

***“RECONSTRUCCIÓN 3D A PARTIR DE PATRONES
CONCÉNTRICOS”***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

***MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
ELECTRÓNICA***

PRESENTA:

MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. MARCELINO ANGUIANO MORALES

CHIHUAHUA, CHIH., JUNIO 2025





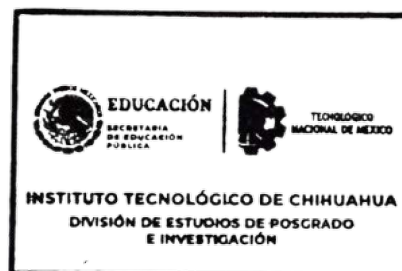
Chihuahua, Chih. **13 de junio de 2025**

**C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA
PRESENTE**

En cumplimiento con los requerimientos para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica y a propuesta de su Comité Tutorial, la División de Estudios de Posgrado e Investigación le concede la autorización para imprimir la tesis titulada **"Reconstrucción 3D a partir de patrones concéntricos"** dirigida por el Dr. Marcelino Anguiano Morales con el siguiente contenido de capítulos:

- I Antecedentes
- II Transformada de Fourier
- III Transformación de coordenadas en imágenes
- IV Patrones concéntricos Bessel
- V Resultados
- VI Conclusiones y trabajo futuro

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
"La Técnica por el Engrandecimiento de México"



LEONCIO OCHOA CERVANTES
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

LOC/adcs



2025
Año de
**La Mujer
Indígena**

Av. Tecnológico #2909 Col. 10 de Mayo
C.P. 31200, Chihuahua, Chihuahua. Tel. (614) 2012000 ext. 2157
e-mail: dir_chihuahua@tecnm.mx tecnm.mx <http://itichihuahua.mx/>





Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Chihuahua, Chih. **11 de junio de 2025**

LEONCIO OCHOA CERVANTES
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
PRESENTE

En cumplimiento con los requerimientos para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le notificamos que el documento de tesis del alumno **C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA**, titulado **"Reconstrucción 3D a partir de patrones concéntricos"** dirigido por el Dr. Marcelino Anguiano Morales, ha sido aprobado y aceptado para su impresión.

Por lo anterior, proponemos le sea concedida la autorización de impresión correspondiente.

Agradeciendo la atención a la presente, quedamos de usted:

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica
La técnica por el Engrandecimiento de México*

DR. MARCELINO ANGUIANO MORALES
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DRA. DIDIA PATRICIA SALAS PEIMBERT
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. GERARDO TRUJILLO SCHIAFFINO
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL

DRA. NADIA TORNERO MARTÍNEZ
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORIAL



Av. Tecnológico #2909 Col. 10 de Mayo
C.P. 31200, Chihuahua, Chihuahua. Tel. (614) 2012000 ext. 2157
e-mail: dir_chihuahua@tecnm.mx [tecnm.mx http://itichihuahua.mx](http://itichihuahua.mx)



2025
Año de
La Mujer
Indígena





CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Chihuahua el día 13 de junio de 2025, el que suscribe, C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA con número de control G23061081, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, adscrita a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del el Dr. Marcelino Anguiano Morales y cede los derechos del trabajo titulado "Reconstrucción 3D a partir de patrones concéntricos", al Tecnológico Nacional de México y/o Instituto Tecnológico de Chihuahua para su difusión, divulgación, transmisión, reproducción, así como su digitalización con fines académicos y de investigación.

C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA





Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

En la ciudad de Chihuahua el día 13 de junio de 2025, el que suscribe, C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, con número de control G23061081, adscrito a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, manifiesta que es autor intelectual de la tesis titulada "Reconstrucción 3D a partir de patrones concéntricos" bajo la dirección el Dr. Marcelino Anguiano Morales; que el contenido es original y que las fuentes de información consultadas para su fundamentación están debidamente citadas y referenciadas.

C. MARIO ALBERTO MARTÍNEZ HERRERA



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Av. Tecnológico #2909 Col. 10 de Mayo
C.P. 31200, Chihuahua, Chihuahua. Tel. (614) 2012000 ext. 2157
e-mail: dir_chihuahua@tecnm.mx tecnm.mx <http://itchiihuahua.mx>



Chihuahua, Chihuahua, junio de 2025

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Directora de SECIHTI

Sirva la presente para saludarla e informarle que a la fecha he obtenido el grado de **Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica** en la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Chihuahua, motivo por el cual agradezco todo el apoyo brindado por este Consejo que usted representa, con el otorgamiento de una beca que permitió dedicarme de manera exclusiva a la realización de mis estudios de posgrado y de esta manera lograr el objetivo principal del convenio establecido.

Sin otro particular quedo a sus órdenes no sin antes reiterar mi agradecimiento.
Atentamente



Mario Alberto Martínez Herrera

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, Maru Herrera, mi padre, Mario Martínez, y mi hermana, Ofelia Martínez, mi más profundo agradecimiento. Su apoyo incondicional y su Fe en mí han sido un gran pilar en mi camino. Les estaré eternamente agradecido.

A mi familia Zaide, Lucy y Curie, gracias por nunca dejarme solo y por impulsarme a seguir adelante en la academia y la ciencia. Cada logro es también suyo.

A mis compañeros y amigos del ITCH, Edgar, Moy y Erick, gracias por hacerme sentir parte de su grupo. Su amistad ha sido un regalo invaluable.

A mis colegas, compañeros de trabajo y amigos de FING UACH, Daniel, Nacho, Toño y Arión, gracias por sus consejos, discusiones y por facilitarme este objetivo. Su apoyo ha sido esencial.

Al personal académico y administrativo de esta institución, Dr. Anguiano, Dr. Trujillo, Dra. Salas, Dra. Tornero, Dr. Corral y M. C. Alma, gracias por su comprensión y disposición. Su ejemplo me inspira a seguir adelante.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento.

RESUMEN

RECONSTRUCCIÓN 3D A PARTIR DE PATRONES CONCÉNTRICOS

Mario Alberto Martínez Herrera

Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica

División de Estudios de Posgrado e Investigación del

Instituto Tecnológico de Chihuahua

Chihuahua, Chih. 2025

Director de Tesis: Dr. Marcelino Anguiano Morales

Durante años recientes la perfilometría por proyección de franjas ha sido una de las áreas de investigación más activas dentro de la metrología óptica. En las últimas décadas una gran cantidad de métodos de análisis se han desarrollado. En dicha técnica se hace incidir un patrón de luz estructurada sobre un objeto para, a través del registro de una imagen y su procesamiento, reconstruir la distribución de alturas de la superficie del objeto.

Debido a la baja dependencia de su precisión de medición con respecto de la frecuencia de las franjas y de los algoritmos de desenvolvimiento de fase, la perfilometría de proyección de franjas concéntricas ha emergido como alternativa a las franjas lineales regularmente usadas.

La presente investigación plantea reconstruir la distribución topográfica de la superficie de objetos a través del patrón de franjas concéntricas proyectado por un arreglo con una fuente láser y una lente cónica. Tal arreglo proyecta un perfil de intensidad asociado a un haz del tipo Bessel o Bessel-Gauss, el cual, cuenta con un punto de luz central (spot) y un patrón de anillos concéntricos a él.

El arreglo experimental permite la capacidad de modular el patrón de franjas concéntricas mencionado para reconstruir las alturas y detalles de las superficies de objetos en diferentes órdenes de magnitud.

ABSTRACT

3D RECONSTRUCTION FROM CONCENTRIC PATTERNS

Mario Alberto Martínez Herrera

Master of Science in Electronic Engineering

Division of Postgraduate Studies and Research of

Instituto Tecnológico de Chihuahua

Chihuahua, Chih. 2025

Thesis Supervisor: Dr. Marcelino Anguiano Morales

Nowadays, fringe projection profilometry has become one of the most active areas in optical metrology. Over the last decades, a wide variety of methods and analysis have been developed. In this metrology technique, a structured light pattern is projected onto an object. By capturing its image and performing subsequent digital processing, a 3D reconstruction of the object's height distribution is obtained.

Due to its low dependence on precision with respect to fringe frequency and algorithms for phase unwrapping, concentric fringe projection profilometry has emerged as an alternative to common linear fringe techniques.

The current research proposes to reconstruct the topographic distribution of object surfaces using a concentric fringe pattern generated by an experimental setup consisting of a laser source and a conical lens. This setup projects a Bessel or Bessel-Gauss intensity profile, which features a central spot and a pattern of concentric rings.

The experimental setup allows for the capacity to modulate the concentric fringe pattern to reconstruct surface details in different orders of magnitude of heights.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABLAS	xi
INTRODUCCIÓN	1
I. ANTECEDENTES	3
1.1. Triangulación	3
1.2. Patrones de franjas lineales	5
1.2.1. Proyección del patrón de franjas	8
1.3. Sensibilidad de la fase en la FPP	10
1.4. Perfilometría de proyección de franjas circulares	12
II. TRANSFORMADA DE FOURIER	20
2.1. Transformada continua de Fourier	21
2.2. Transformada discreta de Fourier	22
2.3. Transformada rápida de Fourier	23
2.4. Método de Takeda	25
III. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS EN IMÁGENES	31
3.1. Muestreo y cuantización	31
3.2. Representación de imágenes digitales	33
3.3. Interpolación	34
3.4. Transformaciones de coordenadas	37
3.4.1. Transformaciones entre coordenadas rectangulares y polares	37
IV. PATRONES CONCÉNTRICOS BESSEL	41
4.1. Haz Bessel	41
4.2. Axicons	43
4.3. Propiedades de los haces Bessel	44

4.4. Patrones concéntricos con perfil Bessel	45
V. RESULTADOS	47
5.1. Software implementado	47
5.2. Hardware empleado	47
5.3. Metodología experimental	47
5.4. Otras reconstrucciones	55
VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	57
6.1. Conclusiones y discusiones	57
6.2. Trabajo futuro	58
REFERENCIAS	59

LISTA DE FIGURAS

1.1. Diagrama esquemático de un arreglo de triangulación de ejes ópticos paralelos [1].	4
1.2. Diagrama de arreglo físico de ejes ópticos cruzados (izquierda) y paralelos (derecha) [3].	6
1.3. Patrón de franjas proyectado y deformado (izquierda), y reconstrucción de perfiles del objeto para distintas secciones transversales (derecha) [3].	7
1.4. Arreglo óptico del interferómetro de Michelson (izquierda) y arreglo para la adquisición (derecha) [6].	8
1.5. Arreglo óptico del interferómetro de Mach-Zehnder (izquierda) y arreglo para la adquisición (derecha) [6].	9
1.6. Arreglo experimental para el proyector de franjas en (izquierda) y patrón de franjas proyectado sobre un objeto (derecha) [7].	9
1.7. Arreglo para la proyección de franjas por interferencia de doble rendija [8]. . .	10
1.8. Análisis de la reconstrucción con proyección de franjas (de arriba a abajo) horizontales (a), verticales (b), a inclinación cuasi-óptima (c) y circulares óptimas (d); y (de izquierda a derecha) su imagen adquirida, su mapa de fase desenvuelta, la reconstrucción del objeto y su perfil de línea horizontal en $v=266$ [9].	11
1.9. Arreglo óptico de adquisición con lente telecéntrica con ejes ópticos coincidentes (izquierda) y uno de los objetos representativos a reconstruir (derecha) [11].	13
1.10. Diagrama experimental para mediciones con lente telecéntrica (izquierda) y arreglo experimental (derecha) [9].	14
1.11. Diagrama experimental para mediciones fuera de plano (izquierda) y arreglo experimental para proyección de franjas circulares con rejilla de Ronchi (derecha) [14].	15
1.12. Algoritmo para CFFTP [16].	17

1.13. Reconstrucción 3D de R. Goushi, et al, para diferentes planos. (a) Etiquetado de los planos, (b) Proyección de franjas circulares sobre los planos, (c) Mapa de fase de los planos y (d) Reconstrucción de la topografía [18].	18
2.1. Señal $g(x) = 4 + 3 \cos [2\pi(2x)] + 2 \cos [2\pi(4x)] + \cos [2\pi(6x)]$	24
2.2. Espectro de amplitud de la señal ejemplo.	25
2.3. Simulación de adquisición de la imagen de un patrón de franjas deformado por un objeto. Imagen normalizada de 128×128 píxeles con franjas de periodicidad de 8 píxeles.	26
2.4. Espectro de Fourier de la imagen mostrada en la Figura 2.8.	27
2.5. Perfil del espectro de Fourier.	27
2.6. Mapa de fase envuelta.	28
2.7. Perfil del mapa de fase envuelta en el centro de la misma.	28
2.8. Mapa de fase desenvuelta.	29
2.9. Perfil del mapa de fase desenvuelta en el centro de la misma.	29
2.10. Mapa de fase del objeto del registro de imagen simulado en la Figura 2.3. . . .	30
3.1. Ejemplo de muestreo y cuantización de una imagen digital.	32
3.2. Perfil de línea horizontal de la mitad de la imagen digital ejemplo.	32
3.3. Representación matricial de la imagen de la Figura 3.1.	33
3.4. Superficie generada por la función $g(x,y)$ de la imagen de la Figura 3.1.	34
3.5. Tipos de interpolaciones: (a) Imagen a interpolar e interpolaciones (b) proximal, (c) bilineal y (d) bicúbica.	36
3.6. Representaciones esquemáticas de las transformaciones entre coordenadas rectangulares (izquierda) y polares (derecha).	39
3.7. Representaciones esquemáticas la transformación de un patrón de franjas circulares (izquierda) en uno de franjas lineales (derecha).	40
3.8. Perfiles de línea de los patrones en (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = \pi/4$ y (c) $\theta = \pi/2$	40

4.1. a) Funciones Bessel de orden 0, 1 y 2. Intensidades normalizadas de haces Bessel b) de orden 0, c) orden 1 y d) orden 2	42
4.2. Diagrama esquemático de la autointerferencia debido a una lente cónica	43
4.3. (a) Comparación entre las funciones $J_0^2(x)$ y $(1 + \sin 2x)\pi x$ y (b) su diferencia absoluta.	46
5.1. Diagrama esquemático del experimento para la proyección de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss.	48
5.2. Arreglo experimental para la generación de un patrón de intensidades Bessel-Gauss (a), arreglo experimental para la generación de imagen sobre la pantalla y su posterior registro (b) y objetos de prueba comparadas con la medición de un vernier (c).	49
5.3. Registros de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss. Registro de referencia (a) y deformados por objeto (b).	50
5.4. Región asintótica de los registros de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss. Registro de referencia (a) y deformados por objeto (b).	50
5.5. Transformación de coordenadas de las franjas de referencia (a), las deformadas (b) además de sus fases envueltas asociadas (c) y (d), respectivamente	51
5.6. Transformada de Fourier de las franjas, deformadas por la semiesfera, en coordenadas polares.	51
5.7. Diferencia de fase en coordenadas polares (a) y rectangulares (b).	52
5.8. Reconstrucción 3D de la semiesfera (a) y los perfiles alturas en la posición de la altura máxima horizontal (b) y vertical (c). En rojo, el perfil asociado a la reconstrucción y en azul, el asociado al modelado 3D del objeto real. Coordenadas en mm	53
5.9. Reconstrucción 3D de la semiesfera. Coordenadas en mm	54
5.10. Error absoluto de la medición. Coordenadas en mm	54
5.11. Registro de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss con sólo tres franjas sobre el objeto (a) y la diferencia de fase de dichas franjas (b).	55

5.12. Reconstrucción 3D de la semiesfera con un patrón de franjas menos frecuente.	
Coordenadas en mm.	56
5.13. Reconstrucción 3D de la semiesfera con un patrón menos frecuente (a) y los perfiles alturas en la posición de la altura máxima horizontal (b) y vertical (c). En rojo, el perfil asociado a la reconstrucción y en azul, el asociado al modelado 3D del objeto real. Coordenadas en mm	56

LISTA DE TABLAS

1.1. Desviación estándar de la profundidad de un perfil de línea horizontal en $v=266$ [9].	12
1.2. Comparativa del RMSE normalizado. Mediciones en mm [15].	15
5.1. Distancias entre objetos ópticos en experimento.	48

INTRODUCCIÓN

La perfilometría óptica es una tecnología que adquiere información de la geometría de una superficie sin tocarla físicamente. Sus campos de aplicación rondan desde el diagnóstico médico y la industria alimentaria hasta la preservación cultural y el entretenimiento. Sin embargo, su potencial dista mucho de ser alcanzado, en parte, debido al bajo nivel de madurez tecnológica actual.

La perfilometría por proyección de franjas (FPP por sus siglas en inglés) es una técnica que se centra en la determinación de la distribución de fase bidimensional a partir de un patrón de franjas cuya fase está modulada por las magnitudes físicas a medir. La FPP, como tecnología óptica de medición tridimensional (3D), presenta ventajas como su alta precisión, la ausencia de contacto y el campo completo.

Existen diferentes técnicas de análisis en la FPP, la transformada de Fourier es una de ellas. Dicha técnica es adecuada para fenómenos rápidos y cuyo entorno es inestable, ya que sólo necesita de un interferograma para demodular la distribución de fase desconocida. No obstante, el principal problema que se presenta al analizar por transformada de Fourier los patrones de franjas registrados es la etapa de filtrado, ya que induce errores en la medición del mapa de fase en caso de haber registrado un patrón de franjas lineales de baja frecuencia. A fin de sortear este problema, se pretende proyectar una geometría diferente a la de las franjas lineales para analizar la viabilidad de disminuir tales errores.

Una alternativa es usar patrones de franjas cerradas, sin embargo, para interferogramas de franjas cerradas, la obtención de la amplitud de franja compleja es complicado mediante el uso del método de transformada de Fourier ya que los espectros de Fourier no están completamente separados. Con la finalidad de poder aplicar el método tradicional de transformada de Fourier, es posible la ejecución de una transformación de coordenadas a las imágenes registradas para así procesar el interferograma como franjas abiertas. Un ejemplo de ello son los patrones circulares concéntricos que, a través de una transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, es posible transformarlos a patrones lineales.

El generar patrones de franjas circulares sintéticos mediante un algoritmo numérico no es problemático, sin embargo, mediante interferometría es menos simple. Generalmente, en un

interferómetro de Michelson se utiliza un haz gaussiano para generar un patrón de franjas concéntricas. El haz gaussiano sufre una difracción significativa en su propagación lo que repercute en el tamaño del patrón de interferencia generado, el cual, al ser demasiado grande no permite realizar mediciones precisas en objetos de dimensiones pequeñas.

En este trabajo se implementa la generación de un patrón de franjas concéntricas a partir de una única lente cónica, de forma que sobrepasa en simplicidad a un arreglo interferométrico regular el cual requiere de un número mayor de elementos ópticos. El patrón generado por una lente cónica usualmente se conoce como haz Bessel y pertenece a la familia de campos ópticos adifraccionales.

El contenido de esta tesis se encuentra estructurado de la siguiente manera: En el Capítulo I se muestran algunos antecedentes y resultados de la perfilometría por proyección de franjas, desde la propuesta del método de Takeda et al hasta la comparativa entre geometrías de las franjas proyectadas. En el Capítulo II se abordan las bases matemáticas de la Transformada de Fourier y el método de extracción de fase de Takeda. En el Capítulo III, se desarrolla el cómo se adquieren y representan las imágenes digitales, además de, el cómo una transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares afecta a los patrones de concéntricos. En el Capítulo IV, se establece la geometría de un patrón de luz estructurada con franjas concéntricas generadas por una lente cónica y su consecuente transformación de coordenadas y facilitar un posterior análisis en el dominio de las frecuencias con la transformada de Fourier. Para, ulteriormente, en el Capítulo V presentar la metodología y los resultados asociados a la reconstrucción 3D de objetos a partir de los patrones concéntricos generados por una lente cónica, así como algunas discusiones asociadas y el trabajo futuro a investigar en el Capítulo VI.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

La perfilometría por proyección de franjas es un método óptico para la reconstrucción del perfil 3D de objetos. En dicha técnica, se hace incidir un perfil de haz de luz estructurada sobre un objeto de reflexión difusa cuya forma tridimensional quiere determinarse, luego, una cámara orientada oblicuamente registra la imagen. Las variaciones de alturas del objeto modulan el patrón de franjas, modificando así, la distribución de fase del mismo. Dicha modulación de fase puede cuantificarse calculando la distribución de fase subyacente del patrón de imagen adquirida.

Diversos patrones de luz estructurada como lineales, triangulares, hexagonales o diente de sierra han sido usados. Igualmente, diferentes algoritmos como el de transformada de Fourier, desplazamiento de fase y transformada wavelet se han implementado para lograr extraer el mapa de fase de los patrones. Debido a que requiere de una sola imagen para recuperar la fase mencionada, la técnica de transformada de Fourier ha sido el método más usado.

Asimismo, la fase obtenida a través de la transformada de Fourier está envuelta en la rama principal de la función $\tan x$ es decir, $x \in [-\pi, \pi]$. Para desenvolver la fase, se han desarrollado varios algoritmos como *Branch Cut*, Goldstein, *Discontinuity Minimization*, entre otros. Entre los algoritmos de desenvolvimiento existentes, Goldstein es el método preferido debido a su baja complejidad computacional y mayor velocidad de desenvolvimiento.

1.1 Triangulación

Un esquema de arreglo experimental de triangulación entre una cámara y un sistema de proyección es mostrado en la Figura 1.1. El centro de la pupila de salida O_p del sistema de proyección y el centro de la pupila de entrada O_c de la cámara están alejados una distancia $\overline{O_c O_p} = d$ y pertenecen a un plano alejado una distancia L del plano de referencia $h = 0$ en el cual se encuentra el objeto.

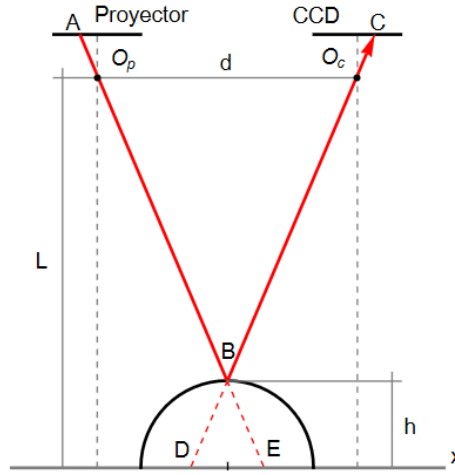


Figura 1.1. Diagrama esquemático de un arreglo de triangulación de ejes ópticos paralelos [1].

Sobre el objeto, B denota un punto, con altura h con respecto del plano, en el cual incidió luz. Similarmente, E denota un punto de incidencia sobre la pantalla en el caso de no tener un objeto y D , un punto de virtual emisión el cual llegó a la cámara. Note que los triángulos $\Delta O_p B O_c$ y $\Delta D B E$ son triángulos semejantes, es decir,

$$\frac{\overline{DE}}{h} = \frac{d}{L - h},$$

y por tanto

$$h = \frac{\overline{DE}}{d + \overline{DE}} L. \quad (1.1)$$

De tal manera que si de alguna forma se logra determinar $\overline{DE}$ es posible encontrar la altura h de cualquier punto y por tanto la topografía del objeto. Para ello, un sistema de proyección basado en franjas lineales es usado regularmente, en cual la distancia en cuestión está asociada a la diferencia de fase de las franjas, con objeto y sin objeto, en las imágenes registradas por la cámara.

Note que existen cuatro disposiciones diferentes de sistema de triangulación que conservan la distancia d y L intacta, es decir, según la orientación de sus ejes ópticos: Ejes ópticos paralelos, eje óptico del sistema de proyección inclinado, eje óptico del sistema de registro (cámara CCD) inclinado y ambos ejes ópticos inclinados. Al proyectar un patrón de franjas lineales sobre el plano de referencia, para los casos en los que el eje óptico del sistema de proyección sea

normal al plano de referencia, el periodo p de las franjas permanece constante en todo el plano, caso contrario a un arreglo en el que el eje óptico no esté normal al plano, el periodo toma la estructura $p = p(x)$ [1]. En las técnicas de FPP la distancia $\overline{DE}$, ante mencionada, es recuperada a través de la fase de las franjas proyectadas y registradas por la cámara CCD.

1.2 Patrones de franjas lineales

La proyección de franjas verticales, horizontales u oblicuas, con perfil sinusoidal, son las más usuales en la literatura. Por ejemplo, un patrón de franjas lineales típico y frecuencia f_L tiene la forma

$$I_L^{(r)}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_L x], \quad (1.2)$$

el cual, corresponde a las variaciones de intensidad del patrón de referencia y, $a(x, y)$ y $b(x, y)$ representan la intensidad no uniforme de la luz del fondo y de la reflexión difusa en el objeto, respectivamente.

El patrón de franjas lineales deformado y registrado por la cámara tiene la forma de

$$I_L^{(d)}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_L x + \phi(x, y)], \quad (1.3)$$

donde $\phi(x, y)$ es el término de fase introducido por la distribución de alturas del objeto y por tanto contiene la información asociada a la forma del objeto bajo prueba.

En la perfilometría por transformada de Fourier de franjas lineales (LFFTP por sus siglas en inglés), el patrón de franjas deformado es transformado al dominio de las frecuencias. A continuación, una región de interés del espectro de Fourier es filtrada y transformada de forma inversa al dominio inicial (espacial o temporal), para posteriormente aplicar un algoritmo de desenvolvimiento sobre el mapa de fase envuelto calculado y así, recuperar la fase original.

Los términos r , d y L , en las ecuaciones (1.2) y (1.3) aluden a referencia, deformado y lineal, respectivamente.

A principios de los años 80's, Takeda, et al, proponen y validan el método de análisis de tales patrones de franjas con la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) [2]. A partir de un interferómetro de Michelson con una fuente láser He-Ne y un arreglo óptico constituido por un sensor de estado sólido Reticon RL1024H (1024 fotodiodos separados a 15

μm de distancia), proyectan y registran un patrón de 15.3 mm de diámetro con frecuencia $f_0 = 3$ líneas/mm.

Asimismo, en [3] analizan dos arreglos ópticos para la adquisición de patrones deformados y el rango máximo de medición de alturas de un objeto. La diferencia entre los arreglos mostrados en la Figura 1.2 recae en la orientación de sus ejes ópticos. En el arreglo del lado izquierdo, el proyector y la cámara pertenecen al mismo plano y sus ejes ópticos del proyector $\overline{E'_p E_p}$ y $\overline{E'_c E_c}$, respectivamente, se cruzan en algún punto del plano de referencia R . Por lo contrario, en el arreglo del lado derecho, los ejes ópticos son paralelos entre sí.

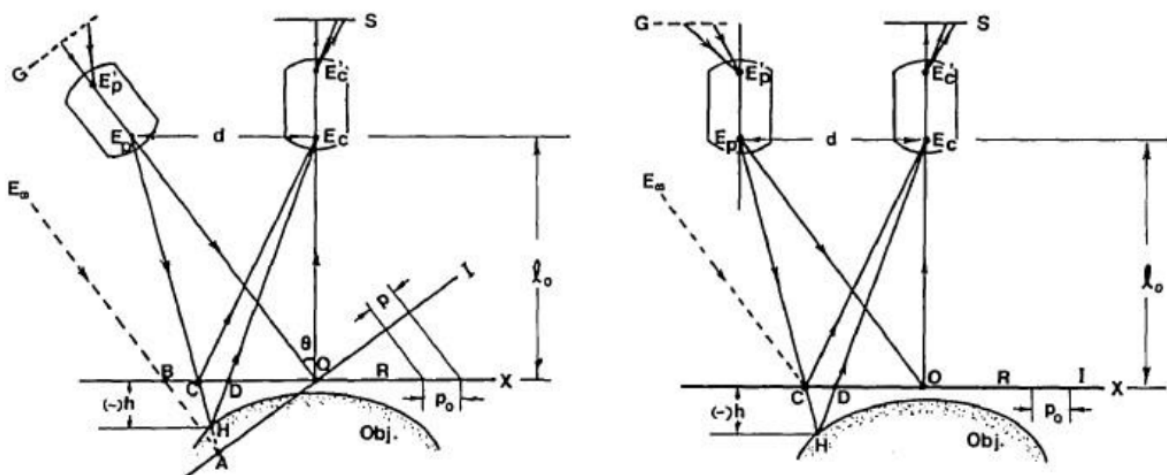


Figura 1.2. Diagrama de arreglo físico de ejes ópticos cruzados (izquierda) y paralelos (derecha) [3].

Luego, con un proyector de diapositivas 300 W y una lente de distancia focal de 85 mm, proyectan una rejilla de Ronchi de 150 líneas/mm y registran la imagen con una cámara C-1000 Hamamatsu con lente de 55 mm, logrando reconstruir el perfil de un objeto estableciendo una relación entre sus alturas y la distribución de fase del patrón (Figura 1.3). Concluyendo, se discute la aplicación del criterio práctico de la medición máxima de las pendientes sobre la superficie de un objeto, siendo esta menor a $l_0/3d$ según la nomenclatura en la Figura 1.2.

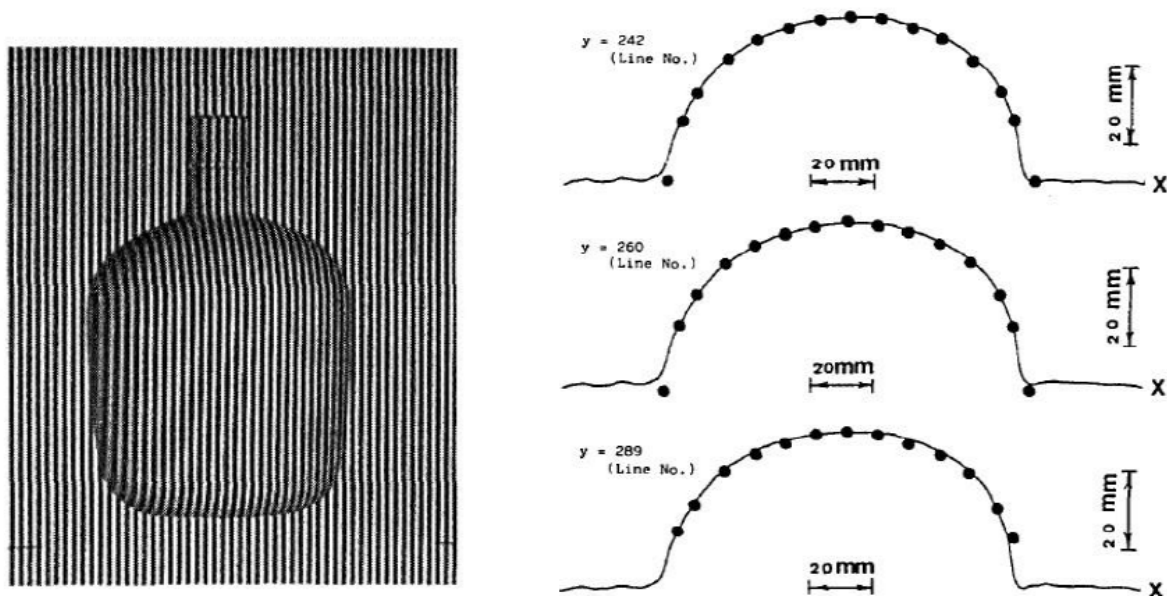


Figura 1.3. Patrón de franjas proyectado y deformado (izquierda), y reconstrucción de perfiles del objeto para distintas secciones transversales (derecha) [3].

Según una revisión del estado del arte hecha por Gorthi y Rastogi [4], los desarrollos en las técnicas de proyección de franjas pueden ser categorizados por:

- Estructura del patrón.
- Métodos de generación del patrón.
- Errores producidos por la instrumentación y su corrección.
- Desarrollo de nuevos métodos de extracción de fase.
- Mejora de los métodos existentes.
- Algoritmos de desenvolvolvimiento de fase.
- Técnicas de calibración.
- Escala del objeto.
- Estado del objeto (estático o dinámico).
- Aplicaciones.

1.2.1 Proyección del patrón de franjas

En cuanto a los métodos de generación del patrón de franjas se encuentran: La proyección de luz estructurada con un proyector de cristal líquido (proyector LCD por sus siglas en inglés) o similares, la proyección de la imagen de una rejilla o los métodos interferométricos.

A pesar de que los proyectores constituidos por microespejos (DMD por sus siglas en inglés) han presentado una mejora sustancial en la proyección de diferentes formas en el patrón, el uso de fuentes de luz coherentes presenta ventajas sobre los primeros dos debido a su alta precisión y su capacidad de hacer mediciones de campo completo, como mencionan J. I. Harizanova, et al, [5].

Además J. I. Harizanova, et al [6], presentan dos arreglos experimentales para la proyección de franjas sinusoidales. El primero, a partir del patrón de interferencia de un interferómetro de Michelson con un láser He-Ne, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, y un cerámico del tipo piezoeléctrico en uno de los espejos para el control optoelectrónico del sistema (Figura 1.4).

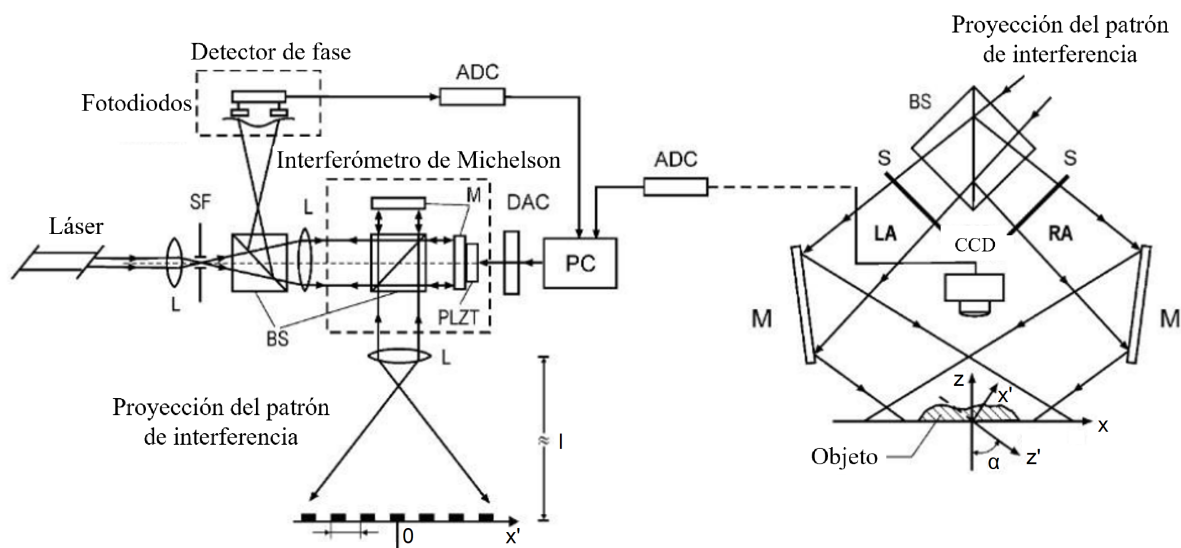


Figura 1.4. Arreglo óptico del interferómetro de Michelson (izquierda) y arreglo para la adquisición (derecha) [6].

Y el segundo, a través del patrón de interferencia generado por un interferómetro de Mach-Zehnder con una fuente láser de Ar^+ con $\lambda = 488 \text{ nm}$ (Figura 1.5). Obteniendo, al comparar las

medidas reales y las experimentales de ambas técnicas, un error por debajo de $\pm 3\%$.

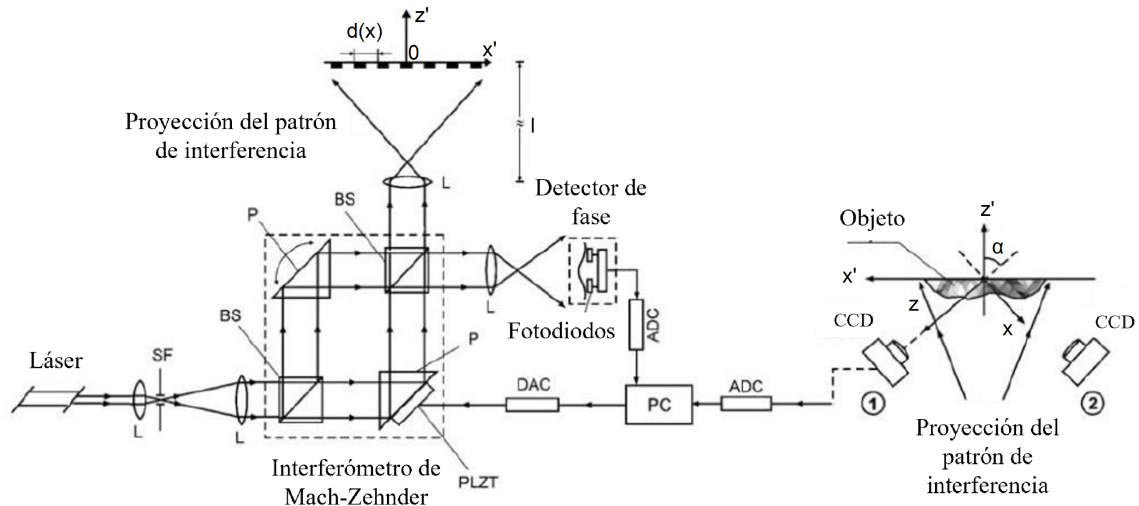


Figura 1.5. Arreglo óptico del interferómetro de Mach-Zehnder (izquierda) y arreglo para la adquisición (derecha) [6].

Igualmente E. B. Li, et al [7]; haciendo uso de un diodo láser de 10 mW a 670 nm y dos moduladores opto-acústicos (AOM por sus siglas en inglés) generan un patrón de interferencia modulado controlando la diferencia de frecuencias entre las señales de radio frecuencia en los AOM (Figura 1.6).

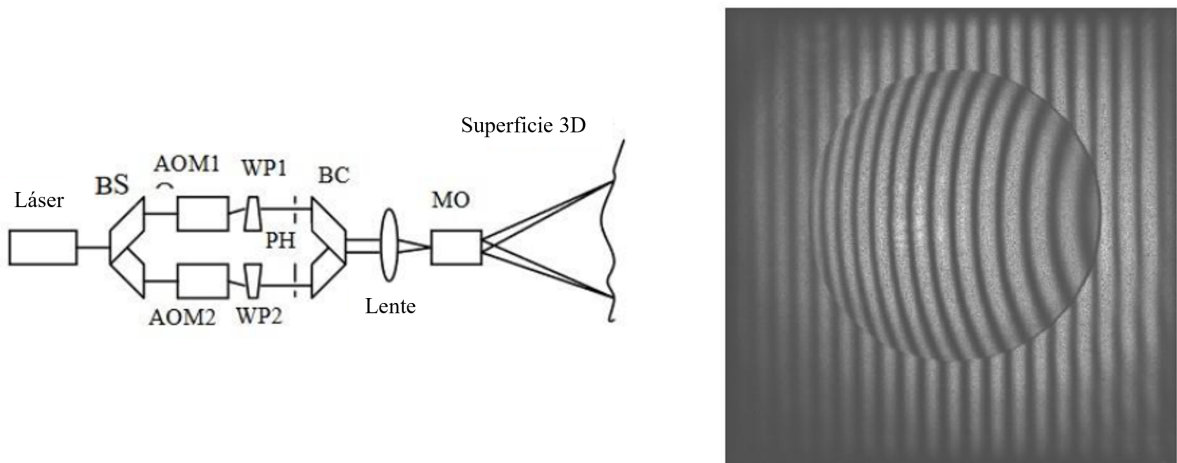


Figura 1.6. Arreglo experimental para el proyector de franjas en (izquierda) y patrón de franjas proyectado sobre un objeto (derecha) [7].

Sin embargo, la interferometría no está exenta de problemas. El problema principal es la robustez y precisión con la que se deben armar los arreglos ópticos. T. L. Pennington, et al [8], proponen un arreglo interferométrico compacto mediante acoplamiento de doble rendija a una fibra óptica alimentada por un láser de 633 nm ó 830 nm (Figura 1.7), en el que reportan un error cuadrático medio del 1.5 % de la profundidad del objeto de análisis, además de ahondar en la dependencia del error de medición con respecto del ángulo entre los ejes ópticos de la cámara y el de la fibra.

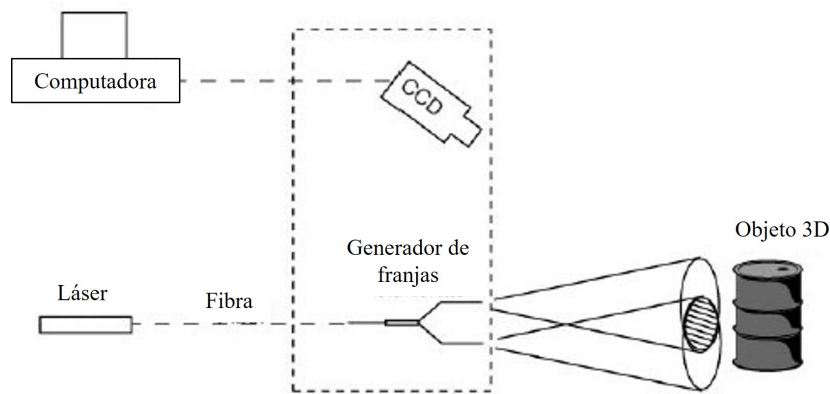


Figura 1.7. Arreglo para la proyección de franjas por interferencia de doble rendija [8].

1.3 Sensibilidad de la fase en la FPP

En general, los vectores de sensibilidad son útiles para comprender cómo varían las franjas de interferencia en respuesta a cambios en los parámetros del sistema. En arreglos fuera de plano, es decir, cuando las superficies no están perfectamente alineadas, los vectores de sensibilidad pueden ayudar a determinar cómo estas desalineaciones afectan la forma y la intensidad de las franjas proyectadas. En el caso de arreglos dentro del plano, donde las superficies están perfectamente alineadas, los vectores de sensibilidad puede ser útiles para comprender inclusive como la longitud de onda de la luz o las propiedades ópticas de los materiales podrían afectar a la formación del patrón de franjas , y por tanto a la fase.

Zhang, et al, [9] hacen un estudio geométrico de la sensibilidad $S = \Delta\phi/\Delta h$ (donde ϕ es la fase de las franjas y h la profundidad de cada punto del objeto) en la reconstrucción. Partiendo de un análisis de un sistema basado en el principio de triangulación con geometría epipolar

lograron determinar la dependencia de la sensibilidad en los siguientes factores: Distancias focales de las lentes y distancia lateral de cámara y proyector, así como, los parámetros de las franjas como frecuencia y dirección, e inclusive, mostrando una sensibilidad diferente para diferentes pixeles de la adquisición.

Desde tal perspectiva geométrica, encuentran que, en general, la sensibilidad máxima posible se obtiene para franjas circulares centradas en el epipolo y comparan con el comportamiento mostrado para franjas horizontales, verticales y a una inclinación cuasi-óptima dada. También, con un proyector LCD HITACHI HCP-3250X y una cámara VT Stingray F-125B (ambos de 1024×768 pixeles) con una lente de distancia focal de 12 mm prueban experimentalmente sus resultados (Figura 1.8) obteniendo una desviación estándar, para cada patrón (en un perfil de línea específico de la imagen), mostrada en la Tabla 1.1.

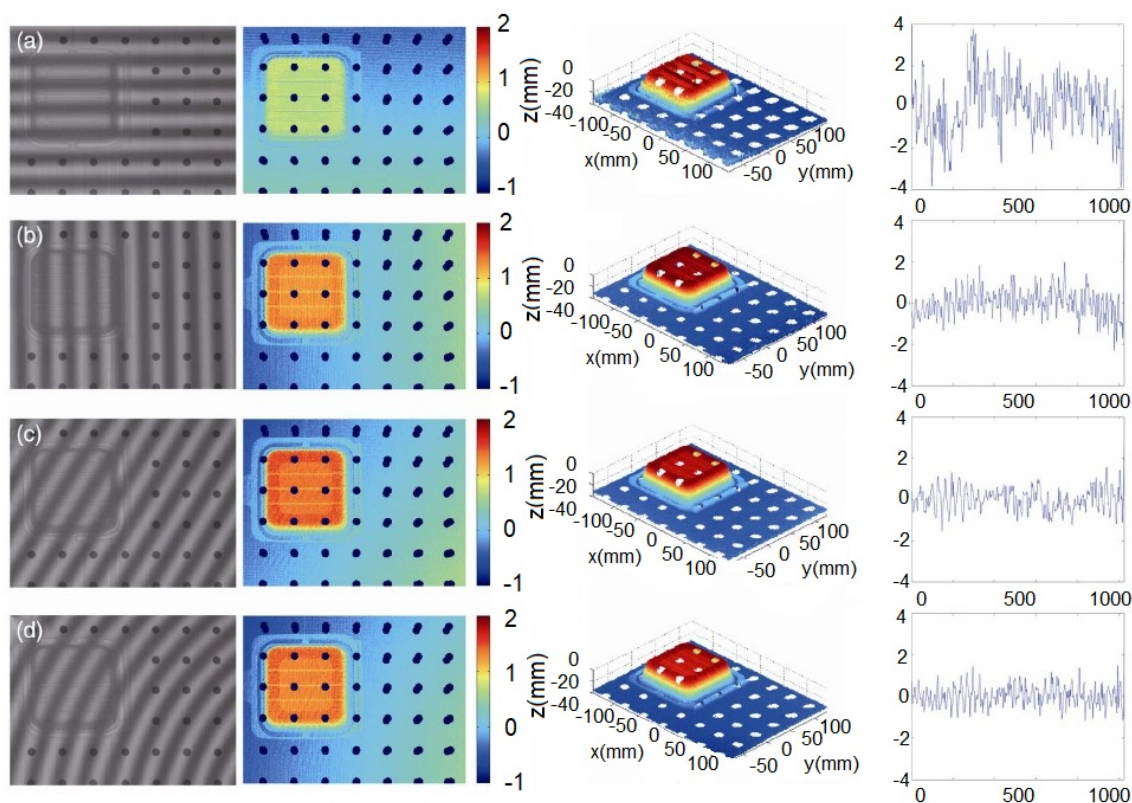


Figura 1.8. Análisis de la reconstrucción con proyección de franjas (de arriba a abajo) horizontales (a), verticales (b), a inclinación cuasi-óptima (c) y circulares óptimas (d); y (de izquierda a derecha) su imagen adquirida, su mapa de fase desenvuelta, la reconstrucción del objeto y su perfil de línea horizontal en $v=266$ [9].

Tabla 1.1. Desviación estándar de la profundidad de un perfil de línea horizontal en $v=266$ [9].

Franjas Horizontales	Franjas Verticales	Franjas con inclinación cuasi-óptima	Franjas circulares óptimas
1.338 mm	0.691 mm	0.534 mm	0.492 mm

1.4 Perfilometría de proyección de franjas circulares

En perfilometría por transformada de Fourier de franjas circulares (CFFTP por sus siglas en inglés), el perfil de intensidad del patrón de franjas circulares de referencia a ser proyectado sobre el objeto es

$$I_C^{(r)}(x,y) = a(x,y) + b(x,y) \cos \left[2\pi f_C \sqrt{x^2 + y^2} \right], \quad (1.4)$$

donde (x,y) representan las coordenadas espaciales en un sistema coordenado rectangular; a , b y f_C , representan los mismos parámetros que en la perfilometría por transformada de Fourier de franjas lineales (LFFTP por sus siglas en inglés).

De tal manera que el perfil de intensidad del patrón de franjas deformado o modulado, y registrado por la cámara CCD, puede ser representado por

$$I_C^{(d)}(x,y) = a(x,y) + b(x,y) \cos \left[2\pi f_C \sqrt{(x + \delta(x,y))^2 + y^2} \right], \quad (1.5)$$

donde el término $\delta(x,y)$ representa el desplazamiento lateral encontrado por $I_C^{(d)}$ y por tanto contiene la información asociada a la distribución de alturas del objeto.

La notación r , d y C en las ecuaciones (1.4) y (1.5), indican referencia, deformado y circular, respectivamente.

En el artículo titulado *Coordinate transform technique for closed-fringe analysis by Fourier-transform method* [10], Mitsuo Takeda y colaboradores en 2001, proponen por primera vez analizar un interferograma que incluye un patrón de franjas cerradas aplicando el método de transformada de Fourier convencional. Desde entonces, un gran interés se ha despertado sobre este tópico de la perfilometría.

Por otro lado, H. Zhao, et al, en [11] proponen un arreglo óptico (Figura 1.9) basado en una lente telecéntrica para la cámara de adquisición y haciendo uso del método de proyección sobre

el eje de Sicardi-Segade [12] y el método de corrimiento de fase, son medidos tres objetos representativos, uno de ellos mostrado en la Figura 1.9 (bloque de aluminio). Reportan una diferencia de alturas entre las dos regiones del bloque de entre 18.6 mm y 18.4 mm, con una frecuencia de franjas de 20 pixeles, en comparativa a los 18.5 mm medidos por un vernier calibrado.

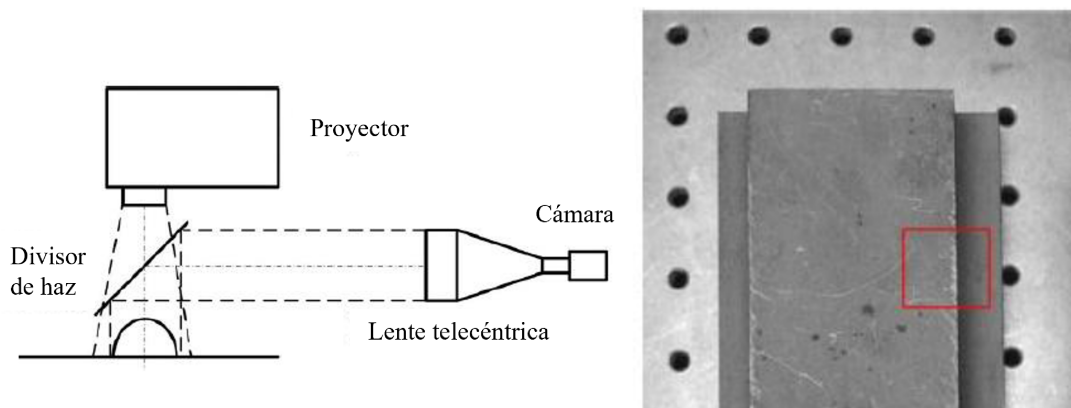


Figura 1.9. Arreglo óptico de adquisición con lente telecéntrica con ejes ópticos coincidentes (izquierda) y uno de los objetos representativos a reconstruir (derecha) [11].

Luego, en 2019, C. Zhang, et al [13], retoman los trabajos de H. Zhao [11] haciendo notar la problemática del punto de fase cero en la técnica CFPP. Debido a que la relación entre la lejanía de un punto de medición y la altura de este con la función $\cot \theta$, para θ como el ángulo entre el eje óptico de la fuente de las franjas y la línea de acción del punto de análisis (centro del patrón concéntrico y un punto sobre el objeto), la precisión promedio en el mapa de alturas del objeto se reduce para mediciones muy cercanas al punto de fase cero. Para darle solución a dicha problemática, proponen e implementan un sistema de captura de imágenes telecéntrico y dos métodos para asignación del punto de fase cero basados en una plantilla cuadrículada en la zona de registro; llamados *2D Ruler Based Method* y *Plane Constrained Based Method* (2DRM y PCM por sus siglas en inglés). Logrando desviaciones estándar de 0.167 mm y 0.071 mm, respectivamente, para las mediciones hechas sobre una esfera de 39.5 mm de diámetro. Un esquema de su montaje experimental es mostrado en Figura 1.10.

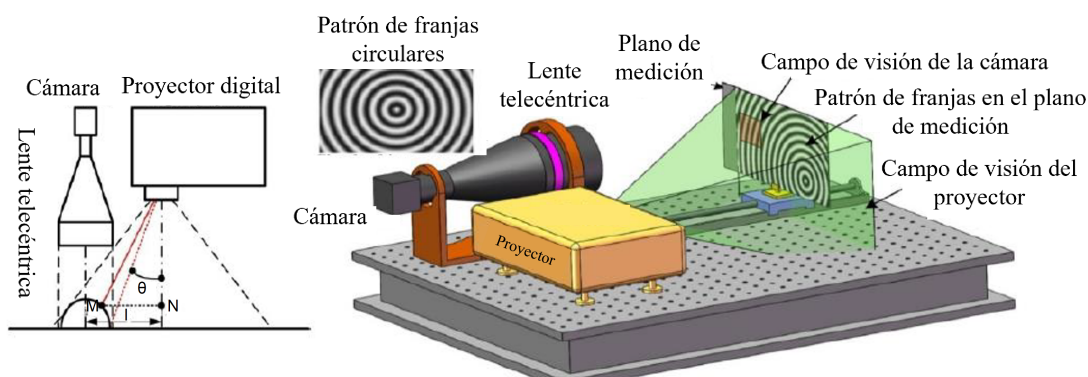


Figura 1.10. Diagrama experimental para mediciones con lente telecéntrica (izquierda) y arreglo experimental (derecha) [9].

En referencia a la proyección de franjas circulares, en el mismo 2019, S. S. Gorthi, et al proponen, simulan y desarrollan experimentalmente la técnica de CFFTP haciendo uso de la transformación de coordenadas cartesianas a polares y el método de transformada de Fourier [14], [15].

El estudio de las simulaciones y su contraparte experimental se centra en dos aspectos:

1. Demostrar que el perfil 3D puede ser recuperado con la técnica propuesta.
2. Demostrar que las mediciones pueden ser hechas para la dinámica de objetos inclusive con movimientos fuera del plano.

Las mediciones estacionarias hechas muestran un RMSE del 8 % sobre las alturas de un objeto semiesférico bajo proyección de una rejilla de Ronchi circular con periodo de 1 mm. Igualmente, las mediciones fuera de plano hechas a partir de la técnica muestran una ventaja sobre los métodos convencionales debido a que el desplazamiento fuera de plano puede ser simplemente detectado por el movimiento del centro del patrón sobre la imagen registrada. Debido a ello, es propuesto como método para el estudio de vibraciones y deformaciones por carga de impacto. El arreglo experimental es mostrado en la Figura 1.11.

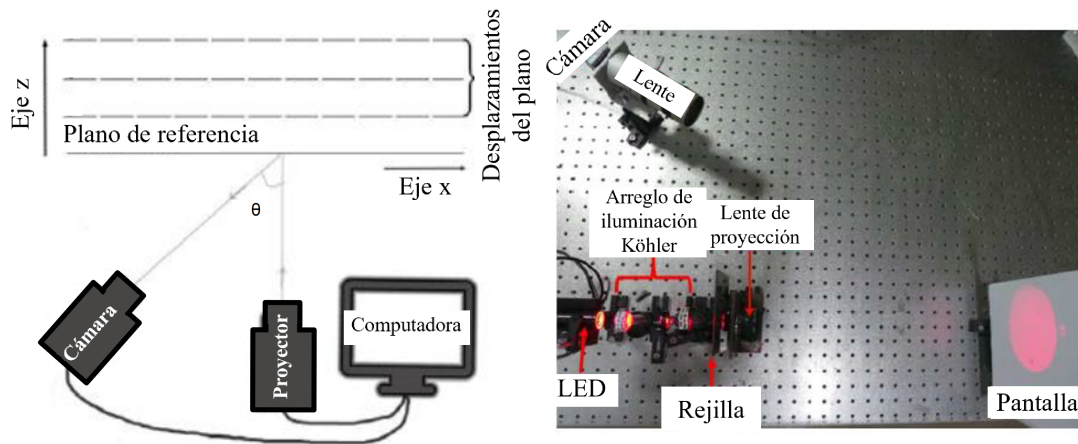


Figura 1.11. Diagrama experimental para mediciones fuera de plano (izquierda) y arreglo experimental para proyección de franjas circulares con rejilla de Ronchi (derecha) [14].

Cabe mencionar que en [15], las simulaciones hechas comparan el error cuadrático medio (MSE por sus siglas en inglés) para diferentes rangos dinámicos en las alturas de un objeto simulado por una mezcla de gaussianas con la localización de picos y valles elegidos de forma aleatoria, tanto para LFFTP como para CFFTP. Los resultados son mostrados en la Tabla 1.2

Tabla 1.2. Comparativa del RMSE normalizado.
Mediciones en mm [15].

Rango dinámico de alturas del objeto	RMSE normalizado	
	LFFTP	CFFTP
± 4	0.00	0.00
± 8	0.00	0.00
± 16	0.02	0.00
± 24	0.85	0.00
± 40	4.66	0.00
± 56	10.01	0.00
± 80	16.43	0.01
± 120	19.44	0.10
± 160	18.06	5.83

Igualmente, Mandapalli, et al [16], establecen la metodología para hacer CFFTP (Figura 1.12). Además de analizar la técnica a detalle, es decir, muestran y desarrollan las ventajas y problemáticas de CFFTP. En referencia a las ventajas:

- La técnica permite reconstruir perfiles discontinuos con una sola captura.
- Baja dependencia del algoritmo de desenvolvimiento en comparación al LFFTP.
- Un proyector de bajo costo es suficiente para la implementación de la técnica.

Los problemas y soluciones mencionadas:

- Un proyector enfocado de manera óptima produce saturación en la adquisición dando cabida a la generación de armónicos en la captura. Desenfocar la lente del proyector, ajustar el contraste de la captura y reducir el tiempo de exposición puede ayudar a mitigar tales efectos.
- Una pequeña desalineación puede llevar a una proyección de franjas elípticas en lugar de circulares, además de un desfase del centro de la proyección. Reducir el ángulo entre los ejes ópticos de la cámara y el proyector puede ayudar a solucionar tal problema.
- La frecuencia de las franjas debe ser elegida según las texturas del objeto que quieren ser detectadas. Aumentar la frecuencia de las franjas podría tener como consecuencia una captura deficiente dependiendo de la resolución de la cámara en uso.
- La presencia de sombras u oclusiones en el patrón deformado puede complicar el proceso de reconstrucción 3D. El pre y post procesamiento de la imagen puede ayudar a disminuir errores debido a dichas sombras.

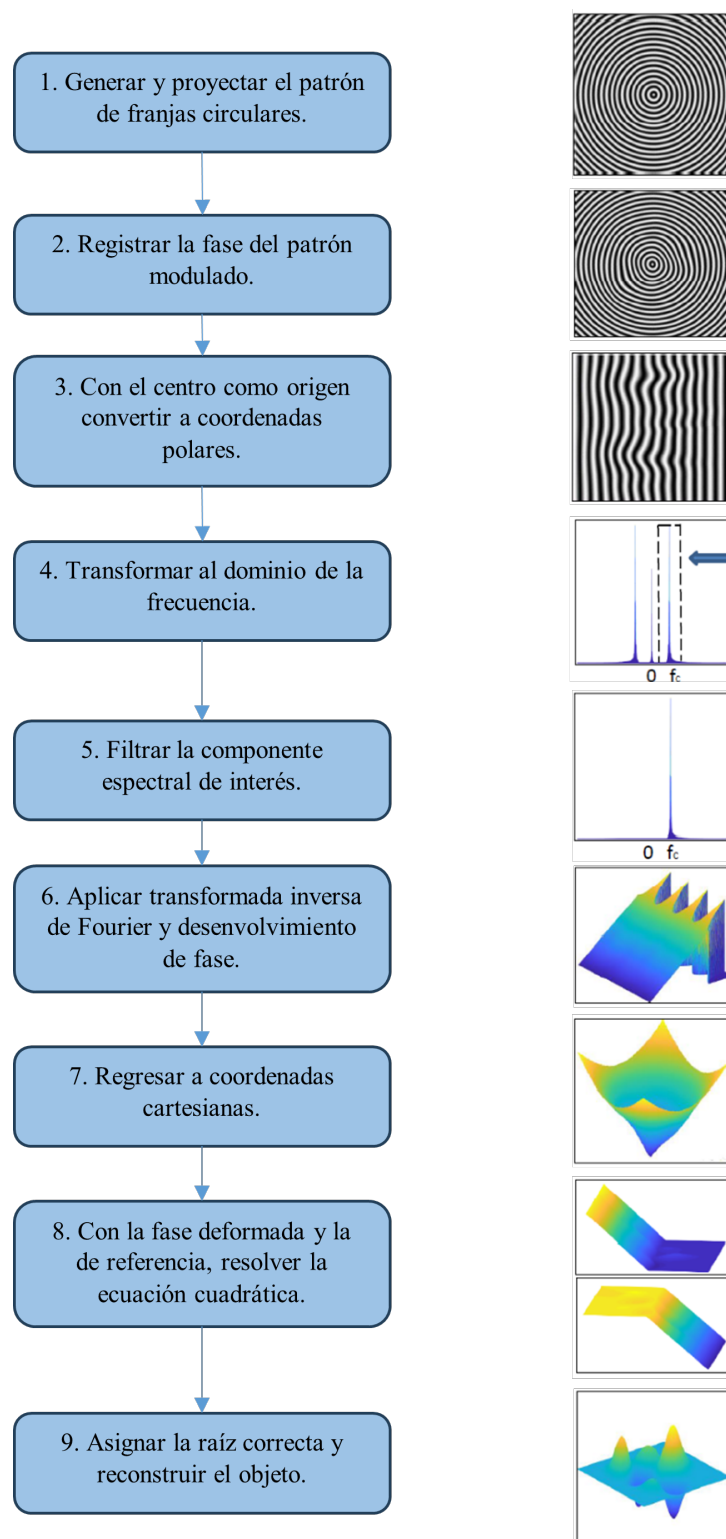


Figura 1.12. Algoritmo para CFFTP [16].

Asociado a la búsqueda de raíces del paso 9 del diagrama en la Figura 1.12, Q. Chen, et al [17], mencionan que la solución de una ecuación cuadrática, y la elección de la raíz correcta para la obtención del desplazamiento lateral debido al objeto, lleva a errores en la reconstrucción del mapa de fase. Con la finalidad de mitigar tales errores, proponen, simulan y evalúan una técnica de linealización en la obtención del desplazamiento lateral. En dicha técnica, registran dos patrones de referencia con un desplazamiento horizontal de su centro y sus respectivos patrones deformados cuando el objeto está presente. Una comparativa del cuadrado de las fases de los patrones registrados permite reconstruir el perfil 3D del objeto de análisis.

Las técnicas de CFPP se han seguido desarrollando en tiempos recientes, en enero de 2024, R. Guoshui, et al [18] desarrollan una técnica novedosa haciendo uso del desplazamiento de fase, la codificación ternaria de fase espacial (STPC por sus siglas en inglés) y combinando un algoritmo de desenvolvolvimiento temporal con el teorema del círculo centro-coseno (CCCT por sus siglas en inglés) logran reconstruir 10 diferentes planos (Figura 1.13), es decir, objetos que presentan discontinuidades con 0.17 mm de RMSE en promedio de sus mediciones.

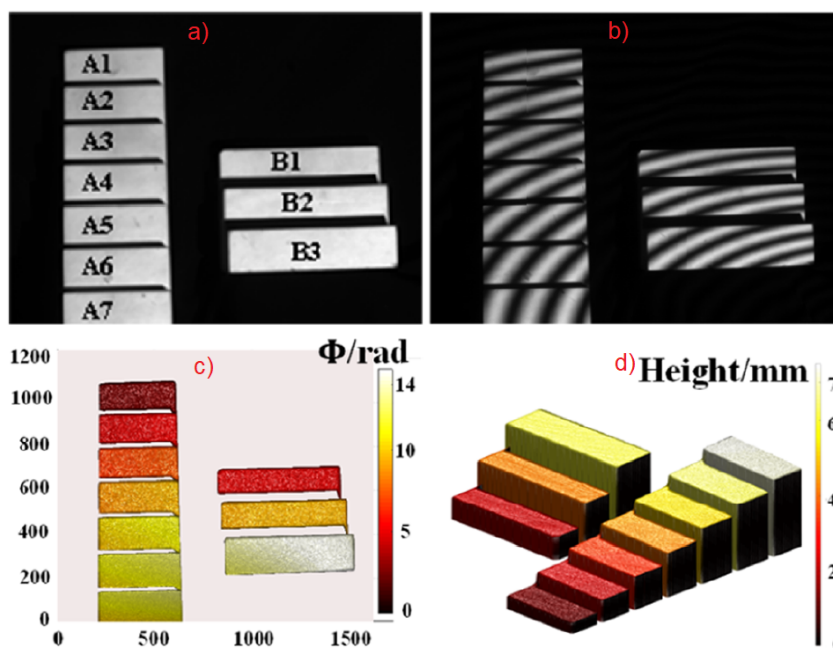


Figura 1.13. Reconstrucción 3D de R. Goushi, et al, para diferentes planos. (a) Etiquetado de los planos, (b) Proyección de franjas circulares sobre los planos, (c) Mapa de fase de los planos y (d) Reconstrucción de la topografía [18].

Similarmente, en marzo de 2024 fue publicado un trabajo de Jiaqiong, Li y Beiwen, Li [19], analizan a partir de un modelo de cámara estenopeica (*pinhole camera*) las transformaciones de sistemas de coordenadas en el plano imagen de la cámara, las coordenadas del mundo real y las de proyección, para así, proponer un nuevo método de calibración basado en corrimiento de fase de patrones circulares y radiales. Además, prueban experimentalmente su propuesta obteniendo un RMSE para puntos triangulados de $X = 0.0194$ mm, $Y = 0.0159$ mm y $Z = 0.2708$ mm; por debajo de 1 % del volumen medio de calibración. En cuanto a pruebas de reconstrucción 3D, obtuvieron un RMSE de 0.2307 mm y 0.3442 mm reconstruyendo el mapa de alturas de una esfera de 49.975 mm de radio, con perfilometría de franjas concéntricas y lineales, respectivamente.

En conclusión, la CFFTP es una técnica novedosa para obtención del mapa de fase debido a la deformación de un patrón de franjas. Se ha demostrado que es una buena técnica alternativa debido a su baja dependencia de los algoritmos de desenvolvimiento y su alto rango dinámico de trabajo. Sin embargo, su aplicación bajo métodos de proyección con luz coherente haciendo uso de un interferómetro aún presenta la desventaja de la robustez y la necesidad de una precisión muy alta en la construcción del arreglo óptico.

Se considera que el desarrollo experimental de una técnica con la precisión de los métodos interferométricos y la simplicidad de los métodos sintéticos mejoraría enormemente a la CFFTP. Debido a ello se propone el uso de una lente cónica iluminada por una fuente de luz coherente para la generación del patrón de franjas a proyectar. Técnica que en los siguientes capítulos será analizada, desarrollada y aplicada.

CAPÍTULO II

TRANSFORMADA DE FOURIER

Jean-Baptiste Joseph Fourier, físico y matemático francés nacido en 1768, es conocido por sus trabajos en transferencia de calor y análisis armónico, dejando tras de ellos al llamado análisis de Fourier del cual emanan las series y transformada homónimas.

La Transformada de Fourier es una herramienta sumamente importante para el procesamiento de señales e imágenes, con aplicaciones en el análisis de sistemas de comunicación, filtraje de señales, en sistemas de análisis geológico, en óptica, entre otros. En procesamiento digital de imágenes, una imagen de entrada se dice estar en el dominio espacial y similarmente, al resultado de la transformación se le dice estar en el dominio de Fourier, de la frecuencia o en el espacio k , según la forma de adquisición. En el dominio de Fourier, cada punto representa una frecuencia espacial específica contenida dentro de la imagen en el dominio espacial.

En análisis de imágenes, la frecuencia espacial se refiere a la tasa de variación de intensidad de los píxeles a través de toda la imagen. A partir de una descomposición en componentes sinusoidales, se puede construir un diagrama de amplitudes de cada una de dichas componentes y por tanto de las diferentes frecuencias presentes dentro de la imagen.

Suponga a una función integrable en un intervalo dado como un vector dentro de un espacio vectorial. Dada una base de dicho espacio vectorial, es posible tanto escribir cualquier vector como una combinación lineal de la base como obtener proyecciones del vector hacia cada uno de los elementos de la base.

Un ejemplo de ello es el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector $\vec{u}$ dentro de ese espacio puede ser escrito como una combinación lineal de la base canónica, es decir, $\vec{u} = u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2 + u_3\hat{e}_3$. Además, definido el producto interno de dos elementos del espacio vectorial como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, es posible determinar los coeficientes de la combinación lineal a través de proyecciones del vector y la base, tal que $\hat{e}_i \cdot \vec{u} = u_i$. Similarmente se puede definir ortogonalidad entre dos vectores como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

La Transformada de Fourier expresa una señal o función en términos de los coeficientes de dicha combinación lineal, tomando como base un conjunto de funciones armónicas en un

dominio definido por el periodo de la señal. Una imagen, al estar definida en un dominio cerrado y asignarse un valor nulo fuera de ella, la hace integrable sobre todos los valores de la recta real.

2.1 Transformada continua de Fourier

Considere un conjunto de funciones ortogonales entre sí,

$$\mathcal{B}_1 = \{\sin 2\pi f x, \cos 2\pi f x | f \in \mathbb{R}\},$$

o equivalentemente, según la relación de Euler $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$,

$$\mathcal{B}_2 = \{e^{i2\pi f x} | f \in \mathbb{R}\}.$$

Además del producto interno entre funciones reales para $x \in (-\infty, \infty)$,

$$(g_1, g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(x) dx.$$

Entonces una función $g(x)$ puede ser descompuesta en la base $\mathcal{B}_2$ como

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes $G(f)$ de la expansión de Fourier pueden ser calculados como

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx. \quad (2.2)$$

A la expresión mostrada en la Ecuación (2.1) se le llama Transformada Inversa de Fourier y usualmente es representada como $\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}$, asimismo la Transformada de Fourier $\mathcal{F}\{g(x)\}$ está definida en la Ecuación (2.2). Note que las variables usadas $x, f \in \mathbb{R}$ de tal manera que las sumas asociadas a la combinación lineal están hechas a través del operador integral y por tanto se está abreviando a esta transformación como Transformada de Fourier sin hacer alusión a su dominio continuo.

El resultado de la operación de transformación al dominio de Fourier es una función compleja $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(f)$; escrita en su forma rectangular $G(f) = \Re\{G(f)\} + i\Im\{G(f)\}$, o en su forma polar $G(f) = |G(f)| \exp\{i\Phi(f)\}$.

A $|G(f)|^2 = \Re\{G(f)\}^2 + \Im\{G(f)\}^2$ se le llama espectro de potencias de Fourier de $g(x)$, a $|G(f)|$, espectro de amplitud de Fourier, y a $\Phi(f)$, el ángulo fase o simplemente, la fase.

En muchas aplicaciones sólo la información contenida en el espectro de potencias es útil, sin embargo, la información asociada a la fase no puede ser descartada. Por ejemplo, si se construyen imágenes sintéticas hechas a partir de la información de amplitud de una imagen y la de fase de otra, es la imagen correspondiente a los datos de fase la que se percibe, aunque algo degradada.

En el caso de imágenes, es decir, señales bidimensionales, la transformada de Fourier puede ser aplicada en ambas dimensiones, tal que,

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy. \quad (2.3)$$

2.2 Transformada discreta de Fourier

Sin embargo, las imágenes digitales son una representación discreta del espacio continuo de la realidad. De tal manera que la descripción anterior debe ser discretizada. Considere ahora una señal continua $g(x)$ que ha sido muestreada N veces en intervalos δ_s (frecuencia o tasa de muestreo $1/\delta_s$), generando una secuencia de valores $g_n = g(n\delta_s)$, para $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la Transformada de Fourier de $g(x)$ puede aproximarse como

$$G(k) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\delta_s}^{(n+1)\delta_s} g(n\delta_s) e^{-i2\pi kn/N} dx.$$

De tal manera que para $|k| \ll N$, $G(k)$ puede ser calculada como

$$G(k) \approx \frac{1}{N} \mathcal{DFT} \{g(n\delta_s)\},$$

donde la transformada discreta de Fourier (DFT por sus siglas en inglés) se define como

$$\mathcal{DFT} \{g(n\delta_s)\} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-i2\pi kn/N}. \quad (2.4)$$

Para un intervalo de muestreo δ_s existe una frecuencia especial f_c llamada frecuencia crítica de Nyquist,

$$f_c = \frac{1}{2\delta_s}. \quad (2.5)$$

Siendo dicha frecuencia, la frecuencia máxima que puede ser representada con una señal que fue muestreada en intervalos δ_s . Entonces las frecuencias discretas generadas son $f_k = k/N\delta_s$, donde $k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2$ [20].

Por tanto, la representación de una imagen de dimensiones $N \times M$ en el espacio de Fourier viene dada por

$$G(k, l) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} g(n, m) e^{-i2\pi(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M})}, \quad (2.6)$$

donde $g(n, m)$ es la imagen en el dominio espacial. Asimismo $G(0, 0)$ es llamada la componente DC de la señal y representa la intensidad promedio de la misma.

Cabe resaltar que la cantidad de operaciones a realizar por la DFT en la Ecuación (2.4) es proporcional a N^2 debido a las N multiplicaciones de g_n con $\exp\{-i2\pi kn/N\}$ y las $N - 1$ sumas necesarias para sumar N números.

2.3 Transformada rápida de Fourier

La complejidad computacional antes mencionada, es una de las desventajas en el análisis de señales digitales con la DFT, no obstante, el uso de propiedades de la misma ha ayudado a mejorar la implementación de diferentes algoritmos computacionalmente menos demandantes.

Al término exponencial en la Ecuación (2.4) se le llama factor de giro (*twiddle factor* en inglés [21]) y es denotado por

$$W_N^{kn} = e^{-i2\pi kn/N}, \quad (2.7)$$

para $0 \leq k \leq N - 1$ y $n \leq N - 1$. El nombre de estos factores es debido a que representan las N raíces de $z - 1$ (para $z \in \mathbb{C}$) en sentido horario del círculo unitario. Note que $W_N^N = W_N^0 = 1$, igualmente $W_N^{N/2} = -1$.

Además poseen las propiedades de simetría $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, para $0 \leq k \leq N/2 - 1$, y de periodicidad $W_N^{k+N} = W_N^k$. A través de reducir estas redundancias en la ejecución de DFT, puede ser construido un algoritmo sumamente eficiente, la Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). Tomando en cuenta que la FFT requiere de una entrada de tamaño en potencias de dos y que de no serlo, de manera regular, la entrada es truncada o rellenada con datos nulos.

Tal algoritmo reduce las N^2 operaciones requeridas en $N \log_2 N$. Por ejemplo, para $N = 1024$, la FFT necesita de aproximadamente 10^4 en contraste con las 10^6 necesarias en la DFT.

Es de remarcar que una señal real debe tener un espectro de amplitudes simétrico respecto a frecuencias negativas y positivas. Por tanto, en lugar de desplegar un espectro entre 0 y $1/\delta_s$, es más apropiado representarlo entre $-f_c$ y f_c .

Para ejemplificar lo mencionado durante el capítulo, en la Figura 2.1 se muestra una señal $g(x) = 4 + 3 \cos[2\pi(2x)] + 2 \cos[2\pi(4x)] + \cos[2\pi(6x)]$ con intervalos de muestreo $\delta_s = 1/100$ y longitud de la señal 500. Es decir, una señal con DC de 4 unidades de amplitud y armónicos de 2, 4 y 6 unidades de frecuencia, con 3, 2 y 1 unidades de amplitud, respectivamente.

Su espectro de amplitudes es mostrado en la Figura 2.2, con dominio $[-f_c, f_c]$. Note que las frecuencias mostradas por la FFT coinciden con las de las funciones armónicas contenidas en la señal e igualmente las proporciones entre los máximos de la FFT y las amplitudes de cada una de ellas.

Lo anteriormente descrito fue generado con el software MATLAB R2023 y su respectiva función para la FFT.

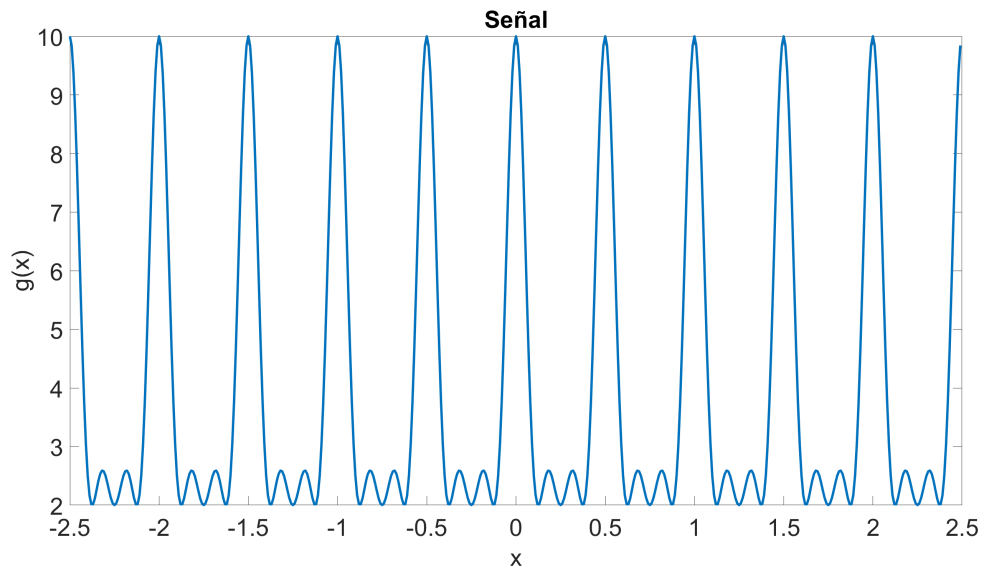


Figura 2.1. Señal $g(x) = 4 + 3 \cos[2\pi(2x)] + 2 \cos[2\pi(4x)] + \cos[2\pi(6x)]$.

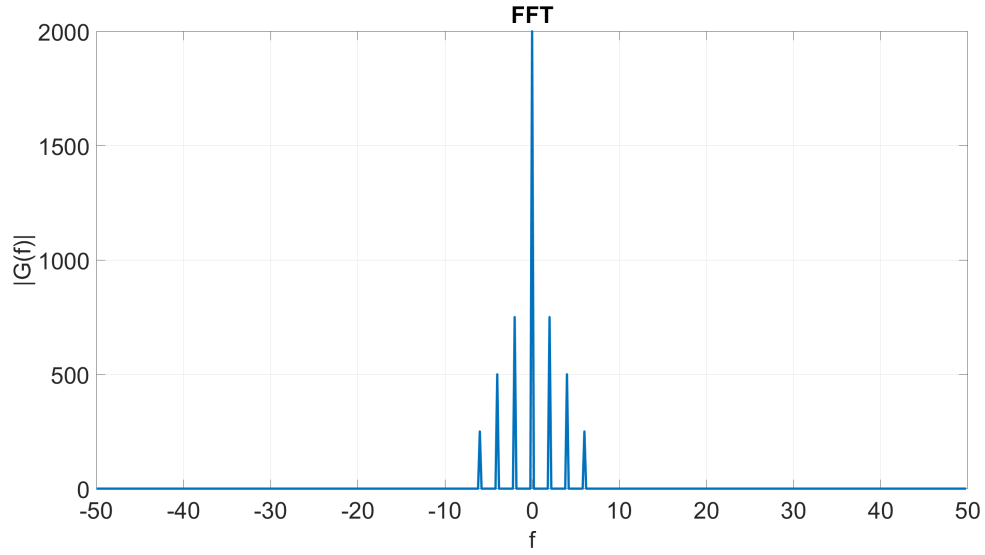


Figura 2.2. Espectro de amplitud de la señal ejemplo.

2.4 Método de Takeda

Como ya se ha mencionado en el Capítulo I, la imagen registrada de un patrón de franjas lineales con frecuencia f_0 y sometido a deformación debido a un objeto puede ser modelada por

$$I_L^{(d)}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi f_L x + \phi(x, y)], \quad (2.8)$$

donde los parámetros $a(x, y)$ y $b(x, y)$ representan las mismas variaciones de intensidad que en la Ecuación (1.3). Asimismo $\phi(x, y)$ posee la información asociada a la topografía del objeto. El patrón dado por la Ecuación (2.8) puede ser reescrito como

$$I_L^{(d)}(x, y) = g(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp [2\pi i f_c x] + c^*(x, y) \exp [-2\pi i f_c x], \quad (2.9)$$

debido a la relación de Euler, $\exp [iz] = \cos z + i \sin z$. Con

$$c(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp [i\phi(x, y)].$$

Haciendo uso de la Transformada de Fourier descrita por la Ecuación (2.3), el patrón de franjas puede ser transformado a

$$G(f_x, f_y) = A(f_x, f_y) + C(f_x - f_0, f_y) + C^*(f_x + f_0, f_y),$$

para $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_x, f_y)$, de forma similar para $A(f_x, f_y)$ y $B(f_x, f_y)$. De tal manera que si se filtra sólo el término $C(f_x - f_0, f_y)$ y aplicando el teorema de traslación de la transformada de Fourier [22], $c(x,y)$ puede ser calculado como

$$c(x,y) = e^{-i2\pi f_0 x} \mathcal{F}^{-1}\{C(f_x - f_0, f_y)\}, \quad (2.10)$$

con la finalidad de recuperar la información contenida en $\phi(x)$

$$\ln[c(x,y)] = \ln\left[\frac{1}{2}b(x,y)\right] + i\phi(x,y).$$

Sin embargo, computacionalmente la extracción de la fase del número complejo dado por la Ecuación (2.10) hace uso de la función $\arg z$, envolviendo la fase alrededor de la rama principal de $\tan z$, es decir, en un intervalo $z \in [-\pi, \pi]$. Tales discontinuidades pueden ser corregidas compensando las discontinuidades mostradas por $\phi(x,y)$ y así obtener una distribución de fase continua [2]. A estos métodos se les llaman algoritmos de desenvolvimiento.

Con la finalidad de exponer el procedimiento antes descrito, en la Figura 2.3 se muestra la simulación del registro de una imagen con un patrón de franjas deformado representando a la señal bidimensional $g(x,y)$ de la Ecuación (2.8).

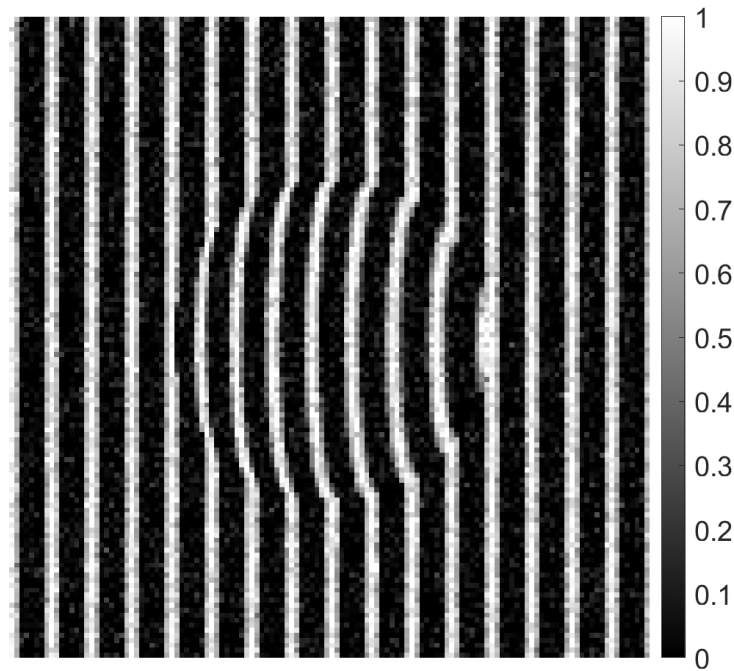


Figura 2.3. Simulación de adquisición de la imagen de un patrón de franjas deformado por un objeto. Imagen normalizada de 128×128 píxeles con franjas de periodicidad de 8 píxeles.

Luego de la aplicación de la FFT a dicha señal, el espectro de Fourier puede ser visualizado en la Figura 2.4.

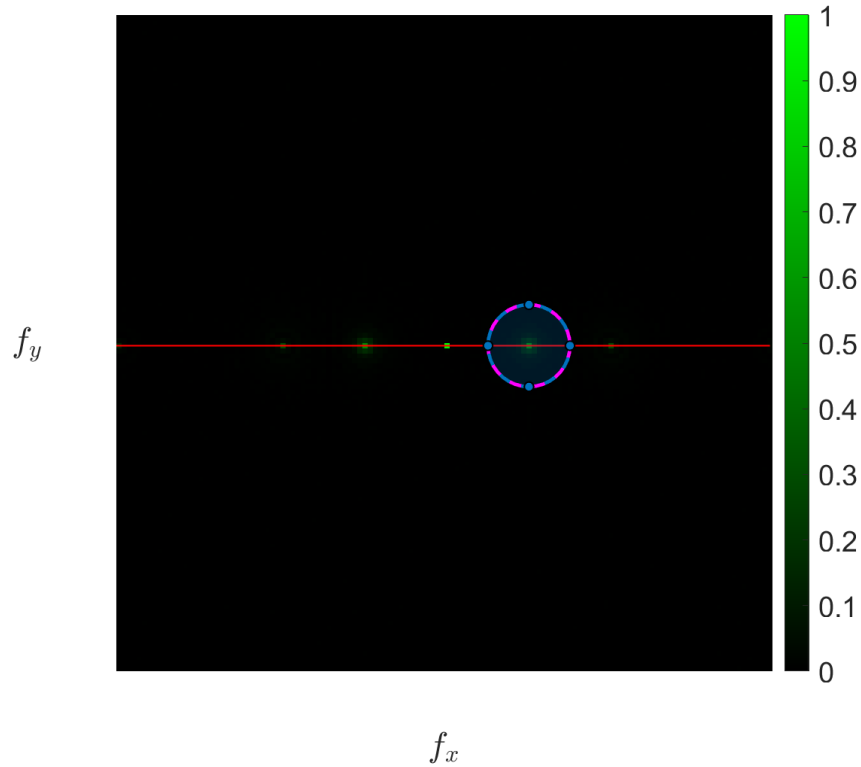


Figura 2.4. Espectro de Fourier de la imagen mostrada en la Figura 2.8.

Se ha señalado un perfil de línea desplegado en la Figura 2.5 y la máscara binaria circular usada.

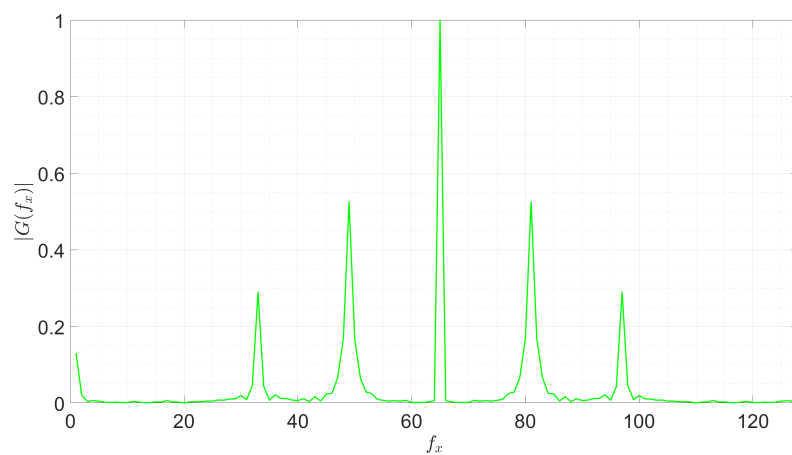


Figura 2.5. Perfil del espectro de Fourier.

Luego de la extracción de fase, sin haber hecho el desplazamiento según el teorema de la traslación de la Ecuación (2.10) se obtiene el mapa de fase envuelta antes mencionada (Figura 2.6). Además en la Figura 2.7 se muestra el perfil de dicho mapa justo en el centro de la imagen.

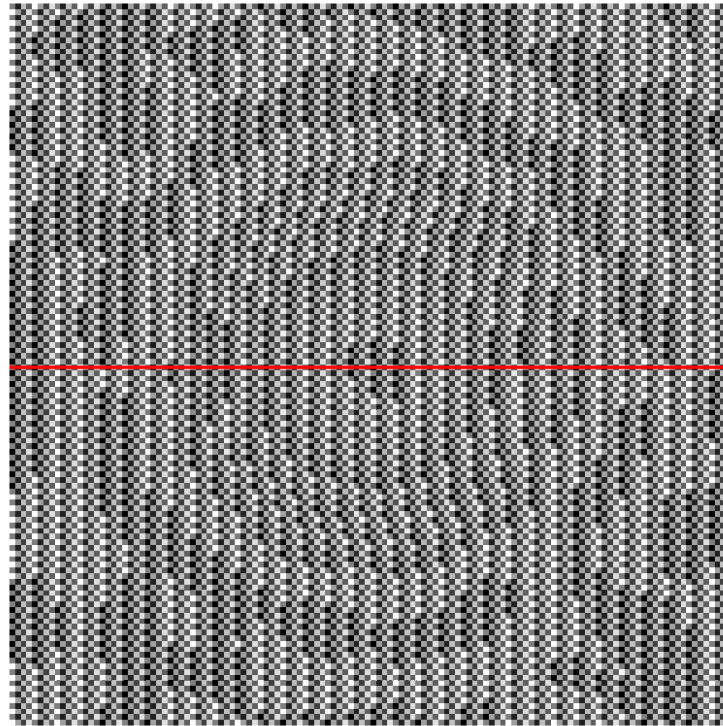


Figura 2.6. Mapa de fase envuelta.

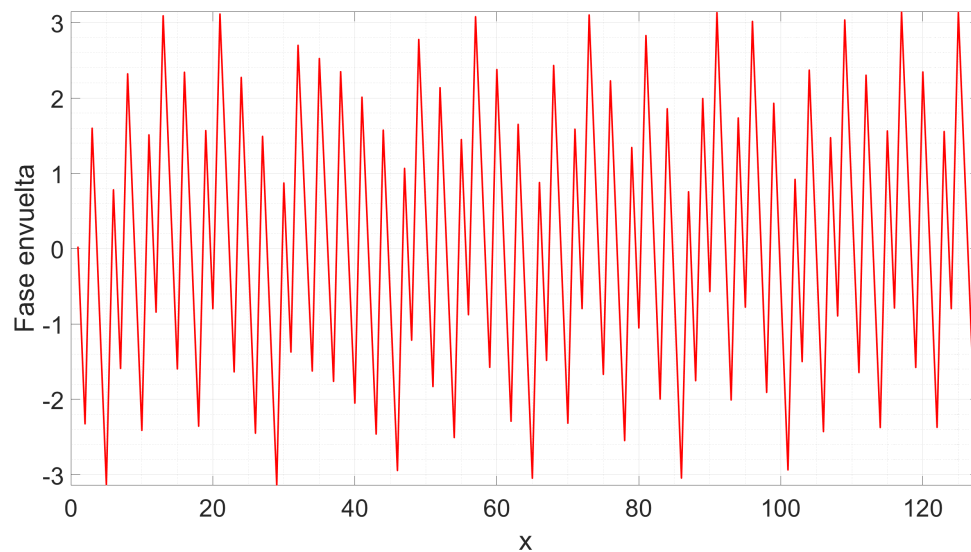


Figura 2.7. Perfil del mapa de fase envuelta en el centro de la misma.

Note que el perfil de la fase, presenta una señal bidimensional discontinua con rango $[-\pi, \pi]$, la rama principal de la función usada para la extracción de fase. Al aplicar un algoritmo de desenvolviendo se puede obtener un mapa de fase continuo, de manera regular llamado fase desenvuelta (Figuras 2.8 y 2.9).

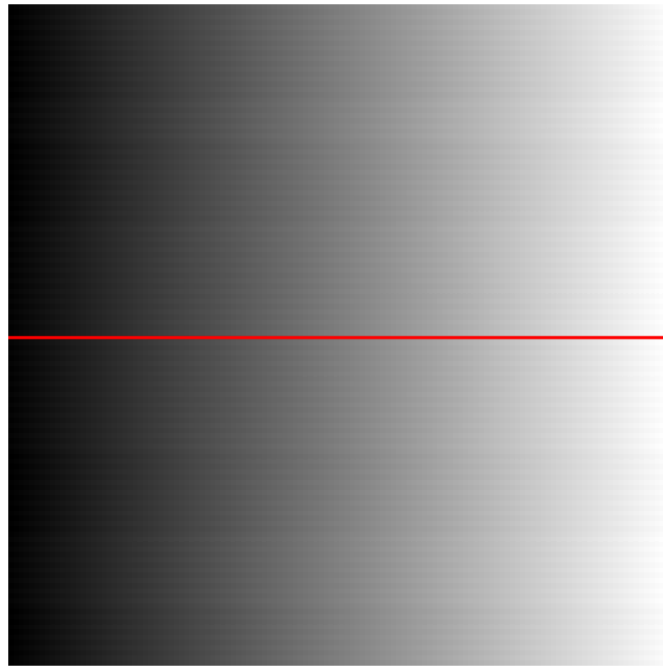


Figura 2.8. Mapa de fase desenvuelta.

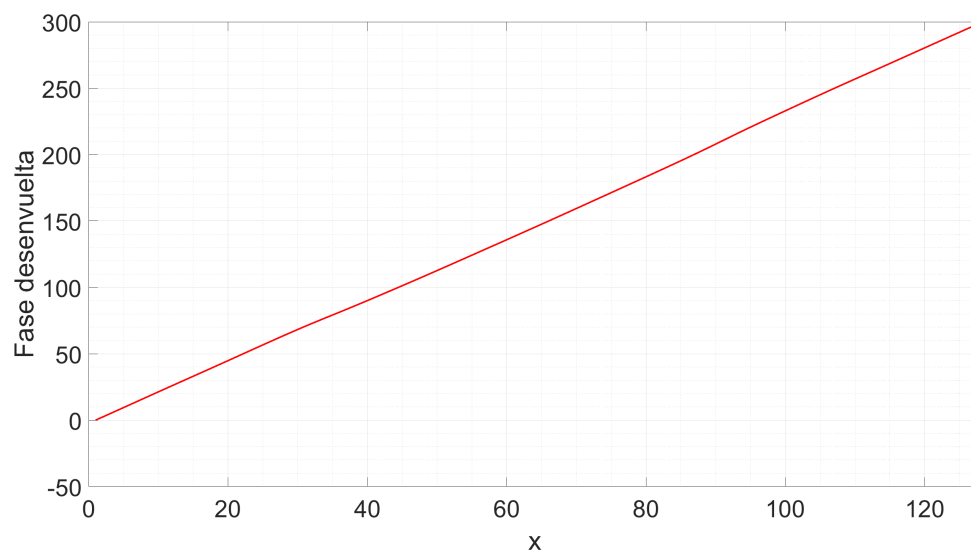


Figura 2.9. Perfil del mapa de fase desenvuelta en el centro de la misma.

De tal forma que la diferencia de las fases desenvueltas de las imágenes asociadas a las franjas deformadas por el objeto y a una registrada como referencia (sin objeto), análogamente al teorema de la traslación de la Transformada de Fourier, permite extraer el mapa de fase mostrado en la Figura 2.10.

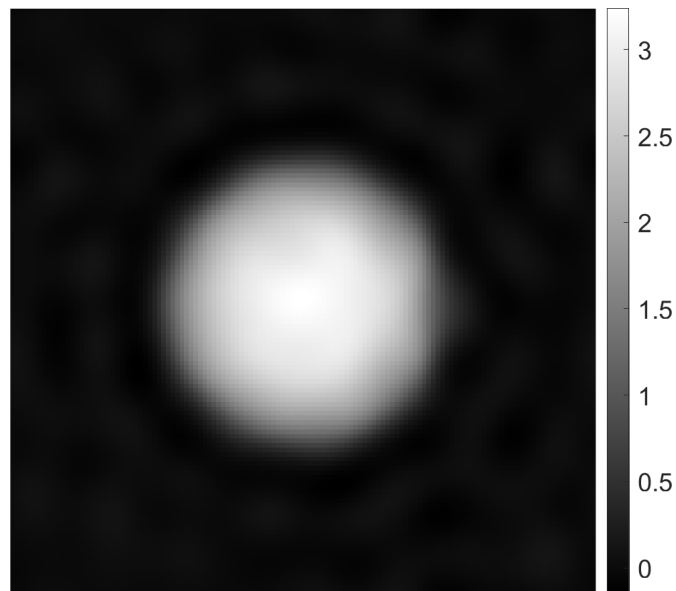


Figura 2.10. Mapa de fase del objeto del registro de imagen simulado en la Figura 2.3.

Permitiendo así, hacer una transformación entre el mapa de fase y la distribución de alturas del objeto de análisis.

CAPÍTULO III

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS EN IMÁGENES

Una imagen digital se puede describir a partir de una función de dos variables $g(x,y)$ donde el valor de la amplitud g en las coordenadas espaciales (x,y) es una cantidad escalar positiva. El significado físico de dicha amplitud depende de la técnica de adquisición de la imagen. Al formarse una imagen, los valores de intensidad de g son proporcionales a la energía radiada por una fuente.

La función $g(x,y)$ puede ser descrita por dos componentes: La cantidad de energía incidente en la escena llamada iluminación, $i(x,y)$, y la cantidad de energía reflejada por los objetos de dicha escena, llamada reflectancia, $r(x,y)$.

La naturaleza de la iluminación es enteramente determinada por la fuente a diferencia de la reflectancia que es determinada por las características de los objetos en la imagen. De tal manera que

$$g(x,y) = i(x,y)r(x,y), \quad (3.1)$$

donde $0 < i(x,y) < \infty$ y $0 < r(x,y) < 1$. Es decir, en el caso de absorción total de la energía incidente, la reflectancia es 0; caso contrario, si hay una reflectancia total, la reflectancia es 1.

En la práctica, los valores de intensidad para cierto punto (x_0, y_0) en una imagen a grises (monocromática) están acotados a $g(x_0, y_0) \in [L_{min}, L_{max}]$ para $L_{min} = i_{min}r_{min}$ y $L_{max} = i_{max}r_{max}$ aunque comúnmente se normalizan los valores a $[0, L - 1]$ donde se considera 0 como negro y $L - 1$ como blanco. Todos los valores intermedios son diferentes tonalidades de grises.

3.1 Muestreo y cuantización

Existen numerosas formas de adquirir una imagen, sin embargo, todas necesitan de la conversión de una señal sensada de forma continua a una forma digital. Los procesos por los cuales se debe conducir a la señal son llamados muestreo y cuantización, los cuales, se refieren a la digitalización de las coordenadas y la intensidad, respectivamente.

En la Figura 3.1 se muestra la simulación de registro de una imagen con franjas sinusoidales deformadas por un objeto esférico. Note que las posiciones (x,y) dentro de la imagen están discretizadas en el conjunto $(x,y) \in \mathcal{K}^2$ para $\mathcal{K} = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x \leq 100\}$. Igualmente en la

Figura 3.2, se puede observa la asignación de a cada valor del conjunto $\mathcal{K}$, con los marcadores circulares, un valor de intensidad normalizado en $[0,1]$ con 8 bits de profundidad.

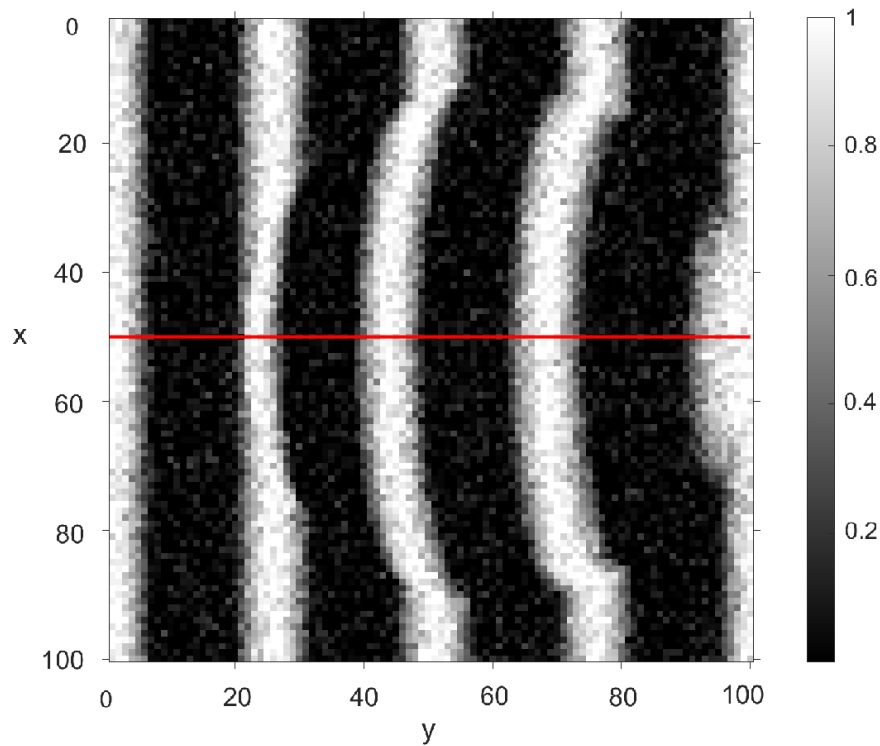


Figura 3.1. Ejemplo de muestreo y cuantización de una imagen digital.

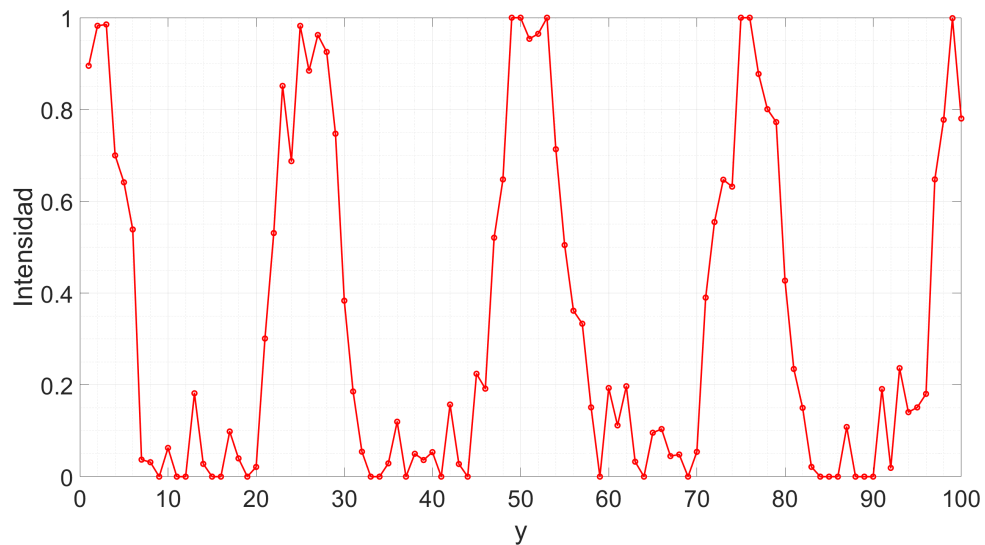


Figura 3.2. Perfil de línea horizontal de la mitad de la imagen digital ejemplo.

3.2 Representación de imágenes digitales

Considere $g(u, v)$ como la representación de una imagen descrita por una función continua de dos variables u y v . Al convertir dicha función en una imagen digital por muestreo y cuantización es posible construir un arreglo bidimensional $g(x, y)$ constituido por M filas y N columnas donde (x, y) están discretizados, es decir, $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Por tanto, el origen $(0, 0)$ está situado por convención en la esquina superior izquierda. Además a la sección de $\mathbb{R}^2$ en el cual la imagen está contenida se le suele llamar dominio espacial donde x y y son las variables o coordenadas espaciales [23].

El arreglo numérico asociado a la función $g(x, y)$ puede ser representado por una matrix de dimensiones $M \times N$ tal que

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} g(0, 0) & g(0, 1) & g(0, 2) & \dots & g(0, N-1) \\ g(1, 0) & g(1, 1) & g(1, 2) & \dots & g(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(M-1, 0) & g(M-1, 1) & g(M-1, 2) & \dots & g(M-1, N-1) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

En la Figura 3.3 se puede observar la representación matricial de una región de la Figura 3.1 resaltada por un rectángulo azul y en la Figura 3.4 su respectiva representación como superficie contenida en $\mathbb{R}^3$.

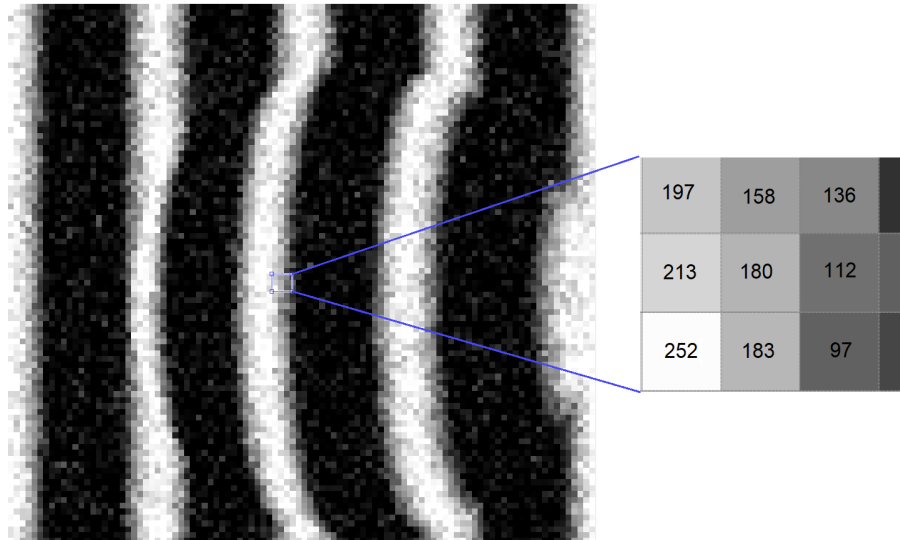


Figura 3.3. Representación matricial de la imagen de la Figura 3.1.

A cada elemento de la representación matricial en la Ecuación (3.2) se le llama pixel debido a la abreviatura de *picture element*.

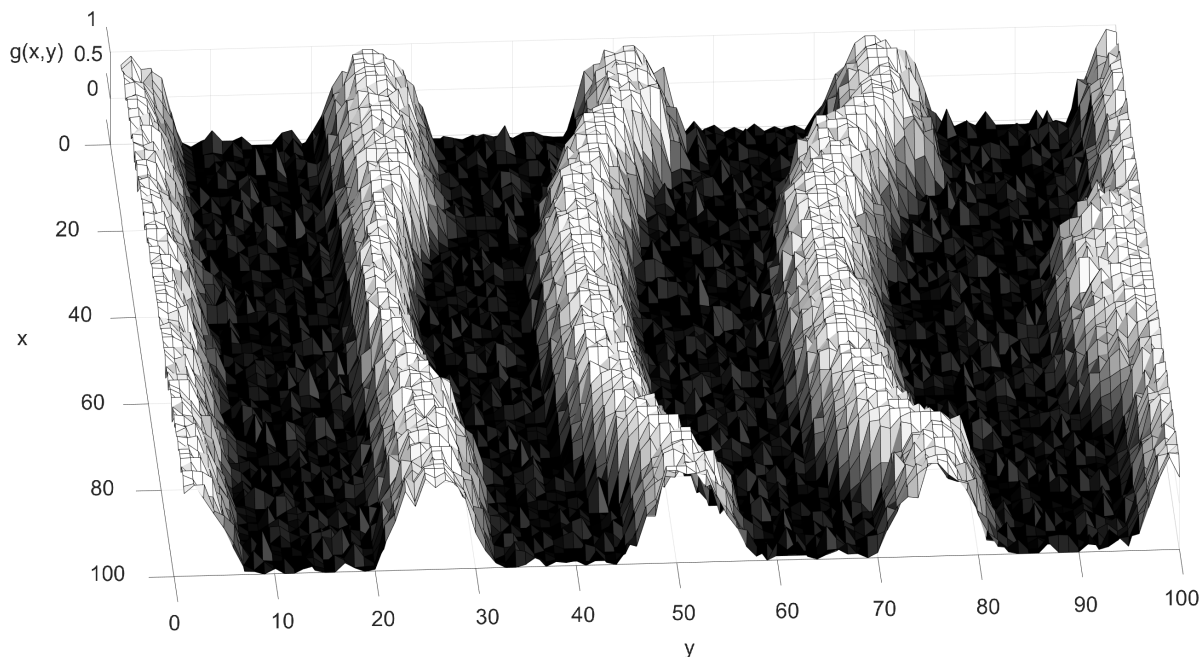


Figura 3.4. Superficie generada por la función $g(x,y)$ de la imagen de la Figura 3.1.

Debe tomarse en cuenta que la representación mostrada es la representación de coordenadas cartesianas en sentido positivo es decir, sigue la regla de la mano derecha.

Como se mencionó anteriormente, el proceso de digitalización asignará valores de intensidad a cada pixel en un intervalo $[0, L - 1]$, sin embargo, debido a consideraciones de almacenaje digital el número de niveles de intensidad en potencias de 2, es decir, $L = 2^k$. Se dice que una imagen con 2^k valores de intensidad en una imagen es una imagen de k -bits. Por ejemplo una imagen que almacena 256 valores posibles de intensidad es una imagen de 8-bits. Similarmente, el rango dinámico de un sistema de imagen es la razón entre la máxima y la mínima intensidades medibles [24].

3.3 Interpolación

La interpolación es una herramienta usada dentro del análisis de señales e imágenes para, con el conocimiento de cierto conjunto de valores muestreados, obtener nuevos valores de intensidad

en diferentes puntos muestra. Usualmente, en el procesamiento de imágenes se emplea para escalar, rotar y hacer modificaciones geométricas.

El método de interpolación a través del vecino más cercano (o proximal), la interpolación bilineal y la bicúbica son los métodos más comunes de interpolación en imágenes debido a su baja demanda computacional, aunque existen técnicas más complejas haciendo uso de *splines* o *wavelets* [24].

La interpolación más simple es la interpolación proximal ya que asigna el valor del pixel más cercano al nuevo punto, esto conlleva a producir distorsión severa en zonas con bordes rectos.

Por otro lado, la interpolación bilineal hace uso de los cuatro vecinos más cercanos al punto a interpolar. Tomando a (x, y) como el punto al cual se quiere asignarle valor de intensidad $g(x, y)$. Si se aproxima la intensidad como

$$g(x, y) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 a_{ij} x^i y^j, \quad (3.3)$$

se necesitaría conocer los coeficientes a_{00} , a_{10} , a_{01} y a_{11} . En consecuencia, la evaluación de la Ecuación (3.3) en los cuatro vecinos más cercanos permitiría establecer un sistema de cuatro ecuaciones con los cuatro coeficientes como incógnitas, y por tanto, obtener sus valores. Note que contrario a lo que su nombre sugiere, la interpolación bilineal no es lineal debido al término xy .

De igual manera, la interpolación bicúbica utiliza los dieciséis vecinos más cercanos al punto para resolver el sistema de dieciséis ecuaciones resultante de la evaluación de

$$g(x, y) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 a_{ij} x^i y^j, \quad (3.4)$$

en dichos vecinos, con los coeficientes a_{ij} como incógnitas.

Usualmente la interpolación bicúbica genera un detalle más fino que la interpolación bilineal con el debido costo computacional asociado.

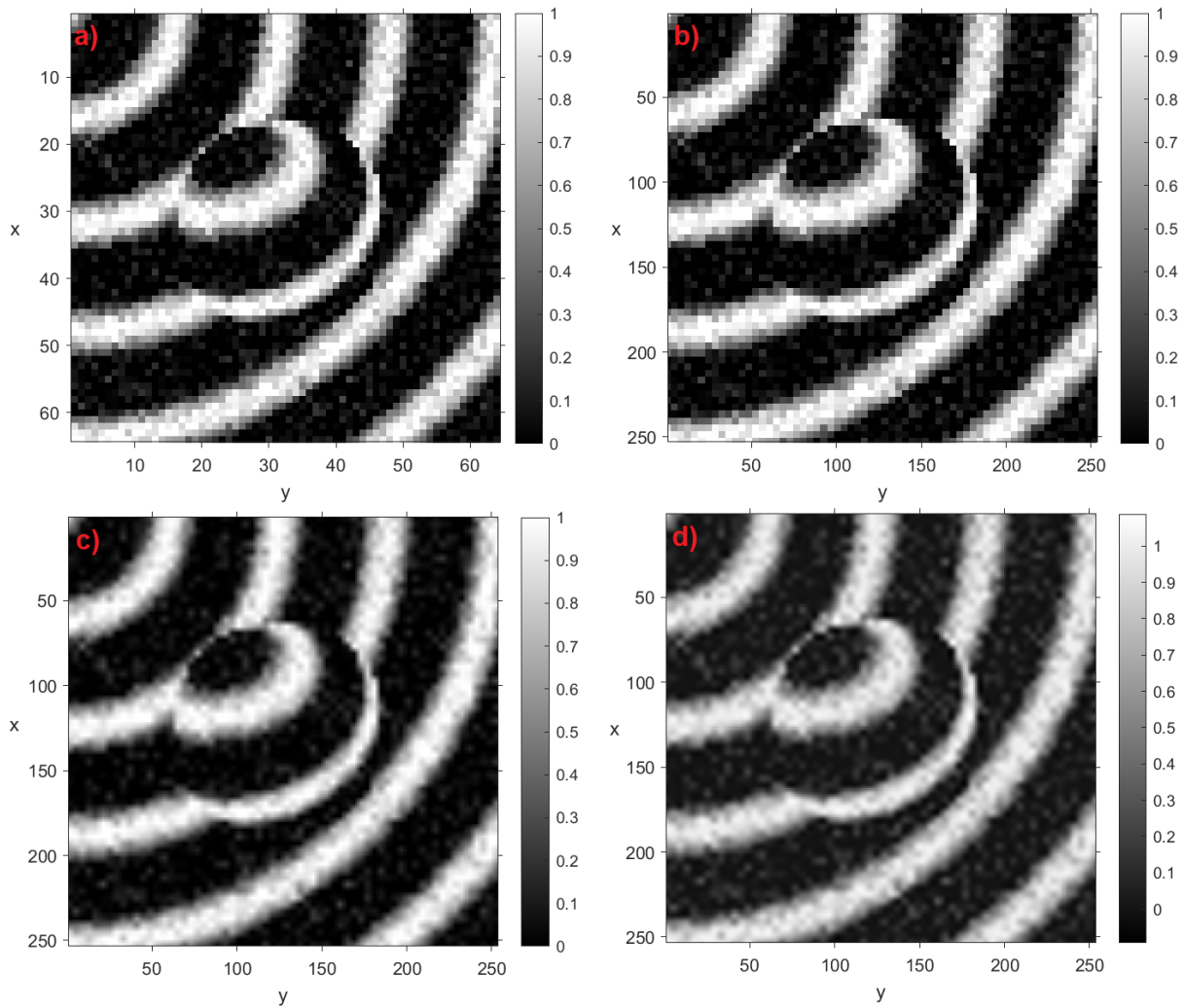


Figura 3.5. Tipos de interpolaciones: (a) Imagen a interpolar e interpolaciones (b) proximal, (c) bilineal y (d) bicúbica.

En la Figura 3.5 se puede observar una imagen sin procesar con intensidades en $[0, 1]$ de 64×64 píxeles interpolada a 256×256 píxeles. En la Figura 3.5.b se ha ejecutado una interpolación proximal, note que cada uno de los píxeles de la imagen cruda ahora abarca cuatro píxeles en la imagen interpolada. Además en las Figuras 3.5.c y 3.5.d se muestran las interpolaciones bilineal y bicúbica, respectivamente. Note que las transiciones de intensidades son menos suaves en el caso de la interpolación bilineal.

La función de interpolación usada en MATLAB (a partir de MATLAB R2006a) es `interp2` aunque también puede ser usada `griddata` y ambas poseen los métodos mencionados: 'nearest',

'linear' y 'cubic' asociadas a las interpolaciones proximal, bilineal y bicúbica, respectivamente.

3.4 Transformaciones de coordenadas

Las transformaciones de coordenadas son transformaciones geométricas que modifican las relaciones espaciales entre puntos en un espacio. Una transformación de coordenadas f (uno-a-uno) en un plano es una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir, $(x, y) = f(u, v)$, y considerando que cada punto en el plano u - v es mapeado a sólo uno en el plano x - y , existe una transformación inversa $(u, v) = f^{-1}(x, y)$.

En términos del procesamiento digital de imágenes, una transformación geométrica consiste de dos operaciones básicas:

1. Una transformación espacial de coordenadas, seguida de
2. Una interpolación de intensidades a los píxeles transformados espacialmente.

Una transformación, desde el punto de vista de la linealidad, se puede clasificar como lineal o no lineal. Una transformación o mapeo lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Dado que son utilizadas para hacer transformaciones geométricas de escalado, rotación y sesgos horizontales o verticales, dichas transformaciones siempre poseen un origen fijo. Sin embargo, si la transformación también produce una traslación del origen, se les llama usualmente transformación de afinidad.

A todas aquellas transformaciones que no siguen las propiedades de linealidad, se les llama no lineales y son más generales ya que pueden ser representadas con cualquier mapeo f , entre los que destacan las transformaciones de *swirl*, de *ripple* y de distorsión esférica [25].

3.4.1 Transformaciones entre coordenadas rectangulares y polares

A la descripción regular de cada uno de los puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ en la cual se toman como curvas de coordenada constante a las rectas verticales y horizontales, y con las que se

trató a las locaciones de los píxeles de una imagen en la sección 3.2, se les llama coordenadas cartesianas o rectangulares. Sin embargo, debido a la geometría de ciertos sensores de imagen (como en radares y sensores de ultrasonido) o de las franjas proyectadas en perfilometría óptica, ciertas adecuaciones geométricas deben ser hechas sobre la imagen adquirida antes de su debido procesamiento.

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas estándar en $\mathbb{R}^2$ que permite analizar sistemas con simetría circular de forma más simple. La transformación entre ambas, coordenadas polares (r, θ) y rectangulares (x, y) , está definida por

$$x = r \cos \theta \quad y \quad y = r \sin \theta, \quad (3.5)$$

donde r representa a la lejanía de un origen $(x, y) = (0, 0)$ definido y θ , la inclinación con respecto de una dirección específica. El dominio regular de las variables polares es $0 \leq r < \infty$ y $-\pi \leq \theta < \pi$, para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$.

De igual manera, la transformación inversa entre coordenadas, puede ser definida como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad \theta = \text{atan2}(y, x), \quad (3.6)$$

donde

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{Si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{Si } x < 0 \text{ y } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{Si } x < 0 \text{ y } y < 0, \\ \pi/2 & \text{Si } x = 0 \text{ y } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{Si } x = 0 \text{ y } y < 0, \\ \text{Indefinido} & \text{Si } x = 0 \text{ y } y = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Un diagrama esquemático de la transformación de un punto puede ser observado en la Figura 3.6. Note que todos los puntos alejados una misma distancia desde el origen de las coordenadas rectangulares es mapeado a una línea horizontal en el sistema de coordenadas polares y de igual manera, todos los puntos inclinados a un ángulo dado, son mapeados a una línea vertical. De tal manera que los círculos son mapeados en líneas horizontales de longitud 2π .

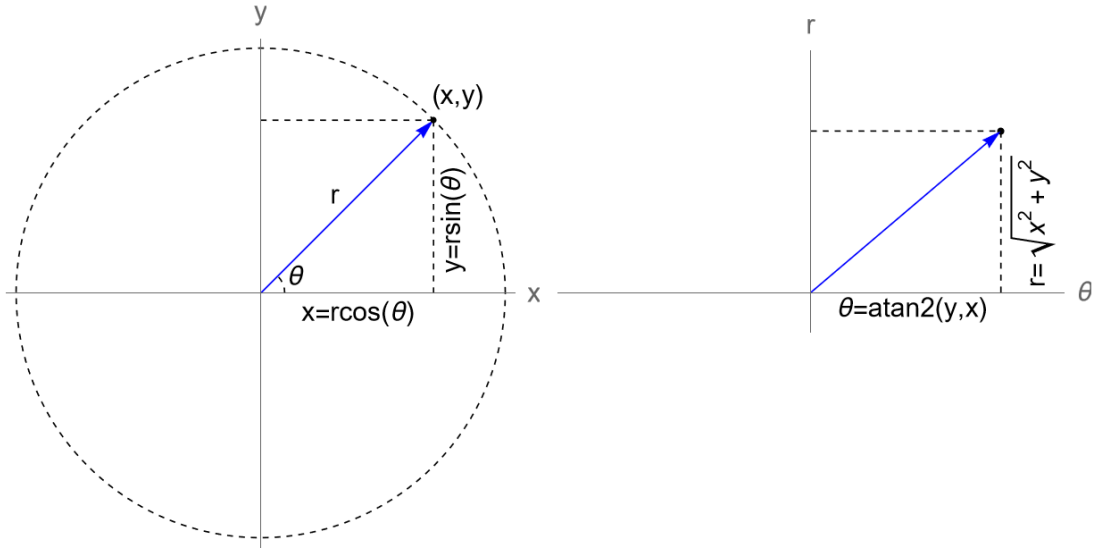


Figura 3.6. Representaciones esquemáticas de las transformaciones entre coordenadas rectangulares (izquierda) y polares (derecha).

En el caso de la perfilometría por proyección de franjas circulares, es inherente la necesidad de transformación entre coordenadas rectangulares y polares debido a que la recuperación del mapa de fase depende directamente de un algoritmo de desenrollamiento y tales algoritmos están diseñados para patrones de franjas lineales.

En la Figura 3.7 se puede observar un patrón de franjas circulares de 1024×1024 píxeles y perfil sinusoidal con periodo $p_0 = 32$ píxeles, es decir, $g(x,y) = \cos\left(2\pi f_0 \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ para $f_0 = 1/p_0$ y considerando al centro de la imagen como el origen de las coordenadas rectangulares, además de su respectiva transformación a coordenadas polares $g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos(2\pi f_0 r)$. Observe que la variable r ha sido desplegada hacia la zona inferior de la imagen por cuestiones de simplicidad.

Asimismo, en la Figura 3.8 están representados los perfiles de línea de las imágenes de la Figura 3.7 para diferentes ángulos. Note que existen regiones sin información dentro del plano descrito por las coordenadas polares. Esto es debido a que la lejanía de los píxeles de la imagen en coordenadas rectangulares está restringida por las dimensiones de la imagen, de tal manera que el perfil de línea a $\theta = \pi/4$ (Figura 3.8b) presenta más longitud que los de $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ (Figuras 3.8a y 3.8c).

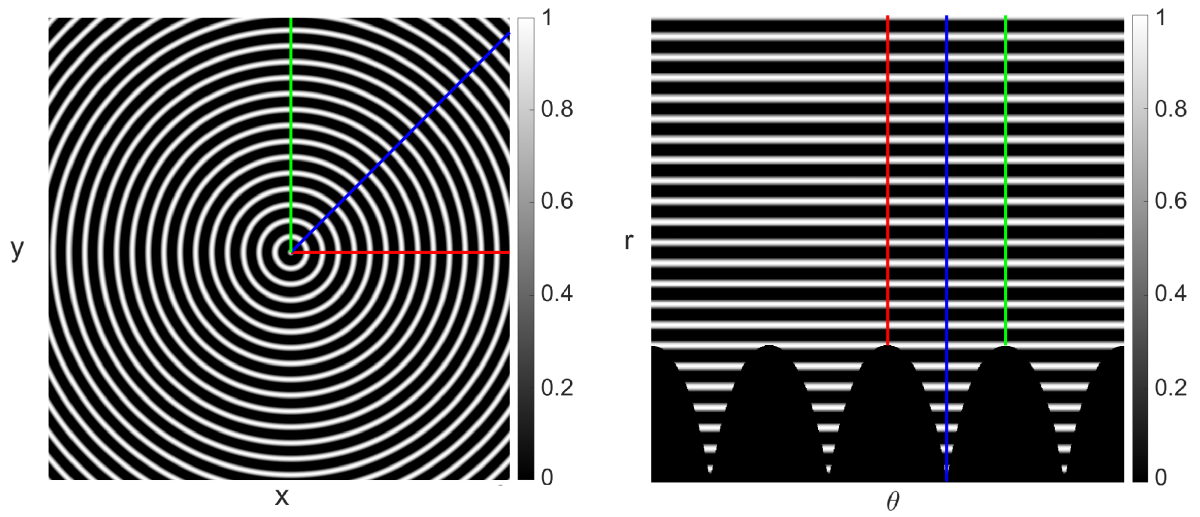
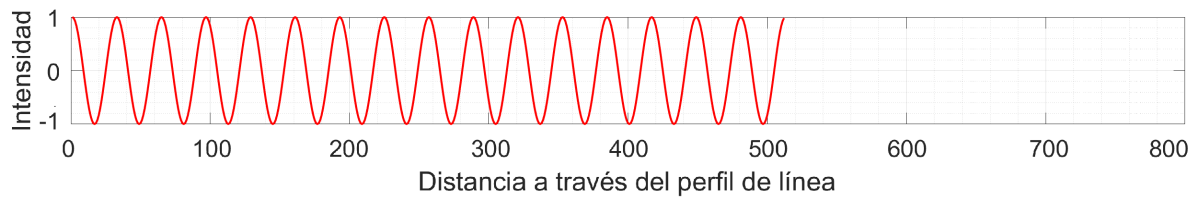
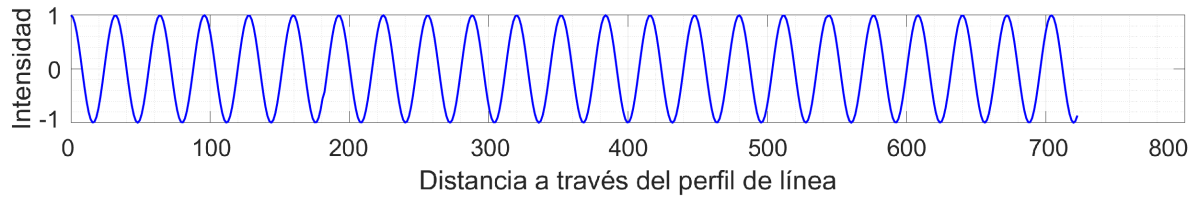


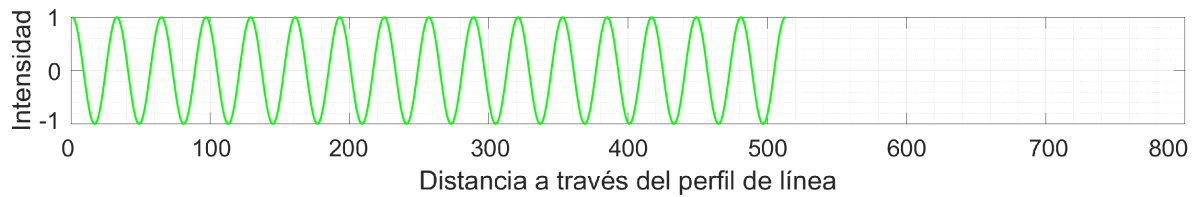
Figura 3.7. Representaciones esquemáticas la transformación de un patrón de franjas circulares (izquierda) en uno de franjas lineales (derecha).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.8. Perfiles de línea de los patrones en (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = \pi/4$ y (c) $\theta = \pi/2$.

CAPÍTULO IV

PATRONES CONCÉNTRICOS BESSEL

Desde el comienzo del uso de los láseres como fuente, la modulación y control de la intensidad en su sección transversal ha sido un punto clave para la búsqueda de aplicaciones para el mismo. Los modos de luz estructurada pueden ser clasificados dentro de dos ramas: Los modos con estabilidad de propagación y autosimilitud como los modos Gaussianos Laguerre-Gauss (LG), Hermite-Gauss (HG), Ince-Gauss (IG) y los producidos por autointerferencia además de formas muy características como los haces Bessel (BB) y los haces Airy.

La sección transversal de los haces BB poseen forma de anillos concéntricos lo cual permite generar patrones de franjas concéntricas para su uso en FPP.

4.1 Haz Bessel

Las funciones Bessel (Figura 4.1a) son funciones muy bien estudiadas por su uso regular en el modelado de fenómenos físicos con simetría cilíndrica como la vibración de membranas circulares [22]. Durning en 1987 [26] planteó soluciones con dicha simetría a la ecuación de onda que desembocaron no sólo en soluciones teóricas tipo Bessel si no su posterior descubrimiento experimental haciendo incidir un haz de luz colimado sobre una apertura anular circular colocada en el plano focal de una lente [27]. Considere la ecuación de onda sin fuentes y en el vacío

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = 0.$$

Se puede proponer una solución monocromática con frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ como $u(\vec{r}, t) = U(r)V(z)e^{-i\omega t}$ donde $r^2 = x^2 + y^2$ obteniendo dos ecuaciones diferenciales separadas para las coordenadas espaciales

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_r^2) U(r) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) V(z) = 0,$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es llamado operador Laplaciano transversal y $k^2 = k_r^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$. De tal manera que para $z \geq 0$ la solución exacta se puede escribir como [28]

$$u(\vec{r}, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} e^{in\theta} J_n(k_r r), \quad (4.1)$$

con θ definido en el sentido de las coordenadas cilíndricas (Ecuación 3.7) y J_n como una función Bessel de orden n . Note que para $k_r = 0$ es una simple onda plana y para $0 < k_r \leq \omega/c$ es adifraccional debido a que su intensidad

$$I_n^{BB}(\vec{r}) = J_n^2(k_r r) \quad (4.2)$$

no depende de la coordenada z , es decir, de propagación sobre el eje óptico. Para orden $n = 0$ el ancho del lóbulo central es aproximadamente k_r^{-1} y la distribución de intensidades decae como r^{-1} (Figura 4.1) [26]. Sin embargo, la cantidad de energía contenida en cada anillo es aproximadamente igual a la del lóbulo central por tanto necesitando una cantidad infinita de energía para crear un BB extendido sobre todo el plano, imposibilitando tener un BB ideal experimentalmente [28]. No obstante, cálculos y experimentos subsiguientes permitieron desarrollar más el entendimiento del haz Bessel e incrementar el número de aplicaciones.

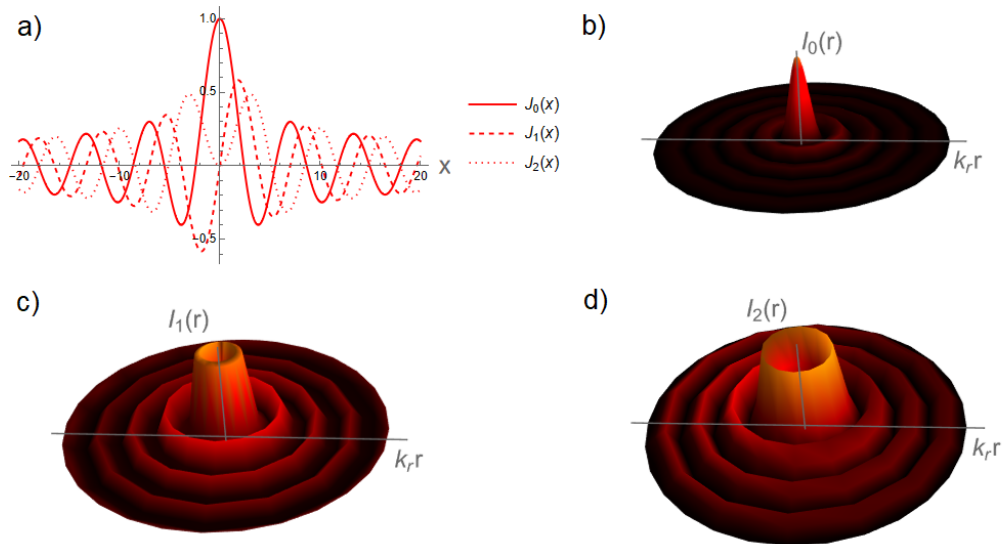


Figura 4.1. a) Funciones Bessel de orden 0, 1 y 2. Intensidades normalizadas de haces Bessel b) de orden 0, c) orden 1 y d) orden 2

Otro haz importante con propiedades similares fue introducido por F. Gori et al [29]; llamado Bessel-Gauss por la consideración de poseer una envolvente Gaussiana. La intensidad de dicho haz está dada por

$$I_n^{BG}(\vec{r}) = \frac{w_0}{w^2(z)} J_n^2 \left(\frac{k_r r}{1 + \frac{iz}{z_R}} \right) \exp \left\{ -\frac{2}{w^2(z)} \left(r^2 + \frac{k_r^2 z^2}{k^2} \right) \right\}, \quad (4.3)$$

donde z_R es el rango de Rayleigh, $w_0 = \sqrt{\lambda z_R / \pi}$ el radio de la cintura del haz y $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2 / z_R^2}$; parámetros regulares en un haz Gaussiano [30].

Los haces BB y BG pueden ser generados experimentalmente de diferentes maneras, algunas de las más comunes son las basadas en aperturas anulares circulares, las que usan moduladores espaciales basados en elementos de cristal líquido y las que emplean lentes cónicas también llamadas axicons [28].

4.2 Axicons

Las lentes cónicas, también llamadas axicons, son lentes con simetría cilíndrica (simetría axial con el eje óptico) usualmente usadas para generar haces Bessel. La formación de haces Bessel de una lente cónica es debida a la autointerferencia de un modo Gaussiano en una región del espacio específica definida por los parámetros de la lente cónica y tal autointerferencia es a causa de la transformación de un frente de onda plano en uno cónico, como se muestra en la Figura 4.2.

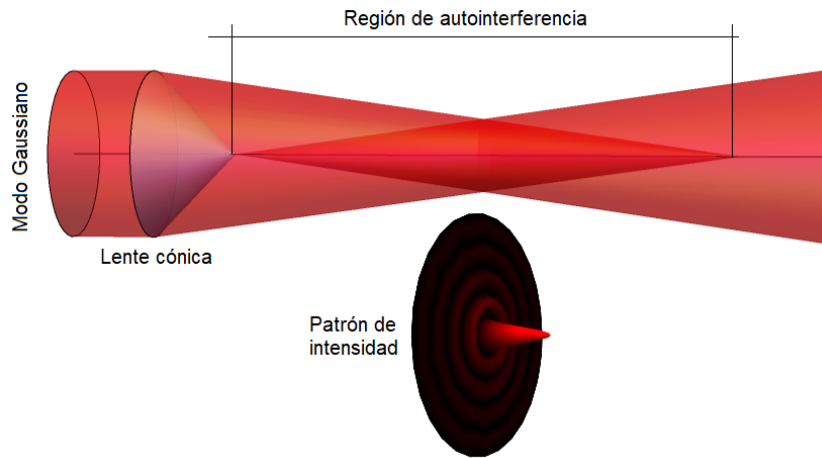


Figura 4.2. Diagrama esquemático de la autointerferencia debido a una lente cónica

El patrón de intensidades en la región de autointerferencia está dado por

$$I_n^{BG} \propto \left(\frac{z}{z_{max}^G} \right)^{2n+1} \exp \left(\frac{-2z^2}{2z_{max}^G} \right) J_n^2(k_r r), \quad (4.4)$$

donde $k_r = k \sin[(n-1)\alpha]$ con una lente cónica de índice de refracción n y ángulo apical $\gamma = \pi - 2\alpha$. Además, el rango de formación del BB viene dado por

$$z_{max}^G = \frac{w}{(n-1)\alpha},$$

considerando un modo Gaussiano de radio w .

Es posible tener distribuciones de intensidades del tipo Bessel de orden 0 como los descritos por la Ecuación (4.2), o Bessel- Gauss como los de la Ecuación (4.4), haciendo incidir sobre una lente cónica, un haz Gaussiano; con un frente de onda plano (haz colimado) o con un frente de onda divergente, respectivamente. Sin embargo, si se quisiese generar un BB de orden mayor, es necesario el uso de algún otro elemento óptico difractivo como una placa de fase espiral [28].

4.3 Propiedades de los haces Bessel

Las principales propiedades de los haces Bessel, y que no poseen la mayoría de los haces Gaussianos, son la adifraccionalidad y la autoregeneración. La difracción de haces ópticos en propagación es entendida a través del rango de Rayleigh

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda},$$

rango en el cual el radio del *spot* del haz, w_0 no ha aumentado más de $\sqrt{2}$. Note que un w_0 más pequeño da por resultado un rango de Rayleigh menor y por tanto es imposible confinar un haz en una región pequeña (del orden de su longitud de onda λ) en distancias grandes [28]. Los haces Bessel poseen un patrón de intensidades adifraccional en el rango z_{max}^G .

Igualmente, a la propiedad de reformar el patrón de intensidades del haz aún cuando se ha colocado un obstáculo en la región de autointerferencia de la lente cónica se le llama autoregeneración. A la distancia que le toma al haz autorregenerarse justo después del obstáculo se le llama longitud de la sombra del obstáculo y viene dada por

$$z_{sh} = D \frac{k}{k_z},$$

para un obstáculo de radio $D/2$ [31].

4.4 Patrones concéntricos con perfil Bessel

Un patrón de franjas dado por el perfil de intensidades de un haz Bessel-Gauss generado por una lente cónica y registrado por una cámara CCD, similar a las de LFTPP (Ecuación 1.2) y CFFTP (Ecuación 1.4), puede ser modelado por

$$I_{BG}^{(r)}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) J_0^2 \left[f_0 \sqrt{x^2 + y^2} \right], \quad (4.5)$$

donde $a(x, y)$ y $b(x, y)$ son los parámetros regulares de la FPP, y $f_0 = k_r$. Además, se ha usado un sistema de coordenadas rectangular (x, y) con el origen coincidiendo con el centro del patrón de franjas. De tal manera que al colocar un objeto que presenta mayormente reflectancia difusa el patrón es deformado como

$$I_{BG}^{(d)}(x, y) = a(x, y) + b(x, y) J_0^2 \left[f_0 \sqrt{x^2 + y^2} + \Phi(x, y) \right]. \quad (4.6)$$

Bajo una transformación de coordenadas rectangulares a polares (Ecuaciones 3.6 y 3.7) se puede reescribir la Ecuación (4.6) como

$$I_{BGL}^{(d)}(r, \theta) = \check{a}(r, \theta) + \check{b}(r, \theta) J_0^2 \left[f_0 r + \check{\Phi}(r, \theta) \right], \quad (4.7)$$

para $\check{a}(r, \theta) = a(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $\check{b}(r, \theta) = b(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $\check{\Phi}(r, \theta) = \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta)$, con la etiqueta BGL haciendo alusión a ser un patrón de franjas de un BG transformado a franjas lineales.

En la región asintótica, $8x \gg 4n^2 - 1$, las funciones Bessel poseen un comportamiento tal que

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Para $J_0(x)$ tal condición se cumple muy cercanamente para $x > 5$ [22]. Por tanto, en la región asintótica, el patrón dado por la Ecuación (4.7) se puede expresar como

$$I_{BGL}^{(d)}(r, \theta) \approx \tilde{a}(r, \theta) + \tilde{b}(r, \theta) \sin \left[2f_0 r + \check{\Phi}(r, \theta) \right], \quad (4.8)$$

donde $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ además contienen información sobre la máxima intensidad registrada y su atenuación $1/r$ inherente de $J_0^2(f_0 r)$. Asimismo, se consideraron las identidades

$\cos^2 x = (1/2)(1 + \cos 2x)$ y $\cos(x - \pi/2) = \sin x$. Por tanto la imagen modelada por la Ecuación (4.8) puede ser procesada según el método de Takeda con la FFT [2] descrito en el Capítulo II. Una comparativa entre las funciones $J_0^2(x)$ y $(1 + \sin 2x)/\pi x$ puede ser observado en la Figura 4.3

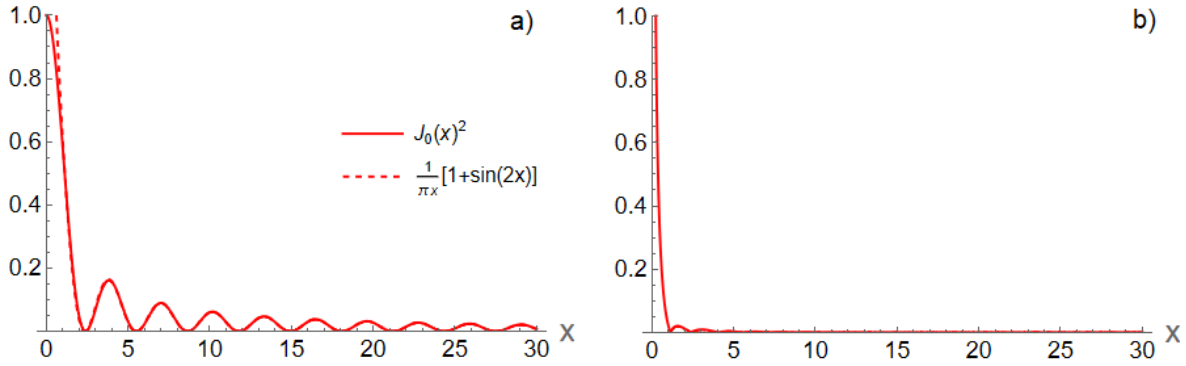


Figura 4.3. (a) Comparación entre las funciones $J_0^2(x)$ y $(1 + \sin 2x)/\pi x$ y (b) su diferencia absoluta.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este capítulo se presenta el desarrollo e implementación de una técnica de perfilometría por proyección de franjas empleando CFFTP donde las franjas proyectadas son generadas por una lente cónica alimentada por una fuente de luz coherente. El sistema óptico implementado muestra una resolución en el orden milimétrico dando una buena alternativa como sistema de reconstrucción a partir de FPP. Cabe mencionar como una ventaja agregada la baja cantidad de componentes ópticos necesarios para la aplicación de la técnica.

5.1 Software implementado

Los algoritmos creados para y durante la implementación de la técnica fueron programados en el entorno de programación del software MATLAB debido a la facilidad del tratamiento y transformación de las imágenes registradas procesadas en un entorno matricial. De manera similar, las imágenes asociadas a expresiones analíticas para la generación de diagramas esquemáticos fueron trabajadas en Wolfram Mathematica y en el paquete pst-optexp asociado a PSTricks en código TeX.

5.2 Hardware empleado

Se dispuso de una fuente láser He-Ne de 20 mW de potencia Modelo 1135P de JDS uniphase, seguida de una montura de filtraje espacial constituida por un objetivo de microscopio con EFL (Distancia focal efectiva por sus siglas en inglés) de 8 mm y su *pinhole*. Dos lentes, una lente colectora y una asociada a la generación de la imagen del patrón de $f_1 = 23$ cm y $f_2 = 10.5$ cm de distancia focal, respectivamente, así como una lente cónica de 0.5° de ángulo apical (o ángulo físico) y un cubo divisor de haz no polarizante CM1-BS013 de THORLABS. Para el registro de imágenes se empleó una cámara CCD DCU223M de THORLABS, equipada con una lente de 75 mm, permitiendo capturar imágenes con dimensiones de 1024×768 píxeles en escala de grises con una profundidad de 8 bits.

5.3 Metodología experimental

El diagrama esquemático de la generación del patrón de franjas es mostrado en la Figura 5.1

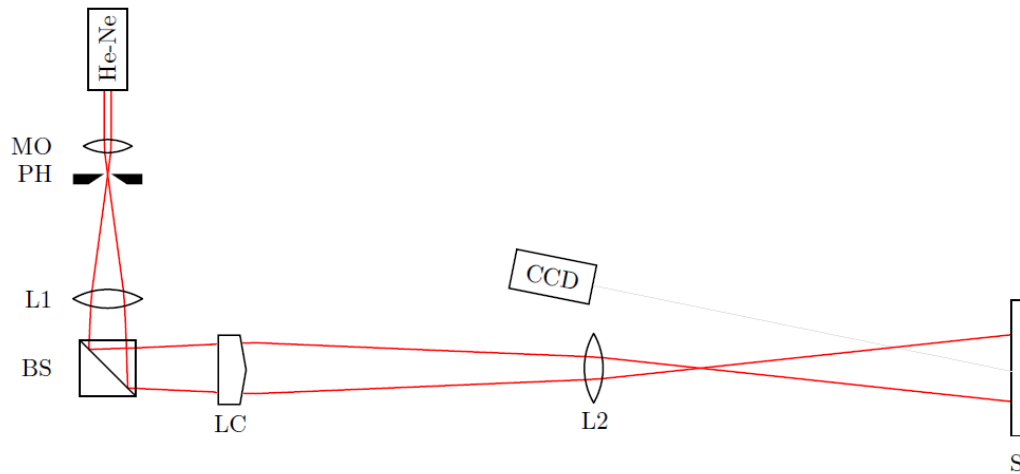


Figura 5.1. Diagrama esquemático del experimento para la proyección de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss.

El objetivo de microscopio *MO* fue colocado seguido del *pinhole PH* sobre una montura de filtrado espacial para la concentración de la fuente He-Ne; consecuentemente, la lente *L1* fungiendo el rol de lente colectora. Para un uso optimizado del espacio de la mesa óptica, se colocó el divisor de haz *BS* para, con el frente de onda generado por *L1*, alimentar a la lente cónica *LC*. Asimismo, la lente *L2* se colocó en la región de autointerferencia de la lente cónica para, por consiguiente, proyectar una distribución de intensidades del tipo de franjas concéntricas Bessel-Gauss sobre la pantalla *S* y su posterior registro de imagen con la cámara CCD.

Tabla 5.1. Distancias entre objetos ópticos en experimento.

Objetos ópticos		Distancia
<i>PH</i>	<i>L1</i>	17.5 cm
<i>L1</i>	<i>BS</i>	10 cm
<i>BS</i>	<i>LC</i>	16 cm
<i>LC</i>	<i>L2</i>	45 cm
<i>L2</i>	<i>S</i>	170 cm
CCD	<i>L2</i>	10 cm

Cabe resaltar que el CCD se colocó de tal manera que la línea de unión entre el CCD y $L2$ es ortogonal al eje óptico. Las distancias entre los elementos ópticos de la configuración experimental son detallados en la Tabla 5.1. Algunas imágenes asociadas al experimento pueden ser observadas en la Figura 5.2.

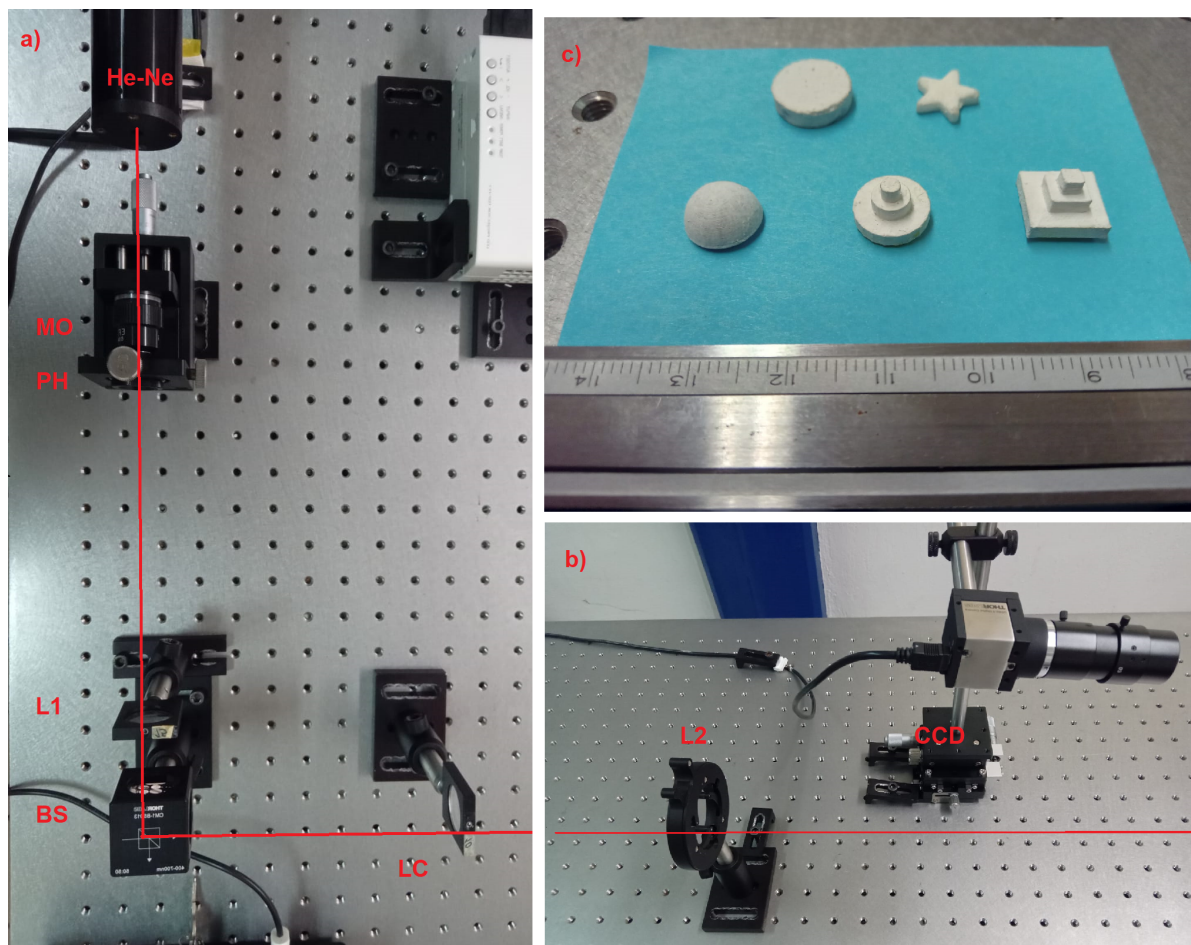


Figura 5.2. Arreglo experimental para la generación de un patrón de intensidades Bessel-Gauss (a), arreglo experimental para la generación de imagen sobre la pantalla y su posterior registro (b) y objetos de prueba comparadas con la medición de un vernier (c).

Note que se ha colocado un vernier de referencia (unidades en cm) sobre los objetos de prueba (Figura 5.2c) para la comparativa del orden de magnitud de las mediciones realizadas.

En la Figura 5.3 se muestran los registros de las franjas concéntricas de referencia y las deformadas por una semiesfera modelada e impresa 3D en filamento de 5 mm de radio. La imagen registrada es de aproximadamente $78.17 \text{ mm} \times 58.62 \text{ mm}$.

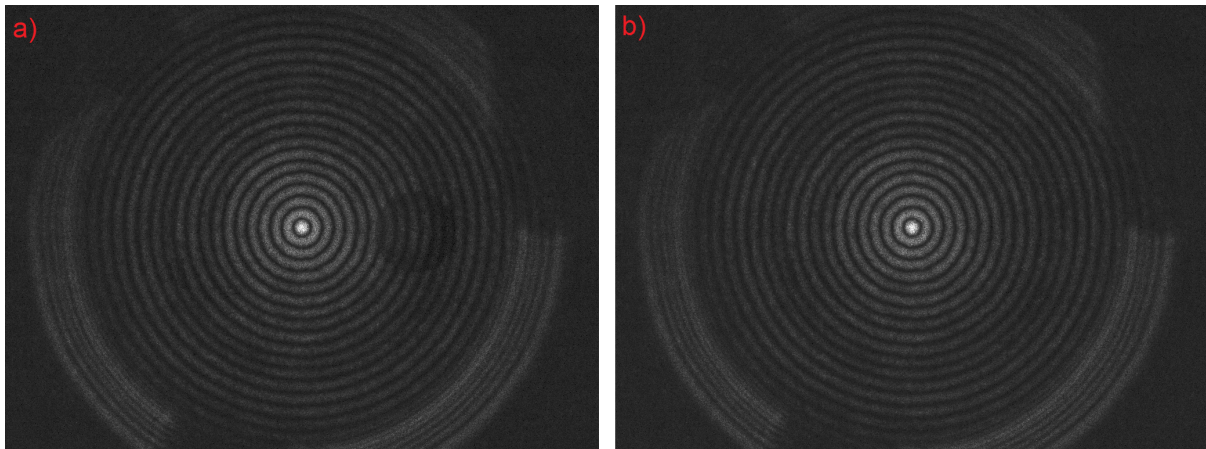


Figura 5.3. Registros de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss. Registro de referencia (a) y deformados por objeto (b).

De tal manera que, como se mencionó en el Capítulo IV, para mejorar el filtrado de la información de fase del objeto a través de la FFT, se tomó la región asintótica de las imágenes resultando en las imágenes mostradas en la Figura 5.4.

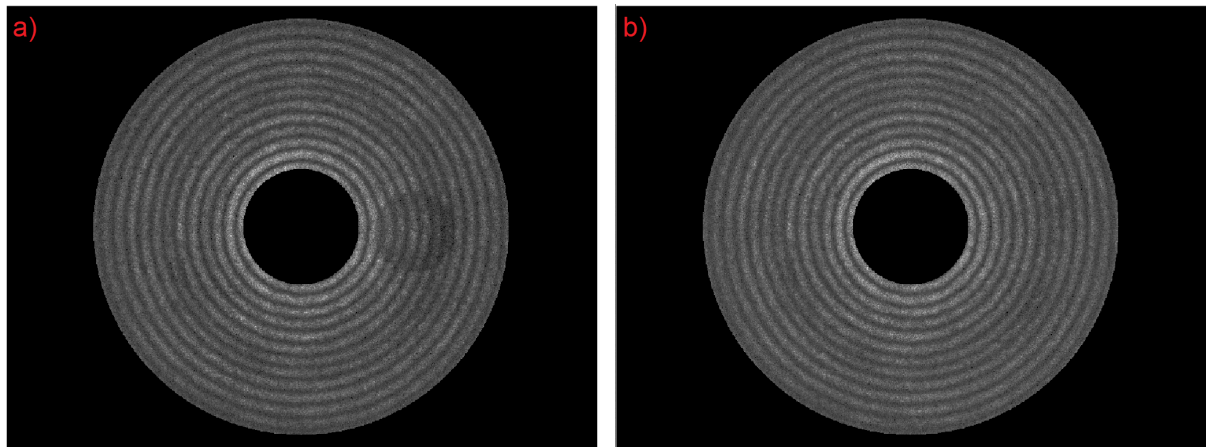


Figura 5.4. Región asintótica de los registros de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss. Registro de referencia (a) y deformados por objeto (b).

Con la finalidad de aplicar el método de Takeda [2] mencionado en Capítulo II existe la necesidad de aplicar una transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares dado por las Ecuaciones 3.6 y 3.7. En la Figura 5.5 se muestra dicha transformación además del mapa de fase envuelta luego del filtrado de su transformada de Fourier, su consecuente

transformación inversa y posterior extracción de fase.

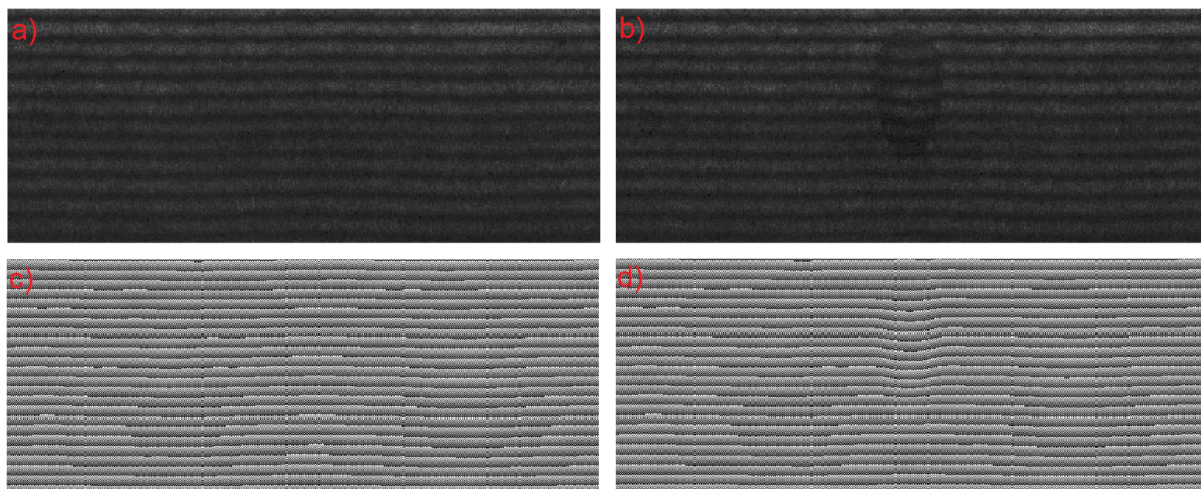


Figura 5.5. Transformación de coordenadas de las franjas de referencia (a), las deformadas (b) además de sus fases envueltas asociadas (c) y (d), respectivamente

En la Figura 5.6 se muestra el espectro de Fourier de la imagen dada en la Figura 5.5b señalado uno las regiones asociadas a la frecuencia portadora.

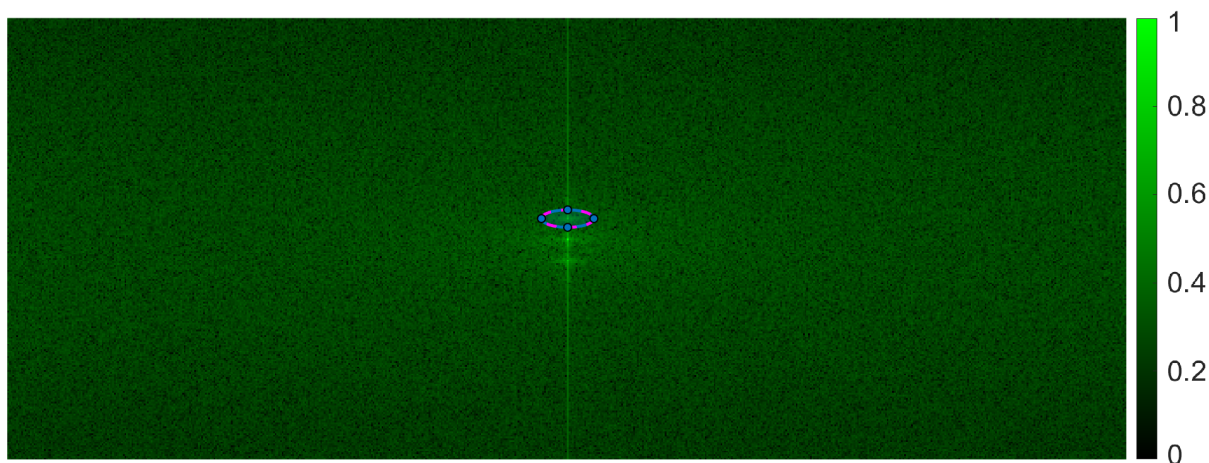


Figura 5.6. Transformada de Fourier de las franjas, deformadas por la semiesfera, en coordenadas polares.

A causa de la discontinuidad de la fase envuelta (Figuras 5.5c y 5.5d), un algoritmo de desenrollamiento debe ser aplicado. Debido a su simplicidad se utilizó la función unwrap del

software MATLAB (desde MATLAB R2024b). Para, de esta forma, hacer la diferencia entre las fases desenvueltas, de las franjas deformadas y de referencia, obteniendo la Figura 5.7a.

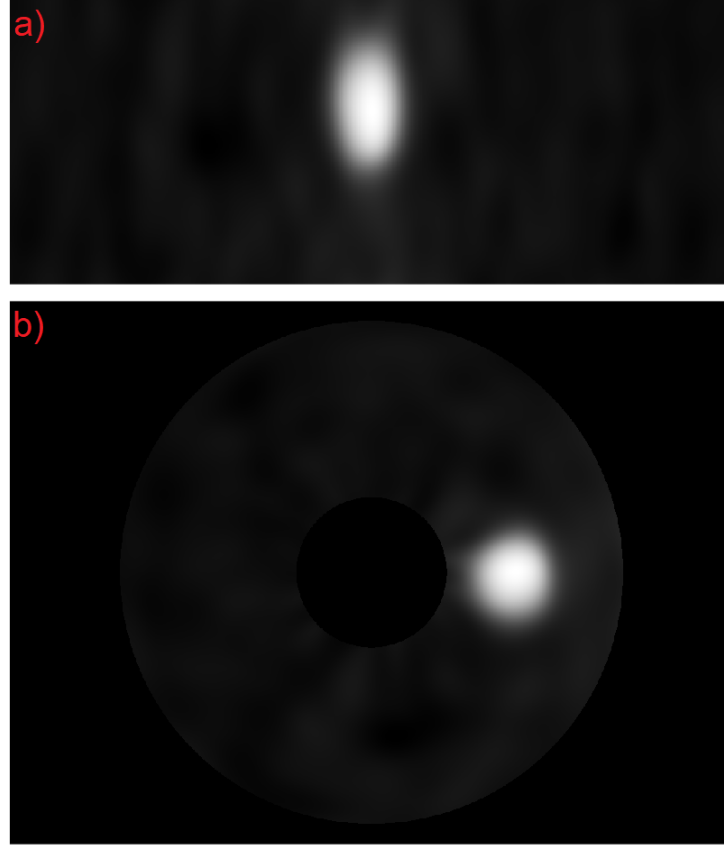


Figura 5.7. Diferencia de fase en coordenadas polares (a) y rectangulares (b).

Regresando la imagen a las coordenadas originales (rectangulares), es decir, aplicando una transformación de coordenadas polares a coordenadas rectangulares, se obtiene el mapa de fase asociado a la información del objeto (Figura 5.7b). Para reconstruir el objeto dado su mapa de fase $\Delta\phi(x,y)$, es necesario una asignación uno a uno con la distribución de alturas del objeto $h(x,y)$. Idealmente según el principio de triangulación [2] esta conversión está dada por

$$h(x,y) = \frac{\Delta\phi(x,y)L}{2\pi f_0 d + \Delta\phi(x,y)}, \quad (5.1)$$

para f_0 como la frecuencia portadora. De igual manera que en la Ecuación (1.1), los parámetros d y L están asociados a la configuración experimental, de tal manera que d es la distancia entre

la pupila de entrada de la cámara CCD y la pupila de salida del sistema de proyección y L la distancia entre esta última y la pantalla o plano de referencia. En la Figuras 5.8a y 5.9 se muestra la reconstrucción 3D del objeto de análisis (semiesfera de 5 mm de radio) además de los perfiles de línea horizontal 5.8b y vertical 5.8c posicionados en el punto de altura máxima de la distribución de alturas del objeto reconstruido.

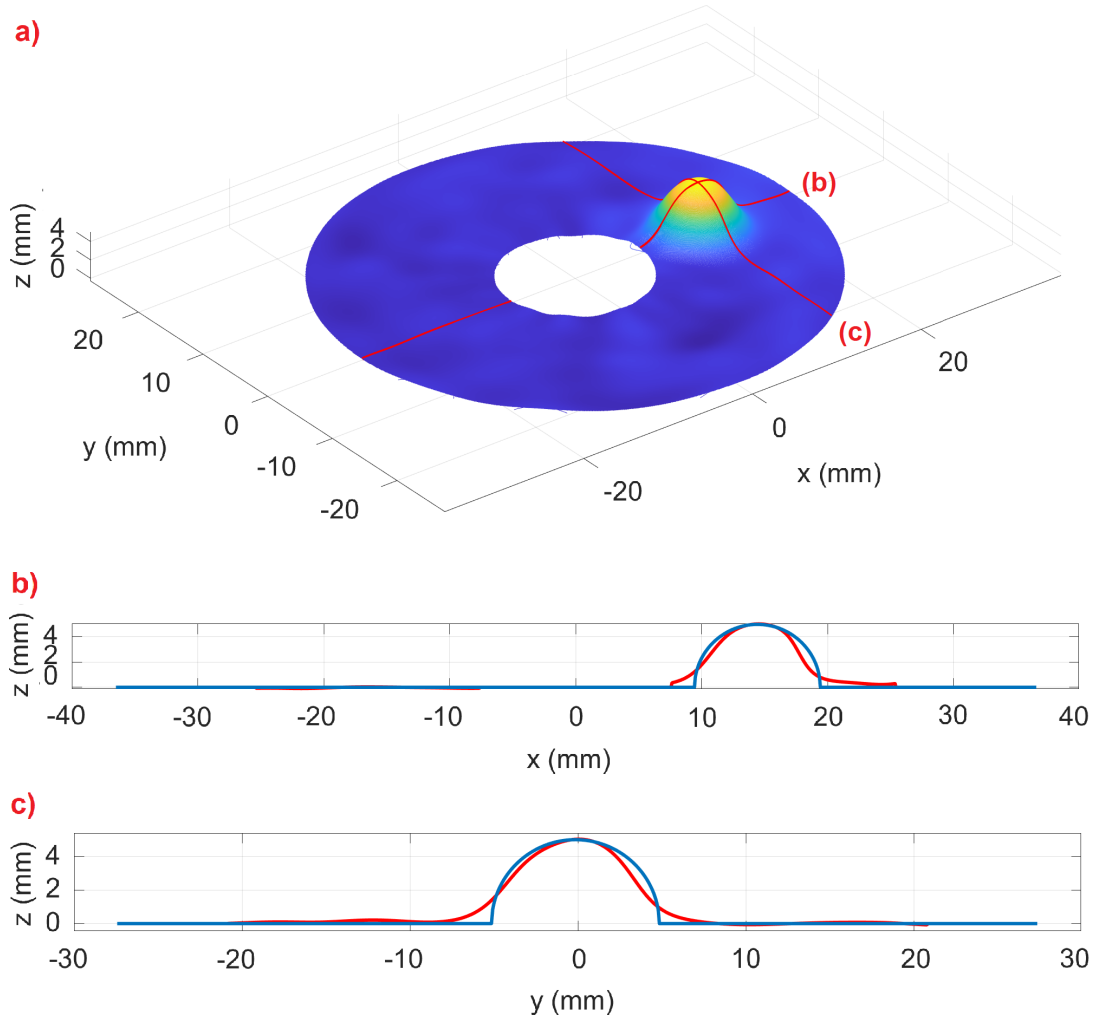


Figura 5.8. Reconstrucción 3D de la semiesfera (a) y los perfiles alturas en la posición de la altura máxima horizontal (b) y vertical (c). En rojo, el perfil asociado a la reconstrucción y en azul, el asociado al modelado 3D del objeto real. Coordenadas en mm

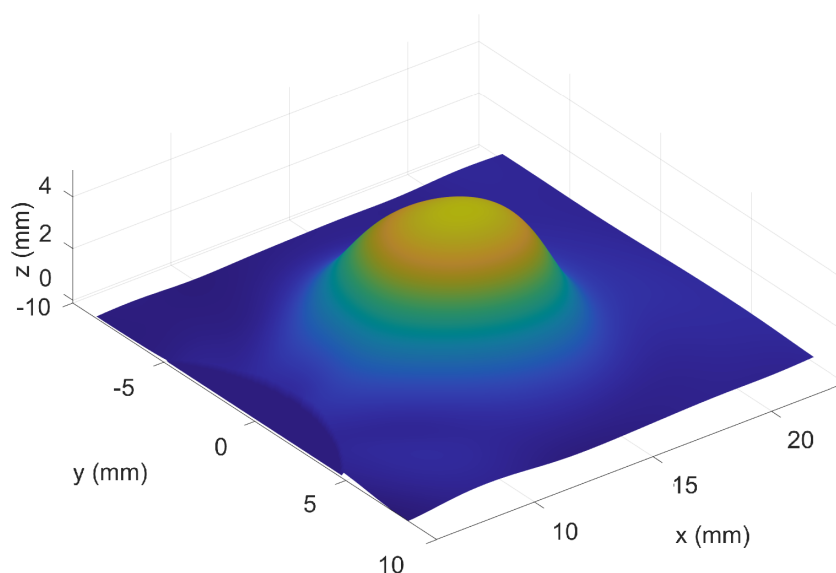


Figura 5.9. Reconstrucción 3D de la semiesfera. Coordenadas en mm

La altura máxima medida del objeto reconstruido es de 5.03 ± 0.02 mm en contraste a la altura real de 5 mm, representando 0.6% de error en dicha medición. Con respecto a la raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés) de la distribución de alturas del campo completo se obtuvo $1.93 \pm 0.02 \times 10^{-2}$ mm. En la Figura 5.10 se muestra el error absoluto de la medición, es decir, el de la diferencia entre el modelado 3D del objeto real y el del reconstruido.

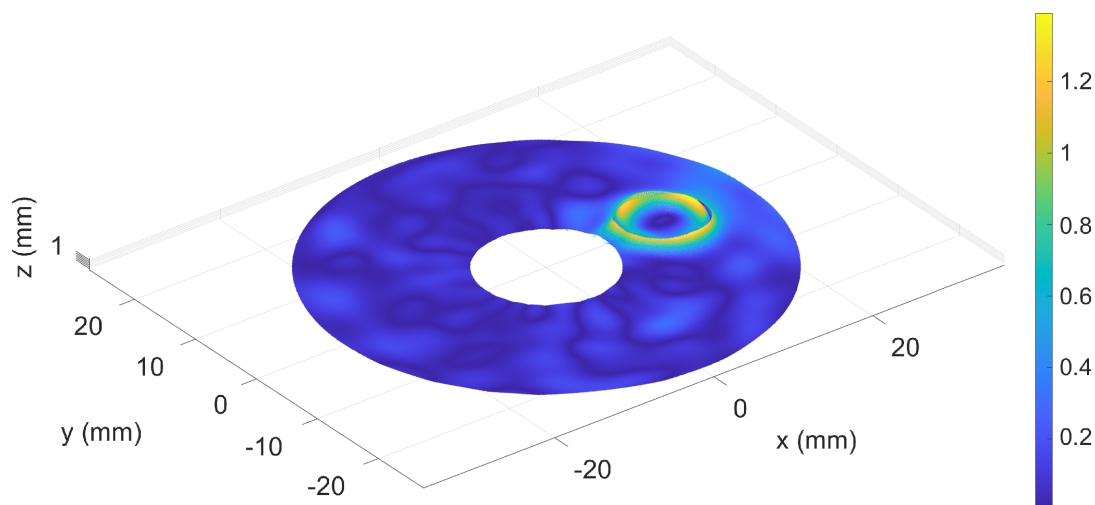


Figura 5.10. Error absoluto de la medición. Coordenadas en mm

Note que la mayoría del error en la reconstrucción está en los bordes debido al filtrado gaussiano en la FFT.

5.4 Otras reconstrucciones

Con la finalidad de mostrar la versatilidad de mediciones que se pueden ejecutar con modificaciones mínimas en el arreglo experimental se colocó una lente $L3$ de distancia focal $f_3 = 7$ cm a 31 cm por delante de la lente $L2$ y con el propósito de bloquear la luz que no incidiera en $L3$, un diafragma. Bajo este nuevo arreglo, se registró una imagen con menor frecuencia en el patrón, para con ello, tener sólo tres franjas sobre el objeto, una semiesfera de 10 mm de diámetro. La imagen registrada y la diferencia de fase de las franjas son mostradas en la Figura 5.11.

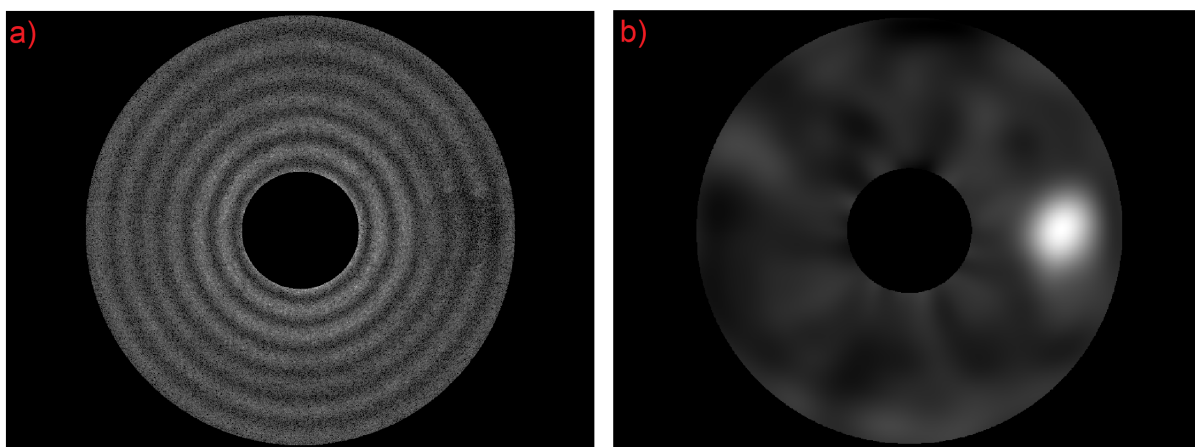


Figura 5.11. Registro de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss con sólo tres franjas sobre el objeto (a) y la diferencia de fase de dichas franjas (b).

La altura máxima medida en la reconstrucción es de 5.14 ± 0.02 mm en contraste a la altura real de 5 mm, representando 2.8% de error en dicha medición; además, la reconstrucción presenta un RMSE de campo completo de $6.25 \pm 0.02 \times 10^{-2}$ mm. La reconstrucción 3D de la distribución de alturas de la superficie del objeto es mostrada en la Figura 5.12. Asimismo, en la Figura 5.13 es mostrada la reconstrucción topográfica de campo completo con los perfiles horizontales y verticales en la localización de la altura máxima medida.

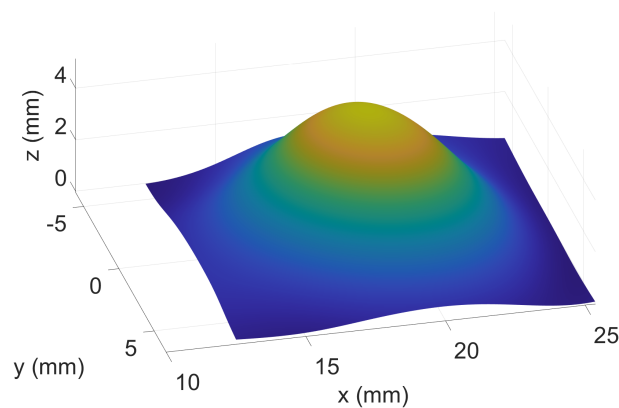


Figura 5.12. Reconstrucción 3D de la semiesfera con un patrón de franjas menos frecuente. Coordenadas en mm.

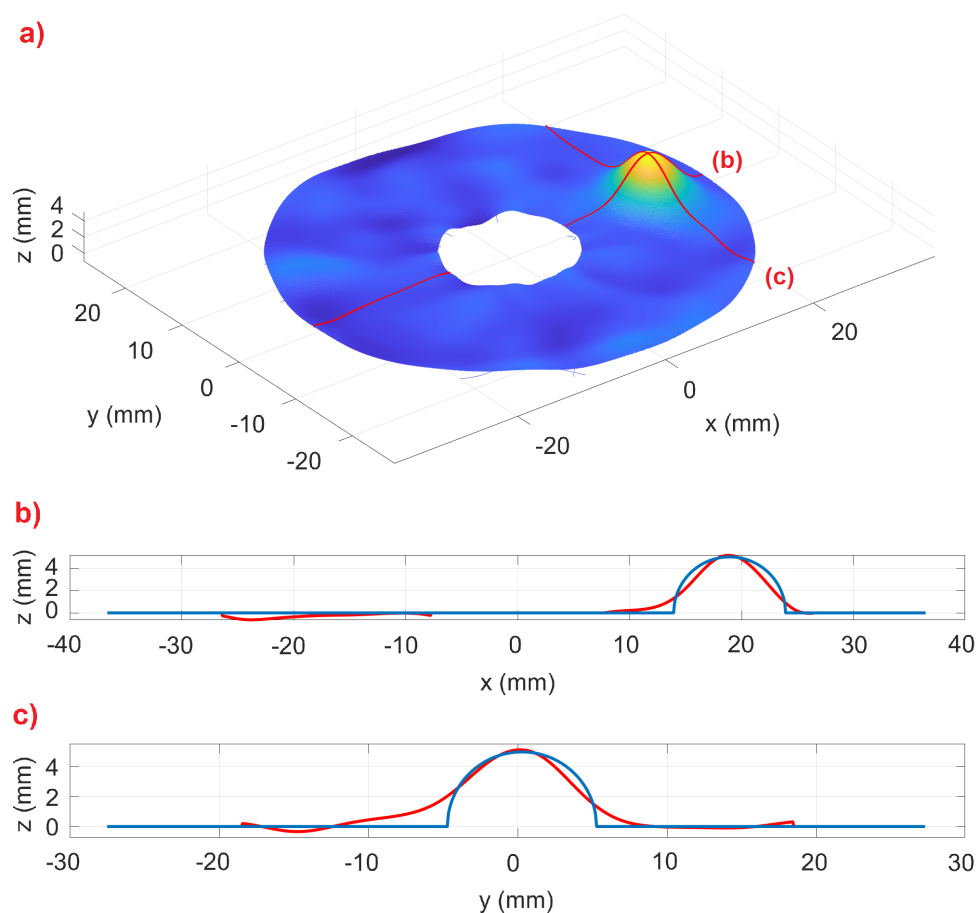


Figura 5.13. Reconstrucción 3D de la semiesfera con un patrón menos frecuente (a) y los perfiles alturas en la posición de la altura máxima horizontal (b) y vertical (c). En rojo, el perfil asociado a la reconstrucción y en azul, el asociado al modelado 3D del objeto real. Coordenadas en mm

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1 Conclusiones y discusiones

Se implementó un arreglo experimental para la reconstrucción de objetos con dimensiones en el orden milimétrico a partir de la proyección de franjas concéntricas del tipo Bessel-Gauss generadas por la interacción entre una fuente láser y una lente cónica; sin embargo, al hacer uso de esta fuente de iluminación, el patrón de franjas presenta ruido asociado al moteado, característica asociada a las fuentes de alta coherencia, por lo que el uso de un LED de alta potencia como fuente presenta una buena alternativa.

La resolución en la medición de topografías 3D con una técnica de proyección de franjas como la implementada depende directamente de la frecuencia de las franjas, la configuración experimental desarrollada presenta la ventaja de poder modular dicha frecuencia a partir de la modificación de la distancia entre la lente cónica LC y la lente generadora de la imagen $L2$. Inclusive, asociado a las características de $L2$, una lente con potencia óptica mayor generará un patrón de franjas menos frecuente y un campo de trabajo más amplio, con ello, permitiendo hacer mediciones sobre objetos más extensos; Asimismo, una lente con menor potencia óptica, patrones más frecuentes y por tanto, mediciones sobre objetos con distribuciones de altura debajo del orden milimétrico.

Note que las reconstrucciones 3D hechas y mostradas en las Figuras 5.8 y 5.13, con una incidencia de 7 y 3 franjas sobre una semiesfera de 5 mm de altura, respectivamente, poseen un RMSE de dos órdenes de magnitud por debajo del rango milimétrico, así como un error porcentual debajo del 4% en la medición de la altura máxima del objeto. Esto permite calificar a los resultados de la técnica de reconstrucción como estadísticamente buenos.

A causa de la elección de la posición y orientación de la cámara CCD (sobre el eje transversal a la mesa óptica y rotada 90°) las reconstrucciones muestran distribuciones menos deformadas por la perspectiva sobre el eje asociado a las Figuras 5.8c y 5.13c.

La alineación de la cámara CCD juega un rol fundamental debido a la ubicación del punto de fase cero, el centro de la imagen en este trabajo, y a la deformación del patrón registrado

por el ángulo de inclinación del eje óptico. En el desarrollo de este proyecto de investigación se notó que en caso de incluir este punto hay dos formas de sortear con su alineación, de forma mecánica, con una montura XYZ milimétrica o a partir de la localización de dicho centro sobre la imagen y la posterior adecuación en la transformación de coordenadas debido a ello. En el caso de la inclinación, mayor inclinación supondría una deformación de las franjas en la imagen registrada de franjas circulares a franjas elípticas; el trabajo sobre la transformación de coordenadas rectangulares a polares generará una imagen con franjas no del todo lineales, pero aún así franjas abiertas, presentando un transformada de Fourier fuera de uno de los ejes coordenados, sin embargo no imposibilita su filtrado. De igual manera la modificación de la transformación considerando la excentricidad adquirida puede ser implementada.

6.2 Trabajo futuro

El conocimiento, el desarrollo científico y la especialización del mismo está cimentado en la generación de conocimiento de forma escalonada donde cada escalón siempre es base de los consecuentes. Por ello, los principales trabajos a futuro planeados son:

- Implementación de una fuente de iluminación LED de baja coherencia y alta potencia en el arreglo experimental planteado.
- Modificación de la posición de la cámara CCD para el aumento en la resolución tal como es trabajado por Zhang et al [9].
- Generar reconstrucciones 3D en el orden micrométrico bajo la combinación de las dos anteriores adecuaciones.
- De igual manera, hacer reconstrucciones en el orden micrométrico con una configuración experimental *on axis* [12] con patrones de franjas del tipo Bessel.
- Aplicación de las técnicas micrométricas para reconstrucción de las estructuras periódicas en la superficie de cristales fotónicos.

REFERENCIAS

- [1] S. Feng et al., “Calibration of fringe projection profilometry: A comparative review,” *Optics and lasers in engineering*, vol. 143, pág. 106 622, 2021.
- [2] M. Takeda, H. Ina y S. Kobayashi, “Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry,” *JosA*, vol. 72, n.º 1, págs. 156-160, 1982.
- [3] M. Takeda y K. Mutoh, “Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes,” *Applied optics*, vol. 22, n.º 24, págs. 3977-3982, 1983.
- [4] S. S. Gorthi y P. Rastogi, “Fringe projection techniques: whither we are?” *Optics and lasers in engineering*, vol. 48, n.º 2, págs. 133-140, 2010.
- [5] J. Harizanova y V. Sainov, “Three-dimensional profilometry by symmetrical fringes projection technique,” *Optics and lasers in engineering*, vol. 44, n.º 12, págs. 1270-1282, 2006.
- [6] J. Harizanova, E. Stoykova y V. Sainov, “Phase retrieval techniques in coordinates measurement,” en *AIP conference proceedings*, American Institute of Physics, vol. 899, 2007, págs. 321-322.
- [7] E. Li, X. Peng, J. Xi, J. F. Chicharo, J. Yao y D. Zhang, “Multi-frequency and multiple phase-shift sinusoidal fringe projection for 3D profilometry,” *Optics Express*, vol. 13, n.º 5, págs. 1561-1569, 2005.
- [8] T. L. Pennington, H. Xiao, R. May y A. Wang, “Miniaturized 3-D surface profilometer using a fiber optic coupler,” *Optics & Laser Technology*, vol. 33, n.º 5, págs. 313-320, 2001.
- [9] R. Zhang, H. Guo y A. K. Asundi, “Geometric analysis of influence of fringe directions on phase sensitivities in fringe projection profilometry,” *Applied optics*, vol. 55, n.º 27, págs. 7675-7687, 2016.

- [10] Z. Ge, F. Kobayashi, S. Matsuda y M. Takeda, “Coordinate-transform technique for closed-fringe analysis by the Fourier-transform method,” *Applied Optics*, vol. 40, n.º 10, págs. 1649-1657, 2001.
- [11] H. Zhao, C. Zhang, C. Zhou, K. Jiang y M. Fang, “Circular fringe projection profilometry,” *Optics letters*, vol. 41, n.º 21, págs. 4951-4954, 2016.
- [12] A. Sicardi-Segade, J. Estrada, A. Martínez-García y G. Garnica, “On axis fringe projection: a new method for shape measurement,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 69, págs. 29-34, 2015.
- [13] C. Zhang et al., “Three-dimensional measurement based on optimized circular fringe projection technique,” *Optics express*, vol. 27, n.º 3, págs. 2465-2477, 2019.
- [14] M. Ratnam, M. Saxena y S. S. Gorthi, “Circular fringe projection technique for out-of-plane deformation measurements,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 121, pág. 369, 2019.
- [15] J. K. Mandapalli, G. S. Siva, R. K. S. S. Gorthi y S. Gorthi, “Circular Fringe Projection Method for 3D Profiling of High Dynamic Range Objects.,” en *VISIGRAPP (5: VISAPP)*, 2019, págs. 849-856.
- [16] J. K. Mandapalli, V. Ravi, S. S. Gorthi, S. Gorthi y R. K. Gorthi, “Single-shot circular fringe projection for the profiling of objects having surface discontinuities,” *JOSA A*, vol. 38, n.º 10, págs. 1471-1482, 2021.
- [17] Q. Chen, M. Han, Y. Wang y W. Chen, “An improved circular fringe fourier transform profilometry,” *Sensors*, vol. 22, n.º 16, pág. 6048, 2022.
- [18] G. Ruan, Y. Cao, H. Wu, Z. Wei y C. Li, “Absolute phase retrieval based on spatial ternary phase coding with circular fringe projection,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 178, pág. 108 167, 2024.
- [19] J. Li y B. Li, “Comparative analysis of circular and linear fringe projection profilometry: from calibration to 3D reconstruction,” *Optics Continuum*, vol. 3, n.º 3, págs. 468-483, 2024.

- [20] M. J. Roberts, *Signals and systems: analysis using transform methods and MATLAB*. McGraw-Hill, 2011.
- [21] S. M. Kuo, B. H. Lee y W. Tian, *Real-time digital signal processing: fundamentals, implementations and applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [22] G. B. Arfken, H. J. Weber y F. E. Harris, *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [23] R. E. Woods y R. C. Gonzalez, *Digital Image Processing Third Edition*. Pearson: Prentice Hall, 2021.
- [24] R. C. Gonzalez, *Digital image processing*. Pearson education india, 2009.
- [25] W. K. Pratt, *Digital image processing: PIKS Scientific inside*. Wiley Online Library, 2007, vol. 4.
- [26] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory,” *JOSA A*, vol. 4, n.º 4, págs. 651-654, 1987.
- [27] J. Durnin, J. Miceli Jr y J. H. Eberly, “Diffraction-free beams,” *Physical review letters*, vol. 58, n.º 15, pág. 1499, 1987.
- [28] A. S. Rao, “A conceptual review on Bessel beams,” *Physica Scripta*, vol. 99, n.º 6, pág. 062 007, 2024.
- [29] V. Bagini, F. Frezza, M. Santarsiero, G. Schettini y G. S. Spagnolo, “Generalized bessel-gauss beams,” *Journal of modern optics*, vol. 43, n.º 6, págs. 1155-1166, 1996.
- [30] B. E. Saleh y M. C. Teich, *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019.
- [31] I. A. Litvin, M. G. McLaren y A. Forbes, “A conical wave approach to calculating Bessel–Gauss beam reconstruction after complex obstacles,” *Optics Communications*, vol. 282, n.º 6, págs. 1078-1082, 2009.