



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®



Apuntes de Cálculo Integral y Cálculo Vectorial

Reporte final: Cálculo Vectorial

María Guadalupe Amado Moreno

Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Mexicali

Departamento de Ciencias Básicas

2 de septiembre de 2025

Contribución académica

La asignatura Cálculo Vectorial actualmente se imparte en el tercer semestre del programa educativo de Ingeniería Química del Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Mexicali (TecNM/ITM). Se detalla, un análisis sobre cómo esta asignatura contribuye al cumplimiento de los objetivos formativos establecidos en dicho programa.

El objetivo general de la carrera de Ingeniería Química es “Formar profesionistas en Ingeniería Química competentes para investigar, generar y aplicar el conocimiento científico y tecnológico, que le permita identificar y resolver problemas de diseño, operación, adaptación, optimización y administración en industrias químicas y de servicios, con calidad, seguridad, economía, usando racional y eficientemente los recursos naturales, conservando el medio ambiente, cumpliendo el código ético de la profesión y participando en el bienestar de la sociedad” (TecNM/ITM, s.f.).

Durante los meses de junio y agosto de 2022 los integrantes de la Academia de Ingeniería Química y Bioquímica se reunieron para establecer por consenso tres objetivos formativos educacionales para el programa educativo de Ingeniería Química del TecNM/ITM. Se presenta una descripción sobre la contribución de la asignatura de Cálculo Vectorial a la consecución de dichos objetivos:

“Los egresados de Ingeniería Química son profesionistas competentes para desarrollarse en los sectores industrial y de servicios; identificando, analizando, formulando y resolviendo problemas propios de su ámbito”. En este sentido la asignatura de Cálculo Vectorial contribuye al desarrollar un pensamiento lógico matemático que le permitirá al egresado identificar, analizar y resolver problemas, ya que tendrán las herramientas básicas necesarias para modelar fenómenos de Ingeniería Química. Con las herramientas matemáticas podrán manipular una gran cantidad de variables para emplearlas en las ecuaciones de diseño y de modelación para la

simulación de los procesos. Estos análisis podrán servir de base en la toma de decisiones y para hacer más eficientes los procesos. Los conocimientos adquiridos son indispensables para identificar el comportamiento de una gran cantidad de sistemas tanto a nivel laboratorio como a escala industrial. Las competencias adquiridas en Cálculo Vectorial, entre ellas, la aplicación de las propiedades de vectores, rectas, planos, cálculo de funciones vectoriales o escalares de varias variables son necesarias para resolver y optimizar problemas de Ingeniería Química, principalmente el diseño de equipos de procesos industriales de esta ingeniería.

“Los egresados de Ingeniería Química se conducen éticamente y aplican la normatividad inherente a su práctica profesional con una visión sustentable en ambientes interdisciplinarios y multiculturales”. Con las competencias adquiridas en Cálculo Vectorial, el egresado de Ingeniería Química es capaz de manipular las variables incluidas en los diferentes modelos matemáticos claves en el diseño de procesos químicos. La manipulación de las variables de proceso lleva al desarrollo de diferentes alternativas de operación en las que el egresado puede aplicar su capacidad de análisis y síntesis para seleccionar la más viable, no solo desde el punto de vista económico, sino también con una perspectiva ética, sustentable y respetuosa con la normatividad aplicable.

“Los egresados de Ingeniería Química son competentes para administrar recursos, comunicarse en forma oral y escrita de manera expedita y concisa, así como trabajar en equipo con actitud creativa y emprendedora en el desarrollo de proyectos”. En la asignatura de Cálculo Vectorial varios subtemas se abordan con actividades en las cuales los estudiantes forman grupos para resolver una serie de ejercicios o problemas, favoreciendo con ello el trabajo en equipo, también exponen la solución frente al grupo, poniendo en práctica habilidades de comunicación oral (exposiciones y discusiones) y escrita (al resolver los ejercicios en el pizarrón y en algunos

temas al elaborar el portafolio de evidencia de lo realizado), para ello emplean con regularidad las tecnologías de la información y comunicación (TIC's).

ÍNDICE:

INTRODUCCIÓN.....	7
1. VECTORES EN EL ESPACIO	10
1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio. Interpretación geométrica.....	10
1.2 Álgebra vectorial y su geometría	13
1.3 Producto escalar y vectorial	28
1.4 Ecuación de la recta.....	41
1.5 Ecuación del plano	45
1.6 Aplicaciones	49
1.7 Actividades de aprendizaje y complementos educativos.....	52
2. CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES	57
2.1 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica.....	57
2.2 Derivada de una curva en forma paramétrica.....	60
2.3 Tangentes a una curva	61
2.4 Área y longitud de arco	63
2.5 Curvas planas y graficación en coordenadas polares	68
2.6 Cálculo en coordenadas polares	76
2.7 Actividades de aprendizaje y complementos educativos.....	91
3. FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL.....	96
3.1 Definición de función vectorial de una variable real	96
3.2 Límites y continuidad de una función vectorial	98
3.3 Derivada de una función vectorial	103
3.4 Integración (antiderivada) de funciones vectoriales.....	106
3.5 Longitud de arco.....	108
3.6 Vectores tangente, normal y binormal	112
3.7 Curvatura	115
3.8 Aplicaciones	117
3.9 Actividades de aprendizaje y complementos educativos.....	128
4. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES	131
4.1 Definición de una función de varias variables	131

4.2 Gráfica de una función de varias variables. Curvas y superficies de nivel	132
4.3 Límite y continuidad de una función de varias variables	137
4.4 Derivadas parciales	141
4.5 Incrementos y diferenciales.....	147
4.6 Regla de la cadena y derivación implícita.....	151
4.7 Derivadas parciales de orden superior	154
4.8 Derivada direccional y gradiente.....	157
4.9 Valores extremos de funciones de varias variables.....	161
4.10 Actividades de aprendizaje y complementos educativos	162
5. INTEGRACIÓN MÚLTIPLE	166
5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles.....	166
5.2 Integrales iteradas.....	168
5.3 Integral doble en coordenadas rectangulares	168
5.4 Integral doble en coordenadas polares	175
5.5 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen	179
5.6 Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas.....	185
5.7 Campos vectoriales	191
5.8 Integral de línea.....	194
5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.....	205
5.10 Teoremas de integrales. Aplicaciones.	209
5.11 Actividades de aprendizaje y complementos educativos	240
REFERENCIAS	244
ANEXO 1. ACTIVIDADES ADICIONALES PARA CÁLCULO VECTORIAL.....	245
1. Vectores en el espacio	245
2. Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	259
3. Funciones vectoriales de una variable real.....	269
4. Funciones vectoriales de una variable real.....	281
5. Integración múltiple	294
ANEXO 2. INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA CÁLCULO VECTORIAL.....	314
ANEXO 3. CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN.....	338

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Cálculo Vectorial, que se imparte en el TecNM/ITM, forma parte del currículo de los programas de ingeniería del tercer semestre. Esta materia se encuentra dentro del área de Ciencias Básicas y representa un pilar fundamental para la formación de los estudiantes en el campo de la ingeniería. Su estudio fomenta en el estudiantado el desarrollo de un pensamiento lógico y matemático que no solo enriquece el perfil del futuro ingeniero, sino que también le otorga herramientas para modelar fenómenos y aplicarlos en diversos contextos.

El Cálculo Vectorial constituye la base para cursos más avanzados como Estática, Ecuaciones Diferenciales y Física, además de ser esencial en el aprendizaje de otras asignaturas de carrera y especialidad de Ingeniería Química (Termodinámica, Fisicoquímica, Balance de Momento, Calor y Masa, entre otras). Durante este curso los estudiantes adquieren: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo.

Cinco temas se abordan en el programa de Cálculo Vectorial, se inicia en el tema 1, con la exploración de los vectores, abordando su comprensión, manipulación algebraica y representación geométrica. Se utiliza el producto escalar para calcular el trabajo realizado por una fuerza y el producto vectorial para determinar el momento de esta, entre otras aplicaciones. También se estudia el triple producto escalar, el cual permite calcular volúmenes de paralelepípedos rectangulares y determinar momentos de fuerzas con respecto a un eje. Para cerrar el primer tema, se estudian las ecuaciones que describen rectas y planos en el espacio.

En el segundo tema, el enfoque se traslada al estudio de curvas en el plano, esenciales para analizar el movimiento de un cuerpo en términos de posición, velocidad y aceleración. Se

emplean tanto coordenadas rectangulares como polares, dependiendo de la geometría de las trayectorias, optimizando así la resolución algebraica. También se abordan conceptos como la tangente horizontal y vertical a una curva, longitud de arco y el cálculo de área de una superficie.

El estudio de curvas en el espacio utilizando parametrización se introduce en el tercer tema. Se analiza los límites y la continuidad de funciones vectoriales, así como sus derivadas e integrales. Se examina además los vectores tangentes, normal y binormal, los cuales caracterizan la geometría de una curva en el espacio. Se estudia la longitud de arco y la curvatura.

En el cuarto tema, se trabaja con funciones de dos variables, representándolas mediante gráficos, mapas de contorno y curvas de nivel para comprender su comportamiento. Se estudian los límites y la continuidad en funciones de varias variables, además de calcular y analizar sus derivadas parciales e interpretar su significado geométrico. También se introduce el concepto de diferencial y la linealización de funciones, complementando el tema con la regla de la cadena, la derivación implícita y las derivadas parciales de orden superior. Se finaliza con la definición de gradiente y su uso en el cálculo de derivadas direccionales, concluyendo con el análisis de valores extremos de funciones de varias variables.

Finalmente, el último tema se centra en el estudio de las integrales dobles y triples en distintos sistemas de coordenadas, fundamentales para el cálculo de áreas y volúmenes. Se exploran regiones tipo I y tipo II para facilitar la aplicación de integrales múltiples. Además, se introduce el concepto de campo vectorial, con ejemplos prácticos como el flujo de calor, flujo de energía, el campo gravitatorio y las cargas eléctricas. A partir de estos análisis, se profundiza en la interpretación geométrica del gradiente, la divergencia y el rotacional de un campo vectorial. Para concluir, se estudian las integrales de línea y los teoremas fundamentales de Green, Stokes y de la divergencia de Gauss (TecNM, s. f.).

Estos apuntes están diseñados para ser una herramienta práctica y accesible que facilite la enseñanza del Cálculo Vectorial. La intención es ofrecer un material estructurado y de calidad que favorezca el aprendizaje de los estudiantes y a los docentes a enriquecer sus clases. Además de servir como guía de estudio, este material busca aportar una perspectiva adicional sobre los contenidos, contribuyendo al fortalecimiento de las asignaturas de Ciencias Básicas, fundamentales en la formación de cualquier ingeniería.

Se espera que estos apuntes sean un apoyo efectivo tanto para profesores como para estudiantes, ayudando a mejorar el aprendizaje y los resultados académicos en estas disciplinas clave. Se incluyen diversas actividades para ser desarrolladas en clase, prácticas que los estudiantes realizaran en el aula y tareas para reforzar el aprendizaje fuera del horario escolar.

Es importante señalar que todas las actividades y tareas que no cuentan con cita han sido diseñados o resueltos por el autor de estos apuntes. En cambio, aquellos que han sido tomados de otras fuentes incluyen la cita correspondiente.

1. VECTORES EN EL ESPACIO

Competencias específicas: comprende y aplica las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de diversas áreas de la ingeniería, además formula y analiza ecuaciones de rectas y planos en distintos contextos, desarrollando habilidades para el modelado matemático y su aplicación en situaciones reales.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio. Interpretación geométrica.

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante. En las ciencias, la ingeniería y las matemáticas es usual utilizar cantidades escalares (o escalares) y cantidades vectoriales (o vectores). Se inicia con los conceptos básicos de este tema.

Una cantidad escalar o simplemente un escalar es una magnitud cuya determinación solo requiere el conocimiento de un número. Por ejemplo, las siguientes son unidades de medida: la estatura, edad, temperatura, el peso y el tiempo

Los escalares se indican por una letra del tipo ordinario, generalmente por las primeras letras del alfabeto. Las operaciones con escalares obedecen las reglas del álgebra elemental de los números reales (Leithold, 1998).

Mientras que una cantidad vectorial o comúnmente un vector es “...un segmento de recta dirigido...” (Thomas, 2010, p. 665) que “posee tanto magnitud como dirección” (Stewart, 2018, p. 798). Por ejemplo, una fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración, campo eléctrico, campo magnético, etcétera son cantidades vectoriales que se representan geoméricamente como un vector (Larson y Edwards, 2010).

Representación gráfica de un vector

Un segmento de recta dirigido, representado por una flecha, define un vector. El punto donde comienza se denomina punto inicial, mientras que el punto donde termina es el punto final. La flecha que conecta ambos puntos indica la dirección del vector. La longitud del segmento también llamada magnitud o módulo, expresa su tamaño (Rivera y Álvarez, 2020). Cuando el punto inicial coincide con el origen de coordenadas, el vector recibe el nombre de vector de posición (Edwards y Penney, 2008). En la Figura 1.1 se muestran varios ejemplos de vectores en el sistema bidimensional (plano) y en la Figura 1.2 un vector en el sistema tridimensional (espacio).

Figura 1.1

Vectores en el sistema bidimensional.

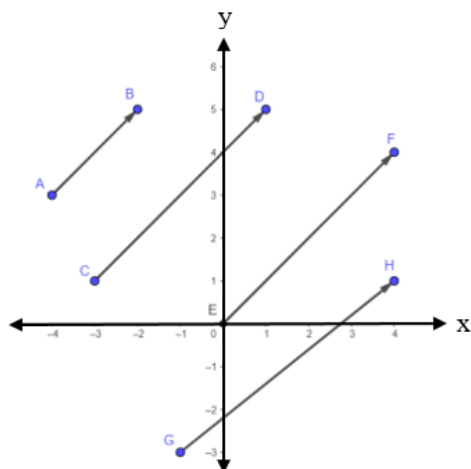
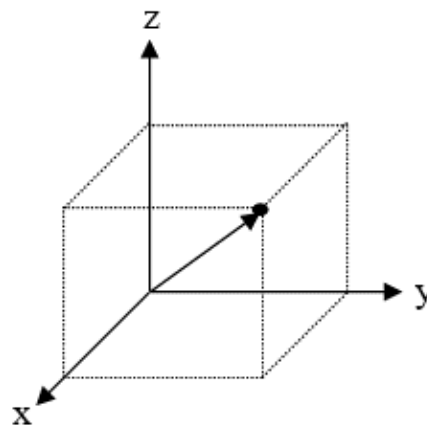


Figura 1.2

Vector en el sistema tridimensional.



Representación analítica de un vector

Se representa por una literal con una flecha encima o la literal en negrillas.

$$\vec{A}$$

Se lee vector “ $\vec{A}$ ”

Un vector se puede representar como una pareja o terna ordenada de números reales, a los elementos del vector se les llama componentes, separados por comas y entre rombos.

Dos dimensiones (Dos componentes)

Tres dimensiones (Tres componentes)

$$\vec{A} = \langle a, b \rangle$$

$$\vec{A} = \langle a, b, c \rangle$$

TAREA 1.1: Realizar una presentación de la clasificación y uso de vectores en la vida cotidiana. Utilice formato APA para las referencias. Subir a plataforma Moodle.

Magnitud o módulo de un vector

Es la longitud del segmento dirigido.

Se denota por: $|\vec{A}|$ o $\|\vec{A}\|$

NOTA: $\|\vec{A}\| \geq 0$; $\|\vec{A}\| = 0 \quad \vec{A} = 0$

Cálculo de la magnitud o módulo de un vector

Si $\vec{A}$ es el vector, entonces la magnitud del vector $\vec{A}$ es la raíz cuadrada de la suma de cada componente del vector al cuadrado, es decir:

Vector en dos dimensiones

Vector en tres dimensiones

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

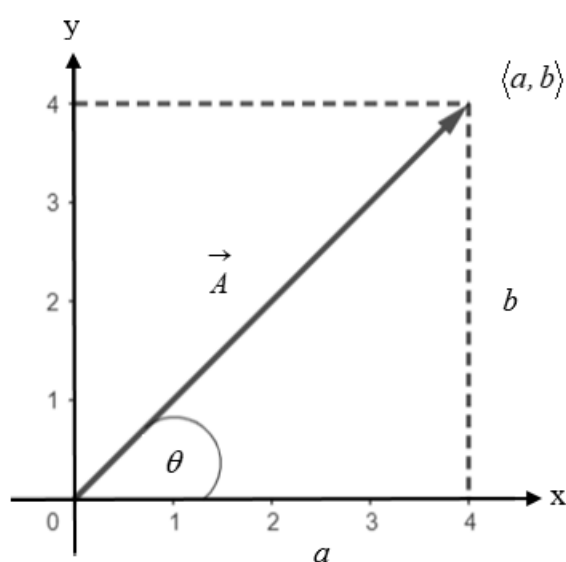
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dirección de un vector

Para calcular la dirección, se utiliza el ángulo que existe entre el eje positivo de las abscisas y el vector, como se muestra en Figura 1.3 (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Marsden y Tromba, 2004; Edwards y Penney, 2008; Zill y Dewar, 2008; Larson y Edwards, 2010; Thomas, 2010; Zill y Wright, 2011; Stewart, 2018; Rivera y Álvarez, 2020).

Figura 1.3

Ángulo entre un vector y el eje x.



Del teorema de Pitágoras

se tiene:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Despejando el ángulo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

1.2 Álgebra vectorial y su geometría

Los autores de libros de texto para matemáticas como: Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

El Álgebra vectorial es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades y operaciones entre vectores, tales como la suma, la resta, el producto escalar y el producto vectorial. Su aplicación es fundamental en la Geometría Analítica, ya que permite modelar y

resolver problemas relacionados con magnitudes que poseen dirección y sentido, como la fuerza, la velocidad o la aceleración, así como la determinación de la ecuación de una recta en el espacio, la distancia entre dos puntos o la intersección de planos.

En Geometría, los vectores se utilizan para representar puntos, direcciones y planos en el espacio tridimensional. A través de la combinación lineal de vectores, es posible describir rectas y planos.

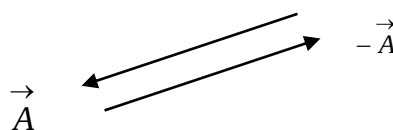
A continuación, se desarrolla el subtema.

Álgebra vectorial:

- 1) Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales cuando tienen la misma magnitud, dirección y sentido y el mismo origen. Se representa por:

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{B}$$

- 2) Dado un Vector $\vec{A}$ el vector opuesto $-\vec{A}$, es el que tiene la misma magnitud, dirección y sentido contrario.



- 3) La suma o resultante de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$ obtenido trasladando el origen de $\vec{B}$ al extremo de $\vec{A}$ y uniendo el origen a $\vec{A}$ con el extremo de $\vec{B}$.

Analíticamente se expresa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

NOTA: La suma de varios vectores puede realizarse siempre y cuando se sumen de dos en dos para el caso 3, analíticamente no importa el número de vectores.

Leyes del álgebra vectorial:

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ tres vectores, m y n dos escalares:

- | | | |
|----|---|---|
| 1) | $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ | P. Conmutativa de la suma |
| 2) | $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ | P. Asociativa de la suma |
| 3) | $m\vec{A} = \vec{A}m$ | P. Conmutativa del producto |
| 4) | $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ | P. Distributiva del producto |
| 5) | $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$ | P. Distributiva |
| 6) | $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$ | P. Asociativa del producto por un escalar |

Las operaciones con vectores se realizarán para dos dimensiones (dos componentes) y después se generaliza para n componentes.

Suma o resta de vectores:

Sean los vectores: $\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$

Entonces:

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

Multiplicación de vector por un escalar:

Sea C el escalar:

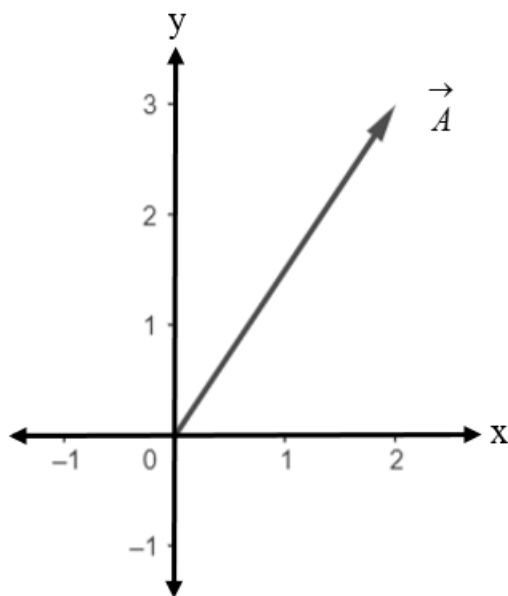
$$C\vec{A} = \langle Ca_1, Ca_2 \rangle$$

Vector 0 o nulo:

Gráficamente se representa como un punto y analíticamente: $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$

Vector opuesto: $-\vec{A} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$

Actividad 1.1: Grafique el vector $\vec{A} = \langle 2, 3 \rangle$



Actividad 1.2: Determine la magnitud de los siguientes vectores.

a) $\vec{A} = \langle 4, 2 \rangle$

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{(5)(4)} = 2\sqrt{5}$$

b) $\vec{D} = \left\langle \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right\rangle$

$$\left\| \vec{D} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+8}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

Práctica 1: Representar gráficamente los vectores en el espacio, utilizando Winplot.

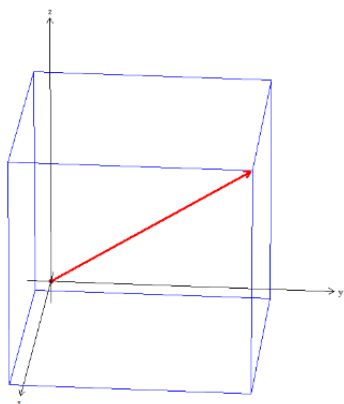
Realizar la práctica en el aula y subir a plataforma Moodle el trabajo terminado.

Procedimiento:

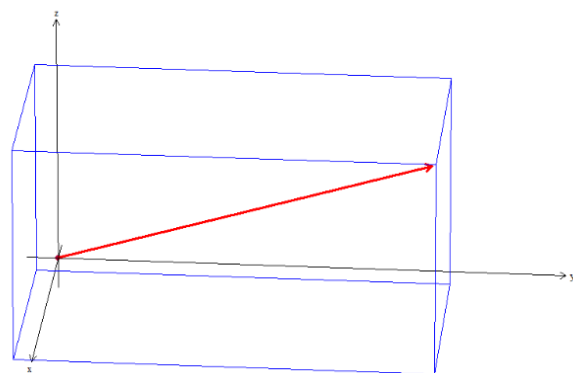
1. Abrir el programa Winplot.
2. Elegir pestaña **ventana**, Opción **3 dim**.
3. En pestaña **ecuación**, elegir opción **punto**, opción **cartesiana** y escribir la coordenada origen (0,0,0).
4. En pestaña **ecuación**, elegir opción **punto**, opción **cartesiana** y escribir las componentes del vector dado.
5. En pestaña **ecuación**, elegir opción **segmento**, y escribir las coordenadas del punto origen en a, b, c y después las componentes del vector 1 en d, e, f. (Si desea cambiar color, seleccionar la opción color y elegir el color de su preferencia). Seleccione ancho de lápiz mayor a 1 para que el segmento sea más grueso y coloque el sentido del segmento.
6. En pestaña **ver**, elegir opción **caja**, volver a escoger **caja**.
7. Una vez trazado el vector, seleccionar pestaña **Btms**, elegir opción **texto**, dar clic derecho en cualquier parte de la gráfica y escribir el nombre de vector, dar clic en aceptar y acomodar en la gráfica (Si desea cambiar fuente de la letra, seleccionar la opción fuente y elegir el color, tipo y tamaño de su preferencia).

Actividad 1.3: Represente gráficamente los vectores en el espacio.

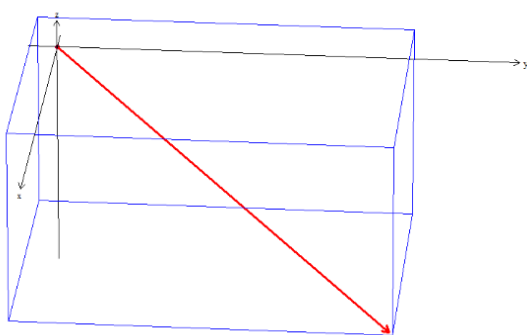
a) $\vec{A} = \langle 3, 2, 3 \rangle$



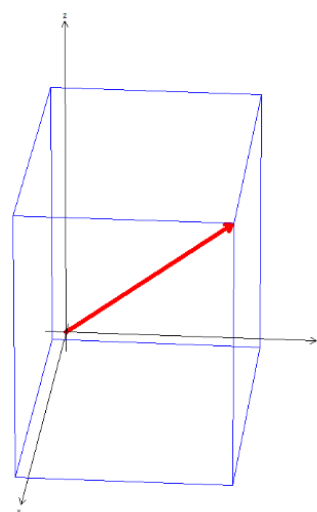
b) $\vec{B} = \langle 2, 4, 2 \rangle$



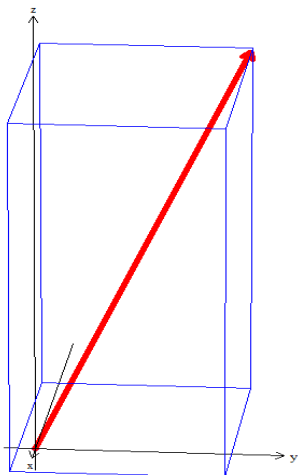
c) $\vec{R} = \langle 3, 4, -2 \rangle$



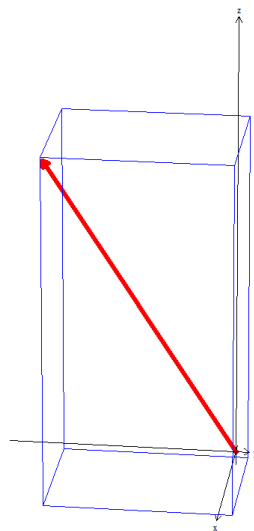
d) $\vec{M} = \langle 5, 3, 4 \rangle$



e) $\vec{Z} = \langle -3, 2, 5 \rangle$



f) $\vec{W} = \langle 3, -4, 8 \rangle$

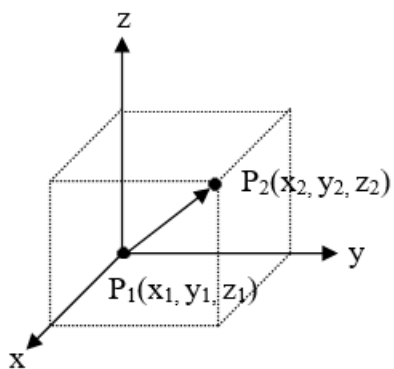


Vector en el espacio

Puede obtenerse por la suma de sus componentes como se observa en Figura 1.4:

Figura 1.4

Vector en el espacio dado dos puntos.



Si el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es el punto inicial del vector y el punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es el punto

final del vector, las componentes del vector $\vec{A}$ son:

$$\vec{P_1 P_2} = \vec{A} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

El módulo o magnitud de $\vec{A}$ es:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

NOTA: Las componentes de un vector $\vec{A}$ son independientes del origen que se selecciona.

Vectores unitarios

Cualquier vector $\vec{A}$ diferente de cero, da origen a un vector $\hat{a}$ en la misma dirección y magnitud "1" de la siguiente forma:

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

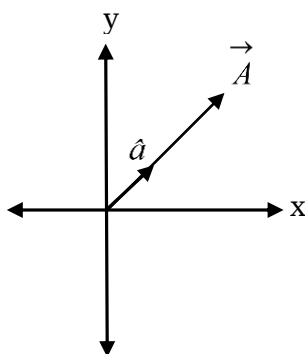
Al vector $\hat{a}$ se le llama vector unitario de $\vec{A}$.

NOTA: Los vectores unitarios, se representarán con las minúsculas correspondientes al vector asociado, o bien con la letra $\vec{U}$.

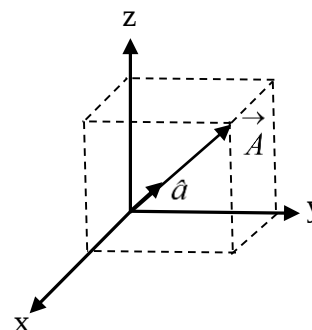
Interpretación geométrica

Figura 1.5

Representación de los vectores canónicos de un vector en dos y tres dimensiones.



Dos dimensiones



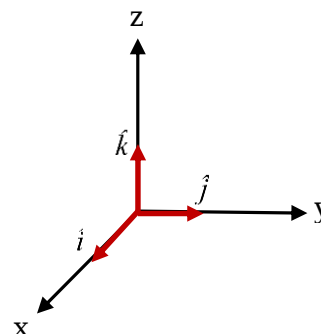
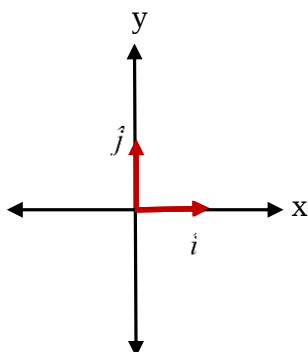
Tres dimensiones

Observaciones:

- 1) El **vector unitario** determina la dirección del vector.
- 2) Vectores de diferente magnitud, pero igual dirección tendrá el mismo vector unitario.
- 3) Vectores unitarios canónicos. Son los vectores en la dirección de los ejes coordenados. Se denotan por $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y su representación geométrica se muestra en Figura 1.6.

Figura 1.6

Representación de los vectores canónicos en el sistema rectangular y en el sistema tridimensional.



Donde:

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Representación de vectores en términos de los vectores unitarios canónicos

Todo vector diferente de cero se puede representar en términos de los vectores canónicos.

Sea el vector $\vec{A} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ por la ley distributiva es posible escribir el vector como:

$$\vec{A} = a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + b_1 \langle 0, 1, 0 \rangle + c_1 \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Por lo tanto: $\vec{A} = a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j} + c_1 \hat{k}$ Representación Canónica Vectorial

Actividad 1.4: Expresar $\vec{A} = \langle 3, -4, 2 \rangle$ en términos de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y encontrar un vector

unitario $\vec{U}$ que tenga dirección opuesta a $\vec{A}$ (Swokowski, 1989).

$$-\vec{A} = \langle -3, 4, -2 \rangle = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} \quad \vec{U} = \frac{-\vec{A}}{\|-\vec{A}\|}$$

$$\|-\vec{A}\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\vec{U} = \frac{-3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{29}} = \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} = \frac{-3}{\sqrt{29}} \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{29}} \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}} \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

$$\vec{U} = \frac{-3\sqrt{29}}{29}\hat{i} + \frac{4\sqrt{29}}{29}\hat{j} - \frac{2\sqrt{29}}{29}\hat{k}$$

Actividad 1.5: Encuentre un vector con dirección opuesta al vector $\vec{A} - 3\vec{B} = \vec{C}$ y

magnitud 4. Si los vectores son $\vec{A} = \langle 2, 1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 3, -2 \rangle$.

$$\vec{C} = \vec{A} - 3\vec{B} = \langle 2, 1 \rangle - 3\langle 3, -2 \rangle$$

$$\vec{C} = \langle -7, 7 \rangle \text{ Por lo tanto } -\vec{C} = \langle 7, -7 \rangle$$

$$\|-\vec{C}\| = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$$

$$\vec{U} = \frac{-\vec{C}}{\|-\vec{C}\|}$$

$$\vec{U} = \frac{\langle 7, -7 \rangle}{7\sqrt{2}} = \frac{7\langle 1, -1 \rangle}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \quad \text{Racionalizando} \quad \vec{U} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \quad \text{Magnitud 1}$$

$$\text{De magnitud 4:} \quad \vec{U} = 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right] \quad \vec{U} = 2\sqrt{2}\hat{i} - 2\sqrt{2}\hat{j}$$

Actividad 1.6: Dados los puntos P(5, 6, -2) y Q(-3, 8, 7) encontrar los vectores $\vec{a}$ y

$\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ que correspondan a $\vec{PQ}$ y $\vec{QP}$ respectivamente.

$$\Delta x = -3 - 5 = -8$$

$$\Delta x = 5 - (-3) = 8$$

$$\Delta y = 8 - 6 = 2$$

$$\vec{a} = \vec{PQ} = \langle -8, 2, 9 \rangle$$

$$\Delta y = 6 - 8 = -2$$

$$\vec{b} = \vec{QP} = \langle 8, -2, -9 \rangle$$

$$\Delta z = 7 - (-2) = 9$$

$$\Delta z = -2 - 7 = -9$$

Actividad 1.7: Obtenga el punto S de manera que $\vec{PQ}$ y $\vec{RS}$ representen el mismo

vector, considere $P = (2, 5)$, $Q = (1, 6)$, $R = (-3, 2)$ y $S = (S_1, S_2)$.

$$\vec{PQ} = \vec{a} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\vec{PQ} = \vec{RS}$$

$$\vec{RS} = \vec{b} = \langle S_1 + 3, S_2 - 2 \rangle$$

Si $\vec{PQ} = \vec{RS}$

$$\langle -1, 1 \rangle = \langle S_1 + 3, S_2 - 2 \rangle$$

Los vectores son iguales, por lo tanto, se igualan las componentes para x y las componentes para y para obtener el punto S.

$$-1 = S_1 + 3 \quad 1 = S_2 - 2$$

$$S_1 = -4 \quad S_2 = 3$$

$$S = (-4, 3)$$

TAREA 1. 2: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
797	11, 15, 17, 19, 23, 27, 33
809	29

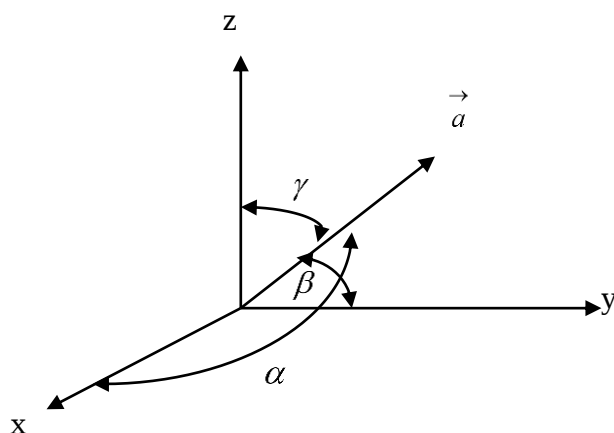
Ángulos y cosenos directores

Los ángulos directores de un vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ diferente de cero son los ángulos α, β, γ comprendidos respectivamente entre los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y el vector $\vec{a}$, los cosenos directores son: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Los ángulos directores de un vector siempre se mencionan en el orden específico α, β, γ y se observan en Figura 1.7. Si $\vec{OA}$ es el vector de posición correspondiente a $\vec{a}$ entonces es conveniente medir estos ángulos siguiendo el camino más corto de cada uno de los ejes coordenados de $\vec{OA}$. Los ángulos directores están en el intervalo de $[0, \pi]$.

Figura 1.7

Representación de los ángulos directores de un vector.



Teorema:

Si α, β, γ son los ángulos directores de un vector $\vec{a} \neq 0$

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \cos \beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

$$b) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Deducción:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(a_1)^2}{\|\vec{a}\|^2}, \cos^2 \beta = \frac{(a_2)^2}{\|\vec{a}\|^2}, \cos^2 \gamma = \frac{(a_3)^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

Sustituyendo en: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

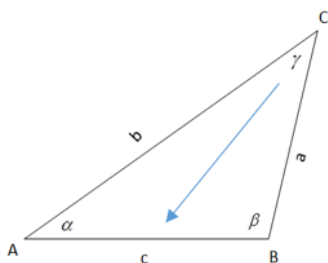
$$\frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$\text{Si } \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \therefore \|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{a}\|^2} = 1 \quad \text{L.Q.Q.D. (lo que se quería demostrar)}$$

c) Los ángulos directores de $\vec{a}$ son: $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$

d) Ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



Actividad 1.8: Sean los vectores $\vec{a} = \langle 3, -1, 4 \rangle$, $\vec{b} = \langle -2, 5, -3 \rangle$, $\vec{c} = \langle 4, 3, -2 \rangle$.

Encontrar los ángulos y cosenos directores de $\vec{M} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 4\vec{c}$.

$$\vec{M} = 3\langle 3, -1, 4 \rangle - 2\langle -2, 5, -3 \rangle - 4\langle 4, 3, -2 \rangle$$

$$\vec{M} = \langle 9, -3, 12 \rangle - \langle -4, 10, -6 \rangle - \langle 16, 12, -8 \rangle$$

$$\vec{M} = \langle -3, -25, 26 \rangle$$

$$\|\vec{M}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-25)^2 + (26)^2} = \sqrt{1310}$$

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{\|\vec{M}\|} = \frac{-3}{\sqrt{1310}} = -0.0828$$

$$\cos \gamma = \frac{M_z}{\|\vec{M}\|} = \frac{26}{\sqrt{1310}} = 0.7184$$

Ángulos directores

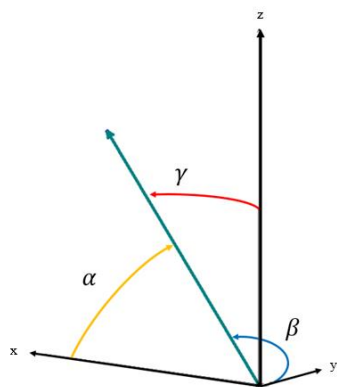
$$\alpha = \cos^{-1}(-0.0828) = 94.76 \text{ grados}$$

$$\beta = \cos^{-1}(-0.6907) = 133.68 \text{ grados}$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0.7184) = 44.07 \text{ grados}$$

$$\cos \beta = \frac{M_y}{\|\vec{M}\|} = \frac{-25}{\sqrt{1310}} = -0.6907$$

Gráficamente se observan los ángulos directores en el sistema tridimensional.



TAREA 1.3: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
810	35, 39

1.3 Producto escalar y vectorial

Los autores de libros de texto para matemáticas como: Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

En esta sección se estudiarán dos métodos para multiplicar vectores.

Al primero se le denomina Producto Escalar ("Producto Punto") porque de éste ***se obtiene como resultado un escalar.***

Este producto es útil en el cálculo de componentes vectoriales a lo largo de una determinada dirección.

Otra operación es el Producto Vectorial ("Producto Cruz") cuyo ***resultado es un vector.***

Este producto se utiliza ampliamente para describir los efectos de las fuerzas en estudios de electricidad y magnetismo, flujo de fluidos, y mecánica orbital.

Producto escalar

El producto escalar o producto punto entre los vectores $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

Se denota por: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se lee "A producto punto B"

Se determina en términos de sus componentes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Es decir:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \cdot b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 \hat{i}^2 + a_2 b_2 \hat{j}^2 + a_3 b_3 \hat{k}^2 \quad \text{donde: } \hat{i}^2 = 1, \hat{j}^2 = 1, \hat{k}^2 = 1$$

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

NOTA: El resultado del producto escalar es un número real.

Propiedades del producto escalar

Sean $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ vectores y “m” cualquier escalar

$$1) \vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$$

$$2) \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{Conmutativo}$$

$$3) \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$4) m \vec{A} \cdot \vec{B} = m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (m \vec{B})$$

$$5) \vec{0} \cdot \vec{A} = 0$$

Deducción de 1:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = a_1^2 + a_2^2$$

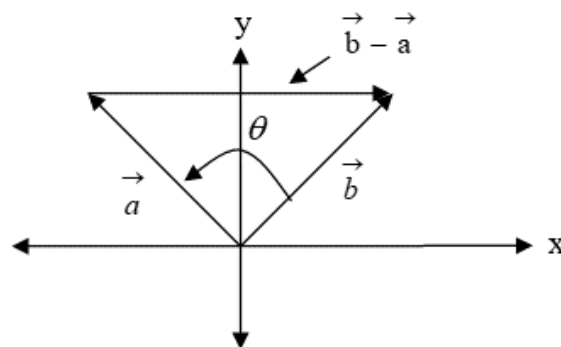
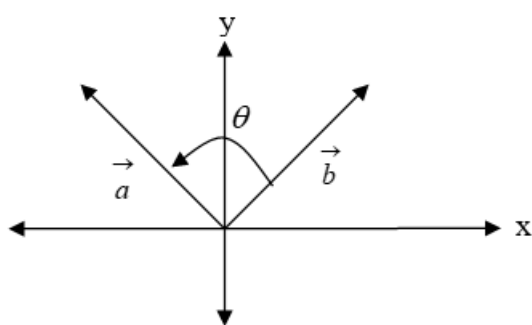
$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \left\| \vec{a} \right\|^2$$

Actividad 1.9: Calcular el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si $\vec{a} = \langle 1, 4, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle -1, 5, 3 \rangle$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(-1) + (4)(5) + (-3)(3) = -1 + 20 - 9 = 10$$

Ángulo entre dos vectores

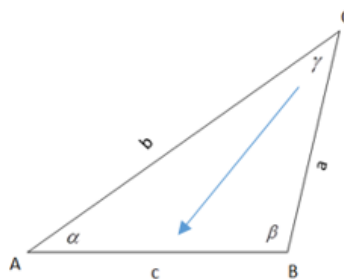
Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores y θ el ángulo en radianes entre los dos vectores.



Partiendo de la ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

Si $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ entonces:



$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2 \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

$$-2 \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \cos(\theta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\|}$$

Despejando el ángulo:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\|} \right)$$

Vectores ortogonales o perpendiculares:

Se dice que dos vectores son ortogonales o perpendiculares si $\theta = \frac{\pi}{2} = 90$ grados.

Por convención se dice que el vector $\vec{0}$ (nulo) es paralelo y perpendicular a todo vector

$\vec{a}$.

Por lo tanto, para dos vectores $\perp$ (ortogonales):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \cos 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Proyección de vectores

Proyección escalar o componente de un vector

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores en $R_3 (V_3)$ con $\vec{B} \neq 0$, la componente de $\vec{A}$ a lo largo de $\vec{B}$ se

denota por: $Comp_{\vec{B}} \vec{A}$

$$\text{Y se define: } Proj_{\vec{B}} \vec{A} = Comp_{\vec{B}} \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}}$$

Si $\vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ entonces las componentes del vector son:

$$comp_{\hat{i}} \vec{A} = a_1 = \vec{A} \cdot \hat{i} \quad comp_{\hat{j}} \vec{A} = a_2 = \vec{A} \cdot \hat{j} \quad comp_{\hat{k}} \vec{A} = a_3 = \vec{A} \cdot \hat{k}$$

Es decir, las componentes de $\vec{A}$ a lo largo de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son las mismas que las componentes a_1, a_2, a_3 de $\vec{A}$.

Proyección vectorial

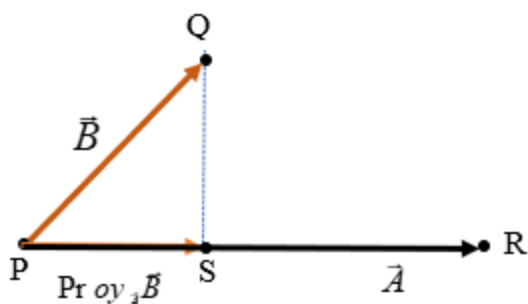
El vector proyección de $\vec{B} = \vec{PQ}$ sobre un vector no nulo $\vec{A} = \vec{PS}$ es el vector $\vec{PR}$ determinado al bajar una perpendicular de Q a la recta PS. Es decir, es el vector formado al multiplicar la componente de $\vec{B}$ en la dirección especificada con un vector unitario en esa dirección.

Se denota por $\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B}$, y se lee “vector proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ ” y se observa en la

se muestra en Figura 1.7.

Figura 1.8

Proyección vectorial de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ o vector proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.



Se define:

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = (\text{magnitud})(\text{dirección})$$

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} \cdot \vec{U}_{\vec{A}}$$

Actividad 1.10: Sean los vectores $\vec{A} = 5\hat{i} - K\hat{j}$ y $\vec{B} = K\hat{i} + 6\hat{j}$ donde K es un escalar.

Encuentre K tal que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares.

$$\text{Si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\langle 5 - k \rangle \cdot \langle k + 6 \rangle = 0$$

$$5k - 6k = 0$$

$$-k = 0$$

$$k = 0$$

Actividad 1.11: Demostrar que los pares de vectores $\vec{a} = \hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y

$\vec{b} = \hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ son ortogonales.

Si son ortogonales el producto escalar entre ellos debe ser cero.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 0 = \langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 0 + 0 + 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 0 \therefore \text{son perpendiculares } (\perp)$$

Actividad 1.12: Encontrar la componente de $\vec{a} = 5\hat{i} - 6\hat{j}$ en dirección de $\vec{z} = 7\hat{i} + \hat{j}$.

$$Comp_{\vec{z}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|}$$

$$Comp_{\vec{z}} \vec{a} = \frac{\langle 5, -6 \rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{35 - 6}{\sqrt{50}}$$

$$Comp_{\vec{z}} \vec{a} = \frac{29}{5\sqrt{2}} = 4.1$$

Actividad 1.13: Dados los vectores $\vec{A} = -5\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$. Determinar la

proyección escalar de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

$$Comp_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{\langle 4, 2 \rangle \cdot \langle -5, 1 \rangle}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{-20 + 2}{\sqrt{26}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

Producto vectorial o producto cruz

Sean los vectores $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ el producto vectorial se denota por:

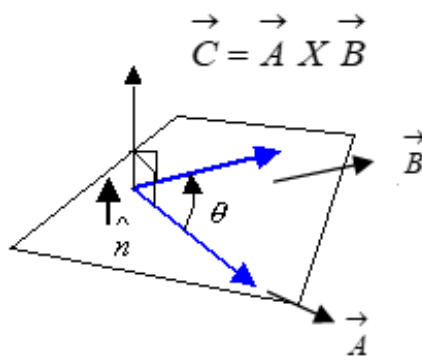
$\vec{A} \times \vec{B}$ y se lee “a cruz b”.

Se define:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Definición geométrica

Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son paralelos, entonces determinan un plano como se observa en la figura.



Así la magnitud del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Como el área es base por altura se tiene: $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \theta$.

Propiedades:

$$1) \vec{A} \times \vec{B} = 0 \text{ si } \vec{A} = 0 \text{ o } \vec{B} = 0.$$

$$2) \text{ El producto vectorial no es conmutativo, es decir } \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

$$3) \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) \quad \text{ley distributiva}$$

$$4) (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{B} \times \vec{C}) \quad \text{ley distributiva}$$

$$5) \vec{A} \times \vec{A} = 0 \quad \text{El producto vectorial consigo mismo es igual a cero.}$$

$$6) \vec{A} \times (k \vec{B}) = (k \vec{A}) \times \vec{B} = k (\vec{A} \times \vec{B}) \quad k \text{ es un escalar.}$$

$$7) \text{ Los vectores } \vec{A} \text{ y } \vec{B} \text{ son paralelos si y sólo si } \vec{A} \times \vec{B} = 0.$$

$$8) \text{ El vector } \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{ es perpendicular al plano que contiene a los vectores, por lo tanto, es perpendicular a ambos vectores.}$$

Actividad 1.14: Obtenga el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 4 - (0 + 4 + 3) = 16 - 7 = 9$$

Actividad 1.15: Sea $\vec{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$. Obtenga: $\vec{a} \times \vec{b}$ (Swokowski, 1989).

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \hat{k} - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{k} \\ 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \hat{i}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\hat{i} - 18\hat{j} + 10\hat{k} - (3\hat{k} + 30\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\hat{i} - 18\hat{j} + 10\hat{k} - 3\hat{k} - 30\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -31\hat{i} - 20\hat{j} + 7\hat{k}$$

Actividad 1.16: Determine el vector perpendicular ($\perp$) unitario al plano formado

por el vector $\vec{a} = \langle 2, -6, -3 \rangle$ y el vector $\vec{b} = \langle 4, 3, -1 \rangle$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \hat{k} - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{k} \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{i}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 6\hat{i} - 12\hat{j} - 6\hat{k} - (-24\hat{k} - 9\hat{i} - 2\hat{j})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 6\hat{i} - 12\hat{j} - 6\hat{k} + 24\hat{k} - 9\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = 35$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|} = \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35} = \frac{15}{35}\hat{i} - \frac{10}{35}\hat{j} + \frac{30}{35}\hat{k}$$

$$\vec{U} = \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$$

Ángulo entre dos vectores $\vec{A} \times \vec{B}$

Si $\vec{A} \times \vec{B}$ es diferente de cero entonces:

$$\left\| \vec{A} \times \vec{B} \right\| = \left\| \vec{A} \right\| \left\| \vec{B} \right\| \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\left\| \vec{A} \times \vec{B} \right\|}{\left\| \vec{A} \right\| \left\| \vec{B} \right\|}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\left\| \vec{A} \times \vec{B} \right\|}{\left\| \vec{A} \right\| \left\| \vec{B} \right\|} \right)$$

NOTA: La magnitud del producto vectorial es igual al área del paralelogramo formado por dos vectores.

Vectores paralelos

Dos vectores son paralelos $\langle // \rangle$ si: $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ entonces $\theta = 0$ $\theta = \pi$

Actividad 1.17: Determine (Swokowski, 1989):

- El área formada por P (4, - 3, 1), Q (6, - 4, 7) y R (1, 2, 2).
- El área del triángulo formado por los vectores.

Obteniendo:

$$\vec{PQ} = \vec{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$$

$$\vec{PR} = \vec{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -\hat{i} - 18\hat{j} + 10\hat{k} - (2\hat{j} + 30\hat{i} + 3\hat{k}) = -\hat{i} - 18\hat{j} + 10\hat{k} - 2\hat{j} - 30\hat{i} - 3\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -31\hat{i} - 20\hat{j} + 7\hat{k}$$

Área del paralelogramo es igual a $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|}{2}$$

$$\text{área} = \sqrt{(-31)^2 + (-20)^2 + (7)^2} = 37.54 \, u^2$$

$$\text{Área del triángulo} = 18.77 u^2$$

Triple producto

a) Escalar

Se denota por: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

Se define:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

b) Vectorial

Se denota por: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Se define:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

Actividad 1.18: Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3, -1, 2 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 1, -1 \rangle$, $\vec{c} = \langle 1, -2, 2 \rangle$. Hallar

el triple producto vectorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -1 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} - (-2\hat{k} + 2\hat{i} - 3\hat{j})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} + 2\hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 14\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k} - (7\hat{k} - 10\hat{i} - 2\hat{j})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 14\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k} - 7\hat{k} + 10\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 24\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$$

TAREA 1.4: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
819	17, 23

1.4 Ecuación de la recta

Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

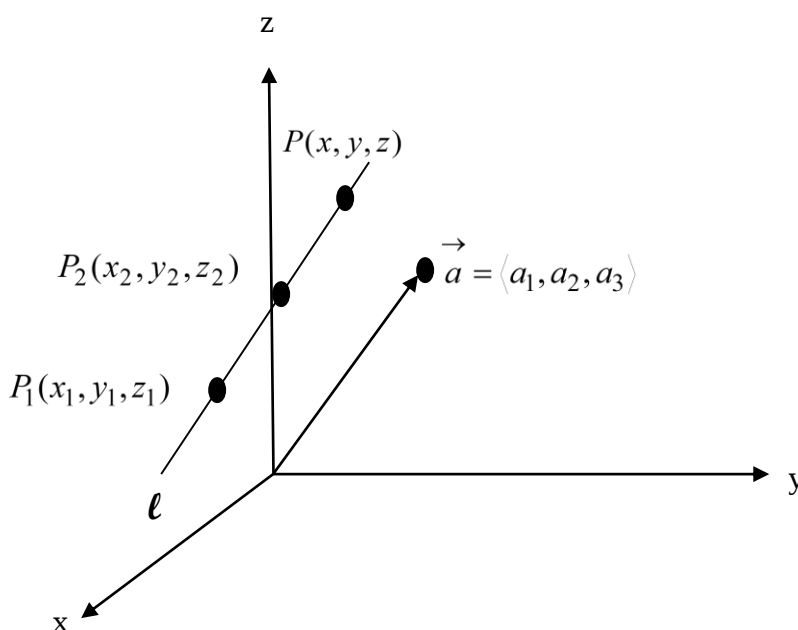
En esta sección se mostrará cómo usar productos escalares y vectoriales para escribir las ecuaciones de rectas, segmentos de rectas y planos en el espacio.

La gráfica de una ecuación de dos variables, x y y es una curva en el plano x - y . El tipo de curva más simple en el espacio bidimensional es la recta, y la ecuación general de una línea recta es de la forma: $Ax + By + C = 0$ que es una ecuación de primer grado.

En el espacio tridimensional, la gráfica de una ecuación de tres variables es una superficie. La superficie más simple es un plano.

Rectas en el espacio tridimensional

Sea una recta en $\mathcal{R}^3$ que contenga un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y paralela al vector $\vec{a}$ como se muestra:



La recta ℓ es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tal que el vector $\vec{P_1P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$. Así el punto P se encuentra sobre la recta ℓ si y sólo si existe un escalar " t " distinto de cero tal que:

$$\vec{P_1P} = \vec{a} t \quad \text{-----} \quad (1)$$

Como $\vec{P_1P} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle$

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= \vec{a} t \\ \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle t \end{aligned}$$

Por igualdad de vectores, las componentes respectivas deben de ser iguales, así.

$$x - x_1 = a_1 t \qquad y - y_1 = a_2 t \qquad z - z_1 = a_3 t$$

Rescribiendo estas ecuaciones para x, y, z se tiene:

$$x = x_1 + a_1 t \qquad y = y_1 + a_2 t \qquad z = z_1 + a_3 t$$

Que se conocen con el nombre de **Ecuaciones Paramétricas de la Recta**.

Despejando el parámetro t se obtiene forma de las **ecuaciones simétricas de la recta**.

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

También se pueden indicar:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}$$

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

$$\frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

Obteniéndose de esta manera la intersección de 2 planos, el primero de los cuales es perpendicular a xy y el segundo a xz .

Actividad 1.19: Encontrar

a) ecuaciones paramétricas para la recta ℓ que pasa por $P(5, -2, 4)$ y es paralela al vector $\langle 3, 12, -4 \rangle$.

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_1 + a_1 t \quad y = y_1 + a_2 t \quad z = z_1 + a_3 t$$

Se tiene:

$$x = 5 + 3t, \quad y = -2 + 12t, \quad z = 4 - 4t \quad \forall t$$

b) ¿En qué punto ℓ corta al plano XY ?

$$z = 0$$

$$P_{xy}(x, y, z)$$

$$z = 4 - 4t$$

$$x = 5 + 3 = 8$$

$$0 = 4 - 4t$$

$$y = -2 + 12 = 10$$

$$P_{xy}(8, 10, 0)$$

$$t = 1$$

$$z = 0$$

c) ¿En qué punto ℓ corta al plano YZ ?

$$x = 0$$

$$P_{yz}(x, y, z)$$

$$5 + 3t = 0$$

$$y = -22$$

$$t = -\frac{5}{3}$$

$$z = \frac{32}{3}$$

$$P_{yz}\left(0, -22, \frac{32}{3}\right)$$

Actividad 1.20: Suponiendo que $x = 5 - 3t$, $y = -2 + t$, $z = 1 + 9t$ son ecuaciones paramétricas de una recta ℓ , encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $P(-6, 4, -3)$ y es paralela a ℓ .

Si son rectas paralelas las componentes son las mismas $\therefore$ las ecuaciones paramétricas son:

$$x = -6 - 3t, \quad y = 4 + t, \quad z = -3 + 9t \quad \forall t$$

Actividad 1.21: Determine si las dos rectas dadas se intersecan y en caso afirmativo encuentre el punto de intersección (Swokowski, 1989).

Recta 1

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 1 - 4t$$

$$z = 5 - t$$

Recta 2

$$x = 4 - v$$

$$y = -1 + 6v$$

$$z = 4 + v$$

De recta 1 y 2 se obtienen los vectores:

$$\vec{a} = \langle 2, -4, -1 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{b} = \langle -1, 6, 1 \rangle$$

No son múltiplos $\therefore$ No son paralelos

El punto de intersección se encuentra igualamos componente a componente (x con x , y con y , z con z).

$$1 + 2t = 4 - v$$

$$2t + v = 3$$

$$1 - 4t = -1 + 6v$$

$$-4t - 6v = -2$$

$$5 - t = 4 + v$$

$$-t - v = -1$$

Resolviendo el sistema de 2 X 3 se tiene

$$v = -1$$

$$t = 2$$

Se verifica que los valores encontrados satisfagan a las tres ecuaciones y de ser así, se encuentra el punto de intersección.

El punto de intersección se encuentra sustituyendo en t o v en la recta 1 o en la recta 2.

$$x = 1 + 2(2) = 5$$

$$y = 1 - 4(2) = -7 \quad \text{Punto de intersección } P(5, -7, 3)$$

$$z = 5 - 2 = 3$$

NOTA: Cuando las rectas no se intersecan ni son paralelas se llaman rectas oblicuas.

Observaciones:

- 1) Las rectas son ortogonales ($\perp$) cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- 2) Las rectas son paralelas cuando los vectores son múltiplos escalares uno del otro.

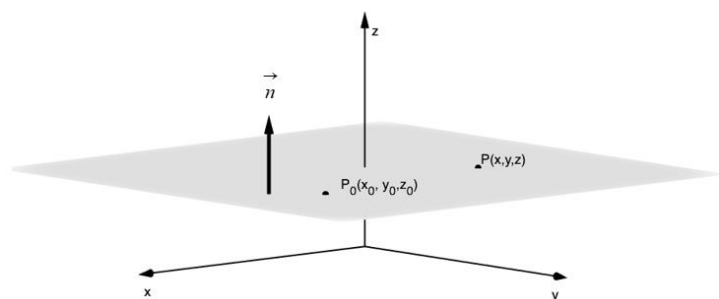
1.5 Ecuación del plano

Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

Sea la Figura 1.9 la representación de un plano en el espacio (sistema tridimensional) con un vector normal al plano.

Figura 1.9

Plano en el espacio.



Un plano ρ es un conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen la condición de perpendicularidad $\vec{n} \cdot \vec{PP_0} = 0$, donde $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector normal al plano y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece o está en el plano:

Obteniendo el vector $\vec{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$

Desarrollando la condición de perpendicularidad:

$$\vec{n} \cdot \vec{PP_0} = 0$$

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ Ecuación del plano dado un punto y un vector normal al plano

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

Si $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Actividad 1.22: Encontrar una ecuación del plano que pasa por $P(5, -2, 4)$ y tiene un vector normal $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ (Swokowski, 1989).

Si la ecuación del plano es: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$(x - 5) + 2(y + 2) + 3(z - 4) = 0$$

$$x - 5 + 2y + 4 + 3z - 12 = 0$$

$$x + 2y + 3z - 13 = 0 \text{ Ecuación del plano.}$$

Actividad 1.23: Determinar la ecuación de plano dado por los puntos P (4, - 3, 1), Q (6,-4,7) y R (1, 2, 2) (Swokowski, 1989).

$$\vec{PQ} = \vec{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$$

$$\vec{PR} = \vec{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -31\hat{i} - 20\hat{j} + 7\hat{k} \therefore \text{el vector normal } \vec{n} = \langle -31, -20, 7 \rangle$$

Conociendo el vector normal al plano y un punto que pasa él se obtiene la ecuación del plano:

Si la ecuación del plano es: $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

$$-31(x - 4) - 20(y + 3) + 7(z - 1) = 0$$

$$-31x + 124 - 20y - 60 + 7z - 7 = 0$$

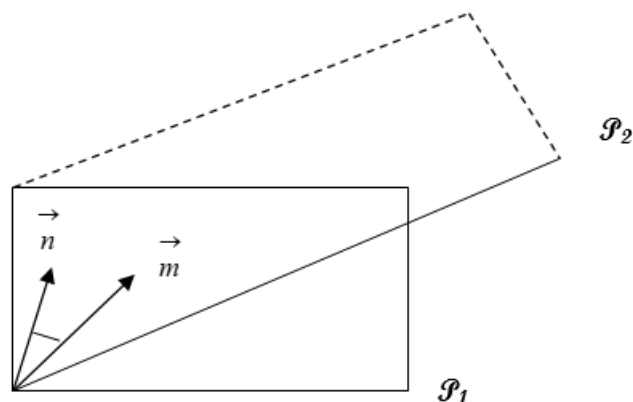
$$-31x - 20y + 7z + 57 = 0$$

Definición:

Dos planos con vectores normales $\vec{m}$ y $\vec{n}$ respectivamente son:

a) **Paralelos.** Si $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son paralelos de otra manera los dos planos se cortan en una recta.

Los vectores $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son $\perp$ a los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente.



b) **Ortogonales.** Si $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son ortogonales. Los vectores $\vec{m}$ y $\vec{n}$ de los dos planos son ambos perpendiculares a la recta.

Actividad 1.24: Encuentre el ángulo formado por los planos cuyas ecuaciones son:

$$\mathcal{P}_1: 2x + 3y - z = 3 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2: 4x + 5y + z = 1$$

De cada ecuación del plano se obtiene el vector normal al plano:

$$\vec{m} = \langle 2, 3, -1 \rangle$$

$$\vec{n} = \langle 4, 5, 1 \rangle$$

El producto escalar entre ambos vectores es: $\vec{m} \cdot \vec{n} = \|\vec{m}\| \|\vec{n}\| \cos(\theta)$

$$\text{Despejando el ángulo se tiene: } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{\|\vec{m}\| \|\vec{n}\|} \right)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 22$$

$$\|\vec{m}\| = \sqrt{14}$$

$$\left\| \vec{n} \right\| = \sqrt{42}$$

Sustituyendo

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{22}{\sqrt{14} \sqrt{42}} \right)$$

$$\theta = 24.87^\circ$$

Actividad 1.25: Encontrar una ecuación en el plano que pasa por $P(5, -2, 4)$ y es paralela al plano $3x + y - 6z + 8 = 0$ (Swokowski, 1989).

Si los planos son paralelos el vector normal es el mismo: $\vec{m} = 3\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$

La ecuación del plano que falta es:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$3x + y - 6z + d = 0$$

Sustituyendo las coordenadas del punto P

$$3(5) - 2 - 6(4) + d = 0$$

$$d = 11$$

$\therefore$ La ecuación buscada es: $3x + y - 6z + 11 = 0$

TAREA 1.5: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
819	31
832	1, 3, 7, 21, 29

1.6 Aplicaciones

Se presentan aplicaciones del área de la física que serán útiles para el perfil del Ingeniero Químico, sobre todo en las asignaturas de carrera.

Actividad 1.26: Dos fuerzas de magnitudes 340 y 475 Newton (N) respectivamente forman un ángulo de 34.6 grados y se aplican en el mismo punto (Leithold, 1998).

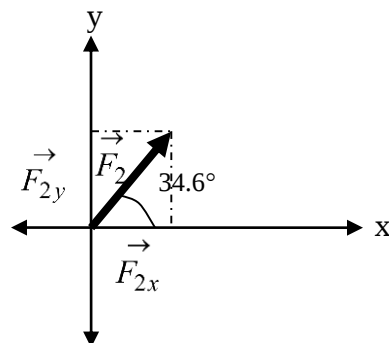
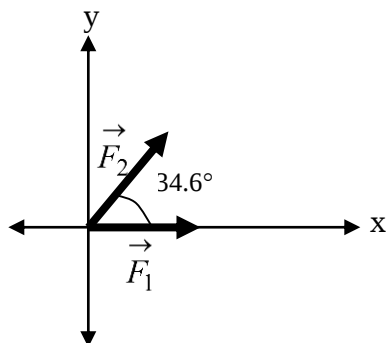
a) Determinar la magnitud de la fuerza resultante.

b) El ángulo que forma la fuerza resultante con la fuerza de 475 N.

Datos:

$$\|\vec{F}_1\| = 340 \text{ Newton}$$

$$\|\vec{F}_2\| = 475 \text{ Newton}$$



a) $\|\vec{R}\| = ?$

b) Ángulo entre $\vec{R}$ y $\vec{F}_2 = ?$

De gráfica se observa

$$\vec{F}_1 = \langle 340, 0 \rangle$$

Componente en x

$$\cos(34.6) = \frac{\vec{F}_{2x}}{475}$$

a) La resultante es el vector suma de fuerzas:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{2x} = 475 \cos(34.6)$$

$$\vec{F}_{2x} = 390.9$$

$$\vec{R} = \langle 340, 0 \rangle + \langle 390.9, 269.7 \rangle$$

Componente en y

$$\vec{R} = \langle 730.9, 269.7 \rangle$$

$$\sin(34.6) = \frac{\vec{F}_{2y}}{475}$$

La magnitud de la resultante

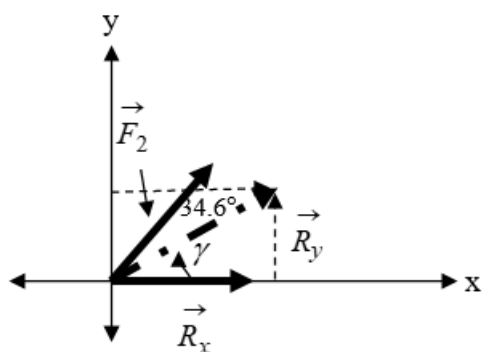
$$\vec{F}_{2y} = 475 \sin(34.6)$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(730.9)^2 + (269.7)^2} = 779.07 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2y} = 269.7$$

$$\vec{F} = \langle 390.9, 269.7 \rangle$$

b) El ángulo entre la fuerza de 475 Newton y la resultante



$$\tan \gamma = \frac{\vec{R}_y}{\vec{R}_x}, \quad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{269.7}{730.9}\right) = 20.25^\circ$$

El ángulo buscado es: $34.6^\circ - 20.25^\circ = 14.3^\circ$

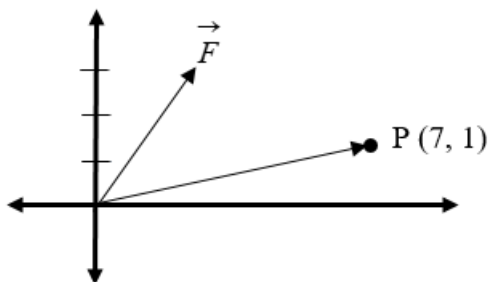
Actividad 1.27: Una fuerza $\vec{F}$ tiene una intensidad de 6 lb y la medida del ángulo es

$\frac{1}{6} \pi$ rad. Determine el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover un objeto a lo largo de una recta

desde el origen al punto $P(7, 1)$, considere que la distancia se mide en pies. En la figura se

muestra la representación del vector de posición de y del vector de posición de $\vec{OP}$

(Leithold, 1998).



Si $\vec{F} = \left\langle 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\rangle$ y el vector $\vec{OP} = \langle 7, 1 \rangle$

Por definición el trabajo realizado es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{OP}$$

$$W = \left\langle 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle$$

$$W = \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle$$

$$W = 21\sqrt{3} + 3$$

$$W = 39.37 \text{ lb-pie}$$

1.7 Actividades de aprendizaje y complementos educativos

Según lo planteado en la propuesta de trabajo, se describen los complementos educativos y las actividades de aprendizaje para el tema 1: vectores en el espacio. La competencia específica busca que él y la estudiante comprendan y apliquen las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de diversas áreas de la ingeniería, además

formula y analiza ecuaciones de rectas y planos en distintos contextos, desarrollando habilidades para el modelado matemático y su aplicación en situaciones reales.

Las competencias genéricas incluyen habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Para el Tema 1, y para todos los temas de la asignatura, se utilizará el enfoque de metodologías activas de aprendizaje. A través del aprendizaje colaborativo y cooperativo, se fomenta la cohesión del grupo y se incentiva a los estudiantes a trabajar de manera conjunta. Además, se aplicará el aprendizaje basado en problemas, en el que los estudiantes aprenden a través de la resolución de actividades con problemas tipo. El profesor llevará a cabo actividades que luego serán analizadas y discutidas tanto a nivel de equipo como en grupo. Si bien el resultado final es único y no admite discusión, el proceso para llegar a él puede variar dependiendo de las bases matemáticas de los estudiantes. El rol del profesor será el de guía o facilitador del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades para que el estudiante sea el protagonista de su proceso educativo.

Complemento Educativo No. 1. *Aprendizaje basado en problemas* y **Complemento Educativo No. 3.** *Ejercicios/casos prácticos*. En relación con estos complementos educativos, se presentarán en clase actividades relacionadas con la solución de problemas o ejercicios de cada uno de los subtemas. La resolución de estos ejemplos se llevará a cabo durante las diferentes sesiones de clases de acuerdo con la planeación realizada por el profesor procurando en todo momento fomentar la discusión y participación de los estudiantes. Además de los ejemplos de clase, se conformarán equipos de trabajo para la realización de prácticas en el aula. En el anexo 1 se incluye una serie de actividades con ejercicios representativos que se

tienen planeados para el curso. Las herramientas tecnológicas relacionadas con este objetivo educacional consisten en los programas Word®. En Word® se presentará el listado con la redacción de las actividades a resolver en el aula y las tareas. Se utilizó el GeoGebra y el Winplot para realizar la mayoría de los gráficos del tema. Tanto los problemas resueltos como los propuestos estarán a disposición de los estudiantes a través de la plataforma MOODLE y en la medida de lo posible serán proyectados en el aula de clase para su solución. Durante estas actividades se llevará un registro de la participación de los estudiantes en la resolución de las actividades en el aula.

Complemento Educacional No. 2. Presentaciones. Se han preparado una serie de presentaciones con el propósito de desarrollar los diferentes subtemas en el aula. Una vez que se hayan visto en clase, las presentaciones estarán a disposición de todos los estudiantes a través de la plataforma MOODLE. A manera de muestra en la Figura 1.10 se presenta una carátula del programa PowerPoint® en la que se visualiza el contenido de la clase inicial o el encuadre del curso. En la Figura 1.11 se muestra la vista del programa PowerPoint® de la presentación del Tema 1: Vectores en el espacio de la asignatura Cálculo Vectorial.

En la instrumentación didáctica que acompaña a estos apuntes se proporciona información detallada sobre las actividades de aprendizaje y de enseñanza, así como los niveles de desempeño y evaluación para este tema.

Figura 1.10

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación encuadre de la asignatura Cálculo Vectorial.

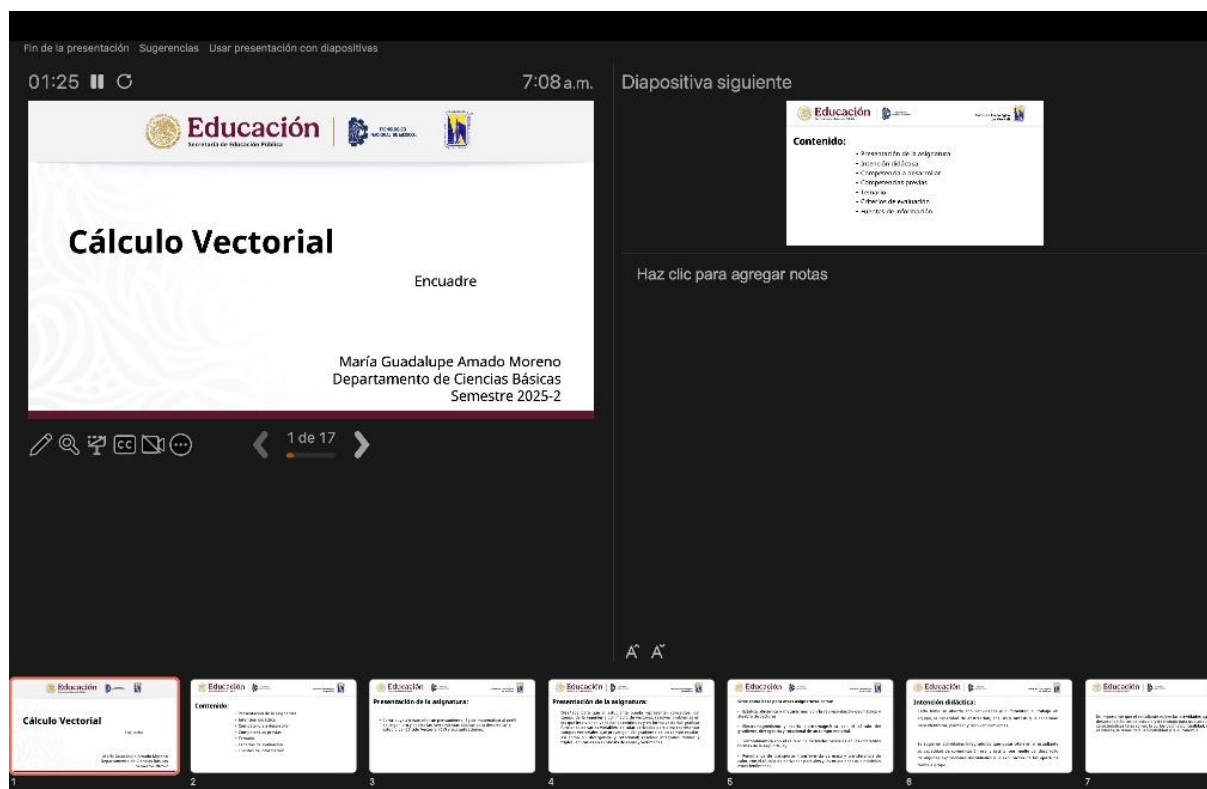
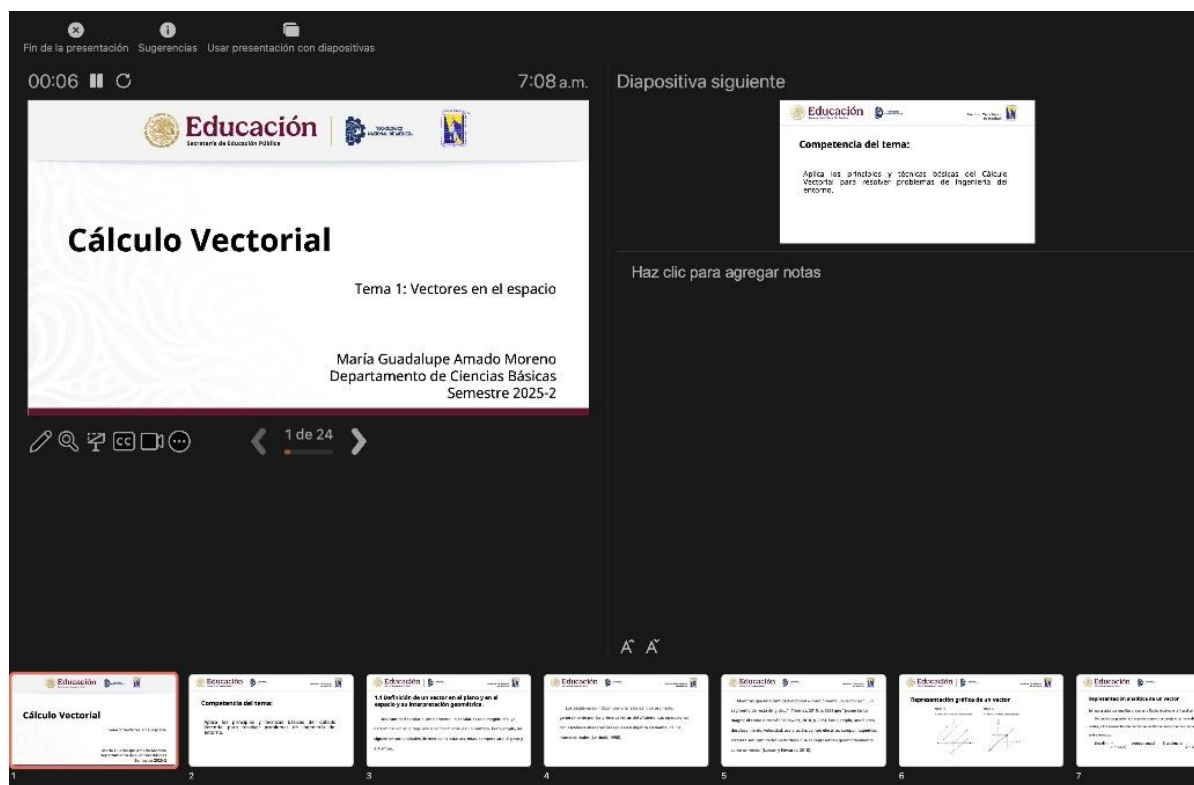


Figura 1.11

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación del Tema 1: Vectores en el espacio de la asignatura Cálculo Vectorial.



2. CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

Competencias específicas: establece ecuaciones de curvas planas, en coordenadas rectangulares, polares o en forma paramétrica, para brindarle herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

En las asignaturas previas se ha trabajado con curvas cuyas gráficas están en coordenadas cartesianas rectangulares, en este tema se estudiarán otras curvas planas utilizando ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

2.1 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica.

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

Curva plana

Definición:

Si f y g son funciones continuas definidas sobre un intervalo I , entonces: $x = f(t)$, $y = g(t)$ se llaman ecuaciones paramétricas, y a t se le llama parámetro. Al conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ cuando t varía sobre I se le llama **curva plana** (Leithold, 1998).

Tipos de curvas planas

Curva lisa o suave

Definición:

Una curva plana C se dice que es lisa (suave) en el intervalo cerrado $[a, b]$ si f' y g' son continuas en $[a, b]$, y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero simultáneamente en cada número del intervalo abierto (a, b) .

Curva cerrada

Definición:

Una curva plana C se dice que es cerrada si el punto inicial $A(f(a), g(a))$ y el punto final o terminal $B(f(b), g(b))$ coinciden.

Curva simple

Definición:

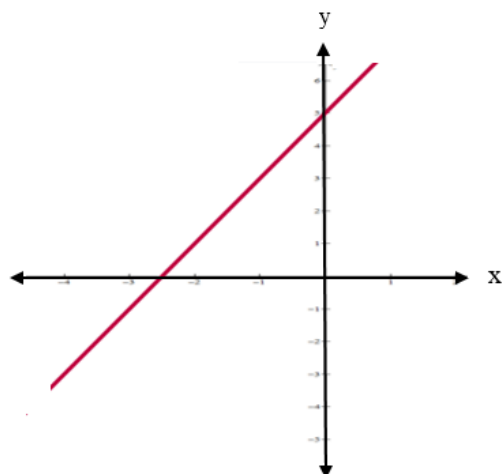
Una curva plana C se dice que es simple entre los puntos $A(f(a), g(a))$ y $B(f(b), g(b))$ si $(f(t_1), g(t_1))$ es diferente del punto $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 y t_2 diferentes del intervalo abierto (a, b) .

La gráfica de una curva paramétrica C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado correspondiente al par ordenado $(f(t), g(t))$ (Leithold, 1998).

Actividad 2.1: Grafique la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas se indican.

a) $x = 2t - 3$, $y = 4t - 1$ (Leithold, 1998)

t	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(t)$	...	-7	-5	-3	-1	1	...
$g(t)$	...	-9	-5	-1	3	7	...



b) $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$ (Zill y Wright, 2011)

Buscando la intersección con los ejes coordenados:

Eje x: por lo tanto $y = 0$

Eje y: por lo tanto, $x = 0$

$$t^3 - 3t = 0$$

$$t^2 - 4 = 0$$

$$t(t^2 - 3) = 0$$

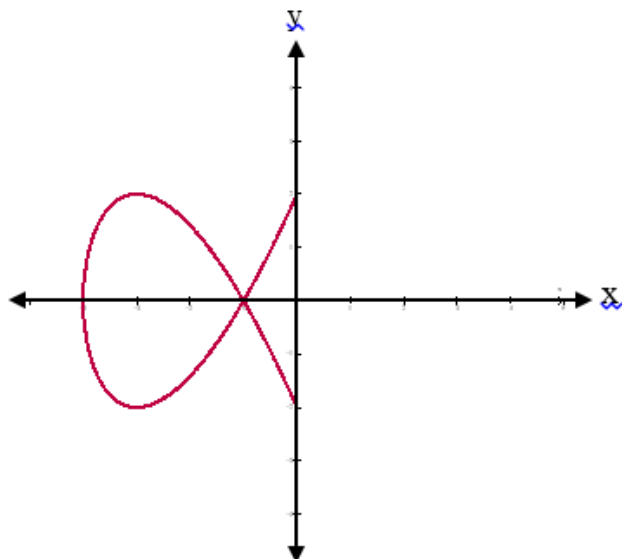
$$t = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$t = 0 \quad t^2 - 3 = 0$$

$$t = \pm \sqrt{3}$$

Valores que toma el parámetro t

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$f(t)$	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
$g(t)$	-2	0	2	0	-2	0	2



2.2 Derivada de una curva en forma paramétrica

Definición:

Sea una curva definida por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ se obtiene (Leithold, 1998; Thomas, 2010; Stewart, 2018):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (2.1)$$

Donde $f'(t) \neq 0$

Actividad 2.2: Determine la derivada $\frac{dy}{dx}$ e indique para que valores de t existe la derivada.

a) $x = t^2 - 3$, $y = 2t - 1$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

Sustituyendo las derivadas en 2.1: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

La derivada existe para todos los números reales, excepto para $t = 0$

b) $x = \frac{t}{t+1}$, $y = \sqrt{t+1}$ (Stewart, 2018).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t+1) \frac{d}{dt} t - t \frac{d}{dt} (t+1)}{(t+1)^2} = \frac{t+1-t}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (t+1)^{1/2} = \frac{1}{2} (t+1)^{-1/2} \frac{d}{dt} (t+1) = \frac{1}{2(t+1)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

Sustituyendo las derivadas en 2.1: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dg}{df}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}}{\frac{1}{(t+1)^2}} = \frac{(t+1)^2}{2\sqrt{t+1}} = \frac{(t+1)^2}{2(t+1)^{1/2}} = \frac{(t+1)^{2-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{(t+1)^3}}{2}$$

La derivada existe en el intervalo $[-1, \infty)$.

2.3 Tangentes a una curva

Si $x = f(t)$, $y = g(t)$ define a una curva suave "C" (sin cambios abruptos), entonces la pendiente de una recta tangente en un punto $P(x, y)$ de la curva es $\frac{dy}{dx}$ (que es la ecuación 2.2, solo que ahora a la derivada se le denotará con la letra m que representa la pendiente) sobre "C" es: (Zill y Wright, 2011; Stewart, 2018).

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{si } f'(t) \neq 0 \quad (2.2)$$

Se puede utilizar junto con la ecuación de la recta punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (2.3)$$

Actividad 2.3: Encuentre la pendiente y la ecuación de una recta tangente al punto P para el parámetro t indicado (Zill y Wright, 2011).

Dado: $x = t^2 - 4$ $y = t^3 - 4t$ para $t = 1$

Considerando $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces derivando ambas funciones y sustituyendo en

2.2:

$$x = t^2 - 4 \quad y = t^3 - 4t$$

$$\text{Para } t = 1$$

$$x = (1)^2 - 4 \quad y = (1)^3 - 4(1)$$

$$x = -3 \quad y = -3$$

$$P(-3, -3)$$

$$f(t) = t^2 - 4 \quad g(t) = t^3 - 4t$$

$$f'(t) = 2t \quad g'(t) = 3t^2 - 4$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4}{2t}$$

$$m|_{t=1} = \frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente, en el punto correspondiente a $t = 1$ se obtiene con 2.3:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ si } m = -0.5, P(-3, -3)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

TAREA 2.1: (Zill y Wright, 2011).

Página	Ejercicios
68	2, 4, 6, 7, 8, 9, 10

2.4 Área y longitud de arco

Área

El área bajo una curva paramétrica se obtiene integrando el producto de $y = g(t)$ por la derivada de $x = f(t)$, es decir (Edwards & Penney, 2008):

$$A = \int_a^b g(t) f'(t) dt \text{ si } f(a) < f(b) \quad (2.4)$$

Actividad 2.4: Determine el área bajo la curva que tiene las ecuaciones paramétricas:

a) $x = t$, $y = t^2$ en el intervalo $[0, 2]$

$f(t) = x = t$, $g(t) = y = t^2$ se cumple que $f(a) < f(b)$

$$f'(t) = 1$$

Sustituyendo en 2.4 para encontrar el área bajo la curva $A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$

$$A = \int_0^2 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0) = \frac{8}{3}$$

b) $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 - 1$ en el intervalo $[-2, 2]$ (Leithold, 1998).

$f(t) = x = t^3 - 3t$, $g(t) = y = t^2 - 1$ se cumple que $f(a) < f(b)$

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$$

Sustituyendo en 2.4 para encontrar el área bajo la curva $A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$

$$A = 3 \int_{-2}^2 (t^2 - 1) (t^2 - 1) dt = 3 \int_{-2}^2 (t^2 - 1)^2 dt = 3 \int_{-2}^2 (t^4 - 2t^2 + 1) dt$$

$$A = 3 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) \bigg|_{-2}^2 = 3 \left\{ \frac{1}{5} [(2)^5 - (-2)^5] - \frac{2}{3} [(2)^3 - (-2)^3] + [2 - (-2)] \right\}$$

$$A = 3 \left\{ \frac{1}{5} [32 - (-32)] - \frac{2}{3} [8 - (-8)] + [2 + 2] \right\} = 3 \left[\frac{1}{5} (32 + 32) - \frac{2}{3} [8 + 8] + 4 \right]$$

$$A = 3 \left[\frac{1}{5} (64) - \frac{2}{3} (16) + 4 \right] = 3 \left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3} + 4 \right) = 3 \left(\frac{192 - 160 + 60}{15} \right) = 3 \left(\frac{92}{15} \right)$$

$$A = \frac{92}{5}$$

TAREA 2.2: (Edwards y Penney, 2008).

Página	Ejercicios
695	2, 3, 5

Longitud de arco

Si una curva “C” tiene una parametrización regular $x = f(t)$, $y = g(t)$, en $a \leq t \leq b$ y si “C” no se corta a sí misma en (a, b) , entonces la longitud (L) de “C” es (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Zill y Wright, 2011) :

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \quad (2.5)$$

Actividad 2.5: Determine la longitud de arco de la curva parametrizada en cada inciso.

a) $x = 4t$, $y = t^2$ en el intervalo de $[0, 2]$ (Zill y Wright, 2011).

La longitud de arco se determina por la expresión 2.5:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

$$f(t) = x = 4t \quad g(t) = y = t^2$$

$$f'(t) = 4 \quad g'(t) = 2t$$

Sustituyendo en 2.5:

$$L = \int_0^2 \sqrt{(4)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} dt$$

Para resolver la integral de L se utiliza la ecuación 24 de (García-Anguis, 1981):

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left[u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right] + C$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{a^2 + u^2} du$$

Se tiene:

$$a^2 = 4 \quad u^2 = 4t^2$$

$$a = 2 \quad u = 2t$$

$$\frac{du}{dt} = 2$$

$$\frac{du}{2} = dt$$

Límites de la integral

$$u = 2t$$

$$u_i = 2(0) = 0$$

$$u_s = 2(2) = 4$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 16} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Ln} \left[u + \sqrt{u^2 + 16} \right] \right\} \Bigg|_0^4$$

Tomando límites en la variable u :

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[4 \sqrt{(4)^2 + 16} - 0 \right] + \frac{4}{2} \left[\operatorname{Ln} \left[4 + \sqrt{(4)^2 + 16} \right] - \operatorname{Ln} (\sqrt{0 + 16}) \right] \right\}$$

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (4 \sqrt{32}) + 2 \left[\operatorname{Ln} (4 + \sqrt{32}) - \operatorname{Ln} (4) \right] \right\}$$

$$L = \frac{1}{2} \left\{ 2 \sqrt{(16)(2)} + 2 \left[\operatorname{Ln} (4 + \sqrt{(16)(2)}) - \operatorname{Ln} (4) \right] \right\}$$

$$L = \sqrt{(16)(2)} + \operatorname{Ln} (4 + \sqrt{(16)(2)}) - \operatorname{Ln} (4) = 4\sqrt{2} + \operatorname{Ln} (4 + 4\sqrt{2}) - \operatorname{Ln} (4)$$

$$L = 9.18$$

b) $x(t) = e^t \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = e^t \cos(t)$, cuando t se incrementa de 1 a 4 (Leithold, 1998).

$$f(t) = x(t) = e^t \operatorname{sen}(t)$$

$$g(t) = y(t) = e^t \cos(t)$$

Derivando como un producto:

$$f'(t) = e^t \frac{d}{dt} \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(t) \frac{d}{dt} e^t$$

$$g'(t) = e^t \frac{d}{dt} \cos(t) + \cos(t) \frac{d}{dt} e^t$$

$$f'(t) = e^t \cos(t) + \operatorname{sen}(t) e^t$$

$$g'(t) = -e^t \operatorname{sen}(t) + \cos(t) e^t$$

Sustituyendo en 2.5 para determinar $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

$$L = \int_1^4 \sqrt{[e^t \cos(t) + \sin(t) e^t]^2 + [-e^t \sin(t) + \cos(t) e^t]^2} dt$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{e^{2t} \cos^2(t) + 2e^{2t} \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t) e^{2t} + \sin^2(t) e^{2t} - 2e^{2t} \cos(t) \sin(t) + e^{2t} \cos^2(t)} dt$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{e^{2t} \cos^2(t) + \sin^2(t) e^{2t} + \sin^2(t) e^{2t} + e^{2t} \cos^2(t)} dt$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{e^{2t} [\cos^2(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)]} dt = \int_1^4 \sqrt{e^{2t} [2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)]} dt$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{2e^{2t} [\cos^2(t) + \sin^2(t)]} dt = \int_1^4 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_1^4 \sqrt{e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_1^4 (e^{2t})^{\frac{1}{2}} dt$$

$$L = \sqrt{2} \int_1^4 e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_1^4 = \sqrt{2} (e^4 - e)$$

$$L = 73.36$$

TAREA 2.3: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
751	1, 3, 5, 11, 13

2.5 Curvas planas y graficación en coordenadas polares

Son aquellas que se encuentran en el sistema bidimensional o cartesiano (plano), es decir, solo tienen dos dimensiones: largo y ancho y pueden representarse en diferentes formas: cartesiana, paramétrica y polar (Leithold, 1998; Zill y Wright, 2011).

En el sistema de coordenadas rectangular o cartesiano:

Forma explícita: $y = f(x)$

Forma implícita: $F(x, y) = 0$

Forma paramétrica: $x = f(t)$, $y = f(t)$

En el sistema de coordenadas polar: $r = f(\theta)$

Las curvas en el sistema de coordenadas rectangular se estudiaron en el curso de Cálculo Diferencial, las ecuaciones paramétricas en este tema 2 y coordenadas polares se desarrollará a continuación.

Graficación en coordenadas polares

En el sistema coordenado rectangular se puede graficar una función $y = f(x)$ trazando los puntos $P(x, y)$ y crear la curva en el plano rectangular. De forma análoga en el sistema de coordenadas polares se puede graficar una función trazando los puntos $P(r, \theta)$ y crear la curva en el plano polar.

Se realiza una tabulación dándole valores a la variable independiente θ y se obtiene el valor de r . Se generan las parejas ordenadas de puntos $P(r, \theta)$ los cuales se ubican en el plano polar y se conectan los puntos para obtener el gráfico (Rivera Berrío y Álvarez Sáinz, 2020).

En la Tabla 2.1 se muestra un resumen de algunas curvas en coordenadas polares, donde a , b y n son constantes arbitrarias.

Tabla 2.1

Curvas comunes en coordenadas polares.

Nombre	Ecuación
Rectas que pasan por el origen	$\theta = \text{Constante}$
Circunferencias	$r = a \operatorname{sen}(\theta)$, $r = a \cos(\theta)$
Espiral	$r = a + b\theta$
Cardioide	$r = a[1 \pm \operatorname{sen}(\theta)]$, $r = a[1 \pm \cos(\theta)]$
Limacon	$r = a \pm b \operatorname{sen}(\theta)$, $r = a \pm b \cos(\theta)$
Rosa	$r = a \operatorname{sen}(n\theta)$, $r = a \cos(n\theta)$
Lemniscata	$r^2 = a \operatorname{sen}(2\theta)$, $r^2 = a \cos(2\theta)$

Fuente: (Zill y Wright, 2011; Rivera Berrío y Álvarez Sáinz, 2020).

Tradicionalmente la graficación de este tipo de funciones se realiza por tabulación, resultando muy tedioso y laborioso para los estudiantes, debido a la gran cantidad de operaciones que se realiza para obtener un punto en coordenadas polares, al comportamiento de los ángulos y a las diferentes representaciones que tiene un mismo punto en coordenadas polares.

Por lo que, este tema se desarrolla utilizando el Winplot/GeoGebra para graficar las curvas en coordenadas polares. Se realiza en el aula y se deja un trabajo extra clase del tema.

Práctica 2.1: Graficando en coordenadas polares

Competencia: El estudiante utilizará el winplot para graficar funciones en coordenadas polares, y observará los cambios que sufre la gráfica al ir modificando algunos parámetros de la función.

La gráfica de una función en coordenadas rectangulares es diferente en coordenadas polares. Para graficar estas funciones en el cuaderno o en el pizarrón se puede hacer una tabulación sólo con algunos valores de θ que casi siempre son: 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π . Posteriormente observar cómo cambia el valor de r . Sin embargo, en ocasiones no es tan sencillo graficar, por lo que, se utilizará el winplot para graficar estas funciones.

Instrucciones: Indicar el nombre de la función en inglés, por ejemplo, para la función seno será sin, coseno cos, exponencial e, y los argumentos de las funciones trigonométricas deben estar entre paréntesis, el ángulo θ será con el parámetro t, por lo demás se respetan los símbolos de producto, división y potencia como *, / y ^ respectivamente.

Se pueden graficar varias funciones a la vez en un mismo plano, estas aparecerán con diferente color y puede editarlas con la ecuación de cada gráfico.

Pasos a seguir:

- ❖ De doble click en el icono de winplot que se encuentra en el escritorio de su monitor
- ❖ Seleccione en window 2-dim
- ❖ En equa seleccione $r = f(t)$ (coordenadas polares)
- ❖ Escriba la ecuación del lado derecha de la función y ok. Aparece el gráfico de la función
- ❖ Seleccionando Ecua aparece la ecuación del gráfico
- ❖ Con X desactiva la ventana anterior
- ❖ En file puede grabar lo realizado
- ❖ Con copy to clipboard puede llevar el grafico a cualquier archivo del office

**SIGUIENDO LAS INSTRUCCIONES ANTERIORES GRAFIQUE LAS
FUNCIONES:**

a) $r = 4$ b) $r = 2$ c) $r = -4$ d) $r = -2$ e) $r = \frac{1}{2}$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso a al e?

f) $r = \theta$ g) $r = 2\theta$ h) $r = -\theta$ i) $r = -2\theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso f al i?

j) $r = \frac{1}{\sin \theta}$ k) $r = \frac{3}{\sin \theta}$ l) $r = \frac{-1}{\sin \theta}$ m) $r = \frac{-3}{\sin \theta}$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso j al m?

n) $r = \cos \theta$ o) $r = 5 \cos \theta$ p) $r = -\cos \theta$ q) $r = -5 \cos \theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso n al q?

s) $r = \sin \theta$ t) $r = 2 \sin \theta$ u) $r = -\sin \theta$ v) $r = -2 \sin \theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso s al v?

w) $r = \sin 2\theta$ x) $r = \sin 3\theta$ y) $r = \sin 4\theta$ z) $r = \sin 5\theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso w al z?

aa) $r = 1 - \sin \theta$ ab) $r = 1 - 2 \sin \theta$ ac) $r = 1 - 3 \sin \theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso aa al ac?

ad) $r = 1 - \text{sen}2\theta$ ae) $r = 1 - \text{sen}3\theta$ af) $r = 1 - \text{sen}4\theta$

¿Qué observa en la gráfica de las funciones del inciso ad al af?

Con el software GeoGebra se generaron también las gráficas en coordenadas polares. Con los resultados de alguno de los grupos se diseñó una estrategia didáctica para el tema, la cual será publicada próximamente. Después de utilizar la aplicación con GeoGebra el estudiante contesta para los subtemas una serie de preguntas, que se muestran Práctica 2.2:

Práctica 2.2: Bosquejando funciones polares.

Realiza las siguientes actividades en la aplicación con GeoGebra y registra tus respuestas.

SUBTEMA: Gráfica de cardioides

I) REALIZA LAS ACTIVIDADES INDICADAS POR EL PROFESOR.

1. Abrir la aplicación y seleccionar la opción cardioides.
2. Escribir la función $a + b \text{sen}(\theta)$.

3. Posicionar los deslizadores en $a = 2$ y $b = 3$.

4. Mover el deslizador de ángulo.

II) SECCIÓN DE PREGUNTAS Y RESPUESTAS. Lee cuidadosamente las preguntas y responde detalladamente.

5. Describe la gráfica obtenida.

6. ¿Qué representa en la gráfica el valor del parámetro a ?

7. Encuentra una relación de los puntos en los que la gráfica corta al eje vertical, con los valores de los parámetros a y b . Explica (si deseas modifica los valores de los parámetros).

8. Explica lo que sucede si $a < 0$ (negativo).

9. Explica lo que sucede si $b < 0$ (negativo).

10. ¿Qué sucede si se cambia la función $\sin(\theta)$ por $\cos(\theta)$?

11. Salga de la aplicación y con lo aprendido bosqueje la gráfica de las siguientes funciones polares.

a) $r(\theta) = -2 + 4\cos(\theta)$

b) $r(\theta) = 6 + 4\sin(\theta)$

c) $r(\theta) = -3\cos(\theta)$

d) $r(\theta) = 2\sin(\theta)$

TAREA 2.4: Individualmente y utilizando el Winplot grafique las siguientes funciones, ponga atención en los cambios que ocurren en la gráfica al ir modificando la ecuación y observe la forma que tienen las gráficas según la ecuación.

1: Grafique los siguientes limaones o caracoles. Son gráficas polares llamadas limaon (caracol) palabra francesa que proviene del latín limax que significa caracol. La forma de la función que las representa es: $r(\theta) = a \pm b \cos(\theta)$.

a) $r = 1 - \cos(\theta)$

b) $r = 1 - 2\cos(\theta)$

c) $r = 1 - 3\cos(\theta)$

d) $r = 1 + \cos(\theta)$

d) $r = 1 + 2\cos(\theta)$

e) $r = 1 + 3\cos(\theta)$

2: Grafique las siguientes espirales.

a) $r = e^{\theta}$ Espiral logarítmica

b) $r = e^{\frac{\theta}{3}}$ Espiral logarítmica

c) $r = 2\theta$ Espiral de Arquímedes

d) $r = \frac{1}{\theta}$ Espiral recíproca

3: Grafique las siguientes lemniscatas.

a) $r^2 = 9\sin(2\theta)$ b) $r^2 = -4\sin(2\theta)$ c) $r^2 = 16\cos(2\theta)$ d) $r^2 = -25\cos(2\theta)$

4: Grafique el Cisoide $r = 2\sin(\theta)\tan(\theta)$.

5: Grafique las siguientes funciones.

a) $r = \cos(\theta)$

b) $r = 2\cos(\theta)$

c) $r = 3\cos(\theta)$

d) $r = -\cos(\theta)$

e) $r = -2\cos(\theta)$

f) $r = -3\cos(\theta)$

g) $r = \cos(2\theta)$

h) $r = \cos(3\theta)$

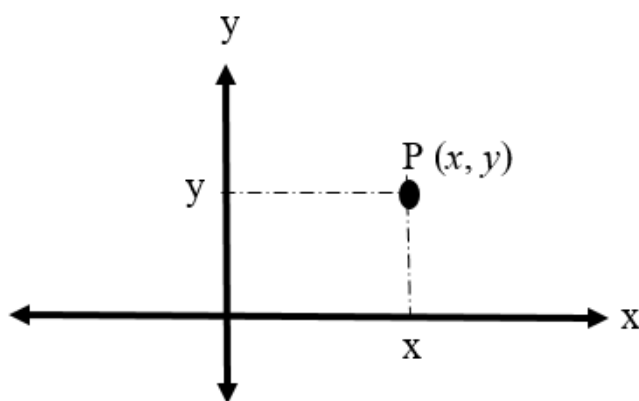
2.6 Cálculo en coordenadas polares

Puntos en el sistema bidimensional (puntos en el plano)

En un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano como el de la Figura 2.1, se puede localizar un punto con una sola pareja de puntos (x, y) estos valores son las distancias dirigidas, partiendo del origen, desde los ejes x y eje y respectivamente. El origen es el punto donde se intersectan los dos ejes coordenados (Leithold, 1998; Zill y Wright, 2011).

Figura 2.1

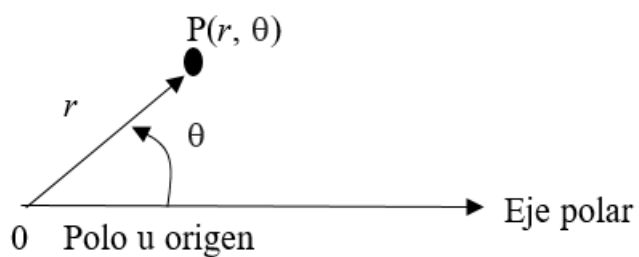
Sistema de coordenadas rectangular.



Otra forma de representar puntos en el plano es empleando **coordenadas polares**, en este sistema se necesitan un *ángulo* (θ) y una *distancia* (r). Para medir θ se requiere una semirrecta dirigida llamada **eje polar** y para medir r , un punto fijo llamado **polo u origen** mostrado en la Figura 2.2.

Figura 2.2

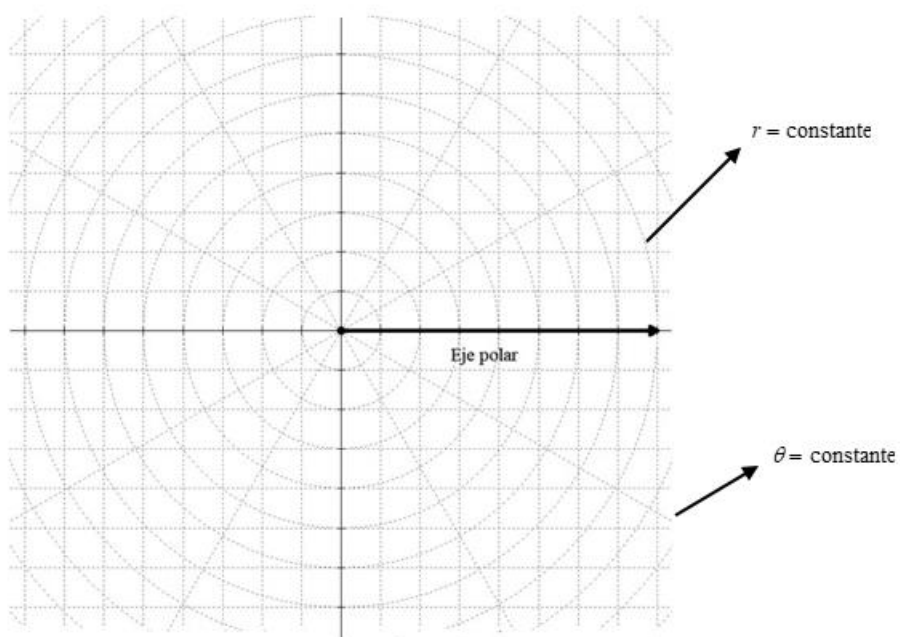
Coordenadas polares de P.



En la Figura 2.3 se muestra el sistema de coordenadas polares, donde r es la distancia en coordenadas polares. Se utiliza la convención de que un ángulo es positivo al medirlo en sentido contrario a las manecillas del reloj, caso contrario se considera ángulo negativo (Stewart, 2018).

Figura 2.3

Sistema de coordenadas polares.



θ es la medida del ángulo en radianes, positivo cuando se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj y negativo a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

Las coordenadas polares se denotan por (r, θ) y para localizar un punto $P(r, \theta)$ en este sistema de coordenadas, lo primero que se hace es trazar una circunferencia de radio r , después trazar una línea con un ángulo de inclinación θ y, por último, localizar el punto de intersección entre la circunferencia y la recta; este punto será el buscado.

Para graficar un punto $(-r, \theta)$ donde $-r < 0$, se considera el valor absoluto de r a lo largo del rayo (o semirecta) $\theta + \pi$.

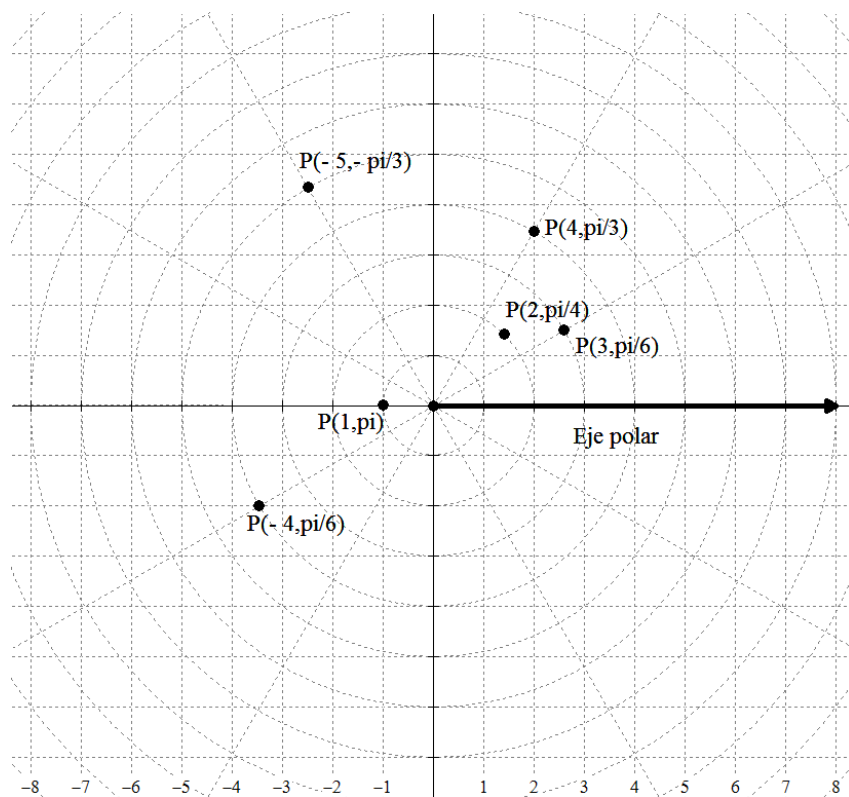
A diferencia de un sistema de coordenadas rectangulares, un punto en coordenadas polares no es único y puede tener muchas representaciones. Una vuelta completa en el sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por 2π .

Entonces el punto representado por las coordenadas polares (r, θ) , se representa también por: $(r, \theta + 2\pi)$ y $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ donde n es cualquier entero (Zill y Wright, 2011).

Actividad 2.6: Localizar los puntos en el plano polar:

a) $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, b) $P\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, c) $P(1, \pi)$, d) $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, e) $P\left(-4, \frac{\pi}{6}\right)$, f) $P\left(-5, -\frac{\pi}{3}\right)$

(Leithold, 1998).



TAREA 2.5: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
764	1, 3

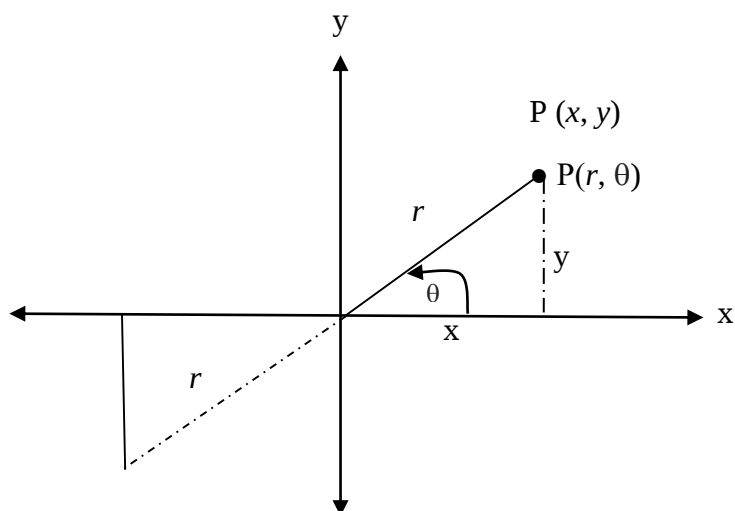
Cambio de coordenadas

Sistema de coordenadas rectangular a sistema de coordenadas polar

La relación entre coordenadas rectangulares y polares se puede ver en la Figura 2.4, donde el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo.

Figura 2.4

Relación entre coordenadas rectangulares y polares.



De la Figura 2.4 se tiene:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

$$x = r \cos(\theta) \quad (2.6)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$y = r \text{sen}(\theta) \quad (2.7)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad (2.8)$$

Partiendo de la ecuación de una circunferencia en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{sustituyendo el equivalente de } x \text{ y } y:$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \text{sen}^2(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 [\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.9)$$

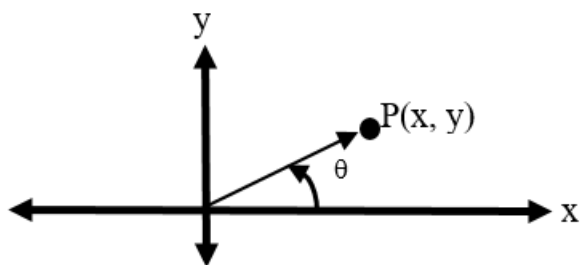
Las ecuaciones 2.6 y 2.7 permiten determinar un punto en coordenadas rectangulares, cuando se conocen las coordenadas polares.

Cuando se conocen las coordenadas rectangulares y se busca determinar r y θ , se utilizan las ecuaciones 2.9 y 2.8 (Stewart, 2018).

Es importante tomar en cuenta para la determinación de θ en qué cuadrante se ubica el punto en coordenadas rectangulares.

Determinación del ángulo θ de acuerdo al cuadrante:

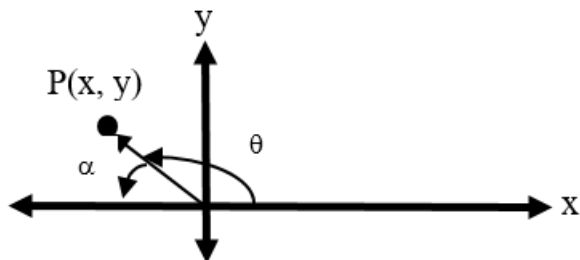
Cuadrante 1



El ángulo se obtiene directamente de ecuación 2.8:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

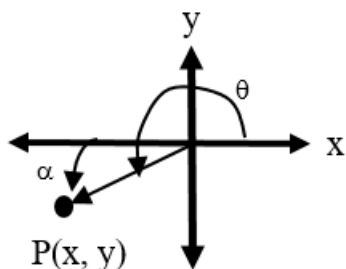
Cuadrante 2



$\theta > \frac{\pi}{2}$, por lo que se utiliza un ángulo auxiliar α , que se mide desde el eje x hasta el punto.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{y}{x} \right| \quad \alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|, \text{ por lo tanto: } \theta = \pi - \alpha$$

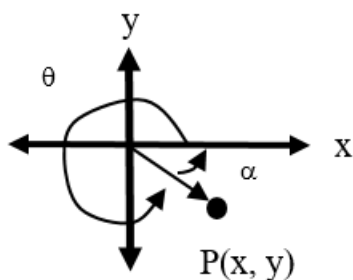
Cuadrante 3



Determinando α , que se mide desde el eje x hasta el punto.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{y}{x} \right| \quad \alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|, \text{ por lo tanto: } \theta = \pi + \alpha$$

Cuadrante 4



$$\tan(\alpha) = \left| \frac{y}{x} \right| \quad \alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|, \text{ por lo tanto: } \theta = 2\pi - \alpha$$

En la Tabla 2.2 se muestra la forma de encontrar el ángulo según el cuadrante en el que está ubicado el punto en coordenadas rectangulares.

Tabla 2.2

Determinación de θ dado un $P(x, y)$.

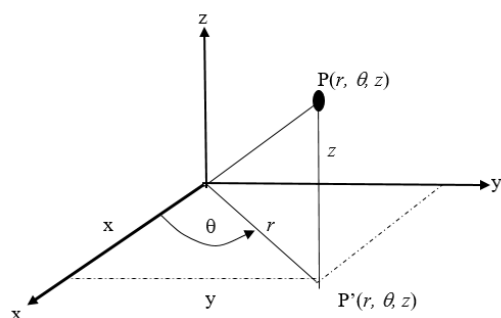
Número de cuadrante	Obtención del ángulo θ	
1	$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
2	$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\theta = \pi - \tan^{-1}\left \frac{y}{x}\right $
3	$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\theta = \pi + \tan^{-1}\left \frac{y}{x}\right $
4	$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left \frac{y}{x}\right $

Coordenadas cilíndricas

Son generalizaciones de las coordenadas polares en el espacio tridimensional como se observa en Figura 2.5. Un punto P en coordenadas cilíndricas se denota por $P((r, \theta, z))$ donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde este plano polar a P.

Figura 2.5

Coordenadas cilíndricas.



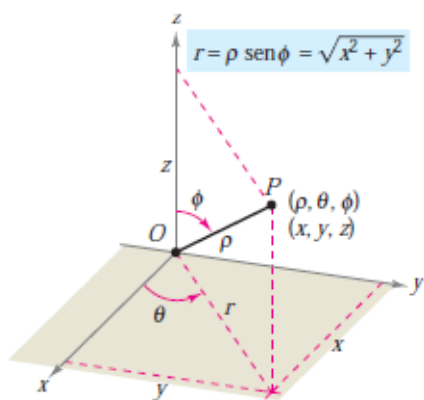
Coordenadas esféricas

Un punto P en este sistema de coordenadas se denota por la terna ordenada $P(\rho, \theta, \phi)$ donde la primera coordenada ρ es una distancia, la segunda y la tercera coordenadas son ángulos.

- 1) ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$
- 2) θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$
- 3) ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta $\overline{OP}$, $0 \leq \phi \leq \pi$

Figura 2.6

Coordenadas esféricas.



Fuente: (Larson y Edwards, 2010).

Para convertir de un sistema a otro, utilizar lo siguiente (Larson y Edwards, 2010):

a) Esféricas a rectangulares

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \quad y = \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \quad z = \rho \cos(\phi)$$

b) Rectangulares a esféricas

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

c) Esféricas a cilíndricas

$$r^2 = \rho^2 \sin^2(\phi) \quad \theta = \theta \quad z = \rho \cos(\phi)$$

Actividad 2.7: Convierta el punto dado a coordenada polar, cilíndrica, esférica o rectangular según sea el caso.

a) $P(4,4)$ ubicando el punto en el plano, está en el primer cuadrante $x=4$ $y=4$

Para determinar el ángulo: Como esta en el primer cuadrante se obtiene directamente de

ecuación 2.8: $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \sqrt{2(16)} = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $P(4,4) = P\left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

b) $P(-1, \sqrt{3})$ ubicando el punto en el plano, está en el segundo cuadrante $x=-1$ $y=\sqrt{3}$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = \left| \sqrt{3} \right| \quad \alpha = \arctan \left| \sqrt{3} \right| = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Por lo tanto: } P(-1, \sqrt{3}) = P\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$$

c) $P(-\sqrt{3}, -1)$ ubicando el punto en el plano, está en el tercer cuadrante $x = -\sqrt{3}$ $y = -1$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \quad \alpha = \arctan \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Por lo tanto: } P(-\sqrt{3}, -1) = P\left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$$

d) $P(2, -2)$ ubicando el punto en el plano, está en el cuarto cuadrante $x = 2$ $y = -2$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{2}{2} \right| \quad \alpha = \arctan|1| = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{2(4)} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Por lo tanto: } P(2, -2) = P\left(2\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$$

$$\text{e) } P(2, \sqrt{2}, -1) \quad x=2 \quad y=\sqrt{2} \quad z=-1$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35.26^\circ$$

$$\text{Por lo tanto: } P(2, \sqrt{2}, -1) = P(\sqrt{6}, 35.26^\circ, -1) = P(\sqrt{6}, 0.1958\pi, -1)$$

$$\text{f) } P\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right) \quad r = -2 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Con ecuación 2.6 y 2.7:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

$$x = -2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad y = -2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 0 \quad y = 2$$

$$\text{Por lo tanto: } P\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right) = P(0, 2)$$

$$\text{g) } P\left(4, -\frac{\pi}{3}, 5\right) \quad r = 4 \quad \theta = -\frac{\pi}{3} \quad z = 5$$

Con ecuación 2.6 y 2.7:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

$$x = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad y = 4 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad z = 5$$

$$x = 2 \quad y = -3.46 = -2\sqrt{3}$$

Para convertir a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho &= \sqrt{(2)^2 + (-3.46)^2 + (5)^2} & \tan(\theta) &= \frac{y}{x} \\ \rho &= \sqrt{4 + 11.97 + 25} & \theta &= -\frac{\pi}{3} \\ \rho &= \sqrt{40.97} \end{aligned}$$

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\rho}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{40.97}}\right) = 38.62^\circ$$

$$\text{Por lo tanto: } P\left(4, -\frac{\pi}{3}, 5\right) = P\left(2, -2\sqrt{3}, 5\right) = P\left(\sqrt{40.97}, -\frac{\pi}{3}, 0.2145\pi\right)$$

$$\text{h) } P(1, -3, 5) \quad x = 1 \quad y = -3 \quad z = 5$$

Se determina el ángulo auxiliar α

$$\tan(\alpha) = |3| \quad \alpha = \arctan|3| = 71.56^\circ = 0.3975\pi$$

$$\theta = 2\pi - \alpha = 360 - 71.56 = 288.44^\circ = 2\pi - 0.3975\pi = 1.6025\pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Por lo tanto: } P(1, -3, 5) = P(\sqrt{10}, 1.6025\pi, 5) = P(\sqrt{10}, 288.44^\circ, 5)$$

Cambiando de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2} & \tan(\theta) &= \frac{y}{x} \\ \rho &= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} & \theta &= 288.44^\circ\end{aligned}$$

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) = 32.31^\circ = 0.1795\pi$$

$$\text{Por lo tanto: } P(1, -3, 5) = P(\sqrt{35}, 288.44^\circ, 32.31^\circ) = P(\sqrt{35}, 1.6025\pi, 0.1795\pi)$$

$$\text{i) } P\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \quad \rho=2 \quad \theta=\frac{\pi}{3} \quad \phi=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin(\phi) \cos(\theta) & y &= \rho \sin(\phi) \sin(\theta) & z &= \rho \cos(\phi) \\ x &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & y &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & z &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ x &= 0.7071 = \frac{\sqrt{2}}{2} & y &= 1.22 = \frac{\sqrt{6}}{2} & z &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto: } P\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

Actividad 2.8: Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar o cilíndrica indicada.

a) $r = 4 \sin(\theta)$ (Leithold, 1998).

De 2.7: $y = r \sin(\theta)$ se tiene que $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$

$$r = 4 \left(\frac{y}{r} \right)$$

$$r^2 = 4y$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

b) $r^2 \cos(2\theta) - z^2 = 1$ (Leithold, 1998).

Se tiene la identidad trigonométrica: $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

$$r^2 [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - z^2 = 1$$

$$r^2 \left[\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right] - z^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

c) $x^2 = 8(2 - y)$ (Zill y Wright, 2011).

Sustituyendo ecuación 2.7:

$$r^2 \cos^2(\theta) = 8 [2 - r \sin(\theta)]$$

Si $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ entonces: $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$

$$r^2 [1 - \sin^2(\theta)] = 16 - 8r \sin(\theta)$$

$$r^2 - r^2 \sin^2(\theta) = 16 - 8r \sin(\theta)$$

$$r^2 = r^2 \sin^2(\theta) - 8r \sin(\theta) + 16$$

El lado derecho de la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, factorizando:

$$r^2 = [r \operatorname{sen}(\theta) - 4]^2$$

$$r = \pm [r \operatorname{sen}(\theta) - 4]$$

Resolviendo para r

$$r = r \operatorname{sen}(\theta) - 4$$

$$r = -[r \operatorname{sen}(\theta) - 4]$$

$$r - r \operatorname{sen}(\theta) = -4$$

$$r = -r \operatorname{sen}(\theta) + 4$$

$$r[1 - \operatorname{sen}(\theta)] = -4$$

$$r + r \operatorname{sen}(\theta) = 4$$

$$r = -\frac{4}{1 - \operatorname{sen}(\theta)}$$

$$r[1 + \operatorname{sen}(\theta)] = 4$$

$$r = \frac{4}{1 + \operatorname{sen}(\theta)}$$

d) $r^2 \cos^2(\theta) + z^2 + 1 = 0$ (Leithold, 1998).

$$r^2 \left(\frac{x^2}{r^2} \right) + z^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + z^2 + 1 = 0$$

TAREA 2.6: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
764	5, 7, 9, 11

2.7 Actividades de aprendizaje y complementos educativos

Según lo planteado en la propuesta de trabajo, se describen los complementos educativos y las actividades de aprendizaje para el tema 2: curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares. La competencia específica establece ecuaciones de curvas

planas, en coordenadas rectangulares, polares o en forma paramétrica, para brindarle herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Para el Tema 2, y para todos los temas de la asignatura, se utilizará el enfoque de metodologías activas de aprendizaje. A través del aprendizaje colaborativo y cooperativo, se fomenta la cohesión del grupo y se incentiva a los estudiantes a trabajar de manera conjunta. Además, se aplicará el aprendizaje basado en problemas, en el que los estudiantes aprenden a través de la resolución actividades con problemas tipo. El profesor llevará a cabo actividades que luego serán analizadas y discutidas tanto a nivel de equipo como en grupo. Si bien el resultado final es único y no admite discusión, el proceso para llegar a él puede variar dependiendo de las bases matemáticas de los estudiantes. El rol del profesor será el de guía o facilitador del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades para que el estudiante sea el protagonista de su proceso educativo.

Complemento Educativo No. 1. *Aprendizaje basado en problemas* y **Complemento Educativo No. 3.** *Ejercicios/casos prácticos*. En relación con estos complementos educativos, se presentarán en clase actividades relacionadas con la solución de problemas o ejercicios de cada uno de los subtemas. La resolución de estos ejemplos se llevará a cabo durante las diferentes sesiones de clases de acuerdo con la planeación realizada por el profesor procurando en todo momento fomentar la discusión y participación de los estudiantes. Además de los ejemplos de clase, se conformarán equipos de trabajo para la realización de prácticas en el aula (Práctica 2.1: Graficando en coordenadas polares con Winplot y Práctica 2.2: Bosquejando

funciones polares con GeoGebra). En el anexo 1 se incluye una serie de actividades con ejercicios representativos que se tienen planeados para el curso. Las herramientas tecnológicas relacionadas con este objetivo educacional consisten en los programas Word®. En Word® se presentará el listado con la redacción de las actividades a resolver en el aula y las tareas. Las gráficas de funciones polares se realizan con el Winplot y con GeoGebra. Tanto los problemas resueltos como los propuestos estarán a disposición de los estudiantes a través de la plataforma MOODLE y en la medida de lo posible serán proyectados en el aula de clase para su solución. Durante estas actividades se llevará un registro de la participación de los estudiantes en la resolución de las actividades en el aula.

Complemento Educacional No. 2. Presentaciones. Se han preparado una serie de presentaciones con el propósito de desarrollar los diferentes subtemas en el aula. Una vez que se hayan visto en clase, las presentaciones estarán a disposición de todos los estudiantes a través de la plataforma MOODLE. A manera de muestra en la Figura 2.7 se presenta una carátula del programa PowerPoint® en la que se visualiza el contenido de una de las presentaciones señaladas. Se creó un *Padlet*, mostrado en Figura 2.8 con el formulario para derivadas e integrales a utilizar durante el curso, los estudiantes podrán bajarlo con la liga:

<https://padlet.com/lupitaamado/c-lculo-integral-formulario-para-derivadas-e-integrales-vqktstlpfr0ohdxw>

En la instrumentación didáctica que acompaña a estos apuntes se proporciona información detallada sobre las actividades de aprendizaje y de enseñanza, así como los niveles de desempeño y evaluación para este tema.

Figura 2.7

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación del Tema 2: curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

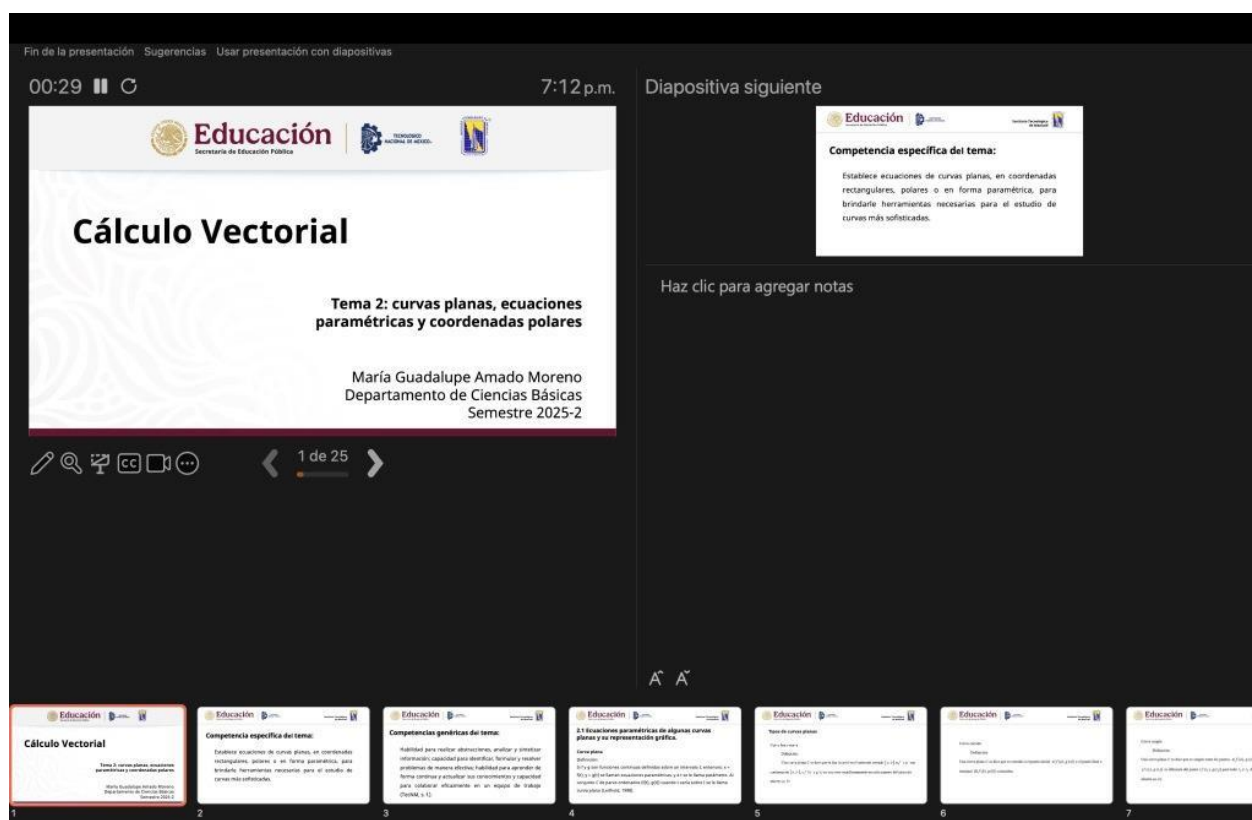


Figura 2.8

Padlet. Curso de Cálculo Integral. Formulario para derivar e integrar.



3. FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

Competencias específicas: establece ecuaciones de curvas en el espacio en forma paramétrica, para analizar el movimiento curvilíneo de un objeto, así como contribuir al diseño de elementos que involucran curvas en el espacio.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

3.1 Definición de función vectorial de una variable real

Las funciones vectoriales son vectores cuyas componentes son funciones. Es una correspondencia que asocia a cada número t en el dominio D un vector único $\vec{R}(t)$ en el espacio (V_3). Determina la trayectoria de un móvil.

Las gráficas de las funciones vectoriales son curvas, las cuales también pueden representarse por ecuaciones paramétricas.

Las aplicaciones geométricas incluyen la longitud de arco, vectores tangentes y normales a una curva y curvatura. En las aplicaciones físicas se emplean los vectores para estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva.

Sean f, g y h funciones reales de una variable real t , entonces una función vectorial $\vec{R}(t)$ se define por:

$$\vec{R}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k} \quad (3.1)$$

Donde t es cualquier número real del dominio D común de f, g y h .

Nota: La función vectorial puede representarse por cualquier literal del alfabeto, aunque por lo general se denota por $\vec{R}(t)$ o $\vec{r}(t)$ en la mayoría de los libros de matemáticas.

La interpretación geométrica del dominio D se representa por puntos en una recta real (Leithold, 1998).

Actividad 3.1: Sea $\vec{R}(t) = (t + 2)\hat{i} + (2t^2 - 3)\hat{j} + t^3\hat{k}$

Determinar:

a) $\vec{R}(1)$ y $\vec{R}(2)$ y trazar sus vectores de posición.

b) ¿Para qué valores de t el vector de posición $\vec{R}(t)$ está en el plano XY, YZ ?

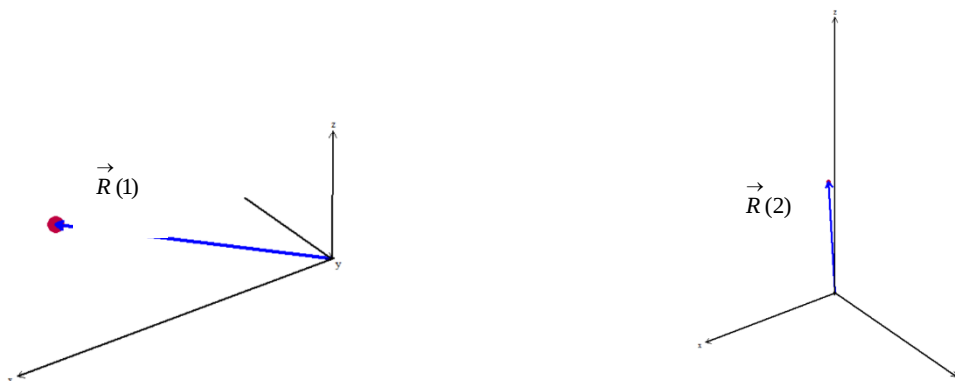
$$a) \quad \vec{R}(1) = (1 + 2)\hat{i} + (2 - 3)\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{R}(2) = (2 + 2)\hat{i} + [2(4) - 3]\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\vec{R}(1) = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{R}(2) = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{k}$$

Gráfica de los vectores de posición $\vec{R}(1)$ y $\vec{R}(2)$:



b) Valores de t para que el vector de posición $\vec{R}(t)$ este en el plano:

$$XY \therefore Z = 0$$

$$YZ \therefore X = 0$$

Tomando la componente en Z e igualando a cero:
igualando a cero:

Tomando la componente en X e

$$t^3 = 0$$

$$t + 2 = 0$$

$$t = 0$$

$$t = -2$$

$$x = t + 2 \quad y = 2t^2 - 3$$

$$y = 2t^2 - 3 \quad z = t^3$$

$$x = 2 \quad x = -3$$

$$y = 8 - 3 = 5 \quad z = -8$$

$$P(2, -3, 0)$$

$$P(0, 5, -8)$$

3.2 Límites y continuidad de una función vectorial

Sea $\vec{R}$ una función vectorial cuyos valores de función están dados por:

$$\vec{R}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

Entonces el límite de $\vec{R}(t)$ cuando t tiende a a está definido por:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \hat{k} \quad (3.2)$$

Si $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow a} g(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} h(t)$ existen (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Larson y

Edwards, 2010).

Actividad 3.2: Obtenga el límite de las funciones vectoriales siguientes:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \cos t \hat{i} + 2e^t \hat{j} + 3\hat{k}$ (Leithold, 1998).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right] \hat{i} + 2 \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^t \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} 3 \right] \hat{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{1 - \cos t}{t} \hat{i} + e^t \hat{j} + e^{-t} \hat{k}$ (Leithold, 1998).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^t \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} \right] \hat{k}$$

Aplicando Regla de L'Hopital en el primer componente para quitar la indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \sin t \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^t \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} \right] \hat{k} \quad S$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \hat{j} + \hat{k} = \langle 0, 1, 1 \rangle$$

c) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t} \hat{i} + \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \cos t} \hat{j} + \frac{t^2}{\sin t} \hat{k}$ (Leithold, 1998).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \cos t} \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sin t} \right] \hat{k} \dots\dots\dots 1$$

Aplicando Regla de L'Hopital en el segundo y tercer componente para quitar la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Derivando simultáneamente el numerador y denominador del segundo componente se obtiene:

$$\text{Numerador } \frac{d}{dt}(1 - \cos^2 t) = \frac{d}{dt}[1 - (\cos t)^2] = -2 \cos t \frac{d}{dt} \cos t = -2 \cos t (-\sin t) = 2 \cos t \sin t$$

$$\text{Denominador } \frac{d}{dt}(1 - \cos t) = \sin t$$

Derivando simultáneamente el numerador y denominador del tercer componente se obtiene:

$$\text{Numerador } \frac{d}{dt} t^2 = 2t \quad \text{Denominador } \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

Sustituyendo en 1:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos t \sin t}{\sin t} \right] \hat{j} + 2 \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos t} \right] \hat{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t} \right] \hat{i} + 2 \left[\lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right] \hat{j} + 2 \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos t} \right] \hat{k}$$

Realizando el proceso a límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = 2 \hat{i} + 2 \hat{j}$$

$$\text{d) } \lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) \text{ si } \vec{R}(t) = \frac{t - \sin t}{t^3} \hat{i} + \frac{\sin t}{t^2} \hat{j} + \frac{\sin^2 t}{t} \hat{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t^2} \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} \right] \hat{k}$$

.....2

Se observa indeterminación en todos los componentes de la función vectorial, para ello aplicamos L'Hopital en cada uno de ellos.

Derivando simultáneamente el numerador y denominador se obtiene:

Numeradores

$$\frac{d}{dt}(t - \text{sent}) = 1 - \cos t$$

$$\frac{d}{dt} \text{sent} = \cos t$$

$$\frac{d}{dt}(\text{sent})^2 = 2\text{sent} \cdot \frac{d}{dt} \text{sent} = 2\text{sent} \cos t$$

Denominadores

$$\frac{d}{dt} t^3 = 3t^2$$

$$\frac{d}{dt} t^2 = 2t$$

$$\frac{d}{dt} t = 1$$

Sustituyendo los resultados de la derivada en 2:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{2t} \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} 2 \text{sent} \cos t \right] \hat{k}$$

Tomado límite se observa que sigue la indeterminación en la componente 1 pero la componente 2 queda indefinida, por lo que, se dice: $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ No existe.

TAREA 3.1: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
870	17, 19

TAREA 3.2: Obtenga:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{t}{\text{sen } t} \hat{i} + \frac{\tan t}{\text{sen } 5t} \hat{j} + \frac{\text{sen } 4t}{\text{sen } 7t} \hat{k}$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{t - \text{sen } t}{t^3} \hat{i} + \frac{\text{sen } 5t}{\text{sen } 3t} \hat{j} + \frac{\text{sen}^2 t}{t} \hat{k}$

Continuidad de funciones vectoriales

DEFINICIÓN: Se dice que la función vectorial es continua si cada una de las componentes es continua.

En general debe cumplir: $\lim_{t \rightarrow a} \vec{R}(t) = \vec{R}(a)$

Actividad 3.3: indique para que valores de t la función $\vec{R}(t)$ no es continua.

a) $\vec{R}(t) = \frac{1}{t} \hat{i} + \frac{1}{t-2} \hat{j}$

En $t = 0$ $t = 2$ no es continua $\therefore$ o bien $\vec{R}(t)$ es continua $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

b) $\vec{R}(t) = \ln(t+1) \hat{i} - \frac{1}{t^2-4} \hat{j}$

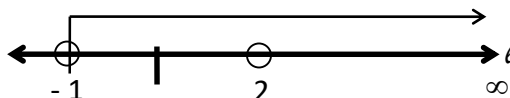
$$t+1 > 0$$

$$t > -1$$

$$D: (-1, \infty), t \neq 2$$

También puede expresarse en términos de intervalos: $D: (-1, 2) \cup (2, \infty)$

Por lo tanto, la función vectorial es continua en $(-1, \infty), t \neq 2$



TAREA 3.3: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
910	1, 9, 15

3.3 Derivada de una función vectorial

Se obtiene derivando cada componente de $\vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$ donde f, g y h son derivables entonces:

$$\vec{R}'(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k} \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 también puede expresarse con la notación de diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\vec{R}(t) = \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\hat{i} + \left[\frac{d}{dt}g(t)\right]\hat{j} + \left[\frac{d}{dt}h(t)\right]\hat{k} \quad (3.4)$$

Derivadas de orden superior

Si f, g y h tiene segundas derivadas entonces se deriva sucesivamente $\vec{R}(t)$.

Actividad 3.4: Sea $\vec{R}(t) = \ln(t)\hat{i} + e^{-3t}\hat{j} + t^2\hat{k}$

Determinar (Swokowski, 1989):

i) El dominio de $\vec{R}(t)$ y los intervalos donde es continua

ii) $\vec{R}'(t)$, $\vec{R}''(t)$ y $\vec{R}^{IV}(t)$.

Solución:

i) $\ln 1 = 0$ si

$\ln(-1) = \text{no existe}$ $\therefore$ el dominio D: $t > 0$ o bien de $(0, \infty)$

$\ln(0) = \text{no existe}$ Es continua de $(0, \infty)$

$$\text{ii) } \vec{R}'(t) = \frac{1}{t} \hat{i} - 3e^{-3t} \hat{j} + 2t \hat{k}$$

$$\vec{R}'(t) = t^{-1} \hat{i} - 3e^{-3t} \hat{j} + 2t \hat{k}$$

$$\vec{R}''(t) = -t^{-2} \hat{i} + 9e^{-3t} \hat{j} + 2 \hat{k}$$

$$\vec{R}'''(t) = 2t^{-3} \hat{i} - 27e^{-3t} \hat{j}$$

$$\vec{R}^{IV}(t) = -6t^{-4} \hat{i} + 81e^{-3t} \hat{j}$$

$$\vec{R}^{IV}(t) = -\frac{6}{t} \hat{i} + \frac{81}{e^{3t}} \hat{j}$$

Actividad 3.5: Dada la función vectorial determine en cada inciso:

i) Dominio de $\vec{r}(t)$.

ii) $\frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ y su dominio.

$$\text{a) } \vec{r}(t) = \frac{1}{t+1} \hat{i} + 2t^2 \hat{j}$$

Solución:

i) D: $\mathbb{R}, t \neq -1$ o bien $D : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$$\text{ii) } \vec{r}(t) = \frac{1}{t+1} \hat{i} + 2t^2 \hat{j} = (t+1)^{-1} \hat{i} + 2t^2 \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = -(t+1)^{-2} \hat{i} + 4t \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \hat{i} + 4t \hat{j} \quad D : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{b) } \vec{r}(t) = \sqrt{t^2 - 4} \hat{i} + 5t^3 \hat{j}$$

Solución:

$$\text{i) } D: (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$\text{ii) } \vec{r}(t) = (t^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \hat{i} + 5t^3 \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t \hat{i} + 15t^2 \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{t}{(t^2 - 4)^{\frac{1}{2}}} \hat{i} + 15t^2 \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} \hat{i} + 15t^2 \hat{j} \quad D: (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

TAREA 3.4: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios impares
880	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

PRÁCTICA 3.1: En equipo de tres personas, resolver los ejercicios y entregar individualmente un trabajo al final de la clase.

1. Indicar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales:

$$\text{a) } \vec{R}(t) = \ln(t+2) \hat{i} - \frac{1}{t+4} \hat{j} + t^2 \hat{k}$$

$$\text{b) } \vec{R}(t) = \sqrt{t+4} \hat{i} + \frac{1}{(t+3)(2t+5)} \hat{j} + e^{2t} \hat{k}$$

$$c) \quad \vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{t+2}} \hat{i} + \frac{t}{t+4} \hat{j} - \frac{1}{t} \hat{k}$$

2. Derive las funciones vectoriales ¿para qué valores de t existe la derivada?

$$a) \quad \vec{R}(t) = e^{3t} \hat{i} + t \cos(2t) \hat{j} + \frac{1}{t^2} \hat{k}$$

$$b) \quad \vec{R}(t) = \ln(t) \hat{i} + (3t^2 + 5t) \hat{j} + t^2 \hat{k}$$

3.4 Integración (antiderivada) de funciones vectoriales

Si $\vec{R}(t) = f(t) \hat{i} + g(t) \hat{j} + h(t) \hat{k}$, donde f, g y h son continuas en $[a, b]$, la integral indefinida (o primitiva) de $\vec{R}(t)$ es (Leithold, 1998):

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \hat{i} + \left[\int g(t) dt \right] \hat{j} + \left[\int h(t) dt \right] \hat{k} \quad (3.5)$$

La solución de 1 se obtiene integrando cada componente:

$$\int f(t) dt = F(t) + C_1 \quad \int g(t) dt = G(t) + C_2 \quad \int h(t) dt = H(t) + C_3$$

$$\text{Donde: } F'(t) = f(t) \quad G'(t) = g(t) \quad H'(t) = h(t)$$

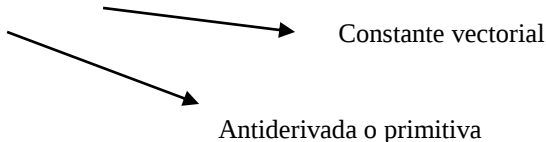
Las tres constantes escalares de integración producen una constante vectorial de integración, sustituyendo en 3.5:

$$\int \vec{R}(t) dt = [F(t) + C_1] \hat{i} + [G(t) + C_2] \hat{j} + [H(t) + C_3] \hat{k}$$

$$\int \vec{R}(t) dt = [F(t) \hat{i} + G(t) \hat{j} + H(t) \hat{k}] + [C_1 \hat{i} + C_2 \hat{j} + C_3 \hat{k}]$$

$$\int \vec{R}(t) dt = [F(t) \hat{i} + G(t) \hat{j} + H(t) \hat{k}] + (C_1 \hat{i} + C_2 \hat{j} + C_3 \hat{k})$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \vec{r}(t) + C$$



Donde: $\vec{r}'(t) = \vec{R}(t)$

La integral indefinida de una función vectorial representa a una familia de funciones vectoriales que difieren una de otras en algún vector constante.

La integral definida sobre el intervalo $a \leq t \leq b$ es:

$$\int_a^b \vec{R}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \hat{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \hat{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \hat{k} \quad (3.6)$$

Actividad 3.6: Antiderive las funciones vectoriales.

a) $\int (t \hat{i} + 3t \hat{j}) dt$

$$\int (t \hat{i} + 3t \hat{j}) dt = \left[\int t dt \right] \hat{i} + \left[3 \int t dt \right] \hat{j} = \left(\frac{t^2}{2} + C_1 \right) \hat{i} + \left(\frac{3}{2} t^2 + C_2 \right) \hat{j}$$

b) $\int_0^1 \vec{R}(t) dt$ si $\vec{R}(t) = \sqrt[3]{t} \hat{i} + \frac{1}{t+1} \hat{j}$

$$\int_0^1 \vec{R}(t) dt = \left[\int_0^1 t^{1/3} dt \right] \hat{i} + \left[\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \right] \hat{j}$$

Haciendo cambio de variable en la segunda integral: $u = t + 1$
 $du = dt$

$$\int_0^1 \vec{R}(t) dt = \left[\int_0^1 t^{1/3} dt \right] \hat{i} + \left[\int_1^2 \frac{1}{u} du \right] \hat{j}$$

$$\int_0^1 \vec{R}(t) dt = \frac{3t^{4/3}}{4} \Big|_0^1 \hat{i} + \ln|u| \Big|_1^2 \hat{j} = \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(1)^4} - 0 \right] \hat{i} + [\ln|2| - \ln|1|] \hat{j}$$

$$\int_0^1 \vec{R}(t) dt = \frac{3}{4} \hat{i} + \ln|2| \hat{j}$$

TAREA 3.5: Resolver la integral indefinida: $\int \vec{R}(t) dt$ si $\vec{R}(t) = \arctan(t) \hat{i} + \frac{4t^2 + 3t + 1}{t(2t + 1)^3} \hat{j}$

3.5 Longitud de arco

Una curva en el espacio es el conjunto de ternas ordenadas de la forma:

$[f(t), g(t), h(t)]$, donde f, g, h son funciones continuas en un intervalo I (Leithold, 1998).

Ecuaciones paramétricas de una curva C .

$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ por lo que, $\vec{R}(t) = f(t) \hat{i} + g(t) \hat{j} + h(t) \hat{k}$

Si una curva “C” tiene una parametrización regular $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, en $a \leq t \leq b$ y si “C” no se corta a sí misma, excepto posiblemente en los extremos del intervalo $[a, b]$, entonces la longitud (L) de “C” es:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \quad (3.7)$$

$$L = \int_a^b \left\| \vec{R}'(t) \right\| dt \quad (3.8)$$

NOTA: Para obtener la longitud de una curva se determina la derivada de las componentes de la función vectorial.

Actividad 3.7: Determine la longitud de la curva parametrizada por: $x = t^2$, $y = t \sin(t)$, $z = t \cos(t)$ en el intervalo de $[0, 1]$ (Leithold,1998).

Con ecuación 3.7:
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Obteniendo las derivadas de $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$, después se eleva al cuadrado el resultado de cada una de las derivadas y finalmente se sustituyen en 3.6:

$$f(t) = x = t^2$$

$$f'(t) = 2t$$

$$[f'(t)]^2 = 4t^2$$

$$g(t) = y = t \sin(t)$$

derivando como un producto de funciones

$$g'(t) = t \cos(t) + \sin(t)$$

$$[g'(t)]^2 = [t \cos(t) + \sin(t)]^2 = t^2 \cos^2(t) + 2t \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t)$$

$$h(t) = z = t \cos(t) \quad \text{derivando como un producto de funciones}$$

$$h'(t) = -t \sin(t) + \cos(t)$$

$$[h'(t)]^2 = [-t \sin(t) + \cos(t)]^2 = t^2 \sin^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + \cos^2(t)$$

Sustituyendo en ecuación 3.7 para obtener la longitud de arco de la función vectorial:

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2 \cos^2(t) + 2t \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t) + t^2 \sin^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + \cos^2(t)} dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2 \cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2 \sin^2(t) + \cos^2(t)} dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2 [\cos^2(t) + \sin^2(t)] + [\sin^2(t) + \cos^2(t)]} dt$$

$$\text{Si } \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2 + 1} dt = \int_0^1 \sqrt{5t^2 + 1} dt$$

Del formulario de integrales de (García-Anguis, 1981), ecuación 24:

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left[u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right]$$

De la antiderivada a resolver se tiene:

$$u^2 = 5 t^2 \quad a^2 = 1$$

$$u = \sqrt{5} t \quad a = 1$$

$$du = \sqrt{5} dt$$

$$\frac{du}{\sqrt{5}} = dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{5t^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| \right]_0^{\sqrt{5}}$$

Tomando límites para u

$$L = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1} - 0 \right] + \frac{1}{2} \left[\ln \left| \sqrt{5} + \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1} \right| - \ln \left| 0 + \sqrt{1} \right| \right] \right\}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{6} \right] + \frac{1}{2} \left[\ln \left| \sqrt{5} + \sqrt{6} \right| - \ln(1) \right] \right\}$$

$$L = 1.57 \text{ Unidades de longitud}$$

TAREA 3.6: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios impares
881	49, 51
911	25

3.6 Vectores tangente, normal y binormal

Se ha dicho que el vector velocidad $\vec{v}$ apunta en la dirección del movimiento.

Cuando una partícula recorre una curva “C” puede cambiar su velocidad rápida o lentamente dependiendo de si “C” se dobla brusca o gradualmente. Para medir la rapidez con que “C” se encorva o cambia de forma, se usa el concepto de curvatura.

Si $\vec{r}(t)$ es una función vectorial y “C” está determinada por $\vec{r}(t)$ y es regular, entonces:

$\vec{r}'(t)$ es un vector tangente a C.

Vector tangente unitario

Se denota por: $\vec{T}(t)$ y se define por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad (3.9)$$

Si $\vec{r}'(t) \neq 0$

Si $\vec{T}(t)$ es derivable entonces $\vec{r}'(t)$ es ortogonal (perpendicular) a $\vec{T}(t)$. Entonces:

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$$

Vector normal principal unitario

Es el vector unitario que tiene la misma dirección que $\vec{T}'(t)$.

Se denota por: $\vec{N}(t)$

Se define por:
$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \quad (3.10)$$

Si $\vec{T}'(t) \neq 0$

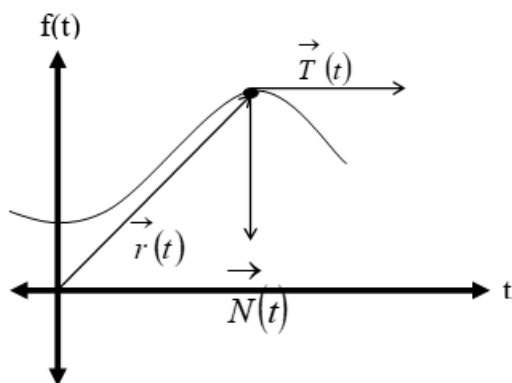
Las expresiones anteriores se pueden aplicar tanto a curvas planas como a curvas espaciales.

Cuando $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ se representan geométricamente, como en Figura 3.1, se toma en cuenta:

- El punto inicial en el punto P de C correspondiente a t .
- El vector tangente $\vec{r}'(t)$ apunta en la dirección en que el punto se mueve cuando “ t ” aumenta, también $\vec{T}(t)$ apunta en esa dirección (Leithold, 1998).

Figura 3.1

Representación geométrica del vector tangente unitario y el vector normal principal unitario.



Actividad 3.8: Se tiene la curva plana “C” determinada por: $\vec{r}(t) = t^2 \hat{i} + t \hat{j}$

(Swokowski, 1989) .

a) Encontrar el vector tangente unitario.

b) Trazar C, $\vec{T}(1)$.

a) Vector tangente unitario

Con ecuación 3.9: $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$

$$\vec{r}'(t) = 2t \hat{i} + \hat{j}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1}$$

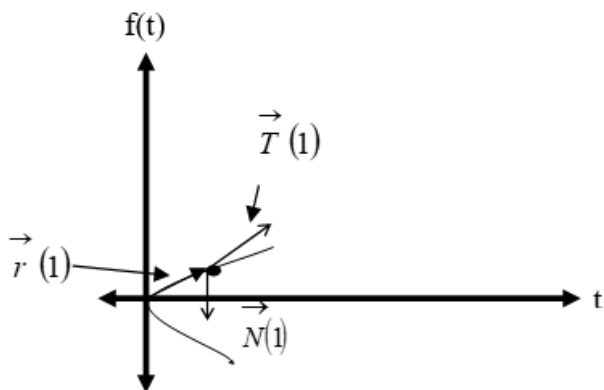
Sustituyendo en 3.9: $\vec{T}(t) = \frac{2t \hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{4t^2 + 1}}$

$$\vec{T}(t) = \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \hat{j}$$

b) Trazar C, $\vec{T}(1)$

Para graficar:

t	-2	-1	0	1	2
$\vec{r}(t)$	$\langle 4, -2 \rangle$	$\langle 1, -1 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$



Para $t = 1$ $\vec{r}(1) = \hat{i} + \hat{j}$

$$\vec{T}(1) = \frac{2}{\sqrt{4+1}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{4+1}} \hat{j} = \frac{2}{\sqrt{5}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{j}$$

3.7 Curvatura

Curvatura de “C” en el punto P(x, y)

Se denota por: K

Sea C una curva plana que tiene parametrización $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces la curvatura K en P(x, y) es:

$$K = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11)$$

Si una curva plana “C” está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $f''(t)$ y $g''(t)$ existen, entonces la curvatura K en P(x, y) es:

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (3.12)$$

Actividad 3.9: Demostrar que la curvatura en todos los puntos de una circunferencia

de radio K es igual a $\frac{1}{k}$. La circunferencia de radio k con centro en el origen tienen las

siguientes ecuaciones paramétricas: $x = k \cos(t)$ y $y = k \sin(t)$ (Swokowski, 1989).

Ya que se tienen las ecuaciones paramétricas se utiliza ecuación 3.12:

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left\{ [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(t) = x = k \cos(t)$$

$$g(t) = y = k \sin(t)$$

$$f'(t) = -k \sin(t)$$

$$g'(t) = k \cos(t)$$

$$f''(t) = -k \cos(t)$$

$$g''(t) = -k \sin(t)$$

Sustituyendo en 3.12:

$$K = \frac{|[-k \sin(t)][-k \sin(t)] - [k \cos(t)][-k \cos(t)]|}{\left\{ [-k \sin(t)]^2 + [k \cos(t)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{|k^2 \sin^2(t) + k^2 \cos^2(t)|}{[k^2 \sin^2(t) + k^2 \cos^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = \frac{|k^2 [\sin^2(t) + \cos^2(t)]|}{[k^2 [\sin^2(t) + \cos^2(t)]]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|k^2|}{(k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k^2}{k^3}$$

$$K = \frac{1}{k} \text{ L Q. Q. D. lo que se quería demostrar}$$

3.8 Aplicaciones

Existen diversas aplicaciones de las funciones vectoriales, en esta sección se estudiará el movimiento de una partícula en el plano y la función de posición de un proyectil (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Larson y Edwards, 2010; Stewart, 2018).

Movimiento de una partícula en el plano

Cuando una partícula se mueve sobre una curva en el plano, las coordenadas (x, y) de su centro de masa son funciones del tiempo. En vez de utilizar f y g para ellas se utiliza:

$$f = x(t), \quad g = y(t)$$

Por lo tanto, el vector de posición será: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ que representa el movimiento de la partícula en el plano.

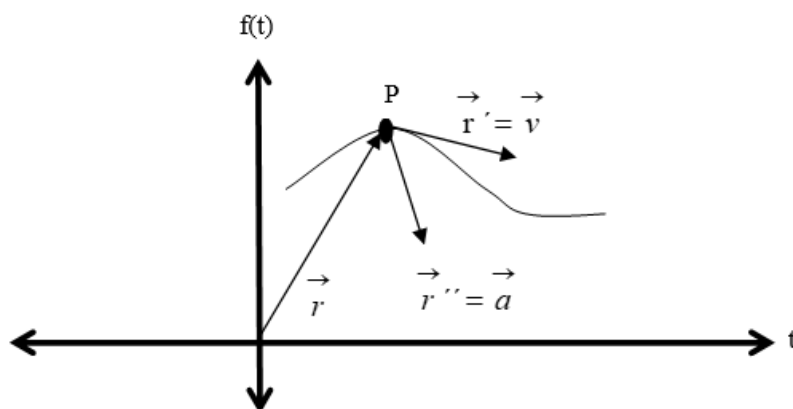
El vector tangente $\vec{r}'(t)$ se denomina por definición velocidad de la partícula al tiempo t .

El vector $\vec{r}''(t)$ representa la aceleración de la partícula.

La velocidad y la aceleración se representan geométricamente por vectores con punto inicial P . En la mayoría de los casos $\vec{r}''(t)$ apunta hacia el lado cóncavo de C . La rapidez de la velocidad no es más que la magnitud de la velocidad.

Figura 3.2

Representación de la velocidad y aceleración en el plano.



Actividad 3.10: Una partícula se mueve a lo largo de una curva, donde $x = 2t^3$,

$y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$, siendo t el tiempo. Hallar (Swokowski, 1989):

a) $\vec{v}(1)$ y $\vec{a}(1)$.

b) Las componentes de velocidad y aceleración en la dirección de $\vec{b} = \langle 1, -3, 2 \rangle$ para $t = 1$.

Con las ecuaciones paramétricas dadas se obtiene la función vectorial:

$$\vec{r}(1) = 2t^3 \hat{i} + (t^2 - 4t) \hat{j} + (3t - 5) \hat{k}$$

a) Velocidad y aceleración

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 6t^2 \hat{i} + (2t - 4) \hat{j} + 3 \hat{k} = \langle 6t^2, 2t - 4, 3 \rangle$$

$$\vec{v}(1) = \vec{r}'(1) = 6(1)^2 \hat{i} + (2 - 4) \hat{j} + 3 \hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = \langle 6, -2, 3 \rangle$$

b) Componente de la velocidad

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v} = \frac{\langle 6t^2, 2t-4, 3 \rangle \cdot \langle 1, -3, 2 \rangle}{\|\langle 1, -3, 2 \rangle\|}$$

$$\|\vec{b}\| = \|\langle 1, -3, 2 \rangle\| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 12t \hat{i} + 2 \hat{j} = \langle 12t, 2 \rangle$$

$$\vec{a}(1) = \vec{r}''(1) = 12 \hat{i} + 2 \hat{j} = \langle 12, 2 \rangle$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v} = \frac{6t^2 - 6t + 12 + 6}{\sqrt{14}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v} = \frac{6t^2 - 6t + 18}{\sqrt{14}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v}(1) = \frac{6 - 6 + 18}{\sqrt{14}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{v}(1) = \frac{18}{\sqrt{14}} = 4.8$$

Componente de la aceleración

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\langle 12t, 2, 0 \rangle \cdot \langle 1, -3, 2 \rangle}{\|\langle 1, -3, 2 \rangle\|}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{12t - 6}{\sqrt{14}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a}(1) = \frac{12 - 6}{\sqrt{14}}$$

$$\text{comp}_{\vec{b}} \vec{a}(1) = \frac{6}{\sqrt{14}} = 1.6$$

Actividad 3.11: El vector de posición de una partícula que se mueve en el plano

coordinado es (Swokowski, 1989):

$$\vec{r}(t) = 2t \hat{i} + 3t^2 \hat{j} + t^3 \hat{k} \text{ para } 0 \leq t \leq 2.$$

a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula al tiempo t .

b) Trazar la trayectoria C de la partícula y representar geoméricamente $\vec{v}(1)$ y $\vec{a}(1)$.

a) Velocidad y aceleración

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 2\hat{i} + 6t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 6\hat{j} + 6t\hat{k}$$

$$\vec{v}(1) = \vec{r}'(1) = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k} = \langle 2, 6, 3 \rangle$$

$$\vec{a}(1) = \vec{r}''(1) = 6\hat{j} + 6\hat{k} = \langle 0, 6, 6 \rangle$$

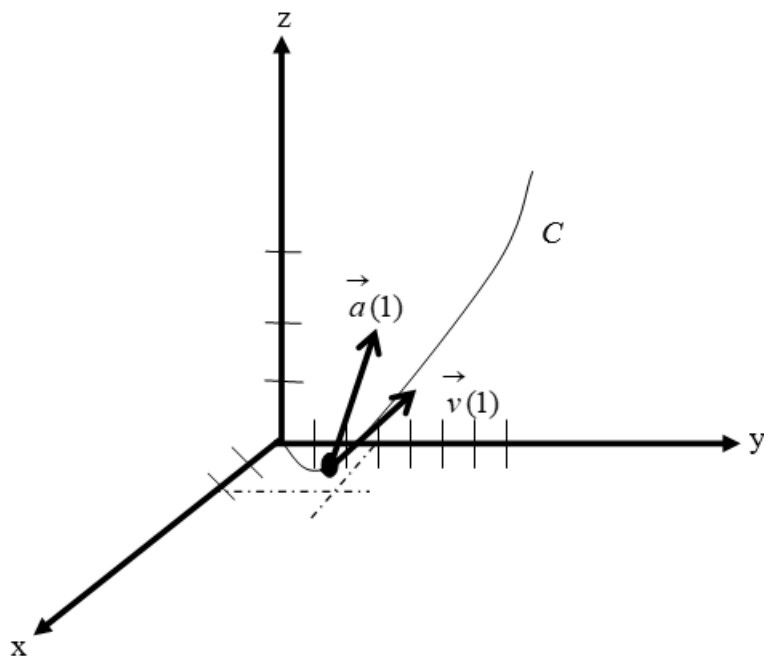
b) De la función vectorial $\vec{r}(t)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la curva C :

$$x = 2t \quad y = 3t^2 \quad z = t^3$$

Para graficar se dan valores de t en el intervalo dado de $0 \leq t \leq 2$

t	0	0.5	1	1.5	2
x	0	1	2	3	4
y	0	0.75	3	6.75	12
z	0	0.125	1	3.4	8

Sustituyendo $t=1$ en la función vectorial para obtener el punto $P(2, 3, 1)$.



Función de posición de un proyectil

El movimiento de proyectiles es otra aplicación de las funciones vectoriales.

Es el movimiento bidimensional de una partícula disparada oblicuamente al aire, por ejemplo, el movimiento ideal de una pelota de baseball, de una bola de golf, de una bala, etcétera.

La trayectoria de un proyectil localizado desde una altura inicial “h” con una velocidad inicial V_0 y un ángulo de elevación θ se describe por la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = [V_0 t \cos(\theta)] \hat{i} + \left[h + V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j} \quad (3.13)$$

Donde:

g = Gravedad (constante gravitacional, 9.8 m/s^2 , 32 ft/s^2)

h = Altura

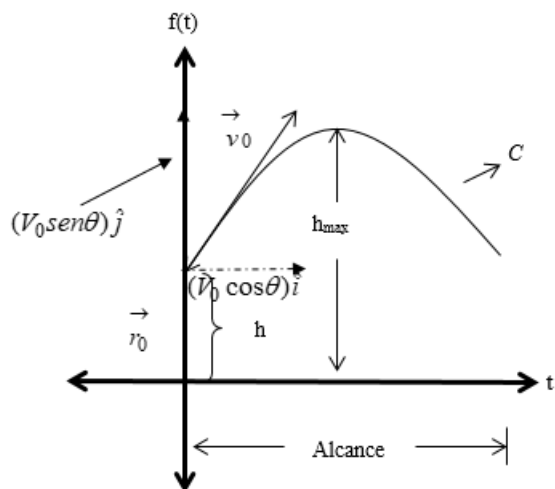
V_0 = Velocidad inicial

t = Tiempo

θ = Ángulo de elevación

Figura 3.3

Función de posición de un proyectil.



Dedución:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

$$d \vec{v}(t) = \vec{a}(t) dt$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d \vec{v}(t) = \int_0^t (-g \hat{j}) dt$$

$$\vec{v}(t) \Big|_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = -g t \hat{j}$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = -g t \hat{j}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - g t \hat{j}$$

$$\vec{v} = (V_0 \cos \theta) \hat{i} + (V_0 \sin \theta) \hat{j} - g t \hat{j}$$

Sumando vectores

$$\vec{v} = (V_0 \cos \theta) \hat{i} + (V_0 \sin \theta - g t) \hat{j}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}$$

Expresando en forma de diferenciales:

$$d \vec{r}(t) = \vec{v} dt$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}(t) = \int_0^t \left[(V_0 \cos \theta) \hat{i} + (-gt + V_0 \sin \theta) \hat{j} \right] dt$$

$$\vec{r}(t) \Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = \int_0^t \left[(V_0 \cos \theta) \hat{i} + (-gt + V_0 \sin \theta) \hat{j} \right] dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int \left[(V_0 \cos \theta) \hat{i} \right] dt + \int \left[(-gt + V_0 \sin \theta) \hat{j} \right] dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (tV_0 \cos \theta) \hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin \theta \right) \hat{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (tV_0 \cos \theta) \hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin \theta \right) \hat{j}$$

$$\text{Si } \vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} = h \hat{j}$$

$$\vec{r} = h \hat{j} + (tV_0 \cos \theta) \hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin \theta \right) \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \left[V_0 t \cos(\theta) \right] \hat{i} + \left[h + V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2 \right] \hat{j}$$

Actividad 3.12: Se golpea una pelota de baseball a 3 ft del suelo con un ángulo de $\frac{\pi}{4}$

respecto de la horizontal y con una velocidad de $100 \frac{ft}{s}$. Determine la altura máxima que

alcanzó la pelota (Larson y Edwards, 2010).

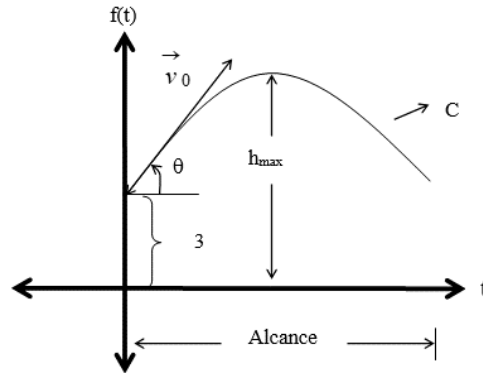
Datos

$$h = 3\text{ft}$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$V_0 = 100 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$h_{\max} = ?$$



Con ecuación 3.13 se plantea la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = [V_0 t \cos(\theta)] \hat{i} + \left[h + V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j}$$

Sustituyendo los datos en 3.13:

$$\vec{r}(t) = [100 t \cos(45^\circ)] \hat{i} + \left[3 + 100 t \sin(45^\circ) - \frac{1}{2} (32) t^2 \right] \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = 70.71t \hat{i} + [3 + 70.71t - 16t^2] \hat{j}$$

De la función vectorial se tienen las ecuaciones paramétricas:

Componente en x

$$x = 70.71t$$

Componente en y

$$y = 3 + 70.71t - 16t^2$$

Para encontrar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima, se considera:

$$y' = 70.71 - 32t$$

$$0 = 70.71 - 32t$$

Despejando t

$$32t = 70.71$$

$$t = \frac{70.71}{32}$$

$$t = 2.2 \text{ segundos}$$

Para encontrar la altura máxima se trabaja con la componente en y:

$$h_{\max} = y = 3 + 70.71(2.2) - 16(2.2)^2$$

$$h_{\max} = 81.12 \text{ ft}$$

Actividad 3.13: Se lanza una pelota de baseball desde una altura de 3 ft sobre el nivel del suelo con un ángulo de 45° y la captura a 300 ft de distancia. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la pelota y que altura alcanzo si la captura se hizo a 3 ft sobre el nivel del suelo? (Larson y Edwards, 2010).

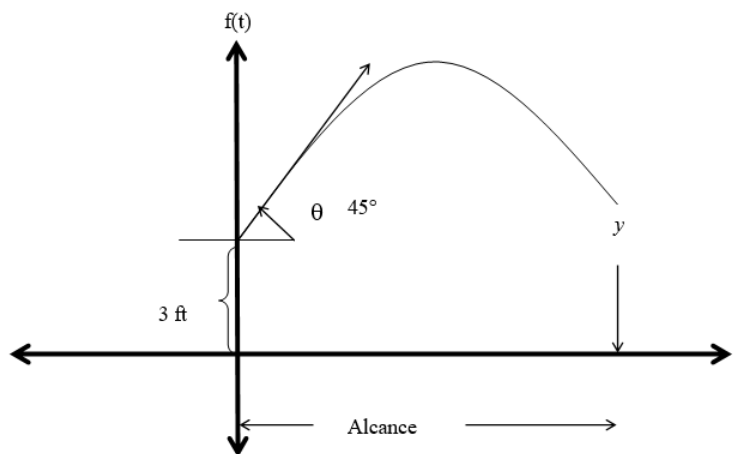
Datos:

$$\theta = 45^\circ$$

$$y = 3 \text{ ft}$$

$$x = \text{alcance} = 300 \text{ ft}$$

$$h = 3 \text{ ft}$$



Con ecuación 3.13 se plantea la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = [V_0 t \cos(\theta)] \hat{i} + \left[h + V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j}$$

Sustituyendo los datos en 3.13:

$$\vec{r}(t) = [V_0 t \cos(45^\circ)] \hat{i} + \left[3 + V_0 t \sin(45^\circ) - \frac{1}{2} (32) t^2 \right] \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = 0.7071 V_0 t \hat{i} + \left(3 + 0.7071 V_0 t - 16 t^2 \right) \hat{j}$$

De la función vectorial se tienen las ecuaciones paramétricas:

Componente en x

$$x = 0.7071 V_0 t$$

Componente en y

$$y = 3 + 0.7071 V_0 t - 16t^2$$

Para encontrar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima, se considera:

$$300 = 0.7071 V_0 t$$

$$t = \frac{300}{0.7071 V_0} \dots A$$

Sustituyendo t en la componente en y :

$$y = 3 + 0.7071 V_0 t - 16t^2$$

$$3 = 3 + 0.7071 V_0 \left(\frac{300}{0.7071 V_0} \right) - 16 \left(\frac{300}{0.7071 V_0} \right)^2$$

$$0 = 300 - 16 \left(\frac{300}{0.7071 V_0} \right)^2$$

Despejando la velocidad inicial V_0 :

$$-300 = -16 \left(\frac{300}{0.7071 V_0} \right)^2$$

$$\frac{-300}{-16} = \left(\frac{300}{0.7071 V_0} \right)^2$$

$$\frac{300}{16} V_0^2 = \left(\frac{300}{0.7071} \right)^2$$

$$V_0^2 = \frac{(16)(300)^2}{(300)(0.7071)^2}$$

$$V_0^2 = \frac{(16)(300)}{(0.7071)^2}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{(16)(300)}{(0.7071)^2}}$$

$$V_0 = 97.98 \frac{ft}{s}$$

Sustituyendo en A para encontrar t :

$$t = \frac{300}{0.7071 V_0}$$

$$t = \frac{300}{0.7071 (97.98)}$$

$$t = 4.33 s$$

La altura máxima se alcanza cuando el componente vertical de la velocidad es cero.

Primero se determina el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima:

$$y = 3 + 0.7071 V_0 t - 16t^2$$

$$0 = y' = 0.7071 V_0 - 32t$$

$$32t = 0.7071 V_0$$

$$t = \frac{0.7071 V_0}{32}$$

$$t = \frac{0.7071 (97.98)}{32}$$

$$t = 2.16 s$$

La altura máxima es:

$$y = 3 + 0.7071 V_0 t - 16t^2$$

$$h_{\max} = y = 3 + 0.7071 (97.98)(2.16) - 16(2.16)^2$$

$$h_{\max} = 77.99 ft$$

TAREA 3.7: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
907	1, 3, 17, 21, 25, 27, 41, 45, 47

3.9 Actividades de aprendizaje y complementos educativos

Según lo planteado en la propuesta de trabajo, se describen los complementos educativos y las actividades de aprendizaje para el tema 3: funciones vectoriales de una variable real. La competencia específica es que los estudiantes establezcan ecuaciones de curvas en el espacio en forma paramétrica, para analizar el movimiento curvilíneo de un objeto, así como contribuir al diseño de elementos que involucran curvas en el espacio.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Para el Tema 3, y para todos los temas de la asignatura, se utilizará el enfoque de metodologías activas de aprendizaje. A través del aprendizaje colaborativo y cooperativo, se fomenta la cohesión del grupo y se incentiva a los estudiantes a trabajar de manera conjunta. Además, se aplicará el aprendizaje basado en problemas, en el que los estudiantes aprenden a través de la resolución actividades con problemas tipo. El profesor llevará a cabo actividades que luego serán analizadas y discutidas tanto a nivel de equipo como en grupo. Si bien el resultado final es único y no admite discusión, el proceso para llegar a él puede variar dependiendo de las bases matemáticas de los estudiantes. El rol del profesor será el de guía o facilitador del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades para que el estudiante sea el protagonista de su proceso educativo.

Complemento Educativo No. 1. *Aprendizaje basado en problemas* y **Complemento Educativo No. 3.** *Ejercicios/casos prácticos.* En relación con estos complementos educativos, se presentarán en clase actividades relacionadas con la solución de problemas o ejercicios de cada uno de los subtemas. La resolución de estos ejemplos se llevará a cabo durante las diferentes sesiones de clases de acuerdo con la planeación realizada por el profesor procurando en todo momento fomentar la discusión y participación de los estudiantes. Además de los ejemplos de clase, se conformarán equipos de trabajo para que los estudiantes resuelvan los ejercicios y reafirmen sus conocimientos. En el anexo 1 se incluye una serie de actividades con ejercicios representativos que se tienen planeados para el curso. Las herramientas tecnológicas relacionadas con este objetivo educativo consisten en los programas Word®. En Word® se presentará el listado con la redacción de las actividades a resolver en el aula y las tareas. Las gráficas de las funciones se realizan con el Winplot y con GeoGebra. Tanto los problemas resueltos como los propuestos estarán a disposición de los estudiantes a través de la plataforma MOODLE y en la medida de lo posible serán proyectados en el aula de clase para su solución. Durante estas actividades se llevará un registro de la participación de los estudiantes en la resolución de las actividades en el aula.

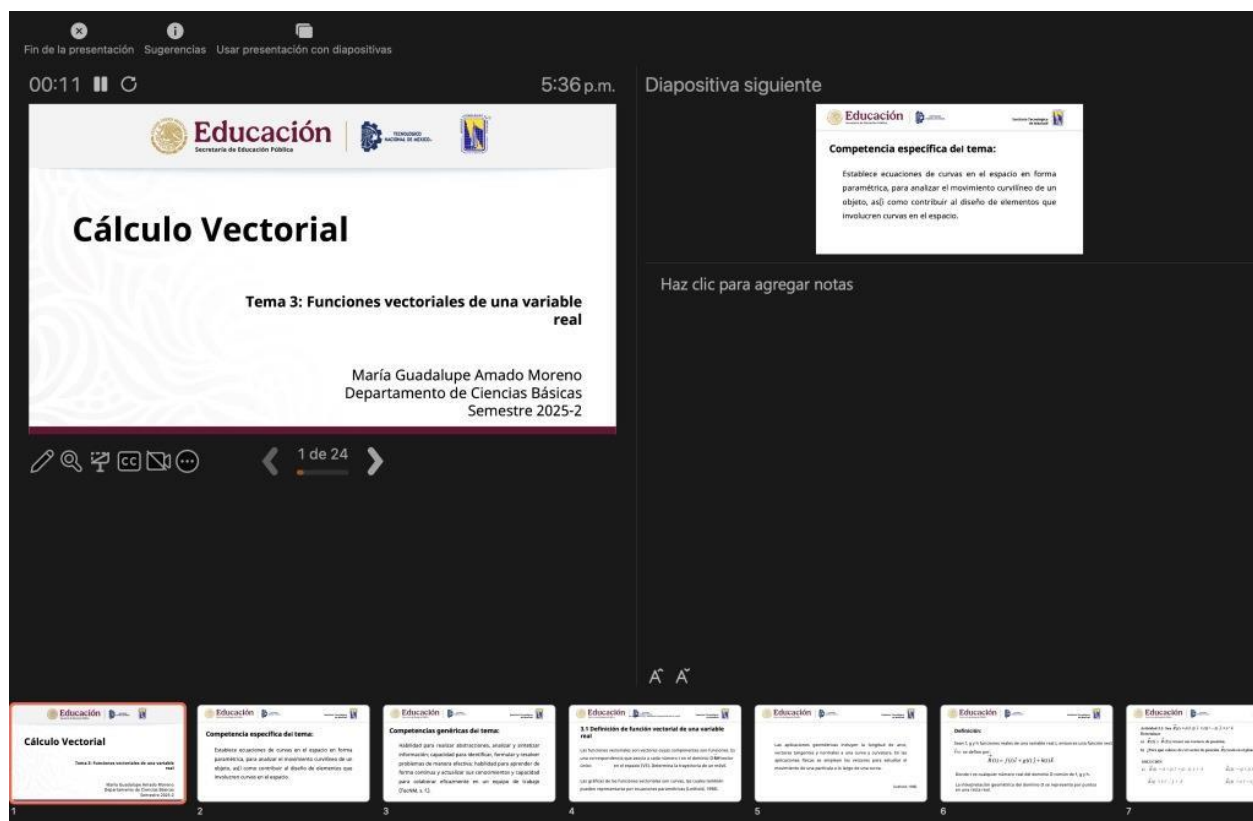
Complemento Educativo No. 2. *Presentaciones.* Se han preparado una serie de presentaciones con el propósito de desarrollar los diferentes subtemas en el aula. Una vez que se hayan visto en clase, las presentaciones estarán a disposición de todos los estudiantes a través de la plataforma MOODLE. A manera de muestra en la Figura 3.4 se presenta una carátula del programa PowerPoint® en la que se visualiza el contenido de una de las presentaciones señaladas. Se creó un *Padlet*, mostrado en Figura 2.8 con el formulario para derivadas e integrales a utilizar durante el curso, los estudiantes podrán bajarlo con la liga:

<https://padlet.com/lupitaamado/c-lculo-integral-formulario-para-derivadas-e-integrales-vqktstlpfr0ohdxw>

En la instrumentación didáctica que acompaña a estos apuntes se proporciona información detallada sobre las actividades de aprendizaje y de enseñanza, así como los niveles de desempeño y evaluación para este tema.

Figura 3.4

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación del Tema 3: funciones vectoriales de una variable real.



4. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Competencias específicas: aplica los principios del cálculo de funciones de varias variables para resolver y optimizar problemas de ingeniería del entorno, así como para mejorar su capacidad de análisis e interpretación de leyes físicas.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

4.1 Definición de una función de varias variables

Una función de dos variables es una regla de correspondencia que asigna a cada pareja de números reales (x, y) uno y solo un número real z . Por ejemplo, el área de un rectángulo depende de dos cantidades: ancho y longitud (Swokowski, 1989; Larson y Edwards, 2010; Zill y Wright, 2011, Stewart, 2018).

Nota: Con el fin de observar las gráficas de las funciones se consideran las definiciones para funciones de dos variables, pero todo lo mencionado para éstas es válido para funciones de cualquier número de variables.

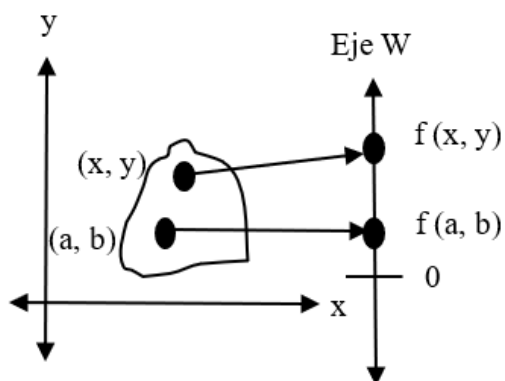
Al conjunto que contiene las parejas ordenadas (x, y) se le llama **Dominio de la Función**. El conjunto de valores z que corresponde a los pares ordenados se llama **imagen o contradominio**.

Usualmente estas funciones se denotan por: $z = f(x, y)$

En la Figura 4.1 se representa el dominio y contradominio de una función de dos variables (Swokowski, 1989).

Figura 4.1

Dominio y contradominio de una función de dos variables.



4.2 Gráfica de una función de varias variables. Curvas y superficies de nivel

Gráficas de una función de dos variables

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de puntos (x, y, z) donde (x, y) está en el dominio de f y $z = f(x, y)$.

Estas gráficas son SUPERFICIES en el espacio tridimensional.

Actividad 4.1: Sea $g(x, y, z) = x^2 - 5xy + yz^2$ evalúe:

a) $g(1, 4, -2) = (1)^2 - 5(1)(4) + (4)(-2)^2 = 1 - 20 + 16 = -3$

b) $g(2a, -b, -3c) = (2a)^2 - 5(2a)(-b) + (-b)(-3c)^2 = 4a^2 + 10ab - 9c^2b$

Actividad 4.2: Describa la región R en el plano cartesiano XY, que corresponde al dominio de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Encuentre el contradominio de $f(x, y)$ (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$4 \geq x^2 + y^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 \leq 4} \quad \text{Circunferencia de } r = 2$$

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (-1,0), (0,-2), (-2,0), (-1,-1)\}$$

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

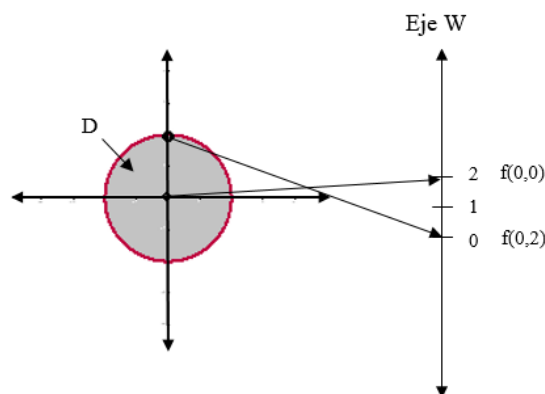
$$f(0,0) = 2$$

$$f(0,1) = \sqrt{3}$$

$$f(0,2) = 0$$

$$f(1,0) = \sqrt{3}$$

Contradominio: $[0, 2]$



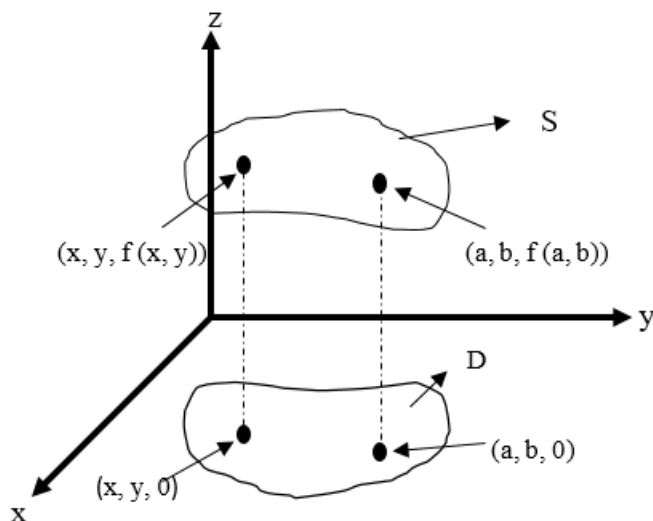
Representación geométrica de funciones de varias variables y curvas de nivel

Si se tiene una función de dos variables “x” y “y” la gráfica de la función es $z = f(x, y)$ en un sistema rectangular y en tres dimensiones suele ser una superficie de cierto tipo.

Si representamos a D por una región en el plano xy, entonces la pareja (x, y) en D queda representada por el punto $P(x, y, 0)$. El valor $f(x, y)$ de la función es la distancia dirigida del punto $P(x, y, 0)$ a S medida sobre la recta paralela al eje z, que pasa por este punto (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).

Figura 4.2

Gráfica de una función $z = f(x, y)$.



Actividad 4.3: Sea f la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ con $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Trazar la gráfica de f e indicar las trazas en los planos $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$ y $z = 8$

(Swokowski, 1989).

$$z = f(x, y)$$

$$z = 9 - x^2 - y^2 \quad \text{paraboloide}$$

Cada traza representa a una circunferencia:

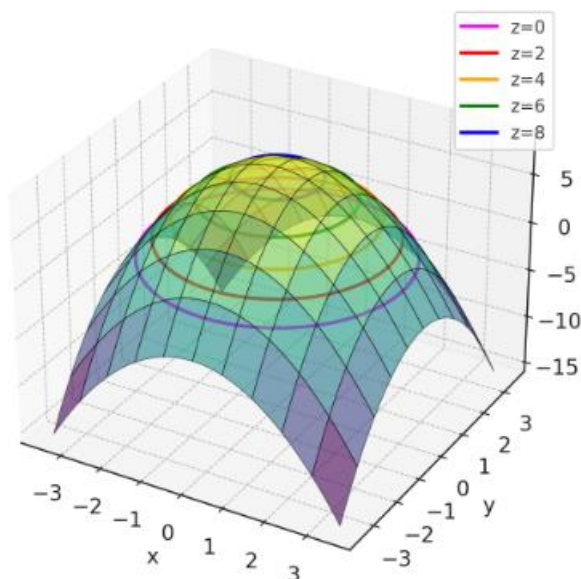
$$x^2 + y^2 = 9 - z$$

z	0	2	4	6	8
r	3	2.6	2.2	1.7	1

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Ecn. de una circunferencia de radio } 3$$

$$z = 2, \quad x^2 + y^2 = 7 \quad \text{Ecn. de una circunferencia de radio } \sqrt{7}$$

$z = 8, x^2 + y^2 = 1$ Ecn. de una circunferencia de radio 1



Curvas de nivel

Un método gráfico que es útil para describir una función f de dos variables consiste en trazar en el plano xy las gráficas de las ecuaciones $f(x, y) = k$ para varios valores de k . Las gráficas que se obtienen de esta manera son llamadas **curvas de nivel** de la función f . Es importante observar que cuando un punto $P(x, y)$ se mueve sobre una curva de nivel, los valores $f(x, y)$ de la función no cambian.

Las curvas de nivel se utilizan frecuentemente en la elaboración de **mapas orográficos o planos de configuración**. Para indicar la configuración del fondo de un lago se utilizan mapas hidrográficos, también mapas meteorológicos o climáticos, las isotermas, etc.

La característica principal en una curva de nivel es que si un punto $P(x, y, z)$ se mueve sobre una curva de nivel la $f(x, y, z)$ no cambia (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).

Actividad 4.4: Describa las curvas de nivel asociadas a las funciones siguientes:

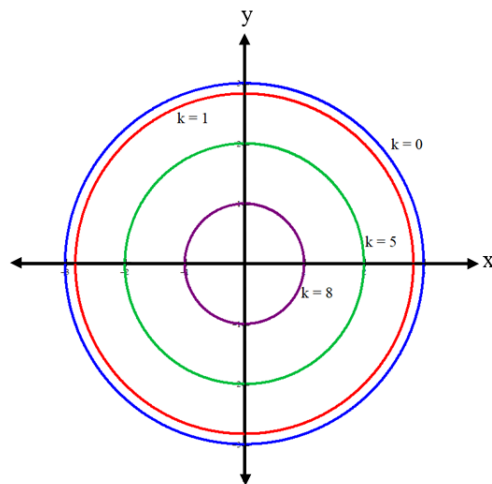
a) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ si $k = 0, k = 1, k = 5, k = 8$ (Swokowski, 1989).

$$f(x, y) = k$$

$$9 - x^2 - y^2 = k$$

$$x^2 + y^2 = 9 - k \quad \text{circunferencia}$$

k	0	1	5	8
r	3	2.8	2	1



b) $f(x, y) = x + 2y + 3z$ para $k = 2$ y $k = 4$ (Edwards y Penney, 2008).

$$f(x, y) = k$$

$$x + 2y + 3z = k$$

$$x + 2y + 3z = 2 \quad x + 2y + 3z = 4 \quad \text{plano}$$

$$P_x(2, 0, 0)$$

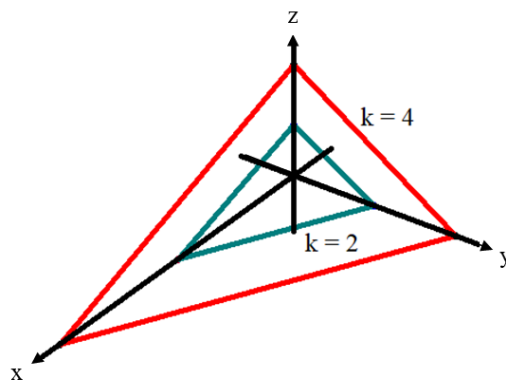
$$P_x(4, 0, 0)$$

$$P_y(0, 1, 0)$$

$$P_y(0, 2, 0)$$

$$P_z(0, 0, 0.6)$$

$$P_z(0, 0, 1.3)$$



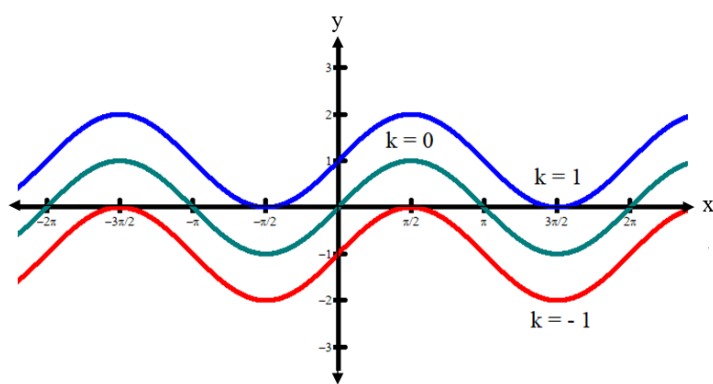
c) $f(x, y) = y - \sin(x)$ para $k = 0, k = 1$ y $k = -1$.

$$f(x, y) = k$$

$$y - \sin(x) = k$$

$$y = k + \text{sen}(x)$$

$\begin{array}{c} x \\ \backslash \\ k \end{array}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
1	1	2	1	0	1	2	1	0	1
-1	-1	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1



TAREA 4.1: Obtenga las curvas de nivel asociadas a $f(x, y) = y - \cos(x)$ (Swokowski, 1989).

4.3 Límite y continuidad de una función de varias variables

La definición de límite de una función de dos variables va en total paralelismo con la definición de límite de una función de una sola variable.

Para determinar si una función de una sola variable tiene límite en x_0 es necesario observar lo que ocurre si se aproxima a x_0 por dos trayectorias diferentes, por la izquierda y por la derecha. Si la función tiene el mismo límite se concluye que el límite existe.

Para una función de dos variables, (x, y) los límites pueden determinarse, si existen, por sustitución o con la definición (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Thomas G. B., 2010; Larson y Edwards, 2010).

Definición de límite de una función de dos variables

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad 4.1$$

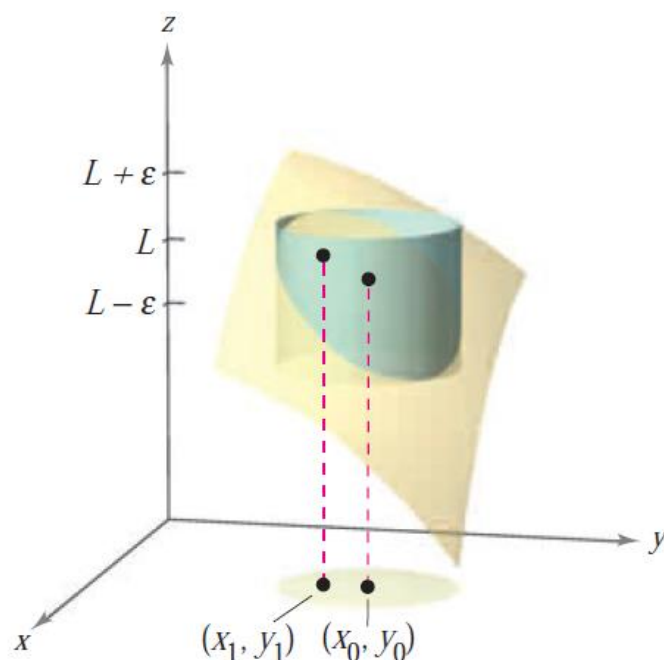
Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ siempre que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad .$$

Definición similar al límite de una variable, su interpretación gráfica se muestra en Figura 4.3 (Larson y Edwards, 2010).

Figura 4.3

Límite de una función de dos variables.



Fuente: (Larson y Edwards, 2010).

Actividad 4.5: Comprobar el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$ utilizando la definición (Larson

y Edwards, 2010).

Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que;

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

$$|f(x, y) - L| = \sqrt{(x - a)^2}$$

$$|f(x, y) - L| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$|f(x, y) - L| < \delta$$

Pudiéndose elegir $\delta = \varepsilon$ para que el límite se compruebe.

Actividad 4.6: Evalúe los límites indicados (Swokowski, 1989).

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2, -3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) = 8 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7 = -86$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3, 4)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{9 - 16}{\sqrt{9 + 16}} = -\frac{7}{5}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - 2}{3 + xy} = -\frac{2}{3}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} = ?$

Regla de las dos trayectorias

A diferencia del límite de una función de una variable, en el caso de una función de dos variables, se tiene $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ lo que significa que el punto $P(x, y)$ puede acercarse o aproximarse al punto $P(x_0, y_0)$ por cualquier dirección, camino o trayectoria.

Si dos trayectorias que llevan a un punto $P(x_0, y_0)$ **producen dos valores límites diferentes** para f , entonces (Leithold, 1998; Thomas G. B., 2010; Larson y Edwards, 2010):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \quad \text{NO EXISTE}$$

Actividad 4.7: Demuestre que los límites indicados no existen (considere la regla de las dos trayectorias).

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).

Trayectoria 1: Cualquier punto sobre el eje x , es decir, $P(x, 0)$ o en el eje y $P(0, y)$

En el eje x

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} 1 = 1$$

En el eje y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} -1 = -1$$

Trayectoria 2: (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 2x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2x)} \frac{x^2 - 4x^2}{x^2 + 4x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2x)} \frac{-3x^2}{5x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2x)} \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x y}{x^2 + y^2}$ (Edwards y Penney, 2008; Stewart, 2018).

Trayectoria 1: Cualquier punto sobre el eje x , es decir, $P(x, 0)$ o en el eje y $P(0, y)$

En el eje x

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} \frac{0}{x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} 0 = 0$$

En el eje y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} \frac{0}{y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} 0 = 0$$

Trayectoria 2: El conjunto de todos los puntos (x, y) en cualquier recta en el origen y = x

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,x)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,x)} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,x)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

TAREA 4.2: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
940	1, 3, 11, 15

4.4 Derivadas parciales

Esta sección muestra cómo se originan las derivadas parciales y como calcularlas aplicando las reglas para diferenciar funciones de una sola variable.

En la aplicación de las funciones de varias variables se desea conocer, cómo se verá afectada la función, por la variación de sus variables independientes.

Considerando la variación producida por una variable independiente a la vez, mientras que las otras se mantienen constantes.

Es decir, es la derivada de *f* cada vez con respecto a una variable independiente manteniendo constante las demás, este proceso, se conoce como **Diferenciación parcial o Derivada Parcial** y su resultado se refiere como la **Derivada Parcial de f con respecto a la variable independiente elegida**.

Definición: Sea *f* una función de dos variables. Las primeras derivadas parciales de *f* con respecto a *x* y *y* son las funciones *f_x* y *f_y* definidas por (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_1 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{donde:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_2 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad \begin{array}{l} x, y \text{ son fijas pero arbitrarias} \\ h = \text{variable} \end{array}$$

Sí el límite existe.

Notación de derivadas

Sea $w = f(x, y)$

Primera derivada

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial w}{\partial x} = w_x = w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial w}{\partial y} = w_y = w_2 \quad \text{Se lee derivada parcial de } w \text{ con respecto a}$$

“x”

Segunda derivada

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx} = w_{11} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w_{yy} = w_{22} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = w_{xy} = w_{12} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = w_{yx} = w_{21}$$

Se lee: Segunda derivada parcial de w con respecto a “x”, Segunda derivada parcial de w con respecto a “y”, Segunda derivada parcial de w con respecto a xy , respectivamente.

También puede tenerse: $w = f(x, y, z)$

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_{y,z} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = w_{xxx} = w_{111} & \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{x,z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = w_{yyy} = w_{222} \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right)_{x,y} = \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = w_{zzz} = w_{333} & \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = w_{xyz} = w_{123} \end{array}$$

Nota: En la notación de subíndice, el orden de la diferenciación es de izquierda a derecha, mientras que en la notación con el símbolo de parcial el orden es de derecha a izquierda.

Actividad 4.8: Dada la función obtenga las primeras derivadas parciales.

a) $z(x, y) = x^2 y - 5y^3 x^4 - 5y$

Derivando con respecto a x (manteniendo y constante):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = y \frac{\partial x^2}{\partial x} - 5y^3 \frac{\partial x^4}{\partial x} = 2yx - 5y^3 \cdot 4x^3$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = 2yx - 20y^3 x^3}$$

Derivando con respecto a y (manteniendo x constante):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x = x^2 \frac{\partial y}{\partial y} - 5x^4 \frac{\partial y^3}{\partial y} - 5 \frac{\partial y}{\partial y} = x^2 - 5x^4 \cdot 3y^2 - 5$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x = x^2 - 15x^4 y^2 - 5}$$

b) $f = y^3 \text{sen}(2x) + e^{2x} y - y \ln(x^3) - 3xy$

Derivando con respecto a x:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = y^3 \frac{\partial \text{sen}(2x)}{\partial x} + y \frac{\partial e^{2x}}{\partial x} - y \frac{\partial \ln(x^3)}{\partial x} - 3y \frac{\partial x}{\partial x} = 2y^3 \cos(2x) + 2ye^{2x} - y \frac{3x^2}{x^3} - 3y$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 2y^3 \cos(2x) + 2ye^{2x} - \frac{3y}{x} - 3y}$$

Derivando con respecto a y:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = \text{sen}(2x) \frac{\partial y^3}{\partial y} + e^{2x} \frac{\partial y}{\partial y} - \ln(x^3) \frac{\partial y}{\partial y} - 3x \frac{\partial y}{\partial y} = \text{sen}(2x) \cdot 3y^2 + e^{2x} - \ln(x^3) - 3x$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = 3y^2 \text{sen}(2x) + e^{2x} - \ln(x^3) - 3x}$$

c) $w(x, y) = \text{sen}(x - y) - 4 \cos(xy) + 2x$

Derivando con respecto a x:

$$w_x = \frac{\partial \text{sen}(x - y)}{\partial x} - 4 \frac{\partial \cos(xy)}{\partial x} + 2 \frac{\partial x}{\partial x} = \cos(x - y) \frac{\partial(x - y)}{\partial x} + 4 \text{sen}(xy) \frac{\partial xy}{\partial x} + 2$$

$$w_x = \cos(x - y)(1) + 4 \text{sen}(xy) \cdot y \frac{\partial x}{\partial x} + 2$$

$$w_x = \cos(x - y) + 4y \text{sen}(xy) + 2$$

Derivando con respecto a y

$$w_y = \frac{\partial \text{sen}(x - y)}{\partial y} - 4 \frac{\partial \cos(xy)}{\partial y} + 2 \frac{\partial x}{\partial y} = \cos(x - y) \frac{\partial(x - y)}{\partial y} + 4 \text{sen}(xy) \frac{\partial xy}{\partial y}$$

$$w_y = \cos(x - y)(-1) + 4 \text{sen}(xy) \cdot x \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$w_y = -\cos(x - y) + 4x \text{sen}(xy)$$

TAREA 4.3: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios impares
952	1 - 9, 13 - 25

Derivadas parciales de ecuaciones de estado

Para un sistema en equilibrio termodinámico una ecuación de estado es aquella que relaciona las variables de estado presión (P), volumen (v) y temperatura (T) que lo describen.

Existen varias ecuaciones de estado utilizadas en la ingeniería, entre las más utilizadas se encuentra la ecuación de estado de Redlich-Kwong, de Clausius, de Van der Waals, de Peng-Robinson (Smith J. M. et al, 2020).

Las derivadas parciales típicas para determinar cambios en funciones de estado

termodinámicas son: $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$, $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$.

Actividad 4.9: Dada la ecuación de estado de Redlich-Kwong

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v\sqrt{T}(v+b)} \text{ obtenga } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \text{ y } \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \text{ (Smith J. M. et al, 2020).}$$

Es una ecuación explícita para P que depende de la temperatura y el volumen, a y b son constantes.

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v\sqrt{T}(v+b)}$$

Derivando P con respecto a T:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \cdot \frac{\partial T}{\partial T} - \frac{a}{v(v+b)} \cdot \frac{\partial T^{-\frac{1}{2}}}{\partial T} = \frac{R}{v-b} - \frac{a}{v(v+b)} \cdot -\frac{1}{2} T^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{2v(v+b) T^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{2v(v+b) T \sqrt{T}}}$$

Derivando P con respecto a v:

$$\text{Partiendo de } P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v\sqrt{T}(v+b)}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = RT \frac{\partial (v-b)^{-1}}{\partial v} - \frac{a}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\partial v^{-1}(v+b)^{-1}}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -RT(v-b)^{-2} \cdot \frac{\partial(v-b)}{\partial v} - \frac{a}{\sqrt{T}} \left[v^{-1} \frac{\partial(v+b)^{-1}}{\partial v} + (v+b)^{-1} \cdot \frac{\partial v^{-1}}{\partial v} \right]$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -RT(v-b)^{-2} - \frac{a}{\sqrt{T}} \left[v^{-1} \cdot -(v+b)^{-2} \cdot \frac{\partial(v+b)}{\partial v} + (v+b)^{-1} \cdot -v^{-2} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} \right]$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -RT(v-b)^{-2} - \frac{a}{\sqrt{T}} \left[v^{-1} \cdot -(v+b)^{-2} + (v+b)^{-1} \cdot -v^{-2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} - \frac{a}{\sqrt{T}} \left[-\frac{1}{v(v+b)^2} - \frac{1}{(v+b)v^2} \right] = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{a}{\sqrt{T}} \left[\frac{v+v+b}{v^2(v+b)^2} \right]$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{a}{\sqrt{T}} \left[\frac{2v+b}{v^2(v+b)^2} \right]}$$

Actividad 4.10: Dada la ecuación de Clausius $\left[P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] (v-b) = RT$

obtenga $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$ (Smith J. M. et al, 2020).

Despejando P de la ecuación de Clausius:

$$\left[P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] = \frac{RT}{v-b}$$

$$\boxed{P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{T(v+c)^2}}$$

Derivando con respecto a T

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} \cdot \frac{\partial T}{\partial T} - \frac{a}{(v+c)^2} \cdot \frac{\partial T^{-1}}{\partial T}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{(v+c)^2} \cdot T^{-2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 (v+c)^2}$$

TAREA 4.4: Obtener las derivadas parciales: $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$, $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$ con la ecuación de estado de Van der Waals $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ (Smith J. M. et al, 2020).

4.5 Incrementos y diferenciales

Incrementos

Definición:

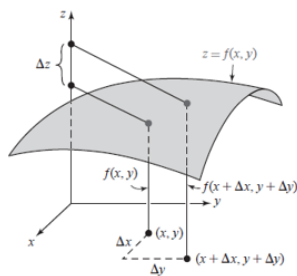
Sea una función de dos variables $z = f(x, y)$ y sea Δx y Δy los incrementos de x y y respectivamente. El incremento de la variable dependiente z es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (4.2)$$

El cual representa el cambio en el valor de la función cuando (x, y) varía a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. En la Figura 4.4 se muestra el incremento en z (Larson y Edwards, 2010; Zill y Wright, 2011).

Figura 4.4

Incremento en z .



Fuente: (Zill y Wright, 2011).

Actividad 4.11: Se tiene $z = f(x, y) = 3x^2 - xy$

a) Suponiendo que los incrementos x y y son Δx y Δy determinar Δz .

b) Obtenga Δz para determinar el cambio en $f(x, y)$ cuando (x, y) varía de $(1, 2)$ a $(1.01, 1.98)$ (Swokowski, 1989).

Con ecuación 4.2

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Primero se evalúa:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 3\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right] - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

Sustituyendo en 4.2

$$\Delta z = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - 3x^2 + xy$$

$$\Delta z = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

b) (x, y) varía de $(1, 2)$ a $(1.01, 1.98)$

Se obtiene el cambio en x y el cambio en y :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.01 - 1 = 0.01$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 1.98 - 2 = -0.02$$

Sustituyendo Δx , Δy , x y y en Δz :

$$\Delta z = 6(1)(0.01) + 3(0.01)^2 - (1)(-0.02) - (2)(0.01) - (0.01)(-0.02)$$

$$\Delta z = 0.0605$$

Este valor puede encontrarse también evaluando $f(1.01, 1.98) - f(1, 2)$.

Diferenciales

Definición:

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen y si Δz satisface la ecuación:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (4.3)$$

En la cual $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$. Se dice que f es diferenciable si es derivable en todos los puntos de su dominio (Thomas, 2010).

Condiciones suficientes para la diferenciabilidad

Si f es una función de x y y , para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

Diferenciabilidad implica continuidad

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces es continua en (x_0, y_0) (Thomas, 2010; Larson y Edwards, 2010; Zill y Wright, 2011).

Definición de diferencial total

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las diferenciales de las variables independientes x y y son:

$$dx = \Delta x \text{ y } dy = \Delta y$$

Y la diferencial total de la variable z es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (4.4)$$

La cual puede extenderse a una definición de tres o más variables (Larson y Edwards, 2010).

Actividad 4.12: Sea $w = f(x, y, z, t)$ exprese el diferencial total dw .

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

Actividad 4.13: Determinar la diferencial total de la función $w = z^2 + y^2 + x^2$ (Larson y Edwards, 2010).

La diferencial total de $w(x, y, z) = z^2 + y^2 + x^2$ es:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Obteniendo las derivadas parciales de w

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la diferencial total dw

$$dw = 2x dx + 2y dy + 2z dz$$

4.6 Regla de la cadena y derivación implícita

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y . Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, siendo f y g derivables de t , entonces w es una función derivable de t y se expresa:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.5)$$

En general, suponga que w es una función derivable de n variables independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y que cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$.

Entonces, w una función de $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$ se expresa:

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \quad (4.6)$$

Para cada $i = 1, 2, 3, \dots, m$ (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Stewart, 2018).

Actividad 4.14: Sea $y = 2wz + z^2$ con $w = e^x$, $z = \cos(x)$. Aplicando la regla de la cadena obtenga $\frac{\partial y}{\partial x}$ (Leithold, 1998).

Se tiene $y = f(w, z)$ una función de dos variables, aplicando 4.5:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots\dots\dots A$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = 2z \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = e^x$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2w + 2z = 2(w + z) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\text{sen}(x)$$

$$\text{Sustituyendo en A: } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ze^x - 2(w + z)\text{sen}(x) = 2[ze^x - (w + z)\text{sen}(x)]$$

Sustituyendo z y w (para dejar en términos de x):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \left\{ e^x \cos(x) - \left[e^x + \cos(x) \right] \sin(x) \right\}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \left[e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - \cos(x) \sin(x) \right]$$

Actividad 4.15. Utilice la ley del gas ideal $PV = RT$ con $R = 0.8$ atm-litro/K para obtener la tasa a la que la temperatura varía en el instante en que el volumen del gas es de 15 litros y el gas está bajo una presión de 12 atm, si el volumen se incrementa a una tasa de 0.1 litros/min y la presión disminuye con una tasa de 0.2 atm/min (Leithold, 1998).

Datos:

$$R = 0.8 \text{ atm-litro/K}$$

$$PV = RT$$

$$V = 15 \text{ litros}$$

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{PV}{0.8} = 1.25PV \quad T = f(P, V)$$

$$P = 12 \text{ atm}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \dots\dots\dots A$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.1 \frac{l}{min}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = 1.25V \cdot \frac{\partial P}{\partial P} = 1.25V$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -0.2 \frac{atm}{min}$$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = 1.25P \cdot \frac{\partial V}{\partial V} = 1.25P \quad \text{Sustituyendo en A}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ?$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1.25V(-0.2) + 1.25P(0.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 1.25(15)(-0.2) + 1.25(12)(0.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -2.25 \frac{K}{min} \text{ tasa de disminución de la temperatura}$$

TAREA 4.5: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
973	7, 9, 13, 47

Derivación implícita

Sea una ecuación $F(x, y, z) = 0$ que determina implícitamente una función diferenciable f de dos variables x y y tales que $z = f(x, y)$ para toda (x, y) en el dominio de f , entonces (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Larson y Edwards, 2010; Stewart, 2018)):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad (4.8)$$

Actividad 4.16: Sea $z = f(x, y)$ tal que $4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$.

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ (Leithold, 1998).

$$\text{Si } F(x, y, z) = 4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$$

Obteniendo primero las derivadas parciales de F con respecto a cada una de las variables:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 3z^2 - xy - 2y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = -xz - 4xy = -(xz + 4xy)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z = 12z^2 + 6xz - xy$$

Después se sustituyen las derivadas parciales de F en la definición 4.7 y 4.8:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3z^2 - xy - 2y^2}{12z^2 + 6xz - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-(xz + 4xy)}{12z^2 + 6xz - xy} = \frac{xz + 4xy}{12z^2 + 6xz - xy}$$

4.17: Sea $z = f(x, y)$ tal que $x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{Si } F(x, y, z) = x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5$$

Obteniendo primero las derivadas parciales de F con respecto a cada una de las variables:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 2xz^2 + y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 2yx + 4z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z = 2zx^2 - 3z^2 + 4y$$

Después se sustituyen las derivadas parciales de F en la definición 4.7 y 4.8:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yx + 4z}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}$$

4.7 Derivadas parciales de orden superior

Se obtienen aplicando derivadas parciales repetidamente (sucesivamente) a una función, mientras sus derivadas existan (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Thomas, 2010, Larson y Edwards, 2010; Stewart, 2018).

Recordando de la notación de derivadas que f_{xy} significa que primero se deriva con respecto a x y luego con respecto a y . Mientras que cuando se utiliza la notación " ∂ " el orden es

al revés: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se deriva primero con respecto a y después con respecto a x .

Actividad 4.18. Dada la función obtenga las segundas derivadas parciales (Swokowski, 1989).

a) $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$

Derivando con respecto a x :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = y^2 \cdot \frac{\partial x^3}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial x}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 3y^2 x^2 - 2y(2x) + 3$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 3y^2 x^2 - 4yx + 3$$

Segunda derivada de f con respecto a x :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \right)_y = 3y^2 \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x} - 4y \cdot \frac{\partial x}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \right)_y = 6y^2 x - 4y$$

Volviendo a derivar $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = 3y^2 x^2 - 4yx + 3$ con respecto a y :

$$f_{xy} = 3x^2 \cdot \frac{\partial y^2}{\partial y} - 4x \cdot \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$f_{xy} = 6x^2y - 4x$$

Derivando con respecto a y:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2x^3y - 2x^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\right)_x = 2x^3$$

Derivando $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = 2x^3y - 2x^2$ **con respecto a x**

$$f_{yx} = 6yx^2 - 4x$$

Nota: Derivadas parciales mixtas o cruzadas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad f_{xy} = f_{yx}$$

Teorema de Clairaut o de la derivada mixta o cruzada

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables, si f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región abierta R entonces: $f_{xy} = f_{yx}$ en R (Swokowski, 1989; Thomas, 2010; Stewart, 2018).

TAREA 4.6: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
953	49, 51

4.8 Derivada direccional y gradiente

Derivada direccional

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018), Rivera y Álvarez, (2020) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

Se ha visto como las derivadas parciales de una función caracterizan la tasa de variación de la función a lo largo de rectas paralelas a los ejes coordenados. Esto es, si f es una función en la dirección del eje x , y y la derivada $f_x(x, y)$ describe la tasa de variación de f en la dirección del eje y .

Sea $w = f(x, y)$ y sea $\vec{U} = U_1 \hat{i} + U_2 \hat{j}$ un vector unitario. La derivada direccional de f en $P(x, y)$ en la dirección de $\vec{U}$, se denota por: $D_{\vec{U}} f(x, y)$.

Se define:

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = f_x U_1 + f_y U_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot U_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot U_2 \quad (4.9)$$

La cual se puede generalizar para n variables independientes.

Actividad 4.19: Sea $f(x, y) = x^3 y^2$

a) Determinar la $D_{\vec{U}} f(x, y)$ en la dirección del vector $\vec{a} = \langle 4, -3 \rangle$. Evalúe en el punto en $P(-1, 2)$.

b) Explicar el significado del inciso a suponiendo que $f(x, y)$ es la temperatura en (x, y) .

Obteniendo el vector unitario:

$$\vec{U} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\langle 4, -3 \rangle}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5} \hat{i} - \frac{3}{5} \hat{j}$$

Obteniendo las derivadas parciales:

$$f_x = y^2 \cdot \frac{\partial x^3}{\partial x} = 3y^2 x^2$$

$$f_y = x^3 \cdot \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2x^3 y$$

Sustituyendo en 4.9 para obtener la derivada direccional:

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = f_x U_1 + f_y U_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot U_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot U_2$$

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = 3y^2 x^2 \left(\frac{4}{5} \right) + 2x^3 y \left(-\frac{3}{5} \right) = \frac{12}{5} y^2 x^2 - \frac{6}{5} x^3 y$$

$$D_{\vec{U}} f(-1, 2) = \frac{12}{5} (2)^2 (-1)^2 - \frac{6}{5} (-1)^3 (2) = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = \frac{60}{5}$$

$$D_{\vec{U}} f(-1, 2) = 12$$

b) Significa que en el punto P la temperatura aumenta 12° por unidad de distancia.

Gradiente de una función $f(x, y)$

Definición: Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. El gradiente de f es la función vectorial dada por:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \hat{i} + f_y(x, y) \hat{j} \quad (4.10)$$

Donde el operador nabla: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$

Actividad 4.20: Determinar el gradiente de $f(x, y) = y \ln(x) + x y^2$ en el punto $(1, 2)$

(Larson y Edwards, 2010).

Primero se obtienen las derivadas parciales:

$$f_x = y \cdot \frac{\partial \ln(x)}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x} + y^2 = \frac{y}{x} + y^2$$

$$f_y = \ln(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial y^2}{\partial y} = \ln(x) + 2yx$$

Con ecuación 4.10 se obtiene el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \hat{i} + f_y(x, y) \hat{j}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2 \right) \hat{i} + [\ln(x) + 2yx] \hat{j}$$

El gradiente en el punto $(1, 2)$ es:

$$\nabla f(1, 2) = (2 + 4) \hat{i} + [\ln(1) + 2(2)(1)] \hat{j}$$

$$\nabla f(1, 2) = 6 \hat{i} + 4 \hat{j} = \langle 6, 4 \rangle$$

Derivada Direccional en términos del gradiente

Se define:

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{U} \quad (4.11)$$

Actividad 4.21: Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy$

Encontrar:

a) El gradiente de f en $P(1, 2)$.

b) La derivada direccional de f en $P(1, 2)$ en la dirección de $P(1, 2)$ a $Q(2, 5)$.

El gradiente se obtiene con ecuación 4.10: $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j}$

Obteniendo las derivadas parciales:

$$f_x = 2x - 4y \quad f_y = -4x$$

Sustituyendo en 4.10:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 4y)\hat{i} - 4x\hat{j}$$

$$\nabla f(1,2) = [2(1) - 4(2)]\hat{i} - 4(1)\hat{j}$$

$$\nabla f(1,2) = -6\hat{i} - 4\hat{j}$$

Para encontrar la derivada direccional, primero se obtiene el vector de P a Q y luego el vector unitario asociado a ese vector.

$$\vec{PQ} = \vec{a} = \langle 2 - 1, 5 - 2 \rangle = \langle 1, 3 \rangle$$

$$\vec{U} = \frac{\langle 1, 3 \rangle}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{j}$$

Sustituyendo en 4.11:

$$D_{\vec{U}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{U}$$

$$D_{\vec{U}} f(x,y) = \langle 2x - 4y, -4x \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$D_{\vec{U}} f(x,y) = \frac{2x - 4y}{\sqrt{10}} - \frac{12x}{\sqrt{10}} = \frac{2x - 4y - 12x}{\sqrt{10}} = \frac{-10x - 4y}{\sqrt{10}}$$

$$D_{\vec{U}} f(1,2) = \frac{-10(1) - 4(2)}{\sqrt{10}} = \frac{-10 - 8}{\sqrt{10}} = \frac{-18}{\sqrt{10}}$$

$$D_{\vec{U}} f(1,2) = -5.7$$

4.9 Valores extremos de funciones de varias variables

Valor Máximo y mínimo de la derivada direccional

Sea f una función de 2 variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$.

- El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$ y el valor mínimo $-\|\nabla f(x, y)\|$.
- La tasa de crecimiento máximo de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y)$ (Leithold, 1998; Stewart, 2018).

Actividad 4.22: Sea $f(x, y) = x^2 - 4xy$ (Leithold, 1998). Encontrar

- La dirección en la que $f(x, y)$ aumenta más rápidamente en el punto $P(1, 2)$.
- La tasa máxima de crecimiento en $P(1, 2)$.

Con ecuación 4.10 se obtiene el gradiente de f : $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\hat{i} + f_y(x, y)\hat{j}$

$$\nabla f(1, 2) = -6\hat{i} - 4\hat{j}$$

- El valor máximo de crecimiento es

$$\|\nabla f(1, 2)\| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7.2$$

- La tasa máxima de crecimiento es la dirección de $\nabla f(1, 2) = -6\hat{i} - 4\hat{j}$

Actividad 4.23: La función $T(x, y)$ representa la temperatura en °C en la superficie de una placa metálica y está dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ donde x y y se miden en centímetros. ¿en qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿cuál es la tasa o ritmo de crecimiento? (Larson y Edwards, 2010).

Con ecuación 4.10 se obtiene el gradiente de T

$$\nabla T(x, y) = T_x(x, y) \hat{i} + T_y(x, y) \hat{j}$$

Obteniendo las derivadas parciales: $T_x = -8x$ $T_y = -2y$

Sustituyendo en 4.10:

$$\nabla T(x, y) = -8x \hat{i} - 2y \hat{j}$$

La dirección de máximo incremento es igual al gradiente en el punto (2, -3):

$$\nabla T(2, -3) = -8(2) \hat{i} - 2(-3) \hat{j}$$

$$\nabla T(2, -3) = -16 \hat{i} + 6 \hat{j}$$

La tasa de incremento es $\|\nabla T(2, -3)\|$:

$$\|\nabla T(2, -3)\| = \sqrt{(-16)^2 + 6^2} = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292}$$

$$\|\nabla T(2, -3)\| = 17.08^\circ \text{ por centímetro}$$

TAREA 4.7: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
983	1, 3, 7, 15, 23

4.10 Actividades de aprendizaje y complementos educativos

Según lo planteado en la propuesta de trabajo, se describen los complementos educativos y las actividades de aprendizaje para el tema 4: funciones reales de varias variables. La competencia específica es que los estudiantes apliquen los principios del cálculo de funciones de varias variables para resolver y optimizar problemas de ingeniería del entorno, así como para mejorar su capacidad de análisis e interpretación de leyes físicas.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Para el Tema 4, y para todos los temas de la asignatura, se utilizará el enfoque de metodologías activas de aprendizaje. A través del aprendizaje colaborativo y cooperativo, se fomenta la cohesión del grupo y se incentiva a los estudiantes a trabajar de manera conjunta. Además, se aplicará el aprendizaje basado en problemas, en el que los estudiantes aprenden a través de la resolución actividades con problemas tipo. El profesor llevará a cabo actividades que luego serán analizadas y discutidas tanto a nivel de equipo como en grupo. Si bien el resultado final es único y no admite discusión, el proceso para llegar a él puede variar dependiendo de las bases matemáticas de los estudiantes. El rol del profesor será el de guía o facilitador del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades para que el estudiante sea el protagonista de su proceso educativo.

Complemento Educativo No. 1. *Aprendizaje basado en problemas* y **Complemento Educativo No. 3.** *Ejercicios/casos prácticos*. En relación con estos complementos educativos, se presentarán en clase actividades relacionadas con la solución de problemas o ejercicios de cada uno de los subtemas. La resolución de estos ejemplos se llevará a cabo durante las diferentes sesiones de clases de acuerdo con la planeación realizada por el profesor procurando en todo momento fomentar la discusión y participación de los estudiantes. Además de los ejemplos de clase, se conformarán equipos de trabajo para que los estudiantes resuelvan los ejercicios y reafirmen sus conocimientos. En el anexo 1 se incluye una serie de actividades con ejercicios representativos que se tienen planeados para el curso. Las herramientas tecnológicas relacionadas con este objetivo educativo consisten en los programas Word®. En Word® se

presentará el listado con la redacción de las actividades a resolver en el aula y las tareas. Las gráficas de las funciones se realizan con el Winplot, Matlab y GeoGebra. Tanto los problemas resueltos como los propuestos estarán a disposición de los estudiantes a través de la plataforma MOODLE y en la medida de lo posible serán proyectados en el aula de clase para su solución. Durante estas actividades se llevará un registro de la participación de los estudiantes en la resolución de las actividades en el aula.

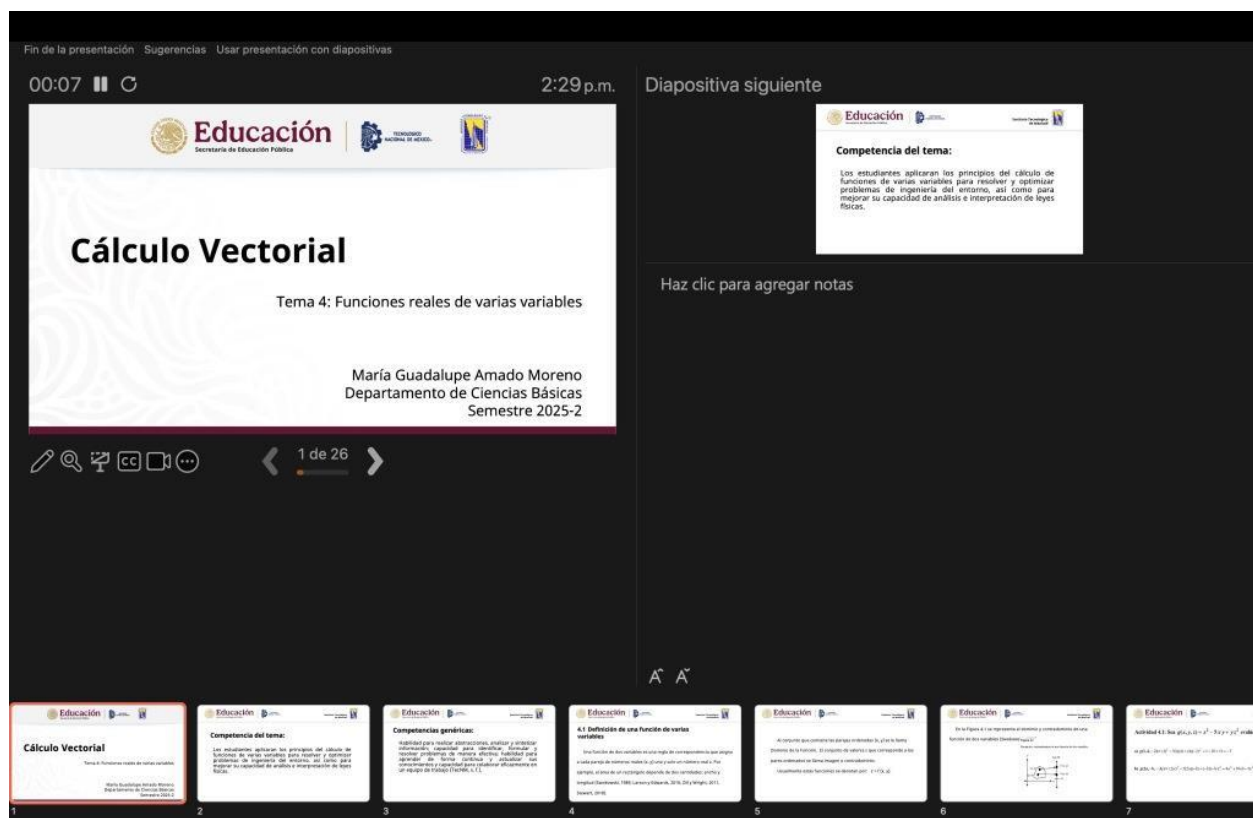
Complemento Educacional No. 2. Presentaciones. Se han preparado una serie de presentaciones con el propósito de desarrollar los diferentes subtemas en el aula. Una vez que se hayan visto en clase, las presentaciones estarán a disposición de todos los estudiantes a través de la plataforma MOODLE. A manera de muestra en la Figura 4.4 se presenta una carátula del programa PowerPoint® en la que se visualiza el contenido de una de las presentaciones señaladas. Se creó un *Padlet*, mostrado en Figura 2.8 con el formulario para derivadas e integrales a utilizar durante el curso, los estudiantes podrán bajarlo con la liga:

<https://padlet.com/lupitaamado/c-lculo-integral-formulario-para-derivadas-e-integrales-vqktstlpfr0ohdxw>

En la instrumentación didáctica que acompaña a estos apuntes se proporciona información detallada sobre las actividades de aprendizaje y de enseñanza, así como los niveles de desempeño y evaluación para este tema.

Figura 4.4

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación del Tema 4: funciones reales de varias variables.



5. INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

Competencias específicas: formula y resuelve integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas. Interpreta y determina las características de los campos vectoriales para su aplicación en el estudio de fenómenos físicos.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Marsden y Tromba (2004), Edwards y Penney (2008), Zill y Dewar (2008), Larson y Edwards (2010), Thomas (2010), Zill y Wright (2011), Stewart (2018) entre otros, abordan el tema de manera semejante.

5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles

Sea F una función de dos variables definida en una región R y sea $P = \{R_k\}$ una partición interna de R . Una suma de Riemann de F para P es una expresión de la forma:

$$\sum_k F(U_k, V_k) \Delta A_k$$

Para los pares (U_k, V_k) están en R_k y ΔA_k es el área de R_k . La suma se extiende sobre todas las regiones $R_1, R_2, \dots, R_n$ de P .

Definición del límite de esta suma de Riemann:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k F(U_k, V_k) \Delta A_k \quad (5.1)$$

$L =$ Es la Integral doble

La Integral doble se define:

$$\iint_R F(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_k F(U_k, V_k) \Delta A_k \quad (5.2)$$

Siempre y cuando el límite exista (Leithold, 1998; Stewart, 2018).

Propiedades

$$1) \iint_R C F(x, y) dA = C \iint_R F(x, y) dA \quad \text{Para todo número real } C.$$

$$2) \iint_R [F(x, y) \pm G(x, y)] dA = \iint_R F(x, y) dA \pm \iint_R G(x, y) dA$$

3) Si R es la unión de dos regiones R_1 y R_2 que no se sobreponen o traslapan.

$$\iint_R F(x, y) dA = \iint_{R_1} F(x, y) dA + \iint_{R_2} F(x, y) dA$$

$$4) \text{ Si } F(x, y) \geq 0 \text{ en toda región } R, \text{ entonces: } \iint_R F(x, y) dA \geq 0$$

Evaluación de integrales dobles

Es casi imposible calcular el valor de una integral doble directamente a partir de la definición dada. Por lo que, la integral doble se expresa en términos de dos integrales sucesivas, cada una de las cuales tiene una variable independiente.

El símbolo $\int_a^b F(x, y) dy$ significa que x se toma como constante y y es la variable de

integración. (Equivale a una integración parcial con respecto a y).

$$\int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d F(x, y) dy \right] dx \quad (5.3)$$

$$\int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b F(x, y) dx \right] dy \quad (5.4)$$

Al evaluar una integral sucesiva se determina primero la integral "interna".

5.2 Integrales iteradas

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy \right] dx \quad (5.5)$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x, y) dx \right] dy \quad (5.6)$$

5.3 Integral doble en coordenadas rectangulares

Utilizando las ecuaciones 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 se determinan las integrales dobles en coordenadas rectangulares. Lo importante es, si no se tienen los límites de la integral interna o externa, obtenerlos como se indica en las actividades presentadas.

Actividad 5.1: Evalúe las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_1^3 \int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx dy = \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx \right] dy$$

Realizando la integral interna:

$$\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx = 2 \int_{-1}^2 x^2 dx - 3y \int_{-1}^2 dx = \frac{2}{3} x^3 - 3yx \Big|_{-1}^2 \quad \text{Tomando límite en } x$$

$$\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx = \frac{2}{3} [(2)^3 - (-1)^3] - 3y[(2) - (-1)] = \frac{2}{3}(8+1) - 3y(2+1) = \frac{2}{3}(9) - 3y(3)$$

$$\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx = \frac{18}{3} - 9y = 6 - 9y$$

El resultado se vuelve a integrar, ahora con respecto a y

$$\int_1^3 (6 - 9y) dy = 6 \int_1^3 dy - 9 \int_1^3 y dy = 6y - \frac{9}{2} y^2 \Big|_1^3 \quad \text{Tomando límites}$$

$$\int_1^3 (6 - 9y) dy = 6(3-1) - \frac{9}{2} [(3)^2 - (1)^2] = 6(2) - \frac{9}{2} (9-1) = 12 - \frac{9}{2} (8) = 12 - \frac{72}{2} = 12 - 36$$

$$\int_1^3 (6 - 9y) dy = -24$$

$$\int_1^3 \int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx dy = -24$$

$$\text{b) } \int_1^2 \int_1^3 (3\sqrt{x} - 3y) dy dx = \int_1^2 \left[\int_1^3 (3\sqrt{x} - 3y) dy \right] dx$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_1^3 (3\sqrt{x} - 3y) dy = 3\sqrt{x} \int_1^3 dy - 3 \int_1^3 y dy = 3\sqrt{x} y - \frac{3}{2} y^2 \Big|_1^3 \quad \text{tomando límites en } y$$

$$\int_1^3 (3\sqrt{x} - 3y) dy = 3\sqrt{x}(3-1) - \frac{3}{2}[(3)^2 - (1)^2] = 3\sqrt{x}(2) - \frac{3}{2}(9-1) = 6\sqrt{x} - \frac{3}{2}(8) = 6\sqrt{x} - 12$$

El resultado se vuelve a integrar, ahora con respecto a x

$$\int_1^2 (6\sqrt{x} - 12) dx = 6 \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx - 12 \int_1^2 dx = 6x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} - 12x \Big|_1^2 = \frac{12}{3}x^{\frac{3}{2}} - 12x \Big|_1^2 = 4x^{\frac{3}{2}} - 12x \Big|_1^2$$

Tomando límites

$$6 \int_1^2 (6\sqrt{x} - 12) dx = 4 \left[(2)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right] - 12(2-1) = 4(2.8284 - 1) - 12 = -4.6864$$

$$\int_1^2 \int_1^3 (3\sqrt{x} - 3y) dy dx = -4.6864$$

Actividad 5.2: Evalúe la integral $\int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx$ **(Leithold, 1998).**

Realizando la integral interna:

$$\int_{x^2}^{4x-x^2} dy = y \Big|_{x^2}^{4x-x^2} \quad \text{Sustituyendo límites}$$

$$\int_{x^2}^{4x-x^2} dy = y \Big|_{x^2}^{4x-x^2} = 4x - x^2 - x^2 = 4x - 2x^2$$

Integrando con respecto a x

$$\int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \frac{4}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = 2(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3 = 2(4) - \frac{2}{3}(8)$$

$$\int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx = \frac{8}{3}$$

TAREA 5.1: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
1040	21, 23, 25, 26, 29

Área y Volumen

El área como límite de sumas dobles

$$A = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum \sum \Delta y_j \Delta x_k = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx \quad (5.7)$$

El símbolo: $|\Delta| \rightarrow 0$ Indica que todo los Δx_k y Δy_j tienden a 0.

Actividad 5.3: Encontrar por integración doble el área de la región en el plano xy acotada por las curvas: $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ (Leithold, 1998) .

Con expresión 5.7: $A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx$ se determina el área de la región buscada.

Los límites de la integral externa se obtienen igualando las ecuaciones de las curvas dadas:

$$x^2 = 4x - x^2$$

$$x^2 + x^2 - 4x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$$2x = 0 \quad x - 2 = 0$$

$$x = \frac{0}{2} = 0 \quad x = 2$$

El menor valor de x es el límite para a y el mayor valor es el de b . $a = 0$ y $b = 2$

Después se encuentra la región delimitada por las 2 curvas en el plano xy , graficando cada una de ellas en el intervalo (a, b) .

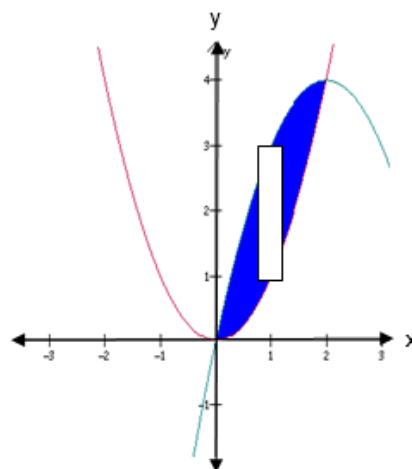
Tabulando para:

$$y = x^2$$

x	0	1	2	6	-2
y	0	1	4	36	4

$$y = 4x - x^2$$

x	0	1	2	3	-1
y	0	3	4	3	-5



Los límites de la integral interna se obtienen con el rectángulo representativo de la región acotada por las dos curvas.

El área se obtiene:

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy \, dx \quad \text{Integrando con respecto a } y$$

$$A = \int_0^2 y \Big|_{x^2}^{4x-x^2} dx \quad \text{Sustituyendo límites en } y$$

$$A = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \frac{4}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 \quad \text{Tomando límites}$$

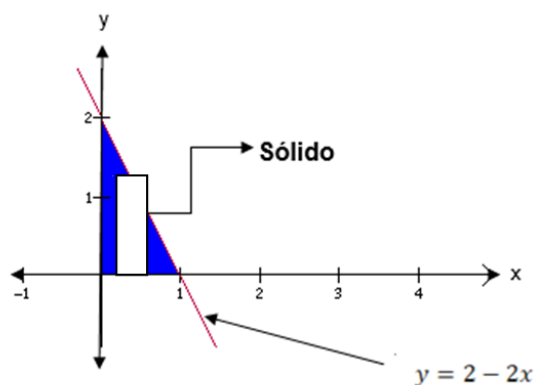
$$A = 2(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3 = 2(4) - \frac{2}{3}(8) = 8 - \frac{16}{3}$$

$$A = \frac{8}{3} u^2$$

El volumen como límite de sumas dobles

$$V = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum \sum f(U_k, U_j) \Delta y_j \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (5.8)$$

Actividad 5.4: Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y por las gráficas de las ecuaciones $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ y $2x + y = 2$.



De la gráfica se obtienen los límites para x : $x = 0$ a $x = 1$.

Con el rectángulo representativo se obtienen los límites para y : $y = 0$ a $y = 2 - 2x$

Con ecuación 5.8 se obtiene el volumen:

$$V = \iint_R f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx$$

Realizando la integral interna:

$$\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = x^2 \int_0^{2-2x} dy + \int_0^{2-2x} y^2 dy + \int_0^{2-2x} dy = x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \Big|_0^{2-2x} \quad \text{Sustituyendo límites en } y$$

$$\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = x^2(2-2x) + \frac{(2-2x)^3}{3} + 2-2x$$

$$\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = 2x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}(8 - 24x + 24x^2 - 8x^3) + 2 - 2x$$

$$\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3} - \frac{24}{3}x + \frac{24}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + 2 - 2x$$

$$\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = -\frac{14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3}$$

Se vuelve a integrar, ahora con respecto a x

$$V = \int_0^1 \left(-\frac{14}{3}x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx = -\frac{14}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{10}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + \frac{14}{3}x \Big|_0^1 \quad \text{Tomando límites}$$

$$V = -\frac{14}{12}(1)^4 + \frac{10}{3}(1)^3 - \frac{10}{2}(1)^2 + \frac{14}{3}(1) = -\frac{7}{6} + \frac{10}{3} - 5 + \frac{14}{3} = \frac{-7 + 20 - 30 + 28}{6}$$

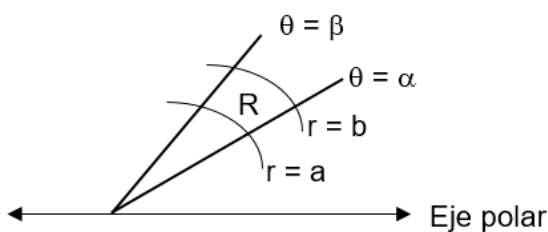
$$V = \frac{11}{6} u^3$$

También puede integrarse con respecto a x:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} (x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

5.4 Integral doble en coordenadas polares

Sea R la región limitada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y las circunferencias $r = a$ y $r = b$.



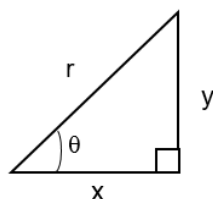
$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta) r d\theta dr \quad (5.9)$$

Nota: $dA = r dr d\theta$

En condiciones adecuadas, una integral doble en coordenadas rectangulares puede transformarse en una integral doble en coordenadas polares.

Para ello se sustituye en el integrando las coordenadas rectangulares por el equivalente en coordenadas polares.

Recordando del Tema 2:



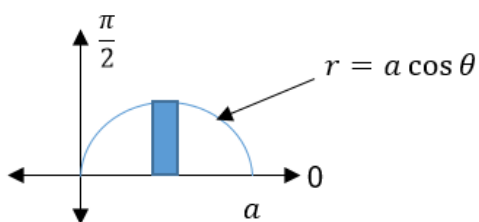
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \text{sen}(\theta)$$

Es decir:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f[r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta)] r dr d\theta \quad (5.10)$$

Actividad 5.5: Determinar por medio de integrales dobles el área del sólido de la figura:



El área de una región puede determinarse con una integral doble en coordenadas polares por la ecuación 5.9 y si $f(x, y) = 1$, la expresión se simplifica:

$$A = \iint_R dA \text{ que en coordenadas polares se expresa}$$

$$A = \iint_R r dr d\theta = \iint_R r dr d\theta$$

De la gráfica de la función se obtienen los límites para r y θ :

Límites para r :

Con el rectángulo representativo se obtiene el límite inferior (i) y superior (s)

$$r_i = 0 \quad r_s = a \cos \theta$$

Límites para θ :

Del área donde está la figura se obtienen los límites:

$$\theta_i = 0 \quad \theta_s = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} r \, dr \, d\theta$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_0^{a \cos \theta} r \, dr = \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{a \cos \theta} = \frac{1}{2} [(a \cos \theta)^2 - 0] = \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta$$

Se vuelve a integrar con respecto al ángulo θ

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{Si: } \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$A = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right]$$

$$U = 2\theta$$

$$U_i = 2(0) = 0$$

$$dU = 2 \, d\theta$$

$$\frac{du}{2} = d\theta$$

$$U_s = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$A = \frac{1}{2}a^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos U \, dU \right] = \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{1}{2} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} U \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$A = \frac{1}{2}a^2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0) \right] = \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right)$$

$$A = \frac{1}{8}a^2 \pi$$

Actividad 5.6: Evaluar utilizando coordenadas polares la integral doble

$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$. La región R se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por la

circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y los ejes coordenados (Leithold, 1998).

Límites para r:

$$r_i = 0 \quad r_s = 2$$

Límites para θ : área donde está la figura

$$\theta_i = 0 \quad \theta_s = \frac{\pi}{2}$$

$$dA = r dr d\theta$$

Sustituyendo en la doble integral: $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_0^2 e^{-r^2} r \, dr = -\frac{1}{2} \int_0^4 e^U \, dU = -\frac{1}{2} e^U \Big|_0^4 = -\frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

Se vuelve a integrar con respecto a θ :

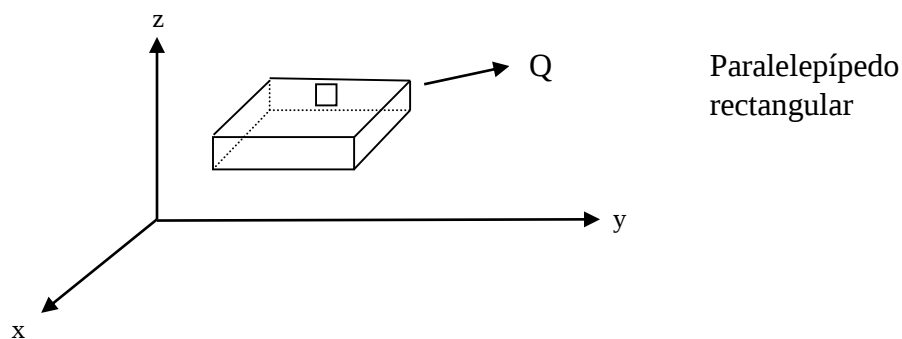
$$\begin{aligned} U &= -r^2 & U_i &= 0 \\ dU &= -2r \, dr & U_s &= (2)^2 = 4 \\ \frac{du}{-2} &= r \, dr \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} (e^4 - 1) \, d\theta = -\frac{1}{2} (e^4 - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -\frac{1}{2} (e^4 - 1) \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} (e^4 - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_R e^{-(x^2 + y^2)} \, dA = -\frac{\pi}{4} (e^4 - 1)$$

5.5 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen

Las integrales triples de una función de tres variables x, y, z , se evalúan siguiendo un proceso parecido al de las funciones de dos variables (Swokowski, 1989; Liethold, 1998; Thomas, 2010; Larson y Edwards, 2010; Zill y Wright, 2011; Stewart, 2018).



$$\text{Volumen } Q = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Por definición:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum f(U_k, V_k, W_k) = \iiint_Q f(x, y, z) dV \quad (5.11)$$

Si Q es la región de la figura entonces:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.12)$$

Actividad 5.7: Evalúe la integral triple $\iiint_Q 3xy^3z^2 dV$ para

$$Q = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 3 \quad 1 \leq y \leq 4 \quad 0 \leq z \leq 2\} \text{ (Swokowski, 1989).}$$

Se ordena el dV como en ecuación 5.12.

Los límites de las integrales se colocan según el orden de los diferenciales:

$$\int_0^2 \int_1^4 \int_{-1}^3 3xy^3z^2 dx dy dz$$

Se realiza la integral interna (se integra con respecto a x):

$$\int_{-1}^3 3xy^3z^2 dx = 3y^3z^2 \int_{-1}^3 x dx = 3y^3z^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^3 = \frac{3}{2}y^3z^2[(3)^2 - (-1)^2] = \frac{3}{2}y^3z^2(9 - 1)$$

$$\int_{-1}^3 3xy^3z^2 dx = \frac{3}{2}y^3z^2(8) = \frac{24}{2}y^3z^2 = 12y^3z^2 \text{ se vuelve a integrar con respecto a } y$$

$$\int_1^4 12 y^3 z^2 dy = 12 z^2 \int_1^4 y^3 dy = 12 z^2 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_1^4 = 3 z^2 [(4)^4 - (1)^4] = 3 z^2 (256 - 1) = 3 z^2 (255)$$

$$\int_1^4 12 y^3 z^2 dy = 765 z^2 \quad \text{se vuelve a integrar con respecto a } z$$

$$\int_0^2 765 z^2 dz = 765 \int_0^2 z^2 dz = 765 \frac{z^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{765}{3} [(2)^3 - 0] = \frac{765}{3} (8) = 2040$$

Es decir, la integral buscada es:

$$\iiint_Q 3 x y^3 z^2 dV = 2040$$

Actividad 5.8: Evalúe la integral triple $\iiint_Q x y z^2 dV$ para

$$Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 2 \quad 0 \leq z \leq 3\} \quad (\text{Stewart, 2018}).$$

Se ordena el dV como en ecuación 5.12.

Los límites de las integrales se colocan según el orden de los diferenciales:

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_{-1}^2 x y z^2 dy dx dz$$

Se realiza la integral interna (se integra con respecto a y):

$$\int_{-1}^2 x y z^2 dy = x z^2 \int_{-1}^2 y dy = \frac{x z^2}{2} \cdot y^2 \Big|_{-1}^2 = \frac{x z^2}{2} [(2)^2 - (-1)^2] = \frac{x z^2}{2} (4 - 1) = \frac{3 x z^2}{2}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a x :

$$\int_0^1 \frac{3xz^2}{2} dx = \frac{3z^2}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3z^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3z^2}{4} [(1)^2 - 0] = \frac{3z^2}{4}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a z :

$$\int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \frac{3}{4} \int_0^3 z^2 dz = \frac{3}{4} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{3}{12} [(3)^3 - 0] = \frac{3(27)}{12} = \frac{27}{4}$$

El resultado de la $\int_0^3 \int_0^1 \int_{-1}^2 xyz^2 dy dx dz = \frac{27}{4}$

Integral triple iterativa

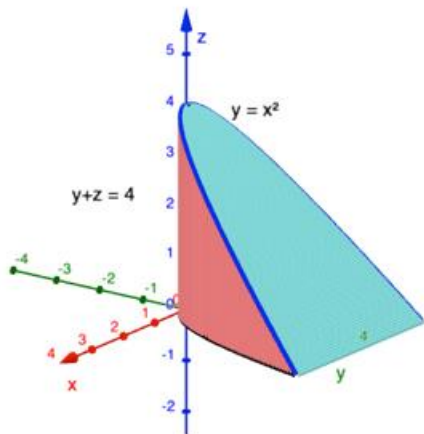
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z) dV \quad (5.13)$$

La integral triple puede interpretarse como la medida del volumen de una región tridimensional.

Si $f(x, y, z) = 1$ en Q :

$$V = \iiint_Q dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} dz dx dy \quad (5.14)$$

Actividad 5.9: Determine el volumen del sólido mostrado en la figura y que está acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$ (Swokowski, 1989).



De ecuación 5.14 se tiene que
$$V = \iiint_Q dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} dz dx dy$$

Los límites de las integrales se colocan según el orden de los diferenciales:

Límites para z :

$$z_i = 0, z_s \text{ se obtiene despejando de } y + z = 4, z_s = 4 - y$$

Límites para y :

$$y_i = x^2, y_s \text{ se obtiene despejando de } y + z = 4, \text{ si } z = 0 \text{ entonces de } y + z = 4, y_s = 4$$

Límites para x :

$$\text{De la figura observe que } x_i = -2 \text{ a } x_s = 2$$

Sustituyendo en ecuación 5.14 se obtiene:

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx$$

Resolviendo la integral interna con respecto a z :

$$\int_0^{4-y} dz = z \Big|_0^{4-y} = 4 - y$$

Resolviendo la integral para y:

$$\int_{x^2}^4 (4 - y) dy = 4y - \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^4 = 4(4 - x^2) - \frac{1}{2} \left[(4)^2 - (x^2)^2 \right] = 16 - 4x^2 - \frac{1}{2}(16 - x^4)$$

$$\int_{x^2}^4 (4 - y) dy = 16 - 4x^2 - 8 + \frac{x^4}{2} = 8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}$$

Resolviendo la integral para x:

$$\int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \Big|_{-2}^2$$

$$\int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = 8[2 - (-2)] - \frac{4}{3}[(2)^3 - (-2)^3] + \frac{1}{10}[(2)^5 - (-2)^5]$$

$$\int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = 8(4) - \frac{4}{3}(8 + 8) + \frac{1}{10}(32 + 32) = 32 - \frac{4}{3}(16) + \frac{1}{10}(64)$$

$$\int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = \frac{960 - 640 + 192}{30} = \frac{512}{30} = 17.06$$

El resultado del volumen del sólido es $V = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = 17.06$

TAREA 5.2: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
1065	1, 3, 5, 7

5.6 Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas

Una integral triple es más fácil de evaluar si se utilizan coordenadas cilíndricas y esféricas. Recapitulando del Tema 2 del curso de Cálculo vectorial los sistemas de coordenadas en tres dimensiones.

Coordenadas cilíndricas

Es una generalización en tres dimensiones de las coordenadas polares. Un punto P en el espacio tridimensional está representado por la terna ordenada $P(r, \theta, z)$.

Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, se utilizan las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

El cambio de coordenadas rectangulares a cilíndricas se realiza con las ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

Coordenadas esféricas

Un punto P en el espacio tridimensional está representado por la terna ordenada $P(\rho, \theta, \phi)$. Se puede convertir de un sistema en coordenadas rectangulares y cilíndricas a coordenadas esféricas y viceversa.

Para cambiar de coordenadas rectangulares a esféricas se utilizan las ecuaciones:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Integral triple en coordenadas cilíndricas

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Edwards (2008), Stewart (2018)

plantean la integral triple de la forma:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(r, \theta, z) dV \quad (5.15)$$

Donde: $dV = r dr d\theta dz$

Reescribiendo considerando las coordenadas cilíndricas y el cambio del diferencial de volumen.

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \quad (5.16)$$

La integral triple puede evaluarse como una integral iterada con la expresión:

$$\iiint f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_a^b \int_{\theta_1(z)}^{\theta_2(z)} \int_{r_1(\theta, z)}^{r_2(\theta, z)} f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \quad (5.17)$$

Actividad 5.10: Evalúe la integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta$ (Stewart, 2018).

Utilizando la expresión 5.15 y considerando $f(r, \theta, z) = 1$, se realiza la integral interna (con respecto a z):

$$\int_0^{r^2} r dz = r \int_0^{r^2} dz = r z \Big|_0^{r^2} = r r^2 = r^3$$

Integrando el resultado con respecto a r :

$$\int_0^2 r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{(2)^4}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 d\theta = 4\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi$$

La integral triple
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta = 4\pi$$

Actividad 5.11: Cambie a coordenadas cilíndricas y evalúe la integral triple

(Stewart, 2018).

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy$$

En coordenadas cilíndricas se tiene:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = r dz dr d\theta$$

Es una región en el plano xy , un disco de radio 2 en donde los límites de integración son:

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ y } r \leq z \leq 2$$

Sustituyendo en la integral dada:

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r z \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 z \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_r^2 r^2 z \cos \theta \, dz = r^2 \cos \theta \int_r^2 z \, dz = r^2 \cos \theta \left. \frac{z^2}{2} \right|_r^2 = \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2)$$

Integrando el resultado con respecto a r :

$$\int_0^2 \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, dr = \frac{\cos \theta}{2} \int_r^2 r^2 (4 - r^2) \, dr = \frac{\cos \theta}{2} \int_r^2 (4r^2 - r^4) \, dr$$

$$\int_0^2 \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, dr = \frac{\cos \theta}{2} \left[4 \int_r^2 r^2 \, dr - \int_r^2 r^4 \, dr \right] = \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^2$$

$$\int_0^2 \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, dr = \frac{\cos \theta}{2} \left[\frac{4}{3} (2)^3 - \frac{1}{5} (2)^5 \right] = \cos \theta \left[\frac{4}{3} (8) - \frac{1}{5} (32) \right] = \frac{\cos \theta}{2} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right)$$

$$\int_0^2 \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, dr = \frac{\cos \theta}{2} \left[\frac{32(5) - 32(4)}{15} \right] = \frac{(160 - 128) \cos \theta}{30} = \frac{32}{30} \cos \theta$$

$$\int_0^2 \frac{r^2}{2} \cos \theta (4 - r^2) \, dr = \frac{16}{15} \cos \theta$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ

$$\int_0^{2\pi} \frac{16}{15} \cos \theta \, d\theta = \frac{16}{15} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{15} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{16}{15} (0) = 0$$

Por lo tanto, la integral buscada
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy = 0$$

TAREA 5.3: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
1072	1, 3

Integral triple en coordenadas esféricas

Los autores Swokowski (1989), Leithold (1998), Edwards (2008), Stewart (2018) definen la integral triple:

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dV = \iiint_R f(\rho, \theta, \phi) \, dV \quad (5.18)$$

Donde: $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

Reescribiendo considerando las coordenadas esféricas y el cambio del diferencial de volumen.

$$\iiint_R f(\rho, \theta, \phi) \, dV = \iiint_R f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \, \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \quad (5.19)$$

La integral triple puede evaluarse como una integral iterada con la expresión:

$$\iiint f(\rho, \theta, \phi) \, dV = \int_a^b \int_{\theta_1(\phi)}^{\theta_2(\phi)} \int_{\rho_1(\theta, \phi)}^{\rho_2(\theta, \phi)} f(\rho, \theta, \phi) \, \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \quad (5.20)$$

Si $f(\rho, \theta, \phi) = 1$ se obtiene la expresión para el volumen (V):

$$V = \iiint_R dV = \int_a^b \int_{\theta_1(\phi)}^{\theta_2(\phi)} \int_{\rho_1(\theta, \phi)}^{\rho_2(\theta, \phi)} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \quad (5.21)$$

Actividad 5.12: Evalúe la integral $\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV$, donde R es la pelota

unitaria que cumple con $R = \{(\rho, \theta, \phi) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, considere

$$R = \{(\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\} \text{ (Stewart, 2018).}$$

Como la frontera de R es una esfera, se utilizan coordenadas esféricas:

Sustituyendo en el integrando de la triple integral $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$ y los límites de integración de acuerdo al orden de los diferenciales

como en ecuación 5.20.

$$\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Realizando la integral interna (con respecto a ρ):

$$\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho = \sin \phi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{\sin \phi}{3} \int_0^1 e^U \, dU = \frac{\sin \phi}{3} \cdot e^U \Big|_0^1 = \frac{\sin \phi}{3} (e - e^0)$$

$$U = \rho^3 \quad U_i = (0)^3 = 0$$

$$dU = 3\rho^2 \, d\rho$$

$$\frac{dU}{3} = \rho^2 \, d\rho \quad U_s = (1)^3 = 1$$

$$\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho = \frac{\sin \phi}{3} (e - 1)$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{3} (e-1) d\theta = \frac{\sin \phi}{3} (e-1) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sin \phi}{3} (e-1) \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi(e-1)\sin \phi}{3}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a ϕ :

$$\int_0^{\pi} \frac{2\pi(e-1)\sin \phi}{3} d\phi = \frac{2\pi(e-1)}{3} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = -\frac{2\pi(e-1)}{3} \cdot \cos \phi \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{2\pi(e-1)\sin \phi}{3} d\phi = -\frac{2\pi(e-1)}{3} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{2\pi(e-1)}{3} (-1 - 1) = -\frac{2\pi(e-1)}{3} (-2)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{2\pi(e-1)\sin \phi}{3} d\phi = \frac{4\pi(e-1)}{3} = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

Por lo tanto, la integral buscada $\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV = \frac{4}{3}\pi(e-1)$

5.7 Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función que asigna a cada punto de una región del espacio un vector, mientras que un campo escalar asigna un valor o magnitud. El campo vectorial describe la magnitud y dirección de una cantidad en cada posición.

Se utilizan para modelar fenómenos como campos de velocidad, campos eléctricos, campos gravitacionales y flujos de calor (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Edwards y Penney, 2008; Larson y Edwards, 2010; Zill y Wright, 2011; Stewart, 2018).

Campo de fuerza o de fuerzas

Se utiliza en el estudio de la mecánica y de la electricidad.

Definición:

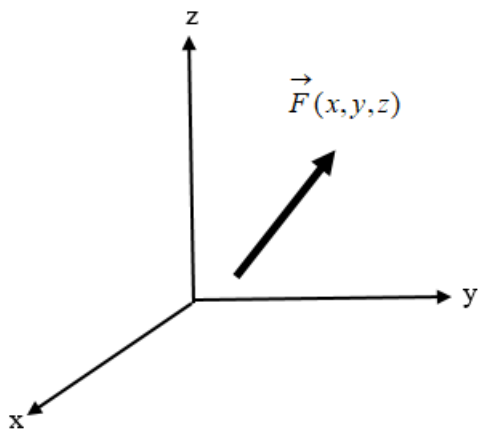
Dado un campo vectorial, se supone que hay un sistema de coordenadas rectangulares y el vector asociado al punto $P(x, y, z)$ se denota por: $\vec{F}(x, y, z)$ en donde:

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k} \quad (5.22)$$

Donde M, N, P son funciones escalares de tres variables (Swokowski, 1989).

Figura 5.1

Representación de un campo vectorial en tres dimensiones.



Clasificación

Sea $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$. Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ es un campo de variación inversa al cuadrado de la distancia si:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{C \cdot \vec{U}}{\|\vec{r}\|^2} \quad (5.23)$$

Donde:

C: Escalar

$\vec{U}$: Vector unitario con la misma dirección de $\vec{r}$

Ejemplos de fuerzas de un campo tipo de variación inversa al cuadrado son: la ley de la gravitación universal de newton y la ley de Coulomb.

Campo vectorial conservativo

Un campo vectorial $\vec{F}$ es de este tipo si es el gradiente de una función escalar, es decir, si para una función f se tiene:

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \quad (5.24)$$

Donde:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \hat{i} + f_y(x, y, z) \hat{j} + f_z(x, y, z) \hat{k} \quad (5.25)$$

En estos campos, el trabajo realizado para mover una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria.

Todo campo vectorial del tipo de variación inversa al cuadrado o del tipo gravitacional) es conservativo (Swokowski, 1989; Stewart, 2018).

Actividad 5.13: Encuentre un campo vectorial conservativo que tenga el potencial dado (Swokowski, 1989).

$$f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$$

De ecuación 5.24 $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$

y con 5.25 $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \hat{i} + f_y(x, y, z) \hat{j} + f_z(x, y, z) \hat{k}$

Se obtiene:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial x^2}{\partial x} \hat{i} - 3 \frac{\partial y^2}{\partial y} \hat{j} + 4 \frac{\partial z^2}{\partial z} \hat{k}$$

Actividad 5.14: Encuentre un campo vectorial conservativo que tenga el potencial dado (Stewart, 2018).

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$$

De ecuación 5.24 $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$

y con 5.25 $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \hat{i} + f_y(x, y, z) \hat{j} + f_z(x, y, z) \hat{k}$

Se obtiene:

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (x - y)^2}{\partial x} \hat{i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (x - y)^2}{\partial y} \hat{j}$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot 2(x - y) \hat{i} - \frac{1}{2} \cdot 2(x - y) \hat{j}$$

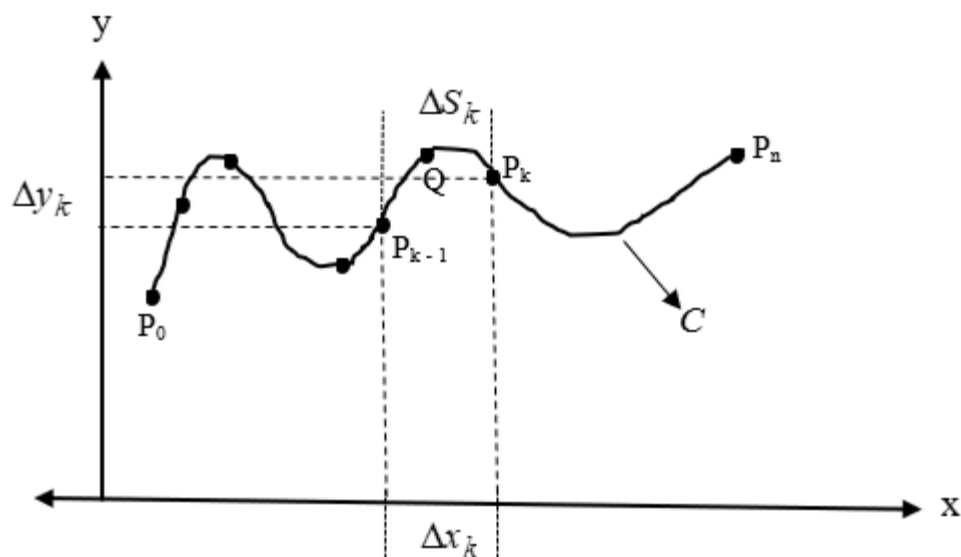
$$\nabla f(x, y) = (x - y) \hat{i} - (x - y) \hat{j}$$

5.8 Integral de línea

A diferencia de la integral donde la función se evalúa en un intervalo, la integral de línea (o integral de curva) se evalúa a largo de una curva (en el plano o en el espacio) sumando valores de un campo escalar o vectorial. Se utiliza para calcular longitudes de arco, masas de alambres y el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula. En la figura 5.2 se observa la representación de integrales de línea de f sobre C (Swokowski, 1989).

Figura 5.2

Integrales de línea de f sobre C (Swokowski, 1989).



Donde:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

$$\Delta S_k = \text{Longitud de } P_{k-1} \text{ a } P_k$$

$$Q = (U_k, V_k)$$

Considerando las tres sumas:

$$\sum_k f(U_k, V_k) \Delta S_k, \quad \sum_k f(U_k, V_k) \Delta x_k, \quad \sum_k f(U_k, V_k) \Delta y_k$$

Si los límites de estas sumas existen cuando $|\Delta| \rightarrow 0$, son entonces las integrales de línea de f sobre C con respecto a S , x y y respectivamente.

La integral de línea se denota por el símbolo: $\int_C$

Y se define:

$$\int_C f(x, y) dS = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(U_k, V_k) \Delta S_k \quad (5.26)$$

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(U_k, V_k) \Delta x_k \quad (5.27)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(U_k, V_k) \Delta y_k \quad (5.28)$$

Las integrales se pueden evaluar reemplazando: $x = g(t)$, $y = h(t)$, es decir, la parametrización de C y reemplazando los diferenciales por:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{si } dx = g'(t) dt, \quad dy = h'(t) dt$$

$$dS = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Evaluación para integrales de línea

Si una curva C está dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$ en $a \leq t \leq b$ y $f(x, y)$ es continua en una región D que contiene a C , entonces:

$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f[g(t), h(t)] \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \quad (5.29)$$

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f[g(t), h(t)] g'(t) dt \quad (5.30)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f[g(t), h(t)] h'(t) dt \quad (5.31)$$

Integral de línea para una función de tres variables

Si una curva C tiene una parametrización $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ en $a \leq t \leq b$, la integral de línea se puede evaluar:

$$\int_C f(x, y, z) dS = \int_a^b f[g(t), h(t), k(t)] \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2} dt \quad (5.32)$$

$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_c M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz \quad (5.33)$$

Actividad 5.15: Evaluar $\int_C x y^2 dS$, donde C tiene la parametrización: $x = \cos(t)$,

$y = \sin(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Swokowski, 1989).

Aplicando 5.29
$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f[g(t), h(t)] \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Primero obtener: $f[g(t), h(t)]$

$$f(x, y) = x y^2$$

$$f[g(t), h(t)] = \cos(t) \sin^2(t)$$

Segundo: Obtener: $g(t)$, $h(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$

Si: $x = g(t)$ $y = h(t)$

$g(t) = \cos(t)$ $h(t) = \sin(t)$

$g'(t) = -\sin(t)$ $h'(t) = \cos(t)$

Tercero: Sustituir en 5.29

$$\int_C xy^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^2(t) \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2} dt$$

$$\int_C xy^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^2(t) \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt \text{ donde: } \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

$$\int_C xy^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) [\sin(t)]^2 dt = \int_0^1 U^2 dU = \frac{U^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1 - 0)$$

$$\begin{aligned} U &= \sin(t) & U_i &= \sin(0) = 0 \\ dU &= \cos(t) dt & U_s &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\int_C xy^2 dS = \frac{1}{3}$$

Actividad 5.16: Evaluar $\int_C xy^2 dx$ y $\int_C xy^2 dy$, donde C tiene las ecuaciones

paramétricas: $x = t$, $y = t^2$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$

$$\text{Aplicando 5.30 } \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f[g(t), h(t)] g'(t) dt \text{ y 5.31}$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f[g(t), h(t)] h'(t) dt$$

Se tiene:

$$f[g(t), h(t)] = t(t^2)^2 = t^5$$

$$g(t) = t \qquad h(t) = t^2$$

$$g'(t) = 1 \qquad h'(t) = 2t$$

Sustituyendo en 5.30 $\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f[g(t), h(t)] g'(t) dt$ se obtiene:

$$\int_C x y^2 dx = \int_0^2 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^2 = \frac{1}{6}(2^6 - 0) = \frac{1}{6}(64) = \frac{32}{3} = 10.66$$

Con ecuación 5.31 $\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f[g(t), h(t)] h'(t) dt$ se obtiene:

$$\int_C x y^2 dx = \int_0^2 t^5 (2t) dt = 2 \int_0^2 t^6 dt = \left. \frac{2t^7}{7} \right|_0^2 = \frac{2}{7}(2^7 - 0) = \frac{2}{7}(128) = \frac{256}{7} = 36.57$$

Actividad 5.17: Evaluar $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$ donde C está dada por: $x = t$,

$y = t^2$, $z = t^3$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ (Swokowski, 1989).

Se tiene:

$$\begin{array}{lll} x = t & y = t^2 & z = t^3 \\ dx = dt & dy = 2t dt & dz = 3t^2 dt \end{array}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z , y los diferenciales en la integral de línea, se obtiene:

$$\int_C yz dx + xz dy + xy dz = \int_0^2 t^2 t^3 dt + 2t t^3 t dt + 3t t^2 t^2 dt = \int_0^2 (t^5 + 2t^5 + 3t^5) dt$$

$$\int_C yz dx + xz dy + xy dz = \int_0^2 6t^5 dt = 6 \int_0^2 t^5 dt = 6 \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_0^2 = 2^6 = 64$$

Independencia de la trayectoria

Una integral de línea es independiente de la trayectoria en una región cuando el valor de la integral de un campo vectorial entre dos puntos A y B depende únicamente de los puntos inicial y final y no del camino recorrido.

Si la integral de línea $\int_C f(x, y) dS$ es independiente de la trayectoria se denota:

$$\int_A^B f(x, y) dS \text{ porque el valor de la integral depende solo de los extremos A y B de la curva C.}$$

Si un campo vectorial $\vec{F}$ es continuo, entonces la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es

independiente de la trayectoria si y solo si el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo, es decir, si:

$$\vec{F} = \nabla f(x, y) \text{ para alguna función escalar } f.$$

Si C es una curva regular parte por parte en D con extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces:

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \quad (5.34)$$

$$\int_C f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.35)$$

De donde se tiene:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad (5.36)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad (5.37)$$

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa D , entonces la integral de línea $\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es independiente

de la trayectoria en D si y solo si cumple con la condición:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \quad (5.38)$$

O simplemente:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (5.39)$$

Actividad 5.18: Demuestre que la integral de línea

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy \text{ es independiente de la trayectoria y calcule su valor}$$

(Swokowski, 1989).

Probando la independencia de la trayectoria:

$$M = y^2 + 2xy \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} + 2x \frac{\partial y}{\partial y} = 2y + 2x \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N = x^2 + 2xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + 2y \frac{\partial x}{\partial x} = 2x + 2y$$

Calculando su valor:

Si $\vec{F} = \nabla f(x, y)$ la integral de línea es independiente de la trayectoria y con ecuación 5.35

$$\int_C f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para encontrar f se tienen dos opciones: $M = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ o $N = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$

Seleccionando M (la función que sea más fácil de integrar):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = y^2 + 2yx \quad \text{Expresando en forma diferencial}$$

$$df = (y^2 + 2yx)dx \quad \text{Integrando ambos lados de la igualdad}$$

$$\int df = \int (y^2 + 2yx)dx \quad \text{Resolviendo}$$

$$f = y^2 \int dx + 2y \int x dx$$

$$f = y^2 x + \frac{2}{2} y x^2 + k(y) \quad \text{es una función de dos variables, puede expresarse:}$$

$$f(x, y) = y^2 x + y x^2 + k(y)$$

Para encontrar la función $k(y)$ se deriva f con respecto a y :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \frac{\partial y^2}{\partial y} + x^2 \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial k(y)}{\partial y} \quad \text{si} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N$$

$$x^2 + 2xy = 2xy + x^2 + \frac{\partial k(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial k(y)}{\partial y} = 0$$

$$k(y) = C \quad C = \text{constante}$$

$$\text{Sustituyendo en } f(x, y) = y^2 x + y x^2 + k(y)$$

$$f(x, y) = y^2 x + y x^2 + C \quad \text{considerando que } C = 0$$

$$f(x, y) = y^2 x + y x^2$$

$$\text{Evaluando en los límites dados: } f(x, y) = y^2 x + y x^2 \Big|_{(-1,2)}^{(3,1)}$$

$$f(x, y) = (1)^2 (3) - (-1)^2 (2) + (1)(3)^2 - (-1)(2)^2 = 3 - 2 + 9 + 4$$

$$f(x, y) = 14$$

Actividad 5.19: Demuestre que la integral de línea $\int_{(0,0)}^{(1, \frac{\pi}{2})} e^x \operatorname{sen}(y) dx + e^x \cos(y) dy$ es

independiente de la trayectoria y calcule su valor (Swokowski, 1989).

Probando la independencia de la trayectoria:

$$\begin{aligned} M &= e^x \operatorname{sen}(y) & \frac{\partial M}{\partial y} &= e^x \frac{\partial \operatorname{sen}(y)}{\partial y} = e^x \cos(y) \\ N &= e^x \cos(y) & \frac{\partial N}{\partial x} &= \cos(y) \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \cos(y) \end{aligned} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Calculando su valor:

Si $\vec{F} = \nabla f(x, y)$ la integral de línea es independiente de la trayectoria y con ecuación 5.35

$$\int_C f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para encontrar f se tienen dos opciones: $M = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ o $N = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$

Seleccionando M (la función que sea más fácil de integrar):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \operatorname{sen}(y) \quad \text{Expresando en forma diferencial}$$

$$df = e^x \operatorname{sen}(y) dx \quad \text{Integrando ambos lados de la igualdad}$$

$$\int df = \operatorname{sen}(y) \int e^x dx \quad \text{Resolviendo}$$

$f = e^x \operatorname{sen}(y) + k(y)$ es una función de dos variables, puede expresarse:

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + k(y)$$

Para encontrar la función $k(y)$ se deriva f con respecto a y :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^x \frac{\partial \operatorname{sen}(y)}{\partial y} + \frac{\partial k(y)}{\partial y} \quad \text{si } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N$$

$$e^x \cos(y) = e^x \cos(y) + \frac{\partial k(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial k(y)}{\partial y} = 0$$

$$k(y) = C \quad C = \text{constante}$$

Sustituyendo en $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + k(y)$

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + C \quad \text{considerando } C = 0$$

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$$

Evaluando en los límites dados: $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) \Big|_{(0,0)}^{\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}$

$$f(x, y) = e \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \operatorname{sen}(0) = e$$

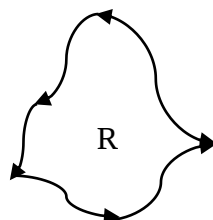
Integral de línea sobre una curva cerrada simple

Se denota por: $\oint_C$ que determina el recorrido a lo largo de una trayectoria C que

comienza y termina en el mismo punto, como se observa en Figura 5.3 Es utilizada para analizar campos conservativos o campos de fuerza sobre una curva. Usualmente se evalúa con el teorema de Green (Swokowski, 1989; Leithold, 1998; Stewart, 2018).

Figura 5.3

Integral de línea sobre una curva cerrada simple (Swokowski, 1989).



Nota: La integral de línea se efectúa en una trayectoria cerrada que se recorre en sentido positivo.

5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física

La divergencia y el rotacional de $\vec{F}$ son operadores que miden la tendencia de un campo a “extenderse” desde una fuente o a “girar” alrededor de un punto, respectivamente.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z) \hat{i} + N(x, y, z) \hat{j} + P(x, y, z) \hat{k}$ tal que M, N y P tienen derivadas parciales en alguna región.

Divergencia de $\vec{F}$

Se denota por $\text{div } \vec{F}$ o $\nabla \cdot \vec{F}$, el resultado es un escalar.

Se define:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (5.40)$$

La divergencia proporciona información acerca del flujo o desplazamiento de la masa.

Si $\text{div } \vec{F} < 0$ en un punto $P(x, y, z)$, entonces la masa fluye hacia el punto y se dice que hay un sumidero en P.

Sí $\text{div } \vec{F} > 0$, entonces la masa fluye desde el punto y se dice que hay una fuente en P.

Sí $\text{div } \vec{F} = 0$, es característica de los fluidos incomprensibles (densidad constante).

Si $\vec{F}$ es un campo de velocidades. En una fuente las líneas de velocidad divergen al emanar o salir del punto, se dice que la divergencia es positiva. En un sumidero las líneas convergen al llegar del punto y por lo tanto la divergencia es negativa.

Rotacional de $\vec{F}$

El rotacional de $\vec{F}$ se denota por $\text{rot } \vec{F}$ o $\nabla \times \vec{F}$, el resultado es un vector.

Se define:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \quad (5.41)$$

El rotacional proporciona información acerca del aspecto giratorio o rotativo del movimiento (Swokowski, 1989; Leithold, 1998).

Actividad 5.20: Sea: $\vec{F}(x, y, z) = x^2z \hat{i} - 2y^3z^2 \hat{j} + xy^2z \hat{k}$ (Swokowski, 1989).

Determinar:

a) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z)$

b) $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z)$ en $P(1, -1, 1)$

c) El punto P ¿es una fuente o un sumidero?

a) Con 5.40 se obtiene la divergencia: $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = z \frac{\partial x^2}{\partial x} - 2z^2 \frac{\partial y^3}{\partial y} + xy^2 \frac{\partial z}{\partial z}$

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 2xz - 6z^2y^2 + xy^2$$

b) $\nabla \cdot \vec{F}(1, -1, 1) = 2(1)(1) - 6(1)^2(-1)^2 + (1)(-1)^2 = 2 - 6 + 1$

$$\nabla \cdot \vec{F}(1, -1, 1) = -3$$

c) Se tiene $\text{div } \vec{F} < 0$ entonces el punto P es un sumidero

Actividad 5.21: Sea $\vec{F}(x, y, z) = z^3 x \hat{i} - 2y x^2 z \hat{j} + 2yz^4 \hat{k}$ (Swokowski, 1989).

Encontrar:

a) $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$

b) $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$ en el punto $P(1, -1, 1)$

a) Con 5.41 se obtiene el rotacional de $\vec{F}$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 x & -2yx^2 z & 2yz^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = 2z^4 \frac{\partial y}{\partial y} \hat{i} + x \frac{\partial z^3}{\partial z} \hat{j} - 2yz \frac{\partial x^2}{\partial x} \hat{k} + 2yx^2 \frac{\partial z}{\partial z} \hat{i} = 2z^4 \hat{i} + 3z^2 x \hat{j} - 4xyz \hat{k} + 2yx^2 \hat{i}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (2z^4 + 2yx^2) \hat{i} + 3z^2 x \hat{j} - 4xyz \hat{k}$$

b) Sustituyendo en $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$ el punto $P(1, -1, 1)$

$$\nabla \times \vec{F}(1, -1, 1) = (2 - 2) \hat{i} + 3 \hat{j} + 4 \hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{F}(1, -1, 1) = \langle 0, 3, 4 \rangle$$

TAREA 5.4: (Leithold, 1998).

Página	Ejercicios
1089	33, 35, 39, 41

5.10 Teoremas de integrales. Aplicaciones.

Teorema de Green

Este teorema muestra una relación entre la integral de línea alrededor de C y sobre cierta integral doble sobre una región R .

Definición:

Sea C una curva cerrada regular parte por parte y cerrada simple (no se corta a si misma), y sea R la región que consta de C y su interior. Si M y N son funciones continuas que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región D que contiene a R entonces (Swokowski, 1989):

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (5.42)$$

Teorema de Green para campos vectoriales conservativos

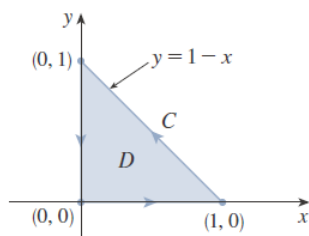
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy \quad (5.43)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (5.44)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ lo que indica que } \vec{F} \text{ es un campo conservativo (Larson y Edwards, 2010).}$$

Actividad 5.22: Evalúe la $\oint_C x^4 dx + x y dy$, donde C es la curva triangular

(mostrada) que consta de los segmentos de recta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ y de $(0,1)$ a $(0,0)$ (Stewart, 2018).



Del teorema de Green, ecuación 5.42 $\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$ se obtiene:

$$\oint_C x^4 dx + x y dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(y \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial x^4}{\partial y} \right) dy dx$$

$$\oint_C x^4 dx + x y dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna:

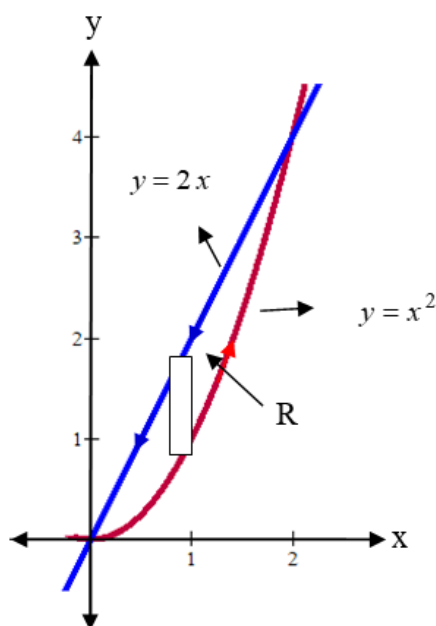
$$\int_0^{1-x} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2} (1-x)^2 = \frac{1}{2} (1 - 2x + x^2) \text{ sustituyendo el resultado en A}$$

$$\oint_C x^4 dx + x y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - 2x + x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx$$

$$\oint_C x^4 dx + x y dy = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{2} x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Actividad 5.23: Aplicar el teorema de Green para evaluar $\oint_C 5xy dx + x^3 dy$, donde

C es la curva cerrada que consta de las gráficas: $y = x^2$, $y = 2x$ entre los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$ (Swokowski, 1989).



Del teorema de Green, ecuación 5. 42 $\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$ se obtiene:

$$M = 5xy$$

$$N = x^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5x \frac{\partial y}{\partial y} = 5x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

Los límites para y se obtienen de la gráfica: $y_i = x^2$, $y_s = 2x$

Los límites para x se obtienen de la gráfica o igualando las ecuaciones:

$$x^2 = 2x \text{ igualando a cero}$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ factorizando}$$

$$x(x - 2) = 0 \text{ de donde se tiene}$$

$$x = 0 \text{ y } \begin{matrix} x - 2 = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$$

El menor valor de x es el límite inferior y el mayor es el límite superior

Por ecuación 5.42 se obtiene:

$$\oint_C 5xy \, dx + x^3 \, dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x) \, dy \, dx \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna

$$\int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x) \, dy = (3x^2 - 5x) \int_{x^2}^{2x} dy = (3x^2 - 5x) y \Big|_{x^2}^{2x} = (3x^2 - 5x) (2x - x^2)$$

$$\int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x) \, dy = 6x^3 - 3x^4 - 10x^2 + 5x^3 = -3x^4 + 11x^3 - 10x^2$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a x

$$\int_0^2 (-3x^4 + 11x^3 - 10x^2) \, dx = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{11}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 \Big|_0^2 = -\frac{3}{5}(2)^5 + \frac{11}{4}(2)^4 - \frac{10}{3}(2)^3$$

$$\int_0^2 (-3x^4 + 11x^3 - 10x^2) dx = -\frac{3}{5}(32) + \frac{11}{4}(16) - \frac{10}{3}(8) = \frac{96}{5} + \frac{176}{4} - \frac{80}{3} = \frac{96}{5} + 44 - \frac{80}{3}$$

$$\int_0^2 (-3x^4 + 11x^3 - 10x^2) dx = \frac{96}{5} + 44 - \frac{80}{3} = \frac{(96)(3) + (44)(15) - (80)(5)}{15} = \frac{288 + 660 - 400}{15}$$

$$\int_0^2 (-3x^4 + 11x^3 - 10x^2) dx = -\frac{28}{15} \text{ sustituyendo en A}$$

$$\oint_C 5xy dx + x^3 dy = -\frac{28}{15}$$

El resultado representa la circulación neta del campo vectorial: $\vec{F} = \langle 5xy, x^3 \rangle$ alrededor de la curva C .

El signo negativo indica que la tendencia global del campo es circular en sentido opuesto a la orientación positiva de la curva.

Integrales de superficies

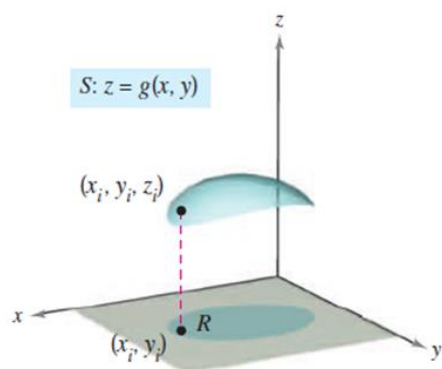
Cuando se tiene la proyección de una superficie S sobre un plano coordenado, entonces se dice que S tiene una proyección regular sobre el plano coordenado.

La proyección regular sobre el plano xy , xz o yz se denota por: R_{xy} , R_{xz} o R_{yz} , respectivamente.

Para tales proyecciones se supone que S es la gráfica de una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$, como se muestra en la Figura 5.4 (Swokowski, 1989; Larson y Edwards, 2010).

Figura 5.4

Proyección de una superficie S sobre un plano coordenado (Larson y Edwards, 2010).

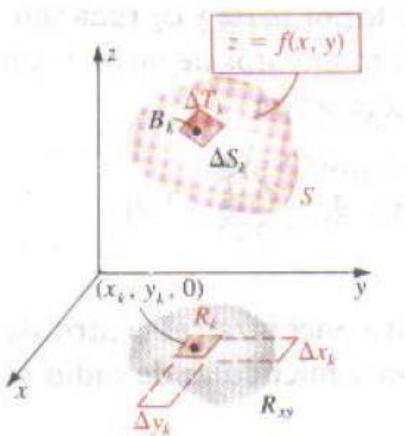


Sea S una de las dos caras de una superficie como la mostrada en la Figura 5.5 y considerando a una de ellas arbitrariamente positiva (si S es una superficie cerrada se toma positiva). Un vector unitario normal $\vec{n}$ en un punto cualquiera de la cara positiva de S se llama vector unitario normal exterior.

Figura 5.5

Proyección de una superficie S sobre

un plano coordenado. Sólido visto desde arriba (Swokowski, 1989).



A las integrales que incluyen el elemento diferencial de área dS se les llama integrales de superficie (Swokowski, 1989).

Teorema para evaluar integrales de superficie (Swokowski, 1989)

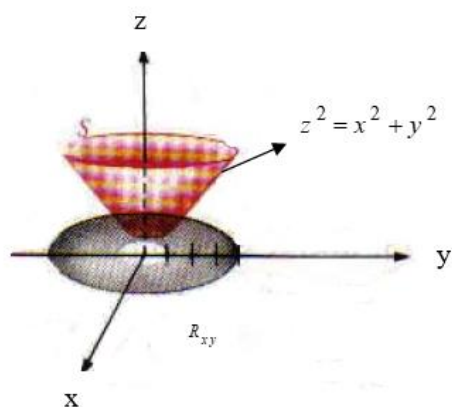
$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{xy}} g[x, y, f(x, y)] \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA \quad (5.45)$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{xz}} g[x, h(x, z), z] \sqrt{[h_x(x, z)]^2 + [h_z(x, z)]^2 + 1} dA \quad (5.46)$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{R_{yz}} g[k(y, z), y, z] \sqrt{[k_y(y, z)]^2 + [k_z(y, z)]^2 + 1} dA \quad (5.47)$$

Actividad 5.24: Evaluar $\iint_S x^2 z \, dS$ suponiendo que S es la parte del cono circular

(mostrado) $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 4$ (Swokowski, 1989).



Con ecuación 5.45:

$$\iint_S g(x, y, z) \, dS = \iint_{R_{xy}} g[x, y, f(x, y)] \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA$$

De donde se tiene que $z = f(x, y)$

Si $z^2 = x^2 + y^2$ entonces despejando $z = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

Obteniendo las derivadas parciales de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ con respecto a x y a y

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Elevando las derivadas parciales al cuadrado para después sustituir en 5.45

$$[f_x(x, y)]^2 = \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad [f_y(x, y)]^2 = \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo en 5.45:

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} \, dA$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}} \, dA = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} \, dA$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \, dA$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \, dA \dots\dots\dots A$$

La integral doble de A se resuelve fácilmente utilizando coordenadas polares:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad dA = r \, dr \, d\theta \quad x = r \cos(\theta) \quad x^2 = r^2 \cos^2(\theta)$$

Los límites son:

Para r :

$$r = 1 \text{ a } r = 4$$

Para θ :

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

Sustituyendo en A:

$$\iint_S x^2 z \, dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^2 \cos^2(\theta) (r^2)^{\frac{1}{2}} r \, dr \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^2 \cos^2(\theta) r \, dr \, d\theta$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^4 \cos^2(\theta) \, dr \, d\theta \dots\dots\dots B$$

Evaluando la integral interna:

$$\int_1^4 r^4 \cos^2(\theta) \, dr = \cos^2(\theta) \int_1^4 r^4 \, dr = \cos^2(\theta) \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_1^4 = \frac{\cos^2(\theta)}{5} [(4)^5 - (1)^5] = \frac{\cos^2(\theta)}{5} (1024 - 1)$$

$$\int_1^4 r^4 \cos^2(\theta) \, dr = \frac{1023}{5} \cos^2(\theta)$$

Sustituyendo el resultado de la integral interna en B

$$\iint_S x^2 z \, dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1023}{5} \cos^2(\theta) \, d\theta = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$\text{Si } \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right] d\theta = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta \right]$$

$$U = 2\theta$$

$$dU = 2 \, d\theta$$

$$\frac{dU}{2} = d\theta$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(U) \, dU \right] = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \left[\frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin(U) \Big|_0^{4\pi} \right]$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \left\{ \frac{2\pi}{2} + \frac{1}{4} [\sin(4\pi) - \sin(0)] \right\} = \frac{(1023)\sqrt{2}}{5} \left[\pi + \frac{1}{4} (0 - 0) \right]$$

$$\iint_S x^2 z \, dS = \frac{(1023)\sqrt{2}\pi}{5} = 909$$

Integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S (o integral de flujo)

Swokowski (1989) y otros la denotan como $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ que es el flujo de un campo

vectorial $\vec{F}$ a través de (o sobre) una superficie S , donde $\vec{n}$ es un vector unitario normal.

El vector unitario normal $\vec{n}$ se define:

$$\vec{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} \quad (5.48)$$

Donde: $g(x, y, z) = z - f(x, y)$

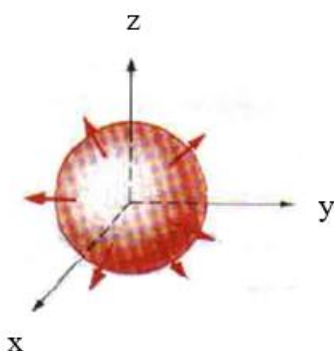
$$\vec{n} = \frac{-f_x(x, y)\hat{i} - f_y(x, y)\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}} \quad (5.49)$$

Se parte de las siguientes suposiciones:

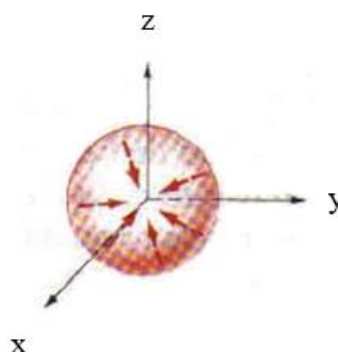
- $\vec{n}$ varía continuamente sobre la superficie S .
- Si S tiene dos lados, tales como “lado de arriba” y “lado de abajo” de la gráfica de, $z = f(x, y)$. Para una superficie cerrada S como una esfera puede considerarse “la parte de afuera” y “la parte de adentro” de S . En donde a $\vec{n}$ se le llama vector unitario normal exterior o vector unitario normal interior como se observa en la Figura 5.6 y Figura 5.7.

Figura 5.6

Vectores unitarios normales
exteriores (Swokowski, 1989).

**Figura 5.7**

Vectores unitarios normales
interiores (Swokowski, 1989).



- Si el fluido tiene densidad $\rho = \rho(x, y, z)$ entonces el valor de la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \text{ es la masa del fluido que atraviesa } S \text{ por unidad de tiempo.}$$

- El campo vectorial $\vec{F}$ puede representar flujo térmico en estado estacionario, un gas que se expande uniformemente, una corriente eléctrica. En estos casos, “flujo” corresponde a cantidad (por unidad de tiempo) de calor que cruza S , de gas a través de S o de carga eléctrica a través de S , respectivamente.

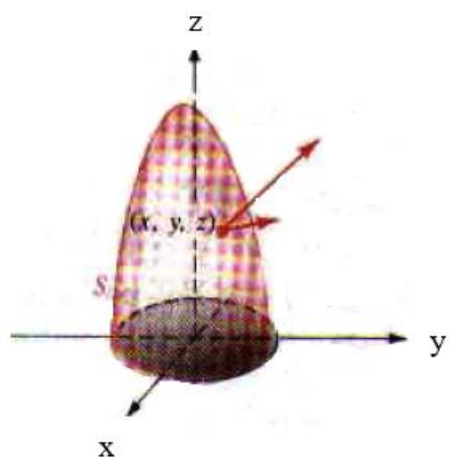
Para una superficie cerrada como una esfera:

Si $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior, entonces el flujo mide el desplazamiento neto hacia afuera por unidad de tiempo. Si la integral de flujo es positiva, el flujo hacia afuera de S es mayor que el flujo hacia adentro y se dice entonces que hay una fuente de $\vec{F}$ dentro de S ; caso

contrario, si la integral es negativa, entonces el flujo hacia adentro de S es mayor que el flujo hacia afuera de S y se dice que hay un sumidero dentro de $\vec{F}$. Si la integral es cero significa que el flujo hacia adentro y el flujo hacia afuera de S son iguales (Swokowski, 1989).

Actividad 5.25: Sea S la parte de la gráfica (mostrada) cuya ecuación es

$z = 9 - x^2 - y^2$ tal que $z \geq 0$ y sea $\vec{F}(x, y, z) = 3x\hat{i} + 3y\hat{j} + z\hat{k}$. Determinar el flujo de $\vec{F}$ a través de S (Swokowski, 1989).



$$\text{El flujo } \vec{F} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Primero: se encuentra el vector unitario normal con ecuación 5.48: $\vec{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|}$

$$z = f(x, y)$$

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2)$$

$$\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial x^2}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial y^2}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial (z-9)}{\partial z} \hat{k} = 2x \hat{i} + 2y \hat{j} + \hat{k}$$

$$\|\nabla g(x, y, z)\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Por lo tanto: $\vec{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|}$

$$\vec{n} = \frac{2x \hat{i} + 2y \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Segundo: se encuentra el flujo de $\vec{F}$ a través de S

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (3x \hat{i} + 3y \hat{j} + z \hat{k}) \cdot \frac{2x \hat{i} + 2y \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS$$

Tercero: resolver la integral de flujo con ecuación 5.45:

$$\iint_S g(x, y, z) \, dS = \iint_{R_{xy}} g[x, y, f(x, y)] \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA$$

$$g[x, y, f(x, y)] = \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Debe estar solo en función de x y y , por lo que es necesario sustituir el valor de

$$z = 9 - x^2 - y^2.$$

$$g[x, y, f(x, y)] = \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{5x^2 + 5y^2 + 9}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Obteniendo las derivadas parciales de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ con respecto a x y a y

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -2y$$

Elevando las derivadas parciales al cuadrado para después sustituir en 5.45

$$[f_x(x, y)]^2 = 4x^2 \qquad [f_y(x, y)]^2 = 4y^2$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} \frac{5x^2 + 5y^2 + 9}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dS = \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 9) \, dA$$

R_{xy} es la región circular en el plano xy acotado por la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$.

Para resolver la integral se utilizan coordenadas polares:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad dA = r \, dr \, d\theta$$

Los límites son:

Para r :

Para θ :

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$r = 0 \text{ a } r = 3$$

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

Sustituyendo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 9) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^3 + 9r) \, dr \, d\theta$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_0^3 (5r^3 + 9r) \, dr = 5 \int_0^3 r^3 \, dr + 9 \int_0^3 r \, dr = \left. \frac{5}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right|_0^3$$

$$\int_0^3 (5r^3 + 9r) dr = \frac{5}{4}(3)^4 + \frac{9}{2}(3)^2 = \frac{5}{4}(81) + \frac{9}{2}(9) = \frac{405}{4} + \frac{81}{2} = \frac{405 + 162}{4} = \frac{567}{4}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \frac{567}{4} d\theta = \frac{567}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{567}{4} (2\pi)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{567}{2} \pi$$

Formas alternativas del teorema de Green

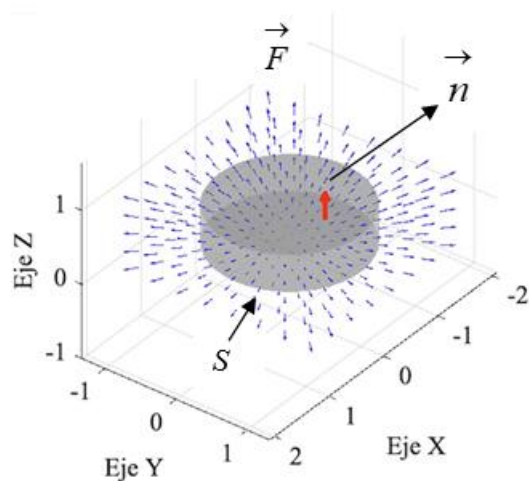
Son el teorema de la divergencia o de Gauss y el teorema de Stokes, que son la extensión de las formas vectoriales del teorema a tres dimensiones.

Teorema de la divergencia o de Gauss

Se refiere al flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S que es la frontera de una región Q en tres dimensiones, es decir, este teorema permite evaluar el flujo a través de una superficie cerrada utilizando una integral triple. En esta parte $\vec{n}$ denota un vector unitario normal exterior a S (Swokowski, 1989; Larson y Edwards, 2010).

Figura 5.8

Representación de un vector unitario
normal exterior a S .



Definición:

Sea Q una región en tres dimensiones acotada por una superficie cerrada S y sea $\vec{n}$ un vector unitario normal exterior a S en (x, y, z) . Si es una función vectorial que tiene derivadas parciales continuas en Q , entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \vec{F} \, dV \quad (5.50)$$

Recordando que $\vec{F} = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$, entonces el teorema de la divergencia puede expresarse:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \left[\frac{\partial M(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \right] dV \quad (5.51)$$

O Simplemente:

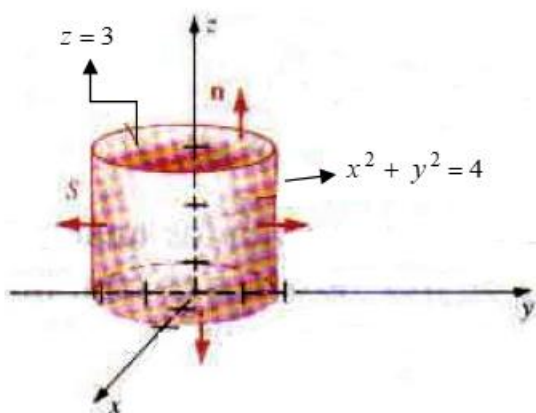
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV \quad (5.52)$$

Actividad 5.26: Sea Q la región acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y

$z = 3$, S la frontera de Q (como se muestra en la figura dada) y

$\vec{F}(x, y, z) = x^3 \hat{i} + y^3 \hat{j} + z^3 \hat{k}$. Utilice el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{Swokowski, 1989}).$$



De ecuación 5.52 Se tiene
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV$$

De $\vec{F}$ se obtiene: $M = x^3$ $N = y^3$ $P = z^3$

Derivando parcialmente: $\frac{\partial M}{\partial x} = 3x^2$ $\frac{\partial N}{\partial y} = 3y^2$ $\frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2$

Sustituyendo en 5.52:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dV = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, para resolver la integral triple:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3 \iiint_Q (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta$$

Límites para z :

$$z = 0 \text{ a } z = 3$$

Límites para r :

$$r = 0 \text{ a } r = 2$$

Límites para θ :

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna con respecto a z

$$\int_0^3 (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^3 (r^3 + r z^2) \, dz = r^3 \int_0^3 dz + r \int_0^3 z^2 \, dz$$

$$\int_0^3 (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta = r^3 z + \frac{r}{3} z^3 \Big|_0^3 = 3r^3 + \frac{r}{3} \cdot 27 = 3r^3 + \frac{27}{3} r = 3r^3 + 9r$$

Resolviendo la integral para r

$$\int_0^2 (3r^3 + 9r) dr = 3 \int_0^2 r^3 dr + 9 \int_0^2 r dr = \frac{3}{4} \cdot r^4 + \frac{9}{2} \cdot r^2 \bigg|_0^2 = \frac{3}{4} \cdot (2)^4 + \frac{9}{2} \cdot (2)^2$$

$$\int_0^2 (3r^3 + 9r) dr = \frac{3}{4} \cdot (16) + \frac{9}{2} \cdot (4) = 12 + 18 = 30$$

Resolviendo la integral para θ

$$\int_0^{2\pi} 30 d\theta = 30 \theta \bigg|_0^{2\pi} = 30(2\pi) = 60\pi$$

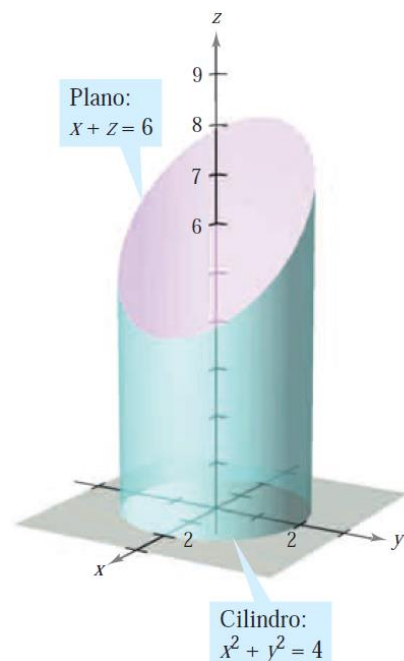
Sustituyendo en A

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 3(60\pi) = 180\pi$$

Actividad 5.27: Sea Q el sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano

$x + z = 6$ y el plano xy , como se muestra en la figura. Encontrar $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde S es

la superficie de Q y $\vec{F}(x, y, z) = [x^2 + \sin(z)]\hat{i} + [xy + \cos(z)]\hat{j} + e^y\hat{k}$ (Larson y Edwards, 2010).



Utilizando el teorema de la divergencia para evaluar la integral de flujo:

De ecuación 5.52 se tiene que
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV$$

$$\vec{F}(x, y, z) = [x^2 + \sin(z)]\hat{i} + [x y + \cos(z)]\hat{j} + e^y \hat{k}$$

De $\vec{F}$ se obtiene: $M = x^2 + \sin(z)$ $N = x y + \cos(z)$ $P = e^y$

Derivando parcialmente: $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial N}{\partial y} = x$ $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$

Sustituyendo en 5.52

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_Q (2x + x + 0) \, dV = \iiint_Q 3x \, dV = 3 \iiint_Q x \, dV$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, para resolver la integral triple:

$$x = r \cos(\theta), \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3 \iiint_Q r \cos(\theta) \, r \, dz \, dr \, d\theta = 3 \iiint_Q r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta \dots\dots\dots A$$

Límites para z :

$$x + z = 6$$

$$z = 6 - x = 6 - r \cos(\theta)$$

$$z = 0 \text{ a } z = 6 - r \cos(\theta)$$

Límites para r :

$$r = 0 \text{ a } r = 2$$

Límites para θ :

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta$$

Resolviendo la integral interna con respecto a z

$$\int_0^{6-r\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) \, dz = r^2 \cos(\theta) \int_0^{6-r\cos(\theta)} dz = r^2 \cos(\theta) z \Big|_0^{6-r\cos(\theta)}$$

$$\int_0^{6-r\cos(\theta)} r^2 \cos(\theta) \, dz = r^2 \cos(\theta) [6 - r \cos(\theta)] = 6r^2 \cos(\theta) - r^3 \cos^2(\theta)$$

El resultado se vuelve a integrar para r

$$\int_0^2 [6r^2 \cos(\theta) - r^3 \cos^2(\theta)] \, dr = 6 \cos(\theta) \int_0^2 r^2 \, dr - \cos^2(\theta) \int_0^2 r^3 \, dr$$

$$\int_0^2 \left[6r^2 \cos(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \right] dr = 6 \cos(\theta) \frac{r^3}{3} - \cos^2(\theta) \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = 2 \cos(\theta) (2)^3 - \frac{\cos^2(\theta)}{4} (2)^4$$

$$\int_0^2 \left[6r^2 \cos(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \right] dr = 16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta)$$

El resultado se vuelve a integrar para θ

$$3 \int_0^{2\pi} \left[16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \right] d\theta = 48 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 12 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta$$

$$\text{Si: } \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left[16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \right] d\theta = 48 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 12 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] d\theta$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left[16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \right] d\theta = 48 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 6 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d\theta$$

$$U = 2\theta$$

$$dU = 2 d\theta$$

$$\frac{dU}{2} = d\theta$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left[16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \right] d\theta = 48 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 6 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sin(U) dU$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left[16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \right] d\theta = 48 \sin(\theta) - 6 \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \cos(\theta) \Big|_0^{4\pi}$$

$$3 \int_0^{2\pi} [16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta)] d\theta = 48 [\sin(2\pi) - \sin(\theta)] - 6(2\pi) + \frac{1}{4} [\cos(4\pi) - \cos(0)]$$

$$3 \int_0^{2\pi} [16 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta)] d\theta = -12\pi + \frac{1}{4}(1-1) = -12\pi$$

Sustituyendo en A

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -12\pi$$

Teorema de Stokes

Swokowski (1989), Leithold (1998), Larson y Edwards (2010) y Stewart (2018) entre otros, desarrollan el tema de forma similar.

Definición (Swokowski, 1989):

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \iint_S \left(\text{rot } \vec{F} \right) \cdot \vec{n} dS \quad (5.53)$$

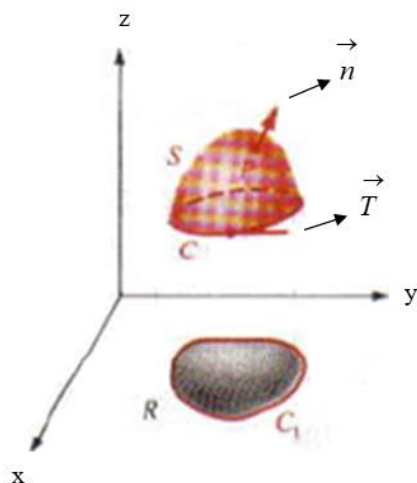
También el teorema de Stokes puede expresarse:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.54)$$

El vector $\vec{T}$ es un vector unitario tangente a C que apunta en la dirección positiva. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región que contiene a S , como se muestra en la Figura 5.9.

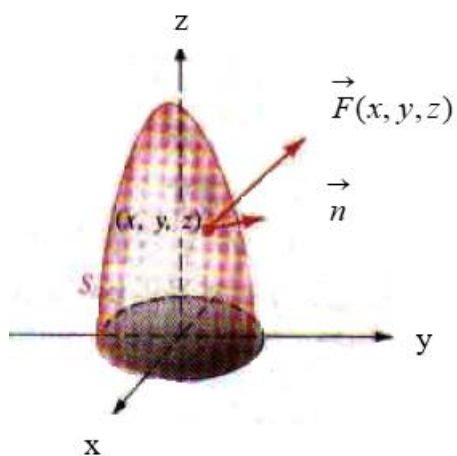
Figura 5.9

S es la gráfica de $z = f(x, y)$ y la proyección de C_1 de C sobre el plano xy (Swokowski, 1989).



Actividad 5.28: Sea S la parte del paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$, y sea C la traza de S en el plano xy . Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = 3z\hat{i} + 4x\hat{j} + 2y\hat{k} \quad (\text{Swokowski, 1989}).$$



Primero: se encuentra el vector unitario normal con ecuación 5.48: $\vec{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|}$

$$z = f(x, y)$$

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2)$$

$$\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial x^2}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial y^2}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial (z - 9)}{\partial z} \hat{k} = 2x \hat{i} + 2y \hat{j} + \hat{k}$$

$$\|\nabla g(x, y, z)\| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Por lo tanto: $\vec{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|}$

$$\vec{n} = \frac{2x \hat{i} + 2y \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Segundo: se encuentra el rotacional de $\vec{F}$ con ecuación 5.41:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3z & 4x \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = 2 \frac{\partial y}{\partial y} \hat{i} + 3 \frac{\partial z}{\partial z} \hat{j} + 4 \frac{\partial x}{\partial x} \hat{k} = 2 \hat{i} + 3 \hat{j} + 4 \hat{k}$$

Por lo tanto:

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Tercero: resolver la integral de superficie con ecuación 5.45:

$$\iint_S g(x, y, z) \, dS = \iint_{R_{xy}} g[x, y, f(x, y)] \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA$$

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

Obteniendo las derivadas parciales de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ con respecto a x y a y

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -2y$$

Elevando las derivadas parciales al cuadrado para después sustituir en 5.45

$$[f_x(x, y)]^2 = 4x^2 \qquad [f_y(x, y)]^2 = 4y^2$$

$$g[x, y, f(x, y)] = \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Sustituyendo en 5.45:

$$\iint_S g(x, y, z) \, dS = \iint_{R_{xy}} \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA$$

$$\iint_S g(x, y, z) \, dS = \iint_{R_{xy}} (4x + 6y + 4) \, dA \dots\dots\dots A$$

Para resolver la integral se utilizan coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) \quad dA = r \, dr \, d\theta$$

Los límites son:

Para r :

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$r = 0 \text{ a } r = 3$$

Para θ :

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

Sustituyendo en A:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [4r \cos(\theta) + 6r \sin(\theta) + 4] r dr d\theta$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr d\theta$$

Resolviendo la integral interna para r

$$\int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr = 4\cos(\theta) \int_0^3 r^2 dr + 6\sin(\theta) \int_0^3 r^2 dr + 4 \int_0^3 r dr$$

$$\int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr = 4\cos(\theta) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 + 6\sin(\theta) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 + 4 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^3$$

$$\int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr = \frac{4\cos(\theta)}{3} \cdot (3)^3 + 2\sin(\theta) \cdot (3)^3 + 2 \cdot (3)^2$$

$$\int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr = \frac{4\cos(\theta)}{3} \cdot (27) + 2\sin(\theta) \cdot (27) + 2 \cdot (9)$$

$$\int_0^3 [4r^2 \cos(\theta) + 6r^2 \sin(\theta) + 4r] dr = 36\cos(\theta) + 54\sin(\theta) + 18$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} [36 \cos(\theta) + 54 \operatorname{sen}(\theta) + 18] d\theta = 36 \operatorname{sen}(\theta) - 54 \cos(\theta) + 18\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} [36 \cos(\theta) + 54 \operatorname{sen}(\theta) + 18] d\theta = 36 [\operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(0)] - 54 [\cos(2\pi) - \cos(0)] + 18(2\pi)$$

$$\int_0^{2\pi} [36 \cos(\theta) + 54 \operatorname{sen}(\theta) + 18] d\theta = 54[1-1] + 36\pi = 36\pi$$

Con ecuación 5.54: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C 3z dx + 4x dy + 2y dz$$

Donde C es la circunferencia en el plano $x y$ (por lo tanto, $z=0$), entonces la expresión anterior se reduce a:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C 4x dy = 4 \oint_C x dy$$

Por definición, el área de la región R es: $\oint_C x dy$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 A$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi r^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi$$

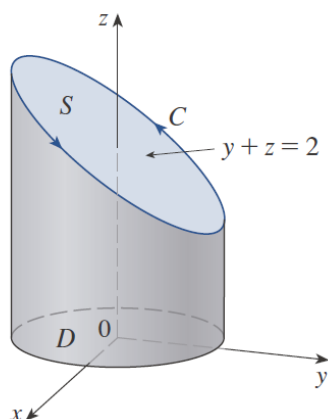
Por lo tanto, el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \iint_S \left(\text{rot } \vec{F} \right) \cdot \vec{n} dS$$

$36\pi = 36\pi$ lo que se quería demostrar

Actividad 5. 29: Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde

$\vec{F}(x, y, z) = -y^2 \hat{i} + x \hat{j} + z^2 \hat{k}$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. La curva C se aprecia en la figura dada (Stewart, 2018).



Primero se obtiene el rotacional de $\vec{F}$ con ecuación 5.41:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y^2 & x \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} \hat{k} - 2 \frac{\partial y^2}{\partial y} \hat{k} + \frac{\partial x}{\partial x} \hat{k} = \hat{k} + 2y \hat{k} = (1 + 2y) \hat{k}$$

El disco $x^2 + y^2 \leq 1$ es la proyección D de S en el plano xy :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_D (1 + 2y) dA$$

Para resolver la integral se utilizan coordenadas polares:

$$y = r \sin(\theta) \quad dA = r dr d\theta$$

Los límites son:

Para r :

Para θ :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$r = 0 \text{ a } r = 1$$

$$\theta = 0 \text{ a } \theta = 2\pi$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [1 + 2r \sin(\theta)] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r + 2r^2 \sin(\theta)] dr d\theta \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna para r

$$\int_0^1 [r + r^2 \sin(\theta)] dr = \int_0^1 r dr + 2 \sin(\theta) \int_0^1 r^2 dr = \frac{r^2}{2} + 2 \sin(\theta) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 [r + r^2 \sin(\theta)] dr = \frac{1}{2} + 2 \sin(\theta) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(\theta)$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(\theta) \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{2}{3} \cos(\theta) \Big|_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(\theta) \right] d\theta = \frac{1}{2} (2\pi) - \frac{2}{3} [\cos(2\pi) - \cos(0)] = \pi - \frac{2}{3} (1 - 1) = \pi$$

Sustituyendo el resultado en A

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$$

5.11 Actividades de aprendizaje y complementos educativos

Según lo planteado en la propuesta de trabajo, se describen los complementos educativos y las actividades de aprendizaje para el tema 5: integración múltiple. La competencia específica es que los estudiantes formulen y resuelvan integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas. Interpreta y determina las características de los campos vectoriales para su aplicación en el estudio de fenómenos físicos.

Competencias genéricas: habilidad para realizar abstracciones, analizar y sintetizar información; capacidad para identificar, formular y resolver problemas de manera efectiva; habilidad para aprender de forma continua y actualizar sus conocimientos y capacidad para colaborar eficazmente en un equipo de trabajo (TecNM, s. f.).

Para el Tema 5, al igual que para todos los temas de la asignatura, se utilizará el enfoque de metodologías activas de aprendizaje. A través del aprendizaje colaborativo y cooperativo, se fomenta la cohesión del grupo y se incentiva a los estudiantes a trabajar de manera conjunta.

Además, se aplicará el aprendizaje basado en problemas, en el que los estudiantes aprenden a través de la resolución actividades con problemas tipo. El profesor llevará a cabo actividades que luego serán analizadas y discutidas tanto a nivel de equipo como en grupo. Si bien el resultado final es único y no admite discusión, el proceso para llegar a él puede variar dependiendo de las bases matemáticas de los estudiantes. El rol del profesor será el de guía o facilitador del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades para que el estudiante sea el protagonista de su proceso educativo.

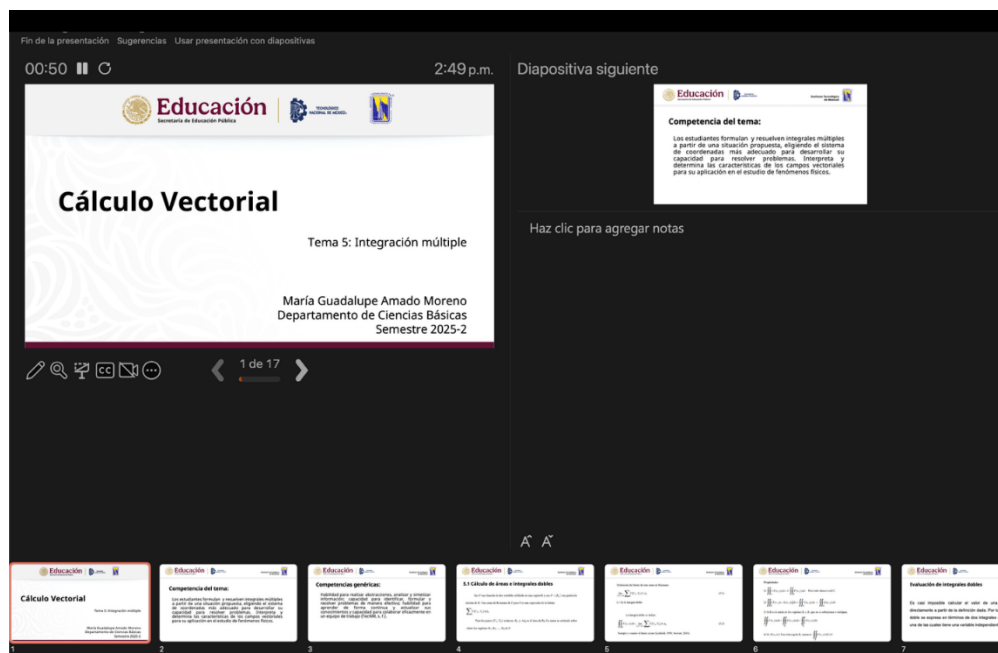
Complemento Educativo No. 1. *Aprendizaje basado en problemas* y **Complemento Educativo No. 3.** *Ejercicios/casos prácticos.* En relación con estos complementos educacionales, se presentarán en clase actividades relacionadas con la solución de problemas o ejercicios de cada uno de los subtemas. La resolución de estos ejemplos se llevará a cabo durante las diferentes sesiones de clases de acuerdo con la planeación realizada por el profesor procurando en todo momento fomentar la discusión y participación de los estudiantes. Además de los ejemplos de clase, se conformarán equipos de trabajo para que los estudiantes resuelvan los ejercicios y reafirmen sus conocimientos. En el anexo 1 se incluye una serie de actividades con ejercicios representativos que se tienen planeados para el curso. Las herramientas tecnológicas relacionadas con este objetivo educacional consisten en los programas Word®. En Word® se presentará el listado con la redacción de las actividades a resolver en el aula y las tareas. Las gráficas de las funciones se realizan con el Winplot, Matlab y GeoGebra. Tanto los problemas resueltos como los propuestos estarán a disposición de los estudiantes a través de la plataforma MOODLE y en la medida de lo posible serán proyectados en el aula de clase para su solución. Durante estas actividades se llevará un registro de la participación de los estudiantes en la resolución de las actividades en el aula.

Complemento Educativo No. 2. Presentaciones. Se han preparado una serie de presentaciones con el propósito de desarrollar los diferentes subtemas en el aula. Una vez que se hayan visto en clase, las presentaciones estarán a disposición de todos los estudiantes a través de la plataforma MOODLE. A manera de muestra en la Figura 5.10 se presenta una carátula del programa PowerPoint® en la que se visualiza el contenido de una de las presentaciones señaladas. Se creó un *Padlet*, mostrado en Figura 2.8 con el formulario para derivadas e integrales a utilizar durante el curso, los estudiantes podrán bajarlo con la liga:

<https://padlet.com/lupitaamado/c-lculo-integral-formulario-para-derivadas-e-integrales-vqktstlpfr0ohdxw>

Figura 5.10

Vista del presentador en el programa PowerPoint® de la presentación del Tema 5: integración múltiple.



En la instrumentación didáctica que acompaña a estos apuntes se proporciona información detallada sobre las actividades de aprendizaje y de enseñanza, así como los niveles de desempeño y evaluación para este tema.

REFERENCIAS

- Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas*. México: Pearson Educación.
- Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas*. México: McGrawHill.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.
- Marsden, J. E., y Tromba, A. J. (2004). *Cálculo vectorial*. España: Pearson Educación, S. A.
- Rivera Berrío, J. G., y Álvarez Sáinz, E. E. (2020). *Cálculo Vectorial-Parte 1*. Colombia: Fondo Editorial Pascual Bravo.
- Smith J. M., V. N. (2020). *Introducción a la termodinámica en ingeniería química*. México: McGrawHill.
- Stewart, J. (2018). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: CENGAGE.
- Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
- TecNM. (s. f.). *TecNM*. Obtenido de Planes y programas de estudio. Ingeniería Química.: <https://www.tecnm.mx/?vista=Normateca>
- TecNM/ITM. (s.f.). *Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Mexicali*. Obtenido de Oferta educativa. Ingeniería Química: <http://www.itmexicali.edu.mx/carreras/quimica/quimica.html>
- Thomas, G. B. (2010). *Cálculo, varias variables*. México: Pearson Educación.
- Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2008). *Cálculo Vectorial, Análisis de Fourier y Análisis Complejo*. México: McGrawHill.
- Zill, D., y Wright, W. S. (2011). *Matemáticas 3. Cálculo de varias variables*. México: McGrawHill.

ANEXO 1. ACTIVIDADES ADICIONALES PARA CÁLCULO VECTORIAL

Las actividades elaboradas por el autor de estos apuntes no cuentan con referencia, mientras que aquellas tomadas de otros autores están acompañadas de la referencia respectiva.

1. Vectores en el espacio

Actividad 1.1: Sean los vectores $\vec{A} = \langle -1, 3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 4, 2 \rangle$. Encontrar:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle -1, 3 \rangle + \langle 4, 2 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$$

b) $-\frac{3}{2}\vec{B}$

$$-\frac{3}{2}\vec{B} = \left(-\frac{3}{2}\right)\langle 4, 2 \rangle = \langle -6, -3 \rangle$$

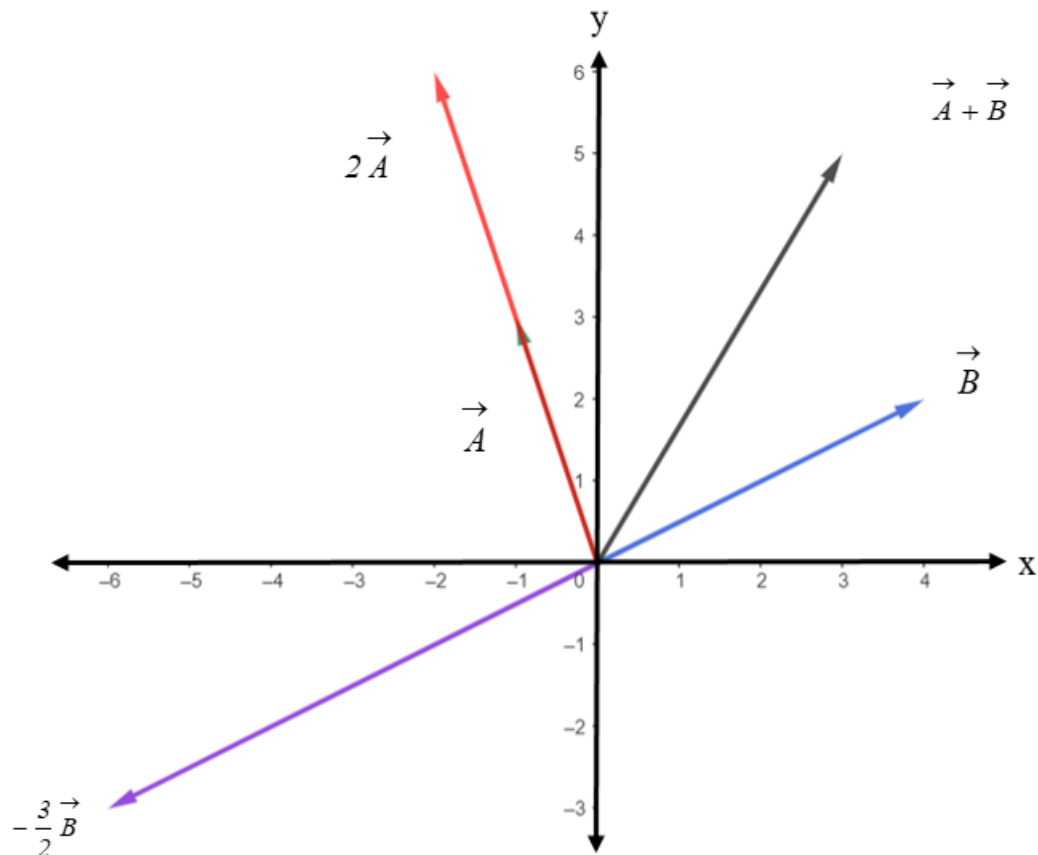
c) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

$$2\vec{A} + 3\vec{B} = 2\langle -1, 3 \rangle + 3\langle 4, 2 \rangle = \langle -2, 6 \rangle + \langle 12, 6 \rangle = \langle 10, 12 \rangle$$

d) $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle -1, 3 \rangle - \langle 4, 2 \rangle = \langle -5, 1 \rangle$$

e) Trazar los vectores de posición $\vec{A}$, $\vec{B}$, $2\vec{A}$, $\vec{A} + \vec{B}$ y $-\frac{3}{2}\vec{B}$.



Actividad 1.2: Determine la magnitud de los siguientes vectores.

a) $\vec{B} = \langle 8, 3 \rangle$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$$

b) $\vec{C} = \langle 5, \sqrt{2} \rangle$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{(5)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

c) $\vec{E} = \langle 2, 4, 3 \rangle$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29} \quad R_3 \text{ terna ordenada (x, y, z)}$$

Actividad 1.3: Dados los vectores: $\vec{A} = \langle 5, -4 \rangle$, $\vec{B} = \langle -3, 2 \rangle$, $\vec{N} = \langle 3, -2 \rangle$ y

$\vec{R} = \langle 4, -1 \rangle$, realice las operaciones:

a) $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle$$

b) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

$$2\vec{A} + 3\vec{B} = 2\langle 5, -4 \rangle + 3\langle -3, 2 \rangle = \langle 10, -8 \rangle + \langle -9, 6 \rangle = \langle 1, -2 \rangle$$

c) $\vec{N} - \vec{R}$

$$\vec{N} - \vec{R} = \langle 3, -2 \rangle - \langle 4, -1 \rangle = \langle -1, -1 \rangle$$

Actividad 1.4: Determinar la suma o resultante de forma analítica y gráfica.

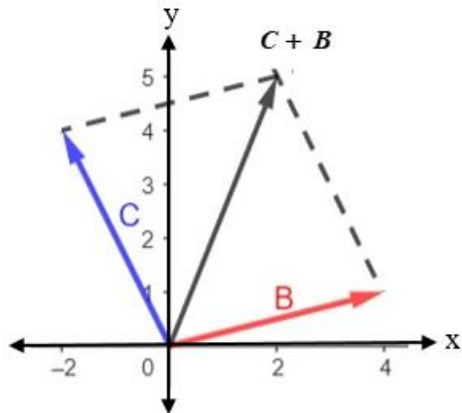
a) $\vec{C} = \langle -2, 4 \rangle$, $\vec{B} = \langle 4, 1 \rangle$

Forma analítica

$$\vec{C} + \vec{B} = \langle -2, 4 \rangle + \langle 4, 1 \rangle$$

$$\vec{C} + \vec{B} = \langle 2, 5 \rangle$$

Forma gráfica (método del paralelogramo)



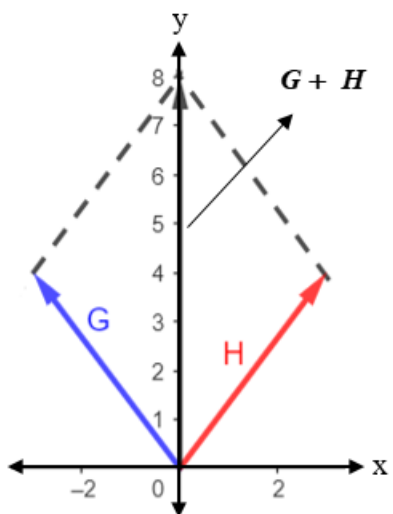
b) $\vec{G} = \langle -3, 4 \rangle$, $\vec{H} = \langle 3, 4 \rangle$

Forma analítica

$$\vec{G} + \vec{H} = \langle -3, 4 \rangle + \langle 3, 4 \rangle$$

$$\vec{G} + \vec{H} = \langle 0, 8 \rangle$$

Forma gráfica (método del paralelogramo)



Actividad 1.5: Se tiene $\vec{A} = 5\hat{i} + \hat{j}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - 7\hat{j}$. Expresar $3\vec{A} - 2\vec{B}$ como una combinación lineal de los vectores canónicos (Swokowski, 1989).

$$3\vec{A} - 2\vec{B} = 3(5\hat{i} + \hat{j}) - 2(4\hat{i} - 7\hat{j})$$

$$3\vec{A} - 2\vec{B} = 15\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{i} + 14\hat{j}$$

$$3\vec{A} - 2\vec{B} = 7\hat{i} + 17\hat{j} = \langle 7, 17 \rangle$$

Actividad 1.6: Encontrar un vector unitario $\vec{U}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{r} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$.

$$\left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{(4)(5)} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}}{\left\| \vec{r} \right\|}$$

$$\vec{U} = \frac{2\hat{i} + 4\hat{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{4}{2\sqrt{5}}\hat{j} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

Racionalizando:

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

$$\vec{U} = \frac{\sqrt{5}}{5}\hat{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\hat{j}$$

Actividad 1.7: Sea el vector $\vec{a} = 8\hat{i} + 15\hat{j}$. Encontrar un vector unitario $\vec{U}$ que tenga:

a) La misma dirección del vector $\vec{a}$.

b) Dirección opuesta al vector $\vec{a}$.

$$\text{a) } \vec{U} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \vec{U} = \frac{8}{17}\hat{i} + \frac{15}{17}\hat{j}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{-a}\| = 17$$

$$\text{b) } \vec{U} = \frac{-\vec{a}}{\|\vec{-a}\|} \quad \vec{U} = -\frac{8}{17}\hat{i} - \frac{15}{17}\hat{j}$$

Actividad 1.8: Un vector $\vec{a}$ tiene una componente “x” positiva de 4 unidades y una

componente “y” negativa de 2 unidades, ¿Qué vector $\vec{d}$ al sumarse a $\vec{a}$ producirá un

vector resultante cuya magnitud sea el triple de la de $\vec{a}$ y esté dirigido en dirección “y” positiva?

$$\vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{d} + \vec{a} = 3 \|\vec{a}\| \hat{j}$$

$$\vec{d} = 3 \|\vec{a}\| \hat{j} - \vec{a}$$

$$\vec{d} = 3(2\sqrt{5})\hat{j} - 4\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{d} = -4\hat{i} + (6\sqrt{5} + 2)\hat{j}$$

$$\vec{d} = -4\hat{i} + 15.41\hat{j}$$

Actividad 1.9: Calcular el producto escalar $\vec{b} \cdot \langle \vec{a} - \vec{c} \rangle$ si $\vec{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$,

$$\vec{b} = \langle 7, 4, 5 \rangle \text{ y } \vec{c} = \langle 1, -5, 2 \rangle.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 7, 4, 5 \rangle \cdot [\langle -2, 3, 1 \rangle - \langle 1, -5, 2 \rangle]$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 7, 4, 5 \rangle \cdot \langle -3, 8, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -21 + 32 - 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

Actividad 1.10: Determine el ángulo entre los vectores: $\vec{M} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y

$$\vec{N} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}.$$

$$\left\| \vec{M} \right\| = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\left\| \vec{N} \right\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = \langle 4, -3, 1 \rangle \cdot \langle -1, -2, 2 \rangle = -4 + 6 + 2 = 4$$

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = \|\vec{M}\| \|\vec{N}\| \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{\|\vec{M}\| \|\vec{N}\|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{26}} \right) = 74.84^\circ$$

Actividad 1.11: Demostrar que los pares de vectores $\vec{a} = 3\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}$ y

$\vec{b} = 10\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ son ortogonales.

Si son ortogonales el producto escalar entre ellos debe ser cero.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 3, -7, 2 \rangle \cdot \langle 10, 4, -1 \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 30 - 28 - 2 = 30 - 30 = 0 \therefore \text{son } \perp$$

Actividad 1.12: Dados los vectores $\vec{A} = -5\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$. Determinar La

proyección vectorial de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

La proyección vectorial de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ se determina por:

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} \cdot \vec{U}_{\vec{A}} = \text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} \cdot \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

En la Actividad 1.13 del aula de clase se obtuvo la proyección escalar de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$:

$$\text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{\langle 4, 2 \rangle \cdot \langle -5, 1 \rangle}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{-20 + 2}{\sqrt{26}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

Sustituyendo ese valor en la expresión para la proyección vectorial de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} \cdot \vec{U}_{\vec{A}} = \text{Comp}_{\vec{A}} \vec{B} \cdot \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{-18}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\langle -5, 1 \rangle}{\sqrt{26}} = \left\langle \frac{90}{\sqrt{26} \sqrt{26}}, \frac{-18}{\sqrt{26} \sqrt{26}} \right\rangle = \left\langle \frac{90}{26}, \frac{-18}{26} \right\rangle$$

$$\text{Proy}_{\vec{A}} \vec{B} = \left\langle \frac{45}{13}, \frac{-9}{13} \right\rangle$$

Actividad 1.13: Obtenga el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -40 - 1 - 12 - (15 + 4 - 8) = -64$$

Actividad 1.14: Sea $\vec{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$. Obtenga: B) $\vec{b} \times \vec{a}$

(Swokowski, 1989).

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = 30\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (10\hat{k} - \hat{i} - 18\hat{j})$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = 30\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - 10\hat{k} + \hat{i} + 18\hat{j}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = 31\hat{i} + 20\hat{j} - 7\hat{k}$$

Actividad 1.15: Dados los vectores $\vec{a} = \langle 1, -2, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 1, -1 \rangle$, $\vec{c} = \langle 1, 3, -2 \rangle$.

Hallar el triple producto vectorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 5 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k} - (-4\hat{k} - 3\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k} + 4\hat{k} + 3\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = 10\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k} - (-5\hat{k} + 15\hat{i} - 10\hat{j})$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = 10\hat{i} + 5\hat{j} + 15\hat{k} - 5\hat{k} - 15\hat{i} + 10\hat{j}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{c} = -5\hat{i} + 15\hat{j} + 20\hat{k}$$

Actividad 1.16: Encontrar la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por $P_1(3, 1, -2)$ y $P_2(-2, 7, -4)$ (Swokowski, 1989).

$$\vec{P_1P_2} = \langle -5, 6, -2 \rangle$$

$$x = 3 - 5t$$

$$y = 1 + 6t$$

$$z = -2 - 2t$$

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+2}{-2} \quad \text{Forma simétrica de la recta}$$

Actividad 1.17: Encuentre el ángulo entre las dos rectas que tienen ecuaciones paramétricas:

Recta 1 $x = 7 - 2t$ $y = 4 + 3t$ $z = 5t$

Recta 2 $x = -1 + v$ $y = 3 + 4v$ $z = 1 + v$

De ecuaciones paramétricas de recta 1 se tiene: $\vec{a} = \langle -2, 3, 5 \rangle$ y de recta 2 se tiene que

$$\vec{b} = \langle 1, 4, 1 \rangle$$

Si el producto escalar es: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 12 + 5 = 15$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{15}{\sqrt{38} \sqrt{18}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{15}{\sqrt{38(18)}} \right) = 55^\circ$$

Actividad 1.18: Trazar la gráfica de la ecuación del plano $2x + 3y + 4z = 12$

(Swokowski, 1989).

Primero obtener los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados:

Sustituyendo x, y, z por “cero” en la ecuación del plano se obtiene:

Si: $y = z = 0$

$z = x = 0$

$y = x = 0$

Se obtiene:

x

y

z

$2x + 3y + 4z = 12$

$2x + 3y + 4z = 12$

$2x + 3y + 4z = 12$

$2x = 12$

$3y = 12$

$4z = 12$

$x = 6$

$y = 4$

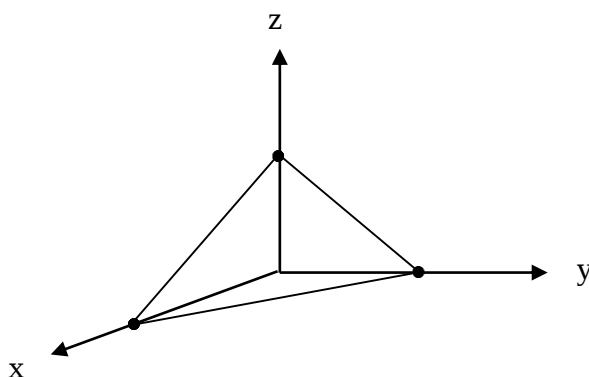
$z = 3$

$P_x(6, 0, 0)$

$P_y(0, 4, 0)$

$P_z(0, 0, 3)$

Graficando:



Actividad 1.19: Dos fuerzas de 200 lb y 250 lb forman un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ entre sí y

están aplicadas a un objeto en el mismo punto. Determine:

- La intensidad o magnitud de la fuerza resultante
- El ángulo que forma la resultante con la fuerza de 200lb (Leithold, 1998).

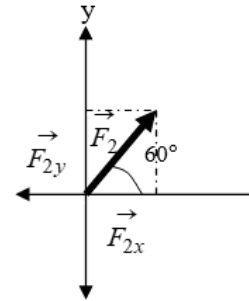
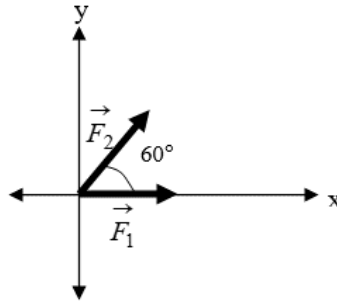
Datos:

$$\|\vec{F}_1\| = 200 \text{ lb}$$

$$\|\vec{F}_2\| = 250 \text{ lb}$$

a) $\|\vec{R}\| = ?$

b) Ángulo entre $\vec{R}$ y $\vec{F}_1 = ?$



De gráfica se observa

$$\vec{F}_1 = \langle 200, 0 \rangle$$

Componente en x

$$\cos(60) = \frac{\vec{F}_{2x}}{250}$$

a) La resultante es el vector suma de fuerzas:

$$\vec{F}_{2x} = 250 \cos(60) = 125$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = \langle 200, 0 \rangle + \langle 125, 216.5 \rangle$$

Componente en y

$$\sin(60) = \frac{\vec{F}_{2y}}{250}$$

$$\vec{R} = \langle 325, 216.5 \rangle$$

La magnitud de la resultante

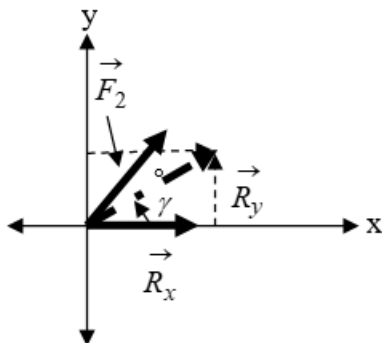
$$\vec{F}_{2y} = 250 \sin(60) = 216.5$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(325)^2 + (216.5)^2}$$

$$\vec{F}_2 = \langle 125, 216.5 \rangle$$

$$\|\vec{R}\| = 390.5 \text{ lb}$$

b) El ángulo entre la fuerza de 200 lb y la resultante



$$\tan \gamma = \frac{\vec{R}_y}{\vec{R}_x}, \quad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{216.5}{325}\right) = 33.6^\circ$$

El ángulo buscado es: 33.6°

Actividad 1.20: Obtenga el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F} = \langle 2, 4 \rangle$

sobre un bloque que se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que la magnitud de la fuerza se mide en libras y la de la distancia se mide en pies (Zill y Wright, 2011).

La distancia o desplazamiento del bloque está dado por:

$$d = \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = \langle 4, 6 \rangle - \langle 1, 1 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$$

Entonces por definición el trabajo realizado es:

$$W = \vec{F} \cdot d = \vec{F} \cdot \vec{OP}$$

$$W = \langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, 5 \rangle$$

$$W = 6 + 20$$

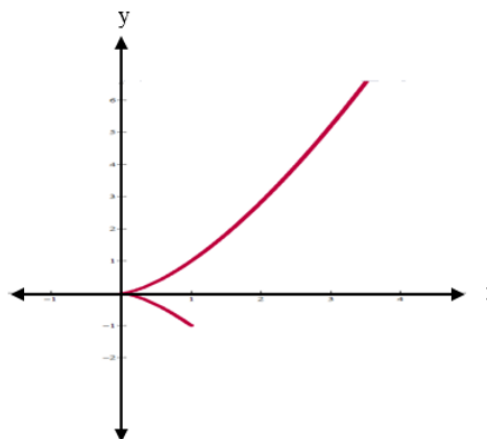
$$W = 26 \text{ lb-pie}$$

2. Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Actividad 2.1: Grafique la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas se indican.

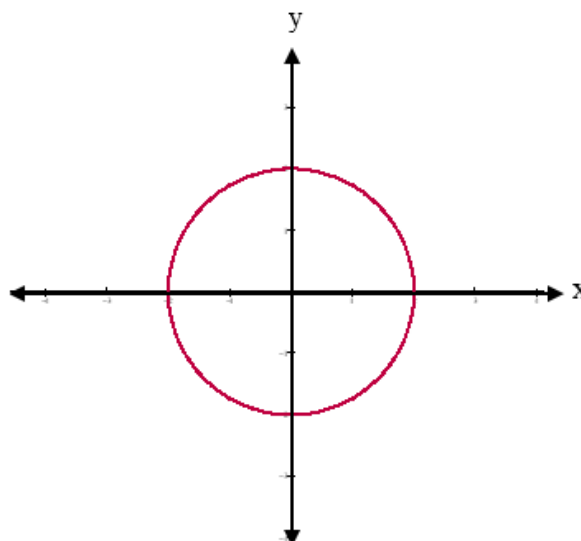
a) $x = t^2$, $y = t^3$ en el intervalo de $[-1, 2]$ (Swokowski, 1989; Zill y Wright, 2011).

t	-1	-0.5	0	1	1.5	2
$f(t)$	1	0.25	0	1	2.25	4
$g(t)$	-1	-0.125	0	1	3.37	8



b) $x = 2 \cos(t)$, $y = 2 \sin(t)$ en el intervalo de $[0, 2\pi]$ (Leithold, 1998).

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	2	0	-2	0	2
$g(t)$	0	2	0	-2	0



Actividad 2.2: Determine la derivada $\frac{dy}{dx}$ e indique para que valores de t existe la

derivada.

a) $x = t^2 + 1$, $y = t^3$ (Stewart, 2018).

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

Sustituyendo las derivadas en 2.1: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{df}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \quad \text{La derivada existe para todos los números reales.}$$

b) $x = t e^t$, $y = t + \text{sen}(t)$ (Stewart, 2018).

$$\frac{dx}{dt} = t \frac{d}{dt} e^t + e^t \frac{d}{dt} t = t e^t + e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} t + \frac{d}{dt} \text{sen}(t) = 1 + \cos(t)$$

Sustituyendo las derivadas en 2.1: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{df}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \cos(t)}{t e^t + e^t} = \frac{1 + \cos(t)}{e^t (t + 1)}$$

La derivada existe para todos los números reales, $t \neq -1$.

Actividad 2.3: Encuentre la pendiente y la ecuación de una recta tangente al punto P para el parámetro t indicado (Zill y Wright, 2011).

Dado: $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$, el punto P correspondiente a $t = 1$.

Evaluando x, y en el parámetro $t = 1$ se obtiene el punto P (- 5, - 4)

Con 2.2 se obtiene la pendiente: $m = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

$$f(t) = t^2 - 4t - 2 \qquad g(t) = t^5 - 4t^3 - 1$$

$$f'(t) = 2t - 4 \qquad g'(t) = 5t^4 - 12t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5t^4 - 12t^2}{2t - 4}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{5 - 12}{2 - 4} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = m$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente, en el punto correspondiente a $t = 1$ se obtiene con 2.3:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = \frac{7}{2} \quad P(-5, -4)$$

$$y + 4 = \frac{7}{2} (x + 5)$$

$$y = \frac{7}{2} x + \frac{35}{2} - 4$$

$$y = \frac{7}{2} x + \frac{27}{2}$$

Actividad 2.4: Determine el área bajo la curva que tiene las ecuaciones

paramétricas:

a) $x = t^2$, $y = t^3$ en el intervalo $[0, 2]$ (Leithold, 1998).

$f(t) = x = t^2$, $g(t) = y = t^3$ se cumple que $f(a) < f(b)$

$$f'(t) = 2t$$

Sustituyendo en 2.4 para encontrar el área bajo la curva $A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$

$$A = 2 \int_0^2 t^3 t dt = 2 \int_0^2 t^4 dt = \left. \frac{2t^5}{5} \right|_0^2 = \frac{2}{5}(2^5 - 0) = \frac{2}{5}(32) = \frac{64}{5}$$

b) $x = 1 - e^t$, $y = 2t + 1$ en el intervalo $[0, 1]$ (Edwards y Penney, 2008).

$f(t) = 1 - e^t$, $g(t) = 2t + 1$ se cumple que $f(a) < f(b)$

$$f'(t) = -e^t$$

Sustituyendo en 2.4 para encontrar el área bajo la curva $A = \int_a^b g(t) f'(t) dt$

$$A = - \int_0^1 (2t + 1)e^t dt = - \int_0^1 (2t e^t + e^t) dt = - 2 \int_0^1 t e^t dt - \int_0^1 e^t dt$$

Resolviendo la primera integral $\int_0^1 t e^t dt$ por partes:

$$U = t \quad dv = e^t dt$$

$$dU = dt \quad \int dv = \int e^t dt$$

$$v = e^t$$

$$\int_0^1 t e^t dt = t e^t - \int_0^1 e^t dt = t e^t - e^t \Big|_0^1 = (e^1 - 0) - (e^1 - e^0) = e^1 - e^1 + e^0 = 1$$

Resolviendo la segunda integral $\int_0^1 e^t dt$ directa:

$$\int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Sustituyendo los resultados de ambas integrales en A:

$$A = -2 \int_0^1 t e^t dt - \int_0^1 e^t dt = -2(1) - (e - 1) = -2 - e + 1 = -1 - e = -(1 + e)$$

Actividad 2.5: Determine la longitud de arco de la curva parametrizada en cada inciso.

a) $x(t) = 3e^{2t}$, $y(t) = -4e^{2t}$, en el intervalo de $[0, \ln 5]$ (Leithold, 1998).

$$f(t) = x(t) = 3e^{2t}$$

$$g(t) = y(t) = -4e^{2t}$$

$$f'(t) = 6e^{2t}$$

$$g'(t) = -8e^{2t}$$

Sustituyendo en 2.5 para determinar $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

$$L = \int_0^{\ln 5} \sqrt{(6e^{2t})^2 + (-8e^{2t})^2} dt = \int_0^{\ln 5} \sqrt{36e^{4t} + 64e^{4t}} dt = \int_0^{\ln 5} \sqrt{100e^{4t}} dt$$

$$L = 10 \int_0^{\ln 5} \sqrt{e^{4t}} dt = 10 \int_0^{\ln 5} (e^{4t})^{\frac{1}{2}} dt = 10 \int_0^{\ln 5} e^{2t} dt = \frac{10}{2} \int_0^{2\ln 5} e^R dR = 5e^R \Big|_0^{2\ln 5}$$

Realizando cambio de variable

$$R = 2t \quad R_i = 2(0) = 0$$

$$dR = 2dt \quad R_s = 2\ln 5$$

$$\frac{dR}{2} = dt$$

$$L = 5(e^{2\ln 5} - e^0) = 5(e^{\ln 5^2} - 1) = 5(25 - 1) = 5(24)$$

$$L = 120$$

b) $x(t) = t^3$, $y(t) = 2t^2$, en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ (Leithold, 1998).

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = 2t^2$$

$$f'(t) = 3t^2 \quad g'(t) = 4t$$

Sustituyendo en 2.5 para determinar $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(3t^2)^2 + (4t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(9t^2 + 16)} dt = \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 16} dt$$

$$L = \frac{1}{18} \int_{16}^{25} U^{\frac{1}{2}} dU = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} U^{\frac{3}{2}} \Big|_{16}^{25} = \frac{1}{27} \left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{27} (125 - 64)$$

$$U = 9t^2 + 16 \quad U_i = 9(0)^2 + 16 = 16$$

$$dU = 18t \, dt \quad U_s = 9(1)^2 + 16 = 25$$

$$\frac{dU}{18} = t \, dt$$

$$L = \frac{61}{27}$$

Actividad 2.6: Convierta el punto dado a coordenada polar, cilíndrica, esférica o rectangular según sea el caso.

a) $P(-2\sqrt{3}, -2)$ ubicando el punto en el plano, está en el cuarto cuadrante
 $x = -2\sqrt{3} \quad y = -2$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{2}{2\sqrt{3}} \right| \quad \alpha = \arctan \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{(4)(3) + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Por lo tanto: } P(-2\sqrt{3}, -2) = P\left(4, \frac{7}{6}\pi\right)$$

b) $P(-1, 3)$ ubicando el punto en el plano, está en el segundo cuadrante $x = -1$ $y = 3$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = |3| \quad \alpha = \arctan|3| = 71.56^\circ = 0.3975\pi$$

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - 0.3975\pi = 0.6025\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Por lo tanto: } P(-1, 3) = P(\sqrt{10}, 0.6025\pi) = P(\sqrt{10}, 108.43^\circ)$$

c) $P\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ $r = -1$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

Con ecuación 2.6 y 2.7:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

$$x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = -0.7071 \quad y = -0.7071$$

$$\text{Por lo tanto: } P\left(-1, \frac{\pi}{4}\right) = P(-0.7071, -0.7071) = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d) $P(-2, -2\sqrt{3})$ ubicando el punto en el plano, está en el tercer cuadrante $x = -2$ $y = -2\sqrt{3}$

Se determina el ángulo auxiliar α , medido desde el eje x al segmento dirigido del origen al punto dado.

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{2\sqrt{3}}{2} \right| \quad \alpha = \arctan|\sqrt{3}| = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Para encontrar la distancia polar se utiliza ecuación 2.9: si $r^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4(3)} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Por lo tanto: } P(-2, -2\sqrt{3}) = P\left(4, \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\text{e) } P\left(6, \frac{\pi}{6}, 4\right) \quad r=6 \quad \theta=\frac{\pi}{6} \quad z=4$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \cos(\phi) = \frac{z}{\rho}$$

$$\begin{array}{llll} x = r \cos(\theta) & y = r \sin(\theta) & \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) \\ x = 6 \cos(30) & y = 6 \sin(30) & \rho = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2 + (4)^2} & \phi = \arccos\left(\frac{4}{2\sqrt{13}}\right) \\ x = 5.196 & y = 3.4 & \rho = \sqrt{52} = \sqrt{4(13)} = 2\sqrt{13} & \phi = 56.30^\circ = 0.3128\pi \end{array}$$

$$\text{Por lo tanto: } P\left(6, \frac{\pi}{6}, 4\right) = P(5.196, 3.4, 4) = P\left(2\sqrt{13}, \frac{\pi}{6}, 0.3128\pi\right)$$

Actividad 2.7: Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar o cilíndrica indicada.

a) $z = 4r^2$ (Leithold, 1998).

$$z = 4(x^2 + y^2)$$

$$4x^2 + 4y^2 - z = 0$$

b) $r^2 = 4 \operatorname{sen}(2\theta)$ (Leithold, 1998).

Se tiene la identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)$

$$r^2 = 4[2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)]$$

$$r^2 = 8 \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right)$$

$$r^2 = \frac{8yx}{r^2}$$

$$(r^2)^2 = 8yx$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8yx$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 8yx = 0$$

c) $x^2 + y^2 = 8x$ (Zill y Wright, 2011).

Sustituyendo ecuaciones:

$$r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = 8r \cos(\theta)$$

$$r^2 [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] = 8r \cos(\theta) \quad \text{Identidad trigonométrica: } \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$

$$r^2 = 8r \cos(\theta)$$

$$r^2 - 8r \cos(\theta) = 0$$

$$r[r - 8 \cos(\theta)] = 0$$

3. Funciones vectoriales de una variable real

Actividad 3.1: Sea $\vec{R}(t) = \sqrt{t-2} \hat{i} + \frac{1}{t-3} \hat{j} + \ln(t) \hat{k}$. Determine el dominio D

de la función vectorial (Leithold, 1998).

El dominio de $\vec{R}(t)$ es el conjunto de valores de t para los cuales $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ están definidos, es decir, el dominio son todos los valores de t que satisfacen a todas las componentes de la función vectorial.

Determinado el D de cada componente de $\vec{R}(t)$:

$f(t)$	$g(t)$	$h(t)$
$t-2 \geq 0$	$t \neq 3$	$t > 0$
$t \geq 2$		

Por lo tanto, el dominio D que satisface a todas las funciones es: $t \geq 2, t \neq 3$

También puede expresarse como: $[2, 3) \cup (3, \infty)$.

Actividad 3.2: Obtenga el límite de las funciones vectoriales siguientes:

a) $\lim_{t \rightarrow -1} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{t^2-1}{t+1} \hat{i} + \frac{t+1}{t-1} \hat{j}$ (Leithold, 1998).

$$\lim_{t \rightarrow -1} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2-1}{t+1} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+1}{t-1} \right] \hat{j}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow -1} \frac{(t+1)(t-1)}{t+1} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+1}{t-1} \right] \hat{j}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow -1} (t-1) \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+1}{t-1} \right] \hat{j}$$

Aplicando el proceso a límite de la función vectorial

$$\lim_{t \rightarrow -1} \vec{R}(t) = -2\hat{i} = \langle -2, 0, 0 \rangle$$

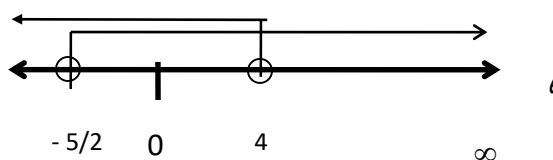
b) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ si $\vec{R}(t) = \frac{\cos t}{t} \hat{i} + \frac{\tan t}{\sin 2t} \hat{j} + \frac{\sin 3t}{\sin 5t} \hat{k}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{t} \right] \hat{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{\sin 2t} \right] \hat{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{\sin 5t} \right] \hat{k}$$

Se observa que al tomar límite en la componente 1 este no existe, y hay indeterminación en los componentes 2 y 3 de la función vectorial, pero como el límite de la componente 1 no está definido entonces, se dice: $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{R}(t)$ No existe .

Actividad 3.3: indique para que valores de t la función $\vec{R}(t)$ es continua.

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+5}} \hat{i} - \ln(4-t) \hat{j}$$



$$\begin{array}{ll} 2t+5 > 0 & 4-t > 0 \\ t > \frac{-5}{2} & -t > -4 \\ & t < 4 \end{array}$$

Por lo tanto, la función vectorial es continua en $\left(\frac{-5}{2}, 4 \right)$

Actividad 3.4: Dada la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = [\cos(5t)]\hat{i} + \frac{1}{e^{4t}}\hat{j} + (7t+1)\hat{k} = [\cos(5t)]\hat{i} + e^{-4t}\hat{j} + (7t+1)\hat{k}$$

Determine en cada inciso:

i) Dominio de $\vec{r}(t)$.

ii) $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ y su dominio.

Solución:

i) D: $\mathbb{R}$

ii) $\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -5\sin(5t+1)\hat{i} - 4e^{-4t}\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -5\sin(5t+1)\hat{i} - \frac{4}{e^{4t}}\hat{j} + 7\hat{k} \quad \text{D: } (-\infty, \infty)$$

Actividad 3.5: Antiderive las funciones vectoriales.

a) $\int \vec{R}(t) dt$ si $\vec{R}(t) = e^{-\frac{t}{3}}\hat{i} + \cos(5t)\hat{j} + \frac{1}{t}\hat{k}$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int e^{-\frac{t}{3}} dt \right] \hat{i} + \left[\int \cos(5t) dt \right] \hat{j} + \left[\int \frac{1}{t} dt \right] \hat{k}$$

$$u = \frac{-t}{3}$$

$$du = \frac{-1}{3} dt$$

$$-3du = dt$$

$$w = 5t$$

$$dw = 5dt$$

$$\frac{dw}{5} = dt$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[-3 \int e^u du \right] \hat{i} + \left[\frac{1}{5} \int \cos(w) dw \right] \hat{j} + \left[\int \frac{1}{t} dt \right] \hat{k}$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left(-3e^{\frac{-t}{3}} + C_1 \right) \hat{i} + \left[\frac{1}{5} \sin(5t) + C_2 \right] \hat{j} + [\ln(t) + C_3] \hat{k}$$

b) $\int \vec{R}(t) dt$ si $\vec{R}(t) = (3t+2) \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \hat{j} + \frac{5}{\cos(2t)} \hat{k}$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int (3t+2) dt \right] \hat{i} + \left[\int \frac{1}{\sqrt{4t+1}} dt \right] \hat{j} + \left[\int \frac{5}{\cos(2t)} dt \right] \hat{k}$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int (3t+2) dt \right] \hat{i} + \left[\int (4t+1)^{-\frac{1}{2}} dt \right] \hat{j} + \left[5 \int \sec(2t) dt \right] \hat{k}$$

$$u = 4t+1$$

$$w = 2t$$

$$du = 4dt$$

$$dw = 2dt$$

$$\frac{du}{4} = dt$$

$$\frac{dw}{2} = dt$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int (3t+2) dt \right] \hat{i} + \left[\frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du \right] \hat{j} + \left[\frac{5}{2} \int \sec(w) dw \right] \hat{k}$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \right) \hat{j} + \left[\frac{5}{2} \ln |\sec(w) + \tan(w)| \right] \hat{k} + (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k})$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t \right) \hat{i} + \frac{1}{2} \sqrt{4t+1} \hat{j} + \frac{5}{2} \ln |\sec(2t) + \tan(2t)| \hat{k} + (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k})$$

$$c) \int \vec{R}(t) dt \quad \text{si } \vec{R}(t) = \cos^2(3t) \hat{i} + \ln(t) \hat{j}$$

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\int \cos^2(3t) dt \right] \hat{i} + \left[\int \ln(t) dt \right] \hat{j} \dots\dots\dots A$$

La primera integral de A se resuelve con la identidad trigonométrica:

$\cos^2(3t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6t)$ y la segunda integral de A con la técnica de integración por partes.

$$\int \cos^2(3t) dt = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6t) \right] dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos(6t) dt$$

$$u = 6t$$

$$du = 6dt$$

$$\frac{du}{6} = dt$$

$$\int \cos^2(3t) dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int \cos(u) du = \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \sin(6t)$$

$$\int \ln(t) dt = t \ln(t) - \int t \cdot \frac{dt}{t} = t \ln(t) - \int dt = t \ln(t) - t$$

$$u = \ln(t) \quad dv = dt$$

$$du = \frac{1}{t} dt \quad v = t$$

Sustituyendo en A

$$\int \vec{R}(t) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{12} \sin(6t) \right] \hat{i} + [t \ln(t) - t] \hat{j} + (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k})$$

Actividad 3.6: Encontrar la longitud de arco si $\vec{R}(t) = e^t \sin(t) \hat{i} + e^t \cos(t) \hat{j}$ si t

se incrementa de 1 a 4 (Leithold, 1998).

Resolviendo con ecuación 3. 8:
$$L = \int_a^b \left\| \vec{R}'(t) \right\| dt$$

Derivando la función vectorial $\vec{R}(t) = e^t \sin(t) \hat{i} + e^t \cos(t) \hat{j}$:

$$\vec{R}'(t) = \left[e^t \cos(t) + e^t \sin(t) \right] \hat{i} + \left[e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \right] \hat{j}$$

$$\left\| \vec{R}'(t) \right\| = \sqrt{\left[e^t \cos(t) + e^t \sin(t) \right]^2 + \left[e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \right]^2}$$

$$\left\| \vec{R}'(t) \right\| = \sqrt{e^{2t} \cos^2(t) + 2e^{2t} \cos(t)\sin(t) + e^{2t} \sin^2(t) + e^{2t} \cos^2(t) - 2e^{2t} \cos(t)\sin(t) + e^{2t} \sin^2(t)}$$

$$\left\| \vec{R}'(t) \right\| = \sqrt{e^{2t} \cos^2(t) + e^{2t} \sin^2(t) + e^{2t} \cos^2(t) + e^{2t} \sin^2(t)}$$

$$\left\| \vec{R}'(t) \right\| = \sqrt{e^{2t} \left[\cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) \right]}$$

$$\left\| \vec{R}'(t) \right\| = \sqrt{e^{2t} (1+1)} = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2} \left(e^{2t} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} e^t$$

Sustituyendo en 3.8:
$$L = \int_a^b \left\| \vec{R}'(t) \right\| dt$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} \int_1^4 e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_1^4$$

$$L = \sqrt{2} (e^4 - e)$$

Actividad 3.7: Hallar el vector normal principal unitario para el círculo dado por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j}.$$

El vector tangente unitario se obtiene con 3.9: $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$

$$\vec{r}'(t) = -2\sin(t)\hat{i} + 2\cos(t)\hat{j}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{4[\sin^2(t) + \cos^2(t)]} = \sqrt{4} = 2$$

Sustituyendo en 3.9:

$$\vec{T}(t) = \frac{-2\sin(t)\hat{i} + 2\cos(t)\hat{j}}{2} = \frac{2[-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}]}{2} = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

El vector normal principal unitario se obtiene con 3.10: $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$

Si $\vec{T}(t) = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$

$$\vec{T}'(t) = -\cos(t)\hat{i} - \sin(t)\hat{j}$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$$

Sustituyendo en 3.10: $\vec{N}(t) = -\cos(t)\hat{i} - \sin(t)\hat{j}$

Actividad 3.8: El vector de posición de una partícula que se mueve en el plano
coordinado es (Swokowski, 1989):

$$\vec{r}(t) = (t^2 + t)\hat{i} + t^3\hat{j} \text{ para } 0 \leq t \leq 2$$

a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula al tiempo t .

b) Trazar la trayectoria C de la partícula y representar geoméricamente $\vec{v}(1)$ y $\vec{a}(1)$.

a) Velocidad y aceleración

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (2t + 1)\hat{i} + 3t^2\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 2t\hat{i} + 6t\hat{j}$$

$$\vec{v}(1) = \vec{r}'(1) = 3\hat{i} + 3\hat{j} = \langle 3, 3 \rangle$$

$$\vec{a}(1) = \vec{r}''(1) = 2\hat{i} + 6\hat{j} = \langle 2, 6 \rangle$$

b) De la función vectorial $\vec{r}(t)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la curva C :

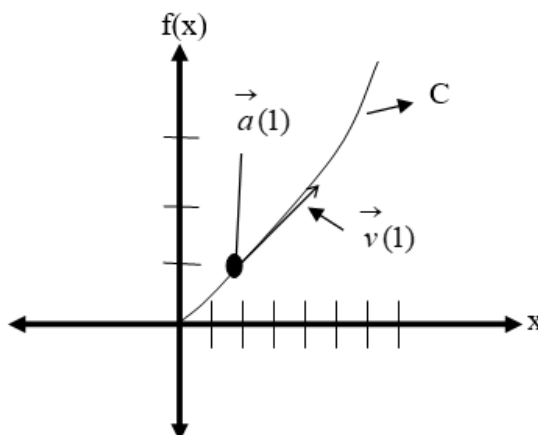
$$x = t^2 + t \quad y = t^3$$

Para graficar se dan valores de t en el intervalo dado de $0 \leq t \leq 2$:

t	0	0.5	1	1.5	2
x	0	0.8	2	3.8	6
y	0	0.1	1	3.4	8

Para $t = 1$ la partícula está en el punto $P(2, 1)$

Graficando:



Actividad 3.9: Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = e^{-t} \qquad y = 2 \cos(3t) \qquad z = 2 \operatorname{sen}(3t)$$

Siendo t el tiempo.

Hallar:

a) La velocidad y aceleración al tiempo t .

b) El módulo de la velocidad y la aceleración en el instante $t = 0$.

El vector de posición de la partícula es:

$$\vec{r}(t) = e^{-t} \hat{i} + 2 \cos(3t) \hat{j} + 2 \operatorname{sen}(3t) \hat{k}$$

a) Velocidad y aceleración al tiempo t

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -e^{-t} \hat{i} - 6 \operatorname{sen}(3t) \hat{j} + 6 \cos(3t) \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = e^{-t} \hat{i} - 18 \cos(3t) \hat{j} - 18 \operatorname{sen}(3t) \hat{k}$$

b) Módulo o magnitud de la velocidad y aceleración para $t = 0$.

$$\vec{v}(0) = \vec{r}'(0) = \hat{i} + 6 \hat{k} = \langle 1, 0, 6 \rangle \qquad \vec{a}(0) = \vec{r}''(0) = \hat{i} - 18 \hat{j} = \langle 1, -18, 0 \rangle$$

$$\left\| \vec{v}(0) \right\| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$\left\| \vec{a}(0) \right\| = \sqrt{1+324} = \sqrt{325} = \sqrt{(25)(13)} = 5 \sqrt{13}$$

Actividad 3.10: Un proyectil es lanzado de un arma en un ángulo de elevación de $\frac{\pi}{6}$

radianes. Su velocidad inicial es 480 ft/s (Leithold, 1998).

ENCONTRAR:

a) El vector de posición del proyectil en cualquier tiempo.

b) El tiempo de recorrido (cuando el proyectil cae).

- c) El alcance del proyectil
- d) La altura máxima.
- e) El vector velocidad del proyectil en el impacto.
- f) La magnitud de la velocidad al impacto

Datos:

$$\theta = 30^\circ$$

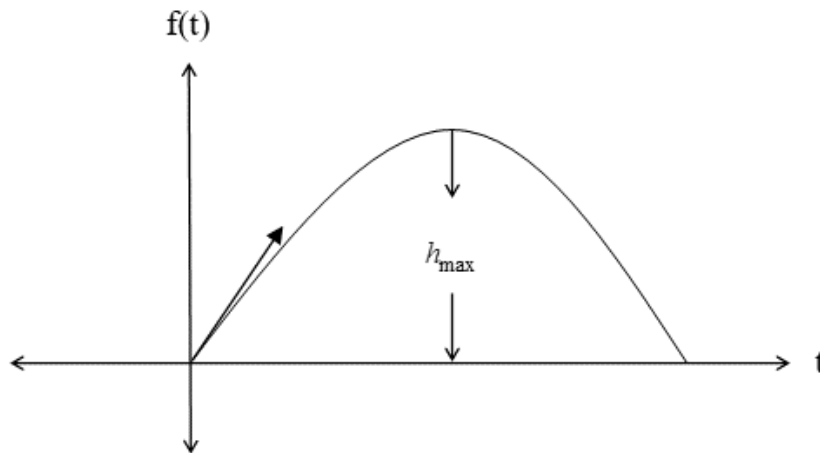
$$V_0 = 480 \text{ ft/s}$$

$$\vec{r}(t) = ?$$

$$t \text{ alcance} = ?$$

$$x = ?$$

$$h_{\dots} = ?$$



a) Con ecuación 3.13 se plantea la función vectorial:

$$\vec{r}(t) = [V_0 t \cos(\theta)] \hat{i} + \left[h + V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j}$$

Sustituyendo los datos en 3.13:

$$\vec{r}(t) = [480 t \cos(30^\circ)] \hat{i} + \left[480 t \sin(30^\circ) - \frac{1}{2} (32) t^2 \right] \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = 415.69 t \hat{i} + (240 t - 16 t^2) \hat{j}$$

De la función vectorial se tienen las ecuaciones paramétricas:

Componente en x

$$x = 415.69 t$$

Componente en y

$$y = 240 t - 16 t^2$$

b) El tiempo de recorrido (cuando el proyectil cae $y = 0$)

$$0 = 240t - 16t^2$$

$$0 = t(240 - 16t)$$

$$t = 0 \quad 240 - 16t = 0$$

$$-16t = -240$$

$$t = \frac{-240}{-16}$$

$$t = 15 \text{ s}$$

O bien puede determinarse el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima

$$y = 240t - 16t^2$$

$$0 = y' = 240 - 32t$$

Despejando t

$$32t = 240$$

$$t = \frac{240}{32}$$

$t = 7.5 \text{ s}$ tiempo que tarda en caer el proyectil

c) El alcance del proyectil (x)

$$x = 415.69t$$

$$x = 415.69(15)$$

$$x = 6235.35 \text{ ft}$$

$$d) \quad h_{\max} = y = 240 t - 16 t^2$$

$$h_{\max} = 240 (7.5) - 16 (7.5)^2$$

$$h_{\max} = 900 \text{ ft}$$

$$e) \quad t = 15 \text{ seg.}$$

$$\vec{v}(15) = ?$$

$$\vec{r}(t) = 415.69 t \hat{i} + (240 t - 16 t^2) \hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 415.69 \hat{i} + (240 - 32 t) \hat{j}$$

$$\vec{v}(15) = \vec{r}'(15) = 415.69 \hat{i} + [240 - 32(15)] \hat{j}$$

$$\vec{v}(15) = \vec{r}'(15) = 415.69 \hat{i} + [240 - 480] \hat{j}$$

$$\vec{v}(15) = \vec{r}'(15) = 415.69 \hat{i} - 240 \hat{j} = \langle 415.69, -240 \rangle$$

$$\vec{v}(15) = \langle 415.69, -240 \rangle \text{ vector velocidad al momento del impacto.}$$

$$f) \quad \left\| \vec{v}(15) \right\| = \sqrt{(415.69)^2 + (-240)^2}$$

$$\left\| \vec{v}(15) \right\| = 479.4 \frac{ft}{s}$$

4. Funciones vectoriales de una variable real

Actividad 4.1: Sea $g(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y$ evalúe $g(1, 2)$ (Stewart, 2018):

$$g(1, 2) = (1)^2 (2)^3 - (1)^3 (2)^2 + 3(1) + 2(2) = 8 - 4 + 3 + 4 = 11$$

Actividad 4.2: Demuestre que los límites indicados no existen (considere la regla de las dos trayectorias).

a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (Thomas G. B., 2010).

Trayectoria 1: Cualquier punto sobre el eje x, es decir, $P(x, 0)$ o en el eje y $P(0, y)$

En el eje x

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x, 0)} \frac{0}{x^4} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x, 0)} 0 = 0$$

En el eje y

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y)} \frac{0}{y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, y)} 0 = 0$$

Trayectoria 2: El conjunto de todos los puntos (x, y) en cualquier recta que pasa por el origen

$y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{x^2 m x}{x^4 + (mx)^2} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{m x^3}{x^2 (x^2 + m^2)} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{m x}{x^2 + m^2} = \frac{0}{m^2} = 0 \end{aligned}$$

Trayectoria 3: El conjunto de todos los puntos (x, y) en la parábola $y = x^2$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, x^2)} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{x^4}{2 x^4} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, mx)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ (Stewart, 2018).

Trayectoria 1: (x, y) tiende a (0, 0) a lo largo de cualquier recta y = mx

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{mx^3}{x^2 + m^4 x^4}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{mx^3}{x^2(1 + m^4 x^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{mx}{1 + m^4 x^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, mx)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0$$

Trayectoria 2: El conjunto de todos los puntos (x, y) en la parábola x = y²

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{y^4}{y^4 + y^4}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (y^2, y)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{1}{2}$$

Como trayectorias distintas conducen a valores límite diferentes, el límite dado no existe, o bien puede indicar que, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

Actividad 4.3: Dada la función obtenga las primeras derivadas parciales.

a) $w = \sin(x) + 3xy^5 - 5z^4 y^4 x^2 - 3xyz$

Derivando con respecto a x (manteniendo y, z constante):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y,z} = \frac{\partial \sin(x)}{\partial x} + 3y^5 \frac{\partial x}{\partial x} - 5z^4 y^4 \frac{\partial x^2}{\partial x} - 3yz \frac{\partial x}{\partial x} = \cos(x) + 3y^5 - 5z^4 y^4 \cdot 2x - 3yz$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y,z} = \cos(x) + 3y^5 - 10z^4 y^4 x - 3yz$$

Derivando con respecto a y (manteniendo x, z constante):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x,z} = 3x \frac{\partial y^5}{\partial y} - 5z^4 x^2 \frac{\partial y^4}{\partial y} - 3xz \frac{\partial y}{\partial y} = 3x(5y^4) - 5z^4 x^2(4y^3) - 3xz$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x,z} = 15xy^4 - 20z^4 x^2 y^3 - 3xz$$

Derivando con respecto a z (manteniendo x, y constante):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x,y} = -5y^4 x^2 \frac{\partial z^4}{\partial z} - 3xy \frac{\partial z}{\partial z} = -5y^4 x^2(4z^3) - 3xy$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x,y} = -20y^4 x^2 z^3 - 3xy$$

b) $f(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos(4x) \sin(6y)$

Derivando con respecto a x:

$$f_x(x, y, t) = f_x = e^{-3\pi t} \sin(6y) \frac{\partial \cos(4x)}{\partial x} = e^{-3\pi t} \sin(6y) \cdot -4 \sin(4x)$$

$$f_x(x, y, t) = f_x = -4 e^{-3\pi t} \sin(6y) \sin(4x)$$

Derivando con respecto a y:

$$f_y = e^{-3\pi t} \cos(4x) \frac{\partial \sin(6y)}{\partial y} = e^{-3\pi t} \cos(4x) \cdot 6 \cos(6y)$$

$$f_y = 6 e^{-3\pi t} \cos(4x) \cos(6y)$$

Derivando con respecto a t:

$$f_t(x, y, t) = f_t = \cos(4x) \operatorname{sen}(6y) \frac{\partial e^{-3\pi t}}{\partial t} = \cos(4x) \operatorname{sen}(6y) e^{-3\pi t} \cdot -3\pi$$

$$\boxed{f_t(x, y, t) = f_t = -3\pi e^{-3\pi t} \cos(4x) \operatorname{sen}(6y)}$$

Actividad 4.4: Dada la ecuación de Clausius $\left[P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] (v-b) = RT$

obtenga $\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T$ (Smith J. M. et al, 2020).

Despejando P de la ecuación de Clausius:

$$\left[P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] = \frac{RT}{v-b}$$

$$\boxed{P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{T(v+c)^2}}$$

Derivando con respecto a v

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = RT \cdot \frac{\partial (v-b)^{-1}}{\partial v} - \frac{a}{T} \cdot \frac{\partial (v+c)^{-2}}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = -RT(v-b)^{-2}(1) + \frac{2a(v+c)^{-3}}{T}(1)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{T(v+c)^3}}$$

Actividad 4.5: Se tiene $z = f(x, y) = x^2 - xy$. **Obtenga** Δz **para determinar el**
cambio en $f(x, y)$ **cuando** (x, y) **varía de** $(1, 1)$ **a** $(1.2, 0.7)$ (Zill y Wright, 2011).

Con ecuación 4.2

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Primero se evalúa:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - (xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

Sustituyendo en 4.2

$$\Delta z = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y - x^2 + xy$$

$$\Delta z = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

(x, y) varía de $(1, 1)$ a $(1.2, 0.7)$

Se obtiene el cambio en x y el cambio en y :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.2 - 1 = 0.2$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 0.7 - 1 = -0.3$$

Sustituyendo Δx , Δy , x y y en Δz :

$$\Delta z = 2(1)(0.2) + (0.2)^2 - (1)(-0.3) - (1)(0.2) - (0.2)(-0.3)$$

$$\Delta z = 0.6$$

Actividad 4.6: Determinar la diferencial total de la función:

$$z(x, y) = 2x \operatorname{sen}(y) - 3x^2 y^2 \text{ (Larson y Edwards, 2010).}$$

La diferencial total de $z(x, y) = 2x \operatorname{sen}(y) - 3x^2 y^2$ es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Obteniendo las derivadas parciales de z

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \operatorname{sen}(y) - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x \cos(y) - 6x^2y$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la diferencial total dz

$$dz = [2 \operatorname{sen}(y) - 6xy^2] dx + [2x \cos(y) - 6x^2y] dy$$

Actividad 4.7: Sea $u = x^2 + yz$, $x = r \operatorname{sen}(t)$, $y = r \cos(t)$ y $z = r \operatorname{sen}^2(t)$. Aplicando

la regla de la cadena obtenga: $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ (Leithold, 1998).

Sea $u = f(x, y, z)$ una función de tres variables. Planteando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \dots \text{A}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \dots \text{B}$$

Derivando parcialmente $u = x^2 + yz$ con respecto a x, y, z

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = y$$

Derivando $x = r \operatorname{sen}(t)$, $y = r \cos(t)$ y $z = r \operatorname{sen}^2(t)$ con respecto a r :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \operatorname{sen}(t) \cdot \frac{\partial r}{\partial r} = \operatorname{sen}(t) \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(t) \cdot \frac{\partial r}{\partial r} = \cos(t) \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{sen}^2(t) \cdot \frac{\partial r}{\partial r} = \operatorname{sen}^2(t)$$

Derivando $x = r \operatorname{sen}(t)$, $y = r \cos(t)$ y $z = r \operatorname{sen}^2(t)$ con respecto a t :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r \cdot \frac{\partial \text{sen}(t)}{\partial t} = r \cos(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = r \cdot \frac{\partial \cos(t)}{\partial t} = -r \text{sen}(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = r \cdot \frac{\partial \text{sen}^2(t)}{\partial t} = r \cdot \frac{\partial [\text{sen}(t)]^2}{\partial t} = 2r \text{sen}(t) \cdot \frac{\partial \text{sen}(t)}{\partial t} = 2r \text{sen}(t) \cos(t)$$

Sustituyendo las derivadas encontradas en A: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2x \text{sen}(t) + z \cos(t) + y \text{sen}^2(t)$$

Sustituyendo $x = r \text{sen}(t)$, $y = r \cos(t)$ y $z = r \text{sen}^2(t)$ (para dejar las derivadas parciales en términos de r y t) y simplificando:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \text{sen}(t) \text{sen}(t) + r \text{sen}^2(t) \cos(t) + r \cos(t) \text{sen}^2(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \text{sen}^2(t) + r \text{sen}^2(t) \cos(t) + r \cos(t) \text{sen}^2(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r \text{sen}^2(t) [2 + \cos(t) + \cos(t)] = r \text{sen}^2(t) [2 + 2 \cos(t)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \text{sen}^2(t) [1 + \cos(t)]$$

Sustituyendo las derivadas encontradas en B: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2x r \cos(t) - z r \text{sen}(t) + 2y r \text{sen}(t) \cos(t)$$

Sustituyendo $x = r \text{sen}(t)$, $y = r \cos(t)$ y $z = r \text{sen}^2(t)$ (para dejar las derivadas parciales en términos de r y t) y simplificando:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2x r \cos(t) - z r \text{sen}(t) + 2y r \text{sen}(t) \cos(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2r \text{sen}(t) r \cos(t) - r \text{sen}^2(t) r \text{sen}(t) + 2r \cos(t) r \text{sen}(t) \cos(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2r^2 \sin(t) \cos(t) - r^2 \sin^3(t) + 2r^2 \cos^2(t) \sin(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r^2 \sin(t) \left[2 \cos(t) - \sin^2(t) + 2 \cos^2(t) \right]$$

Actividad 4.8: Determine la razón a la que cambia la presión cuando la temperatura es de 300 K aumenta a razón de $0.1 \frac{K}{s}$ y el volumen es 100 litros y aumenta a razón de

$0.2 \frac{l}{s}$. Considere que la presión (kilopascales), el volumen (litros) y la temperatura (grados

K) se relacionan por la ecuación de estado $PV = nRT$ para un mol de un gas ideal.

Considere la constante universal de los gases como $R = 8.31 \frac{J}{mol - K}$ (Stewart, 2018).

Datos:

$$R = 8.31 \frac{J}{mol - K}$$

$$PV = nRT$$

$$V = 100 \text{ litros}$$

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{8.31T}{V} \quad P = f(T, V)$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \dots\dots\dots A$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0.2 \frac{l}{s}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8.31}{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{8.31}{V}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.1 \frac{K}{s}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 8.31 T \cdot \frac{\partial V^{-1}}{\partial V} = -8.31 T V^{-2} = -\frac{8.31 T}{V^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = ?$$

Sustituyendo en A

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{8.31}{V} (0.1) - \frac{8.31 T}{V^2} (0.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{8.31}{100} (0.1) - \frac{8.31(300)}{(100)^2} (0.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -0.04155 \frac{kPa}{s} \text{ tasa de disminución de la presión}$$

Actividad 4.9: Sea $z = f(x, y)$ tal que $x^2 + xy^2z = 0$. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{Si } F(x, y, z) = x^2 + xy^2z$$

Primero se obtienen las derivadas parciales de F con respecto a cada una de las variables:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 2x + y^2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 2yxz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z = xy^2$$

Después se sustituyen las derivadas parciales de F en la definición 4.7 y 4.8.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + y^2z}{xy^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yxz}{xy^2}$$

Actividad 4.10: Dada la función obtenga las segundas derivadas parciales

(Swokowski, 1989).

$$W = e^{xz} \sin(x) \quad W = f(x, y)$$

Derivando con respecto a x

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_z = e^{xz} \frac{\partial \text{sen}(x)}{\partial x} + \text{sen}(x) \frac{\partial e^{xz}}{\partial x} = e^{xz} \cos(x) + \text{sen}(x) \cdot e^{xz} \frac{\partial xz}{\partial x} = e^{xz} \cos(x) + \text{sen}(x) \cdot e^{xz} z$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_z = e^{xz} \cos(x) + z e^{xz} \text{sen}(x)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_z = e^{xz} [\cos(x) + z \text{sen}(x)]$$

Derivando otra vez con respecto a x

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = e^{xz} \frac{\partial \cos(x)}{\partial x} + \cos(x) \frac{\partial e^{xz}}{\partial x} + z \left[\text{sen}(x) \frac{\partial e^{xz}}{\partial x} + e^{xz} \frac{\partial \text{sen}(x)}{\partial x} \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = -e^{xz} \text{sen}(x) + \cos(x) \cdot e^{xz} \frac{\partial xz}{\partial x} + z \left[\text{sen}(x) \cdot e^{xz} \frac{\partial xz}{\partial x} + e^{xz} \cos(x) \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = -e^{xz} \text{sen}(x) + \cos(x) \cdot e^{xz} z + z \left[\text{sen}(x) \cdot e^{xz} z + e^{xz} \cos(x) \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = -e^{xz} \text{sen}(x) + \underline{ze^{xz} \cos(x)} + z^2 e^{xz} \text{sen}(x) + \underline{ze^{xz} \cos(x)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = -e^{xz} \text{sen}(x) + 2 ze^{xz} \cos(x) + z^2 e^{xz} \text{sen}(x)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_z = e^{xz} [-\text{sen}(x) + 2 z \cos(x) + z^2 \text{sen}(x)]$$

Derivando $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_z = e^{xz} \cos(x) + z e^{xz} \text{sen}(x)$ **con respecto a z. Se obtiene la segunda**

derivada parcial cruzada.

$$W_{xz} = \cos(x) \frac{\partial}{\partial z} e^{xz} + \text{sen}(x) \left[z \frac{\partial}{\partial z} e^{xz} + e^{xz} \frac{\partial z}{\partial z} \right]$$

$$W_{xz} = \cos(x) e^{xz} \frac{\partial}{\partial z} xz + \operatorname{sen}(x) \left[z e^{xz} \frac{\partial}{\partial z} xz + e^{xz} \right] = \cos(x) e^{xz} x + \operatorname{sen}(x) \left[z e^{xz} x + e^{xz} \right]$$

$$W_{xz} = x e^{xz} \cos(x) + z x e^{xz} \operatorname{sen}(x) + e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

$$W_{xz} = e^{xz} [x \cos(x) + z x \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)]$$

Derivando $W = e^{xz} \operatorname{sen}(x)$ con respecto a z

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_x = \operatorname{sen}(x) \frac{\partial e^{xz}}{\partial z} = \operatorname{sen}(x) \cdot e^{xz} \frac{\partial xz}{\partial z} = e^{xz} \operatorname{sen}(x) \cdot x = x e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_x = x e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

Derivando otra vez con respecto a z

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_x = x \operatorname{sen}(x) \frac{\partial e^{xz}}{\partial z} = x \operatorname{sen}(x) \cdot e^{xz} \frac{\partial xz}{\partial z} = x e^{xz} \operatorname{sen}(x) \cdot x = x^2 e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_x = x^2 e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

Derivando $\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_x = x e^{xz} \operatorname{sen}(x)$ con respecto a x . Se obtiene la segunda derivada

parcial cruzada.

$$W_{zx} = x e^{xz} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) \left[x \frac{\partial}{\partial x} e^{xz} + e^{xz} \frac{\partial x}{\partial x} \right] = x e^{xz} \cos(x) + \operatorname{sen}(x) \left[x e^{xz} \frac{\partial}{\partial x} xz + e^{xz} \right]$$

$$W_{zx} = x e^{xz} \cos(x) + \operatorname{sen}(x) [x e^{xz} z + e^{xz}] = x e^{xz} \cos(x) + x z e^{xz} \operatorname{sen}(x) + e^{xz} \operatorname{sen}(x)$$

$$W_{zx} = e^{xz} [x \cos(x) + x z \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)]$$

Las parciales cruzadas son iguales:

$$W_{xz} = e^{xz} [x \cos(x) + z x \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)]$$

$$W_{zx} = e^{xz} [x \cos(x) + x z \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)]$$

Actividad 4.11 : Determine la derivada direccional de $f(x, y, z) = x^2 y^2 - 4x^2 y + z^2$

en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $\vec{v} = \langle 6, 2, 3 \rangle$ (Zill y Wright, 2011).

Primero se determinan las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes.

$$f_x = y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} - 4y \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x} = y^2 - 8yx$$

$$f_y = x \cdot \frac{\partial y^2}{\partial y} - 4x^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial y} = 2xy - 4x^2 \qquad f_z = 2z$$

Sustituyendo en la ecuación 4.10 para obtener el gradiente, considerando tres variables

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \hat{i} + f_y(x, y, z) \hat{j} + f_z(x, y, z) \hat{k}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 - 8yx) \hat{i} + (2xy - 4x^2) \hat{j} + 2z \hat{k}$$

$$\nabla f(1, -1, 2) = [(-1)^2 - 8(-1)(1)] \hat{i} + [2(1)(-1) - 4(1)^2] \hat{j} + 2(2) \hat{k}$$

$$\nabla f(1, -1, 2) = (1 + 8) \hat{i} + (-2 - 4) \hat{j} + 4 \hat{k}$$

$$\nabla f(1, -1, 2) = 9 \hat{i} - 6 \hat{j} + 4 \hat{k} = \langle 9, -6, 4 \rangle$$

El vector unitario es:

$$\vec{U} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 6, 2, 3 \rangle}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{\langle 6, 2, 3 \rangle}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7} \hat{i} + \frac{2}{7} \hat{j} + \frac{3}{7} \hat{k} = \left\langle \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right\rangle$$

De 4.11 se obtiene la derivada direccional:

$$D_{\vec{U}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{U} \text{ en } P(1, -1, 2)$$

$$D_{\vec{U}} f(1, -1, 2) = \nabla f(1, -1, 2) \cdot \vec{U}$$

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = \langle 9, -6, 4 \rangle \cdot \left\langle \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right\rangle$$

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = \frac{54}{7} - \frac{12}{7} + \frac{12}{7}$$

$$D_{\vec{U}} f(x, y) = \frac{54}{7}$$

Actividad 4.12: Suponga que la temperatura $T(^{\circ}\text{C})$ en el punto $P(x, y, z)$ está dada

por:

$$T = 50 + xyz$$

a) Encontrar la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en pies al punto

$P(3, 4, 1)$ en la dirección del vector $\vec{a} = \langle 1, 2, 2 \rangle$.

b) La derivada direccional máxima en el punto $P(3, 4, 1)$.

a) Con ecuación 4.11: $D_{\vec{U}} T(x, y, z) = \nabla T(x, y, z) \cdot \vec{U}$

$$\vec{U} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\langle 1, 2, 2 \rangle}{3} = \frac{1}{3} \hat{i} + \frac{2}{3} \hat{j} + \frac{2}{3} \hat{k} \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

Obteniendo derivadas Parciales

$$T_x = yz \qquad T_y = xz \qquad T_z = xy$$

Obteniendo el gradiente con ecuación 4.10:

$$\nabla T(x, y, z) = T_x(x, y, z) \hat{i} + T_y(x, y, z) \hat{j} + T_z(x, y, z) \hat{k}$$

$$\nabla T(x, y, z) = yz \hat{i} + xz \hat{j} + xy \hat{k}$$

Sustituyendo el punto $P(3, 4, 1)$

$$\nabla T(3,4,1) = (4)(1)\hat{i} + (3)(1)\hat{j} + (3)(4)\hat{k}$$

$$\nabla T(3,4,1) = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 12\hat{k}$$

Por lo tanto, la derivada direccional es: $D_{\vec{U}}T(x, y, z) = \nabla T(x, y, z) \cdot \vec{U}$ en $P(3,4,1)$

$$D_{\vec{U}}T(3,4,1) = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} \cdot 4\hat{i} + 3\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$D_{\vec{U}}T(3,4,1) = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \frac{24}{3} = \frac{34}{3}$$

$$D_{\vec{U}}T(3,4,1) = 11.33 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{ft}}$$

b) El valor máximo de la derivada direccional es en:

$$\|\nabla T(3,4,1)\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (12)^2} = \sqrt{169}$$

$$\|\nabla T(3,4,1)\| = 13 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{ft}}$$

5. Integración múltiple

Actividad 5.1: Evalúe la integral doble $\int_0^3 \int_2^4 y(x+3)^2 dx dy$.

$$\int_0^3 \left[\int_2^4 y(x+3)^2 dx \right] dy$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_2^4 y(x+3)^2 dx = y \int_2^4 (x+3)^2 dx = y \int_5^7 u^2 du = \frac{yu^3}{3} \Big|_5^7 = \frac{y}{3} [(7)^3 - (5)^3] = \frac{218y}{3}$$

$$u = x + 3 \quad u_i = 2 + 3 = 5$$

$$du = dx \quad u_s = 4 + 3 = 7$$

$$\int_0^3 \int_2^4 y (x+3)^2 dx dy = \frac{218}{3} \int_0^3 y dy = \frac{218}{3} \cdot \frac{1}{2} y^2 = \frac{109}{3} y^2 \Big|_0^3 = \frac{109}{3} [(3)^2 - 0] = 327$$

Actividad 5.2: Evalúe la integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) dx dy$ (Leithold, 1998).

Realizando la integral interna (por cambio de variable):

$$\int_0^{y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) dx = y \int_0^y \operatorname{sen}(u) du = -y \cos(u) \Big|_0^y = -y [\cos(y) - \cos(0)] = -y [\cos(y) - 1]$$

$$u = \frac{x}{y} \quad u_i = \frac{0}{y} = 0 \quad u_s = \frac{y^2}{y} = y$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$du = \frac{1}{y} dx$$

$$y du = dx$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a y:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -y [\cos(y) - 1] dy = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \cos(y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y dy \dots\dots\dots A$$

La primera integral es por partes: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \cos(y) dy$

Resolviendo primero como integral indefinida $\int y \cos(y) dy$

$$\begin{aligned} u &= y & dv &= \cos(y) dy \\ du &= dy & \int dv &= \int \cos(y) dy \\ & & v &= \text{sen}(y) \end{aligned}$$

$$\int y \cos(y) dy = y \text{sen}(y) - \int \text{sen}(y) dy$$

$$\int y \cos(y) dy = y \text{sen}(y) + \cos(y) + C$$

Evalutando en los límites dados

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \cos(y) dy = (\pi) \text{sen}(\pi) - \frac{\pi}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2}(1) + 1 - 0 = -\frac{\pi}{2} + 1$$

Evalutando la segunda integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y dy$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2} \left[(\pi)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2 - \pi^2}{4} \right) = \frac{3\pi^2}{8}$$

Sustituyendo los resultados de ambas integrales en A:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -y[\cos(y) - 1]dy = -\left(-\frac{\pi}{2} + 1\right) + \frac{3\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2} 11 + \frac{3\pi^2}{8} = \frac{4\pi - 8 + 3\pi^2}{8}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) dx dy = \frac{3\pi^2 + 4\pi - 8}{8}$$

Actividad 5.3: Calcular el área de la región acotada por las gráficas: $2y = 16 - x^2$ y

$$x + 2y = 4.$$

Primero: Despejando la misma variable de ambas ecuaciones

$$y = \frac{16 - x^2}{2} \qquad y = \frac{4 - x}{2}$$

Segundo: Igualando las ecuaciones de las curvas para obtener los límites a y b .

$$\frac{16 - x^2}{2} = \frac{4 - x}{2}$$

$$\frac{2(16 - x^2)}{2} = 4 - x$$

$$16 - x^2 = 4 - x \text{ igualando a cero la ecuación}$$

$$0 = 4 - x + x^2 - 16$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \text{ factorizando}$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \qquad x + 3 = 0$$

$$x = 4 \qquad x = -3$$

De donde se tiene que $a = -3$ y $b = 4$

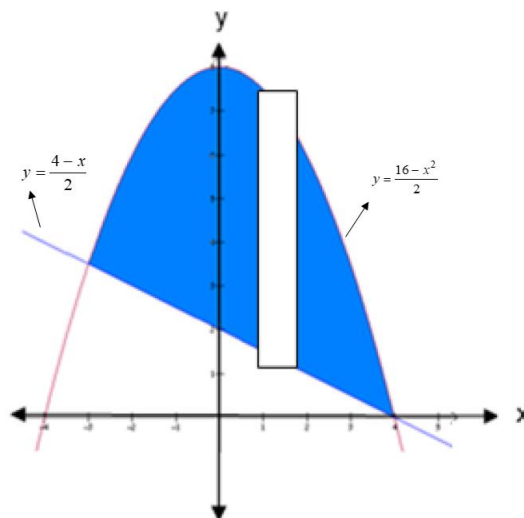
Graficando las curvas

$$y = \frac{16 - x^2}{2}$$

x	-4	-3	-1	0	1	2	3	4
y	0	3.5	7.5	8	7.5	6	3.5	0

$$y = \frac{4 - x}{2}$$

x	-4	-3	-1	0	1	2	3	4
y	4	3.5	2.5	2	1.5	1	-.5	0



Los límites de la integral interna se obtienen con el rectángulo representativo de la región acotada por las dos curvas.

El área se obtiene con expresión 5.7 $A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx :$

$$A = \int_{-3}^4 \int_{\frac{4-x}{2}}^{\frac{16-x^2}{2}} dy dx \quad \text{Integrando con respecto a y}$$

Resolviendo la integral interna e integrando con respecto a y

$$\int_{\frac{4-x}{2}}^{\frac{16-x^2}{2}} dy = y \Big|_{\frac{4-x}{2}}^{\frac{16-x^2}{2}} = \frac{16-x^2}{2} - \frac{4-x}{2} \quad \text{se integra con respecto a x}$$

$$A = \int_{-3}^4 \left(\frac{16-x^2}{2} - \frac{4-x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^4 (16-x^2) dx - \frac{1}{2} \int_{-3}^4 (4-x) dx$$

$$A = \frac{1}{2} \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^4 = 8x - \frac{x^3}{6} - 2x + \frac{x^2}{4} \Big|_{-3}^4 = 6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \Big|_{-3}^4$$

Tomando límites

$$A = 6[4 - (-3)] - \frac{1}{6}[(4)^3 - (-3)^3] + \frac{1}{4}[(4)^2 - (-3)^2] = 6(4+3) - \frac{1}{6}(64+27) + \frac{1}{4}(16-9)$$

$$A = 6(7) - \frac{1}{6}(91) + \frac{1}{4}(7) = 42 - \frac{91}{6} + \frac{7}{4} = \frac{504 - 182 + 21}{12}$$

$$A = \frac{343}{12} u^2$$

Actividad 5.4: Determinar el área de la región en el plano xy acotada por las

gráficas: $x = y^3$, $x + y = 2$, $y = 0$.

$$x = 2 - y$$

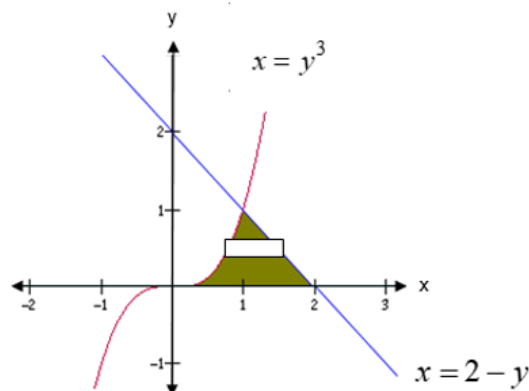
Graficar la región entre las curvas:

$$x = y^3$$

y	-1	0	1	2
x	-1	0	1	8

$$x = 2 - y$$

y	-1	0	1	2
x	3	2	1	0



Los límites de y para la integral externa se obtienen de la gráfica: $a = 0$ y $b = -1$

Con el rectángulo representativo se obtienen los límites para la integral interna:

$$A = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx \, dy$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_{y^3}^{2-y} dx = x \Big|_{y^3}^{2-y} = 2 - y - y^3 \quad \text{Se vuelve a integrar, ahora con respecto a } y$$

$$\int_0^1 (2 - y - y^3) dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = 2(1-0) - \frac{1}{2}[(1)^2 - 0] - \frac{1}{4}[(1)^3 - 0] = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

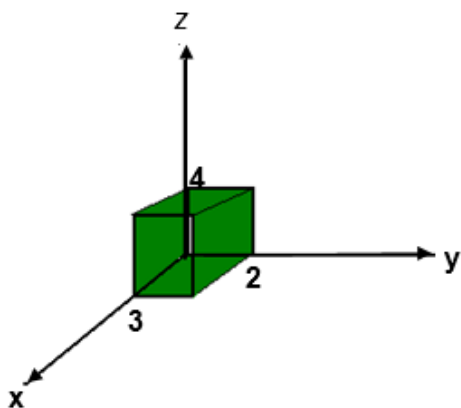
$$A = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx \, dy = \frac{5}{4} = 1.25 \, u^2$$

Actividad 5.5: Encontrar el volumen del sólido acotado por la superficie

$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, los planos $x = 3$ y $y = 2$, y los 3 planos coordenados. La figura

muestra la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ en el primer octante y el sólido dado

(Leithold, 1998).



$$V = \iint_R f(x, y) dA \quad V = \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dy dx$$

Realizando la integral interna:

$$\int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dy = 4 \int_0^2 dy - \frac{x^2}{9} \int_0^2 dy - \frac{1}{16} \int_0^2 y^2 dy = 4y - \frac{x^2}{9} y - \frac{1}{16} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^2$$

Tomando limites en y

$$\int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^3 \right) dy = 4(2) - \frac{x^2}{9}(2) - \frac{1}{48}(2)^3 = 8 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{48} = 8 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{6} = \frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2$$

Integrando el resultado con respecto a x:

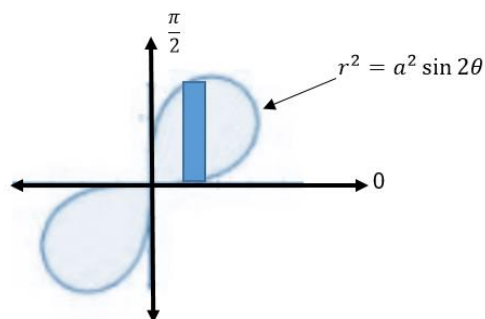
$$\int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2 \right) dx = \frac{47}{6}x - \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{47}{6}(3) - \frac{2}{27}(3)^3 = \frac{47}{2} - \frac{2}{27}(27) = \frac{47}{2} - 2$$

$$V = \frac{43}{2} u^3$$

También puede obtenerse el volumen V integrando primero con respecto a x para el mismo ejemplo.

Actividad 5.6: Determinar el área de la región R acotada por un rizo del lemniscato

$r^2 = a^2 \sen 2\theta$ de la figura del primer cuadrante. Considere $a > 0$.



$$A = \iint_R dA$$

El área de una región puede determinarse con una integral doble en coordenadas polares por la ecuación 5.9 y si $f(x, y) = 1$, la expresión se simplifica:

$$A = \iint_R dA \text{ que en coordenadas polares se expresa}$$

$$A = \iint_R r \, dr \, d\theta = \iint_R r \, dr \, d\theta$$

Límites para r:

Con el rectángulo

$$r_i = 0 \quad r_s = a \sqrt{\sin(2\theta)}$$

Límites para θ :

Área donde está la figura

$$\theta_i = 0 \quad \theta_s = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sqrt{\sin 2\theta}} r \, dr \, d\theta$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r \, dr \, d\theta = \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{1}{2} \left[(a\sqrt{\sin 2\theta})^2 - 0 \right] = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta = \frac{a^2}{2} \sin 2\theta$$

Se vuelve a integrar con respecto al ángulo θ

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta$$

$$U = 2\theta \quad U_i = 2(0) = 0$$

$$dU = 2 \, d\theta$$

$$\frac{du}{2} = d\theta \quad U_s = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin U \, dU = -\frac{a^2}{4} \cos U \Big|_0^{\pi} = -\frac{a^2}{4} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{a^2}{4} (-1 - 1) = -\frac{a^2}{4} (-2)$$

$$A = \frac{a^2}{2}$$

Actividad 5.7: Evalúe la integral triple $\iiint_Q x y \sin(yz) \, dV$ si Q es el

paralelepípedo rectangular acotado por los planos $x = \pi$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{3}$ y los planos

coordenados (Leithold, 1998).

Los límites de las integrales se colocan según el orden de los diferenciales:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x y \sin(yz) \, dz \, dy \, dx$$

Resolviendo la integral interna con respecto a z :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x y \operatorname{sen}(y z) dz = x y \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(y z) dz$$

Realizando cambio de variable con respecto a z , por lo tanto y se considera constante.

$$U = y z \quad U_i = y(0) = 0$$

$$dU = y dz$$

$$\frac{du}{y} = dz \quad U_s = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi y}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x y \operatorname{sen}(y z) dz = \frac{x y}{y} \int_0^{\frac{\pi y}{3}} \operatorname{sen}(U) dU = -x \cos(U) \Big|_0^{\frac{\pi y}{3}} = -x \left[\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - \cos(0) \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x y \operatorname{sen}(y z) dz = -x \left[\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - 1 \right] \text{ se vuelve a integrar con respecto a } y$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \left[\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - 1 \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-x \cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - x \right] dy = -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) dy - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$W = \frac{\pi y}{3} \quad W_i = \frac{\pi}{3}(0) = 0$$

$$dW = \frac{\pi}{3} dy$$

$$\frac{3dW}{\pi} = dy \quad W_s = \left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \left[\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - 1 \right] dy = -\frac{3x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi^2}{6}} \cos(W) dW - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = -\frac{3x}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{3}\right) \Big|_0^{\frac{\pi^2}{6}} - x y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Sustituyendo en y los límites indicados

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \left[\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right) - 1 \right] dy = -\frac{3x}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi^3}{18}\right) + \frac{\pi}{2}x = -\frac{3x}{\pi} \operatorname{sen}(30^\circ) + \frac{\pi}{2}x$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a x

$$\int_0^{\pi} \left[-\frac{3x}{\pi} \operatorname{sen}(30^\circ) + \frac{\pi}{2}x \right] dy = \int_0^{\pi} \left[-\frac{3}{\pi} \operatorname{sen}(30^\circ) + \frac{\pi}{2} \right] x dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$\int_0^{\pi} \left[-\frac{3x}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi^3}{18}\right) + \frac{\pi}{2}x \right] dy = \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^3}{4}$$

El resultado de la integral triple $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x y \operatorname{sen}(y z) dz dy dx = \frac{\pi^3}{4}$

Actividad 5.8 : Evalúe la integral $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r dz d\theta dr$ (Stewart, 2018).

Utilizando la expresión 5.15 y considerando $f(r, \theta, z) = 1$, se realiza la integral interna

(con respecto a z):

$$\int_0^r r dz = r \int_0^r dz = r z \Big|_0^r = r r = r^2$$

Integrando el resultado con respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = r^2 \theta \Big|_0^{2\pi} = r^2 (2\pi) = 2\pi r^2$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a r :

$$\int_0^2 2\pi r^2 dr = 2\pi \int_0^2 r^2 dr = 2\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3} (2)^3 = \frac{16}{3}\pi$$

La integral triple $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r dz d\theta dr = \frac{16}{3}\pi$

Actividad 5.9: Evalúe la integral $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$ (Stewart, 2018).

Considerando $f(\rho, \theta, \phi) = 1$ y utilizando 5.21:

Se inicia resolviendo la integral interna (con respecto a ρ):

$$\int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \sin \phi \int_0^{\cos \phi} \rho^2 d\rho = \sin \phi \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{\cos \phi} = \frac{\sin \phi}{3} [(\cos \phi)^3 - 0] = \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a ϕ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3} d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi (\cos \phi)^3 d\phi = -\frac{1}{3} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} U^3 dU = -\frac{1}{3} \left(\frac{U^4}{4} \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$U = \cos \phi \quad U_i = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

$$dU = -\sin \phi d\phi$$

$$-dU = \sin \phi d\phi \quad U_s = \cos 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3} d\phi = -\frac{1}{12} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - (1)^4 \right] = -\frac{1}{12} \left(\frac{2^2}{2^4} - 1 \right) = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{1}{12} \left(-\frac{3}{4} \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3} d\phi = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{16} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{16} \pi = \frac{\pi}{8}$$

Por lo tanto, la integral buscada
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Actividad 5.10: Realizar la evaluación de la integral de línea $\int_C (x^3 + y) dS$, donde C

tiene la parametrización: $x = 3t$, $y = t^3$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$

Aplicando 5.29
$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f[g(t), h(t)] \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Primero obtener: $f[g(t), h(t)]$

$$f(x, y) = x^3 + y$$

$$f[g(t), h(t)] = (3t)^3 + t^3 = 27t^3 + t^3 = 28t^3$$

Segundo: Obtener: $g(t)$, $h(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$

Si: $x = g(t)$ $y = h(t)$

$$g(t) = 3t \qquad h(t) = t^3$$

$$g'(t) = 3 \qquad h'(t) = 3t^2$$

Tercero: Sustituir en 5.29

$$\int_C (x^3 + y) dS = \int_0^1 28t^3 \sqrt{(3)^2 + (3t^2)^2} dt = 28 \int_0^1 t^3 \sqrt{9 + 9t^4} dt = 28 \int_0^1 t^3 (9 + 9t^4)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$U = 9 + 9t^4 \qquad U_i = 9 + 9(0)^4 = 9$$

$$dU = 36t^3 dt \qquad U_s = 9 + 9(1)^4 = 18$$

$$\frac{dU}{36} = t^3 dt$$

$$\int_C (x^3 + y) dS = \frac{28}{36} \int_9^{18} U^{\frac{1}{2}} dU = \frac{7}{9} U^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_9^{18} = \frac{14}{27} \sqrt{U^3} \Big|_9^{18} = \frac{14}{27} [\sqrt{(18)^3} - \sqrt{(9)^3}]$$

$$\int_C (x^3 + y) dS = \frac{14}{27} (76.3675 - 27) = \frac{14}{27} (49.3675) = 25.59$$

Actividad 5.11: Evaluar $\int_C f(x, y) dx$ y $\int_C f(x, y) dy$ para la curva C con la

parametrización: $f(x, y) = x^3 + y$, $x = 3t$, $y = t^3$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Aplicando 5.30 $\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f[g(t), h(t)]g'(t) dt$ y 5.31

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f[g(t), h(t)]h'(t) dt$$

Se tiene:

$$f(x, y) = x^3 + y$$

$$f[g(t), h(t)] = (3t)^3 + t^3 = 27t^3 + t^3 = 28t^3$$

$$g(t) = 3t \qquad h(t) = t^3$$

$$g'(t) = 3 \qquad h'(t) = 3t^2$$

Sustituyendo en 5.30 $\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f[g(t), h(t)]g'(t) dt$ se obtiene:

$$\int_C (x^3 + y) dx = \int_0^1 28t^3 (3) dt = 84 \int_0^1 t^3 dt = 84 \cdot \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{84}{4} (1^4 - 0) = 21$$

Con ecuación 5.31 $\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f[g(t), h(t)]h'(t) dt$ se obtiene:

$$\int_C (x^3 + y) dy = \int_0^1 28t^3 (3t^2) dt = 84 \int_0^1 t^5 dt = 84 \cdot \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{84}{6} (1^6 - 0) = 14$$

Actividad 5.12: Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy, C \text{ es la curva cerrada dada por } y^2 = x, y = -x \text{ de } (0,0) \text{ a } (1, -1)$$

(Swokowski, 1989).

Del teorema de Green, ecuación 5.40 $\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$ se obtiene:

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \int_{-1}^0 \int_{y^2}^{-y} \left[y^2 \frac{\partial x}{\partial x} - \left(\frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = \int_{-1}^0 \int_{y^2}^{-y} (y^2 - 1) dx dy \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna:

$$\int_{y^2}^{-y} (y^2 - 1) dx = y^2 \int_{y^2}^{-y} dx - \int_{y^2}^{-y} dx = (y^2 x - x) \Big|_{y^2}^{-y} = y^2 (-y - y^2) - (-y - y^2)$$

$$\int_{y^2}^{-y} (y^2 - 1) dx = -y^3 - y^4 + y + y^2 = -y^4 - y^3 + y^2 + y \text{ sustituyendo el resultado en A}$$

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = \int_{-1}^0 (-y^4 - y^3 + y^2 + y) dy$$

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^0$$

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = 0 - \left[-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right] = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\oint_C (x^2 + y) dx + x y^2 dy = -\left(\frac{12 - 15 - 20 + 30}{60} \right) = -\frac{7}{60}$$

Actividad 5.13: Obtenga la divergencia y rotacional sí

$$\vec{F}(x, y, z) = 3yz^2x \hat{i} + y^2 \operatorname{sen}(z) \hat{j} + x e^{2z} \hat{k} \text{ (Swokowski, 1989).}$$

De $\vec{F}$ se obtiene $M = 3yz^2x$, $N = y^2 \operatorname{sen}(z)$, $P = x e^{2z}$

a) Con 5.41 se obtiene la divergencia: $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 3yz^2 \frac{\partial x}{\partial x} + \operatorname{sen}(z) \frac{\partial y^2}{\partial y} + x \frac{\partial e^{2z}}{\partial z}$

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 3yz^2 + 2y \operatorname{sen}(z) + 2x e^{2z}$$

b) Con 5.42 se obtiene el rotacional de $\vec{F}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz^2x & y^2 \operatorname{sen}(z) & x e^{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial x e^{2z}}{\partial y} \hat{i} + 3yx \frac{\partial z^2}{\partial z} \hat{j} + \frac{\partial y^2 \operatorname{sen}(z)}{\partial x} \hat{k} - 3z^2 x \frac{\partial y}{\partial y} \hat{k} - y^2 \frac{\partial \operatorname{sen}(z)}{\partial z} \hat{i} - e^{2z} \frac{\partial x}{\partial x} \hat{j}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = 6yxz \hat{j} - 3z^2 x \hat{k} - y^2 \cos(z) \hat{i} - e^{2z} \hat{j}$$

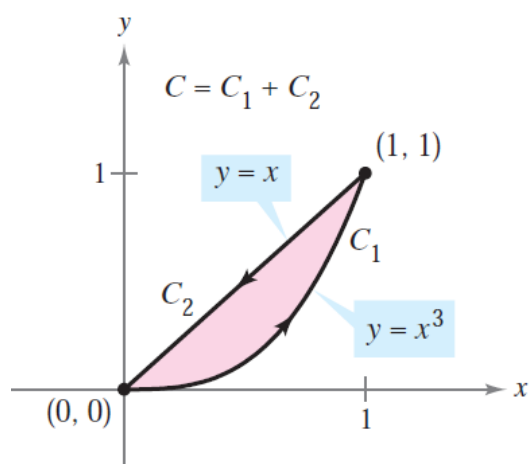
$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = -y^2 \cos(z) \hat{i} + (6yxz - e^{2z}) \hat{j} - 3z^2 x \hat{k}$$

Actividad 5.14: Aplicar el teorema de Green para evaluar

$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$ donde C es la trayectoria desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ a lo largo la

gráfica de $y = x^3$ y desde $(1,1)$ hasta $(0,0)$ a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se

muestra en la figura dada a continuación (Larson y Edwards, 2010).



Aplicando ecuación 5.42: $\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$

Considerando: $M = y^3$ $N = x^3 + 3xy^2$

Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$$

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \int_0^1 \int_{x^3}^x [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dy dx$$

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \int_0^1 \int_{x^3}^x (3x^2 + 3y^2 - 3y^2) dy dx$$

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx \dots\dots\dots A$$

Resolviendo la integral interna

$$\int_{x^3}^x 3x^2 dy = 3x^2 \int_{x^3}^x dy = 3x^2 y \Big|_{x^3}^x = 3x^2 (x - x^3) = 3x^3 - 3x^5$$

El resultado se vuelve a integrar con respecto a x

$$\int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{6}x^6 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{1}{2}(1)^6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo en A:

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \frac{1}{4}$$

ANEXO 2. INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA PARA CÁLCULO VECTORIAL

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales
Periodo: 2025-2

Nombre de la asignatura: Cálculo Vectorial
Plan de estudios: Todas las carreras
Clave de asignatura: ACF-0904
Horas teoría – horas prácticas – créditos: 3 - 2 - 5

1. Caracterización de la asignatura:

En diversas aplicaciones de la ingeniería, la concurrencia de variables espaciales y temporales, hace necesario el análisis de fenómenos naturales cuyos modelos originan funciones vectoriales o escalares de varias variables. Se diseña esta asignatura con el fin de proveer al alumno de herramientas para analizar estas funciones de tal manera que se pueda predecir o estimar su comportamiento, y estudiar conceptos relacionados con ellas; haciendo hincapié en la interpretación geométrica siempre que sea posible.

El curso está diseñado de manera que posibilite al estudiante para representar conceptos, que aparecen en el campo de la ingeniería, por medio de vectores; resolver problemas en los que intervienen variaciones continuas; resolver problemas geométricos en forma vectorial; graficar funciones de varias variables; calcular derivadas parciales; resolver integrales dobles y triples; aplicar las integrales en el cálculo de áreas y volúmenes.

Con el diseño de este curso se pretende que al mismo tiempo que el alumno aprende el lenguaje de las matemáticas, adquiera estrategias para resolver problemas; elabore desarrollos analíticos para la adquisición de un concepto; piense conceptualmente, desarrolle actitudes para la integración a grupos interdisciplinarios y aproveche los recursos que la tecnología ofrece, como el uso de software de álgebra simbólica, calculadora gráfica y computadora.

2. Intención didáctica:

La característica más relevante de la materia es el tratamiento a nivel intuitivo de los Campos escalares y vectoriales desde el inicio del curso, con el fin de dotar de significado a muchos de los conceptos que se estudiarán más adelante en el curso. El examinar y retomar, a lo largo de todo el curso, la importancia geométrica y física de campos, como flujo de calor, flujo de energía, el gravitatorio o el asociado con cargas; análisis que servirá para dar significado a diversos subtemas del curso como álgebra vectorial, superficies de nivel, longitud de arco, vector tangente, etc. Esto permitirá que el alumno se sensibilice de la importancia del concepto "Campo" en el desarrollo de las bases conceptuales de la física y la ingeniería, así como en la consolidación del pensamiento científico.

La propuesta es llegar a las formalizaciones a partir de lo concreto; por ejemplo, primero se estudia la geometría de las operaciones vectoriales y después estas operaciones.

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

En la última unidad se aborda el concepto Integral de Riemann de funciones de varias variables y el concepto de coordenadas esféricas y cilíndricas, cuya intención es mostrar el potencial del cálculo en las aplicaciones donde se calcula un volumen; es decir, no se pretende ser exhaustivo en la resolución de distintos problemas sólo sensibilizar al alumno, del potencial que tiene el uso de estas coordenadas.

En la sección "Unidades de aprendizaje" se recomiendan actividades dirigidas a los estudiantes que pretenden servir de ejemplo para activar competencias al mismo tiempo que se adquieren conocimientos

3. Competencia de la asignatura:

Conocer los principios y técnicas básicas del Cálculo en Varias Variables para interpretar y resolver modelos que representan fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene más de una variable continua.

4. Análisis por competencias específicas:

Competencia No: 1 Descripción: Analizar de manera intuitiva campos escalares y vectoriales del entorno. Identificar la manifestación de un vector en distintos contextos. Resolver con soltura operaciones entre vectores. Determinar ecuaciones de rectas y planos dados, así como asociar gráficas de planos y rectas a ecuaciones dadas.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
1.1 Definición de un vector en R^2 , R^3 y su interpretación geométrica. 1.2 Introducción a los campos escalares y vectoriales. 1.3 La geometría de las operaciones vectoriales. 1.4 Operaciones con vectores y sus propiedades.	*Contestar el examen diagnóstico. *Contestar el cuestionario de estilos de aprender. *Calcular operaciones con vectores. * Realizar en equipo las tareas extraclase. *Elaborar durante el desarrollo de la unidad	*Elaborar el examen diagnóstico de derivadas y diferenciales. * Conocer el estilo de aprender de los estudiantes. Comentar en clase los estilos de aprender de los estudiantes y mencionar algunos hábitos de estudio que les pueden facilitar el aprendizaje.	*Capacidades cognitivas, la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos. *Capacidades metodológicas para manipular el ambiente: ser capaz de organizar el tiempo y las estrategias para el aprendizaje, tomar	3 semanas (15hrs)

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

1.5 Descomposición vectorial en 3 dimensiones.	el portafolio de evidencias.	*Entregar el formulario de derivadas e integrales a utilizar en el curso.	decisiones o resolver problemas.	
1.6 Ecuaciones de rectas y planos.	*Elaborar un mapa conceptual con el resumen de la unidad.	*Resolver y explicar los ejercicios.	*Capacidad de análisis y síntesis.	
1.7 Aplicaciones físicas y geométricas.	*Resolver ejercicios de ecuaciones de rectas y planos.	*Responder las dudas de los temas vistos en clase.	*Capacidad de organizar y planificar.	
	*Investigar aplicaciones del producto vectorial.	*Impartir asesorías.	*Comunicación oral y escrita en su propia lengua.	
	*Participar activamente en el aula.	*Indicar el formato de reporte de la investigación.	*Habilidades básicas de manejo de la computadora.	
		*Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.	*Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas.	
			*Solución de problemas.	
			*Capacidad crítica y autocrítica.	
			*Trabajo en equipo.	
			*Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

			*Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
--	--	--	---	--

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Realiza trabajo de investigación de la aplicación del producto vectorial	10%
B. Resuelve y analiza los ejemplos propuestos en clases.	60%
C. Organiza su tiempo y trabaja de manera autónoma entregando en tiempo y forma las actividades encomendadas.	15%
D. Analiza y aplica los fundamentos del Cálculo Vectorial en la toma de decisiones.	10%
E. Incorpora conocimientos obtenidos en otras asignaturas.	5%

Niveles de desempeño

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con los indicadores (A, B, C, y D).	95-100
	Notable	Cumple con los indicadores (A, B y C) o (B, C y D) o (A, B, D y E).	85-94
	Bueno	Cumple con los indicadores (B y C) o (A, B y E) o (B, D y E).	75-84
	Suficiente	Cumple con los indicadores (A y B) o (B y D).	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con el indicar B.	NA

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Matriz de evaluación

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Examen Escrito	60%		50	10			Corroborar la comprensión de conceptos y su aplicación.
Investigación	5%	5					Reporte de Investigación según formato indicado.
Actividad Extraclase	15%			5	10		Portafolio de Evidencias.
Ejercicios en clase	15%	5	10				Portafolio de Evidencias.
Asistencia y Participación	5%					5	Lista de Cotejo de asistencia y participación
Total	100%	10%	60%	15%	10%	5%	

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Competencia No: 2

Curvas en R^2 y
ecuaciones
paramétricas.

Descripción: Construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica eligiendo la técnica más apropiada.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
2.1 Ecuación paramétrica de la línea recta. 2.2 Curvas planas. 2.3 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica. 2.4 Derivada de una función dada paramétricamente. 2.5 Coordenadas polares. 2.6 Graficación de curvas planas en coordenadas polares.	*Graficar curvas en forma polar. *Realizar en equipo las tareas extraclase. *Elaborar durante el desarrollo de la unidad el portafolio de evidencias. *Elaborar un mapa conceptual con el resumen de la unidad. *Resolver ejercicios de conversión de ecuaciones rectangulares a polares y viceversa. *Participar activamente en el aula.	*Resolver y explicar los ejercicios. *Responder las dudas de los temas vistos en clase. *Impartir asesorías. *Indicar el formato de reporte de la investigación. *Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.	*Capacidades cognitivas, la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos. *Capacidades metodológicas para manipular el ambiente: ser capaz de organizar el tiempo y las estrategias para el aprendizaje, tomar decisiones o resolver problemas. *Capacidad de análisis y síntesis. *Capacidad de organizar y planificar. *Comunicación oral y escrita en su propia lengua.	2 semanas (10hrs)

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

	*Realizar Investigación acerca de curvas planas en forma paramétricas.		*Habilidades básicas de manejo de la computadora. *Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas. *Solución de problemas. *Capacidad crítica y autocrítica. *Trabajo en equipo. *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad *Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
--	---	--	--	--

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Realiza trabajo de investigación curvas planas en forma paramétrica.	10%
B. Resuelve y analiza los ejemplos propuestos en clases.	60%
C. Organiza su tiempo y trabaja de manera autónoma entregando en tiempo y forma las actividades encomendadas.	15%
D. Analiza y aplica los fundamentos del Cálculo Vectorial en la toma de decisiones.	10%
E. Incorpora conocimientos obtenidos en otras asignaturas.	5%

Niveles de desempeño

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con los indicadores (A, B, C, y D).	95-100
	Notable	Cumple con los indicadores (A, B y C) o (B, C y D) o (A, B, D y E).	85-94
	Bueno	Cumple con los indicadores (B y C) o (A, B y E) o (B, D y E).	75-84
	Suficiente	Cumple con los indicadores (A y B) o (B y D).	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con el indicar B.	NA

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Matriz de evaluación

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Examen Escrito	60%		50	10			Corroborar la comprensión de conceptos y su aplicación.
Investigación	5%	5					Reporte de Investigación según formato indicado.
Actividad Extraclase	15%			5	10		Portafolio de Evidencias.
Ejercicios en clase	15%	5	10				Portafolio de Evidencias.
Asistencia y Participación	5%					5	Lista de Cotejo de asistencia y participación
Total	100%	10%	60%	15%	10%	5%	

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Competencia No: 3 Descripción: Reconocer una función vectorial en distintos contextos y manejarla como un vector.
Funciones vectoriales de una variable real. Manejar con soltura ecuaciones paramétricas y el software para graficar curvas. Analizar gráficas de curvas de funciones vectoriales en el espacio. Determinar los parámetros que definen una curva en el espacio.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
3.1 Definición de función vectorial de una variable real. 3.2 Graficación de curvas en función del parámetro t . 3.3 Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades. 3.4 Integración de funciones vectoriales. 3.5 Longitud de arco. 3.6 Vector tangente, normal y binormal. 3.7 Curvatura. 3.8 Aplicaciones.	*Resolver ejercicios de cálculo de ecuaciones de un vector tangente a una curva. *Realizar en equipo las tareas extraclase. *Elaborar durante el desarrollo de la unidad el portafolio de evidencias. *Elaborar un mapa conceptual con el resumen de la unidad. *Resolver ejercicios de Integrales de funciones vectoriales. * Participar activamente en el aula.	*Resolver y explicar los ejercicios. *Responder las dudas de los temas vistos en clase. *Impartir asesorías. *Indicar el formato de reporte de la investigación. *Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.	*Capacidades cognitivas, la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos. *Capacidades metodológicas para manipular el ambiente: ser capaz de organizar el tiempo y las estrategias para el aprendizaje, tomar decisiones o resolver problemas. *Capacidad de análisis y síntesis. *Capacidad de organizar y planificar. *Comunicación oral y escrita en su propia lengua.	4 semanas (20hrs)

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

	*Realizar Investigación acerca de aplicaciones de funciones vectoriales.		*Habilidades básicas de manejo de la computadora. *Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas. *Solución de problemas. *Capacidad crítica y autocrítica. *Trabajo en equipo. *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad *Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
--	---	--	--	--

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Realiza trabajo de investigación de la aplicación de las funciones vectoriales.	10%
B. Resuelve y analiza los ejemplos propuestos en clases.	60%
C. Organiza su tiempo y trabaja de manera autónoma entregando en tiempo y forma las actividades encomendadas.	15%
D. Analiza y aplica los fundamentos del Cálculo Vectorial en la toma de decisiones.	10%
E. Incorpora conocimientos obtenidos en otras asignaturas.	5%

Niveles de desempeño

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con los indicadores (A, B, C, y D).	95-100
	Notable	Cumple con los indicadores (A, B y C) o (B, C y D) o (A, B, D y E).	85-94
	Bueno	Cumple con los indicadores (B y C) o (A, B y E) o (B, D y E).	75-84
	Suficiente	Cumple con los indicadores (A y B) o (B y D).	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con el indicar B.	NA

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Matriz de evaluación

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Examen Escrito	60%		50	10			Corroborar la comprensión de conceptos y su aplicación.
Investigación	5%	5					Reporte de Investigación según formato indicado.
Actividad Extraclase	15%			5	10		Portafolio de Evidencias.
Ejercicios en clase	15%	5	10				Portafolio de Evidencias.
Asistencia y Participación	5%					5	Lista de Cotejo de asistencia y participación
Total	100%	10%	60%	15%	10%	5%	

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Competencia No: 4 Descripción: Analizar de manera formal campos escalares y vectoriales. Calcular derivadas parciales y direccionales, determinar gradientes, planos tangentes y valores extremos de una función. Resolver problemas que involucren varias variables.

Funciones reales de varias variables.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
4.1 Definición de una función de varias variables. 4.2 Gráfica de una función de varias variables. 4.3 Curvas y superficies de nivel. 4.4 Derivadas parciales de funciones de varias variables y su interpretación geométrica. 4.5 Derivada direccional. 4.6 Derivadas parciales de orden superior. 4.7 Incrementos, diferenciales y regla de la cadena. 4.8 Derivación parcial	*Resolver ejercicios de derivadas parciales. *Realizar en equipo las tareas extraclase. *Elaborar durante el desarrollo de la unidad el portafolio de evidencias. *Elaborar un mapa conceptual con el resumen de la unidad. *Resolver ejercicios del gradiente y derivada direccional. * Participar activamente en el aula. *Realizar Investigación de igualdad de derivadas parciales cruzadas o mixtas.	*Resolver y explicar los ejercicios. *Responder las dudas de los temas vistos en clase. *Impartir asesorías. *Indicar el formato de reporte de la investigación. *Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.	*Capacidades cognitivas, la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos. *Capacidades metodológicas para manipular el ambiente: ser capaz de organizar el tiempo y las estrategias para el aprendizaje, tomar decisiones o resolver problemas. *Capacidad de análisis y síntesis. *Capacidad de organizar y planificar. *Comunicación oral y escrita en su propia lengua. *Habilidades básicas de manejo de la computadora. *Habilidades de gestión de información (habilidad para	4 semanas (20hrs)

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

implícita. 4.9 Gradiente. 4.10 Campos vectoriales. 4.11 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física. 4.12 Valores extremos de funciones de varias variables.			buscar y analizar información proveniente de fuentes diversas. *Solución de problemas. *Capacidad crítica y autocrítica. *Trabajo en equipo. *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad *Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
---	--	--	--	--

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Realiza trabajo de investigación de derivadas cruzadas o mixtas.	10%
B. Resuelve y analiza los ejemplos propuestos en clases.	60%
C. Organiza su tiempo y trabaja de manera autónoma entregando en tiempo y forma las actividades encomendadas.	15%
D. Analiza y aplica los fundamentos del Cálculo Vectorial en la toma de decisiones.	10%
E. Incorpora conocimientos obtenidos en otras asignaturas.	5%

Niveles de desempeño

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con los indicadores (A, B, C, y D).	95-100
	Notable	Cumple con los indicadores (A, B y C) o (B, C y D) o (A, B, D y E).	85-94
	Bueno	Cumple con los indicadores (B y C) o (A, B y E) o (B, D y E).	75-84
	Suficiente	Cumple con los indicadores (A y B) o (B y D).	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con el indicar B.	NA

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Matriz de evaluación

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Examen Escrito	60%		50	10			Corroborar la comprensión de conceptos y su aplicación.
Investigación	5%	5					Reporte de Investigación según formato indicado.
Actividad Extraclase	15%			5	10		Portafolio de Evidencias.
Ejercicios en clase	15%	5	10				Portafolio de Evidencias.
Asistencia y Participación	5%					5	Lista de Cotejo de asistencia y participación
Total	100%	10%	60%	15%	10%	5%	

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Competencia No: 5 Descripción: Plantear y resolver integrales a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado. Usar software para hallar la representación gráfica de un campo vectorial.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-práctica
5.1 Introducción. 5.2 Integral de línea. 5.3 Integrales iteradas dobles y triples. 5.4 Aplicaciones a áreas y solución de problema. 5.5 Integral doble en coordenadas polares. 5.6 Coordenadas cilíndricas y esféricas. 5.7 Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.	*Resolver ejercicios de integrales dobles en coordenadas rectangulares. *Realizar en equipo las tareas extraclase. *Elaborar durante el desarrollo de la unidad el portafolio de evidencias. *Elaborar un mapa conceptual con el resumen de la unidad. *Resolver ejercicios de integrales dobles en coordenadas polares. * Participar activamente en el aula. *Realizar Investigación de la aplicación de integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.	*Resolver y explicar los ejercicios. *Responder las dudas de los temas vistos en clase. *Impartir asesorías. *Indicar el formato de reporte de la investigación. *Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio de ideas, la reflexión, la integración y colaboración de pares.	*Capacidades cognitivas, la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos. *Capacidades metodológicas para manipular el ambiente: ser capaz de organizar el tiempo y las estrategias para el aprendizaje, tomar decisiones o resolver problemas. *Capacidad de análisis y síntesis. *Capacidad de organizar y planificar. *Comunicación oral y escrita en su propia lengua. *Habilidades básicas de manejo de la computadora. *Habilidades de gestión de información (habilidad para buscar y analizar	4 semanas (20hrs)

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

			información proveniente de fuentes diversas. *Solución de problemas. *Capacidad crítica y autocrítica. *Trabajo en equipo. *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad *Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
--	--	--	---	--

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

			información proveniente de fuentes diversas. *Solución de problemas. *Capacidad crítica y autocrítica. *Trabajo en equipo. *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad *Trabajo en equipo *Apreciación de la diversidad y multiculturalidad	
--	--	--	---	--

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Indicadores de alcance	Valor del indicador
A. Realiza trabajo de investigación de la aplicación de la integral triple.	10%
B. Resuelve y analiza los ejemplos propuestos en clases.	60%
C. Organiza su tiempo y trabaja de manera autónoma entregando en tiempo y forma las actividades encomendadas.	15%
D. Analiza y aplica los fundamentos del Cálculo Vectorial en la toma de decisiones.	10%
E. Incorpora conocimientos obtenidos en otras asignaturas.	5%

Niveles de desempeño

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con los indicadores (A, B, C, y D).	95-100
	Notable	Cumple con los indicadores (A, B y C) o (B, C y D) o (A, B, D y E).	85-94
	Bueno	Cumple con los indicadores (B y C) o (A, B y E) o (B, D y E).	75-84
	Suficiente	Cumple con los indicadores (A y B) o (B y D).	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No cumple con el indicar B.	NA

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Matriz de evaluación

Evidencia de aprendizaje	%	Indicador de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	D	E	
Examen Escrito	60%		50	10			Corroborar la comprensión de conceptos y su aplicación.
Investigación	5%	5					Reporte de Investigación según formato indicado.
Actividad Extraclase	15%			5	10		Portafolio de Evidencias.
Ejercicios en clase	15%	5	10				Portafolio de Evidencias.
Asistencia y Participación	5%					5	Lista de Cotejo de asistencia y participación
Total	100%	10%	60%	15%	10%	5%	

Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de Mexicali
 Subdirección Académica
 Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

5. Fuentes de información y apoyos didácticos

Fuentes de información:	Apoyos didácticos:
1. Aleksandrov, A. D., Kolmogorov A. N., Laurentiev M. A. <i>La matemática: su contenido, métodos y significado</i>. Madrid, Alianza Universidad, 1985. 2. Boyer C. B. (1959). <i>The history of the Claculus and its conceptual development</i>. New York, Dover Publications Inc.Bressoud. 3. Crowe M. J. (1985). <i>A history of Vector Analysis (The evolution of the Idea of a Vectorial System)</i>. New York, Dover Publications Inc. 4. Kline M. (1977). <i>Calculus: an intuitive and physical approach</i>. 2nd edition, New York, Dover Publications Inx. 5. Marsden J. E. & Tromba A. J. (2004). <i>Cálculo vectorial</i>, 5^a. edición, Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana. 6. Stewart J. (1999). <i>Cálculo multivariable</i>. México, Thomson. 7. Swokowsky E. (1989). <i>Cálculo con geometría analítica</i>, 2^a. edición, México, Grupo Editorial Iberoamérica.	• Pizarrón y plumones. • Computadora. • Calculadora. • Retroproyector. • Plataforma Moodle. • Internet.

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Mexicali
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

6. Calendarización de evaluación en semanas:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
TP	ED			EF ₁		EF ₂		EF ₃				EF ₄				EF ₅	ES	
TR																		
SD					SD				SD					SD				SD

TP = Tiempo planeado
ED = Evaluación diagnóstica

TR = Tiempo real
EF_n = Evaluación formativa
(competencia específica n)

SD = Seguimiento departamental
ES = Evaluación sumativa

Fecha de elaboración: 02 de septiembre de 2025

Dra. María Guadalupe Amado Moreno
Profesor

M.C. Oscar Enrique Callejas Melgoza
Jefe del Departamento de Ciencias Básicas

ANEXO 3. CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN

CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN

Ciudad de México, 02/09 /2025

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO.
PRESENTE

Bajo protesta de decir verdad, María Guadalupe Amado Moreno, personal docente adscrito al Instituto Tecnológico de Mexicali del Tecnológico Nacional de México, manifiesto que en cumplimiento de mis actividades relacionadas con el Año Sabático elaboré la obra titulada "Apuntes de Cálculo Integral y Cálculo Vectorial".

Con base en lo anterior, y con fundamento en los artículos 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y 46 de su Reglamento, reconozco que el Tecnológico Nacional de México es titular de los derechos patrimoniales sobre la misma y le corresponden las facultades relativas a la divulgación, integridad de la obra y de colección, conservando el derecho a figurar como autor.

Asimismo, respondo por la autoría y originalidad de la citada obra; y relevo de toda responsabilidad al Tecnológico Nacional de México de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere que con esta obra es afectado en alguno de los derechos protegidos por la Ley en cita, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas.

ATENTAMENTE



María Guadalupe Amado Moreno
AUTOR