



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Arquitectura de estimación y control para el
seguimiento de trayectorias de un vehículo
autónomo terrestre basada en el acoplamiento
dinámico-cinemático**

presentada por

Ing. Joaquín Hernández Santiago

como requisito para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

Codirector de tesis

Dr. Jorge Yusef Colín Castillo

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2026.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca Mor, **01/julio/2026**

Oficio No. SAC/203/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis

JOAQUIN HERNANDEZ SANTIAGO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

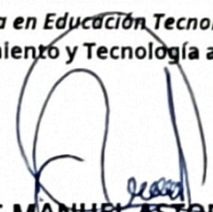
Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"ARQUITECTURA DE ESTIMACIÓN Y CONTROL PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN VEHICULO AUTÓNOMO TERRESTRE BASADO EN EL ACOPLAMIENTO DINAMICO-CINEMÁTICO"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

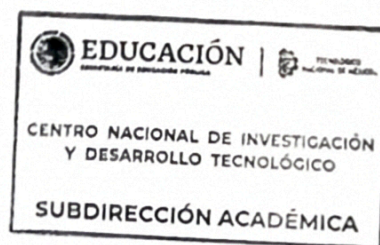
Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®

"Conocimiento y Tecnología al servicio de México"


CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



c.c.p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



2026
año de
Margarita
Maza



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

Cuernavaca, Mor; 29/junio/2026

Oficio No. DIE/150/2026

Asunto: Aceptación de documentos.

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la C. **JOAQUIN HERNANDEZ SANTIAGO**, con número de control **M24CE071** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"ARQUITECTURA DE ESTIMACIÓN Y CONTROL PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE UN VEHICULO AUTÓNOMO TERRESTRE BASADO EN EL ACOPLAMIENTO DINAMICO- CINEMÁTICO"**, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Jorge Yusef Colín Castillo
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 14642015

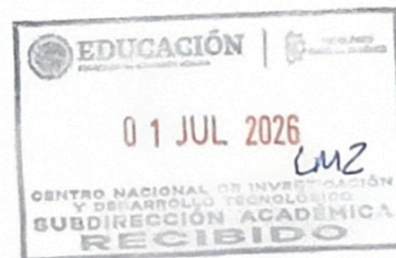
REVISOR 1

Dr. Manuel Adam Medina
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5992003

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 4214833

C.c.p. Mtra. Verónica Sotelo Rojas, Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante JGM/kmqh



2026
año de
Margarita
Maza

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 2225.
e-mail: dlic@cenidet.tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx



Dedicatoria

“Dedico esta tesis a Dios, por brindarme fortaleza y permitirme llegar hasta este momento; a mi familia, por su amor, confianza y apoyo incondicional a lo largo de este camino; y a mis amigos, por su compañía, ánimo y por compartir conmigo cada uno de los desafíos y logros. Gracias por ser parte de este logro.”

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por brindarme la fortaleza, la salud y la oportunidad de culminar esta importante etapa de mi formación profesional.

Agradezco en gran medida a mis padres, Saira Santiago Orozco y José Ángel Hernández Cruz, así como a mi hermano, Ángel Vladimir Hernández Santiago, por su amor, apoyo incondicional y confianza a lo largo de cada etapa de mi vida. Han sido un ejemplo de dedicación, esfuerzo y cariño, y sus palabras de aliento me han impulsado a crecer como persona, superar los desafíos y perseguir cada una de mis metas. Extiendo también mi agradecimiento a mis abuelos, Ofelia, Rosa, Joaquín y César, por su cariño, sus enseñanzas y los valores que han dejado en mi vida.

A mi familia, especialmente a mis tíos Carlos, Ernesto, Orlando, Sergio y Vicente; a mis tías Bertha y Suhey; y a mis primos Dionisio y Jafer, gracias por su cariño, su apoyo y por acompañarme durante este camino.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mis asesores de tesis, la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y el Dr. Jorge Yusef Colín Castillo, por su guía, tiempo y acompañamiento durante el desarrollo de esta investigación. Gracias por compartir sus conocimientos, observaciones y consejos, los cuales enriquecieron esta investigación y contribuyeron a mi desarrollo académico y profesional. Agradezco de manera especial a la Dra. Osorio Gordillo, por su confianza y por el respaldo brindado durante mi formación en el posgrado. Su ejemplo de compromiso con la investigación y la docencia ha sido una inspiración para mí.

A mis revisores, el Dr. Manuel Adam Medina y el Dr. Juan Reyes Reyes, por el tiempo dedicado a la evaluación de esta tesis y por las valiosas observaciones y recomendaciones realizadas, las cuales contribuyeron a mejorar la claridad, calidad y solidez de este trabajo.

A los profesores que formaron parte de mi preparación académica, especialmente al Dr. Gerardo Guerrero, Dr. Carlos Daniel, Dr. Ricardo Fabricio y al Dr. Carlos Astorga, así como a todos aquellos docentes que, a lo largo de estos años, compartieron conmigo sus conocimientos, experiencia y pasión por la investigación.

A mis compañeros y amigos de la generación, especialmente a quienes integraron la línea de Control Automático: Adrián, Daniel Moreno, Dara, Sandro, Sebastián y Vianey; así como a Ángel, Daniel Ramírez, Evelyn, Ezequiel y Zuleyma, por el compañerismo, el apoyo mutuo y los momentos compartidos que hicieron de la maestría una experiencia inolvidable.

Finalmente, agradezco al Tecnológico Nacional de México (TecNM) y al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría y por ofrecer el entorno académico que hizo posible mi formación profesional y personal. Asimismo, expreso mi agradecimiento a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por la beca otorgada durante este periodo de formación, gracias al cual fue posible realizar mis estudios de posgrado.

Resumen

En este trabajo se desarrolla una arquitectura de seguimiento de trayectorias basada en observadores y controladores para un Vehículo Autónomo Terrestre (AGV) representado mediante un modelo dinámico-cinemático no lineal. Inicialmente, se obtiene un modelo dinámico tipo bicicleta a partir de la simplificación de un vehículo de cuatro neumáticos en un neumático delantero y uno trasero equivalentes. Este modelo describe la evolución de las velocidades longitudinal, lateral y angular de orientación del vehículo a partir de la fuerza de tracción y el ángulo de dirección. Posteriormente, dichas velocidades se emplean para formular un modelo cinemático encargado de describir la evolución de la posición y orientación del vehículo respecto a un marco de referencia global. Adicionalmente, se propone una aproximación del ángulo de deslizamiento lateral que permite relacionar el comportamiento lateral del vehículo con la generación de referencias dinámicas compatibles entre los modelos dinámico y cinemático, estableciendo una estructura acoplada para el análisis del problema de seguimiento de trayectorias.

A partir de los modelos obtenidos, se desarrollan representaciones Takagi-Sugeno-Lipschitz. Sobre estas representaciones se diseñan observadores proporcionales-integrales para estimar las variables de estado utilizando únicamente las señales disponibles y las entradas aplicadas al sistema. El diseño considera las particularidades de los modelos dinámico y cinemático, incluyendo la presencia de variables premisas no medibles y el intercambio de información entre ambos observadores. Como resultado, se plantea una estructura de estimación capaz de reconstruir las velocidades locales y la orientación del vehículo a partir de las entradas físicas y de las mediciones de posición global.

Para el seguimiento de trayectorias se propone una arquitectura de controladores PI no lineales basados en Lyapunov compuesta por dos niveles. El primero corresponde al controlador cinemático, encargado de generar referencias dinámicas a partir de los errores de posición y de la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral. El segundo corresponde al controlador dinámico, cuya finali-

dad es generar la fuerza de tracción y el ángulo de dirección requeridos para que las velocidades internas del vehículo sigan las referencias establecidas por el nivel cinemático. Las ganancias de ambos controladores se obtienen mediante condiciones matriciales lineales derivadas del análisis de estabilidad de las dinámicas de error.

Finalmente, los observadores y controladores desarrollados se integran dentro de un esquema de control basado en observador y se validan mediante simulaciones numéricas de seguimiento de trayectoria. Los resultados muestran convergencia de los estados estimados, seguimiento adecuado de las referencias propuestas y un desempeño satisfactorio de la arquitectura desarrollada, permitiendo realizar el seguimiento de trayectorias sin requerir la medición directa de todas las variables internas del vehículo.

La principal contribución de este trabajo consiste en el desarrollo de una arquitectura integrada de modelado, observación y control para seguimiento de trayectorias, basada en el acoplamiento entre los modelos dinámico y cinemático del vehículo, la generación de referencias dinámicas compatibles con su comportamiento lateral y la implementación de un esquema de control basado en observador.

Abstract

This work develops a trajectory-tracking architecture based on observers and controllers for an Autonomous Ground Vehicle (AGV) represented by a nonlinear dynamic-kinematic model. First, a bicycle-type dynamic model is obtained by simplifying a four-wheel vehicle into equivalent front and rear tires. This model describes the evolution of the vehicle's longitudinal, lateral, and yaw velocities as a function of the traction force and steering angle. Subsequently, these velocities are employed to formulate a kinematic model responsible for describing the evolution of the vehicle position and orientation with respect to a fixed global reference frame. In addition, an approximation of the vehicle sideslip angle is proposed to relate the lateral behavior of the vehicle to the generation of dynamic references compatible with both the dynamic and kinematic models, establishing a coupled structure for trajectory-tracking analysis.

Based on the obtained models, Takagi-Sugeno-Lipschitz representations are developed. Proportional-integral observers are then designed to estimate the system states using only the available measurements and applied inputs. The observer design considers the particular characteristics of both the dynamic and kinematic models, including the presence of unmeasurable premise variables and the exchange of information between both observers. As a result, an estimation structure capable of reconstructing the vehicle local velocities and orientation from physical inputs and global position measurements is obtained.

For trajectory tracking, a two-level nonlinear PI control architecture based on Lyapunov theory is proposed. The first level corresponds to the kinematic controller, which generates dynamic references from position tracking errors and the proposed sideslip-angle approximation. The second level corresponds to the dynamic controller, whose purpose is to generate the traction force and steering angle required for the vehicle internal velocities to track the references generated by the kinematic level. The gains of both controllers are obtained through linear matrix inequality

conditions derived from the stability analysis of the error dynamics.

Finally, the developed observers and controllers are integrated into an observer-based control scheme and validated through numerical trajectory-tracking simulations. The obtained results show convergence of the estimated states, satisfactory reference tracking performance, and appropriate operation of the proposed architecture, enabling trajectory tracking without requiring direct measurement of all the vehicle internal states.

The main contribution of this work lies in the development of an integrated modeling, observation, and control architecture for trajectory tracking, based on the coupling between the vehicle dynamic and kinematic models, the generation of dynamic references compatible with its lateral behavior, and the implementation of an observer-based control scheme.

Índice general

Índice general	VIII
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XIV
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Objetivos	4
1.2.1 Objetivo general	4
1.2.2 Objetivos particulares	4
1.3 Estudio del estado del arte	5
1.3.1 Modelado de vehículos autónomos terrestres	6
1.3.2 Control de Vehículos Autónomos Terrestres	10
1.3.3 Observadores en Vehículos Autónomos Terrestres	14
1.3.4 Enfoque Takagi-Sugeno en Vehículos Autónomos Terrestres	16
1.3.5 Síntesis del estado del arte	17
1.4 Alcances	18
1.5 Aportaciones	19
1.6 Originalidad	20
1.7 Estructura del documento	20
2 Marco teórico	22
2.1 Vehículos autónomos	22
2.1.1 Clasificación según el medio de operación	22

2.1.2	Vehículos Autónomos Terrestres	23
2.1.3	Configuraciones de locomoción terrestre	23
2.1.4	Configuraciones de vehículos con ruedas	24
2.2	Fundamentos de modelado vehicular	26
2.2.1	Esquema representativo del AGV	28
2.3	Sistemas Takagi–Sugeno	30
2.3.1	Construcción de modelos Takagi–Sugeno	31
2.4	Observadores de estado	33
2.4.1	Variables premisas medibles y no medibles	34
2.4.2	Observadores Takagi–Sugeno–Lipschitz con acciones proporcional e integral .	36
2.4.3	Observador dinámico generalizado y estructuras particulares	38
2.5	Controladores para sistemas no lineales	40
2.5.1	Seguimiento de referencias y dinámica del error	42
2.5.2	Acción proporcional–integral	42
3	Modelo matemático del AGV	44
3.1	Introducción	44
3.2	Modelo dinámico	45
3.2.1	Consideraciones del modelo dinámico	45
3.2.2	Ecuaciones de movimiento	48
3.2.3	Fuerzas en los neumáticos	49
3.2.4	Representación matricial del modelo dinámico	51
3.2.5	Propiedad local de Lipschitz	53
3.3	Modelo cinemático	54
3.4	Modelo dinámico–cinemático acoplado	55
3.4.1	Simulación en lazo abierto	56
3.5	Aproximación del ángulo de deslizamiento lateral	58
3.6	Representaciones Takagi–Sugeno del modelo	60
3.6.1	Representación T-S del modelo dinámico	61
3.6.2	Representación T-S del modelo cinemático	62
3.6.3	Dominios de operación	62

3.6.4	Funciones de pertenencia	63
3.6.5	Modelos locales dinámicos	64
3.6.6	Validación de las representaciones T-S	65
3.7	Síntesis del capítulo	67
4	Observadores del AGV	68
4.1	Introducción	68
4.2	Análisis de observabilidad	69
4.2.1	Observabilidad del modelo dinámico	69
4.2.2	Observabilidad del modelo cinemático	71
4.2.3	Conclusiones sobre el análisis de observabilidad de los sistemas	72
4.3	Observador proporcional–integral generalizado (Dinámico)	73
4.3.1	Modelo T-S Lipschitz dinámico	73
4.3.2	Estructura del observador proporcional–integral generalizado (Dinámico)	74
4.3.3	Dinámica del error y parametrización del observador PIO generalizado (Dinámico)	75
4.3.4	Análisis de estabilidad mediante el método de Lyapunov (M. Dinámico)	77
4.4	Observador proporcional–integral generalizado (Cinemático)	81
4.4.1	Modelo T-S cinemático	81
4.4.2	Estructura del observador proporcional–integral generalizado (Cinemático)	82
4.4.3	Dinámica del error y parametrización inicial (Cinemático)	83
4.4.4	Representación aumentada de la dinámica del error (Cinemático)	85
4.4.5	Análisis de estabilidad mediante el método de Lyapunov (Cinemático)	85
4.5	Arquitectura y simulación de los observadores acoplados	87
4.5.1	Ganancias utilizadas en la simulación	89
4.5.2	Resultados del observador dinámico	90
4.5.3	Resultados del observador cinemático	92
4.6	Síntesis del capítulo	93
5	Controladores para seguimiento de trayectoria	95
5.1	Introducción	95
5.2	Planteamiento del problema y arquitectura de control	96

5.3	Controlador PI no lineal para el sistema cinemático	98
5.4	Controlador PI no lineal para el sistema dinámico	101
5.4.1	Control longitudinal mediante fuerza de tracción	102
5.4.2	Control lateral-orientación mediante dirección	103
5.5	Análisis de estabilidad del esquema de control	104
5.6	Resultados de simulación	106
5.6.1	Validación de los controladores con variables disponibles	106
5.7	Esquema de control basado en observadores	110
5.8	Síntesis del capítulo	114
6	Conclusiones generales	116
	Bibliografía	118
A	Herramientas matemáticas para el análisis de sistemas	127
A.1	Estabilidad en el sentido de Lyapunov	127
A.2	Complemento de Schur	128
A.3	Lema de eliminación	129
A.4	Desigualdad de Young	130
A.5	Condición de Lipschitz	131
A.6	Criterio de observabilidad para sistemas no lineales	131

Índice de figuras

2.1	Configuración síncrona.	25
2.2	Configuración diferencial.	25
2.3	Configuración de triciclo.	25
2.4	Configuración de cuatro ruedas.	25
2.5	Marco local de un AGV.	27
2.6	Marco global de un AGV.	28
2.7	Esquema representativo de un AGV de cuatro ruedas.	29
2.8	Esquema simplificado tipo bicicleta del AGV.	29
3.1	Representación simplificada tipo bicicleta del AGV.	46
3.2	Diagrama de cuerpo libre para la representación de las fuerzas sobre el marco local del AGV.	48
3.3	Velocidades locales y ángulos de deslizamiento en los neumáticos equivalentes delantero y trasero.	50
3.4	Acoplamiento entre los modelos dinámico y cinemático del AGV.	56
3.5	Ángulo de dirección aplicado durante la simulación en lazo abierto.	57
3.6	Velocidades locales del AGV durante la simulación en lazo abierto.	57
3.7	Trayectoria y variables cinemáticas del AGV durante la simulación en lazo abierto.	57
3.8	Validación de la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral β	60
3.9	Comparación de las velocidades locales del modelo no lineal y la representación T-S.	66
3.10	Comparación de las variables cinemáticas del modelo no lineal y la representación T-S.	66
3.11	Evolución temporal de las funciones de pertenencia utilizadas en las representaciones T-S.	66

4.1	Arquitectura de observadores acoplados para la estimación de variables dinámicas y cinemáticas del AGV.	88
4.2	Comparación entre las variables dinámicas del modelo no lineal y las estimaciones del observador dinámico: v_x , v_y y r	91
4.3	Errores de estimación del observador dinámico para v_x , v_y y r	91
4.4	Comparación entre las variables cinemáticas del modelo no lineal y las estimaciones del observador cinemático: plano $X - Y$, X , Y y $\hat{r}_c$	92
4.5	Errores de estimación del observador cinemático para X , Y y $\hat{r}_c$	93
5.1	Arquitectura de control dinámico–cinemática propuesta para el seguimiento de trayectoria del AGV.	97
5.2	Seguimiento de trayectoria circular mediante el controlador cinemático.	108
5.3	Seguimiento de referencias dinámicas mediante el controlador dinámico.	109
5.4	Entradas de control generadas durante el seguimiento de trayectoria circular.	110
5.5	Arquitectura general del esquema de control basado en observadores.	111
5.6	Seguimiento de trayectoria mediante el esquema de control basado en observadores.	112
5.7	Seguimiento de referencias dinámicas mediante el esquema de control basado en observadores.	113
5.8	Entradas de control generadas por el esquema de control basado en observadores.	113

Índice de tablas

Tabla 3.1	Parámetros del modelo dinámico del AGV.	47
Tabla 3.2	Escenarios utilizados para la identificación de L_β	59
Tabla 3.3	Límites de las variables premisas utilizadas en las representaciones T-S.	63
Tabla 3.4	Combinaciones de las variables premisas del modelo dinámico.	65
Tabla 3.5	Errores RMSE entre el modelo no lineal y las representaciones T-S.	67
Tabla 5.1	Índices de desempeño del controlador y del observador.	114

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años, el grado de interés en los vehículos autónomos ha aumentado debido al avance de las tecnologías de comunicación, sensores de alta precisión, sistemas de percepción y métodos de inteligencia artificial, impulsando el estudio de estos sistemas desde diferentes enfoques. La principal característica de los vehículos autónomos es la capacidad de realizar tareas de forma independiente, sin intervención humana directa, adquiriendo ventajas como la posible reducción de errores relacionados con la operación manual, siempre que estos sistemas se encuentren adecuadamente diseñados, instrumentados y programados.

Aunque el concepto de vehículo autónomo ha evolucionado a lo largo del tiempo, aún se encuentran en desarrollo áreas de estudio relacionadas con la percepción, planificación, estimación y control. Estos enfoques buscan ser aplicados en tareas de transporte, inspección, exploración, asistencia y operación en ambientes controlados o de difícil acceso.

Los vehículos autónomos pueden clasificarse de acuerdo con el medio en el que operan. Los vehículos aéreos no tripulados, conocidos como *UAV (Unmanned Aerial Vehicles)*, se utilizan en tareas de monitoreo, inspección, vigilancia y transporte. Los vehículos acuáticos no tripulados, denominados *UUV (Unmanned Underwater Vehicles)*, se utilizan en exploración submarina, logística y operaciones especializadas. Por último, los Vehículos Autónomos Terrestres (*AGV, Autonomous Ground Vehicles*) se desplazan sobre superficies sólidas mediante ruedas, orugas o mecanismos caminantes, con aplicaciones en agricultura, transporte, automatización industrial, exploración terrestre y operación en entornos estructurados. El estudio de estos sistemas integra distintas áreas del conocimiento, entre ellas la mecánica, la inteligencia artificial, las ciencias computacionales y

el control automático Yao *y col.* (2020).

Dentro del estudio de los AGV, el seguimiento de trayectorias es una tarea relevante para su operación, los vehículos requieren desplazarse de un punto A a un punto B para realizar las tareas programadas, por lo que se debe diseñar una estrategia capaz de generar las acciones necesarias para que el vehículo siga una trayectoria deseada en el plano, considerando la relación entre la posición global, la orientación y las velocidades internas. No obstante, el comportamiento del vehículo no depende únicamente de su descripción cinemática, sino también de su dinámica longitudinal, lateral y rotacional, así como de las fuerzas generadas por los neumáticos y de las entradas físicas aplicadas al sistema.

En aplicaciones reales, algunas variables necesarias para monitorear el seguimiento de las trayectorias planificadas no siempre se encuentran disponibles de forma directa. En especial, las velocidades longitudinal, lateral y angular de orientación pueden ser difíciles de medir o requerir sensores adicionales. Esta limitación motiva el desarrollo de observadores capaces de estimar las señales correspondientes a las variables internas del sistema a partir de mediciones disponibles y de las entradas aplicadas al vehículo. En el caso del seguimiento de trayectorias, la estimación de estados resulta importante, debido a que la implementación del controlador requiere toda la información posible del vehículo para cerrar el lazo de control.

A partir de estas consideraciones, el presente trabajo aborda el seguimiento de trayectorias en un Vehículo Autónomo Terrestre mediante una arquitectura que contempla modelado, estimación y control. La propuesta parte de una representación dinámica–cinemática no lineal del vehículo, con el fin de relacionar las entradas físicas del sistema con las velocidades internas, la posición y la orientación. Esta formulación permite analizar el problema desde dos niveles acoplados: el comportamiento dinámico local del vehículo con referencia en el centro de gravedad y su movimiento respecto a un marco de referencia global.

La estrategia desarrollada incorpora observadores para estimar variables internas que no se consideran directamente disponibles, así como controladores no lineales con el objetivo de generar las acciones necesarias para el seguimiento de referencias. De esta manera, la estimación de estados y el diseño de control se plantean como elementos acoplados en una misma arquitectura, en la cual se plantea estimar todas las variables que requiere el controlador para el seguimiento de trayectorias a partir de la posición global y las entradas correspondientes a la fuerza de tracción y la dirección.

1.1. Planteamiento del problema

Los Vehículos Autónomos Terrestres (*AGV*, *Autonomous Ground Vehicles*) han mostrado un crecimiento importante en aplicaciones agrícolas, industriales, logísticas, de transporte y exploración, con áreas de estudio enfocadas en el modelado, estimación y control para evaluar el comportamiento de desplazamiento en distintos entornos (Yao *y col.*, 2020). Dentro de estas aplicaciones, el seguimiento de trayectorias representa una tarea de suma importancia, ya que permite el movimiento del vehículo de acuerdo con una referencia previamente establecida, manteniendo una evolución de la posición, orientación y velocidades internas conforme a lo requerido.

A pesar de los avances en control automático, el seguimiento de trayectorias en AGV continúa siendo un problema relevante debido a la naturaleza no lineal del sistema. El comportamiento interno del vehículo depende principalmente de la orientación, las velocidades longitudinal, lateral y angular de orientación, las fuerzas generadas por los neumáticos y de las entradas físicas aplicadas. Esta interacción dificulta el uso directo de técnicas lineales convencionales que limitan el comportamiento del vehículo a regiones de operación reducidas, por lo que se requiere un balance entre las consideraciones, limitaciones y efectos considerados en la representación matemática del sistema y la complejidad que implica abordar estos sistemas en el diseño de controladores y observadores.

Además del problema de modelado, el seguimiento de trayectorias requiere generar acciones de control que sean físicamente compatibles con el comportamiento dinámico del vehículo. Una trayectoria deseada se define normalmente en un marco global mediante coordenadas de posición; sin embargo, las entradas reales del AGV actúan sobre variables locales, como la fuerza de tracción y el ángulo de dirección. Esta diferencia introduce una dificultad adicional, ya que las referencias generadas desde el nivel cinemático deben ser alcanzables por el sistema dinámico, especialmente cuando se consideran trayectorias con curvas, donde se debe considerar dinámica lateral, rotacional y el efecto de deslizamiento en neumáticos.

Otro aspecto importante es la disponibilidad limitada de información para el controlador. En aplicaciones prácticas, variables como la velocidad lateral, la velocidad angular de orientación, los ángulos de deslizamiento o algunas variables internas del vehículo no siempre se encuentran disponibles de forma directa debido a restricciones tecnológicas, económicas o de integración (Pan *y col.*, 2021). En muchos casos, las posiciones globales $X(t)$ y $Y(t)$ representan algunas de las

principales mediciones accesibles, mientras que otras variables necesarias para el control deben ser estimadas a partir de las entradas aplicadas y de las señales disponibles.

La ausencia de mediciones completas puede afectar el desempeño del controlador, ya que el cierre del lazo de control depende de la información utilizada para calcular las entradas aplicadas al sistema. Por esta razón, el diseño de observadores representa una alternativa para estimar las variables no medibles y permitir la implementación de esquemas de control basados en estados estimados. Sin embargo, el diseño de observadores para AGV modelados de forma no lineal presenta retos adicionales debido al número de variables de estado involucradas y a la presencia de términos no lineales que dificultan el análisis de estabilidad y convergencia.

Estas consideraciones motivan el desarrollo de una arquitectura de seguimiento de trayectorias capaz de integrar modelado dinámico-cinemático, estimación de estados y control no lineal. En este trabajo, el enfoque Takagi-Sugeno-Lipschitz se utiliza como herramienta para tratar el comportamiento no lineal del AGV desde un enfoque multimodelos y facilitar el diseño de observadores proporcionales-integrales. A partir de las variables estimadas, se plantea una estrategia de control PI no lineal basada en Lyapunov, que busca determinar las expresiones que establezcan los valores de la fuerza de tracción y el ángulo de dirección necesarios para el seguimiento de trayectorias bajo información parcial del sistema.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Diseñar una arquitectura de control para el seguimiento de trayectorias de un Vehículo Autónomo Terrestre (AGV), basada en el acoplamiento dinámico-cinemático y en el uso de estimaciones de estado.

1.2.2. Objetivos particulares

- Desarrollar un modelo dinámico-cinemático acoplado del AGV para el problema de seguimiento de trayectoria.

- Obtener una representación Takagi-Sugeno-Lipschitz del modelo dinámico-cinemático desarrollado, identificando las variables premisas medibles y no medibles.
- Diseñar observadores de estado basados en el enfoque Takagi-Sugeno-Lipschitz, considerando la existencia de variables premisas no medibles.
- Diseñar controladores no lineales utilizando las estimaciones proporcionadas por los observadores, e integrar la arquitectura de estimación y control para el seguimiento de trayectorias.
- Evaluar el desempeño de la arquitectura propuesta mediante simulaciones de seguimiento de trayectorias.

1.3. Estudio del estado del arte

El desarrollo de los Vehículos Autónomos Terrestres (AGV) ha sido impulsado por avances en tecnologías de comunicación, instrumentación, percepción e inteligencia artificial, incluso algunos trabajos han reportado validaciones mediante prototipos y plataformas experimentales, mostrando su aplicación en distintos escenarios de operación (Kunghun *y col.*, 2019; Pikner *y col.*, 2024; Artuñedo *y col.*, 2024).

Dentro del área de control, los problemas estudiados incluyen el modelado matemático, la detección de fallas, el mantenimiento de carril, la evasión de obstáculos y el seguimiento de trayectorias. Este último requiere coordinar el desplazamiento global del vehículo con las variables internas de movimiento, considerando restricciones físicas, efectos de deslizamiento y disponibilidad limitada de mediciones.

Las estrategias para seguimiento de trayectorias pueden organizarse mediante diferentes criterios. Una clasificación frecuente distingue entre métodos basados en modelos matemáticos y enfoques no basados en modelos, cada uno con distintas variantes de diseño (Rokonuzzaman *y col.*, 2021; Albhaisi *y col.*, 2026). Esta tesis adopta un enfoque basado en modelos, ya que permite analizar el comportamiento del vehículo en simulación y formular observadores para reconstruir variables no medibles. Con este propósito, se revisan trabajos relacionados con el modelado de AGV, el diseño de controladores, la estimación de estados mediante observadores y la aplicación del enfoque Takagi-Sugeno en este tipo de sistemas.

1.3.1. Modelado de vehículos autónomos terrestres

El modelado matemático constituye una etapa central para el diseño de observadores y controladores de AGV. La representación seleccionada establece las variables de estado, entradas, salidas medibles y fenómenos considerados durante el análisis. Dependiendo del propósito del estudio, un modelo puede incorporar únicamente relaciones geométricas de movimiento o incluir fuerzas, inercias, actuadores, interacción neumático-suelo y perturbaciones externas.

En la literatura, los modelos utilizados para estudiar vehículos de cuatro ruedas pueden agruparse en tres categorías: cinemáticos, dinámicos y acoplados. Esta clasificación permite distinguir el nivel de detalle requerido para representar la evolución del vehículo y delimitar las hipótesis consideradas en cada formulación.

Modelos cinemáticos del AGV

Los modelos cinemáticos describen el desplazamiento del AGV mediante relaciones geométricas entre velocidades y orientación, sin considerar directamente fuerzas, masa o inercia. Generalmente, las velocidades definidas en un marco local se proyectan sobre un sistema de referencia global para determinar la posición y orientación del vehículo.

Trabajos como los de Chen *y col.* (2024) y Wang *y col.* (2025) abordan la velocidad angular de orientación y funciones trigonométricas para proyectar las componentes de velocidad sobre los ejes globales. Otros enfoques utilizan una rapidez tangencial obtenida a partir de las velocidades locales y posteriormente descompuesta sobre el plano global (Guangwen *y col.*, 2024; Zhu *y col.*, 2024; Aslam y Bilal, 2024; Conejo *y col.*, 2025; Fan *y col.*, 2025). En estas formulaciones, la magnitud del vector de velocidad, análoga a la información proporcionada por el velocímetro de un vehículo puede ser utilizada sin requerir obligatoriamente la descomposición en velocidad longitudinal y lateral.

Una parte de los modelos desarrollados supone despreciable el ángulo de deslizamiento lateral β . Sin embargo, existen trabajos que incorporan esta variable para representar la diferencia entre la orientación geométrica del vehículo y la dirección efectiva de movimiento (Inamdar *y col.*, 2024; Jin *y col.*, 2024a; Zhang *y col.*, 2024; Cho *y col.*, 2025). Dependiendo del enfoque, β puede introducirse

mediante una relación algebraica o como una variable adicional con dinámica propia (Lin *y col.*, 2024; Li *y col.*, 2025).

Los modelos cinemáticos permiten describir la trayectoria global mediante una estructura reducida, los cuales consideran las velocidades como entradas disponibles directamente, por lo que no representan la forma en que las acciones físicas generan el movimiento y las velocidades en el vehículo. Cuando se requiere el estudio del comportamiento interno del AGV, esta limitación puede ser cubierta por el uso de modelos dinámicos, abordados a continuación.

Modelos dinámicos del AGV

Los modelos dinámicos describen el movimiento del AGV considerando fuerzas longitudinales y laterales, masa e inercia. Estas formulaciones normalmente se determinan a partir de la segunda ley de Newton aplicada al movimiento traslacional y rotacional. Su complejidad depende de los grados de libertad seleccionados, las consideraciones realizadas y el modelo matemático determinado para representar la interacción entre los neumáticos y la superficie.

En la literatura se reportan modelos de dos grados de libertad centrados en la velocidad angular de orientación r y el ángulo de deslizamiento lateral β , suponiendo constante la velocidad longitudinal y considerando el ángulo de dirección δ como entrada principal (Daraoui *y col.*, 2012; Wang *y col.*, 2016; Jin *y col.*, 2024a; Li *y col.*, 2025). Otros enfoques conservan la velocidad longitudinal constante, pero incorporan dinámicas laterales inducidas por variaciones en el ángulo de dirección (Lin *y col.*, 2025; Liu *y col.*, 2025b; Jin *y col.*, 2024b; Hu *y col.*, 2021; Kennouche *y col.*, 2022).

También se han desarrollado modelos con tres variables de estado que consideran la velocidad longitudinal v_x , la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r . En estas representaciones, el ángulo de dirección δ y la acción de tracción se incorporan como entradas del sistema (Nguyen *y col.*, 2016, 2021b,a; Wang *y col.*, 2021; Mihály *y col.*, 2024). A diferencia de los modelos laterales reducidos, estas representaciones permiten analizar las variaciones de la velocidad longitudinal y las dinámicas lateral y rotacional.

Modelos que acoplan dinámicas

Los modelos acoplados integran las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del vehículo, considerando la velocidad longitudinal v_x , la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r en el marco local, y las posiciones X y Y y el ángulo de orientación ψ en el marco global. Esta estructura permite relacionar las acciones físicas aplicadas al AGV, como el ángulo de dirección δ y la acción de tracción T , con su desplazamiento respecto a una trayectoria representada en el marco global.

En la literatura se han abordado modelos acoplados para analizar los efectos de la masa, la fricción, las fuerzas externas y las entradas de dirección y tracción sobre la evolución global del vehículo (Narendran y Hedrick, 1994; Kong *y col.*, 2021; Boggio *y col.*, 2023; Ning *y col.*, 2024; Ren *y col.*, 2024; Wang *y col.*, 2024a; Zhang, 2024). Estas formulaciones resultan adecuadas cuando el objetivo no se limita al estudio del movimiento lateral y requiere analizar la interacción entre la dinámica interna del AGV y su posición en el entorno.

También se han propuesto representaciones con un mayor número de componentes. Por ejemplo, el modelo presentado en Badar *y col.* (2024) considera seis grados de libertad e incorpora variables de posición, velocidades lineales y angulares, fuerzas en los neumáticos y dinámicas de actuadores. El modelo fue ajustado y validado experimentalmente, exponiendo al vehículo en terrenos irregulares, incluyendo condiciones relacionadas con la estabilidad ante posibles volcaduras.

Fuerzas en los neumáticos

La interacción entre los neumáticos y la superficie genera efectos significativos en el comportamiento longitudinal y lateral del vehículo. Una aproximación común consiste en considerar dichas fuerzas como relaciones lineales respecto a los ángulos de deslizamiento de los neumáticos α_i y coeficientes de rigidez constantes. Esta formulación reduce la complejidad del modelo y puede ser adecuada cuando el estudio del AGV se restringe a regiones de operación donde no se alcanzan velocidades tan altas o grandes ángulos de deslizamiento en neumáticos.

También se han propuesto fuerzas en neumáticos con representaciones no lineales dependientes de la velocidad, los ángulos y coeficientes de deslizamiento. Los autores Daraoui *y col.* (2012) y Zhao *y col.* (2020) modelan estas fuerzas como funciones trigonométricas basadas en la estructura

y configuración del vehículo. Por otro lado, Nguyen *y col.* (2021*b*) consideran relaciones que combinan velocidades y ángulos con parámetros de deslizamiento. En una representación extendida, Badar *y col.* (2024) modelan las fuerzas normales, longitudinales y laterales para cada neumático, considerando su ubicación dentro del vehículo. Asimismo, Cai *y col.* (2024) incorporan un término adicional para representar efectos de amortiguamiento en la interacción neumático-superficie.

La resistencia a la rodadura constituye otro fenómeno relevante cuando se analizan pérdidas energéticas o condiciones variables de contacto. Su representación puede incluir la deformación del neumático, la fricción, las características de la superficie y otros efectos relacionados con el desplazamiento del vehículo (Chen *y col.*, 2016; Wong, 2022).

La selección del modelo de neumáticos debe responder al objetivo del estudio y a las condiciones de operación consideradas. Las formulaciones lineales facilitan el análisis y el diseño de controladores mediante estructuras matemáticas manejables, mientras que los modelos extendidos permiten incorporar fenómenos adicionales cuando su influencia no puede despreciarse.

Consideraciones adicionales

Una parte de los modelos reportados supone superficies horizontales y perturbaciones externas despreciables. En escenarios con inclinaciones, irregularidades, humedad o deformaciones del terreno, resulta necesario incorporar términos adicionales que describan la interacción entre el vehículo y su entorno. Para el análisis de superficies inclinadas y resistencia a la rodadura pueden consultarse (Wong, 2022; Chen *y col.*, 2016).

Las perturbaciones aerodinámicas también pueden modificar el comportamiento del AGV, particularmente ante ráfagas de viento o componentes transversales del flujo de aire. Estos efectos pueden modelarse mediante fuerzas longitudinales, fuerzas laterales y momentos de orientación dependientes de la velocidad relativa entre el vehículo y el viento (Gillespie, 1992; Wong, 2022).

A partir de la revisión realizada, se observa que los modelos cinemáticos proporcionan una representación compacta del desplazamiento global, mientras que los modelos dinámicos permiten describir la influencia de las acciones físicas y las fuerzas externas. Por esta razón, en esta tesis se adopta una estructura acoplada dinámico-cinemática orientada al diseño de observadores y controladores para el seguimiento de trayectoria.

1.3.2. Control de Vehículos Autónomos Terrestres

El seguimiento de trayectoria constituye uno de los problemas estudiados en el control de Vehículos Autónomos Terrestres (AGV), ya que requiere relacionar el desplazamiento global del vehículo con su comportamiento dinámico interno. La selección de la estrategia de control depende del modelo utilizado, las variables disponibles para medición, las restricciones físicas del sistema y las condiciones de operación consideradas.

Las estrategias reportadas en la literatura pueden organizarse mediante distintos criterios. Una clasificación reciente distingue entre enfoques basados en reglas y métodos basados en aprendizaje adaptativo (Albhaisi *y col.*, 2026). Dentro de los primeros se encuentran los controladores fundamentados en retroalimentación, que pueden dividirse en estrategias basadas y no basadas en modelos matemáticos, así como los controladores derivados de propiedades geométricas. Por otra parte, los métodos adaptativos incorporan técnicas de optimización, aprendizaje automático y redes neuronales para ajustar el comportamiento del controlador ante variaciones del sistema o del entorno.

Entre las estrategias basadas en modelos se encuentran el control predictivo basado en modelos (MPC), el regulador cuadrático lineal (LQR) y los métodos de *backstepping*. Por otro lado, los controladores PID, los esquemas por modos deslizantes y las técnicas basadas en lógica difusa pueden diseñarse sin depender directamente de una representación completa del sistema. Finalmente, los controladores geométricos, como *Pure Pursuit* y Stanley, emplean relaciones entre la trayectoria y la geometría del vehículo para determinar el ángulo de dirección (Rokonuzzaman *y col.*, 2021; Albhaisi *y col.*, 2026).

Problemáticas abordadas en el seguimiento de trayectoria

Las estrategias de control para el seguimiento de trayectoria se han desarrollado considerando distintas condiciones de operación. Una parte de los trabajos se orienta al mantenimiento de carril, estacionamiento y navegación guiada. Por ejemplo, Boggio *y col.* (2023) emplean control predictivo para realizar maniobras de estacionamiento y mantenimiento de carril, mientras que Shen *y col.* (2024) utilizan una representación LPV de la dinámica lateral para ajustar el controlador ante variaciones de la velocidad longitudinal.

También se han estudiado escenarios en los que intervienen restricciones físicas, variaciones de adherencia o condiciones relacionadas con el consumo energético. En Yang *y col.* (2025), el seguimiento se integra con un esquema de recuperación de energía durante el frenado, incorporando modelos del vehículo, motor y batería. Por su parte, Nguyen *y col.* (2025) consideran restricciones en la magnitud y tasa de variación de las entradas dentro de una estrategia que separa el control longitudinal y lateral.

Otros trabajos atienden condiciones de operación que requieren mecanismos de adaptación o actualización en línea. En Xu *y col.* (2026), el controlador predictivo se complementa con una estrategia basada en programación dinámica heurística dependiente de la acción, utilizando información histórica de entradas, estados de seguimiento y coeficiente de adherencia. De forma relacionada, Li *y col.* (2026b) incorporan procesos gaussianos y un algoritmo de optimización para ajustar parámetros de la función de costo del controlador. Asimismo, Zhou *y col.* (2025) proponen un esquema predictivo activado por eventos con conmutación entre modelos, validado experimentalmente en un vehículo de tamaño convencional.

Estos trabajos muestran que el seguimiento de trayectoria puede involucrar objetivos adicionales al desplazamiento sobre una referencia, como restricciones en actuadores, adaptación ante cambios del entorno, eficiencia energética o validación en condiciones cercanas a la operación real.

Arquitecturas jerárquicas y acopladas

Una estrategia empleada para organizar el problema de seguimiento consiste en dividir el controlador en niveles cinemáticos y dinámicos. En estas arquitecturas, el nivel cinemático genera referencias asociadas a posición, orientación o velocidades deseadas, mientras que el nivel dinámico calcula las acciones físicas requeridas para seguir dichas referencias.

En Alcalá *y col.* (2018) y Alcalá *y col.* (2019) se desarrollan arquitecturas jerárquicas que relacionan ambos niveles mediante señales intermedias. El controlador cinemático emplea información de posición para generar referencias dinámicas, mientras que el controlador dinámico utiliza variables locales y mecanismos de estimación o compensación de fricción para determinar las acciones aplicadas al vehículo. En particular, Alcalá *y col.* (2019) combinan un controlador MPC cinemático con un controlador LQR dinámico e incorporan un estimador Takagi–Sugeno basado en horizonte

móvil y entradas desconocidas.

La división por niveles también se presenta en trabajos orientados a maniobras con mayores exigencias dinámicas. Por ejemplo, Kim *y col.* (2025) integran un planeador de referencias con controladores longitudinal y lateral, incorporando estimadores de fricción y fuerzas en los neumáticos para ajustar el comportamiento del sistema ante condiciones cercanas al límite de adherencia.

Las arquitecturas jerárquicas permiten relacionar el desplazamiento global con las variables internas del vehículo y separar el diseño de acuerdo con la naturaleza de cada subsistema. No obstante, la incorporación de estimadores, modelos de neumáticos y bloques de compensación incrementa el número de componentes involucrados en la implementación.

Controladores basados en dinámicas de error

Otra línea de desarrollo consiste en formular el seguimiento mediante variables de error asociadas a la trayectoria. Entre las variables utilizadas se encuentran el error lateral, el error de orientación, sus derivadas y, en algunos casos, errores relacionados con velocidades internas. La curvatura de la trayectoria suele emplearse como referencia para describir el comportamiento deseado del vehículo.

Una aproximación frecuente consiste en separar el control longitudinal del control de dirección. Bajo esta formulación, el subsistema lateral se construye a partir de la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r , mientras que la velocidad longitudinal v_x puede considerarse constante. Esta hipótesis permite concentrar el diseño en la generación del ángulo de dirección requerido para corregir los errores de seguimiento.

Por ejemplo, en Xu y Peng (2020) se propone un controlador de dirección que combina una acción de retroalimentación con un término anticipativo. La retroalimentación permite corregir los errores de seguimiento, mientras que la acción anticipativa incorpora información relacionada con la curvatura futura del camino. De forma relacionada, Li *y col.* (2026a) emplean una estrategia basada en errores laterales y de orientación para generar una referencia de la velocidad angular r . Esta referencia depende de variables internas del vehículo y de una estimación del ángulo de deslizamiento lateral β , a partir de las cuales un controlador por modos deslizantes determina el ángulo de dirección.

Cuando la velocidad longitudinal deja de considerarse constante, el problema de seguimiento requiere integrar el comportamiento longitudinal y lateral del vehículo. En este caso, pueden emplearse

controladores separados pero acoplados mediante referencias internas o variables compartidas. En Zhou *y col.* (2023), el modelo de error incorpora las velocidades v_x y v_y , proyectadas mediante el error de orientación para relacionar el movimiento local del vehículo con la trayectoria definida en el marco global. La arquitectura combina un controlador longitudinal con una estrategia lateral y analiza la influencia de la dinámica de los neumáticos sobre el seguimiento.

Estas formulaciones pueden ampliarse cuando se requiere incorporar un mayor número de variables internas o distribuir las acciones de control entre los neumáticos. En Liu *y col.* (2025a), se consideran errores de posición, orientación, velocidad lateral y velocidad angular de orientación dentro de una arquitectura que integra control predictivo, modos deslizantes y distribución diferencial de par. Por otra parte, Nguyen *y col.* (2025) separan el control longitudinal y lateral e incorporan referencias de posición, velocidad longitudinal y orientación, considerando restricciones en la magnitud y tasa de variación de las entradas.

Los controladores basados en dinámicas de error permiten expresar el objetivo de seguimiento mediante variables relacionadas directamente con el sistema. Su estructura depende de las hipótesis adoptadas, como velocidad longitudinal constante, deslizamiento lateral reducido o disponibilidad de mediciones internas. A medida que se incorporan dinámicas adicionales, el diseño requiere una mayor coordinación entre los subsistemas longitudinal, lateral y rotacional.

Métodos robustos y adaptativos

Las perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y restricciones en los actuadores han motivado el uso de estrategias robustas y adaptativas. En Kennouche *y col.* (2022), se combina un controlador H^∞ con retroalimentación de salida estática para estudiar el seguimiento ante viento transversal y saturación del actuador de dirección.

Las técnicas por modos deslizantes también han sido empleadas para atender variaciones del sistema y perturbaciones externas. Li *y col.* (2026a) utilizan un controlador terminal no singular adaptativo para seguimiento de trayectoria, mientras que Alike *y col.* (2024) desarrollan una estrategia *super-twisting* con lógica difusa para un sistema líder-seguidor.

Algunos trabajos incorporan mecanismos de aprendizaje para ajustar el comportamiento del controlador. Mihály *y col.* (2024) combinan aprendizaje por refuerzo y una representación LPV ante

ruido e incertidumbre sensorial. En Bai y Liu (2026), una red neuronal guiada por ecuaciones diferenciales se integra con MPC para mitigar perturbaciones periódicas en un vehículo experimental a escala.

También se han propuesto esquemas de identificación en línea para actualizar parámetros relacionados con la interacción neumático-superficie. En Zhang *y col.* (2026), un filtro adaptativo de Kalman estima la rigidez lateral de los neumáticos y actualiza las variables empleadas por un controlador LQR. La arquitectura utiliza estimadores en cascada para obtener fuerzas laterales, curvatura y ángulos de deslizamiento de los neumáticos.

A partir de las diferentes estrategias de control analizadas, se puede concluir que la estructura del controlador se encuentra estrechamente relacionada con el modelo matemático, las variables disponibles y las condiciones de operación consideradas. Las arquitecturas jerárquicas permiten relacionar el desplazamiento global con la dinámica interna del vehículo mediante referencias intermedias, mientras que las formulaciones basadas en error expresan el objetivo de seguimiento a partir de variables laterales, orientación y curvatura. Cuando se incorporan perturbaciones, incertidumbres o variaciones en la interacción neumático-superficie, el diseño puede complementarse con mecanismos de compensación, adaptación o estimación.

1.3.3. Observadores en Vehículos Autónomos Terrestres

La implementación de estrategias de control para AGV puede requerir información de variables internas cuya medición directa no siempre se encuentra disponible. Entre estas variables se incluyen la velocidad lateral, el ángulo de orientación, la velocidad angular de orientación, el ángulo de deslizamiento lateral y algunas perturbaciones externas que influyen sobre el movimiento del vehículo. Aunque parte de esta información puede obtenerse mediante sensores especializados, su incorporación puede incrementar el costo, la complejidad de instrumentación o la sensibilidad del sistema frente a ruido y fallas de medición. Por esta razón, se han desarrollado observadores de estado capaces de reconstruir variables no medibles a partir de las entradas conocidas y las salidas disponibles.

El diseño de un observador depende de la estructura del modelo matemático, las señales accesibles para medición y las propiedades de observabilidad del sistema. En modelos cinemáticos tipo

monociclo y configuraciones de cuatro ruedas, se han empleado mediciones ópticas para estimar la posición y orientación del vehículo (Pliego, 2023). Para configuraciones Ackermann también se han desarrollado estructuras orientadas a reconstruir el ángulo de orientación y funciones trigonométricas dependientes de esta variable sin requerir su medición directa (Wang *y col.*, 2024b; Xu *y col.*, 2025).

La estimación de variables laterales constituye otro tema de interés debido a su influencia sobre la estabilidad y el seguimiento de trayectoria. En particular, se han propuesto estimadores del ángulo de deslizamiento lateral β , el cual relaciona la orientación geométrica del vehículo con la dirección efectiva de movimiento (Dong *y col.*, 2025; Bessafa *y col.*, 2022). También se han desarrollado estructuras para estimar velocidades internas y perturbaciones externas utilizando un conjunto reducido de mediciones (Liu *y col.*, 2025c; Wang *y col.*, 2024c; Fenyés *y col.*, 2025; Zhang *y col.*, 2025).

La reconstrucción simultánea de variables cinemáticas y dinámicas puede requerir esquemas organizados en distintos niveles. Algunas propuestas emplean observadores en cascada (Jemmali y Mouftah, 2022), condiciones de persistencia de excitación (Wang *y col.*, 2021) y análisis de matrices dependientes del estado para determinar la convergencia del error de estimación (Cai *y col.*, 2024). En estas arquitecturas, la información reconstruida en un nivel puede utilizarse como señal disponible para estimar perturbaciones (Jemmali y Mouftah, 2022), fallas en actuadores (Wang *y col.*, 2021; Pan *y col.*, 2021) o variables correspondientes a otro subsistema. Esta última idea resulta especialmente pertinente cuando el modelo del vehículo se divide en componentes cinemáticos y dinámicos acoplados.

En esta tesis se adopta una arquitectura de observación acoplada. El primer nivel se orienta a la estimación de las variables cinemáticas X , Y y ψ a partir de mediciones de posición. Posteriormente, la información obtenida se utiliza para proporcionar una señal relacionada con la velocidad angular de orientación r , requerida por el observador dinámico encargado de reconstruir v_x , v_y y r . Esta organización permite integrar la estimación de estados con el esquema de control para seguimiento de trayectoria.

1.3.4. Enfoque Takagi–Sugeno en Vehículos Autónomos Terrestres

Los modelos Takagi–Sugeno (T-S) permiten representar sistemas no lineales mediante la interpolación ponderada de modelos lineales locales. Esta formulación facilita el análisis de estabilidad y el diseño de observadores mediante herramientas matriciales, incluyendo desigualdades matriciales lineales (LMI). La exactitud de la representación depende de la selección de las variables premisas y del dominio de operación considerado.

En el área de AGV, el enfoque T-S se ha empleado para estimar variables internas relacionadas con la dinámica lateral. En Nguyen *y col.* (2021b) se diseñan observadores considerando variables premisas no medibles, mientras que en Pan *y col.* (2021) se propone una estructura que evita la dependencia explícita respecto a dichas variables. Ambos enfoques atienden la reconstrucción de estados que no se encuentran disponibles mediante medición directa.

El enfoque T-S también se ha utilizado en estrategias de control y diagnóstico. En Kong *y col.* (2021) se presenta un controlador difuso orientado al seguimiento ante perturbaciones externas. Por su parte, Wang *y col.* (2021) abordan fallas en actuadores mediante una formulación H^∞ basada en una estructura T-S extendida. En escenarios con acceso limitado a señales de posicionamiento, Hu *y col.* (2021) emplean compensación paralela distribuida (PDC) y retroalimentación no lineal a partir de información visual.

También se han desarrollado arquitecturas que integran observadores y controladores dentro de una representación T-S. En Jemmali y Mouftah (2022) se combinan observadores tipo Luenberger dentro de una estructura T-S-PDC para atender perturbaciones externas, como viento lateral. Por otra parte, Cai *y col.* (2024) proponen un esquema adaptativo orientado a escenarios con restricciones de comunicación, incluyendo retrasos y limitaciones en el ancho de banda.

A partir de la literatura revisada, el enfoque T-S constituye una alternativa para el diseño de observadores aplicados a sistemas vehiculares no lineales. En esta tesis, su utilización se concentra en la estimación de estados, mientras que el esquema de control se desarrolla directamente a partir de las dinámicas no lineales del AGV. Esta separación permite conservar la interpretación física del modelo durante el diseño del controlador y emplear herramientas matriciales para establecer las condiciones de convergencia de los observadores.

1.3.5. Síntesis del estado del arte

La revisión de los modelos matemáticos empleados para representar Vehículos Autónomos Terrestres muestra que su selección depende del objetivo de análisis y de las condiciones de operación consideradas. Los modelos cinemáticos permiten describir el desplazamiento global mediante relaciones geométricas entre velocidad y orientación, mientras que los modelos dinámicos incorporan fuerzas, masa, inercia y efectos relacionados con la interacción neumático–superficie. Cuando se requiere analizar cómo las acciones físicas aplicadas al vehículo influyen sobre su trayectoria, resulta pertinente emplear una representación acoplada que relacione las velocidades internas v_x , v_y y r con las variables globales X , Y y ψ .

La estructura del controlador también se encuentra condicionada por el modelo matemático y las hipótesis adoptadas. Una parte de los trabajos se concentra en el control de dirección bajo la suposición de velocidad longitudinal constante, utilizando variables como el error lateral, el error de orientación y la curvatura de la trayectoria. Otros enfoques incorporan la dinámica longitudinal y dividen el problema en subsistemas relacionados mediante referencias internas o variables compartidas. Esta organización se observa en arquitecturas jerárquicas donde un nivel cinemático genera referencias para un controlador dinámico encargado de calcular las acciones físicas de tracción y dirección (Alcala *y col.*, 2018; Alcalá *y col.*, 2019).

El diseño de controladores para AGV puede requerir información de variables internas que no siempre se encuentra disponible mediante medición directa. Por esta razón, se han desarrollado observadores orientados a reconstruir velocidades locales, orientación, ángulo de deslizamiento lateral, perturbaciones externas y fallas en actuadores. Algunas propuestas organizan la estimación en niveles o estructuras en cascada, utilizando la información reconstruida en un subsistema como señal disponible para estimar variables relacionadas con otro componente del modelo (Jemmali *y Mouftah*, 2022; Wang *y col.*, 2021; Cai *y col.*, 2024).

El enfoque Takagi–Sugeno constituye una alternativa para representar dinámicas no lineales mediante la interpolación ponderada de modelos lineales locales. Esta formulación permite establecer condiciones de convergencia para observadores mediante herramientas matriciales y desigualdades matriciales lineales. En aplicaciones vehiculares, se han estudiado estructuras con variables premisas medibles y no medibles, así como observadores orientados a estimación de estados, per-

turbaciones y detección de fallas (Nguyen *y col.*, 2021b; Pan *y col.*, 2021; Wang *y col.*, 2021).

A partir de esta revisión, en la presente tesis se propone una arquitectura de estimación y control para seguimiento de trayectoria basada en el acoplamiento dinámico–cinemático del AGV. El esquema considera un nivel de observación cinemático para reconstruir X , Y y ψ a partir de mediciones de posición, así como un nivel dinámico encargado de estimar v_x , v_y y r . La información estimada se integra con controladores no lineales que generan la fuerza de tracción y el ángulo de dirección requeridos para el seguimiento de una trayectoria de referencia. Dentro de esta arquitectura, el enfoque T-S se emplea para el diseño de los observadores, mientras que el controlador se formula directamente a partir de las dinámicas no lineales del vehículo.

1.4. Alcances

El presente trabajo se enfoca en el desarrollo de una metodología de modelado, observación y control para el seguimiento de trayectorias de un Vehículo Autónomo Terrestre. El estudio considera un modelo dinámico–cinemático no lineal del AGV, donde el movimiento del vehículo se describe mediante velocidades longitudinal, lateral y angular de orientación, así como mediante su posición y orientación respecto a un marco de referencia global.

El modelo dinámico se formula bajo una representación simplificada tipo bicicleta, en la cual los neumáticos delanteros y traseros se agrupan en elementos equivalentes. Se consideran la fuerza de tracción, el ángulo de dirección y las fuerzas laterales generadas por los neumáticos como elementos principales para describir el comportamiento longitudinal, lateral y rotacional del vehículo. El análisis se realiza sobre una superficie plana, por lo que no se incluyen efectos generados en pendientes, irregularidades del terreno, variaciones de adherencia o cambios en las condiciones de contacto con el suelo.

La investigación se desarrolla en un entorno de simulación numérica. Por tanto, no se considera una implementación experimental en una plataforma física ni la instrumentación real del vehículo. Las leyes de control obtenidas se aplican directamente al modelo no lineal, sin incorporar dinámicas propias de actuadores, retardos de comunicación, saturaciones físicas detalladas, ruido de sensores o incertidumbres paramétricas explícitas.

El alcance del modelo no incluye efectos aerodinámicos, dinámica vertical, balanceo, cabeceo, deformación explícita de los neumáticos, resistencia a la rodadura, fallas en sensores o actuadores, ni fenómenos internos relacionados con la transmisión o el sistema de propulsión. Estos aspectos quedan fuera del estudio para centrar el análisis en el acoplamiento dinámico–cinemático, la estimación de estados y el diseño de controladores para seguimiento de trayectorias.

Asimismo, el trabajo no aborda problemas de percepción, localización, planeación global de rutas, evasión de obstáculos o toma de decisiones. Se asume que la trayectoria de referencia es conocida y que el objetivo principal consiste en diseñar una estrategia de control capaz de seguir dicha trayectoria utilizando la información disponible y las variables estimadas por los observadores.

De esta manera, el alcance de la tesis se delimita al análisis, diseño y validación en simulación de observadores y controladores para un modelo no lineal de AGV, considerando información parcial del sistema y una arquitectura de control basada en observador.

1.5. Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- Un modelo general del Vehículo Autónomo Terrestre, obtenido a partir del acoplamiento entre un modelo dinámico y un modelo cinemático.
- Una representación Takagi–Sugeno–Lipschitz de los modelos considerados, empleada como base para el diseño de observadores en sistemas no lineales.
- Un esquema de estimación de estados basado en observadores proporcionales–integrales, utilizado para reconstruir variables internas del AGV a partir de las señales disponibles.
- Un esquema de control PI no lineal para el seguimiento de trayectorias, organizado en los niveles cinemático y dinámico.
- Una arquitectura de control basada en observadores de estado, en la cual las variables estimadas se integran dentro del lazo de control para realizar el seguimiento de trayectoria.

1.6. Originalidad

La originalidad de este trabajo se encuentra en la integración de una arquitectura de modelado, estimación y control para el seguimiento de trayectorias de un Vehículo Autónomo Terrestre. Aunque existen trabajos previos relacionados con el control de AGV y con el diseño de observadores para sistemas no lineales, en esta tesis se plantea un esquema que acopla un modelo dinámico tipo bicicleta con un modelo cinemático, permitiendo relacionar las entradas físicas del vehículo con la evolución de sus velocidades internas, posición y orientación.

A partir de esta formulación, se desarrolla una representación Takagi–Sugeno–Lipschitz para el diseño de observadores proporcionales–integrales y se propone un esquema de control PI no lineal basado en Lyapunov. La integración de ambos elementos permite construir una arquitectura de control basada en observadores de estado, enfocada en el seguimiento de trayectorias bajo información parcial del sistema. De esta manera, la aportación principal radica en el desarrollo, diseño e implementación de estos elementos dentro de una metodología conjunta de modelado, estimación y control aplicada al AGV.

1.7. Estructura del documento

El presente documento se organiza en seis capítulos, los cuales describen de manera progresiva el desarrollo teórico, metodológico y de simulación de la arquitectura propuesta para el seguimiento de trayectorias de un Vehículo Autónomo Terrestre.

En el Capítulo 1 se presenta la introducción general del trabajo, incluyendo el planteamiento del problema, los alcances, las aportaciones, la originalidad y la estructura del documento. Esta sección permite contextualizar la investigación y delimitar el problema abordado en la tesis.

En el Capítulo 2 se desarrolla el marco teórico necesario para sustentar el trabajo. Se presentan conceptos relacionados con vehículos autónomos terrestres, seguimiento de trayectorias, modelos dinámicos y cinemáticos, observadores de estado, controladores proporcionales–integrales, estabilidad de Lyapunov y representaciones Takagi–Sugeno–Lipschitz. Estos elementos proporcionan la base conceptual para los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 se obtiene el modelo matemático del AGV. Primero se desarrolla el modelo dinámico a partir de una representación tipo bicicleta, considerando las fuerzas de tracción, dirección y fuerzas laterales generadas por los neumáticos. Posteriormente, se presenta el modelo cinemático encargado de describir la evolución de la posición y orientación del vehículo en un marco global. Además, se establece el acoplamiento entre ambos modelos y se obtienen las representaciones Takagi–Sugeno–Lipschitz utilizadas en el diseño de observadores.

En el Capítulo 4 se presenta el diseño de observadores de estado para el sistema considerado. Se desarrollan observadores proporcionales–integrales para estimar variables internas del vehículo a partir de las señales disponibles y de las entradas aplicadas al sistema. Asimismo, se analiza el desempeño de los observadores mediante simulaciones numéricas, evaluando la convergencia de los estados estimados respecto a los estados del modelo.

En el Capítulo 5 se desarrolla la estrategia de control para el seguimiento de trayectorias. Primero se diseña un controlador cinemático PI no lineal encargado de generar referencias dinámicas a partir del error de trayectoria. Posteriormente, se diseña un controlador dinámico PI no lineal para calcular la fuerza de tracción y el ángulo de dirección requeridos por el vehículo. Finalmente, se integran los observadores y controladores dentro de una arquitectura de control basada en observador, la cual se valida mediante simulaciones de seguimiento de trayectoria.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales del trabajo, destacando los resultados obtenidos, las principales aportaciones de la arquitectura desarrollada y las posibles líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Vehículos autónomos

Un vehículo autónomo puede definirse como un sistema móvil capaz de percibir su entorno, procesar información y ejecutar acciones de movimiento sin intervención humana directa. De acuerdo con Özgüner Ümit *y col.* (2011), la autonomía vehicular implica la capacidad de tomar decisiones a partir de la información disponible y de la tarea asignada. Bajo esta perspectiva, un vehículo autónomo no solo realiza desplazamientos, sino que también interpreta su estado, responde a su entorno y genera acciones compatibles con su objetivo de operación.

2.1.1. Clasificación según el medio de operación

Los vehículos autónomos pueden clasificarse de acuerdo con el medio físico en el que operan:

- **Aéreos:** Conocidos comúnmente como Vehículos Aéreos no Tripulados o *UAV* (*Unmanned Aerial Vehicles*), tienen aplicaciones en tareas de monitoreo, inspección, vigilancia y transporte.
- **Acuáticos:** Los Vehículos Acuáticos no Tripulados denominados *UUV* (*Unmanned Underwater Vehicles*), se utilizan en exploración submarina, inspección, logística en ambientes acuáticos y operaciones especializadas.
- **Terrestres:** Los Vehículos Autónomos Terrestres referidos en este trabajo como *AGV* (*Au-*

onomous Ground Vehicles), se desplazan sobre superficies sólidas y tienen aplicaciones en transporte, automatización industrial, logística, agricultura, exploración terrestre y operación en entornos estructurados.

Debido al objetivo de esta tesis, el análisis se centra en esta última clase de vehículos.

2.1.2. Vehículos Autónomos Terrestres

Los AGV forman parte de los sistemas móviles autónomos diseñados para operar sobre el terreno firme. Su funcionamiento requiere integrar mecanismos de locomoción, percepción del entorno, estimación de variables internas y estrategias de control que permitan ejecutar una tarea de desplazamiento. Dependiendo de la aplicación, estos vehículos pueden operar en ambientes estructurados, como almacenes o instalaciones industriales, o en entornos parcialmente estructurados, como zonas agrícolas, caminos urbanos o superficies de prueba.

En problemas de seguimiento de trayectorias, el AGV debe generar acciones de movimiento que permitan reducir la diferencia entre su posición real y una referencia deseada. Para ello, resulta necesario describir su movimiento mediante variables como posición, orientación, velocidades locales y entradas físicas. Estas variables permiten establecer la relación entre el desplazamiento del vehículo y las acciones de control aplicadas.

2.1.3. Configuraciones de locomoción terrestre

Dentro de los AGV existen diferentes mecanismos de locomoción:

- **Orugas:** Suelen operar en terrenos irregulares o de baja adherencia, debido a que distribuyen el peso sobre una mayor superficie de contacto. Esta característica puede mejorar su capacidad de desplazamiento en superficies deformables o accidentadas, aunque incrementa la complejidad mecánica del sistema.
- **Patas:** Pueden adaptarse a terrenos complejos y superar obstáculos que serían difíciles para otras formas de locomoción. Sin embargo, requieren mecanismos articulados y estrategias de control más elaboradas, debido a la necesidad de coordinar los apoyos, mantener estabilidad y planificar la interacción con el terreno.

- **Ruedas:** Son ampliamente utilizados en aplicaciones terrestres de movilidad autónoma, especialmente en entornos industriales, urbanos, agrícolas y de transporte, donde el desplazamiento se realiza sobre superficies relativamente regulares. Por esta razón, su estudio resulta relevante para el desarrollo de estrategias de seguimiento de trayectorias en AGV.

En esta tesis se considera un AGV con locomoción mediante ruedas, enfocando el análisis en la relación entre la posición en el plano, la orientación, las velocidades locales y las entradas físicas de tracción y dirección.

2.1.4. Configuraciones de vehículos con ruedas

Los AGV con ruedas pueden presentar distintas configuraciones de locomoción y dirección, dependiendo del número de ruedas, la ubicación de los actuadores y la forma en que se genera el movimiento. Entre las configuraciones más utilizadas se encuentran la síncrona, la diferencial, la de triciclo clásico y la de cuatro ruedas (Gutiérrez, 2021).

- **Síncrona:** Las ruedas se orientan simultáneamente mediante un sistema de transmisión o acoplamiento común. Esto permite coordinar el desplazamiento del vehículo y modificar su dirección de movimiento de forma simultánea. Sin embargo, puede presentar limitaciones cuando se requiere controlar de manera independiente la orientación del chasis o ejecutar maniobras con alta demanda de movilidad lateral. Un esquema representativo se muestra en la Figura 2.1.
- **Diferencial:** Utiliza dos ruedas motrices accionadas de manera independiente, como se muestra en la Figura 2.2. El cambio de dirección se obtiene mediante la diferencia de velocidades entre ambas ruedas, permitiendo incluso giros sobre su propio eje cuando las ruedas giran con la misma magnitud y en sentidos opuestos. Debido a su estructura simple, esta configuración es común en robots móviles de pequeña y mediana escala.
- **Triciclo clásico:** contiene dos ruedas traseras y una rueda delantera encargada de la dirección. Su funcionamiento permite generar movimiento longitudinal y cambios de orientación mediante un mecanismo de dirección relativamente simple. Por ello, puede emplearse en aplicaciones de baja complejidad mecánica o en ambientes controlados. La Figura 2.3 presenta una representación de esta configuración.

- **Cuatro ruedas:** Ampliamente utilizada en vehículos terrestres debido a su similitud con la estructura de automóviles convencionales. En este tipo de vehículo, las ruedas delanteras suelen modificar la dirección, mientras que la tracción puede aplicarse en el eje delantero, trasero o en ambos. Una representación de esta configuración se muestra en la Figura 2.4. Su relevancia en el modelado vehicular se debe a que permite representar de manera aproximada, bajo escenarios restringidos y controlados, el comportamiento de un vehículo real mediante modelos simplificados, como el modelo tipo bicicleta.

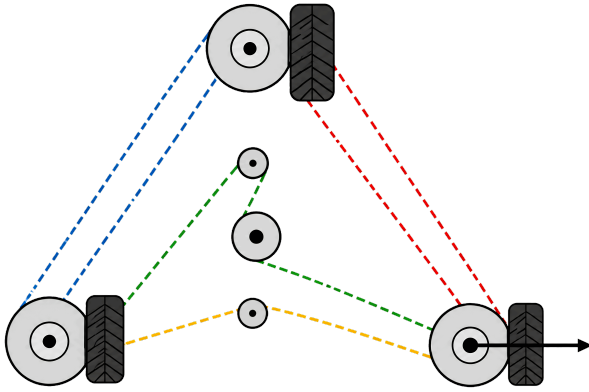


Fig. 2.1. Configuración síncrona.

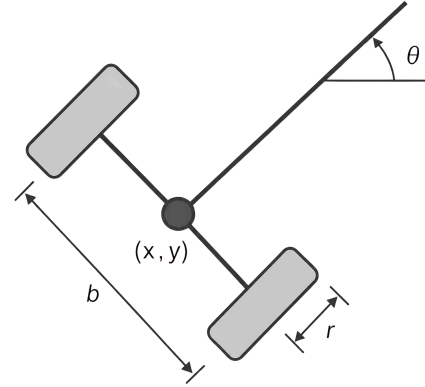


Fig. 2.2. Configuración diferencial.

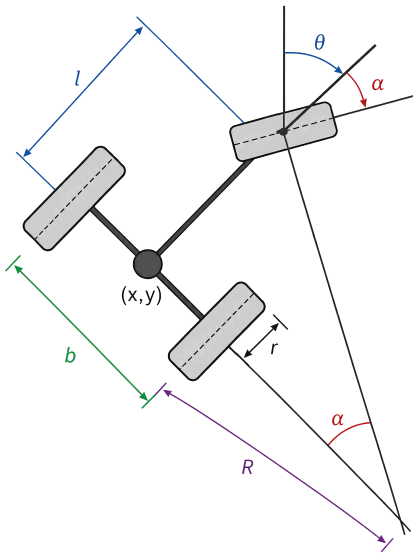


Fig. 2.3. Configuración de triciclo.

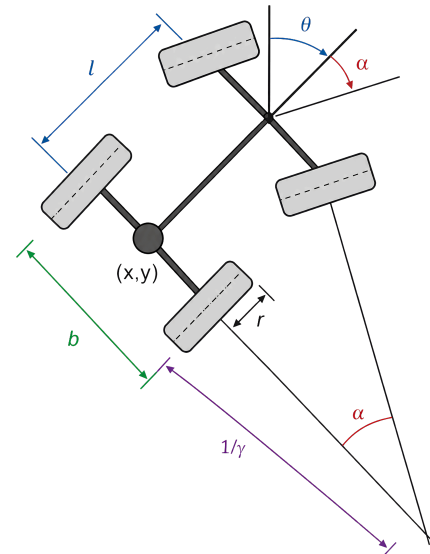


Fig. 2.4. Configuración de cuatro ruedas.

En este trabajo se utiliza una representación tipo bicicleta, en la cual los neumáticos delanteros y traseros se agrupan en elementos equivalentes. Esta simplificación permite conservar los efectos principales del movimiento longitudinal, lateral y rotacional del AGV, reduciendo la complejidad de la descripción sin perder la relación entre las entradas físicas, las velocidades locales y la evolución de la posición del vehículo.

2.2. Fundamentos de modelado vehicular

El análisis del movimiento de un Vehículo Autónomo Terrestre requiere definir con claridad los sistemas de referencia utilizados para describir sus variables. En el caso de un vehículo con ruedas con enfoque al seguimiento de trayectorias, puede analizarse a partir de sus velocidades de desplazamiento y orientación. Esto permite estudiar su comportamiento desde enfoques cinemático y dinámico. Cada uno representa una aproximación distinta, con un grado de complejidad que depende de las variables físicas que se consideren o se desprecien. En la sección correspondiente al estado del arte se describen los modelos reportados en la literatura bajo estas perspectivas, mientras que en la sección de avances se presenta la deducción de los modelos seleccionados.

Cabe destacar que cada tipo de modelo requiere de un sistema de coordenadas apropiado para representar adecuadamente las magnitudes físicas involucradas. En la formulación del modelo matemático de un AGV, es necesario tener en cuenta tanto las fuerzas aplicadas como las aceleraciones y velocidades que determinan su desplazamiento.

Por esta razón, se diferencia entre un marco local, que describe el comportamiento del vehículo con respecto a su propio sistema de referencia, y un marco global, que permite representar su ubicación dentro de un entorno fijo. Esta distinción es importante para el problema de seguimiento de trayectorias, ya que la referencia deseada se define usualmente en coordenadas globales, mientras que las entradas físicas del vehículo modifican su comportamiento a través de variables locales.

Marco local del vehículo

El marco local se define con origen en el centro de gravedad del vehículo y se desplaza junto con este. En dicho sistema, el eje x local se relaciona directamente con la dirección longitudinal del

AGV, mientras que el eje y local representa la dirección lateral. Este marco permite describir el movimiento interno a través de tres velocidades principales: la velocidad longitudinal $v_x(t)$ corresponde al avance o retroceso del vehículo y se considera positiva en dirección hacia adelante; la velocidad lateral $v_y(t)$ representa el desplazamiento hacia los lados normalmente generado en curvas y se considera positiva cuando se mueve hacia la derecha; la velocidad angular de orientación $r(t)$ representa la tasa de cambio de la orientación del AGV alrededor del eje vertical.

La Figura 2.5 muestra una representación del marco local utilizado para describir las velocidades del AGV respecto a su propio sistema de referencia.

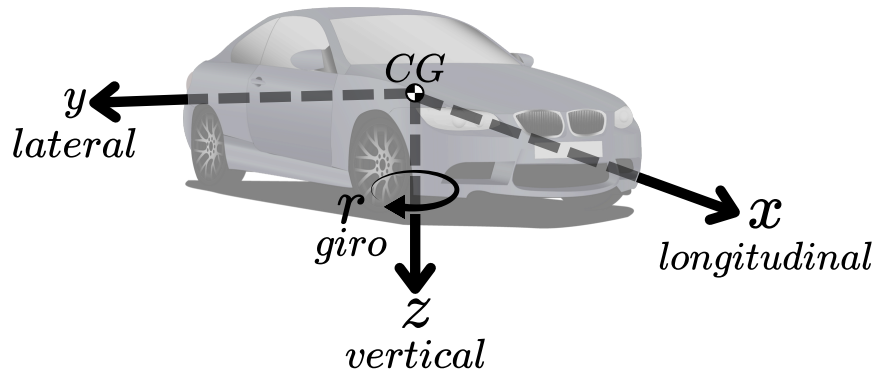


Fig. 2.5. Marco local de un AGV.

Marco global del entorno

Si bien el sistema de coordenadas local permite analizar el comportamiento dinámico del AGV en función de las fuerzas internas, no proporciona información sobre su ubicación absoluta en el entorno. Para ello, se introduce un sistema de coordenadas global, con ejes fijos X y Y (con $Z(t) = 0$ debido a que el AGV se mantiene en un terreno plano) y una orientación respecto al marco global denotada mediante el ángulo $\psi(t)$, que permiten referenciar la posición del vehículo dentro de un espacio definido. La Figura 2.6 muestra la relación entre ambos marcos de referencia.

La orientación $\psi(t)$ relaciona el marco local del vehículo con el marco global del entorno estableciendo la relación entre la dinámica local y el desplazamiento global. La velocidad angular $r(t)$, definida en el marco local, corresponde a la derivada temporal de dicha orientación, por lo que se

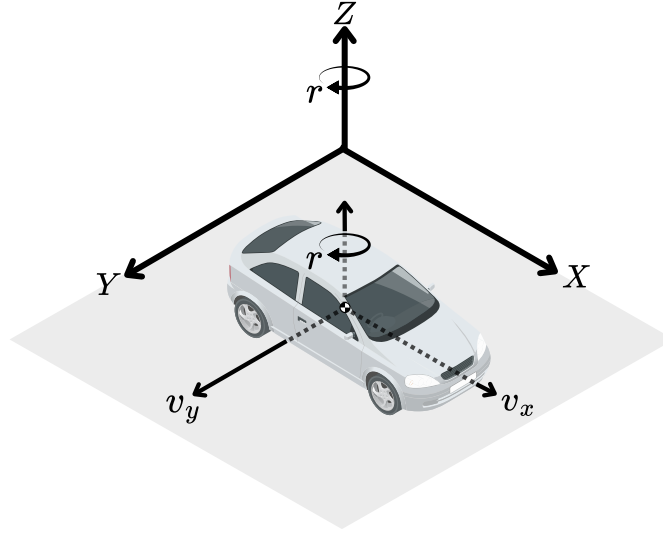


Fig. 2.6. Marco global de un AGV.

cumple

$$\dot{\psi}(t) = r(t). \quad (2.1)$$

Desde esta perspectiva, las coordenadas x y y del sistema local varían en el marco global conforme el AGV se desplaza, y deben transformarse a coordenadas globales para describir su posición absoluta. Esta dualidad entre coordenadas locales y globales es fundamental tanto para el modelado como para el diseño de estrategias de control, en especial aquellas orientadas al seguimiento de trayectorias.

2.2.1. Esquema representativo del AGV

La Figura 2.7 muestra un esquema representativo de un AGV de cuatro ruedas desde una vista superior, considerando su movimiento sobre un terreno plano. El vehículo se estructura a partir de un eje longitudinal central y dos ejes transversales, delantero y trasero, sobre los cuales se ubican los neumáticos. En esta representación se incluyen tanto el marco global como el marco local, lo que permite describir el movimiento del vehículo desde su propia perspectiva y, al mismo tiempo, relacionarlo con el entorno de desplazamiento.

En el esquema completo, cada neumático se denota como R_i , con $i = 1, 2, 3, 4$. Sobre cada neumático pueden actuar fuerzas longitudinales F_{ix} y laterales F_{iy} , definidas con respecto al propio

neumático. Por esta razón, dichas fuerzas deben proyectarse posteriormente sobre los ejes longitudinal y lateral del vehículo durante el desarrollo del modelo matemático.

Las ruedas delanteras se relacionan con el ángulo de dirección δ , mientras que la fuerza de tracción se denota mediante T . Las distancias desde el centro de gravedad hacia los ejes delantero y trasero se representan como l_d y l_t , respectivamente. Asimismo, se identifican las velocidades locales v_x y v_y , la velocidad angular de orientación r , el ángulo de orientación ψ , el ángulo de curso ν y el ángulo de deslizamiento lateral del vehículo β .

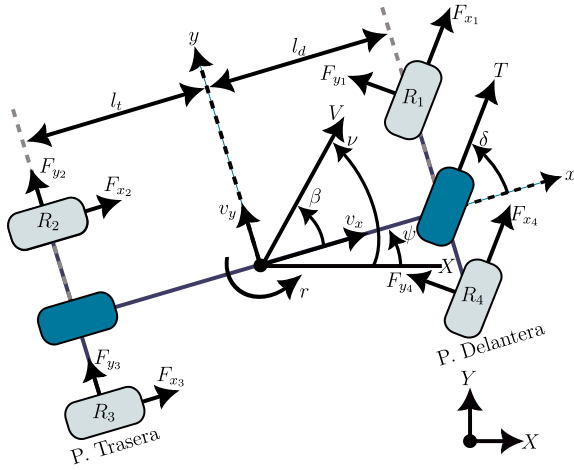


Fig. 2.7. Esquema representativo de un AGV de cuatro ruedas.

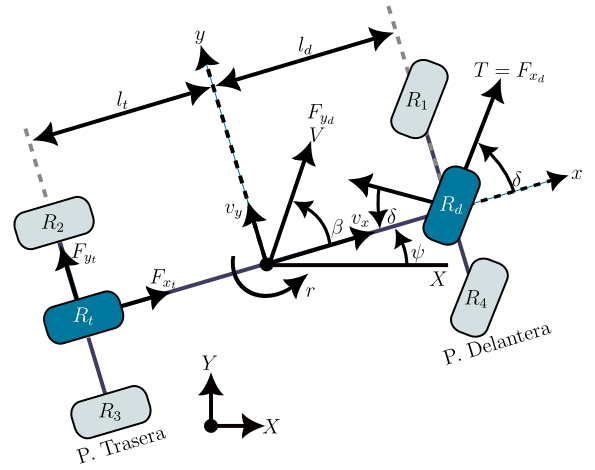


Fig. 2.8. Esquema simplificado tipo bicicleta del AGV.

Aunque la representación de cuatro ruedas permite describir con mayor detalle las interacciones presentes en cada neumático, su uso puede incrementar considerablemente la complejidad del modelo dinámico, debido a que requiere considerar de forma individual las fuerzas generadas en cada punto de contacto. Por esta razón, en este trabajo se adopta una representación simplificada tipo bicicleta, en la cual las ruedas delanteras se agrupan en un neumático equivalente R_d y las ruedas traseras en un neumático equivalente R_t , como se muestra en la Figura 2.8.

En el modelo simplificado, la fuerza de tracción se considera aplicada en el eje delantero y se denota como $T = F_{x_d}$. Las fuerzas laterales equivalentes se representan mediante F_{y_d} y F_{y_t} , mientras que las componentes longitudinales se indican mediante F_{x_d} y F_{x_t} . Esta representación conserva las variables principales necesarias para analizar el movimiento longitudinal, lateral y rotacional del AGV, reduciendo la complejidad de la formulación respecto al esquema completo de cuatro

ruedas. En esta tesis, dicha aproximación se considera dentro de un intervalo de operación con velocidades moderadas, menores a 5 m/s, ya que a velocidades mayores las diferencias respecto al comportamiento real pueden incrementarse.

Finalmente, el ángulo de orientación ψ describe la orientación del eje longitudinal del vehículo respecto al marco global, mientras que el ángulo de curso ν describe la dirección instantánea de la velocidad resultante V . La diferencia entre ambos permite definir el ángulo de deslizamiento lateral del vehículo, denotado como β , el cual queda determinado por la relación entre las componentes de velocidad v_x y v_y . Estas variables serán utilizadas posteriormente para establecer la relación entre el movimiento del AGV, las referencias de seguimiento y las acciones de control.

2.3. Sistemas Takagi–Sugeno

Un sistema dinámico no lineal puede expresarse de manera general como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathcal{F}(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ el vector de entradas y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la salida del sistema. La función $\mathcal{F}(\cdot)$ contiene la dinámica no lineal del sistema, la cual puede incluir productos entre variables, funciones trigonométricas u otras expresiones que dificultan la aplicación directa de herramientas lineales de análisis y diseño.

Una forma de tratar este tipo de sistemas consiste en obtener representaciones lineales mediante diferentes métodos, como la incorporación de suposiciones físicas, la simplificación de términos no lineales o la linealización alrededor de puntos de operación. Una técnica común es la linealización mediante series de Taylor, la cual permite obtener un modelo lineal válido en una vecindad del punto de linealización.

No obstante, estas representaciones pueden perder precisión cuando el sistema opera fuera de las condiciones consideradas. Esto ocurre, por ejemplo, durante la respuesta transitoria, cuando las no linealidades despreciadas no son suficientemente pequeñas, cuando el sistema se aleja del punto de operación o cuando la dinámica presenta variaciones importantes. Por esta razón, resulta conveniente utilizar representaciones capaces de conservar la influencia de las no linealidades dentro de un dominio de operación acotado.

Como alternativa, el enfoque Takagi–Sugeno (T-S) permite representar un sistema no lineal mediante la interpolación ponderada de modelos lineales locales. Tomando como base la estructura presentada por Lendek *y col.* (2010) y adaptándola a una forma Takagi–Sugeno–Lipschitz, una representación continua puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i f(x(t))), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $F_i \in \mathbb{R}^{n \times o}$ son matrices correspondientes al i -ésimo modelo local. El término $f(x(t)) \in \mathbb{R}^o$ representa la parte no lineal del sistema que satisface una condición de Lipschitz en el dominio de operación considerado. Además, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ es la matriz de salida, M es el número total de modelos locales y $\mu_i(z(t))$ son las funciones de pertenencia normalizadas.

Las funciones de pertenencia dependen del vector de las variables premisas $z(t)$, el cual puede estar formado por estados, entradas, salidas medidas o señales exógenas. Para garantizar una interpolación convexa entre los modelos locales, dichas funciones deben satisfacer

$$0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) = 1.\tag{2.4}$$

2.3.1. Construcción de modelos Takagi–Sugeno

La construcción de modelos Takagi–Sugeno puede realizarse mediante diferentes enfoques. Dos de los procedimientos más utilizados son el sector lineal y el sector no lineal (Lendek *y col.*, 2010). Ambos buscan obtener una representación multimodelo del sistema, pero difieren en la forma en que se generan los modelos locales y las funciones de pertenencia.

Sector lineal

El enfoque de sector lineal se basa en la linealización local del sistema alrededor de distintos puntos de operación, los cuales pueden corresponder o no a puntos de equilibrio. Generalmente, esta linealización se obtiene mediante una expansión en series de Taylor, generando modelos lineales válidos en una vecindad del punto considerado.

Una ventaja de este enfoque es que los modelos locales pueden conservar ciertas propiedades del sistema no lineal alrededor de los puntos de linealización. Por ejemplo, si el sistema es localmente observable en una región determinada, el modelo lineal obtenido en dicha región puede conservar esa propiedad. No obstante, la selección del número y ubicación de los puntos de linealización depende del comportamiento del sistema. Por esta razón, en sistemas con variaciones dinámicas significativas puede requerirse un número elevado de modelos locales para obtener una aproximación adecuada.

Sector no lineal

El enfoque de sector no lineal permite construir una representación Takagi–Sugeno a partir de términos no lineales acotados dentro de un dominio compacto. A diferencia de la linealización local, este método no se basa en aproximar el sistema alrededor de puntos de operación, sino en expresar las no linealidades como combinaciones convexas de sus valores extremos.

Esta estrategia puede generar una representación exacta del sistema dentro del dominio considerado, siempre que las no linealidades seleccionadas estén adecuadamente acotadas. Sin embargo, presenta dos aspectos importantes a considerar. Primero, las propiedades de los modelos locales, como estabilidad u observabilidad, no necesariamente se conservan de forma directa respecto al sistema no lineal original. Segundo, el número de modelos locales crece de manera exponencial con el número de variables premisas, lo que puede incrementar la complejidad del análisis y del diseño.

En el enfoque de sector no lineal, cada variable premisa $z_k(t)$ se considera acotada en un dominio compacto,

$$z_k(t) \in [\underline{z}_k, \bar{z}_k], \quad k = 1, 2, \dots, n_z, \quad (2.5)$$

donde n_z representa el número de variables premisas. A partir de los extremos de cada intervalo se definen las funciones de ponderación

$$\lambda_0^k(z_k(t)) = \frac{\bar{z}_k - z_k(t)}{\bar{z}_k - \underline{z}_k}, \quad \lambda_1^k(z_k(t)) = 1 - \lambda_0^k(z_k(t)). \quad (2.6)$$

Estas funciones satisfacen

$$0 \leq \lambda_0^k(z_k(t)) \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_1^k(z_k(t)) \leq 1, \quad \lambda_0^k(z_k(t)) + \lambda_1^k(z_k(t)) = 1. \quad (2.7)$$

Las funciones de pertenencia de cada modelo local se construyen como el producto de las ponderaciones asociadas a cada variable premisa:

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{k=1}^{n_z} \lambda_{j_k}^k(z_k(t)), \quad j_k \in \{0, 1\}. \quad (2.8)$$

Cada combinación de los índices j_k define una regla del sistema T-S, por lo que el número total de modelos locales queda dado por

$$M = 2^{n_z}. \quad (2.9)$$

De esta manera, el enfoque Takagi–Sugeno permite representar la dinámica no lineal dentro de un dominio acotado mediante una combinación convexa de modelos locales. Esta estructura resulta útil para el diseño de observadores y controladores, ya que conserva una formulación en espacio de estados y permite establecer condiciones de estabilidad mediante herramientas matriciales.

2.4. Observadores de estado

Un observador de estado es una estructura dinámica utilizada para reconstruir las variables internas de un sistema a partir de sus entradas conocidas y salidas medidas. Esta herramienta resulta útil cuando algunas variables no están disponibles de forma directa debido a restricciones de instrumentación, costo, ruido de medición o complejidad de integración. En estos casos, el observador permite generar estimaciones que pueden utilizarse en tareas de monitoreo, diagnóstico y retroalimentación en esquemas de control.

De acuerdo con la cantidad de variables que se estiman, los observadores pueden clasificarse según su orden:

- **Observador de orden completo:** estima todas las variables del vector de estado, aun cuando algunas de ellas puedan estar disponibles mediante medición directa.
- **Observador de orden reducido:** estima únicamente las variables de estado que no se encuentran disponibles para medición directa, utilizando las variables medidas como información conocida del sistema.
- **Observador de orden mínimo:** corresponde a la estructura de menor dimensión posible para reconstruir los estados no medidos. En sistemas lineales con salidas independientes,

su dimensión puede asociarse con la diferencia entre la dimensión del vector de estado y la dimensión del vector de salida.

Para determinar si la información disponible permite reconstruir los estados del sistema, es necesario analizar la propiedad de observabilidad. En sistemas lineales, esta propiedad se estudia mediante la matriz clásica de observabilidad. En sistemas no lineales, la observabilidad puede interpretarse como la capacidad de distinguir trayectorias generadas por condiciones iniciales distintas a partir de las mismas entradas y salidas medidas, lo cual puede analizarse mediante herramientas diferenciales como los operadores de Lie Isidori (1995).

Para sistemas no lineales existen distintas estructuras de observación, entre ellas observadores de alta ganancia, observadores por modos deslizantes, observadores adaptativos, observadores de entrada desconocida y observadores basados en modelos Takagi–Sugeno Han (2021). La selección de una estructura particular depende de la forma del modelo, de las señales disponibles y del objetivo de estimación. En esta tesis, el interés se centra en observadores para sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz, debido a su compatibilidad con la representación no lineal del modelo del AGV.

2.4.1. Variables premisas medibles y no medibles

En los sistemas Takagi–Sugeno, las funciones de pertenencia dependen del vector de variables premisas $z(t)$. Estas variables determinan la contribución de cada modelo local dentro de la interpolación convexa. Cuando las variables premisas están disponibles mediante medición directa, las funciones $\mu_i(z(t))$ pueden calcularse con la misma información tanto en el sistema como en el observador. En este caso, el modelo real y el observador utilizan las mismas ponderaciones para combinar los modelos locales.

Sin embargo, en muchos sistemas no lineales las variables premisas dependen de estados internos que no se encuentran disponibles para medición directa. En esta situación, el observador debe evaluar las funciones de pertenencia utilizando variables estimadas. Por lo tanto, mientras el sistema real depende de $\mu_i(z(t))$, el observador utiliza funciones evaluadas en $\hat{z}(t)$, es decir, las funciones de pertenencia que utiliza el observador quedan evaluadas como $\mu_i(\hat{z}(t))$.

En general, cuando las variables premisas no son medibles directamente, se cumple

$$\mu_i(z(t)) \neq \mu_i(\hat{z}(t)). \quad (2.10)$$

Esta diferencia implica que el sistema y el observador no son ponderados exactamente por las mismas funciones de pertenencia. Como consecuencia, aparecen términos adicionales en la dinámica del error de estimación, generados por la diferencia entre las funciones $\mu_i(z(t))$ y $\mu_i(\hat{z}(t))$. En sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz, este efecto se combina además con la diferencia entre los términos no lineales evaluados en $x(t)$ y $\hat{x}(t)$.

Para representar este efecto de manera general, considérese un subsistema genérico ℓ , donde $\ell \in \{d, c\}$ permite distinguir entre el modelo dinámico y el modelo cinemático. Las funciones de pertenencia reales y estimadas se definen como

$$\mu_{\ell_i}(t) = \mu_{\ell_i}(z_{\ell}(t)), \quad \hat{\mu}_{\ell_i}(t) = \mu_{\ell_i}(\hat{z}_{\ell}(t)). \quad (2.11)$$

Cuando las variables premisas del subsistema ℓ dependen de estados no medidos, la diferencia entre $\mu_{\ell_i}(t)$ y $\hat{\mu}_{\ell_i}(t)$ debe considerarse dentro del análisis del observador. Este efecto puede agruparse en un término aumentado $\Delta_{P_{\ell}}(t)$, el cual representa la incertidumbre inducida por el uso de funciones de pertenencia estimadas en lugar de las funciones reales.

Bajo la hipótesis de que las funciones de pertenencia son continuas, las entradas permanecen acotadas y las trayectorias evolucionan dentro de un dominio compacto de operación, se puede suponer que existe una constante $\mu_{P_{\ell}} > 0$ tal que

$$\|\Delta_{P_{\ell}}(t)\| \leq \mu_{P_{\ell}} \|w_{\ell}(t)\|, \quad (2.12)$$

donde $w_{\ell}(t)$ representa el error aumentado del observador del subsistema ℓ .

La desigualdad (2.12) permite acotar el efecto de las variables premisas no medibles mediante una constante dependiente del dominio de operación. Siguiendo el tratamiento de sistemas Takagi–Sugeno con variables premisas no medibles presentado en Lendek *y col.* (2010), este efecto puede incorporarse en el análisis mediante condiciones matriciales lineales.

Para ello, se introduce una matriz simétrica $Q_{P_{\ell}} = Q_{P_{\ell}}^T > 0$, la cual debe satisfacer

$$\begin{bmatrix} Q_{P_{\ell}} - \mu_{P_{\ell}}^2 I_{n_{\ell}+p_{\ell}} & X_{\ell}^T \\ X_{\ell} & I_{n_{\ell}+p_{\ell}} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.13)$$

Aplicando el complemento de Schur a (2.13), se obtiene la condición equivalente

$$X_\ell^T X_\ell + \mu_{P_\ell}^2 I_{n_\ell+p_\ell} < Q_{P_\ell}. \quad (2.14)$$

La condición (2.14) permite incluir el efecto de las funciones de pertenencia no medibles dentro de una cota matricial útil para el análisis de estabilidad del error de estimación. Para este trabajo, dicha consideración es relevante debido a que algunas variables premisas dependen de estados que deben ser estimados. Por ello, los observadores se formulan utilizando funciones de pertenencia evaluadas con variables estimadas, permitiendo abordar el diseño de observadores Takagi–Sugeno–Lipschitz bajo información parcial del sistema.

2.4.2. Observadores Takagi–Sugeno–Lipschitz con acciones proporcional e integral

Retomando la representación Takagi–Sugeno–Lipschitz (2.3), definida en la Sección 2.3, se considera un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i f(x(t))), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es la salida medida y $f(x(t)) \in \mathbb{R}^o$ representa un término no lineal con propiedad Lipschitz en el dominio de operación considerado. Las matrices A_i , B_i y F_i corresponden al i -ésimo modelo local, mientras que $\mu_i(z(t))$ son funciones de pertenencia normalizadas dependientes del vector de variables premisas $z(t)$.

Una estructura básica de observador para este tipo de sistemas puede formularse a partir del observador tipo Luenberger, incorporando una corrección proporcional al error de salida. Para ello, se define el error de salida como

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t),$$

donde $\hat{x}(t)$ es el vector de estados estimados y $\hat{y}(t)$ es la salida estimada.

Con base en esta señal, un **observador proporcional Takagi–Sugeno–Lipschitz** puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + F_i f(\hat{x}(t)) + L_i e_y(t)), \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t),\end{aligned}$$

donde L_i corresponde a las matrices de ganancia proporcional del observador. Esta estructura utiliza el error entre la salida medida y la salida estimada para corregir la dinámica de estimación.

Cuando se requiere incorporar información acumulada del error de salida, puede agregarse una acción integral. Para ello, se introduce una variable auxiliar $\eta(t) \in \mathbb{R}^q$, cuya dinámica está dada por

$$\dot{\eta}(t) = e_y(t).$$

De esta forma, un **observador proporcional–integral Takagi–Sugeno–Lipschitz** puede expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + F_i f(\hat{x}(t)) + L_i e_y(t) + G_i \eta(t)), \\ \dot{\eta}(t) &= e_y(t), \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t),\end{aligned}$$

donde G_i son las matrices de ganancia integral. La incorporación de $\eta(t)$ permite considerar el efecto acumulado del error de salida dentro de la dinámica del observador, lo cual puede mejorar el comportamiento de la estimación cuando existen errores persistentes o discrepancias sostenidas entre la salida medida y la salida estimada.

En este tipo de estructuras, las funciones de pertenencia del observador se evalúan mediante $\hat{z}(t)$, debido a que algunas variables premisas pueden depender de estados no medidos. Por esta razón, en general se tiene

$$\mu_i(z(t)) \neq \mu_i(\hat{z}(t)),$$

lo cual debe considerarse en la dinámica del error de estimación.

Para garantizar la convergencia del observador, no es suficiente proponer la estructura de estimación; también es necesario seleccionar las ganancias L_i y G_i de manera que la dinámica del error

sea estable. Definiendo el error de estimación como

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t),$$

el objetivo del observador consiste en asegurar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0.$$

Por ello, el diseño de las ganancias debe realizarse a partir del análisis de estabilidad de la dinámica del error de estimación. En sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz, dicho análisis puede formularse mediante funciones de Lyapunov y condiciones matriciales que permitan garantizar la convergencia del estado estimado hacia el estado real dentro del dominio de operación considerado.

2.4.3. Observador dinámico generalizado y estructuras particulares

El observador dinámico generalizado constituye una estructura amplia para la estimación de estados, ya que incorpora variables internas auxiliares y matrices de diseño adicionales. Esta formulación permite aumentar los grados de libertad del observador y obtener diferentes estructuras de estimación mediante selecciones particulares de sus matrices (Zetina, 2024).

En el caso de sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz, el observador dinámico generalizado puede adaptarse considerando funciones de pertenencia evaluadas con variables premisas estimadas. De esta forma, para el sistema descrito en (2.3), una estructura general puede expresarse como

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + E_i y(t) + J_i u(t) + T_i F_i f(\hat{x}(t))), \quad (2.15)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (S_i \zeta(t) + R_i v(t) + M_i y(t)), \quad (2.16)$$

$$\hat{x}(t) = P \zeta(t) + Q y(t), \quad (2.17)$$

donde $\zeta(t)$ representa el estado interno del observador, $v(t)$ es una variable auxiliar, $\hat{x}(t)$ es el vector de estados estimados y N_i , H_i , E_i , J_i , S_i , R_i , M_i , T_i , P y Q son matrices de diseño con dimensiones compatibles.

En esta formulación, la variable $\zeta(t)$ contiene la dinámica principal del observador, mientras que $v(t)$ permite incorporar dinámicas auxiliares adicionales. Dependiendo de la forma asignada a esta

variable auxiliar, el observador dinámico generalizado puede reducirse a estructuras particulares, entre ellas el observador proporcional generalizado y el observador proporcional–integral generalizado.

Observador proporcional generalizado

El observador proporcional generalizado se obtiene al eliminar la dinámica auxiliar $v(t)$ de la estructura general (2.15). En este caso, la corrección de la estimación se realiza mediante la información de la salida medida y las matrices de diseño asociadas al observador. Para sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz, esta estructura puede escribirse como

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (N_i \zeta(t) + E_i y(t) + J_i u(t) + T_i F_i f(\hat{x}(t))), \quad (2.18)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t). \quad (2.19)$$

Esta estructura puede interpretarse como una variante generalizada del observador con acción proporcional, ya que la estimación se corrige a partir de la información instantánea contenida en la salida medida. A diferencia de una forma tipo Luenberger directa, el estado estimado no se obtiene únicamente de una dinámica en $\hat{x}(t)$, sino mediante la relación algebraica $\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t)$, lo que proporciona mayor flexibilidad en el diseño.

Observador proporcional–integral generalizado

El observador proporcional–integral generalizado conserva una variable auxiliar ligada al error de salida. Esta variable permite incorporar información acumulada de la diferencia entre la salida medida y la salida estimada, lo cual resulta útil cuando se busca mejorar el comportamiento de la estimación ante discrepancias persistentes.

Definiendo el error de salida como

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad (2.20)$$

la acción integral puede introducirse mediante

$$\dot{v}(t) = e_y(t). \quad (2.21)$$

Con esta elección, el observador proporcional–integral generalizado para sistemas Takagi–Sugeno–Lipschitz puede expresarse como

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{z}(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + E_i y(t) + J_i u(t) + T_i F_i f(\hat{x}(t))), \quad (2.22)$$

$$\dot{v}(t) = e_y(t), \quad (2.23)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t). \quad (2.24)$$

En esta estructura, $v(t)$ representa la integral del error de salida, mientras que H_i determina la forma en que dicha acción integral modifica la dinámica interna del observador. Por ello, esta formulación puede considerarse una extensión del observador proporcional generalizado, al incorporar una dinámica adicional que representa el error acumulado.

De esta manera, el observador proporcional generalizado y el observador proporcional–integral generalizado pueden interpretarse como casos particulares del observador dinámico generalizado. En esta tesis se emplea una estructura proporcional–integral generalizada, debido a que permite incorporar una acción integral del error de salida y resulta compatible con el análisis de convergencia mediante funciones de Lyapunov y condiciones matriciales.

2.5. Controladores para sistemas no lineales

Un sistema de control puede definirse como un conjunto de componentes interconectados cuyo objetivo es modificar el comportamiento de un sistema dinámico para alcanzar una respuesta deseada. El elemento o proceso que se desea controlar se denomina planta, mientras que las señales aplicadas para modificar su comportamiento se conocen como entradas de control o variables manipuladas. Por otro lado, las variables cuya evolución se desea regular o seguir se denominan variables controladas.

De manera general, los sistemas de control pueden clasificarse en esquemas de lazo abierto y de lazo cerrado. En un sistema de lazo abierto, la acción de control se aplica sin utilizar información de la salida real del sistema. Por esta razón, su desempeño depende principalmente de la calibración del controlador y del conocimiento previo de la relación entrada–salida. Este tipo de esquema puede ser adecuado cuando el modelo del sistema es suficientemente preciso y las perturbaciones

son despreciables; sin embargo, su capacidad de corrección ante variaciones internas o externas es limitada.

En contraste, un sistema de control en lazo cerrado utiliza retroalimentación de la salida medida o estimada para comparar el comportamiento real con el comportamiento deseado. La diferencia entre ambas señales define un error de control, el cual es utilizado por el controlador para generar la acción correspondiente. Esta estructura permite corregir desviaciones producidas por perturbaciones, errores de modelado o cambios en las condiciones de operación, por lo que resulta fundamental en sistemas donde se requiere precisión y capacidad de adaptación.

Los objetivos de control pueden formularse principalmente como problemas de regulación o de seguimiento. En un problema de regulación, se busca llevar el sistema hacia un punto de operación o equilibrio deseado. En cambio, en un problema de seguimiento, el objetivo consiste en hacer que los estados o salidas del sistema sigan una referencia variable en el tiempo. Dentro de esta última categoría se encuentra el seguimiento de trayectorias, donde se requiere que la posición y orientación del vehículo evolucionen de acuerdo con una trayectoria definida en el plano.

En sistemas lineales clásicos, la acción de control suele construirse mediante ganancias constantes que multiplican señales de error. No obstante, en sistemas no lineales esta estructura puede ser insuficiente, debido a la presencia de acoplamientos entre variables, términos no lineales, restricciones físicas y dependencias respecto al estado del sistema. Por ello, el diseño de controladores para sistemas no lineales puede requerir leyes de control más generales, donde las entradas se calculan como funciones no lineales de los estados, referencias, errores de seguimiento o variables estimadas.

En el contexto de esta tesis, el problema de control se formula como un problema de seguimiento de trayectorias para un Vehículo Autónomo Terrestre. Las variables manipuladas corresponden a la fuerza de tracción T y al ángulo de dirección δ , mientras que las variables controladas se relacionan con la posición, orientación y velocidades del vehículo. Debido a la estructura no lineal del modelo dinámico–cinemático del AGV, se emplea una arquitectura de control no lineal basada en retroalimentación, estimación de estados y análisis de estabilidad de las dinámicas de error.

2.5.1. Seguimiento de referencias y dinámica del error

Retomando una representación general de un sistema no lineal, considérese

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.25)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas de control. Si $x_r(t)$ representa una referencia deseada, el error de seguimiento se define como

$$e(t) = x_r(t) - x(t). \quad (2.26)$$

El objetivo del controlador es generar una entrada $u(t)$ que permita reducir el error de seguimiento y garantizar su convergencia hacia cero, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (2.27)$$

Para ello, una estrategia común consiste en proponer una dinámica deseada para el error y diseñar la ley de control de manera que la dinámica real del sistema reproduzca dicho comportamiento.

Una elección básica consiste en proponer una dinámica proporcional de la forma

$$\dot{e}(t) = -K_P e(t), \quad (2.28)$$

donde K_P es una matriz de ganancias seleccionada para asegurar la estabilidad de la dinámica del error. Esta expresión establece una evolución deseada en la que el error disminuye conforme transcurre el tiempo, siempre que las ganancias sean elegidas adecuadamente.

No obstante, en presencia de errores persistentes, incertidumbres, perturbaciones o desacoplamientos entre la referencia y la dinámica real del sistema, una acción proporcional puede no ser suficiente para obtener el desempeño deseado. En estos casos, puede incorporarse una variable auxiliar integral que acumule el error de seguimiento y permita modificar la acción de control considerando su comportamiento acumulado.

2.5.2. Acción proporcional–integral

La acción proporcional genera una respuesta de control dependiente del error instantáneo del sistema. Considerando una señal de error $e(t)$, esta acción puede expresarse de manera general

como

$$u_P(t) = K_P e(t), \quad (2.29)$$

donde K_P representa la ganancia proporcional. En este caso, la magnitud de la acción de control depende de la diferencia actual entre la señal deseada y la señal real del sistema.

Por otra parte, la acción integral incorpora el efecto acumulado del error a lo largo del tiempo. Para ello, se define una variable auxiliar

$$\eta(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

cuya dinámica está dada por

$$\dot{\eta}(t) = e(t). \quad (2.31)$$

Esta variable permite considerar errores persistentes que no necesariamente son eliminados mediante una acción proporcional.

La combinación de ambas acciones da lugar a una estructura proporcional-integral, la cual puede escribirse como

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \eta(t), \quad (2.32)$$

donde K_I representa la ganancia integral. En esta expresión, el primer término actúa sobre el error instantáneo, mientras que el segundo incorpora la información acumulada del error.

En sistemas lineales, esta estructura puede aplicarse de forma directa como una ley de control basada en ganancias constantes. Sin embargo, en sistemas no lineales su implementación puede requerir una formulación más general, debido a que la relación entre entradas, estados y salidas depende de la dinámica no lineal del sistema. Por esta razón, la acción proporcional-integral puede emplearse como base para definir una dinámica auxiliar deseada del error, a partir de la cual se diseña una ley de control compatible con el modelo no lineal considerado.

Capítulo 3

Modelo matemático del AGV

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el modelo matemático utilizado para describir el comportamiento de un Vehículo Autónomo Terrestre (AGV). La representación se formula mediante dos sistemas complementarios: el sistema dinámico, encargado de relacionar las entradas físicas con las velocidades internas del vehículo, y el sistema cinemático, utilizado para proyectar dichas velocidades sobre un marco de referencia global y determinar la evolución de la posición y orientación.

El acoplamiento entre ambos sistemas permite analizar la influencia de la fuerza de tracción T y del ángulo de dirección δ sobre las velocidades longitudinal v_x , lateral v_y y angular de orientación r , así como sobre las variables globales X , Y y ψ . Para distinguir las variables y matrices correspondientes a cada representación, se emplea la nomenclatura

$$(\cdot)_d : \text{sistema dinámico}, \quad (\cdot)_c : \text{sistema cinemático}. \quad (3.1)$$

Con esta notación, se presentan las ecuaciones de movimiento del vehículo, la aproximación de las fuerzas desarrolladas por los neumáticos y la representación matricial requerida para el diseño posterior de observadores. También se analiza la propiedad local de Lipschitz de los términos no lineales del sistema dinámico, debido a su relevancia en la formulación de estrategias de estimación.

Posteriormente, se construye el modelo dinámico–cinemático acoplado, donde las velocidades locales generadas por el sistema dinámico se proyectan sobre el marco global mediante el sistema

cinemático. Esta relación permite describir la evolución completa del AGV desde las entradas físicas T y δ hasta las variables de posición y orientación.

Además, se propone una aproximación del ángulo de deslizamiento lateral β , con el propósito de establecer una relación entre el comportamiento cinemático y la dinámica lateral del vehículo. Esta aproximación será utilizada en el diseño de referencias dinámicas compatibles con el movimiento lateral del AGV.

Finalmente, se obtienen las representaciones Takagi–Sugeno de los sistemas dinámico y cinemático mediante el método de sector no lineal. Estas formulaciones constituyen la base para el diseño de los observadores y controladores desarrollados en los capítulos posteriores.

3.2. Modelo dinámico

3.2.1. Consideraciones del modelo dinámico

El comportamiento dinámico del Vehículo Autónomo Terrestre (AGV) se representa mediante el modelo simplificado tipo bicicleta mostrado en la Figura 3.1. En esta representación se definen dos ejes con origen en el centro de gravedad del AGV: un eje longitudinal x , establecido de acuerdo con la dirección principal de avance del vehículo, y un eje lateral y , paralelo a los ejes que conectan los neumáticos. La aproximación agrupa los neumáticos delanteros (R_1, R_4) y traseros (R_2, R_3) en elementos equivalentes (R_d, R_t), permitiendo describir el movimiento longitudinal, lateral y rotacional del vehículo respecto a un marco local.

La formulación del modelo se obtiene a partir del diagrama de cuerpo libre del vehículo y de la descomposición de las fuerzas generadas en los neumáticos equivalentes. En el marco local se definen la velocidad longitudinal $v_x(t)$, la velocidad lateral $v_y(t)$ y la velocidad angular de orientación $r(t)$. Asimismo, el ángulo de orientación del vehículo respecto al marco global $X - Y$ se denota por $\psi(t)$.

En el eje delantero, el neumático equivalente R_d se encuentra direccionado por un ángulo $\delta(t)$ respecto al eje longitudinal del vehículo. La fuerza longitudinal delantera se relaciona directamente con la fuerza de tracción aplicada al vehículo, por lo que se considera $F_{x_d}(t) = T(t)$. Además,

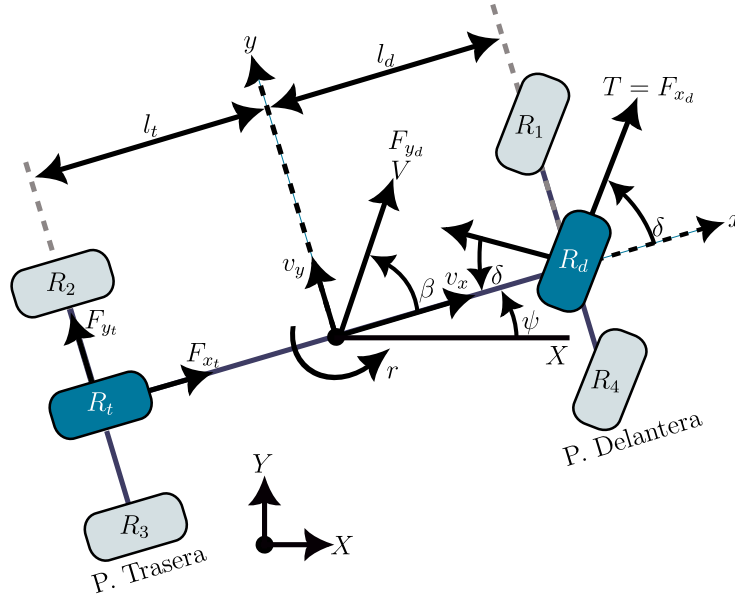


Fig. 3.1. Representación simplificada tipo bicicleta del AGV.

se considera una fuerza lateral delantera $F_{y_d}(t)$, relacionada con el comportamiento lateral del neumático equivalente delantero. En el eje trasero se consideran las fuerzas $F_{x_t}(t)$ y $F_{y_t}(t)$, las cuales representan componentes efectivas longitudinal y lateral asociadas al neumático equivalente trasero dentro del modelo reducido.

Para establecer una convención coherente entre el esquema físico, las ecuaciones diferenciales, la representación matricial y las simulaciones numéricas, las fuerzas desarrolladas por los neumáticos se consideran cantidades efectivas con signo. En particular, los ángulos $\psi(t)$, $\delta(t)$, $\alpha_d(t)$, $\alpha_t(t)$ y la velocidad angular $r(t)$ se definen de acuerdo con la convención mostrada en la Figura 3.1. De esta forma, el signo de las fuerzas $F_{y_d}(t)$, $F_{y_t}(t)$ y $F_{x_t}(t)$ queda determinado por los ángulos de deslizamiento y por la convención adoptada para el modelo.

La formulación del modelo matemático se desarrolla bajo las siguientes consideraciones:

- El AGV se desplaza sobre una superficie plana.
- Los neumáticos delanteros y traseros se representan mediante elementos equivalentes ubicados sobre los ejes delantero y trasero, respectivamente.
- Las fuerzas de los neumáticos se expresan mediante componentes longitudinales y laterales

efectivas, evitando el uso de fuerzas resultantes para la formulación de los balances dinámicos.

- La fuerza de tracción $T(t)$ se interpreta como la componente longitudinal aplicada en el marco del neumático delantero, por lo que se considera

$$F_{x_d}(t) = T(t).$$

- La fuerza lateral delantera $F_{y_d}(t)$ se incorpora como una componente efectiva con signo asociada al neumático delantero y al ángulo de dirección $\delta(t)$.
- En el eje trasero se considera una componente longitudinal equivalente $F_{x_t}(t)$, la cual no representa una entrada de tracción independiente, sino un término efectivo relacionado con el comportamiento del neumático trasero dentro del modelo reducido.
- Las fuerzas de los neumáticos se aproximan mediante relaciones lineales respecto a sus ángulos de deslizamiento.
- La fuerza de tracción y el ángulo de dirección se consideran entradas directamente disponibles del sistema.
- Los efectos aerodinámicos, la dinámica vertical, la deformación explícita de los neumáticos y la resistencia a la rodadura no se incorporan en el modelo dinámico desarrollado.
- La velocidad longitudinal satisface $v_x(t) > 0$, evitando indeterminaciones en el cálculo de los ángulos de deslizamiento.

Los valores utilizados para la parametrización del modelo son obtenidos de Özgüner Ümit *y col.* (2011) y se presentan en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Parámetros del modelo dinámico del AGV.

Variable	Símbolo	Magnitud
Distancia del centro de gravedad al eje delantero	l_d	1.35 m
Distancia del centro de gravedad al eje trasero	l_t	1.37 m
Inercia rotacional	I_z	272.4 kg m ²
Masa del vehículo	m	1569 kg
Rigidez lateral del eje delantero	k_{y_d}	5.96×10^4 N/rad
Rigidez lateral del eje trasero	k_{y_t}	8.66×10^4 N/rad
Rigidez longitudinal equivalente del eje trasero	k_{x_t}	8.66×10^4 N/rad

3.2.2. Ecuaciones de movimiento

El modelo dinámico se obtiene mediante la segunda ley de Newton en sus formulaciones traslacional y rotacional. Para ello, se consideran las fuerzas aplicadas sobre el vehículo en el marco local con origen en el centro de gravedad. La Figura 3.2 muestra el diagrama de cuerpo libre empleado para describir las fuerzas de los neumáticos sobre los ejes longitudinal y lateral del vehículo.

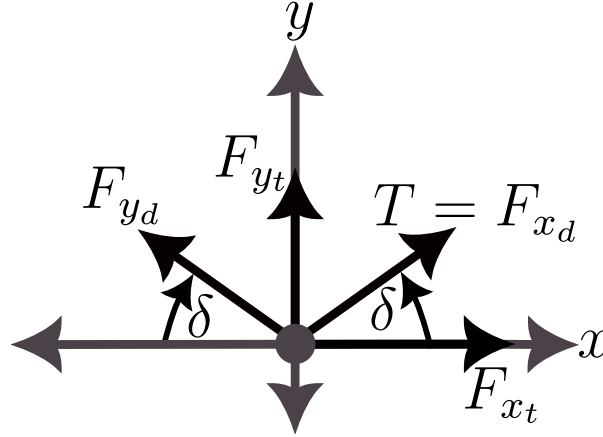


Fig. 3.2. Diagrama de cuerpo libre para la representación de las fuerzas sobre el marco local del AGV.

Bajo la convención de fuerzas efectivas adoptada, la fuerza de tracción se interpreta como la componente longitudinal aplicada en el eje delantero, de modo que $F_{x_d}(t) = T(t)$. La fuerza lateral delantera $F_{y_d}(t)$ y las fuerzas del eje trasero $F_{x_t}(t)$ y $F_{y_t}(t)$ se incorporan como componentes con signo dentro del modelo reducido. Así, la suma de fuerzas longitudinales $\sum F_x(t)$, laterales $\sum F_y(t)$ y momentos respecto al centro de gravedad $\sum \tau(t)$ se expresan como

$$\begin{aligned}\sum F_x(t) &= F_{x_t}(t) + F_{y_d}(t) \sin(\delta(t)) + T(t) \cos(\delta(t)), \\ \sum F_y(t) &= F_{y_t}(t) + F_{y_d}(t) \cos(\delta(t)) + T(t) \sin(\delta(t)), \\ \sum \tau(t) &= l_d F_{y_d}(t) \cos(\delta(t)) + l_d T(t) \sin(\delta(t)) - l_t F_{y_t}(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

La expresión de momento en (3.2) considera que las componentes aplicadas en el eje delantero generan momento respecto al centro de gravedad con brazo l_d , mientras que la fuerza lateral trasera actúa con brazo l_t en sentido opuesto, de acuerdo con la convención de giro adoptada.

Debido a que el marco local se encuentra fijo al vehículo, las aceleraciones longitudinal y lateral incorporan términos dependientes de la velocidad angular $r(t)$. Bajo la convención adoptada, se

tiene

$$\begin{aligned}\sum F_x(t) &= ma_x(t) = m(\dot{v}_x(t) + v_y(t)r(t)), \\ \sum F_y(t) &= ma_y(t) = m(\dot{v}_y(t) - v_x(t)r(t)), \\ \sum \tau(t) &= I_z \dot{r}(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Los términos $v_y(t)r(t)$ y $v_x(t)r(t)$ aparecen por la rotación del marco local. Estos términos acoplan el movimiento longitudinal, lateral y rotacional del vehículo, por lo que la evolución de cada velocidad depende tanto de las fuerzas aplicadas como de la orientación instantánea del marco local.

Igualando (3.2) y (3.3), y despejando las derivadas de las variables dinámicas, se obtiene

$$\dot{v}_x(t) = -v_y(t)r(t) + \frac{1}{m}F_{x_t}(t) + \frac{1}{m}F_{y_d}(t)\sin(\delta(t)) + \frac{1}{m}T(t)\cos(\delta(t)),\tag{3.4}$$

$$\dot{v}_y(t) = v_x(t)r(t) + \frac{1}{m}F_{y_t}(t) + \frac{1}{m}F_{y_d}(t)\cos(\delta(t)) + \frac{1}{m}T(t)\sin(\delta(t)),\tag{3.5}$$

$$\dot{r}(t) = \frac{l_d}{I_z}F_{y_d}(t)\cos(\delta(t)) + \frac{l_t}{I_z}T(t)\sin(\delta(t)) - \frac{l_t}{I_z}F_{y_t}(t).\tag{3.6}$$

Las ecuaciones (3.4)–(3.6) describen la evolución de las velocidades internas del AGV a partir de las fuerzas efectivas desarrolladas por los neumáticos y de las entradas físicas $T(t)$ y $\delta(t)$. Esta formulación constituye la base del sistema dinámico utilizado posteriormente para la representación matricial, el diseño de observadores y el desarrollo del controlador dinámico.

3.2.3. Fuerzas en los neumáticos

Las fuerzas $F_{y_d}(t)$ y $F_{y_t}(t)$ representan las componentes laterales efectivas desarrolladas por los neumáticos equivalentes delantero y trasero, respectivamente. Asimismo, $F_{x_t}(t)$ representa una componente longitudinal equivalente del neumático trasero dentro del modelo reducido. Los subíndices d y t denotan los ejes delantero y trasero, mientras que los subíndices x y y indican las componentes longitudinal y lateral.

La Figura 3.3 muestra la relación geométrica entre las velocidades locales, la dirección de los neumáticos equivalentes y los ángulos de deslizamiento empleados para calcular las fuerzas efectivas del modelo.

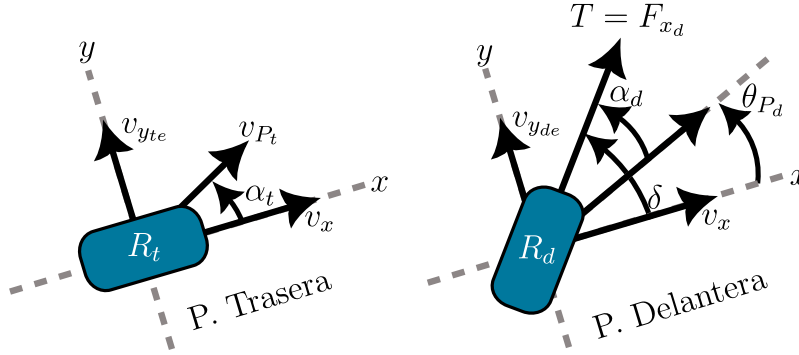


Fig. 3.3. Velocidades locales y ángulos de deslizamiento en los neumáticos equivalentes delantero y trasero.

Debido al movimiento rotacional del vehículo, las velocidades laterales en los ejes delantero y trasero no coinciden directamente con la velocidad lateral del centro de gravedad. En el eje delantero, la componente lateral local se define como

$$v_{y_{de}}(t) = v_y(t) + l_d r(t), \quad (3.7)$$

mientras que en el eje trasero se tiene

$$v_{y_{te}}(t) = v_y(t) - l_t r(t). \quad (3.8)$$

Por tanto, las direcciones locales de movimiento en los ejes delantero y trasero quedan dadas por

$$\theta_{P_d}(t) = \arctan \left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)} \right), \quad (3.9)$$

$$\theta_{P_t}(t) = \arctan \left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)} \right). \quad (3.10)$$

En el eje delantero, el neumático equivalente se encuentra orientado por el ángulo de dirección $\delta(t)$. De esta manera, el ángulo de deslizamiento delantero se define como la diferencia entre la orientación del neumático y la dirección local de movimiento:

$$\alpha_d(t) = \delta(t) - \theta_{P_d}(t). \quad (3.11)$$

En el eje trasero, al no existir dirección, la orientación del neumático coincide con el eje longitudinal del vehículo. Bajo la convención angular adoptada, el ángulo de deslizamiento trasero se define como

$$\alpha_t(t) = -\theta_{P_t}(t). \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.9) y (3.10) en (3.11) y (3.12), se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_d(t) &= \delta(t) - \arctan\left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)}\right), \\ \alpha_t(t) &= -\arctan\left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)}\right).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Dentro del dominio de operación considerado, las fuerzas en los neumáticos equivalentes se aproximan mediante relaciones lineales respecto a los ángulos de deslizamiento:

$$\begin{aligned}F_{y_d}(t) &= k_{y_d} \alpha_d(t), \\ F_{y_t}(t) &= k_{y_t} \alpha_t(t), \\ F_{x_t}(t) &= k_{x_t} \alpha_t(t).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Por tanto, las fuerzas utilizadas en el modelo dinámico se expresan como

$$\begin{aligned}F_{y_d}(t) &= k_{y_d} \left[\delta(t) - \arctan\left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)}\right) \right], \\ F_{y_t}(t) &= -k_{y_t} \arctan\left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)}\right), \\ F_{x_t}(t) &= -k_{x_t} \arctan\left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)}\right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Los ángulos $\alpha_d(t)$ y $\alpha_t(t)$ describen el comportamiento local de los neumáticos equivalentes y se utilizan únicamente para calcular las fuerzas efectivas del modelo. Estos términos deben distinguirse del ángulo de deslizamiento lateral del vehículo $\beta(t)$, el cual representa la diferencia entre el eje longitudinal del AGV y la dirección efectiva de movimiento del centro de gravedad.

La condición $v_x(t) > 0$, establecida en las consideraciones del modelo, evita indeterminaciones en el cálculo de las direcciones locales de movimiento y de los ángulos de deslizamiento de los neumáticos.

3.2.4. Representación matricial del modelo dinámico

Para el diseño del observador, el modelo dinámico se expresa mediante una estructura matricial que separa los términos dependientes del estado, las entradas físicas y las no linealidades generadas

por los ángulos de deslizamiento en neumáticos. Considerando el modelo no lineal (3.4)–(3.6) y las ecuaciones de fuerzas en neumáticos (3.15), se obtiene la siguiente ecuación diferencial matricial:

$$\dot{x}_d(t) = A_d(x_d(t)) x_d(t) + B_d(u_d(t)) u_d(t) + F_d(u_d(t)) f_d(x_d(t)), \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad u_d(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, \quad A_d(x_d(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{d1}(t) & 0 \\ z_{d1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_d(u_d(t)) &= \begin{bmatrix} c_{1p} z_{d2}(t) & c_{2p} z_{d3}(t) \\ c_{1p} z_{d3}(t) & c_{2p} z_{d2}(t) \\ c_{6p} z_{d3}(t) & c_{7p} z_{d2}(t) \end{bmatrix}, \quad F_d(u_d(t)) = \begin{bmatrix} -c_{3p} & -c_{4p} z_{d2}(t) \\ -c_{5p} & -c_{4p} z_{d3}(t) \\ c_{8p} & -c_{6p} z_{d3}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las variables premisas identificadas para la representación T-S del modelo dinámico son

$$z_{d1}(t) = r(t), \quad z_{d2}(t) = \sin(\delta(t)), \quad z_{d3}(t) = \cos(\delta(t)). \quad (3.18)$$

Por otra parte, las no linealidades generadas por los ángulos de deslizamiento en neumáticos se agrupan en el vector

$$f_d(x_d(t)) = \begin{bmatrix} z_{d4}(t) \\ z_{d5}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)} \right) \\ \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Los parámetros constantes empleados en las matrices anteriores se definen como

$$\begin{aligned} c_{1p} &= \frac{k_{y_d}}{m}, & c_{2p} &= \frac{1}{m}, & c_{3p} &= \frac{k_{x_t}}{m}, & c_{4p} &= \frac{k_{y_d}}{m}, \\ c_{5p} &= \frac{k_{y_t}}{m}, & c_{6p} &= \frac{l_d k_{y_d}}{I_z}, & c_{7p} &= \frac{l_d}{I_z}, & c_{8p} &= \frac{l_t k_{y_t}}{I_z}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La representación (3.16) conserva la estructura no lineal del modelo del AGV. Los términos z_{d1} , z_{d2} y z_{d3} serán utilizados para obtener la representación T-S, mientras que $f_d(x_d)$ se mantendrá explícitamente dentro del modelo para incorporar su comportamiento mediante una condición local de Lipschitz.

3.2.5. Propiedad local de Lipschitz

Las no linealidades presentes en el modelo dinámico se encuentran relacionadas a los ángulos de deslizamiento de los neumáticos delantero y trasero definidos en (3.13). De acuerdo con la representación matricial (3.16), estos términos se agrupan en el vector $f_d(x_d)$ presentado en (3.19). Para simplificar la notación, en esta subsección se omite explícitamente la dependencia temporal de las variables de estado.

Para verificar la condición local de Lipschitz, se determina el Jacobiano de $f_d(x_d)$ respecto al vector de estados

$$x_d = \begin{bmatrix} v_x & v_y & r \end{bmatrix}^T. \quad (3.21)$$

El Jacobiano correspondiente se expresa como

$$J_{f_d}(x_d) = \frac{\partial f_d(x_d)}{\partial x_d} = \begin{bmatrix} -\frac{v_y - l_t r}{v_x^2 + (v_y - l_t r)^2} & \frac{v_x}{v_x^2 + (v_y - l_t r)^2} & -\frac{l_t v_x}{v_x^2 + (v_y - l_t r)^2} \\ -\frac{v_y + l_d r}{v_x^2 + (v_y + l_d r)^2} & \frac{v_x}{v_x^2 + (v_y + l_d r)^2} & \frac{l_d v_x}{v_x^2 + (v_y + l_d r)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Las expresiones anteriores presentan una singularidad cuando $v_x = 0$. Por esta razón, se considera el dominio de operación

$$\Omega_\varepsilon = \{x_d \in \mathbb{R}^3 : v_x \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\}. \quad (3.23)$$

Esta restricción es coherente con la formulación del modelo, ya que los ángulos de deslizamiento definidos en (3.15) no se encuentran determinados cuando la velocidad longitudinal es nula.

Para establecer una cota del Jacobiano, se considera la función auxiliar

$$g(z) = \frac{|z|}{v_x^2 + z^2}. \quad (3.24)$$

El valor máximo de $g(z)$ se alcanza cuando $|z| = v_x$. Por tanto,

$$g_{\max} = \frac{1}{2v_x} \leq \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (3.25)$$

Asimismo, se cumple

$$\frac{|v_x|}{v_x^2 + z^2} \leq \frac{1}{v_x} \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.26)$$

A partir de estas relaciones, las sumas de los valores absolutos por columna del Jacobiano pueden acotarse como

$$\|J_{f_d}(x_d)\|_1 \leq \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}, \frac{l_t + l_d}{\varepsilon} \right\}. \quad (3.27)$$

Para las simulaciones desarrolladas en esta tesis se adopta

$$\varepsilon = 0.1 \text{ m/s.} \quad (3.28)$$

Considerando los parámetros $l_t = 1.37 \text{ m}$ y $l_d = 1.35 \text{ m}$ presentados en la Tabla 3.1 y evaluando ϵ de (3.28) en (3.27), se obtiene

$$\|J_{f_d}(x_d)\|_1 \leq \max\{10, 20, 27.2\} = 27.2. \quad (3.29)$$

Por tanto, se selecciona la constante

$$\gamma_d = 27.2. \quad (3.30)$$

De esta forma, para cualesquiera $x_d, \bar{x}_d \in \Omega_\varepsilon$, se satisface

$$\|f_d(x_d) - f_d(\bar{x}_d)\|_1 \leq \gamma_d \|x_d - \bar{x}_d\|_1. \quad (3.31)$$

La cota seleccionada se verificó adicionalmente mediante una evaluación numérica sobre una malla discreta definida por

$$\begin{aligned} 0.1 \leq v_x \leq 15 \text{ m/s}, \quad -5 \leq v_y \leq 5 \text{ m/s}, \\ -5 \leq r \leq 5 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En cada punto de la malla se evaluó la suma máxima de los valores absolutos por columna de $J_{f_d}(x_d)$. Los valores obtenidos no excedieron la cota analítica $\gamma_d = 27.2$, la cual será utilizada posteriormente en el diseño del observador dinámico.

3.3. Modelo cinemático

El modelo cinemático describe el desplazamiento del AGV respecto al marco global. Para ello, las velocidades longitudinal v_x y lateral v_y , definidas en el marco local unido al centro de gravedad, se proyectan sobre los ejes globales mediante el ángulo de orientación ψ . Por su parte, la evolución de ψ se determina a partir de la velocidad angular de orientación r .

Las ecuaciones cinemáticas se expresan como

$$\dot{X} = v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi), \quad (3.33)$$

$$\dot{Y} = v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi), \quad (3.34)$$

$$\dot{\psi} = r. \quad (3.35)$$

Las ecuaciones (3.33)–(3.35) relacionan las velocidades internas del vehículo con la evolución de su posición y orientación en el marco global.

Para el diseño del observador cinemático, el modelo se expresa en forma matricial como

$$\dot{x}_c(t) = B_c(x_c(t)) u_c(t), \quad (3.36)$$

donde

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad u_c(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad B_c(x_c(t)) = \begin{bmatrix} z_{c1}(t) & -z_{c2}(t) & 0 \\ z_{c2}(t) & z_{c1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Las variables premisas identificadas para la representación T-S del modelo cinemático son

$$z_{c1}(t) = \cos(\psi(t)), \quad z_{c2}(t) = \sin(\psi(t)). \quad (3.38)$$

En este modelo, el vector $u_c(t)$ agrupa las velocidades locales proporcionadas por el sistema dinámico. Por tanto, estas señales establecen el acoplamiento entre ambos niveles del modelo: las entradas físicas T y δ modifican las velocidades internas del vehículo, mientras que v_x , v_y y r determinan su desplazamiento respecto al marco global.

3.4. Modelo dinámico–cinemático acoplado

Los modelos dinámico (3.16) y cinemático (3.36) desarrollados en las secciones anteriores describen comportamientos complementarios del AGV. El modelo dinámico determina la evolución de las velocidades locales v_x , v_y y r a partir de las entradas físicas T y δ , mientras que el modelo cinemático utiliza dichas velocidades para calcular la posición X , Y y la orientación ψ respecto al marco global.

Ambos modelos pueden integrarse mediante el vector de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_c^T(t) & x_d^T(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} X(t) & Y(t) & \psi(t) & v_x(t) & v_y(t) & r(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.39)$$

Sin embargo, en esta tesis se conserva una representación funcional por sistemas dinámico-cinemático acoplados. Esta organización permite analizar de forma separada el comportamiento dinámico y cinemático del vehículo, manteniendo la relación existente entre ambos niveles, como se muestra en la Figura 3.4.

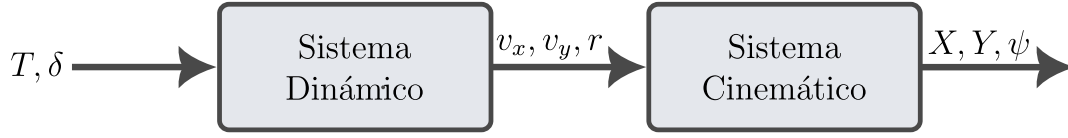


Fig. 3.4. Acoplamiento entre los modelos dinámico y cinemático del AGV.

3.4.1. Simulación en lazo abierto

Para analizar el comportamiento del modelo dinámico–cinemático acoplado, se realizó una simulación en lazo abierto mediante la función `ode45` de MATLAB. El horizonte de simulación se estableció en 150 s. Las condiciones iniciales se definieron como

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.40)$$

donde se adopta $v_x(0) = 0.1$ m/s para evitar indeterminaciones en los ángulos de deslizamiento y mantener la simulación dentro del dominio de operación definido en (3.23).

Durante la simulación se aplica una fuerza de tracción constante

$$T(t) = 800 \text{ N}, \quad (3.41)$$

mientras que el ángulo de dirección se define como

$$\delta(t) = 0.5236 + 0.2618 \sin(0.25t) \quad \text{rad}. \quad (3.42)$$

La Figura 3.5 presenta el ángulo de dirección aplicado durante la simulación.

La evolución de las velocidades locales v_x , v_y y r se muestra en la Figura 3.6. Estas señales permiten observar el comportamiento longitudinal, lateral y rotacional producido por la fuerza de tracción constante y la variación periódica del ángulo de dirección.

La Figura 3.7 presenta la trayectoria obtenida en el plano global, así como la evolución temporal de las posiciones X , Y y del ángulo de orientación ψ . La entrada de dirección periódica produce una trayectoria con cinco lóbulos, mientras que las variables cinemáticas permanecen acotadas durante el intervalo analizado.

Los resultados permiten analizar cualitativamente la relación entre las entradas físicas, las velocidades locales y el desplazamiento global del AGV. Esta simulación no constituye una validación

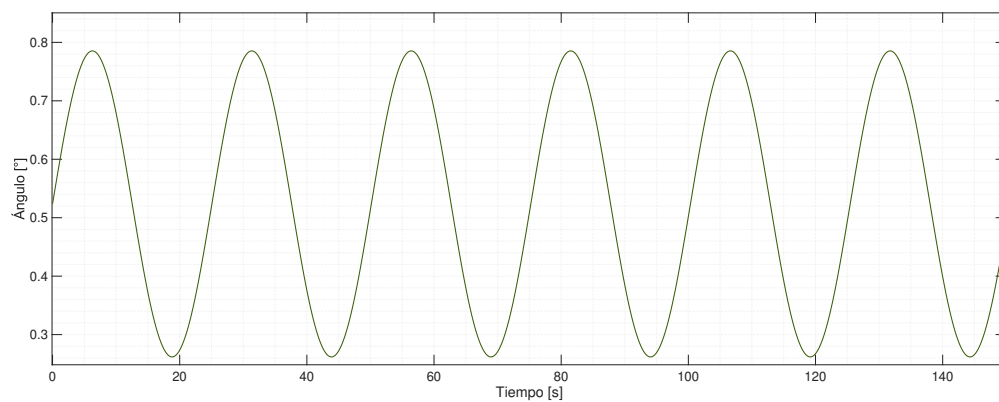


Fig. 3.5. Ángulo de dirección aplicado durante la simulación en lazo abierto.

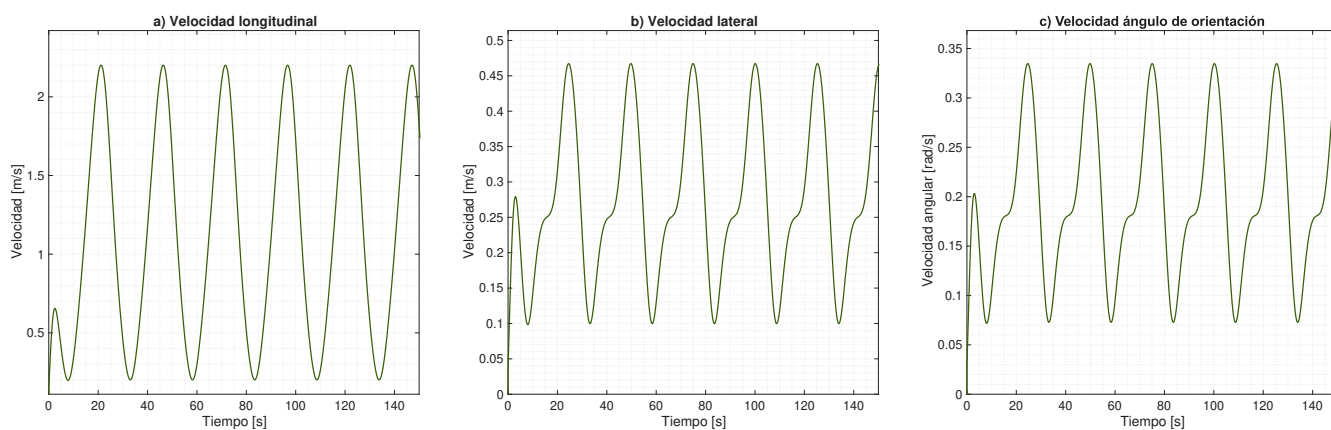


Fig. 3.6. Velocidades locales del AGV durante la simulación en lazo abierto.

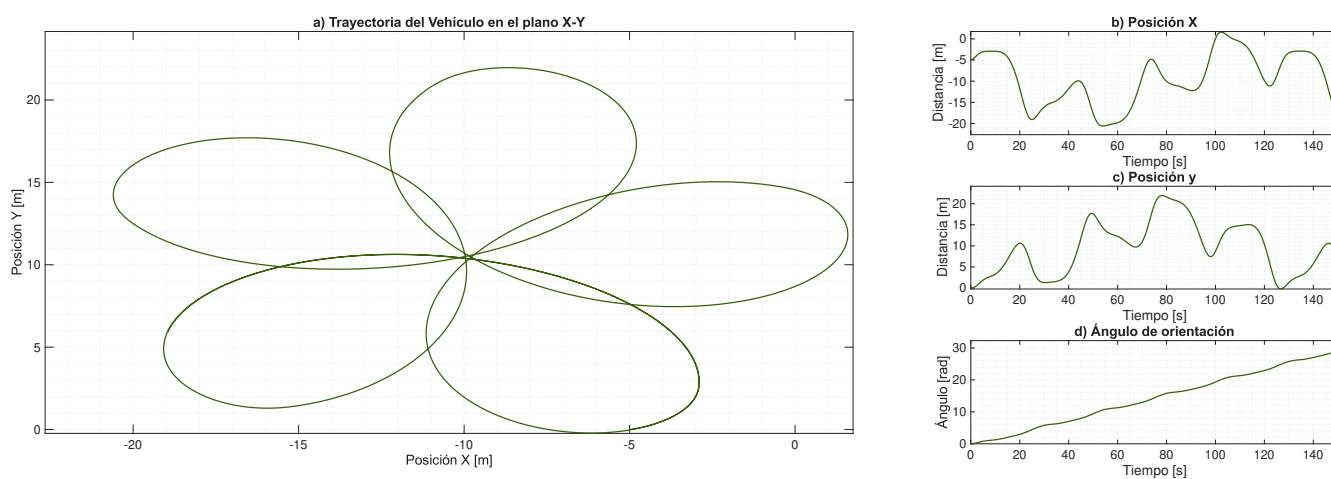


Fig. 3.7. Trayectoria y variables cinemáticas del AGV durante la simulación en lazo abierto.

experimental del modelo; su finalidad es verificar la evolución del sistema no lineal dentro del entorno de simulación y proporcionar información para el análisis posterior del ángulo de deslizamiento lateral, la obtención de las representaciones Takagi-Sugeno y su comparación con los modelos no lineales.

3.5. Aproximación del ángulo de deslizamiento lateral

El ángulo de deslizamiento lateral β representa la diferencia entre la orientación geométrica del vehículo ψ y la dirección efectiva de movimiento ν , como se muestra en la Figura 3.1. A diferencia de los ángulos α_d y α_t , asociados al comportamiento local de los neumáticos, β describe el deslizamiento lateral del vehículo respecto a su dirección de avance. Este ángulo también relaciona las velocidades longitudinal y lateral del AGV y, aunque no aparece explícitamente en el modelo dinámico (3.16), su efecto se encuentra implícito en la dinámica lateral del sistema.

A partir de las velocidades locales, la rapidez total y el ángulo de deslizamiento lateral se definen como

$$V(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}, \quad \beta(t) = \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)} \right). \quad (3.43)$$

En consecuencia, la velocidad lateral puede expresarse como

$$v_y(t) = V(t) \sin(\beta(t)). \quad (3.44)$$

A partir de simulaciones en lazo abierto del modelo no lineal, realizadas para fuerzas de tracción comprendidas entre $500 \leq T \leq 900 \text{ N}$ y ángulos de dirección en el intervalo $-35^\circ \leq \delta \leq 35^\circ$, se observó una relación con tendencia lineal entre la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r . A partir de esta observación, se propone

$$v_y(t) \approx L_\beta(t) r(t), \quad (3.45)$$

donde $L_\beta(t)$ representa un parámetro efectivo generado por el comportamiento lateral del vehículo. Debido a que $L_\beta(t)$ relaciona una velocidad lineal con una velocidad angular, este parámetro se expresa en unidades de longitud.

Sustituyendo (3.45) en (3.44), se obtiene

$$V(t) \sin(\beta(t)) \approx L_\beta(t) r(t). \quad (3.46)$$

Considerando la aproximación de ángulo pequeño

$$\sin(\beta(t)) \approx \beta(t), \quad (3.47)$$

se obtiene

$$L_\beta(t) \approx \frac{V(t)\beta(t)}{r(t)}, \quad \beta(t) \approx \frac{L_\beta(t)r(t)}{V(t)}. \quad (3.48)$$

La identificación de $L_\beta(t)$ se realizó mediante simulaciones en lazo abierto considerando fuerzas de tracción y ángulos de dirección constantes, así como señales de dirección variables. Durante este procedimiento se excluyeron los instantes donde $r(t)$ se aproxima a cero, debido a que la primera expresión de (3.48) presenta una indeterminación numérica bajo dichas condiciones.

La Tabla 3.2 resume los escenarios evaluados y los valores obtenidos durante el proceso de identificación.

Tabla 3.2. Escenarios utilizados para la identificación de L_β .

Caso	$T(t)$ [N]	$\delta(t)$ [°]	L_β [m]	RMSE [rad]
1	500	5	1.3817	0.0011
2	500	10	1.4094	8.0783×10^{-4}
3	700	15	1.3991	7.9327×10^{-4}
4	700	20	1.3848	6.1051×10^{-4}
5	900	25	1.3839	5.6627×10^{-4}
6	900	30	1.3815	4.2096×10^{-4}
7	900	35	1.3838	2.9325×10^{-4}
8	700	$10 + 10 \sin(0.25t)$	1.4597	0.0053
9	700	$15 + 10 \sin(0.25t)$	1.4101	0.0031
10	900	$15 + 15 \sin(0.25t)$	1.4522	0.0084
11	900	$20 + 15 \sin(0.25t)$	1.4120	0.0046

Los resultados muestran que $L_\beta(t)$ presenta variaciones relacionadas con las condiciones de operación. Para los escenarios evaluados, sus valores permanecen aproximadamente dentro del intervalo

$$1.35 \leq L_\beta(t) \leq 1.46 \text{ m}. \quad (3.49)$$

Por esta razón, se adopta el valor constante

$$L_\beta = 1.39 \text{ m}. \quad (3.50)$$

La Figura 3.8 presenta la validación de la aproximación propuesta. En la primera parte se muestra la evolución temporal de $L_\beta(t)$, mientras que en la segunda se compara el ángulo de deslizamiento lateral calculado mediante (3.43) con la aproximación obtenida a partir de (3.48) y (3.50).

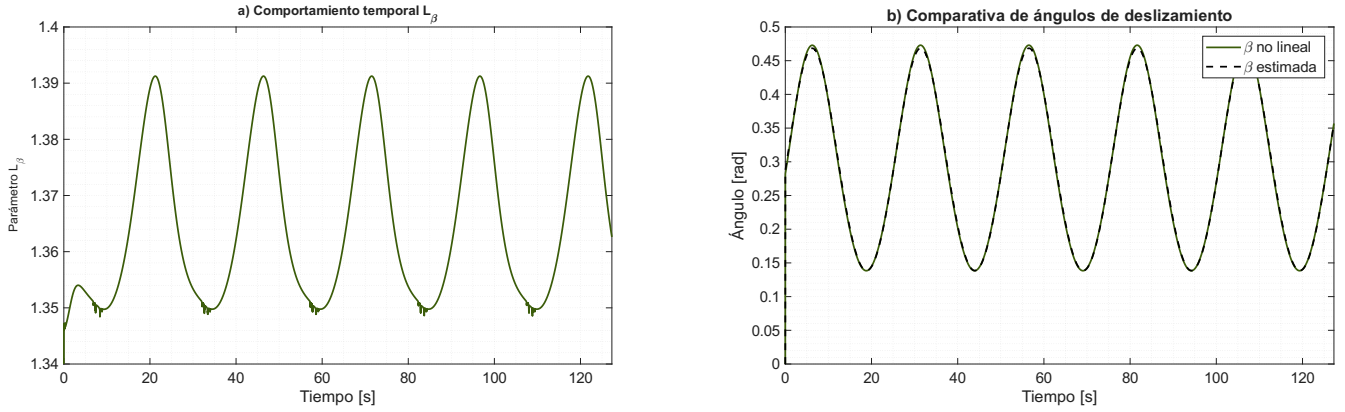


Fig. 3.8. Validación de la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral β .

La comparación entre ambas señales presentó un error cuadrático medio

$$\text{RMSE}_\beta = 0.0019 \text{ rad.} \quad (3.51)$$

Este resultado muestra que el valor constante $L_\beta = 1.39$ m permite aproximar el comportamiento del ángulo de deslizamiento lateral dentro del dominio de operación analizado. La aproximación obtenida será utilizada posteriormente para generar referencias compatibles entre los niveles cinemático y dinámico de la arquitectura de control.

3.6. Representaciones Takagi–Sugeno del modelo

Los modelos dinámico (3.16) y cinemático (3.36) desarrollados en las secciones anteriores contienen términos no lineales que describen el comportamiento interno y el desplazamiento global del vehículo. Para obtener una estructura adecuada para el diseño de los observadores, ambos sistemas se representan mediante el enfoque Takagi–Sugeno (T-S) utilizando el método de sector no lineal presentado en Lendek *y col.* (2010).

Aunque los modelos pueden integrarse mediante el vector de seis estados definido en (3.39), en esta tesis se conserva la filosofía de los sistemas acoplados. Esta organización permite analizar por separado las dinámicas locales y globales del AGV, así como diseñar un observador específico para cada sistema.

3.6.1. Representación T-S del modelo dinámico

El modelo dinámico no lineal definido en (3.16) se reescribe a continuación:

$$\dot{x}_d(t) = A_d(x_d(t)) x_d(t) + B_d(u_d(t)) u_d(t) + F_d(u_d(t)) f_d(x_d(t)),$$

con

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, & u_d(t) &= \begin{bmatrix} \delta(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, & A_d(x_d(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{d1}(t) & 0 \\ z_{d1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_d(u_d(t)) &= \begin{bmatrix} c_{1p}z_{d2}(t) & c_{2p}z_{d3}(t) \\ c_{1p}z_{d3}(t) & c_{2p}z_{d2}(t) \\ c_{6p}z_{d3}(t) & c_{7p}z_{d2}(t) \end{bmatrix}, & F_d(u_d(t)) &= \begin{bmatrix} -c_{3p} & -c_{4p}z_{d2}(t) \\ -c_{5p} & -c_{4p}z_{d3}(t) \\ c_{8p} & -c_{6p}z_{d3}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este modelo contiene cinco términos no lineales definidos como z_{d1} , z_{d2} , z_{d3} , z_{d4} , z_{d5} . Para la representación TS-Lipschitz se seleccionaron como variables premisas

$$z_{d1}(t) = r(t), \quad z_{d2}(t) = \sin(\delta(t)), \quad z_{d3}(t) = \cos(\delta(t)) \quad (3.52)$$

Por otra parte, los términos $z_{d4}(t)$ y $z_{d5}(t)$, generados por los ángulos de deslizamiento de los neumáticos, se conservan explícitamente dentro del vector $f_d(x_d(t))$ presentado en (3.19).

Una representación que incorporara los cinco términos mediante el enfoque de sector no lineal requeriría

$$2^5 = 32 \quad (3.53)$$

modelos locales. Para reducir este número, se adopta una estructura híbrida T-S Lipschitz. Bajo este enfoque, las tres variables premisas definidas en (3.52) generan

$$M_d = 2^3 = 8 \quad (3.54)$$

modelos locales, mientras que las no linealidades restantes se mantienen dentro del término $f_d(x_d(t))$ y se tratan mediante la propiedad local de Lipschitz establecida en la Sección 3.2.5.

La representación dinámica resultante se expresa como

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \mu_{d_i}(z_d(t)) [A_{d_i}x_d(t) + B_{d_i}u_d(t) + F_{d_i}f_d(x_d(t))], \quad (3.55)$$

donde

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} z_{d1}(t) & z_{d2}(t) & z_{d3}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.56)$$

Las matrices A_{d_i} , B_{d_i} y F_{d_i} se obtienen evaluando las matrices del modelo no lineal en las combinaciones de los valores extremos de las variables premisas.

3.6.2. Representación T-S del modelo cinemático

El modelo cinemático definido en (3.36) se reescribe a continuación:

$$\dot{x}_c(t) = B_c(x_c(t)) u_c(t),$$

donde

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad u_c(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad B_c(x_c(t)) = \begin{bmatrix} z_{c_1}(t) & -z_{c_2}(t) & 0 \\ z_{c_2}(t) & z_{c_1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este modelo contiene dos términos no lineales dependientes del ángulo de orientación:

$$z_{c_1}(t) = \cos(\psi(t)), \quad z_{c_2}(t) = \sin(\psi(t)). \quad (3.57)$$

Por tanto, la representación cinemática se encuentra compuesta por

$$M_c = 2^2 = 4 \quad (3.58)$$

modelos locales. El sistema T-S correspondiente se expresa como

$$\dot{x}_c(t) = \sum_{j=1}^{M_c} \mu_{c_j}(z_c(t)) B_{c_j} u_c(t), \quad (3.59)$$

donde

$$z_c(t) = \begin{bmatrix} z_{c_1}(t) & z_{c_2}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.60)$$

A diferencia del modelo dinámico, esta representación no incorpora un término Lipschitz adicional. Su estructura será utilizada posteriormente para diseñar el observador cinemático encargado de reconstruir $X(t)$, $Y(t)$ y $\psi(t)$.

3.6.3. Dominios de operación

Los límites de las variables premisas se establecen manualmente a partir del dominio de operación considerado para el vehículo. Para el modelo dinámico se adoptan los intervalos

$$-5 \leq r(t) \leq 5 \text{ rad/s}, \quad -60^\circ \leq \delta(t) \leq 60^\circ. \quad (3.61)$$

A partir de estas restricciones se obtiene

$$-5 \leq z_{d_1}(t) \leq 5, \quad -0.8660 \leq z_{d_2}(t) \leq 0.8660, \quad 0.5 \leq z_{d_3}(t) \leq 1. \quad (3.62)$$

Para el modelo cinemático se consideran los intervalos completos de las funciones seno y coseno:

$$-1 \leq z_{c_1}(t) \leq 1, \quad -1 \leq z_{c_2}(t) \leq 1. \quad (3.63)$$

La Tabla 3.3 resume los límites utilizados para construir las representaciones T-S.

Tabla 3.3. Límites de las variables premisas utilizadas en las representaciones T-S.

Modelo	Variable premisa	Mínimo	Máximo
Dinámico	$z_{d_1} = r$	-5	5
Dinámico	$z_{d_2} = \sin(\delta)$	-0.8660	0.8660
Dinámico	$z_{d_3} = \cos(\delta)$	0.5	1
Cinemático	$z_{c_1} = \cos(\psi)$	-1	1
Cinemático	$z_{c_2} = \sin(\psi)$	-1	1

Los límites adoptados permiten representar maniobras con giros en ambos sentidos. Debido a que $z_{d_2}(t)$ y $z_{d_3}(t)$ dependen simultáneamente de $\delta(t)$, algunas combinaciones de sus valores extremos no ocurren de forma simultánea.

3.6.4. Funciones de pertenencia

Para construir las funciones de pertenencia, se considera que cada variable premisa $z_k(t)$ se encuentra acotada dentro del intervalo

$$\underline{z}_k \leq z_k(t) \leq \bar{z}_k. \quad (3.64)$$

A partir de estos límites se definen las funciones de ponderación

$$\lambda_0^k(z_k(t)) = \frac{\bar{z}_k - z_k(t)}{\bar{z}_k - \underline{z}_k}, \quad \lambda_1^k(z_k(t)) = \frac{z_k(t) - \underline{z}_k}{\bar{z}_k - \underline{z}_k}. \quad (3.65)$$

Estas funciones satisfacen

$$\lambda_0^k(z_k(t)) + \lambda_1^k(z_k(t)) = 1, \quad 0 \leq \lambda_q^k(z_k(t)) \leq 1, \quad q \in \{0, 1\}. \quad (3.66)$$

Las funciones de pertenencia correspondientes a cada modelo local se obtienen mediante el producto de las ponderaciones de las variables premisas. Para el modelo dinámico se define

$$\mu_{d_i}(z_d(t)) = \prod_{k=1}^3 \lambda_{q_k}^k(z_{d_k}(t)), \quad q_k \in \{0, 1\}, \quad (3.67)$$

mientras que para el modelo cinemático se tiene

$$\mu_{c_j}(z_c(t)) = \prod_{k=1}^2 \lambda_{q_k}^k(z_{c_k}(t)), \quad q_k \in \{0, 1\}. \quad (3.68)$$

En ambos casos, las funciones de pertenencia se encuentran normalizadas:

$$\sum_{i=1}^{M_d} \mu_{d_i}(z_d(t)) = 1, \quad \sum_{j=1}^{M_c} \mu_{c_j}(z_c(t)) = 1. \quad (3.69)$$

3.6.5. Modelos locales dinámicos

Los ocho modelos locales dinámicos se expresan como

$$\dot{x}_{d_i}(t) = A_{d_i}x_d(t) + B_{d_i}u_d(t) + F_{d_i}f_d(x_d(t)), \quad i \in \{1, \dots, 8\}. \quad (3.70)$$

Considerando los valores extremos de $z_{d_1}(t) = r(t)$, se obtienen las matrices

$$A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Las matrices asociadas a las entradas físicas se definen como

$$\begin{aligned} B_{d_1} &= \begin{bmatrix} -32.8968 & 3.1867 \times 10^{-4} \\ 18.9930 & -5.5196 \times 10^{-4} \\ 147.6872 & -4.2920 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, & B_{d_2} &= \begin{bmatrix} -32.8968 & 6.3735 \times 10^{-4} \\ 37.9860 & -5.5196 \times 10^{-4} \\ 295.3744 & -4.2920 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ B_{d_3} &= \begin{bmatrix} 32.8968 & 3.1867 \times 10^{-4} \\ 18.9930 & 5.5196 \times 10^{-4} \\ 147.6872 & 4.2920 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, & B_{d_4} &= \begin{bmatrix} 32.8968 & 6.3735 \times 10^{-4} \\ 37.9860 & 5.5196 \times 10^{-4} \\ 295.3744 & 4.2920 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Las matrices correspondientes a los términos Lipschitz se expresan como

$$\begin{aligned} F_{d_1} &= \begin{bmatrix} -55.1944 & 32.8968 \\ -55.1944 & -18.9930 \\ 435.5433 & -147.6872 \end{bmatrix}, & F_{d_2} &= \begin{bmatrix} -55.1944 & 32.8968 \\ -55.1944 & -37.9860 \\ 435.5433 & -295.3744 \end{bmatrix}, \\ F_{d_3} &= \begin{bmatrix} -55.1944 & -32.8968 \\ -55.1944 & -18.9930 \\ 435.5433 & -147.6872 \end{bmatrix}, & F_{d_4} &= \begin{bmatrix} -55.1944 & -32.8968 \\ -55.1944 & -37.9860 \\ 435.5433 & -295.3744 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Las combinaciones utilizadas para construir los ocho modelos dinámicos se presentan en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Combinaciones de las variables premisas del modelo dinámico.

Modelo	z_{d_1}	z_{d_2}	z_{d_3}	A_{d_i}	B_{d_i}	F_{d_i}
1	-5	-0.8660	0.5	A_{d_1}	B_{d_1}	F_{d_1}
2	-5	-0.8660	1	A_{d_1}	B_{d_2}	F_{d_2}
3	-5	0.8660	0.5	A_{d_1}	B_{d_3}	F_{d_3}
4	-5	0.8660	1	A_{d_1}	B_{d_4}	F_{d_4}
5	5	-0.8660	0.5	A_{d_2}	B_{d_1}	F_{d_1}
6	5	-0.8660	1	A_{d_2}	B_{d_2}	F_{d_2}
7	5	0.8660	0.5	A_{d_2}	B_{d_3}	F_{d_3}
8	5	0.8660	1	A_{d_2}	B_{d_4}	F_{d_4}

3.6.6. Validación de las representaciones T-S

Para verificar las representaciones T-S, se comparan las respuestas de los modelos (3.55) y (3.59) con las obtenidas mediante los modelos no lineales originales, utilizando las mismas condiciones iniciales y entradas de simulación.

La Figura 3.9 presenta la evolución de las velocidades locales $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$. En los tres casos se observa una correspondencia entre las respuestas obtenidas mediante el modelo dinámico no lineal y su representación T-S Lipschitz.

La Figura 3.10 muestra la trayectoria generada en el plano global, así como la evolución de las variables cinemáticas $X(t)$, $Y(t)$ y $\psi(t)$. La superposición de las señales permite observar que la representación T-S reproduce el desplazamiento global del AGV dentro del dominio de operación considerado.

Adicionalmente, la Figura 3.11 presenta la evolución temporal de las funciones de pertenencia utilizadas en ambas representaciones. La suma de estas funciones permanece igual a uno durante toda la simulación, de acuerdo con la condición de normalización establecida en (3.69).

Para complementar el análisis gráfico, la Tabla 3.5 presenta los errores cuadráticos medios obtenidos para las variables dinámicas y cinemáticas.

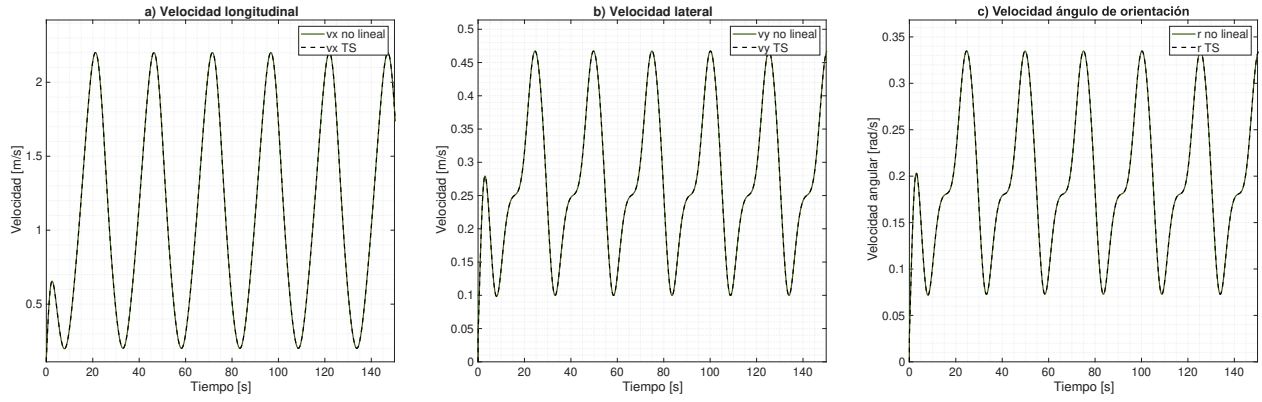


Fig. 3.9. Comparación de las velocidades locales del modelo no lineal y la representación T-S.

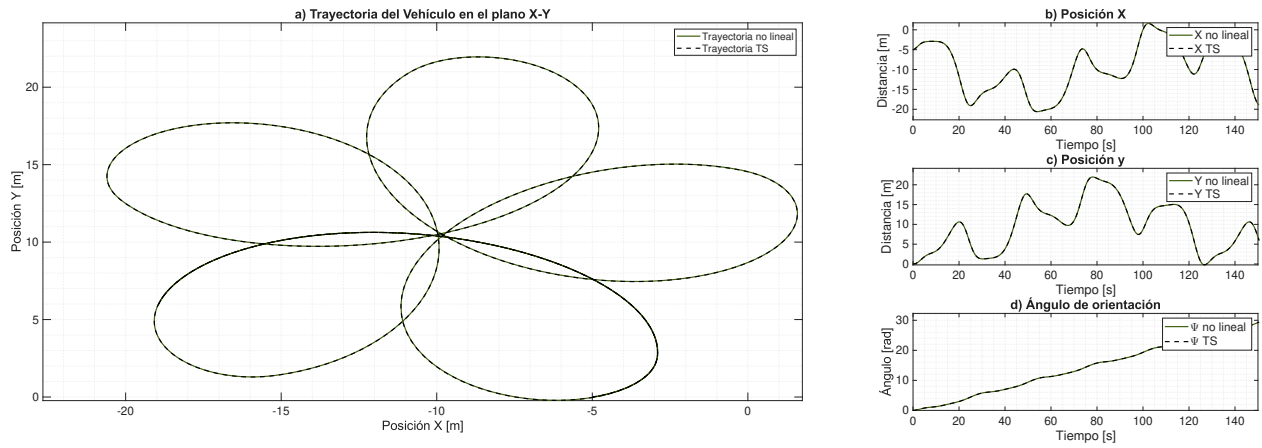


Fig. 3.10. Comparación de las variables cinemáticas del modelo no lineal y la representación T-S.

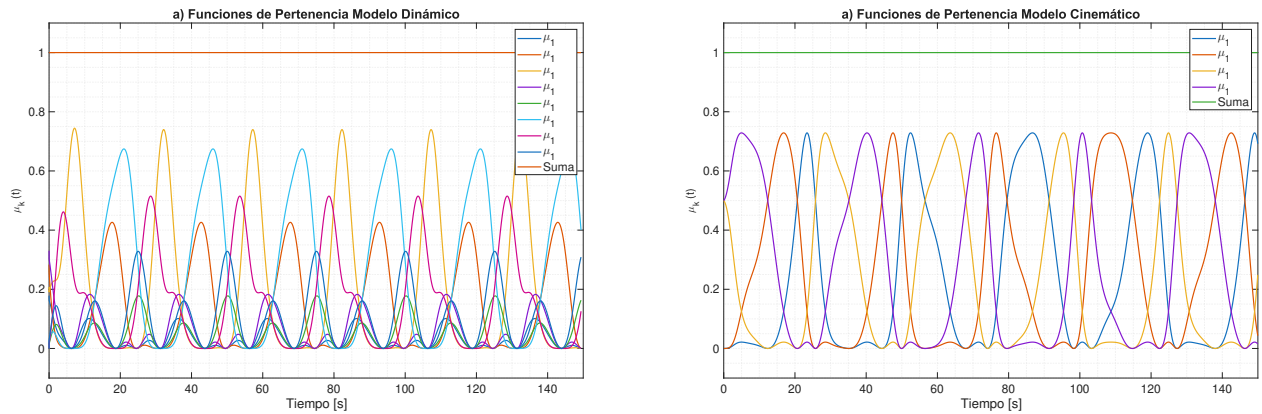


Fig. 3.11. Evolución temporal de las funciones de pertenencia utilizadas en las representaciones T-S.

Tabla 3.5. Errores RMSE entre el modelo no lineal y las representaciones T-S.

Modelo dinámico		Modelo cinemático	
Variable	RMSE	Variable	RMSE
v_x	0.0026008	X	0.0073558
v_y	0.0059462	Y	0.0072728
r	0.00047104	ψ	0.0014507

Los resultados obtenidos muestran que las representaciones T-S reproducen el comportamiento de los modelos no lineales dentro del dominio de operación considerado. Estas formulaciones serán utilizadas posteriormente para el diseño de los observadores dinámico y cinemático.

3.7. Síntesis del capítulo

En este capítulo se desarrollaron los modelos dinámico y cinemático utilizados para representar el comportamiento del AGV. El modelo dinámico relaciona la fuerza de tracción T y el ángulo de dirección δ con las velocidades locales v_x , v_y y r , considerando el acoplamiento entre los movimientos longitudinal, lateral y rotacional, así como las fuerzas generadas por los neumáticos equivalentes. Por su parte, el modelo cinemático proyecta estas velocidades sobre el marco global para determinar la evolución de X , Y y ψ .

La estructura dinámica se expresó mediante una representación matricial que separa las variables premisas incorporadas al enfoque Takagi–Sugeno de los términos no lineales generados por los ángulos de deslizamiento en neumáticos. Para estos últimos se estableció una propiedad local de Lipschitz dentro del dominio de operación seleccionado. Asimismo, se presentó una aproximación del ángulo de deslizamiento lateral β , basada en la relación observada entre la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r .

Finalmente, se obtuvieron las representaciones T-S de ambos sistemas mediante el método de sector no lineal. El modelo dinámico se formuló mediante una estructura híbrida T-S Lipschitz compuesta por ocho modelos locales, mientras que el modelo cinemático se representó mediante cuatro modelos locales. Las formulaciones obtenidas permiten abordar en el siguiente capítulo el diseño de observadores para la reconstrucción de las variables internas y globales del vehículo.

Capítulo 4

Observadores del AGV

4.1. Introducción

El diseño de estrategias de control para el seguimiento de trayectorias requiere disponer de información suficiente sobre el estado del vehículo. Sin embargo, en una implementación práctica no todas las variables del modelo dinámico–cinemático del AGV se consideran disponibles mediante medición directa. En particular, las velocidades locales v_x , v_y , la velocidad angular de orientación r y el ángulo de orientación ψ son variables necesarias para la formulación del esquema de control, por lo que resulta necesario incorporar mecanismos de estimación que permitan reconstruirlas a partir de las señales disponibles.

En este capítulo se desarrolla una arquitectura de observadores acoplados para los modelos dinámico y cinemático del AGV. El observador dinámico tiene como objetivo estimar las velocidades locales y la velocidad angular de orientación, mientras que el observador cinemático reconstruye la posición global y la orientación del vehículo a partir de las mediciones de posición. La interacción entre ambos observadores permite establecer una estructura de estimación compatible con la arquitectura de control dinámico–cinemática propuesta en este trabajo.

Antes de presentar el diseño de los observadores, se analiza la observabilidad local de los modelos dinámico y cinemático, con el fin de verificar la posibilidad de reconstruir los estados a partir de las salidas consideradas. Posteriormente, se introducen las consideraciones necesarias para el diseño de observadores Takagi–Sugeno, incluyendo el tratamiento del término no lineal Lipschitz presente en el modelo dinámico y el efecto de las variables premisas no medibles. Con base en

dicho análisis, se desarrollan los observadores proporcionales–integrales para ambos sistemas y se obtienen condiciones suficientes de convergencia mediante el método de Lyapunov.

Finalmente, se presenta la simulación de la arquitectura acoplada de observadores. En esta etapa se evalúa la convergencia de las estimaciones bajo condiciones iniciales diferentes entre el modelo no lineal y los observadores, así como el comportamiento de los errores de estimación durante el transitorio inicial y en régimen posterior.

4.2. Análisis de observabilidad

Antes de plantear los observadores, resulta necesario analizar si los estados de los modelos dinámico y cinemático pueden reconstruirse a partir de las señales disponibles. Debido a que ambos sistemas presentan estructuras diferentes, el estudio de observabilidad se realiza de manera independiente.

4.2.1. Observabilidad del modelo dinámico

El modelo dinámico desarrollado en la Sección 3.2 toma como estados las velocidades locales y la velocidad angular de orientación del vehículo, así como la dirección y la fuerza de tracción como entradas:

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad u_d(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ T(t) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Para el análisis de observabilidad se considera como salida disponible la velocidad angular de orientación:

$$y_d(t) = h_d(x_d(t)) = r(t). \quad (4.2)$$

Esta elección corresponde a la relación directa que genera esta variable entre el sistema dinámico y cinemático. En la arquitectura acoplada propuesta, dicha señal no se asume como una medición directa permanente, sino como una variable que será obtenida a partir de la información reconstruida por el observador cinemático. De esta manera, el análisis permite verificar si, a partir de una señal relacionada con $r(t)$ y de las entradas conocidas $T(t)$ y $\delta(t)$, es posible estimar las velocidades $v_x(t)$ y $v_y(t)$.

Para simplificar la escritura de las expresiones derivadas del modelo dinámico, se definen

$$\eta_t = v_y - l_t r, \quad \eta_d = v_y + l_d r, \quad (4.3)$$

así como

$$D_t = v_x^2 + \eta_t^2, \quad D_d = v_x^2 + \eta_d^2. \quad (4.4)$$

De acuerdo con el modelo dinámico (3.6), la evolución de la velocidad angular de orientación está dada por

$$\dot{r} = \frac{l_t k_{y_t}}{I_z} \tan^{-1} \left(\frac{\eta_t}{v_x} \right) - \frac{l_d k_{y_d}}{I_z} \cos(\delta) \tan^{-1} \left(\frac{\eta_d}{v_x} \right) + \frac{l_d k_{y_d}}{I_z} \delta \cos(\delta) + \frac{l_d}{I_z} T \sin(\delta). \quad (4.5)$$

A partir de la salida $r(t)$, la primera derivada de Lie permite introducir explícitamente la dependencia respecto a $v_x(t)$ y $v_y(t)$. Posteriormente, la segunda derivada de Lie incorpora la evolución de dichas velocidades dentro del mapa de observabilidad. Por esta razón, se considera

$$\mathcal{O}_d(x_d) = \begin{bmatrix} h_d(x_d) \\ L_{f_d} h_d(x_d) \\ L_{f_d}^2 h_d(x_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Las derivadas parciales de $\dot{r}$ respecto a los estados se definen como

$$\rho_1 = \frac{\partial \dot{r}}{\partial v_x} = \frac{1}{I_z} \left[-\frac{l_t k_{y_t} \eta_t}{D_t} + \frac{l_d k_{y_d} \cos(\delta) \eta_d}{D_d} \right], \quad (4.7)$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \dot{r}}{\partial v_y} = \frac{1}{I_z} \left[\frac{l_t k_{y_t} v_x}{D_t} - \frac{l_d k_{y_d} \cos(\delta) v_x}{D_d} \right], \quad (4.8)$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = -\frac{1}{I_z} \left[\frac{l_t^2 k_{y_t} v_x}{D_t} + \frac{l_d^2 k_{y_d} \cos(\delta) v_x}{D_d} \right]. \quad (4.9)$$

Con estas definiciones, la segunda derivada de Lie puede escribirse como

$$\ddot{r} = \rho_1 \dot{v}_x + \rho_2 \dot{v}_y + \rho_3 \dot{r}, \quad (4.10)$$

donde $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$ y $\dot{r}$ corresponden a las ecuaciones dinámicas (3.4) y (3.5) desarrolladas previamente.

El Jacobiano del mapa de observabilidad se expresa como

$$\sigma_d(x_d) = \frac{\partial \mathcal{O}_d(x_d)}{\partial x_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Las expresiones de la tercera fila se obtienen derivando (4.10) respecto a v_x , v_y y r . Debido a la extensión algebraica de estos términos, se mantienen indicadas mediante derivadas parciales. Esta forma conserva la información necesaria para evaluar el rango del Jacobiano sin introducir expresiones auxiliares que no aportan claridad al análisis.

Considerando que las entradas $\delta(t)$ y $T(t)$ son conocidas, el cálculo simbólico del rango de (4.11) proporciona

$$\text{rank}(\sigma_d(x_d)) = 3 \quad (4.12)$$

en los puntos regulares del dominio de operación considerado.

Al igual que en el análisis de la propiedad local de Lipschitz, se mantiene la restricción

$$v_x(t) \geq \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.1 \text{ m/s}, \quad (4.13)$$

ya que la formulación de los ángulos de deslizamiento deja de ser adecuada cuando la velocidad longitudinal se aproxima a cero.

4.2.2. Observabilidad del modelo cinemático

El modelo cinemático desarrollado en la Sección 3.3 se encuentra definido por

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad u_c(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Para este sistema se consideran disponibles las mediciones de posición:

$$y_c(t) = h_c(x_c(t)) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

La primera derivada de Lie de la función de salida se expresa como

$$L_{f_c} h_c(x_c) = \begin{bmatrix} v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi) \\ v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

En este caso, la función de salida y su primera derivada son suficientes para construir el mapa

$$\mathcal{O}_c(x_c) = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi) \\ v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

El Jacobiano correspondiente se obtiene como

$$\sigma_c(x_c) = \frac{\partial \mathcal{O}_c(x_c)}{\partial x_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -v_x \sin(\psi) - v_y \cos(\psi) \\ 0 & 0 & v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Las dos primeras filas proporcionan directamente rango dos. Para alcanzar rango completo, basta con que alguno de los dos últimos elementos de la tercera columna sea distinto de cero. Ambos términos se anulan cuando se toman los valores

$$v_x(t) = 0, \quad v_y(t) = 0, \quad (4.19)$$

de forma simultánea. Por tanto,

$$\text{rank}(\sigma_c(x_c)) = 3 \quad (4.20)$$

siempre que

$$v_x^2(t) + v_y^2(t) > 0. \quad (4.21)$$

Esta condición posee una interpretación física directa: la orientación $\psi(t)$ puede reconstruirse a partir de la evolución de las posiciones globales cuando el vehículo se encuentra en movimiento. Cuando el AGV permanece completamente detenido, las mediciones $X(t)$ y $Y(t)$ no contienen información suficiente para determinar su orientación.

4.2.3. Conclusiones sobre el análisis de observabilidad de los sistemas

Los análisis anteriores muestran que los estados de ambos sistemas pueden reconstruirse localmente bajo las condiciones de operación establecidas. Para el modelo dinámico, la velocidad angular de orientación $r(t)$ proporciona información suficiente para estimar las velocidades internas $v_x(t)$ y $v_y(t)$. Por otra parte, en el modelo cinemático, las mediciones de posición $X(t)$ y $Y(t)$ permiten reconstruir el ángulo de orientación $\psi(t)$ cuando el vehículo se encuentra en movimiento.

Estos resultados permiten plantear inicialmente dos observadores independientes. Posteriormente, ambas estructuras se integrarán mediante una arquitectura acoplada, en la cual la información reconstruida por el observador cinemático se utilizará para proporcionar una señal relacionada con $r(t)$ al observador dinámico.

4.3. Observador proporcional–integral generalizado (Dinámico)

4.3.1. Modelo T-S Lipschitz dinámico

Para diseñar el observador dinámico se utiliza la representación T-S Lipschitz obtenida en la Sección 3.6:

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \mu_{d_i}(z_d(t)) [A_{d_i}x_d(t) + B_{d_i}u_d(t) + F_{d_i}f_d(F_Lx_d(t))], \quad (4.22)$$

donde

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad u_d(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ T(t) \end{bmatrix}, \quad A_d(x_d(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{d1}(t) & 0 \\ z_{d1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_d(u_d(t)) &= \begin{bmatrix} c_{1p}z_{d2}(t) & c_{2p}z_{d3}(t) \\ c_{1p}z_{d3}(t) & c_{2p}z_{d2}(t) \\ c_{6p}z_{d3}(t) & c_{7p}z_{d2}(t) \end{bmatrix}, \quad F_d(u_d(t)) = \begin{bmatrix} -c_{3p} & -c_{4p}z_{d2}(t) \\ -c_{5p} & -c_{4p}z_{d3}(t) \\ c_{8p} & -c_{6p}z_{d3}(t) \end{bmatrix}, \quad M_d = 8. \end{aligned}$$

Las variables premisas utilizadas para construir los modelos locales se encuentran definidas por

$$z_d(t) = \begin{bmatrix} z_{d1}(t) \\ z_{d2}(t) \\ z_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \sin(\delta(t)) \\ \cos(\delta(t)) \end{bmatrix}.$$

Mientras que las no linealidades correspondientes a los ángulos de deslizamiento se encuentran agrupadas en el vector $f_d(F_Lx_d(t))$, definido previamente en la Sección 3.2.5. Debido a que dichas no linealidades dependen del vector completo de estados dinámicos, se considera

$$f_d(x_d(t)) = \begin{bmatrix} z_{d4}(t) \\ z_{d5}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)} \right) \\ \tan^{-1} \left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)} \right) \end{bmatrix} \quad F_L = I_{n_d}. \quad (4.23)$$

Para el diseño individual del observador se considera disponible la velocidad angular de orientación $r(t)$. Por tanto, la salida del sistema dinámico se define como

$$y_d(t) = C_d x_d(t), \quad C_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Dentro de la arquitectura acoplada, esta señal no se obtiene mediante medición directa. Posteriormente, se describirá la forma en que se obtiene a partir de la información proporcionada por el observador cinemático.

4.3.2. Estructura del observador proporcional–integral generalizado (Dinámico)

El observador se plantea mediante una estructura proporcional–integral (PIO) generalizada obtenida como un caso particular del observador dinámico generalizado (Zetina, 2024). La incorporación de un estado integral proporciona grados de libertad adicionales para el diseño de las ganancias.

De acuerdo con el tratamiento de variables premisas no medibles presentado en la Sección 2.4.1, el observador evalúa las funciones de pertenencia mediante

$$\hat{z}_d(t) = \begin{bmatrix} \hat{r}(t) \\ \sin(\delta(t)) \\ \cos(\delta(t)) \end{bmatrix}.$$

La estructura del observador PIO generalizada se expresa como

$$\dot{\zeta}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \mu_{d_i}(\hat{z}_d(t)) \left[N_{d_i} \zeta_d(t) + H_{d_i} v_d(t) + R_{d_i} y_d(t) + J_{d_i} u_d(t) + T_d F_{d_i} f_d(F_L \hat{x}_d(t)) \right], \quad (4.25)$$

$$\dot{v}_d(t) = C_d \hat{x}_d(t) - y_d(t), \quad (4.26)$$

$$\hat{x}_d(t) = \zeta_d(t) + Q_d y_d(t), \quad (4.27)$$

donde $\zeta_d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ representa el estado de la dinámica interna del observador, $v_d(t) \in \mathbb{R}^{p_d}$ corresponde a un vector integral auxiliar y $\hat{x}_d(t)$ contiene las estimaciones

$$\hat{x}_d(t) = \begin{bmatrix} \hat{v}_x(t) \\ \hat{v}_y(t) \\ \hat{r}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Las matrices N_{d_i} , H_{d_i} , R_{d_i} , J_{d_i} , T_d , Q_d deben determinarse de manera que el error de estimación sea estable y tenga tendencia a reducirse a cero.

4.3.3. Dinámica del error y parametrización del observador PIO generalizado (Dinámico)

Para analizar la convergencia del observador, se define el error auxiliar

$$\epsilon_d(t) = \zeta_d(t) - T_d x_d(t), \quad (4.29)$$

cuya dinámica satisface

$$\dot{\epsilon}_d(t) = \dot{\zeta}_d(t) - T_d \dot{x}_d(t). \quad (4.30)$$

Sustituyendo (4.25) y (4.22) en (4.30), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) & \left[N_{d_i} \zeta_d(t) + H_{d_i} v_d(t) + R_{d_i} y_d(t) + J_{d_i} u_d(t) + T_d F_{d_i} f_d(F_L \hat{x}_d(t)) \right] \\ & - T_d \sum_{i=1}^{M_d} \mu_{d_i}(t) \left[A_{d_i} x_d(t) + B_{d_i} u_d(t) + F_{d_i} f_d(F_L x_d(t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para agrupar las expresiones anteriores mediante las funciones de pertenencia estimadas, se suma y resta el término

$$T_d \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) \left[A_{d_i} x_d(t) + B_{d_i} u_d(t) + F_{d_i} f_d(F_L x_d(t)) \right]. \quad (4.32)$$

Definiendo

$$\Delta_{\mu_d}(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \left[\mu_{d_i}(t) - \hat{\mu}_{d_i}(t) \right] \left[A_{d_i} x_d(t) + B_{d_i} u_d(t) + F_{d_i} f_d(F_L x_d(t)) \right], \quad (4.33)$$

$$\Delta_f(t) = f_d(F_L \hat{x}_d(t)) - f_d(F_L x_d(t)). \quad (4.34)$$

y considerando el término no lineal $\Delta_f(t)$ definido en (4.34), la dinámica del error puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) & \left[(N_{d_i} T_d + R_{d_i} C_d - T_d A_{d_i}) x_d(t) + (J_{d_i} - T_d B_{d_i}) u_d(t) + N_{d_i} \epsilon_d(t) \right. \\ & \left. + H_{d_i} v_d(t) + T_d F_{d_i} \Delta_f(t) \right] - T_d \Delta_{\mu_d}(t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para eliminar la dependencia explícita respecto a $x_d(t)$ y $u_d(t)$, se considera

$$N_{d_i} T_d + R_{d_i} C_d - T_d A_{d_i} = 0, \quad J_{d_i} = T_d B_{d_i}. \quad (4.36)$$

Bajo estas condiciones, la dinámica del error auxiliar (4.35) se reduce a

$$\dot{\epsilon}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) \left[N_{d_i} \epsilon_d(t) + H_{d_i} v_d(t) + T_d F_{d_i} \Delta_f(t) \right] - T_d \Delta_{\mu_d}(t). \quad (4.37)$$

Por otra parte, a partir de (4.27) y (4.29), se obtiene

$$\hat{x}_d(t) = \epsilon_d(t) + (T_d + Q_d C_d) x_d(t). \quad (4.38)$$

Para garantizar que el error auxiliar coincida con el error de estimación, se establece

$$T_d + Q_d C_d = I_{n_d}. \quad (4.39)$$

En consecuencia,

$$\epsilon_d(t) = \hat{x}_d(t) - x_d(t), \quad \dot{v}_d(t) = C_d \epsilon_d(t). \quad (4.40)$$

La restricción (4.39) puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} T_d & Q_d \end{bmatrix} \Omega_d = I_{n_d}, \quad \Omega_d = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ C_d \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Una solución particular se obtiene mediante la pseudoinversa de Moore–Penrose:

$$T_d = \Omega_d^\dagger \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ 0_{p_d \times n_d} \end{bmatrix}, \quad Q_d = \Omega_d^\dagger \begin{bmatrix} 0_{n_d \times p_d} \\ I_{p_d} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

La pseudoinversa de Moore–Penrose constituye una elección particular dentro del conjunto de inversas generalizadas y satisface

$$\Omega_d \Omega_d^\dagger \Omega_d = \Omega_d. \quad (4.43)$$

Definiendo

$$K_{d_i} = R_{d_i} - N_{d_i} Q_d, \quad (4.44)$$

las ganancias restantes pueden recuperarse mediante

$$\begin{aligned} N_{d_i} &= T_d A_{d_i} - K_{d_i} C_d, & R_{d_i} &= K_{d_i} + N_{d_i} Q_d, \\ J_{d_i} &= T_d B_{d_i}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Las matrices K_{d_i} y H_{d_i} se determinarán posteriormente mediante las condiciones matriciales de convergencia.

Para agrupar las dinámicas del error auxiliar (4.37) y del estado integral (4.40), se define

$$w_d(t) = \begin{bmatrix} \epsilon_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Su dinámica se expresa como

$$\dot{w}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) [\mathbb{A}_{d_i} w_d(t) + \mathbb{B}_{d_i} \Delta_f(t)] + \Delta_{P_d}(t), \quad (4.47)$$

donde

$$\mathbb{A}_{d_i} = \begin{bmatrix} N_{d_i} & H_{d_i} \\ C_d & 0_{p_d \times p_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{d_i} = \begin{bmatrix} T_d F_{d_i} \\ 0_{p_d \times o_d} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{P_d}(t) = -\mathbb{T}_d \Delta_{\mu_d}(t), \quad \mathbb{T}_d = \begin{bmatrix} T_d \\ 0_{p_d \times n_d} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Para el modelo dinámico considerado, $o_d = 2$ corresponde a la dimensión del vector no lineal con cota Lipschitz. Sustituyendo N_{d_i} de (4.45) en $\mathbb{A}_{d_i}$ de (4.48) se obtiene

$$\mathbb{A}_{d_i} = \mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d}. \quad (4.49)$$

con las matrices se encuentran definidas como:

$$\mathbb{A}_{1d_i} = \begin{bmatrix} T_d A_{d_i} & 0_{n_d \times p_d} \\ C_d & 0_{p_d \times p_d} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_d = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ 0_{p_d \times n_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}_{2d} = \begin{bmatrix} C_d & 0_{p_d \times p_d} \\ 0_{p_d \times n_d} & -I_{p_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Y}_{d_i} = \Sigma_d \begin{bmatrix} K_{d_i} & H_{d_i} \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

donde $\mathbb{Y}_{d_i}$ corresponde a la matriz desconocida que deberá determinarse. Por tanto, la dinámica aumentada (4.47) puede reescribirse como

$$\dot{w}_d(t) = \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) [(\mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d}) w_d(t) + \mathbb{B}_{d_i} \Delta_f(t)] - \mathbb{T}_d \Delta_{\mu_d}(t). \quad (4.51)$$

4.3.4. Análisis de estabilidad mediante el método de Lyapunov (M. Dinámico)

Para establecer condiciones suficientes de convergencia del observador, se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_d(w_d(t)) = w_d^T(t) X_d w_d(t), \quad X_d = X_d^T > 0. \quad (4.52)$$

La derivada temporal de (4.52) se encuentra dada por

$$\dot{V}_d(w_d(t)) = \dot{w}_d^T(t)X_d w_d(t) + w_d^T(t)X_d \dot{w}_d(t). \quad (4.53)$$

Sustituyendo la dinámica aumentada (4.51), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_d(w_d(t)) = & \sum_{i=1}^{M_d} \hat{\mu}_{d_i}(t) \left\{ w_d^T(t) \left[(\mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d})^T X_d + X_d (\mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d}) \right] w_d(t) \right. \\ & \left. + \boxed{\Delta_f^T(t) \mathbb{B}_{d_i}^T X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \mathbb{B}_{d_i} \Delta_f(t)}_{R_1} \right\} + \boxed{\Delta_{P_d}^T(t) X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \Delta_{P_d}(t)}_{R_2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para acotar los términos correspondientes a las variables premisas no medibles (Recuadro R_2), se aplica la desigualdad de Young:

$$\Delta_{P_d}^T(t) X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \Delta_{P_d}(t) \leq \Delta_{P_d}^T(t) \Delta_{P_d}(t) + w_d^T(t) X_d X_d w_d(t). \quad (4.55)$$

De acuerdo con la Sección 2.4.1, particularizando $\ell = d$:

$$\Delta_{P_d}^T(t) \Delta_{P_d}(t) \leq \mu_{P_d}^2 w_d^T(t) w_d(t). \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{P_d} - \mu_{P_d}^2 I_{n_d+p_d} & X_d^T \\ X_d & I_{n_d+p_d} \end{bmatrix} > 0, \quad Q_{P_d} = Q_{P_d}^T > 0. \quad (4.57)$$

$$X_d^T X_d + \mu_{P_d}^2 I_{n_d+p_d} < Q_{P_d}. \quad (4.58)$$

Por tanto,

$$\Delta_{P_d}^T(t) X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \Delta_{P_d}(t) \leq w_d^T(t) [X_d^T X_d + \mu_{P_d}^2 I_{n_d+p_d}] w_d(t). \quad (4.59)$$

A partir de (4.58), se obtiene

$$\Delta_{P_d}^T(t) X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \Delta_{P_d}(t) < w_d^T(t) Q_{P_d} w_d(t). \quad (4.60)$$

Para acotar los términos correspondientes al Recuadro R_1 , se aplica nuevamente la desigualdad de Young. Para cualquier escalar $\rho_d > 0$:

$$\Delta_f^T(t) \mathbb{B}_{d_i}^T X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \mathbb{B}_{d_i} \Delta_f(t) \leq \rho_d \Delta_f^T(t) \Delta_f(t) + \frac{1}{\rho_d} w_d^T(t) X_d \mathbb{B}_{d_i} \mathbb{B}_{d_i}^T X_d w_d(t). \quad (4.61)$$

De acuerdo con la propiedad local de Lipschitz establecida en el Anexo A.5, existe una constante $\gamma_d > 0$ tal que

$$\|\Delta_f(t)\| \leq \gamma_d \|F_L (\hat{x}_d(t) - x_d(t))\|. \quad (4.62)$$

Al elevar ambos lados al cuadrado, la desigualdad (4.62) puede escribirse como

$$\Delta_f^T(t) \Delta_f(t) \leq \gamma_d^2 (\hat{x}_d(t) - x_d(t))^T F_L^T F_L (\hat{x}_d(t) - x_d(t)). \quad (4.63)$$

Sustituyendo $\epsilon_d(t)$ de (4.40) en (4.63), la desigualdad (4.61) queda determinada como

$$\Delta_f^T(t) \mathbb{B}_{d_i}^T X_d w_d(t) + w_d^T(t) X_d \mathbb{B}_{d_i} \Delta_f(t) \leq \rho_d \gamma_d^2 w_d^T(t) \bar{F}_L^T \bar{F}_L w_d(t) + \frac{1}{\rho_d} w_d^T(t) X_d \mathbb{B}_{d_i} \mathbb{B}_{d_i}^T X_d w_d(t). \quad (4.64)$$

donde

$$\bar{F}_L = \begin{bmatrix} F_L & 0_{n_d \times p_d} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

Sustituyendo las desigualdades (4.60) y (4.64) en (4.54), se obtienen las condiciones suficientes para garantizar $\dot{V}_d < 0$, requiriendo

$$(\mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d})^T X_d + X_d (\mathbb{A}_{1d_i} - \mathbb{Y}_{d_i} \mathbb{A}_{2d}) + Q_{P_d} + \rho_d \gamma_d^2 \bar{F}_L^T \bar{F}_L + \frac{1}{\rho_d} X_d \mathbb{B}_{d_i} \mathbb{B}_{d_i}^T X_d < 0, \quad (4.66)$$

para cada modelo local $i \in \{1, \dots, M_d\}$.

Definiendo

$$\Phi_{d_i} = X_d \mathbb{Y}_{d_i}, \quad (4.67)$$

la condición (4.66) puede reescribirse como

$$\mathbb{A}_{1d_i}^T X_d - \mathbb{A}_{2d}^T \Phi_{d_i}^T + X_d \mathbb{A}_{1d_i} - \Phi_{d_i} \mathbb{A}_{2d} + Q_{P_d} + \rho_d \gamma_d^2 \bar{F}_L^T \bar{F}_L + \frac{1}{\rho_d} X_d \mathbb{B}_{d_i} \mathbb{B}_{d_i}^T X_d < 0. \quad (4.68)$$

Aplicando el complemento de Schur, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1d_i}^T X_d - \mathbb{A}_{2d}^T \Phi_{d_i}^T + X_d \mathbb{A}_{1d_i} - \Phi_{d_i} \mathbb{A}_{2d} + Q_{P_d} + \rho_d \gamma_d^2 \bar{F}_L^T \bar{F}_L & X_d \mathbb{B}_{d_i} \\ \mathbb{B}_{d_i}^T X_d & -\rho_d I_{o_d} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.69)$$

La desigualdad (4.69) contiene el producto entre la matriz de Lyapunov X_d y la matriz $\mathbb{Y}_{d_i}$, la cual agrupa las ganancias K_{d_i} y H_{d_i} . Para separar estas variables y obtener condiciones resolubles mediante LMIs, se aplica el lema de eliminación presentado en Anexo A.3.

Se consideran las particiones

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{d11} & X_{d12} \\ X_{d12}^T & X_{d22} \end{bmatrix} > 0, \quad Q_{P_d} = \begin{bmatrix} Q_{P_{d11}} & Q_{P_{d12}} \\ Q_{P_{d12}}^T & Q_{P_{d22}} \end{bmatrix} > 0. \quad (4.70)$$

Utilizando la definición de Φ_{d_i} dada en (4.67), la desigualdad (4.69) puede escribirse como

$$(\mathcal{B}_d \Phi_{d_i} \mathcal{C}_d) + (\mathcal{B}_d \Phi_{d_i} \mathcal{C}_d)^T + \mathcal{D}_{d_i} < 0, \quad (4.71)$$

donde

$$\mathcal{B}_d = \begin{bmatrix} -I_{n_d+p_d} \\ 0_{o_d \times (n_d+p_d)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} C_d & 0_{p_d \times p_d} & 0_{p_d \times o_d} \\ 0_{p_d \times n_d} & -I_{p_d} & 0_{p_d \times o_d} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{d_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{d_i}^{11} & \mathcal{D}_{d_i}^{12} & X_{d11} T_d F_{d_i} \\ * & Q_{P_{d22}} & X_{d12}^T T_d F_{d_i} \\ * & * & -\rho_d I_{o_d} \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{d_i}^{11} &= \text{He} \left\{ A_{d_i}^T T_d^T X_{d11} + C_d^T X_{d12}^T \right\} + Q_{P_{d11}} + \rho_d \gamma_d^2 F_L^T F_L, \\ \mathcal{D}_{d_i}^{12} &= A_{d_i}^T T_d^T X_{d12} + C_d^T X_{d22} + Q_{P_{d12}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

De acuerdo con el lema de eliminación, existe una matriz Φ_{d_i} que satisface (4.71) si se cumplen

$$\mathcal{B}_d^{\perp T} \mathcal{D}_{d_i} \mathcal{B}_d^{\perp} < 0, \quad \mathcal{C}_d^{\perp T} \mathcal{D}_{d_i} \mathcal{C}_d^{\perp} < 0, \quad (4.74)$$

para cada modelo local $i \in \{1, \dots, M_d\}$.

Las matrices $\mathcal{B}_d^{\perp}$ y $\mathcal{C}_d^{\perp}$ representan bases de los espacios nulos correspondientes. Pueden seleccionarse

$$\mathcal{B}_d^{\perp} = \begin{bmatrix} 0_{(n_d+p_d) \times o_d} \\ I_{o_d} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_d^{\perp} = \begin{bmatrix} C_d^{\perp} & 0_{n_d \times o_d} \\ 0_{p_d \times (n_d-p_d)} & 0_{p_d \times o_d} \\ 0_{o_d \times (n_d-p_d)} & I_{o_d} \end{bmatrix}.$$

Las condiciones (4.74) se resuelven junto con (4.57) y

$$X_d = X_d^T > 0.$$

Una vez resueltas las LMIs, se consideran las factorizaciones compatibles

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{l_d} \mathcal{B}_{r_d}, \quad \mathcal{C}_d = \mathcal{C}_{l_d} \mathcal{C}_{r_d}. \quad (4.75)$$

La matriz Φ_{d_i} se obtiene como

$$\Phi_{d_i} = \mathcal{B}_{r_d}^{\dagger} \mathcal{K}_{d_i} \mathcal{C}_{l_d}^{\dagger} + \mathcal{Z}_d - \mathcal{B}_{r_d}^{\dagger} \mathcal{B}_{r_d} \mathcal{Z}_d \mathcal{C}_{l_d} \mathcal{C}_{l_d}^{\dagger}, \quad (4.76)$$

donde

$$\mathcal{K}_{d_i} = -\mathcal{R}_{0_d}^{-1} \mathcal{B}_{l_d}^T \mathcal{V}_{d_i} \mathcal{C}_{r_d}^T \left(\mathcal{C}_{r_d} \mathcal{V}_{d_i} \mathcal{C}_{r_d}^T \right)^{-1} + \mathcal{S}_{d_i}^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_d \left(\mathcal{C}_{r_d} \mathcal{V}_{d_i} \mathcal{C}_{r_d}^T \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.77)$$

$$\mathcal{S}_{d_i} = \mathcal{R}_{0_d}^{-1} - \mathcal{R}_{0_d}^{-1} \mathcal{B}_{l_d}^T \left[\mathcal{V}_{d_i} - \mathcal{V}_{d_i} \mathcal{C}_{r_d}^T \left(\mathcal{C}_{r_d} \mathcal{V}_{d_i} \mathcal{C}_{r_d}^T \right)^{-1} \mathcal{C}_{r_d} \mathcal{V}_{d_i} \right] \mathcal{B}_{l_d} \mathcal{R}_{0_d}^{-1}, \quad (4.78)$$

$$\mathcal{V}_{d_i} = \left(\mathcal{B}_{l_d} \mathcal{R}_{0_d}^{-1} \mathcal{B}_{l_d}^T - \mathcal{D}_{d_i} \right)^{-1} > 0. \quad (4.79)$$

Las matrices $\mathcal{R}_{0_d}$, $\mathcal{L}_d$ y $\mathcal{Z}_d$ son matrices auxiliares de dimensiones compatibles seleccionadas de acuerdo con las condiciones establecidas por el lema de eliminación. La notación $(\cdot)^\dagger$ representa la pseudoinversa de Moore–Penrose utilizada durante la implementación numérica.

A partir de (4.67), se obtiene

$$\mathbb{Y}_{d_i} = X_d^{-1} \Phi_{d_i}. \quad (4.80)$$

Las matrices K_{d_i} y H_{d_i} se recuperan mediante

$$\begin{aligned} K_{d_i} &= \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0_{n_d \times p_d} \end{bmatrix} \mathbb{Y}_{d_i} \begin{bmatrix} I_{p_d} \\ 0_{p_d \times p_d} \end{bmatrix}, \\ H_{d_i} &= \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0_{n_d \times p_d} \end{bmatrix} \mathbb{Y}_{d_i} \begin{bmatrix} 0_{p_d \times p_d} \\ I_{p_d} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Una vez obtenidas K_{d_i} y H_{d_i} , las matrices restantes del observador proporcional–integral se calculan mediante la parametrización definida en (4.45), es decir,

$$N_{d_i} = T_d A_{d_i} - K_{d_i} C_d, \quad R_{d_i} = K_{d_i} + N_{d_i} Q_d, \quad J_{d_i} = T_d B_{d_i}.$$

La matriz R_{d_i} corresponde a la ganancia que multiplica la salida $y_d(t)$ dentro del observador dinámico.

4.4. Observador proporcional–integral generalizado (Cinemático)

4.4.1. Modelo T-S cinemático

Para diseñar el observador cinemático se utiliza la representación T-S obtenida en la Sección 3.6:

$$\dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^{M_c} \mu_{c_i}(z_c(t)) B_{c_i} u_c(t), \quad (4.82)$$

donde

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad B_c(x_c(t)) = \begin{bmatrix} z_{c1}(t) & -z_{c2}(t) & 0 \\ z_{c2}(t) & z_{c1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_c(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad M_c = 4.$$

Las variables premisas utilizadas para construir los modelos locales corresponden a

$$z_c(t) = \begin{bmatrix} z_{c1}(t) \\ z_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \end{bmatrix}.$$

A diferencia del modelo dinámico, la representación cinemática no contiene una matriz A_{c_i} ni términos no lineales tratados mediante una cota Lipschitz. Por esta razón, el desarrollo del observador resulta más compacto.

Las salidas disponibles corresponden a las posiciones globales:

$$y_c(t) = C_c x_c(t), \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Para el diseño individual del observador se consideran disponibles las velocidades locales contenidas en $u_c(t)$. Posteriormente, dentro de la arquitectura acoplada, estas señales serán proporcionadas por el observador dinámico.

4.4.2. Estructura del observador proporcional–integral generalizado (Cinemático)

El observador cinemático se plantea mediante una estructura proporcional–integral análoga a la empleada para el sistema dinámico. Debido a la forma del modelo (4.82), en este diseño no intervienen términos no lineales de tipo Lipschitz.

El observador evalúa las funciones de pertenencia mediante

$$\hat{z}_c(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}_{c1}(t) \\ \hat{z}_{c2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\psi}(t)) \\ \sin(\hat{\psi}(t)) \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, la estructura del observador PIO generalizado se escribe para cada modelo local como

$$\dot{\zeta}_c(t) = \sum_{i=1}^{M_c} \hat{\mu}_{c_i}(t) \left[N_{c_i} \zeta_c(t) + H_{c_i} v_c(t) + R_{c_i} y_c(t) + J_{c_i} u_c(t) \right], \quad (4.84)$$

$$\dot{v}_c(t) = C_c \hat{x}_c(t) - y_c(t), \quad (4.85)$$

$$\hat{x}_c(t) = \zeta_c(t) + Q_c y_c(t), \quad (4.86)$$

donde $\zeta_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ representa la dinámica interna del observador, $v_c(t) \in \mathbb{R}^{p_c}$ corresponde al estado auxiliar integral y $\hat{x}_c(t)$ contiene las estimaciones

$$\hat{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{Y}(t) \\ \hat{\psi}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Las matrices N_{c_i} , H_{c_i} , R_{c_i} , J_{c_i} , T_c y Q_c deben determinarse de manera que el error de estimación se estabilice y tienda a cero.

4.4.3. Dinámica del error y parametrización inicial (Cinemático)

Para analizar la convergencia del observador, se define el error auxiliar

$$\epsilon_c(t) = \zeta_c(t) - T_c x_c(t), \quad (4.88)$$

cuya dinámica satisface

$$\dot{\epsilon}_c(t) = \dot{\zeta}_c(t) - T_c \dot{x}_c(t). \quad (4.89)$$

Para simplificar la notación, se definen las funciones de pertenencia reales y estimadas como

$$\mu_{c_i}(t) = \mu_{c_i}(z_c(t)), \quad \hat{\mu}_{c_i}(t) = \mu_{c_i}(\hat{z}_c(t)).$$

Al sustituir (4.82) y (4.84) en (4.89), y sumar y restar los términos evaluados mediante las funciones de pertenencia estimadas, se define

$$\Delta_{\mu_c}(t) = \sum_{i=1}^{M_c} [\mu_{c_i}(t) - \hat{\mu}_{c_i}(t)] B_{c_i} u_c(t). \quad (4.90)$$

La dinámica del error puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_c(t) = \sum_{i=1}^{M_c} \hat{\mu}_{c_i}(t) & \left[(N_{c_i} T_c + R_{c_i} C_c) x_c(t) + (J_{c_i} - T_c B_{c_i}) u_c(t) \right. \\ & \left. + N_{c_i} \epsilon_c(t) + H_{c_i} v_c(t) \right] - T_c \Delta_{\mu_c}(t). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Para eliminar la dependencia explícita respecto a $x_c(t)$ y $u_c(t)$, se considera

$$N_{c_i}T_c + R_{c_i}C_c = 0, \quad J_{c_i} = T_cB_{c_i}. \quad (4.92)$$

Bajo estas condiciones, la dinámica del error (4.91) se reduce a

$$\dot{\epsilon}_c(t) = \sum_{i=1}^{M_c} \hat{\mu}_{c_i}(t) [N_{c_i}\epsilon_c(t) + H_{c_i}v_c(t)] - T_c\Delta_{\mu_c}(t). \quad (4.93)$$

Por otra parte, a partir de (4.86) y (4.88), se obtiene

$$\hat{x}_c(t) = \epsilon_c(t) + (T_c + Q_cC_c)x_c(t). \quad (4.94)$$

Para garantizar que el error auxiliar coincida con el error de estimación, se establece

$$T_c + Q_cC_c = I_{n_c}. \quad (4.95)$$

En consecuencia,

$$\epsilon_c(t) = \hat{x}_c(t) - x_c(t), \quad \dot{v}_c(t) = C_c\epsilon_c(t). \quad (4.96)$$

La restricción (4.95) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} T_c & Q_c \end{bmatrix} \Omega_c = I_{n_c}, \quad \Omega_c = \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ C_c \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Una solución particular se obtiene mediante la pseudoinversa de Moore–Penrose:

$$T_c = \Omega_c^\dagger \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0_{p_c \times n_c} \end{bmatrix}, \quad Q_c = \Omega_c^\dagger \begin{bmatrix} 0_{n_c \times p_c} \\ I_{p_c} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Definiendo

$$K_{c_i} = R_{c_i} - N_{c_i}Q_c, \quad (4.99)$$

las ganancias restantes pueden recuperarse mediante

$$\begin{aligned} N_{c_i} &= -K_{c_i}C_c, & R_{c_i} &= K_{c_i} + N_{c_i}Q_c, \\ J_{c_i} &= T_cB_{c_i}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Las matrices K_{c_i} y H_{c_i} se determinarán mediante las condiciones matriciales de convergencia.

4.4.4. Representación aumentada de la dinámica del error (Cinemático)

Para agrupar las dinámicas del error auxiliar y del estado integral, se define

$$w_c(t) = \begin{bmatrix} \epsilon_c(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Su dinámica se expresa como

$$\dot{w}_c(t) = \sum_{i=1}^{M_c} \hat{\mu}_{c_i}(t) \mathbb{A}_{c_i} w_c(t) + \Delta_{P_c}(t), \quad (4.102)$$

donde

$$\mathbb{A}_{c_i} = \begin{bmatrix} N_{c_i} & H_{c_i} \\ C_c & 0_{p_c \times p_c} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{P_c}(t) = -\mathbb{T}_c \Delta_{\mu_c}(t), \quad \mathbb{T}_c = \begin{bmatrix} T_c \\ 0_{p_c \times n_c} \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Para obtener una parametrización lineal de $\mathbb{A}_{c_i}$, se definen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{1c} &= \begin{bmatrix} 0_{n_c \times n_c} & 0_{n_c \times p_c} \\ C_c & 0_{p_c \times p_c} \end{bmatrix}, & \Sigma_c &= \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0_{p_c \times n_c} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_{2c} &= \begin{bmatrix} C_c & 0_{p_c \times p_c} \\ 0_{p_c \times n_c} & -I_{p_c} \end{bmatrix}, & \mathbb{Y}_{c_i} &= \Sigma_c \begin{bmatrix} K_{c_i} & H_{c_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Con estas definiciones,

$$\mathbb{A}_{c_i} = \mathbb{A}_{1c} - \mathbb{Y}_{c_i} \mathbb{A}_{2c}. \quad (4.105)$$

4.4.5. Análisis de estabilidad mediante el método de Lyapunov (Cinemático)

Para establecer condiciones suficientes de convergencia, se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_c(w_c(t)) = w_c^T(t) X_c w_c(t), \quad X_c = X_c^T > 0. \quad (4.106)$$

Sustituyendo (4.102) en la derivada temporal de (4.106), se obtiene

$$\dot{V}_c = \sum_{i=1}^{M_c} \hat{\mu}_{c_i}(t) \left\{ w_c^T \text{He} \{ X_c (\mathbb{A}_{1c} - \mathbb{Y}_{c_i} \mathbb{A}_{2c}) \} w_c \right\} + \Delta_{P_c}^T X_c w_c + w_c^T X_c \Delta_{P_c}. \quad (4.107)$$

De acuerdo con la Sección 2.4.1, particularizando $\ell = c$, se cumple

$$\begin{bmatrix} Q_{P_c} - \mu_{P_c}^2 I_{n_c+p_c} & X_c^T \\ X_c & I_{n_c+p_c} \end{bmatrix} > 0, \quad Q_{P_c} = Q_{P_c}^T > 0 \quad (4.108)$$

$$\Delta_{P_c}^T X_c w_c + w_c^T X_c \Delta_{P_c} < w_c^T Q_{P_c} w_c. \quad (4.109)$$

Por lo tanto, una condición suficiente para garantizar $\dot{V}_c < 0$ puede escribirse inicialmente como

$$\text{He} \{X_c (\mathbb{A}_{1c} - \mathbb{Y}_{c_i} \mathbb{A}_{2c})\} + Q_{P_c} < 0, \quad (4.110)$$

para cada modelo local $i \in \{1, \dots, M_c\}$.

La condición anterior aún conserva ganancias dependientes del índice i . Sin embargo, las matrices $\mathbb{A}_{1c}$ y $\mathbb{A}_{2c}$ no cambian entre modelos locales, ya que la representación T-S cinemática no contiene una matriz A_{c_i} . La única dependencia local aparece en B_{c_i} , la cual queda incorporada en la ganancia de entrada al determinar

$$J_{c_i} = T_c B_{c_i}.$$

Por esta razón, puede adoptarse una matriz común de ganancias para la parte del error:

$$\mathbb{Y}_{c_i} = \mathbb{Y}_c, \quad i \in \{1, \dots, M_c\}.$$

Con esta elección, la condición de estabilidad se reduce a una única LMI dada por

$$\text{He} \{X_c (\mathbb{A}_{1c} - \mathbb{Y}_c \mathbb{A}_{2c})\} + Q_{P_c} < 0. \quad (4.111)$$

Definiendo

$$\Phi_c = X_c \mathbb{Y}_c, \quad (4.112)$$

la condición (4.111) puede escribirse como

$$\text{He} \{X_c \mathbb{A}_{1c} - \Phi_c \mathbb{A}_{2c}\} + Q_{P_c} < 0. \quad (4.113)$$

La condición (4.113) se resuelve junto con la condición general para variables premisas no medibles (4.108). Una vez resueltas las LMIs, se obtiene

$$\mathbb{Y}_c = X_c^{-1} \Phi_c. \quad (4.114)$$

Las matrices K_c y H_c se recuperan mediante

$$\begin{aligned} K_c &= \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times p_c} \end{bmatrix} \mathbb{Y}_c \begin{bmatrix} I_{p_c} \\ 0_{p_c \times p_c} \end{bmatrix}, \\ H_c &= \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times p_c} \end{bmatrix} \mathbb{Y}_c \begin{bmatrix} 0_{p_c \times p_c} \\ I_{p_c} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Finalmente, las ganancias del observador proporcional–integral se determinan como

$$\begin{aligned} N_c &= -K_c C_c, & R_c &= K_c + N_c Q_c, \\ J_{c_i} &= T_c B_{c_i}, & i &\in \{1, \dots, M_c\}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

La matriz R_c corresponde a la ganancia que multiplica la salida $y_c(t)$, mientras que J_{c_i} conserva la dependencia respecto al modelo local debido a la presencia de B_{c_i} en la representación T-S cinemática.

4.5. Arquitectura y simulación de los observadores acoplados

Con la finalidad de evaluar la convergencia de los observadores propuestos, se realizó una simulación en lazo abierto utilizando los parámetros presentados en la Tabla 3.1 y las mismas señales de entrada utilizadas previamente en la simulación del modelo no lineal de la Sección 3.4.1. En esta prueba, el modelo no lineal del AGV evoluciona únicamente bajo las entradas aplicadas, mientras que los observadores operan en paralelo para reconstruir los estados dinámicos y cinemáticos. De esta manera, la comparación entre las variables reales y estimadas permite evaluar el desempeño de estimación sin la intervención de una ley de control sobre la trayectoria del vehículo.

Para esta simulación se consideraron condiciones iniciales diferentes entre el modelo no lineal y los observadores. Por esta razón, se espera que los errores de estimación presenten un transitorio inicial generado por las condiciones seleccionadas. Las condiciones iniciales utilizadas fueron

$$\begin{aligned} v_x(0) &= 0.1, & v_y(0) &= 0, & r(0) &= 0, & X(0) &= 0, & Y(0) &= 0, & \psi(0) &= 0, \\ \hat{v}_x(0) &= 2, & \hat{v}_y(0) &= 2, & \hat{r}(0) &= 2, & \hat{X}(0) &= 50, & \hat{Y}(0) &= 50, & \hat{\psi}(0) &= 0.5. \end{aligned}$$

Las velocidades locales v_x y v_y están dadas en m/s, la velocidad angular de orientación r en rad/s, las posiciones globales X y Y en m, y la orientación ψ en rad.

La arquitectura general utilizada para la simulación se muestra en la Figura 4.1. En dicha arquitectura, el sistema dinámico recibe como entradas la fuerza de tracción T y el ángulo de dirección δ , y genera las variables locales v_x , v_y y r . Estas variables alimentan al sistema cinemático, el cual determina la evolución de la posición global X , Y y del ángulo de orientación ψ .

De forma paralela, el observador dinámico utiliza las entradas T y δ para estimar las variables $\hat{v}_x$, $\hat{v}_y$ y $\hat{r}$. A su vez, dichas estimaciones son utilizadas por el observador cinemático para reconstruir $\hat{X}$, $\hat{Y}$ y $\hat{\psi}$, considerando como salidas disponibles las posiciones globales X y Y . Finalmente, a partir de la dinámica del observador cinemático se obtiene una señal estimada de velocidad angular, denotada como $\hat{r}_c$, la cual se retroalimenta hacia el observador dinámico para establecer el acoplamiento entre ambos sistemas de estimación.

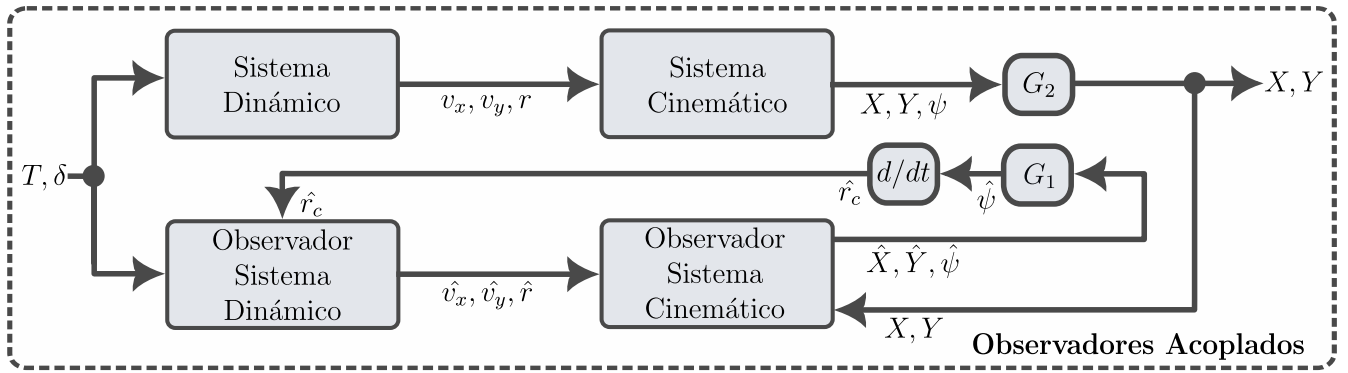


Fig. 4.1. Arquitectura de observadores acoplados para la estimación de variables dinámicas y cinemáticas del AGV.

La señal $\hat{r}_c$ no se calcula mediante una derivada numérica directa de $\hat{\psi}(t)$. En su lugar, se obtiene a partir de la ecuación de estimación del observador cinemático. Definiendo

$$E_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y considerando (4.86), se tiene

$$\hat{r}_c(t) = E_\psi \dot{\hat{x}}_c(t) = E_\psi \left[\dot{\zeta}_c(t) + Q_c \dot{y}_c(t) \right].$$

Esta forma de cálculo evita derivar numéricamente la señal estimada de orientación, lo que reduce la aparición de picos artificiales durante el transitorio inicial. Además, durante la implementación se limitó la variación incremental de $\hat{r}_c$ en el intervalo

$$\Delta \hat{r}_c(t) \in [-0.1, 0.1],$$

con el fin de evitar cambios abruptos provocados por la rápida convergencia inicial del observador cinemático. Esta saturación se utiliza únicamente como protección numérica y no modifica la estructura de diseño de los observadores.

4.5.1. Ganancias utilizadas en la simulación

Las ganancias empleadas en la simulación fueron obtenidas mediante la solución de las condiciones matriciales desarrolladas para los observadores dinámico y cinemático. A continuación, se reportan los valores numéricos utilizados en la implementación, con el propósito de hacer reproducibles los resultados presentados posteriormente.

Para el observador dinámico, la matriz de Lyapunov obtenida fue

$$X_d = \begin{bmatrix} 0.0034 & -0.0024 & 0.0002 & -0.0000 \\ -0.0024 & 0.0023 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0002 & -0.0001 & 0.2535 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.2530 \end{bmatrix}.$$

Las matrices N_{d_i} , R_{d_i} y J_{d_i} , para $i = 1, \dots, 8$, fueron:

$$N_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.0642 \\ 0 & 0 & 3.9936 \\ 0 & 0 & -0.0169 \end{bmatrix}, \quad R_{d_1} = \begin{bmatrix} -2.0321 \\ -1.9968 \\ 0.0084 \end{bmatrix}, \quad J_{d_1} = \begin{bmatrix} 9.8315 & 0.0005 \\ 26.8601 & 0.0002 \\ 104.4306 & 0.0006 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6572 \\ 0 & 0 & -2.7122 \\ 0 & 0 & -0.0164 \end{bmatrix}, \quad R_{d_2} = \begin{bmatrix} -0.3286 \\ 1.3561 \\ 0.0082 \end{bmatrix}, \quad J_{d_2} = \begin{bmatrix} 9.8315 & 0.0006 \\ 36.6916 & 0.0002 \\ 142.6549 & 0.0006 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6694 \\ 0 & 0 & 3.6526 \\ 0 & 0 & -0.0141 \end{bmatrix}, \quad R_{d_3} = \begin{bmatrix} -0.3347 \\ -1.8263 \\ 0.0070 \end{bmatrix}, \quad J_{d_3} = \begin{bmatrix} 26.8601 & 0.0005 \\ 26.8601 & 0.0005 \\ 104.4306 & 0.0018 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.1925 \\ 0 & 0 & -2.1600 \\ 0 & 0 & -0.0129 \end{bmatrix}, \quad R_{d_4} = \begin{bmatrix} 1.5963 \\ 1.0800 \\ 0.0064 \end{bmatrix}, \quad J_{d_4} = \begin{bmatrix} 26.8601 & 0.0006 \\ 36.6916 & 0.0005 \\ 142.6549 & 0.0018 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_5} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3347 & 4.0559 \\ 0.3347 & 0 & 3.9838 \\ 0 & 0 & -0.0169 \end{bmatrix}, \quad R_{d_5} = \begin{bmatrix} -2.0279 \\ -1.9919 \\ 0.0084 \end{bmatrix}, \quad J_{d_5} = \begin{bmatrix} 9.8315 & 0.0005 \\ 26.8601 & 0.0002 \\ 104.4306 & 0.0006 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_6} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3347 & 0.6319 \\ 0.3347 & 0 & -2.7444 \\ 0 & 0 & -0.0164 \end{bmatrix}, \quad R_{d_6} = \begin{bmatrix} -0.3160 \\ 1.3722 \\ 0.0082 \end{bmatrix}, \quad J_{d_6} = \begin{bmatrix} 9.8315 & 0.0006 \\ 36.6916 & 0.0002 \\ 142.6549 & 0.0006 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_7} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3347 & 0.6894 \\ 0.3347 & 0 & 3.6781 \\ 0 & 0 & -0.0141 \end{bmatrix}, \quad R_{d_7} = \begin{bmatrix} -0.3447 \\ -1.8390 \\ 0.0070 \end{bmatrix}, \quad J_{d_7} = \begin{bmatrix} 26.8601 & 0.0005 \\ 26.8601 & 0.0005 \\ 104.4306 & 0.0018 \end{bmatrix}.$$

$$N_{d_8} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3347 & -3.1788 \\ 0.3347 & 0 & -2.1431 \\ 0 & 0 & -0.0129 \end{bmatrix}, \quad R_{d_8} = \begin{bmatrix} 1.5894 \\ 1.0716 \\ 0.0064 \end{bmatrix}, \quad J_{d_8} = \begin{bmatrix} 26.8601 & 0.0006 \\ 36.6916 & 0.0005 \\ 142.6549 & 0.0018 \end{bmatrix}.$$

Para el observador cinemático, la matriz de Lyapunov obtenida fue

$$X_c = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1057 & 0.0153 & -0.0002 & -0.0002 & 0.0005 \\ 0.0153 & 0.1057 & -0.0002 & 0.0005 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0002 & 0.0781 & 0.0191 & 0.0191 \\ -0.0002 & 0.0005 & 0.0191 & 0.0857 & 0.0278 \\ 0.0005 & -0.0002 & 0.0191 & 0.0278 & 0.0857 \end{bmatrix}.$$

Las ganancias comunes del observador cinemático fueron

$$N_c = \begin{bmatrix} -6.0068 & -2.4303 & 0 \\ -2.4294 & -6.0068 & 0 \\ -0.0324 & -0.0321 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} 3.0034 & 1.2152 \\ 1.2147 & 3.0034 \\ 0.0162 & 0.0160 \end{bmatrix}.$$

Las matrices J_{c_i} , para $i = 1, \dots, 4$, conservan la dependencia respecto al modelo local:

$$J_{c_1} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad J_{c_2} = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.5000 & 0 \\ 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

$$J_{c_3} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad J_{c_4} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

4.5.2. Resultados del observador dinámico

La Figura 4.2 presenta la comparación entre las variables dinámicas del modelo no lineal y las estimaciones proporcionadas por el observador dinámico. En particular, se muestran la velocidad

longitudinal v_x , la velocidad lateral v_y y la velocidad angular de orientación r . A pesar de que las estimaciones parten de condiciones iniciales diferentes y de que durante el transitorio reciben la señal $\hat{r}_c$ proveniente del observador cinemático, las variables estimadas convergen hacia las trayectorias reales y posteriormente reproducen su comportamiento.

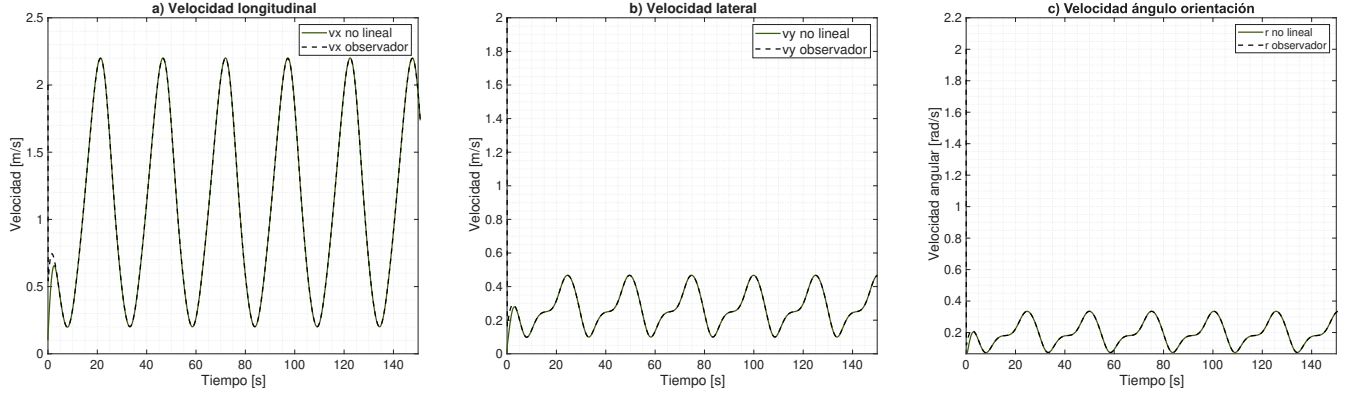


Fig. 4.2. Comparación entre las variables dinámicas del modelo no lineal y las estimaciones del observador dinámico: v_x , v_y y r .

El comportamiento anterior se confirma mediante los errores de estimación mostrados en la Figura 4.3. Debido a que los errores iniciales están determinados principalmente por las condiciones iniciales impuestas, la gráfica se presenta en una escala recortada para observar con mayor claridad la evolución posterior al transitorio inicial. En dicha región, los errores correspondientes a v_x , v_y y r permanecen acotados y evolucionan en una escala reducida, lo cual muestra la capacidad del observador dinámico para reconstruir las variables locales del vehículo.

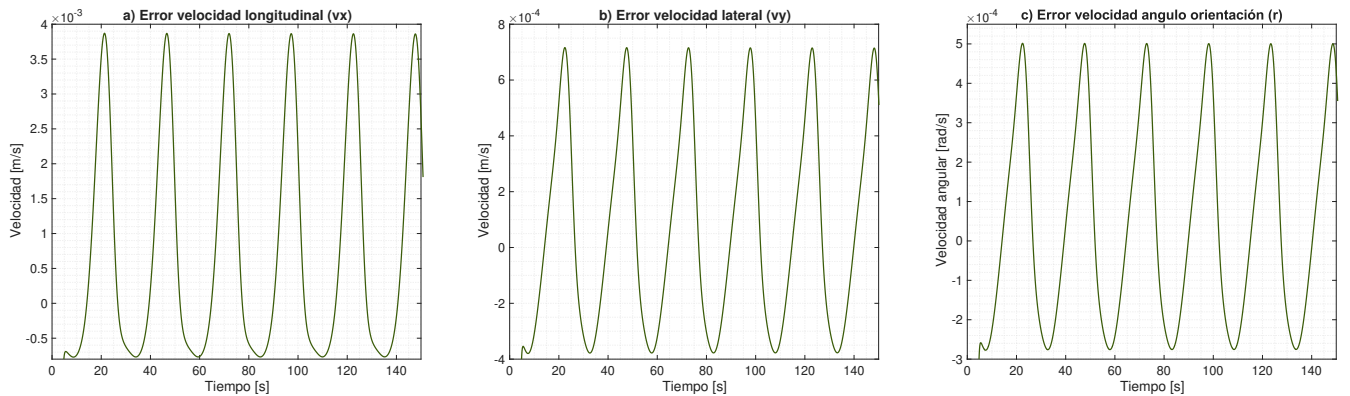


Fig. 4.3. Errores de estimación del observador dinámico para v_x , v_y y r .

4.5.3. Resultados del observador cinemático

La Figura 4.4 muestra la comparación entre las variables cinemáticas del modelo no lineal y las estimaciones obtenidas mediante el observador cinemático. Se incluye la trayectoria en el plano $X - Y$, así como la evolución temporal de las posiciones $X(t)$, $Y(t)$ y la señal $\hat{r}_c(t)$ obtenida a partir de la estimación de la orientación.

En el plano global, la diferencia inicial entre las trayectorias se debe a que las posiciones estimadas fueron inicializadas con un desplazamiento de 50 m en X y 50 m en Y . Posteriormente, el observador reduce dicha diferencia y reproduce la evolución de las variables cinemáticas del modelo. Este resultado es relevante porque, durante el intervalo inicial, el observador cinemático también recibe velocidades locales estimadas que aún se encuentran en proceso de convergencia. A pesar de ello, el esquema mantiene una evolución acotada y logra reconstruir las variables globales del AGV.

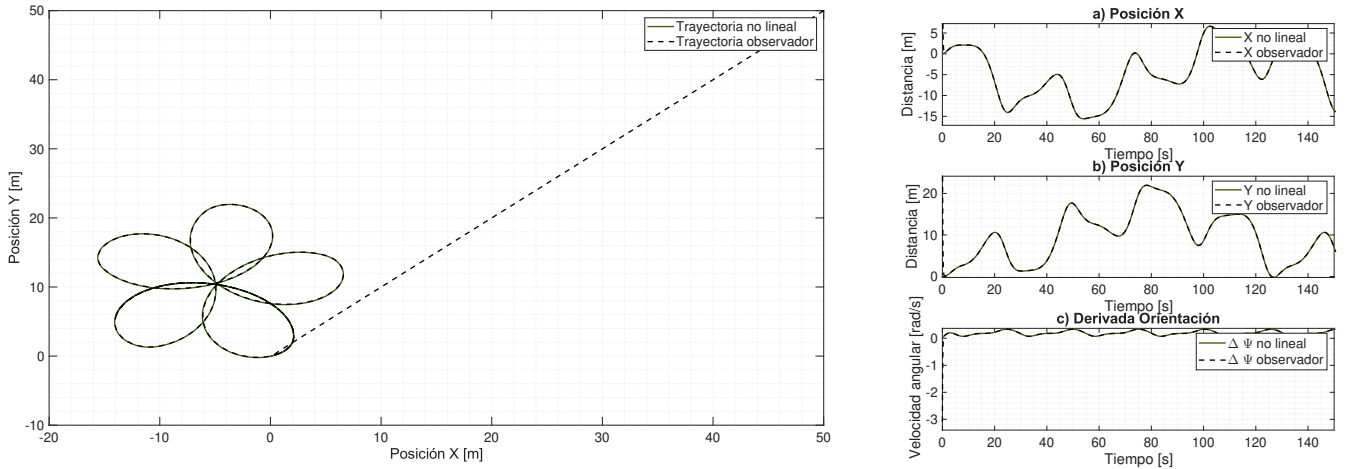


Fig. 4.4. Comparación entre las variables cinemáticas del modelo no lineal y las estimaciones del observador cinemático: plano $X - Y$, X , Y y $\hat{r}_c$.

Los errores de estimación del observador cinemático se presentan en la Figura 4.5. Al igual que en el caso dinámico, la gráfica de error se muestra en una escala recortada para apreciar el comportamiento posterior al transitorio provocado por las condiciones iniciales. Los errores de X , Y y de la señal $\hat{r}_c$ permanecen acotados en una escala reducida. Esto indica que el observador cinemático reconstruye las variables globales del vehículo aun cuando sus entradas provienen de estimaciones dinámicas y no directamente del modelo no lineal.

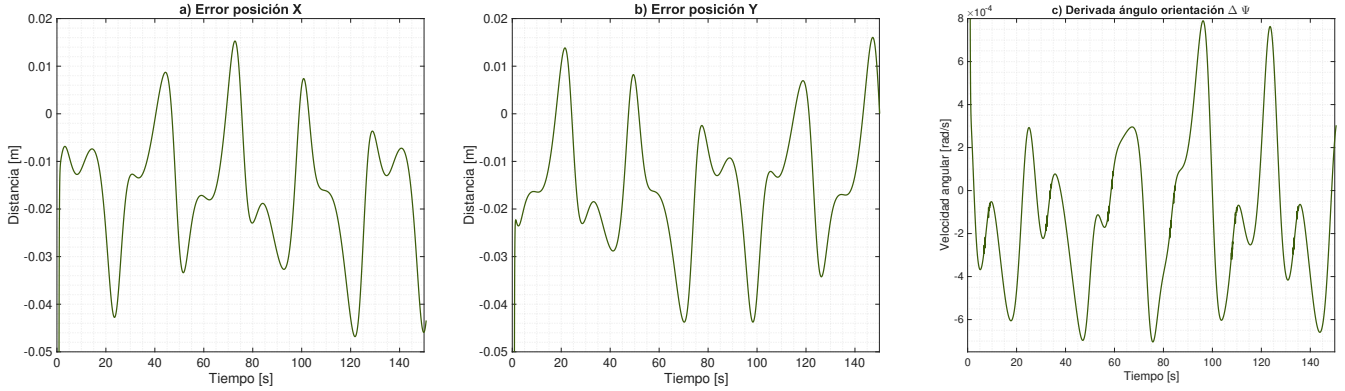


Fig. 4.5. Errores de estimación del observador cinemático para X , Y y $\hat{r}_c$.

Los resultados anteriores muestran que el tratamiento de variables premisas no medibles resulta adecuado para la arquitectura propuesta, ya que ambos observadores emplean funciones de pertenencia evaluadas con variables estimadas. En particular, el sistema dinámico recibe la señal $\hat{r}_c$ generada por el observador cinemático, mientras que el sistema cinemático utiliza velocidades locales reconstruidas por el observador dinámico. Aun con esta interacción y con condiciones iniciales diferentes, los errores permanecen acotados y tienden a una escala reducida después del transitorio inicial.

En conclusión, la arquitectura de observadores acoplados permite estimar las variables dinámicas y cinemáticas del AGV bajo una simulación en lazo abierto con diferencias iniciales entre estados reales y estimados. El observador dinámico reconstruye las velocidades locales y la velocidad angular de orientación, mientras que el observador cinemático estima la posición global y la orientación del vehículo. Esta interacción proporciona una estructura de estimación compatible con la arquitectura de control dinámico–cinemática desarrollada en este trabajo.

4.6. Síntesis del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de una arquitectura de observadores acoplados para estimar las variables dinámicas y cinemáticas del AGV. Primero, se analizó la observabilidad local de los modelos considerados, mostrando que los estados pueden reconstruirse localmente a partir de las salidas disponibles y de las entradas conocidas, siempre que el sistema opere fuera de los conjuntos

singulares de cada modelo.

Posteriormente, se establecieron las consideraciones empleadas en el diseño de los observadores T-S. Para el sistema dinámico se incorporó el tratamiento del término no lineal relacionado con los ángulos de deslizamiento mediante una cota local de Lipschitz. Además, para ambos sistemas se consideró el efecto de las variables premisas no medibles, debido a que las funciones de pertenencia del observador se evalúan a partir de variables estimadas.

Con base en estas consideraciones, se diseñaron observadores proporcionales-integrales para los sistemas dinámico y cinemático. En cada caso se obtuvo la dinámica del error de estimación, se introdujo una representación aumentada y se formularon condiciones suficientes de convergencia mediante funciones de Lyapunov y desigualdades matriciales lineales. Para el observador cinemático, la ausencia de una matriz A_{c_i} en la representación T-S permitió utilizar ganancias comunes en la dinámica del error, manteniendo la dependencia local únicamente en la ganancia que multiplica a la entrada.

La simulación de los observadores acoplados permitió verificar el desempeño de la estructura propuesta bajo condiciones iniciales diferentes entre los estados reales y estimados. Los resultados mostraron que el observador dinámico reconstruye las velocidades locales y la velocidad angular de orientación, mientras que el observador cinemático estima las posiciones globales y la orientación del vehículo. Asimismo, la interacción entre ambos observadores no produjo inestabilidad durante el transitorio inicial, aun cuando las señales intercambiadas provenían de estimaciones en proceso de convergencia.

De esta forma, la arquitectura de observación desarrollada proporciona las variables necesarias para la implementación del esquema de control dinámico-cinemático. En particular, las estimaciones obtenidas permiten reducir la dependencia de mediciones directas de todos los estados del AGV y establecen una base para integrar el diseño de observadores con la estrategia de seguimiento de trayectoria desarrollada en los capítulos posteriores.

Capítulo 5

Controladores para seguimiento de trayectoria

5.1. Introducción

El seguimiento de trayectorias en un AGV requiere transformar una referencia definida en el plano global en acciones físicas capaces de modificar el movimiento longitudinal, lateral y rotacional del vehículo. Debido al acoplamiento existente entre los sistemas cinemático y dinámico, el diseño de control no puede limitarse únicamente a imponer una trayectoria deseada sobre las coordenadas $X(t)$ y $Y(t)$, sino que debe generar referencias compatibles con las velocidades locales y con la dinámica lateral del vehículo.

En este capítulo se desarrolla una arquitectura de control dinámico–cinemática basada en controladores PI no lineales. El esquema propuesto se organiza en dos niveles. El primer nivel corresponde al controlador cinemático, encargado de generar referencias de velocidad local a partir de los errores de seguimiento en el plano global. Además, se emplea la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral desarrollada previamente para definir una referencia de velocidad angular compatible con el comportamiento lateral del AGV.

El segundo nivel corresponde al controlador dinámico, cuya finalidad es calcular la fuerza de tracción $T(t)$ y el ángulo de dirección $\delta(t)$ para que las velocidades locales $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$ sigan las referencias generadas por el controlador cinemático. Aunque el diseño se organiza mediante un lazo longitudinal y un lazo lateral–orientación, el análisis se realiza considerando la dinámica

aumentada completa del error, debido al acoplamiento presente en el modelo dinámico no lineal.

Las ganancias de los controladores se obtienen mediante un análisis de estabilidad basado en Lyapunov y formulado como una condición LMI. Posteriormente, se valida el desempeño de la arquitectura mediante simulaciones numéricas. Primero se analiza el caso en el que las variables de estado requeridas por el controlador se consideran disponibles, con el propósito de evaluar el comportamiento propio de los controladores. Después, se integra el esquema de control con los observadores diseñados en el capítulo anterior, permitiendo evaluar la arquitectura completa de control basado en observadores.

5.2. Planteamiento del problema y arquitectura de control

El objetivo del esquema de control consiste en lograr que el AGV siga una trayectoria de referencia definida en el plano global mediante las coordenadas $X_d(t)$ y $Y_d(t)$. Para ello, se considera el modelo dinámico–cinemático desarrollado previamente, en el cual el sistema dinámico describe la evolución de las velocidades locales $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$, mientras que el sistema cinemático relaciona dichas velocidades con la posición global $X(t)$, $Y(t)$ y la orientación $\psi(t)$.

El problema de seguimiento se define a partir de los errores de posición

$$e_x(t) = X(t) - X_d(t), \quad e_y(t) = Y(t) - Y_d(t),$$

los cuales deben converger idealmente a una región cercana a cero, bajo las condiciones de operación consideradas. Para cumplir este objetivo, se propone una arquitectura de control dinámico–cinemática compuesta por dos niveles conectados mediante referencias de velocidad en el marco local del vehículo.

El primer nivel corresponde al controlador cinemático PI no lineal. Este controlador utiliza la posición actual del vehículo, la trayectoria deseada y la orientación $\psi(t)$ para generar las referencias locales $v_{xd}(t)$ y $v_{yd}(t)$. Estas referencias representan las velocidades longitudinal y lateral requeridas para inducir el movimiento deseado en el plano global. Adicionalmente, mediante la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral se calcula la referencia de velocidad angular $r_d(t)$, con el propósito de mantener compatibilidad entre las referencias cinemáticas y el comportamiento lateral del vehículo.

El segundo nivel corresponde al controlador dinámico PI no lineal. Este controlador recibe las referencias $v_{xd}(t)$, $v_{yd}(t)$ y $r_d(t)$, y genera las entradas físicas del AGV: la fuerza de tracción $T(t)$ y el ángulo de dirección $\delta(t)$. La fuerza de tracción se obtiene a partir del lazo longitudinal, orientado al seguimiento de $v_{xd}(t)$, mientras que el ángulo de dirección se determina a partir del lazo lateral-orientación, basado en el seguimiento de trayectoria conjunto de $v_{yd}(t)$ y $r_d(t)$.

Aunque el diseño dinámico se presenta mediante dos acciones de control diferenciadas, el sistema dinámico no se considera desacoplado. Las ecuaciones del vehículo conservan términos de interacción entre las velocidades longitudinales, laterales y rotacionales. Por esta razón, el análisis de estabilidad del controlador dinámico se realiza sobre la dinámica aumentada completa del error, incorporando simultáneamente los errores de $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$.

En una primera etapa, el diseño y la validación del controlador se realizan considerando disponibles las variables de estado requeridas por la arquitectura. Esta decisión permite evaluar el comportamiento propio de los controladores PI no lineales sin introducir, en esta fase, los efectos generados por el error de estimación. Posteriormente, el esquema se evalúa bajo una configuración basada en observadores, donde las variables necesarias para el control son proporcionadas por la arquitectura de estimación desarrollada en el capítulo anterior.

La Figura 5.1 muestra la arquitectura general del esquema propuesto. En ella se observa que las referencias globales de posición son transformadas en referencias dinámicas locales, las cuales posteriormente son utilizadas para calcular las entradas físicas aplicadas al modelo dinámico del AGV.

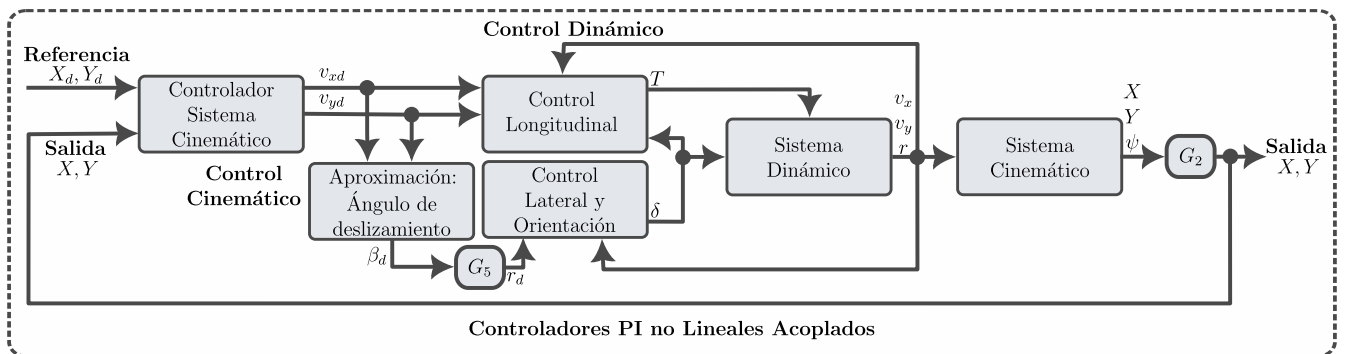


Fig. 5.1. Arquitectura de control dinámico-cinématica propuesta para el seguimiento de trayectoria del AGV.

5.3. Controlador PI no lineal para el sistema cinemático

El controlador cinemático tiene como objetivo generar las referencias de velocidad local que posteriormente serán utilizadas por el controlador dinámico. Para ello, se parte de la trayectoria deseada definida en el plano global mediante $X_d(t)$ y $Y_d(t)$, y se proponen dinámicas auxiliares para inducir el comportamiento deseado de las coordenadas globales del AGV. Las ecuaciones del modelo cinemático del AGV presentadas en la Sección 3.3 se reescriben a continuación:

$$\dot{X} = v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi), \quad (5.1)$$

$$\dot{Y} = v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi), \quad (5.2)$$

$$\dot{\psi} = r. \quad (5.3)$$

Considerando la estructura de las ecuaciones (5.1)–(5.3), se introduce la siguiente dinámica auxiliar:

$$\dot{X}(t) = u_1(t), \quad \dot{Y}(t) = u_2(t), \quad \dot{\psi}(t) = u_3(t). \quad (5.4)$$

Las variables $u_1(t)$, $u_2(t)$ y $u_3(t)$ representan dinámicas auxiliares relacionadas al desplazamiento global y a la orientación del vehículo. A partir del modelo cinemático no lineal (5.1)–(5.3) y de (5.4), se obtienen las referencias de velocidad requeridas en el marco local:

$$\begin{aligned} v_{xd}(t) &= u_1(t) \cos(\psi(t)) + u_2(t) \sin(\psi(t)), \\ v_{yd}(t) &= -u_1(t) \sin(\psi(t)) + u_2(t) \cos(\psi(t)), \\ r_d(t) &= u_3(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Las referencias $v_{xd}(t)$ y $v_{yd}(t)$ se obtienen directamente mediante una transformación trigonométrica dependiente de la orientación del vehículo. No obstante, si la referencia $r_d(t)$ se selecciona de forma independiente, existe la posibilidad de generar una velocidad angular no compatible con la relación lateral presente en el modelo dinámico. Por esta razón, se utiliza la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral desarrollada previamente en la Sección 3.5.

A partir de dicha aproximación, la referencia de velocidad angular se define como

$$r_d(t) = u_3(t) = \frac{V_d(t)\beta_d(t)}{L_\beta}, \quad (5.6)$$

donde

$$V_d(t) = \sqrt{v_{xd}^2(t) + v_{yd}^2(t)}, \quad \beta_d(t) = \arctan\left(\frac{v_{yd}(t)}{v_{xd}(t)}\right), \quad L_\beta = 1.39. \quad (5.7)$$

De esta manera, la referencia $r_d(t)$ queda relacionada con las velocidades locales deseadas $v_{xd}(t)$ y $v_{yd}(t)$. Esta elección permite construir referencias dinámicas compatibles con el comportamiento lateral del vehículo, ya que la velocidad angular deseada no se impone como una señal independiente, sino como una variable inducida por la velocidad resultante y el ángulo de deslizamiento lateral deseado.

Aunque el controlador cinemático se formula a partir de los errores de posición X y Y , la orientación del vehículo no queda completamente desvinculada del diseño. Al definir $r_d(t)$ y considerando la relación determinada en (5.3): $\dot{\psi}(t) = r(t)$, se induce una evolución angular indirectamente deseada para el seguimiento de las referencias dinámicas. Sin embargo, en esta etapa no se introduce un error explícito de orientación, por lo que el objetivo cinemático principal permanece definido sobre el seguimiento de posición en el plano global.

Sustituyendo (5.6) en (5.5), las referencias empleadas por el controlador dinámico quedan dadas por

$$\begin{aligned} v_{xd}(t) &= u_1(t) \cos(\psi(t)) + u_2(t) \sin(\psi(t)), \\ v_{yd}(t) &= -u_1(t) \sin(\psi(t)) + u_2(t) \cos(\psi(t)), \\ r_d(t) &= \frac{\arctan(v_{yd}(t)/v_{xd}(t)) \sqrt{v_{xd}^2(t) + v_{yd}^2(t)}}{L_\beta}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Considerando la trayectoria deseada $(X_d(t), Y_d(t))$, se definen los errores de seguimiento cinemático como

$$e_x(t) = X(t) - X_d(t), \quad e_y(t) = Y(t) - Y_d(t). \quad (5.9)$$

Al derivar (5.9) y utilizar la dinámica auxiliar (5.4), se obtiene

$$\dot{e}_x(t) = u_1(t) - \dot{X}_d(t), \quad \dot{e}_y(t) = u_2(t) - \dot{Y}_d(t). \quad (5.10)$$

Para generar un comportamiento proporcional-integral en las dinámicas de error, se proponen las señales auxiliares

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \dot{X}_d(t) - k_{px}e_x(t) - k_{ix}\eta_x(t), \\ u_2(t) &= \dot{Y}_d(t) - k_{py}e_y(t) - k_{iy}\eta_y(t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde

$$\eta_x(t) = \int e_x(t) dt, \quad \eta_y(t) = \int e_y(t) dt.$$

Sustituyendo (5.11) en (5.10), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= -k_{px}e_x(t) - k_{ix}\eta_x(t), \\ \dot{e}_y(t) &= -k_{py}e_y(t) - k_{iy}\eta_y(t). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Para expresar estas dinámicas en forma aumentada, se definen

$$\epsilon_{ac}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \end{bmatrix}, \quad \eta_{ac}(t) = \begin{bmatrix} \eta_x(t) \\ \eta_y(t) \end{bmatrix}, \quad x_{ac}(t) = \begin{bmatrix} \epsilon_{ac}(t) \\ \eta_{ac}(t) \end{bmatrix}.$$

Asimismo, se definen las matrices de ganancias

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{px} & 0 \\ 0 & k_{py} \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} k_{ix} & 0 \\ 0 & k_{iy} \end{bmatrix}, \quad K_{ac} = \begin{bmatrix} K_p & K_i \end{bmatrix}.$$

Con estas definiciones, el sistema aumentado del error cinemático puede escribirse como

$$\dot{x}_{ac}(t) = (A_{ac} - B_{ac}K_{ac})x_{ac}(t), \tag{5.13}$$

donde

$$A_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ac} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, las señales auxiliares del controlador cinemático pueden agruparse como

$$u_{ac}(t) = q_{ac}(t) - K_p\epsilon_{ac}(t) - K_i\eta_{ac}(t), \tag{5.14}$$

con

$$u_{ac}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad q_{ac}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_d(t) \\ \dot{Y}_d(t) \end{bmatrix}.$$

La ley (5.14), junto con la transformación (5.8), permite generar las referencias $v_{xd}(t)$, $v_{yd}(t)$ y $r_d(t)$ requeridas por el controlador dinámico.

5.4. Controlador PI no lineal para el sistema dinámico

El controlador dinámico tiene como objetivo generar las entradas físicas del AGV, dadas por la fuerza de tracción $T(t)$ y el ángulo de dirección $\delta(t)$, de manera que las velocidades locales $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$ sigan las referencias $v_{xd}(t)$, $v_{yd}(t)$ y $r_d(t)$ generadas por el controlador cinemático.

El diseño se organiza en dos lazos de control. El primero corresponde al lazo longitudinal, encargado del seguimiento de la velocidad $v_x(t)$ mediante la fuerza de tracción $T(t)$. El segundo corresponde al lazo lateral–orientación, encargado del seguimiento conjunto de la velocidad lateral $v_y(t)$ y de la velocidad angular de orientación $r(t)$ mediante el ángulo de dirección $\delta(t)$.

Aunque las acciones de control se obtienen a partir de análisis diferenciados, el sistema dinámico no se considera desacoplado. Las ecuaciones del modelo no lineal conservan términos de interacción entre el movimiento longitudinal, lateral y rotacional. Por esta razón, las dinámicas de error se agrupan posteriormente en una representación aumentada común, la cual será utilizada para el análisis de estabilidad del controlador dinámico.

Para facilitar las referencias de las ecuaciones del modelo dinámico desarrollado en la Sección 3.2, las ecuaciones (3.4)–(3.6) se reescriben a continuación:

$$\dot{v}_x(t) = -v_y(t)r(t) + \frac{1}{m}F_{x_t}(t) + \frac{1}{m}F_{y_d}(t)\sin(\delta(t)) + \frac{1}{m}T(t)\cos(\delta(t)), \quad (5.15)$$

$$\dot{v}_y(t) = v_x(t)r(t) + \frac{1}{m}F_{y_t}(t) + \frac{1}{m}T(t)\sin(\delta(t)) + \frac{1}{m}F_{y_d}(t)\cos(\delta(t)), \quad (5.16)$$

$$\dot{r}(t) = \frac{l_d}{I_z}T(t)\sin(\delta(t)) + \frac{l_d}{I_z}F_{y_d}(t)\cos(\delta(t)) - \frac{l_t}{I_z}F_{y_t}(t). \quad (5.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} F_{y_d}(t) &= k_{y_d} \left[\delta(t) - \arctan \left(\frac{v_y(t) + l_d r(t)}{v_x(t)} \right) \right], \\ F_{y_t}(t) &= -k_{y_t} \arctan \left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)} \right), \\ F_{x_t}(t) &= -k_{x_t} \arctan \left(\frac{v_y(t) - l_t r(t)}{v_x(t)} \right). \end{aligned}$$

5.4.1. Control longitudinal mediante fuerza de tracción

Para el lazo longitudinal, se define el error de seguimiento como la diferencia entre la velocidad longitudinal real y deseada:

$$e_{vx}(t) = v_x(t) - v_{xd}(t). \quad (5.18)$$

La dinámica del error está dada por

$$\dot{e}_{vx}(t) = \dot{v}_x(t) - \dot{v}_{xd}(t). \quad (5.19)$$

Con el propósito de inducir un comportamiento proporcional–integral, se propone una dinámica auxiliar deseada para la velocidad longitudinal:

$$u_x(t) = -k_{pvx}e_{vx}(t) - k_{ivx}\eta_{vx}(t) + \dot{v}_{xd}(t), \quad (5.20)$$

donde

$$\eta_{vx}(t) = \int e_{vx}(t) dt.$$

Al establecer la condición

$$\dot{v}_x(t) = u_x(t), \quad (5.21)$$

la dinámica del error longitudinal toma la forma

$$\dot{e}_{vx}(t) = -k_{pvx}e_{vx}(t) - k_{ivx}\eta_{vx}(t). \quad (5.22)$$

A partir de la ecuación longitudinal del modelo dinámico no lineal (5.15) y de la condición (5.21), se obtiene la fuerza de tracción requerida:

$$T(t) = \frac{mu_x(t) + mv_y(t)r(t) - F_{x_t}(t) - F_{y_d}(t)\sin(\delta(t))}{\cos(\delta(t))}. \quad (5.23)$$

La expresión (5.23) muestra que, aunque el lazo longitudinal se orienta al seguimiento de $v_x(t)$, la fuerza de tracción depende también de variables laterales y del ángulo de dirección. Esta dependencia refleja el acoplamiento físico del vehículo y justifica que el análisis de estabilidad del sistema dinámico se realice de forma conjunta.

5.4.2. Control lateral–orientación mediante dirección

Para el lazo lateral–orientación, se definen los errores de seguimiento entre los estados laterales y de orientación respecto a sus referencias deseadas:

$$e_{vy}(t) = v_y(t) - v_{yd}(t), \quad e_r(t) = r(t) - r_d(t). \quad (5.24)$$

Las dinámicas de error correspondientes están dadas por

$$\dot{e}_{vy}(t) = \dot{v}_y(t) - \dot{v}_{yd}(t), \quad \dot{e}_r(t) = \dot{r}(t) - \dot{r}_d(t). \quad (5.25)$$

Se proponen las siguientes dinámicas auxiliares PI:

$$\begin{aligned} u_y(t) &= -k_{pvy}e_{vy}(t) - k_{ivy}\eta_{vy}(t) + \dot{v}_{yd}(t), \\ u_r(t) &= -k_{pr}e_r(t) - k_{ir}\eta_r(t) + \dot{r}_d(t), \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde

$$\eta_{vy}(t) = \int e_{vy}(t) dt, \quad \eta_r(t) = \int e_r(t) dt.$$

Al establecer

$$\dot{v}_y(t) = u_y(t), \quad \dot{r}(t) = u_r(t), \quad (5.27)$$

se obtienen las dinámicas de error

$$\begin{aligned} \dot{e}_{vy}(t) &= -k_{pvy}e_{vy}(t) - k_{ivy}\eta_{vy}(t), \\ \dot{e}_r(t) &= -k_{pr}e_r(t) - k_{ir}\eta_r(t). \end{aligned} \quad (5.28)$$

A partir de las ecuaciones lateral (5.16) y rotacional (5.17) del modelo dinámico no lineal, y de las condiciones (5.27), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} v_x(t)r(t) + \frac{1}{m}F_{yt}(t) + \frac{1}{m}F_{yd}(t)\cos(\delta(t)) + \frac{1}{m}T(t)\sin(\delta(t)) - u_y(t) &= 0, \\ \frac{l_d}{I_z}F_{yd}(t)\cos(\delta(t)) - \frac{l_t}{I_z}F_{yt}(t) + \frac{l_d}{I_z}T(t)\sin(\delta(t)) - u_r(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

En (5.29), la fuerza de tracción $T(t)$ se calcula mediante (5.23). Por tanto, el ángulo de dirección $\delta(t)$ debe seleccionarse de manera que las condiciones lateral y rotacional sean satisfechas de forma compatible con la acción longitudinal. En la implementación numérica, esta selección se realiza resolviendo las ecuaciones algebraicas resultantes para $\delta(t)$.

El uso de la referencia $r_d(t)$ obtenida a partir de la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral contribuye a reducir inconsistencias entre las referencias $v_{yd}(t)$ y $r_d(t)$. De esta manera, el lazo lateral-orientación no impone una referencia angular independiente, sino una referencia relacionada con el comportamiento lateral deseado del vehículo.

Para preparar el análisis de estabilidad, se agrupan los errores dinámicos y sus integrales como

$$\epsilon_{ad}(t) = \begin{bmatrix} e_{vx}(t) \\ e_{vy}(t) \\ e_r(t) \end{bmatrix}, \quad \eta_{ad}(t) = \begin{bmatrix} \eta_{vx}(t) \\ \eta_{vy}(t) \\ \eta_r(t) \end{bmatrix}.$$

El vector aumentado del error dinámico se define como

$$x_{ad}(t) = \begin{bmatrix} \epsilon_{ad}(t) \\ \eta_{ad}(t) \end{bmatrix}.$$

A partir de las dinámicas (5.22) y (5.28), el sistema aumentado puede escribirse como

$$\dot{x}_{ad}(t) = (A_{ad} - B_{ad}K_{ad})x_{ad}(t), \quad (5.30)$$

donde

$$A_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ad} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{ad} = \begin{bmatrix} K_{pd} & K_{id} \end{bmatrix}.$$

Las matrices de ganancias proporcional e integral se definen como

$$K_{pd} = \begin{bmatrix} k_{pvx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{pvy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{pr} \end{bmatrix}, \quad K_{id} = \begin{bmatrix} k_{ivx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ivy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{ir} \end{bmatrix}.$$

La representación (5.30) agrupa el comportamiento de los errores longitudinales, laterales y de orientación. Aunque las acciones $T(t)$ y $\delta(t)$ se obtienen mediante lazos diferenciados, esta forma permite estudiar la estabilidad del controlador dinámico considerando simultáneamente los errores de $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$.

5.5. Análisis de estabilidad del esquema de control

Las dinámicas de error correspondientes al controlador cinemático (5.13) y al controlador dinámico (5.30) pueden escribirse de forma general como

$$\dot{x}_{ai}(t) = (A_{ai} - B_{ai}K_{ai})x_{ai}(t), \quad i \in \{c, d\}, \quad (5.31)$$

donde $x_{ai}(t)$ representa el vector aumentado formado por los errores de seguimiento y sus respectivas acciones integrales. Para $i = c$, el vector aumentado corresponde a los errores cinemáticos correspondientes a $X(t)$ y $Y(t)$; para $i = d$, corresponde a los errores dinámicos generados por $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$.

La matriz K_{ai} agrupa las ganancias proporcionales e integrales del controlador correspondiente. En particular, para el controlador cinemático se tiene $K_{ac} = [K_p \ K_i]$, mientras que para el controlador dinámico se tiene $K_{ad} = [K_{pd} \ K_{id}]$. Por tanto, la estabilidad de las dinámicas de error puede estudiarse mediante el análisis de estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo.

Para este propósito, se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_i(x_{ai}(t)) = x_{ai}^T(t) P_i x_{ai}(t), \quad P_i = P_i^T > 0. \quad (5.32)$$

La derivada temporal de (5.32) a lo largo de las trayectorias de (5.31) está dada por

$$\dot{V}_i = x_{ai}^T(t) \left[(A_{ai} - B_{ai}K_{ai})^T P_i + P_i (A_{ai} - B_{ai}K_{ai}) \right] x_{ai}(t). \quad (5.33)$$

Para garantizar que $\dot{V}_i < 0$, se requiere que

$$(A_{ai} - B_{ai}K_{ai})^T P_i + P_i (A_{ai} - B_{ai}K_{ai}) < 0. \quad (5.34)$$

La desigualdad (5.34) permite establecer la estabilidad de la dinámica aumentada del error. Sin embargo, dicha condición es bilineal debido al producto entre la matriz de Lyapunov P_i y la matriz de ganancias K_{ai} . Para obtener una condición resoluble mediante LMIs, se introduce el cambio de variables

$$X_i = P_i^{-1}, \quad Y_i = K_{ai}X_i.$$

Premultiplicando y postmultiplicando (5.34) por X_i , y utilizando el cambio de variables anterior, se obtiene la condición LMI

$$X_i A_{ai}^T + A_{ai} X_i - Y_i^T B_{ai}^T - B_{ai} Y_i < 0, \quad (5.35)$$

con

$$X_i = X_i^T > 0. \quad (5.36)$$

Una vez resuelta la LMI (5.35), la matriz de ganancias se recupera mediante

$$K_{ai} = Y_i X_i^{-1}. \quad (5.37)$$

La factibilidad de (5.35) y (5.36) garantiza la existencia de una función de Lyapunov cuadrática decreciente para las dinámicas de error aumentadas. En consecuencia, los errores de seguimiento y sus acciones integrales convergen al origen para el sistema auxiliar considerado.

5.6. Resultados de simulación

5.6.1. Validación de los controladores con variables disponibles

Con el propósito de validar la convergencia y la capacidad de seguimiento de trayectoria de los controladores propuestos, se realizó una primera simulación considerando disponibles las variables de estado requeridas por la arquitectura de control. Esta prueba permite evaluar el desempeño propio de los controladores PI no lineales sin incluir todavía los efectos provocados por la estimación de estados.

La simulación fue desarrollada en MATLAB mediante el solucionador `ode45`, considerando un tiempo total de 150 s. La trayectoria de referencia utilizada corresponde a una trayectoria circular desplazada en el plano global, definida por

$$X_d(t) = -20 (\cos(0.05t) - 1), \quad Y_d(t) = -20 \sin(0.05t). \quad (5.38)$$

Las condiciones iniciales de posición fueron

$$X(0) = -5, \quad Y(0) = 0,$$

mientras que las velocidades iniciales se definieron como

$$v_x(0) = 0.1, \quad v_y(0) = 0, \quad r(0) = 0.$$

Las ganancias utilizadas en los controladores fueron obtenidas mediante la condición LMI presentada en la Sección 5.5. Para el controlador cinemático se calcularon

$$k_{px} = 0.8971, \quad k_{ix} = 0.8971, \quad k_{py} = 0.0274, \quad k_{iy} = 0.0274,$$

mientras que para el controlador dinámico se obtuvieron

$$\begin{aligned} k_{pvx} &= 0.3553, & k_{ivx} &= 0.0612, & k_{pvy} &= 5.4884, \\ k_{ivy} &= 0.0612, & k_{pr} &= 5.4884, & k_{ir} &= 0.0612. \end{aligned}$$

Para evitar transitorios abruptos durante el arranque de la simulación, se incorporó un factor de suavizado exponencial definido como

$$\lambda_s(t) = 1 - e^{-t/3}. \quad (5.39)$$

Este factor se aplicó a las referencias dinámicas generadas por el controlador cinemático y a las señales auxiliares empleadas en el controlador dinámico, permitiendo una transición gradual desde las condiciones iniciales hacia las referencias de seguimiento. De esta manera, las señales utilizadas durante el arranque se definieron de forma general como

$$\xi_s(t) = \lambda_s(t)\xi(t), \quad (5.40)$$

donde $\xi(t)$ representa la señal original y $\xi_s(t)$ la señal suavizada correspondiente.

Adicionalmente, se incorporaron saturaciones suaves mediante funciones tangentes hiperbólicas, con el propósito de mantener las referencias y señales auxiliares dentro de rangos físicamente realizables. Para una señal genérica $\xi(t)$, la saturación suave se definió como

$$\text{sat}_{\xi_{\text{máx}}}(\xi(t)) = \xi_{\text{máx}} \tanh\left(\frac{\xi(t)}{\xi_{\text{máx}}}\right). \quad (5.41)$$

Bajo esta formulación, las referencias dinámicas se limitaron de acuerdo con

$$\begin{aligned} v_{xd}^s(t) &= v_{x\text{máx}} \tanh\left(\frac{\lambda_s(t)v_{xd}(t)}{v_{x\text{máx}}}\right), & v_{yd}^s(t) &= v_{y\text{máx}} \tanh\left(\frac{\lambda_s(t)v_{yd}(t)}{v_{y\text{máx}}}\right), \\ r_d^s(t) &= r_{\text{máx}} \tanh\left(\frac{\lambda_s(t)r_d(t)}{r_{\text{máx}}}\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

De manera análoga, la dinámica auxiliar longitudinal se limitó mediante

$$u_x^s(t) = u_{\text{máx}} \tanh\left(\frac{\lambda_s(t)u_x(t)}{u_{\text{máx}}}\right). \quad (5.43)$$

Los límites empleados fueron

$$v_{x\text{máx}} = 5 \text{ m/s}, \quad v_{y\text{máx}} = 1 \text{ m/s}, \quad r_{\text{máx}} = 1 \text{ rad/s}, \quad u_{\text{máx}} = 20 \text{ m/s}^2.$$

Estas funciones de suavizado y saturación se utilizaron únicamente durante la implementación numérica, con el fin de evitar picos iniciales no deseados y mantener las señales dentro de rangos compatibles con el modelo. Por lo tanto, no modifican la estructura analítica de los controladores PI no lineales ni el planteamiento de estabilidad desarrollado previamente.

La Figura 5.2 presenta la respuesta cinemática del sistema controlado. En la Figura 5.2(a) se muestra la trayectoria obtenida en el plano $X - Y$, donde puede observarse que el AGV converge hacia la trayectoria circular deseada a pesar de iniciar desde una posición distinta a la referencia. Por otra parte, las Figuras 5.2(b) y 5.2(c) muestran la evolución temporal de las posiciones $X(t)$ y $Y(t)$, respectivamente. En ambos casos, las variables tienden hacia sus referencias con un comportamiento suave después del transitorio inicial.

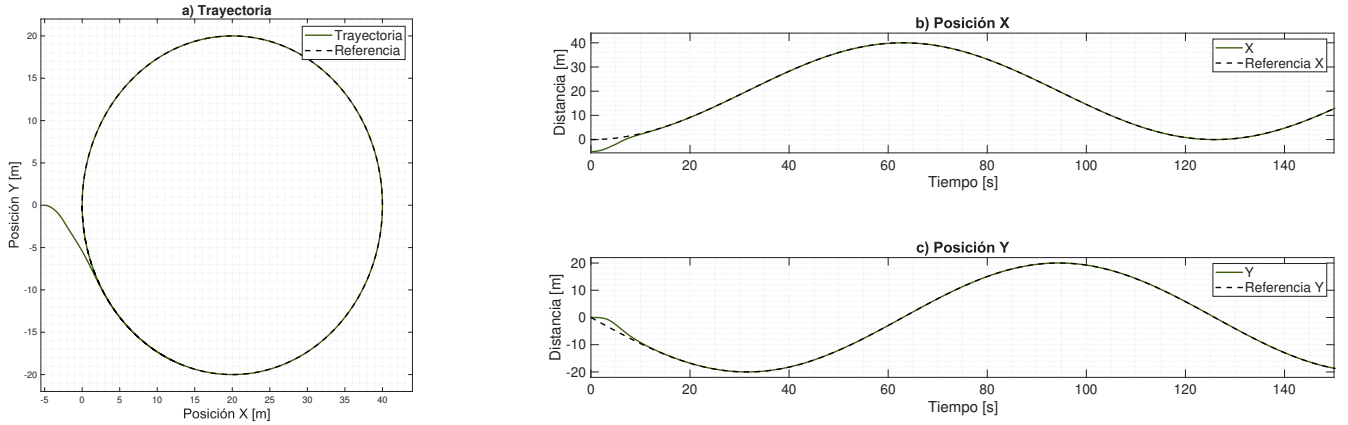


Fig. 5.2. Seguimiento de trayectoria circular mediante el controlador cinemático.

Una vez generadas las referencias dinámicas por el controlador cinemático, se evaluó el seguimiento de las velocidades internas del AGV mediante el controlador dinámico. La Figura 5.3 muestra la comparación entre las referencias generadas y las variables dinámicas del sistema.

En la Figura 5.3(a) se presenta la velocidad longitudinal $v_x(t)$ y su referencia $v_{xd}(t)$. Se observa un transitorio inicial al arranque de la simulación, seguido de un comportamiento cercano a la referencia. La Figura 5.3(b) muestra el seguimiento de la velocidad lateral $v_y(t)$, mientras que la Figura 5.3(c) presenta la velocidad angular de orientación $r(t)$. En ambos casos, las variables dinámicas siguen las referencias generadas por el controlador cinemático después del periodo transitorio.

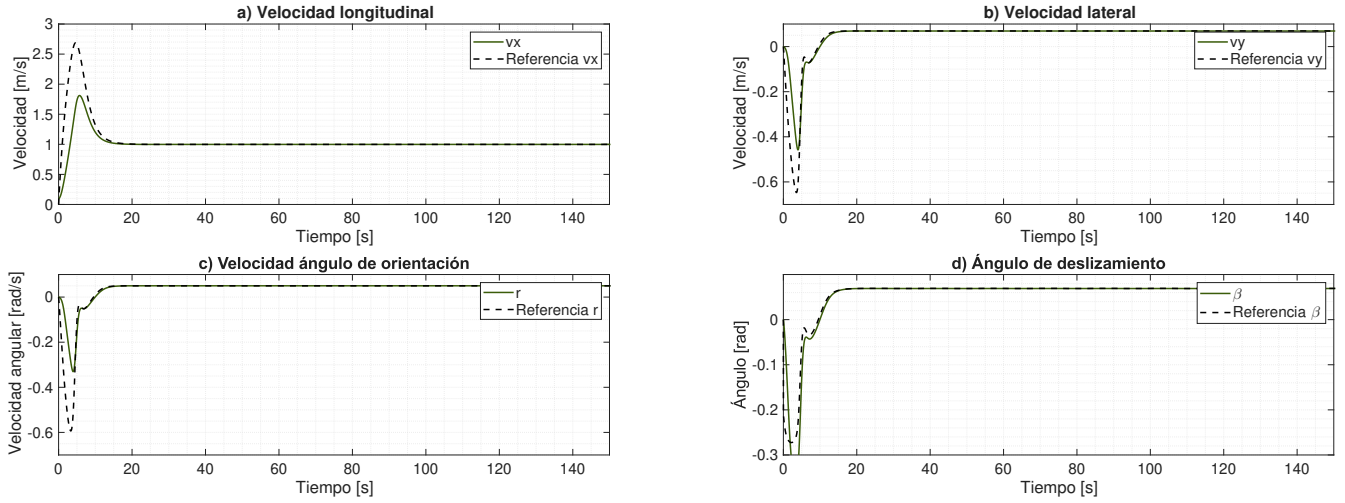


Fig. 5.3. Seguimiento de referencias dinámicas mediante el controlador dinámico.

Finalmente, la Figura 5.3(d) muestra el comportamiento del ángulo de deslizamiento lateral $\beta(t)$ y su referencia. El ángulo permanece acotado durante toda la simulación y presenta una evolución compatible con la aproximación desarrollada para generar $r_d(t)$. Este resultado es relevante porque muestra que la referencia angular inducida mediante L_β mantiene coherencia con el comportamiento lateral del vehículo para la trayectoria considerada.

La Figura 5.4 presenta las señales de control generadas durante la simulación. En la Figura 5.4(a) se muestra el ángulo de dirección $\delta(t)$, el cual presenta un cambio inicial provocado por la corrección de la condición inicial y posteriormente evoluciona hacia un valor compatible con la maniobra circular. La Figura 5.4(b) muestra la fuerza de tracción $T(t)$, donde se aprecia un transitorio inicial seguido de una señal acotada y suave durante el seguimiento de la trayectoria.

Los resultados obtenidos permiten validar el funcionamiento de la arquitectura de control dinámico-cinemática bajo el supuesto de variables disponibles. El controlador cinemático genera referencias locales compatibles con el seguimiento de la trayectoria global, mientras que el controlador dinámico permite que las velocidades internas del AGV sigan dichas referencias mediante la fuerza de tracción y el ángulo de dirección. Esta primera validación sirve como base para evaluar posteriormente el esquema de control basado en observadores.

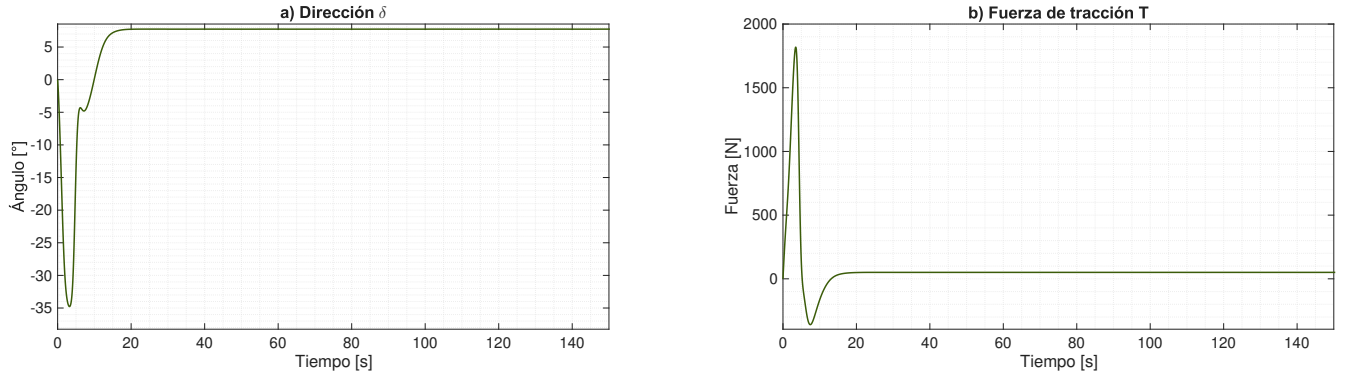


Fig. 5.4. Entradas de control generadas durante el seguimiento de trayectoria circular.

5.7. Esquema de control basado en observadores

Con el propósito de validar el desempeño de la arquitectura completa desarrollada en este trabajo, se realizó una simulación del esquema de control basado en observadores. A diferencia de la validación anterior, en esta prueba las variables requeridas por los controladores no se consideran directamente disponibles en su totalidad, sino que son proporcionadas por los observadores dinámico y cinemático diseñados previamente. De esta manera, la simulación permite evaluar la interacción entre el sistema de estimación y la arquitectura de control dinámico–cinemática.

La arquitectura general utilizada se muestra en la Figura 5.5. El sistema dinámico del AGV recibe como entradas la fuerza de tracción $T(t)$ y el ángulo de dirección $\delta(t)$, y genera las velocidades locales $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$. Estas variables alimentan al sistema cinemático, el cual determina la posición global $X(t)$, $Y(t)$ y la orientación $\psi(t)$. En paralelo, el observador dinámico estima las velocidades locales, mientras que el observador cinemático reconstruye la posición y orientación del vehículo a partir de las salidas disponibles. Las estimaciones obtenidas se utilizan posteriormente como señales de retroalimentación para los controladores.

La simulación fue desarrollada en MATLAB utilizando el solucionador `ode45`, con un tiempo total de simulación de 150 s. La trayectoria de referencia considerada fue

$$X_d(t) = -20 (\cos(0.05t) - 1), \quad Y_d(t) = -20 \sin(0.1t). \quad (5.44)$$

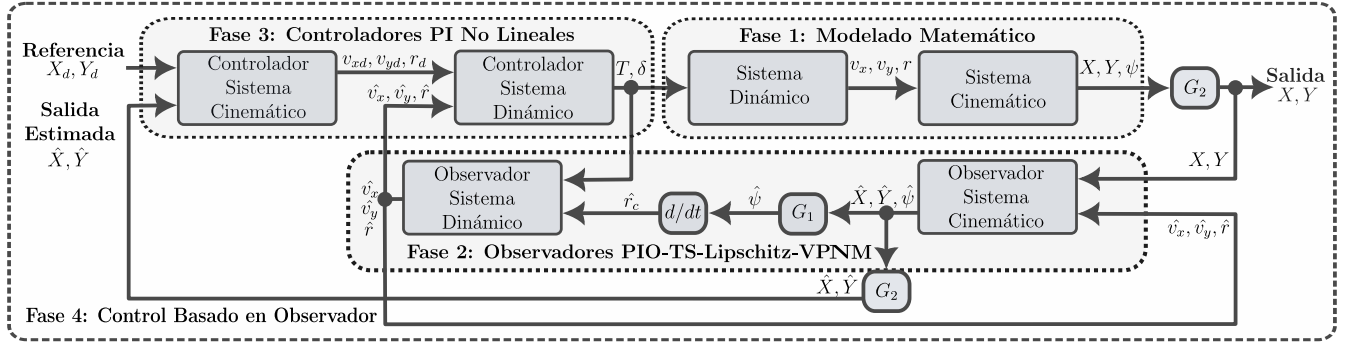


Fig. 5.5. Arquitectura general del esquema de control basado en observadores.

Las condiciones iniciales del sistema fueron

$$X(0) = -5, \quad Y(0) = 0, \quad v_x(0) = 0.1, \quad v_y(0) = 0, \quad r(0) = 0.$$

Por otra parte, las condiciones iniciales de los observadores se seleccionaron diferentes a las condiciones reales del sistema, con el propósito de evaluar la convergencia de las estimaciones y su efecto sobre el esquema de control:

$$\hat{X}(0) = -10, \quad \hat{Y}(0) = -5, \quad \hat{v}_x(0) = 2, \quad \hat{v}_y(0) = 2, \quad \hat{r}(0) = 2.$$

Durante la implementación numérica se conservaron las funciones de suavizado y saturación utilizadas en la validación de los controladores. En particular, las referencias dinámicas y la dinámica longitudinal deseada se prefiltraron mediante

$$\lambda_s(t) = 1 - e^{-t/3},$$

lo que permitió una transición gradual desde las condiciones iniciales. Asimismo, se utilizaron las saturaciones suaves basadas en funciones tangentes hiperbólicas para mantener las referencias dentro de rangos físicamente admisibles, considerando los límites

$$v_{x \text{ máx}} = 5 \text{ m/s}, \quad v_{y \text{ máx}} = 1 \text{ m/s}, \quad r_{\text{máx}} = 1 \text{ rad/s}, \quad u_{x \text{ máx}} = 20 \text{ m/s}^2.$$

La señal $\hat{r}_c(t)$, obtenida a partir de la dinámica del observador cinemático, se utilizó como señal de retroalimentación para el observador dinámico. Como se describió previamente, esta señal se calcula de forma analítica a partir de la ecuación de estimación del observador cinemático, evitando el uso

de una derivada numérica directa de $\hat{\psi}(t)$. Para reducir picos transitorios durante la convergencia inicial, se limitó el incremento de $\hat{r}_c(t)$ en el intervalo ± 0.1 por paso de simulación. Esta restricción se utilizó como protección numérica y no modifica la estructura analítica del observador ni del controlador.

La Figura 5.6 muestra el comportamiento cinemático del esquema propuesto. En la trayectoria $X - Y$ se presentan la referencia, la trayectoria real y la trayectoria reconstruida por el observador. Se observa que, a pesar de la diferencia inicial entre los estados reales y estimados, el AGV converge hacia la trayectoria deseada. Las señales $X(t)$ y $Y(t)$ también muestran que la posición real y la posición estimada se aproximan a sus respectivas referencias después del transitorio inicial.

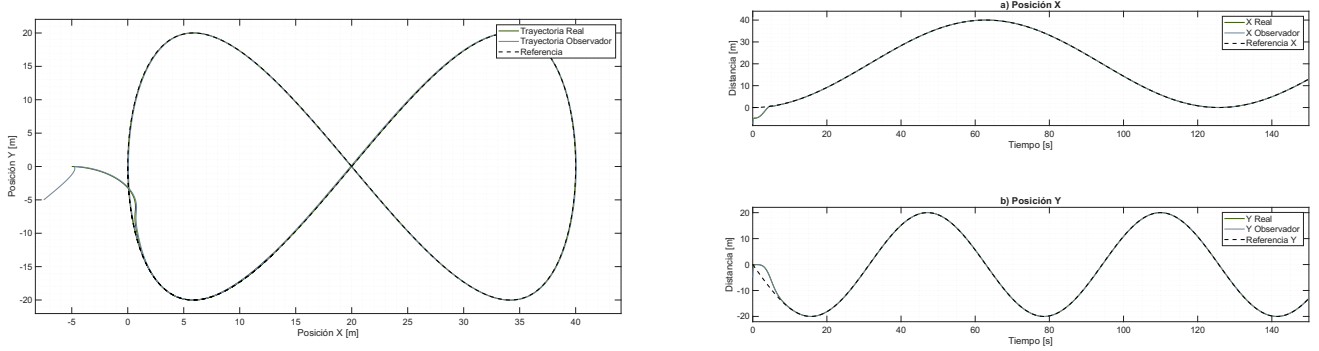


Fig. 5.6. Seguimiento de trayectoria mediante el esquema de control basado en observadores.

La Figura 5.7 presenta el comportamiento de las variables dinámicas del AGV. En la Figura 5.7(a) se muestra la velocidad longitudinal $v_x(t)$, junto con su estimación y referencia. Las Figuras 5.7(b) y 5.7(c) muestran la velocidad lateral $v_y(t)$ y la velocidad angular de orientación $r(t)$, respectivamente. En ambos casos, las señales reales y estimadas presentan convergencia hacia las referencias generadas por el controlador cinemático.

En particular, la evolución de $r(t)$ muestra la interacción entre ambos observadores: la velocidad angular estimada por el observador dinámico y la señal obtenida a partir de la derivada analítica de la orientación estimada presentan un comportamiento coherente con la referencia $r_d(t)$. Esto resulta relevante porque dicha señal participa en el acoplamiento entre el observador cinemático y el observador dinámico.

La Figura 5.7(d) muestra la evolución del ángulo de deslizamiento lateral $\beta(t)$, incluyendo la señal real, estimada y de referencia. El ángulo permanece acotado durante la simulación y sigue la

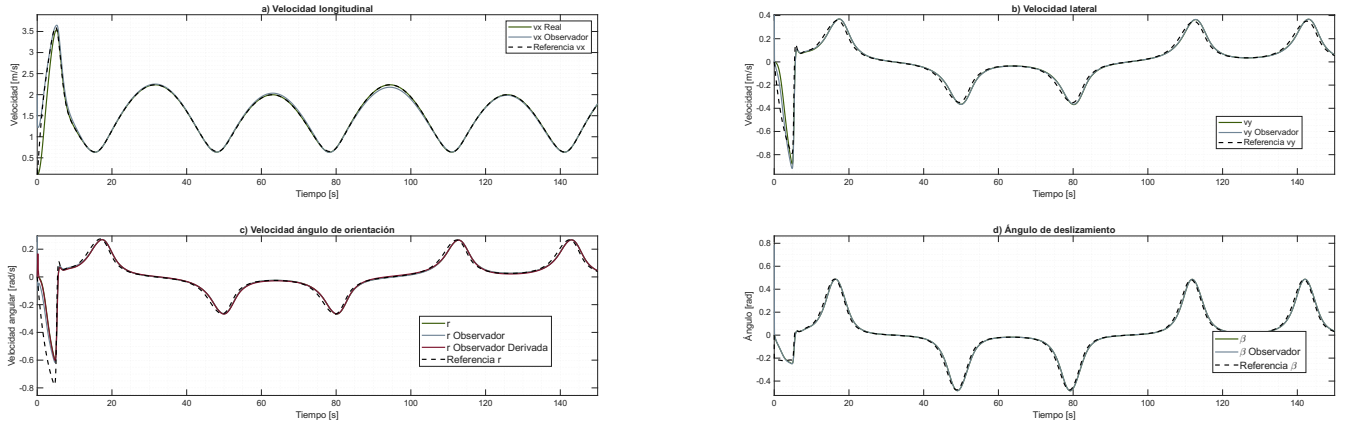


Fig. 5.7. Seguimiento de referencias dinámicas mediante el esquema de control basado en observadores.

tendencia de la referencia calculada mediante la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral. Esto indica que la generación de $r_d(t)$ mediante L_β mantiene una relación compatible con el comportamiento lateral del vehículo bajo la trayectoria considerada.

Las señales de control generadas por el esquema completo se presentan en la Figura 5.8. La Figura 5.8(a) muestra el ángulo de dirección $\delta(t)$, mientras que la Figura 5.8(b) presenta la fuerza de tracción $T(t)$. Ambas señales permanecen acotadas durante la simulación y presentan variaciones acordes con las maniobras requeridas para seguir la trayectoria de referencia. Los picos iniciales observados se asocian principalmente con las correcciones exigidas por la trayectoria y con los transitorios iniciales derivados de las diferencias entre los estados reales y estimados.

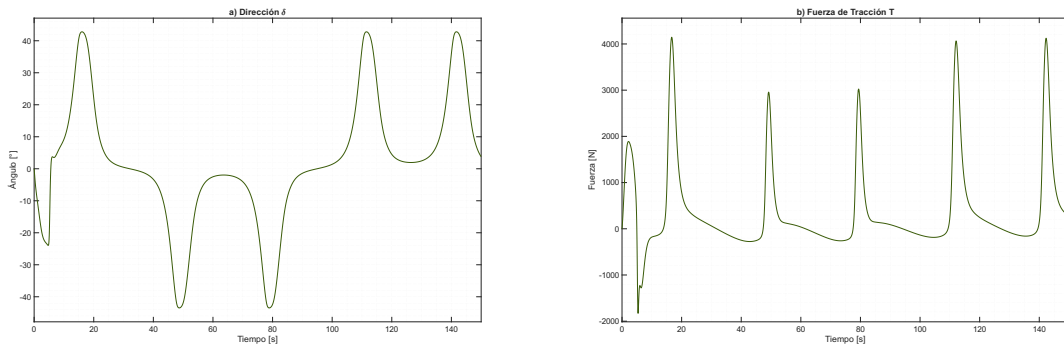


Fig. 5.8. Entradas de control generadas por el esquema de control basado en observadores.

Con el propósito de evaluar cuantitativamente el desempeño del esquema propuesto, la Tabla 5.1

presenta los índices de desempeño del controlador y del observador. Se incluyen el error cuadrático medio ($RMSE$), el error máximo y el índice de error absoluto integrado normalizado ($IAEn$).

Tabla 5.1. Índices de desempeño del controlador y del observador.

Controlador				Observador			
Estado	RMSE	Error máx.	IAEn	Estado	RMSE	Error máx.	IAEn
X	0.62313	5.0000	0.11673	$\hat{X}$	0.06128	2.5000	0.03743
Y	0.74470	5.1636	0.17992	$\hat{Y}$	0.11570	5.0000	0.02814
v_x	0.10499	0.91583	0.02016	$\hat{\psi}$	0.00593	0.16779	0.00279
v_y	0.03979	0.29299	0.01876	$\hat{v}_x$	0.14037	1.9000	0.04363
r	0.04846	0.33406	0.01777	$\hat{v}_y$	0.02851	2.0000	0.00447
				$\hat{r}$	0.02099	2.0000	0.00339

Los resultados cuantitativos muestran que los errores de seguimiento permanecen en rangos reducidos para las variables cinemáticas y dinámicas. En particular, los errores asociados a $v_y(t)$ y $r(t)$ son relevantes debido al acoplamiento existente entre la dinámica lateral y la dinámica de orientación del vehículo. Por su parte, los índices del observador muestran que las estimaciones convergen aun cuando las condiciones iniciales fueron seleccionadas con diferencias respecto a los estados reales.

En conclusión, la simulación del esquema de control basado en observadores muestra que la arquitectura propuesta permite integrar estimación y control dentro de un mismo esquema dinámico-cinemático. El controlador mantiene el seguimiento de trayectoria utilizando estados estimados, mientras que los observadores proporcionan las variables internas requeridas por la retroalimentación. De esta forma, se valida la operación conjunta de los observadores y controladores diseñados en este trabajo.

5.8. Síntesis del capítulo

En este capítulo se presentó una arquitectura de control dinámico-cinemática para el seguimiento de trayectorias de un AGV. El diseño se formuló mediante controladores PI no lineales, con el propósito de relacionar una referencia de posición definida en el plano global con las entradas físicas del vehículo.

Primero, se estableció el planteamiento del problema de seguimiento y se describió la arquitectura general de control. Bajo esta estructura, el controlador cinemático genera las referencias locales $v_{xd}(t)$ y $v_{yd}(t)$ a partir de los errores de posición $e_x(t)$ y $e_y(t)$. Además, mediante la aproximación del ángulo de deslizamiento lateral, se definió la referencia $r_d(t)$, evitando imponer una velocidad angular completamente desacoplada del comportamiento lateral del vehículo.

Posteriormente, se desarrolló el controlador dinámico PI no lineal. El diseño se organizó en un lazo longitudinal, encargado de calcular la fuerza de tracción $T(t)$, y un lazo lateral-orientación, encargado de determinar el ángulo de dirección $\delta(t)$. Aunque estos lazos se presentan de forma diferenciada, el análisis se formuló sobre la dinámica aumentada completa del error, considerando simultáneamente los errores de $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $r(t)$.

El análisis de estabilidad se planteó mediante una función cuadrática de Lyapunov aplicada a las dinámicas aumentadas de error de los controladores cinemático y dinámico. A partir de este análisis, se obtuvo una condición LMI que permite calcular las ganancias proporcionales e integrales de ambos controladores y establecer la convergencia de las dinámicas de error consideradas dentro del dominio de operación del modelo.

Los resultados de simulación permitieron validar el desempeño de la arquitectura propuesta en dos etapas. Primero, se evaluó el seguimiento de una trayectoria circular considerando disponibles las variables de estado requeridas por el controlador. Esta prueba permitió analizar el comportamiento propio de los controladores PI no lineales sin incluir los efectos asociados a la estimación de estados. Posteriormente, se evaluó el esquema de control basado en observadores, en el cual las variables internas requeridas para la retroalimentación fueron proporcionadas por los observadores dinámico y cinemático.

La validación final mostró que la arquitectura propuesta permite integrar estimación y control dentro de un mismo esquema dinámico-cinemático. El controlador mantiene el seguimiento de trayectoria utilizando estados estimados, mientras que los observadores proporcionan las variables internas necesarias para la retroalimentación. De esta forma, el capítulo conecta el modelo dinámico-cinemático, los observadores de estado y la estrategia de control dentro de una arquitectura completa para seguimiento de trayectorias del AGV.

Capítulo 6

Conclusiones generales

En este trabajo se desarrolló una metodología orientada al seguimiento de trayectorias para un Vehículo Autónomo Terrestre (AGV), integrando modelado matemático, observadores de estado y estrategias de control dentro de un esquema de control basado en observador. La propuesta permitió abordar las limitaciones relacionadas con la naturaleza no lineal del sistema y con la disponibilidad parcial de mediciones internas.

En una primera etapa, se desarrolló el modelado de los sistemas dinámico y cinemático, así como la interacción entre ambos, permitiendo representar el comportamiento del AGV a partir de una fuerza de tracción y un ángulo de dirección. Asimismo, a partir del análisis de la dinámica lateral del vehículo, se propuso una aproximación para estimar el ángulo de deslizamiento lateral mediante el parámetro dinámico L_β , el cual presentó un comportamiento adecuado dentro de los escenarios evaluados en simulación. Los resultados obtenidos permitieron validar la aproximación propuesta mediante índices RMSE reducidos respecto al comportamiento del sistema no lineal.

Los modelos obtenidos fueron representados mediante el enfoque Takagi–Sugeno, permitiendo el diseño de observadores de estado PIO capaces de estimar variables no medibles a partir de información disponible en el plano global. Las simulaciones realizadas mostraron convergencia entre los estados reales y estimados aun bajo condiciones iniciales distintas, así como reducción del error de estimación durante el seguimiento de trayectoria.

En la etapa de control, se desarrollaron estrategias de seguimiento de trayectoria mediante la definición de dinámicas proporcional–integral deseadas basadas en los errores del sistema, permitiendo

orientar el comportamiento no lineal del vehículo hacia dinámicas de error estables.

El controlador cinemático permitió generar referencias dinámicas relacionadas con el movimiento global del vehículo, mientras que el controlador dinámico transformó dichas referencias en entradas físicas aplicadas al AGV. La integración de ambos controladores permitió considerar la interacción entre las dinámicas longitudinal, lateral y de orientación del sistema junto con la cinemática del vehículo, empleando una aproximación lineal del ángulo de deslizamiento para restringir las referencias dinámicas a comportamientos físicamente alcanzables por el sistema.

El análisis de estabilidad basado en funciones de Lyapunov y condiciones matriciales tipo LMI permitió garantizar dinámicas de error convergentes tanto para los controladores como para los observadores correspondientes a los sistemas cinemático y dinámico. Asimismo, las simulaciones realizadas mostraron errores aceptables en posición, velocidades internas y variables estimadas durante las trayectorias consideradas.

Finalmente, la integración de observadores y controladores dentro de una arquitectura de control basada en observador permitió desarrollar un esquema capaz de operar sin requerir la medición directa de todas las variables internas del AGV. Los resultados obtenidos muestran que la metodología propuesta representa una alternativa viable para el seguimiento de trayectorias en vehículos autónomos terrestres bajo condiciones de información sensorial limitada.

Bibliografía

- Albhaisi, Mohammed S., Michal Prauzek, Tri Tran Huu Minh, Stepan Ozana y Jaromir Konecny (2026). Trajectory tracking control for autonomous vehicles: A systematic prisma review of models and strategies.
- Alcala, Eugenio, Vicenç Puig, Joseba Quevedo y Teresa Escobet (2018). Gain-scheduling lpv control for autonomous vehicles including friction force estimation and compensation mechanism. *IET Control Theory and Applications* **12**, 1683–1693.
- Alcalá, Eugenio, Vicenç Puig y Joseba Quevedo (2019). Ts-mpc for autonomous vehicles including a ts-mhe-uio estimator. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **68**, 6403–6413.
- Alika, Rachid, El Mehdi Mellouli y El Houssaine Tissir (2024). A modified sliding mode controller based on fuzzy logic to control the longitudinal dynamics of the autonomous vehicle. *Results in Engineering* **22**, 1–13.
- Artuñedo, Antonio, Marcos Moreno-Gonzalez y Jorge Villagra (2024). Lateral control for autonomous vehicles: A comparative evaluation. *Annual Reviews in Control* **57**, 1–13.
- Aslam, Muhammad Shamrooz y Hazrat Bilal (2024). Modeling a takagi-sugeno (t-s) fuzzy for unmanned aircraft vehicle using fuzzy controller. *Ain Shams Engineering Journal*.
- Badar, Tabish, Juha Backman y Arto Visala (2024). Vehicle modeling and state estimation for autonomous driving in terrain. *Control Engineering Practice* **152**, 1–16.
- Bai, Siyuan y Longqi Liu (2026). Ode-driven neural networks for trajectory tracking of autonomous vehicles under periodic noise suppressed. *Computational Intelligence*.

- Bessafa, H., C. Delattre, Z. Belkhatir, R. Khemmar y A. Zemouche (2022). A new discrete-time interval estimator for vehicle side-slip angle estimation. *IFAC-PapersOnLine* **55**(35), 85–90. 5th IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPVS 2022.
- Boggio, Mattia, Carlo Novara y Michele Taragna (2023). Trajectory planning and control for autonomous vehicles: a “fast” data-aided nmppc approach. *European Journal of Control* **74**, 1–8.
- Cai, Guoshun, Liwei Xu, Xiaoyuan Zhu, Ying Liu, Jiwei Feng y Guodong Yin (2024). Fuzzy adaptive event-triggered path tracking control for autonomous vehicles considering rollover prevention and parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **54**, 4896–4907.
- Chen, Tian, Hui Xia y Xiangyu Luan (2024). A linear time-varying model predictive control algorithm for autonomous vehicles. En: *2024 8th International Conference on Electrical, Mechanical and Computer Engineering, ICEMCE 2024*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1965–1970.
- Chen, Wuwei, Hansong Xiao, Qidong Wang, Linfeng Zhao y Maofei Zhu (2016). *Integrated Vehicle Dynamics and Control*. Chap. 2. John Wiley & Sons, Ltd.
- Cho, Yongseong, Kangmin Noh, Eunchan Lee y Hyunhwan Jeong (2025). Introduction to a motion control algorithm for the autonomous 4-wheel steering vehicle. En: *2025 IEEE/SICE International Symposium on System Integration, SII 2025*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1090–1094.
- Conejo, Carlos, Vicenç Puig, Bernardo Morcego, Francisco Navas y Vicente Milanés (2025). Enhancing safety in autonomous vehicles using zonotopic lpv-ekf for fault detection and isolation in state estimation. *Control Engineering Practice* **156**, 106192.
- Daraoui, N., O. Pages y A. El Hajjaji (2012). Study on observer-based robust control of the vehicle lateral dynamics via ts model with unmeasurable premise variables. En: *2012 20th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2012 - Conference Proceedings*. 836–841.
- Dong, Ziheng, Xing Xu, Shenguang He, Zhongwei Wu, Ju Xie y Te Chen (2025). Tire slip angle estimation based lateral stability control strategy for trajectory tracking scenarios of ddaev. *Control Engineering Practice* **161**, 106343.

- Fan, Xiaoliang, Chunguang Bu, Xingang Zhao, Jin Sui y Hongwei Mo (2025). Incremental double q-learning enhanced mpc for trajectory tracking of mobile robots. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **18**, 1–13.
- Fenyés, Daniel, Tamas Hegedus, Balazs Nemeth y Peter Gaspar (2025). An improved observer design approach for autonomous vehicles using error-based ultra-local model. *Scientific Reports* **15**, 25175.
- Gillespie, T. D (1992). *Fundamentals of vehicle dynamics*. Society of Automotive Engineers, Inc.
- Guangwen, Tan, Li Mengshan, Hou Biyu, Zhu Jihong y Guan Lixin (2024). Achieving accurate trajectory predicting and tracking for autonomous vehicles via reinforcement learning-assisted control approaches. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **135**, 108773.
- Gutiérrez, Susana Viridiana (2021). Control de robots móviles para el seguimiento de trayectorias. Tesis de Doctorado. Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Han, Xue (2021). Observer based fault diagnosis and fault tolerant control of nonlinear systems. Tesis de Doctorado. Automatic.
- Hu, Chuan, Yimin Chen y Junmin Wang (2021). Fuzzy observer-based transitional path-tracking control for autonomous vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **22**, 3078–3088.
- Inamdar, Rohan, S. Kavin Sundarr, Deepen Khandelwal, Varun Dev Sahu y Nitish Katal (2024). A comprehensive review on safe reinforcement learning for autonomous vehicle control in dynamic environments. *Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy* **10**, 100810.
- Isidori, Alberto (1995). *Nonlinear Control Systems*. 3 ed.. Springer. Berlín, Alemania.
- Jemmali, Mohamed Ali y Hussein T. Mouftah (2022). Discrete-time takagi-sugeno stabilization approach applied in autonomous vehicles. *Journal of Sensor and Actuator Networks* **11**, 1–17.
- Jin, Lisheng, Heping Zhou, Xianyi Xie, Baicang Guo y Xiangsheng Ma (2024a). A direct yaw moment control frame through model predictive control considering vehicle trajectory tracking performance and handling stability for autonomous driving. *Control Engineering Practice* **148**, 105947.

- Jin, Ma, Mingcheng Qu, Qingyang Gao, Zhuo Huang, Tonghua Su y Zhongchao Liang (2024b). Advanced trajectory planning and control for autonomous vehicles with quintic polynomials. *Sensors* **24**, 7928.
- Kennouche, Amine, Dounia Saifia, Mohammed Chadli y Mohamed Nasri (2022). h_∞ static output feedback control for path tracking of autonomous vehicles with input constraints. En: *2022 19th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, SSD 2022*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1688–1693.
- Kim, Changhee, Myeonggeun Jun, Jayu Kim, Kyongsu Yi y Jaeyong Park (2025). Vehicle motion planning and control at the limits of handling for autonomous driving on racetrack environments. *International Journal of Control, Automation and Systems* **23**, 1613–1629.
- Kong, Qingfeng, Chunjiang Bao, Zeyu Jiao y Jian Wu (2021). Research on path tracking and anti-roll control of commercial vehicle based on takagi-sugeno fuzzy model. *IFAC-PapersOnLine* **54**, 118–123.
- Kunghun, Worawut, Akapot Tantrapiwat y Phudit Chaidilokpattanakul (2019). Navigation of autonomous vehicle for rubber tree orchard. En: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 639. Institute of Physics Publishing. 1–7.
- Lendek, Zsófia, T. M. Guerra, Robert Babuška y Bart De Schutter (2010). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Springer Science & Business Media.
- Li, Hongliang, Heng Wang, Qing Li y Jian Li (2026a). Path following control of autonomous ground vehicles via adaptive fast non-singular terminal sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*.
- Li, Pengxu, Yongfu Wang, Jing Zhao y Panshuo Li (2025). Adaptive event-triggered integrated control for autonomous vehicle steering and lateral stability with interval type-2 fuzzy method. *Mechatronics* **106**, 103290.
- Li, Shoutao, Jun Zhu, Dezheng Xu, Haoyan Li, Xiangyi Jia, Dingli Yu y Hongyan Guo (2026b). Learning-based model predictive control for autonomous vehicles path tracking based on gaussian processes and snake optimizer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*.

- Lin, Chenhui, Efstathios Siampis y Efstathios Velenis (2024). Path-tracking control at the limits of handling of a prototype over-actuated autonomous vehicle. *Vehicle System Dynamics* 1–23.
- Lin, Xinyou, Jiawang Huang, Biao Zhang, Binhao Zhou y Zhiyong Chen (2025). A velocity adaptive steering control strategy of autonomous vehicle based on double deep q-learning network with varied agents. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **139**, 109655.
- Liu, Jianjian, Haolun Xu, Hongyi Zhu, Qian Zhu y Wenbin Han (2025a). Model predictive control of vehicle stability using differential driving torque. *IET Control Theory and Applications*.
- Liu, Yicai, Xiangyu Wang, Zhentao Chen y Liang Li (2025b). Adaptive event-triggered path tracking control with proximate appointed-time prescribed performance for autonomous ground vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **72**, 3092–3102.
- Liu, Zhen, Shixi Wen, Yuan Zhao, Chi Li y Jian Liu (2025c). Prescribed-time disturbance observer based sliding-mode control for 2-d plane autonomous ground vehicle platoons. En: *2025 37th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. 701–706.
- Mihály, András, Van Tan Vu, Trong Tu Do y Péter Gáspár (2024). Supervised reinforcement learning based trajectory tracking control for autonomous vehicles. *IFAC-PapersOnLine* **58**, 140–145.
- Narendran, V.K. y J.K. Hedrick (1994). Autonomous lateral control of vehicles in an automated highway system. *Vehicle System Dynamics* **23**, 307–324.
- Nguyen, Anh Tu, Chouki Sentouh y Jean Christophe Popieul (2016). Takagi-sugeno model-based steering control for autonomous vehicles with actuator saturation. *IFAC-PapersOnLine* **49**, 206–211.
- Nguyen, Anh Tu, Juntao Pan, Thierry Marie Guerra y Zhenhua Wang (2021a). Avoiding unmeasured premise variables in designing unknown input observers for takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Control Systems Letters* **5**, 79–84.
- Nguyen, Anh Tu, Víctor Campos, Thierry Marie Guerra, Juntao Pan y Wenbo Xie (2021b). Takagi-sugeno fuzzy observer design for nonlinear descriptor systems with unmeasured premise

- variables and unknown inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **31**, 8353–8372.
- Nguyen, Nhu Toan, Duc Thinh Le, Binh Minh Nguyen y Tung Lam Nguyen (2025). Asymmetric time-varying integral barrier lyapunov control-based trajectory tracking of autonomous vehicles with input magnitude and rate constraints. *Asian Journal of Control*.
- Ning, Yigao, Xuan Zhao, Jianyi Ning, Rui Liu y Yanru Wang (2024). Integrated control of yaw and roll stability for autonomous vehicles using interval type-2 fuzzy logic. En: *IEEE International Conference on Industrial Informatics (INDIN)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1–6.
- Pan, Juntao, Shanshan Zhang, Lijuan Bai y Weiwei Zhang (2021). Fuzzy unknown input observer design for autonomous ground vehicles. En: *2021 IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*. IEEE. 1972–1977.
- Pikner, Heiko, Raivo Sell y Ehsan Malayjerdi (2024). Level 4 commercial autonomous vehicle control system transition to an open-source solution. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences* **73**, 124–133.
- Pliego, Javier (2023). On the attitude estimation of nonholonomic wheeled mobile robots. *Automatica* **148**, 110764.
- Ren, Yunshuai, Xiangpeng Xie y Yongfu Li (2024). Lateral control of autonomous ground vehicles via a new homogeneous polynomial parameter dependent-type fuzzy controller. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* **20**, 11233–11241.
- Rokonuzzaman, Mohammad, Navid Mohajer, Saeid Nahavandi y Shady Mohamed (2021). Review and performance evaluation of path tracking controllers of autonomous vehicles. *IET Intelligent Transport Systems* **15**, 646–670.
- Shen, Dan, Yaobin Chen, Lingxi Li y Jianghai Hu (2024). Trajectory tracking for autonomous vehicles using robust model predictive control. En: *IFAC-PapersOnLine*. Vol. 58. Elsevier B.V.. 94–101.

- Skelton, R.E., T. Iwasaki y D.E. Grigoriadis (1997). *A Unified Algebraic Approach To Control Design*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis.
- Wang, Chenchao, Deyuan Meng, Honggui Han y Kaiquan Cai (2024a). Data-based estimator design for sideslip angles of autonomous ground vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **25**, 1–13.
- Wang, Chengyue, Haicheng Liao, Kaiqun Zhu, Guohui Zhang y Zhenning Li (2025). Demo: A dynamics-enhanced learning model for multi-horizon trajectory prediction in autonomous vehicles. *Information Fusion* **118**, 102924.
- Wang, Ruijie, Guodong Yin y Xianjian Jin (2016). Robust adaptive sliding mode control for nonlinear four-wheel steering autonomous vehicles path tracking systems. En: *2016 IEEE 8th International Power Electronics and Motion Control Conference, IPEMC-ECCE Asia 2016*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 2999–3006.
- Wang, Shuai, Haixin Zhao y Quan Quan (2024b). Gob: Geometric observer on $so(3)$ for disturbance observation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* p. 1.
- Wang, Sujun, Juntao Pan, Anh Tu Nguyen, Thierry Marie Guerra y Jimmy Lauber (2021). Takagi-sugeno fuzzy fault detector design with finite-frequency specifications for autonomous ground vehicles. *IFAC-PapersOnLine* **54**, 195–200.
- Wang, Zhongnan, Zhongchao Liang y Zhengtao Ding (2024c). Observer-based prescribed performance path-following control for autonomous ground vehicles via error shifting method. *Nonlinear Dynamics* **112**, 10061–10080.
- Wong, J. Y. (2022). *Theory of Ground Vehicles*. 5 ed.. Wiley.
- Xu, Feixiang, Junkang Feng, Yafei Wang, Xiaoyi Wang, Chuanwang Shen y Chen Zhou (2026). Parallel self-learning adaptive strategy based on model predictive control for trajectory tracking of autonomous vehicles. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*.
- Xu, Shaobing y Huei Peng (2020). Design, analysis, and experiments of preview path tracking control for autonomous vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **21**, 48–58.

- Xu, Zhe, Tao Yan, Simon X. Yang, S. Andrew Gadsden y Mohammad Biglarbegian (2025). Robust observer and neurodynamics based distributed formation control of multiple mobile robots. *Neurocomputing* **651**, 130818.
- Yang, Lin, Yaqi Niu, Hongbin Ren, Yuzhuang Zhao, Jiyu Sun y Chih Keng Chen (2025). Collaborative control strategy of optimal trajectory tracking and braking energy recovery for unmanned ground vehicles. *Journal of Mechanical Science and Technology* **39**, 7803–7814.
- Yao, Qiangqiang, Ying Tian, Qun Wang y Shengyuan Wang (2020). Control strategies on path tracking for autonomous vehicle: State of the art and future challenges. *IEEE Access* **8**, 161211–161222.
- Zetina, Israel Isaac (2024). Diseño de observadores para sistemas algebro- diferenciales con parámetros variables. Tesis de Doctorado. Tecnológico Nacional de México / Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Zhang, Jiarui, Aijing Kong, Yu Tang, Zhichao Lv, Lulu Guo y Peng Hang (2024). Data-driven model predictive control for autonomous vehicle steering. En: *2024 8th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCI)*. IEEE. 1–6.
- Zhang, Shou-Wu, Li Ma, Qing Li y Heng Wang (2025). Observer-based adaptive path tracking control for autonomous ground vehicle with singularities and time-varying delays. *Journal of Mechanical Science and Technology* **39**, 1443–1456.
- Zhang, Yuhua, Yuying Fang, Kaichen Cui, Pengwei Wang, Yuchen Tan, Chengyi Yu, Song Gao y Binbin Sun (2026). Intelligent vehicle tracking control with real-time tire cornering stiffness identification. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.
- Zhang, Zhicheng (2024). Coupled lateral and longitudinal control systems with planning for autonomous vehicles. En: *2024 5th International Conference on Artificial Intelligence and Computer Engineering, ICAICE 2024*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1046–1051.
- Zhao, Yating, Xiaolong Chen y Han Zhao (2020). Robust control design for home pension service mobile robots with passive and servo constraints. *Science Progress* **103**, 1–19.

- Zhou, Shilei, Yang Tian, Paul Walker y Nong Zhang (2023). Impact of the tyre dynamics on autonomous vehicle path following control with front wheel steering and differential motor torque. *IET Intelligent Transport Systems* **17**, 1629–1648.
- Zhou, Zhaodong, Mingyuan Tao, Jiayi Qiu, Peng Zhang, Meng Xu y Jun Chen (2025). Autonomous vehicle path tracking using event-triggered mpc with switching model: Methodology and real-world validation. *IET Control Theory and Applications*.
- Zhu, Cheng, Qin Luo, Kangyu Xie y Wenbin Cao (2024). Autonomous parking path planning and control for unmanned vehicles based on hybrid A* algorithm and mpc algorithm. En: *2024 5th International Conference on Artificial Intelligence and Computer Engineering, ICAICE 2024*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. 1143–1147.
- Özgüner Ümit, Tankut Acarman y Keith Redmill (2011). *Autonomous Ground Vehicles*. Artech House.

Apéndice A

Herramientas matemáticas para el análisis de sistemas

A.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov permite analizar el comportamiento de un sistema dinámico sin necesidad de obtener explícitamente la solución de sus ecuaciones diferenciales. Para un sistema no lineal descrito por

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (\text{A.1})$$

con punto de equilibrio en $x = 0$, el método consiste en proponer una función escalar $V(x)$, denominada función candidata de Lyapunov, que permita evaluar la evolución de la energía generalizada del sistema.

Para que $V(x)$ sea una función candidata adecuada, debe cumplir la condición de positividad

$$V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (\text{A.2})$$

y

$$V(0) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Es decir, $V(x)$ debe ser definida positiva alrededor del punto de equilibrio. Posteriormente, se analiza su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema,

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x}. \quad (\text{A.4})$$

Si la derivada temporal satisface

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (\text{A.5})$$

entonces $V(x)$ decrece con el tiempo y el punto de equilibrio es asintóticamente estable. En términos físicos, esta condición indica que la energía generalizada del sistema disminuye conforme evoluciona la dinámica, por lo que las trayectorias tienden hacia el equilibrio.

Una elección común para sistemas expresados en variables de estado o dinámicas de error es una función cuadrática de la forma

$$V(x) = x^T P x, \quad (\text{A.6})$$

donde $P = P^T > 0$. En este caso, la matriz P debe ser definida positiva para garantizar $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. La derivada de $V(x)$ permite establecer condiciones de estabilidad que, en muchos casos, pueden expresarse mediante desigualdades matriciales.

El enfoque de Lyapunov se utiliza como herramienta de análisis de la convergencia de las dinámicas de error correspondientes a los observadores y controladores desarrollados. En el caso de los observadores, el error que se busca estabilizar es el generado por las señales reales y estimadas; en el caso del controlador, son las referencias y los estados del sistema. En particular, se utilizan funciones cuadráticas de Lyapunov para obtener condiciones que permitan garantizar la estabilidad de dichos errores de estimación y seguimiento dentro del dominio de operación considerado.

A.2. Complemento de Schur

El complemento de Schur es una herramienta utilizada para transformar ciertas desigualdades matriciales en condiciones equivalentes con una estructura adecuada para su formulación como LMI. Esta transformación resulta útil en el análisis de estabilidad, ya que permite reorganizar términos matriciales que aparecen al derivar funciones de Lyapunov.

Sea la matriz simétrica por bloques

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

donde $A = A^T$, $D = D^T$ y las matrices tienen dimensiones compatibles. Entonces, las siguientes

condiciones son equivalentes:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A.8})$$

$$D < 0, \quad A - BD^{-1}B^T < 0, \quad (\text{A.9})$$

o, de forma equivalente,

$$A < 0, \quad D - B^T A^{-1}B < 0. \quad (\text{A.10})$$

El complemento de Schur se emplea para obtener condiciones matriciales equivalentes que facilitan la formulación de desigualdades asociadas al análisis de estabilidad de observadores y controladores.

A.3. Lema de eliminación

El lema de eliminación permite transformar desigualdades matriciales que contienen productos entre matrices conocidas y matrices de decisión. Esta herramienta resulta útil en problemas de análisis y síntesis, ya que permite establecer condiciones equivalentes para la existencia de una matriz que satisface una desigualdad matricial.

Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T$ matrices de dimensiones compatibles. De acuerdo con Skelton *y col.* (1997), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \Phi : \quad \mathcal{B}\Phi\mathcal{C} + (\mathcal{B}\Phi\mathcal{C})^T + \mathcal{D} < 0, \quad (\text{A.11})$$

y

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D} \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad \text{o} \quad \mathcal{B} \mathcal{B}^T > 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad \text{o} \quad \mathcal{C}^T \mathcal{C} > 0. \quad (\text{A.13})$$

Si se satisfacen las condiciones (A.12) y (A.13), y si $(\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_r)$ y $(\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r)$ son factorizaciones de rango completo tales que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r, \quad (\text{A.14})$$

entonces una solución para Φ está dada por

$$\Phi = \mathcal{B}_r^+ \mathcal{K} \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+, \quad (\text{A.15})$$

donde

$$\mathcal{K} = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T\left(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T\right)^{-1} + \mathcal{S}^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\left(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T\left[\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{C}_r^T\left(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T\right)^{-1}\mathcal{C}_r\mathcal{V}\right]\mathcal{B}_l\mathcal{R}^{-1}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{V} = \left(\mathcal{B}_l\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}\right)^{-1} > 0. \quad (\text{A.18})$$

En las expresiones anteriores, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ son matrices arbitrarias de dimensiones compatibles, tales que

$$\|\mathcal{L}\| < 1, \quad \mathcal{R} > 0. \quad (\text{A.19})$$

Asimismo, $(\cdot)^\perp$ denota un complemento ortogonal y $(\cdot)^+$ representa una inversa generalizada, la cual satisface

$$AA^+A = A. \quad (\text{A.20})$$

El lema de eliminación se emplea para reformular desigualdades matriciales presentes en el análisis de estabilidad, facilitando la obtención de condiciones adecuadas para el diseño de observadores y controladores.

A.4. Desigualdad de Young

La desigualdad de Young permite acotar términos cruzados que aparecen en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos. Esta herramienta resulta útil cuando la derivada de una función de Lyapunov contiene productos entre matrices o vectores que deben ser reorganizados para obtener una condición matricial.

Sean M y N matrices constantes de dimensiones compatibles. Para cualquier escalar $\gamma > 0$, se cumple que

$$\mathcal{M}^T\mathcal{N} + \mathcal{N}^T\mathcal{M} \leq \gamma\mathcal{M}^T\mathcal{M} + \frac{1}{\gamma}\mathcal{N}^T\mathcal{N}. \quad (\text{A.21})$$

La desigualdad de Young se emplea para acotar términos cruzados presentes en las dinámicas de error, facilitando la obtención de condiciones de estabilidad expresadas mediante desigualdades matriciales.

A.5. Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz permite acotar la variación de una función no lineal respecto a cambios en sus argumentos. Esta propiedad es útil en el análisis de sistemas no lineales, ya que permite tratar ciertos términos no lineales mediante cotas dependientes del error entre dos trayectorias o estados.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de operación y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función no lineal. Se dice que $f(x)$ satisface una condición de Lipschitz en Ω si existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega. \quad (\text{A.22})$$

La constante γ se conoce como constante de Lipschitz y permite establecer una cota superior para la diferencia entre los valores de la función no lineal evaluada en dos puntos distintos. Cuando esta condición se cumple únicamente dentro de un dominio acotado, se habla de una propiedad local de Lipschitz.

En el caso de sistemas dinámicos no lineales, esta condición puede emplearse para acotar diferencias de la forma

$$\|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\|, \quad (\text{A.23})$$

donde x representa el estado real del sistema y $\hat{x}$ el estado estimado. Esta relación resulta importante en el diseño de observadores, debido a que permite expresar el efecto de las no linealidades en función del error de estimación.

La condición de Lipschitz se utiliza para tratar términos no lineales presentes en las dinámicas de error de los observadores. A partir de esta propiedad, dichos términos pueden incorporarse al análisis de estabilidad mediante desigualdades matriciales, facilitando la obtención de condiciones suficientes para la convergencia del error de estimación.

A.6. Criterio de observabilidad para sistemas no lineales

Considérese un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t)), \quad (\text{A.24})$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u(t)$ corresponde a las entradas conocidas y $y(t)$ agrupa las salidas disponibles.

La observabilidad local puede analizarse mediante las derivadas de Lie de la función de salida. La primera derivada se define como

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, u), \quad (\text{A.25})$$

mientras que las derivadas de orden superior se obtienen:

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x} f(x, u). \quad (\text{A.26})$$

A partir de estas expresiones se construye el mapa de observabilidad

$$\mathcal{O}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

y su Jacobiano respecto al vector de estados:

$$\sigma(x) = \frac{\partial \mathcal{O}(x)}{\partial x}. \quad (\text{A.28})$$

El sistema es localmente observable alrededor de los puntos si

$$\text{rank}(\sigma(x)) = n. \quad (\text{A.29})$$