

CAPÍTULO I. EQUILIBRIO DE LA PARTÍCULA EN 2D Y 3D

Objetivo: solucionar problemas para las fuerzas que se concentran en un punto.

Subtemas a tratar:

1.1. Definiciones

1.2. Concepto de fuerza

1.3. Descomposición de fuerzas en tres dimensiones.

1.3.1. Con vectores unitarios

1.3.2. Con cosenos directores

1.4. Sistemas de fuerzas concurrentes

1.5. Equilibrio de partículas.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son cinco:

1. Definir los conceptos y los principios de la mecánica con ejercicios.
2. Realizar ejercicios donde las fuerzas sean concurrentes y en un plano.
3. Aplicar el método del paralelogramo para determinar la resultante de fuerzas concurrentes.
4. Determinar la resultante de fuerzas por medio del polígono.
5. Obtener resultantes por medio del método analítico. Descomposición de fuerzas rectangulares.

1.1 DEFINICIONES.

1.1.1 La primera definición que se establecerá es la de Mecánica. Para lo anterior se citarán algunas definiciones, tanto de la R.A.E., como de diferentes autores con la idea es demostrar la afinidad entre ellas y coincidir con una sola definición.

A. Mecánico, ca¹

Del latín mechanĭcus, y este del gr. μηχανικός mēchanikós; la forma f., del latín tardío mechanĭca, y este del gr. μηχανική mēchanikḗ.

1. adj. Perteneciente o relativo a la mecánica. Principios mecánicos.
2. adj. Ejecutado por un mecanismo o máquina.
3. adj. Dicho de un acto: Automático, hecho sin reflexión.
4. adj. Dicho de un agente físico material: Que puede producir efectos como choques, rozaduras, erosiones, etc.
5. adj. Dicho de un oficio o de una obra: Que exige más habilidad manual que intelectual.
6. adj. Dicho de una persona: Que se dedica a un oficio mecánico. U. t. c. s.
7. adj. desus. Bajo e indecoroso.
8. m. y f. Especialista en mecánica (II parte de la física).
9. m. y f. Persona dedicada al manejo y arreglo de las máquinas.
10. m. y f. Especialista en el automóvil o en mecánica del automóvil.
11. m. p. us. Conductor asalariado de un automóvil.
12. f. Parte de la física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a cualquier fuerza.
13. f. Pieza o conjunto de piezas que ponen en movimiento una máquina.
14. f. Conjunto de reglas que rigen el desarrollo de una actividad. La mecánica de un concurso.

¹ <https://dle.rae.es/?id=OiC9vhp> (visitada el 14 de agosto de 2019).

15. f. Mil. Buen orden interior y cuidado de los intereses y efectos de los soldados.

16. f. coloq. desus. Cosa despreciable y ruin.

17. f. coloq. desus. Acción mezquina e indecorosa.

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de cuerpos rígidos, la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos (Beer Ferdinand P., Johnston Russell jr., Mazurek David F., Eisenberg Elliot R., 2010) (a)

En su nivel más elemental, la mecánica es el estudio de las fuerzas y sus efectos. La mecánica elemental se divide en estática, que es el estudio de los objetos en equilibrio, y dinámica, que estudia los objetos en movimiento (Bedford Anthony, Fowler Wallace, 1996).

La mecánica es una rama de las ciencias físicas que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: mecánica de cuerpos rígidos, mecánica de cuerpos deformables y mecánica de fluidos (Hibbeler Russell C., 2010).

Por ser la obra de cabecera para la materia de Estática de quien escribe, este texto adoptará la definición de Beer and J. Asimismo queda claro que la Estática es una rama de la Mecánica.

De las anteriores definiciones podemos establecer un esquema que ayudará al estudiantado a visualizar la relación de la materia de Estática con otras materias anteriores y posteriores de su retícula (cuadros I-I y I-II).

MECÁNICA			
Competencias previas indicadas para Estática	Materia de la retícula que cubre la anterior competencia	 ESTÁTICA². MED-1010	Materias que requieren el haber cursado Estática.
Manejo de conceptos básicos de dibujo.	Dibujo Mecánico MEV-1006		Dinámica MED-1007
Manejo de Trigonometría.	Explícitamente ninguna.		
Manejo de Cálculo diferencial.	Cálculo diferencial ACF-0901		Mecánica de materiales I MED-1020
Manejo de Cálculo Integral.	Cálculo integral ACF-0902		

Cuadro I-I

MECÁNICA			
Competencias previas indicadas para Estática	Materia de la retícula que cubre la anterior competencia	 ESTÁTICA³. EME-1012	Materias que requieren el haber cursado Estática.
Sumar, restar y multiplicar vectores.	Cálculo vectorial ACF-0904		
Tener conocimiento de Trigonometría.	Explícitamente ninguna.		
Interpretar de planos y dibujos de ingeniería (sic)	Dibujo electromecánico EMF-1007		
Calcular áreas por integración	Cálculo integral ACF-0902		Mecánica de materiales I MED-1020
Trazar líneas y curvas en el plano y en el espacio.	Explícitamente ninguna.		
Resolver sistemas de ecuaciones lineales	Álgebra lineal ACF-0903		

Cuadro I-II

² Esta información es tomando como referencia la retícula de la carrera de Ingeniería Mecánica.

³ Esta información es tomando como referencia la retícula de la carrera de Ingeniería ElectroMecánica.

1.1.2 Vectores.

Para familiarizarnos con los vectores tenemos que establecer las diferencias entre escalares y vectores, para esto citaremos textualmente a Lugo⁴:

“Las cantidades escalares abarcan más cosas en nuestras vidas cotidianas como la estatura, la edad, la temperatura, números de página, masa, distancia y tasas de interés. Sin embargo, algunas cosas no se pueden definir o medir mediante un sólo número. Por ejemplo la velocidad, la fuerza y el peso requieren de una magnitud y una dirección.” (b)

Un escalar solo tiene magnitud o que es lo mismo, un valor y este podría ser positivo o negativo. En la tabla I-I se dan ejemplos de algunos escalares y vectores.

Escalares			Vectores				
Concepto	Magnitud	Unidades	Concepto	Magnitud	Unidades	Dirección ⁵	Sentido
Tiempo	Valores reales.	Horas, días...	Posición	Valores reales mayores que cero.	Longitud	En una dimensión, en un plano, en el espacio.	Hacia la izquierda o a la derecha. Hacia arriba, o hacia abajo...
Leche		Litros, galones...	Fuerza		Fuerza		
Sonido		Decibeles.	Momento		Fuerza por distancia.		

Tabla I-I

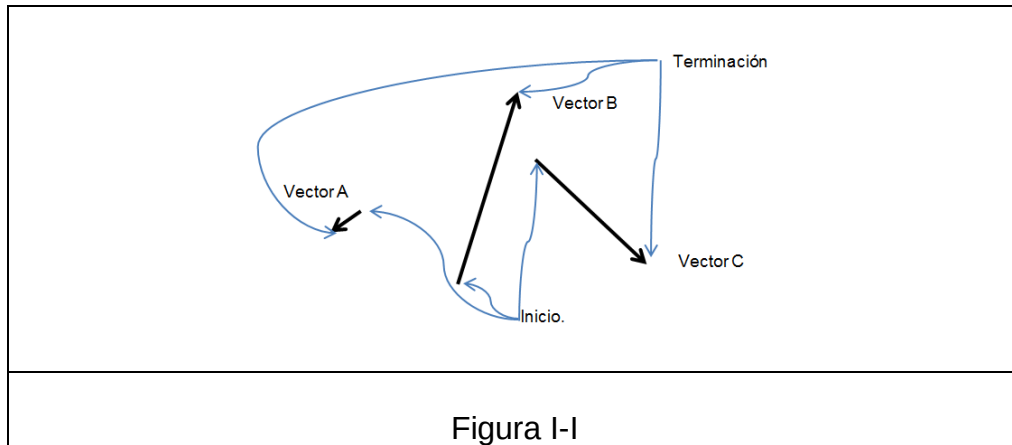
Por lo anterior se podrá definir al vector como una expresión matemática que se caracteriza por tener los siguientes atributos:

1. Magnitud (serán solo valores reales y mayores que cero)
2. Dirección y...
3. Sentido.

⁴ http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Vectores_22310.pdf (visitada el 19 de agosto de 2019).

⁵ En esta tabla se están considerando únicamente dos de las tres direcciones que definen el espacio.

Una vez que se ha definido al vector, ahora tendremos que darle una "forma", para poderlo identificar. Se acostumbra a representarlo como una línea recta que termina en punta de flecha. En la figura I-I se describe a detalle lo anterior.



De la figura I-I se podrá afirmar que los vectores allí mostrados tienen diferente dirección, asimismo el largo de cada recta representa su magnitud. Sus inclinaciones representarán la dirección en el espacio o en el plano, según sea el caso y la punta de flecha (^) el sentido de cada uno de los vectores respectivamente. Algo muy importante a destacar: no se especifica qué clase de vectores son, de lo anterior se podrá afirmar que cualquiera de los dos métodos referenciados en el párrafo anterior aplica para el vector posición, o para el vector fuerza o para el vector momento.

Es de suma importancia destacar que con líneas rectas representaremos a los vectores, a la vez recordar que se ocupan, por lo menos, dos puntos para definir una línea recta. Para nuestra conveniencia, estos dos puntos serán el inicio y final de cada uno de nuestros vectores.

Conveniente será el establecer, la nomenclatura que se utilizará para identificar a los vectores, y estas serán letras del abecedario, en mayúsculas⁶ o en minúsculas y con una tilde en forma de flecha dibujada de izquierda a derecha:

Vector A $\vec{A}$, Vector B $\vec{B}$, Vector c: $\vec{c}$

Asimismo se utilizarán una nomenclatura especial para identificar cierto tipo de vectores definidos como vectores unitarios. Los cuáles serán tres:

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

⁶ Salvo algunas excepciones se utilizarán un par de números, por ejemplo: $\overrightarrow{0.-1}$

En su momento se indicará la definición y aplicación de dichos vectores unitarios.

Ejemplos de vectores (aunque existen algunos más, solo se indicarán los que más se ocuparán a lo largo de este texto)

1. Vector Posición.
2. Vector Fuerza.
3. Vector Momento o Par Torsional.

Ahora se analizará término por término de la definición de vector:

- a. La Magnitud se refiere únicamente a un valor. En la tabla II se dan algunos ejemplos.

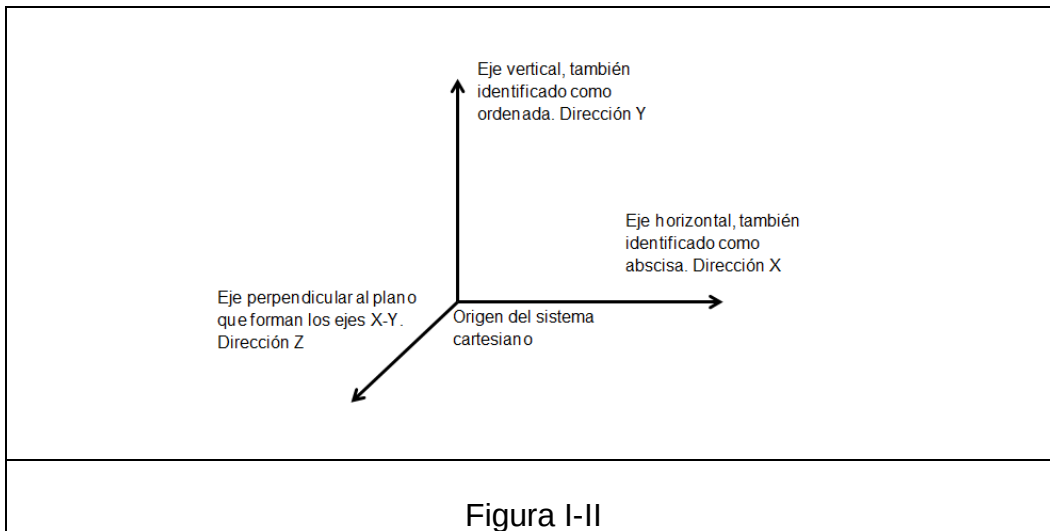
Vector	Magnitud	Unidades	S. I ⁷ .	Uso común en Estados Unidos. FPS ⁸
Posición	Cualquier valor real mayor que cero	Longitud	Metros	Pies.
Fuerza		Fuerza	Newton $\frac{kg * m}{s^2}$	Libra $\frac{slug * pie}{s^2}$
Momento o Par torsional		Momento	Newton-metro $\frac{kg * m^2}{s^2}$	Libra-pie $\frac{slug * pie^2}{s^2}$
Tabla I-I				

- b. La Dirección. Recordará el alumnado que tres ejes perpendiculares entre sí y con un origen en común definen un espacio, también conocido como espacio Euclídeo. Asimismo cualquier vector podrá tener cualquier dirección en el espacio que definiremos por los tres ejes cartesianos X, Y, Z y que está representado en la figura I-II. Como parte de la estrategia de la solución de problemas que involucran vectores se buscará que cualquier vector pueda ser representado por tres o dos vectores, según sea el caso, con direcciones paralelas a dichos ejes

⁷ SI significa Système International d'Unités (francés) (beer).

⁸ Hibbeler

cartesianos, esto último se estará explicando a detalle mientras se avance en este capítulo.



En la tabla I-III se ilustra y amplía la anterior idea de tres o menos ejes:

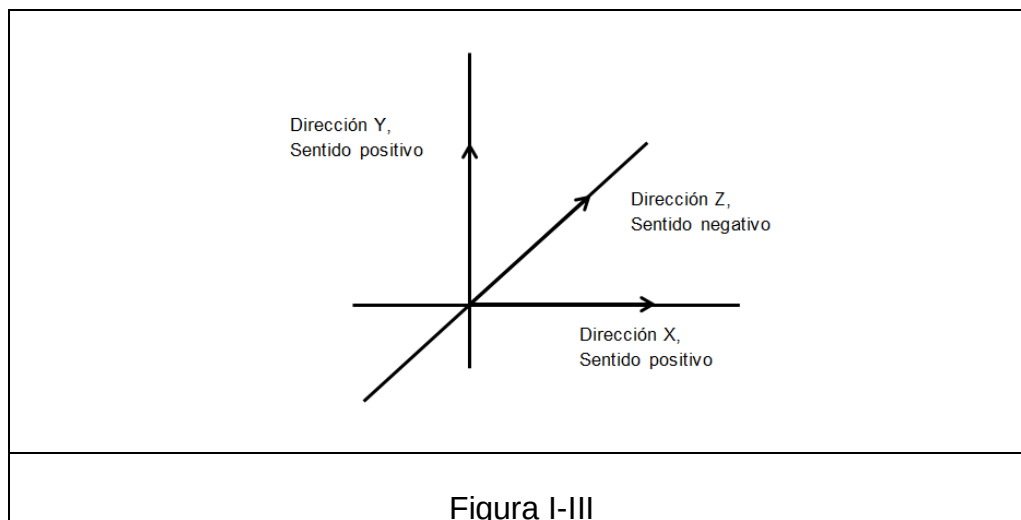
Número de ejes perpendiculares entre si	Lo que se puede definir
3	El Espacio.
2	El plano cartesiano
1	Solo una línea recta

Tabla I-III

- c. El Sentido. El sentido se refiere a que el vector puede estar orientado sobre cualquier eje o paralelo a este, ya sea hacia la izquierda o a la derecha, hacia arriba o hacia abajo, hacia dentro o hacia afuera de alguno de los siguientes tres planos que se utilizar

1. $X - Y$
2. $X - Z$
3. $Y - Z$

Tal como se ilustra en la figura I-III. Lo anterior se resume en sentido positivo o negativo y que la selección de esto último es arbitraria pero vez una seleccionada la convención de signos la misma se deberá respetar en el desarrollo de cualquier problema.



Una de las más frecuentes confusiones que he observado entre el alumnado de la clase de Estática es cuando se les pregunta por el sentido de un vector, y que de respuesta dan la dirección:

“¿Qué sentido tiene, por lo tanto, esta resultante?, y como respuesta dicen: X o Y o Z, según sea el caso. O lo contrario; se les pregunta por la dirección y responden diciendo positivo o negativo.”

Un ejemplo sobre la importancia de definir correctamente los atributos se podría ejemplificar con el siguiente diálogo imaginario entre dos individuos:

- I1. Hola, ¿Qué tan lejos vives en línea recta de este punto en el cual nos encontramos ambos?*
- I2. A cinco kilómetros*
- I1. Yo también vivo a cinco kilómetros en línea recta de este punto, ¿por qué, entonces, nunca te he visto por allí?*
- I2. Es que yo vivo sobre la calzada principal.*
- I1. Yo también vivo sobre dicha calzada.*
- I2. Sí, pero yo vivo rumbo al este.*
- I1. Yo vivo rumbo al oeste y por lo tanto eso explica todo; nuestras viviendas están ubicadas a la misma lejanía (**magnitud**) de este punto, sobre la misma calzada (**dirección**), pero en **sentidos** opuestos.*

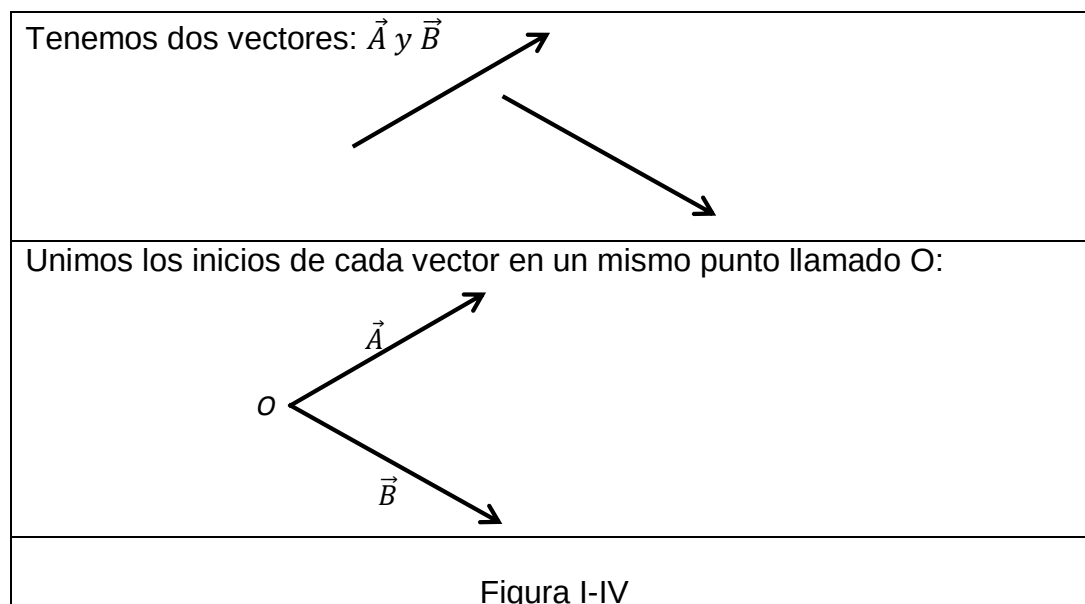
Antes de empezar con el repaso del álgebra vectorial es conveniente recordar las siguientes reglas del álgebra ordinaria y del álgebra vectorial y que se pueden observar en la tabla I-IV.

Ley.	Álgebra escalar	Álgebra vectorial
1. Conmutativa para la suma	$a + b = b + a$	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. Asociativa para la suma	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. Conmutativa para la multiplicación	$ab = ba$	$a\vec{b} = \vec{b}a$
4. Asociativa para la multiplicación	$a(bc) = (ab)c$	$a(b\vec{c}) = ab\vec{c}$
5. Distributiva para la multiplicación	$(a + b)c = ac + bc$	$(a + b)\vec{c} = a\vec{c} + b\vec{c}$
	$a(b + c) = ab + ac$	$a(\vec{b} + \vec{c}) = a\vec{b} + a\vec{c}$
Tabla I-IV. Fuente (Lugo ⁹)		

Operaciones algebraicas con vectores.

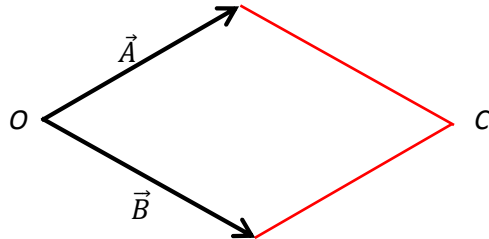
La operación vectorial más recurrente en la solución de problemas de Estática es la suma vectorial. Por lo tanto nos avocaremos a repasar, primeramente, la ley del paralelogramo:

Ley del paralelogramo: Hibbeler indica que todas las cantidades vectoriales obedecen la ley del paralelogramo para la suma vectorial. Lo anterior se ilustra de la siguiente manera (figura I-IV):



⁹ http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Vectores_22310.pdf (visitada el 19 de agosto de 2019).

De donde termina cada vector se traza una línea paralela al vector contrario. El punto de intersección de estas líneas será el punto C, formando un paralelogramo



La diagonal de este paralelogramo que inicia en **O** y termina en **C** será el vector resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

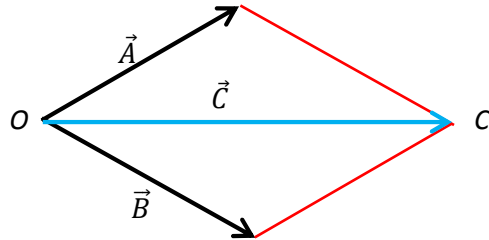
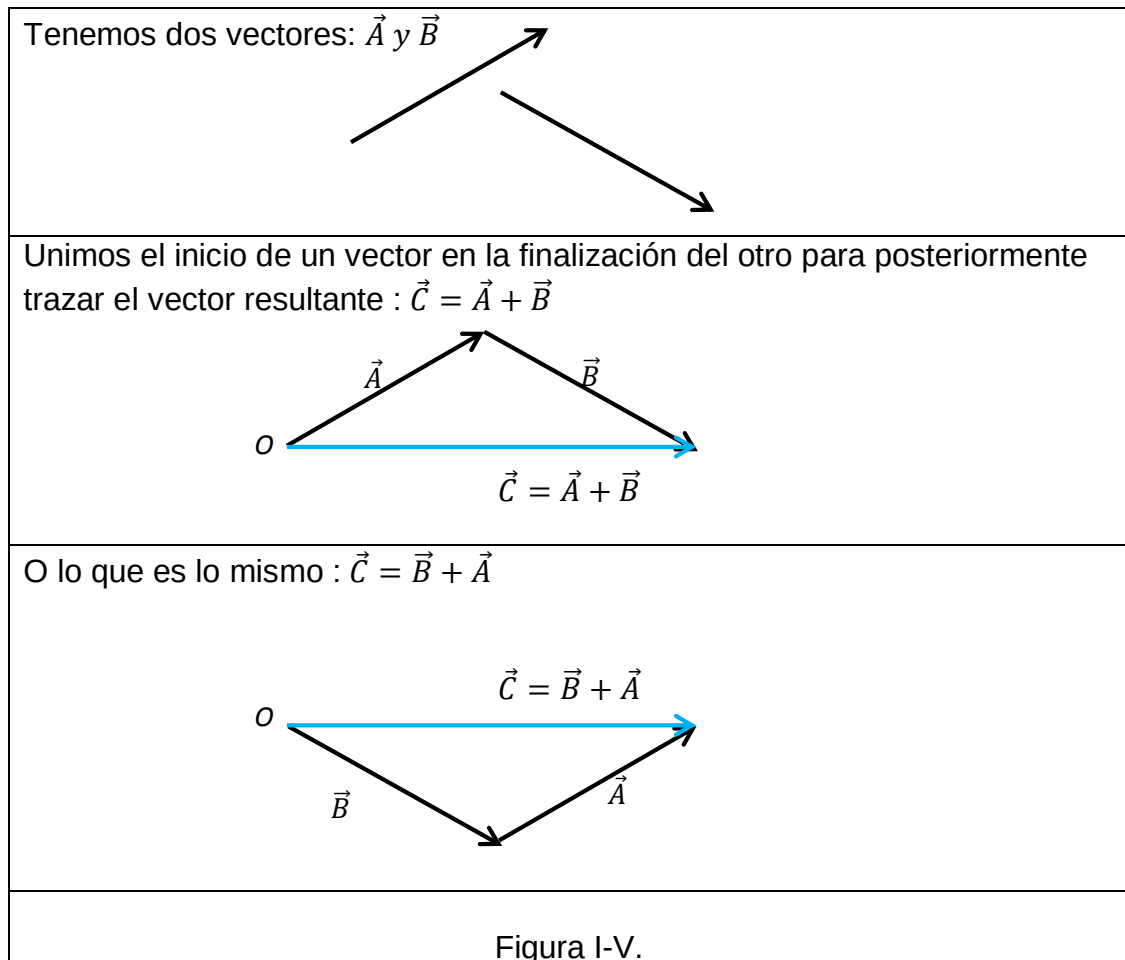


Figura I-IV (continuación)

Lo anterior también se podrá hacer mediante la regla del triángulo lo cual se puede observar en la figura I-V. Para tal fin utilizaremos los mismos vectores de la figura anterior:

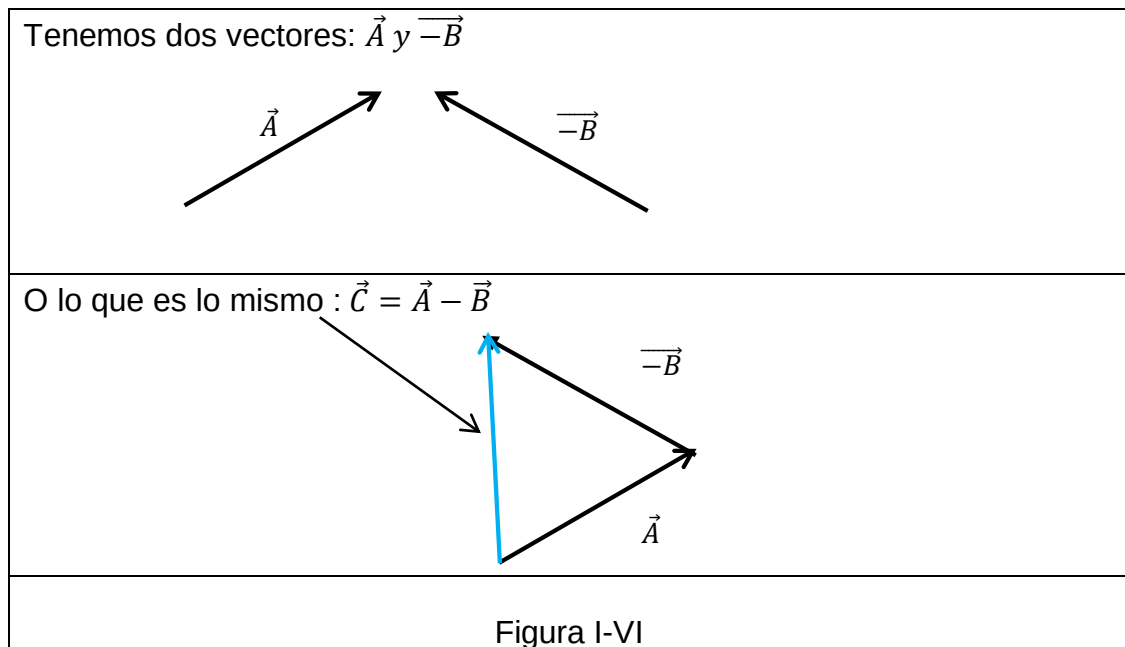


De lo anterior podemos establecer el siguiente enunciado:

El Vector resultante de dos o más vectores, inicia donde inicia el primer vector que forma parte de dicha resultante y finaliza donde finaliza el último vector que forma, también, parte de dicha resultante

(c)

En la figura I-VI se representa la resta vectorial:



Como se indicó líneas arriba: un paso casi inevitable para la solución de los problemas de Estática es la suma/resta vectorial. Para poder hacerlo se deberá tener identificado, en la medida de lo posible, de cada vector su posición inicial y final con respecto a un sistema de referencia y así poder representarlo en sus tres componentes rectangulares ($\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$). Y para lograr lo anterior nos apoyaremos en los conceptos siguientes:

Posiciones absolutas y relativas en una dimensión,

Posiciones absolutas y relativas en dos dimensiones,

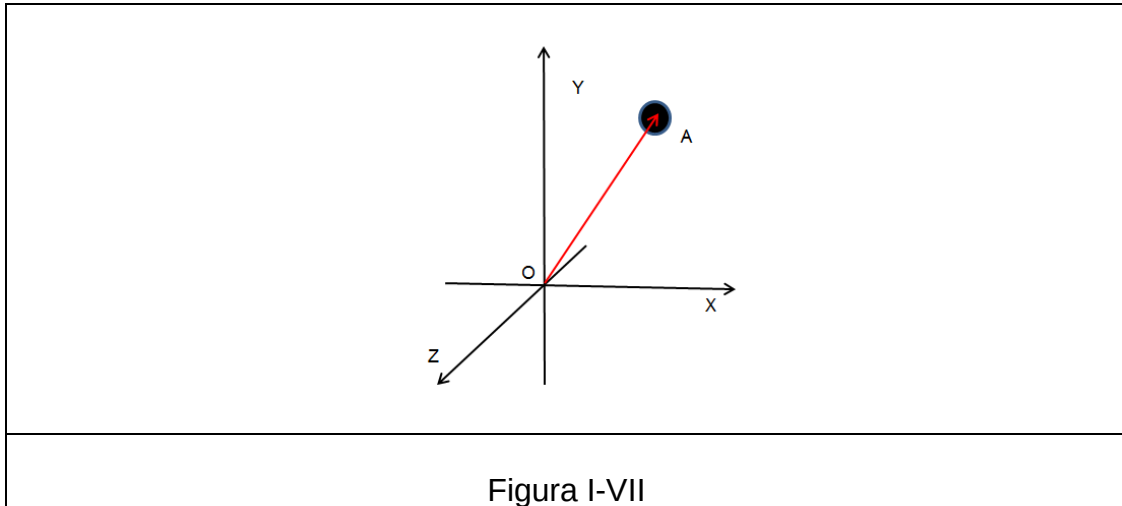
Posiciones absolutas y relativas en tres dimensiones,

La importancia de explicar los conceptos absolutos y relativos estriba en que todos los vectores que se utilizarán a lo largo de este texto, ya sea en tres o dos dimensiones se deberá referenciar su inicio y su fin. Ya que como los puntos iniciales y finales nos darán idea de:

- a. La magnitud,
- b. la Dirección y

c. el sentido de dicho vector

Por ejemplo: Supongamos que tenemos un punto A ubicado, únicamente en el plano formado por los ejes X y Y tal como se muestra en la figura I-VII, y se desea conocer la posición de dicho punto A con respecto a otro punto. En este caso se selecciona como el "otro" punto al origen del sistema cartesiano

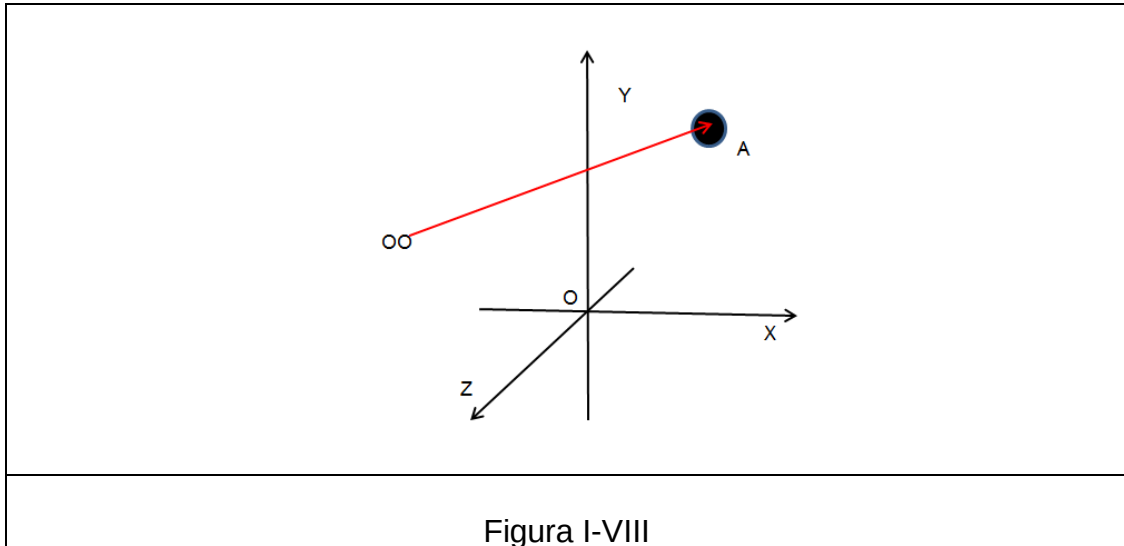


De lo anterior podemos definir un vector posición entre el origen O y el punto A representado de la siguiente manera:

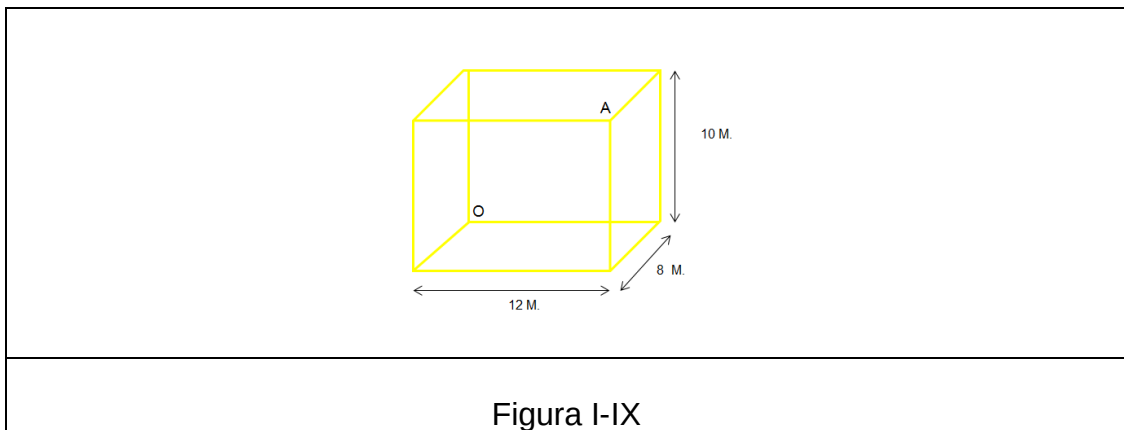
$$\vec{S}_{O-A} = \text{la distancia en línea recta de } O \text{ hacia } A.$$

Supongamos que medimos con una regla dicha distancia, que con un transportador medimos su inclinación con respecto al eje horizontal y como se encuentra orientada afirmamos que va de izquierda a derecha y de abajo a arriba. Se tiene completamente definido el vector $\vec{S}_{O-A}$ en el espacio (aunque únicamente se requirieron dos ejes para definirlo).

¿Pero qué pasaría si por las condiciones de algún problema planteado en Estática tengamos que definir un vector como el que se muestra en la figura I-VIII?, siendo ahora el vector posición $\vec{S}_{O-A}$:



Debido a que el vector $\vec{S}_{O-A}$ de la figura I-VIII se encuentra en el espacio, ubicar su magnitud, dirección y sentido ya no es tan sencillo –a primera instancia- como lo fue con el vector $\vec{S}_{O-A}$ de la figura I-VII. Un ejemplo de la vida real podría ser el que a usted se le pida medir la distancia en línea recta del punto O al punto A de un salón de clases como el de la figura I-IX y solo tiene para hacerlo una cinta de medir de cuatro metros de largo, ¿cómo le haría? La respuesta al anterior cuestionamiento se facilitará una vez que se expliquen los conceptos de posiciones absolutas y relativas.



Posiciones absolutas y relativas en una dimensión.

Empecemos con las posiciones absolutas. Realizar problemas que involucren vectores y que todos los vectores se encuentren sobre la misma dirección, será siempre la forma más simple de trabajar en Estática, pero se deberá tomar en cuenta que en dicho curso casi el 100% de los problemas planteados y a resolver, los vectores involucrados tendrán diferentes direcciones, las cuales podrán abarcan dos o tres dimensiones. Cuando se tienen problemas de Estática donde solo interviene una sola dimensión (que sería lo mismo que una sola dirección) únicamente se tiene que hacer la suma algebraica de los vectores respetando sus unidades (ver tabla I-I). De lo anterior se podrá establecerán los siguientes dos enunciados:

Dos o más vectores se podrán sumar algebraicamente si y solo si tienen la misma dirección y las mismas unidades (d)

Un vector puede ser la resultante de dos o más vectores y puede ser al mismo tiempo la componente de una resultante... (e)

La manera de demostrar los anteriores enunciados es la siguiente. Si se considera que la imagen I-I representa una dirección de las tres que definen el espacio (figura I-II) y es la dirección horizontal y que sobre dicha recta se definen arbitrariamente 16 Vectores¹⁰ ($(\overrightarrow{0-1}, \overrightarrow{1-2}, \dots, \overrightarrow{15-16},)$), y para cada uno de estos vectores la magnitud es de un centímetro y el sentido es de izquierda a derecha –esto último se convendrá como sentido positivo-, existirá por lo tanto un vector resultante cuya magnitud se reduce a la suma algebraica o suma escalar de los 16 vectores dando como resultado un solo vector resultante de 16 centímetros de magnitud, dirección horizontal y sentido positivo, quedando así demostrado ambos enunciados.



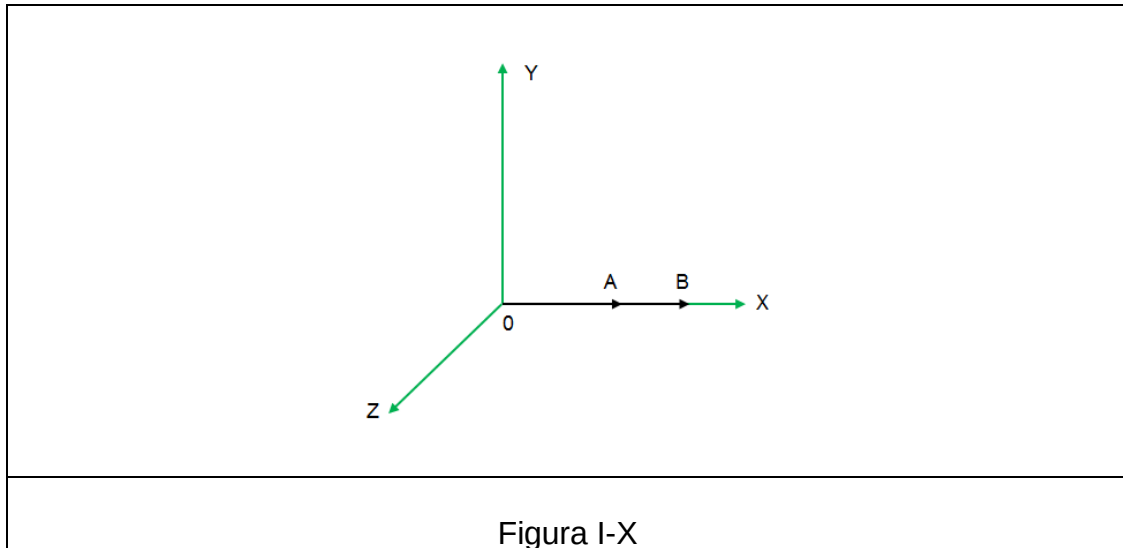
Imagen I-I.

¹⁰ A esto se le identifica como vectores colineales.

Para definir la posición absoluta

Nos apoyaremos en lo siguiente:

- i. El vector posición y...
- ii. un sistema de tres dimensiones como se muestra en la figura IV¹¹



Se observa en dicha figura I-X, los tres ejes cartesianos, el origen 0, dos puntos: A y B sobre el eje X y cada uno en diferente posición. Con lo anterior podemos definir la posición absoluta de un punto cualquiera de la siguiente manera:

Tomando un único origen, todas las mediciones de posición de cualquier punto con respecto a este origen serán posiciones absolutas. (f)

La manera de escribir una posición absoluta será:

$$S_{\text{De un punto cualquiera} / \text{Origen}}$$

Y se lee de la siguiente manera: *La posición absoluta de un punto cualquiera con respecto al origen.*

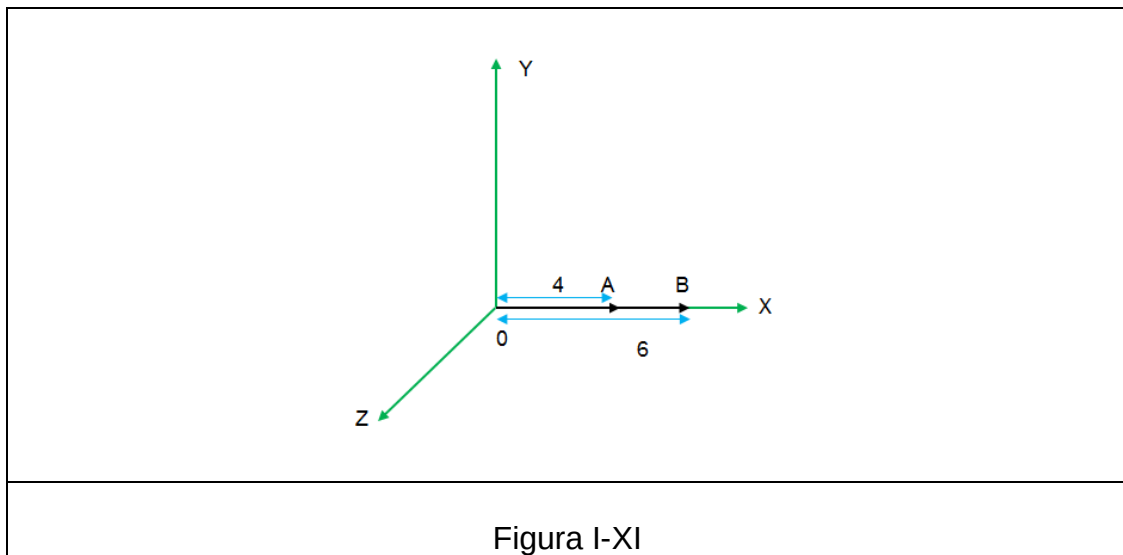
¹¹ Se estableció en este apartado que solo nos manejaríamos en una sola dirección, pero lo anterior no impide que se utilice un sistema de tres dimensiones.

Por lo anterior la posición absoluta de los puntos A y B de la figura VIII se anotará como se indica:

$$S_{A/0} \text{ y } S_{B/0}$$

Leyéndose de la siguiente manera: la posición de A respecto al origen y la posición de B respecto al origen

Ahora supongamos que el valor de las mediciones absolutas de las posiciones A y B utilizando el S. I., y empleando el metro, son 4 y 6 metros respectivamente, como se muestra en la figura I-XI:



De tal forma que:

$$S_{A/0} = 4 \text{ metros, y } S_{B/0} = 6 \text{ metros.}$$

Una forma alterna de indicar posiciones absolutas es:

$$S_{A/0} = S_A - S_0 \quad (1)$$

Leyéndose de la siguiente manera: la posición absoluta de A menos la posición absoluta del origen, siendo esta última siempre cero, por lo tanto es válido escribirlo así:

$$S_{A/0} = S_A \quad (2)$$

Finalmente la anotación absoluta de los puntos A y B de la figura I-XI quedaría de la siguiente manera:

$$S_A = 4 \text{ metros.}$$

$$S_B = 6 \text{ metros.}$$

Las posiciones relativas

Son aquellas mediciones que se hacen tomando como referencia cualquier punto de nuestro sistema de coordenadas que no sea el origen. Por ejemplo: supongamos que tomamos como punto de referencia el punto A de la figura I-XI y deseamos saber la posición de B con respecto al punto A, siguiendo lo establecido en la ecuación (1) se deberá anotar de la siguiente manera:

$$S_{B/A} = S_B - S_A \quad (3)$$

Y leerse así: La posición relativa del punto B con respecto al punto A, y cuyo valor en este caso sería de:

$$S_{B/A} = 6 - 4 = 2 \text{ metros.}$$

Una forma de explicar lo anterior es como si usted se dirigiera o "caminara" del punto A al punto B y se desplazará en línea recta horizontal y de izquierda a derecha dos metros.

En caso de hacer la medición del punto A con respecto al punto B, tendríamos lo siguiente:

$$S_{A/B} = S_A - S_B \quad (4)$$

$$S_{A/B} = 4 - 6 = -2 \text{ metros.}$$

Del anterior planteamiento, ahora usted se dirigiera o "caminara" del punto B al punto A y se desplazara en línea recta horizontal y derecha a izquierda menos dos metros.

Posiciones absolutas y relativas en dos dimensiones.

Consideremos los dos puntos A y B ubicados en el plano cartesiano que se muestra en la figura I-XII. Supongamos que usted está en el origen de la figura I-XII y desea llegar al punto A de dicha figura pero solo se puede desplazar sobre los ejes cartesianos X, Y, Z . Asimismo, del origen desea llegar al punto B e igualmente solo se puede desplazar por dichos ejes cartesianos. En la tabla IV muestra la información de lo que usted "caminó" tanto horizontalmente como verticalmente para llegar del origen al punto A y B , respectivamente.

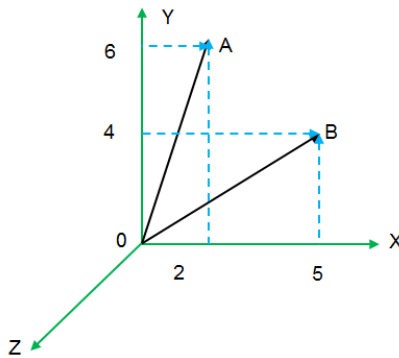


Figura I-XII.

Posiciones absolutas				
Punto	Inicial X	Final X	Inicial Y	Final Y
A	0	2	0	6
B	0	5	0	4

Tabla I-V

Ahora y con dicha información de la Tabla I-V, se podrá encontrar la:

- Magnitud,
- Dirección y
- Sentido de cada vector posición $\vec{S}_{A/O}$ y $\vec{S}_{B/O}$ respectivamente.

Las magnitudes se encuentran aplicando el teorema de Pitágoras:

$$M_{OA} = (4 + 36)^{.5} = 6.32$$

$$M_{OB} = (25 + 16)^{.5} = 6.4$$

La dirección. Por el momento se presentará la dirección de cada vector en sus componentes rectangulares ya que falta definir los cosenos directores, por lo tanto tenemos que:

$$\vec{S}_{A/O} = 2\vec{X} + 6\vec{Y}$$

$$\vec{S}_{B/O} = 5\vec{X} + 4\vec{Y}$$

Y finalmente el sentido. Por el momento podemos observar de las dos ecuaciones vectoriales anteriores que los sentidos de cada componente X, Y son positivos. Como se ha indicado en el párrafo anterior: cuando se expliquen los cosenos directores se profundizará en la manera de establecer el sentido del vector en cuestión.

Hasta aquí únicamente tenemos definidas las ubicaciones absolutas de los puntos A y B . Si deseamos conocer la posición relativa del punto B respecto al punto A se tendrá que indicar lo anterior mediante la siguiente expresión¹²:

$$\vec{S}_{B/A} = \vec{S}_B - \vec{S}_A \quad (5)$$

Y así mismo plantearíamos la siguiente expresión si quisiéramos saber la posición relativa del punto A respecto al punto B :

$$\vec{S}_{A/B} = \vec{S}_A - \vec{S}_B \quad (6)$$

Suponga ahora que desea llegar del punto A al punto B o viceversa como se observa en la tabla I-VI.

Posiciones relativas				
Punto	Inicial X	Final X	Inicial Y	Final Y
B/A	2	5	6	4
A/B	5	2	4	6

Tabla I-VI

¹² A diferencia de la expresión (3) donde no se indicó de manera vectorial por ser considerada en una dimensión, es necesario indicar la anotación vectorial con la tilde en forma de flecha.

Para explicar la tabla I-VI, replantemos la siguiente expresión:

$$\vec{S}_{B/A} = \vec{S}_B - \vec{S}_A \quad (5)$$

Recordemos que los vectores $\vec{S}_B$ y $\vec{S}_A$ están, para efectos prácticos, representados por dos vectores que son

- perpendiculares entre si...
- y paralelos a los ejes cartesianos X, Y .

Por lo tanto tenemos que:

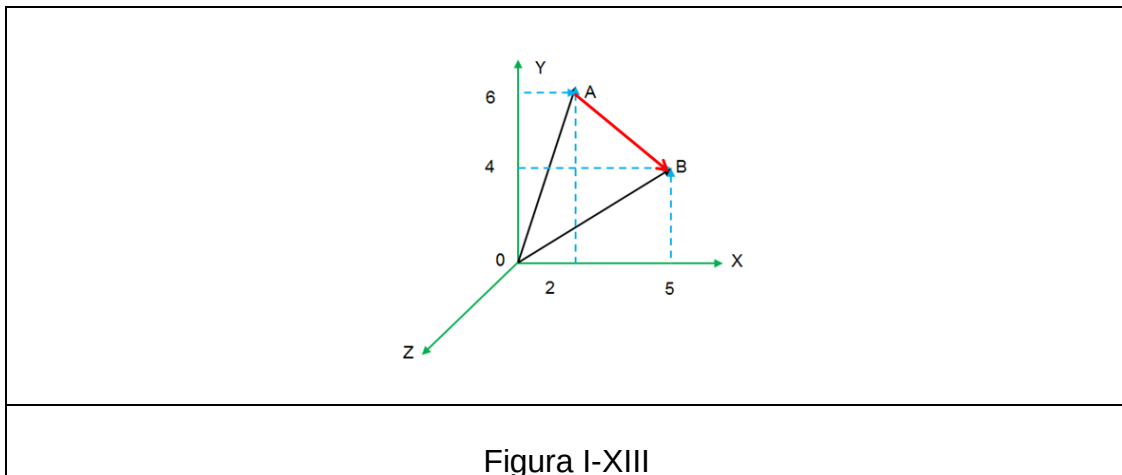
$$\vec{S}_B = 5\vec{X} + 4\vec{Y} \text{ y } \vec{S}_A = 2\vec{X} + 6\vec{Y}$$

Dando por resultado que

$$\vec{S}_{B/A} = 3\vec{X} - 2\vec{Y}$$

Dicho vector se podrá observar en la figura tal y, por el momento, estimar su magnitud que es de

$$Magnitud_{B/A} = 3.6 \text{ unidades de longitud.}$$



Posiciones absolutas y relativas en tres dimensiones

Los siguientes tres pasos nos servirá para conocer, al menos en un principio, la magnitud de cualquier vector en el espacio sea este un vector que inicie o termine en el origen o inicie o termine en otro punto que no sea el origen

1. Identificar cada uno de los vectores con una letra diferente y a la vez su posición inicial y su posición final con respecto al origen del sistema de referencia.

2. Con los datos anteriores construir la siguiente tabla:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{A}$	x_{A_i}	y_{A_i}	z_{A_i}	x_{A_f}	y_{A_f}	z_{A_f}			
2	$\vec{B}$	x_{B_i}	y_{B_i}	z_{B_i}	x_{B_f}	y_{B_f}	z_{B_f}			
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N's	Enésimo vector									

3. Expresar el vector deseado haciendo la suma o resta vectorial.
Aplicar el teorema de Pitágoras para conocer, en un principio, la magnitud del vector resultante u otro vector deseado.

Para demostrar la sencillez de los anteriores tres pasos, resolvamos la situación mencionada referente a la figura I-IX (bis)

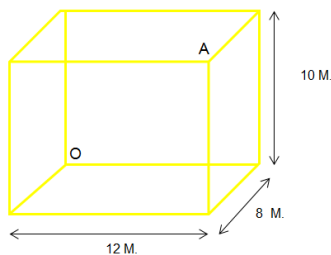


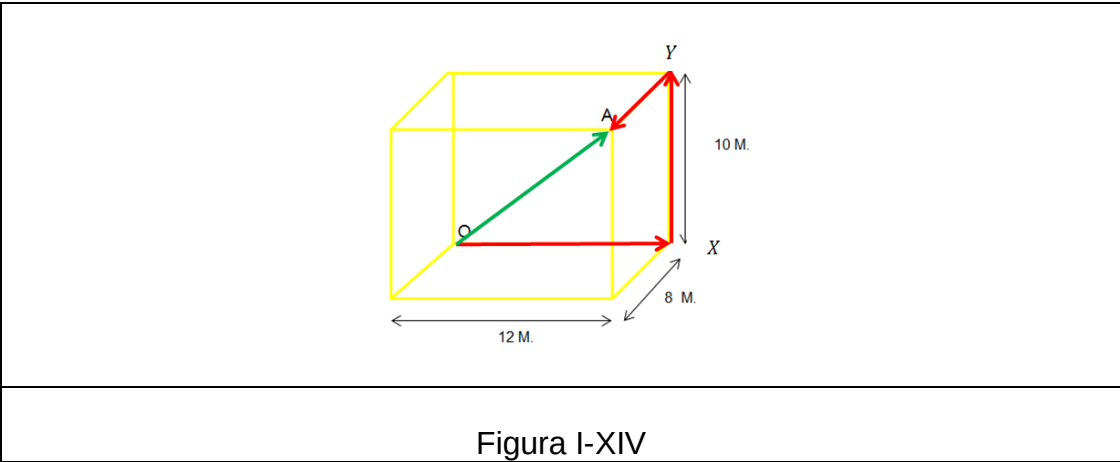
Figura I-IX (bis)

El problema, como se recordará, es medir la distancia en línea recta del punto O al punto A de un salón de clases y solo tiene para hacerlo una cinta de medir de cuatro metros de largo.

El vector del cual se desea conocer su magnitud es:

$$\vec{S}_{A/O}$$

Primeramente se definirán cada uno de los vectores tal como se muestran en la figura I-XIV.



A continuación vaciamos la información de dicha figura en la tabla sugerida quedando de la siguiente manera:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{OX}$	0	0	0	12	0	0	12	0	0
2	$\vec{XY}$	12	0	0	12	10	0	0	10	0
3	$\vec{YA}$	12	10	0	12	10	8	0	0	8

Tabla I-VII

Expresamos el vector deseado de la siguiente forma:

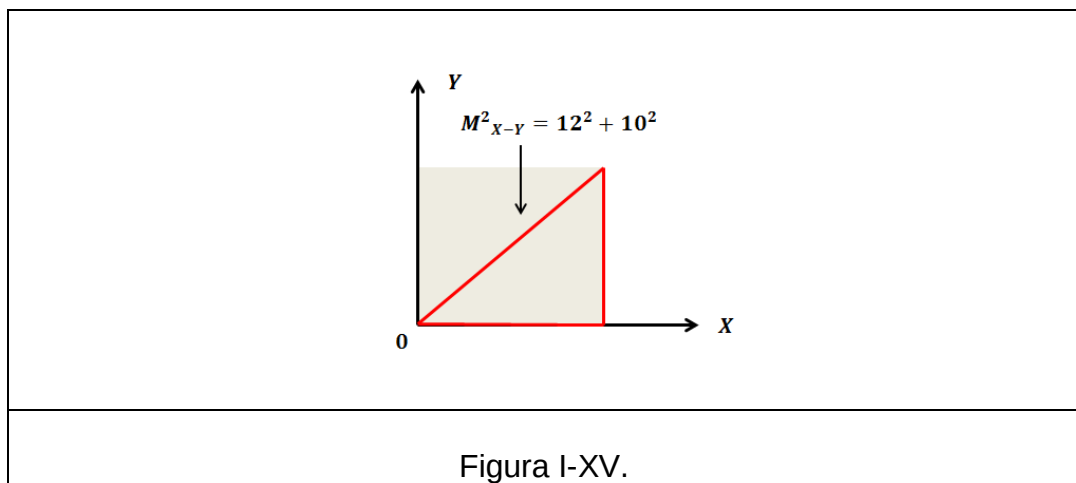
$$\vec{S}_{A/O} = \vec{S}_{X/O} + \vec{S}_{Y/X} + \vec{S}_{A/Y}$$

Es importante señalar que los vectores $\vec{S}_{Y/X}$ y $\vec{S}_{A/Y}$ sus puntos de inicio no son con respecto al origen.

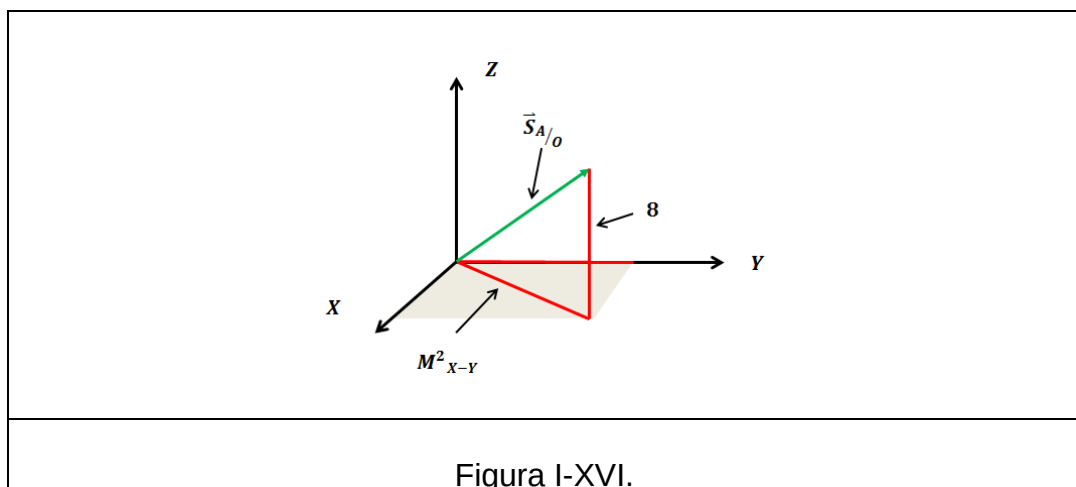
La expresión vectorial anterior quedaría a continuación de la siguiente manera:

$$\vec{S}_{A/O} = 12\vec{x} + 10\vec{y} + 8\vec{z}$$

Los tres vectores del lado derecho de la ecuación son perpendiculares entre sí. Encontraremos, con el teorema de Pitágoras un vector resultante de los vectores que forman el plano $x - y$. EL vector resultante y los cálculos pertinentes se muestran en la figura I-XV



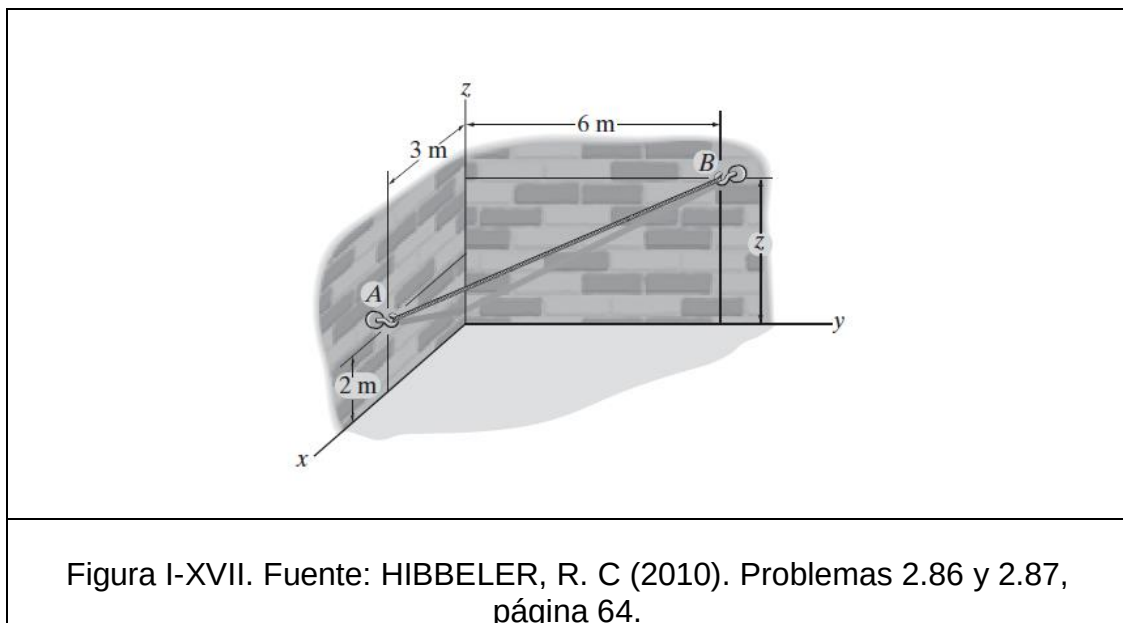
En la figura I-XVI se muestra el plano que forman los vectores $x - y$ así como la relación del vector en dirección z con dicho plano, y que dicha relación es que es perpendicular al plano $x - y$.



Por lo tanto la magnitud del punto O al punto A será de:

$$M = (12^2 + 10^2 + 8^2)^{.5} = 17.549 \text{ unidades de longitud.}$$

Veamos la efectividad del anterior procedimiento en la solución de dos problemas propuestos del texto de Hibbeler, (2010). En el primero de ellos se pide determinar el vector posición desde un punto A y un punto B , así como la magnitud entre dichos puntos. Un dato adicional en este problema es: $z = 4 \text{ metros}$. En el segundo problema, dando como dato el valor de la distancia entre los puntos A y B encontrar el valor de z . En la figura I-XVII se podrá observar el esquema del problema.



Para el primer problema y tomando como origen la intersección de los ejes cartesianos y definiendo el vector requerido como:

$$\vec{S}_{B/A} = \vec{S}_B - \vec{S}_A$$

Y elaborando la tabla I-VIII

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{S}_A$	0	0	0	3	0	2	3	0	2
2	$\vec{S}_B$	0	0	0	0	6	4	0	6	4
Tabla I-VIII:										

Por lo tanto:

$$\vec{S}_{B/A} = (\vec{0}x + \vec{6}y + \vec{4}z) - (\vec{3}x + \vec{0}y + \vec{2}z) = -\vec{3}x + \vec{6}y + \vec{2}z$$

Cuya magnitud es:

$$S_{B/A} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}$$

$$S_{B/A} = 7 \text{ metros.}$$

El segundo problema se planteará de la siguiente manera:

$$\vec{S}_{B/A} = -\vec{3}x + \vec{6}y + \vec{2}z$$

Planteándolo de manera escalar y apoyándonos en el teorema de Pitágoras como se hizo co el problema de la figura I-XVI:

$$7.5^2 = (-3)^2 + (6)^2 + z^2$$

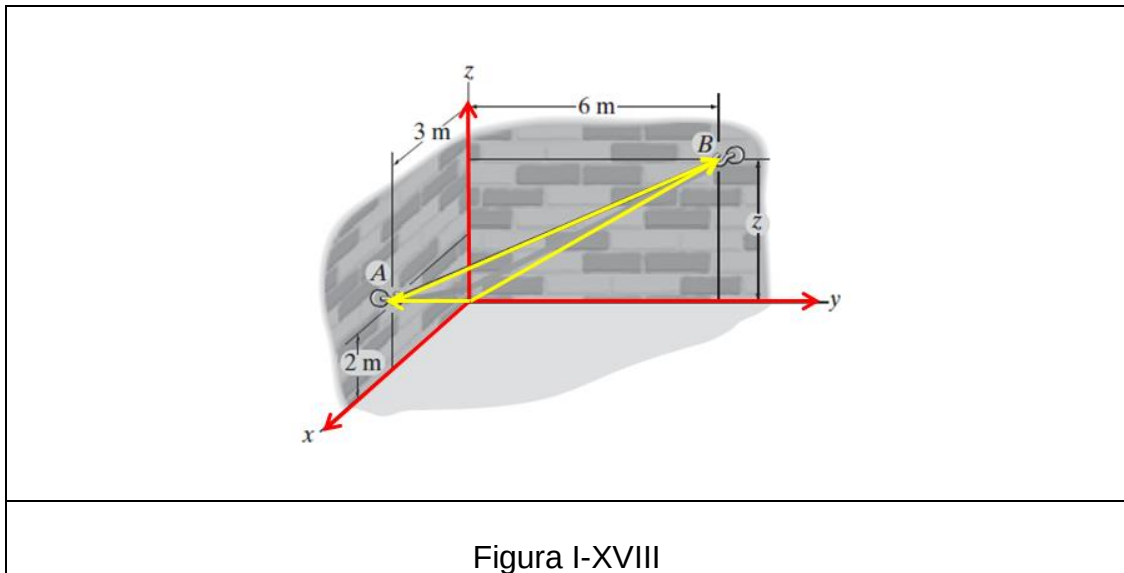
Despejando tenemos que

$$z = 3.35 \text{ metros.}$$

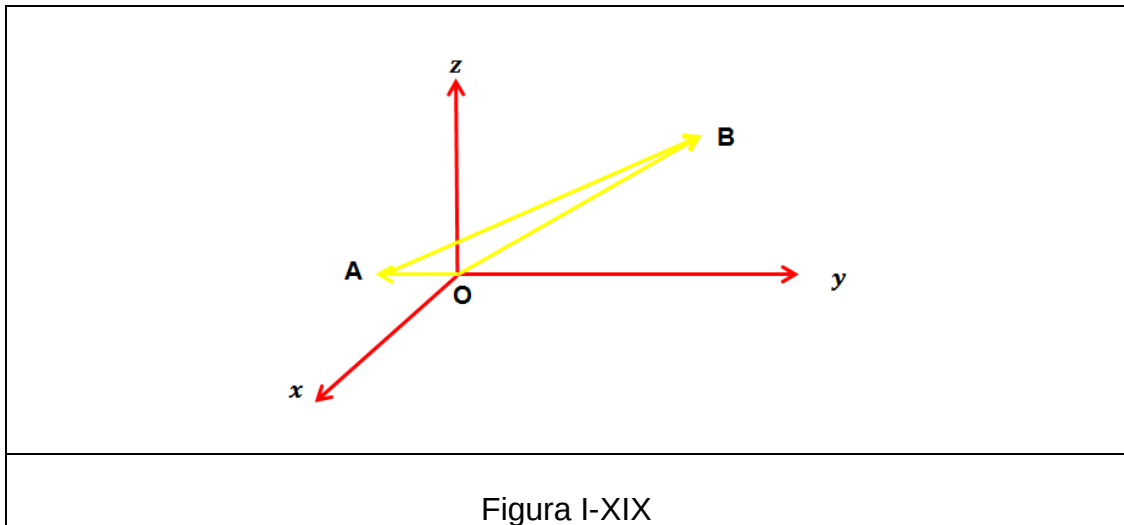
Ahora analicemos a detalle el "vector requerido"

$$\vec{S}_{B/A} = \vec{S}_B - \vec{S}_A$$

Para lo anterior, primeramente trazaremos en el sistema de coordenadas ya muchas veces referido los tres vectores arriba indicado como se muestra en la figura I-XVIII.



Se podrá observar que inicio de los vectores $\vec{S}_A$ y $\vec{S}_B$ coinciden con el origen del sistema de referencia, no así el vector $\vec{S}_{B/A}$ el cual inicia en el punto A y termina en el punto B . Trazando únicamente tales vectores y el sistema de referencia se logra la figura I-XIX



Pasaremos ahora a analizar el vector $\vec{S}_A$

De la forma en que está planteado es un vector cuya posición es absoluta, esto es: inicia en el origen y finaliza en las siguientes coordenadas:

$$\vec{3x}, \vec{2z}$$

Podríamos verlo así: para que usted llegue del punto O al punto A “caminaría” en línea recta horizontalmente y de derecha a izquierda tres metros y “caminaría” en línea recta verticalmente y de abajo hacia arriba dos metros. Respetando el signo de convenido en dicho problema podríamos representar nuestro vector bajo análisis de la siguiente manera:

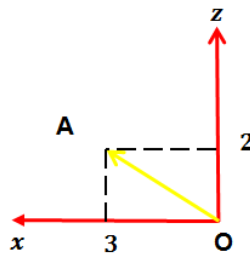


Figura I-XX.

Haremos el mismo análisis con el vector $\vec{S}_B$.

Sus coordenadas son:

$$6y, 4z$$

Ahora para que usted llegue del punto O al punto B “caminaría” en línea recta horizontalmente y de izquierda a derecha seis metros y “caminaría” en línea recta verticalmente y de abajo hacia arriba cuatro metros. Respetando, nuevamente, el signo de convenido en dicho problema podríamos representar nuestro vector bajo análisis en la figura I-XXI:

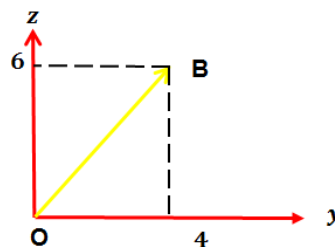


Figura I-XXI.

Para finalizar nuestro análisis: se podrá observar en la figura tal que la posición inicial del vector $\vec{S}_{B/A}$ es la posición final del vector $\vec{S}_A$ y que la posición final del vector $\vec{S}_B$ y haciendo referencia a la ley del paralelogramo y recordando el siguiente enunciado (c) de la página 13 de este capítulo:

El Vector resultante de dos o más vectores, inicia donde inicia el primer vector que forma parte de dicha resultante y finaliza donde finaliza el último vector que forma, también, parte de dicha resultante

El vector $\vec{S}_B$ sería la resultante de la suma vectorial de los vectores $\vec{S}_A$ y $\vec{S}_{B/A}$

Planteándose la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A + \vec{S}_{B/A}$$

Y cuyo trazo en el espacio ya se mostró en la figura I-XIX.

¿Sería el mismo desarrollo y resultado si en lugar de vectores posiciones se hubieran utilizado vectores fuerza?, la respuesta es: sí. En los siguientes dos puntos se demostrará lo anterior además de explicar el concepto de vectores unitarios y cosenos directores que nos ayudarán para definir la dirección y sentido de los vectores en el plano y en el espacio, ya que hasta este punto y de manera explícita nos avocamos a encontrar magnitudes de los vectores.

1.2. CONCEPTO DE FUERZA

A título personal y de manera muy general se podría entender que fuerza es “aquello” que mantiene a “algo” en la misma posición o trata de cambiar la posición de ese “algo”.

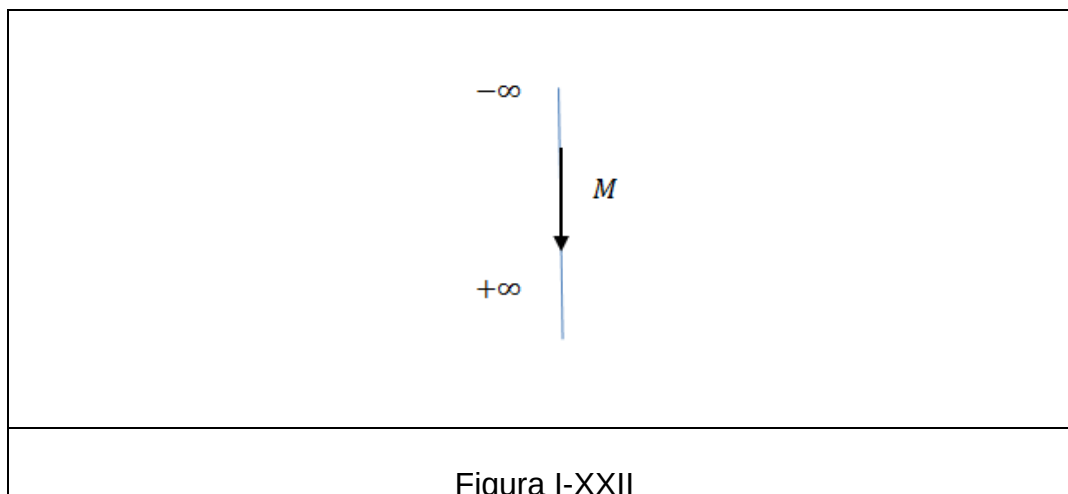
Si se busca la definición en cualquier diccionario de uso común aparecerá más de una definición sobre esta palabra. Dependiendo de la disciplina en donde se utilice, por ejemplo: en psicología se habla de la fuerza de los sentimientos, en algunas religiones de la fuerza de la fe, en derecho de la fuerza de la ley y así podríamos continuar. Pero para efectos de este texto se tendría que revisar el cuadro I-I de este mismo capítulo en donde se muestra que Estática es una rama de la Mecánica y está a la vez es una rama de la física, por lo tanto y debido a que no es intención de este texto profundizar en el concepto de Fuerza, si el lector(a) está interesado(a) en dicho tema se le sugiere consultar el documento de Riviera¹³. Respecto a la definición de tal concepto citaremos a Beer et.al. (2010):

“Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por con tacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, magnitud y dirección y se representa con un vector.” (g)

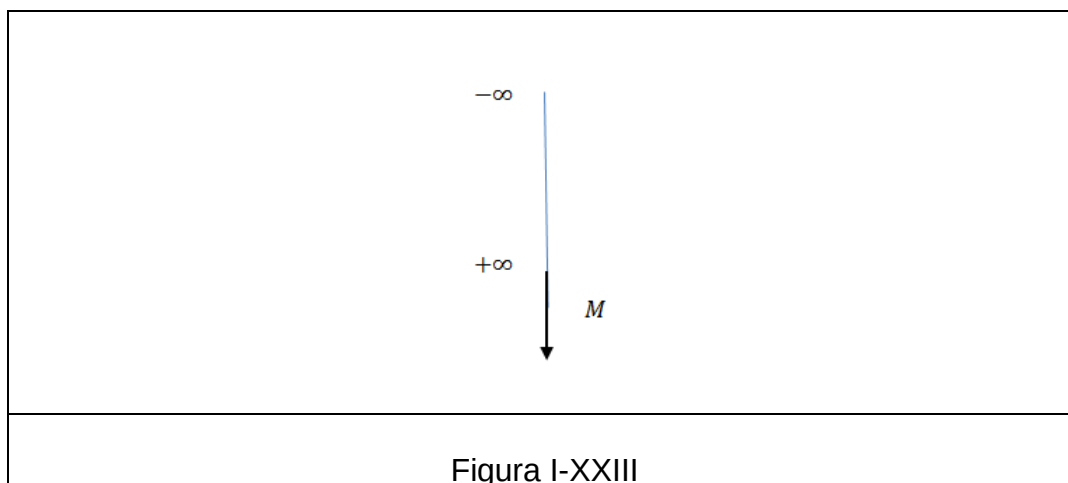
Con respecto al punto de aplicación es importante señalar que existirá, siempre y a lo largo de todos los problemas de este texto, contacto físico entre quien aplique la fuerza y quien la reciba. Lo anterior se señala para el caso de las fuerzas electromagnéticas como la que ejerce un imán sobre algún metal; aun estando separados el imán y el metal se presenta una fuerza entre ellos.

Ya que la fuerza se puede conceptualizar como un vector, se ampliará sobre el atributo de la dirección. Observemos la figura I-XXII que la componen una línea recta imaginaria que podría partir del $-\infty$ al $+\infty$ y un vector cuya magnitud se representará con la letra M y será un segmento de recta la cual, en este caso, será colineal a nuestra línea recta imaginaria

¹³ http://www.lajpe.org/dec14/4601_Madrigal.pdf (visitada el 17 de agosto de 2019).



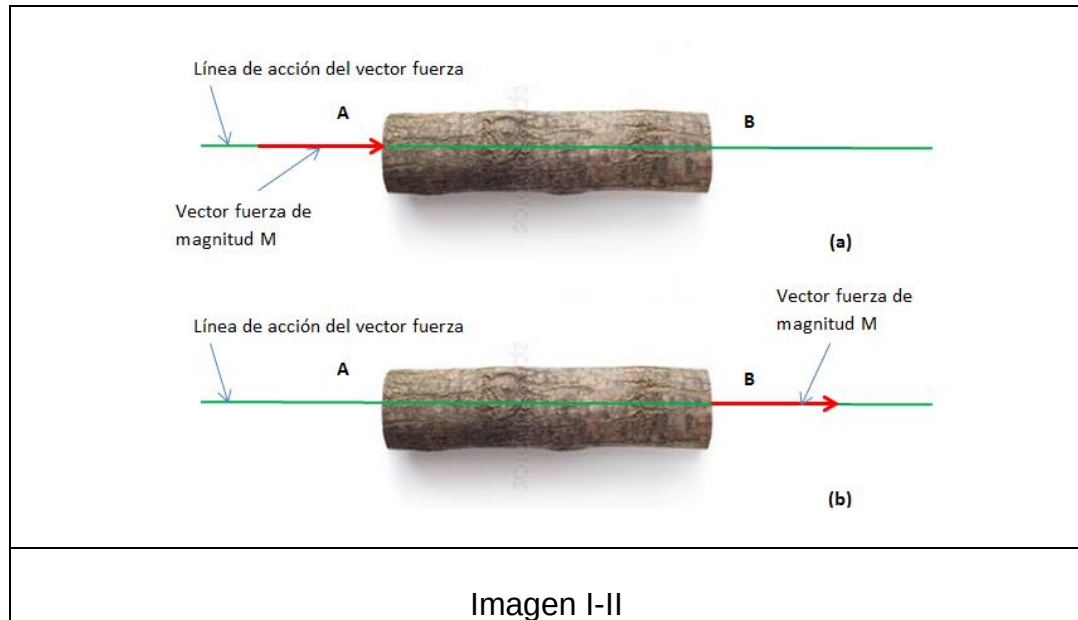
Llamaremos a la línea imaginaria *línea de acción del vector M*. Existe un principio llamado principio de transmisibilidad, el cual establece que el vector M puede colocarse en otro segmento de la línea de acción siempre y cuando no se altere su magnitud ni su sentido, como se podrá observar en la figura I-XXIII.



Lo anterior está basado en la evidencia experimental, por ejemplo: usted puede arrastrar un tronco¹⁴ de cualquiera de las dos maneras posibles, empujándolo de la parte A o jalándolo de la parte B, tal como se ilustra en la imagen I-II. En ambos casos se aplica la misma fuerza, la misma dirección y

¹⁴ Tomado sin permiso de: <https://sp.depositphotos.com/stock-photos/tronco.html> (visitada el 17 de agosto de 2019)

mismo sentido, solo cambió el punto de aplicación de la fuerza y se obtiene el mismo resultado¹⁵.



¹⁵ Se recomienda no hacer este experimento con una cadena; todos hemos visto jalar una cadena, pero, al menos quien escribe, nunca ha visto empujar una cadena.

1.3. DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN TRES DIMENSIONES.

Tomando como base el enunciado (e):

Un vector puede ser la resultante de dos o más vectores y puede ser al mismo tiempo la componente de una resultante

La manera más sencilla y elegante de resolver cualquier problema de estática¹⁶, que obviamente involucrará fuerzas, será la descomposición de cada una de estas fuerzas en sus tres componentes perpendiculares (lo anterior asumiendo que cada fuerza está en el espacio, si solo están en un plano tendrán solo dos componentes perpendiculares).

Por ejemplo, el siguiente problema aparentemente se ve “complejo” (figura I-XXIV):

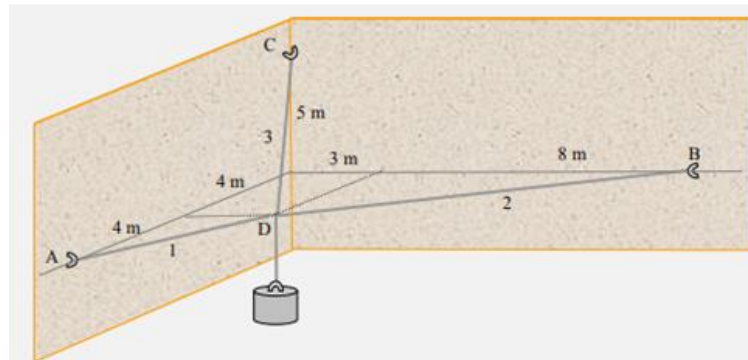
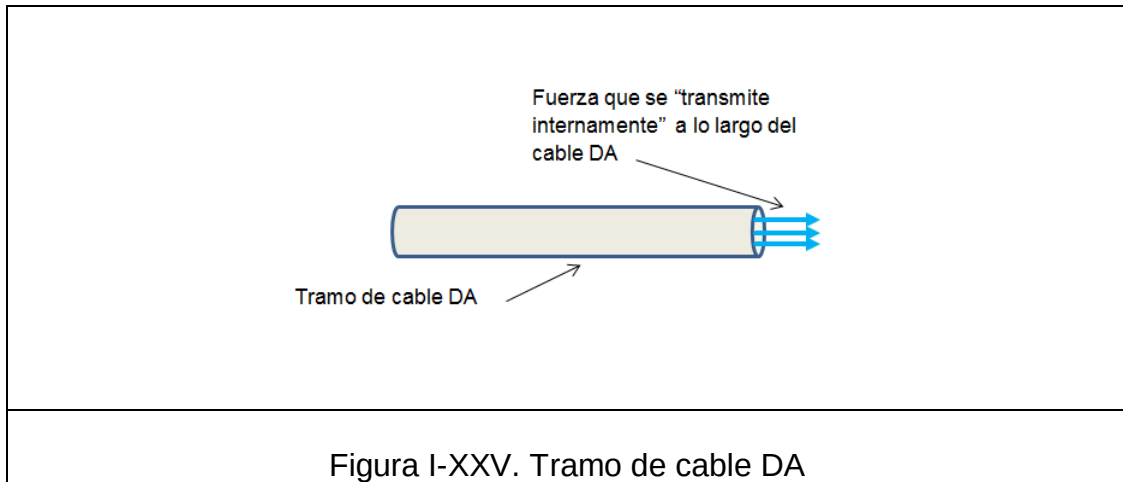


Figura I-XXIV. Fuente: ProblemasResueltosEstatica.pdf¹⁷

El sistema de tres cables (DA, DB y DC) están soportando el bloque de 60N y es muy posible que cada uno de ellos este sometido a una fuerza y en caso de ser así estaría sometido a la tensión. Imaginemos que cada cable es como una tubería por la cual corre el agua, la tubería representaría el cable y el agua que corre por dentro a la fuerza. En la figura I-XXV se hace una representación de lo anterior.

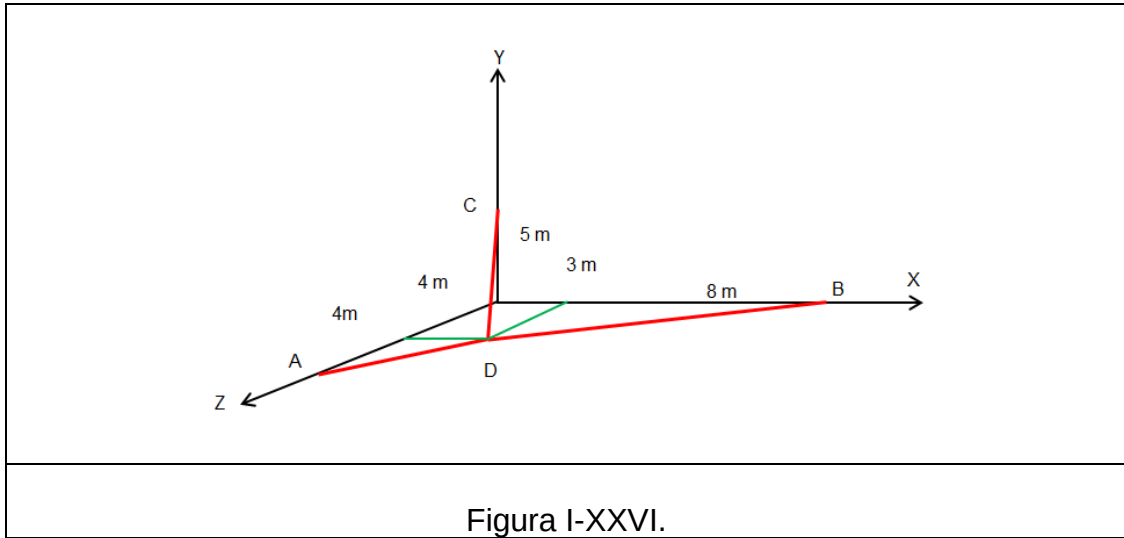
¹⁶ Para quien escribe.

¹⁷ <http://www.telesforozabala.es/mediapool/83/836590/data/ProblemasResueltosEstatica.pdf>
(visitada el 26 de agosto de 2019)



¿Por qué se hace la anterior analogía? Por la siguiente razón: si aplicamos el principio de transmisibilidad la dirección u orientación del cable en el espacio será la dirección u orientación de la fuerza que actúa o "fluye" sobre dicho cable. Y ya sabemos cómo ubicar vectores posiciones en el espacio podremos hacer lo mismo con los vectores fuerza. Analizaremos únicamente las cuerdas DA y DC, definiendo su posición en el espacio tal como se muestra en la figura I-XXVI.

Primeramente identificaremos los tres ejes perpendiculares que definirán nuestro sistema de referencia para ubicar las distancias del inicio y final de cada cable, definido en tal problema, con respecto al origen de dicho sistema de referencia, como se puede observar en la figura I-XXVI. Asimismo se resalta con líneas rojas los tres cables y con dos líneas verdes la ubicación del punto D con respecto al origen de nuestro sistema.

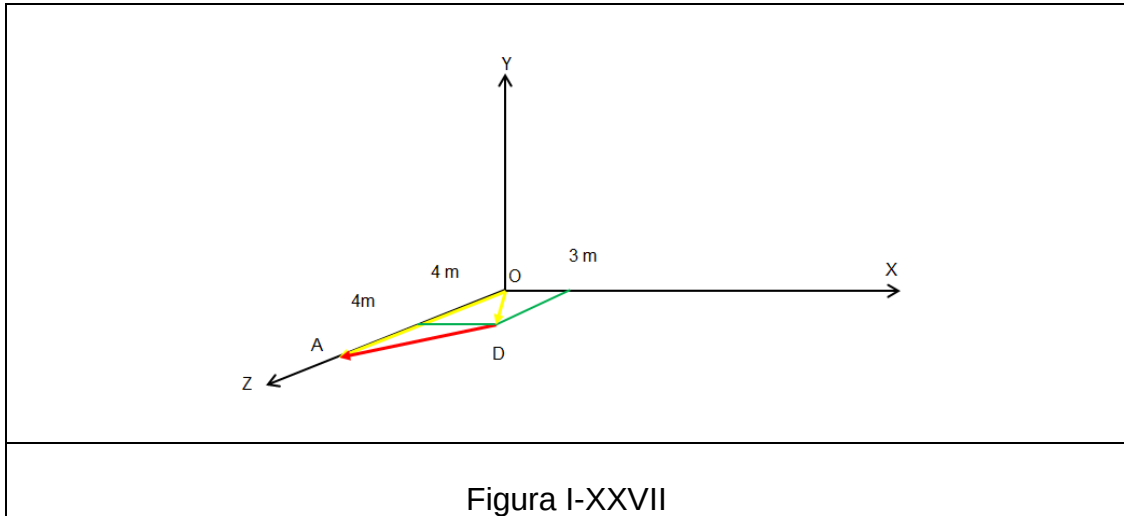


De la figura arriba mostrada podemos escribir vectorialmente al vector DA de la siguiente forma:

$$\vec{S}_{A/D} = \vec{S}_A - \vec{S}_D$$

En la figura I-XXVII se podrá ver la representación de:

1. $\vec{S}_{A/D}$: que es un vector posición y nos indicará la distancia relativa del punto A con respecto al punto D .
2. $\vec{S}_A$: que es otro vector posición y nos indicará la distancia absoluta del punto A con respecto al origen del sistema de medición.
3. $\vec{S}_D$: es otro vector posición y nos indicará la distancia absoluta del punto D con respecto al mismo origen del sistema de medición ya referido.



Quedando definido que tanto $\vec{S}_A$ como $\vec{S}_D$ son posiciones absolutas y conociendo sus posiciones finales se podrá hacer la representación de dichos vectores en función de sus componentes cartesianas. Los datos afines así como los cálculos correspondientes se muestran en la tabla I-VIII.

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{S}_A$	0	0	0	0	0	8	0	0	8
2	$\vec{S}_D$	0	0	0	3	0	4	3	0	4

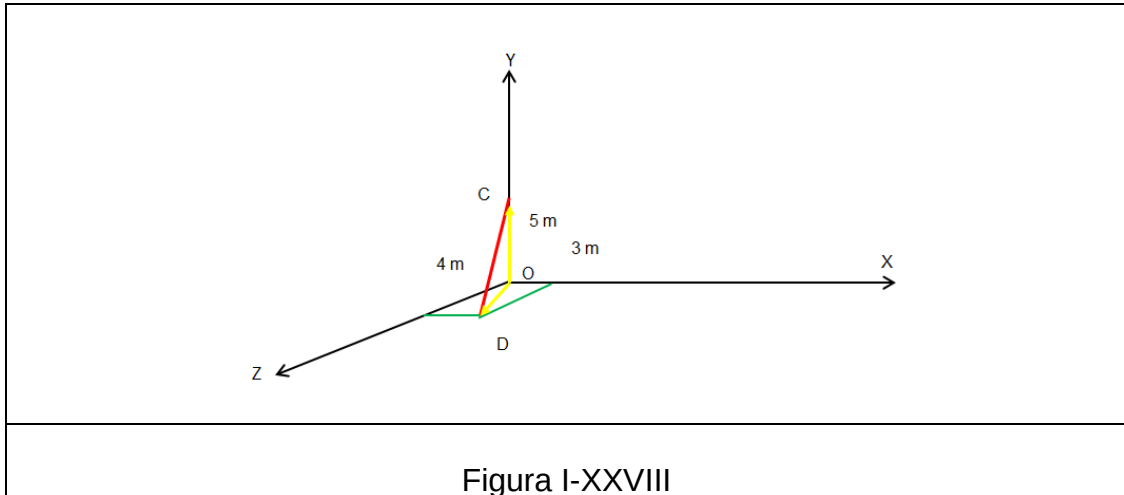
Tabla I-VIII

Teniendo por lo tanto que:

$$\vec{S}_A = \vec{0}x + \vec{0}y + \vec{8}z ; \vec{S}_D = \vec{3}x + \vec{0}y + \vec{4}z$$

$$\vec{S}_{A/D} = -\vec{3}x + \vec{0}y + \vec{4}z$$

Seguiremos el mismo procedimiento utilizado para la cuerda AD, pero ahora con la cuerda CD, tal como se muestra en la figura en la figura I-XXVIII



De la figura arriba mostrada podemos escribir vectorialmente al vector CD de la siguiente forma:

$$\vec{S}_{C/D} = \vec{S}_C - \vec{S}_D$$

Realizando las mismas operaciones que se hicieron para la cuerda AD, se construye la tabla I-IX:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{S}_C$	0	0	0	0	5	0	0	5	0
2	$\vec{S}_D$	0	0	0	3	0	4	3	0	4
Tabla I-IX.										

Teniendo por lo tanto que:

$$\vec{S}_C = \vec{0}x + \vec{5}y + \vec{0}z ; \vec{S}_D = \vec{3}x + \vec{0}y + \vec{4}z$$

Finalmente:

$$\vec{S}_{C/D} = -\vec{3}x + \vec{5} - \vec{4}z$$

Hasta aquí hemos presentado como descomponer o definir un vector posición en el espacio en sus componentes rectangulares. Lo anterior será el

preámbulo para hacer la descomposición de fuerzas en el espacio en función de tres compones rectangulares X, Y, Z pero será necesario definir primeramente el siguiente concepto para poder encontrar la respuesta al problema en desarrollo

1.3.1. Descomposición de fuerzas en tres dimensiones con Vectores unitarios¹⁸

De manera discrecional se definirán los vectores unitarios de la siguiente manera (tabla I-X):

<i>Vector unitario</i>	<i>Magnitud (adimensioal) y sentido siempre +</i>	<i>Dirección</i>
i	<i>uno</i>	<i>Colineal con el eje X</i>
j	<i>uno</i>	<i>Colineal con el eje Y</i>
k	<i>uno</i>	<i>Colineal con el eje Z</i>
Tabla I-X		

Tomemos de ejemplo el vector posición encontrado en el anterior resultado:

$$\vec{S}_{C/D} = -3\vec{x} + 5\vec{y} - 4\vec{z}$$

El vector $-3\vec{x}$, es un vector posición de magnitud tres, cuyas unidades de medición es el metro, sentido negativo y dirección X . Dicho vector también se podrá representar por un vector unitario, como el que esta descrito en la tabla I-X, multiplicado por un escalar de magnitud -3 y cuyas unidades de medición son, también, el metro. Por lo tanto es válido plantear lo siguiente:

$$-3\vec{x} = -3i$$

Si se hace lo mismo con los otros dos vectores que se encuentran en dirección Y, Z se tendrá por lo tanto:

¹⁸ Por lo general, en trabajos manuscritos los vectores unitarios se indican con un acento circunflejo, por ejemplo, $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Estos vectores tienen una magnitud adimensional de una unidad, y su sentido (o la cabeza de su flecha) se describirá analíticamente mediante un signo de más o menos, dependiendo de si apuntan a lo largo del eje x o y positivo o negativo (Hibbeler, 2010).

$$\vec{S}_{C/D} = -3i + 5j - 4k$$

Se dice que dicho vector $\vec{S}_{C/D}$ se encuentra expresado en función de los vectores unitarios i, j, k . El expresarlo de esa manera alterna no violenta igualdad alguna.

Pero si se quiere definir algún vector que sea unitario y que tenga componentes en más de una dirección tendremos que definir el siguiente vector unitario: λ

$$\lambda = \frac{\vec{V}}{\text{Magnitud de } V} \quad (7)$$

Para este ejemplo la magnitud de $\vec{S}_{C/D}$ que se encuentra en el espacio definido por $X.Y.Z$ es:

$$M_{C/D} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$$

De acuerdo a la ecuación (7) se tiene ahora que

$$\lambda_{C/D} = \frac{\vec{S}_{C/D}}{\sqrt{50}} = \frac{-3i + 5j - 4k}{\sqrt{50}}$$

Expresando, finalmente, la dirección del vector unitario $\lambda_{C/D}$ el cual se ubica en el espacio, en función de los tres vectores unitarios i, j, k

$$\lambda_{C/D} = \frac{3}{\sqrt{50}}i + \frac{5}{\sqrt{50}}j - \frac{4}{\sqrt{50}}k$$

Un caso que nos ilustrará en la importancia de operar problemas vectoriales utilizando vectores unitarios se da con el conocido vector que está expresado de la siguiente forma:

$$\vec{5} = 4i + 3j$$

En donde los vectores unitarios i y j están siendo multiplicados por los escalares 4 y 3, respectivamente y cuya representación gráfica sería la siguiente:

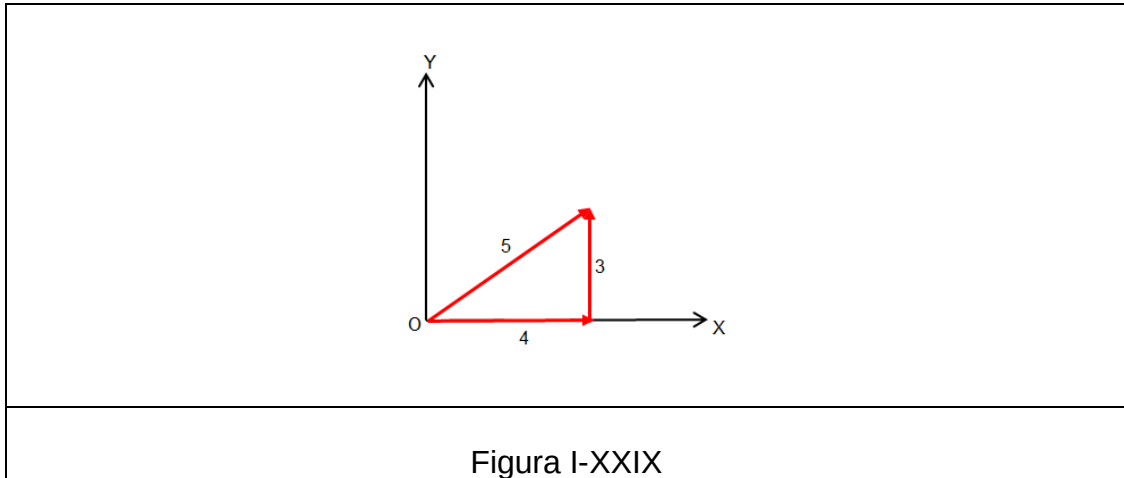


Figura I-XXIX

Analicemos la expresión vectorial y la figura I-XXIX

$$\vec{5} = 4i + 3j$$

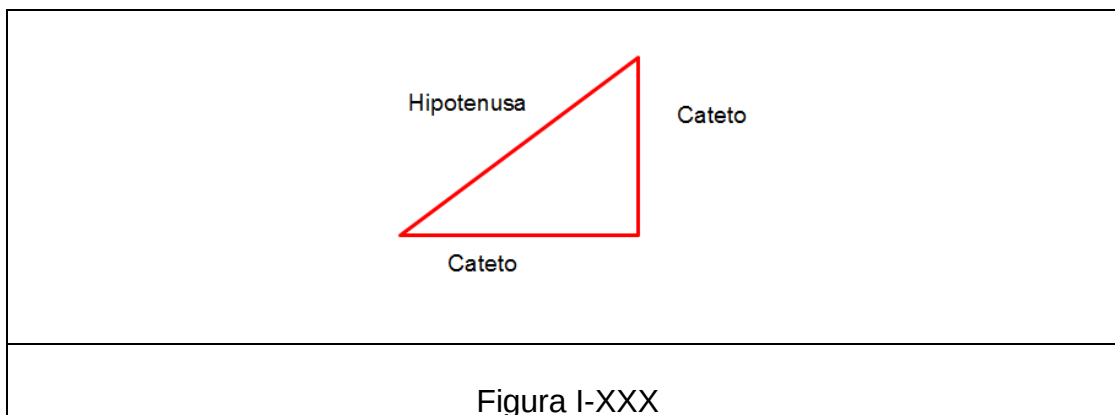
El lado izquierdo representa un vector de magnitud cinco, pero a simple vista no sabemos qué dirección podría tener en el plano $X - Y$, asimismo en el lado derecho de dicha expresión vectorial tenemos los vectores unitario i y j , multiplicados por los escalares 4 y 3 respectivamente. Con esta última información ya podemos ubicar la dirección y el sentido del vector:

$$\vec{5}$$

Esto último será la introducción del siguiente subtema y que tiene como nombre:

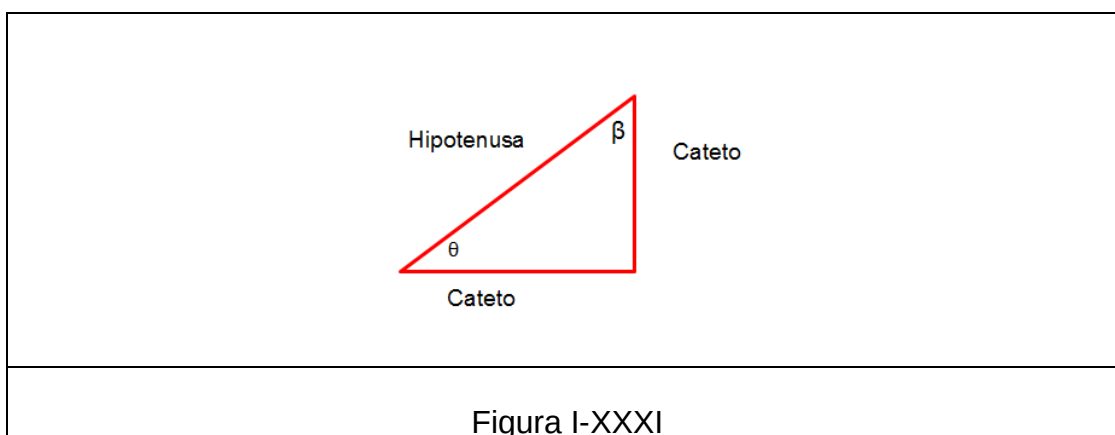
1.3.2. Descomposición de fuerzas en tres dimensiones con cosenos directores

Repasaremos la función coseno con el siguiente triángulo rectángulo que se puede observar en la figura I-XXX



Recordemos que la hipotenusa¹⁹ es el vértice, a simple vista mayor, que siempre será el opuesto al ángulo de 90°. Los otros dos vértices se conocen como los catetos.

Si en el triángulo de la figura tal identificamos a los ángulos que no son rectos como θ y β tendríamos la nueva siguiente figura:



En los cursos elementales de trigonometría se define a la función coseno como:

$$\text{Coseno de un ángulo} = \frac{\text{Cateto adyacente a dicho ángulo}}{\text{Hipotenusa}}$$

De lo anterior se podría escribir lo siguiente tomando la información de la figura I-XXXI:

¹⁹ Del lat. tardío hipotenusa, y este del gr. ὑποτείνουσα hypoteínousa, t. f. del part. act. de ὑποτείνειν hypoteínein 'tender con firmeza' (visitada el 26 de agosto de 2019).

$$\text{Coseno de } \theta = \frac{\text{Cateto Horizontal}}{\text{Hipotenusa}}$$

Y

$$\text{Coseno de } \beta = \frac{\text{Cateto Vertical}}{\text{Hipotenusa}}$$

Retomando la expresión vectorial:

$$\vec{5} = 4i + 3j$$

Ahora definiremos al vector unitario λ

Podemos entonces escribir:

$$5\lambda = 4i + 3j$$

Donde el escalar cinco multiplica al vector unitario λ que esta igualado a la suma vectorial del escalar cuatro que multiplica al vector unitario i y del escalar 3 que multiplica al vector unitario j .

Si dividimos ambos miembros de la ecuación vectorial el signo de igualdad no se altera y tenemos que:

$$\lambda = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$$

O que es lo mismo a:

$$\lambda = .8i + .6j$$

Si aplicamos el teorema de Pitágoras $(.8^2 + .6^2)^{\frac{1}{2}} = 1$;

Como lo es: $(4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

De la figura I-XXXI se estableció que

$$\text{Coseno de } \theta = \frac{\text{Cateto Horizontal}}{\text{Hipotenusa}}$$

Despejando θ y buscando el coseno inverso para hallar el ángulo entre dicho cateto horizontal y la hipotenusa tenemos que:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\text{Cateto horizontal}}{\text{Hipotenusa}} = \cos^{-1}.8 = 36.86 \text{ grados.}$$

Y

$$\text{Coseno de } \beta = \frac{\text{Cateto Vertical}}{\text{Hipotenusa}};$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{\text{Cateto vertical}}{\text{Hipotenusa}} = \cos^{-1}.6 = 53.13 \text{ grados.}$$

Se identificarán dichos cosenos como cosenos directores

Por todo lo anterior la ecuación vectorial

$$\vec{5} = 4i + 3j,$$

Se podrá escribir en función de los cosenos directores de la siguiente manera:

$$\vec{5} = 5\cos\theta i + 5\cos\beta j$$

De la ya tan mencionada ecuación $\vec{5} = 4i + 3j$, no se ha aclarado que tipo de vector se está utilizando (posición, fuerza...) y realmente no importa. Por lo anterior supondremos a conveniencia que estamos trabajando con vectores fuerza, y que como el subtema al que estamos abocados es: descomposición de fuerzas en tres dimensiones, podremos suponer que el vector fuerza se podrá descomponer en tres dimensiones como a continuación se muestra:

$$\vec{5} = 4i + 3j + 0k$$

Veamos el siguiente ejemplo: Se desea conocer las componentes rectangulares X, Y, Z de la fuerza de 500N que está orientada sobre la línea OA tal como se muestra en la figura I-XXXII

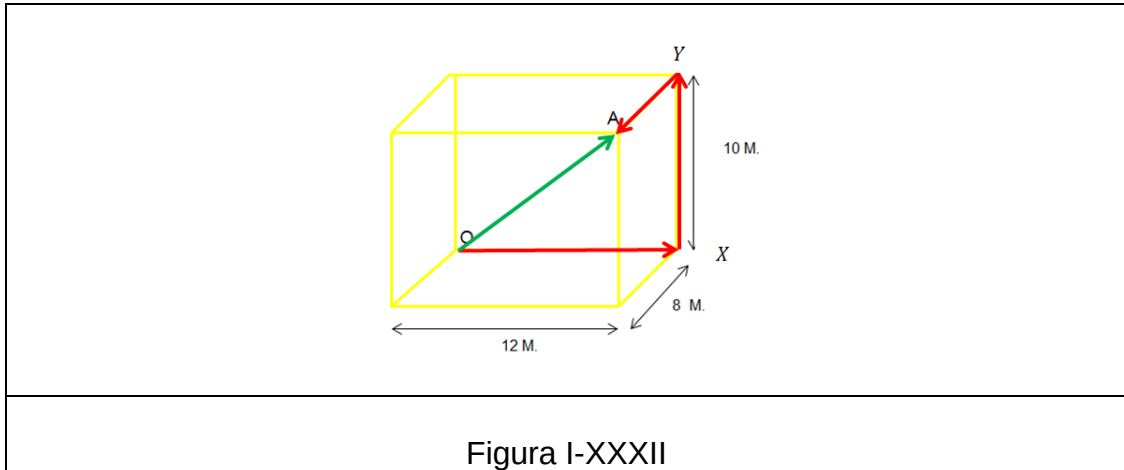


Figura I-XXXII

La ecuación vectorial que representa el vector fuerza orientado sobre la línea OA puede ser representada como

$$\overrightarrow{500N} = F_x i + F_y j + F_z k$$

A continuación definiremos los ángulos $\theta_x, \beta_y, \alpha_z$ como los cosenos directores ya que como se explicó líneas arriba podemos expresar lo siguiente:

$$F_x = 500 \cos \theta_x$$

$$F_y = 500 \cos \beta_y,$$

$$F_z = 500 \cos \alpha_z$$

Para encontrar el valor de los cosenos directores primeramente planteamos la siguiente ecuación vectorial de posición

$$\overrightarrow{S_A} = \overrightarrow{S_X} + \overrightarrow{S_{Y/A}} + \overrightarrow{S_{A/Y}}$$

Recordando que ya se habían realizado dichos cálculos y los cuales se muestran en la tabla I-VII (bis)

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{OX}$	0	0	0	12	0	0	12	0	0
2	$\overrightarrow{XY}$	12	0	0	12	10	0	0	10	0
3	$\overrightarrow{YA}$	12	10	0	12	10	8	0	0	8
Tabla I-VII-Bis										

Expresamos el vector deseado de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{S_A} = 12\vec{x} + 10\vec{y} + 8\vec{z}$$

La magnitud de dicho vector es:

$$S_A = (12^2 + 10^2 + 8^2)^{.5} = 17.54 \text{ metros.}$$

Por lo tanto:

$$\theta_x, \beta_y, \alpha_z$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{12}{17.54} = 46.83^\circ$$

$$\beta_y = \cos^{-1} \frac{10}{17.54} = 55.24^\circ$$

$$\alpha_z = \cos^{-1} \frac{8}{17.54} = 62.86^\circ$$

De lo anterior:

$$F_x = 500 \cos 46.83 = 342N$$

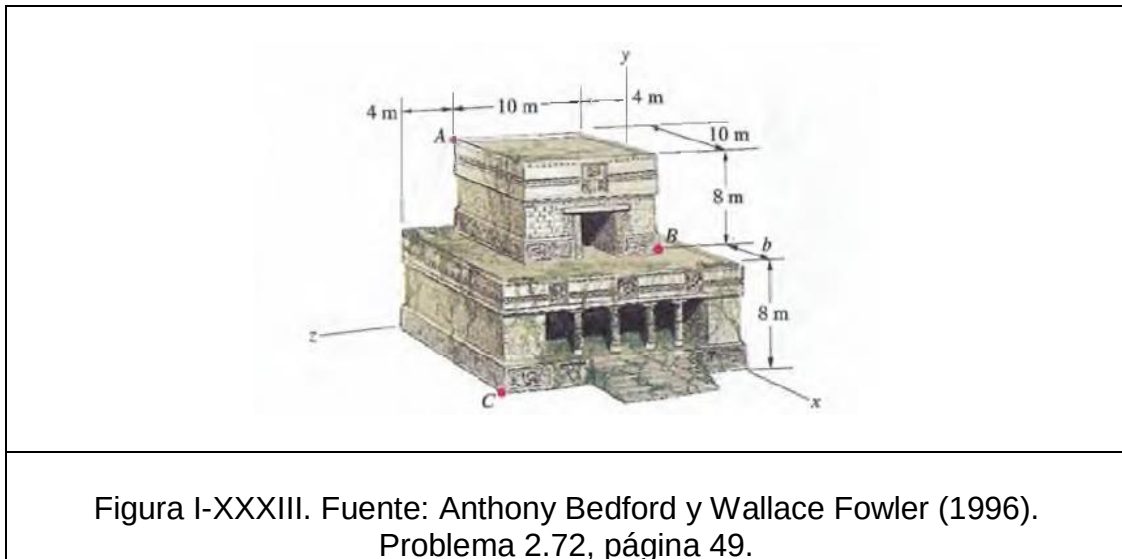
$$F_y = 500 \cos 55.24 = 285N$$

$$F_z = 500 \cos 62.86 = 228N$$

Expresando dicho vector fuerza en función de los vectores unitarios:

$$\overrightarrow{500N} = 342Ni + 285Nj + 228Nk$$

Un ejemplo interesante para ilustrar el cómo encontrar cosenos directores es un problema propuesto en el texto de Bedford y Fowler (1996), el cual se muestra en la figura I-XXXIII.



El enunciado de este problema es el siguiente:

“Unos arqueólogos extranjeros midieron una estructura ceremonial precolombina y obtuvieron las dimensiones mostradas. Determine (a) la magnitud y (b) los cosenos directores del vector de posición del punto A al punto B”.

Lo primero que se hará será visualizar el problema de tal manera que se pueda observar el planteamiento de forma vectorial. El problema pide la distancia del punto A al punto B, esto es: salir de A para llegar a B por lo tanto se tienen la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{S}_{B/A} = \mathbf{S}_B - \mathbf{S}_A$$

Por así convenirlo se hará un cambio en el origen del sistema cartesiano y el cual consiste en colocar dicho origen en el punto A, por lo tanto la $\mathbf{S}_A$ valdrá cero. En la figura I-XXXIV se destaca dicho cambio:

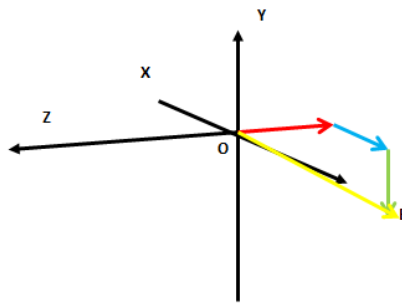
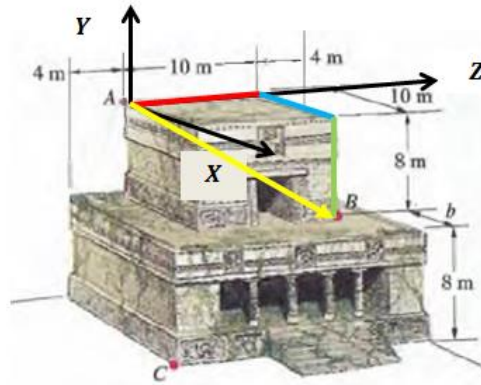


Figura I-XXXIV

En dicha figura se observan cuatro vectores donde el vector BO es la resultante y se puede escribir vectorialmente así:

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{ROJO_Z} + \overrightarrow{AZUL_X} + \overrightarrow{VERDE_Y}$$

Algo que ayudará a comprender esta manera de plantearlo es la siguiente: suponga que usted desea “caminar” del punto A (que ahora es el origen del sistema de medición de posición) al punto B y que solo puede desplazarse en dirección X, Y, Z . Por lo tanto usted se desplazó, primeramente -10 metros , en dirección Z (línea roja), posteriormente hace un giro de 90 grados hacia su derecha sobre el plano $X - Z$ y se desplaza $+10 \text{ metros}$ en dirección X (línea azul) y finalmente usted baja -8 metros -8 en dirección Y llegando al punto B (línea verde).

En la tabla I-XI, con los anteriores datos se obtendría tendr a la siguiente información:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{OB}$	0	0	0	10	-8	-10	10	-8	-10
Tabla I-XI										

El vector posición BO expresado con vectores unitarios ser a:

$$\overrightarrow{BO} = 10i - 8j - 10k$$

Su magnitud:

$$BO = \sqrt{10^2 + 8^2 + 10^2} = 16.24 \text{ Metros}$$

$$BO = 16.24 \text{ Metros}$$

Siendo los cosenos directores:

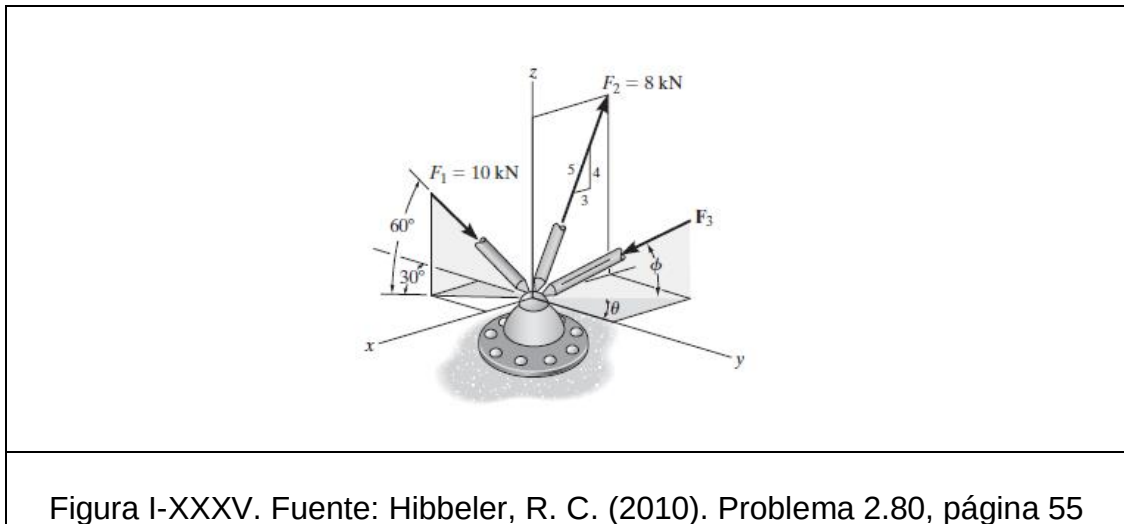
$$\cos \theta_x = \frac{10}{16.24} = .615$$

$$\cos \theta_y = \frac{-8}{16.24} = -.492$$

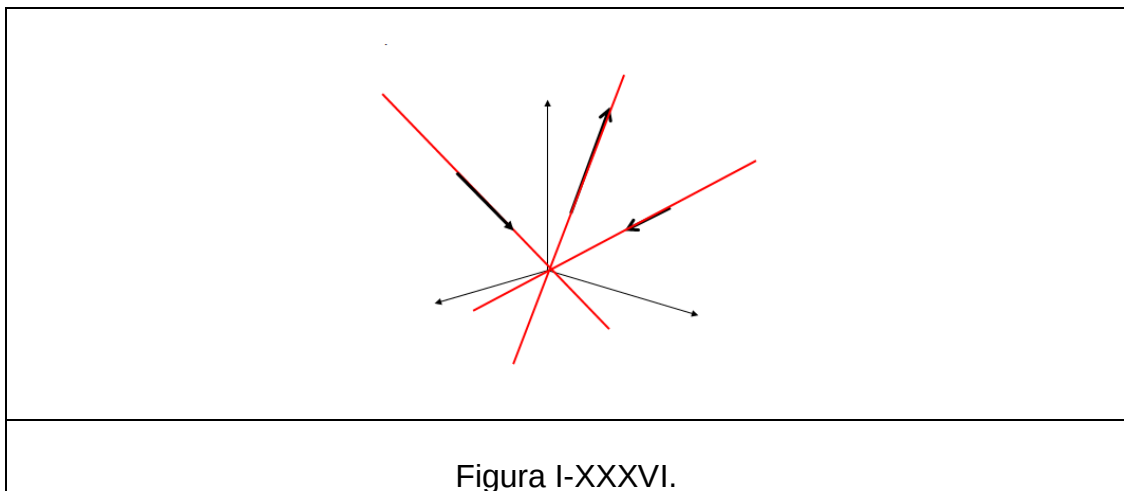
$$\cos \theta_z = \frac{-10}{16.24} = -.615$$

1.4. SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES

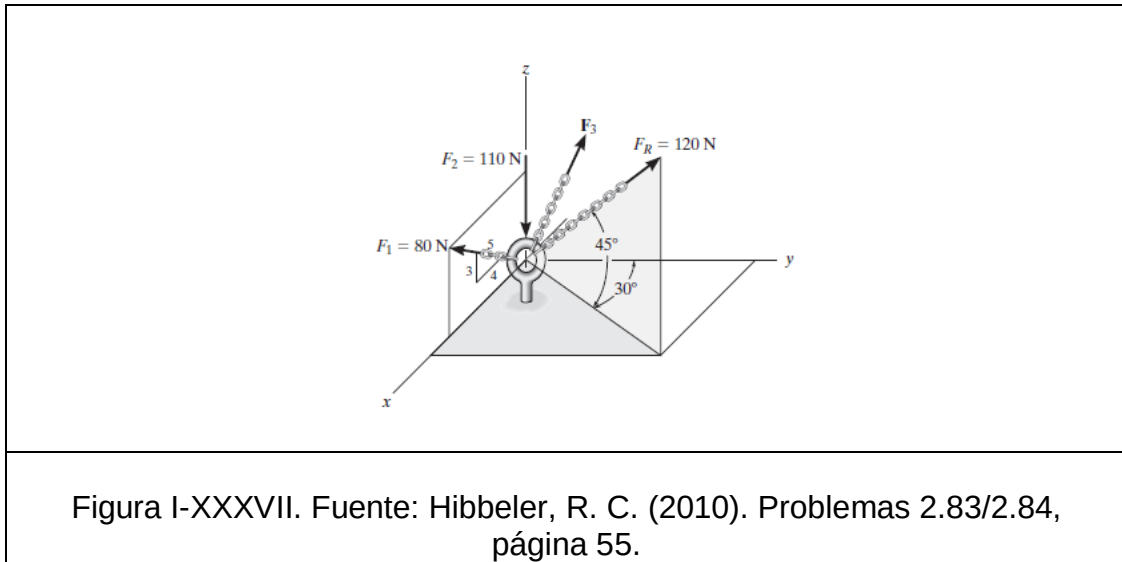
Aplicaremos todo lo anterior expuesto para los siguientes dos subtemas. Recordemos que una fuerza vista como vector tiene una línea de acción imaginaria de longitud infinita. Cuando se tiene dos o más fuerzas con direcciones de cada una de ellas diferentes existe un punto en el espacio o en el plano -según sea el caso- donde todas las líneas de acción concurren en un punto. Tomemos como ejemplo el siguiente problema propuesto del texto de Hibbeler (2010):



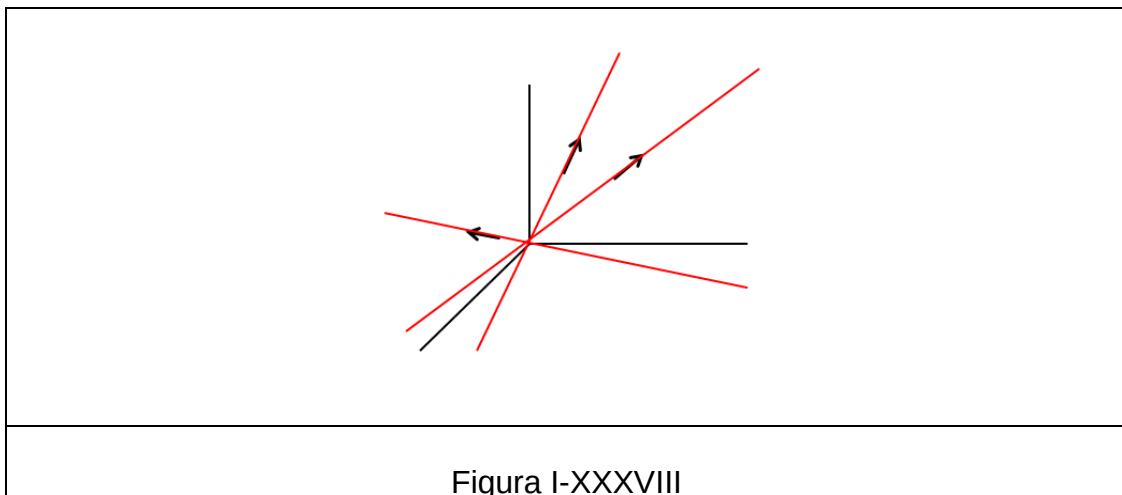
En dicha figura se puede observar que hay tres fuerzas representadas por el mismo número de vectores y cada vector tiene diferente dirección. Si aislamos las fuerzas del problema y resaltamos la dirección de cada fuerza tendremos la siguiente esquematización como se observa en la figura I-XXXVI:



En dicha figura las líneas de color rojo son las líneas de acción de cada una de las fuerzas y se tomó el punto donde las tres líneas concurren como el origen del sistema cartesiano X, Y, Z por así convenir a la manera de plantear la forma de solucionar dicho problema, de hecho se recomienda que el punto de concurrencia de las fuerzas sea tomado como el origen de tal sistema cartesiano. Un último ejemplo del concepto de fuerzas concurrentes lo podemos ver con el siguiente problema del mismo autor en la figura I-XXXVII:



Como en el ejemplo anterior, aislamos las fuerzas en el sistema cartesiano y resaltamos de color rojo las líneas de acción de cada una de las fuerzas teniendo en el origen de dicho sistema cartesiano el punto de concurrencia de dichas líneas de acción de las fuerzas, tal como se observa en la figura I-XXXVIII:



1.5. EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS.

Con todo lo anterior expuesto, desde el tema 1.1 (definiciones) hasta el tema 1.4 (sistemas de fuerzas concurrentes) tenemos la información y las herramientas para dar cumplimiento con el objetivo de esta primera unidad y que es:

Solucionar problemas para las fuerzas que se concentran en un punto.

En primera instancia revisemos el nombre de este subtema:

"Equilibrio de partículas".

Y empecemos con la palabra Equilibrio. De las ocho definiciones que da la RAE²⁰ la número seis es la más apropiada para este subtema:

4. m. Fís. Estado en el que se encuentra una partícula si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero.

De lo anterior tenemos un dato de muy alto valor:

La fuerza resultante de un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo será igual a cero

Y de aquí proviene el nombre del curso:

Estática

El sistema de fuerzas que actúan sobre cualquier cuerpo no logran moverlo; está, a fin de cuentas: Estático. Y si cualquier fuerza, como vector resultante, se puede representar por tres fuerzas orientadas en los ejes cartesianos entonces las dos o más fuerzas de un sistema cualquiera de fuerzas se podrán plantear de la siguiente manera:

$$\vec{F}_1 = F_{x1}i + F_{y1}j + F_{z1}k$$

$$\vec{F}_2 = F_{x2}i + F_{y2}j + F_{z2}k$$

·
·

$$\vec{F}_n = F_{xn}i + F_{yn}j + F_{zn}k$$

²⁰ <https://dle.rae.es/?id=Fzm8ZpA> (visitada el 1 de septiembre de 2019)

Dando por consiguiente las tres ecuaciones de equilibrio en un sistema cartesiano:

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^n \vec{F}_{xa} &= (F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn})\vec{i} = 0 \\ \sum_{a=1}^n \vec{F}_{ya} &= (F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn})\vec{j} = 0 \\ \sum_{a=1}^n \vec{F}_{za} &= (F_{z1} + F_{z2} + \dots + F_{zn})\vec{k} = 0\end{aligned}\quad (8)$$

Continuando con la revisión del nombre de este subtema sigue el concepto de:

Partícula

En un principio la forma y/o el tamaño del objeto sometido a diferentes fuerzas no se tomará en cuenta para el cumplimiento del objetivo de esta unidad, como lo indica Beer et al. (2010)

“que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto.”

Y ese punto será nombrado: partícula. Tomemos por ejemplo la imagen de un problema propuesto de texto de Hibbeler (2010):

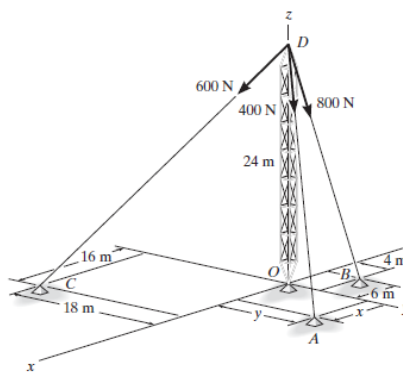
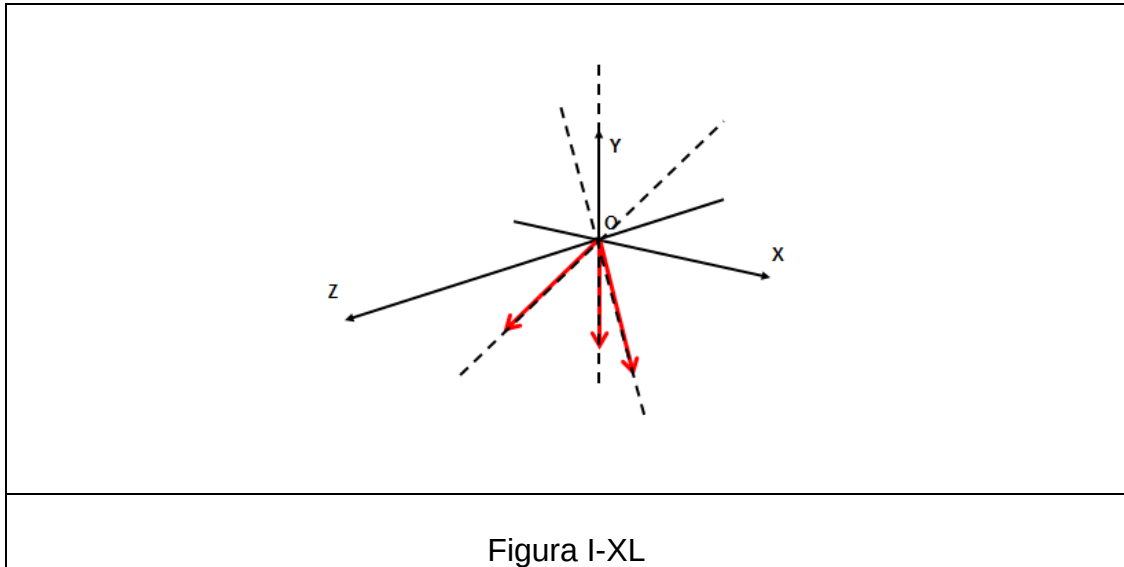


Figura I-XXXIX. Fuente: Hibbeler, R. C. (2010). Problema 2.96, página 55

En un principio, la torre suspendida por los tres cables se muestra impresionante²¹. Pero también se podría representar como se observa en la figura I-XL:



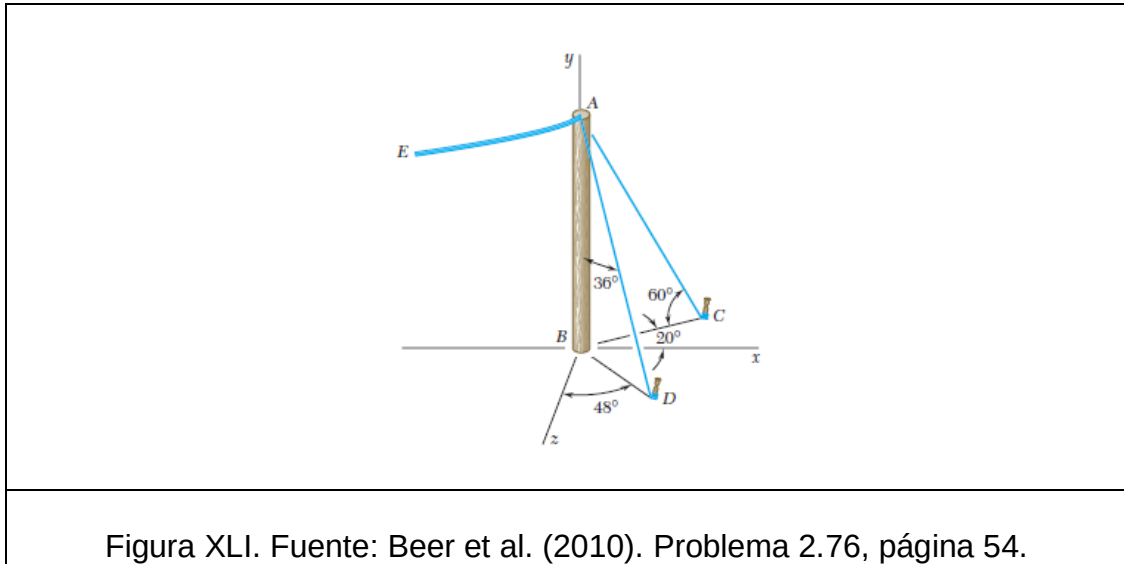
Solucionar el problema tomando la torre en su forma original o como una partícula será lo mismo.

En dicha figura se representan las fuerzas en el espacio y sus líneas de acción las cuales concurren en el origen del sistema cartesiano; la torre se “transformó” en una partícula ubicada en el mismo origen anterior.

Haremos una serie de ejemplos con la intención de aplicar toda la teoría explicada en esta unidad y así dar cumplimiento con el objetivo aquí planteado. Dichos ejemplos son algunos problemas de tres diferentes autores.

Empezaremos con el problema 2.76 del texto de Beer et al. (2010):

²¹ Al menos para mí, cuando fui estudiante, me aterraban dichas imágenes.



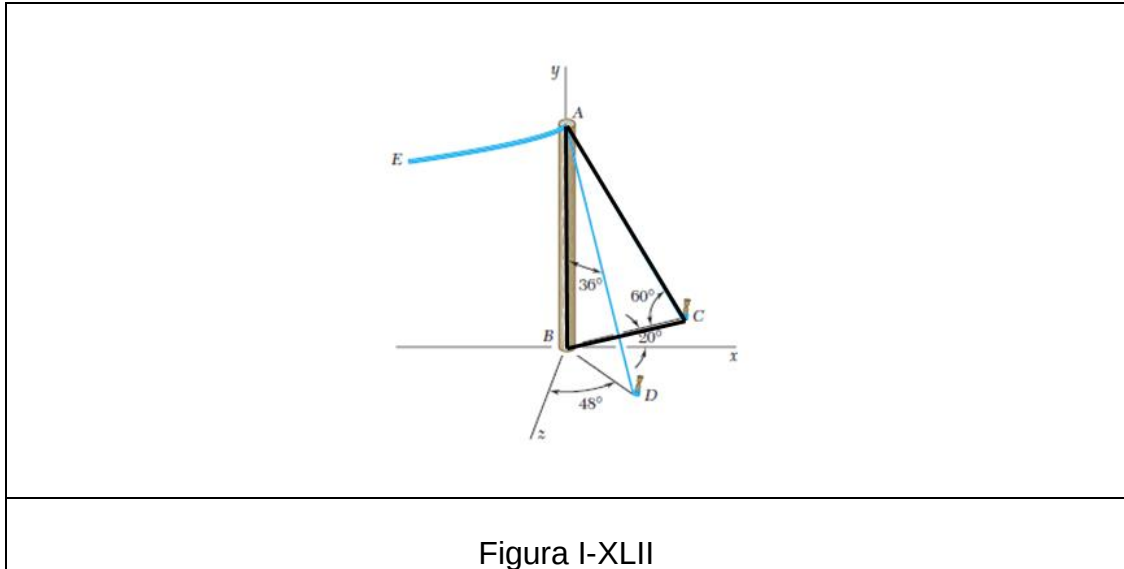
Respetaremos el enunciado de dicho problema:

El extremo del cable coaxial AE se une al poste AB, el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD. Si se sabe que la tensión en el alambre AC es de 120 lb, determine a) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, b) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

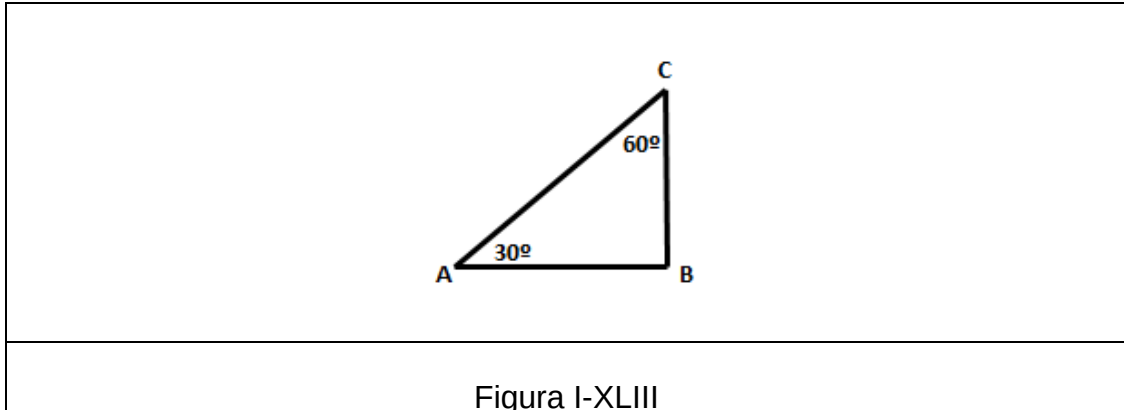
Aunque en un principio la figura del poste y los tres cables parece retadora, si revisamos con calma el enunciado del problema nos daremos cuenta que dicho problema se centra en un solo tirante (AC) el cual está perfectamente orientado en el sistema cartesiano y del cual nos piden el valor y sentido de sus tres componentes rectangulares. Vectorialmente se puede escribir el enunciado en su inciso **a** de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{F_{AC}} = F_{ACx}i + F_{ACy}j + F_{ACz}k$$

Y podemos presentar la figura del problema de la siguiente manera (figura I-XLII):



En la figura tal, claramente se puede observar que las líneas AB, BC y AC representan las aristas de un triángulo rectángulo. Ahora representaremos dicho triángulo de la siguiente manera (figura I-XLIII):



De la figura tal el cable AC representa la hipotenusa, el poste AB un cateto y la distancia de la base del poste al punto de anclaje del cable AC el otro cateto. Es importante destacar que, de acuerdo a la figura del problema, el cateto AB está en la dirección del eje cartesiano Y, mientras que el cateto BC se encuentra comprendido en el plano conformado por los ejes X, Z, y por lo tanto se tendrá que considerar dicho cateto de una manera especial, pero primeramente nos enfocaremos al cateto AB.

La componente en dirección del poste se puede encontrar fácilmente y que será la fuerza ejercida por cable AC sobre dicho poste aplicando la siguiente ecuación:

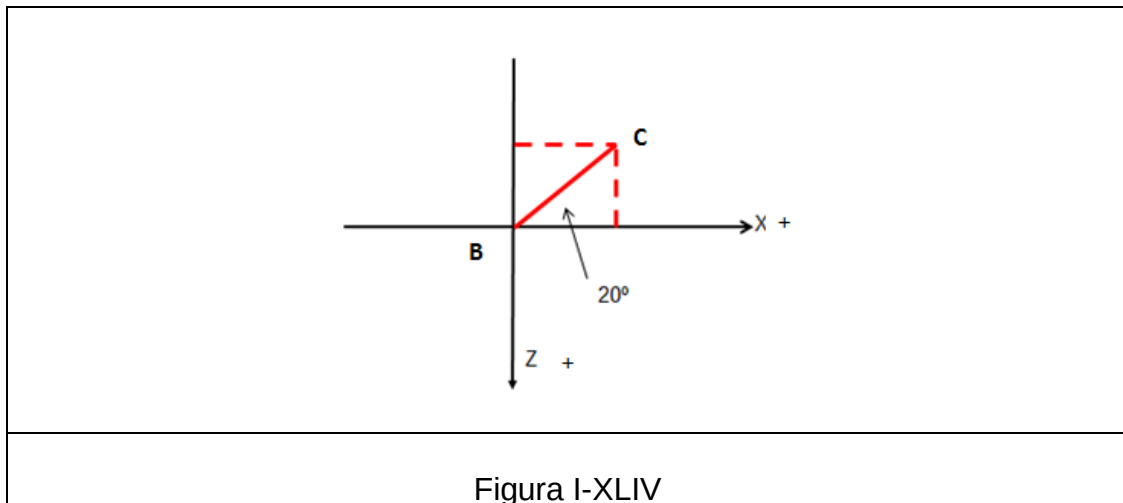
$$F_{AB} = T_{AC} \cos 30; F_{AB} = 120 * \cos 30 = 103.9 \text{ lb.}$$

El sentido de la fuerza es, de acuerdo a la imagen, de arriba hacia abajo, por lo tanto es una fuerza dirección vertical y sentido negativo.

Respecto al cateto BC cuyo valor es:

$$F_{BC} = T_{AC} * \cos 60 = 120 * \cos 60 = 60 \text{ lb.}$$

Se comentó líneas arriba que el cateto BC sería considerado de una manera especial y es que si lo visualizamos en el plano XZ de ser un cateto pasa a ser una hipotenusa tal como se muestra en la figura I-XLIV



Pudiendo descomponer dicha hipotenusa en los siguientes catetos:

$$F_x = 60 * \cos 20 = 56.38 \text{ lb.}$$

Que de acuerdo a la figura I-XLIV tendría un sentido positivo. Y la componente e dirección Z será:

$$F_z = 60 * \sin 20 = 20.52 \text{ lb.}$$

Y que de acuerdo a la convención de signos establecida en el problema su sentido será negativo.

Recordando que para contestar el inciso **b** de dicho problema y en donde se pide: *los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados*, se aplicará la ecuación de los cosenos directores:

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{F_x}{T_{AC}} = \frac{56.38}{120} = 61.97^\circ$$

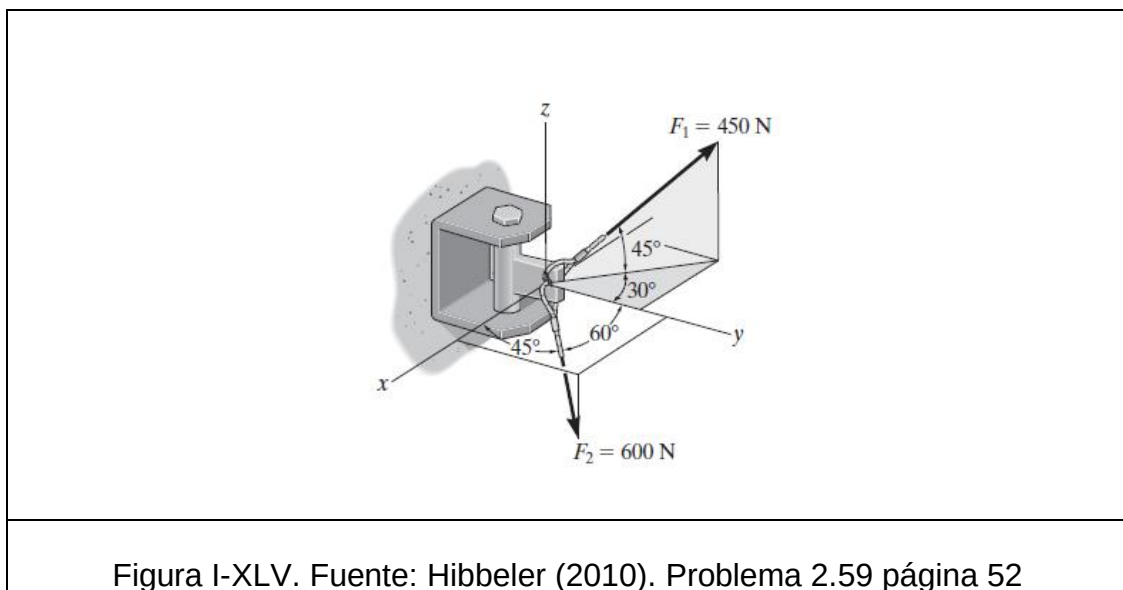
$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{F_y}{T_{AC}} = \frac{-103.9}{120} = 149.97^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{F_z}{T_{AC}} = \frac{-20.52}{120} = 99.84^\circ$$

Y las componentes de la fuerza dirigida en el cable AC serán:

$$\vec{F}_{AC} = 56.38i - 103.9j - 20.52k.$$

El siguiente problema es del texto de Hibbeler (2010), figura I-XLV.

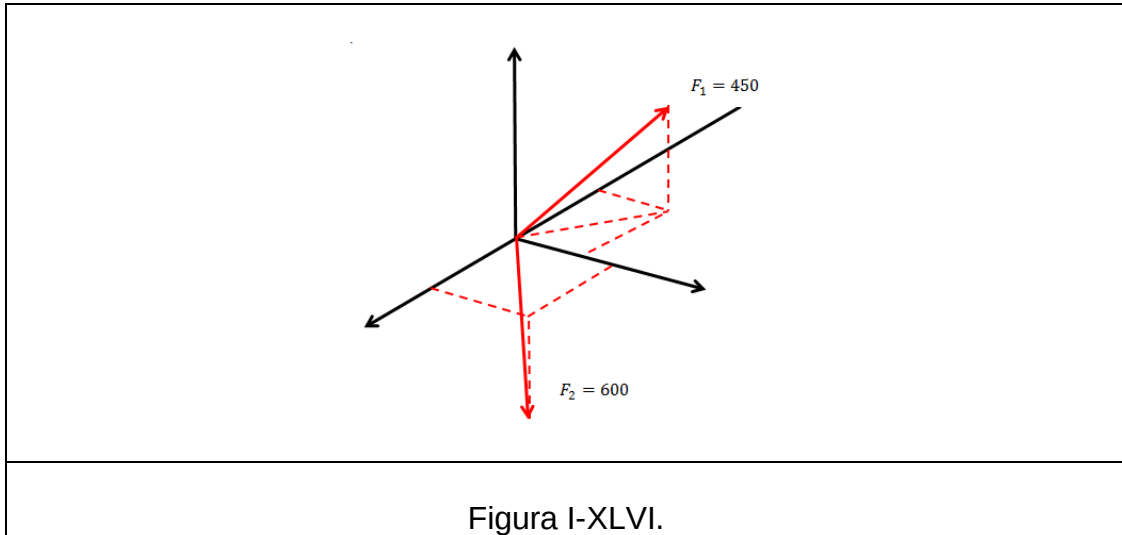


Cuyo enunciado dice:

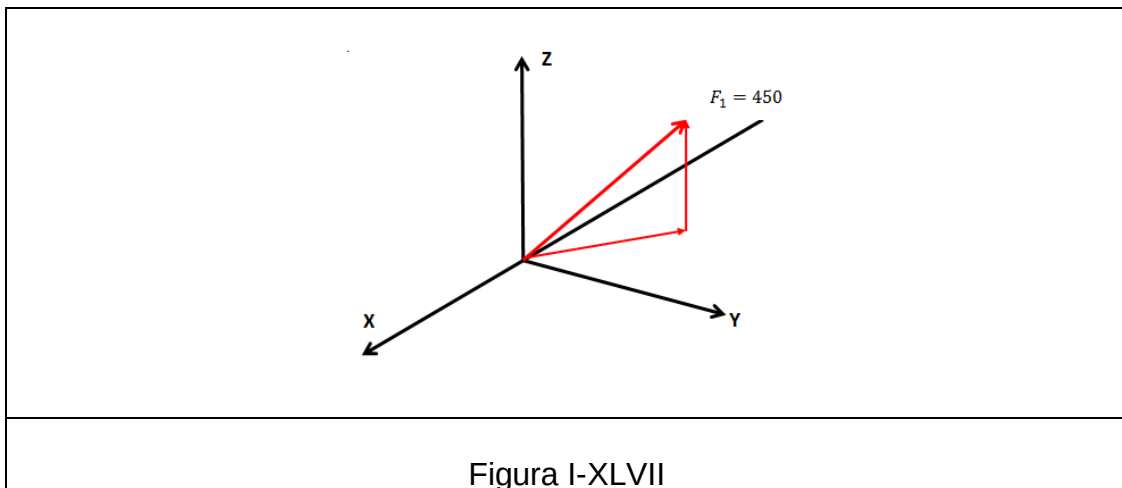
“Determine el ángulo coordenado λ para F_2 y después exprese cada fuerza que actúa sobre la ménsula como un vector cartesiano.”

El ángulo λ que se pide determinar en este problema es el coseno director relacionado entre la componente cartesiana dirigida sobre el eje de las Z 's y el vector fuerza F_2 .

Lo primero que haremos será representar en el espacio a los vectores fuerza involucrados, tal como se muestra en la figura I-XLVI:



Analizaremos fuerza por fuerza y empezaremos con la F_1 . La misma la representaremos como un triángulo rectángulo tal como se observa en la figura I-XLVII



Se podrá observar un triángulo recto cuya hipotenusa está representada por la fuerza de 450 N, el cateto vertical está en dirección del eje de las $Z's$ y el cateto restante está comprendido en el plano que forman los ejes cartesianos X, Y .

Con los datos del problema tenemos que:

$$F_z = F * \cos 45 = 450 * \cos 45 = 318 \text{ N.}$$

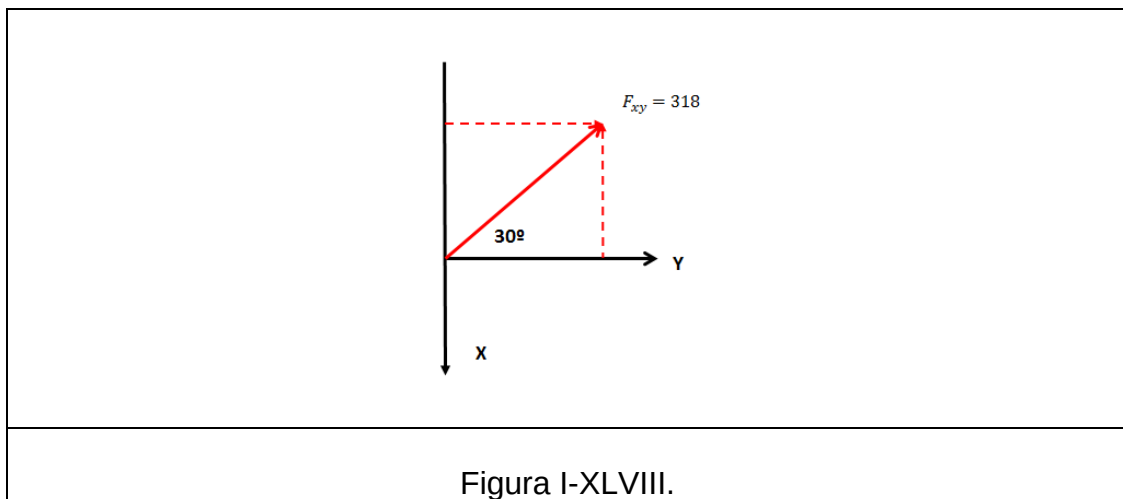
Cuyo sentido, como está representado en la figura, es positivo. Vectorialmente se escribe de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{F_{1z}} = +318k \text{ N.}$$

El valor del cateto que está comprendido en el plano X, Y será:

$$F_{XY} = F * \cos 45 = 450 * \cos 45 = 318 \text{ N.}$$

El cual será representado en la figura I-XLVIII:



Dicho cateto ahora será la hipotenusa y cuyos catetos serán las fuerzas dirigidas en los ejes cartesianos X, Y : de la siguiente manera:

$$F_X = F_{XY} * \sin 30 = 318 * \sin 30 = 159 \text{ N.}$$

Y respetando la notación del problema es una fuerza en sentido negativo, vectorialmente se expresaría de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{F_{1X}} = -159i \text{ N.}$$

Por último la componente dirigida en el eje cartesiano Y sería:

$$F_Y = F_{XY} * \cos 30 = 318 * \cos 30 = 275.4 \text{ N.}$$

E igualmente en cuanto al sentido de dicha fuerza con respecto a la notación original del problema: sentido positivo. Finalmente la fuerza $\mathbf{F}_1$ se representará vectorialmente de la siguiente manera:

$$\vec{F}_1 = -159i + 275.4j + 318k. (N.)$$

Para encontrar el coseno director λ que de acuerdo a los autores del problema es el ángulo entre la $\vec{F}_2$ y el eje cartesiano Z debemos notar que el mismo problema nos indica los cosenos directores α y β los cuales están asociados a los ejes cartesianos X, Y respectivamente. Recordemos que se estableció que:

$$1^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \lambda$$

Despejando tenemos que:

$$\lambda = \cos^{-1}((1 - (\cos 45)^2 - (\cos 60)^2)^{.5})$$

$$\lambda = 60^\circ$$

Es de vital importancia destacar que de acuerdo a como está planteado el problema el sentido de las componentes X, Y de $\vec{F}_2$ será positivo y el sentido de la componente en dirección Z será negativo.

Por lo tanto la $\vec{F}_2$ estará, vectorialmente, representada de la siguiente manera:

$$\vec{F}_2 = 600 * (\cos 45 i + \cos 60 j - \cos 60 k)$$

$$\vec{F}_2 = 424i + 300j - 300k (N.)$$

Para terminar este primer capítulo resolveremos el siguiente problema ya planteado, figura I-XXIV-(Bis).

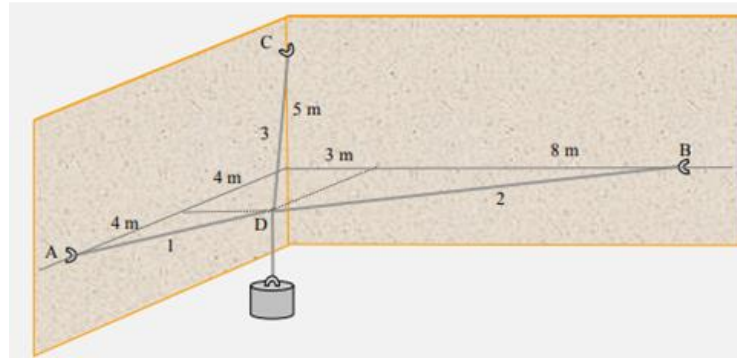


Figura I-XXIV-(Bis). Fuente: ProblemasResueltosEstatica.pdf²²

En este problema un bloque que pesa 60 N está soportado por tres cables:

AD , AB y AC .

Se pide encontrar la tensión en cada uno de los cables.

El punto D representará una partícula y el bloque de 60N será remplazado por una fuerza de la misma magnitud, dirección vertical y sentido negativo (estos cambios no alteran en lo absoluto el problema inicial), tal como se muestra en la figura I-XLIX:

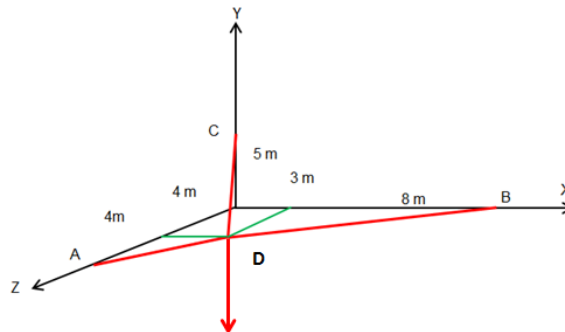
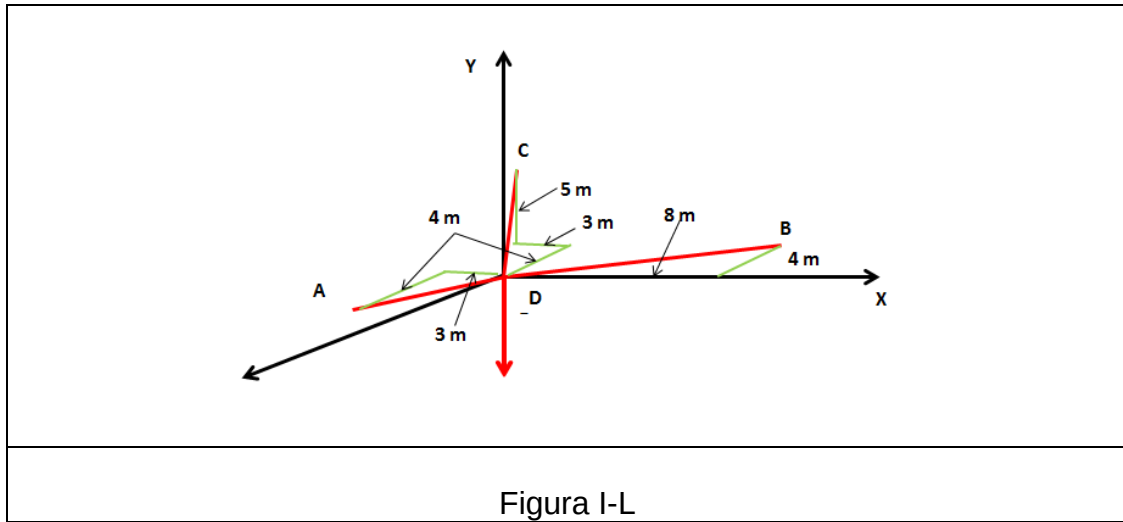


Figura I-XLIX

²² <http://www.telesforozabala.es/mediapool/83/836590/data/ProblemasResueltosEstatica.pdf>
(visitada el 26 de agosto de 2019)

Haremos algunos razonamientos iniciales los cuales nos darán las habilidades necesarias para este tipo de problemas y los subsecuentes.

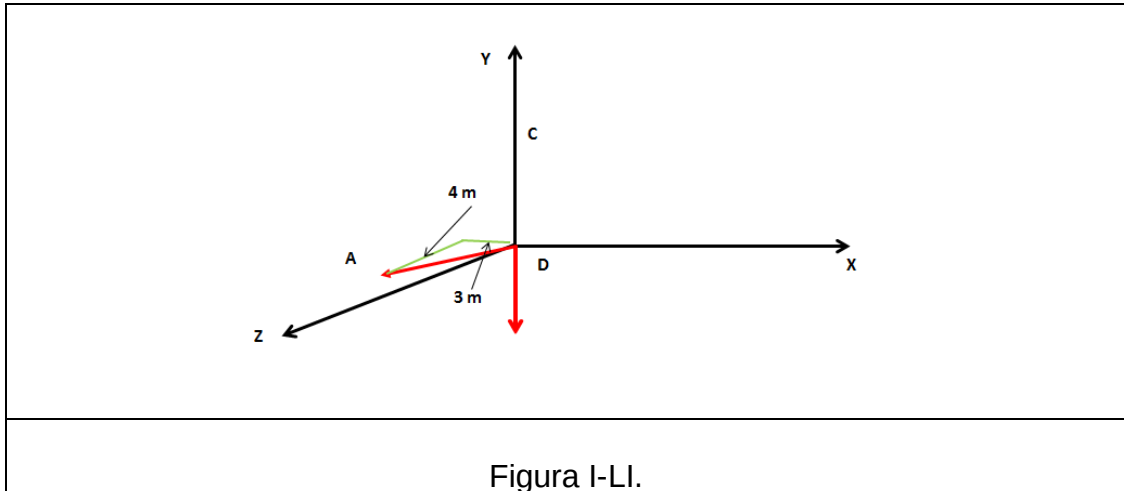
1. El primer razonamiento es el de trasladar el origen del sistema en donde se encuentra la partícula D, tal y como se muestra en la figura I-L. Se ha demostrado que dicho traslado del origen no altera el resultado del problema, al contrario; simplifica la solución de dicho problema.



Como ya se ha explicado, la dirección de cada cable en el espacio es la dirección de cada vector fuerza (principio de transmisibilidad) Por lo tanto nos avocaremos a encontrar los cosenos directores de cada fuerza para hacer la descomposición de las mismas en dirección de los ejes cartesianos como a continuación se explica y se muestra: solo se sabe la magnitud, dirección y sentido de una fuerza:

$$\overrightarrow{W_B} = -60Nj$$

A continuación se analizará la posición del cable DA (figura I-LI):



Conociendo las posiciones iniciales y finales de: $\overrightarrow{DA}$ como vector posición, cuyos valores se indican en la tabla I-XII se podrán encontrar los valores de los cosenos directores:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{DA}$	0	0	0	-3	0	4	-3	0	4

Tabla I-XII

La magnitud de $\overrightarrow{DA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ metros}$.

Por lo tanto los cosenos directores de la fuerza de tensión que experimentará el cable $\overrightarrow{DA}$ son:

$$\cos(\theta_{xDA}) = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(\theta_{zDA}) = \frac{4}{5}$$

Las tensiones en los cables son incógnitas, pero eso no impide hacer el siguiente planteamiento:

$$T_{xDA} = -\frac{3}{5}T_{DA}$$

$$T_{zDA} = \frac{4}{5} T_{DA}$$

Se hará lo mismo con el cable DB . En la figura I-LII se muestra tanto la posición inicial como la final de dicho cable, información más que suficiente para conocer sus cosenos directores (tabla I-XIII)

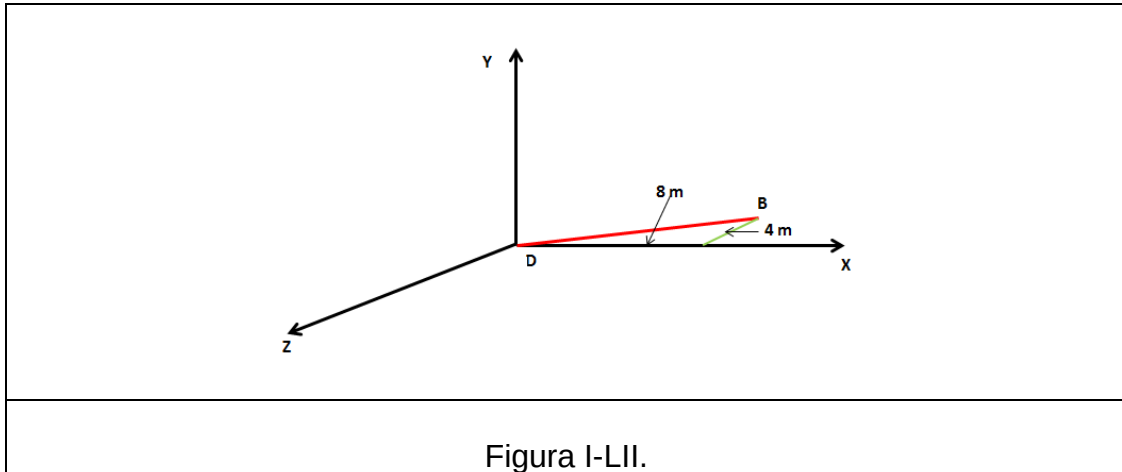


Figura I-LII.

:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{DB}$	0	0	0	8	0	-4	8	0	-4

Tabla I-XIII

La magnitud de $DB = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = 8.94 \text{ metros}$

Por lo tanto los cosenos directores de la fuerza de tensión que experimentará el cable DB son:

$$\cos(\theta_{xDB}) = \frac{8}{8.94}$$

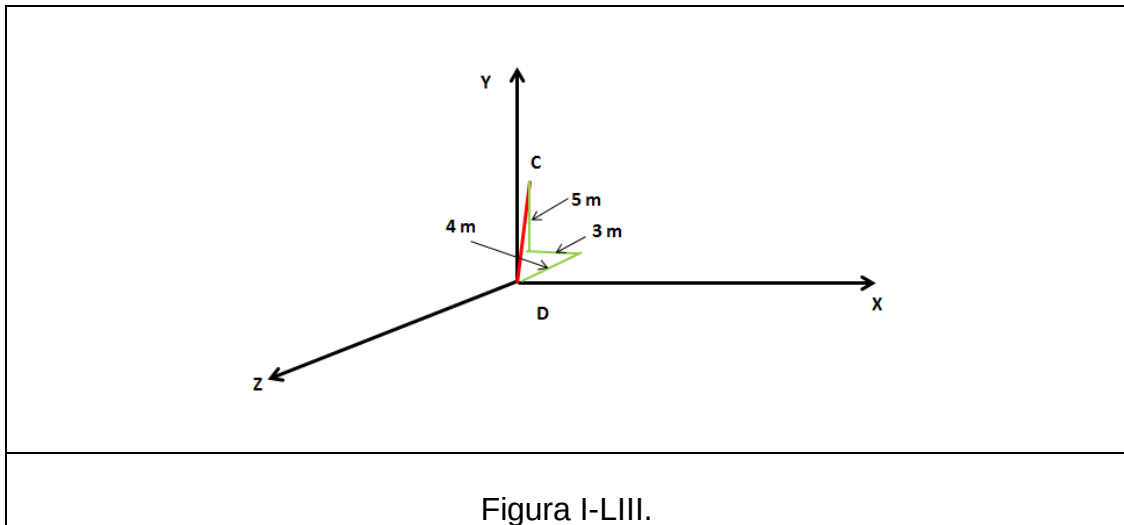
$$\cos(\theta_{zDB}) = -\frac{4}{8.94}$$

Teniendo el siguiente planteamiento:

$$T_{xDB} = \frac{8}{8.94} T_{DB}$$

$$T_{zDB} = -\frac{4}{8.94} T_{DB}$$

Finalmente se desglosará el vector posición CB en sus tres componentes rectangulares (figura I-LIII y tabla XIV):



#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{DC}$	0	0	0	-3	5	-4	-3	5	-4

Tabla I-XIV

La magnitud de $DC = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-4)^2} = 7.07 \text{ metros}$

Por lo tanto los cosenos directores de la fuerza de tensión que experimentará el cable DC son:

$$\cos(\theta_{xDC}) = -\frac{3}{7.07}$$

$$\cos(\theta_{yDC}) = \frac{5}{7.07}$$

$$\cos(\theta_{zDC}) = -\frac{4}{7.07}$$

Teniendo el siguiente planteamiento:

$$T_{xDC} = -\frac{3}{7.07}T_{DC}$$

$$T_{yDC} = \frac{5}{7.07}T_{DC}$$

$$T_{zDC} = -\frac{4}{7.07}T_{DC}$$

Con el anterior sistema de ecuaciones y apoyándonos en el principio de equilibrio de partículas expresado por el sistema de ecuaciones (8):

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^n \vec{F}_{xa} &= (F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn})i = 0 \\ \sum_{a=1}^n \vec{F}_{ya} &= (F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn})j = 0 \\ \sum_{a=1}^n \vec{F}_{za} &= (F_{z1} + F_{z2} + \dots + F_{zn})k = 0\end{aligned}$$

Se podrá plantear lo siguiente:

$$T_{xDA} + T_{xDB} + T_{xDC} = 0$$

$$T_{yDC} - 60N = 0;$$

$$T_{yDC} = 60N$$

$$T_{zDA} + T_{zDB} + T_{zDC} = 0$$

Se había planteado que:

$$T_{yDC} = \frac{5}{7.07}T_{DC}$$

Y sabiendo que:

$$T_{yDC} = 60N$$

Por lo tanto:

$$T_{DC} = \frac{60 * 7.07}{5}$$

$$T_{DC} = 84.84N$$

Asimismo:

$$T_{xDC} = -\frac{3}{7.07}T_{DC} = -\frac{3}{7.07} * 84.84 = 36N$$

$$T_{zDC} = -\frac{4}{7.07}T_{DC} = -\frac{4}{7.07} * 84.84 = -48N$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$T_{xDA} + T_{xDB} - 36N = 0$$

$$T_{zDA} + T_{zDB} - 48N = 0$$

Recordando que:

$$T_{xDA} = -\frac{3}{5}T_{DA}$$

$$T_{xDB} = \frac{8}{8.94}T_{DB}$$

Se obtiene:

$$-\frac{3}{5}T_{DA} + \frac{8}{8.94}T_{DB} - 36N = 0$$

Asimismo sabiendo que:

$$T_{zDA} = \frac{4}{5}T_{DA}$$

$$T_{zDB} = -\frac{4}{8.94}T_{DB}$$

Se obtiene:

$$\frac{4}{5}T_{DA} - \frac{4}{8.94}T_{DB} - 48N = 0$$

Y ya se tiene:

$$-\frac{3}{5}T_{DA} + \frac{8}{8.94}T_{DB} - 36N = 0$$

Dos ecuaciones, dos incógnitas. Sustituyendo una en la otra, tenemos finalmente que:

$$T_{DA} = 132N$$

$$T_{DB} = 128.7N$$

$$T_{DC} = 84.84N$$

CAPÍTULO II. DETERMINAR LA FUERZA ÚNICA DE UN SISTEMAS DE FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN PUNTO O SOBRE UN CUERPO RÍGIDO.

Objetivo: Determinar la fuerza única de un sistema de fuerzas que actúan sobre un punto o sobre un cuerpo rígido.

Subtemas a tratar

2.1. Clasificación de sistemas de fuerzas

2.2. Momento de una fuerza

2.2.1. Momento de una fuerza respecto a un punto

2.2.2. Momento de una fuerza respecto a un eje

2.3. Par de fuerzas

2.4. Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par

2.5. Reducción de un sistema de fuerzas.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son ocho:

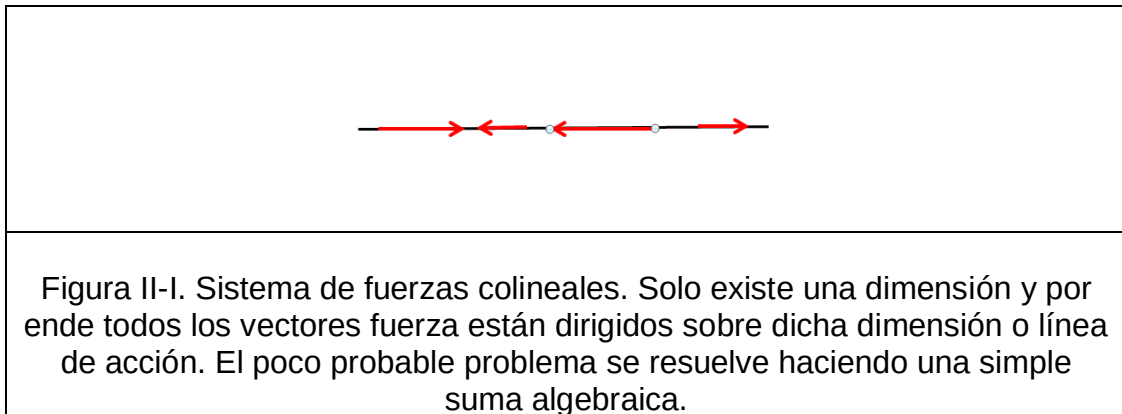
1. Definir el concepto del producto punto y producto cruz de vectores, con ejemplos.
2. Definir el concepto de momento con respecto a un punto utilizando el producto cruz, obteniendo el valor escalarmente y por determinante.
3. Realizar ejercicios donde intervenga encontrar el momento con respecto a un punto así como las fuerzas que los producen.
4. Definir y explicar el concepto del triple producto escalar de tres vectores.
5. Desarrollar el momento con respecto a un eje aplicando el concepto anterior.
6. Descomponer una fuerza en una fuerza y un par.
7. Reducir sistemas de fuerzas a una fuerza única de sistemas de fuerzas concurrentes, paralelas y coplanares.
8. Reducir un sistema de fuerzas a una llave de torsión.

2.1. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

2.1.1. Fuerzas Colineales.

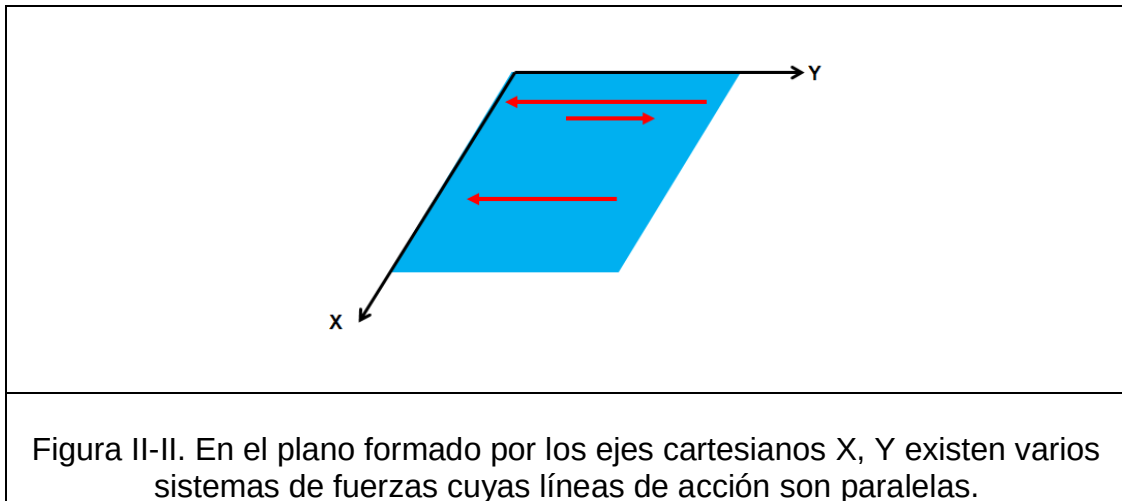
Fuerzas donde todas están orientadas en la misma línea de acción sin importar si son positivas o negativas. A estos sistemas se les conoce como sistema colineales (II-a)

En los problemas de estática, este es el sistema más sencillo pero extremadamente raro que se presente (figura II-I).



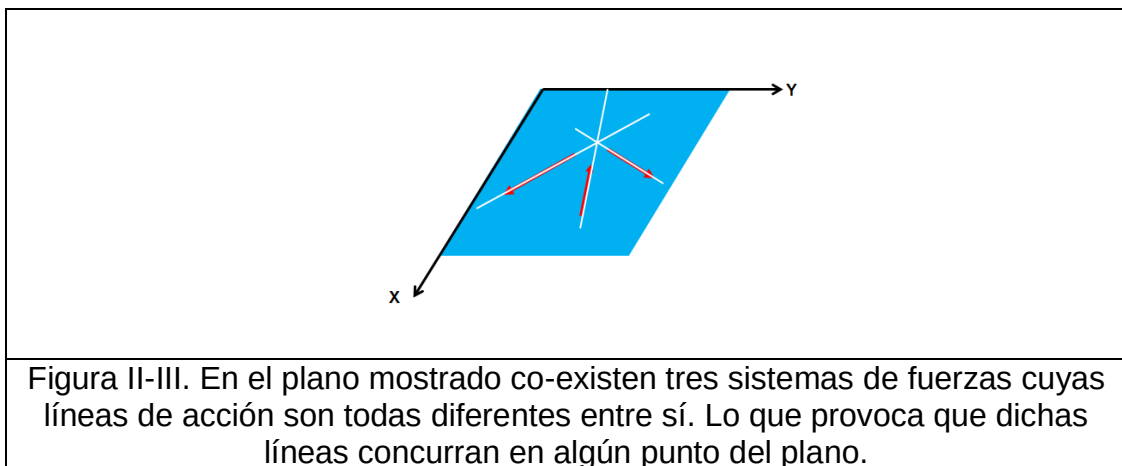
2.1.2. Fuerzas Coplanares Paralelas (figura II-II).

Cuando en el plano que definen dos ejes perpendiculares, el sistema de fuerzas que allí se presenta se define como sistema de fuerzas coplanares. Dentro de dicho plano podrán existir más de un sistema de fuerzas y la característica de dichos sistemas de fuerzas es que sus líneas de acción son paralelas entre sí, identificándolo a lo anterior como sistemas de fuerzas coplanares paralelas. (II-b)



2.1.3. Fuerzas Coplanares Concurrentes (figura II-III):

Cuando todas las líneas de acción de las fuerzas contenidas en un mismo plano son todas diferentes entre sí, estas se llegarán a encontrar en algún punto del plano. Identificando a lo anterior como sistemas de fuerzas coplanares concurrentes. (II-c)



2.1.4. Caso General de Fuerzas Coplanares (figura II-IV):

En esta situación, en el mismo plano coexisten sistemas de fuerzas cuyas líneas de acción podrán ser paralelas y a la vez concurrentes con otras líneas de acción. (II-d)

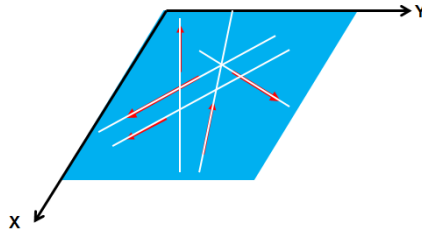


Figura II-IV. Se podrá observar que en esta figura existen diferentes sistemas de fuerza cada uno con su línea de acción, algunas de estas líneas son paralelas entre si y a la vez concurrentes con otras líneas de acción. Este sería el caso general de fuerzas coplanares.

2.1.5. Sistema de fuerzas paralelas en el espacio. En la figura II-V, se podrá observar un ejemplo de esta situación.

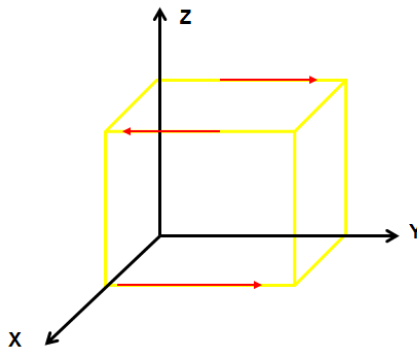


Figura II-V. En esta figura se observan tres sistemas de fuerzas cada uno con su línea de acción diferente entre sí pero paralelas.

2.1.6. Caso general de sistemas de fuerzas en el espacio. Aquí se presentan más de un sistema de fuerzas en el espacio y cada uno de ellos con líneas de acción que pueden ser paralelas entre unas y/o concurrentes con otras. En la figura II-VI se observa un problema propuesto de Beer, et al. (2010) que ejemplifica esta situación

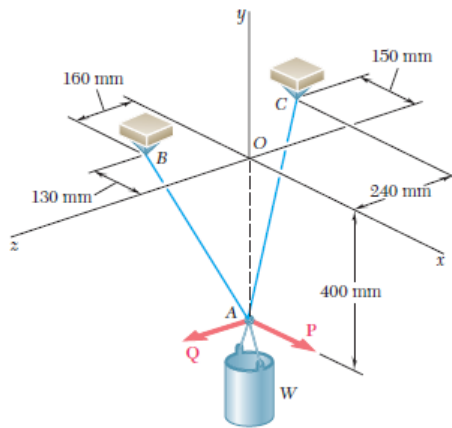


Figura II-VI. En este problema se puede observar explícitamente dos fuerzas; P y Q. De acuerdo al enunciado del problema, otras dos fuerzas están orientadas en la dirección de los cables AB y AC. Fuente: Beer et al. (2010), problema 2.121 página 62.

En la figura II-VII se presenta una esquematización del problema de la figura II-VI. Se muestran cuatro aparentes sistemas de fuerza en el espacio, cada uno con línea de acción diferente, en color rojo, y todas concurriendo en un mismo punto.

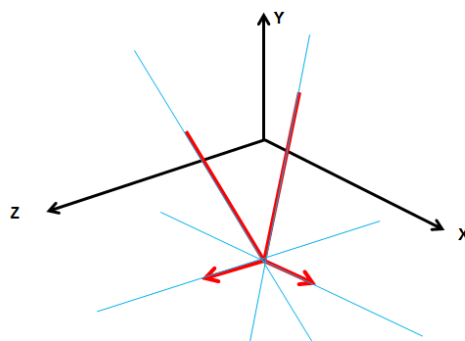


Figura II-VII.

2.2. MOMENTO DE UNA FUERZA.

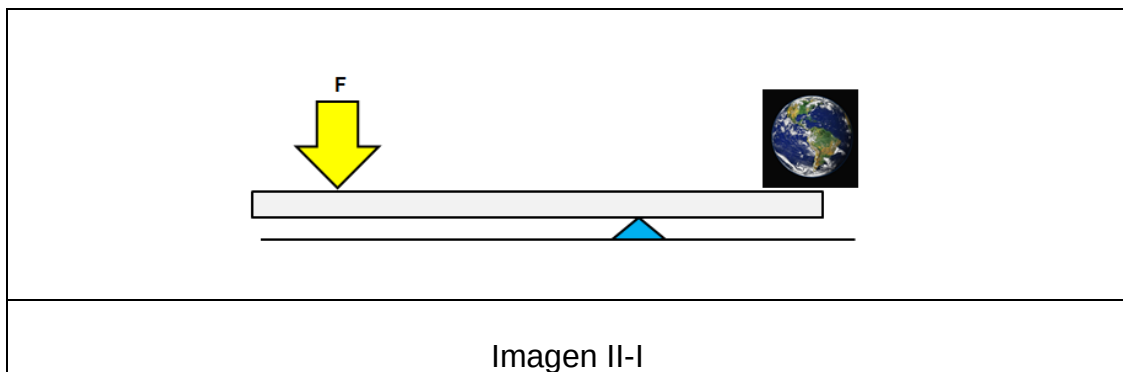
"Dadme un punto de apoyo y moveré al mundo"

Arquímedes.

La palanca²³. De acuerdo a la RAE²⁴ la palanca es:

1. f. Máquina simple que consiste esencialmente en una barra rígida que se apoya y puede girar sobre un punto, y que sirve para transmitir una fuerza.

La imagen II-I muestra una palanca en su forma más simple.

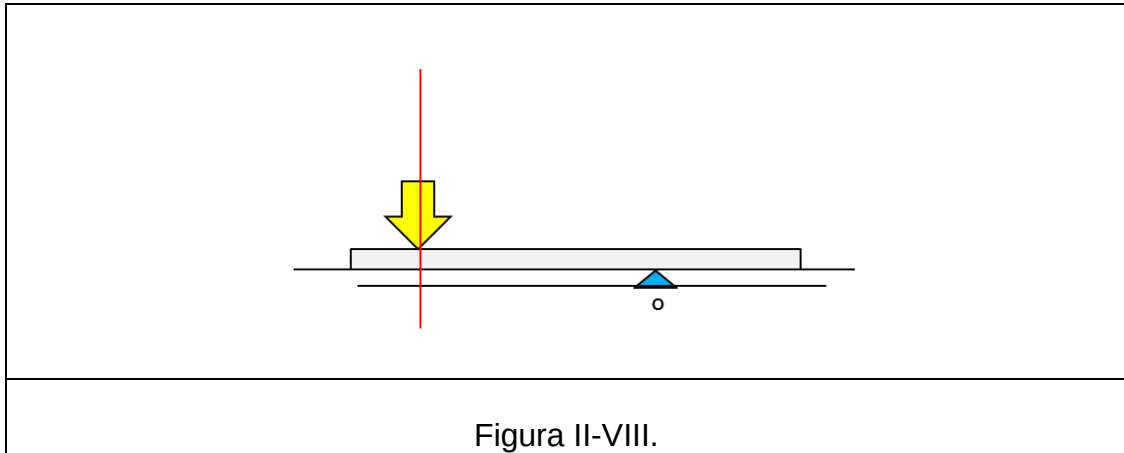


La línea de acción de la fuerza de la imagen está alejada del punto de apoyo representado por el triángulo azul. Mientras más alejada este la línea de acción de dicha fuerza F del punto de apoyo mayor será el peso que se levante (en esta imagen el peso está representado por nuestro planeta tierra). Es importante destacar que si la línea de acción de la fuerza pasa por el punto de apoyo no se conseguirá resultado alguno; se anula la palanca. De lo anterior se deduce que cualquier fuerza tiende a hacer palanca siempre que un punto cualquiera no se encuentre dentro de la línea de acción de dicha fuerza.

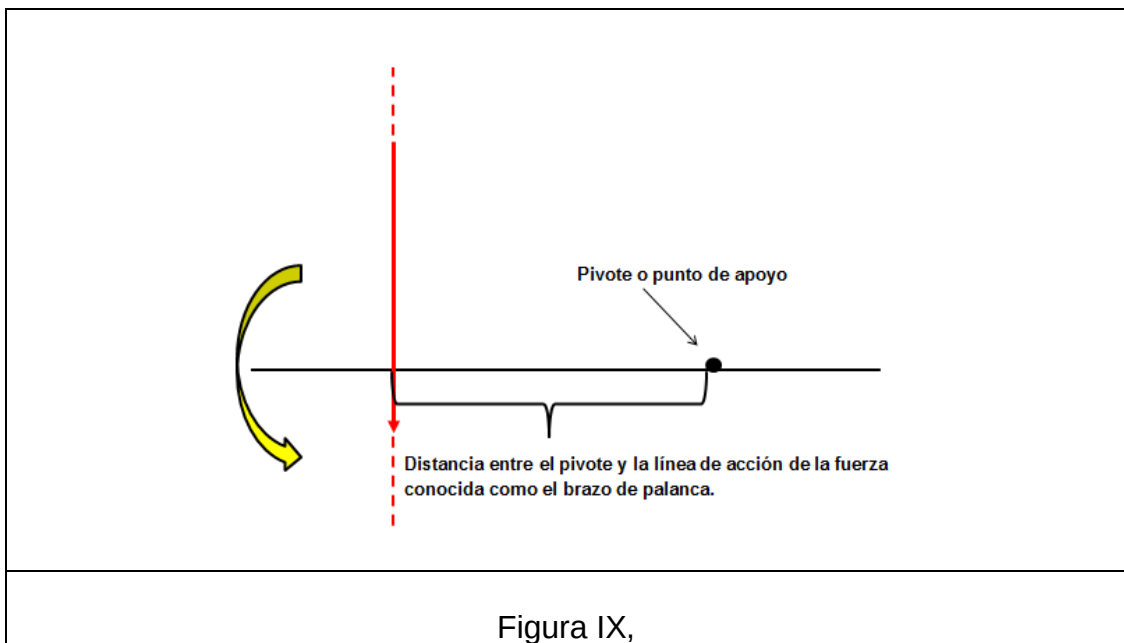
En la figura II-VIII se resalta en rojo la línea de acción de la fuerza F y en negro la distancia entre el punto O y dicha línea de acción.

²³ Es común en nuestro México escuchar: "Tengo una palanca que me va a ayudar a entrar a trabajar en el gobierno: ¿a qué se refieren cuando se exclama lo anterior? De acuerdo al mismo diccionario de la RAE se refiere a aquella persona influyente que interfiere para bien o para mala a favor de otra persona.

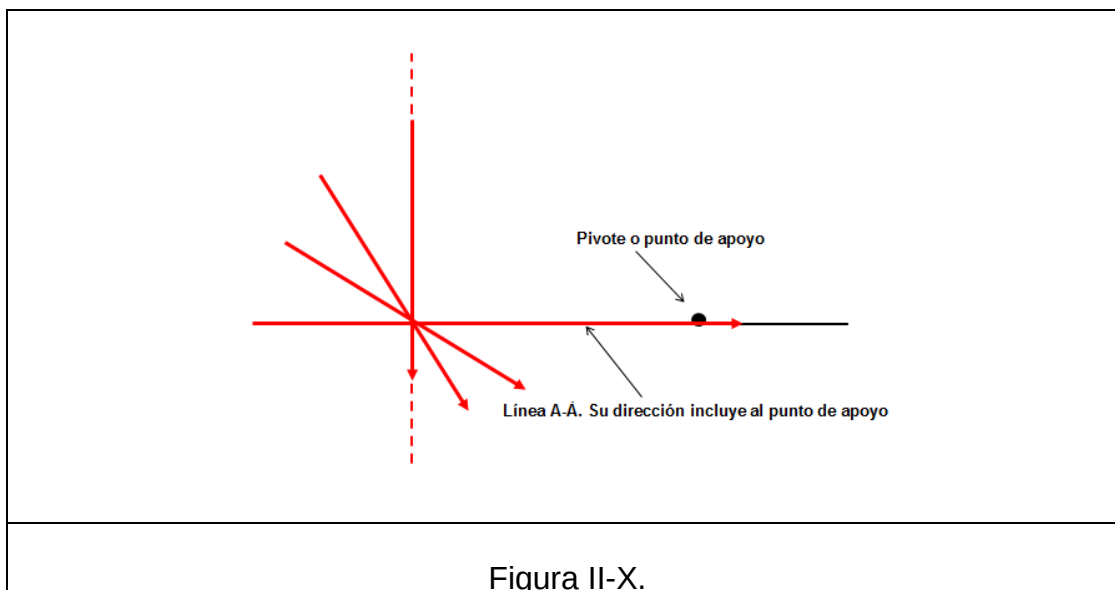
²⁴ <https://dle.rae.es/?id=RVecfbx> (visitada el 15 de septiembre de 2019)



En la figura II-IX solo representamos la línea de acción de la fuerza y la distancia entre el punto O y dicha línea de acción. Tal distancia se conoce como el brazo de la palanca.



Es evidente que de la forma en que esta aplicada la fuerza se provocará una tendencia al giro. En tal figura II-VIII el punto O se le conoce como punto de apoyo o pivote. Si modificamos la línea de acción de la fuerza F , como se representa en la figura II-X, llegará una línea (línea A-Á) que pase por el punto de apoyo y por lo tanto el brazo de palanca no existe y en consecuencia no habrá tendencia al giro o momento.



Explicar el concepto de momento de una fuerza al alumnado siempre ha sido un desafío. ¿Cómo hacerlo de la manera más fácil? Dos maneras que me han dado resultados son las siguientes:

1. Pongo de ejemplo un mesabanco como la de la imagen II-II



Le pido al grupo que observe bien el pupitre y que me diga si este tiende a girar. La respuesta generalizada es que no. A continuación les pregunto qué pasaría si ahora a dicho pupitre le hacemos una pequeña

²⁵ Tomada sin permiso de <https://www.modeloffice.com.mx/producto/pupitre-escolar-ps-40/> (visitada el 8 de septiembre de 2019)

modificación como la mostrada en la imagen II-III. La respuesta es diferente: “*el mesabanco se gira*”, es lo que responden.



Imagen II-III. La modificación realizada al mesabanco provocaría un desbalanceo provocado por la fuerza de su mismo peso haciendo que dicho mesabanco tienda a girar, esto es: dejaría de estar estático

2. Les pido que traten de cerrar la puerta del salón del siguiente modo (figura II-XI)

:

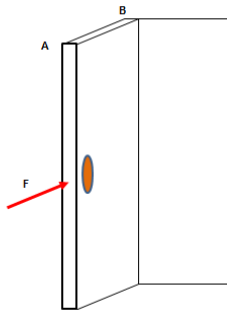


Figura II-XI. La línea de acción de la fuerza F es paralela a la arista AB del marco de la puerta.

El alumnado, de manera empírica, comprende que de esa manera, aunque exista una fuerza, la puerta no girará y por lo tanto permanecerá en la misma posición.

Lo que se pretende con los dos ejemplos anteriores es que el alumnado relacione el término ***momento*** con la tendencia a girar de cualquier cuerpo provocado por una o varias fuerzas, esto es: cómo un sinónimo de la palabra

momento, en estática, sea algo que tiende a girar. Vectorialmente momento se define como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{II-1})$$

Dónde:

$\vec{r}$ representará un vector distancia

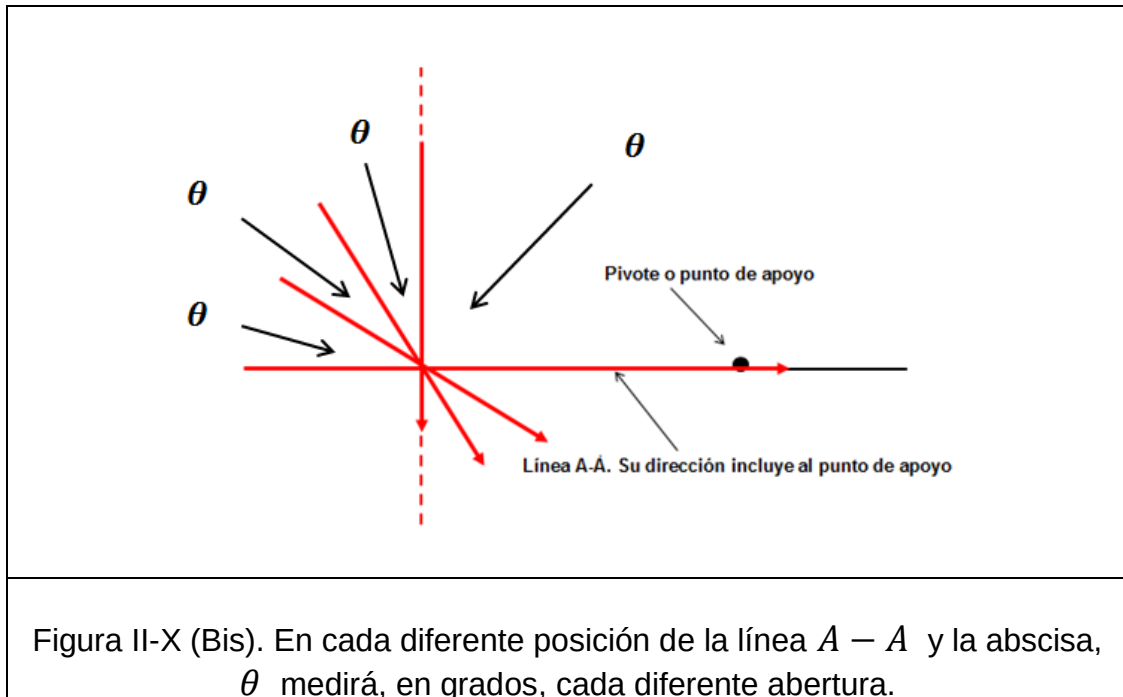
$\vec{F}$ representará un vector fuerza

Se podrá observar que momento está representado como un vector, resultado de un vector posición y un vector fuerza.

Y escalarmente el momento se expresa de la siguiente manera:

$$M = F * r \sin \theta \quad (\text{II-2})$$

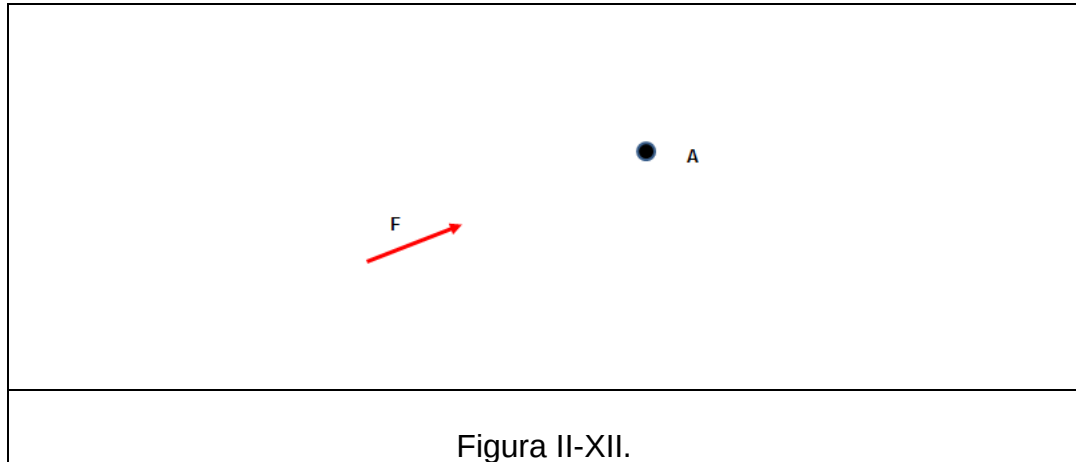
En donde el ángulo θ es aquel que forman las líneas de acción que siguen al vector posición y al vector fuerza, respectivamente (figura II-X Bis)



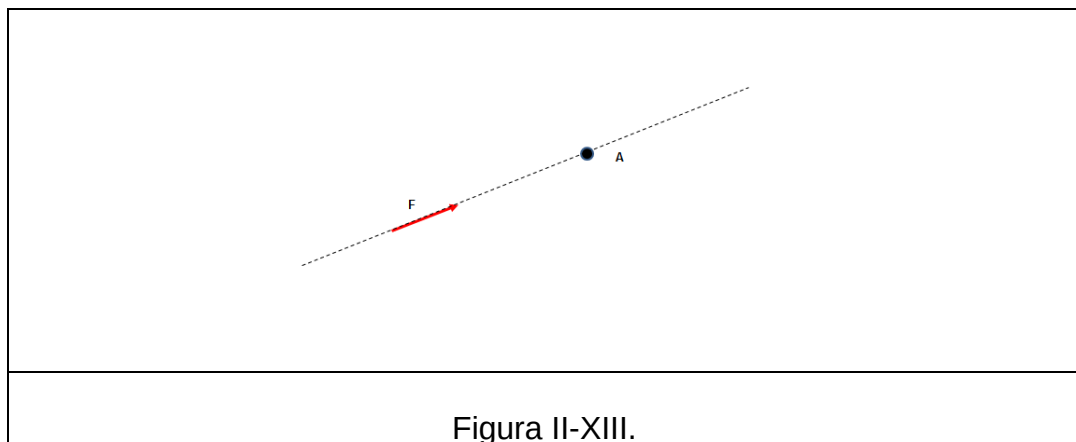
En el siguiente punto se explicará y ejemplificará los anteriores planteamientos matemáticos.

2.2.1. Momento de una fuerza respecto a un punto.

El momento de una fuerza se define como el producto de su magnitud por la distancia más corta entre la línea de acción de dicha fuerza a un punto deseado. Por ejemplo, en la figura II-XII se representa una fuerza F y un punto A .



De acuerdo a la definición anterior el momento de la fuerza F de la figura II-XII sería la distancia entre un punto de la línea de acción de la fuerza F y el punto A . La pregunta obligada aquí es ¿cómo se encuentra esa distancia? Para dar respuesta a lo anterior siempre debemos conocer la línea de acción de la fuerza. De la figura anterior se traza la línea de acción de la fuerza F tal y como se muestra en la figura tal II-XIII.



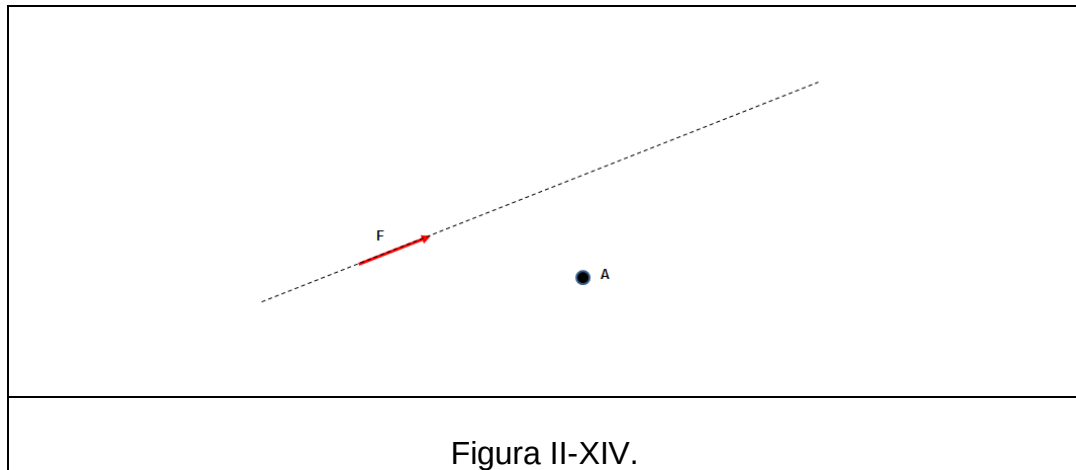
Se observa que el punto A está sobre la línea de acción de la fuerza F , en otras palabras: la distancia entre la línea de acción de la fuerza F y el punto A es cero y por lo tanto el momento es igual a cero.

De la ecuación escalar (II-2)

$$M = F * r \sin \theta$$

Equivale a que el ángulo θ sea igual a cero ya que puede existir una distancia entre el punto A y el punto donde se aplique la fuerza como en el ejemplo de la figura II-XI

Supongamos que se tienen, ahora, la siguiente situación mostrada en la figura II-XIV:



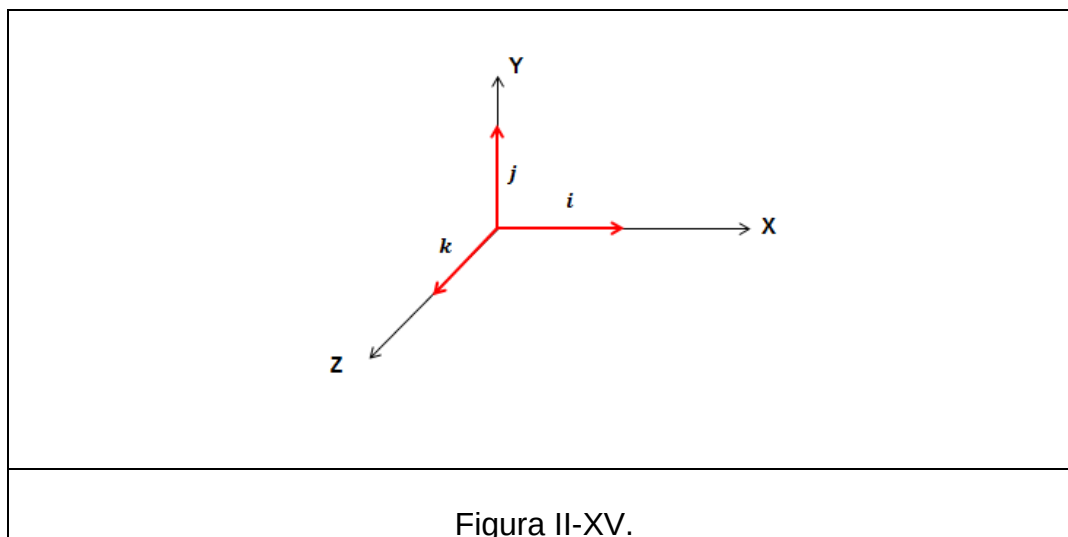
En la figura II-XIV es evidente que hay una distancia entre la línea de acción de la fuerza F y el punto A; el momento será diferente a cero. Para encontrar el valor del momento que se provoca en la figura II-XIV se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Definir de los dos vectores sus líneas de acción,
2. Conocer el ángulo que forman dichas líneas de acción,
3. Se encontrará la magnitud de un tercer vector mediante la ecuación:

$$V_3 = V_1 * V_2 \sin \theta$$

4. La dirección del vector encontrado será perpendicular al plano que forman las líneas de acción de los dos vectores, y el sentido será de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Para explicar con un ejemplo lo anterior sugerido recurramos a los vectores unitarios i, j, k tal y como se podrá observar en la figura II-XV:



Y siguiendo los cuatros pasos anteriores en donde el primero establece que:
Definir de dos vectores sus líneas de acción

1. Escogemos a criterio los de los vectores i, j sus líneas de acción que serán colineales a los ejes cartesianos X, Y respectivamente como se muestra en la figura II-XV.
2. El ángulo que forman los ejes referidos es de 90° , segundo criterio satisfecho; el definir el ángulo que forman las líneas de acción de los dos vectores seleccionados.

3. El tercer criterio es encontrar la magnitud de un tercer vector de acuerdo a la siguiente ecuación

$$: V_3 = V_1 * V_2 \sin \theta.$$

Las magnitudes de V_1, V_2 son ambas iguales a uno por ser vectores unitarios y el seno del ángulo ya encontrado es igual a uno por lo tanto la magnitud de: $V_3 = 1$.

4. El cuarto y último criterio es en cuanto a la dirección y sentido del que será el vector:

$$\vec{V_3}$$

Del que solo conocemos su magnitud.

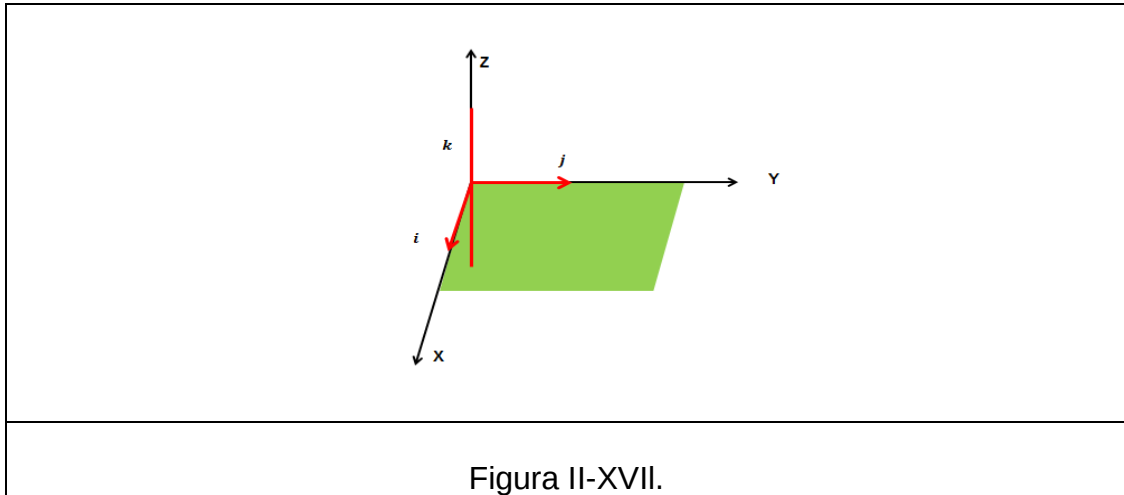
En el cuarto criterio se estableció que la dirección del tercer vector resultante:

$$\vec{V}_3$$

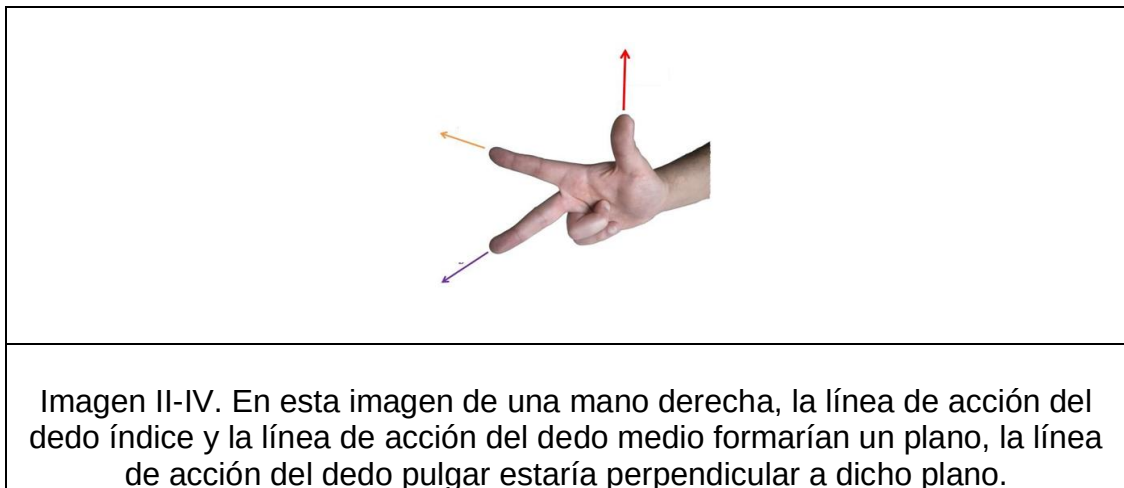
Deberá ser perpendicular al plano que forman las líneas de acción de los dos vectores

$$\vec{V}_1 \text{ y } \vec{V}_2$$

En la figura II-XVI se representa la dirección del tercer vector la cual coincide con la dirección del vector unitario $\mathbf{k}$ que por definición su sentido será siempre positivo



Pero para establecer el sentido del vector resultante se establecerá el criterio de la regla de la mano derecha (imagen II-IV)



Si se cerrará la mano como se muestra en la imagen II-V es cuando de manera arbitraria se define el sentido del tercer vector y que será sentido positivo

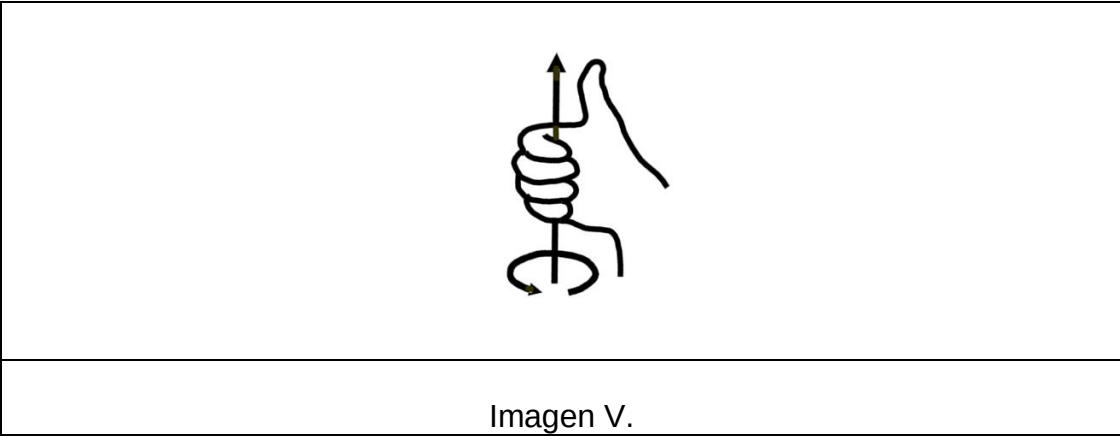


Imagen V.

De lo anterior se podrá establecer la siguiente convención del producto vectorial de dos vectores o producto cruz: (tabla II-I)

Producto vectorial $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ donde $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ son perpendiculares entre si		
i	j	k
$i \times i = 0$	$j \times i = -k$	$k \times i = j$
$i \times j = k$	$j \times j = 0$	$k \times j = -i$
$i \times k = -j$	$j \times k = i$	$k \times k = 0$

Tabla II-I.

La figura II-XVII, representa la forma en que opera la tabla II-I, donde la i con la j “buscan” a la k , la j con la k “buscan” a la i y así sucesivamente. En este orden de “búsqueda” el sentido de lo obtenido es positivo, si la “búsqueda” fuera en sentido contrario se obtiene sentidos negativos

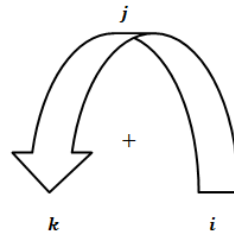


Figura II-XVII. Siguiendo el sentido de rotación de la flecha curva tenemos que si el vector i sigue al vector j resulta el vector k en sentido positivo. Asimismo si el vector j sigue al vector i en sentido contrario a la dirección de la flecha curva resulta el vector k con sentido negativo.

De lo anterior explicado se podrá concluir que para conocer el momento resultante de un vector posición y un vector fuerza lo más práctico es conocer sus componentes rectangulares con respecto a un sistema de referencia y realizar las operaciones vectoriales ya explicadas.

El problema que se resolverá a continuación es un problema propuesto del texto de Bedford (2000) y en donde se pondrá en práctica los criterios aquí establecidos (figura II-XVIII).

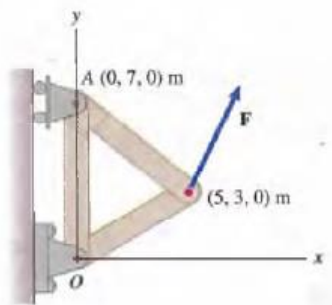


Figura II-XVIII. Fuente: Bedford (2000). Problema 4.44, página 144

El enunciado de este problema es:

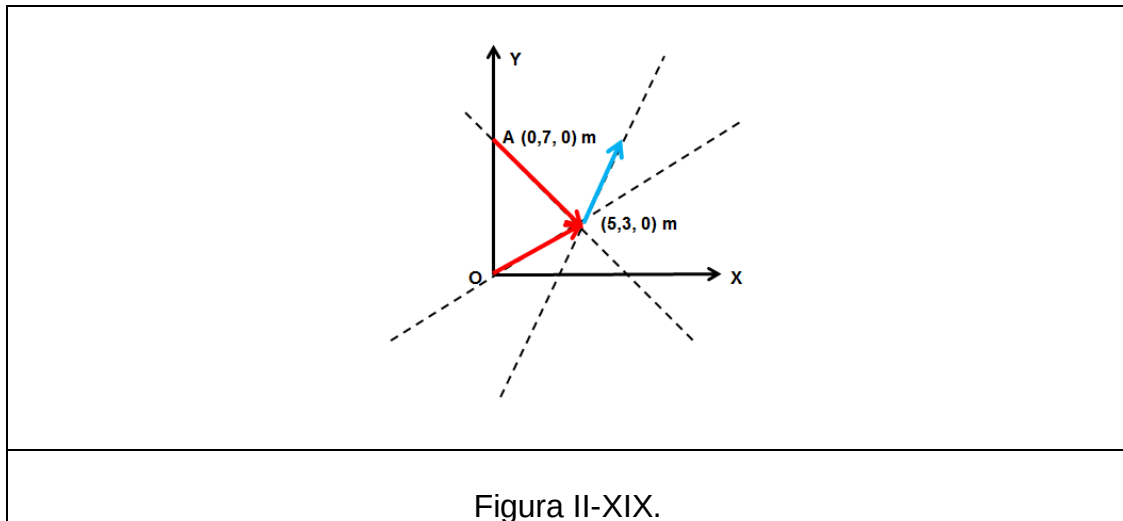
“La línea de acción de F que se muestra está contenida en el plano x - y . El momento de F respecto a O es de 140 k (N-m) , y el momento de F respecto al punto A es de 280 k (N-m) . ¿Cuáles son las componentes de F ?”

En este problema se tienen como datos dos momentos con el mismo vector fuerza (no se cambia ni su magnitud, ni su dirección ni su sentido), solo cambia la distancia entre el punto donde se aplica la fuerza F y el punto donde se hace momentos: inicialmente, este último punto, era el punto O , para cambiar al punto A .

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{P/O} \times \vec{F} = 140k \text{ (N.m)}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{P/A} \times \vec{F} = 280k \text{ (N.m)}$$

Lo que se desea con este problema es demostrar que la fuerza provocará momentos en el cuerpo donde se aplique dicha fuerza siempre y cuando el apoyo que se seleccione no esté sobre la línea de acción de la fuerza. En la figura II-XIX se hace una representación vectorial del problema en cuestión.



La línea azul sólida representa la fuerza F ; dirección, sentido, y magnitud. De acuerdo al enunciado del problema sus componentes rectangulares en dirección $X - Y$ son la incógnita. La línea discontinua sobre la línea azul representa la línea de acción de la fuerza F . Como se podrá observar los puntos O y A no forman parte de la línea de acción de la fuerza F , por lo tanto dicha fuerza tiende a hacer momentos con cada uno de estos puntos, de hecho se tiene como dato el momento que hace F con respecto al punto O y representado al vector posición entre el punto de aplicación de la fuerza F y dicho punto se obtiene que:

$$\vec{r}_{P/O} = \vec{r}_P - \vec{r}_O = (5i + 3j + 0k) - (0i + 0j + 0k) = 5i + 3j + 0k$$

Y de lo ya planteado:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{P/O} \times \vec{F} = 140k \text{ (N.m)}$$

Se podrá escribir lo siguiente:

$$140 k \text{ (N * m)} = (5i + 3j + 0k) \times (F_x i + F_y j)$$

Desarrollando la anterior ecuación mediante el producto cruz (tabla II-I= se obtiene:

$$140k = 5F_y k - 3F_x k$$

Que sería una ecuación con dos incógnitas:

$$F_y \text{ y } F_x$$

Para obtener una segunda ecuación se repite lo anterior, solo se cambia del punto O al punto A:

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = (5i + 3j + 0k) - (0i + 7j + 0k) = 5i - 4j + 0k$$

Y de lo ya planteado:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{P/A} \times \vec{F} = 280k \text{ (N * m)}$$

Se podrá escribir lo siguiente:

$$280 k \text{ (N * m)} = (5i - 4j + 0k) \times (F_x i + F_y j)$$

Desarrollando la anterior ecuación mediante el producto cruz (tabla II-I= se obtiene la segunda ecuación:

$$280k = 5F_y k + 4F_x k$$

Haciendo los despejes correspondientes se obtiene que

$$F_x = 20N, F_y = 40N$$

$$\vec{F} = +20i + 40j \text{ (N)}$$

En aras de reforzar el concepto de: *Momento de una fuerza respecto a un punto*, se resolverá el siguiente triple problema propuesto del texto de Hibbeler (2010), mostrado en la figura II-XX. En dicho problema se pide encontrar:

1. El momento provocado por la fuerza en el cable BA y la distancia entre los puntos A y O .
2. El momento provocado por la fuerza en el cable CA y la distancia entre los puntos C y O
3. El momento que resulte de la suma vectorial de los momentos encontrados en los dos puntos anteriores.

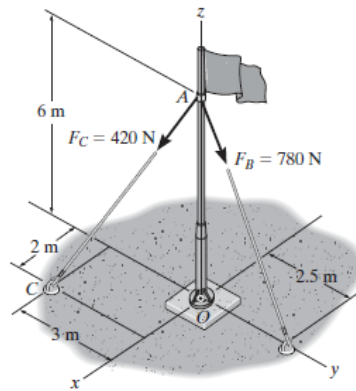


Figura II-XX. Fuente: Hibbeler (2010) problemas 4.40, 4.41 y 4.42, página 137

En este problema se identifican dos fuerzas cuyas líneas de acción concurren en el punto A. Como una manera de hacer lo difícil fácil se recomienda visualizar dicho problema tal como y se ilustra en la figura II-XXI:

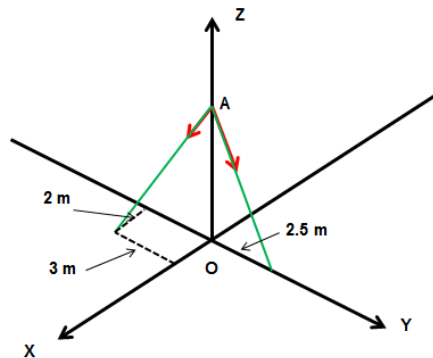


Figura II-XXI. La dirección de las dos fuerzas está claramente indicada respecto al origen del sistema de referencia. Asimismo la distancia entre el punto A y el origen también es considerado como un dato más.

Primeramente se encontrará el momento provocado por la fuerza que actúa a través del cable BA y la distancia entre los puntos A y O, aplicando la siguiente ecuación:

$$\vec{M}_{BA/O} = \vec{r}_{A/O} \times \vec{F}_{BA}$$

A continuación expresar el vector posición $\vec{r}_{A/O}$ en función de sus componentes rectangulares. Sabiendo que el punto A es el punto donde se aplica la fuerza $\vec{F}_{BA}$ y el punto O es donde se ubica el punto de apoyo del brazo de palanca por lo tanto $\vec{r}_{A/O}$ es la distancia entre ambos puntos: A y O:

$$\vec{r}_{A/O} = \vec{r}_A - \vec{r}_O = (0i + 0j + 6k) - (0i + 0j + 0k) = 6k \text{ (metros)}$$

El siguiente paso es representar la fuerza BA, que se encuentra ubicada en el espacio, en sus componentes rectangulares X, Y, Z. Como la línea de acción de dicha fuerza es colineal al cable BA y que de este cable se conoce, respecto al origen del sistema cartesiano, la posición de B y A nos apoyaremos en los coseos directores de dicho cable que serán los mismos cosenos directores de la fuerza BA. El planteamiento vectorial de lo anterior es el siguiente:

$$\vec{S}_{B/A} = \vec{S}_B - \vec{S}_A$$

En la tabla II-II se muestran los valores de $\vec{S}_B$ como la posición final y de $\vec{S}_A$ como la posición inicial

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{BA}$	0	0	6	0	2.5	0	0	2.5	-6

Tabla II-II.

De la tabla II-II se tiene que:

$$\vec{S}_{B/A} = 0i + 2.5j - 6k \text{ (metros)}$$

La magnitud es:

$$AB = (6.25 + 36)^{.5} = 6.5 \text{ metros.}$$

Por lo tanto:

$$\cos(\theta_{xAB}) = 0$$

$$\cos(\theta_{yAB}) = \frac{2.5}{6.5}$$

$$\cos(\theta_{zAB}) = -\frac{6}{6.5}$$

Las componentes escalares de la fuerza AB de 780N serán:

$$F_{xAB} = 0 * 780 = 0$$

$$F_{yAB} = \frac{2.5}{6.5} * 780 = 300N$$

$$F_{zAB} = -\frac{6}{6.5} * 780 = -720N$$

Por lo tanto el vector fuerza AB se puede representar en sus componentes rectangulares:

$$\vec{F}_{BA} = 300j - 720k \text{ (N.)}$$

Aplicando la ecuación de momentos se procede a encontrar el mismo:

$$\vec{M}_{BA/o} = \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_{BA} = (6k) \times (300j - 720k)$$

$$\vec{M}_{BA/o} = -1800i \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

El siguiente paso es representar la fuerza CA, que se encuentra ubicada en el espacio, en sus componentes rectangulares X, Y, Z. Como la línea de acción de dicha fuerza es colineal al cable CA y que de este cable se conoce, respecto al origen del sistema cartesiano, la posición de C y A nos apoyaremos en los coseos directores de dicho cable que serán los mismos cosenos directores de la fuerza BA. El planteamiento vectorial de lo anterior es el siguiente:

$$\vec{s}_{C/A} = \vec{s}_C - \vec{s}_A$$

En la tabla II-III se muestran los valores de $\vec{S}_C$ como la posición final y de $\vec{S}_A$ como la posición inicial

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{CA}$	0	0	6	2	-3	0	2	-3	-6
Tabla II-III										

De la tabla II-III se tiene que:

$$\vec{S}_{C/A} = 2i - 3j - 6k \text{ (metros)}$$

La magnitud será:

$$CA = (4 + 9 + 36)^{.5} = 7 \text{ metros.}$$

Por lo tanto:

$$\cos(\theta_{xAC}) = \frac{2}{7}$$

$$\cos(\theta_{yAC}) = -\frac{3}{7}$$

$$\cos(\theta_{zAC}) = -\frac{6}{7}$$

Las componentes escalares de la fuerza AC de 420N serán:

$$F_{xAC} = \frac{2}{7} * 420 = 120N$$

$$F_{yAC} = -\frac{3}{7} * 420 = -180N$$

$$F_{zAC} = -\frac{6}{7} * 420 = -360N$$

Por lo tanto el vector fuerza AC se puede representar en sus componentes rectangulares:

$$\vec{F}_{CA} = 120i - 180j - 360k \text{ (N.)}$$

Y sabiendo que el brazo de palanca $\vec{r}_{A/o}$ es el mismo para ambas fuerzas, se procederá a calcular el momento respectivo:

$$\vec{M}_{CA/o} = \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_{CA} = (6k) \times (120i - 180j - 360k)$$

$$\vec{M}_{CA/o} = 720j + 1080i \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Finalmente encontramos el vector resultante sumando vectorialmente los dos anteriores resultados:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{BA/o} + \vec{M}_{CA/o} = (720j + 1080i) + (-1800i)$$

$$\vec{M}_R = (-720i + 720j) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se aprovechará este ejemplo para demostrar que la propiedad distributiva en el producto vectorial se cumple (tabla I-IV):

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{AC} + \vec{M}_{AB} = \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_{AC} + \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_{AB} = \vec{r}_{A/o} \times (\vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AB})$$

Demostración:

Se había establecido que

$$\vec{F}_{AC} = 120i - 180j - 360k$$

$$\vec{F}_{AB} = 300j - 720k$$

Si se realiza la suma vectorial de ambas fuerzas se tiene una fuerza única resultante e igual a:

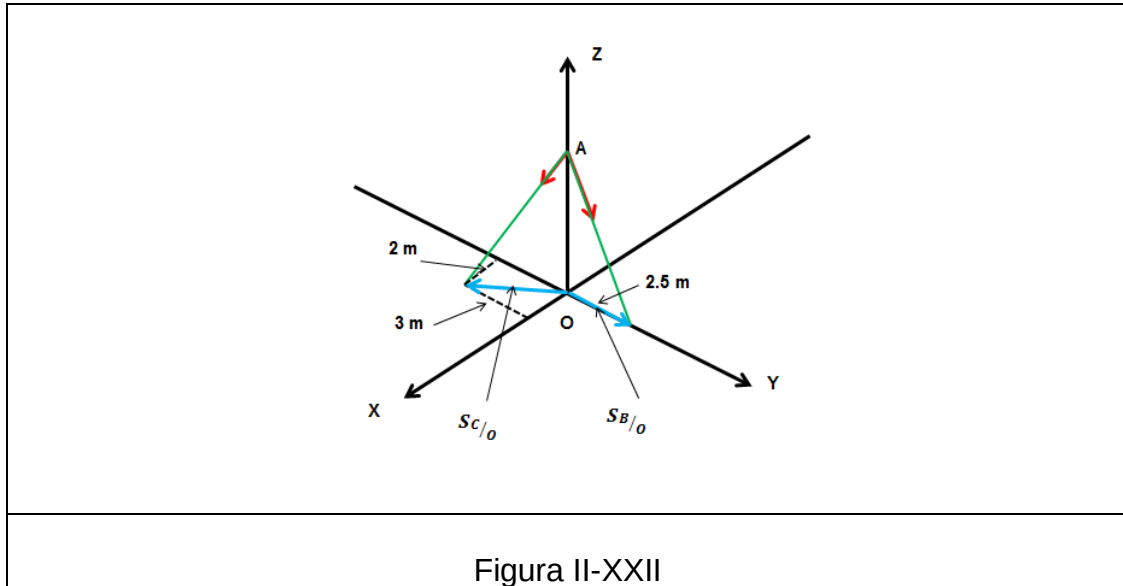
$$\vec{F}_R = 120i + 120j - 1080k$$

El momento resultante sería:

$$\vec{M}_R = \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_R = 6k \times (120i + 120j - 1080k) = (-720i + 720j) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_R = (-720i + 720j) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respecto al mismo problema, ¿sería igual el resultado si cambiamos el vector posición (brazo de palanca) para ambas fuerzas tal y como se ilustra en la figura tal?



Inicialmente el problema pide encontrar el momento resultante de las fuerzas AB y AC con respecto al punto O. se solucionó tomando como vector posición a

$$\vec{r}_{A/O}$$

Y fue el mismo vector posición para ambas fuerzas. Se tratará de probar si el resultado es el mismo si cambias el vector posición para ambas fuerzas como se muestra en la figura II-XXII siendo estos:

$$\vec{r}_{B/O} \text{ en vez de } \vec{r}_{A/O}$$

$$\vec{r}_{B/O} = \vec{s}_B = \vec{r}_B = 2.5j$$

$$\vec{r}_{C/O} \text{ en vez de } \vec{r}_{A/O}$$

$$\vec{r}_{C/O} = \vec{s}_C = \vec{r}_C = 2i - 3j$$

Como ya se tienen las fuerzas AB y AC en su representación vectorial se procederá a calcular los momentos:

$$\vec{M}_{AB} = \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB} = 2.5j \times (300j - 720k) = -1800i$$

$$\overrightarrow{M_{AC}} = \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{F_{AC}} = (2i - 3j) \times (120i - 180j - 360k) = 1080i + 720j$$

El momento resultante será:

$$\overrightarrow{M_R} = \overrightarrow{M_{AB}} + \overrightarrow{M_{AC}} = -1800i + (1080i + 720k) = (-720i + 720j)Nm$$

$$\overrightarrow{M_R} = (-720i + 720j)N \cdot m$$

Con lo anterior queda demostrado que el vector posición entre la línea de acción de una fuerza y el punto donde se desea conocer el momento puede ser seleccionado a discreción.

La anterior demostración se empleará para resolver el problema de Beer et al. (2010), el cual se muestra en la figura II-XXIII:

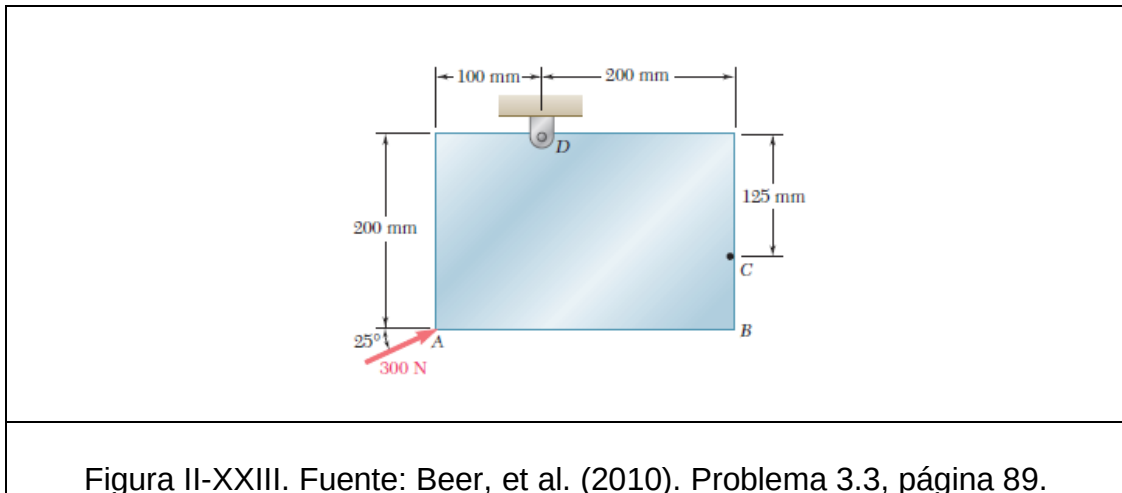


Figura II-XXIII. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 3.3, página 89.

El enunciado de este problema es:

“Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine a) el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D y b) la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento alrededor de D.”

Para resolver el inciso a) de este problema es conveniente visualizar tanto la línea de acción de la fuerza aplicada en el punto A como el vector posición entre el punto D y el punto A, tal como se muestra en la figura II-XXIV:

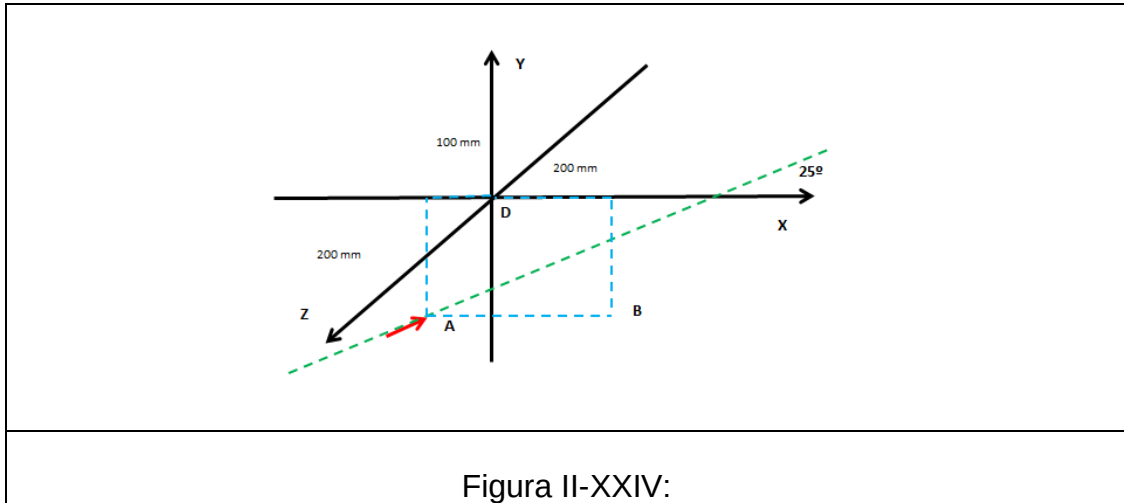


Figura II-XXIV:

En la figura II-XXIV se puede observar que la inclinación de la línea de acción de la fuerza con respecto a la horizontal o eje de las X's es de 25° , por lo anterior lo primero que se hará es encontrar los cosenos directores de dicha fuerza y representarla vectorialmente:

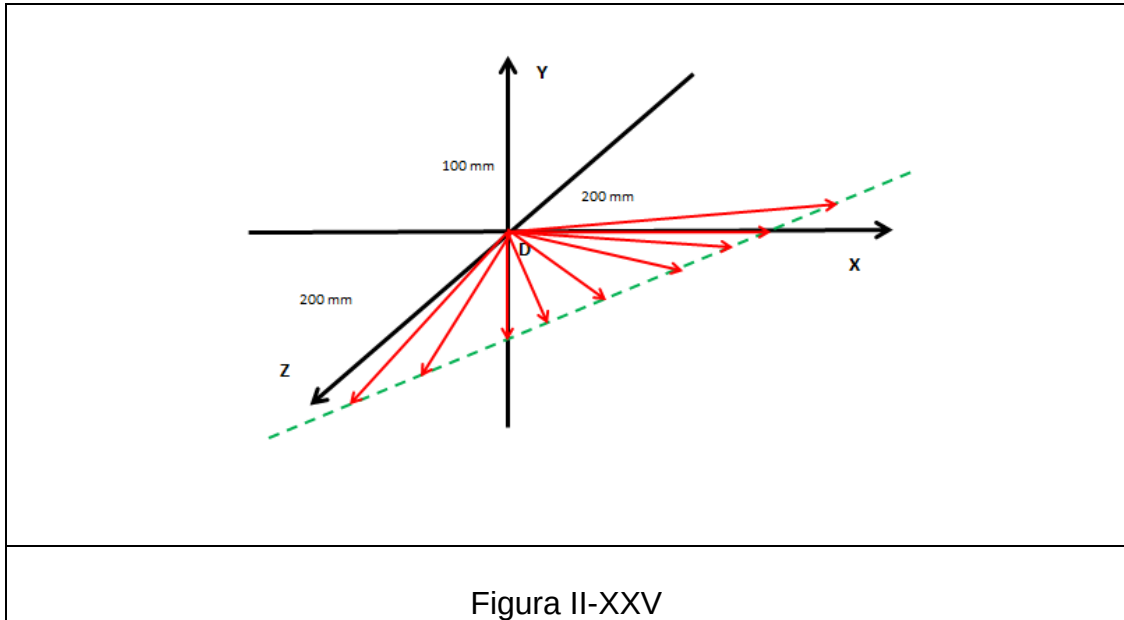
$$\cos \theta_x = \cos 25^\circ = .906$$

$$\cos \theta_y = \cos 65^\circ = .422$$

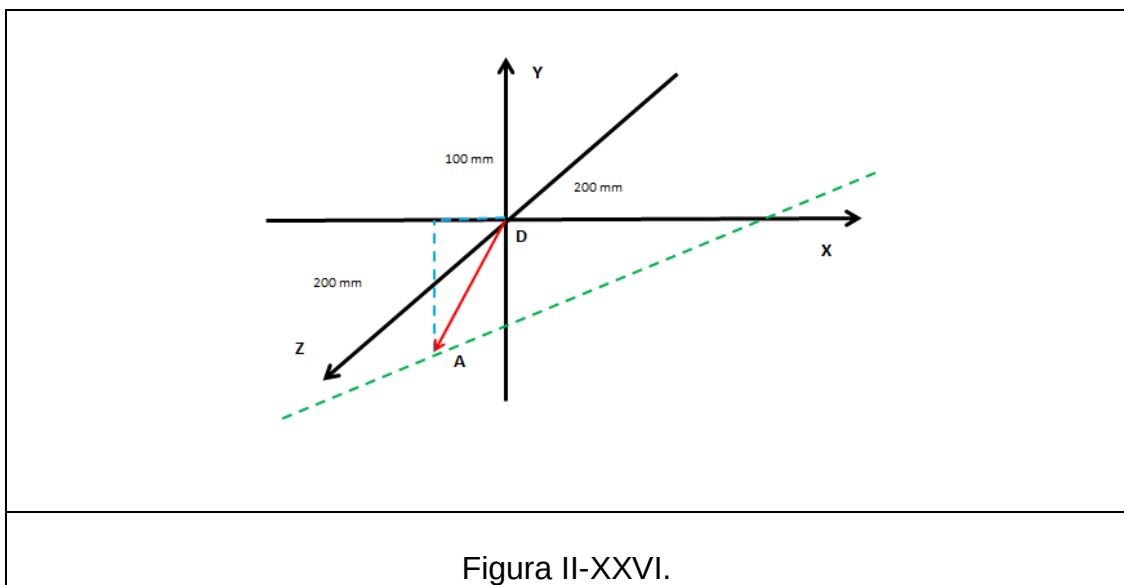
$$F_x = \cos \theta_x * 300N = 271.89N; F_y = \cos \theta_y * 300N = 126.78$$

$$\vec{F}_A = 271.89i + 126.78j$$

Para definir el vector posición del punto D a la línea de acción de la fuerza A en principio podríamos tener una gama de posibilidades tal y como se representa en la figura II-XXV:



De acuerdo a lo ya demostrado en el problema anterior cualquiera de los vectores en rojo trazados del punto D a la línea de acción de la fuerza A podría ser utilizado para solucionar el inciso a) de este problema, pero de acuerdo a los datos que nos da el autor de dicho problema solo una línea tiene los datos suficientes para ser considerada el vector posición para aplicar momentos y es la que se observa en la figura II-XXVI, ya que es el punto en donde se aplica la fuerza. Se trata de hacer fácil lo difícil.



El vector posición DA mostrado en la figura se deberá representar algebraicamente de la siguiente manera:

$$\vec{S}_A = \vec{r}_A = -.1i - .2j; (\text{metros})$$

Por lo tanto el momento de la fuerza A respecto al punto D será:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_A = (-.1i - .2j) \times (271.89i + 126.78j) = 41.7k(Nm)$$

$$\vec{M}_A = 41.7k(N \cdot m)$$

El inciso b) pide que se aplique la mínima fuerza en el punto B para lograr el mismo resultado que en el inciso a) ($41.7k(N \cdot m)$). Para poder encontrar dicha fuerza y partiendo del planteamiento escalar que ya se ha establecido que es el siguiente:

$$M = F * r \sin \theta$$

Se tiene que hacer la siguiente reflexión: cualquier resultado que se obtenga al multiplicar la fuerza por la distancia, será el valor del ángulo teta quien potencialice dicho resultado y el seno de teta es máximo cuando el ángulo vale 90 grados ó 270 grados. De la anterior afirmación se desprende que la línea de acción de la fuerza aplicada en el punto B deberá ser perpendicular al vector posición entre el punto D y el punto B, tal y como se muestra en la figura II-XXVII:

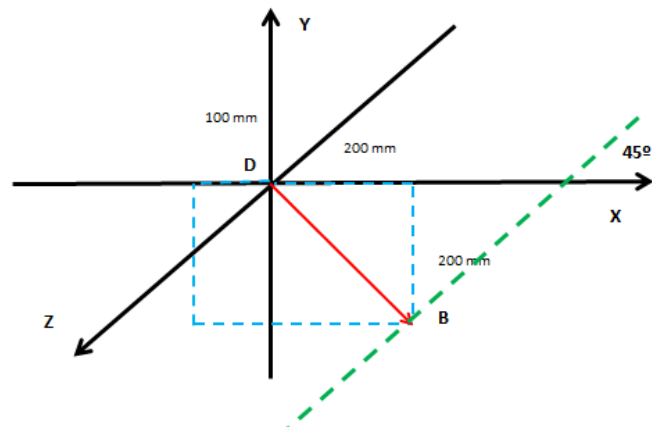


Figura II-XXVII.

Por trigonometría se encuentra que la línea de acción de la fuerza que se deberá aplicar en B tiene un ángulo de 45° con la horizontal, por lo tanto los cosenos directores de dicha fuerza serán;

$$\cos \theta_x = \cos 45^\circ = .707$$

$$\cos \theta_y = \cos 45^\circ = .707$$

Se tendrá entonces:

$$F_{BX} = \cos 45^\circ * F_B = .707 * F_B$$

$$F_{BY} = \cos 45^\circ * F_B = .707 * F_B$$

Vectorialmente la fuerza aplicada en el punto B será:

$$\vec{F}_B = .707F_B i + .707F_B j$$

En la figura II-XXVII se planteó el vector posición entre el punto B y el punto D:

$$\vec{r}_{B/D} = .2i - .2j$$

Dado que se pide el mismo momento del inciso (a), pero con una fuerza, mínima, aplicada en B, y ya explicado que cuando el ángulo entre el vector posición (en este caso: $\vec{r}_{B/D}$) y la línea de acción de la fuerza son perpendiculares entre sí se requerirá una fuerza mínima para lograr el mismo momento del inciso (a), podemos expresar lo siguiente:

$$41.7k(Nm) = \vec{r}_{B/D} \times \vec{F}_B$$

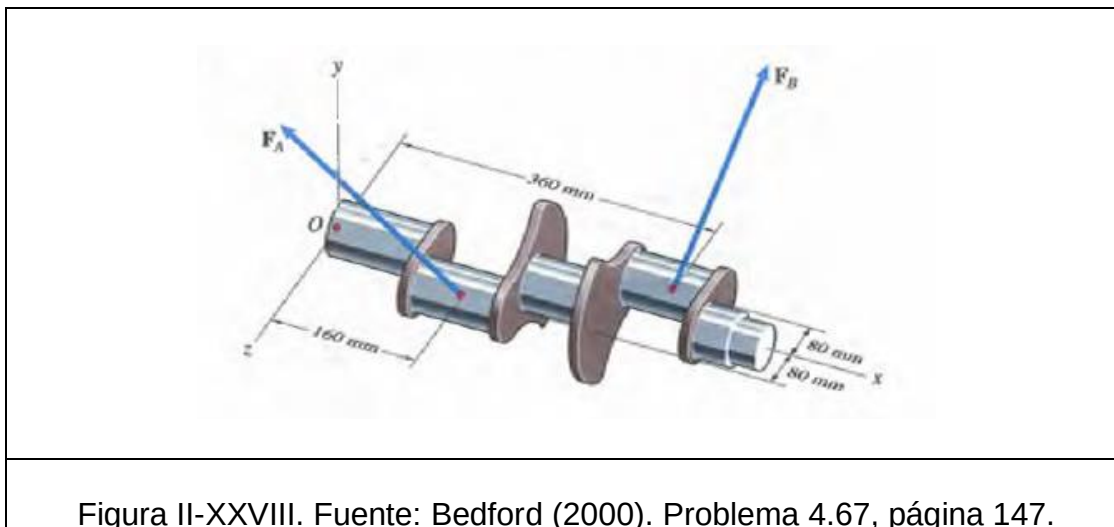
$$41.7k = (.2i - .2j) \times (.707F_B i + .707F_B j)$$

$$41.7k = .2828F_B k$$

Por lo tanto:

$$F_B = 147.45 \text{ N}$$

El siguiente problema es un problema propuesto del texto de Bedford y Fowler, (1996), (figura II-XXVIII):



El enunciado de este problema es el siguiente:

“Las bielas ejercen dos fuerzas sobre el cigüeñal. Los cosenos directores de F_A son:

$$\cos\theta_x = -.182,$$

$$\cos\theta_y = .818$$

$$\cos\theta_z = .545$$

Y su magnitud es de 4 kN. Los cosenos directores de F_B son:

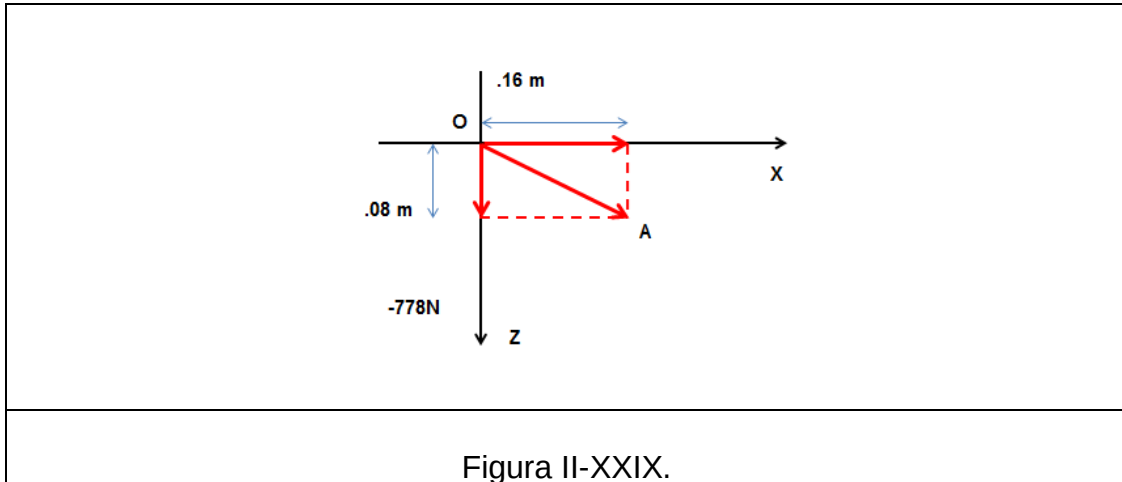
$$\cos\theta_x = .182,$$

$$\cos\theta_y = .818$$

$$\cos\theta_z = -.545$$

Y su magnitud es de 2 kN. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto a O debidos a las dos fuerzas?”

Nos enfocaremos primeramente en el punto de la biela que de acuerdo a la figura II-XXVIII intercepta la línea de acción de la fuerza A. En la figura II-XXIX se muestra dicho punto el cual se ubica en el plano XZ y se le identificara como punto A.



Por lo tanto el vector posición entre el punto A y el origen es:

$$\overrightarrow{r_{A/0}} = \overrightarrow{r_A} = .16i + .08k$$

En el problema a resolver se indican de la fuerza A de 4KN sus cosenos directores:

$$\cos \theta_{xA} = -.182; \cos \theta_{yA} = .818; \cos \theta_{zA} = .545$$

Entonces las componentes escalares de la fuerza A son:

$$F_{xA} = -.182 * 4KN = -728N;$$

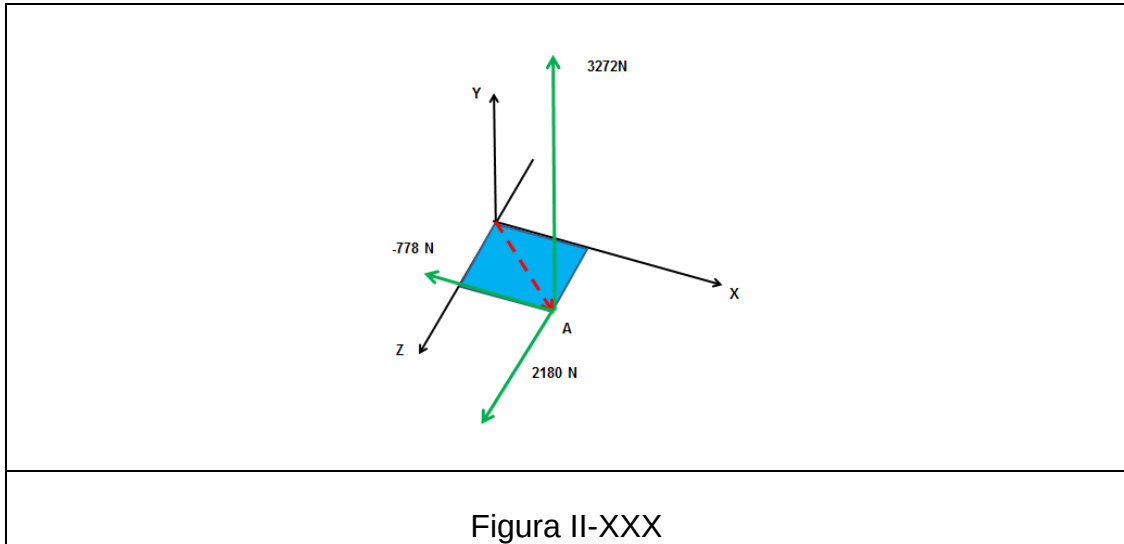
$$F_{yA} = .818 * 4KN = 3272N;$$

$$F_{zA} = .545 * 4KN = 2180N$$

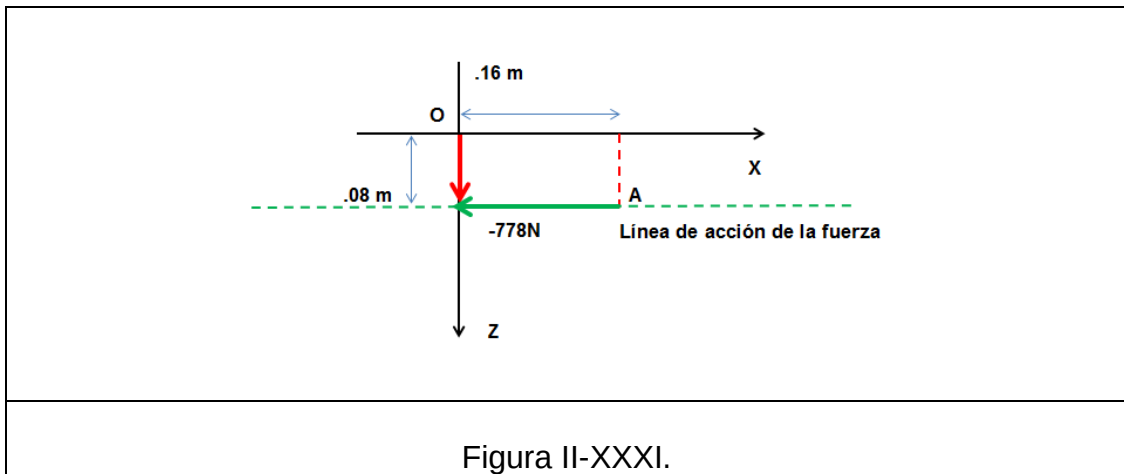
Dicha fuerza A quedará representada vectorialmente con la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{F_A} = -778i + 3272j + 2180k$$

En la figura II-XXX se hace una representación de la anterior expresión vectorial:



Se calculará el momento de cada componente rectangular de la fuerza A con respecto al origen O del sistema



El momento de la componente de la fuerza A en dirección X es (figura II-XXXI):

$$\overrightarrow{M_{Ax}} = (.08k)X(-778i) = -\mathbf{62.24j}$$

El momento de la componente de la fuerza A en dirección Y es (figura II-XXXII):

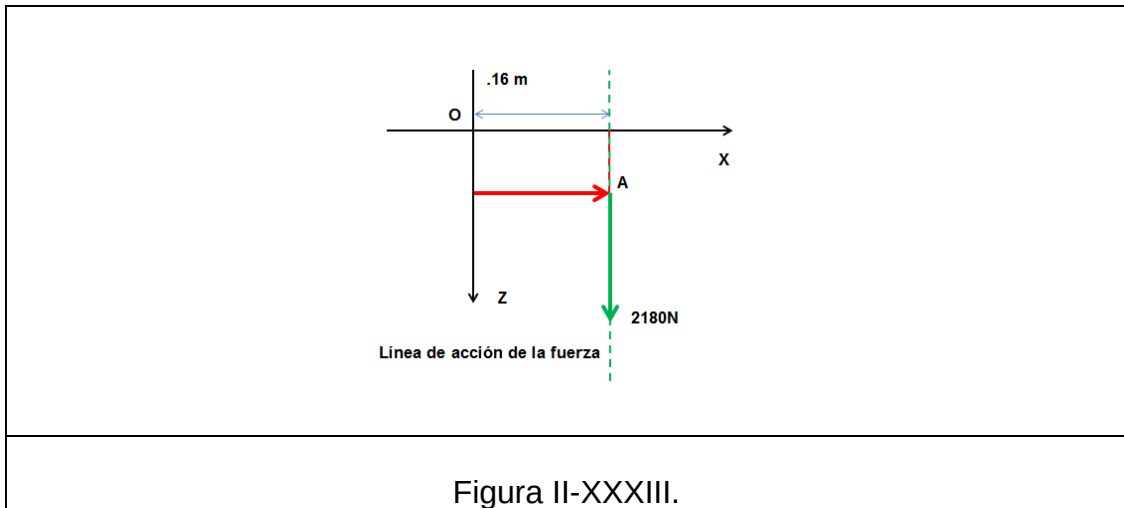
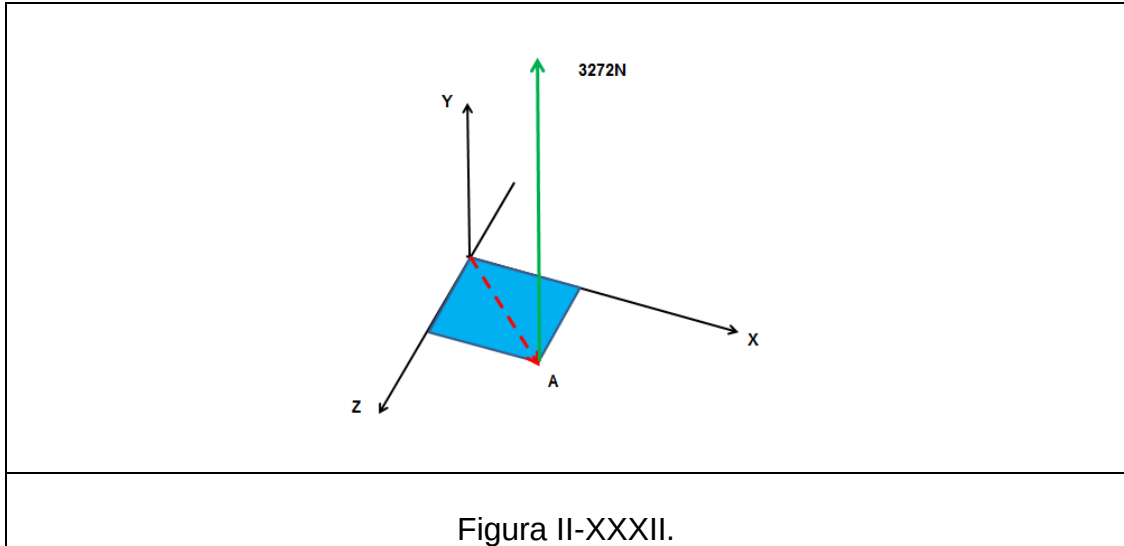
$$\overrightarrow{M_{AY}} = (.16i + .08k)X(3272j) = -\mathbf{261.7i} + \mathbf{523.52k}$$

El momento de la componente de la fuerza A en dirección Z es (figura II-XXXIII):

$$\overrightarrow{M_{AZ}} = (.16i) \times (2180k) = -\mathbf{348.8j}$$

Por lo tanto el momento resultante de la fuerza en A será:

$$\overrightarrow{M_A} = -261.7i - 411.2j + 523.52k, (N \cdot m)$$



El momento de la fuerza B se encontrará resumiendo todo lo anterior a solo al vector posición de OB y a las componentes rectangulares de la fuerza B para poder efectuar el producto cruz entre ambos vectores:

$$\overrightarrow{r_{B/0}} = \overrightarrow{r_B} = .36i - .08k$$

$$\overrightarrow{F_B} = 364i + 1636j - 1090k$$

$$\overrightarrow{M_B} = (.36i - .08k) \times (364i + 1636j - 1090k)$$

$$\overrightarrow{M_B} = 130.88i + 363.28j + 588.96k, (N \cdot m)$$

El resultado del momento de las fuerzas A y B respecto al punto O seria de:

$$\overrightarrow{M_R} = -130.82i - 47.9j - 1112.48k, (N \cdot m)$$

2.2.2. Momento de una fuerza respecto a un eje.

Antes de entrar en materia se repasará el concepto de producto punto o producto escalar:

El producto escalar de dos vectores es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí sus líneas de acción (dirección): (II-e)

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = V_1 * V_2 * \cos \theta \quad (II-3)$$

Destacando que el resultado de lo anterior es un escalar; solo se obtendrá una magnitud. Matemáticamente y en función de los vectores unitarios y recordando que el coseno de 90° es igual a cero se tiene los siguientes cálculos reflejados en la Tabla II-IV:

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i> · <i>i</i> = 1	<i>j</i> · <i>i</i> = 0	<i>k</i> · <i>i</i> = 0
<i>i</i> · <i>j</i> = 0	<i>j</i> · <i>j</i> = 1	<i>k</i> · <i>j</i> = 0
<i>i</i> · <i>k</i> = 0	<i>j</i> · <i>k</i> = 0	<i>k</i> · <i>k</i> = 1
Tabla: II-IV.		

Se podrá observar que para poder hacer la operación se requiere que ambos vectores estén expresados en función de sus componentes rectangulares *x, y, z*:

$$\vec{V}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

$$\vec{V}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

Asimismo, el establecer la magnitud de cada vector:

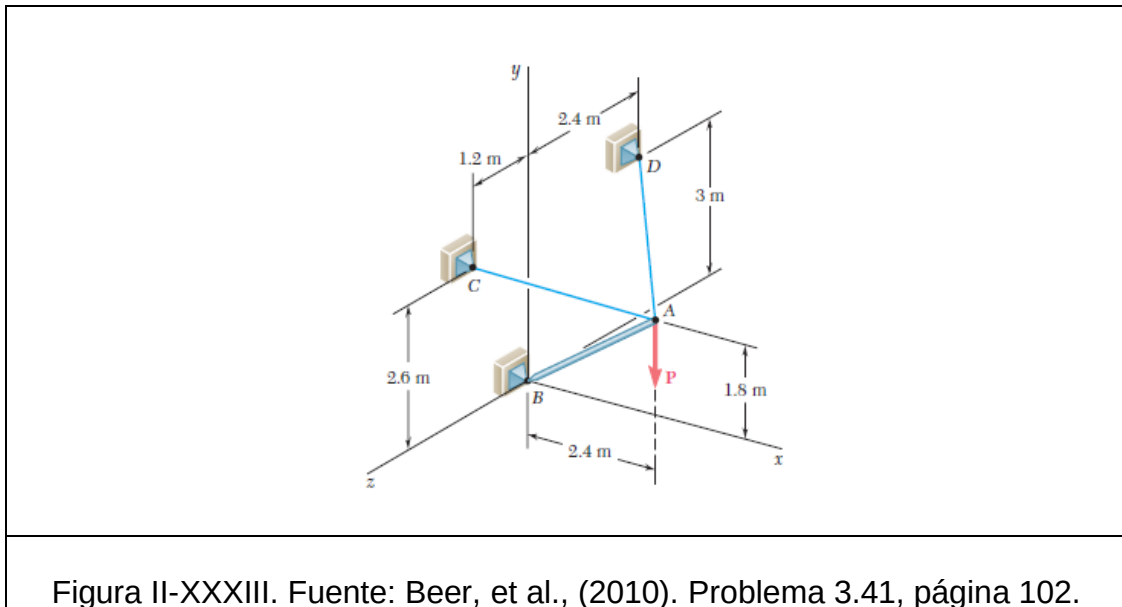
$$V_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$$

$$V_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}$$

Y basándose en la definición de cosenos directores, se podrá hacer el siguiente planeamiento:

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1 * V_2}$$

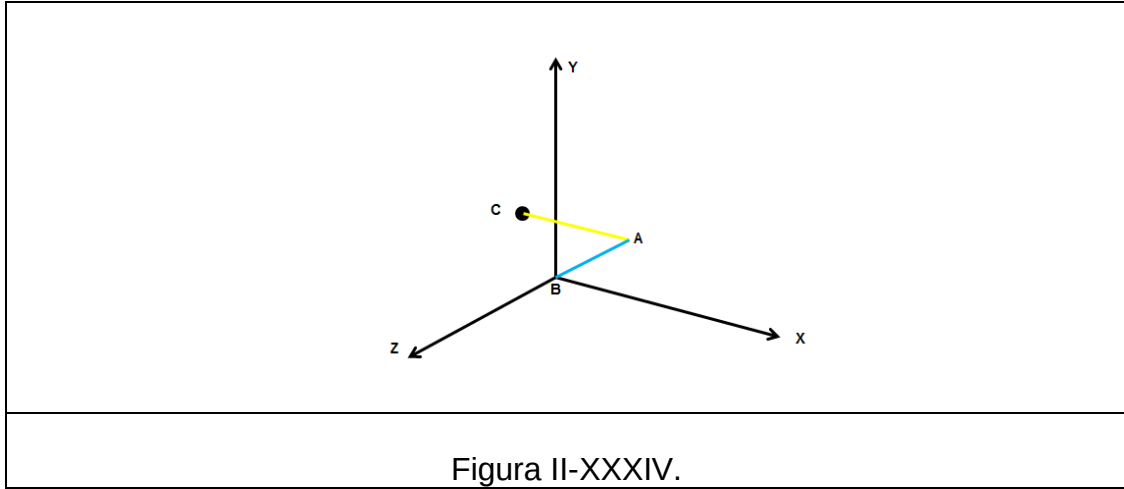
Para ejemplificar lo anterior se resolverá el siguiente problema correspondiente al texto de Beer et al., (2010) y que se muestra en la figura II-XXXIII:



El enunciado de este problema es:

“Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 1 260 N, determine a) el ángulo entre el cable AC y el aguilón AB, b) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A.”

En la figura II-XXXIV se muestra una representación vectorial de dicho problema:



Se podrá observar de dicha figura que el vector posición $s_{A/B}$ (línea azul) solo está comprendido en el plano x, y. Asimismo la ubicación de los dos puntos que se requieren para identificar la línea de acción de la fuerza (línea amarilla) hacen que dicha fuerza este comprendida en el espacio como se verá más adelante.

Iniciaremos la solución del primer inciso replanteando la ecuación:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 * V_2 * \cos \theta \quad (\text{II-3})$$

Ya que la igualdad de la anterior ecuación no será violentada y por así ser conveniente se hace el siguiente planeamiento:

$$E = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

Esto es, se obtendrá un escalar y en este caso se le identificará con la letra E . Otra manera de calcular dicho escalar, como ya se ha definido, es conociendo la magnitud de los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ así como el coseno del ángulo entre ambos vectores:

$$E = V_1 * V_2 * \cos \theta$$

El vector $\vec{V}_1$ será de acuerdo a la figura II-XXXIII el vector posición $\vec{s}_{A/B}$:

$$\vec{s}_{A/B} = 2.4i + 1.8j, (m)$$

Cuya magnitud será

$$s_{A/B} = (2.4^2 + 1.8^2)^{.5} = 3 \text{ metros}$$

El $\vec{V}_2$ será el vector fuerza representado por sus componentes rectangulares. Para lo anterior se requiere de sus cosenos directores. En la tabla II-V se muestra la información pertinente para hacer los respectivos cálculos.

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{AC}$	2.4	1.8	0	0	2.6	1.2	-2.4	.8	1.2
Tabla II-V										

La magnitud del vector $\vec{AC}$ será:

$$AC = (2.4^2 + .8^2 + 1.2^2)^{.5} = 2.8 \text{ metros}$$

Por lo tanto los cosenos directores de la fuerza de 1260 N. serán:

$$\cos \theta_x = -\frac{2.4}{2.8}; \cos \theta_y = \frac{.8}{2.8}; \cos \theta_z = \frac{1.2}{2.8}$$

Finalmente:

$$\vec{V}_2 = T_{AC}(\cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k)$$

$$\vec{V}_2 = -1080i + 360j + 540k$$

Del anterior planteamiento:

$$E = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

Y despejando y recordando que la magnitud de cualquier vector será siempre igual o mayor a cero:

$$E = (2.4i + 1.8j) \cdot (-1080i + 360j + 540k) = \text{abs}(-1944) = 1944 \text{ N.m}$$

$$E = V_1 * V_2 * \cos \theta$$

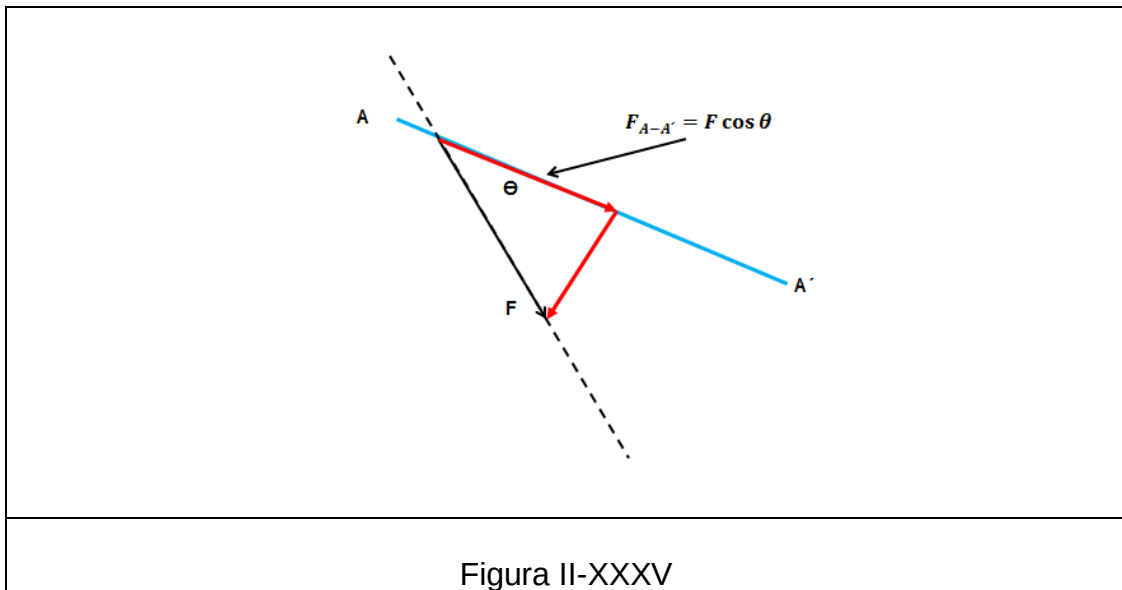
$$\cos \theta = \frac{E}{V_1 * V_2}; \theta = \cos^{-1} \frac{1944}{1260 * 3} = 59.05^\circ$$

$$\theta = 59.05^\circ$$

Que será el valor buscado en el inciso a).

Inciso b) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A:

En la figura II-XXXV con un vector de color negro se representa al vector fuerza que tensa al cable AC de la figura II-XXXIII y cuya magnitud es de 1260 N. En la misma figura II-XXXV una recta A – A' de color azul se representa la línea AB de la figura II-XXXIII



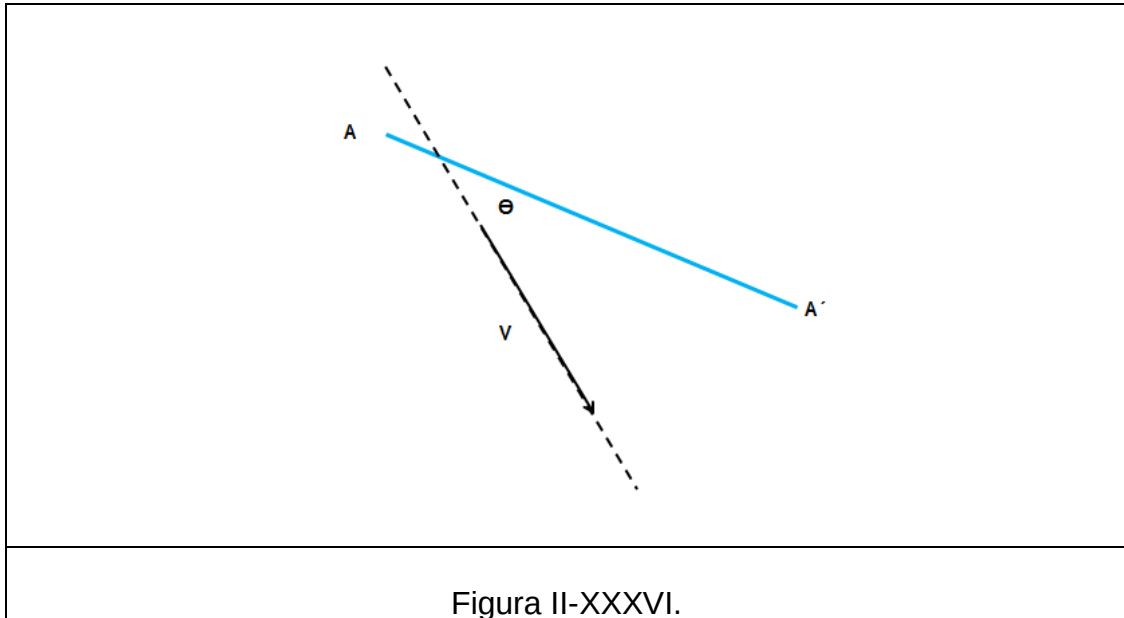
Ya habiendo, en el inciso a), encontrado el ángulo θ que forman dichas líneas de la figura II-XXXV, podemos resolver el inciso b):

$$F_{A-A'} = F \cos \theta = T_{AC} * \cos(59.05)$$

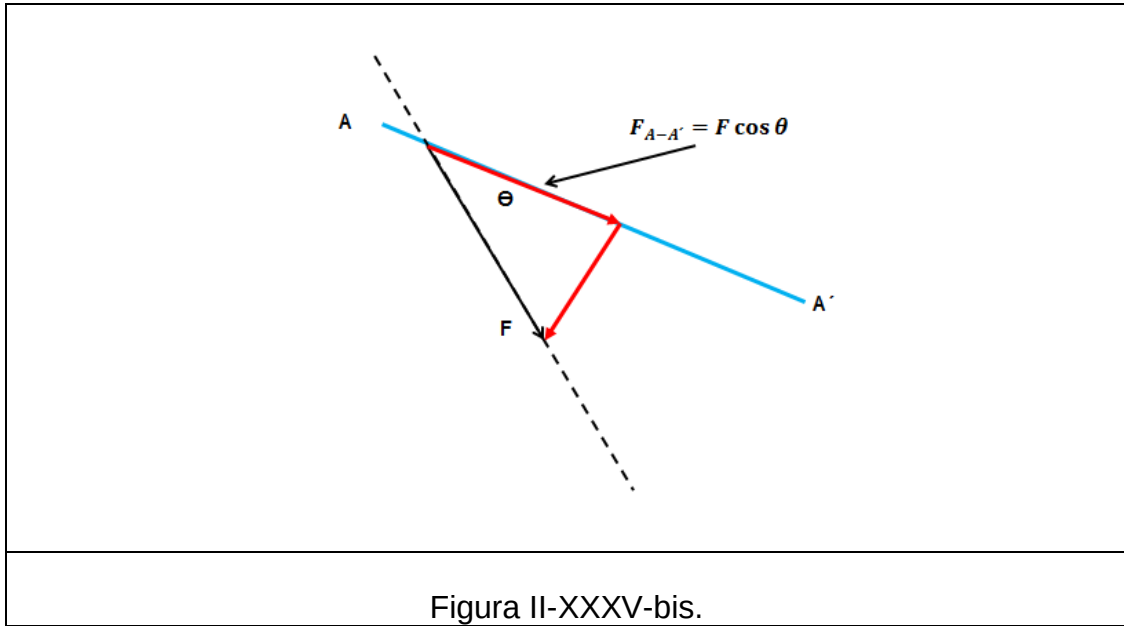
$$\text{Proyección AB} = 1260 * \cos(59.05) = 648 \text{ N}$$

$$\text{Proyección AB} = 648 \text{ N}$$

Respecto al inciso b) se hará la siguiente ampliación: Es posible descomponer un vector en sus componentes paralela y normal con respecto a una línea dada si se conoce el ángulo que hay entre la línea de acción de dicho vector y la línea dada, tal y como los que se muestran en la figura II-XXXVI: un vector V (segmento de color azul) y una línea $A - A'$ (línea de color azul). Cuando se encuentra la componente del vector V que es paralela a la línea $A - A'$ se conoce como proyección de un vector respecto a una línea dada.



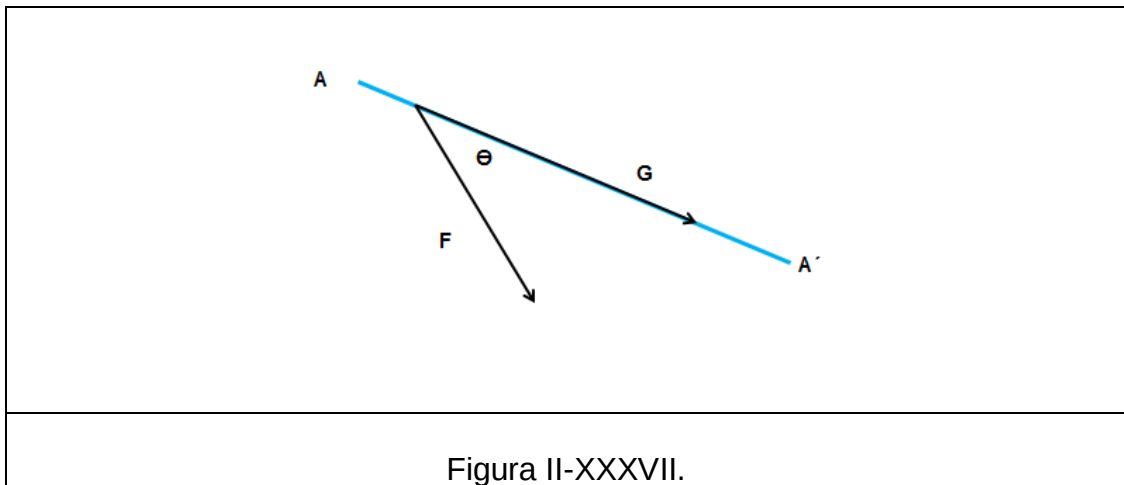
Supongamos que el vector V de la figura II-XXXVI es un vector fuerza y si aplicamos el principio de transmisibilidad al vector V de tal manera que intersecte la línea $A - A'$ de la misma figura II-XXXV podrá quedar de acuerdo a la figura II-XXXV-bis.



La proyección del vector F sobre la línea $A - A'$ sería:

$$F_{A-A'} = F \cos \theta$$

Por otro lado si dirigimos un vector G que sea colineal con $A - A'$ y con su mismo sentido tendremos lo que se muestra en la figura II-XXXVII



Si se plantea el siguiente producto escalar con los vectores F y G de la figura II-XXXVII tendremos lo siguiente:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = FG \cos \theta$$

Que será lo mismo que:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = (F \cos \theta) * G$$

Y de la figura II-XXXV y II-XXXV-bis se plantea que:

$$F_{A-A'} = F \cos \theta$$

Por lo tanto y sin violentar alguna igualdad se llega a:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = F_{A-A'} * G$$

Despejando $F_{A-A'}$:

$$F_{A-A'} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{G}$$

Aplicando los criterios para el producto punto establecidos en la tabla II-IV se tiene que:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = F_X G_X + F_Y G_Y + F_Z G_Z$$

Llegando finalmente a (como la magnitud del producto escalar siempre es mayor a cero, se expresará en términos absolutos):

$$F_{A-A'} = \frac{ABS(F_X G_X + F_Y G_Y + F_Z G_Z)}{G}$$

Para este problema sabemos que:

$$\vec{F} = 1080i + 360j + 540k, (N); \vec{G} = 2.4i + 1.8j, (m) \text{ y } G = 3 \text{ metros}$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = (-1080i + 360j + 540k) \cdot (2.4i + 1.8j) = 1944 N \cdot m$$

$$F_{A-A'} = \frac{1944 N \cdot m}{3 m} = 648 N.$$

Valor que ya habíamos encontrado.

Continuando con la explicación del concepto de *Momento de una fuerza respecto a un eje*, y en aras de hacer sencilla dicha explicación, se analizará la

siguiente situación en donde una fuerza realiza un par torsional tal como se muestra en la figura II-XXXVIII:

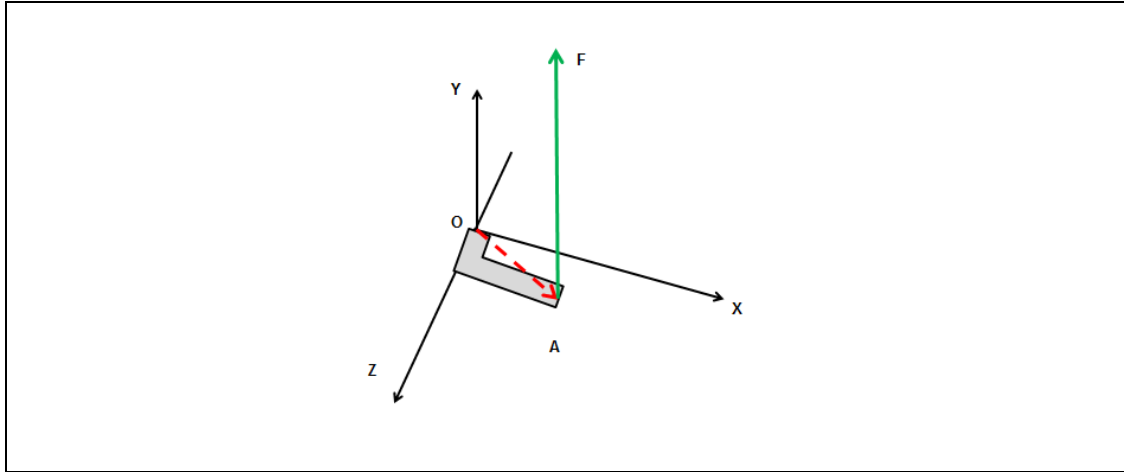


Figura II-XXXVIII.

Dicha figura II-XXXVIII es la representación esquemática de una llave L para desenroscar una tuerca ubicada en el origen O . La distancia o vector posición $S_{A/O}$ entre la tuerca u origen O y la línea de acción de la fuerza F tiene componentes rectangulares en el plano conformado por los ejes cartesianos $X - Y$, y para cuando la tuerca empiece a desenroscarse y por el mismo diseño del elemento en donde se encuentra enroscada, la tuerca solamente se podrá dirigir sobre el eje que es perpendicular al plano $X - Y$; el eje Z . Ahora que ya se sabe la dirección que tomará la tuerca al estar siendo desenroscada, lo relevante será determinar la magnitud del vector momento que provoca que la tuerca se desenrosque en dicha dirección Z , y el cual se define como momento de una fuerza con respecto a un eje, la ecuación que expresa lo anterior es una ecuación escalar producto de tres vectores:

$$M_{eje} = \overrightarrow{\lambda_{eje}} \cdot ((r_x i + r_y j + r_z k) \times (F_x i + F_y j + F_z k)) \quad (II-4)$$

Que es lo mismo que:

$$M_{eje} = \overrightarrow{\lambda_{eje}} \cdot \overrightarrow{M_R}$$

Líneas arriba se definió:

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = FG \cos \theta$$

Por lo tanto también se podrá escribir:

$$\overrightarrow{\lambda_{eje}} \cdot \overrightarrow{M_R} = \lambda_{eje} M_R \cos \theta$$

$$M_{eje} = \lambda_{eje} M_R \cos \theta$$

Asimismo el término $\vec{\lambda}$ también se podrá expresar en función de sus componentes vectoriales unitarios

$$\vec{\lambda} = \frac{x}{\lambda}i + \frac{y}{\lambda}j + \frac{z}{\lambda}k$$

Sin olvidar que la magnitud del vector unitario λ en el espacio se puede expresar en función de la magnitud de sus componentes rectangulares:

$$\lambda = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

El término:

$$(r_x i + r_y j + r_z k)X(F_x i + F_y j + F_z k)$$

Resulta en un vector, por eso también se le conoce al momento de una fuerza respecto a un eje como el triple producto escalar.

Aplicaremos lo anterior expuesto iniciando con el siguiente problema propuesto del texto de Beer et al (2010), el cual se muestra en la figura II-XXXIX

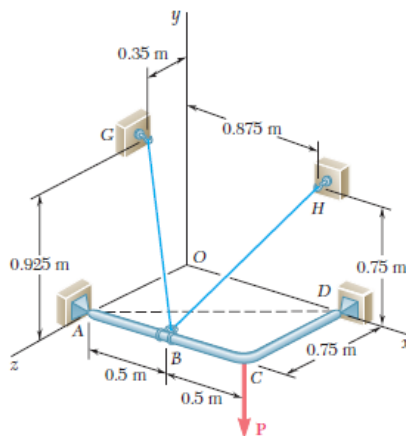


Figura II-XXXIX. Fuente Beer, et al., (2010). Problema 3.55, página 104.

El enunciado de este problema propuesto es:

“El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene por medio de un cable, el cual pasa a través de un anillo en B y está unido a los ganchos en G y H. Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.”

En la figura II-XL se representan tanto la diagonal AD, el brazo de palanca y la fuerza de 450 N

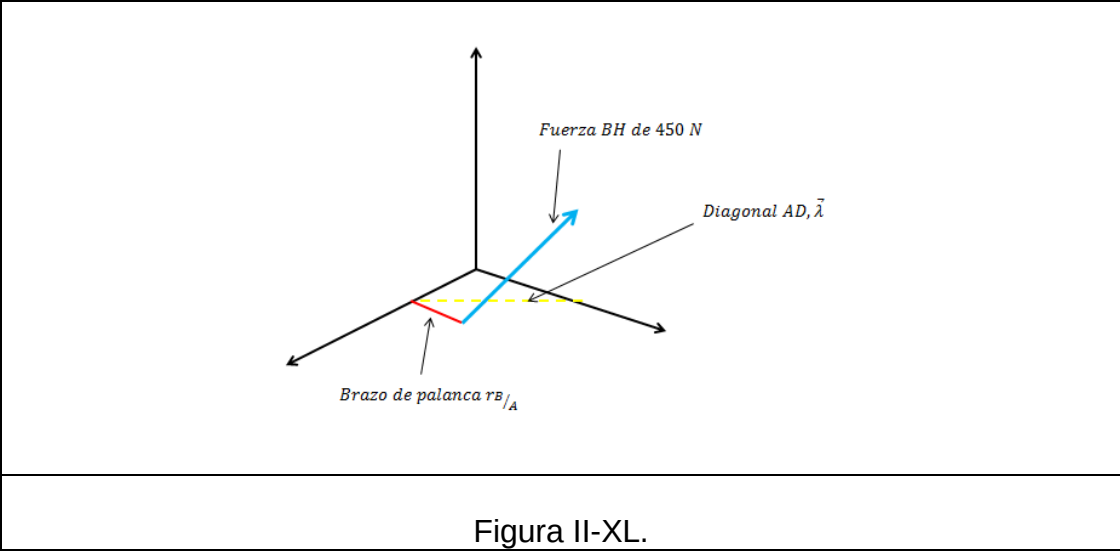


Figura II-XL.

Para encontrar la respuesta a dicho problema se utilizara la ecuación la ecuación II-4:

$$M_{eje} = \vec{\lambda} \cdot ((r_x i + r_y j + r_z k) \times (F_x i + F_y j + F_z k))$$

Se definirá primeramente el vector posición $\vec{\lambda}_{D/A}$, y el cual se lee: “vector posición lambda de D con respecto a A”, y que será la diagonal con la cual se hará el momento. Para lo anterior se harán los siguientes cálculos de acuerdo a los datos del problema y los cuales se presentan en la tabla II-VI:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{\lambda}_{D/A}$	0	0	.75	1	0	0	1	0	-.75

Tabla II-VI

Por lo tanto la magnitud de λ será:

$$\lambda = \sqrt{1 + .75^2} = 1.25 \text{ metros}$$

Así se expresará dicha diagonal AD, el cual es un vector unitario:

$$\vec{\lambda}_{D/A} = \frac{1}{1.25}i - \frac{.75}{1.25}j$$

Ahora se harán los cálculos para representar en el espacio el vector posición $r_{B/A}$, cuyos datos se muestran en la tabla II-VII:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{r}_{B/A}$	0	0	.75	.5	0	.75	.5	0	0
Tabla II-VII.										

Por lo tanto se obtiene que:

$$\vec{r}_{B/A} = .5i \text{ metros}$$

Finalmente y con la ubicación en el espacio de los puntos H y B plantearemos la fuerza de 450 N en función de sus componentes rectangulares con la ayuda de la información de la tabla II-VIII:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{S}_{H/B}$	.5	0	.75	.875	.75	0	.375	.75	-.75
Tabla II-VIII.										

La magnitud de dicho vector posición es:

$$S_{H/B} = \sqrt{.375^2 + .75^2 + .75^2} = 1.125 \text{ metros}$$

De lo anterior los cosenos directores de la fuerza HB serán

$$\cos \theta_x = \frac{.375}{1.125}; \cos \theta_y = \frac{.75}{1.125}; \cos \theta_z = -\frac{.75}{1.125}$$

Y la fuerza vector quedará expresada en función de los vectores unitarios i, j, k :

$$\vec{F}_{HB} = 150i + 300j - 300k$$

El momento de dicha fuerza respecto al punto A es:

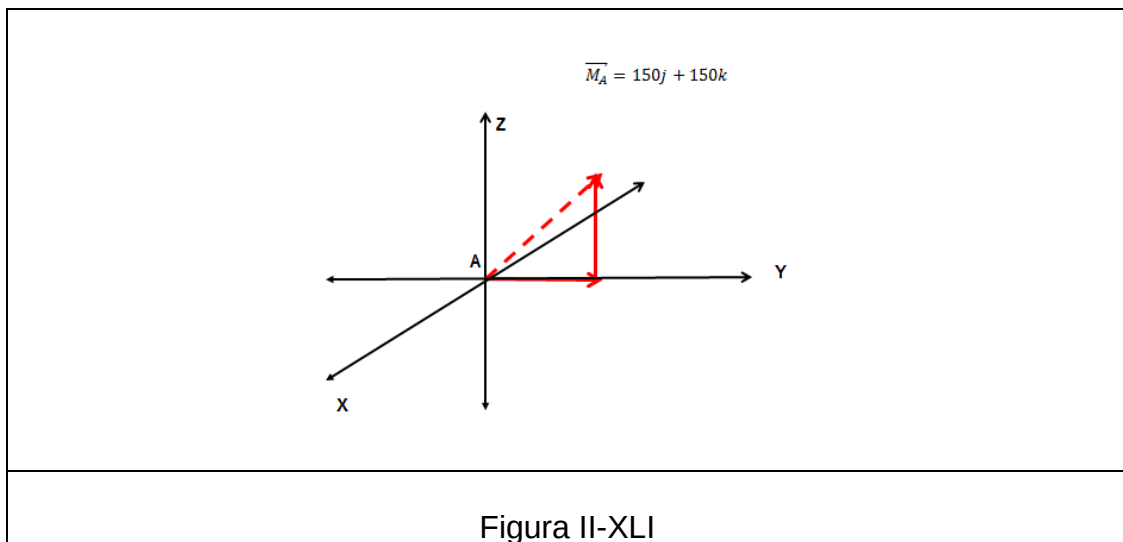
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_{HB} = .5i \times (150i + 300j - 300k) = 150j + 150k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Y el momento con respecto a la diagonal AD:

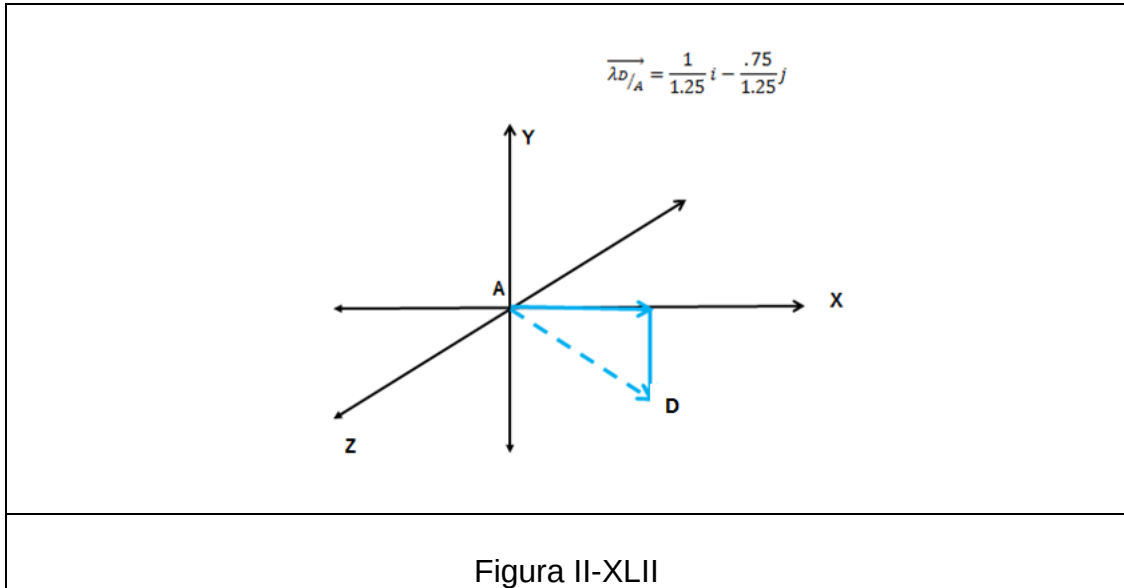
$$M_{AD} = \vec{\lambda}_{D/A} \cdot \vec{M}_A = \left(\frac{1}{1.25}i - \frac{.75}{1.25}j \right) \cdot (150j + 150k) = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{AD} = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

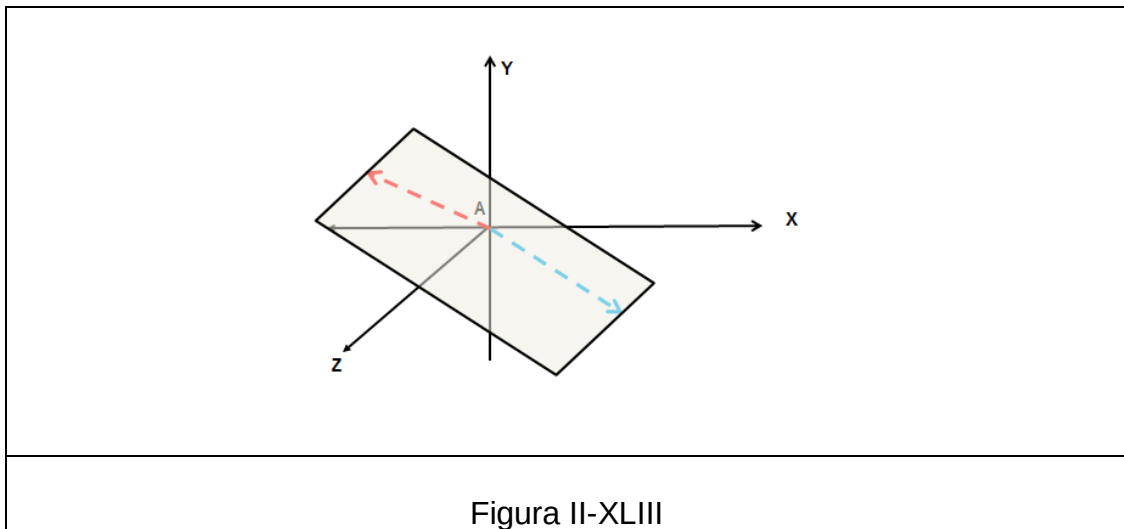
El resultado representa el valor del escalar y siempre será mayor o igual a cero, el signo de menos nos da la información entre el ángulo del vector momento y la diagonal involucrada. Con las figuras II-XLI y II-XLII, respectivamente se trata de hacer una representación para explicar lo anterior:



En la figura II-XLI se muestra el vector momento representado en sus componentes rectangulares en dirección Y, Z respectivamente. Se podrá observar que dichas componentes están contenidas en el primer cuadrante; ambas son positivas.



En cambio, en la figura II-XLII, el vector unitario $\overrightarrow{\lambda_{D/A}}$ y el cual está orientado sobre la línea de acción AD tiene una de sus dos componentes sentido negativo. Si construimos el plano que contiene tanto al vector momento como al vector $\overrightarrow{\lambda_{D/A}}$ se obtendría algo parecido a lo que se tiene en la figura II-XLIII



Y recordando que se puede hacer el siguiente planteamiento:

$$\overrightarrow{\lambda_{D/A}} \cdot \vec{M}_A = \lambda_{D/A} M_A \cos \theta$$

Despejando:

$$\overrightarrow{\lambda_{D/A}} \cdot \overrightarrow{M_A} = -90 \text{ Nm}$$

$$M_A = \sqrt{150^2 + 150^2} = 212.32 \text{ Nm}; \lambda_{D/A} = 1$$

$$\theta = \cos^{-1} -\frac{90}{212.32} = 115.1^\circ$$

Lo que demuestra que el ángulo que forman dichos vectores ($\overrightarrow{\lambda_{D/A}}$ y $\overrightarrow{M_A}$) estaría en el segundo cuadrante del plano que se forma y que está representado en dicha figura (II-XLIII).

Continuando con la aplicación de los conceptos explicados en este subtema, utilizaremos el siguiente problema propuesto del texto de Bedford (2000) y el cual se muestra en la figura II-XLIV:

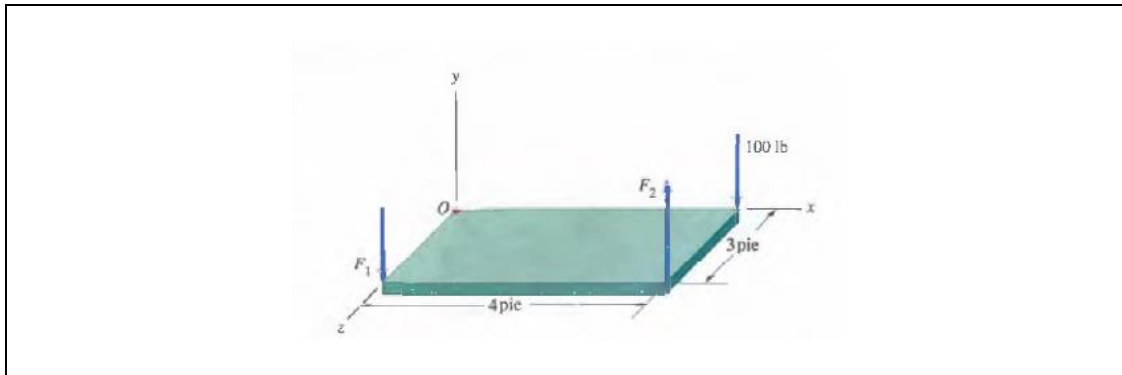


Figura II-XLIV. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 4.74, página 155.

El enunciado del problema de la figura II-XLIV es el siguiente:

“Tres fuerzas paralelas al eje y mostrado actúan sobre la placa rectangular. La suma vectorial de las fuerzas es igual a cero, y la magnitud de la suma de los momentos de las fuerzas respecto a O es de 600 lb pie. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto al eje x ?

En la figura II-XLV se visualizan tanto los vectores posición (líneas rojas) del punto O hacia la línea de acción de cada fuerza (líneas verdes) como el vector $\overrightarrow{\lambda_{O-X}}$ (líneas amarilla), el cual está orientado en la diagonal $O - X$.

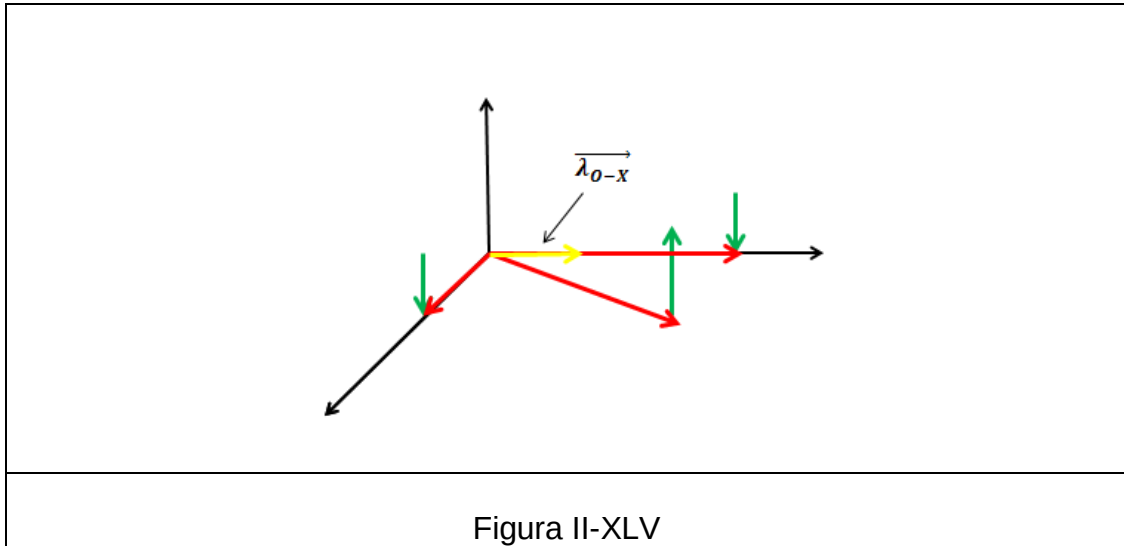


Figura II-XLV

En este problema se tienen como incógnitas el valor de las fuerzas uno y dos, más no así su dirección y sentido. De la tercera fuerza se dan como datos tanto su magnitud, como dirección y sentido, de lo anterior podemos plantear la siguiente primera ecuación:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

Haciendo una sustitución y despejando una de las fuerzas desconocidas podemos obtener lo siguiente:

$$F_1 = -F_2 + 100 \text{ (libras)}$$

Por otro lado se sabe la magnitud del momento resultante, más no sus componentes rectangulares. Para poder conocer dichas componentes se puede hacer el siguiente planteamiento:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{1/0} \times \vec{F}_1 = 3k \times F_1 j = -3F_1 i$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_{2/0} \times \vec{F}_2 = (4i + 3k) \times F_2 j = -3F_2 i + 4F_2 k$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_{3/0} \times \vec{F}_3 = 4i \times 100j = -400k$$

De acuerdo al enunciado del problema el vector momento resultante de las tres fuerzas, en cuanto a su magnitud, es de 600 lb pies, vectorialmente se puede plantear de la siguiente manera:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

$$\overrightarrow{M_R} = -3F_1i + (-3F_2i + 4F_2k) - 400k$$

Agrupando términos:

$$\overrightarrow{M_R} = (-3F_1 - 3F_2)i + (4F_2 - 400)k$$

Recordando que $F_1 = -F_2 + 100$; tenemos que:

$$\overrightarrow{M_R} = (+3F_2 - 300 - 3F_2)i + (4F_2 - 400)k$$

$$\overrightarrow{M_R} = -300i + (4F_2 - 400)k$$

Se sabe por cosenos directores que:

$$\cos \theta_x = \frac{M_x}{M_R}; \theta = \cos^{-1} - \frac{300}{600} = 120^\circ$$

Respecto al $\cos \theta_z$ se ha demostrado que respecto a los cosenos directores de cualquier vector se tiene que:

$$\cos \theta_x^2 + \cos \theta_y^2 + \cos \theta_z^2 = 1$$

En este problema en particular el $\cos \theta_y = 0$, por lo tanto:

$$\theta_z = \cos^{-1} \sqrt{1 - \cos^2 120^\circ} = 30^\circ$$

Resumiendo respecto a los cosenos directores del vector momento se obtiene:

$$\cos \theta_x = .5; \cos \theta_z = .866$$

Por lo tanto:

$$M_x = M_R \cos \theta_x = 600 * \cos 120 = -300 \text{ lb} - \text{pie}$$

$$M_z = M_R \cos \theta_z = 600 * \cos 30 = 519.61 \text{ lb} - \text{pie}$$

Finalmente podemos expresar el momento resultante de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{M_R} = -300i + 519.61j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

Ya que el enunciado del problema pide el valor de la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto al eje x que es lo mismo que:

$$M_{eje} = \overrightarrow{\lambda_{O-X}} \cdot \overrightarrow{M_R}$$

$$M_{eje} = i \cdot (-300i + 519.61j) = -300 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

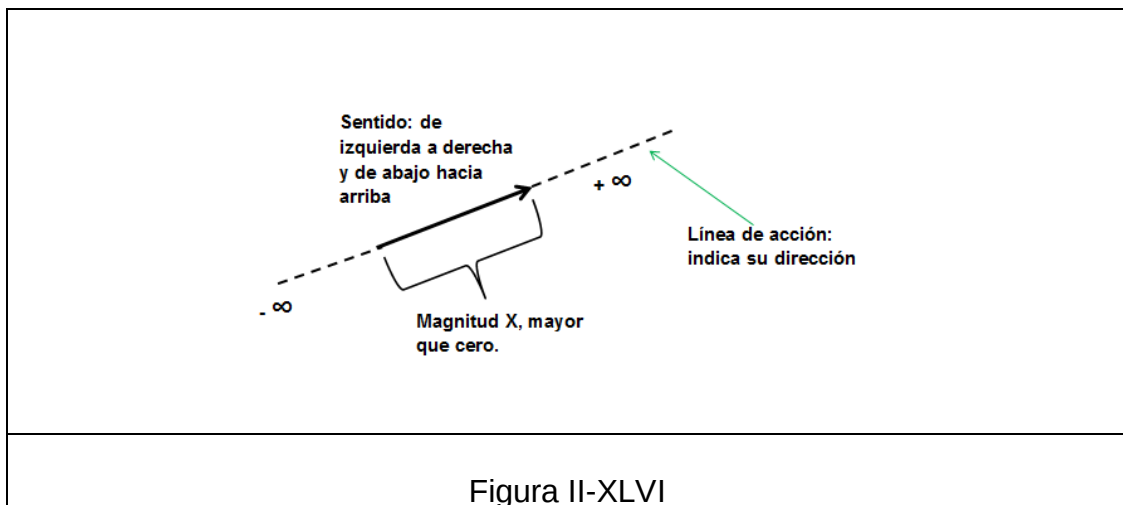
$$M_{eje} = -300 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

2.3 PAR DE FUERZAS

Recordemos las tres características que definen a un vector:

1. Magnitud,
2. Dirección, y
3. Sentido.

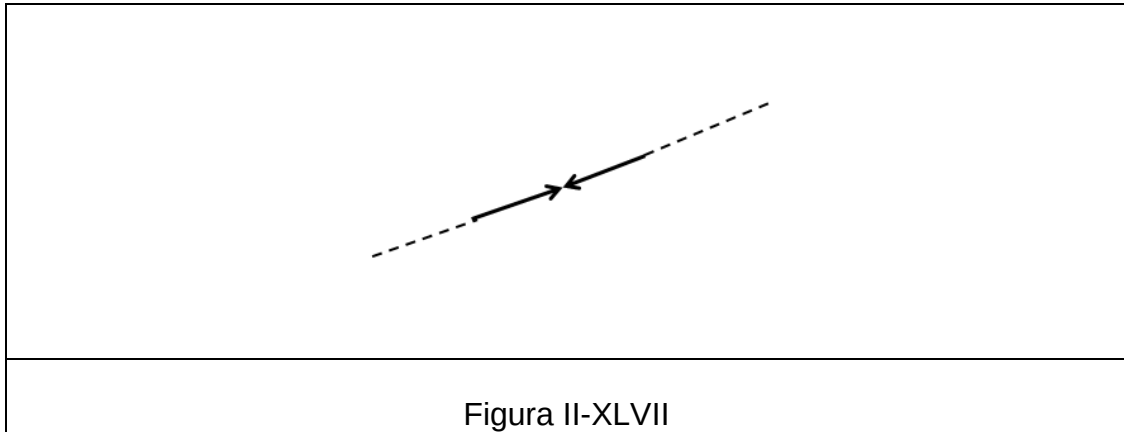
Ahora bien, respecto al vector fuerza se ha establecido, basado en el principio de transmisibilidad, que su línea de acción comprende la dirección y su sentido tal y como se muestra en la figura II-XLVI:



Supongamos ahora que tenemos dos vectores fuerzas que presentan las siguientes características:

1. Sus magnitudes son iguales,
2. Sus direcciones son la misma, pero...
3. Sus sentidos son puestos.

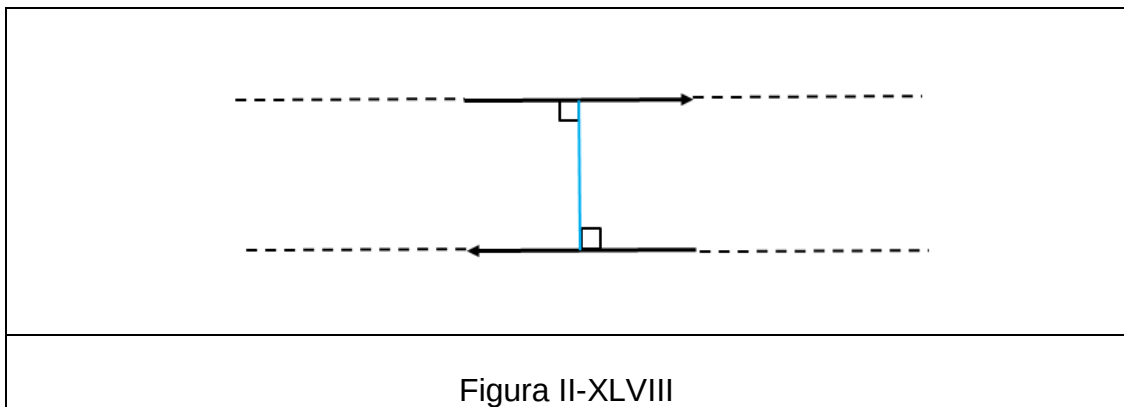
De lo anterior se puede asegurar que la suma de dichos vectores fuerza es igual a cero. (II-XLVII)



Establezcamos ahora lo siguiente respecto a los dos vectores fuerza:

1. Sus magnitudes son iguales,
2. Sus direcciones son la misma pero paralelas entre sí, esto es: media una distancia perpendicular entre dichas líneas de acción, tal y como se muestra en la figura II-XLVIII (lo anterior también se podrá plantear indicando que los dos vectores no son colineales pero sí coplanares).
3. Sus sentidos son puestos.

En la figura II-XLVIII se hace una representación de los tres puntos anteriores:



La situación, anterior, descrita presenta dos características:

1. La sumatoria de fuerzas del sistema es igual a cero

2. La suma de los momentos que provocan cada fuerza respecto a un punto cualquiera es diferente a cero, de hecho lo anterior se define como.

Momento de un Par.

(II-f)

Demostrar el primer punto establecido no muestra dificultad alguna, pero no se puede decir lo mismo del segundo punto. Para demostrar lo anterior nos basaremos en el siguiente ejemplo y el cual se muestra en la figura II-XLIX. En dicha figura se muestran dos fuerzas de la misma magnitud, misma dirección pero sentidos opuestos. De lo anterior podemos hacer el siguiente planteamiento:

$$\sum_{x=1}^{x=2} F_x = +10i - 10i = 0$$

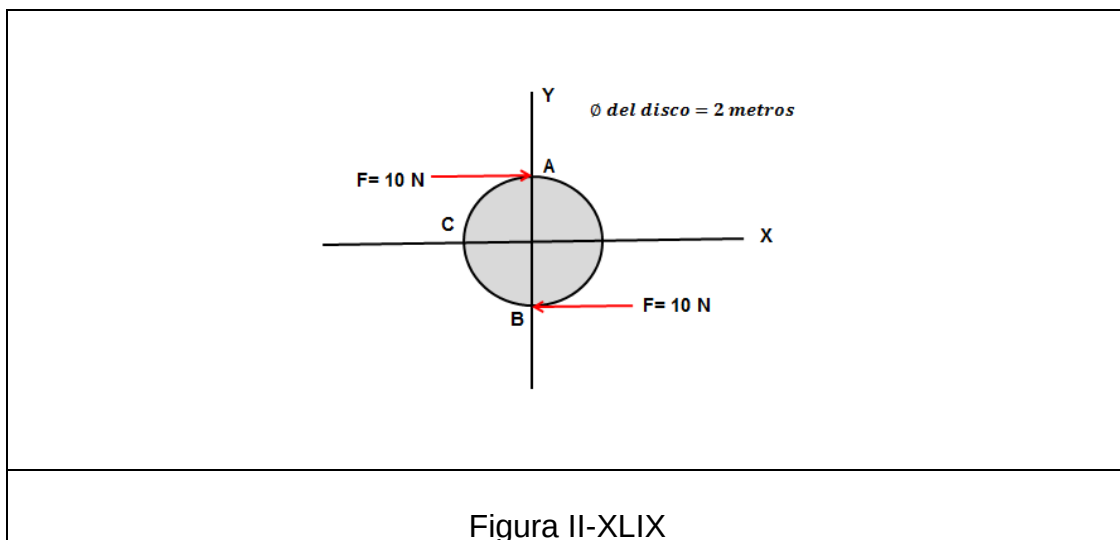


Figura II-XLIX

Para demostrar que la suma de los momentos que provocan cada fuerza respecto a un punto cualquiera es diferente a cero con la situación descrita en la figura II-XLIX, se utilizará la representación un disco de diámetro igual a dos metros se somete a dos fuerzas de la misma magnitud, misma dirección pero paralelas entre si y de sentidos opuestos haremos momentos con cada fuerza respecto a cuatro puntos diferentes; El origen y los puntos: A, B y C respectivamente. En la tabla II-IX se muestran los datos y resultados:

$\sum \vec{M}_O$		
$\vec{r}_{A/O}$	$\vec{F}_A$	$\vec{r}_{A/O} \times \vec{F}_A$
$+j$	$+10i$	$-10k$
$\vec{r}_{B/O}$	$\vec{F}_B$	$\vec{r}_{B/O} \times \vec{F}_B$
$-j$	$-10i$	$-10k$
	$\sum \vec{M}_O =$	$-20k \text{ N} \cdot \text{m}$
$\sum \vec{M}_A$		
$\vec{r}_{A/A}$	$\vec{F}_A$	$\vec{r}_{A/A} \times \vec{F}_A$
0	$+10i$	0
$\vec{r}_{B/A}$	$\vec{F}_B$	$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B$
$-2j$	$-10i$	$-20k$
	$\sum \vec{M}_A =$	$-20k \text{ N} \cdot \text{m}$
$\sum \vec{M}_B$		
$\vec{r}_{A/B}$	$\vec{F}_A$	$\vec{r}_{A/B} \times \vec{F}_A$
$+2j$	$+10i$	$-20k$
$\vec{r}_{B/B}$	$\vec{F}_B$	$\vec{r}_{B/B} \times \vec{F}_B$
0	$-10i$	$0k$
	$\sum \vec{M}_B =$	$-20k \text{ N} \cdot \text{m}$
$\sum \vec{M}_C$		
$\vec{r}_{A/C}$	$\vec{F}_A$	$\vec{r}_{A/C} \times \vec{F}_A$
$i + j$	$+10i$	$-10k$
$\vec{r}_{B/C}$	$\vec{F}_B$	$\vec{r}_{B/C} \times \vec{F}_B$
$+i - j$	$-10i$	$-10k$
	$\sum \vec{M}_C =$	$-20k \text{ N} \cdot \text{m}$
Tabla II-IX.		

Además de demostrar que el momento de un par es diferente a cero se demuestra que el momento de un par es el mismo valor independientemente del punto con respecto a que se hace momentos.

¿Qué pasaría si tenemos más de un momento par actuando al mismo tiempo en una situación dada? R= encontrar el vector resultante de cada momento par y posteriormente hacer la suma vectorial de cada momento par.

A continuación se pondrá en práctica lo aquí definido y demostrado utilizando, primeramente, el siguiente problema propuesto del texto de Hibbeler (2010) y el cual se muestra en la figura II-L:

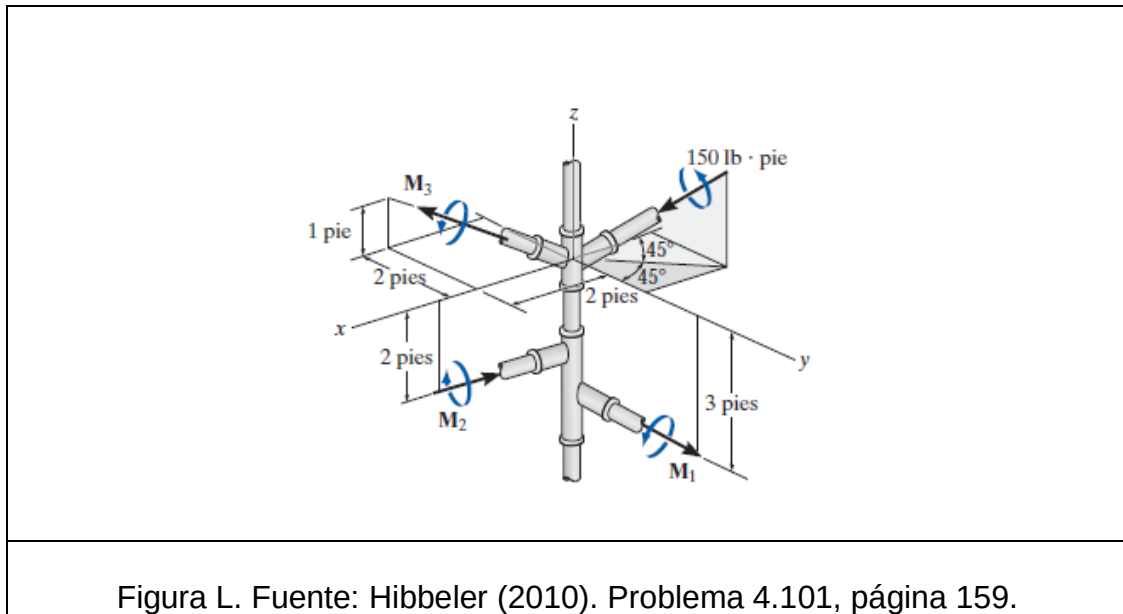


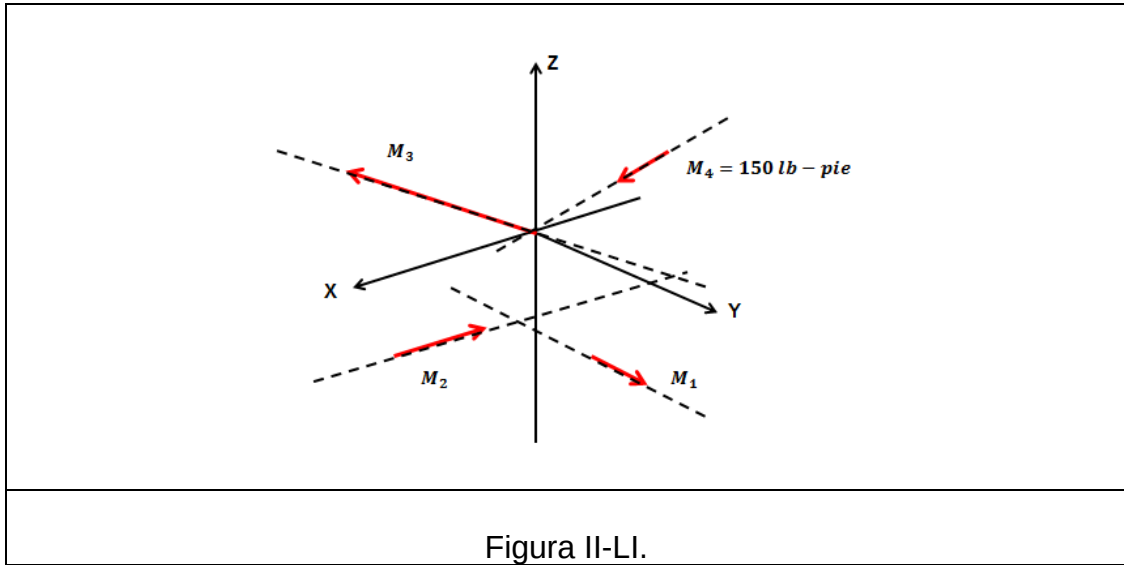
Figura L. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 4.101, página 159.

En dicho problema se nos pide encontrar la magnitud M_1 , M_2 y M_3 de los vectores momentos que se muestran en dicha figura. Se tiene como dato que la resultante de los cuatro momentos es igual a cero.

Primeramente recordemos que el vector momento se puede representar vectorialmente de la siguiente manera:

$$\vec{M}_C = M_{\text{cualquiera}} * \vec{\lambda} = M_C \cos \theta_x i + M_C \cos \theta_y j + M_C \cos \theta_z k$$

Por lo que debemos encontrar primeramente los cosenos directores de cada uno de los momentos de dicho problema. En la figura II-LI se hace una representación de los vectores momentos en el espacio y sus coordenadas con respecto a un origen y que ayudarán a determinar los cosenos directores de los que hacemos referencia líneas arriba.



Como parte de la información explícita de este problema en particular se puede observar que la dirección del vector momento M_1 es paralela al eje cartesiano de las Y 's por lo anterior, dicho vector se podrá representar de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{M_1} = M_1 * \overrightarrow{\lambda_1} = M_1 j$$

De igual manera, la dirección del vector momento M_2 se encuentra orientado paralelamente al eje de las X 's por lo tanto se tiene que:

$$\overrightarrow{M_2} = M_2 * \overrightarrow{\lambda_2} = M_2 i$$

Para conocer la dirección del vector momento $\overrightarrow{M_3}$ se podrá observar de la figura II-L que dicha dirección es colineal a una línea recta de la cual se da información de la ubicación precisa de dos puntos de dicha línea recta respecto al sistema de referencia allí definido y los cuales son suficientes para lo que se busca. Uno de estos dos puntos coincide con el origen del sistema cartesiano, y con los datos de la ubicación del segundo punto y con los cálculos presentados en la tabla II-IX se podrán encontrar los cosenos directores del vector M_3 .

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen			Posición final/origen			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
3	$\vec{\lambda}_3$	0	0	0	2	-2	-1	2	-2	1
Tabla II-IX										

$$\vec{M}_3 = M_3 * \vec{\lambda}_3 = M_3 * \frac{2}{3}i - M_3 * \frac{2}{3}j + M_3 * \frac{1}{3}k$$

Respecto al vector M_4 se tienen, como datos del problema según la figura II-L, sus cosenos directores además de su magnitud y sentido, el cual se representa de la siguiente expresión:

$$\vec{M}_4 = M_4 * \vec{\lambda}_4 = 150 * .707 * .707i - 150 * .707 * .707j - 150 * .707k$$

$$\vec{M}_4 = M_4 * \vec{\lambda}_4 = 75i - 75j - 106k$$

Se estableció que la resultante de los momentos es igual a cero, por lo tanto y agrupando términos se tiene que:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 = 0$$

$$\vec{M}_R = M_1j + M_2i + M_3 \left(\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \right) + (75i - 106j - 75k)$$

$$(i): M_2 + M_3 * \frac{2}{3} + 75 = 0$$

$$(j): + M_1 - M_3 * \frac{2}{3} - 75 = 0$$

$$(k): + M_3 * \frac{1}{3} - 106 = 0$$

Tres ecuaciones, con tres incógnitas, problema resuelto:

$$M_1 = 287, M_2 = -287, M_3 = 318. (lb \cdot pie)$$

En el siguiente problema propuesto de texto de Bedford y Fowler (1996) y en donde se nos pide un valor y el cual será el producto de la acción de dos pares momento sobre un sistema (figura II-LII) demostraremos que el método

de solución de este tipo de problemas de este subtema en especial (2.3 Par de fuerzas) es repetitivo:

- ubicar el sistema de ejes cartesianos,
- el origen de lo anterior,
- un par de puntos que se encuentren dentro de la línea de acción de los vectores, ya sean vectores fuerza o vectores momentos. En este caso en particular son vectores fuerza, y...
- resolverlo.

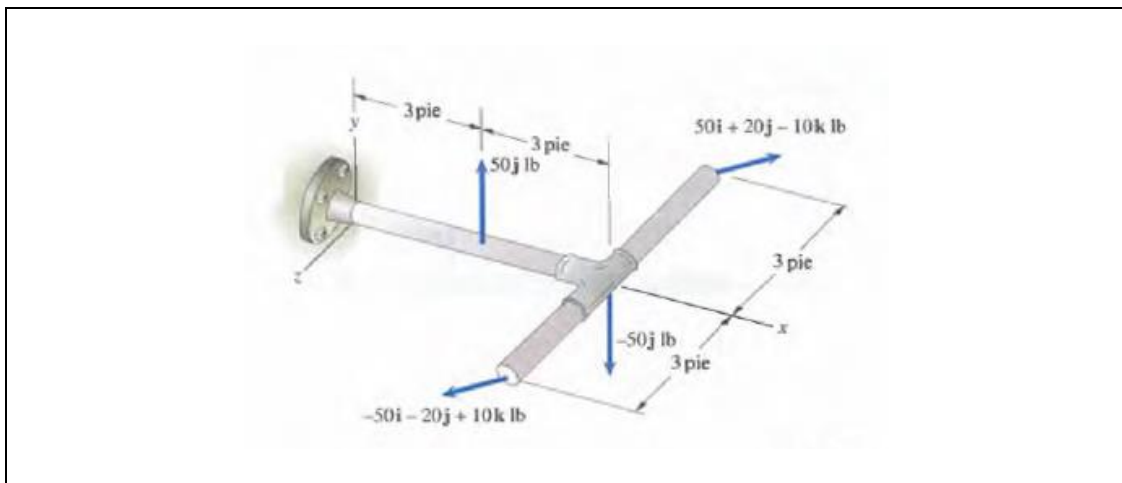


Figura LII. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 4.108, página 170.

Analizaremos primeramente el par de fuerzas de +/- 50 libras y cuyas líneas de acción son paralelas y están comprendidas en el plano cartesiano $X - Y$ tal y como se muestra en la figura II-LIII.

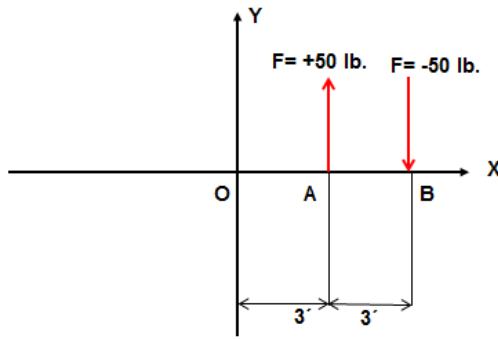


Figura II-LIII

Ya se estableció que cuando se tiene un par momento como el de la figura II-LIII el resultado del momento que resulte de dicho par de fuerzas es el mismo independientemente del punto con respecto al cual se hace momentos. En este caso y por ser lo más conveniente para la simplificación de los cálculos haremos momentos con respecto al punto B de la figura II-LIII.

$$\vec{M}_{1B} = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}_{1y} = -3iX + 50j = -150k \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

En la figura II-LIV se muestra una esquematización del segundo par momento y el cual está comprendido en el espacio:

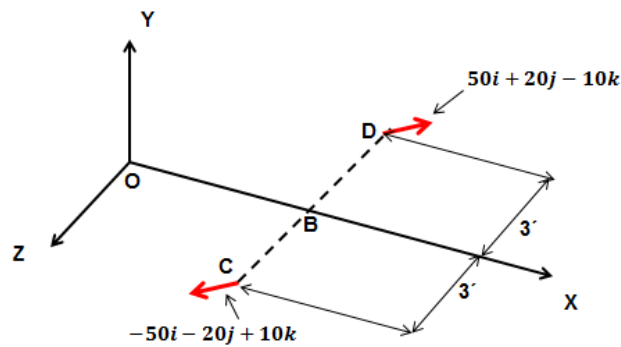


Figura II-LIV.

Con la misma intención de facilitar cálculos se harán momentos con respecto al punto C:

$$\vec{M}_{2C} = \vec{r}_{D/C} \times \vec{F}_2 = -6k \times (50i + 20j - 10k) = -120i - 300j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

Dando como momento resultante:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{1B} + \vec{M}_{2C} = -150k + (-120i - 300j)$$

$$\vec{M}_R = -120i - 300j - 150k$$

Y cuya magnitud será

$$M_R = (-120^2 - 300^2 - 150^2)^{.5}$$

$$M_R = 356 \text{ lb} \cdot \text{pie.}$$

2.4. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN UNA FUERZA Y UN PAR

Cambiar para quedar igual. La anterior expresión se podría decir que es paradójica y de hecho lo es. Descomponer una fuerza en una fuerza y un par se podrá hacer mientras los resultados que se obtienen antes de la descomposición son los mismos que después de la descomposición. Veamos el siguiente ejemplo:

$$4 + x = y$$

La anterior ecuación también se podría escribir de la siguiente manera:

$$4 = -x + y$$

Lo anterior es válido mientras no se violente la igualdad; cambió la forma de escribir dicha ecuación pero la igualdad no.

¿Cómo se logra que una fuerza que actúa en un sistema dado que provoca cierto resultado y reemplazar dicha fuerza en una fuerza y un par en el mismo sistema con el mismo resultado? Para responder lo anterior analicemos la siguiente figura (figura II-LV)

:

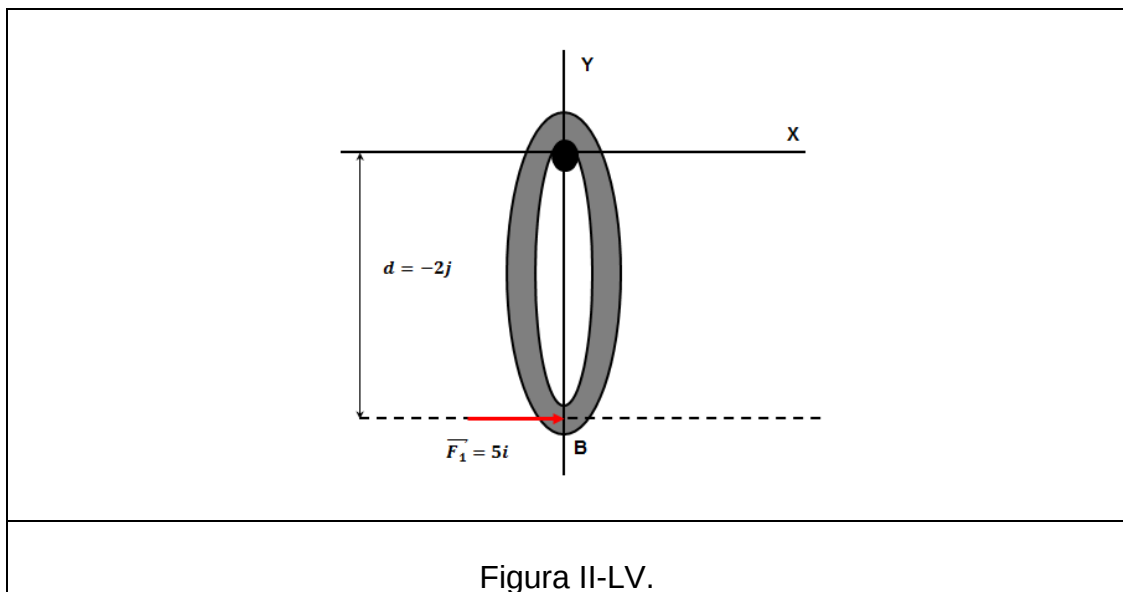


Figura II-LV.

En dicha figura un eslabón que descansa en un punto –en este caso el origen del sistema cartesiano $X - Y$ -, es sometido en el punto B, a una fuerza cuya magnitud será de cinco Newtons, dirección horizontal y positiva. Consideremos ahora el punto B, dicho punto se encuentra comprendido dentro

de la línea de acción de dicha fuerza y a una distancia de dos metros del origen, pudiendo, por lo tanto, escribir la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 = +5i$$

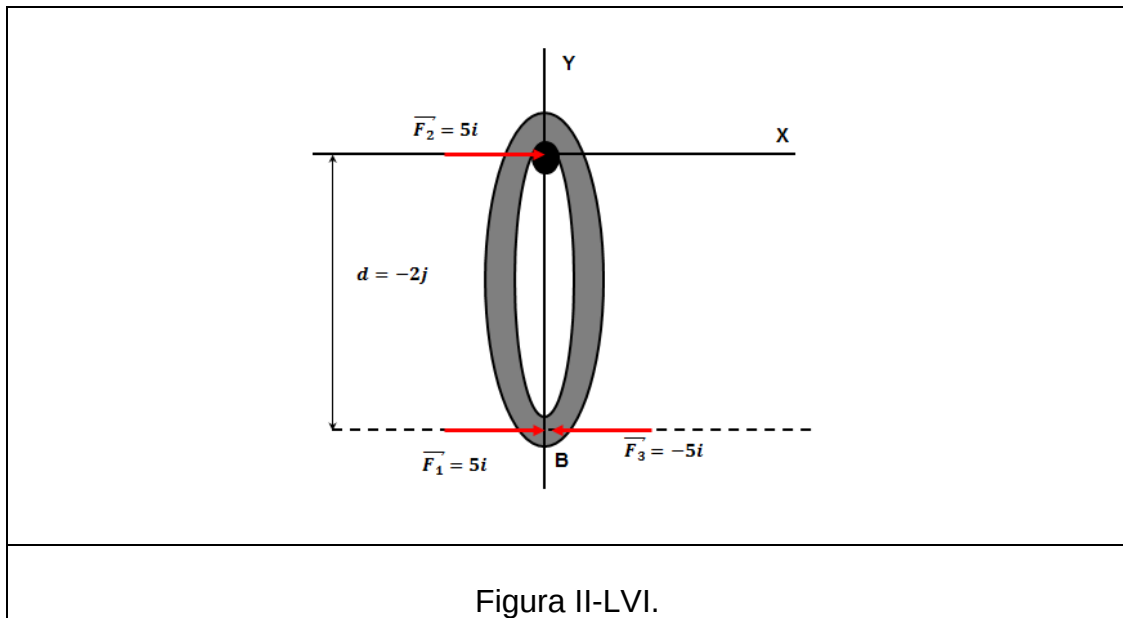
En este caso $n = 1$

Ahora, en la ecuación anterior agreguemos dos fuerzas asegurándonos de no violentar la igualdad:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = +5i + 5i - 5i = +5i$$

En este caso $n = 3$

A conveniencia podríamos indicar la línea o líneas de acción de las $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ respectivamente tal y como se muestra en la figura II-LVI

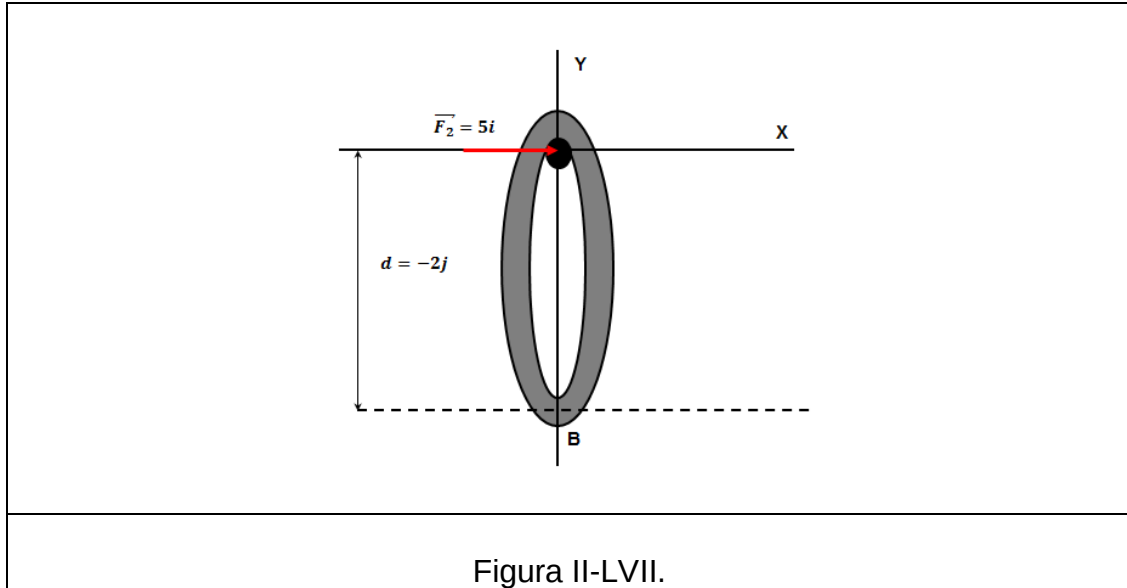


Hasta este punto no se ha alterado la situación original representada en la figura II-LV. Siguiendo con nuestra podemos hacer lo siguiente sin alterar dicha situación original:

1. Una nueva sumatoria de fuerzas:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = +5i + 5i - 5i = \vec{F}_2 = +5i$$

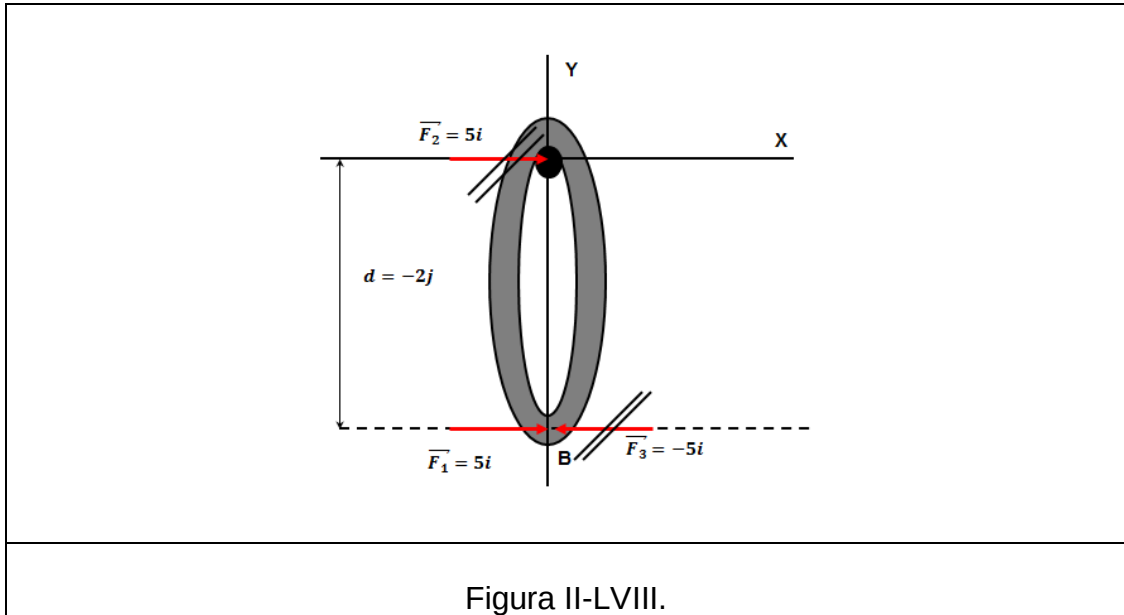
Representando lo anterior en la figura II-LVII:



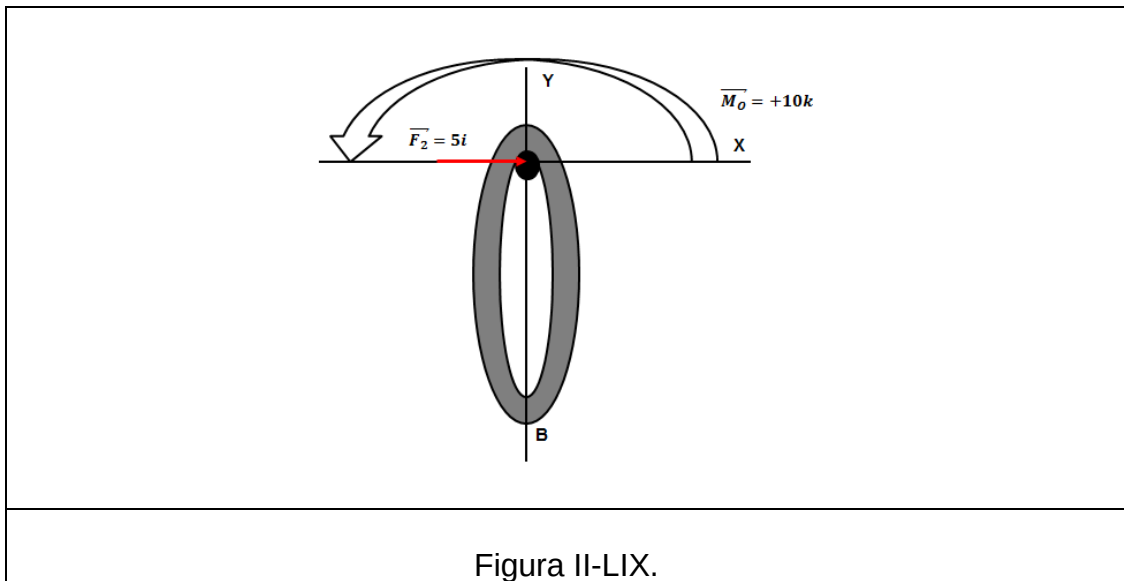
2. Al mismo tiempo hacer momentos con respecto al origen pero únicamente considerando a la fuerza $\vec{F}_1$. En la figura II-LVIII se representa dicho cálculo

$$\sum \vec{M}_O = r_{B/O} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

$$\sum \vec{M}_O = -2j \times (+5i + 5i - 5i) = +10k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$



Por lo tanto la descomposición de una fuerza en una fuerza y un par de este ejemplo se representa en la figura II-LIX



Por lo tanto, se podrá asegura que la situación A de la figura II-LX es equivalente a la situación B de la misma figura, esto es: los resultados que se logran son los mismos.

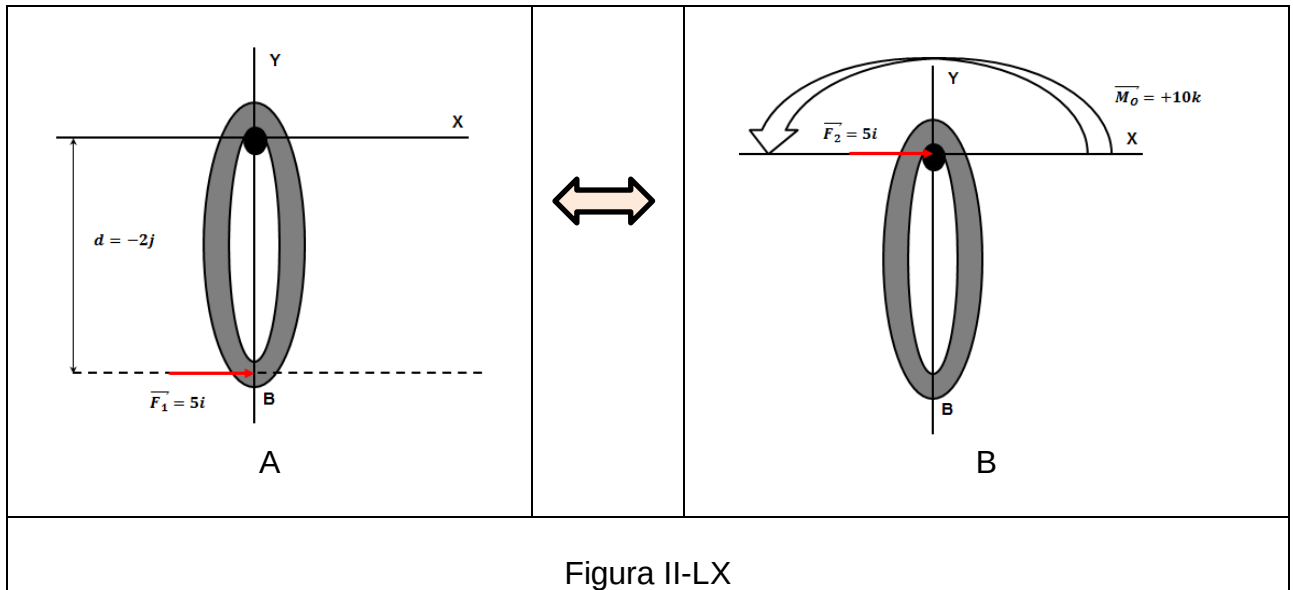
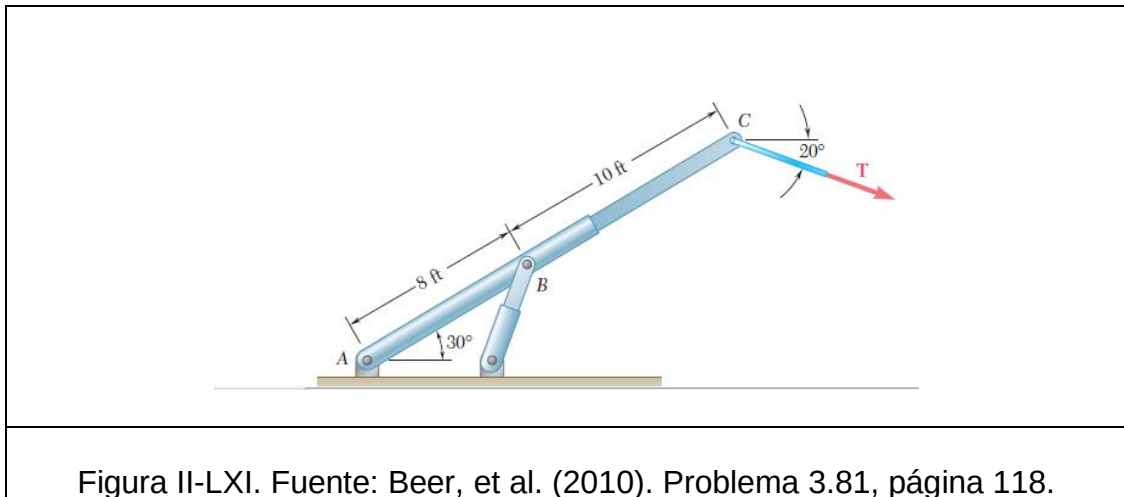


Figura II-LX

La pregunta obligada aquí podría ser: ¿qué aplicación en la vida real tiene lo anterior? Para responder a dicha interrogante utilicemos el mismo eslabón de la figura II-L. Usted desea que dicho eslabón gire pivoteando en su punto de apoyo pero sin aplicar la fuerza en el punto B. Para lograr lo anterior ya sabe que provocando un torque de $\vec{M}_O = +10k$ ($N \cdot m$) en el punto de apoyo logrará su objetivo y asimismo estará consciente de que tendrá una fuerza de $\vec{F} = 5i$ N en dicho punto.

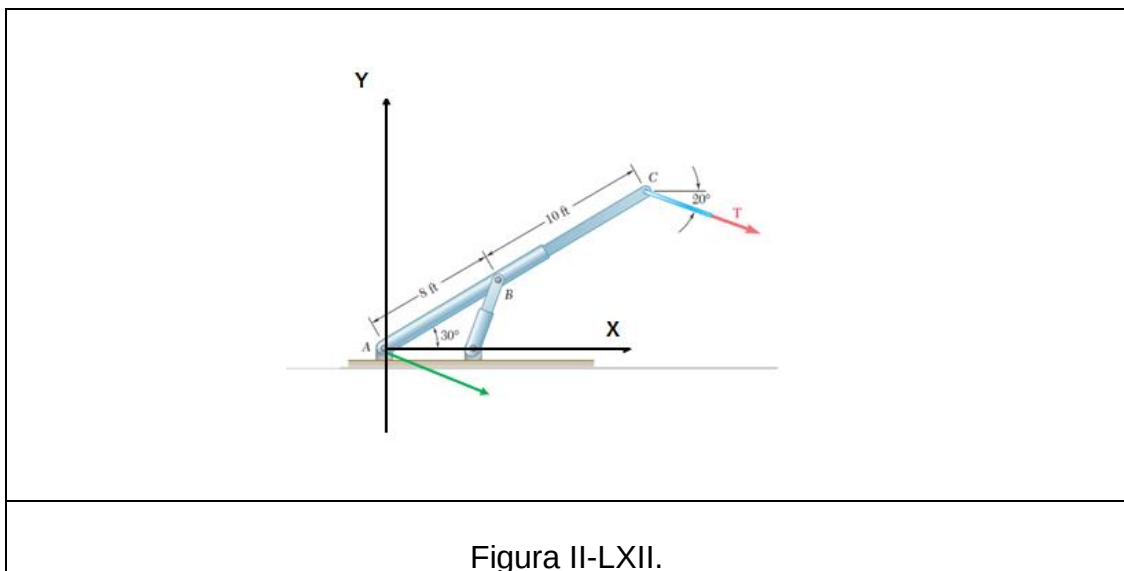
Por último, hay que destacar que en la situación A de la figura II-LX el punto origen del sistema X-Y no se encuentra dentro de la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_1$, al hacer el cambio por una fuerza y un par, dicho punto se encuentra dentro de la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_2$.

A continuación se resolverán algunos problemas propuestos de diferentes autores para practicar este subtema.



En el problema de la figura II-LXI del texto de Beer, et al. (2010), la tensión en el cable unido al extremo C del mecanismo ABC es de 560 lb. Se nos pide reemplazar la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema equivalente fuerza-par a) en A y b) en B.

De acuerdo a lo aquí ya explicado por definición y para ambos incisos la magnitud, dirección y sentido de la fuerza tanto en A y B será la misma. En la figura II-LXII se podrá observar lo anterior para el inciso A.



Para responder, en parte el inciso A, la fuerza que se aplica en el punto C será reemplazada por una fuerza aplicada en el punto A, tendrá igual magnitud, dirección y sentido que la que reemplaza pero cuya línea de acción será

paralela (línea de color verde de la figura II-LXII) a la línea de acción de la fuerza que se aplicaba en el punto C.

Se establece que:

$$\overrightarrow{F_C} = \overrightarrow{F_A}$$

Para terminar de responder el inciso A, solo falta calcular el par que se aplicara en el punto A:

$$M_A = r_{C/A} * F \sin \theta = 18 * 560 * \sin 50^\circ$$

$$M_A = 7721 \text{ lb} \cdot \text{pie}(-)$$

La respuesta del inciso B será:

$$\overrightarrow{F_C} = \overrightarrow{F_B}$$

$$M_B = r_{C/B} * F \sin \theta = 10 * 560 * \sin 50^\circ = 4289.8 \text{ lb} \cdot \text{pie}(-)$$

$$M_B = 4289.8 \text{ lb} \cdot \text{pie}(-)$$

Ahora bien, ¿podemos pasar de una fuerza-par a una sola fuerza?, en teoría sí. Veamos lo anterior con el siguiente problema propuesto del texto de Bedford y Fowler (1996), (figura II-LXIII). El enunciado de este problema propuesto es el siguiente:

“Tres fuerzas y un par se aplican a una viga (sistema 1). (a) Si el sistema 1 se representa con una fuerza aplicada en A y un par (sistema 2), ¿qué valores tienen F y M? (b) Si el sistema 1 se representa con la fuerza F (sistema 3), ¿qué valor tiene la distancia D?”

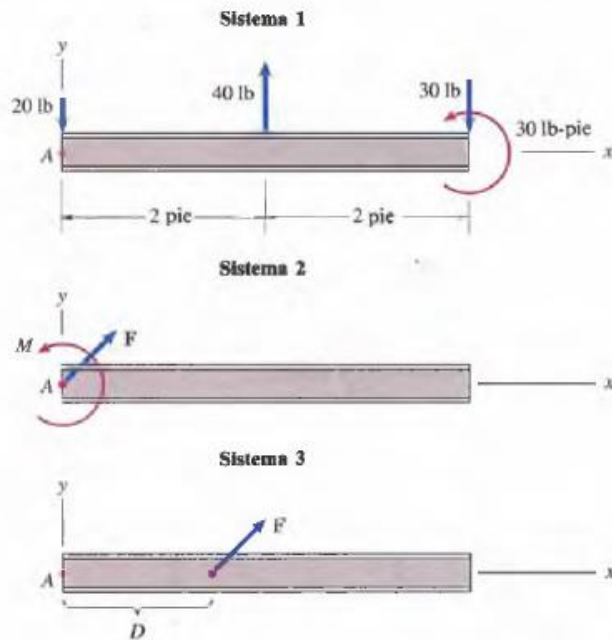


Figura II-LXIII. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 4.122, página 188.

En dicho problema muestran tres diferentes situaciones a las que el autor identifica como sistema 1, sistema 2 y sistema tres. Pide, el autor, que se pase del sistema uno al sistema dos encontrando la fuerza que se aplicará en el punto A y la nueva magnitud del momento. Para responder a lo anterior se hace una simple suma vectorial. De acuerdo a la imagen se tienen únicamente tres fuerzas en dirección vertical, por lo tanto la fuerza será:

$$\overrightarrow{F_{RA}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = -20j + 40j - 30j$$

$$\overrightarrow{F_{RA}} = -10j \text{ lb.}$$

Para encontrar el momento en A, se hará una sumatoria de momentos con respecto al punto A e incluyendo en esta sumatoria el momento del sistema uno ya que su dirección es paralela a los momentos que se encontrarán:

$$\overrightarrow{M_A} = \vec{r}_{1/A} \times \overrightarrow{F_1} + \vec{r}_{2/A} \times \overrightarrow{F_2} + \vec{r}_{3/A} \times \overrightarrow{F_3} + 30k \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

$$\overrightarrow{M_A} = 0i \times 20j + 2i \times 40j - 4i \times 30j + 30k$$

$$\vec{M}_A = -10k \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

Es importante destacar lo siguiente; aunque la teoría y ejemplificación del concepto sobre descomponer una fuerza en una fuerza y un par se hizo utilizando solo una fuerza, lo anterior no implicará que se limitará solo a una fuerza. En este ejemplo se utilizó un sistema de tres fuerzas además de un par torsional. Lo que se trata de aclarar es que tanto las fuerzas como los vectores que se identifiquen en cualquier sistema se podrán representar por una sola fuerza y un solo momento tal como se acaba de demostrar, o se podrá representar –fuerzas y momentos- por una sola fuerza como a continuación se hará para finalizar este problema propuesto de Bedford y Fowler (1996).

Ya se ha demostrado que el sistema dos representa al sistema uno si encontramos, tal como lo pide el enunciado del problema, un tercer sistema que represente al sistema dos, el mismo representará al sistema uno:

$$S_1 \Leftrightarrow S_2 \text{ y si } S_2 \Leftrightarrow S_3, \therefore S_1 \Leftrightarrow S_3$$

Además se estaría contestando, afirmativamente, la pregunta de: ¿podemos pasar de una fuerza-par a una sola fuerza?,

Para encontrar el sistema tres de dicho problema se planteará lo siguiente:

Tenemos una fuerza y un momento:

$$\vec{F}_A = -10j \text{ lb}; \vec{M}_A = -10k \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

El punto A está dentro de la línea de acción de la fuerza. Para encontrar el nuevo punto donde se aplicará la fuerza se plantea lo siguiente:

$$-10k = \vec{d} \times (-10j) \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

$$d = 1 \text{ pie}$$

A continuación se resolverá un problema propuesto del texto de Hibbeler (2010) (figura II-LXIV). En dicho problema se pide reemplazar dos fuerzas que son completamente diferentes en cuanto a magnitud, dirección y sentido, por una sola fuerza cuya línea de acción atraviese el punto O y un par torsional en dicho punto.

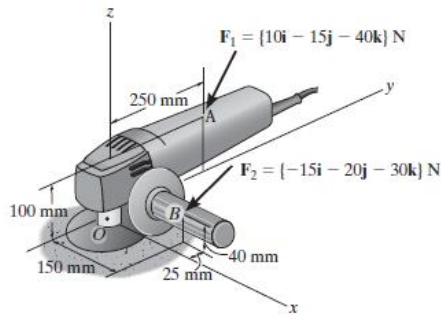


Figura II-LXIV. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 4.112, página 168.

En este problema visualizaremos los vectores posición dirigidos a la línea de acción de cada una de las dos fuerzas. En la figura II-LXV se representa lo anterior. Las flechas verdes dirigidas del origen al punto A y B respectivamente representan el vector posición, las flechas rojas representan las fuerzas y las líneas negras punteadas representan la línea de acción de dichas fuerzas.

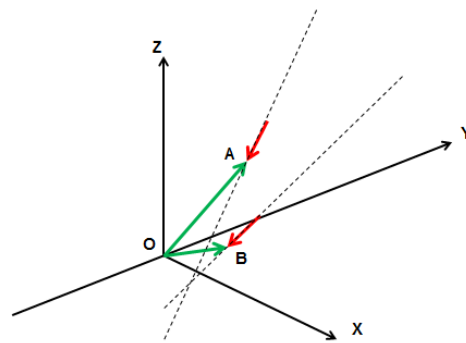


Figura II-LXV.

Primeramente hacemos la suma vectorial de las dos fuerzas:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (10i - 15j - 40k) + (-15i - 20j - 30k)$$

$$\vec{F}_R = -5i - 35j - 70k \text{ (N)}$$

A continuación y con los datos de problema se identifican los 2 vectores posición:

$$\vec{r}_{A/o} = .25j + .1k \text{ (metros)}$$

$$\vec{r}_{B/o} = .15i + .025j + .04k \text{ (metros)}$$

Y calculando el momento de cada fuerza con respecto al origen del sistema de coordenadas X, Y, Z :

$$\vec{M}_{1/o} = \vec{r}_{A/o} \times \vec{F}_1 = (.25j + .1k) \times (10i - 15j - 40k)$$

$$\vec{M}_{1/o} = -8.5i + j - 2.5k$$

$$\vec{M}_{2/o} = \vec{r}_{b/o} \times \vec{F}_2 = (.15i + .025j + .04k) \times (-15i - 20j - 30k)$$

$$\vec{M}_{2/o} = .05i + 3.9j - 2.625k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Los resultados presentados de manera vectorial serían:

$$\vec{F}_R = -5i - 35j - 70k \text{ (N)}$$

$$\vec{M}_{R-o} = -.795i + 4.9j - 5.125k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

En el siguiente problema del texto de Beer, et al. (2010), figura II-LXVI, se propone un problema que presenta, aparentemente, un alto grado de dificultad y cuyo enunciado es el siguiente:

“Una fuerza F_1 de 77 N y un par M_1 de 31 N · m se aplican en la esquina E de la placa doblada que se muestra en la figura. Si F_1 y M_1 deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par (F_2 , M_2) en la esquina B y si (M_2) $z = 0$, determine a) la distancia d y b) F_2 y M_2 .”

Se resolverá siguiendo los siguientes pasos:

- primeramente representar el vector momento $\vec{M}_1$ en sus componentes rectangulares utilizando los cosenos directores,
- posteriormente se hará el cambio de la fuerza aplicada en la esquina E por un par y una fuerza en la esquina B,

c) finalmente se harán las sumas vectoriales correspondientes.

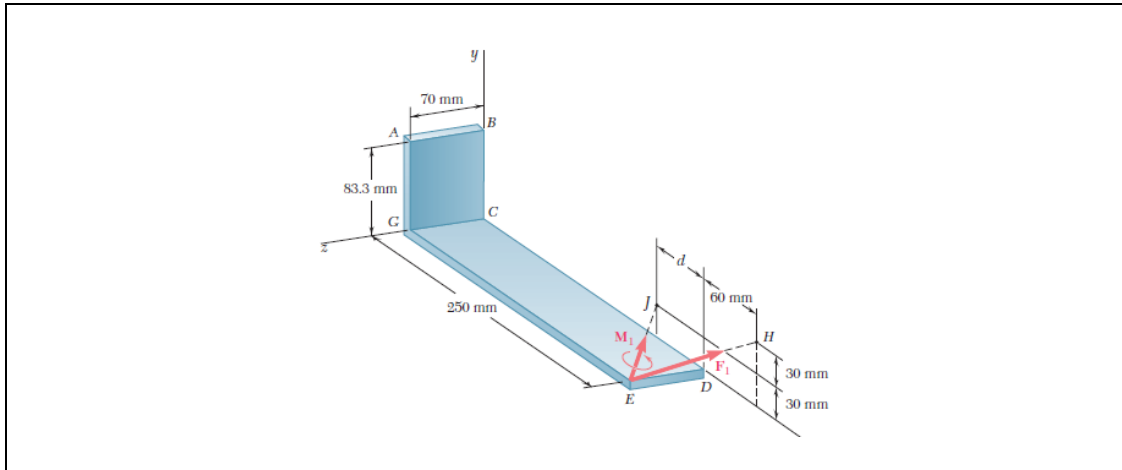
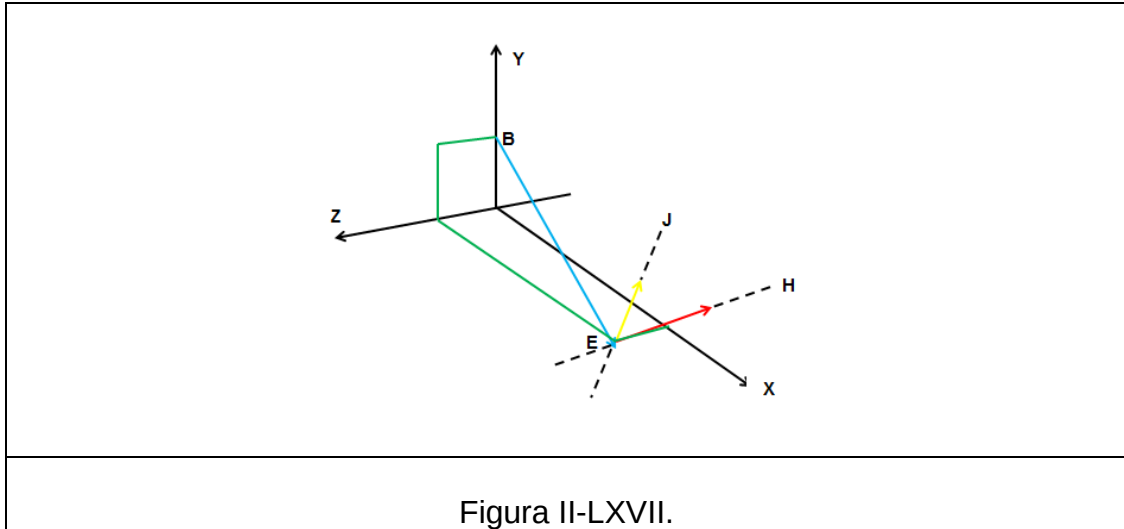


Figura II-LXVI. Fuente Beer, et al. (2010). Problema 3.98, página 121

Para poder observar los vectores posición, fuerza y momento involucrados en este problema se hará una esquematización de dicho problema tal y como se muestra en la figura II-LXVII. La flecha de color azul representa el vector posición entre un punto de la esquina E y un punto de la esquina b, el punto E está dentro de la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_1$. La flecha de color amarillo representa el vector momento $\vec{M}_1$ y la orientación en el espacio de dicho vector está dada por los puntos E y J ya que ambos se encuentran dentro de la línea de acción de dicho momento y sus posiciones están referenciadas con respecto al origen del sistema cartesiano, y finalmente la flecha de color rojo representa la fuerza $\vec{F}_1$ y cuya orientación está perfectamente bien definida en el espacio por los puntos E y H, los cuales están dentro de la línea de acción de dicha fuerza y que también están referenciados con respecto a dicho origen del sistema X, Y, Z .



Se ha establecido que un vector cualquiera se puede representar en función de su magnitud y un vector unitario, en este caso se tiene:

$$\overrightarrow{M_1} = M_1 \overrightarrow{\lambda_1}$$

Para encontrar $\overrightarrow{\lambda_1}$ utilizaremos la información pertinente, respecto a las posiciones mostradas en la figura II-LXVI y la cual se muestra en la tabla II-X:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial (E)/origen (m)			Posición final(J)/origen (m)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{\lambda_1}$	.25	0	.07	$.25 - d$	.03	0	$-d$	.03	$-.07$

Tabla II-X.

La magnitud del vector $\overrightarrow{\lambda_1}$ será

$$\lambda = (d^2 + .03^2 + .07^2)^{.5} = (d^2 + .0058)^{.5}$$

La representación vectorial de $\overrightarrow{\lambda_1}$ será:

$$\overrightarrow{\lambda_1} = -\frac{d}{(d^2 + .0058)^{.5}}i + \frac{.03}{(d^2 + .0058)^{.5}}j - \frac{.07}{(d^2 + .0058)^{.5}}k$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\vec{M}_1 = 31 * \left(-\frac{d}{(d^2 + .0058)^{.5}} i + \frac{.03}{(d^2 + .0058)^{.5}} j - \frac{.07}{(d^2 + .0058)^{.5}} k \right) N \cdot m$$

$$\vec{M}_1 = -\frac{31d}{(d^2 + .0058)^{.5}} i + \frac{.93}{(d^2 + .0058)^{.5}} j - \frac{2.17}{(d^2 + .0058)^{.5}} k (N \cdot m)$$

Continuaremos representando ahora la fuerza $\vec{F}_1$ en sus componentes rectangulares, para lo anterior encontraremos sus cosenos directores con información de la figura II-LXVI y la cual se muestra en la tabla II-XI:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial (E)/origen (m)			Posición final(H)/origen (m)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
2	$\vec{r}_{H/E}$	.25	0	.07	.31	..06	0	.06	.06	-.07

Tabla II-XI

La magnitud de $\vec{r}_{H/E}$:

$$r_{H/E} = (.06^2 + .06^2 + .07^2)^{.5} = .11 \text{ metros.}$$

Por lo tanto los cosenos directores serán:

$$\cos \theta_x = \frac{.06}{.11}, \cos \theta_y = \frac{.06}{.11}, \cos \theta_z = -\frac{.07}{.11}$$

Sabiendo que:

$$F_x = F \cos \theta_x, F_y = F \cos \theta_y, F_z = F \cos \theta_z$$

Se tendrá por lo tanto que:

$$\vec{F}_1 = 42i + 42j - 49k, (N)$$

Que será la $\vec{F}_2$ ubicada en la esquina B.

Finalmente se harán momentos en la esquina B con la $\vec{F}_1$ para lo cual encontraremos el brazo de palanca de B hacia el punto H o a la esquina E, el resultado será el mismo pero es más sencillo hacerlo con el punto H. en la tabla II-XII se muestra la información obtenida de la figura II-LXVI para ubicar dicho brazo de palanca:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial (B)/origen (m)			Posición final(H)/origen (m)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
3	$\vec{r}_{H/B}$	0	.0833	0	.31	..06	0	.31	-.0233	0
Tabla II-XII										

Con lo anterior se tiene que:

$$\vec{r}_{H/B} = .31i - .0233j$$

El momento será:

$$\vec{M}_{F1/B} = \vec{r}_{H/B} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_{F1/B} = (.31i - .0233j) \times (42i + 42j - 49k)$$

$$\vec{M}_{F1/B} = 1.1417i + 15.19j + 13.9986k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Y el primer momento está en función de d:

$$\vec{M}_1 = -\frac{31d}{(d^2 + .0058)^{.5}}i + \frac{.93}{(d^2 + .0058)^{.5}}j - \frac{2.17}{(d^2 + .0058)^{.5}}k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

De acuerdo al enunciado del problema la resultante de la suma de los momentos en dirección del eje de las Z's es igual a cero, por lo tanto

$$-\frac{2.17}{(d^2 + .0058)^{.5}} + 13.9986 = 0$$

Haciendo los despejes correspondientes se encuentra que:

$$d = .135 \text{ metros.}$$

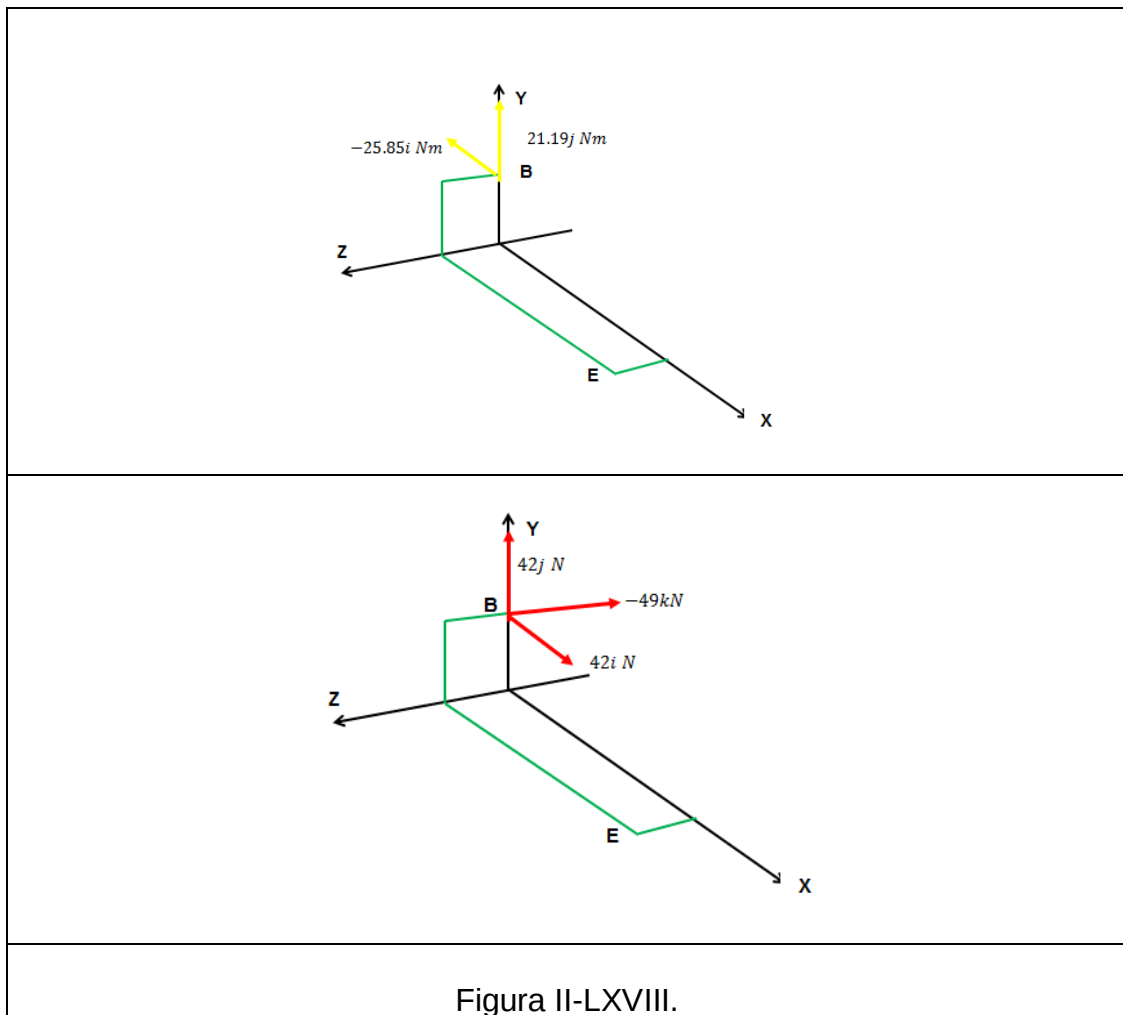
$$\vec{M}_1 = -27i + 6j - 14k \text{ (Nm)}$$

Por lo tanto:

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_{F1/B}$$

$$\vec{M}_2 = -25.85i + 21.19j \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

En la figura II-LXVIII se hace una representación del sistema equivalente fuerza par $\vec{F}_2, \vec{M}_2$ que se ubican en la esquina B



2.5. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS.

Como su nombre lo indica, la reducción de un sistema de fuerzas a una sola fuerza resultante es posible. Lo único que se deberá cuidar es que el efecto que provoque la fuerza resultante sea el mismo que el del sistema de fuerzas que se está reemplazando. Cuando todas las fuerzas que conforman el sistema a reemplazar son concurrentes la reducción a una sola fuerza es simplemente la suma vectorial de cada una de las fuerzas del sistema:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$$

Cuando las fuerzas son coplanares la fuerza resultante estará contenida en el mismo plano. Como en el caso anterior la reducción del sistema de fuerzas será:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$$

El problema que se presenta en esta particular situación es definir la línea de acción de la fuerza resultante con respecto a un sistema de referencia determina. En la figura II-LIX se representan dos fuerzas coplanares.

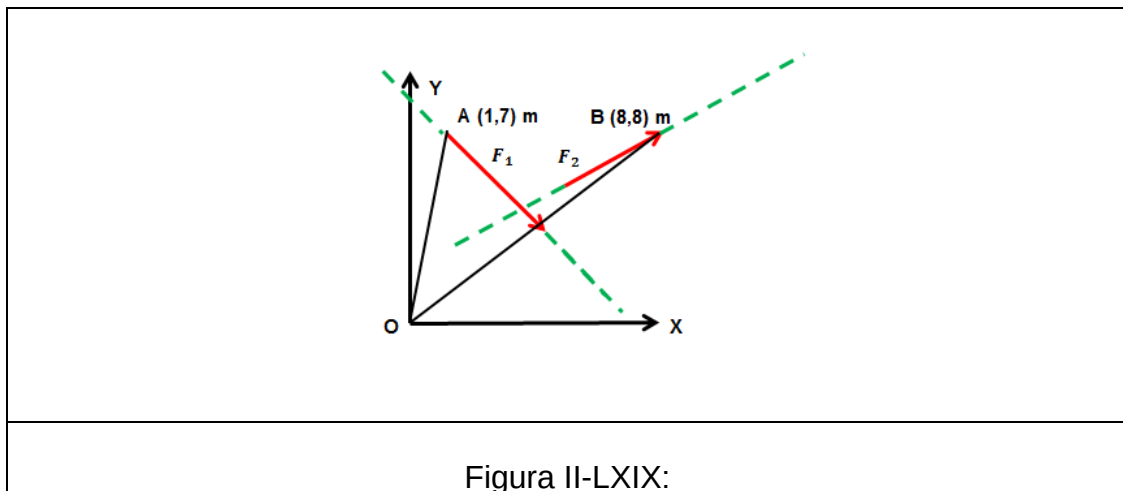


Figura II-LXIX:

En dicha figura tal, los valores de cada fuerza son los siguientes:

$$\vec{F}_1 = 4i - 3j \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = 3i + 2j \text{ (N)}$$

La reducción del sistema de fuerzas de dicho ejemplo sería:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4i - 3j) + (3i + 2j) = 7i - j \text{ (N)}$$

El problema estriba es ubicar los puntos de la línea de acción de la nueva fuerza que interceden los ejes X-Y respectivamente. Para responder lo anterior cada una de las fuerzas del sistema a reducir hará momentos con respecto al punto más conveniente: el origen del sistema X-Y.

$$\vec{M}_1 = (i + 7j) \times (4i - 3j) = -31k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\vec{M}_2 = (8i + 8j) \times (3i + 2j) = -8k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\vec{M}_R = -39k \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Si igualamos el momento resultante a una distancia d entre el origen del sistema por la fuerza resultante tendremos:

$$\vec{M}_R = (xi + jy) \times (7i - j) \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$-39k = -xk - 7yk$$

$$-39 = -x - 7y$$

Y cuando:

$$y = 0,$$

Sabremos que:

$$x = 39 \text{ m}$$

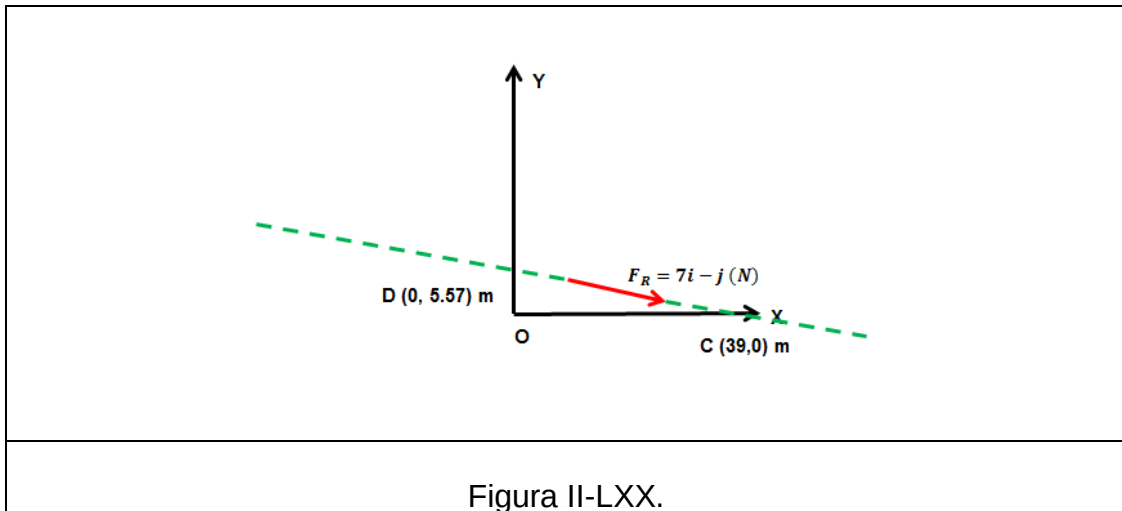
E igualmente

$$x = 0,$$

Se sabrá que:

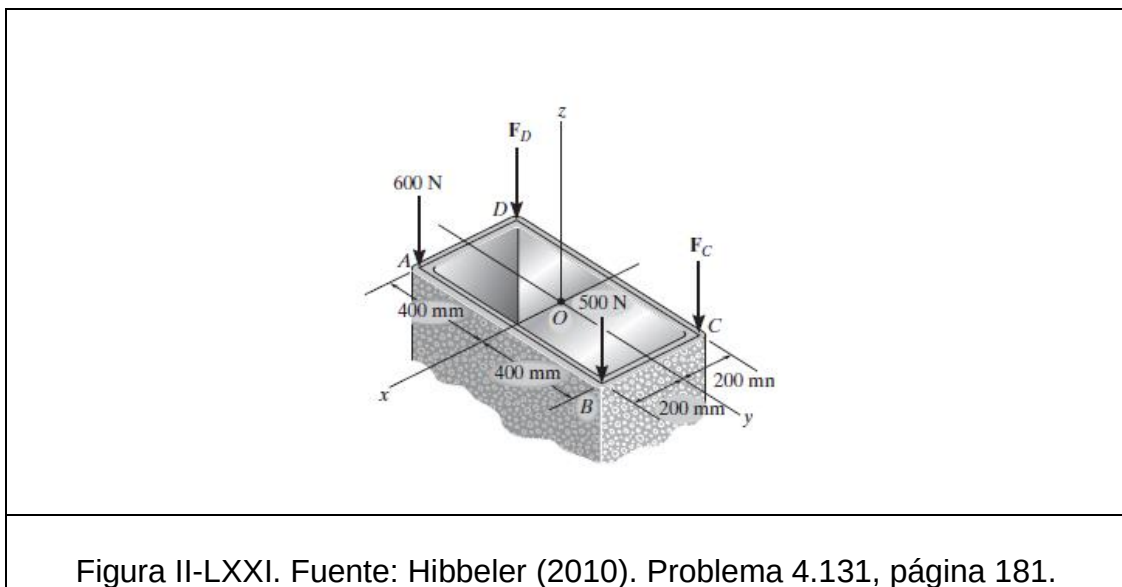
$$y = 5.57 \text{ m}$$

En la figura LXX se representa la reducción de un sistema de fuerza a una sola fuerza, cuando dichas fuerzas son coplanares:



Los siguientes dos ejemplos servirán para explicar el cómo poder reducir sistemas de fuerzas paralelas a una sola fuerza con resultados equivalentes al sistema de fuerzas a reemplazar. .

Iniciaremos con un problema propuesto del texto de Hibbeler (2010), figura II-LXXI.



En este problema se nos pide encontrar una sola fuerza en dirección vertical y cuya línea de acción incluya al origen del sistema cartesiano, para producir el mismo efecto que el de las cuatro fuerzas mostradas en dicha figura. Asimismo para poder contestar lo anterior se deberá encontrar las magnitudes y sentidos de las fuerzas aplicadas en los puntos D y C respectivamente.

Como la fuerza en O será equivalente a las cuatro fuerzas, podemos plantear lo siguiente:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

$$\vec{F}_O = -600j - 500j + \vec{F}_C + \vec{F}_D \text{ (N)}$$

Se tiene una ecuación con dos incógnitas, se ocupará una ecuación independiente más y no incrementar el número de incógnitas. Para lograr lo anterior se harán momentos en una de las esquinas en donde se aplica una de las fuerzas desconocidas (a discreción seleccionaremos la esquina D) y se igualará al momento que hará la fuerza equivalente a las cuatro fuerzas en el mismo punto seleccionado:

$$\sum \vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

$$\sum \vec{M}_1 = \vec{r}_{A/D} \times (-600)j + \vec{r}_{B/D} \times (-500)j + \vec{r}_{C/D} \times F_C j$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_{O/D} \times \vec{F}_O$$

Identificando cada vector posición, con la información mostrada en la tabla II-XII:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial /origen (m)			Posición final/origen (m)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{r}_{A/D}$	-.2	-.4	0	.2	-.4	0	.4	0	0
2	$\vec{r}_{B/D}$	-.2	-.4	0	.2	.4	0	.4	.8	0
3	$\vec{r}_{C/D}$	-.2	-.4	0	-.2	.4	0	0	.8	0
4	$\vec{r}_{O/D}$	-.2	-.4	0	0	0	0	.2	.4	0
Tabla II-XIII										

Con la anterior información se puede plantear:

$$\vec{r}_{A/D} \times (-600)k = (.4i) \times -600k = 240j \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\vec{r}_{B/D} \times (500)k = (.4i + .8j) \times -500k = -400i + 200j \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\vec{r}_{C/D} \times F_C k = (.8j) \times F_C k = .8F_C i \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\sum \vec{M}_1 = (-400 + .8F_C)i + 440j \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_{O/D} \times \vec{F}_O = (.2i + .4j) \times F_O k = -.2F_O j + .4F_O i \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

Como:

$$\sum \vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

$$(-400 + .8F_C)i + 440j \text{ (Nm)} = -.2F_O j + .4F_O i$$

Agrupando términos:

$$(j) 440 = -.2F_O; F_O = -2200 \text{ N}$$

$$(i) (-400 + .8F_C) = .4F_O; (-400 + .8F_C) = .4(-2200); F_C = -600 \text{ N}$$

Se había planteado que:

$$\vec{F}_O = -600j - 500j + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

Por lo tanto se tiene que:

$$-2200 = -600 - 500 - 600 + F_D$$

Finalmente:

$$F_D = -500 \text{ N}$$

En el siguiente problema a resolver del texto de Beer, et al. (2010) (figura II-LXXI), se observan cuatro señalamientos montados en una estructura. De acuerdo a los datos del problema cada señalamiento recibe un empuje diferente provocado por la fuerza del viento. Se desea conocer los valores de a y b para reemplazar las cuatro fuerzas por una sola fuerza que se aplicará en el punto G y cuyo efecto sobre la estructura sea el mismo que el de las cuatro fuerzas en conjunto.

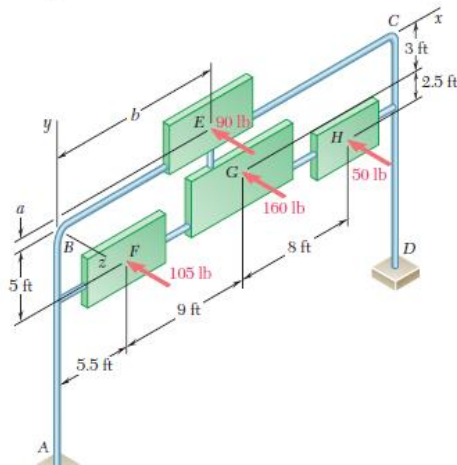


Figura II-LXXI. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 3.130, página 142

Lo primero que se hará es una representación del problema en donde se pueda observar tanto la línea de acción de las cuatro fuerzas así como el origen del sistema cartesiano (figura II-LXXII). Lo anterior servirá para poder tomar la decisión de seleccionar el mejor punto para realizar momentos en aras de encontrar los valores de a y de b , los cuales se presentan como las incógnitas. El punto más conveniente será el origen del sistema de ejes cartesianos representado por el punto B.

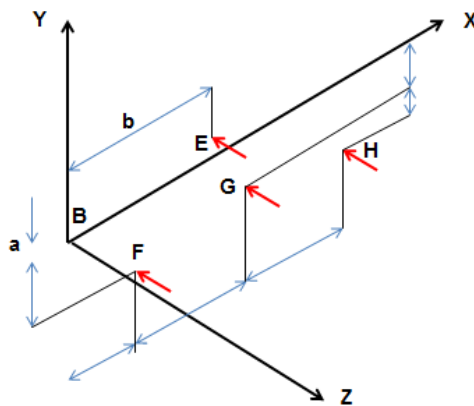


Figura II-LXXII.

Recordemos que solucionando este problema se demostrará que es posible la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza, que a fin de cuentas es el objetivo de este capítulo:

Objetivo: Determinar la fuerza única de un sistema de fuerzas que actúan sobre un punto o sobre un cuerpo rígido.

Matemáticamente la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza se plantea de la siguiente manera:

$$\vec{M}_{\text{resultante del sistema de fuerzas respecto a un punto } A} = \vec{r}_A \times \vec{F}_{\text{resultante del sistema de fuerzas.}}$$

El término izquierdo de la anterior ecuación será la sumatoria de los momentos de cada una de las fuerzas con respecto al mismo punto – llamémosle punto A-:

$$\sum_{W=i}^n \vec{M}_W = \vec{r}_W \times \vec{F}_W$$

El término derecho de la ecuación tal corresponde al momento que hará la fuerza equivalente con respecto al mismo punto A seleccionado.

En este problema hay cuatro fuerzas y se hará momento con respecto al origen del sistema cartesiano: punto B. Para cada una de estas fuerzas identificaremos vectorialmente su brazo de palanca, para lo cual se ocupará la información mostrada en la tabla II-XIV.

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial /origen (pies)			Posición final/origen (pies)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{r}_{E/B}$	0	0	0	b	a	0	b	a	0
2	$\vec{r}_{F/B}$	0	0	0	5.5	-5	0	5.5	-5	0
3	$\vec{r}_{G/B}$	0	0	0	14.5	-3	0	14.5	-3	0
4	$\vec{r}_{H/B}$	0	0	0	22.5	-5.5	0	22.5	-5.5	0
Tabla II-XIV:										

Por lo tanto:

$$\vec{M}_{E/B} = \vec{r}_{E/B} \times \vec{F}_E = (bi + aj)X - 90k = -90ai + 90bj \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

$$\vec{M}_{F/B} = \vec{r}_{F/B} \times \vec{F}_F = (5.5i - 5j)X - 105k = 525i + 577.5j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

$$\vec{M}_{G/B} = \vec{r}_{G/B} \times \vec{F}_G = (14.5i - 3j)X - 160k = 480i + 2320j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

$$\vec{M}_{H/B} = \vec{r}_{H/B} \times \vec{F}_H = (22.5i - 5.5j)X - 50k = 275i + 1125j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

Se obtiene

$$\sum_{W=i}^4 \vec{M}_W = -90ai + 90bj + 525i + 577.5j + 480i + 2320j + 275i + 1125j$$

$$\sum_{W=i}^4 \vec{M}_W = (-90a + 1280)i + (90b + 4022.5)j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

Ya que la anterior ecuación se iguala al momento que hace la fuerza resultante con respecto al mismo punto (recordemos que para este problema se seleccionó el origen o punto B para hacer momentos) se encontrará primeramente dicha fuerza resultante:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_E + \vec{F}_F + \vec{F}_G + \vec{F}_H = -90k - 105k - 160k - 50k$$

$$\vec{F}_R = -405k \text{ (lb's)}$$

De acuerdo al enunciado de este problema:

“Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en G.”

La línea de acción de dicha fuerza resultante debe atravesar el punto G, por lo tanto si se hace momento con respecto al punto B el brazo de palanca será:

$$\vec{r}_{G/B} = (14.5i - 3j)$$

Para este problema en particular y replanteando la siguiente ecuación:

$$\vec{M}_{\text{resiltande del sistema de fuerzas respecto a B}} = \vec{r}_{G/B} \times \vec{F}_{\text{resultante}}.$$

Se obtiene:

$$\vec{M}_{FR/B} = (14.5i - 3j)X - 405k = 1215i + 5872.5j \text{ (lb} \cdot \text{pie)}$$

De lo ya planteado:

$$\sum_{W=i}^n \vec{M}_W = \vec{r}_W \times \vec{F}_W$$

$$(-90a + 1280)i + (90b + 4022.5)j = 1215i + 5872.5j$$

Y agrupando términos

$$(i) -90a + 1280 = 1215;$$

$$a = .722 \text{ pies.}$$

$$(j) 90b + 4022.5 = 5872.5;$$

$$b = 20.55 \text{ pies.}$$

CAPÍTULO III. EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO.

Objetivo: Obtener fuerzas en apoyos y en otros puntos de un cuerpo rígido en un plano y en tres dimensiones.

Subtemas:

- 3.1. Diagrama de cuerpo libre.
- 3.2. Fuerzas de acción y de reacción.
- 3.3. Ecuaciones de equilibrio.
- 3.4. Aplicaciones bidimensionales:
- 3.5. Aplicaciones tridimensionales.
- 3.6. Sistemas estáticamente indeterminados.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son cuatro:

1. Presentar los tipos de apoyos que se presentan en un plano, así como las fuerzas y momentos.
2. Solucionar ejercicios donde estén presentes cuerpos rígidos con soportes en un plano.
3. Presentar los tipos de apoyos, sus fuerzas y momentos en apoyos en tres dimensiones.
4. Solucionar ejercicios donde estén presentes cuerpos rígidos con soportes en tres dimensiones:

3.1. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL).

El concepto de diagrama de cuerpo libre o DCL que se utiliza en ingeniería es un concepto universal el cual se refiere a "aislar" de su entorno a un cuerpo, parte de este o a una partícula para los análisis pertinentes. Para explicar lo anterior supongamos que tenemos un cuerpo como el de la figura III-I, dicho cuerpo representa una araña que esta sostenida por su telaraña en cada una de sus ocho patas, el color de la telaraña entre sus patas y cada uno de los ocho puntos en que se sostiene es de color rojo. A la vez toda la telaraña con todo y araña esta sostenida por tres cables color amarillo al marco de la figura.

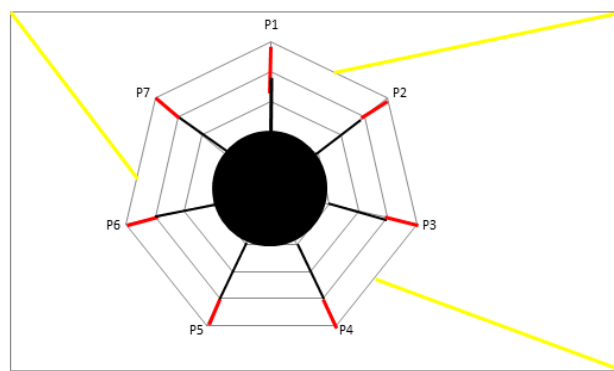


Figura III-I

Si "aislamos" o hacemos el DCL únicamente de la araña se tendría la siguiente representación mostrada en la figura III-II

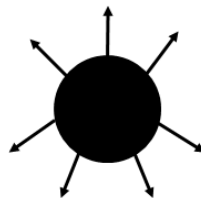
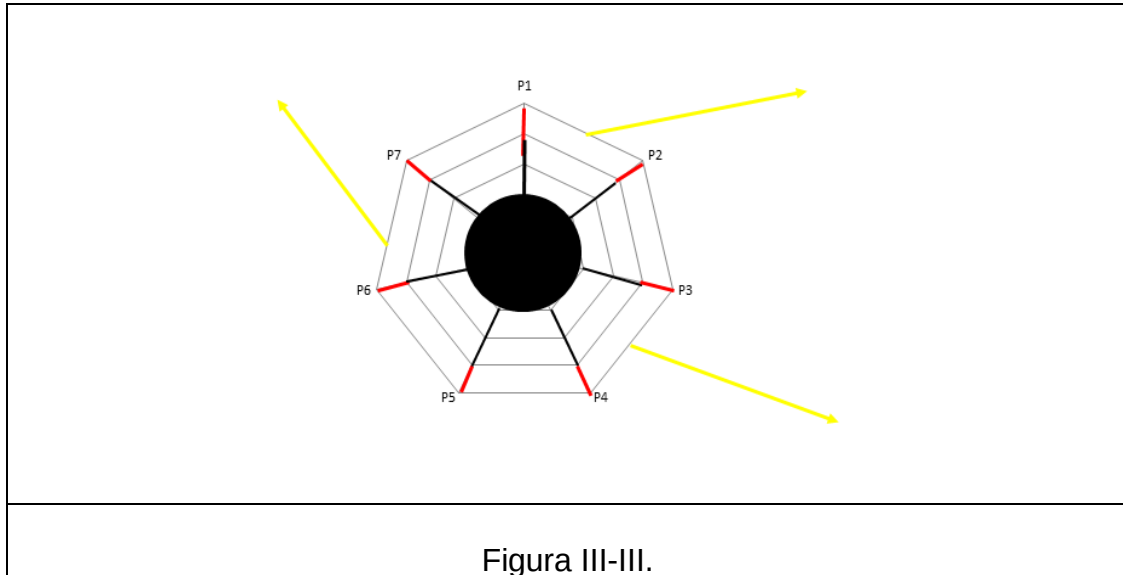


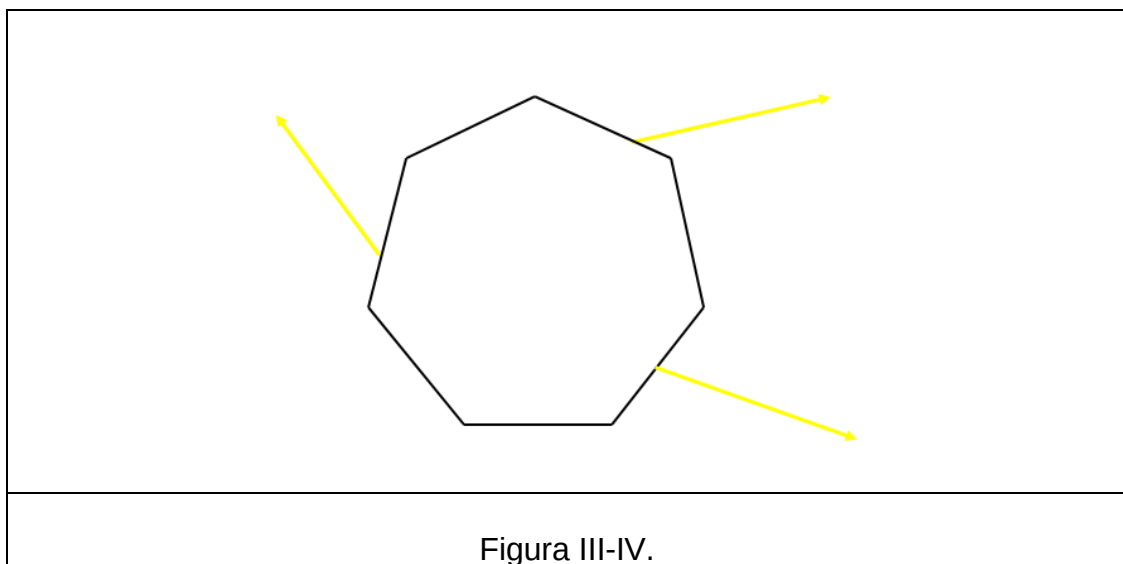
Figura III-II

Al aislar al objeto, en este caso la araña, se deberá indicar que en ese punto se tenía un contacto original con el entorno del cual se ha aislado y lo anterior

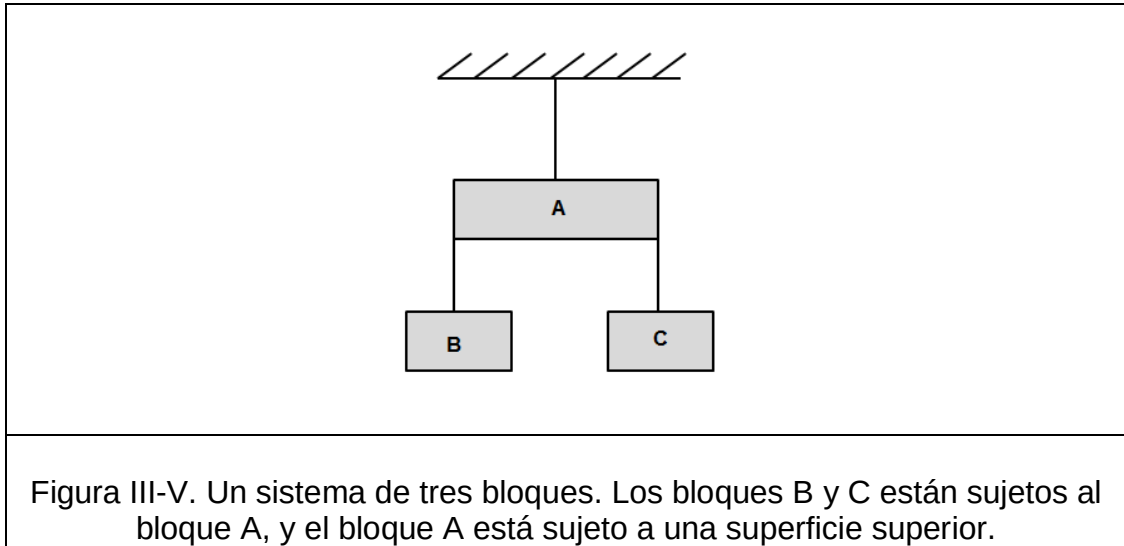
se acostumbra indicar con algún tipo de señalamiento apropiado, como se explicará en la tabla III-I. Por último, si aislamos o que es lo mismo hacemos el diagrama de cuerpo libre de la telaraña con todo y araña con respecto al marco donde esta sostenida tendríamos la siguiente (figura III-III)



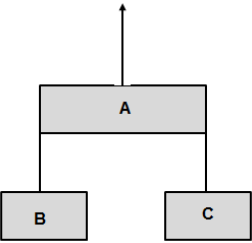
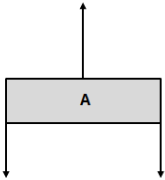
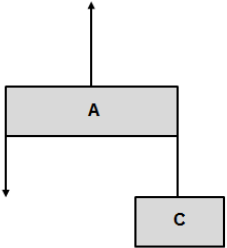
En la figura anterior se consideró el cuerpo libre de la telaraña con todo y araña. Del último DCL mostrado (figura III-III) es importante destacar que hubiera sido lo mismo el no considerar la araña tal y como se muestra en la figura III-IV:



Otro ejemplo más sencillo podría ser el que se muestra en la figura III-V:



En dicha figura III-V se puede observar un sistema de tres bloques (A, B y C) con sus respectivos pesos. Los bloques B y C se encuentran conectados al bloque A y el bloque A se conecta a una superficie superior. El medio de conexión entre los bloques es a través de un cable. Es importante señalar que dicho cable no sufrirá ninguna alteración física, tal como deformación al ser el transmisor de los pesos de los bloques. En la siguiente figura (figura tal) se muestran algunos DCL's que se podrían elaborar a partir de la situación original de la figura III-VI:

	a) Se ha aislado el sistema compuesto por los tres bloques. La línea terminada en punta de flecha indica que dicho sistema estaba conectado a "algo".
	b) Se ha aislado únicamente al bloque A. Las tres líneas que terminan en punta de flecha indican que el bloque está conectado a tres cuerpos o tres puntos más.
	c) En esta representación de un diagrama de cuerpo libre, se han aislado al bloque A y al bloque C de su representación original (figura tal). Las dos líneas terminadas en punta de flecha indican que el bloque A estaba conectado a dos cuerpos o dos puntos más.
Figura III-VI.	

Apoyados en el ejemplo anterior se podrá concluir, entre otras cosas, que la construcción de DCL's es ilimitada. Se indicarán los criterios, de manera general, para hacer el DCL ideal para cualquier problema.

Se ha definido el concepto de DCL utilizando sencillos ejemplos con cables. En el siguiente subtema se ampliará a cualquier tipo de conexión entre los cuerpos y/o superficies.

3.2. FUERZAS DE ACCIÓN Y DE REACCIÓN

En aras de explicar este subtema es obligado que recurramos a la tercera ley de Newton²⁶, también conocida como Principio de acción y reacción nos dice que:

Si un cuerpo A ejerce una acción sobre otro cuerpo B, éste realiza sobre A otra acción igual y de sentido contrario. (III-a)

En un punto de contacto donde interacción dos cuerpos hay un par de fuerzas, una de acción y su respectiva reacción. La dirección de las fuerzas en la misma, con igual magnitud y sentidos opuestos. Por ejemplo, si una persona se para sobre una báscula para conocer su peso dicha persona ejercerá una fuerza sobre el mecanismo de la báscula y la cual le dará una lectura de su peso y la vez la báscula ejerce una fuerza de reacción dirigida hacia la misma persona. Es importante indicar que el sistema compuesto entre la persona y la báscula permanecerá estático, esto es; entre ellos no existe movimiento alguno.

Existe en la vida real una variada forma de conectar diferentes cuerpos entre ellos mismos. Como se indicó en el subtema anterior la forma más sencilla sería la conexión por medio de un cable, pero ¿Cómo representar un DCL de la situación mostrada como el de la figura III-VII?

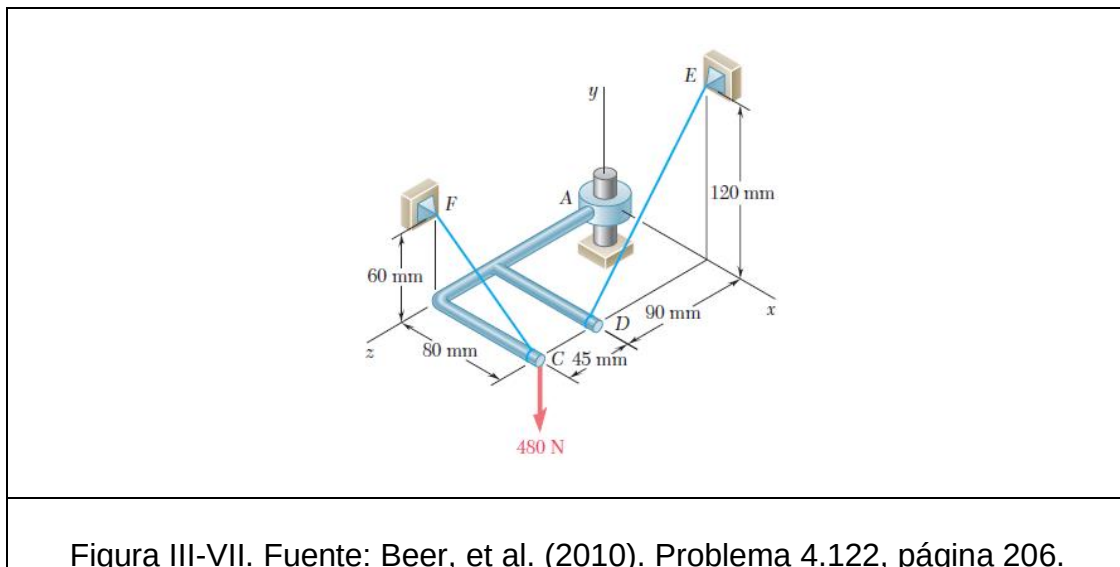
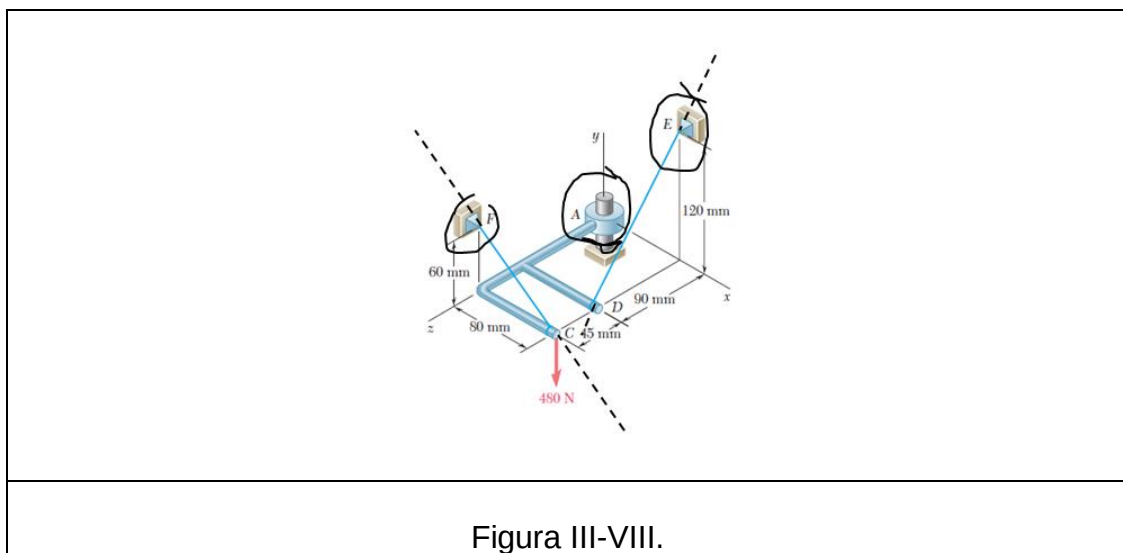


Figura III-VII. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 4.122, página 206.

²⁶ https://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/isaac-newton-cientifico-y-alquimista_10246 (visitada el 26 de octubre de 2019)

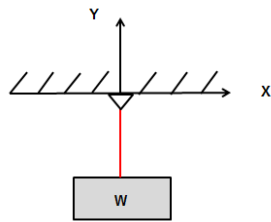
En dicha figura III-VII, se puede observar un cuerpo conectado a un collarín en el extremo A y sostenido por dos cables: EC y DE en los puntos C y D de dicho cuerpo respectivamente. El enunciado del problema pide, para la carga mostrada, determinar la tensión en cada cable y la reacción entre el punto A y el collarín.

Hasta este punto del texto lo único que podemos asegurar es que el sistema mostrado de dicho problema está en equilibrio. Se demostrará en el siguiente subtema como resolverlo, pero antes se dictarán las directrices para construir el necesario DCL de dicho problema para la posterior solución del mismo. En la figura III-VIII se resaltan los puntos de interés a considerar para una útil construcción del DCL.

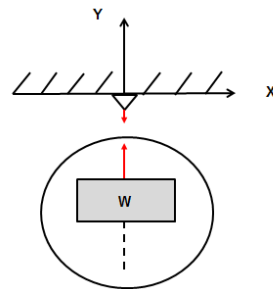


En la figura III-VIII, se han resaltado los puntos de interés para realizar el DCL: A, E y F. Las líneas punteadas representan la línea de acción de la o las posibles fuerzas que actúan en dichos cables en los puntos E y F. Se establece que son posibles fuerzas porque el problema no se ha resuelto, ya que suponer que no existe alguna fuerza es no recomendable, lo recomendable es siempre suponer que existen fuerzas. En el punto A hay un contacto entre el collarín y el pasador vertical, ¿hay una fuerza de contacto entre ambas y como está orientada?, la respuesta, en parte, a la anterior pregunta se dará una vez que se establezca la relación entre el punto de contacto entre dos cuerpos como se desglosa en la tabla III-I

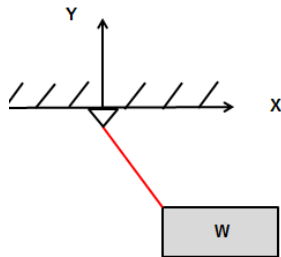
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



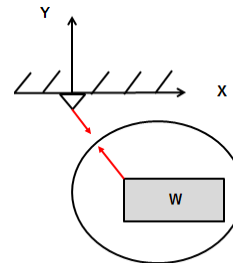
a) Cuerpo de peso W sujeto por un cable a una superficie u otro objeto o cuerpo.



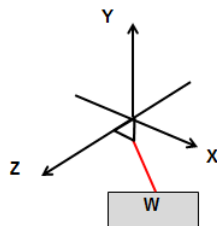
DCL del cuerpo de peso W . La dirección de la fuerza es conocida y en una sola dimensión.



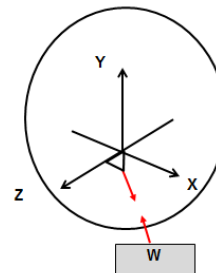
b) Cuerpo de peso W sujeto por un cable en un punto dado



DCL del cuerpo de peso W . la dirección de la fuerza está comprendida en el plano X-Y.



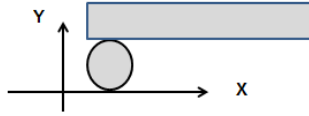
c) Cuerpo de peso W sujeto por un cable en un punto dado. Dicho cable está orientado en el espacio.



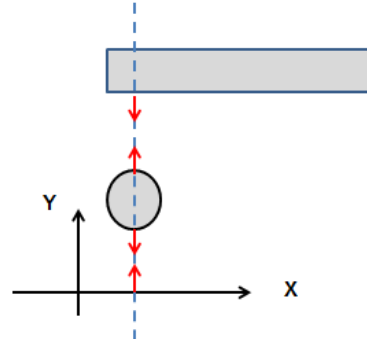
DCL del cable. Dicho cable está orientado en el espacio. Este sería un caso general ya que la fuerza que se ejerce en el cable podría tener componentes orientados en los tres ejes referenciados.

Tabla III-I

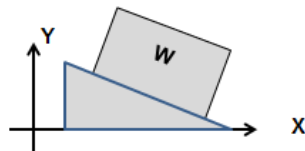
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



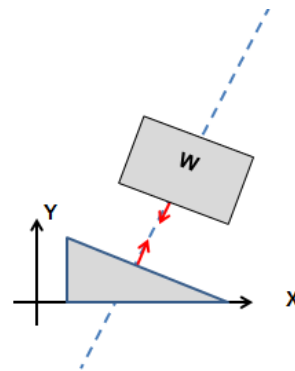
- d) Soporte tipo bola o de balín. Un cuerpo sobre el balín y el balín sobre una superficie.



DCL del cuerpo sobre el cuerpo y el balín, la fuerza de reacción entre ambos será siempre normal al punto de contacto. DCL del balín sobre la superficie, apoyado en el anterior postulado la reacción entre ambos será normal al punto de contacto entre ambos.



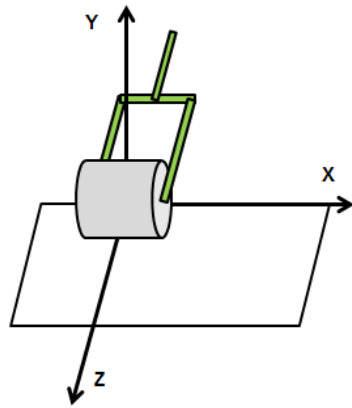
- e) Cuerpo de peso W descansando sobre un plano inclinado liso (sin fricción).



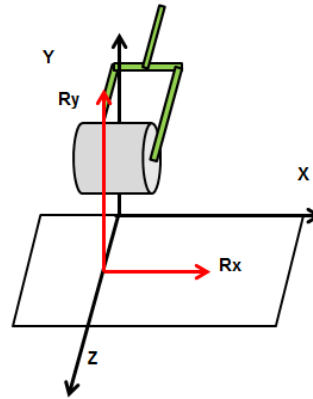
DCL del bloque. La dirección de la reacción será normal o perpendicular a la superficie de contacto. En este caso la fuerza de reacción tendrá componentes en ambos ejes cartesianos.

Tabla III-I (continuación)

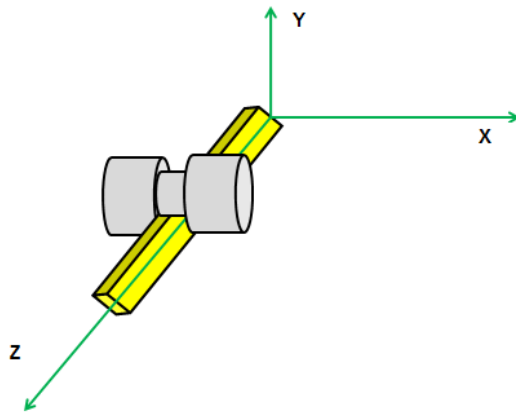
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



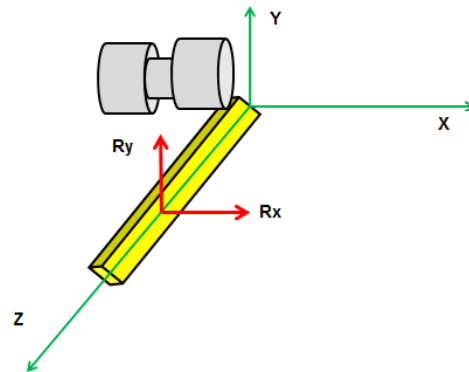
f) Rodillo sobre superficie rugosa



DCL. Reacciones que serán perpendiculares al eje de dirección del rodillo.



g) Rueda sobre riel



DCL. Reacciones que serán perpendiculares a la dirección del riel.

Tabla III-I (continuación)

REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS

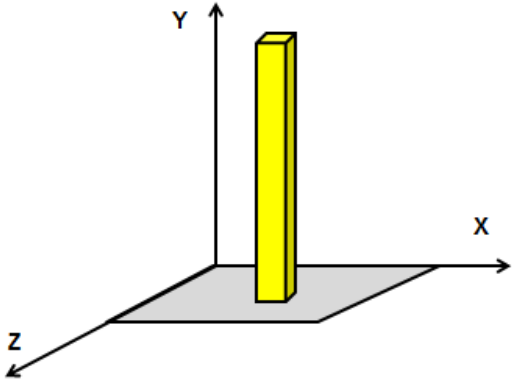
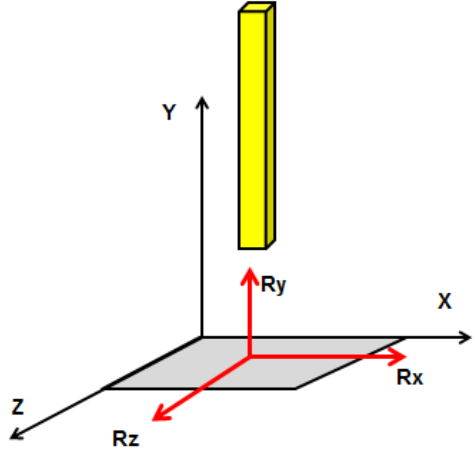
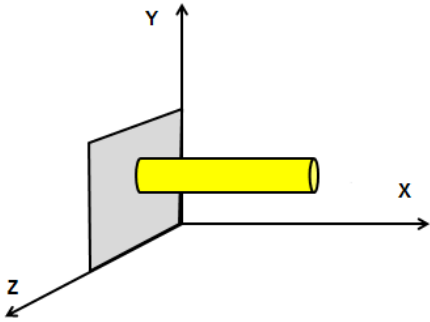
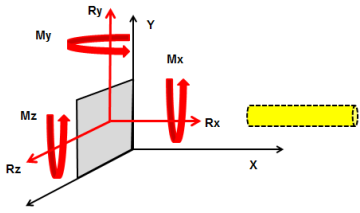
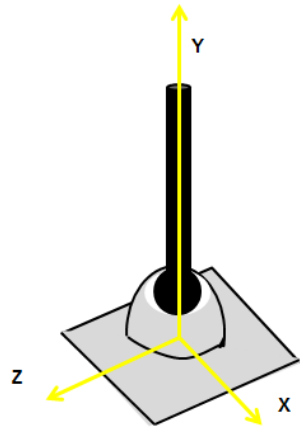
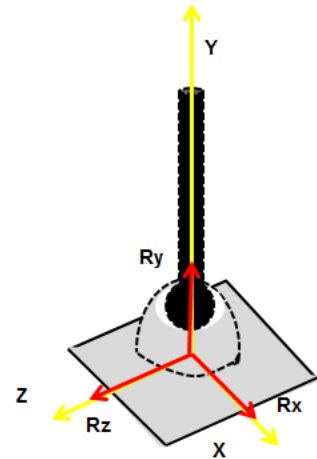
 h) Elemento o cuerpo sobre superficie rugosa	 DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente
 i) Elemento, barra o cualquier cuerpo empotrado.	 DCL. seis posibles reacciones, tres por fuerzas y tres por momentos, orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente

Tabla III-I (continuación)

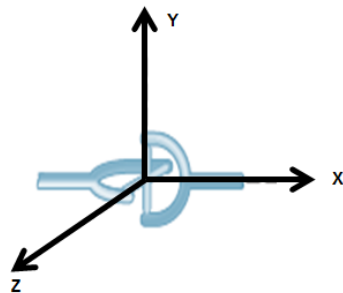
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



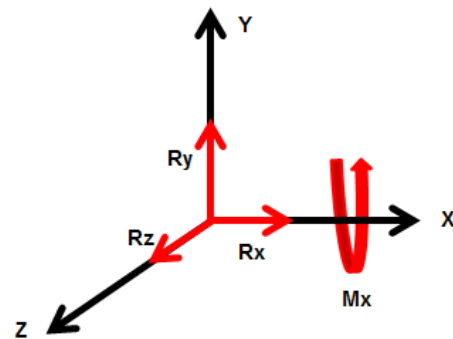
j) Rótula.



DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente



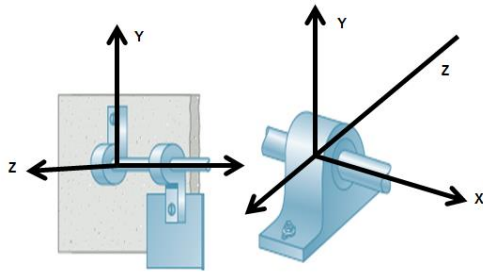
k) Junta universal.(parte de la imagen tomada del texto de Beer)



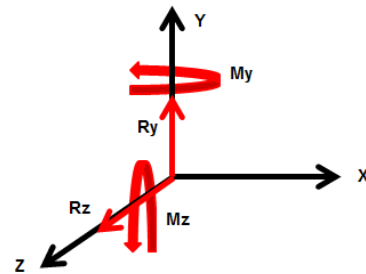
DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente y un momento paralelo al eje que une la junta universal

Tabla III-I (continuación)

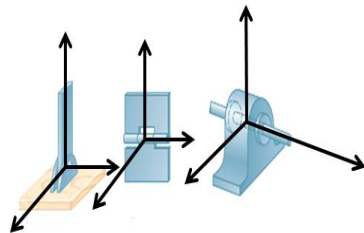
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



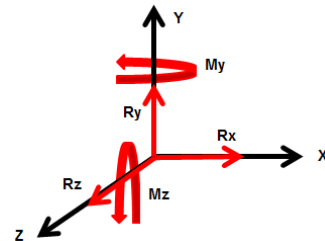
- l) Bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial (parte de la imagen tomada del texto de Beer, et al (2010)).



DCL. Cuatro posibles reacciones, dos de fuerza y dos de momentos. Cada par de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto.



- m) De izquierda a derecha, la primera figura se refiere a un mecanismo conocido como pasador y ménsula. Las siguientes dos figuras corresponden a mecanismos conocidos como bisagra y cojinete. Los tres mecanismos soportan empuje axial y carga radial (parte de la imagen tomada del texto de Beer, et al (2010)).

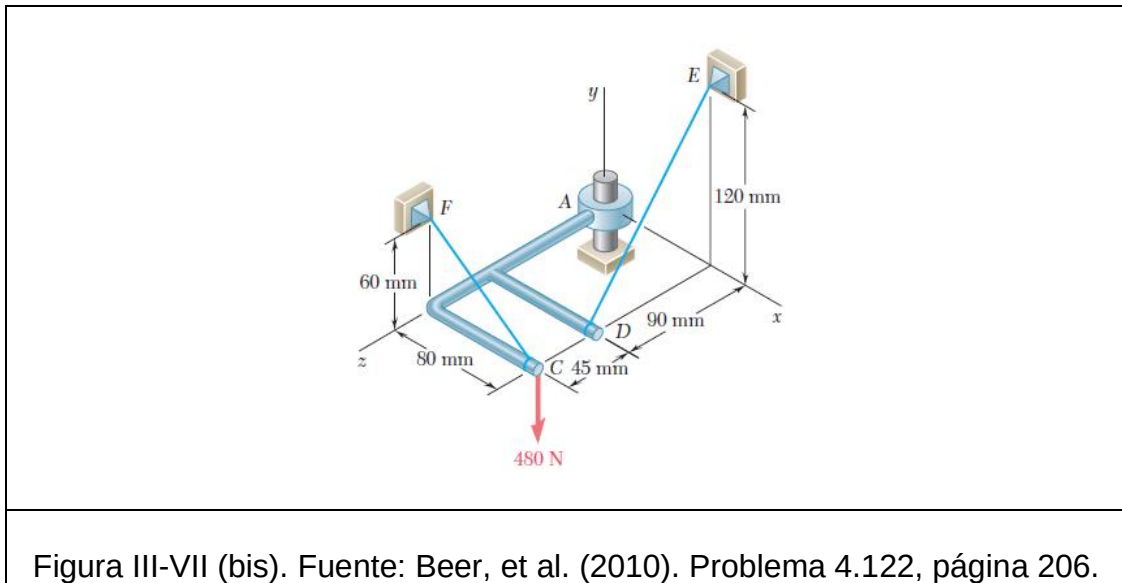


DCL. Cinco posibles reacciones, tres de fuerza y dos de momentos. Dos pares de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira y una reacción (fuerza) paralela a la flecha en cuestión. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto.

Tabla III-I (continuación)

A continuación se tratará, con varios problemas propuestos, para ejemplificar lo establecido en la tabla anterior. Se empezará con un problema propuesto del texto de Beer, et al. (2010) (figura III-VII, bis) y cuyo enunciado dice:

“El ensamble mostrado en la figura se suelda al collarín A, el cual está colocado sobre el pasador vertical. El pasador puede ejercer pares alrededor de los ejes x , y , pero no restringe el movimiento alrededor o a lo largo del eje y . Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en A.”



Primeramente se definirá un sistema de ejes cartesianos, tal y como se muestra en la figura III-IX:

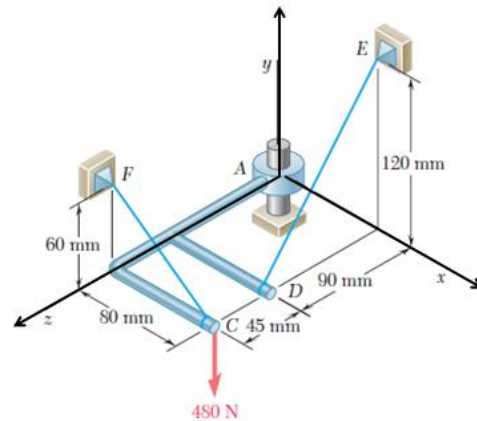


Figura III-IX.

A continuación se aislará el ensamblaje de los puntos A, E y F con la intención de construir el DCL de dicho ensamblaje (figura III-X):

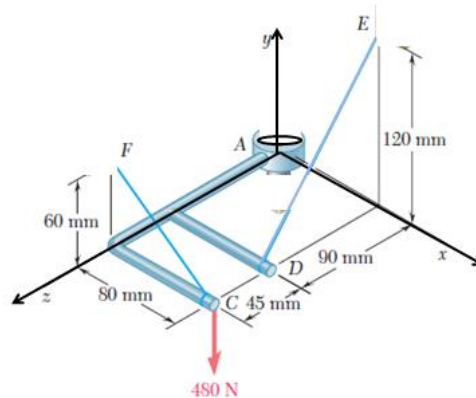


Figura III-X.

El siguiente paso será aplicar el o los criterios de reacciones en los soportes y conexiones entre elementos previstos en la tabla III-I. Para el punto A se aplicará el criterio I de dicha tabla: bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial. Para los puntos E y F se aplicará el criterio c de la misma tabla: Cuerpo de peso W sujeto por un cable en un punto dado. Dicho cable está orientado en el espacio. Es importante indicar que aunque el ensamblaje no tiene algún peso W señalado, la fuerza de 480 N provoca el mismo efecto en el ensamblaje

si es que este tuviera algún peso. En la figura III-XI se representa finalmente el DCL de tal ensamble.

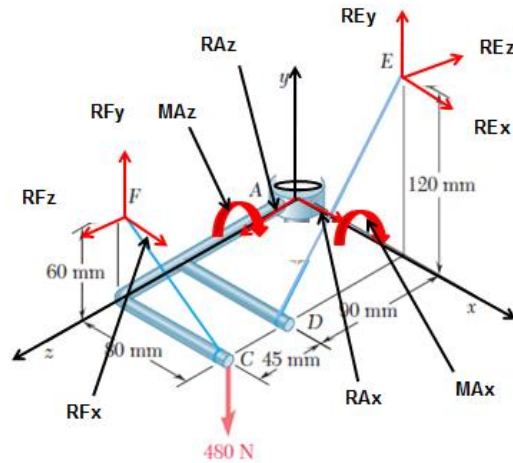


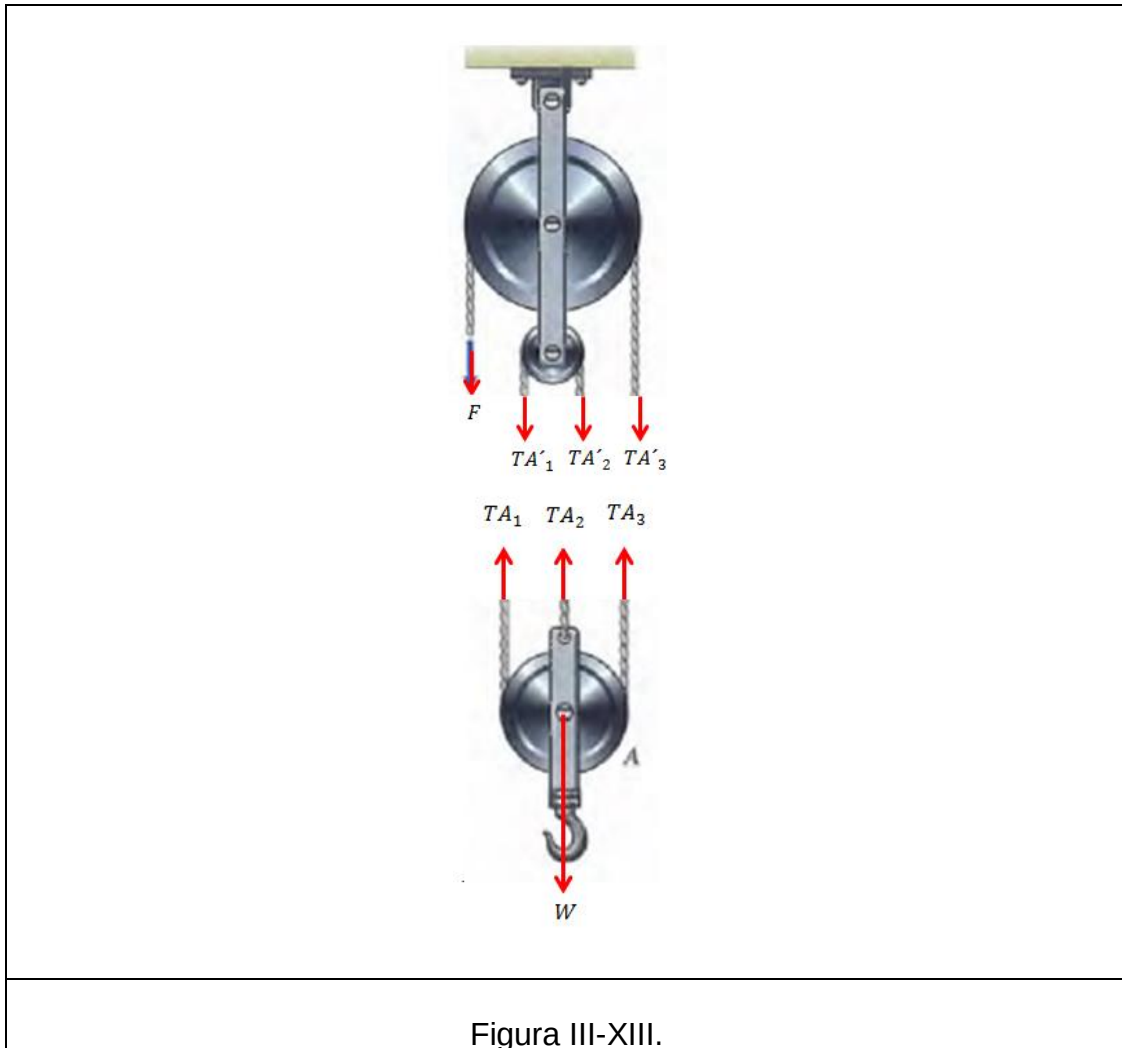
Figura III-XI..

En el siguiente subtema se explicará cómo resolver este problema, ya que el objetivo de este subtema es indicar, únicamente, como elaborar DCL's. A continuación se hará el DCL de un problema propuesto en el texto de Bedford y Fowler (1996). Dicho problema propuesto se muestra en la figura III-XII.



Figura III-XII. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 3.75, página 117.

En este problema propuesto se pide calcular la fuerza F para que el sistema compuesto por las tres poleas y la cuerda que las conecta permanezca inmóvil. Un dato que se da es el peso W de la polea A. En la figura III-XIII se muestra un doble DCL: el de la polea A aislada y el de las dos poleas, igualmente, aisladas. El criterio utilizado para hacer dicho DCL fue el a de la tabla III-I. En este problema todas las fuerzas y reacciones involucradas tendrán la misma dirección.



El siguiente problema que se tomará para realizar el DCL es del texto de Hibbeler (2010). Dicho problema es una estructura en la cual las fuerzas aplicadas y reacciones que resulten estarán comprendidas en el plano. En la figura III-XIV se podrá observar el mismo:

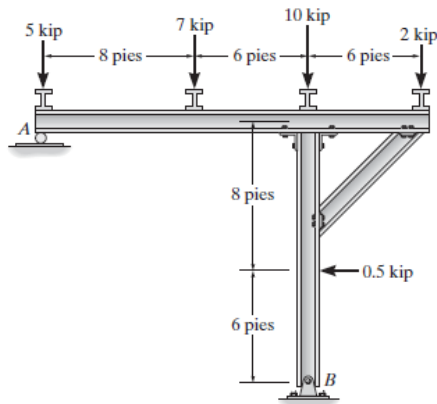


Figura III-XIV. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 5.93, página 261

En dicho problema se pide calcular las reacciones correspondientes en los puntos A y B de la estructura. Para lo anterior se aplicarán los criterios d y m de la tabla III-I, haciendo la observación que respecto al criterio m los momentos no se aplican ya que la estructura está apoyada en el punto A por un balín (criterio d tabla III-I). En la figura III-XV se representa el DCL idóneo para poder resolver este problema.

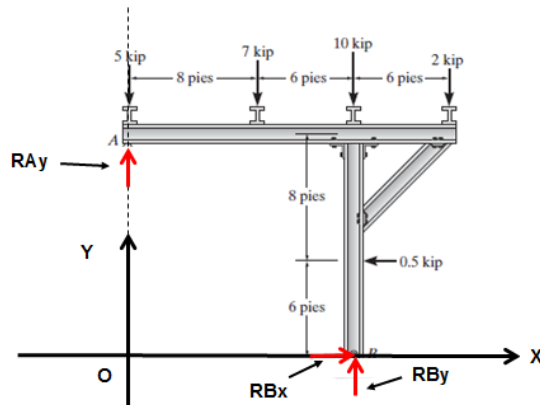


Figura III-XV.

Por último y para cerrar este subtema y del mismo texto de Hibbeler (2010) se tomó el siguiente problema propuesto para realizar el DCL y el cual se ha

considerado adecuado para practicar lo indicado en la tabla III-I. En la figura III-XVI se muestra el mismo

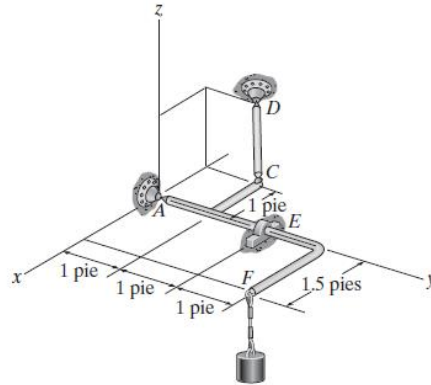


Figura III-XVI. Fuente Hibbeler (2010). Problema 5.71, página 254.

La figura del problema muestra unas barras ensambladas que se utilizan para soportar una carga de peso conocido y localizada en el extremo F. En el enunciado de dicho problema se indica que, tanto en el punto A, C y D, se están utilizando juntas de rótulas esféricas y que en el punto E se utiliza una chumacera lisa. En la figura III-XVII se muestra donde se coloca el origen de los ejes cartesianos y el DCL de este problema propuesto.

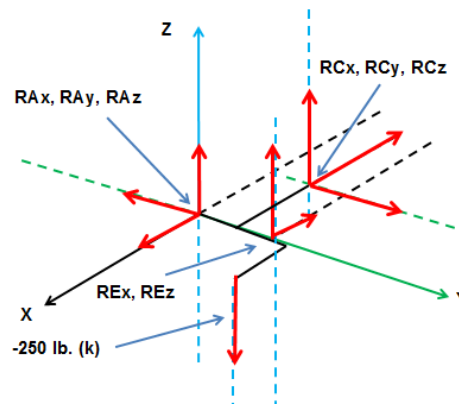


Figura III-XVII

Como se podrá observar en la figura III-XVII, para los puntos A y C se aplicó el criterio j de la tabla III-I: tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente. Para el punto E el criterio I de la misma tabla: cuatro posibles reacciones, dos de fuerza y dos de momentos. Cada par de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. De hecho como se muestra en este DCL, no se tomaron en cuenta los momentos cuya dirección hubiera sido sobre los ejes X y Z respectivamente

3.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Todos los ejemplos que se utilizaron en el subtema anterior tienen lo siguiente en común:

1. Son considerados cuerpos rígidos, y la más importante...
2. Se encuentran en equilibrio.

Respecto al equilibrio se refiere a que tanto todas las fuerzas y todos los momentos que actúan sobre el cuerpo no logran alterar ni su geometría y ni su estado inicial (ya sea en reposo o en movimiento); vectorialmente esto último se representa de la siguiente manera:

$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M} = 0 \quad (\text{III-1})$$

Las anteriores sumatorias vectoriales también se plantean de la siguiente manera:

$$\sum \vec{F} = \sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$\sum \vec{M} = \sum M_x i + \sum M_y j + \sum M_z k = 0 \quad (\text{III-3})$$

El planteamiento escalar de lo anterior sería:

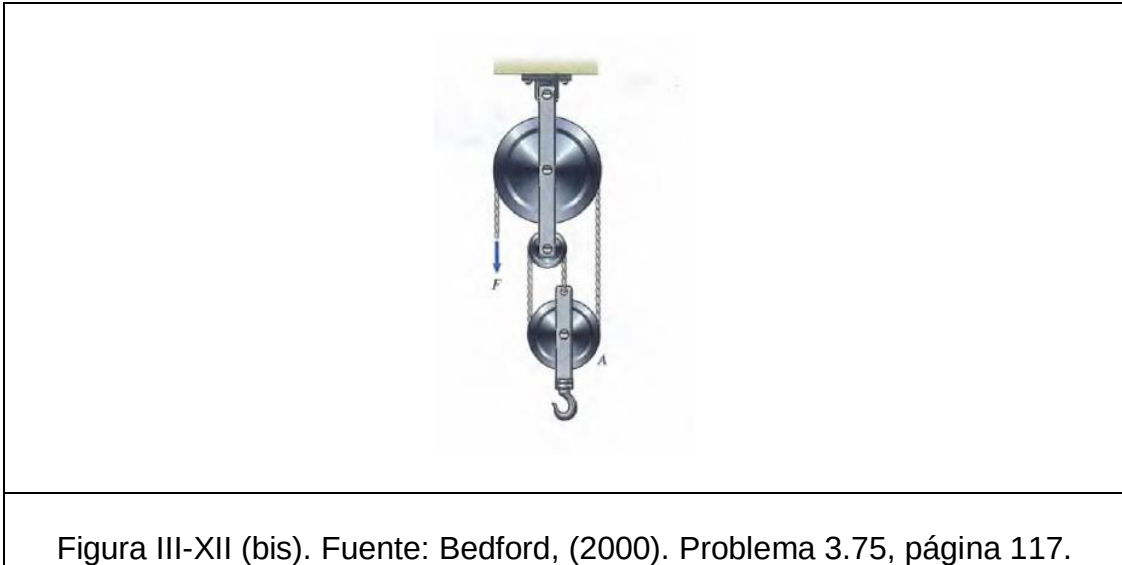
$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0 \quad (\text{III-4})$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0 \quad (\text{III-5})$$

En el siguiente subtema (3.4) se explicará la manera de solucionar problemas afines a lo aquí planteado resolviendo los problemas que se utilizaron en el subtema anterior (3.2). Se pondrá especial énfasis en las estrategias que se podrán utilizar para una solución lo más sencilla posible.

3.4. APLICACIONES BIDIMENSIONALES.

Aunque en este subtema se refiere a fuerzas definidas y momentos definidos en un plano, el primer problema en donde se aplicarán los conceptos vistos en los anteriores subtemas, tiene como característica que todas las fuerzas involucradas son paralelas al eje vertical Y . Lo anterior será una excepción con el objetivo de demostrar, en una dimensión, las condiciones básicas de equilibrio estático y la importancia de saber hacer apropiadamente el DCL.



En el enunciado de este problema se indica que la polea A tiene un peso de 60 libras y se desea saber el valor de la fuerza F para que el sistema se mantenga en equilibrio estático. Una estrategia para poder encontrar el valor de F es el observar que a simple vista que la polea A está conectada a una polea pequeña mediante dos segmentos de cuerda y a la polea mayor con un tercer segmento. Con la intención de resolver este problema con pocos trazos es construir el siguiente DCL tal y como se muestra en la figura III-XVIII:

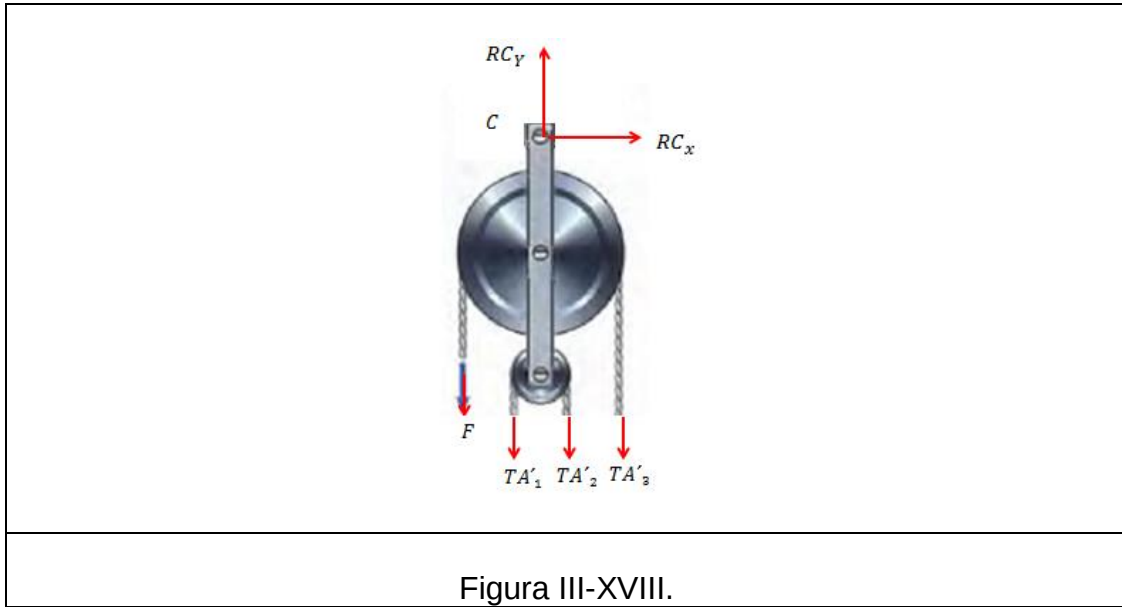


Figura III-XVIII.

Como ya se explicó en los subtemas anterior el construir un DCL del sistema puede incluir todo el sistema o parte de él. En la figura III-XVIII se muestra un DCL haciendo un “corte” de los cuatro segmentos de cuerda aplicando el criterio a de la tabla III-I. En el punto C, de la figura III-XVIII; el sistema de las tres poleas se conecta a una superficie mediante un perno sin fricción y por lo tanto aquí se aplica el criterio I de la misma tabla. De lo anterior se podrán escribir las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = \sum F_x i + \sum F_y j = 0$$

$$\sum F_x = RC_x = 0$$

$$\sum F_y = F + TA'_1 + TA'_2 + TA'_3 + RC_y = 0$$

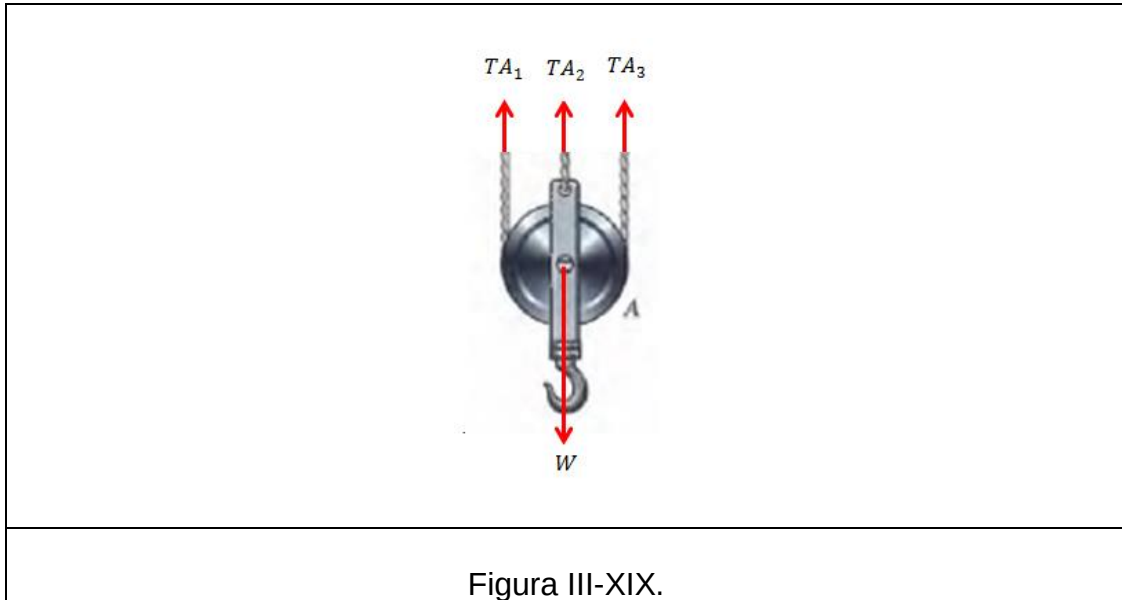
Observando la simetría de los cuatro segmentos de la cuerda se podrá afirmar que:

$$F = TA'_1 = TA'_2 = TA'_3$$

Replantando la ecuación de sumatoria de fuerzas en dirección Y se tiene:

$$\sum F_y = 4F + RC_y = 0$$

Una ecuación con dos incógnitas; un bien elaborado DCL pero inútil para contestar el cuestionamiento del problema. De lo anterior se podrá afirmar que no basta el saber hacer DCL's, también hay que saber identificar si se toma todo el sistema a analizar o que parte del sistema a analizar. El DCL útil para este problema se presenta en la figura III-XIX.



La ecuación aplicable en este caso es:

$$\sum F_y = TA_1 + TA_2 + TA_3 - 60lb = 0$$

Y por la simetría de los segmentos de cuerda ya comentada

$$TA_1 = TA_2 = TA_3$$

Se tiene finalmente que:

$$\sum F_y = 3TA_3 - 60lb = 0; TA_3 = 20lb$$

Elaborando un nuevo DCL que involucra a las tres poleas (figura III-XX):

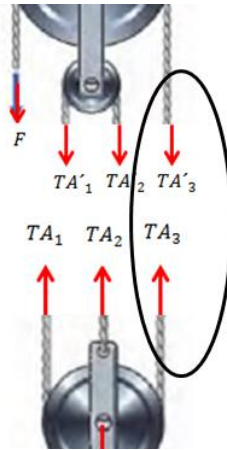


Figura III-XX.

$$\sum F_y = TA_3 + TA'_3 = 0; TA'_3 = -20lb$$

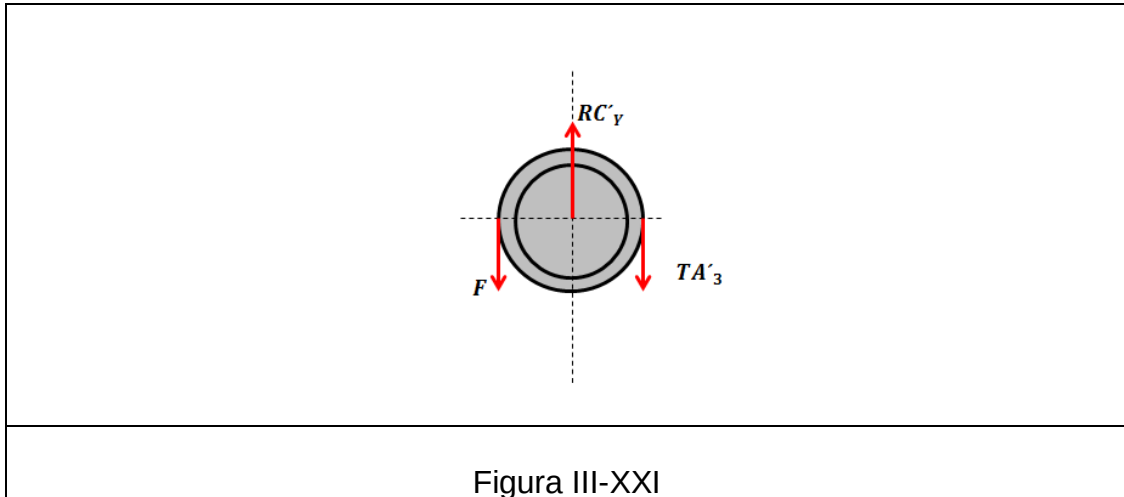
Y como

$$F = TA'_3$$

Finalmente:

$$F = -20 lb$$

¿Pero por qué se asegura que $F = TA'_3$, cómo demostrar lo anterior? Para contestar esto último hagamos el DCL únicamente de la polea mayor (figura III-XXI)



Ya se había encontrado que no existen ni fuerzas ni reacciones en dirección horizontal. Suponiendo cualquier radio (en este caso supongamos $r = 10$ pulgadas) para la polea de la figura tal y haciendo momentos en el punto C se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_c &= 10iXTA'_3j - 10iXFj = 0; 10TA'_3 - 10F \\ &= 0 \text{ (k, lb - pulgada)} \\ 10TA'_3 - 10F &= 0 \text{ (k, lb - pulgada)} \\ TA'_3 &= F\end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar.

El siguiente problema a resolver se muestra en la figura III-XIV (bis):

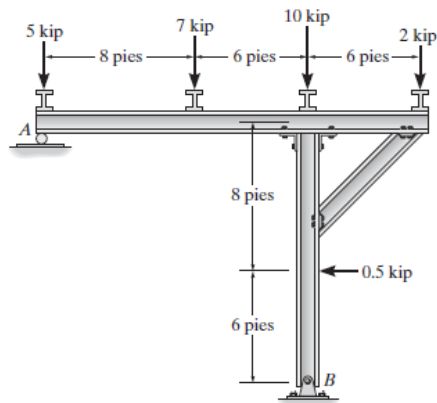


Figura III-XIV (bis). Fuente: Hibbeler (2010). Problema 5.93, página 261

Como se recordará se pide encontrar las reacciones en los puntos A y B, respectivamente. Como se indicó en el ejemplo anterior, no basta con saber trazar el DCL correctamente, hay que saber que parte del problema es más conveniente aislar. Por ejemplo, tracemos un DCL del problema en cuestión tal y como se muestra en la figura III-XXII:

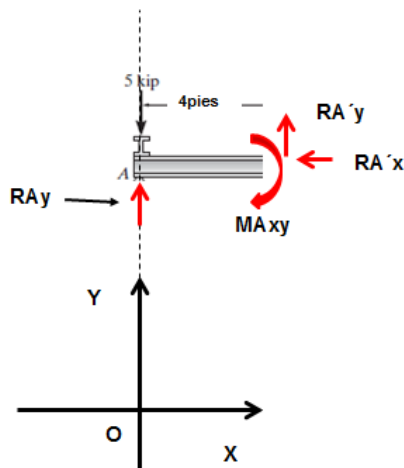


Figura III-XXII.

En el DCL que se muestra en la figura III-XXII, se muestra un trozo de la viga comprendido entre el punto A y cuatro pies en dirección horizontal y a la derecha de dicho punto A. En lo que respecta a la reacción trazada en el punto A se aplicó el criterio d de la tabla III-I y el cual indica que se presenta una reacción normal a la línea donde se apoya el balín, en este caso la dirección de la reacción es vertical. En lo que respecta al extremo derecho del trozo de viga, discrecionalmente seleccionado, se aplica el criterio i de la misma tabla, para lo cual si se hace un corte como el que aquí se muestra es equivalente a suponer que dicho tramo esta empotrado y como se está en dos dimensiones habrá una reacción comprendida en el plano $X - Y$ la cual y por así convenir esta reacción se puede expresar en dos fuerzas perpendiculares entre si y orientadas en los eje cartesianos X, Y . Por todo lo anterior podemos plantear nuestras respectivas ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; RA'_x = 0 \\ \sum F_y &= 0; RA_y + RA'_y - 5kip = 0 \\ \sum \vec{M}_A &= 0; 4iXRA'_y j + MA_{xy} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene:

1. Un correcto DCL,
2. Tres incógnitas: RA_y RA'_y , MA_{xy} y...
3. Dos ecuaciones

Por lo tanto no podemos, por este camino, resolver este problema. De aquí la importancia de saber trazar un útil DCL. Con el mismo problema podemos trazar otro DCL que solo nos llevará al mismo y nulo resultado. Para explicar lo anterior utilizaremos el DCL que se muestra en la figura III-XXIII:

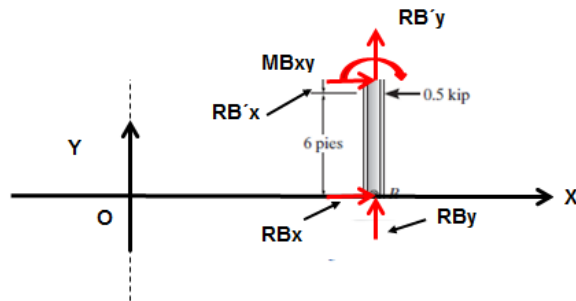


Figura III-XXIII.

En la figura III-XXIII, se muestra un trozo vertical de la estructura comprendida entre el punto B y hacia arriba seis pies. Para dibujar las reacciones en el punto B se utilizó el criterio m de la tabla III-I y el cual indica definir reacciones, cada una dirigida sobre cada uno de los ejes cartesianos (y) y como este problema solo contempla dos dimensiones es por eso que solo se define: y . En la parte superior de trozo se aplica el criterio i de la misma tabla III-I, para lo cual se hace el corte como el que aquí se muestra recordando que es equivalente a suponer que dicho tramo esta empotrado y como se está en dos dimensiones habrá dos reacciones y un momento comprendidos en el plano $X - Y$. Planteando las ecuaciones de equilibrio se tendrá que:

$$\sum F_x = 0; RB_x + RB'_x - .5kip = 0$$

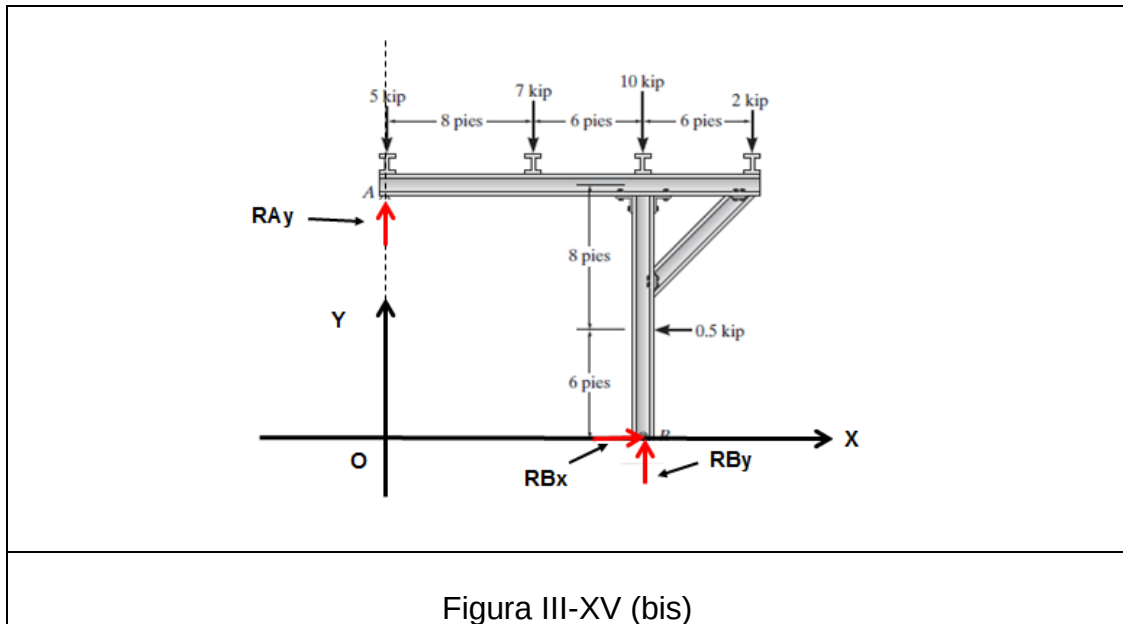
Es muy importante interpretar RB'_x , esta es una reacción interna que se deberá siempre considerar cuando se hace un DCL como el aquí mostrado, que su valor sea igual o diferente a cero se sabrá cuando se hagan los despejes y cálculos pertinentes. Continuando con nuestras ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_y = 0; RBy + RB'_y = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0; 6jX.5i + \vec{MB}_{xy} = 0; MB_{xy} = 3.0 \text{ lb} - \text{pies} (k)$$

Igualmente, aunque se ha encontrado el momento reactivo en el tramo bajo consideración, con las ecuaciones planteadas no se podrá responder lo requerido.

Para dar respuesta recurriremos nuevamente al DCL que ya se había definido en la figura III-XV. Recordando que se aplicaron para tal DCL los criterios d y m de la tabla III-I.



Planteando, ahora, nuestras recurrentes ecuaciones de equilibrio se tiene que

$$\sum F_x = 0; RB_x - .5kip = 0$$

$$RB_x = +.5kip$$

$$\sum F_y = 0; RB_y + RA_y - 5 - 7 - 10 - 2 = 0;$$

$$RB_y + RA_y = 24 kip$$

La anterior ecuación presenta dos incógnitas. Tendremos que plantear una ecuación más y que no se incremente el número de incógnitas para encontrar los valores de las reacciones orientadas en el eje vertical. Para poder hacer lo anterior recurriremos a la ecuación de momentos. De acuerdo a la definición de momento dado en el tema anterior (ecuación II-1) y al DCL último elaborado (figura III-XV, bis) se podrá hacer momentos en cualquier punto de

dicho DCL, lo importante es hacerlo en un punto en donde concurran el mayor número de líneas de acción de las direcciones de las fuerzas incógnitas para que dichas incógnitas sean eliminadas y solamente ocupar los datos conocidos, por ejemplo: si se decide hacer momentos en el punto (D) donde está aplicada la fuerza de 2 kip., (figura III-XXIV).

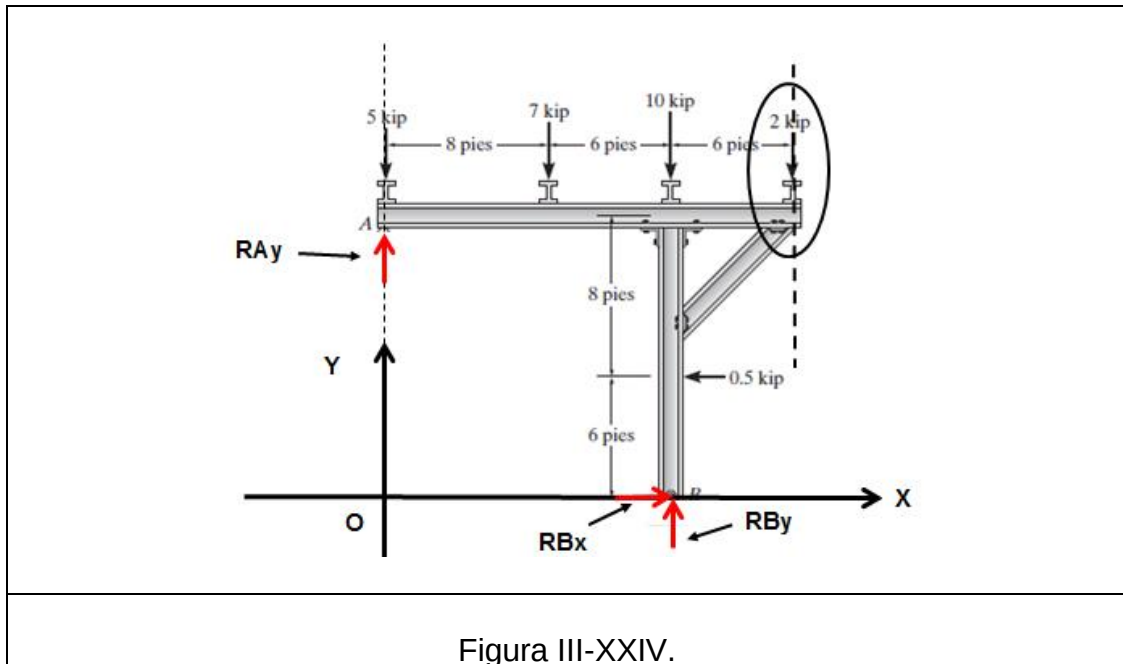


Figura III-XXIV.

Nuestra ecuación de momentos quedaría de la siguiente manera:

$$\sum \vec{M}_D = -20iX - 5j - 20iXRA_yj - 14iX - 7j - 6iX - 10j - 6iXRB_yj - 14jX.5i - 8jX - .5i = 0$$

(La anterior ecuación presenta unidades de lb pie)

$$\sum \vec{M}_D = -20RA_y - 6RB_y + 247 = 0; (lb.pie)k$$

Con lo anterior ya se obtiene la segunda ecuación manteniendo constante el número de incógnitas, pero el único inconveniente, por así llamarlo, es que tendríamos que hacer unos despejes para encontrar las reacciones verticales y lo anterior se podría simplificar si realizamos momentos en el punto A o en el punto B con la intención de eliminar una u otra reacción ya que la línea de acción consideraría al punto seleccionado. Para demostrar lo anterior se harán momentos en el punto B y el cual está dentro de la línea de acción de la

reacción RB_y y por lo tanto no se tomará en cuenta para realizar momentos, Nuestra nueva ecuación de momentos quedaría de la siguiente manera:

$$\sum \overrightarrow{M_B} = -14iX - 5j - 14iXRA_yj - 6iX - 7j + 6iX - 2j - 8jX - .5i - 14jX.5i \\ = 0 \text{ (lb. pie)}$$

Una sola ecuación con una sola incógnita.

$$\sum \overrightarrow{M_B} = -14RA_y + 103 = 0 \text{ (lb - pie)k}$$

$$-14RA_y = -103;$$

$$RA_y = 7.35 \text{ lb.}$$

Con el resultado anterior y replanteando la ecuación de sumatoria de fuerzas en dirección vertical se tiene que:

$$RB_y + RA_y = 24 \text{ kip}; RB_y = -RA_y + 24$$

$$RB_y = 16.6 \text{ kip}$$

Como queda demostrado, hacer una selección idónea tanto del DCL como del punto donde realizar momento nos simplificará los cálculos y nos ahorrar algo de tiempo.

Por último, del DCL mostrado en la figura III-XV (bis), se planteó la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sum F_x = 0; RB_x + RB'_x - .5kip = 0$$

Debido a que el valor de RB_x que se encontró líneas arriba es de:

$$RB_x = +.5kip$$

Ahora si se puede afirmar que el valor de:

$$RB'_x = 0$$

Lo anterior tiene como propósito el establecer que siempre se deberán respetar los criterios establecidos en la tabla III-I para una correcta elaboración de DCL's, ya que el suponer que dicha reacción (RB'_x) sería igual a cero sin una comprobación plena podría haber dado resultados no deseados. Esto es,

si se considera RB'_x y después da como resultado que es igual a cero no afecta en lo mínimo, pero si RB'_x se supone igual a cero y no lo es, entonces tendremos un resultado equivocado.

El siguiente problema propuesto a resolver se muestra en la figura III-XXV del texto de Beer, et al (2010). En él se pide encontrar el rango de valores de la variable de tal manera que la fuerza de reacción en el extremo este entre el siguiente rango de valores:

$$-100 \text{ lb} \leq R_b \leq +200 \text{ lb}.$$

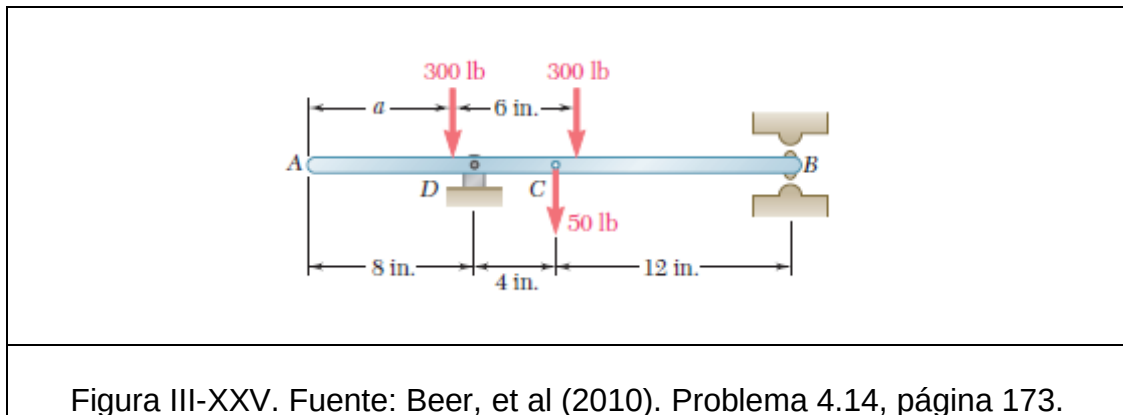


Figura III-XXV. Fuente: Beer, et al (2010). Problema 4.14, página 173.

Es importante destacar de este problema que la distancia entre las dos fuerzas de -300 lb es constante e igual a seis pulgadas. De manera arbitraria se escogerá el punto A como el origen de los ejes cartesianos X-Y, por comodidad matemática se realizarán momentos en el punto D de dicha figura ya que con esa decisión se eliminan las siguientes incógnitas:

$$RD_x, RD_y$$

Sabiendo que $0 \leq a \leq 18 \text{ in}$, (esto último debido a la geometría del mecanismo, ya que cuando $a = 18 \text{ in}$ la segunda fuerza de -300lb estará aplicada exactamente en el punto B del mecanismo) los brazos de palanca de cada una de las fuerzas con respecto al punto D del problema también variaran. Llamemos $sr_{1/D}$ y $sr_{2/D}$ las distancias relativas entre el punto D y las líneas de acción de cada fuerza de -300 lb tal y como se muestra en la III-XXVI.

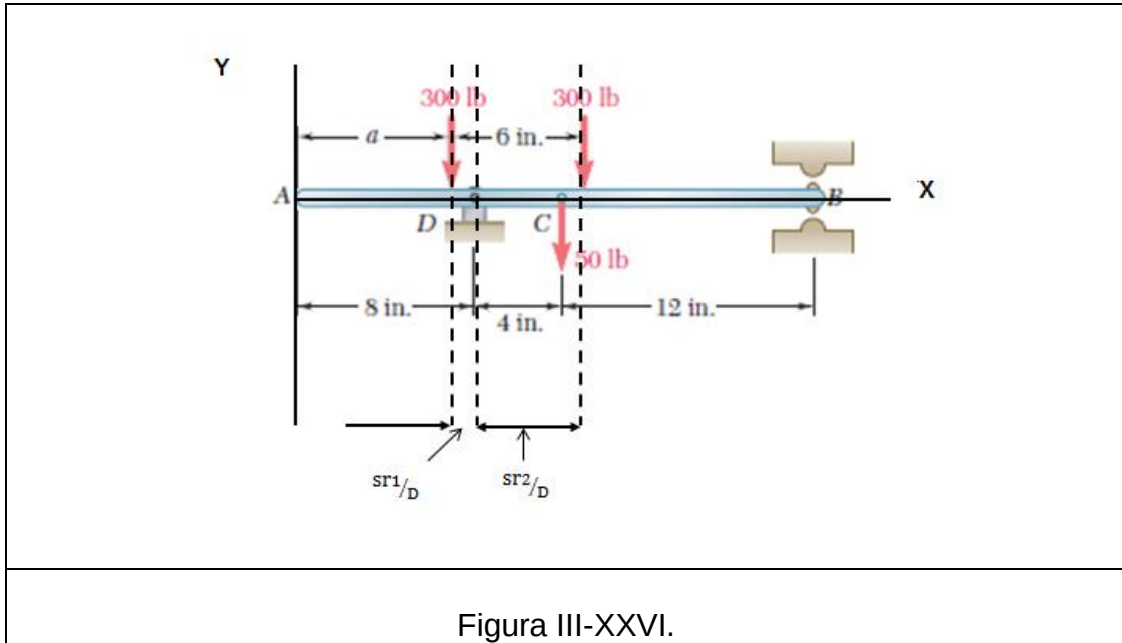


Figura III-XXVI.

Debido a que las distancias $sr_{1/D}$ y $sr_{2/D}$ son variables las dejaremos, a ambas, en función de a utilizando posiciones relativas y absolutas:

Sea s_D la distancia absoluta del punto D respecto al origen y sea r_1 la distancia absoluta de a con respecto al mismo origen $\therefore s_D = 8 \text{ in}$ y $sr_1 = a$

Asimismo sea $sr_{1/D}$ la distancia relativa de a con respecto a D

se tendrá finalmente que $sr_{1/D} = sr_1 - s_D = a - 8$

$$sr_{1/D} = (a - 8)$$

E igualmente:

Sea r_2 la distancia absoluta entre la línea de acción de la segunda fuerza de -300 lb con respecto al origen $sr_2 = 6 + a$

Asimismo sea $sr_{2/D}$ la distancia relativa de dicha línea de acción

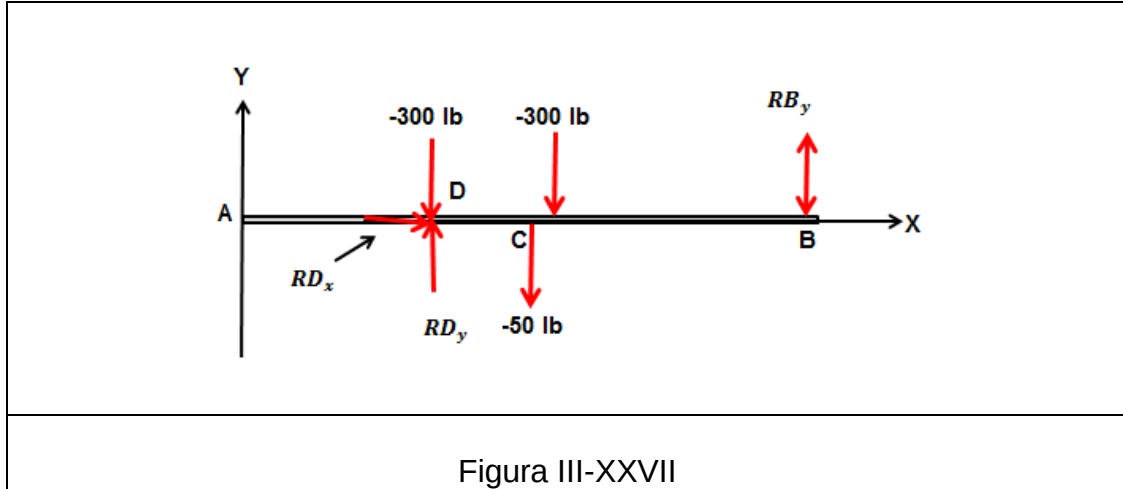
de la segunda fuerza

respecto a D se tendrá finalmente que $sr_{2/D} = sr_2 - s_D$

$$= (6 + a) - 8$$

$$sr_{2/D} = (a - 2)$$

Supongamos que el valor de $a = 8 \text{ in} \therefore sr_{1/D} = 0$ y $sr_{2/D} = 6 \text{ in}$, con los anteriores datos se elaborará el DCL suponiendo que existe una reacción en el extremo B de tal mecanismo. Lo anterior se podrá visualizar en la figura XXVII:



En este supuesto y recordando que se ha escogiendo el punto D como punto de referencia para realizar los momentos, dicha ecuación quedaría de la siguiente manera

$$\sum \vec{M}_D = 4iX - 50j + 6iX - 300j + 16iXRB_yj = 0, (lb - in)k$$

$$RB_y = \frac{2000}{16} = 125lb$$

Como dicho valor está dentro del rango de:

$$-100 \text{ lb} \leq R_b \leq +200 \text{ lb}.$$

Si es posible, por lo tanto, que $a = 8 \text{ in}$.

Para encontrar el rango de valores deseado se hará dejando RB_y en función de a de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_D &= sr_{1/D}iX - 300j + 4iX - 50j + sr_{2/D}iX - 300j + 16iXRB_yj \\ &= 0, (lb - in)k \end{aligned}$$

Por lo tanto se tendrá que:

$$-300(a - 8) - 200 - 300(a - 2) + 16RB_y = 0, (lb - in)k$$

Despejando RB_y :

$$RB_y = \frac{-2800 + 600a}{16}, lb.$$

Con lo anterior y haciendo una corrida en una hoja de Excel se podrán calcular los siguientes valores (tabla III-II):

a	RBy
0	-175
1	-138
2	-100
3	-63
4	-25
5	13
6	50
7	88
8	125
9	163
10	200
11	238
12	275
13	313
14	350
15	388
16	425
17	463
18	500

Tabla III-II.

Por lo tanto, como se muestra en dicha tabla III-II y resaltado en color azul, el rango de los valores de a deberán estar entre 2 y 10 pulgadas.

Para cerrar este subtema se tomará un problema propuesto del texto de Hibbeler (2010) y el cual se muestra en la figura III-XXVIII.

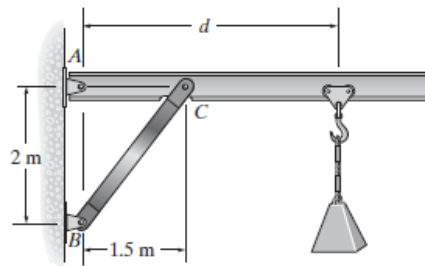


Figura III-XXVIII. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 5.29, página 229.

Como se podrá observa de la figura tal en dicho problema se suspende un peso W de un trole cargador que se deberá mover, de acuerdo al enunciado del problema, a lo largo del riel horizontal en el siguiente rango de valores:

$$1.7 \text{ metros} \leq d \leq 3.5 \text{ metros}$$

Con los anteriores datos, además de los que se pueden observar a simple vista de dicha figura, se pide calcular la fuerza a lo largo del tirante articulado BC y la magnitud de la fuerza en el pasador A . Ambos cálculos dejarlos expresados en términos de la variable d . Asimismo graficar RBC y F_A .

Para resolver este problema primeramente se hará el DCL apropiado tal como se muestra en la figura III-XXIX:

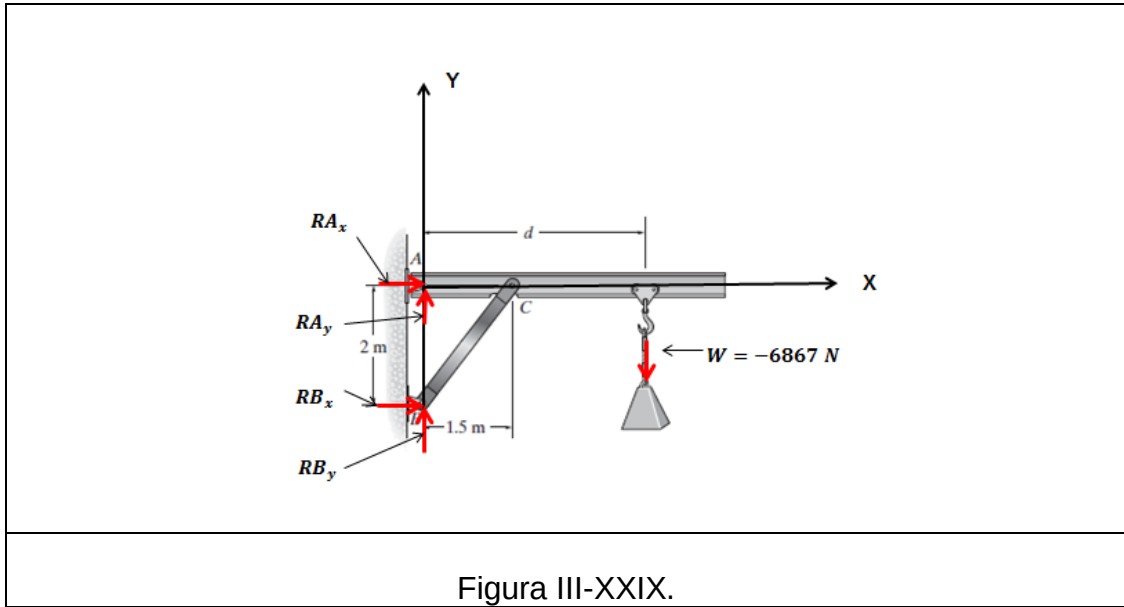


Figura III-XXIX.

De acuerdo al DCL y al número de incógnitas que se observan a simple vista (RA_x, RA_y, RB_x, RB_y) de dicho DCL lo idóneo será realizar momentos en el punto A de la estructura, ya que así se eliminan al mismo tiempo tres reacciones que son incógnitas (RA_x, RA_y, RB_y) ya que la línea de acción de dichas reacciones cruzan por el punto A. de lo anterior se plantea que:

$$\sum \vec{M}_A = -2jXRB_xi + diX(-6867)j = 0, Nm$$

Haciendo los cálculos pertinentes se obtiene que:

$$RB_x = 3433.5 * d, N$$

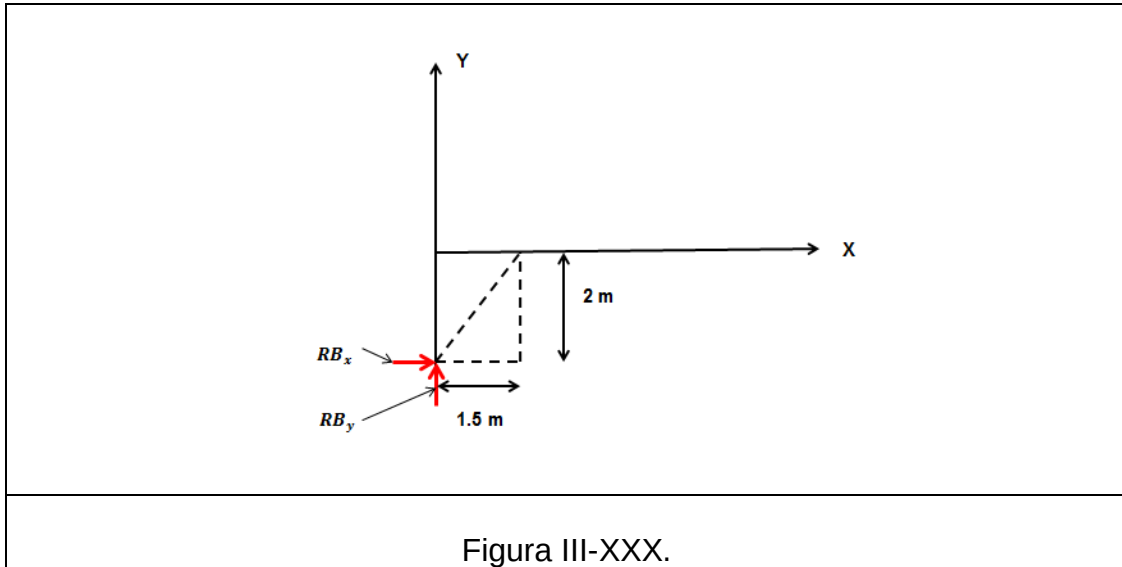
Recordando que por cosenos directores se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\vec{RBC} = RB_xi + RB_yj$$

$$\vec{RBC} = RBC(\cos \theta_x i + \cos \theta_y j)$$

$$RB_x = RBC \cos \theta_x$$

Y en la figura III-XXX se podrán observar los datos pertinentes para el cálculo de los cosenos directores.



Por lo tanto se tiene que:

$$\cos \theta_x = \frac{1.5}{2.5}$$

Ya se había encontrado que:

$$RB_x = 3433.5 * d$$

Sustituyendo se tiene que:

$$3433.5 * d = \frac{RBC * 1.5}{2.5};$$

Con lo anterior se encuentra la primera reacción en función de d :

$$RBC = 5722.5 * d, N$$

Como se requerirá saber RA_y , está, también quedará en función de d :

$$RB_y = RBC \cos \theta_y = 5722.5 * d * \frac{2}{2.5}$$

$$RB_y = 4578 * d, N$$

En lo que respecta a las reacciones en el punto A: RA_x , RA_y la primera se obtiene de la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\sum F_x = RA_x + RB_x = 0, y como RB_x = 3435.5 * d \therefore RA_x = -3435.5 * d, N$$

Y la segunda reacción:

$$\sum F_y = -6867 + RB_y + RA_y = 0, N$$

Despejando:

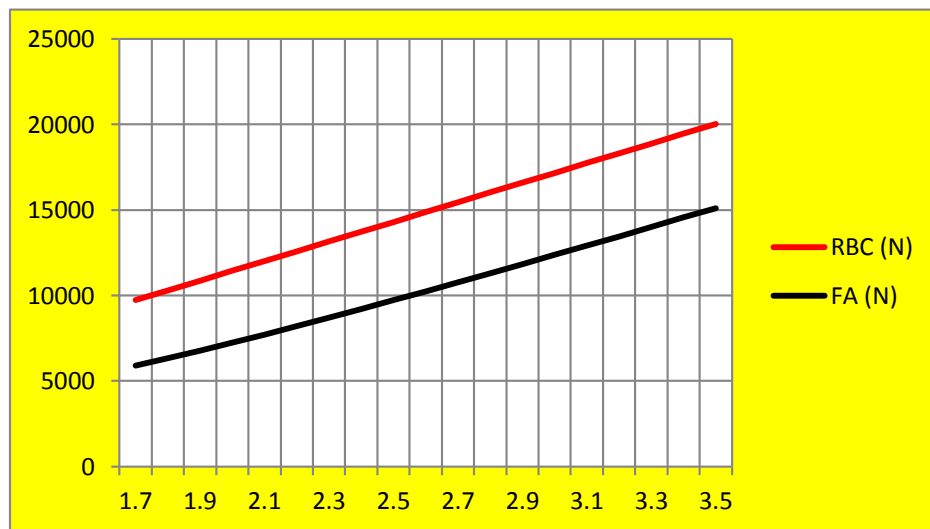
$$RA_y = 6867 - 4578 * d, N$$

Finalmente se plantea RA en función de d:

$$RA = (RA_x^2 + RA_y^2)^{.5} = ((-3433.5 * d)^2 + (6867 - 4578 * d)^2)^{.5}, N$$

$$RA = ((-3433.5 * d)^2 + (6867 - 4578 * d)^2)^{.5}, N$$

Y los comportamientos de *RBC* y *FA* vs *d* se muestran en la gráfica tal III-I



Gráfica III-I

3.5. APLICACIONES TRIDIMENSIONALES.

En el subtema anterior las ecuaciones de equilibrio se limitaron a tener cuando mucho tres incógnitas; dos cuyas unidades eran de fuerza y una cuyas unidades eran de fuerza por distancia. La ampliación a tres dimensiones en el análisis y posterior diseño de elementos y/o sistemas mecánicos en el campo de la estática implica incrementar de cuatro a seis posible incógnitas en lo que se refiere al equilibrio estático. Lo anterior se representa, como se indicó en la subtema 3.3, plantear las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$$

En los siguientes problemas a resolver se observará que la estrategia a abordar es la misma:

1. Hacer un análisis visual del problema después de leer con cuidado el enunciado. Este análisis previo servirá para identificar los datos que son conocidos tales como fuerzas, distancias y tipos de apoyo, principalmente
2. Realizar el DCL del mecanismo o sistema a resolver, aplicando los criterios de la tabla III-I.
3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, procurando que siempre el número de ecuaciones planteadas sea igual o mayor al número de incógnitas establecidas.

El primer problema a resolver para ejemplificar lo anterior se muestra en la figura III-VII, bis:

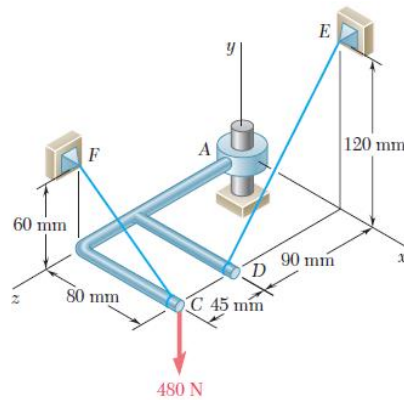


Figura III-VII (bis). Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 4.122, página 206

En el enunciado del problema se pide encontrar la tensión de cada cable y la reacción en el collarín A que está colocado sobre un pasador vertical sobre el cual puede haber movimiento alrededor y/o a lo largo de dicho eje. Se indica en el enunciado que en dicho pasador vertical se pueden ejercer momentos cuya resultantes tendrán dirección paralela a los ejes X, Y .

De entrada este problema exige trazar un DCL para tener una clara visión de todas las reacciones que se podrían presentar. Tal DCL se podrá observar en la figura III-XI (bis):

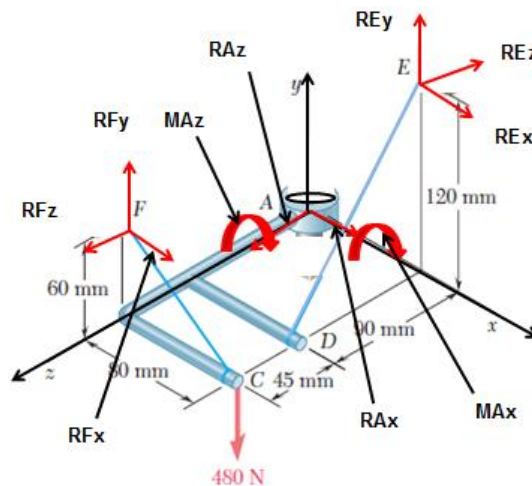


Figura III-XI (bis).

De acuerdo a dicho diagrama y a las ecuaciones de equilibrio se podrá plantear lo siguiente:

$$\sum F_x = RA_x + RE_x + RF_x = 0$$

$$\sum F_y = +RE_y + RF_y - 480N = 0$$

$$\sum F_z = RA_z + RE_z + RF_z = 0$$

Por supuesto en cuanto a la sumatoria de momentos se tendrá:

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

En este problema es obligado representar las posibles fuerzas de los cables en sus componentes rectangulares utilizando los cosenos directores. En la tabla III-III se muestra la información requerida para los cálculos preliminares:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen metros			Posición final/origen Metros			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{CF}$	.08	0	.135	0	.06	.135	-.08	.06	0
2	$\overrightarrow{DE}$	.08	0	.09	0.08	.12	0	0	.12	-.09
Tabla III-III.										

$$CF = (.08^2 + .06^2)^{.5} = .1 \text{ metros}$$

$$DE = (.12^2 + .09^2)^{.5} = .15 \text{ metros}$$

Por lo tanto:

$$\cos(\theta_{xCF}) = -\frac{.08}{.1} = -.8; RF_x = \cos(\theta_{xCF}) * TCF = -.8TCF$$

$$\cos(\theta_{yCF}) = \frac{.06}{.1} = .6; RF_y = \cos(\theta_{yCF}) * TCF = .6TCF$$

$$\cos(\theta_{zCF}) = \frac{0}{.1} = 0; RF_z = \cos(\theta_{zCF}) * TCF = 0$$

$$\cos(\theta_{xDE}) = \frac{0}{.15} = 0; RE_x = \cos(\theta_{xDE}) * TDE = 0$$

$$\cos(\theta_{yDE}) = \frac{.12}{.15} = .8; RE_y = \cos(\theta_{yDE}) * TDE = .8TDE$$

$$\cos(\theta_{zDE}) = -\frac{.09}{.15} = -.6; RE_z = \cos(\theta_{zDE}) * TDE = -.6TDE$$

Representando las tensiones en sus componentes rectangulares:

$$\overrightarrow{TCF} = TCF(-.8i + .6j) = -.8TCFi + .6TCFj$$

$$\overrightarrow{TDE} = TDE(.8j - .6k) = .8TDEj - .6TDEk$$

Por lo tanto ya se puede plantear las siguientes tres ecuaciones:

$$\sum F_x = RA_x - .8TCF = 0$$

$$\sum F_y = .6TCF + .8TDE - 480N = 0$$

$$\sum F_z = RA_z - .6TDE = 0$$

De lo anterior se tienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$RA_x, RA_z, TCF \text{ y } TDE.$$

Se podrá incrementar el número de ecuaciones si aprovechamos las ecuaciones de equilibrio de momentos. De hecho se recomienda hacer momentos en el punto A ya que las líneas de acción de las reacciones RA_x y RA_z cruzan dicho punto A. Por lo anterior se deberá definir el vector posición entre un punto de la línea de acción de cada una de las tensiones de los cables CF y DE y el punto A.

De la figura III-VII (bis):

$$\overrightarrow{r_{D/A}} = .08i + .09k, \text{metros}$$

$$\overrightarrow{r_{C/A}} = .08i + .135k, \text{metros}$$

Haciendo momentos en A:

$$\sum \overrightarrow{M_A} = MA_x i + MA_z k + \overrightarrow{r_{C/A}} X (-480j + \overrightarrow{TCF}) + \overrightarrow{r_{D/A}} X \overrightarrow{TDE} = 0$$

Haciendo los cálculos por partes:

$$\overrightarrow{r_{C/A}} X (-480j + \overrightarrow{TCF}) = (.08i + .135k) X (-480j - .8TCFi + .6TCFj)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{C/A}} X (-480j + \overrightarrow{TCF}) \\ = (64.8 - .081TCF)i - .108TCFj + (-38.4 + .048TCF)k, N - m \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{r_{D/A}} X \overrightarrow{TDE} = (.08i + .09k) X (.8TDEj - .6TDEk)$$

$$\overrightarrow{r_{D/A}} X \overrightarrow{TDE} = -.072TDEi + .048TDEj + .064TDEk, (Nm)$$

Agrupando términos se tiene que:

$$(i) MA_x + 64.8 - .081TCF - .072TDE = 0$$

$$(j) -.108TCF + .048TDE = 0$$

$$(k) MA_z - 38.4 + .048TCF + .064TDE = 0$$

Si nos enfocamos en el término j y sabiendo que:

$$6TCF + .8TDE - 480N = 0$$

tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, se podrá hacer el siguiente planteamiento:

$$-.108TCF + .048TDE = 0$$

$$.6TCF + .8TDE - 480N = 0$$

$$TCF = \frac{.048TDE}{.108} = .4444TDE$$

$$TDE = \frac{480}{(.6 * .444 + .8)}$$

$$TDE = 450 \text{ N}$$

$$TCF = .4444TDE;$$

$$TCF = 200 \text{ N}$$

De la sumatoria de fuerzas en dirección X:

$$\sum F_x = RA_x - .8TCF = 0; RA_x = .8TCF$$

$$RA_x = 160 \text{ N}$$

De la sumatoria de fuerzas en dirección Z:

$$\sum F_z = RA_z - .6TDE = 0; RA_z = .6TDE$$

$$RA_z = 270 \text{ N}$$

Por lo tanto la reacción, representada de manera vectorial, en A es:

$$\overrightarrow{RA} = 160i + 270k, \text{ N}$$

Si replanteamos el término i de la sumatoria de momentos podremos encontrar el valor de MA_x :

$$MA_x + 64.8 - .081TCF - .072TDE = 0$$

$$MA_x = -64.8 + .081(200) + .072(450)$$

$$MA_x = 16.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Y finalmente si hacemos lo mismo con el término k para encontrar el valor de MA_z :

$$MA_z - 38.4 + .048TCF + .064TDE = 0$$

$$MA_z = +38.4 - .048(200) - .064(450)$$

$$MA_z = 0$$

Ya con los resultados que satisfacen lo pedido en el enunciado de este problema se podrá hacer una minuciosa revisión de lo planteado inicialmente vs resultados finales. Se empezará con el DCL propuesto y el cual se había representado en la figura III-XI (bis)-a.

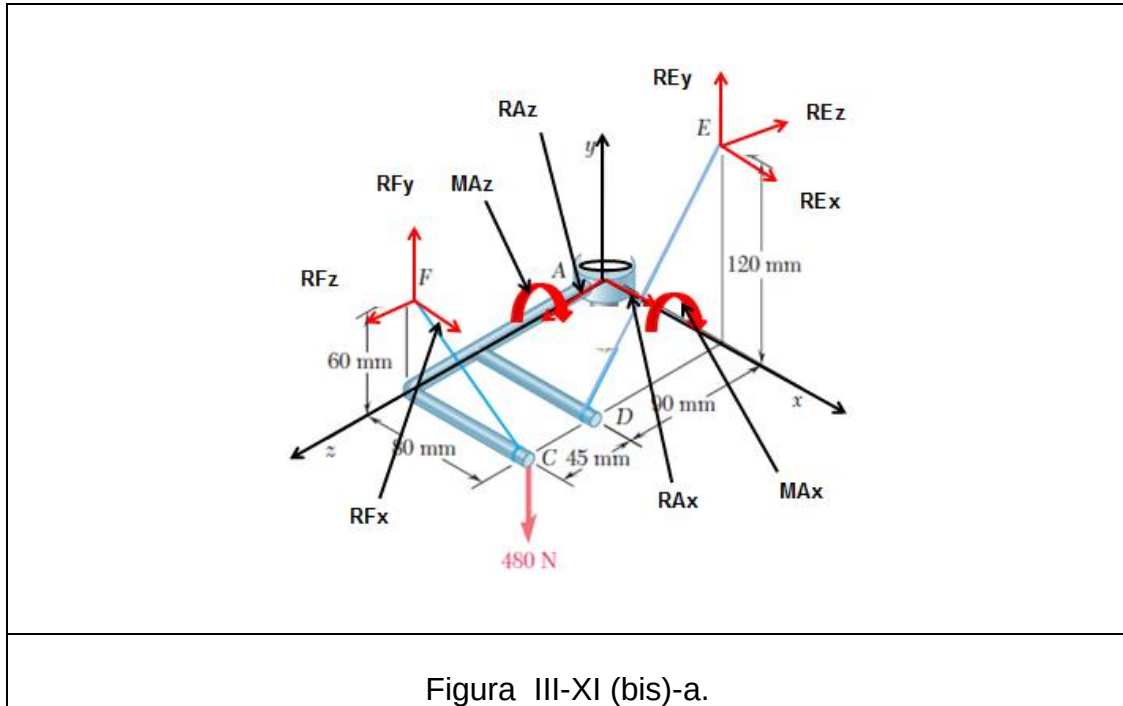


Figura III-XI (bis)-a.

Si se hace una lista de todas las reacciones, ya sea de fuerzas o de momentos, tendremos lo siguiente:

$$R_{Ax}, R_{Az}, R_{Ex}, R_{Ey}, R_{Ez}, R_{Fx}, R_{Fy}, R_{Fz}, M_{Ax}, M_{Az}$$

Diez incógnitas, ¿son muchas? Como ya se indicó líneas arriba es preferible que sobren y no que falten mientras se cumpla con los criterios de la tabla III-I. Este problema es la mejor prueba de lo anterior. De hecho se plantearon nueve ecuaciones y debido a la naturaleza de este problema, en particular por el subtema en que se está se debería tener a lo mucho nueve incógnitas, la pregunta obligada: ¿Por qué se tuvieron 10 incógnitas, cuál fue el error o descuido? La respuesta a lo anterior se encuentra si se observan los cables CF y DE , dicho cables están comprendidos en los planos XY y YZ respectivamente, lo anterior implica de entrada que:

$$R_{Fz} = 0 \text{ y } R_{Ex} = 0$$

Por lo anterior realmente se tienen ocho incógnitas y nueve ecuaciones por lo tanto es posible resolver dicho problema tal y como se ha demostrado. Los valores de RF_z y RE_x ya se había encontrado por medio del cálculo de los cosenos directores:

$$\cos(\theta_{xDE}) = \frac{0}{.15} = 0; RE_x = \cos(\theta_{xDE}) * TDE = 0$$

$$\cos(\theta_{zCF}) = \frac{0}{.1} = 0; RF_z = \cos(\theta_{zCF}) * TCF = 0$$

Otro problema, esta vez del texto de Hibbeler (2010), que se empleó para explicar el subtema 3.2 es el de la figura tal:

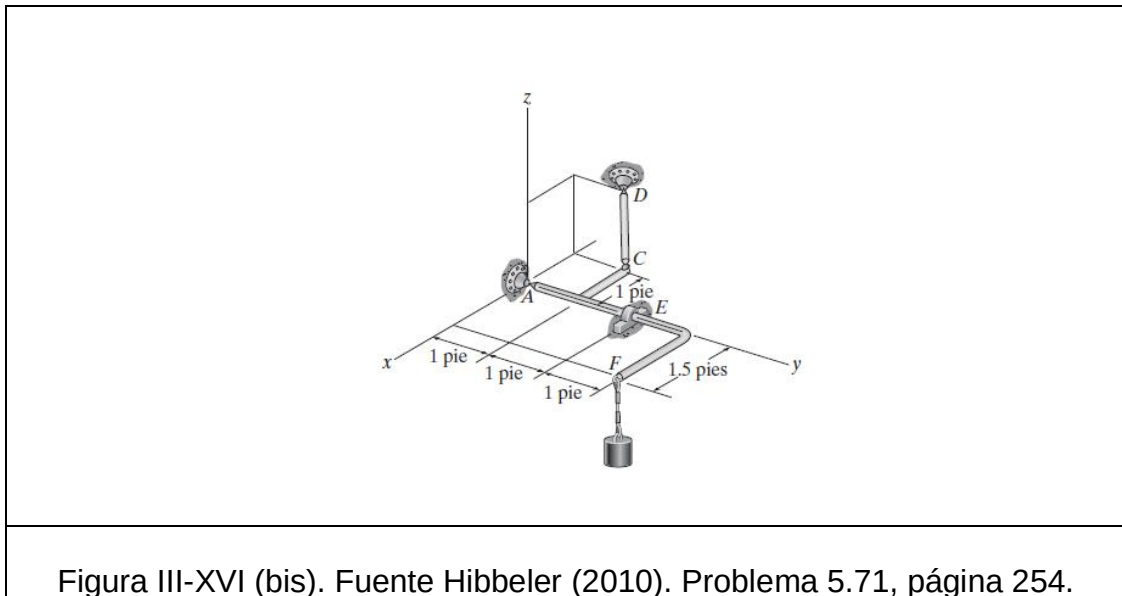
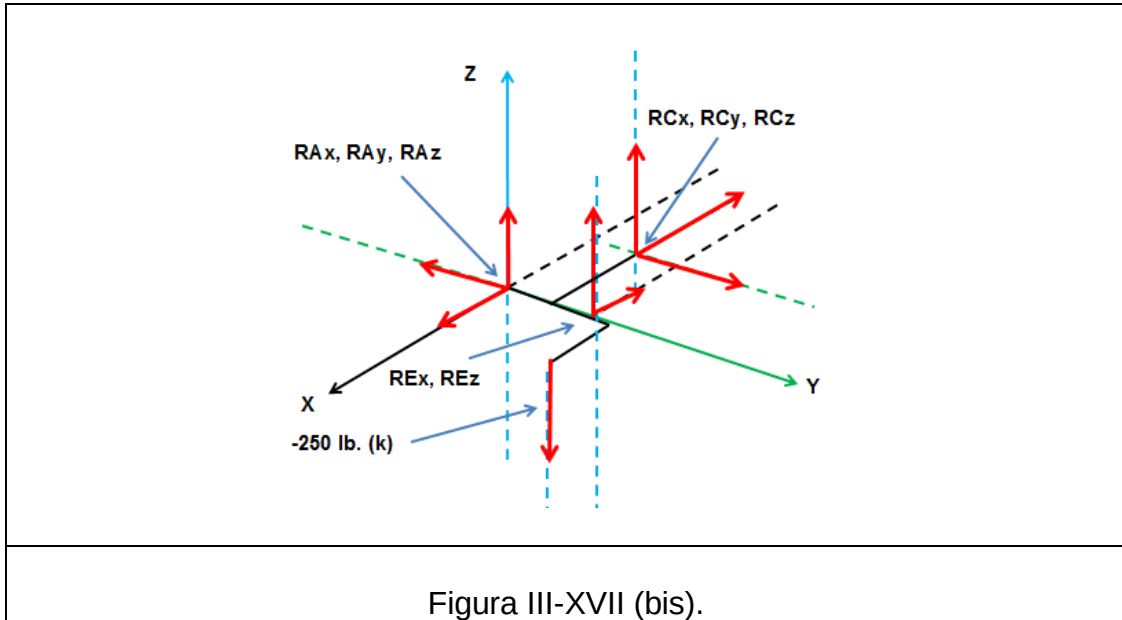


Figura III-XVI (bis). Fuente Hibbeler (2010). Problema 5.71, página 254.

De acuerdo al enunciado de este problema están ensambladas y el peso que el mecanismo compuesto por dichas barras pesa 250 lb. Se pide encontrar la reacción en A representada por sus componente rectangulares, las reacciones en la chumacera lisa E, la fuerza que experimenta la barra CD. Las conexiones en C y D son juntas de rótula esférica.

Para poder encontrar lo solicitado es necesario el DCL de dicho problema. Lo anterior ya se había trazado y se vuelve a mostrar en la siguiente figura:



Como se explicó en el subtema 3.2 sobre este ejemplo:

“Para el punto E el criterio I de la misma tabla: Cuatro posibles reacciones, dos de fuerza y dos de momentos. Cada par de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. De hecho como se muestra en ese DCL, no se tomaron en cuenta los momentos cuya dirección hubiera sido sobre los ejes X y Z respectivamente.”

Por lo anterior se tratará de demostrar que la decisión de no tomar dichos momentos de reacción en el punto E es correcta.

Identificando las reacciones del DCL se podrán escribir las siguientes:

$$RA_x, RA_y, RA_z, RC_x, RC_y, RC_z, RE_x, RE_z$$

Escribiendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = RA_x + RC_x + RE_x = 0$$

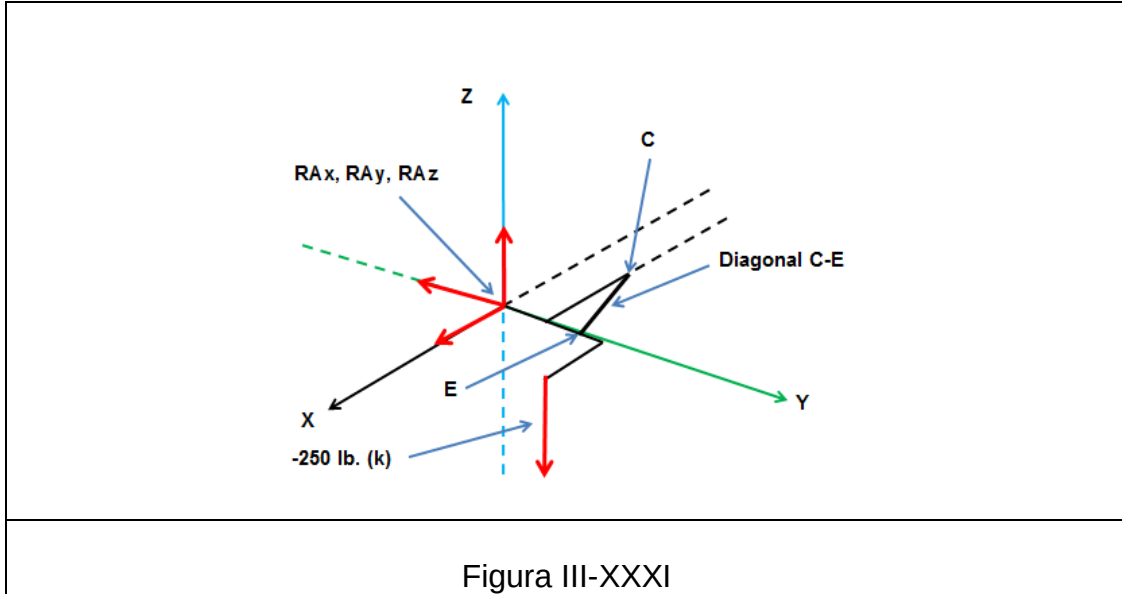
$$\sum F_y = RA_y + RC_y = 0$$

$$\sum F_z = RA_z + RC_z + RE_z - 250lb = 0$$

De acuerdo a lo explicado en el subtema 2.2.2 (Momento de una fuerza respecto a un eje) se harán momentos con respecto al eje diagonal $C - E$ ya que, como el sistema se encuentra en equilibrio se puede asegurar que:

$$\sum M_{C-E} = 0$$

Sin dejar de observar que la ecuación recién planteada es un escalar. Dicho eje se podrá observar en la figura III-XXXI:



¿Por qué aplicar el anterior criterio y por qué esa diagonal?, la respuesta a la primera interrogante es que de esta forma eliminamos cinco reacciones:

$$RC_x, RC_y, RC_z, RE_x, RE_z$$

Ya que las líneas de acción, de dichas reacciones cruzan, la diagonal referida y la respuesta a la segunda interrogante es que esa selección fue discrecional, igual se pudo haber tomado la diagonal $A - C$. Replantando la ecuación de momentos respecto a la diagonal $C - E$:

$$\sum M_{C-E} = \vec{\lambda}_{C-E} \cdot (\vec{r}_{F/E} \times -250\text{lbk} + \vec{r}_{A/C} \times (RA_x\vec{i} + RA_y\vec{j} + RA_z\vec{k})) = 0$$

El término $\vec{\lambda}_{C-E}$ es el vector unitario entre el punto E y C y se define de acuerdo a la información presentada en la siguiente tabla:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen metros (C)			Posición final/origen Metros (E)			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{\lambda}_{C-E}$	-1	1	0	0	2	0	1	1	0
Tabla III-IV.										

Por lo tanto:

$$\vec{\lambda}_{C-E} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

Se tomaron en cuenta las siguientes posiciones relativas: $\vec{r}_{F/E}$ y $\vec{r}_{A/C}$ ya que el punto E y el punto C están comprendidos en la diagonal $C - E$, por lo tanto en la tabla III-V se muestra la información necesaria los cálculos pertinentes:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen Pies			Posición final/origen pies			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{r}_{F/E}$	0	2	0	1.5	3	0	1.5	1	0
2	$\vec{r}_{A/C}$	-1	1	0	0	0	0	1	-1	0
Tabla III-V.										

Por lo tanto se tiene que:

$$\vec{r}_{F/E} = 1.5i + j, \text{pies}$$

$$\vec{r}_{A/C} = i - j, \text{pies}$$

Calculando los respectivos momentos:

$$\vec{r}_{F/E} \times X - 250lbk = (1.5i + j) \times X - 250k = -250i + 375j, lb.pie$$

$$\vec{r}_{A/C} \times X(RA_x i + RA_y j + RA_z k) = (i - j) \times X(RA_x i + RA_y j + RA_z k), lb.pie$$

De la ecuación:

$$\sum M_{C-E} = \vec{\lambda}_{C-E} \cdot (\vec{r}_{F/E} X - 250lbk + \vec{r}_{A/C} X(RA_x i + RA_y j + RA_z k)) = 0$$

Ya se ha planteado lo resaltado en color amarillo y cuyo valor es:

$$-250i - RA_z i - RA_z j + 375j - RA_y k - RA_x k$$

Y como se conoce el término:

$$\vec{\lambda}_{C-E} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

Por lo tanto se puede calcular : $\sum M_{C-E}$

$$\sum M_{C-E} = -250 - RA_z + 375 - RA_z = 0;$$

$$RA_z = 62.5 lb.$$

A la vez se encuentran el valor de las siguientes reacciones:

$$RA_x = RA_y = 0$$

Y como se había planteado que:

$$\sum F_y = RA_y + RC_y = 0$$

Por lo tanto:

$$RC_y = 0$$

Ya que se han encontrado los anteriores valores de las reacciones se podrá hacer momentos ya sea en el punto E para conocer RC_x, RC_z o en el punto C para conocer RE_x, RE_z , es indistinto, se hará con respecto al punto C, para lo anterior se deberán definir los tres vectores posición con respecto al punto C (tabla III-VI):

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen pies			Posición final/origen pies			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\overrightarrow{r_{A/C}}$	-1	1	0	0	0	0	1	-1	0
2	$\overrightarrow{r_{E/C}}$	-1	1	0	0	2	0	1	1	0
3	$\overrightarrow{r_{F/C}}$	-1	1	0	1.5	3	0	2.5	2	0
Tabla III-VI.										

Por lo tanto:

$$\overrightarrow{r_{A/C}} = i - j, \text{pie}$$

$$\overrightarrow{r_{E/C}} = i + j, \text{pie}$$

$$\overrightarrow{r_{F/C}} = 2.5i + 2j, \text{pie}$$

Haciendo momentos e C:

$$\sum \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{r_{A/C}} \times (R_{A_z})k + \overrightarrow{r_{E/C}} \times (R_{E_x}i + R_{E_z}k) + \overrightarrow{r_{F/C}} \times (-250lb)k = 0$$

Término por término:

$$\overrightarrow{r_{A/C}} \times (R_{A_z})k = (i - j) \times 62.5k = -62.5i - 62.5j, \text{lb} \cdot \text{p}$$

$$\overrightarrow{r_{E/C}} \times (R_{E_x}i + R_{E_z}k) = (i + j) \times (R_{E_x}i + R_{E_z}k) = R_{E_z}i - R_{E_x}j - R_{E_x}k, \text{lb} \cdot \text{p}$$

$$\overrightarrow{r_{F/C}} \times (-250lb)k = (2.5i + 2j) \times -250k = -500i + 625j, \text{lb} \cdot \text{pie}$$

Agrupando solo los términos necesarios:

$$(i) - 62.5 + R_{E_z} - 500 = 0 \therefore$$

$$R_{E_z} = 562.5 \text{ lb}$$

$$(k) R_{E_x} = 0$$

Y como se había planteado que:

$$\sum F_x = R_{A_x} + R_{C_x} + R_{E_x} = 0$$

Y dado que:

$$RA_x = 0 \text{ y } RE_x = 0$$

Por lo tanto:

$$RC_x = 0$$

Asimismo se planteó que:

$$\sum F_z = RA_z + RC_z + RE_z - 250lb = 0$$

Sabiendo ya que:

$$RA_z = 62.5 \text{ lb y } RE_z = 562.5 \text{ lb}$$

Se obtiene que:

$$RC_z = -375 \text{ lb.}$$

De las incógnitas que se habían planteado en un principio:

$$RA_x, RA_y, RA_z, RC_x, RC_y, RC_z, RE_x, RE_z$$

Se tiene finalmente que:

$$RA_x = RA_y = 0; RA_z = 62.5 \text{ N}; RC_x = RC_y = 0;$$

$$RC_z = -375 \text{ N}; RE_x = 0; RE_z = 562.5 \text{ N}$$

Replantando el objetivo de este capítulo y que a la letra dice:

Obtener fuerzas en apoyos y en otros puntos de un cuerpo rígido en un plano y en tres dimensiones.

Se resolverá un último problema (figura III-XXXII) para concluir este subtema y el cual es tomado del texto de Beer, et al. (2010) para demostrar que se han creado las condiciones para el cumplimiento de dicho objetivo planteado líneas arriba. Estas condiciones se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Realizar un útil DCL.
2. Identificar las incógnitas.
3. Escribir las ecuaciones de equilibrio, tanto para la sumatoria de fuerzas y de momentos.
4. Asegurarnos de que el número de incógnitas sea cuando mucho igual al número de ecuaciones.

El enunciado de este problema es:

“El poste de 6 m ABC está sometido a una fuerza de 455 N como se muestra en la figura. El poste se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de dos cables BD y BE. Si $a = 3$ m, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.”

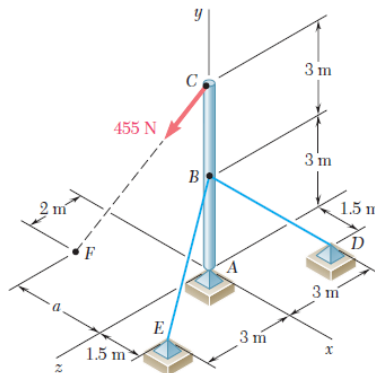
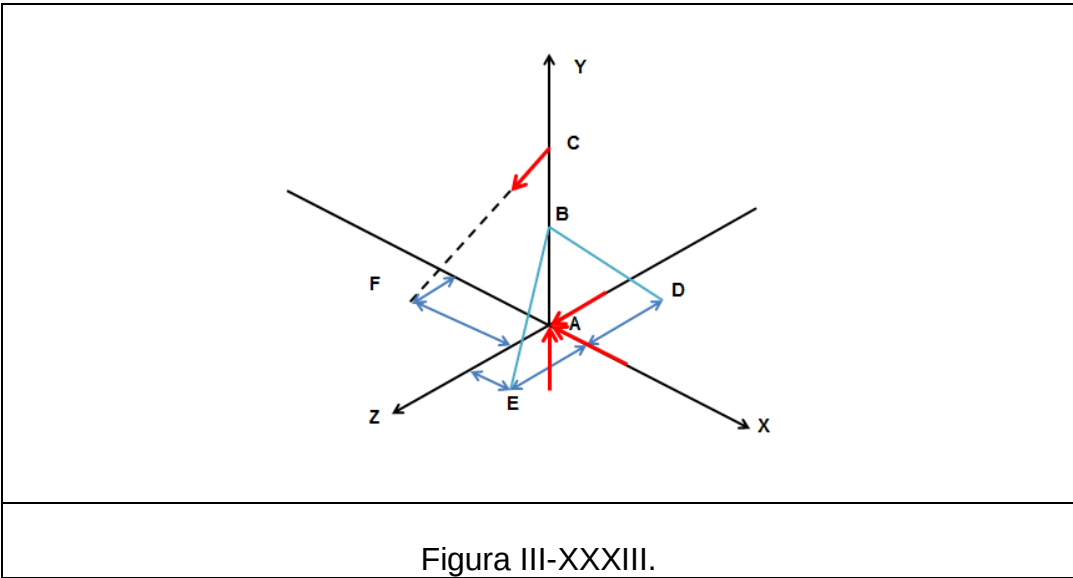


Figura III-XXXII. Fuente Beer, et al. (2010). Problema 4.150, página 214.

Para empezar a resolver este problema propuesto, tal como se ha hecho con los anteriores, se deberá observar que la línea de acción, tanto de la fuerza de 455 N como la de los cables BE y BD, están orientadas en el espacio, esto es: en principio tendrán componentes en dirección X, Y, Z. Por otro lado en el apoyo A y de acuerdo al criterio j de la tabla III-I, se podrían presentar tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente. En la figura III-XXXIII se podrá observar el DCL de este problema.



Es importante destacar que este último DCL únicamente representa las líneas de acción tanto de la fuerza aplicada en C y dirigida a F, como la de los cables BE y BD, en lo que representa al apoyo en A se representan las tres posibles reacciones que en ese punto se pudieran presentar. Al representar, tanto la fuerza de 455 N como la dirección de los cables, en sus componentes rectangulares i, j, k utilizando los cosenos directores se podrán entonces empezar a definir las ecuaciones de equilibrio.

De acuerdo a los datos visibles de la figura III-XXXII se deberán definir los siguientes vectores posición:

$$\vec{S}_{F/C}, \vec{S}_{E/B}, \vec{S}_{D/B}$$

La información requerida para plantear los vectores posición se muestran en la tabla III-VII:

#	Vector	1	2	3	4	5	6	4-1	5-2	6-3
		Posición inicial/origen Metros			Posición final/origen metros			Pf-Pi		
		x_i	y_i	z_i	x_f	y_f	z_f	x	y	z
1	$\vec{S}_{F/C}$	0	6	0	-3	0	2	-3	-6	2
2	$\vec{S}_{E/B}$	0	3	0	1.5	0	3	1.5	-3	3
3	$\vec{S}_{D/B}$	0	3	0	1.5	0	-3	1.5	-3	-3
Tabla III-VII.										

Apoyándonos en el concepto de vector unitario se puede plantear el mismo en función del vector posición F con respecto a C:

$$\vec{s}_{F/C} = s_{F/C} * \vec{\lambda}_{F/C}$$

Ya que:

$$s_{F/C} = (3^2 + 6^2 + 2^2)^{.5} = 7 \text{ metros}$$

Por lo tanto:

$$\vec{\lambda}_{F/C} = \frac{\vec{s}_{F/C}}{s_{F/C}} = -\frac{3}{7}i - \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k$$

Lo anterior planteado servirá para expresar la fuerza de 455 N en sus componentes rectangulares:

$$\vec{F}_{F/C} = 455 * \vec{\lambda}_{F/C} = -195i - 390j + 130k, N$$

Lo anterior explicado es equivalente a utilizar el concepto de cosenos directores. Se le sugiere al alumnado llegar al mismo resultado utilizando dichos cosenos directores.

A continuación se presentan los cálculos para plantear las tensiones de los dos cables EB y DE en sus componentes rectangulares:

$$\vec{s}_{E/B} = s_{E/B} * \vec{\lambda}_{E/B}$$

Ya que:

$$s_{E/B} = (1.5^2 + 3^2 + 3^2)^{.5} = 4.5 \text{ metros}$$

Por lo tanto:

$$\vec{\lambda}_{E/B} = \frac{\vec{s}_{E/B}}{s_{E/B}} = \frac{1.5}{4.5}i - \frac{3}{4.5}j + \frac{3}{4.5}k$$

Lo anterior planteado servirá para expresar la posible tensión a lo largo del cable EB en sus tres posibles componentes rectangulares:

$$\vec{T}_{EB} = T_{EB} * \vec{\lambda}_{E/B} = T_{EB} \frac{1.5}{4.5} i - T_{EB} \frac{3}{4.5} j + T_{EB} \frac{3}{4.5} k, N$$

Asimismo se tiene que:

$$\vec{s}_{D/B} = s_{D/B} * \vec{\lambda}_{D/B}$$

Ya que:

$$s_{D/B} = (1.5^2 + 3^2 + 3^2)^{.5} = 4.5 \text{ metros}$$

Por lo tanto:

$$\vec{\lambda}_{D/B} = \frac{\vec{s}_{D/B}}{s_{D/B}} = \frac{1.5}{4.5} i - \frac{3}{4.5} j - \frac{3}{4.5} k$$

Lo anterior planteado servirá para expresar la posible tensión a lo largo del cable DB en sus tres posibles componentes rectangulares:

$$\vec{T}_{DB} = T_{DB} * \vec{\lambda}_{D/B} = T_{DB} \frac{1.5}{4.5} i - T_{DB} \frac{3}{4.5} j - T_{DB} \frac{3}{4.5} k, N$$

Con los anteriores cálculos se podrán escribir las ecuaciones de equilibrio para las fuerzas:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0 \\ \sum F_x &= -195 + T_{EB} \frac{1.5}{4.5} + T_{DB} \frac{1.5}{4.5} + RA_x = 0 \\ \sum F_y &= -390 - T_{EB} \frac{3}{4.5} - T_{DB} \frac{3}{4.5} + RA_y = 0 \\ \sum F_z &= 130 + T_{EB} \frac{3}{4.5} - T_{DB} \frac{3}{4.5} + RA_z = 0 \end{aligned}$$

Se tienen solamente tres ecuaciones y cinco incógnitas:

$$T_{EB}, T_{DB}, RA_x, RA_y, RA_z$$

Se tendrá que recurrir a las ecuaciones de momentos para incrementar el número de las mismas. Para lo anterior lo idóneo será realizar momentos en el

punto de apoyo A con la intención de eliminar las tres incógnitas RA_x, RA_y, RA_z cuyas líneas de acción son concurrentes en ese punto y por lo tanto no tienen brazo de palanca. Es necesario entonces definir los vectores posición que servirán como brazo de palanca entre un punto de la línea de acción de cada fuerza ya definida en el espacio y el punto A:

$$\overrightarrow{r_{C/A}} \text{ y } \overrightarrow{r_{B/A}}$$

Ya que en el punto B concurren los cables EB y DB con dos vectores posición será suficiente para realizar los momentos:

$$\overrightarrow{r_{C/A}} = 6j \text{ y } \overrightarrow{r_{B/A}} = 3j, \text{ metros.}$$

Recordando que:

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$$

Efectuando momentos fuerza por fuerza se tiene:

$$\sum \overrightarrow{M_{TCF}} = \overrightarrow{r_{C/A}} \times \vec{F}_{F/C} = 6j \times (-195i - 390j + 130k) = 780i + 1170k, Nm$$

$$\sum \overrightarrow{M_{TEB}} = \overrightarrow{r_{B/A}} \times \vec{T}_{EB} = 3j \times \left(T_{EB} \frac{1.5}{4.5} i - T_{EB} \frac{3}{4.5} j + T_{EB} \frac{3}{4.5} k \right) = 2T_{EB}i - T_{EB}k, Nm$$

$$\sum \overrightarrow{M_{TDB}} = \overrightarrow{r_{B/A}} \times \vec{T}_{DB}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{TDB}} = 3j \times \left(T_{DB} \frac{1.5}{4.5} i - T_{DB} \frac{3}{4.5} j - T_{DB} \frac{3}{4.5} k \right) = -2T_{DB}i - T_{DB}k, Nm$$

Agrupando términos:

$$(i); 780 + 2T_{EB} - 2T_{DB} = 0$$

$$(k); 1170 - T_{EB} - T_{DB} = 0$$

Con estas dos nuevas ecuaciones se ha llegado a cinco ecuaciones sin incrementar el número de incógnitas, por lo tanto el sistema de cinco ecuaciones planteado se podrá resolver.

Haciendo las sustituciones y los despejes correspondientes:

$$T_{EB} = 390 (N)$$

$$T_{DB} = 780, (N)$$

$$RA_x = -195 (N)$$

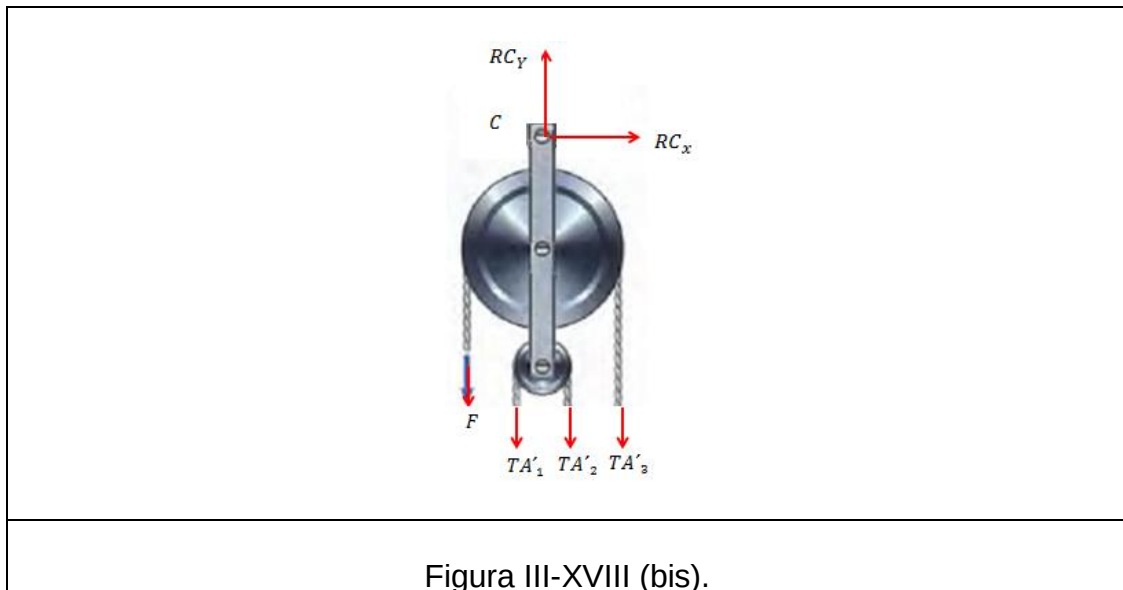
$$RA_y = 1170 (N)$$

$$RA_z = 130 (N)$$

3.6. SISTEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS.

Cuando se refiere a sistemas estáticamente indeterminados es que las ecuaciones de fuerzas y de momentos son menor en número que las incógnitas en algún problema dado. En este subtema haremos un resumen de problemas que se han planteado en este capítulo y que de manera implícita se ha hecho referencia con el concepto de estáticamente indeterminados:

El primer ejemplo es el del texto de Bedford y Fowler (2000) que se utilizó en más de un subtema de este capítulo (figura III-XVIII, bis).



Se había establecido en el subtema 3.4 de este capítulo que:

$$F = TA'_1 = TA'_2 = TA'_3$$

Y que la ecuación de sumatoria de fuerzas en dirección Y quedaría:

$$\sum F_y = 4F + RC_y = 0$$

Una ecuación con dos incógnitas; un bien elaborado DCL pero inútil para contestar el cuestionamiento del problema.

Si se hubiera querido resolver dicho problema únicamente con una ecuación caeríamos en lo que se refiere a estáticamente indeterminados. Para este problema en especial, se pudo definir otra ecuación que ayudó a la solución del mismo.

El siguiente ejemplo para continuar explicando el concepto de estáticamente indeterminado es el siguiente problema que ya se resolvió en el mismo subtema 3.4 de este capítulo:

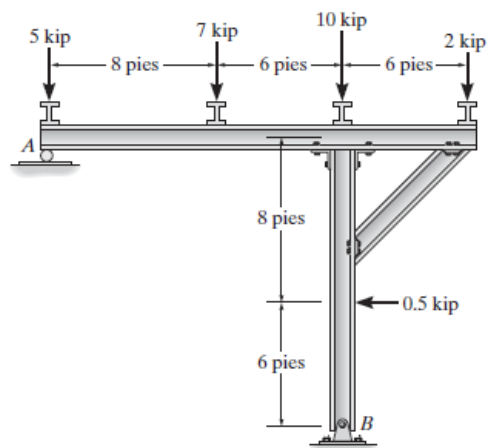


Figura III-XIV (bis-a). Fuente: Hibbeler (2010). Problema 5.93, página 261

Como se recordará el diagrama de cuerpo libre que se utilizó fue el siguiente (figura III-XV (bis-a)):

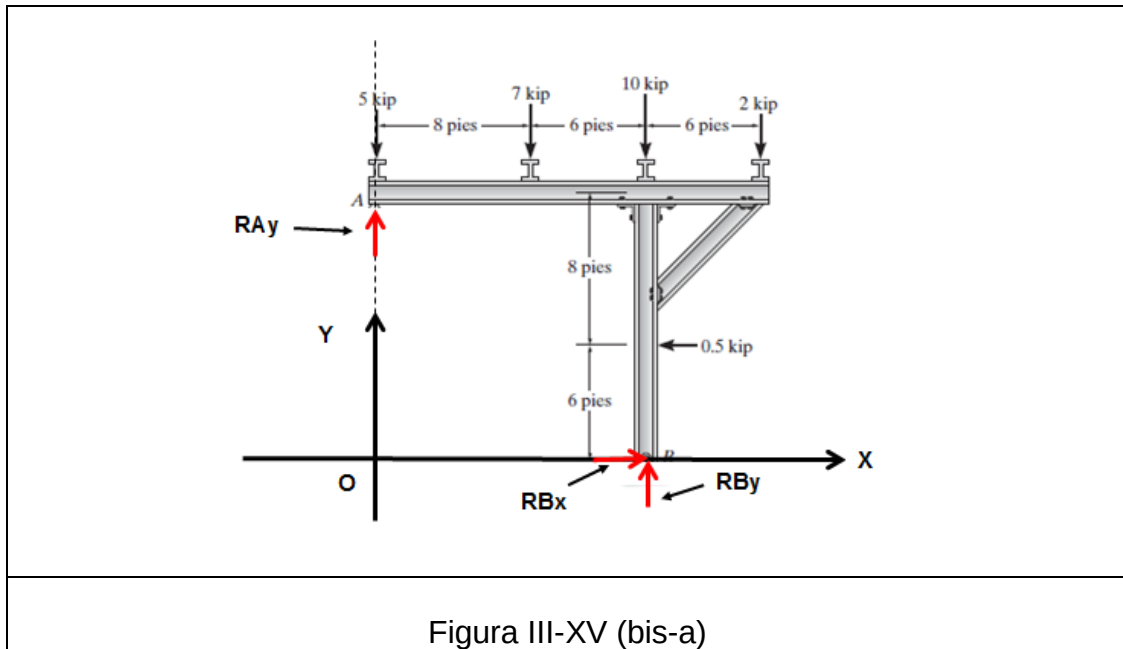


Figura III-XV (bis-a)

Lo cual nos permitió plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum F_x = 0; RB_x - .5kip = 0$$

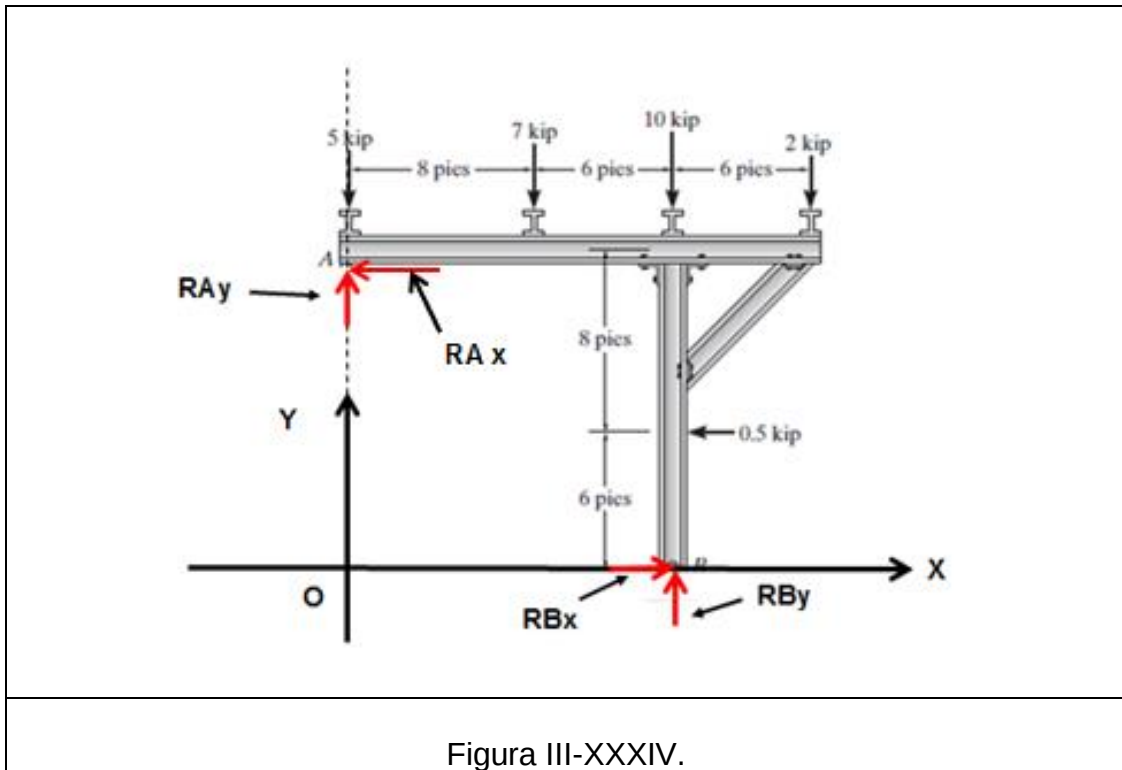
$$RB_x = +.5kip$$

$$\sum F_y = 0; RB_y + RA_y - 5 - 7 - 10 - 2 = 0;$$

$$RB_y + RA_y = 24 kip$$

$$\sum \overrightarrow{M_D} = -20RA_y - 6RB_y + 247 = 0; (lb \cdot pie)k$$

Dos ecuaciones y dos incógnitas (RB_y y RA_y), el sistema de ecuaciones que se pudo resolver, ¿pero qué hubiera pasado si el apoyo en A fuera como el apoyo B?; un pasador. Se tendría el siguiente DCL, tal y como se muestra en la figura III-XXXIV:



Nuestra nueva ecuación de equilibrio respecto al eje de las X quedaría así:

$$\sum F_x = 0; RA_x + RB_x - .5kip = 0$$

Se tendrían en total cuatro incógnitas y tres ecuaciones; estáticamente indeterminado. No se podrá resolver por estática.

Si se observa la modificación propuesta en el apoyo A se podrá afirmar que no era necesario cambiar dicho apoyo de esfera a perno. Cuando se presenta este tipo de situaciones se les conoce como apoyos redundantes.

CAPÍTULO IV ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE SISTEMAS MECÁNICOS

Objetivo: Determinar fuerzas que actúan sobre los componentes de armaduras, marcos de cargas y máquinas.

Subtemas:

4.1. Estructuras.

4.2. Marcos.

4.3. Máquinas.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son cinco:

1. Identificar los tipos de armaduras existentes tanto para techos como para puentes.
2. Aplicar el método de nodos para determinar las fuerzas, indicando si los componentes de la armadura están a tensión o compresión.
3. Utilizar el método de secciones para encontrar las fuerzas que actúan en los elementos seleccionados.
4. Aplicar el método de desarme de marcos de carga para obtener las fuerzas que actúan en cada elemento que la constituye.
5. Determinar las fuerzas en los componentes de máquinas por el método de desarme de la estructura.

4.1. ESTRUCTURAS.

De acuerdo al RAE una estructura es, entre otras definiciones, una armadura²⁷ y de acuerdo al mismo diccionario una armadura es²⁸ (únicamente tomando las definiciones afines al capítulo en cuestión de este texto):

1. f. armazón (ll pieza o conjunto de piezas unidas).
2. f. esqueleto (ll conjunto de piezas que da consistencia al cuerpo).
3. f. Arq. Conjunto de piezas de madera o de hierro, que, ensambladas, sirven de soporte a la cubierta de un edificio.

Las tres anteriores definiciones nos serán útiles para dominar el concepto de armadura que en este capítulo se utilizará para solucionar situaciones en donde se requiera el uso de armaduras que soportarán cargas externas y/o internas.

Se demostrará, en parte, que una armadura es una manera inteligente, por ser barata y sencilla de diseñar, de crear sistemas complejos como puentes, techos, edificios, chasis, entre otros.

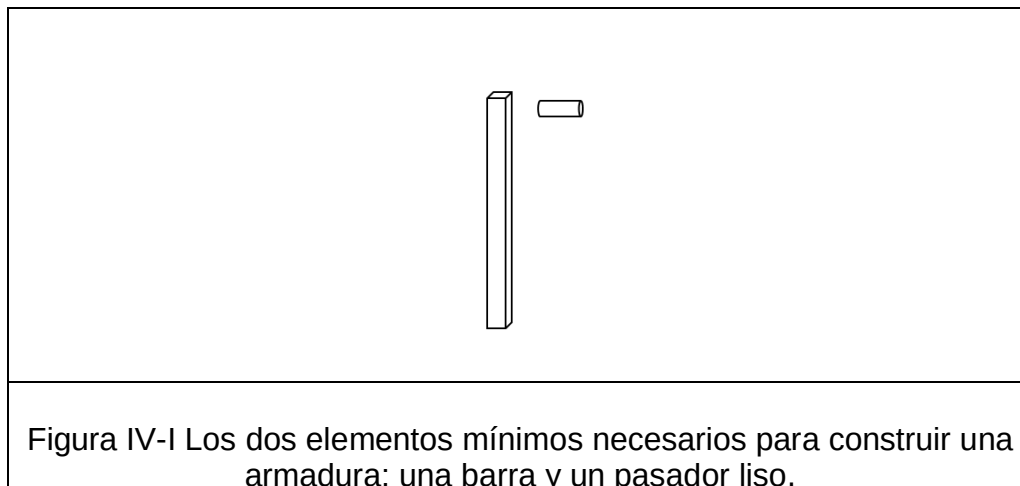
Para entrar en materia se considera necesario plantear y se responden los siguientes dos cuestionamientos:

1. ¿De qué se compone una armadura?

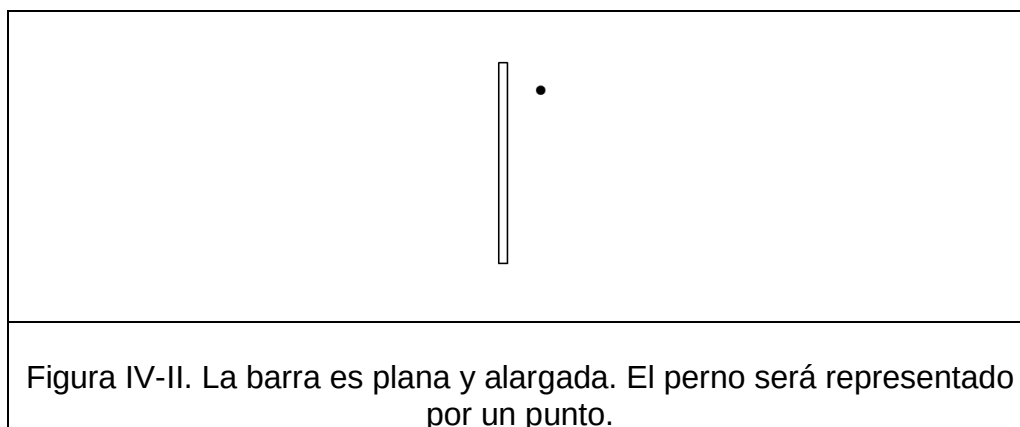
R: Las principales partes que se requieren para construir una armadura son dos y se les identifica como elementos. El primer elemento es esbelto y alargado, y para efectos de este capítulo será identificado como barra. El segundo elemento es un pasador liso el cual se utiliza para unir, en sus extremos, dos o más barras. En la figura IV-I se hace una idealización de lo anterior:

²⁷ <https://dle.rae.es/?w=estructura&m=form> (visitada el 10 de noviembre de 2019)

²⁸ <https://dle.rae.es/?w=armadura&m=form> (visitada el 10 de noviembre de 2019)

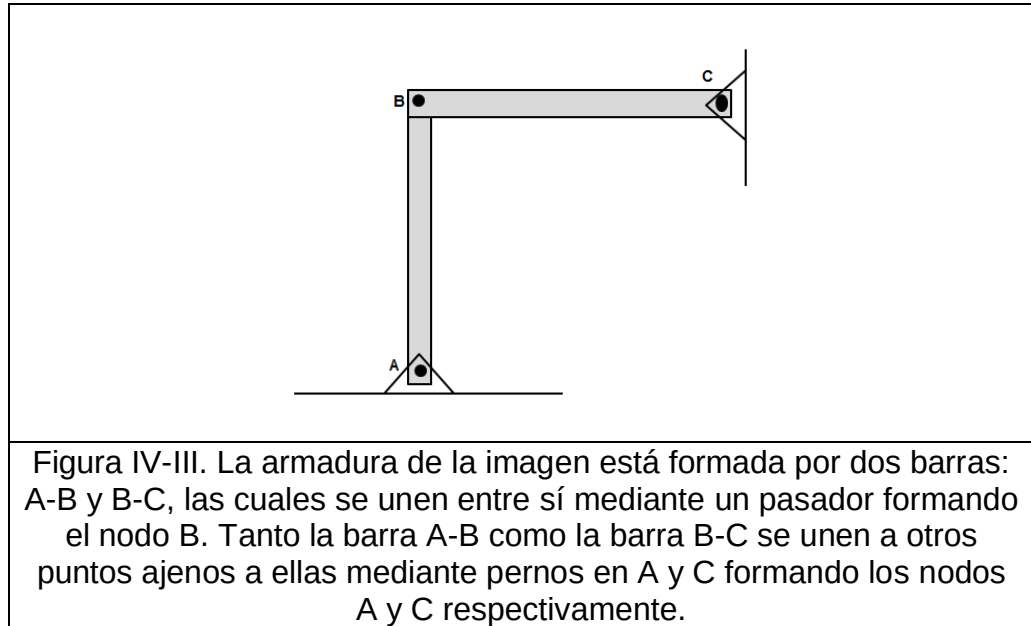


Es importante destacar que los problemas que se plantearán en este capítulo solo abarcan dos dimensiones, esto es: se trabajará en un plano (generalmente el plano $X - Y$). Por lo tanto las barras y los pernos serán representados tal y como se muestra en la figura IV-II:



2. ¿Cómo se construye una armadura?

R: Para construir una armadura las barraras se unirán en sus extremos mediante los pernos. Una armadura de las más simples en cuanto su forma, está representada en la figura IV-III. Para construirla se utilizaron dos barras y tres pernos. Los puntos en donde los pernos unen a las barras entre sí o entre el exterior se llaman nodos.



Debido a que parte del objetivo de este capítulo es determinar fuerzas que actúan sobre los componentes de armaduras es de vital importancia señalar que las fuerzas involucradas presentan las siguientes características:

1. Las fuerzas serán externas. No se tomará, todavía, el peso de las barras. Dichas cargas o fuerzas externas provocará, posiblemente, que los elementos que forman la armadura transmitan fuerzas a través de los nodos, de hecho esa es la función principal de las armaduras.
2. Las fuerzas se aplicarán o pasarán a través de los nodos. En la figura IV-IV se hace una representación de lo anterior:

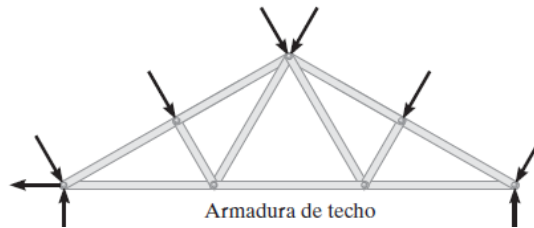


Figura IV-IV. Como se podrá observar las flechas en color negro representan las fuerzas. Todas ellas están aplicadas en algunos los nodos y los cuales son formados por la unión de dos o más barras.
Fuente Hibbeler (2010).

3. Los elementos que conforman un nodo estarán comprendidos en un plano (generalmente el plano $X - Y$), de tal manera que tanto cargas externas como las fuerzas que actúan sobre dichos elementos podrán descomponerse, por conveniencia, en dos componentes rectangulares entre.

Por las anteriores características, los elementos que conforman una estructura se les identifica como elementos sometidos a dos fuerzas ya que en dicho elementos actuarán solo dos fuerzas:

1. De igual magnitud,
2. Con la misma dirección y colineales, y lo que se requiere para lograr el equilibrio estático: sus sentidos son opuestos.

Algunos tipos de armaduras para techo y puentes²⁹

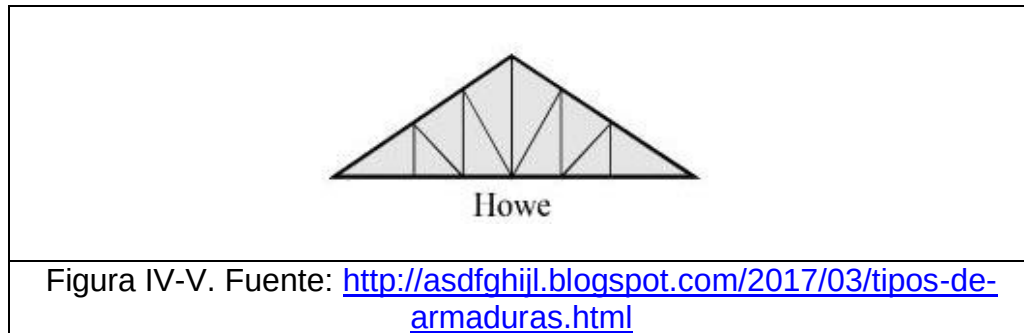
De acuerdo a la literatura disponible existen diferentes tipos de armadura y las que más comúnmente se utilizan para techos³⁰ son la Pratt, Fink, Howe y la Warren y para construir los puentes son la tipo K, Pratt y Warren.

1. *Armadura Howe Esta armadura fue patentada en 1840, a pesar de que fue utilizada anteriormente, ya que en un principio se utilizaba la madera para su creación. Esta estructura está compuesta de montantes*

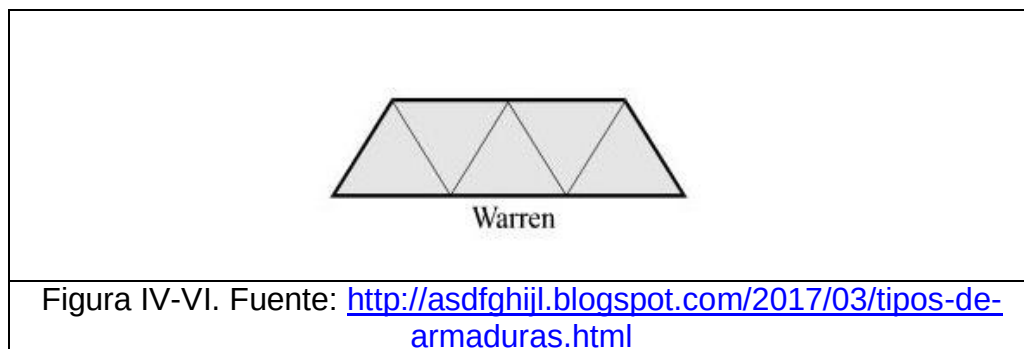
²⁹ <https://blog.laminasyaceros.com/blog/tipos-de-armaduras-para-techo> (visitada el 14 de noviembre de 2019)

³⁰ https://www.academia.edu/19143033/Armaduras_o_cerchas_en_Puentes (visitada el 14 de noviembre de 2019)

verticales entre borde superior y el inferior. Las diagonales son unidas de extremo a extremo donde coincide un montante con los bordes antes mencionados, este lograba que los elementos verticales que eran metálico y cortos tuvieran tensión, mientras que las diagonales largas están comprimidas, lo que resultaba económico ya que los materiales metálicos eran costoso y resultaba mejor hacer un Howe ya que minimiza la longitud (figura IV-V).

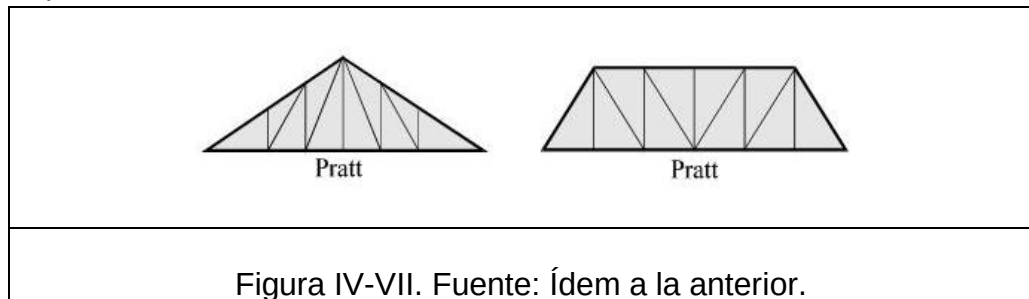


2. *Armadura Warren.* Para el tipo Warren se utilizaba viguetas y las barras de acero representan el elemento principal para el desarrollo de esta estructura, en los entrepisos se utilizan diferentes perfiles de acero como ángulo, polín y viga IPR. Cuando esta estructura es utilizada a gran escala ofrece una ventaja de proporcionar un mayor espacio abierto, libre para inclusión de los elementos de servicios del edificio para atravesar esta armadura como puede ser ductos, tuberías, etc. Una característica de este tipo es que forma una serie de triángulos isósceles o equiláteros y puede ser utilizada para cubrir hasta 90 metros y más (figura IV-VI).

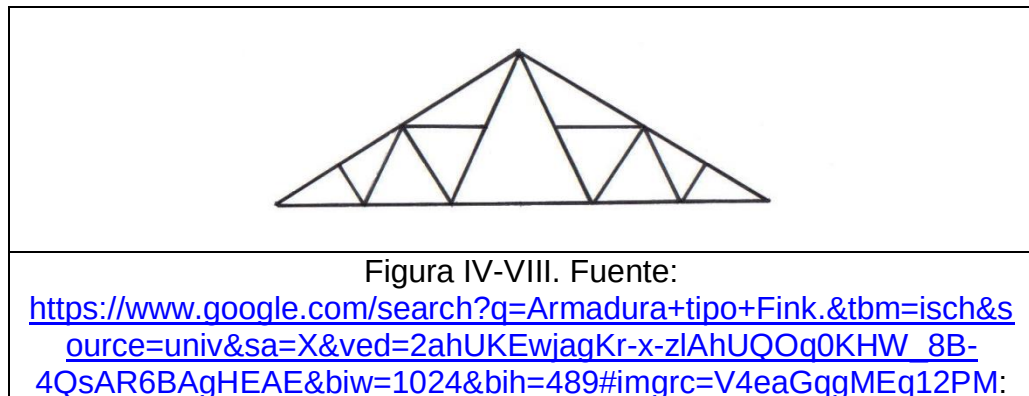


3. *Armadura Pratt.* Este tipo representa la adaptación de las armaduras al uso más generalizado con un nuevo material de la época: como el acero. A diferencia con una Howe, las barras son inclinadas al sentido contrario de tal manera que las diagonales están sometidas a tensión esto mientras las barras verticales son comprimidas. Para la armadura

de cuerdas paralelas esta ofrece la ventaja de tener los miembros más largos del alma a tracción y los más cortos a compresión. (figura IV-VII):



4. *Armadura tipo Fink*³¹. Para techos con pendientes fuertes, es más económico porque la mayoría de los miembros están en tensión, mientras que los sujetos a compresión son bastantes cortos. Se pueden dividir en un gran número de triángulos y coincidir con cualquier espaciamiento de largueros (figura IV-VIII):



5. La forma K se derivaba de la forma en que los ingenieros subdividían los paneles, un procedimiento que proporcionaba más fuerza y economía, ya que también aumentaba la longitud de la estructura. A los constructores también les gustó cómo el diseño redujo las tensiones secundarias y simplificó la tarea de erigir un gran puente en el campo. Remachada y con un cordón superior curvo, la cercha K a través se convirtió en una vista familiar en las carreteras principales, con longitudes de tramo que varían de 140 a 210 pies (43 a 64 mts)³², (figura IV-IX)

³¹ <https://estmetantonz.wordpress.com/2017/02/22/primer-entrada-de-blog/> (visitada el 14 de noviembre de 2019)

³² https://www.academia.edu/36734567/Informe_estructuras_K-Truss (visitada el 14 de noviembre de 2019)

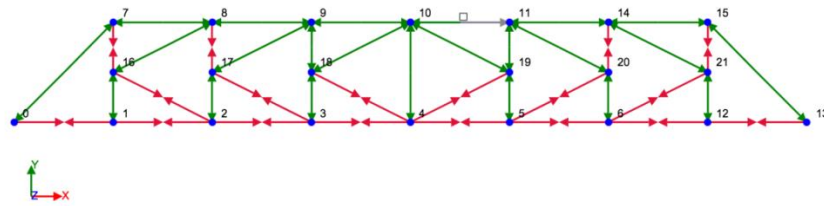
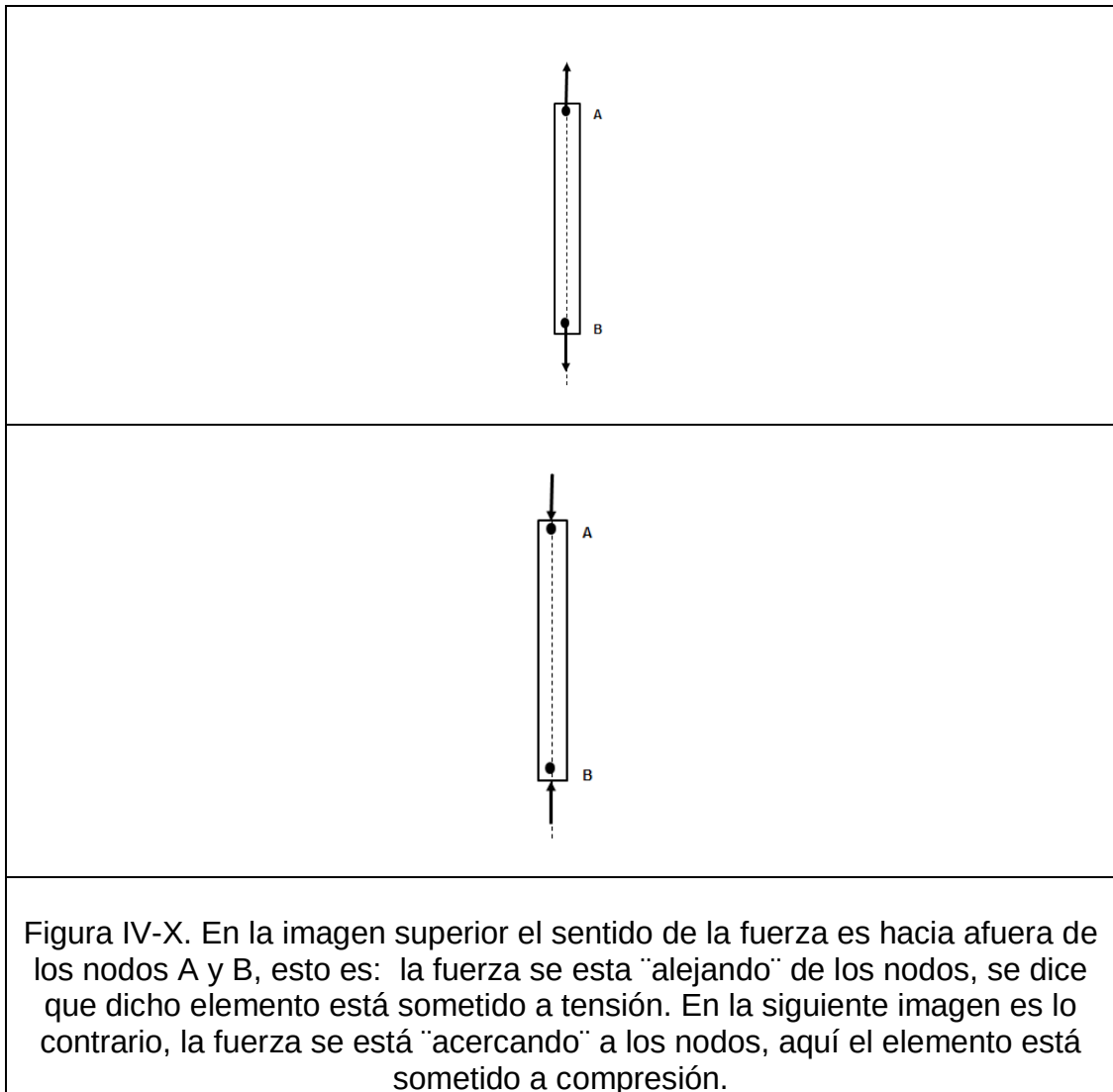


Figura IV-IX. Fuente:

https://www.google.com/search?sa=X&q=armadura+k+truss&tbm=isch&source=univ&ved=2ahUKewi3-NLnzezIAhVGOKwKHcPBBa8QsAR6BAqGEAE&biw=1024&bih=489#imgrc=IVbcr2_TqYGOqM:

Debido a que las barras (o elementos) que dan forma a las armaduras, estarán sometidas a cargas externas es también importante señalar que dichas barras se someterán o “trabajarán” en alguno de los dos casos mencionados a continuación (figura IV-X):



Como se podrá observar en las anteriores imágenes mostradas de armaduras la forma geométrica que predomina es el triángulo. Se podrá construir una estructura de forma triangular utilizando el mínimo número de elementos tal y como se presenta en la figura IV-XI:

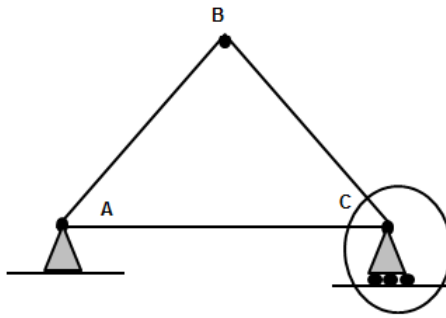


Figura IV-XI. Es importante destacar que el tipo de apoyo en el nodo C, entre los balines y la superficie horizontal tendrá únicamente una reacción normal y cuya dirección será, en este caso, perpendicular a la superficie de apoyo (ver tabla III-I). El objetivo de este tipo de apoyo es para que el problema sea estáticamente determinado³³.

Si a la armadura de la figura IV-XI se agregan dos elementos más tal y como se muestra en la figura IV-XII se logrará una nueva armadura

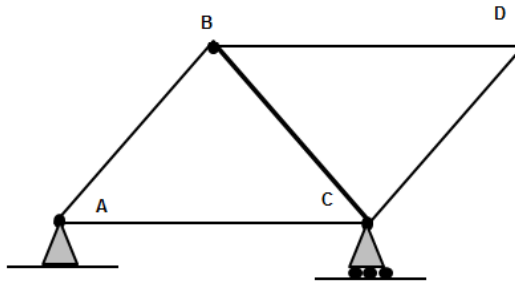


Figura IV-XII.

Mientras la nueva armadura (figura IV-XII) sea rígida el procedimiento que se utilizó para conseguirla se puede repetir tantas veces sea necesario. A este tipo de armadura y de acuerdo a Beer et, al (2010) y a Hibbeler (2010) se le conoce como armadura simple. La cantidad total de elementos m será igual a:

$$m = 2n - 3; \text{ donde } n = \text{número de nodos} \quad (\text{IV-1})$$

³³ Capítulo III, subtema 3.6 de este mismo texto.

En la armadura de la figura IV-XII, donde se tienen cuatro nodos el número de elementos será igual a:

$$m = 2(4) - 3 = 5.$$

De acuerdo a la tabla IV-I son:

Elemento.
1. A-B
2. A-C
3. B-C
4. B-D
5. C-D
Tabla IV-I.

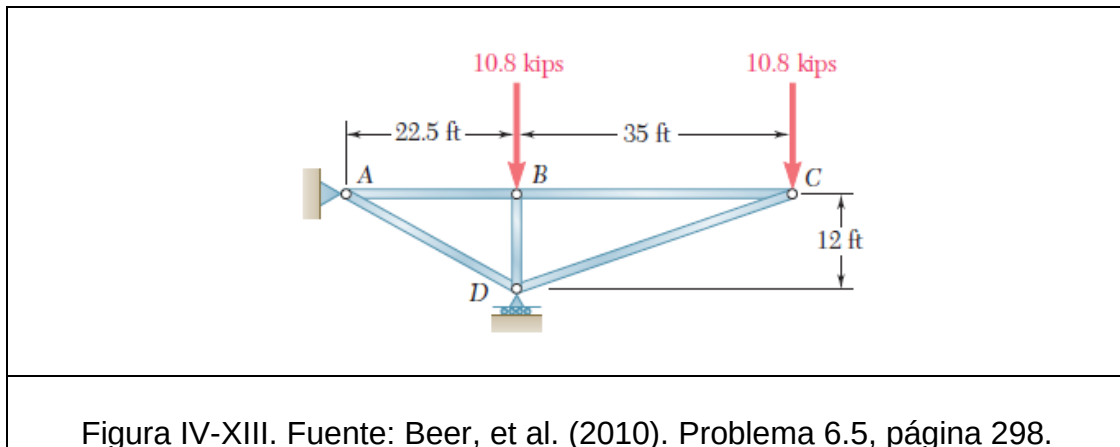
Ahora la pregunta obligada sería; ¿Cómo funciona una armadura? La respuesta es muy sencilla: las cargas externas que se aplican en los nodos se distribuyen a la mayoría de los elementos, ¿y cómo se distribuyen estas fuerzas externas? La respuesta es

1. Mediante la tercera ley de Newton,
2. el principio de transmisibilidad,
3. que la estructura permanecerá en equilibrio y
4. del diseño de la armadura.

Existen dos técnicas para conocer cómo se distribuyen las fuerzas externas entre las barras y son:

1. El método de nodos.
2. El método de secciones.

Principalmente para el método de nodos el primer paso será encontrar, en la medida de lo posible, el valor, dirección y sentido de las reacciones en donde está apoyada o sujeta la estructura. Por ejemplo, en la figura IV-XIII se muestra la imagen de un problema propuesto del texto de Beer, et al. (2010). En dicho problema se pide información sobre las fuerzas que actúan en cada elemento que la componen y si estos están sometidos a tensión o a compresión.



La estructura de la figura IV-XIII está sometida a dos cargas externas en los nodos B y C y se sujeta con el exterior en los nodos A y D. Como se indicó líneas arriba trataremos de encontrar el valor, magnitud y sentido de las reacciones en los puntos A y D. Para lograr lo anterior trazaremos un DCL de dicha estructura y la cual se observa en la figura IV-XIV. Es pertinente aclarar que en el punto de apoyo A podría existir una reacción actuando en el plano donde está definida esta armadura y la cual se podría descomponerse en dos vectores fuerza contenidos en dicho plano y perpendiculares entre sí. Más no así en el punto de apoyo D, allí solo podría existir una fuerza cuya dirección es normal al apoyo esto es; en dirección vertical. En la figura IV-XIV se muestra un DCL de la estructura de la figura IV-XIII como una placa en forma triangular formada por las aristas A-C, A-D y C-D. La intención de presentar la estructura como una placa plana (en este caso de forma triangular) es demostrar que las reacciones externas en A y D no se encuentran en función del número de barras y de cómo estas están conectadas entre sí, dichas reacciones externas dependen del valor de las cargas externas, de la dirección, sentido y el punto de aplicación de dichas cargas sobre la estructura.

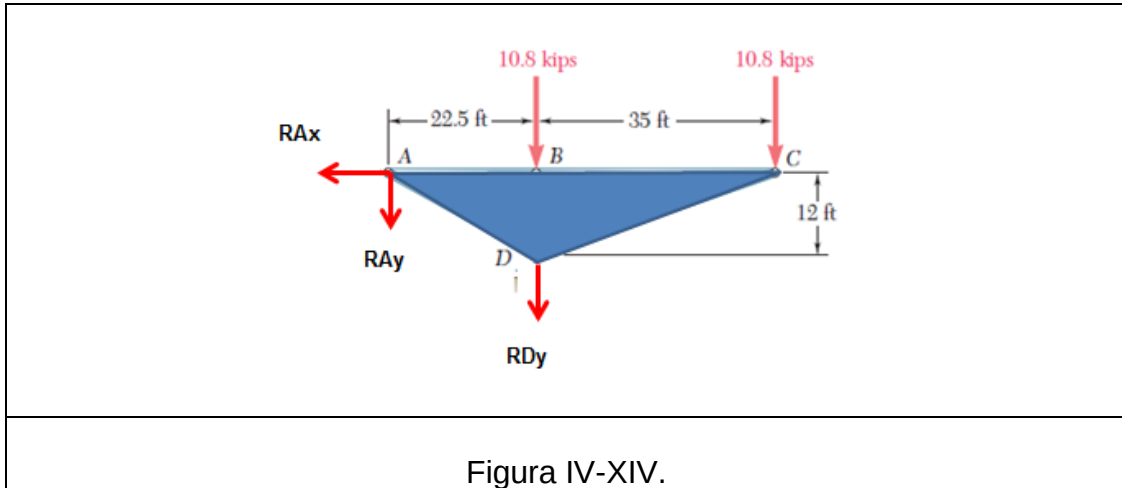


Figura IV-XIV.

Por lo anterior nuestras ecuaciones de equilibrio serán:

$$\sum F_x = 0 \therefore RA_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; -21.6 \text{ kips} + RA_y + RD_y = 0 \therefore RA_y + RD_y = 21.6 \text{ kips}$$

De lo anterior se tienen dos incógnitas y una ecuación, por lo tanto se recurrirá al concepto de momentos buscando tener una ecuación más sin incrementar el número de incógnitas. Se recomienda siempre hacer momentos en el punto donde se elimina el mayor número de incógnitas y en este caso es indiferente hacerlo ya sea en el punto de apoyo A o el punto de apoyo D; se harán momentos con respecto al punto de apoyo A:

$$\sum \vec{M}_A = 22.5iX(-10.8j + RD_y) + 57.5iX - 10.8j = 0, \text{kipsft}$$

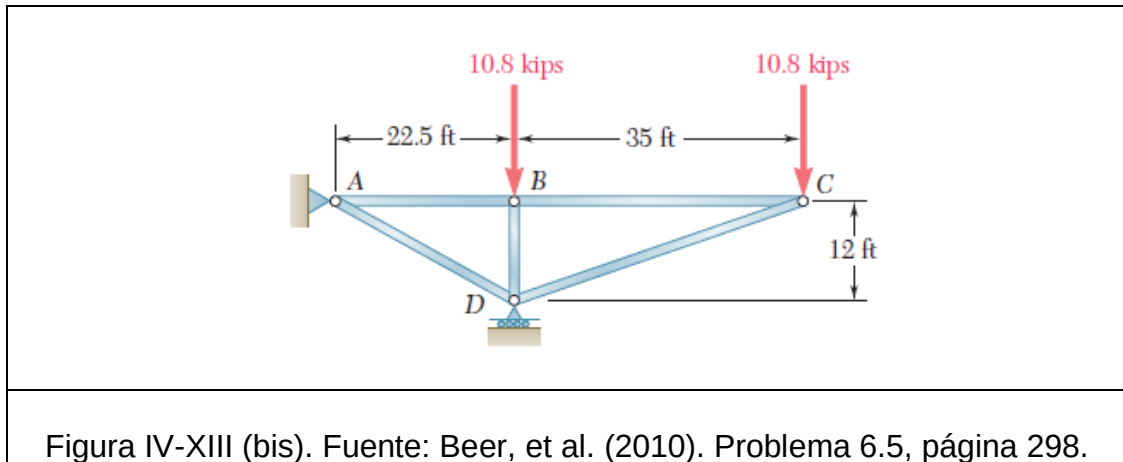
Realizando los cálculos y despejes pertinentes se obtiene que:

$$RA_x = 0, \quad RA_y = -16.8 \text{ kips}, \quad RD_y = 35.7 \text{ kips}.$$

Una vez que se encuentran, en la medida de lo posible como lo fue en este caso, las reacciones en los puntos de apoyo externos de la armadura el siguiente paso será encontrar las fuerzas que actúan sobre los componentes de la armadura y determinar si estos están sometidos a tensión o a compresión. A continuación se explicará a detalle el primer método referido líneas arriba (método por nodos).

4.1.1 Método de nodos.

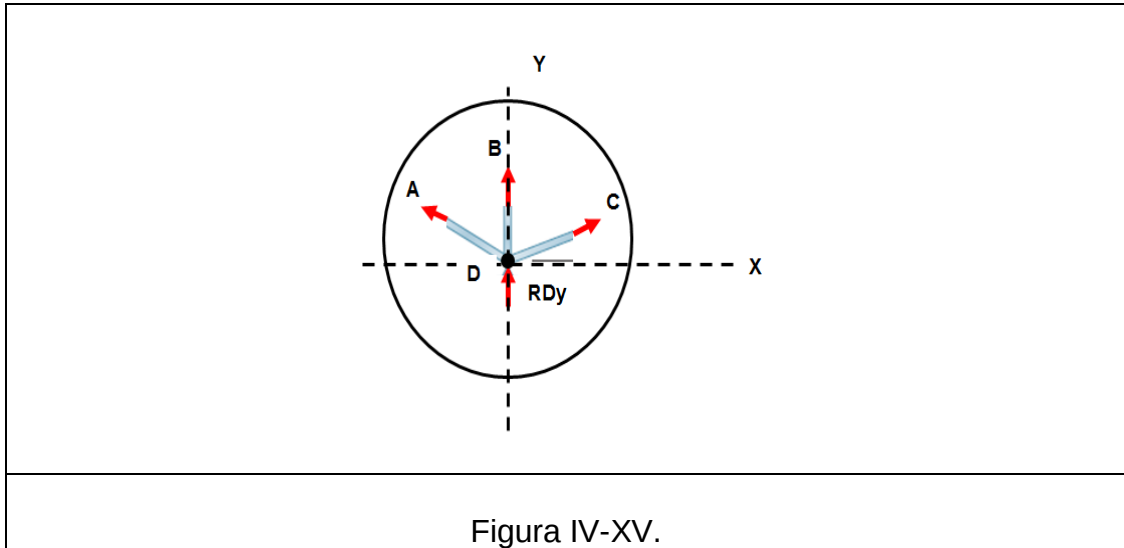
Este método se basa en aislar un nodo cualquiera de su entorno mediante el concepto del DCL y aplicar las ecuaciones de equilibrio estático para conocer las fuerzas que actúan en cada uno de los elementos que conforman dicho nodo y que permanece en equilibrio, por ejemplo: en la figura IV-XIII (bis) se muestra una armadura tomada del texto de Beer, et al. (2010)



En esta armadura se pueden identificar cuatro nodos:

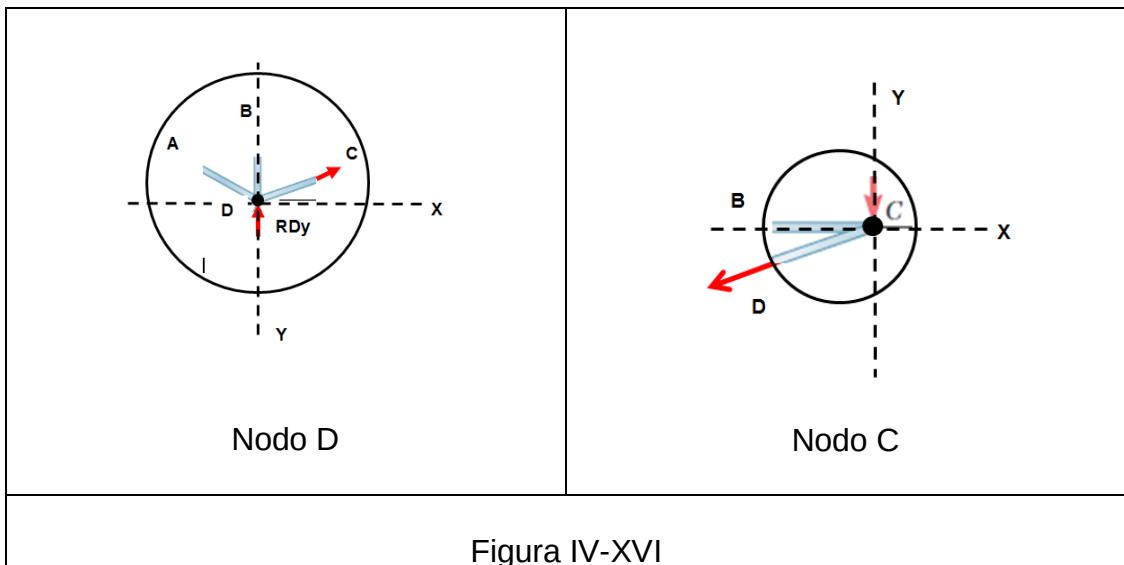
1. El nodo A conectado al exterior y compuesto por el elemento A-B y el elemento A-D,
2. El nodo B compuesto por el elemento A-B, B-D y B-C,
3. El nodo C compuesto por el elemento B-C y el elemento C-D...y
4. El nodo D conectado al exterior y compuesto por el elemento A-D y C-D.

De acuerdo a lo explicado en el apartado anterior de este mismo capítulo (4.1) a criterio se seleccionará el nodo D y sobre el mismo se hará el DCL, tal y como se muestra en la figura IV-XV:



En dicha figura únicamente la reacción RD_y y las posibles fuerzas que actúan en cada elemento A-D, B-D y C-D logran el equilibrio estático. Para conocer las fuerzas que actúan en cada elemento de dicho nodo D se recurre, como se ha estado indicando en esta sección, a la sumatoria de fuerzas en dirección X, Y e igualarlas a cero.

Es importante establecer la manera de identificar cada uno de los elementos que comparten más de un nodo así como el definir los criterios de los sentidos de las fuerzas que actúan en cada uno de los elementos para determinar correctamente si el elemento está sometido a tensión o a compresión. Para explicar lo anterior tomaremos como ejemplo el nodo D y el E de la figura IV.XIII y los cuales se presentan en la figura IV-XVI:



De la figura anterior está será la forma de identificar a cada uno de los elementos:

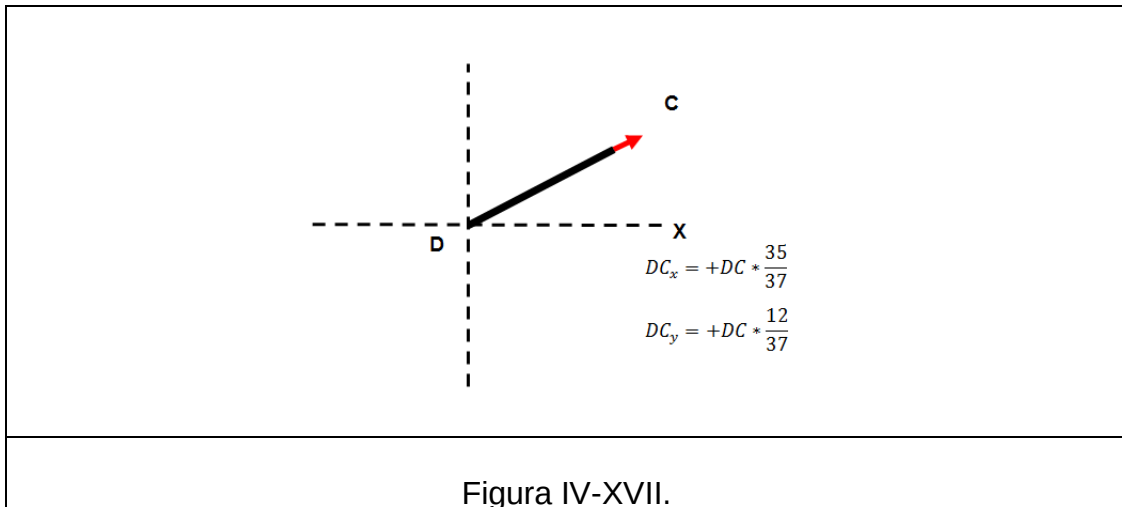
Nodo	D	C
Elemento	DA	
	DB	CB
	DC	CD
Tabla IV-II.		

Como se podrá observar en la tabla tal, el elemento DC o CD comparte ambos nodos: el D y el C. Cuando se analiza un nodo la forma de identificar a cada elemento es colocar la primera letra correspondiente al nodo en cuestión y la segunda letra del nodo hacia donde se dirige dicho elemento

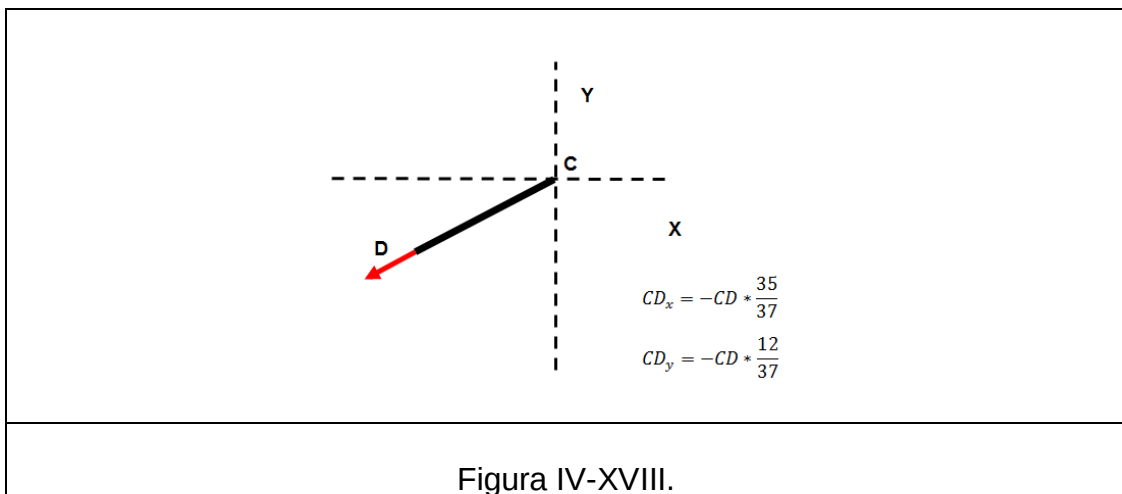
En cuanto al criterio para determinar el sentido de la fuerza actuante en cualquier elemento para determinar si este estará sometido a tensión o a compresión se harán los siguientes supuestos utilizando los mismos nodos de la figura IV-XVI:

1. Que ya se conoce la dirección de la fuerza que actúa en el elemento DC
2. Y que dicha dirección que se ha supuesto provoca que el elemento DC esté sometido a tensión.

Con los supuestos anteriores podemos representar las fuerzas que actúan en el elemento DC de la siguiente manera (figura IV-XVII):



Como se podrá observar en la figura anterior las componentes X, Y de la fuerza que actúa sobre el elemento DC son positivas y no por que dichas componentes estén de izquierda de derecha y de abajo hacia arriba, sino porque la fuerza tiende a "alejarse" de dicho nodo tal y como se explicó utilizando la figura IV-X. Si a continuación hacemos la misma representación de la fuerza actuante pero desde el nodo C se podrá comprender lo que aquí se desea explicar (figura IV-XVIII):



Tomando como referencia al nodo C y el representar la fuerza que actúa en el elemento CD en sus componentes X, Y , se observa que dichas componentes tienen sentido negativo (de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo) y el elemento en cuestión sigue sometido a tensión.

Para este ejemplo esto se podrá resumir de la siguiente manera:

$$DC_x + CD_x = 0$$

$$DC_y + CD_y = 0$$

Lo anterior se aplicará para cualquier elemento que forme parte de uno o más nodos.

Para abundar en la explicación de este método utilizaremos un problema propuesto del texto de Bedford y Fowler (1996), (figura IV-XIX). Primeramente encontraremos las posibles fuerzas de reacción en los puntos de apoyo G y E respectivamente e igual como se hizo en el ejemplo anterior se visualizara la armadura en una forma tal y como se muestra en la figura IV-XX:

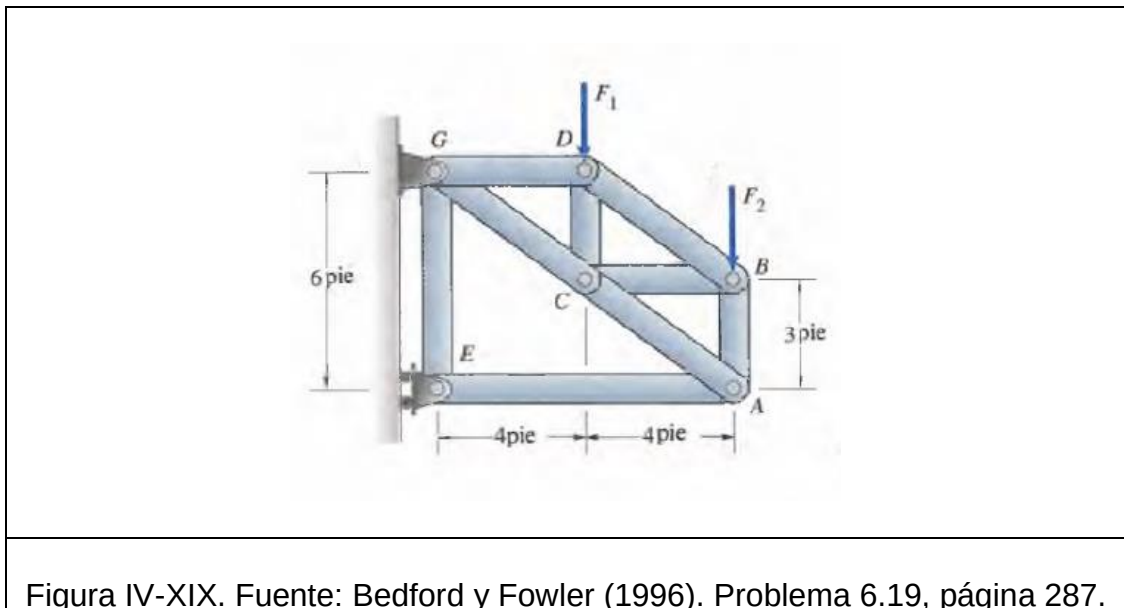


Figura IV-XIX. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 6.19, página 287.

En el DCL mostrado en la figura IV-XX se consideran dos posibles reacciones en el punto G y solo una reacción en el punto E cuya dirección es normal a dicho apoyo.

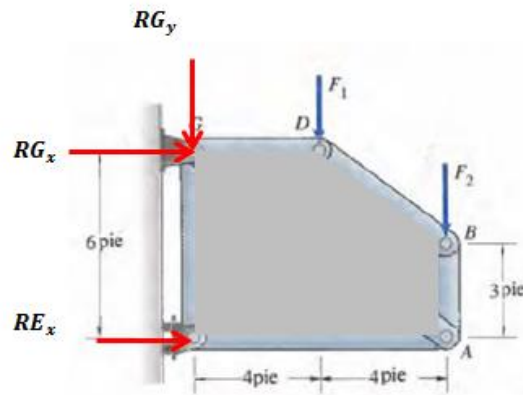


Figura IV-XX.

De acuerdo a los datos del problema donde $F_1 = -450 \text{ lb}$ y $F_2 = -150 \text{ lb}$, ambas en dirección vertical y haciendo momentos en el punto G se tiene que:

$$\sum \vec{M}_G = -4iX - 450j + 8iX - 150j - 6jXRE_x = 0, \text{lb.pie}$$

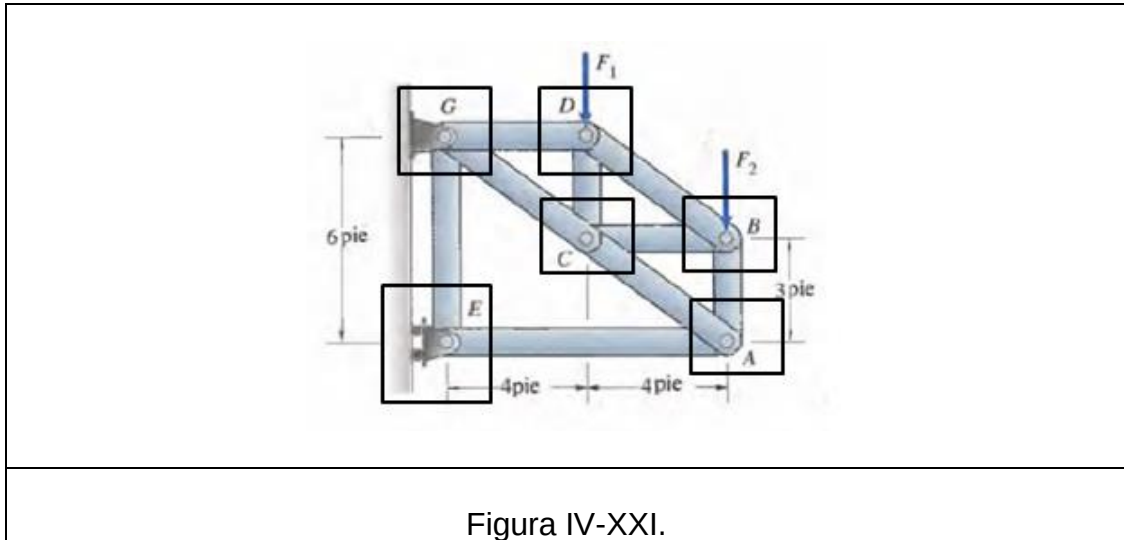
De lo anterior:

$$RE_x = 500 \text{ lb} \therefore RG_x = -500 \text{ lb}.$$

$$\sum F_y = -450 - 150 + RG_y = 0 \therefore RG_y = 600 \text{ lb}$$

Para aplicar el método de nodos el siguiente paso consiste en identificar cada nodo, en este problema son seis y se muestran en la figura IV-XXI:

A, B, C, D E y G



Posteriormente se calculará el número de elementos que componen dicha armadura utilizando la ecuación (IV-1):

$$m = 2n - 3; \text{ donde } n = \text{número de nodos}$$

Ya que de la figura tal se observan seis nodos, se tiene por lo tanto que:

$$m = 2(6) - 3 = 9 \text{ barras o elementos}$$

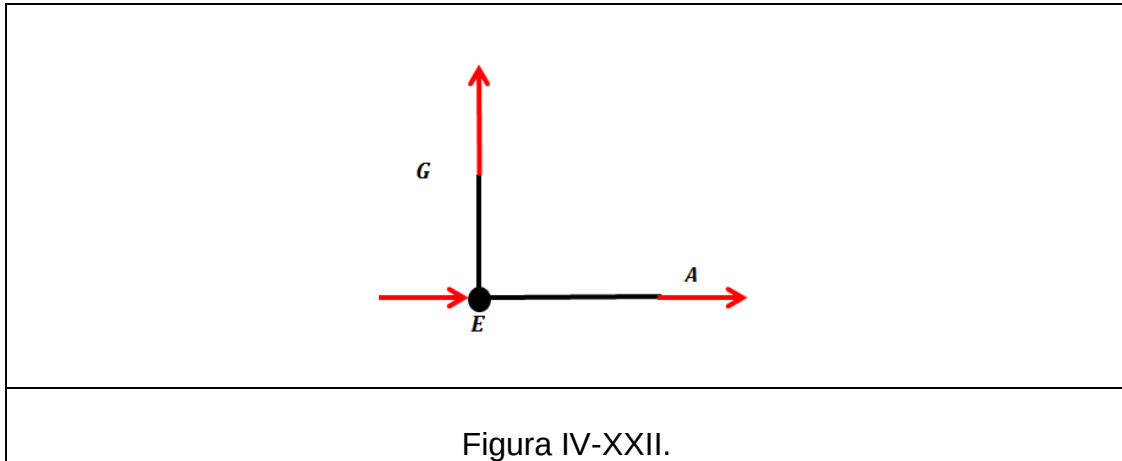
Que se definen así:

Elemento.
1. AB/BA
2. AC/CA
3. AE/EA
4. BC/CB
5. BD/DB
6. CD/DC
7. CG/GC
8. DG/GD
9. EG/GE
Tabla IV-III.

De lo anterior se concluye, además, que se tiene una armadura simple.

Dado que el método que se utilizará para conocer la fuerza que soporta cada elemento, analiza nodo por nodo se recomienda seleccionar aquel nodo en donde confluyen el menor número de elementos y/o el mayor número de datos. El nodo que presenta tales condiciones, en este problema, es el nodo

E. Una vez hecho la anterior selección se realizará un DCL del nodo E tal y como se muestra en la figura IV-XXII:



En este DCL del nodo E únicamente se consideran los elementos E-A y E-G. Dado que este nodo lo definen estas dos barras y el sistema está en equilibrio podemos plantear lo siguiente:

$$\sum F_x = 0; RE_x + EA = 0; EA = -RE_x$$

$$EA = -500 \text{ lb}$$

El anterior planteamiento indica que en el DCL de dicho nodo solamente participan la fuerza de apoyo en el punto E y la fuerza de reacción interna a lo largo del elemento o barra E-A, dicha fuerza de reacción y basándonos en la tercera ley de Newton es contraria a la reacción de 500 lb y necesaria para conseguir el equilibrio estático el equilibrio; -500 lb. El signo negativo de la reacción interna en la barra E-A indica que se dirige al nodo E y esto se interpreta que el elemento E-A está sometido a compresión y la manera correcta de escribir el anterior resultado es:

$$EA = 500 \text{ lb (C)}$$

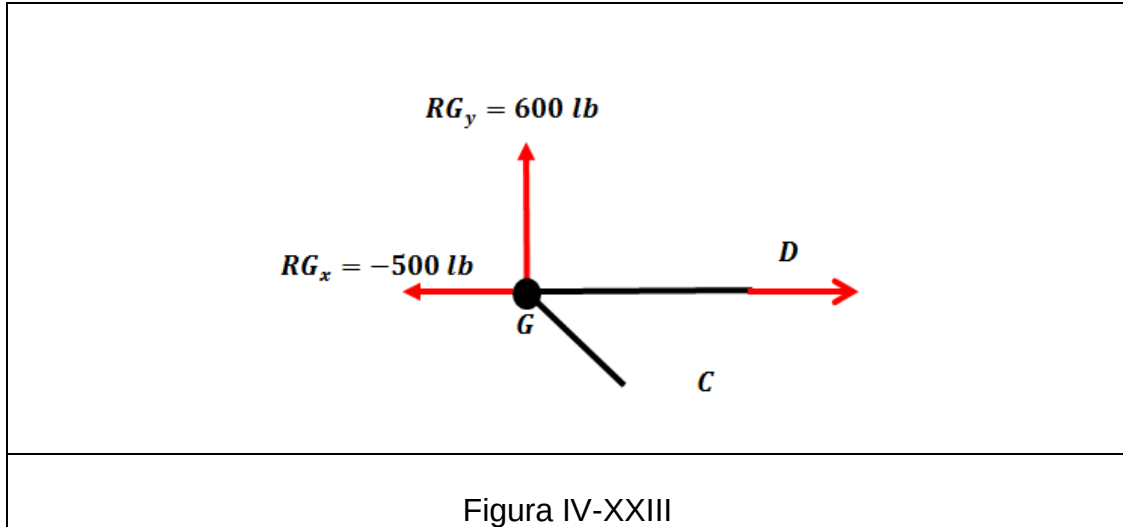
Asimismo en lo que respecta a la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0; EG = 0$$

De acuerdo a Hibbeler (2010), este tipo de elementos conocidos como elementos de fuerza cero son empleados para:

1. Hacer más estable la armadura durante la construcción y...
2. dar soporte adicional si se modifica la carga aplicada.

El siguiente nodo que se podría analizar con los resultados anteriores podría ser el G o el A, analizaremos el G. En la figura tal se muestra el DCL de dicho nodo es importante observar que no se toma en cuenta el elemento o barra G-E ya que en este elemento no actúa fuerza alguna.



A diferencia del nodo anterior el elemento GC está comprendido en el plano $X - Y$, lo anterior indica que la fuerza que actúa a lo largo de dicho elemento tiene componentes tanto en dirección X como en dirección Y . De acuerdo a los datos del problema y aplicando el criterio de cosenos directores, estas componentes se podrán expresar de la siguiente manera:

$$GC_x = GC \frac{8}{10}, \quad GC_y = GC \frac{6}{10}$$

Con los datos anteriores y haciendo sumatoria de fuerzas en el nodo G:

$$\sum F_y = RG_y + GC_y = 0; \quad GC_y = -600lb$$

El signo negativo indica que la componente en dirección Y que actúa sobre la barra GC se aleja del nodo G, por lo tanto dicho elemento está sometido a tensión:

Asimismo se tiene que:

$$GC = GC_y \frac{10}{6}$$

$$GC = 1000 \text{ lb (T)}$$

Respecto a la sumatoria de fuerzas en dirección X :

$$\sum F_x = RG_x + GC_x + GD = 0$$

La componente en X del elemento GC es:

$$GC_x = GC \frac{8}{10} = 1000 * \frac{8}{10} = 800 \text{ lb.}$$

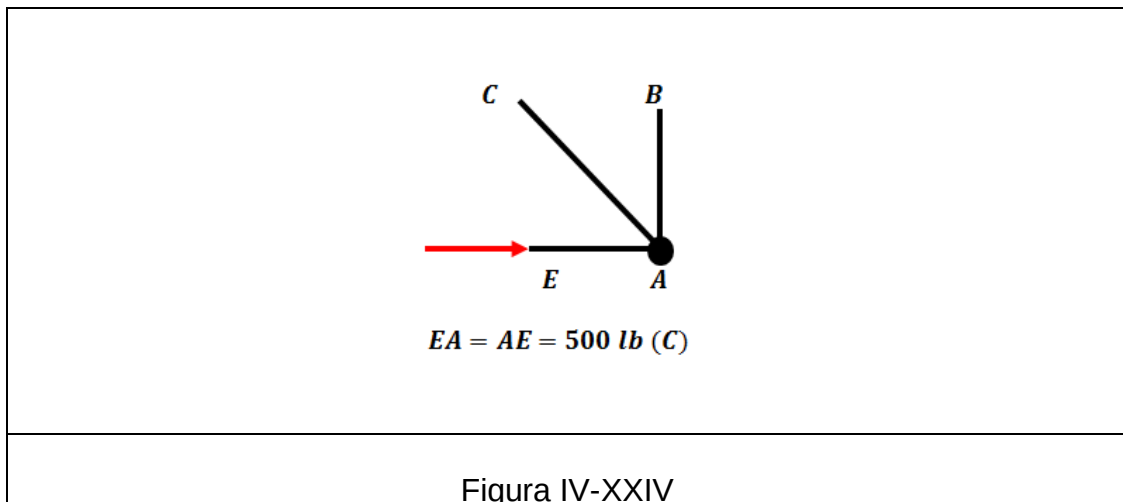
Recordando que este elemento GC está a tensión su componente en X se aleja del nodo:

$$RG_x + GC_x + GD = 0; -500 + 800 + GD = 0; GD = -300 \text{ lb}$$

Lo cual implica que el elemento GD está sometido a compresión:

$$GD = 300 \text{ lb (C)}$$

A continuación se analizará el nodo A (figura IV-XXIV):



Igual que el nodo anterior el elemento AC está comprendido en el plano $X - Y$, lo anterior indica que la fuerza que actúa a lo largo de dicho elemento tiene

componentes tanto en dirección X como en dirección Y . De acuerdo a los datos del problema estas componentes se podrán expresar de la siguiente manera:

$$AC_x = AC \frac{4}{5}, AC_y = AC \frac{3}{5}$$

Realizando sumatoria de fuerzas en dirección X :

$$\sum F_x = AC_x + AE = 0; AC_x = -AE = -500 lb.$$

El signo negativo indica que la componente en X se aleja del nodo A, por lo tanto el elemento AC está sometido a tensión:

$$AC = AC_x \frac{5}{4} = 625 lb (T)$$

Asimismo:

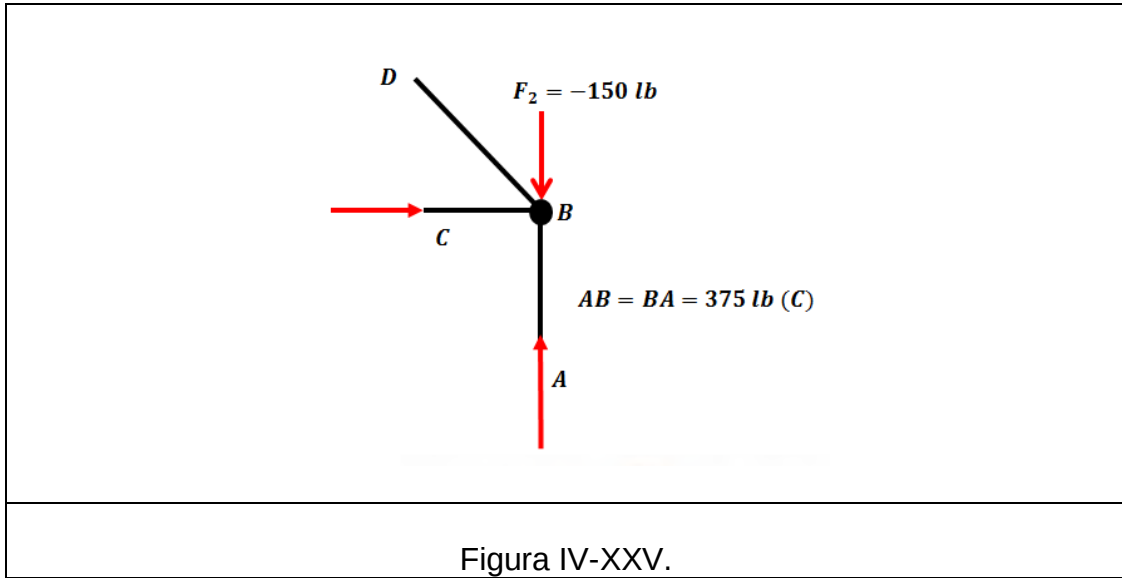
$$AC_y = AC \frac{3}{5} = 625 * \frac{3}{5} = 375 lb$$

$$\sum F_y = AB + AC_y = 0; AB = -AC_y; AB = -375 lb$$

El signo negativo implica que la fuerza que actúa en el elemento AB se está acercando al nodo A, por lo tanto dicho elemento actúa a compresión:

$$AB = 375 lb (C)$$

El siguiente nodo a aislar para realizar su DCL y poder encontrar las fuerzas que actúan en los elementos involucrados será el nodo B y el cual se presenta en la figura IV-XXV:



Igual que en los dos nodos anteriores se presenta un elemento que tiene componentes en el plano $X - Y$, el elemento BD y por lo tanto se podrá plantear de la siguiente manera:

$$BD_x = BD \frac{4}{5}, BD_y = BD \frac{3}{5}$$

Planteando sumatoria de fuerzas en Y :

$$\sum F_y = -150lb + BA + BD_y = 0$$

$$\sum F_y = -150lb + 375lb + BD_y = 0; BD_y = -225 lb$$

Como la componente en Y del elemento BD es negativo lo anterior implica que dicha componente se acerca al nodo por lo cual la barra BD está sometida a compresión:

$$BD_y = -225 lb = BD \frac{3}{5}$$

$$BD = 375 lb (C)$$

Su componente en dirección X será:

$$BD_x = BD \frac{3}{5} = 375 - * \frac{4}{5} = 300 \text{ lb}$$

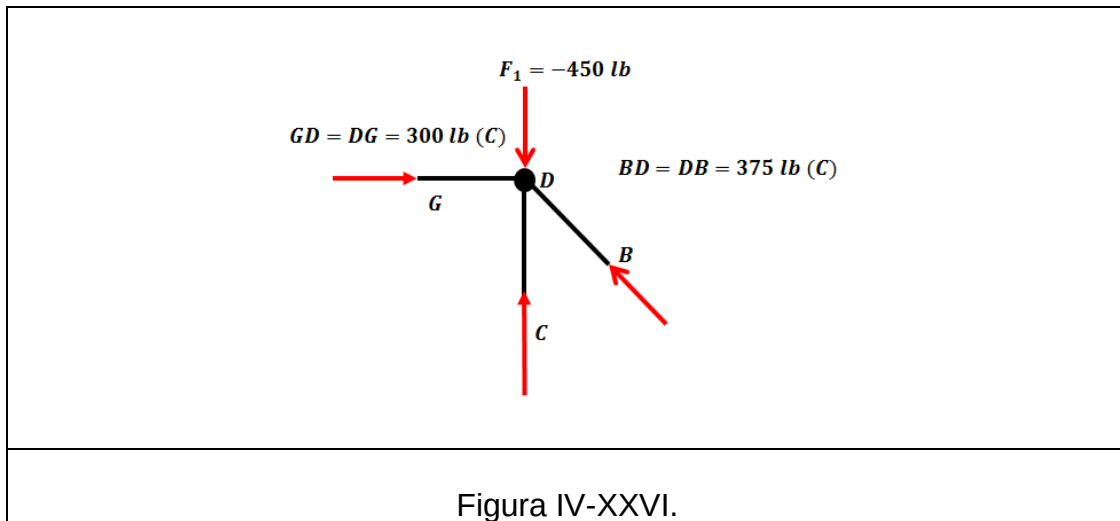
Sin olvidar que el elemento BD está a compresión por lo tanto también la componente en dirección X de dicho elemento se acerca al nodo. Lo anterior servirá para plantear correctamente la sumatoria de fuerzas en dirección X :

$$\sum F_x = BC + BD_x = 0; BE + 300 \text{ lb}; BC = -300 \text{ lb}$$

El signo negativo indica que la fuerza que actúa en dicho elemento se está alejando del nodo; está sometida a tensión:

$$BC = 300 \text{ lb (T)}$$

Quedan dos nodos para ser analizados: nodo C y nodo D. Seleccionar cualquiera de los dos nodos nos llevará al mismo resultado en cuanto a determinar la fuerza actuante en el elemento faltante y que es el CD. El criterio de selección sugerido en este caso es aquel que conlleve el menor número de operaciones y tal parece que se da en el nodo D. En la figura IV-XXVI se muestra el DCL de dicho nodo así como la información ya conocida tanto de la fuerza externa como de las fuerzas que actúan en los elementos DG y DB.



Planteando la ecuación equilibrio de fuerzas en dirección Y , la cual será suficiente para encontrar la fuerza actuante en el elemento DC, se tiene que:

$$\sum F_y = -450 \text{ lb} + DB_y + DC = 0; DB_y = +225 \text{ lb}$$

El valor de la fuerza actuante en el elemento CD tendrá un signo positivo, lo cual indica que dicha fuerza actuante se acerca al nodo y por lo tanto el elemento en cuestión está sometido a compresión

$$CD = +225 \text{ lb (C)}$$

Finalmente en la tabla IV-IV se presenta un informe completo sobre la estructura analizada. La importancia de saber cuáles elementos de cualquier estructura están sometidos a tensión o a compresión radica en el momento de la selección de los materiales que se ocuparán para su construcción. Este tema se verá en cursos posteriores tales como Resistencia de los Materiales y en Diseño de Elementos Mecánicos, lo único que podríamos aventurar en este curso con dicha información es que los elementos que trabajan a tensión podrían ser cables o cadenas ya que estos solamente trabajan bajo esta condición.

Nodos =3	Elementos= $m = 2n - 3 = 2(6) - 3 = 9$	
Armadura Simple		
Elemento.	Fuerza actuante (lb)	Condición de trabajo Compresión/Tensión
1. AB/BA	375	C
2. AC/CA	625	T
3. AE/EA	500	C
4. BC/CB	300	T
5. BD/DB	375	C
6. CD/DC	225	C
7. CG/GC	1000	T
8. DG/GD	300	C
9. EG/GE	0	-
Tabla IV-IV.		

A continuación se resolverá un segundo y último problema para reforzar tanto la teoría explicada en este subtema como la técnica en cuestión. Se demostrará que el método es repetitivo en cuanto a nodo por nodo, solo se deberá tener cuidado para encontrar las reacciones de apoyo de donde se sujeta la armadura. El problema en cuestión a resolver es del texto de Beer, et al. (2010), se pide determinar la fuerza que actúa en cada elemento e indicar si están a tensión o a compresión (figura IV-XXVII):

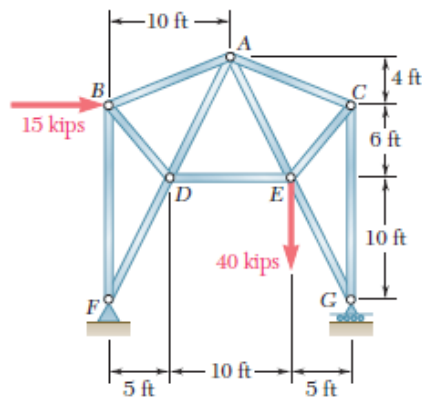


Figura IV-XXVII. Fuente: Beer et al. (2010). Problema 6.27, página 301.

Suponiendo que es una armadura simple:

$$m = 2n - 3 = 2(7) - 3 = 11$$

En teoría debe tener once elementos. Preparando la siguiente plantilla (tabla IV-V) que es la que se deberá completar al final. Se tienen que en principio es una armadura simple:

Nodos =7	Elementos= $m = 2n - 3 = 2(7) - 3 = 11$	
Armadura Simple		
Elemento.	Fuerza actuante (lb)	Condición de trabajo Compresión/Tensión
1. AB/BA		
2. AC/CA		
3. AD/DA		
4. AE/EA		
5. BD/DB		
6. BF/FB		
7. CE/EC		
8. CG/GC		
9. DE/ED		
10. DF/FD		
11. EG/GE		
Tabla IV-V.		

El siguiente paso será determinar las reacciones externas que son las de apoyo tanto en el nodo F y G. Realizando el DCL se podrá observar que el tipo de apoyo en G presenta una reacción de dirección conocida, en este caso vertical por lo anterior se hará la sumatoria de momentos con respecto al punto F (figura IV-XXVIII)

$$\sum \vec{M}_F = 16j \times 15i - 15i \times 40j + 20i \times R_{G_y}j = 0; ft \cdot kips$$

$$R_{G_y} = +42 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = -40 \text{ kips} + R_{G_y} + R_{F_y} = 0 \therefore R_{F_y} = -2 \text{ kips.}$$

$$\sum F_x = +15 \text{ kips} + R_{F_x} = 0 \therefore R_{F_x} = -15 \text{ kips.}$$

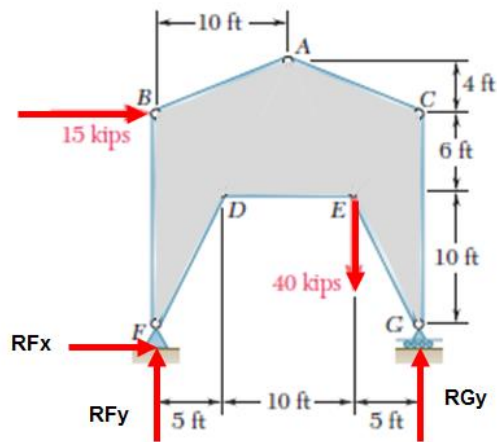


Figura IV-XXVIII.

Una vez ya calculadas las reacciones de apoyo en los puntos F y G respectivamente, se procede a analizar nodo por nodo para determinar la fuerza que actúa en cada elemento que conforma dicho nodo. A discreción de iniciará con el nodo G. En la figura IV-XXIX se muestra el DCL de dicho nodo

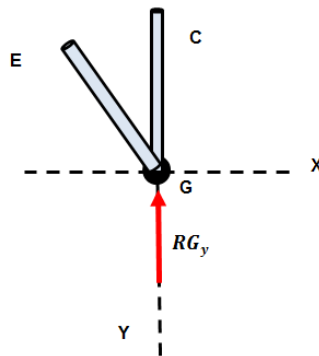


Figura IV-XXIX.

$$\sum F_x = 0 \therefore GE_x = 0$$

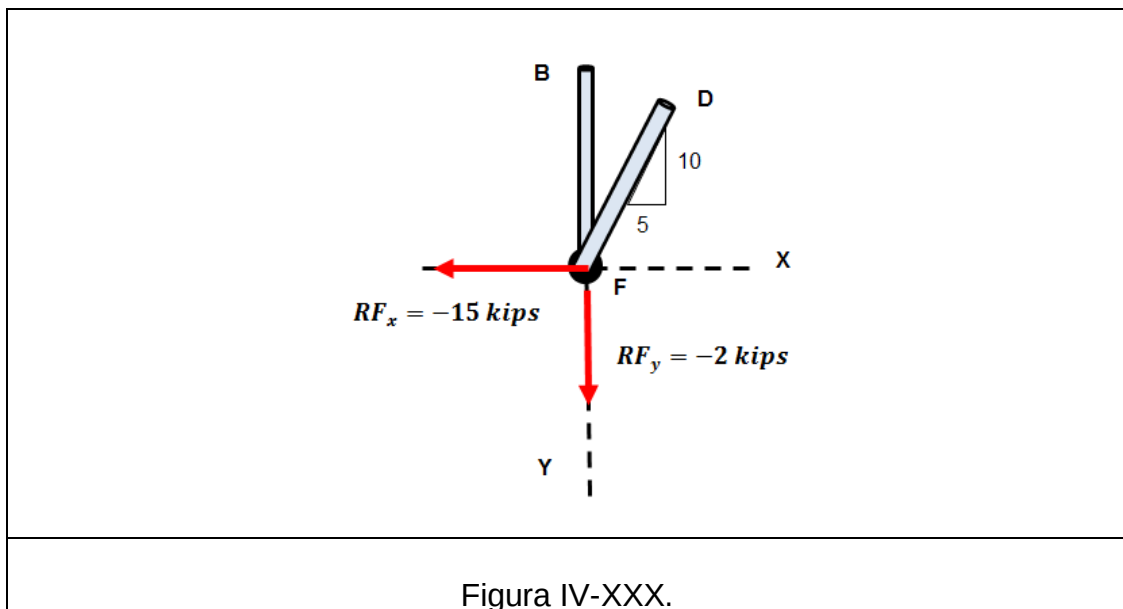
$$GE = 0$$

$$\sum F_y = RG_y + GC = 0 ; +20kips + GC = 0$$

$$GC = -42 \text{ kips. (C)}$$

El signo negativo indica que la fuerza se “acerca” al nodo, esto es: dicho elemento GC está sometido a compresión.

El siguiente nodo a analizar será el nodo F, compuesto por los elementos FB y FD. Como se podrá observar en la figura IV-XXX, que muestra el DCL de dicho nodo, la posible fuerza que actúa en el elemento BF está orientada en dirección vertical únicamente, mas no así con el elemento FD, de acuerdo a su posición la posible fuerza que actúa sobre él está comprendida en el plano X.Y:



De acuerdo a la imagen de la figura tal y por geometría se tiene que:

$$FD_x = FD * \frac{5}{\sqrt{125}} \text{ kips}$$

Y haciendo sumatoria de momentos en dirección X y sabiendo que el nodo se encuentra en equilibrio y que la componente en X del elemento FD se “aleja” del nodo lo cual implica que dicho elemento estará sometido a tensión se tiene que:

$$\sum F_x = RF_x + FD_x = 0; -15 \text{ kips} + FD * \frac{5}{\sqrt{125}} \therefore$$

$$FD = 33.5 \text{ (T)}$$

Haciendo el mismo razonamiento con respecto a la misma imagen de la figura tal pero en dirección vertical:

$$FD_y = FD * \frac{10}{\sqrt{125}} \text{ kips} = 30 \text{ kips}$$

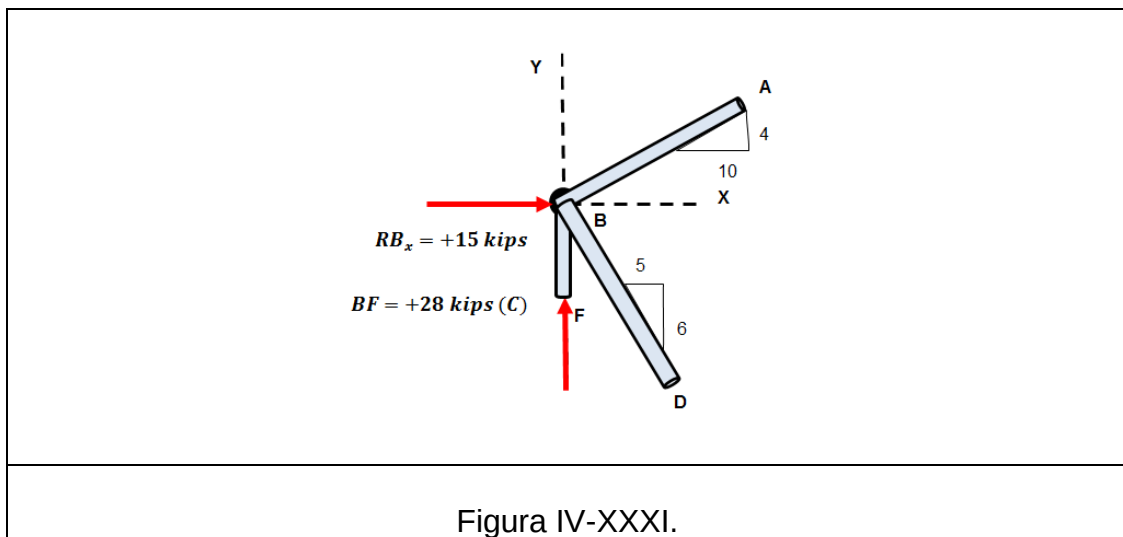
Y haciendo sumatoria de momentos en dirección Y:

$$\sum F_y = RF_y + FD_y + FB = 0; FB = +2 \text{ kips} - 30 \text{ kips}$$

Observando que la fuerza que actúa en elemento FB tiene un signo negativo indica que dicha fuerza se "acerca" al nodo F lo cual implica que el elemento FB está a compresión:

$$FB = -28 \text{ kips (C)}$$

El siguiente nodo a analizar será el B (figura IV-XXXI):



En casos como este nodo en donde se presentan más de tres fuerzas la estrategia a seguir es suponer que las posibles fuerzas desconocidas que serían las que actuarían a lo largo de los elementos BA y BD harían que estos

elementos trabajen a tensión, esto es: las fuerzas se alejan del nodo. De acuerdo a la figura tal y aplicando trigonometría podemos afirmar que:

$$BA_x = BA * \frac{10}{\sqrt{116}} \text{ y que: } BD_x = BD * \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Como se ha supuesto que tanto el elemento BA y BD trabajan a tensión

$$\sum F_x = 0, +15 \text{ kips} + BA_x + BD_x = 0; BA_x = -15 \text{ kips} - BD_x$$

$$BA * \frac{10}{\sqrt{116}} = -15 \text{ kips} - BD * \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$BA = -1.5 * \sqrt{116} - .5BD * \frac{\sqrt{116}}{\sqrt{61}}$$

Una ecuación con dos incógnitas: BA y BD.

Repitiendo lo anterior pero en dirección Y:

$$BA_y = BA * \frac{4}{\sqrt{116}}, BD_y = BD * \frac{6}{\sqrt{61}}$$

Pero debemos tomar en cuenta que debido al supuesto explicado líneas arriba, la componente de BA en Y será positiva y la componente de BD se escribirá con el signo menos ya que se ha supuesto que está a tensión y por lo tanto su sentido es de arriba hacia abajo:

$$\sum F_y = 0, BF + BA_y - BD_y = 0; BA_y = -28 \text{ kips} + BD_y$$

$$BA * \frac{4}{\sqrt{116}} = -28 \text{ kips} + BD * \frac{6}{\sqrt{61}}$$

$$BA = -\frac{28}{4} * \sqrt{116} \text{ kips} + BD * \frac{6 * \sqrt{116}}{4 * \sqrt{61}}$$

Segunda ecuación. Despejando BD, el cual dio positivo y que indica que nuestra suposición fue correcta y que dicho elemento trabaja a tensión:

$$BD = 21.5 \text{ kips (T)}$$

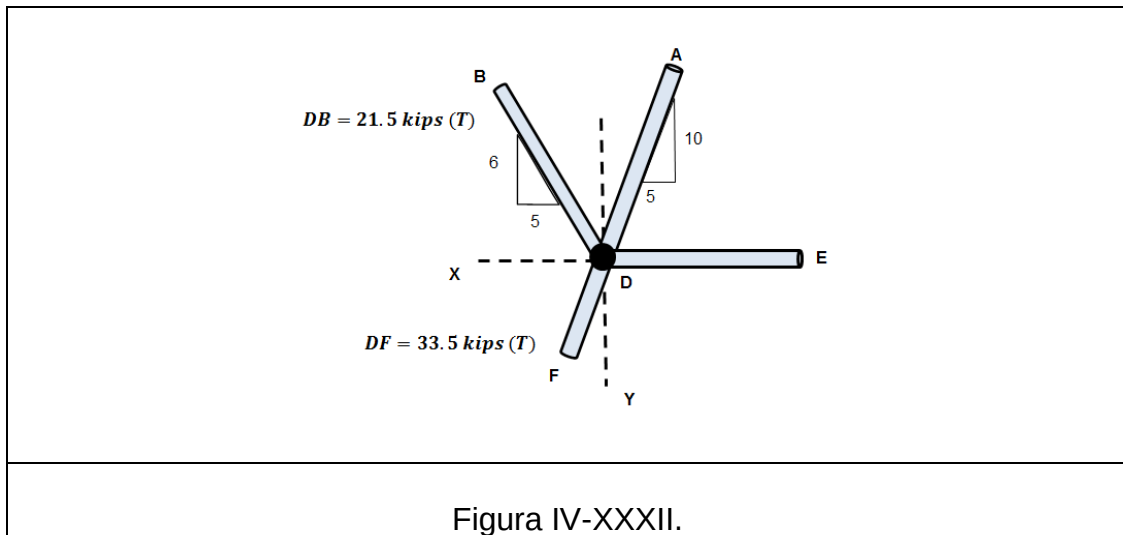
Replanteado la siguiente ecuación para BA:

$$BA = -1.5 * \sqrt{116} - .5BD * \frac{\sqrt{116}}{\sqrt{61}} = -31 \text{ kips}$$

El signo negativo indica que nuestra suposición sobre este elemento fue incorrecta, por lo tanto el elemento BA se encuentra a compresión:

$$BA = 31 \text{ kips (C)}$$

El siguiente nodo a tratar será el D y el cual se muestra su DCL en la figura IV-XXXII:



Primeramente y de acuerdo a los datos conocidos de los elementos DB y DF de la figura tal se planteará lo siguiente:

$$DB_x = DB * \frac{5}{\sqrt{61}} = -13.7 \text{ kips.}$$

$$DF_x = DF * \frac{5}{\sqrt{125}} = -15 \text{ kips.}$$

$$DB_y = DB * \frac{6}{\sqrt{61}} = +16.51 \text{ kips.}$$

$$DF_y = DF * \frac{10}{\sqrt{125}} = -30 \text{ kips.}$$

A continuación se plantean las incógnitas:

$$DA_x = DA * \frac{5}{\sqrt{125}}$$

$$DA_y = DA * \frac{10}{\sqrt{125}}$$

$$DE_x = DE$$

Efectuando la suma de fuerzas en dirección X e igualando a cero:

$$\sum F_x = DB_x + DF_x + DA_x + DE_x = 0$$

$$-13.7 \text{ kips.} - 15 \text{ kips.} + DA_x + DE_x = 0$$

Una ecuación con dos incógnitas

Efectuando, ahora, la suma de fuerzas en dirección Y e igualando a cero:

$$\sum F_y = DB_y + DF_y + DA_y = 0$$

$$\sum F_y = +16.51 \text{ kips.} - 30 \text{ kips.} + DA * \frac{10}{\sqrt{125}} = 0$$

Despejando DA y cuyo resultado será con signo positivo lo cual implica que este elemento está sometido a tensión:

$$DA = 15.07 \text{ kips (T)}$$

De lo anterior:

$$DA_x = DA * \frac{5}{\sqrt{125}} = 15.07 * \frac{5}{\sqrt{125}} = 6.74 \text{ kips.}$$

Replantando las ecuaciones:

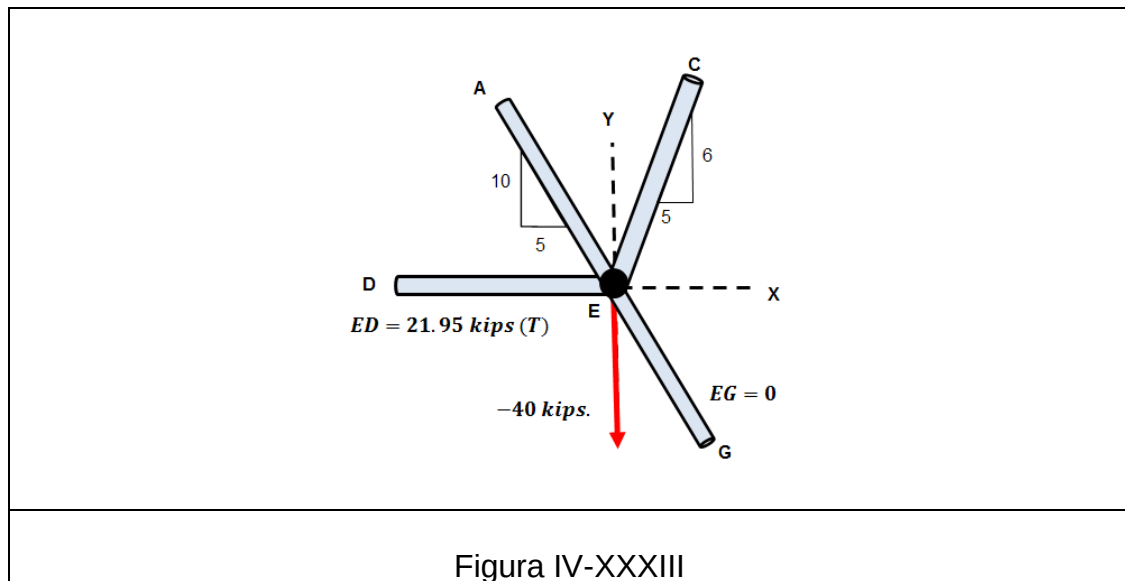
$$\sum F_x = DB_x + DF_x + DA_x + DE_x = 0$$

$$-13.7 \text{ kips.} - 15 \text{ kips.} + 6.74 \text{ kips} + DE_x = 0$$

Observando de antemano que el signo de DE_x será positivo lo cual implica que dicho elemento (DE) estará a tensión. Haciendo los despejes correspondientes:

$$DE = 21.95 \text{ kips (T)}$$

Se continuará con el nodo E el cual se muestra su DCL y los valores de los elementos ya calculados en la figura IV-XXXIII:



Como se ha realizado en los últimos nodos, primeramente y de acuerdo a los datos conocidos de los elementos ED y EG de la figura tal se planteará lo siguiente:

$$ED_x = ED = -21.95 \text{ kips.}$$

$$EG_x = 0$$

$$EG_y = 0$$

A continuación se plantean las incógnitas suponiendo que ambos elementos EA y EC están sometidos a tensión ya que en este nodo se presentan más de tres fuerzas:

$$EA_x = -EA * \frac{5}{\sqrt{125}}$$

$$EA_y = EA * \frac{10}{\sqrt{125}}$$

$$EC_x = EC * \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$EC_y = EC * \frac{6}{\sqrt{61}}$$

Efectuando la suma de fuerzas en dirección X e igualando a cero:

$$\sum F_x = ED_x - EA_x + EC_x = 0$$

$$\sum F_x = -21.95 \text{ kips} - EA * \frac{5}{\sqrt{125}} + EC * \frac{5}{\sqrt{61}} = 0$$

Una ecuación con dos incógnitas

Efectuando la suma de fuerzas en dirección Y e igualando a cero:

$$\sum F_y = -40 \text{ kips} + EA_y + EC_y = 0$$

$$\sum F_y = -40 \text{ kips} + EA * \frac{10}{\sqrt{125}} + EC * \frac{6}{\sqrt{61}} = 0$$

Se obtiene la necesaria segunda ecuación. Haciendo los despejes correspondientes se encontró que el signo del elemento EC es positivo, por lo tanto nuestro supuesto que ese elemento estuviera a tensión fue correcto:

$$EC = 41 \text{ kips (T)}$$

Respecto al elemento EA:

$$EC_x = EC * \frac{5}{\sqrt{61}} = 41 * \frac{5}{\sqrt{61}} = +26.25 \text{ kips}$$

$$\sum F_x = ED_x - EA_x + EC_x = 0$$

$$\sum F_x = -21.95 \text{ kips} - EA_x + 26.25 = 0$$

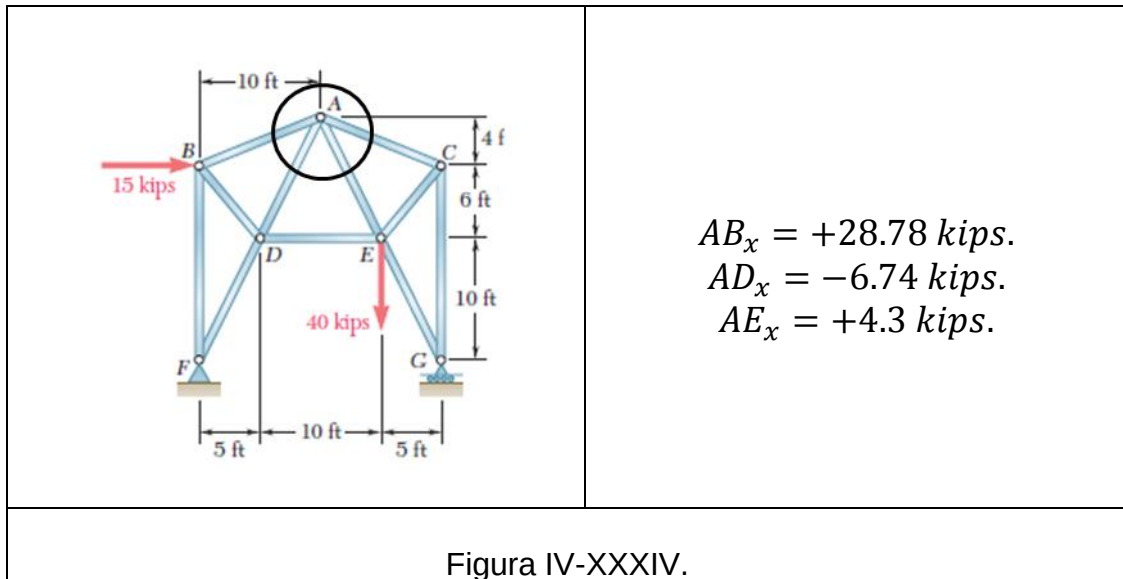
$$EA_x = 4.3 \text{ kips.}$$

El signo positivo indica que nuestro supuesto con el elemento EA a tensión fue correcto, dicho elemento trabaja a tensión y su valor es:

$$EA = EA_x * \frac{\sqrt{125}}{5} = 9.6 \text{ kips}$$

$$EA = 9.6 \text{ kips (T)}$$

El último nodo a analizar es el nodo A y de dicho análisis determinar la carga sobre el elemento AC/CA. La figura IV-XXXIV detalla los elementos que componen dicho nodo: AB, AD y AE, de los cuales ya se conoce el valor de la carga que soportan y si están sometidos a tensión o a compresión. Como se podrá observar, en dicha figura, con un sencillo planteamiento de sumatoria de fuerzas en dirección X se podrá determinar la carga que soporta el elemento AC/CA y si está bajo tensión o compresión.



$$\sum F_x = AB_x + AD_x + AE_x + AC_x = 0$$

$$28.78 - 6.74 + 4.3 + AC_x = 0$$

$$AC_x = -26.33 \text{ kips. (C); } AC_x = AC * \frac{10}{\sqrt{116}} \therefore$$

$$AC = 28.3 \text{ kips (C)}$$

Quedando, finalmente, plasmados los resultados de cada uno de los elementos de dicha estructura bajo análisis en la tabla IV-VI.

Con este ejemplo se finalizará la explicación sobre el cómo determinar el valor de la fuerza que soporta cada uno de los elementos que conforman alguna de las estructuras definidas es este subtema y al mismo tiempo el determinar si esta fuerza tensa o comprime a dichos elementos.

Nodos =7	Elementos= $m = 2n - 3 = 2(7) - 3 = 11$	
Armadura Simple.		
Elemento.	Fuerza actuante (kips)	Condición de trabajo Compresión/Tensión
1. AB/BA	31	C
2. AC/CA	28.3	C
3. AD/DA	15.07	T
4. AE/EA	9.6	T
5. BD/DB	21.5	T
6. BF/FB	28	C
7. CE/EC	41	T
8. CG/GC	42	C
9. DE/ED	21.95	T
10. DF/FD	33.5	T
11. EG/GE	0	-
Tabla IV-VI		

4.1.2 Método de secciones.

El método de nodos es altamente recomendado cuando se desea saber el valor de las cargas que actúan en cada uno de todos los elementos que dan forma a una armadura, así como determinar si estos están bajo tensión, compresión o son elementos de fuerza cero. Cuando solo se desea conocer el valor de la fuerza actuante en cierto número de elementos que componen una armadura el método sugerido es el de las secciones. Este método se basa en seccionar la armadura mediante el concepto de DCL buscando que la sección que se haga sea sobre los elementos a determinar. Para ejemplificar lo anterior tomemos nuevamente la estructura de la figura IV-XIII (bis-a):

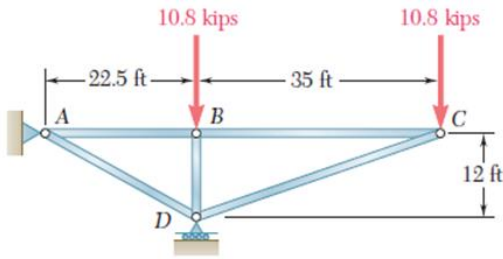


Figura IV-XIII (bis-a). Fuente: Beer, et.al. (2010). Problema 6.5, página 298.

Dicha figura se compone de cinco elementos, peso supongamos que solo se desea conocer la fuerza que actúa en el elemento AB. El procedimiento, como se indica líneas arriba, consistirá en seccionar la imagen de la armadura en la parte donde se encuentra el elemento a determinar su carga actuante. En la figura IV-XXXV se podrá observar dicha sección referida

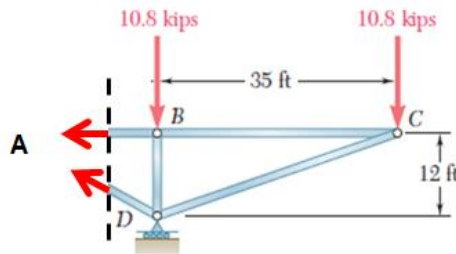


Figura IV-XXXV.

Y si planteamos la sumatoria de momentos en el punto D se podrá determinar la carga y el tipo de la misma que actúa en el elemento BA/AB:

$$\sum \vec{M}_D = 35iX(-10.8j) + 12jXFBAi = 0$$

$$FBA = -31.5 \text{ kips} \therefore$$

$$BA/AB = 31.5 \text{ kips (T)}$$

A continuación se destacan algunas de las ventajas de este método:

1. No siempre será necesario, como en el método por nodos, el encontrar las fuerzas de reacción entre los puntos de apoyo entre la armadura y en donde dicha armadura se sujete (en este ejemplo serían los puntos de apoyo A y D).
2. El tiempo empleado para su solución es significativamente menor

A continuación se emplearán los problemas que se utilizaron en el subtema anterior para ayudar a dominar este método. En la figura IV-XIX (bis) se muestra la armadura de la cual se calcularon las cargas que actuaban en cada uno de los elementos que la conforman así como el tipo de la misma; tensión o compresión

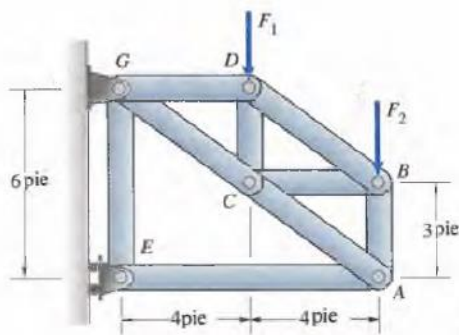


Figura IV-XIX (bis). Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 6.19, página 287.

Supongamos que únicamente se desea conocer las cargas que actúan en los siguientes tres elementos: DG, CG y AE. En la figura IV-XXXVII, mediante el respectivo DCL, se muestra la sección que se debe hacer para incluir a los tres elementos bajo cuestión:

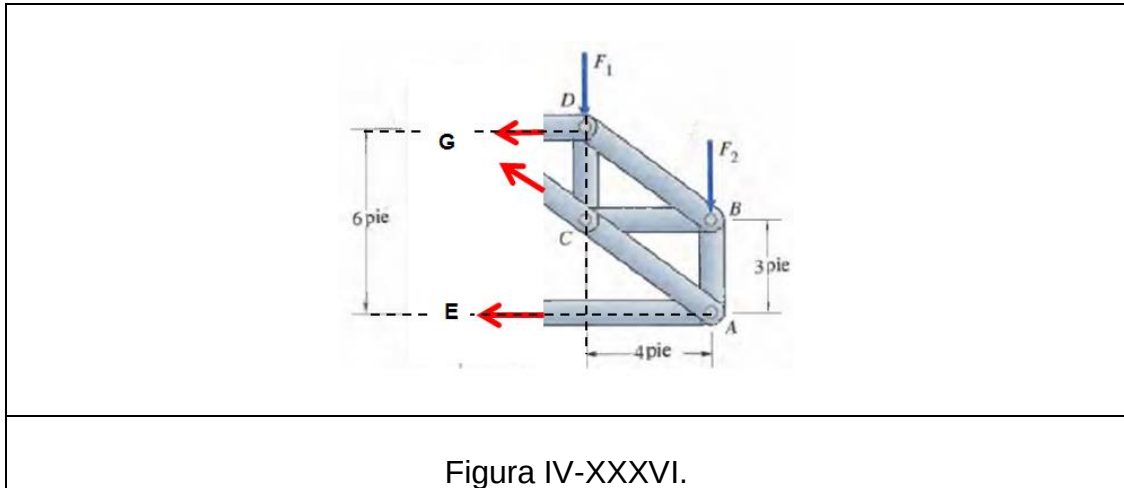


Figura IV-XXXVI.

Observando dicho DCL y sabiendo el valor de F_1 se procederá a hacer momentos en el punto A:

$$\sum \vec{M}_A = -4iX(-450j) + 6jXFDGi = 0$$

$$FDG = +300 \text{ lb.} \therefore$$

$$DG/GD = 300 \text{ lb (C)}$$

Ya con este dato y conociendo el valor de F_2 se procederá a hacer momentos en el punto C:

$$\sum \vec{M}_C = 3jX(FDGi) + 4iX(-150j) - 3jXFAEi = 0$$

$$FAE = +500 \therefore$$

$$AE/EA = 500 \text{ lb (C)}$$

Por último, haciendo la sumatoria de fuerzas en X:

$$\sum F_X = DG + AE + CG_x = 0; CG_x = -800 \text{ lb}$$

El elemento CG estará a tensión y el valor de la carga que actúa sobre él es:

$$CG_x = CG * \frac{4}{5} \therefore$$

$$CG/GC = 1000 \text{ lb (T)}$$

Se indicó, como una ventaja, que no siempre será necesario el determinar las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo de la armadura, bajo cuestión, con su entorno. El siguiente problema, que ya se resolvió por el método por nodos, demuestra lo anterior (figura IV-XXVII-bis). Supongamos que se desea determinar la carga y el tipo de la misma que actúa sobre los elementos CA, EA y ED.

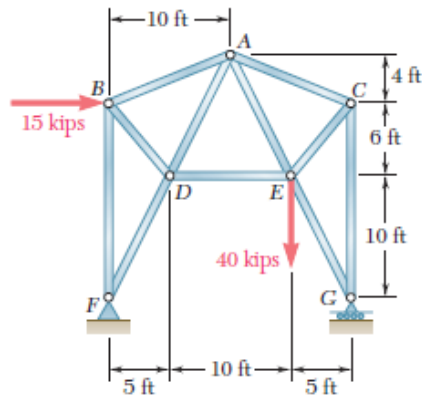


Figura IV-XXVII (bis). Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 6.27, página 301.

En la figura IV-XXXVII se muestra mediante el correspondiente DCL el corte de la estructura que fue seccionado en aras de responder a los cuestionamientos de los elementos referidos

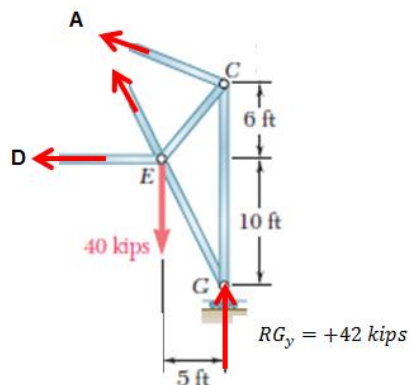


Figura IV-XXXVII

Si se efectúan momentos en el nodo E será obligado el utilizar la fuerza de reacción en el nodo de apoyo G (en este caso omitiremos el cómo calcularlo nuevamente, ya que será lo mismo que se hizo cuando se explicó el método por nodos). Sabiendo que:

$$CA_x = CA * \frac{10}{\sqrt{116}} ; CA_y = CA * \frac{4}{\sqrt{116}}$$

Por lo tanto y suponiendo que CA está sometida a tensión (esto es, la fuerza se aleja del nodo C):

$$\sum \vec{M}_D = 5iX42j + 5iXCA_yj - 6jXCA_xi = 0$$

$$210k + CA * \frac{20}{\sqrt{116}}k + CA * \frac{60}{\sqrt{116}}k = 0; kips - pie$$

$$CA = -28.27 kips.$$

El signo negativo indica que nuestra suposición de que el elemento CA estaba bajo tensión fue incorrecta, por lo tanto:

$$CA/AC = 28.27 kips(C)$$

Ya que:

$$CA_y = CA * \frac{4}{\sqrt{116}} = 28.27 * \frac{4}{\sqrt{116}}; CA_y = -10.5 kips$$

Y:

$$\sum F_y = 0; -40 kips + 42 kips + CA_y + EA_y = 0; \therefore EA_y = +8.5 kips$$

El signo positivo indica que el elemento está sometido a tensión, y como:

$$EA_y = EA * \frac{10}{\sqrt{125}}$$

$$EA/AE = 9.5 kips(T)$$

Asimismo:

$$CA_x = CA * \frac{10}{\sqrt{116}} = 28.27 * \frac{10}{\sqrt{116}} = +26.24 \text{ kips}$$

$$EA_x = EA * \frac{5}{\sqrt{125}} = EA_x = -4.24 \text{ kips}$$

$$\sum F_x = 0; CA_x + EA_x + ED = 0; \therefore ED = -22 \text{ kips}$$

Ya que el signo es negativo el elemento en cuestión está sometido a tensión:

$$ED/DE = 22 \text{ kips}(T)$$

Se resolverá un último problema para afianzar la teoría y práctica explicada hasta este punto de este subtema. Dicho problema propuesto, del texto de Beer, et al. (2010), se presenta en la figura IV-XXXVIII. Asimismo se sugiere al alumnado realizar la mayor cantidad de problemas afines para poder desarrollar la habilidad necesaria que se requiere en aras de cumplir con el objetivo de este y todos los capítulos de este texto; la práctica hace al m@estro.

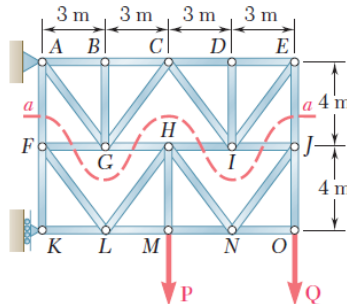


Figura IV-XXXVIII. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 6.62, página 313

En este tipo de problemas se recomienda identificar las posibles opciones, analizarlas y escoger aquella que nos asegure el éxito. Por ejemplo, si hacemos el DCL tal y como lo recomienda el autor tendremos la imagen mostrada en la figura IV-XXXIX:

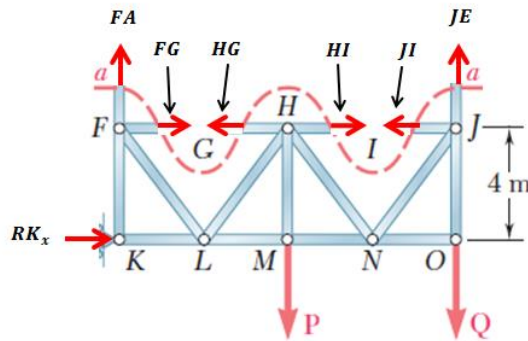


Figura IV-XXXIX. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 6.62, página 313

El DCL, de la figura tal, es correcto en su trazo, pero se presentan siete incógnitas:

$$FA, FG, HG, HI, JI, JE \text{ y } RK_y$$

Querer resolverlo con las ecuaciones de equilibrio conocidas como la sumatoria de fuerzas y de momentos será insuficiente. La segunda opción será, considerar la estructura como se muestra en la figura XL y realizar la sumatoria de momentos en el apoyo A para conocer RK_x :

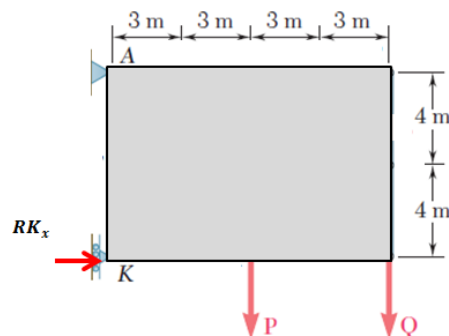


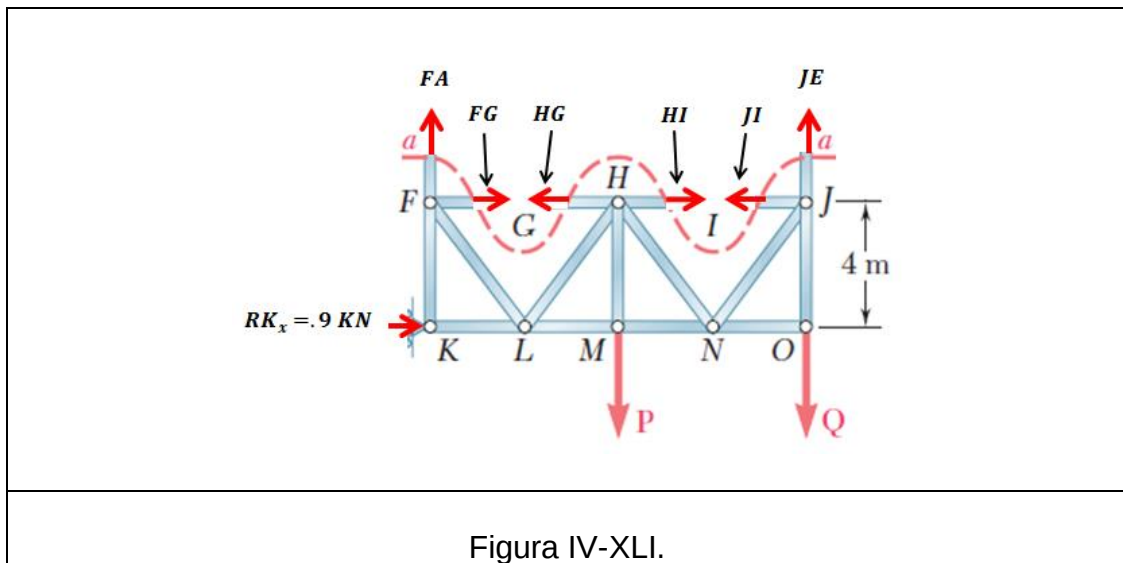
Figura IV-XL.

Sabiendo, de acuerdo a los datos originales de este problema, que el valor de $P = 1.2 \text{ KN}$, sentido negativo y dirección vertical y el de $Q = 0$, se hace el siguiente planeamiento:

$$\sum \vec{M}_A = 6iX(-1.2)j - 8jX(RK_x)i = 0; KN.m$$

$$RK_x = +.9 KN.$$

Una vez determinado esta reacción se tiene un nuevo DCL de la sección deseada en cuanto al valor del nodo de apoyo K (figura IV-XLI)



Si observamos la imagen de la figura, solo los elementos FA y JE están completamente en dirección vertical, de tal manera que si hacemos la sumatoria de fuerzas en dirección Y tendremos lo siguiente:

$$\sum F_y = FA + JE - 1.2 KN. = 0, \therefore FA = -JE + 1.2 KN.$$

Una ecuación con dos incógnitas. Plantear sumatoria de fuerzas en dirección X e igualarla a cero no ayudaría en lo absoluto ya que, aunque se tiene una nueva ecuación, se tendrían cuatro incógnitas:

$$FG, HG, HI \text{ y } JI$$

Queda por último plantear la ecuación de sumatoria de momentos e igualarla a cero, ya que la estructura bajo cuestión se encuentra en equilibrio. Se deberá buscar un punto idóneo para efectuar momentos. Y el punto idóneo será aquel que elimine el mayor número de incógnitas. Revisando a detalle el DCL de la figura IV-XLI se identifican dos puntos que eliminan las cuatro incógnitas definidas líneas arriba ya que la línea de acción de cada una de las fuerzas

que actúan en dichos elementos, de acuerdo al principio de transmisibilidad, cruza por ambos puntos, los puntos de los nodos F y J. Efectuando sumatoria de momentos en F se tiene que:

$$\sum \vec{M}_F = -4jX R K_x i + 6iX(P)j + 12iX(JE)j = 0, KN.m$$

$$\sum \vec{M}_F = -4jX.9i + 6iX(-1.2)j + 12iX(JE)j = 0, KN.m$$

Haciendo las operaciones correspondientes se encuentra el valor de la fuerza que actúa en el elemento JE y su sentido que en este caso fue positivo, indicando que dicho elemento trabaja a tensión:

$$JE/EJ = .3 KN. (T)$$

Y de la primera ecuación planteada para este problema:

$$FA = -JE + 1.2 KN$$

Se tiene finalmente que:

$$FA/AF = .9 KN. (T)$$

El analizar a detalle la figura del problema, como lo fue en este caso, ayuda a encontrar la ruta más corta, en cuanto a tiempo, y asegurar la solución del problema. Lo anterior, como ya se ha indicado, se logrará con práctica y disciplina.

4.2 MARCOS.

Diferentes textos de estática así como programas académicos de la misma materia utilizan de manera indiferente las palabras marco, bastidor, armazón, para referirse a lo mismo. Para unificar criterios, primeramente se realizará una búsqueda en el diccionario digital de la RAE de dichas palabras, y posteriormente conocer la definición que dan varios autores.

Marco³⁴(aunque existen más definiciones, solo se consideran aquellas ad hoc al subtema en referencia):

1. m. Pieza que rodea, ciñe o guarnece un cuadro u otra cosa semejante.
2. m. Pieza fija en donde se encaja una puerta, una ventana, etc.

Bastidor³⁵

1. m. Armazón que sirve para fijar, encajar o soportar algo como un lienzo, una tela, un cristal de una ventana, etc.
2. m. Mar. Armazón de hierro o bronce en que la hélice apoya su eje cuando no es fija, como sucede en ciertos buques mixtos.
3. m. Mec. Armazón metálica que soporta la carrocería de un automóvil. Los coches llevan grabado en el bastidor su número de identificación.
4. m. Mec. Conjunto del bastidor con el motor y las ruedas.

Armazón³⁶

1. m. o f. Pieza o conjunto de piezas unidas que presta estructura o sostén a algo.
2. m. o f. Estructura interna de una obra.
3. m. o f. armadura (ll esqueleto).

Beer et al. (2010), indica sobre el concepto lo siguiente: “*Bajo la denominación de armaduras, bastidores o armazones se consideran estructuras totalmente constituidas por pernos y elementos rectos...*”, y continúa estableciendo, en parte, que: “*Los armazones son estructuras que contienen elementos*

³⁴ <https://dle.rae.es/marco?m=form> (visitada el 25 de noviembre de 2019)

³⁵ <https://dle.rae.es/bastidor?m=form> (visitada el 25 de noviembre de 2019)

³⁶ <https://dle.rae.es/armaz%C3%B3n?m=form> (visitada el 25 de noviembre de 2019)

sometidos a la acción de varias fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y son estructuras estacionarias”.

En lo que respecta a Bedford (2000) el establece lo siguiente: *“En ingeniería, el término estructura se puede referir a cualquier objeto que tiene la capacidad de soportar y ejercer cargas”*. Continúa estableciendo respecto a los marcos, armazones y bastidores lo siguiente: *“estructuras de miembros interconectados que no satisfacen la definición de una armadura. Estas estructuras se denominan bastidores si están diseñadas para permanecer en reposo al soportar cargas,...”*.

De acuerdo a todo lo anterior podemos establecer que un marco, armazón o bastidor presenta las siguientes características:

1. Está compuesto por más de un elemento los cuales se conectan entre sí por pernos.
2. Que alguno o más de los elementos podrán estar empotrados a su entorno.
3. Que alguno o más de los elementos pueden no ser rectos
4. Al menos un elemento está sometido a más de dos fuerzas, pero se sigue presentando el equilibrio estático.
5. Fuerzas que no necesariamente están orientadas a lo largo del elemento,
6. Existen fuerzas que no necesariamente se apliquen en los nodos
7. Pueden, también, estar sometidos a momentos externos cuya dirección del vector resultante es perpendicular al plano donde se define el bastidor.

En la figura IV-XLII se presenta un ejemplo del texto de Bedford (2010). En dicha imagen el armazón está compuesto, principalmente, por tres elementos: AE, ABCD y CF. Haciendo una analogía de la imagen con las siete características anteriores se tiene que:

1. Elemento recto AE, el cual está conectado al elemento ABCD, por medio de un perno en el extremo A (característica número uno).
2. El elemento AE se encuentra empotrado a su entorno en el extremo E (característica número dos).
3. El elemento ABCD es un elemento no recto (característica número tres).
4. El elemento ABCD está sometido a más de dos fuerzas (característica número cuatro).

5. Al menos en uno de los elementos, la fuerza no está orientada a lo largo del mismo (característica número cinco).
6. En los extremos B y D del elemento ABCD se aplican fuerzas y no se consideran nodos como lo son el nodo A y el nodo C (característica número seis).
7. Las poleas que se encuentran en los extremos B y D provocan en el armazón pares externos (característica número siete)

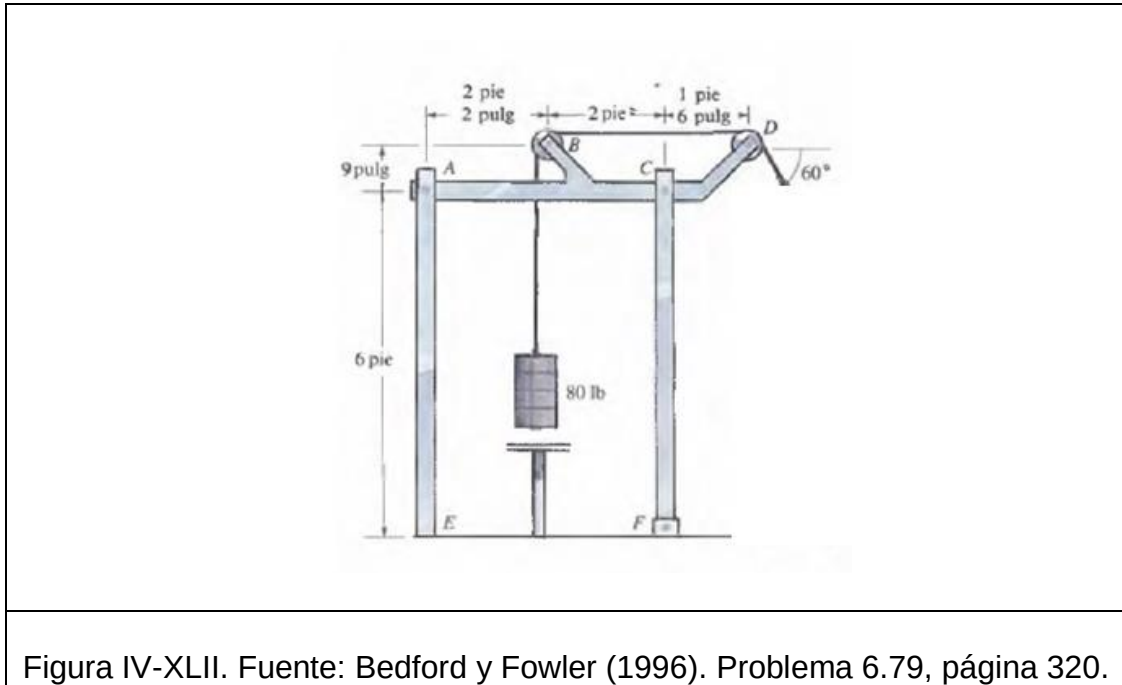


Figura IV-XLII. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 6.79, página 320.

El método de solución generalmente implicará analizar elemento por elemento o combinación de elementos que conformen dicho armazón mediante los respectivos DCL. Mediante la solución de problemas propuestos en los textos de los autores ya referenciados en este texto, se tratará de explicar dicho método de solución observando las siete consideraciones indicadas líneas arriba.

Del texto de Bedford (2000) se tomó el siguiente problema (figura IV-XLIII), en él se pide encontrar las reacciones de empotramiento en A y la fuerza de reacción en C (el piso es liso):

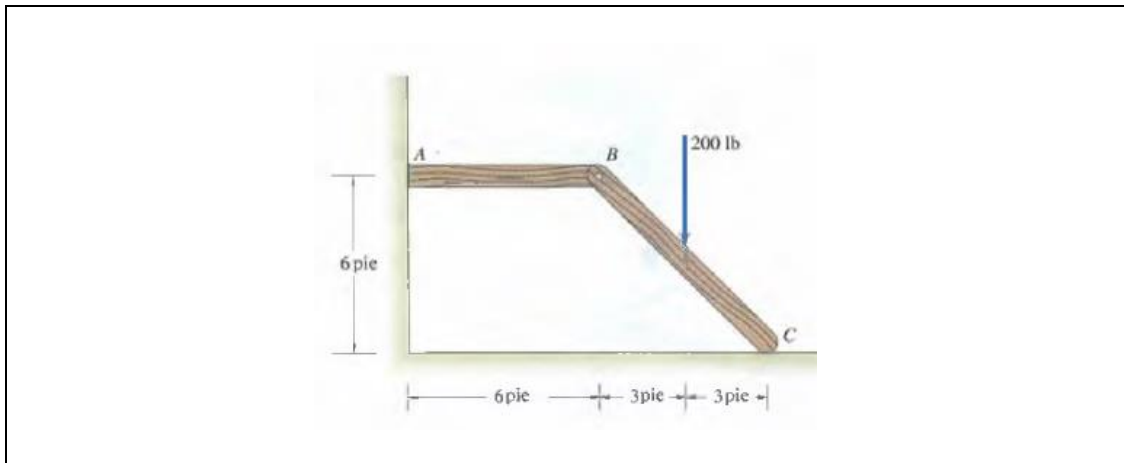


Figura IV-XLIII. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 6.62, página 316

En principio se recomienda –está recomendación es para todos los problemas de este subtema- trazar el DCL del bastidor en cuestión para poder identificar las reacciones, en este caso, entre los puntos A y C. En la figura IV-XLIV se muestra dicho DCL.

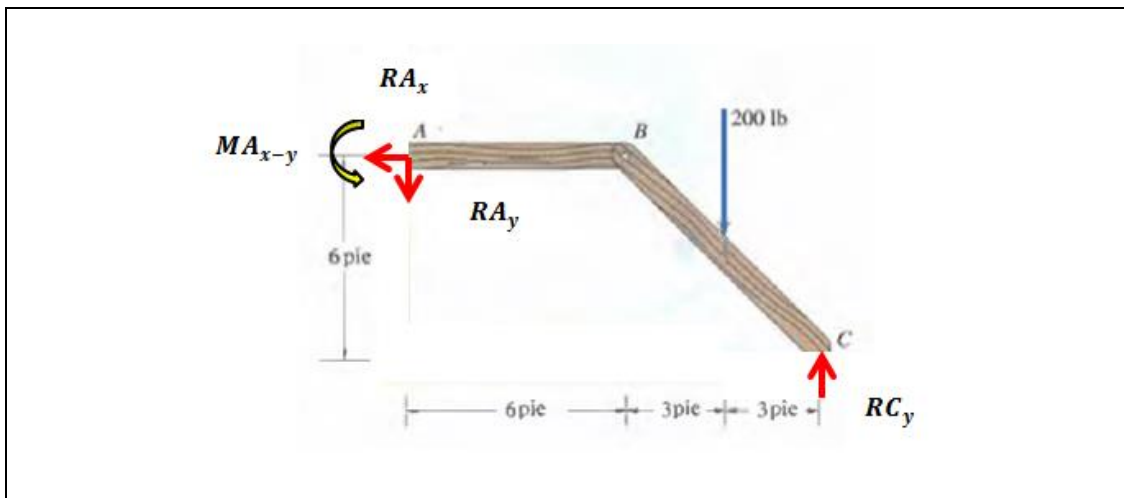


Figura IV-XLIV.

Plateando la sumatoria de fuerzas en dirección X se obtiene que:

$$\sum F_x = 0; RA_x = 0$$

$$RA_x = 0$$

Plateando la sumatoria de fuerzas en dirección Y se obtiene que:

$$\sum F_y = 0; RA_y + RC_y - 200 \text{ lb.} = 0$$

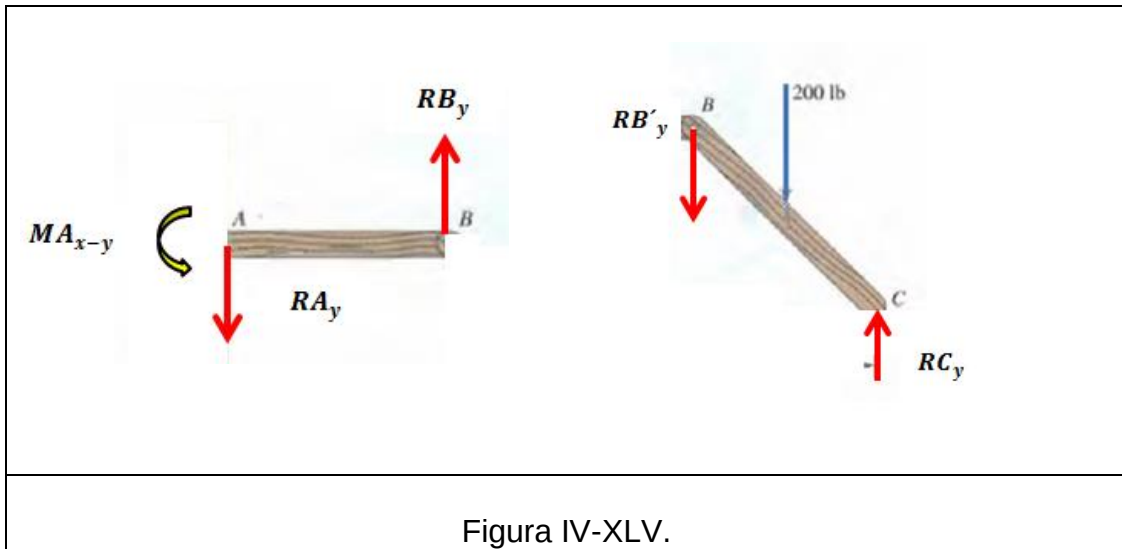
Una ecuación con dos incógnitas. Se deberá definir una ecuación más sin incrementar el número de incógnitas para lo anterior se recurrirá a momentos. El punto e donde se hará momentos podrá ser en el punto A o en el punto C ; es indistinto. Haciendo momentos en el punto A :

$$\sum \vec{M}_A = MAk + 9iX(-200)j + 12iX(RC_y)j = 0$$

Efectuando las operaciones correspondientes se obtiene:

$$MA - 1800 \text{ lb.} - \text{pie} + 12RC_y = 0$$

Una nueva ecuación pero una incógnita más: MA Hasta este punto el problema es estáticamente indeterminado. El siguiente paso será presentar el DCL de cada uno de los elementos que conforman este bastidor o marco (figura IV-XLV)



En el punto de unión B entre los dos elementos que conforman el bastidor se deberá plantear, basándonos en la tercera ley de Newton la siguiente relación:

$$RB_y + RB'_y = 0, \therefore RB_y = -RB'_y$$

Utilizando el elemento BC, el cual se encuentra en equilibrio y realizando momentos en el punto B se obtiene:

$$\sum \vec{M}_B = 3iX(-200)j + 6iX(RC_y)j = 0$$

Efectuando las operaciones y despejes pertinentes se obtiene que:

$$RC_y = +100 \text{ lb.}$$

Haciendo la sumatoria de fuerzas en dirección Y:

$$\sum F_y = 0; RB'_y + RC_y - 200 \text{ lb.} = 0$$

Se obtiene que:

$$RB'_y = +100 \text{ lb.}$$

Como se indicó que:

$$RB_y = -RB'_y$$

El valor de RB_y será: $RB_y = -100 \text{ lb}$

Analizando el elemento AB y haciendo sumatoria de fuerzas en dirección Y:

$$\sum F_y = 0; RA_y + RB_y = 0$$

El valor de RA_y será:

$$RA_y = +100 \text{ lb}$$

Haciendo momentos en el extremo A del mismo elemento:

$$\sum \vec{M}_A = MA + 6iX(RB_y)j = 0$$

$$MA = +600 \text{ lb.} \cdot \text{pies.}$$

El siguiente problema propuesto que se resolverá es del texto de Hibbeler (2010) (figura IV-XLVI)

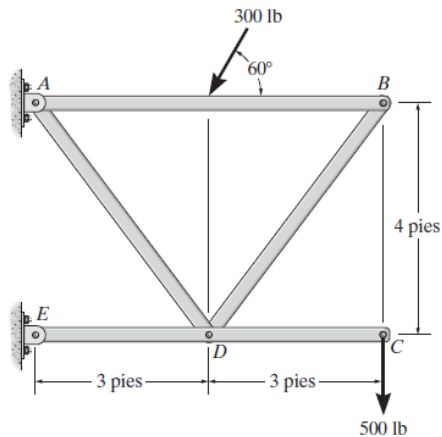


Figura IV-XLVI. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 6.90, página 316.

En dicho problema se pide determinar las componentes horizontal y vertical de reacción que ejercen los pasadores sobre el elemento EDC del bastidor.

Primeramente se trazará, como se muestra en la figura IV-XLVII, el DCL del bastidor pero representado por una especie de placa bidimensional. Dicha representación, como ya se demostró en el subtema de armaduras, facilita la comprensión de dicho problema.

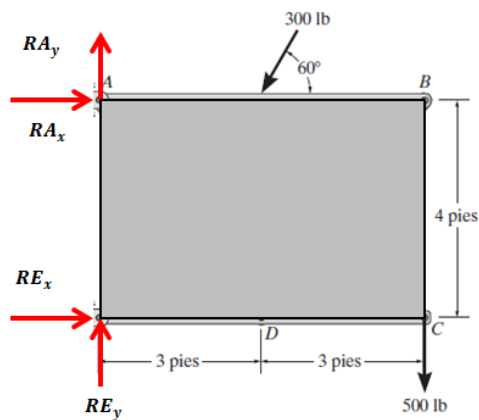


Figura IV-XLVII.

Haciendo momentos en A se obtiene:

$$\sum \vec{M}_A = 3iX(-300\text{sen}60)j + 6iX(-500)j - 4jX(RE_x)i = 0; lb \cdot pie$$

Haciendo los despejes y cálculos correspondientes:

$$RE_x = 944.8 lb.$$

A continuación se hará el DCL del elemento EDC tal y como se muestra en la figura IV-XLIII:

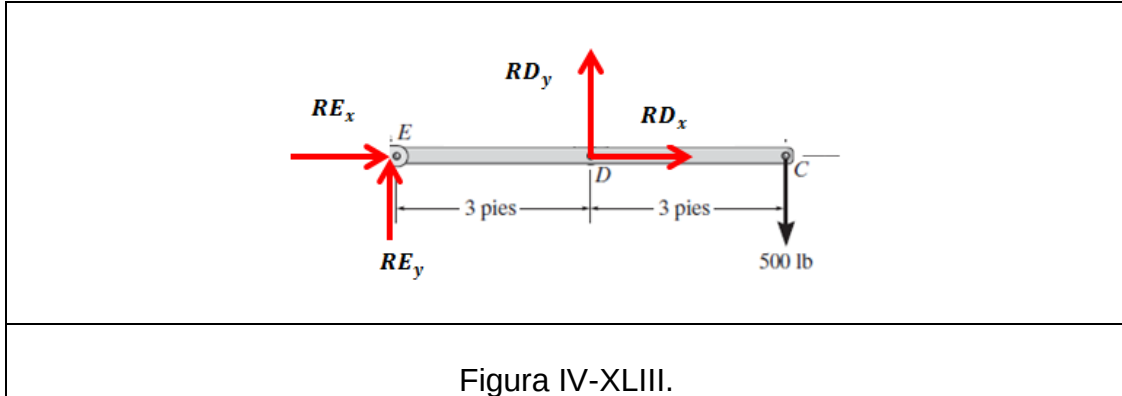


Figura IV-XLIII.

Efectuando sumatoria de momentos en el punto D:

$$\sum \vec{M}_D = 3iX(-500)j - 3iX(RE_y)j = 0; lb \cdot pie$$

$$RE_y = -500 lb.$$

Finalmente y apoyándonos en la sumatorias de fuerzas en X-Y, se obtiene que:

$$RD_x = -944.8 lb.$$

$$RD_y = +1000 lb.$$

Se hará un tercer y último problema para poder pasar al siguiente subtema y terminar con este capítulo. En este problema propuesto del texto de Beer, et.al. (2010), (figura IV-XLIX) y que es un armazón sometido a la carga mostrada se pide determinar las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento CFE en los puntos C y F.

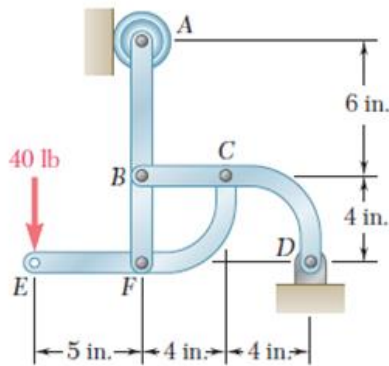


Figura IV-XLIX. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 6.99, página 328.

Para empezar a solucionarlo se hará lo mismo que en el problema anterior: un DCL del armazón, aislando el armazón entre los puntos de apoyo A y D, tal como se muestra en la figura IV-L. Una vez hecho esto, se harán momentos en el punto D.

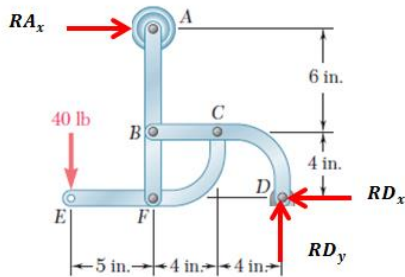


Figura IV-L.

$$\sum \vec{M}_D = -13iX(-40)j + 10iX(RA_x)j = 0; lb.in$$

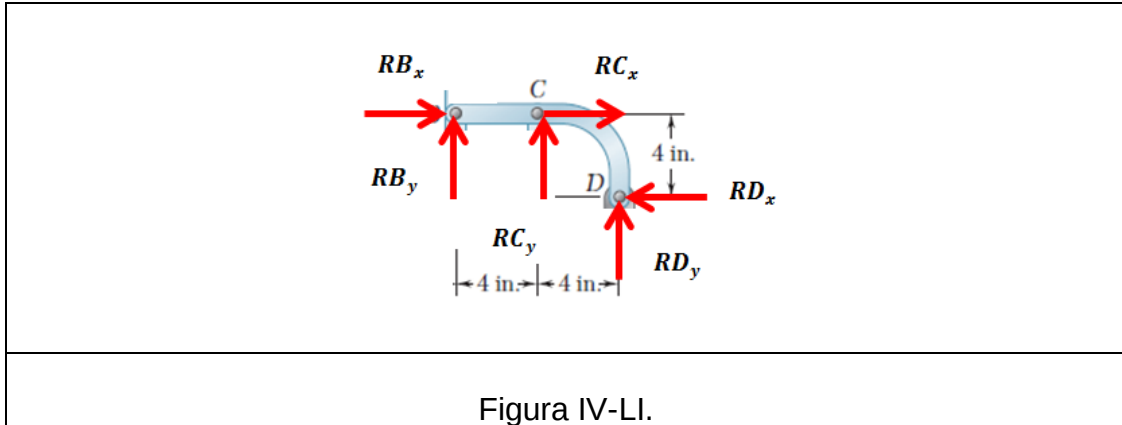
Haciendo los despejes y cálculos correspondientes:

$$RA_x = +52 lb.$$

De lo anterior y apoyándonos en el mismo DCL de la figura IV-L, se podrá encontrar que:

$$RD_x = -52 \text{ lb. y } RD_y = +40 \text{ lb.}$$

Con los anteriores datos se podrá hacer el DCL del elemento BCD, ya que el apoyo C es una de las interrogantes del problema. En la figura IV-LI se muestra dicho DCL.



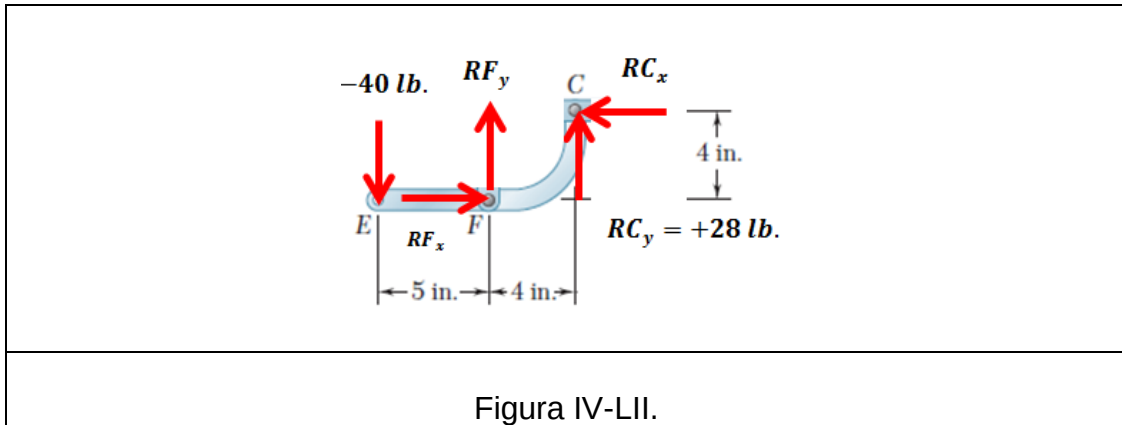
Si se hacen momentos en el punto B, se podrá encontrar la reacción vertical en el punto C:

$$\sum \vec{M}_B = -4jXRD_xi + 8iX(RD_y)j + 4iXRC_y = 0; \text{ lb} \cdot \text{in}$$

Haciendo los despejes y cálculos correspondientes:

$$RC_y = -28 \text{ lb.}$$

Con el anterior valor encontrado y haciendo un nuevo DCL, ahora del elemento EFC como se muestra en la figura IV-LII, se podrá terminar de resolver dicho problema.



Es importante indicar que la reacción horizontal en el punto C en el elemento EFC y de acuerdo a la tercera ley de Newton es de igual magnitud, dirección pero sentido contrario al mismo punto pero del elemento BCD de la figura IV-LII.

Efectuando momentos en el punto F del elemento EFC, tenemos lo siguiente:

$$\sum \vec{M}_F = -5iX(-40)j + 4iX(28)j + 4jXRC_xi = 0; lb \cdot in$$

De lo anterior se obtiene que:

$$RC_x = +78 lb.$$

Apoyándonos en sumatoria de fuerzas en dirección X :

$$RF_x = -78 lb.$$

Y en sumatoria de fuerzas en dirección Y :

$$RF_y = +12 lb.$$

4.3 MÁQUINAS.

Aunque, para fines de este texto, la definición que se dará a las máquinas es la misma que se le ha dado a los bastidores la principal diferencia estriba en que las primeras están formadas por una o más partes móviles lo que hace que pueden transferir y variar la acción de las fuerzas o momentos externos a las que se les somete. En resumen; los bastidores permanecerán estáticos bajo cargas y/o momentos externos y las máquinas tenderán a moverse, aunque es importante señalar que para la solución de los problemas que aquí se resolverán permanecerán estáticos como se muestra en el primer ejemplo a resolver en este subtema.

Por lo anterior la manera de solucionar problemas de marcos y máquinas será idéntica:

1. Identificar los datos.
2. Identificar las incógnitas.
3. Realizar los DCL apropiados mediante el “desarmado” de la estructura.
4. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, tanto para fuerzas como para momentos.

Se recordará que uno de los objetivos de este capítulo es el determinar las fuerzas en los componentes de máquinas por el método de desarme de la estructura. Lo anterior implica el representar una máquina separando alguna o todas sus partes mediante el concepto de DCL. El siguiente problema propuesto del texto de Beer, et al. (2010) nos será de utilidad para demostrar lo planteado en los dos párrafos anteriores (figura IV-LIII):

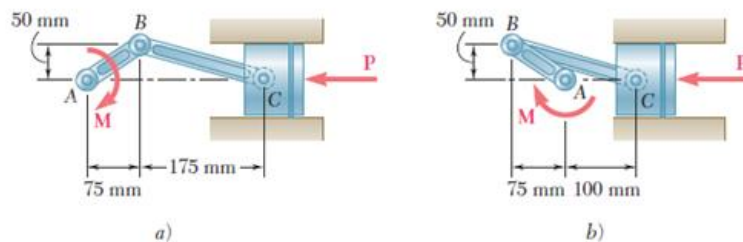


Figura IV-LIII. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 6.129, página 337.

En el problema de la figura IV-LIII se muestra un mecanismo compuesto por un pistón, una biela y una manivela conectados entre sí por pasadores en A, B y C. De acuerdo al enunciado del problema si se aplica, en ambas posiciones (a y b) del sistema mencionado, un par torsional de $1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en sentido horario a la manivela AB, ¿de cuánto debería ser la magnitud de la fuerza P aplicada al pistón para que el sistema se mantenga en equilibrio?

Se resolverá primeramente el inciso a del problema siguiendo lo sugerido líneas arriba

1. Identificar los datos:

Los datos que se disponen son la magnitud dirección y sentido del vector momento y de la geometría que muestra la posición del mecanismo.

2. Identificar las incógnitas

En este caso solo será una: la fuerza P.

3. Realizar los DCL apropiados mediante el “desarmado” de la estructura
Esto se mostrará a detalle en la figura IV-LIV.

4. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, tanto para fuerzas como para momentos. Lo anterior se desarrollará una vez cubierto el punto anterior.

La clave, la mayoría de las veces, en este tipo de problemas es seleccionar el DCL idóneo que nos facilite el encontrar la respuesta requerida en el menor tiempo posible. Si se observa a detalle dicho mecanismo el “desarmarlo” mediante el DCL mostrado en la figura tal nos dará la primera pista para su solución

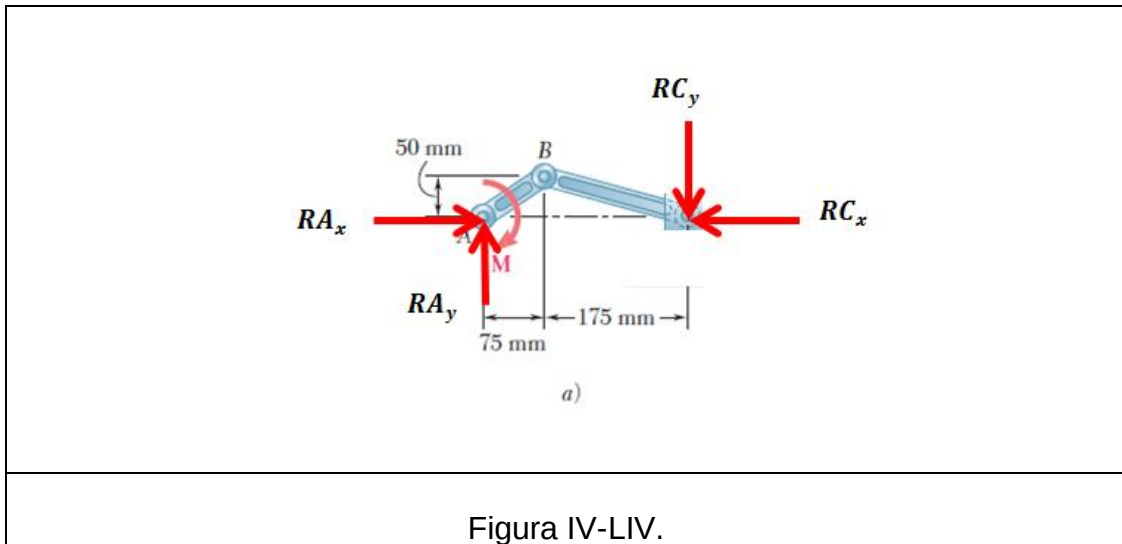


Figura IV-LIV.

¿Por qué se seleccionó exactamente esta parte del mecanismo para realizar el DCL? La respuesta es la siguiente: como se nos pide calcular la fuerza P para lograr el equilibrio en dicho sistema mecánico el pistón y la biela se conectan por un pasador en C, en la figura IV-LV se muestra un DCL de la manivela la biela y el pistón completamente “desarmados”

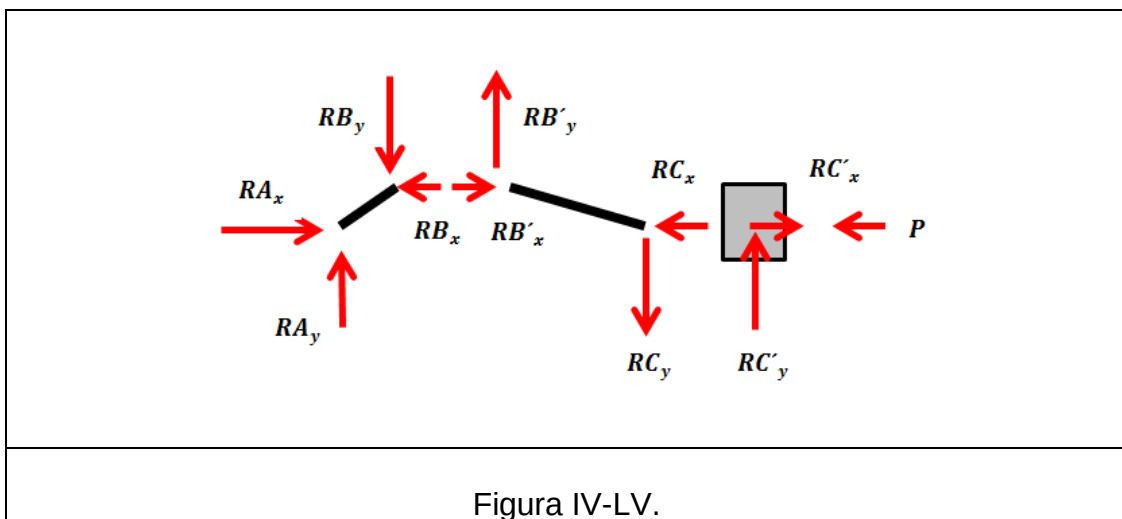


Figura IV-LV.

Si se observan únicamente el pistón y la fuerza P se podrá plantear lo siguiente:

$$\sum F_x = RC'_x + P = 0 \therefore P = -RC'_x$$

Siguiendo ahora con la manivela y el pistón se tiene que:

$$\sum F_x = RC_x + RC'_x = 0 \therefore RC_x = -RC'_x$$

Por lo que finalmente:

$$RC_x = P$$

Pero en el DCL de la figura tal se tienen las siguientes cuatro incógnitas:

$$RA_x, RA_y, RC_x \text{ y } RC_y$$

Lo único que nos queda es hacer sumatoria de momentos en A para eliminar tres de las cuatro incógnitas:

$$\sum \vec{M}_A = .25iXRC_yj - 1.5kN \cdot mk = 0$$

$$RC_y = 6kN$$

Y ahora se hará el DCL únicamente de la manivela como se muestra en la figura IV-LVI, ya que de esa manera se podrá observar que de las cuatro reacciones que allí se definen:

$$RB_x, RB_y, RC_x \text{ y } RC_y$$

Solo RC_y es conocida, pero efectuando sumatoria de momentos en B se eliminan las reacciones RB_x, RB_y , ya que las líneas de acción de ambas fuerzas reactivas cruzan por el punto B, con lo cual se podrá encontrar RC_x .

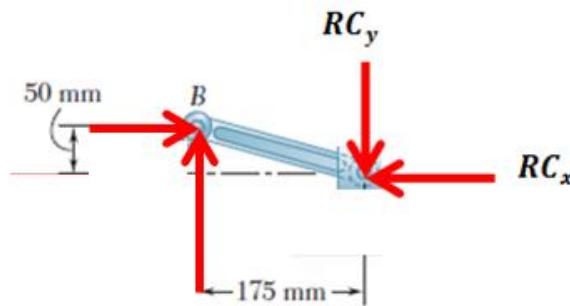


Figura IV-LVI.

Como se indica líneas arriba, se efectúa la sumatoria de momentos en B:

$$\sum \vec{M}_B = .175iXRC_yj - .05jXRC_xi = 0$$

Efectuando las operaciones correspondientes y despejando la única incógnita:

$$RC_x = -21 \text{ kN.}$$

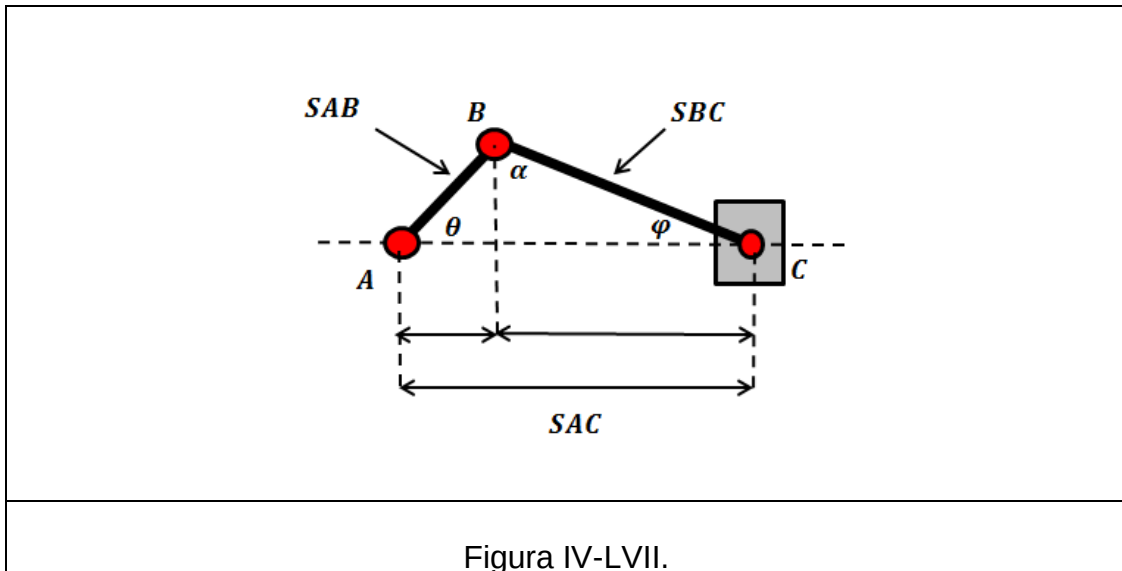
Se había planteado que:

$$RC_x = P$$

Por lo que finalmente:

$$P = -21 \text{ kN.}$$

Para resolver el inciso b observamos que el mecanismo es el mismo y que solo cambia el ángulo de la biela con respecto a la horizontal. En la figura IV-LVII se hace una representación del mecanismo en la posición "a" indicando las posiciones angulares tanto de la biela como de la manivela:



Se podrá observar que de la ecuación que se planteó para encontrar la reacción RC_y :

$$\sum \vec{M}_A = .25iXRC_yj - 1.5kN \cdot mk = 0$$

El valor de .25 es realmente la distancia SAC de la figura IV-LVII, que a la vez se obtiene de sumar las proyecciones tanto de SAB por coseno de θ y de SBC por el coseno de φ . Si nos apoyamos en la ley de senos podemos plantear que:

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{SAB}{SBC} * \sin \theta \right)$$

Con lo anterior se puede hacer el siguiente planteamiento:

$$\alpha = 180^\circ - \theta - \varphi$$

A fin de cuentas, hasta este punto, tanto el ángulo α como el ángulo φ se encuentran en función del ángulo θ . Finalmente se podría calcular la distancia SAC aplicando la ley de cosenos:

$$SAC^2 = SAB^2 + SBC^2 - 2 * SAB * SBC * \cos \alpha$$

Por lo tanto la reacción RC_y estará siempre en función del ángulo θ .

Por otro lado la fuerza P que es igual a la RC_x y que esta reacción se encontró mediante el siguiente planteamiento:

$$\sum \vec{M}_B = .175iXRC_yj - .05jXRC_xi = 0$$

Donde el valor de .175 se encuentra de la siguiente manera, de acuerdo a la figura IVLVII:

$$.175 = SAC - SAB \cos \theta$$

Y el valor de .05:

$$.05 = SAB * \sin \theta$$

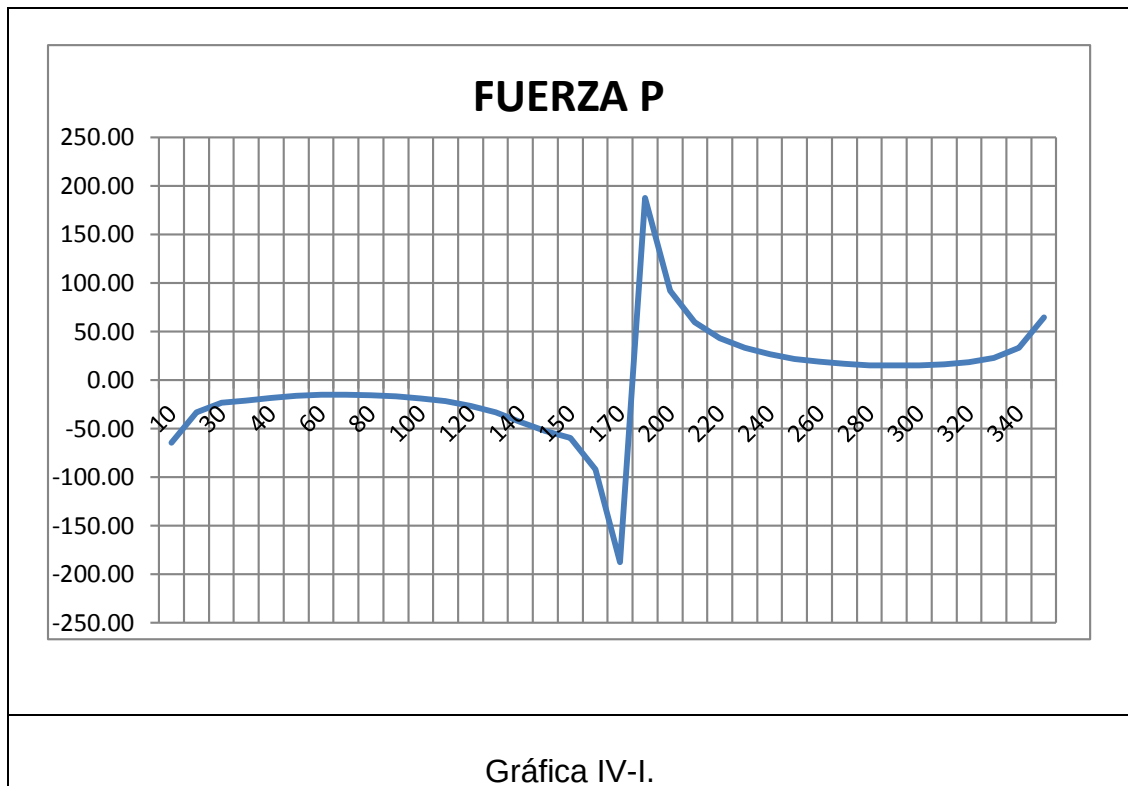
Esto es, siempre sabremos el valor de la fuerza P si sabemos el valor del ángulo teta. En la tabla IV-VII se muestra una tabulación del ángulo teta entre 10 y 350 grados y a la vez los respectivos valores de:

$$SAC, RC_y \text{ y de la fuerza } P$$

Se podrá observar dos líneas resaltadas en amarillo. Son los valores del ángulo θ de acuerdo a la posición del mecanismo de la figura IV-LIII en sus incisos a y b respectivamente. Por último en la gráfica IV-1 se podrá observar como varía la fuerza P en función del ángulo θ .

TETA	SAC	RCY	P
10	0.270	5.55	-64.37
20	0.264	5.68	-33.07
30	0.254	5.90	-23.08
33.69	0.250	6.00	-21.01
40	0.242	6.21	-18.50
50	0.226	6.63	-16.17
60	0.209	7.16	-15.09
70	0.192	7.82	-14.87
80	0.175	8.59	-15.39
90	0.158	9.49	-16.65
100	0.143	10.47	-18.75
110	0.130	11.51	-21.91
120	0.119	12.57	-26.48
130	0.110	13.58	-33.12
140	0.104	14.49	-43.17
146.3	0.100	14.99	-52.49
150	0.098	15.26	-59.72
160	0.095	15.84	-92.19
170	0.093	16.20	-187.75
190	0.093	16.20	187.75
200	0.095	15.84	92.19
210	0.098	15.26	59.72
220	0.104	14.49	43.17
230	0.110	13.58	33.12
240	0.119	12.57	26.48
250	0.130	11.51	21.91
260	0.143	10.47	18.75
270	0.158	9.49	16.65
280	0.175	8.59	15.39
290	0.192	7.82	14.87
300	0.209	7.16	15.09
310	0.226	6.63	16.17
320	0.242	6.21	18.50
330	0.254	5.90	23.08
340	0.264	5.68	33.07
350	0.270	5.55	64.37

Tabla IV-VII



Un último problema a resolver, que será del texto de Bedford y Fowler (1996), para cerrar este capítulo es el que se muestra en la figura IV-LVIII y cuyo enunciado es el siguiente:

“El cucharón C del cargador frontal está soportado por dos brazos idénticos, uno a cada lado del cargador. Se muestra uno de los dos brazos (ABC), el cual está soportado en A por un soporte de pasador y por el actuador hidráulico BD. La suma de las otras cargas ejercidas sobre el brazo, incluido su propio peso, es $F = 1.6 \text{ kN}$. Determine la fuerza axial en el actuador BD y la magnitud de la reacción en A”.

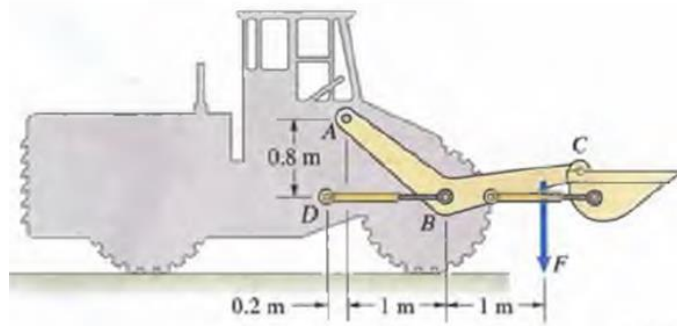


Figura IV-LVIII. Fuente: Bedford y Fowler, (1996). Problema 6.92, página 323.

Siguiendo los pasos sugeridos:

1. Identificar los datos.
2. Identificar las incógnitas.
3. Realizar los DCL apropiados mediante el “desarmado” de la estructura.
4. Aplicar las ecuaciones de equilibrio, tanto para fuerzas como para momentos.

Es importante resaltar parte del enunciado:

“Determine la fuerza axial en el actuador BD ”

Lo anterior es un dato, ya que implica que se conoce la dirección de la reacción en el punto B , siendo esta horizontal. Lo anterior junto con el peso F y las distancias entre los puntos A, B, C y D son los datos que debemos identificar.

Las incógnitas serían la magnitud de la fuerza axial en el actuador BD y la magnitud de la fuerza en el punto A . En la figura IV-LIX se plantea el DCL idóneo para resolver este problema:

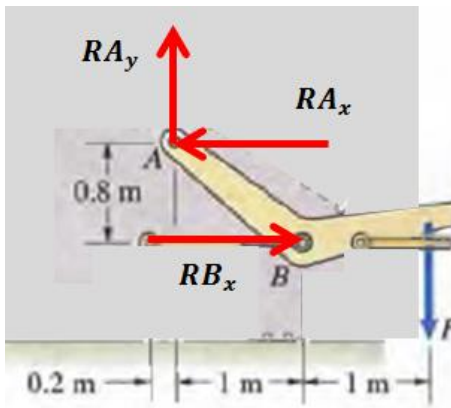


Figura IV-LIX.

Teniendo el DCL que se muestra en la figura superior, efectuamos sumatoria de momentos en el punto A:

$$\sum \vec{M}_A = 2iX(-1.6 \text{ kN})j - .8jXRB_xi = 0; \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Realizando las operaciones y despejes correspondientes:

$$RB_x = +4 \text{ kN}$$

Que es la fuerza axial en el actuador BD.

Finalmente con sumatoria de fuerzas en dirección horizontal y vertical respectivamente:

$$\sum F_x = RB_x + RA_x = 0 \therefore RA_x = -4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = -1.6 \text{ kN} + RA_y = 0 \therefore RA_y = +1.6 \text{ kN}$$

Teniendo que

$$RA = 4.3 \text{ kN.}$$

CAPÍTULO V. CENTROIDES, CENTROS DE GRAVEDAD Y MOMENTOS DE INERCIA.

Objetivo: Determinar el centro de área, de volumen, de gravedad en placas y sólidos, así como el momento de inercia de áreas de sólidos.

Subtemas:

5.1 Centroides

5.1.1. Líneas, áreas y volúmenes.

5.1.2. Centros de masa.

5.1.3. Elementos compuestos.

5.2. Momentos de inercia:

5.2.1. Áreas y volúmenes.

5.2.2. Masas.

5.2.3. Momento polar de inercia.

5.3. Teorema de los ejes paralelos.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son cinco:

1. Definir el concepto del primer momento de área.
2. Determinar el centroide de áreas por integración y por áreas compuestas.
3. Obtener el centro de gravedad de volúmenes de sólidos diversos.
4. Definir el concepto del segundo momento de área.
5. Determinar el segundo momento de área por integración y por el método de los ejes paralelos.

5.1 CENTROIDES.

Debido a la ley de gravedad los cuerpos son atraídos hacia el centro de la tierra y dependiendo de la masa y del tamaño del cuerpo será la magnitud de la fuerza de atracción. Un cuerpo se compone de infinitud de partículas y cada una, por lo tanto, es atraída hacia el centro de la tierra con su respectiva fuerza. La suma total de las fuerzas que se ejerce sobre cada partícula representa el peso W del cuerpo, y dicho peso, por así convenir a la explicación de centroides, se puede ubicar geométricamente en una de esas partículas que lo componen o dicha ubicación geométrica podría estar fuera del mismo cuerpo. Al punto o lugar que pueda ser seleccionado se le conoce como centro de gravedad de dicho cuerpo. La pregunta, ahora, es, ¿en dónde se ubica dicho centro de gravedad? Para responder lo anterior, primeramente definiremos el centro geométrico de un volumen:

El centro geométrico de un volumen es el punto donde se cruzan tres plano perpendiculares entre sí, y donde cada plano divide en dos partes iguales la forma de dicho volumen

V-g

.Empezaremos con un sencillo ejemplo en el cual aplicaremos el sentido común así como el concepto de planos de simetría para que de una manera empírica localizar el centro de geométrico de dicho ejemplo, apoyándonos en .el axioma V-g. Supongamos que se tiene una placa rectangular sólida como la mostrada en la figura V-I (es importante indicar que para este ejemplo será indistinto si el material de dicha placa es o no homogéneo)

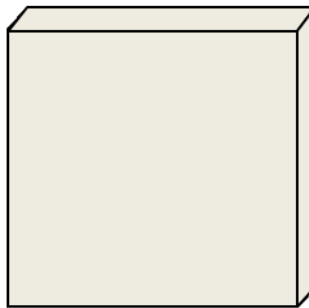
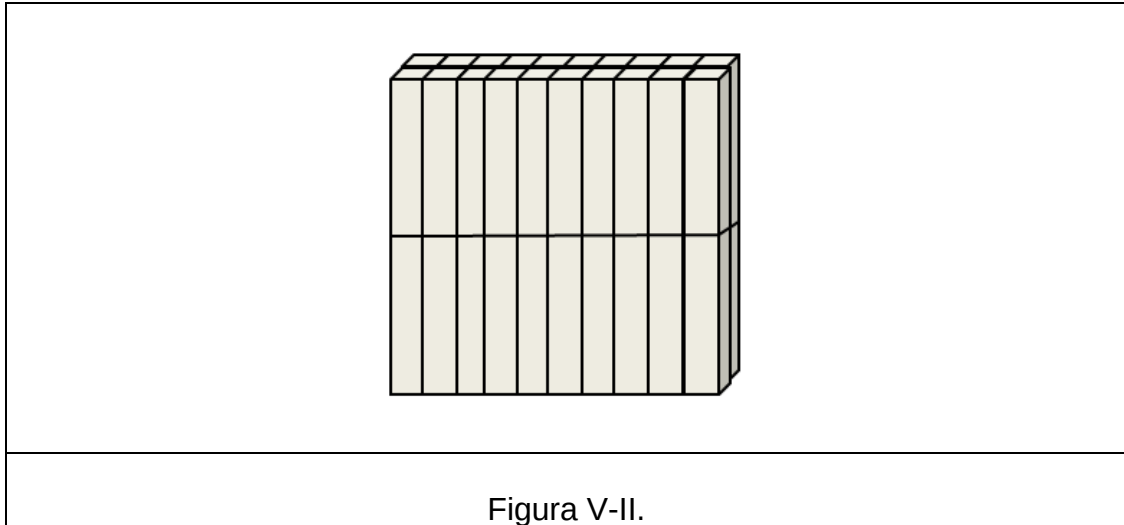
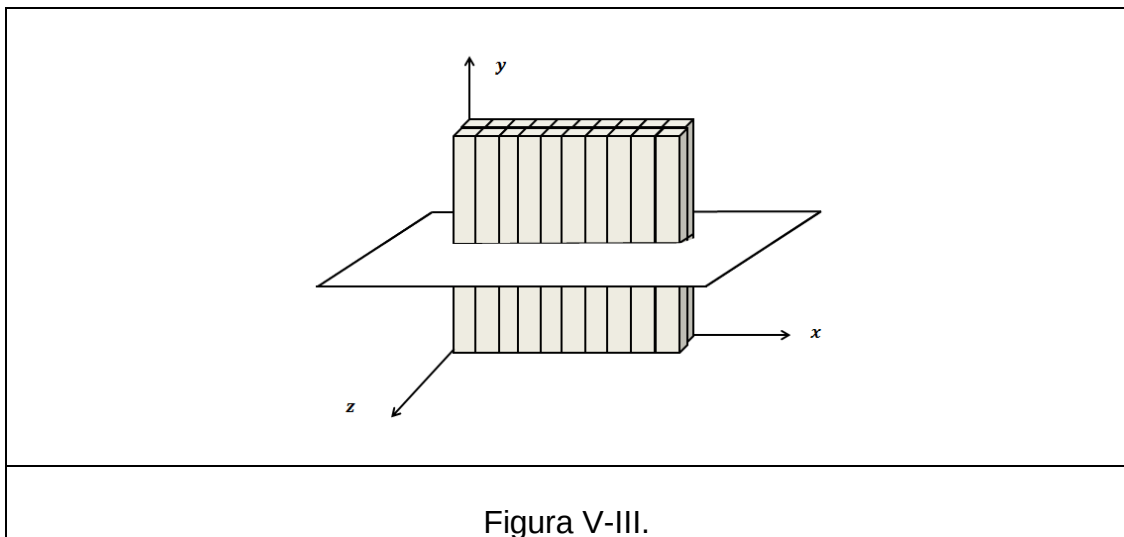


Figura V-I.

Supongamos ahora que dicho volumen representa el cuerpo original y que a la vez estará formado por 40 elementos, todos de la misma forma volumétrica tal y como se representa en la figura V-II:

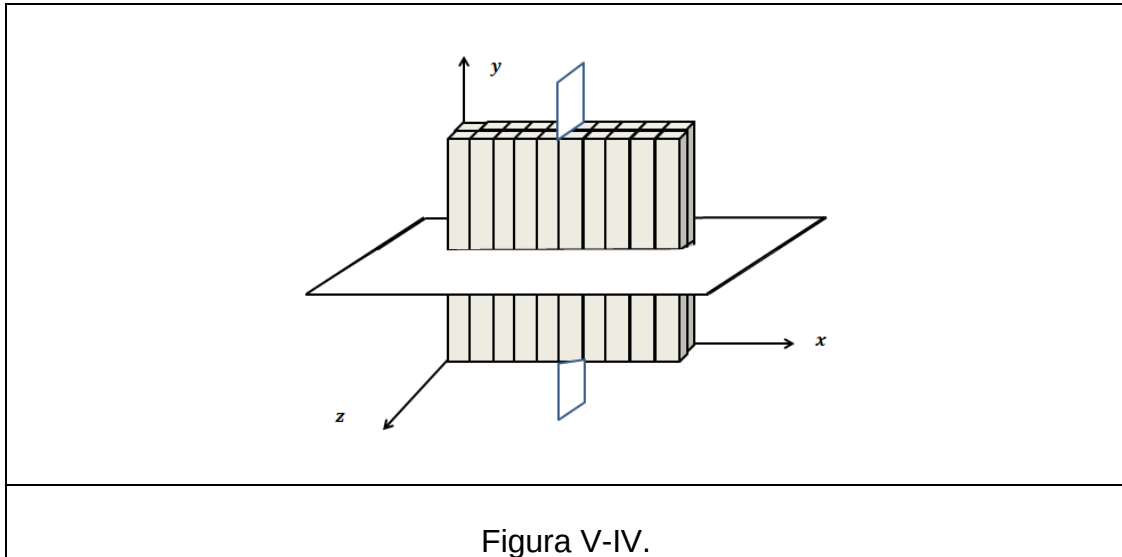


Ahora se definirá como Plano de Simetría a aquel plano imaginario que divida a un volumen cualquiera en dos partes idénticas. Apoyándonos en la anterior definición se creará el plano de simetría $x - z$ el cual dividirá en dos partes iguales el conjunto de los cuarenta elementos que se muestran en la figura V-II. Dicha representación se muestra en la figura V-III:



Sea h la altura total del volumen de la figura tal, por lo tanto el plano de simetría $x - z$ en donde se ubica el centroide del mismo se encuentra a una

distancia igual a: $\frac{h}{2}$ respecto al origen del sistema cartesiano definido. Ahora se definirá un segundo plano de simetría el cual será $y - z$ y como el anterior plano definido divide en dos partes idénticas el volumen en cuestión, tal y como se muestra en la figura V-IV:



Este nuevo plano de simetría $y - z$ nos ayuda para determinar la distancia en dirección x donde se ubica el centro geométrico del volumen bajo cuestión. Obviaremos el plano $x - y$ que divide en dos partes idénticas al cuerpo nos indicaría la ubicación del centro geométrico en dirección del eje z . Si las dimensiones del volumen que representa nuestro cuerpo de masa homogénea son:

Base, en dirección $x = b$

Altura, en dirección $y = h$

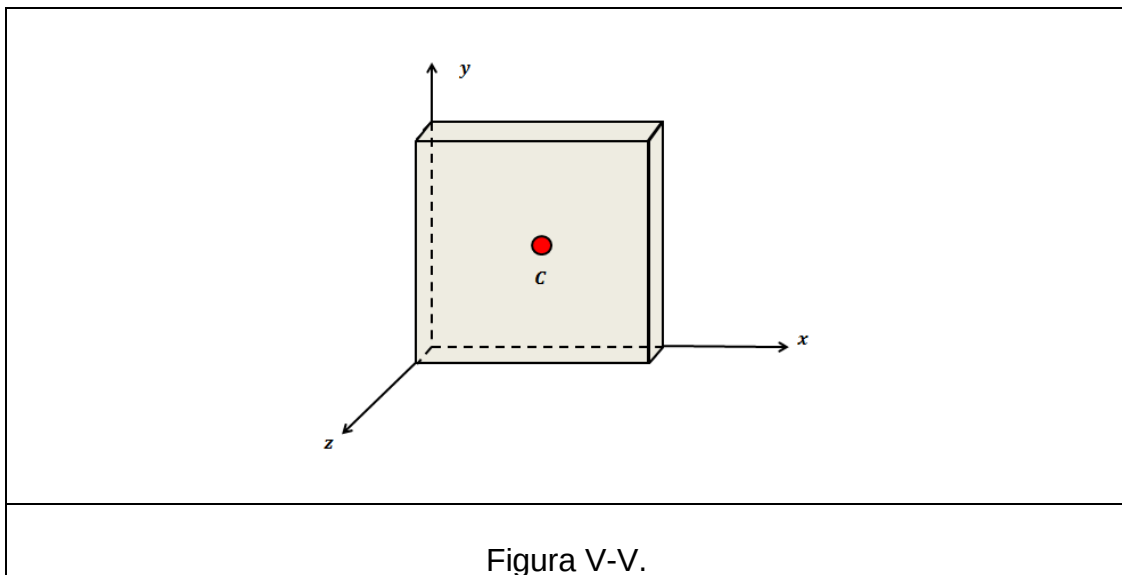
Profundidad, en dirección $z = t$

El centro geométrico de dicho cuerpo se encontrará a un medio de la base, a un medio de la altura y a un medio de su profundidad, lo anterior se podrá observar en la figura V-V.

Al centro geométrico también se le conoce como centroide del cuerpo, resumiendo lo anterior planteado del ejemplo de la figura V-I:

- a) El eje y que es perpendicular al plano de simetría $x - z$ se conoce como eje de simetría en dirección y .
- b) El eje z que es perpendicular al plano de simetría $x - y$ se conoce como eje de simetría en dirección z .
- c) El eje x que es perpendicular al plano de simetría $y - z$ se conoce como eje de simetría en dirección x .

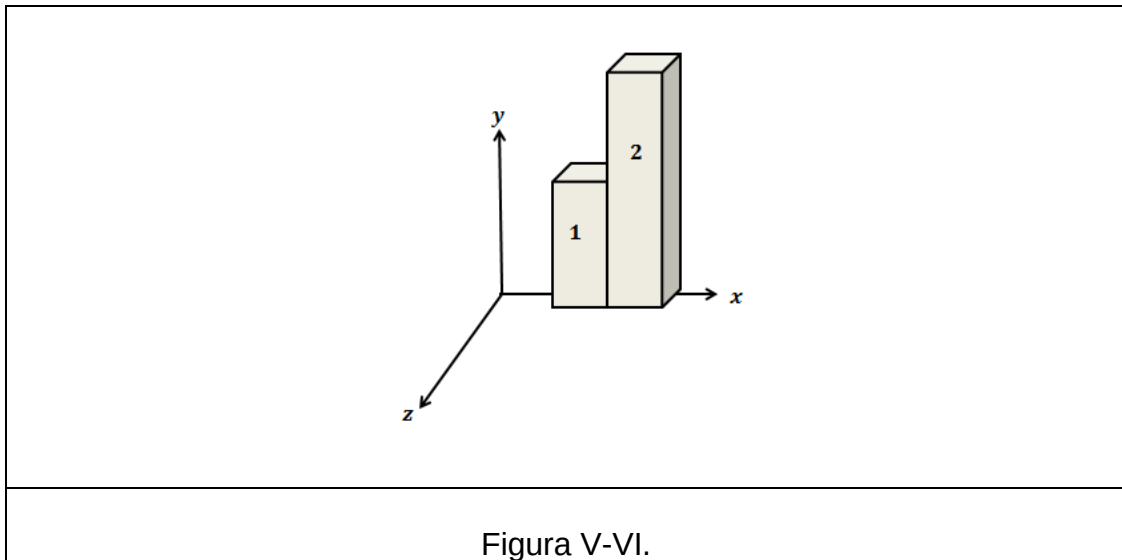
Como se demostró con este primer ejemplo; cuando tres diferentes ejes de simetría de un volumen se cruzan entre sí, en dicho punto de cruce se encuentra el centroide del volumen. Los anteriores ejes de simetría también se conocen como ejes centroidales. Se podrá afirmar lo siguiente: si el material del volumen es homogéneo su centroide coincide con su centro de gravedad.



La manera de encontrar el centroide del anterior ejemplo fue algo cómoda ya que el utilizar los planos de simetría facilitó lo anterior. Se podrá establecer que si algún cuerpo tiene un plano de simetría en ese plano se encuentra su centroide y que se requiere que dicho cuerpo tenga al menos tres diferentes planos de simetría para localizar en el cruce de los mismos su centroide. Pero ¿qué pasa cuando un cuerpo no tiene el mínimo de planos de simetría para ubicar su centroide?, la respuesta a lo anterior se dará en el siguiente subtema y además en dicho subtema se deberán cumplir los dos siguientes criterios:

1. La masa que defina el cuerpo de cualquier ejemplo y/o problema a resolver será homogénea. Esto es: su densidad será constante, y...
2. La forma geométrica de todos los volúmenes, áreas y líneas están definidas por ecuaciones.

Una vez establecido lo anterior nos avocaremos a establecer la metodología para ubicar el centro de gravedad de un cuerpo cualquiera de peso conocido y además de aquí en adelante nos referiremos al centro de gravedad como centroide pero antes se explicará como el concepto de momentos es empleado para localizar el centroide de algún cuerpo. Supongamos que se tienen dos cuerpos de igual masa pero diferente geometría y se encuentran en la posición tal y como se muestra en la figura V-VI:



Supongamos los siguientes datos para cada uno de los elementos de la figura V-VI:

$$h_2 = 6; h_1 = \frac{h_2}{2} = 3$$

$$b_2 = b_1 = 1$$

$$t_2 = t_1$$

Sabiendo que el volumen de cada elemento es:

$$V_2 = h_2 b_2 t_2$$

$$V_1 = h_1 b_1 t_1 = \frac{h_2 b_2 t_2}{2} = \frac{V_2}{2}$$

Como ambos elementos tienen la misma densidad podemos escribir que:

$$\rho = \frac{m}{V}; m = \rho V$$

Se expresará el peso de cada elemento en función del volumen:

$$W_1 = m_1 g = \rho V_1 g$$

$$W_2 = m_2 g = \rho V_2 g$$

Ahora se colocarán los dos elementos en una posición que debido al peso de cada uno tiendan al giro o hacer momentos, cuyo vector resultante del momento sea paralelo al eje x tal y como se muestra en la figura V-VII:

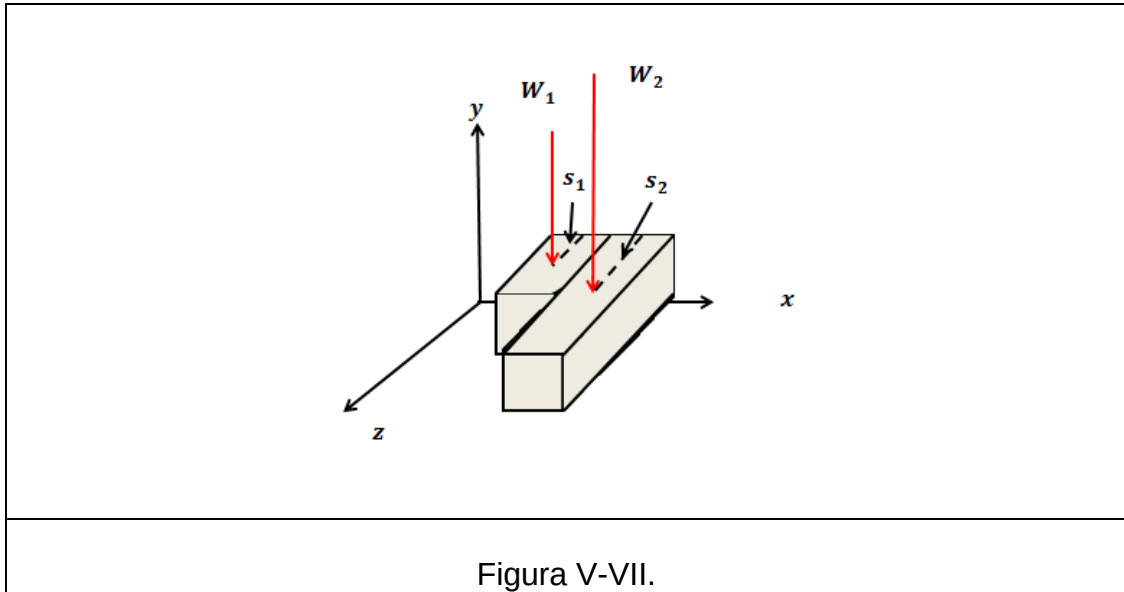


Figura V-VII.

La dirección de la fuerza del peso de cada elemento es en dirección paralela al eje y , y el brazo de palanca que requiere cada peso para hacer momento está en el plano $x - z$ y en dirección paralela al eje z , y que de hecho es uno de sus ejes centroidales. Asimismo sabemos que el brazo de palanca de cada elemento es la mitad de su respectiva altura por lo que podemos expresar la magnitud de cada momento de la siguiente manera:

$$M_1 = s_1 W_1 = \bar{z}_1 W_1 = \frac{h_1 \rho V_1 g}{2}$$

$$M_2 = s_2 W_2 = \bar{z}_2 W_2 = \frac{h_2 \rho V_2 g}{2}$$

Es importante repetir que los brazos de palanca de s_1, s_2 de cada elemento son colineales con sus respectivos ejes de simetría y que la línea de acción de la fuerza provocada por el centro de gravedad de cada elemento es perpendicular a s_1 y s_2 respectivamente. El momento total será la suma de los momentos individuales:

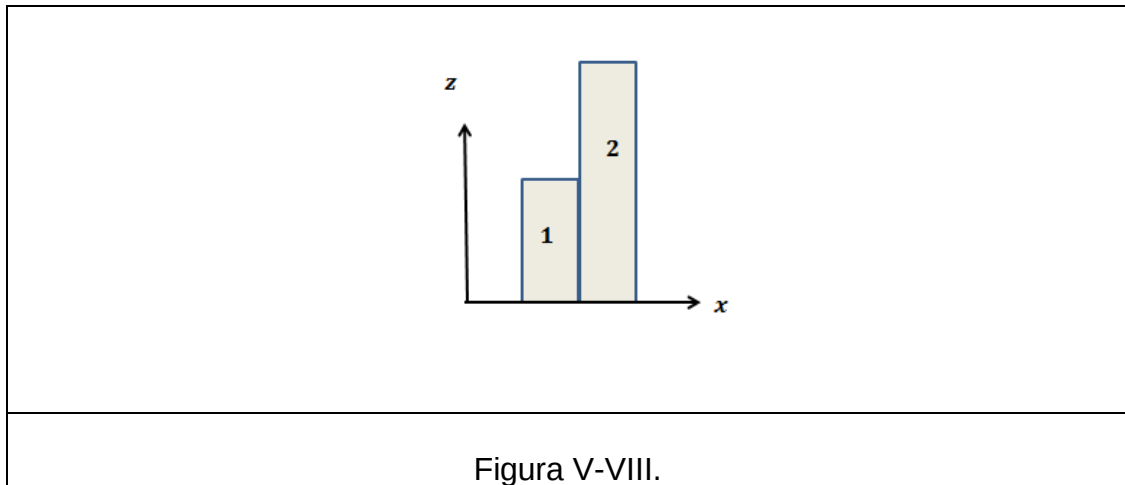
$$M_T = M_1 + M_2 = \frac{h_1 \rho V_1 g}{2} + \frac{h_2 \rho V_2 g}{2}$$

Se había establecido la relación entre las alturas y los volúmenes de ambos cuerpos, por lo tanto:

$$M_T = M_1 + M_2 = \frac{h_2 \rho V_2 g}{8} + \frac{h_2 \rho V_2 g}{2} = \frac{h_2 \rho V_2 g 5}{8}$$

$$M_T = \frac{h_2 \rho A_2 t_2 g 5}{8}$$

En la siguiente figura se muestran los dos elementos en el plano $x - z$

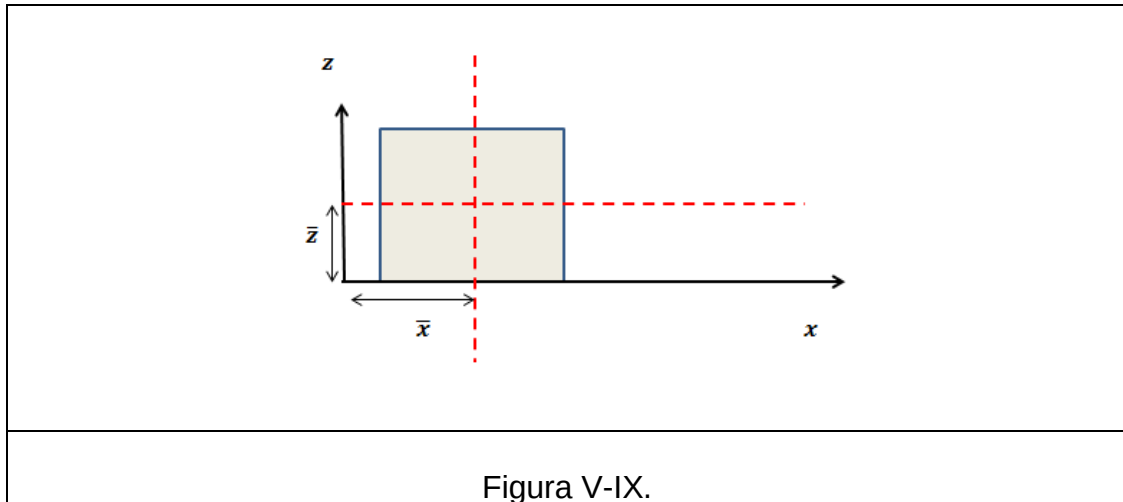


Ahora supongamos un tercer cuerpo como el que se muestra en la figura V-IX. Sabemos que por su forma que a la mitad de su altura y a la mitad de base se encuentran dos ejes de simetría o ejes centroidales y que en el cruce de ambos ejes se localiza su centroide. Lo que deseamos es relacionar este tercer cuerpo con los dos anteriores para por medio de esa relación definir la siguiente función:

$$\bar{z}_3 = f(\bar{z}_2)$$

Esto es, localizar el eje centroidal $\vec{Z}_3$ de un cuerpo en función del eje centroidal $\vec{Z}_2$ de otro cuerpo.

Esta relación será la base de los siguientes subtemas.



La relación que tiene este tercer cuerpo con los dos anteriores es la siguiente:

1. Son del mismo material, por lo tanto tienen la misma densidad,
2. El volumen del tercer cuerpo es la suma del volumen del cuerpo uno y del cuerpo dos. Por lo tanto el peso del cuerpo tres es la suma de los pesos del cuerpo uno y del cuerpo dos, y...
3. Los tres cuerpos tienen el mismo espesor t

Debido al punto dos y tres se puede afirmar que:

$$h_3 b_3 t = h_1 b_1 t + h_2 b_2 t = A_3 = \frac{3A_2}{2}$$

Dejando expresado el peso del cuerpo tres en función de la siguiente ecuación:

$$W_3 = \rho V_3 g = \rho A_3 t g$$

El siguiente paso es que el peso del cuerpo tres tienda a hacer momentos cuya magnitud dirección y sentido sea igual al M_T , ya que sabiendo el valor de dicho momento y el peso del cuerpo podemos encontrar la magnitud del brazo de palanca que sería la mitad de la altura del cuerpo de la figura V-IX:

$$M_3 = s_3 W_3 = \frac{h_3 \rho A_3 t g}{2}$$

$$M_3 = M_T = \frac{h_2 \rho A_2 t g 5}{8}$$

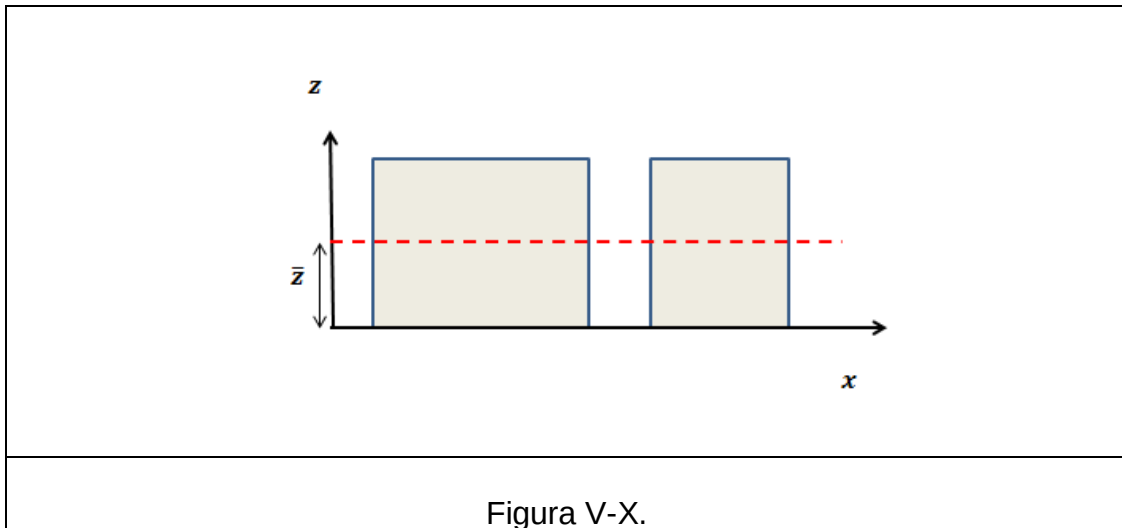
$$\frac{h_3 \rho A_3 t g}{2} = \frac{h_2 \rho A_2 t g 5}{8}$$

$$h_3 = \frac{5 A_2 h_2}{4 A_3}$$

Conociendo, ya, la relación ente áreas tenemos finalmente que:

$$h_3 = \frac{5 h_2}{6}$$

Es de vital importancia destacar que la altura encontrada es independiente de la base. En la figura V-X se muestran dos figuras de diferente base pero igual altura y en donde se puede observar que ambas tienen el mismo valor de su $\bar{z}$:



En este ejemplo se dio el valor de seis a la altura del bloque dos, por lo tanto:

$$\bar{Z}_3 = \frac{h_3}{2} = 2.5$$

La clave del anterior desarrollo está en la siguiente ecuación:

$$M_T = M_1 + M_2 = \frac{h_1 \rho V_1 g}{2} + \frac{h_2 \rho V_2 g}{2}$$

Si dejamos los volúmenes en función del área y del espesor tendríamos lo siguiente:

$$M_T = M_1 + M_2 = \frac{h_1 \rho A_1 t g}{2} + \frac{h_2 \rho A_2 t g}{2}$$

$$M_T = \frac{\rho t g}{2} (h_1 A_1 + h_2 A_2)$$

Sabiendo que:

$$M_3 = \frac{h_3 \rho A_3 t g}{2}$$

Donde ahora el área del cuerpo se identificara como área total y la altura de dicho cuerpo estará en función del eje centroidal $\bar{z}_3$:

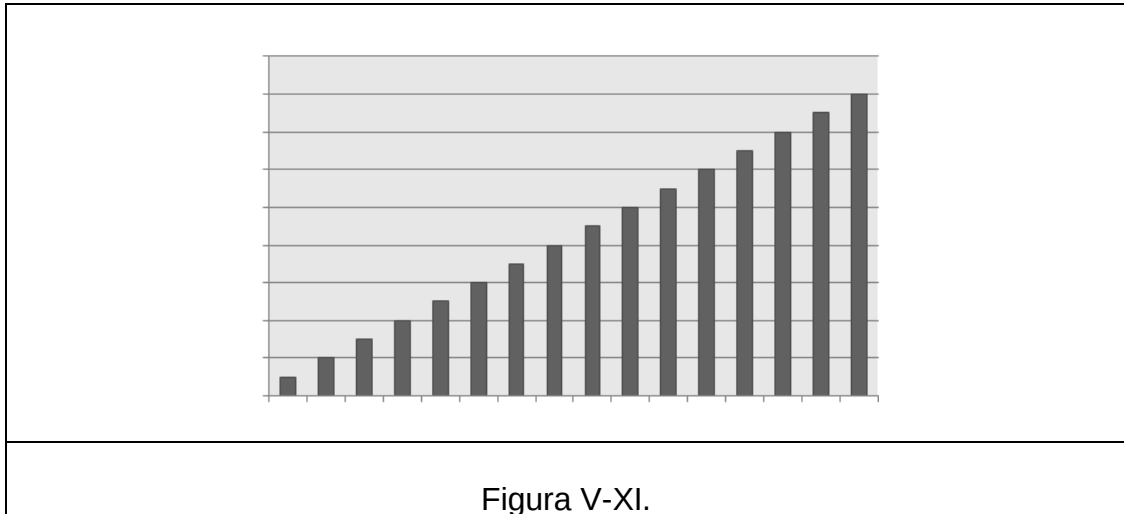
$$M_3 = \frac{\bar{z}_3 \rho A_t t g}{2} = \frac{\rho t g}{2} (h_1 A_1 + h_2 A_2)$$

$$\bar{z}_3 A_T = \frac{1}{2} (h_1 A_1 + h_2 A_2)$$

Para este ejemplo se utilizaron solamente dos cuerpos si hubiéramos utilizado n elementos como los que se muestran en la figura V-XI, tendríamos que

$$M_3 = \frac{h_3 \rho A_3 t g}{2} = \frac{\rho t g}{2} \sum_{n=1}^t h_n A_n$$

$$\bar{z}_3 = \frac{1}{2 A_T} \sum_{n=1}^t h_n A_n$$



Sabiendo que para cada elemento;

$$\bar{z}_n = \frac{h_n}{2}$$

Finalmente tenemos que:

$$\bar{z}_3 = \frac{1}{A_T} \sum_{n=1}^t \bar{z}_n A_n$$

Lo anterior se conoce como momentos de área y se utilizará en los siguientes subtemas para la ubicación de centroides de cuerpos, áreas o líneas que no poseen formas simétricas y será el preámbulo de las siguientes ecuaciones las cuales ubican los ejes de simetría de cualquier cuerpo definido respecto a un origen

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dA}{A} \quad \text{V-1}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} dA}{A} \quad \text{V-2}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \check{z} dA}{A} \quad \text{V-3}$$

5.1.1 Líneas, áreas y volúmenes

Líneas

Para poder encontrar el centroide de varillas estas se representarán como líneas ya que la longitud de las mismas será mucho mayor que su sección transversal. En la figura V-XII se muestran solo dos ejemplos de lo anterior

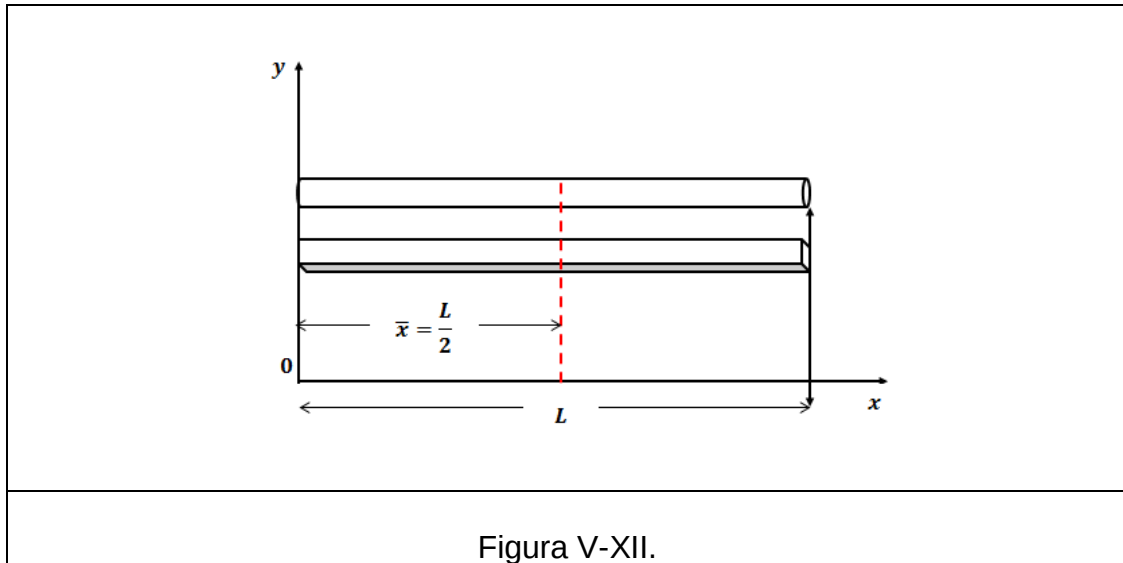


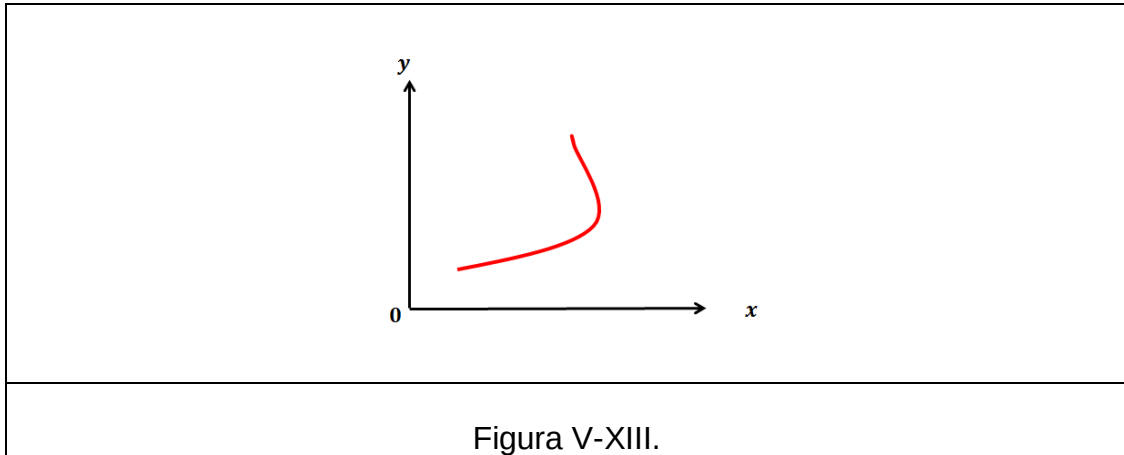
Figura V-XII.

Como se podrá observar en dicha figura, el centroide de ambas varillas se localiza a la mitad de la longitud de cada una de ellas. De hecho en este tipo de elementos solo se ocupa un eje de simetría o eje centroidal para la ubicación de su centroide, únicamente se deberán cumplir las siguientes condiciones para que ambas varillas sean consideradas como líneas:

1. La longitud es mucho mayor que su sección transversal,
2. Su sección transversal, aunque es muy pequeña, deberá ser de tamaño constante, y...
3. El elemento considerado será de material homogéneo.

De aquí en adelante será lo mismo referirnos a las varillas como líneas o viceversa. .

Ahora se pasará a desarrollar las ecuaciones para encontrar el centroide de una varilla cuya forma geométrica no es una línea recta, su forma se muestra en la figura V-XIII.



Primeramente se expresará el peso total de esta varilla en función de su masa y de la constante gravitacional:

$$W_T = m_T g$$

Como la varilla, en cuestión, está hecha de un material homogéneo su densidad es contante y sabiendo que:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La masa total se planteará de la siguiente manera

$$m_T = \rho V_T$$

Supondremos que la varilla es de sección transversal circular y que por lo tanto su radio es constante. El volumen lo podremos dejar en función de:

$$V_T = A \cdot L_T = \pi r^2 L_T$$

Por lo que se podrá plantear lo siguiente:

$$W_T = \rho \pi r^2 g L_T$$

De igual manera un diferencial de varilla tendrá el siguiente diferencial de peso:

$$dW = \rho \pi r^2 g dL$$

El siguiente propósito es definir nuestro diferencial de longitud en función de las coordenadas $x - y$ para lo cual se definirá un elemento diferencial de la

varilla y apoyándonos en el teorema de Pitágoras dejar su longitud en función de $x - y$. Dicho procedimiento se podrá observar en la figura V-XIV:

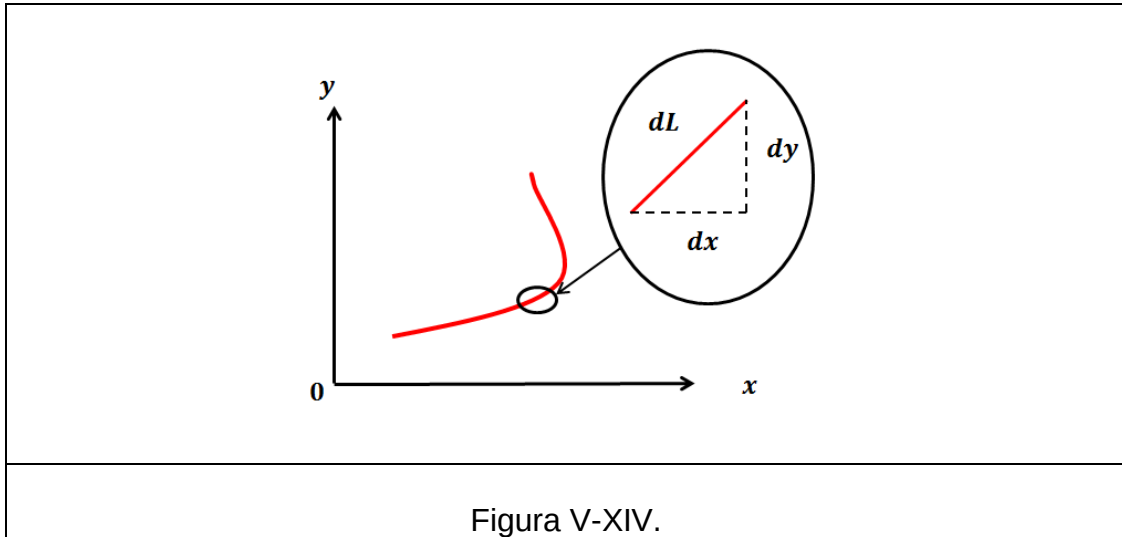


Figura V-XIV.

$$dL^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Apoyándonos en el concepto de momentos como se hizo para localizar el centro de gravedad de un volumen se podrá plantear lo siguiente:

$$\bar{x} \rho \pi r^2 g dL = \rho \pi r^2 g \int \check{x} dL$$

$$\bar{y} \rho \pi r^2 g dL = \rho \pi r^2 g \int \check{y} dL$$

Eliminando las respectivas constantes:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dL}{dL}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} dL}{dL}$$

Y finalmente sustituimos en diferencial de longitud:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dL}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dL}$$

En donde $\check{x}, \check{y}$ son las distancias del centroide del elemento diferencial con respecto al origen del plano $x - y$ definido en la figura V-XIV, y $\bar{x}, \bar{y}$ representan la ubicación del centroide con respecto al origen de dicho plano.

A continuación y para ejemplificar lo anterior planteado se resolverá un problema clásico sobre como ubicar el centroide de una línea cuya forma está en función de una ecuación de segundo grado. En la figura V-XV se muestra la forma geométrica de dicha línea y demás datos. Es de vital importancia recordar que dicha línea representa alguno de los siguientes cuerpos: varilla, cable, alambre, etc., etc. Independientemente de lo que represente sabemos que es homogénea en cuanto a su masa y de sección transversal constante.

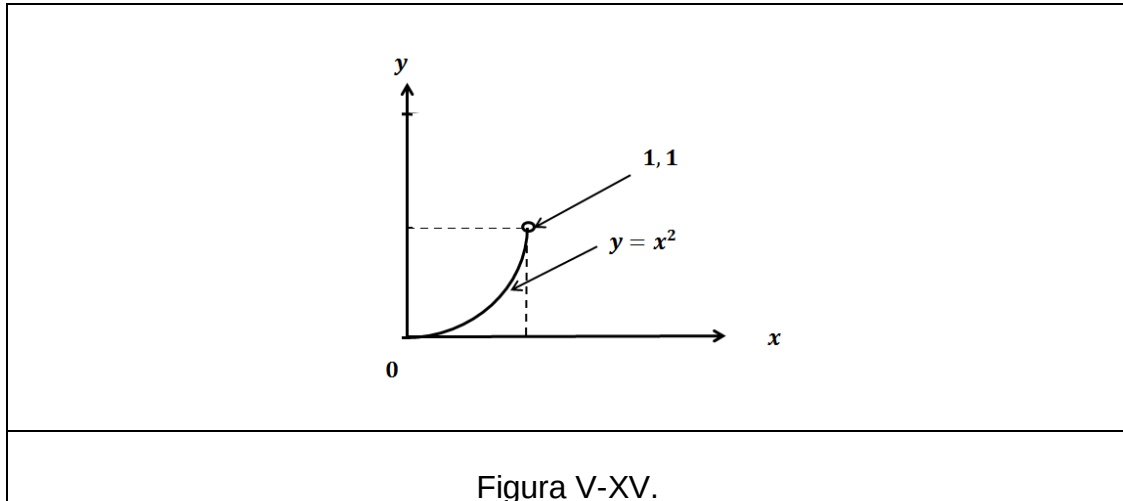


Figura V-XV.

Con los supuestos anteriores se podrá establecer el diferencial de longitud dL :

$$dL^2 = dx^2 * dy^2$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Nos enfocaremos en ubicar primeramente a: $\bar{x}$

De la ecuación: $y = x^2$

$$dy = 2xdx; dy^2 = 4x^2dx^2$$

Quedando el diferencial de longitud de la siguiente manera:

$$dL = \sqrt{dx^2 + 4x^2 dx^2}$$

$$dL = \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

$$dL = 2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int dL} = \frac{\int_0^1 x \cdot 2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^1 2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx}$$

Integrando se obtiene que

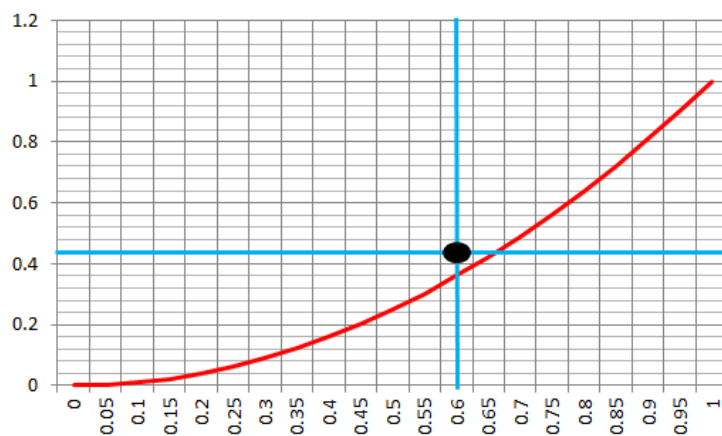
$$\bar{x} = .5736 \text{ unidades de longitud.}$$

De la misma manera;

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dL} = \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^1 2\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx}$$

$$\bar{y} = .41 \text{ unidades de longitud.}$$

En la gráfica V-I se podrá observar el centroide del elemento y el cual se encuentra fuera del mismo:



Gráfica V-I.

Áreas.

Para encontrar el centroides de áreas se establecerá primeramente lo siguiente:

Eje de simetría: es una línea imaginaria que divide al área en dos partes iguales y simétricas.

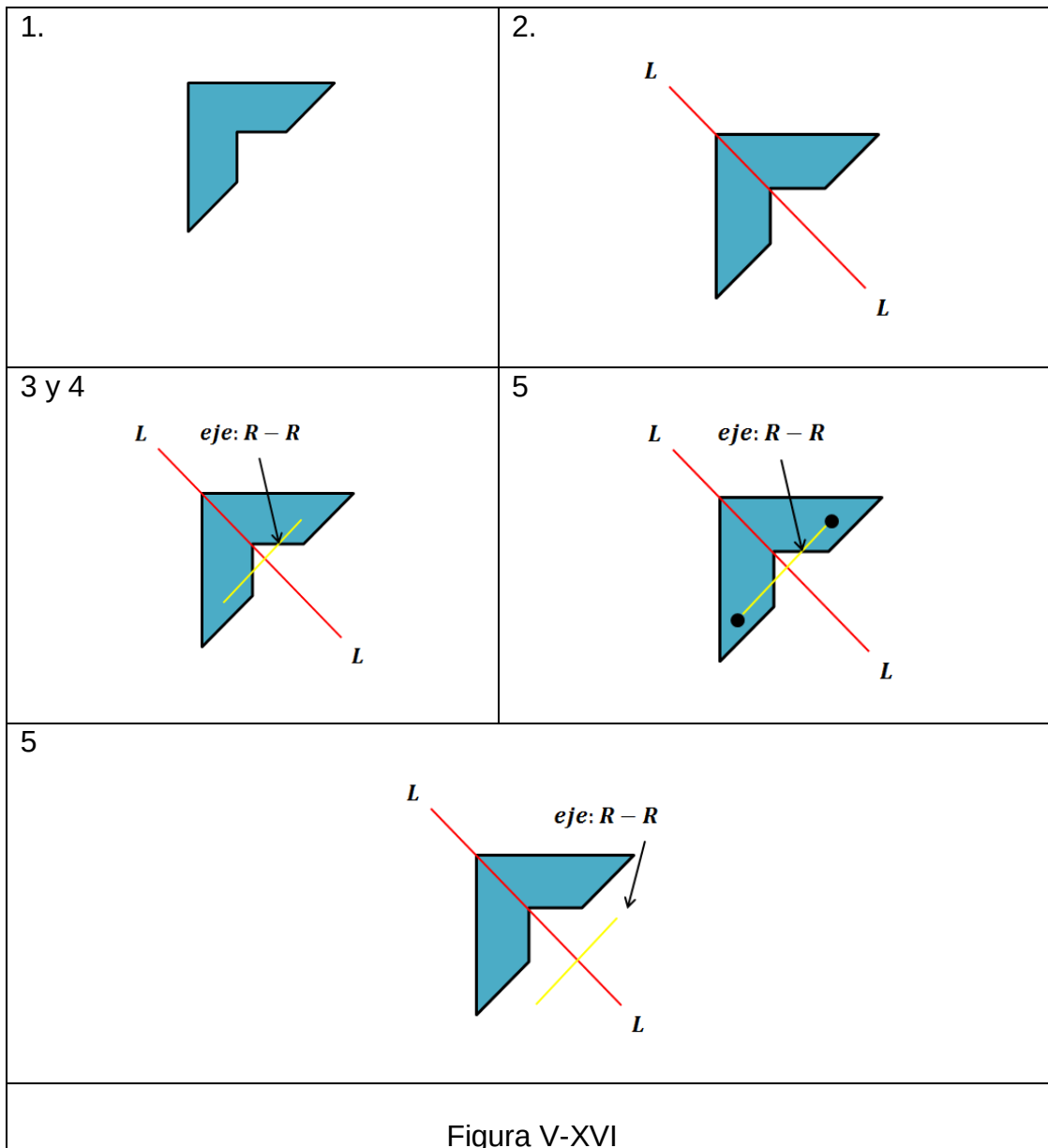
Lo anterior también se le conoce como efecto espejo. Por lo tanto quedará establecido lo siguiente:

1. Si un área cuenta con un eje de simetría este se considerará eje centroidal.
2. Si cuenta con dos o más ejes de simetría en el cruce de estos ejes se localiza el centroide.
3. Que un área no cuente con eje de simetría no implicará nunca que no cuente con centroide; al existir el área existe el centroide de dicha área.

Se indican los siguientes cinco pasos que ayudarán de una manera sencilla a determinar uno o más ejes simétricos de algunas áreas

1. Tenemos un área como la que se muestra en la figura V-XVI,
2. trazamos una línea o eje identificado como: $L - L$ sobre dicha área,
3. trazamos otra línea o eje identificado como $R - R$ perpendicular a $L - L$,
4. nos aseguramos que $L - L$ divida en dos a $R - R$,
5. y si a todo lo largo de $L - L$ cuando en cada uno de los extremos de $R - R$ existe un punto que forma parte del área en cuestión, se dice que dicho eje $L - L$ es un eje de simetría o lo que es lo mismo dicha área A es simétrica con respecto al eje $L - L$. Lo anterior implica que si en uno de los extremos de $R - R$ no hay un punto que forma parte del área, tampoco lo habrá en el otro extremo.

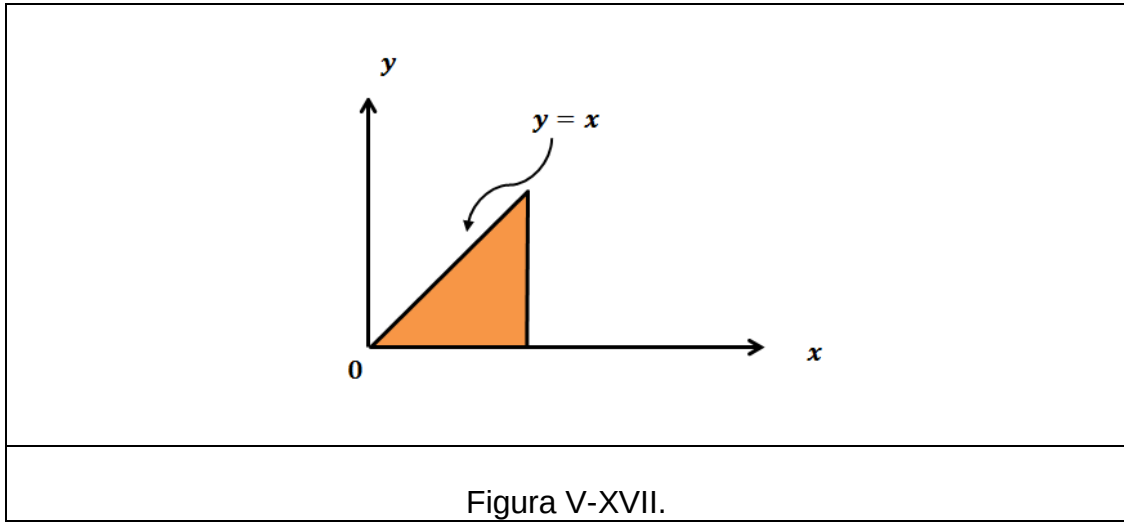
En la figura tal se ejemplifican los pasos anteriores:



Por lo tanto el área de la figura V-XVI es simétrica respecto al eje $L - L$. Esta figura cuenta únicamente con un eje de simetría y por lo tanto en algún punto sobre ese eje se encuentra su centroide. En esta misma sección se explicará el cómo ubicar otro eje centroidal ya que en el cruce de los dos ejes centroidales, como se ha indicado líneas arriba, se localiza el centroide.

Para localizar el eje centroidal de áreas que no tiene dos o más ejes de simetría utilizaremos el siguiente ejemplo: suponga que deseamos encontrar el centroide de un triángulo el cual está en el punto de cruce de las distancias

$\bar{x}, \bar{y}$ de dicha figura. Dicha figura y demás datos se muestran en la figura V-XVII:



Ya se había demostrado que:

$$\bar{z}_3 = \frac{1}{A_T} \sum_{n=1}^t \bar{z}_n A_n$$

Ya que el plano que tenemos definido en la figura V-XVII es $x - y$. la anterior ecuación se puede también plantear de la siguiente forma para nuestros propósitos

$$\bar{x} = \frac{1}{A_T} \sum_{n=1}^t \bar{x}_n A_n; \bar{y} = \frac{1}{A_T} \sum_{n=1}^t \bar{y}_n A_n$$

Aplicado el concepto de integrales:

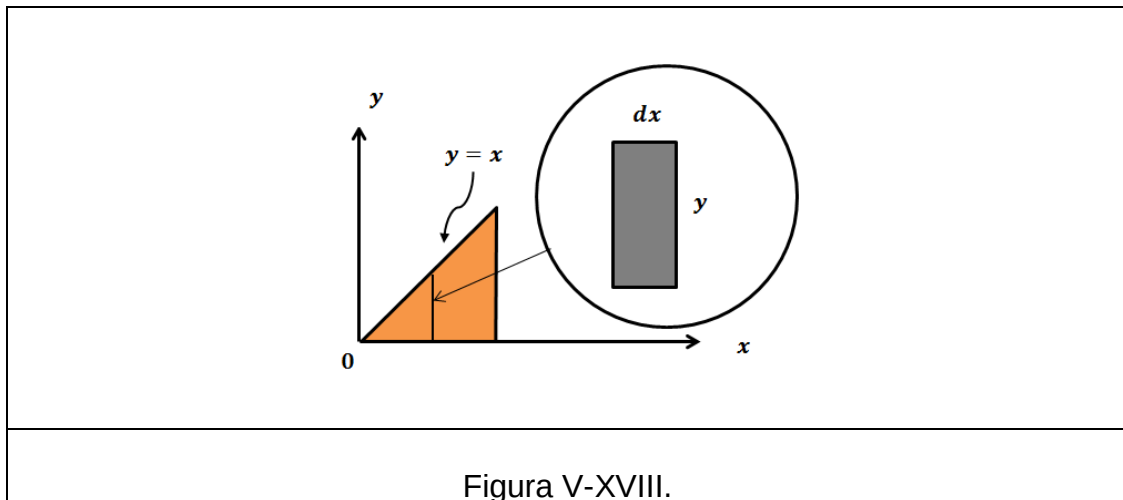
$$\bar{x} = \frac{\int_0^b \check{x} dA}{A}; \bar{y} = \frac{\int_0^b \check{y} dA}{A}$$

En este ejemplo el área total será el área del triángulo

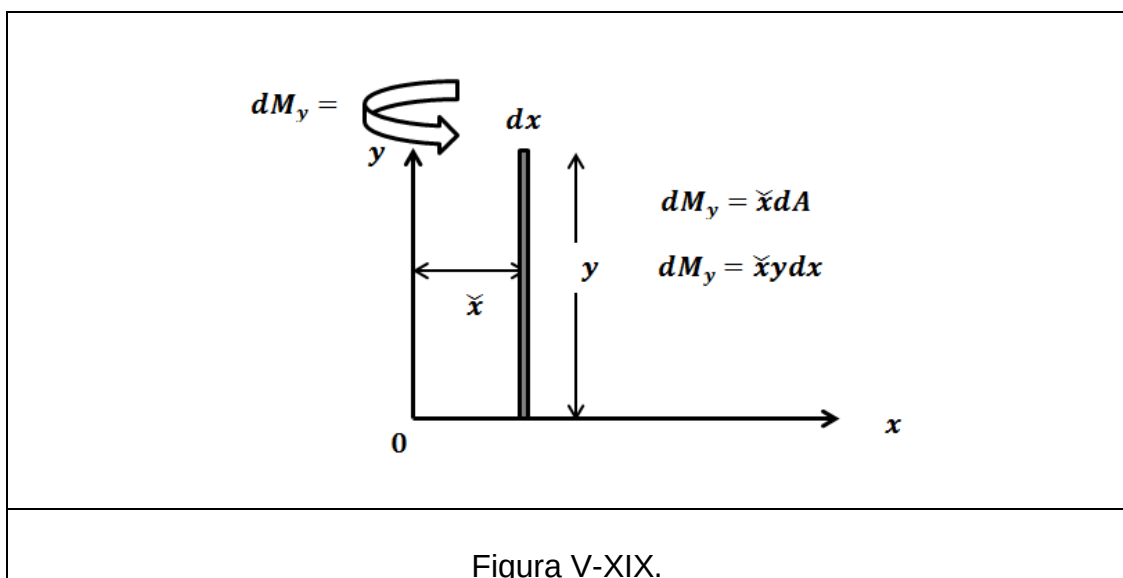
$$A_T = A = \frac{bh}{2}$$

En la figura V-XVIII se muestra el área del triángulo bajo cuestión de donde se ha seleccionado un elemento de tamaño diferencial de forma rectangular y cuyo diferencial de área es

$$dA = ydx$$



Ahora, en la figura V-XIX, la distancia $\tilde{x}$ del elemento dA representa la distancia de nuestro origen al eje centroidal vertical de dicho diferencial de área. En dicha figura la flecha curva que tiende a girar sobre el eje vertical (y) representa lo que se ha definido como primer momento de área.



Considerando que será una integral definida la que se empleará se tiene por lo tanto en este caso:

$$\check{x} = x$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b x dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^b xy dx}{\frac{bh}{2}}$$

Se estableció que:

$$y = x$$

Se tendrá ahora:

$$\bar{x} = \frac{2 \int_0^b x^2 dx}{bh}$$

$$\bar{x} = \frac{2x^3}{3bh}; 0 \leq x \leq b$$

Sabiendo que

$$y = x$$

Se puede escribir:

$$x^2 x = x^2 y$$

Por lo anterior:

$$\bar{x} = \frac{2yx^2}{3bh}; 0 \leq x \leq b$$

Sabiendo que cuando:

$$x = b$$

$$y = h$$

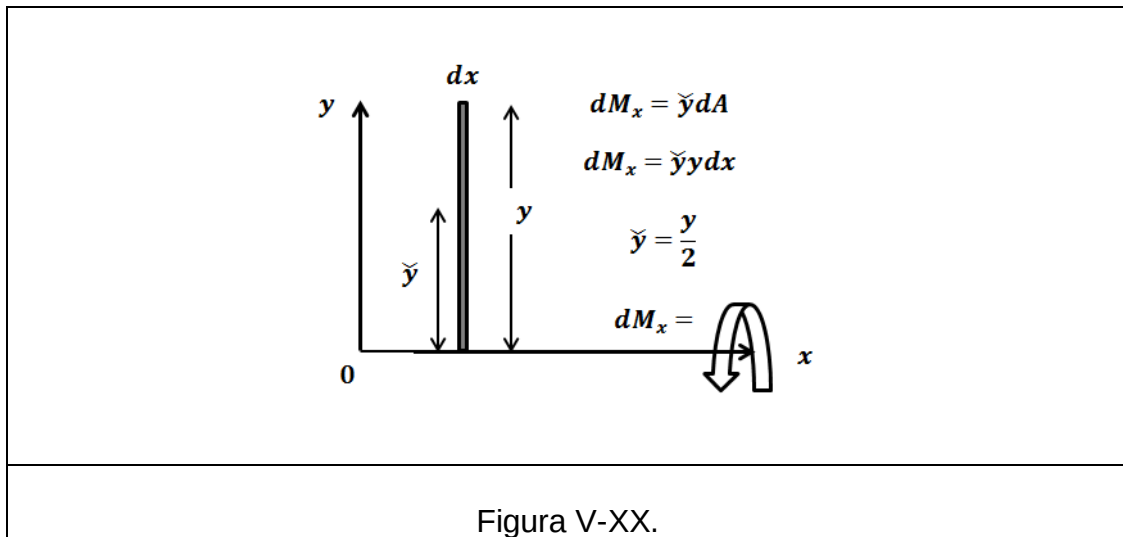
Haciendo los despejes correspondientes:

$$\bar{x} = \frac{2hb^2}{3bh}$$

Se obtiene finalmente la distancia respecto a nuestro origen del eje centroidal en dirección horizontal:

$$\bar{x} = \frac{2b}{3}$$

Regresando al área de la figura V-XVII, falta ubicar la $\bar{y}$ de la misma. Recurriendo al área diferencial de la figura V-XX y con lo ya explicado en los cinco pasos anteriores se podrá definir la $\bar{y}$:



Podemos, ya, asegurar que el centroide del área diferencial se encuentra en el cruce de los dos ejes de simetría de dicha área. La distancia entre el eje de simetría horizontal, de esta área diferencial, a la abscisa x es la mitad de la altura o distancia y de la tan mencionada área diferencial:

$$\check{y} = \frac{y}{2}$$

Por lo que se podrá escribir la siguiente ecuación:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b \check{y}dA}{A}$$

Recordando que el diferencial de área estará en función del diferencial dx

$$dA = ydx$$

Por otro lado sabemos que el área de un triángulo es:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Realizando las sustituciones correspondientes:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b \frac{y}{2} y dx}{\frac{bh}{2}}; \bar{y} = \frac{\int_0^b y^2 dx}{bh}$$

Como:

$$y = x$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b x^2 dx}{bh}$$

Integrando:

$$\bar{y} = \frac{x^3}{3bh}$$

Por convenirnos y sin violentar igualdad alguna:

$$x^3 = x^2 y$$

$$\bar{y} = \frac{x^2 y}{3bh}$$

Ya se indicó que cuando:

$$x = b$$

$$y = h$$

Por lo tanto:

$$x^2 y = b^2 h$$

Finalmente:

$$\bar{y} = \frac{b}{3} = \frac{h}{3}$$

Por lo tanto en el cruce de los dos ejes centroidales se ubica el centroide del triángulo en cuestión tal y como se muestra en la figura V-XXI:

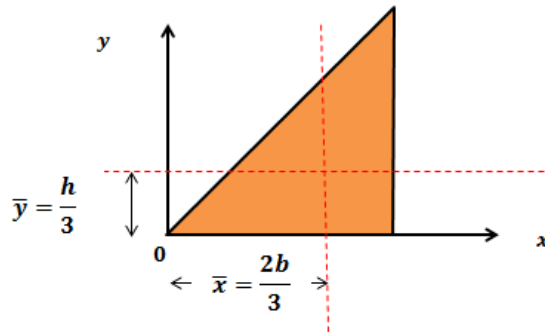


Figura V-XXI.

En el siguiente ejemplo utilizaremos los conceptos de eje de simetría y primer momento de área para encontrar el centroide de un área semicircular la cual se muestra en la figura V-XXII con la ecuación que define su curvatura en el plano $x - y$.

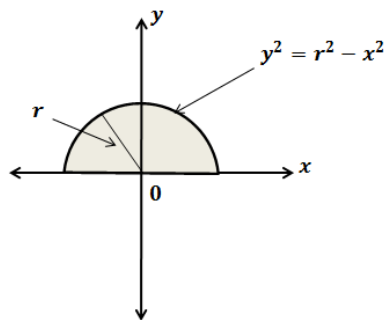


Figura V-XXII.

De acuerdo a la conveniente manera de colocar el semicírculo respecto a los ejes x, y que conforman el plano $x - y$, el eje vertical o eje y es un eje de simetría, ya que divide en dos partes idénticas dicha figura semicircular. De lo anterior se puede establecer lo siguiente:

$$\bar{x} = 0$$

Para encontrar a que distancia o altura se encuentra el centroide sobre el eje horizontal se aplicará la siguiente ecuación:

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{A}$$

El área del semicírculo en cuestión la es:

$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

La manera de definir el diferencial de área y la $\tilde{y}$ se muestra en la figura V-XXIII:

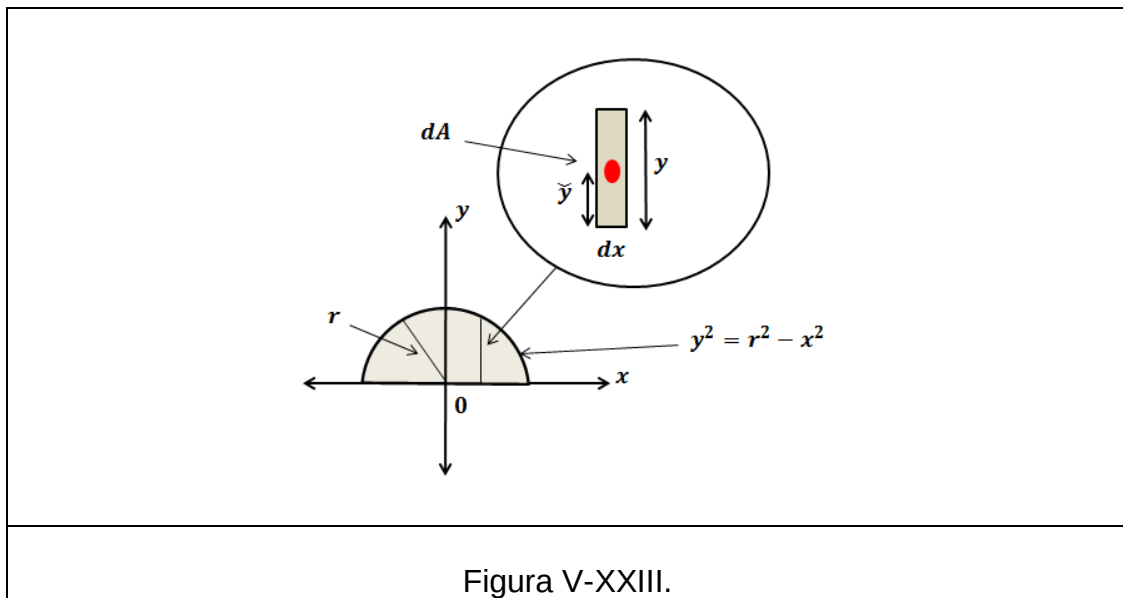


Figura V-XXIII.

En dicha figura el centroide del diferencial del área allí mostrado está representado por el punto rojo cuya distancia al eje horizontal es la mitad de su altura y . Lo anterior se puede asegurar debido al concepto de eje de simetría. Por lo tanto se podrá escribir la siguiente ecuación:

$$\check{y} = \frac{y}{2}$$

El diferencial de área será igual a:

$$dA = ydx$$

Los límites de la integral serán de $-r$ a r . Por lo tanto la ecuación para ubicar la distancia vertical del centroide de la figura en cuestión será:

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y}dA}{A} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r y^2 dx$$

Y como sabemos que:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

Finalmente se tiene que:

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

Integrando por partes;

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (r^2) dx = \frac{r^2}{\pi r^2} (r - (-r)) = \frac{2r}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r (x^2) dx = \frac{1}{3\pi r^2} (r^3 - (-r^3)) = \frac{2r}{3\pi}$$

Por lo tanto se obtiene finalmente que:

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} - \frac{2r}{3\pi} = \frac{6r}{3\pi} - \frac{2r}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

En los dos ejemplos anteriores se utilizaron las siguientes integrales:

$$\bar{x}A = \int \check{x}dA$$

$$\bar{y}A = \int \check{y}dA$$

Y, como ya se ha indicado, se les define como primer momento de área y diversos autores afines al tema los representan con la letra q en mayúscula:

$$Q_y = \int \check{x}dA$$

$$Q_x = \int \check{y}dA$$

Finalmente los primeros momentos de área quedarían expresados de la siguiente manera:

$$Q_y = \bar{x}A$$

$$Q_x = \bar{y}A$$

Volúmenes.

Para encontrar el centroide de un volumen de masa homogénea se establecerá, primeramente, su peso en función de su volumen, su densidad y la gravedad:

$$W = V\rho g$$

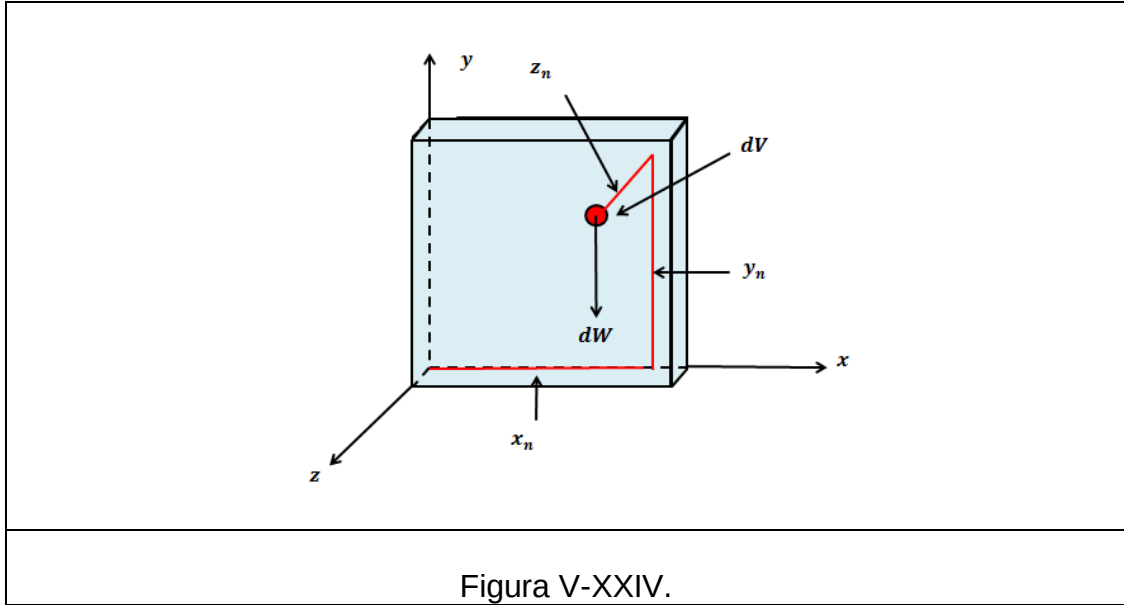
Ya se ha establecido que la fuerza del peso y una distancia a conveniencia se podrá hacer momentos:

$$M = rW \quad \text{V-4}$$

La anterior ecuación también se podrá expresar del siguiente modo:

$$M = rV\rho g$$

Ahora bien, si tenemos un Volumen como el de la figura V-XXIV y si seleccionamos un diferencial de volumen de dicho cuerpo, se podrá observar que las distancias X_n y Z_n medidas desde el origen podrán utilizarse como brazos de palanca para que con el diferencial de peso hacer momentos, la distancia y_n no hace momentos debido a que su dirección es paralela a la dirección de la fuerza del diferencial de peso.



Los diferenciales de momentos se podrán escribir de la siguiente manera:

$$dM_{nx} = z_n dW;$$

$$dM_{nz} = x_n dW$$

Expresados en función del volumen:

$$dM_{nx} = z_n \rho g dV; dM_{nz} = x_n \rho g dV$$

Tomando como referencia la ecuación V-4:

$$M_3 = s_3 W_3 = \frac{h_3 \rho A_3 t g}{2}$$

En su momento en la anterior ecuación el espesor t se consideró constante, ahora este criterio cambiará: no necesariamente será constante y por lo tanto se tendrá el siguiente nuevo planteamiento:

$$M_3 = s_3 W_3 = \frac{h_3 \rho V_3 g}{2}$$

En el mismo orden de ideas si replanteamos las tres siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} dA}{A}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \check{z} dA}{A}$$

Recordemos que se llegó a ellas considerando entre otras cosas, que el espesor del cuerpo era constante. Ahora, nuevamente, este criterio cambiará y no necesariamente el espesor es constante, por lo tanto se tendrán las siguientes ecuaciones para ubicar el centroide de un volumen cualquiera:

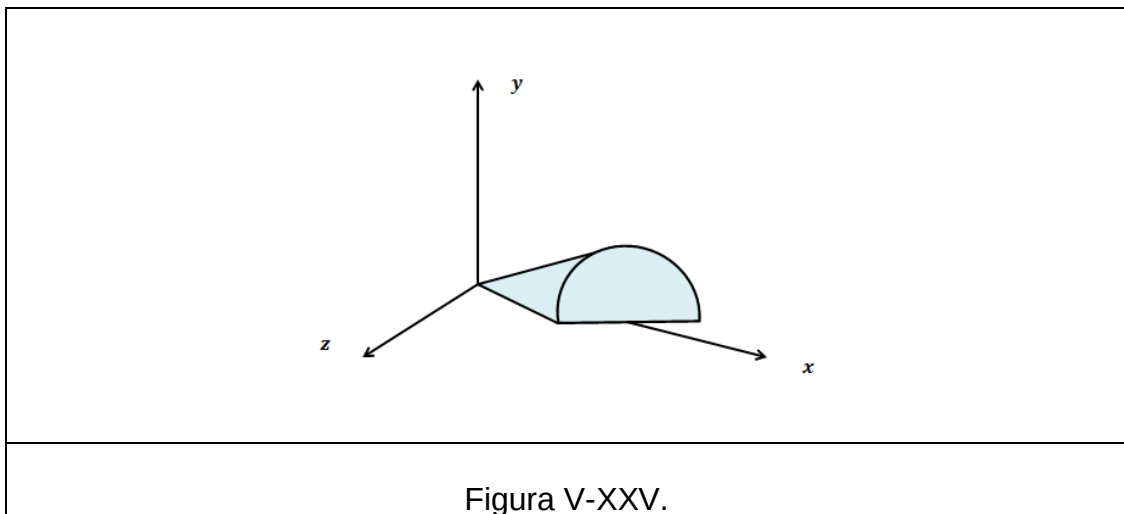
$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dV}{V} \quad \text{V-5}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \check{y} dV}{V} \quad \text{V-6}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \check{z} dV}{V} \quad \text{V-7}$$

Con el siguiente ejemplo se validarán las anteriores ecuaciones.

Se desea encontrar la ubicación del centroide del volumen mostrado en la figura V-XXV. Dicho volumen es homogéneo y representa la mitad de un cono sólido. En la figura VXXVI se representan las vistas del mismo cono en el plano $y - z$ y en el plano $x - y$ respectivamente así como las dimensiones del mismo.



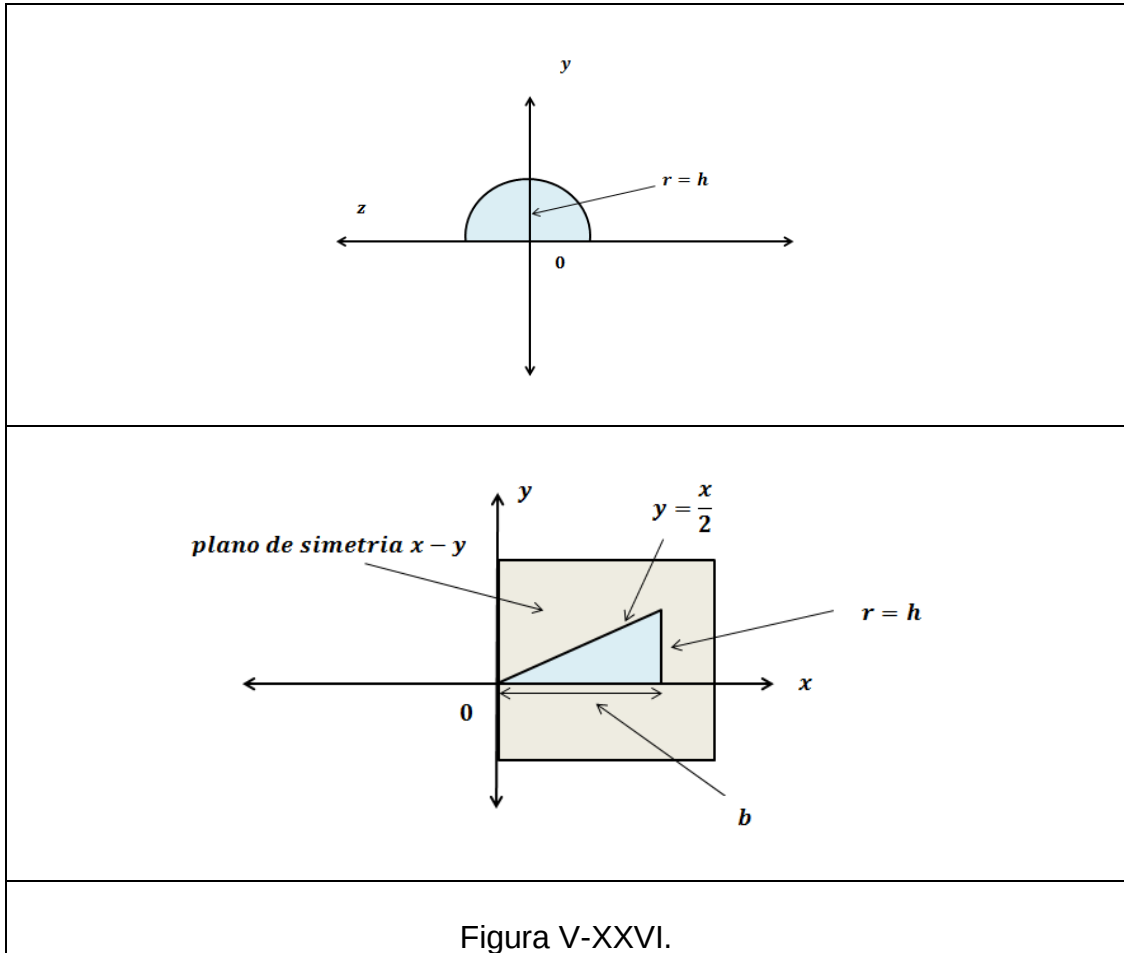


Figura V-XXVI.

Lo primero que se podrá observar es la conveniente manera es que se ha colocado el volumen con respecto al sistema de coordenadas. Tal colocación permite ubicar fácilmente un plano de simetría el cual divide en dos partes idénticas dicho volumen por lo tanto el centroide se encuentra en un punto conformado por dicho plano. Dicho plano está definido por los ejes $x - y$ los cuales, sabemos, son perpendiculares entre sí. Lo anterior ayudará para poder asegurar que;

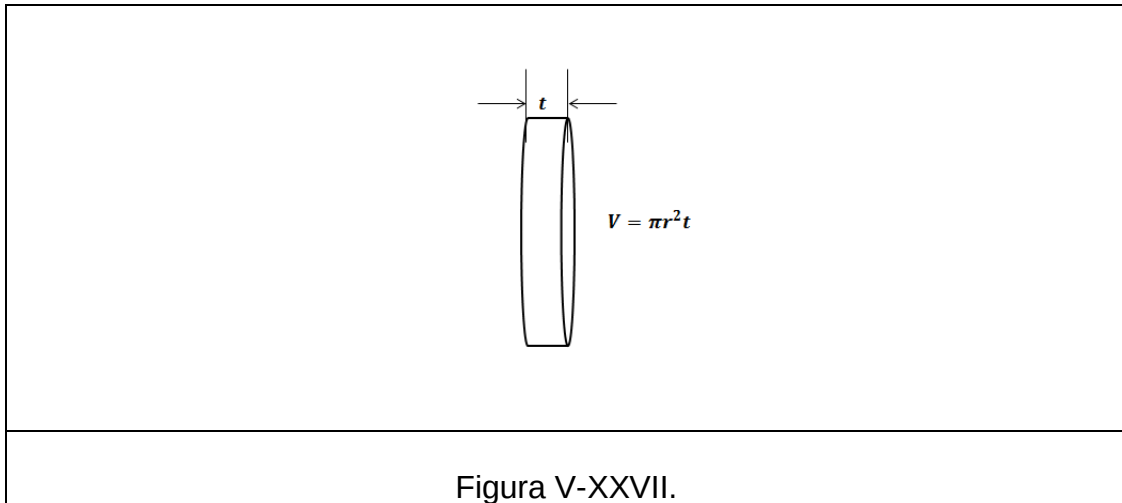
$$\bar{z} = 0$$

Para poder encontrar $\bar{x}$ y $\bar{y}$ tendremos que utilizar las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dV}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

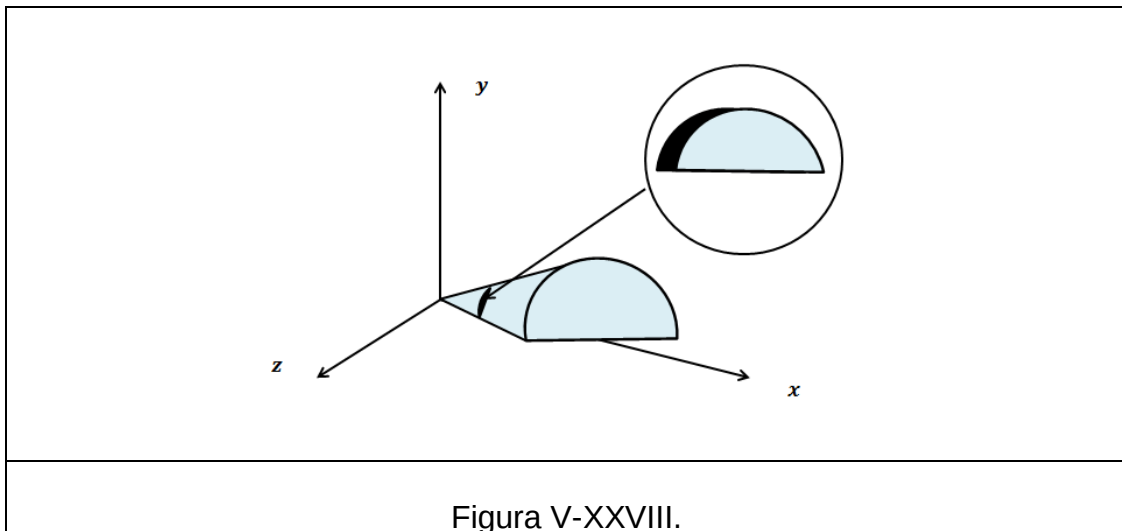
Ahora lo interesante será definir el diferencial de volumen. Empezaremos recordando cómo se calcula el volumen de un cilindro cualquiera de radio r y espesor t , como el de la figura V-XXVII:



Si partimos dicho cilindro de la figura tal en dos partes iguales a lo largo de su diámetro entonces ahora el volumen será la mitad:

$$V = \frac{\pi r^2}{2}$$

Ahora, del volumen bajo estudio y a cierta distancia del origen en dirección del eje x extraeremos un diferencial de volumen tal y como y como se muestra en la figura V-XXVIII:



El espesor de dicho diferencial del volumen será:

$$dt = dx$$

Y su radio está en función de la distancia sobre el eje vertical y . Por lo tanto el diferencial de volumen se podrá expresar de la siguiente manera:

$$dV = \frac{\pi y^2 dx}{2}$$

El volumen del solido de la figura tal será

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^b y^2 dx$$

En la figura V-XXVI se estableció la relación x, y que es igual a:

$$y = \frac{x}{2}$$

Por lo tanto se tiene ahora que:

$$V = \frac{\pi}{8} \int_0^b x^2 dx$$

Integrando se tiene que:

$$V = \frac{\pi b^2 b}{24}$$

Se puede observar de la misma figura V-XXVI que cuando:

$$x = b$$

Entonces:

$$y = h = r$$

De la ecuación:

$$y = \frac{x}{2}$$

$$\text{si } x = b \text{ entonces } y = r \therefore r = \frac{b}{2}$$

$$b = 2r; b^2 = 4r^2$$

Finalmente el volumen de nuestra mitad de cono sólido será:

$$V = \frac{\pi r^2 b}{6}$$

Pasaremos ahora a ubicar la $\bar{x}$ y la $\bar{y}$. Primeramente se trabajará con la siguiente integral:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dV}{V}$$

Ya se había planteado que:

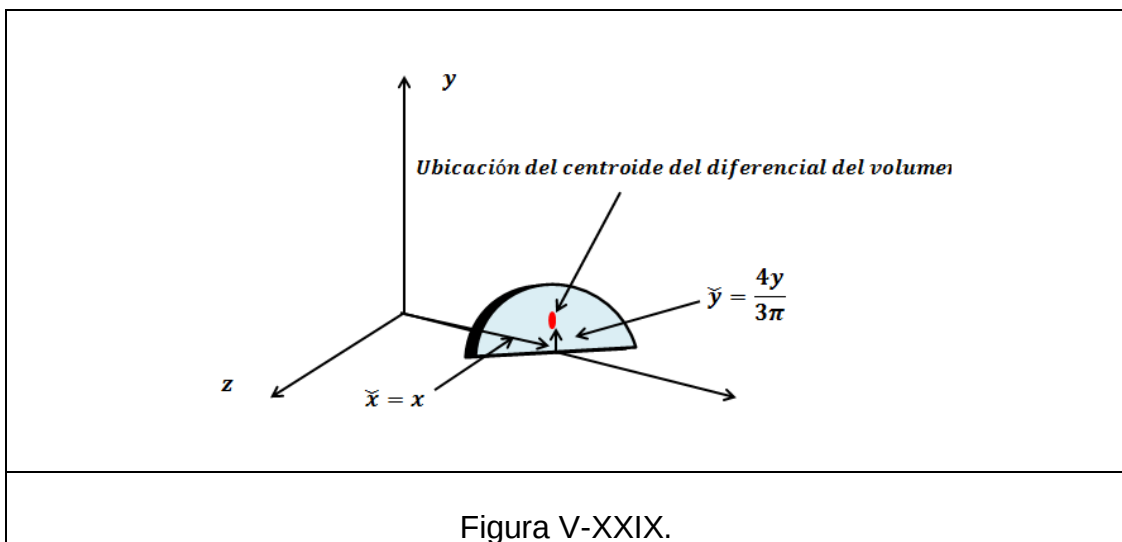
$$dV = \frac{\pi y^2 dx}{2}$$

Y de la ecuación que relaciona a las variables x, y :

$$y = \frac{x}{2}; y^2 = \frac{x^2}{4}$$

En la figura V-XXIX se puede observar que la distancia $\check{x}$ entre el origen y el centroide del diferencial del volumen es:

$$\check{x} = x$$



Por lo anterior se tendrá;

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dV}{V} = \frac{\int_0^b x \pi y^2 dx}{2V} = \frac{\pi}{8V} \int_0^b x^3 dx$$

Integrando:

$$\bar{x} = \frac{\pi b^2 b^2}{32V}$$

Sabiendo que;

$$b^2 = 4r^2; V = \frac{\pi r^2 b}{6}$$

Finalmente se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{6\pi b^2 4r^2}{32\pi b r^2}$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{4}$$

Para ubicar la $\bar{y}$ nos apoyaremos en la siguiente ecuación que se demostró en la parte de este subtema referente a áreas:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

De la ecuación anterior y relacionando el radio del diferencial de la figura V-XXIX como la altura y se puede establecer que:

$$\bar{y} = \frac{4y}{3\pi}$$

Sabiendo que:

$$y = \frac{x}{2}$$

Ahora tenemos que:

$$\bar{y} = \frac{4x}{6\pi}$$

Como ya se ubicó la $\bar{x}$ de nuestra figura podemos establecer la siguiente relación:

$$x = \bar{x}$$

Y sabiendo que:

$$\bar{x} = \frac{3b}{4}$$

Será válido escribir que:

$$\bar{y} = \frac{4x}{6\pi} = \frac{4 \cdot 3 \cdot b}{4 \cdot 6 \cdot \pi} = \frac{b}{2\pi}$$

Sabiendo que:

$$b = 2r$$

Se tiene finalmente que:

$$\bar{y} = \frac{r}{\pi}$$

5.1.2. Centros de masa.

Cuando se determinó el centroide del cuerpo de la figura V-I utilizando los tres planos de simetría no influyó en un principio si era de un material homogéneo y se pudo determinar que la ubicación de su centroide o que es lo mismo: su centro geométrico. Pero, ¿Qué pasa cuando el material del volumen no es homogéneo? Para responder dicho cuestionamiento, primeramente definiremos el concepto de centro de masa:

Centro de masa será el promedio de la ubicación de todas las partes del cuerpo, ponderadas de acuerdo a sus masas, sin importar si el cuerpo total esta hecho de diferentes masas.

Para encontrar el centro de masa de un volumen cualquiera (utilizaremos en un principio solo uno de los tres ejes coordenados, posteriormente se hará extensiva lo establecido a los dos ejes restantes), replantearemos la siguiente ecuación:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad (V-5)$$

Supondremos que la densidad de la masa del volumen bajo cuestión es constante se podrá plantear de la siguiente manera:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Un diferencial de volumen será:

$$dV = \frac{dm}{\rho}$$

Por lo tanto y haciendo lo anterior extensivo para los tres ejes del sistema de coordenadas se podrá ubicar el centro de masa de dicho volumen:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}; \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}; \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

De acuerdo a lo anterior el centro de masa del ejemplo tal se localiza en el centroide de dicho volumen. De lo anterior se podrá establecer que:

El centro de masa de un volumen cuando es de masa homogénea coincide con el centroide de dicho volumen al que también y al principio de este capítulo se le identificó como centro geométrico.

El siguiente ejemplo servirá para localizar el centro de masa de un volumen de forma cilíndrica cuya masa no es homogénea pero su geometría es simétrica ya que a lo largo de la misma su radio es constante. Dicho ejemplo es un problema propuesto del texto de Bedford y Fowler (1996). En la figura V-XXX se muestra el problema a resolver

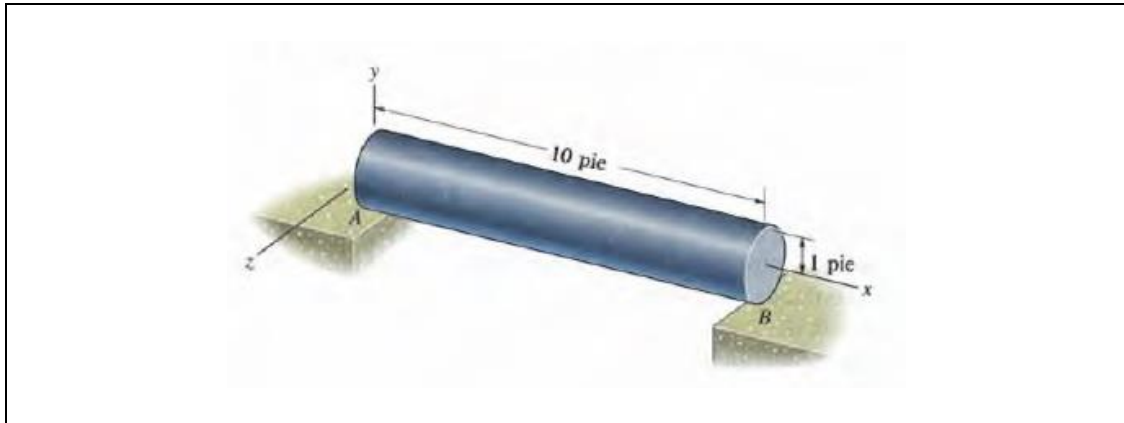


Figura V-XXX. Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 7.36, página 353.

En tal problema se pide encontrar las fuerzas reactivas en los puntos A y B , reacciones provocadas por el peso W de dicha barra cilíndrica. Además de los datos que se pueden leer en la imagen del problema, el enunciado del mismo indica que su peso específico obedece la siguiente ecuación:

$$\gamma = 100 * (1 - .002x^2) \frac{lb}{p^3}$$

Como su peso específico esta dado en función de la variable x y sabiendo que:

$$0 \leq x \leq 10, \text{pies.}$$

Se podrá asegurar que la masa de esta barra no es homogénea, como se demostrará su centro de masa no coincidirá con su centro geométrico

De acuerdo a las unidades del peso específico la relación del mismo es equivalente a:

$$\gamma = \frac{W}{V}$$

Debido a la naturaleza del problema, únicamente se deberá calcular la $\bar{x}$ para lo cual solo resolveremos la siguiente integral:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

Si multiplicamos y dividimos la integral por la gravedad g :

$$\bar{x} = \frac{\int x g dm}{\int g dm}$$

Por conveniencia en este problema se relacionara la masa y la gravedad, que es constante, con el peso. De lo anterior

$$dW = g \int dm$$

Se tendrá entonces que:

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW}$$

Asimismo y aprovechando los datos y relaciones con los que se cuenta se plateará el volumen de la siguiente manera:

$$W = \gamma V$$

Sabiendo que el volumen de cilindro se puede expresar de la siguiente manera:

$$V = AL$$

Y conociendo la relación del peso específico con la variable x y que el radio de la barra es igual a un pie se tiene:

$$W = \gamma V = 100 * (1 - .002x^2)AL = 100\pi L - .2\pi x^2 L$$

Ya que la dirección de la longitud de la barra está e dirección de la variable x se puede hacer uso de la siguiente igualdad diferencial:

$$L = \int_0^L dx$$

Asimismo el peso total es igual a:

$$W = \int_0^{W_T} dW$$

El diferencial del peso será:

$$\int_0^{W_T} dW = 100\pi \int_0^L dx - .2\pi x^2 \int_0^L dx$$

Integrando y sabiendo que el límite superior de la integra es igual a 10 pies se obtiene que el peso total es igual a:

$$W = 2931.5 \text{ lb.}$$

Por lo que ahora se encontrará $\bar{x}$:

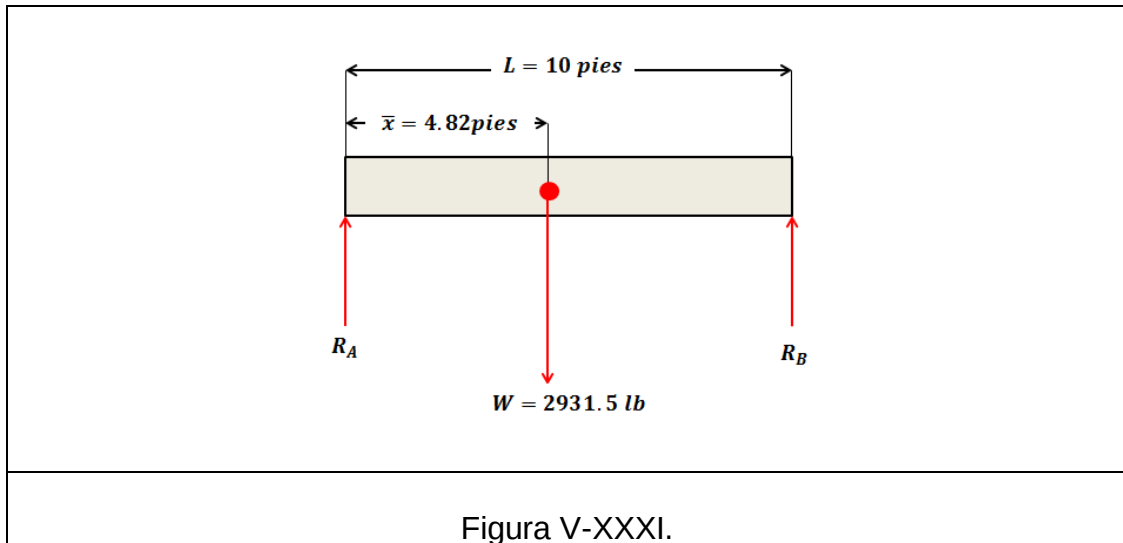
$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW} = \frac{x(100\pi \int_0^{10} dx - .2\pi x^2 \int_0^{10} dx)}{2931.5}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW} = \frac{100\pi x \int_0^{10} dx - .2\pi x^3 \int_0^{10} dx)}{2931.5}$$

Integrando encontramos que:

$$\bar{x} = 4.82 \text{ pies.}$$

En la figura V-XXXI se muestra un DCL del cilindro el cual se utilizara para encontrar las reacciones en los apoyos A y B :



Al hacer sumatoria de momentos en el extremo izquierdo de la barra y sabiendo que el sistema está en equilibrio se tiene:

$$\sum \vec{M}_A = \bar{x}iX(-2931.5)j + 10iXR_Bj = 0$$

Despejando la única incógnita se obtiene que:

$$R_B = 1413 \text{ lb.}$$

Y haciendo la sumatoria de fuerzas en dirección vertical se encuentra que:

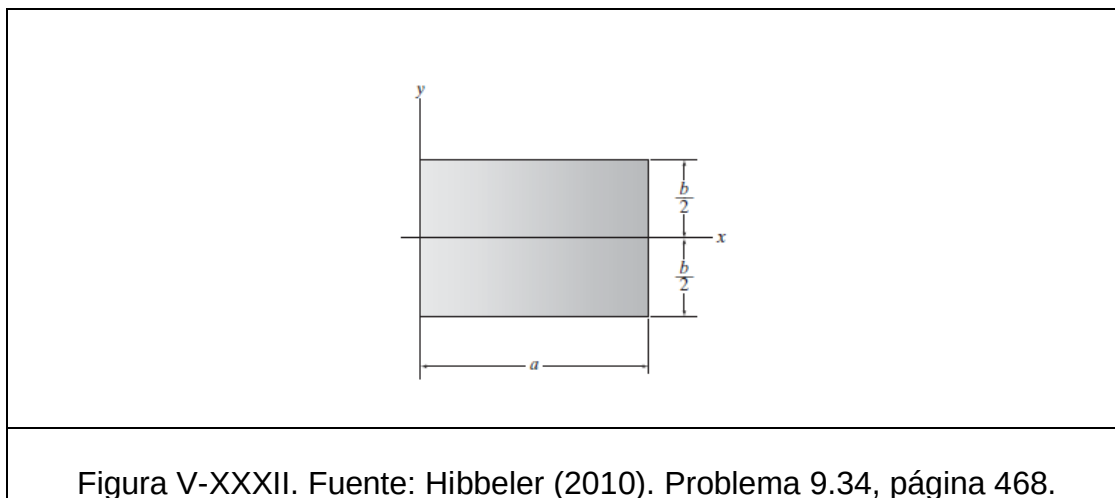
$$R_A = 1518.5 \text{ lb.}$$

Como se puede observar el centro de masa de este cilindro no homogéneo no está situado en el centro geométrico de su volumen.

En lo que respecta a volúmenes de espesor constante y de masa homogénea como el de forma triangular que se utilizó en el ejemplo de áreas, se aplica el siguiente criterio:

Cualquier volumen de masa homogénea, de sección transversal definida y espesor constante, su centro de masa coincide con el centroide de dicho volumen.

Resolvamos un problema donde la masa no es homogénea. El problema propuesto es del texto de Hibbeler (2010) y se muestra en la figura tal.



El volumen de la figura V-XXXII es una placa rectangular de espesor constante t , además de las otras dos dimensiones que se pueden apreciar en dicha imagen. De acuerdo al enunciado de dicho problema se sabe que la densidad en cualquier punto de la placa rectangular está definida por la siguiente relación;

$$\rho = \rho_o \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Igual que en el problema anterior, debido a que la densidad está en función de la distancia x su masa no es homogénea.

Donde ρ_0 es constante. Se pide encontrar la masa total y la $\bar{x}$ de la placa rectangular.

Se utilizara la siguiente integral para dar respuesta a ambos cuestionamientos:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

Primeramente se encontrará la masa total de dicha placa iniciando con la siguiente relación:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Despejando la masa se tiene que:

$$m = \rho V$$

El volumen total de dicha placa será:

$$V = abt$$

Si buscamos dejar el volumen en función de la variable x de tal manera que:

$$V = f(x)$$

Y sabiendo que:

$$0 \leq x \leq a$$

Se tendrá que

$$V = tbx$$

Por lo tanto un diferencial de volumen sería:

$$dV = tbdx$$

Que sería lo mismo que:

$$V = tb \int_0^a dx$$

Si

$$m = \int dm = \rho \int dV$$

Llegamos a la relación que nos interesa:

$$m = \rho V = \rho_o \left(1 + \frac{x}{a}\right) tb \int_0^a dx = \rho_o tb \int_0^a dx + \frac{\rho_o tb}{a} \int_0^a x dx$$

Una vez integrando se tiene que la masa total es igual a;

$$m = \frac{3\rho_o abt}{2}$$

El centroide de la placa medido en dirección del eje x será:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

Ya se encontró que:

$$\int dm = \rho \int dV = \rho_o \left(1 + \frac{x}{a}\right) tb \int_0^a dx$$

Por lo que se tendrá;

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x \left(\rho_o \left(1 + \frac{x}{a}\right) tb\right) dx}{\frac{3\rho_o abt}{2}}$$
$$\bar{x} = \frac{2\rho_o tb \int_0^a x dx}{3\rho_o abt} + \frac{2\rho_o tb \int_0^a x^2 dx}{3\rho_o abta}$$

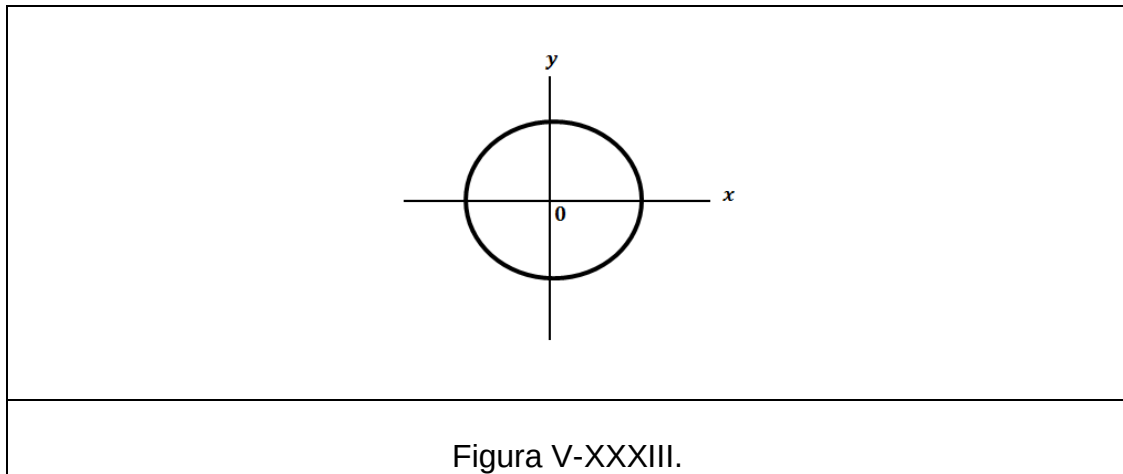
Integrando se encuentra que:

$$\bar{x} = \frac{5a}{9}$$

Se ha demostrado que el centro de masa no coincide con el centroide geométrico del volumen.

En lo que respecta a elementos delgados como alambres varillas o algún otro similar se aplicara los dos anteriores conceptos bajo el siguiente criterio: Será de material homogéneo,

Lo anterior se ha establecido basándonos en el ejemplo de la figura V-XV que se utilizó para encontrar el centroide de una varilla de forma curva; allí se encontró que su centroide está fuera del elemento. Para reforzar lo anterior supongamos que se tiene un alambre de sección transversal constante que forma un círculo perfecto de diámetro dos unidades de longitud tal como se muestra en la figura V-XXXIII



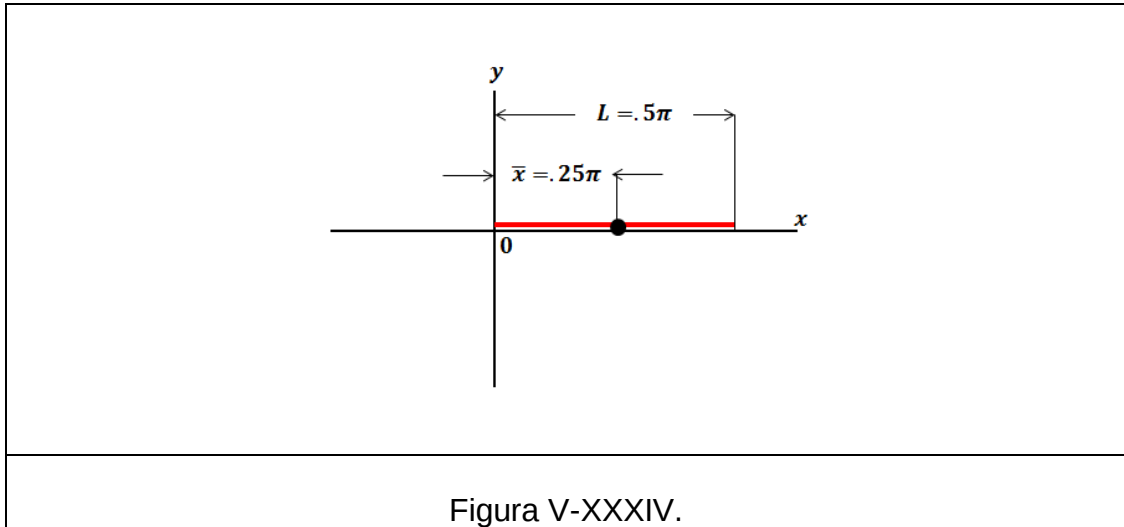
La longitud del perímetro del círculo formado por el alambre será la longitud total del alambre:

$$S_T = 2\pi r$$

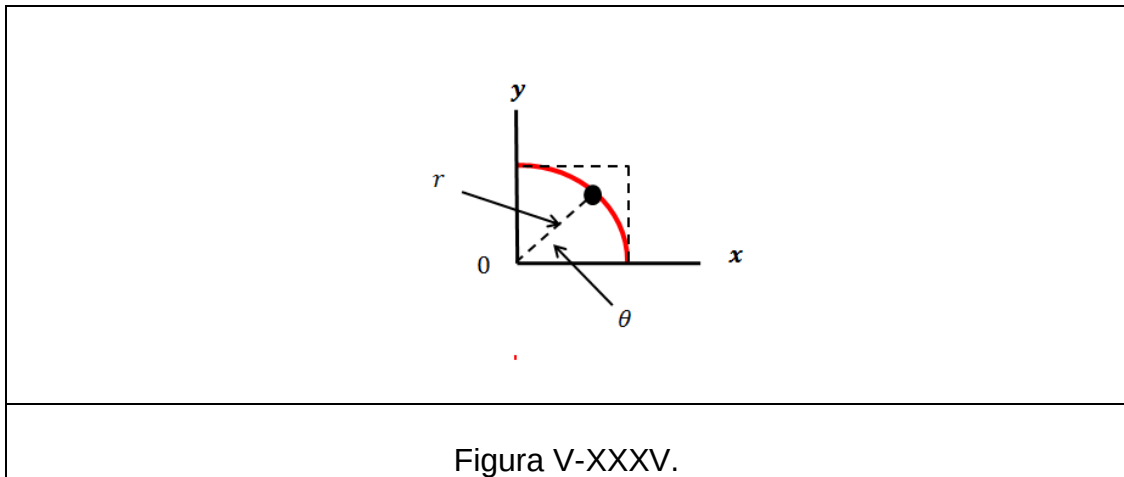
Y como el radio tiene un valor de una unidad de longitud por lo tanto:

$$S_T = 2\pi r = 6.2831$$

Ahora, si utilizamos únicamente un cuarto de la longitud y lo extendemos a lo largo del eje x de una manera sencilla encontraremos el centroide del tramo seleccionado, tal como se muestra en la figura V-XXXIV:



Una vez localizado el centroide del segmento del alambre, ahora se procederá a darle la forma de un cuarto de círculo tal como se muestra en la figura V-XXXV. Además en dicha figura se muestra donde, supuestamente, se localiza el centroide del segmento del alambre en el plano $x - y$:



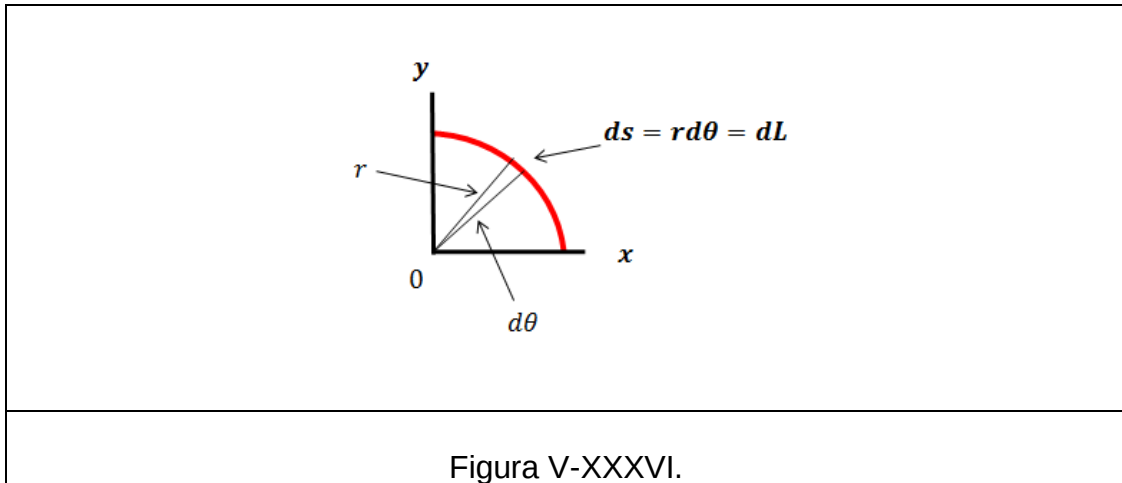
Dado que por la simetría de la forma que se tiene en tal figura V-XXXV se establece que el ángulo teta vale 45° . Sabemos también el valor del radio, por lo tanto se tiene que:

$$\bar{x} = \bar{y} = r \cos \theta = 1 \cdot \cos 45 = .7071$$

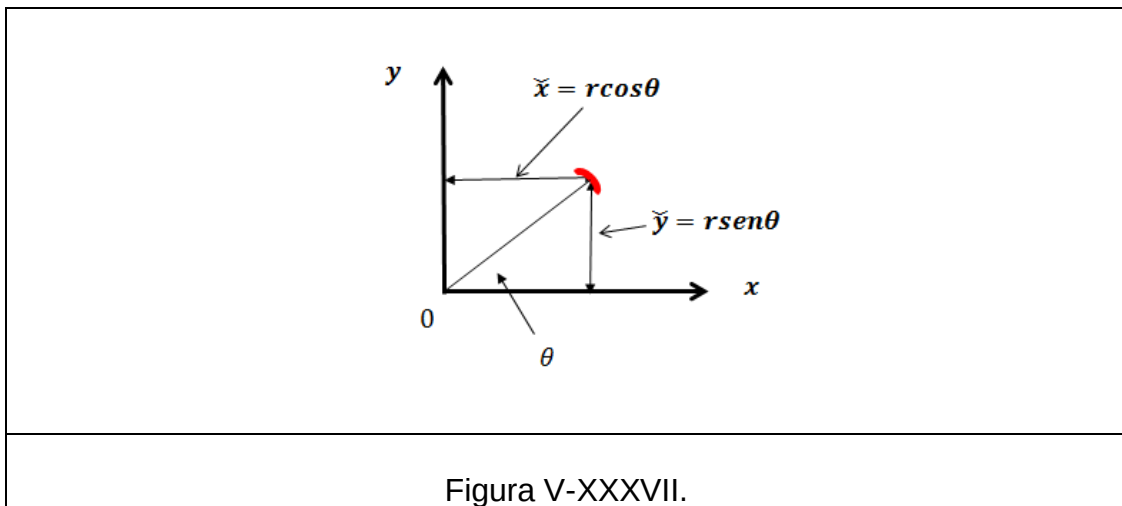
Ahora, aplicando la siguiente integral, que ya se demostró su validez, veremos si el anterior valor es correcto:

$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dL}{dL}$$

Debido a la forma circular del alambre se utilizarán coordenadas polares. El diferencial del segmento se muestra en la figura tal:



En la figura V-XXXVII se muestran las ecuaciones que definen el centroide del diferencial de alambre en el plano $x - y$:



Una vez definido lo anterior se podrá escribir lo siguiente;

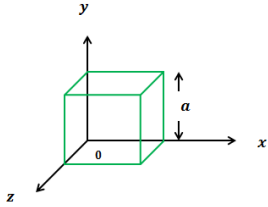
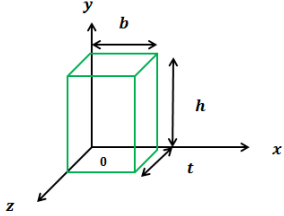
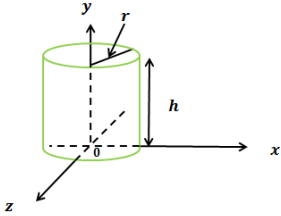
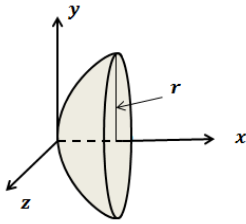
$$\bar{x} = \frac{\int \check{x} dL}{dL} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta} = \frac{2r}{\pi} = .6366$$

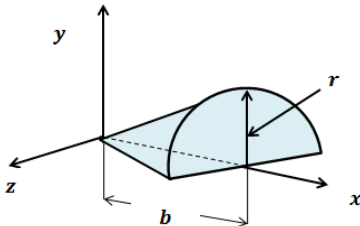
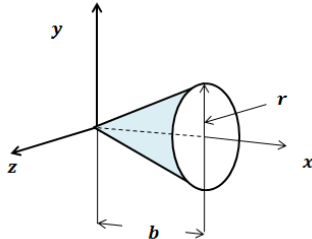
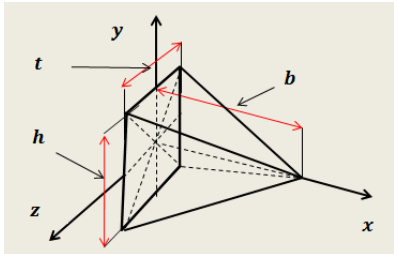
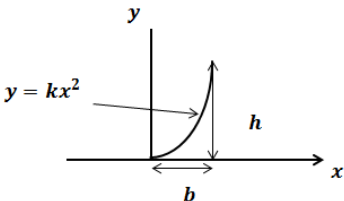
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dL}{dL} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta} = \frac{2r}{\pi} = .6366$$

Lo resultados demuestran que cuando el alambre cambia de forma de línea recta a circular su centroide se ubicará fuera del elemento.

5.1.3. Elementos compuestos.

Para efectos de este subtema, se le llamará elemento compuesto a aquel volumen, área o línea que esté conformado por volúmenes, áreas o líneas, según sea el caso, por formas geométricas comunes. En las siguientes tablas se muestran algunas formas geométricas comunes así como información ad hoc al capítulo en cuestión.

VOLÚMENES					
Nombre	Forma	Volumen	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
Cubo		a^3	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
Ortoedro		hbt	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{t}{2}$
Cilindro		$\pi r^2 h$	0	$\frac{h}{2}$	0
Media esfera		$\frac{2\pi r^3}{3}$	$\frac{5r}{8}$	0	0
Tabla V-I					

Nombre	Forma	Volumen	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
Medio cono		$\frac{\pi r^2 b}{6}$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{r}{\pi}$	0
Cono		$\frac{\pi r^2 b}{3}$	$\frac{3b}{4}$	0	0
Pirámide		$\frac{\pi b h t}{3}$	$\frac{b}{4}$	0	0
ÁREAS					
Nombre	Forma	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$	
Segmento de segundo grado		$\frac{bh}{3}$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{3h}{10}$	
Tabla V-I (continuación).					

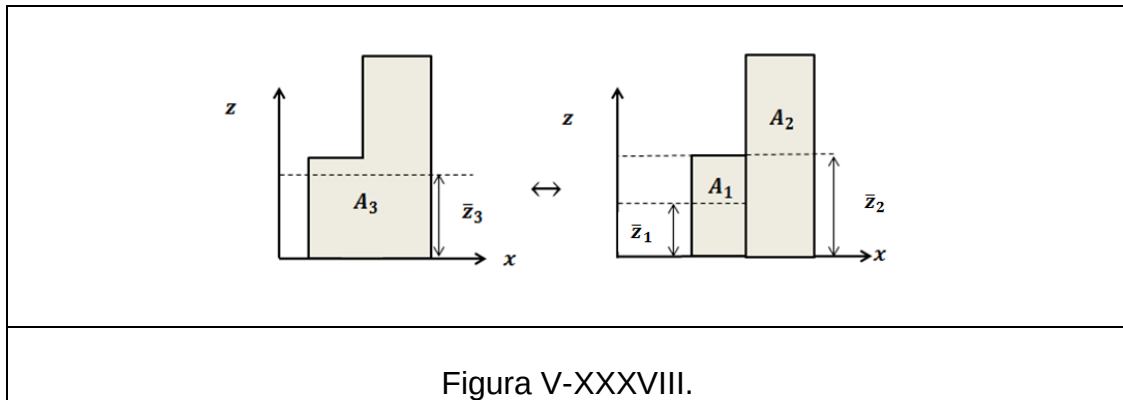
Los elementos compuestos, en su mayoría, estarán conformados con la combinación de dos o más de las formas geométricas que se hacen referencia en la tabla anterior. Cuando un elemento este conformado por alguna forma geométrica que no esté referenciada en dichas tablas, se recurrirá a las referencias que existan en textos afines o se buscará la respuesta a la

ubicación de su centroide así como se ha hecho en los ejemplos ya vistos en este capítulo.

La metodología que se utiliza para ubicar el centroide de elementos compuestos se explicó, en parte, cuando se llegó a la siguiente ecuación:

$$\bar{z}_3 A_T = \frac{1}{2} (h_1 A_1 + h_2 A_2)$$

En su momento, con dicha ecuación, se ubicó el centroide de un tercer rectángulo cuya A_T también puede ser el área de un cuerpo cuya forma puede ser el resultado de dos figuras geométricas definidas tal como el que se muestra en la figura V-XXXVIII:



Aplicando el criterio que se explica líneas arriba se resolverán algunos problemas propuestos de diversos textos ya referidos en problemas anteriores.

Líneas compuestas.

Del texto de Hibbeler (2010), se ha escogido el problema propuesto que se muestra en la figura V-XXXIX:

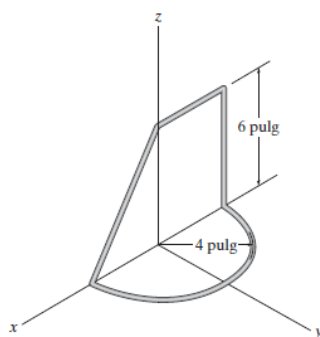


Figura V-XXXIX. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 9.46, página 476.

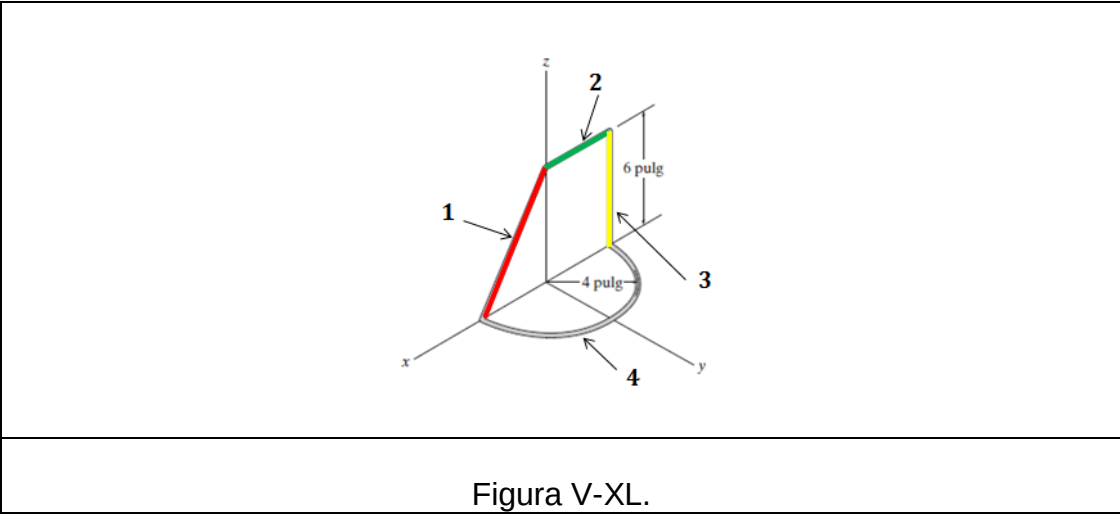
En dicho problema se muestra un solo alambre de sección transversal constante y de material homogéneo a lo largo del mismo, cuya forma es el resultado de dobleces rectos y curvos en el mismo alambre y se pide encontrar $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ de la figura que se logra con tales dobleces. Primeramente se definirá la ecuación a utilizar para resolver dicho problema. De la ecuación que se emplea para áreas podemos utilizarla adecuándola para líneas obteniendo por lo tanto las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x}L_T = (\bar{x}_1L_1 + \dots + \bar{x}_nL_n)$$

$$\bar{y}L_T = (\bar{y}_1L_1 + \dots + \bar{y}_nL_n)$$

$$\bar{z}L_T = (\bar{z}_1L_1 + \dots + \bar{z}_nL_n)$$

A continuación se identificarán las formas geométricas individuales que unidas dan la forma del problema a resolver. En la figura V-XL se muestran, con diferente color dichas formas individuales.



Claramente se pueden distinguir tres alambres rectos y uno curvo y ya se ha establecido el cómo calcular el centroide de cada una de las dos diferentes formas mencionadas así como la longitud del elemento curvo.

Debido a la naturaleza de las ecuaciones será de mucha utilidad el crear la siguiente tabla en la cual se vaciará la información para llegar al resultado deseado

Elemento	L_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$L_n \bar{x}_n$	$L_n \bar{y}_n$	$L_n \bar{z}_n$
1							
2							
3							
4							
$\sum L_n =$				$\sum T =$			

Tabla V-II.

En la siguientes cuatro figuras se muestra la información sobre el centroide de cada elemento en su respectivo plano así como la longitud de cada uno de ellos:

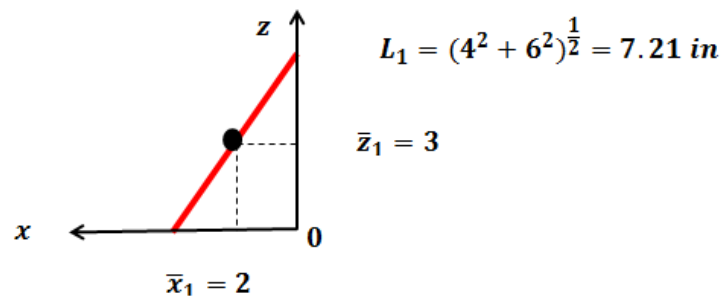


Figura V-XLI.

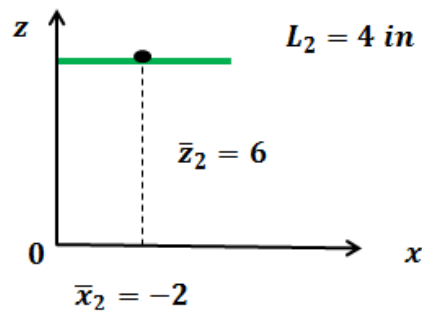


Figura V-XLII.

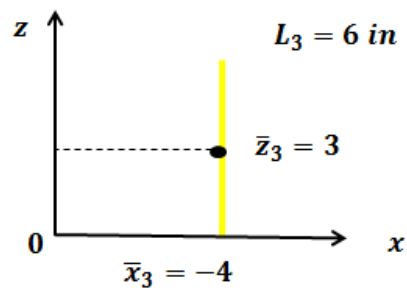
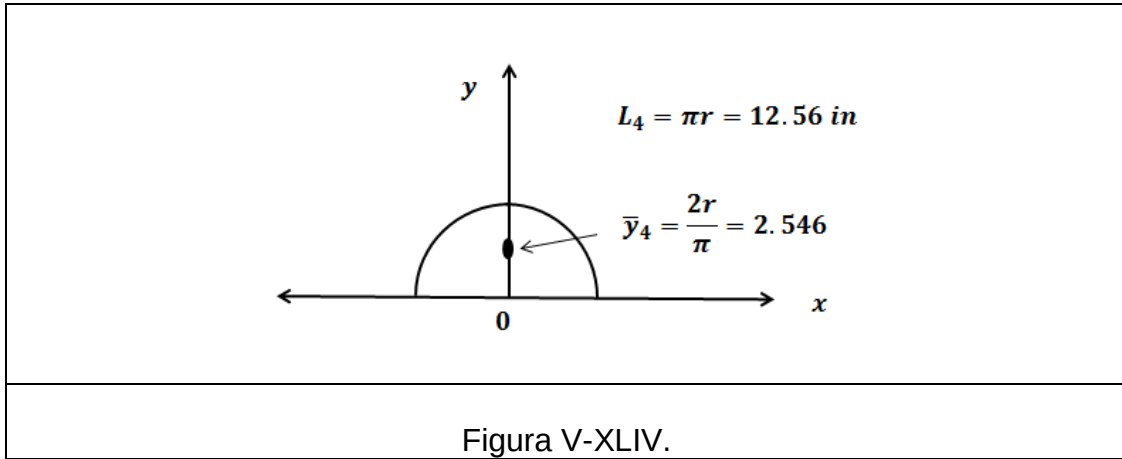


Figura V-XLIII.



Vaciando los cálculos de cada uno de los cuatro elementos en la tabla V-IV, esta quedaría de la siguiente manera

Elemento	L_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$L_n \bar{x}_n$	$L_n \bar{y}_n$	$L_n \bar{z}_n$
1	7.21	2	-	3	14.42	-	21.63
2	4	-2	-	6	-8	-	24
3	6	-4	-	3	-24	-	18
4	12.56	-	2.546	-	-	31.97	
$\sum L_n =$	29.77			$\sum T =$	-17.58	31.97	63.63

Tabla V-III.

Aplicando los datos de la anterior tabla en las siguientes ecuaciones se tiene que

$$\bar{x}L_T = (\bar{x}_1L_1 + \dots + \bar{x}_nL_n)$$

$$\bar{x} = \frac{-17.58}{29.77} = -.590 \text{ in.}$$

$$\bar{y}L_T = (\bar{y}_1L_1 + \dots + \bar{y}_nL_n)$$

$$\bar{y} = \frac{31.97}{29.77} = 1.07 \text{ in.}$$

$$\bar{z}L_T = (\bar{z}_1L_1 + \dots + \bar{z}_nL_n)$$

$$\bar{z} = \frac{63.63}{29.77} = 2.13 \text{ in.}$$

Áreas compuestas.

Para localizar el centroide de un área compuesta por formas geométricas referenciadas en la tabla V-I o formas que obedezcan ecuaciones matemáticas, se sigue la misma metodología que se aplica para el caso de alambres, con la diferencia de que en vez de utilizar la longitud de las figuras se utilizará el área de las mismas. Las ecuaciones para ubicar el centroide de alguna área compuesta serán las siguientes:

$$\bar{x}A_T = (\bar{x}_1A_1 + \dots + \bar{x}_nA_n)$$

$$\bar{y}A_T = (\bar{y}_1A_1 + \dots + \bar{y}_nA_n)$$

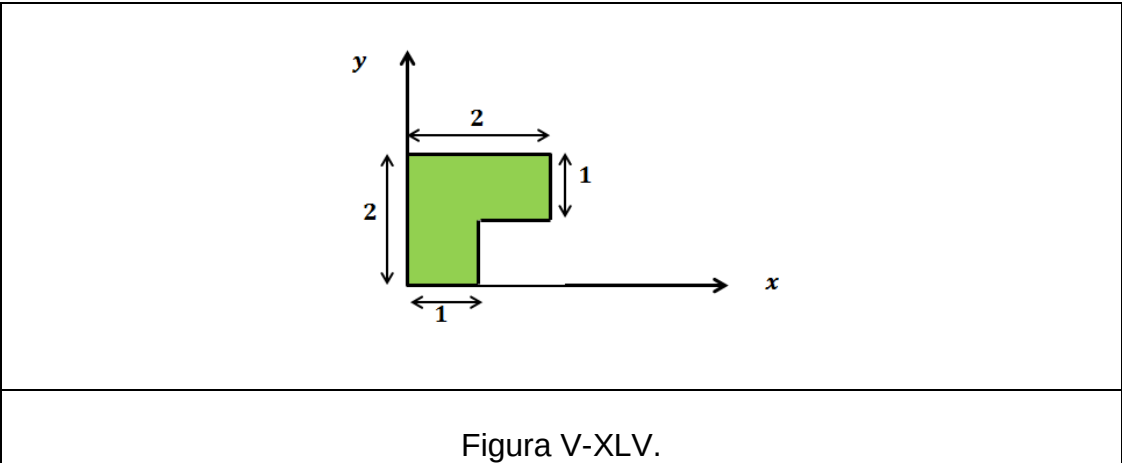
$$\bar{z}A_T = (\bar{z}_1A_1 + \dots + \bar{z}_nA_n)$$

Y la información que se vaya generando por cada una de las áreas que conforman el área compuesta se irá vaciando en una tabla como la tabla V-IV para, finalmente, encontrar el centroide de dicha área compuesta

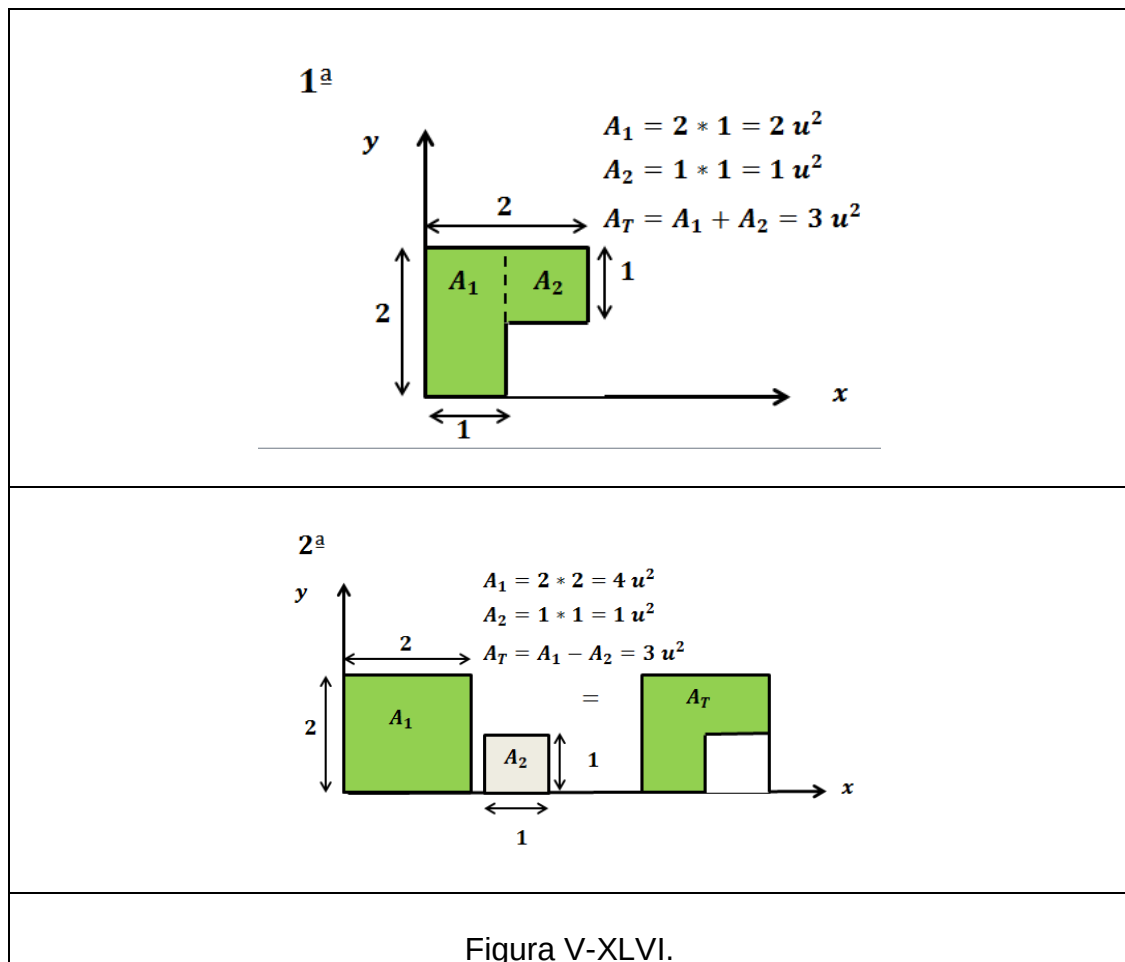
Elemento	A_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$A_n\bar{x}_n$	$A_n\bar{y}_n$	$A_n\bar{z}_n$
1							
.							
.							
n							
$\sum A_n =$				$\sum T =$			

Tabla V-IV.

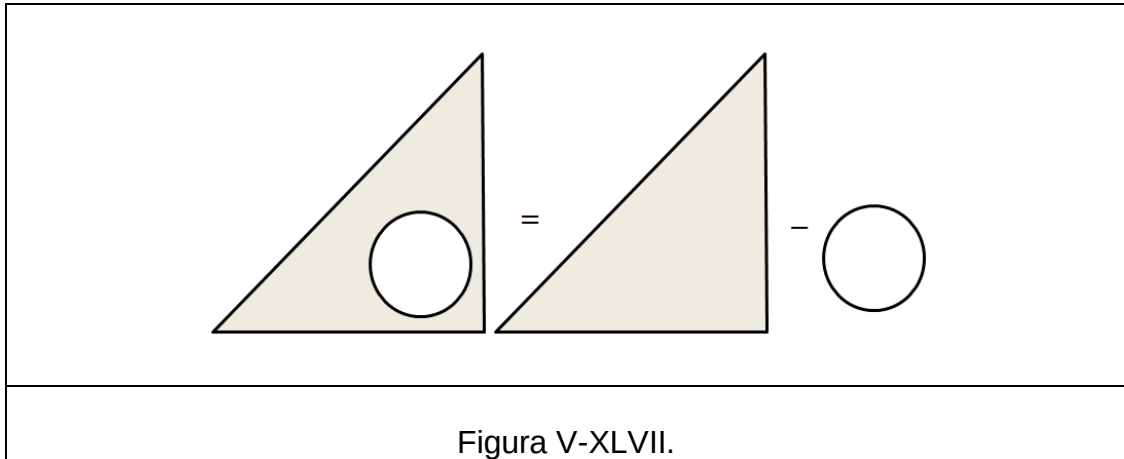
Áreas negativas: Supongamos que tenemos un área representada por la forma que se muestra en la figura V-XLV:



Si queremos saber el valor del área (representada en color verde), aunque su forma sea sencilla, no existe una ecuación que nos de dicho valor de forma directa como las ecuaciones de áreas que se indican en la tabla V-I. Para conocer dicho valor de área existen varias formas de calcularla. En la figura V-XLVI se representan dos de estas,



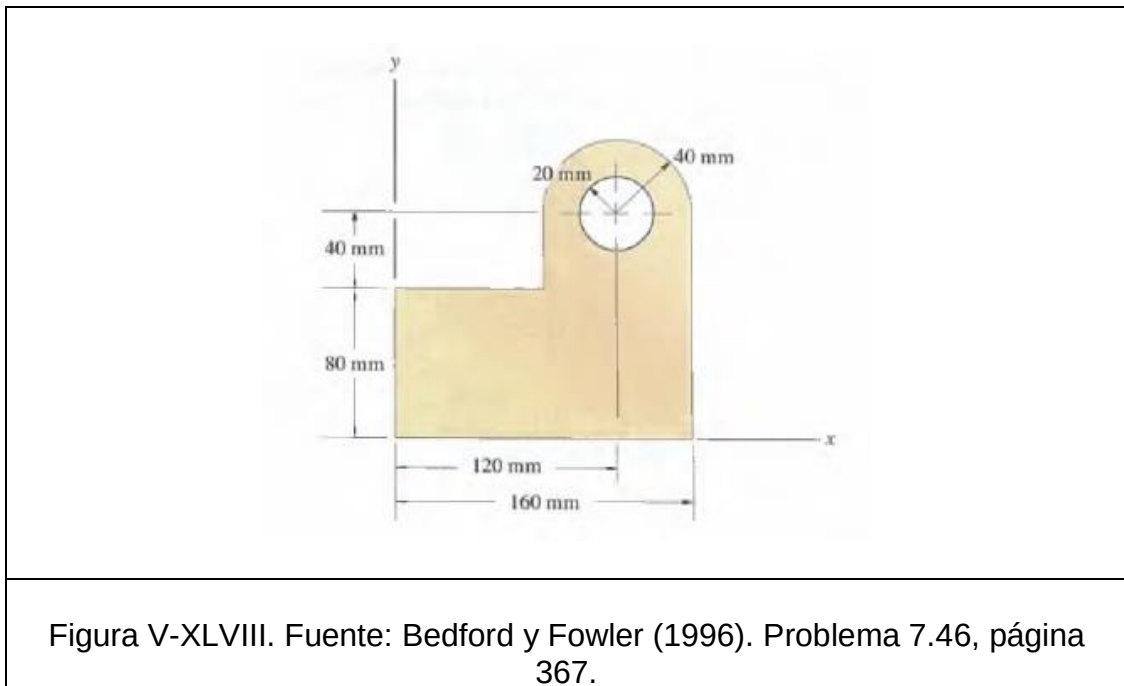
En el primer cálculo de área, la figura se debió de separar en dos rectángulos, encontrar el área de cada rectángulo y finalmente sumar las respectivas dos áreas. En el segundo cálculo se definieron dos rectángulos, uno de color verde y otro de color gris. Se calcularon sus respectivas áreas y finalmente estas se restaron. La resta obedece a que el cuadro de tono grisáceo realmente no existe en la forma inicial de la figura V-XLV. A este tipo de áreas solo se les conoce como áreas negativas. Otro ejemplo de área negativa se muestra a continuación en la figura V-XLVII:



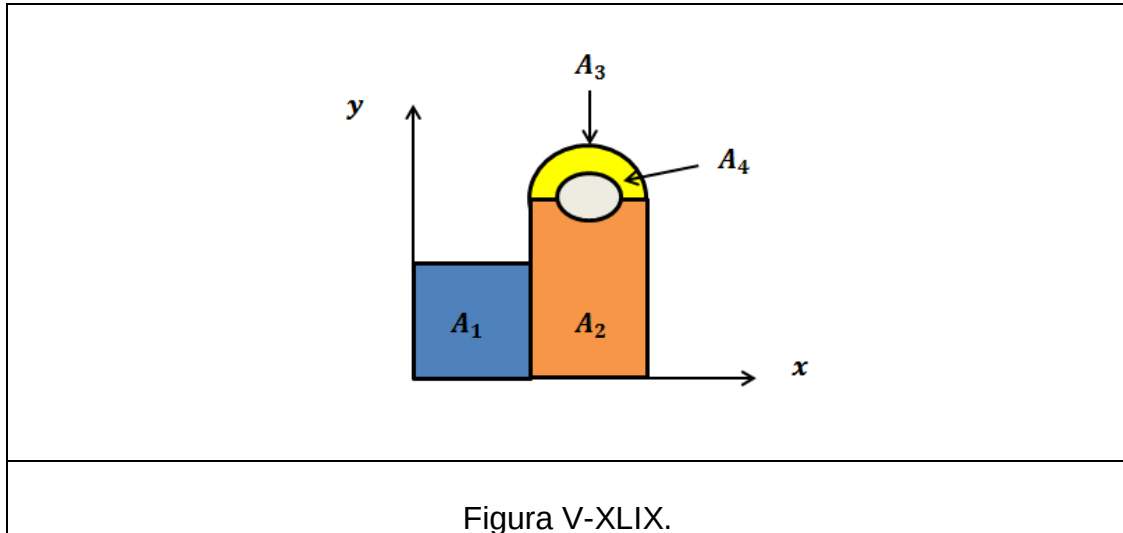
En la figura V-XLVII, se muestra un área real de forma triangular y dentro de la cual se presenta un orificio y el cual resta área al área total. De lo anterior el área real o área total será el resultado de la siguiente adición:

$$A_t = \text{Área}_{\text{Del triángulo}} - \text{Área}_{\text{De la circunferencia}} = \frac{bh}{2} - \pi r^2$$

Mediante la solución de un problema propuesto de Bedford (2000) aplicaremos la metodología explicada líneas arriba para encontrar el centroide de un área compuesta. En la figura V-XLVIII se muestran dicho problema, haciendo énfasis de que es de un material homogéneo.



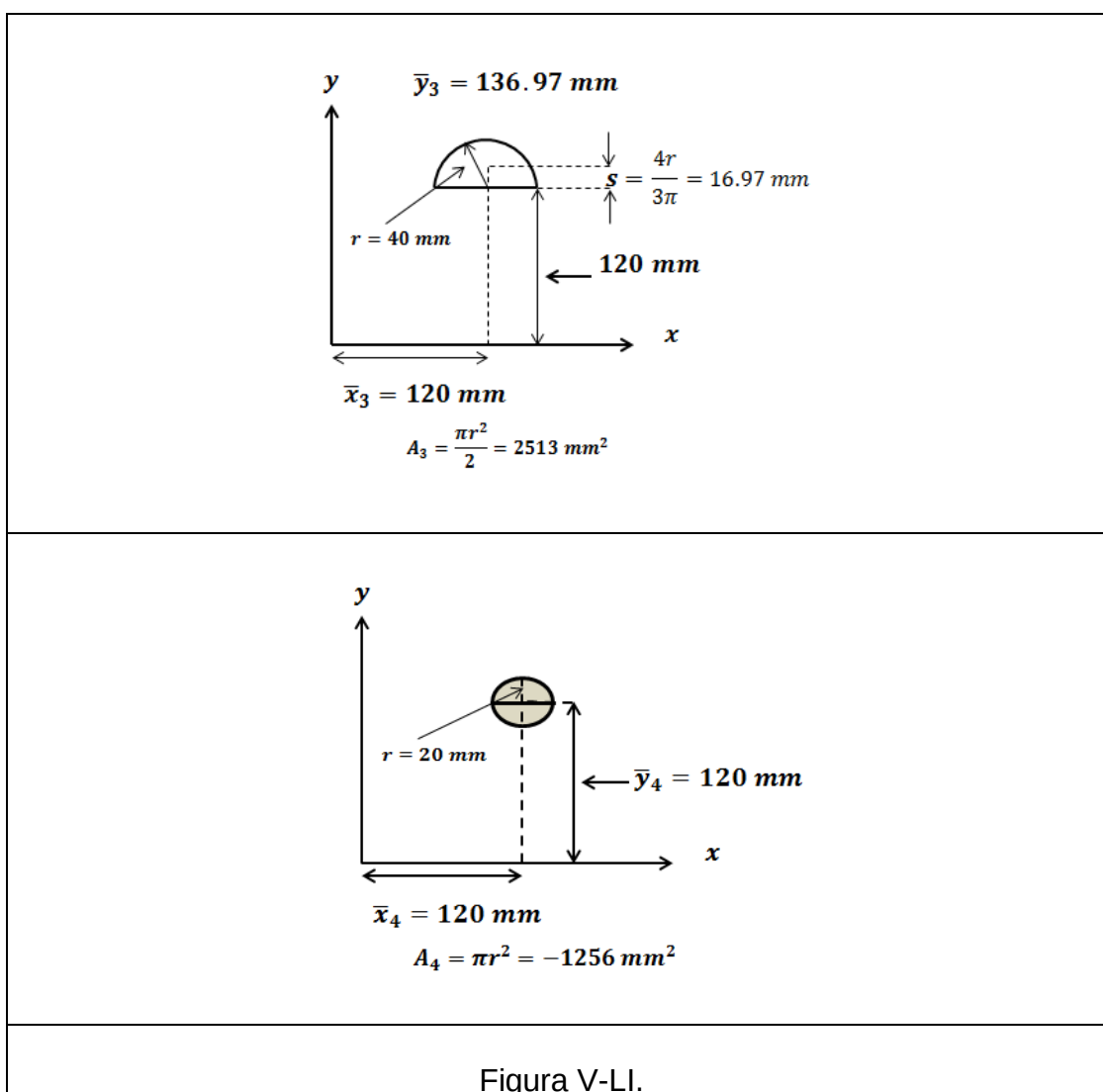
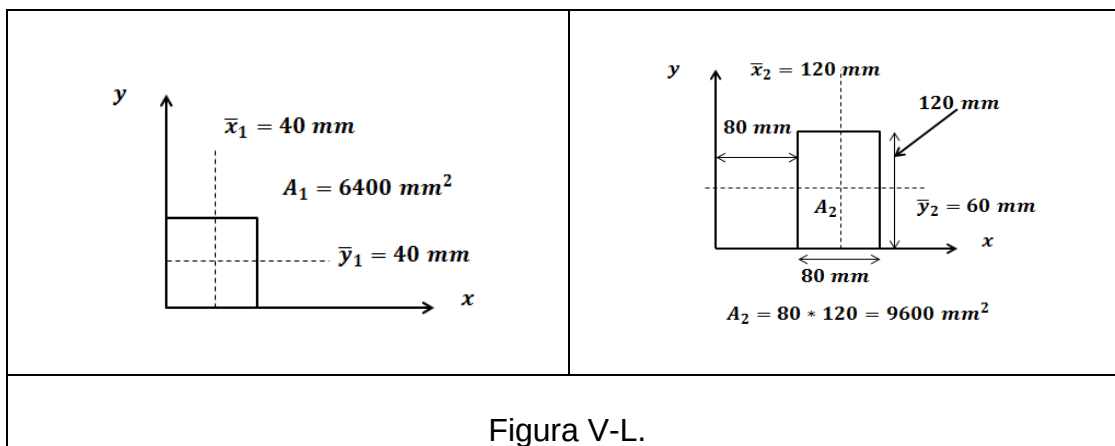
Tal y como se hizo para localizar el centroide de alambre en el problema anterior, se identificarán las formas geométricas individuales que unidas dan la forma final mostrado en la figura V-XLVIII. En la figura V-XLIX se muestran, con diferente color dichas formas individuales.



Se podrá observar que existen cuatro formas geométricas bien definidas, de las cuales una forma geométrica se considerará negativa (A_4), y el efecto para la ubicación del centroide de dicho problema es:

1. Hace que el área total de la figura compuesta sea menor,
2. Al considerarse negativa, su momento de área será negativo. Este se reflejará cuando se hagan los cálculos figura por figura.

En las siguientes dos figuras se muestran los cálculos para ubicar los centroides de cada uno de las cuatro figuras (positivas y negativas) que forman nuestro problema a resolver:



Con la información de las dos últimas figuras se elabora la tabla V-V

Elemento	A_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$A_n \bar{x}_n$	$A_n \bar{y}_n$	$A_n \bar{z}_n$
1	6400	40	40	-	256000	256000	-
2	9600	120	60	.	1152000	576000	-
3	2513	120	137	-	301560	344318	
4	-1256	120	120	-	-150720	-150720	-
$\sum A_n =$	17257			$\sum_T =$	1558840	1025598	-

Tabla V-V.

Por lo tanto

$$\bar{x}A_T = (\bar{x}_1A_1 + \dots + \bar{x}_nA_n)$$

$$\bar{x} = \frac{1558840}{17257} = 90.3 \text{ mm}$$

$$\bar{y}A_T = (\bar{y}_1A_1 + \dots + \bar{y}_nA_n)$$

$$\bar{y} = \frac{1025598}{17257} = 59.4 \text{ mm}$$

Volúmenes compuestos.

Para ilustrar la manera de resolver problemas de volúmenes compuestos y en donde probablemente, como lo fue con las áreas negativas, aquí también se podrán presentar volúmenes negativos, y el criterio para el cálculo del centroide del volumen compuesto será el mismo que se utilizó para el de las áreas compuestas.

Se procederá a resolver un problema propuesto del texto de Beer, et al. (2010). Dicho problema involucra formas geométricas volumétricas que combinadas dan la forma que se muestra en la figura V-LII:

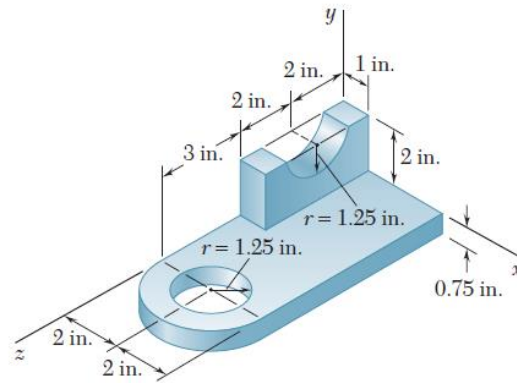


Figura V-LII. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 5.104, página 268.

El enunciado de este problema pide únicamente encontrar la $\bar{Z}$ del cuerpo. Se supone que es de material homogéneo. Se seguirá la misma estrategia aplicada para ubicar centroides que se ha utilizado en los dos últimos problemas. Ya que se trabajará con volúmenes y solo se desea encontrar $\bar{Z}$ se utilizará la siguiente ecuación:

$$\bar{z}V_T = (\bar{z}_1V_1 + \dots + \bar{z}_nV_n)$$

El siguiente paso es identificar cada uno de los volúmenes, sean estos positivos o negativos, tal como se hizo notar en el problema anterior de las áreas compuestas. En la figura tal se han identificado dichos volúmenes.

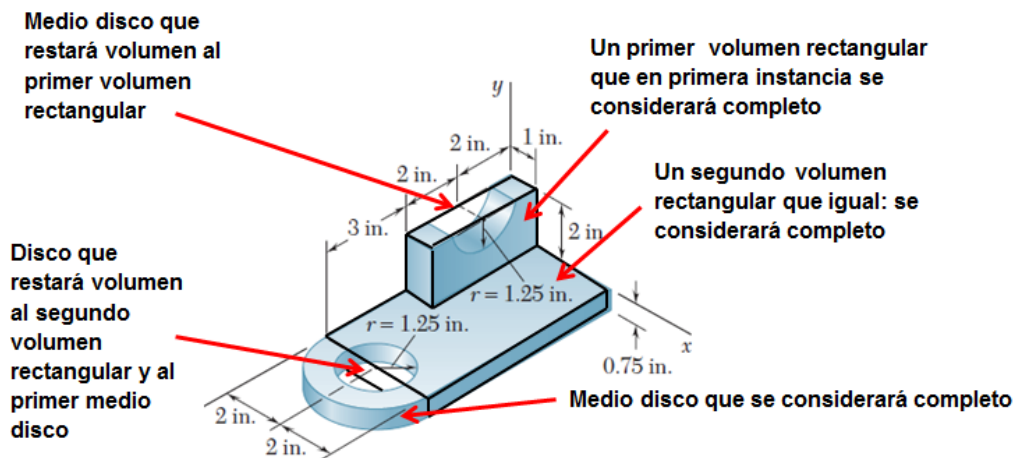


Figura V-LIII.

De la figura V-LIII se han identificado cinco formas geométricas comunes:

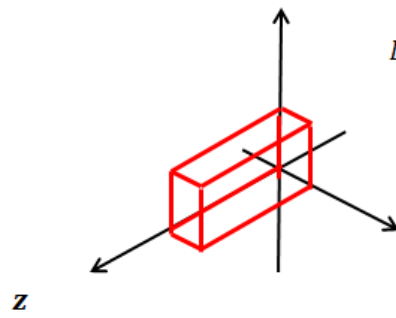
1. La primera es un volumen y en el cual se podrá observar que tiene una especie de medio barreno que lo atraviesa a lo largo del eje x . Pero para efectos de solucionar este problema se considerará como un volumen rectangular completo.
2. Ídem al volumen anterior, solo que el medio barreno lo atraviesa a lo largo del eje y .
3. Es un medio disco de espesor conocido, que igualmente se considerará de volumen completo.
4. Un disco completo que resta volumen al segundo volumen rectangular y al medio disco referenciado en el punto tres.
5. Una especie de medio disco que resta volumen al primer volumen identificado.

Ahora la tabla en donde se habrá de vaciar la información para este tipo de problemas que involucran formas volumétricas es la siguiente (tabla V-VI)

Elemento	V_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$V_n \bar{x}_n$	$V_n \bar{y}_n$	$V_n \bar{z}_n$
1							
2							
3							
4							
5							
$\sum V_n =$				$\sum T =$			

Tabla V-VI.

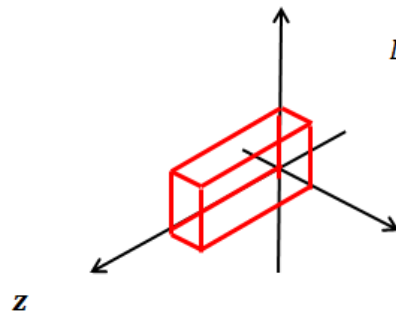
Se muestran en las siguientes figuras los cálculos realizados a los cinco volúmenes referenciados en este problema



De acuerdo a los datos.

$$V_1 = 1 * 4 * 2 = 8 \text{ in}^3.$$

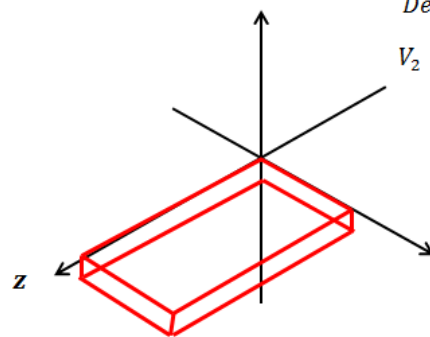
$$\text{La } \bar{Z}_1 = 2$$



De acuerdo a los datos.

$$V_1 = 1 * 4 * 2 = 8 \text{ in}^3.$$

$$\text{La } \bar{Z}_1 = 2$$

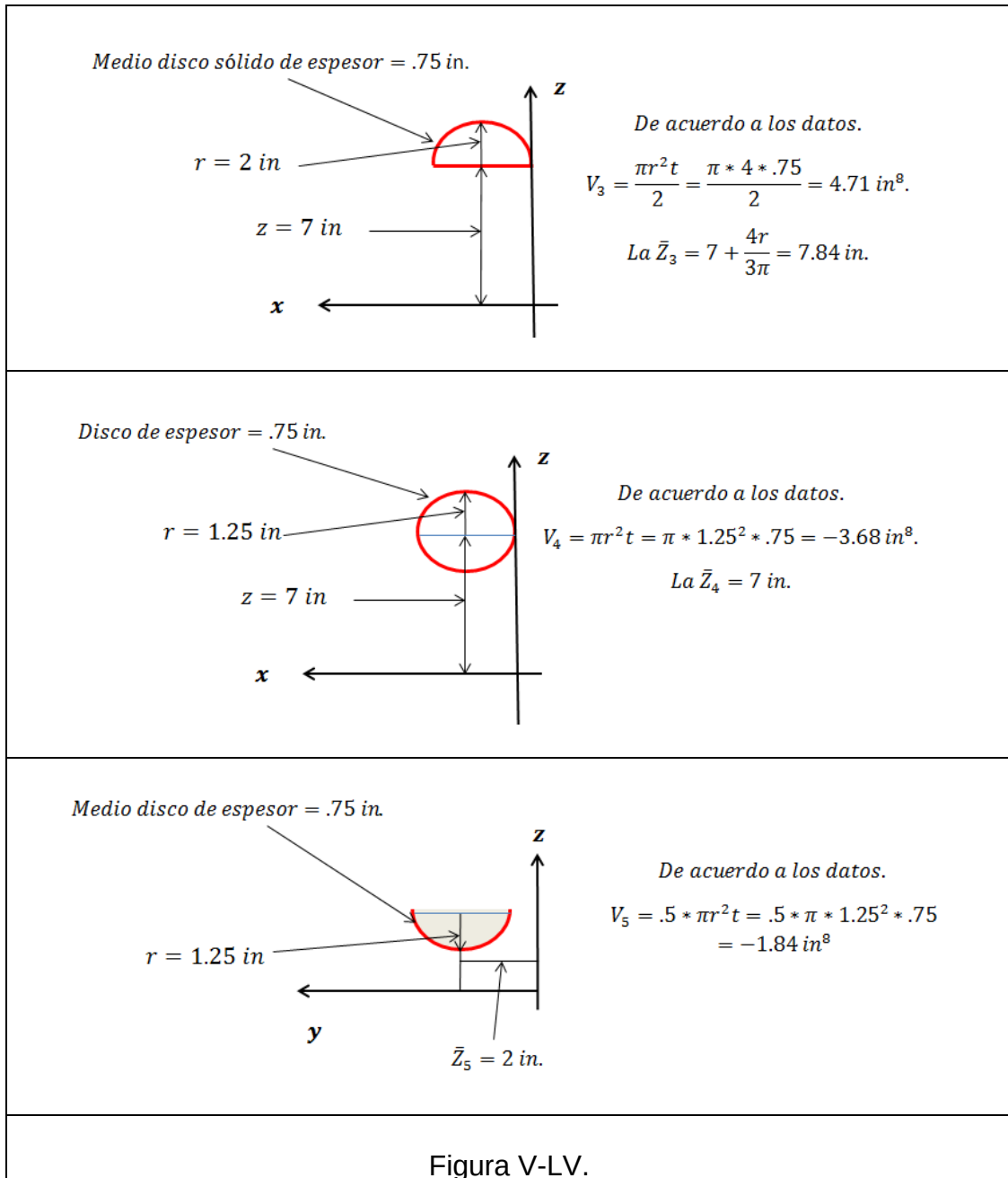


De acuerdo a los datos.

$$V_2 = .4 * 75 * 7 = 21 \text{ in}^3.$$

$$\text{La } \bar{Z}_2 = 3.5$$

Figura V-LIV.



Los resultados de cada figura mostrados en las dos figuras anteriores se muestran en la tabla V-VII, así como los cálculos pertinentes a este problema.

Elemento	V_n	$\bar{x}_n$	$\bar{y}_n$	$\bar{z}_n$	$V_n \bar{x}_n$	$V_n \bar{y}_n$	$V_n \bar{z}_n$
1	8	-	-	2	-	-	16
2	21	-	-	3.5			73.5
3	4.71	-	-	7.84	-	-	36.96
4	-3.68	-	-	7	-	-	-25.77
5	-1.84	-	.	2			-3.68
$\sum V_n =$	28.19			$\sum T =$	-	-	97
Tabla V-VII							

Con dichos valores mostrados en la tabla V-VII y la siguiente ecuación:

$$\bar{z}V_T = (\bar{z}_1V_1 + \dots + \bar{z}_nV_n)$$

Se tiene finalmente que

$$\bar{z} = \frac{97}{28.19} = 3.44 \text{ in.}$$

5.2 MOMENTOS DE INERCIA.

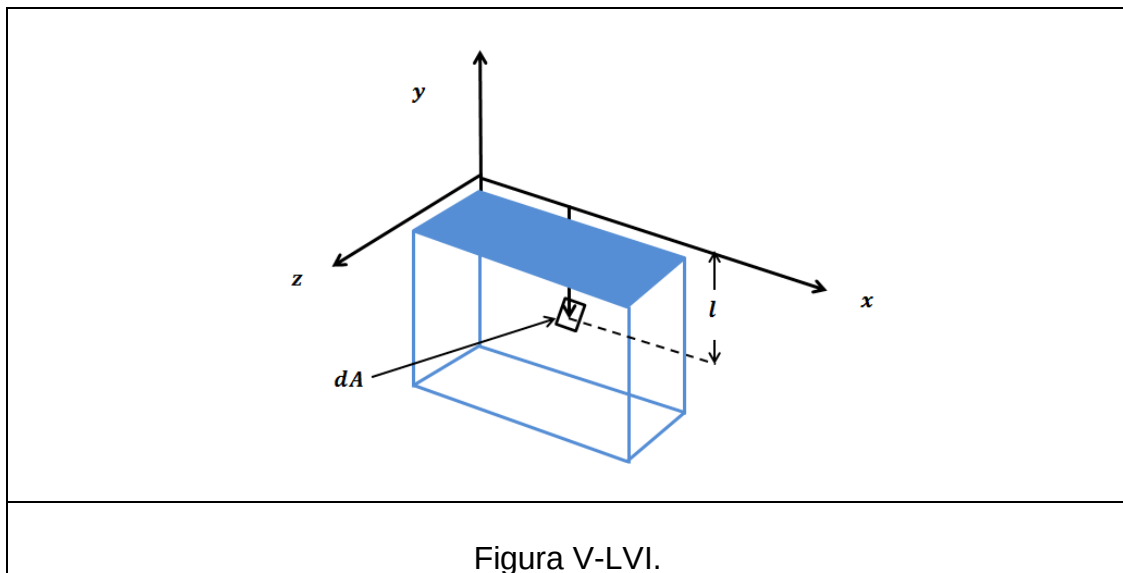
Sabiendo que el peso específico de cualquier cuerpo se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$\gamma = \frac{W}{V}; \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}}; \text{cuyas unidades son: } \frac{f}{l^3}$$

La fuerza de la anterior ecuación puede, por lo tanto, expresarse de la siguiente manera:

$$Fuerza = \gamma l^3$$

Analicemos ahora que sucede a una de las caras de una pecera que contiene algún fluido como el de la figura V-LVI. Dicha cara está contenida en el plano $x - y$.



A cierta profundidad l de la pecera se estará ejerciendo una presión sobre dicha cara igual a:

$$P = f(l)$$

$$P = \gamma l; \frac{f}{l^3} * l = \frac{f}{l^2}$$

Estos es, la presión variará linealmente con la profundidad.

Se puede afirmar que en un diferencial de área, como el que se muestra en la figura V-LVI, se ejerce un diferencial de fuerza y sabiendo que la fuerza se puede expresar en función de la presión se tiene por lo tanto que:

$$dF = PdA = \gamma l dA$$

Ese diferencial de fuerza que está a cierta profundidad l podrá hacer un momento tomando como brazo de palanca dicha distancia l , sabiendo que dicho vector resultado estará en dirección del eje x .

$$dM = dFl = Pl dA = \gamma l^2 dA$$

El momento resultante ejercido por la fuerza de la presión sobre dicha cara será, por lo tanto, igual a:

$$M = \gamma \int l^2 dA$$

El término: $\int l^2 dA$ es conocido como segundo momento de área o momento de inercia. Sus aplicaciones, más importantes, se dan en las siguientes materias

- ✚ Resistencia de materiales,
- ✚ Diseño de elementos mecánicos,
- ✚ Mecánica de fluidos.

5.2.1 Áreas y volúmenes

Áreas.

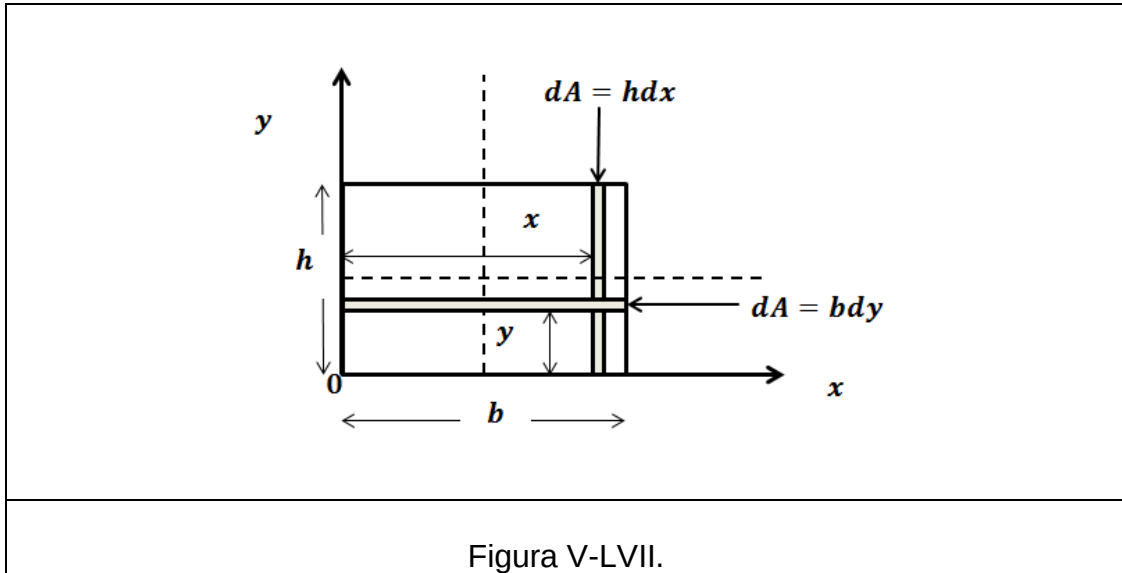
El segundo momento de área, siendo una expresión vectorial, se representará de la siguiente manera:

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dA$$

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA$$

Los anteriores momentos son con respecto a un eje y y a un eje x cualesquiera que estén contenidos, obviamente, en el plano $x - y$.

Como ejemplo se obtendrá el momento de inercia de un rectángulo como el que se muestra en la figura V-LVII.



El primer momento de inercia que se obtendrá será con respecto al eje x , por lo tanto su brazo de palanca será la distancia vertical en el eje horizontal y el centroide del diferencial de área como está indicado en la figura V-LVII, por lo tanto se plantea la siguiente integral:

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA = I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{by^3}{3}$$

Aplicando los límites de la integral se obtiene que el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base será:

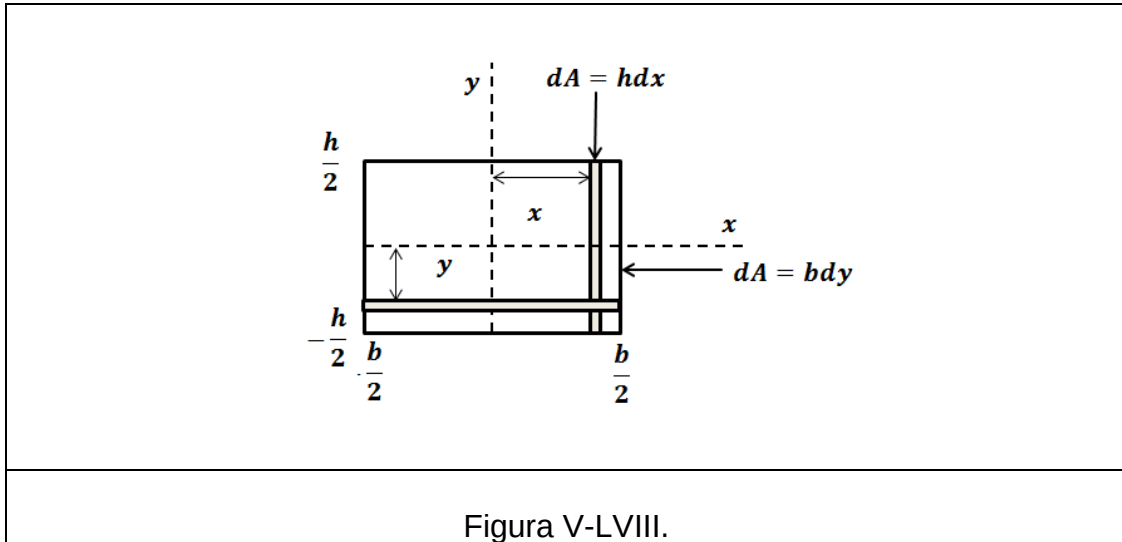
$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

De igual manera el momento de inercia de la misma figura respecto a la ordenada y será:

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dA = I_y = \int_0^b x^2 h dy = \frac{hx^3}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

Podemos, también, encontrar los momentos de inercia de la misma forma geométrica con respecto a sus ejes centroidales. En la figura V-LVIII se muestra el nuevo planteamiento:



Se podrá observar que en el nuevo planteamiento de la figura V-LVIII dos cambios:

1. El brazo de palanca para efectuar momentos es la distancia perpendicular entre los ejes de simetría y los diferenciales de área,
2. Tanto la distancia de la base como de la altura no inicia en cero, por lo tanto los límites de cada integral cambiarán.

De lo anterior se obtiene que;

$$I_{x'} = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right)$$

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y'} = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h dx = \frac{hx^3}{3} = \frac{h}{3} \left(\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8} \right) \right)$$

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$$

El apóstrofe en la x y en la y indican que son momentos de inercia con respecto a los ejes centroidales de la figura.

Ahora supongamos los siguientes valores:

$$b = 2 \text{ unidades de longitud}, h = \text{una unidad de longitud}$$

Por lo tanto los respectivos momentos de inercia de cada figura con respecto a su eje centroidal será:

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{6} u^4$$

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4}{6} u^4$$

Esta diferencia es una de las razones del porqué en la materia de resistencia de materiales cuando se diseñan estructuras la colocación de las vigas deben llevar cierta orientación; colocarlas de manera que con la misma viga se obtenga el mayor momento de inercia. Lo anterior se verá a detalle en dicho curso.

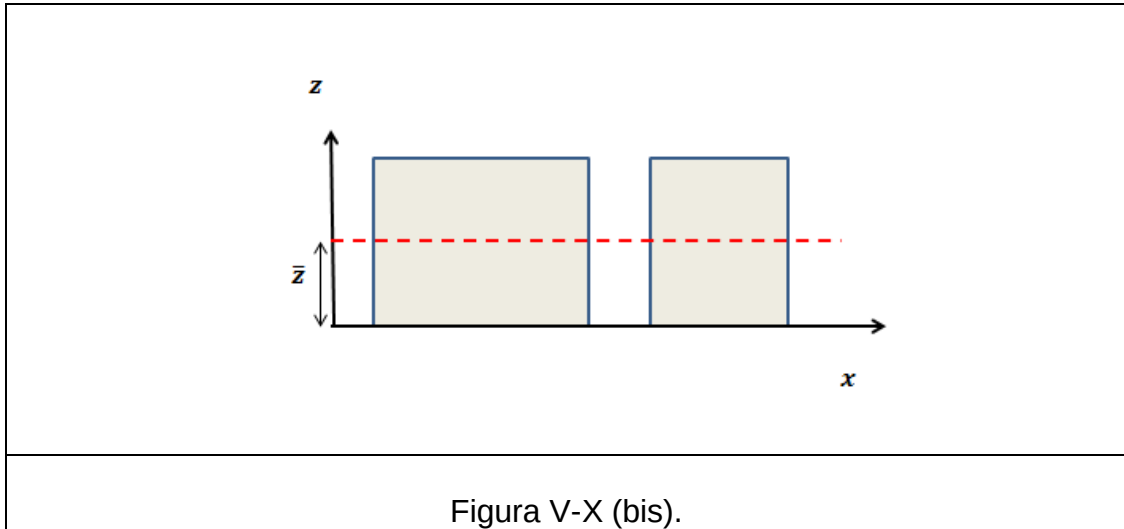
En el mismo orden de ideas, ya se había demostrado que en rectángulos, como los que se muestran en la figura V-X, la ubicación de su eje centroidal horizontal dependía únicamente de la altura de los mismos aunque su base fuera diferente. Pero, ¿se podría decir lo mismo respecto al momento de inercia con respecto a la base de cada rectángulo? Para responder a la anterior pregunta supongamos los siguientes valores:

$$h_1 = h_2 = 1 \text{ unidad de longitud}$$

$$b_1 = 2b_2 = 4 \text{ unidades de longitud}$$

$$I_{x'1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{4}{12} u^4; I_{x'2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2}{12} u^4$$

Aquí el comentario es similar al que se hizo líneas arriba en referencia a los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales.



En la siguiente tabla (tabla V-VII) se muestran los momentos de inercia de figuras geométricas comunes. Dichos momentos, en algunas de las figuras son respecto a las abscisas y las ordenadas y/o con respecto a sus ejes centroidales.

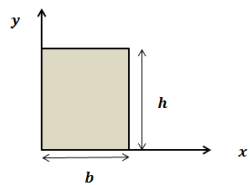
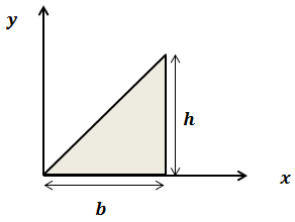
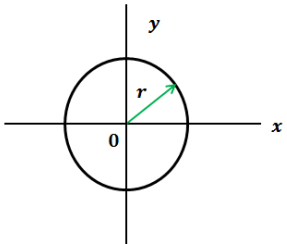
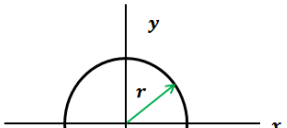
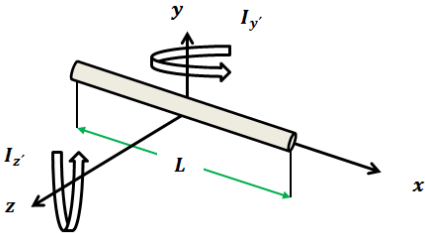
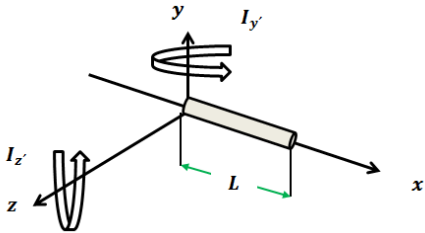
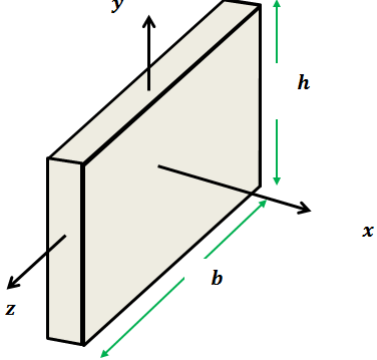
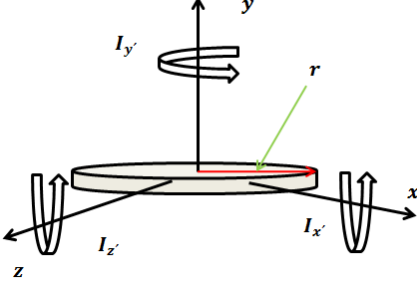
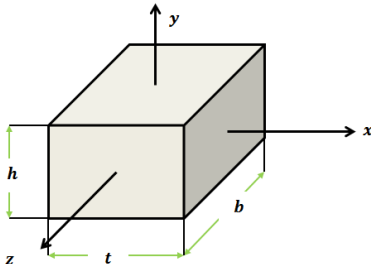
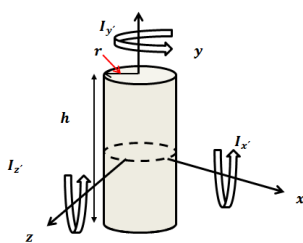
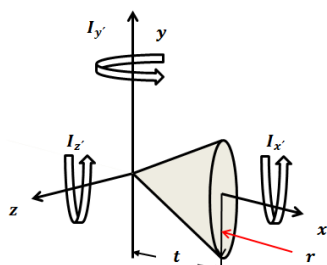
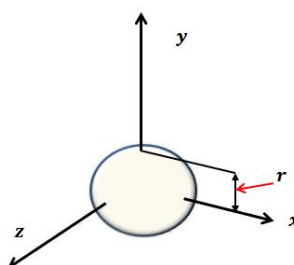
Nombre	Forma	I_x	I_y	$I_{x'}$	$I_{y'}$
Rectángulo		$I_x = \frac{bh^3}{3}$	$I_y = \frac{hb^3}{3}$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$
Triángulo		$I_x = \frac{bh^3}{12}$		$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$	
Circunferencia				$I_{x'} = \frac{\pi r^4}{4}$	$I_{y'} = \frac{\pi r^4}{4}$
Media circunferencia		$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$	$I_y = \frac{\pi r^4}{8}$		

Tabla V-VII

Volúmenes.

En la tabla V-VIII se muestran las ecuaciones para determinar el momento de inercia de volúmenes. A reserva de hacer tanto la explicación del concepto: momento de inercia así como la correspondiente demostración matemática de algunas de dicha ecuaciones, en este mismo capítulo, las ecuaciones se presentan a continuación debido a que se debe de respetar el índice propuesto en este texto y dicho índice indica que este punto es el siguiente: momentos de inercia de volúmenes.

Nombre	Forma	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{z'}$
Barra sólida esbelta			$\frac{ML^2}{12}$	
Barra sólida esbelta			$\frac{ML^2}{3}$	
Placa rectangular delgada.		$\frac{M(b^2 + h^2)}{12}$	$\frac{Mb^2}{12}$	$\frac{Mh^2}{12}$
Disco uniforme, delgado.		$\frac{Mr^2}{4}$	$\frac{Mr^2}{2}$	$\frac{Mr^2}{4}$
Tabla V-VIII.				

Nombre	Forma	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{z'}$
Prisma rectangular		$\frac{M(b^2 + h^2)}{12}$	$\frac{M(b^2 + t^2)}{12}$	$\frac{M(t^2 + h^2)}{12}$
Cilindro Macizo		$\frac{M}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$	$\frac{Mr^2}{2}$	$I_{x'}$
Cono circular		$\frac{3Mr^2}{10}$	$3M \left(\frac{r^2}{20} + \frac{t^2}{5} \right)$	
Esfera		$\frac{2Mr^2}{5}$		
Tabla V-VIII (continuación).				

5.2.2 Masas.

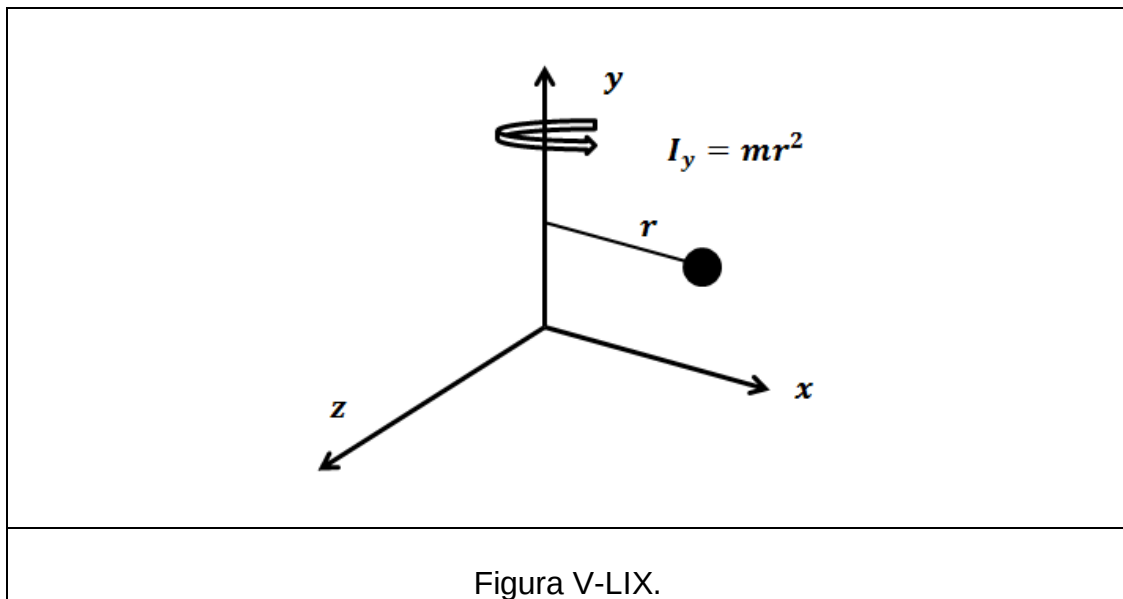
En aquellos elementos que dentro de sus funciones de diseño tienden a girar tales como engranes, poleas, barras circulares, discos, entre otros, mostrarán una resistencia al movimiento angular tanto al inicio de que se les pone a girar,

durante cambios de velocidad del giro así como a detenerse completamente. Lo anterior debido, principalmente, a su masa y a su geometría, por ejemplo: sí se tiene un ventilador común cuyas aspas pueden llegar a girar, digamos, a 120 vueltas por minuto, dicha velocidad de giro no se consigue instantáneamente al momento de encender el ventilador. Tal resistencia al giro se puede medir para efectos de diseño mecánico y se le conoce como momento de inercia. Para poder hacer dichas mediciones de la resistencia de algún cuerpo al giro se ha planteado el siguiente desarrollo partiendo de pequeñas unidades de masa:

Si una masa de carga puntual, se encuentra a cierta distancia de un eje se define como momento de inercia de masa al resultado del producto entre la masa puntual y la distancia perpendicular elevada al cuadrado entre el eje referido y dicha masa.

$$I_y = mr^2$$

En la figura V-LIX se hace una representación de la anterior definición. La masa puntual tiende a girar alrededor del eje vertical y dicho giro será paralelo al plano $x - z$.



Si se tienen n — masas el momento de inercia resultante producto de cada una de estas masas por la distancia elevada al cuadrado entre cada una de ella en dirección perpendicular al eje vertical sería entonces:

$$I_{Ry} = r_1^2 m_1 + \dots + r_n^2 m_n$$

Si el número de partículas tiende a crecer en número es fácil llegar a la siguiente integral:

$$I_y = \int r^2 dm$$

Ahora bien, se sabe la relación entre la densidad de un cuerpo, su masa y volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Se dejará expresada la masa en función de:

$$m = \rho V$$

Por lo tanto un diferencial de masa será igual a:

$$dm = \rho dV$$

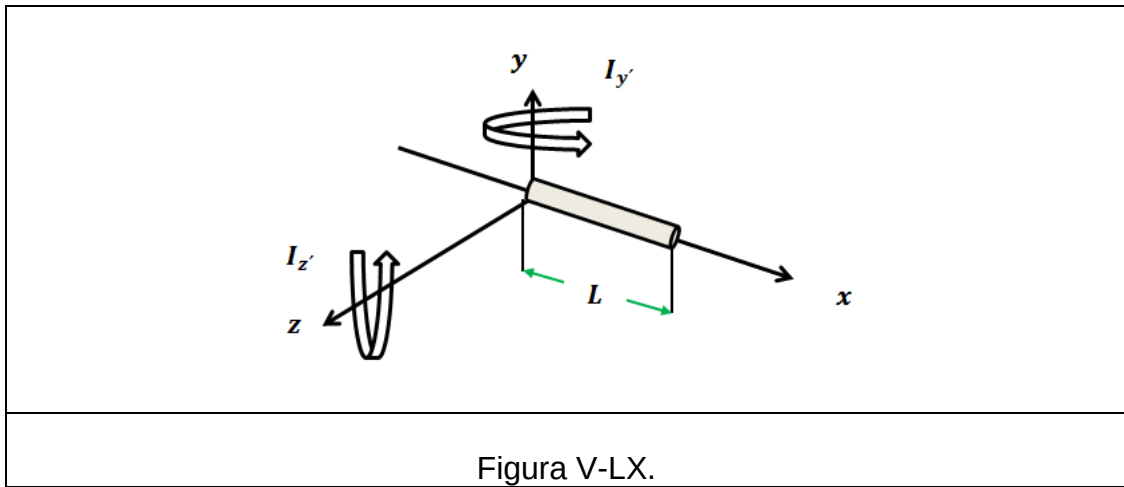
Llegando a la siguiente integral³⁷:

$$I_y = \int \rho r^2 dV \quad (V-8)$$

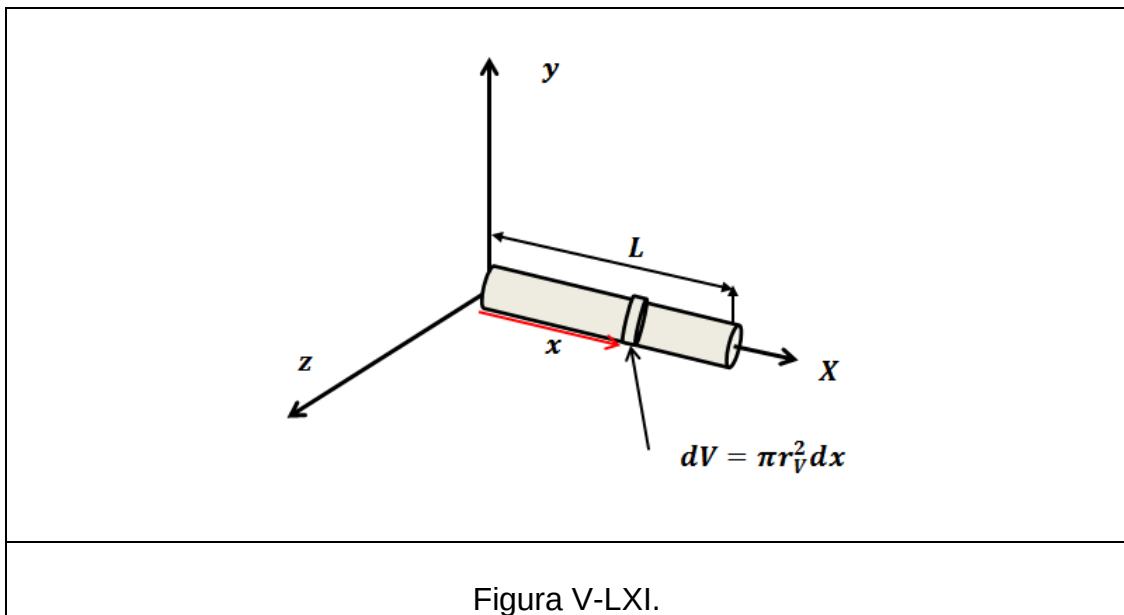
.

Con la explicación anterior se encontrará el momento de inercia de una barra sólida esbelta (figura V-LX) que tiende a girar en el plano $x - z$, pivoteando en su extremo izquierdo. Dado que el momento de inercia es una expresión vectorial, la dirección del vector, en este ejemplo, será perpendicular a dicho plano $x - z$.

³⁷ En la tabla V-VIII se muestran, como ya se ha indicado, los momentos de inercia de algunas formas geométricas comunes



Suponiendo que la masa de la varilla es de una densidad constante, en la figura V-LXI, se muestra un diferencial de volumen de forma cilíndrico a cierta distancia del origen



De la integral V-8:

$$I_y = \int \rho r^2 dV = \int_0^L \rho l^2 \pi r_v^2 dx$$

Dado que es un material homogéneo y el radio de la varilla es constante a lo largo de la misma:

$$I_y = \int \rho r^2 dV = \pi r_V^2 \rho \int_0^L l^2 dx$$

Integrando se obtiene:

$$I_y = \pi r_V^2 \rho \frac{L^3}{3}$$

Por otro lado calcularemos la masa total de dicha varilla:

$$m = \int \rho dV = \int_0^L \rho \pi r_V^2 dx = \rho \pi r_V^2 L$$

Con dicho cálculo anterior encontramos la relación entre la densidad La densidad y la geometría de la varilla:

$$\rho = \frac{m}{\pi r_V^2 L}$$

Finalmente se obtiene el momento de inercia deseado en función de la masa y la longitud de la varilla:

$$I_y = \frac{mL^2}{3}$$

Se indicó líneas arriba que el plano donde tendería a girar la varilla de este ejemplo sería en el plano $x - z$. Si ahora se procura que la varilla tienda a girar en el plano $x - y$, la dirección del vector momento de inercia será perpendicular a dicho plano. Por lo tanto se tiene que:

$$I_z = \frac{mL^2}{3}$$

De la misma varilla se procederá a calcular sus respectivos momentos de inercia con respecto a dos de sus tres ejes centroidales: $I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}$

En la figura V-LXII se muestran los datos generales para los cálculos deseados:

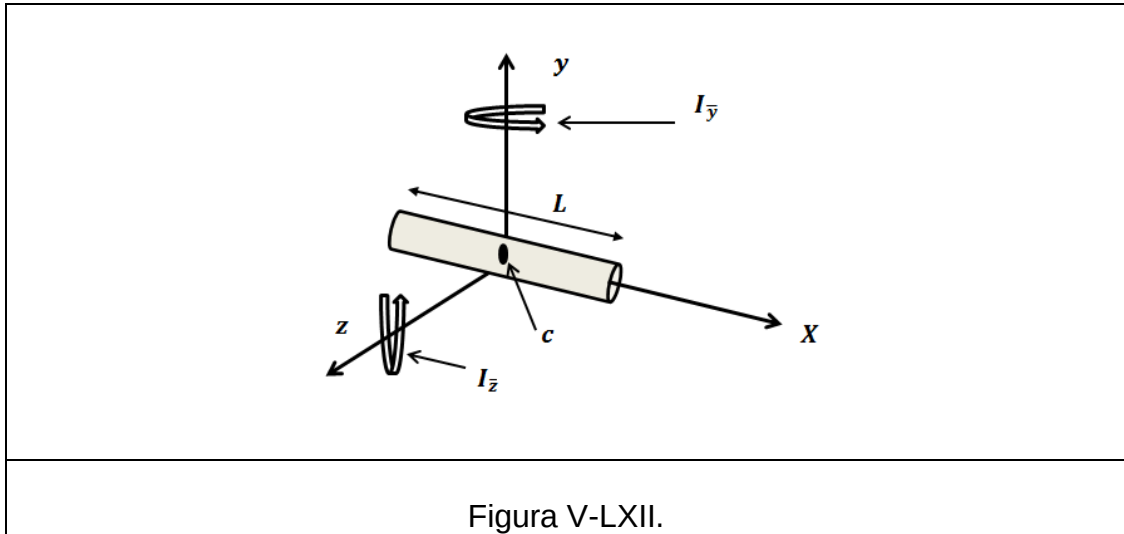


Figura V-LXII.

:

Se podrá observar que lo único que va a cambiar, respecto al ejemplo anterior ya que es la misma varilla, son los límites de la integral empleada en dicho ejemplo anterior:

$$I_{y'} = \int \rho r^2 dV = \pi r_v^2 \rho \int_{-L/2}^{L/2} l^2 dx$$

Integrando se obtiene:

$$I_{y'} = \pi r_v^2 \rho \frac{L^3}{12}$$

Así mismo:

$$m = \int \rho dV = \int_{-L/2}^{L/2} \rho \pi r_v^2 dx = \rho \pi r_v^2 L$$

De paso se demuestra, con la anterior integral, que la masa será siendo la misma

La densidad de la varilla será:

$$\rho = \frac{m}{\pi r_v^2 L}$$

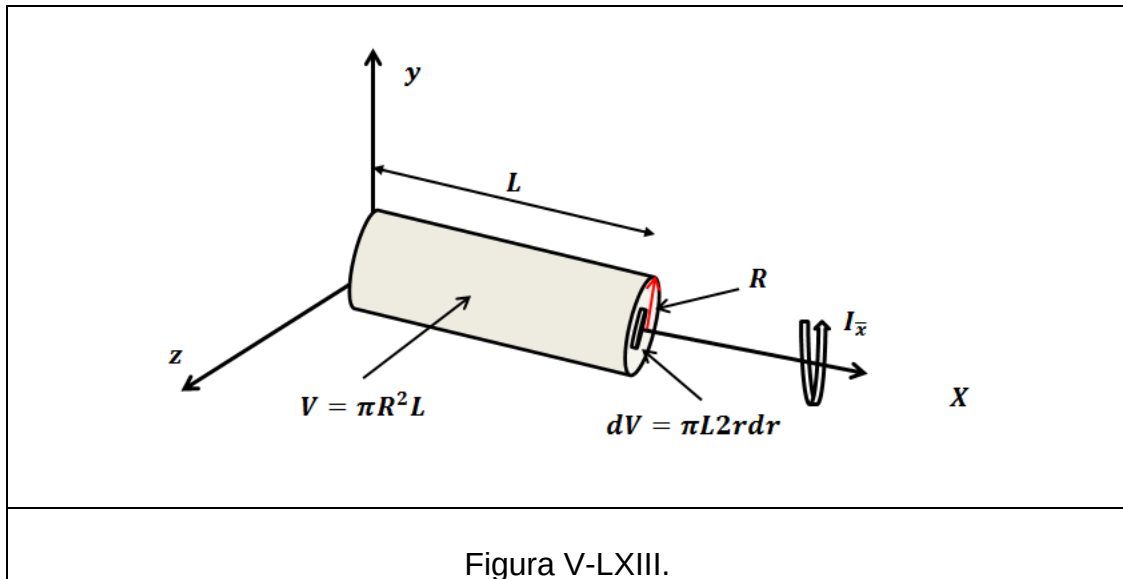
Obteniendo los siguientes resultados:

$$I_{y'} = \frac{mL^2}{12}$$

$$I_{z'} = \frac{mL^2}{12}$$

El siguiente ejemplo será calcular el momento de inercia de un cilindro macizo como el que se muestra en la figura V-LXIII. La dirección del vector momento de inercia será a lo largo del eje x y el radio de dicho cilindro se empezara a medir a partir del mismo eje x y en dirección perpendicular a este, por lo tanto se obtendrá:

$$I_{x'}$$



Aplicando la integral definida para momentos de inercia de masa en función de la densidad del cuerpo y dado que del diferencial de volumen lo que está variando es el radio como se muestra en la figura V-LXIII:

$$I_{x'} = \int \rho r^2 dV = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr$$

Integrando:

$$I_{x'} = \frac{\pi L \rho R^4}{2}$$

Sabiendo que la densidad, en función de la masa y volumen, de cuerpos como el de este cilindro macizo es:

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 L}$$

Nuestra ecuación que estamos buscando es.

$$I_{x'} = \frac{m R^2}{2}$$

El procedimiento para encontrar las restantes ecuaciones de los volúmenes mostrados en la tabla V-VIII es básicamente el mismo que se empleó para los dos últimos ejemplos. Se sugiere al estudiante trate, como una manera de desarrollar las habilidades necesarios para este tipo de conceptos, de llegar a alguna de las ecuaciones restantes mostradas en dicha tabla.

5.2.3 Momento polar de inercia.

.Partiendo de la definición de momento de inercia de áreas:

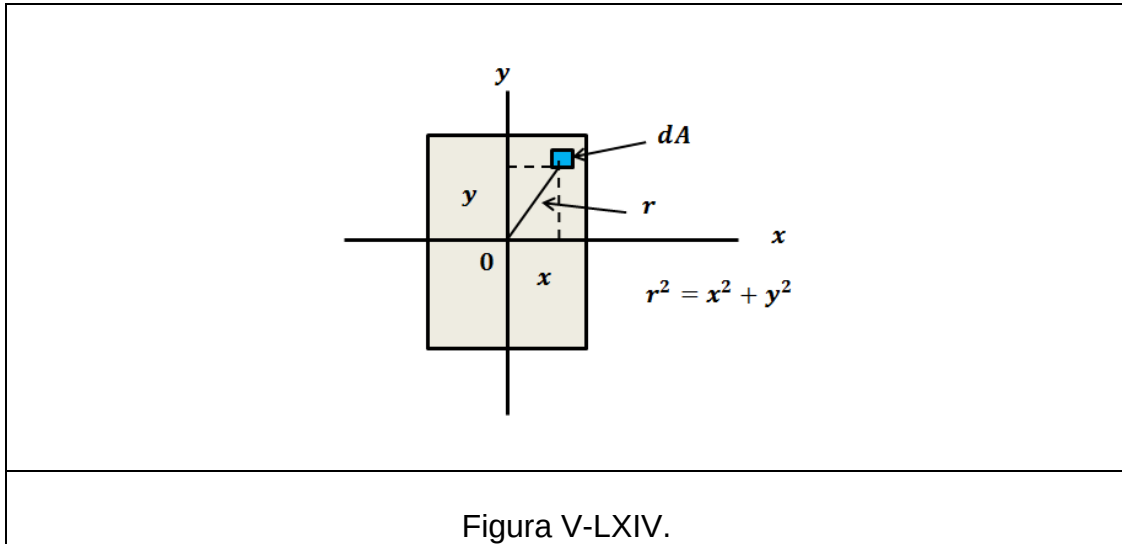
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

Se define al momento polar de inercia de un área cualquiera como:

$$J_o = \int r^2 dA$$

En la figura V-LXIV se muestra una representación de la anterior definición



Ya que la distancia r entre el origen de la figura rectangular y el diferencial del área se puede expresar en función de x, y se obtiene la siguiente expresión:

$$J_o = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

Finalmente el momento polar de inercia de un área como la suma algebraica de sus momentos de inercia x, y :

$$J_o = I_x + I_y$$

La distancia r , contenida en el plano $x - y$ será perpendicular al eje z .

Por ejemplo, a continuación se calculará el momento polar de inercia con respecto al origen de las coordenadas x, y del rectángulo de la figura V-LXIV:

De la tabla V-VIII se tiene que:

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}; I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$$

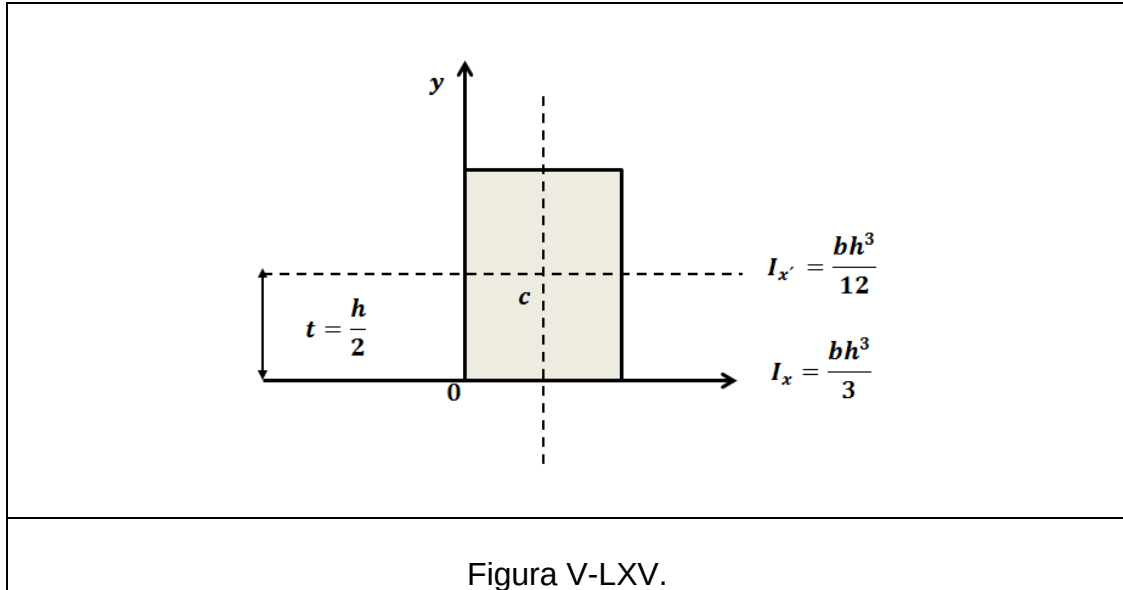
Por lo tanto:

$$J_{o'} = I_{x'} + I_{y'} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{o'} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

5.3 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS.

Observemos el rectángulo de la figura V-LXV y los momentos de inercia que allí mismo se indican



Ambos momentos de inercia, aunque diferentes en el valor del resultado, comparten las variables de la base y de la altura y otro dato en común: el eje centroidal horizontal y la abscisa son paralelos entre sí. Ahora bien, se podrá aplicar algo de álgebra al momento de inercia con respecto a la abscisa como a continuación se muestra:

$$I_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{4bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12} + \frac{3bh^3}{12}$$

Y como se sabe que

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$

Se podrá plantear lo siguiente

$$I_x = I_{x'} + \frac{3bh^3}{12}$$

Asimismo el área del rectángulo, bajo cuestión, es:

$$A = bh$$

Ahora se tiene que:

$$I_x = I_{x'} + \frac{3Ah^2}{12}$$

De la misma figura tal se sabe que:

$$t = \frac{h}{2}; t^2 = \frac{h^2}{4} \therefore h^2 = 4t^2$$

La variable t es la distancia entre el eje centroidal del rectángulo y su base o abscisa. Dichos ejes son paralelos entre sí, de allí el nombre de "teorema de los ejes paralelos". Ya para terminar se involucra dicha distancia t de la siguiente forma:

$$I_x = I_{x'} + \frac{3A(4t^2)}{12}$$

$$I_x = I_{x'} + At^2$$

La anterior ecuación nos indica el momento de inercia del rectángulo de la figura V-LXV con respecto a un eje paralelo al eje centroidal horizontal. En este ejemplo t es la distancia perpendicular entre el eje centroidal horizontal y la base del rectángulo en cuestión.

De la misma figura V-LXV se podrá obtener:

$$I_y = I_{y'} + Ad^2$$

Donde d es la distancia entre la ordenada y el eje centroidal vertical de dicho rectángulo.

Por lo anterior demostrado se podrá encontrar el momento de inercia de cualquiera de las figuras geométricas definidas en la tabla V-VII con respecto a cualquier eje que sea paralelo a su eje centroidal. La importancia del anterior se hace valer cuando se pide el momento de inercia de áreas compuesta. Por ejemplo, retomemos el problema de áreas compuestas en donde se nos pedía encontrar la ubicación de sus ejes centroidales (figura V-XLVIII bis)

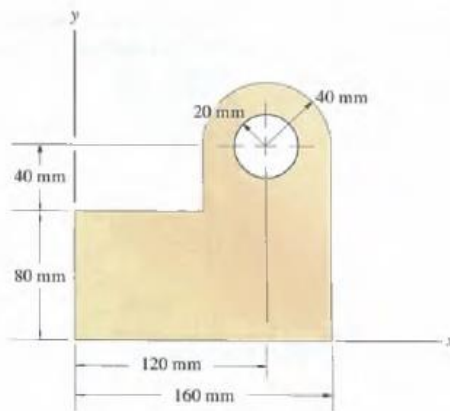


Figura V-XLVIII (bis). Fuente: Bedford y Fowler (1996). Problema 7.46, página 367.

Ahora si deseamos encontrar el momento de inercia de dicha figura con respecto a su base o eje x se tendrá que descomponer dicha figura en formas geométricas comunes, tal y como se hizo para la ubicación de sus ejes centroidales, y con la ayuda del teorema de ejes paralelos, cuando sea necesario, hacer los cálculos correspondientes para cada forma geométrica. En la figura V-XLIX bis se muestra, nuevamente, las cuatro formas geométricas comunes.

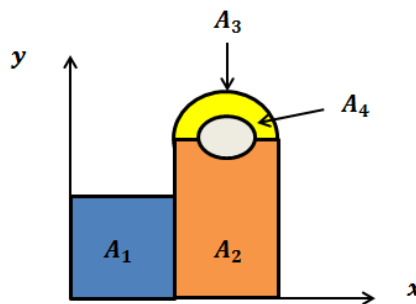


Figura V-XLIX.

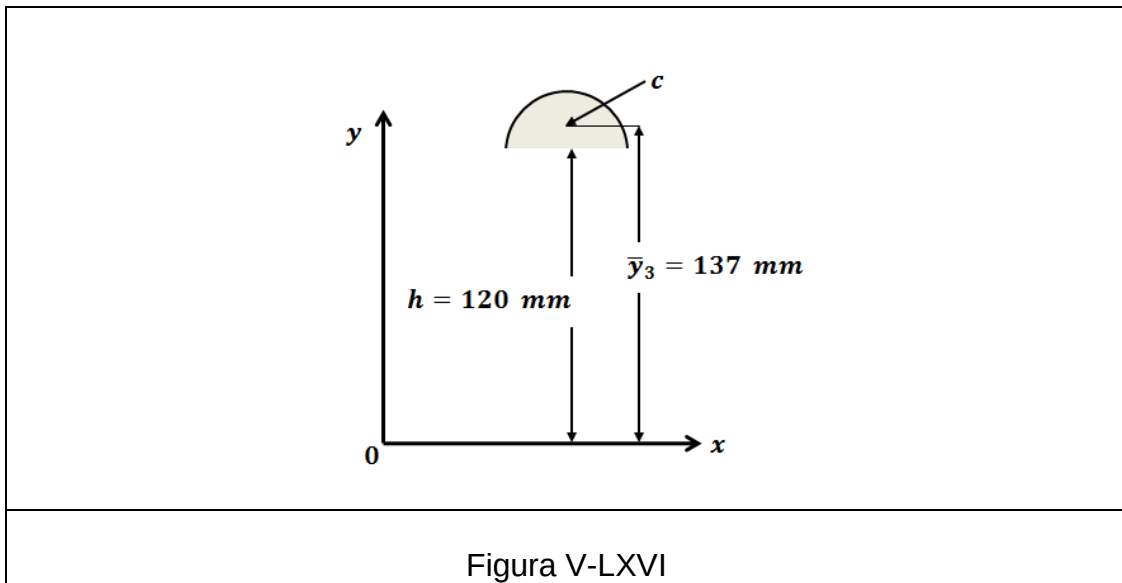
Para las figuras uno y dos los momentos de inercia con respecto al eje deseado son:

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{3} = \frac{80 * 80^3}{3} = 13.65 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{bh^3}{3} = \frac{80 * 120^3}{3} = 138.24 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

En la figura V-LXVI se muestran dos distancias:

1. De la base del área compuesta a la base del semicírculo
2. De la base del área compuesta al centroide del semicírculo



Debido a que la ecuación de momentos de inercia de un semicírculo es con respecto a la base del mismo se tiene entonces que:

$$I_{3/b} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi 40^4}{8} = 1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Sabiendo que la distancia entre la base de semicírculo y su centroide es:

$$d_{b3/c3} = 137 - 120 = 17 \text{ mm}$$

Y el área del semicírculo es:

$$A_3 = \frac{\pi 40^2}{2} = 2513 \text{ mm}^2$$

Y apoyándonos en el teorema de ejes paralelos se encontrará el momento de inercia de dicho semicírculo respecto a su eje centroidal horizontal:

$$I_{3/b} = I_{F3x'} + Ad_{b3/c3}^2$$

$$I_{F3x'} = I_{3/b} - Ad_{b3/c3}^2 = 1 \times 10^6 - 2513 \cdot 17^2 = 273743 \text{ mm}^4$$

Ahora se procederá a encontrar el momento de inercia del semicírculo con respecto a la base del área compuesta, apoyándonos nuevamente en el teorema de los ejes paralelos y sabiendo que la distancia entre el eje centroidal horizontal de dicho semicírculo y de la base del área compuesta ya es conocida:

$$I_{3/X} = I_{F3x'} + Ad_{c3/X}^2$$

$$I_{3/X} = 273743 + 2513 \cdot 137^2 = 47.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Finalmente y aplicando el teorema de ejes paralelos se calcula el momento de inercia negativo del círculo cuya área y distancia entre ejes son, ya, conocidos:

$$I_{4/X} = I_{F4x'} + Ad_{c4/X}^2 = \frac{\pi r^4}{4} + Ad_{c4/X}^2$$

$$I_{4/X} = \frac{\pi 20^4}{4} + 1256 \cdot 120^2 = -18.21 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

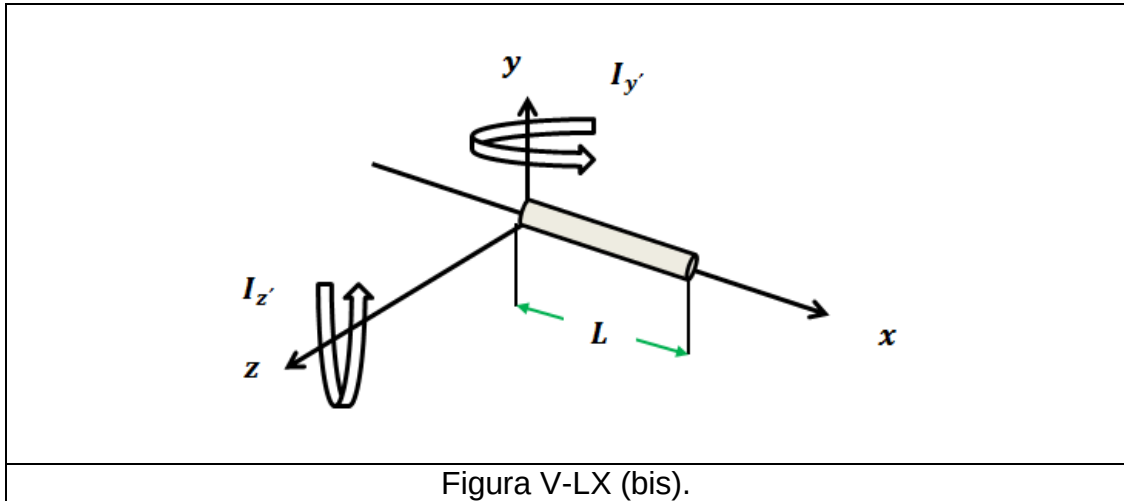
Por lo tanto el momento de inercia del área compuesta respecto a su base será:

$$I_{F/X} = 181 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

¿Se podrá aplicar el concepto del teorema de ejes paralelos utilizado para momentos de inercia de áreas, emplearlo en volúmenes en aras de encontrar momentos de inercia de volúmenes compuestos?

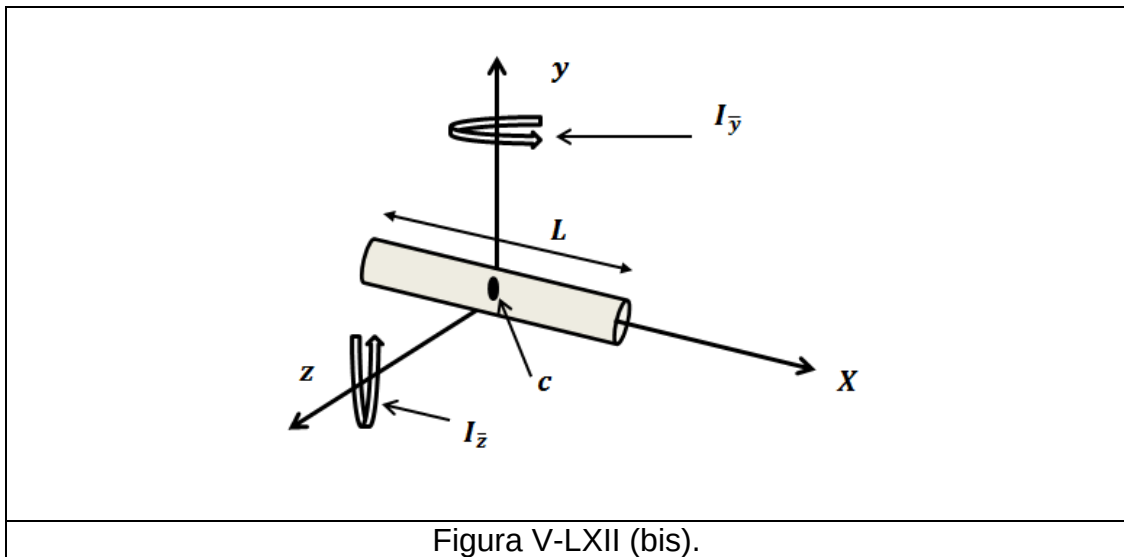
Para responder lo anterior recurriremos al momento de inercia de una barra esbelta.

El momento de inercia de dicha barra respecto al eje z que pasa por su extremo y es perpendicular a su longitud (figura V-LX-bis.) es:



$$I_y = \frac{mL^2}{3}$$

Y también se encontró que el momento de inercia de dicha varilla esbelta respecto a su eje centroidal vertical es (figura V-LXII-bis.):



$$I_{y'} = \frac{mL^2}{12}$$

Supongamos ahora que no conocemos el momento de inercia de dicha varilla respecto a su extremo y nos aventuramos a escribir la siguiente ecuación influenciados por el teorema de los ejes paralelos:

$$I_y = I_{y'} + md^2$$

La distancia d será la mitad de la longitud de la varilla:

$$d = \frac{L}{2}; d^2 = \frac{L^2}{4}$$

Haciendo las sustituciones correspondientes:

$$I_y = \frac{mL^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = m \left(\frac{L^2}{12} + \frac{3L^2}{12} \right)$$

$$I_y = \frac{mL^2}{3}$$

El anterior resultado confirma que si se puede aplicar el concepto de teorema de ejes paralelos a momentos de inercia de volúmenes compuestos de formas geométricas comunes. Para ilustrar lo anterior se resolverá el siguiente problema propuesto del texto de Hibbeler (2010) y de paso concluir con este quinto capítulo.

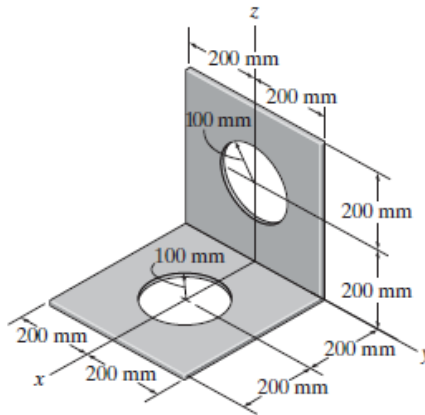


Figura V-LXVII. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 10-103, página 556.

En dicho problema se pide encontrar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje horizontal y teniendo, dicho cuerpo, una masa por unidad de área igual a $10 \frac{kg}{m^2}$.

Las dos placas delgadas idénticas en masa y geometría forman una especie de escuadra y ambas tienen un barrero en el centroide de sus caras.

Con el dato anterior y las dimensiones de la figura se encontrará la masa de una de las placas suponiendo que no tiene barrero alguno:

$$m_{placa} = 10 * .4 * .4 = 1.6 \text{ kg.}$$

De la misma manera se calcula la masa que no existe por causa del barrero en una de las dos placas:

$$m_{barrero} = 10 * \pi * .1^2 = .3141 \text{ kg.}$$

Ahora se hará el cálculo del momento de inercia de masa para una sola placa y suponiendo que esta no está barrenada. De la tabla V-IX sabemos la ecuación de su momento de inercia respecto a su eje centroidal, el cual es paralelo al eje con el que se pide resolver este problema. Por lo tanto y apoyándonos en el teorema de ejes paralelos:

$$I_{yplaca} = I_{y'} + md^2 = I_y = \frac{mb^2}{12} + md^2$$

$$I_y = \frac{1.6 * .4^2}{12} + 1.6 * .2^2 = .08533 \text{ kg.m}^2$$

De la misma forma calcularemos el momento de inercia de la masa faltante respecto al mismo eje:

$$I_{ybarreno} = I_{y'} + md^2 = I_y = \frac{mr^2}{4} + md^2$$

$$I_{ybarreno} = \frac{.3141 * .1^2}{4} + .3141 * .2^2 = .01334 \text{ kg.m}^2$$

De lo anterior el momento de inercia de masa de una sola de las placas barrenada será:

$$I_{yPB} = .08533 - .01334 = .07199 \text{ kg.m}^2$$

Debido a la forma es que están unidas las placas que es simétrica el anterior resultado se multiplica por dos, teniendo finalmente que:

$$I_{yPBT} = .14398 \text{ kg.m}^2$$

CAPÍTULO VI. FRICCIÓN ESTÁTICA.

Objetivo: Determinar la fuerza de fricción seca que actúa en las superficies de los cuerpos cuando están en contacto.

Subtemas:

6.1. Introducción.

6.2. Fricción seca.

Introducción:

De acuerdo al programa del curso Estática (MED-1010), las actividades a desarrollar, en este capítulo, por parte del alumnado para el cumplimiento del objetivo de dicho capítulo son cuatro:

1. Definir el concepto de fricción seca.
2. Resolver ejercicios donde se establezca si el cuerpo está estático o en movimiento inminente.
3. Determinar el ángulo de fricción y el ángulo de reposo.
4. Resolver ejercicios de cuerpos sobre superficies inclinadas.

6.1. Introducción.

Una definición sencilla de fricción es el roce que se da cuando dos cuerpos están en contacto y tienden a moverse entre sí o se mueven entre sí. Y dicho roce se puede manifestar en una fuerza cuyo sentido será opuesto al de la tendencia a moverse o al movimiento, si este se da. Por ejemplo si descendemos a una alta velocidad sujetándonos a una cuerda hecha de ixtle sin protección alguna en nuestras manos, sentiríamos demasiado calor en nuestras manos por el roce entre ellas y la cuerda, al grado de quemarlas. Para efectos de este texto se deberá considerar la fricción como una fuerza más en condiciones del equilibrio estático. En la tabla III.I y en donde se establecen los criterios para elaborar los DCL's de cuerpos que están en contacto, se señala que existen superficies sin fricción como el criterio e, y asimismo superficies rugosas en las cuales se puede presentar la fuerza de fricción como los criterios f y h de dicha tabla.

La teoría que trata el tema de fricción indica que es casi imposible que exista un contacto entre dos cuerpos que tiendan a moverse entre sí o que estén en movimiento y que no presenten fricción. De hecho existen dos grandes áreas de estudio sobre la fricción:

- a) Fricción seca, o fricción de Coulomb. Esta considera únicamente cuerpos sólidos que entre los cuales no existe algún fluido entre ellos conocido, también, como lubricante. Como ejemplo, además del referido en el párrafo anterior, está el de los neumáticos cuando giran sobre el asfalto, o una escalera apoyada en una pared y en el piso soportando a una persona y esta escalera permanece estática, etc., etc.
- b) Fricción de fluidos. En esta intervienen fluidos entre cuerpos que están en contacto, por ejemplo el aceite que lubrica los engranes que están en contacto en una transmisión, o el aire que fluye a través de los alerones de un avión, de hecho en la materia de mecánica de fluidos se analizan estos casos.

Para efectos de este capítulo, debe quedar claro que la fricción entre cuerpos sólidos que están físicamente en contacto es un hecho y que no existirá movimiento entre los cuerpos en contacto, dicho movimiento se empezaría dar y en ese instante serán aplicables las ecuaciones afines que en este capítulo se plantearán.

Asimismo, se debe estar consiente que la fuerza de fricción como puede ser una ventaja, puede ser un problema serio. Será una ventaja en situaciones

donde el “agarre” entre cuerpos es clave para el funcionamiento de algún sistema mecánico. Algunos ejemplos de lo anterior serían los siguientes:

- a) Las cajas que son transportadas en una banda inclinada y que deberán permanecer estáticas respecto a la banda que las transporta.
- b) Las bandas que giran alrededor de las poleas en los motores de combustión interna. Alguna parte de dichas bandas y durante cierto tiempo deben permanecer en contacto con la polea cuando esta está girando.
- c) El desbaste de un cuerpo cuando un herramienta le está dando cierta forma en el proceso de fabricación...

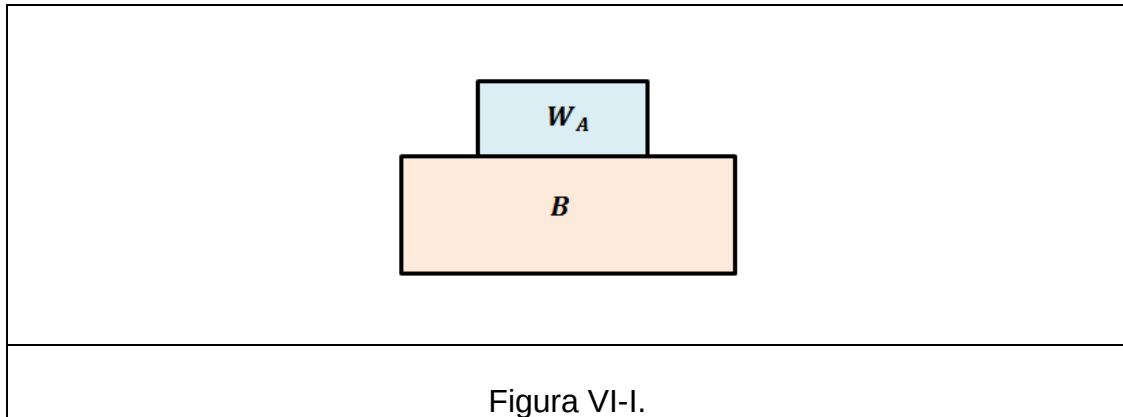
Al contrario, en algunas situaciones, la fricción es un problema, por ejemplo:

- a) Entre el contacto físico que se puede presentar en los engranes cuando estos transmiten potencia. A mayor fricción, más pérdida de dicha potencia.
- b) El desbaste de un cuerpo cuando un herramienta le está dando cierta forma en el proceso de fabricación y no se controla, mediante algún lubricante, la alta temperatura que se presenta entre ambos cuerpos cuando están en contacto.
- c) Cualquier mecanismo que requiera algún tipo de movimiento entre sus componentes y estos no estén debidamente lubricados...

La fricción, como fuerza que es, se puede medir para poderla controlar. En el siguiente subtema se explica la manera de hacerlo partiendo, básicamente, del sentido común.

6.2 FRICCIÓN SECA.

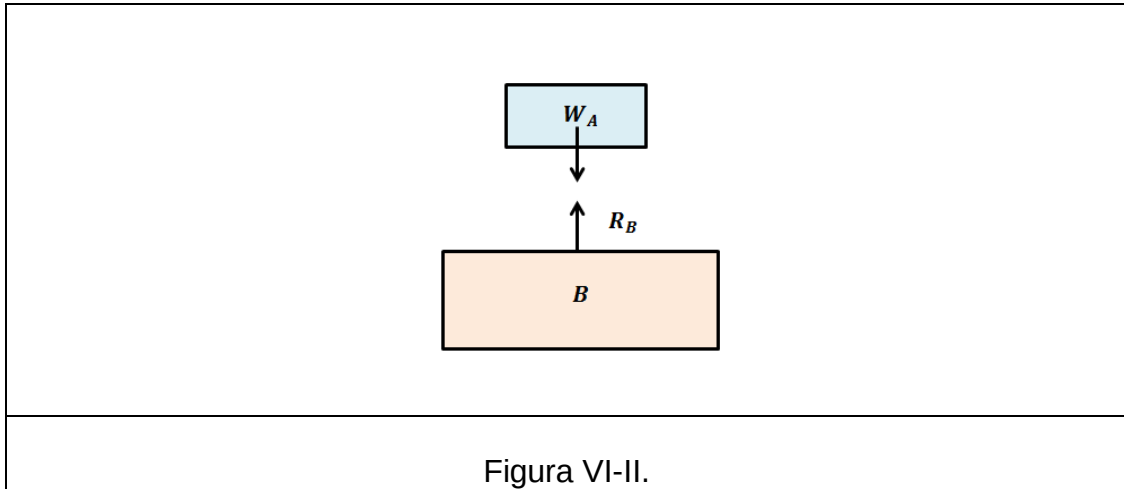
Se empezará analizando los dos cuerpos que están en contacto, tal como se muestran en la figura VI-I



Las características de la situación presentada en la figura VI-I son las siguientes:

1. Los dos cuerpos están en contacto,
2. Ambos cuerpos están en equilibrio estático,
3. La superficie de contacto entre ambos cuerpos es rugosa, esto es: si hubiera algún tipo de fuerza en dirección horizontal que tratara de empujar el cuerpo A sobre el cuerpo B se presentaría alguna fuerza de reacción en dicha dirección horizontal contraría, en sentido, a la fuerza de empuje (criterio h de la tabla III-I),
4. La única fuerza que actúa en el sistema es el peso W_A del bloque superior.

Efectuando el DCL de los cuerpos en contacto (figura VI-II) se podrá observar que la dirección de la fuerza de reacción provocada por el peso del bloque A es normal o perpendicular a la superficie de contacto:



Dado que estamos en el plano $X - Y$ las ecuaciones de equilibrio estático serían las siguientes:

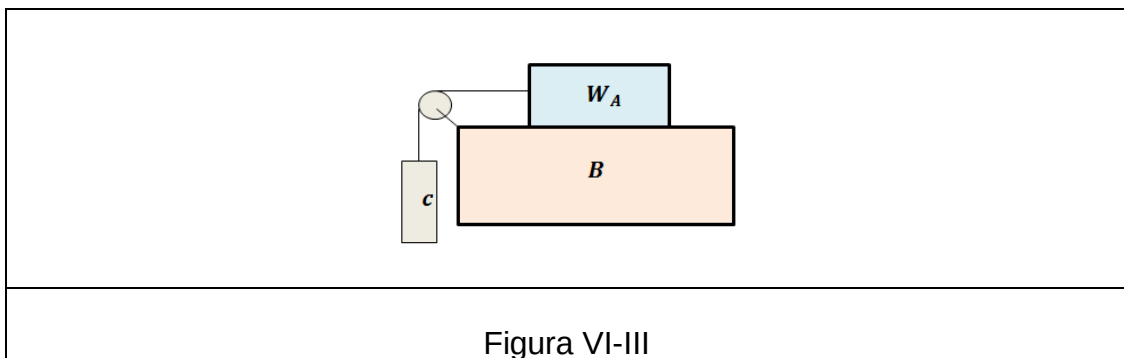
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; W_A + R_B = 0, \therefore R_B = -W_A$$

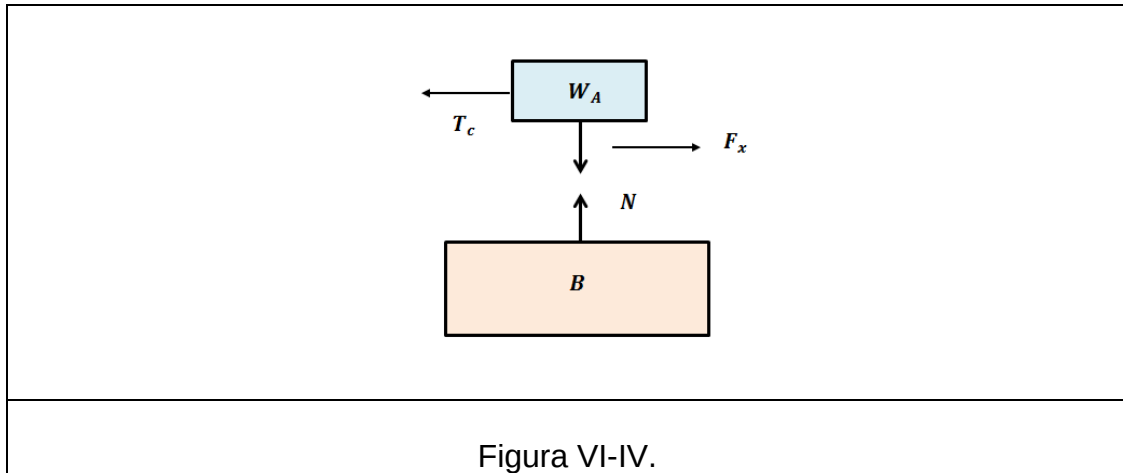
La reacción R_B también se le identifica como la fuerza normal a la superficie de contacto:

$$N = R_B$$

Ahora bien, se hará una pequeña modificación al sistema mostrado en la figura VI-I, tal y como se muestra en la figura VI-III:



En dicha figura VI-III, se ha conectado el bloque A mediante un cable indeformable y de peso insignificante a una canasta c con la ayuda de una polea que no presenta fricción con el cable. Supongamos que el bloque A tiene un peso de 1000 N y que colocamos un peso de solo 1 N en la canasta c y debido a que la superficie entre ambos cuerpos A y B es rugosa se mantendrá el equilibrio estático y ahora el DCL será el que se muestra en la figura VI-IV:



Las ecuaciones afines serán las siguientes:

$$\sum F_x = 0; T_c + F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; W_A + N = 0$$

La fuerza F_x que logra equilibrar el sistema de los bloques $A - B$ se le identificará como fuerza de fricción estática, debido a dicha condición de equilibrio que se presenta y se expresa de la siguiente manera:

Fuerza de fricción estática: f_s

Y siempre será paralela a la superficie de contacto entre los cuerpos involucrados.

Estamos suponiendo que no hay movimiento horizontal, esto es: el peso colocado en la canasta c es incapaz de mover al bloque A . Dicho pequeño peso si tensará el cable pero no altera el equilibrio estático. Nuestro sentido común nos indica que si seguimos colocando más peso en la canasta c

llegará un momento en que se rompa en equilibrio estático y el bloque A empezaría a deslizarse sobre el bloque B pero este inminente inicio de movimiento no implica que desaparezca la fuerza de fricción, de hecho se le identificará de la siguiente manera:

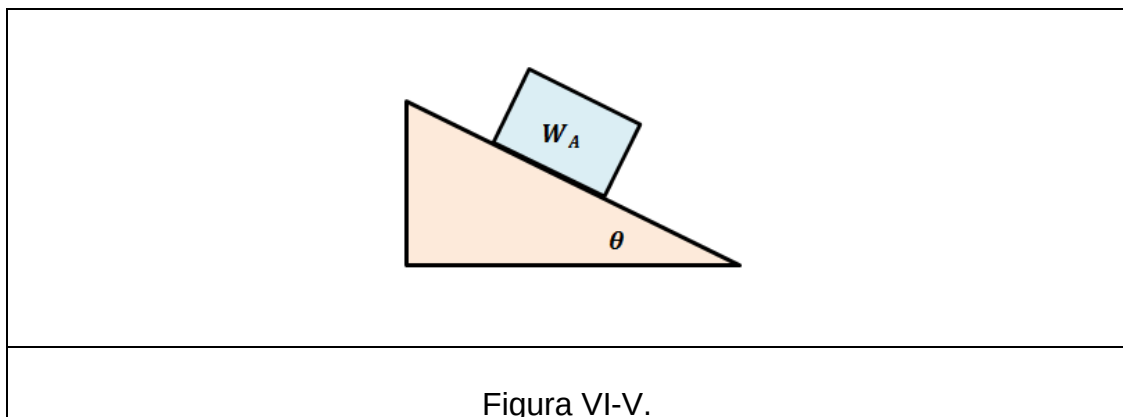
Fuerza de fricción dinámica: f_k

Para efectos de este capítulo el análisis de los problemas a tratar llegará únicamente cuando se presente el inminente movimiento, esto es: únicamente se considerará la fricción estática f_s .

Dicha fuerza de fricción estática estará en función de dos parámetros:

1. El peso W del cuerpo que tiende a deslizarse sobre alguna superficie, y...
2. El tipo de material de la superficie donde se pretende deslizar el cuerpo de peso W . No se aplicará la misma fuerza para iniciar un desplazamiento si el bloque A si este descansa sobre una mullida alfombra que si descasará sobre un pulido piso de mármol.

Independientemente de donde descanse el cuerpo que tiende a desplazarse sobre cierta superficie, el siguiente planteamiento nos dará una ecuación general de como relacionar los dos parámetros anteriores. Suponga que ahora tenemos la siguiente condición de un bloque A sobre cierta superficie, tal y como se muestra en la figura VI-V:



Ahora el bloque descansa sobre una superficie que tiene cierto ángulo de inclinación θ con respecto a la horizontal. Dicho bloque permanece en

equilibrio. Si hacemos el DCL como se muestra en la figura VI.VI se tendrán nuevas ecuaciones de equilibrio.

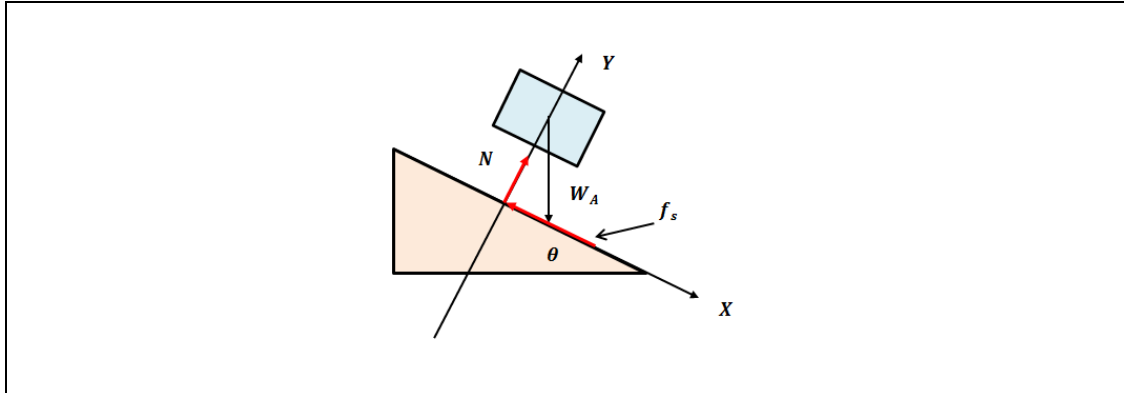


Figura VI-VI. La fuerza N , como ya se ha indicado, siempre será normal al plano de contacto y la fuerza de f_s siempre será paralela a dicho plano o superficie de contacto (ambas fuerzas representadas en color rojo).

Haciendo la sumatoria de fuerzas respecto a los ejes $X - Y$ inclinados:

$$\sum F_x = 0; W_A \sin \theta + f_s^{38} = 0$$

$$W_A = -\frac{f_s}{\sin \theta}$$

$$\sum F_y = 0; W_A \cos \theta + N = 0$$

$$W_A = -\frac{N}{\cos \theta}$$

Igualando términos:

$$\frac{f_s}{\sin \theta} = \frac{N}{\cos \theta}$$

Se obtiene:

³⁸ Se supone válida esta ecuación por que el deslizamiento del bloque A ya es inminente.

$$f_s = \frac{N \sin \theta}{\cos \theta} = N \tan \theta$$

Se encuentra, por lo tanto, que la fuerza de fricción estática está en función de la fuerza normal N y del ángulo de inclinación θ de la superficie. Por intuición sabemos que si la superficie donde descansa el bloque A es de una material como el mármol pulido, el ángulo de inclinación θ para que se inicie el inminente movimiento de dicho bloque será mucho menor que si dicha superficie fuera una mullida alfombra. El ángulo de inclinación θ será entonces diferente para diferente tipo de superficie y dicho ángulo se le conoce como coeficiente de fricción estática: μ_s

$$\mu_s = \text{coeficiente de fricción estática.}$$

Y cuando el bloque está a punto de moverse y por ende de romper el equilibrio estático la fuerza de fricción en este punto es³⁹:

$$f_s = \mu_s N \quad (\text{VI-1})$$

De hecho existen, en la literatura universal afín a este tema, valores aproximados de coeficiente de fricción μ_s para cuerpos que están en contacto. En la tabla VI-I se presentan los más comunes:

Algunos valores (aproximados) típicos de los coeficientes de fricción estática para superficies secas.	
a) Metal sobre hielo	.03-.05
b) Madera sobre madera	.3-.7
c) Cuero sobre madera	.2-.5
d) Cuero sobre metal	.3-.6
e) Aluminio sobre aluminio	1.1-1.7
f) Metal sobre metal	.15-.2
g) Mampostería sobre Mampostería	.6-.7
h) Metal sobre mampostería	.3-.7
i) Metal sobre madera	.2-.6
j) Hule sobre concreto u hormigón	.5-.9
k) Metal sobre piedra	.3-.7
Tabla VI-I. Fuente: Hibbeler (2010), Bedford y Fowler (1996), Beer, et al. (2010).	

³⁹ , Cuando no se ha llegado a tal situación se tiene la siguiente desigualdad: $f_s < -W_A \sin \theta$

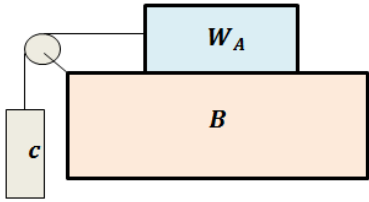
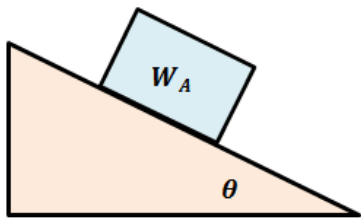
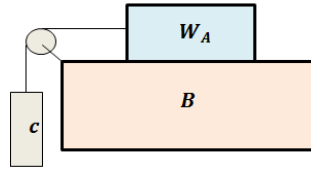
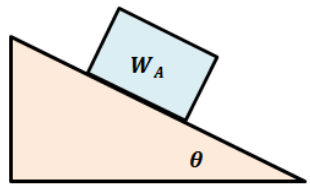
Utilizando la tabla anterior volvamos al ejemplo de la figura VI-III. De acuerdo a los datos que allí se supusieron el bloque A tiene un $W_A = 1000 \text{ N.}$, y las esferas que se colocarían –una por una- en la canasta c pesaría, cada una, $W_e = 1 \text{ N.}$ Ahora supongamos que el bloque es de metal y descansa sobre una piedra, que es el criterio k de la tabla VI-I. Con los datos anteriores podemos calcular la cantidad aproximada de esferas que se podrán colocar en dicha canasta c :

$$f_s = \mu_s N = .3 * 1000 \text{ N.} = 300 \text{ N.}$$

Ya que cada esfera tiene un $W_e = 1 \text{ N.}$, se ocuparían, al menos, trecientas esferas para que se dé el inminente movimiento del bloque A. Tomando el valor máximo de dicho criterio k de la tabla VI-I:

$$f_s = \mu_s N = .7 * 1000 \text{ N.} = 700 \text{ N.}$$

Con los resultados anteriores se muestra una gran diferencia entre ellos. De aquí la importancia de hacer las mediciones en los laboratorios afines con la mayor precisión. Por último, en la figura VI-VII, se muestran dos formas posibles de conseguir el inminente movimiento del bloque A de este ejemplo, uno es con esferas y el otro es inclinando el plano donde dicho bloque descansa. Las dos formas son equivalentes entre sí:

 Dado que el bloque A es de metal y el bloque B es de piedra, el criterio para determinar el μ_s es el k de la tabla VI-I; $\mu_s = .3 \therefore$ el número de esferas de 1 N. cada una a colocar en la canasta c es de trecientas esferas para que sea inminente el desplazamiento del bloque A sobre el bloque B:	$\longleftrightarrow$	 El ángulo θ de inclinación del plano donde descansa el bloque A deberá ser la tangente inversa de μ_s para que el deslizamiento de A sobre B sea inminente. Dado que la $\tan^{-1}.3$ $\theta = 16.96^\circ$
 Ahora se toma el límite superior de dicho criterio k: $\mu_s = .7 \therefore$ el número de esferas de 1 N. cada una a colocar en la canasta c será ahora de setecientas esferas para que sea inminente el desplazamiento del bloque A sobre el bloque B:	$\longleftrightarrow$	 El nuevo ángulo θ de inclinación del plano donde descansa el bloque A deberá ser la tangente inversa de μ_s para que el deslizamiento de A sobre B sea inminente. Dado que la $\tan^{-1}.7$ $\theta = 34.99^\circ$
Figura VI-VII		

A continuación y para finalizar este capítulo se resolverán tres problemas propuestos de tres diferentes autores. La intención es demostrar la aplicación, tanto de la teoría como de las ecuaciones indicadas en dicho capítulo. Asimismo se pretende solucionando estos tres diferentes problemas que siguen el mismo patrón para su solución.

El primer problema propuesto a resolver del texto de Hibbeler (2010), el cual se muestra en la figura VI-VIII, se pide determinar si el poste permanecerá estático en la posición que está colocado

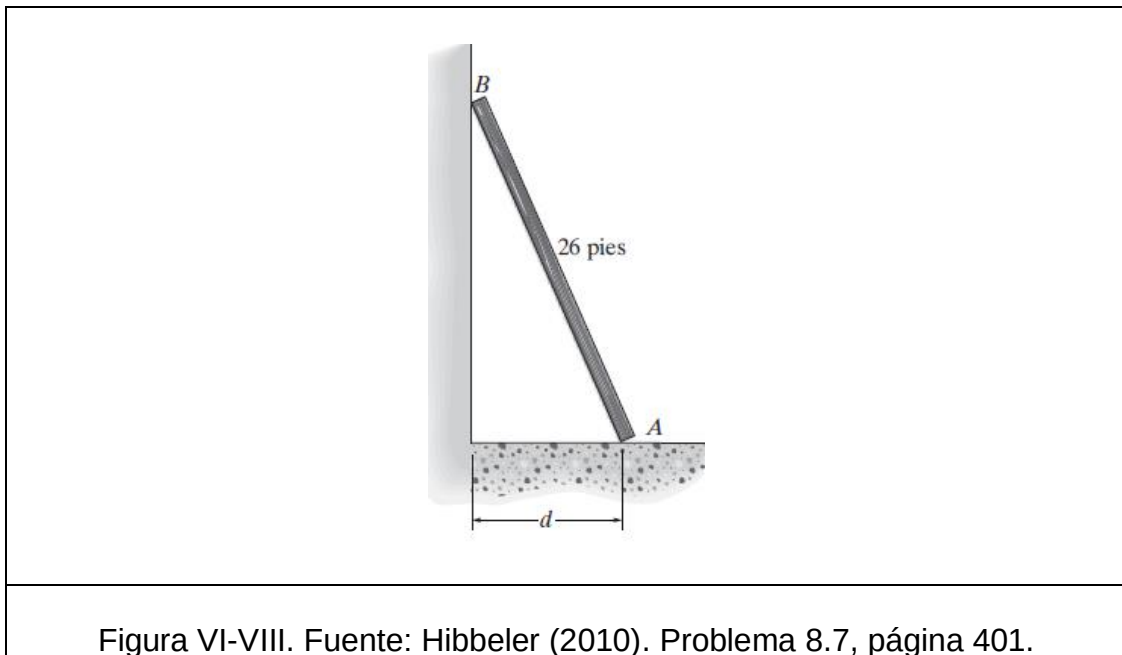
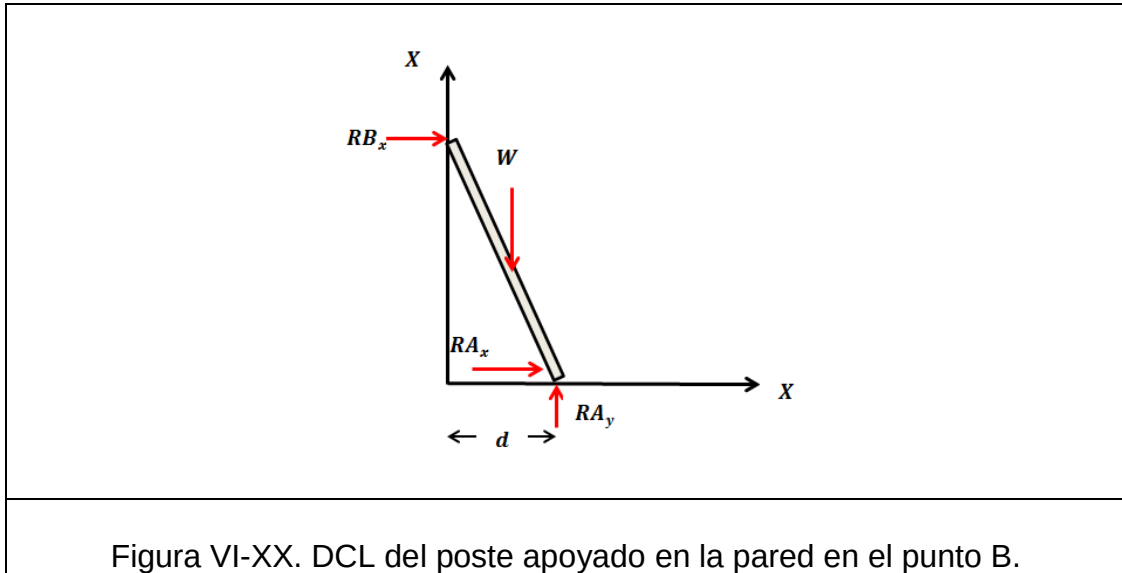


Figura VI-VIII. Fuente: Hibbeler (2010). Problema 8.7, página 401.

Los datos de dicho problema son:

1. El peso del poste uniforme y delgado es de 30 lb y su longitud de 26 pies,
2. El extremo B del poste descansa en una pared es lisa,
3. El piso es rugoso,
4. La distancia del punto A hacia la pared es $d = 10$ pies.
5. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = .3$.

Para poder solucionar este problema, primeramente debemos hacer el DCL del poste, el cual se muestra en la figura VI-IX:



La descripción a detalle del DCL del poste es la siguiente:

- Se identifica solo una reacción en dirección horizontal en el punto de apoyo B ya que la pared es lisa: RB_x
- Debido a que la geometría del poste es de un cilindro delgado y de masa uniforme su centro de gravedad, donde se concentra su peso W , está a la mitad de su longitud la cual es de 26 pies . Ya que el poste forma un triángulo rectángulo, la distancia del punto B en dirección vertical al piso es de: $h = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ pies}$
- Debido a que el piso es una superficie rugosa y que se desea saber si el poste está en equilibrio estático o en inminente movimiento, por lo tanto se presentan dos reacciones en el punto A; una paralela al plano donde se apoya el poste y la otra perpendicular a dicho plano: RA_x y RA_y . Aquí se descubre que la reacción RA_x es realmente la fuerza de fricción que se opondrá a que el poste deslice sobre el piso, y sabiendo que dicha fuerza de fricción está relacionada con una fuerza Normal entre la superficie de contacto, en este caso el poste y el piso y el coeficiente de fricción estática, recordando que se busca saber si con la distancia $d = 10 \text{ pies}$ el poste se desliza.

Observando a detalle el DCL de la figura VI-XIX, lo primero y más conveniente es plantear la siguiente ecuación:

$$\sum F_y = W + RA_y = 0$$

Por lo tanto se encuentra que:

$$RA_y = -W; RA_y = -(-30 \text{ lb.})$$

Dicha reacción es en dirección normal al piso:

$$RA_y = N = 30 \text{ lb.}$$

Sabiendo el valor del coeficiente de fricción estática y aplicando la ecuación (VI-1) podemos encontrar la fuerza máxima horizontal (RA_x) que se presentará en el punto A cuando se dará el inminente movimiento del poste:

$$f_s = \mu_s N = .3 * 30 \text{ lb.} = 9 \text{ lb.}$$

El siguiente paso es ignorar al anterior resultado y encontrar, de acuerdo a la posición del poste, el valor de la reacción horizontal en el punto A. la forma de hallar esa reacción es haciendo momentos en el punto B:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_B &= \vec{s}_{P/B} \times \vec{W}_p + \vec{s}_{A/B} \times \vec{R}_A = 0 \\ (5iX - 30j) + (-24jX\vec{R}_A) + (10iX30j) &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones pertinentes se encuentra que la fuerza de fricción que se presenta es

$$RA_x = 6.25 \text{ lb.}, \text{ sentido negativo.}$$

Retomado el valor de f_s (9 lb.), se plantea la siguiente desigualdad:

$$RA_x < f_s$$

Se concluye que, de acuerdo a como está colocado el poste:

Permanecerá estático

La fuerza de fricción estática que se presenta de la forma como está colocado es menor que la fuerza de fricción que se presenta cuando el movimiento ya es inminente.

El siguiente problema propuesto del texto de Bedford y Fowler (1996) exige un desarrollo meramente algebraico utilizando el DCL, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas la ecuación (VI-1) y un razonamiento cuidadoso. En la figura VI-X se muestra dicho problema propuesto ya a continuación el enunciado del mismo:

“Dos hojas de madera terciada A y B yacen sobre la plataforma del camión mostrado. Ambas tienen el mismo peso W , y el coeficiente de fricción estática entre las dos hojas de madera y entre la hoja B y la plataforma del camión es μ_s .

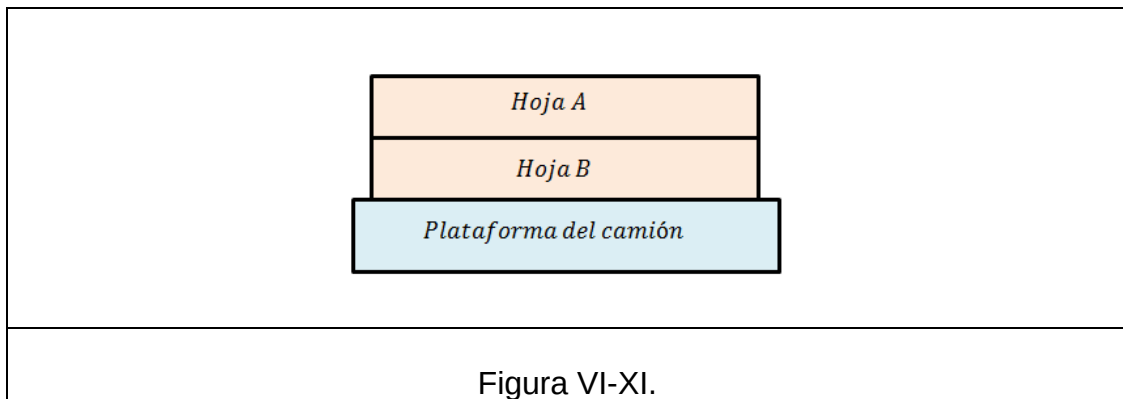
(a) Si se aplica una fuerza horizontal a la hoja A y ninguna fuerza a la hoja B, ¿puede usted deslizar la hoja A hacia afuera del camión sin hacer que se mueva la hoja B? ¿Qué fuerza se necesita para que la hoja A empiece a deslizarse?

(b) Si se impide que la hoja A se mueva ejerciendo una fuerza horizontal sobre ella, ¿qué fuerza horizontal sobre la hoja B se necesita para que ésta empiece a deslizarse?”

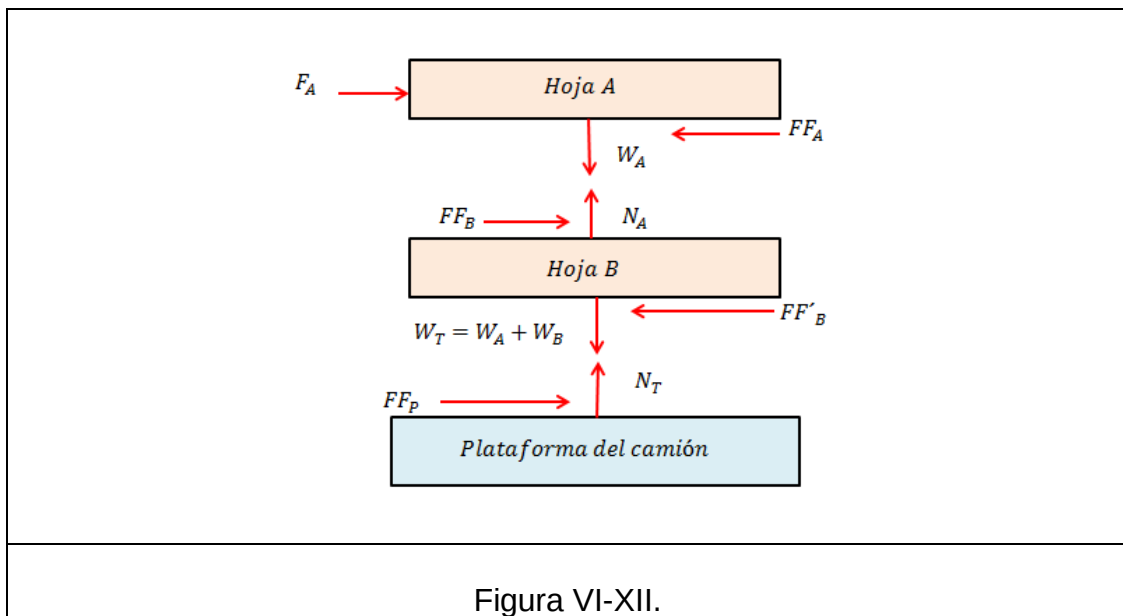


Figura VI-X. Fuente: Bedford y Fowler (1996), Problema 10.12, página 513.

Con los datos que proporciona el enunciado lo más conveniente es hacer una representación gráfica del problema que sea más amigable de entender. En la figura VI-XI se muestran tres bloques que son equivalentes a las dos hojas de madera A y B y a la plataforma del camión:



A continuación se aplicará una fuerza horizontal a la hoja A lo suficiente para provocar el movimiento inminente de dicha hoja sobre la hoja B . Se deberá realizar un DCL de la situación con la finalidad de conocer la relación entre los pesos de los tres elementos (las hojas y la plataforma) involucrados en este problema. En la figura VI-XII se presenta el mismo:



Nos enfocaremos primeramente en la hoja A . En dicha hoja y de acuerdo al DCL de la figura VI-XII se aplica una fuerza horizontal F_A , por lo tanto las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = F_A + FF_A = 0 \therefore FF_A = -F_A$$

En donde FF_A es la fuerza de fricción entre las hojas A y B .

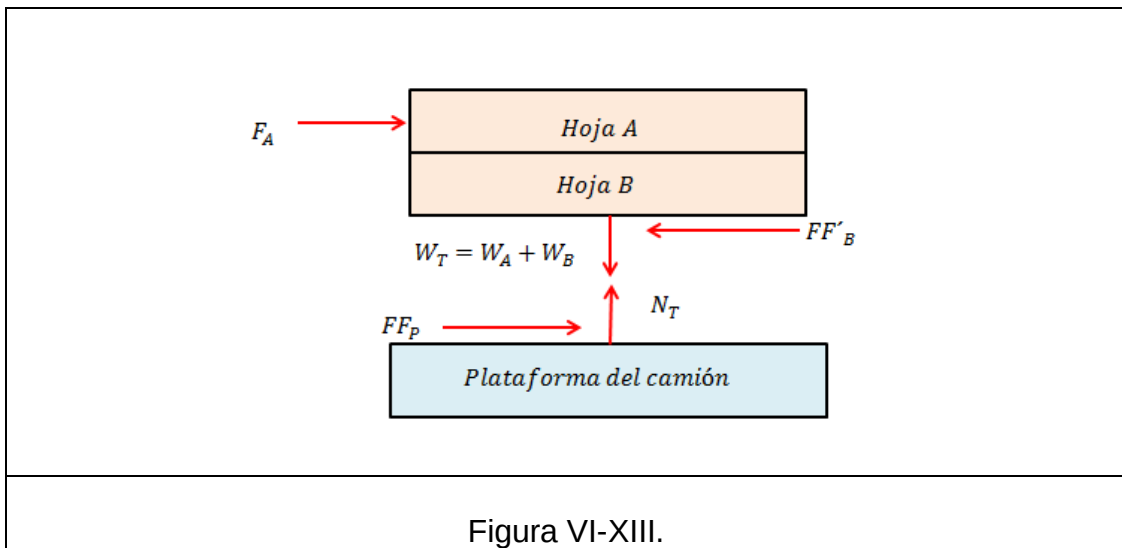
$$\sum F_y = W_A + N_A = 0 \therefore N_A = -W_A$$

La fuerza F_A necesaria para empezar a deslizar la hoja A es, por lo tanto, igual a:

$$F_A = \mu_s N = \mu_s N_A$$

$$F_A = -\mu_s W_A$$

Del DCL de la figura VI-XIII analicemos ambas hojas en cuanto a las ecuaciones de equilibrio:



$$\sum F_x = F_A + FF'_B = 0 \therefore FF'_B = -F_A$$

En donde FF'_B es la fuerza de fricción entre la hoja B y la plataforma del camión.

$$\sum F_y = W_T + N_T = 0 \therefore N_T = -W_T$$

Sabiendo, de acuerdo al enunciado a al DCL de la figura VI-XII, que:

$$W_T = W_A + W_B \therefore N_T = -(W_A + W_B)$$

La fuerza horizontal F_A necesaria aplicada en A y que provoque que la hoja B se deslice sobre la plataforma del camión sería igual a:

$$F_A = \mu_s N = \mu_s N_T$$

Y como:

$$N_T = -(W_A + W_B)$$

Dicha fuerza debería ser:

$$F_A = \mu_s (W_A + W_B)$$

Y como los pesos de las hojas son idénticos, finalmente:

$$F_A = -2\mu_s W_A$$

Dado que la primera fuerza F_A ($-\mu_s W_A$) que se calculó, necesaria para empezar a deslizar la hoja A sobre la hoja B es la mitad de la fuerza horizontal que se aplicaría en dicha hoja A para que empiece a deslizarse la hoja B sobre la plataforma del camión, podemos concluir que cuando se aplique en la hoja A una fuerza horizontal lo suficiente para que dicha hoja empiece a deslizarse sobre la hoja B esta fuerza no será suficiente para que la hoja B empiece a deslizarse sobre la plataforma del camión.

Dando respuesta al inciso a) de este problema:

(a) Si se aplica una fuerza horizontal a la hoja A y ninguna fuerza a la hoja B , ¿puede usted deslizar la hoja A hacia afuera del camión sin hacer que se mueva la hoja B ?

Respuesta: **Sí.**

¿Qué fuerza se necesita para que la hoja A empiece a deslizarse?

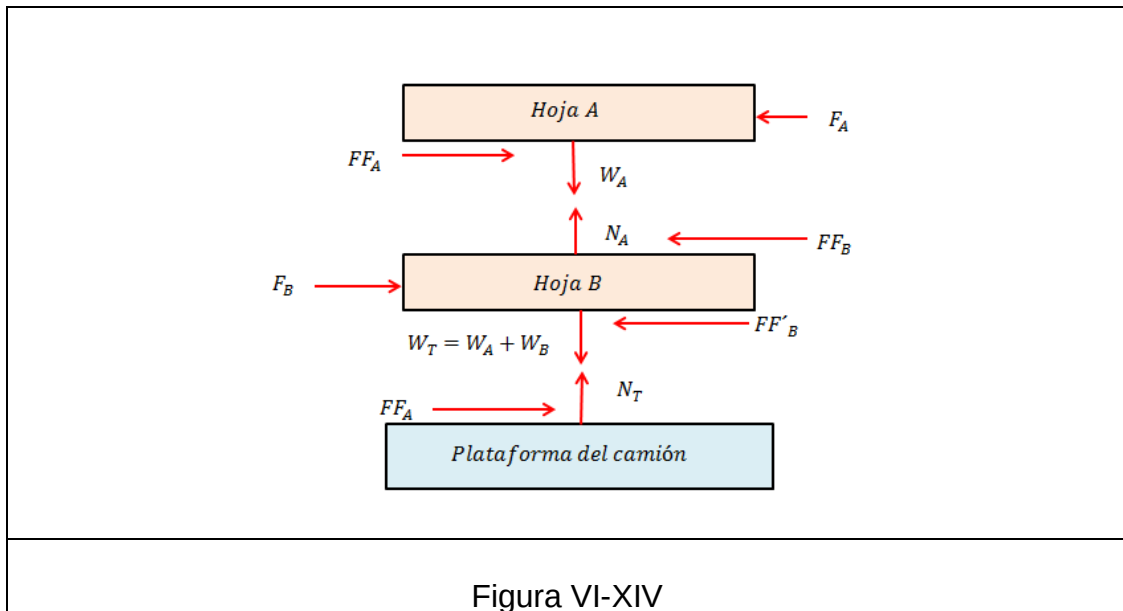
Respuesta: **$F_A = -\mu_s W_A$**

En el inciso b) de este problema se pide calcular la fuerza horizontal aplicada en la hoja B para que esta empiece a deslizarse sobre la plataforma del camión y al mismo tiempo se aplica una fuerza horizontal en la hoja A para que esta no deslice sobre la hoja B .

Ya sabemos que la máxima fuerza que se le puede aplicar a la hoja A para que sea inminente su deslizamiento sobre la hoja B es:

$$F_A = -\mu_S W_A$$

Esta será la fuerza horizontal que se estará aplicando en la hoja A para que no deslice sobre la hoja B mientras se le aplica una fuerza horizontal a la hoja B para que esta empiece a deslizarse sobre la plataforma del camión. En la figura VI-XIV se muestra el DCL que representa lo explicado en estas líneas:



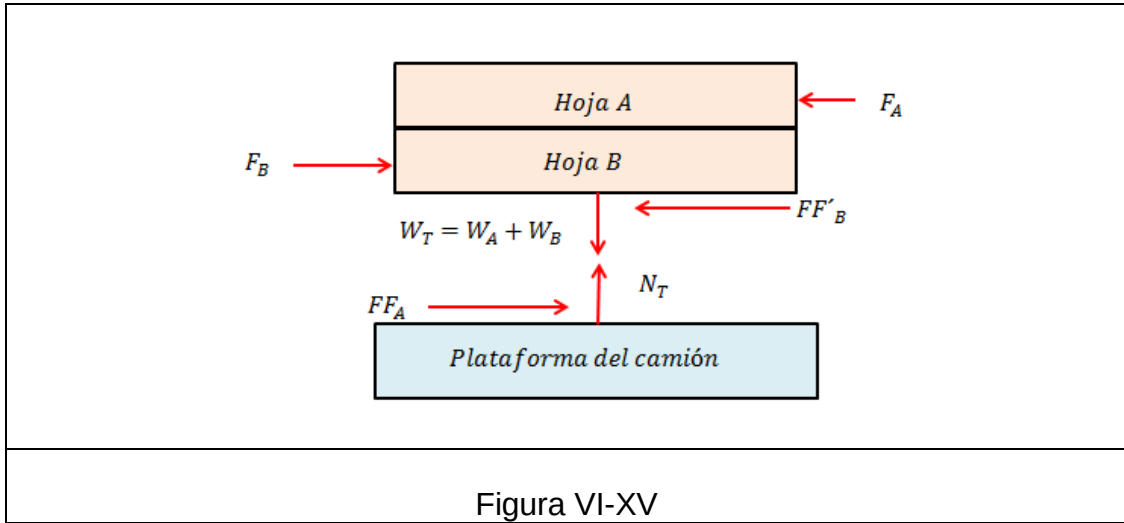
Lo nuevo en este DCL es que se aplica una fuerza horizontal en la hoja B . Planteando las ecuaciones de equilibrio para la hoja A :

$$\sum F_x = F_A + FF_A = 0 \therefore FF_A = -F_A$$

En donde FF_A es la fuerza de fricción entre las hojas A y B .

$$\sum F_y = W_A + N_A = 0 \therefore N_A = -W_A$$

En la figura VI-XV se muestra el DCL donde ambas hojas están unidas:



Analizado ambas hojas en cuanto a las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = F_A + FF'_B + F_B = 0 \therefore FF'_B = -(F_A + F_B)$$

En donde FF'_B es la fuerza de fricción entre la hoja B y la plataforma del camión.

$$\sum F_y = W_T + N_T = 0 \therefore N_T = -W_T$$

Sabiendo que:

$$W_T = W_A + W_B \therefore N_T = -(W_A + W_B)$$

La fuerza de fricción FF'_B que deberá resultar cuando la hoja B empiece a deslizarse sobre la plataforma del camión sería igual a:

$$FF'_B = \mu_s N = \mu_s N_T$$

Sabiendo que los pesos de las hojas son idénticos y que:

$$N_T = -W_T = -(W_A + W_B)$$

Se tiene entonces que:

$$N_T = -2W_A$$

La fuerza de fricción FF'_B será:

$$FF'_B = -2\mu_S W_A$$

Se había planteado que:

$$FF'_B = -(F_A + F_B)$$

Y que:

$$F_A = -\mu_S W_A$$

Haciendo los despejes correspondientes:

$$(F_A + F_B) = 2\mu_S W_A$$

Despejando F_A :

$$-\mu_S W_A + F_B = 2\mu_S W_A$$

Se tiene la respuesta al inciso b) del problema:

Si se impide que la hoja A se mueva ejerciendo una fuerza horizontal sobre ella, ¿qué fuerza horizontal sobre la hoja B se necesita para que ésta empiece a deslizarse?” Respuesta:

$$F_B = 3\mu_S W_A$$

El siguiente problema propuesto del texto de Beer, et al (2010), se muestra en la figura VI-XVI:

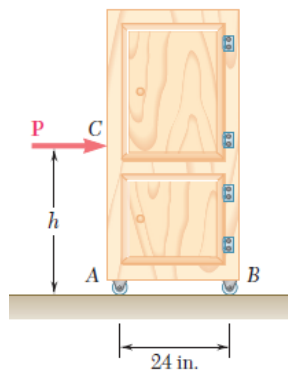
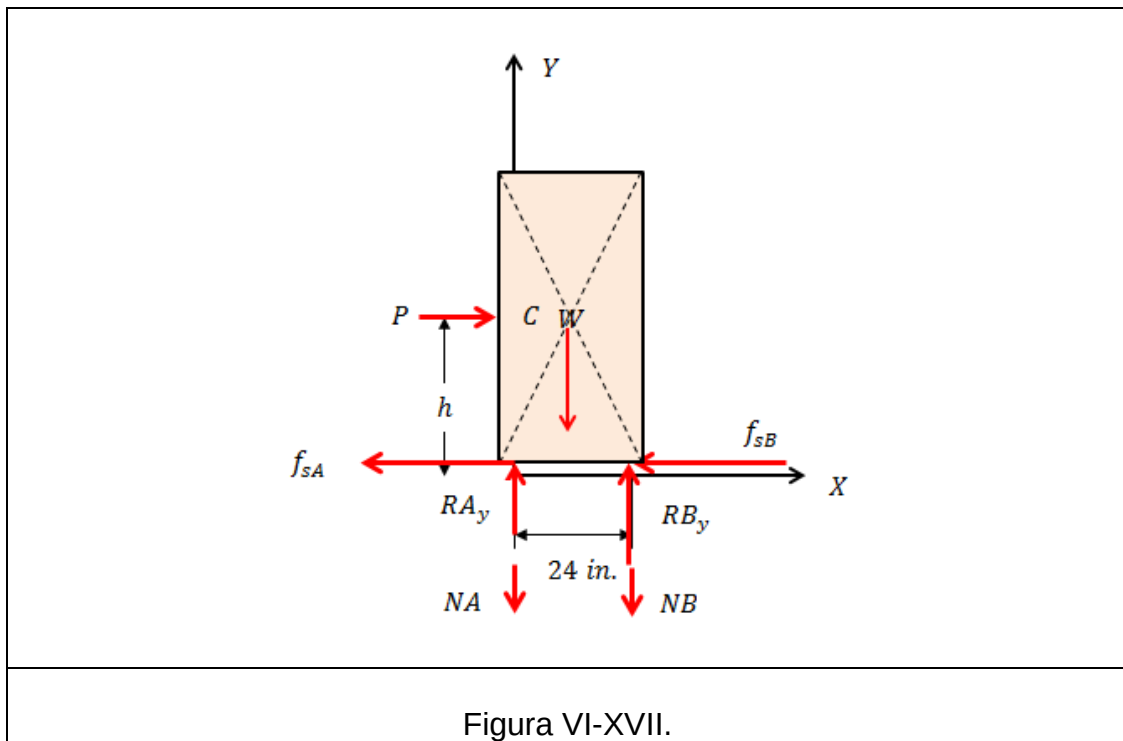


Figura VI-XVI. Fuente: Beer, et al. (2010). Problema 8.16, página 425.

En este problema hay un gabinete de forma simétrica con un peso $W = 120 \text{ lb.}$, la cual descansa sobre dos ruedas que se encuentran en los puntos A y B respectivamente. Dichas ruedas están diseñadas de tal manera que no pueden girar. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el piso es $\mu_s = .3$, con los anteriores datos se pide:

- la fuerza P requerida aplicada en el punto C para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha, y...
- el máximo valor permisible de h para que el gabinete no se vuelque.

Como ha sido sugerido a lo largo de este capítulo lo primero que se hará es realizar el DCL para así poder tener una amplia visión de todas las fuerzas que podrían actuar en el problema a solucionar. En la figura VI-XVII se muestra el mismo:



Por así convenir se hará primeramente la sumatoria de fuerzas e dirección vertical únicamente considerando al gabinete y a las ruedas:

$$\sum F_y = RA_y + RB_y + W = 0$$

Por la simetría del gabinete se puede afirmar sin necesidad de demostrarlo que:

$$RA_y = RB_y$$

Por lo tanto:

$$RA_y = -\frac{W}{2}$$

Ahora sumatoria de fuerzas en dirección vertical entre las ruedas y el piso:

$$\sum F_y = RA_y + RB_y + N_A + N_B = 0$$

$$2RA_y + N_A + N_B = 0$$

$$N_A + N_B = -2RA_y$$

$$N_A + N_B = W$$

La fuerza normal total será la suma de:

$$N_T = N_A + N_B = W$$

Por lo tanto la fuerza de fricción estática que se presentará en el momento de que el movimiento del gabinete sea inminente a su derecha es (ecuación VI-1)

$$f_s = \mu_s N$$

$$f_{sT} = \mu_s N_T$$

De la figura Vi-XVII se puede apreciar que:

$$f_{sT} = f_{sA} + f_{sB}$$

$$f_{sT} = .3 * (-120 \text{ lb.}) = -36 \text{ lb.}$$

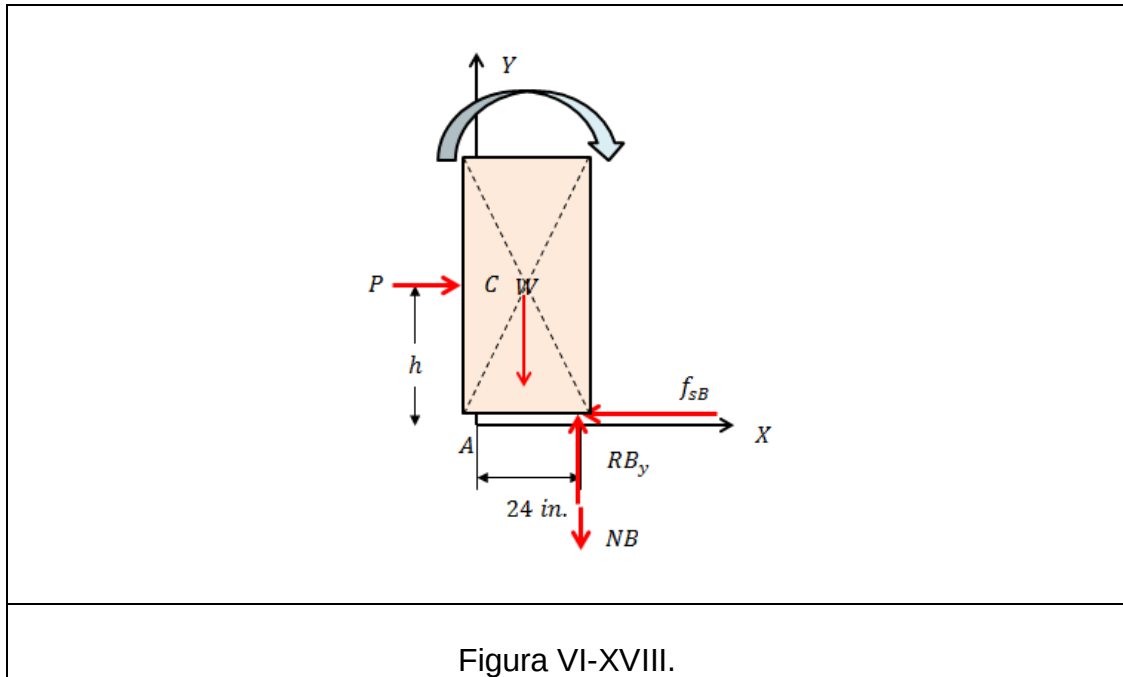
Finalmente y haciendo sumatoria de fuerzas en dirección horizontal:

$$\sum F_x = P + f_{sT} = 0 \therefore P = -f_{sT}$$

$$P = 36 \text{ lb.}$$

Que será la respuesta al primer inciso

El segundo inciso de este problema pide que se encuentre el máximo valor permisible de h para que el gabinete no se vuelque. Exactamente cuando el gabinete empezaría a volcarse, en ese instante se pierde el punto de apoyo de la rueda A con el piso y por ende ya no habrá ningún tipo de fuerza en dicha fuerza. Lo anterior se puede observar en el DCL de la figura VI-XVIII:



Se podrá observar en la figura VI-XVIII, que el gabinete permanece en su posición inicial pero ya no hay contacto del mismo con el piso a través de la rueda o punto de apoyo A . Para saber la máxima h el hacer momentos en la rueda o punto de apoyo B eliminaría la fuerza de reacción RB_y y a la fuerza de fricción f_{sB} ya que la línea de acción de ambas atraviesa por dicho punto de apoyo B :

$$\sum \vec{M}_B = h j X 36 i + (-12 i) X (-120 j) = 0$$

$$-h 36 + 12 * 120 = 0; (k, lb. in.)$$

Haciendo el respectivo despeje se encuentra finalmente la respuesta al inciso b:

$$h = 40 in.$$

TABLA I

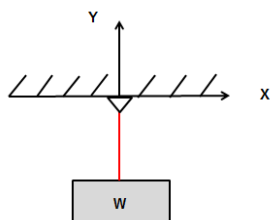
UNIDADES BÁSICAS

MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s

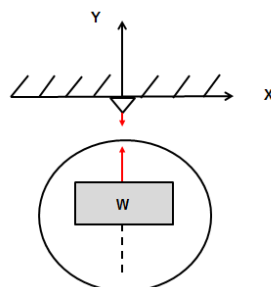
TABLA DE EQUIVALENCIAS

Longitud		
1 m	= 39.3701 pulg	= 3.28084 pies
1 pulg	= 2.54 cm	= 8.33333x10 ⁽⁻²⁾ pies
1 pie	= 30.48 cm	= 12 pulg
1 milla (terrestre)	= 1,609.344 m	= 5280 pies
1 Yarda	= 91.44 cm	= 36.0 pulg
1 Legua	= 5.57 km	
1 vara	= 83.6 cm	
Masa		
1 kg	= 1 000 g	= 35.27 oz
1 oz	= 28.35 g	= 0.0625 lb
1 lb	= 454 g	= 16 oz
1 arroba	= 25 lb	= 230400 granos
Tiempo		
1 hora	= 60 minutos	= 3600 segundos
1 día	= 24 horas	
Temperatura		
Grados Celsius (°C)	= 0.555 (°F - 32)	
Grados Fahrenheit (°F)	= (1.8 x °C) + 32	
Grados Kelvin (°K)	= °C + 273.15	
Volumen		
1 Galon (US)	= 3.785 litros	= 0.2103 latas
1 Galon Imperial	= 4.546 litros	= 0.2526 latas
1 Cilindro	= 55 galones US	= 208.175 litros
Fuerza		
1 Newton	= 0.1019716 Kg Fuerza	= 0.224809 Lb Fuerza
1 Kg Fuerza	= 9.8006652 Newtons	= 2.20462 Lb Fuerza
1 Lb Fuerza	= 0.45359209 Kg Fuerza	= 4.4482205 Newtons
1 slug	= 14.59 Kg Fuerza	= 32.174 Lb Fuerza
Presión		
1 Pa (1 N/m ²)	= 0.1019716 Kg/m ²	= 1.45038x10 ⁽⁻⁴⁾ Lb/pulg ²
1 Psi (Lb/pulg ²)	= 703.070 Kg/m ²	= 6.89476x10 ⁽³⁾ Pa
1 Atm	= 10332.27 Kg/m ²	= 14.69595 Lb/pulg ²
1 Atm	= 760 mm Hg	= 10.35 m H2O
1 Atm	= 0.980665 bar	= 10.35 m H2O

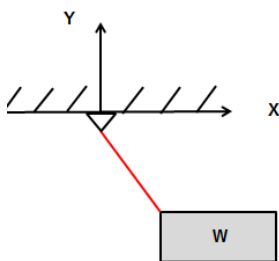
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS



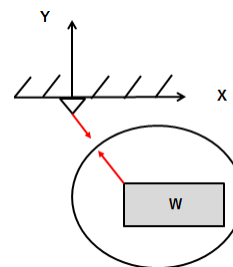
- a) Cuerpo de peso W sujeto por un cable a una superficie u otro objeto o cuerpo.



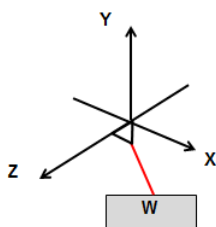
DCL del cuerpo de peso W . La dirección de la fuerza es conocida y en una sola dimensión.



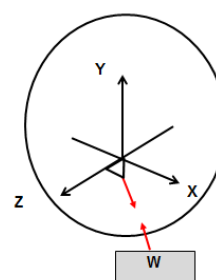
- b) Cuerpo de peso W sujeto por un cable en un punto dado



DCL del cuerpo de peso W . la dirección de la fuerza está comprendida en el plano X-Y.

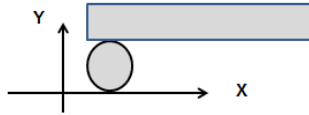


- c) Cuerpo de peso W sujeto por un cable en un punto dado. Dicho cable está orientado en el espacio.

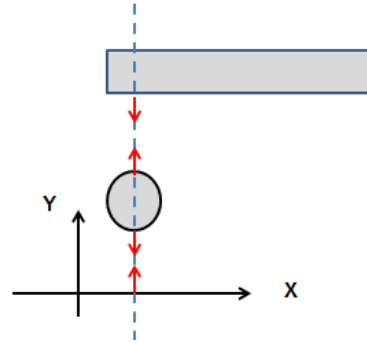


DCL del cable. Dicho cable está orientado en el espacio. Este sería un caso general ya que la fuerza que se ejerce en el cable podría tener componentes orientados en los tres ejes referenciados.

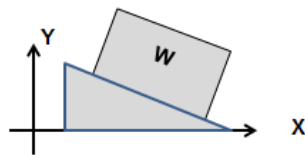
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS (continuación)



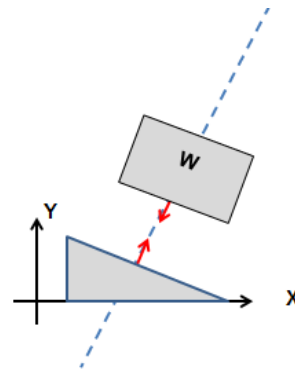
- d) Soporte tipo bola o de balón. Un cuerpo sobre el balón y el balón sobre una superficie.



DCL del cuerpo sobre el cuerpo y el balón, la fuerza de reacción entre ambos será siempre normal al punto de contacto. DCL del balón sobre la superficie, apoyado en el anterior postulado la reacción entre ambos será normal al punto de contacto entre ambos.

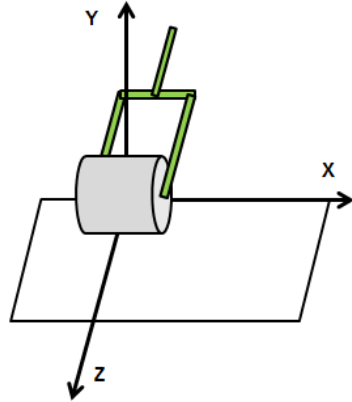


- e) Cuerpo de peso W descansando sobre un plano inclinado liso (sin fricción).

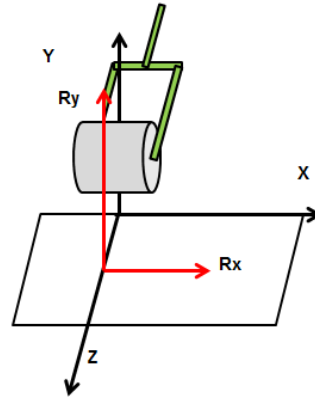


DCL del bloque. La dirección de la reacción será normal o perpendicular a la superficie de contacto. En este caso la fuerza de reacción tendrá componentes en ambos ejes cartesianos.

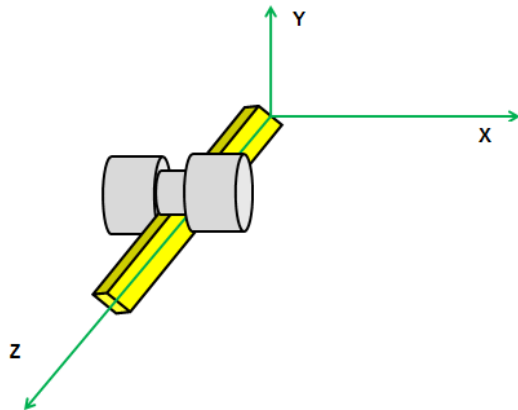
**REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS
(continuación)**



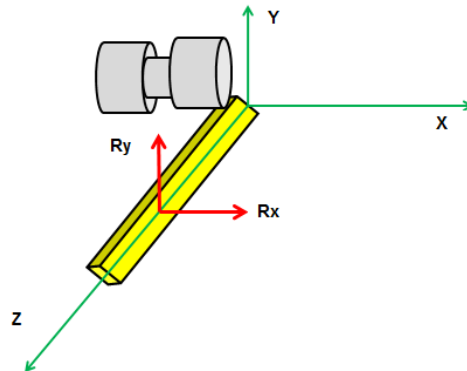
f) Rodillo sobre superficie rugosa



DCL. Reacciones que serán perpendiculares al eje de dirección del rodillo.

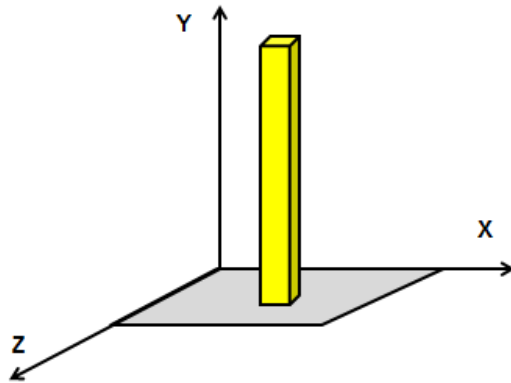


g) Rueda sobre riel

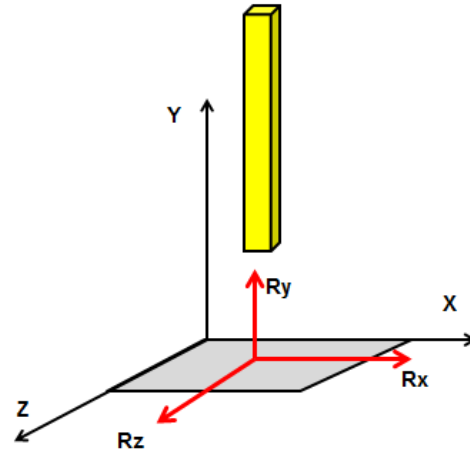


DCL. Reacciones que serán perpendiculares a la dirección del riel.

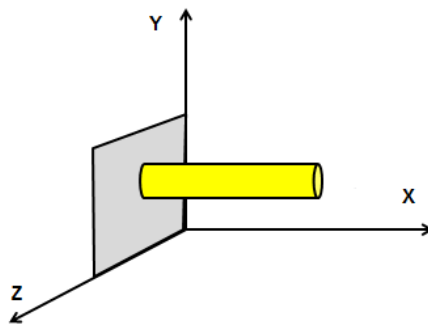
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS (continuación)



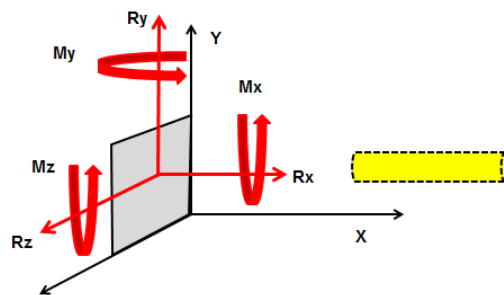
h) Elemento o cuerpo sobre superficie rugosa



DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente

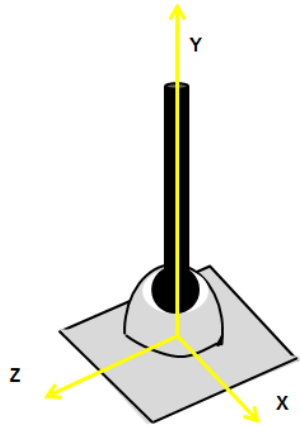


i) Elemento, barra o cualquier cuerpo empotrado.

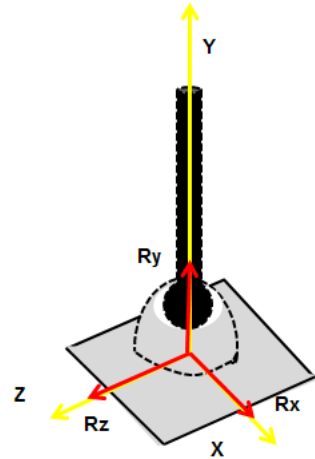


DCL. seis posibles reacciones, tres por fuerzas y tres por momentos, orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente

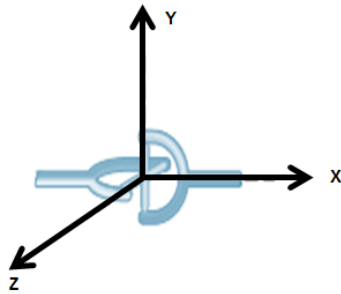
**REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS
(continuación)**



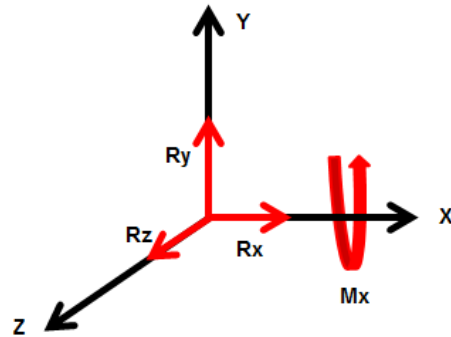
j) Rótula.



DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente

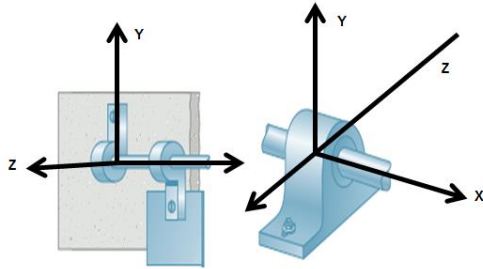


k) Junta universal.(parte de la imagen tomada del texto de Beer)

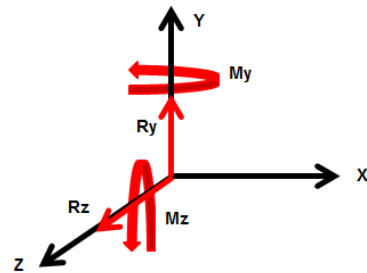


DCL. Tres posibles reacciones orientadas cada una a los ejes cartesianos X, Y, Z respectivamente y un momento paralelo al eje que une la junta universal

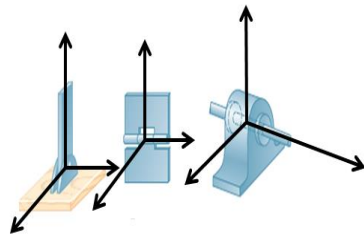
REACCIONES EN LOS SOPORTES Y CONEXIONES ENTRE ELEMENTOS (continuación)



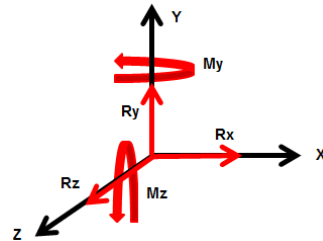
- l) Bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial (parte de la imagen tomada del texto de Beer, et al (2010)).



DCL. Cuatro posibles reacciones, dos de fuerza y dos de momentos. Cada par de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto.

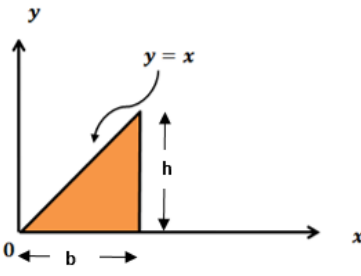
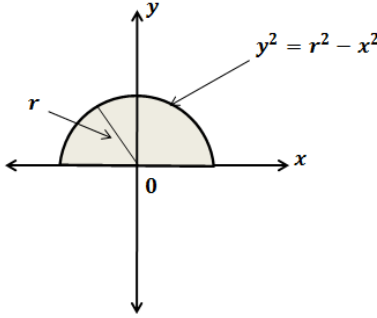
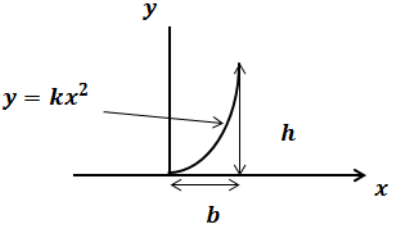


- m) De izquierda a derecha, la primera figura se refiere a un mecanismo conocido como pasador y ménsula. Las siguientes dos figuras corresponden a mecanismos conocidos como bisagra y cojinete. Los tres mecanismos soportan empuje axial y carga radial (parte de la imagen tomada del texto de Beer, et al (2010)).

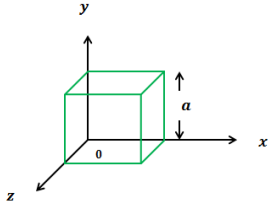
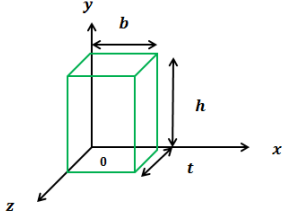
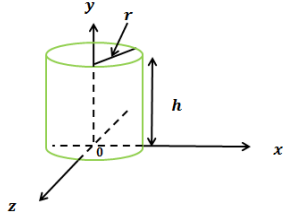
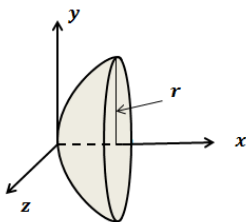


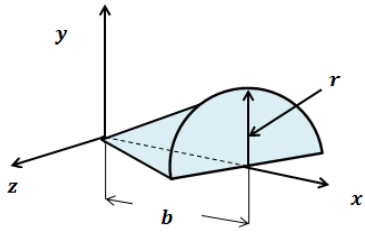
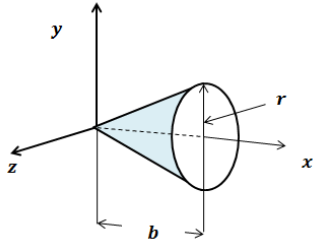
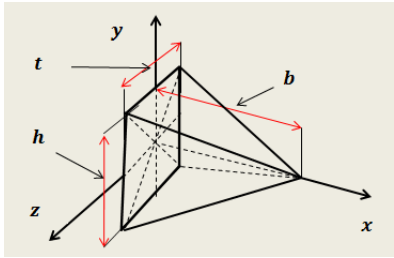
DCL. Cinco posibles reacciones, tres de fuerza y dos de momentos. Dos pares de reacciones (fuerza y momento) perpendicular a la flecha donde se gira o que gira y una reacción (fuerza) paralela a la flecha en cuestión. Es importante indicar que por lo general, los momentos no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto.

ANEXO II

ÁREAS Y UBICACIÓN DE SUS EJES CENTROIDALES				
Nombre	Forma	Área	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Triángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{2b}{3}$	$\frac{h}{3}$
Medio círculo		$\frac{\pi r^2}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$
Segmento de segundo grado		$\frac{bh}{3}$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{3h}{10}$

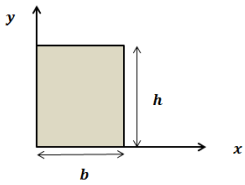
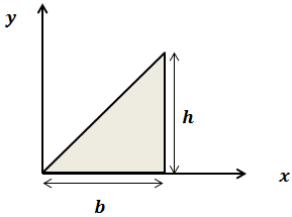
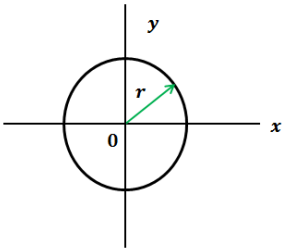
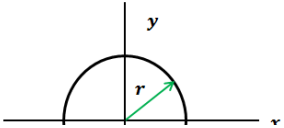
ANEXO III

VOLÚMENES Y UBICACIÓN DE SUS EJES CEMNTROIDALES					
Nombre	Forma	Volumen	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
Cubo		a^3	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
Ortoedro		hbt	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{t}{2}$
Cilindro		$\pi r^2 h$	0	$\frac{h}{2}$	0
Media esfera		$\frac{2\pi r^3}{3}$	$\frac{5r}{8}$	0	0

Nombre	Forma	Volumen	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
Medio cono		$\frac{\pi r^2 b}{6}$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{r}{\pi}$	0
Cono		$\frac{\pi r^2 b}{3}$	$\frac{3b}{4}$	0	0
Pirámide		$\frac{\pi b h t}{3}$	$\frac{b}{4}$	0	0

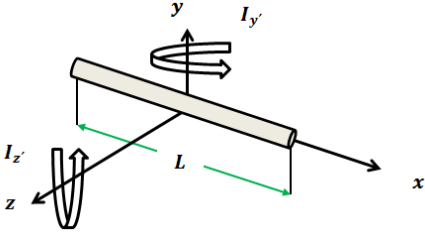
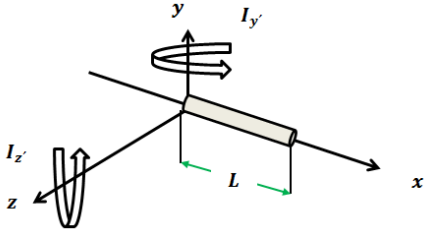
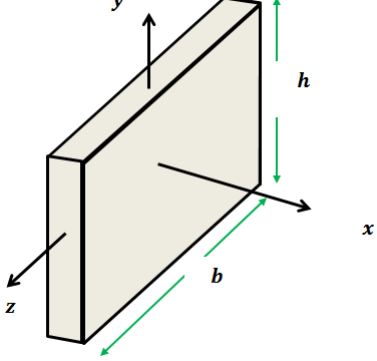
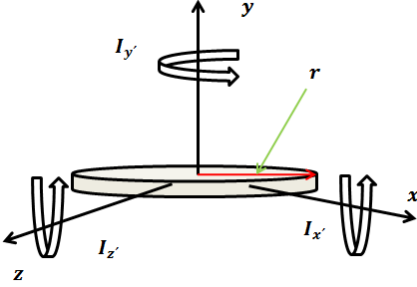
ANEXO IV

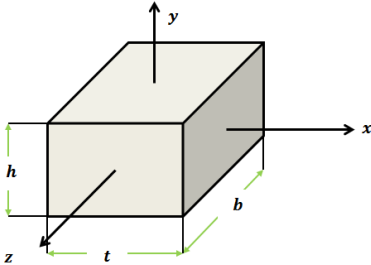
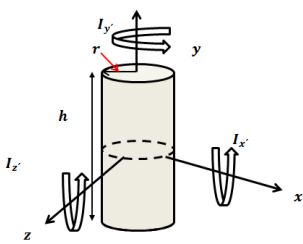
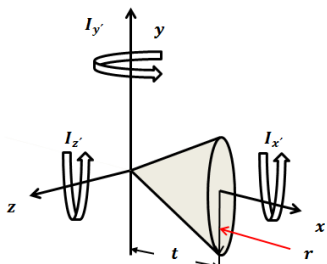
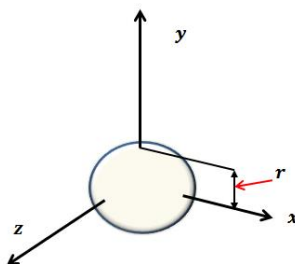
Momentos de inercia de figuras geométricas comunes.

Nombre	Forma	I_x	I_y	$I_{x'}$	$I_{y'}$
Rectángulo		$I_x = \frac{bh^3}{3}$	$I_y = \frac{hb^3}{3}$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$
Triángulo		$I_x = \frac{bh^3}{12}$		$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$	
Circunferencia				$I_{x'} = \frac{\pi r^4}{4}$	$I_{y'} = \frac{\pi r^4}{4}$
Media circunferencia		$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$	$I_y = \frac{\pi r^4}{8}$		

ANEXO V

Momentos de inercia de algunos volúmenes.

Nombre	Forma	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{z'}$
Barra sólida esbelta			$\frac{ML^2}{12}$	
Barra sólida esbelta			$\frac{ML^2}{3}$	
Placa rectangular delgada.		$\frac{M(b^2 + h^2)}{12}$	$\frac{Mb^2}{12}$	$\frac{Mh^2}{12}$
Disco uniforme, delgado.		$\frac{Mr^2}{4}$	$\frac{Mr^2}{2}$	$\frac{Mr^2}{4}$

Nombre	Forma	$I_{x'}$	$I_{y'}$	$I_{z'}$
Prisma rectangular		$\frac{M(b^2 + h^2)}{12}$	$\frac{M(b^2 + t^2)}{12}$	$\frac{M(t^2 + h^2)}{12}$
Cilindro Macizo		$\frac{M}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right)$	$\frac{Mr^2}{2}$	$I_{x'}$
Cono circular		$\frac{3Mr^2}{10}$	$3M \left(\frac{r^2}{20} + \frac{t^2}{5} \right)$	
Esfera			$\frac{2Mr^2}{5}$	

Bibliografía.

Bedford Anthony, Fowler Wallace. (1996). Estática, Mecánica para Ingeniería. Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.

Beer Ferdinand P., Johnston Russell Jr., Mazurek David F., Eisenberg Elliot R. (2010). MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS, ESTÁTICA, novena edición. McGraw-Hill/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Hibbeler Russell C. (2010). INGENIERÍA MECÁNICA, ESTÁTICA. Decimosegunda edición. PEARSON EDUCACIÓN, México.