

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

***“MEDICIÓN DE SUPERFICIES 3D BASADA EN
LOS MÉTODOS DE TRANSFORMADA DE
FOURIER Y CORRIMIENTO DE FASE”***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

***MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA***

PRESENTA:

ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. MARCELINO ANGUIANO MORALES

CHIHUAHUA, CHIH., ENERO 2024.



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®





Chihuahua, Chih. 11 de enero de 2024

**C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS
PRESENTE**

En cumplimiento con los requerimientos para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica y a propuesta de su Comité Tutorial, la División de Estudios de Posgrado e Investigación le concede la autorización para imprimir la tesis titulada **"Medición de superficies 3D basada en los métodos de transformada de fourier y corrimiento de fase"** dirigida por el Dr. Marcelino Anguiano Morales con el siguiente contenido de capítulos:

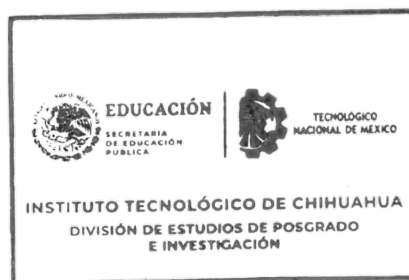
- I Perfilometría de proyección de franjas
- II Luz estructurada de franjas de color sinusoidal
- III Separación de canales
- IV Trabajos previos sobre franjas de color
- V Técnicas de obtención de fase
- VI Análisis de resultados
- VII Conclusiones

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"La Técnica por el Engrandecimiento de México"

LEONCIO OCHOA CERVANTES
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

LOC/adcs





Chihuahua, Chih. 11 de enero de 2024

**LEONCIO OCHOA CERVANTES
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
PRESENTE**

En cumplimiento con los requerimientos para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le notificamos que el documento de tesis del alumno **C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS**, titulado **"Medición de superficies 3D basada en los métodos de transformada de fourier y corrimiento de fase"** dirigido por el Dr. Marcelino Anguiano Morales, ha sido aprobado y aceptado para su impresión.

Por lo anterior, proponemos le sea concedida la autorización de impresión correspondiente.

Agradeciendo la atención a la presente, quedamos de usted:

ATENTAMENTE

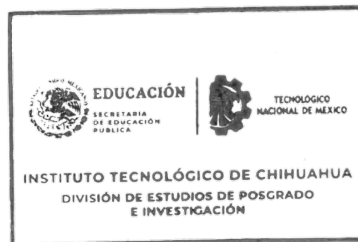
*Excelencia en Educación Tecnológica-
La técnica por el Engrandecimiento de México*

**DR. MARCELINO ANGUIANO MORALES
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL**

**DR. GERARDO TRUJILLO SCHIAFFINO
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL**

**DRA. DIDIA PATRICIA SALAS PEIMBERT
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL**

**DR. LUIS FRANCISCO CORRAL MARTÍNEZ
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL**





CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Chihuahua el día 19 de enero de 2024, el que suscribe, C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS con número de control G21061140, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, adscrita a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del el Dr. Marcelino Anguiano Morales y cede los derechos del trabajo titulado "Medición de superficies 3D basada en los métodos de transformada de fourier y corrimiento de fase", al Tecnológico Nacional de México y/o Instituto Tecnológico de Chihuahua para su difusión, divulgación, transmisión, reproducción, así como su digitalización con fines académicos y de investigación.

C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS





DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

En la ciudad de Chihuahua el día 19 de enero de 2024, el que suscribe, C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, con número de control G21061140, adscrito a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, manifiesta que es autor intelectual de la tesis titulada "Medición de superficies 3D basada en los métodos de transformada de fourier y corrimiento de fase" bajo la dirección el Dr. Marcelino Anguiano Morales; que el contenido es original y que las fuentes de información consultadas para su fundamentación están debidamente citadas y referenciadas.

C. ALEJANDRO DE JESÚS PÉREZ SANTOS



Chihuahua, Chihuahua, a 20 de enero del 2024.

Dra. María Elena Álvarez-Buylla
Director/a de Conacyt

Sirva la presente para saludarla e informarle que a la fecha he obtenido el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica en la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, motivo por el cual agradezco todo el apoyo brindado por este Consejo que usted representa, con el otorgamiento de una beca que permitió dedicarme de manera exclusiva a la realización de mis estudios de posgrado y de esta manera lograr el objetivo principal del convenio establecido.

Sin otro particular quedo a sus órdenes no sin antes reiterar mi agradecimiento.
Atentamente

Alejandro de Jesus Perez Santos



Agradecimientos

Mi experiencia en la maestría ha sido excepcionalmente enriquecedora y gratificante, y deseo expresar mi profunda gratitud por la calidad de la educación que he recibido. A lo largo del programa, he tenido el privilegio de aprender de profesores altamente calificados y de interactuar con compañeros de estudio igualmente apasionados.

Gracias a Dios por ayudarme en esta etapa de mi vida, por siempre estar a mi lado y por seguirme bendiciendo.

Gracias a mi madre Vanessa Santos y a mi padre Manuel Bernal, por ser un pilar en este proyecto, por siempre haberme apoyado y por sobre todo, siempre haber creído en que podía lograrlo, sin ustedes este sueño no habría sido posible.

Gracias a Vanessa Pérez, quien siempre me apoyó, quien estuvo esas noches conmigo, quien confió en mí y que nunca me dejó ningún día, siempre te voy a querer.

Gracias a Norma Franco, por su amor y apoyo incondicional, gracias por haberme acompañado muchas noches, por la motivación y por su apoyo en esa tesis. Eternamente estaré agradecido.

Le agradezco al Dr. Marcelino, cuya dedicación y experiencia han sido fundamentales para mi desarrollo académico. A mis maestros la Dra. Didia Patricia, Dr. Gerardo Trujillo y Dr. Francisco Corral por sus enseñanzas durante mi estancia en la maestría, siempre comprometidos por nuestra educación y crecimiento intelectual y personal.

Agradezco al personal administrativo y en especial a la maestra Alma Corral por su gran apoyo y disposición en todo momento.

Gracias a mi abuelo el M.C Julio Ávila, quien fue mi inspiración para estudiar una maestría y continuar con la investigación.

Gracias a todos esos amigos que me dieron un espacio en su familia y me apoyaron en esta etapa tan importante de mi vida.

Gracias a mis familiares aquí en Chihuahua y Veracruz, quienes siempre estuvieron pendientes a mi progreso y por su total apoyo.

Gracias a mis amigos que se preocupan por mí, quienes siempre tenían unas palabras de apoyo.

Gracias a mis maestros del Tecnológico de Veracruz quienes siempre estuvieron pendientes a mis avances y brindándome siempre su apoyo.

Gracias aquellas personas que ya no están en este plano físico pero que aun sigo sintiendo su apoyo.

Gracias a mi compañero loki que estuvo todas las noches a mi lado, gracias amigo.

RESUMEN

MEDICIÓN DE SUPERFICIES 3D BASADA EN LOS MÉTODOS DE TRANSFORMADA DE FOURIER Y CORRIMIENTO DE FASE

Alejandro de Jesús Pérez Santos
Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Instituto Tecnológico de Chihuahua
Chihuahua, Chih., enero 2024.
Director de Tesis: Dr. Marcelino Anguiano Morales

El método de corrimiento de fase y el método de la transformada de Fourier son métodos de análisis de franjas. Este trabajo se centra en la implementación de estos dos métodos para extraer la información topográfica que está codificada en los patrones de franjas obtenidos por la proyección digital de franjas.

Se propone un método que emplea la combinación del método de corrimiento de fase y el método de la transformada de Fourier para obtener una representación espectral eficiente de la forma 3-D del objeto bajo prueba. Este método de cambio de fase utiliza dos patrones de franjas de colores con una diferencia de fase de π radianes, esto generará dos imágenes, eliminando eficazmente la luz de fondo y proporciona una distribución de modulación más precisa.

En comparación con el método de desplazamiento de fase de tres pasos y el método de la transformada de Fourier, con sólo una menor parte de la adquisición de datos en el método de corrimiento de fase, el método propuesto puede lograr casi la misma precisión de medición que aquél, pero con una precisión de medición mayor que el método de la transformada de Fourier.

ABSTRACT

3D SURFACE MEASUREMENT BASED ON TRANSFORM METHODS

FOURIER AND PHASE SHIFT

Alejandro de Jesús Pérez Santos

Master of Science in Electronic Engineering

Division of Postgraduate Studies and Research

Chihuahua Institute of Technology

Chihuahua, Chih., January 2024.

Thesis Director: Dr. Marcelino Anguiano Morales

The phase shift method and the Fourier transform method are fringe analysis methods. This work focuses on the implementation of these two methods to extract the topographic information that is encoded in the stripe patterns obtained by the digital stripe projection.

A method that employs the combination of the phase shift method and the Fourier transform method is proposed to obtain an efficient spectral representation of the 3-D shape of the object under test. This phase-change method uses two color fringing patterns with a phase difference of π radians, this generates two images, effectively removing backlight and providing a more accurate modulation distribution.

Compared to the three-step phase-shift method and the Fourier transform method, with only a smaller part of the data acquisition in the phase-shift method, the proposed method can achieve almost the same measurement accuracy as the former, but with a higher measurement accuracy than the Fourier transform method.

CONTENIDO

RESUMEN	iv
ABSTRACT	v
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO II: PERFILOMETRÍA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS.....	7
2.1 Geometría experimental.....	7
2.2 Ecuaciones matemáticas	9
2.3 Técnica de proyección de franjas.....	14
2.3.1 Técnica de corrimiento de fase	14
2.3.2 Técnica por transformada de Fourier	15
CAPÍTULO III: LUZ ESTRUCTURADA DE FRANJAS DE COLOR SINUSOIDAL	19
3.1 Proyección de franjas RGB.....	19
3.1.1 Ventajas de franjas en tonos RGB.....	19
3.2 Fundamento matemático de franjas de color sinusoidales	22
CAPÍTULO IV: SEPARACIÓN DE CANALES.....	26
4.1 Separación de canales por color.....	26
4.2 Trabajos previos.....	27
4.2.1 Síntesis digital de color utilizando tonos de grises	27
4.2.2 Optimización basada en la colorización de imágenes en escala de grises	27
4.2.3 Colorización automática de imágenes en escala de grises basada en el espacio de color	28

4.2.4	Transferencia de rasgos de color a imágenes en escala de grises	29
4.3	Separación de imagen por canales.....	30
CAPÍTULO V: TRABAJOS PREVIOS SOBRE FRANJAS DE COLOR.....		32
5.1	Proyección de franjas codificadas por color para mediciones de formas en 3D.....	32
5.2	Medición de forma 3D absoluta de disparo único con perfilometría de proyección de franjas codificadas por color basada en aprendizaje profundo	32
5.3	Técnica de proyección de franjas binarias codificadas por color para la medición de formas en 3D	33
5.4	Técnica de proyección de franjas digitales codificadas por color para la medición de formas en 3D a alta velocidad: acoplamiento de color y compensación	
5.5	Perfilometría de proyección de franjas codificadas por colores de múltiples frecuencias para la rápida medición de formas 3D de objetos complejos	34
5.6	Medición de formas 3D de alta velocidad basada en proyección de franjas digitales	35
5.7	Cálculo de fase y color en la proyección de franjas a color.....	35
5.8	Conclusión.....	36
CAPÍTULO VI: TÉCNICAS DE OBTENCIÓN DE FASE.....		37
6.1	Desenvolvimiento de fase.....	37
6.1.1	Algoritmo de desenvolvimiento de fase de Goldstein	42
CAPÍTULO VII: ANÁLISIS DE RESULTADOS		45
7.1	Experimento 1: Proyección de franjas en escala de grises.....	45
7.2	Experimento 2: Proyección simultánea de franjas a color	51
7.3	Experimento 3: Proyección de franjas con desplazamiento de fase	54
7.4	Experimento 4: Proyección simultánea de franjas bicolor en evento dinámico	57

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES	61
8.1 Trabajos a futuro.....	62

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Secuencia de 4 patrones cosenoidales con desfaseamiento de $\pi/2$ radianes.....	5
Figura 1.2	Patrón sinusoidal implementado en la perfilometría por transformada de Fourier	6
Figura 2.1	Principio de proyección de franjas	8
Figura 2.2	Proyección y registro de franjas.....	11
Figura 2.3	Arreglo experimental donde cámara y proyector se sitúan en el mismo plano. ..	12
Figura 2.4	Arreglo experimental con proyector en diferente plano	13
Figura 2.5	Espectro de Fourier	16
Figura 2.6	a) Filtrado de un lóbulo; b) Método de desplazamiento de espectro	18
Figura 3.1	Captura del patrón de franjas del canal G.....	23
Figura 3.2	Captura del patrón de franjas del canal B.....	24
Figura 3.3	Patrón de franjas superpuesto capturado.	25
Figura 4.1	Separación del canal azul	30
Figura 4.2	Separación del canal verde	31
Figura 6.1	Fase envuelta.	41
Figura 6.2	Fase desenvuelta.....	41
Figura 7.1	Objeto bajo prueba con franjas proyectadas en tono de grises.....	46
Figura 7.2	Transformada de Fourier del patrón de la Figura 7.1 Con un filtro ideal, este se considera cuando el radio del filtro es menor a la mitad de la separación entre el DC y el primer armónico... ..	46
Figura 7.3	(a) Fase envuelta del objeto y (b) fase desenvuelta, para la proyección en escala de grises.	47
Figura 7.4	Topografía del objeto de prueba para proyección de franjas en escala de grises.	48
Figura 7.5	Fase desenvuelta del objeto usando un filtro no convencional	48
Figura 7.6	Topografía del objeto de prueba para proyección de franjas en escala de grises, usando un filtro no muy adecuado	49
Figura 7.7	Perfil de la fase desenvuelta obtenida por la técnica de Takeda, usando un filtro ideal.....	50
Figura 7.8	Objeto bajo prueba, franjas proyectadas superpuestas en color verde y azul	51

Figura 7.9	Objeto bajo prueba, en su canal, a) verde, b) azul	51
Figura 7.10	Transformada de Fourier de la imagen, a) canal verde, b) canal azul	52
Figura 7.11	Transformada de Fourier del patrón resultante de la resta, entre el patrón de franjas correspondiente al canal azul y el canal verde, con un filtro de radio mayor a la mitad de la separación entre el DC y el primer armónico.....	53
Figura 7.12	Fase desenvuelta para proyección bicolor	53
Figura 7.13	Topografía de la semiesfera para proyección de franjas bicolor	54
Figura 7.14	Patrones de franjas en escala de grises sobre una semiesfera, desplazados en fase $\pi/2$, a) 0, b) $\pi/2$, c) π , d) $3\pi/2$	55
Figura 7.15	Resultado de la fase desenvuelta para el algoritmo de cuatro pasos	55
Figura 7.16	Topografía resultante por el método de phase shifting.	56
Figura 7.17	Perfil de la fase desenvuelta obtenida por la técnica de desplazamiento de fase y la técnica de Takeda con una única proyección de un patrón bicolor.....	57
Figura 7.18	Vista posterior del objeto bajo prueba con un imán incrustado.	58
Figura 7.19	Imágenes registradas en evento dinámico, a) evento inicial, b) evento 2, c) evento 3 y d) evento 4.....	58
Figura 7.20	Fase desenvuelta en tres posiciones diferentes durante su desplazamiento vertical	59
Figura 7.21	Representación tridimensional del objeto de prueba en tres posiciones diferentes, proporcional al mapa de fase obtenido mediante el método de Fourier por proyección de franjas bicolor en un evento dinámico.	60
Figura 7.22	Altura de la semiesfera en evento dinámico.....	60

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El mundo físico en el que vivimos es tridimensional (3D). La tecnología de adquisición y procesamiento de la información en 3D refleja la capacidad de los seres humanos para conocer y comprender el mundo objetivo, por lo que, en cierto modo, es un símbolo importante de la sabiduría humana. Las cámaras convencionales y los detectores de imágenes sólo pueden adquirir información de intensidad bidimensional de la escena, pero no pueden registrar información de forma y profundidad.

Aunque el ser humano puede percibir la profundidad basándose en la estereopsis binocular formada por los ojos, no puede cuantificar con precisión la geometría 3D de los objetos. Para resolver este problema, se han desarrollado tecnologías de medición que permiten obtener cuantitativamente la información geométrica de los objetos, con el fin de proporcionar una base de datos que permita entender y comprender mejor su estado y función en el mundo real.

El rápido desarrollo de la tecnología de la información moderna ha propiciado la madurez gradual de la tecnología de medición de formas en 3D que ha penetrado en casi todos los campos del conocimiento, con diferentes estilos y características.

En el diseño industrial, la ingeniería inversa basada en la medición de formas 3D puede crear rápidamente modelos CAD 3D precisos y digitalizados de los productos existentes, acortando significativamente el ciclo de desarrollo y facilitando los procesos de ingeniería posteriores [1].

En el campo de la fabricación inteligente, la tecnología de detección 3D permite a las máquinas percibir el mundo tridimensional, posibilitando un nuevo punto de partida para la automatización de la fabricación, la inteligencia y la recreación [2].

En el campo de la realidad virtual, un gran número de escenas y modelos 3D digitalizados se han utilizado ampliamente en la defensa nacional, el entrenamiento simulado, los experimentos

científicos y la animación [3].

En el ámbito de la conservación del patrimonio cultural, la tecnología de medición de formas en 3D se ha convertido en una herramienta esencial para la documentación del patrimonio cultural y su conservación a largo plazo [4], gracias a su característica de no contacto y por resultar no destructiva.

En el ámbito de la cirugía plástica médica, la tecnología de medición de formas en 3D se ha utilizado ampliamente en la reparación de tejidos blandos faciales y la personalización de prótesis dentales [5], entre otros. Además, existen otras aplicaciones en diversos campos, como la inspección de la fabricación, la biomedicina, la arquitectura, la seguridad y la interacción persona-computadora [6].

Para la medición de objetos tridimensionales existen técnicas de contacto y no contacto. Las primeras miden y reconstruyen la geometría 3D palpando la superficie del objeto mediante contacto físico. Un ejemplo de este tipo de técnica es la máquina de medición de coordenadas que puede medir la geometría 3D mediante un brazo de sonda articulado [7]. Aunque este tipo de medición puede alcanzar una gran precisión, normalmente está limitada a una baja eficiencia de medición, ya que el sistema utiliza una sonda física que necesita tocar la superficie del objeto de forma puntual. Además, debido a la necesidad de contacto físico, no es deseable para la medición de objetos blandos o deformables.

Para la medición de objetos tridimensionales sin contacto, se recurre a técnicas que no requieren un contacto físico con la superficie del objeto. Estas técnicas ofrecen ventajas significativas en términos de preservar la integridad del objeto y permitir la medición de objetos delicados o en entornos que no son accesibles fácilmente. Un ejemplo de un método de no contacto es la implementación de luz estructurada.

A la proyección de luz se le puede denominar estructura de iluminación o bien, luz estructurada, esta consiste en generar patrones en forma de franjas, también se pueden implementar patrones de puntos o cuadros (estos últimos son pocos usados); estos patrones son proyectados mediante láser o un proyector. Estos procedimientos son utilizados para la detección

de defectos y reconstrucciones 3D.

En el área industrial existe un problema, y es que si los objetos contienen mucho óxido, manchas de aceite, superficies brillantes, etc., puede generar problemas de reconstrucción o problemas en la detección de defectos [8], por lo tanto, son detalles a considerar cuando se trabaja con estos métodos. Para esto, la tecnología de luz estructurada puede obtener información en 3D, es más preciso, rápido y no invasivo (no hay contacto con el objeto), se puede aplicar a objetos ya sea en ambientes dinámicos o de manera estática [9].

En objetos que están en ambientes estáticos, se utiliza comúnmente el corrimiento de fase (Phase Shifting Profilometry) el cual consiste en tomar al menos 2 imágenes del objeto, para poder encontrar la fase y poder hacer la reconstrucción, entre más imágenes se capturen del objeto la reconstrucción será de una mayor resolución, un defecto de este método es que solo se puede implementar en objetos que se encuentran de manera estática.

Para objetos que están en ambientes dinámicos existen diferentes técnicas de perfilometría, entre ellas se encuentra la transformada de Fourier (Fourier Transform Profilometry), esta puede modelar un objeto en su forma 3D a partir de una sola imagen capturada, el problema de usar este método de reconstrucción radica en que la intensidad de fondo no deseada afecta en la reconstrucción 3D, para solucionar este problema se han propuesto diferentes métodos, como capturar 2 imágenes para después restarlas, proyectando franjas de diferentes colores, proyección de luz estructurada, proyectando franjas en los canales RGB superpuesto para después separar los canales, este último método reduce la reflectividad del objeto o el aliasing generado en la señal pero no ambos.

A nivel internacional las reconstrucciones 3D han tenido un crecimiento muy rápido debido al avance de la tecnología, existen métodos de contacto y de no contacto. La técnica de contacto se basa en medir la geometría del objeto mediante un contacto físico, sondeando el objeto con diferentes equipos mecánicos, entre ellos un puntero mecánico o una aguja metálica, para

hacer la reconstrucción, se posiciona el puntero en el objeto y empieza a recorrer por todo el objeto registrando una matriz de puntos para determinar la forma y dimensión del objeto. Esta técnica es implementada en la fabricación de objetos de diferente geometría, su precisión en la reconstrucción es alta, el problema de esta técnica cae en el palpado del objeto, ya que al estar en sondeo físico con el objeto a reconstruir, el puntero puede dañar el objeto y deformarlo; otra consecuencia que presenta es el tiempo de espera muy alto para la reconstrucción del objeto.

La técnica de no contacto se basa en medir la geometría del objeto mediante un emisor de luz y un receptor. Esto se logra gracias a que se conoce la dirección de la onda emitida y su reflectancia en un punto del objeto; también se conoce la distancia y por consiguiente se puede obtener la profundidad del objeto. Esta técnica tiene la misma precisión que la técnica de contacto. El método de no contacto dentro de la óptica se puede implementar en diferentes áreas, una de ellas es la metrología óptica. Dentro de la metrología óptica se encuentra la interferometría la cual es un método que se puede implementar para reconstrucciones 3D, existen diferentes técnicas dentro de la interferometría para reconstrucciones 3D, algunas destacan como: interferometría de moiré, por corrimiento de fase, interferometría de Fourier.

El método de corrimiento de fase es una técnica bien establecida para el análisis de franjas en interferometría óptica [10], se caracteriza por su gran precisión y su amplia utilización en la reconstrucción de frentes de onda, medición de elementos ópticos, aplicaciones de deflectometría y perfilometría óptica.

Esta no es una técnica reciente, en un inicio su aplicación era lenta debido al lento procesamiento de las computadoras que implicaba mucho tiempo de espera para la obtención de los resultados, pero en los últimos años ha sido una gran opción debido al gran avance de la tecnología computacional, la cual ha ayudado a aumentar la velocidad y resolución de la perfilometría 3D.

Una desventaja mostrada en la literatura es el número de imágenes necesarias para poder hacer el procesamiento, se necesitan al menos 3 imágenes para poder hacer el barrido de franja y así obtener la imagen espectral en 3D de una resolución aceptable, así que entre más imágenes se

obtengan y más franjas (ver Figura 1.1) sean proyectadas sobre el objeto mejor será su resolución debido a su baja sensibilidad al ruido generado por la luz ambiental y variaciones por reflexión. Por lo tanto, si esto se quiere llevar a la implementación del modelado 3D de objetos en constante cambio no se podrá, porque en cada imagen será distinta la posición del objeto.

La técnica de transformada de Fourier también ha tenido una gran aceptación, por ejemplo, en áreas donde se destaca la microscopia confocal, deflectometría e interferometría; donde el análisis de los datos puede ser de manera frecuencial o temporal [11]. El método de transformada de Fourier fue creado por Mitsuo Takeda en la década de los 80, originalmente fue utilizado para determinar con mayor precisión los radios de curvatura y planicidad de lentes y espejos, pero poco a poco se fue introduciendo en el modelado 3D. Sus inicios en esta área fueron en la reconstrucción de piezas arqueológicas.

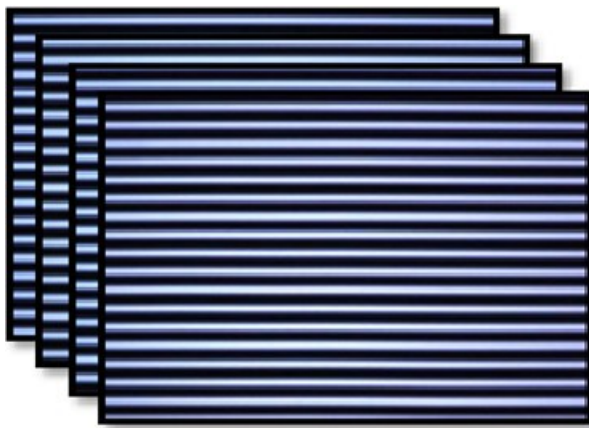


Figura 1.1. Secuencia de 4 patrones cosenoidales con desfase de $\pi/2$ radianes.

Una de sus mayores características es el uso de la transformada de Fourier para la demodulación de franjas. La técnica tradicionalmente utiliza una cámara y un proyector, y ambos son colocados a la misma distancia de un objeto, sobre el cual se proyecta un patrón de franjas sinusoidales. La Figura 1.2 corresponde al patrón de referencia proyectado.

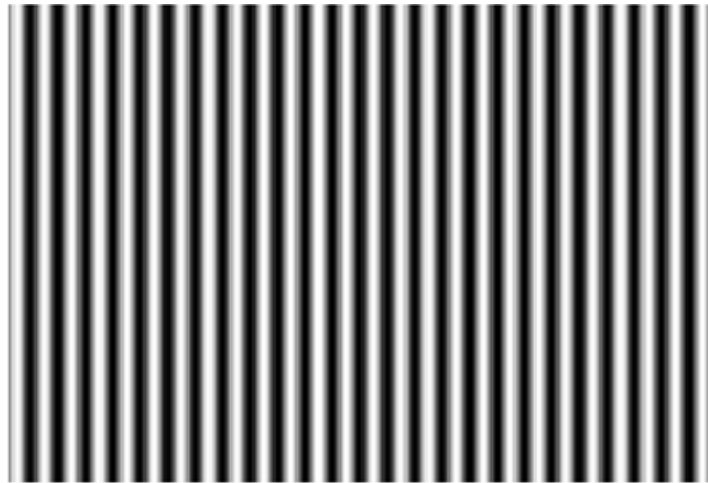


Figura 1.2. Patrón sinusoidal implementado en la perfilometría por transformada de Fourier.

CAPÍTULO II

PERFILOMETRÍA DE PROYECCIÓN DE FRANJAS

En este capítulo se detallará la técnica de proyección de franjas, sus ecuaciones matemáticas y técnicas de análisis de franjas.

2.1 Geometría experimental

La técnica de proyección de franja, es una técnica de no-contacto, basada en el principio de luz estructurada [12], cuyo funcionamiento se basa en:

- Un patrón de franjas de periodo P proyectado sobre un plano de referencia.
- Una cámara CCD captura el patrón de franjas proyectado sobre el plano de referencia, se toma un punto de referencia cualquiera y dicho punto se convertirá en S_1 .

Si en el plano de referencia se coloca un objeto, el patrón de franjas sufrirá una deformación por la geometría del objeto, por lo tanto, el punto S_1 se desplazará hacia una posición S_2 en el patrón deformado.

En la Figura 2.1 se muestra el principio de proyección de franjas donde los ángulos α y β corresponden a los ángulos formados por la línea de proyección y observación respectivamente, ϑ es el ángulo de intersección entre la línea de proyección y el eje de observación de la cámara y $z(x)$ representa la profundidad del objeto, el desplazamiento tiene una diferencia de fase $\delta(x)$ en el patrón de franjas P_x [13]. Para medir la profundidad del objeto se puede implementar el principio de triangulación, el cual es un método utilizado para determinar la posición de un punto o la profundidad de un objeto mediante la medición de las distancias y los ángulos entre puntos de referencia conocidos.

Por el principio de triangulación, $m(x)$, $\delta(x)$ y $z(x)$ se expresarán [16] de la siguiente manera:

$$m(x) = z(x) \tan \theta \quad (2.1)$$

$$\delta(x) = \frac{2\pi}{P_x} m(x) = \frac{2\pi}{P_x} (z(x) \tan \theta) \quad (2.2)$$

$$z(X) = \frac{P_x \delta(x)}{2\pi \tan \theta} \quad (2.3)$$

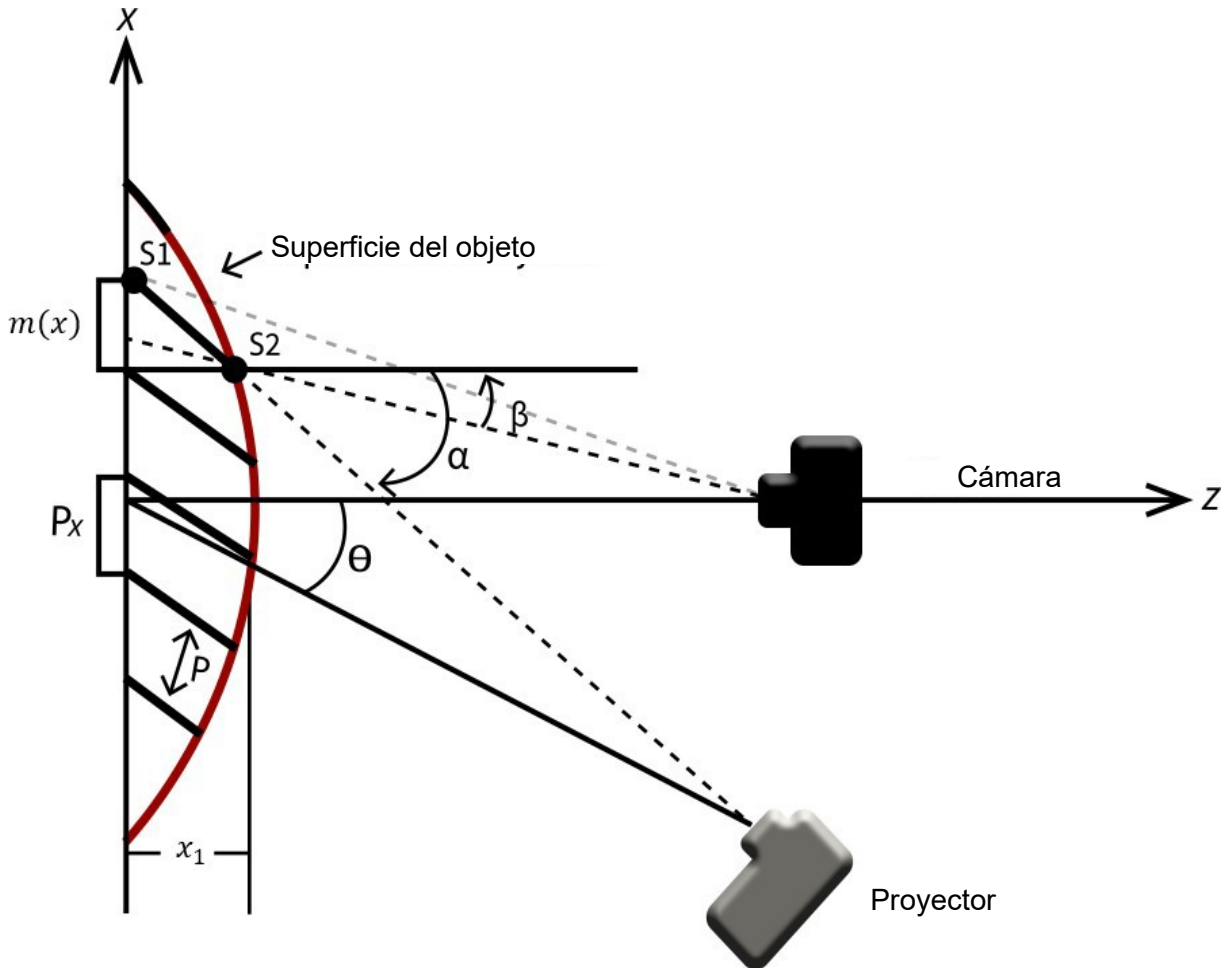


Figura 2.1. Principio de proyección de franjas.

2.2 Ecuaciones matemáticas

Existen diversas técnicas para la generación del patrón de franjas en la proyección de franjas, cada una de ellas empleada para capturar la información necesaria en la reconstrucción 3D. Algunas de estas técnicas son enunciadas:

- a. Proyección de franjas sinusoidales o cosenoidales: Mediante la proyección de franjas con forma sinusoidal o cosenoidal sobre la superficie del objeto, se obtiene información sobre su geometría al analizar la distorsión de estas franjas.
- b. Proyección de franjas codificadas: Se generan patrones de franjas que contienen códigos o secuencias conocidas. Estos códigos permiten identificar puntos y regiones específicas en la superficie del objeto, facilitando el proceso de reconstrucción 3D.
- c. Proyección de franjas en secuencia: Se proyectan franjas en secuencias o patrones diferentes para obtener información adicional sobre la forma del objeto. Estas secuencias pueden incluir franjas paralelas, ortogonales o patrones de malla.
- d. Proyección de franjas con desplazamiento de fase: Se proyectan franjas con desplazamientos de fase distintos. Al analizar las deformaciones de estas franjas, se pueden calcular las coordenadas tridimensionales y la forma del objeto.

La ecuación generada para la proyección de franjas cosenoidales binarias es la siguiente:

$$I_p(x_p, y_p) = a_p + b_p \cos(2\pi f_o p x_p) \quad (2.4)$$

Donde:

- a_p , corresponde al valor medio que depende del espacio.
- b_p corresponde a la amplitud de la onda que depende del espacio.
- $\cos$, representa la función coseno.

- f_{op} , corresponde a la frecuencia de la onda.
- El subíndice p esta asociado al espacio del proyector.

Debido a factores ambientales el patrón que contiene la información topográfica del objeto se ve afectado por ruido ambiental, el cual es considerado en la siguiente ecuación:

$$I(x_c, y_c) = \alpha(x_c, y_c) \{ a_c(x_c, y_c) + b_c(x_c, y_c) \cos[2\pi f_o x + \phi(x_c, y_c)] + \dots \\ \dots \beta_{1c}(x_c, y_c) \} + \beta_{2c}(x_c, y_c) \quad (2.5)$$

Los términos de esta ecuación representan lo siguiente:

- $\alpha(x, y)$, Corresponde al valor de la reflectividad del objeto.
- a_c , corresponde al valor medio el cual depende del espacio.
- b_c , corresponde a la amplitud de la onda el cual depende del espacio.
- $\cos$, corresponde a la forma de onda.
- f_o , corresponde a la frecuencia de la onda.
- ϕ ; corresponde a la fase del objeto.
- β_{1c} , corresponde a la intensidad de la luz ambiental que refleja del objeto.
- β_{2c} , corresponde a la intensidad de la luz ambiental.
- El subíndice "c" resta asociado al espacio de la cámara.

En la Figura 2.2 se observa la intensidad del patrón de franjas generada por el proyector sobre el objeto, la intensidad del patrón de franjas y el ruido ambiental reflejado por el objeto hacia la cámara así como la intensidad por ruido ambiental.

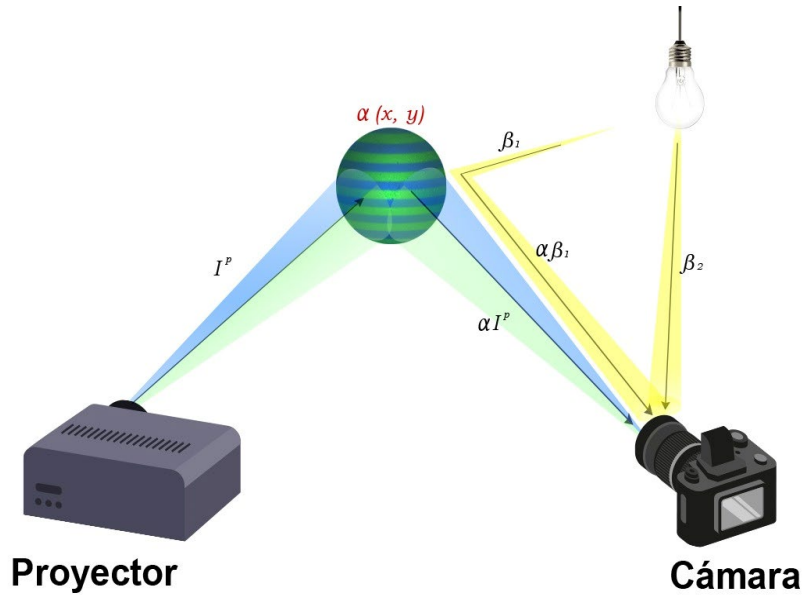


Figura 2.2. Proyección y registro de franjas.

La ecuación 2.5 es reescrita de la siguiente manera agrupada:

$$I(x_c, y_c) = A(x_c, y_c) + B(x_c, y_c) \cos[2\pi f_0 x_c + \phi(x_c, y_c)] \quad (2.6)$$

El término $A(x, y)$ está representando el ruido producido por el objeto y el ambiente.

$$A(x_c, y_c) = \alpha(x_c, y_c)[a_c(x_c, y_c) + \beta_1(x_c, y_c)] + \beta_{2c}(x_c, y_c) \quad (2.7)$$

En la ecuación 2.7, el término $A(x, y)$ representa el ruido que se genera por la luz ambiente y la reflectividad del objeto, la reflectividad del objeto multiplica al valor medio generado por la superficie del objeto y al valor de la luz ambiente que se está reflejando por el objeto.

El término $B(x_c, y_c)$ está representando la nueva amplitud generada por la reflectividad del objeto.

$$B(x_c, y_c) = \alpha(x_c, y_c)(b_c(x_c, y_c)) \quad (2.8)$$

En la Figura 2.3 se muestra un arreglo experimental de proyección de franjas, donde se observan las principales partes del sistema, el proyector y la cámara se ubican sobre el mismo plano teniendo una distancia d_1 entre sí, para la distancia de la cámara-proyector existe una distancia d_2 con respecto al plano de referencia, θ representa el ángulo de la cámara con respecto al proyector y x_1 representa la distancia de visión de la cámara desde el eje del sistema coordenado hasta el extremo del campo de visión.

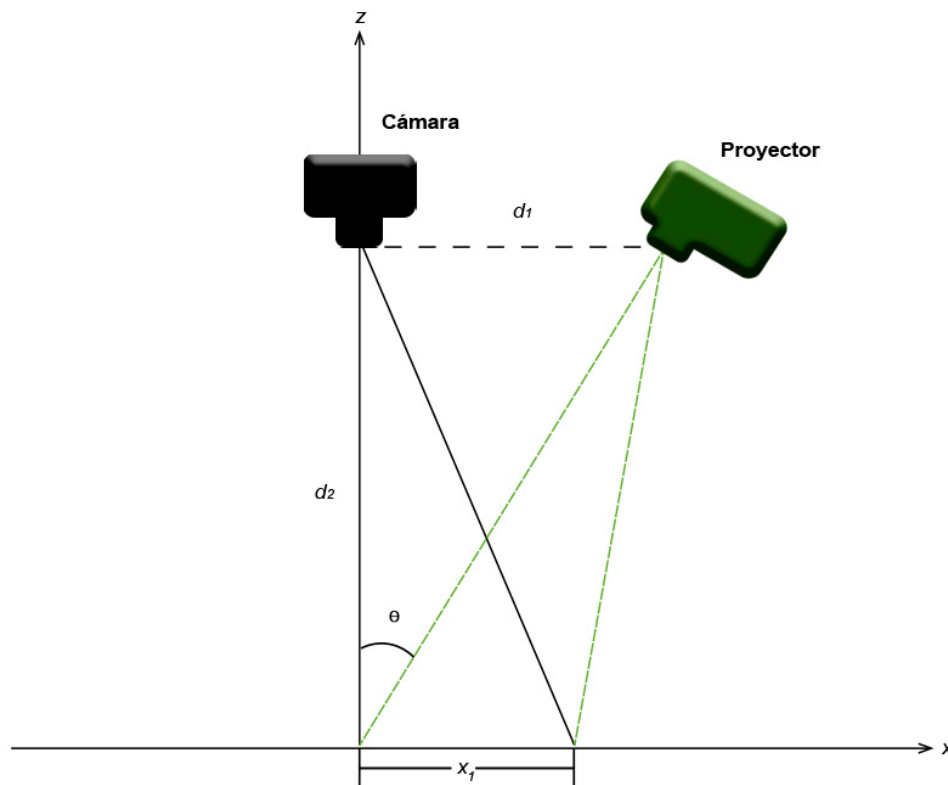


Figura 2.3. Arreglo experimental donde cámara y proyector se sitúan en el mismo plano.

En la Figura 2.4 se muestra un arreglo diferente, el proyector y la cámara no comparten el mismo plano, por lo tanto, la distancia al plano de referencia será diferente. El ángulo θ es generado por

la intersección entre el eje de observación y proyección, α y β son los ángulos de proyección y observación, d_1 corresponde a la distancia entre proyector-plano, d_2 corresponde a la distancia de la cámara al plano de referencia, x_1 es la distancia entre el origen del sistema coordenado y el punto final del campo de visión de la cámara.

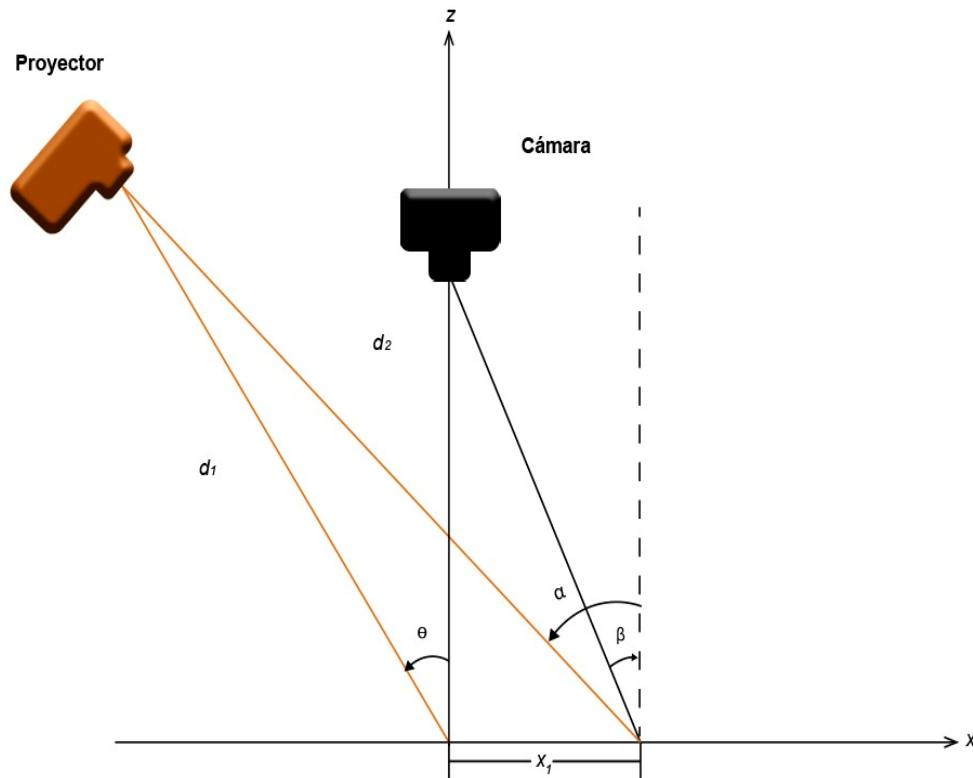


Figura 2.4. Arreglo experimental con proyecto en diferente plano.

Este nuevo arreglo experimental le corresponde un modelo matemático distinto:

$$\tan\alpha = \frac{d_1 \sin\theta + x}{d_1 \cos\theta}, \quad \tan\beta = \frac{-x}{d_2}. \quad (2.9)$$

$$m(x) = z(x)(\tan\alpha + \tan\beta) = \frac{z(x)}{\cos\theta} \sin\theta + \left[\frac{(d_2 - d_1 \cos\theta)x}{d_1 d_2} \right] \quad (2.10)$$

$$\delta(x) = \frac{2\pi}{P_x} m(x) = \frac{2\pi z(x)}{P_x \cos\theta} + \left[\frac{(d_2 - d_1 \cos\theta)x}{d_1 d_2} \right] \quad (2.11)$$

$$z(x) = \frac{P_x}{2\pi} \cos\theta \left[\frac{(d_2 - d_1 \cos\theta)x}{d_1 d_2} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

2.3 Técnica de proyección de franjas

Existen diferentes técnicas para la demulación de patrones de franjas [15-17], para obtener el mapa de fase del objeto a reconstruir, esta fase se encuentra codificada en el patrón de franjas distorsionado por la geometría del objeto. Existen 2 categorías para estas técnicas; temporales y espaciales.

Las técnicas temporales demandan de mínimo 2 patrones proyectados en secuencia, realizando el cálculo de fase por las diferentes deformaciones que tendrá el píxel en cada secuencia, esta característica limita la técnica a solo aplicaciones en objetos estáticos. Una de las técnicas más representativa es el método de corrimiento de fase.

Las técnicas espaciales generalmente requieren de una o dos imágenes del patrón de franjas para extraer la fase, calcula cada píxel en la imagen con respecto a un píxel vecino, lo cual genera una ventaja muy importante permitiendo analizar objetos en eventos dinámicos. Algunas técnicas que existen son; demodulación de fase directa, perfilometría por transformada de Fourier.

2.3.1 Técnica corrimiento de fase

La técnica de corrimiento de fase, consiste en registrar múltiples patrones de proyección de franjas secuencialmente desfasados cada uno, por ejemplo, el método de cuatro pasos consiste

en registrar cuatro patrones de proyección de franjas desfasados, para este ejemplo, $\pi/2$ radianes, las ecuaciones de intensidad de los cuatro patrones de franjas registrados [14] son las siguientes:

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos(2\pi f_0 x + \phi(x, y)) \quad (2.13)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos\left(2\pi f_0 x + \phi(x, y) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.14)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos(2\pi f_0 x + \phi(x, y) + \pi) \quad (2.15)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos\left(2\pi f_0 x + \phi(x, y) + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (2.16)$$

Siendo $a(x, y)$ la intensidad de fondo, $b(x, y)$ la amplitud de las franjas, f_0 la frecuencia espacial, $\phi(x, y)$ corresponde a la modulación de fase del patrón de franjas y las constantes corresponden al desfaseamiento de cada secuencia de patrones.

La fase es obtenida mediante la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \tan^{-1} \left\{ \frac{I_4(x, y) - I_2(x, y)}{I_1(x, y) - I_3(x, y)} \right\} \quad (2.17)$$

La distribución de fase $\phi(x)$ está ubicada dentro de $-\pi$ a π , debido a esto se debe implementar un algoritmo que desenvuelva esta fase para así poder reconstruir en 3D.

2.3.2 Técnica por transformada de Fourier

La perfilometría por transformada de Fourier, es una técnica que consiste en el análisis de patrones de franjas en el espacio de las frecuencias [17-20], fue propuesta por Takeda en 1982.

Esta técnica consiste en extraer el mapa de fase del patrón de franjas deformado, esta distribución parte de la ecuación (2.6) y se representa en su forma compleja para poder analizar de una manera más sencilla y se reescribe de la siguiente manera:

$$I(x,y) = a(x,y) + c(x,y)\exp(2\pi i f_0 x) + c^*(x,y)\exp(-2\pi i f_0 x) \quad (2.18)$$

donde $c(x,y)$ representa:

$$c(x,y) = b(x,y)\exp[i\phi(x,y)]. \quad (2.19)$$

Para poder extraer el mapa de fase, se llevan acabo los siguientes pasos:

- a. Se captura el patrón de franjas, se aplica la transformada de Fourier para poder trabajar la imagen en el espacio de las frecuencias, la Figura 2.5, representa el espectro de Fourier en el espacio de las frecuencias, donde $c(x,y)e^{(2i\pi f_0 x)}$ representa la parte real y $c(x,y)^*e^{(2\pi i f_0 x)}$ la parte imaginaria, $A(x,y)$ representa la intensidad de fondo.

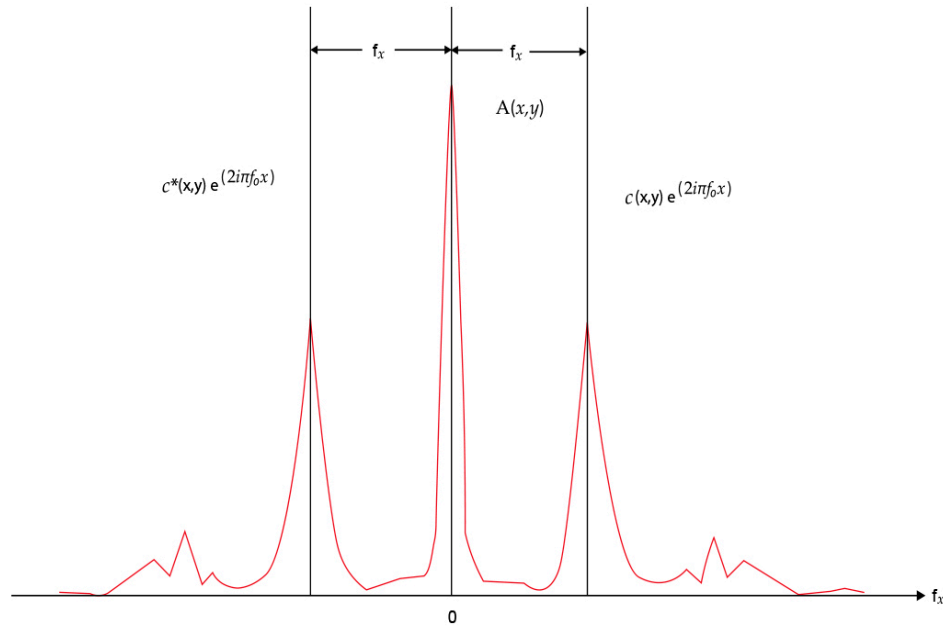


Figura 2.5. Espectro de Fourier.

- b. Se realiza el filtrado del primer armónico, ya que éste contiene la información topográfica del objeto, eliminando las demás componentes.
- c. Una vez que se filtra el armónico, se debe remover la frecuencia portadora, esta frecuencia portadora corresponde al patrón de franjas proyectado y registrado, para esto existen diferentes métodos [20], por ejemplo, el método de desplazamiento de espectro que consiste en desplazar el armónico filtrado hacia el centro del espectro para así remover la frecuencia portadora.

En la Figura 2.6, se muestra el filtrado del armónico ya desplazado del espectro. En el inciso (a) se muestra la máscara de filtrado del armónico real; en el inciso (b) se observa el desplazamiento centrado del espectro.

- d. Se aplica la transformada inversa de Fourier para regresar al dominio espacial.
- e. Se obtiene la fase, ésta se calcula dividiendo la parte imaginaria de la señal entre la parte real y a este resultado se le aplica la arco-tangente. La ecuación matemática viene representada por:

$$\phi(x) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[c(x,y)]}{\text{Re}[c(x,y)]} \right\} \quad (2.20)$$

- f. Debido a que la fase se encuentra envuelta en un rango de $-\pi$ a π hay que implementar un desenvolvimiento de fase.
- g. Una vez que se obtiene el desenvolvimiento de fase se procede hacer la reconstrucción 3D del objeto.

Una ventaja de esta técnica es que se requiere de una sola imagen con el patrón de franjas, por lo tanto, es una excelente alternativa para implementarla en eventos dinámicos.

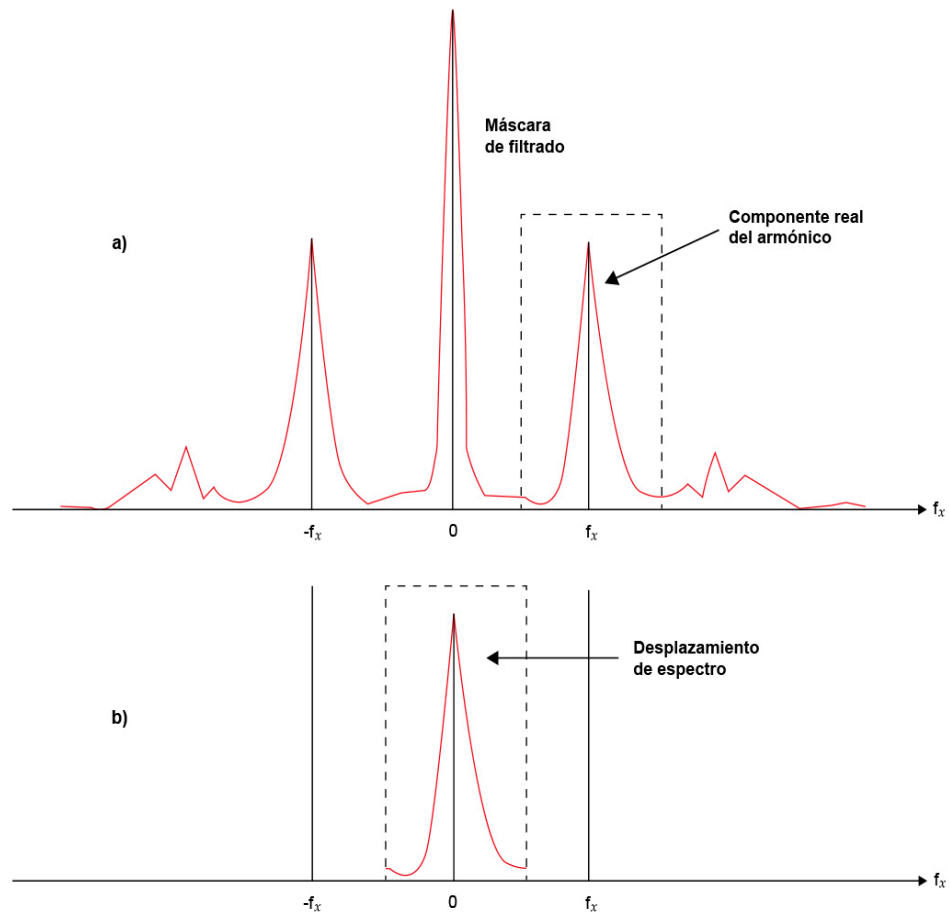


Figura 2.6. a) Filtrado de un lóbulo; b) Método de desplazamiento de espectro.

CAPÍTULO III

LUZ ESTRUCTURADA DE FRANJAS DE COLOR SINUSOIDAL

En este capítulo se describirá las ventajas de implementar franjas de color, las ecuaciones matemáticas de proyección de franjas en los canales RGB, las ecuaciones matemáticas de proyección de franjas RGB con corrimiento de fase y las ecuaciones registradas por la cámara CCD.

3.1 Proyección de franjas RGB

Cada vez más, se ha recurrido a la codificación de colores en las técnicas de proyección de franjas desarrolladas para la medición de formas en 3D. La incorporación de colores posibilita la inclusión de mayor información en la misma cantidad de patrones, en comparación con las técnicas en blanco y negro [20].

Los colores permiten representar múltiples niveles de altura con mayor precisión, lo que mejora la resolución espacial y reduce ambigüedades en los datos. Además, la versatilidad de asignar colores facilita la adaptación a diversas aplicaciones y condiciones. La detección y procesamiento de datos en color suele ser más eficiente, lo que favorece la automatización y una interpretación más precisa.

Algunas ventajas de implementar franjas de color son las siguientes:

- Mayor información por patrón: En la proyección de colores, cada color puede representar un valor de altura diferente, lo que significa que se puede codificar más información en un solo patrón de proyección. En contraste, las franjas binarias solo tienen dos niveles de altura (blanco y negro), lo que limita la cantidad de información que se puede codificar en cada patrón.

- Mayor precisión: Debido a la mayor cantidad de información disponible en los patrones de proyección en color, es posible obtener mediciones más precisas y detalladas de la superficie en 3D. Esto es especialmente beneficioso en aplicaciones donde se requiere una alta resolución.
- Reducción de ambigüedades: Las franjas binarias pueden dar lugar a ambigüedades en la interpretación de los datos, especialmente en áreas con cambios abruptos o falta de textura. Los colores pueden ayudar a resolver estas ambigüedades, lo que resulta en mediciones más confiables.
- Mayor flexibilidad: La proyección en color ofrece la flexibilidad de asignar información de manera personalizada a diferentes colores, lo que permite adaptar la técnica a diversas aplicaciones y escenarios de iluminación.
- Mejora en la detección: Los sistemas de visión por computadora pueden ser más eficientes en la detección y seguimiento de patrones de color en comparación con franjas binarias, lo que facilita la automatización del proceso de medición.
- Mejora en condiciones de iluminación: La proyección en color puede ser más robusta en entornos con variaciones de iluminación, ya que los colores son menos sensibles a cambios en la intensidad de la luz que las franjas binarias.

Algunas desventajas de las franjas en tono binarios son las siguientes:

- Menor capacidad para capturar texturas y características superficiales: Las franjas binarias pueden no ser ideales para capturar detalles sutiles en la superficie de objetos, como texturas, rugosidades o características microscópicas, ya que carecen de la riqueza de información que ofrecen los colores en otros métodos.
- Mayor susceptibilidad al ruido: Debido a su simplicidad, las franjas binarias pueden ser más susceptibles al ruido y las interferencias, lo que puede afectar negativamente la calidad de las mediciones.

- Requieren post procesamiento adicional: En algunos casos, las técnicas de franjas binarias pueden requerir un procesamiento de datos más complejo y post procesamiento para corregir errores y ambigüedades, lo que puede aumentar la complejidad del sistema.
- Menos adecuado para superficies con alto contraste: En superficies con altos contrastes naturales, las franjas binarias pueden no ser la mejor opción, ya que los cambios de color en las franjas de proyección en blanco y negro pueden ser menos distintivos.
- Limitaciones en la medición de objetos translúcidos o con reflejos: Las franjas binarias pueden tener dificultades para medir objetos translúcidos o altamente reflectantes debido a problemas de contraste y reflexión de luz.

Algunas aplicaciones que implementan franjas de color son las siguientes:

- Metrología industrial: En la metrología industrial, se utilizan proyecciones de franjas de color para medir y controlar la precisión de piezas manufacturadas, ensamblajes y componentes. La codificación de color permite una medición más precisa y detallada de la geometría de piezas, lo que es fundamental en la fabricación de alta precisión, como la industria aeroespacial y la automotriz.
- Digitalización 3D de objetos: La digitalización 3D se utiliza en aplicaciones como la creación de modelos 3D de objetos, esculturas, artefactos arqueológicos y más. La proyección de franjas de color permite capturar la forma y los detalles de objetos con mayor precisión y fidelidad de color.
- Escaneo corporal y facial: En medicina y en la industria del entretenimiento (por ejemplo, para la creación de avatares digitales), se utilizan proyecciones de franjas de color para escanear el cuerpo humano y el rostro. Esto es útil en aplicaciones como la planificación de cirugías reconstructivas y la creación de personajes digitales con alta fidelidad.

- **Reconstrucción de superficies de terrenos:** En topografía y cartografía, se utilizan técnicas de proyección de franjas de color para crear modelos tridimensionales de terrenos, lo que es fundamental en la planificación de proyectos de construcción, la gestión de recursos naturales y la evaluación de cambios en el paisaje.
- **Inspección de superficies en la industria electrónica:** En la fabricación de componentes electrónicos, como placas de circuito impreso, se utilizan proyecciones de franjas de color para inspeccionar la calidad de las superficies y detectar defectos, como grietas o desviaciones dimensionales.
- **Exploración subacuática y subterránea:** En la exploración marina y subterránea, las proyecciones de franjas de color se pueden utilizar para mapear el lecho marino, cuevas subterráneas o estructuras sumergidas, proporcionando datos precisos de forma tridimensional.

3.2 Fundamento matemático de franjas de color sinusoidales

Dentro del capítulo dos, se describe la ecuación (2.4) de proyección de franjas binarias proyectadas.

En este trabajo se implementarán franjas de color en los canales G y B, la ecuación (2.4) representa de manera física una proyección de franjas en tonos binarios (blanco y negro), al implementar franjas de colores la ecuación de proyección cambia debido a un nuevo término que corresponde a la intensidad del color que se está proyectando [21-22]:

$$I_{pC}(x_p, y_p) = a_{pC} + b_{pC} \cos(2\pi f_{o pC} x_{pC}) \quad (3.1)$$

Este nuevo término $I_{pC}(x_p, y_p)$ representa lo siguiente:

- El subíndice p está asociado al espacio del proyector.
- El subíndice C representa al canal que será proyectado, G o B.

La ecuación de franjas capturada para el canal G será la siguiente:

$$I_G(x_c, y_c) = \alpha_G(x_c, y_c) \{ a_{cG}(x_c, y_c) + b_{cG}(x_c, y_c) \cos[2\pi f_{ocG} x_{cG} + \beta_{1cG}(x_c, y_c)] + \beta_{2c}(x_c, y_c) \}, \quad (3.2)$$

En la Figura 3.1, se observa el patrón de franja capturado.

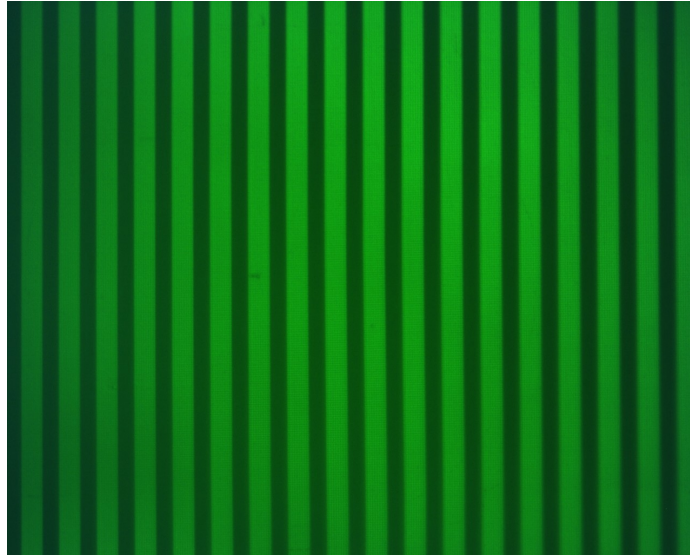


Figura 3.1. Captura del patrón de franjas del canal G.

La ecuación de franjas capturada para el canal B será la siguiente:

$$I_B(x_c, y_c) = \alpha_B(x_c, y_c) \{ a_{cB}(x_c, y_c) + b_{cB}(x_c, y_c) \cos[2\pi f_{ocB} x_{cB} + \beta_{1cB}(x_c, y_c) + \pi] + \beta_{2c}(x_c, y_c) \}, \quad (3.3)$$

En la Figura 3.2 se muestra el patrón de franjas capturado con intensidad azul, este patrón está desplazado π radianes con respecto a la ecuación anterior:

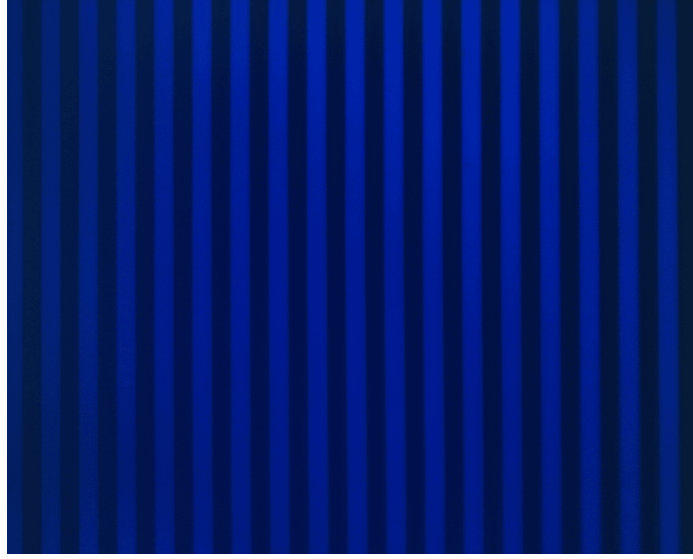


Figura 3.2. Captura del patrón de franjas del canal B.

Para simplificar las ecuaciones anteriores, denotamos:

$$A(x_c, y_c) = \alpha(a_c(x_c, y_c) + \beta_1(x_c, y_c)) + \beta_2(x_c, y_c) \quad (3.4)$$

Y

$$B(x_c, y_c) = \alpha(b_c(x_c, y_c)) \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la ecuación queda agrupada de la siguiente forma:

$$I_c = A(x_c, y_c) + B(x_c, y_c) \cos[2\pi f_{oc} x_c] \quad (3.6)$$

Para optimizar el tiempo de adquisición se pretende proyectar un patrón bicolor, el cual está representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} I(x,y)_{GB} = I_G + I_B = A(x_c, y_c)_G + B(x_c, y_c)_G \cos[2\pi f_{oc} x_c] + \dots \\ \dots A(x_c, y_c)_B + B(x_c, y_c)_B \cos[2\pi f_{oc} x_c + \pi] \end{aligned} \quad (3.7)$$

La representación de la ecuación 3.7 se puede observar en la Figura 3.3.

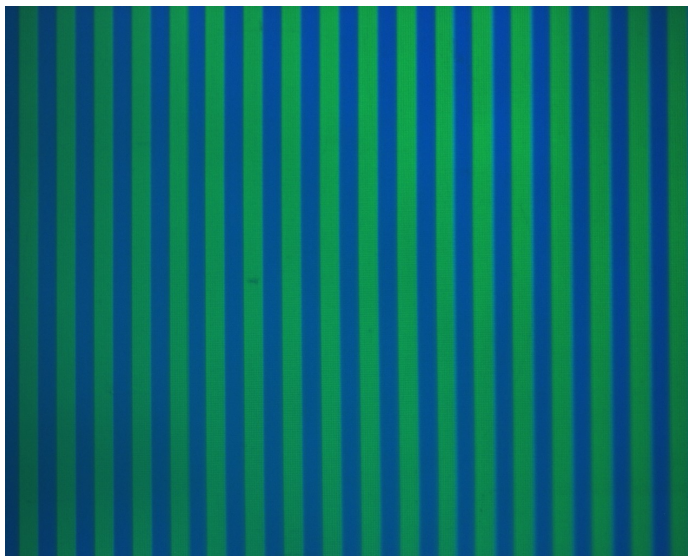


Figura 3.3. Patrón de franjas superpuesto capturado.

CAPÍTULO IV

Separación de canales

Este capítulo se centra en explicar en qué consiste la separación de canales RGB a tonos de grises y algunos trabajos previos.

4.1 Separación de canales

La separación de canales por color de una imagen a tonos de grises, es un proceso mediante el cual se obtiene una representación en blanco y negro de una imagen en color. En lugar de mostrar la imagen con sus canales de color originales, se convierte en una escala de grises en la que cada píxel se representa por un solo valor de intensidad en lugar de tres componentes de color (rojo, verde y azul).

El objetivo principal de la separación de canales a tonos de grises es simplificar la imagen y reducir la información de color a una escala de grises, lo que puede ser útil en diversas aplicaciones, como el análisis de imágenes, la detección de bordes, la segmentación de objetos, la mejora de contraste y más.

Como ejemplo, en la literatura se puede encontrar diferentes métodos para realizar la conversión de una imagen en color a tonos de grises, siendo los métodos ponderados los más comunes. En estos métodos, se calcula un solo valor de intensidad para cada píxel en función de las componentes de color (rojo, verde y azul) y se ponderan de diferentes maneras para obtener la intensidad final. Uno de los métodos más conocidos es el método de promedio ponderado, donde se calcula la intensidad como el promedio ponderado de las componentes de color RGB.

4.2 Trabajos previos

4.2.1 Síntesis digital de color utilizando tonos de grises

Este trabajo se enfocó en comparar la correspondencia entre los canales RGB con sus respectivos tonos de grises para que su algoritmo sea capaz de reconstruir la imagen aproximándose lo más posible a la original en RGB.

Implementaron una descomposición de la imagen fuente, convirtieron la imagen de tonos RGB a tonos de gris, a partir de las siguientes ecuaciones:

$$R2 = Gr - G - B \quad (4.1)$$

$$G2 = Gr - R - B \quad (4.2)$$

$$B2 = Gr - R - G \quad (4.3)$$

Donde R2, G2 y B2 corresponden a las componentes encontradas, mientras que, R, G, B son los canales de la imagen original en tonos de gris y Gr corresponde a la imagen en tonos de gris.

Como último paso, aplicaron una serie de filtros a las nuevas componentes, como lo fueron, síntesis aditiva, correcciones de gamma, brillo y contraste.

En los resultados obtenidos de este trabajo, la intensidad de la imagen original y la imagen reconstruida fue escalada en un rango de intensidad de 0-255 luxes para generar una comparación entre ellas, los resultados de intensidad en tonos de grises fueron muy cercanos a los tonos de intensidad RGB demostrando la efectividad de su propuesta.

4.2.2 Optimización basada en la colorización de imágenes en escala de grises

En este artículo se presenta un método interactivo para agregar color a imágenes en blanco y negro basado en optimización. Este método permite que el usuario agregue color de manera interactiva, y la única tarea que debe realizar es proporcionar algunas indicaciones de color

mediante garabatos o puntos de referencia.

La principal contribución de este método es su capacidad para reducir significativamente el tiempo de procesamiento sin comprometer la calidad de la imagen. Logra esto utilizando un enfoque de muestreo no uniforme basado en la descomposición de quadtree. Además, se mejora la calidad al introducir una nueva función de ponderación que ayuda a evitar la difusión de color no deseada entre regiones diferentes de la imagen.

Los experimentos realizados muestran que este método logra una calidad de imagen en color igual de buena que el método de Levin y otros métodos similares, pero con un costo computacional mucho menor.

4.2.3 Colorización automática de imágenes en escala de grises basada en el espacio de color

La propuesta que presentan se centra en abordar el desafío de la colorización de manera completamente automática, eliminando la necesidad de intervención manual por parte del usuario. En lugar de depender de la intervención humana, la solución propuesta busca simplificar el proceso.

Su propuesta sugiere utilizar una imagen de referencia en color para facilitar la transferencia de colores desde esta imagen de referencia a la imagen en escala de grises que se desea colorizar. Para lograrlo, primero realizan una conversión de la imagen de referencia al espacio de color Lab. Al mismo tiempo, la imagen en escala de grises la normalizan con respecto al canal de luminancia (L). Posteriormente, concatenan la imagen en escala de grises con los canales a y b antes de convertirla en una imagen RGB.

Su método propuesto produjo resultados prometedores, tanto visualmente como mediante la determinación del PSNR (Relación Señal a Ruido de Pico).

4.2.4 Transferencia de rasgos de color a imágenes en escala de grises

El método que se presenta introduce técnicas novedosas para añadir colores a imágenes en escala de grises. Se reconoce que colorear imágenes en blanco y negro es un desafío sin una solución precisa. El objetivo principal de este enfoque es minimizar la intervención manual necesaria para realizar esta tarea.

El método se basa en la interacción del usuario para encontrar una imagen de referencia en color. Una vez obtenida la imagen de referencia, las técnicas propuestas se encargan de transferir las características de color de la imagen de referencia a la imagen en escala de grises.

El proceso implica la creación de una paleta de colores utilizando ventanas de píxeles de ciertos grados tomados de la imagen de referencia en color. Luego, la imagen en escala de grises se divide en ventanas de píxeles con los mismos grados. Para cada ventana en la imagen en escala de grises, se busca en la paleta valores de colores equivalentes que se puedan utilizar para colorear esa ventana en particular.

Es importante destacar que durante todo el proceso solo se equiparan los valores de luminancia entre la imagen de referencia en color y la imagen en escala de grises objetivo. Basándose en la mejor coincidencia de luminancia, se transfieren los valores de cromaticidad correspondientes de la imagen en color a la imagen en escala de grises.

En cuanto a la preparación de la paleta, exploraron inicialmente los espacios de color RGB y LUV de Kekre, encontrando que este último proporciona resultados comparativamente mejores. Para acelerar la búsqueda en la paleta de colores, se utilizan tanto búsquedas exhaustivas como búsquedas rápidas de Kekre.

En este capítulo se explicará por qué se deben de separar los canales de color y su importancia en esta tesis, también se abordará el procedimiento de la transformada de Fourier.

4.3 Separación de imagen por canales

En este trabajo, la separación de canales por color es el primer paso para el análisis de la imagen. Este proceso consta de separar los canales G y B de la imagen original [27] obteniendo 2 imágenes a partir de la imagen original.

Aunque la proyección de franjas a color es una alternativa eficaz debido a su baja sensibilidad al ruido de fondo no deseado, esta no la elimina por completo, por lo tanto, al separar la imagen en cada canal individual de proyección, se obtienen múltiples imágenes a partir de una sola imagen con patrón de franjas superpuesto, esto equivale al método de corrimiento de fase donde, proyectan y capturan simultáneamente.

Al obtener múltiples capturas de la imagen a modelar, se obtiene una mayor precisión en la reconstrucción 3D [28] debido a que se obtiene mayor información del objeto, lo mismo sucede al separar los canales G y B de la imagen original de franjas superpuestas, debido a que se genera el mismo fenómeno de múltiples imágenes, esto da como resultado una mayor información del objeto.

La separación del canal azul, ver Figura 4.1.

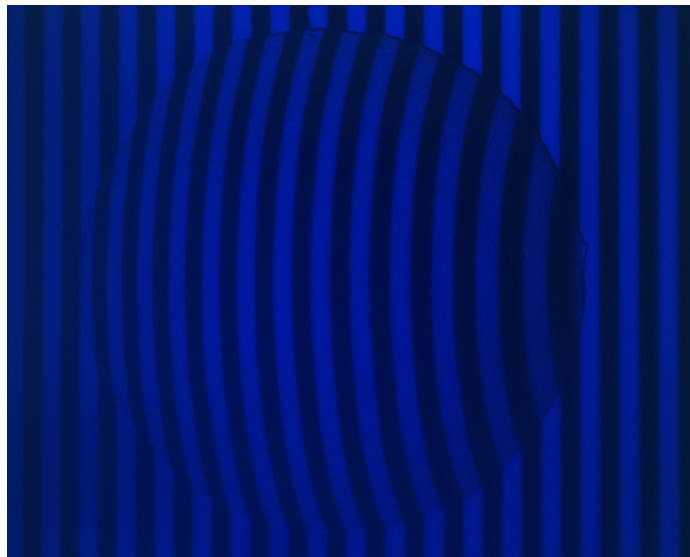


Figura 4.1. Separación del canal azul.

Para la separación del canal verde, ver la Figura 4.2.



Figura 4.2. Separación del canal verde.

CAPÍTULO V

ANTECEDENTES SOBRE FRANJAS DE COLOR

En este capítulo se abordará trabajos existentes sobre perfilometría implementando franjas de color, así como la descripción de las mismas.

5.1 Proyección de franjas codificadas por color para mediciones de formas en 3D

En este artículo [30] proponen una técnica de franjas de colores codificadas proyectadas en un patrón de franjas sinusoidales para encontrar la forma del objeto.

La fase del objeto es evaluada mediante la transformada de Fourier. Cuando el objeto contiene grandes discontinuidades de profundidad, las franjas codificadas en color pueden identificar estas discontinuidades de manera más fácil en comparación de franjas binarias en blanco y negro, esto se debe a que las franjas de color poseen mayor información de la fase del objeto que las franjas en blanco y negro.

Una de las ventajas que presentan; es el bajo requerimiento de procesamiento para la reconstrucción 3D, un desenvolvimiento de fase más confiable para objetos con superficies irregulares, solo se requiere una única toma del objeto.

5.2 Medición de forma 3D absoluta de disparo único con perfilometría de proyección de franjas codificadas por color basada en aprendizaje profundo

En el trabajo de Qian et. al [31], presentan un método que recupera la superficie tridimensional (3D) de un objeto a partir de una sola captura. Se hace mención al método de proyección de franjas de color como una tecnología con mucho potencial debido a las propiedades de multiple- xado de 3 canales, pero aún se presentan ciertos problemas como el crosstalk y la codificación

comprometida.

La codificación comprometida se refiere a un enfoque en el cual se toman decisiones conscientes que equilibran la eficiencia o la simplicidad en la codificación con la calidad o precisión de la información codificada. Esta estrategia se utiliza cuando existen limitaciones técnicas, de recursos o de otros tipos que requieren ciertos compromisos en la representación de datos.

Proponen un método a través de redes neuronales para poder predecir la fase absoluta sin necesidad de algún artefacto de movimiento y sin crosstalk, todo desde una sola imagen con franjas de color.

5.3 Técnica de proyección de franjas binarias codificadas por color para la medición de formas en 3D

En la investigación de Pan et. al [32], implementan franjas de colores debido a que poseen una mejor codificación de la información comparada con otras técnicas donde implementan franjas en blanco y negro.

Sin embargo, un problema que presentó su técnica fue que, el patrón de franjas proyectado es muy sensible a la superficie reflejante del objeto y su color, este problema es notorio en la recuperación de fase.

Para resolver este problema, implementaron un esquema de umbral adaptativo que les permite extraer la información 3D del objeto sin que le afecte el color del que está pintado el objeto. Gracias a esto pudieron obtener errores de digitalización muy reducidos provocados por el ruido del sistema, también la precisión de medición es ligeramente afectada por el ruido.

5.4 Técnica de proyección de franjas digitales codificadas por color para la medición de formas en 3D a alta velocidad: acoplamiento de color y compensación de desequilibrio

En la investigación desarrollada por Pan et. al [33], implementan franjas de color, ya que estas contienen una mayor información de fase y, por lo tanto, son una buena forma de medir

formas en 3D a alta velocidad. Se percataron que los resultados experimentales no eran tan buenos a comparación de la técnica en escala de grises debido a los problemas de acoplamiento y desequilibrio de color.

Para resolver esto propusieron un sistema mejorado, este consta de un proyector LCD de alta luminosidad y una cámara de video 3-CCD, la cámara 3-CCD contiene 3 sensores CCD, cada uno de los sensores está diseñado para capturar información de un color en específico para solucionar el desacoplamiento entre colores.

De la misma manera, implementaron un método de búsqueda (por sus siglas en inglés *LUT*) que ayuda a compensar el desequilibrio de color, al igual que un método de compensación de no linealidad para reducir los errores de medición. Como resultado, se concluye que el error de medición se redujo significativamente.

5.5 Perfilometría de proyección de franjas codificadas por colores de múltiples frecuencias para la rápida medición de formas 3D de objetos complejos

En el artículo presentado por Jiang et. al [34], emplean una proyección de franjas marcadas con color en múltiples frecuencias para poder medir la forma 3D de objetos que contengan discontinuidades.

Implementaron un proyector de micro espejos digital para proyectar las franjas de color a diferente frecuencia, generaron una curva de cromaticidad para que pudieran calcular el cambio de color que se generaba por la altura del objeto.

Para mejorar la precisión de medición, desarrollaron un método de corrección de curva de cromaticidad, esto ayudó a reducir las fluctuaciones de color, los errores de la curva de cromaticidad y la altura del objeto. Su método no necesita un desplazamiento de fase ni desenvolvimiento de fase, por lo tanto, se puede implementar para medir objetos con discontinuidades y dinámicos.

5.6 Medición de formas 3D de alta velocidad basada en proyección de franjas digitales

En el trabajo de Huang et. al [35] generán un patrón de franjas de color RGB con un corrimiento de fase de 120 grados entre cada canal, este patrón de franjas es proyectado mediante un proyector digital de micro espejos (por sus siglas en inglés DMD), sin filtro decolor.

Debido a que el proyector no tiene filtro de color, el patrón de franjas proyectado es en escala de grises, estos tres patrones son capturados por la camada CCD.

Una vez que obtienen registrada la imagen, proceden a reconstruir el objeto, utilizando un algoritmo de desenvolvimiento de fase para después aplicar un algoritmo de conversión de coordenadas de fase. Los resultados experimentales que obtuvieron, demostraron que su técnica de alta velocidad es viable para frecuencias de hasta 100 Hz.

5.7 Cálculo de fase y color en la proyección de franjas a color

En este trabajo realizado por Zhang et. al (2007) [36] presentan un método para extraer la fase del objeto y la información de los colores, rojo, verde y azul, generan un patrón de franjas sinusoidales en los canales RGB, estos patrones de franjas tienen un número n de franjas que determina, mediante un método de selección de tres frecuencias, cuáles serán codificadas en los canales rojo, verde y azul, formando un patrón de franjas RGB compuesto.

Un problema que se presentó en su trabajo, fue la falta de coincidencia de los espectros, al igual que la superposición de los espectros de las cámaras CCD de color y los proyectores (Aparato eléctrico para proyectar imágenes sobre una pantalla o superficie) de datos disponibles comerciales, los cuales generan una superposición de longitudes de onda al momento de la proyección y la limitada respuesta espectral de los sensores de la cámara CCD.

Para solucionar este problema, desarrollaron un método de optimización generado por software para calcular simultáneamente la información de fase y color basado en un modelo matemático, en el cual solucionan el efecto de acoplamiento de luz digital (por sus siglas en inglés DLP), como

resultado obtuvieron una alta resolución de fase aun con el problema de efecto de acoplamiento de las franjas RGB.

5.8 Conclusión

Los problemas principales que se encontraron en el desarrollo de la técnica de proyección de franjas en color son:

- La dificultad para analizar objetos con grandes discontinuidades.
- El crosstalk y la codificación comprometida.
- Mayor sensibilidad a las superficies reflectivas del color del objeto (ya sea rojo, azul o verde).
- Problemas de desequilibrio de intensidades de color.
- Error en la curva de cromaticidad.
- Superposición de las franjas de color.

CAPÍTULO VI

TÉCNICAS DE OBTENCIÓN DE FASE

En este capítulo se explicará qué es el desenvolvimiento de fase y algoritmos que existen para la obtención de fase.

6.1 Desenvolvimiento de fase

El desenvolvimiento de fase (en inglés, *phase unwrapping*) [37-38] es un proceso utilizado en el procesamiento de señales para resolver un problema común relacionado con la fase de una señal o una imagen. Para comprender el concepto, primero es importante entender qué es la fase en este contexto.

En muchas aplicaciones, las señales o las imágenes pueden representarse mediante números complejos, donde la magnitud representa la amplitud y la fase representa la información de fase. La fase puede ser una medida importante en una variedad de campos, como la interferometría, la resonancia magnética, la detección remota, entre otros.

El problema surge cuando la fase se mide en forma de diferencias de fase relativas, lo que significa que solo se conoce la diferencia entre las fases en puntos cercanos de la señal o la imagen. Esto puede dar lugar a una representación envuelta o discreta de la fase, donde la fase suele repetirse en intervalos de 0 a 2π o de $-\pi$ a π . Este efecto se asemeja a lo que sucede cuando se observan las manecillas de un reloj y no se puede decir si han dado una vuelta completa o más.

El desenvolvimiento de fase, es el proceso de eliminar estas repeticiones y obtener una representación continua y suave de la fase. Esto es esencial en aplicaciones donde la información precisa de fase es crítica, ya que permite una interpretación más precisa de los datos. El desenvolvimiento de fase se utiliza en una variedad de campos, como la cartografía, la tomografía por

resonancia magnética, la interferometría, la holografía y más.

Existen varios algoritmos y técnicas para el desenvolvimiento de fase, y su elección depende de la aplicación específica y de la calidad de los datos. Algunos de estos métodos involucran operaciones matemáticas avanzadas, mientras que otros pueden aprovechar la información contextual para resolver el problema. En general, el objetivo es reconstruir la fase original a partir de las diferencias de fase observadas en la señal o la imagen.

El desenvolvimiento de fase puede llevarse a cabo tanto en el dominio temporal como en el dominio espacial, dependiendo del tipo de señal o imagen y de los objetivos de la aplicación [39].

El desenvolvimiento de fase temporal se aplica a señales que varían en función del tiempo. Esto puede involucrar señales periódicas o señales que experimentan cambios de fase temporales debido a diversas razones, como el movimiento o la variación en el tiempo.

Algunos ejemplos de aplicaciones:

- Interferometría de radar: En aplicaciones de radar, especialmente en sistemas interferométricos, se puede medir la diferencia de fase entre señales reflejadas en diferentes momentos. El desenvolvimiento de fase temporal se utiliza para obtener una representación continua de esta diferencia de fase en función del tiempo.
- Resonancia magnética funcional (fMRI): Con ella, se pueden adquirir datos de imágenes en secuencias temporales. El desenvolvimiento de fase temporal se utiliza para corregir las variaciones de fase debidas al movimiento del tejido y obtener una representación precisa de la señal.

El desenvolvimiento de fase espacial se aplica a imágenes que tienen información de fase distribuida en un espacio bidimensional o tridimensional. Esto ocurre, por ejemplo, en aplicaciones de imagenología médica, cartografía, holografía y procesamiento de imágenes en general. En esta tesis se implementa el desenvolvimiento de fase espacial.

Algunos ejemplos de aplicaciones:

- Interferometría óptica: En la interferometría óptica, las imágenes pueden contener información de fase que se encuentra envuelta debido a las características del sistema. El desenvolvimiento de fase espacial se utiliza para obtener una imagen coherente y continua de la fase.
- Tomografía por coherencia óptica (OCT): Permite adquirir imágenes tridimensionales de tejidos biológicos. El desenvolvimiento de fase espacial se aplica para corregir las discontinuidades de fase causadas por cambios en la longitud óptica de los tejidos.

Función unwrap

En esta tesis se implementó el desenvolvimiento de fase espacial, MATLAB[®] incluye una función basada en el algoritmo de desenvolvimiento de fase [40], este algoritmo se encarga de corregir la fase mediante la suma de múltiplos de $\pm 2\pi$, si los saltos entre los elementos consecutivos (píxeles de la imagen) son mayores o igual a la tolerancia de π radianes.

A continuación se da una descripción general de cómo funciona el algoritmo unwrap:

1.- Entrada de datos

- La entrada principal de la función unwrap es una matriz que representa la fase envuelta que se desea desenvolver. Esta matriz puede tener dimensiones 1D, 2D o incluso 3D, dependiendo de la aplicación. La fase envuelta es aquella en la que la fase presenta discontinuidades de 2π en ciertos puntos debido a limitaciones en la medición o el cálculo.

2.- Detección de saltos de fase

- El algoritmo comienza detectando los saltos de fase en la matriz de entrada. Los saltos de fase se identifican como discontinuidades en la fase envuelta. Esto se hace calculando la

diferencia entre los valores de fase adyacentes en la matriz y evaluando si la diferencia supera un umbral determinado (generalmente π o $-\pi$).

3.- Acumulación de envoltura

- Una vez que se detecta un salto de fase, se inicia un proceso de acumulación de envoltura. El algoritmo realiza un seguimiento de cuánta envoltura de 2π se ha acumulado en cada punto a lo largo de la matriz. Esto se hace sumando o restando múltiplos de 2π a los valores de fase en función de los saltos detectados. La cantidad de 2π agregada o restada se calcula de manera acumulativa para que la fase sea continua.

4.- Iteración

- El algoritmo itera a través de la matriz varias veces, detectando y corrigiendo los saltos de fase en cada iteración. En cada paso, se refina la corrección de fase.

5.- Resultado

- Al final del proceso de iteración, la función `unwrap` devuelve una matriz que representa la fase desenvuelta, que es continua y suave, sin los saltos de fase de 2π . Esta representación es más adecuada para análisis posteriores o visualización precisa.

En la Figura 6.1, se presenta el resultado de fase envuelta antes de aplicar el algoritmo de desenvolvimiento.

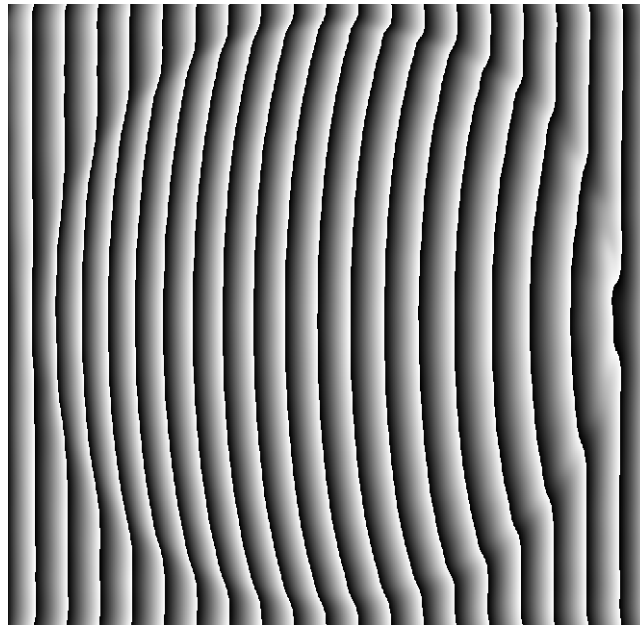


Figura 6.1. Fase envuelta.

Una vez que se obtiene la fase envuelta se aplica la función de unwrap para generar el desenvolvimiento de fase obteniendo la siguiente imagen:

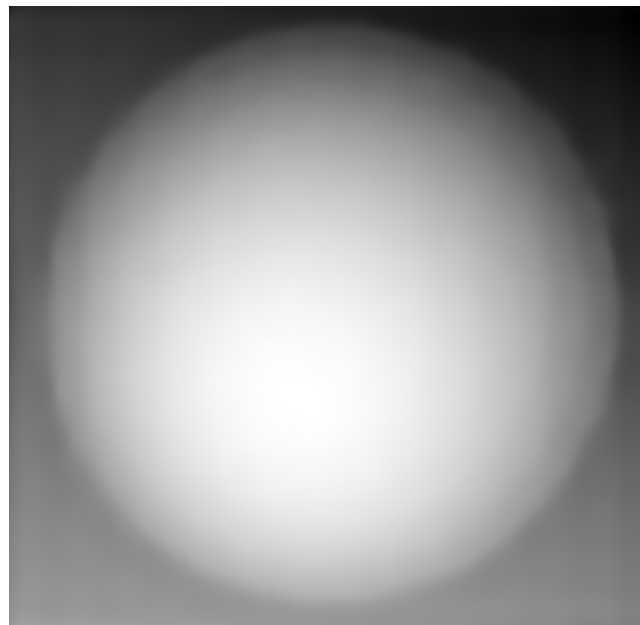


Figura 6.2. Fase desenvuelta.

En la figura 6.2, se presenta el resultado de aplicar la función de desenvolvemento de fase de MATLAB[®], es necesario recalcar la calidad del desenvolvemento de fase que se obtuvo de la imagen original, el objeto desenvuelto es visible al ojo humano y fácil de identificar su geometría correspondiente a una semiesfera.

El desenvolvemento de fase es una tarea difícil para objetos con forma geométrica compleja, factores como el ruido en la imagen, reflexiones, discontinuidades en el objeto, etc., estos factores generan inconsistencias en la fase envuelta, estas inconsistencias se pueden encontrar en la literatura como residuos, los residuos generan dificultad de implementar el algoritmo unwrap predeterminado de MATLAB, para este tipo de problemas se han desarrollado otros algoritmos más robustos de desenvolvemento de fase, como ejemplo se puede encontrar el algoritmo de desenvolvemento de fase de Goldstein.

6.1.1 Algoritmo de desenvolvemento de fase de Goldstein

La presencia de residuos en la fase (diferencias entre la fase verdadera y la fase envuelta de una señal o imagen) necesita un algoritmo de la categoría trayectoria como lo es el algoritmo Goldstein [38], este algoritmo consiste en generar *branch cut* (cortes de rama), esto se refiere a tratar los saltos de fase de 2π como discontinuidades en una superficie y, en vez de eliminarlos, genera una línea o corte imaginario que conecta los puntos antes y después de cada salto, por eso se emplea el término detrayectoria.

Para generar el desenvolvemento de fase, el algoritmo de Goldstein implementa estos pasos:

1.- Entrada de datos

- La entrada principal es una imagen o una señal que contiene información de fase envuelta, donde la fase se ha medido o calculado de manera discreta y contiene saltos de 2π en ciertos puntos debido a limitaciones en la medición.

2.- Cálculos de gradientes

- El algoritmo comienza calculando el gradiente de la fase envuelta. Esto implica calcular las diferencias de fase entre los píxeles vecinos en una imagen o entre puntos cercanos en una señal. El gradiente proporciona información sobre cómo cambia la fase en diferentes direcciones.

3.- Generación de una máscara de confiabilidad

- Se crea una máscara de confiabilidad que indica qué áreas de la imagen tienen una alta o baja confiabilidad en términos de desenvolvimiento de fase. Esto se hace evaluando la coherencia del gradiente y la suavidad de la fase local. Las áreas con una alta coherencia y suavidad se consideran más confiables para el desenvolvimiento de fase.

4.- Identificación de los saltos de fase

- El algoritmo identifica los saltos de fase de 2π en la fase envuelta utilizando el gradiente y la máscara de confiabilidad. Cuando se detecta un salto de fase, se marca como una discontinuidad en la superficie de fase.

5.- Creación de cortes de rama

En esta etapa, se crean los cortes de rama imaginarios para conectar los puntos antes y después de cada salto de fase detectado. Estos cortes de rama se diseñan de manera que

- minimicen la discontinuidad de fase en la superficie. La ubicación y la forma de los cortes se determinan utilizando técnicas de optimización, como mínimos cuadrados ponderados.

6.- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

- El algoritmo resuelve un sistema de ecuaciones lineales que relaciona los gradientes de la fase con el desplazamiento o la acumulación de fase, teniendo en cuenta los cortes de rama. La máscara de confiabilidad se utiliza para ponderar la importancia de cada ecuación.

7.- Desenvolvimiento de fase

- Con la solución del sistema de ecuaciones, el algoritmo calcula el desplazamiento o la acumulación de fase en cada punto de la imagen o señal, incluyendo los efectos de los cortes de rama. Esto proporciona una representación desenvuelta de la fase, que es continua y suave, sin los saltos de 2π .

8.- Resultado final

- El resultado final del algoritmo es una representación desenvuelta de la fase, que es adecuada para análisis posteriores y aplicaciones que requieren una medición precisa de la fase. Los cortes de rama ayudan a minimizar la discontinuidad de fase y aseguran un desenvolvimiento de fase más preciso en áreas problemáticas.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Existen muchos métodos para la adquisición de patrones de franjas en metrología óptica. La perfilometría, interferometría, moiré, metrología de moteado, etc.. En este capítulo se analiza la adquisición de patrones de franjas para perfilometría óptica, donde la distribución del mapa de fase es obtenida implementando el método de Takeda, conocido como método de Fourier y el método de corrimiento de fase o también conocido como desplazamiento de fase o Phase Shifting (del inglés). A continuación se presentan los resultados obtenidos en los diferentes experimentos realizados.

7.1 Experimento 1: Proyección de franjas en escala de grises

Para implementar el arreglo experimental y obtener las imágenes del objeto bajo prueba, se utilizó una cámara CCD, conectada a una computadora. Los algoritmos implementados para obtener el mapa de fase son FFT (*Fast Fourier Transform*). La obtención de la topografía de cualquier objeto usando el método de proyección de franjas es básicamente hecho en tres etapas: primero, la simulación de franjas y su proyección sobre la superficie del objeto; segundo, la obtención del mapa de fase; y tercero, la evaluación de la altura a partir de este mapa de fase considerando la información del sistema óptico.

En la Figura 7.1, se puede observar el objeto bajo prueba que es una semiesfera de unicel de superficie suave. Una vez registrada esa imagen, posteriormente se procede a obtener su transformada rápida de Fourier.

En la Figura 7.2, se puede ver la transformada de la imagen 7.2. En este proceso el resultado es una matriz que contiene por cada línea la transformada de Fourier de la línea que le corresponde en la imagen.

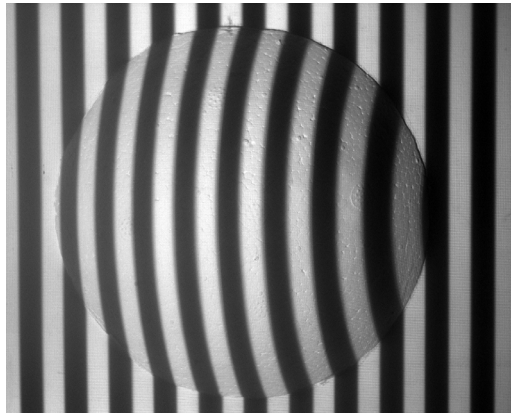


Figura 7.1. Objeto bajo prueba con franjas proyectadas en tono de grises.

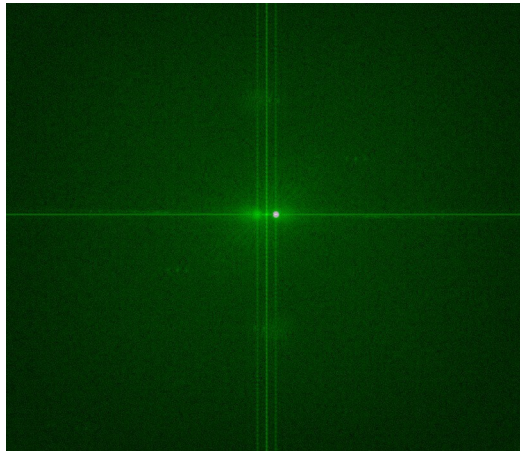


Figura 7.2. Transformada de Fourier del patrón de la Figura 7.1 con un filtro ideal, este se considera cuando el radio del filtro es menor a la mitad de la separación entre el DC y el primer armónico.

Una vez que se ubica la posición de la primera componente armónica, se procede a pasar la señal por un filtro pasa bajas con frecuencia central ubicada en dicha posición. El proceso de filtrado sirve para eliminar la información de intensidad de fondo y solo tener la información de fase de la semiesfera bajo prueba. El proceso de filtrado no es tan simple como parece, existen varios factores que pueden afectar este proceso, uno de ellos es el tamaño del filtro. El tamaño de la ventana del filtro permite el rechazo de los armónicos introducidos por la no linealidad de la intensidad de las franjas. Desafortunadamente, este proceso en ocasiones elimina información

necesaria para la reconstrucción adecuada de la superficie, o agrega información no asociada al objeto causando con esto, errores de medición.

Para recuperar la mayor información posible de información de fase, es necesario utilizar un filtro con tamaño del radio de la ventana, menor a la mitad de la separación del primer armónico y el DC para eliminar el término de background.

Una vez que se ha filtrado el armónico de interés se puede obtener la fase envuelta. Para obtener dicha fase se aplica a la imagen la función arco tangente (ecuación 2.20). El resultado obtenido hasta este punto aún no ofrece información de profundidad, debido a que la información se encuentra contenida entre los valores de, como se muestra en la Figura 7.3 (a). Por lo cual es necesario implementar un método de desenvolvimiento de fase.

La obtención de la fase a partir de su tangente inversa, es un tema conocido como, desenvolvimiento de fase. El problema de desenvolvimiento de fase consiste en recuperar los valores originales a partir de los valores de la fase envuelta, es decir, se obtiene un mapa de fase continua a partir de una discontinua.

Entre los métodos de desenvolvimiento espaciales más robustos y eficaces se tienen el algoritmo de Goldstein y el algoritmo guiado por calidad. El método usado en este proceso es el desenvolvimiento de Goldstein, descrito en el capítulo VI. La fase desenvuelta obtenida se muestra en la Figura 7.3 (b).

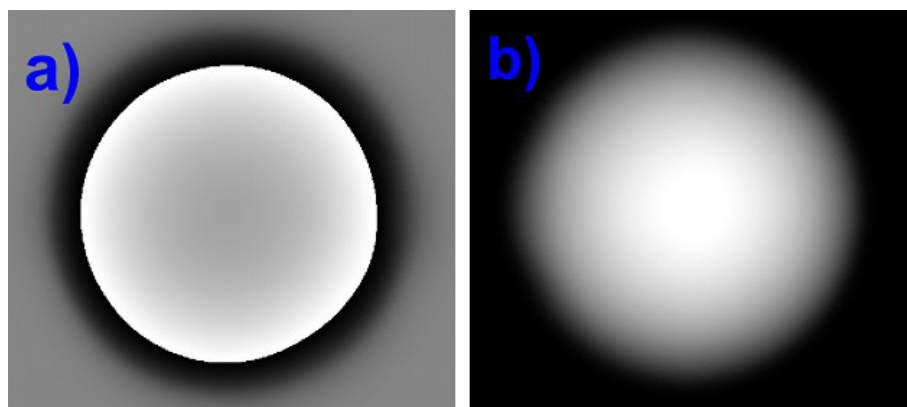


Figura 7.3. (a) Fase envuelta del objeto y (b) fase desenvuelta, para la proyección en escala de grises.

En la siguiente etapa se obtiene la reconstrucción 3D de la superficie de la semiesfera, convirtiendo el valor de fase en valores de alturas reales.

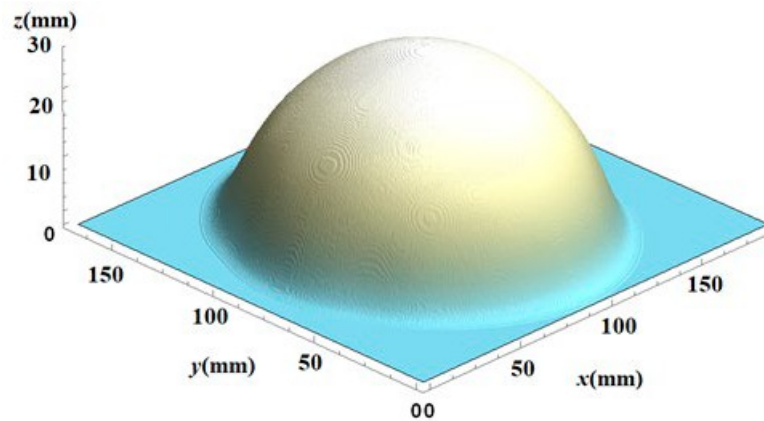


Figura 7.4. Topografía del objeto de prueba para proyección de franjas en escala de grises.

Para poder visualizar las implicaciones del tamaño del filtro, se implementó uno con un tamaño del radio del filtro ligeramente mayor a la mitad de la separación del primer armónico y el DC. El mapa de fase se puede observar en la Figura 7.5, como se puede apreciar el algoritmo es sensible a las dimensiones de la ventana del filtro implementado y aparecen algunas irregularidades en la distribución de fase obtenida.



Figura 7.5. Fase desenvuelta del objeto usando un filtro no muy óptimo.

La Figura 7.6 representa la reconstrucción 3D de la superficie del objeto, se puede apreciar inexactitudes introducidas por el filtrado de Fourier, generando la aparición de irregularidades superficiales.

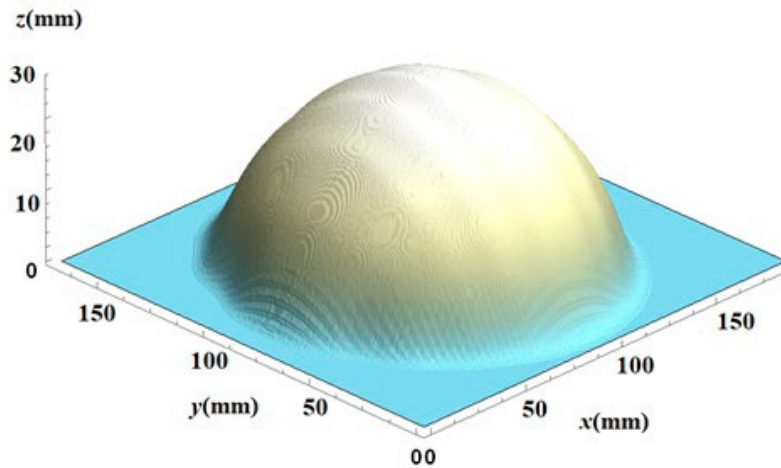


Figura 7.6. Topografía del objeto de prueba para proyección de franjas en escala de grises, usando un filtro no muy adecuado.

En la Figura 7.7 se observa el comportamiento de los perfiles de ambos casos. En la región de máxima altura se pueden observar algunas ondulaciones debido a la información del ruido contenido dentro de la vecindad de la frecuencia filtrada, el cual se incrementaría con el tamaño del filtro. La diferencia en el tamaño y tipo de las ventanas explica una calidad de detalle mayor en el método de Fourier tradicional. La pérdida de información se puede minimizar cuando se incrementa el número de franjas, sin embargo, el número de franjas es restringido por la resolución del proyector y cuando el objeto de prueba es de dimensiones pequeñas, es complicado incrementar el número de franjas.

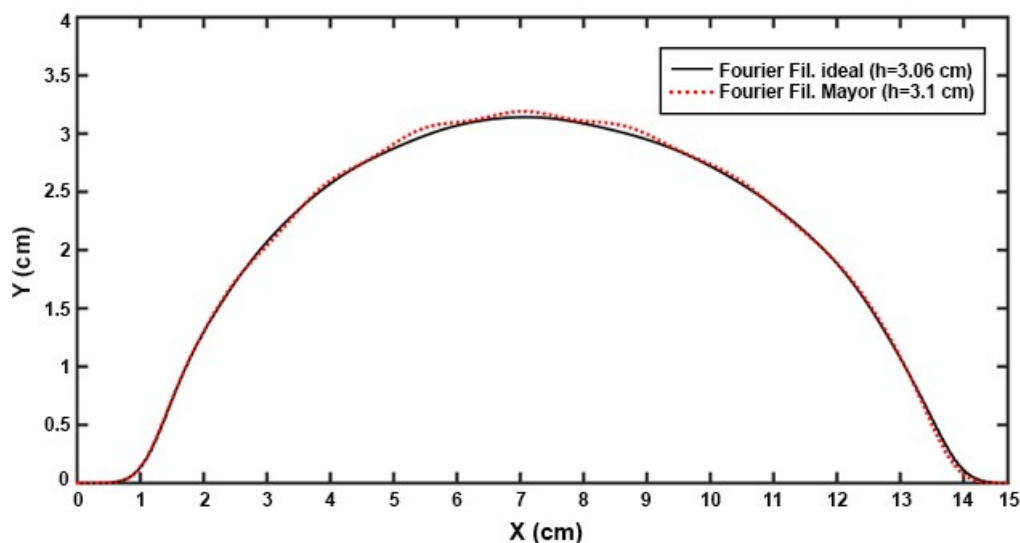


Figura 7.7. Perfil de la fase desenvuelta obtenida por la técnica de Takeda, usando un filtro ideal y otro de mayores dimensiones.

Comparando las mediciones obtenidas del objeto de la Figura 7.3 (b) y Figura 7.5, con las mediciones realizadas con un vernier calibrado, se obtuvo que el error máximo es de 0.6 mm y 1.0 mm, respectivamente. La medida de altura máxima obtenida a partir de un vernier calibrado fue de 3.00 cm. De los perfiles se puede apreciar que en los extremos no existe gran diferencia, sin embargo, en la parte central es donde existe la mayor diferencia. De un análisis visual del objeto, se sabe que es un objeto con superficie suave y no existen irregularidades superficiales. Una buena reconstrucción consiste en una superficie coincidente con la del objeto real y además una altura con un error mínimo.

Aunque en principio, la técnica implementada anteriormente trabaja bien cuando se elige un filtro adecuado, la exactitud en el cálculo de fase es mayor cuando el ruido de fondo se logra anular considerablemente. En el siguiente experimento, se mostrará como eliminar la información de fondo y además aumentar la precisión de las mediciones.

7.2 Experimento 2: Proyección simultánea de franjas a color

En la siguiente sección se presenta una técnica de reconstrucción 3D, la cual a pesar de ser un algoritmo que funciona a través de dos patrones con una diferencia de fase de π , permite obtener la información 3D a partir de una sola imagen. Esta etapa consiste en la proyección de un patrón de color con franjas en color azul y otro con franjas de color verde con su correspondiente desplazamiento de fase y un único registro. Esto es posible, debido a que se superponen digitalmente estos dos patrones, el resultado es un patrón bicolor que es proyectado sobre la superficie del objeto bajo prueba.

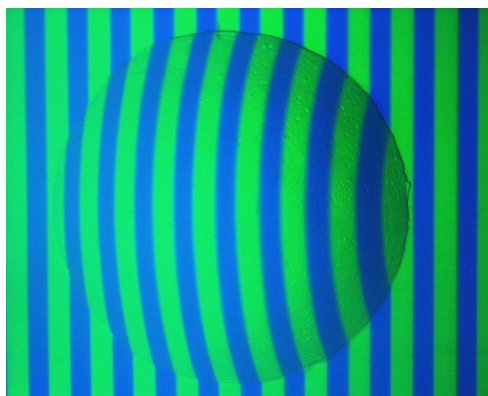


Figura 7.8. Objeto bajo prueba, franjas proyectadas superpuestas en color verde y azul.

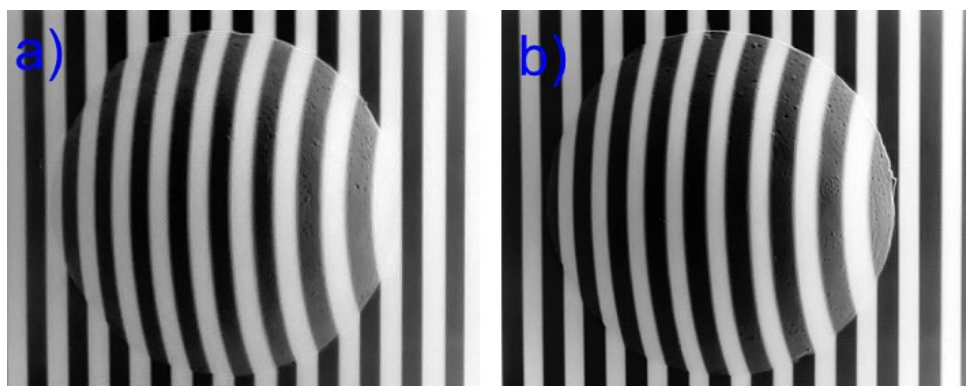


Figura 7.9. Objeto bajo prueba, en su canal, a) verde, b) azul.

Una vez obtenidas las imágenes del objeto con las franjas bicolor proyectadas, se utiliza un algoritmo de separación de las intensidades de las tres capas, para finalmente mantener la información del canal azul y verde de la proyección. Luego, la imagen RGB original, pasa a ser un par de imágenes en escala de grises y el procesamiento que se realiza para la obtención de la fase es igual al descrito en el algoritmo usado en la primera parte de este capítulo. Los dos patrones resultantes de la separación de canales se observan en la Figura 7.9. En la Figura 7.10 se muestran las transformadas de Fourier de ambos patrones.

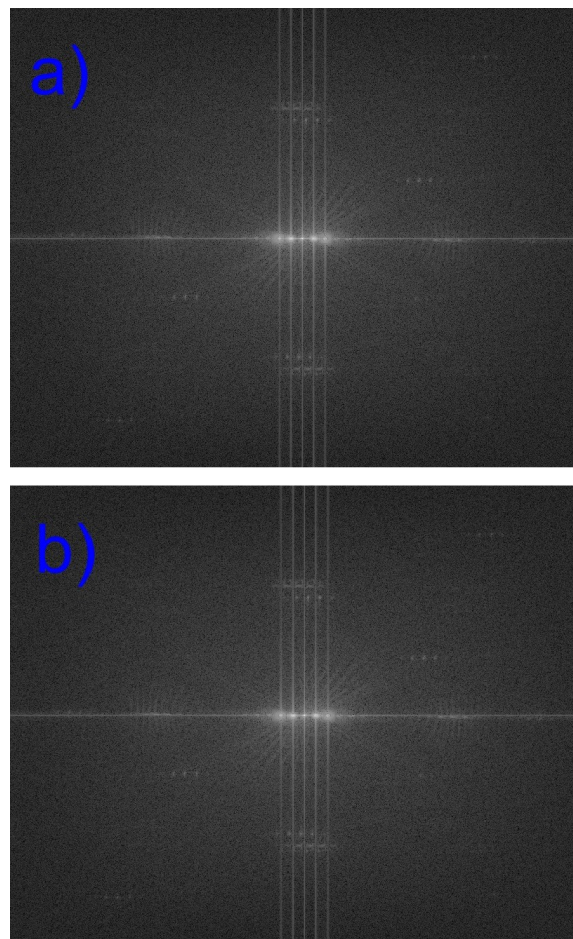


Figura 7.10. Transformada de Fourier de la imagen, a) canal verde, b) canal azul.

Al realizar la resta de los dos patrones, se obtiene un nuevo patrón y al obtener su transformada de Fourier resulta una distribución de frecuencias sin el DC, como se puede apreciar en la Figura 7.11.

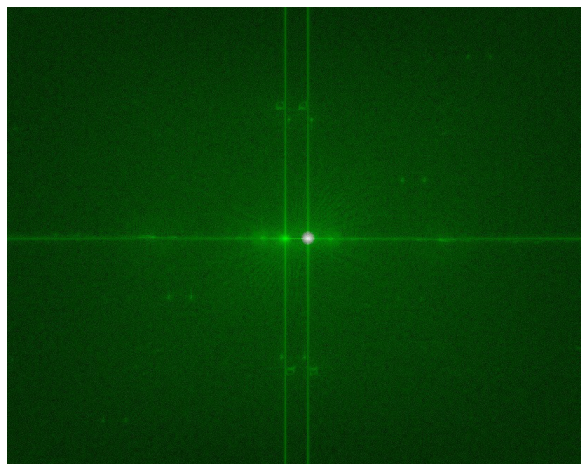


Figura 7.11. Transformada de Fourier del patrón resultante de la resta, entre el patrón de franjas correspondiente al canal azul y el canal verde, con un filtro de radio mayor a la mitad de la separación entre el DC y el primer armónico.

Luego se procedió a realizar el proceso de filtrado con la particularidad de elegir un tamaño en la ventana del filtro considerablemente mayor a la mitad de la separación del primer armónico y el DC. La gráfica para el mapa de fase de este caso, se muestra en la Figura 7.12.



Figura 7.12. Fase desenvuelta para proyección bicolor.

Ahora se puede obtener finalmente la topografía, a partir de la fase envuelta, como se puede ver en la Figura 7.13. Para probar la eficacia de este método, se comparará con un método tradicional muy robusto y que ofrece gran precisión en la obtención de información de altura. El método mencionado es denominado corrimiento de fase o Phase Shifting de cuatro pasos y se analiza en el siguiente experimento.

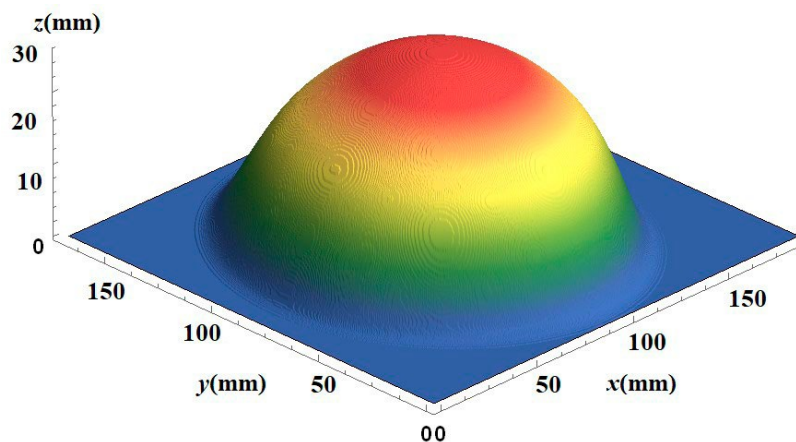


Figura 7.13. Topografía de la semiesfera para proyección de franjas bicolor.

7.3 Experimento 3: Proyección de franjas con desplazamiento de fase

La técnica de corrimiento de fase consiste en proyectar una secuencia de un patrón de franjas en niveles de gris sobre la superficie del objeto, el desplazamiento de fase entre cada patrón de franjas es de $\pi/2$. En la Figura 7.14 se pueden observar las imágenes de los patrones de franjas proyectados sobre la superficie del objeto.

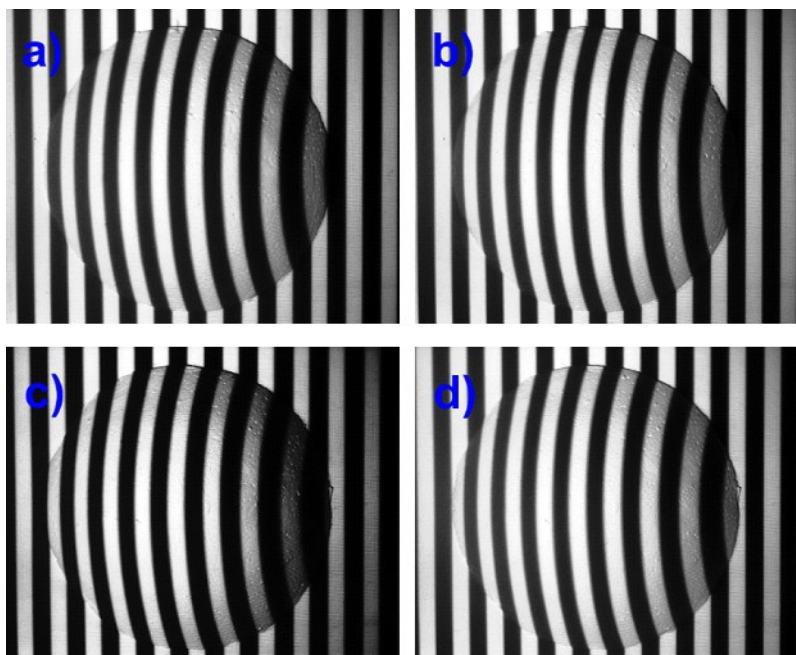


Figura 7.14. Patrones de franjas en escala de grises sobre una semiesfera, desplazados en fase $\pi/2$,
a) 0, b) $\pi/2$, c) π , d) $3\pi/2$.



Figura 7.15. Resultado de la fase desenvuelta para el algoritmo de cuatro pasos.

Después de procesar las imágenes del objeto, se obtuvo la fase envuelta del objeto, utilizando el algoritmo de Phase Shifting para cuatro pasos (ecuación 2.17). La fase desenvuelta es mostrada en la Figura 7.15. Una vez obtenida la fase desenvuelta de las franjas proyectadas sobre la superficie

del objeto, se puede obtener finalmente la topografía de la semiesfera bajo prueba, la cual se presenta en la Figura 7.16.

Para obtener la profundidad del objeto en unidades de longitud, se utilizó la ecuación 2.12, donde se sustituyen los datos del arreglo. La medida de profundidad máxima obtenida a partir de un vernier calibrado fue 3.00 cm. Las mediciones obtenidas del objeto de la Figura 7.16, arrojaron un error máximo de 0.3 mm.

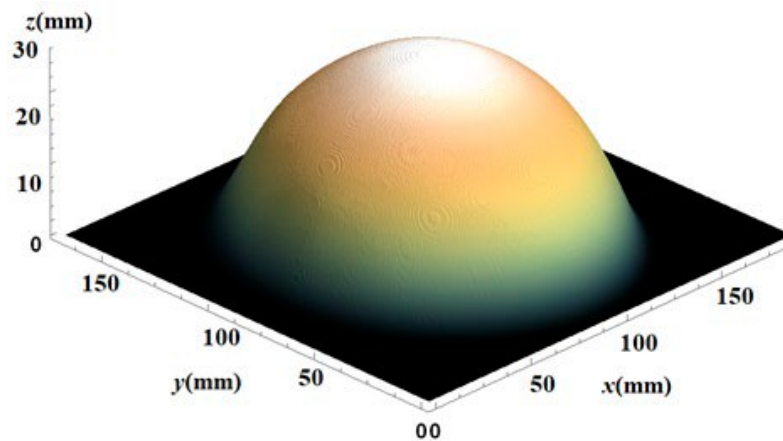


Figura 7.16. Topografía resultante por el método de phase shifting.

Anteriormente se presentó un análisis de las medidas de la topografía del objeto con proyección de franjas de tipo bicolor. Ahora se realiza una comparación entre estas medidas y las medidas de la topografía utilizando corrimiento de fase para cuatro pasos. En la Figura 7.17, se pueden observar los perfiles del mapa de fase del objeto obtenido con el método de única proyección de franjas bicolor y el método de corrimiento de fase.

Por el método de proyección de franjas bicolor se obtuvo que el error máximo es de 0.4 mm, mientras que por corrimiento de fase fue de 0.3 mm. Pero, aunque el error es mayor cuando se proyecta el patrón bicolor, se puede inferir que una ventaja es que se puede implementar en eventos dinámicos usando un algoritmo de Phase Shifting de dos pasos, lo cual no se puede hacer con el método de Phase Shifting de cuatro pasos. Otra ventaja es que ofrece menor error

que el método de Takeda convencional.

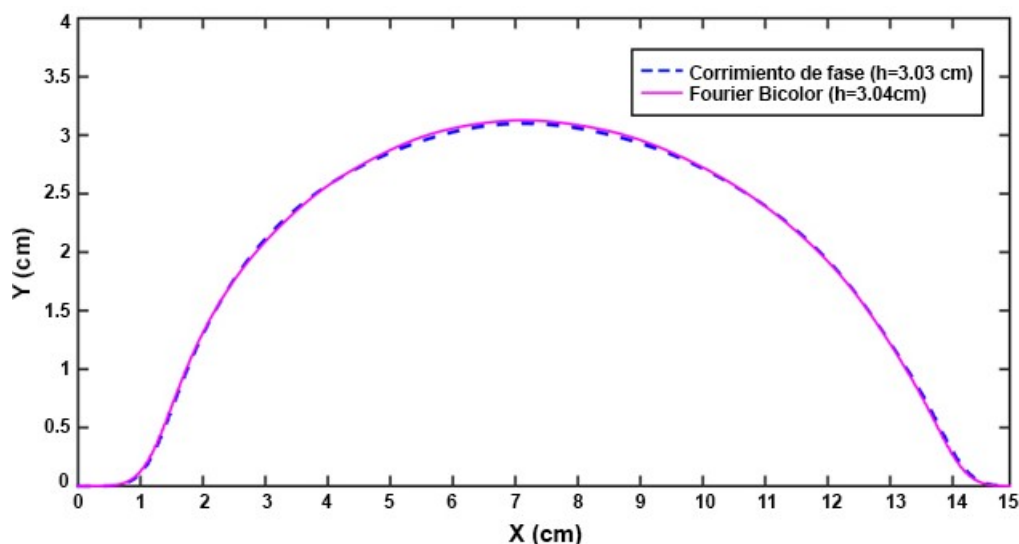


Figura 7.17. Perfil de la fase desenvuelta obtenida por la técnica de desplazamiento de fase y la técnica de Takeda con una única proyección de un patrón bicolor.

7.4 Experimento 4: Proyección simultánea de franjas bicolor en evento dinámico

En la siguiente sección se analiza la técnica de reconstrucción 3D, implementando la proyección de un patrón bicolor sobre un objeto en movimiento. El objeto de análisis es una semiesfera de unicel de altura 2.5 cm y diámetro 4.5 cm, en la parte plana se le ha insertado un pequeño imán como se muestra en la Figura 7.18 (denominado imán 1). Posteriormente el objeto, es colocado en el plano de referencia, para fijarlo a éste se utiliza otro imán (denominado imán 2) de mayores dimensiones donde por atracción entre los imanes el objeto queda adherido a la superficie del plano de referencia. En la Figura 7.18 se puede observar en el lado derecho de la semiesfera el imán 2.



Figura 7.18. Vista posterior del objeto bajo prueba con un imán incrustado.

Debido al peso del imán 2 colocado en la parte trasera del plano de referencia y por efecto de la atracción gravitatoria tiende a desplazarse verticalmente, pero la fuerza de atracción del imán 2 hace que también el objeto de prueba se desplace lentamente sobre el eje vertical. Con ello se podría decir que se tiene un evento dinámico controlado. La velocidad del objeto se puede controlar agregando un imán de mayor o menor dimensión.

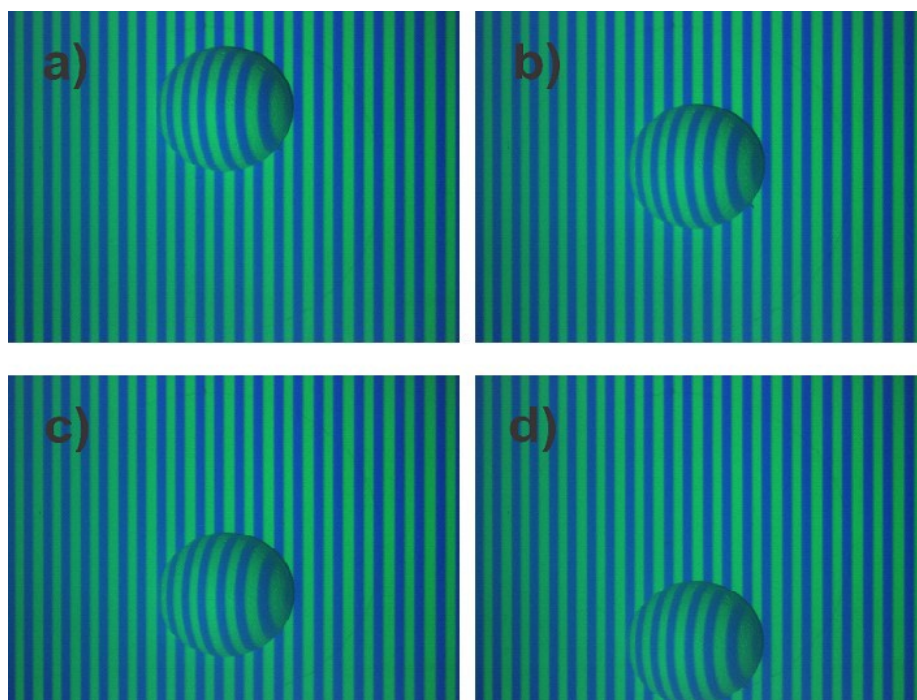


Figura 7.19. Imágenes registradas en evento dinámico, a) evento inicial, b) evento 2, c) evento 3 y d) evento 4.

Durante la trayectoria del objeto se registran algunas de sus imágenes con franjas bicolor sobre su superficie (Figura 7.19).

Una vez que se tiene el patrón proyectado, se procede a analizar el comportamiento de las imágenes de manera similar al realizado en el experimento 2. Se toma en cuenta las capas que forman la imagen utilizando un algoritmo de separación de las intensidades de las tres capas, para obtener dos patrones de interés que contienen la información del canal azul y verde de la proyección. Posteriormente se realiza la resta de ambos patrones para eliminar el término de background y obtener un único patrón, se calcula la transformada de Fourier al patrón de franjas resultante para después aislar el primer armónico con un filtro.

Con la transformada inversa de Fourier del espectro seleccionado se obtiene la fase envuelta, este mismo proceso se realiza para tres posiciones seleccionadas. En la Figura 7.20 se muestra el mapa de fase del objeto bajo prueba en solo tres posiciones durante su movimiento vertical.

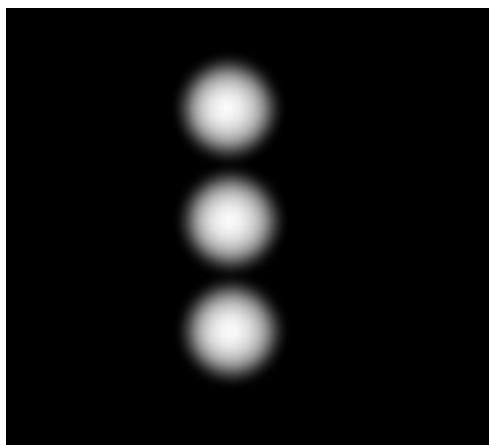


Figura 7.20. Fase desenvuelta en tres posiciones diferentes durante su desplazamiento vertical.

Finalmente, después de aplicar un algoritmo para desenvolver la fase se puede graficar la superficie 3D del objeto de prueba como se muestra en la Figura 7.21. En la Figura 7.22 se muestra la topografía del objeto desde otra perspectiva.

Vale la pena señalar que el algoritmo es simple y rápido en términos computacionales ya que se ocupa la técnica ampliamente estudiada y aplicada, conocida como método de Takeda, y que

como se puede apreciar es aplicable a eventos dinámicos con la precisión obtenida con el método de corrimiento de fase visto en el exprimeto 3 donde fue 3mm de error, pero usando un número menor de imágenes y con mayor precisión que el método de Takeda tradicional el cual va desde 6mm hasta 10mm según sea el tamaño del filtro mientras que implementando franjas de bicolor se obtuvo un error de solo 4mm como se ha mostrado en los experimentos anteriores.

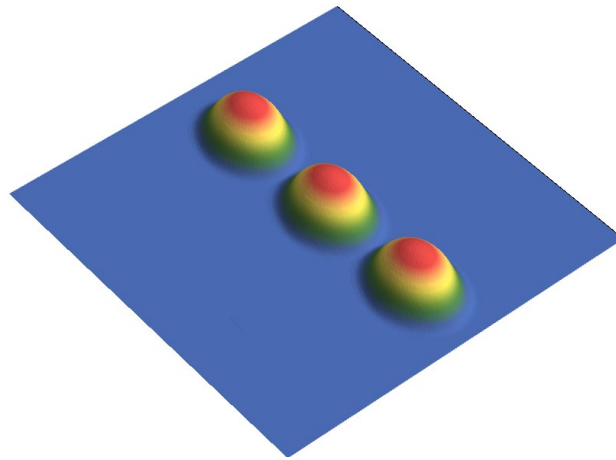


Figura 7.21. Representación tridimensional del objeto de prueba en tres posiciones diferentes, proporcional al mapa de fase obtenido mediante el método de Fourier por proyección de franjas bicolor en un evento dinámico correspondientes al evento a, b y c de la Figura 19.

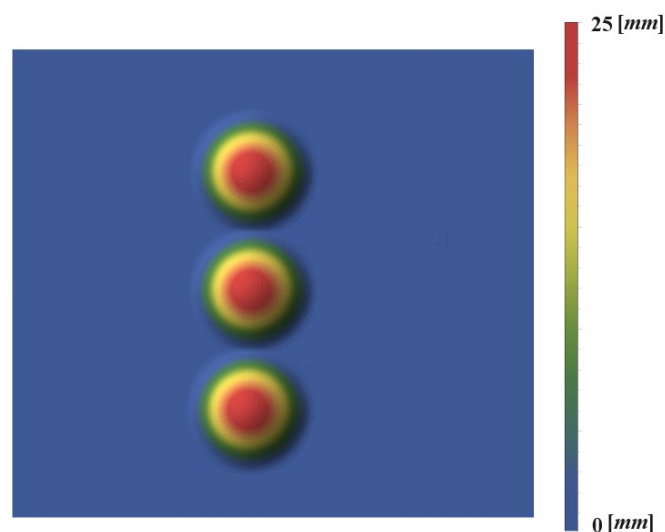


Figura 7.22. Altura de la semiesfera en evento dinámico correspondientes a los eventos a, b y c de la Figura 19.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

El método propuesto cumple con el objetivo de eliminar el ruido de fondo no deseado y poder reconstruir un objeto en su forma tridimensional a partir de una sola imagen con una precisión muy cercana al método de corrimiento de fase, esto lo hace una opción viable para la reconstrucción 3D de objetos que se encuentran en ambientes dinámicos, se describen algunas ventajas de este método propuesto basadas en los resultados:

- Utiliza una sola imagen como entrada, lo que lo hace más simple y eficiente en comparación con el corrimiento de fase que requiere múltiples imágenes.
- En algunos casos, es fundamental trabajar con una sola imagen, especialmente si se está abordando problemas de procesamiento de imágenes en tiempo real o situaciones en las que no se pueden tomar múltiples capturas.
- El corrimiento de fase puede ser más intensivo en términos de recursos computacionales y, a menudo, requiere un mayor procesamiento, en cambio, el método propuesto no requiere un intensivo recurso computacional.
- Dado que el método propuesto se basa en una sola imagen, es menos susceptible a problemas de alineación y calidad de las imágenes de entrada que pueden afectar negativamente a diferencia del corrimiento de fase, que es susceptible a tener problemas de desalineación. Esto lo hace menos dependiente en la calidad de las imágenes

Como posibles desventajas se pueden encontrar:

- La transparencia o translucidez de un objeto puede plantear desafíos en la reconstrucción mediante Fourier optimizada, ya que la transformada puede tener dificultades para representar adecuadamente las propiedades de la luz que atraviesa el objeto.

- La transformada de Fourier puede no ser robusta frente a cambios en la iluminación y las sombras en los objetos.
- La calidad de la imagen original es crucial para una buena reconstrucción mediante Fourier. Imágenes borrosas, con baja resolución o con artefactos pueden resultar en una representación tridimensional menos precisa.
- Sombras intensas en la escena pueden afectar negativamente la reconstrucción mediante Fourier, ya que las variaciones en la intensidad de la luz pueden conducir a información errónea sobre la forma y la estructura de los objetos.

8.1 Trabajos a futuro

Con el método propuesto se logró eliminar el ruido de fondo no deseado y obtener una precisión de reconstrucción 3D muy similar al método de corrimiento de fase. Cabe destacar que en el método propuesto solo se trabajó con franjas en dos canales, G y B.

Se estima que al implementar un tercer canal o múltiples canales, se obtendrá mayor información de la imagen, por lo tanto, el ruido de fondo será eliminado, y la reconstrucción 3D obtendrá una precisión igual al método de corrimiento de fase.

También, se puede implementar una segunda cámara y un segundo proyector, al obtener dos cámaras se captura mayor información del objeto, ya que se capturan múltiples vistas y se reducen los errores de profundidad y al implementar 2 proyectores, se reducen los efectos de sombra dando una mejor resolución a la imagen capturada.

REFERENCIAS

- [1]. Bak, D. (2003). Rapid prototyping or rapid production? 3D printing processes move industry towards the latter. *Assembly Automation*.
- [2]. Dagli, C. H. (Ed.). (2012). *Artificial neural networks for intelligent manufacturing*. Springer Science Business Media.
- [3]. Burdea, G. C., Coiffet, P. (2003). *Virtual reality technology*. John Wiley Sons.
- [4]. Gallo, G., Stanco, F., Battiato, S. (2011). Digital imaging for cultural heritage preservation: analysis, restoration and reconstruction of ancient artworks.
- [5]. Honrado, C. P., Larrabee Jr, W. F. (2004). Update in three-dimensional imaging in facial plastic surgery. *Current opinion in otolaryngology head and neck surgery*, 12(4), 327-331.
- [6]. Sansoni, G., Trebeschi, M., Docchio, F. (2009). State-of-the-art and applications of 3D imaging sensors in industry, cultural heritage, medicine, and criminal investigation. *Sensors*, 9(1), 568-601.
- [7]. Hocken, R. J., Pereira, P. H. (Eds.). (2012). *Coordinate measuring machines and systems* (Vol. 2). Boca Raton: CRC press.
- [8]. Zhang, P., Zhong, K. A. I., Zhongwei, L. I., Xiaobo, J. I. N., Bin, L. I., Congjun, W. A. N. G., Yusheng, S. H. I. (2021). High dynamic range 3D measurement based on structured light: A review. *Journal of Advanced Manufacturing Science and Technology*, 1(2), 2021004-1.
- [9]. Wei, B., Yanjun, F., Kejun, Z., Baiheng, M., Zhanjun, Y. (2022). Rapid 3D measurement of colour objects based on three-channel sinusoidal fringe projection. *Journal of Modern Optics*, 69(13), 741-749.
- [10]. J. H. Bruning, D. R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, D. J. Brangaccio, "Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses", *Applied Optics*, vol 13, pp. 2693-2703, 1974.

- [11]. L. Álvarez, R. Yadira, et al. "Application of the Takeda method and phase shift in the reconstruction of profiles by structured light", *Revista de operaciones tecnológicas*, vol 2, p. 16, 2018.
- [12]. Abdul-Rahman, H. (2007). Three-dimensional Fourier fringe analysis and phase unwrapping. Liverpool John Moores University (United Kingdom).
- [13]. Chen, L. C., Nguyen, X. L., & Ho, H. W. (2008, August). High-speed 3-D machine vision employing Fourier Transform Profilometry with digital tilting-fringe projection. In 2008 IEEE Workshop on Advanced robotics and Its Social Impacts. IEEE.
- [14]. Malacara, Z., & Servin, M. (2018). Interferogram analysis for optical testing. CRC press.
- [15]. Zuo, C., Feng, S., Huang, L., Tao, T., Yin, W., & Chen, Q. (2018). Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review. *Optics and Lasers in Engineering*.
- [16]. Gåsvik, K.J. "Moiré Methods. Triangulation in Optical Metrology, 3rd edition, Chichester, United Kingdom. John Wiley & Sons. Ltd., 2003.
- [17]. Takeda, M. & Mutoh, K. (1983). Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Applied optics*, 22(24), 3977-3982.
- [18]. Zeng, Q., & Shao, S. (2012, May). Fourier transform profilometry using linear CCD array. In 2012 Symposium on Photonics and Optoelectronics. IEEE.
- [19]. Quan, C., Tay, C. J., & Chen, L. J. (2007). A study on carrier-removal techniques in fringe projection profilometry. *Optics Laser Technology*, 39(6), 1155-1161.
- [20]. Gorthi, S. S., Rastogi, P. (2010). Fringe projection techniques: whither we are?. *Optics and lasers in engineering*, 48(2), 133-140.
- [21]. Zhang, Z., Towers, C. E., Towers, D. P. (2006). Time efficient color fringe projection system for 3D shape and color using optimum 3-frequency selection. *Optics express*, 14(14), 6444-6455.

- [22]. Zuo, C., Feng, S., Huang, L., Tao, T., Yin, W., Chen, Q. (2018). Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review. *Optics and lasers in engineering*, 109, 23-59.
- [23]. FLORES ERAÑA, Jesús Gustavo. *Síntesis digital de color utilizando tonos de gris*. 2009.
- [24]. NIE, Dongdong, et al. Optimization based grayscale image colorization. *Pattern recognition letters*, 2007, vol. 28, no 12, p. 1445-1451.
- [25]. ABBADI, N. K. E.; RAZAQ, E. S. Automatic gray images colorization based on lab color space. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 2020, vol. 18, no 3, p. 1501-1509.
- [26]. KEKRE, Hemant B.; THEPADE, Sudeep D. Color traits transfer to grayscale images. En 2008 first international conference on emerging trends in engineering and technology. IEEE, 2008. p. 82-85.
- [27]. Cheng, H. D., Jiang, X. H., Sun, Y., Wang, J. (2001). Color image segmentation: advances and prospects. *Pattern recognition*, 34(12), 2259-2281.
- [28]. Zuo, C., Feng, S., Huang, L., Tao, T., Yin, W., Chen, Q. (2018). Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review. *Optics and lasers in engineering*, 109, 23-59.
- [29]. De la Fraga, L. (2001). *La transformada discreta de Fourier y la transformada rápida de Fourier*.
- [30]. Su, W. H. (2007). Color-encoded fringe projection for 3D shape measurements. *Optics Express*, 15(20), 13167-13181.
- [31]. Qian, J., Feng, S., Li, Y., Tao, T., Han, J., Chen, Q., Zuo, C. (2020). Single-shot absolute 3D shape measurement with deep-learning-based color fringe projection profilometry. *Optics Letters*, 45(7), 1842-1845.
- [32]. Pan, J., Huang, P. S., Chiang, F. P. (2005). Color-coded binary fringe projection technique for 3-D shape measurement. *Optical Engineering*, 44(2), 023606-023606.

- [33]. Pan, J., Huang, P. S., Chiang, F. P. (2004, February). Color-encoded digital fringe projection technique for high-speed 3-D shape measurement: color coupling and imbalance compensation. In *Two-and Three-Dimensional Vision Systems for Inspection, Control, and Metrology* (Vol. 5265, pp. 205-212). SPIE.
- [34]. Jiang, C., Jia, S., Dong, J., Bao, Q., Yang, J., Lian, Q., Li, D. (2015). Multi-frequency color-marked fringe projection profilometry for fast 3D shape measurement of complex objects. *Optics Express*, 23(19), 24152-24162.
- [35]. Huang, P. S., Zhang, C., Chiang, F. P. (2003). High-speed 3-D shape measurement based on digital fringe projection. *Optical engineering*, 42(1), 163-168.
- [36]. Zhang, Z. H., Towers, C. E., Towers, D. P. (2007). Phase and colour calculation in colour fringe projection. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 9(6), S81.
- [37]. Gdeisat, M., Lilley, F. (2011). One-dimensional phase unwrapping problem. *signal*, 4, 6.
- [38]. Cardona Valdez, J. C., Pinedo Vargas, M. E., Arceo Olague, J. G., Saucedo Anaya, T., De la Rosa Vargas, J. I., Olvera Olvera, C. A. (2016). Algoritmo para desenvolvimiento de fase unidimensional partiendo de un interferograma con frecuencia portadora implementado en labview.
- [39]. Novák, J. (2001). Methods for 2-D phase unwrapping in MATLAB. In *Proc. MATLAB 2001* (pp. 313-317). VSCHT Publishing.
- [40]. Ghiglia, D. C., Pritt, M. D. (1998). *Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software*. Wiley-Interscience, first ed. (April 1998).