



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Calibración de Osciladores Dinámicos en el
Comportamiento Vibratorio de Estructuras Sometidas a
Vibraciones Inducidas por Vórtices

presentada por
Ing. Hussein Antonio Peña Colli

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis
Dr. Miguel Ángel Chagolla Aranda

Codirector de tesis
Dr. Jorge Colín Ocampo

Cuernavaca, Morelos, México. Abril de 2026.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca Mor, **23/marzo/2026**

Oficio No. SAC/098/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis

HUSSEIN ANTONIO PEÑA COLLI
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Calibración de osciladores dinámicos en el comportamiento vibratorio de estructuras sometidas a vibraciones inducidas por vórtices"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®

"Conocimiento y Tecnología al servicio de México"

CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



c.c.p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



2026
año de
Margarita Maza

cenidet
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 4104,
e-mail: acad_cenidet@tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo tecnológico
Departamento de Ingeniería Mecánica

Cuernavaca, Mor., 20/marzo/2026

OFICIO No. DIM/068/2026

Asunto: Aceptación de documento de tesis

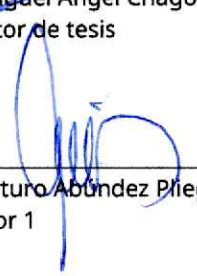
CENIDET-AC-004-M14-OFICIO

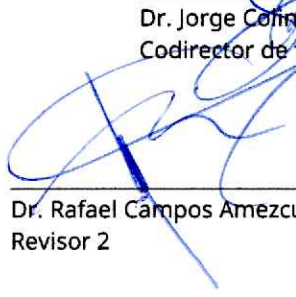
DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Hussein Antonio Peña Colli con número de control M24CE031, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado "**Calibración de osciladores dinámicos en el comportamiento vibratorio de estructuras sometidas a vibraciones inducidas por vórtices**" y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.


Dr. Miguel Angel Chagolla Aranda
Director de tesis


Dr. Jorge Conín Ocampo
Codirector de tesis


Dr. Arturo Abundez Pliego
Revisor 1


Dr. Rafael Campos Amezcua
Revisor 2


Dr. Eladio Martínez Rayón
Revisor 3

C.c.p. Depto. Servicios Escolares.
Expediente / Estudiante



2025
Año de
La Mujer
Indígena

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 1421,
e-mail: dim@cenidet.tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx

cenidet
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), anteriormente CONAHCYT, por el apoyo económico que hizo posible la realización de este proyecto.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), por abrirme las puertas de sus instalaciones y brindarme la oportunidad de continuar con mi preparación académica y profesional.

A mi padre Javier Peña Campos, mi madre Gelmi Rosalba Colli Pan y hermano Pedro Javier Peña Colli, quienes siempre han estado conmigo en los malos y buenos momentos.

Al Dr. Miguel Ángel Chagolla Aranda y al Dr. Jorge Colin Ocampo por tomarse el tiempo de analizar y enriquecer la investigación realizada con sus comentarios durante las reuniones de trabajo.

A mi comité revisor, el Dr. Arturo Abundez Pliego, el Dr. Eladio Martínez Rayón y el Dr. Rafael Campos Amezcua, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, por sus valiosas observaciones que enriquecieron su contenido.

A la Sra. Rocio Salazar y a todo el equipo de trabajo del Departamento de Ingeniería Mecánica, por brindarme el apoyo necesario y la amistad durante mi estancia en el CENIDET.

A las buenas personas que conocí: Hugo Sánchez, Jesús Cortes, Marte Beltrán, Javier Antonio, Jesús Cruz, Edgar Sotelo, Sergio Elizalde, María de los Ángeles Ramírez, Hugo Andrés, David Paez, Melchor Camacho, Yessenia Diaz, Alejandro Pineda y Elías Ramírez por su amistad brindada, orientación y

con quienes compartí momentos inolvidables durante mi estancia en el CENIDET.

Por último, quiero dar un agradecimiento a dios quien me brindó salud y la dicha de haber concluido mis estudios de posgrado y a mi tío Alfredo Campos y su familia quienes me abrieron los brazos durante mi estancia en Cuernavaca Morelos.

"Lo que ha sido creado por una mente humana no puede no ser descifrado por otra"

Yuri Knorozov.

"La suerte ya está echada"

Julio Cesar.

Índice

Índice de tablas	IV
Índice de figuras	VI
Nomenclatura	XI
Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
Capítulo 1: Estado del arte	4
1.1 Antecedentes	5
1.1.1 Modelación con osciladores dinámicos	6
1.1.2 Calibración de parámetros del oscilador de estela para las <i>VIV</i>	11
1.1.3 Metodología de calibración de parámetros de Xu. <i>et al.</i> 2015	12
1.1.4 Metodología de calibración de parámetros de Kurushina (2018)	13
1.1.5 Conclusiones	15
1.2 Metas	16
1.2.1 Problemática	16
1.2.2 Objetivo general	16
1.2.3 Objetivos específicos	16
1.2.4 Alcances y limitaciones	16
Capítulo 2: Fundamentos teóricos	17
2.1 Parámetros del fluido	18
2.1.1 Viscosidad	18
2.1.2 Número de Reynolds	18
2.2 Física del fenómeno de las <i>VIV</i>	19
2.2.1 Estela y capa límite	19
2.2.2 Desprendimiento de vórtices	21
2.2.3 Fuerza de arrastre	22
2.2.4 Fuerza de sustentación	23
2.2.5 Masa añadida por el fluido	25
2.2.6 Oscilador de masa-resorte-amortiguador	26

2.2.7	Osciladores no lineales.....	27
2.3	Algoritmos de optimización.....	27
2.3.1	Algoritmo genético.....	28
2.3.2	<i>Matlab Optimization Toolbox</i>	29
2.4	Experimentos de las <i>VIV</i>	30
2.4.1	Experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).....	30
2.4.2	Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009).....	31
2.4.3	Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020).....	32
2.5	Modelo matemático.....	34
2.5.1	Oscilador estructural en las <i>VIV</i>	34
2.5.2	Osciladores de estela en las <i>VIV</i>	36
Capítulo 3: Metodología de calibración propuesta		37
3.1	Estrategia de calibración	38
3.1.1	Puntos iniciales e intervalos en la calibración.....	38
3.1.2	Función objetivo y distribución de ponderaciones.....	40
3.1.3	Asignación de ponderaciones y puntos de control	41
3.1.4	Algoritmo de calibración.....	42
Capítulo 4: Análisis e interpretación de resultados.....		44
4.2	Calibración con experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).....	45
4.2.1	Calibración con 5 puntos de control.....	45
4.2.2	Calibración con 6 puntos de control.....	49
4.2.3	Calibración con 7 puntos de control.....	54
4.3	Calibración con experimento de Yang <i>et al.</i> (2009).....	59
4.3.1	Calibración con 5 puntos de control.....	59
4.3.2	Calibración con 6 puntos de control.....	64
4.3.3	Calibración con 7 puntos de control.....	69
4.4	Calibración con Deng <i>et al.</i> (2020).....	75
4.4.1	Calibración con 5 puntos de control.....	75
4.4.2	Calibración con 6 puntos de control.....	81
4.4.3	Calibración con 7 puntos de control.....	86
4.5	Discusiones.....	91

4.5.1	Resultados del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).....	91
4.5.2	Resultados del experimento de Yang <i>et al.</i> (2009).....	93
4.5.3	Resultados del experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)	95
4.5.4	Discusiones generales	97
Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones		99
5.1.1	Recomendaciones.....	99
5.1.2	Conclusiones	99
APÉNDICE		101
Apéndice A: Parámetros obtenidos de la calibración.....		102
Apéndice B. Velocidad relativa del fluido al objeto oscilante.		113
BIBLIOGRAFÍA		115

Índice de tablas

Tabla 1.1-1: Características de los experimentos para realización de calibración de parámetros del experimento de Xu et al. (2015).....	12
Tabla 1.1-2: Características de los experimentos para realización de calibración de parámetros del experimento de Kurushina (2018).....	13
Tabla 1.1-3: Tabla de ponderaciones de los puntos de control de Kurushina (2018).....	15
Tabla 2.2-1: Valor de $CD0$ en función de la geometría LD para $1.5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^5$. (White, 2011).....	23
Tabla 2.2-2: Recopilación de Norberg (2003) de mediciones experimentales del coeficiente de sustentación en canales de agua.	24
Tabla 2.2-3: Relación de masa en función de la relación geométrica. (Blevins et al. 1980).	25
Tabla 2.3-1: Algoritmos que integran Matlab Optimization Toolbox. (MathWorks, 2024).....	29
Tabla 2.4-1: Características del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)	30
Tabla 2.4-2: Características del experimento de Yang et al. (2009).....	31
Tabla 2.4-3: Características del experimento de Deng et al. (2009)	33
Tabla 2.5-1: Osciladores de estela utilizados en esta investigación.	36
Tabla 3.1-1: Clasificación de los parámetros calibrados.	38
Tabla 3.1-2: Intervalos y puntos iniciales de los parámetros empíricos.	38
Tabla 3.1-3: Condiciones iniciales y límites para la calibración de los coeficientes físicos.	39
Tabla 3.1-4: Parámetros obtenidos del ajuste de las funciones unimodales con los ensayos experimentales.....	41
Tabla 4.2-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con cinco puntos de control.....	46
Tabla 4.2-2: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con seis puntos de control.	50
Tabla 4.2-5: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con siete puntos de control. Autoría propia.....	55
Tabla 4.3-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con cinco puntos de control.	60
Tabla 4.3-2: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con seis puntos de control.	65
Tabla 4.3-5: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con seis puntos de control. Autoría propia.....	70
Tabla 4.4-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Deng et al. (2020) con cinco puntos de control.	76
Tabla 4.4-3: Ponderaciones para la calibración con seis puntos de control en el experimento de Deng et al. (2020).	82
Tabla 4.4-5: Ponderaciones para la calibración con siete puntos de control en el experimento de Deng et al. (2020).....	87

Índice de figuras

Figura 1.1-1: a) Aerogenerador en campo. b) Diseño de aerogenerador. (Plazaola-Iguaran 2022).	5
Figura 1.1-2: Camino de vórtices de Von Karman. (Williamson y Govardhan 2004)	5
Figura 1.1-3: Estructura rígida en un flujo uniforme con un grado de libertad. (Griffin et al. 1973).	7
Figura 1.1-4: Influencia de los diferentes osciladores de estela. (Kurushina, 2018)	11
Figura 1.1-5: Modelo matemático calibrado por Xu et al. (2015)	13
Figura 1.1-6: Puntos de control ponderados sobre los desplazamientos experimentales de Stappenbelt et. al (2008). Tomado de Kurushina (2018)	14
Figura 1.1-7: Modelos matemáticos calibrados.(Kurushina, 2018 y Kurushina et al. 2022).....	15
Figura 2.1-1: Comportamiento mecánico de un fluido.	18
Figura 2.1-2: Regímenes del flujo: A laminar, B transición, C turbulento.	19
Figura 2.2-1: A zona de estela en experimento, B estela esquematizada, C comportamiento del fluido en la superficie del cilindro.....	20
Figura 2.2-2: A gráfica de vorticidad, B mecanismo de vorticidad.	20
Figura 2.2-3: Camino de vórtices de Von Karman. (Rodríguez, 2020).....	21
Figura 2.2-4: Secuencia de los campos de presión superficiales en cilindro fijo generados por los desprendimientos de vórtices en $Re = 112000$. (Blevins, 2001).	21
Figura 2.2-5: Frecuencias de desprendimiento de vórtices experimentales en cilindros lisos. (White, 2011).	22
Figura 2.2-6: Esfera en un fluido en movimiento. (Mott 1996).....	22
Figura 2.2-7: Coeficientes de arrastre $CD0$ para diferentes geometrías. (Nakayama 2018).	23
Figura 2.2-8: Mediciones del coeficiente de sustentación en cilindros fijos. (Blevins 2001).....	24
Figura 2.2-9: Fuerzas sobre un objeto dentro de un fluido en movimiento.	25
Figura 2.2-10: Coeficiente de masa añadida CA en función de la relación LD	26
Figura 2.2-11: Sistema mecánico de masa ms -resorte hs -amortiguador rs	26
Figura 2.2-12: Ciclo límite. Autoría propia referenciado de Ávila-Patarroyo (2012).....	27
Figura 2.3-1: Mínimos globales y mínimos globales de una función objetivo. (Cortez, 1997).....	28
Figura 2.3-2: Proceso básico del algoritmo genético. (Cheng et al., 2021)	28
Figura 2.4-1: Comportamiento dinámico del experimento Stappenbelt y Lalji (2008).	31
Figura 2.4-2: Comportamiento dinámico del experimento de Yang et al. (2009).	32
Figura 2.4-3: Modelo del experimento del túnel flotante. (Deng et al., 2020)	32
Figura 2.4-4: Comportamiento dinámico del experimento de Deng et al. (2020).	33
Figura 2.5-1: Cilindro rígido de un grado de libertad soportado elásticamente que interactúa con un fluido de velocidad constante. (Kurushina, 2018).	34
Figura 3.1-1: Diagrama de flujo del algoritmo de calibración.	42
Figura 4.2-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	45

Figura 4.2-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	47
Figura 4.2-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	48
Figura 4.2-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)	49
Figura 4.2-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	51
Figura 4.2-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	53
Figura 4.2-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	54
Figura 4.2-8: Resultados de la Calibración con 7 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	56
Figura 4.2-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	58
Figura 4.3-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Yang et al. (2009).	59
Figura 4.3-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).	61
Figura 4.3-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).	63
Figura 4.3-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de (Yang et al., 2009).	64
Figura 4.3-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).	66
Figura 4.3-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).	68
Figura 4.3-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de (Yang et al., 2009).	69
Figura 4.3-8: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).	72

Figura 4.3-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).....	74
Figura 4.4-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020)....	75
Figura 4.4-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).	78
Figura 4.4-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. 2020.	80
Figura 4.4-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020).....	81
Figura 4.4-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).	83
Figura 4.4-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. (2020).	85
Figura 4.4-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020).	86
Figura 4.4-8: Resultados de la Calibración con 7 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).	88
Figura 4.4-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. (2020).	90
Figura 4.5-1: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).	92
Figura 4.5-2: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Yang et al. (2009).....	94
Figura 4.5-3: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Deng et al. (2020).	96
Figura 4.5-4: Comparativa de los errores de la metodología propuesta y la metodología de Kurushina (2018) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).....	97
Figura 4.5-5: Distribución de las amplitudes experimentales y la selección de puntos de control de la respuesta de la estructural en el experimento de Yang et al. (2009).....	98

Nomenclatura

ρ_f	Densidad del fluido [kg/m^3]
τ	Cortante
η	Viscosidad dinámica [$kg/m \cdot s$]
ϑ	Viscosidad cinemática [m^2/s]
$\dot{\gamma}, dU/dy$	Tasa de deformación cortante
U	Velocidad del fluido [m/s]
U_0	Velocidad del fluido libre [m/s]
U_r	Velocidad reducida
U_{rc}	Velocidad reducida de la ocurrencia de la amplitud experimental máxima
o	Origen del plano coordenado
R_e	Número de Reynolds
D	Diámetro de cilindro, longitud característica [m]
ω	Vorticidad
d	Distancia [m]
f_v	Frecuencia de desprendimiento de vórtices [H_z]
Ω_R	Frecuencia de desprendimiento de vórtices reducida
f_n	Frecuencia de natural de la estructura [H_z]
f	Frecuencia
$a, b, c, \dots, z$	Constantes
S_t	Número de Strouhal
F_D	Fuerza de arrastre [N]
A_c	Área característica [m^2]
C_{D0}, d_0	Coeficiente de arrastre en estructuras fijas
p_s	Punto de estancamiento
y	Amplitud, distancia vertical [m]
C_{Dm}	Coeficiente de arrastre amplificado
F_L	Fuerza de sustentación [N]
C_L	Coeficiente de sustentación de estructura oscilante
C_{L0}, c_0	Coeficiente de sustentación en estructuras fijas
F_N	Suma vectorial de fuerzas (N)
L	Longitud
C_A	Coeficiente de masa añadida por el fluido
h_s	Rigidez de apoyo estructural [N/m]
r_s	Coeficiente de amortiguamiento estructural
ξ	Relación de amortiguamiento estructural
m_s	Masa estructural [kg]
μ	Relación de masas

m_*	Masa efectiva
t	Tiempo [s]
T	Tiempo adimensional
ω_0	Frecuencia angular [rad/s]
ω_n	Frecuencia angular natural [rad/s]
ω_r	Frecuencia angular de referencia
ω_{r0}	Relación de frecuencias angulares
y_0	Amplitud inicial
ε_0	Coeficiente de amortiguamiento de osciladores no lineales
$\varepsilon_{y1,y2,y3}$	Coeficiente de amortiguamiento de osciladores no lineales para oscilaciones sobre el eje Y
Y	Amplitud vertical adimensional
$\dot{Y}, \ddot{Y}$	Derivadas temporales adimensionales de la coordenada Y
q	Coeficiente de fuerza de sustentación fluidodinámica
K	Coeficiente de ocurrencia de la resonancia
A_y	Coeficiente de acoplamiento
ER	Error relativo
DC	Cuadrado de las diferencias absolutas
w_i	Coeficiente de ponderación
w_m	Coeficiente de ponderación máxima
Y_{mi}	Amplitud modelada
Y_{expi}	Amplitud experimental
T_i	Número total de puntos experimentales
i	Punto de control
y_k	Amplitud máxima experimental
$P_{1,2}, \lambda$	Coeficiente de forma
$\sigma_{1,2}, \delta$	Coeficiente de escala

Resumen

En este trabajo de investigación ha sido propuesta y analizada una metodología para la calibración de parámetros en modelos matemáticos basados en osciladores dinámicos, cuyo propósito es describir la respuesta estructural influenciada por el desprendimiento de vórtices.

La calibración se realizó utilizando tres ensayos experimentales con distintas características, lo que ha permitido evaluar el procedimiento propuesto. La metodología se basa en la selección de puntos de control, a los cuales se les ha asignó una jerarquía o valor ponderado, otorgando mayor relevancia a unos puntos sobre otros.

La asignación de dicha jerarquía se realizó mediante el ajuste de funciones unimodales sobre los desplazamientos experimentales normalizados, de manera que la jerarquía ha quedado definida en función de la velocidad reducida.

El proceso de calibración ha sido llevado a cabo mediante el algoritmo de optimización global “ga” de MATLAB, el cual ha permitido determinar la combinación óptima de parámetros que mejor ha aproximado cada uno de los modelos matemáticos a ensayos experimentales.

Los resultados obtenidos han demostrado que la metodología propuesta cumple el objetivo de calibrar de diversos osciladores de estela que modelan las *VIV*, ya que las aproximaciones logradas han presentado una tendencia satisfactoria a los resultados experimentales cuando se utilizaron 7 puntos de control en el proceso de calibración, que ofrece una mayor estabilidad para cada modelo de oscilador acoplado.

Abstract

In this research work, a methodology for parameter calibration in mathematical models based on dynamic oscillators has been proposed and analyzed, with the purpose of describing the structural response influenced by vortex shedding.

The calibration was carried out using three experimental tests with different characteristics, which allowed for the evaluation of the proposed procedure. The methodology is based on the selection of control points, to which a hierarchy or weighted value was assigned, giving greater relevance to certain points over others.

This hierarchy was established through the fitting of unimodal functions to the normalized experimental displacements, such that the weighting was defined as a function of the reduced velocity.

The calibration process was performed using the global optimization algorithm “ga” from MATLAB, which enabled the determination of the optimal combination of parameters that best approximated each of the mathematical models to the experimental tests.

The results obtained demonstrated that the proposed methodology successfully achieves the calibration of various wake oscillator models used to represent Vortex-Induced Vibrations (VIV), as the approximations showed satisfactory agreement with the experimental results when seven control points were used in the calibration process, providing greater stability for each coupled oscillator model.

Introducción

Las vibraciones inducidas por vórtices (*VIV*, por sus siglas en inglés) constituyen un fenómeno relevante en la interacción fluido-estructura, ya que las estructuras pueden generar respuestas dinámicas significativas cuando interaccionan con un fluido en movimiento. La adecuada modelación de esta fenómeno resulta fundamental para predecir el comportamiento estructural y garantizar condiciones seguras de operación en diversas aplicaciones de ingeniería.

Los modelos basados en osciladores dinámicos que emplean osciladores de estela acoplados con sistemas estructurales, han demostrado ser herramientas eficaces para describir el comportamiento de las *VIV*. No obstante, la precisión de estos modelos depende en gran medida de la adecuada estimación de sus parámetros, lo cual representa un desafío debido a la variabilidad de las condiciones experimentales y a la complejidad del fenómeno físico.

En diversas investigaciones sobre las *VIV*, la metodología empleada para la obtención de los parámetros calibrados no siempre se describe con suficiente detalle. En este sentido, el estudio de estos procedimientos aún puede profundizarse, particularmente en el desarrollo de enfoques sistemáticos que permitan incorporar de manera consistente la información experimental disponible.

Bajo esta perspectiva, el presente trabajo propone una metodología para la calibración de parámetros en modelos de osciladores dinámicos, basada en la selección de puntos de control y en la asignación de ponderaciones mediante funciones unimodales dependientes de la velocidad reducida. La metodología planteada tiene un carácter general, por lo que puede aplicarse a distintos modelos y configuraciones experimentales, proporcionando un procedimiento estructurado y reproducible.

Finalmente, la metodología se evalúa mediante su aplicación a distintos conjuntos de datos experimentales, con el objetivo de analizar su desempeño en la modelación de vibraciones inducidas por vórtices.

Capítulo 1: Estado del arte

En este capítulo se presenta la evolución de la modelación de las vibraciones inducidas por vórtices mediante osciladores dinámicos. Se analizan las metodologías y los algoritmos reportados en la literatura especializada para la calibración de parámetros en estos modelos, los cuales permiten reproducir el comportamiento experimental observado. De esta manera, los modelos basados en osciladores dinámicos se consolidan como herramientas capaces de predecir el comportamiento dinámico de la respuesta estructural en experimentos de vibraciones inducidas por vórtices (*VIV*).

Se presentan las metas del presente proyecto de investigación, el cual surge a partir de una revisión del estado del arte en la calibración de parámetros. Durante esta revisión, se identificaron diversas áreas de oportunidad que pueden contribuir al desarrollo de una metodología de calibración de osciladores dinámicos aplicable a distintas condiciones experimentales.

1.1 Antecedentes

Las vibraciones inducidas por vórtices (*VIV*) son oscilaciones que experimenta una estructura como resultado de la interacción entre esta y las fuerzas fluidodinámicas generadas por un fluido en movimiento. La ocurrencia de este fenómeno se considera en la etapa de diseño de estructuras como edificios, chimeneas, cables y tuberías submarinas, en general para cualquiera otra estructura esbelta, debido a que las oscilaciones asociadas pueden comprometer la integridad estructural, provocar fallas, que en el peor de los casos pueden conducir a colapsos (Williamson y Govardhan, 2004; Xu et al. 2012).

Sin embargo, los movimientos oscilatorios asociados a este fenómeno pueden aprovecharse para la generación de energía eléctrica mediante generadores basados en vibraciones inducidas por vórtices (Ver *Figura 1.1-1*). En comparación con los aerogeneradores convencionales de aspas, los generadores *VIV* suelen requerir menos recursos para su fabricación e implementación.

**a)****b)**

Figura 1.1-1: a) Aerogenerador en campo. b) Diseño de aerogenerador. (Plazaola-Iguaran 2022)

Los vórtices son el producto de la interacción dinámica entre un fluido y un sólido, los vórtices se desprenden periódicamente en la región de la estela. De este modo, se genera el fenómeno conocido como camino de vórtices de Von Karman mostrado en la *Figura 1.1-2* (Lienhard, 1966).

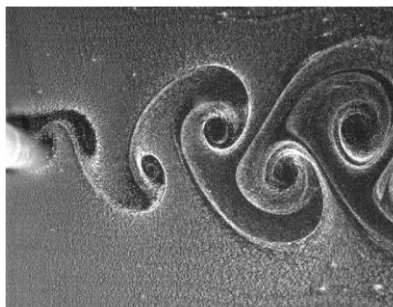


Figura 1.1-2: Camino de vórtices de Von Karman. (Williamson y Govardhan 2004)

La formación de los vórtices ocasiona que las fuerzas fluidodinámicas asociadas a la interacción fluido-estructura tengan un comportamiento periódico estrechamente vinculado con la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Cuando dicha frecuencia se aproxima a la frecuencia natural de las estructuras, las fuerzas fluidodinámicas se amplifican significativamente. En consecuencia, si el cuerpo tiene la capacidad de oscilar en torno a una posición de equilibrio, se producen incrementos graduales en la amplitud de las oscilaciones.

El estudio de las *VIV* puede abordarse mediante simulación de modelos con la dinámica de fluidos computacional (*CFD*, por sus siglas en inglés). La *CFD* es una herramienta que nos permite predecir el comportamiento del fluido en todo el volumen de análisis en forma detallada. Esto requiere del uso de recursos de hardware computacional considerables y tiempo entre cada iteración con diferentes parámetros del fluido (Fehér y Avila, 2021; Qu y Metrikine, 2016).

Las *VIV* también puede modelarse al suponer un conjunto mínimo de supuestos físicos representativos del fenómeno. La ventaja principal de este tipo de formulaciones matemáticas radica en que permiten obtener modelaciones exactas con requerimientos reducidos de hardware computacional y tiempos de cálculo. En la literatura especializada de este fenómeno, se reportan comúnmente como modelos basados en osciladores dinámicos llamados osciladores de estela (*Wake oscillator*, en inglés) (Mathelin y de Langre, 2005; Vigneshvar et al. 2019). Dicho método es el que se abordó en esta investigación.

1.1.1 Modelación con osciladores dinámicos

La modelación de las *VIV* con osciladores dinámicos, se logra mediante la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas formuladas para representar la complejidad física de los procesos asociados al fenómeno. La efectividad de este enfoque se sustenta principalmente de una comprensión rigurosa de la física que gobierna el fenómeno (Tamura, 2020). Hasta la fecha, la modelación matemática de las *VIV* bajo este esquema no ha podido derivarse exclusivamente de los principios físicos presentes en el fenómeno, por lo que los modelos deben complementarse con relaciones semiempíricas obtenidas en ensayos experimentales. En consecuencia, son referidos comúnmente como modelos semiempíricos (Wu et al. 2022).

En la interacción fluido-estructura se manifiestan fenómenos dinámicos no lineales y multiparamétricos, debido a la participación simultánea de variables asociadas al fluido, la geometría de la estructura y propiedades del material como la elasticidad, entre otros factores. Esta combinación presenta un desafío en la modelación de las *VIV* (Wu et al. 2022).

La modelación simplificada del fenómeno tiene su origen en las investigaciones experimentales sobre las *VIV* en cilindros rígidos de superficie lisa con un grado de libertad, que oscilan perpendicularmente a la dirección del fluido (*cross-flow* en inglés), realizadas

por Donohue Bishop y Hassan (1964) (*Figura 1.1-3*). Con base de la naturaleza periódica observada, los autores propusieron describir el comportamiento de las fuerzas fluidodinámicas generadas en la estela mediante ecuaciones diferenciales, estableciendo así una base matemática para su modelación dinámica.

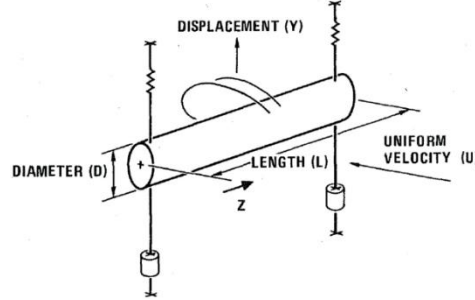


Figura 1.1-3: Estructura rígida en un flujo uniforme con un grado de libertad. (Griffin et al. 1973).

La modelación matemática se basó en un sistema masa-resorte-amortiguador en condición de vibración forzada, excitada por las fuerzas fluidodinámicas periódicas asumidas con comportamientos lineales (*1.1-1*). Donde $y, \dot{y}, \ddot{y}$ es el desplazamiento y sus derivadas temporales, F es la fuerza fluidodinámica, ω es la frecuencia de oscilación, φ es el ángulo de fase, m_s es la masa estructural, r_s es la constante de amortiguamiento y h_s es la rigidez del soporte.

$$m_s \ddot{y} + r_s \dot{y} + h_s y = F \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.1-1)$$

Los modelos lineales no lograban precisar debidamente los desplazamientos del cilindro. Por ello, era necesario realizar una serie de ajustes con cada variación de la velocidad del fluido incidente.

Debido a la imprecisión de los modelos lineales y a la necesidad recurrente de realizar ajustes, Hartlen y Currie (1970) sugirieron el uso de osciladores no lineales. En su formulación, desarrollaron un modelo matemático basado en una ecuación diferencial no lineal de segundo orden de tipo Rayleigh (*1.1-3*) que modela el comportamiento de las fuerzas fluidodinámicas asociada al desprendimiento de vórtices, la acción del fluido se expresa mediante el coeficiente de sustentación y sus derivadas ($C_L \dot{C}_L \ddot{C}_L$).

$$\ddot{Y} + 2\xi \dot{Y} + Y = C_L n U_0^2 \quad (1.1-2)$$

$$\ddot{C}_L - a \Omega_R \dot{C}_L + \frac{b}{\Omega_R} \dot{C}_L^3 + \Omega_R^2 C_L = cY \quad (1.1-3)$$

La ecuación no lineal conocida como oscilador de estela, se resuelve de forma acoplada con el oscilador lineal masa-resorte-amortiguador (*1.1-2*) que modela la respuesta estructural. Estas ecuaciones se acoplan mediante un término de forzamiento en el lado derecho de la ecuación, permitiendo que el movimiento del cilindro influya sobre las fuerzas

fluidodinámicas y a la vez que las fuerzas fluidodinámicas influyan en el desplazamiento estructural.

En la forma adimensional del modelo acoplado (1.1-2 y 1.1-3), ξ es la relación de amortiguamiento, los coeficientes a , b , c y n son constantes matemáticas que permiten ajustar el modelo a desplazamientos obtenidos de un experimento.

La variable de entrada del sistema acoplado se definió como la frecuencia de desprendimiento de vórtices Ω_R , la cual se expresa como una función es el número de Strohual (St), la velocidad del flujo libre (U_0) y una frecuencia de referencia (ω_r).

$$\Omega_R = \frac{2\pi St U_0}{D \omega_r} \quad (1.1-4)$$

El análisis de Skop y Griffin (1973) evidenció que el modelo de Hartlen y Currie (1970) presentaba una limitada representación de parámetros físicos, de modo que su concordancia con resultados experimentales dependía principalmente de parámetros empíricos meramente matemáticos. Sin embargo, las ideas de Hartlen y Currie (1970) continuaron vigentes y se propusieron alternativas para solventar esta deficiencia. Este proceso marcó el inicio de la evolución de los osciladores de estela no lineales.

Un fenómeno que había pasado desapercibido en el estudio del *VIV* fue reportado por Feng (1968), quien demostró que la respuesta del sistema no depende únicamente de la velocidad del fluido en un instante de tiempo, sino que también depende cómo esa velocidad cambió previamente en el tiempo. Este comportamiento indica que la respuesta puede diferir según si la velocidad se obtiene mediante aceleración o desaceleración. Se observó que, al alcanzarse una velocidad crítica del fluido, ocurre un incremento repentino de la amplitud de vibración, condición que se conoce como rama superior (*upper Branch* en inglés). Sin embargo, al acelerar o desacelerar el fluido a partir de la velocidad crítica, las amplitudes se mantenían en la rama superior durante cierto intervalo de velocidad del fluido.

Este efecto de memoria observado por Feng es conocido como efecto de histéresis. El fenómeno descubierto motivó a Landl (1975) para proponer una explicación matemática, el autor logró reproducir satisfactoriamente el efecto de histéresis al asumir que la dinámica de las fuerzas fluidodinámicas puede modelarse mediante un oscilador de Van der Pol con un término no lineal de quinto orden (1.1-6), donde a , b , g y n son constantes empíricas.

$$\ddot{Y} - \xi \dot{Y} + Y = m_s \Omega_R^2 C_L \quad (1.1-5)$$

$$\ddot{C}_L + (a - b C_L^2 + g C_L^4) \dot{C}_L + \Omega_R^2 C_L = n \dot{Y} \quad (1.1-6)$$

En las formulaciones iniciales, la ecuación del fluido incorporaba de manera explícita la evolución temporal del coeficiente de sustentación y sus derivadas ($C_L \dot{C}_L \ddot{C}_L$). Nayfeh (1993)

propuso una reformulación de esta representación para el caso de estructuras que oscilan en dirección transversal al flujo, introduciendo un coeficiente de estela dependiente el tiempo denotado como q , este parámetro se define como el doble del cociente entre un coeficiente de sustentación de referencia correspondiente a una estructura fija (C_{L0}) y el coeficiente de sustentación instantáneo de la estructura oscilante dependiente del tiempo $C_L(t)$, obtenido a partir de observaciones experimentales (1.1-7).

$$q = \frac{2C_L}{C_{L0}} \quad (1.1-7)$$

La reformulación propuesta por Nayfeh (1993) reescribió de una forma compacta los osciladores de estela y facilitó el acoplamiento con el oscilador estructural, los modelos matemáticos posteriores adoptaron esta forma de representar las fuerzas en la zona de estela.

Krenk y Nielsen (1999) introdujeron un enfoque riguroso con una mayor base en la física para los modelos de osciladores de estela ya que estos modelos fueron vistos anteriormente como modelos puramente empíricos. Su modelo se basó en la conservación de la energía bajo el argumento de que el intercambio de energía entre un fluido y la estructura debe ser consistente y que la energía disipada por el fluido debe ser compensada por el trabajo realizado por la estructura sobre el fluido.

$$\dot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2Y = \mu A_0\Omega_R \left(q - \frac{2a}{\Omega_R}\dot{U} \right) \quad (1.1-8)$$

$$\ddot{q} + 2\xi_f\Omega_R\dot{q} \left(1 - \left(\frac{\dot{q}}{\Omega_R} \right)^2 - q^2 \right) + \Omega_R^2 q = -\omega_0^{-2} A_0\Omega_R\dot{Y} \quad (1.1-9)$$

En el modelo μ es una relación de masa, ω_{st} es la frecuencia del cilindro estacionario, A_0 es el coeficiente de acoplamiento normalizado, ξ_f es la razón de amortiguamiento del fluido equivalente que actúa como una fuente de energía que alimenta las vibraciones usualmente suele ser negativo, el término no lineal del modelo $\left[2\xi_f\Omega_R\dot{q} \left(1 - \left(\frac{\dot{q}}{\Omega_R} \right)^2 - q^2 \right) \right]$ es una hibridación de entre la ecuación de Van der Pol y Rayleigh.

La investigación realizada por Facchinetti et al. (2004) redefinió la forma de entender y modelar las vibraciones inducidas por vórtices, antes de su investigación no había un consenso general sobre si la estela era influenciada por el cilindro a través de su posición (Y), velocidad ($\dot{Y}$) o aceleración ($\ddot{Y}$), por lo que probó sistemáticamente estos tres tipos de acoplamientos.

Los resultados concluyeron que el acoplamiento por aceleración (1.1-11) era el indicado para reproducir satisfactoriamente el fenómeno de masa añadida por el fluido y el cambio de fase en la ocurrencia del bloqueo (*lock-in* en inglés). De esta forma se demostró que las VIV son

un problema de sincronización inercial, de modo que la aceleración del cuerpo sólido influye en la formación de los vórtices ocasionando que se desprendan al ritmo del cilindro.

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + \delta^2 Y = S_y q \quad (1.1-10)$$

$$\ddot{q} + \varepsilon(q^2 - 1)\dot{q} + q = A_y \ddot{Y} \quad (1.1-11)$$

En el modelo de Facchinetti et al. (2004), δ es una relación entre la frecuencia de desprendimiento de vórtices (Ω_F) y la frecuencia natural de la estructura (ω_n), A_y y S_y son coeficientes de acoplamiento de la estela y la estructura respectivamente.

$$\delta = \frac{\Omega_F}{\omega_n} \quad (1.1-12)$$

A partir del trabajo de Facchinetti *et al.* (2004) los investigadores realizaron sus modelos acoplados mediante la aceleración ($\ddot{Y}$), gracias a ello los resultados simulados resultaron ser más precisos.

Postnikov (2016) analizó la estructura interna del oscilador estructural, en su modelo las fuerzas de arrastre y sustentación se modelaron de manera separada. En enfoques previos, ambas fuerzas se representaban de forma conjunta mediante un promedio en la variable q . En su modelo, la fuerza de sustentación periódica ocasionada por los vórtices se define exclusivamente en la variable q y el efecto del arrastre es asociado al movimiento de la estructura oscilante.

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + \omega_{r0}^2 Y = c_0(\Omega_R - StK)^2 q - d_0(\Omega_R - StK)\dot{Y} \quad (1.1-13)$$

$$\ddot{q} + (\Omega_R - StK)(\varepsilon_y \dot{q} q^2 - \varepsilon_y \dot{q}) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y} \quad (1.1-14)$$

En síntesis, el enfoque basado en osciladores de estela y su evolución teórica constituyen una herramienta para mejorar la precisión en la predicción de las vibraciones inducidas por vórtices. La incorporación y ajuste de términos no lineales en la ecuación del fluido como los propuestos en los modelos de Landl Rayleigh, Van der Pol y Krenk-Nielsen, permiten representar con mayor fidelidad la dinámica del fenómeno, la influencia de los osciladores de estela en la predicción del fenómeno se observa en la *Figura 1.1-4*. En consecuencia, la selección y formulación adecuada de estos términos resulta determinante en el desempeño de las modelaciones de las *VIV* (Kurushina, 2018).

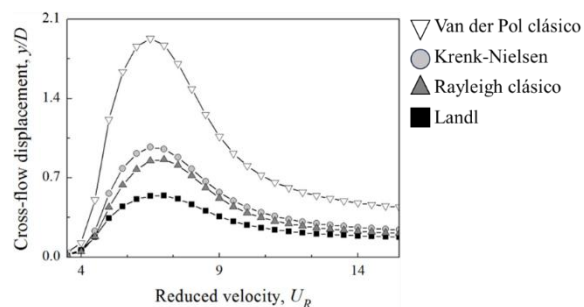


Figura 1.1-4: Influencia de los diferentes osciladores de estela. (Kurushina, 2018)

Los osciladores dinámicos empleados en la modelación del VIV incorporan coeficientes empíricos cuya calibración es necesaria para transformar un modelo matemático teórico en una herramienta predictiva. El proceso de calibración de parámetros tiene como objetivo identificar el conjunto de valores que minimiza la discrepancia entre las estimaciones del modelo matemático y los datos experimentales (Kurushina et al. 2022). La recopilación de este proceso se explica mejor en la siguiente sección.

1.1.2 Calibración de parámetros del oscilador de estela para las VIV

La literatura relacionada con métodos de calibración para modelos de osciladores dinámicos aplicados a VIV ha sido escasamente abordada en estudios previos. Un número considerable de investigaciones en este campo no describe con detalle el procedimiento empleado para determinar el conjunto de parámetros que permita al modelo reproducir un comportamiento consistente con los datos experimentales.

Una de las excepciones es el estudio de Xu et al. (2015), en el que se analizó la influencia de los parámetros no lineales y de las constantes empíricas del modelo de oscilador de estela sobre las características predichas del VIV y la respuesta dinámica del sistema. Para ello, los autores calibraron tres constantes empíricas mediante el uso de un algoritmo genético, señalando que la identificación de dichos parámetros puede formularse como un problema de optimización.

Las ecuaciones diferenciales en el trabajo de Xu et al. (2015) fueron resueltas aplicando el método de promediado (*averaging method* en inglés) con la que derivaron ecuaciones algebraicas que describen las diferentes amplitudes de la respuesta del sistema, el sistema de ecuaciones fue resuelto con *Matlab Matcont* para evaluar la función objetivo dentro del bucle del algoritmo genético.

Otro de los trabajos de investigación en el que se detalló una metodología de calibración, fue realizada por Kurushina (2018); Kurushina et al. (2018, 2022); Kurushina y Pavlovskaya, (2018), se calibraron diversos acoplamientos de osciladores de estela de la mediante un procedimiento de minimización no lineal con restricciones utilizando el *Matlab Optimization Toolbox*. Las ecuaciones diferenciales de la dinámica del sistema se integraron con el

solucionador *ode45* de *Matlab* para obtener las amplitudes de desplazamiento en un intervalo de velocidades del fluido evaluar la función objetivo dentro del bucle del *Optimization Toolbox*.

En ambos trabajos de calibración de coeficientes, se emplearon funciones objetivo o funciones de costo, que cuantifican el grado de concordancia entre una simulación asociada a un conjunto específico de parámetros con respecto a datos reales (Baddoo et al. 2020). En consecuencia, los algoritmos de calibración buscan identificar el conjunto de parámetros que proporcione la mejor aproximación a datos reales del experimento o fenómeno observado.

1.1.3 Metodología de calibración de parámetros de Xu. et al. 2015

Xu et al. (2015) realizó la calibración de parámetros del oscilador de estela tipo Van der Pol para estructuras en aire, adoptó el modelo analizado Facchinetti et al. (2004) adicionando la derivada aerodinámica H^* propuesta por Scanlan (1998), eligió el acoplamiento por velocidad, ya que argumentan reproduce mejor el fenómeno en aire.

1. Los datos experimentales empleados en la calibración provinieron de ensayos propios realizados en túnel de viento. Aunque el estudio no consideró una estructura cilíndrica, se identificaron las características físicas del experimento necesarias para modelar el fenómeno de la *Tabla 1.1-1*.

Tabla 1.1-1: Características de los experimentos para realización de calibración de parámetros del experimento de Xu et al. (2015).

Características	Símbolo
Masa equivalente por unidad de longitud (kg/m)	(m_s)
Relación de amortiguamiento estructural	(ξ)
Longitud característica	(D)
Ancho del tablero	(B)
Frecuencia natural (H_z)	(f_n)
Intervalo de velocidad reducida del experimento	(U_r)
Velocidad U_r de la máxima amplitud	(U_r)
Amplitud máxima desarrollada	(A_y/D)
Número de Strouhal	(S_t)

2. Establecer la función objetivo con la que se realizará la aproximación de los experimentos a los datos experimentales, Xu et al. (2015) realizó su calibración minimizando el error calculado con ecuación 1.1-15 conocido como método de mínimos cuadrados o el cuadrado del error absoluto.

$$E_{dc} = \sum_{i=1}^N (Y_{mi} - Y_{expi})^2 \quad (1.1-15)$$

3. Se analizaron los parámetros físicos que intervienen en la interacción fluido-estructura, los cuales se consideraron constantes y no formaron parte del proceso iterativo de calibración. Únicamente se ajustaron los parámetros de carácter matemático; los intervalos de búsqueda empleados por el algoritmo no fueron reportados explícitamente.
4. Para minimizar la función objetivo, el algoritmo de calibración comparó las respuestas del modelo con las amplitudes experimentales correspondientes a cada velocidad reducida (U_r), lo que permitió a Xu et al. (2015) identificar el conjunto óptimo de parámetros capaz de reproducir la respuesta estructural mostrada en la *Figura 1.1-5* asociada al desprendimiento de vórtices.

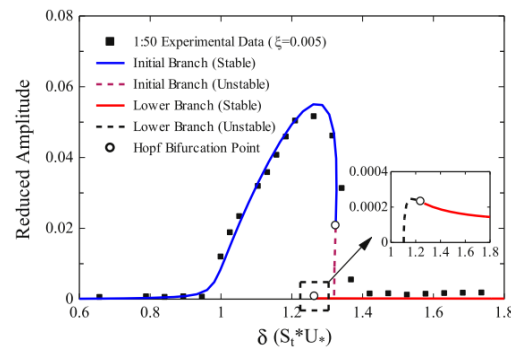


Figura 1.1-5: Modelo matemático calibrado por Xu et al. (2015)

1.1.4 Metodología de calibración de parámetros de Kurushina (2018)

Kurushina (2018) realizó calibraciones de diversos osciladores de estela acoplados con el modelo de oscilador estructural de Postnikov (2016). Los acoplamientos se realizaron mediante el acoplamiento por aceleración sugerida por Facchinetti et al. (2004).

1. Se recopilaron datos experimentales reportados en la literatura especializada, correspondientes a ensayos en estructuras cilíndricas. A partir de estos estudios se identificaron las características físicas relevantes para la modelación del fenómeno, las cuales se resumen en la *Tabla 1.1-2*.

Tabla 1.1-2: Características de los experimentos para realización de calibración de parámetros del experimento de Kurushina (2018).

Características	Símbolo
Relación de masa	(μ)
Relación de amortiguamiento estructural	(ξ)
Diámetro del cilindro	(D)
Frecuencia natural (H_z)	(f_n)
Intervalo de velocidad reducida del experimento	(U_r)
Velocidad U_r de la máxima amplitud	(U_r)

Amplitud máxima desarrollada	(A_y/D)
Relación de aspecto	(L/D)
Número de Strouhal	(S_t)

2. La función objetivo para cuantificar la discrepancia entre las simulaciones y los datos experimentales se basaron en el error relativo (1.1-16) y el cuadrado del error absoluto (1.1-17) en su versión ponderada, incorporando coeficientes de ponderación (w_i) para priorizar la información experimental más representativa.

$$E_{rel} = \sum_{i=1}^{T_i} w_i \frac{|Y_{mi} - Y_{expi}|}{Y_{expi}} \quad (1.1-16)$$

$$E_{dc} = \sum_{i=1}^{T_i} w_i (Y_{mi} - Y_{expi})^2 \quad (1.1-17)$$

3. Se distinguieron los parámetros con fundamento físico de aquellos de carácter puramente matemático. Esta separación permitió establecer valores iniciales e intervalos de búsqueda consistentes: los parámetros físicos se delimitaron con base en principios de la fluidodinámica, mientras que los coeficientes matemáticos se definieron a partir de validaciones previas y evidencia experimental reportada ambos tipos de calibraciones fueron parte del proceso iterativo de calibración.
4. Se seleccionaron puntos de control dentro de los desplazamientos experimentales para lograr un ajuste adecuado con un número reducido de datos, disminuyendo el costo computacional. En este proceso, los coeficientes de ponderación (w_i) priorizaron los puntos más representativos de la dinámica del sistema. Según la autora, la calibración debe centrarse principalmente en reproducir la amplitud máxima de resonancia, el inicio del bloqueo y el de la resonancia, siguiendo un esquema de selección de puntos como el mostrado en la *Figura 1.1-6*.

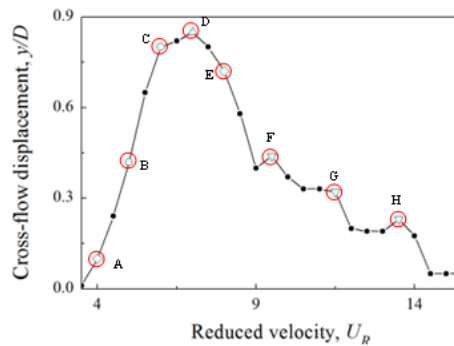


Figura 1.1-6: Puntos de control ponderados sobre los desplazamientos experimentales de Stappenbelt et. al (2008). Tomado de Kurushina (2018)

La ponderación se distribuyó de la siguiente forma: $w_i = 4$ para el punto con el mayor valor de amplitud de desplazamiento, $w_i = 3$ para los puntos cercanos al valor

máximo de resonancia y ponderación $w_i = 2$ para enfatizar el inicio de la resonancia y el final de la rama superior y para los demás puntos se les pondera $w_i = 0$. Esto se resume en la *Tabla 1.1-3*.

Tabla 1.1-3 Tabla de ponderaciones de los puntos de control de Kurushina (2018).

Puntos de control (i)	A	B	C	D	E	F	G	H
Ponderación (w_i)	2	3	3	4	2	1	1	1

De esta forma, se obtiene el conjunto de parámetros óptimos que ofrecen aproximaciones satisfactorias de los modelos matemáticos a los datos experimentales como se muestra en la *Figura 1.1-7*.

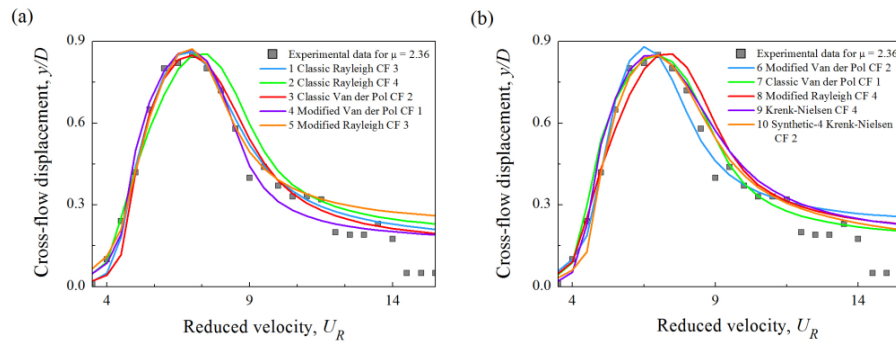


Figura 1.1-7: Modelos matemáticos calibrados. (Kurushina, 2018 y Kurushina et al. 2022)

1.1.5 Conclusiones

La evolución de los osciladores de estela ha sido fundamental para mejorar la precisión de las predicciones en la modelación basada en osciladores dinámicos. En particular, los modelos no lineales han demostrado ser los más adecuados para representar el fenómeno, ya que permiten una descripción precisa de las vibraciones inducidas por vórtices (*VIV*). No obstante, a pesar de los avances en su capacidad predictiva, estos modelos requieren la incorporación de coeficientes de naturaleza empírica que, en conjunto con aquellos fundamentados en principios de la fluidodinámica, hacen posible la adecuada modelación del fenómeno.

Para que estos modelos trasciendan su carácter teórico y se consoliden como herramientas funcionales, resulta indispensable llevar a cabo un proceso de calibración de parámetros para que logren reproducir el comportamiento observado del sistema.

En este sentido, es necesario contar con una metodología de calibración con un enfoque generalizado, capaz de adaptarse a distintos escenarios experimentales. La formalización de estos procedimientos favorece la reproducibilidad y consistencia de los resultados, además

de establecer un marco metodológico para la aplicación sistemática de los modelos de osciladores dinámicos en el estudio del *VIV*.

1.2 Metas

Para formalizar una metodología que permita calibrar los parámetros de los modelos de *VIV* basados en osciladores dinámicos, se propusieron los siguientes objetivos en base de la problemática detectada.

1.2.1 Problemática

Las metodologías aplicadas por los autores para la calibración de los modelos del *VIV* basados en osciladores dinámicos, necesitan de formalidad metodológica que permitan la calibración de los modelos con diferentes situaciones experimentales, para que, de este modo, este tipo de modelación pueda convertirse en una herramienta útil de predicción experimental.

1.2.2 Objetivo general

Calibrar modelos de osciladores de estela acoplados con el oscilador estructural con experimentos reportados en la literatura.

1.2.3 Objetivos específicos

Para lograr cumplir con el objetivo general, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Investigar sobre las no linealidades de fluidos para osciladores de ciclo límite auto excitados que permiten capturar las características cuantitativas y cualitativas de los picos de resonancia en términos de amplitudes de desplazamiento.
- Probar y verificar estrategias de calibración de modelos de oscilador de estela.
- Calibrar un modelo matemático con casos experimentales reportados en la literatura.

1.2.4 Alcances y limitaciones

Esta investigación está enfocada en la formalización de una metodología para la calibración de parámetros con base a la precisión que pudieran tener los modelos matemáticos del *VIV* con las variaciones del número de puntos de control seleccionados y las variaciones del coeficiente de ponderación.

Capítulo 2: Fundamentos teóricos

En el presente capítulo se exponen los fundamentos físicos que dan origen al fenómeno de las vibraciones inducidas por vórtices (*VIV*), describiendo los mecanismos de interacción fluido–estructura que gobiernan la generación periódica de vórtices y su acoplamiento con la respuesta dinámica de sistemas estructurales. Se analizan los conceptos esenciales relacionados con el desprendimiento de vórtices, la sincronización (*lock-in*), la transferencia de energía y los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno.

Asimismo, se presentan los fundamentos teóricos de los algoritmos de calibración reportados en la literatura especializada para la estimación de parámetros en modelos de osciladores dinámicos aplicados a *VIV*. Se discuten los enfoques más relevantes en optimización y ajuste de modelos, así como los criterios empleados para evaluar la concordancia entre resultados numéricos y datos experimentales. Este análisis permite comprender las bases metodológicas que sustentan los procedimientos de calibración y sienta las bases para el desarrollo y aplicación de la estrategia propuesta en esta investigación.

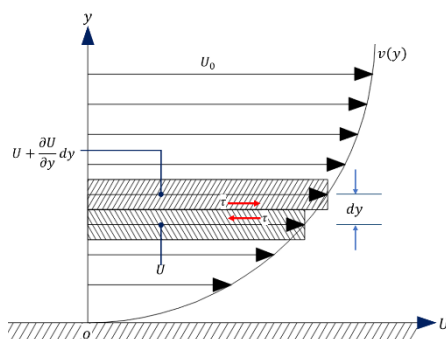
2.1 Parámetros del fluido

2.1.1 Viscosidad

La viscosidad es una propiedad interna de los fluidos que representa su resistencia al flujo o a la deformación, actúa como una medida de la fricción interna que dificulta el movimiento relativo entre sus moléculas, en un lenguaje coloquial, determina que tan “espeso” es un fluido (Regalado y Ramos, 2009).

Desde un punto de vista mecánico, puede interpretarse considerando al fluido como un conjunto de capas paralelas cuya velocidad varía perpendicularmente con la distancia a una superficie sólida (*Figura 2.1-1*), bajo este enfoque, la ley de Newton establece que el esfuerzo cortante (τ) generado entre capas es proporcional al gradiente de velocidad entre ellas (dU/dy) multiplicado por un coeficiente de fricción (η) entre las capas, dicha fricción, corresponde al valor de la viscosidad dinámica del fluido.

$$\tau = \eta \frac{dU}{dy} = \eta \dot{\gamma} \quad (2.1-1)$$



*Figura 2.1-1: Comportamiento mecánico de un fluido.
Autoría propia, referenciado de Gilberto, (1997)*

Para fines prácticos en problemas de mecánica de fluidos, la viscosidad dinámica suele relacionarse a la densidad del fluido (ρ_f) mediante la viscosidad cinemática (ϑ).

$$\vartheta = \frac{\eta}{\rho_f} \quad (2.1-2)$$

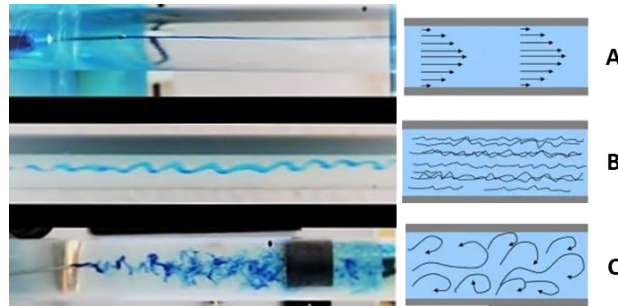
2.1.2 Número de Reynolds

El número de Reynolds fue propuesto en 1883 por Osbourne Reynolds mientras realizaba la investigación del flujo de fluidos dentro de tuberías. Es un número de carácter adimensional, útil en el estudio de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor, es el cociente entre las

fuerzas de inercia sobre un fluido y las fuerzas viscosas internas del fluido que se expresa en la ecuación 2.1-3 (Jímenez-Carballo, 2016).

$$Re = \frac{DU_0}{\nu} \quad (2.1-3)$$

Este parámetro describe el régimen de movimiento de un fluido como se observa en la *Figura 2.1-2*; cuando $Re \leq 2000$ corresponde a un régimen laminar caracterizado por un flujo ordenado sin perturbaciones internas; en el intervalo $2000 \leq Re \leq 4000$ es un régimen de transición en el que aparecen leves deformaciones en la estructura interna del flujo; para valores $Re \geq 4000$ se establece un régimen turbulento, marcado por torbellinos y desorganización interna que ocasiona perdida de energía en su desplazamiento (L. Mott, 1996).



*Figura 2.1-2: Regímenes del flujo: A laminar, B transición, C turbulento.
Autoría propia referenciado de Iturbide-Jiménez et al. (2017)*

2.2 Física del fenómeno de las *VIV*

2.2.1 Estela y capa límite

La estela es la región del flujo situada aguas abajo de un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento, puede interpretarse de forma análoga como la “sombra del objeto” (*Figura 2.2-1 A*) cuya presencia altera el campo de velocidades y presiones del fluido. En la estructura de la estela, la capa límite constituye la zona de transición entre el flujo no perturbado y el flujo perturbado por la presencia de un cuerpo (*Figura 2.2-1 B*). En esta región se establece una variación progresiva de la velocidad, ya que en la cercanía de la superficie del objeto el fluido presenta velocidades menores al del flujo libre (U_0) (*Figura 2.2-1 C*).

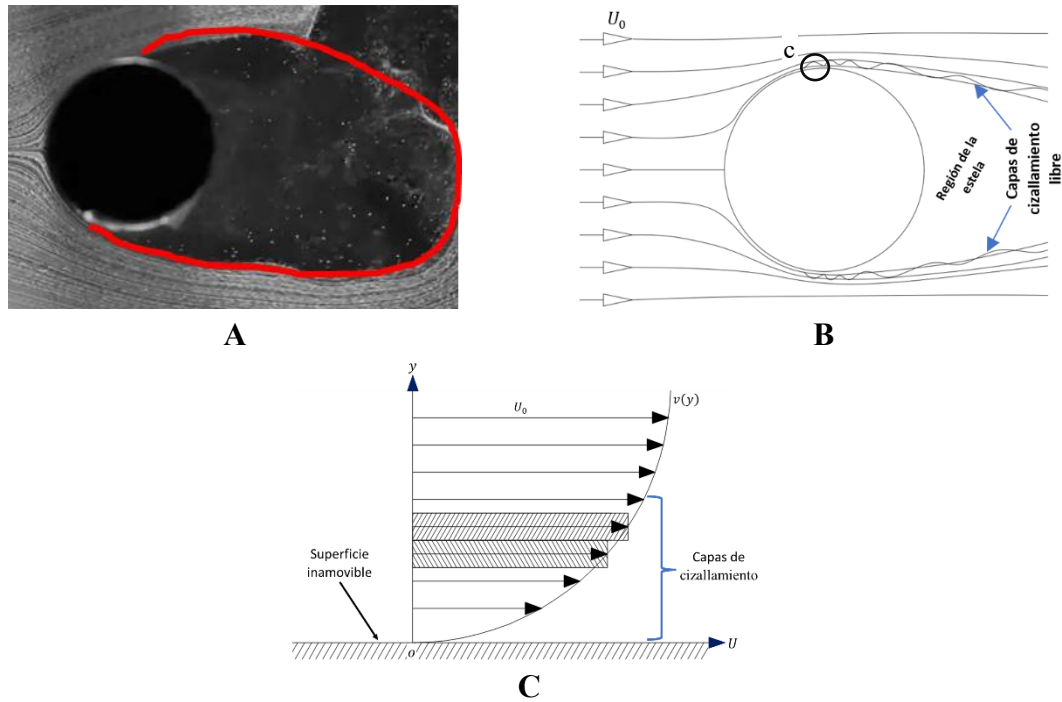


Figura 2.2-1: **A** zona de estela en experimento, **B** estela esquematizada, **C** comportamiento del fluido en la superficie del cilindro.

Autoría propia, referenciado de Gurian et al. (2019) y Kurushina (2018)

Este gradiente de velocidades dentro de la capa límite es consecuencia de la viscosidad del fluido. Y como resultado, se generan deformaciones en la estructura del flujo que favorecen al desarrollo de rotaciones (Figura 2.2-2 B) que resultan en la formación de vórtices, en donde la vorticidad (ω) (Figura 2.2-2 A) se incrementa en las cercanías de la superficie del objeto.

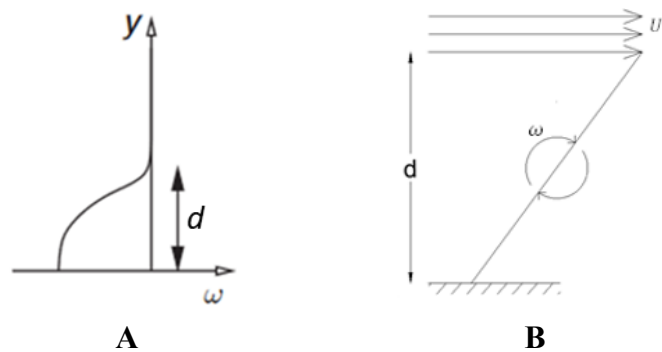


Figura 2.2-2: **A** gráfica de vorticidad, **B** mecanismo de vorticidad.

Autoría propia, referenciado de Nistche (2006).

2.2.2 Desprendimiento de vórtices

Las vibraciones u oscilaciones inducidas por vórtices (*VIV*) es originada por el desprendimiento alternado de vórtices que se originan en la capa límite, que forma un patrón conocido como calle de vórtices de Von Karman (*Figura 2.2-3*).

Este fenómeno ocasiona que las presiones fluidodinámicas sobre un objeto tengan comportamientos periódicos en el tiempo (*Figura 2.2-4*). Cuando una estructura con capacidad de oscilar es sometida a este forzamiento y cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices (f_v) se aproxima a la frecuencia natural de la estructura ($f_v \approx f_n$) se pueden generar oscilaciones de amplitud significativa debido al fenómeno de resonancia. (Blevins y Scanlan, 1977).



Figura 2.2-3: Camino de vórtices de Von Karman. (Rodríguez, 2020)

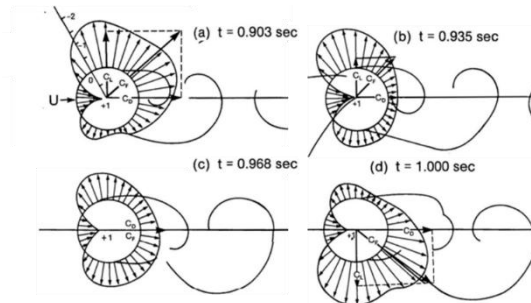


Figura 2.2-4: Secuencia de los campos de presión superficiales en cilindro fijo generados por los desprendimientos de vórtices en $Re = 112000$. (Blevins, 2001).

En los experimentos con alambres giratorios en el aire que realizó Strouhal (1878), observó que la frecuencia del sonido (f) que se producía depende de la velocidad de fluido libre (U_0) y el diámetro del cable (D). Concluyó que la relación se mantenía constante y que puede expresarse con la ecuación 2.1-1.

$$f = \frac{kU_0}{D} \quad (2.2-1)$$

Donde k es una constante determinada experimentalmente, con un valor cercano a 0.185, que es conocida actualmente como el número de Strouhal ($k = St$). El sonido generado en el experimento por los alambres en movimiento es atribuido al desprendimiento de vórtices, cuya frecuencia depende principalmente del régimen de flujo, caracterizado por el número

de Reynolds. En la práctica, es común asumir $St = 0.2$ para el intervalo $300 < Re < 1.5 \times 10^5$, con base a las frecuencias registradas en experimentos recientes, como se muestra en la *Figura 2.2-5*.

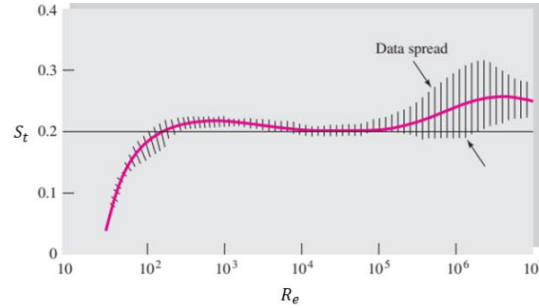


Figura 2.2-5: Frecuencias de desprendimiento de vórtices experimentales en cilindros lisos. (White, 2011).

2.2.3 Fuerza de arrastre

Las fuerzas de arrastre es la resistencia que opone un fluido al movimiento de un objeto que se desplaza a través de él. Para un cilindro, la fuerza de arrastre (F_D) en forma dimensional se describe mediante la ecuación 2.2-2, donde ρ_f es la densidad del fluido, U_0 es la velocidad libre del fluido con relación al cuerpo, A_C es el área característica transversal a la dirección del fluido y C_{D0} es un coeficiente adimensional llamado coeficiente de arrastre (White, 2011).

$$F_D = \frac{A_C C_{D0} \rho_f U_0^2}{2} \quad (2.2-2)$$

El valor de C_{D0} se determina generalmente de forma experimental, ya que la magnitud de esta fuerza no depende únicamente de la presión en el punto de estancamiento (p_s) (*Figura 2.2-6*), que es la zona donde la fuerza del fluido alcanza la presión máxima, sino que también depende de las presiones generadas en la estela y la geometría del cuerpo. Debido a la complejidad e incertidumbre asociadas a las presiones en la estela, el valor de C_{D0} es una forma de compensar la incertidumbre existente en la resistencia aerodinámica global (Mott, 1996).

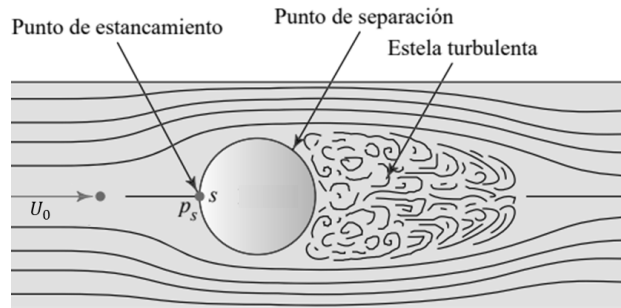


Figura 2.2-6: Esfera en un fluido en movimiento. (Mott 1996)

Nakayama (2018) resume los valores que puede adquirir C_{D0} con diferentes geometrías en la mostradas en la *Figura 2.2-7* cuando $10^3 \leq Re \leq 10^5$. White (2011) resume los valores de C_{D0} para cilindros dentro del intervalo de $1.5 \times 10^4 \leq Re \leq 10^5$ en función de la relación L/D como se muestra en la *Tabla 2.2-1*.

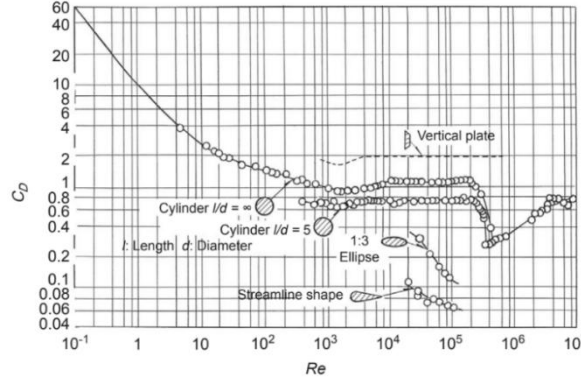


Figura 2.2-7: Coeficientes de arrastre (C_{D0}) para diferentes geometrías. (Nakayama 2018).

Tabla 2.2-1: Valor de C_{D0} en función de la geometría L/D para $1.5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^5$. (White, 2011)

Relación geométrica (L/D)	Coefficiente de arrastre C_D
1	0.63
2	0.68
5	0.74
10	0.82
20	0.91
40	0.98
∞^*	1.20

*Valor promedio en intervalo $10^4 \leq Re \leq 10^5$.

Blevins (2001), Facchinetti et al. (2004), y Postnikov (2016) mencionan que el coeficiente de arrastre fluidodinámico de la estructura estacionaria (C_{D0}) se incrementa con la amplitud y/D a razón de la ecuación 2.2-3, que ocurre cuando la frecuencia natural de vibración de la estructura coincide con la frecuencia de desprendimiento de vórtices.

$$C_{Dm} = [1 + 2(y/D)]C_{D0} \quad (2.2-3)$$

2.2.4 Fuerza de sustentación

La fuerza de sustentación (F_L) es una fuerza perpendicular a la dirección del flujo, esta es la causante de las oscilaciones perpendiculares al flujo en el *VIV*, es originada por diferencias de presiones sobre la superficie de un cuerpo inmerso en un fluido en movimiento. Su expresión dimensional es la ecuación 2.2-4, donde C_{L0} es el coeficiente de sustentación cuyo

valor se determinada principalmente de forma experimental y depende de factores como la geometría del cuerpo, el ángulo de ataque (para el caso de perfiles alares), número de Reynolds, rugosidad superficial, relación de aspecto y el grado de turbulencia. Dicho coeficiente compensa las incertidumbres asociadas a estas variables en la estimación de la fuerza de sustentación (Mott, 1996).

$$F_L = \frac{A_c C_{L0} \rho_f U_0^2}{2} \quad (2.2-4)$$

Blevins (2001) realizó una recopilación de mediciones experimentales del coeficiente de sustentación en cilindros fijos que se presentan en la *Figura 2.2-8*, se observa que el coeficiente de sustentación puede alcanzar el valor de 1.4 cuando $1 \times 10^4 \leq Re \leq 2.5 \times 10^5$

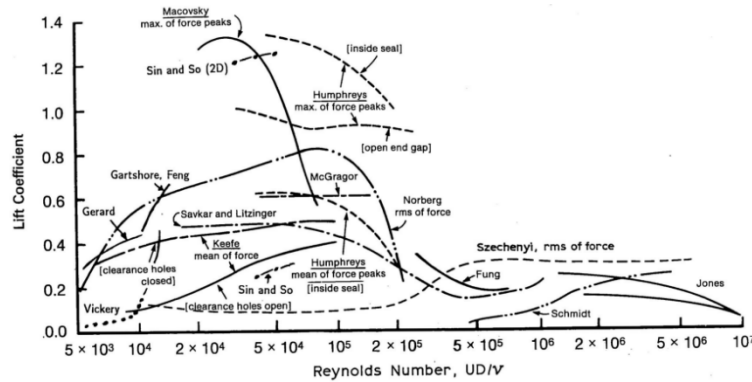


Figura 2.2-8: Mediciones del coeficiente de sustentación en cilindros fijos. (Blevins 2001)

Norberg (2003) recopiló mediciones experimentales la cuales se presentan en la *Tabla 2.2-2* obtenidas en canales de agua y túneles de viento para cilindros fijos.

Tabla 2.2-2: Recopilación de Norberg (2003) de mediciones experimentales del coeficiente de sustentación en canales de agua.

Estudio	$Re/10^4$	L/D	C_{L0}
Drescher (1956)	11	3.1	0.80
Fujino <i>et al.</i> (1958)	8-60	7.0	0.06-0.30
Macovsky (1958)	2-10	12	0.20-0.70
Bishop and Hassan (1964)	0.4-11	9.0	0.30-0.50
Protos <i>et al.</i> (1968)	4.50	11	0.28
Tanida <i>et al.</i> (1973)	0.30-0.80	10	0.05-0.08
So and Savkar (1981)	3-51	4/8	0.13-1.04
Mulcahy (1983)	2-21	12	0.13-0.25
Mulcahy (1984)	2-18	7.5	0.21-0.50
Moeller and Leehey (1984)	0.30-3.90	26	0.07-0.61
Watanabe <i>et al.</i> (1996)	0.20-1.30	3.3	0.03-0.30

Bouak and Lemay (1998) | 0.20-1.30 | 10 | 0.03-0.30

Cabe mencionar que la suma vectorial de la fuerza de sustentación y la fuerza de arrastre, representa la magnitud de la fuerza fluidodinámica neta (F_N) sobre el objeto (ver *Figura 2.2-9*).

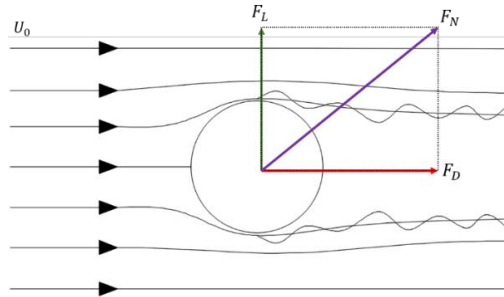


Figura 2.2-9: Fuerzas sobre un objeto dentro de un fluido en movimiento. Autoría propia, referenciado de Mott (1996).

2.2.5 Masa añadida por el fluido

Además de las fuerzas de arrastre y sustentación que influyen en el desplazamiento de un cuerpo dentro de un fluido, experimenta un aumento en su inercia ya que se aparta y empuja el fluido que lo rodea. Besley (1998) representó este incremento de inercia por una masa igual a n veces la masa del fluido desplazado por el cuerpo, se le atribuyó coeficiente de masa añadida por el fluido (C_A) que depende de la forma y tamaño del objeto, las propiedades del fluido y la razón de cambio de la velocidad del objeto en el fluido.

Las estimaciones teóricas del coeficiente C_A en cilindros indicaban valores cercanos a 1 para distintas relaciones geométricas L/D . Blevins et. al (1980) confirmaron esta predicción mediante una serie de experimentos, cuyos resultados se presentan en la *Tabla 2.2-3*.

Tabla 2.2-3: Relación de masa en función de la relación geométrica. (Blevins et al. 1980).

Relación geométrica (L/D)	Estimaciones teóricas	Resultados experimentales
1.2	1.0	0.62
2.5	1.0	0.78
5.0	1.0	0.90
9.0	1.0	0.96

La estimación del puede realizarse con la expresión $C_A = 0.1704 \ln(L/D) + 0.6060$. Dicha expresión reproduce con precisión los datos experimentales reportados por Blevins et al. (1980). Además, es consistente con las predicciones teóricas previas a su verificación experimental, dado que dentro de las primeras 100 relaciones L/D el valor de C_A son menores que 1.45, que concuerda la estimación teórica en el que $C_A \approx 1$.

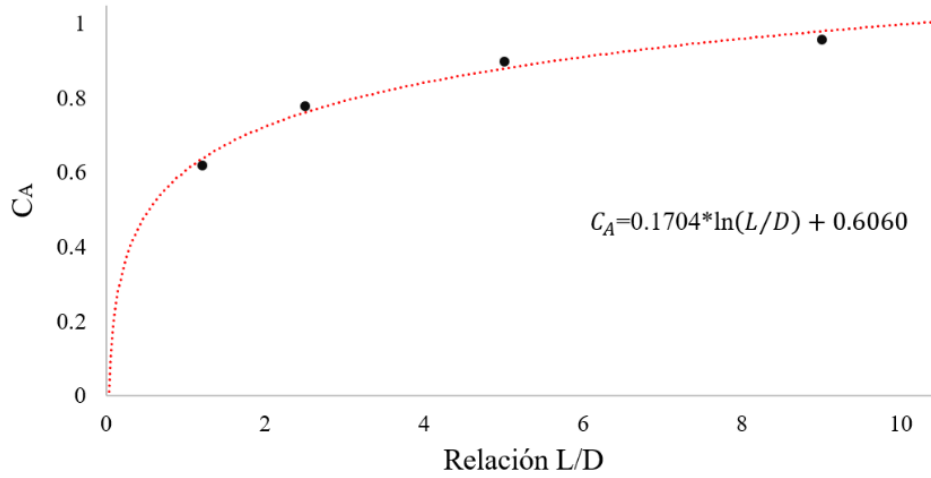


Figura 2.2-10: Coeficiente de masa añadida C_A en función de la relación L/D .
Realizado por autoría propia referenciado de Blevins et al. (1980).

2.2.6 Oscilador de masa-resorte-amortiguador

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación. En el fenómeno *VIV* la dinámica estructural se describe mediante el sistema mecánico lineal de masa-resorte-amortiguador en condición de vibración forzada que es ocasionada por una fuerza periódica $f(t)$.

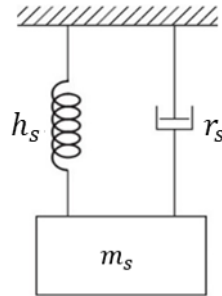


Figura 2.2-11: Sistema mecánico de masa (m_s)-resorte (h_s)-amortiguador (r_s).

$$m_s \ddot{y} + r_s \dot{y} + h_s y = f(t) \quad (2.2-5)$$

Donde la fuerza periódica $f(t)$ es representada mediante una función armónica simple:

$$y = y_0 \cos(\omega_0 t) \quad y = y_0 \sen(\omega_0 t) \quad (2.2-6)$$

Donde y_0 es la amplitud máxima del sistema y y es el desplazamiento del cuerpo que oscila en el tiempo (t) a una determinada frecuencia ω_0 .

2.2.7 Osciladores no lineales

En el estudio del *VIV*, la modelación de las fuerzas fluidodinámicas periódicas se realiza mediante ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden autoexcitadas, en las que el propio movimiento oscilatorio retroalimenta la dinámica del sistema. Entre los osciladores no lineales comunes para la modelación *VIV* es el oscilador de Rayleigh (2.2-7), en el que el control energético está asociado a la velocidad del sistema, y el oscilador de Van der Pol (2.2-8), donde dicho control depende de la amplitud de la oscilación.

$$\ddot{x} + \varepsilon_0(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (2.2-7)$$

$$\ddot{x} + \varepsilon_0(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (2.2-8)$$

Ambos osciladores dinámicos presentan soluciones en forma de ciclo límite (*Figura 2.2-12*), caracterizadas por la existencia de órbitas cerradas y estables en el espacio de fases. Este comportamiento implica que, independientemente de las condiciones iniciales, el sistema evoluciona hacia un régimen oscilatorio periódico de amplitud y frecuencia definidas, propio de sistemas no lineales autoexcitados. En estado estable, dicha respuesta puede describirse de manera aproximada mediante osciladores armónicos simples.

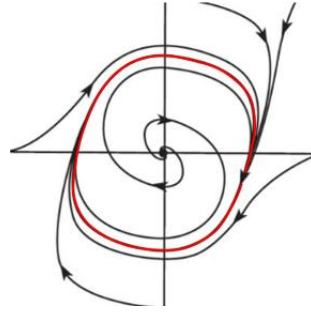


Figura 2.2-12: Ciclo límite. Autoría propia referenciado de Ávila-Patarroyo (2012).

2.3 Algoritmos de optimización

Los modelos de *VIV* requieren un proceso de calibración para consolidarse como herramientas predictivas del fenómeno. Este proceso puede formularse como un problema de optimización, ya que consiste en determinar el conjunto de parámetros que permita al modelo reproducir de la mejor manera el comportamiento observado (Xu et al. 2015).

Para encontrar un mínimo o máximo óptimo, se necesita de una función objetivo que puede presentar múltiples extremos debido a su estructura matemática de los cuales hay dos tipos:

- El mínimo local es un punto donde la función alcanza un valor menor que el de su entorno inmediato, sin garantizar que sea el más bajo en todo el dominio.
- El mínimo global representa el valor mínimo absoluto de la función en todo el espacio de búsqueda.

La existencia de varios mínimos locales (*Figura 2.3-1*) puede dificultar su identificación especialmente en problemas no lineales o multimodales (Boyd y Vandenberghe, 2004; Nocedal y Wright, 2006).

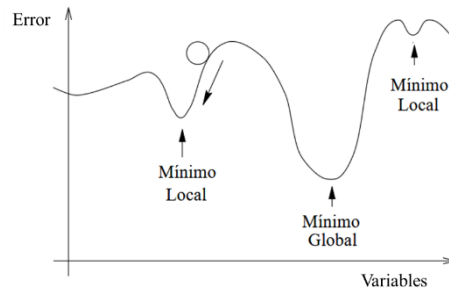


Figura 2.3-1: Mínimos globales y mínimos globales de una función objetivo. (Cortez, 1997)

La capacidad de identificar mínimos locales y globales durante el proceso de optimización constituye un factor determinante en el desempeño de los distintos algoritmos, particularmente en términos de convergencia y del equilibrio entre exploración y explotación del espacio de búsqueda. En la siguiente sección se describen los algoritmos de optimización reportados en la literatura para la calibración de parámetros en modelos del fenómeno *VIV*.

2.3.1 Algoritmo genético

El algoritmo genético es un método de optimización inspirado en los principios de la selección natural y la genética evolutiva. Su funcionamiento se basa en la evolución iterativa de una población de soluciones candidatas, donde cada individuo representa un conjunto de parámetros del problema a optimizar. A través de operadores como selección, cruce y mutación, el algoritmo favorece la propagación de las soluciones con mejor desempeño, evaluadas mediante una función objetivo, el diagrama de flujo elemental de este algoritmo se muestra en la *Figura 2.3-2*. El algoritmo permite la exploración de manera eficiente en el espacio de búsqueda y aproximarse progresivamente a soluciones óptimas (Holland, 1992).

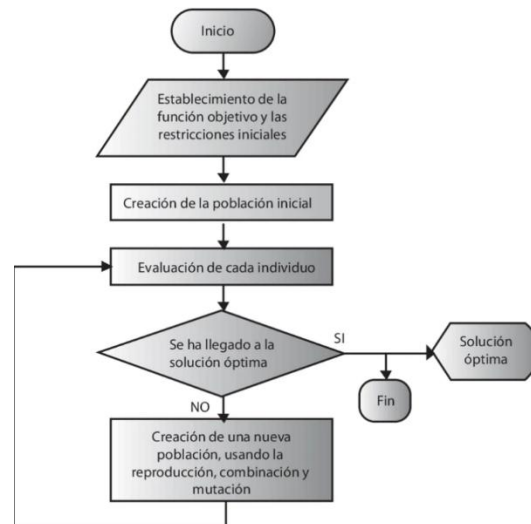


Figura 2.3-2: Proceso básico del algoritmo genético. (Cheng et al., 2021)

La combinación de mecanismos de exploración global y local, lo hace adecuado para la solución de problemas no lineales o multimodales, su estructura flexible facilita la adaptación a distintos problemas de ingeniería y calibración de modelos, manteniendo un equilibrio entre diversidad poblacional y convergencia hacia soluciones que representen la mínima global (Mitchell, 1998).

2.3.2 Matlab Optimization Toolbox

MATLAB *Optimization Toolbox* es un conjunto de funciones y solucionadores numéricos diseñado para formular y resolver problemas de optimización mediante la minimización o maximización de funciones objetivo sujetas a restricciones. Esta herramienta integra métodos para programación lineal, programación cuadrática, optimización no lineal, problemas de mínimos cuadrados y sistemas de ecuaciones no lineales, lo que permite abordar una amplia variedad de problemas de ingeniería y modelación matemática, la recopilación de estos algoritmos se muestra en la *Tabla 2.3-1* (MathWorks, 2024).

Tabla 2.3-1: Algoritmos que integran Matlab Optimization Toolbox. (MathWorks, 2024)

Algoritmo	Tipo de optimización	Uso principal
fmincon	No lineal con restricciones	Optimización general con restricciones físicas o matemáticas
fminunc	No lineal sin restricciones	Minimización suave de funciones diferenciables
lsqnonlin	Mínimos cuadrados o lineales	Ajuste de curvas y calibración de parámetros
lsqcurvefit	Ajuste no lineal de datos	Ajuste de modelos a datos experimentales
linprog	Programación lineal	Optimización lineal con restricciones
quadprog	Programación cuadrática	Problemas con función objetivo cuadrática
coneprog	Programación cónica de segundo orden	Optimización convexa estructurada
intlinprog	Programación lineal entera mixta	Problemas con variables discretas
fsolve	Sistemas de ecuaciones no lineales	Resolución de ecuaciones acopladas

MATLAB *Optimization Toolbox* proporciona solucionadores eficientes basados en gradientes y métodos deterministas que son altamente efectivos cuando el problema presenta continuidad y buena condición numérica. Sin embargo, estos métodos pueden converger hacia mínimos locales si la superficie de búsqueda es compleja (MathWorks, 2024).

2.4 Experimentos de las *VIV*

Para evaluar la metodología de calibración que se propone, se seleccionaron tres casos experimentales reportados en la literatura. Cada experimento presenta un comportamiento dinámico distinto, por lo que sus características físicas también difieren entre sí.

2.4.1 Experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

Uno de los casos experimentales considerados para evaluar la metodología de calibración corresponde al estudio de Stappenbelt y Lalji (2008) enfocado en vibraciones inducidas por vórtices en un cilindro rígido montado elásticamente. Este experimento fue relevante porque se analizó sistemas con bajo cociente de masa relativa ($\mu \approx 1$), esta condición que favorece respuestas dinámicas no lineales.

Los autores demostraron que a diferencia de los modelos tradicionales de alta masa que capturan la denominada rama superior, los sistemas de dos grados de libertad con baja masa presentan una respuesta super-superior (*super upper branch* en inglés), caracterizada por amplitudes significativamente mayores y oscilaciones más regulares. Asimismo, se concluyó que tanto la relación de masa como el amortiguamiento actúan como parámetros gobernantes en el establecimiento de esta respuesta crítica, la cual exhibe regiones de sincronización más amplias. Las características de este experimento en oscilaciones transversales se presentan en la *Tabla 2.4-1* y el comportamiento dinámico del sistema se muestra en la *Figura 2.4-1*.

Tabla 2.4-1: Características del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

Características	Valores
Relación de masa (μ)	2.36
Relación de amortiguamiento estructural (ξ)	0.006
Diámetro del cilindro (D)	0.0554
Frecuencia natural (f_n)	1.711
Intervalo de velocidad reducida (U_r)	3.5-16.0
Velocidad U_r de la máxima amplitud y/D	7.16
Amplitud máxima desarrollada (y/D)	0.85
Relación de aspecto (L/D)	8

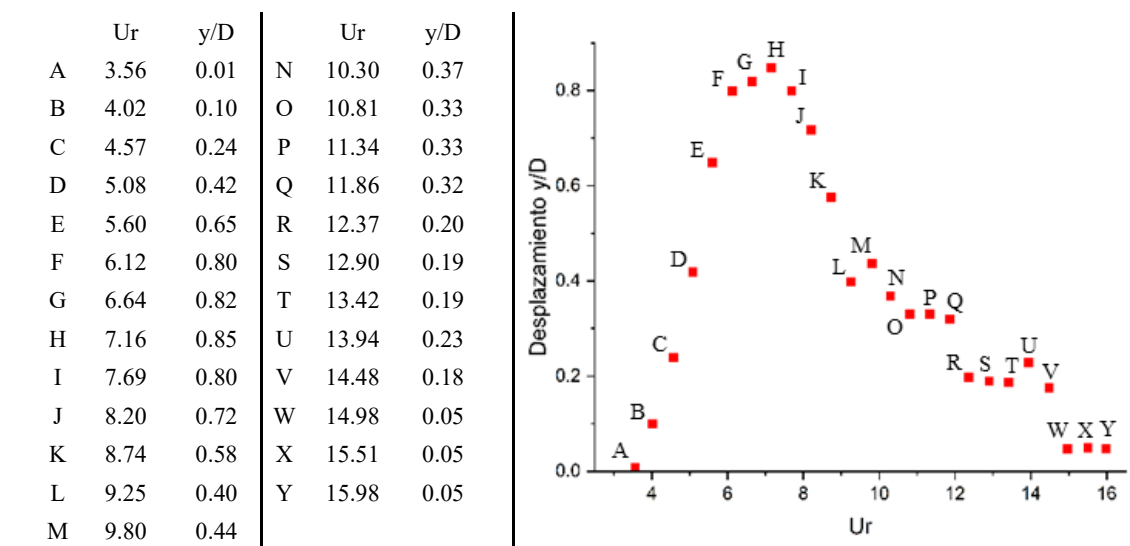


Figura 2.4-1: Comportamiento dinámico del experimento Stappenbelt y Lalji (2008).

2.4.2 Experimento de Yang *et al.* (2009)

Otro de los experimentos con el que se realizó esta serie de calibraciones corresponde al estudio de Yang *et al.* (2009), quienes realizaron una investigación experimental sobre *VIV* en un cilindro ubicado próximo a una superficie rígida dentro de un flujo estacionario. El trabajo consistió en un análisis paramétrico para evaluar la influencia de la velocidad del flujo, la razón de masa sobre las respuestas en amplitud y frecuencia del cilindro y la razón del espaciamiento entre el fondo inamovible y el diámetro del cilindro (e_0/D).

Cabe mencionar que en sus resultados experimentales se demostró el valor del número de Strouhal $S_t = 0.20$. Se observó que al incrementar la razón del espaciamiento entre el fondo inamovible y el diámetro del cilindro (e_0/D), la amplitud de oscilación se incrementó. Las características de este experimento con la condición de no existir la influencia del fondo fijo se muestran en la *Tabla 2.4-2* y el comportamiento dinámico del experimento se detalla en la *Figura 2.4-2*.

Tabla 2.4-2: Características del experimento de Yang *et al.* (2009)

Características	Valores
Relación de masa (μ)	3.87
Relación de amortiguamiento estructural (ξ)	0.0152
Diámetro del cilindro (D)	0.032
Frecuencia natural (f_n)	1.27
Intervalo de velocidad reducida (U_r)	2.0-12.0
Velocidad U_r de la máxima amplitud y/D	5.7
Amplitud máxima desarrollada (y/D)	1.04
Relación de aspecto (L/D)	9

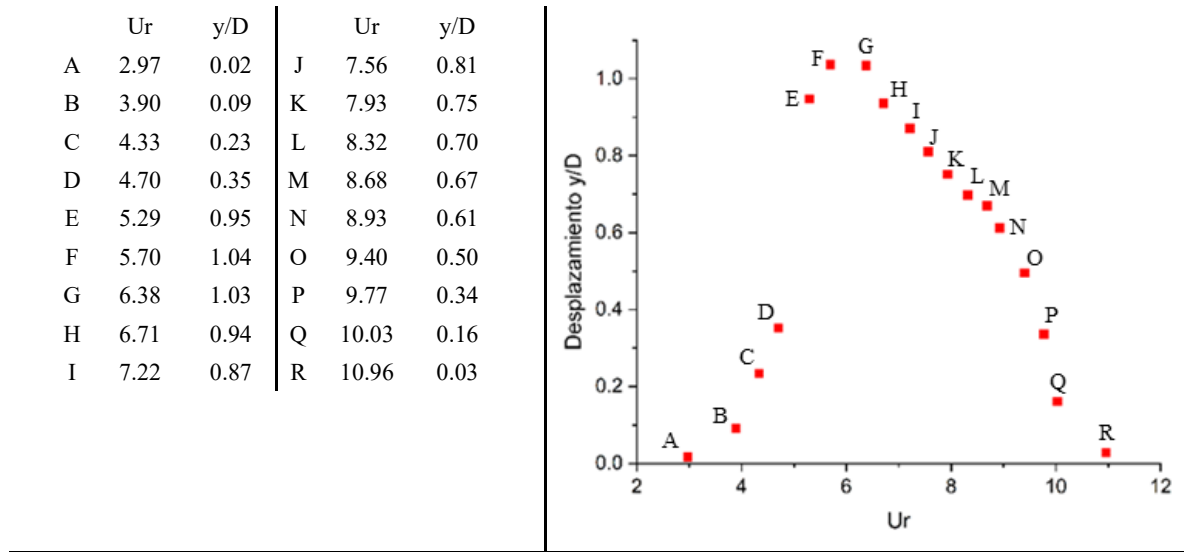


Figura 2.4-2: Comportamiento dinámico del experimento de Yang et al. (2009).

2.4.3 Experimento de Deng et al. (2020)

El tercer experimento con el que se puso a prueba la metodología propuesta fue con el experimento de Deng et al. (2020) quienes realizaron un experimento a escala reducida de un proyecto civil de túnel flotante propuesto por la Administración Noruega de Carreteras Públicas. El proyecto consta de dos cilindros de concreto suspendidos en el agua a una profundidad de entre 25 y 30 m bajo la superficie del agua.

El objetivo del experimento fue la de estudiar las oscilaciones perpendiculares a la dirección del fluido en movimiento ocasionadas por vórtices. Considerando diferentes relaciones de espaciamiento (d) entre los tubos dobles (Figura 2.4-3) comparándolas con el comportamiento de un cilindro aislado. El canal de agua utilizado permitió alcanzar una velocidad máxima de 2.2 m/s, equivalente a una velocidad reducida aproximada de $U_r \approx 10$, suficiente para observar el desplazamiento máximo del sistema. Las características físicas del sistema para un cilindro aislado se muestran en la Tabla 2.4-3 y el comportamiento dinámico se ilustra en la Figura 2.4-4.

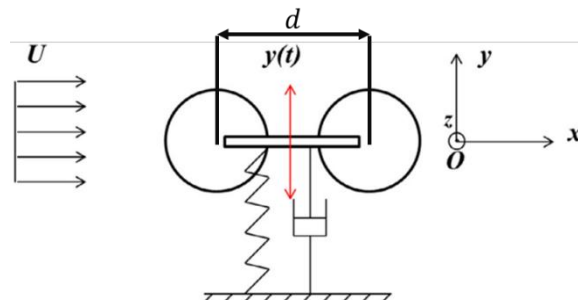


Figura 2.4-3: Modelo del experimento del túnel flotante. (Deng et al., 2020)

Tabla 2.4-3: Características del experimento de Deng et al. (2009)

Características	Valores
Relación de masa (μ)	1
Relación de amortiguamiento estructural (ξ)	0.045
Diámetro del cilindro (D)	0.10
Frecuencia natural (f_n)	1.00
Intervalo de velocidad reducida (U_r)	2.0-9.0
Velocidad U_r de la máxima amplitud y/D	6.54
Amplitud máxima desarrollada (y/D)	1.10
Relación de aspecto (L/D)	20

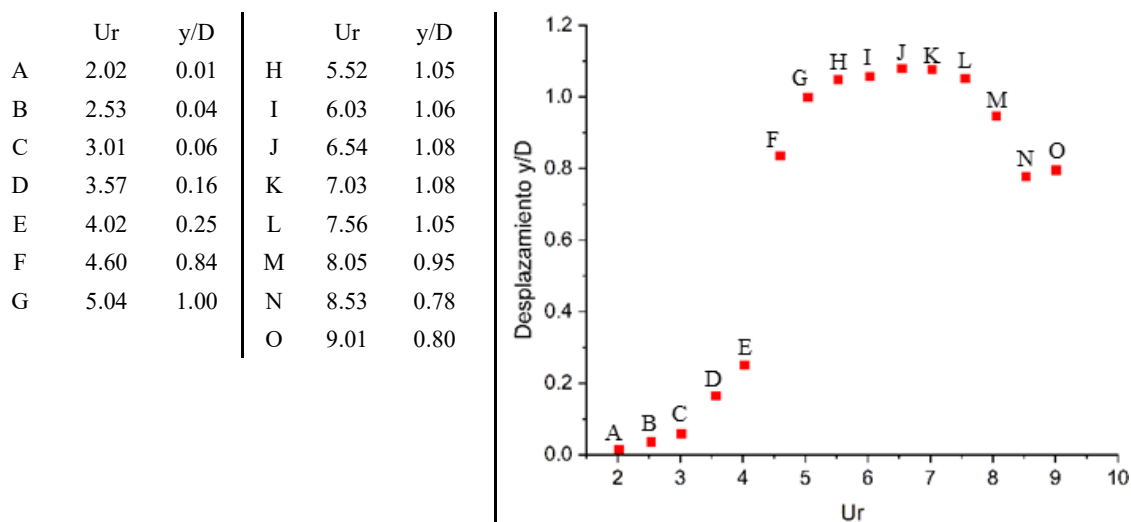


Figura 2.4-4: Comportamiento dinámico del experimento de Deng et al. (2020).

2.5 Modelo matemático

2.5.1 Oscilador estructural en las *VIV*

Para las simulaciones que se realizaron en este trabajo, se utilizó el modelo de oscilador dinámico planteado por Postnikov (2016) y Postnikov et al. (2017) con un grado de libertad para oscilaciones perpendiculares a la dirección del flujo de un cilindro rígido soportado elásticamente (*Figura 2.5-1*). La esquematización del modelo es caracterizada por la masa estructural (m_s), diámetro del cilindro (D), amortiguamiento estructural (r_s), la rigidez del soporte elástico (h_s) y el comportamiento periódico de la estela (q).

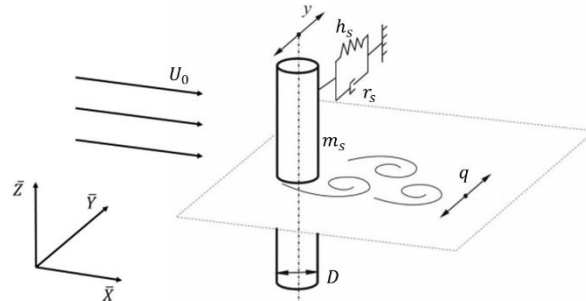


Figura 2.5-1: Cilindro rígido de un grado de libertad soportado elásticamente que interactúa con un fluido de velocidad constante. (Kurushina, 2018)

En la descripción matemática del sistema, los parámetros adimensionales se muestran a continuación:

$$\omega_{r0} = \omega_n / \omega_r \quad (2.5-1)$$

$$\xi = r_s / 2 \omega_r m_* \quad (2.5-2)$$

$$\mu = 4m_s / \pi \rho_f D^2 \quad (2.5-3)$$

Donde ω_{r0} es una relación de frecuencias en el que $\omega_{r0} = 1$ debido a que la frecuencia de referencia ω_r tiene un valor igual a la frecuencia angular natural de la estructura definido como $\omega_n = \sqrt{h_s / m_*}$. ξ es la relación de amortiguamiento estructural que está influenciada por el parámetro de masa efectiva del sistema m_* que contempla la masa estructural relativa μ y la masa añadida por el fluido C_A .

$$m_* = \pi \rho_f D^2 (\mu + C_A) / 4 \quad (2.5-4)$$

El tiempo t y el desplazamiento del centro de la estructura perpendicular al flujo y son adimensionados como T y Y respectivamente:

$$T = \omega_r t \quad (2.5-5)$$

$$Y = y / D \quad (2.5-6)$$

El flujo del fluido se considera uniforme de velocidad constante (U_0) y el desprendimiento de vórtices se asume constante y periódico, caracterizado por la frecuencia f_v . Ambos parámetros se emplean en forma adimensional mediante la velocidad reducida (U_R) y la frecuencia reducida de desprendimiento de vórtices (Ω_R).

$$U_r = 2\pi U_0 / D\omega_n \quad (2.5-7)$$

$$\Omega_R = f_v / \omega_r = 2\pi U_0 St / D\omega_r \quad (2.5-8)$$

El número de Strouhal (St) se consideró de valor constante $St = 0.2$ en todas las modelaciones de *VIV*, ya que este valor es el promedio para un amplio intervalo de número de Reynolds dentro del cual se encuentran los experimentos de *VIV*.

El comportamiento periódico de las fuerzas fluidodinámicas causada por los vórtices es representado mediante la variable en el tiempo q que es un cociente entre el coeficiente de sustentación de la estructura oscilante (C_L) y la estructura fija (C_{L0}).

$$q = 2C_L / C_{L0} \quad (2.5-9)$$

Los coeficientes de las fuerzas fluidodinámicas de arrastre (C_{D0}) y sustentación (C_{L0}) fueron utilizados para el cálculo de la fuerza de arrastre 2.5-11 y sustentación 2.5-12 del modelo matemático de Postnikov (2016) y Postnikov et al. (2017) de la ecuación 2.5-10.

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + \omega_{r0}^2 Y = d_0(\Omega_R - StK)^2 q - l_0(\Omega_R - StK)\dot{Y} \quad (2.5-10)$$

$$d_0 = C_{D0}\rho_f D^2 / 4\pi St m_* \quad (2.5-11)$$

$$l_0 = C_{L0}\rho_f D^2 / 16\pi^2 St^2 m_* \quad (2.5-12)$$

2.5.2 Osciladores de estela en las *VIV*

Como se mostró anteriormente, a lo largo de la historia se han desarrollado diversas versiones del oscilador de estela con el objetivo de mejorar la precisión de la predicción con este tipo de modelaciones. El presente estudio centra su atención en un método genérico para la calibración de los modelos acoplados de *VIV*, los modelos de oscilador de estela considerados en esta investigación se muestran en la *Tabla 2.5-1*. Donde además de las ecuaciones de Van der Pol y Rayleigh clásicas, se incluyen las ecuaciones modificadas de ambos modelos que probó Kurushina (2018); Kurushina et al. (2018, 2022); Kurushina y Pavlovskaja, (2018) en su serie de calibraciones.

Tabla 2.5-1: Osciladores de estela utilizados en esta investigación.

Van der Pol clásico:
$\ddot{q} + (\Omega_R - StK)(\varepsilon_y \dot{q} q^2 - \varepsilon_y \dot{q}) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y}$
Van der Pol modificado:
$\ddot{q} + (\Omega_R - StK)(\varepsilon_{y1} \dot{q} q^2 - \varepsilon_{y2} \dot{q}) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y}$
Rayleigh clásico:
$\ddot{q} - \varepsilon_y(\Omega_R - StK)\dot{q} + \varepsilon_y \dot{q}^3 / (\Omega_R - StK) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y}$
Rayleigh modificado:
$\ddot{q} - \varepsilon_{y1}(\Omega_R - StK)\dot{q} + \varepsilon_{y2} \dot{q}^3 / (\Omega_R - StK) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y}$
Krenk-Nielsen
$\ddot{q} - (\Omega_R - StK)(\varepsilon_{y1} \dot{q} + \varepsilon_{y2} \dot{q} q^2) + \varepsilon_{y3} \dot{q}^3 / (\Omega_R - StK) + q(\Omega_R - StK)^2 = A_y \ddot{Y}$

Capítulo 3: Metodología de calibración propuesta

En el presente capítulo se describe de manera detallada la metodología propuesta para la calibración de los modelos de osciladores dinámicos considerados en esta investigación. Se establecen los fundamentos metodológicos que permiten calibrar los parámetros en los modelos matemáticos con la evidencia experimental.

Para ello, se identifican los parámetros que se calibrará, se define los parámetros que tienen un sustento teórico de la física del fenómeno de aquellos que son parámetros empíricos de ajuste, esto es importante, ya que definen tanto los puntos iniciales como los intervalos de búsqueda para cada parámetro.

Posteriormente se define la función objetivo, ya que es la base con la cual se realiza el proceso de calibración u optimización de parámetros para encontrar la mejor aproximación al comportamiento real del fenómeno. Debido a que se utiliza funciones objetivo ponderadas, las ponderaciones en esta propuesta son distribuidas mediante funciones unimodales, donde la máxima ponderación se restringe a un valor de 1.

Finalmente, se expone la estrategia de calibración adoptada, detallando el criterio de selección de datos, la formulación de la función objetivo, la asignación de ponderaciones y el algoritmo de optimización implementado para la estimación de parámetros.

3.1 Estrategia de calibración

3.1.1 Puntos iniciales e intervalos en la calibración

Los parámetros calibrados se presentan en la *Tabla 3.1-1*, es importante distinguir entre los parámetros empíricos de naturaleza puramente matemática y aquellos con significado físico dentro del fenómeno, ya que la definición de sus intervalos de búsqueda y valores iniciales difiere en cada caso.

Esta diferenciación resulta relevante porque los parámetros físicos se establecen con base en fundamentos teóricos, considerando propiedades como la velocidad del fluido, la geometría del cuerpo y la frecuencia de oscilación. En contraste, los valores iniciales y los intervalos de variación de los parámetros empíricos se definen a partir de validaciones previas reportadas en la literatura.

Tabla 3.1-1: Clasificación de los parámetros calibrados.

Parámetros empíricos		Parámetros físicos	
Coefficiente de amortiguamiento del fluido	$\varepsilon_{y1,y2,y3}$	Coefficiente de sustentación	C_{L0}
Coefficiente de acoplamiento	A_y	Coefficiente de arrastre	C_{D0}
Coefficiente de ocurrencia de la resonancia	K	Coefficiente de masa añadida del fluido	C_A

Los intervalos de búsqueda y los valores iniciales de los parámetros empíricos se establecieron con base en los trabajos de Postnikov (2016), Kurushina (2018), Kurushina y Pavlovskaya (2018) y Kurushina et al. (2018, 2022). No obstante, en el presente estudio dichos intervalos fueron considerablemente reducidos ya que como se muestra en la *Tabla 3.1-2*, en las calibraciones reportadas por estos autores, las soluciones no tendieron a aproximarse a los límites inferior y superior de los rangos originalmente propuestos.

Tabla 3.1-2 Intervalos y puntos iniciales de los parámetros empíricos.

Características	Símbolo	Punto inicial	Límite inferior	Límite superior
Coefficiente de amortiguamiento del fluido.	$\varepsilon_{y1,2,3}$	0.010	0.0001	2
Coefficiente de acoplamiento.	A_y	5	0	25
Coefficiente de ocurrencia de la resonancia.	K	0.1	0	3

Para la definición de los intervalos de los parámetros físicos, es necesario conocer la relación geométrica L/D de los cilindros en los experimentos y estimar la velocidad relativa entre el objeto oscilante y el flujo incidente. Para el cálculo de la velocidad del objeto oscilante se toma como base el modelo propuesto por Postnikov (2016) y Postnikov et al. (2017), es decir se iguala a cero la ecuación 3.1-1 considerando las condiciones iniciales de tiempo adimensional $T = 0$ y la máxima amplitud experimental de desplazamiento en Y de cada ensayo.

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + \omega_{r0}^2 Y = 0 \quad (3.1-1)$$

Obtenida la velocidad de la estructura, esta se suma vectorialmente con la magnitud de la velocidad del fluido incidente, la velocidad resultante obtenida corresponde a la velocidad relativa entre el objeto oscilante y el flujo incidente. Con ello se obtiene el número de Reynolds y se estiman los valores iniciales de los coeficientes de arrastre y sustentación con el auxilio de las *Tablas* (2.2-1 y 2.2-2) y *Figuras* (2.2-7 y 2.2-8) de las secciones 2.2.3 y 2.2.4, este procedimiento se detalla en el **Apéndice B**.

Para el límite superior del coeficiente de arrastre (C_{D0}), se utilizó el coeficiente de amplificación expresada como $C_{Dm} = [1 + 2(y/D)]C_{D0}$, para estructuras oscilantes en condición de resonancia. El límite superior del coeficiente de sustentación (C_{L0}) se propuso tomando el máximo valor medido experimentalmente de las recopilaciones de Blevins (2001) de la **sección 2.2.4** con un valor de 1.40. Para el límite inferior de ambos coeficientes se propuso un porcentaje arbitrario del 90% de su valor inicial.

El valor inicial de la masa añadida por el fluido (C_A) para cada experimento, se estableció en función de la relación geométrica L/D de la **sección 2.2.5**. Los límites superiores e inferiores fueron propuestos arbitrariamente de un valor de 0.12 unidades con respecto al valor inicial esto con el propósito de no considerarlo un valor absoluto, pero que su intervalo de opciones esté próximo al valor teórico. Estos valores resumen en la *Tabla 3.1-3*.

Tabla 3.1-3: Condiciones iniciales y límites para la calibración de los coeficientes físicos.

	Stappenbelt y Lalji (2008)			Yang et al. (2009)			Deng et al. (2020)		
	Límite inferior	Valor inicial	Límite superior	Límite inferior	Valor inicial	Límite superior	Límite inferior	Valor inicial	Límite superior
Coeficiente de arrastre inicial C_{D0}	0.70	0.78	2.10	0.72	0.80	2.55	0.83	0.91	2.88
Coeficiente de sustentación inicial C_{L0}	0.27	0.30	1.4	0.24	0.32	1.4	0.62	0.70	1.4
Coeficiente de masa añadida del fluido C_A	0.84	0.96	1.08	0.86	0.98	1.10	1	1.12	1.24

3.1.2 Función objetivo y distribución de ponderaciones

Las series de calibraciones no se ejecutaron considerando todos los puntos correspondientes a los desplazamientos experimentales de los ensayos como tal como lo realizó Xu et al. (2015), sino que se realizó siguiendo la recomendación de Kurushina (2018), Kurushina y Pavlovskaya (2018) y Kurushina et al. (2018, 2022) de establecer puntos de control con la finalidad de ahorrar tiempo de cómputo. Por lo que las funciones objetivo con las que se realizaron las calibraciones fueron con ecuaciones 3.1-2 y 3.1-3 dando como resultado dos versiones de cada modelo calibrado de *VIV* de acuerdo a la función objetivo que se utilizó.

$$ER = \sum_{i=1}^{T_i} w_i \frac{|Y_{mi} - Y_{expi}|}{Y_{expi}} \quad (3.1-2)$$

$$DC = \sum_{i=1}^{T_i} w_i (Y_{mi} - Y_{expi})^2 \quad (3.1-3)$$

En el presente trabajo, las ponderaciones de calibración w_i para cada punto de control i se determinaron mediante la evaluación de una función unimodal, función que fue previamente ajustada mediante una regresión numérica a las amplitudes experimentales normalizadas de cada ensayo, de modo que la ponderación w_i queda en función de las velocidades reducidas.

La propuesta de utilizar una función unimodal para estimar la ponderación, se debe a que las respuestas de amplitud perpendicular al flujo en *VIV* de los experimentos, exhiben una distribución unimodal en función de la velocidad reducida, que se caracteriza por presentar un máximo definido en el régimen de bloqueo y una disminución progresiva fuera dicho intervalo (Zhang et al. 2021).

Del análisis del comportamiento de las funciones unimodales y los experimentos de *VIV* se puede observar que siguen la tendencia de la expresión 3.1-4, la cual establece que en una serie de datos ordenados en orden creciente existe un valor máximo (y_k) y que los datos posteriores a dicho máximo tienen un decremento.

$$y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_k > y_{k+1} > y_{k+2} \dots y_{k+n} \quad (3.1-4)$$

Las funciones unimodales con las que se establecieron las ponderaciones w_i para el proceso de calibración fueron las ecuaciones 3.1-5, 3.1-6 y 3.1-7 que corresponden a la función gaussiana asimétrica, función gaussiana asimétrica general y función de Weibull respectivamente.

$$w_i = f(U_r) = \begin{cases} w_m * e^{\left[-\frac{(U_{rc}-U_r)^2}{2\sigma_1^2}\right]}, & U_r \leq U_{rc} \\ w_m * e^{\left[-\frac{(U_{rc}-U_r)^2}{2\sigma_2^2}\right]}, & U_r > U_{rc} \end{cases} \quad (3.1-5)$$

$$w_i = f(U_r) = \begin{cases} w_m * e^{\left[\frac{-(U_{rc} - U_r)^{P_1}}{2\sigma_1^2} \right]}, & U_r \leq U_{rc} \\ w_m * e^{\left[\frac{-(U_{rc} - U_r)^{P_2}}{2\sigma_2^2} \right]}, & U_r > U_{rc} \end{cases} \quad (3.1-6)$$

$$w_i = f(U_r) = \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{U_r}{\lambda} \right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{U_r}{\lambda} \right)^{\delta}} \quad (3.1-7)$$

Donde w_m representa el valor máximo de la ponderación, U_{rc} es la velocidad reducida correspondiente al desplazamiento máximo. Los parámetros σ_1 y σ_2 controlan el ancho de la campana a la izquierda y a la derecha del punto máximo respectivamente, mientras que P_1 y P_2 definen la forma de la campana en cada uno de esos lados. En la función Weibull, por su parte, λ es un parámetro de forma y δ es un parámetro de escala.

3.1.3 Asignación de ponderaciones y puntos de control

Para obtener las jerarquías o ponderaciones con las funciones unimodales propuestas 3.1-5, 3.1-6 y 3.1-7 de la **sección 3.1.2**, se realizó un ajuste de regresión numérica sobre cada gráfica de la respuesta dinámica del *VIV* normalizada, de tal modo que la ponderación está en función de la velocidad U_r . Este ajuste por regresión se realizó bajo dos condiciones:

1. Se estableció que el desplazamiento máximo experimental del *VIV* tuviera la ponderación máxima $w_i = 1$.
2. El ajuste de las funciones unimodales se llevó a cabo de manera que la ponderación máxima coincidiera exactamente con la amplitud máxima de desplazamiento en cada gráfica normalizada.

Con estas condiciones, las funciones unimodales se ajustaron con el algoritmo *lsqcurvefit* del *Matlab Optimization Toolbox* sobre la respuesta dinámica normalizada del experimento *VIV*, los parámetros obtenidos en este ajuste se presentan en la *Tabla 3.1-4*.

Tabla 3.1-4: Parámetros obtenidos del ajuste de las funciones unimodales con los ensayos experimentales.

Experimentos	Función gaussiana asimétrica				Función gaussiana asimétrica general						Función Weibull	
	w_m	U_{rc}	σ_1	σ_2	w_m	U_{rc}	σ_1	σ_2	P_1	P_2	λ	δ
Stappenbelt y Lalji (2008)	1	7.16	1.7023	2.8750	1	7.16	2.3822	3.9869	3.0250	1.0465	3.6440	7.8188
Yang et al. (2009)	1	5.70	0.7472	2.7529	1	5.70	1.0565	3.8151	1.9697	2.5021	2.9502	6.5586
Deng et al. (2020)	1	6.54	1.8129	2.8991	1	6.54	2.4356	4.2028	5.0813	1.9282	3.6318	7.1464

3.1.4 Algoritmo de calibración

Para las calibraciones, se utilizó el algoritmo genético “ga” disponible dentro de los métodos del *Global Optimization Toolbox*, diseñados para encontrar el mínimo o máximo global de una función objetivo en problemas donde existen múltiples mínimos locales. El diagrama de flujo del procedimiento de calibración de parámetros de los osciladores dinámicos del *VIV* se muestra en la *Figura 3.1-1*.

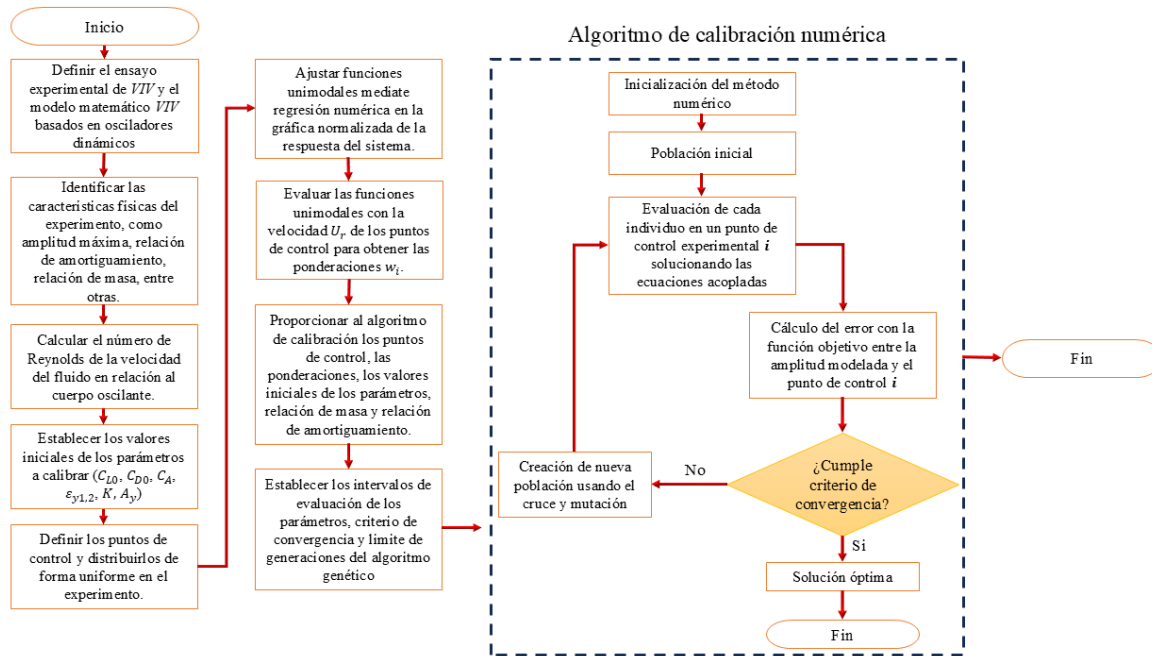


Figura 3.1-1: Diagrama de flujo del algoritmo de calibración.

Para iniciar el procedimiento de calibración, se debe establecer el experimento con el que se realizará el proceso de calibración de parámetros en los osciladores dinámicos. En los experimentos, se deben identificar las características como relación de masa, frecuencia, relación de amortiguamiento, entre otras; posteriormente, se debe estimar la velocidad relativa del fluido al objeto oscilante, con ella se podrán estimar los parámetros iniciales de la interacción fluido estructura (C_{L0} , C_{D0} y C_A), mientras que para los parámetros matemáticos ($\varepsilon_{y1,2,3}$, A_y y K) son referenciadas a validaciones previas reportadas.

Se deben identificar y establecer aquellos puntos experimentales para fungir como puntos de control en el proceso de calibración, el criterio de elección es que debe tener distribución cuasi equidistante con respecto al pico de máxima amplitud experimental, su valor ponderado se obtiene del ajuste de las funciones unimodales en la gráfica de las amplitudes normalizadas.

Los valores iniciales, los puntos de control y sus ponderaciones deben introducirse al algoritmo de calibración. También, es necesario debe establecer el oscilador de estela que se

solucionará de forma acoplada con el oscilador estructural para modelar las amplitudes del fenómeno *VIV*

Para que la simulación no tienda a un bucle infinito, es necesario establecer las condiciones en el que el algoritmo de calibración numérica detendrá sus operaciones con base a un número máximo de generaciones producidas o con un criterio de convergencia que define el cambio mínimo en el valor de la función objetivo entre generaciones para que el algoritmo considere que ya no está mejorando.

Capítulo 4: Análisis e interpretación de resultados

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de las calibraciones realizadas con los tres experimentos seleccionados, aplicando la estrategia de calibración descrita en el Capítulo 3. Se evalúa el desempeño de los modelos dinámicos mediante la comparación entre las predicciones numéricas y los datos experimentales, con el objetivo de valorar la capacidad de los parámetros ajustados para reproducir adecuadamente el comportamiento observado.

Asimismo, se discute la influencia de los distintos esquemas de ponderación y los puntos de control seleccionados, destacando las diferencias en la precisión, estabilidad y convergencia de las soluciones obtenidas. Se analizan las tendencias en los coeficientes calibrados, su coherencia física y su sensibilidad ante variaciones en las condiciones experimentales, lo cual permite identificar fortalezas y limitaciones de cada modelo en los diferentes intervalos de velocidad reducida.

Los parámetros calibrados se presentan en el **Apéndice A**, con el fin de mantener la claridad expositiva del capítulo principal.

4.2 Calibración con experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

4.2.1 Calibración con 5 puntos de control

Se adoptó un conjunto mínimo de cinco puntos de control (i) representativos para el proceso de calibración, con el propósito de asegurar que el algoritmo de optimización de parámetros disponga de información suficiente para converger hacia una solución físicamente consistente.

Desde la perspectiva numérica, utilizar el número mínimo necesario de puntos reduce el costo computacional del proceso de calibración, particularmente debido a la naturaleza no lineal del modelo y a la integración repetitiva requerida durante la optimización. Los puntos fueron seleccionados mediante un criterio de espaciamiento cuasi equidistante con respecto al máximo desplazamiento experimental (*Figura 4.2-1*), de modo que se capturó tanto la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta.

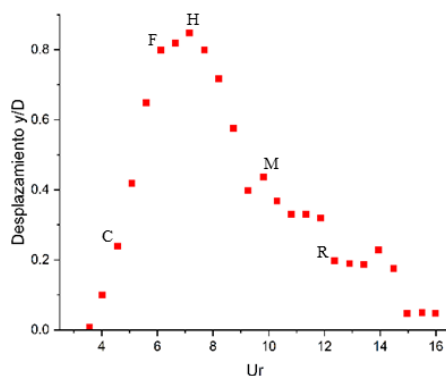


Figura 4.2-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

Esta selección es con base a un criterio técnico que equilibra suficiencia matemática, representatividad física del fenómeno y eficiencia computacional, proporcionando una base sólida para el proceso de calibración.

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.2-1*. Dichas ponderaciones reflejan una mayor importancia aritmética en los puntos ubicados en las proximidades del desplazamiento máximo experimental. En particular, el punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1, estableciendo así la jerarquización relativa de los demás puntos de control.

Tabla 4.2-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con cinco puntos de control.

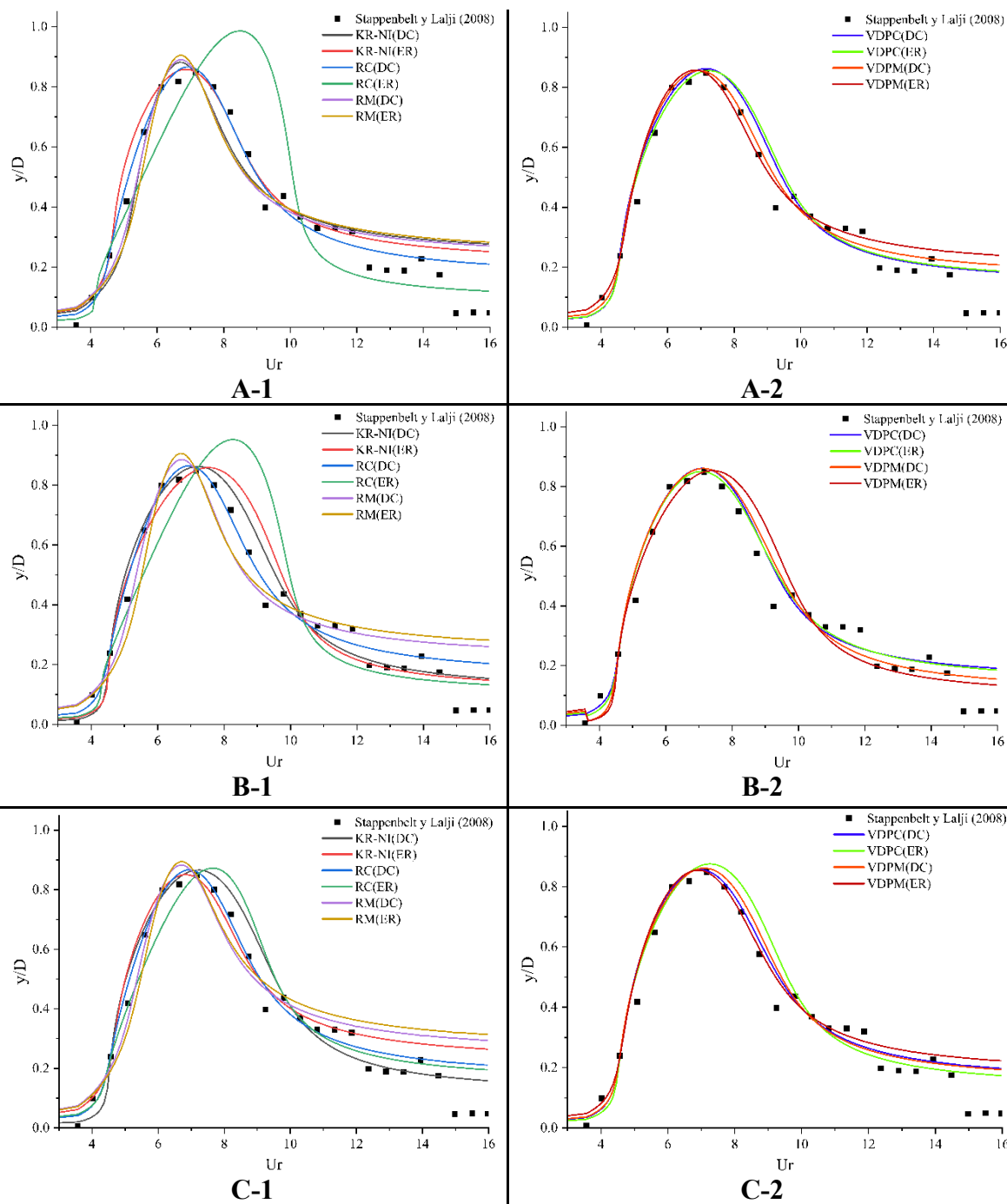
Stappenbelt y Lalji (2008)					
i	C	F	H	M	R
U_r	4.57	6.12	7.16	9.80	12.37
Ponderación Gauss asimétrico					
w_i	0.3143	0.8297	1	0.5508	0.1363
	11/35	609/734	1	315/572	38/279
Ponderación Gauss asimétrico general					
w_i	0.2760	0.9217	1	0.4589	0.2312
	8/29	106/115	1	67/146	194/839
Ponderación Weibull					
w_i	0.54723	0.9058	1	0.3524	0.0199
	365/667	125/138	1	37/105	17/855

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7). Los parámetros calibrados con 5 puntos de control para el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) se muestran en el **Apéndice A**

Los modelos RC(DC) y KR-NI(ER) de la *Figura 4.2-2 A-1, B-1 y C1* logran capturar satisfactoriamente la magnitud y ocurrencia del desplazamiento máximo. Sin embargo, tienden a sobreestimar las amplitudes en $4 \leq U_r \leq 6$. Por otro lado, los modelos RM (DC y ER) subestiman las amplitudes al inicio de la resonancia en $4 \leq U_r \leq 6$ y en $7 \leq U_r \leq 9$, anticipan levemente la ocurrencia del pico de resonancia y no logran seguir la tendencia experimental en $9 \leq U_r \leq 16$. En todas las calibraciones, la curva del modelo RC(ER) no presentó buen ajuste, a pesar de mostrar una mejora bajo el esquema ponderado con Weibull

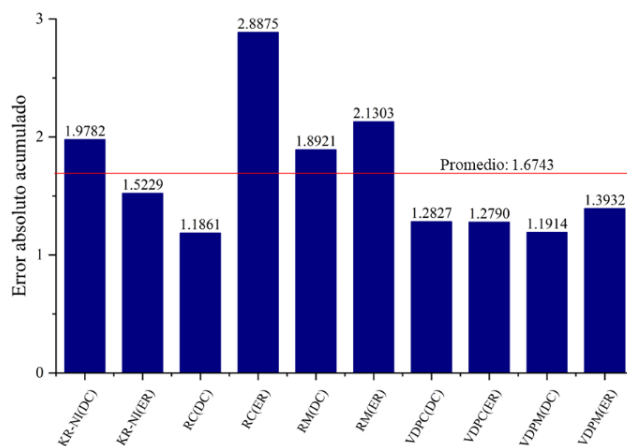
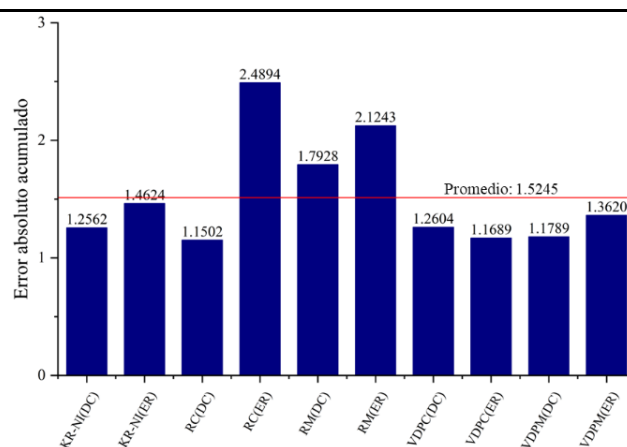
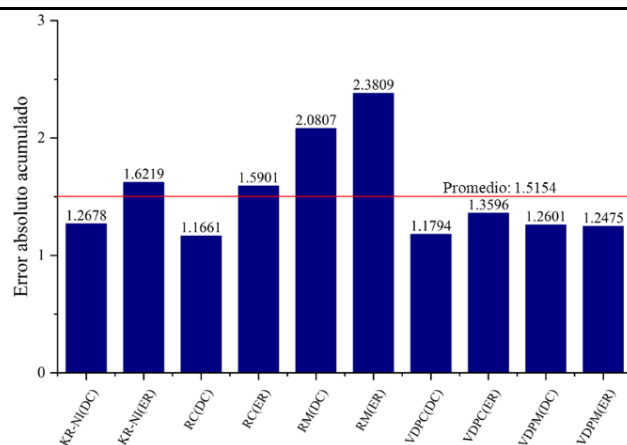
Los osciladores VDPC y VDPM (DC y ER) de la *Figura 4.2-2 A-2, B-2 y C-2* muestran un ajuste global satisfactorio y robusto ante los tres esquemas estadísticos. Los cuatro modelos emulan de forma precisa el inicio de la resonancia, así como la amplitud y ocurrencia del desplazamiento máximo. El modelo VDP(ER) presenta la mayor sobreestimación de amplitudes en $8 \leq U_r \leq 10$. De forma general el modelo VDPM (DC) destaca por exhibir la mejor aproximación a los datos experimentales a lo largo del dominio evaluado.

La evaluación cuantitativa revela que refinar el método estadístico reduce la magnitud de la media del error global del ensamble de modelos. Inicialmente, la calibración con el esquema de Gauss asimétrico (*Figura 4.2-3 A*) estableció una media de error de 1.6743 unidades. Posteriormente, el uso de la ponderación de Gauss asimétrico general (*Figura 4.2-3 B*) redujo esta media de los errores absolutos a 1.5245 unidades, lo que representa una mejora del 8.95% respecto al esquema anterior. Finalmente, la aplicación de la función de Weibull (*Figura 4.2-3 C*) situó la media global en 1.5154 unidades, consolidando una precisión estadística muy similar a la obtenida con el esquema de Gauss asimétrico general.



Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.2-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.2-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

4.2.2 Calibración con 6 puntos de control

La selección de seis puntos de control se fundamenta en un criterio de suficiencia matemática en la estimación de parámetros. Si bien cinco puntos constituyen el mínimo requerido para garantizar la identificabilidad del modelo, la inclusión de un punto adicional permite fortalecer la estabilidad numérica del proceso de optimización y reducir la sensibilidad ante posibles variaciones o incertidumbres en los datos experimentales.

Los seis puntos de control se distribuyeron de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.2-4*), con el propósito de capturar tanto las características de la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta dinámica. Esta disposición permite que la calibración represente no solo el valor máximo de la respuesta, sino también la tendencia global de la curva. Cabe señalar que el sexto punto de control se ubicó del lado derecho del máximo, debido a que en esa región se dispone de un mayor número de datos experimentales.

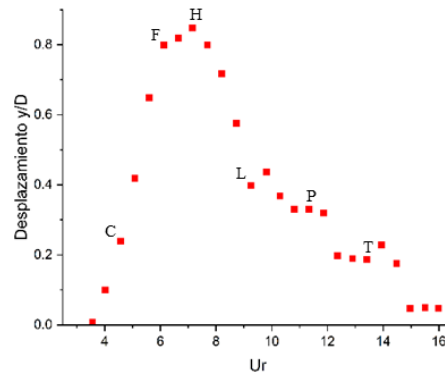


Figura 4.2-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.2-2*. El punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1, estableciendo así la jerarquización relativa de los demás puntos de control.

Tabla 4.2-2: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con seis puntos de control.

Stappenbelt y Lalji (2008)						
i	C	F	H	L	P	T
Ponderación gauss asimétrico						
w_i	0.3143	0.8298	1	0.7678	0.3475	0.0934
	11/35	697/840	1	248/323	204/587	84/899
Ponderación gauss asimétrico general						
w_i	0.2758	0.9217	1	0.6013	0.3497	0.2012
	155/562	412/447	1	95/158	264/755	67/333
Ponderación Weibull						
w_i	0.5472	0.9058	1	0.6425	0.1444	0.0080
	365/667	125/138	1	151/235	13/90	1/125

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7) y se obtuvo los siguientes resultados:

En la *Figura 4.2-5 A-1, B-1 y C-1* los modelos RC(DC) y KR-NI(DC) en general presentan la mejor consistencia. Estos modelos sobrestiman las amplitudes iniciales en $4 \leq U_r \leq 6$ y tienen buena aproximación con las amplitudes en $10 \leq U_r \leq 16$, pero anticipan ligeramente la predicción el pico de máxima amplitud. En contraste, los modelos basados de RM (DC y ER) exhiben un comportamiento deficiente debido a que subestiman las amplitudes iniciales y no predicen la ubicación del desplazamiento máximo.

En contraste el modelo RC(ER) no muestran un ajuste satisfactorio con la ponderación de Gauss asimétrico y Gauss asimétrico. Sin embargo, su comportamiento mejora de manera significativa al aplicar la ponderación de Weibull el modelo de RC(ER) y RC(DC) logran las mejores aproximaciones tanto en el pico de resonancia como en la rama de decaimiento en el intervalo $10 \leq U_r \leq 16$.

En la *Figura 4.2-5 A-2, B-2 y C-3* se observa que los osciladores de Van der Pol ratifican su robustez estructural al predecir satisfactoriamente la ocurrencia y la magnitud del máximo desplazamiento a través de los tres esquemas de calibración evaluados. Las variaciones entre sus calibraciones se concentran al inicio de la resonancia en $4 \leq U_r \leq 6$, el ajuste fluctúa entre la calibración con Gauss asimétrico con VDPM y sobreestimaciones observadas con la ponderación de Weibull.

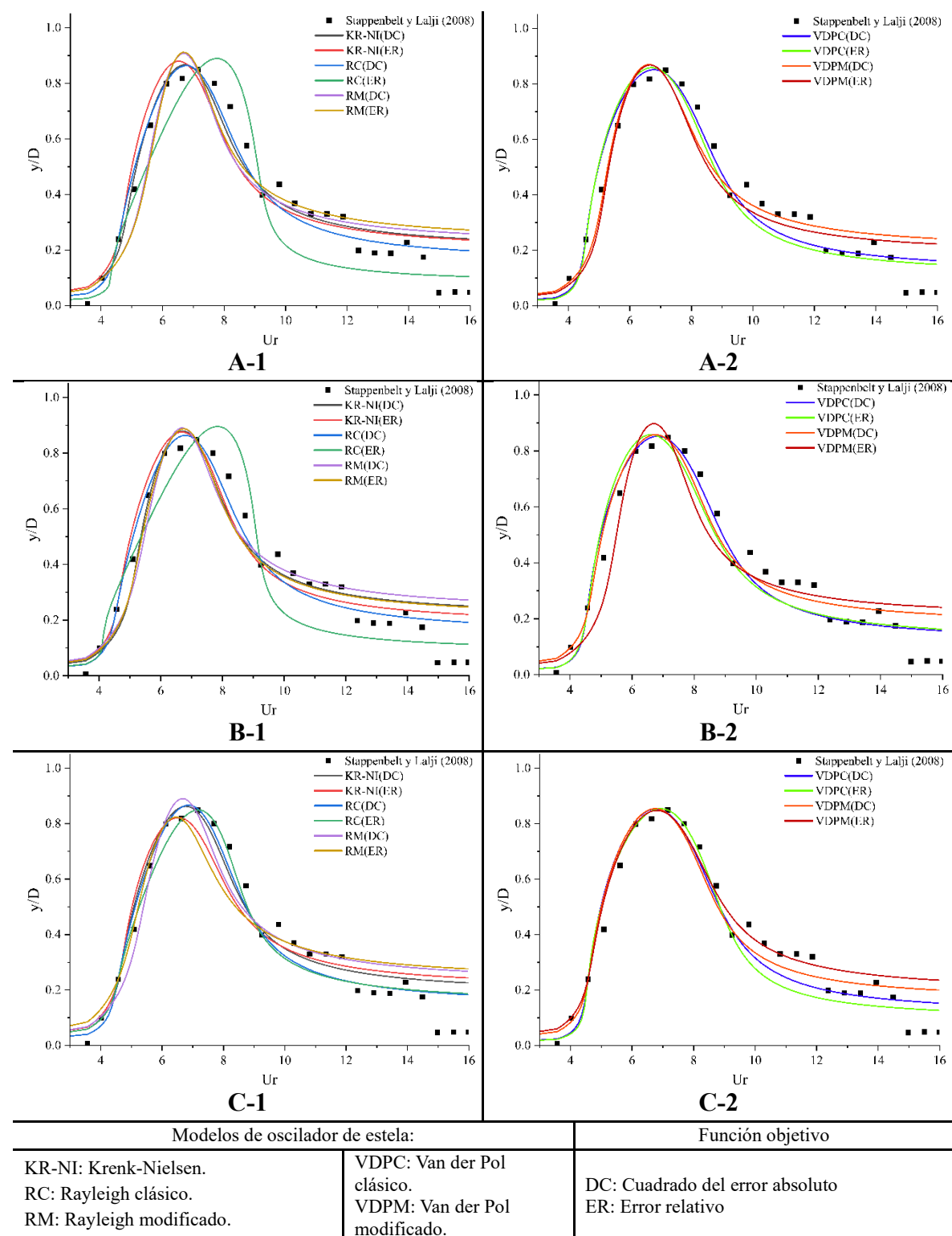
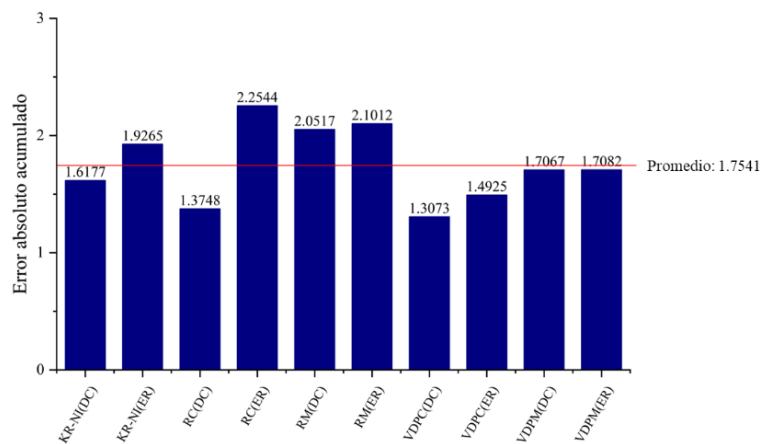
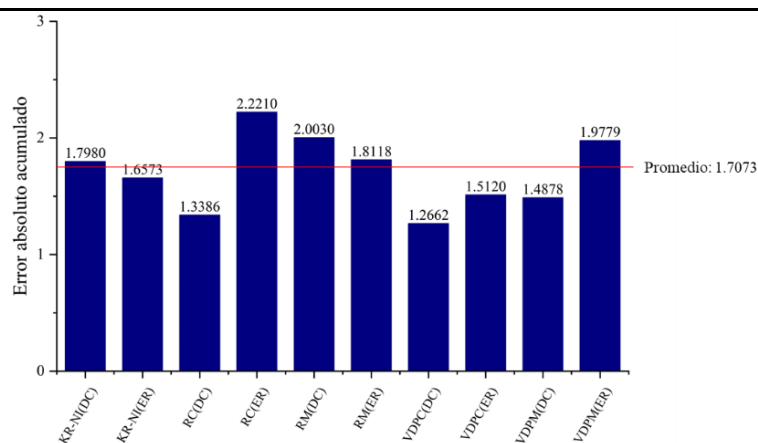
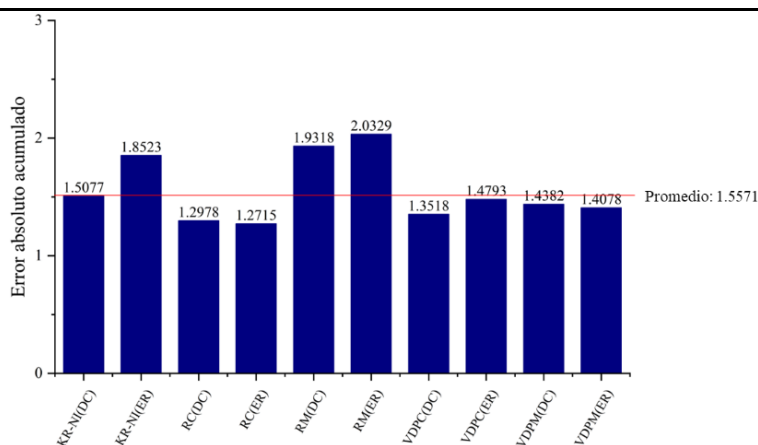


Figura 4.2-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

La evaluación estadística del error absoluto que se muestra en la *Figura 4.2-6* con las calibraciones con seis puntos de control, se demuestra que el refinamiento del esquema de ponderación mejora progresivamente la tendencia con las amplitudes experimentales. Ya que la ponderación con Gauss asimétrico (*Figura 4.2-6 A*) estableció una media de error global de 1.7541 unidades. Al implementar el esquema de Gauss asimétrico general (*Figura 4.2-6 B*), este valor se redujo a 1.7073 unidades, logrando una ligera mejora del 2.60%. Finalmente, la calibración mediante la función de Weibull (*Figura 4.2-6 C*) alcanzó la mayor precisión para esta etapa, situando el promedio global en 1.5571 unidades, lo que representa una mejora significativa del 11.20% respecto al esquema estadístico inicial.

En cuanto al desempeño individual de los osciladores, los modelos VDPC(DC) y RC(DC) destacaron consistentemente por ofrecer el mejor ajuste bajo los dos esquemas gaussianos. No obstante, la aplicación de la función de Weibull modificó esta jerarquía de precisión de manera notable. Ya que el modelo RC(ER), que había registrado el peor desempeño bajo el esquema de Gauss asimétrico, experimentó una mejora atípica que junto a RC(DC) fueron los modelos de mejor ajuste. Sin embargo, bajo este mismo esquema de Weibull, el modelo RM(ER) pasó a registrar el mayor error acumulado.

Los parámetros calibrados con 6 puntos de control para el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) se muestran en el **Apéndice A**

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.2-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

4.2.3 Calibración con 7 puntos de control

La selección de siete puntos de control responde al objetivo de evaluar la estabilidad del proceso de calibración ante el incremento gradual de información experimental. Mientras que cinco puntos representan el número mínimo necesario para asegurar la identificabilidad del modelo y seis puntos introducen un nivel adicional de estabilidad numérica, el uso de siete puntos permite analizar la sensibilidad del algoritmo de optimización frente a un conjunto más amplio de datos.

Los siete puntos fueron distribuidos de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.2-7*), con el propósito de representar adecuadamente las distintas regiones de la respuesta dinámica, incluyendo la zona de crecimiento de amplitud, el entorno del máximo desplazamiento y la región posterior al pico. Esta distribución permite que la calibración capture con mayor detalle la forma global de la curva experimental.

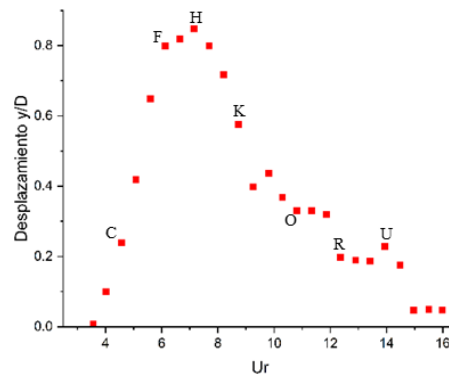


Figura 4.2-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.2-3*. El punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1, estableciendo así la referencia para la jerarquización relativa de los demás puntos de control.

Tabla 4.2-3: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) con siete puntos de control. Autoría propia

Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
i	C	F	H	K	O	R	U
Ponderación gauss asimétrico							
w_i	0.3140	0.8297	1	0.8598	0.4470	0.1940	0.0620
	11/35	609/734	1	601/699	46/103	121/625	38/613
Ponderación gauss asimétrico general							
w_i	0.2758	0.9217	1	0.6841	0.4018	0.2663	0.1749
	8/29	412/447	1	327/478	133/331	94/353	131/749
Ponderación Weibull							
w_i	0.5472	0.9058	1	0.7805	0.2367	0.0428	0.0032
	365/667	125/138	1	32/41	169/714	3/70	1/310

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones **3.1.5-3.1.7**) y se obtuvo los siguientes resultados:

El modelo *VIV* RC(DC) destacó como el más consistente ya que logró predecir adecuadamente el inicio de la resonancia, ocurrencia y magnitud del desplazamiento máximo y además mostró una aproximación aceptable hacia el final de la resonancia (*Figura 4.2-8 A-1, B-1 y C-1*). En contraste los modelos KR-NI (DC y ER) y RM(ER) tienden a subestimar las amplitudes iniciales, anticipan y sobreestiman la magnitud del máximo desplazamiento. Por su parte, el modelo RC(ER) presenta un comportamiento inestable que depende del método de ajuste. Mientras que bajo la ponderación con Gauss asimétrico general retrasa la ocurrencia de la amplitud máxima, su predicción mejora significativamente al aplicar Weibull.

Los osciladores de Van der Pol de la *Figura 4.2-8 A-2, B-2 y C-2* demuestran una notable estabilidad geométrica y predictiva a través de las tres ponderaciones estadísticas. De manera consistente, los modelos VDPC(DC) y VDPM(DC) logran representar satisfactoriamente tanto la ocurrencia y la amplitud máxima del desplazamiento en la mayoría de los escenarios. Aunque registran fluctuaciones menores al inicio de la resonancia en $4 \leq U_r \leq 6$, la capacidad predictiva de la familia es altamente robusta. En todas las iteraciones de calibración, los cuatro modelos de Van der Pol demuestran convergir de manera adecuada hacia los datos experimentales empíricos al término del fenómeno de resonancia en $10 \leq U_r \leq 16$.

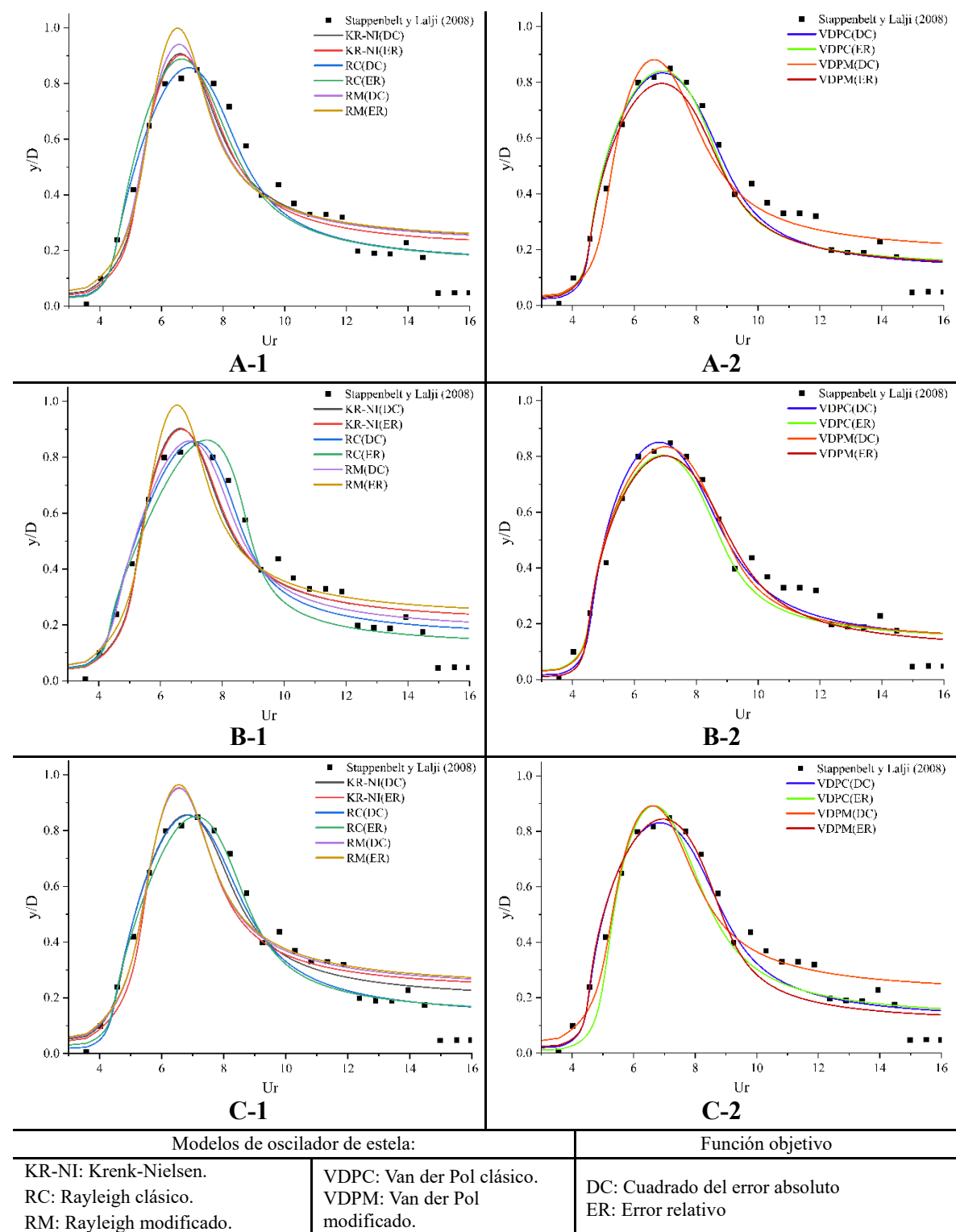


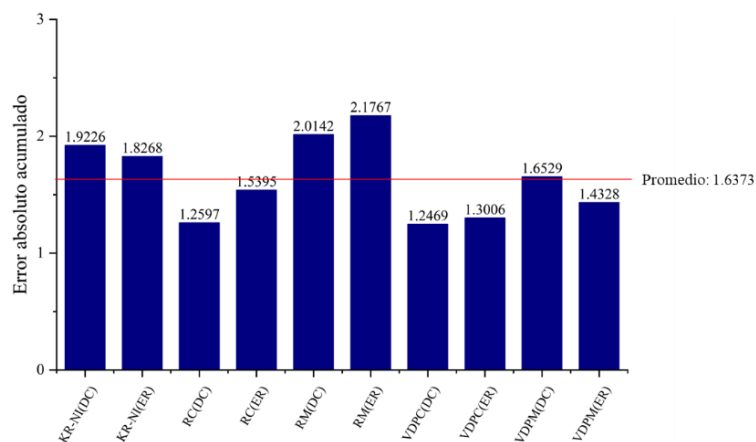
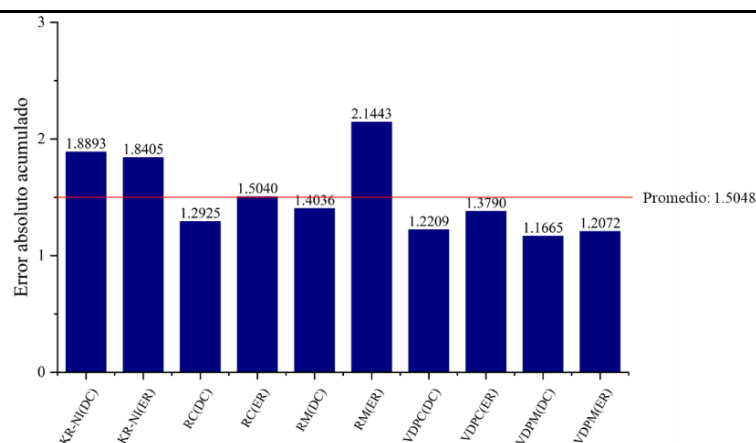
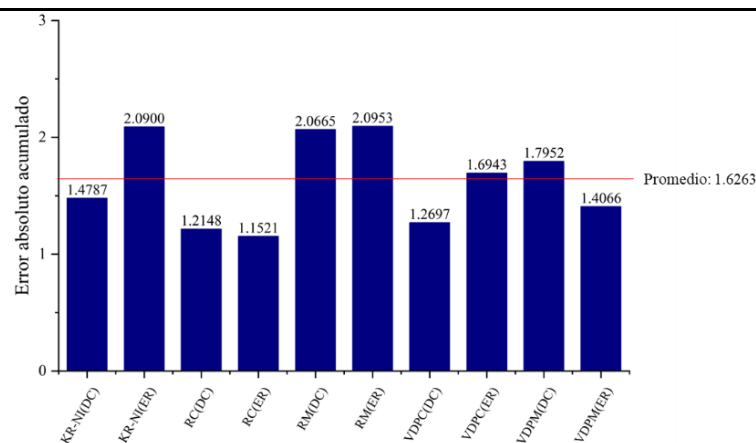
Figura 4.2-8: Resultados de la Calibración con 7 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

En la evaluación estadística del error absoluto, la ponderación de Gauss asimétrico *Figura 4.2-9 A* estableció una media global del error absoluto de 1.6373 unidades. Posteriormente, la implementación del esquema de Gauss asimétrico general *Figura 4.2-9 B* logró la mayor optimización para esta configuración, reduciendo el promedio global en un 8.10% respecto al esquema inicial. Con la aplicación de la función de Weibull para las ponderaciones (*Figura 4.2-9 B*) no mejoró el promedio global, por lo que se asemeja desempeño general al obtenido con el primer esquema gaussiano en 1.6263 unidades.

El análisis de la precisión de los modelos *VIV* arrojó variaciones significativas dependientes del método de ponderación usado. Con la ponderación de Gauss asimétrico, los osciladores RC(DC) y las variantes VDPC (DC y ER) presentaron el mejor ajuste a los datos experimentales. Con el esquema de Gauss asimétrico general, la mejor exactitud recayó en el modelo VDPM(DC) quien registró el error mínimo, seguido de cerca por VDPM(ER) y VDPC(DC). Finalmente, bajo la ponderación de Weibull, el modelo RC(ER) presentó una mejora atípica alcanzando el mejor ajuste, secundado estrechamente por RC(DC) y VDPC(DC).

En contraste, los ajustes no satisfactorios se concentraron en el modelo RM(ER) ya que acumuló consistentemente los mayores errores absolutos a lo largo de los tres esquemas de ponderación, evidenciando un ajuste inaceptable al que también se sumó el modelo KR-NI(ER).

Los parámetros calibrados con 7 puntos de control para el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008) se muestran en el **Apéndice A**

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto ER: Error relativo
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.2-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

4.3 Calibración con experimento de Yang *et al.* (2009)

4.3.1 Calibración con 5 puntos de control

En este experimento se prosiguió con el mismo proceso de calibración expuesto anteriormente, se adoptó por el conjunto mínimo de cinco puntos de control (*i*) representativos para el proceso de calibración, con el propósito de asegurar que el algoritmo de optimización de parámetros disponga de información suficiente para converger hacia una solución físicamente consistente.

Los puntos fueron seleccionados mediante un criterio de espaciamiento cuasi equidistante con respecto al máximo desplazamiento experimental (*Figura 4.3-1*), de modo que se capturó tanto la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta.

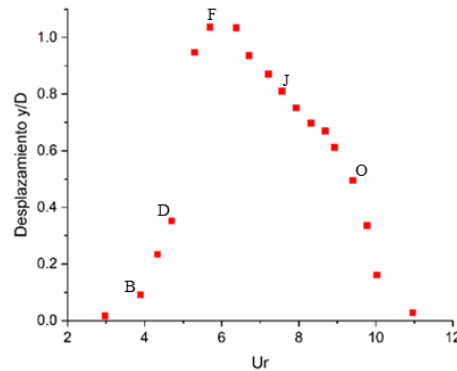


Figura 4.3-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Yang et al. (2009).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.3-1*. Las ponderaciones reflejan una mayor importancia aritmética en los puntos ubicados en las proximidades del desplazamiento máximo experimental. En particular, el punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1.

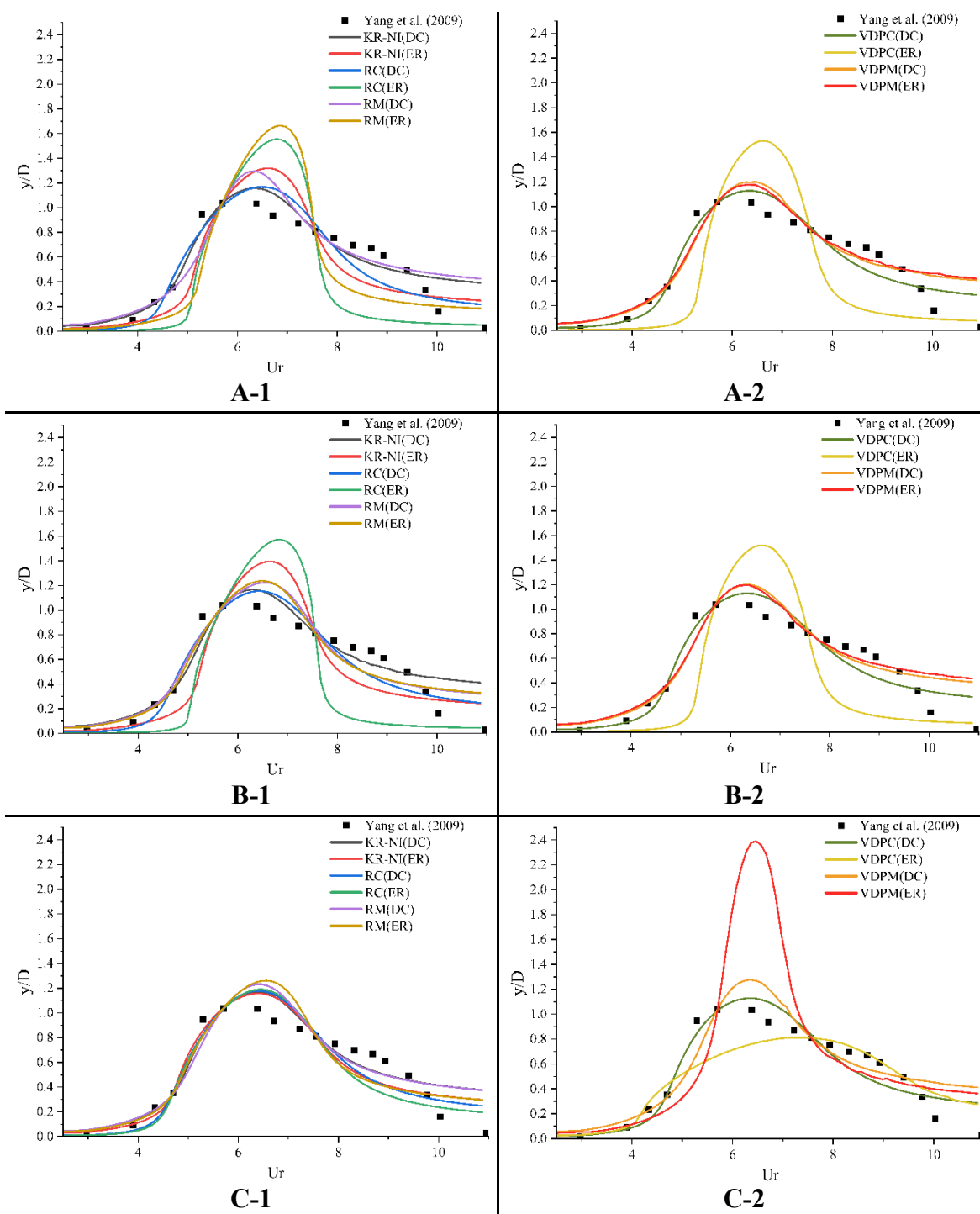
Tabla 4.3-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con cinco puntos de control.

Yang et al. (2009)					
i	B	D	F	J	O
Ponderación gauss asimétrico					
w_i	0.0549	0.4084	1	0.7959	0.4053
	39/710	361/884	1	39/49	246/607
Ponderación gauss asimétrico general					
w_i	0.0575	0.4076	1	0.8473	0.3961
	28/487	309/758	1	172/203	221/558
Ponderación Weibull					
w_i	0.74468	0.9145	1	0.7342	0.2850
	35/47	503/550	1	279/380	242/849

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7) y se obtuvo los siguientes resultados:

La calibración muestra en la en *Figura 4.3-2 A-1, B-1 y C-1*, en el que, bajo la ponderación de Gauss asimétrico, las variantes calibradas con error relativo (ER) exhiben un ajuste deficiente, mientras que las calibradas con el cuadrado del error (DC) logran aproximarse adecuadamente al inicio en de la resonancia en $3 \leq U_r \leq 5$. Predicen la ocurrencia del pico máxima amplitud experimental, pero fallan en modelar su magnitud. Con el esquema de Gauss asimétrico general, los modelos RC(ER) y RM(ER) mejoran su ajuste con respecto a los desplazamientos experimentales, mientras que para los demás modelos ocurren cambios mínimos. La ponderación con Weibull proporciona la mejor aproximación global para este grupo en todas las curvas, destacándose el modelo KR-NI(ER) por ofrecer la mejor predicción de la amplitud máxima.

El comportamiento de los osciladores de Van der Pol en la *Figura 4.3-2 A-2, B-2 y C-2* se caracteriza por una tendencia sistemática a sobrestimar la magnitud de la amplitud máxima en todos los esquemas evaluados, a pesar de predecir correctamente su ocurrencia y modelar de forma aceptable el inicio en $3 \leq U_r \leq 5$ y el final de la resonancia en $7 \leq U_r \leq 9.5$. De forma individual, el modelo VDPC(ER) presenta un ajuste inaceptable en todas las iteraciones sumándose con ello el modelo VDPM(ER) con el esquema de ponderación de Weibull. En contraste, las variantes calibradas con el cuadrado del error, VDPC(DC) y VDPM(DC), demuestran ser consistentes a lo largo de las tres calibraciones, siendo el modelo VDPC(DC) el que logra la mayor proximidad al desplazamiento máximo experimental al utilizar el esquema de Weibull.



Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

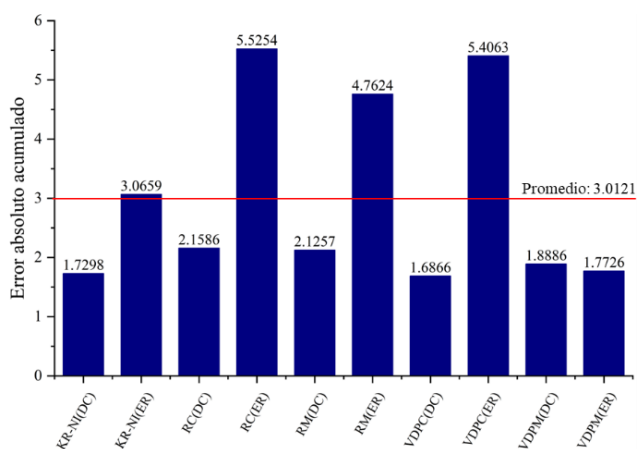
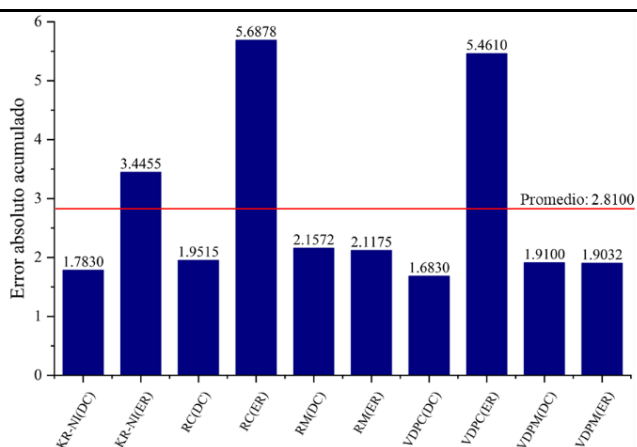
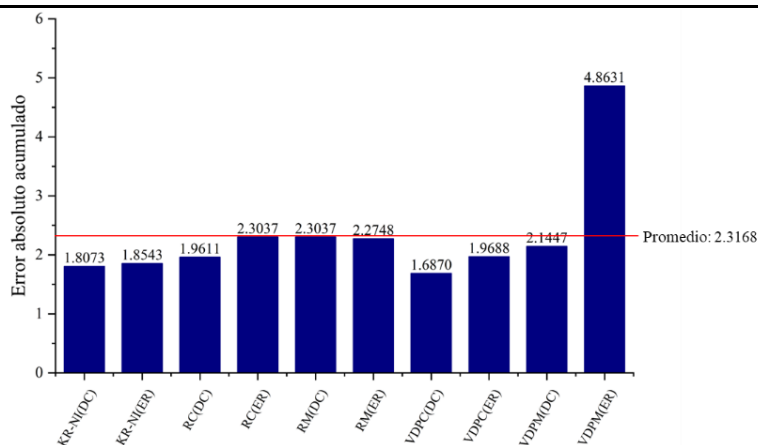
Figura 4.3-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).

La evaluación estadística del error absoluto demuestra que refinar el esquema de ponderación reduce progresivamente la magnitud del error global del ensamble predictivo. Inicialmente, la calibración con el esquema de Gauss asimétrico (*Figura 4.2-3 A*) arrojó un promedio global de 3.0121 unidades. Posteriormente, la implementación de Gauss asimétrico general de la *Figura 4.2-3 B* logró reducir esta media en un 6.70% y la aplicación de la función de Weibull alcanzó la optimización más significativa (*Figura 4.2-3 C*), ya que disminuyó el error global en un 23.08% adicional respecto al esquema de Gauss asimétrico situando un error promedio de 2.3168.

En cuanto al desempeño individual de cada oscilador de estela, el modelo VDPC(DC) demostró una consistencia que lo consolidó como la mejor aproximación al registrar el error mínimo en los tres esquemas de calibración. El oscilador de KR-NI(DC) también mantuvo un desempeño destacado con errores muy cercanos al mínimo.

En contraste, los modelos RC(ER) y VDPC(ER) calibrados con el esquema de Gauss asimétrico y Gauss asimétrico general muestran ajustes no satisfactorios acumulando errores superiores a la media global. Junto a ellos se les suman el modelo de RM(ER) calibrado con Gauss asimétrico, el modelo KR-NI(ER) calibrado con Gauss asimétrico general y VDPM(ER) calibrado con Weibull.

Los parámetros calibrados con 5 puntos de control para el experimento de Yang et al. (2009) se muestran en el **Apéndice A**.

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.3-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).

4.3.2 Calibración con 6 puntos de control

Continuando con las calibraciones, la elección de los seis puntos de control se fundamenta en un criterio de suficiencia matemática en la estimación de parámetros. Si bien cinco puntos constituyen el mínimo requerido para garantizar la identificabilidad del modelo, la inclusión de un punto adicional permite fortalecer la estabilidad numérica del proceso de optimización y reducir la sensibilidad ante posibles variaciones o incertidumbres en los datos experimentales.

Al igual que en las calibraciones anteriores, los seis puntos de control se distribuyeron de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.3-4*), con el propósito de capturar tanto las características de la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta dinámica. Esta disposición permite que la calibración represente no solo el valor máximo de la respuesta, sino también la tendencia global de la curva. Cabe señalar que el sexto punto de control se ubicó del lado derecho del máximo, debido a que en esa región se dispone de un mayor número de datos experimentales.

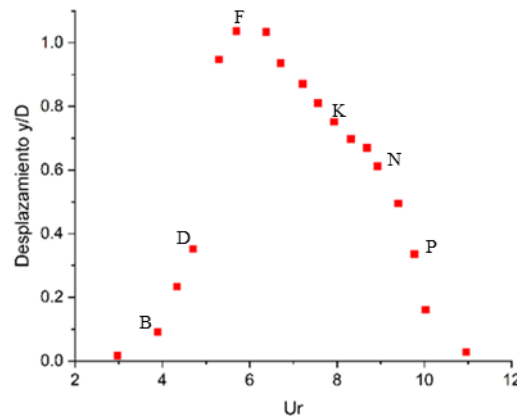


Figura 4.3-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de (Yang et al., 2009).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.3-2*. El punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1, estableciendo así la referencia para la jerarquización relativa de los demás puntos de control.

Tabla 4.3-2: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con seis puntos de control.

Yang et al. (2009)						
i	B	D	F	K	N	P
Ponderación gauss asimétrico						
w_i	0.0549	0.4084	1	0.7203	0.5024	0.3353
	39/710	361/884	1	479/665	207/412	58/173
Ponderación gauss asimétrico general						
w_i	0.05749	0.4076	1	0.7703	0.5172	0.3086
	28/487	309/758	1	691/897	15/29	229/742
Ponderación Weibull						
w_i	0.7447	0.9145	1	0.6402	0.3871	0.2168
	35/47	824/901	1	137/214	12/31	116/535

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7) y se obtuvo los siguientes resultados:

La calibración de los modelos matemáticos de *VIV* bajo los 3 diferentes esquemas de ponderación se muestran en la *Figura 4.3-5*, en donde los modelos de KR-NI(ER) y RC(ER) que se muestran en la *Figura 4.3-5 A-1, B-1 y C-1* exhiben ajustes aceptables no favorables que no logran representar el fenómeno experimental. Con la ponderación de Weibull, el modelo RC(ER) experimenta una mejora marginal, pero el modelo KR-NI(ER) mantiene la deficiencia predictiva. En contraste, los osciladores KR-NI(DC), RC(DC) y RM(DC) demuestran un comportamiento estable y en las tres iteraciones estadísticas, estos modelos logran modelar de manera satisfactoria las amplitudes al inicio de la resonancia en $3 \leq U_r \leq 6$ y muestran aproximaciones aceptables al final de la resonancia en $8 \leq U_r \leq 9.5$. Estas curvas predicen la ocurrencia del desplazamiento máximo, pero fallan de forma sistemática al intentar emular su amplitud.

El comportamiento de los osciladores de la *Figura 4.3-5 A-2, B-2 y C-2* muestran que los modelos VDPC(ER) y VDPM(ER), resultan predictivamente inviables, mostrando de manera generalizada ajustes insatisfactorios frente a los datos experimentales en las tres ponderaciones evaluadas. Los modelos VDPC(DC) y VDPM(DC) tampoco muestran una representación coherente a pesar de capturar adecuadamente la fase inicial de la resonancia en $3 \leq U_r \leq 6$ y mostrar aproximaciones aceptables hacia los desplazamientos posteriores al pico máximo en $8 \leq U_r \leq 9.5$. Estos modelos logran simular correctamente la ubicación del desplazamiento máximo, pero no logran modelar su magnitud.

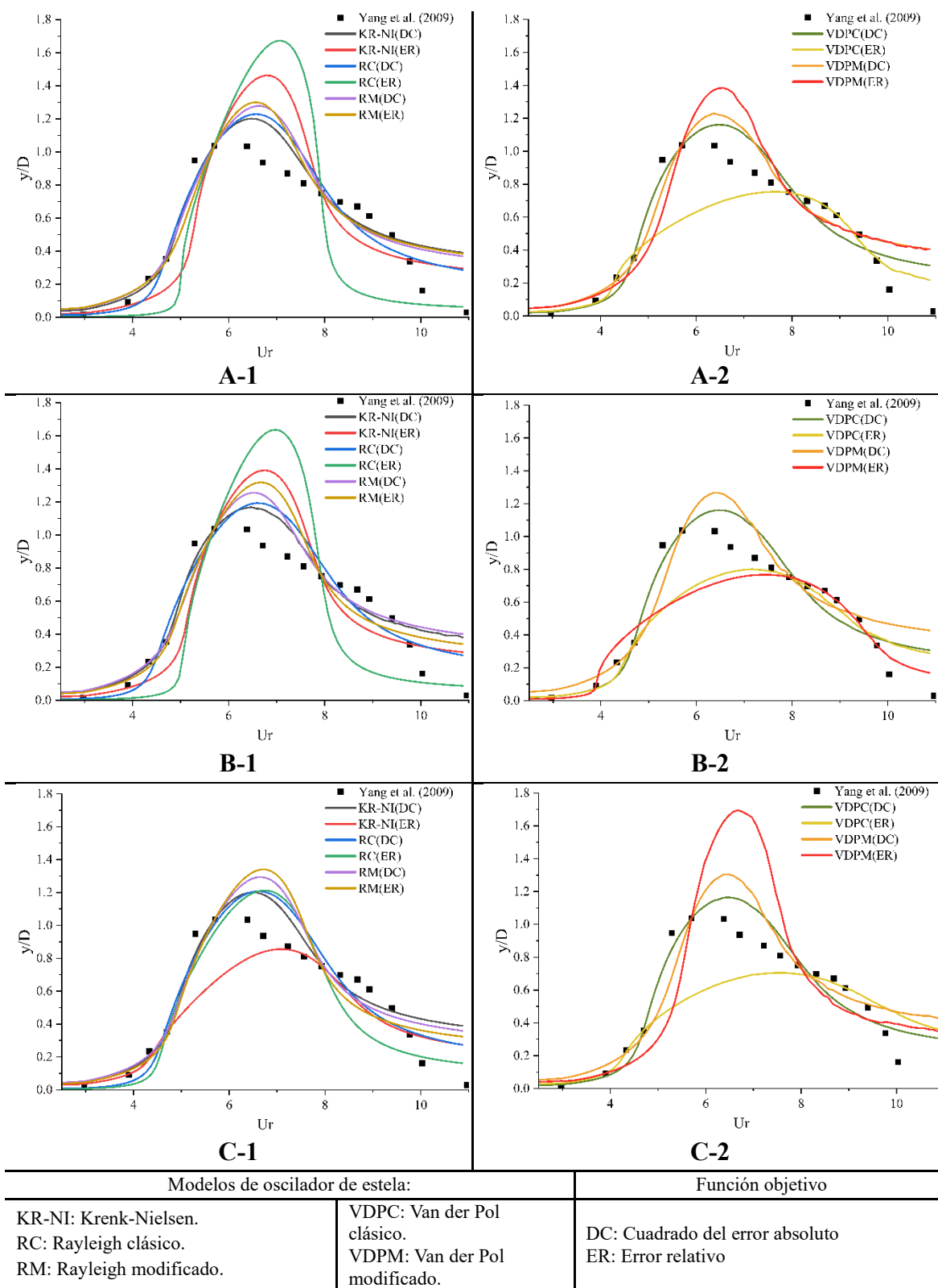


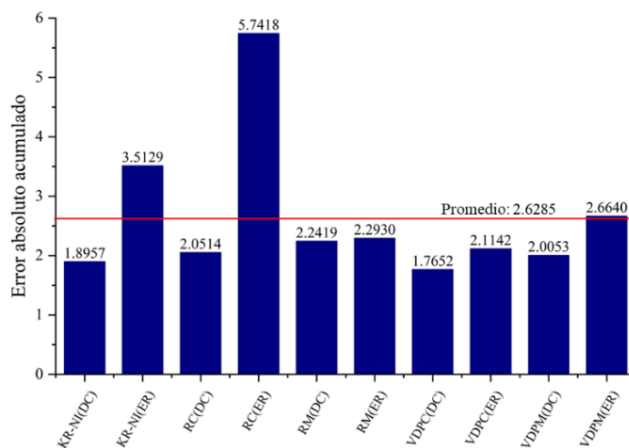
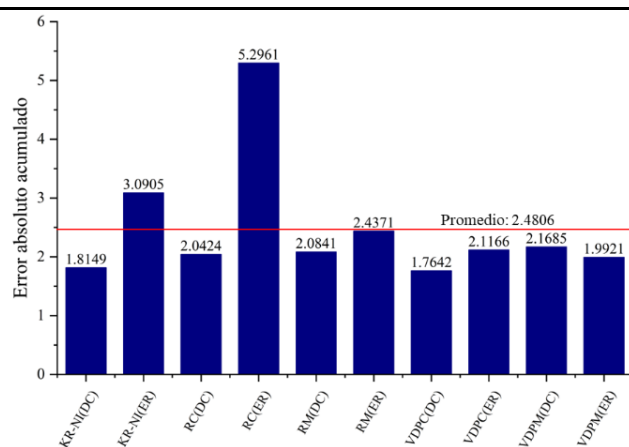
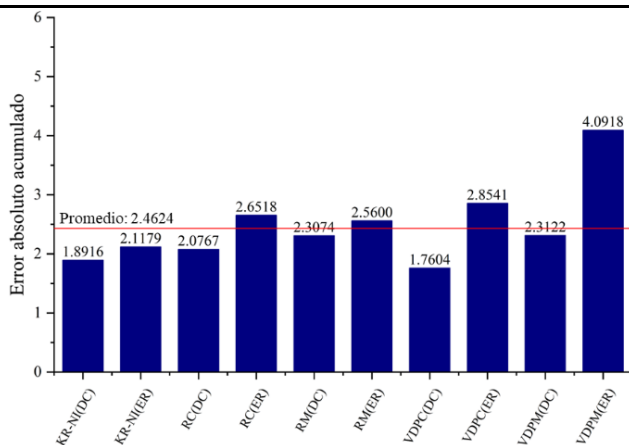
Figura 4.3-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).

La evaluación estadística del error absoluto muestra que la calibración con Gauss asimétrico (*Figura 4.3-6 A*) estableció una media global de 2.6285 unidades y al implementar la ponderación con Gauss asimétrico general (*Figura 4.3-6 B*), este promedio disminuyó en un 5.60% y la ponderación de Weibull (*Figura 4.3-6 C*) situó la media global en 2.4624 unidades, logrando una mejora adicional de apenas un 0.70%.

En el desempeño individual de los modelos calibrados con el cuadrado del error (DC), el modelo VDPC(DC) registró consistentemente el error mínimo en los tres esquemas estadísticos, secundado de cerca por el modelo KR-NI(DC), consolidándose ambos como las herramientas predictivas más precisas para esta configuración de control.

En contraste, el comportamiento de las variantes calibradas con error relativo (ER) evidenció una fuerte dependencia del esquema de ponderación utilizado. Bajo los dos esquemas gaussianos, los modelos KR-NI(ER) y RC(ER) exhibieron los ajustes más deficientes, acumulando errores superiores a la media global. Sin embargo, la aplicación de la ponderación de Weibull provocó una inversión drástica en las tendencias de error: mejoró significativamente la precisión de KR-NI(ER) y RC(ER), pero incrementó de manera notable el error acumulado en los osciladores VDPC(ER) y VDPM(ER). Esta fluctuación confirma la inestabilidad paramétrica de las formulaciones basadas en el error relativo para este conjunto experimental.

Los parámetros calibrados con 6 puntos de control para el experimento de Yang et al. (2009) se muestran en el **Apéndice A**

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.3-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).

4.3.3 Calibración con 7 puntos de control

Al igual que con la calibración del caso experimental anterior, la selección de siete puntos de control responde al objetivo de evaluar la estabilidad del proceso de calibración ante el incremento gradual de información experimental. Mientras que cinco puntos representan el número mínimo necesario para asegurar la identificabilidad del modelo y seis puntos introducen un nivel adicional de estabilidad numérica, el uso de siete puntos permite analizar la sensibilidad del algoritmo de optimización frente a un conjunto más amplio de datos.

Los siete puntos fueron distribuidos de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.3-7*), con el propósito de representar adecuadamente las distintas regiones de la respuesta dinámica.

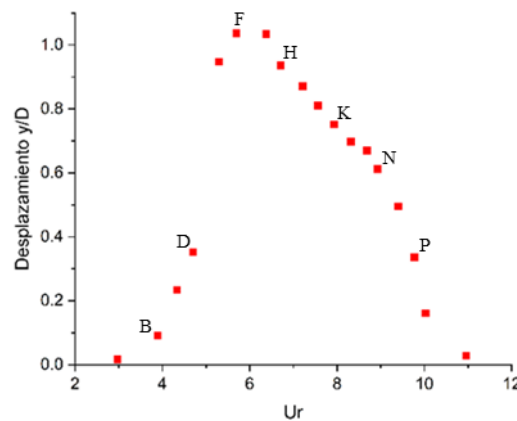


Figura 4.3-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de (Yang et al., 2009).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.3-3*. El punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1, estableciendo así la referencia para la jerarquización relativa de los demás puntos de control.

Tabla 4.3-3: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Yang et al. (2009) con seis puntos de control. Autoría propia

Yang et al. (2009)							
i	B	D	F	H	K	N	P
Ponderación gauss asimétrico							
w_i	0.0549	0.4083	1	0.9349	0.7203	0.5024	0.3353
	39/710	361/884	1	158/169	479/665	207/412	58/173
Ponderación gauss asimétrico general							
w_i	0.0575	0.4076	1	0.9647	0.7703	0.5172	0.3086
	28/487	309/758	1	792/821	691/897	15/29	229/742
Ponderación Weibull							
w_i	0.7447	0.9145	1	0.9135	0.6402	0.3871	0.2168
	35/47	503/550	1	602/659	137/214	12/31	116/535

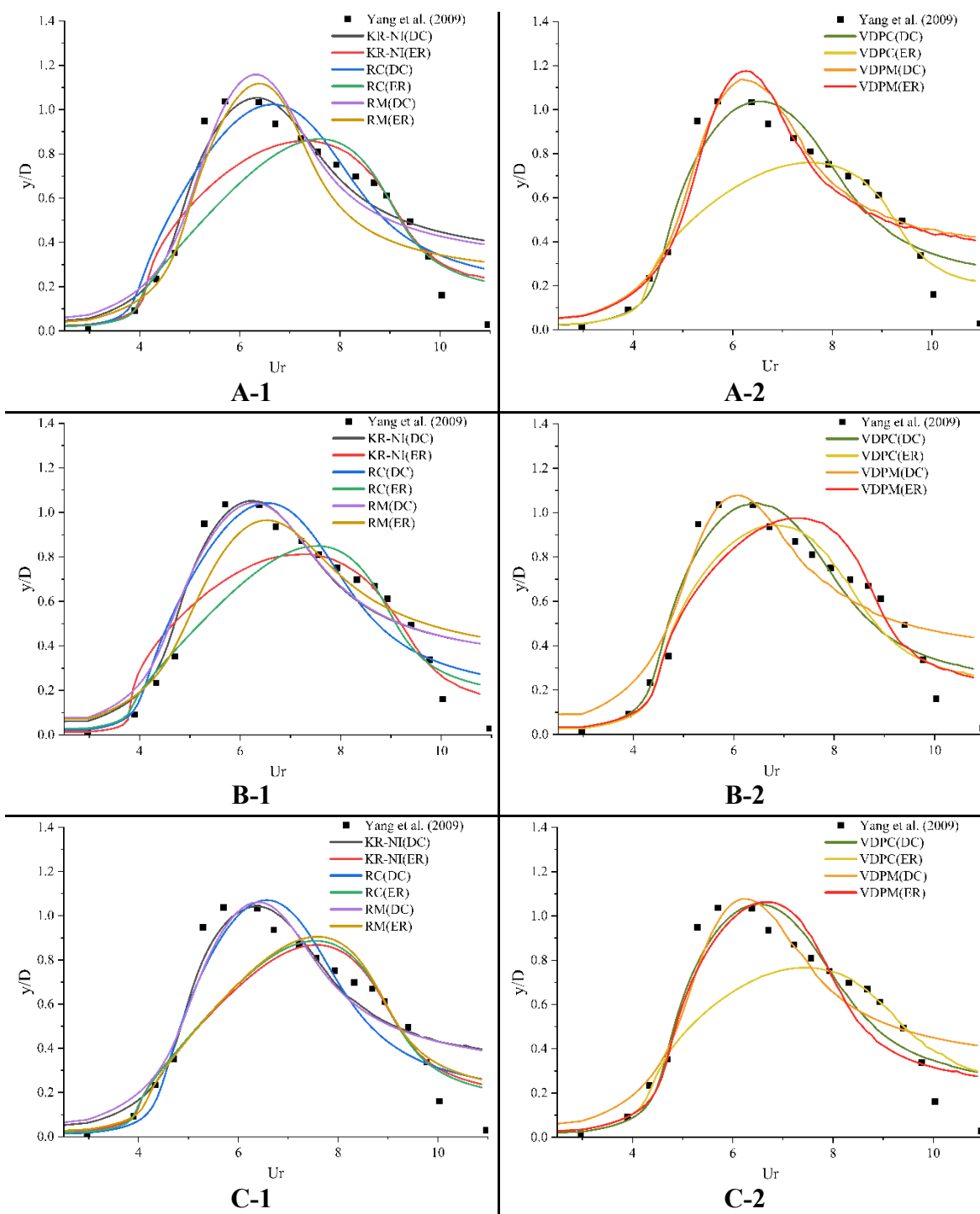
Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7) y se obtuvo los siguientes resultados:

La evaluación de los modelos calibrados con siete puntos de control revela que algunos osciladores específicos logran emular por primera vez tanto la ocurrencia temporal como la magnitud exacta del desplazamiento máximo. Asimismo, se reitera la deficiencia de las calibraciones basadas en el error relativo (ER).

A través de los tres esquemas de ponderación, los modelos calibrados con la reducción del error relativo, entre los que destacan KR-NI(ER) y RC(ER) y RM(ER) de la *Figura 4.3-8 A-I, B-I y C-I*, este último a partir del esquema ponderado de Gauss asimétrico general, presentan ajustes inadecuados que fallan en emular la fenomenología experimental. En contraste, las variantes basadas en la desviación cuadrática (DC) experimentan una mejora progresiva y notable. Con la ponderación de Gauss asimétrico, si bien KR-NI(DC) y RM(DC) modelan adecuadamente los el inicio y final de la resonancia, únicamente el modelo KR-NI(DC) logra capturar la magnitud real de la amplitud máxima. Esto se observa también con el modelo de RM(DC) obtenida con la ponderación de Gauss asimétrico general. La ponderación con Weibull mejora la predicción de los modelos de KR-NI(DC), RC(DC) y RM(DC) ya que logran modelar el inicio de la resonancia en $3 \leq U_r \leq 6$, predecir con exactitud la ocurrencia y magnitud del desplazamiento máximo, y aproximarse aceptablemente a las amplitudes al final de la resonancia en $7 \leq U_r \leq 10$.

El comportamiento de los osciladores en la *Figura 4.3-8 A-I, B-I y C-I*, modelo VDPC(ER) resulta ser el más ineficiente ya que exhibe ajustes insatisfactorios a los datos experimentales con los tres esquemas de ponderación. Por el contrario, el modelo VDPC(DC) demuestra una notoria estabilidad, debido a que, desde la calibración con Gauss asimétrico logra capturar el tanto el inicio y el final de la resonancia y precisa la magnitud de la máxima amplitud. Ambos

modelos de Van der Pol Modificado muestran un desempeño variable, aunque VDPM(DC) tiende a sobreestimar los valores iniciales con el esquema de Gauss asimétrico general, al aplicar la ponderación de Weibull, tanto VDPM(DC) como VDPM(ER) logran tener mejor aproximación a los desplazamientos experimentales al tanto al inicio de la resonancia como al final de la resonancia, así como acercamiento a la ocurrencia y amplitud del desplazamiento máximo experimental.



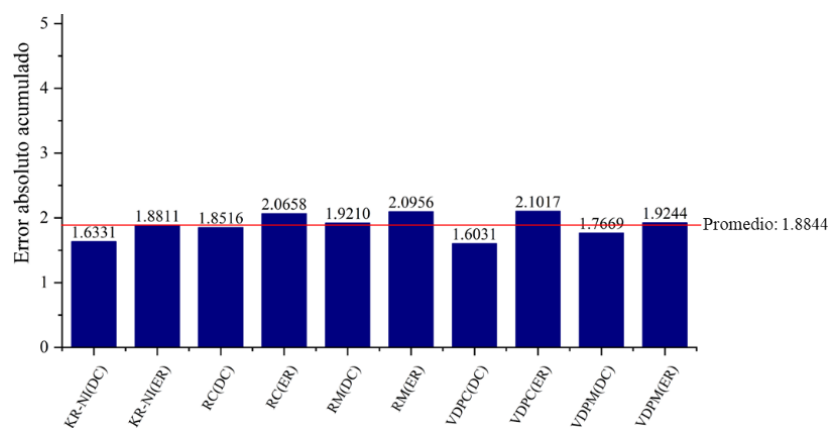
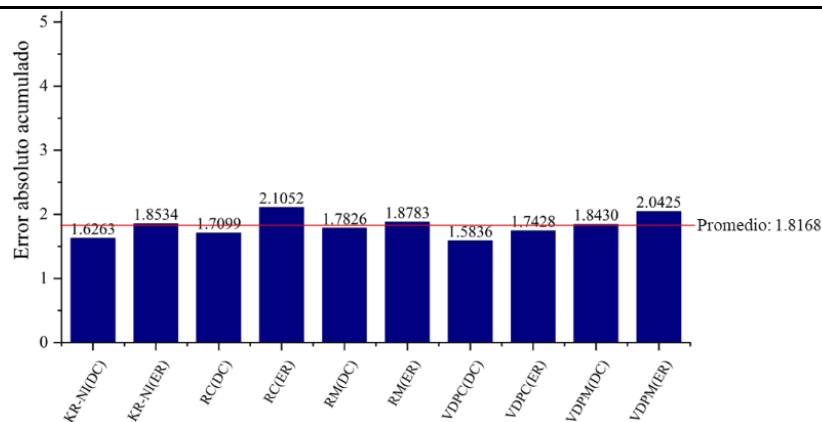
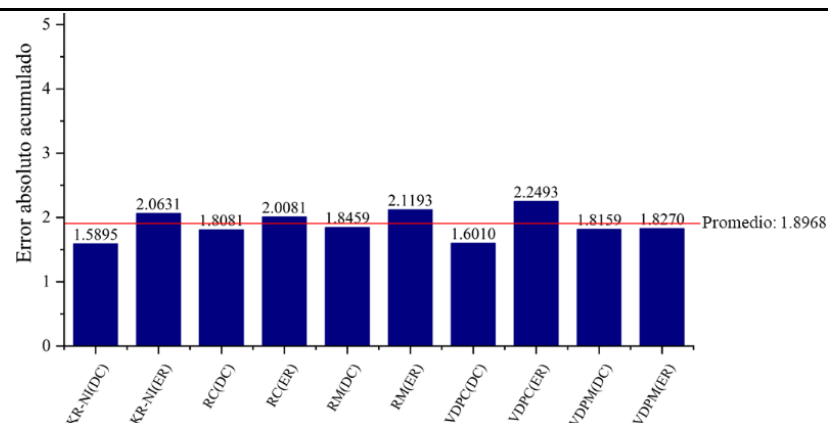
Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.3-8: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Yang et al. (2009).

La variación del error global demuestra que la mayor optimización se alcanzó con la ponderación de Gauss asimétrico (*Figura 4.3-9 B*). La ponderación de Gauss asimétrico (*Figura 4.3-9 A*) estableció una media global de 1.8844 unidades y al implementar el esquema de Gauss asimétrico general, este promedio experimentó una ligera reducción del 3.60%, situándose en su punto mínimo de 1.8168. La aplicación de la función de Weibull (*Figura 4.3-9 C*) no logró sostener ni mejorar el promedio global, sino que elevó la media global a 1.8968, un valor que representa un retroceso numérico hacia los niveles del esquema gaussiano.

A nivel de desempeño individual, el hallazgo más destacable de esta configuración de control empírico es la drástica reducción en la variabilidad de los resultados: a diferencia de los escenarios con cinco y seis puntos, las diferencias de los errores absolutos entre los distintos modelos matemáticos resultaron mínimas bajo los tres esquemas evaluados, manteniéndose todas las curvas numéricamente cercanas al promedio global. A pesar de esta convergencia, los modelos VDPC(DC) y KR-NI(DC) registraron consistentemente los errores mínimos y consolidándose como las herramientas predictivas con la mejor tendencia de ajuste a los datos experimentales a lo largo de toda esta fase.

Los parámetros calibrados con 7 puntos de control para el experimento de Yang et al. (2009) se muestran en el **Apéndice A**

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto ER: Error relativo
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.3-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Yang et al. (2009).

4.4 Calibración con Deng *et al.* (2020)

4.4.1 Calibración con 5 puntos de control

En este experimento se procedió con el mismo proceso de calibración expuesto anteriormente, se adoptó por el conjunto mínimo de cinco puntos de control (*i*) representativos para el proceso de calibración, con el propósito de asegurar que el algoritmo de optimización de parámetros disponga de información suficiente para converger hacia una solución físicamente consistente.

Los puntos fueron seleccionados mediante un criterio de espaciamiento cuasi equidistante con respecto al máximo desplazamiento experimental (*Figura 4.4-1*), de modo que se capturó tanto la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta.

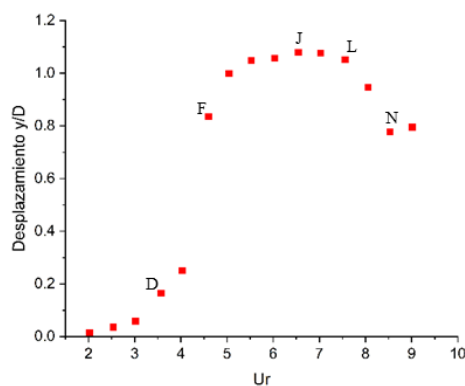


Figura 4.4-1: Cinco puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.4-1*. Las ponderaciones reflejan una mayor importancia aritmética en los puntos ubicados en las proximidades del desplazamiento máximo experimental. En particular, el punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1.

Tabla 4.4-1: Ponderaciones para la calibración con el experimento de Deng et al. (2020) con cinco puntos de control.

Deng et al. 2020					
i	D	F	J	L	N
Ponderación gauss asimétrico					
w_i	0.2613	0.7101	1	0.9400	0.7901
	75/287	659/928	1	47/50	527/667
Ponderación gauss asimétrico general					
w_i	0.0646	0.9184	1	0.9369	0.7893
	33/511	45/49	1	282/301	296/375
Ponderación Weibull					
w_i	0.3871	0.7848	1	0.8864	0.6200
	319/824	609/776	1	593/669	395/637

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones 3.1.5-3.1.7) y se obtuvo los siguientes resultados:

La evaluación de los modelos calibrados con cinco puntos de control para este tercer experimento revela un cambio significativo en la viabilidad predictiva de los métodos de ajuste: las formulaciones basadas en el error relativo (ER), que previamente mostraban inestabilidad, demuestran un comportamiento estable.

El comportamiento de los osciladores en la *Figura 4.4-2 A-1, B-1 y C-1* con la ponderación de Gauss asimétrico, muestran un desempeño fragmentado variable, ya que los modelos calibrados mediante la minimización del cuadrado del error absoluto (DC) logran una aproximación aceptable al inicio de la resonancia en $2 \leq U_r \leq 5$, pero anticipan la máxima amplitud experimental. En contraste, los modelos calibrados con el error relativo (ER) no representa adecuadamente el inicio de la resonancia, pero logran un mayor acercamiento a la amplitud máxima. Con el esquema de Gauss asimétrico general, las seis curvas homogeneizan su comportamiento mostrando deficiencias en la fase inicial en $2 \leq U_r \leq 5$ y anticipando la ocurrencia de la amplitud máxima, destacando únicamente el modelo KR-NI(ER) por su proximidad a la amplitud real. Sin embargo, la implementación de la función de Weibull no produce una mejoría en la calibración, los modelos KR-NI(ER) y RM(ER) logran predecir con exactitud tanto la ocurrencia como la magnitud del desplazamiento máximo, dejando rezagado únicamente al modelo RC(ER), el cual no presenta un ajuste aceptable con los datos experimentales.

Se observa que los modelos de las gráficas *Figura 4.4-2 A-2, B-2 y C-2* tienen un comportamiento similar con los modelos analizados con anterioridad, en el que se destaca el modelo de VDPM(DC) que logra el mejor acercamiento con la máxima amplitud experimental. En la ponderación de Gauss asimétrico general la mayoría de los modelos

logran ubicar la ocurrencia del pico, con la notable excepción de VDPM(ER) que carece de un ajuste satisfactorio. Con la ponderación el modelo VDPC(ER) destaca al predecir de forma precisa la ocurrencia y la amplitud del desplazamiento máximo, manteniendo además una tendencia aceptable en la fase de decaimiento posterior. Por el contrario, el modelo VDPM(ER) demuestra de nueva cuenta un ajuste no satisfactorio.

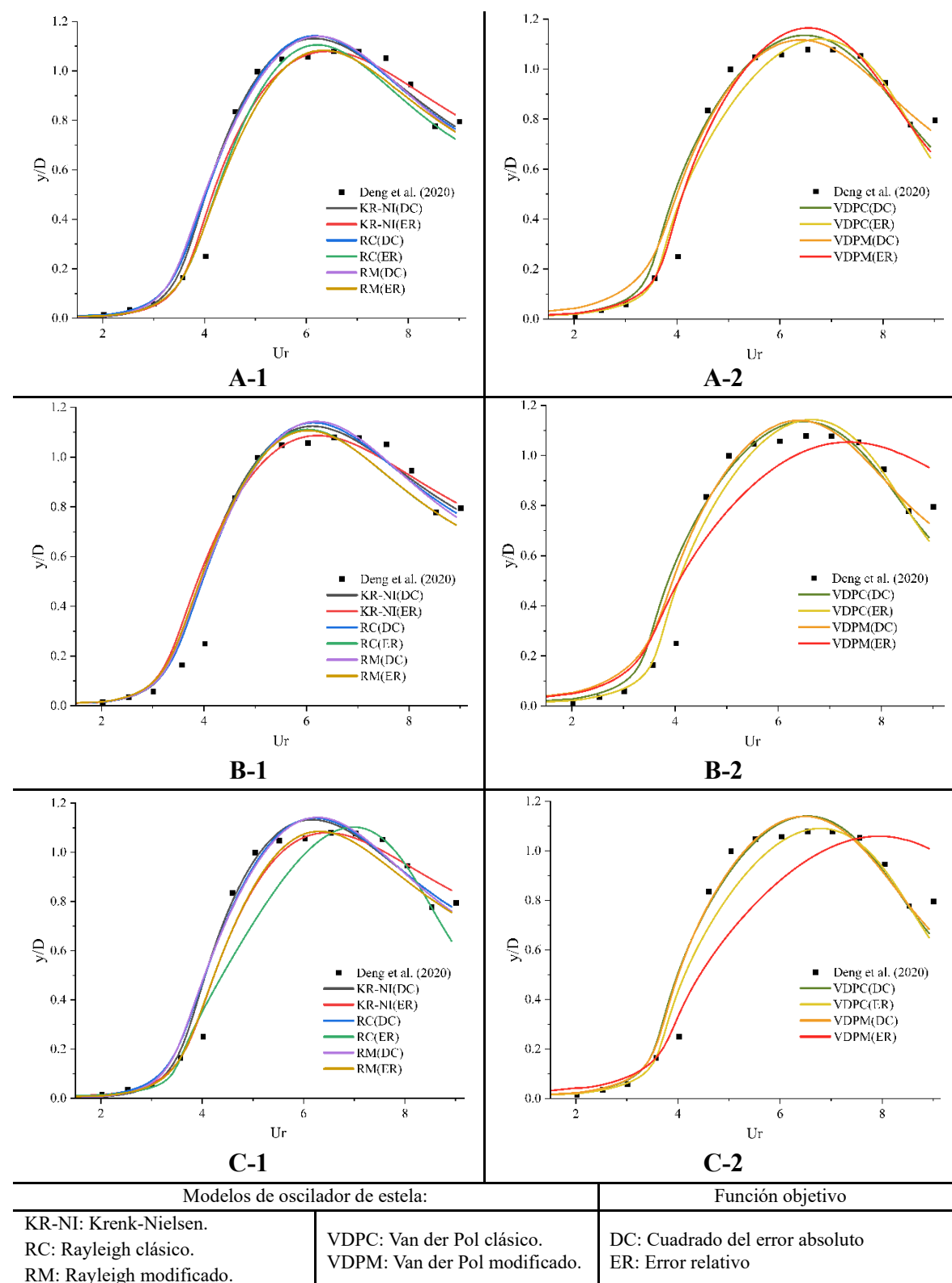
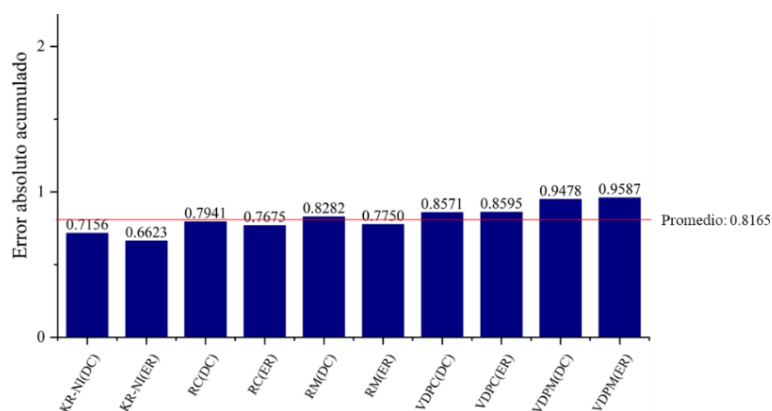


Figura 4.4-2: Resultados de la Calibración con 5 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).

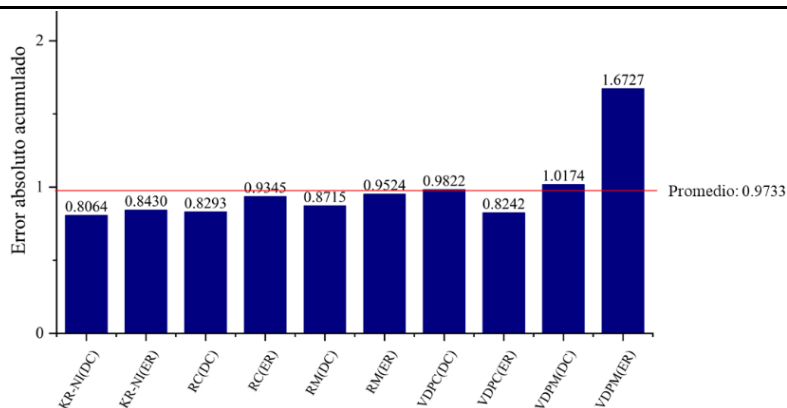
La evaluación cuantitativa del error absoluto acumulado para la calibración con cinco puntos de control revela un comportamiento numérico uniforme entre los modelos, en el que se destacan magnitudes de error global significativamente bajas.

Con la calibración de Gauss asimétrico de la *Figura 4.4-3 A* se estableció el nivel de exactitud óptimo ya que se registró un error global mínimo de 0.8165 unidades. Con la implementación del esquema de Gauss asimétrico general presentado en la *Figura 4.4-3 B* ocurrió un incremento del promedio del error absoluto en un 19.20% situándose un valor de 0.9733. Con el esquema de ponderación de Weibull (*Figura 4.4-3 C*) se incrementó la media del error absoluto en 0.9346, que fue más alto que el obtenido con la calibración de Gauss asimétrico.

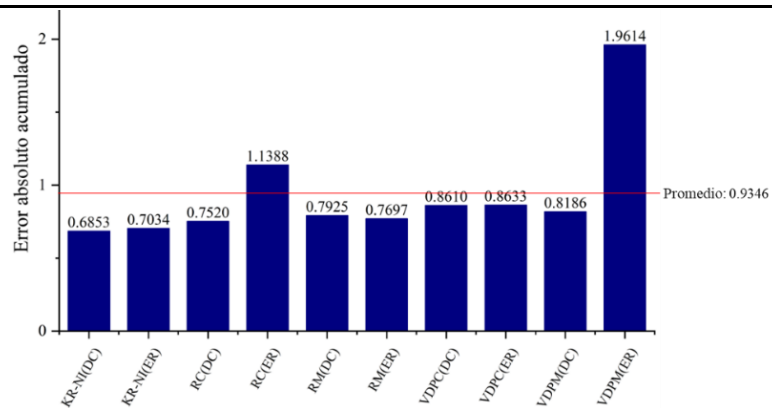
En el desempeño individual de cada modelo mostrado en la *Figura 4.4-3*, KR-NI(ER) demostró una superioridad matemática destacable, obteniendo el menor error acumulado con el esquema de Gauss asimétrico. En conjunto con KR-NI(DC), ambos modelos mantuvieron un acercamiento destacable con las amplitudes experimentales. En contraste, la deficiencia predictiva se concentró en el modelo VDPM(ER) puesto que este oscilador exhibió el menor desempeño en las calibraciones, registró consistentemente la mayor puntuación del error absoluto a través de los diferentes esquemas. A este comportamiento inestable se sumaron los modelos VDPC(DC) en la calibración de Gauss asimétrico y RC(ER) con la calibración de Weibull, los cuales superaron la media global y confirmaron un ajuste insatisfactorio frente a los datos experimentales.



A



B



C

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.4-3: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 5 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. 2020.

4.4.2 Calibración con 6 puntos de control

Continuando con las calibraciones, la elección de los seis puntos de control se fundamenta en un criterio de suficiencia matemática en la estimación de parámetros. Si bien cinco puntos constituyen el mínimo requerido para garantizar la identificabilidad del modelo, la inclusión de un punto adicional permite fortalecer la estabilidad numérica del proceso de optimización y reducir la sensibilidad ante posibles variaciones o incertidumbres en los datos experimentales.

Al igual que en las calibraciones anteriores, los seis puntos de control se distribuyeron de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.4-4*), con el propósito de capturar tanto las características de la región de mayor amplitud como las zonas adyacentes de crecimiento y decrecimiento de la respuesta dinámica. Esta disposición permite que la calibración represente no solo el valor máximo de la respuesta, sino también la tendencia global de la curva. Cabe señalar que el sexto punto de control se ubicó del lado derecho del máximo, debido a que en esa región se dispone de un mayor número de datos experimentales.

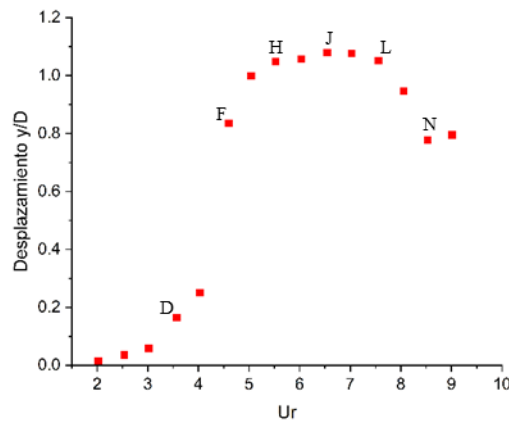


Figura 4.4-4: Seis puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.4-2*. Las ponderaciones reflejan una mayor importancia aritmética en los puntos ubicados en las proximidades del desplazamiento máximo experimental. En particular, el punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1.

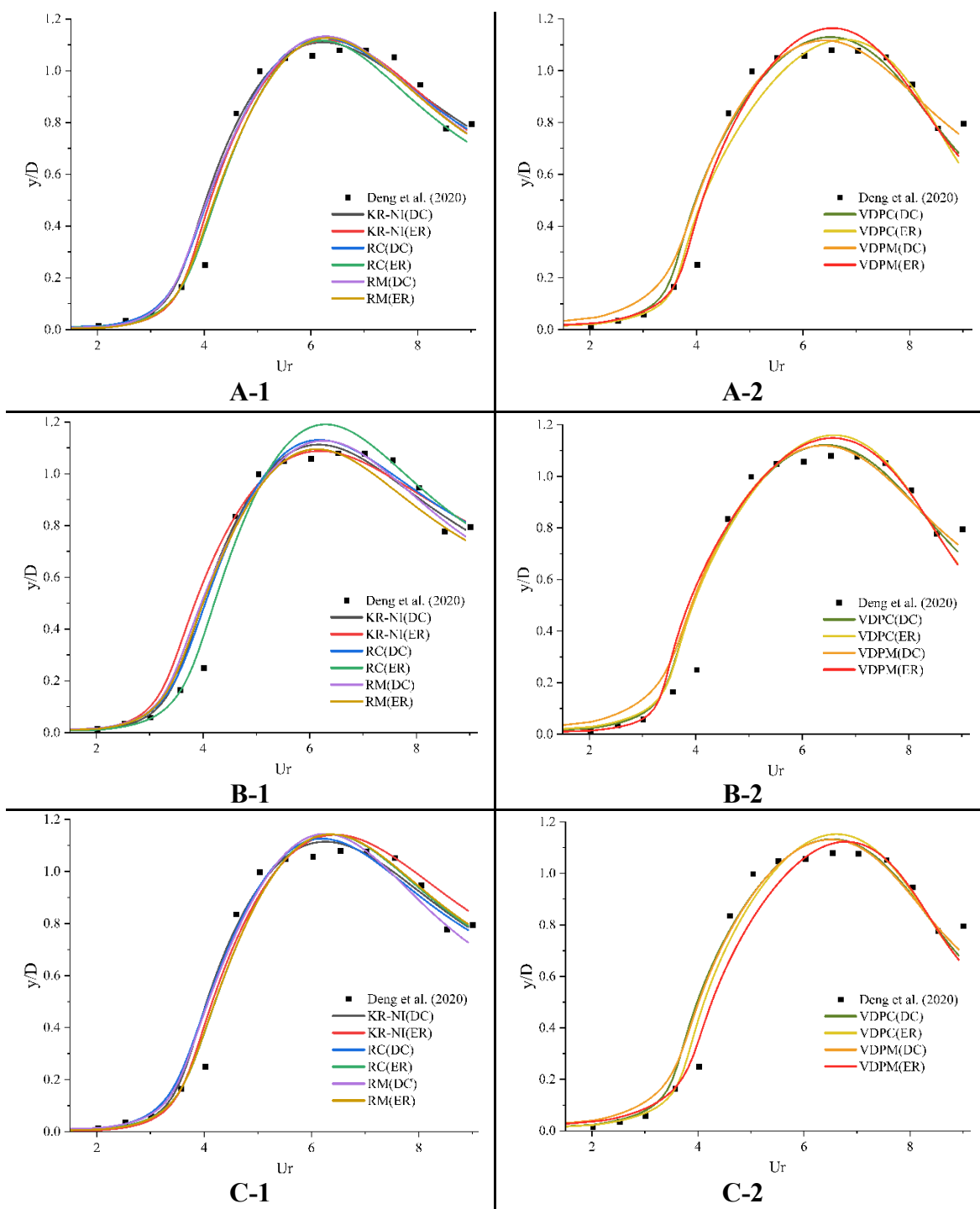
Tabla 4.4-2: Ponderaciones para la calibración con seis puntos de control en el experimento de Deng et al. (2020).

Deng et al. (2020)						
i	D	F	H	J	L	N
Ponderación gauss asimétrico						
w_i	0.2613	0.5641	0.8536	1	0.9400	0.7901
	75/287	405/718	414/485	1	47/50	527/667
Ponderación gauss asimétrico general						
w_i	0.0645	0.7300	0.9880	1	0.9369	0.7893
	33/511	73/100	247/250	1	282/301	296/375
Ponderación Weibull						
w_i	0.3871	0.6681	0.8931	1	0.8864	0.6200
	319/824	467/699	259/290	1	593/669	395/637

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones **3.1.5-3.1.7**) y se obtuvo los siguientes resultados:

Los modelos calibrados que se presentan en la *Figura 4.4-5 A-1, B-1 y C-1* evidencian que, independientemente del esquema de ponderación utilizado, todas las curvas tienden a sobreestimar la máxima amplitud experimental. Al contrastar los resultados con los distintos esquemas de ponderación, se observa que las calibraciones basadas en Gauss asimétrico y Weibull muestran comportamientos consistentes entre sí al inicio de la resonancia en $2 \leq U_r \leq 5$. En contraste, la implementación de la ponderación de Gauss asimétrico general introduce una mayor variabilidad en la respuesta al inicio de la resonancia, la gran mayoría de los osciladores logra una excelente aproximación global a los desplazamientos experimentales, destacando de manera particular los modelos **KR-NI(ER)** y **RM(ER)** por exhibir el mejor nivel de ajuste a la máxima amplitud experimental. La única excepción de este desempeño es el modelo **RC(ER)**, el cual no logra un buen ajuste bajo el esquema de Gauss asimétrico general.

Los modelos calibrados presentados en *Figura 4.4-5 A-2, B-2 y C-2* exhiben ajustes satisfactorios, en concordancia con el comportamiento geométrico de las curvas analizadas previamente. Al evaluar el inicio de la resonancia en $2 \leq U_r \leq 5$, las calibraciones ponderadas con el esquema de Gauss asimétrico general muestran una notable uniformidad entre sí. En contraste, la aplicación de las ponderaciones de Gauss asimétrico y Weibull introduce una ligera dispersión al inicio de la resonancia. Sin embargo, todas las gráficas conservan una clara convergencia hacia los datos experimentales. Dentro de este conjunto, los modelos **VDPM(DC)** y **VDPC(DC)** destacan por presentar el comportamiento predictivo más estable, logrando además una excelente proximidad al pico de máximo desplazamiento experimental.



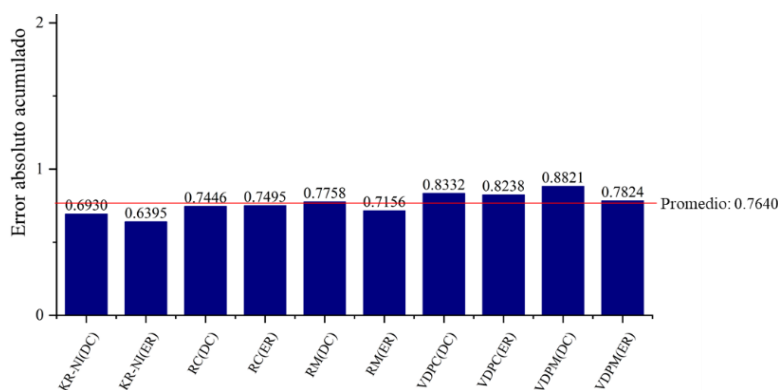
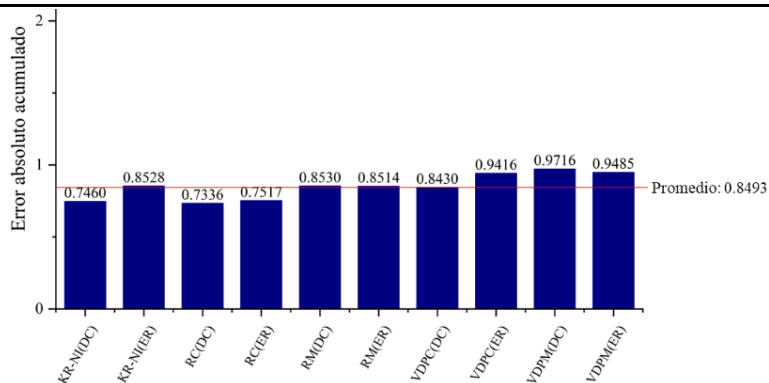
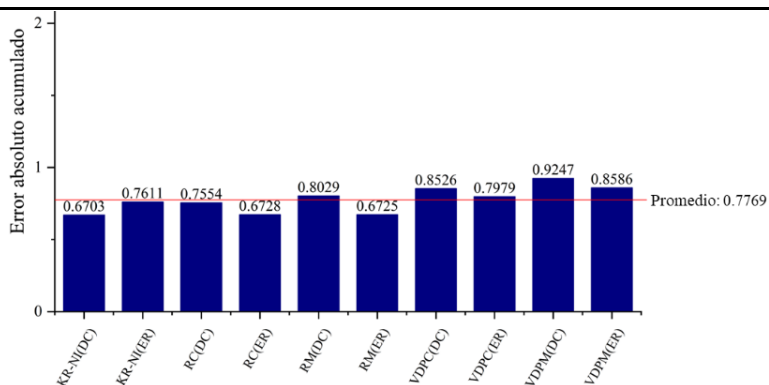
Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.4-5: Resultados de la Calibración con 6 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).

La evaluación estadística del error absoluto acumulado revela una notable uniformidad predictiva entre los modelos evaluados, caracterizándose por la ausencia de variaciones abruptas entre las diferentes curvas, independientemente del esquema estadístico empleado.

La media global muestra poca variabilidad entre los esquemas de ponderación. La ponderación con Gauss asimétrico de la *Figura 4.4-6 A* estableció el promedio más bajo con 0.7640 unidades, en el que los modelos KR-NI (DC y ER) lograron el mejor ajuste. Posteriormente, la ponderación con Gauss asimétrico general *Figura 4.4-6 B* incrementó la media global en un 10% para situarla en 0.8493 unidades en el que, a pesar del repunte, la dispersión de los osciladores se mantuvo mínima y se destacaron las aproximaciones de KR-NI(DC) y RC (DC y ER). La calibración con la distribución de Weibull *Figura 4.4-6 C* no mejor considerablemente el promedio mínimo que se obtuvo ya que se situó con 0.7769 unidades. Bajo esta última ponderación, los osciladores KR-NI(DC), RC(ER) y RM(ER) se consolidaron como las herramientas más precisas al registrar los errores absolutos mínimos.

Los parámetros calibrados con 6 puntos de control para el experimento de Deng et al. (2020) se muestran en el **Apéndice A**

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.4-6: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 6 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. (2020).

4.4.3 Calibración con 7 puntos de control

Al igual que con la calibración del caso experimental anterior, la selección de siete puntos de control responde al objetivo de evaluar la estabilidad del proceso de calibración ante el incremento gradual de información experimental. Mientras que cinco puntos representan el número mínimo necesario para asegurar la identificabilidad del modelo y seis puntos introducen un nivel adicional de estabilidad numérica, el uso de siete puntos permite analizar la sensibilidad del algoritmo de optimización frente a un conjunto más amplio de datos.

Los siete puntos fueron distribuidos de manera cuasi equidistante con respecto al punto de máxima amplitud experimental (*Figura 4.4-7*), con el propósito de representar adecuadamente las distintas regiones de la respuesta dinámica.

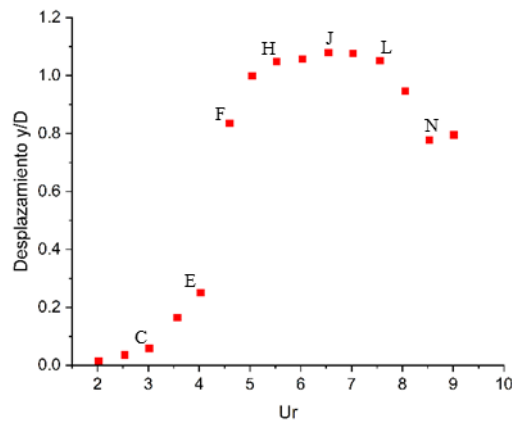


Figura 4.4-7: Siete puntos de control seleccionados en el experimento de Deng et al. (2020).

Las ponderaciones w_i asignadas a los puntos de control, obtenidas a partir del ajuste de las curvas unimodales, se presentan en la *Tabla 4.4-3*. Las ponderaciones reflejan una mayor importancia aritmética en los puntos ubicados en las proximidades del desplazamiento máximo experimental. En particular, el punto correspondiente al máximo de la respuesta concentra la mayor ponderación dentro del esquema de calibración adoptado, con un valor unitario igual a 1.

Tabla 4.4-3: Ponderaciones para la calibración con siete puntos de control en el experimento de Deng et al. (2020).

Deng et al. (2020)							
i	C	E	F	H	J	L	N
Ponderación gauss asimétrico							
w_i	0.0538	0.2316	0.7738	0.9712	1	0.9750	0.7901
	17/316	107/462	65/84	607/625	1	39/40	399/505
Ponderación gauss asimétrico general							
w_i	0.0014	0.3046	0.7300	0.9881	1	0.9369	0.7893
	1/714	53/174	73/100	83/84	1	683/729	236/299
Ponderación Weibull							
w_i	0.2564	0.5066	0.6681	0.8931	1	0.8864	0.6201
	10/39	38/75	467/699	259/290	1	593/669	395/637

Aplicando la metodología propuesta descrita en la sección en **Capítulo 3**, se realizó la calibración de los modelos con los tres esquemas de las funciones unimodales (ecuaciones **3.1.5-3.1.7**) y se obtuvo los siguientes resultados:

El análisis global de las curvas calibradas con siete puntos de control de la *Figura 4.4-8* revela un patrón consistente y fuertemente que trasciende del de ponderación utilizado. A lo largo de las tres modos de ponderación, se evidencia que los modelos fundamentados en el cuadrado del error absoluto (DC) poseen una notable superioridad en la fase temprana del fenómeno, logrando la mejor aproximación a los datos empíricos durante el inicio de la resonancia. Sin embargo, estos modelos sobreestiman la máxima amplitud experimental.

Por el contrario, las calibraciones basadas en la minimización del error relativo (ER), exhiben un comportamiento inverso, debido a que no muestran un satisfactorio en la etapa inicial, pero compensan esta deficiencia geométrica logrando predecir con exactitud la magnitud real del desplazamiento máximo.

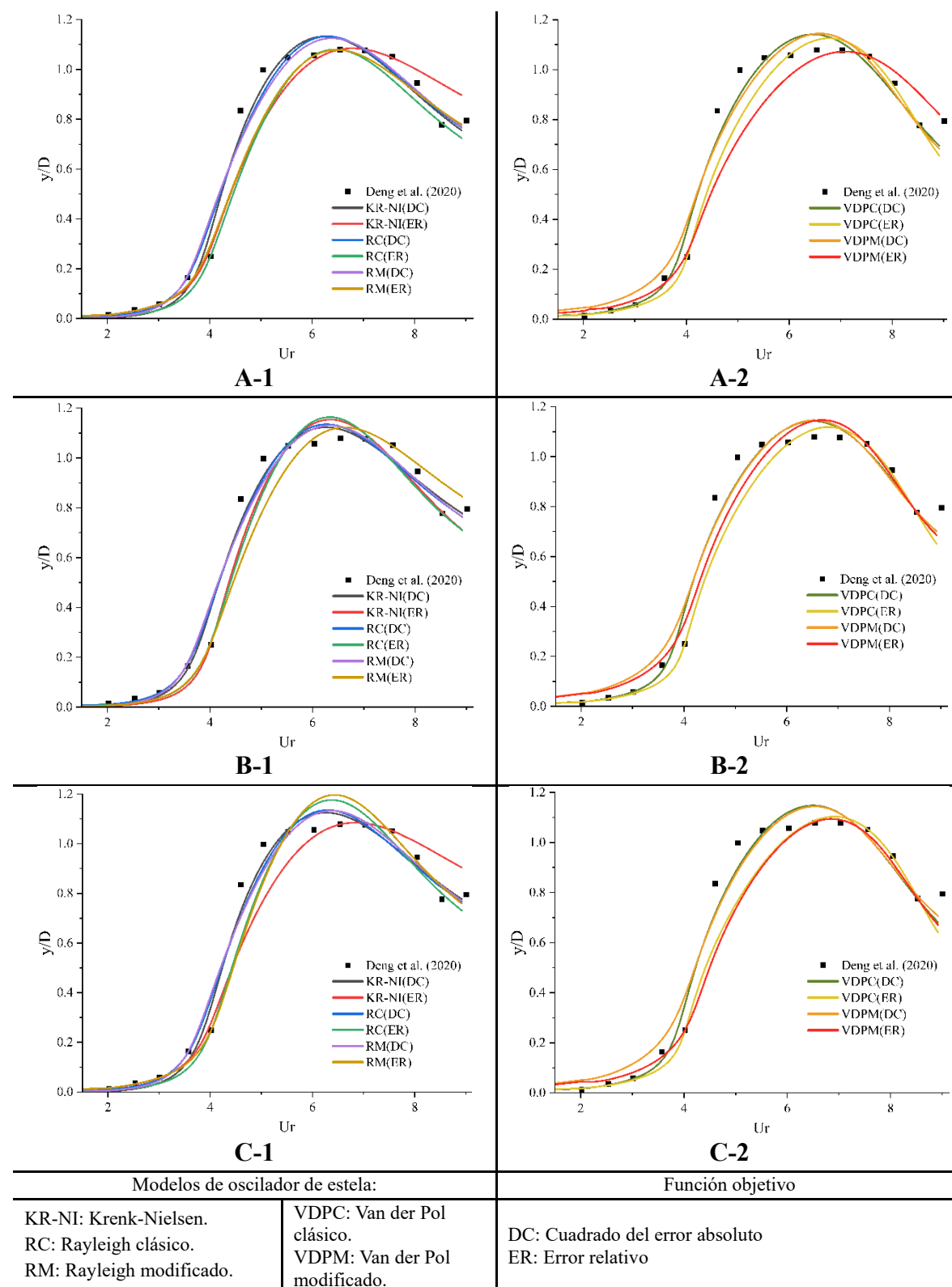


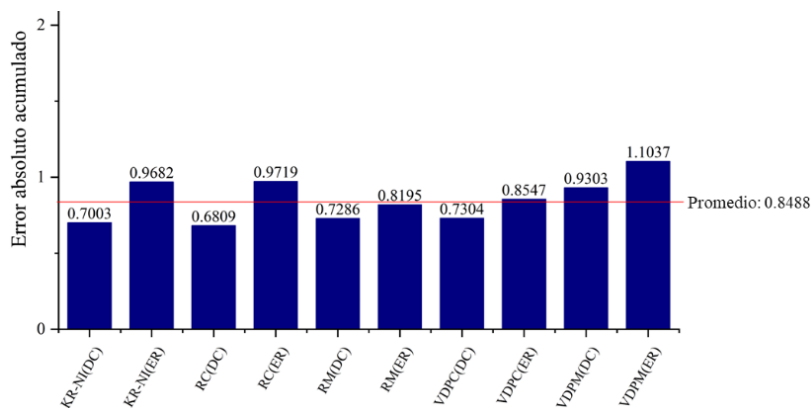
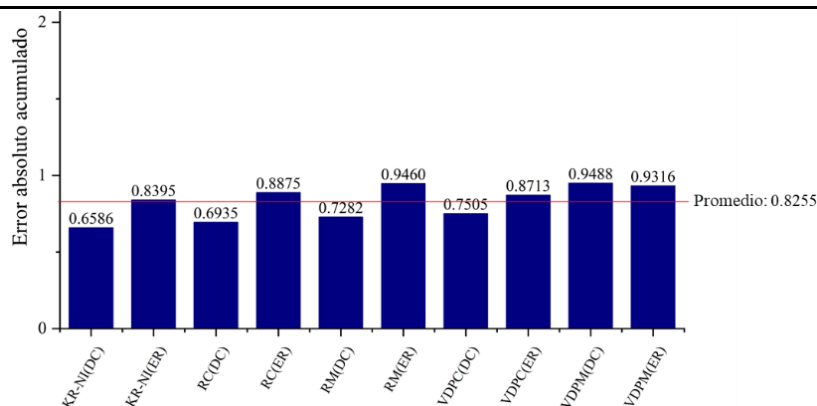
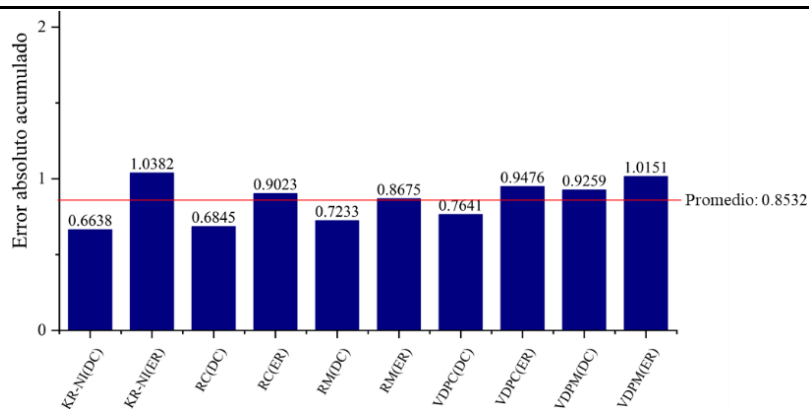
Figura 4.4-8: Resultados de la Calibración con 7 puntos de control ponderados con Gauss asimétrico (A-1, A-2), Gauss asimétrico general (B-1, B-2) y Weibull (C-1, C-2) en el experimento de Deng et al. (2020).

La evaluación cuantitativa del error absoluto acumulado de la *Figura 4.4-9* muestran que, el promedio del error absoluto experimenta fluctuaciones moderadas que dependen del esquema estadístico empleado. La calibración con Gauss asimétrico *Figura 4.4-9 A* establece una media de 0.8488 unidades, la ponderación de Gauss asimétrico general *Figura 4.4-9 B* es cuando se alcanza la mejor aproximación a los experimentos, ya que reduce el promedio a 0.8255. Mientras que la ponderación con Weibull *Figura 4.4-9 C* eleva la media global a su punto máximo de 0.8532 unidades.

En el rendimiento individual de los osciladores, las gráficas de barras evidencian un mejor comportamiento de los modelos calibrados con base a la minimización del cuadrado del error absoluto (DC). Los osciladores **KR-NI(DC)** y **RC(DC)** se consolidan indiscutiblemente como las herramientas matemáticamente más precisas, manteniendo sus errores absolutos consistentemente por debajo de las 0.7 unidades en los tres esquemas de ponderación, alcanzando mínimos de 0.6586 y 0.6809, respectivamente.

En contraste, las formulaciones basadas en el error relativo (ER) exhiben una severa ineficiencia cuantitativa. A pesar de lograr predecir con exactitud la magnitud del pico máximo en las curvas, la subestimación durante el inicio de la resonancia ocasiona la acumulación del error absoluto. Los modelos de **VDPM(ER)** y **KR-NI(ER)** resultan ser los más deficientes del estudio ya que registran constantemente los valores más altos de las gráficas con valores de 1.1037 y 1.0382 respectivamente bajo los esquemas de ponderación de Gauss asimétrico y Weibull.

Los parámetros calibrados con 7 puntos de control para el experimento de Deng et al. (2020) se muestran en el **Apéndice A**.

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPM: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.4-9: Error absoluto acumulado entre los puntos experimentales y los modelos matemáticos calibrados con 7 puntos de control, ponderados con Gauss asimétrico (A), Gauss asimétrico general (B) y Weibull(C) en el experimento de Deng et al. (2020).

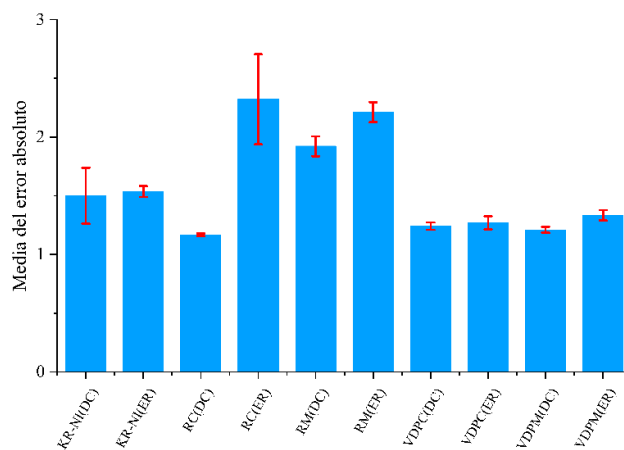
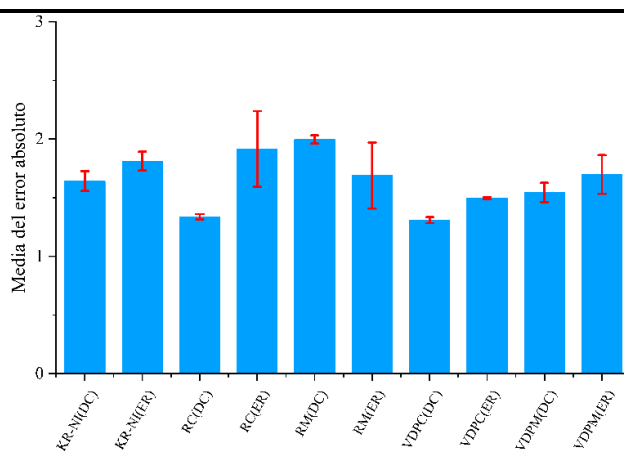
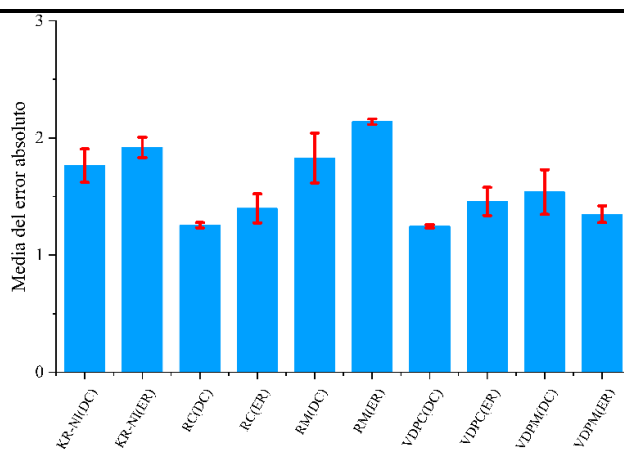
4.5 Discusiones

4.5.1 Resultados del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

El análisis comparativo de los resultados revela una evolución clara en la estabilidad de la calibración conforme se incrementa el número de puntos de control. Al contrastar la *Figura 4.5-1 A* y la *Figura 4.5-1 B*, se evidencia que el aumento en la densidad de datos actúa como un mecanismo de regularización que define con mayor precisión el paisaje de la función objetivo. En la *Figura 4.5-1 A*, la mayor magnitud de las barras de incertidumbre, especialmente en los modelos de tipo Rayleigh. Esta condición determina que el valor óptimo es altamente sensible a la configuración específica de los puntos de control.

Con el incremento de los puntos de control, los resultados en la *Figura 4.5-1 B* y *Figura 4.5-1 C*, se observa que las soluciones convergen hacia resultados significativamente más robustos. La reducción sistemática de la incertidumbre estándar observada en la *Figura 4.5-1 C* demuestra que con siete puntos de control los resultados son físicamente más representativos y la capacidad predictiva de cada oscilador de estela es consistente.

En cuanto al desempeño de las arquitecturas matemáticas, los modelos basados en la formulación de Van der Pol (VDPC y VDPM) destacan por su capacidad de mantener una convergencia estable a través de todas las configuraciones. Mientras que otros modelos muestran desplazamientos considerables en su error medio al comparar la *Figura 4.5-1 A* con la *Figura 4.5-1 C*, las versiones de Van der Pol exhiben niveles de precisión mínimos y una incertidumbre reducida. Esto indica que el modelo matemático de Van der Pol genera respuestas del comportamiento del sistema definidas independientemente de la densidad de información empleada en el proceso de calibración.

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.	VDPm: Van der Pol modificado.	ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

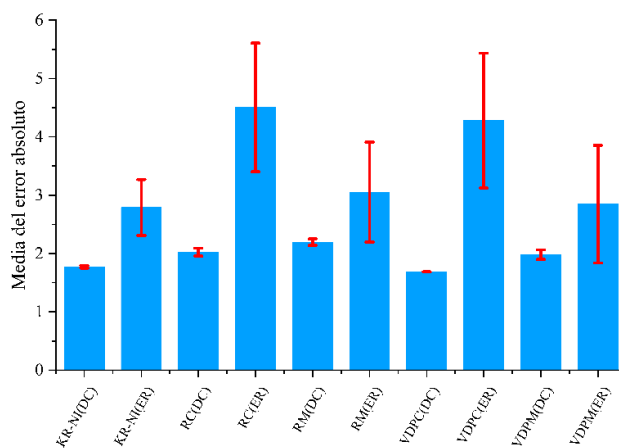
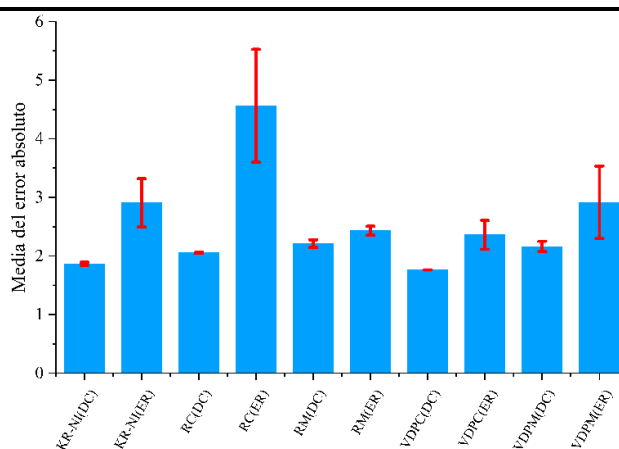
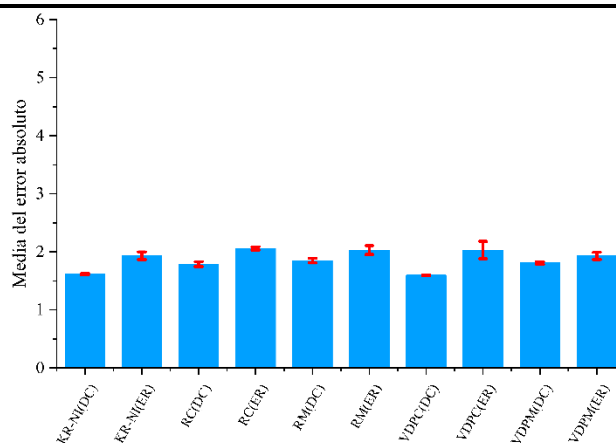
Figura 4.5-1: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008).

4.5.2 Resultados del experimento de Yang *et al.* (2009)

Al comparar la *Figura 4.5-2 A* con la *Figura 4.5-2 C*, que corresponden a las calibraciones efectuadas con 5 y 7 puntos de control respectivamente, se observa una reducción tanto en la magnitud de la media del error absoluto como en la incertidumbre estándar. En la *Figura 4.5-2 A* se evidencia que una menor cantidad de puntos de control resulta en una mayor dispersión de los datos, con niveles de incertidumbre particularmente elevados en configuraciones como RC(ER) y VDPC(ER). Esta condición sugiere que dicho mínimo genera soluciones que son altamente sensibles a la disposición específica de los puntos de control.

El resultado de la calibración con 7 puntos de control (*Figura 4.5-2 C*) muestra una notable disminución de las barras de incertidumbre, se demuestra que con siete puntos de control los resultados son físicamente más representativos y la capacidad predictiva de cada oscilador de estela es consistente para capturar la dinámica de las vibraciones inducidas por flujo.

Los modelos de Van der Pol (VDPC y VDPM) se consolidan como las opciones de mayor precisión y estabilidad. Mientras que modelos como el Rayleigh (RC) muestran fluctuaciones severas en el error y la incertidumbre al comparar la *Figura 4.5-2 A* con la *Figura 4.5-2 C*, las variantes de Van der Pol, especialmente bajo la función objetivo de cuadrado del error absoluto (DC), mantienen sistemáticamente los niveles más bajos de error y una incertidumbre mínima independientemente del aumento en el número de puntos de control empleados en la calibración.

**A****B****C**

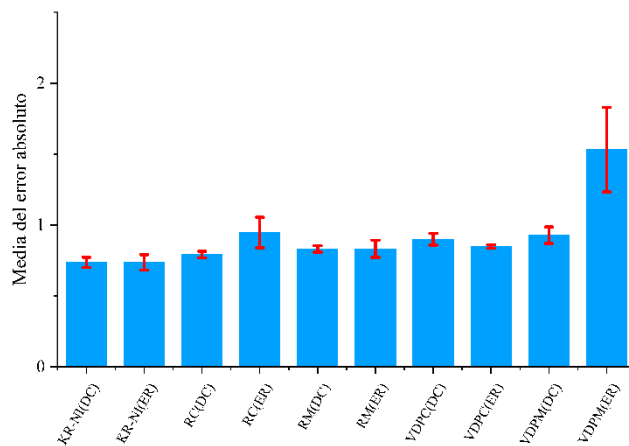
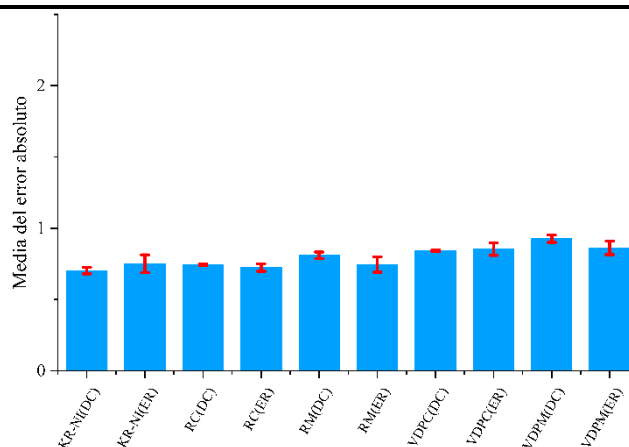
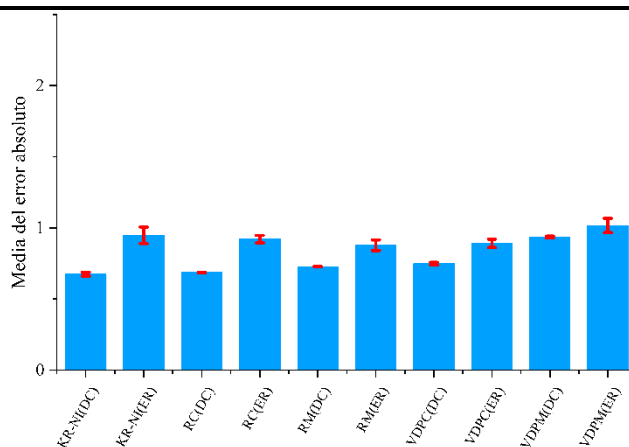
Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico. VDPM: Van der Pol modificado.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.		ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.5-2: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Yang et al. (2009).

4.5.3 Resultados del experimento de Deng *et al.* (2020)

A diferencia de los casos anteriores, el aumento de los puntos de control no sigue una trayectoria lineal de reducción de incertidumbre, sino que revela un punto de máxima concordancia con 6 puntos de control como se muestra en la *Figura 4.5-3 B*. En la *Figura 4.5-3 A*, se observa una incertidumbre moderada. Con 7 puntos de control *Figura 4.5-3 C*, se percibe un ligero incremento en las barras de incertidumbre en comparación con la etapa previa.

La inclusión de un séptimo punto de control introduce información adicional que fortalece el proceso de calibración. Sin embargo, también puede hacer más evidente que la solución numérica del modelo no coincide exactamente con la respuesta real del sistema. Estas diferencias pueden influir en la evaluación de la función objetivo durante la calibración por puntos de control. Como consecuencia, parte del error minimizado puede no deberse únicamente al comportamiento físico del sistema, lo que puede sesgar el resultado final hacia soluciones que son numéricamente consistentes, pero menos representativas del fenómeno real. Los modelos matemáticos que mejor desempeño mostraron fue el de Van der Pol y Krenk-Nielsen que se consolidaron como los modelos que muestran de mejor desempeño, manteniendo errores sistemáticamente bajos.

**A****B****C**

Modelos de oscilador de estela:		Función objetivo:
KR-NI: Krenk-Nielsen.	VDPC: Van der Pol clásico. VDPM: Van der Pol modificado.	DC: Cuadrado del error absoluto
RC: Rayleigh clásico.		ER: Error relativo
RM: Rayleigh modificado.		

Figura 4.5-3: Media del error absoluto (barras azules) e incertidumbre estándar (barras rojas) de las calibraciones con 5 (A), 6 (B) y 7 (C) puntos de control de las 3 formas de ponderación en el experimento de Deng et al. (2020).

4.5.4 Discusiones generales

La exactitud obtenida con los osciladores calibrados mediante la metodología propuesta es comparable a la reportada por otros autores, como se muestra en la *Figura 4.5-4*. En dicha figura se observa que el promedio del error absoluto reportado obtenido con la metodología planteada es ligeramente superior al promedio obtenido con la metodología encontrada en la literatura. Cabe señalar que este resultado obtenido en esta investigación corresponde al ajuste realizado con 7 puntos de control bajo un esquema de ponderación de Weibull, el cual presentó el menor desempeño en términos de aproximación a las amplitudes experimentales.

No obstante, la diferencia respecto al resultado de la literatura es de apenas 3.8%. Además, los promedios obtenidos con los otros dos esquemas de ponderación obtenidos en esta investigación resultaron incluso inferiores al promedio reportado de la literatura.

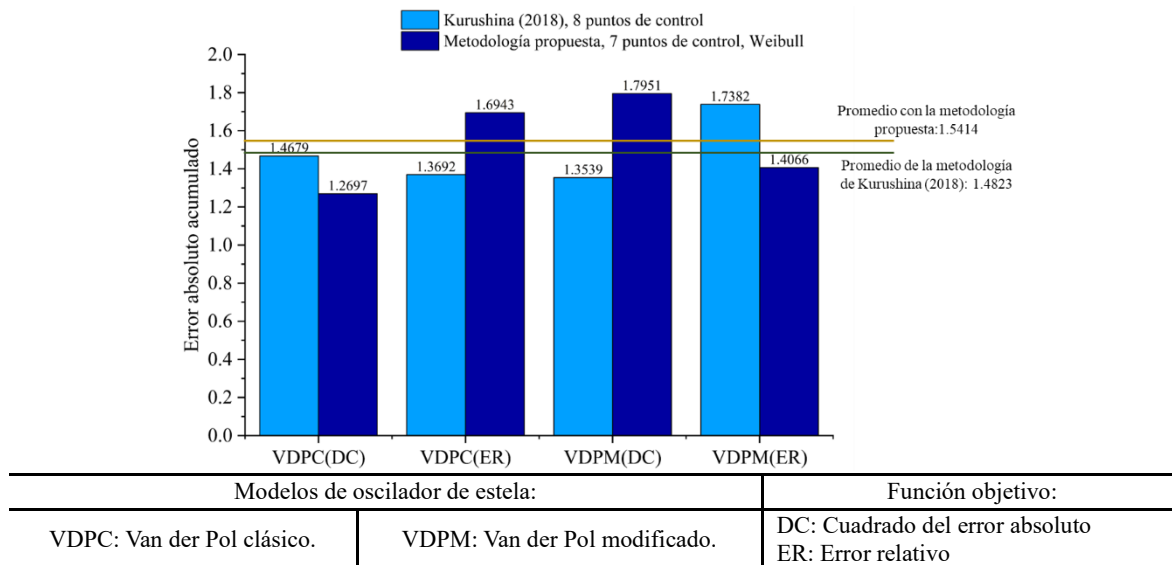


Figura 4.5-4: Comparativa de los errores de la metodología propuesta y la metodología de Kurushina (2018) en el experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

Con esto se demuestra que la metodología de ponderación cumple con el objetivo de aproximar diferentes modelos matemáticos de las *VIV* a los datos experimentales de forma satisfactoria.

El comportamiento de los sesgos en las curvas de los modelos calibrados de las *VIV* se evidencia con mayor claridad en las calibraciones realizadas con el experimento de Yang et al. (2009), aunque este patrón puede generalizarse al resto de los casos analizados. Para comprenderlo, debe considerarse que, en la gráfica de la respuesta estructural en los experimentos de las *VIV*, suelen registrarse un mayor número de amplitudes posteriores a la máxima amplitud que al inicio de la resonancia (*Figura 4.5-5*).

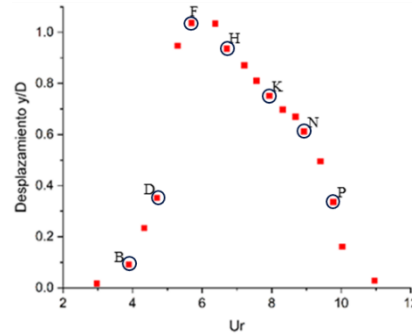


Figura 4.5-5: Distribución de las amplitudes experimentales y la selección de puntos de control de la respuesta de la estructural en el experimento de Yang et al. (2009)

Esto genera una mayor disponibilidad de puntos de control en la región posterior al máximo desplazamiento experimental, de modo que la zona derecha presenta una mayor densidad de error calculado en comparación con la izquierda. Como consecuencia, las curvas tienden a mostrar un sesgo hacia la derecha, tal como se observa en la Figura 4.3-5 (A-1, A-2, B-1 y B-2) de la sección 4.3.2 para el caso de 6 puntos de control. En los resultados con 7 puntos de control, este efecto no resulta tan evidente.

Asimismo, se identificó que este comportamiento también está influenciado por la ponderación asignada a los puntos experimentales. En la Figura 4.3-2 (A-1, A-2, B-1 y B-2) de la sección 4.3.1, correspondiente a 5 puntos de control, se aprecia que las ponderaciones de los puntos ubicados después de la amplitud máxima son significativamente mayores que aquellas al inicio de la resonancia, lo que refuerza el sesgo hacia la derecha.

En este contexto, la ponderación de Weibull adquiere relevancia, ya que asigna mayor peso a los puntos ubicados al inicio de la resonancia, contribuyendo a corregir el sesgo hacia la derecha. Este efecto puede observarse en la Figura 4.3-2 (C-1, C-2) y en la Figura 4.3-5 (C-1, C-2) de las secciones 4.3.1 y 4.3.2 respectivamente.

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones

5.1.1 Recomendaciones

Con base en los hallazgos asociados a la presencia de sesgos en las curvas calibradas atribuidos a la mayor densidad de puntos y a la ponderación del error, se recomienda en trabajos futuros el estudio del impacto en las calibraciones optando por una selección de puntos de control en el que se considere una distribución balanceada en términos de la ponderación a ambos lados de la máxima amplitud experimental, con el objetivo de reducir el sesgo observado ocasionado por la acumulación del error al término de la resonancia. O en su caso, probar con otras formas de ponderación en el que se les añada una ponderación superior a los puntos iniciales de la resonancia, es decir, antes del desarrollo de la máxima amplitud experimental.

5.1.2 Conclusiones

Se implementó con éxito una nueva metodología para la calibración de modelos de osciladores de estela que describen el fenómeno de las *VIV*. El fundamento de esta propuesta radica en la sustitución de los esquemas de ponderación discreta tradicionales, los cuales suelen introducir discontinuidades numéricas y subjetividades, por factores de distribución continuos basados en funciones de la velocidad reducida del fluido mediante ecuaciones unimodales como el de Gauss asimétrico, Gauss asimétrico general y Weibull los cuales fueron objeto de estudio en esta investigación. De esta forma se garantiza una transición suave y coherente en la ponderación de los datos en relación al pico de máxima amplitud experimental. La variación sistemática del coeficiente de ponderación o jerarquización (w_i) mediante funciones unimodales, demostró que no existió una función predominante de distribución que ofreciera la mejor aproximación.

El análisis de las calibraciones efectuadas en los tres experimentos de referencia de Stappenbelt y Lalji (2008), Yang et al. 2009 y Deng et al. 2020 evidenció que el número de puntos de control es el determinante crítico de la estabilidad en los modelos para la calibración. En la calibración con 5 puntos de control, se observó una elevada incertidumbre con errores absolutos más dispersos. No obstante, al progresar hacia los 7 puntos de control, los datos muestran una disminución drástica de la incertidumbre estándar hasta valores prácticamente nulos. Este hallazgo concluye que los 7 puntos de control representan el proporcionan la información necesaria para que los modelos logren capturar la magnitud real del fenómeno físico de manera, eliminando las variaciones estadísticas derivadas de la escasez de datos aritméticos para la calibración.

Los datos han arrojado que la calibración basada en la minimización del cuadrado del error absoluto (DC) muestran independencia ante la falta de información del número de puntos de control, han demostrado una estabilidad numérica superior en comparación con el esquema

de error relativo (ER). La optimización mediante la reducción del error relativo manifestó su vulnerabilidad ante los cambios de la ponderación y la falta de puntos de control, derivando en comportamientos erráticos y una marcada inestabilidad. Por el contrario, el método la minimización del cuadrado del error absoluto (DC) proporcionó una concordancia integral y robusta con los desplazamientos experimentales, consolidándose como el estándar de optimización más adecuado para capturar la tendencia dinámica del sistema y garantizar la convergencia del algoritmo hacia soluciones físicamente representativas.

En la evaluación individual de los modelos matemáticos de las *VIV*, los datos arrojan que los osciladores que exhibieron el desempeño más consistente fueron el de Krenk-Nielsen [KR-NI(DC)], el de Rayleigh clásico [RC(DC)] y el de Van der Pol clásico [VDPC(DC)]. Además de que estos modelos lograron minimizar el error absoluto, mostraron un comportamiento consistente ante las variaciones de la distribución de la ponderación y las variaciones de los puntos de control.

APÉNDICE

Apéndice A: Parámetros obtenidos de la calibración.

Resultados de la calibración con cinco puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico.							
Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.78	1.89	0.20135	5.84	1.06	1.02
	ER	0.81	1.82	0.26233	5.53	1.02	1.03
Van der Pol modificado	DC	0.66	1.95	0.11973, 0.24509	6.11	0.94	1.00
	ER	0.63	1.98	0.11067, 0.42998	5.33	0.97	0.96
Rayleigh clásico	DC	1.40	2.00	0.16737	2.58	0.84	0.86
	ER	0.73	1.05	0.76019	5.33	0.92	0.62
Rayleigh modificado	DC	0.32	1.80	1.00982, 0.01580	3.83	1.07	0.94
	ER	0.29	1.82	1.00914, 0.01020	3.16	1.07	1.08
Krenk-Nielsen	DC	0.35	1.85	1.13597, 0.00962, 0.01197	5.11	1.01	1.28
	ER	0.45	1.70	1.56481, 0.08618, 0.01297	7.25	1.06	1.10
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.55	0.07887	2.57	0.86	0.90
	ER	0.34	1.10	0.00898	5.30	1.07	1.26
Van der Pol modificado	DC	0.32	2.12	0.01060, 0.89724	4.45	0.95	0.80
	ER	0.40	2.35	0.01313, 0.85422	3.64	1.10	0.81
Rayleigh clásico	DC	0.70	2.31	0.00909	5.55	0.86	0.74
	ER	0.33	0.89	0.00646	5.73	0.97	1.06
Rayleigh modificado	DC	0.30	1.92	1.14411, 0.00451	2.22	0.92	0.73
	ER	0.31	0.84	0.50890, 0.00937	4.75	0.99	1.03
Krenk-Nielsen	DC	0.52	2.16	1.28751, 0.01003, 0.01015	4.89	1.02	0.91
	ER	0.35	1.17	1.07789, 0.01080, 0.00923	5.94	0.94	1.10
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.71	1.15	0.15313	4.70	1.23	0.11
	ER	0.69	0.82	0.37432	3.95	1.16	0.15
Van der Pol modificado	DC	0.79	1.16	0.23834, 0.52030	3.56	1.24	0.06
	ER	0.68	0.92	0.41149, 0.90630	3.40	1.24	0.06
Rayleigh clásico	DC	0.67	1.92	0.01036	4.72	1.24	0.16
	ER	0.67	1.89	0.01005	4.28	1.23	0.32

Rayleigh modificado	DC	0.60	1.80	0.00027, 0.01101	5.63	1.24	0.09
	ER	0.66	1.96	0.00989, 0.01027	4.87	1.24	0.33
Krenk-Nielsen	DC	0.72	1.84	0.00029, 0.01254, 0.00821	4.83	1.24	0.25
	ER	0.66	1.93	0.01339, 0.01844, 0.00550	5.98	1.22	0.43

Resultados de la calibración con cinco puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico general.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.82	1.80	0.24131	5.09	0.90	1.01
	ER	0.65	1.93	0.11708	6.92	0.86	1.05
Van der Pol modificado	DC	1.30	2.00	0.41517, 0.01067	3.88	1.02	1.07
	ER	1.28	1.80	0.63455, 0.03183	4.05	1.06	1.11
Rayleigh clásico	DC	1.25	2.10	0.11825	3.12	0.92	0.86
	ER	0.83	1.23	0.55464	4.96	0.95	0.78
Rayleigh modificado	DC	0.42	1.77	0.96638, 0.02793	3.43	1.07	0.89
	ER	0.29	1.82	0.97079, 0.01020	3.08	1.07	1.10
Krenk-Nielsen	DC	1.18	1.85	0.04398, 0.37217, 0.01747	4.18	1.01	1.09
	ER	1.28	1.61	0.18418, 0.88693, 0.01137	3.73	1.02	1.10
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	5.55	0.07889	2.58	0.86	0.89
	ER	0.32	1.04	0.00918	5.48	0.95	1.26
Van der Pol modificado	DC	0.30	2.10	0.01060, 1.02133	4.27	1.05	0.74
	ER	0.34	2.31	0.01076, 1.01772	3.11	1.10	0.76
Rayleigh clásico	DC	0.83	2.54	0.00936	4.54	0.86	0.78
	ER	0.31	0.80	0.00741	5.87	1.02	1.04
Rayleigh modificado	DC	0.30	1.54	1.37938, 0.01487	5.81	1.09	0.26
	ER	0.32	1.72	1.00527, 0.00844	5.80	1.10	0.53
Krenk-Nielsen	DC	1.37	2.16	1.38166, 0.22513, 0.01059	1.09	1.04	0.87
	ER	0.36	1.08	1.01508, 0.00923, 0.01063	5.01	0.93	1.12
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							

Van der Pol clásico	DC	0.75	1.03	0.24192	4.16	1.18	0
	ER	0.69	0.91	0.24372	4.07	1.10	0.18
Van der Pol modificado	DC	0.87	1.13	0.34911, 0.78291	2.70	1.18	0
	ER	0.68	1.31	0.34516, 1.04838	5.48	1.23	0
Rayleigh clásico	DC	0.67	1.94	0.01033	4.81	1.21	0.11
	ER	0.67	1.92	0.01005	4.54	1.20	0.06
Rayleigh modificado	DC	0.60	1.80	0.01406, 0.01107	5.66	1.24	0.04
	ER	0.67	1.92	0.01017, 0.01068	4.74	1.23	0.03
Krenk-Nielsen	DC	0.72	1.87	0.01150, 0.00940, 0.01005	4.83	1.17	0.14
	ER	0.69	1.97	0.00962, 0.01097, 0.00971	5.90	1.21	0.09

Resultados de la calibración con cinco puntos de control con la ponderación de Weibull.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.78	2.10	0.13465	5.80	1.06	1.03
	ER	0.63	1.73	0.15957	7.00	0.85	1.06
Van der Pol modificado	DC	1.13	1.81	0.43312, 0.20743	3.71	0.83	1.02
	ER	0.56	2.03	0.07742, 0.27382	6.99	0.98	1.00
Rayleigh clásico	DC	1.33	2.05	0.14141	2.83	0.85	0.86
	ER	1.34	1.55	0.83795	2.73	1.06	0.67
Rayleigh modificado	DC	0.31	1.94	1.06030, 0.01350	4.04	1.07	0.90
	ER	0.29	1.91	1.07219, 0.01052	3.00	0.87	1.05
Krenk-Nielsen	DC	1.30	1.83	0.06627, 0.46905, 0.02087	3.72	1.02	1.09
	ER	0.61	1.81	1.65012, 0.09246, 0.04400	6.04	1.02	1.12
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.54	0.07884	2.57	0.86	0.90
	ER	1.11	1.99	0.63979	5.21	0.91	0.57
Van der Pol modificado	DC	0.30	1.90	0.01084, 1.02657	2.89	0.87	0.82
	ER	0.30	0.80	0.00932, 0.82056	1.49	1.04	1.10
Rayleigh clásico	DC	0.91	2.55	0.00983	3.82	0.86	0.81
	ER	0.79	2.20	0.01083	4.30	0.87	0.79
Rayleigh modificado	DC	0.52	2.03	0.85240, 0.01208	3.19	1.10	0.71

Krenk-Nielsen	ER	0.31	1.54	1.00176, 0.01018	6.11	1.06	0.50
	DC	0.52	2.05	1.13893, 0.01015, 0.01005	4.81	0.95	0.93
	ER	0.62	1.81	0.51543, 0.01811, 0.01061	4.76	0.91	0.87
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.71	1.04	0.19072	4.38	1.20	0.13
	ER	0.65	0.91	0.26556	4.64	1.24	0.17
Van der Pol modificado	DC	1.02	1.13	0.31354, 0.17584	3.09	1.20	0.17
	ER	0.69	0.90	1.00626, 1.49668	4.37	1.15	0.03
Rayleigh clásico	DC	0.67	1.94	0.01036	4.84	1.24	0.19
	ER	0.67	0.92	0.11930	4.71	1.19	0.05
Rayleigh modificado	DC	0.60	1.79	0.00012, 0.01080	5.61	1.24	0.14
	ER	0.65	1.94	0.01002, 0.01019	4.71	1.19	0.34
Krenk-Nielsen	DC	0.72	1.85	0.00012, 0.01420, 0.00729	4.71	1.24	0.30
	ER	0.75	2.03	0.03144, 0.01055, 0.00994	4.73	1.11	0.48

Resultados de la calibración con seis puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.56	1.91	0.07223	7.01	0.89	0.97
	ER	0.47	1.89	0.04844	8.03	0.91	0.96
Van der Pol modificado	DC	0.37	2.09	0.01943, 0.29087	6.21	0.99	1.19
	ER	0.41	2.02	0.02577, 0.27993	5.66	1.08	1.21
Rayleigh clásico	DC	1.40	2.00	0.14511	2.37	0.89	0.84
	ER	0.79	1.12	0.50932	4.22	1.00	0.72
Rayleigh modificado	DC	0.29	1.67	0.99268, 0.01230	3.16	1.08	1.04
	ER	0.35	1.74	0.99567, 0.01610	2.34	1.08	1.10
Krenk-Nielsen	DC	0.34	1.72	0.97133, 0.00979, 0.01737	7.72	1.08	0.94
	ER	0.35	1.66	0.92186, 0.01307, 0.01547	7.24	1.00	0.88
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.55	0.08581	2.90	0.86	0.94

Van der Pol modificado	ER	0.81	1.35	1.52459	5.02	1.06	0.18
	DC	0.37	2.23	0.01063, 0.65531	5.23	0.96	0.93
Rayleigh clásico	ER	0.31	1.81	0.01058, 0.91589	3.99	1.09	0.96
	DC	1.40	2.55	0.02609	2.82	0.86	0.85
Rayleigh modificado	ER	0.34	0.96	0.00733	7.01	0.96	1.09
	DC	0.32	1.71	1.18903, 0.01039	5.98	0.93	0.48
Krenk-Nielsen	ER	0.30	1.68	1.38508, 0.01011	4.69	1.07	0.46
	DC	0.53	2.03	1.06924, 0.01009, 0.01063	5.41	0.90	0.94
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.69	1.12	0.15577	4.71	1.22	0.14
	ER	0.65	0.89	0.24959	4.62	1.24	0.17
Van der Pol modificado	DC	0.95	1.38	0.22937, 0.45727	3.08	1.24	0.17
	ER	0.68	1.06	0.15269, 0.22144	4.29	1.24	0.26
Rayleigh clásico	DC	0.67	1.95	0.01036	4.86	1.22	0.20
	ER	0.69	1.84	0.01036	4.18	1.24	0.32
Rayleigh modificado	DC	0.62	1.80	0.00326, 0.01130	5.40	1.22	0.15
	ER	0.65	1.87	0.00044, 0.01021	4.84	1.24	0.30
Krenk-Nielsen	DC	0.75	1.86	0.00818, 0.01500, 0.01011	4.83	1.24	0.25
	ER	0.66	1.68	0.00648, 0.01766, 0.00831	5.37	1.24	0.33

Resultados de la calibración con seis puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico general.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.53	1.89	0.06725	7.59	0.90	0.98
	ER	0.47	2.04	0.03619	7.83	0.91	0.96
Van der Pol modificado	DC	0.49	1.81	0.08217, 0.50932	6.07	1.08	0.90
	ER	0.31	1.81	0.01998, 0.51127	4.74	1.08	1.30
Rayleigh clásico	DC	1.30	2.00	0.12519	2.63	0.89	0.84
	ER	0.67	0.85	1.42336	3.77	0.95	0.10
Rayleigh modificado	DC	0.28	1.80	1.00037, 0.01065	3.71	1.08	1.01
	ER	0.28	1.77	0.76013, 0.01017	5.44	1.08	1.01

Krenk-Nielsen	DC	0.33	1.71	1.19421, 0.01042, 0.01446	6.14	1.08	1.17
	ER	0.33	1.65	0.79301, 0.01067, 0.01601	8.78	1.08	0.85
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.55	0.08592	2.90	0.86	0.94
	ER	1.31	2.35	0.48274	4.39	1.09	0.83
Van der Pol modificado	DC	0.33	2.12	0.01058, 0.95900	4.02	1.10	0.86
	ER	1.20	1.86	0.81685, 0.12195	5.89	1.10	0.54
Rayleigh clásico	DC	0.67	2.55	0.00721	6.61	0.86	0.79
	ER	0.49	1.15	0.00983	5.07	1.01	1.13
Rayleigh modificado	DC	0.29	2.04	1.01208, 0.00451	6.40	1.10	0.64
	ER	0.32	1.59	1.02965, 0.00971	6.12	0.89	0.59
Krenk-Nielsen	DC	1.14	1.92	1.41871, 0.23178, 0.01015	2.03	1.07	0.79
	ER	0.40	1.31	1.01323, 0.00934, 0.01063	5.88	0.95	1.12
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.72	1.25	0.13547	4.78	1.23	0.12
	ER	0.78	0.93	0.31897	3.71	1.17	0.05
Van der Pol modificado	DC	0.84	1.26	0.23506, 0.55608	3.38	1.24	0.01
	ER	0.72	1.00	0.21277, 0.05743			
Rayleigh clásico	DC	0.75	2.03	0.01041	3.99	1.06	0.24
	ER	0.74	1.92	0.01025	3.92	1.20	0.39
Rayleigh modificado	DC	0.66	1.58	0.01982, 0.01948	4.70	1.00	0.04
	ER	0.65	1.97	0.00992, 0.01021	4.97	1.24	0.11
Krenk-Nielsen	DC	0.72	1.88	0.00577, 0.00962, 0.00998	4.84	1.19	0.20
	ER	0.68	1.9	0.00884, 0.01115, 0.00922	5.88	1.18	0.08

Resultados de la calibración con seis puntos de control con la ponderación de Weibull.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.45	1.89	0.04593	8.64	0.86	0.98
	ER	0.47	1.71	0.07602	8.45	1.07	0.97
Van der Pol modificado	DC	0.58	1.90	0.09251, 0.30763	5.91	1.08	0.93
	ER	0.48	1.92	0.07237, 0.47098	6.65	0.95	0.93
Rayleigh clásico	DC	1.29	1.88	0.15686	2.63	0.89	0.83
	ER	1.30	1.31	1.22852	1.79	0.97	0.41
Rayleigh modificado	DC	0.29	1.78	0.99499, 0.01230	4.06	1.08	0.93
	ER	0.29	2.02	0.92191, 0.01020	4.31	1.08	0.77
Krenk-Nielsen	DC	0.33	1.70	0.81807, 0.00897, 0.01752	9.12	1.08	0.85
	ER	0.32	1.79	1.02401, 0.01569, 0.01055	8.89	1.01	0.96
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.55	0.08396	2.86	0.86	0.94
	ER	1.30	2.45	0.94191	5.00	1.09	0.60
Van der Pol modificado	DC	0.33	1.97	0.01150, 0.93684	3.56	0.88	0.90
	ER	0.36	1.23	0.01861, 0.86119	3.27	1.07	1.10
Rayleigh clásico	DC	0.79	2.54	0.00936	5.36	0.86	0.83
	ER	0.56	1.89	0.01041	6.84	0.91	0.81
Rayleigh modificado	DC	0.44	1.75	1.09122, 0.01649	4.75	1.10	0.54
	ER	0.31	1.51	1.01436, 0.01028	6.34	0.90	0.59
Krenk-Nielsen	DC	0.47	1.99	1.33422, 0.00998, 0.01036	6.25	0.91	0.93
	ER	0.93	1.84	1.31691, 0.02866, 0.26962	4.29	1.10	0.36
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.68	0.98	0.19911	4.24	1.00	0.13
	ER	0.79	1.01	0.24417	3.71	1.24	0.24
Van der Pol modificado	DC	0.78	1.10	0.26701, 0.56708	3.45	1.24	0.09
	ER	0.65	0.84	0.37451, 0.84295	3.43	1.24	0.16
Rayleigh clásico	DC	0.68	1.95	0.01037	4.64	1.19	0.20
	ER	0.67	1.91	0.01036	4.78	1.24	0.34
Rayleigh modificado	DC	0.60	1.50	0.02069, 0.01547	4.68	1.00	0.15

Krenk-Nielsen	ER	0.66	1.91	0.00578, 0.01021	4.86	1.21	0.34
	DC	0.76	1.79	0.00029, 0.02003, 0.00990	4.82	1.24	0.28
	ER	0.66	1.85	0.00139, 0.00976, 0.00894	5.78	1.24	0.38

Resultados de la calibración con siete puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\varepsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.57	1.76	0.10428	6.88	0.83	0.99
	ER	0.81	1.71	0.25894	4.54	1.07	0.93
Van der Pol modificado	DC	0.32	2.14	0.01088, 0.14878	7.90	0.92	1.24
	ER	1.25	1.85	0.53533, 0.18527	3.17	1.07	0.95
Rayleigh clásico	DC	1.27	1.89	0.15640	2.69	0.85	0.84
	ER	1.17	2.10	0.06875	2.81	1.00	0.85
Rayleigh modificado	DC	0.30	1.66	0.84737, 0.01133	3.61	1.07	0.95
	ER	0.29	1.55	0.89912, 0.01021	2.63	1.07	0.99
Krenk-Nielsen	DC	0.36	1.76	0.84517, 0.00931, 0.00979	4.91	1.07	1.23
	ER	0.43	1.78	0.51470, 0.01069, 0.01067	4.71	1.07	1.23
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.40	2.50	0.13743	3.23	0.86	0.86
	ER	0.87	1.47	1.22965	5.07	0.97	0.35
Van der Pol modificado	DC	0.37	2.44	0.01037, 0.72874	4.40	1.03	0.81
	ER	0.37	2.28	0.01032, 0.74779	3.23	1.10	0.85
Rayleigh clásico	DC	1.39	2.55	0.07199	4.11	0.86	0.40
	ER	1.39	1.83	0.60191	4.09	1.02	0.36
Rayleigh modificado	DC	0.34	1.91	1.50069, 0.01323	3.38	1.07	0.27
	ER	0.37	1.89	0.85302, 0.00951	5.01	1.10	0.58
Krenk-Nielsen	DC	0.42	2.35	1.99998, 0.01025, 0.00993	7.57	0.86	0.84
	ER	1.35	1.79	0.65232, 0.99768, 0.00820	4.14	1.10	0.52
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.76	1.20	0.12957	3.76	1.11	0.40

Van der Pol modificado	ER	0.78	0.96	0.25886	3.49	1.24	0.47
	DC	0.71	0.93	0.36427, 0.96766	2.85	1.23	0.10
	ER	0.82	1.09	0.44062, 0.83813	3.24	1.24	0.42
Rayleigh clásico	DC	0.66	1.89	0.01011	4.74	1.24	0.32
	ER	0.62	1.81	0.01036	4.65	1.24	0.52
Rayleigh modificado	DC	0.62	1.82	0.00016, 0.01128	5.40	1.24	0.27
	ER	0.64	1.96	0.05253, 0.01021	4.78	1.24	0.50
Krenk-Nielsen	DC	0.72	1.75	0.00027, 0.02212, 0.00519	4.43	1.24	0.47
	ER	0.66	1.99	0.10424, 0.01347, 0.00869	6.19	1.24	0.67

Resultados de la calibración con siete puntos de control con la ponderación de Gauss asimétrico general.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\epsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.39	2.10	0.02735	10.76	0.99	1.04
	ER	0.81	1.76	0.26601	4.69	1.07	0.93
Van der Pol modificado	DC	0.83	1.77	0.26009, 0.23152	4.80	1.07	0.97
	ER	1.04	2.05	0.26564, 0.01129	4.67	1.06	1.03
Rayleigh clásico	DC	1.40	1.46	0.73916	2.00	0.83	0.58
	ER	0.87	1.01	1.58284	2.62	0.96	0.10
Rayleigh modificado	DC	0.93	1.54	1.04243, 0.32050	2.55	1.07	0.50
	ER	0.33	1.54	0.97261, 0.01561	2.34	1.07	0.94
Krenk-Nielsen	DC	0.28	1.53	1.00935, 0.00918, 0.00984	6.32	0.87	1.20
	ER	0.31	1.65	0.93260, 0.00951, 0.00952	6.40	1.06	1.23
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.37	2.55	0.12251	3.31	0.87	0.87
	ER	1.36	2.25	0.29035	3.65	1.08	0.91
Van der Pol modificado	DC	0.32	2.52	0.01074, 1.07057	3.46	0.92	0.60
	ER	1.31	1.56	1.08900, 1.03007	3.01	1.10	0.66
Rayleigh clásico	DC	1.36	2.55	0.05458	3.81	0.86	0.56
	ER	1.39	1.77	0.80627	3.90	1.10	0.26
Rayleigh modificado	DC	0.50	2.55	0.87335, 0.01215	5.00	0.89	0.46
	ER	0.31	2.54	1.51115, 0.01017	5.80	0.97	0.42

Krenk-Nielsen	DC	0.47	2.41	1.63518, 0.01032, 0.01008	6.67	0.91	0.84
	ER	1.34	1.87	0.09127, 0.72817, 0.01966	5.22	1.02	0.55
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.72	1.19	0.12493	4.28	1.23	0.35
	ER	0.76	0.93	0.27308	3.56	1.23	0.46
Van der Pol modificado	DC	0.73	0.91	0.42228, 1.06788	2.47	1.09	0.05
	ER	0.77	0.83	0.62957, 1.26514	2.25	1.24	0.04
Rayleigh clásico	DC	0.65	1.90	0.00965	4.70	1.24	0.30
	ER	0.64	1.67	0.01005	4.02	1.24	0.49
Rayleigh modificado	DC	0.62	1.81	0.00012, 0.01118	5.31	1.24	0.25
	ER	0.65	1.96	0.01016, 0.00970	4.90	1.15	0.60
Krenk-Nielsen	DC	0.73	1.85	0.00093, 0.01112, 0.00890	4.55	1.24	0.38
	ER	0.67	1.51	0.00581, 0.01275, 0.00978	4.29	1.24	0.52

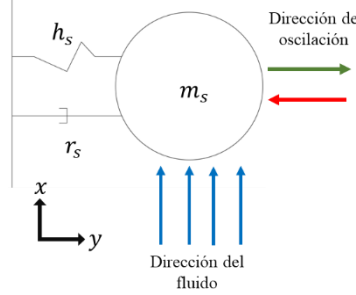
Resultados de la calibración con siete puntos de control con la ponderación de Weibull.

Oscilador de estela	Función objetivo	C_{L0}	C_{D0}	$\epsilon_{y1,2,3}$	A_y	C_A	K
Experimento de Stappenbelt <i>et al.</i> (2008)							
Van der Pol clásico	DC	0.50	2.00	0.05653	8.64	1.08	1.00
	ER	0.36	2.10	0.01189	7.40	0.84	1.30
Van der Pol modificado	DC	0.30	2.10	0.01141, 0.32577	7.01	1.08	1.21
	ER	0.76	1.68	0.22352, 0.14278	5.16	1.08	0.96
Rayleigh clásico	DC	0.64	2.09	0.02632	5.87	0.92	0.88
	ER	1.24	1.84	0.21016	3.10	1.08	0.83
Rayleigh modificado	DC	0.34	1.75	0.73469, 0.01016	3.15	1.08	1.03
	ER	0.30	1.68	0.94499, 0.01033	2.98	1.08	0.96
Krenk-Nielsen	DC	0.34	1.66	0.97189, 0.00703, 0.02506	8.07	1.07	0.77
	ER	0.28	1.55	1.45987, 0.01049, 0.01016	4.72	0.96	1.28
Experimento de Yang <i>et al.</i> (2009)							
Van der Pol clásico	DC	1.39	2.55	0.11616	3.13	0.86	0.90
	ER	1.16	1.86	1.25785	4.07	0.99	0.43

Van der Pol modificado	DC	0.30	2.36	0.01060, 1.00993	4.22	0.86	0.68
	ER	0.50	1.96	0.03812, 0.45948	7.06	0.99	0.82
Rayleigh clásico	DC	1.40	2.55	0.03943	3.05	0.86	0.76
	ER	1.31	1.90	0.39530	4.58	0.97	0.42
Rayleigh modificado	DC	0.28	1.89	1.74109, 0.01476	4.72	0.88	0.06
	ER	0.80	1.57	1.30019, 0.38505	5.16	0.98	0.16
Krenk-Nielsen	DC	1.40	2.19	1.65197, 0.33849, 0.01932	1.57	0.90	0.79
	ER	1.33	1.60	1.12027, 0.10280, 0.93250	3.98	1.09	0.26
Experimento de Deng <i>et al.</i> (2020)							
Van der Pol clásico	DC	0.73	1.18	0.12133	4.02	1.18	0.40
	ER	0.74	0.85	0.35530	3.53	1.23	0.43
Van der Pol modificado	DC	0.66	1.02	0.25619, 0.97745	2.99	1.24	0.14
	ER	0.68	0.83	0.49348, 1.10937	2.71	1.24	0.26
Rayleigh clásico	DC	0.68	1.91	0.00996	4.47	1.24	0.35
	ER	0.66	1.70	0.00988	4.00	1.24	0.53
Rayleigh modificado	DC	0.62	1.82	0.00128, 0.01092	5.25	1.24	0.30
	ER	0.62	1.64	0.07583, 0.01021	3.99	1.24	0.57
Krenk-Nielsen	DC	0.68	1.89	0.00018, 0.01975, 0.00296	4.82	1.24	0.51
	ER	0.65	2.01	0.10340, 0.00954, 0.01007	6.28	1.24	0.66

Apéndice B. Velocidad relativa del fluido al objeto oscilante.

El fenómeno se modela con la condición de un grado de libertad, en el que la oscilación es en sentido transversal a la dirección del flujo de fluido como se muestra en el *Esquema 1*. Por lo tanto, es necesario establecer la velocidad del fluido en relación al objeto oscilante.



Esquema 1: Velocidades presentes en el fenómeno de VIV.

Para ello son necesarias las características de los experimentos que se muestran a continuación:

Características del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008)

Relación de amortiguamiento estructural (ξ)	0.006
Diámetro del cilindro [m]	0.0554
Frecuencia natural [H_z]	1.711
Amplitud máxima desarrollada (A_y/D)	0.85
Velocidad reducida del desplazamiento máximo (U_R)	7.16
Relación de aspecto (L/D)	8

Para fines de ejemplo, se tomaron las características del experimento de Stappenbelt y Lalji (2008). Con ello, se calcula la velocidad máxima que podría alcanzar el sistema masa-resorte-amortiguador en condición sub-amortiguada. Para ello, se recurrió a la solución general (B-2 y B-3) del sistema masa-resorte-amortiguador que se obtiene al igualar a cero el modelo matemático de Postnikov (B-1). Que con las condiciones iniciales de tiempo adimensional $\tau = 0$ y desplazamiento máximo adimensional $Y = 0.85$. Se determinó que la velocidad (V_y) que alcanzará el sistema oscilante dimensional es de 0.50 m/s.

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + \omega_{st}^2 Y = 0 \quad \text{B-1}$$

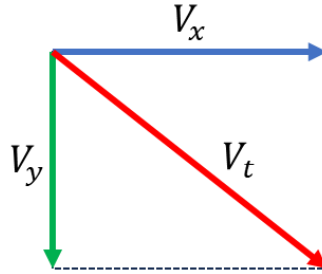
$$Y(\tau) = e^{(-\xi\tau)}[A \cos(\tau\omega_d) + B \sin(\tau\omega_d)] \quad \text{B-2}$$

$$\dot{Y}(\tau) = e^{(-\xi\tau)}\{\omega_d B - \xi A\} \cos(\tau\omega_d) - \{\xi B + \omega_d A\} \sin(\tau\omega_d)\} \quad \text{B-3}$$

Es necesario convertir la velocidad del fluido U_R en el que se desarrolla la amplitud máxima de oscilación, con el uso de la expresión B-4. De modo que se determinó la velocidad del fluido libre ($U_0 = V_x$) de 0.67 m/s .

$$U_R = 2\pi U_0 / \omega_n D \quad (B-4)$$

La velocidad de la estructura oscilante y la velocidad del fluido son la componente de la magnitud de la velocidad relativa del fluido respecto a la estructura oscilante (*Esquema 2*). De modo que al realizar la suma vectorial la velocidad del fluido relativa al cuerpo oscilante es $V_t = 0.85 \text{ m/s}$



Esquema 2: Velocidad relativa del fluido respecto al cilindro oscilante.

Con el valor calculado de V_t , se determinó que el número de Reynolds del fluido tendrá un valor de $Re \approx 4.7 \times 10^4$. Con el apoyo de la *Tabla 2.2-1* y la *Tabla 2.2-2* de las secciones **2.2.3** y **2.2.4** se establece que el coeficiente de arrastre (C_{D0}) tiene un valor teórico de 0.78 y el coeficiente de sustentación (C_{L0}) será de 0.30.

BIBLIOGRAFÍA

- Ávila-Patarroyo, C. (2012). *Histerésis y oscilador de Van der Pol* [Trabajo de grado para optar al título de Ingeniería Electrónica]. Pontificia Universidad Javeriana.
- Baddoo, T. D., Li, Z., Guan, Y., Boni, K. R. C., & Nooni, I. K. (2020). Data-Driven Modeling and the Influence of Objective Function Selection on Model Performance in Limited Data Regions. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 17(11), 4132. <https://doi.org/10.3390/ijerph17114132>
- Besley, P. (1998). Wave overtopping of seawalls, design and assessment manual. In *R&D technical report W178*. HR Wallingford. <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:0cd1c50d-0957-4599-aa37-e6328da73988?collection=research>
- Blevins, R. D. (2001a). *Flow-Induced Vibration* (Segunda Edición). Krieger Publishing Company.
- Blevins, R. D. (2001b). *Flow-Induced vibration*. Krieger Publishing Company.
- Blevins, R. D., & Plunkett, R. (1980). Formulas for natural frequency and mode shape. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2), 461.
- Blevins, R. D., & Scanlan, R. H. (1977). Flow-Induced Vibration. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4), 802–802. <https://doi.org/10.1115/1.3424205>
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Cheng, S., Lianbo, M., Lu, H., Lei, X., & Shi, Y. (2021). Evolutionary computation for solving search-based data analytics problems. *Artificial Intelligence Review*, 54. <https://doi.org/10.1007/s10462-020-09882-x>
- Deng, S., Ren, H., Xu, Y., Fu, S., Moan, T., & Gao, Z. (2020). Experimental study of vortex-induced vibration of a twin-tube submerged floating tunnel segment model. *Journal of Fluids and Structures*, 94, 102908. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.102908>
- Donohue Bishop, R. E., & Hassan, A. Y. (1964). The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 277(1368), 51–75. <https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0005>

- Facchinetti, M. L., de Langre, E., & Biolley, F. (2004). Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19(2), 123–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.12.004>
- Fehér, R., & Avila, J. J. (2021). Vortex-induced vibrations model with 2 degrees of freedom of rigid cylinders near a plane boundary based on wake oscillator. *Ocean Engineering*, 234, 108938. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.108938>
- Feng, C. C. (1968). The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders. MA Sc. *The-Sis, The University of British Columbia (Oct. 1968)*, 91(92), x3.
- Gilberto, S.-Á. (1997). *Hidráulica general*. Editorial Limusa, S.A. de C.V.
- Griffin, O. M., Skop, R. A., & Koopmann, G. H. (1973). The vortex-excited resonant vibrations of circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 31(2), 235-IN3. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80377-3](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80377-3)
- Gurian, T. D., Currier, T., & Modarres-Sadeghi, Y. (2019). Flow force measurements and the wake transition in purely inline vortex-induced vibration of a circular cylinder. *Physical Review Fluids*, 4(3), 034701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.034701>
- Hartlen, Ro. T., & Currie, I. G. (1970). Lift-Oscillator Model of Vortex-Induced Vibration. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 96(5), 577–591. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001276>
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press.
- Iturbide-Jiménez, F., García, A. A., Mendoza-Jasso, Á. de J., Santiago-Alvarado, A., & Ramírez, A. A. (2017). *Diseño y construcción de un equipo para visualizar el comportamiento de los fluidos en regímenes laminar y turbulento*. Memorias del XXIII congreso internacional anual de la SOMIM.
- Jimenez-Carballo, C. A. (2016). *Mecánica de fluidos: Viscosidad y turbulencia*.
- Joo, R. (2008). *Identificación de puntos de pesca en los viajes pesqueros de anchoveta monitoreados por satélite mediante redes neuronales artificiales*.
- Krenk, S., & Nielsen, S. R. K. (1999). Energy Balanced Double Oscillator Model for Vortex-Induced Vibrations. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(3), 263–271. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:3\(263\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:3(263))
- Kurushina, V. (2018). *Fluid Nonlinearities for Calibrated VIV Wake Oscillator Models*.

- Kurushina, V., & Pavlovskaja, E. (2018). Fluid nonlinearities effect on wake oscillator model performance. *MATEC Web of Conferences*, 148, 4002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814804002>
- Kurushina, V., Pavlovskaja, E., Postnikov, A., & Wiercigroch, M. (2018). Calibration and comparison of VIV wake oscillator models for low mass ratio structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 142–143, 547–560. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.027>
- Kurushina, V., Postnikov, A., Franzini, G., & Pavlovskaja, E. (2022). Optimization of the wake oscillator for transversal VIV. *Journal of Marine Science and Engineering*, 10(2), 293. <https://doi.org/10.3390/jmse10020293>
- L. Mott, R. (1996). *Mecánica de fluidos aplicada* (L. G. Cedeño-Plascencia, Ed.; 4th ed.). Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- Landl, R. (1975). A mathematical model for vortex-excited vibrations of bluff bodies. *Journal of Sound and Vibration*, 42(2), 219–234. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(75\)90217-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(75)90217-5)
- Lienhard, J. H. (1966). *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders* (Vol. 300). Technical Extension Service, Washington State University Pullman, WA.
- Mathelin, L., & de Langre, E. (2005). Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 24(4), 478–490. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2004.12.005>
- MathWorks. (2024). *Optimization toolbox user's guide*. https://la.mathworks.com/help/optim/?utm_source=chatgpt.com
- Mitchell, M. (1998). *An introduction to genetic algorithms*. MIT press.
- Nakayama, Y. (2018). *Introduction to fluid mechanics*. Butterworth-Heinemann.
- Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons.
- Nistche, M. (2006). *Vortex Dynamics*. Elsevier Ltd. All Rights Reserved.
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). Numerical optimization. In *New York* (2nd ed.).
- Norberg, C. (2003). Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, 17(1), 57–96. [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(02\)00099-3](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(02)00099-3)

- Plazaola-Iguaran, A. (2022). *Modelización mediante CFD de un campo eólico de aerogeneradores sin palas usando Vortex Induced Vibration (VIV)* [Proyecto fin de master]. Universidad de Zaragoza.
- Postnikov, A. (2016). *Wake Oscillator and CFD in Modelling of VIVs*. University of Aberdeen.
- Postnikov, A., Pavlovskaya, E., & Wiercigroch, M. (2017). 2DOF CFD calibrated wake oscillator model to investigate vortex-induced vibrations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 127, 176–190. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.05.019>
- Qu, Y., & Metrikine, A. V. (2016). A wake oscillator model with nonlinear coupling for the VIV of rigid cylinder constrained to vibrate in the cross-flow direction. *Volume 2: CFD and VIV*. <https://doi.org/10.1115/OMAE2016-54511>
- Rodríguez, E. (2020). *ESTUDIO DE SUSTENTACIÓN Y EMPUJE DE UN PERFIL EN MOVIMIENTO OSCILATORIO*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15842.15046>
- Scanlan, R. H. (1998). Bridge Flutter Derivatives at Vortex Lock-In. *Journal of Structural Engineering*, 124(4), 450–458. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1998\)124:4\(450\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1998)124:4(450))
- Skop, R. A., & Griffin, O. M. (1973). A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2), 225–233. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(73\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(73)90063-1)
- Stappenbelt, B., & Lalji, F. (2008). Vortex-induced Vibration Super-Upper Response Branch Boundaries. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 18(02).
- Strouhal, V. (1878). *Über eine besondere Art der Tonerregung*. Stahel.
- Tamura, Y. (2020). Mathematical models for understanding phenomena: Vortex-induced vibrations. *JAPAN ARCHITECTURAL REVIEW*, 3(4), 398–422. <https://doi.org/10.1002/2475-8876.12180>
- Vigneshvar, V., Vishwanth, S. R., Venkateshwaran, S., & Balaram, B. (2019). *A comparative study of wake oscillator models for flow induced vibrations*. 80006. <https://doi.org/10.1063/1.5120246>
- White, F. M. (2011). *Fluid Mechanics* (7th ed.). McGraw-Hil.
- Williamson, C. H. K., & Govardhan, R. (2004). Vortex-Induced Vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1), 413–455. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122128>

- Wu, Y., Cheng, Z., McConkey, R., Lien, F.-S., & Yee, E. (2022). Modelling of Flow-Induced Vibration of Bluff Bodies: A Comprehensive Survey and Future Prospects. *Energies*, 15(22), 8719. <https://doi.org/10.3390/en15228719>
- Xu, K., Ge, Y., & Zhang, D. (2015). Wake oscillator model for assessment of vortex-induced vibration of flexible structures under wind action. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 136, 192–200. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2014.11.002>
- Xu, W.-H., Gao, X.-F., & Du, J. (2012). The prediction on in-line vortex-induced vibration of slender marine structures. *Acta Mechanica Sinica*, 28(5), 1303–1308. <https://doi.org/10.1007/s10409-012-0098-3>
- Yang, B., Gao, F., Jeng, D.-S., & Wu, Y. (2009a). Experimental study of vortex-induced vibrations of a cylinder near a rigid plane boundary in steady flow. *Acta Mechanica Sinica*, 25(1), 51–63. <https://doi.org/10.1007/s10409-008-0221-7>
- Yang, B., Gao, F., Jeng, D.-S., & Wu, Y. (2009b). Experimental study of vortex-induced vibrations of a cylinder near a rigid plane boundary in steady flow. *Acta Mechanica Sinica*, 25(1), 51–63. <https://doi.org/10.1007/s10409-008-0221-7>
- Zhang, M., Xu, F., & Yu, H. (2021). A simplified model to evaluate peak amplitude for vertical vortex-induced vibration of bridge decks. *International Journal of Mechanical Sciences*, 192, 106145. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106145>