

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Conceptos básicos de Vibraciones Mecánicas	9
1.1.1. Frecuencia y período	9
1.1.2. Vibraciones libres	10
1.1.3. Vibraciones forzadas	10
1.2. Movimiento Armónico Simple y su representación	10
1.2.1. Energía de un MAS	11
1.3. Uso de factores para suma, resta, multiplicación y división de movimiento armónico	12
1.3.1. Diagrama de Fresnel (diagrama fasorial)	13
1.3.2. Suma y resta de fasores	13
1.3.3. Producto y división	16
1.3.4. Un ejemplo: Circuito RLC	17
2. Sistemas de un grado de libertad	19
2.1. Ecuaciones constitutivas del elemento resorte	19
2.1.1. Métodos de análisis de sistemas oscilatorios	19
2.1.2. Solución general de la ecuación del péndulo	23
2.1.3. Péndulo Torsional	24
2.1.4. Ejemplos	29
2.2. Análisis de Sistemas con Amortiguamiento	34

2.2.1. Ejemplos	37
2.3. Sistemas de un grado de libertad con excitación armónica (sin amortiguamiento y con amortiguamiento)	42
3. Balanceo de rotores	48
3.1. Concepto de balance de rotor rígido y flexible	48
3.2. Balanceo estático	49
3.3. Balanceo dinámico en uno y dos planos	50
3.3.1. Balanceo dinámico en un plano	50
3.3.2. Balanceo dinámico en dos planos	51
3.4. Tolerancias al desbalance	52
4. Sistemas de varios grados de libertad	54
4.1. Vibración de modo modal	55
4.1.1. Dos osciladores armónicos acoplados	55
4.1.2. Pulsaciones	58
4.1.3. Problema general de osciladores acoplados	61
4.1.4. Péndulo doble	65
4.2. Absorber dinámico de vibraciones no amortiguadas	68
4.3. Absorber de vibraciones amortiguado	70
4.3.1. Sistemas de 2 grados de libertad con amortiguamiento	70
4.4. Aisladores de vibraciones (mecánicas, eléctricos y magnéticos)	72
5. Vibración Magnética	75
5.1. Campos magnéticos alternantes	75
5.1.1. Modelo del campo magnético unidimensional	75
5.1.2. Modelo de levitación puro	84
A. Funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ y ondas estacionarias y viajeras	87
A.1. Las curvas básicas, funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$	88

A.1.1. Amplitud	89
A.1.2. Localización de ceros, máximos y mínimos de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$	91
A.1.3. Frecuencia	93
A.1.4. Corrimiento de fase	93
A.2. Ondas viajeras, su descripción matemática	95
A.2.1. Principio de Superposición	96
B. Lagrangianas y Hamiltonianos	100
B.0.2. Ecuaciones de Hamilton	103
C. Energía cinética de un cuerpo Rígido	106

Índice de figuras

1-1. Representación de Fasores	13
1-2. Suma de Fasores	14
2-1. Péndulo Simple	20
2-2. Resortes en Serie y en Paralelo	27
2-3. Cilindro acoplado a resorte	29
2-4. Cilindro a acoplado a 2 resortes	32
2-5. Sistema Forzado y Amortiguado	35
2-6. Oscilación Amortiguada	38
2-7. Oscilador acoplado a 2 resortes	40
2-8. Medidor de Vibraciones	44
3-1. Balanceo Estático de Rotores	50
3-2. Balanceo dinámico de rotores	51
3-3. Balanceo en 2 planos	51
3-4. Sistema equivalente en 2 planos	52
4-1. 2 Osciladores Armónicos Acoplados	55
4-2. Pulsación	61
4-3. Péndulo doble	65
4-4. Acoplamiento Oscilador de Frahm	69
4-5. Acompamiento de 2 osciladores amortiguados	71
4-6. Forzamiento de osciladores acoplados	73

5-1. Levitación Magnética de Trenes	76
5-2. Circuito RL	82
A-1. Sin(x)	88
A-2. Cos(x)	89
A-3. Amplitud Variable $A_n \cos(x)$	90
A-4. Amplitud Variable $A_n \sin(x)$	90
A-5. Frecuencia Variable $\sin(\omega t)$	93
A-6. Defasamiento	94
C-1. Vectores de posición de dm	107

Prefacio

El propósito de estas notas es el de proporcionar material de apoyo y discusión para el mejor desarrollo del curso de Análisis de Vibraciones que se imparte actualmente en el sexto semestre de la carrera de mecánica.

El análisis de vibraciones en sistemas mecánicos y eléctricos es una parte importante en ingeniería, debido a la enorme cantidad de máquinas eléctricas y de combustión que presentan problemas de funcionamiento debido a vibraciones u oscilaciones indeseables que provocan deficiencias en los productos y/o ponen en riesgo la estabilidad de la máquina en sí misma con consecuencias negativas para operarios y producción.

El estudio de las causas de vibraciones y el desarrollo de metodos para su eliminación ha tenido momentos importantes en la historia de la ingeniería.

En los inicios de la era espacial, se hicieron enormes esfuerzos para construir cohetes que permitieran a las naves liberarse de la atracción gravitacional, pero era muy frecuente el fracaso debido a las enormes vibraciones que producían los potentes motores que ponían constantemente en peligro la integridad de toda la estructura o la destruían. Dado que no era posible disminuir la potencia de los motores, el problema se reducía a buscar maneras de disminuir en todo lo posible las vibraciones que soportaba la estructura debido a su funcionamiento.

Problemas como estos obligaron a un estudio sistemático de la teoría de las vibraciones, su propagación, metodos de amortiguamiento y balanceo, y al desarrollo de técnicas que simplificaran el análisis de sistemas oscilatorios y aportaran metodos de solución. Algunos de esos metodos son la parte medular de este curso y tienen una base común

el modelado mediante masas, resortes y amortiguadores de las cantidades reales masa, elasticidad y fricción.

Capítulo 1

Introducción

James Clerk Maxwell (ver [1]) no solo contribuyó a la teoría electromagnética sino que además fué de los pioneros en el estudio sistemático de las vibraciones mecánicas y aportó uno de los primeros métodos para el análisis de las vibraciones de un sistema de muchos cuerpos acoplados sometidos a fuerzas elásticas, el método de los coeficientes de influencia, un método que discutiremos más adelante.

La eliminación de las oscilaciones requiere como primer paso determinar las frecuencias de oscilación que se obtienen del funcionamiento del sistema en cuestión y las causas físicas de las mismas. Esto permite diseñar algunos mecanismos adicionales que se pueden acoplar al sistema bajo estudio para eliminar las vibraciones indeseables mediante 2 métodos básicos; amortiguamiento y/o balanceo

Existen diferentes aproximaciones para discutir el problema de las vibraciones, estas han dado como resultado varias técnicas matemáticas que surgen de los principios de la mecánica clásica, como la segunda ley de Newton, los métodos de la energía de Rayleigh, las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton y más recientemente algunos métodos iterativos, todos ellos diseñados para determinar en primera instancia las frecuencias naturales de oscilación que se esperan en el diseño de sistemas mecánicos y/o eléctricos, o se usan para modelar sistemas ya existentes.

1.1. Conceptos básicos de Vibraciones Mecánicas

El análisis de vibraciones se concentra en el estudio de sistemas oscilatorios que pueden ser modelados como cargas sobre las cuales actúan fuerzas elásticas además de amortiguamientos de diferentes tipos.

Los sistemas más simples consistirán de una masa sujeta a una o más fuerzas elásticas que producen el movimiento oscilatorio, posteriormente discutiremos sistemas de más de una masa que requerirán la generalización de los métodos previos y en algunos casos de otros nuevos para tratar estos sistemas.

Nuestro objetivo central en la discusión de un sistema oscilatorio será el de determinar las frecuencias naturales de oscilación del sistema que representaremos por ω_n .

Determinar estas frecuencias nos permite tener una idea más clara de la magnitud del problema generado por las oscilaciones y en base a esto podemos proponer algunos métodos de solución como el balanceo o el acoplamiento de osciladores externos que contrarresten las vibraciones naturales del sistema bajo estudio.

1.1.1. Frecuencia y período

Llamaremos *período* al tiempo necesario para que el movimiento se repita y lo representaremos por la letra T .

Llamaremos *frecuencia* al número de ciclos por unidad de tiempo (T), es decir

$$\nu = f = \frac{1}{T},$$

y llamaremos *frecuencia angular* a la cantidad $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.

Llamaremos *frecuencia natural* a la frecuencia que presenta un sistema que está libre de fricción, y la llamaremos *frecuencia amortiguada* cuando la fricción está presente.

1.1.2. Vibraciones libres

Entendermos por una *vibración u oscilación libre* aquella en la cual la masa se encuentra sometida sólo a las fuerzas elásticas, fricción y gravedad, pero ningún otro agente externo está actuando sobre el sistema para mantener el estado de oscilación. Bajo estas condiciones una oscilación libre se amortiguará hasta desaparecer por la presencia de la fricción. A la vibración libre usualmente también se le llama *transitoria*.

1.1.3. Vibraciones forzadas

Cuando sobre el sistema actúan fuerzas externas armónicas, es decir, fuerzas dadas por alguna de las siguientes expresiones

$$F_{ext} = \begin{cases} F_o \sin \omega t, \\ F_o \cos \omega t, \\ F_o e^{i\omega t}, \end{cases}$$

la oscilación resultante se denomina *vibración forzada*.

1.2. Movimiento Armónico Simple y su representación

La definición de un movimiento armónico simple (MAS) se puede hacer de varias formas todas ellas equivalentes entre sí. Desde un punto de vista matemático diremos que un movimiento unidimensional es un MAS si el desplazamiento como función del tiempo está determinado por una ecuación de la forma

$$x = \begin{cases} x_o \cos \omega_o t, \\ x_o \sin \omega_o t, \\ x_o e^{i\omega_o t}, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde ω_o representa la frecuencia natural de oscilación y x_o su amplitud (ver). Un estudio sobre propiedades generales de las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ se presenta en el apéndice A.

La versión física de esta definición consiste en afirmar que un sistema es un MAS, si satisface la ecuación

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0, \quad o \\ \ddot{x} + \omega_o^2 x &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $\omega_o^2 = k/m$, ésta ecuación resulta de aplicar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, a una masa m sometida a la acción de un resorte de dureza k , que ha sido desplazado de su posición de equilibrio para estudiar su movimiento.

Observemos que cualquiera de las maneras de escribir x en (1.1) es solución de la ecuación diferencial (1.2). Otra manera física de definir un MAS consiste en afirmar que un sistema oscilatorio será un MAS si en él se conserva la energía mecánica del sistema, es decir, si la suma de energía cinética más potencial es constante.

1.2.1. Energía de un MAS

Mostraremos que la energía de un MAS es constante, para esto usaremos la expresión estandard

$$x = A \cos \omega t,$$

de un resorte, en el cual suponemos que la amplitud y la frecuencia son constantes (no existen ningún tipo de fricción o forzamiento). La expresión de la energía mecánica para

este caso es

$$\begin{aligned} E &= T + U, \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{d}{dt}(A \cos \omega t) \right)^2 + \frac{1}{2}k (A \cos \omega t)^2, \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t, \\ &= \frac{A^2}{2} (m\omega^2 \sin^2 \omega t + k \cos^2 \omega t), \\ &= \frac{k}{2}A^2, \\ &= \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos en el caso de un resorte la energía mecánica total es una constante y es directamente proporcional a la constante del resorte y al cuadrado de su amplitud.

Los ejemplos más frecuentes para ilustrar un MAS son: El sistema *masa-resorte*, es decir, una masa sometida a la acción de un resorte oscilando en un plano horizontal sin fricción, o verticalmente bajo la acción de la gravedad pero sin tomar en cuenta los efectos de amortiguación del aire. El *péndulo simple*, una masa sujeta por una cuerda (de masa despreciable) que oscila bajo la acción de la fuerza de gravedad. En el siguiente capítulo dedicaremos mucha de nuestra atención a estos problemas y a otros que son versiones un poco más complicadas de estos.

1.3. Uso de factores para suma, resta, multiplicación y división de movimiento armónico

Existe un método geométrico que permite representar sistemas oscilatorios y con el cual es además posible realizar las operaciones básicas de suma y producto (y sus

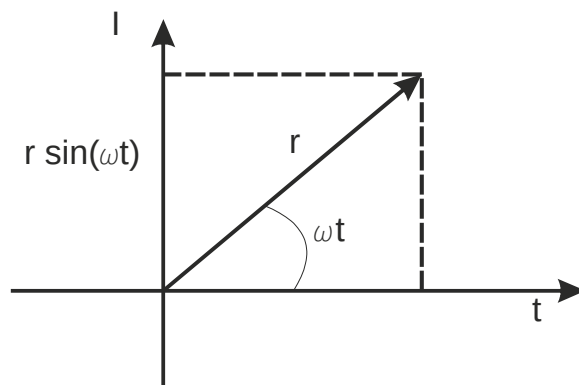


Figura 1-1: Representación de Fasores

inversos) (ver [6]).

El método se basa en el estudio de las componentes de vectores de magnitud constante que rotan en el plano con una velocidad angular ω . Normalmente se usan las componente verticales para estudiar el comportamiento de los sistemas oscilatorios.

1.3.1. Diagrama de Fresnel (diagrama fasorial)

Una variación sinusoidal como $I(x) = r \sin \omega t$ (ver figura 1-1), puede ser representada como la proyección sobre el eje vertical (u horizontal, esto es convencional) de un vector que gira a una velocidad angular ω alrededor del origen en el plano x, y en el sentido contrario a las agujas de un reloj, donde la longitud del vector es la amplitud r (en el caso de circuitos, esta longitud es $r/\sqrt{2}$).

Al vector construido de esta manera, se le denomina de *Fresnel* o *fasor*, y cada vuelta completa de este vector representa un ciclo de la onda.

1.3.2. Suma y resta de fasores

Ahora usaremos el diagrama de Fresnel para estudiar el problema de la suma de dos ondas armónicas (iguales dirección y frecuencia), pero permitiremos que las amplitudes

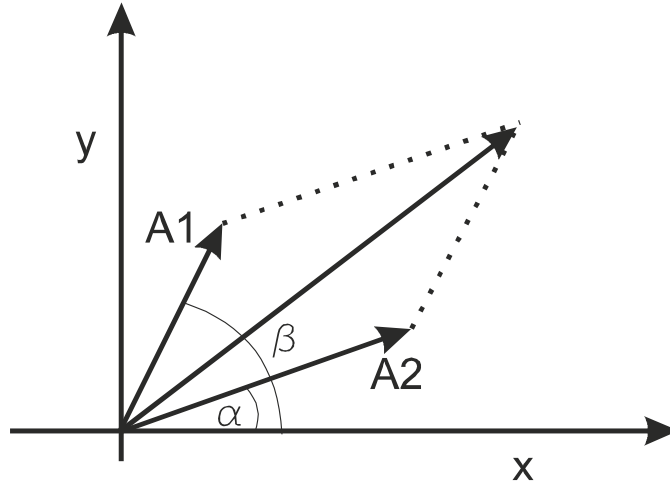


Figura 1-2: Suma de Fasores

puedan ser diferentes. Consideremos los fasores (figura 1-2)

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ \xi_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \beta) \implies \\ \xi(t) &= A_1 \sin(\omega t + \alpha) + A_2 \sin(\omega t + \beta),\end{aligned}$$

usando la ley de los cosenos, podemos determinar la amplitud de la onda resultante, y está dada por

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\beta - \alpha)}, \quad (1.3)$$

el ángulo de fase del vector resultante (ángulo con el eje x), lo podemos determinar usando las componentes del vector resultante en su representación vectorial

$$\vec{P} = (A_2 \cos \beta + A_1 \cos \alpha)\mathbf{i} + (A_2 \sin \beta + A_1 \sin \alpha)\mathbf{j},$$

por lo que el ángulo de fase del vector resultante está dado por

$$\tan \gamma = \frac{A_2 \sin \beta + A_1 \sin \alpha}{A_2 \cos \beta + A_1 \cos \alpha}, \quad (1.4)$$

como los vectores componentes giran con la misma frecuencia angular, el vector resultante tiene también la misma frecuencia. Usando las expresiones (1.3 y 1.4) podemos estudiar algunos casos especiales importantes:

1. Si las ondas ξ_1 y ξ_2 están en fase ($\alpha = \beta$) entonces, la onda resultante

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_1(t) + \xi_2(t), \\ &= A \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned}$$

cumple que, $\gamma = \alpha$ y $A = A_1 + A_2$, representa la interferencia *constructiva* de las ondas.

2. Si $\beta = \alpha + \pi$ los movimientos armónicos están en oposición, sus vectores rotantes son antiparalelos y las ecuaciones (1.3 y 1.4) dan (en el caso de que $A_2 > A_1$) $A = A_2 - A_1$, $\gamma = \beta$, por lo que los movimientos armónicos interfieren atenúandose. En el caso particular en el cual $A_1 = A_2$ los dos MAS se cancelan, esto corresponde al caso de la interferencia destructiva.

Estos mismos resultados pueden obtenerse también usando el álgebra de los números complejos. Dado que todo vector en 2 dimensiones $\vec{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, puede pensarse también como el número complejo $z = a_x + i a_y$, donde las componentes representan las proyecciones del número complejo con ángulo dependiente del tiempo podemos escribir para la suma (o resta)

$$\begin{aligned} z &= z_1 \pm z_2, \\ &= (a_x \pm b_x) + i (a_y \pm b_y), \end{aligned}$$

la magnitud del vector resultante está dada por

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2}, \\
 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}, \\
 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2 (\cos (\beta - \alpha))},
 \end{aligned}$$

el ángulo de fase para la suma

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{a_y \pm b_y}{a_x \pm b_x} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{A_1 \sin \alpha + A_2 \sin \beta}{A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta} \right).
 \end{aligned}$$

1.3.3. Producto y división

La idea de representar a los fasores mediante números complejos nos permite realizar el producto de fasores de manera igualmente simple, si

$$\begin{aligned}
 z &= z_1 z_2, \\
 &= (a_x + i a_y) (b_x + i b_y), \\
 &= (a_x b_x - a_y b_y) + i (a_x b_y + a_y b_x),
 \end{aligned}$$

el ángulo de fase se determina rápidamente usando

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_x b_x - a_y b_y} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \right), \\
 &= \tan^{-1} (\tan (\alpha + \beta)), \\
 &= \alpha + \beta.
 \end{aligned}$$

Este resultado se puede obtener de manera prácticamente trivial si representamos el

producto en la forma polar

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2, \\ &= A_1 e^{i\alpha} A_2 e^{i\beta}, \\ &= A_1 A_2 e^{i(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

La división se trata de manera análoga y se puede mostrar que el argumento ϕ está dado por

$$\phi = \alpha - \beta. \quad (1.5)$$

Esto se puede deducir fácilmente si usamos $z_1 = A_1 e^{i\alpha}$ y $z_2 = A_2 e^{i\beta}$, entonces

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\alpha-\beta)},$$

de donde se tiene el resultado (1.5).

1.3.4. Un ejemplo: Circuito RLC

Consideremos el ejemplo simple de un circuito RLC para mostrar la utilidad del método. Si conectamos los 3 elementos, resistencia, inductor y capacitor en serie a una fuente de corriente alterna, podemos representar a cada uno de los elementos por un número complejo (impedancias):

$$\begin{aligned} z_R &= R, \\ z_L &= i \omega L, \\ z_C &= -\frac{i}{\omega C}, \end{aligned}$$

donde ω representa la frecuencia angular de la fuente. Estas expresiones se pueden obtener a partir de estudio de la corriente en el circuito de corriente alterna considerando cada uno de los elementos por separado y usando $V = IR$ para definir las impedancias

correspondientes en cada caso.

En nuestro caso R , ωL y $\frac{1}{\omega C}$ representan las amplitudes de nuestros fasores. Si necesitáramos representarlos como funciones oscilantes deberíamos incluir el tiempo de manera que

$$\begin{aligned} z_R &= R e^{i\omega t}, \\ z_L &= \omega L e^{i(\omega t + \pi/2)}, \\ z_C &= \frac{1}{\omega C} e^{i(\omega t - \pi/2)}. \end{aligned}$$

La impedancia total del circuito está dada por

$$\begin{aligned} Z &= z_R + z_L + z_C, \\ &= R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \end{aligned}$$

o en términos de las funciones oscilatorias

$$Z = \left[R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] e^{i\omega t},$$

el ángulo del fador resultante está dado por

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

la corriente máxima i_m en el circuito se puede obtener ahora fácilmente calculando

$$\begin{aligned} i_m &= \frac{\varepsilon_m}{|Z|}, \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Sistemas de un grado de libertad

Los sistemas que requieren de k -variables independientes para describir su movimiento se dice que tienen k grados de libertad.

Un pistón moviéndose en un cilindro sólo tiene un grado de libertad, un disco moviéndose sobre una mesa sin fricción tiene 2 grados de libertad, un cuerpo rígido moviéndose en el espacio tiene 6 grados de libertad (3 traslacionales y 3 rotacionales).

En lo que sigue nos dedicaremos a establecer algunos de los métodos más usados para determinar las ecuaciones de movimiento, a partir de la cual podemos leer la frecuencia natural de oscilación del sistema de 1 grado de libertad.

2.1. Ecuaciones constitutivas del elemento resorte

2.1.1. Métodos de análisis de sistemas oscilatorios

El modelo matemático para el movimiento armónico simple se puede hacer de varias maneras (ver [2]):

- a) Usando la segunda ley de Newton
- b) Mediante el principio de conservación de la energía

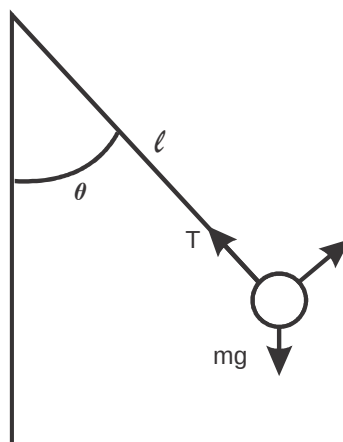


Figura 2-1: Péndulo Simple

- c) Modelos Lagrangianos¹
- d) Ecuaciones de Hamilton
- e) Método de Rayleigh

Veremos la forma de usar cada uno de estos métodos en algunos problemas y más adelante usaremos básicamente sólo 2 de estos metodos, segunda ley de Newton y lagrangianas. Pero debemos tener presente que los métodos de la energía son más fundamentales ((b) $\rightarrow$ (e)) dado que usan las propiedades de la energía y su transformación.

a) Newton

Para determinar la ecuación de movimiento de un péndulo simple usando la segunda ley de Newton requerimos un diagrama de cuerpo de libre de la masa, mediante la cual obtenemos la ecuación de movimiento para la componente tangencial de la gravedad (usualmente se consideran los ejes, uno a lo largo del hilo que sostiene la masa) ver figura (2-1).

¹Ver apéndice B

$$\begin{aligned}
ma &= -mg \sin \theta, \quad a = a_t = l\ddot{\theta}, \\
ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta, \implies \\
\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0.
\end{aligned}$$

b) Energía

Suponemos que no existe fricción, por lo que la energía mecánica del péndulo se conserva y en cualquier posición ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) está dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh,$$

donde consideraremos que h está medida desde la parte más baja de la oscilación, en estas condiciones

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{\theta} l \right)^2 + mgl (1 - \cos \theta),$$

como la energía es constante entonces $dE/dt = 0 \implies$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(\dot{\theta} l \right)^2 + mgl (1 - \cos \theta) \right), \\
0 &= ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta, \\
0 &= ml^2 \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \right) \quad \forall \theta \in [0, \pi/2], \iff \\
0 &= \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta.
\end{aligned}$$

c) Lagrangianas

La lagrangiana del péndulo está dada por

$$\begin{aligned}
L &= T - V, \\
&= \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl (1 - \cos \theta),
\end{aligned}$$

las ecuación de movimiento está dada por la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$

d) Ecuaciones de Hamilton

El hamiltoniano del sistema está dado por

$$\begin{aligned}H &= T + V, \\ H &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl (1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Hamilton son (ver apéndice B):

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

los momentos generalizados p están dados por

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \\ ml^2 \dot{\theta} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \implies \\ \dot{p} &= ml^2 \ddot{\theta}, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} &= mgl \sin \theta,\end{aligned}$$

sustituyendo estos resultados en la ecuación de Hamilton de la fuerza tenemos

$$\begin{aligned}mgl \sin \theta &= -ml^2 \ddot{\theta}, \implies \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$

2.1.2. Solución general de la ecuación del péndulo

Para determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

en forma exacta, normalmente se recurre al siguiente truco para determinar una primera integral;

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \right) &\implies \\ \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \dot{\theta} \sin \theta &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) &= -\frac{g}{l} \dot{\theta} \sin \theta, \\ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 &= -\frac{g}{l} \int \sin \theta \frac{d\theta}{dt} dt, \\ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{2g}{l} \cos \theta + C, \implies \\ t &= \int \frac{d\theta}{\sqrt{C + \frac{2g}{l} \cos \theta}} + t_o. \end{aligned}$$

La integral no se puede determinar por funciones elementales (es una integral elíptica de primera especie), pero podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor del integrando e integrar término a término.

Usualmente esta solución no se utiliza, a menos que existan problemas prácticos reales en los que la aproximación de oscilaciones pequeñas ($\sin \theta \simeq \theta$) no sea válida, pero en el caso usual se supone que las oscilaciones son pequeñas lo que nos permite simplificar

considerablemente la ecuación y obtener un MAS directamente

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta &= 0, \implies \\ \omega^2 &= \frac{g}{l}, \implies \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\end{aligned}$$

2.1.3. Péndulo Torsional

Para estudiar las oscilaciones de un eje sólido fijo, podemos considerar básicamente las mismas ideas que hemos usado para los resortes y el péndulo simplemente introduciendo las cantidades relevantes para movimientos rotacionales mediante la sustitución

$$\begin{aligned}\vec{F} &\longleftrightarrow \vec{\tau}, \\ m &\longleftrightarrow I, \\ \vec{a} &\longleftrightarrow \vec{\alpha},\end{aligned}$$

donde $\vec{\tau}$ representa la torca, I el momento de inercia, $\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\theta}}$ la aceleración angular. De esta manera la ecuación relevante para el estudio de las oscilaciones de una varilla es

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha},$$

junto con la correspondiente ley de Hooke para movimientos torsionales $\vec{\tau} = -K\theta$, donde K representa la constante de torsión que depende del material de la barra. Las unidades de K son:

$$[K] = [\tau] = L \, Nw.$$

Ahora podemos (usando el método de Newton) determinar la frecuencia de oscilación

del péndulo torsional a partir de la ecuación de movimiento (MAS)

$$\begin{aligned}
 I\alpha &= -K\theta, \\
 \alpha + \frac{K}{I}\theta &= 0, \\
 \ddot{\theta} + \frac{K}{I}\theta &= 0, \\
 \omega &= \sqrt{\frac{K}{I}}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observemos que en el caso de 1 grado de libertad no es necesario resolver la ecuación diferencial para determinar la frecuencia de oscilación, es suficiente con determinar la ecuación de movimiento.

Podemos también obtener la ecuación (2.1) usando lagrangianas, hamiltonianos y el método de la energía.

Para usar el método de las lagrangianas debemos suponer un estado dinámico del movimiento, dado que es puramente rotacional, la energía cinética está dada por $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ (ver apéndice C) y la energía potencial tiene la misma expresión que en el caso de un resorte $U = \frac{1}{2}K\theta^2$, de aquí que la lagrangiana de la barra torsional está dada por

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K\theta^2,
 \end{aligned}$$

la ecuación de movimiento está determinada por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\
 I\ddot{\theta} + K\theta &= 0, \\
 \ddot{\theta} + \frac{K}{I}\theta &= 0.
 \end{aligned}$$

Para usar el método de Hamilton requerimos determinar los momentos generalizados

del sistema, que en este caso está dado por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ &= I\dot{\theta} \Rightarrow \\ \frac{p^2}{2I} &= \frac{I\dot{\theta}^2}{2}, \end{aligned}$$

que $H = T + U = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{p^2}{2I} + \frac{1}{2}K\theta^2$ introduciendo esta función en las ecuaciones de Hamilton obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta} &= -\dot{p} \Rightarrow \\ K\theta &= -\dot{p} = -I\ddot{\theta} \Rightarrow \\ \ddot{\theta} + \frac{K}{I}\theta &= 0. \end{aligned}$$

la otra ecuación de Hamilton en este caso sólo aporta una identidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}, \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\theta}, \\ \frac{p}{I} &= \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Los resortes son un instrumento esencial en la modelación de sistemas oscilatorios, así que es necesario entender algunas de sus propiedades básicas.

Desde un punto de vista teórico, lo relevante de un resorte es su dureza, caracterizada por k cuyas unidades son

$$\begin{aligned} [k] &= \frac{[F]}{[L]}, \\ &= \frac{Nw}{L}, \end{aligned}$$

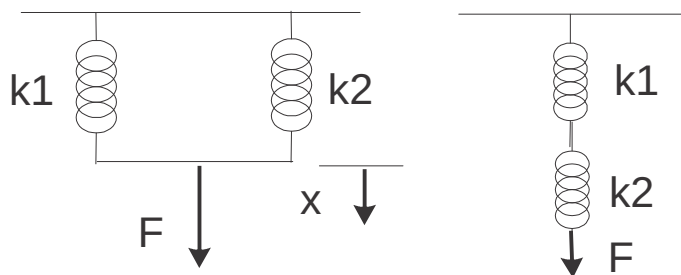


Figura 2-2: Resortes en Serie y en Paralelo

así entre más rígido es el resorte mayor el valor de k .

Supondremos normalmente que el resorte funciona en el rango de deformaciones pequeñas, de manera que la ley de Hooke $\vec{F} = -k\vec{x}$ sigue siendo válida y el resorte no ha sufrido deformaciones permanentes.

Un teorema básico sobre resortes nos permite entender un poco más el comportamiento de la rigidez k cuando conectamos varios resortes en serie o en paralelo y nos muestra que el comportamiento de un resorte tiene un análogo eléctrico, *el capacitor*.

Teorema.

(a) *En un sistema de resortes conectados en paralelo, la dureza del sistema resultante es mayor que la dureza de cualquiera de los resorte conectados, y está dada por*

$$k_{eq}(P) = \sum_{i=1}^n k_i.$$

(b) *En un sistema de resortes conectados en serie, la dureza del sistema resultante es menor que la dureza de cualquiera de los resorte conectados, y está dada por*

$$k_{eq}(S) = \left(\sum_{i=1}^n k_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Demostración

Podemos proceder de manera análoga al método usado para estudiar resistencias y

capacitores en circuitos eléctricos, es decir, tratando de identificar qué es lo que tienen en común todos los resortes al conectarse en serie o en paralelo.

a) Para la conexión en paralelo de dos (o más) resortes, al llevar a cabo la deformación x , todos los resortes se deforman exactamente la misma longitud x , pero la fuerza de cada uno de ellos sobre la barra (ver figura 2-2) es diferente pues depende de su dureza y dado que estamos suponiendo que el sistema está equilibrio, debe cumplirse

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

si hubiese n resortes conectados en paralelo sobre la barra. Ahora dado que cada resorte cumple la ley de Hooke $\mathbf{F}_i = k_i \mathbf{x}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \mathbf{x}, \\ &= k_{eq} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Así que podemos escribir la conclusión: *En un sistema de resortes conectados en paralelo la dureza del sistema resultante es mayor que la dureza de cualquiera de los resortes conectados, es decir;*

$$k_{eq}(P) = \sum_{i=1}^n k_i.$$

b) Conexión de resortes en serie. Procediendo en forma similar, observamos que al deformar los resortes en serie por una fuerza F cada resorte se deformará ahora una cantidad diferente x_i dependiendo de su dureza, en este caso cada uno de los resortes experimentan la misma fuerza F (por la 3ª ley de Newton). Así que finalmente tenemos

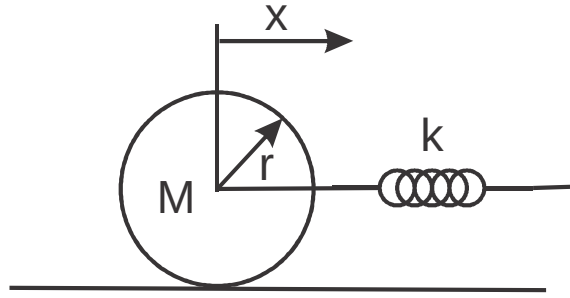


Figura 2-3: Cilindro acoplado a resorte

$$\begin{aligned}
 x &= \sum x_i, \\
 &= \sum \frac{F}{k_i}, \\
 &= F \sum k_i^{-1}, \\
 F k_{eq}^{-1} &= F \sum k_i^{-1}, \\
 k_{eq}(S) &= \left(\sum k_i^{-1} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

2.1.4. Ejemplos

Consideremos ahora algunos ejemplos para ilustrar el uso de estas ideas en sistemas con un grado de libertad.

Sistema cilindro-resorte

Consideremos un cilindro circular de masa M y radio r unido a una pared por medio de un resorte de módulo k , ver figura (2-3). Si el cilindro puede rodar sin resbalar encuentre la frecuencia de oscilación.

Contestaremos la pregunta de dos formas distintas (a) usando la ecuación de Euler-Lagrange y (b) el método de Newton.

(a) Debemos determinar primero las energías cinética y potencial en un instante

arbitrario del movimiento del sistema. En este caso el cilindro posee 2 tipos de energía cinética; rotacional y traslacional

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2,$$

como rueda sin resbalar tenemos una ecuación adicional $x = r\theta^2$ por lo que la expresión final para la energía cinética esta dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \\ &= \frac{3}{4} M \dot{x}^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que el momento de inercia de un cilindro circular respecto a un eje que pase por su centro es $I = Mr^2/2$. La energía potencial es la que está almacenada en el resorte y está dada por $U = \frac{1}{2}kx^2$ por lo que la lagrangiana del sistema está dada por

$$\begin{aligned} L &= T - U, \\ &= \frac{3}{4} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{3}{2} M \ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \frac{2k}{3M} x &= 0, \end{aligned}$$

de donde podemos leer el valor de la frecuencia natural de oscilación

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}. \tag{2.2}$$

²Podemos usar también como variable el ángulo, esto es opcional.

(b) Para usar el método de Newton debemos tener en cuenta que hay dos tipos de movimiento: rotacional y traslacional, por lo que debemos escribir las ecuaciones para cada uno de ellos y resolverlas simultáneamente.

Para el movimiento traslacional las fuerzas que actúan sobre el cilindro al moverlo una distancia x hacia la pared, son 2 en la dirección del movimiento, la del resorte dada por la ley de Hooke y la fuerza de fricción f y son opuestas. La fuerza normal de la superficie simplemente equilibra al peso.

Así el movimiento traslacional está descrito por la ecuación

$$M\ddot{x} = -kx + f, \quad (2.3)$$

para el movimiento rotacional, la única fuerza que provoca la rotación, respecto al centro de masa, es la fricción f por lo que podemos escribir

$$\tau = I\ddot{\theta} = -rf,$$

a partir de la cual podemos determinar la fuerza de fricción y sustituirla en (2.3)

$$\begin{aligned} f &= -\frac{I\ddot{\theta}}{r} \implies \\ M\ddot{x} &= -kx - \frac{Mr^2}{2r}\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

como rueda sin resbalar, también disponemos de la ecuación $x = r\theta$, y finalmente podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}Mr\ddot{\theta} + kr\theta &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{2k}{3M}\theta &= 0, \end{aligned}$$

y obtenemos el mismo valor, ecuación (2.2), para la frecuencia natural de oscilación.

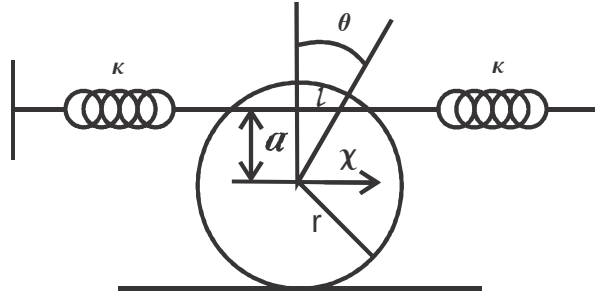


Figura 2-4: Cilindro a acoplado a 2 resortes

Sistema resorte-cilindro-resorte

Usar el método de la energía y el método de las lagrangianas para determinar la frecuencia natural de oscilación del cilindro mostrado en la figura (2-4) que rueda sin resbalar.

(a) El método de la energía se puede usar cuando la energía mecánica (E_m) del sistema se conserva, es decir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E_m) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(T + V) &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Las energías cinética está dada por

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \\ &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2,\end{aligned}$$

donde hemos usado que rueda sin resbalar ($x = r\theta$) y el momento de inercia de un cilindro que gira en torno a su centro de masa ($I = \frac{1}{2}mr^2$), finalmente la energía cinética está dada por

$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2.\tag{2.5}$$

La energía potencial se debe a la presencia de los 2 resortes que tienen la misma dureza k

$$V = 2 \left\{ \frac{1}{2} k y^2 \right\},$$

donde y representa la distancia que se han deformado los resortes al mover el cilindro una distancia x a la derecha.

Al mover el cilindro, este giró un ángulo θ y como rueda sin resbalar tenemos $x = r\theta$.

Como los resortes están sujetos a una distancia a del centro, la deformación de estos es mayor que si estuvieran sujetos al centro del cilindro (en este caso particular su deformación sería exactamente x), por lo que debemos sumar a esta, la distancia

$$\ell = a \sin \theta,$$

usualmente consideraremos la aproximación de ángulos pequeños por lo que tenemos $\ell = a \sin \theta \simeq a \theta$, y la energía almacenada en los resortes está dada por

$$V = k (r + a)^2 \theta^2, \tag{2.6}$$

sustituyendo (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.4) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 + k (r + a)^2 \theta^2 \right) &= 0, \\ \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 2k (r + a)^2 \theta \dot{\theta} &= 0, \implies \\ \ddot{\theta} + \frac{4k (r + a)^2}{3mr^2} \dot{\theta} &= 0, \end{aligned}$$

de donde podemos leer la frecuencia natural de oscilación

$$\omega^2 = \frac{4k (r + a)^2}{3mr^2}.$$

A partir de este resultado podemos ver rápidamente qué sucede si sujetamos los

resortes al centro del cilindro ($a = 0$), obtenemos el resultado del problema anterior (salvo un 2 por la presencia de 2 resortes), y cada vez que aumentamos $a \leq r$ aumentamos la frecuencia de oscilación del sistema, hasta alcanzar el máximo posible dado por

$$\omega_{\text{máx}} = 4\sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

(b) Lagrangiana

Aprovechando que ya calculamos las energías cinética y potencial podemos escribir

$$L = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 - k(r+a)^2\theta^2,$$

la ecuación de movimiento está dada por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 2k(r+a)^2\theta &= 0 \implies \\ \omega &= \frac{2(r+a)}{r} \sqrt{\frac{k}{3m}}. \end{aligned}$$

2.2. Análisis de Sistemas con Amortiguamiento

Los sistemas oscilatorios que consideraremos básicamente serán de 2 tipos:

1. Sistemas para los cuales el amortiguamiento depende de la velocidad.
2. Sistemas en los cuales el amortiguamiento es constante, lo que se conoce como amortiguamiento de Colulomb.

La representación gráfica de un sistema amortiguado es como se muestra en la figura (2-5) donde c representa el coeficiente de amortiguamiento responsable de la eliminación de la energía cinética del cuerpo por fricción (depende de la velocidad de oscilación), el resorte k que proporciona el carácter oscilatorio, y una fuerza externa armónica (dependencia de funciones $\sin \theta$) $F_{ext} = F \sin \omega t$ que mantiene al sistema en oscilación.

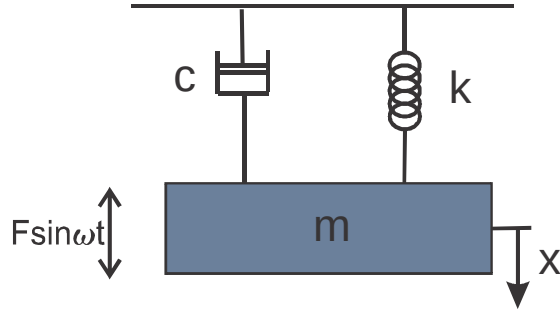


Figura 2-5: Sistema Forzado y Amortiguado

La figura (2-5) corresponde a un sistema oscilatorio *forzado* (F_{ext}) y *amortiguado* (c).

Consideraremos primero el caso del sistema amortiguado sin forzamiento (el amortiguamiento depende sólo de la velocidad).

Las fuerzas presentes sobre la masa son el resorte y la fuerza debida al amortiguamiento que depende de la velocidad, y están dadas por $F = -kx$ y $F_a = -c\dot{x}$ (los signos negativos indican que ambas fuerzas se oponen al movimiento).

Usando la segunda ley de Newton tenemos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x}, \iff \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes cuya solución general está dada por

$$x = e^{\alpha t} \{C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t\}, \tag{2.8}$$

donde $\alpha = \text{Re}(r)$ y $\beta = \text{Im}(r)$ donde r representa una de las raíces complejas de la ecuación característica.

Por lo tanto es suficiente determinar las raíces de la ecuación característica

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0,$$

que están dadas por

$$\begin{aligned} r &= \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2}, \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{c}{m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{c^2 - 4mk} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

como $k = m\omega_o^2$ (ω_o es la frecuencia natural de oscilación sin amortiguamiento) y definiendo el factor de amortiguamiento $\zeta = c/(2m\omega_o)$ podemos escribir la ecuación (2.9) de la siguiente manera

$$r = \omega_o \left\{ -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right\},$$

estas son las raíces necesarias para resolver (2.7). Observemos que ζ es adimensional, en efecto

$$[\zeta] = \frac{[c]}{M [\omega_o]} = \frac{[c] T}{M} = \frac{\frac{M}{T} T}{M} = 1.$$

Claramente existen 3 casos para la solución dependiente del valor del radical $\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Las soluciones oscilatorias sólo estarán presentes en el caso en el que esta raíz represente un número complejo, por lo que es usual darle un nombre a cada uno de estos casos:

a) Si $\zeta > 1$ ambas raíces son reales y negativas y el movimiento se da sin oscilación y simplemente se amortigua hasta desaparecer. A esta situación se la distingue con el nombre de *movimiento sobreamortiguado*.

b) Si $\zeta = 1$ ambas raíces son iguales a la frecuencia natural de oscilación ω_o y el movimiento tampoco es oscilatorio y el nombre que se le da a esta situación es el de *críticamente amortiguado*.

c) Finalmente, la solución que nos interesa es cuando $\zeta < 1$, en este caso las raíces son complejas y podemos escribirlas

$$\begin{aligned}\sqrt{\zeta^2 - 1} &= i\sqrt{1 - \zeta^2}, \\ r_1 &= \omega_o \left(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2} \right), \\ r_2 &= \omega_o \left(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2} \right),\end{aligned}$$

por lo que la solución en este caso está dada por

$$x = e^{-\zeta\omega_o t} \left\{ C_1 \sin \left(\omega_o t \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + C_2 \cos \left(\omega_o t \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right\},$$

donde $\alpha = -\zeta\omega_o$ y $\beta = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$, que podemos escribir más brevemente como

$$x = e^{-\zeta\omega_o t} \{ C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t) \}, \quad o \quad (2.10)$$

$$= C e^{-\zeta\omega_o t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad con \quad (2.11)$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right)$$

donde hemos definido la frecuencia $\omega_d \equiv \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$ (frecuencia natural *amortiguada*).

La situación física en este caso difiere de las anteriores en que ahora, aunque al final el movimiento también desaparece, lo hace oscilando y disminuyendo su amplitud en cada oscilación por el factor $e^{-\zeta\omega_o t}$.

2.2.1. Ejemplos

Método para medir coeficientes de amortiguamiento

En un sistema oscilatorio amortiguado, ver figura (2-5) sin forzamiento, se observa que la amplitud decrece hasta un 25 % (1/4 de la inicial), después de 5 ciclos consecutivos de movimiento, como se muestra en la figura (2-6).

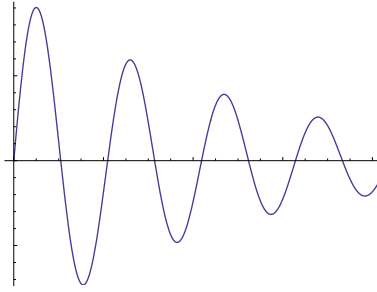


Figura 2-6: Oscilación Amortiguada

Determine el coeficiente de amortiguamiento c del sistema si $k = 20 \text{ lb/pul}$ y la masa $m = 10 \text{ lb}$.

Nuestro problema es determinar c , el cual está relacionado con ζ a través de la ecuación $\zeta = \frac{c}{2m\omega_o}$.

Usando la ecuación (2.11) para describir movimientos oscilatorios amortiguados, sabemos que la máxima amplitud se obtiene cuando la función $\sin(\omega_d t + \phi) = 1$, y en este caso las amplitudes consecutivas máximas se obtienen en los tiempos t_1 y t_2

$$x_1 = Ce^{-\zeta\omega_o t_1}, \quad x_2 = Ce^{-\zeta\omega_o t_2},$$

dado que la diferencia de tiempo entre dos amplitudes máximas consecutivas es el período de oscilación T podemos escribir

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{-\zeta\omega_o T}, \quad (2.12)$$

el período de oscilación es $T = 2\pi/\omega_d$.

Nuestro interés es despejar ζ por lo cual se considera el logaritmo natural de la ecuación (2.12)

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -\zeta\omega_o T, \quad (2.13)$$

a esta cantidad se le da el nombre especial de *decrecimiento logarítmico* y se representa

por la letra griega $\delta = \ln(x_1/x_2) = -\zeta\omega_o T$.

Como $c = 2m\zeta\omega_o = 2\zeta\sqrt{km}$, conociendo la razón de dos amplitudes máximas consecutivas o el decrecimiento logarítmico δ podemos determinar el coeficiente de amortiguamiento c . En este caso particular tenemos

$$\frac{x_1}{x_6} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4,$$

y

$$\frac{x_1}{x_6} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \frac{x_4}{x_5} \frac{x_5}{x_6},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1}{x_6} &= \ln \frac{x_1}{x_2} + \ln \frac{x_2}{x_3} + \ln \frac{x_3}{x_4} + \ln \frac{x_4}{x_5} + \ln \frac{x_5}{x_6}, \\ \ln 4 &= 5\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 0,28 = \zeta\omega_o (2\pi/\omega_d) \\ 0,28 &= \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \\ \zeta &= 0,044. \end{aligned}$$

Finalmente $c = 2\zeta\sqrt{km} = 0,063 \text{ lb seg/pul}$.

Podemos generalizar fácilmente este resultado para un decrecimiento en la longitud original en y partes, es decir $d_n = L/y$ y si este decrecimiento se observa después de n

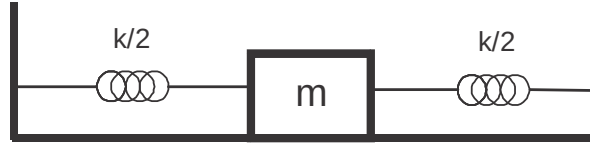


Figura 2-7: Oscilador acoplado a 2 resortes

oscilaciones completas, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 \ln y &= n \delta \Rightarrow \\
 \delta &= \frac{\ln y}{n} \Rightarrow \\
 \zeta &= \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \Rightarrow \\
 c &= 2\delta \sqrt{\frac{km}{4\pi^2 + \delta^2}}.
 \end{aligned}$$

Amortiguamiento Coulombiano

Estudiaremos ahora el caso de amortiguamiento constante e independiente de la velocidad. Para esto consideraremos que el coeficiente de fricción entre dos superficies (sin lubricación) (ver figura (2-7)) tiene un valor constante μ .

Nuestro interés es determinar el desplazamiento en cualquier instante y el valor de la frecuencia natural amortiguada.

Al desplazar el bloque una distancia x y dejarlo en libertad para que oscile, la ecuación de movimiento (usando la segunda ley de Newton) está dada por

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -\mu mg - 2\left(\frac{1}{2}kx\right), \\
 &= -\mu mg - kx, \\
 \ddot{x} + \omega_o^2 x &= -\mu g.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para determinar la solución general de esta ecuación usaremos el método estándar,

que consiste en determinar la solución general de la ecuación homogénea y posteriormente una solución particular para la no homogénea de manera que la solución general estará dada por

$$x = x_h + x_p. \quad (2.15)$$

La solución de la ecuación homogénea simplemente corresponde a un MAS cuya solución está dada por

$$x_h = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t.$$

Determinar una solución particular en este caso no es complicado dado que el término no homogéneo es una constante, si escogemos $x_p = -\mu mg/k$ al sustituir en la ecuación (2.14) obtenemos una identidad, por lo que la solución general está dada por

$$x = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t - \frac{\mu mg}{k}.$$

Para determinar la frecuencia de oscilación no es necesario resolver la ecuación diferencial, basta reescribir la ecuación (2.14) en forma conveniente.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_o^2 x &= -\mu g, \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \mu g &= 0, \\ m\ddot{x} + k\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ahora definimos una nueva variable de desplazamiento $x' \equiv x + \mu gm/k$ (cambio de origen en xs) de esta manera tenemos que la ecuación de movimiento para x' está dada por

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' + kx' &= 0, \implies \\ \omega_d' &= \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \end{aligned}$$

así que la frecuencia amortiguada (en el caso de amortiguamiento constante) es igual a

la frecuencia natural sin amortiguamiento.

2.3. Sistemas de un grado de libertad con excitación armónica (sin amortiguamiento y con amortiguamiento)

Para sistemas de un grado de libertad³ en los que el amortiguamiento depende de la velocidad y están sujetos a la acción externa de una función armónica (forzador) de frecuencia ω , la ecuación diferencial que lo describe está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \sin \omega t, \quad (2.16)$$

que resulta de aplicar la segunda ley de Newton al sistema mostrado en la figura (2-5), donde las cantidades $\{m, c, k, F_o\}$ son constantes y definen los diferentes sistemas oscilatorios unidimensionales forzados y amortiguados.

Nuevamente tenemos el problema de hallar la solución de una ecuación diferencial con coeficientes constantes no homogénea.

La solución de (2.16) nuevamente la podemos determinar hallando la solución general de la ecuación homogénea y sumarle una solución cualquiera particular.

La solución de la ecuación homogénea ya la conocemos y está dada por cualquiera de las ecuaciones (2.10 y 2.11). Nuestro problema es hallar una solución particular de la ecuación (2.16), esto puede hacerse de varias maneras.

Aquí consideraremos el método que consiste en usar números complejos y después tomaremos sólo la parte imaginaria de la solución. Para esto consideramos la variable compleja X y en vez de la función $F_o \sin \omega t$ sustituimos la función $F_o e^{i\omega t}$ (cuya parte

³Una sola variable es suficiente para describir su movimiento

imaginaria es precisamente el forzador armónico), es decir, consideramos ahora la ecuación

$$\ddot{X} + \frac{c}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F_o}{m}e^{i\omega t},$$

cuya solución particular está dada por

$$X_p = \frac{\frac{F_o}{m}e^{i\omega t}}{p(\alpha)},$$

donde $p(\alpha)$ es el polinomio asociado a la ecuación característica valuado en $\alpha = i\omega$, de manera que la solución particular es

$$\begin{aligned} x_p &= \text{Im } X_p, \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{\frac{F_o}{m}e^{i\omega t}}{-\omega^2 + \frac{c}{m}i\omega + \frac{k}{m}} \right\}, \\ &= \text{Im} \left[\left\{ \frac{F_o e^{i\omega t}}{-m\omega^2 + k + i\omega c} \right\} \left\{ \frac{k - m\omega^2 - i\omega c}{k - m\omega^2 - i\omega c} \right\} \right], \\ &= \text{Im} \left[\left\{ \frac{F_o (\cos \omega t + i \sin \omega t)}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2} \right\} \{k - m\omega^2 - i\omega c\} \right], \\ &= \frac{F_o [\omega c \cos \omega t + (k - m\omega^2) \sin \omega t]}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}, \\ &= \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}} \sin(\omega t + \psi), \\ &= B \sin(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

donde hemos usado la forma de la ecuación (2.11) con

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2} \quad y \\ \psi &= \tan^{-1} \frac{\omega c}{k - m\omega^2}. \end{aligned}$$

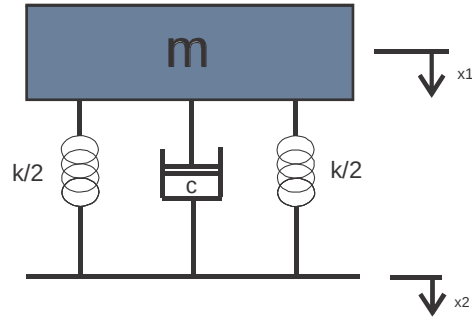


Figura 2-8: Medidor de Vibraciones

Finalmente la solución general para un sistema amortiguado y forzado está dada por

$$x = x_h + x_p,$$

$$x = Ae^{-\zeta\omega_o t} \sin(\omega_d t + \phi) + B \sin(\omega t + \psi).$$

Es necesario tener en cuenta que en esta ecuación aparecen 3 frecuencias diferentes:

- La frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- La frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
- La frecuencia del forzador ω ($F_o \sin \omega t$)

Instrumentos sísmicos

Para ilustrar el uso de esta solución consideraremos el caso de un vibrómetro que puede ser usado como sismógrafo o como acelerómetro.

En la figura (2-8) se muestra un modelo general de un medidor de vibraciones. La base se sujeta al cuerpo que manifiesta una vibración armónica desconocida $A \sin \omega t$ y del cual nos interesa conocer la amplitud y la frecuencia ω . Suponemos conocidos los datos de nuestro aparato $\{c, k, m\}$.

Este vibrómetro se puede usar como instrumento sísmico o como acelerómetro dependiendo del valor de la razón entre las frecuencias del forzador y la frecuencia natural $r = \omega/\omega_n$.

a) En el caso en el que r es muy grande ($r \rightarrow \infty$) el instrumento se usa como sismógrafo.

b) En caso contrario ($r \rightarrow 0$) se usa como acelerómetro.

Para resolver el sistema debemos tener presente que la base del aparato funciona como el forzador. Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m tenemos

$$-k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m\ddot{x}_1,$$

el desplazamiento relativo de la masa está caracterizado por $x = x_1 - x_2$, ahora podemos eliminar x_1 en la ecuación anterior y resulta

$$\begin{aligned} -kx - c\dot{x} &= m(\ddot{x} + \ddot{x}_2), \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= -m\ddot{x}_2, \end{aligned} \tag{2.17}$$

como estamos suponiendo que la vibración de la base es armónica entonces podemos escribir $x_2 = A \sin \omega t$, sustituyendo en la ecuación (2.17) obtenemos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Am\omega^2 \sin \omega t,$$

por lo que la solución particular (solución de estado estacionario) está dada por

$$x_p = \frac{Am\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}} \sin(\omega t + \psi), \tag{2.18}$$

podemos escribir esta expresión de manera más conveniente en terminos de la razón

$r = \omega/\omega_n$. Para esto observemos que la cantidad en el radical se puede escribir

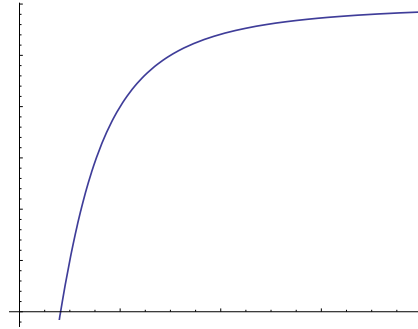
$$\begin{aligned}\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} &= \sqrt{(m\omega_n^2 - m\omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2 m^2 \omega_n^2}, \\ &= \sqrt{m^2 \left[\omega_n^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right]^2 + m^2 \omega_n^4 \left(4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)}, \\ &= m\omega_n^2 \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2},\end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (2.18)

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega t + \psi).$$

La amplitud de la solución estacionaria está determinada por el factor de la función $\sin(\omega t + \psi)$ y calculando el límite de esta cantidad cuando $r \rightarrow \infty$ observamos que esta amplitud tiende al valor constante A .

La gráfica del comportamiento de la amplitud para los diferentes valores de r (usando $A = 1$ y $\zeta = 1$) es como se muestra en la siguiente figura



Amplitud vs r

para hacer funcionar el vibrómetro como sismógrafo usualmente se utilizan resortes suficientemente blandos para garantizar $\omega_n \ll \omega$ ($r \gg 1$, esto provoca un defasamiento de aproximadamente π rad).

Para el caso de un acelerómetro se buscan los resortes suficientemente duros⁴ para tener $\omega_n \gg \omega$ ($r \ll 1$), y en este caso la amplitud resultante está dada aproximadamente por

$$\begin{aligned} F_o &\simeq Ar^2, \\ &= A \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \\ &= \frac{a}{\omega_n^2} \implies \\ a &= F_o \omega_n^2, \end{aligned}$$

donde $a = A\omega^2$ representa la aceleración del cuerpo que vibra ($[A\omega^2] = L/T^2$).

⁴La dureza que se use en el diseño depende de las aceleraciones que se pretenden medir.

Capítulo 3

Balanceo de rotores

3.1. Concepto de balance de rotor rígido y flexible

El balanceo es una técnica de corregir o eliminar fuerzas o momentos generadores de perturbaciones vibratorias. Durante el funcionamiento continuado de una máquina, el desgaste natural puede producir vibraciones que pueden alcanzar amplitudes peligrosas que obligan a su eliminación. No existe aún una teoría bien establecida, en su lugar existen varios métodos y criterios empíricos para eliminar estas vibraciones no deseadas en los sistemas mecánicos.

Esencialmente todos los métodos tienen como fundamento el resolver las ecuaciones de equilibrio traslacional y rotacional, es decir, se busca que se cumplan las condiciones

$$\sum_i \tilde{\mathbf{F}}_i = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (3.1)$$

$$\sum_j \tilde{\tau}_j = \tilde{\mathbf{0}}. \quad (3.2)$$

El problema básico para usar estas ecuaciones es determinar la ubicación de las masas que provocan las vibraciones, por lo que se recurre a métodos físicos (rotaciones controladas) o geométricos para ubicar las causas del desbalance.

Cualquier eslabón o elemento que se encuentre en rotación pura debe teóricamente estar perfectamente equilibrado estática y dinámicamente, es decir, se ha logrado eliminar todas las fuerzas y momentos generadores de vibración.

En el caso del balanceo de una rueda la técnica consiste en mover el centro de gravedad hacia el centro de rotación, pero para objetos más grandes y complejos se requiere más, para que un cuerpo quede completamente balanceado se requiere que se cumplan dos condiciones:

- *Balanceo estático.* Este se obtiene cuando no existe una fuerza centrífuga resultante y el centro de gravedad está sobre el eje de rotación.
- *Balanceo dinámico.* Este se obtiene cuando no existe ningún momento de giro a lo largo del eje.

3.2. Balanceo estático

En el caso de un rotor delgado, la masa que produce el desbalance está en un solo plano y la fuerza que provoca el desbalance es una sola fuerza radial. En este caso el balanceo estático es todo lo que se necesita.

Podemos determinar la ubicación de la masa para balancear el disco simplemente permitiendo que el rotor gire por la acción de la gravedad sobre rieles sin fricción. Esto se logra haciéndolos lo más delgados posibles, ver figura (3-1).

Permitimos que el disco gire hasta que encuentra su posición de equilibrio y posteriormente añadimos o se quitamos masa (por ensayo y error) hasta que el rotor queda en reposo en cualquier posición en que lo coloquemos sobre los rieles.

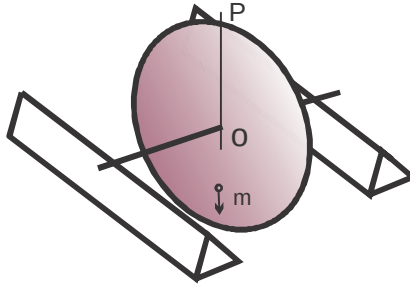


Figura 3-1: Balanceo Estático de Rotores

3.3. Balanceo dinámico en uno y dos planos

3.3.1. Balanceo dinámico en un plano

Si el disco está fuera de balance debido a masas que se encuentran sujetas a la superficie del disco (ver figura 3-2), entonces las masas son coplanares y giran en torno a un centro común, y dado que la fuerza centrífuga que actúa sobre cada masa está dada por $F = mv^2/R = mR\omega^2$ entonces para balancear el sistema debemos añadir una masa adicional (m_4 en nuestro caso) de manera que se cumpla la condición de equilibrio (ecuación (3.1)).

Dado que todas las masas giran con la misma velocidad angular nuestra ecuación de equilibrio es

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4 = \vec{0},$$

si suponemos conocida la masa m_4 (conjunto de plomos de masas conocidas) debemos colocarla en la posición dada por

$$\vec{r}_4 = -\frac{1}{m_4} (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3).$$

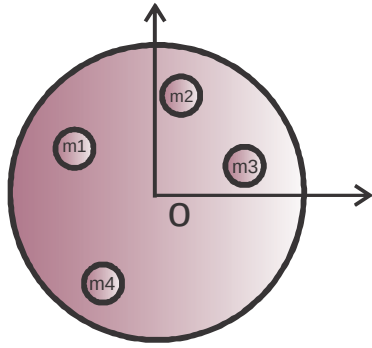


Figura 3-2: Balanceo dinámico de rotores

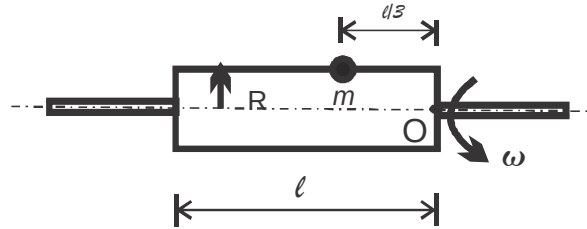


Figura 3-3: Balanceo en 2 planos

3.3.2. Balanceo dinámico en dos planos

Podemos mostrar que cualquier masa desbalanceada en un rotor largo es equivalente a dos masas desbalanceadas en cualesquier dos planos perpendiculares al eje de rotación.

Para mostrar esto consideraremos el caso simple de un rotor de longitud ℓ ($\ell > R$) y consideraremos que existe una masa no balanceada m en el punto $(-\ell/3, R)$ medidos desde O y que gira con una velocidad angular ω , como se muestra en la figura (3-3).

Mostraremos que este problema es equivalente al de 2 masas no balanceadas colocadas en planos perpendiculares al eje de rotación como se muestra en la figura (3-4)

De la condición de equilibrio de fuerzas podemos determinar una de las 2 ecuaciones

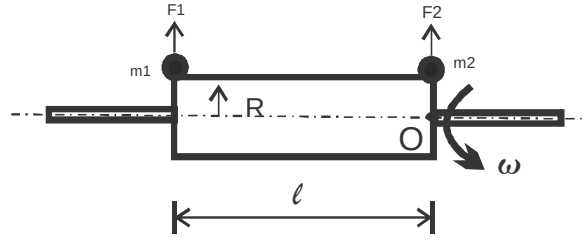


Figura 3-4: Sistema equivalente en 2 planos

necesarias para determinar las magnitudes de las masas m_1 y m_2 , es decir debemos tener

$$m\omega^2 R = m_1\omega^2 R + m_2\omega^2 R \Rightarrow$$

$$m = m_1 + m_2.$$

De la condición de equilibrio rotacional (momentos calculados desde O) podemos escribir la ecuación de las componentes perpendiculares del momento

$$m\omega^2 R \frac{\ell}{3} = m_1\omega^2 R \ell \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{m}{3}, \Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{2}{3}m.$$

Este argumento puede generalizarse para mostrar que una distribución arbitraria de masas desbalanceadas distribuidas a lo largo de un rotor en posiciones angulares diferentes, es equivalente a un conjunto de masas desbalanceadas en cualesquier 2 planos.

3.4. Tolerancias al desbalance

Las técnicas que deben usarse para el balanceo de un rotor se establecen empíricamente a partir de la relación de su radio con su longitud y las tolerancias de vibración claramente dependen de la función particular del rotor, si es una turbina, un eje de una

carreta, o eje de una impresora o de un aparato de funcionamiento más delicado. Estas normalmente están definidas por la práctica.

El método de balanceo de manera estándar queda determinado por la siguiente tabla empírica de relaciones entre el radio y la longitud del rotor

L/R	1 <i>plano</i>	2 <i>planos</i>
$R < L$	$0 \rightarrow 1000 \text{ rpm}$	$1000 \text{ rpm} < \omega$
$L < R$	$0 \rightarrow 500 \text{ rpm}$	$500 \text{ rpm} < \omega$

Capítulo 4

Sistemas de varios grados de libertad

Ahora consideraremos el caso de sistemas oscilatorios que requieren de 2 coordenadas independientes para describir su movimiento.

Los sistemas físicos con estas características normalmente son de 2 tipos: masas que oscilan en un plano, u osciladores acoplados.

Aquí esencialmente dedicaremos nuestra atención a los osciladores acoplados que son útiles para modelar diversas situaciones de vibraciones en maquinaria industrial y oscilaciones en sistemas físicos (atómicos, sísmicos, etc.).

Los resultados característicos más importantes del estudio de oscilaciones acopladas son los modos normales de vibración, que representan las formas de vibración en los cuales las masas oscilan de manera que alcanzan sus máximos, mínimos y puntos de equilibrio simultáneamente, es decir cuando el sistema está oscilando en fase y estos modos de oscilación representan los diferentes estados estacionarios del sistema.

La descripción matemática está diseñada precisamente para determinar las frecuencias de estos estados normales de vibración, y en lo que sigue ilustraremos mediante un ejemplo las características esenciales del método.

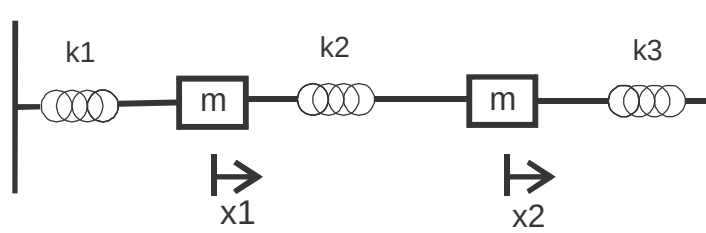


Figura 4-1: 2 Osciladores Armónicos Acoplados

4.1. Vibración de modo modal

4.1.1. Dos osciladores armónicos acoplados

Consideraremos el problema de hallar las ecuaciones de movimiento y las frecuencias naturales (modos normales) del sistema de 2 masas acopladas mediante resortes (ver figura (4-1)), en el cual suponemos conocidas las masas y las constantes de los resortes.

Resolveremos el problema por el método de la segunda ley de Newton y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

a) Segunda Ley de Newton

La fuerza sobre cada una de las masas es únicamente debida a la presencia de los resortes y estará presente sólo si los resortes se han deformado.

Para la primera masa tenemos que la fuerza total está dada por

$$m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2),$$

y para la segunda masa

$$m\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1),$$

el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es por lo tanto

$$m\ddot{x}_1 + x_1(k_1 + k_2) - k_2x_2 = 0, \quad (4.1)$$

$$m\ddot{x}_2 + x_2(k_3 + k_2) - k_2x_1 = 0, \quad (4.2)$$

dado que estamos buscando las soluciones oscilatorias en fase proponemos como solución

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t},$$

$$x_2 = A_2 e^{i\omega t},$$

sustituyendo en las ecuaciones (4.1 y 4.2) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$A_1(k_1 + k_2 - m\omega^2) - k_2A_2 = 0, \quad (4.3)$$

$$-k_2A_1 + A_2(k_3 + k_2 - m\omega^2) = 0, \quad (4.4)$$

claramente si $A_1 = A_2 = 0$ resuelve este sistema de ecuaciones, pero es una solución completamente irrelevante pues el sistema estaría fijo.

Si queremos soluciones no triviales debe cumplirse que el determinante del sistema debe ser nulo para poder tener soluciones distintas de cero, es decir

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & (k_3 + k_2 - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0, \\ (k_1 + k_2 - m\omega^2)(k_3 + k_2 - m\omega^2) - k_2^2 = 0, \quad (4.5)$$

con el fin de simplificar el análisis de este primer ejemplo supondremos que $k_1 = k_3 = k$

de manera que podemos escribir esta última ecuación (4.5)

$$\begin{aligned}(k + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2 &= 0 \implies \\ k + k_2 - m\omega^2 &= \pm k_2, \\ \omega &= \sqrt{\frac{k + k_2 \pm k_2}{m}},\end{aligned}$$

de aquí que los 2 modos normales de vibración corresponden a las frecuencias

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}}, \quad (4.6)$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.7)$$

Para ambas soluciones es relativamente simple identificar a que movimientos oscilatorios corresponden. La frecuencia más pequeña ω_- describe el movimiento cuando las dos masas se mueven en la misma dirección exactamente la misma distancia ($x_1 = x_2$) de manera que el resorte intermedio no se deforma y no influye en el movimiento. La segunda ω_+ describe el movimiento de las dos masas cuando estas se mueven en oposición y el resorte intermedio si se deforma.

Podemos demostrar que esto es realmente lo que ocurre sustituyendo la frecuencia ω_- (4.7) en el sistema de ecuaciones (4.3 y 4.4) tenemos $A_1 = A_2$, llamando A a esta amplitud común, el primer modo de oscilación está definido por

$$x_1 = x_2 = Ae^{it\sqrt{k/m}}.$$

Análogamente, sustituyendo ω_+ en el sistema de ecuaciones obtenemos $A_1 = -A_2$, obtenemos el segundo modo de oscilación

$$x_1 = -x_2,$$

ahora las masas oscilan en direcciones opuestas con una frecuencia mayor

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}}.$$

b) Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

Para usar este método sólo debemos determinar la energía mecánica del sistema en un momento arbitrario. La contribución a la energía cinética es debida al movimiento de ambas masas y está dada por

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

la energía potencial es la que se encuentra almacena en la deformación de cada uno los resortes

$$V = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2,$$

de esta manera la lagrangiana del sistema está dad por

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2,$$

dado que tenemos 2 variables independiente, ahora tendremos dos ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

realizando las derivadas y simplificando obtenemos precisamente las ecuaciones (4.1 y 4.2).

4.1.2. Pulsaciones

El fenómeno de pulsaciones el cual es más fácilmente identificable en el sonido, también se presenta en las oscilaciones mecánicas. Los pulsos se presentan de igual manera, cuando el acoplamiento entre los sistemas oscilatorios es débil (en el ejemplo anterior, cuando $k_2 \ll k$).

Para determinar la expresión del desplazamiento de las masas ($x_1(t)$) en este caso, usualmente se recurre a una serie de aproximaciones que mostraremos a continuación.

En el ejemplo de los osciladores acoplados encontramos que la frecuencia

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}},$$

describe la oscilación cuando el resorte intermedio se deforma. Si suponemos que el acoplamiento es débil ($k_2 \ll k$) podemos escribir¹

$$\begin{aligned}\omega_+ &= \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{k_2}{k}\right)}, \\ &= \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{k_2}{k}\right)^{1/2}}, \\ &\cong \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{k_2}{k}\right)}, \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} (1 + 2\varepsilon),\end{aligned}$$

donde hemos definido $\varepsilon = k_2/2k$. Podemos comparar este resultado con la frecuencia natural de un oscilador que se encuentra sometido sólo a la acción de los resortes k, k_2 .

En este caso su frecuencia natural está dada por

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k + k_2}{m}} \cong \sqrt{\frac{k}{m}} (1 + \varepsilon) \implies \\ \sqrt{\frac{k}{m}} &\cong \omega_n (1 + \varepsilon)^{-1} \cong \omega_n (1 - \varepsilon),\end{aligned}$$

¹En este cálculo usaremos en varias ocasiones la serie de Taylor:

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots$$

sustituyendo este resultado en la ecuación de la frecuencia de acoplamiento tenemos

$$\begin{aligned}\omega_+ &\cong \omega_n (1 - \varepsilon) (1 + 2\varepsilon), \\ &\cong \omega_n (1 + \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.8}$$

(en este último cálculo sólo hemos conservado el término de primer orden). En forma análoga podemos escribir

$$\omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}} \cong \omega_n (1 - \varepsilon).\tag{4.9}$$

Las expresiones (4.8 y 4.9) muestran que ambas frecuencias son prácticamente la misma en el caso de acoplamiento débil y nos permiten mostrar que el desplazamiento $x(t)$ presenta pulsaciones.

Para mostrar esto basta recordar que la solución de la ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir en términos de sus raíces en la forma

$$x(t) = B_1 e^{i\omega_- t} + B_2 e^{-i\omega_- t} + B_3 e^{i\omega_+ t} + B_4 e^{-i\omega_+ t},$$

si consideramos como condiciones iniciales² $x_1(0) = A$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, tendremos $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = A/4$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{A}{4} \cos\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\right), \\ &= \frac{A}{4} \cos(\omega_n t) \cos(\varepsilon \omega_n t),\end{aligned}$$

que muestra que ahora tendremos una amplitud variable característica del fenómeno de pulsación. En la figura (4-2) ilustramos la presencia de las pulsaciones para los valores $A = 3$, $\omega_n = 2$ y $\varepsilon = 1/25$.

²Estas condiciones iniciales nos permiten estudiar cómo la oscilación de una masa afecta a la otra que se encuentra en reposo, si existe acoplamiento débil.

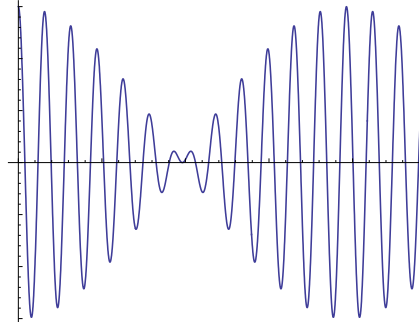


Figura 4-2: Pulsación

4.1.3. Problema general de osciladores acoplados

En esta parte trataremos de hallar el método general para el estudio de sistemas oscilatorios acoplados con 2 o más grados de libertad. Consideraremos en primera instancia sistemas conservativos descritos por las coordenadas generalizadas q_i y el tiempo t .

Supondremos además que para el sistema existe una configuración de equilibrio estable y que en esa configuración las coordenadas generalizadas toman los valores $q_k = q_{ko}$, y $\dot{q}_k = 0$, $\ddot{q}_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.³, por lo tanto en la configuración de equilibrio tenemos

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_k} \right|_0 = \left. \frac{\partial T}{\partial q_k} \right|_0 - \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 = 0. \quad (4.10)$$

Dado que la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas⁴

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (4.11)$$

en general tendremos que $\partial T / \partial q_k = \partial_k T = 0 \forall k = 1, \dots, n$, de aquí y de la ecuación (4.10)

³Con estas condiciones iniciales simplemente estamos afirmando que en la configuración de equilibrio no existe movimiento.

⁴La suma de los exponentes de las variables es constante.

tenemos

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 = 0. \quad (4.12)$$

Aquí debemos enfatizar que las coordenadas generalizadas están medidas a partir de la posición de equilibrio.

La expansión en serie de Taylor de la energía potencial en torno a la configuración de equilibrio la podemos escribir

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V_o + \sum_k \left. \partial_k V \right|_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left. \partial_j \partial_k V \right|_0 q_j q_k + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \left. \partial_{ijk}^3 V \right|_0 q_i q_j q_k + \dots$$

el segundo término de esta expansión se anula por la ecuación (4.12) y sin pérdida de generalidad podemos suponer que en la configuración de equilibrio $V_0 = 0$, de manera que podemos escribir

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left. \partial_j \partial_k V \right|_0 q_j q_k,$$

si nos restringimos sólo a oscilaciones armónicas⁵. De esta manera tenemos ahora que el potencial es una función homogénea de las coordenada generalizadas q_i ,

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k, \quad (4.13)$$

donde la matriz A_{jk} está definida por

$$A_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0,$$

la matriz $\mathbf{A}$ claramente es simétrica, pues el orden de derivación no es relevante para determinar cada una de sus entradas.

Ahora estamos en condiciones de hallar las ecuaciones de movimiento partiendo de

⁵Términos cuadráticos.

las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k} &= 0, \\ \sum_j m_{jk} \dot{q}_j + \sum_j A_{jk} q_j &= 0, \implies\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_j (A_{jk} q_k - m_{jk} \ddot{q}_j) = 0.} \quad (4.14)$$

La ecuación de movimiento (4.14) representa n ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, y dado que estamos considerando sistemas oscilatorios esperamos soluciones de la forma

$$q_j = a_j e^{i(\omega t - \phi)},$$

donde las a_j representan las amplitudes y ϕ las fases. Sustituyendo estas coordenadas generalizadas en la ecuación (4.14) las ecuaciones de movimiento son

$$\sum_j (A_{jk} - m_{jk} \omega^2) a_j = 0.$$

Nuevamente, para que este sistema de ecuaciones tenga soluciones $\{a_j\}$ distintas cero, el determinante del sistema debe ser nulo

$$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0, \quad (4.15)$$

esta es llamada la ecuación secular y representa un polinomio de grado n en ω^2 , el cual tendrá en general n raíces que se denotan usualmente por ω_r^2 y representan las frecuencias características asociadas a cada uno de los modos normales de vibración.

De esta manera disponemos de un método para hallar las frecuencias características y los modos normales de vibración, basta resolver la ecuación (4.15) en cada caso parti-

cular, para lo cual es necesario determinar la matriz A_{jk} y hallar las raíces del polinomio resultante.

Una de las deficiencias de este método es hallar las raíces del polinomio, pues para grados de libertad mayores a 4, en general se requieren usar métodos numéricos para determinar las raíces.

Por esta razón más adelante estudiaremos métodos alternativos que de entrada consideran la necesidad de métodos aproximados.

Para ilustrar el uso del método calcularemos nuevamente las frecuencias del sistema de los dos osciladores acoplados mostrados en la figura (4-1).

Para usar la ecuación secular sólo necesitamos conocer 2 matrices, la matriz $A = (A_{ij})_{2 \times 2}$, y la matriz de masa M .

Aprovecharemos la energía potencial que habíamos calculado

$$V = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2,$$

de aquí que

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \partial_1^2 V & \partial_{12}^2 V \\ \partial_{21}^2 V & \partial_2^2 V \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} k + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k + k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\partial_{12}^2 V = \partial^2 V / \partial x_1 \partial x_2$. Ahora determinaremos el polinomio en las frecuencias a partir de la ecuación secular

$$\det(A - \omega^2 M) = 0,$$

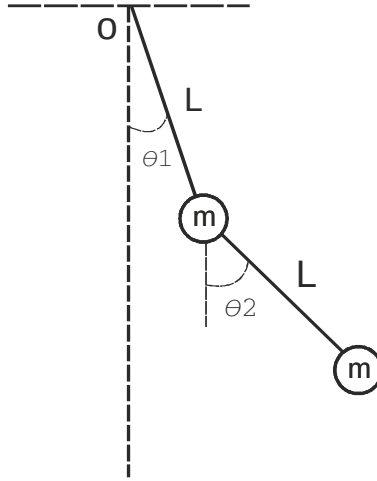


Figura 4-3: Péndulo doble

de aquí tenemos

$$\det \begin{pmatrix} k + k_2 - \omega^2 m & -k_2 \\ -k_2 & k + k_2 - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0,$$

$$(k + k_2 - \omega^2 m)^2 - k_2^2 = 0,$$

$$k + k_2 - \omega^2 m = \pm k_2,$$

finalmente, las frecuencias de los modos normales son

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k + 2k_2}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

este es precisamente el resultado obtenido anteriormente, ver ecuaciones (4.6 y 4.7).

4.1.4. Péndulo doble

En este ejemplo vamos a determinar las frecuencias características y los modos normales de vibración de un péndulo doble (ver figura 4-3), donde suponemos conocidas las masas m y las longitudes L del péndulo.

Debemos calcular la matriz A_{jk} , para lo cual debemos determinar la energía potencial del sistema.

Para determinar la energía gravitacional de cada una de las masas sólo necesitamos conocer la altura que cada una se eleva de su configuración de equilibrio. De esta manera al subir la masa 1 se ha elevado una distancia

$$\ell_1 = L(1 - \cos \theta_1),$$

respecto a la configuración de equilibrio, de aquí que la energía potencial de cada partícula está dada por

$$\begin{aligned} V_1 &= mgL(1 - \cos \theta_1), \\ V_2 &= mgL[1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2], \end{aligned}$$

ahora usando la aproximación de ángulos pequeños podemos usar el desarrollo en serie de Taylor del coseno hasta segundo orden de esta manera ⁶ obtenemos

$$\begin{aligned} V_1 &= mgL \left(1 - 1 + \frac{\theta_1^2}{2} \right), \\ V_1 &= \frac{1}{2}mgL\theta_1^2, \\ V_2 &= \frac{1}{2}mgL(\theta_1^2 + \theta_2^2), \end{aligned}$$

por lo que la energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}mgL\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgL(\theta_1^2 + \theta_2^2) \\ &= \frac{1}{2}mgL[2\theta_1^2 + \theta_2^2]. \end{aligned}$$

Ahora debemos determinar la matriz M del sistema, para lo cual debemos determinar

⁶ $\cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$ y $\theta_1 - \theta_2 \cong 0$.

la energía cinética.

La posición de cada masa está descrita por los vectores

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= L \sin \theta_1 \mathbf{i} - L \cos \theta_1 \mathbf{j}, \\ \vec{r}_2 &= (L \sin \theta_1 + L \sin \theta_2) \mathbf{i} - (L \cos \theta_1 + L \cos \theta_2) \mathbf{j},\end{aligned}$$

por lo que su energía cinética está dada por

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_2^2, \\ &= \frac{1}{2}mL^2 \left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right], \\ &\cong \frac{1}{2}mL^2 \left[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right].\end{aligned}$$

A partir de esta expresión podemos leer la matriz M (coeficientes de la forma cuadrática de las velocidades)

$$M = \begin{pmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{pmatrix}.$$

Matriz A_{ij} Usando que

$$A_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0,$$

tenemos

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{11}V & \partial_{12}V \\ \partial_{21}V & \partial_{22}V \end{pmatrix}, \\ &= mgL \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

las frecuencias características las determinamos a partir del determinante

$$|\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2mgL & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{pmatrix} \right|$$

$$\det \begin{pmatrix} m(2gL - 2\omega^2 L^2) & -m\omega^2 L^2 \\ -m\omega^2 L^2 & m(gL - \omega^2 L^2) \end{pmatrix} = 0,$$

$$(2gL - 2\omega^2 L^2)(gL - \omega^2 L^2) - \omega^4 L^4 = 0,$$

$$L^4 \omega^4 - 4L^3 g \omega^2 + 2L^2 g^2 = 0,$$

de aquí que las frecuencias correspondientes de los dos modos normales son:

$$\omega_+^2 = \frac{g}{L} (2 + \sqrt{2}), \quad \omega_-^2 = \frac{g}{L} (2 - \sqrt{2}),$$

el modo de oscilación más lento corresponde al movimiento en fase de las dos masas (ω_-) y la frecuencia de oscilación más rápida (ω_+) corresponde al movimiento de las masas en oposición. Para mostrar que este es el caso es necesario sustituir estas frecuencias en las ecuaciones de movimiento del sistema al suponer soluciones armónicas.

4.2. Absorber dinámico de vibraciones no amortiguadas

En una máquina o en general en un sistema sometido a la acción de una fuerza externa de frecuencia constante es posible que aparezcan vibraciones no deseadas especialmente cuando se encuentran cercanas a la resonancia. Con el fin de desaparecer las vibraciones el primer paso es tratar de eliminar la fuerza externa que las causa, otra posibilidad es añadir pesos al sistema para alejarlo de la condición de resonancia.

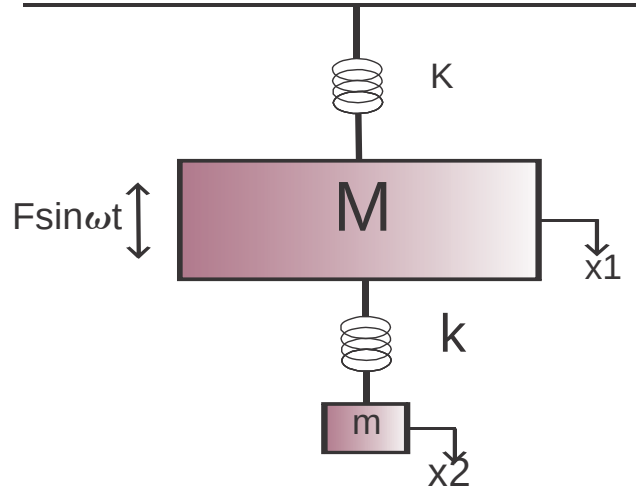


Figura 4-4: Acoplamiento Oscilador de Frahm

Debido a que usualmente esto no es posible se recurre a una tercera solución, el acoplamiento de un oscilador externo que absorba las vibraciones producidas por la fuerza exterior. Esta solución fué descubierta por Frahm en 1909 y consiste en sujetar un sistema oscilatorio a la masa M (comparativamente pequeño al sistema), de manera que la frecuencia natural del absorvedor ω_a que se sujeta a la masa M sea igual a la frecuencia ω de la fuerza perturbadora.

Para mostrar que esto elimina las vibraciones en la masa M estudiaremos el sistema mostrado en la figura (4-4) que nos sirve de modelo de la situación que estamos discutiendo aquí.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema de dos grados de libertad son

$$M\ddot{x}_1 + (K + k)x_1 - kx_2 = F_o \sin \omega t, \quad (4.16)$$

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0, \quad (4.17)$$

sustituyendo las soluciones armónicas $x_k = a_k \sin \omega t$, $k = 1, 2$ en las ecuaciones (4.16 y

4.17) resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las amplitudes

$$\begin{aligned} a_1 (-M\omega^2 + K + k) - ka_2 &= F_o, \\ -ka_1 + a_2 (-m\omega^2 + k) &= 0, \end{aligned}$$

el determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} -M\omega^2 + K + k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = \Delta,$$

de donde la amplitud de oscilación a_1 de la masa M está dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} F_o & -k \\ 0 & -m\omega^2 + k \end{vmatrix}, \\ &= \frac{1}{\Delta} F_o (k - m\omega^2), \end{aligned}$$

que es evidentemente nula si escogemos la constante del resorte del amortiguador como $k = m\omega^2$ o podemos decir en forma equivalente que la frecuencia de oscilación del resorte es $\omega_a \equiv \sqrt{k/m}$, lo que determina el diseño del absorvedor de vibración⁷.

4.3. Absorsor de vibraciones amortiguado

4.3.1. Sistemas de 2 grados de libertad con amortiguamiento

En este caso podemos seguir usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para determinar las ecuaciones de movimiento, pero debemos tener en cuenta que ahora existe una fuerza de fricción que depende de la velocidad, esta fuerza puede introducirse como una fuerza

⁷Observemos que ésta elección no anula el determinante del sistema que resulta $\Delta = -k^2$.

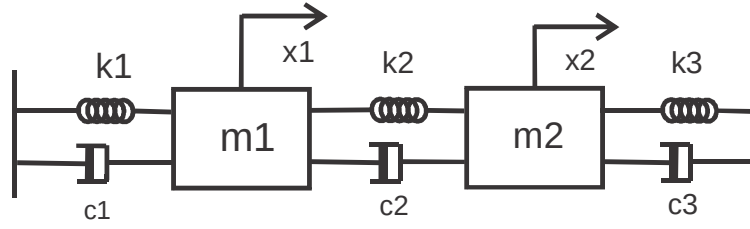


Figura 4-5: Acomplamiento de 2 osciladores amortiguados

generalizada de manera que ahora debemos escribir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.18)$$

donde $E_d = \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2$ representa la energía de disipación debida a la presencia del amortiguador, y como antes suponemos que la energía potencial $V = V(q_i)$ no depende de las velocidades.

Ilustraremos el uso de la ecuación (4.18) para determinar las ecuaciones de movimiento con un ejemplo.

Osciladores acoplados con amortiguamiento

Consideraremos el caso de dos masas acopladas entre sí con osciladores y amortiguadores como se muestra en la figura (4-5).

Suponemos conocidas todas las constantes involucradas en el diseño $\{c_i, m_i, k_i\}$.

La lagrangiana del sistema se determina de la misma manera que lo hemos venido haciendo

$$\begin{aligned} L &= T - V, \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2, \\ E_d &= \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_3 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2, \end{aligned}$$

Ahora basta sustituir en la ecuación (4.18) para $q_1 = x_1$ y para $q_2 = x_2$ y obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 &= 0. \end{aligned}$$

En general para estos sistemas de ecuaciones con amortiguamiento no existe un método general de solución y debe estudiarse cada caso en forma particular.

Si el sistema además está forzado (con un forzador armónico) aún podemos seguir usando las mismas ideas, basta con añadir el forzador a las ecuaciones de Euler-Lagrange, teniendo particular cuidado de considerarlo en la variable que le corresponda (la masa sobre la cual actúa), para esto basta añadir la fuerza generalizada Q_i que representa al forzador.

En este caso debemos escribir las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + Q_i, \quad (4.19)$$

y se procede de manera análoga al caso anterior.

4.4. Aisladores de vibraciones (mecánicas, eléctricos y magnéticos)

Mostraremos las diferencias que surgen debido a la presencia de forzadores armónicos con un ejemplo.

Consideraremos el caso de un sismógrafo con oscilador armónico acoplado, el cual además está forzado, ver figura (4-6).

En este ejemplo el forzamiento externo sólo actúa sobre la masa m y estamos con-

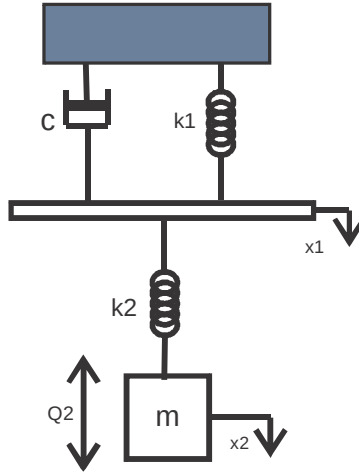


Figura 4-6: Forzamiento de osciladores acoplados

siderando que es un forzador armónico $Q_2 = F_o e^{i\omega t}$.

El rectángulo en color gris sólo representa la parte donde se fija el sistema y no tiene movimiento, y la parte donde se fija el oscilador suponemos que es de masa despreciable para las condiciones del problema.

Nuevamente suponemos conocidas las constantes de los resortes, el coeficiente c y la masa del oscilador cuyo movimiento es el que pretendemos estudiar.

En este caso existen 2 coordenadas generalizadas $\{x_1, x_2\}$ por lo que debemos escribir 2 ecuaciones de movimiento. Las energías están dadas por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2, \\ V &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2, \\ E_d &= \frac{1}{2} c \dot{x}_1^2, \end{aligned}$$

y las fuerzas generalizadas son

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = F_o e^{i\omega t}.$$

Sustituyendo en la ecuación (4.19) para cada una de las variables obtenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned}c \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\m \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 &= F_o e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Vibración Magnética

5.1. Campos magnéticos alternantes

5.1.1. Modelo del campo magnético unidimensional

Hablar de campos magnéticos alternantes es equivalente a estudiar el campo electromagnético, es decir, campos eléctricos y magnéticos alternantes, pues como veremos más adelante las ecuaciones del campo electromagnético muestran que la variación en el tiempo de uno de los campos ($\vec{E}(t)$ o $\vec{B}(t)$) implican la existencia del otro.

El estudio y la aplicación del electromagnetismo ha tenido una enorme cantidad de implicaciones científicas e industriales, nuestro interés en esta parte es su relación con el problema de la levitación magnética, que actualmente tiene aplicaciones espectaculares en algunos trenes europeos y asiáticos, los cuales apoyados en los principios de los campos alternantes (ver figura 5-1) han logrado hasta el momento velocidades del orden de 400 – 600 km/h .

Iniciaremos con un breve repaso de los campos eléctricos y magnéticos y finalmente mostraremos las ecuaciones de onda de los campos cuando estos dependen del tiempo.

Tradicionalmente el estudio del electromagnetismo inicia con el enunciado de la ley experimental de fuerza eléctrica entre dos cargas separadas una distancia r , la ley de

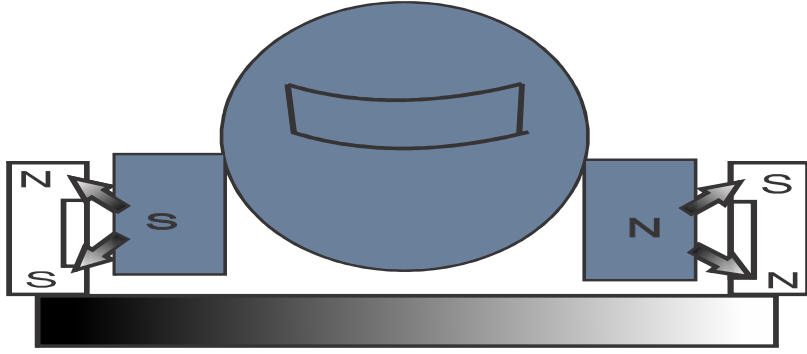


Figura 5-1: Levitación Magnética de Trenes

Coulomb

$$\vec{F}_{12} = K q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (5.1)$$

donde $K = 1/(4\pi\epsilon_o)$.

Partiendo sólo de ésta expresión podemos enunciar una importante cantidad de conceptos relacionados con los fenómenos electrostáticos.

El campo eléctrico se define por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

y usando los principios de superposición de fuerzas tenemos que el campo en un punto P determinado por el vector $\vec{r}$, está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left[\underbrace{\sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}_{discretas} + \underbrace{\int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq}_{continuas} \right], \quad (5.2)$$

que incluye las contribuciones al campo de las distribuciones discretas de carga (cargas aisladas) y las distribuciones continuas (cargas distribuidas sobre líneas, superficies o volúmenes).

La ecuación (5.2) junto con la ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\phi_{\vec{E}} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o}, \quad (5.3)$$

donde $\phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds$, constituyen las herramientas fundamentales para la determinación del campo eléctrico en una gran cantidad de casos prácticos.

El concepto de potencial electrostático es una consecuencia de la aplicación del concepto de trabajo junto con la ley de fuerza de Coulomb, es decir

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \bullet d\vec{r}, \\ &= \int q\vec{E} \bullet d\vec{r}, \\ &= -q \int \nabla V \cdot d\vec{r}, \\ &= -q \int dV, \\ &= qV \implies \\ V &= \frac{W}{q}. \end{aligned}$$

La idea de potencial eléctrico tiene una enorme importancia en el estudio del campo eléctrico, pues dado que es un escalar es mucho más simple de medir que el campo, y basta conocer las diferencias de potencial entre dos puntos para determinar la intensidad del campo eléctrico, además de sus claras ventajas de cálculo desde el punto de vista analítico.

Es posible determinar la fórmula general para el cálculo del potencial eléctrico a partir del estudio y la generalización de la función potencial en el caso de una carga puntual, la cual está dada por

$$V(\vec{r}) = K \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|},$$

a partir de ésta expresión podemos simplemente sumar todas las contribuciones al potencial de las distribuciones discretas y continuas aprovechando que el potencial es un

escalar se obtiene

$$V(\vec{r}) = K \left[\underbrace{\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}_{discretas} + \underbrace{\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}_{continuas} \right],$$

conocido este potencial podemos ahora determinar el campo eléctrico a partir de la relación

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Existen muchos fenómenos y aplicaciones relacionadas con el movimiento de las cargas en presencia de campos eléctricos, pero para nuestro interés particular sólo necesitamos los conceptos de corriente eléctrica $i = dq/dt$ y densidad de corriente eléctrica

$$\vec{j} = \frac{i}{A} \hat{e}_i,$$

donde $\hat{e}_i$ representa un vector unitario en la dirección de la corriente.

El experimento de Hans Christian Oersted mostró que las cargas en movimiento producían campos magnéticos, lo cual sugería la estrecha relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos.

La producción de campos magnéticos a partir de cargas eléctricas en movimiento fué motivo de gran interés y se produjeron los primeros 2 grandes resultados: la ley de Ampere y la ley de Biot-Savart para la determinación del vector de campo magnético producido por corrientes estacionarias.

La ley de Ampere para $\vec{B}$ era el equivalente a la ley de Gauss para $\vec{E}$, la ley de Ampere afirma que la circulación de $\vec{B}$ a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es directamente proporcional a la corriente encerrada por dicha trayectoria

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o i_{enc},$$

y la ley de Biot-Savart representaba el equivalente matemático del cálculo del campo

eléctrico (ecuación (5.2))

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int Id\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Estas expresiones junto con la ley de fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right),$$

constituían las herramientas base para la determinación del campo magnético y el instrumento para estudiar algunas de sus principales consecuencias.

Por otra parte la exploración de la idea de potencial magnético no resultó tan fructífera en un principio, fué prácticamente hasta los años 1950's en los que se empezó a entender la enorme importancia de la idea del potencial magnético sobre todo en relación con las teorías de norma de Yang-Mills.

Aquí nos limitaremos a mencionar que el campo magnético se puede determinar a partir del conocimiento del potencial vectorial magnético $\vec{A}$ tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Hasta ese momento se tenía la clara comprensión de que las cargas producían campos eléctricos que le conferían propiedades especiales al espacio alrededor de las cargas y también que las cargas en movimiento producían campos magnéticos. Esto sugería cierta simetría entre ambos campos, esta idea fué explorada con éxito por Michael Faraday al demostrar que campos magnéticos variables en el tiempo provocaban el movimiento de las cargas en un circuito cerrado, es decir

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt},$$

que escrita en su forma integral permitía relacionar de manera directa ambos campos

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \bullet \hat{n} \, ds.$$

Maxwell realizó la importante tarea de conjuntar todo el conocimiento adquirido hasta entonces sobre los fenómenos eléctricos y magnéticos y aportó una estructura lógica y coherente dentro de un marco teórico único, además de observar que debido al comportamiento simétrico de los campos era necesario añadir un término adicional a la ley de Ampere, todo estos trabajos los resumió finalmente en las 4 ecuaciones fundamentales del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{E} &= \frac{\rho_{enc}}{\epsilon_o}, & \text{Ley de Gauss para } \vec{E}, \\ \nabla \bullet \vec{B} &= 0, & \text{Ley de Gauss para } \vec{B}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{Ley de Faraday,} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \vec{j} + \underbrace{\mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{Maxwell}, & \text{Ley de Ampere.} \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones Maxwell pudo demostrar que el campo electromagnético puede viajar en el vacío y lo hace con una velocidad igual $c = 3 \times 10^5 Km/seg$. Esto sugería que la luz era simplemente campo electromagnético. Para mostrar esto Maxwell mostró en primera instancia que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ambos satisfacen una ecuación de onda.

Ecuación de onda para $\vec{E}$ y $\vec{B}$

A partir de la ley de Faraday tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \\ \nabla (\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

usando que el estudio es en el vacío $\nabla \bullet \vec{E} = 0$ y $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, sustituyendo en la ecuación (5.4) obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

que es precisamente la ecuación de onda del campo eléctrico. Comparando con la ecuación de onda general

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

Maxwell pudo leer la velocidad de propagación del campo eléctrico

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}.$$

En forma análoga, partiendo ahora de la ley de Ampere tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}), \\ \nabla(\nabla \bullet \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} &= \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \\ \nabla^2 \vec{B} &= \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

y obtenía para $\vec{B}$ la misma velocidad de propagación. Esto le permitió sugerir que la luz eran precisamente ondas electromagnéticas que se propagaban en el espacio vacío cumpliendo con las leyes descubiertas hasta entonces del electromagnetismo.

Una forma simple de obtener un campo magnético unidimensional (las líneas de campo son todas paralelas) es mediante la construcción de un electroimán.

Basta con disponer de una bobina enrollada en torno a un núcleo de hierro y tendremos una buena aproximación de un campo magnético unidimensional en las vecindades del centro de la bobina.

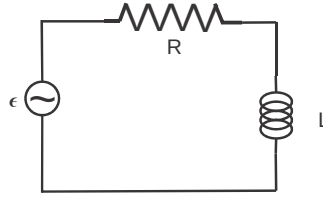


Figura 5-2: Circuito RL

Partiendo de la ley de Ampere

$$\oint_C \tilde{\mathbf{B}} \bullet d\tilde{\mathbf{l}} = \mu_o i_{enc},$$

y tomando la aproximación de un campo constante en el interior de la bobina podemos mostrar que

$$B = \mu n i,$$

donde $n = N/L$, es el número de vueltas por unidad de longitud, i es la corriente eléctrica que circula por la bobina y μ representa la permitividad magnética del medio en el interior de la bobina.

Podemos además a partir de las leyes de Kirchhoff mostrar que la presión magnética del campo está dada por

$$P_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_o}. \quad (5.5)$$

Para mostrar este resultado basta con considerar el circuito de la figura (5-2)

Al circular una corriente alterna por el circuito podemos estudiar las variaciones de voltaje en cada uno de los elementos conectados y podemos escribir la ecuación

$$\begin{aligned} \varepsilon &= V_R + V_L, \\ &= iR + L \frac{di}{dt} \implies \\ \varepsilon i &= i^2 R + L i \frac{di}{dt}, \end{aligned}$$

esta ecuación nos dice que la potencia entregada por la fem es igual a la potencia disipada en cada uno de los elementos del circuito

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L,$$

por lo que la energía almacenada en el campo magnético está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_L &= Li \frac{di}{dt}, \\ \frac{dU_B}{dt} &= Li \frac{di}{dt} \implies \\ U_B &= \frac{1}{2} Li^2,\end{aligned}$$

y usando que la inductancia de una bobina recta es $L = \mu_o n^2 \ell A$, tenemos finalmente

$$U_B = \frac{1}{2} \mu_o \ell A n^2 i^2,$$

o en función del campo magnético $B = \mu_o n i$

$$\begin{aligned}U_B &= \frac{B^2 \ell A}{2 \mu_o}, \\ \mu_B &= \frac{U_B}{vol}, \\ &= \frac{B^2}{2 \mu_o}.\end{aligned}$$

Para mostrar que esta es precisamente la presión magnética que ejerce el electroimán

por unidad de área basta con recordar que

$$\begin{aligned} W &= F\ell, \quad P = \frac{F}{A}, \implies \\ W &= PA\ell, \\ P &= \frac{W}{A\ell}, \\ P &= \frac{B^2}{2\mu_o}. \end{aligned}$$

5.1.2. Modelo de levitación puro

La levitación magnética o suspensión magnética, es un método mediante el cual un objeto puede quedar suspendido sin más soporte que los campos magnéticos. La presión magnética es usada para contrarrestar los efectos gravitacionales y cualesquier otras aceleraciones presentes.

Earnshaw mostró en 1842, que una colección de cargas puntuales no puede ser mantenida en equilibrio estable únicamente por la interacción de las propias cargas. Este teorema es usualmente referenciado para campos magnéticos, pero originalmente se aplicó a campos electrostáticos. Normalmente se aplica a leyes de fuerza clásicas que varíen con la ley de inverso del cuadrado de la distancia y también a fuerzas magnéticas de imanes permanentes y materiales paramagnéticos o cualquier combinación.

La generalización del teorema de Earnshaw para campos magnéticos, muestra que no es posible levitar establemente contra la fuerza de gravedad. Pero es posible mediante el uso de materiales diamagnéticos, superconductores, o sistemas que involucren corrientes de Foucault (corrientes remolino inducidas por los campos magnéticos externos).

Aunque Earnshaw mostró que no era posible levitar ningún objeto establemente usando sólo campos magnéticos estáticos, aún era posible la levitación de objetos, siempre que se usaran materiales diamagnéticos y controladores electrónicos. Puede mostrarse que los materiales diamagnéticos son estables al menos en una dirección lo que permite la estabilización electrónica en los demás ejes.

Los conductores pueden tener una permeabilidad relativa a campos magnéticos alternantes por debajo de la unidad, de esta manera algunas configuraciones simples de corriente alterna son autoestables, en este caso se dice que se ha alcanzado la estabilidad dinámica, pues el sistema en levitación es capaz de amortiguar cualquier tipo de vibración.

Diamagnetismo

El diamagnetismo es la propiedad que presentan algunos materiales, la cual consiste en la generación de un campo magnético interno en oposición a cualquier campo magnético externo que se le aplique, de manera que se produce un efecto neto repulsivo.

Esto sucede debido a que los campos magnéticos externos alteran la velocidad orbital de los electrones alrededor del núcleo produciendo de esta manera un cambio en el momento dipolar magnético y de acuerdo con la ley de Lenz este se opone al campo externo.

El fenómeno del diamagnetismo fue descubierto y nominado por primera vez en septiembre de 1845 por Michael Faraday cuando vio un trozo de bismuto que era repelido por un polo *cualquiera* de un imán; lo que indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto.

Los materiales diamagnéticos son materiales que se caracterizan por tener una permeabilidad magnética $\mu < 1$. De esta manera el diamagnetismo es una forma de magnetismo que sólo se manifiesta en presencia de campos magnéticos externos y es en general un efecto bastante débil aunque en condiciones de superconductividad es bastante fuerte.

La levitación diamagnética puede usarse para levitar piezas ligeras de bismuto o grafito pirolítico sobre el campo producido por un imán permanente moderadamente fuerte.

Debido a que el agua es predominantemente diamagnética, ésta técnica ha sido usada para levitar gotas de agua, animales vivos pequeños (chapulines, ranas y un ratón). Sin embargo los campos magnéticos requeridos para esto son muy grandes, típicamente

alrededor de 16 teslas, lo que produce gran cantidad de problemas si existen materiales ferromagnéticos en la vecindad del experimento.

Apéndice A

Funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ y ondas estacionarias y viajeras

Los fenómenos ondulatorios en la actualidad son tan importantes que pocas cosas podríamos hacer actualmente sin ellos, son indispensables para transmitir información a través del radio, la televisión, internet, telefonía celular, etc., captamos ondas del espacio con radiotelescopios, que nos permiten hacernos una idea del universo.

Por otra parte a principios del siglo XX un conjunto de experimentos mostró que las partículas que constituyen el átomo (electrones, protones y neutrones) tienen también un comportamiento ondulatorio. Esto dió bases experimentales para la construcción de una teoría que explicaba el comportamiento de la materia a niveles atómicos, la mecánica cuántica.

El propósito del presente apéndice es estudiar las propiedades básicas de las funciones que son esenciales para la modelación matemática de fenómenos oscilatorios, las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

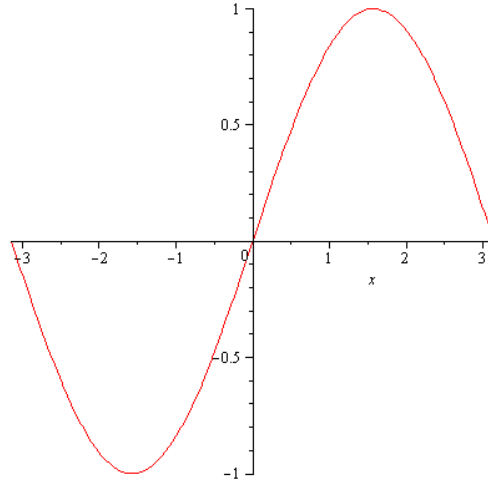


Figura A-1: $\sin(x)$

A.1. Las curvas básicas, funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son parte esencial del lenguaje estándar para la descripción del movimiento ondulatorio. La gráfica de la función $f(x) = \sin x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se muestra en la figura (A-1).

Los puntos de intersección con el eje x los determinan las soluciones de la ecuación

$$x = n\pi \Leftrightarrow \sin x = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.1})$$

además la función $\sin(x)$ es impar, es decir, $\sin x = -\sin(-x)$ para todo x ($\forall x$).

La gráfica de la función $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en la figura (A-2)

Los puntos de intersección con el eje x se determinan por la ecuación

$$x = (2n \pm 1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos x = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.2})$$

además la función $\cos(x)$ es par, es decir, $\cos(x) = \cos(-x)$ para todo x ($\forall x$). Ambas

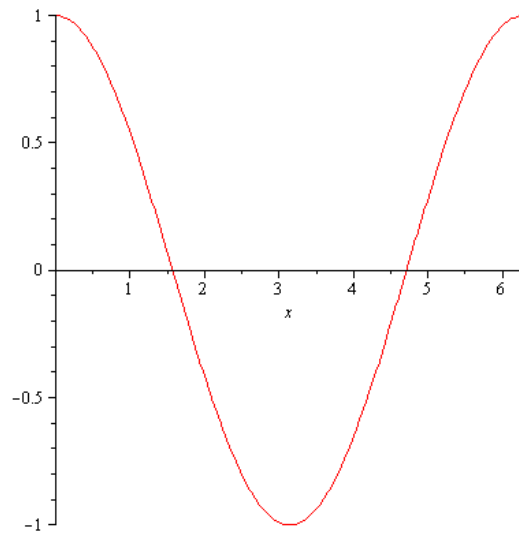


Figura A-2: $\cos(x)$

funciones cumplen la desigualdad

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.3})$$

A.1.1. Amplitud

Si consideramos las funciones $y = A \sin x$, $y = A \cos x$, la constante A nos permite modificar la altura de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ de manera que ahora

$$|A \sin x| \leq |A| \quad \text{y} \quad |A \cos x| \leq |A|, \quad (\text{A.4})$$

para ejemplificar esta situación mostramos la gráfica (??) de las funciones $y = A \sin x$, con la amplitud $A \in \{1, 2, 3, 5\}$ en forma análoga, si $y = A \cos x$, con $A \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 5\}$ está representada en la figura (A-4)

Los ceros de las funciones permanecen invariantes, sólo se modifica la altura de la función, y es tan grande (o pequeña) como lo sea el número A , que es llamada la *amplitud*

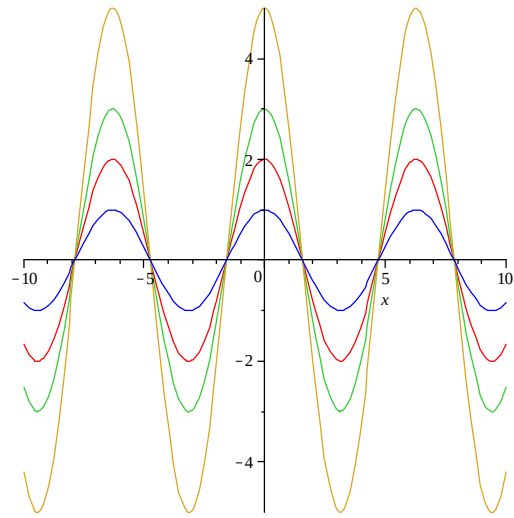


Figura A-3: Amplitud Variable $A_n \cos(x)$

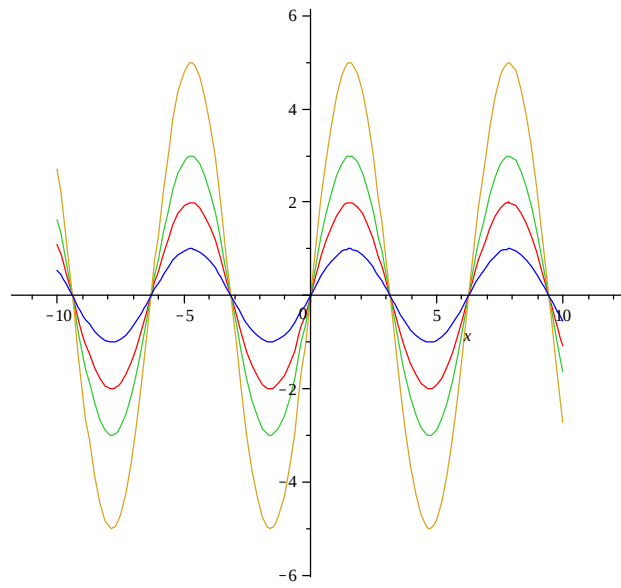


Figura A-4: Amplitud Variable $A_n \sin(x)$

de la onda.

A.1.2. Localización de ceros, máximos y mínimos de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$.

Primero determinaremos los puntos del eje real en los cuales la función $\sin(x)$ toma los valores

$$\sin(x) = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ -1. \end{cases}$$

Los ceros de la función se determinan a partir de la periodicidad de la función, de la gráfica (A-1) podemos observar que los ceros en el eje x se localizan en los puntos donde

$$\sin(x) = 0 \iff x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De la misma manera entre $1/s$ y $-1/s$ existe una distancia constante de 2π . Ahora dado que en la parte positiva del eje el primer 1 se encuentra en $x = \pi/2$, el siguiente estará en $x_1 = \pi/2 + 2\pi = 5\pi/2$, $x_2 = 5\pi/2 + 2\pi = 9\pi/2$, podemos ahora inferir que la fórmula general para todos los máximos es

$$\sin(x) = 1 \iff x = (4n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mediante un análisis similar y tomando en cuenta que el primer -1 en la parte positiva del eje se encuentra en $x = 3\pi/2$, el siguiente se encuentra en $x_2 = 3\pi/2 + 2\pi = 7\pi/2$, $x_3 = 7\pi/2 + 2\pi = 11\pi/2$, de donde podemos concluir que

$$\sin(x) = -1 \iff x = (4n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para la función $\cos(x)$ podríamos repetir el mismo análisis y encontrar las fórmulas correspondientes, pero es más útil usar que las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son la misma,

salvo que una es traslación de la otra por una distancia $\pi/2$, es decir:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{A.5})$$

a partir de esta relación podemos determinar rápidamente los 0's, 1's y -1's de la función $\cos(x)$ usando el conocimiento que hemos adquirido para la función $\sin(x)$, es decir:

0's

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 0 = \sin(x + \pi/2) \iff \\ x + \pi/2 &= n\pi \implies x = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

así los ceros de la función $\cos(x)$ se encuentran en todos los múltiplos impares de $\pi/2$.

1's

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 = \sin(x + \pi/2) \iff \\ x + \pi/2 &= (4n + 1)\frac{\pi}{2} \iff x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

los máximos de la función $\cos(x)$ se encuentran en todos los múltiplos pares de π .

-1's

$$\begin{aligned} \cos(x) &= -1 = \sin(x + \pi/2) \iff \\ x + \pi/2 &= (4n - 1)\frac{\pi}{2} \iff x = (2n - 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

los mínimos se encuentran en todos los múltiplos impares de π .

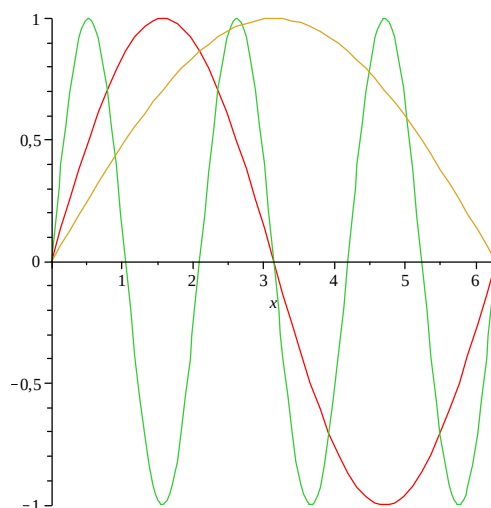


Figura A-5: Frecuencia Variable $\sin(\omega t)$

A.1.3. Frecuencia

En forma análoga ahora consideraremos las graficas de las funciones $y = \sin kx$, $y = \cos kx$, ahora veremos el número k nos permite determinar el número de ondas completas en cualquier intervalo de longitud 2π . Con éste fin mostramos las gráficas (A-5) de éstas funciones para los valores de $k = \{1/2, 1, 3\}$, en el intervalo $x \in [0, 2\pi]$

El número k es llamado el *número de onda*, y determina el número de ondas completas en cualquier intervalo de longitud 2π . De esta manera observamos que la gráfica de la función $\sin(x/2)$ sólo debe mostrar media onda en el intervalo de 0 a 2π .

A.1.4. Corrimiento de fase

Podemos mover las gráficas de las funciones trigonométricas hacia la derecha o izquierda, usando el hecho de que las gráficas de las funciones $y = f(x)$, e $y = f(x + c)$, son la misma con la salvedad que una está trasladada hacia la izquierda o la derecha dependiendo del valor de c . De aquí que las gráficas de las funciones $y = A \sin k(x - c)$ tiene la misma forma que la gráfica de la función $y = A \sin kx$, excepto que está corrida c —

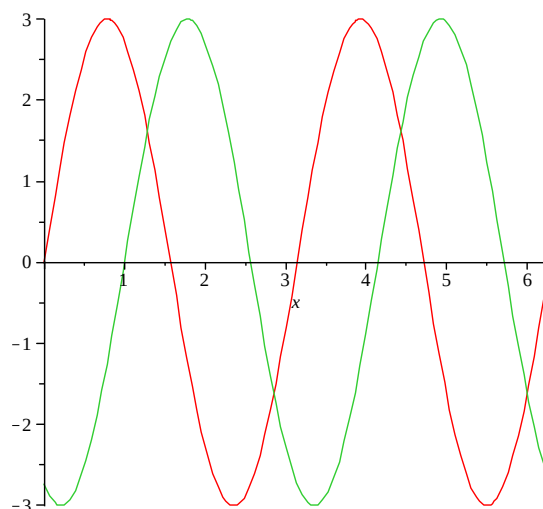


Figura A-6: Defasamiento

unidades a la izquierda si $c < 0$, y está corrida c unidades a la derecha si $c > 0$. El número c es llamado el *corrimiento de fase* y mide, que tanto, la curva de la función $\sin x$ ha sido *avanzada o retrasada*.

La gráfica de la función $y_1 = 3 \sin 2(x - 1)$ tiene la misma forma que la gráfica de la función $y_2 = 3 \sin 2x$ excepto que está corrida 1 unidad a la derecha como se muestra en la figura (A-6)

Un error que se comente frecuentemente al tratar de determinar los desplazamientos de la función, proviene de no factorizar el número de onda en la expresión de la función, por ejemplo, en la función $y = 4 \cos(\pi x + \frac{\pi}{2})$ ¿Cuál es el corrimiento de la función?, una respuesta común a esta pregunta es que el corrimiento es de $\pi/2$ unidades hacia la izquierda, lo cual es incorrecto. Para determinar el corrimiento debemos escribir la función como $y = 4 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$ lo que nos permite leer correctamente el corrimiento de $1/2$ unidades hacia la izquierda.

A.2. Ondas viajeras, su descripción matemática

La descripción matemática general del movimiento ondulatorio unidimensional se hace mediante una función que depende tanto del espacio como del tiempo, es decir:

$$\xi(x, t) = A(t) \sin k(x \pm vt), \quad (\text{A.6})$$

donde v representa la velocidad de propagación de la onda, y es llamada la *velocidad de fase*, k representa el número de onda, t el tiempo y x representa el desplazamiento.

En el caso particular de amplitud constante la Eq. (A.6) toma la forma

$$\xi(x, t) = A \sin k(x \pm vt), \quad (\text{A.7})$$

la longitud de onda λ (distancia entre crestas consecutivas) se define por

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}, \quad (\text{A.8})$$

y representa el *período espacial* de la curva. La Eq. (A.7) la podemos escribir también de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \sin(kx \pm kvt) \\ &= A \sin(kx \pm \omega t), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

a la cantidad ω se le llama frecuencia angular y está definida por la Eq. (A.9)

$$\begin{aligned} \omega &\equiv kv \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}v \\ &= 2\pi\nu \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde $\nu = 1/T$ (T representa el período temporal) es la *frecuencia*, de éstas expresiones

se deduce que la velocidad de propagación de la onda es igual al producto de la frecuencia (ν) por su longitud de onda (λ), es decir, $v = \lambda\nu$, y el período temporal $T = 2\pi/\omega$.

Es necesario tomar en cuenta que el argumento de las funciones trigonométricas es adimensional, de donde se desprenden que las unidades de cada una de las cantidades definidas están dadas por

$$[k] = \frac{1}{L}, \quad [\lambda] = L, \quad [v] = \frac{L}{t}, \quad [\omega] = \frac{1}{t}, \quad [\nu] = \frac{1}{t}, \quad [T] = t. \quad (\text{A.11})$$

A.2.1. Principio de Superposición

Consideremos la onda $\xi_1(t) = A \sin \omega t$ que representa el desplazamiento de algún punto material en una cuerda, la superficie del agua, etc. Si en este mismo medio se propaga a su vez otra onda $\xi_2(t) = B \sin \omega t$, la onda resultante en el momento de encontrarse ambas ondas en el medio considerado resulta ser

$$\xi(t) = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t, \quad (\text{A.12})$$

si pensamos que existen un número arbitrario de ondas propagándose en el mismo medio la *onda resultante* es la suma de cada una de las ondas presentes en el medio, es decir,

$$\xi(t) = \sum_n a_n \cos n\omega + \sum_m b_m \sin m\omega, \quad (\text{A.13})$$

éste es precisamente el teorema de Fourier, que establece que cualquier función periódica con período temporal $T = 2\pi/\omega$ puede expresarse como la suma (A.13) donde ω es la *frecuencia natural o fundamental* y las frecuencias $n\omega$ son las *armónicas o sobretonos*. Las amplitudes a_n y b_m se determinan a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos n\omega t \, dt, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin m\omega t \, dt, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

de ésta manera cualquier clase de movimiento periódico puede considerarse como la superposición de movimientos armónicos simples.

Si consideramos una función periódica con período espacial $\lambda = vT$, la onda se repite ahora en el espacio y en éste caso la función $\xi = A \sin kx$ la podemos escribir

$$\xi(x) = \sum_m a_n \cos n k x + \sum_m b_m \sin m k x, \quad (\text{A.15})$$

si queremos introducir el tiempo en ésta expresión basta cambiar el argumento de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ por $x \rightarrow x - vt$ y obtenemos

$$\xi(x, t) = \sum_m a_n \cos n k (x - vt) + \sum_m b_m \sin m k (x - vt), \quad (\text{A.16})$$

donde las a_n y b_m se calculan ahora por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \xi(x) \cos n k x \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ b_m &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \xi(x) \sin m k x \, dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Consideraremos algunos ejemplos para ilustrar el principio de superposición. El problema general que se considera en los siguientes ejemplos es: Dados los coeficientes de Fourier para una suma de armónicas, determinar la onda resultante.

1) Si la corriente alterna a través de un circuito está dada por la función

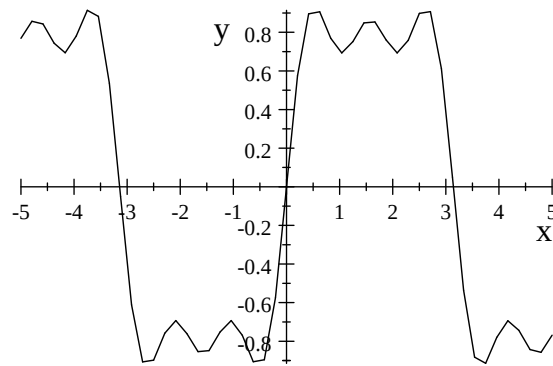
$$i(t) = 10 \sin \left(120\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

grafique ésta función en un ciclo.

2) Grafique la siguiente aproximación a un diente de sierra

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$$

ver la siguiente figura

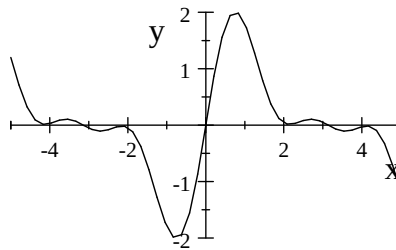


Aproximación de Fourier

3) Grafique las siguientes versiones muy simplificadas de dos instrumentos musicales

a) Violin

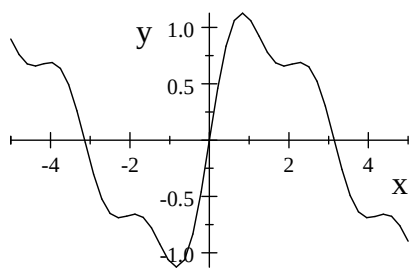
$$y = \sin x + 0,98 \sin 2x + 0,45 \sin 3x$$



Señal característica de violín

b) Piano

$$y = \sin x + 0,22 \sin 2x + 0,28 \sin 3x,$$



Señal característica piano

Apéndice B

Lagrangianas y Hamiltonianos

Existen varias formas alternativas al método de la segunda ley de Newton para determinar las ecuaciones de movimiento. Estos métodos se desarrollaron durante el siglo XIX, por Euler, Lagrange y Hamilton.

El método estaba basado en un concepto desarrollado previamente por Pierre Louis Mapertuis y el cual se puede enunciar de manera breve como "*la naturaleza es ahorrativa en todas sus acciones*" y que es llamado el principio de mínima acción.

Hamilton lo estableció de una manera más precisa afirmando que: *La evolución de un sistema dinámico del tiempo t_1 a el tiempo t_2 es tal que la acción $S(t_1, t_2)$ es un mínimo con respecto a cambios arbitrarios pequeños en la trayectoria.*

Euler y Lagrange le dieron la forma que usamos actualmente definiendo la acción como la integral

$$S(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (\text{B.1})$$

esta es la cantidad que habría que estudiar (minimizar) para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema

El integrando es la Lagrangiana del sistema y está definida por la diferencia de las

energías cinética y potencial del sistema:

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &= T - V, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 + V(q_i). \end{aligned}$$

Las variables q_i se denominan las coordenadas generalizadas del sistema asociadas a la partícula i — *ésima* y $\dot{q}_i$ son las velocidades generalizadas.

Las ecuaciones de movimiento del sistema se determinan exigiendo que la integral (B.1) sea un mínimo. El problema de determinar los mínimos de esta integral era un problema nuevo que no se podía resolver con el cálculo desarrollado por Newton y Leibniz, era necesario construir nuevas herramientas, pues la respuesta no eran las coordenadas de un punto en el cual ésta función fuese mínima, sino que ahora se buscaba una función que hiciera de la integral, la mínima posible, es decir, la trayectoria de la partícula.

Este tipo de problemas dió origen al cálculo de variaciones, aquí simplemente ilustraremos su utilidad para los fines de este curso, determinar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que representan las ecuaciones de movimiento del sistema.

Partimos de la acción (B.1) y buscamos mediante variaciones arbitrarias *de las coordenadas*, ¿cuál es la trayectoria que une dos puntos fijos del espacio que hace de (B.1) un mínimo ($\delta S = 0$).

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

como estamos considerando que los extremos son fijos, podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt, \end{aligned} \tag{B.2}$$

dado que sólo estamos considerando variaciones respecto a las coordenadas y no a las velocidades, debemos determinar las variaciones de las velocidades ($\delta\dot{q}_i$) en términos de las variaciones con respecto a las coordenadas (δq_i), esto podemos hacerlo usando el método estándar de integrar por partes el segundo término de (B.2), es decir

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta\dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt, \quad (\text{B.3})$$

como el movimiento se realiza entre 2 puntos fijos la primera de estas integrales en (B.3) es nula, es decir $\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0$. De aquí que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta\dot{q}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

sustituyendo en (B.2) tenemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0,$$

ahora, como las variaciones (δq_i) son arbitrarias, la única manera de que esta integral sea siempre nula, es cuando el integrando sea cero, es decir:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0,$$

estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange y serán nuestra herramienta básica para determinar las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas.

Nosotros usaremos y escribiremos estas ecuaciones de la manera equivalente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 \dots n, \quad (\text{B.4})$$

donde n representa el número de coordenadas generalizadas independientes del sistema.

B.0.2. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton son un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales a (B.4) que nos permiten de igual manera determinar las ecuaciones de movimiento del sistema.

El método estándar para hallar el sistema de ecuaciones de Hamilton es a partir de una transformación de Legendre, que esencialmente es un método que nos permite eliminar una variable no deseada por otra más conveniente para la descripción de la situación física de interés. En nuestro caso (para Hamilton) la variable importante es el momentum generalizado p_i , que se define por la ecuación

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (\text{B.5})$$

La idea básica es determinar las ecuaciones de movimiento del hamiltoniano del sistema que se define por

$$H = T + V.$$

Para esto se propone la transformación de Legendre que pretende hacer el cambio de variables $\dot{q}_i \rightarrow p_i$,

$$H(q_i, p_i, t) = \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (\text{B.6})$$

de esta manera

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (\text{B.7})$$

ahora podemos estimar esta variación de H usando la transformación de Legendre (B.6)

y nos resulta

$$\begin{aligned}
dH &= d(\dot{q}_i p_i) - d(L(q_i, \dot{q}_i, t)), \\
&= p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right), \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

observemos que el término en $d\dot{q}_i$ desaparece (esta es precisamente el objetivo de la transformación de Legendre). Ahora igualando con (B.7) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \\
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, \\
\frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t},
\end{aligned}$$

este es el sistema de ecuaciones de Hamilton. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (B.4) podemos cambiar el término $\partial L/\partial q_i$ por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i}, \\
\dot{p}_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i},
\end{aligned}$$

así que nuestro sistema de ecuaciones finalmente queda (usualmente consideraremos sistemas en los cuales $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, \\
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i.
\end{aligned}$$

Este es el sistema de ecuaciones que usaremos en las aplicaciones del método de Hamilton, observemos que las variables importantes para Hamilton son las posiciones

(q_i) y los momentos generalizados ($p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$), y para Lagrange las posiciones y las velocidades $(q_i, \dot{q}_i)$.

Apéndice C

Energía cinética de un cuerpo Rígido

En varios problemas es necesario escribir la energía cinética de un sistema que tiene dos movimientos; traslación del centro de masas y rotación en torno a su centro de masas.

La expresión para la energía cinética es afortunadamente muy simple y resulta ser sólo la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía de rotación en torno al centro de masa (ver [7]).

La demostración de este hecho es relativamente simple para el caso de rotaciones planas (eje de rotación fijo). Para esto basta considerar un cuerpo rígido de forma arbitraria y un par de vectores, uno que determine la ubicación del centro de masas a lo largo del movimiento $\mathbf{r}_{cm}$ y otro para determinar la posición de un elemento de masa arbitrario del cuerpo rígido desde el centro de masas $\mathbf{r}'$ ver Figura (C-1).

La energía cinética del elemento de masa dm está dada por

$$dE = \frac{1}{2} \dot{r}^2 dm,$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'$, por lo que $\dot{r}^2 = (\dot{\mathbf{r}}_{cm} + \dot{\mathbf{r}}') \bullet (\dot{\mathbf{r}}_{cm} + \dot{\mathbf{r}}')$

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= (\dot{\mathbf{r}}_{cm} + \dot{\mathbf{r}}') \bullet (\dot{\mathbf{r}}_{cm} + \dot{\mathbf{r}}'), \\ &= \dot{r}_{cm}^2 + \dot{r}'^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_{cm} \bullet \dot{\mathbf{r}}', \end{aligned}$$

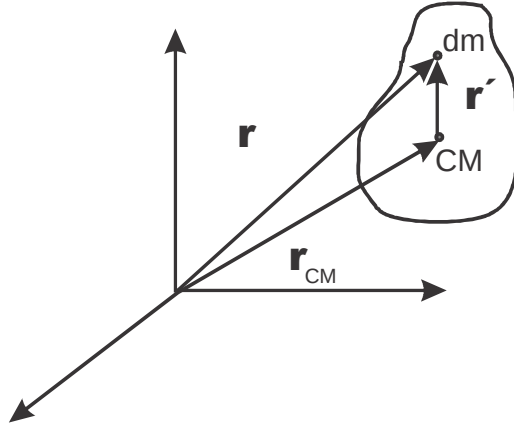


Figura C-1: Vectores de posición de dm

por lo que la energía cinética total del cuerpo rígido está dada por

$$\begin{aligned}
 E &= \int dE, \\
 &= \frac{1}{2} \int (\dot{r}_{cm}^2 + \dot{r}'^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_{cm} \bullet \dot{\mathbf{r}}') dm, \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{r}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \int \dot{r}'^2 dm + \dot{\mathbf{r}}_{cm} \bullet \frac{d}{dt} \int \mathbf{r}' dm,
 \end{aligned}$$

el último término de esta suma es nulo por la definición de centro de masa (pues cada elemento de masa $\mathbf{r}' dm$ tiene un elemento simétrico $-\mathbf{r}' dm$ que lo compensa).

El segundo término requiere un poco más de trabajo, $\dot{r}'$ es la velocidad tangencial del elemento dm visto desde el centro de masa por lo que podemos escribirlo como $\dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ y su cuadrado está dado por

$$\dot{r}'^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \bullet (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') , \quad (\text{C.1})$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular en torno al centro de masas.

Usando la relación vectorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{D})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{C})$$

podemos desarrollar el producto dado en la ecuación (C.1) y obtenemos

$$\dot{r}'^2 = \omega^2 r'^2 - (\boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{r}')^2,$$

y como $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}'$ son vectores perpendiculares obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M \dot{r}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int r'^2 dm, \\ E &= \frac{1}{2} M \dot{r}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \end{aligned}$$

esta es la expresión que usaremos repetidamente a lo largo de las notas para sistemas que se trasladan y giran.

Bibliografía

- [1] Den Hartog J. P., Mechanical Vibration, **Ed Mc Graw Hill.**
- [2] Vibraciones Mecánicas William W Seto 1971 **Shaum Outline Series.**
- [3] Classical Dynamics of particles and Systems J B Marion, S T Thorton. **Saunders College Publishing.**
- [4] Principles of electrodynamics Melvin Schwartz. **Dover.**
- [5] Vibrations Problems in Engineering, S Timoshenko New York D Van Nostrand Company
- [6] Complementos de física y mecánica, J Luis Lorente Guarch y Antoni Rueda de Andrés UNED
- [7] Mecánica Clásica, H Goldstein, Ed. Reverté
- [8] A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies, E T Whittaker
- [9] Wikipedia, the free encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page.