



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Análisis del comportamiento dinámico de un
aerogenerador VIV utilizando absorbedores de
vibración aplicando el concepto de admitancia
mecánica global**

presentada por

Ing. Maria de los Angeles Ramírez Macario

como requisito para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias en Ingeniería
Mecánica**

Director de tesis

Dr. Jorge Colín Ocampo

Codirector de tesis

Dr. Arturo Abundez Pliego

Cuernavaca, Morelos, México. Abril de 2026.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca Mor, 23/marzo/2026
Oficio No. SAC/097/2026
Asunto: Autorización de impresión de tesis

MARÍA DE LOS ÁNGELES RAMÍREZ MACARIO
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN
CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Análisis del comportamiento dinámico de un aerogenerador VIV utilizando absorbedores de vibración aplicando el concepto de admitancia mecánica global"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

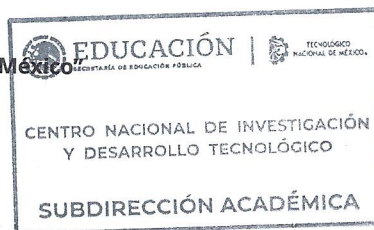
Excelencia en Educación Tecnológica®

"Conocimiento y Tecnología al servicio de México"

CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

c.c.p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



2026
año de
Margarita
Maza





Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Mecánica

Cuernavaca, Mor., 19/marzo/2026

OFICIO No. DIM/067/2026

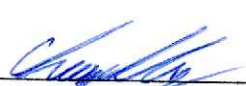
Asunto: Aceptación de documento de tesis
CENIDET-AC-004-M14-OFICIO

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la C. Maria de los Angeles Ramírez Macario con número de control M24CE033, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado **"Análisis del comportamiento dinámico de un aerogenerador VIV utilizando absorbedores de vibración aplicando el concepto de admitancia mecánica global"** y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.


Dr. Jorge Colin Ocampo
Director de tesis


Dr. Arturo Abundez Pliego
Codirector de tesis


Dr. Miguel Angel Chagolla Aranda
Revisor 1


Dra. Claudia Cortés García
Revisor 2


Dr. Eladio Martínez Rayón
Revisor 3

C.c.p. Depto. Servicios Escolares.
Expediente / Estudiante



2026
año de
**Margarita
Maza**

cenidet
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 1408,
e-mail: dim_cenidet@tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx

Dedicatoria

A Dios, fuente de vida y sabiduría, por permitirme llegar a esta meta, por el don de la fe que iluminó mi camino; por la paciencia que es virtud en la adversidad y por ese amor infinito que me ha sostenido en cada momento. Esta culminación es, ante todo, un testimonio de tu gracia.

A mis padres, Onesimo Ramírez y Socorro Macario, pilares fundamentales en mi vida, por darme el regalo más valioso: la libertad para perseguir mis sueños y la certeza de su apoyo absoluto. La confianza que siempre han depositado en mí ha sido el motor que alimenta mi esfuerzo y la brújula que orienta mis retos.

A mis hermanos, Tania Arely Ramírez y Jesús Eduardo Ramírez, cómplices y aliados incondicionales, su amor y fe ha sido un refugio, sus consejos y alegrías han iluminado este trayecto, compartir la vida con ustedes le da sentido a cada logro.

A mis abuelos paternos, Nicolas Ramírez y Juana Luna por ser columna de fortaleza espiritual, su amor se manifiesta en cada oración que hicieron por mí.

A la memoria de mis abuelos maternos, Abraham Macario y Angelica Hernández por cimentar mi vida con los recuerdos de una infancia feliz y llena de amor.

A mi amado, Sergio Elizalde por caminar a mi lado durante una década. Tu amor paciente, tu apoyo inquebrantable y tu bondad que cautiva mi alma, han sido el suelo firme bajo mis pies, contigo he aprendido a ser mejor ser humano.

A mis amigos, por darme las palabras justas en los momentos precisos, por el cariño que no conoce distancias y por celebrar con genuina felicidad cada uno de mis logros. Saber que están ahí ha hecho la carga más ligera y la vida más divertida.

Con gratitud infinita.

Maria de los Angeles Ramírez Macario.

Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por el apoyo económico mediante la beca otorgada para la realización de este posgrado.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) y al Tecnológico Nacional de México (TecNM), por recibirme en su comunidad tecnológica y proporcionarme las herramientas para mi desarrollo académico y profesional, sembrando en mí la semilla de la curiosidad científica.

A mi familia, por su amor incondicional. A mis padres, cuyo esfuerzo y sacrificio han sido el impulso vital de mi trayectoria. A mis hermanos, por su cariño constante y los momentos de alegría compartida. A mis abuelos, por sus enseñanzas y sus consejos llenos de sabiduría. A mi pareja y su familia, por su invaluable compañía y apoyo en cada obstáculo.

De manera especial, a mi director de tesis, *Dr. Jorge Colín Ocampo*, y a mi codirector, *Dr. Arturo Abundez Pliego*, quienes orientaron el rumbo de este trabajo. Agradezco la confianza total que depositaron en mi capacidad para llevar a cabo este proyecto y valoro enormemente la inspiración que significó su ejemplo: su rigor intelectual, su pasión por la investigación y su calidez humana. Su influencia ha dejado una huella que va mucho más allá de la tesis concluida.

A mis revisores, *Dra. Claudia Cortés García*, *Dr. Eladio Martínez Rayón* y *Dr. Miguel Angel Chagolla Aranda*, sus observaciones y críticas constructivas fueron fundamentales para perfeccionar este proyecto. Agradezco, además, sus palabras de aliento en momentos clave y el cimiento que construyeron a través de sus enseñanzas en las asignaturas que me impartieron.

Al equipo de vibraciones mecánicas, en especial al *Dr. Cuauhtémoc Mazón Valadez* y a los maestros *Javier Antonio Pérez Molina* y *Edgar Sotelo Parra*, por su amistad, su conocimiento compartido y sus retroalimentaciones a lo largo de esta etapa, fueron una contribución significativa.

Al personal catedrático que conforma el CENIDET y a todo el equipo de trabajo del Departamento de Ingeniería Mecánica, en especial a la *Sra. Rocío Salazar* por ayudarme en todos los procesos administrativos durante mis estudios de posgrado, por sus consejos y sus pláticas amenas.

A los amigos que conocí en mi estancia de maestría por su apoyo y amistad que atesoro, sin duda alguna son personas que admiro. Este logro se comparte con todos ustedes.

Índice

Lista de figuras	i
Lista de Tablas	iv
Nomenclatura.....	v
Resumen	ix
Abstract.....	x
1. Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Revisión del estado del arte	2
1.1.1 Vibraciones inducidas por vórtices (VIV)	2
1.1.2 Aerogeneradores VIV	5
1.1.3 Absorbedores dinámicos de vibración	7
1.1.4 Conclusión del estado del arte	9
1.2 Hipótesis	10
1.3 Objetivos.....	10
1.3.1 General.....	10
1.3.2 Específicos.....	10
1.4 Alcance y limitaciones.....	10
1.4.1 Alcances	10
1.4.2 Limitaciones	11
2. Capítulo 2. Fundamentos teóricos	12
2.1 Fundamentos de vibraciones inducidas por vórtices.	13
2.1.1 Flujo alrededor de un cilindro	13
2.1.2 Número de Reynolds y desprendimiento de vórtices	13
2.1.3 Número de Strouhal y la frecuencia de desprendimiento de vórtices	15
2.1.4 Velocidad reducida	16
2.1.5 Masa añadida	16
2.1.6 Fenómeno de bloqueo.....	16

2.1.7 Modos de desprendimiento de vórtices e histéresis.....	17
2.2 Modelo matemático acoplado fluido – estructura por Facchinetti	18
2.2.1 Acoplamiento fluido – estructura	19
2.2.2 Dinámica del sistema acoplado	20
2.3 Conceptos fundamentales de vibraciones mecánicas	25
2.3.1 Vibración	25
2.3.2 Sistema vibratorio.....	25
2.3.3 Frecuencia natural.....	25
2.3.4 Resonancia.....	25
2.3.5 Efecto Sommerfeld.....	26
2.3.6 Absorbedores dinámicos de vibración (DVA)	26
2.3.7 Inersor.....	27
2.3.8 Red mecánica.....	28
2.3.9 Sub-admitancia mecánica	28
2.3.10 Admitancia mecánica global (<i>Ag</i>).....	29
2.4 Optimización	31
2.4.1 Metodología de puntos invariantes.....	31
2.4.2 Metodología del punto fijo extendido	32
3. Capítulo 3. Modelo matemático de sistema acoplado VIV - modificado.....	34
3.1 Modelo matemático VIV modificado	35
3.1.1 Oscilador de la estructura y de la estela	35
3.2 Acoplamiento fluido – estructura modelo modificado	36
3.3 Dinámica del sistema acoplado – modificado	38
3.4 Validación del modelo modificado y discusión.....	40
3.4.1 Frecuencia angular – Modelo matemático modificado	43
3.4.2 Amplitud de la estela y la estructura – Modelo matemático modificado	44
4. Capítulo 4. Modelo matemático de un sistema acoplado VIV con DVA/IDVA aplicando el concepto de Admitancia Mecánica Global (<i>Ag</i>).....	43
4.1.1 Formulación del sistema acoplado	44

4.1.2 Adimensionamiento del sistema acoplado con A_g	46
4.2 Dinámica del sistema acoplado VIV con A_g :	46
4.2.1 Solución del oscilador estructural en el dominio de Laplace	46
4.2.2 Solución del oscilador de la estela q_0	47
4.3 Optimización de los parámetros del DVA e IDVA	48
4.3.1 Optimización del DVA convencional	49
4.3.2 Optimización de los IDVA (C_3 , C_4 y C_6)	52
4.4 Comportamiento dinámico del sistema acoplado VIV con A_g	62
4.4.1 Sistema Estela – Estructura – DVA	62
4.5 Comparación de DVA/IDVA en el sistema acoplado VIV	72
5. Capítulo 5. Discusión de resultados	74
5.1 Análisis de los resultados obtenidos del sistema acoplado estela – estructura con las configuraciones de absorbedores dinámicos de vibración	75
5.1.1 Frecuencia angular de desprendimiento de vórtices	75
5.1.2 Amplitud del oscilador de estela	79
5.1.3 Amplitud de la estructura	81
5.1.4 Comparación de DVA / IDVA	83
6. Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros	83
6.1 Conclusiones	84
6.2 Recomendaciones para trabajos futuros	85
Referencias bibliográficas	87
7. Apéndice A: Modelo matemático con DVA – Método de Euler	92
8. Apéndice B: Modelo matemático con DVA – Funciones Trigonométricas	97
9. Apéndice C: Obtención de la fórmula del DVA e IDVA con admitancia mecánica global (A_g) 100	
10. Apéndice D: Coeficientes de los IDVA	104

Lista de figuras

Figura 1.1 Formación de la calle de vórtices en un cilindro circular a $Re=140$ [7].	2
Figura 1.2 Recolector de energía eólica microelectromecánico (MeMS) [26]	4
Figura 1.3 Aerogenerador VIV propuesto por la empresa Vortex Bladeless [4].	5
Figura 1.4 Aerogenerador VIV con una masa sintonizada TMM [32].	6
Figura 1.5 Absorbedores dinámicos de vibración: a) DVA convencional, b) NDVA [39].	7
Figura 1.6 Analogía fuerza – corriente [41].	8
Figura 2.1 Fenómeno de lock – in [9].	17
Figura 2.2 Efecto de histéresis de acuerdo con los modos de desprendimiento de vórtices [15].	18
Figura 2.3 Modelo VIV de un cilindro montado elásticamente acoplado con osciladores de estela, donde (m_s) es la masa del cilindro, (D) es el diámetro del cilindro, (c_s) es la rigidez de la estructura, (k_s) el amortiguamiento de la estructura, $q(t)$ representa la estela de vórtices y (U) es la velocidad de flujo [23].	18
Figura 2.4 Frecuencia angular de desprendimiento de vórtices ω en función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.	22
Figura 2.5 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.	23
Figura 2.6 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento, b) velocidad, c) aceleración.	24
Figura 2.7 Efecto Sommerfeld en un rotor excéntrico: a) Amplitud de la frecuencia rotacional b) Resultados que demuestran el efecto Sommerfeld al variar la velocidad de rotación [46].	26
Figura 2.8 Sistema masa – resorte incorporando absorbedores dinámicos de vibración (DVA): (a) sin amortiguamiento y (b) con amortiguamiento [49].	27
Figura 2.9 Red mecánica basada en inersores. Donde: b es la inercia, c es el coeficiente de amortiguamiento y K_1 es la constante del resorte [42].	28
Figura 2.10 Sustitución del elemento amortiguador por diferentes configuraciones de redes mecánicas basadas en inersores [42].	29
Figura 2.11 Esquema de la simplificación de DVAs: a) DVA clásico, b) DVA clásico en serie, c) Diagrama general de DVAs basado en la topología de redes mecánicas mediante admitancia mecánica y c) Diagrama simplificado mediante admitancia mecánica global [44].	31
Figura 2.12 Optimización de un absorbedor de vibraciones mediante la metodología de puntos fijos [49].	32

Figura 2.13 a) Diagrama de un sistema IDVA empleando la configuración de la red mecánica C3. b) Respuesta del comportamiento dinámico del sistema al calibrar los cuatro puntos invariantes [43].	33
Figura 3.1 Frecuencia angular ωa función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento; b) velocidad y c) modelo de aceleración.	40
Figura 3.2 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.	41
Figura 3.3 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur : a) desplazamiento, b) velocidad, c) aceleración.	42
Figura 4.1 Estructura rígida sometida a VIV, acoplada a un absorbedor dinámico de vibraciones mediante el concepto de admitancia mecánica global Ag .	44
Figura 4.2 Representación del oscilador estructural acoplado a diferentes absorbedores de vibración: DVA, C3, C4 y C6.	45
Figura 4.3 Sistema masa-resorte empleando el concepto de admitancia mecánica global. La función Ag representa cualquier configuración de DVAs.	48
Figura 4.4 Respuesta del sistema con un DVA convencional para una relación de masa $z=0.01$ y un amortiguamiento de $\zeta a = 0.05$.	51
Figura 4.5 Respuesta del sistema con un DVA convencional para una relación de masa $z=0.01$, un amortiguamiento arbitrario de $\zeta a = 0.05$ y $\zeta a, opt$.	52
Figura 4.6 Comportamiento dinámico del IDVA-C3 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, y_{aopt}$ y H_{mopt} con un factor de amortiguamiento $\zeta a = 0.45$.	57
Figura 4.7 Comportamiento dinámico del IDVA-C3 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, y_{aopt}$ y H_{mopt} para un factor de amortiguamiento $\zeta a = 0.45$, $\zeta a_{opt} \rightarrow C3$ y ζa_{opt} .	58
Figura 4.8 Comportamiento dinámico del IDVA-C4 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, y_{aopt}$ y H_{mopt} con un factor de amortiguamiento $\zeta a = 0.020$ y ζa_{opt} .	60
Figura 4.9 Comportamiento dinámico del IDVA-C6 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, y_{aopt}$ y H_{mopt} con un factor de amortiguamiento arbitrario de $\zeta a = 0.25$ y ζa_{opt} .	62
Figura 4.10 Frecuencia angular ωa en función de la velocidad reducida Ur con un DVA para diferentes valores de z .	66
Figura 4.11 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida Ur con un DVA para diferentes valores de z .	66
Figura 4.12 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur con un DVA para diferentes valores de z .	67
Figura 4.13 Frecuencia angular ωa en función de la velocidad reducida Ur para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.	70

Figura 4.14 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida Ur y de la frecuencia angular ωa para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.	71
Figura 4.15 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur y de la frecuencia angular ωa para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.	72
Figura 4.16 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur y de la frecuencia angular ωa para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 y un DVA con una relación de masa de $z=0.001$	73
Figura 4.17 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida Ur y de la frecuencia angular ωa para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 y un DVA con una relación de masa de $z=0.005$	74
Figura 5.1 Frecuencia de desprendimiento de vórtices en función de la velocidad reducida con un DVA para $z=0$	76
Figura 5.2 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z=0$	77
Figura 5.3 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z=0.0001$ y 0.0003 empleando un DVA	78
Figura 5.4 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z=0.0003$ empleando una red mecánica C3.....	79
Figura 5.5 Fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estela q_0 para una relación de masa de $z=0$ empleando un DVA convencional.....	80
Figura 5.6 Control del fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estela q_0 para diferentes relaciones de masa empleando una red mecánica C4.	81
Figura 5.7 Fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estructura y_0 para una relación de masa de $z=0$ empleando un DVA convencional.....	82
Figura 5.8 Control del fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estructura y_0 para diferentes relaciones de masa (z): a) Red mecánica C3 b) DVA convencional.....	83

Lista de Tablas

Tabla 2.1 Regímenes de flujo alrededor de un cilindro [8].	14
Tabla 2.2 Parámetros del sistema acoplado VIV obtenidos por Facchinetti et al. [17].	21
Tabla 2.3 Coeficientes C y G para los modos de acoplamiento del sistema	21
Tabla 3.1 Coeficientes Ca y Ga para los modos de acoplamiento del sistema modificado.	39
Tabla 4.1 Funciones de admitancia mecánica global A_g para las configuraciones de DVA e IDVA [44].	45

Nomenclatura

Símbolo	Descripción
A	Factor de escala de la fuerza acoplada
A_g	Coefficiente de admitancia mecánica global
c_s	Amortiguamiento del sistema principal
C_L	Coefficiente de sustentación del vórtice
C_M	Coefficiente de masa agregada
C_{Lo}	Coefficiente de sustentación de referencia
D	Diámetro del cilindro
F	Efecto del movimiento del cilindro sobre la estela cercana
f	Fuerza de acoplamiento
f_v	Frecuencia de desprendimiento periódico de vórtices dimensional
f_n	Frecuencia natural del sistema dimensional
H_m	Magnitud del sistema masa – resorte
k_s	Rigidez del sistema principal
M	Número de masa
m_s	Masa del sistema del sistema principal
m_c	Masa del cilindro
m_f	Masa añadida por el fluido
Q	Coefficiente de sustentación fluctuante en la estructura
q_0	Amplitud de la estela
$R_{(s)}$	Respuesta del sistema masa – resorte
Re	Número de Reynolds
c_c	Amortiguamiento del cilindro
c_f	Amortiguamiento añadido del fluido
S_t	Número de Strouhal
s	Parámetro de Laplace
S_v	Fuerza de excitación de desprendimiento de vórtices dimensional
s_v	Fuerza de excitación de desprendimiento de vórtices adimensional
T	Tiempo dimensional
t	Tiempo adimensional modelo Facchinetti
t_a	Tiempo adimensional modelo Facchinetti Modificado
U_r	Velocidad reducida adimensional
U	Velocidad del fluido

ν	Viscosidad cinemática del fluido
$Y(s)$	Subadmitancia mecánica
Y_g	Parámetro adimensional de la admitancia mecánica global
y	Desplazamiento respecto al diámetro de la estructura
y_0	Amplitud de la estructura
ω	Relación de frecuencia forzada modelo Facchinetti
ω_a	Relación de frecuencia forzada modelo Facchinetti Modificado
z	Parámetro adimensional de la relación de masa de la estructura y el absorbedor

Griegas

Ω_s	Frecuencia de natural de la estructura adimensional
Ω_f	Frecuencia de desprendimiento de vórtices de vórtices adimensional
Ω_m	Frecuencia natural del sistema secundario
Ω_b	Frecuencia natural del inersor
δ	Relación de frecuencias fluido-estructura del sistema principal y la frecuencia de desprendimiento de vórtices.
δ_a	Relación de las frecuencias naturales del sistema secundario con el sistema principal
ρ	Densidad del fluido
ζ	Amortiguamiento reducido de la estructura
ζ_a	Relación de amortiguamiento del sistema secundario
ε	Parámetro de no linealidad de Van der Pol.
β	Relación de masas del inersor y el sistema secundario
η	Relación de frecuencias del inersor y el sistema secundario
γ	Coeficiente de amortiguamiento del fluido añadido
μ	Relación de masas de la estructura y el fluido adimensional modelo Facchinetti

Resumen

Los aerogeneradores de vibraciones inducidas por vórtices (VIV) representan una tecnología emergente para la generación de energía eléctrica, con ventajas potenciales en mantenimiento, impacto visual y operación. Sin embargo, su viabilidad práctica se ve limitada por el fenómeno de resonancia, un régimen fluido – estructura que ocurre en un solo intervalo estrecho de velocidades de viento, restringiendo así su ancho de banda operativo y eficiencia energética.

Esta investigación propone un sistema de sintonización pasivo basado en absorbedores dinámicos de vibración con inersor (IDVA), integrado mediante el concepto de admitancia mecánica global (A_g), para controlar y ampliar la respuesta dinámica de un aerogenerador VIV. Para el estudio se desarrolló un modelo matemático acoplado que integra el oscilador de estela tipo Van der Pol con la estructura principal modificada, incorporando el efecto de la admitancia mecánica global A_g , que generaliza el comportamiento de diferentes configuraciones de IDVA ($C3$, $C4$ y $C6$), así como, el efecto de un DVA convencional.

Para lograr un diseño óptimo del sistema VIV, los parámetros de los IDVA fueron optimizados utilizando la metodología del punto fijo extendido. Con los resultados obtenidos se demostró, que con una relación de masa de $z=0.001$ los IDVA logran suprimir significativamente el fenómeno de histéresis y, así mismo, estabilizar la respuesta del sistema incrementando el intervalo de velocidades reducidas (U_r), en las que el aerogenerador puede operar de manera eficiente. En particular, el uso de redes mecánicas basadas en inersores, las cuales sustituyen al amortiguador en un DVA convencional, mejoran el desempeño dinámico del sistema VIV, ya que permiten el control de la amplitud de vibración en un intervalo de banda ancha de frecuencia de excitación mayor que la obtenida con un DVA convencional.

Abstract

Vortex Induced Vibration (VIV) wind turbines represent an emerging technology for electrical power generation, with potential advantages in maintenance, visual impact, and operation. However, their practical viability is limited by the resonance phenomenon a fluid – structure regime that occurs only within a narrow range of wind speeds, thereby restricting their operational bandwidth and energy efficiency.

This research proposes a passive tuning system based on inerter – based dynamic vibration absorbers (IDVA), integrated through the concept of global mechanical admittance (A_g), to control and broaden the dynamic response of a VIV wind turbine. For this study, a coupled mathematical model was developed, integrating a Van der Pol type wake oscillator with the modified primary structure. This model incorporates the effect of global mechanical admittance A_g which generalizes the behavior of different IDVA configurations (C3, C4 and C6) as well as the effect of a conventional DVA.

To achieve an optimal design of the VIV system, the IDVA parameters were optimized using the extended fixed-point methodology. The results demonstrated that with a mass ratio of ($z=0.001$), IDVA significantly suppresses the hysteresis phenomenon and stabilize the system response, by increasing the range of reduced velocities (U_r), at which the wind turbine can operate efficiently. In particular, the use of inerter – based mechanical networks to replace the damper in a conventional DVA improves the dynamic performance of the VIV system, as they allow for vibration amplitude control over a wider excitation frequency bandwidth than that obtained with a conventional DVA.

Capítulo 1. Introducción

En la actualidad, la transición energética hacia fuentes renovables y de bajo impacto ambiental es uno de los mayores desafíos globales. Entre las diferentes fuentes de energía renovable, la energía eólica ocupa un lugar destacado para la generación de electricidad mediante el uso de turbinas eólicas [1], [2]. En este contexto, se han desarrollado innovaciones tecnológicas como los aerogeneradores de vibraciones inducidas por vórtices (VIV), también conocidos como aerogeneradores sin aspas, los cuales aprovechan un fenómeno fluido – estructura para convertir la energía cinética del viento en oscilaciones mecánicas y, posteriormente, en electricidad [3], [4], [5]. El fenómeno VIV ocurre cuando un flujo incidente sobre un cuerpo cilíndrico genera un desprendimiento periódico y alternante de vórtices en su estela, dando lugar a fuerzas fluctuantes que pueden producir vibraciones transversales en la estructura. Cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices coincide con la frecuencia natural del sistema, se produce una amplificación resonante de la amplitud de oscilación, ideal para la captación de energía. Sin embargo, este régimen de operación se limita a un intervalo estrecho de velocidades de viento [4], [6].

Para ampliar el intervalo de resonancia en el sistema, se han explorado diversas estrategias de sintonización, tanto activas como pasivas. Los sistemas activos, aunque efectivos presentan la desventaja de utilizar la misma energía generada por el aerogenerador. Como alternativa, los absorbedores dinámicos de vibración (DVA) ofrecen un enfoque pasivo para el control de vibraciones. Recientemente, la incorporación del inersor, un elemento mecánico análogo al capacitor eléctrico, en configuraciones avanzadas de los DVA, conocidas como IDVA, ha demostrado un desempeño superior en el control de vibraciones, con mayor ancho de banda y capacidad de adaptación dinámica.

Esta tesis se enfoca en el desarrollo y análisis de un sistema de sintonización pasivo para aerogeneradores VIV, basado en IDVA y fundamentado en el concepto de admitancia mecánica global. El objetivo es controlar la respuesta dinámica del sistema acoplado fluido – estructura – absorbedor, con el fin de extender el intervalo de velocidades de viento en las que el aerogenerador opera en condiciones de resonancia, mejorando así su estabilidad.

A través de un modelo matemático modificado de acoplamiento VIV y la aplicación de metodologías de optimización como el punto fijo extendido, se evaluó el desempeño dinámico de tres configuraciones de IDVA ($C3$, $C4$ y $C6$), y se comparó el comportamiento dinámico del sistema VIV utilizando un DVA convencional. Los resultados obtenidos validaron la capacidad de estos sistemas para suprimir la histéresis, estabilizar la respuesta y

ampliar el intervalo del ancho de banda operativo, sentando las bases para el diseño de sistemas de sintonización en los aerogeneradores VIV.

1.1 Revisión del estado del arte

La revisión bibliográfica que fundamenta la presente investigación se estructura en torno a tres áreas fundamentales, que permiten contextualizar el problema, identificar los avances existentes y delimitar el aporte potencial de este trabajo:

- Vibraciones inducidas por vórtices (VIV): En esta sección se explica el origen físico del fenómeno VIV y se examinan brevemente los modelos matemáticos que describen la interacción entre el fluido y la estructura, así como las áreas de oportunidad que este fenómeno presenta, particularmente en el contexto del aprovechamiento energético.
- Aerogeneradores sin aspas: Se describe el principio de funcionamiento de tipo de aerogenerador VIV, así como las estrategias de sintonización pasivo o activo reportadas en la literatura que se han propuesto para optimizar su desempeño.
- Absorbedores de vibración dinámicos (DVA): Se explora su evolución histórica, sus aplicaciones, tanto en ingeniería estructural como en sistemas mecánicos, evaluando su potencial en mejorar el desempeño dinámico en el campo de los aerogeneradores VIV.

1.1.1 Vibraciones inducidas por vórtices (VIV)

Se definen como un fenómeno de carácter fluidoelástico que ocurre en estructuras sumergidas en campos de flujo. Cuando un flujo uniforme incide sobre un cilindro circular, la naturaleza del flujo en su estela está gobernada por el número de Reynolds $\left(Re = \frac{UD}{\nu}\right)$, para $Re > 40$, la inestabilidad de la estela da origen al desprendimiento periódico y alternante de vórtices, conocido como *calle de vórtices de Von Karman*, Figura 1.1.



Figura 1.1 Formación de la calle de vórtices en un cilindro circular a $Re=140$ [7].

El desprendimiento periódico de vórtices deriva en fluctuaciones de presión sobre la superficie de la estructura, lo cual desencadena una oscilación forzada de la misma [7], [8],

[9]. Un aspecto fundamental de las VIV es el fenómeno de bloqueo o *lock-in*, donde la frecuencia de desprendimiento de vórtices se aproxima a la frecuencia natural de la estructura, amplificando sustancialmente la amplitud de oscilación [10]. Feng [11], así como Bishop y Hassan [12], determinaron que el fenómeno de bloqueo exhibe un comportamiento de carácter no lineal con histéresis. Sus hallazgos revelan que, en condiciones de flujo ascendente, la transición hacia una rama de oscilación de gran amplitud ocurre a una velocidad distinta a la del flujo descendente, manifestándose a través de saltos abruptos en la amplitud de respuesta.

A lo largo de los años el fenómeno VIV ha sido ampliamente investigado debido a su relevancia y efectos en múltiples estructuras, tales como tuberías, líneas de transmisión eléctrica, tuberías ascendentes que conectan las plataformas con el lecho marino (*risers*), cables suspendidos, estructuras marinas, aerogeneradores y torres de refrigeración [13], [14], [15], [16]. Las metodologías empleadas en las VIV incluyen tres enfoques de estudio: experimental [15], [17], [18], simulaciones numéricas [11], [19], [20] y la modelación matemática. Este último enfoque busca predecir la amplitud de desplazamiento y la respuesta de frecuencia de un cilindro sometido a VIV.

El enfoque matemático considera el acoplamiento dinámico entre la estela y la estructura, la idea conceptual de modelar la estela como un oscilador se remonta a las observaciones de Birkhoff [21], quien inspeccionó la región detrás del cilindro y describió su movimiento oscilatorio análogo a una cola de un pez nadando. Sin embargo, la base para esta analogía surge del trabajo pionero de Bishop y Hassan [12], quienes demostraron que la dinámica de la estela es comparable a la de un oscilador mecánico determinando las fuerzas de sustentación y arrastre en un cilindro sometido a un flujo.

Por su parte, Hartlen y Currie [22] presentaron la formulación matemática del oscilador de estela. En su modelo de un grado de libertad consideraron una variable única que corresponde a la fuerza de sustentación gobernada por la ecuación no lineal de Rayleigh para representar la excitación periódica de la estela sobre el cilindro. Esta variable de la estela se acopló directamente con la ecuación de movimiento transversal del oscilador de la estructura, dando como resultado un modelo simplificado de VIV. Por otra parte, Facchinetti *et al.* [23], formularon un modelo bidimensional para un cilindro circular restringido al plano transversal. En su estudio propusieron un oscilador no lineal de Van der Pol para modelar el comportamiento de la estela, y evaluaron tres parámetros como mecanismos de acoplamiento con la estructura: desplazamiento, velocidad y aceleración. La evolución de estos modelos matemáticos ha permitido una comprensión cada vez más precisa de la compleja dinámica no lineal de las VIV. A diferencia del enfoque tradicional de la ingeniería, que ha buscado suprimir el desprendimiento de vórtices y mitigar las VIV para evitar daños estructurales,

una nueva línea de investigación propone la posibilidad de aprovechar estas vibraciones para la recolección de energía renovable.

A diferencia de las turbinas convencionales que emplean la fuerza de sustentación constante generada por las aspas para producir electricidad, los recolectores de energía basados en VIV realizan la conversión energética mediante las oscilaciones del cuerpo impulsadas por las fuerzas asociadas a las inestabilidades del flujo [3]. En este contexto, Bernitsas *et al.* [24], introdujeron el convertidor de energía limpia acuática por vibraciones inducidas por vórtice (VIVACE), el cual fue diseñado empleando un cilindro rígido y resortes lineales, para la generación de energía eléctrica a partir de la energía cinética de la corriente del océano. Este considerado el primer convertidor de energía en aprovechar las VIV con éxito, ya que puede mantener una alta eficiencia energética incluso en corrientes de baja velocidad (desde 0.25 m/s hasta más de 2.5 m/s), lo que amplía el potencial de aprovechamiento de este recurso energético en un amplio espectro de velocidades de corriente. Zahari y Dol [25], realizaron un estudio sobre la capacidad del fenómeno VIV en la generación de energía alternativa para la aplicación en plataformas marinas. Los autores concluyeron que, en corrientes bajas de 0.1 m/s , un modelo VIV puede generar una potencia nominal de 10.4 W , no obstante, subrayan que, aunque esta cifra parece modesta a nivel individual, la tecnología VIV es escalable. Esto puede lograrse mediante la construcción de granjas o matrices múltiples de cilindros para aumentar la producción energética, así como mediante la integración de estos sistemas con otras fuentes renovables (solar – eólica), en plataformas *offshore*, creando un sistema híbrido más robusto y confiable. Lee *et al.* [26], desarrollaron un recolector de energía eólica microelectromecánico (MeMS), Figura 1.2. Al probar el dispositivo en un túnel de viento junto a una formación de 25 cilindros de poliestireno, los resultados demostraron que la interacción de vórtices entre los cilindros incrementa significativamente la potencia de salida, validando la viabilidad de las VIV para la cosecha de energía a microescala.

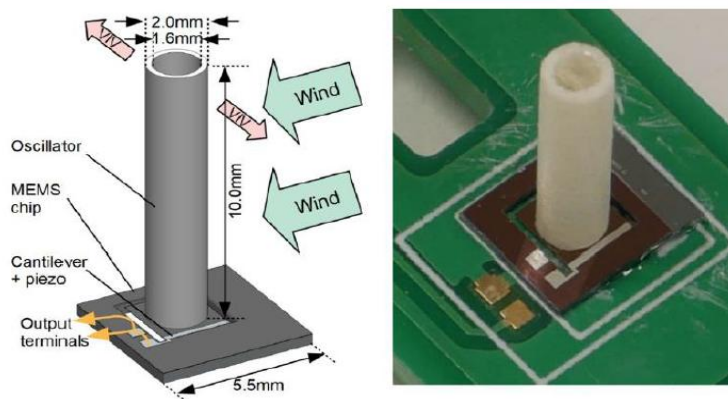


Figura 1.2 Recolector de energía eólica microelectromecánico (MeMS) [26]

De acuerdo con la literatura, uno de los principales desafíos a los que se enfrentan los captadores de energía por VIV es el limitado intervalo de velocidades de flujo en donde estos pueden operar en condiciones de resonancia. Por esta razón, una de las principales líneas de investigación en este campo se centra en ampliar el margen operativo de la región de acoplamiento [3].

1.1.2 Aerogeneradores VIV

Los aerogeneradores sin aspas (BWT), constituyen un enfoque innovador para la conversión de energía eólica. A diferencia de los aerogeneradores tradicionales, omiten la presencia de palas giratorias. Uno de los diseños más emblemáticos, fue desarrollado por la empresa española Vortex Bladeless [4]. Consiste en un mástil vertical y esbelto de sección circular, cuyo funcionamiento se basa en la oscilación inducida por VIV. Este sistema aprovecha la resonancia como principio fundamental para la generación de energía, Figura 1.3.

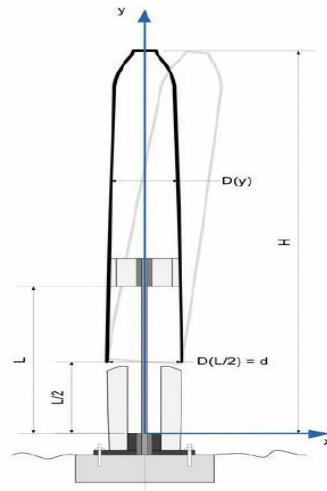


Figura 1.3 Aerogenerador VIV propuesto por la empresa Vortex Bladeless [4].

Para extender el intervalo de velocidades de viento en el que ocurre la resonancia, el diseño incorpora un sistema de sintonización mediante repulsión magnética de imanes permanentes. Algunos estudios se han enfocado en la geometría del cuerpo para mejorar la eficiencia en los aerogeneradores. Chizfahm *et al.* [27], propusieron cuatro configuraciones de BWT y mediante la comparación de cuerpos rectos y cónicos, establecieron que la eficiencia varía según la forma y la velocidad del aire, y concluyeron que los cilindros rectos son más efectivos para vientos de baja velocidad, comunes en zonas urbanas, mientras que los modelos cónicos resultan prometedores para aplicaciones marinas donde el recurso eólico es más vigoroso. Complementariamente Zhang *et al.* [28], lograron intensificar la potencia obtenida por VIV de un recolector de energía piezoeléctrico mediante la inserción de un cilindro de interferencia de diversas geometrías (cuadrada, circular, triangular y en forma de

D) acoplado con la estela del cilindro principal. Los resultados obtenidos destacaron que la variación de la distancia entre cilindros reconfigura la dinámica de flujo, lo que se traduce a en una mayor producción energética y en la ampliación del intervalo de velocidades útiles del viento.

Por otra parte, se han explorado estrategias de control activo para gestionar la estabilidad de la estructura. Meliga *et al.* [29] propusieron un mecanismo de retroalimentación de velocidad disipativa mientras que Hasheminejad *et al.* [30], [31], desarrollaron controladores adaptativos de modo deslizante difuso. Aunque estos estudios priorizaban la supresión de vibraciones con eficiencias energéticas modestas, sentaron las bases para entender cómo la modificación de la respuesta dinámica del mástil altera la recolección de energía. En este contexto, Yazdi [32], propuso un mecanismo de ajuste basado en una masa sintonizada (TMM) y una estrategia de control óptimo. El diseño consiste en una turbina integrada por un cilindro rígido hueco montado sobre una viga flexible, la cual está parcialmente recubierta con generadores piezoeléctricos, ver Figura 1.4. Los resultados demostraron que el TMM ubicado dentro del cilindro modifica la inercia efectiva del mástil, permitiendo la sintonización del sistema y extendiendo el intervalo de velocidades del viento en las que el aerogenerador es eficiente.

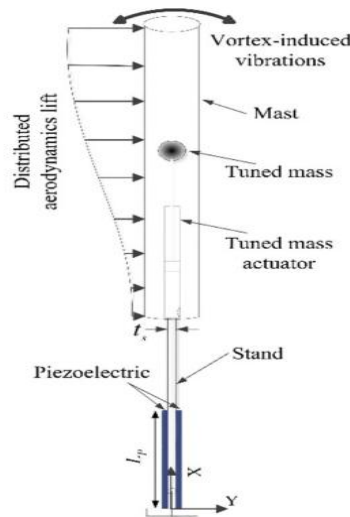


Figura 1.4 Aerogenerador VIV con una masa sintonizada TMM [32].

Recientemente, se ha explorado el uso de materiales avanzados para la sintonización dinámica, Kang *et al.* [33], implementaron un elastómero magnetorreológico (MRE) para modificar la rigidez estructural mediante campos magnéticos. A pesar de la efectividad de las masas sintonizadas y el control activo, estos sistemas suelen aumentar la complejidad mecánica o el consumo energético del dispositivo. Como alternativa surge el interés por los absorbedores de vibración.

1.1.3 Absorbedores dinámicos de vibración

Los absorbedores dinámicos de vibración (DVA) o amortiguadores de masa sintonizada (TMD), constituyen una herramienta fundamental en ingeniería para el control de vibraciones en sistemas estructurales. El DVA, denominado así en este proyecto, consiste en un sistema secundario compuesto por una masa, un resorte y, en su configuración amortiguada, un amortiguador en paralelo. Este subsistema se acopla a la estructura principal con el objetivo de disipar y transferir energía mediante un equilibrio dinámico que se genera entre ambos sistemas, a través de la sintonización de los parámetros de rigidez y amortiguamiento del DVA [34], [35], [36].

El precursor para el control de vibraciones no deseadas se remonta a 1909, cuando Frahm [37], diseñó un dispositivo para un sistema de un solo grado de libertad sin amortiguamiento sometido a una fuerza armónica. Posteriormente, Den Hartog y Ormondroyd [36], presentaron la configuración clásica amortiguada de un DVA, compuesta por una masa m , un resorte k y un amortiguador c conectados en paralelo, Figura 1.5 (a). Adicionalmente desarrollaron un método de optimización que actualmente se conoce como criterio de puntos invariantes [36], [38]. Tomando como base los puntos invariantes de la respuesta del sistema, determinaron las expresiones matemáticas para el cálculo de los parámetros óptimos para ajustar la frecuencia natural del DVA con la frecuencia de las vibraciones no deseadas en el sistema amortiguado, logrando controlar la amplitud de vibración del sistema primario en un intervalo mayor de la frecuencia de excitación. Por otra parte, Ren [39], presentó una configuración que difiere del DVA clásico, conocido como absorbedor de vibración dinámico no tradicional (NDVA). De acuerdo con esta nueva configuración, el amortiguador se conecta directamente a tierra, como se observa en la Figura 1.5 (b), a diferencia de un DVA clásico que se conecta a la estructura principal, Figura 1.5 (a).

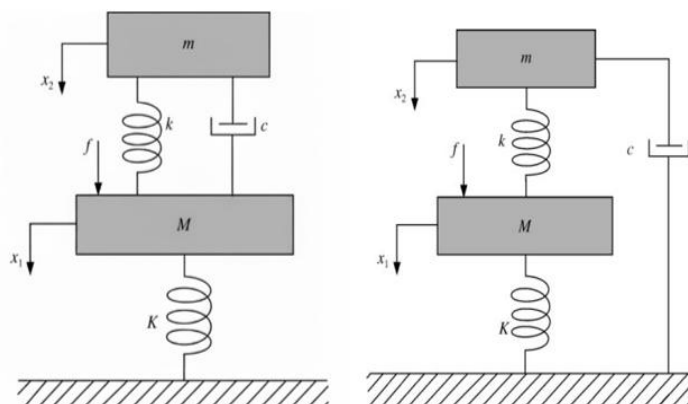


Figura 1.5 Absorbedores dinámicos de vibración: a) DVA convencional, b) NDVA [39].

Posteriormente, Smith [40], propuso un nuevo dispositivo mecánico para el control de vibraciones, denominado inersor, basándose en la analogía fuerza – corriente entre redes mecánicas y eléctricas. El inersor es un elemento de dos terminales que agrega una masa despreciable al sistema en comparación con los demás elementos que lo integran, así mismo, tiene la propiedad de modificar las frecuencias naturales y reducir las amplitudes de vibración. En la Figura 1.6 se muestran las correspondencias de la analogía fuerza-corriente, en el dominio mecánico, los parámetros f , v , k , m , c representan la fuerza, velocidad, rigidez, masa y el amortiguamiento respectivamente. Por otra parte, i , u , L , C y R denotan la corriente, voltaje, inductancia, capacitancia y la resistencia en una red eléctrica [41].

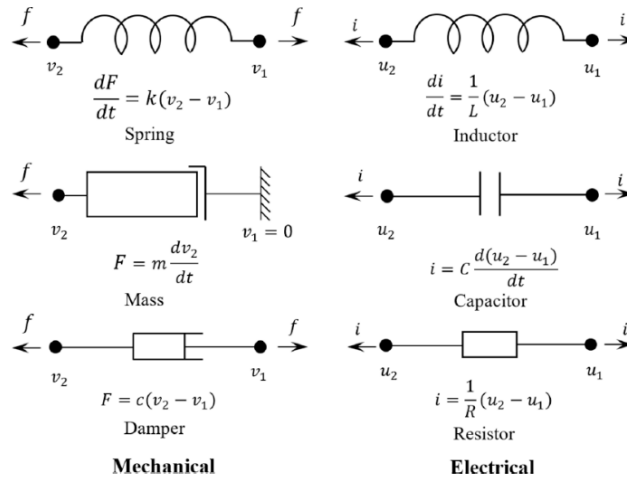


Figura 1.6 Analogía fuerza – corriente [41].

A partir del desarrollo del inersor, este elemento se incorporó en una nueva configuración del DVA, denominada absorbedor dinámico de vibración basado en inersores (IDVA). Hu y Chen [42], demostraron que es posible simplificar el modelo matemático de diversas configuraciones de redes mecánicas mediante una expresión que caracteriza el efecto de un amortiguador equivalente. En su estudio, sustituyeron el elemento amortiguador del DVA convencional por redes mecánicas basadas en inersores, y aplicando las técnicas de optimización H_∞ y H_2 , compararon el comportamiento dinámico de los IDVAs con el DVA tradicional. Concluyeron que las configuraciones de los IDVAs denotados en la literatura como C3, C4 y C6 presentan un mejor desempeño dinámico. Posteriormente, Barredo *et al.* [43] extendieron el método de optimización de puntos invariantes con aplicación a sistemas de tres o más grados de libertad. A está, metodología que se le denominó optimización por puntos fijos extendido, como resultado de su estudio, desarrollaron expresiones analíticas para el cálculo de parámetros óptimos de los IDVAs. Por otra parte, tomando como base el trabajo desarrollado por Hu y Chen [42], Mazón *et al.* [44], desarrollaron el concepto de admitancia mecánica global. Este enfoque permitió evaluar la eficiencia o desempeño dinámico de distintas topologías de DVA en estructuras complejas obteniendo expresiones

matemáticas que evalúan el efecto dinámico de las redes mecánicas como si actuara un amortiguamiento equivalente en el sistema. El concepto propuesto agiliza el análisis dinámico y optimiza el control de la amplitud de la vibración.

1.1.4 Conclusión del estado del arte

De acuerdo con el estudio del arte realizado, se encontró que las vibraciones inducidas por vórtices (VIV), tradicionalmente estudiadas por sus efectos nocivos en estructuras, han sido reorientadas hacia el aprovechamiento energético. La evolución de los modelos matemáticos, han sentado las bases para predecir y analizar esta interacción fluido – estructura. Los aerogeneradores VIV representan una alternativa prometedora, con ventajas potenciales en mantenimiento, impacto ambiental y operación a bajas velocidades. Sin embargo, aún es un tema de estudio debido al limitado intervalo de velocidades de viento en el cual opera en resonancia, lo que restringe severamente su viabilidad práctica y rendimiento energético.

La literatura reporta múltiples esfuerzos para ampliar el intervalo operativo de estos sistemas. Estos van desde modificaciones pasivas de la geometría (cilindros rectos vs cónicos, interferencia de estelas) hasta estrategias activas o semi activas de mayor complejidad (controladores magnéticos, sistemas magnéticos, elastómeros magnetorreológicos), muchas de estas soluciones introducen una complejidad en los requerimientos de control precisos o pérdidas en el consumo de energía auxiliar.

Por otra parte, los DVA, han evolucionado desde el modelo clásico convencional hasta configuraciones no tradicionales (NDVA) y, recientemente, hacia los que incorporan el elemento inersor (IDVA), demostrando ser una herramienta eficaz para el control de vibraciones ya que suprimen la amplitud de la respuesta del sistema primario en un intervalo amplio de frecuencias. La optimización de parámetros de los IDVA mediante criterios como la metodología del punto fijo extendido, H_∞ y H_2 , permite diseñar este tipo de dispositivos de control pasivo de la vibración *ad hoc* a cualquier sistema vibratorio.

Existe una clara convergencia conceptual entre el problema del aerogenerador VIV (intervalo de sintonía estrecho) y la fortaleza de los IDVA (control de vibración en banda ancha). No obstante, la revisión exhaustiva revela que la aplicación sistemática de IDVA optimizados como sistemas pasivos de sintonización para aerogeneradores VIV es un área que no se ha explorado.

De acuerdo con lo anterior, se visualiza un área de oportunidad: el desarrollo de un sistema de sintonización pasivo para aerogeneradores VIV basado en absorbedores dinámicos de vibración, que explore diferentes topologías de redes mecánicas. Por ello, esta investigación se centró en el análisis del comportamiento dinámico de un sistema acoplado fluido –

estructura VIV sintonizado con IDVA, con el objetivo de ampliar el intervalo de velocidades de viento en las que el aerogenerador opera bajo resonancia.

1.2 Hipótesis

Se ha demostrado que el efecto dinámico de un absorbedor de vibración DVA consiste en minimizar la amplitud de vibración de la estructura principal en un ancho de banda de frecuencia de excitación que es función de la configuración de la red mecánica del DVA propuesto.

Por lo tanto, la implementación de un sistema de sintonización pasivo en un aerogenerador VIV empleando IDVA, permitirá controlar la respuesta dinámica del aerogenerador, logrando que el aerogenerador VIV opere en condiciones de resonancia en un ancho de banda de frecuencias de excitación función de la velocidad del viento, donde el ancho de banda dependerá de la configuración de la red mecánica del DVA.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Desarrollar un sistema de sintonización pasivo utilizando IDVA para optimizar el comportamiento dinámico de los aerogeneradores VIV.

1.3.2 Específicos

- Desarrollar un modelo matemático de un sistema VIV acoplando un sistema de sintonización con base en absorbedores de vibración basado en inersores.
- Analizar y comprender los diferentes métodos de optimización reportados en la literatura.
- Optimizar los parámetros de diseño del absorbedor de vibración acoplado al sistema VIV.
- Realizar un estudio paramétrico del comportamiento del modelo.

1.4 Alcance y limitaciones

1.4.1 Alcances

- Modelo matemático de un sistema VIV acoplado a un absorbedor de vibraciones basado en inersores IDVA.
- Optimización de los parámetros del IDVA acoplado al sistema VIV, utilizando diferentes redes mecánicas.

1.4.2 Limitaciones

- Únicamente se realizó el modelo analítico del comportamiento dinámico del aerogenerador VIV.
- Para el estudio se consideró un sistema acoplado VIV de un grado de libertad.
- Se consideró una estructura con forma geométrica cilíndrica.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos esenciales para el análisis y desarrollo de la presente investigación. En primer lugar, se abordan los principios de las vibraciones inducidas por vórtices (VIV) desde la mecánica de fluidos, definiendo sus parámetros característicos. Posteriormente, se describe el modelo matemático del sistema acoplado fluido - estructura, propuesto por Facchinetti *et al.* [23], modelo que constituye la base para el desarrollo del modelo matemático del sistema VIV implementando DVA.

Así mismo, se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de vibraciones mecánicas, con énfasis en los absorbedores dinámicos de vibración y los métodos de optimización empleados para estos dispositivos. Finalmente, se presenta el concepto de subadmitancia mecánica y admitancia mecánica global, herramientas claves para el análisis del desempeño dinámico del sistema VIV con IDVA.

2.1 Fundamentos de vibraciones inducidas por vórtices.

2.1.1 Flujo alrededor de un cilindro

Cuando un cuerpo estacionario se encuentra inmerso en un fluido en movimiento se genera una fuerza de arrastre que tiende a desplazar el objeto en la dirección del flujo. La fuerza de arrastre se integra por dos componentes: presión y fricción. La presión de arrastre es producida por la diferencia de presiones entre la superficie del objeto, mientras que la fricción de arrastre es el resultado del esfuerzo de corte viscoso del fluido sobre la superficie del objeto. De este modo, los objetos pueden clasificarse en función de la predominancia de dichas componentes. Si la fricción de arrastre es superior, el cuerpo se denomina aerodinámico; en cambio, cuando predomina la presión de arrastre, el objeto se clasifica como un cuerpo generador de vórtices o *bluff body* [45].

2.1.2 Número de Reynolds y desprendimiento de vórtices

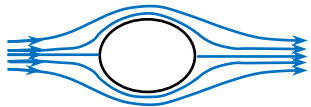
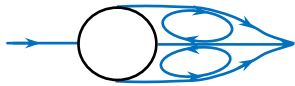
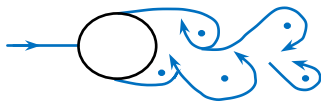
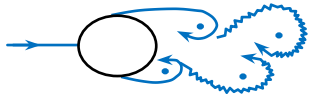
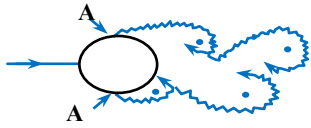
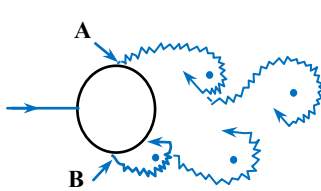
Cuando un flujo uniforme incide sobre un cilindro circular, la naturaleza del flujo en su estela está gobernada por el número de Reynolds (Re):

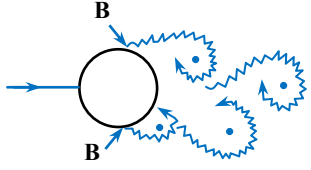
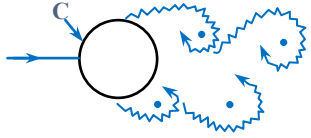
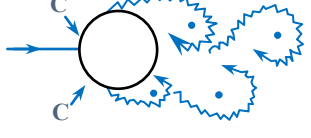
$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (2.1)$$

En donde U es la velocidad de fluido, D es el diámetro del cilindro y ν es la viscosidad cinemática del fluido. De forma física, el número de Reynolds representa la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en el flujo. Este valor es un indicador crucial para predecir la transición de un régimen laminar a uno turbulento, además de identificar el punto crítico de ocurrencia del desprendimiento de vórtices [8][45]. En la Tabla 2.1 se observan los aspectos cualitativos del flujo para diferentes regímenes de Reynolds. A valores muy bajos de este parámetro adimensional $Re < 5$, las fuerzas viscosas son dominantes, dando lugar a un flujo completamente adherente a la superficie del cilindro. Conforme el número de Reynolds aumenta, se observan transiciones progresivas en la estructura de la estela. En el intervalo de $5 < Re < 40$, se produce la separación del flujo, generándose vórtices simétricos y estacionarios aguas abajo del cuerpo. Al superar el $Re = 40$ y hasta aproximadamente $Re = 150$, esta configuración simétrica pierde su estabilidad. En este régimen, los vórtices comienzan a desprenderse de manera alternante en cada lado del cilindro, formando una estela periódica y laminar, comúnmente denominada calle de vórtices de Von Kármán. Posteriormente, en el intervalo de $150 < Re < 300$, la estela de vórtices experimenta una transición turbulenta, mientras que la capa límite adherida al cilindro mantiene su carácter laminar. Esta disociación se acentúa en el denominado intervalo subcrítico (aproximadamente $300 < Re < 1.5 \times 10^5$), donde la estela es completamente

turbulenta pero la capa límite permanece laminar. Para el estudio de VIV, algunos autores como Blevins [8], Facchinetti *et al.*[23], han centrado sus investigaciones en el intervalo $300 < Re < 1.5 \times 10^5$. Una característica fundamental de este régimen es que el coeficiente de arrastre del cilindro prácticamente permanece constante. Finalmente, para números de Reynolds superiores a aproximadamente 3×10^5 , se produce la transición a turbulencia en la propia capa límite, marcando el inicio del régimen supercrítico en donde el desprendimiento de vórtices ocurre desde una capa límite ya turbulenta, lo que resulta en una estela más delgada y un patrón de vórtices turbulento e irregular [8].

Tabla 2.1 Regímenes de flujo alrededor de un cilindro [8].

	Régimen	Descripción del flujo	Rango del número de Reynolds (Re)
a)		Flujo reptante (sin separación)	$Re < 5$
b)		Par fijo de vórtices simétricos	$5 < Re < 40$
c)		Calle de vórtices laminar (calle de Von Kármán)	$40 < Re < 200$
d)		Transición a la turbulencia en la estela	$200 < Re < 300$
e)		Estela completamente turbulenta A: Separación de la capa límite laminar.	$300 < Re < 3 \times 10^5$ Subcrítico
f)		A: Separación de la capa límite laminar. B: Separación de la capa límite turbulenta; pero la capa límite es laminar.	$3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$ Crítico (Transición inferior)

g)		B: Separación de la capa límite turbulenta; la capa límite es parcialmente laminar y parcialmente turbulenta.	$3.5 \times 10^5 < Re < 1.5 \times 10^6$ Supercrítico
h)		C: Capa límite completamente turbulenta en un lado.	$1.5 \times 10^6 < Re < 4 \times 10^6$ Transición superior
i)		C: Capa límite turbulenta en ambos lados.	$4 \times 10^6 < Re$ Transcrítico

2.1.3 Número de Strouhal y la frecuencia de desprendimiento de vórtices

El número de Strouhal (S_t) es el parámetro adimensional fundamental para caracterizar la periodicidad del desprendimiento de vórtices en el flujo alrededor de cuerpos sumergidos. Se define como la relación entre la frecuencia de desprendimiento de vórtices, las escalas de velocidad y la longitud del cilindro según la expresión:

$$S_t = \frac{f_v U}{D} \quad (2.2)$$

En donde f_v es la frecuencia de desprendimiento periódico de vórtices, D es el diámetro del cilindro y U es la velocidad de la corriente libre incidente. Este número adimensional vincula directamente la dinámica oscilatoria de la estela en condiciones del flujo principal y es de especial relevancia porque la frecuencia de desprendimiento f_v coincide con la frecuencia de la fuerza de sustentación fluctuante que experimenta el cuerpo. En contraste, la fuerza de arrastre oscilante presenta una frecuencia igual al doble de la frecuencia de desprendimiento de vórtices [8].

2.1.4 Velocidad reducida

La velocidad reducida (U_r), es el parámetro adimensional fundamental que caracteriza la intensidad de la interacción entre una corriente fluida y una estructura vibrante. Se define como:

$U_r = \frac{U}{f_n D}$	(2.3)
-------------------------	-------

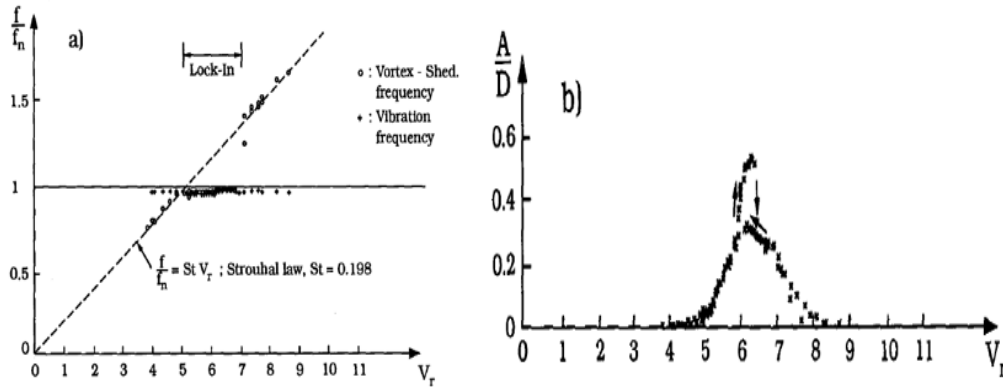
Donde U es la velocidad de corriente libre, f_n es la frecuencia natural de la estructura (en el fluido) y D es el diámetro del cilindro. Físicamente U_r representa el número de longitudes de cuerpo que el fluido recorre durante un ciclo completo de vibración natural de la estructura. Además, su inversa $1/U_r$ es directamente proporcional a la relación de frecuencias $f_v/f_n = 1$, estableciendo así el vínculo esencial entre la ley de Strouhal que gobierna el desprendimiento y la condición de bloqueo estructural [8].

2.1.5 Masa añadida

La masa añadida (masa virtual o masa hidrodinámica) es un efecto fundamental en la interacción fluido – estructura que describe cómo un cuerpo, al acelerar dentro de un fluido, debe también desplazar y poner en movimiento una porción del fluido que lo rodea. Esta porción de fluido, al ser acelerada junto con el cuerpo, se comporta como si fuera una masa adicional unida a la masa física de la estructura [8].

2.1.6 Fenómeno de bloqueo

El fenómeno de bloqueo o *lock-in* constituye un mecanismo de acoplamiento no lineal característico de sistemas de interacción fluido - estructura [46]. Se manifiesta cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices f_v se aproxima a la frecuencia natural de vibración de la estructura f_n . Bajo esta condición, el valor de f_v se desvía temporalmente de la relación lineal con la velocidad del flujo, establecida por la ley de Strouhal (S_t) y se sincroniza o acopla con la frecuencia estructural ($f_v/f_n = 1$), como se ilustra en la Figura 2.1. Debido a este acoplamiento, la fuerza de sustentación oscila en fase con el movimiento del cuerpo, amplificando la vibración y generando amplitudes significativas [9], [10]. Por consiguiente, la estela se ve directamente afectada por el movimiento del cilindro. Sin embargo, cuando la frecuencia de desprendimiento se aleja de la frecuencia natural del cilindro (por ejemplo, al cambiar la velocidad del viento), el cuerpo pierde el control sobre el proceso de desprendimiento. En un punto dado, el desprendimiento de vórtices se “desintoniza” de la frecuencia del cilindro y vuelve a seguir la relación lineal del Strouhal.


 Figura 2.1 Fenómeno de *lock-in* [9].

2.1.7 Modos de desprendimiento de vórtices e histéresis

La amplitud de vibración durante el *lock-in* no es ilimitada. Experimentos detallados [15],[47], [48], han demostrado que, para amplitudes de vibraciones pequeñas y moderadas, la estela mantiene el modo clásico de desprendimiento, denominado “2S” (dos vórtices por ciclo), que genera la calle de vórtices de Von Kármán tradicional. Sin embargo, cuando la amplitud de vibración crece, la estela sufre una transición abrupta a un modo “2P” (dos pares de vórtices por ciclo). Este cambio en la topología de la estela está asociado a una redistribución de las fuerzas hidrodinámicas y tiene una implicación crucial: limita la amplitud máxima de vibración. La transición al modo 2P provoca una caída brusca de amplitud de respuesta, como se observa en la Figura 2.2. La transición entre los modos de estela y la curva de respuesta de amplitud no son necesariamente reversibles, dependiendo de si la velocidad de flujo incrementa o disminuye, el sistema puede exhibir histéresis, manteniendo un modo de vibración y un nivel de amplitud diferentes para un mismo valor de velocidad reducida [9], [15].

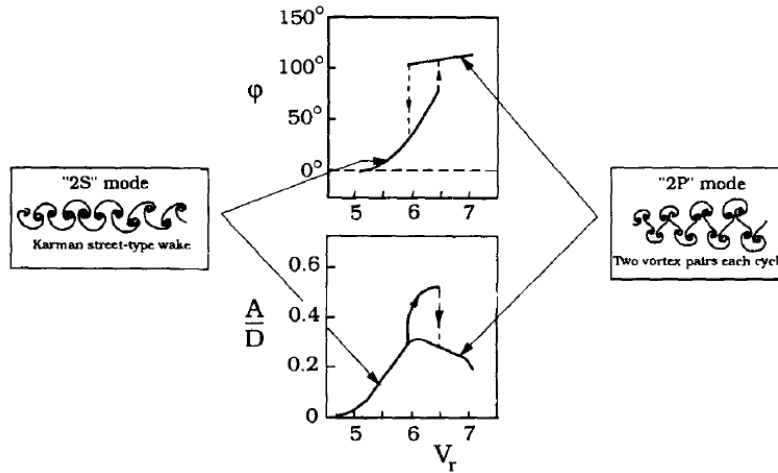


Figura 2.2 Efecto de histéresis de acuerdo con los modos de desprendimiento de vórtices [15].

2.2 Modelo matemático acoplado fluido – estructura por Facchinetti

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema acoplado VIV, Facchinetti *et al.* [23], desarrollaron un modelo matemático en el que emplearon un cilindro rígido circular, de un grado de libertad (1 DOF) con diámetro D , el cual oscila en la dirección transversal (dirección Y) por un flujo a una velocidad constante U , (Figura 2.3).

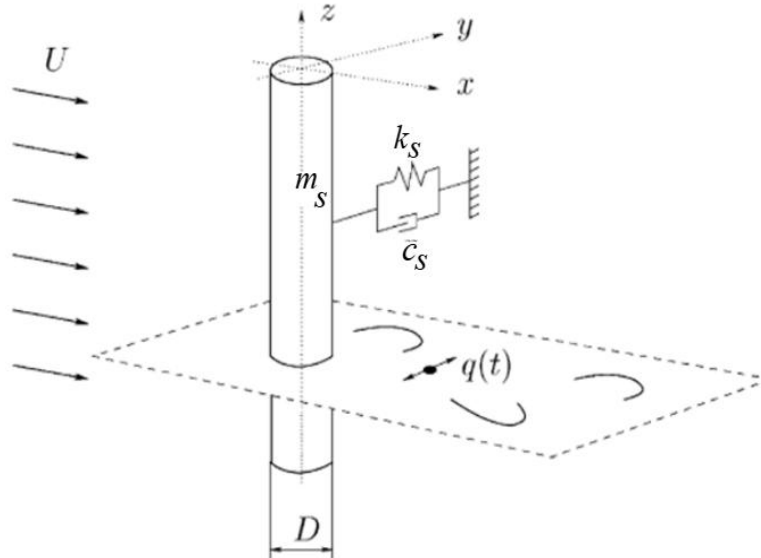


Figura 2.3 Modelo VIV de un cilindro montado elásticamente acoplado con osciladores de estela, donde (m_s) es la masa del cilindro, (D) es el diámetro del cilindro, (c_s) es la rigidez de la estructura, (k_s) el amortiguamiento de la estructura, $q(t)$ representa la estela de vórtices y (U) es la velocidad de flujo [23].

2.2.1 Acoplamiento fluido – estructura

Tomando como referencia la Figura 2.3, el modelo matemático adimensional del comportamiento dinámico del sistema estructura - fluido acoplado, se define como:

- Oscilador de la estructura:

$$\ddot{y} + \left(2\zeta\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right)\dot{y} + \delta^2 y = s_v \quad (2.4)$$

- Oscilador de la estela:

$$\ddot{q} + \varepsilon(q^2 - 1)\dot{q} + q = f \quad (2.5)$$

Siendo δ la frecuencia angular reducida de la estructura, también relacionada con la velocidad reducida del fluido U_r :

$$\delta = \frac{\Omega_s}{2\pi St(U/D)} = \frac{1}{U_r S_t}, \quad U_r = \frac{2\pi}{\Omega_s} \frac{U}{D} \quad (2.6)$$

Donde:

$$s_v = \frac{S_v}{D\Omega_f^2 m} = S_v \frac{D}{4\pi^2 S_t^2 U^2 m}, \quad f = \frac{F}{D\Omega_f^2} = F \frac{D}{4\pi^2 S_t^2 U^2} \quad (2.7)$$

$$S_v = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_L \quad (2.8)$$

$$s_v = Mq \quad M = \frac{C_{Lo}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_t^2 \mu} \quad (2.9)$$

La definición de los parámetros de las Ecs (2.7) – (2.9) se definen en las Ecs. (3.11) – (3.13) del Capítulo 3 de la sección de la presente investigación

De igual manera, la excitación f de la Ec. (2.5) considera los efectos de la estructura sobre el oscilador de estela, dependiendo del modelo de acoplamiento:

- Acoplamiento por desplazamiento: $f = Ay$
- Acoplamiento por velocidad: $f = A\dot{y}$
- Acoplamiento por aceleración: $f = A\ddot{y}$

Donde A es un factor de escala de la fuerza f acoplada.

2.2.2 Dinámica del sistema acoplado

Para resolver el sistema dinámico acoplado del oscilador estructural y del fluido Ecs. (2.4) y (2.5) respectivamente, se propone una solución de tipo armónico, es decir:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad q(t) = q_0 \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

Donde y y q son funciones de la frecuencia angular $\omega = \Omega_{exc} / \Omega_f$, donde y_0 y q_0 denotan amplitudes adimensionales independientes del tiempo. La fuerza de excitación acoplada f (acoplamiento por desplazamiento, velocidad y aceleración), se puede expresar como:

$$f = Ay_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \dot{f} = -A\omega y_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \ddot{f} = -A\omega^2 y_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.11)$$

Por otra parte, Facchinetti *et al.*[23] definió una velocidad reducida basada en la frecuencia de excitación:

$$U_r = \frac{2\pi}{\omega \Omega_f} \frac{U}{D} = \frac{1}{\omega S_t} \quad (2.12)$$

En las Ecs (2.13), (2.14) y (2.15) se muestran la función de transferencia de amplitud y_0 de la estructura, así como la amplitud de la estela q_0 y la frecuencia de desprendimiento de vórtices ω , respectivamente:

$$\frac{y_0}{q_0} = \frac{M}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(2\zeta\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right)^2}} \quad (2.13)$$

$$\frac{q_0^2}{4} = 1 + \frac{AM}{\varepsilon} \frac{C}{(\delta^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(2\zeta\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right)^2} \quad (2.14)$$

$$\omega^6 - \omega^4 \left[1 + 2\delta^2 - \left(2\zeta\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right)^2\right] - \omega^2 \left[-2\delta^2 - \delta^4 + \left(2\zeta\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right)^2\right] - \delta^4 + G = 0 \quad (2.15)$$

En la Tabla 2.2 se presentan los parámetros del sistema acoplado VIV reportado por Facchinetti *et al.* [23].

Tabla 2.2 Parámetros del sistema acoplado VIV obtenidos por Facchinetti *et al.* [17].

Descripción	Parámetro	Valor
Número de Strouhal	S_t	0.2
Número de masa	M	2×10^{-4}
Relación de masa adimensional	μ	250
Factor de escala de la fuerza acoplada	A	12
Coefficiente de no linealidad	ε	0.3
Parámetro de pérdida	γ	0.8
Amortiguamiento a causa del soporte	ζ	0.0031

Los coeficientes C y G de las Ecs (2.14) y (2.15), dependen de la fuerza de acoplamiento f y se reporta en la Tabla 2.2. La frecuencia angular ω se obtiene de la solución de la Ec. (2.15), y arroja como resultados tres raíces reales positivas. De acuerdo con Facchinetti *et al.* [23], distintas raíces pueden estar asociadas a la histéresis del sistema VIV, se pueden explorar diversas soluciones dependiendo de la elección particular de los modelos de acoplamiento, cuando se varía la velocidad reducida U_r .

 Tabla 2.3 Coeficientes C y G para los modos de acoplamiento del sistema

Desplazamiento	$C = -(2\zeta\delta + \gamma/\mu),$	$G = AM(\delta^2 - \omega^2)$
Velocidad	$C = \delta^2 - \omega^2$	$G = AM(2\zeta\delta + \gamma/\mu)\omega^2$
Aceleración	$C = (2\zeta\delta + \gamma/\mu)\omega^2,$	$G = AM(\omega^2 - \delta^2)\omega^2$

En las Figuras. 2.4, 2.5 y 2.6 se muestran el comportamiento de la frecuencia angular de desprendimiento de vórtice ω , la amplitud de la estela q_0 y la amplitud de la estructura y_0 , en función de la velocidad reducida U_r para las fuerzas de acoplamiento en a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración, respectivamente.

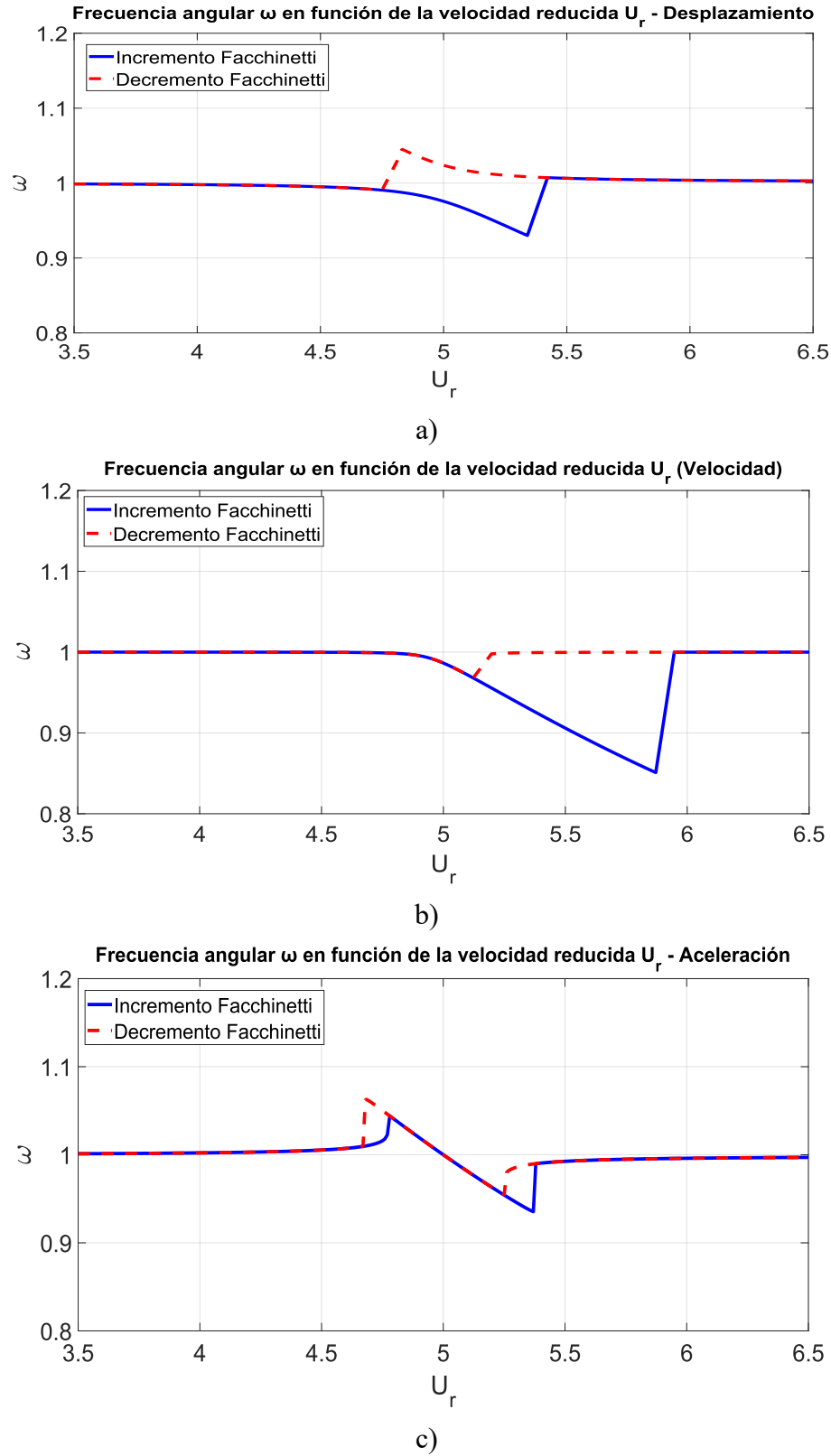


Figura 2.4 Frecuencia angular de desprendimiento de vórtices ω en función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.

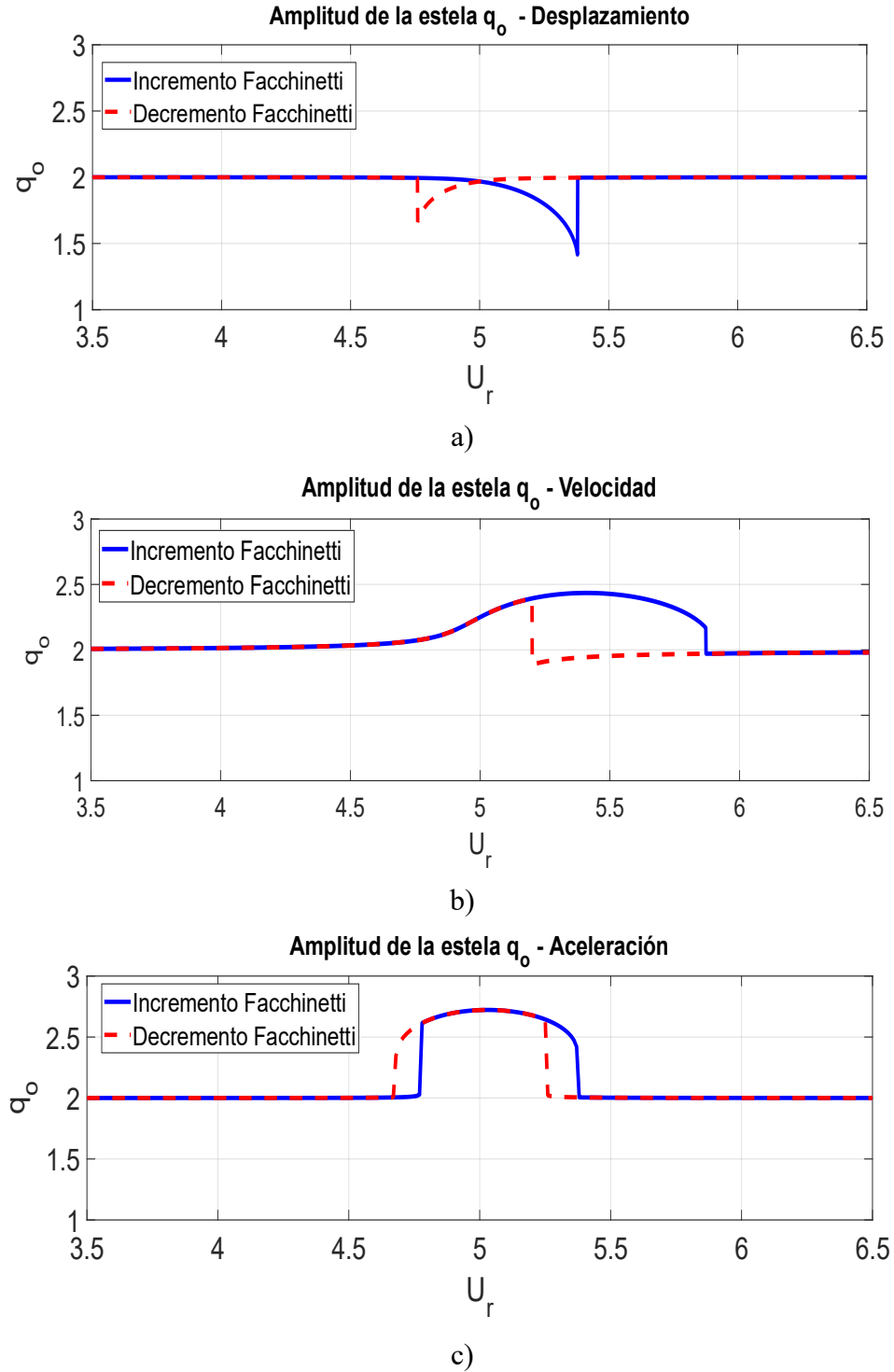
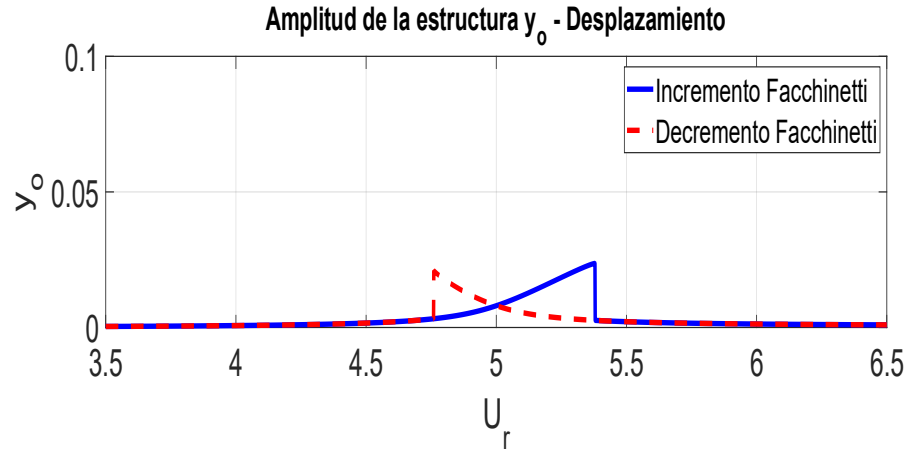
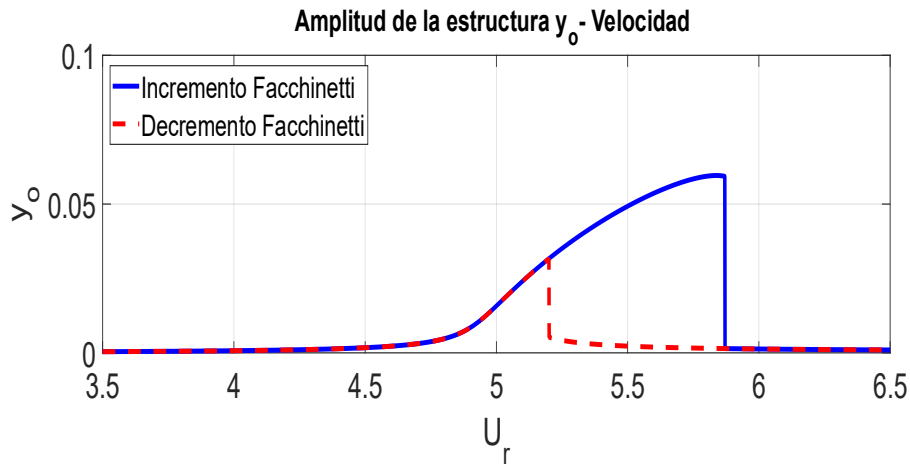


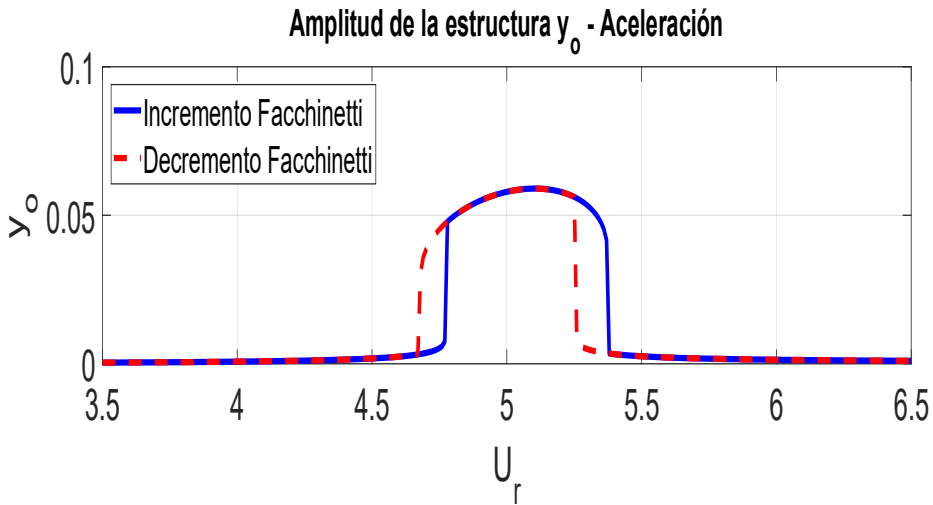
Figura 2.5 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.



a)



b)



c)

Figura 2.6 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento, b) velocidad, c) aceleración.

2.3 Conceptos fundamentales de vibraciones mecánicas

2.3.1 Vibración

De acuerdo con Rao *et al.* [49], se denomina vibración u oscilación a todo movimiento que se repite de una forma periódica en el tiempo. Este fenómeno es observable en casos como el vaivén de un péndulo y el ejemplo de una cuerda pulsada. Sin embargo, en el estudio de la teoría de la vibración encuentra sus aplicaciones más críticas en contextos técnicos e industriales como en el análisis de máquinas rotativas, o el monitoreo de estructuras civiles sometidas a cargas dinámicas, entre otros ejemplos. Esta teoría analiza dichos movimientos oscilatorios y las fuerzas que intervienen en ellos.

2.3.2 Sistema vibratorio

Un sistema vibratorio común se compone de tres elementos fundamentales: Un componente que almacena energía potencial (resorte), otro que almacena la energía cinética (masa) y un elemento que disipa la energía progresivamente (amortiguamiento). El proceso vibratorio consiste en la conversión alternante entre la energía potencial y cinética. En sistemas amortiguados, parte de esta energía se disipa en cada ciclo, por lo que es necesario un aporte energético externo para mantener una oscilación constante [49].

2.3.3 Frecuencia natural

La frecuencia natural es una propiedad intrínseca de todo sistema vibratorio, que describe la “forma de vibrar libremente” de un sistema, tras una perturbación inicial sin la influencia de fuerzas externas. Esta frecuencia depende de los parámetros físicos del sistema, tales como su masa y rigidez, en sistemas con múltiples grados de libertad, existirá un espectro de frecuencias naturales por cada modo de vibración posible [49].

2.3.4 Resonancia

La resonancia es un fenómeno que se presenta cuando la frecuencia de una fuerza de excitación externa coincide con la frecuencia natural del sistema. Esta sintonía genera una transferencia máxima de energía, provocando amplificaciones extremas en la amplitud de vibración. Estas oscilaciones descontroladas inducen esfuerzos estructurales que pueden ocasionar fallas catastróficas en el sistema. Un ejemplo es el colapso del puente de Tacoma Narrows en 1940, que ilustra drásticamente los riesgos de la interacción entre vientos constantes y las frecuencias naturales de una estructura [49].

2.3.5 Efecto Sommerfeld

En 1902, Arnold Sommerfeld fue el primero en observar un fenómeno peculiar en un sistema vibratorio compuesto por un rotor excéntrico y una base elástica. Descubrió que, cuando la frecuencia de rotación se aproxima a la frecuencia natural del sistema, una gran parte de la energía suministrada por la fuente de excitación externa se invierte en generar vibraciones estructurales en lugar de incrementar la velocidad de rotación. Un aspecto inusual es que, al superar la frecuencia natural, las oscilaciones experimentan un cambio abrupto y la amplitud durante el incremento de energía no es la misma que durante su disminución. Como se observa en la Figura 2.7 (a), los tramos correspondientes a los puntos a, b, c y d corresponden a cambios bruscos que siguen trayectorias distintas. Por su parte, en la Figura 2.7 (b), se presentan datos experimentales que demuestran el efecto Sommerfeld en un sistema simplificado de una turbina eólica, demostrando cómo la amplitud de la vibración varía con la frecuencia de rotación [50].

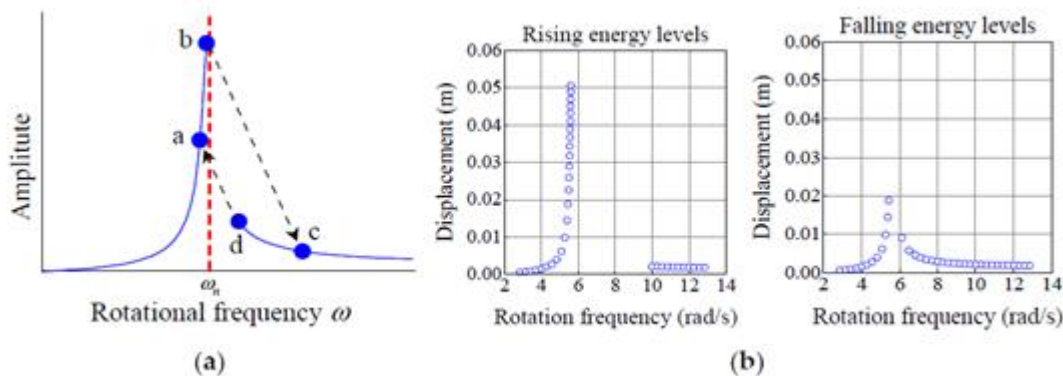


Figura 2.7 Efecto Sommerfeld en un rotor excéntrico: a) Amplitud de la frecuencia rotacional b) Resultados que demuestran el efecto Sommerfeld al variar la velocidad de rotación [46].

2.3.6 Absorbedores dinámicos de vibración (DVA)

Un absorbedor de vibración dinámico (DVA) es un dispositivo mecánico diseñado para mitigar o eliminar vibraciones no deseadas en un sistema principal. Consiste en una masa y un resorte adicional y, opcionalmente un amortiguador, que se acopla al sistema que requiere protección. Este acoplamiento transforma el sistema en uno de dos grados de libertad, modificando así su respuesta dinámica fundamental ya que el sistema tiene dos frecuencias naturales. El principio de funcionamiento se basa en redirigir la energía vibratoria de la estructura hacia el absorbedor. Cuando se sintoniza adecuadamente los parámetros del DVA, se generan fuerzas de oposición que contrarrestan la excitación, logrando reducir significativamente la amplitud de vibración dentro de una banda angosta de frecuencia [36], [38], [49]. El diseño de los DVA con y sin amortiguamiento se observa en la Figura 2.8.

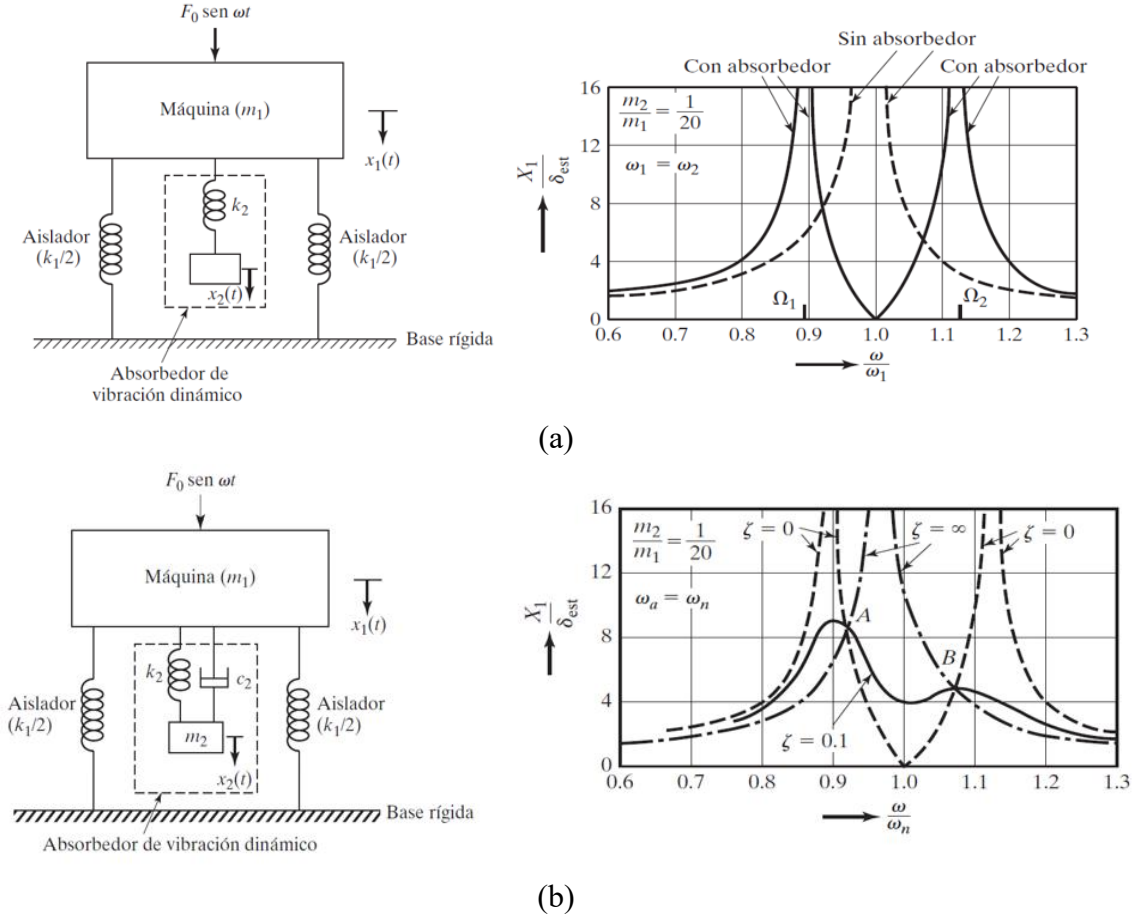


Figura 2.8 Sistema masa – resorte incorporando absorbentes dinámicos de vibración (DVA): (a) sin amortiguamiento y (b) con amortiguamiento [49].

2.3.7 Inersor

Es un dispositivo mecánico introducido por Smith [40], que actúa como un elemento de dos terminales dentro de un sistema dinámico. Su principal función es absorber y almacenar energía cinética de vibración, transformándola en energía rotacional, típicamente mediante el giro de un volante de inercia. La propiedad fundamental que lo define es que la fuerza que se genera entre sus dos terminales es proporcional a la aceleración relativa entre ellas, la cual se expresa matemáticamente como:

$$F = b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \quad (2.16)$$

Donde la constante b , denominada inertancia, tiene unidades de masa (kg). Al introducir inercia aparente (o efectiva) en un sistema, el inersor tiene el efecto de modificar sus frecuencias naturales y atenuar las amplitudes de vibración, constituyendo el análogo mecánico directo del capacitor eléctrico, completando así la analogía clásica entre dominios mecánicos y eléctricos. Debe ser diseñado para proporcionar el valor de inertancia deseado

y cumplir con las especificaciones de un dispositivo real, de forma análoga a como se realiza con resortes y amortiguadores.

2.3.8 Red mecánica

Es un sistema compuesto por elementos mecánicos interconectados como resortes, masas, amortiguadores e inersores, en configuraciones rígidas en serie, paralelo o mixtas. Su movimiento está restringido a un eje fijo respecto a un punto de referencia inercial, como ejemplo se muestra una red mecánica en la Figura 2.9. Aunque las diferentes configuraciones de redes mecánicas permiten optimizar el control de vibraciones, estas presentan una complejidad en su análisis y ajuste [40].

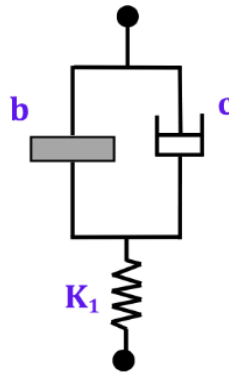


Figura 2.9 Red mecánica basada en inersores. Donde: b es la inertancia, c es el coeficiente de amortiguamiento y K_1 es la constante del resorte [42].

2.3.9 Sub-admitancia mecánica

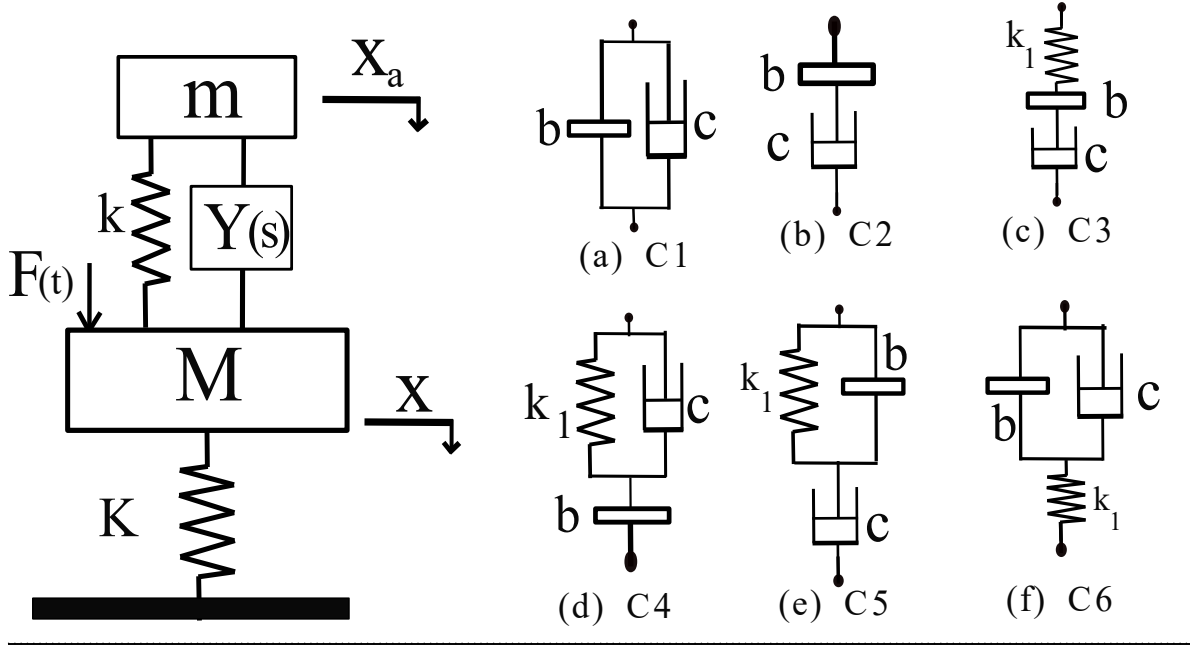
De acuerdo con Hu *et al.*[42], se ha demostrado que, aplicando el concepto de sub-admitancia mecánica, es posible simplificar el modelado matemático de diversas configuraciones de redes mecánicas en los DVA. Este concepto, análogo al concepto de admitancia en circuitos eléctricos, se define en el dominio de la frecuencia y representa la relación entre la fuerza aplicada y la velocidad resultante, y se denota como $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{V(s)} \quad (2.17)$$

Hu *et al.*[42], analizaron seis configuraciones de redes mecánicas (Figura 2.10). En una red mecánica, la interacción entre resortes, amortiguadores e inersores produce una respuesta dinámica semejante al comportamiento de un único amortiguador equivalente, manteniendo así la coherencia con la analogía fuerza - corriente entre sistemas mecánicos y eléctricos. Los elementos individuales (masa, rigidez e inertancia) se combinan en configuraciones en serie

y paralelo. Este agrupamiento se realiza por medio de los coeficientes de amortiguamiento de cada elemento mecánico de la red, resultando en las siguientes expresiones:

$$C_m = ms \quad C_k = \frac{k}{s} \quad C_b = bs \quad (2.18)$$



$$Y_1(s) = bs + c$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{bs} + c}$$

$$Y_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bs}}$$

$$Y_4(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1}{s} + c} + \frac{1}{bs}}$$

$$Y_5(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1}{s} + bs} + \frac{1}{c}}$$

$$Y_6(s) = \frac{1}{\frac{1}{bs+c} + \frac{s}{k_1}}$$

Figura 2.10 Sustitución del elemento amortiguador por diferentes configuraciones de redes mecánicas basadas en inersores [42].

2.3.10 Admitancia mecánica global (A_g)

Mazón *et al.* [44], desarrollaron el concepto de *admitancia mecánica global* para simplificar el análisis y la evaluación del comportamiento dinámico de diversas configuraciones de los DVA basados en la topología de las redes mecánicas, implementados en estructuras complejas. Este concepto se presenta como una extensión de la sub - admitancia mecánica y posee la cualidad de aislar parcialmente la configuración del DVA con respecto a la estructura primaria. En la Figura 2.11 se muestra la analogía de simplificación de los diagramas esquemáticos de los DVAs basados en la topología de las redes mecánicas. En la Figura 2.11 (a) y 2.11 (b), se muestran los diagramas esquemáticos de la estructura con DVA reportada

por Hartog (DVA convencional) y la estructura con el DVA propuesto por Asami (DVA tipo serie) respectivamente, donde k_s , c_s y m_s denotan las propiedades elásticas, de amortiguamiento y de inercia de la estructura principal (estructura primaria), x_s es el desplazamiento de la masa m_s y F la fuerza de excitación aplicada a la estructura principal. Para la estructura secundaria k_1 , c_1 y m_1 son los elementos mecánicos de rigidez, amortiguamiento y masa correspondientes al DVA, mientras que x_1 corresponde al desplazamiento de la masa m_1 . En el DVA propuesto por Asami, en la Figura 2.11 (b) se observa que se agrega un segundo DVA conectado en serie al DVA clásico, sus elementos mecánicos de rigidez, amortiguamiento y masa son k_2 , c_2 y m_2 respectivamente, el desplazamiento de la masa m_2 se denota por x_2 . De acuerdo con la literatura aplicando el concepto de sub – admitancia mecánica, el sistema de la Figura 2.11 (a) y Figura 2.11 (b) se puede representar de forma generalizada como el esquema de la Figura. 2.11 (c), donde A_1 se le denota como sub-admitancia mecánica que es función de los elementos mecánicos k_1 y c_1 conectados en paralelo y que se encuentra conectada entre las masas m_s y m_1 , donde esta configuración representa el comportamiento de un DVA basado en los DVAs convencionales. De forma similar A_2 es la sub-admitancia que es función de los elementos mecánicos k_2 y c_2 conectados en paralelo y que se encuentran conectada entre las masas m_1 y m_2 , representando este sistema el comportamiento de los DVAs basados en el DVA tipo serie. Siguiendo la misma tendencia, la Figura 2.11 (b) se puede extender considerando una sub – admitancia A_3 configuración que representa el comportamiento del DVA tipo serie con conexión a tierra.

Es importante mencionar que las sub – admitancias A_1 , A_2 y A_3 no están restringidas a configuraciones únicamente en paralelo entre los elementos mecánicos k_i y c_i ($i=1,2$ y 3), por otra parte, si la masa m_1 no existe en el sistema vibratorio de la Figura 2.11 (b), una de las terminales de la sub – admitancia A_1 tiene conexión a tierra, por lo que el sistema actuará como un IDVA. De manera similar si la masa m_2 no existe en el sistema vibratorio de la Figura 2.11 (b) una de las terminales de la sub – admitancia A_2 tiene conexión a tierra, por tanto, el sistema tendrá un comportamiento de un DVA no convencional.

En el diagrama esquemático de la Figura. 2.11 (c) la conexión en serie secuencial entre las masas m_s , m_1 , m_2 y la sub-admitancias A_1 , A_2 y A_3 se puede considerar como una nueva red mecánica e implementar nuevamente la admitancia mecánica. Sin embargo, debido a que los desplazamientos de las masas y los posibles desplazamientos internos de las sub-admitancias de los DVAs hacen que el concepto de admitancia mecánica sea insuficiente. Para superar esta adversidad, el esquema se generaliza como se observa en la Figura 2.11(d), donde el efecto dinámico de las masas m_1 , m_2 y las sub-admitancias A_1 , A_2 y A_3 se engloban en una función generalizada denominada como admitancia mecánica global (A_g) representando una

función de amortiguamiento resultante que puede acoplarse al análisis de una estructura de 1 GDL [44].

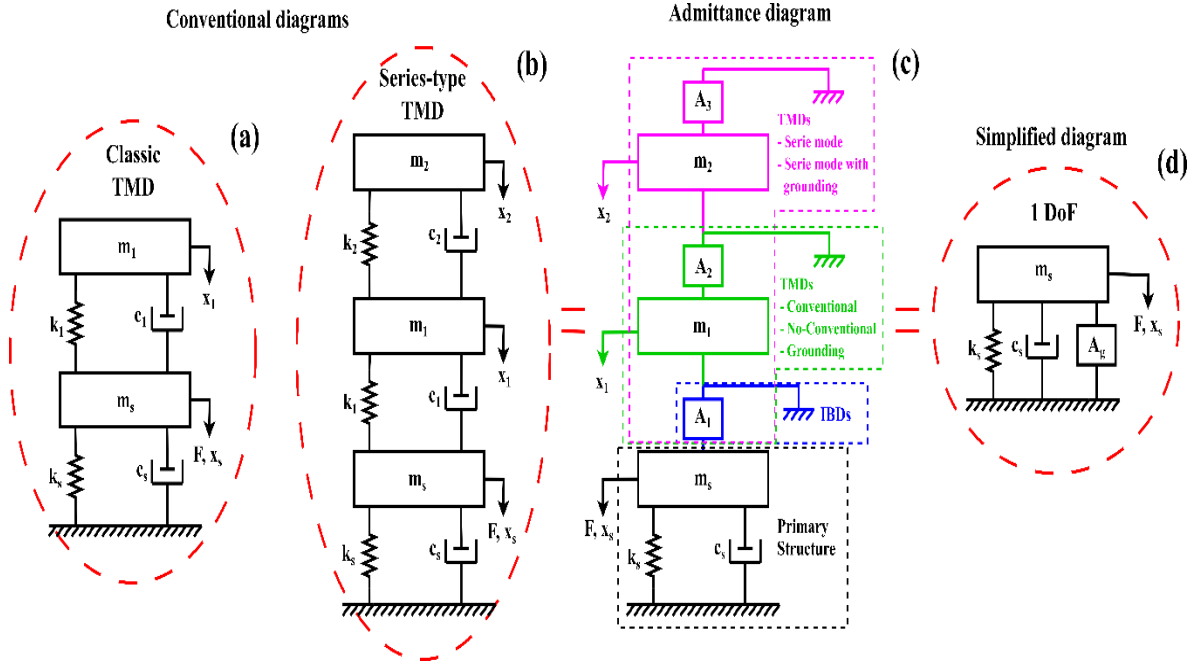


Figura 2.11 Esquema de la simplificación de DVAs: a) DVA clásico, b) DVA clásico en serie, c) Diagrama general de DVAs basado en la topología de redes mecánicas mediante admitancia mecánica y c) Diagrama simplificado mediante admitancia mecánica global [44].

2.4 Optimización

La optimización es un proceso matemático y computacional que consiste en sintonizar o ajustar los componentes de un sistema vibratorio para obtener una respuesta de vibración más estable. En el ámbito del control de vibraciones, el objetivo principal de la optimización es minimizar la amplitud de vibratoria de la estructura principal. Este proceso se fundamenta en el análisis de la función de transferencia del sistema, para obtener valores numéricos o expresiones analíticas que garanticen el desempeño deseado [43], [49], [51].

2.4.1 Metodología de puntos invariantes

La metodología de los puntos invariantes es una técnica empleada para optimizar sistemas dinámicos de dos grados de libertad. En estos sistemas, la respuesta en frecuencia depende de tres parámetros adimensionales: la relación de masa (variable independiente), la relación de frecuencias naturales y el amortiguamiento (variables dependientes). El análisis consiste en identificar los puntos invariantes (A y B) mediante la respuesta en estado estable del sistema cuando la relación de amortiguamiento tiende a cero ($\zeta \rightarrow 0$) y cuando tiende a infinito ($\zeta \rightarrow \infty$), como se observa en la Figura 2.13. Al igualar las expresiones de respuesta

en amplitud para estos dos casos límite en dichos puntos, es posible resolver un sistema de ecuaciones, donde se obtienen las expresiones matemáticas para los parámetros óptimos del sistema. Este método permite aplanar la curva de respuesta en frecuencia del sistema principal, al forzar a que los puntos invariantes sean de igual amplitud, se minimizan las amplitudes resonantes y se mejora significativamente el desempeño dinámico del sistema en un intervalo de frecuencias, logrando una atenuación de vibraciones óptima [36], [38], [49].

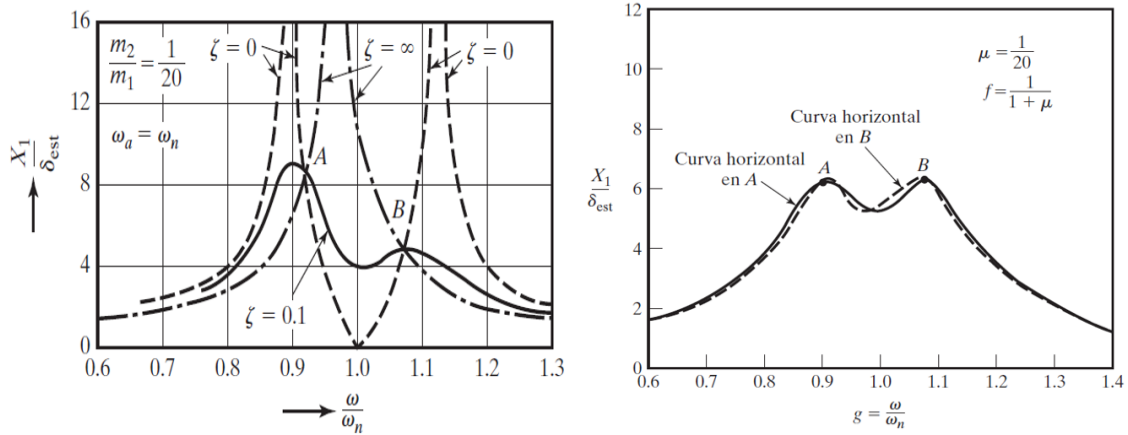


Figura 2.12 Optimización de un absorbedor de vibraciones mediante la metodología de puntos fijos [49].

2.4.2 Metodología del punto fijo extendido

Propuesta por Barredo *et al.* [43], esta metodología constituye una extensión del método de puntos invariantes y fue desarrollada para sistemas de tres grados de libertad, específicamente para los absorbedores dinámicos de vibración basados en inersores (IDVA). Se basa en igualar a la misma amplitud cuatro puntos invariantes mediante el uso de los parámetros óptimos del sistema. Estos parámetros se obtienen a partir de las raíces de los polinomios de la respuesta del sistema $R_{(s)}$ cuando $(\zeta \rightarrow 0, \infty)$ y su magnitud H_m , lo que se representa matemáticamente como:

$$R_{(s)} = H_m \quad (2.24)$$

Los polinomios resultantes, generalmente de cuarto grado, dependen de la cantidad de desplazamientos considerados en la configuración de la red mecánica analizada. En el caso de los sistemas IDVA, se manejan cinco variables: una dependiente (relación de masa del absorbedor) y cuatro independientes (relación de la inercancia, relación de la frecuencia del inersor-absorbedor, relación de frecuencia absorbedor-sistema principal y la relación de amortiguamiento). Para encontrar las raíces en función de los términos independientes de estos polinomios, se emplean las fórmulas de Vieta. El desarrollo matemático del sistema de ecuaciones resultante permite determinar las expresiones para las variables adimensionales

óptimas. Posteriormente, se obtiene la expresión para la relación de amortiguamiento óptimo utilizando tres frecuencias invariantes. Estas frecuencias se determinan analizando las tendencias de amortiguamiento cuando $(\zeta \rightarrow 0)$ y $(\zeta \rightarrow \infty)$, tal como se ilustra en la Figura 2.13 b). Determinadas las frecuencias invariantes, la relación de amortiguamiento óptimo se calcula mediante la siguiente expresión matemática:

$$\zeta_{op} = \sqrt{\frac{\zeta_{\lambda_1 \rightarrow \infty}^2 + \zeta_{\lambda_2 \rightarrow 0}^2 + \zeta_{\lambda_3 \rightarrow \infty}^2}{3}} \quad (2.25)$$

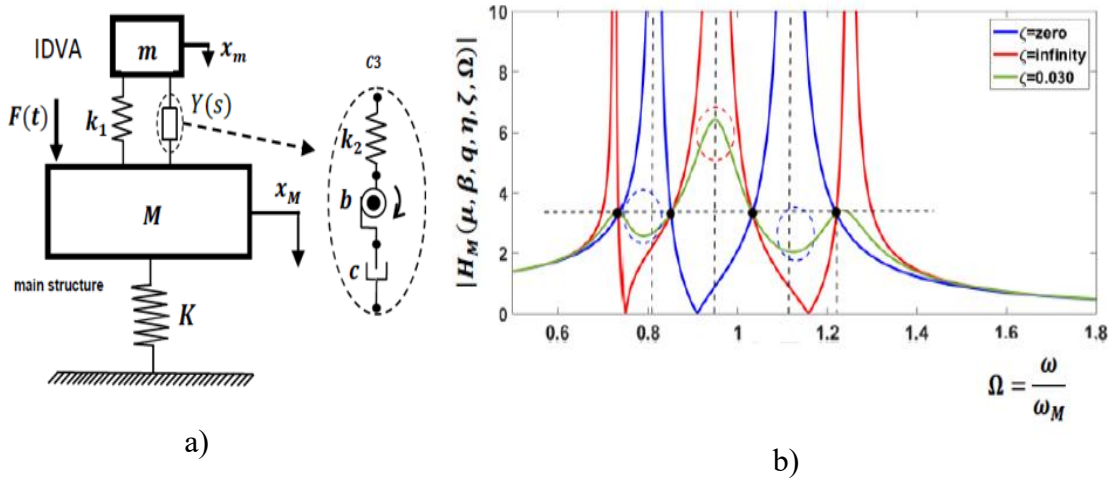


Figura 2.13 a) Diagrama de un sistema IDVA empleando la configuración de la red mecánica C3. b) Respuesta del comportamiento dinámico del sistema al calibrar los cuatro puntos invariantes [43].

Capítulo 3. Modelo matemático de sistema acoplado VIV - modificado

El modelo del oscilador acoplado de Facchinetti *et al.* [23], presentado en la Sección 2.2 *Modelo matemático acoplado fluido – estructura por Facchinetti* del Capítulo 2, proporciona una base matemática sólida para el estudio de las vibraciones inducidas por vórtices (VIV). Sin embargo, para los fines específicos de esta investigación centrada en analizar y ampliar el intervalo de operación en resonancia, la variable adimensional de frecuencia tradicional $\omega = \Omega_{exc} / \Omega_f$ puede no ser la más intuitiva.

En este capítulo se propone una reformulación del modelo, mediante una nueva variable adimensional de la frecuencia. Esta elección posee una ventaja interpretativa fundamental: la condición de *lock-in*, se manifiesta directamente facilitando la identificación y el análisis en este régimen. A partir de la formulación dimensional original, se deriva el sistema de ecuaciones adimensionales modificado y se presenta su solución analítica.

Finalmente, se analiza la respuesta dinámica del sistema (frecuencia de desprendimiento de vórtices, amplitud de la estela y amplitud de la estructura) validando el modelo y estableciendo la herramienta analítica que será extendida en el siguiente capítulo con la incorporación de los absorbedores dinámicos de vibración y redes mecánicas.

3.1 Modelo matemático VIV modificado

3.1.1 Oscilador de la estructura y de la estela

Considerando el esquema de un grado de libertad del sistema de vibraciones inducidas por vórtices de la Figura 2.4 del Capítulo 2. El desplazamiento Y del cilindro se restringe al plano transversal z - y del flujo, y de acuerdo con Facchinetti *et al.* [23], se puede describir mediante un oscilador de tipo lineal expresada en el tiempo dimensional T donde se involucran, fuerzas inerciales m_s , fuerzas de amortiguamiento c_s , fuerzas elásticas k_s y fuerza de excitación debida al desprendimiento de vórtices S_v .

$$m_s \ddot{Y} + c_s \dot{Y} + k_s Y = S_v \quad (3.1)$$

De acuerdo con Blevins [8] m_s es la masa total del sistema e involucra a la masa de la estructura m_c y la masa agregada por el fluido m_f . Por tanto:

$$m_s = m_c + m_f, \quad m_f = C_M \rho D^2 \pi / 4, \quad \mu = (m_s + m_f) / \rho D^2 \quad (3.2)$$

Siendo ρ la densidad del fluido, C_M un coeficiente de masa agregada y μ la relación de masa adimensional, para un cilindro circular, generalmente se asume que el coeficiente de masa agregada es 1 [8]. Asimismo, c_s es el coeficiente de amortiguamiento del sistema e involucra los efectos de amortiguamiento del soporte c_c y los efectos de amortiguamiento generados por el fluido c_f , y se denota como:

$$c_s = c_c + c_f, \quad c_f = \gamma \Omega \rho D^2 \quad \gamma = \frac{C_D}{4\pi S_t} \quad (3.3)$$

Donde Ω representa una frecuencia angular de referencia y γ es el parámetro de pérdida de sustentación (*stall parameter*). En un fluido sin movimiento Ω corresponde a la frecuencia angular del movimiento de la estructura y γ es función de la amplitud de oscilación, relacionada con el coeficiente de arrastre seccional medio C_D [8]. Para este caso en particular Ω denota la frecuencia angular del desprendimiento del vórtice, siendo entonces $\Omega = \Omega_f = 2\pi S_t U / D$, donde S_t es el número de Strouhal y el parámetro γ nuevamente se relaciona con la fuerza de arrastre que actúa sobre el cilindro en movimiento mediante el coeficiente de arrastre seccional medio C_D .

Finalmente k_s representa la rigidez externa de la estructura, cabe señalar que los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez se definen por unidad de longitud. Nótese que los efectos

del fluido se consideran directamente en el oscilador de la estructura Ec. (3.1) a través de los parámetros c_s y k_s , mientras que la excitación causada por los vórtices se representa por el parámetro S_v , ubicado en el lado derecho de la Ec. (3.1). Por otro lado, se sabe que la frecuencia natural no amortiguada de la estructura Ω_s así como, el factor de amortiguamiento a causa del soporte ζ , se puede definir respectivamente como:

$$\Omega_s = \sqrt{k_s/m_s} \quad (3.4)$$

$$\zeta = r_s/(2m_s\Omega_s) \quad (3.5)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) en la Ec. (3.1), esta se puede reescribir como:

$$\ddot{Y} + \left(2\zeta\Omega_s + \frac{\gamma}{\mu}\Omega_f\right)\dot{Y} + \Omega_s^2 Y = S_v/m_s \quad (3.6)$$

Por otra parte, el carácter fluctuante del vórtice en la estela se modela mediante un oscilador no lineal (oscilador de estela) que satisface la ecuación de Van der Pol.

$$\ddot{Q} + \varepsilon\Omega_f\left(\frac{Q^2}{D^2} - 1\right)\dot{Q} + \Omega_f^2 Q = F \quad (3.7)$$

Donde:

- Q es el coeficiente de sustentación fluctuante en la estructura.
- F modela los efectos del movimiento del cilindro en la estela cercana.
- ε es el parámetro de no linealidad.

3.2 Acoplamiento fluido – estructura modelo modificado

Definiendo las variables adimensionales del tiempo $t_a = T\Omega_f$, desplazamiento de la estructura $y_0 = Y/D$, coeficiente de sustentación fluctuante en la estructura $q_0 = Q/D$, donde la frecuencia de desprendimiento de vórtice se propone como $\omega_a = \Omega_f/\Omega_s$. Las Ecs. (3.6) y (3.7) forman un sistema dinámico fluido-estructura que de forma acoplada pueden escribirse como:

- Oscilador de la estructura:

$$\ddot{y}_0 + \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right)\dot{y}_0 + y_0 = Mq_0\omega_a^2 \quad (3.8)$$

- Oscilador de la estela:

$$\ddot{q}_0 \frac{\varepsilon}{\delta} + (q_0^2 - 1)\dot{q}_0 + \frac{q_0}{\delta^2} = \frac{f}{\delta^2} \quad (3.9)$$

Relacionando la frecuencia de desprendimiento de vórtice ω_a con la velocidad reducida del fluido U_r , esta se puede escribir como:

$$\omega_a = \frac{2\pi S_t}{\Omega_s} \frac{U}{D} = U_r S_t, \quad U_r = \frac{2\pi}{\Omega_s} \frac{U}{D} \quad (3.10)$$

Por otra parte, s_v y f representan, respectivamente la fuerza de sustentación fluctuante y la fuerza de acoplamiento. Estos términos adimensionales, que aparecen en las Ecs. (3.8) y (3.9), se definen matemáticamente de la siguiente manera:

$$s_v = \frac{S_v}{D\Omega_f^2 m} = S_v \frac{D}{4\pi^2 S_t^2 U^2 m}, \quad f = \frac{F}{D\Omega_f^2} = F \frac{D}{4\pi^2 S_t^2 U^2} \quad (3.11)$$

En las Ecs. (3.8) y (3.9) los puntos superpuestos denotan la derivada con respecto al tiempo en forma adimensional t_a . Con el objetivo de mantener el modelo VIV lo más simple posible, los términos de acoplamiento del lado derecho del sistema fluido-estructura se restringen a ser funciones lineales de los parámetros adimensionales q y del desplazamiento y , así como, sus derivadas con respecto al tiempo.

De acuerdo con Facchinetti *et al.* [23], la sustentación fluctuante s_v de la estela cercana sobre la estructura se escribe de forma dimensional como la Ec. 3.12, donde C_L representa el coeficiente de sustentación del vórtice, por lo que el parámetro q_0 correspondiente al fluido también puede ser definido como un coeficiente de sustentación de vórtice reducido $q_0 = 2 C_L / C_{Lo}$, con C_{Lo} como el coeficiente de sustentación de referencia, que se presenta cuando una estructura fija es sometida al fenómeno de desprendimiento de vórtice:

$$S_v = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_L \quad (3.12)$$

Sustituyendo la Ec. (3.12) en el parámetro s_v correspondiente a la Ec. (3.11), este puede reescribirse como:

$$s_v = Mq_0 \quad M = \frac{C_{Lo}}{2} \frac{1}{8\pi^2 S_t^2 \mu} \quad (3.13)$$

Dado que μ es una relación de masas, Ec. (3.8), M en esencia es un número de masa y tiene como función escalar el efecto de la estela sobre la estructura. Por otra parte, para el parámetro f de la Ec. (3.9) es posible seleccionar diferentes modelos que consideren los efectos de la estructura sobre el oscilador de estela, por ejemplo: desplazamiento acoplado $f = Ay$, velocidad acoplada $f = A\dot{y}$ y aceleración acoplada $f = A\ddot{y}$. Donde A es un factor de escala de la fuerza f acoplada [23].

3.3 Dinámica del sistema acoplado – modificado

Para resolver el sistema acoplado de las Ecs. (3.8) y (3.9), se aplica el mismo método de balance armónico utilizado por Facchinetti *et al.* [23]. Se considera un movimiento armónico de amplitud adimensional y_0 y una frecuencia angular ω_a , de la forma:

$$y_0(t) = y_0 \cos(\omega_a t_a + \varphi) \quad q_0(t) = q_0 \cos(\omega_a t_a) \quad (3.14)$$

Donde la fuerza f , que excita al oscilador armónico en la Ec. (3.9), dependiendo del modelo de acoplamiento (desplazamiento, velocidad y aceleración) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} f &= Ay_0 \cos(\omega_a t_a + \varphi) & \dot{f} &= -A\omega_a \delta y_0 \sin(\omega_a t_a + \varphi) \\ \ddot{f} &= -A\omega_a^2 \delta^2 y_0 \cos(\omega_a t_a + \varphi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donde $\delta = 1/U_r S_t$. Al sustituir las Ecs. (3.15) en la ecuación del oscilador estructural Ec. (3.8), se obtiene la función de transferencia correspondiente a la amplitud de la estructura en función de la variable del fluido:

$$\frac{y_0}{q_0} = \frac{M\omega_a^2}{\sqrt{(1 - \omega_a^2)^2 + \omega_a^2 \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t\right)^2}} \quad (3.16)$$

Por otra parte, al sustituir los diferentes modelos de acoplamiento descritos en la Ec. (3.15) en la ecuación del oscilador de la estela, Ec. (3.9), se obtienen dos ecuaciones: una correspondiente a la amplitud de estela q_0 , Ec. (3.17) y otra para la frecuencia angular de excitación ω_a , Ec. (3.18):

$$\frac{q_0^2}{4} = 1 + \frac{AM}{\varepsilon} \frac{C_a}{(1 - \omega_a^2)^2 + \omega_a^2 \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t\right)^2} \quad (3.17)$$

$$\omega_a^6 - \omega_a^4 \left[U_r^2 S_t^2 + 2 - \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t \right)^2 \right] - \omega_a^2 \left[-2U_r^2 S_t^2 + U_r^2 S_t^2 \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t \right)^2 - 1 \right] - U_r^2 S_t^2 + G_a = 0 \quad (3.18)$$

Los coeficientes C_a y G_a dependen del modelo de acoplamiento f considerado y se encuentran descritos en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Coeficientes C_a y G_a para los modos de acoplamiento del sistema modificado.

Modelos de acoplamiento	Coeficientes C_a	Coeficientes G_a
Desplazamiento	$-(2\zeta + \gamma/\mu U_r S_t) U_r^3 S_t^3$	$(1 - \omega_a^2) AM U_r^4 S_t^4$
Velocidad	$(1 - \omega_a^2) U_r^2 S_t^2$	$\left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t \right) AM \omega_a^2 U_r^3 S_t^3$
Aceleración	$\left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu} U_r S_t \right) \omega_a^2 U_r S_t$	$(\omega_a^2 - 1) AM \omega_a^2 U_r^2 S_t^2$

Cabe mencionar que en este análisis se emplearon los mismos parámetros del sistema reportados en la literatura [23], los cuales se listan en la Tabla 2.1 del Capítulo 2. En las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se muestra, respectivamente, el comportamiento de la frecuencia angular de desprendimiento de vórtices ω_a , la amplitud de la estela q_0 , y la amplitud de la estructura y_0 .

Nótese que las Ecs. (3.16) y (3.17) correspondientes a las amplitudes y_0 y q_0 están en función de la frecuencia angular ω_a y la velocidad reducida U_r , mientras que la frecuencia angular ω_a únicamente es función de la velocidad reducida U_r (velocidad del flujo), es decir U_r genera la frecuencia de desprendimiento de vórtice ω_a . La frecuencia angular ω_a se obtiene de la solución de la Ec. (3.18), al tratarla como una ecuación bi-cúbica se obtienen como resultado tres raíces, de las cuales una o todas pueden ser reales positivas, éstas pueden estar asociadas a la histéresis del sistema VIV [23].

3.4 Validación del modelo modificado y discusión

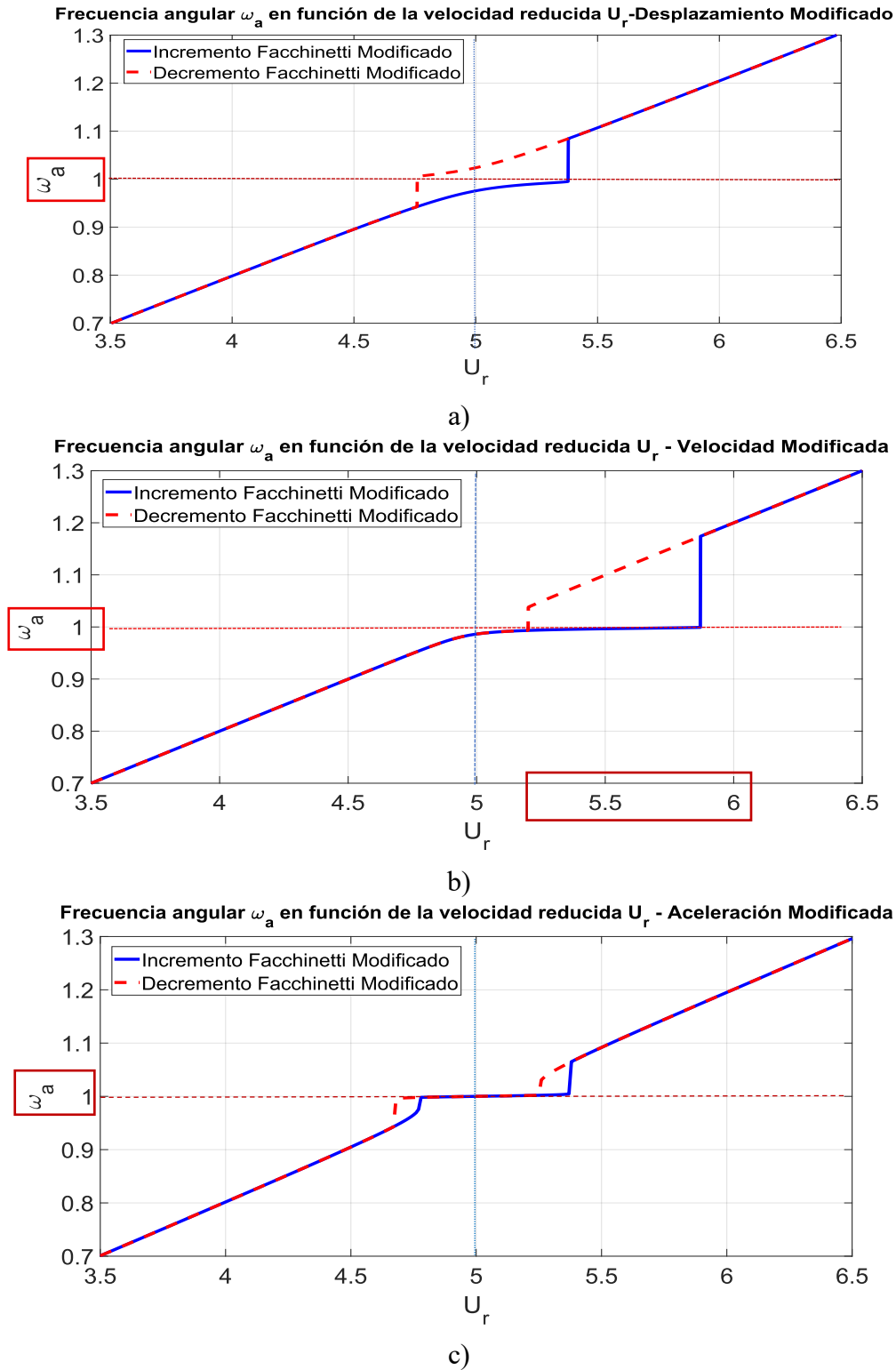


Figura 3.1 Frecuencia angular ω_a función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento; b) velocidad y c) modelo de aceleración.

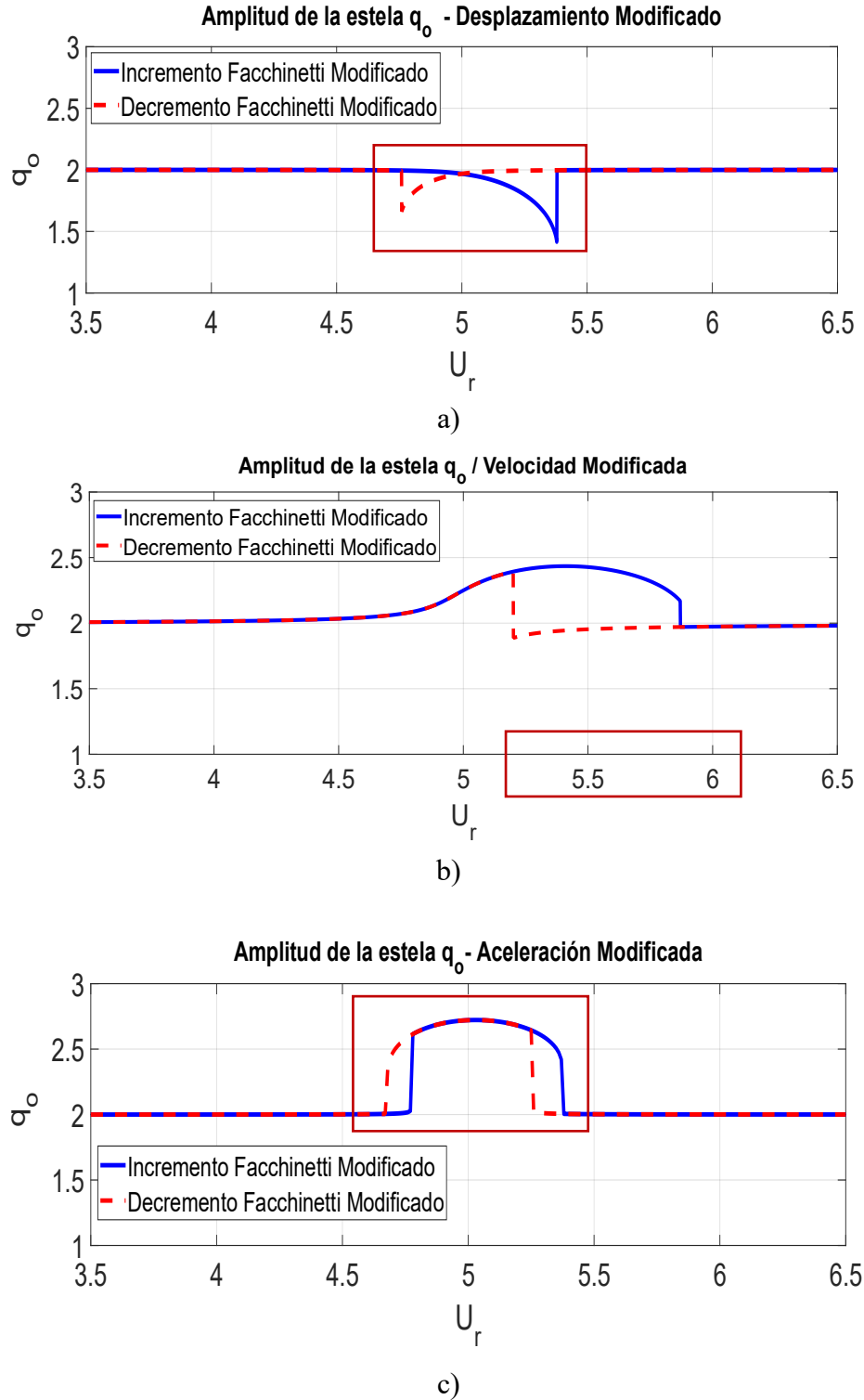


Figura 3.2 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.

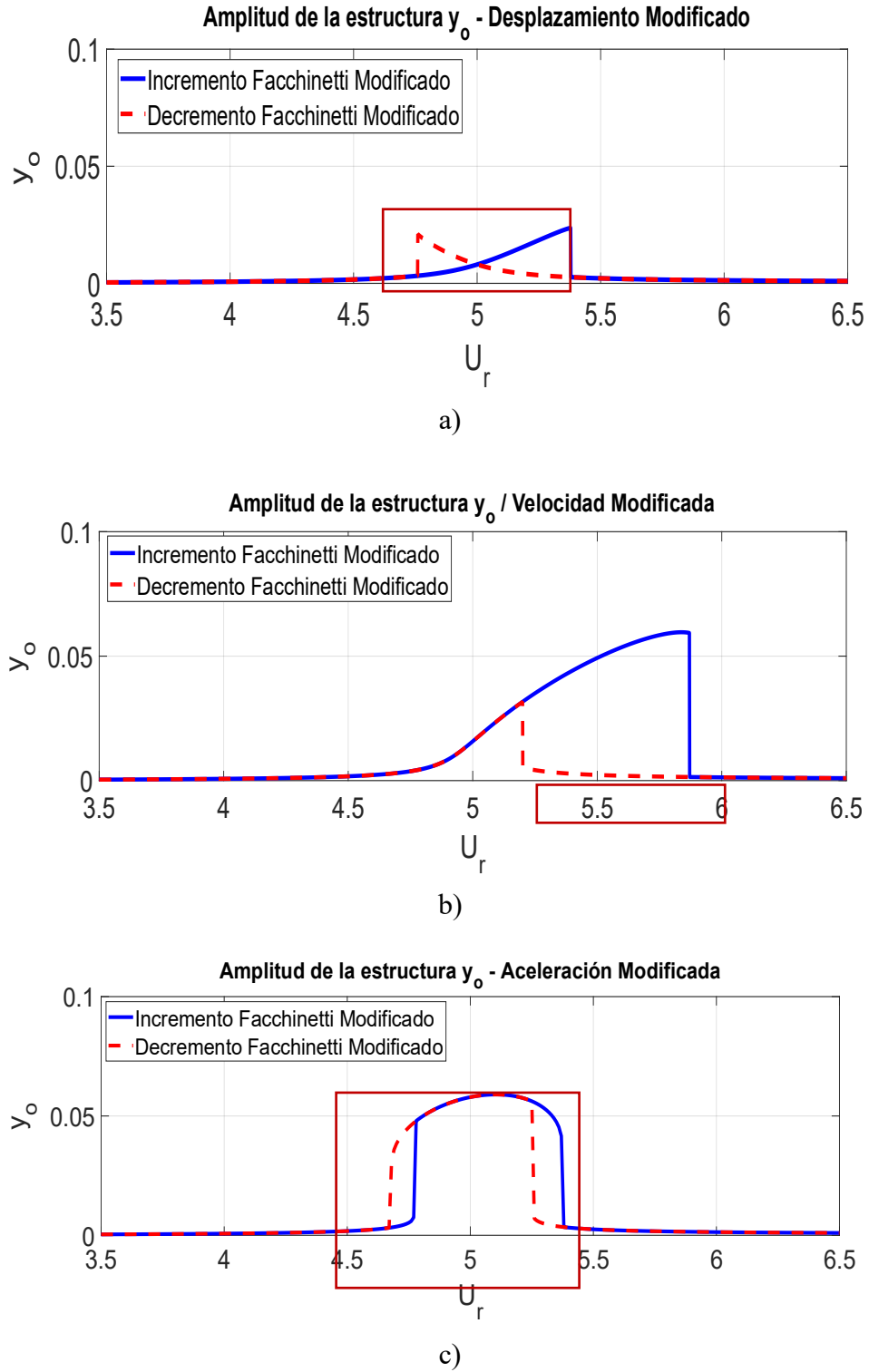


Figura 3.3 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r : a) desplazamiento, b) velocidad, c) aceleración.

3.4.1 Frecuencia angular – Modelo matemático modificado

El modelo clásico de Facchinetti *et al.* [23], descrito en la Sección 2.2 del Capítulo 2, constituye el punto de partida matemático para los tres modelos de acoplamiento. No obstante, el cambio de variable adimensional propuesto en este capítulo ofrece una alternativa adicional para analizar el sistema VIV. Por tanto, en esta sección se presenta una discusión de las ventajas que ofrece el cambio de variable sugerido al modelo original de Facchinetti. Comparando la información del comportamiento de la frecuencia de vórtices del análisis de las Figuras 2.5 y 3.1, se puede precisar que:

En la Figura 3.1 el fenómeno de *lock-in*, el cual ocurre cuando existe un cambio o alteración en el comportamiento vibratorio de la estela y de la estructura en una frecuencia común, es decir $\omega_a = 1$. La frecuencia de bloqueo del sistema, obtenida de la Ec. (3.18) es $\omega_a = U_r S_t$, lo que implica que el fenómeno ocurre cuando $U_r = 1/S_t$.

En comparación con la gráfica correspondiente a la Figura 2.5 también es posible observar la existencia del *lock-in*, el cual se manifiesta cuando la frecuencia angular $\omega = \delta = 1 / S_t U_r$, nuevamente en $U_r = 1 / S_t$. En ambas Figuras, se aprecia que la zona de *lock-in* está caracterizada completamente por la histéresis del sistema y es simétrica con respecto a la resonancia de referencia. Esta zona es ligeramente mayor para valores superiores a $U_r = 1/S_t$, particularmente en los casos donde el acoplamiento se realiza con el desplazamiento y la aceleración.

En el caso de la Figura 2.5, fuera de la zona de *lock-in*, el sistema acoplado está sincronizado con la frecuencia angular del desprendimiento de vórtices en $\omega = 1$. En contraste, la Fig. 3.1 permite observar con mayor facilidad cómo cambia la frecuencia de excitación ω_a con respecto a la variación de la velocidad reducida del flujo U_r . En esta representación, la frecuencia angular del desprendimiento de vórtice Ω_f aumenta hasta igualar o superar la frecuencia angular de la estructura Ω_s , alcanzando la condición de resonancia cuando $\omega_a = 1$. Por el contrario, en la Figura 2.5, la frecuencia de excitación $\omega = 1$ permanece constante para cualquier valor de U_r , excepto en la zona correspondiente al efecto *lock-in*, es decir, la frecuencia de excitación está sincronizada con la frecuencia angular del desprendimiento de vórtice Ω_f , donde para condiciones de resonancia $\omega = \delta = 1 / S_t U_r$.

En los modelos acoplados mediante desplazamiento y velocidad, la histéresis abarca todo el intervalo de velocidades reducidas donde ocurre el bloqueo, tanto en rampas de incremento como decremento. Por el contrario, en el modelo por aceleración, la histéresis se manifiesta únicamente en los extremos del dominio de bloqueo. Cabe destacar que el modelo por

velocidad presenta una asimetría marcada, donde la rama del efecto *lock-in* solo se desarrolla para valores de U_r superiores a $1/S_t$.

3.4.2 Amplitud de la estela y la estructura – Modelo matemático modificado

En las Figuras 3.2 y 3.3, correspondientes a la amplitud de la estela q_0 y la amplitud de la estructura y_0 , se observa que el comportamiento dinámico del sistema coincide con el reportado en el modelo original de Facchinetti *et al.* [23] (presentados en las Figuras 2.6 y 2.7). Las diferencias observadas entre los tres modos de acoplamiento (desplazamiento, velocidad y aceleración) en el análisis de la respuesta dinámica de la estela q_0 y la estructura y_0 , permiten identificar cuál de los modelos representa de manera más coherente el comportamiento físico esperado en un sistema VIV. Por lo que, Facchinetti *et al.* [23], concluyeron que el acoplamiento por aceleración es el más adecuado para modelar la interacción fluido – estructura, dicha elección se sustenta en las siguientes características del modelo, reportadas en [23]:

- Proporciona una identificación más precisa la zona de *lock – in* y del comportamiento fuera de esta región.
- Exhibe una histéresis más simétrica y físicamente coherente, localizada en los bordes del dominio del efecto *lock - in*.
- Reproduce una respuesta en amplitud tanto de la estructura como de la estela positiva y amplificada, en concordancia con el comportamiento físico esperado durante la interacción fluido - estructura en VIV.

En consecuencia, el acoplamiento por aceleración se adopta en esta investigación por ofrecer una representación más robusta y equilibrada del fenómeno de *lock – in*, lo que a su vez facilita un análisis más claro de la respuesta dinámica del sistema acoplado.

Capítulo 4. Modelo matemático de un sistema acoplado VIV con DVA/IDVA aplicando el concepto de Admitancia Mecánica Global (A_g)

El modelo VIV modificado desarrollado en el Capítulo 3 constituye una herramienta efectiva para analizar el fenómeno de *lock-in*. Sin embargo, para abordar el objetivo central de esta tesis es necesario incorporar un mecanismo de sintonización pasivo empleando absorbedores dinámicos de vibración.

Tradicionalmente, modelar la interacción de un DVA con la estructura primaria implica agregar grados de libertad al sistema, lo que aumenta significativamente la complejidad matemática. Esta complejidad se multiplica al considerar configuraciones avanzadas de DVA que incorporan redes mecánicas con inersores IDVA.

Para superar este desafío y permitir un análisis unificado y sistemático de múltiples configuraciones, se hace uso del concepto de Admitancia Mecánica Global (A_g) desarrollado por Mazon *et al.* [44], esta metodología permite condensar la dinámica de cualquier DVA o IDVA en una única función de transferencia A_g , función que emula los efectos dinámicos del DVA o IDVA al sustituir la red mecánica por un amortiguamiento equivalente complejo, dando como resultado un sistema acoplado estructura – absorbedor reducido a un modelo equivalente de un solo grado de libertad.

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático del sistema acoplado VIV – absorbedor utilizando la función de transferencia A_g , así como, el análisis del desempeño dinámico de un DVA convencional y de tres configuraciones de IDVA ($C3$, $C4$ y $C6$) reportadas en la literatura.

4.1.1 Formulación del sistema acoplado

Para incorporar el efecto de un absorbedor dinámico de vibraciones, se consideró un sistema de un grado de libertad (1 DOF) compuesto por un cilindro rígido circular de diámetro D , que representa la estructura principal, inmerso en un flujo uniforme y estacionario con una velocidad constante U , como se muestra en la Figura 4.1.

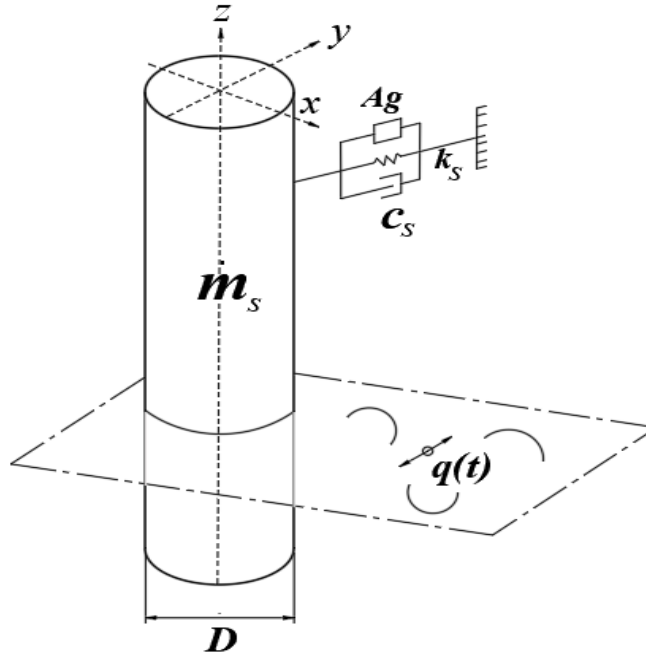


Figura 4.1 Estructura rígida sometida a VIV, acoplada a un absorbedor dinámico de vibraciones mediante el concepto de admitancia mecánica global A_g .

El cilindro bajo estudio se acopló a diferentes absorbedores dinámicos de vibración (DVA). Para el análisis se consideró un DVA tradicional y tres configuraciones de IDVA (C3, C4 y C6) [42]. La representación unificada de los absorbedores utilizados se realizó a través de la función del coeficiente de admitancia mecánica global A_g , función que es equivalente a un amortiguamiento viscoso efectivo dependiente de la frecuencia de excitación e independiente de la configuración específica del IDVA. De acuerdo con lo anterior, el sistema representado en la Figura 4.1 se puede representar como un sistema masa-resorte-amortiguador de un solo grado de libertad, ver Figura 4.2.

Para el desarrollo del modelo matemático se toman como base las ecuaciones de los osciladores dimensionales correspondientes a la estructura Ec. (3.1) y la estela Ec. (3.7) reportados en el Capítulo 3. De acuerdo con el concepto de admitancia mecánica global y tomando como referencia la Figura 4.2, la ecuación del oscilador estructural incluyendo el amortiguador equivalente A_g , se puede escribir como:

$$m_s \ddot{Y} + (c_s + A_g) \dot{Y} + k_s Y = S_v \quad (4.1)$$

Definiendo $\Omega_s = (k_s/m_s)^{1/2}$ y $\zeta_a = c_s/(2m_s\Omega_s)$ como la frecuencia angular de la estructura y el factor de amortiguamiento del soporte respectivamente la ecuación (4.1) se puede expresar como:

$$m_s \ddot{Y} + \left(m_s \left(2\zeta_a \Omega_s + \frac{\gamma}{\mu} \Omega_f \right) + A_g \right) \dot{Y} + k_s Y = S_v \quad (4.2)$$

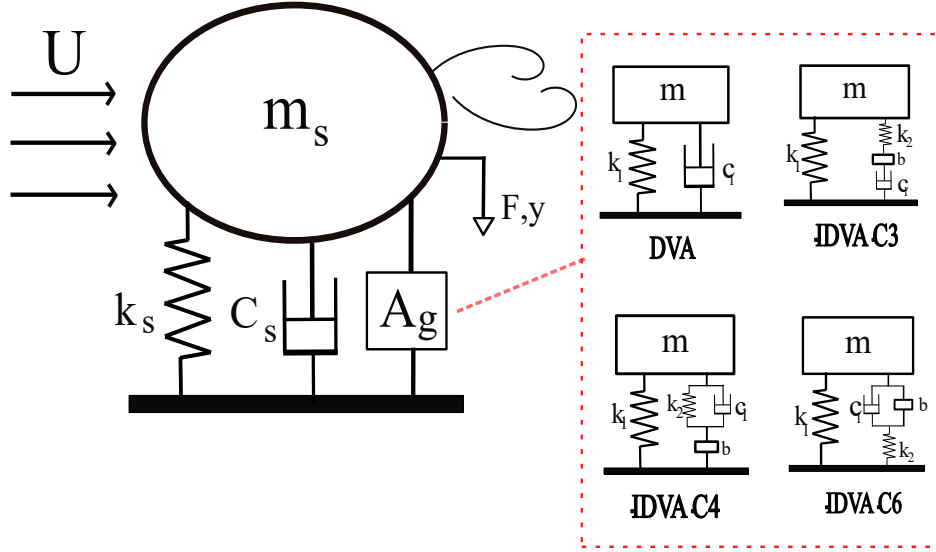


Figura 4.2 Representación del oscilador estructural acoplado a diferentes absorbentes de vibración: DVA, C3, C4 y C6.

En la Tabla 4.1 se presentan las funciones de transferencia dimensionales del coeficiente de admitancia mecánica global A_g para cada configuración de DVA [44], (ver Apéndice C para mayor detalle).

Tabla 4.1 Funciones de admitancia mecánica global A_g para las configuraciones de DVA e IDVA [44].

Configuración	Función de admitancia mecánica global dimensional
DVA	$A_{g,DVA} = \frac{ms(c_1s + k_1)}{ms^2 + c_1s + k_1}$
IDVA C3	$A_{g,C3} = \frac{(bc_1(k_1 + k_2)s^2 + bk_1k_2s + c_1k_1k_2)sm}{bc_1ms^4 + bk_2ms^3 + c_1((b + m)k_2 + bk_1)s^2 + bk_1k_2s + c_1k_1k_2}$
IDVA C4	$A_{g,C4} = \frac{ms(bc_1s^3 + b(k_1 + k_2)s^2 + c_1k_1s + k_1k_2)}{bm s^4 + c_1(b + m)s^3 + (b(k_1 + k_2) + k_2m)s^2 + c_1k_1s + k_1k_2}$
IDVA C6	$A_{g,C6} = \frac{ms(b(k_1 + k_2)s^2 + c_1(k_1 + k_2)s + k_1k_2)}{bm s^4 + c_1ms^3 + ((b + m)k_1 + bk_2)s^2 + c_1(k_1 + k_2)s + k_1k_2}$

4.1.2 Adimensionamiento del sistema acoplado con A_g

Para facilitar la solución paramétrica y simplificar la complejidad del modelo, se definieron las siguientes variables adimensionales del sistema acoplado:

$$\begin{aligned} t_a &= T\Omega_f & y_a &= Y/D & q_0 &= Q/D & \omega_a &= \Omega_f/\Omega_s & (4.3) \\ \delta &= \frac{\Omega_s}{\Omega_f} = \frac{1}{U_r S_t} & Y_g &= \frac{A_g}{m_s z \Omega_s} & s_v &= \frac{S_v}{\Omega_f^2 D m} = M q_0 \end{aligned}$$

Donde:

- t_a es el tiempo adimensional
- y_a corresponde al desplazamiento adimensional de la estructura
- q_a representa el coeficiente de sustentación fluctuante en la estructura
- ω_a es la frecuencia de excitación del modelo modificado
- δ es la relación de frecuencias naturales entre la estructura y el fluido relacionada a la velocidad reducida
- Y_g es la relación de conexión entre la función de admitancia mecánica global y la estructura principal
- z es la relación de masas del sistema principal y el sistema secundario
- s_v es la fuerza de sustentación fluctuante adimensional

Sustituyendo la Ec. (4.3) en la Ec. (4.2) y Ec. (3.7), el oscilador estructural y oscilador de la estela de forma adimensional se pueden escribir como:

- Oscilador estructural adimensional:

$$\ddot{y}_0 + \left(\left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right) + Y_g z \right) \dot{y}_0 + y_a = M q_0 \omega_a^2 \quad (4.4)$$

- Oscilador de la estela adimensional (inalterado):

$$\ddot{q}_0 \frac{\varepsilon}{\delta} + (q_a^2 - 1) \dot{q}_0 + \frac{q_0}{\delta^2} = \frac{f}{\delta^2} \quad (4.5)$$

4.2 Dinámica del sistema acoplado VIV con A_g :

4.2.1 Solución del oscilador estructural en el dominio de Laplace

La solución de la Ec. (4.4) se realizó en el plano complejo s (dominio de Laplace), ya que: (1) la propia admitancia mecánica global se define y caracteriza en dicho dominio; (2) permite incorporar de manera directa el efecto de cualquier DVA volviéndolo un sistema más

manejable; y (3) permite una versatilidad en el análisis debido a la sencillez de regresar al dominio de la frecuencia (haciendo $s = j\omega_a$). Con base en lo anterior, las soluciones propuestas en el dominio de Laplace son:

$$y = y_0(s) \quad \dot{y} = sy_0(s) \quad \ddot{y} = s^2 y_0(s) \quad q = q_0(s) \quad (4.6)$$

Al sustituir las soluciones de la Ec. (4.6) en la Ec. (4.4), se obtiene la función de transferencia correspondiente a la estructura en el dominio de Laplace:

$$\frac{y_0(s)}{q_0(s)} = \frac{M\omega_a^2}{s^2 + \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} + Y_g z\right)s + 1} \quad (4.7)$$

Haciendo $s = j\omega_a$ y reorganizando la Ec. (4.7), se obtiene la función de transferencia en el dominio de la frecuencia:

$$\frac{y_0}{q_0 M \omega_a^2} = \frac{1}{-\omega_a^2 + j \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} + Y_g z\right) \omega_a + 1} \quad (4.8)$$

4.2.2 Solución del oscilador de la estela q_0

Por otra parte, el término no lineal (q^2) $\dot{q}$ presente en el oscilador de la estela Ec (4.5) no permite obtener una solución exacta mediante la transformada de Laplace, ya que involucra convoluciones múltiples que no admiten una solución cerrada. Por ello, siguiendo la metodología de Facchinetti *et al.* [23] para la solución del oscilador de estela, se consideró el acoplamiento por aceleración y una solución de tipo armónica con la siguiente forma:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_a t_a) \quad \ddot{f} = -A\omega_a^2 \delta^2 y_0 \cos(\omega_a t_a + \varphi) \quad (4.9)$$

El acoplamiento entre el fluido y la estructura se preserva mediante la fuerza de acoplamiento, proporcionando un modelo matemáticamente consistente que captura la esencia física del fenómeno de interacción fluido-estructura. Cabe destacar que la función de admitancia mecánica global Y_g depende de la topología específica del absorbedor que se desee evaluar en el sistema VIV. En la siguiente sección se desarrolla la metodología de optimización empleada para el DVA convencional y los IDVA, la cual es clave para obtener los parámetros óptimos de los absorbedores que servirán para evaluar el comportamiento dinámico del sistema acoplado VIV con diferentes topologías.

4.3 Optimización de los parámetros del DVA e IDVA

Debido a la complejidad computacional asociada a la optimización directa de los absorbedores dinámicos de vibración (DVA/IDVA) en el sistema acoplado fluido – estructura [52], se adopta una estrategia para implementar los absorbedores dinámicos de vibración DVA e IDVA que consiste en dos etapas:

1. Sintonización del absorbedor: el DVA y los IDVA se sintonizan considerando un sistema lineal masa – resorte (Figura 4.3) sometido a una excitación de tipo armónica, siguiendo la metodología clásica de Den Hartog [38] y la propuesta por Hu y Chen [42]. Esta simplificación se justifica porque, en condición de resonancia, la respuesta estructural en VIV adopta un carácter predominante cuasi – armónico, permitiendo su aproximación eficaz mediante un oscilador lineal excitado armónicamente para fines de sintonización.
2. Integración al sistema VIV: Los absorbedores dinámicos de vibración DVA e IDVA optimizados se integran posteriormente al sistema VIV completo mediante el coeficiente adimensional de admitancia mecánica global Y_g .

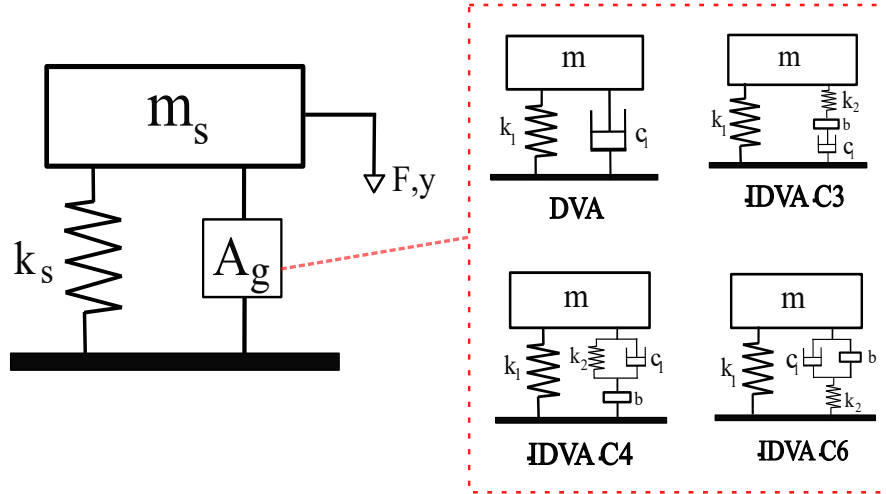


Figura 4.3 Sistema masa-resorte empleando el concepto de admitancia mecánica global. La función A_g representa cualquier configuración de DVAs.

Tomando como base el sistema masa – resorte de la Fig. 4.3, la ecuación diferencial de movimiento correspondiente al sistema principal se puede escribir como:

$$m_s \ddot{y}_s + k_s y_s + A_g \dot{y}_s = F(s) \quad (4.10)$$

Donde:

- m_s es la masa del sistema principal
- k_s es la rigidez del sistema principal
- A_g es la admitancia mecánica global
- $F(s)$ Fuerza de excitación

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (4.10), la función de transferencia $R_{(s)}$ correspondiente a la estructura principal se escribe:

$$R_{(s)} = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_s s^2 + A_g s + k_s} \quad (4.11)$$

4.3.1 Optimización del DVA convencional

Al acoplar la configuración del DVA convencional ($A_{g, DVA}$) de la Tabla 4.1 en la función de transferencia $R_{(s)}$ de la Ec. (4.11), se realizó el proceso de adimensionamiento empleando los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \sqrt{\frac{k_1}{m}} & \delta_a &= \frac{\Omega_m}{\Omega_s} & \zeta_a &= \frac{c_1}{2\sqrt{mk_1}} & z &= \frac{m}{m_s} \\ \text{▪ } s &= j\Omega_e & \omega_a &= \frac{\Omega_f}{\Omega_s} & \Omega_s &= \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

En donde:

- Ω_m es la frecuencia natural del sistema secundario
- Ω_s es la frecuencia natural del sistema principal
- Ω_e es la frecuencia de excitación
- δ_a es la relación de las frecuencias naturales del sistema secundario con el principal
- ζ_a es la relación de amortiguamiento del sistema secundario
- z es la relación de masas del sistema secundario y el principal
- ω_a es la relación de frecuencias de excitación con la estructura principal considerando el sistema modificado
- s representa el parámetro de Laplace

Sustituyendo la Ec. (4.12) en la Ec. (4.11) se obtiene la función de transferencia de forma adimensional, donde la Ec. (4.11) se puede escribir como:

$$R_{(s)} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad (4.13)$$

Siendo:

- $A = -\delta_a^2 + \omega_a^2$
- $B = -2\omega_a\delta_a\zeta_a$
- $C = -\omega_a^4 + (1 + (z + 1)\delta_a^2)\omega_a^2 - \delta_a^2$
- $D = 2((z + 1)\omega_a^2 - 1)\omega_a\zeta_a\delta_a$

Para la optimización del DVA se utilizó la metodología del punto fijo [36], [38], que consiste en la calibración de los puntos invariantes del sistema. Puntos que se obtienen a partir de las tendencias de la respuesta de la función de transferencia cuando la relación de amortiguamiento tiende a cero ($\zeta_a \rightarrow 0$) y a infinito ($\zeta_a \rightarrow \infty$), ya que son independientes del valor de este parámetro:

- Cuando la relación de amortiguamiento tiende a cero $\zeta_a \rightarrow 0$, se tiene:

$$R_{(s), \zeta_a \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{A^2}{C^2}} \quad (4.14)$$

$$R_{(s) \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{(-\delta_a^2 + \omega_a^2)^2}{(-\omega_a^4 + (1 + (z + 1)\delta_a^2)\omega_a^2 - \delta_a^2)^2}} \quad (4.15)$$

- Cuando la relación de amortiguamiento tiende a infinito $\zeta_a \rightarrow \infty$ se tiene:

$$R_{(s), \zeta_a \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{B^2}{D^2}} \quad (4.16)$$

$$R_{(s) \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1}{((z + 1)\omega_a^2 - 1)^2}} \quad (4.17)$$

Al igualar de las Ecs. (4.15) y (4.17) se obtienen dos posibles soluciones polinómicas, el polinomio mónico que contiene la información fundamental para resolver el sistema es normalmente de cuarto grado, que para su solución se puede reducir a una ecuación de segundo grado, cuya resolución proporciona la ubicación de los puntos invariantes y que de forma matemática se pueden expresar como:

$$\omega_{a1,2}^2 = \sqrt{-\frac{-2-z+\sqrt{z^2+2z}}{(z+2)(z+1)}} \pm \sqrt{\frac{2+z+\sqrt{z^2+2z}}{(z+1)(z+2)}} \quad (4.18)$$

Dado que los puntos invariantes deben tener la misma amplitud de respuesta, se cumple que $\omega_{a1}^2 = \omega_{a2}^2$. Al resolver el sistema mediante sustitución, se obtienen los parámetros óptimos para la relación de frecuencias naturales $\delta_{a,opt}$ y la magnitud de los puntos invariantes H_{opt} , Ec. (4.19) y Ec. (4.20) respectivamente:

$$\delta_{a,opt} = \frac{1}{z+1} \quad (4.19)$$

$$H_{opt} = \frac{\sqrt{z+2}}{\sqrt{z}} \quad (4.20)$$

En la Figura 4.4 se observa la respuesta del sistema, donde los puntos invariantes convergen a una misma amplitud debido a la implementación de estos parámetros óptimos, el análisis se realizó considerando una relación de masa $z = 0.01$ y un amortiguamiento arbitrario $\zeta_a = 0.05$.

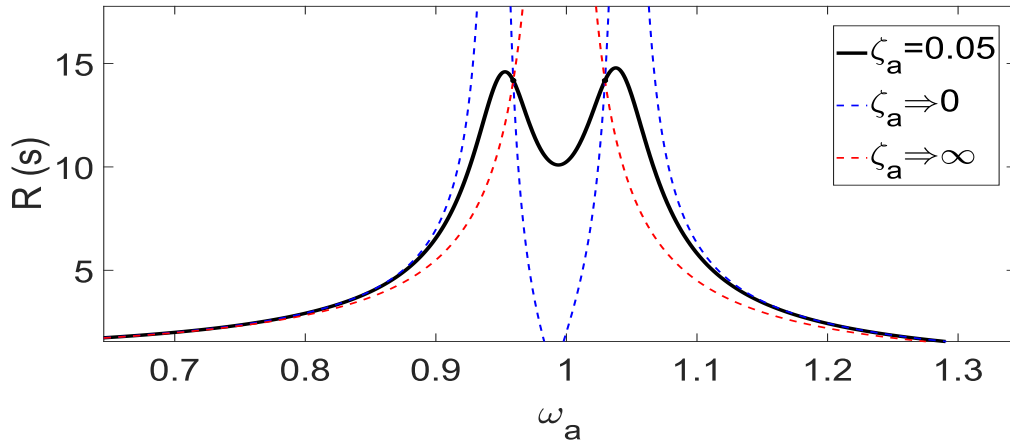


Figura 4.4 Respuesta del sistema con un DVA convencional para una relación de masa $z=0.01$ y un amortiguamiento de $\zeta_a = 0.05$

Finalmente, se determina la relación de amortiguamiento óptima para que la repuesta dinámica del sistema sea lo más plana posible. Para ello, se utilizó la formulación de Den Hartog [36], [38], y la teoría de Krenk. El primero consiste en calcular las derivadas parciales de la respuesta del sistema Ec. (4.13) considerando las variables óptimas definidas en las ecuaciones (4.19) – (4.20), este procedimiento arroja un valor de ζ_a para cada punto

invariante, mientras que en el segundo se determina la frecuencia central de la respuesta adimensional cuando la relación de amortiguamiento tiende a infinito $\zeta_a \rightarrow \infty$, frecuencia que se sustituye en la Ec. (4.13) utilizando los parámetros óptimos obtenidos de la Ecs. (4.19) y (4.20), ambos métodos permiten obtener la relación de amortiguamiento óptimo $\zeta_{a,opt}$ que para el DVA convencional se puede escribir como:

$$\zeta_{a,opt} = \sqrt{\frac{3z}{8(z+1)^3}} \quad (4.21)$$

En la Figura 4.5 se observa que, al emplear los parámetros y relación de amortiguamiento óptimos, se obtiene un comportamiento dinámico más estable en sistema al utilizar el DVA:

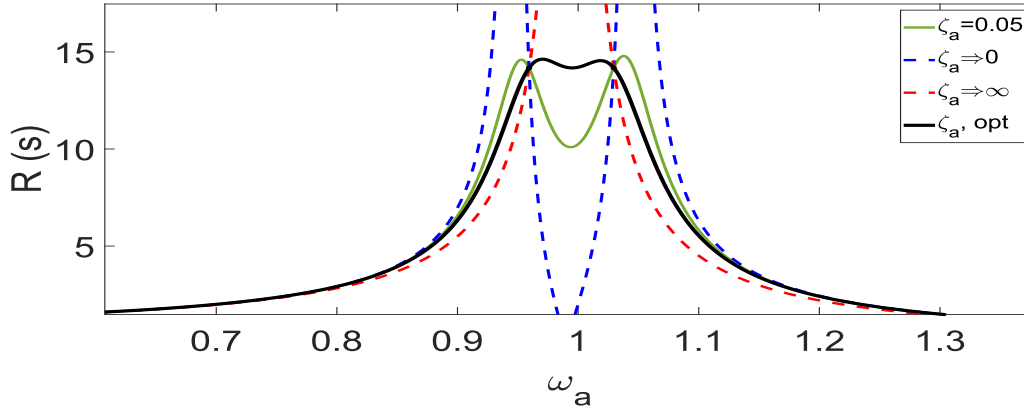


Figura 4.5 Respuesta del sistema con un DVA convencional para una relación de masa $z=0.01$, un amortiguamiento arbitrario de $\zeta_a = 0.05$ y $\zeta_{a,opt}$.

4.3.2 Optimización de los IDVA (C3, C4 y C6)

Para sustituir los IDVA en la función de transferencia de la estructura principal Ec (4.13), se realizó el proceso de adimensionamiento de las funciones de admitancia mecánica global $A_{g,C3}$, $A_{g,C4}$ y $A_{g,C6}$ de la Tabla 4.1, para el adimensionamiento se propusieron los siguientes parámetros:

$$z = \frac{m}{m_s} \quad \beta = \frac{b}{m} \quad \zeta_a = \frac{c_1}{2\sqrt{mk_1}} \quad \eta = \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \quad \delta_a = \frac{\Omega_m}{\Omega_s} \quad \omega_a = \frac{\Omega_f}{\Omega_s} \quad (4.22)$$

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \Omega_b = \sqrt{\frac{k_2}{b}} \quad \Omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$$

En donde:

- z es la relación de masas del sistema secundario y el principal.
- β es la relación de masas del inersor y el sistema secundario.
- ζ_a es la relación de amortiguamiento del sistema secundario.
- η es la relación de frecuencias del inersor y el sistema secundario.
- δ_a es la relación de frecuencias del sistema principal y el sistema secundario.
- ω_a es la relación de frecuencias de excitación con la estructura principal.
- Ω_m es la frecuencia natural del sistema secundario
- Ω_b es la frecuencia natural del inersor.
- Ω_s es la relación de las frecuencias naturales del sistema principal.

4.3.2.1 Optimización IDVA C3

Para la optimización del IDVA C3 se utilizó la metodología del punto fijo extendido [43] que consiste en la obtención de expresiones matemáticas para cada variable adimensional del IDVA. En esta sección se explica detalladamente la optimización desarrollada para el IDVA C3—Sustituyendo la función $A_{g,C3}$ en la Ec. (4.11) y realizando el adimensionamiento correspondiente, se obtiene la Ec. (4.23), función de transferencia que representa la respuesta del sistema en estado estable:

$$R_{(s)} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (4.23)$$

Donde:

- $A = 2\zeta_a(-\omega_a^4 + \delta_a^2\omega_a^2(1 + (\beta + 1)\eta^2) - \delta_a^4\eta^2)$
- $B = \beta\eta^2\omega_a\delta_a(-\delta_a^2 + \omega_a^2)$
- $C = -2\zeta_a(-\omega_a^6 + (1 + ((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\delta_a^2)\omega_a^4 - \delta_a^2(\eta^2(z + 1)\delta_a^2 + 1 + (\beta + 1)\eta^2)\omega_a^2 + \delta_a^4\eta^2)$
- $D = \beta\omega_a\eta^2(-\omega_a^4 + ((z + 1)\delta_a^2 + 1)\omega_a^2 - \delta_a^2)\delta_a$

La obtención de un primer polinomio se logra al aplicar las condiciones establecidas por la metodología del punto fijo. El principio fundamental de esta metodología radica en calibrar las frecuencias invariantes, frecuencias que se obtienen a partir de las tendencias de la

respuesta de la función de transferencia Ec. (4.23) cuando la relación de amortiguamiento tiende a cero ($\zeta_a \rightarrow 0$) y a infinito ($\zeta_a \rightarrow \infty$), es decir:

$$R_{(s) \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{A^2}{C^2}} \quad R_{(s) \zeta_a \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{B^2}{D^2}} \quad (4.24)$$

La igualación de las ecuaciones obtenidas para ambas relaciones de amortiguamiento en la Ec. (4.24) conduce a dos posibles soluciones: una trivial y otra no trivial. La solución no trivial es la que contiene la información fundamental para resolver el sistema y resulta en una ecuación de grado ocho, que para su solución se puede reducir a una ecuación de cuarto grado, de la forma:

$$a_0 \omega_a^4 + a_1 \omega_a^3 + a_2 \omega_a^2 - a_3 \omega_a + a_4 \quad (4.25)$$

Donde:

- $a_0 = 2$
- $a_1 = -2 + (-\beta z - 2\beta - 2)\eta^2 - 2z - 4\delta_a^2$
- $a_2 = 2 \left(((\beta + 1)z + \beta + 2)\eta^2 + z + 1 \right) \delta_a^2 + 2 + (\beta + 1)\eta^2$
- $a_3 = 2\delta_a^4 (\eta^2(z + 1)\delta_a^2 + 1 + (\beta + 2)\eta^2)$
- $a_4 = 2\eta^2 y_a^6$

El segundo polinomio se obtiene al suponer que la magnitud del sistema H_m existe y puede determinarse cuando la relación de amortiguamiento tiende a infinito, es decir:

$$H_m^2 = R_{(s) \zeta_a \rightarrow \infty}^2 \quad (4.26)$$

El polinomio resultante es de octavo grado, que para su solución se puede reducir a un polinomio de 4 grado, que se puede escribir como:

$$b_0 \omega_a^4 + b_1 \omega_a^3 + b_2 \omega_a^2 + b_3 \omega_a + b_4 \quad (4.27)$$

En donde:

- $b_0 = H_m^2$

- $b_1 = -2H_m^2((z+1)\delta_a^2 + 1)$
- $b_2 = -1 + (1 + (z+1)^2\gamma_a^4 + (2z+4)\gamma_a^2)H_m^2$
- $b_3 = -1 + (1 + (z+1)^2\delta_a^4 + (2z+4)\delta_a^2)H_m^2$
- $b_4 = \delta_a^4(H_m^2 - 1)$

Las Ecs. (4.25) y (4.27) constituyen dos polinomios independientes de la relación de amortiguamiento (ζ_a). No obstante, el sistema planteado resulta indeterminado, dado que solo dispone de dos ecuaciones para la determinación de cuatro incógnitas. Para resolver esta indeterminación, se consideró un polinomio mónico adicional que tiene la forma de la Ec. (4.28):

$$(\omega_a - \alpha)(\omega_a - \eta)(\omega_a - \gamma)(\omega_a - \delta) = 0 \quad (4.28)$$

Tomando como base las fórmulas de Vieta es posible igualar las raíces características de los polinomios en función de sus términos independientes, lo anterior, da como resultado un sistema de cuatro ecuaciones que se pueden escribir como:

$$-\frac{b_1}{b_0} = -(\gamma + \alpha + \delta + \eta) = -\frac{a_1}{a_0} \quad \therefore \quad \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = 0 \quad (4.29)$$

$$-\frac{b_2}{b_0} = (\alpha\delta + \alpha\eta + \alpha\gamma + \delta\eta + \delta\gamma + \eta\gamma) = -\frac{a_2}{a_0} \quad \therefore \quad \frac{a_2}{a_0} - \frac{b_2}{b_0} = 0 \quad (4.30)$$

$$-\frac{b_3}{b_0} = (-\alpha\delta\eta - \alpha\gamma\delta - \alpha\eta\gamma - \delta\eta\gamma) = -\frac{a_3}{a_0} \quad \therefore \quad \frac{a_3}{a_0} - \frac{b_3}{b_0} = 0 \quad (4.31)$$

$$-\frac{b_4}{b_0} = \alpha\delta\eta\gamma = -\frac{a_4}{a_0} \quad \therefore \quad \frac{a_4}{a_0} - \frac{b_4}{b_0} = 0 \quad (4.32)$$

Sustituyendo las fórmulas de Vieta de las Ecs. (4.30), (4.31) y (4.32), en el primer polinomio, dado por la Ec. (4.25), y en el segundo polinomio, dado por la Ec. (4.27), se obtienen tres expresiones para H_m^2 , tal cómo se muestran en las Ecs. (4.33), (4.34) y (4.35). Por otro lado, al sustituir la Ec. (4.29) en los polinomios Ecs. (4.25) y (4.27), se obtiene una expresión para δ_a^2 :

$$H_m^2 = -\frac{1}{-1 + \left((\beta + 1)z + \beta + 2\right)\eta^2 - z^2 - z} \delta_a^4 + \left((\beta + 1)\eta^2 - 2z - 2\right)\delta_a^2 \quad (4.33)$$

$$H_m^2 = -\frac{2}{-2 + \eta^2(z+1)\delta_a^4 + ((\beta+2)\eta^2 - 2z - 1)\delta_a^2} \quad (4.34)$$

$$H_m^2 = -\frac{1}{\eta^2\delta_a^2 - 1} \quad (4.35)$$

$$\delta_a^2 = \frac{2}{(2 + (z+2)\beta)\eta^2 - 2z} \quad (4.36)$$

Igualando de forma sucesiva la Ec. (4.35) con las Ecs. (4.33) y (4.34) respectivamente, se obtienen dos expresiones para δ_a^2 , que se denotan como:

$$\delta_a^2 = \frac{-\beta\eta^2 + 2z + 1}{\eta^2(z+1)} \quad (4.37)$$

$$\delta_a^2 = \frac{\beta\eta^2 - 2z - 2}{((-\beta - 1)z - \beta - 2)\eta^2 + z^2 + z} \quad (4.38)$$

Al igualar las Ecs. (4.36) y (4.38), se encuentra el parámetro óptimo para β , el cual es una solución real y positiva y se denota como:

$$\beta_{opt \rightarrow C3} = \frac{2z}{z+1} \quad (4.39)$$

Posteriormente al sustituir los parámetros $\beta_{opt \rightarrow C3}$ y $\eta_{opt \rightarrow C3}$ Ec. (4.39) y Ec. (4.40) respectivamente en la Ec. (4.37), se obtiene el parámetro óptimo para δ_a y que se denota como $\delta_{a_{opt \rightarrow C3}}$:

$$\eta_{opt \rightarrow C3} = \sqrt{z+1} \quad (4.40)$$

Posteriormente al sustituir los parámetros de β de la Ec. (4.39) y η de la Ec. (4.40) en la Ec. (4.37), se obtiene el parámetro óptimo para δ_a . Y al sustituir estos parámetros en la Ec. (4.35) se obtiene el parámetro óptimo para H_m :

$$\delta_{a_{opt \rightarrow C3}} = \frac{1}{z+1} \quad (4.41)$$

De manera similar, sustituyendo $\eta_{opt \rightarrow C3}$ y $\delta_{a_{opt \rightarrow C3}}$, Ec. (4.40) y Ec. (4.41) en la Ec. (4.35), se obtiene el parámetro óptimo para H_m :

$$H_{m_{opt \rightarrow C3}} = \sqrt{\frac{z+1}{z}} \quad (4.42)$$

Con los parámetros óptimos obtenidos, se logra la calibración de los cuatro puntos invariantes del sistema, ver Figura 4.6 (círculos color rojo). Para la respuesta de vibración de la Figura

4.6 se consideró un factor de amortiguamiento arbitrario $\zeta_a = 0.45$ y una relación de masa $z = 0.50$.

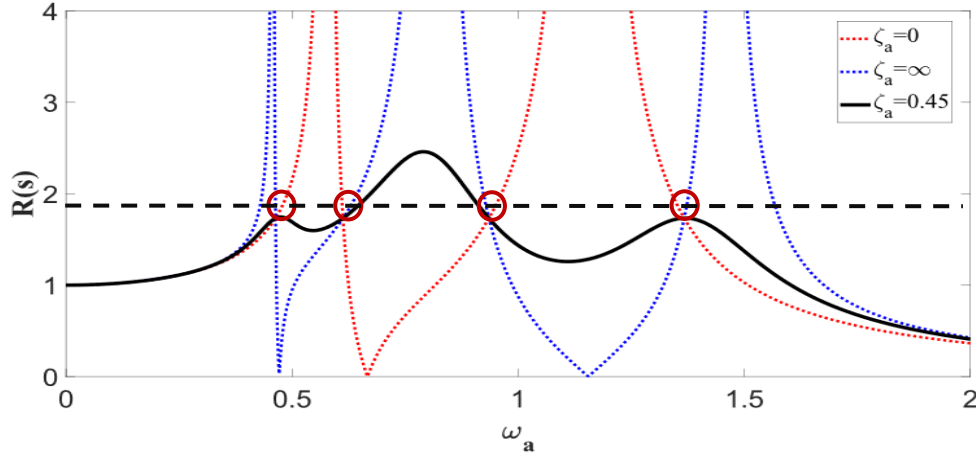


Figura 4.6 Comportamiento dinámico del IDVA-C3 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, \gamma_{a_{opt}}$ y $H_{m_{opt}}$ con un factor de amortiguamiento $\zeta_a = 0.45$.

Con el fin de aplanar la curva de respuesta en frecuencia del sistema principal y establecer el factor de amortiguamiento óptimo $\zeta_{a_{opt}}$, se aplicó la teoría de Krenk. Para lo anterior, es necesario determinar tres frecuencias resonantes no amortiguadas ω_{a_1} , ω_{a_2} , y ω_{a_3} , ver Figura 4.6, para ello, se identifican los puntos resonantes, es decir, cuando la respuesta del sistema es igual a infinito ($R(s) = \infty$), así como, como los puntos antiresonantes, es decir, cuando la respuesta del sistema es igual a cero ($R(s) = 0$). Para determinar las frecuencias ω_{a_1} , ω_{a_2} , y ω_{a_3} es necesario realizar combinaciones de dos puntos resonantes y uno antiresonante, o considerar tres puntos resonantes. Para el caso particular de la configuración C3 se emplearon tres puntos resonantes.

Para calcular las frecuencias ω_{a_1} y ω_{a_3} , se iguala a cero el denominador de la Ec. (4.24) cuando $\zeta_a = \infty$, se sustituyen los parámetros óptimos de las Ecs. (4.39) a (4.42), dando como resultado una ecuación de cuarto grado, que para su solución se puede reducir a una ecuación de segundo grado, de donde se obtienen dos soluciones, correspondientes a ω_{a_1} y ω_{a_3} . De manera análoga, para determinar la frecuencia ω_{a_2} se toma el denominador de la Ec. (4.24) cuando $\zeta_a = 0$ y, sustituyendo los parámetros óptimos de las Ecs. (4.39) a (4.42), se obtiene una ecuación en función de ω_{a_2} . Al resolver la ecuación, se selecciona la raíz que satisface la condición $\omega_{a_1} < \omega_{a_2} < \omega_{a_3}$. Finalmente, la relación de amortiguamiento óptima se obtiene igualando la magnitud de $H_{m_{opt \rightarrow C3}}$ Ec. (4.42) con la función de transferencia adimensional de la Ec. (4.23), donde ahora $H_{m_{opt \rightarrow C3}}$ se puede escribir como:

$$H_{m_{opt \rightarrow C3}} = \sqrt{\frac{A^2 \zeta_a + B^2}{C^2 \zeta_a + D^2}} \quad (4.43)$$

Despejando el amortiguamiento ζ_a , se obtiene la Ec. (4.44) ecuación que permite calcular tres valores de amortiguamiento, uno para cada frecuencia resonante, Ecs. (4.45) – (4.47):

$$\zeta_a^2 = \frac{D^2 H_m^2 - B^2}{-C^2 H_m^2 + A^2} \quad (4.44)$$

$$\zeta_{a \rightarrow \omega_{a1}}^2 = \frac{z}{3z + 3} \quad (4.45)$$

$$\zeta_{a \rightarrow \omega_{a2}}^2 = \frac{z}{4z + 4} \quad (4.46)$$

$$\zeta_{a \rightarrow \omega_{a3}}^2 = \frac{z}{3z + 3} \quad (4.47)$$

Sustituyendo las Ecs. (4.45) – (4.47) en la Ec. (2.25), se obtiene la expresión del amortiguamiento óptimo que se denota como:

$$\zeta_{a_{opt \rightarrow C3}} = \sqrt{11} \sqrt{\frac{z}{36z + 36}} \quad (4.48)$$

En la Figura 4.7, se muestra el comportamiento dinámico del sistema considerando una relación de masa $z = 0.50$ un amortiguamiento arbitrario $\zeta_a = 0.45$ (gráfica color negro) y el amortiguamiento óptimo $\zeta_{a_{opt \rightarrow C3}}$ (gráfica en color rojo), calculado de la Ec. (4.48). Se puede observar que la respuesta del comportamiento dinámico del sistema es más plana cuando se emplea el factor de amortiguamiento óptimo, lo que indica una mejor distribución de la energía vibratoria en un rango más amplio de frecuencias.

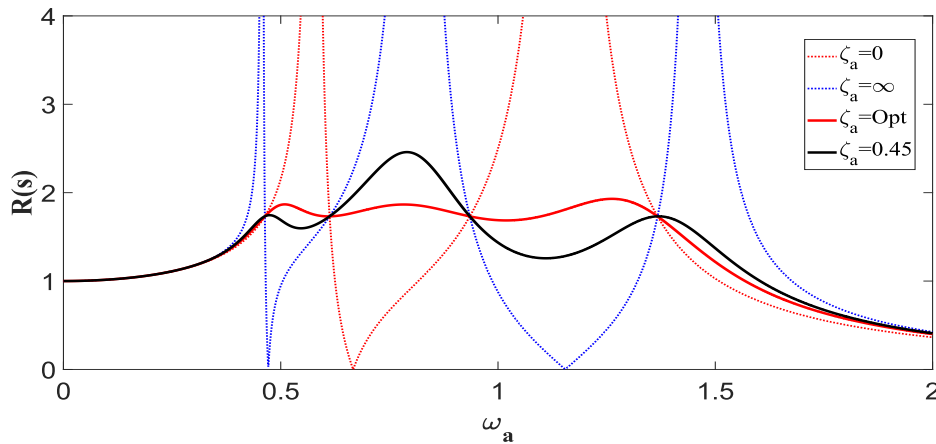


Figura 4.7 Comportamiento dinámico del IDVA-C3 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, \gamma_{a_{opt}}$ y $H_{m_{opt}}$ para un factor de amortiguamiento $\zeta_a = 0.45$, $\zeta_{a_{opt \rightarrow C3}}$ y $\zeta_{a_{opt}}$.

4.3.2.2 Optimización IDVA C4

Para la optimización de la configuración C4, se sustituye la función de la admitancia mecánica global $A_{g,C4}$ reportada en la Tabla 4.1 en la función de transferencia de la estructura principal Ec. (4.11). Siguiendo la misma metodología descrita e la optimización del IDVA C3, Sección 4.3.2.1, se obtiene los parámetros óptimos correspondientes. Los parámetros óptimos para la configuración del IDVA C4 se presentan en las Ecs. (4.49) – (4.52):

$$\beta_{opt \rightarrow C4} = \frac{z - 1 + \sqrt{z^2 + 6z + 1}}{2z + 2} \quad (4.49)$$

$$y_{a_{opt \rightarrow C4}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{z^2 + 6z + 1} - z + 1}}{2z + 2} \quad (4.50)$$

$$H_{m_{opt \rightarrow C4}} = \sqrt{\frac{(z^2 + 3z + 1)\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z^3 + 6z^2 + 6z + 1}{((z + 1)\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z^2 + 4z + 1)z}} \quad (4.51)$$

$$\eta_{opt \rightarrow C4} = \sqrt{\frac{2z + 2}{3z + 1 + \sqrt{z^2 + 6z + 1}}} \quad (4.52)$$

Asimismo, la expresión de la relación de amortiguamiento óptima bajo el criterio de Krenk se puede escribir como:

$$\zeta_{a_{opt \rightarrow C4}} = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{-2(z - 1 + \sqrt{z^2 + 6z + 1})^2 z f_1 \sqrt{z^2 + 6z + 1} + f_2}{f_3 f_4 f_5 f_6 f_7}} \quad (4.53)$$

Donde:

- $f_1 = 16384z^{15} + 282624z^{14} + 2011136z^{13} + 7827456z^{12} + \dots + 3699z^2 + 203z + 5$
- $f_2 = 16384z^{16} + 331776z^{15} + 2793472z^{14} + 12926976z^{13} + \dots + 4288z^2 + 218z + 5$
- $f_3 = \left((-z^3 - 11z^2 - 7z - 1)\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z^4 - 18z^3 - 28z^2 - 10z - 1\right)(-\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z - 1)^2 \left(z + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{z^2 + 6z + 1}}{3}\right)^3 \left(-\sqrt{2} \sqrt{z} \sqrt{\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1\right)$
- $f_4 = \frac{\sqrt{2} \left(\left(\sqrt{z} + 10z^{\frac{3}{2}} + 32z^{\frac{5}{2}} + 38z^{\frac{7}{2}} + 16z^{\frac{9}{2}} + 2z^{\frac{11}{2}} \right) \sqrt{z^2 + 6z + 1} + \sqrt{z} + 13z^{\frac{3}{2}} + 58z^{\frac{5}{2}} + 106z^{\frac{7}{2}} + 78z^{\frac{9}{2}} + 22z^{\frac{11}{2}} + 2z^{\frac{13}{2}} \right) \sqrt{\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1}}{4} + \frac{(8z^6 + 72z^5 + 204z^4 + 220z^3 + 96z^2 + 17z + 1)\sqrt{z^2 + 6z + 1}}{8} + \dots + \frac{143z^2}{8} + \frac{5z}{2} + \frac{1}{8}$
- $f_5 = \sqrt{2} \sqrt{z} \sqrt{\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1$

- $f_6 = \frac{\sqrt{2} \left(\left(\sqrt{z} + 10z^{\frac{3}{2}} + 32z^{\frac{5}{2}} + 38z^{\frac{7}{2}} + 16z^{\frac{9}{2}} + 2z^{\frac{11}{2}} \right) \sqrt{z^2 + 6z + 1} + \sqrt{z} + 13z^{\frac{3}{2}} + 58z^{\frac{5}{2}} + 106z^{\frac{7}{2}} + 78z^{\frac{9}{2}} + 22z^{\frac{11}{2}} + 2z^{\frac{13}{2}} \right) \sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1}{4 \left(z^5 + 8z^4 + \frac{35}{2}z^3 + 10z^2 + 2z + \frac{1}{8} \right) (z + 1) \sqrt{z^2 + 6z + 1} + \dots + 12z^6}$
- $f_7 = (z + 1)(\sqrt{z^2 + 6z + 1} + z + 1)$

En la Figura 4.8, se observa el comportamiento para una relación de masa $z = 0.10$, aplicando un amortiguamiento arbitrario de $\zeta_a = 0.020$ y el amortiguamiento óptimo $\zeta_{a_{opt}}$ obtenido de este procedimiento. Se puede observar que la magnitud de la función de transferencia, representada en el eje de las ordenadas como $R(s)$, presenta diferencias significativas dependiendo del valor del amortiguamiento del DVA. Para el caso con el amortiguamiento arbitrario $\zeta_a = 0.020$, la respuesta muestra un poco de resonancia pronunciado, característico de un sistema con bajo amortiguamiento. En contraste, la curva correspondiéndote al amortiguamiento óptimo $\zeta_{a_{opt}}$ (línea roja) exhibe una respuesta sensible más plana y con una amplitud máxima reducida, lo que demuestra la eficiencia del criterio de la metodología del punto fijo extendido.

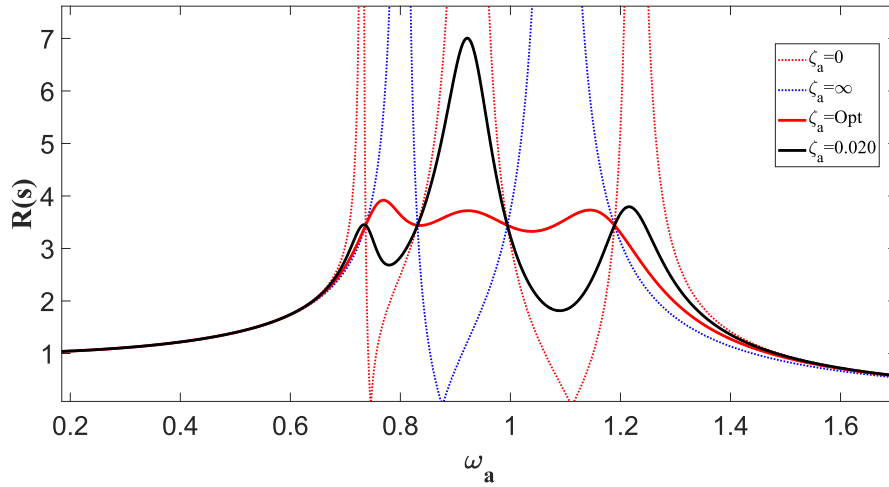


Figura 4.8 Comportamiento dinámico del IDVA-C4 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, \gamma_{a_{opt}}$ y $H_{m_{opt}}$ con un factor de amortiguamiento $\zeta_a = 0.020$ y $\zeta_{a_{opt}}$.

4.3.2.3 Optimización IDVA-C6

Para la optimización de la configuración C6, se sustituye la función de la admitancia mecánica global $A_{g,C6}$ reportada en la Tabla 4.1 en la función de transferencia de la estructura principal Ec. (4.11). Siguiendo la misma metodología descrita e la optimización del IDVA-C3, Sección 4.3.2.1, y IDVA-C4, Sección 4.3.2.2, se obtiene los parámetros óptimos

correspondientes. Los parámetros óptimos para la configuración del IDVA-C6 se presentan en las Ecs. (4.54) – (4.57):

$$\beta_{opt \rightarrow C6} = \frac{2z}{(2z + 1)^2} \quad (4.54)$$

$$y_{a_{opt \rightarrow C6}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{z}}{\sqrt{2z^2 + 3z + 1}} \quad (4.55)$$

$$H_{m_{opt \rightarrow C4}} = \sqrt{\frac{z + 1}{z}} \quad (4.56)$$

$$\eta_{opt \rightarrow C4} = \frac{2z + 1}{2z} \quad (4.57)$$

La expresión correspondiente a la relación de amortiguamiento óptimo aplicando el-criterio de Krenk, se escribe como:

$$\zeta_{a_{opt \rightarrow C6}} = \frac{\sqrt{15} z}{3(2z + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.58)$$

En la Figura 4.9, se muestra el comportamiento dinámico del sistema considerando un amortiguamiento arbitrario $\zeta_a = 0.25$ y el amortiguamiento óptimo $\zeta_{a_{opt \rightarrow C6}}$ (gráfica en color rojo), calculado de la Ec. (4.58), se puede observar que al integrarse los parámetros óptimos en el sistema el comportamiento de la magnitud de la función de transferencia presenta una reducción significativa en los picos de resonancia, lo que indica un mejor desempeño en la absorción de vibraciones. La curva correspondiente al amortiguamiento óptimo, muestra una respuesta más plana y con menor amplitud máxima en un rango más amplio de frecuencias, lo que confirma la efectividad del criterio de optimización.

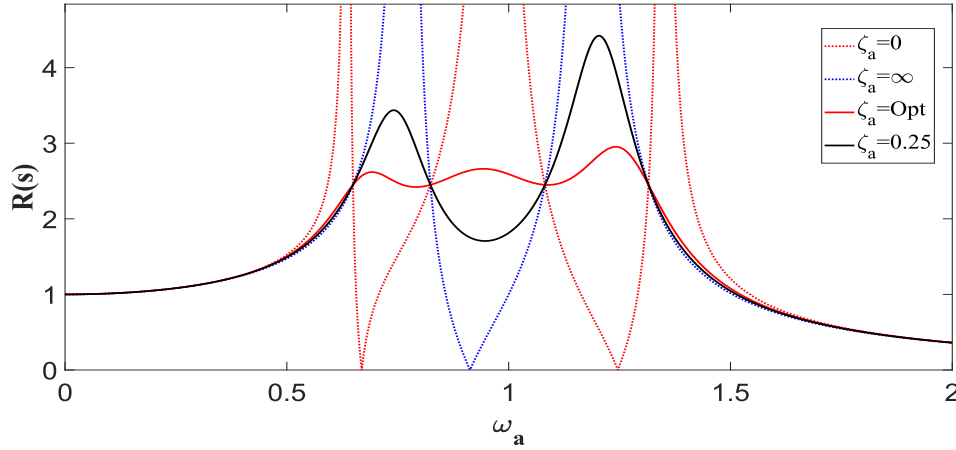


Figura 4.9 Comportamiento dinámico del IDVA-C6 con $\beta_{opt}, \eta_{opt}, \gamma_{a_{opt}}$ y $H_{m_{opt}}$ con un factor de amortiguamiento arbitrario de $\zeta_a = 0.25$ y $\zeta_{a_{opt}}$.

4.4 Comportamiento dinámico del sistema acoplado VIV con A_g

4.4.1 Sistema Estela – Estructura – DVA

Nótese que en la Ec. (4.8) el término correspondiente a la admitancia mecánica global Y_g está expresado en forma adimensional, por lo cual, utilizando los parámetros de la Ec. (4.12), la admitancia mecánica global $Y_{g,DVA}$ correspondiente al DVA se puede expresar como:

$$Y_{g,DVA} = \frac{j\delta_a\omega_a(j2\zeta_a\omega_a + \delta_a)}{-\omega_a + j^2\zeta_a\delta_a\omega_a + \delta_a^2} \quad (4.59)$$

Sustituyendo $Y_{g,DVA}$ Ec. (4.59) en la Ec. (4.8), se obtiene, la función de transferencia en el dominio de la frecuencia correspondiente a la estructura principal, y se puede expresar como:

$$\frac{y_0}{q_0 M \omega_a^2} = \frac{1}{-\omega_a^2 + j \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} + \frac{j\delta_a\omega_a(2j\zeta_a\omega_a + \delta_a)z}{-\omega_a^2 + 2j\zeta_a\delta_a\omega_a + \delta_a^2} \right) \omega_a + 1} \quad (4.60)$$

Al desarrollar el denominador de la Ec. (4.60), la expresión toma la forma de la Ec. (4.61), donde se observa que no es posible calcular directamente la magnitud física debido a las componentes imaginarias presentes en el sistema, por lo tanto, para separar la parte real e imaginaria de la Ec. (4.61) y racionalizar el denominador multiplicando tanto el numerador como el denominador por el conjugado complejo ($C - jD$), obteniendo:

$$\frac{X_1}{P_o} = \frac{A + jB}{C + jD} = \frac{(A + jB)(C - jD)}{(C + jD)(C - jD)} = \frac{(AC + BD) + j(BC - AD)}{C^2 + D^2} \quad (4.61)$$

De la expresión (4.61), se obtiene la magnitud física expresada de la siguiente forma:

$$\frac{X_1}{P_o} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (4.62)$$

En donde:

- $X_1 = y_0$
- $P_o = q_0 M \omega_a^2$
- $A = -\mu \delta (\delta_a^2 - \omega_a^2)$
- $B = -2\delta \mu \zeta_a \delta_a \omega_a$
- $C = -\delta \mu \omega_a^4 + (\mu((z+1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \delta_a + 1)\delta + 2\zeta_a \delta_a \gamma) \omega_a^2 - \delta \mu \delta_a^2$
- $D = 2\left(\left(-\zeta_a \mu \delta - \frac{\gamma}{2}\right) \delta_a^2 + \mu(-1 + (z+1)\omega_a^2) \zeta_a \delta \delta_a + \omega_a^2 \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2}\right) \omega_a\right)$

Al despejar X_1 de la Ec. (4.62) y calcular su raíz cuadrada, se obtiene la función de transferencia denominada como $y_{0,DVA}$ y se denota como:

$$y_{0,DVA} = \sqrt{\frac{M^2 q_0^2 (a_2 \omega_a^4 + a_1 \omega_a^2 + a_0)}{b_4 \omega_a^8 + b_3 \omega_a^6 + b_2 \omega_a^4 + b_1 \omega_a^2 + b_0}} \quad (4.63)$$

En donde:

- $a_2 = \delta^2 \mu^2$
- $a_1 = (4\mu^2 \delta^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 - 2\mu^2 \delta^2 \delta_a^2)$
- $a_0 = (4\mu^2 \delta^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 - 2\mu^2 \delta^2 \delta_a^2)$
- $b_4 = \delta^6 \mu^2$
- $b_3 = \delta^4 \left(-2(\mu(\delta_a^2(z+1) + 4\zeta_a \delta_a + 1)\delta + 2\zeta_a \delta_a \gamma) \delta \mu + 4\left(\mu(z+1)\zeta_a \delta \delta_a + \zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \right)$
- $b_2 = \delta^4 \left(2\mu^2 \delta^2 \delta_a^2 + (\mu(\delta_a^2(z+1) + 4\zeta_a \delta_a + 1)\delta + 2\zeta_a \delta_a \gamma)^2 + 8\left(\left(-\zeta_a \mu \delta - \frac{\gamma}{2}\right) \delta_a^2 - \mu \zeta_a \delta \delta_a\right) \left(\mu(z+1)\zeta_a \delta \delta_a + \zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2}\right) \right)$
- $b_1 = \delta^4 \left(-2\delta \mu \delta_a^2 (\mu(\delta_a^2(z+1) + 4\zeta_a \delta_a + 1)\delta + 2\zeta_a \delta_a \gamma) + 4\left(\left(-\zeta_a \mu \delta - \frac{\gamma}{2}\right) \delta_a^2 - \mu \zeta_a \delta \delta_a\right)^2 \right)$
- $b_0 = \delta^6 \mu^2 \delta_a^4$

Para verificar la validez del modelo matemático desarrollado, la función de transferencia de la Ec. (4.63) se comparó con otras dos funciones de transferencia del mismo sistema, obtenidas con metodologías diferentes: (a) método de Euler (ME - Apéndice **A**) y (b) funciones trigonométricas (MI - Apéndice **B**), ambas utilizando el DVA convencional, pero

sin recurrir al concepto de admitancia mecánica global. Para lo anterior, se dividió la Ec. (4.63) entre la función de transferencia (ME) obtenida por el método de Euler, así mismo, la Ec. (4.63) entre la función de transferencia (MI) obtenida por el método de funciones trigonométricas, dando como resultado en ambas divisiones la unidad. Además, al fijar la relación de masas en $z=0$, la Ec. (4.63) se reduce a la función de transferencia obtenida en el desarrollo del modelo de Facchinetti modificado sin DVA, Ec. (3.16), sección 3.3, Capítulo 3.

Por otra parte, sustituyendo las soluciones propuestas de la Ec. (4.9) en la ecuación del oscilador de estela Ec. (4.5), se obtiene la función correspondiente a la frecuencia de excitación angular por desprendimiento de vórtices ω_a , y la función de transferencia de la amplitud de la estela q_0 .

- La ecuación correspondiente a la frecuencia de excitación ω_a , se puede expresar como:

$$a_5 \omega_a^{10} + a_4 \omega_a^8 + a_3 \omega_a^6 + a_2 \omega_a^4 + a_1 \omega_a^2 + a_0 \quad (4.64)$$

En donde:

- $a_5 = -\frac{\mu^2}{Ur^2 St^2}$
- $a_4 = \frac{(-4(-\frac{1}{2} + (z+1)\zeta_a^2)(z+1)\delta_a^2 - 8\zeta_a z \zeta_a \delta_a - Ur^2(AM-1)St^2 - 4\zeta^2 + 2)\mu^2 - 4StUr\gamma(\zeta_a z \delta_a + \zeta)\mu - St^2 Ur^2 \gamma^2}{Ur^2 St^2}$
- $a_3 = \frac{1}{Ur^2 St^2} \left(-(z+1)^2 \delta_a^4 + \left(-4 \left((z+1)(AM-z-1)\zeta_a^2 + \left(-\frac{AM}{4} + \frac{1}{2} \right) z - \frac{AM}{2} + \frac{1}{2} \right) Ur^2 St^2 + (-16\zeta^2 + 8z + 8)\zeta_a^2 + 8\zeta^2 - 2z - 4 \right) \delta_a^2 + 8\delta_a z St^2 Ur^2 \zeta \zeta_a - 1 + Ur^2(AM + 4\zeta^2 - 2)St^2 \right) \mu^2 - 16St \left(\zeta \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_a^2 - \frac{\delta_a z St^2 Ur^2 \zeta_a}{4} - \frac{St^2 Ur^2 \zeta}{4} \right) Ur\gamma\mu - 4St^2 Ur^2 \left(\left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_a^2 - \frac{Ur^2 St^2}{4} \right) \gamma^2$
- $a_2 = \frac{1}{Ur^2 St^2} \left((-Ur^2(z+1)(AM-z-1)St^2 - 4\zeta^2 + 2z + 2)\mu^2 - 4UrSt\gamma\zeta\mu - St^2 Ur^2 \gamma^2 \right) \delta_a^4 + \left(\left(4 \left((AM + 4\zeta^2 - 2z - 2)\zeta_a^2 - \frac{AM}{2} - 2\zeta^2 + \frac{z}{2} + 1 \right) Ur^2 St^2 - 4\zeta_a^2 + 2 \right) \mu^2 + 16St^3 \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \zeta Ur^3 \gamma\mu + 4St^4 \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) Ur^4 \gamma^2 \right) \delta_a^2 + \mu^2 Ur^2 St^2$
- $a_1 = \left(\left(\left((-1 + Ur^2(AM + 4\zeta^2 - 2z - 2)St^2) \delta_a^2 + 4St^2 \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) Ur^2 \right) \mu^2 + 4\delta_a^2 St^3 Ur^3 \zeta\gamma\mu + \delta_a^2 St^4 Ur^4 \gamma^2 \right) \delta_a^2 \right) (Ur^2 St^2)$
- $a_0 = \delta_a^4 \mu^2$

- La ecuación correspondiente a la estela del vórtice q_0 , se escribe como:

$$q_0 = 2 \sqrt{-\frac{Ur^3 St^3 \omega_a AM (a_3 \omega_a^5 + a_2 \omega_a^3 + a_1 \omega_a)}{\varepsilon (b_4 \omega_a^8 + b_3 \omega_a^6 + b_2 \omega_a^4 + b_1 \omega_a^2 + b_0)}} + 1 \quad (4.65)$$

Donde:

- $a_3 = \left(2\mu \left(z\mu\zeta_a\delta_a + \frac{1}{2}StUr\gamma + \zeta\mu \right) \right) (Ur^2St^2)$
- $a_2 = -\left(4\mu(StUr\gamma + 2\zeta\mu) \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_a^2 \right) (Ur^2St^2)$
- $a_1 = -(\mu\delta_a^4(StUr\gamma + 2\zeta\mu))(Ur^2St^2)$
- $b_4 = \mu^2$
- $b_3 = \left(4 \left(-\frac{1}{2} + (z+1)\zeta_a^2 \right) (z+1)\delta_a^2 + 8z\zeta\zeta_a\delta_a + 4\zeta^2 - 2 \right) \mu^2 + 4StUr\gamma(\zeta_a z\delta_a + \zeta)\mu + St^2Ur^2\gamma^2$
- $b_2 = \left(1 + (z+1)^2\delta_a^4 + ((16\zeta^2 - 8z - 8)\zeta_a^2 - 8\zeta^2 + 2z + 4)\delta_a^2 \right) \mu^2 + 16\gamma UrSt \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_a^2 \zeta\mu + 4\gamma^2 Ur^2 St^2 \left(\zeta_a^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_a^2$
- $b_1 = -2\delta_a^2 \left((\delta_a^2(-2\zeta^2 + z + 1) - 2\zeta_a^2 + 1)\mu^2 - 2StUr\mu\zeta\gamma\delta_a^2 - \frac{St^2Ur^2\gamma^2\delta_a^2}{2} \right)$
- $b_0 = \mu^2\delta_a^4$

Caso # 1: Sistema VIV con DVA

Para el análisis del comportamiento dinámico del sistema, se consideró los parámetros óptimos para el DVA Ecs. (4.19) y (4.21), Sección 4.3.1, Capítulo 4, junto con los parámetros del sistema acoplado presentados en la Tabla 2.1. La frecuencia angular ω_a se obtiene de la solución de la Ec. (4.64), al tratarla como una ecuación bicúbica, se obtienen cinco raíces reales positivas.

En las Figuras siguientes, se analiza el comportamiento de la frecuencia angular de desprendimiento de vórtices ω_a (Figura 4.10), la amplitud de la estela q_0 (Figura 4.11), y la amplitud de la estructura y_0 (Figura 4.12). Para el estudio, se utilizó como excitación el modelo por acoplamiento de aceleración en función de la velocidad reducida U_r . Con el objetivo de evaluar el desempeño mecánico del DVA se consideraron distintas relaciones de masa: z (0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.008, 0.01 y 0.1).

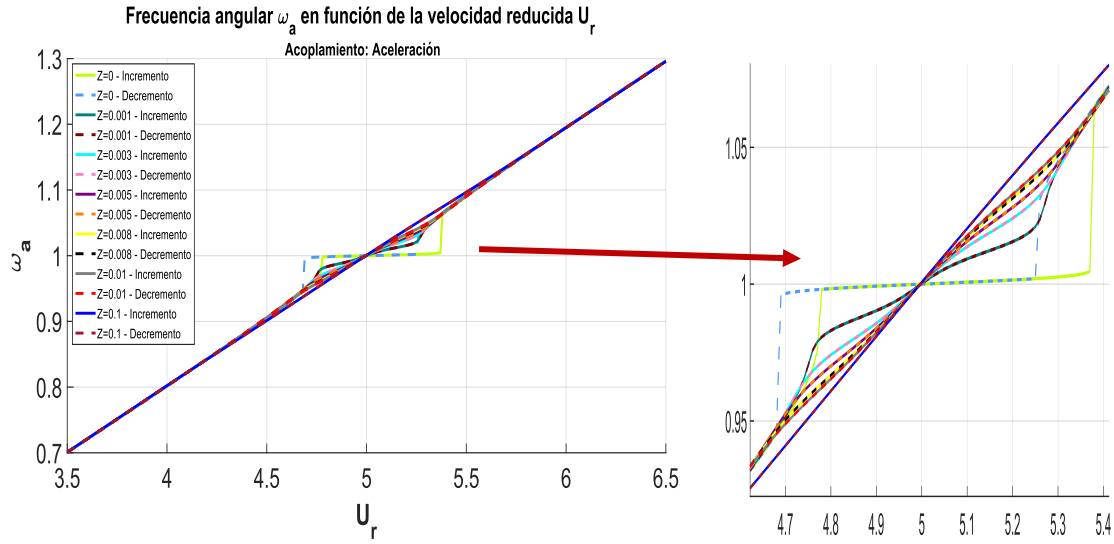


Figura 4.10 Frecuencia angular ω_a en función de la velocidad reducida U_r con un DVA para diferentes valores de z .

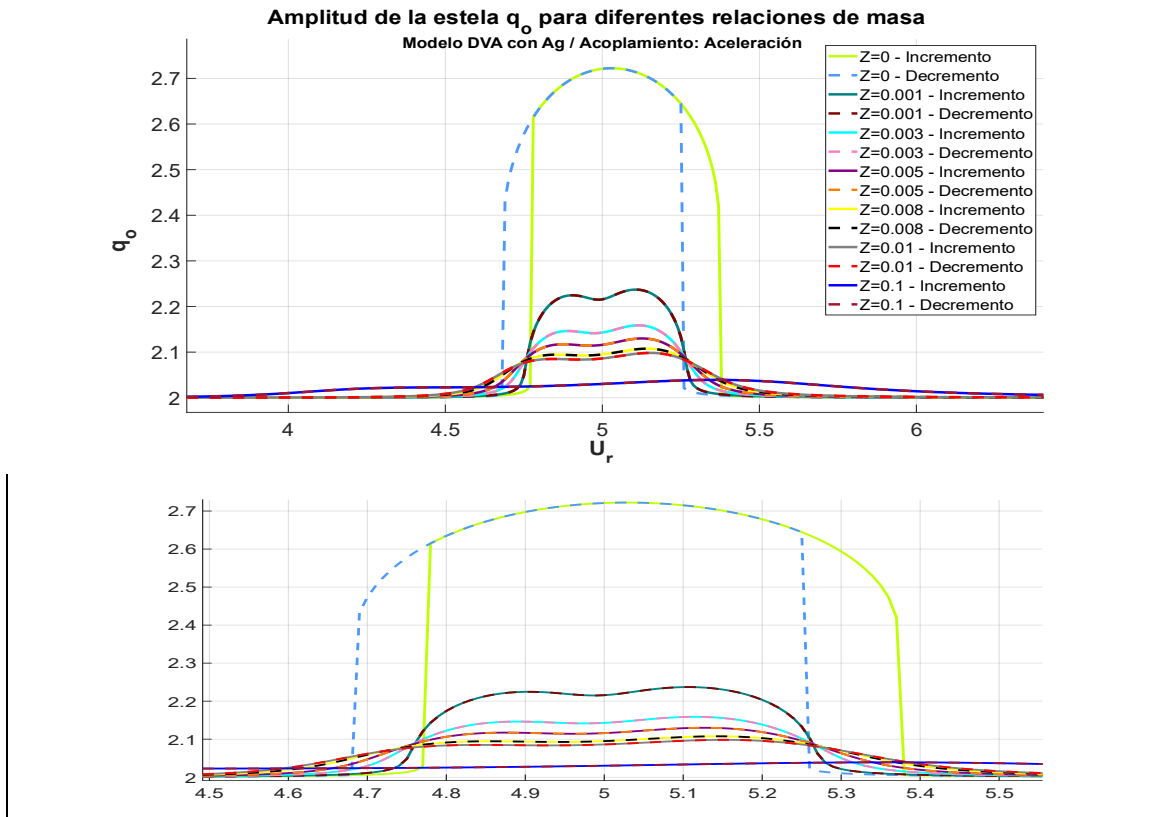


Figura 4.11 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida U_r con un DVA para diferentes valores de z

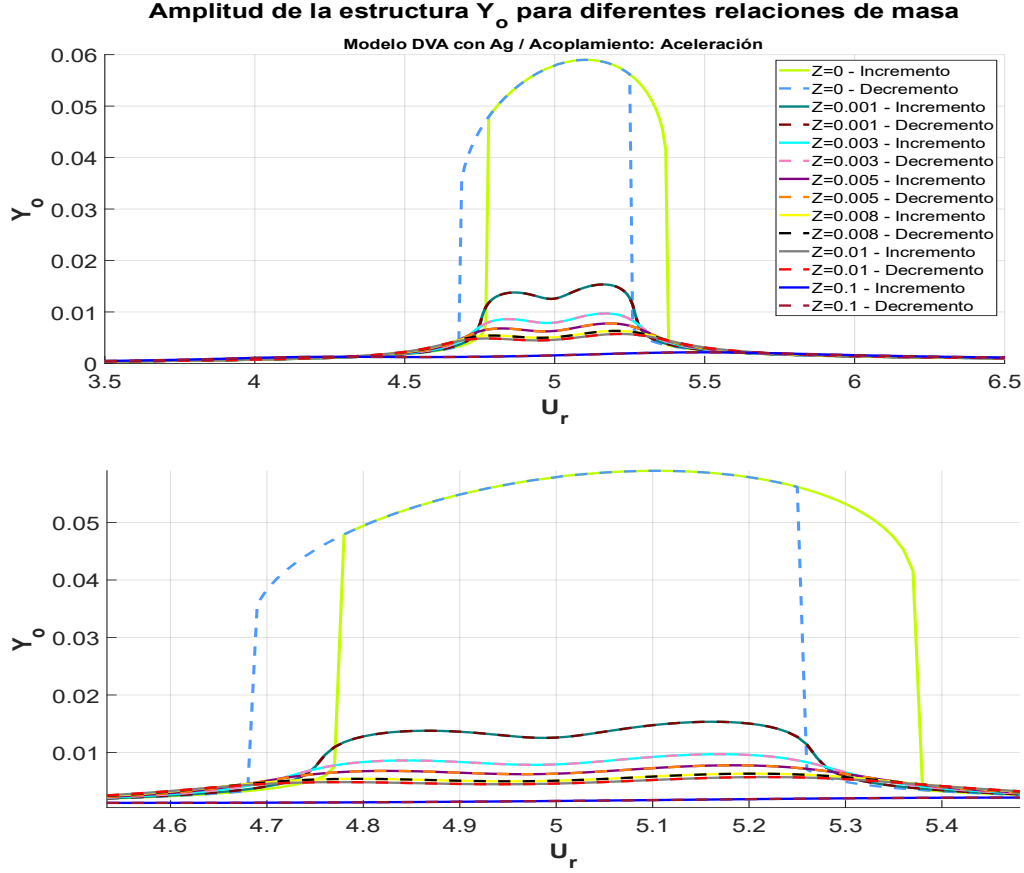


Figura 4.12 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r con un DVA para diferentes valores de z

Caso # 2: Sistema VIV con IDVA-C3, IDVA-C4, IDVA-C6

Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para el caso del DVA convencional, Sección 4.4.1, las funciones adimensionales correspondientes a los IDVA C3, C4 y C6 respectivamente se escriben como:

$$Y_{g,C3} = \frac{2j \left(-\zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \omega_a^2 + \frac{j\beta \eta^2 \omega_a \delta_a}{2} + \eta^2 \zeta_a \delta_a^2 \right) \delta_a^2 \omega_a}{2\zeta_a \omega_a^4 - j\beta \eta^2 \omega_a^3 \delta_a - 2(1 + (\beta + 1)\eta^2) \zeta_a \delta_a^2 \omega_a^2 + j\beta \eta^2 \omega_a \delta_a^3 + 2\eta^2 \zeta_a \delta_a^4} \quad (4.66)$$

$$Y_{g,C4} = \frac{2j\omega_a \delta_a \left(\frac{\beta \eta^2 \delta_a^3}{2} + j\omega_a \zeta_a \delta_a^2 - \frac{\omega_a^2 \beta (\beta \eta^2 + 1) \delta_a}{2} - j\beta \omega_a^3 \zeta_a \right)}{\beta \eta^2 \delta_a^4 + 2j\omega_a \zeta_a \delta_a^3 - \omega_a^2 \beta (\beta \eta^2 + \eta^2 + 1) \delta_a^2 - 2j\omega_a^3 \zeta_a (\beta + 1) \delta_a + \beta \omega_a^4} \quad (4.67)$$

$$Y_{g,C6} = \frac{j\omega_a \delta_a^2 (-\beta (\beta \eta^2 + 1) \omega_a^2 + 2j\zeta_a \delta_a (\beta \eta^2 + 1) \omega_a + \beta \eta^2 \delta_a^2)}{\beta \omega_a^4 - 2j\omega_a^3 \zeta_a \delta_a - \delta_a^2 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \omega_a^2 + 2j\zeta_a \delta_a^3 (\beta \eta^2 + 1) \omega_a + \beta \eta^2 \delta_a^4} \quad (4.68)$$

Al reorganizar la Ec. (4.8) después de sustituir cada una de las respectivas funciones adimensionales de las redes mecánica de las Ecs. (4.66) – (4.68) y siguiendo el desarrollo expuesto en para determinar la magnitud física del sistema descrito en las Ecs (4.60 – 4.63), se obtienen tres funciones de transferencia para cada red mecánica. Estas funciones se agrupan bajo una representación general denominada $y_{0C3,C4,C6}$:

$$y_{0C3,C4,C6} = \sqrt{\frac{q_0^2 M^2 (a_5 \omega_a^6 + a_4 \omega_a^5 + a_3 \omega_a^4 + a_2 \omega_a^3 + a_1 \omega_a^2)}{b_6 \omega_a^6 + b_5 \omega_a^5 + b_4 \omega_a^4 + b_3 \omega_a^3 + b_2 \omega_a^2 + b_1 \omega_a + b_6}} \quad (4.69)$$

Por otra parte, sustituyendo la fuerza de acoplamiento por aceleración definida en la Ec. (4.9) en la Ec. (4.5) del oscilador de la estela adimensional, se obtienen dos ecuaciones para cada configuración de red mecánica, correspondientes a la frecuencia angular ω_a y otra a la amplitud de la estela q_0 , que se pueden escribir como:

- Ecuación correspondiente a la frecuencia de excitación:

$$a_7 \omega_a^{14} + a_6 \omega_a^{12} + a_5 \omega_a^{10} + a_4 \omega_a^8 + a_3 \omega_a^6 + a_2 \omega_a^4 + a_1 \omega_a^2 + a_0 \quad (4.70)$$

1. Ecuación correspondiente a la estela del vórtice:

$$q_0 = 2 \sqrt{-\frac{Ur St \omega_a AM (a_5 \omega_a^9 + a_4 \omega_a^7 + a_3 \omega_a^5 + a_2 \omega_a^3 + a_1 \omega_a)}{\varepsilon (b_6 \omega_a^{12} + b_5 \omega_a^{10} + b_4 \omega_a^8 + b_3 \omega_a^6 + b_2 \omega_a^4 + b_1 \omega_a^2 + b_0)} + 1} \quad (4.71)$$

Es importante mencionar que los coeficientes de la Ec. (4.69), (4.70) y (4.71) se reportan para los IDVA *C3*, *C4* y *C6* en el Apéndice D.

Para graficar el comportamiento dinámico del sistema con las diferentes configuraciones de redes mecánicas, se han empleado los parámetros óptimos obtenidos de la metodología del punto fijo extendido para cada red mecánica, tal como se describe en la Sección 4.4. *Optimización del sistema masa – resorte con IDVAs (C3, C4 y C6)* del presente Capítulo. Al analizar la Ec. (4.70), que describe la frecuencia angular de excitación del sistema acoplado ω_a , se tiene un polinomio de grado 14, que para su solución se puede reducir a un polinomio de grado siete, lo que resulta en siete raíces reales positivas.

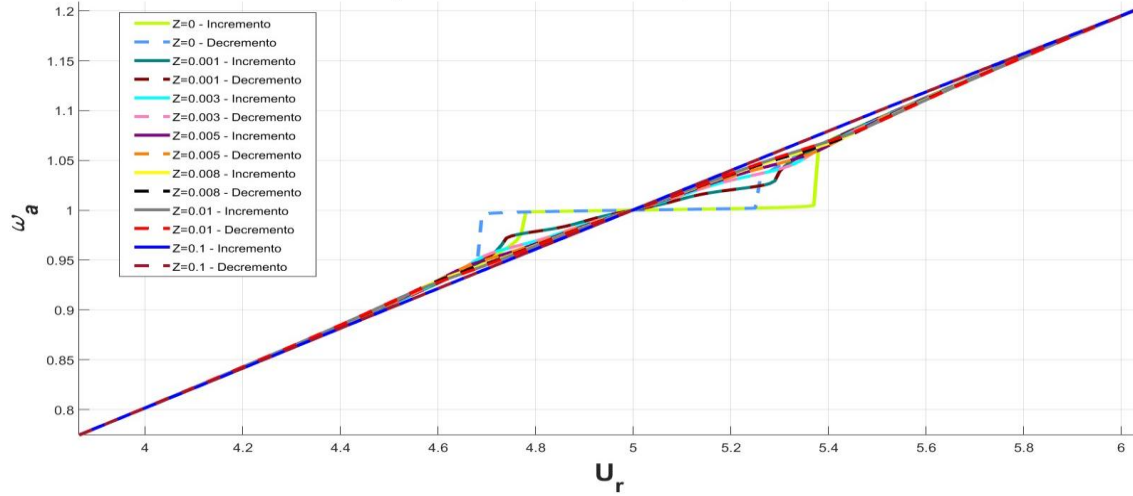
En las Figuras siguientes, se presenta el comportamiento dinámico del sistema en función de la velocidad reducida U_r para el acoplamiento de aceleración, mostrando la frecuencia angular de excitación del sistema ω_a (Figura 4.13), la amplitud de la estela q_0 (Figura 4.14), y la amplitud de la estructura y_0 (Figura 4.15), para distintas configuraciones de redes mecánicas. Se emplearon relaciones de masa: $z=0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.008, 0.01$ y 0.1 , evaluando el sistema tanto para valores crecientes como decrecientes de la velocidad

Capítulo 4. Modelo matemático de un sistema acoplado VIV con DVA/IDVA aplicando el concepto de Admitancia Mecánica Global (A_g)

reducida. Cuando $z=0$, el comportamiento dinámico del sistema es igual que el comportamiento dinámico obtenido del modelo de Facchinetti Modificado.

RED MECÁNICA C3 - ACOPLAMIENTO ACELERACIÓN

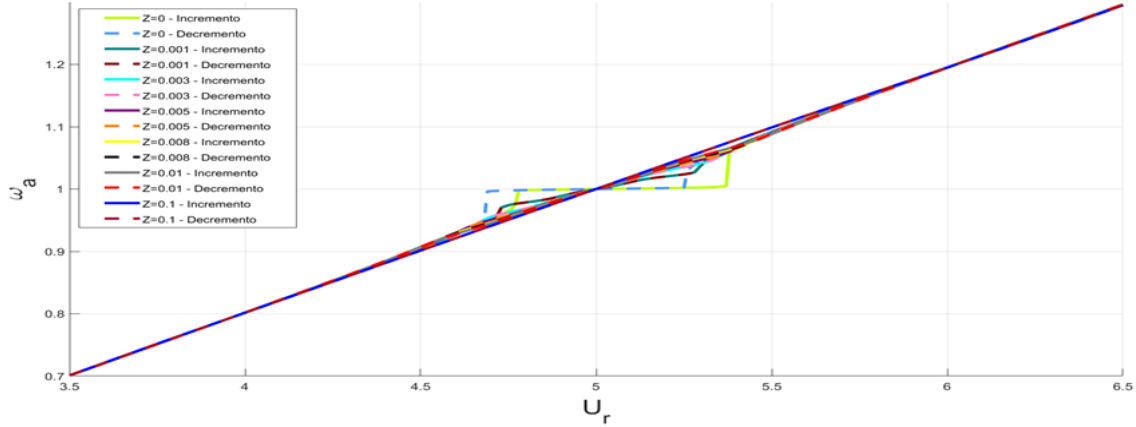
Frecuencia angular ω_a en función de la velocidad reducida U_r para diferentes relaciones de masa (Z)



a)

RED MECÁNICA C4 - ACOPLAMIENTO ACELERACIÓN

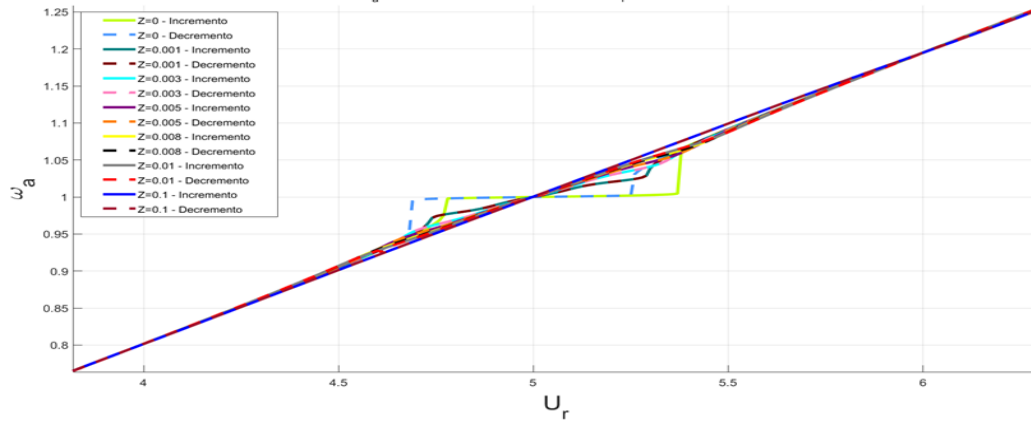
Frecuencia angular ω_a en función de la velocidad reducida U_r para diferentes relaciones de masa (Z)



b)

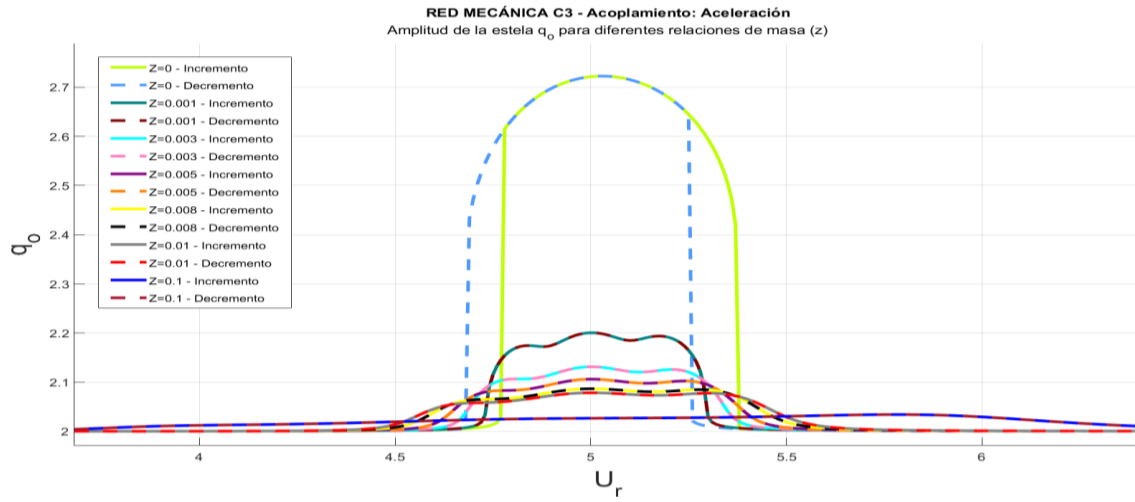
Red Mecánica C6 - Acoplamiento: Aceleración

Frecuencia angular ω_a en función de la velocidad reducida U_r para diferentes relaciones de masa (Z)

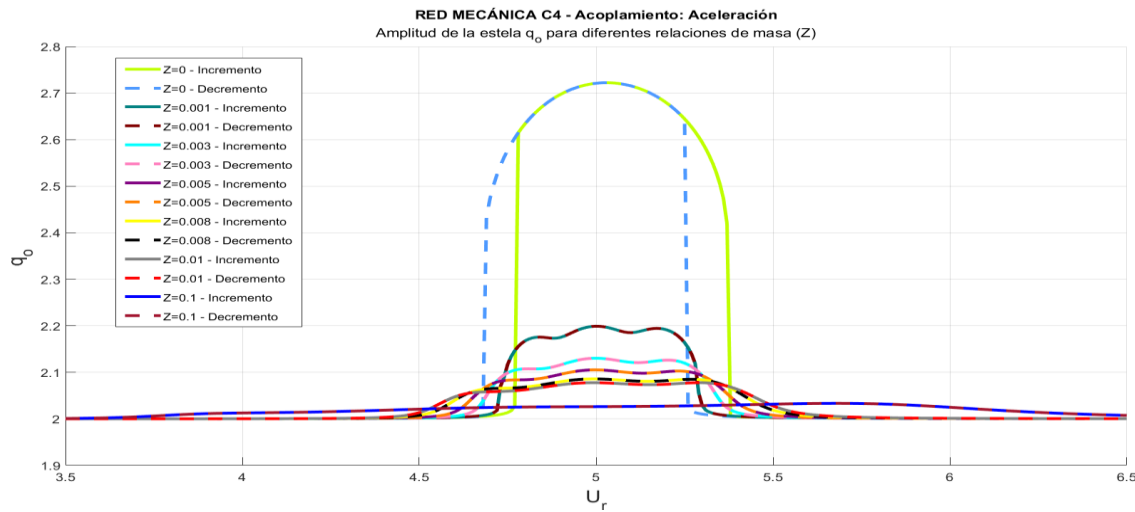


d)

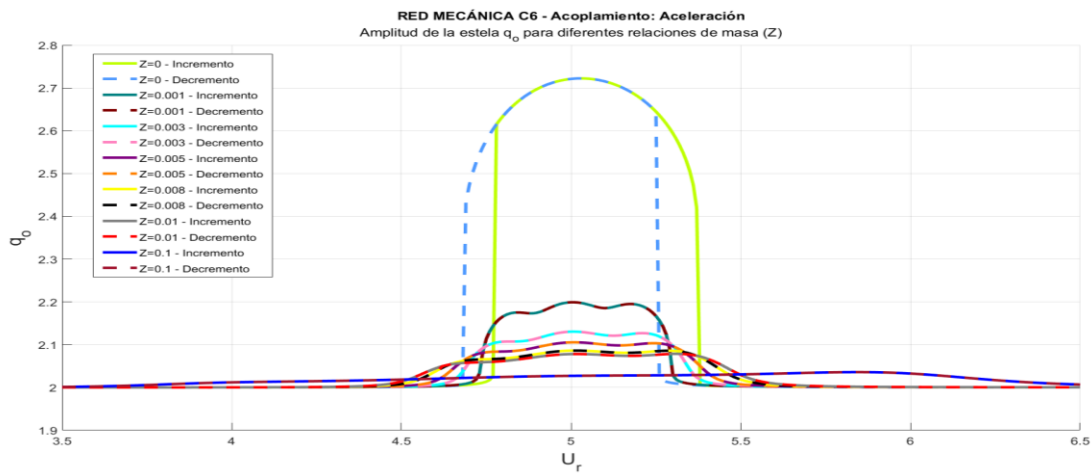
Figura 4.13 Frecuencia angular ω_a en función de la velocidad reducida U_r para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.



a)

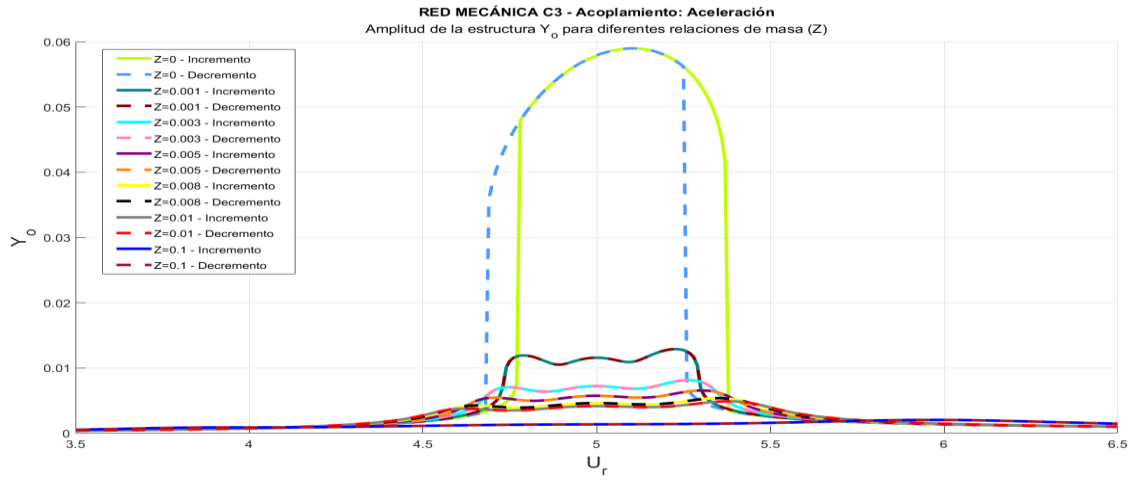


b)

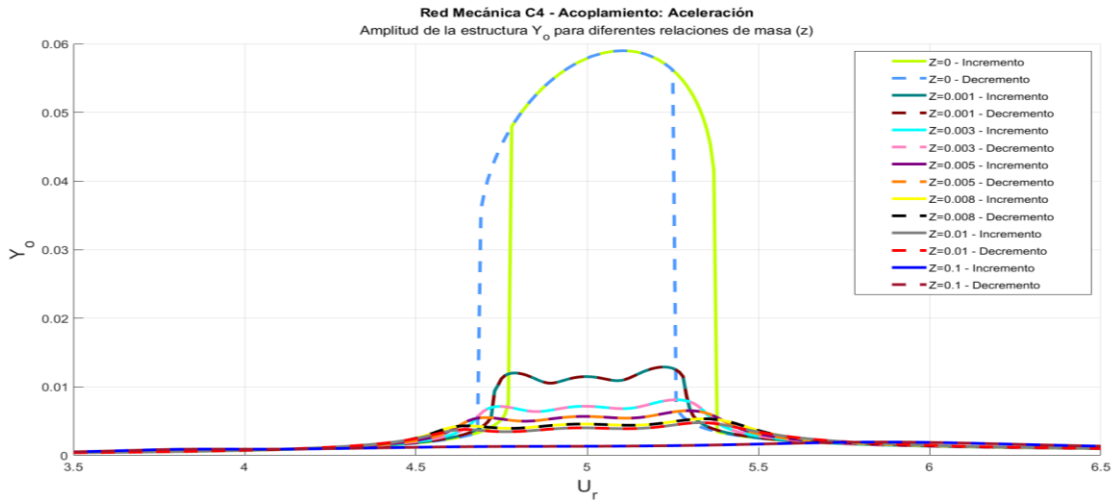


c)

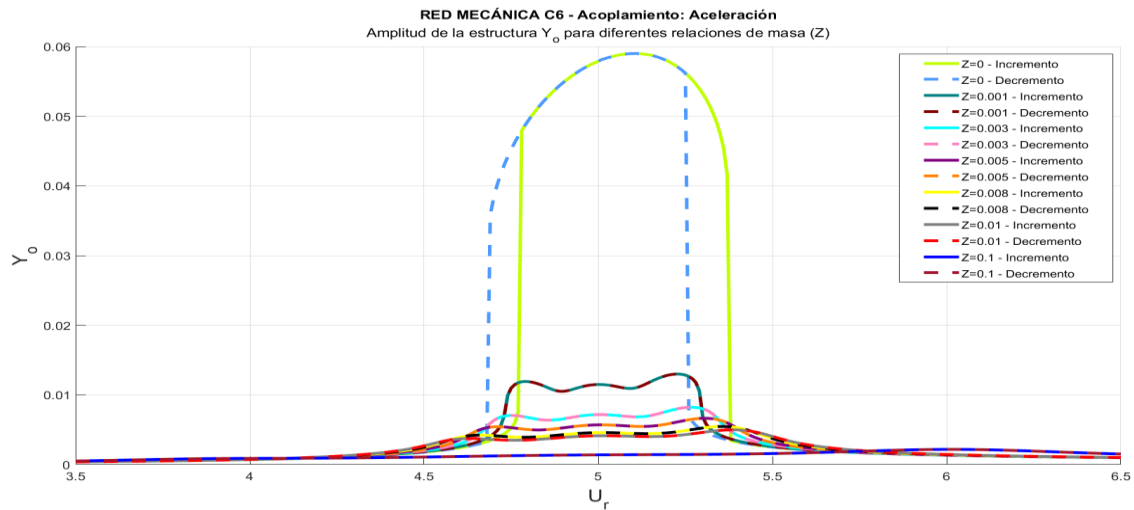
Figura 4.14 Amplitud de la estela q_0 en función de la velocidad reducida U_r y de la frecuencia angular ω_a para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.



a)



b)

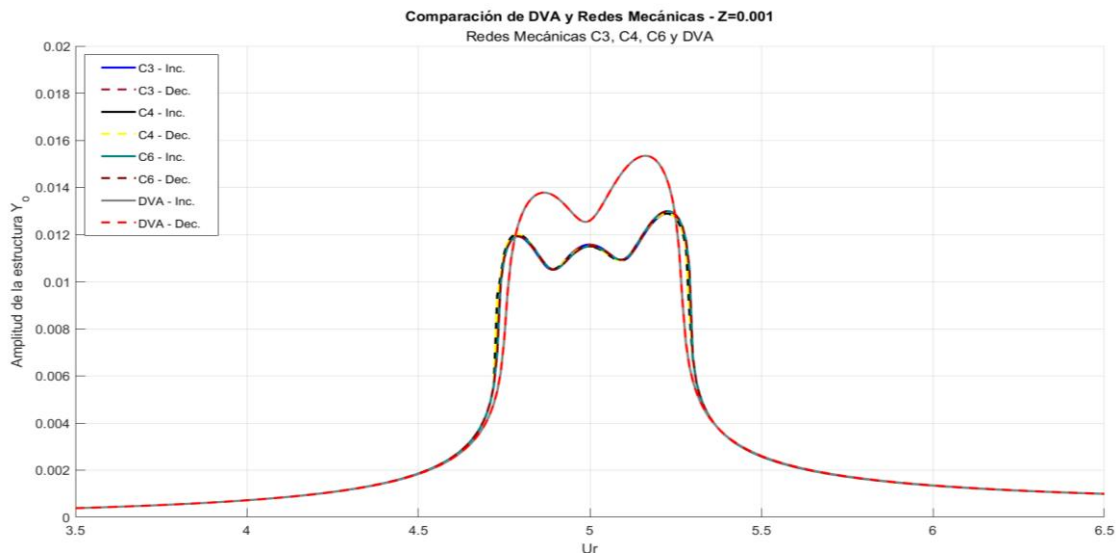


c)

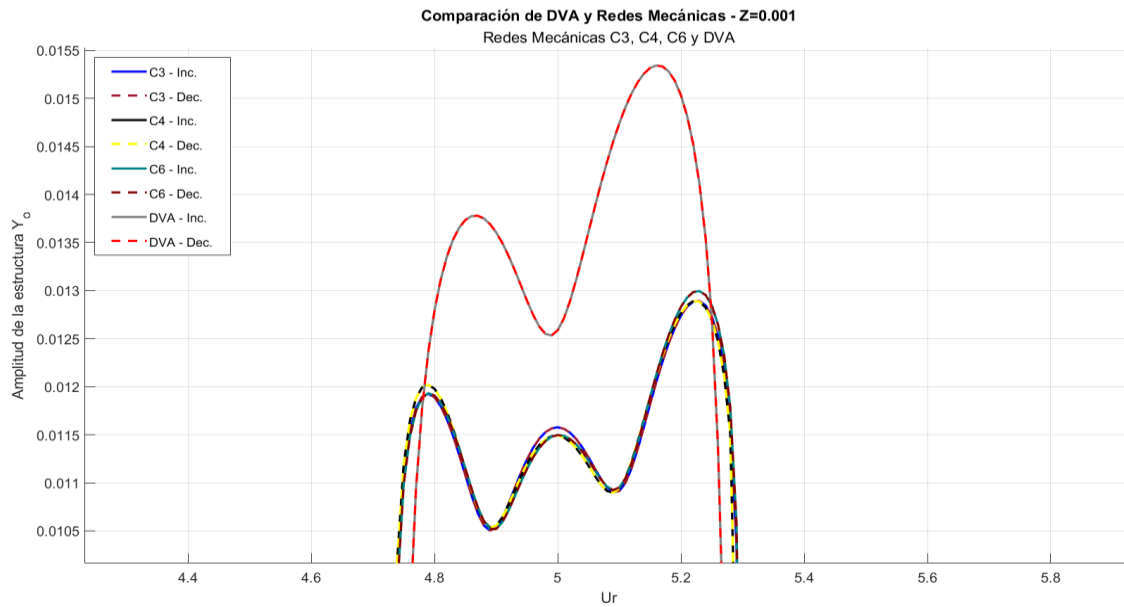
Figura 4.15 Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r y de la frecuencia angular ω_a para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 con diferentes relaciones de masa.

4.5 Comparación de DVA/IDVA en el sistema acoplado VIV

A continuación, se presenta una comparación del desempeño dinámico del sistema VIV implementando los IDVA (C3, C4 y C6), con el desempeño dinámico del VIV utilizando y un absorbedor dinámico de vibraciones convencional (DVA). En las gráficas de las Figuras 4.16 y 4.17 se muestra el comportamiento dinámico del sistema VIV para una relación de masas de $z=0.001$ y $z=0.005$ respectivamente.

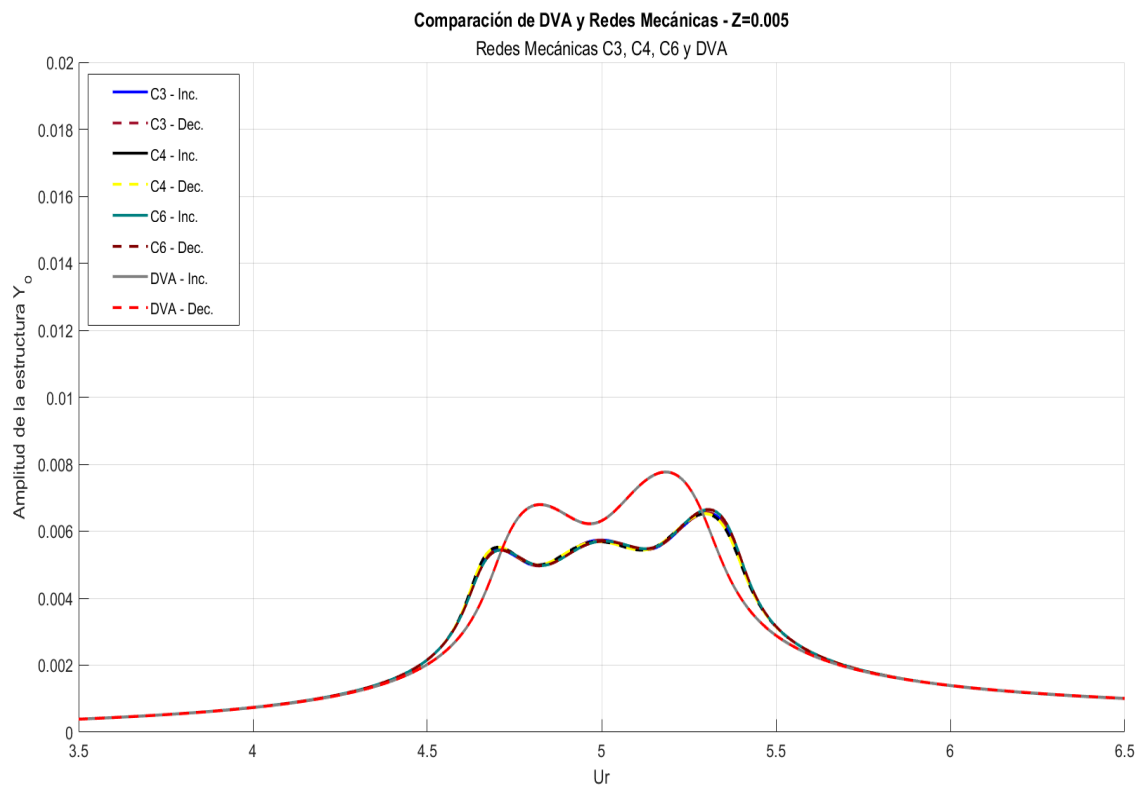


a)



(b)

Figura 4.16 (a) Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r y de la frecuencia angular ω_a para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 y un DVA con una relación de masa de $z=0.001$. (b) Zoom de la región de interés.



a)

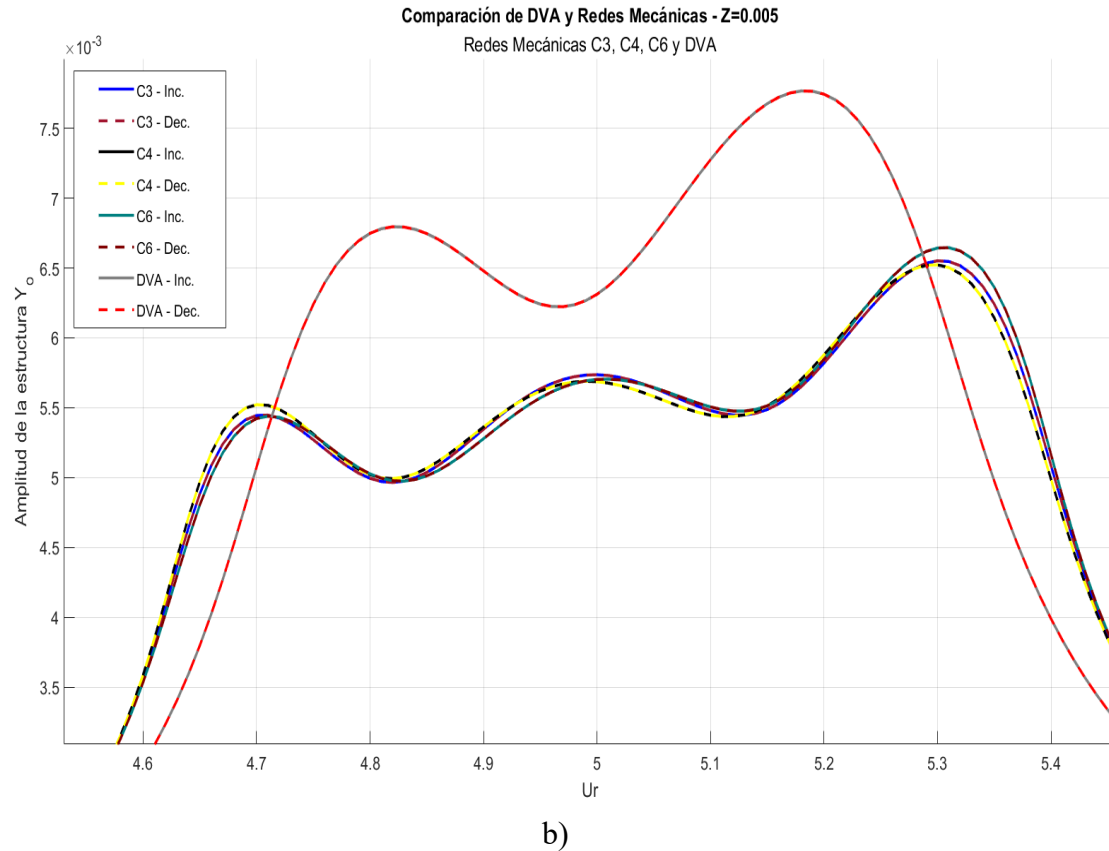


Figura 4.17 (a) Amplitud de la estructura y_0 en función de la velocidad reducida U_r y de la frecuencia angular ω_a para aceleración de las redes mecánicas C3, C4 y C6 y un DVA con una relación de masa de $z=0.005$. (b) Zoom de la región de interés.

Capítulo 5. Discusión de resultados

En esta sección se muestran la discusión de los resultados obtenidos de esta investigación, centrados en el rendimiento dinámico de los IDVA en comparación con un DVA convencional, implementados como un componente mecánico de sintonización pasiva. Se evalúa el impacto progresivo de introducir estos dispositivos de control con variaciones de masa z . El análisis se estructura en tres ejes principales, (a) influencia de la frecuencia de desprendimiento de vórtices, (b) respuesta de la amplitud del oscilador de estela, (c) respuesta en la amplitud de la estructura principal.

5.1 Análisis de los resultados obtenidos del sistema acoplado estela – estructura con las configuraciones de absorbedores dinámicos de vibración

5.1.1 Frecuencia angular de desprendimiento de vórtices

Como se ha mencionado previamente, cuando se emplea una relación de masa (z) nula, el sistema acoplado se comporta de acuerdo con el modelo original de Facchinetti *et al.*[23], ya que ignora la existencia del absorbedor de vibraciones o red mecánica. En este escenario es visible el efecto *lock-in*. De acuerdo con De Langre [10], la frecuencia de desprendimiento de vórtices de un cuerpo no aerodinámico en ausencia de movimiento del sólido aumenta proporcionalmente con la velocidad del flujo, siguiendo la ley de Strouhal. Sin embargo, cuando la estructura oscila libremente en dirección transversal al flujo, se genera un acoplamiento no lineal entre el movimiento estructural y la dinámica de la estela cercana. Esto resulta en una evolución compleja de la frecuencia de desprendimiento, la cual se desvía de la ley de Strouhal al aproximarse a la frecuencia natural del sólido, (es decir, cuando $\omega_a \approx 1$). En este régimen, la frecuencia de desprendimiento se “engancha” o sincroniza con la frecuencia natural del sólido, como se observa en la Figura 5.1. Es común asumir un número de Strouhal $S_t = 0.2$ en el intervalo subcrítico $300 < Re < 1.5 \times 10^5$, donde el desprendimiento de vórtices es fuerte y periódico, proporcionando condiciones óptimas para la aparición del fenómeno de *lock-in*.

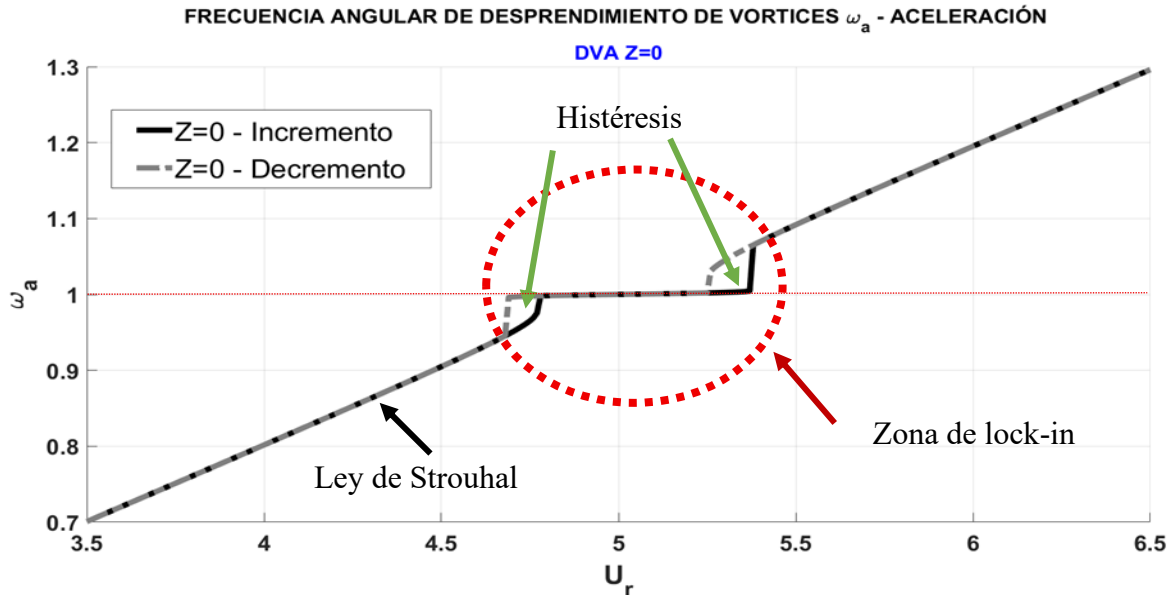


Figura 5.1 Frecuencia de desprendimiento de vórtices en función de la velocidad reducida con un DVA para $z=0$.

Un aspecto fundamental del fenómeno de *lock-in* es la presencia de un bucle de histéresis, que constituye un comportamiento dinámico no lineal característico de sistemas acoplados. Esto significa que el estado del sistema (su frecuencia de desprendimiento, amplitud de vibración y modo de desprendimiento de vórtices) no está determinado únicamente por el valor instantáneo de la velocidad reducida, sino también por la dirección y la historia de su variación. En la Figura 5.2 durante el incremento de la velocidad reducida U_r , la frecuencia adimensional de desprendimiento ω_a sigue la ley de Strouhal desde $U_r = 3.5$ hasta $U_r = 4.77$. Al alcanzar este último valor, el sistema experimenta una transición abrupta, ω_a pasa de 0.975 a 1.062, marcando el inicio del régimen de *lock-in*. En este punto la dinámica del desprendimiento se sincroniza con la frecuencia natural del sistema, este estado acoplado se mantiene en un intervalo de $U_r = 4.77$ -5.37, para velocidades superiores a $U_r = 5.37$, el fenómeno se desacopla. Por otra parte, durante la disminución progresiva de la velocidad U_r , el comportamiento es distinto. El sistema entra en la fase de bloqueo en un intervalo de U_r de 5.26 a 4.68 donde ω_a desciende de 1.030 hasta 0.945, evidenciando la histéresis del sistema.

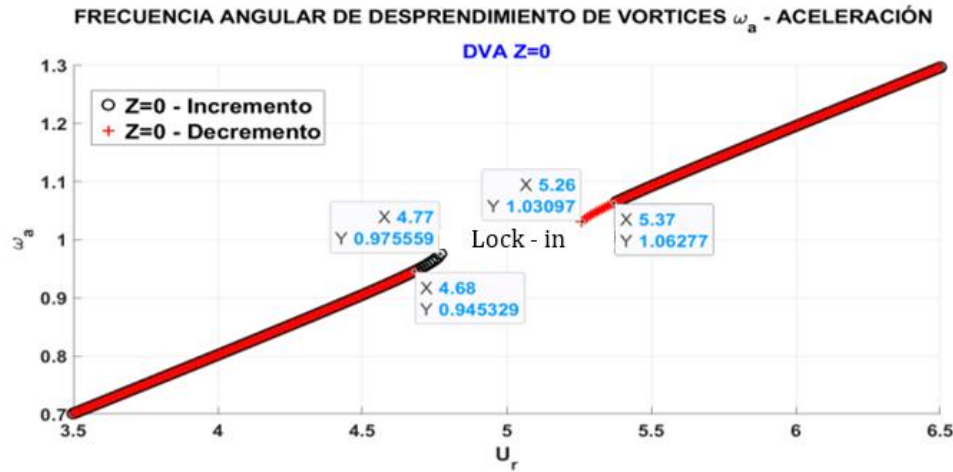
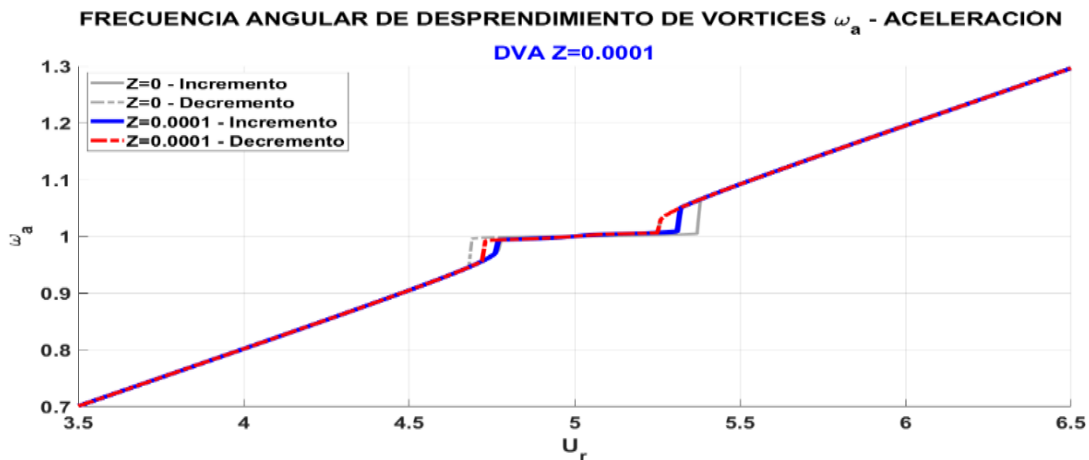


Figura 5.2 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z=0$.

Si se emplea una relación de masa $z=0.0001$ y 0.0003 para el DVA y la red mecánica (C3) respectivamente, el fenómeno de bloqueo en ambos sistemas persiste, como se observa en las Figuras 5.3 y 5.4. No obstante, una comparación revela que la amplitud del bucle de histéresis disminuye en ambos sistemas en comparación con el caso base sin control ($z=0$). Esto indica que incluso una masa de control mínima introduce disipación y alteración de fase suficiente para comenzar a controlar la inestabilidad, reduciendo la brecha entre los estados estables alcanzados durante el incremento y el decremento de velocidad, un comportamiento más drástico se observa al aumentar la relación de masa ($z=0.0003$). Para estos valores, mostrados en las Figuras 4.11 y 4.15, los bucles de histéresis prácticamente desaparecen, las curvas de frecuencia para incremento y decremento de velocidad U_r se superponen y el fenómeno de *lock-in* se estabiliza. En este régimen, la frecuencia de desprendimiento de vórtices recupera y sigue de manera consistente la ley de Strouhal en todo el intervalo de velocidades analizado, sin mostrar el característico salto de amplitud.



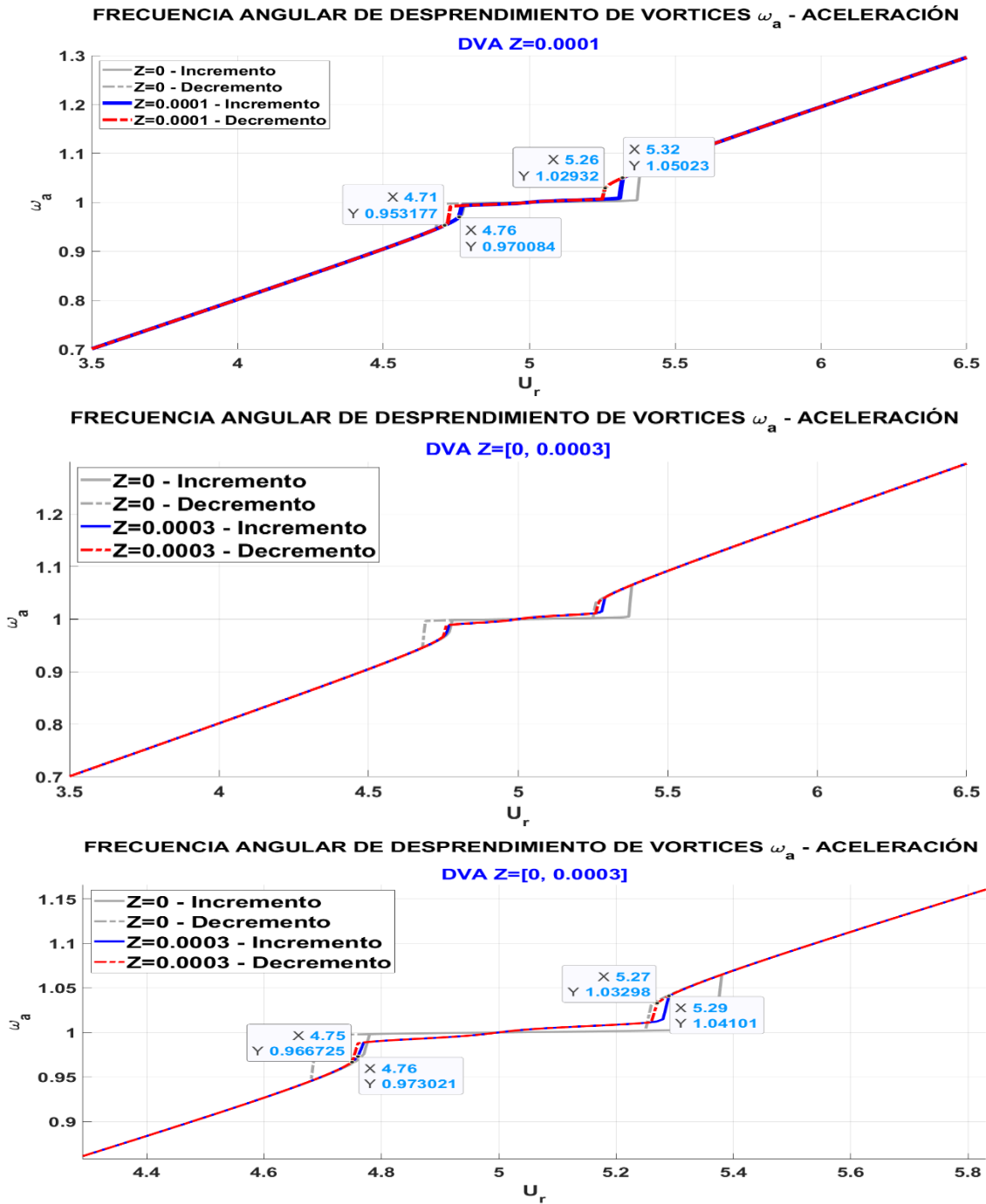


Figura 5.3 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z=0.0001$ y 0.0003 empleando un DVA

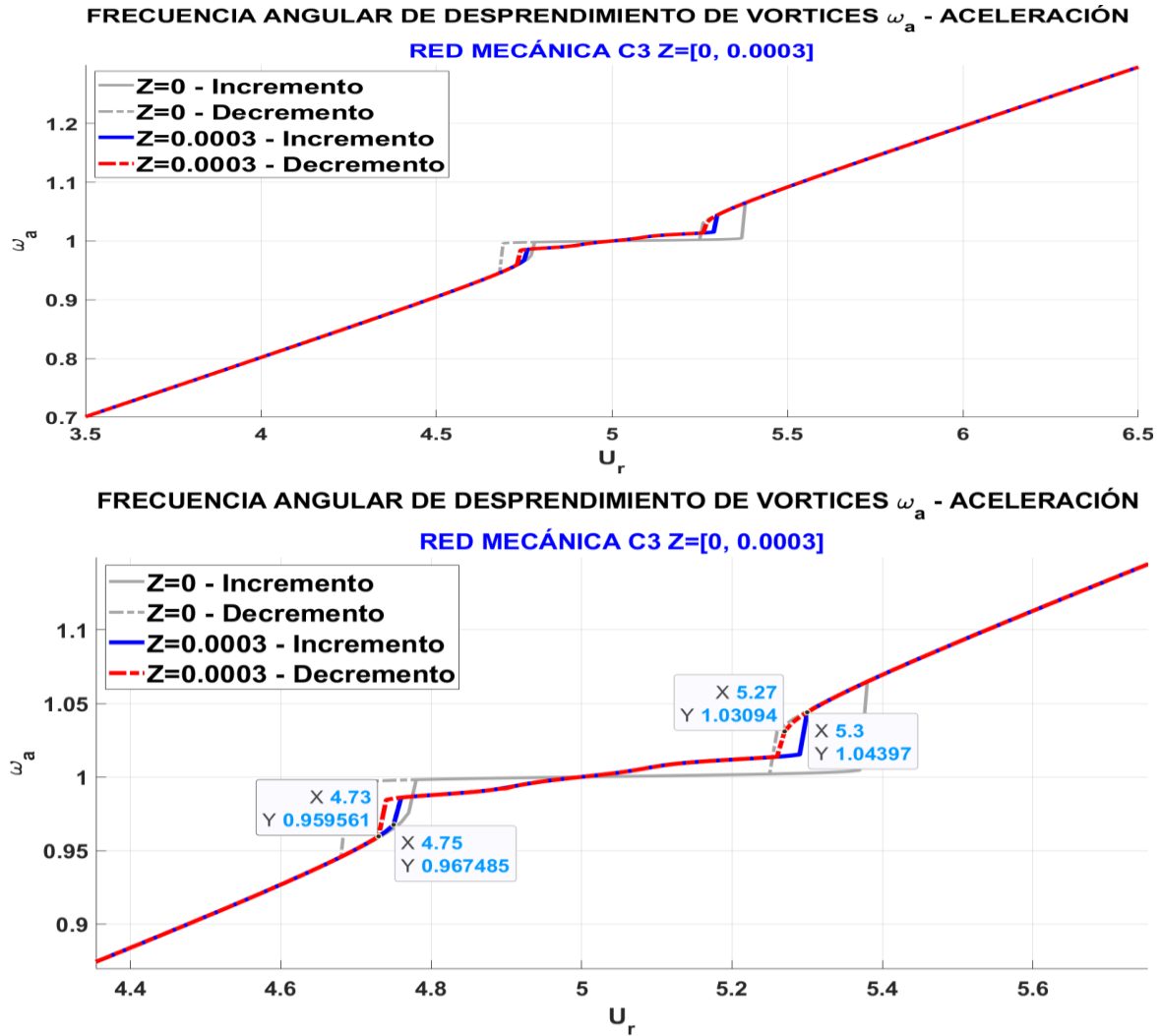


Figura 5.4 Fenómeno de bloqueo en la frecuencia de desprendimiento de vórtices para $z = 0.0003$ empleando una red mecánica C3.

5.1.2 Amplitud del oscilador de estela

El oscilador de estela tipo Van der Pol, que modela la dinámica del desprendimiento de vórtices, presenta una característica de los sistemas no lineales: el ciclo limite. Este fenómeno describe una oscilación periódica y estable cuya amplitud en este modelo es $q_0 = 2$. La Figura 5.5 correspondiente al caso sin absorbedor ($z=0$), se puede observar que fuera del intervalo de la velocidad U_r donde se presenta el efecto *lock-in* q_0 mantiene su valor teórico. Sin embargo, en el intervalo de velocidades U_r donde se presenta el efecto *lock-in* $4.68 < U_r < 5.37$, la amplitud q_0 experimenta una amplificación alcanzando valores entre 2 a 2.64. Esta amplificación es una consecuencia directa de la retroalimentación energética del sistema, la vibración estructural refuerza el desprendimiento de vórtices, el cual a su vez genera fuerzas sincronizadas que alimentan la vibración. La repuesta dinámica en este régimen se distingue por la presencia de transiciones abruptas en la amplitud, identificables

en los segmentos $(AB - CD)$ y $(EF - GH)$ de la Figura 5.5. Adicionalmente, se manifiesta un ciclo de histéresis marcado entre las trayectorias de velocidad reducida creciente y decreciente.

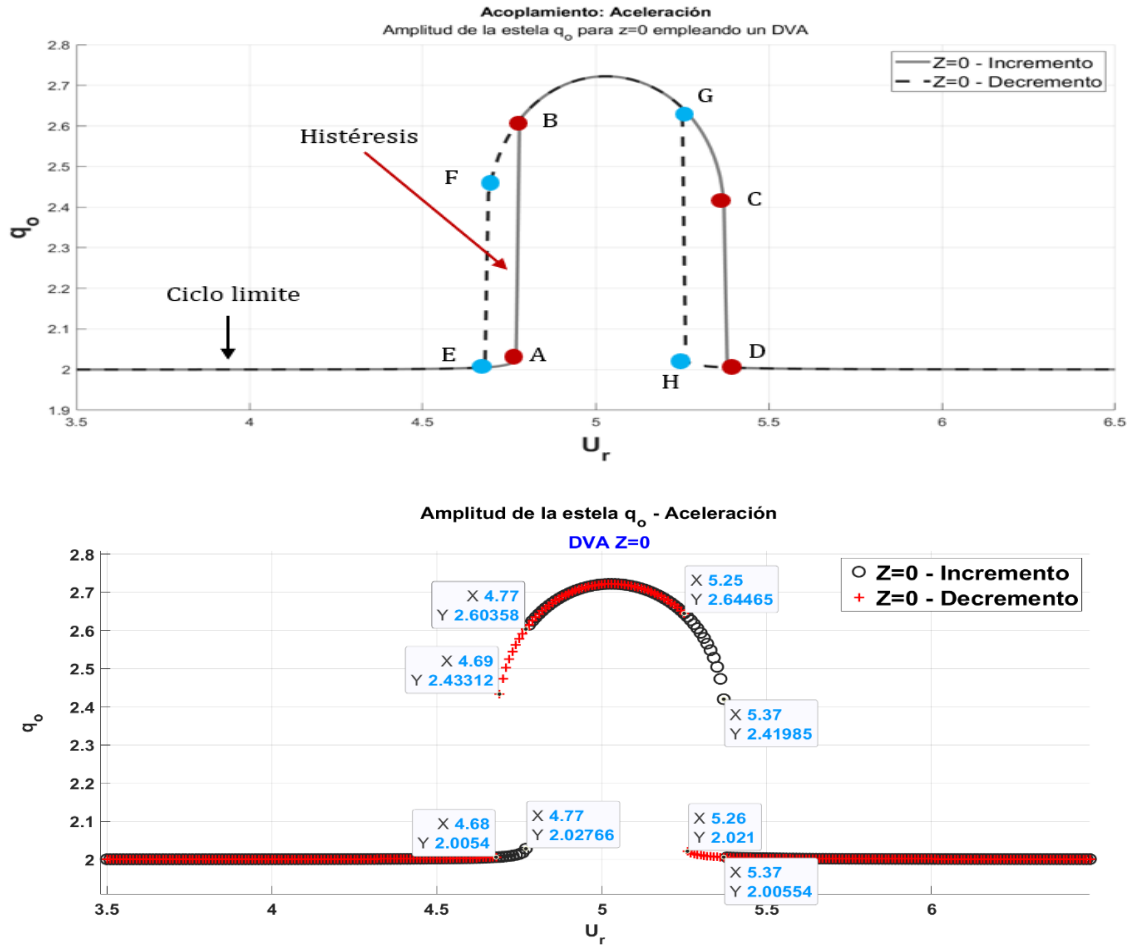


Figura 5.5 Fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estela q_0 para una relación de masa de $z=0$ empleando un DVA convencional

En la Figura 5.6 se observa que, al incrementar la relación de masa en valores de $z > 0.0003$ en el sistema con el IDVA C4, la amplitud de la estela tiende a estabilizarse, mientras que el fenómeno de histéresis y el efecto *lock-in* se atenúa progresivamente. Lo anterior indica que el IDVA C4, disipa la energía intercambiada entre la estructura y la estela, desacoplando así el sistema. Para el valor de $z = 0.1$, el comportamiento de la amplitud del oscilador de estela se aproxima notablemente a su ciclo límite teórico, lo que refleja un sistema prácticamente desacoplado, con una dinámica cercana a la de un oscilador de Van der Pol (Figuras 4.11 y 4.14).

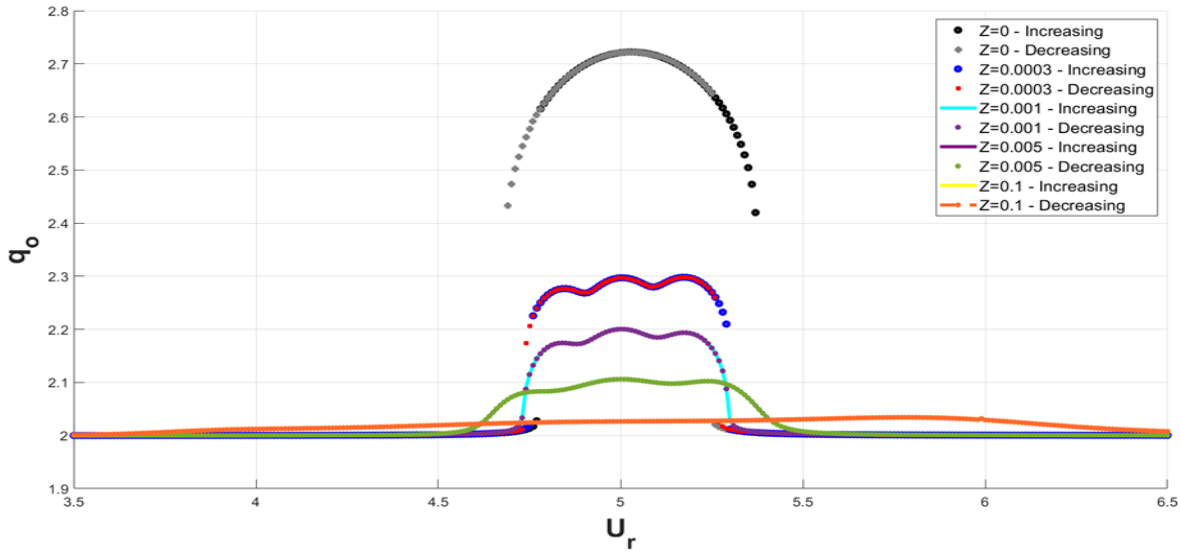


Figura 5.6 Control del fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estela q_0 para diferentes relaciones de masa empleando una red mecánica C4.

5.1.3 Amplitud de la estructura

El acoplamiento por aceleración, el incremento de amplitud y_0 se presenta por la condición de resonancia, en la fase de la zona del efecto *lock-in* conduce a una discontinuidad en el diagrama de bode producto de la inestabilidad del sistema cuando el mástil es sometido a VIV, fuera de este régimen la estructura se encuentra esencialmente en reposo, ver figura 5.7. Se observa que cuando la velocidad reducida incrementa hasta $U_r = 4.73$, se produce un salto que va desde 0.004 hasta 0.047, posteriormente la estructura alcanza a su amplitud máxima (0.058) y, al finalizar la zona del efecto *lock-in* en $U_r = 5.39$, se genera otro salto desde 0.047 hasta 0.003. Cuando la velocidad se reduce, el sistema entra en la zona del efecto *lock-in* en el intervalo de $U_r = 5.28$ a 4.65, el primer salto de amplitud ocurre desde 0.005 hasta 0.056 alcanzando nuevamente la amplitud máxima de 0.058 para luego descender a 0.002 al salir de la zona del efecto *lock-in* y regresar a su estado cuasi estático, igualmente se puede observar el fenómeno de histéresis entre las curvas correspondientes a la de velocidad U_r creciente (incremento) y decreciente (decremento). Al implementar un DVA convencional o alguna configuración de IDVA y aumentar la relación de masa z , se tiene un mejor control de vibración en la estructura para valores de $z=0.001$ como se observa en las Figura 5.8. Es importante mencionar que debido a la influencia del inersor, las configuraciones de IDVA agregan un grado de libertad extra al sistema, de ahí que en la gráfica 5.8 (a) se identifiquen tres frecuencias naturales, a diferencia del sistema con DVA convencional.

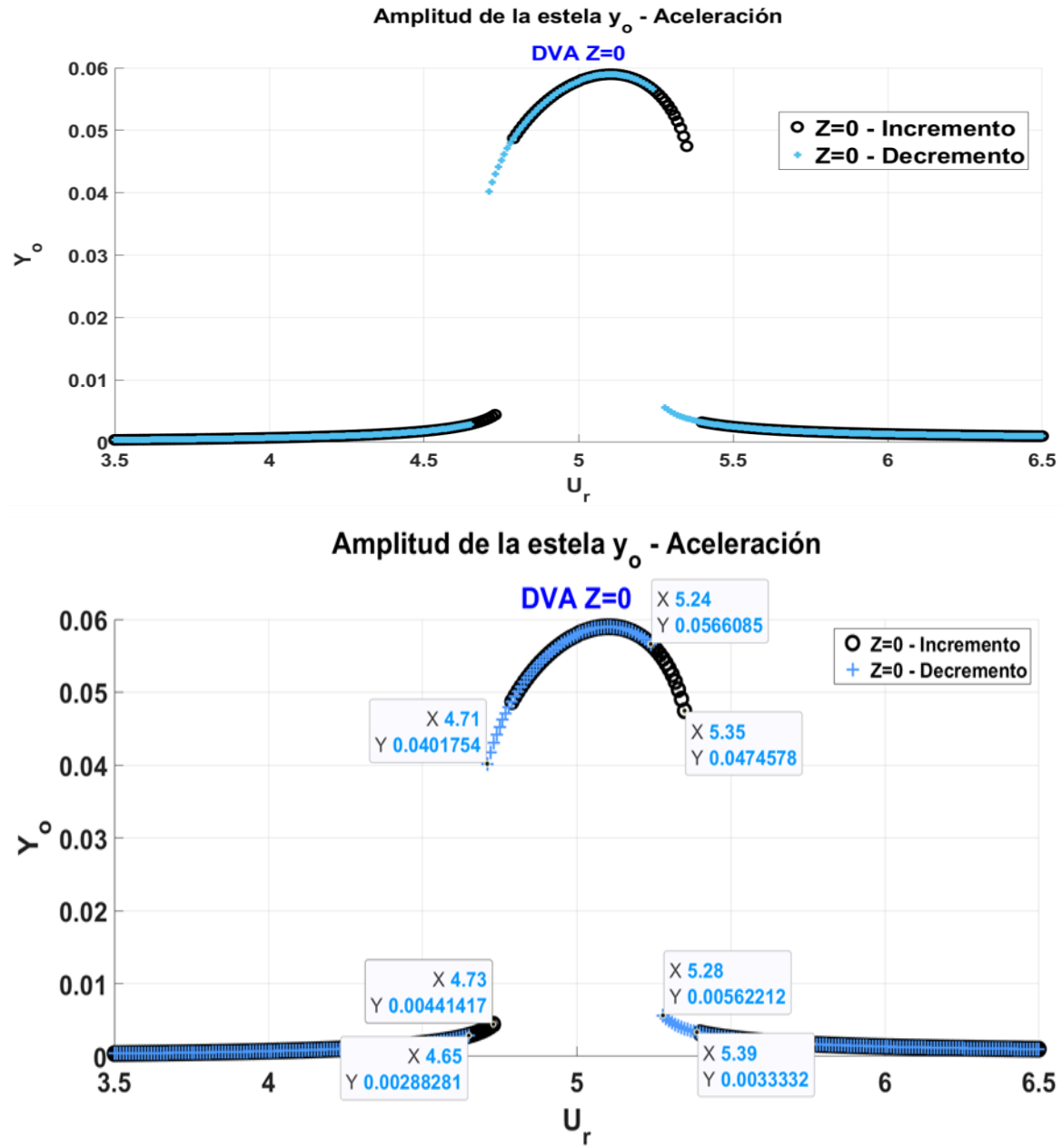


Figura 5.7 Fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estructura y_o para una relación de masa de $z=0$ empleando un DVA convencional

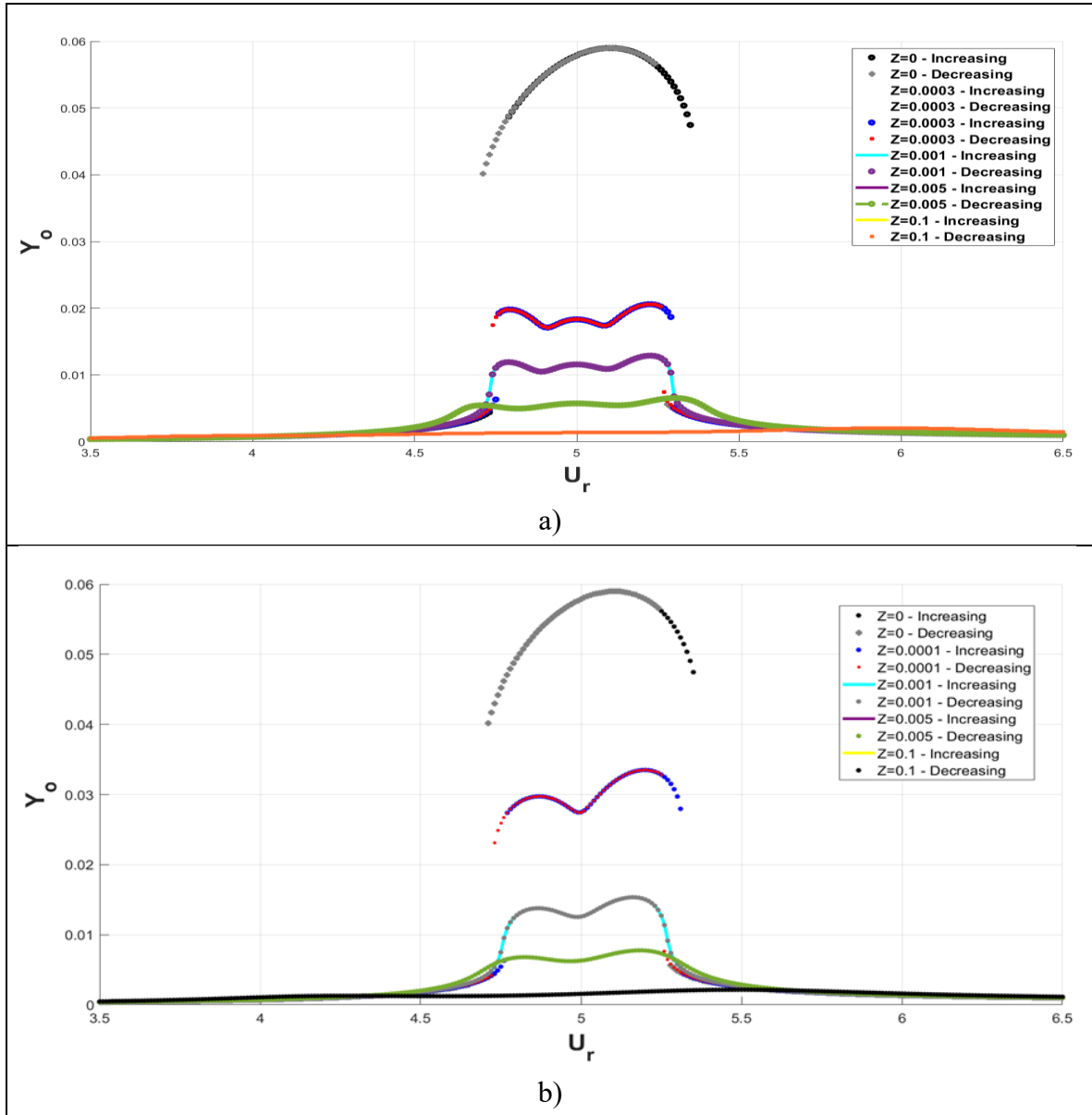


Figura 5.8 Control del fenómeno de bloqueo e histéresis en la amplitud de la estructura y_0 para diferentes relaciones de masa (z): a) Red mecánica C3 b) DVA convencional.

5.1.4 Comparación de DVA / IDVA

En las Figuras 4.18 y 4.19 se realiza una comparación integral entre un DVA convencional y tres configuraciones de IDVA para relaciones de masa z en el intervalo de $[0.001, 0.005]$, valores en los que el sistema VIV presenta un comportamiento dinámico estable, ver Figura 5.8. Se observa que el DVA convencional, Figura 5.8(b), presenta una amplitud máxima mayor que los IDVA, figura 5.8(a). Sin embargo, las configuraciones de IDVA muestran un incremento en el ancho de banda operativo, ofreciendo un rendimiento más robusto frente a variaciones en la velocidad del flujo. Por otra parte, es posible realizar un mejor ajuste de calibración en los IDVA con la normativa H_∞

Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros

Como cierre de esta investigación, en este capítulo se presenta una evaluación conclusiva de la estrategia de control basa en IDVA, destacando su capacidad para suprimir el fenómeno de *lock-in* y estabilizar la respuesta dinámica del sistema VIV. Además de proyectar el conocimiento generado hacia futuras etapas de desarrollo, identificando los desafíos técnicos y las oportunidades de investigación que permitan avanzar hacia la validación experimental y la aplicación práctica de los aerogeneradores VIV.

6.1 Conclusiones

Este trabajo de investigación abordó el desafío de ampliar el rango operativo de los aerogeneradores de vibración inducidas por vórtices (VIV), una tecnología prometedora pero cuyo desarrollo comercial se ve limitado por una banda de sincronización estrecha. Para superar esta barrera, se propuso y analizó en profundidad la implementación de un sistema de sintonización pasivo basado en absorbedores dinámicos de vibración con inersor (IDVA).

El desarrollo del estudio se sustentó en dos bases metodológicas fundamentales: En primer lugar, se formuló con éxito un modelo matemático acoplado estela-estructura en el marco del concepto de admitancia mecánica global. Este enfoque demostró ser una herramienta sumamente eficaz y satisfactoria en el análisis del sistema acoplado bajo este estudio, ya que permitió integrar y analizar diversas configuraciones de IDVA (C3, C4, C6) y un DVA convencional bajo una formulación unificada, evitando la necesidad de desarrollar modelos individuales para cada topología, logrando simplificar significativamente el análisis de sistemas complejos. En segundo lugar, la aplicación de la metodología del punto fijo extendido permitió optimizar de manera eficaz los parámetros de los IDVA. La robustez de esta optimización quedó validada al obtener respuestas dinámicas convergentes con resultados reportados en la literatura [43].

Los resultados obtenidos son contundentes y se pueden resumir en los siguientes puntos clave:

1. La implementación de los IDVA y el DVA se reveló como una estrategia altamente eficaz para controlar el fenómeno *lock-in* y la histéresis asociada en un sistema VIV. Un hallazgo crucial es que este control se logra incluso con relaciones de masa (z) extremadamente bajas (del orden de 0.001). Estos valores mínimos ya son suficientes para atenuar visiblemente el bucle de histéresis y reducir la amplitud de resonancia, demostrando la alta sensibilidad del acoplamiento fluido – estructura a perturbaciones externas. Con valores mayores ($z=0.1$), la no linealidad se suprime casi por completo, restaurando un comportamiento lineal gobernado por la ley de Strouhal.
2. Aunque la introducción del control pasivo conlleva una reducción en la amplitud máxima de vibración de la estructura y de la estela, se presenta una ventaja radical en la eliminación de los saltos abruptos y la dependencia histórica característico del fenómeno *lock-in*. Esto se traduce en un sistema más estable, predecible y confiable en un intervalo más amplio de velocidades reducidas, condición indispensable para una operación práctica en un aerogenerador VIV.
3. El análisis comparativo entre DVA y las configuraciones de IDVA para relaciones de masa $z=0.001$ y $z=0.005$ mostró un desempeño dinámico diferenciado. Si bien el DVA

logra una reducción de amplitud, las configuraciones con inersor presentan un ancho de banda mayor, ofreciendo un rendimiento más robusto frente a variaciones de velocidad de flujo. Además, la formulación basada en admitancia mecánica global confiere a los IDVA una mayor versatilidad para su ajuste y optimización bajo criterios como la normativa H_{∞} , H_2 .

En síntesis, esta investigación valida que los sistemas de sintonización pasiva con inersor IDVA representan una solución viable para optimizar la respuesta dinámica de los aerogeneradores VIV. Al priorizar la estabilidad y el control sobre la amplitud máxima, se sientan las bases para el diseño de prototipos con un comportamiento más confiable. Los modelos y metodologías desarrollados constituyen un punto de partida crucial para futuros desarrollos, tanto en la simulación avanzada como en la implementación y validación experimental de esta innovadora tecnología de generación de energía eólica.

6.2 Recomendaciones para trabajos futuros

Los resultados y el marco metodológico desarrollado en esta tesis abren varias líneas de investigación prometedoras para avanzar hacia la implementación práctica y la optimización de aerogeneradores VIV con sistemas de control pasivo, se proponen las siguientes direcciones:

1. Modelado de un aerogenerador realista: Extender el modelo matemático para incluir efectos tridimensionales, la elasticidad distribuida del mástil, la influencia de la turbulencia del viento y el acoplamiento electromecánico de un sistema de conversión de energía acoplado, esto permitirá desarrollar una herramienta de predicción de potencia eléctrica en función de la velocidad reducida y los parámetros del sistema, evaluando no solo la respuesta dinámica, sino la energía útil extraíble.
2. Diseño y caracterización de un prototipo de inersor: Desarrollar el diseño mecánico detallado (ej., basado en mecanismos de volante de inercia, masas giratorias, de tornillo) de un inersor práctico, caracterizando experimentalmente su inercia aparente, eficiencia y pérdidas por fricción.
3. Construir un modelo físico (un cilindro elástico con IDVA integrado) y realizar pruebas experimentales en túnel de viento. Esto permitirá validar cuantitativamente las predicciones del modelo teórico sobre la supresión del efecto *lock-in*, la reducción de amplitud y la estabilización de la respuesta, midiendo fuerzas, desplazamientos y visualización de la estela.
4. Alternativas de optimización: Implementar otras metodologías de sintonización tales como H_{∞} , H_2 o algoritmos de optimización (enjambre de partículas, algoritmos genéticos) que consideren objetivos en conflicto, como maximizar la extracción de

energía mientras se minimiza la fatiga estructural y se maximiza el ancho de banda operativo.

5. Exploración de nuevas configuraciones de DVA: Investigar topologías de redes mecánicas más complejas o la incorporación de elementos no lineales para mejorar el rendimiento en regímenes de amplitud específicos.
6. Sistemas híbridos semi – activos: Explorar arquitecturas donde el IDVA pasivo sea complementado con un actuador de baja potencia que permita un ajuste fino en tiempo real de algunos parámetros.
7. Análisis de confiabilidad y fatiga: Incorporar al modelo análisis de confiabilidad y vida a fatiga de los componentes críticos (mástil, anclajes del IDVA, elementos del inersor) bajo espectros de carga generados por el viento y las vibraciones controladas.

Referencias bibliográficas

- [1] D. Khojasteh, S. M. Mousavi, W. Glamore, and G. Iglesias, “Wave energy status in Asia,” *Ocean Engineering*, vol. 169, pp. 344–358, Dec. 2018, doi: 10.1016/j.oceaneng.2018.09.034.
- [2] World Wind Energy Association, “WWEA Half-year Report 2024: Strong Wind Power Growth Continues in First Half 2024,” Bonn, Germany, Dec. 2024.
- [3] J. Wang, L. Geng, L. Ding, H. Zhu, and D. Yurchenko, “The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations,” *Appl. Energy*, vol. 267, p. 114902, Jun. 2020, doi: 10.1016/j.apenergy.2020.114902.
- [4] D. Yañéz, “VIV resonant wind generators,” Vortex Bladeless.
- [5] Md. A. Kader Zilani, A. Hossen, S. M. G. Mostafa, Md. M. Rahman, M. M. Uddin, and M. A. Mazid, “Unconventional Energy Harvesting from Wind Velocity and VIV Resonance Phenomenon by using Bladeless Wind Turbine (BLWT),” in *2021 International Conference on Information and Communication Technology for Sustainable Development (ICICT4SD)*, IEEE, Feb. 2021, pp. 254–258. doi: 10.1109/ICICT4SD50815.2021.9396939.
- [6] T., Sarpkaya, “Vortex Shedding and Resistance in Harmonic Flow About Smooth and Rough Circular Cylinders at High Reynolds Numbers,” Monterey, Calif., 1976.
- [7] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion.*, 4th ed. Stanford, California: The Parabolic Press, 1988.
- [8] R. D., Blevins, *Flow-Induced Vibrations*, Second. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 2001.
- [9] B. Mutlu. Sumer and Jørgen. Fredsøe, *Hydrodynamics around cylindrical structures*. World Scientific, 1997.
- [10] E. de Langre, “Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter,” *J. Fluids Struct.*, vol. 22, no. 6–7, pp. 783–791, Aug. 2006, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2006.04.008.
- [11] Feng CC., “The measurements of vortex induced effects in flow past a stationary and oscillating circular and D-section cylinders,” The University of British Columbia, Vancouver, 1968.

-
- [12] R. E. D. , H. A. Y. , Bishop, “The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 277, 1964.
- [13] T. Sarpkaya, “Vortex-Induced Oscillations: A Selective Review,” *J. Appl. Mech.*, vol. 46, no. 2, pp. 241–258, Jun. 1979, doi: 10.1115/1.3424537.
- [14] C. H. K. Williamson and R. Govardhan, “A brief review of recent results in vortex-induced vibrations,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 96, no. 6–7, pp. 713–735, Jun. 2008, doi: 10.1016/j.jweia.2007.06.019.
- [15] C. H. K. Williamson and A. Roshko, “Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder,” *J. Fluids Struct.*, vol. 2, no. 4, pp. 355–381, Jul. 1988, doi: 10.1016/S0889-9746(88)90058-8.
- [16] P. W. Bearman, “Vortex Shedding from Oscillating Bluff Bodies,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 16, no. 1, pp. 195–222, Jan. 1984, doi: 10.1146/annurev.fl.16.010184.001211.
- [17] G. R. Franzini, A. L. C. Fajarra, J. R. Meneghini, I. Korkischko, and R. Franciss, “Experimental investigation of Vortex-Induced Vibration on rigid, smooth and inclined cylinders,” *J. Fluids Struct.*, vol. 25, no. 4, pp. 742–750, May 2009, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2009.01.003.
- [18] K. Vikestad, J. K. Vandiver, and C. M. Larsen, “Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibrations and external disturbance,” *J. Fluids Struct.*, vol. 14, no. 7, pp. 1071–1088, Oct. 2000, doi: 10.1006/jfls.2000.0308.
- [19] J. R. Meneghini and P. W. Bearman, “Numerical Simulation of High Amplitude Oscillatory Flow About a Circular Cylinder,” *J. Fluids Struct.*, vol. 9, no. 4, pp. 435–455, May 1995, doi: 10.1006/jfls.1995.1025.
- [20] Z. Song, M. Duan, and J. Gu, “Numerical investigation on the suppression of VIV for a circular cylinder by three small control rods,” *Applied Ocean Research*, vol. 64, pp. 169–183, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.apor.2017.03.001.
- [21] G. Birkhoff, “Formation of Vortex Streets,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, no. 1, pp. 98–103, Jan. 1953, doi: 10.1063/1.1721143.
- [22] R. T. Hartlen and I. G. Currie, “Lift-Oscillator Model of Vortex-Induced Vibration,” *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 96, no. 5, pp. 577–591, Oct. 1970, doi: 10.1061/JMCEA3.0001276.

- [23] M. L. Facchinetti, E. de Langre, and F. Biolley, "Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations," *J. Fluids Struct.*, vol. 19, no. 2, pp. 123–140, Feb. 2004, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2003.12.004.
- [24] M. M. Bernitsas, K. Raghavan, Y. Ben-Simon, and E. M. H. Garcia, "VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy): A New Concept in Generation of Clean and Renewable Energy From Fluid Flow," *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 130, no. 4, Nov. 2008, doi: 10.1115/1.2957913.
- [25] M. A. Zahari and S. S. Dol, "Application of Vortex Induced Vibration Energy Generation Technologies to the Offshore Oil and Gas Platform: The Feasibility Study" *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*, vol. 8, 2014.
- [26] Y. J. Lee, Y. Qi, G. Zhou, and K. B. Lua, "Vortex-induced vibration wind energy harvesting by piezoelectric MEMS device in formation," *Sci. Rep.*, vol. 9, no. 1, p. 20404, Dec. 2019, doi: 10.1038/s41598-019-56786-0.
- [27] A. Chizfahm, E. A. Yazdi, and M. Eghtesad, "Dynamic modeling of vortex induced vibration wind turbines," *Renew. Energy*, vol. 121, pp. 632–643, Jun. 2018, doi: 10.1016/j.renene.2018.01.038.
- [28] L. B. Zhang, H. L. Dai, A. Abdelkefi, and L. Wang, "Improving the performance of aeroelastic energy harvesters by an interference cylinder," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 111, no. 7, Aug. 2017, doi: 10.1063/1.4999765.
- [29] P. Meliga and J.-M. Chomaz, "An asymptotic expansion for the vortex-induced vibrations of a circular cylinder," *J. Fluid Mech.*, vol. 671, pp. 137–167, Mar. 2011, doi: 10.1017/S0022112010005550.
- [30] S. M. Hasheminejad, A. H. Rabiee, M. Jarrahi, and A. H. D. Markazi, "Active vortex-induced vibration control of a circular cylinder at low Reynolds numbers using an adaptive fuzzy sliding mode controller," *J. Fluids Struct.*, vol. 50, pp. 49–65, Oct. 2014, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.06.011.
- [31] A. H. Rabiee, "Regenerative semi-active vortex-induced vibration control of elastic circular cylinder considering the effects of capacitance value and control parameters," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 32, no. 12, pp. 5583–5595, Dec. 2018, doi: 10.1007/s12206-018-1104-x.
- [32] E. Azadi Yazdi, "Optimal control of a broadband vortex-induced vibration energy harvester," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 31, no. 1, pp. 137–151, Jan. 2020, doi: 10.1177/1045389X19888711.

-
- [33] H. Kang, J. Kook, J. Lee, and Y.-K. Kim, “A Novel Small-Scale Bladeless Wind Turbine Using Vortex-Induced Vibration and a Discrete Resonance-Shifting Module,” *Applied Sciences*, vol. 14, no. 18, p. 8217, Sep. 2024, doi: 10.3390/app14188217.
- [34] J. Q. Sun, M. R. Jolly, and M. A. Norris, “Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorbers—A Survey,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 117, no. B, pp. 234–242, Jun. 1995, doi: 10.1115/1.2836462.
- [35] D. Richiedei, I. Tamellin, and A. Trevisani, “Beyond the Tuned Mass Damper: a Comparative Study of Passive Approaches to Vibration Absorption Through Antiresonance Assignment,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 29, no. 1, pp. 519–544, Jan. 2022, doi: 10.1007/s11831-021-09583-w.
- [36] J. Ormondroyd and Den Hartog J. P., “The Theory of the Dynamic Vibration Absorber,” in *The Theory of the Dynamic Vibration Absorber*, ASME J. Appl. Mech., vol. 50, 1928, pp. 9–22.
- [37] H. Frahm, “*Device for damping vibrations ‘of bodies.*,” United States Patent Office , vol. 989,958, 1911.
- [38] J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibration*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1947.
- [39] M. Z. REN, “A variant design of the dynamic vibration absorber,” *J. Sound Vib.*, vol. 245, no. 4, pp. 762–770, Aug. 2001, doi: 10.1006/jsvi.2001.3564.
- [40] M. C. Smith, “Synthesis of mechanical networks: the inerter,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 10, pp. 1648–1662, Oct. 2002, doi: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [41] R. Ma, K. Bi, and H. Hao, “Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review,” *Eng. Struct.*, vol. 243, p. 112655, Sep. 2021, doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112655.
- [42] Y. Hu and M. Z. Q. Chen, “Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 99, pp. 297–307, Aug. 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [43] E. Barredo *et al.*, “Closed-form solutions for the optimal design of inerter-based dynamic vibration absorbers,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 144, pp. 41–53, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.05.025.
- [44] C. Mazón-Valadez *et al.*, “Global Admittance: A New Modeling Approach to Dynamic Performance Analysis of Dynamic Vibration Absorbers,” *Vibration*, vol. 8, no. 2, p. 19, Apr. 2025, doi: 10.3390/vibration8020019.

- [45] B. Munson, T. Okiishi, W. Huebsch, and A. Rothmayer, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 6ta ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [46] M. Zdravkovich, *Flow Around Circular Cylinders. Fundamentals*, vol. 1. New York, N.Y.: Oxford University Press, 1997.
- [47] D. Brika and A. Laneville, “An Experimental Study of the Aeolian Vibrations of a Flexible Circular Cylinder at Different Incidences,” *J. Fluids Struct.*, vol. 9, no. 4, pp. 371–391, May 1995, doi: 10.1006/jfls.1995.1021.
- [48] D. Brika and A. Laneville, “Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, vol. 250, pp. 481–508, May 1993, doi: 10.1017/S0022112093001533.
- [49] S. Singeresu, *Vibraciones Mecánicas*, 5th ed. México: PEARSON EDUCACIÓN, 2012.
- [50] J. Lian, H. Zhou, and X. Dong, “A Theoretical Approach for Resonance Analysis of Wind Turbines under 1P/3P Loads,” *Energies (Basel)*, vol. 15, no. 16, p. 5787, Aug. 2022, doi: 10.3390/en15165787.
- [51] E. Baquela and Redchuk. A., *Optimización Matemática con R*, vol. 1. Madrid, 2013.
- [52] K. Devarajan, F. Qian, and L. Zuo, “Suppression mechanism of vortex-induced vibrations using non-linear energy sink with inerter based mechanical networks,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 201, p. 117246, Dec. 2025, doi: 10.1016/j.chaos.2025.117246.

Apéndice A: Modelo matemático con DVA – Método de Euler

En el siguiente esquema se representa la implementación del DVA convencional a la estructura del aerogenerador VIV:

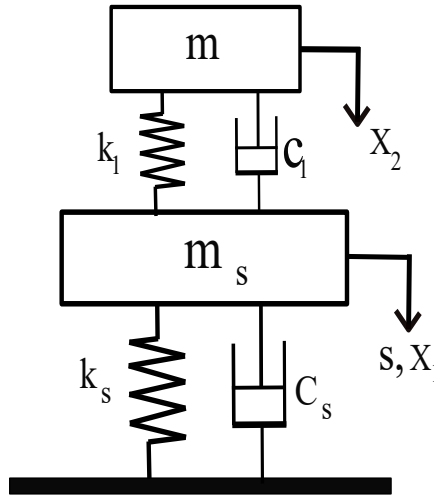


Figura A.1 Esquema de un aerogenerador VIV con un DVA convencional (2 GDL).

En donde:

- m_s masa del sistema principal (estructura)
- k_s rigidez del sistema principal
- c_s amortiguamiento del sistema principal
- m masa del sistema secundario (absorbedor)
- k_1 rigidez del sistema secundario
- c_1 amortiguamiento del sistema secundario
- s fuerza de excitación (fuerza de desprendimiento de vórtices)

Posteriormente, al aplicar la segunda Ley de Newton y considerar que la resultante de la suma de fuerzas es proporcional a su aceleración correspondiente, se obtiene la dinámica del sistema, el coeficiente de amortiguamiento $c_s = c_c + c_f$, considera tanto las disipaciones viscosas de la estructura $c_c = 2\zeta\Omega_s m$, como el amortiguamiento del fluido $c_f = \frac{\gamma\Omega_f m}{\mu}$, al sustituir el coeficiente, la ecuación queda:

- Para la estructura:

$$m_s \ddot{x}_1 + m_s \left(2\zeta \Omega_s + \frac{\gamma \Omega_f}{\mu} \right) \dot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_s x_1 + k_1 (x_1 - x_2) = S_v \quad (A.1)$$

- Para el absorbedor:

$$m \ddot{x}_2 + c_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 (x_2 - x_1) = 0 \quad (A.2)$$

Al realizar el proceso de adimensionamiento, las ecuaciones correspondientes a la estructura (A.1) y el absorbedor (A.2) son:

$$\ddot{y}_1 + \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu \delta} \right) \dot{y}_1 + 2\zeta \delta_a \zeta_a (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + y_1 + \delta_a^2 Z (y_1 - y_2) = \frac{M q_0}{\delta^2} \quad (A.3)$$

$$\ddot{y}_2 + 2\delta_a \zeta_a (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \delta_a^2 (y_2 - y_1) = 0 \quad (A.4)$$

Por parte del oscilador de estela se retoma la Ec. (3.9):

$$\ddot{q}_0 \frac{\varepsilon}{\delta} + (q_0^2 - 1) \dot{q}_0 + \frac{q_0}{\delta^2} = \frac{f}{\delta^2} \quad (A.5)$$

Estas ecuaciones pueden expresarse de forma matricial como $[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F}$. En donde, $[m]$, $[c]$ y $[k]$, representan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente y los vectores $\ddot{\vec{x}}$, $\dot{\vec{x}}$, $\vec{x}$ y $\vec{F}$, son los vectores de aceleración, velocidad, desplazamiento y fuerza.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu \delta} \right) + 2\zeta \delta_a \zeta_a & -2\zeta \delta_a \zeta_a & 0 \\ -2\delta_a \zeta_a & 2\delta_a \zeta_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{\delta} (q_a^2 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \delta_a^2 Z & -\delta_a^2 Z & 0 \\ -\delta_a^2 & \delta_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M q_0}{\delta^2} \\ 0 \\ \frac{f}{\delta^2} \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Este sistema se simplifica al emplear la nomenclatura de Euler:

$$\{F\} = \{F_0\} e^{j\omega_a t} \quad \{y\} = \{Y\} e^{j\omega_a t} \quad \{\dot{y}\} = j\omega_a \{Y\} e^{j\omega_a t} \quad \{\ddot{y}\} = -\omega_a^2 \{Y\} e^{j\omega_a t} \quad (A.7)$$

Donde:

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{M q_0}{\delta^2} \\ 0 \\ \frac{f}{\delta^2} \end{Bmatrix} \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema de la Ec. (A.6), puede reescribirse como se muestra a continuación:

$$-\omega_a^2[M] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} + j\omega_a[C] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Mq_0}{\delta^2} \\ 0 \\ f \\ \frac{f}{\delta^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Al factorizar $\{X\}$, la ecuación se reescribe como;

$$\begin{aligned} [-\omega_a^2[M] + j\omega_a[C] + [K]]\{X\} &= \{F_0\} \\ [G(j\omega_a)]\{X\} &= \{F_0\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En donde $[G(j\omega_a)]$, representa la matriz general $[-\omega_a^2[M] + j\omega_a[C] + [K]]$:

$$[G(j\omega_a)] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Los coeficientes empleados son los siguientes:

- $A_1 = -\omega_a^2 + j\omega_a \left\{ 2\zeta + \frac{\gamma}{\delta_\mu} + 2Z\delta_a\zeta_a \right\} + 1 + \delta_a^2 Z$
- $A_2 = -2j\omega_a Z\delta_a\zeta_a - \delta_a^2 Z$
- $A_3 = -2j\omega_a \delta_a\zeta_a - \delta_a^2$
- $A_4 = 2j\omega_a \delta_a\zeta_a - \omega_a^2 + \delta_a^2$
- $A_5 = -\omega_a^2 + j\omega_a \left\{ \frac{\varepsilon(q^2-1)}{\delta} \right\} + \frac{1}{\delta^2}$

Para obtener la solución del sistema matricial es fundamental calcular la inversa de la matriz cuadrada empleando menores, cofactores, la adjunta y el determinante, como se describe a continuación. Principalmente se obtiene el determinante de $[G(j\omega_a)]$:

$$[\Delta G(j\omega_a)] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & | & A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 & 0 & | & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & A_5 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1(A_4A_5) - A_2(A_3A_5) \quad (\text{A.11})$$

Posteriormente se determina la matriz de menores:

$$\text{Men}[G(j\omega_a)] = \begin{bmatrix} A_4A_5 & A_3A_5 & 0 \\ A_2A_5 & A_1A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_1A_4 - A_2A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Y a partir de esta se obtiene la matriz de cofactores:

$$\text{cof}[G(j\omega_a)] = \begin{bmatrix} A_4A_5 & -A_3A_5 & 0 \\ -A_2A_5 & A_1A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_1A_4 - A_2A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Al formar la transpuesta empleando la matriz de cofactores se determina la matriz adjunta de la matriz original:

$$Adj[G(j\omega_a)] = cof[G(j\omega_a)]^T = \begin{bmatrix} A_4A_5 & -A_2A_5 & 0 \\ -A_3A_5 & A_1A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_1A_4 - A_2A_3 \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

Estos pasos permiten calcular la matriz inversa, al aplicar la formula correspondiente:

$$[G(j\omega_a)]^{-1} = \frac{Adj[G(j\omega_a)]}{[\Delta G(j\omega_a)]} \quad (A.15)$$

$$[G(j\omega_a)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A_4A_5 & -A_2A_5 & 0 \\ -A_3A_5 & A_1A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_1A_4 - A_2A_3 \end{bmatrix}}{A_1(A_4A_5) - A_2(A_3A_5)}$$

Al despejar $[G(j\omega_a)]$ de la Ec. (A.9), y sustituir la matriz inversa en el sistema, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} = [G(j\omega_a)]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{Mq_0}{\delta^2} \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A_4A_5 & -A_2A_5 & 0 \\ -A_3A_5 & A_1A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_1A_4 - A_2A_3 \end{bmatrix}}{A_1(A_4A_5) - A_2(A_3A_5)} \begin{bmatrix} \frac{Mq_0}{\delta^2} \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Del sistema de la Ec. (A.16), es posible obtener las expresiones para y_2 y q_0 , sin embargo, debido a que el interés principal radica en conocer la función de transferencia de la estructura, solo se determina la expresión y_1 :

$$y_1 = \frac{A_4}{A_1A_4 - A_2A_3} \frac{Mq_0}{\delta^2} \quad (A.17)$$

Y al sustituir los coeficientes de la Ec. (A.10) previamente mencionadas, se obtiene la función de transferencia ME:

$$\frac{y_1}{Mq_0/\delta^2} = \frac{\{[-\omega_a^2 - \delta_a^2] - j\omega_a 2\zeta_a \delta_a\}}{j\omega_a 2\zeta_a \delta_a [\omega_a^2 - 1 + \omega_a^2 z] + [\omega_a^2 \delta_a^2 z - (\omega_a^2 - 1)(\omega_a^2 - \delta_a^2)] + j\omega_a (2\zeta + \gamma/\mu\delta)(\omega_a^2 - \delta_a^2) + (2\zeta + \gamma/\mu\delta)(2\omega_a^2 \zeta_a \delta_a)} \quad (A.18)$$

Sin embargo, es posible observar la presencia de números imaginarios, por lo que se calcula el módulo del número complejo para que solo queden números reales, despejando y_1 , se obtiene:

$$ME = \frac{P_0^2(A^2 + B^2)}{C^2 + D^2} \quad (\text{A.19})$$

En donde:

- $P_0 = Mq_o/\delta^2$
- $A = 2\omega_a\zeta_a\delta_a$
- $B = -\delta_a^2 + \omega_a^2$
- $C = 2\omega_a\zeta_a\delta_a(z\omega_a^2 + \omega_a^2 - 1) + \omega_a\left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right)(-\delta_a^2 + \omega_a^2)$
- $D = -(\omega_a^2 - 1)(-\delta_a^2 + \omega_a^2) + \omega_a^2\delta_a^2z + 2\left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right)\omega_a^2\zeta_a\delta_a$

Apéndice B: Modelo matemático con DVA – Funciones Trigonométricas

Retomando las ecuaciones adimensionales para el oscilador estructural con el DVA convencional Ec. (A.3) – (A.4) y la ecuación para el oscilador de la estela Ec. (A.5) del apéndice A. Se propone una solución empleando las siguientes excitaciones armónicas:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1) & y_2 &= y_{20} \cos(\omega_a t_a + \phi_2) & q_0 &= q_o \cos(\omega_a t_a) \\ \dot{y}_1 &= -\omega_a y_{10} \sin(\omega_a t_a + \phi_1) & \dot{y}_2 &= -\omega_a y_{20} \sin(\omega_a t_a + \phi_2) \\ \ddot{y}_1 &= -\omega_a^2 y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1) & \ddot{y}_2 &= -\omega_a^2 y_{20} \cos(\omega_a t_a + \phi_2) \end{aligned} \quad (B.1)$$

Al sustituir las soluciones en las ecuaciones (A.3) – (A.4) y emplear identidades trigonométricas, se obtiene la Ec. (B.2) que representa al sistema principal y le Ec. (B.3), que representa al sistema secundario.

$$\begin{aligned} & -\omega_a^2 y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1) - \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right) \omega_a y_{10} \sin(\omega_a t_a + \phi_1) + 2\zeta_a z \delta_a (-\omega_a y_{10} \sin(\omega_a t_a + \phi_1) + \omega_a y_{20} (\sin(\omega_a t_a) \cos(\phi_2) + \cos(\omega_a t_a) \sin(\phi_2))) + y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1) + \\ & \delta_a^2 z (y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1) - y_{20} (\cos(\omega_a t_a) \cos(\phi_2) - \sin(\omega_a t_a) \sin(\phi_2))) = \frac{M q_o \cos(\omega_a t_a)}{\delta^2} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} & -\omega_a^2 y_{20} (\cos(\omega_a t_a) \cos(\phi_2) - \sin(\omega_a t_a) \sin(\phi_2)) + 2\zeta_a \delta_a (-\omega_a y_{20} (\sin(\omega_a t_a) \cos(\phi_2) + \cos(\omega_a t_a) \sin(\phi_2)) + \omega_a y_{10} \sin(\omega_a t_a + \phi_1)) + \\ & \delta_a^2 (y_{20} (\cos(\omega_a t_a) \cos(\phi_2) - \sin(\omega_a t_a) \sin(\phi_2)) - y_{10} \cos(\omega_a t_a + \phi_1)) = 0 \end{aligned} \quad (B.3)$$

Al separar las ecuaciones (B.2) – (B.3), en sus componentes $\cos \omega_a$ y $\sin \omega_a$, es posible resolver el sistema de forma matricial, el cual se representa a continuación:

$$\begin{bmatrix} (\delta_a^2 z - \omega_a^2 + 1) & -\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right) - \omega_a \cdot 2\zeta_a \cdot z \cdot \delta_a & -\delta_a^2 z & 2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot z \cdot \delta_a \\ -\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta}\right) - \omega_a \cdot 2\zeta_a \cdot z \cdot \delta_a & -(\delta_a^2 z - \omega_a^2 + 1) & 2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot z \cdot \delta_a & -(\delta_a^2 z) \\ -\delta_a^2 & 2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot \delta_a & (\delta_a^2 - \omega_a^2) & -(2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot \delta_a) \\ 2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot \delta_a & -(\delta_a^2) & -(2 \cdot \omega_a \cdot \zeta_a \cdot \delta_a) & -(\delta_a^2 - \omega_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \cos(\phi_1) \\ y_{10} \sin(\phi_1) \\ y_{20} \cos(\phi_2) \\ y_{20} \sin(\phi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M q_o}{\delta^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Al realizar el cálculo de la matriz inversa de la Ec. (B.4) y multiplicarlo por el vector de fuerzas, es posible determinar las dos primeras ecuaciones $y_{10} \cos(\phi_1)$ y $y_{10} \sin(\phi_1)$, las cuales corresponden a las componentes de la estructura:

$$y_{10} \cos(\varphi_1) = (Mq_0(4(-\omega_a^2 + 1)\omega_a^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 - 4\omega_a^4 \zeta_a^2 z \delta_a^2 + (z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)(\delta_a^2 - \omega_a^2)^2 - \quad (B.5)$$

$$z \delta_a^4 (\delta_a^2 - \omega_a^2)) / \delta^2 \left(4 \left((z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)^2 - 2(z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)z \delta_a^2 + z^2 \delta_a^4 + \omega_a^2 \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right)^2 \right) \omega_a^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 + \dots + \left((z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)^2 + \left(-\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right) - 2\omega_a \zeta_a z \delta_a \right)^2 \right) \right) \\ y_{10} \sin(\varphi_1) = Mq_0 \left(4 \left(-\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right) - 2\omega_a \zeta_a z \delta_a \right) \omega_a^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 + \left(-\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right) - 2\omega_a \zeta_a z \delta_a \right) (\delta_a^2 - \omega_a^2)^2 - 2z \delta_a^5 \omega_a \zeta_a + 4\omega_a \zeta_a z \delta_a^3 (\delta_a^2 - \omega_a^2) + 8\omega_a^3 \zeta_a^3 z \delta_a^3 \right) / \delta^2 (4(z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)^2 \omega_a^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 + (z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)^2 (\delta_a^2 - \omega_a^2)^2 - 2(z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)z \delta_a^4 (\delta_a^2 - \omega_a^2) - 16(z \delta_a^2 - \omega_a^2 + 1)z \delta_a^4 \omega_a^2 \zeta_a^2 + \dots + z^2 \delta_a^8 + 8\omega_a^2 \zeta_a^2 z^2 \delta_a^6 + 16\omega_a^4 \zeta_a^4 z^2 \delta_a^4) \quad (B.6)$$

Al elevar al cuadrado ambas componentes de las Ec. (39-40), y sacar raíz, se obtiene la función de transferencia y_0 , que se muestra en la Ec. (41).

$$MI = \frac{Mq_0(g^2 + h^2)}{\delta^2 \left((a^2 + 2ac + b^2 + 2bd + c^2 + d^2)g^2 + 2(f+h)(ad-bc)g + a^2h^2 - 2acfh + b^2h^2 - 2bdfh + f^2(c^2 + d^2) \right)} \quad (B.7)$$

En donde:

- $a = (\delta_a^2 z - \omega_a^2 + 1)$
- $b = -\omega_a \left(2\zeta + \frac{\gamma}{\mu\delta} \right) - \omega_a 2\zeta_a z \delta_a$
- $c = -\delta_a^2 z$
- $d = 2\omega_a \zeta_a z \delta_a$
- $f = -\delta_a^2$
- $g = 2\omega_a \zeta_a \delta_a$
- $h = \delta_a^2 - \omega_a^2$

Para corroborar la exactitud del modelo matemático fundamentado en el concepto de *admitancia mecánica global*, se realizó un proceso de validación mediante la comparación de las funciones de transferencia derivadas de los modelos matemáticos previamente desarrollados, las cuales son las siguientes:

- ME: Función de transferencia obtenida por el método de Euler.
- MI: Función de transferencia obtenida por medio de identidades trigonométricas.
- MA: Función de transferencia obtenida por método de Laplace (y_0, DV_A).

Al simplificar analíticamente cada una de estas expresiones y confrontar los resultados (MA vs ME y MA vs MI), se observa que el cociente entre ellas converge asintóticamente a 1. Esta equivalencia matemática certifica la coherencia interna del modelo propuesto y valida la robustez del enfoque basado en la admitancia mecánica global como herramienta para el análisis de sistemas dinámicos acoplados, tal y como se ilustra en la Figura B.1

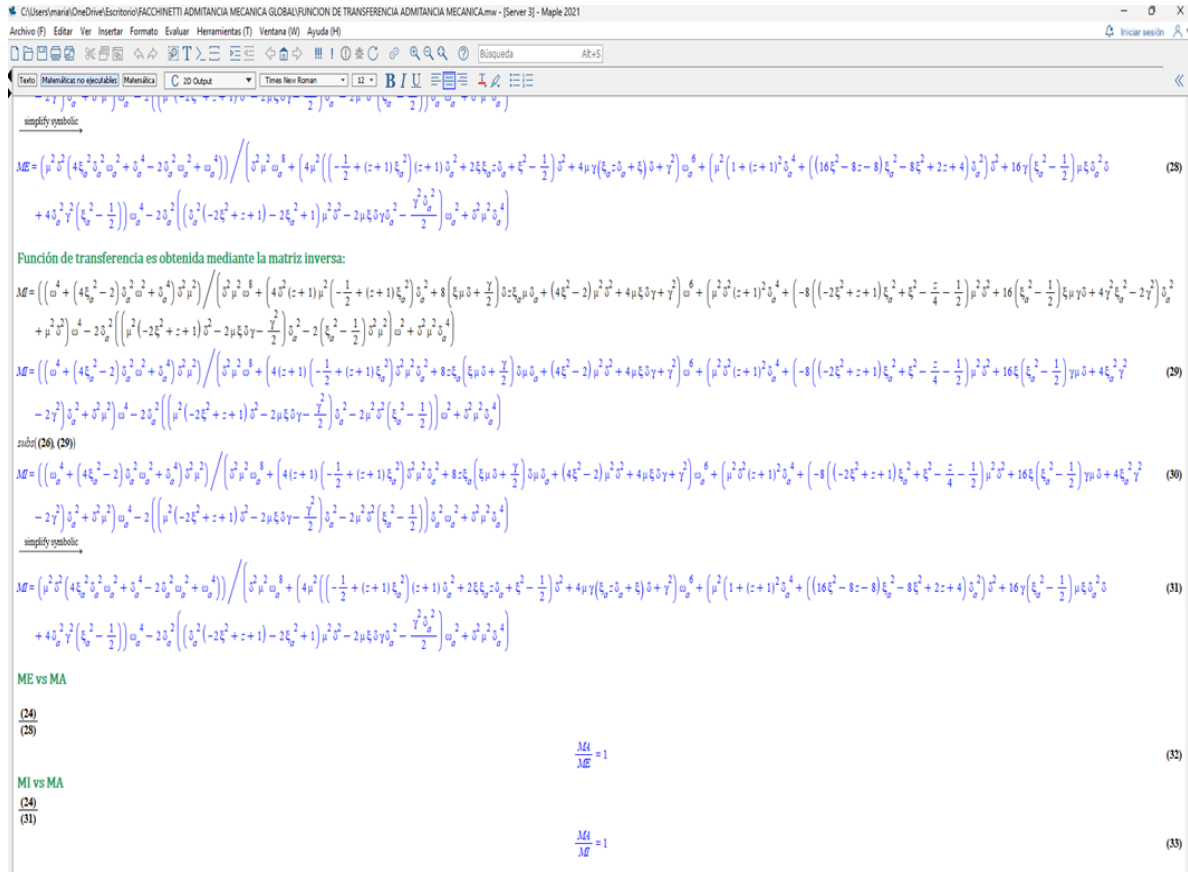


Figura B.1 Comparación de funciones de transferencia MA, MI y ME.

Apéndice C: Obtención de la fórmula del DVA e IDVA con admitancia mecánica global (Ag)

Para desarrollar la formulación de un DVA utilizando el concepto de admitancia mecánica global, se analizan tres sistemas fundamentales representados en la Figura C.1.

- DVA convencional.
- DVA no convencional (NDVA) conectado a una subadmitancia A2 con una terminal a tierra.
- Sistema generalizado con admitancia mecánica

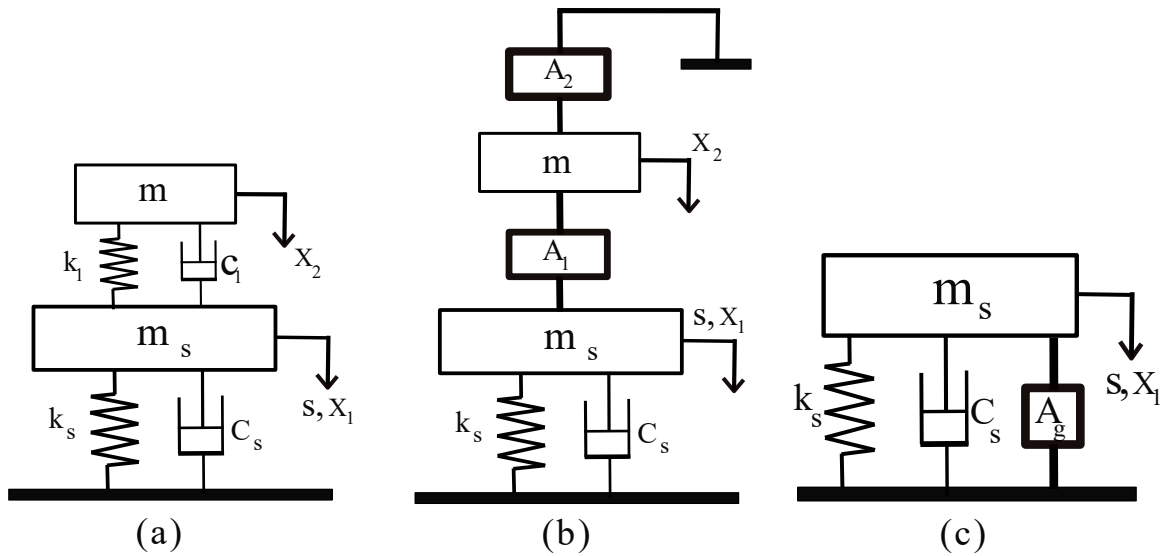


Figura C.1. Esquemas de sistemas de diferentes configuraciones de absorbedores de vibración en donde a) DVA convencional, b) DVA no convencional y c) sistema generalizado con admitancia mecánica global.

Las ecuaciones de movimiento obtenidas para estos sistemas son:

$$\text{DVA} \quad m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_s x_1 + k_1(x_1 - x_2) = F \quad (\text{C.1})$$

$$m \ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$\text{NDVA} \quad m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + A_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_s x_1 = F \quad (\text{C.2})$$

$$m \ddot{x}_2 + A_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + A_2 \dot{x}_2 = 0$$

$$\text{Ag} \quad m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + k_s x_1 + A_g \dot{x}_1 = F \quad (\text{C.3})$$

Para determinar matemáticamente la admitancia global del DVA, es necesario simplificar la Ec. (C.1) correspondiente al DVA convencional y (C.2) correspondiente al NDVA, aplicando el método de sustitución se obtiene:

$$\text{DVA} \quad m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + k_s x_1 + m \ddot{x}_2 = F \quad (\text{C.4})$$

$$\text{NDVA} \quad m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + k_s x_1 + m \ddot{x}_2 + A_2 \dot{x}_2 = F \quad (\text{C.5})$$

Si se toma la Ec. (C.3) como referencia y se compara con las Ecs. (C.4) y (C.5), se entiende que los términos correspondientes en cada ecuación representan las componentes de la estructura principal ($m_s \ddot{x}_1 + c_s \dot{x}_1 + k_s x_1$). Por lo que, los términos adicionales ($m \ddot{x}_2 + A_2 \dot{x}_2$) representan la influencia del absorbador en la dinámica del sistema, al aislar estos términos es posible construir la ecuación de admitancia global:

$$A_{g,DVA,NDVA} \dot{x}_1 = m \ddot{x}_2 + A_2 \dot{x}_2 \quad (\text{C.6})$$

Al aplicar la transformada de Laplace se obtiene:

$$A_{g,DVA,NDVA}(s) = \frac{X_2(s)ms + A_2(s)X_2(s)}{X_1(s)} \quad (\text{C.7})$$

En donde la variable $A_2(s)$ en el dominio de Laplace representa la subadmitancia y los desplazamientos $X_1(s)$ y $X_2(s)$, corresponden a las amplitudes de vibración de la estructura principal y del DVA. El siguiente paso consiste en vincular la admitancia global con las componentes estructurales y las propiedades dinámicas del sistema, esto se obtiene al sustituir los términos $X_1(s)$ y $X_2(s)$ en las funciones de transferencia del NDVA para la estructura y el absorbador, representadas en las Ecs. (C.8) y (C.9), respectivamente:

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{ms + A_1(s) + A_2(s)}{mm_s s^3 + ((m + m_s)A_1(s) + A_2(s)m_s + c_s m)s^2 + (A_1(s)(A_2(s) + c_s) + A_2(s)c_s + k_s m)s + k_s(A_1(s) + A_2(s))} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{A_1(s)}{mm_s s^3 + ((m + m_s)A_1(s) + A_2(s)m_s + c_s m)s^2 + ((A_2(s) + c_s)A_1(s) + A_2(s)c_s + k_s m)s + k_s(A_1(s) + A_2(s))} \quad (\text{C.9})$$

Al realizar el procedimiento descrito se obtiene la siguiente ecuación:

$$A_{g,DVA,NDVA}(s) = \frac{A_1(s)(ms + A_2(s))}{ms + A_1(s) + A_2(s)} \quad (\text{C.10})$$

Debido a que se considera un DVA convencional, el sistema se simplifica al considerar $A_2 = 0$, en donde la subadmitancia $A_1(s)$ agrupa los efectos combinados de la rigidez (k_1) y el amortiguamiento (c_1) del absorbador, como se muestra en la Figura C.2.

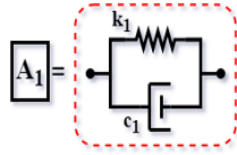


Figura C.2. Esquema de los efectos de rigidez y amortiguamiento de la subadmitancia A_1 [44].

El concepto clave aquí es la subadmitancia mecánica, definida como la relación entre la fuerza aplicada y la velocidad en el dominio de la frecuencia (s):

$$A_{g,}(s) = \frac{F(s)}{V(s)} \quad (C.11)$$

Esta representación permite modelar elementos mecánicos (resortes, inersores), como subadmitancias generalizas en el dominio de Laplace. En la Figura C.2, se observa que $A_1(s)$ combina una rigidez (k_1) y un amortiguamiento (c_1) en paralelo. Sus contribuciones individuales son:

$$\text{Rigidez } (k_1) \quad \frac{F_k(s)}{V(s)} = \frac{k_1 X(s)}{sX(s)} = \frac{k_1}{s} \quad (C.12)$$

$$\text{Amortiguamiento } (c_1) \quad \frac{F_k(s)}{V(s)} = \frac{c_1 X(s)}{sX(s)} = c_1 \quad (C.13)$$

La subadmitancia $A_1(s)$, resulta de la suma paralela de ambos componentes:

$$A_1(s) = \frac{k_1}{s} + c_1 = \frac{c_1 s + k_1}{s} \quad (C.14)$$

Al sustituir la Ec. (C.14) en (C.10), se obtiene finalmente la ecuación de la admitancia global para el DVA, en donde se refleja la interacción dinámica entre la inercia (m), amortiguamiento (c_1) y rigidez (k_1).

$$A_{g,DVA}(s) = \frac{ms(c_1 s + k_1)}{ms^2 + c_1 s + k_1} \quad (C.15)$$

Para obtener las ecuaciones de la admitancia mecánica global de las tres configuraciones de redes mecánicas C3, C4 y C6, se emplea la Ec. (C.10) previamente desarrollada. En donde al considerar que las redes mecánicas no tienen conexión a tierra se simplifica $A_2 = 0$, el efecto combinado de la rigidez (k_1), el amortiguamiento (c_1) y la inercia (b) de las redes, se representa en las subadmitancias $A_1(s)$, como se observa en la Figura C.3.

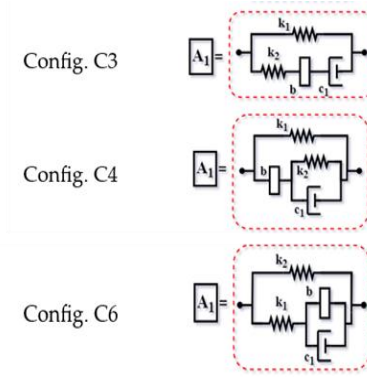


Figura C.3 Esquema de los efectos de rigidez y amortiguamiento e inercia de la subadmitancia A1 para la red mecánica C3, C4 y C6 [44].

Al realizar la suma de sus componentes se agrega la contribución individual de la inercia:

$$\text{Inercia } (b) \quad \frac{F_b(s)}{V(s)} = \frac{bs^2 X(s)}{sX(s)} = bs \quad (\text{C.16})$$

Al realizar la suma de sus componentes individuales, se obtienen las siguientes Ecs.:

$$A_{1,C3}(s) = \frac{bc_1(k_1 + k_2)s^2 + bk_1k_2s + c_1k_1k_2}{(bs^2c_1 + k_2bs + k_2c_1)s} \quad (\text{C.17})$$

$$A_{1,C4}(s) = \frac{bc_1s^3 + b(k_1 + k_2)s^2 + c_1k_1s + k_1k_2}{(bs^2 + c_1s + k_2)s} \quad (\text{C.18})$$

$$A_{1,C6}(s) = \frac{(k_1 + k_2)(bs + c_1)s + k_1k_2}{s(k_2 + s(b_s + c_1))} \quad (\text{C.19})$$

Al sustituir cada una de las Ecs. (C.17-C.19) en la Ecs. (C.10), se obtienen finalmente las ecuaciones de la admitancia mecánica global para cada una de las redes, en donde se refleja la interacción dinámica entre la inercia (m), el amortiguamiento (c_1), la rigidez (k_1) y la inercia (b).

$$A_{g,C3} = \frac{(bc_1(k + k_1)s^2 + bkk_1s + c_1kk_1)sm}{bc_1ms^4 + bk_1ms^3 + c_1((b + m)k_1 + bk)s^2 + bkk_1s + c_1kk_1} \quad (\text{C.20})$$

$$A_{g,C4} = \frac{ms(bc_1s^3 + b(k + k_1)s^2 + c_1ks + kk_1)}{bm s^4 + c_1(m + b)s^3 + (b(k + k_1) + k_1m)s^2 + c_1ks + kk_1} \quad (\text{C.21})$$

$$A_{g,C6} = \frac{sm(b(k + k_1)s^2 + c_1(k + k_1)s + kk_1)}{bm s^4 + c_1ms^3 + ((b + m)k + bk_1)s^2 + c_1(k + k_1)s + kk_1} \quad (\text{C.22})$$

Apéndice D: Coeficientes de los IDVA

IDVA C3

Polinomio de la frecuencia angular

- $a_7 = 4\delta^2 \zeta_a^2 \mu^2$
- $a_6 = 4St^2 Ur^2 \delta^2 \zeta_a^2 \mu^2 - 4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a \delta_a^2 - 2\eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\mu \delta \zeta_a \right) \mu \delta \zeta_a - \left(-\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a - 4 \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \right)^2 - 4KM St^2 Ur^2 \delta^2 \mu^2 \zeta_a^2$
- $a_5 = St^2 Ur^2 \left(4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a \delta_a^2 - 2\eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\mu \delta \zeta_a \right) + \dots + AM Ur^2 St^2 \left(4(1 + (\beta + 1)\eta^2) \mu^2 \delta^2 \zeta_a^2 \delta_a^2 - \left(-\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a - 4 \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \right) \right) \right)$
- $a_4 = St^2 Ur^2 \left(8 \left(\mu \eta^2 \delta \zeta_a (z + 1) \delta_a^2 + \eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2) \mu \delta \zeta_a \right) \delta_a^2 \mu \delta \zeta_a + \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a \delta_a^2 - 2\eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\mu \delta \zeta_a \right)^2 + \dots + \mu \eta^2 \beta \delta \delta_a \right)$
- $a_3 = St^2 Ur^2 \left(-8\delta^2 \mu^2 \zeta_a^2 \delta_a^4 \eta^2 + 4 \left(\mu \eta^2 \delta \zeta_a (z + 1) \delta_a^2 + \eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2) \mu \delta \zeta_a \right) \delta_a^2 + 2 \right) + \dots + (\delta_a^4 \delta^2 \mu^2)$
- $a_2 = St^2 Ur^2 \left(-4\mu \eta^2 \delta \zeta_a \delta_a^4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a \delta_a^2 - 2\eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\mu \delta \zeta_a \right) + \dots + \left(-4\eta^2 \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \delta_a^4 - \mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^3 \right) \delta \eta^2 \mu \beta \delta_a^3 \right)$
- $a_1 = St^2 Ur^2 \left(-8\mu \eta^2 \delta \zeta_a \delta_a^6 + \dots + \left(-4\eta^2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \delta_a^4 - \mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^3 \right)^2 \right) + 4KM St^2 Ur^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \zeta_a^2 \delta_a^8$
- $a_0 = 4St^2 Ur^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \zeta_a^2 \delta_a^8$

Amplitud de la estela

- $a_5 = 2\delta\mu\zeta_a \left(-\delta\mu\beta \eta^2 \delta_a - 4\zeta_a \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) + 2\delta^2 \mu^2 \beta \eta^2 \delta_a \zeta_a$
- $a_4 = -2\delta\zeta_a (1 + (\beta + 1)\eta^2) \delta_a^2 \mu \left(-\delta\mu\beta \eta^2 \delta_a - 4\zeta_a \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) + \dots + \delta\mu\beta \eta^2 \delta_a \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a \delta_a^2 - 2\eta^2 \beta \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right)$
- $a_3 = 2\mu \eta^2 \delta \zeta_a \delta_a^4 \left(-\delta\mu\beta \eta^2 \delta_a - 4\zeta_a \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) + \dots + 2\delta\mu\beta \eta^2 \delta_a^3 \left(\delta \eta^2 \mu \zeta_a (z + 1) \delta_a^2 + \eta^2 \beta \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2) \mu \delta \zeta_a \right)$
- $a_2 = 2\mu \eta^2 \delta \zeta_a \delta_a^4 \left(\delta(z + 1) \eta^2 \mu \beta \delta_a^3 + 4(1 + (\beta + 1)\eta^2) \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \delta_a^2 + \delta\mu\beta \eta^2 \delta_a \right) + \dots + 2\delta^2 \mu^2 \beta \eta^4 \delta_a^5 \zeta_a$
- $a_1 = \left(2\mu \eta^2 \delta \zeta_a \delta_a^4 \left(-4\eta^2 \left(\zeta_a \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \delta_a^4 - \delta \eta^2 \mu \beta \delta_a^3 \right) + 2\delta^2 \eta^4 \mu^2 \beta \delta_a^7 \zeta_a \right) \omega_a$
- $b_6 = 4\delta^4 \mu^2 \zeta_a^2$

- $b_5 = \left(4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) \delta\mu\zeta_a + \left(-\delta\mu\beta\eta^2\delta_a - 4\zeta_a \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right)^2 \right) \delta^2$
- $b_4 = \left(8 \left(\delta\eta^2\mu\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) \delta_a^2\delta\mu\zeta_a + \dots + \left(-\delta\mu\beta\eta^2\delta_a - 4\zeta_a \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) \right)$
- $b_3 = -8\delta_a^4\delta^2\mu^2\zeta_a^2\eta^2 + 4 \left(\delta\eta^2\mu\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) \delta_a^2 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) + \dots + \left(\left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^2 + \delta\mu\beta\eta^2\delta_a \right)^2$
- $b_2 = -4\mu\eta^2\delta\zeta_a\delta_a^4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) + \dots + \left(\delta(z + 1)\eta^2\mu\beta\delta_a^3 + 4(1 + (\beta + 1)\eta^2) \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^2 + \delta\mu\beta\eta^2\delta_a \right) \delta^2$
- $b_1 = \left(-8\mu\eta^2\delta\zeta_a\delta_a^6 \left(\delta\eta^2\mu\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) + \left(-4\eta^2 \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^4 - \delta\eta^2\mu\beta\delta_a^3 \right)^2 \right) \delta^2$
- $b_0 = 4\delta^4\eta^4\mu^2\zeta_a^2\delta_a^8$

Amplitud de la estructura

- $a_5 = 4\delta^2\mu^2\zeta_a^2$
- $a_4 = -8\delta^2\zeta_a^2(1 + (\beta + 1)\eta^2)\delta_a^2\mu^2 + \delta^2\mu^2\beta^2\eta^4\delta_a^2$
- $a_3 = 4\delta^2\zeta_a^2(2\eta^2\delta_a^4 + (1 + (\beta + 1)\eta^2)^2\delta_a^4)\mu^2 - 2\delta^2\mu^2\beta^2\eta^4\delta_a^4$
- $a_2 = -8\delta^2\zeta_a^2\eta^2\delta_a^6(1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu^2 + \delta^2\mu^2\beta^2\eta^4\delta_a^6$
- $a_1 = 4\delta^2\eta^4\mu^2\zeta_a^2\delta_a^8\omega_a^4$
- $b_6 = 4\delta^2\mu^2\zeta_a^2$
- $b_5 = 4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) \delta\mu\zeta_a + \left(-\eta^2\mu\delta\beta\delta_a - 4 \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \right)^2$
- $b_4 = 8 \left(\mu\eta^2\delta\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) \delta_a^2\delta\mu\zeta_a + \dots + \left(-\eta^2\mu\delta\beta\delta_a - 4 \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a \right)$
- $b_3 = -8\delta^2\mu^2\zeta_a^2\delta_a^4\eta^2 + 4 \left(\mu\eta^2\delta\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) \delta_a^2 + \dots + \left(\mu\delta(z + 1)\eta^2\beta\delta_a^3 + 4(1 + (\beta + 1)\eta^2) \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^2 + \eta^2\mu\delta\beta\delta_a \right)^2$
- $b_2 = -4\delta\eta^2\mu\zeta_a\delta_a^4 \left(-2\delta\mu((1 + (z + 1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) + \dots + \left(\mu\delta(z + 1)\eta^2\beta\delta_a^3 + 4(1 + (\beta + 1)\eta^2) \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^2 + \eta^2\mu\delta\beta\delta_a \right)$
- $b_1 = -8\delta\eta^2\mu\eta\delta_a^6 \left(\mu\eta^2\delta\zeta_a(z + 1)\delta_a^2 + \eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + (1 + (\beta + 1)\eta^2)\mu\delta\zeta_a \right) + \left(-4\eta^2 \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^4 - \mu\delta\eta^2\beta\delta_a^3 \right)^2$
- $b_0 = 4\delta^2\eta^4\mu^2\zeta_a^2\delta_a^8$

IDVA C4

Polinomio de la frecuencia angular

- $a_7 = \beta^2 \delta^2 \mu^2$
- $a_6 = St^2 Ur^2 \beta^2 \mu^2 \delta^2 + 2(\mu \delta \beta (\eta^2 (z+1) \beta + \eta^2 + z + 1) \delta_a^2) + \dots + AM St^2 Ur^2 \beta^2 \delta^2 \mu^2$
- $a_5 = -2St^2 Ur^2 \left(\mu \delta \beta (\eta^2 (z+1) \beta + \eta^2 + z + 1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta + 1) \delta_a + \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta + \dots + \delta_a \left((1 + (z+1) \beta) \delta \delta_a + 2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)$
- $a_4 = 2St^2 Ur^2 \delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \beta (\eta^2 \beta + \eta^2 + 1) \right) + \dots + (\eta^2 \beta + \eta^2 + 1) \beta \delta_a + \mu \delta \zeta_a (\beta + 1)$
- $a_3 = St^2 Ur^2 \left(-2\beta^2 \delta^2 \eta^2 \mu^2 \delta_a^4 - 2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \beta (\eta^2 \beta + \eta^2 + 1) \right) \right) + \dots + 4\mu \delta \zeta_a (\beta + 1) \delta_a^4 \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right)$
- $a_2 = 2St^2 Ur^2 \mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^4 \left(\mu \delta \beta (\eta^2 (z+1) \beta + \eta^2 + z + 1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\mu \zeta \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta + 1) \delta_a + \mu \delta \beta \right) + \dots + 4 \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right) \delta_a^6 \zeta_a \mu$
- $a_1 = -2St^2 Ur^2 \beta \delta \eta^2 \mu \delta_a^6 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \beta (\eta^2 \beta + \eta^2 + 1) \right) + AM Ur^2 St^2 \delta_a^8 \beta^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2$
- $a_0 = St^2 Ur^2 \beta^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \delta_a^8$

Amplitud de la estela

- $a_5 = -\mu \delta \beta \left(2\zeta_a \mu (1 + (z+1) \beta) \delta \delta_a + 2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) + 2(\beta + 1) \delta^2 \delta_a \mu^2 \zeta_a$
- $a_4 = \mu \delta \beta (1 + (\beta + 1) \eta^2) \delta_a^2 \left(2\zeta_a \mu (1 + (z+1) \beta) \delta \delta_a + 2 \left(\mu \zeta \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) + \dots + 4\zeta_a \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta + 1) \delta_a + \mu \delta$
- $a_3 = -\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^4 \left(2\zeta_a \mu (1 + (z+1) \beta) \delta \delta_a + 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) - 2\mu \delta \beta (1 + (\beta + 1) \eta^2) \delta_a^3 (\mu \delta \zeta_a (z+1) \delta_a^2 + \dots + \mu \delta \beta (\beta \eta^2 + \eta^2 + 1))$
- $a_2 = 2\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^5 \left(\mu \delta \zeta_a (z+1) \delta_a^2 + \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + \eta^2 + 1) \beta \delta_a + \mu \delta \zeta_a (\beta + 1) \right) + \dots + -2(\beta + 1) \delta^2 \delta_a^5 \mu^2 \zeta_a \eta^2$
- $a_1 = \left(-2\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^7 \left(\beta \eta^2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right) + 2\delta_a^7 \delta^2 \mu^2 \zeta_a \eta^2 \beta \right) \omega_a^2$
- $b_6 = St Ur \beta^2 \delta^4 \mu^2$
- $b_5 = Ur St \left(-2 \left(\mu \delta \beta (\eta^2 (z+1) \beta + \eta^2 + z + 1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta + 1) \delta_a + \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta + \dots + 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta^2 \right) \delta^2$
- $b_4 = Ur St \left(2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \beta (\eta^2 \beta + \eta^2 + 1) \right) \mu \delta \beta + \dots + \delta_a \left(2\zeta_a \mu (1 + (z+1) \beta) \delta \delta_a + 2 \left(\mu \zeta \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) \right) \delta^2$

- $b_3 = UrSt \left(-2\mu^2\eta^2\beta^2\delta_a^4 - 2\delta_a^2 \left(\mu\eta^2\beta\delta(z+1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a \right) + \dots + 4 \left(\mu\delta\zeta_a(z+1)\delta_a^2 + \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\eta^2\beta + \eta^2 + 1)\beta\delta_a + \mu\delta\zeta_a(\beta+1) \right)^2 \delta_a^2 \right)$
- $b_2 = UrSt \left(2\mu^2\eta^2\beta^2\delta_a^6(\eta^2(z+1)\beta + \eta^2 + z + 1) + \mu\delta\zeta_a(z+1)\delta_a^2 + \dots + \left(\mu\zeta\delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\eta^2\beta + \eta^2 + 1)\beta\delta_a + \mu\delta\zeta_a(\beta+1) \right) \delta_a^2$
- $b_1 = UrSt \left(-2\mu\eta^2\beta\delta_a^6 \left(\mu\eta^2\beta\delta(z+1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a \right) + \dots + 4 \left(\eta^2\beta \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu\delta\zeta_a \right)^2 \delta_a^6 \right) \delta_a^2 \omega_a^2$
- $b_0 = StUr\beta^2\delta_a^4\eta^4\mu^2\delta_a^8$

Amplitud de la estructura

- $a_5 = \beta^2\delta^2\mu^2$
- $a_4 = -2\beta^2\delta^2\mu^2(1 + (\beta+1)\eta^2)\delta_a^2 + 4(\beta+1)^2\delta^2\delta_a^2\mu^2\zeta_a^2$
- $a_3 = \beta^2\delta^2\mu^2(2\eta^2\delta_a^4 + (1 + (\beta+1)\eta^2)^2\delta_a^4) - 8\delta_a^4(\beta+1)\delta^2\mu^2\zeta_a^2$
- $a_2 = -2\beta^2\delta^2\mu^2\eta^2\delta_a^6(1 + (\beta+1)\eta^2) + 4\delta_a^6\delta^2\mu^2\zeta_a^2$
- $a_1 = \beta^2\delta^2\eta^4\mu^2\delta_a^8$
- $b_6 = \beta^2\delta^2\mu^2$
- $b_5 = -2 \left(\mu\delta\beta(\eta^2(z+1)\beta + \eta^2 + z + 1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta+1)\delta_a + \mu\delta\beta \right) \mu\delta\beta + \left(2\zeta_a\mu(1 + (z+1)\beta)\delta\delta_a + 2 \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)^2$
- $b_4 = 2\delta_a^2 \left(\mu\eta^2\beta\delta(z+1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu\delta\beta(\eta^2\beta + \eta^2 + 1) \right) \mu\delta\beta + \dots + \delta_a \left(2\zeta_a\mu(1 + (z+1)\beta)\delta\delta_a + 2 \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)$
- $b_3 = -2\beta^2\delta^2\eta^2\mu^2\delta_a^4 - 2\delta_a^2 \left(\mu\eta^2\beta\delta(z+1)\delta_a^2 + 4\zeta_a \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu\delta\beta(\eta^2\beta + \eta^2 + 1) \right) + \dots + 4 \left(\mu\delta\zeta_a(z+1)\delta_a^2 + \left(\zeta\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\eta^2\beta + \eta^2 + 1)\beta\delta_a + \mu\delta\zeta_a(\beta+1) \right)^2 \delta_a^2$
- $b_2 = -4\delta\eta^2\mu\zeta_a\delta_a^4 \left(-2\delta\mu((1 + (z+1)\beta)\eta^2 + z + 1)\zeta_a\delta_a^2 - 2\eta^2\beta \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a - 2\delta\mu\zeta_a \right) + \dots + \left(\mu\delta(z+1)\eta^2\beta\delta_a^3 + 4(1 + (\beta+1)\eta^2) \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) \zeta_a\delta_a^2 + \eta^2\mu\delta\beta\delta_a \right)$
- $b_1 = 2\mu^2\eta^2\beta^2\delta^2\delta_a^6(\eta^2(z+1)\beta + \eta^2 + z + 1) + \dots + \delta_a^4 \left(\mu\delta\zeta_a(z+1)\delta_a^2 + \left(\xi\mu\delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\eta^2\beta + \eta^2 + 1)\beta\delta_a + \mu\delta\zeta_a(\beta+1) \right)$
- $b_0 = \beta^2\delta^2\eta^4\mu^2\delta_a^8$

IDVA C6

Polinomio de la frecuencia angular

- $a_7 = \beta^2\delta^2\mu^2$

- $a_6 = St^2 Ur^2 \beta^2 \delta^2 \mu^2 - 2 \left(-\mu(1 + \eta^2(z+1)\beta^2 + (z+1)\beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta -$
 $\left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)^2 - AM St^2 Ur^2 \beta^2 \delta^2 \mu^2$
- $a_5 = 2St^2 Ur^2 \left(-\mu(1 + \eta^2(z+1)\beta^2 + (z+1)\beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta + \dots + AM Ur^2 St^2 \left(\mu^2 \delta^2 + 2\mu \delta \zeta_a \delta_a \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) \right)$
- $a_4 = 2St^2 Ur^2 \delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right) \mu \delta \beta + \dots + 4\mu \delta \zeta_a \delta_a^2 \left(\mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) (z+1) \delta_a^2 + (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right)$
- $a_3 = St^2 Ur^2 \left(-2\beta^2 \delta^2 \eta^2 \mu^2 \delta_a^4 + 2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right) \right) + \dots + 4\mu^2 \delta^2 \zeta_a \delta_a^4 \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \right)$
- $a_2 = -2St^2 Ur^2 \beta \delta \eta^2 \mu \delta_a^4 \left(-\mu(1 + \eta^2(z+1)\beta^2 + (z+1)\beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) + \dots + 4\mu \delta_a^4 (\beta \eta^2 \delta_a^2 + \delta_a^2) \delta \zeta_a \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \delta \mu \right)$
- $a_1 = -2St^2 Ur^2 \beta \delta \eta^2 \mu \delta_a^6 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right) + \dots + AM Ur^2 St^2 \delta_a^8 \mu^2 \eta^4 \beta^2 \delta^2$
- $a_0 = St^2 Ur^2 \beta^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \delta_a^8$

Amplitud de la estela

- $a_5 = \mu \delta \beta \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) + 2\mu^2 \delta^2 \zeta_a \delta_a$
- $a_4 = -\delta \mu \delta_a^2 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) + 2\mu^2 \delta^2 \beta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) (z+1) \delta_a^2 + \dots + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta$
- $a_3 = \mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^4 \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) - 2\mu \delta \delta_a^3 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) + \dots + 2\mu \delta \zeta_a \delta_a^3 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right)$
- $a_2 = 2\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^5 \left(\mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) (z+1) \delta_a^2 + (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right) + \dots + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) - 2\mu^2 \delta^2 \zeta_a \delta_a^5 \eta^2$
- $a_1 = -2\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^7 \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \right) + 2\mu^2 \delta_a^5 (\beta \eta^2 \delta_a^2 + \delta_a^2) \delta^2 \zeta_a \eta^2$
- $b_6 = St Ur \beta^2 \delta^4 \mu^2$
- $b_5 = Ur St \left(2 \left(-\mu(1 + \eta^2(z+1)\beta^2 + (z+1)\beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta + \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)^2 \right) \delta^2$

- $b_4 = UrSt \left(2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta(z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right) \mu \delta \beta + \right.$
 $\left. \delta_a \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right) \delta^2 \right)$
- $b_3 = UrSt \left(-2\mu^2 \eta^2 \beta^2 \delta^2 \delta_a^4 + 2\delta_a^4 \mu \eta^2 \beta \delta(z+1) + 4 \left(\mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1)(z+1) \delta_a^2 + \right. \right.$
 $\left. (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right)^2 \delta_a^2 \delta^2$
- $b_2 = UrSt \left(2\mu^2 \eta^2 \beta \delta^2 \delta_a^6 (1 + \eta^2 (z+1) \beta^2 + (z+1) \beta) + \mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1)(z+1) \delta_a^2 + \right.$
 $\left. (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right) \delta^2$
- $b_1 = UrSt \left(-2\mu \eta^2 \beta \delta \delta_a^6 \left(\mu \eta^2 \beta \delta(z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) + 4\delta_a^6 \left(\beta \eta^2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \right. \right.$
 $\left. \mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \right)^2 \delta^2$
- $b_0 = StUr \beta^2 \delta^4 \eta^4 \mu^2 \delta_a^8$

Amplitud de la estructura

- $a_5 = \beta^2 \delta^2 \mu^2$
- $a_4 = -2\mu^2 \delta^2 \delta_a^2 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \beta + 4\mu^2 \delta_a^2 \delta^2 \zeta_a^2$
- $a_3 = \mu^2 \delta^2 (2\beta^2 \eta^2 \delta_a^4 + \delta_a^4 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1)^2) + 4\mu^2 \delta_a^2 (-2\beta \eta^2 \delta_a^2 - 2\delta_a^2) \delta^2 \zeta_a^2$
- $a_2 = -2\mu^2 \delta^2 \beta \eta^2 \delta_a^6 (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) + 4\mu^2 \delta_a^2 (\beta \eta^2 \delta_a^2 + \delta_a^2)^2 \delta^2 \zeta_a^2$
- $a_1 = \beta^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \delta_a^8$
- $b_6 = \beta^2 \delta^2 \mu^2$
- $b_5 = 2 \left(-\mu (1 + \eta^2 (z+1) \beta^2 + (z+1) \beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) \mu \delta \beta +$
 $\left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)^2$
- $b_4 = 2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta(z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) \right) + \dots + 4 \left(\mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1)(z+1) \delta_a^2 + \right.$
 $\left. (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right) \delta_a \left(-2\mu \delta \zeta_a \delta_a - 2 \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \beta \right)$
- $b_3 = -2\delta_a^4 \mu^2 \eta^2 \beta^2 \delta^2 + 2\delta_a^2 \left(\mu \eta^2 \beta \delta(z+1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \right) + \dots + 4 \left(\mu \delta \zeta_a (\beta \eta^2 + 1)(z+1) \delta_a^2 + \right.$
 $\left. (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a \right)^2 \delta_a^2$
- $b_2 = -2\beta \eta^2 \mu \delta \delta_a^4 \left(-\mu (1 + \eta^2 (z+1) \beta^2 + (z+1) \beta) \delta \delta_a^2 - 4\delta_a \zeta_a \left(\zeta \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) - \mu \delta \beta \right) + \dots + \left(\zeta \mu \delta + \right.$
 $\left. \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \mu \delta \zeta_a$

- $b_1 = -2\beta \eta^2 \mu \delta \delta_a^6 \left(\mu \eta^2 \beta \delta (z + 1) \delta_a^2 + 4\delta_a \zeta_a \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) (\beta \eta^2 + 1) + \mu \delta (\beta^2 \eta^2 + \beta + 1) \right) + 4\delta_a^6 \left(\beta \eta^2 \left(\xi \mu \delta + \frac{\gamma}{2} \right) \delta_a + \zeta_a (\beta \eta^2 + 1) \delta \mu \right)^2$
- $b_0 = \beta^2 \delta^2 \eta^4 \mu^2 \delta_a^8$