



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Doctorado

**Métodos basados en sincronización de observadores
para la fusión de señales en sistemas multisensor**

presentada por

MC. Laura Adriana Galicia Galicia

como requisito para la obtención del grado de

**Doctora en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Daniel García Beltrán

Codirector de tesis

Dr. Omar Hernández González

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2026.

 Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL		Código: CENIDET-AC-006-D20
			Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4		Página 1 de 1

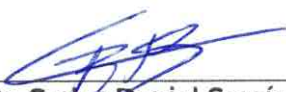
Cuernavaca, Mor., a 05 de junio de 2026

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Subdirector Académico
Presente

At'n: Dr. Juan Reyes Reyes
Presidente del Claustro Doctoral del
Depto. De Ingeniería Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial de la estudiante LAURA ADRIANA GALICIA GALICIA manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "METODOS BASADOS EN SINCRONIZACION DE OBSERVADORES PARA LA FUSION DE SEÑALES EN SISTEMAS MULTISENSOR", realizado bajo la dirección del Dr. Carlos Daniel García Beltrán y la codirección del Dr. Omar Hernández González, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE



Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Director de Tesis / CENIDET



Dr. Omar Hernández González
Codirector de Tesis / IT. Hermosillo



Dr. Manuel Adam Medina
Miembro del Comité Tutorial / CENIDET



Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Miembro del Comité Tutorial / CENIDET



Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Miembro del comité Tutorial / CENIDET

c.c.p: Mtra. Verónica Sotelo Boyas/ jefa del Departamento de Servicios Escolares.
c.c.p: Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.
c.c.p: Expediente.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca Mor, 08/junio/2026

Oficio No. SAC/156/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis

LAURA ADRIANA GALICIA GALICIA
CANDIDATA AL GRADO DE DOCTORA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"METODOS BASADOS EN SINCRONIZACION DE OBSERVADORES PARA LA FUSION DE SEÑALES EN SISTEMAS MULTISENSOR"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

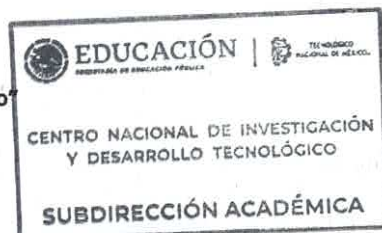
Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®

"Conocimiento y Tecnología al servicio de México"

CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



c.c.p. Departamento de Ingeniería Mecánica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



2026
año de
Margarita
Maza

cenidet
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 4104,
e-mail: acad_cenidet@tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx

*A mi familia: mi origen, mi ancla y mi razón. Por caminar junto a mí en cada
decisión, amarme sin medida y estar siempre, siempre, ahí.*

Dedicada a los sueños que despiertan

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por la gracia de permitirme estudiar y completar mi doctorado.

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SE-CIHTI) por el apoyo económico brindado durante este periodo, fundamental para la culminación de mis estudios. Extiendo también mi agradecimiento al TecNM/CENIDET, al Departamento de Ingeniería Electrónica (DIE) y a cada uno de los trabajadores de esta institución por abrirme sus puertas y brindarme los recursos necesarios para el desarrollo de esta investigación.

Agradezco al Dr. Carlos Daniel García Beltrán, mi director, por su paciencia y por abrirme el panorama científico. Y de manera muy especial, al Dr. Omar Hernández González, mi codirector y mentor en Hermosillo, quien con sus clases, asesorías y acompañamiento constante fue pilar fundamental para culminar mi doctorado. Gracias a él, y también al Dr. Carlos Daniel, por ser los hombros sobre los que puedo ver más lejos.

Agradezco también a mi comité tutorial, por su dedicación y disposición para ayudarme a mejorar mi trabajo de tesis, así como por sus revisiones y correcciones: Dr. José Francisco Gómez Aguilar, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, Dr. Manuel Adam Medina.

Agradezco al Dr. Guillermo Valencia Palomo por acompañarme en la redacción, enseñarme el valor del trabajo en equipo y apoyarme en la publicación de artículos. Y al Dr. Jesús Morales por su generosidad, amabilidad y comentarios que enriquecieron esta tesis.

Agradezco al Dr. Arturo Turi por la motivación y la invitación a Cenidet, y al Dr. José Fernando Castro Gómez por sus asesorías puntuales.

Gracias a mi hermosa familia. A mi mamá Cheve y a mi papá Mere, que descansan en el cielo y siempre me acompañan. A mis hermanos José Luis, Jesús (†), Rocío y Juan Carlos, y a sus compañeras y compañero de vida: mis cuñadas Lourdes, Petra, Ana María, y mi cuñado Fortino. Agradezco también el apoyo de todos mis sobrinos: Dianita, Iratze, Alán, Edson, Zaira, Mari Chuy, Paco, Jahir, Sara, Mere, Juanito, Sofi y Karlita.

Gracias a Avelino, quien me hizo conocer la belleza de Cuernavaca, me prestó su familia y a su mamá Rosario. Por las convivencias y por hacerme sentir en casa.

Gracias a mis compañeros de la maestría que entraron el mismo año que yo iniciaba el doctorado —Seli, Arturo Grande, Arturito, Xopo, Elker, Ezequiel, Inri y Víctor—, la generación más unida. Y a mis compañeros de lugar: Héctor Martín de Jalisco, Dianita de Chiapas, Felipe de Tamaulipas, Sabido de Campeche, Christian de Veracruz. También gracias a Irving e Irbin y a Omar Arturo. Fue un honor convivir con ellos en Cenidet.

Gracias a mis amigas y amigos de toda la vida: Rocío Alducín Yobal, Brenda Berenice Aquino Caliz, Sara Lili Contreras Martínez, Erick Cervantes Mendieta, Hugo Gutierrez Domingo, Pedro Orozco Cavanzo y Francisco Javier Fuentes Ramos.

Muchas gracias al personal administrativo, personas muy amables desde mi llegada hasta mi salida: a la Lic. Liliana, Lic. Rocío, Lic. Irma, y con mucho cariño a la Psic. Verónica. Gracias a ellas conservo un grato recuerdo de la atención recibida, por su diligencia y calidez.

Por último, pero no menos importante, a mi eterna cachorra perruna, Muñeca.

Laura

Resumen

Esta tesis doctoral desarrolla estrategias de estimación distribuida basadas en observadores para la fusión de señales en sistemas multisensor, abordando condiciones realistas como muestreo heterogéneo (multitasa), retardos en las mediciones, ruido en los sensores y limitaciones en la comunicación entre agentes. Se presentan cuatro contribuciones originales que evolucionan desde escenarios ideales hacia esquemas robustos y eficientes. La primera contribución diseña un observador distribuido con mediciones multitasa y retardos múltiples bajo comunicación continua, incorporando predictores del error de salida que se actualizan en cada instante de muestreo, garantizando convergencia exponencial y superando a enfoques tradicionales en presencia de muestreo heterogéneo. La segunda contribución propone un observador sincronizado que fusiona múltiples estimadores locales para atenuar el ruido de medición en entornos multitasa, demostrando que el promedio de las estimaciones reduce el ruido de forma inversamente proporcional al número de observadores, logrando una estimación robusta. La tercera contribución introduce un observador distribuido con comunicación multitasa periódica, desacoplando los eventos de muestreo de los de intercambio de información mediante una descomposición del error en partes observable y no observable, lo que relaja significativamente las condiciones de diseño de las ganancias y permite una estimación continua precisa validada con datos experimentales reales. La cuarta contribución integra un mecanismo dinámico de comunicación activada por eventos junto con un diseño robusto al ruido de medición, incorporando una variable auxiliar que ajusta el umbral de evento para reducir drásticamente el número de transmisiones sin degradar la precisión, demostrando estabilidad exponencial del error hacia una región acotada por el nivel de ruido. En conjunto, las contribuciones avanzan la teoría de observadores distribuidos al incorporar condiciones operativas realistas, ofreciendo soluciones escalables, tolerantes a fallos y eficientes en el uso de recursos de comunicación, validadas tanto en simulación como en prototipos experimentales, con publicaciones resultantes en revistas indexadas de alto impacto.

Palabras clave: observadores distribuidos, fusión multisensor, comunicación por eventos, sistemas lineales, estimación distribuida, grafos dirigidos.

Abstract

This doctoral thesis develops distributed estimation strategies based on observers for signal fusion in multisensor systems, addressing realistic conditions such as heterogeneous (multirate) sampling, measurement delays, sensor noise, and communication constraints among agents. Four original contributions are presented, progressing from ideal scenarios toward robust and efficient schemes. The first contribution designs a distributed observer with multirate measurements and multiple delays under continuous communication, incorporating output error predictors that update at each sampling instant, guaranteeing exponential convergence and outperforming traditional approaches in the presence of heterogeneous sampling. The second contribution proposes a synchronized observer that fuses multiple local estimators to attenuate measurement noise in multirate environments, demonstrating that the average of the estimates reduces noise inversely proportional to the number of observers, thus achieving robust estimation. The third contribution introduces a distributed observer with periodic multirate communication, decoupling sampling events from information exchange through a decomposition of the estimation error into observable and unobservable parts, which significantly relaxes the gain design conditions and enables accurate continuous estimation validated with real experimental data. The fourth contribution integrates a dynamic event-triggered communication mechanism with a measurement-noise-robust design, incorporating an auxiliary variable that adjusts the event threshold to drastically reduce the number of transmissions without degrading estimation accuracy, proving exponential stability of the error toward a residual region bounded by the noise level. Collectively, these contributions advance the theory of distributed observers by incorporating realistic operating conditions, offering scalable, fault-tolerant, and communication-efficient solutions validated both in simulation and on experimental prototypes, with resulting publications in high-impact indexed journals.

Keywords: distributed observers, Directed graphs, multi-sensor fusion, event-triggered communication, linear systems, distributed estimation.

Publicaciones

Publicaciones en revista

- Galicia-Galicia, L.-A., Hernández-González, O., García-Beltrán, C.D., Valencia-Palomo, G., Guerrero-Sánchez, M.-E. (2024). Distributed observer for linear systems with multirate sampled outputs involving multiple delays. *Mathematics*, 12(18), 2943. DOI: 10.3390/math12182943
- Galicia-Galicia, L.A., García-Beltrán, C.D., Hernández-González, O., Valencia-Palomo, G., Morales-Valdez, J., Guerrero-Sánchez, M.E. (2026). Multirate sampled-data distributed observer synthesis for building-type structures. *Measurement*, 121364. DOI: 10.1016/j.measurement.2026.121364
- Galicia-Galicia, L.-A., Hernández-González, O., García-Beltrán, C.D., Valencia-Palomo, G., Guerrero-Sánchez, M.-E. (2026). Distributed observer with multi-rate measurements and event-triggered communication for disturbed linear systems. *Information Sciences*, Sometido 2026

Publicaciones en congresos

- Galicia Galicia, L.A., Hernández González, O., García Beltrán, C.D., Valencia Palomo, G. (2022). Control basado en un observador sincronizado para una estructura tipo edificio. En: *Novena edición de la Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada* (presentación oral, noviembre 2022).
- Galicia Galicia, L.A., Hernández González, O., García Beltrán, C.D., Guerrero Sánchez, M.E., Castro Gómez, J.F., Valencia Palomo, G. (2024). Synchronized estimation of displacement in a structure using multi-sensors under different sampling periods. En: *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2024*, pp. 144–149. DOI: 10.58571/CNCA.AMCA.2024.025
- Galicia-Galicia, L.-A., Hernández-González, O., García-Beltrán, C.D., Valencia-Palomo, G., Guerrero-Sánchez, M.-E. (2025). Distributed event-triggered estimation over sensor networks for satellite tracking in LEO. En: *2025 22nd International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–4. DOI: 10.1109/CCE67728.2025.11272037

Índice general

Agradecimientos	6
Resumen	8
Abstract	9
Lista de Figuras	14
Lista de Tablas	15
1 Introducción	1
1.1 Contexto y motivación	1
1.2 Estado del arte	2
1.3 Planteamiento del problema	11
1.4 Marco Teórico	12
1.5 Objetivos	17
1.6 Justificación	17
1.7 Alcance y Limitaciones	18
1.8 Organización de la Tesis	18
2 Observador distribuido con mediciones multitasa y retardo en la salida	20
2.1 Introducción	20
2.1.1 Planteamiento del problema	22
2.1.2 Diseño del observador distribuido	23
2.1.3 Análisis de estabilidad	27
2.1.4 Caso de estudio. Satélites en LEO.	30
2.2 Observador Sincronizado	40
2.2.1 Introducción	40
2.2.2 Modelado de estructura tipo edificio	41
2.2.3 Diseño del observador	43
2.2.4 Observador sincronizado	47
2.2.5 Caso de estudio. Estructura tipo edificio de dos pisos.	48

3 Observador distribuido con datos muestreados y comunicación multi-	
tasa	51
3.1 Introducción	51
3.2 Planteamiento del problema	52
3.3 Diseño del observador	53
3.4 Análisis de Estabilidad	59
3.5 Caso de estudio. Estructura tipo edificio de cinco pisos	65
4 Observador distribuido con mediciones muestreadas y comunicación	
por eventos	76
4.1 Introducción	76
4.2 Planteamiento del problema	77
4.3 Diseño del observador	79
4.4 Análisis de Estabilidad	83
4.5 Caso de estudio: Conjunto de cuatro VANTs.	93
4.5.1 Comportamiento ante el ruido en las mediciones	100
4.6 Caso de estudio. Satélites en LEO.	108
5 Conclusiones y Trabajo Futuro	114
5.1 Contribuciones principales	114
5.2 Conclusiones específicas por esquema	115
5.3 Direcciones de investigación futura	116
Bibliografía	129
Anexos	130
A Diseño experimental de la estructura tipo edificio de cinco pisos	130
B Metodología empleada para el desarrollo de observadores distribuidos .	137
Lista de variables utilizadas	142

Índice de figuras

1.1	Clasificación de los algoritmos de estimación distribuida. Adaptada de (Huang et al., 2022)	11
2.1	Esquema de estimación distribuida con mediciones de salida con múltiples muestreos bajo múltiples retardos.	21
2.2	Grafo de comunicación entre nodos.	32
2.3	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$. Primer Escenario	36
2.4	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$. Segundo Escenario	36
2.5	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ primer experimento.	38
2.6	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ segundo experimento.	38
2.7	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ tercer experimento.	39
2.8	Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ cuarto experimento.	40
2.9	Esquema de una estructura vertical tipo edificio de n pisos.	41
2.10	Salidas de medición a diferentes tasas de muestreo.	48
2.11	Estimación de posición	49
2.12	Estimación de velocidad	50
2.13	Estimación promedio de la posición	50
3.1	Grafo de comunicación del observador para la estructura de cinco pisos.	67
3.2	Salida de medición muestreada a 60 ms y 100 ms, respectivamente	69
3.3	Estimación de desplazamiento, primer escenario.	70
3.4	Estimación de velocidad, primer escenario.	70
3.5	Estimación de desplazamiento, segundo escenario.	71
3.6	Estimación de velocidad, segundo escenario.	71
4.1	Estimaciones de los componentes de posición de cada VANT obtenidas por los observadores es un escenario sin ruido	98
4.2	Norma del error de estimación de posición $\ \epsilon_i(t)\ $ para cada VANT usando cada observador.	99
4.3	Estimaciones de las componentes de la posición absoluta del VANT-1 en un escenario sin ruido.	100

4.4	Instantes de activación por cada observador	101
4.5	Componentes de la posición absoluta del VANT 1 y sus estimaciones con ruido de varianza 0.001.	102
4.6	Estimaciones de posición para cada VANT bajo ruido de medición de varianza 0.001.	103
4.7	Norma del error de estimación de posición $\ \epsilon_i(t)\ $ para cada VANT usando cada observador, bajo ruido de medición de varianza 0.001.	104
4.8	Componentes de la posición absoluta del VANT 1 y sus estimaciones con ruido de varianza 0.01.	105
4.9	Estimaciones de posición para cada VANT bajo ruido de medición de varianza 0.01.	106
4.10	Norma del error de estimación de posición $\ \epsilon_i(t)\ $ para cada VANT usando cada observador, bajo ruido de medición de varianza 0.01.	107
4.11	Las componentes p_x , p_y y p_z de la posición y sus respectivas estimaciones.	112
4.12	Instantes de activación de $\hat{\zeta}_i$.	113
1	Prototipo de edificio de cinco pisos a escala reducida.	131
2	Componente norte-sur normalizada del terremoto de la Ciudad de México de 1985.	132
3	Modelo real de la planta (edificio de cinco pisos instrumentado).	134
4	Mediciones experimentales de aceleración y desplazamiento relativas a la base.	135

Lista de Tablas

2.1	Condiciones iniciales de posición	35
2.2	Configuraciones experimentales con mediciones de salida muestreadas	
	que involucran múltiples retardos	37
3.1	Métricas de rendimiento experimental para el desplazamiento estimado.	73
3.2	Métricas de rendimiento experimental para las velocidades estimadas. .	74
4.1	Condiciones iniciales de los VANTs [m]	96
4.2	Métricas de rendimiento promedio por observador para los tres escenarios	
	de ruido.	108
4.3	Condiciones iniciales de posición	111
1	Parámetros estructurales del prototipo de edificio de cinco pisos	132

Capítulo 1

Introducción

1.1 Contexto y motivación

Se comprende que cuando la información de varios sensores o multisensores se combinan en una fusión de datos se obtienen más beneficios que las que se obtendrían con un solo sensor, considerando que se pueden fusionar sensores de distintos tipos esto permite tener lecturas más precisas y exactas de la variable a medir o estimar. De este modo, se inicia con algunas definiciones encontradas en los artículos de fusión.

En (Hall and Llinas, 1997), se explica la fusión de la siguiente manera: “La integración de información procedente de múltiples fuentes para producir datos unificados específicos y completos sobre una entidad”, en (Khaleghi et al., 2013) “La fusión de información es el estudio de métodos eficientes para transformar automática o semiautomáticamente información de diferentes fuentes y de diferentes puntos en el tiempo, en una representación que proporcione un apoyo eficaz para la toma de decisiones humana o automatizada” y en (Kong et al., 2020) es “El proceso de combinar los datos de medición de todos los sensores y utilizar algoritmos especiales para proporcionar una visión completa de la medición se denomina fusión de datos multisensor”. De manera general estos son algunas definiciones de fusión, conceptos que vienen de lo general a lo particular, y que para este trabajo se ha de considerar la fusión de datos multisensor.

Los sistemas multisensor se utilizan en el reconocimiento de objetivos, en la navegación autónoma de robots y en la fabricación automática, entre otros (Hackett and Shah, 1990; Tsanousa et al., 2022; Nazarahari and Rouhani, 2021). En las aplicaciones que se basan en localización, la fusión es una estrategia que permite combinar las mediciones inerciales y de posición recopiladas por los sensores que funcionan con diferentes tecnologías y a diferentes frecuencias de muestreo (D’Ippolito et al., 2023). En esta revisión de literatura, la técnica más popular para la fusión de datos de sensores fueron los filtros Kalman y sus variantes (Chong et al., 2018), luego le siguen las redes neuronales y los estimadores de estados como los observadores.

La fusión de sensores se puede llevar a cabo mediante arquitecturas centralizadas, descentralizadas, distribuidas o jerárquicas (Nebot Roglá, 2008; Ma et al., 2017). La arquitectura centralizada en su implementación podría ser la más fácil de llevar a cabo, sin embargo al presentarse una falla todo el sistema se detiene, también presenta cuellos de botella cuando la información es de gran tamaño o son múltiples sensores. Por otra parte, la arquitectura distribuida al presentarse una falla el funcionamiento del sistema continúa, porque cada sensor tiene su propio centro de procesamiento para después enviarla al centro del sistema y completar la asociación, en comparación con la estructura de fusión centralizada, la estructura distribuida reduce la presión de comunicación del sistema y al mismo tiempo asegura el tiempo real y la confiabilidad del sistema (Nebot Roglá, 2008). La arquitectura distribuida presenta un conjunto de ventajas para la fusión multisensor como escalabilidad, flexibilidad, tolerancia a fallas y aprendizaje automático (Rodríguez Del Nozal et al., 2019a).

Durante la revisión bibliográfica, se encontró que para sistemas complejos a gran escala sobre sensores en red, los algoritmos de estimación de estados distribuidos son los más utilizados. Estos algoritmos se han clasificado en dos principales categorías: métodos tipo filtros Kalman y métodos tipo observador, en sistemas lineales invariantes en el tiempo (Han et al., 2018; Huang et al., 2022).

1.2 Estado del arte

Los observadores distribuidos que tienen como objetivo observar y estimar el estado de un sistema complejo a partir de múltiples fuentes de información distribuidas en la red, en donde cada observador tiene el objetivo de estimar el estado de tal manera que converja asintóticamente al estado del sistema o también realizar el cálculo para la fusión de datos. Actualmente se han desarrollado muchos algoritmos que realizan ya esta tarea, sin embargo, aún existen desafíos y algunos problemas en los enlaces de comunicación entre observadores. Las arquitecturas descentralizadas o distribuidas representan una solución para desahogar a los esquemas centralizados, además de permitir escalar el sistema. Los observadores distribuidos representan una solución para la estimación de variables en el momento de tener la información de todas las medidas de los sensores y poder llevar a cabo estrategias de control o monitorización del mismo. A continuación, se presentan algunas revisiones en la literatura sobre los observadores distribuidos.

El problema de la estimación distribuida de estados está siendo cada vez más estudiado debido a la creciente aplicación de sensores en redes espacialmente ubicadas (He et al., 2020; Huang et al., 2022), como las redes de sensores utilizadas en aeronáutica y astronáutica (Yingrong et al., 2022), localización (Soares et al., 2015), operación de redes eléctricas (Mitra and Sundaram, 2016), entre otras áreas. En el control de formaciones de sistemas multiagente lineales, un observador distribuido permite que

cada agente estime su estado y se coordine para lograr una formación estable (He and Liu, 2024). Los algoritmos empleados para redes de sensores espacialmente ubicados se pueden clasificar en dos estrategias principales: los filtros de Kalman distribuidos (Olfati-Saber, 2007; Ma et al., 2017) y los observadores de estado distribuidos (Han et al., 2018; Huang et al., 2022). A diferencia de los filtros de Kalman distribuidos, los observadores de estado distribuidos han podido resolver el problema de la carga computacional y facilitar la expansión del sistema (Rodríguez Del Nozal et al., 2019a).

Un observador distribuido está formado por un conjunto de observadores individuales espacialmente distribuidos. Cada observador local reconstruye una cierta porción del estado utilizando sus propias medidas y utiliza dinámicas de consenso para estimar las porciones no observables del estado con los otros observadores (Han et al., 2018). De esta manera, al combinar sus propias mediciones con las estimaciones de sus vecinos, cada observador local puede lograr una estimación completa del estado (Chen et al., 2021c). Las dinámicas de consenso son realizadas a través de grafos que pueden ser de comunicación no dirigida y conectada (Kim et al., 2016) o dirigido y fuertemente conectado (Han et al., 2018). En los sistemas lineales invariantes en el tiempo, uno de los observadores más utilizado para algoritmos de estimación de estados distribuidos es el observador de Luenberger, representando un enfoque simple que permite la convergencia asintótica.

Los primeros trabajos sobre observadores distribuidos utilizaban estados aumentados con representaciones discretas de los sistemas, lo que conllevaba un problema de carga computacional debido al modelo aumentado (Park and Martins, 2012a, 2016). En (Park and Martins, 2012a) se presenta el diseño de una red de observadores aumentados para el problema de estimación distribuida. Así mismo, en (Park and Martins, 2012b, 2016) presenta las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de una clase de observadores distribuidos con estados aumentados, que permitan la omnisciencia asintótica del estado de la planta en todos los observadores locales. Posteriormente, (Kim et al., 2016) presentó como novedad tener dos ganancias en el observador distribuido; una para las mediciones locales y otra para el intercambio de información en los grafos de consenso, ya que previamente (2005), se actualizaban los datos de cada nodo con una media ponderada por mínimos cuadrados de los datos de sus vecinos (Xiao et al., 2005). Es por eso que a partir de esta idea de tener dos ganancias en el observador, (Han et al., 2018) presenta un procedimiento simple en donde se puede calcular las matrices de ganancia del observador mediante desigualdades matriciales lineales (LMI) para un sistema continuo y reafirmando que si el sistema observado es observable y el grafo de la red es un grafo dirigido fuertemente conectado, entonces existe un observador distribuido. Su algoritmo permite cualquier tasa de decrecimiento del error deseada y desacopla la información topológica de la red mediante un grafo auxiliar. En (Kim et al., 2019) se implementó un diseño completamente distribuido, refinando la metodología

original para proporcionar mayor flexibilidad y adaptabilidad a los cambios en la red, utilizando un esquema adaptativo para ajustar la ganancia de acoplamiento entre los agentes.

Existen diferentes estructuras para la estimación de estados distribuidos. En [Millán et al. \(2017\)](#) se presenta la descomposición ortogonal de los subespacios locales en observables y no observables asociados a cada conjunto de salidas localmente accesibles, de esta manera permite tener un diseño escalable para cuando crezca el número de agentes. En cambio [\(Rego et al., 2017\)](#) diseña la estructura de estados distribuidos basadas en consenso utilizando el enfoque de filtrado de Kalman distribuido con la diferencia de no requerir intercambiar covarianzas, al realizar este tipo de estructura reduce los requisitos de ancho de banda de comunicaciones. Además, una tercera estructura para observadores distribuidos trata con la teoría clásica de control descentralizada, que se presenta en [\(Kim et al., 2019; Wang and Morse, 2017; Wang et al., 2019a,b\)](#) con un grafo fuertemente conectado y un sistema cuyo estado a estimar es observable en conjunto (jointly observable), permitiendo reducir restricciones que se dan en las suposiciones donde cada par (C_i, A) es observable o detectable. En dicho trabajo se permite controlar directamente la tasa de convergencia, sin embargo, no logra tener un diseño resistente ante cambios bruscos en el número de nodos y enlaces del grafo vecino. Más adelante en [\(Wang et al., 2017, 2020, 2022\)](#) presenta un observador híbrido resistente ante cambios en nodos o enlaces; este observador híbrido tiene un observador local continuo y un estimador de parámetros local diseñado para estimar recursivamente en cada intervalo de tiempo, dando una solución a un observador resistente.

En [\(Mitra and Sundaram, 2018\)](#) se introducen diferentes transformaciones matriciales, utilizando la descomposición canónica observable de Kalman a un entorno multi-sensor para dividir los subespacios observables y no observables de cada agente, dando como resultado un diseño de observador que se puede llevar a cabo de forma distribuida. Sin embargo, el método no permite ajustar la tasa de convergencia y el diseño distribuido requiere que se intercambie una gran cantidad de información, [\(Rodríguez Del Nozal et al., 2018\)](#). [Rodríguez Del Nozal et al. \(2018\)](#) presenta un enfoque en donde se considera que los agentes se comunican a través de una red multisalto por tiempo de muestreo, donde los datos transmitidos pueden tardar varios instantes de muestreo en llegar a su destino final, es decir, las comunicaciones se ven afectadas por retrasos inducidos en los grafos, no por retrasos en la transmisión o procesamiento de las señales de los agentes. Para la fusión de datos que se trata en este trabajo, el diseño del observador reduce el intercambio de información ya que cada agente no está obligado a recopilar la información de cada agente para reconstruir todo el estado. En [Rodríguez Del Nozal et al. \(2019b\)](#) se realiza la estimación de estados de una planta LTI en un contexto en el que los agentes pueden sufrir fallos o ser corrompidas las mediciones. Por lo que desarrolla un estimador robusto y un algoritmo para limitar el efecto de dichas

fallas o ataques. El objetivo de cada agente es reconstruir el estado completo a partir de sus propias medidas y corregir la estimación en subespacios no observables con la información proporcionada por sus vecinos.

Uno de los mayores problemas que se presentan en la estimación distribuida es en las vías de comunicación, por lo que, en los siguientes trabajos se enfatizan las estrategias llevadas a cabo para resolverlas. En (Silm et al., 2020b) se modela mediante el enfoque de retardo temporal, en el que se tienen en cuenta los intervalos de muestreo variables, los retardos de transmisión y los abandonos de paquetes. Las ganancias son calculadas mediante LMI utilizando la desigualdad de Halanay. En (Xin and Cheng, 2020) considera el problema de consenso basado en observadores de sistemas multiagente lineales con comunicación intermitente proponiendo un protocolo basado en el observador con datos continuos y muestreados. En (Xu et al., 2020) investiga para sistemas lineales en redes de comunicación desconectadas y variables en el tiempo, y calcula las ganancias utilizando el método de LMIs. Para sistemas LTI de tiempo continuo con retardos de comunicación en tiempo variable (Chen et al., 2021c), diseña un observador con dos ganancias que son calculadas por la ecuación algebraica de Riccati, y por la ecuación de Lyapunov-Krasovski para el acoplamiento, sugiriendo que se estudien los retardos heterogéneos en las comunicaciones, los errores de transmisión y los canales de comunicación dirigidos.

La mayoría de los estudios sobre observadores distribuidos se concentran en el desafío de la comunicación (Tian et al., 2020; Tanaka et al., 2022; Bertollo et al., 2022), dejando de lado el problema de que cada salida medida de los sistemas puede ser muestreada en diferentes instantes de muestreo. Esta problemática surge porque las mediciones de salida pueden ser proporcionadas por diferentes tipos de sensores, cada uno con su propia tasa de muestreo, ya sea periódica o aperiódica. Entre los trabajos más significativos centrados en la comunicación entre observadores, (Tian et al., 2020), inspirado en los trabajos de (Kim et al., 2016); (Han et al., 2018), realiza una comunicación impulsada por eventos entre observadores vecinos, es decir, los observadores vecinos solo se comunican y comparten su estimación cuando se activa la condición de activación del evento correspondiente. En (Tanaka et al., 2022) se propone un observador de estado completo cooperativo distribuido asincrónicamente basado en un protocolo gossip, seleccionando aleatoriamente el tiempo de comunicación y un par de nodos de comunicación. Por lo tanto, se considera la estimación distribuida con comunicación intermitente y mediciones continuas de los sensores. La comunicación sincrónica en una red a gran escala es una tarea difícil, y no es fácil determinar dicho intervalo, por lo que se utilizó el protocolo gossip para la comunicación asíncrona cuyo intervalo de comunicación se selecciona aleatoriamente, resultando fácil su implementación y demostrando que el error de estimación converge a cero en un sentido medio-cuadrático. Por el contrario, (Bertollo et al., 2022) propone un observador híbrido, donde los observadores locales y de planta funcionan en tiempo continuo, y para el intercambio de información entre los vecinos

lo hace mediante datos muestreados. En la descomposición de subespacios, utiliza el método propuesto por (Rodríguez Del Nozal et al., 2019a), denominado multi-hop, donde cada agente construye su propia observabilidad en forma escalonada. Además, se consideran las perturbaciones del proceso, el ruido de medición y de comunicación.

En el ámbito de los sistemas centralizados, se han desarrollado técnicas basadas en predictores del error de salida para enfrentar el problema de mediciones muestreadas o con retardo. Por ejemplo, Farza et al. (2018) y Ramírez-Rasgado et al. (2022b) proponen observadores que incorporan un predictor del error de estimación, el cual se actualiza cada vez que se recibe una nueva medición. Estos enfoques han sido aplicados con éxito en sistemas con múltiples salidas y en presencia de retardos, permitiendo una estimación continua del estado a partir de mediciones discretas. Sin embargo, dichas estrategias se han desarrollado principalmente para esquemas centralizados, donde un único observador tiene acceso a todas las mediciones. La extensión de estos predictores al contexto de observadores distribuidos, donde cada agente solo dispone de información local y debe coordinarse con sus vecinos, no ha sido explorada en profundidad y constituye una oportunidad de investigación.

Sin embargo, los trabajos mencionados (tanto los distribuidos como los centralizados con predictores) asumen que cada medición de salida se realiza en tiempo continuo y que dichas mediciones son ideales, sin efectos de retardo. Los retardos son inevitables y afectan negativamente el rendimiento y la estabilidad del sistema. Se han reportado trabajos interesantes sobre este tema (Silm et al., 2020b; Chen et al., 2021c; Ge et al., 2022). En Silm et al. (2020b) los autores asumen que las mediciones son casi instantáneas, pero consideran retardos en la comunicación con intervalos de muestreo variables. En Chen et al. (2021c) los retardos de comunicación se consideran constantes y uniformes. Por otro lado, en Ge et al. (2022) se diseña un observador para converger en un tiempo fijo, lo que permite compensar los retardos en la transmisión de datos después de que ocurren. Considerando que en el diseño de un observador distribuido influye la comunicación gráfica entre agentes, Ge et al. (2022) garantiza las propiedades de convergencia en tiempo fijo utilizando los operadores integrales de Volterra con funciones especiales del Kernel, donde la comunicación entre agentes puede implicar retardos variables en el tiempo, y además caracteriza la robustez del algoritmo en presencia de ruido de medición. Varios estudios han explorado el muestreo de señales de transmisión para aumentar la viabilidad de lograr escenarios más realistas, como en el trabajo de He and Liu (2024), donde el control de formación se basa en un observador distribuido con señales muestreadas asincrónicamente. Sin embargo, estos estudios pasan por alto el impacto de los retardos en las señales. En contraste, en Fang and Zhu (2024) se aborda el problema de los retardos en la transferencia de información, rechazándolos de manera robusta mediante el uso de una función de Lyapunov especial, aunque asumiendo que tanto la transferencia de información como el sistema operan en un marco de tiempo

continuo.

En (Wang et al., 2024) se abordan los observadores distribuidos con medición local de datos muestreados y comunicación aperiódica. Cada agente observador percibe información parcial del sistema a observar, pero al no satisfacer la condición de observabilidad, se comunica por períodos de muestreo con todos los observadores de cada nodo. En (Yang et al., 2023) se garantiza el rendimiento de la estimación de estado, aún cuando la comunicación puede fallar, desconectarse y reconstruirse con el tiempo; esto es posible si la unión de los enlaces de comunicación en intervalos finitos de tiempo hace que la topología de comunicación se conecte. Por lo que se enfatiza en el tipo de topología de comunicación que es de conmutación conectada en conjunto, lo que permite la estimación completa del sistema. Además, las ganancias diseñadas para el observador permiten atenuar el ruido en las mediciones y las perturbaciones externas, obteniendo un rendimiento deseado. En ocasiones, aunque cada observador tenga acceso a la medida local no es suficiente para proveer la observabilidad al sistema, sin embargo el conjunto de todas las mediciones en la red sí garantiza la observabilidad. Por lo que se debe asegurar que los observadores puedan intercambiar sus estimaciones sin que fallen los enlaces. Así, en (Yang et al., 2023) se considera un escenario donde el enlace de comunicación puede fallar, reconstruirse con el tiempo y además tener una comunicación conmutada, proponiendo un observador distribuido para un sistema LTI en presencia de fallas en los enlaces de comunicación presentando una topología de conmutación conectada en conjunto en intervalos de tiempo finito. Asegurando así que la comunicación en los observadores distribuidos no necesariamente tiene que ser continua, sino a través de una topología de conmutación conjunta. Además, en este trabajo se extiende a un escenario con perturbaciones externas y ruido en las mediciones, diseñando las ganancias del observador para un rendimiento robusto.

En los sistemas de control en red, los observadores distribuidos son cruciales para coordinar sensores, actuadores y estimadores de estado que operan de forma asíncrona. En este sentido, se han diseñado observadores distribuidos para sensores en red como en (Cao and Wang, 2023); (Han et al., 2018); (Rego, 2023); (Silm et al., 2020a); (Wang and Guay, 2024). Para la sincronización de arquitecturas maestro-esclavo se han desarrollado diferentes técnicas, como algoritmos evolutivos (Liu et al., 2007), observador de estados de modos deslizantes (Yang and Zhu, 2013), sincronización a través del acoplamiento de Huygens (Pena Ramirez et al., 2013), modelo de observador no lineal de Runge-Kutta (Beyhan, 2013), orden completo y observadores afines a la salida de orden reducido (Abdullah, 2013) y de entrada desconocida de los sistemas caóticos difusos de Takagi-Sugeno (González-Miranda, 2004). Las técnicas de sincronización basadas en observadores son más aplicables en condiciones en las que se desconocen todos los estados de los sistemas controlador y esclavo (Morgül and Solak, 1996) y observadores síncronos caóticos acoplados (CCS) y observadores síncronos adaptativos caóticos acoplados

(CCAS) (Hussain et al., 2021).

Como se ha podido revisar en el estado del arte existen diferentes técnicas o metodologías para lograr reunir la información proporcionada por los sensores y que ésta sea una sola señal suficiente para el sistema en estudio, cada una de estas técnicas tiene su grado de dificultad para implementarse, así como sus ventajas y desventajas, considerando las oportunidades que se tienen al utilizar observadores y que éstos permiten sincronizarse se utilizarán para la fusión de sensores de manera que lleguen a un consenso o sigan una trayectoria en común.

En los problemas de consenso de seguimiento de líder de una clase de sistemas multiagente no lineales de segundo orden, donde se supone que la información de velocidad no es medible, se ha presentado un novedoso protocolo de control de retroalimentación de salida aperiódicamente intermitente de modo que todos los seguidores lleguen a un consenso con el líder, en el que se construye un observador de estado distribuido para que cada seguidor observe el estado de velocidad. Con base en la teoría de la estabilidad de Lyapunov y algunas técnicas de análisis de matrices, se obtienen un par de condiciones suficientes para el consenso de seguimiento del líder del sistema multiagente no lineal en estudio, aunque el estado de velocidad no esté disponible (Luo et al., 2023). Los agentes en las redes actualizan sus estados en base al intercambio de información entre ellos. Si cada agente se ejecuta en un estado común, lo llamamos sistema multiagente que logra el consenso. En los últimos años, ha habido una enorme cantidad de investigaciones sobre el problema del consenso, y se han obtenido muchos resultados interesantes (Zhang and Tian, 2009).

La comunicación entre observadores locales o vecinos es uno de los puntos más importantes en los observadores distribuidos. Según (Zhou, 2023) la transmisión de comunicación muestreada es más práctica y puede reducir la carga de comunicación, por lo que utiliza el método de descomposición de detectabilidad u observabilidad que consiste en dividir en dos partes el estado completo: un subestado detectable que recupera las salidas locales y un subestado indetectable que recupera las salidas mediante el intercambio de información entre vecinos. La estimación entre los vecinos introduce dos funciones de Lyapunov diferentes en el análisis de convergencia. Basándose en la teoría de Lyapunov de los sistemas híbridos (Dolk et al., 2016), junto con el método de disparo por tiempo y el método de disparo por evento, se presentan condiciones suficientes para asegurar la convergencia exponencial de los sistemas de error.

Con la intención de reducir los tiempos de convergencia en los observadores distribuidos, algunos trabajos (Silm et al., 2017, 2020a; Ortega et al., 2020; Ge et al., 2022) tratan con observadores convergentes en tiempo finito o en tiempo fijo. (Ortega et al., 2020) logra la convergencia en tiempo finito, sin inyección de alta ganancia, y en la comunicación entre agentes utiliza el grafo con camino Hamiltoniano siendo menos restrictivo que los grafos de comunicación dirigidos fuertemente conectados. El algoritmo

que presenta tiene las características de ser robusto a perturbaciones externas y retrasos en la comunicación. Además, se proponen dos objetivos importantes: la reconstrucción de todo el estado en un nodo determinado y la omnisciencia, es decir, reconstrucción de todo el estado en cada nodo; sin embargo, este segundo objetivo es cuestionado por las grandes exigencias de intercambio de información. En (Ortega et al., 2022), utilizando la propiedad de observabilidad local de los agentes, con una operación de muestreo y retención o de suma finita, es posible estimar algebraicamente los parámetros de la trayectoria y también establecer el tiempo de convergencia asintótica o finita del observador para varios escenarios del grafo, incluidos los de tiempo variable, conmutación y con retardos de transmisión. Además, emplea una estrategia de consenso para reconstruir el vector de estados en cada agente tomando en cuenta distintos escenarios de la topología de grafos, con un grafo fuertemente conectado. Por otra parte, al igual que en la mayoría de la literatura que se revisó —a excepción de (Rego et al., 2020; Ge et al., 2022; Yang et al., 2023)— no trata el ruido en las mediciones.

En este punto, es importante destacar que las estrategias de estimación tradicionales se han basado predominantemente en esquemas centralizados, que aún son ampliamente utilizados en aplicaciones prácticas. Sin embargo, este enfoque presenta limitaciones fundamentales en sistemas de gran escala, donde las fallas locales pueden propagarse, causando inestabilidad global. Para enfrentar estos desafíos, se han desarrollado alternativas descentralizadas, como el enfoque propuesto por (Aghajanian et al., 2017), que emplea un observador de Luenberger para la estimación de estados. De esta manera, también se han desarrollado esquemas espacialmente distribuidos, dando lugar a arquitecturas más flexibles con comunicación cooperativa entre subsistemas que mejoran la estimación de estados en sistemas de gran escala (Han et al., 2018; Rodríguez Del Nozal et al., 2019a; Kim et al., 2019). Avances recientes (Zhang et al., 2023; Fioravanti et al., 2025) resuelven la estimación distribuida en tiempo continuo y discreto en grafos dirigidos con agentes intermitentes y admiten conmutación topológica asíncrona. Mientras que algunos trabajos resuelven el problema de salidas medidas muestreadas independientemente de esquemas continuos o discretos, persisten desafíos en las comunicaciones muestreadas (Liu and Huang, 2021; He and Huang, 2022, 2025).

Estudios recientes sobre estimación distribuida bajo comunicación no ideal han explorado protocolos disparados por eventos (Zhou, 2023), resiliencia a ciberataques (Jenabzadeh et al., 2025) y esquemas adaptativos (Zhu and Su, 2025a). Sin embargo, comúnmente manejan el muestreo y la comunicación simultáneamente mediante formulaciones basadas en Lyapunov (Wang and Guay, 2024), o dependen de desigualdades matriciales lineales (LMIs) complejas (Liu and Huang, 2021) y mecanismos adaptativos. Esta formulación conjunta dificulta aislar los efectos del muestreo multitasa de los de la comunicación de datos muestreados multitasa. El trabajo en (Wang and Guay, 2024) relaja las restricciones topológicas en la estimación distribuida pero aún asume disponi-

bilidad continua de la salida o integra el muestreo sin distinción. Como resultado, su aplicabilidad es limitada en sistemas con sensores de muestreo multitasa. Las estrategias disparadas por eventos [Zhou (2023)] se centran en decidir cuándo transmitir para ahorrar recursos, mientras que los protocolos adaptativos ajustan los parámetros en línea. También se han desarrollado estrategias de estimación resilientes para contrarrestar ciberataques como la inyección de datos falsos y la denegación de servicio en sistemas multiagente [Jenabzadeh et al. (2025)], garantizando la estabilidad bajo perturbaciones maliciosas. De manera similar, [Zhu and Su (2025a)] propone un observador distribuido adaptativo basado en eventos que opera bajo grafos dirigidos y entornos ruidosos, utilizando transformaciones de coordenadas para manejar subespacios no detectables. El trabajo en [Liu and Huang (2021)] sienta las bases para el control cooperativo con datos muestreados en sistemas lineales multiagente, mostrando que la regulación de salida es alcanzable bajo ciertas tasas de muestreo. Sin embargo, su enfoque unificado basado en LMI y su dependencia de la comunicación continua entre observadores limitan la escalabilidad en sistemas de gran escala con sensores heterogéneos y comunicación de datos muestreados multitasa.

A pesar de estos avances, persisten dos limitaciones en el estado del arte. En primer lugar, existe una desconexión entre los avances en mecanismos de comunicación activados por eventos para el control y consenso, y los específicos de los observadores distribuidos. Los esquemas robustos diseñados para grafos dirigidos [Wu et al. (2022)] no se han integrado plenamente con las arquitecturas de observación avanzadas. En segundo lugar, la bibliografía predominante [Tian et al. (2020); Zhou (2023); Xu et al. (2025); Zhuang et al. (2025)] opera bajo el supuesto de que las mediciones de salida están disponibles de forma continua. Esta premisa es insostenible en los sistemas digitales, donde los sensores proporcionan datos muestreados de forma inherente. La interacción entre el muestreo periódico de mediciones y la comunicación aperiódica desencadenada por eventos plantea retos de estabilidad y diseño que no se han explorado suficientemente.

En [Huang et al. (2022)], resume en su momento los avances y tendencias que tuvieron los observadores distribuidos hasta aproximadamente 2019, bosquejándolo en la Figura 1.1.

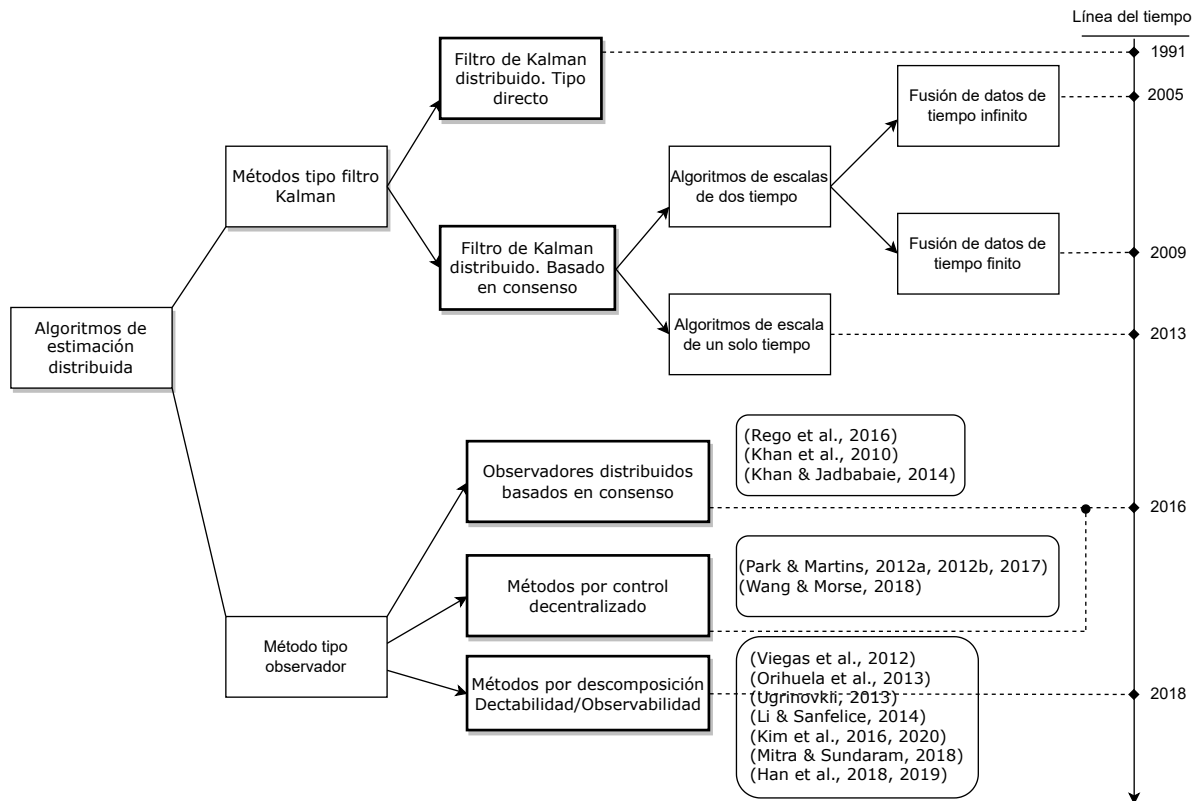


Figura 1.1: Clasificación de los algoritmos de estimación distribuida. Adaptada de (Huang et al., 2022)

1.3 Planteamiento del problema

Siguiendo la revisión de la literatura existente, se puede comentar de manera resumida que la estimación distribuida se lleva a cabo por un conjunto de observadores que colaboran entre ellos para alcanzar un objetivo definido, a través de una red de comunicación que influye de manera significativa en la convergencia del sistema. La mayoría de los conflictos se presentan precisamente en la comunicación, ya sea por retardos, fallas en los enlaces o diferentes intervalos de comunicación, por lo que se recomienda que el algoritmo aplicado para estas limitaciones considere una topología de grafo fuertemente conectado. Además, gran parte de los resultados reportados se enfocan en el objetivo de la omnisciencia, es decir, reconstruir el estado completo en cada nodo, lo cual se puede alcanzar fusionando las estimaciones independientes de los diferentes nodos a través de una ley de consenso. Cabe destacar que la mayoría de las referencias encontradas se centran en sistemas continuos o discretos, mientras que la estimación con dinámica continua y mediciones muestreadas no se ha investigado completamente. Por otra parte, se ha dejado de lado el impacto del ruido de medición en la estabilidad del sistema; al igual que el tratamiento de datos muestreados, el manejo del ruido en las mediciones constituye un área muy poco investigada en observadores

distribuidos, lo que abre la puerta para acercarse cada vez más a estimaciones más prácticas y reales.

Así como existen aplicaciones para resolver necesidades de la vida humana, también existen problemas por resolver. En áreas como los sistemas de seguimiento de objetivos, el monitoreo ambiental o el transporte inteligente tripulado y no tripulado, surgen conflictos que requieren atención. Con la intención de hacer una contribución considerable, se ha identificado un área de oportunidad en la parte de monitoreo, pues los sensores desempeñan un papel muy importante en la recolección de información en tiempo real. Estos han sido diseñados de diferentes tipos según la aplicación requerida, permitiendo que entre ellos se complementen y sean redundantes. Al requerir que trabajen en conjunto, surgen otros problemas, como el acoplamiento de señales cuando operan a diferentes tasas de muestreo, el trabajo en diferentes marcos de referencia, la pérdida de datos en el procesamiento de la información, el ruido en la medición, entre otros. Los observadores o estimadores de estado han sido ampliamente utilizados, principalmente cuando no se dispone de mediciones precisas o completas, o cuando se desea sustituir algún sensor. En este sentido, el diseño de sistemas robustos de estimación que permitan mantener lecturas con alto grado de confiabilidad es fundamental, a pesar de la presencia de ruido de medición, de la discrepancia entre los métodos de medición, de la diferencia de velocidades de muestreo de los sensores, de la asincronía entre las mediciones y de los problemas en la comunicación. Bajo un esquema multisensor con las características mencionadas, el desarrollo de esquemas de estimación de variables basados en observadores distribuidos requiere proponer algoritmos adecuados que garanticen la estabilidad y convergencia de la estimación.

1.4 Marco Teórico

En sistemas de gran escala o multiagente, surge la necesidad de emplear observadores de estado. Las arquitecturas distribuidas se presentan como una alternativa de solución para estos casos; sin embargo, enfrentan una condición restrictiva: la información disponible para cada nodo es inherentemente limitada. Por ello, los nodos deben intercambiar información con sus vecinos a través de la red de comunicación, buscando alcanzar un consenso que permita estimar el estado global, de modo que cada nodo pueda reconstruir el estado completo del sistema. A pesar de esta restricción, las arquitecturas distribuidas ofrecen ventajas como escalabilidad, tolerancia a fallos y menor carga computacional por nodo.

Para formular el problema, considérese un sistema lineal invariante en el tiempo

descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1.1}$$

con estado $x \in \mathbb{R}^n$ y salida $y \in \mathbb{R}^\rho$. La salida se distribuye entre N sensores, de modo que el nodo i mide

$$y_i = C_i x \in \mathbb{R}^{\rho_i},\tag{1.2}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1^T & \cdots & C_N^T \end{bmatrix}^T,\tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^N \rho_i = \rho.\tag{1.4}$$

Cada nodo puede intercambiar información con un subconjunto de otros nodos (sus vecinos) de acuerdo con una topología de red modelada por un grafo $\mathcal{G}$. El objetivo es que cada nodo i genere, a partir de su medición y_i y de la información recibida de sus vecinos, una estimación $\hat{x}_i(t)$ tal que

Definición 1 ([Park and Martins \(2012b\)](#)). *Un observador distribuido alcanza la omnisciencia asintóticamente si para todas las condiciones iniciales en $x(t)$ y $\hat{x}_i$ se tiene:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_i(t) - x(t)\| = 0\tag{1.5}$$

para todo $i \in \mathcal{V}$, es decir, la estimación de estado en cada nodo converge asintóticamente al estado real de la planta.

La dificultad central reside en que el par (A, C_i) que determina la información disponible para el nodo i es, en general, no observable. Esto significa que, trabajando en las coordenadas originales, no es posible diseñar una ganancia de realimentación de salida L_i que permita reconstruir el estado completo de forma independiente, pues la dinámica del error estaría gobernada por $A - L_i C_i$, cuya estructura no puede modificarse arbitrariamente para lograr observabilidad [Kim et al. \(2016\)](#); [Han et al. \(2018\)](#); [Kim et al. \(2019\)](#). Para superar esta limitación, se requiere un cambio de coordenadas que revele la estructura interna del sistema desde la perspectiva de cada sensor. Este cambio se materializa mediante una transformación que lleva el sistema a la forma canónica de observabilidad, como se desarrolla a continuación.

Condición de observabilidad conjunta

La viabilidad de que los nodos, mediante cooperación, estimen el estado completo x descansa en la observabilidad del sistema global, es decir, del par (A, C) . Esta condición

equivale a que la intersección de todos los subespacios no observables locales sea trivial [Kim et al. \(2016\)](#):

$$\bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}_i = \{0\}. \quad (1.6)$$

En términos de las matrices de bases ortonormales, la condición [\(1.6\)](#) implica que la matriz formada por la concatenación de las bases de las partes observables tiene rango completo de filas. Sea v_i la dimensión del subespacio observable del par (A, C_i) . Definiendo

$$\mathcal{O} = [O_1 \ O_2 \ \cdots \ O_N] \in \mathbb{R}^{n \times \sum_{i=1}^N (v_i)}, \quad (1.7)$$

se cumple que $\text{rango } \mathcal{O} = n$ [Han et al. \(2018\)](#); [Kim et al. \(2019\)](#). Esta propiedad garantiza que, bajo una topología de comunicaciones adecuadamente conectada [Olfati-Saber and Murray \(2004\)](#); [Ren \(2007\)](#), la información compartida entre los nodos permite reconstruir cualquier dirección del espacio de estados, incluyendo aquellas no observables para cada nodo individual.

Matriz de observabilidad global

Considérese la matriz de salida global obtenida mediante la concatenación vertical de las matrices locales:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho \times n},$$

donde $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$ y ρ_i es el número de salidas del nodo i . La matriz de observabilidad del par (A, C) se define como

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\rho \cdot n) \times n}. \quad (1.8)$$

El sistema global es observable si y solo si

$$\text{rango}(\mathcal{O}(A, C)) = n. \quad (1.9)$$

Esta condición de rango completo es equivalente a la intersección trivial [\(1.6\)](#) y al rango completo de la matriz $\mathcal{O} = [O_1 \ O_2 \ \cdots \ O_N]$ construida a partir de las bases ortonormales de los subespacios observables locales [Kim et al. \(2016\)](#); [Han et al. \(2018\)](#).

A continuación, se introducen los conceptos necesarios para el diseño de observadores distribuidos: la descomposición de observabilidad mediante transformaciones ortogonales y la teoría de grafos para modelar la red de comunicaciones.

Descomposición de observabilidad

Para cada nodo i , el par (A, C_i) puede no ser observable. Para revelar su estructura, se introduce el subespacio no observable.

El subespacio no observable del par (A, C_i) , denotado $\mathcal{U}_i$, se define como

$$\mathcal{U}_i = \bigcap_{l=1}^n \ker(C_i A^{l-1}). \quad (1.10)$$

El par (A, C_i) es observable si y sólo si $\mathcal{U}_i = \{0\}$.

Sea $n - v_i = \dim \mathcal{U}_i$, es decir, la dimensión del subespacio no observable. Se construye una matriz ortogonal $T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($T_i^T T_i = I_n$) tal que sus primeras v_i columnas formen una base ortonormal de $\mathcal{U}_i^\perp$ (el complemento ortogonal de $\mathcal{U}_i$) y las últimas $n - v_i$ columnas formen una base ortonormal de $\mathcal{U}_i$. Particionando T_i como

$$T_i = [O_i \quad U_i], \quad O_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-v_i)}, \quad U_i \in \mathbb{R}^{n \times v_i}, \quad (1.11)$$

se cumple $\text{im } O_i = \mathcal{U}_i^\perp$ y $\text{im } U_i = \mathcal{U}_i$.

Aplicando la transformación de coordenadas $\zeta_i = T_i^T x$, las matrices del sistema adoptan la forma canónica de observabilidad (descomposición de Kalman para observabilidad) [Luenberger \(1971\)](#); [Kim et al. \(2016\)](#):

$$T_i^T A T_i = \begin{bmatrix} A_{io} & 0 \\ A_{ir} & A_{iu} \end{bmatrix}, \quad C_i T_i = \begin{bmatrix} C_{io} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

donde $A_{io} \in \mathbb{R}^{(v_i) \times (v_i)}$, $A_{ir} \in \mathbb{R}^{v_i \times (v_i)}$, $A_{iu} \in \mathbb{R}^{n-v_i \times n-v_i}$, y $C_{io} \in \mathbb{R}^{p_i \times (v_i)}$. En esta representación:

- Ahora el par (A_{io}, C_{io}) es observable, por construcción; concentra toda la información del sistema que puede ser reconstruida desde la perspectiva del nodo i .
- La matriz A_{iu} describe la dinámica de la parte no observable, la cual no es influenciada directamente por la medición local y_i .
- El bloque nulo en $C_i T_i$ refleja que la salida local no tiene acceso a la parte no observable.

Esta descomposición permite diseñar el observador de manera estructurada: se asigna una ganancia L_{io} que actúe sobre la parte observable (estabilizando $A_{io} - L_{io} C_{io}$

si el sistema es observable, o simplemente ubicando los polos si se desea una dinámica específica), mientras que la parte no observable deberá estimarse mediante intercambio de información con los vecinos.

Grafo dirigido y matriz laplaciana

Un grafo dirigido ponderado se denota $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ es el conjunto de vértices, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de aristas dirigidas y $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]_{N \times N}$ es la matriz de adyacencia. La convención es la siguiente: $\alpha_{ij} > 0$ si y sólo si $(j, i) \in \mathcal{E}$ (el nodo i recibe información del nodo j), y $\alpha_{ij} = 0$ en caso contrario. Se excluyen lazos propios, es decir, $\alpha_{ii} = 0$ para todo i .

El conjunto de vecinos de entrada del agente i es $\mathcal{V}_i^{\text{in}} = \{j \in \mathcal{V} \mid (j, i) \in \mathcal{E}\}$. La matriz de grado de entrada $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ se define mediante

$$d_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i^{\text{in}}} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}. \quad (1.13)$$

La matriz laplaciana $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{N \times N}$ del grafo Γ se define como

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}. \quad (1.14)$$

Equivalentemente, sus elementos son

$$l_{ii} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}, \quad l_{ij} = -\alpha_{ij} \quad (i \neq j). \quad (1.15)$$

Por construcción, $\mathcal{L}$ satisface $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$, donde $\mathbf{1}_N = [1, \dots, 1]^T$.

Definición 2 (Grafo fuertemente conexo). *Un grafo dirigido Γ es **fuertemente conexo** si para todo par de nodos distintos $i, j \in \mathcal{V}$ existe un camino dirigido desde i hasta j (una secuencia de aristas $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$).*

Lema 1 (Lema 1 [Olfati-Saber and Murray \(2004\)](#); [Ren \(2007\)](#); [Han et al. \(2018\)](#)). *Sea Γ un grafo dirigido fuertemente conexo. Entonces existe un único vector fila positivo $g = [g_1, g_2, \dots, g_N]$ tal que*

$$g\mathcal{L} = 0 \quad y \quad g\mathbf{1}_N = N. \quad (1.16)$$

Defina $G := \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$. La matriz simétrica

$$\check{\mathcal{L}} := G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G \quad (1.17)$$

es semidefinida positiva, cumple $\mathbf{1}_N^T \check{\mathcal{L}} = 0$ y $\check{\mathcal{L}}\mathbf{1}_N = 0$. Además, $\check{\mathcal{L}}$ es la matriz laplaciana de un grafo no dirigido conexo, denominado el espejo del grafo balanceado $G\mathcal{L}$, que se

obtiene ajustando los pesos originales. Los valores propios de $\check{\mathcal{L}}$ pueden ordenarse como $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$.

Gracias a este lema, podemos medir el error global del sistema sumando los errores individuales de cada observador con ciertos pesos. La matriz $\check{\mathcal{L}}$ se comporta como si la red de comunicación fuera no dirigida, lo que ayuda a que todos los observadores se pongan de acuerdo en su estimación.

Este lema se emplea en el análisis de convergencia de los observadores distribuidos propuestos, ya que en los casos de esta tesis se utilizan grafos dirigidos.

1.5 Objetivos

Objetivo general

Diseñar una estrategia de estimación distribuida basada en observadores distribuidos con mediciones de salidas muestreadas y comunicación aperiódica para sistemas lineales.

Objetivos específicos

1. Diseñar un observador distribuido con mediciones de salidas muestreadas con retardo y comunicación continua.
2. Diseñar un observador sincronizado con mediciones de salidas muestreadas corrompidas por ruido.
3. Diseñar un observador distribuido con mediciones de salida muestreadas con comunicación aperiódica.
4. Diseñar un observador distribuido con mediciones de salidas muestreadas corrompidas por ruido con comunicación por eventos y retardos acotados en la comunicación.
5. Evaluar mediante simulaciones y datos reales el funcionamiento de los observadores propuestos.

1.6 Justificación

Actualmente los sistemas multisensor cuentan con una mayor atención en las investigaciones debido a la diversidad en sus aplicaciones. Los sistemas multisensor van a contar con sensores que estén configurados según la variable a medir, por lo que se puede tener sensores a diferentes tiempos de muestreo, en diferentes marcos de referencia, señales que estén sin sincronización y además mediciones corrompidas por el ruido.

Por otra parte, para la estimación de sus estados, existen diversas arquitecturas que van a permitir la fusión de datos, entre ellas, se encuentra la estimación de estados distribuidos que puede llevarse a cabo mediante filtros Kalman y sus variantes, así como por observadores, siendo estos los de nuestro interés por presentar menor complejidad en su estudio y ser otra alternativa para la fusión de datos con arquitectura distribuida. Actualmente, los sistemas estudiados se consideran ya sea en tiempo continuo, en tiempo discreto o continuos con comunicación discreta, y pocos trabajos han considerado diseñar un observador distribuido continuo discreto; el cual tiene la ventaja de considerar el sistema con dinámica continua y las salidas de medición muestreadas, lo que se ajusta mejor a escenarios reales donde las mediciones no son continuas. Además, en sistemas multisensor avanzados, el aumento en el número de sensores incrementa la complejidad de la red, especialmente cuando se consideran las diferencias en las características físicas de los dispositivos, se propone un enfoque sincronizado para atender las mediciones corrompidas por el ruido. De esta manera, el diseño de un observador continuo-discreto no solo responde a las limitaciones de muestreo en entornos reales, sino que también asegura la convergencia del sistema, y aplicabilidad en configuraciones distribuidas.

1.7 Alcance y Limitaciones

- Los sistemas a estudiar son LTI.
- Se está enfatizando que el tipo de salida es muestreada.
- Se considera el ruido en las mediciones.
- Se considerarán retardos en la medición, no en el sistema.

1.8 Organización de la Tesis

Esta tesis doctoral se organiza en cuatro capítulos, seguidos de las conclusiones generales y los anexos. La secuencia de capítulos responde a una progresión lógica: desde los fundamentos y el estado del arte (Capítulo 1), pasando por el diseño de observadores distribuidos con comunicación continua (Capítulo 2), hasta propuestas con comunicación periódica (Capítulo 3) y basada en eventos (Capítulo 4).

Capítulo 1 – Introducción. Presenta la motivación, el estado del arte, la problemática que aborda la tesis y los conceptos básicos necesarios para comprender el resto del trabajo.

Capítulo 2 – Observador distribuido con mediciones multitasa y retardo en la salida bajo comunicación continua. Se describe el diseño del observador cuando los nodos se comunican de manera continua. Además, se extiende el resultado a un observador

sincronizado considerando mediciones multitasa y ruido en la salida. Se incluyen dos casos de estudio: uno para el observador distribuido y otro para el observador sincronizado.

Capítulo 3 – Observador distribuido con mediciones multitasa y comunicación periódica. Se plantea el problema, se presenta el diseño del observador, se analiza su convergencia y se valida mediante un caso de estudio.

Capítulo 4 – Observador distribuido con mediciones a diferentes velocidades y comunicación disparada por eventos. Siguiendo la estructura de los capítulos anteriores, se incluye introducción, planteamiento del problema, diseño del observador, análisis de convergencia y casos de estudio.

Conclusiones – Se resumen las aportaciones de la tesis en función de cada objetivo alcanzado, y se discuten líneas de trabajo futuro y áreas de oportunidad.

Anexos – Contienen: (i) un caso de estudio con mediciones reales, (ii) un repositorio con los códigos desarrollados y (iii) un listado de las variables utilizadas en el cuerpo de la tesis.

Capítulo 2

Observador distribuido con mediciones multitasa y retardo en la salida

2.1 Introducción

El problema de la estimación distribuida de estados ha cobrado relevancia en aplicaciones con sensores espacialmente localizados, como aeronáutica, localización y redes eléctricas [Soares et al. \(2015\)](#); [Mitra and Sundaram \(2016\)](#); [He et al. \(2020\)](#); [Huang et al. \(2022\)](#); [Yingrong et al. \(2022\)](#). Dentro de las estrategias existentes, los observadores de estado distribuidos destacan frente a los filtros de Kalman distribuidos por reducir la carga computacional y facilitar la expansión del sistema [Rodríguez Del Nozal et al. \(2019a\)](#).

Un observador distribuido consiste en múltiples observadores locales que, al carecer de información completa por sí mismos, combinan sus mediciones con las estimaciones de sus vecinos mediante una red de comunicación para lograr una estimación completa del estado [Chen et al. \(2021c\)](#). Aunque se han desarrollado numerosos avances en este campo, la mayoría de los estudios se centran en los desafíos de comunicación [Tian et al. \(2020\)](#); [Tanaka et al. \(2022\)](#); [Bertollo et al. \(2022\)](#); [Zhu and Su \(2025b\)](#), asumiendo que las mediciones de salida están disponibles en tiempo continuo y son ideales, sin efectos de retardo. Sin embargo, en la práctica las salidas se muestrean periódicas o aperiódicas y los retardos son inevitables, afectando la estabilidad y el rendimiento [Silm et al. \(2020b\)](#); [Chen et al. \(2021c\)](#); [Ge et al. \(2022\)](#); [Fang and Zhu \(2024\)](#); [Torchiaro et al. \(2025\)](#).

Un aspecto poco tratado es que cada sensor puede tener su propia tasa de muestreo (escenario multitasa), ya sea síncrona o asíncrona, y que los retardos pueden afectar tanto a las mediciones como a la comunicación. Existen trabajos que consideran retardos en la comunicación [Silm et al. \(2020b\)](#); [Chen et al. \(2021c\)](#) o convergencia en tiempo fijo [Ge et al. \(2022\)](#), pero muy pocos abordan simultáneamente el muestreo multitasa y

los retardos múltiples en las mediciones de salida.

Motivado por lo anterior, este capítulo aborda el diseño de observadores distribuidos en tiempo continuo para sistemas lineales, considerando mediciones de salida muestreadas en condiciones multitasa (síncronas o asíncronas) y con retardos múltiples. La propuesta mantiene la comunicación continua entre nodos para lograr una estimación continua del estado completo. La originalidad radica en el uso de predictores del error de salida, que se actualizan cada vez que se recibe una nueva medición, permitiendo manejar de forma independiente la naturaleza del retardo y el intervalo de muestreo de cada sensor con restricciones de máximos permitidos. Este enfoque ha sido aplicado previamente en sistemas centralizados con múltiples salidas [Farza et al. \(2018\)](#); [Ramírez-Rasgado et al. \(2022b\)](#); [Bouraoui et al. \(2015\)](#), pero su extensión a observadores distribuidos no ha sido explorada.

La Figura 2.1 ilustra el esquema propuesto: observadores locales con acceso a una parte del sistema lineal comunicados según el grafo de comunicación dado, cada observador incorpora un predictor que minimiza el error de estimación durante los intervalos sin medición, a diferencia de los enfoques tradicionales basados únicamente en datos muestreados [He and Liu \(2024\)](#); [He et al. \(2020\)](#). La estructura resultante es similar al observador continuo de [Han et al. \(2018\)](#), pero reemplazando el término de error de observación por la variable que predice.

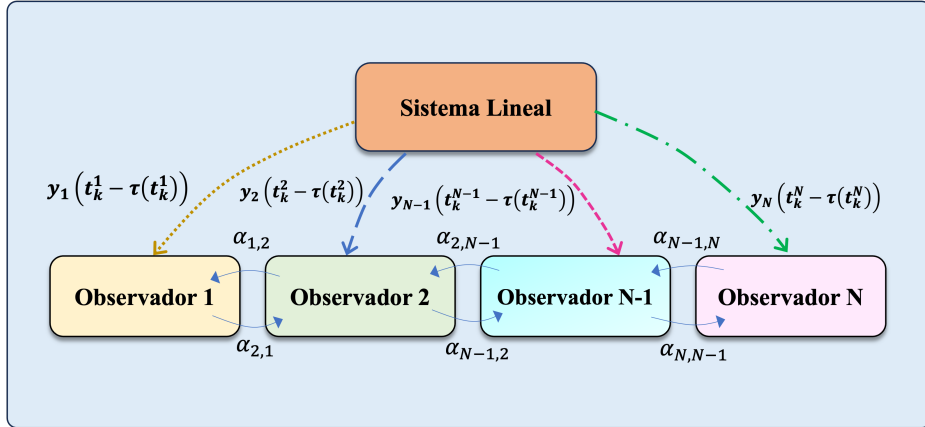


Figura 2.1: Esquema de estimación distribuida con mediciones de salida con múltiples muestreos bajo múltiples retardos.

De esta manera, se proporciona una solución alternativa que facilita la implementación digital en sistemas distribuidos, logrando una estimación fiable del sistema aún con mediciones de salidas con múltiples muestreos y posibles retardos.

2.1.1 Planteamiento del problema

Considere un sistema físico que es monitoreado por N sensores, representado por el siguiente modelo matemático lineal bajo mediciones de salida muestreadas multitasa que involucran retardos múltiples, el cual es más general que el considerado en [Wang and Guay \(2024\)](#); [Cao and Wang \(2023\)](#); [Han et al. \(2018\)](#):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ \bar{y}(t) = y(t - \tau(t)) = Cx(t - \tau(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz del sistema, $C \in \mathbb{R}^{\rho \times n}$ es la matriz de salida, y $y(t - \tau(t)) \in \mathbb{R}^\rho$ denota las mediciones de salida con retardos adquiridas en diferentes instantes de tiempo; $\tau(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \tau_{\max} + \Delta_{\max}]$ es una función continua a trozos, donde $\tau_{\max}$ es una constante positiva que representa el retardo máximo y $\Delta_{\max}$ es la cota superior del tiempo de muestreo máximo.

Dado que cada medición de salida muestreada está disponible en los instantes de tiempo t_k , correspondiente a la medición de salida muestreada en el instante $t_k - \tau(t_k)$, la salida muestreada y con retardo se representa de la siguiente manera:

$$\bar{y}(t) = y(t - (t - t_k + \tau(t_k))) = y(t_k - \tau(t_k)) = Cx(t_k - \tau(t_k)) \quad (2.2)$$

ya que la función continua $\tau(t)$ se denota como $\tau(t) = t - t_k + \tau(t_k)$.

Por lo tanto, la salida muestreada y con retardo puede partitionarse como:

$$\bar{y}(t) = y_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) = \begin{bmatrix} y_1(t_k^1 - \tau_1(t_k^1)) \\ y_2(t_k^2 - \tau_2(t_k^2)) \\ \vdots \\ y_N(t_k^N - \tau_N(t_k^N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 x(t_k^1 - \tau_1(t_k^1)) \\ C_2 x(t_k^2 - \tau_2(t_k^2)) \\ \vdots \\ C_N x(t_k^N - \tau_N(t_k^N)) \end{bmatrix} = C_i x(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) \quad (2.3)$$

donde $y_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ y $\sum_{i=1}^N \rho_i = \rho$, con $C_i \in \mathbb{R}^{\rho_i \times n}$. Esto significa que la medición parcial $y_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) = C_i x(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ es la medición con retardo disponible para el nodo sensor i . La salida con retardo del sistema está disponible solo en los instantes de muestreo que satisfacen $0 \leq t_0^i - \tau_i(t_0^i) < \dots < t_k^i - \tau_i(t_k^i) < t_{k+1}^i - \tau_i(t_{k+1}^i) < \dots$. Así, se tiene $\tau_k^i = (t_{k+1}^i - \tau_i(t_{k+1}^i)) - (t_k^i - \tau_i(t_k^i))$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\tau_k^i) = +\infty, i = 1, \dots, \rho$. Se asume que existe una cota superior para el diámetro de la partición de muestreo de cada nodo sensor i , $\Delta_{\max}^i > 0$, y una cota superior para el diámetro de la partición de muestreo $\Delta_{\max} > 0$ de la salida muestreada y con retardo $\bar{y}(t)$, es decir

$$0 < t_{k+1}^i - t_k^i = \Delta_i \leq \Delta_{\max}^i \leq \Delta_{\max}, \quad \forall k \geq 0, \quad i = 1, \dots, \rho \quad (2.4)$$

Además, se asume que cada retardo en los instantes de muestreo t_k^i , i.e., $\tau_i(t_k^i)$, son funciones acotadas de la siguiente manera:

$$|\tau_i(t_k^i)| \leq \tau_i \leq \tau_{\max}^i \leq \tau_{\max}, \quad \forall k \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (2.5)$$

donde $\tau_{\max}^i$ es la cota superior del retardo variable en el tiempo de cada nodo sensor i , y $\tau_{\max}$ representa el retardo máximo.

Por lo tanto, se obtiene, como en [Ramírez-Rasgado et al. \(2022b\)](#); [Ramírez-Rasgado et al. \(2021\)](#); [Bouraoui et al. \(2015\)](#):

$$0 < \Delta_{\max}^i + \tau_{\max}^i < \chi_i < \Delta_{\max} + \tau_{\max} < \chi. \quad (2.6)$$

Para el diseño del observador se considerarán los siguientes supuestos.

Suposición 1. *El par (A, C) es observable; sin embargo, una submatriz C_i de C puede no garantizar la observabilidad del sistema.*

Suposición 2. *El grafo $\mathcal{G}$ es dirigido y fuertemente conexo.*

Dado el sistema a estimar [\(2.1\)](#) y [\(2.3\)](#) y una estructura de comunicación $\mathcal{G}$ entre cada observador, se espera que la esquema del observador distribuido bajo muestreo multitasa y retardos múltiples logre la omnisciencia asintóticamente para todos los nodos $i \in \mathcal{V}$ [\(1.5\)](#).

En consecuencia, para abordar los desafíos que plantean las mediciones de salida muestreadas afectadas por múltiples retardos, se propone un rediseño de la estructura del observador distribuido en tiempo continuo. Este rediseño tiene como objetivo garantizar la omnisciencia asintótica de la red, permitiendo la estimación en tiempo continuo, como se presenta en [Han et al. \(2018\)](#).

2.1.2 Diseño del observador distribuido

Esta sección presenta el observador distribuido para el sistema lineal con muestreo multitasa y múltiples retardos [\(2.1\)](#) y [\(2.3\)](#). La estructura del observador distribuido se describe mediante el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\hat{x}_j(t) - \hat{x}_i(t)), i \in \mathcal{V} \\ \dot{\eta}_i(t) = -C_i L_i \eta_i(t), \quad t \in [t_k^i - \tau_i(t_k^i), t_{k+1}^i - \tau_i(t_{k+1}^i)), k \in \mathbb{N} \\ \eta_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) = C_i x(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) - C_i \hat{x}_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i)), t = t_k^i - \tau_i(t_k^i) \end{cases} \quad (2.7)$$

donde el valor de $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado estimado del nodo observador i ; α_{ij} es el elemento (i, j) -ésimo de la matriz de adyacencia $\mathcal{A}$, que está relacionada

con la red de comunicación; $\gamma \in \mathbb{R}$ es una ganancia de acoplamiento a diseñar; y $L_i \in \mathbb{R}^{n \times \rho_i}$ y $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de ganancia a diseñar. La función $\eta_i(t)$ es continua en el intervalo de tiempo $[t_k^i - \tau_i(t_k^i), t_{k+1}^i - \tau_i(t_{k+1}^i))$, el cual se establece en cada instante de muestreo $t_k^i - \tau_i(t_k^i)$ utilizando únicamente la medición de salida muestreada $y_i(t_k^i - \tau_i(t_k^i))$.

El error de estimación del observador del nodo i -ésimo se define como sigue $\epsilon_i(t) := \hat{x}_i(t) - x(t)$, combinando (2.1) con (2.7), se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) \quad (2.8)$$

Definiendo $z_i(t)$ como una variable auxiliar,

$$z_i(t) = C_i\epsilon(t) - \eta_i(t) \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8),

$$\dot{\epsilon}_i(t) = (A - L_i C_i) \epsilon_i(t) + L_i z_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t))$$

donde $\epsilon(t) := \text{col}(\epsilon_1^T(t), \epsilon_2^T(t), \dots, \epsilon_N^T(t))$ es el vector conjunto de errores. Por lo tanto, se puede escribir el error global:

$$\dot{\epsilon}(t) = \Lambda \epsilon(t) + L z(t) - \gamma \bar{W} (\mathcal{L} \otimes I_n) \epsilon(t) \quad (2.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{diag} \{A - L_1 C_1, \dots, A - L_N C_N\}, \\ L &= \text{diag} \{L_1, \dots, L_N\}, \\ z(t) &= \text{diag} \{z_1(t), \dots, z_N(t)\}, \\ \bar{W} &= \text{diag} \{W_1, \dots, W_N\}. \end{aligned}$$

Nota 1. Dado que (A, C_i) puede no ser observable o detectable, se requiere una transformación ortogonal para lograr la observabilidad del par (A, C_i) . Siguiendo el enfoque de Han et al. (2018) y Kim et al. (2016), se define una matriz ortogonal T_i (es decir, $T_i T_i^T = I_n$) para $i \in \mathcal{V}$. Luego, las matrices A y C_i se transforman mediante la transformación de espacio de estados T_i dados en (1.12).

Los lemas que se presentan a continuación se utilizarán para garantizar la convergencia del observador propuesto.

Lema 2 (Han et al. (2018)). Vinculando la matriz laplaciana $\mathcal{L}$ al grafo dirigido

fuertemente conexo $\mathcal{G}$, para todo $g_i > 0, i \in \mathcal{V}$, es necesario tener $\psi > 0$ tal que

$$T^T \left(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n \right) T + \hat{R} > \psi I_{nN} \quad (2.11)$$

donde $\check{\mathcal{L}}$ se describe en el lema 1. T es una matriz diagonal con entradas $T_1, \dots, T_N$, y $\hat{R}$ es una matriz diagonal cuyos elementos están determinados por r_i .

Lema 3 (Han et al. (2018)). La estructura de observador distribuido (2.7) garantiza omnisciencia asintóticamente. Además, todas las dinámicas de error (2.10) convergen a cero con una tasa de decaimiento de al menos μ , considerando que existen matrices definidas positivas $P_{io} \in \mathbb{R}^{v_i \times v_i}$, $P_{iu} \in \mathbb{R}^{(n-v_i) \times (n-v_i)}$, y una matriz $Q_i \in \mathbb{R}^{v_i \times \rho_i}$ tales que

$$\begin{bmatrix} \Psi_i + \frac{\gamma}{g_i} r_i I_{v_i} & A_{ir}^T P_{iu} \\ P_{iu} A_{ir} & P_{iu} A_{iu} + (P_{iu} A_{iu})^T + 2\mu P_{iu} \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{g_i} \psi I_n < 0, \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2.12)$$

donde $\Psi_i := P_{io} A_{io} + A_{io}^T P_{io} - Q_i C_{io} - C_{io}^T Q_i^T + 2\mu P_{io}$, así, las matrices de ganancia del observador distribuido (2.7) son

$$L_i := T_i \begin{bmatrix} L_{io} \\ 0 \end{bmatrix}, W_i := T_i \begin{bmatrix} P_{io}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{iu}^{-1} \end{bmatrix} T_i^T \quad (2.13)$$

donde $L_{io} = P_{io}^{-1} Q_i, i \in \mathcal{V}$.

Lema 4 (Ramírez-Rasgado et al. (2022b)). Considere una función diferenciable $v : t \in [t_0 - \delta(t), +\infty[\mapsto v(t) \in \mathbb{R}^+$, donde $t_0, \delta(t) \geq 0$, por lo tanto, la función $v(t)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\dot{v}(t) \leq -a v(t) + b \int_{t-\delta(t)}^t v(s) ds, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.14)$$

donde $a > 0, b > 0$ y si

$$\frac{b\tau_M}{a} < 1. \quad (2.15)$$

entonces, la función v tiene una convergencia exponencial a cero, es decir

$$v(t) \leq (1 + \delta(a - \sigma(\delta(t)))) e^{-\sigma(\delta(t))(t-t_0)} v(t_0) \quad (2.16)$$

con

$$0 < \sigma(\delta(t)) = (a - b\delta(t)) e^{-a\delta(t)} \leq a. \quad (2.17)$$

Sobre la base de lo anterior, se propone el siguiente teorema:

Teorema 1. Dado el sistema observable (2.1) y (2.3) y un grafo dirigido fuertemente conexo $\mathcal{G}$, existe una constante positiva $\chi > 0$ tal que la cota superior $(\tau_{\max}^i + \Delta_{\max}^i)$ de

cada observador i satisface que

$$\tau_{\max} + \Delta_{\max} < \chi \quad (2.18)$$

y también se satisface $\mu > 0$, entonces el observador distribuido bajo muestreo multitasa y múltiples retardos (2.7) alcanza la omnisciencia asintótica (1.5), y el sistema de error es estable, lo cual está dado por:

$$\|\epsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\sigma(d_{\max})(t-t_0)} (1 + d_{\max}(\mathbf{a} - \sigma(d_{\max})) |\epsilon(0)|) \quad (2.19)$$

donde $d_{\max} = \Delta_{\max} + \tau_{\max}$, $\mathbf{a} = 2\mu$, $\mathbf{b} = 2(G \otimes I_n) |L| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi$ y

$$\sigma(d_{\max}) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}d_{\max}) e^{-\mathbf{a}d_{\max}},$$

además, realizando los siguientes pasos:

1. Encontrar una matriz ortogonal T_i para todo $i \in \mathcal{V}$ tal que el par (A_{io}, C_{io}) sea observable:

$$T_i^T A T_i = \begin{bmatrix} A_{io} & 0 \\ A_{ir} & A_{iu} \end{bmatrix}, \quad C_i T_i = \begin{bmatrix} C_{io} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2. Calcular el vector fila positivo $g = [g_1, \dots, g_N]$ tal que $g\mathcal{L} = 0$ y $g\mathbf{1}N = N$.
3. Calcular $\psi > 0$, proponiendo $r_i = 1$. De manera que

$$T^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)T + \hat{R} > \psi I_{nN} \quad (2.21)$$

se cumpla.

4. Calcular $\gamma > 0$ para todo $i \in \mathcal{V}$

$$A_{iu} + A_{iu}^T - \left(\frac{\gamma}{g_i} \psi - 2\mu \right) I_{n-v_i} + \frac{1}{\frac{\gamma}{g_i} \psi - 2\mu} A_{ir} A_{ir}^T < 0 \quad (2.22)$$

5. Calcular L_{io} tal que los valores propios de $A_{io} - L_{io}C_{io}$ converjan a la región $s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < -\mu$.
6. Calcular las matrices de ganancia L_i y W_i para $i \in \mathcal{V}$ tales que

$$\begin{bmatrix} \Psi_i + \frac{\gamma}{g_i} r_i I_{v_i} & A_{ir}^T P_{iu} \\ P_{iu} A_{ir} & P_{iu} A_{iu} + (P_{iu} A_{iu})^T + 2\mu P_{iu} \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{g_i} \psi I_n < 0, \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2.23)$$

donde $\Psi_i := P_{io}A_{io} + A_{io}^T P_{io} - Q_i C_{io} - C_{io}^T Q_i^T + 2\mu P_{io}$

$$L_i := T_i \begin{bmatrix} L_{io} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_i := T_i \begin{bmatrix} P_{io}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{iu}^{-1} \end{bmatrix} T_i^T \quad (2.24)$$

donde $L_{io} = P_{io}^{-1} Q_i$, $i \in \mathcal{V}$. Se obtiene lo siguiente:

$$P_i := T_i \begin{bmatrix} P_{io} & 0 \\ 0 & P_{iu} \end{bmatrix} T_i^T, \quad P_i > 0 \quad (2.25)$$

así, el observador (2.7) converge asintóticamente con una tasa de decrecimiento de al menos μ .

2.1.3 Análisis de estabilidad

Demostración. Considere la función candidata de Lyapunov para el sistema de error (2.10):

$$V(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N, t) := \sum_{i=1}^N g_i \epsilon_i^T(t) P_i \epsilon_i(t) \quad (2.26)$$

donde la matriz P_i está dada por (2.25).

La derivada temporal de $V(\epsilon, t) = V(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N, t)$ a lo largo de las trayectorias de $\epsilon(t)$ se obtiene como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon(t), t) = & \epsilon^T(t) \left((G \otimes I_n) (P\Lambda + \Lambda^T P) \right) \epsilon(t) \\ & - \gamma \epsilon^T(t) (P\bar{W} (G\mathcal{L} \otimes I_n) + (\mathcal{L}^T G \otimes I_n) \bar{W}^T P) \epsilon(t) \\ & + (G \otimes I_n) (\epsilon(t)^T PLz(t) + z^T(t) L^T P \epsilon(t)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

con $P = \text{diag}\{P_1, \dots, P_N\}$. Dado que la matriz W_i en (2.13) se define como $W_i = P_i^{-1}$, se sigue que $\bar{W} = P^{-1}$. En consecuencia, (2.27) se convierte en

$$\dot{V}(\epsilon(t), t) = \epsilon^T(t) \left((G \otimes I_n) (P\Lambda + \Lambda^T P) - \gamma (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) \right) \epsilon(t) + (G \otimes I_n) (2\epsilon^T(t) PLz(t)) \quad (2.28)$$

donde $\check{\mathcal{L}} = G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G$. Por otro lado, se analiza la función auxiliar $z(t)$ dada en (2.9). Nótese que $z(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) = 0$. Además, la derivada temporal de $z(t)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & C \left((A - LC) \epsilon(t) + Lz(t) + \gamma \bar{W} (\mathcal{L} \otimes I_n) \epsilon(t) \right) + CL e^{-CL(t - (t_k^i - \tau_i(t_k^i)))} C \epsilon(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) \\ = & CA \epsilon(t) + C\gamma \bar{W} (\mathcal{L} \otimes I_n) \epsilon(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Integrando (2.29) desde $\delta_i(t) = t - (t_k^i - \tau_i(t_k^i))$ hasta t , y considerando además que $z(t_k^i - \tau_i(t_k^i)) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
z(t) &= \int_{t-\delta_i(t)}^t (CA\epsilon(s) + C\gamma P^{-1}(\mathcal{L} \otimes I_n)\epsilon(s)) ds \\
&= (CA + C\gamma P^{-1}(\mathcal{L} \otimes I_n)) \int_{t-\delta_i(t)}^t \epsilon(s) ds
\end{aligned} \tag{2.30}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|z(t)\| &\leq \left\| (CA + C\gamma P^{-1}(\mathcal{L} \otimes I_n)) \int_{t-\delta_i(t)}^t \epsilon(s) ds \right\| \\
&\leq (\|C\|\|A\| + \|C\|\|\gamma\|P^{-1}\|(\mathcal{L} \otimes I_n)\|) \int_{t-\delta_i(t)}^t \|\epsilon(s)\| ds \\
&\leq \xi \int_{t-\delta_i(t)}^t \|\epsilon(s)\| ds
\end{aligned} \tag{2.31}$$

donde $\xi = \|C\|\|A\| + \|C\|\|\gamma\|P^{-1}\|(\mathcal{L} \otimes I_n)\|$. Así, de la ecuación (2.28)

$$\|2\epsilon^T(t)PLz(t)\| \leq 2\|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi \int_{t-\delta_i(t)}^t \sqrt{V(\epsilon(s), s)} ds \times \sqrt{V(\epsilon(t), t)} \tag{2.32}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\epsilon(t), t) &\leq \epsilon^T(t) \left((G \otimes I_n) (P\Lambda + \Lambda^T P) - \gamma (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) \right) \epsilon(t) \\
&\quad + 2(G \otimes I_n) \|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi \int_{t-\delta_i(t)}^t \sqrt{V(\epsilon(s), s)} ds \times \sqrt{V(\epsilon(t), t)}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por otro lado, a partir de las desigualdades (2.11) y (2.12) de los Lemas 2 y 3 respectivamente, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\text{diag}\{H_1, \dots, H_N\} - T^T \gamma (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) T < 0, \tag{2.34}$$

donde $H_i = g_i \begin{bmatrix} \Psi_i & A_{ir}^T P_{iu} \\ P_{iu} A_{ir} & \text{Sym}(P_{iu} A_{iu}) + 2\mu P_{iu} \end{bmatrix}$, $i \in \mathcal{V}$, con Ψ_i definido en el Lema 3. Dado que $L_{io} = P_{io}^{-1} Q_i$, premultiplicando y postmultiplicando la desigualdad (2.34) por T y T^T , esto resulta en

$$(G \otimes I_n) (P\Lambda + \Lambda^T P + 2\mu P) - \gamma (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) < 0, \tag{2.35}$$

Por lo tanto, del análisis anterior, se garantiza que

$$(G \otimes I_n) (P\Lambda + \Lambda^T P + 2\mu P) - \gamma (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) < -2\mu V(\epsilon(t), t). \tag{2.36}$$

Basándose en el análisis y considerando el Lema [4](#), se sigue que

$$\dot{V}(\epsilon(t), t) \leq -2\mu V(\epsilon(t), t) + 2(G \otimes I_n) \|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi \int_{t-\delta_i(t)}^t \sqrt{V(\epsilon(s), s)} ds \times \sqrt{V(\epsilon(t), t)} \quad (2.37)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\epsilon(t), t)} \leq -a \sqrt{V(\epsilon(t), t)} + b \int_{t-\delta_i(t)}^t \sqrt{V(\epsilon(s), s)} ds \quad (2.38)$$

donde $a = \mu$ y

$$b = (G \otimes I_n) \|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Lema [4](#), se sigue que

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\epsilon(t))} &\leq (1 + \delta(t)(a - \sigma(\delta(t)))) e^{-\sigma(\delta(t))(t-t_0)} \sqrt{V(\epsilon(0), t)} \\ &\leq (1 + d_{\max}(a - \sigma(d_{\max})) e^{-\sigma(d_{\max})(t-t_0)} \sqrt{V(\epsilon(0), t)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde $d_{\max} = \Delta_{\max} + \tau_{\max}$ y

$$0 < \sigma(d_{\max}) = (a - b d_{\max}) e^{-a d_{\max}}. \quad (2.40)$$

y se supone que los valores máximos del tiempo de muestreo $\Delta_{\max}$ y el retardo $\tau_{\max}$ satisfacen la siguiente condición $\Delta_{\max} + \tau_{\max} = d_{\max} < \frac{a}{b} = \chi$, es decir, $\frac{b d_{\max}}{a} < 1$ o explícitamente

$$d_{\max} \frac{(G \otimes I_n) \|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi}{\mu} < 1 \quad (2.41)$$

donde el valor máximo $d_{\max}$ satisface la siguiente condición

$$d_{\max} < \frac{a}{b} = \frac{\mu}{(G \otimes I_n) \|L\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \xi} \triangleq \chi \quad (2.42)$$

Volviendo a los términos del error de estimación $\epsilon(t)$, se puede establecer que

$$\|\epsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\sigma(d_{\max})(t-t_0)} (1 + d_{\max}(a - \sigma(d_{\max})) \|\epsilon(0)\| \quad (2.43)$$

De la ecuación [\(2.43\)](#), se observa que el error de estimación $\epsilon(t)$ disminuye asintóticamente a una región cercana a cero a una tasa exponencial. Entonces, con los parámetros calculados como ψ , γ , P_{iu} , P_{io} y aquellos calculados en los pasos 3 y 6 del Teorema [1](#), se garantiza que se satisface la desigualdad [\(2.12\)](#). De esta manera, el observador distribuido con mediciones de salida muestreadas y con retardos [\(2.7\)](#) con las matrices

de ganancia calculadas L_i , W_i y γ logra la omnisciencia asintótica (1.5) con una tasa de decaimiento de al menos μ , como se expresa en (2.36). $\square$

2.1.4 Caso de estudio. Satélites en LEO.

En esta sección se presenta un ejemplo numérico para mostrar cómo se comporta el observador distribuido que se propone. El ejemplo consiste en la estimación de seguimiento de satélites perseguidores que se mueven en órbita terrestre baja (LEO). Para que estos satélites funcionen bien, necesitan conocer su órbita con precisión y en tiempo real. Esta determinación precisa de la órbita depende casi por completo del sistema de posicionamiento global. Sin embargo, no es nada sencillo obtener siempre información orbital estable y de alta precisión en tiempo real desde un satélite en órbita baja, porque las mediciones que estos satélites logran capturar varían según reciben o transmiten señales Yang et al. (2020). Por eso, para determinar la posición orbital en tiempo real desde el satélite, hay que encontrar un equilibrio entre la eficiencia computacional, los recursos del procesador a bordo y la precisión que se necesita. Normalmente, las mediciones hechas a bordo tienen más errores que las terrestres, y además suelen ser discontinuas; pueden aparecer muchos valores atípicos. Por esta razón, lo habitual es aplicar un modelo dinámico junto con una técnica de estimación para mejorar la fiabilidad y estabilidad de las soluciones orbitales en tiempo real. Un ejemplo es el trabajo de Li et al. (2022), donde se propone un filtro de Kalman para la determinación precisa de la órbita en tiempo real.

El problema es que el procesador a bordo tiene una capacidad limitada, lo que restringe cuántas mediciones se pueden procesar. Además, cuando las mediciones son escasas o se pierde frecuentemente el seguimiento del satélite, tratar de estimar muchas mediciones junto con los parámetros del modelo dinámico puede hacer que las soluciones se vuelvan singulares. En definitiva, es clave considerar ese equilibrio entre la capacidad del procesador a bordo y la precisión con la que se estiman las variables que no se miden directamente.

Para este ejemplo, se supone que el satélite objetivo actúa como referencia y se mueve en una órbita circular de radio r_0 , con $\dot{\omega}_0 = 0$ y $\omega_0 = \sqrt{g/r_0^3}$, donde g es el parámetro gravitacional estándar. La dinámica relativa de los satélites perseguidores con respecto al satélite objetivo se linealiza usando el siguiente sistema de referencia. Se elige el sistema de coordenadas derecho (orientado a la derecha), con el origen en el centro de masa del satélite objetivo. El eje- x es tangente a la órbita, el eje- y apunta a lo largo del vector de posición que va desde el centro de la Tierra hasta el satélite objetivo, y el eje- z está alineado con el vector de momento angular orbital, es decir, perpendicular al plano de la órbita del satélite objetivo. Las ecuaciones linealizadas de la dinámica relativa del satélite objetivo son las conocidas ecuaciones de Clohessy-Wiltshire Clohessy

and Wiltshire (1960); Alfriend et al. (2009).

$$u_x(t) = \ddot{p}_x(t) - 2\omega_0\dot{p}_y(t) \quad (2.44)$$

$$u_y(t) = \ddot{p}_y(t) + 2\omega_0\dot{p}_x(t) - 3\omega_0^2 p_y(t) \quad (2.45)$$

$$u_z(t) = \ddot{p}_z(t) + \omega_0^2 p_z(t) \quad (2.46)$$

Las componentes de posición del satélite objetivo están representadas por $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$; $u_x(t)$, $u_y(t)$, $u_z(t)$ representan las entradas de control; y ω_0 denota la tasa angular del satélite objetivo. Es conveniente expresar las ecuaciones diferenciales lineales (2.44)-(2.46) en forma de espacio de estados Chen et al. (2023). Se define el vector de estado $\zeta(t) = [\bar{\zeta}_1(t) \ \bar{\zeta}_2(t)]^T$, donde $\bar{\zeta}_1(t)$ contiene las componentes de posición $\bar{\zeta}_1(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$, y $\bar{\zeta}_2(t)$ contiene las componentes de velocidad $\bar{\zeta}_2(t) = [\dot{p}_x(t) \ \dot{p}_y(t) \ \dot{p}_z(t)]^T$, y $u(t) = [u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t)]^T$

$$\dot{\zeta}(t) = A\zeta(t) + Bu(t) \quad (2.47)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 & 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

donde la velocidad angular del satélite objetivo ω_0 se fija en 0.001 rad/s. Además, la entrada de control se define como

$$u(t) = [-F_1 \quad -F_2] \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_1(t) - \varrho_1(t) \\ \bar{\zeta}_2(t) - \varrho_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

donde $\varrho_1(t) = [\sin(2\pi t), \ \cos(2\pi t), \ \sin(2\pi t) + 8]^T$ y $\varrho_2(t) = \dot{\varrho}_1(t)$ definen la trayectoria deseada. Las matrices F_1 y F_2 son las matrices de ganancia de realimentación y se definen como sigue:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 27.0750 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4150 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6100 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 10.4500 & 0.0020 & 0 \\ -0.0020 & 4.7500 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7500 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Suponga que las mediciones de los sensores son $\bar{y}_1(t) = p_x(t_k^1 - \tau_1(t_k^1))$, $\bar{y}_2(t) =$

$p_y(t_k^2 - \tau_2(t_k^2))$ y $\bar{y}_3(t) = p_z(t_k^3 - \tau_3(t_k^3))$, las cuales son muestreadas y con retardos; además, reconociendo que las velocidades típicamente no son medibles, por lo tanto, la salida muestreada y con retardos se denota de la siguiente manera:

$$\bar{y}(t) = [\bar{y}_1(t) \quad \bar{y}_2(t) \quad \bar{y}_3(t)]^T = C\zeta(t) \quad (2.51)$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

De acuerdo con (2.47) y (2.51), este sistema adopta las formas que se ven en (2.1) y (2.3). Así que podemos comprobar sin problemas si el enfoque que proponemos funciona bien.

Ahora bien, el grafo fuertemente conexo que se muestra en la Figura 2.2 indica que los Observadores 1 y 3 pueden obtener información del Observador 2, y que el Observador 2 puede recibir información de los otros dos observadores locales.

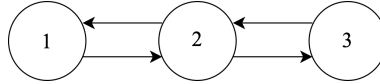


Figura 2.2: Grafo de comunicación entre nodos.

La matriz laplaciana asociada a este grafo es:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Para calcular las ganancias L_1 , L_2 , L_3 , W_1 , W_2 y W_3 , primero es necesario seguir una serie de pasos preliminares. Estos pasos consisten en calcular ciertos valores que después se usarán en la ecuación (2.24).

Antes de continuar, se recuerda que la dimensión del estado del sistema es 6. Por lo tanto, para que un par (A, C_i) sea completamente observable, su matriz de observabilidad debe tener rango 6.

Ahora bien, se define $\mathcal{O} = \text{obsv}(A, C)$ y $\mathcal{O}_i = \text{obsv}(A, C_i)$ como las matrices de observabilidad de los pares (A, C) y (A, C_i) , respectivamente. En este caso, se calculan sus rangos y se obtiene:

$$\text{rango}(\mathcal{O}_1) = 4, \quad \text{rango}(\mathcal{O}_2) = 3, \quad \text{rango}(\mathcal{O}_3) = 2.$$

Es decir, ninguno de los pares locales (A, C_i) alcanza el rango completo 6; por lo tanto, cada observador local por separado no es observable.

Sin embargo, de manera conjunta (es decir, usando todas las salidas) el sistema sí es observable, ya que el par (A, C) tiene una matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ con rango completo, igual a 6.

Entonces, debido a que la observabilidad local no se cumple, es necesario aplicar transformaciones matriciales para resolver esta limitación. Para ello, considere las siguientes matrices ortogonales T_i calculadas conforme a la subsección 1.4:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las nuevas matrices transformadas, según la ecuación (2.20), $\bar{A}_i = T_i^T A T_i$ y $\bar{C}_i = C_i T_i$, se obtienen

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0020 & 0 & 3 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \times 10^{-6} & 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{-6} & 0 & -0.0020 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{C}_2 = \bar{C}_3$$

De donde obtenemos, A_{io} , A_{iu} , A_{ir} y C_{io} , como se muestra en (2.20). Para el cálculo de γ

en (2.22), se propone un valor de $\mu = 0.01$, mientras que ψ se determina usando (2.21), obteniendo $\psi = 0.0820$ y $\gamma = 2.021$. Estos valores se utilizan luego en (2.23), a partir de la cual se calculan los parámetros L_{io} , P_{io} y P_{iu} . Posteriormente, estos parámetros se emplean en (2.24) para determinar las ganancias L_1 , L_2 , L_3 , W_1 , W_2 y W_3 . Entonces, las matrices de ganancia del observador local resultantes son:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.3590 \\ 433.8611 \\ 0 \\ 0.1400 \\ 0.5591 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0007 \\ 0 \\ -11.2996 \\ 1.5786 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8952 \\ 0 \\ 0 \\ 1.3059 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1.94 \times 10^{-8} & 3.69 \times 10^{-6} & 0 & 1.15 \times 10^{-9} & 4.74 \times 10^{-9} & 0 \\ 3.69 \times 10^{-6} & 0.03 & 0 & 7.15 \times 10^{-6} & 3.22 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0 & 2.61 \times 10^{-4} \\ 1.15 \times 10^{-9} & 7.15 \times 10^{-6} & 0 & 2.31 \times 10^{-9} & 9.22 \times 10^{-9} & 0 \\ 4.74 \times 10^{-9} & 3.29 \times 10^{-5} & 0 & 9.22 \times 10^{-9} & 4.14 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 2.61 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 1.04 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.36 \times 10^{-8} & 0 & -9.94 \times 10^{-8} & 1.38 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & -9.94 \times 10^{-8} & 0 & 2.86 \times 10^{-6} & -2.84 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 1.38 \times 10^{-9} & 0 & -2.84 \times 10^{-7} & 3.97 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0.0166 & 0 & 0 & 3.57 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.01 & 0 & 0.02 & -9.04 \times 10^{-4} & 0 \\ 0.01 & 0.96 & 0 & 9.93 \times 10^{-4} & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 3.28 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 1.12 \times 10^{-8} \\ 0.02 & 9.93 \times 10^{-4} & 0 & 3.58 \times 10^{-4} & 1.48 \times 10^{-6} & 0 \\ -9.04 \times 10^{-4} & 0.02 & 0 & 1.48 \times 10^{-6} & 3.73 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.12 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 3.30 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

Para las simulaciones, se definieron las siguientes condiciones iniciales de posición, las cuales se resumen en la Tabla 2.1. En todos los casos, tanto para el sistema real como para cada observador local, las condiciones iniciales de velocidad se consideraron nulas, es decir, $\dot{p}_x(0) = \dot{p}_y(0) = \dot{p}_z(0) = 0$.

Para evaluar la efectividad del método propuesto bajo condiciones variables de mediciones de salida muestreadas multitasa y con retardos variables, se consideraron los parámetros que se muestran en la Tabla 2.2. Cabe mencionar que los retardos considerados en la prueba son constantes en el tiempo; por esta razón, se denotan como

Tabla 2.1: Condiciones iniciales de posición

Estado	p_x $3 \times 10^{-3} [\text{m}]$	p_y $3 \times 10^{-3} [\text{m}]$	p_z $3 \times 10^{-3} [\text{m}]$
$\zeta(0)$	50	40	30
$\hat{\zeta}_1(0)$	45	36	27
$\hat{\zeta}_2(0)$	100	80	60
$\hat{\zeta}_3(0)$	-125	-100	-75

$$\tau_i(t_k^i) = \tau_i.$$

Estas configuraciones tuvieron como objetivo simular escenarios con retardos significativos, los cuales son típicos en aplicaciones prácticas de mediciones muestreadas. Para la evaluación del observador distribuido propuesto se consideraron dos escenarios principales: en el primer escenario se utilizaron los valores base, mientras que en el segundo escenario se incrementaron tanto los períodos de muestreo como los retardos de medición, con los valores también indicados en la Tabla 2.2. Cada configuración experimental generó gráficas de simulación que ilustran el comportamiento del observador distribuido con salidas muestreadas multitasa que involucran múltiples retardos. La primera serie de simulaciones, correspondiente al primer escenario, se muestra en la Figura 2.3, donde se presenta la estimación de las variables de estado por cada observador: $\hat{\zeta}_i^1(t) = \hat{p}_x(t)$, $\hat{\zeta}_i^2(t) = \hat{p}_y(t)$ y $\hat{\zeta}_i^3(t) = \hat{p}_z(t)$, para $i = 1, 2, 3$. Cada componente de estado es estimada por los $\mathcal{V}$ observadores distribuidos continuos, considerando que entre las salidas existen diferentes períodos de muestreo Δ_i y diferentes retardos τ_i en cada salida. Los resultados obtenidos para el segundo escenario se muestran en la Figura 2.4. Los resultados demuestran que los observadores distribuidos con mediciones de salida muestreadas y múltiples retardos convergen a los valores correctos del estado, a pesar de que no se cumplen las condiciones de observabilidad individual, como se evaluó previamente. Además, el observador logra una omnisciencia asintótica, estimando con éxito los valores del estado aún con salidas de medición muestreadas a diferentes frecuencias y a múltiples retardos.

Comparación con un observador distribuido tradicional

Para resaltar la originalidad del observador distribuido propuesto en presencia de mediciones de salida bajo diferentes períodos de muestreo, la estrategia se comparó con un enfoque de observador distribuido tradicional basado en un mecanismo de datos muestreados, como se presenta en He and Liu (2024). Ambos observadores distribuidos se aplicaron al problema de estimación de posición para un satélite perseguidor en LEO, realizándose la comparación con diferentes períodos de muestreo.

Se llevaron a cabo cuatro experimentos, además de los escenarios experimentales

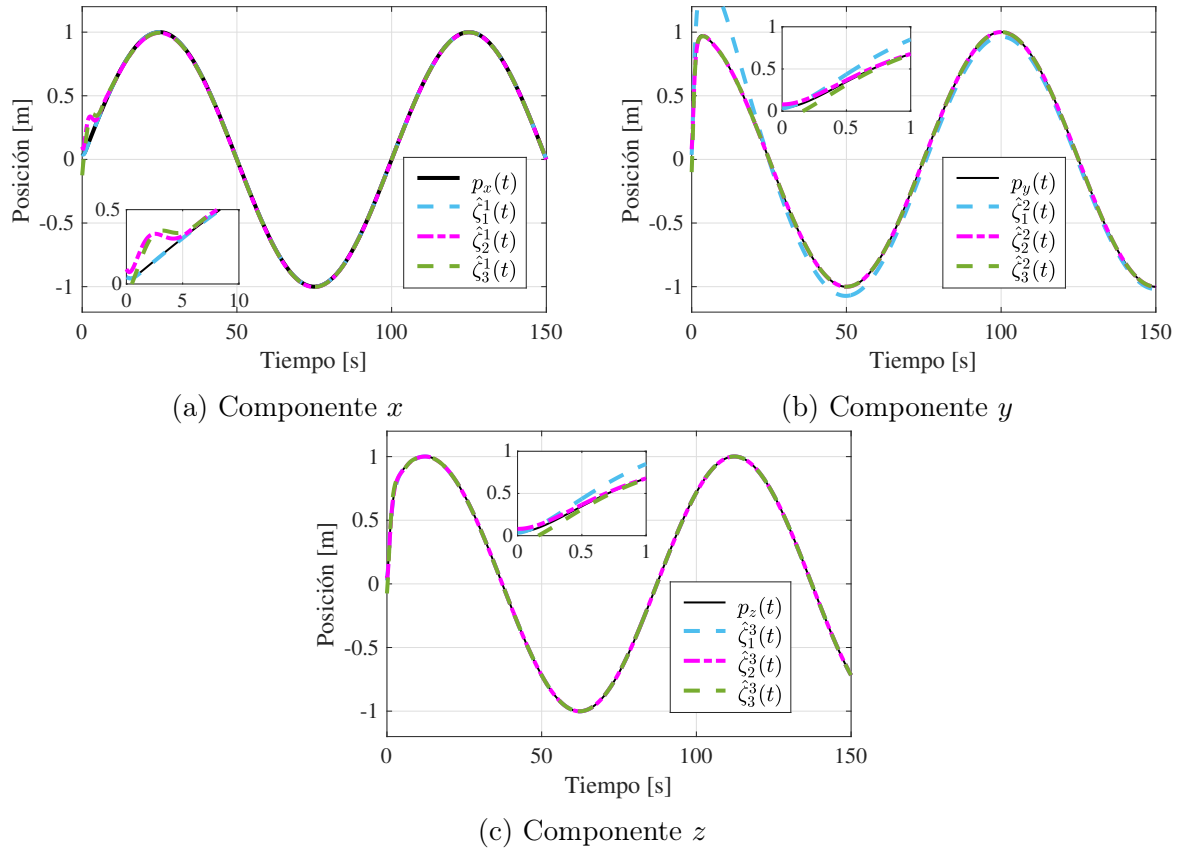


Figura 2.3: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$. Primer Escenario

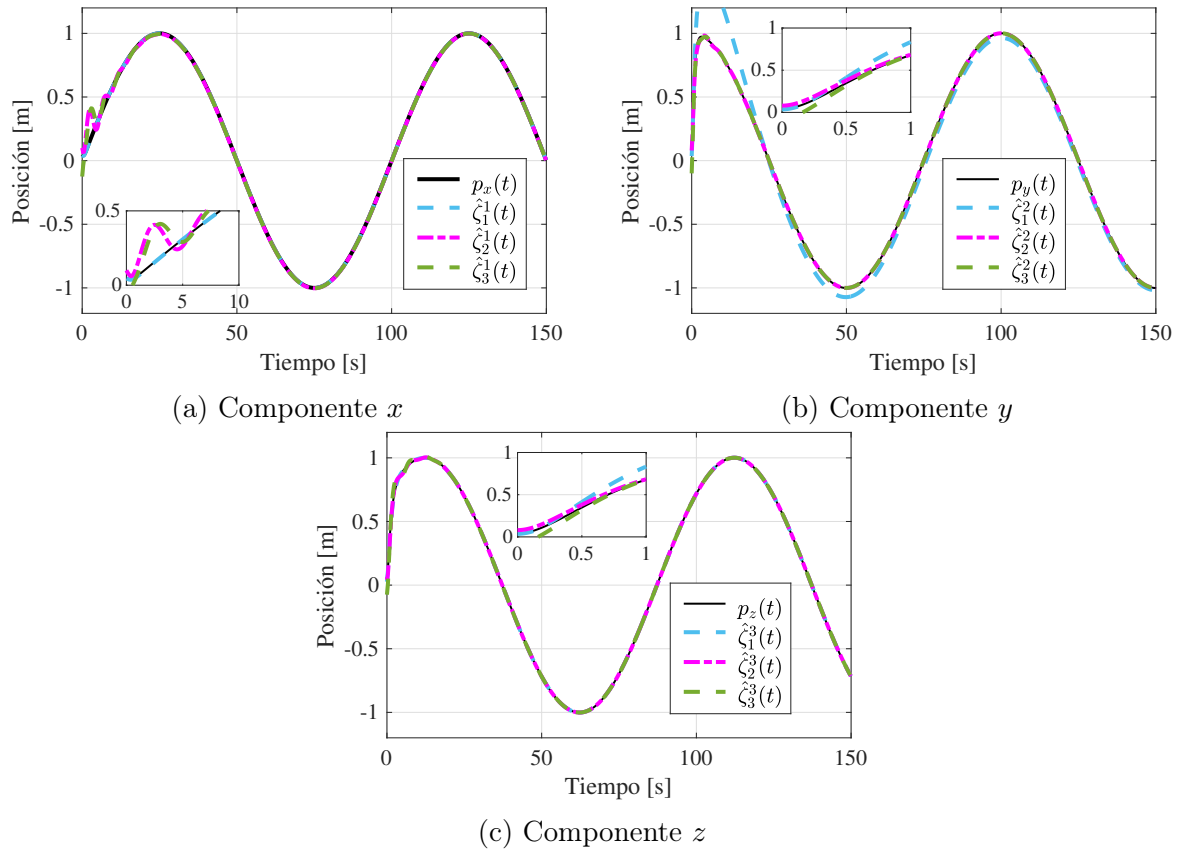


Figura 2.4: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$. Segundo Escenario

Tabla 2.2: Configuraciones experimentales con mediciones de salida muestreadas que involucran múltiples retardos

Escenario	Intervalos de muestreo para las salidas muestreadas [s]	Retardos en las salidas muestreadas [s]
Primer	$\Delta_1 = 0.0120$	$\tau_1 = 0.0120$
	$\Delta_2 = 0.0240$	$\tau_2 = 0.0144$
	$\Delta_3 = 0.0168$	$\tau_3 = 0.0168$
Segundo	$\Delta_1 = 0.160$	$\tau_1 = 0.140$
	$\Delta_2 = 0.320$	$\tau_2 = 0.168$
	$\Delta_3 = 0.224$	$\tau_3 = 0.196$

mostrados en la sección anterior. Para evitar confusiones, las siguientes pruebas se denominarán experimentos: El primer experimento corresponde al observador distribuido tradicional con un período de muestreo base de $\Delta_1 = 0.5$ s, $\Delta_2 = 1$ s y $\Delta_3 = 1.25$ s. El segundo experimento es con el observador distribuido propuesto, empleando los mismos períodos de muestreo. El tercer experimento utiliza el observador distribuido tradicional con un incremento en los períodos de muestreo: $\Delta_1 = 0.77$ s, $\Delta_2 = 1.54$ s y $\Delta_3 = 1.925$ s, y el cuarto experimento es con el observador distribuido propuesto bajo los mismos períodos de muestreo.

Los resultados se muestran en la Figura 2.5 para el observador distribuido basado en el enfoque tradicional He and Liu (2024) y en la Figura 2.6 para el observador distribuido propuesto que utiliza mediciones de salida muestreadas. Al comparar estas figuras, se observa que la estimación en la Figura 2.5 presenta mayores oscilaciones que la de la Figura 2.6. El observador distribuido tradicional (Figura 2.5) es más sensible a las variaciones en las señales de entrada muestreadas, lo que resulta en una respuesta menos suave. En contraste, el observador propuesto con mediciones de salida muestreadas (Figura 2.6) proporciona una estimación más estable y suave, lo que indica que la estrategia de muestreo implementada en este caso mitiga las fluctuaciones en la estimación.

En el tercer y cuarto experimento, en el que se aumentaron los períodos de muestreo tanto para el observador distribuido tradicional (Figura 2.7), como para el observador distribuido propuesto con mediciones de salida muestreadas (Figura 2.8). Se puede observar que el observador distribuido con mediciones de salida muestreadas (Figura 2.8) proporciona una estimación consistente del estado completo del sistema, manteniendo un error de observación acotado a pesar del retardo y los períodos de muestreo más grandes. En contraste, el observador distribuido tradicional muestra un comportamiento indeterminado bajo estas condiciones, teniendo dificultades para ofrecer estimaciones confiables con los intervalos de muestreo aumentados.

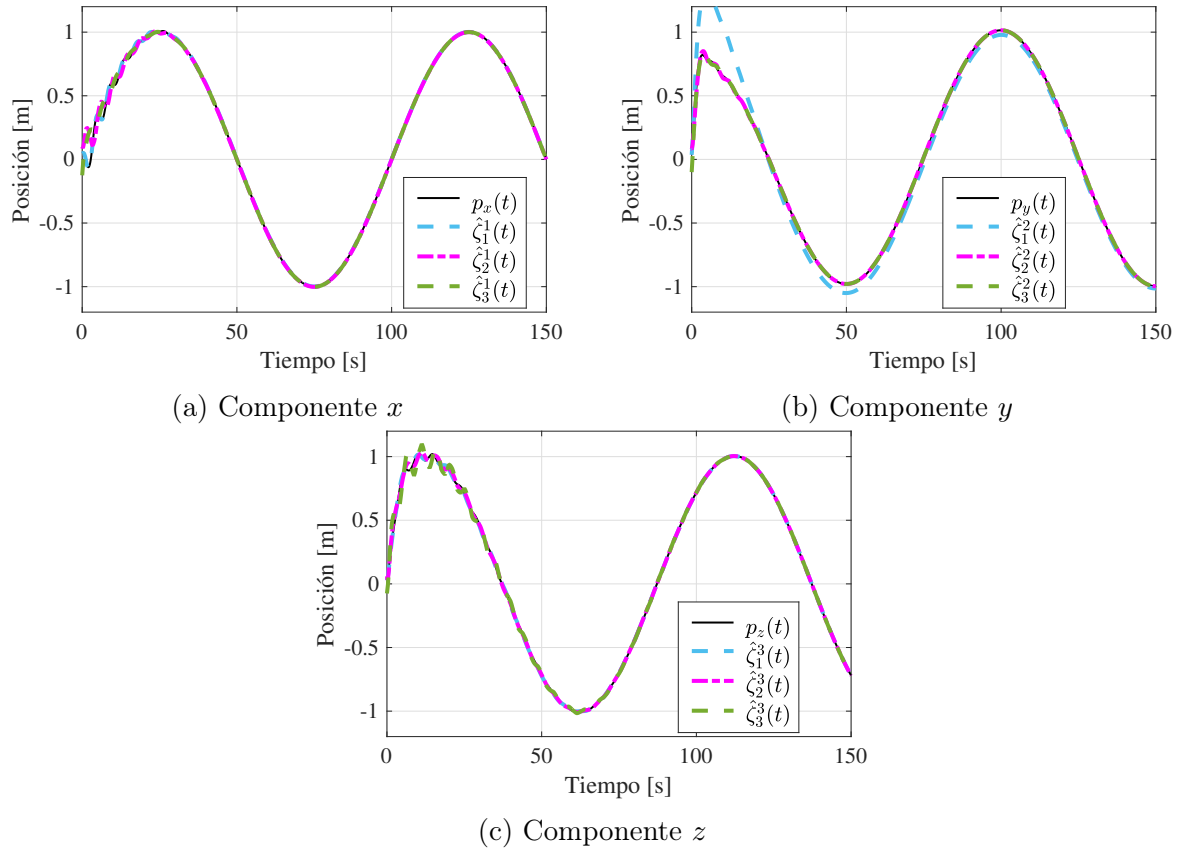


Figura 2.5: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ primer experimento.

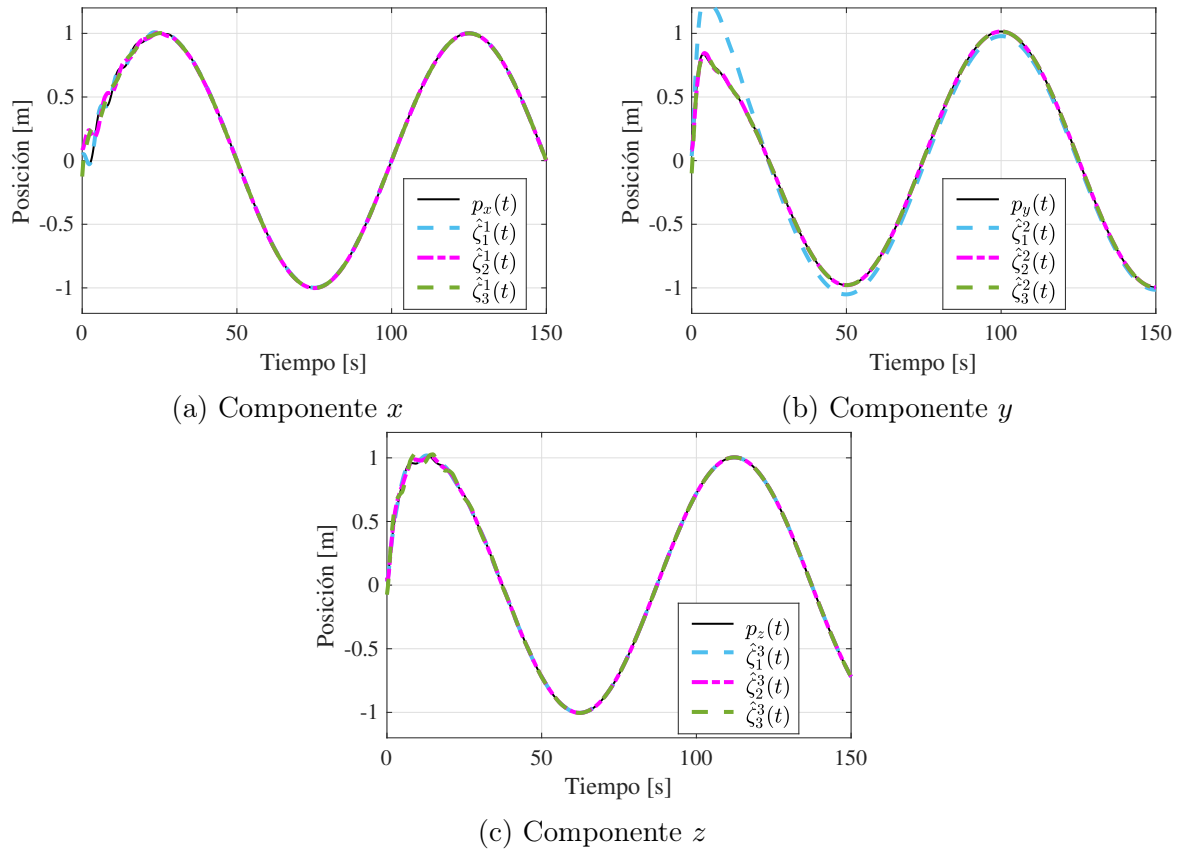


Figura 2.6: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ segundo experimento.

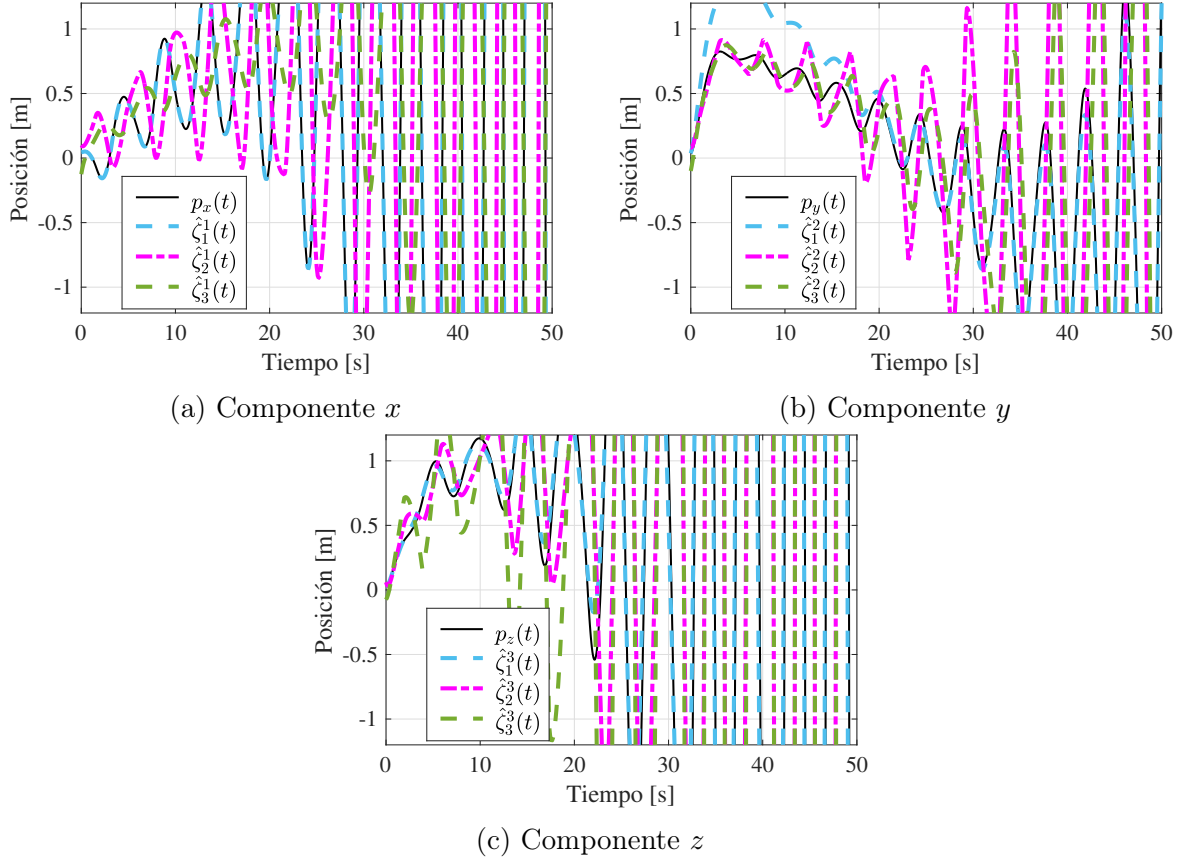


Figura 2.7: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ tercer experimento.

El observador distribuido utiliza su propia información y se comunica con sus vecinos en tiempo continuo. A pesar de que las mediciones de los sensores llegan con diferentes períodos de muestreo y con posibles retardos, el observador logra converger asintóticamente a la omnisciencia. Esto se ha demostrado tanto en el análisis de convergencia como en el ejemplo numérico, en el cual se probaron diversos valores de muestreo y retardo, mostrando que el observador mantiene la convergencia. Se ha evidenciado que cada sensor i de la red de sensores alcanza la convergencia independientemente de la naturaleza del retardo temporal o del intervalo de muestreo de cada sensor.

Además, el observador de perturbaciones ha demostrado que maneja períodos de muestreo grandes mediante la integración eficiente de información de múltiples sensores, manteniendo al mismo tiempo una estimación precisa del estado. Esto se corroboró adicionalmente mediante una comparación con resultados disponibles en la literatura. Como posible extensión para trabajo futuro, se propone aplicar este enfoque a sistemas de control multi-agente, abordando la gestión de retardos de comunicación variables en el tiempo y desconocidos.

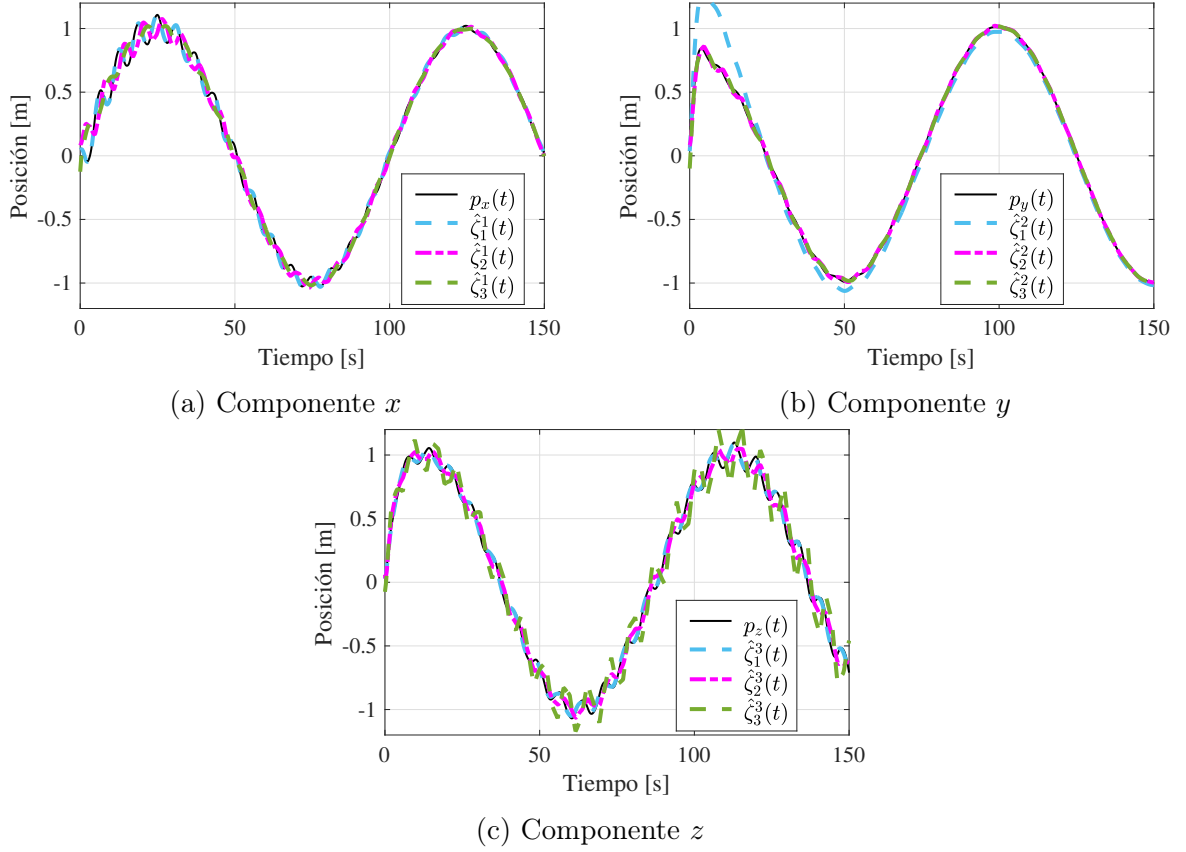


Figura 2.8: Estimaciones de las componentes $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$ cuarto experimento.

2.2 Observador Sincronizado

2.2.1 Introducción

La fusión de señales multisensor es la combinación de señales de más de un sensor para hacer posible que la información resultante sea mejor que la de un solo sensor (Elmenreich, 2002). En la mayoría de los casos, un solo sensor presenta limitaciones para cumplir satisfactoriamente su tarea de medición, por lo que se añade otro sensor que complemente la medición. En Ma et al. (2017), se fusionan un sensor electromagnético y un sensor infrarrojo, ambos tienen diferentes características entre sí; sin embargo, al fusionarse se complementan para mejorar la precisión en el reconocimiento del objetivo. En Li and Fu (2018), se fusionan el sensor GPS, el sistema de navegación Inercial (INS), y los sensores de luz visible, cada uno de estos sensores funciona de manera diferente, y en la fusión comparten y complementan información para lograr el posicionamiento de un vehículo aéreo no tripulado (UAV). Existen diversas y múltiples aplicaciones para la fusión de datos multisensor; algunas otras se pueden encontrar en Gao et al. (2018), You et al. (2020) y en Karaked et al. (2022). De acuerdo al método de integración, la fusión de datos se puede dividir en homogéneas y heterogéneas (Chen et al., 2021b). En los casos antes mencionados, se han presentado fusión de datos heterogéneos multisensor,

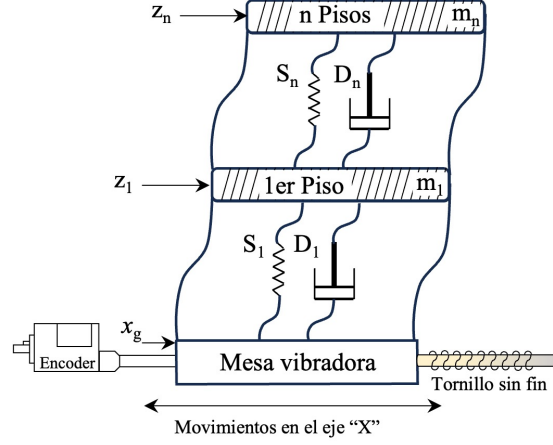


Figura 2.9: Esquema de una estructura vertical tipo edificio de n pisos.

siendo los más reportados en la literatura. Para la fusión de datos se utiliza el enfoque de filtros de Kalman y sus mejoras. Por otra parte, en [Grave and Tang \(2015\)](#) presenta una solución novedosa para la estimación de profundidad desconocida de un objeto en 3D utilizando la sincronización de observadores de orden completo, lo que da como resultado señales con menos ruido al sincronizar los observadores. De igual manera, en [Pérez et al. \(2018\)](#), se lleva a cabo la sincronización de observadores para una clase de osciladores neuronales. En [Chavez-Moreno et al. \(2018\)](#), se estiman la velocidad angular de pequeños satélites utilizando el diseño de observadores sincronizados, y en [Tang et al. \(2019\)](#) abordan el diseño de un observador multisensor para medir la misma señal. En este trabajo, se realiza la fusión de sensores de posición para reconstruir la medición de posición y velocidad de cada uno de los pisos, utilizando observadores sincronizados.

La aportación es dar solución al problema de múltiples sensores para estimar los desplazamientos de una estructura tipo edificio. Las mediciones de posición provienen de distintos sensores, que pueden estar afectados por distintos ruidos de medición y múltiples períodos de muestreo en cada sensor, los cuales pueden ser periódicos o aperiódicos. Se considera un escenario donde las mediciones múltiples provienen de distintos sensores que miden la posición de cada piso, modelando el edificio como un sistema lineal.

2.2.2 Modelado de estructura tipo edificio

Se considera una estructura tipo edificio vertical con n -pisos, representada en la Figura [2.9](#), como en [\(Rodriguez-Torres et al., 2021\)](#), la cual tiene el siguiente modelo matemático:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}S & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \xi \end{bmatrix} g(t) \\ y = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_1 \end{cases} \quad (2.54)$$

siendo z_1 y z_2 las posiciones y velocidades de cada uno de los pisos, respectivamente; n el número de pisos de la estructura; y la medición de las posiciones de cada uno de los pisos; y M , D y S las matrices de constantes conocidas de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, definidas como:

$$M = \text{diag} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{bmatrix} > 0 \quad (2.55)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & d_{n-1} + d_n & -d_n \\ 0 & 0 & \cdots & -d_n & d_n \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.56)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -s_2 & s_2 + s_3 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & s_{n-1} + s_n & -s_n \\ 0 & 0 & \cdots & -s_n & s_n \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.57)$$

donde m_i , d_i y s_i para $i = 1, 2, \dots, n$, son la masa, la constante de amortiguamiento y la constante de rigidez entre los pisos, respectivamente. El vector ξ permite distribuir la señal sísmica $g(t)$, quedando:

$$\xi = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, \dots, 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.58)$$

El vector de estado está definido por la posición y velocidad de cada uno de los niveles de la estructura, representado por $z = [z_1, \dots, z_2]^T$, quedando el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}S & -M^{-1}D \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \xi \end{bmatrix} g \\ y = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix} z = z_1 \end{cases} \quad (2.59)$$

El sistema (2.59) se puede escribir como:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Eg \\ y = Cz = z_1 \end{cases} \quad (2.60)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M^{-1}S & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \xi \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

donde z es el estado, y la salida medible, y el par (A, C) es observable.

2.2.3 Diseño del observador

Considere el sistema lineal presentado en (2.60), el cual puede estar siendo monitoreado por múltiples tipos de sensores con distintos rangos de muestreos. Por lo tanto, es necesario llevar a cabo el análisis del monitoreo con un tipo particular de sensor para el sistema lineal presentado en (2.60), considerando que las mediciones de salida están disponibles en instantes de tiempo, es decir, se considera una salida muestreada con un periodo de muestreo dado. Por lo tanto, se propone el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t_k) = Cx(t_k) \end{cases} \quad (2.63)$$

donde $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$ es la medición de salida, adquirida en instantes de tiempo con un rango de muestreo que puede ser periodo o aperiódico. Las matrices A , C y E , así como el vector de estado z , y la señal $g(t)$, ya fueron definidas previamente.

Es importante mencionar que el par del sistema (2.63) (A, C) , se asume como observable.

Además, se asume que hay p mediciones de $y(t_k)$ representadas por $y_i(t_{k,i}) = y(t_{k,i}) + w_i(t_{k,i})$, $i = 1, \dots, p$, las cuales están afectadas por ruido de medición $w_i(t_{k,i})$. El problema es diseñar un observador tal que la diferencia entre la trayectoria de estado $z(t)$ y su estimación $\hat{z}(t)$ satisfaga que $\|\hat{z} - z\| \rightarrow 0$ asintóticamente, manteniendo todas las soluciones del sistema acotadas. Se asume que las mediciones de salidas $y_i(t_k)$ pueden ser medidas en distintos tiempos de muestreos, es decir, cada medición de salida se muestrea aperiódicamente.

En este trabajo se considera que cada salida medible está disponible solo en ciertos instantes de tiempo. Considerando $y_i(t_k)$ como la i -ésima salida $i = 1, \dots, p$, para esta salida está disponible en los instantes de tiempo, $0 \leq t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(k)}$,

$\Delta_i^{(k)} = t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} t_i^{(k)} = +\infty, i = 1, \dots, p$. Entonces, para cada salida existe $0 < \Delta_{m_i} \leq \Delta_{M_i} < +\infty$, lo que corresponde a

$$0 < \Delta_i^{(k)} = t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)} \leq \Delta_{M_i}, \forall k \geq 0, i = 1, \dots, p.$$

Primeramente, se aborda el diseño de observadores para la clase de sistemas dinámicos (2.63), asumiendo salidas medidas limpias $y(t_k)$.

Consideremos el siguiente observador de orden completo para la estimación del vector de estado del sistema (2.63) con mediciones de salida muestreadas a un rango periódico o aperiódico:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K\eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = -CK\eta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \\ \eta(t_k) = Cx(t_k) - C\hat{x}(t_k), \end{cases} \quad (2.64)$$

donde $\hat{z} = [\hat{z}^1, \hat{z}^2]^T$ es el vector de estado estimado y K es la ganancia del observador. Cabe mencionar que la función $\eta(t)$ es continua en el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ y se actualiza en cada instante de muestreo t_k utilizando solo la medición de salida muestreada $y(t_k)$, es decir, a una tasa de muestreo periódica o aperiódica.

Nota: Es importante mencionar para el caso del sistema de la estructura vertical tipo edificio, la medición de salida es el vector de los desplazamientos de cada piso del edificio, es decir, $y(t_k) = z_1(t_k)$, siendo $z_1(t_k)$ todos los desplazamientos de cada uno de los pisos.

Considerando esto, se propone el siguiente teorema.

Teorema 2. Sea el sistema (2.64) un observador para estimar el estado del sistema (2.63), si existen matrices $P > 0$, R y $Q > 0$ de dimensiones apropiadas, que satisfagan la siguiente desigualdad:

$$A^T P + P A - C^T R - R^T C \leq -Q \quad (2.65)$$

donde la ganancia del observador es $K = P^{-1}R^T$, y si la cota máxima del diámetro de partición de la muestra es $\Delta_{\bar{M}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}}$. Así, el observador (2.64) convergerá exponencialmente a una región acotada que dependerá de dicho diámetro.

Prueba: Tomando en cuenta (2.63) y (2.64), se tiene la siguiente dinámica del error de observación $\tilde{z} = z - \hat{z}$:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) - K\eta(t) \quad (2.66)$$

A partir de $\dot{\eta}(t)$ en (2.64), se tiene que:

$$\eta(t) = C\tilde{z}(t_k)e^{-CK(t-t_k)} \quad (2.67)$$

Ahora, se define una variable auxiliar $\zeta(t)$:

$$\zeta(t) = C\tilde{z}(t) - \eta(t) = C\tilde{z}(t) - C\tilde{z}(t_k)e^{-CK(t-t_k)} \quad (2.68)$$

Sustituyendo (2.68) en (2.66) se obtiene:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = (A - KC)\tilde{z}(t) + K\zeta(t) \quad (2.69)$$

Ahora, se considera la siguiente función cuadrática de Lyapunov $V(\tilde{z}, t) = \tilde{z}^T(t)P\tilde{z}(t)$, la cual tiene la siguiente dinámica en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{z}(t), t) &= 2\tilde{z}^T(t)P[(A - KC)\tilde{z}(t) + K\zeta(t)] \\ &= 2\tilde{z}^T(t)P(A - KC)\tilde{z}(t) + 2\tilde{z}^T(t)PK\zeta(t). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Tomando en cuenta (2), se debe asegurar que existe una matriz simétrica $P > 0$ y $\mu = \|Q\|$, tal que:

$$A^TP + PA - C^TR - R^TC \leq -\mu \quad (2.71)$$

con lo que la ganancia del observador estará dada por $K = P^{-1}R^T$.

Ahora, se analizará la función auxiliar $\zeta(t)$ dada por (2.68), la cual tiene la siguiente dinámica en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= C\dot{\tilde{z}}(t) + CKC\tilde{z}(t)e^{-CK(t-t_k)} \\ &= C[(A - KC)\tilde{z}(t) + K\zeta(t)] \\ &\quad + CKC\tilde{z}(t_k)e^{-CK(t-t_k)} \\ &= CA\tilde{z}(t). \end{aligned} \quad (2.72)$$

A partir de la ecuación anterior, $\zeta(t)$ queda:

$$\zeta(t) = \int_{t_k}^t CA\tilde{z}(s)ds. \quad (2.73)$$

Obteniendo la norma de $\zeta(t)$:

$$\begin{aligned}\|\zeta(t)\| &\leq \|C\| \int_{t_k}^t \|A\| \|\tilde{z}(s)\| ds \\ &\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{z}(s), s)} ds\end{aligned}\quad (2.74)$$

Tomando en cuenta (2.71) y (2.74), se tienen las siguientes normas:

$$\begin{aligned}\|2\tilde{z}^T(t)PK\zeta(t)\| &\leq 2\|K\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{z}(s), s)} ds \right) \\ &\quad \times \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)},\end{aligned}\quad (2.75)$$

$$\|2\tilde{z}^T(t)P(A - KC)\tilde{z}(t)\| \leq -2\mu V(\tilde{z}(t), t), \quad (2.76)$$

A continuación, se sustituyen las ecuaciones previas en (2.70), queda:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{z}(t), t) &\leq -2\mu V(\tilde{z}(t), t) \\ &\quad + 2\|K\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{z}(s), s)} ds \right) \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)}\end{aligned}$$

Reescribiendo, queda como a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)} &\leq -2\mu \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)} \\ &\quad + 2\sigma \|K\| \|A\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{z}(s), s)} ds\end{aligned}\quad (2.77)$$

con $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$.

Agrupando:

$$a_{\theta_L} = 2\mu, b_{\theta_L} = 2\sigma \|K\| \|A\|, \quad (2.78)$$

Sustituyendo (2.78) en (2.77) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)} \leq -a_{\theta_L} \sqrt{V(\tilde{z}(t), t)} + b_{\theta_L} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\tilde{z}(s), s)} ds \quad (2.79)$$

De acuerdo al Lema 2.1 presentado en Ramírez-Rasgado et al. (2022a) se asegura que existe una convergencia exponencial del observador propuesto, donde el valor máximo

del diámetro de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ satisface la siguiente desigualdad:

$$\Delta_{\bar{M}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}} = \frac{\mu}{\sigma \|K\| \|A\|} \quad (2.80)$$

2.2.4 Observador sincronizado

Considerando que para el sistema (2.63) se asume que existen p mediciones de $y(t_k)$ denotadas por $y_i(t_{k,i}) = y(t_{k,i}) + w_i(t_{k,i})$, $i = 1, \dots, p$, afectadas por el ruido blanco $w_i(t_{k,i})$ con $Ew_i(t_{k,i}) = 0$, $Ew_i(t_{k,i})w_j(t_{k,i}) = 0$, $\forall i \neq j$ y $Ew_i^2(t_{k,i}) = \sigma_w$, donde $E(\cdot)$ es la expectativa matemática. Consideremos el grupo de p observadores de orden completo acoplados (2.64), denominado observador sincronizado con mediciones de salida con muestreos periódicos o aperiódicos:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = A\hat{z}_i(t) + K\eta(t) + K_a \sum_j (\hat{z}_j - \hat{z}_i) \\ \dot{\eta}_i(t) = -CL\eta_i(t), \quad t \in [t_{k,i}, t_{k+1,i}), k \in \mathbb{N} \\ \eta(t_{k,i}) = Cz_i(t_{k,i}) - C\hat{x}_i(t_{k,i}), \end{cases} \quad (2.81)$$

donde $K_a > 0$ es la ganancia de acoplamiento y $i = 1, \dots, p$ es el número de observadores a sincronizar.

La estimación dada por el observador sincronizado está dada por

$$[\hat{z}_o] = \frac{1}{p} \sum_j [\hat{z}_j].$$

El siguiente teorema establece que el observador tiene un comportamiento libre de ruido, por lo tanto, la trayectoria del estado puede recuperarse asintóticamente a medida que el número de observadores de orden completo tiende a infinito.

Teorema 3. Sea z el vector de estado, $\hat{z}_{\text{Sin-Ruido}}$, la estimación de z por el observador de orden completo (2.64), y $\hat{z}_{\text{Ruido}} := \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p [\hat{z}_i]$, la estimación de z por el observador sincronizado (2.81) en presencia de medidas ruidosas $y_i(t_{k,i})$, respectivamente. Entonces, después de un transitorio exponencial

$$\|\hat{z}_{\text{Ruido}} - \hat{z}_{\text{Sin-Ruido}}\|^2 \leq c/p,$$

donde $c > 0$ es una constante para las características dadas del sistema y del ruido. Por lo tanto, por la desigualdad del triángulo $\|\hat{z}_{\text{Ruido}} - z\| \leq \|\hat{z}_{\text{Ruido}} - \hat{z}_{\text{Sin-Ruido}}\| + \|\hat{z}_{\text{Sin-Ruido}} - z\| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow \infty$.

Prueba: La prueba es similar a la presentada en Grave and Tang (2015). ■

2.2.5 Caso de estudio. Estructura tipo edificio de dos pisos.

Para validar la eficacia del algoritmo de estimación basado en un observador sincronizado diseñado para una estructura vertical tipo edificio en presencia de una señal de entrada inducida por una señal senoidal, se analizó el caso de una estructura vertical tipo edificio de dos pisos ($n = 2$). Para la estructura tipo edificio, las mediciones disponibles son las posiciones de los pisos, denotadas por la literal z_1 , mientras que las velocidades de los pisos, denotadas por la variable z_2 , son mediciones no disponibles. Estas literales son utilizadas en el diseño del observador. Dado que se trata de un edificio de dos pisos, se tiene una variable de estado de desplazamientos $z_1 = [z_1^1 \ z_1^2]^T$ y una variable de velocidades $z_2 = [z_2^1 \ z_2^2]^T$. Las salidas $y_i(t_{k,i})$, $i = 1, 2, 3$ son medidas a diferentes períodos de muestreo $\Delta_{\bar{M}_1} = 0.1$ s, $\Delta_{\bar{M}_2} = 0.14$ s, y $\Delta_{\bar{M}_3} = 0.25$ s, respectivamente. Como se pueden ver en la Figura (2.10)

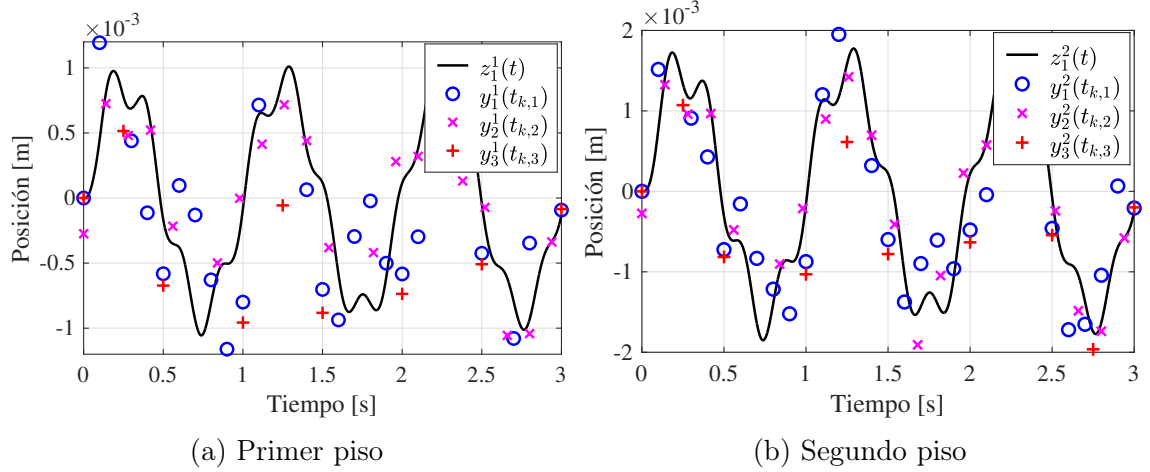


Figura 2.10: Salidas de medición a diferentes tasas de muestreo.

Los valores de las masas, las constantes de resorte y amortiguador de cada piso son: $m_1 = 3.17$ kg, $m_2 = 4.609$ kg, $d_1 = 7.388$ Ns/m, $d_2 = 6.834$ Ns/m, $k_1 = 9199.834$ N/m, $k_2 = 7531.62$ N/m, quedando las siguientes matrices (2.55)-(2.57), Galaz-Palma et al. (2023):

$$M = \begin{bmatrix} 3.17 & 0 \\ 0 & 4.609 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 16731.462 & -7531.628 \\ -7531.628 & 7531.628 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 14.222 & -6.834 \\ -6.834 & 6.834 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales del sistema original son $z(0) = 0_{4 \times 1}$ y de los observadores son $\hat{z}^1(0) = 5 \times 10^{-4}[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$, $\hat{z}^2(0) = 7.5 \times 10^{-4}[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$, $\hat{z}^3(0) = 9.5 \times 10^{-4}[1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$.

De acuerdo al Teorema 2, las ganancias del observador sincronizado son las siguientes:

$$K = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.1595 & 0.0068 \\ 0.0067 & 0.1645 \\ 0.7251 & 3.0814 \\ 2.2887 & 5.0026 \end{bmatrix}, \quad Ka = \text{diag} \begin{bmatrix} 7.5 & 7.5 & 12.5 & 12.5 \end{bmatrix}$$

En las Figura [2.11](#) se muestran las estimaciones de posición del primer y segundo piso mediante el observador sincronizando, donde se utilizan 3 mediciones de las posiciones en cada piso, por lo que $p = 3$. Cada medición de las salidas $y_i(t_{k,i})$ son afectadas por ruidos diferentes, los cuales son: $w_1 = 82 \times 10^{-5} \sin(200t)$, $w_2 = 31.623 \times 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, donde x es una variable real aleatoria con media 0 y varianza 1, y $w_3 = 1 \times 10^{-3} \sin(200t)$. Para las tres mediciones se considera una matriz $E = I_n$. En la Figura [2.11](#) se muestran las estimaciones de los 3 observadores de la posición del primer y segundo piso, respectivamente. Se ilustra que incluso en presencia de señales ruidosas que perturban las mediciones de salida. En la Figura [2.12](#) se muestra las 3 estimaciones de los observadores para la velocidad del primer y del segundo piso, respectivamente. Debido al diseño propuesto, se logra estimar estas velocidades sin ningún problema. Finalmente, en la Figura [2.13](#) se muestra la estimación sincronizada de los 3 observadores para la posición en presencia de múltiples mediciones de salidas ruidosas, donde se observa que el observador sincronizado logra un buen desempeño.

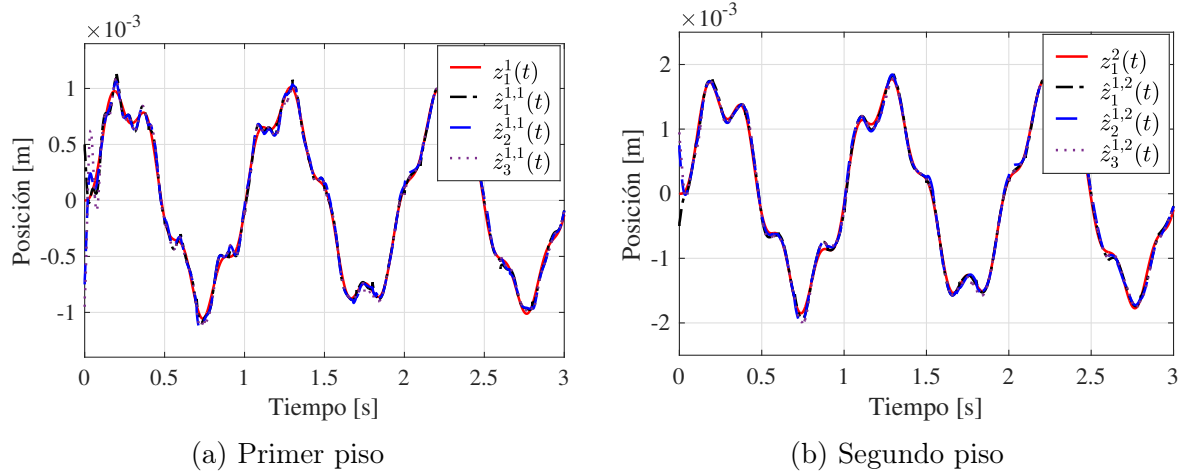


Figura 2.11: Estimación de posición

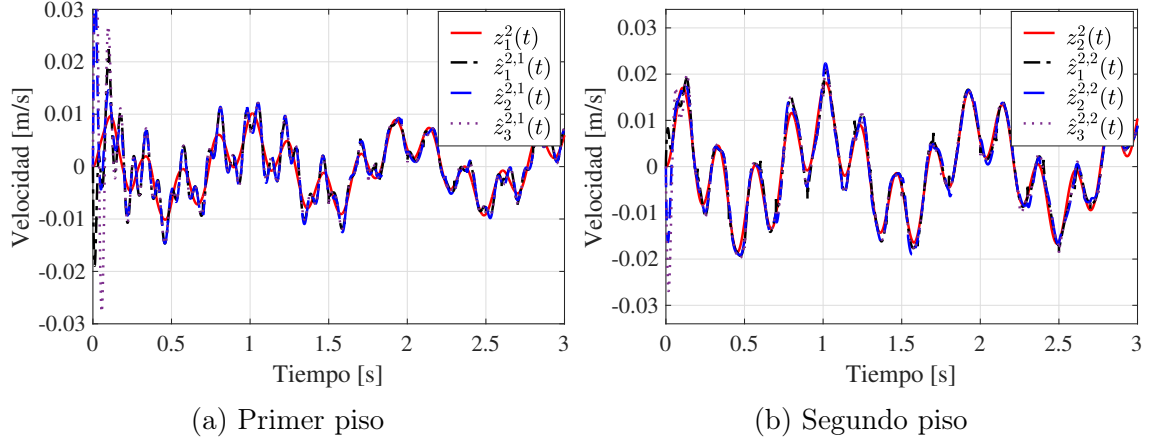


Figura 2.12: Estimación de velocidad

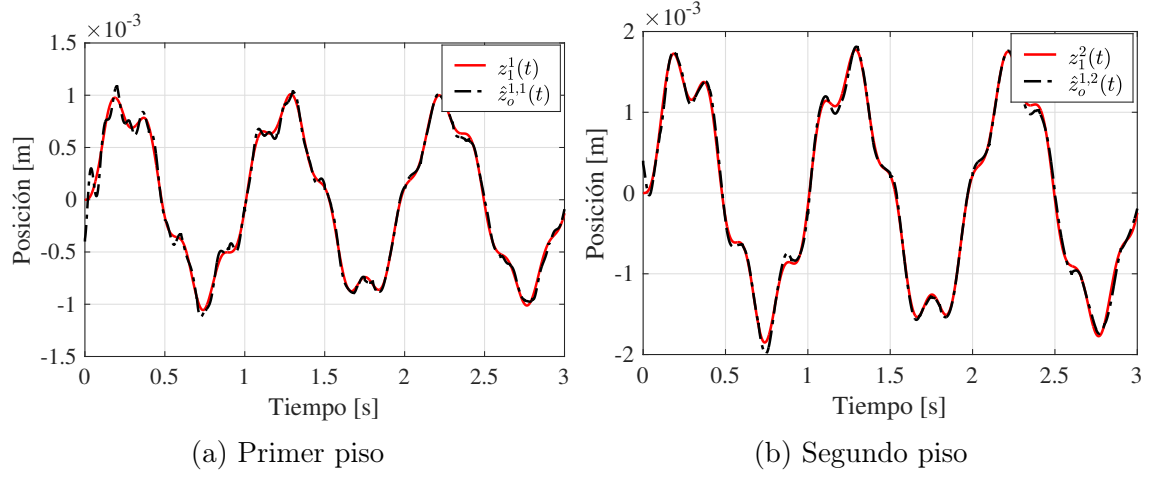


Figura 2.13: Estimación promedio de la posición

Se ha presentado el desarrollo de un observador sincronizado con la fusión de p -mediciones de salida que pueden provenir de distintos sensores a distintos tiempos de muestreos, los cuales puede ser periódicos o aperiódicos. Este enfoque ha sido validado en el sistema de una estructura vertical tipo edificio, donde las posiciones en cada piso son las mediciones de salida muestreadas periódicamente. Además, estas mediciones son afectas por ruido de medición. El observador sincronizado propuesto logra una estimación sincronizada continua incluso ante distintos tipos de ruido y períodos distintos relativamente grandes. Con base en los resultados obtenidos, podemos afirmar que el observador sincronizado exhibe un buen desempeño en la estimación de estados. Su diseño, basado en mediciones de salidas muestreadas, representa un algoritmo de estimación simple, capaz de ser implementado en un entorno real con el ajuste adecuado.

Capítulo 3

Observador distribuido con datos muestreados y comunicación multitasa

3.1 Introducción

Los terremotos son fenómenos naturales que pueden causar daños significativos a estructuras, infraestructura y comunidades, por lo que resulta esencial el desarrollo de tecnologías para mitigar sus efectos [Kim et al. \(2006\)](#). Una de las principales causas de daño estructural en edificios es el desplazamiento lateral excesivo durante eventos sísmicos. El uso de acelerómetros para la estimación de desplazamientos estructurales está ampliamente extendido, ya que el desplazamiento puede obtenerse mediante la doble integración de las mediciones de aceleración [Gavin et al. \(1998\)](#); [Thenozhi et al. \(2013\)](#), siendo esta técnica fundamental para el monitoreo dinámico de estructuras [Ma et al. \(2023\)](#). Aunque se han desarrollado varios métodos, los sistemas convencionales presentan limitaciones en precisión, robustez y aplicabilidad en tiempo real [Paziewski et al. \(2025\)](#); [Qu et al. \(2025\)](#).

Una alternativa prometedora es el uso de observadores de estado, que integran datos de sensores con un modelo dinámico para estimar estados no medidos. En el ámbito del monitoreo estructural, se han propuesto observadores adaptativos [Morales-Valdez et al. \(2018\)](#), esquemas de mínimos cuadrados recursivos con filtrado integral [Concha et al. \(2016\)](#), filtros de Kalman extendido [Yang et al. \(2006\)](#); [Lei et al. \(2012\)](#), observadores robustos mediante LMI [Galaz-Palma et al. \(2023\)](#) y observadores algebraicos proporcionales-integrales [Oliva-Gonzalez et al. \(2024\)](#); [Morales-Valdez et al. \(2024\)](#). Sin embargo, estos enfoques son predominantemente centralizados, lo que conlleva limitaciones en sistemas de gran escala: las fallas locales pueden propagarse causando inestabilidad global, y existe vulnerabilidad de punto único de fallo. Además, la pérdida de datos por interrupciones o deriva temporal es un desafío crítico en el monitoreo de salud estructural [Kim et al. \(2018\)](#); [Zhang et al. \(2024\)](#).

Para superar estas limitaciones, se han desarrollado esquemas descentralizados y distribuidos, que ofrecen arquitecturas más flexibles con comunicación cooperativa entre subsistemas [Han et al. (2018); Rodríguez Del Nozal et al. (2019a); Kim et al. (2019)]. No obstante, persisten desafíos en las comunicaciones muestreadas [Liu and Huang (2021); He and Huang (2022, 2025)]. En el campo del monitoreo estructural, las técnicas de fusión de datos multifrecuencia permiten integrar señales de aceleración (alta frecuencia) y desplazamiento (baja frecuencia), como se demuestra con filtros de Kalman multitasa [Zheng et al. (2019); Zhu et al. (2023)] y asíncronos [Zhu and Zhu (2024)]. Sin embargo, la mayoría de los estudios distribuidos asumen disponibilidad continua de las salidas o integran el muestreo sin distinguir sus efectos, lo que limita su aplicabilidad en sistemas con sensores heterogéneos que operan a diferentes frecuencias (muestreo multitasa).

Estudios recientes han explorado protocolos disparados por eventos [Zhou (2023)], resiliencia a ciberataques [Jenabzadeh et al. (2025)] y esquemas adaptativos [Zhu and Su (2025a)], pero suelen manejar el muestreo y la comunicación conjuntamente mediante formulaciones basadas en Lyapunov o LMI complejas, dificultando aislar los efectos del muestreo multitasa de los de la comunicación. En particular, la interacción entre el muestreo periódico de mediciones y la comunicación aperiódica no se ha explorado suficientemente en el contexto de monitoreo estructural.

Por lo tanto, este capítulo aborda la estimación distribuida de desplazamientos y velocidades en estructuras tipo edificio, considerando mediciones de salida muestreadas bajo un esquema de muestreo multitasa (síncrono o asíncrono). El objetivo es diseñar observadores distribuidos que permitan una estimación continua y estable, aprovechando la cooperación entre sensores espacialmente distribuidos mediante comunicación periódica multitasa, sin requerir mediciones continuas.

3.2 Planteamiento del problema

Considere un sistema físico lineal e invariante en el tiempo, modelado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada conocida, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida medida, y A , B , C son matrices constantes de dimensiones apropiadas.

El sistema es monitoreado por una red de $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ sensores. Cada sensor i mide una componente parcial de la salida,

$$y_i(t) = C_i x(t), \quad C_i \in \mathbb{R}^{\rho_i \times n}, \quad \sum_{i=1}^N \rho_i = p,$$

de modo que $C = [C_1^T, \dots, C_N^T]^T$. Debido a limitaciones de hardware o de red, las mediciones no están disponibles de forma continua, sino únicamente en instantes de muestreo t_k^i propios de cada sensor, con intervalos $\Delta_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i$ acotados uniformemente. Es decir, Cada sensor muestrea a diferente velocidad, por lo que el proceso de medición es multitasa.

Los agentes pueden intercambiar información a través de una red de comunicación. La topología de esta red se describe mediante un grafo dirigido fuertemente conexo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, donde $(j, i) \in \mathcal{E}$ indica que el agente j envía información al agente i , y la matriz de adyacencia $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]$ asocia pesos positivos a las aristas existentes; esto es, $\alpha_{ij} > 0$ si $(j, i) \in \mathcal{E}$ y $\alpha_{ij} = 0$ en caso contrario. La comunicación entre agentes se realiza de forma periódica multitasa: cada agente i transmite su estado estimado a sus vecinos en los instantes $\hat{t}_h^i = hT^i$, con período propio $T^i \in [T_m, T_M]$.

El problema consiste en diseñar, para cada agente i , un observador local que, utilizando únicamente:

- sus propias mediciones muestreadas $y_i(t_k^i)$ en los instantes t_k^i ,
- la entrada $u(t)$ (conocida por todos),
- y la información intercambiada periódicamente con sus vecinos según $\mathcal{G}$ en los instantes $\hat{t}_h^i$,

genere una estimación $\hat{x}_i(t)$ del estado completo $x(t)$, de modo que todos los observadores logren la omnisciencia asintótica (1.5) independientemente de la velocidad de muestreo de cada sensor (siempre que esté acotada) y de las condiciones iniciales.

Para ello, se requieren los siguientes supuestos.

Suposición 3. *El par (A, C) es observable. Sin embargo, ningún subsistema individual (A, C_i) es necesariamente observable.*

Suposición 4. *El grafo de comunicación $\mathcal{G}$ es dirigido y fuertemente conexo.*

Suposición 5. *Los intervalos de muestreo de las mediciones satisfacen $\Delta_{\bar{M}} < \Psi$. Los períodos de comunicación satisfacen $0 < T_m \leq T^i \leq T_M < \hat{T}$ para todo $i \in \mathcal{V}$.*

Bajo estas suposiciones, se desarrollará un observador distribuido basado en un esquema de muestreo en la medición (η_i) y un término de consenso acoplado a la comunicación periódica.

3.3 Diseño del observador

Considere el sistema lineal descrito en la ecuación (3.1), monitoreado por una red de $\mathcal{V}$ sensores donde cada i -ésimo sensor mide una salida parcial $y_i(t_k^i) = C_i x(t_k^i)$

en instantes de muestreo t_k^i . Estos sensores (actuando como agentes) se comunican utilizando una topología representada por el grafo $\mathcal{G}$. Los agentes colaboran para estimar el estado completo $x(t)$, intercambiando información a múltiples períodos de comunicación T^i entre observadores locales según $\mathcal{G}$.

Cada sensor obtiene mediciones en sus propios instantes de muestreo t_k^i . Cada sensor obtiene mediciones en sus propios instantes de muestreo t_k^i . Si todas las mediciones locales se agruparan, el modelo de medición podría expresarse como

$$[y_1(t_k^1)^T, \dots, y_N(t_k^N)^T]^T = [C_1^T, \dots, C_N^T]^T x(t_k^i) := Cx(t_k^i),$$

lo que permite la estimación cooperativa del estado mediante mediciones parciales y comunicación distribuida.

Se asume que cada salida está disponible solo en instantes de tiempo específicos. Sea $y_i(t_k^i)$ la i -ésima salida muestreada, con $i = 1, \dots, N$, disponible en los instantes

$$0 \leq t_0^i < t_1^i < \dots < t_k^i < \dots,$$

donde el intervalo de muestreo se define como $\Delta_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i$. Los instantes de muestreo satisfacen $t_k^i \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $i \in \mathcal{V}$, con intervalos acotados

$$0 < \Delta_m^i \leq \Delta_k^i \leq \Delta_{\bar{M}}^i \leq \Delta_{\bar{M}} < +\infty, \quad \forall k \geq 0, \forall i \in \mathcal{V}.$$

De forma análoga, cada agente i se comunica con sus vecinos en los instantes

$$\hat{t}_h^i = hT^i, \quad h = 0, 1, 2, \dots,$$

con período propio $T^i > 0$, satisfaciendo

$$0 < T_m \leq T^i \leq T_M < +\infty, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

donde $T_M = \max_i T^i$. En general, $T^i \neq T^j$ para $i \neq j$, por lo que la comunicación es también multitasa.

Para superar estas limitaciones y basándonos en el marco propuesto por [Galicia-García et al. \(2024b\)](#), nuestra principal contribución es extender el diseño del observador distribuido a un marco cooperativo con comunicación periódica multitasa entre obser-

vadores locales, cuya dinámica se rige por:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) + Bu(t) + L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\hat{x}_j(\overset{\circ}{t}_h^j) - \hat{x}_i(\overset{\circ}{t}_h^i)), \\ \dot{\eta}_i(t) = -C_i L_i \eta_i(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \\ \eta_i(t_k^i) = C_i x(t_k^i) - C_i \hat{x}_i(t_k^i), \quad t = t_k^i. \end{cases} \quad (3.2)$$

El estado del observador local en el nodo i , denotado por $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$, depende de los parámetros de diseño α_{ij} (entradas de la matriz de adyacencia $\mathcal{A}$), la ganancia de acoplamiento $\gamma \in \mathbb{R}$, y las matrices de ganancia $L_i \in \mathbb{R}^{n \times \rho_i}$ y $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La función de actualización $\eta_i(t)$, continua en el intervalo $[t_k^i, t_{k+1}^i)$, se recalcula en cada instante de muestreo t_k^i utilizando únicamente la salida muestreada $y_i(t_k^i)$.

El término de consenso utiliza los estados estimados en los instantes de comunicación $\overset{\circ}{t}_h^i$ y $\overset{\circ}{t}_h^j$, donde $\overset{\circ}{t}_{h+1}^i = \overset{\circ}{t}_h^i + T^i$ con $T^i \in [T_m, T_M]$ el período de comunicación propio del agente i . El término de corrección $\vartheta_i(t) = \epsilon_i(t) - \epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i)$, definido para $t \in [\overset{\circ}{t}_h^i, \overset{\circ}{t}_{h+1}^i)$, cuantifica la deriva del error de estimación entre instantes de comunicación consecutivos.

Este desacoplamiento explícito de los eventos de medición (t_k^i) y comunicación ($\overset{\circ}{t}_h^i$) permite el manejo independiente de las restricciones de muestreo e intercambio de datos. Sea $\epsilon_i(t) = x(t) - \hat{x}_i(t)$, $i \in \mathcal{V}$, el error de estimación del i -ésimo observador. Entonces, la dinámica del error puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}_i(t) \\ &= A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\hat{x}_j(\overset{\circ}{t}_h^j) - \hat{x}_i(\overset{\circ}{t}_h^i)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dado que $\hat{x}_j(\overset{\circ}{t}_h^j) - \hat{x}_i(\overset{\circ}{t}_h^i) = -(\epsilon_j(\overset{\circ}{t}_h^j) - \epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i))$, entonces:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\epsilon_j(\overset{\circ}{t}_h^j) - \epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i)) \quad (3.4)$$

Sustituyendo las expresiones para $\epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i)$ y $\epsilon_j(\overset{\circ}{t}_h^j)$ en términos de $\epsilon_i(t)$, $\vartheta_i(t)$, $\epsilon_j(t)$, y $\vartheta_j(t)$ (donde $\vartheta_i(t) = \epsilon_i(t) - \epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i)$), tenemos:

$$\epsilon_i(\overset{\circ}{t}_h^i) = \epsilon_i(t) - \vartheta_i(t), \quad \epsilon_j(\overset{\circ}{t}_h^j) = \epsilon_j(t) - \vartheta_j(t) \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4):

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_i(t) &= A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} [(\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) - (\vartheta_j(t) - \vartheta_i(t))] \\ &= A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\vartheta_j(t) - \vartheta_i(t)).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Para obtener una representación compacta, los términos de acoplamiento se reescriben utilizando la matriz laplaciana del grafo de comunicación. Sea $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]$ la matriz de adyacencia y $\mathcal{D} = \text{diag}(d_i)$ la matriz de grados, donde $d_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}$. La matriz laplaciana se define como $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, cuyas entradas satisfacen $l_{ij} = -\alpha_{ij}$ para $i \neq j$ y $l_{ii} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}$. Usando esta definición, el término de acoplamiento difusivo puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (x_j - x_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j - x_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j - d_i x_i.$$

Dado que $l_{ii} = d_i$ y $l_{ij} = -\alpha_{ij}$, se sigue que

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (x_j - x_i) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j.$$

Aplicando esta identidad a ambos términos de acoplamiento en (3.6), obtenemos

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t), \quad \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\vartheta_j(t) - \vartheta_i(t)) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} \vartheta_j(t).$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.6) se obtiene

$$\dot{\epsilon}_i(t) = A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \vartheta_j(t). \quad (3.7)$$

Para facilitar el análisis del desempeño del observador, introducimos una variable auxiliar $z_i(t)$ definida en (2.9)

Esta variable expresa la diferencia entre el error de estimación de la salida $C_i\epsilon_i(t)$ y la señal de corrección $\eta_i(t)$. Sustituyendo $z_i(t)$ en la dinámica del error (3.7), obtenemos:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = (A - L_i C_i) \epsilon_i(t) + L_i z_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \vartheta_j(t). \quad (3.8)$$

Continuando con el análisis de la dinámica del error, es importante notar que el

par (A, C_i) no siempre es observable. Por lo tanto, se realiza una transformación de observabilidad utilizando una matriz de transformación ortonormal T_i (es decir, una matriz cuadrada que satisface $T_i T_i^T = I_n$). Esta matriz se construye concatenando las submatrices O_i y U_i : $T_i = \begin{bmatrix} O_i & U_i \end{bmatrix}$, donde $O_i \in \mathbb{R}^{n \times v_i}$ contiene los elementos observables y $U_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-v_i)}$ agrupa los elementos no observables, siendo v_i la dimensión del subespacio observable del par (A, C_i) .

Dada la no observabilidad del par (A, C_i) , las matrices del sistema se transforman mediante T_i (1.12).

Para analizar la dinámica del error, descomponemos el error de estimación $\epsilon_i(t)$ en componentes observable y no observable:

$$\epsilon_i(t) = T_i \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde $\epsilon_{io}(t)$ es la parte observable y $\epsilon_{iu}(t)$ es la parte no observable. Similarmente, para $\vartheta_i(t)$:

$$\vartheta_i(t) = T_i \begin{bmatrix} \vartheta_{io}(t) \\ \vartheta_{iu}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) y (3.10) en la dinámica del error (3.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} T_i \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{io}(t) \\ \dot{\epsilon}_{iu}(t) \end{bmatrix} &= (A - L_i C_i) T_i \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix} + L_i z_i(t) \\ &\quad - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} T_j \begin{bmatrix} \epsilon_{jo}(t) \\ \epsilon_{ju}(t) \end{bmatrix} + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} T_j \begin{bmatrix} \vartheta_{jo}(t) \\ \vartheta_{ju}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las matrices de ganancia L_i y W_i se diseñan para estabilizar el observador y garantizar la convergencia. Estas matrices de ganancia se calculan de la siguiente manera. Primero, para cada nodo i , el subsistema observable (A_{io}, C_{io}) se obtiene mediante la descomposición de observabilidad (1.12). Utilizando asignación de polos, se diseña L_{io} tal que $(A_{io} - L_{io} C_{io})$ sea Hurwitz con una tasa de decaimiento deseada μ . La ganancia completa es entonces

$$L_i = T_i \begin{bmatrix} L_{io} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_i = T_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-v_i} \end{bmatrix} T_i^T, \quad (3.12)$$

La matriz de ponderación W_i en (3.12) es una proyección ortogonal sobre el subespacio no observable de (A, C_i) .

Sustituyendo la transformación (1.12) y las matrices de ganancia (3.12) en la

dinámica del error, obtenemos

$$\dot{\epsilon}_o(t) = (A_o - L_o C_o) \epsilon_o(t) + L_o z(t), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_u(t) &= A_r \epsilon_o + A_u \epsilon_u(t) - \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) (O \epsilon_o(t) + U \epsilon_u(t)) \\ &\quad + \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) (O \vartheta_o(t) + U \vartheta_u(t)), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\epsilon_o := \text{col}(\epsilon_{io})$, $\epsilon_u := \text{col}(\epsilon_{iu})$ y:

$$\begin{aligned} A_o &:= \text{diag}(A_{io}), & L_o &:= \text{diag}(L_{io}), & C_o &:= \text{diag}(C_{io}), \\ A_r &:= \text{diag}(A_{ir}), & O &:= \text{diag}(O_i), & z(t) &:= \text{diag}(z_i), \\ A_u &:= \text{diag}(A_{iu}), & U &:= \text{diag}(U_i). \end{aligned}$$

El resultado principal se ilustrará con la introducción del siguiente lema:

Lema 5. (Lema 2 de [Liu and Huang \(2021\)](#)). Suponga que $V(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es continua, y existe una secuencia $\{\dot{t}_t \mid t \in \mathbb{N}, \dot{t}_t \in [0, \infty)\}$ que satisface $\dot{t}_{t+1} - \dot{t}_t \geq \dot{t}_m$ para todo $t \in \mathbb{N}$ y para algún $\dot{t}_m > 0$, tal que $V(t)$ es diferenciable en cada intervalo $[\dot{t}_t, \dot{t}_{t+1})$ y

$$\dot{V}(t) \leq -\beta_1 V(t) + \beta_2 V_M(t), \quad \forall t \in [\dot{t}_t, \dot{t}_{t+1}), \quad (3.15)$$

donde $V_M(t) = \max_{s \in [\dot{t}_t, t]} V(s)$ y $\beta_1, \beta_2 > 0$ con $\beta_2 < \beta_1$. Entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$.

Ahora, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4. Considere un grafo de comunicación dirigido y un sistema (A, C) que es conjuntamente observable. Se propone un observador distribuido que garantiza la convergencia al estado del sistema con una tasa de decaimiento mínima de $\mu > 0$ si L_i se calcula de modo que $(A_{io} - L_{io} C_{io}) < -\mu$ para cada $i \in \mathcal{V}$, y γ se calcula como

$$\gamma > \frac{2(\max g_i) \|A_u + \mu I\|}{\lambda_{\min}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U)} \quad (3.16)$$

y si la dimensión máxima de la partición de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ es tal que $\Delta_{\bar{M}} < \Psi$, entonces el estado del observador convergerá exponencialmente a una región acotada, la cual estará dada por la función $\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})$, definida como

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}}) e^{-a_{\theta_L} \Delta_{\bar{M}}}, \quad (3.17)$$

y si los intervalos de muestreo en la comunicación entre nodos satisfacen $T_t \in [\dot{t}_m, \dot{t}_M]$ con $0 < \dot{t}_m \leq \dot{t}_M < \dot{T}$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

3.4 Análisis de Estabilidad

Demostración. Para garantizar una tasa de decaimiento de $\mu > 0$, sumamos $\mu \begin{bmatrix} \epsilon_o \\ \epsilon_u \end{bmatrix}$ a las ecuaciones (3.13)-(3.14), obteniendo la siguiente dinámica del error:

$$\dot{\epsilon}_o(t) = (A_o - L_o C_o + \mu I)\epsilon_o(t) + L_o z(t), \quad (3.18a)$$

$$\dot{\epsilon}_u(t) = A_r \epsilon_o + (A_u - \gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U + \mu I)\epsilon_u(t) + \gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U \vartheta_u(t). \quad (3.18b)$$

Por lo tanto, se debe demostrar la estabilidad de cada subsistema $(\dot{\epsilon}_o, \dot{\epsilon}_u)$ de $\dot{\epsilon}_i$.

Para garantizar la estabilidad del subsistema $\dot{\epsilon}_o$ presente en (3.18a), se considera la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\epsilon_o) := \epsilon_o^T P \epsilon_o, \quad (3.19)$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva ($P = P^T > 0$). Entonces, la derivada temporal de V a lo largo de (3.19) es

$$\dot{V}(\epsilon_o) := 2\epsilon_o^T P \dot{\epsilon}_o, \quad (3.20)$$

y reemplazando $\dot{\epsilon}_o$ de (3.18a)

$$\dot{V}(\epsilon_o) = 2\epsilon_o^T P(A_o - L_o C_o + \mu I)\epsilon_o(t) + 2\epsilon_o^T P L_o z(t). \quad (3.21)$$

Si suponemos que $(A_o - L_o C_o)$ es Hurwitz, entonces podemos encontrar una matriz P tal que:

$$P(A_o - L_o C_o) + (A_o - L_o C_o)^T P = -\mu I, \quad (3.22)$$

donde μ es un término positivo.

A partir de la definición de $z_i(t)$ dada en (2.9), su derivada es

$$\dot{z}_i(t) = C_i \dot{\epsilon}_i(t) - \dot{\eta}_i(t).$$

Usando la dinámica de $\eta_i(t)$ dada en (3.2), obtenemos

$$\dot{z}_i(t) = C_i \dot{\epsilon}_i(t) + C_i L_i \eta_i(t).$$

Sustituyendo la dinámica del error (3.7) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{z}_i(t) = C_i \left(A \epsilon_i(t) - L_i \eta_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \vartheta_j(t) \right) + C_i L_i \eta_i(t).$$

Reduciendo términos se tiene:

$$\dot{z}_i(t) = C_i A \epsilon_i(t) - \gamma C_i W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma C_i W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \vartheta_j(t). \quad (3.23)$$

Una simplificación crucial surge de la estructura de la matriz W_i . De (3.12), mientras que la descomposición de observabilidad (1.12) da

$$C_i W_i = C_i T_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-v_i} \end{bmatrix} T_i^T = \begin{bmatrix} C_{io} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-v_i} \end{bmatrix} T_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} T_i^T = 0.$$

Por lo tanto, el término $C_i W_i$ se elimina porque W_i se proyecta solo sobre el subespacio *no observable*, resultando

$$\dot{z}_i(t) = C_i A \epsilon_i(t). \quad (3.24)$$

Para expresar $\dot{z}_i(t)$ en términos de la componente observable, empleamos la transformación de coordenadas $\epsilon_i(t) = T_i [\epsilon_{io}(t) \ \epsilon_{iu}(t)]^T$ y las matrices transformadas (1.12). Así, sustituyendo en (3.24) se obtiene

$$\dot{z}_i(t) = C_i T_i (T_i^T A T_i) \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{io} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{io} & 0 \\ A_{ir} & A_{iu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix}.$$

Realizando la multiplicación de matrices,

$$\begin{bmatrix} C_{io} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{io} & 0 \\ A_{ir} & A_{iu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{io} A_{io} & 0 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$\dot{z}_i(t) = \begin{bmatrix} C_{io} A_{io} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix} = C_{io} A_{io} \epsilon_{io}(t). \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) muestra que la dinámica de $z_i(t)$ depende exclusivamente de la parte observable del error de estimación, lo cual es consistente con su papel como medida de la discrepancia entre la salida y el error en el subespacio observable.

Se integran ambos lados de la ecuación (3.25) desde t_k^i hasta t :

$$\int_{t_k^i}^t \dot{z}_i(s) ds = \int_{t_k^i}^t C_{io} A_{io} \epsilon_{io}(s) ds. \quad (3.26)$$

La integral del lado izquierdo es simplemente $z_i(t) - z_i(t_k^i)$. Dado que $z_i(t_k^i) = 0$, obtenemos

$$z_i(t) = \int_{t_k^i}^t C_{io} A_{io} \epsilon_{io}(s) ds, \quad (3.27)$$

reescribiendo

$$z(t) = \int_{t_k}^t C_o A_o \epsilon_o(s) ds. \quad (3.28)$$

Aplicando la norma euclidiana y acotando cada término

$$\|z(t)\| \leq \|C_o A_o\| \int_{t_k}^t \|\epsilon_o(s)\| ds. \quad (3.29)$$

Ahora, para demostrar la estabilidad del sistema, derivamos una cota superior para el error observable $\epsilon_o(t)$. Así, la condición de estabilidad se establece mediante las cotas:

$$\lambda_m(P) \|\epsilon_o(t)\|^2 \leq V(\epsilon_o(t), t) \leq \lambda_M(P) \|\epsilon_o(t)\|^2, \quad (3.30)$$

donde $\lambda_m(P)$ es el mínimo valor propio de P y $\lambda_M(P)$ es el máximo valor propio de P .

Ahora, sustituyendo estas relaciones en la integral, obtenemos:

$$\|z(t)\| \leq \frac{\|C_o A_o\|}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds. \quad (3.31)$$

Considerando (3.21) y (3.31), obtenemos:

$$\|2\epsilon_o^T(t) P L_o z(t)\| \leq 2\|L_o\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|C_o A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds \right) \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)}. \quad (3.32)$$

Por lo tanto, la derivada de la función de Lyapunov se puede acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_o(t), t) &\leq -2\mu V(\epsilon_o(t), t) \\ &\quad + 2\|L_o\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|C_o A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds \right) \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)}. \end{aligned}$$

Reescribiendo, queda de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} \leq -\mu \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} + 2\sigma \|L_o\| \|C_o A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds, \quad (3.33)$$

$$\text{con } \sigma = \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}}.$$

Sean: $a_{\theta_L} = \mu$, $b_{\theta_L} = 2\sigma \|L_o\| \|C_o A_o\|$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} \leq -a_{\theta_L} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} + b_{\theta_L} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds. \quad (3.34)$$

El valor máximo de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_{\bar{M}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}} = \frac{\mu}{2\sigma\|L_o\|\|C_oA_o\|} \triangleq \Psi. \quad (3.35)$$

Aplicando el Lema 2.1 propuesto en [Ramírez-Rasgado et al. \(2022b\)](#), con $\mathbf{a} = a_{\theta_L}$, $\mathbf{b} = b_{\theta_L}$, resulta:

$$\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}})e^{-a_{\theta_L}\Delta_{\bar{M}}}. \quad (3.36)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} \leq e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \sqrt{V(\epsilon_o(0))}. \quad (3.37)$$

Volviendo a términos del error de observación $\epsilon_o(t)$:

$$\|\epsilon_o(t)\| \leq \sigma e^{-\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{M}})t} \|\epsilon_o(0)\|. \quad (3.38)$$

Como se ha mostrado, la parte observable $\epsilon_o(t)$ es estable y tiende a una región acotada por $\Delta_{\bar{M}}$. Para calcular el período máximo de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$, establecemos el Algoritmo

Algoritmo 3.4.1: Cálculo del período máximo de muestreo ($\Delta_{\bar{M}}$)

1. Construir la matriz ortogonal $T_i = [O_i, U_i]$.
 2. Obtener las matrices transformadas usando [\(1.12\)](#).
 3. Calcular $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_N)$ tal que $\check{\mathcal{L}} = G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G$ sea una matriz semidefinida positiva.
 4. Resolver $(A_{io} - L_{io}C_{io})^T P + P(A_{io} - L_{io}C_{io}) + \mu I \preceq 0$ con $P = P^T \succ 0$.
 5. Calcular γ usando [\(3.16\)](#).
 6. Calcular $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$.
 7. Calcular la cota superior $\Delta_{\bar{M}}$ usando [\(3.35\)](#).
-

A continuación, evaluaremos el subsistema no observable $\epsilon_u(t)$, proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\epsilon_u) := \sum_{i=1}^N g_i \|\epsilon_{iu}\|^2. \quad (3.39)$$

En efecto, se tiene

$$\dot{V}(\epsilon_u) = \sum_{i=1}^N g_i \cdot 2\epsilon_{iu}^T \dot{\epsilon}_{iu}. \quad (3.40)$$

Reescribiendo

$$\dot{V}(\epsilon_u) = 2\epsilon_u^T (G \otimes I_n) \dot{\epsilon}_u, \quad (3.41)$$

sustituyendo $\dot{\epsilon}_u$ de (3.18b) en (3.41)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_u) &= 2\epsilon_u^T (G \otimes I_n) (A_u \epsilon_u(t) - \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \epsilon_u(t) \\ &\quad + \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \vartheta_u(t) + \mu I \epsilon_u(t)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Eliminando paréntesis y simplificando la expresión (3.42), agrupamos los términos que contienen A_u y μI . Esto nos permite factorizar $2\epsilon_u^T (G \otimes I_n)$ y expresar el resultado como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_u) &= 2\epsilon_u^T (G \otimes I_n) (A_u + \mu I) \epsilon_u(t) \\ &\quad - 2\gamma \epsilon_u^T (G \otimes I_n) U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \epsilon_u(t) \\ &\quad + 2\gamma \epsilon_u^T (G \otimes I_n) U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \vartheta_u(t). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ahora acotamos cada término. Para el primer término, usando la norma espectral y considerando que $\|G \otimes I_n\| = \max g_i$, se sigue que

$$2\epsilon_u^T (G \otimes I_n) (A_u + \mu I) \epsilon_u(t) \leq 2(\max g_i) \|A_u + \mu I\| \|\epsilon_u\|^2 \quad (3.44)$$

El segundo término en la derivada de Lyapunov toma la forma:

$$-\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u. \quad (3.45)$$

Recuérdese que el producto de Kronecker satisface: $(G \otimes I_n)(\mathcal{L} \otimes I_n) = (G\mathcal{L} \otimes I_n)$, donde $\check{\mathcal{L}} = G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G$. Dado que $\check{\mathcal{L}}$ es definida positiva, $U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U$ también es definida positiva. Sea $\lambda_{\min}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U)$ el mínimo valor propio de la matriz. Entonces, podemos acotar el término como:

$$-\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u \leq -\gamma \lambda_{\min}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U) \|\epsilon_u\|^2 \quad (3.46)$$

Para el tercer término, sea $\lambda_{\max}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U)$ el máximo valor propio de la matriz y aplíquese la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \vartheta_u \leq \gamma \lambda_{\max}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U) \|\epsilon_u\| \|\vartheta_u\| \quad (3.47)$$

Combinando las tres cotas:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon_u) \leq & \left(2(\max g_i) \|A_u + \mu I\| - \gamma \lambda_{\min}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U) \right) \|\epsilon_u\|^2 \\ & + \gamma \lambda_{\max}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U) \|\epsilon_u\| \|\vartheta_u\|\end{aligned}\quad (3.48)$$

Para garantizar la estabilidad, se requiere que el coeficiente principal sea negativo:

$$\gamma > \frac{2(\max g_i) \|A_u + \mu I\|}{\lambda_{\min}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U)} \quad (3.49)$$

Bajo la condición de que existe $\zeta_1 = \gamma \lambda_{\min}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U) - 2(\max g_i) \|A_u + \mu I\| > 0$ y $\zeta_2 = \gamma \lambda_{\max}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U)$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(\epsilon_u) \leq -\zeta_1 \|\epsilon_u\|^2 + \zeta_2 \|\epsilon_u\| \|\vartheta_u\|. \quad (3.50)$$

Consideramos el término $\zeta_2 \|\epsilon_u\| \|\vartheta_u\|$ y aplicamos la desigualdad de Young ($ab \leq \frac{\iota}{2}a^2 + \frac{1}{2\iota}b^2$), tomando $\iota = \zeta_1$, $a = \|\epsilon_u\|$ y $b = \zeta_2 \|\vartheta_u\|$. Esto produce:

$$\zeta_2 \|\epsilon_u\| \|\vartheta_u\| \leq \frac{\zeta_1}{2} \|\epsilon_u\|^2 + \frac{\zeta_2^2}{2\zeta_1} \|\vartheta_u\|^2.$$

Ahora, sustituimos esto en la ecuación original (3.50):

$$\dot{V}(\epsilon_u) \leq -\zeta_1 \|\epsilon_u\|^2 + \left(\frac{\zeta_1}{2} \|\epsilon_u\|^2 + \frac{\zeta_2^2}{2\zeta_1} \|\vartheta_u\|^2 \right),$$

lo que se simplifica a:

$$\dot{V}(\epsilon_u) \leq -\frac{\zeta_1}{2} \|\epsilon_u\|^2 + \frac{\zeta_2^2}{2\zeta_1} \|\vartheta_u\|^2. \quad (3.51)$$

Además, considerando las cotas de Lyapunov:

$$\lambda_m(P) \|\epsilon_u(t)\|^2 \leq V(\epsilon_u(t)) \leq \lambda_M(P) \|\epsilon_u(t)\|^2, \quad (3.52)$$

se sigue que:

$$\|\epsilon_u(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(\epsilon_u(t))}{\lambda_m(P)}}. \quad (3.53)$$

Para todo $t \in [\mathring{t}_h, \mathring{t}_{t+1})$ con períodos de muestreo $\mathring{t}_m \leq T_t \leq \mathring{t}_M < \mathring{T}$, el error de

vecindad $\|\vartheta_u(t)\| = \|\epsilon_u(t) - \epsilon_u(\dot{t}_h)\|$ satisface:

$$\begin{aligned}
\|\vartheta_u(t)\| &\leq \int_{\dot{t}_h}^t \|\dot{\epsilon}_u(s)\| ds \\
&\leq \int_{\dot{t}_h}^t \vartheta \sqrt{V(\epsilon_u)(s)} ds \\
&\leq \vartheta(t - \dot{t}_h) \sqrt{V_M(\epsilon_u)(t)} \\
&\leq \vartheta \dot{t}_M \sqrt{V_M(\epsilon_u)(t)},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

donde $V_M(\epsilon_u)(t) = \max_{s \in [\dot{t}_h, t]} V(\epsilon_u)(s)$ y la constante ϑ se define como:

$$\vartheta = \frac{\|(A_u + \mu I) - \gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U\| + \|\gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U\|}{\sqrt{\lambda_m(P)}}.$$

Esto implica:

$$\|\vartheta_u(t)\|^2 \leq \vartheta^2 \dot{t}_M^2 V_M(\epsilon_u(t)).$$

Sustituyendo las cotas (3.52) y (3.54) en la derivada $\dot{V}(\epsilon_u)(t)$ se obtiene:

$$\dot{V}(\epsilon_u)(t) \leq -\frac{\zeta_1}{2\lambda_M(P)} V(\epsilon_u)(t) + \frac{\zeta_2^2 \vartheta^2 \dot{t}_M^2}{2\zeta_1} V_M(\epsilon_u)(t). \tag{3.55}$$

Definiendo $\beta_1 = \frac{\zeta_1}{2\lambda_M(P)}$ y $\beta_2 = \frac{\zeta_2^2 \vartheta^2 \dot{t}_M^2}{2\zeta_1}$, se cumple la desigualdad $\dot{V}(\epsilon_u) \leq -\beta_1 V(t) + \beta_2 V_M(t)$. Dado que $\dot{t}_{t+1} - \dot{t}_h = T_t \geq \dot{t}_m$ para todo $t \in \mathbb{N}$, la condición $\beta_2 < \beta_1$ se satisface siempre que:

$$\dot{t}_M < \frac{\zeta_1}{\zeta_2 \vartheta \sqrt{\lambda_M(P)}} \tag{3.56}$$

En consecuencia, de acuerdo con el Lema 1 en Liu and Huang (2021), se puede concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\epsilon_u(t)) = 0$, lo que asegura la estabilidad asintótica del error de estimación ϵ_u . $\square$

3.5 Caso de estudio. Estructura tipo edificio de cinco pisos

Para evaluar el rendimiento de nuestro esquema de observador, presentamos resultados experimentales obtenidos en un marco de pruebas realista, cuya configuración preliminar se describe en el anexo A.

El problema de estimación de estados en estructuras de múltiples grados de libertad

bajo excitación sísmica requiere observadores capaces de operar con información limitada y frente a incertidumbres paramétricas. Para abordar el diseño de observadores distribuidos, se parte del modelo de espacio de estados de la estructura.

En dinámica estructural, los edificios con múltiples grados de libertad se modelan comúnmente representando cada piso como una masa concentrada, interconectada por elementos elásticos y amortiguadores. Esto conduce a un sistema de ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_d^{-1}K_d & -M_d^{-1}C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \Gamma_d \end{bmatrix} \ddot{x}_g(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} -M_d^{-1}K_d & -M_d^{-1}C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Cx(t), \end{cases} \quad (3.57)$$

con

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \\ x_2(t) &= [\dot{\nu}_1(t), \dot{\nu}_2(t), \dots, \dot{\nu}_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \\ y(t) &= [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Aquí, el vector de estado es $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan los desplazamientos $\nu_i(t)$ y velocidades $\dot{\nu}_i(t)$ de cada piso, respectivamente; n es el número de pisos; y $y_i(t)$ es la aceleración medida en cada piso. Las matrices M_d , C_d y K_d (masa, amortiguamiento y rigidez) son:

$$M_d = \text{diag}([m_1, m_2, \dots, m_n]) > 0, \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad (3.59)$$

$$K_d = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix} > 0, \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad (3.60)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix} \geq 0, \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad (3.61)$$

donde m_i , c_i y k_i ($i = 1, \dots, n$) son la masa, amortiguamiento y rigidez entre pisos. El

vector Γ_d distribuye la señal sísmica $\ddot{x}_g(t) \in \mathbb{R}^+$:

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (3.62)$$

El sistema (3.57) se puede escribir en la forma estándar como en la ecuación (3.1), con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M_d^{-1}K_d & -M_d^{-1}C_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \Gamma_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} -M_d^{-1}K_d & -M_d^{-1}C_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2n}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde $u(t) = \ddot{x}_g(t)$ es la aceleración del suelo (entrada sísmica medida).

Se establecen los siguientes supuestos:

Suposición 6. Dado que M_d , C_d y K_d son simétricas y definidas positivas o semidefinidas positivas, el par (A, C) es observable.

Suposición 7. Se dispone de mediciones de aceleración para cada piso ($\ddot{x}_i$) y para el nivel del suelo ($\ddot{x}_g$).

Suposición 8. Antes de la acción sísmica, la estructura está en reposo: $x_i(t) = 0$, $\dot{x}_i(t) = 0$, $\ddot{x}_i(t) = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Para este estudio, $n = 5$ (cinco pisos). La entrada $u(t) = \ddot{x}_g(t)$ se muestrea a una frecuencia constante significativamente menor que $\Delta_{\bar{M}}$ y está disponible para todos los observadores locales. Las mediciones de los sensores son $y_i(t_k^1) = C_i x(t_k^i)$ con $i = 1, \dots, 5$, correspondientes a acelerómetros en cada piso, y se muestrean en instantes potencialmente diferentes t_k^i .

El grafo de la Figura 3.1 es dirigido y fuertemente conexo. No es un grafo completo, ya que sus enlaces conectan principalmente pisos adyacentes, y algunos de ellos son unidireccionales, lo que refleja restricciones realistas de comunicación. El Nodo 1 (primer piso) actúa como puerta de enlace, el Nodo 4 como punto de agregación, y las aristas asimétricas modelan canales típicos en sistemas cableados o inalámbricos.

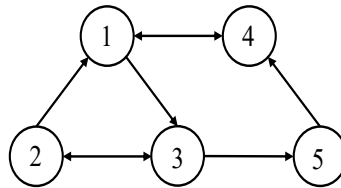


Figura 3.1: Grafo de comunicación del observador para la estructura de cinco pisos.

La matriz laplaciana asociada es

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Para calcular las ganancias L_i y W_i ($i = 1, \dots, 5$), primero se verifica la observabilidad de los pares (A, C) y (A, C_i) . Las matrices de observabilidad O_i tienen rango 5; al ser menor que $2n = 10$, los pares (A, C_i) no son observables individualmente. En cambio, (A, C) tiene rango completo, garantizando la observabilidad global. Para abordar la inobservabilidad local, se aplica una transformación matricial mediante la matriz ortogonal T_i , resolviendo así la restricción.

Se implementó un esquema multitasa síncrono en los diferentes canales. Cada canal proporciona mediciones de salida muestreadas a los observadores con períodos fijos pero distintos en cada uno de los tres experimentos realizados. En el experimento de mayor frecuencia, estos períodos variaron entre 0.15 s y 0.75 s. Además, se emularon los efectos de la comunicación a múltiples velocidades mediante retenedores de orden cero (ZOH) con intervalos de actualización entre 0.075 s y 0.375 s.

Para validar el observador distribuido en entornos reales con velocidades de muestreo heterogéneas, se realizaron dos escenarios experimentales: primero con intervalos de muestreo pequeños (tanto para medición como para comunicación), y luego aumentando progresivamente dichos períodos para evaluar el rendimiento bajo adquisición e intercambio intermitente de información.

El sistema real (estructura) parte del reposo: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 0$. La señal sísmica se muestrea a 0.01 s. Las condiciones iniciales de los observadores son:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(0) &= 1.0 \times 10^{-3} [-15 \ 5 \ 5 \ -5 \ 5 \ -50 \ 50 \ -50 \ 50 \ -50]^T, \\ \hat{x}_2(0) &= 1.5 \times 10^{-3} [\ 5 \ -5 \ 5 \ -5 \ 5 \ -50 \ 50 \ -50 \ 50 \ -50]^T, \\ \hat{x}_3(0) &= -1.5 \times 10^{-3} [\ 5 \ -5 \ 5 \ -5 \ 5 \ -50 \ 50 \ -50 \ 50 \ -50]^T, \\ \hat{x}_4(0) &= 2.0 \times 10^{-3} [\ 5 \ -5 \ 5 \ -5 \ 5 \ -50 \ 50 \ -50 \ 50 \ -50]^T, \\ \hat{x}_5(0) &= -2.0 \times 10^{-3} [\ 5 \ -5 \ 5 \ -5 \ 5 \ -50 \ 50 \ -50 \ 50 \ -50]^T. \end{aligned}$$

En nuestros escenarios experimentales, las ganancias locales L_i se calcularon mediante asignación de polos, seleccionando una ganancia de acoplamiento $\gamma = 1.57$ que satisface la condición de estabilidad $\gamma > 1.37$ establecida en (3.16). Como resultado, se obtiene

la siguiente matriz de ganancias para los observadores locales:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0482 & -0.0309 & -0.0112 & 0.0112 & -0.0134 \\ -0.1570 & -0.0384 & -0.0419 & 0.0107 & -0.0669 \\ -0.2091 & -0.0481 & -0.0534 & -0.0470 & -0.0136 \\ -0.3223 & -0.0450 & -0.0673 & -0.0950 & -0.0736 \\ -0.3437 & -0.0652 & -0.0565 & -0.1364 & -0.0730 \\ -0.4428 & -0.0102 & -0.0003 & 0.0027 & 0.0023 \\ -0.0524 & -0.0395 & -0.0012 & 0.0081 & 0.0033 \\ -0.0435 & -0.0091 & -0.0299 & 0.0051 & 0.0045 \\ -0.0017 & -0.0015 & 0.0034 & -0.0341 & 0.0033 \\ 0.0792 & 0.0176 & 0.0060 & 0.0080 & -0.0222 \end{bmatrix}$$

Para evaluar el observador distribuido propuesto en condiciones de muestreo multitasa, el primer escenario consideró períodos de muestreo heterogéneos $\Delta_{\bar{M}} = \{i \cdot 0.2 \text{ s} \mid i = 1, \dots, 5\}$ para las mediciones y $T_t = \{j \cdot 0.015 \text{ s} \mid j = 1, \dots, 5\}$ para la comunicación. En la Figura 3.2 se muestran las salidas de medición del piso intermedio (tercer piso) y del último piso (quinto piso), con períodos de muestreo de 60 ms y 100 ms, respectivamente. Esto demuestra que cada sensor posee un período de muestreo distinto según la ubicación del piso monitoreado.

La Figura 3.3 muestra las estimaciones de desplazamiento en los pisos 3 y 5, mientras que la Figura 3.4 corresponden a las estimaciones de velocidad. Estos resultados demuestran que el observador opera correctamente en condiciones de muestreo multitasa.

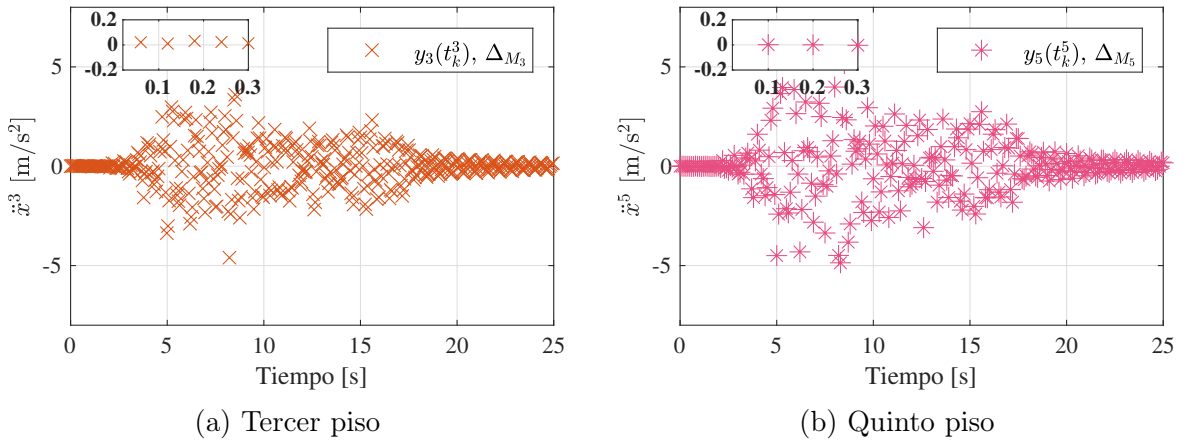
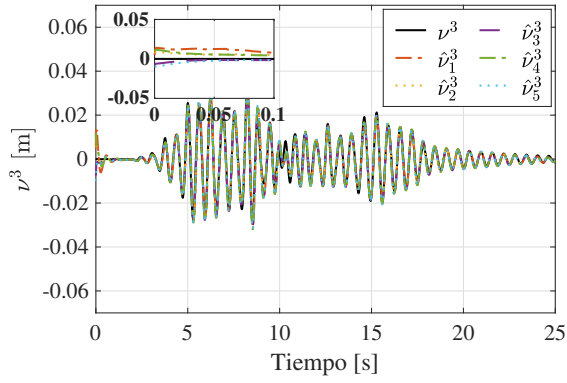
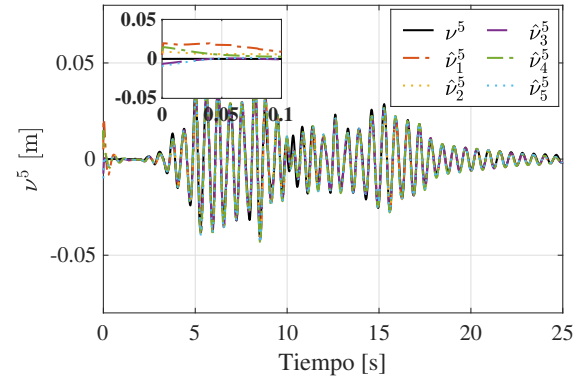


Figura 3.2: Salida de medición muestreada a 60 ms y 100 ms, respectivamente

El segundo escenario evaluó condiciones de operación con intervalos de muestreo extendidos, donde los períodos de medición siguieron la progresión $\Delta_{\bar{M}} = \{i \cdot 0.15 \text{ s} \mid i \in \{1, \dots, 5\}\}$, que está por debajo del límite máximo teórico de 0.7768248 s obtenido de

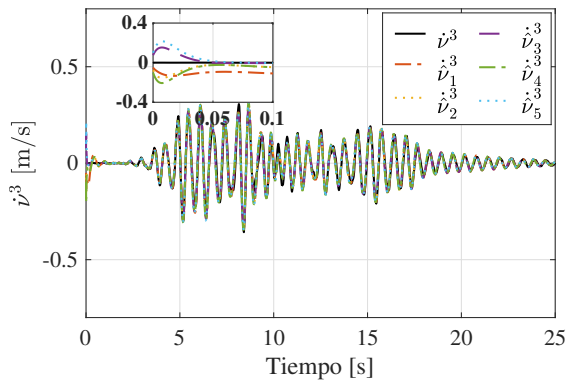


(a) Tercer piso

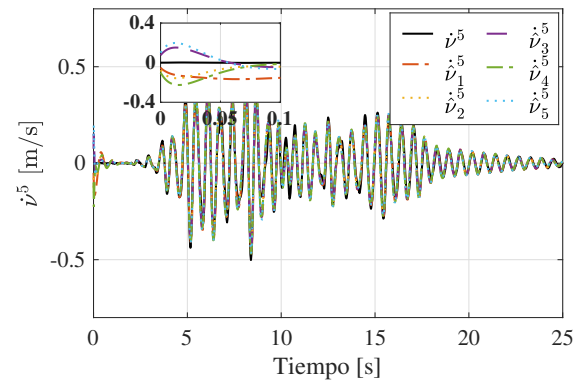


(b) Quinto piso

Figura 3.3: Estimación de desplazamiento, primer escenario.



(a) Tercer piso



(b) Quinto piso

Figura 3.4: Estimación de velocidad, primer escenario.

la ecuación (3.35), y los intervalos de comunicación se escalaron según $T_t = \{j \cdot 0.075 \text{ s} \mid j \in \{1, \dots, 5\}\}$.

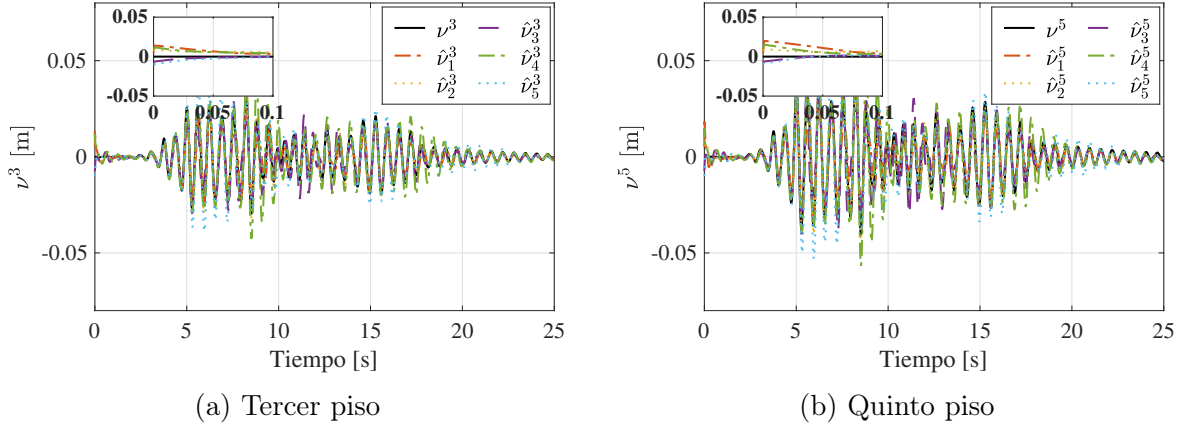


Figura 3.5: Estimación de desplazamiento, segundo escenario.

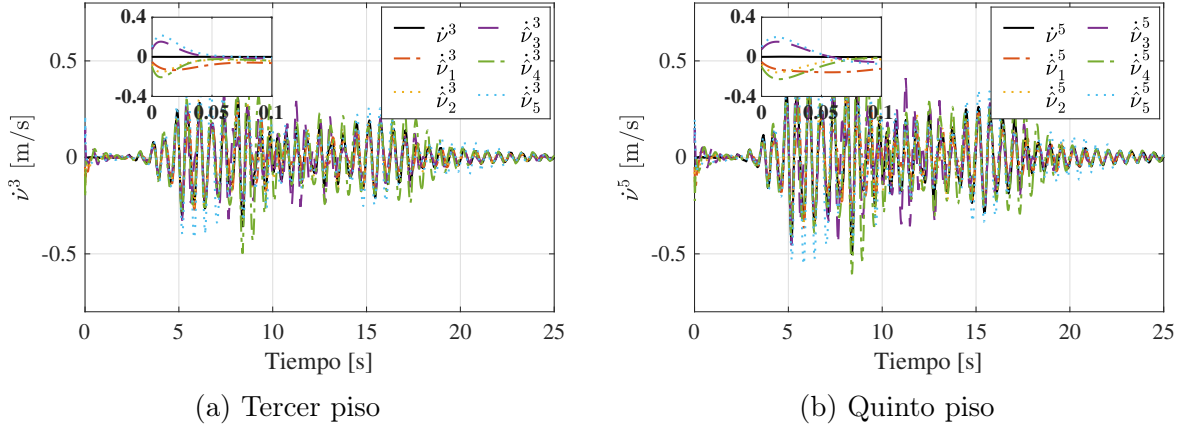


Figura 3.6: Estimación de velocidad, segundo escenario.

Estas configuraciones nos permiten evaluar el impacto del muestreo múltiple en las salidas de medición y en la comunicación entre observadores. En el segundo escenario, donde los períodos de muestreo son 7.5 veces más largos que en el primero, se observa que, a pesar de las tasas de actualización reducidas y los intervalos de comunicación más largos, el observador distribuido mantiene su capacidad de convergencia. Sin embargo, exhibe una respuesta transitoria más lenta, requiriendo más tiempo para alcanzar el estado estacionario, como se aprecia en las estimaciones de posición y velocidad para los pisos 3 y 5 (Figura 3.5-3.6). No obstante, es evidente un compromiso inherente entre la velocidad de respuesta y la tolerancia a perturbaciones temporales. Estos resultados validan la estabilidad del observador distribuido propuesto, incluso bajo condiciones de muestreo multitasa y tasas de actualización reducidas.

Comparación con otros enfoques convencionales de observadores distribuidos

Para demostrar adicionalmente la originalidad del observador distribuido propuesto, diseñado para operar con mediciones de salida muestreadas heterogéneamente y comunicación entre observadores con períodos de muestreo variables, se realizó una comparación sistemática con un observador distribuido convencional basado en esquemas de datos muestreados [Liu and Huang \(2021\)](#); [He and Huang \(2025\)](#) y el observador clásico de Luenberger. Los tres enfoques se aplicaron al problema de estimar el desplazamiento y la velocidad en un modelo de edificio de cinco pisos. Para la validación experimental, las condiciones fueron estrictamente equitativas dentro del marco de su propio diseño, utilizando las mismas ganancias L_i (calculadas mediante asignación de polos), la misma ganancia de acoplamiento γ , e idénticos períodos de muestreo (0.005 s para mediciones, 0.0025 s para comunicación) para el observador propuesto y el observador convencional, mientras que para el observador de Luenberger solo se consideró el muestreo en la salida de medición. Esta configuración permitió analizar el impacto en el rendimiento del observador propuesto en comparación con los enfoques mencionados, bajo un esquema de muestreo en la salida de medición y en la comunicación. Para realizar una comparación equitativa, las ganancias del observador distribuido convencional [Liu and Huang \(2021\)](#); [He and Huang \(2025\)](#) se diseñaron específicamente para el mismo edificio estructural y las mismas condiciones experimentales consideradas en este trabajo. Las ganancias de estimación local L_i se calcularon mediante la técnica de colocación de polos, de acuerdo a la metodología aplicada al observador propuesto, con el fin de garantizar una dinámica de estimación local comparable. La ganancia de acoplamiento γ se seleccionó para satisfacer las condiciones de estabilidad derivadas en [Liu and Huang \(2021\)](#) para los intervalos de muestreo utilizados en los experimentos ($T_s = 0.005$ s y $T_t = 0.0025$ s). Los valores de muestreo elegidos se acercan al límite superior teórico, lo que garantiza la estabilidad del esquema convencional y proporciona una condición de funcionamiento exigente pero válida para la comparación. Las Tablas [3.1](#) y [3.2](#) presentan un análisis comparativo de la precisión de la estimación, mostrando el error absoluto medio (MAE), la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de correlación R^2 de las estimaciones de desplazamiento y velocidad para cada piso y para cada observador.

Estas métricas se definen de la siguiente manera:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (3.65)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_i - \hat{x}_i\| \quad (3.66)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.67)$$

Tabla 3.1: Métricas de rendimiento experimental para el desplazamiento estimado.

Piso	Tipo de observador	MAE [mm]	RMSE [mm]	R^2
Primer	Propuesto distribuido	0.35	0.47	0.96
	Luenberger	1.13	1.57	0.59
	Distribuido convencional	0.60	0.85	0.88
Segundo	Propuesto distribuido	0.69	0.99	0.97
	Luenberger	3.17	4.67	0.43
	Distribuido convencional	1.35	2.02	0.89
Tercer	Propuesto distribuido	1.17	1.83	0.96
	Luenberger	4.32	6.25	0.55
	Distribuido convencional	2.32	3.53	0.86
Cuarto	Propuesto distribuido	1.62	2.49	0.95
	Luenberger	5.28	7.67	0.56
	Distribuido convencional	3.07	4.67	0.84
Quinto	Propuesto distribuido	1.88	2.88	0.95
	Luenberger	5.70	8.28	0.59
	Distribuido convencional	3.50	5.31	0.83

De acuerdo con los resultados presentados en las Tablas 3.1 y 3.2, el observador distribuido propuesto demuestra una mayor precisión en la estimación tanto de desplazamientos como de velocidades en cada piso. Presenta los valores de error más bajos (MAE y RMSE) y los coeficientes de correlación (R^2) más cercanos a uno, manteniendo un rendimiento favorable incluso en los pisos superiores, donde la dinámica es más compleja y el movimiento más pronunciado. En comparación, el observador distribuido convencional, que opera en el límite de su convergencia con los mismos períodos de muestreo (0.005 s) y comunicación (0.0025 s), ofrece resultados aceptables, pero con errores sistemáticamente más altos y un R^2 consistentemente más bajo. Por otro lado, el observador centralizado de Luenberger muestra un rendimiento considerablemente inferior, con los errores más altos y una capacidad de seguimiento muy limitada, confirmando que no es adecuado para escenarios que requieren operación distribuida bajo restricciones de muestreo.

Además de la precisión en la estimación, el esquema de observador distribuido propuesto reduce significativamente la carga computacional en comparación con enfoques anteriores. En la etapa de diseño, las ganancias del observador se obtienen utilizando operaciones básicas de álgebra lineal y asignación de polos (Algoritmo 3.4.1), evitando el uso de LMI de gran escala como en Li et al. (2025) para observadores distribuidos

Tabla 3.2: Métricas de rendimiento experimental para las velocidades estimadas.

Piso	Tipo de observador	MAE [mm/s]	RMSE [mm/s]	R^2
Primero	Propuesto distribuido	5.44	8.00	0.89
	Luenberger	14.95	23.82	0.06
	Distribuido convencional	4.94	7.75	0.90
Segundo	Propuesto distribuido	9.70	13.40	0.95
	Luenberger	42.03	62.90	-0.02
	Distribuido convencional	9.40	14.19	0.95
Tercero	Propuesto distribuido	11.12	15.75	0.97
	Luenberger	36.72	53.05	0.68
	Distribuido convencional	14.22	22.27	0.94
Cuarto	Propuesto distribuido	13.33	19.44	0.97
	Luenberger	46.95	64.78	0.70
	Distribuido convencional	19.56	29.10	0.94
Quinto	Propuesto distribuido	15.56	22.75	0.97
	Luenberger	47.31	65.65	0.75
	Distribuido convencional	22.78	34.07	0.93

o en [Galaz-Palma et al. \(2023\)](#) para sistemas con una estructura como la nuestra, cuya complejidad crece con la dimensión total del sistema $2n$. Sin embargo, nuestro diseño distribuido mantiene una complejidad fija e independiente por observador local, descomponiendo efectivamente el problema de diseño de ganancias del observador en un marco de observador distribuido. En la implementación, cada observador integra un modelo dinámico de $2n$ variables de estado con un paso de 1 ms, pero las actualizaciones de estado ocurren a tasas muy bajas ($\Delta_{\bar{M}}$ entre 150 y 750 ms). Por ejemplo, en la prueba de 25 s con cinco pisos ($n = 5$), el sistema completo realiza solo 383 mediciones y 764 eventos de comunicación en total. El número de mediciones por piso es 167, 84, 56, 42 y 34 para los pisos 1 a 5, respectivamente, reflejando los diferentes períodos de muestreo $\Delta_{\bar{M}}$. De manera similar, los eventos de comunicación por observador son 334, 167, 112, 84 y 67 para los observadores 1 a 5. En contraste, un observador continuo [Morales-Valdez et al. \(2024\)](#) requeriría una frecuencia de muestreo de al menos 10^3 Hz por sensor, lo que para la misma estructura y duración produciría aproximadamente 1.25×10^5 eventos, tres órdenes de magnitud más que el esquema propuesto. Para corroborar aún más la capacidad en tiempo real del esquema propuesto, se realizaron mediciones directas del tiempo de cálculo en el mismo hardware utilizado para la validación experimental: una estación de trabajo Advantech equipada con un procesador Intel Core i7-4770S (3.1 GHz, 8 GB de RAM) en la que se ejecutaba MATLAB/Simulink R2011a con el conjunto de herramientas Real-Time Windows Target. Se midieron los tiempos de ejecución de los ciclos de actualización completos para un único observador local a lo largo de los

25 segundos que duró el experimento. El tiempo de cálculo medio fue de $85.37 \mu\text{s}$ por observador y por iteración. Esta medición incluye las operaciones requeridas para cada observador local: predicción de estado utilizando el modelo dinámico; corrección a partir de la medición muestreada mediante la variable $\eta_i(t)$; el término de consenso con los observadores vecinos bajo el esquema de comunicación multitasa; y la actualización de las variables internas. Teniendo en cuenta que los períodos de muestreo de las mediciones oscilaron entre 0.15 s y 0.75 s, el tiempo de cálculo representa solo el 0,057 % del intervalo de muestreo más rápido, lo que deja un margen de tiempo real considerable. En cuanto a la escalabilidad, el coste computacional por observador implica operaciones sobre matrices de tamaño $2n \times 2n$, lo que da lugar a una complejidad de $O(n^2)$, donde n es el número de pisos. Estos resultados confirman que el observador propuesto es computacionalmente ligero en relación con estos intervalos de muestreo.

Capítulo 4

Observador distribuido con mediciones muestreadas y comunicación por eventos

4.1 Introducción

En los últimos años, la investigación sobre sistemas multiagente (MAS) ha crecido significativamente debido a su versatilidad en aplicaciones como redes eléctricas [Chen et al. (2021a)], vehículos aéreos no tripulados [Ren and Cao (2010); Campos-Martínez et al. (2024); Chi and Su (2024)], vehículos submarinos no tripulados [Mahboubi et al. (2022)] y redes de monitorización medioambiental [Miller et al. (2025)]. Estos sistemas han aumentado en escala y complejidad, lo que ha hecho necesario desarrollar arquitecturas distribuidas o descentralizadas [Siljak (2011)] que ofrezcan escalabilidad, robustez y eficiencia operativa. En este contexto, los estimadores de estado distribuidos (como los filtros de Kalman distribuidos [Olfati-Saber (2007)] y los observadores distribuidos [Park and Martins (2012b, 2016)]) permiten reconstruir el estado completo a partir de mediciones parciales mediante cooperación entre agentes.

Sin embargo, la implementación de estos estimadores enfrenta retos prácticos en el consumo de recursos de comunicación. Si bien los primeros trabajos asumían mediciones y comunicaciones continuas (un supuesto idealizado), avances recientes han incorporado mediciones muestreadas. Por ejemplo, [He and Liu (2024)] aborda el control de formación multiagente con salidas muestreadas en instantes no coordinados; [Liu and Huang (2021)] resuelve la regulación cooperativa de salida con mediciones y comunicaciones muestreadas, estableciendo límites explícitos para los intervalos de muestreo; y [Wang and Guay (2024)] trata la estimación distribuida con mediciones muestreadas a múltiples velocidades y comunicación asíncrona, incluso cuando los agentes individualmente no satisfacen la observabilidad.

La creciente complejidad de los MAS ha evidenciado que la comunicación continua no siempre es factible debido a recursos limitados. Para abordar esto, los mecanismos de comunicación activados por eventos (ETM) permiten transmitir solo cuando se cumple una condición específica, reduciendo transmisiones innecesarias [Liu et al. (2018); Wu et al. (2022)]. La investigación ha evolucionado desde esquemas estáticos hacia dinámicos (DETM) que incorporan variables auxiliares para umbrales más adaptativos [Wu et al. (2022); Tian et al. (2020)]. Por ejemplo, [Tian et al. (2020)] propuso un observador distribuido con DETM que garantiza convergencia asintótica y evita el comportamiento de Zenón. Posteriormente, [Zhou (2023)] introdujo un observador que separa subestados detectables de no detectables para reducir la carga de comunicación.

Recientemente, se han ampliado estos conceptos al consenso bipartito [Yao et al. (2025)], al control de formación y observación adaptativa con topologías cambiantes [Xu et al. (2025); Zhuang et al. (2025)], y a mecanismos robustos ante retardos [Li et al. (2025)] o esquemas síncronos/asíncronos [Wang and Chen (2025)].

A pesar de estos avances, persisten dos limitaciones importantes en el estado del arte. Primero, existe una desconexión entre los avances en ETM para control/consenso y los específicos para observadores distribuidos; los esquemas robustos para grafos dirigidos [Wu et al. (2022)] no se han integrado plenamente con arquitecturas de observación avanzadas. Segundo, la bibliografía predominante [Tian et al. (2020); Zhou (2023); Xu et al. (2025); Zhuang et al. (2025)] opera bajo el supuesto de que las mediciones de salida están disponibles de forma continua, lo cual es insostenible en sistemas digitales donde los sensores proporcionan datos muestreados. La interacción entre el muestreo periódico de mediciones y la comunicación aperiódica desencadenada por eventos plantea retos de estabilidad y diseño que no se han explorado suficientemente.

4.2 Planteamiento del problema

En esta sección, definimos el problema de estimación distribuida para un sistema lineal invariante en el tiempo general sobre un grafo dirigido. Cada agente tiene acceso a una parte de la salida del sistema observado y se comunica con los agentes vecinos, lo que permite a cada agente estimar el estado completo de la planta. La comunicación entre agentes se lleva a cabo utilizando una topología representada por el grafo dirigido $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ es el conjunto de agentes, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de aristas dirigidas y $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]$ es la matriz de adyacencia ponderada, con $\alpha_{ij} > 0$ si y solo si $(i, j) \in \mathcal{E}$ (el agente i envía información a j). Se supone que no hay lazos propios ($\alpha_{ii} = 0$) y que el grafo es fuertemente conexo, es decir, para cualquier par de nodos i, j existe un camino dirigido de i a j y de j a i .

Para cada agente i , el conjunto de vecinos de salida es $\mathcal{V}_i^{\text{out}} = \{j \in \mathcal{V} \mid (i, j) \in \mathcal{E}\}$, y su grado de salida es $d_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i^{\text{out}}} \alpha_{ij}$. La matriz laplaciana del grafo se define

como $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, donde $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\}$. Así, los elementos de $\mathcal{L}$ son $l_{ii} = d_i$ y $l_{ij} = -\alpha_{ij}$ para $i \neq j$. Dado que el grafo es dirigido, la matriz de adyacencia no es simétrica, por lo que se requiere un lema adicional (Lema [1](#)) para el análisis de estabilidad; dicho lema se presentó en la Sección [1.4](#) y permite construir un grafo no dirigido “espejo” a partir del laplaciano balanceado $G\mathcal{L}$, cuya matriz asociada es $\check{\mathcal{L}}$.

Consideremos ahora el siguiente sistema lineal perturbado e invariante en el tiempo con salidas muestreadas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y_i(t_k^i) &= C_i x(t_k^i) + D_i \zeta_i(t_k^i),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz del sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es la matriz de entrada y $u(t) \in \mathbb{R}^q$ es la entrada de control. El sistema es monitoreado por una red de N sensores, donde el i -ésimo sensor proporciona una medición de salida parcial $y_i(t_k^i) \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ en los instantes de muestreo t_k^i . La matriz $C_i \in \mathbb{R}^{\rho_i \times n}$ es la matriz de salida del sensor i , $D_i = I_{\rho_i} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_i}$ es la matriz de acoplamiento de ruido, y $\zeta_i(t_k^i) \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ es el ruido de medición que afecta al sensor i -ésimo.

Cada agente i obtiene mediciones de salida en los instantes de muestreo t_k^i , que satisfacen:

$$0 \leq t_0^i < t_1^i < \dots < t_k^i < t_{k+1}^i < \dots,$$

donde los intervalos de muestreo se definen como:

$$\Delta_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i.\tag{4.2}$$

Los instantes de muestreo satisfacen $t_k^i \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, para todo $i = 1, \dots, N$. Existen límites positivos para los intervalos de muestreo tales que:

$$0 < \Delta_h^i \leq \Delta_k^i \leq \Delta_{\bar{H}}^i \leq \Delta_{\bar{H}} < +\infty, \quad \forall k \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,\tag{4.3}$$

donde $\Delta_h^i > 0$ es el límite inferior del intervalo de muestreo para el agente i , $\Delta_{\bar{H}}^i > 0$ es el límite superior local, y $\Delta_{\bar{H}} > 0$ es el límite superior global que satisface $\Delta_{\bar{H}}^i \leq \Delta_{\bar{H}}$ para todo i .

La salida particionada del sistema puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} y_1(t_k^1) \\ y_2(t_k^2) \\ \vdots \\ y_N(t_k^N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 x(t_k^1) + D_1 \zeta_1(t_k^1) \\ C_2 x(t_k^2) + D_2 \zeta_2(t_k^2) \\ \vdots \\ C_N x(t_k^N) + D_N \zeta_N(t_k^N) \end{bmatrix},\tag{4.4}$$

donde $y_i(t_k^i) \in \mathbb{R}^{\rho_i}$ y $\sum_{i=1}^N \rho_i = \rho$.

En el diseño se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 9. Sea $C = [C_1^T, C_2^T, \dots, C_N^T]^T$ la matriz de salida global. Entonces (A, C) es observable, mientras que (A, C_i) no es observable para ningún $i \in \mathcal{V}$.

Suposición 10. Las mediciones se ven afectadas por un ruido aditivo $\zeta_i(t_k^i)$ que es acotado, es decir, existe una constante $\mathcal{Z} > 0$ tal que $\|\zeta_i(t_k^i)\| \leq \mathcal{Z}$ para todo $i \in \mathcal{V}$ y todos los instantes de muestreo t_k^i .

4.3 Diseño del observador

El objetivo principal es diseñar un observador distribuido que, para cada agente i , genere una estimación $\hat{x}_i(t)$ del estado global $x(t)$, utilizando únicamente mediciones locales muestreadas $y_i(t_k^i)$ y el intercambio de información con los vecinos $j \in \mathcal{V}_i^{\text{out}}$, donde la comunicación se activa en respuesta a eventos. Se desea garantizar que el error de estimación $\epsilon_i(t) = \hat{x}_i(t) - x(t)$ esté uniformemente acotado y converja asintóticamente a cero, a pesar del muestreo multitasa y la comunicación desencadenada por eventos.

Para lograr la estimación colaborativa del estado completo de un sistema dinámico, se propone un observador distribuido compuesto por $\mathcal{V}$ observadores locales que se comunican a través de una secuencia temporal desencadenada por eventos. Cada observador $i \in \mathcal{V}$ decide transmitir su estado $\hat{x}_i(t)$ a sus vecinos solo cuando se cumple una condición de activación específica, evaluada en función del último estado recibido de sus vecinos $\hat{x}_j(\omega_k^j)$, su propio estado actual $\hat{x}_i(t)$, y la última información transmitida $\hat{x}_i(\omega_k^i)$. Este mecanismo de comunicación selectiva reduce significativamente el uso de recursos de red al tiempo que mantiene la precisión de la estimación. Cada observador local i sigue la dinámica:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) + Bu(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\hat{x}_j(\omega_k^j) - \hat{x}_i(\omega_k^i)) \\ \dot{\eta}_i(t) = -C_i L_i \eta_i(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i) \\ \eta_i(t_k^i) = C_i \hat{x}_i(t_k^i) - C_i x(t_k^i) + D_i \zeta_i(t_k^i), \quad t = t_k^i. \end{cases} \quad (4.5)$$

Este enfoque considera dos secuencias temporales independientes. Por un lado, los instantes de muestreo t_k^i definen los momentos en los que cada agente i obtiene mediciones de salida $y_i(t_k^i)$, que se producen con intervalos de muestreo acotados $\Delta_k^i \leq \Delta_{\bar{H}}^i$; por otro lado, los instantes de comunicación ω_k^i representan los momentos en los que el agente i transmite su estado estimado a sus vecinos, los cuales se determinan de forma asíncrona mediante una condición desencadenante de eventos, lo que permite una comunicación selectiva que optimiza el uso de los recursos de red.

En este esquema, los instantes de muestreo t_k^i proporcionan nuevas mediciones de salida, mientras que los instantes de comunicación ω_k^i permiten el intercambio de información entre agentes vecinos.

El estado del observador local en el nodo i , denotado por $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^n$, depende de los parámetros de diseño α_{ij} (entradas de la matriz de adyacencia $\mathcal{A}$), la ganancia de acoplamiento $\gamma \in \mathbb{R}$ y las matrices de ganancia $L_i \in \mathbb{R}^{n \times \rho_i}$ y $W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A continuación se propone un mecanismo dinámico de activación de eventos. Este mecanismo se basa en una variable dinámica interna $\phi_i(t)$ para cada $i \in \mathcal{V}$, cuya dinámica rige los instantes de comunicación entre los observadores distribuidos, y viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i(t) = & -b_i\phi_i(t) - 2\gamma g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 \\ & + \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^N (g_i \alpha_{ij} + \alpha_{ji} g_j) \|\hat{x}_i(\omega_k^i) - \hat{x}_j(\omega_k^j)\|^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con $\phi_i(0) > 0$, donde $\phi_i(0)$ corresponde al estado inicial de ϕ_i , $b_i > 0$ es un parámetro positivo, y la condición de activación asociada al observador i viene definida por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}^i = & \inf \left\{ t > \omega_k^i \mid 2\gamma g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 \right. \\ & \left. \geq \theta_i \phi_i(t) + \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^N (g_i \alpha_{ij} + \alpha_{ji} g_j) \|\hat{x}_i(\omega_k^i) - \hat{x}_j(\omega_k^j)\|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde γ se define en la ecuación (4.5) y $\theta_i > 0$ es un parámetro. Para evaluar el rendimiento de los observadores, definimos el error de observación $\epsilon_i(t) = \hat{x}_i(t) - x(t)$ y la diferencia $\delta_i(t) = \hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)$ durante el intervalo $t \in [\omega_k^i, \omega_{k+1}^i)$. La dinámica del error para el observador i , resultante de combinar (4.1) y (4.5), es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i(t) = & \dot{\hat{x}}_i(t) - \dot{x}(t) \\ = & A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\hat{x}_j(\omega_k^j) - \hat{x}_i(\omega_k^i)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Expresando $\hat{x}_j(\omega_k^j) = x(t) + \epsilon_j(\omega_k^j)$ y de forma similar para i , obtenemos:

$$\hat{x}_j(\omega_k^j) - \hat{x}_i(\omega_k^i) = \epsilon_j(\omega_k^j) - \epsilon_i(\omega_k^i). \quad (4.9)$$

De la definición de $\delta_i(t)$, se deduce que $\epsilon_i(\omega_k^i) = \epsilon_i(t) - \delta_i(t)$. Sustituyendo esta

relación y la correspondiente para $\epsilon_j(\omega_k^j)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_i(t) &= A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} [(\epsilon_j(t) - \delta_j(t)) - (\epsilon_i(t) - \delta_i(t))] \\ &= A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\delta_i(t) - \delta_j(t)).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Dada la matriz laplaciana $\mathcal{L}$, observamos que:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)) = - \sum_{j=1}^N l_{ij}\epsilon_j(t)\tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\delta_i(t) - \delta_j(t)) = \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_j(t),\tag{4.12}$$

obtenemos finalmente:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = A\epsilon_i(t) - L_i\eta_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij}\epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_j(t).\tag{4.13}$$

Para simplificar el análisis, introducimos una variable auxiliar $z_i(t)$ definida en (2.9). Sustituyendo $z_i(t)$ en la dinámica de error (4.13), obtenemos:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = (A - L_i C_i)\epsilon_i(t) + L_i z_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij}\epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij}\delta_j(t).\tag{4.14}$$

Continuando con el análisis de la dinámica del error, es importante señalar que el par (A, C_i) no es necesariamente observable. Por lo tanto, se realiza una transformación de observabilidad utilizando una matriz de transformación ortonormal T_i (es decir, una matriz cuadrada que satisface $T_i T_i^T = I_n$). Esta matriz se construye concatenando las submatrices O_i y U_i : $T_i = \begin{bmatrix} O_i & U_i \end{bmatrix}$, donde $O_i \in \mathbb{R}^{n \times v_i}$ contiene el subespacio observable y $U_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-v_i)}$ genera el subespacio no observable, siendo v_i la dimensión del subespacio observable del par (A, C_i) .

Dado que el par (A, C_i) no es observable, las matrices del sistema se transforman mediante T_i (1.12).

Para analizar la dinámica del error, descomponemos el error de estimación $\epsilon_i(t)$ en componentes observables y no observables:

$$\epsilon_i(t) = T_i \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix},\tag{4.15}$$

donde $\epsilon_{io}(t)$ es la parte observable y $\epsilon_{iu}(t)$ es la parte no observable. De forma similar, para $\delta_i(t)$:

$$\delta_i(t) = T_i \begin{bmatrix} \delta_{io}(t) \\ \delta_{iu}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Sustituyendo (4.15) y (4.16) en la dinámica de error (4.14), y multiplicando por T_i^T por la izquierda, obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{io}(t) \\ \dot{\epsilon}_{iu}(t) \end{bmatrix} &= T_i^T (A - L_i C_i) T_i \begin{bmatrix} \epsilon_{io}(t) \\ \epsilon_{iu}(t) \end{bmatrix} + T_i^T L_i z_i(t) \\ &\quad - \gamma T_i^T W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} T_j \begin{bmatrix} \epsilon_{jo}(t) \\ \epsilon_{ju}(t) \end{bmatrix} + \gamma T_i^T W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} T_j \begin{bmatrix} \delta_{jo}(t) \\ \delta_{ju}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Las matrices de ganancia L_i y W_i están diseñadas para estabilizar el observador y garantizar la convergencia,

$$L_i = T_i \begin{bmatrix} L_{io} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_i = T_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-v_i} \end{bmatrix} T_i^T. \quad (4.18)$$

En (4.18), la matriz de ponderación W_i actúa como un proyector ortogonal sobre el subespacio no observable definido por (A, C_i) .

Sustituyendo la transformación (1.12) y las matrices de ganancia (4.18) en la dinámica de error (4.14), y definiendo las siguientes variables agregadas:

$$\begin{aligned} \epsilon_o &:= \text{col}(\epsilon_{1o}, \epsilon_{2o}, \dots, \epsilon_{No}), & \epsilon_u &:= \text{col}(\epsilon_{1u}, \epsilon_{2u}, \dots, \epsilon_{Nu}), \\ A_o &:= \text{diag}(A_{1o}, A_{2o}, \dots, A_{No}), & L_o &:= \text{diag}(L_{1o}, L_{2o}, \dots, L_{No}), \\ A_r &:= \text{diag}(A_{1r}, A_{2r}, \dots, A_{Nr}), & O &:= \text{diag}(O_1, O_2, \dots, O_N), \\ A_u &:= \text{diag}(A_{1u}, A_{2u}, \dots, A_{Nu}), & U &:= \text{diag}(U_1, U_2, \dots, U_N), \\ C_o &:= \text{diag}(C_{1o}, C_{2o}, \dots, C_{No}), & z &:= \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_N), \\ D &:= \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_N). \end{aligned}$$

La dinámica de error resultante, descompuesta en componentes observables y de interconexión, puede escribirse en forma compacta de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon}_o(t) = (A_o - L_o C_o) \epsilon_o(t) + L_o z(t), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_u(t) &= A_r \epsilon_o(t) + A_u \epsilon_u(t) - \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) (O \epsilon_o(t) + U \epsilon_u(t)) \\ &\quad + \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) (O \delta_o(t) + U \delta_u(t)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Teorema 5. Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo (A, C) observable

conjuntamente, monitoreado por una red de N agentes que se comunican a través de un grafo dirigido fuertemente conectado Γ . Cada agente obtiene mediciones de salida en instantes de muestreo con un intervalo máximo de $\Delta_{\bar{H}}$. El observador distribuido propuesto (4.5), que utiliza comunicación desencadenada por eventos (4.7), garantiza la convergencia exponencial del error de estimación si se cumplen las siguientes condiciones:

- Las matrices de ganancia L_{io} deben estabilizar los subsistemas observables de tal manera que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\begin{bmatrix} PA_o + A_o^T P - Y C_o - C_o^T Y^T + \mu P & Y \\ Y^T & -\bar{\delta} I \end{bmatrix} < 0, \quad P = P^T > 0. \quad (4.21)$$

donde $L_o = P^{-1}Y$, con una tasa de decaimiento $\mu > 0$.

- La ganancia de acoplamiento γ debe seleccionarse de acuerdo con $\gamma > 4(\|A_u\| + \mu)/\lambda_{\min}(U^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U)$, y el intervalo de muestreo máximo $\Delta_{\bar{H}}$ debe estar acotado por arriba por $\chi_{\theta_L} = \mu/(2\sigma\|L_o\|\|C_o A_o\|)$.

En estas condiciones, el error de estimación $\epsilon_i(t) = \hat{x}_i(t) - x(t)$ cumple que

$$\|\epsilon_i(t)\| \leq \sigma \left(1 + \Delta_{\bar{H}}(a_{\theta_L} - \eta(\Delta_{\bar{H}}))\right) e^{-\eta(\Delta_{\bar{H}})t} \|\epsilon_i(0)\| + \frac{c_{\theta_L}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)} \eta(\Delta_{\bar{H}})}, \quad (4.22)$$

donde

$$\eta(\Delta_{\bar{H}}) = (\mu - \sigma\|L_o\|\|C_o A_o\|\Delta_{\bar{H}}) e^{-\mu\Delta_{\bar{H}}}. \quad (4.23)$$

En consecuencia, el error converge exponencialmente a un conjunto residual cuyo tamaño es proporcional a $c_{\theta_L}/\eta(\Delta_{\bar{H}})$; es decir, está acotado en última instancia por $\frac{c_{\theta_L}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)} \eta(\Delta_{\bar{H}})}$.

4.4 Análisis de Estabilidad

Demostración. Para garantizar una tasa de decaimiento de $\mu > 0$, consideramos la dinámica del error desplazada:

$$\dot{\epsilon}_o(t) = (A_o - L_o C_o + \mu I) \epsilon_o(t) + L_o z(t) \quad (4.24a)$$

$$\dot{\epsilon}_u(t) = A_r \epsilon_o + (A_u - \gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U + \mu I) \epsilon_u(t) + \gamma U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U \delta_u(t). \quad (4.24b)$$

Por lo tanto, debe demostrarse la estabilidad de cada subsistema de $\epsilon_i(t)$.

Para garantizar la estabilidad del subsistema $\dot{\epsilon}_o$ presente en (4.24a), consideramos

la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V(\epsilon_o) := \epsilon_o^T P \epsilon_o, \quad (4.25)$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva ($P = P^T > 0$). Entonces, la derivada de V a lo largo de (4.25) es:

$$\dot{V}(\epsilon_o) := 2\epsilon_o^T P \dot{\epsilon}_o. \quad (4.26)$$

Sustituyendo (4.24a):

$$\dot{V}(\epsilon_o) = 2\epsilon_o^T P(A_o - L_o C_o + \mu I)\epsilon_o(t) + 2\epsilon_o^T P L_o z(t). \quad (4.27)$$

Analicemos la variable auxiliar z , a partir de la definición en (2.9), obteniendo su respectiva derivada y considerando la dinámica del observador $\dot{\eta}_i(t) = -C_i L_i \eta_i(t)$, obtenemos

$$\dot{z}_i(t) = C_i \dot{\epsilon}_i(t) + C_i L_i \eta_i(t).$$

Sustituyendo la dinámica del error (4.13) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{z}_i(t) = C_i \left(A\epsilon_i(t) - L_i \eta_i(t) - \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t) \right) + C_i L_i \eta_i(t) \quad (4.28)$$

simplificando

$$\dot{z}_i(t) = C_i A\epsilon_i(t) - \gamma C_i W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \epsilon_j(t) + \gamma C_i W_i \sum_{j=1}^N l_{ij} \delta_j(t). \quad (4.29)$$

La estructura de W_i en (4.18), junto con la descomposición de observabilidad (1.12), implica que $C_i W_i = \mathbf{0}$, lo que cancela los términos acoplados y da como resultado

$$\dot{z}_i(t) = C_i A\epsilon_i(t) \quad (4.30)$$

Aplicando la transformación $\epsilon_i(t) = T_i[\epsilon_{io}(t) \ \epsilon_{iu}(t)]^T$ y las matrices transformadas (1.12), llegamos finalmente a

$$\dot{z}_i(t) = C_{io} A_{io} \epsilon_{io}(t) \quad (4.31)$$

La dinámica de $z_i(t)$ depende, por lo tanto, exclusivamente del componente observable del error. Por lo tanto, basándonos en la suposición 10, donde se garantiza que el ruido de medición está limitado por $\|\zeta_i(t)\| \leq \mathcal{Z}$ para todo $i \in \mathcal{V}$, y en particular las muestras satisfacen $\|\zeta_i(t_k^i)\| \leq \mathcal{Z}$.

Entre instantes de muestreo, $\eta_i(t)$ sigue evolucionando según $\dot{\eta}_i = -C_i L_i \eta_i$. A partir de $z_i(t)$ en (2.9) y utilizando $\eta_i(t_k^i)$ en (4.5), ahora, su valor en el instante de muestreo es

$$z_i(t_k^i) = C_i \epsilon_i(t_k^i) - \eta_i(t_k^i) = -D_i \zeta_i(t_k^i). \quad (4.32)$$

Ahora, integrando $\dot{z}_i(t)$ desde t_k^i hasta t y utilizando la condición inicial (4.32) se obtiene:

$$z_i(t) = -D_i \zeta_i(t_k) + \int_{t_k^i}^t C_{io} A_{io} \epsilon_{io}(s) ds. \quad (4.33)$$

Reescribiendo en forma vectorial:

$$z(t) = -D \zeta(t_k) + \int_{t_k}^t C_o A_o \epsilon_o(s) ds, \quad (4.34)$$

donde $t_k = \min_i t_k^i$ denota el instante de muestreo más reciente entre todos los agentes, siguiendo la relación $t_k \leq t < t_k + \Delta_{\bar{H}}$ con $\Delta_{\bar{H}} = \max_i (t_{k+1}^i - t_k^i)$.

Así, del término $2\epsilon_o^T P L_o z(t)$ de la ecuación (4.27), se obtiene:

$$2\epsilon_o^T P L_o z(t) = 2\epsilon_o^T P L_o \left(-D \zeta(t_k) + \int_{t_k}^t C_o A_o \epsilon_o(s) ds \right) \quad (4.35)$$

Dado que D es diagonal y definida positiva, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D = I$ mediante un escalado adecuado de los límites de ruido $\mathcal{Z}$, de lo que se deduce que:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_o^T P L_o \zeta(t_k) &\leq \bar{\delta} \|\zeta(t_k)\|^2 + \frac{1}{\bar{\delta}} \epsilon_o^T P L_o L_o^T P \epsilon_o \\ &\leq \bar{\delta} \mathcal{Z}^2 + \frac{1}{\bar{\delta}} \epsilon_o^T P L_o L_o^T P \epsilon_o \end{aligned} \quad (4.36)$$

y

$$2\epsilon_o^T P L_o \int_{t_k}^t C_o A_o \epsilon_o(s) ds \leq 2\sigma \|L_o\| \|C_o A_o\| \left(\int_{t_k}^t \sqrt{V_o(\epsilon_o(s), s)} ds \right) \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)}, \quad (4.37)$$

donde $\sigma = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$.

Para demostrar la estabilidad del sistema, tratamos de establecer un límite superior para el error de estimación observable $\epsilon_o(t)$. Con este fin, proponemos una función de Lyapunov de la forma $V(\epsilon_o(t)) = \epsilon_o^T(t) P \epsilon_o(t)$, donde P es una matriz simétrica y

definida positiva (SPD). La elección de P como SPD garantiza que $V(\epsilon_o(t))$ sea una función definida positiva, lo cual es esencial para analizar la convergencia del error y, en consecuencia, para demostrar la estabilidad del sistema.

$$\lambda_{\min}(P)\|\epsilon_o\|^2 \leq V(\epsilon_o(t), t) \leq \lambda_{\max}(P)\|\epsilon_o\|^2, \quad (4.38)$$

donde $\lambda_{\min}(P)$ es el valor propio mínimo de P y $\lambda_{\max}(P)$ es el valor propio máximo de P . La variable $\|\epsilon_o\|^2$ se expresa de la siguiente manera:

$$\|\epsilon_o\| \leq \sqrt{\frac{V(\epsilon_o(t), t)}{\lambda_{\min}(P)}}. \quad (4.39)$$

Por lo tanto, la derivada de la función de Lyapunov puede acotarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\epsilon_o(t), t) + \mu V_o(\epsilon_o(t), t) &\leq \epsilon_o^T(t) \left[P(A_o - L_o C_o) + (A_o - L_o C_o)^T P + \mu P \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\delta}} P L_o L_o^T P \right] \epsilon_o(t) + \bar{\delta} \mathcal{Z}^2 \\ &\quad + 2\sigma \|L_o\| \|C_o A_o\| \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)} \int_{t_k}^t \sqrt{V_o(s)(\epsilon_o(s), s)} ds. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esta desigualdad se cumple, siempre que

$$\left[P(A_o - L_o C_o) + (A_o - L_o C_o)^T P + \mu P + \frac{1}{\bar{\delta}} P L_o L_o^T P \right] < 0 \quad (4.41)$$

Utilizando el complemento de Schur, esta condición es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \Lambda_o + \frac{1}{\bar{\delta}} P L_o L_o^T P & P L_o \\ L_o^T P & -\bar{\delta} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.42)$$

donde $\Lambda_o = P(A_o - L_o C_o) + (A_o - L_o C_o)^T P + \mu P$, expandiendo se obtiene:

$$\Lambda_o = P A_o + A_o^T P - P L_o C_o - C_o^T L_o^T P + \mu P. \quad (4.43)$$

Ahora, se denota $P L_o = Y$. Entonces, la LMI se convierte en

$$\Xi = \begin{bmatrix} P A_o + A_o^T P - Y C_o - C_o^T Y^T + \mu P & Y \\ Y^T & -\bar{\delta} I \end{bmatrix} < 0, \quad P = P^T > 0. \quad (4.44)$$

donde $L_o = P^{-1} Y$.

Reescribiendo, la derivada de la función de Lyapunov se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\epsilon_o(t), t) + \mu V_o(\epsilon_o(t), t) &\leq \epsilon_o^T \Xi \epsilon_o + \bar{\delta} \mathcal{Z}^2 \\ &\quad + 2\|L_o\|\sigma\|C_o A_o\| \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)} \int_{t_k}^t \sqrt{V_o(\epsilon_o(s), s)} ds, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde $\Xi = P(A_o - L_o C_o) + (A_o - L_o C_o)^T P + \mu P + \frac{1}{\bar{\delta}} P L_o L_o^T P \leq 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)} &\leq \frac{1}{2\sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)}} \left[-\mu V_o(t) + \bar{\delta} \mathcal{Z}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\|L_o\|\sigma\|C_o A_o\| \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)} \int_{t_k}^t \sqrt{V_o(\epsilon_o(s), s)} ds \right] \\ &= -\frac{\mu}{2} \sqrt{V_o(\epsilon_o(t), t)} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \mathcal{Z} \\ &\quad + \sigma\|L_o\|\|C_o A_o\| \int_{t_k}^t \sqrt{V_o(\epsilon_o(s), s)} ds. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} \leq -a_{\theta_L} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} + b_{\theta_L} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds + c_{\theta_L}. \quad (4.47)$$

donde

$$a_{\theta_L} = \frac{\mu}{2}, \quad b_{\theta_L} = \sigma\|L_o\|\|C_o A_o\|, \quad c_{\theta_L} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \mathcal{Z}.$$

El valor máximo del diámetro de muestreo $\Delta_{\bar{H}}$ satisface la siguiente condición:

$$\Delta_{\bar{H}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}} = \frac{\mu}{2\sigma\|L_o\|\|C_o A_o\|} \triangleq \chi_{\theta_L}. \quad (4.48)$$

Para limitar el error de observación, recurrimos ahora al Lema 2.1 de [Ramírez-Rasgado et al. \(2022b\)](#). En primer lugar, observemos que, para cualquier $t \geq t_k$, el término integral satisface

$$\int_{t_k}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds \leq \int_{t-\Delta_{\bar{H}}}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds, \quad (4.49)$$

puesto que $t - t_k \leq \Delta_{\bar{H}}$. Por lo tanto, la desigualdad [\(4.47\)](#) implica

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} \leq -a_{\theta_L} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} + b_{\theta_L} \int_{t-\Delta_{\bar{H}}}^t \sqrt{V(\epsilon_o(s), s)} ds + c_{\theta_L}. \quad (4.50)$$

Ahora, identifiquemos

$$v(t) = \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)}, \quad \gamma = a_{\theta_L}, \quad \mu = b_{\theta_L}, \quad \delta = \Delta_{\bar{H}}, \quad p(t) = c_{\theta_L}.$$

La condición $\Delta_{\bar{H}} < \frac{a_{\theta_L}}{b_{\theta_L}}$ en (4.48) garantiza que $\mu\delta/\gamma < 1$, que es la condición requerida por el Lema 2.1. Por lo tanto, aplicando el lema se obtiene, para todo $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\epsilon_o(t), t)} &\leq \left(1 + \Delta_{\bar{H}}(a_{\theta_L} - \eta(\Delta_{\bar{H}}))\right) e^{-\eta(\Delta_{\bar{H}})(t-t_0)} \\ &\quad \times \max_{\nu \in [t_0 - \Delta_{\bar{H}}, t_0]} \sqrt{V(\epsilon_o(\nu), \nu)} + \frac{c_{\theta_L}}{\eta(\Delta_{\bar{H}})}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde

$$\eta(\Delta_{\bar{H}}) = (a_{\theta_L} - b_{\theta_L} \Delta_{\bar{H}}) e^{-a_{\theta_L} \Delta_{\bar{H}}}.$$

Esta desigualdad proporciona un límite explícito del error de observación en términos del intervalo de muestreo máximo $\Delta_{\bar{H}}$ y el límite de perturbación c_{θ_L} . Muestra que el error converge exponencialmente a un conjunto residual cuyo tamaño es proporcional a $c_{\theta_L}/\eta(\Delta_{\bar{H}})$.

Volviendo a los términos del error de observación $\epsilon_o(t)$:

$$\|\epsilon_o(t)\| \leq \sigma \left(1 + \Delta_{\bar{H}}(a_{\theta_L} - \eta(\Delta_{\bar{H}}))\right) e^{-\eta(\Delta_{\bar{H}})t} \|\epsilon_o(0)\| + \frac{c_{\theta_L}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)} \eta(\Delta_{\bar{H}})}. \quad (4.52)$$

Esta desigualdad muestra que el error de observación converge exponencialmente a una bola residual cuyo radio es proporcional al límite de perturbación c_{θ_L} e inversamente proporcional a $\eta(\Delta_{\bar{H}})$.

Ahora evaluaremos el subsistema no observable $\epsilon_u(t)$, proponiendo la siguiente función de Lyapunov candidata.

Función candidata de Lyapunov:

$$V_u := V(\epsilon_u) + \sum_{i=1}^N \phi_i, \quad (4.53)$$

donde:

$$V(\epsilon_u) := \sum_{i=1}^N g_i \epsilon_{iu}^T \epsilon_{iu}. \quad (4.54)$$

Utilizando el producto de Kronecker:

$$V(\epsilon_u) = \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u, \quad (4.55)$$

donde $n - v$ es la dimensión del subespacio no observable. Entonces, la derivada de V_u :

$$\dot{V}_u := \dot{V}(\epsilon_u) + \sum_{i=1}^N \dot{\phi}_i. \quad (4.56)$$

Para $\dot{V}(\epsilon_u)$:

$$\dot{V}(\epsilon_u) = \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) \dot{\epsilon}_u + \dot{\epsilon}_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u. \quad (4.57)$$

Sustituyendo $\dot{\epsilon}_u$ en (4.57):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_u) = & \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) [A_r \epsilon_o + (A_u - \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U + \mu I) \epsilon_u + \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \delta_u] \\ & + [A_r \epsilon_o + (A_u - \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U + \mu I) \epsilon_u + \gamma U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \delta_u]^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u \end{aligned} \quad (4.58)$$

Desarrollando los términos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon_u) = & \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o + \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_u \epsilon_u - \gamma \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \epsilon_u \\ & + \mu \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u + \gamma \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) U^T (\mathcal{L} \otimes I_n) U \delta_u + \epsilon_o^T A_r^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u \\ & + \epsilon_u^T A_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u - \gamma \epsilon_u^T U^T (\mathcal{L}^T \otimes I_n) U (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u + \mu \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u \\ & + \gamma \delta_u^T U^T (\mathcal{L}^T \otimes I_n) U (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para facilitar el análisis, los términos se agrupan de manera que se simplifique la ecuación (4.59). Comenzamos con los términos que relacionan los errores ϵ_u y ϵ_o . Dada la estructura simétrica de la forma cuadrática, el primer término se reduce a:

$$\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o + \epsilon_o^T A_r^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u = 2 \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o \quad (4.60)$$

Agrupamos los términos asociados a la matriz de dinámica del sistema A_u y obtenemos:

$$\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_u \epsilon_u + \epsilon_u^T A_u^T (G \otimes I_{n-v}) \epsilon_u = 2 \epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_u \epsilon_u \quad (4.61)$$

Por el Lema 1, tenemos que $G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G = \check{\mathcal{L}}$ (considerando que G es la matriz de pesos

diagonal). Por lo tanto, la suma de los dos términos se reduce a:

$$\begin{aligned}
& -\gamma\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U\epsilon_u - \gamma\epsilon_u^TU^T(\mathcal{L}^T \otimes I_n)U(G \otimes I_{n-v})\epsilon_u \\
& = -\gamma\epsilon_u^TU^T[(G \otimes I_{n-v})(\mathcal{L} \otimes I_n) + (\mathcal{L}^T \otimes I_n)(G \otimes I_{n-v})]U\epsilon_u \\
& = -\gamma\epsilon_u^TU^T[(G\mathcal{L} \otimes I_n) + (\mathcal{L}^TG \otimes I_n)]U\epsilon_u \\
& = -\gamma\epsilon_u^TU^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U\epsilon_u
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Sumando los términos con μ se obtiene:

$$\mu\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})\epsilon_u + \mu\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})\epsilon_u = 2\mu\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})\epsilon_u \tag{4.63}$$

Finalmente, los términos que involucran a δ_u se reducen a:

$$\begin{aligned}
& \gamma\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})U^T(\mathcal{L} \otimes I_n)U\delta_u + \gamma\delta_u^TU^T(\mathcal{L}^T \otimes I_n)U(G \otimes I_{n-v})\epsilon_u \\
& = \gamma\epsilon_u^TU^T[(G \otimes I_{n-v})(\mathcal{L} \otimes I_n) + (\mathcal{L}^T \otimes I_n)(G \otimes I_{n-v})]U\delta_u \\
& = \gamma\epsilon_u^TU^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U\delta_u
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Por lo tanto, la ecuación $\dot{V}(\epsilon_u)$ es:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\epsilon_u) & = 2\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})A_r\epsilon_o + 2\epsilon_u^T(G \otimes I_{n-v})(A_u + \mu I)\epsilon_u - \gamma\epsilon_u^TU^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U\epsilon_u \\
& \quad + \gamma\epsilon_u^TU^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)U\delta_u.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Ahora, para $\sum_{i=1}^N \dot{\phi}_i$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \dot{\phi}_i & = \sum_{i=1}^N (-b_i\phi_i - 2\gamma g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2) \\
& \quad + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (g_i\alpha_{ij} + \alpha_{ji}g_j) \|\hat{x}_i(\omega_k^i) - \hat{x}_j(\omega_k^j)\|^2 \\
& = -\sum_{i=1}^N b_i\phi_i - 2\gamma \sum_{i=1}^N g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 \\
& \quad + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (g_i\alpha_{ij} + \alpha_{ji}g_j) \|\hat{x}_i(\omega_k^i) - \hat{x}_j(\omega_k^j)\|^2.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Tenemos:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\phi}_i = -\sum_{i=1}^N b_i\phi_i - 2\gamma \sum_{i=1}^N g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 + \gamma(\epsilon - \delta)^T(\check{\mathcal{L}} \otimes I_n)(\epsilon - \delta), \tag{4.67}$$

donde $\epsilon = \text{col}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N) - \mathbf{1}_N \otimes x$ y $\delta = \text{col}(\delta_1, \dots, \delta_N)$.

Definiendo $\epsilon = U\epsilon_u$ y $\delta = U\delta_u$, donde U es una base del subespacio no observable, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\phi}_i = & - \sum_{i=1}^N b_i \phi_i - 2\gamma \sum_{i=1}^N g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 \\ & + \gamma(\epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u - 2\epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u + \delta_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Sumando algebraicamente las ecuaciones (4.65) y (4.68) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u = & 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o + 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) (A_u + \mu I) \epsilon_u - \sum_{i=1}^N b_i \phi_i \\ & - 2\gamma \sum_{i=1}^N g_i d_i \|\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)\|^2 + \gamma \delta_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u - \gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Para demostrar que $\dot{V}_u < 0$, utilizamos la condición de evento para obtener un límite superior. Partimos de la expresión (4.69) de $\dot{V}_u$.

La condición de evento garantiza que, para cada agente i y $t \in [\omega_k^i, \omega_{k+1}^i)$:

$$-2\gamma \sum_{i=1}^N g_i d_i \|\delta_i\|^2 > - \sum_{i=1}^N \theta_i \phi_i - \gamma(\epsilon_u - \delta_u)^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U (\epsilon_u - \delta_u). \quad (4.70)$$

Sustituyendo (4.70) en (4.69) y simplificando:

$$\begin{aligned} \dot{V}_u < & 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o + 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) (A_u + \mu I) \epsilon_u \\ & - \sum_{i=1}^N (b_i + \theta_i) \phi_i - \gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u + \gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para tratar el término cruzado $\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u$, aplicamos la desigualdad de Young:

$$\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u \leq \frac{\gamma}{2} \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u + \frac{\gamma}{2} \delta_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u. \quad (4.72)$$

Ahora, para acotar $\delta_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u$, obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\delta_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u &\leq \|U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U\| \cdot \|\delta_u\|^2 \\
&\leq \|\check{\mathcal{L}} \otimes I_n\| \cdot \|\delta_u\|^2 \\
&= \|\check{\mathcal{L}}\| \cdot \|\delta_u\|^2 \\
&= \lambda_{\max}(\check{\mathcal{L}}) \sum_{i=1}^N \|\delta_{iu}\|^2 \\
&\leq \lambda_{\max}(\check{\mathcal{L}}) \sum_{i=1}^N \|\delta_i\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\gamma \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \delta_u \leq \frac{\gamma}{2} \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u + \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}(\check{\mathcal{L}}) \sum_{i=1}^N \|\delta_i\|^2. \quad (4.73)$$

Sustituyendo la desigualdad (4.73) en (4.71) se obtiene el límite

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u &< 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o + 2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) (A_u + \mu I) \epsilon_u \\
&\quad - \sum_{i=1}^N (b_i + \theta_i) \phi_i - \frac{\gamma}{2} \epsilon_u^T U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U \epsilon_u \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}(\check{\mathcal{L}}) \sum_{i=1}^N \|\delta_i\|^2. \quad (4.74)
\end{aligned}$$

El análisis de (4.74) revela que el término $2\epsilon_u^T (G \otimes I_{n-v}) A_r \epsilon_o$ decae exponencialmente debido a la estabilidad del subsistema observable, mientras que $-\sum_{i=1}^N (b_i + \theta_i) \phi_i$ contribuye negativamente porque $b_i, \theta_i, \phi_i(0) > 0$.

Los términos que contienen ϵ_u pueden combinarse como $\epsilon_u^T Q \epsilon_u$, donde la matriz Q viene definida por

$$Q = 2(G \otimes I_{n-v})(A_u + \mu I) - \frac{\gamma}{2} U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U. \quad (4.75)$$

Para que Q sea definida negativa, el parámetro γ debe satisfacer

$$\gamma > \frac{4(\|A_u\| + \mu)}{\lambda_{\min}(U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U)}. \quad (4.76)$$

Esta condición garantiza que la parte cuadrática en ϵ_u sea negativa, contrarrestando cualquier posible contribución positiva de los demás términos.

Por el Lema 1, G es definida positiva y $\check{\mathcal{L}}$ es un laplaciano simétrico conexo, lo que garantiza que $U^T (\check{\mathcal{L}} \otimes I_n) U$ es semidefinida positiva con $\lambda_{\min} > 0$.

La condición de evento (4.7) garantiza que $\sum_{i=1}^N \|\delta_i\|^2$ permanece acotado y, en consecuencia, $\frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}(\check{\mathcal{L}}) \sum_{i=1}^N \|\delta_i\|^2$ también es acotado. Si se elige γ suficientemente grande (según la desigualdad anterior), los términos negativos en $\dot{V}_u$ predominan, lo que lleva a

$$\dot{V}_u \leq -(\|\epsilon_u\|^2 + \sum_{i=1}^N \phi_i). \quad (4.77)$$

Al combinar este resultado con la estabilidad exponencial del subsistema observable, concluimos que el error de estimación es globalmente estable de forma exponencial con una tasa $\eta_{\theta_L}(\Delta_{\bar{H}})$. □

4.5 Caso de estudio: Conjunto de cuatro VANTs.

Se considera un conjunto de cuatro VANT o agentes que se mueven en un espacio euclídeo tridimensional. Cada VANT se modela como un sistema de doble integrador para su dinámica de movimiento. Los agentes están equipados con sensores que les permiten medir puntos de referencia en el entorno para obtener mediciones de posición absoluta y detectar agentes vecinos para obtener mediciones de posición relativa. Además, cada agente dispone de un enlace de comunicación que permite el intercambio de información a través de una red dirigida fuertemente conectada. Las mediciones se obtienen a múltiples frecuencias de muestreo, y la comunicación se lleva a cabo utilizando un esquema activado por eventos para reducir el uso de la comunicación. El objetivo es diseñar un observador distribuido que permita a cada agente estimar el estado global del sistema multiagente utilizando únicamente sus mediciones locales y la información compartida por sus vecinos.

La dinámica de cada VANT i viene dada por:

$$\dot{p}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = a_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.78)$$

donde $p_i = [p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición, $v_i = [v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad, y $a_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de aceleración.

Para un grupo de cuatro VANT, el vector de estado global se define como:

$$x = [p_1^T, v_1^T, p_2^T, v_2^T, p_3^T, v_3^T, p_4^T, v_4^T]^T \in \mathbb{R}^{24},$$

y el vector de entrada de control es:

$$u = [a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T]^T \in \mathbb{R}^{12}.$$

La dinámica global del sistema se describe mediante:

$$A = I_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24}, \quad B = I_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 12}. \quad (4.79)$$

Para el problema de localización, se supone que cada agente conoce las entradas u_i . La comunicación sigue una topología dirigida fuertemente conectada con matriz laplaciana:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

La comunicación se lleva a cabo mediante un esquema activado por eventos, en el que cada agente j transmite su estimación $\hat{x}_j$ solo cuando se cumple la condición de activación (4.7).

Las matrices de salida se construyen como $C_i = [S_i \otimes I_3 \ 0]$, donde las matrices S_i definen la estructura de medición:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así, C_1 proporciona la posición absoluta del VANT₁ y la posición relativa entre el VANT₄ y el VANT₁; C_2 proporciona la posición relativa entre el VANT₁ y el VANT₂; C_3 proporciona la posición relativa entre el VANT₂ y el VANT₃; y C_4 proporciona las posiciones relativas entre el VANT₁ y el VANT₄, y entre el VANT₃ y el VANT₄. Obsérvese que solo el VANT₁ tiene acceso a su posición absoluta, mientras que los agentes restantes se basan exclusivamente en mediciones relativas.

Se puede verificar que los pares individuales (A, C_i) no son observables. Sin embargo, si consideramos la matriz de salida $C = \text{col}(C_1, C_2, C_3, C_4)$, entonces el par (A, C) es observable; es decir, el sistema es conjuntamente observable, por lo que es posible utilizar la descomposición introducida en (1.12), de la que se deduce que, mediante la transformación, cada par (A_{io}, C_{io}) es observable. Por lo tanto, las ganancias del observador L_{io} se diseñan de tal manera que $(A_{io} - L_{io}C_{io})$ sea de Hurwitz.

En este trabajo, las ganancias del observador se obtuvieron mediante el LMI de la ecuación (4.44). Debido a las diferentes dimensiones de los subsistemas observables (A_{io}, C_{io}) , las ganancias L_1 y L_4 tienen un tamaño de 24×6 , mientras que L_2 y L_3 tienen un tamaño de 24×3 . La ganancia del observador L_1 (dimensiones 24×6) obtenida mediante el LMI tiene la siguiente estructura en bloques:

$$L_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 8.09 & 0 & 0 & -1.65 & 0 & 0 \\ 0 & 8.09 & 0 & 0 & -1.65 & 0 \\ 0 & 0 & 8.09 & 0 & 0 & -1.65 \\ 14.45 & 0 & 0 & -4.01 & 0 & 0 \\ 0 & 14.45 & 0 & 0 & -4.01 & 0 \\ 0 & 0 & 14.45 & 0 & 0 & -4.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.44 & 0 & 0 & 8.09 & 0 & 0 \\ 0 & 6.44 & 0 & 0 & 8.09 & 0 \\ 0 & 0 & 6.44 & 0 & 0 & 8.09 \\ 10.45 & 0 & 0 & 14.45 & 0 & 0 \\ 0 & 10.45 & 0 & 0 & 14.45 & 0 \\ 0 & 0 & 10.45 & 0 & 0 & 14.45 \end{bmatrix}$$

$$L_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 5.51 & 0 & 0 \\ 0 & 5.51 & 0 \\ 0 & 0 & 5.51 \\ 15.00 & 0 & 0 \\ 0 & 15.00 & 0 \\ 0 & 0 & 15.00 \\ -5.51 & 0 & 0 \\ 0 & -5.51 & 0 \\ 0 & 0 & -5.51 \\ -15.00 & 0 & 0 \\ 0 & -15.00 & 0 \\ 0 & 0 & -15.00 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5.51 & 0 & 0 \\ 0 & 5.51 & 0 \\ 0 & 0 & 5.51 \\ 15.00 & 0 & 0 \\ 0 & 15.00 & 0 \\ 0 & 0 & 15.00 \\ -5.51 & 0 & 0 \\ 0 & -5.51 & 0 \\ 0 & 0 & -5.51 \\ -15.00 & 0 & 0 \\ 0 & -15.00 & 0 \\ 0 & 0 & -15.00 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_4 = \begin{bmatrix} 5.29 & 0 & 0 & -1.78 & 0 & 0 \\ 0 & 5.29 & 0 & 0 & -1.78 & 0 \\ 0 & 0 & 5.29 & 0 & 0 & -1.78 \\ 9.30 & 0 & 0 & -2.68 & 0 & 0 \\ 0 & 9.30 & 0 & 0 & -2.68 & 0 \\ 0 & 0 & 9.30 & 0 & 0 & -2.68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.78 & 0 & 0 & 5.29 & 0 & 0 \\ 0 & -1.78 & 0 & 0 & 5.29 & 0 \\ 0 & 0 & -1.78 & 0 & 0 & 5.29 \\ -2.68 & 0 & 0 & 9.30 & 0 & 0 \\ 0 & -2.68 & 0 & 0 & 9.30 & 0 \\ 0 & 0 & -2.68 & 0 & 0 & 9.30 \\ -3.52 & 0 & 0 & -3.52 & 0 & 0 \\ 0 & -3.52 & 0 & 0 & -3.52 & 0 \\ 0 & 0 & -3.52 & 0 & 0 & -3.52 \\ -6.63 & 0 & 0 & -6.63 & 0 & 0 \\ 0 & -6.63 & 0 & 0 & -6.63 & 0 \\ 0 & 0 & -6.63 & 0 & 0 & -6.63 \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales del sistema definen las posiciones y velocidades de los cuatro VANT, suponiendo velocidades iniciales nulas para todos ellos, tanto en el sistema real como en los observadores. Las posiciones iniciales, expresadas en metros, se resumen en la Tabla [4.1](#).

Tabla 4.1: Condiciones iniciales de los VANTs [m]

	VANT 1			VANT 2			VANT 3			VANT 4		
Estados	p_x	p_y	p_z	p_x	p_y	p_z	p_x	p_y	p_z	p_x	p_y	p_z
x	-0.5	-0.5	0	1.5	-0.5	0	1.5	2.5	0	-0.5	2	0
$\hat{x}_1$	-0.45	-0.45	-0.05	1.35	-0.45	0.15	1.35	2.25	-0.2	-0.45	1.8	0.2
$\hat{x}_2$	-0.6	-0.6	-0.1	1.8	-0.6	0.1	1.8	3	-0.3	-0.6	2.4	-0.2
$\hat{x}_3$	-0.4	-0.4	-0.1	1.2	-0.4	-0.1	1.2	2	-0.3	-0.4	1.6	0.1
$\hat{x}_4$	-0.55	-0.55	-0.05	1.65	-0.55	-0.05	1.65	2.75	-0.2	-0.55	2.2	-0.1

Para controlar el movimiento de los VANTs, se implementa un controlador de retroalimentación de estado con una matriz de ganancia K diseñada mediante la técnica de colocación de polos (utilizando el comando `place` de MATLAB) para asignar los polos del bucle cerrado de cada eje en $[-0.5; -1; -1.5; -2; -2.5; -3]$. La estructura diagonal resultante es:

$$K = \begin{bmatrix} 7.5000 & 0 & 0 & 5.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5000 & 0 & 0 & 2.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 2.5000 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

que se aplica al estado local de cada VANT $x_i = [p_i^T, v_i^T]^T$.

La velocidad de referencia es cero en todo momento: $v_d = [0, 0, 0]$. Las entradas de control u_i para cada VANT se calculan utilizando la ley de control:

$$u_i = -K \begin{bmatrix} p_i - p_{d,i} \\ v_i \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

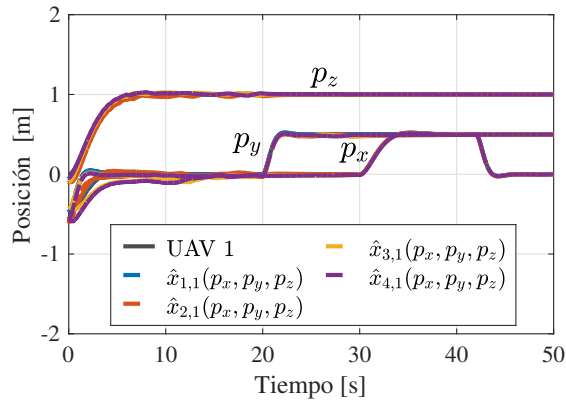
donde $p_i \in \mathbb{R}^3$ y $v_i \in \mathbb{R}^3$ representan los vectores de posición y velocidad actuales del i -ésimo VANT, y $p_{d,i} \in \mathbb{R}^3$ es su posición deseada correspondiente a partir de $\mathbf{p}_d(t)$. La evolución temporal da como resultado que cada VANT recorra una trayectoria cuadrada cerrada independiente, definida por los puntos de referencia constantes por tramos.

Las mediciones se representan mediante $y_i(t_k^i) = C_i x(t_k^i)$, donde t_k^i denota los instantes de muestreo para el agente i , con intervalos de muestreo constantes $\Delta_k^i = \Delta^i$ para todo k . Los períodos específicos son $\Delta^1 = 0.04$ s, $\Delta^2 = 1.5\Delta^1$, $\Delta^3 = 2\Delta^1$ y $\Delta^4 = 2.5\Delta^1$, que satisfacen los límites teóricos $\Delta_h^i = \Delta^i$ y $\Delta_{\bar{H}} = 0.1$ s.

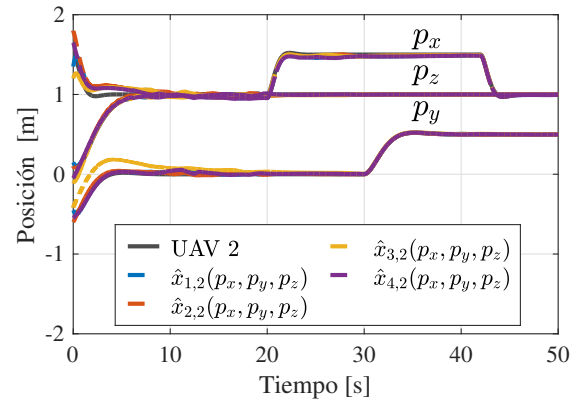
A continuación se presentan los resultados de la simulación obtenidos con el observador distribuido en las condiciones experimentales descritas anteriormente. La comunicación se implementa utilizando el mecanismo dinámico activado por eventos (4.7), con su variable auxiliar (4.6), donde los parámetros utilizados fueron $\theta_i = 0.01$, $b_i = 0.1$ y $\gamma = 1$.

El conjunto de gráficos que se muestra en las Figuras 4.1a-4.1d muestra las estimaciones de los componentes de posición (x , y , z) para cada VANT, junto con sus posiciones reales. Cada observador estima el estado completo del sistema. Sea $\hat{x}_{i,\kappa}(p_x, p_y, p_z)$ la estimación de la posición del VANT κ proporcionada por el observador i , donde $i, \kappa = 1, \dots, 4$. Los resultados muestran que las estimaciones siguen de cerca los estados reales, lo que confirma la eficacia del observador distribuido propuesto incluso bajo muestreo multitasa y comunicación activada por eventos.

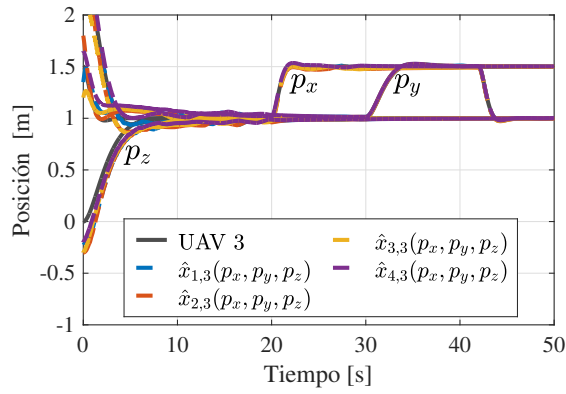
Para evaluar cuantitativamente el rendimiento de las estimaciones, se calcularon las normas de error para cada uno de los cuatro VANT. Las Figuras 4.2a-4.2d muestran la evolución temporal de la norma de error media de la estimación posicional para cada



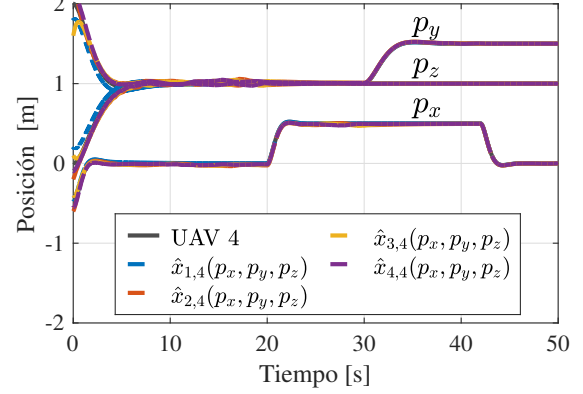
(a) VANT 1



(b) VANT 2



(c) VANT 3



(d) VANT 4

Figura 4.1: Estimaciones de los componentes de posición de cada VANT obtenidas por los observadores es un escenario sin ruido

uno de los cuatro VANT, considerando cada observador por separado. La figura 4.2a presenta la norma de los errores obtenidos con el observador 1 ($\hat{x}_1$), donde cada curva corresponde a un VANT diferente. De forma similar, las figuras 4.2b, 4.2c y 4.2d presentan los errores para los observadores 2 ($\hat{x}_2$), 3 ($\hat{x}_3$) y 4 ($\hat{x}_4$), respectivamente. La notación $\epsilon_{i,\kappa}$ se utiliza para la norma de error del observador i al estimar el VANT κ . Se puede observar que todos los errores convergen hacia un valor pequeño cercano a cero, y que la convergencia se mantiene a pesar de los cambios en la trayectoria, que solo provocan pequeños aumentos temporales en el error.

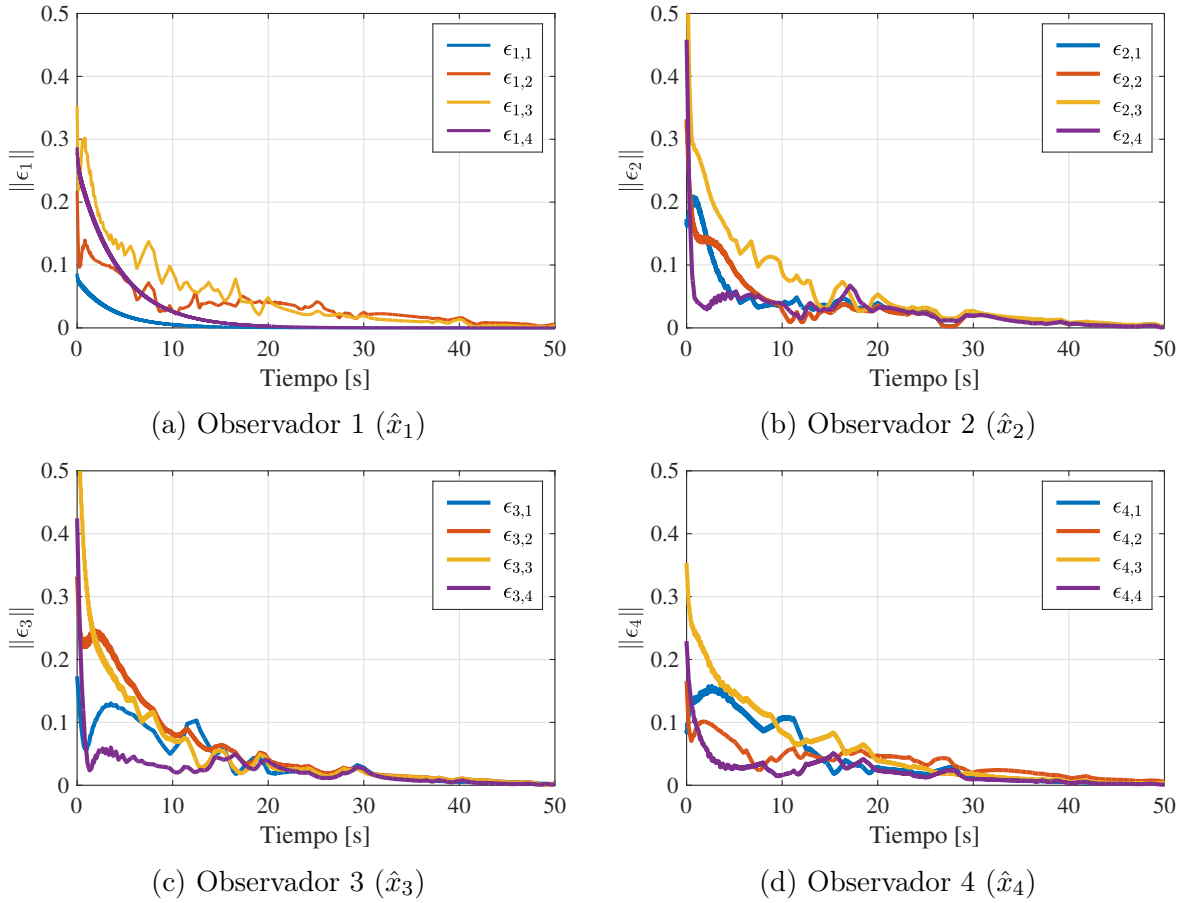


Figura 4.2: Norma del error de estimación de posición $\|\epsilon_i(t)\|$ para cada VANT usando cada observador.

En la siguiente sección se evalúa el rendimiento de los observadores en el seguimiento de la salida medida del VANT 1. Esta salida, denotada como y_1 , representa la posición absoluta del primer VANT en coordenadas cartesianas y su posición relativa con respecto al VANT 4. Para evaluar el rendimiento del seguimiento, las figuras 4.3a-4.3c comparan la evolución temporal de cada coordenada (x, y, z) con las estimaciones proporcionadas por los cuatro observadores ($\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_4$) de la posición absoluta del VANT 1. Estos gráficos nos permiten observar hasta qué punto cada observador es capaz de reproducir la trayectoria real del sistema.

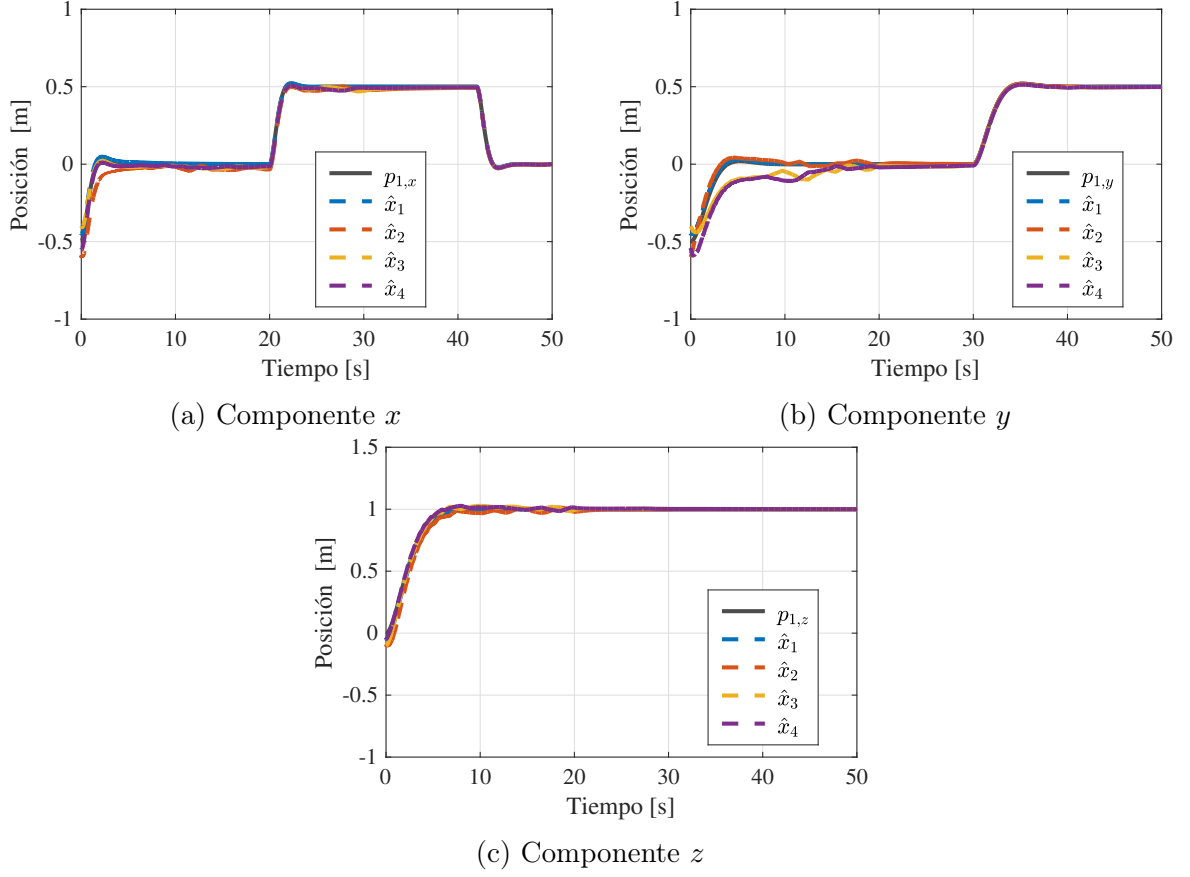


Figura 4.3: Estimaciones de las componentes de la posición absoluta del VANT-1 en un escenario sin ruido.

Además, se analiza la carga de comunicación entre vecinos asociada al esquema basado en eventos. Se obtuvieron un total de 496 eventos de activación para el observador $\hat{x}_1$, 427 para $\hat{x}_2$, 419 para $\hat{x}_3$ y 481 para $\hat{x}_4$. La figura 4.4 muestra los instantes de comunicación para cada observador. Inicialmente, debido al error de estimación inicial, se producen múltiples eventos; una vez que las estimaciones convergen, la tasa de eventos disminuye significativamente. Sin embargo, en cada cambio de trayectoria, el error aumenta temporalmente, lo que desencadena una serie de eventos hasta que se restablece la convergencia. Este comportamiento ilustra la adaptabilidad del esquema basado en eventos a los cambios en la trayectoria de referencia.

4.5.1 Comportamiento ante el ruido en las mediciones

A continuación se presentan dos pruebas en las que se añadió ruido a la salida de la medición. En la primera prueba, se añadió ruido gaussiano con media cero y varianza de 0.001; en la segunda prueba, la varianza se incrementó a 0.01. En ambos casos, el ruido se aplicó a todas las salidas de medición. Las pruebas se llevaron a cabo con la misma configuración descrita para el escenario sin ruido, incluyendo el tiempo de simulación de 70 s, las mismas ganancias del observador (diseñadas para el caso sin

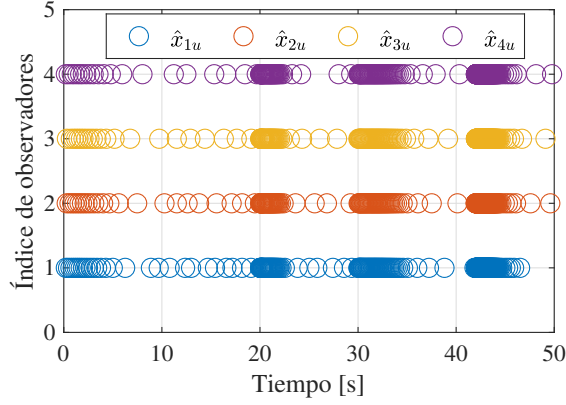


Figura 4.4: Instantes de activación por cada observador

ruido) y los mismos parámetros θ_i , b_i y γ utilizados en la condición de activación de eventos de (4.7).

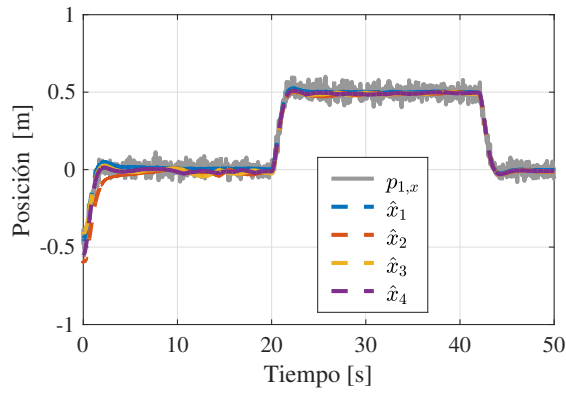
En esta primera prueba, la salida de medición está corrompida por ruido, tal y como se ha descrito anteriormente. Para ilustrar el efecto de esta corrupción, presentamos las salidas de medición absolutas del VANT 1, concretamente los tres componentes de posición ($p_{1,x}$, $p_{1,y}$, $p_{1,z}$), que se muestran en las figuras 4.5a, 4.5b y 4.5c, respectivamente. El ruido añadido es claramente visible en las señales medidas.

No obstante, el estimador logra eliminar el ruido, proporcionando una salida estimada limpia que sigue la señal real sin reproducir las variaciones de alta frecuencia introducidas por el ruido de medición. Los resultados para todos los VANT se presentan en las figuras 4.6a–4.6d, que muestran las estimaciones de posición junto con las posiciones reales y la trayectoria deseada. A pesar de la presencia de ruido, las estimaciones se mantienen cercanas a los estados reales, lo que demuestra que los estimadores mantienen un rendimiento satisfactorio incluso cuando se ha añadido ruido a las mediciones.

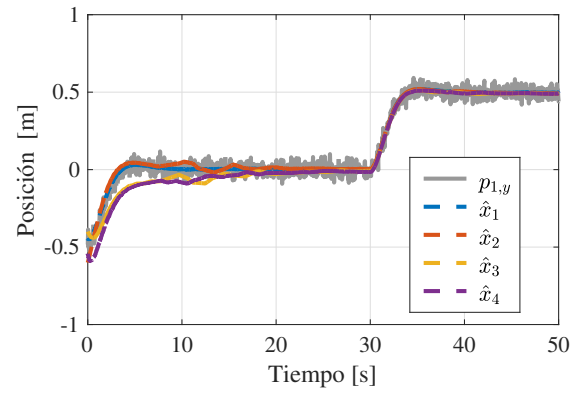
Además, se calcularon las normas del error de estimación tras añadir ruido a las mediciones. Las figuras 4.7a–4.7d muestran estas normas para cada VANT, donde el impacto del ruido es evidente. Cada una de estas figuras compara el rendimiento de los cuatro observadores. A diferencia del caso sin ruido, los errores ya no convergen a cero, sino que permanecen acotados en una región cercana a este valor como resultado de la excitación del ruido.

Para la segunda prueba, se aumentó la varianza del ruido gaussiano a 0.01. Para ilustrar el efecto de este ruido de mayor intensidad, se vuelve a presentar el resultado de la medición absoluta del VANT 1 para sus componentes de posición $p_{1,x}$, $p_{1,y}$ y $p_{1,z}$ en las figuras 4.8a, 4.8b, y 4.8c, respectivamente. Estas figuras muestran que el ruido afecta significativamente a las señales medidas. No obstante, el estimador lo rechaza de manera efectiva, proporcionando una estimación limpia que sigue de cerca la trayectoria real sin replicar las fluctuaciones de alta frecuencia inducidas por el ruido.

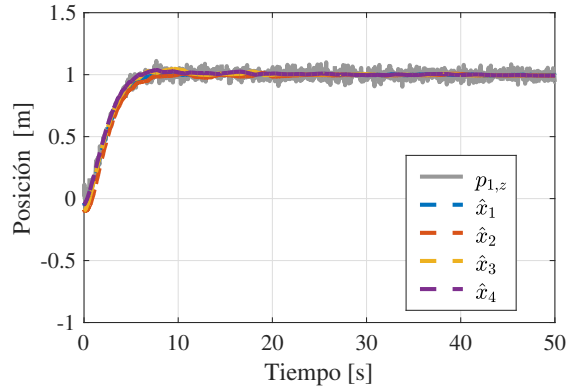
A continuación se presentan los resultados restantes para este nivel de ruido. Las



(a) Componente x

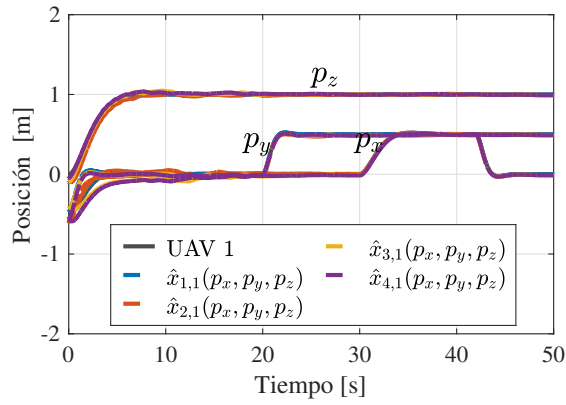


(b) Componente y

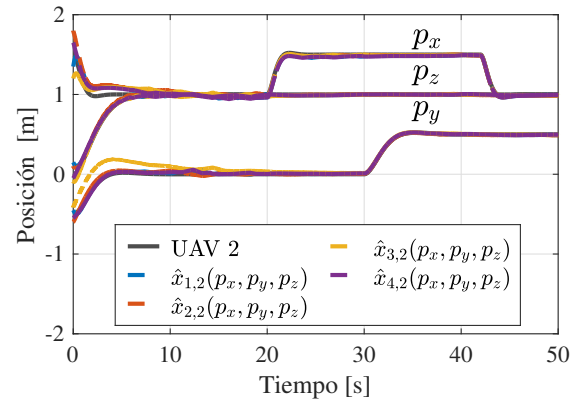


(c) Componente z

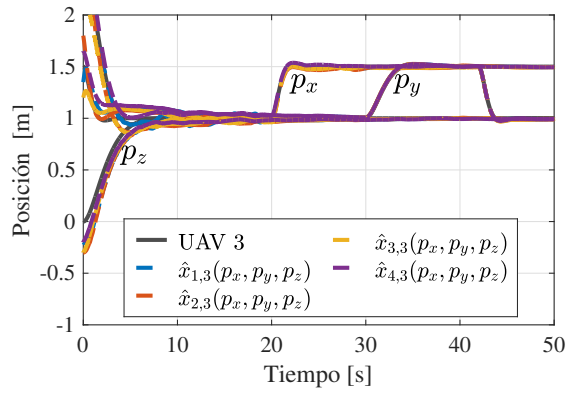
Figura 4.5: Componentes de la posición absoluta del VANT 1 y sus estimaciones con ruido de varianza 0.001.



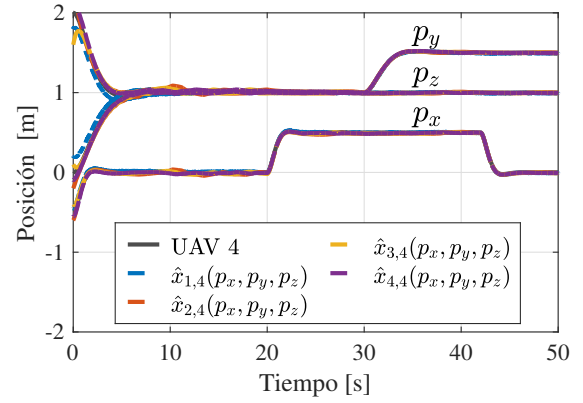
(a) VANT 1



(b) VANT 2

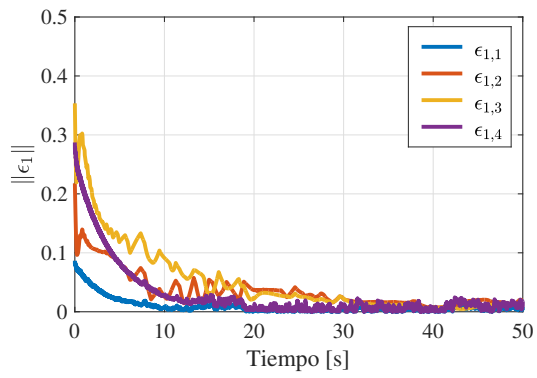


(c) VANT 3

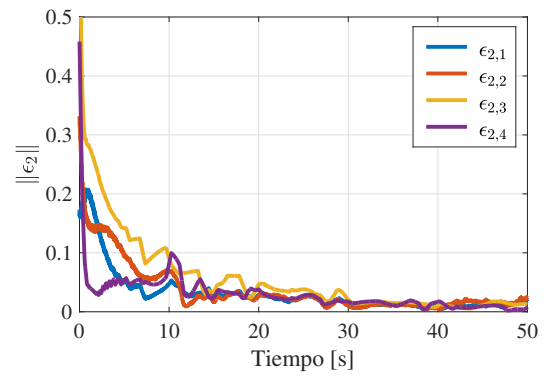


(d) VANT 4

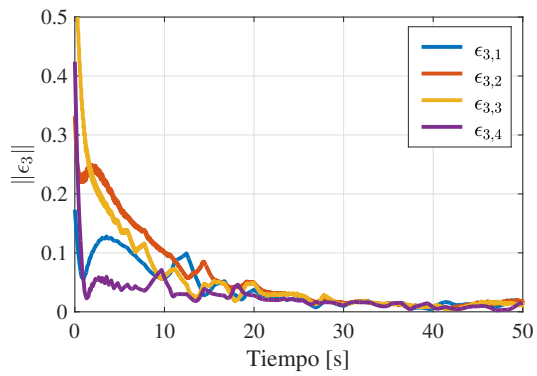
Figura 4.6: Estimaciones de posición para cada VANT bajo ruido de medición de varianza 0.001.



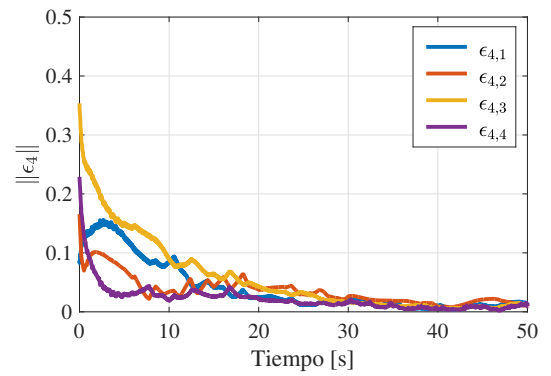
(a) Observador 1 ($\hat{x}_1$)



(b) Observador 2 ($\hat{x}_2$)



(c) Observador 3 ($\hat{x}_3$)



(d) Observador 4 ($\hat{x}_4$)

Figura 4.7: Norma del error de estimación de posición $\|\epsilon_i(t)\|$ para cada VANT usando cada observador, bajo ruido de medición de varianza 0.001.

figuras 4.9a–4.9d muestran las estimaciones de posición para cada VANT junto con las trayectorias reales y deseadas. Las figuras 4.10a–4.10d presentan la evolución temporal de las normas de error de estimación para cada observador y cada VANT. En conjunto, estos resultados confirman que, incluso con un nivel de ruido más alto, el esquema de estimación distribuida mantiene un rendimiento satisfactorio.

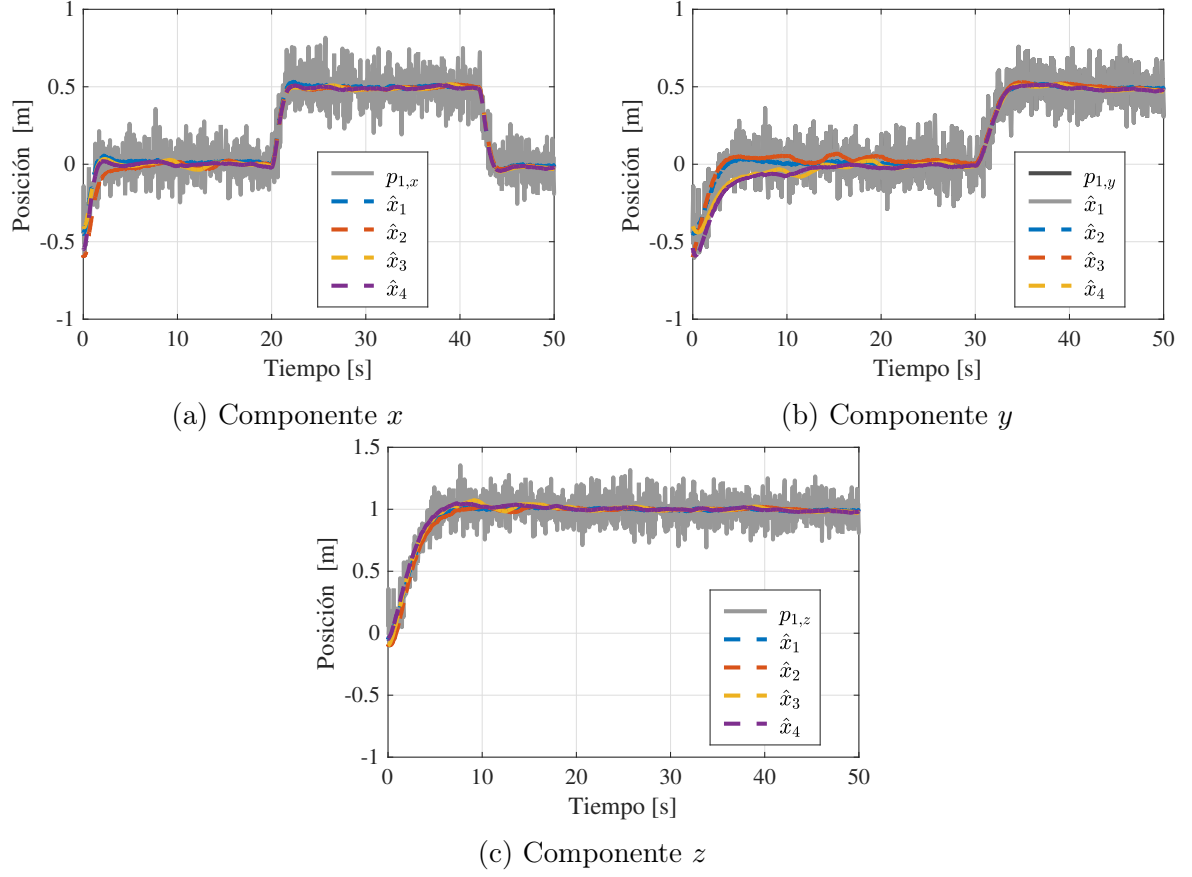
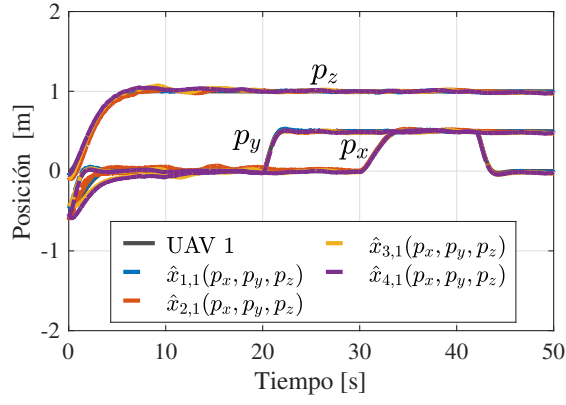
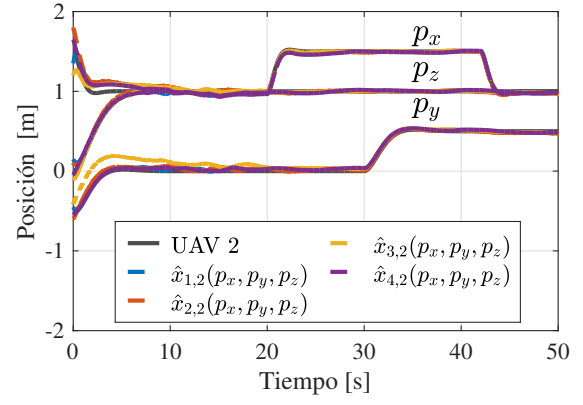


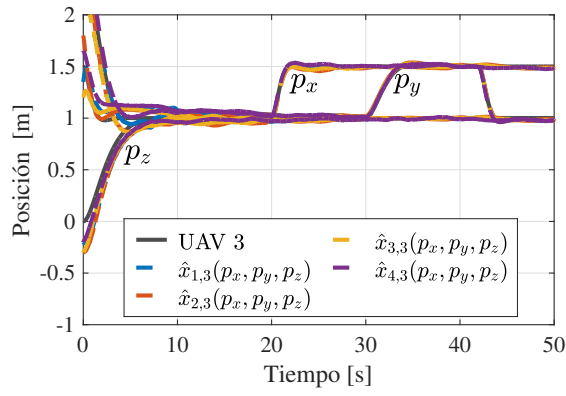
Figura 4.8: Componentes de la posición absoluta del VANT 1 y sus estimaciones con ruido de varianza 0.01.



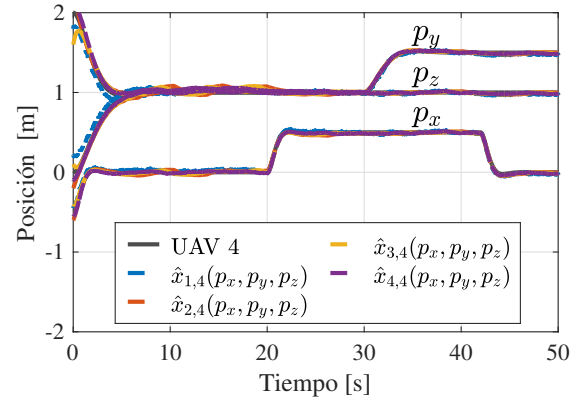
(a) VANT 1



(b) VANT 2



(c) VANT 3



(d) VANT 4

Figura 4.9: Estimaciones de posición para cada VANT bajo ruido de medición de varianza 0.01.

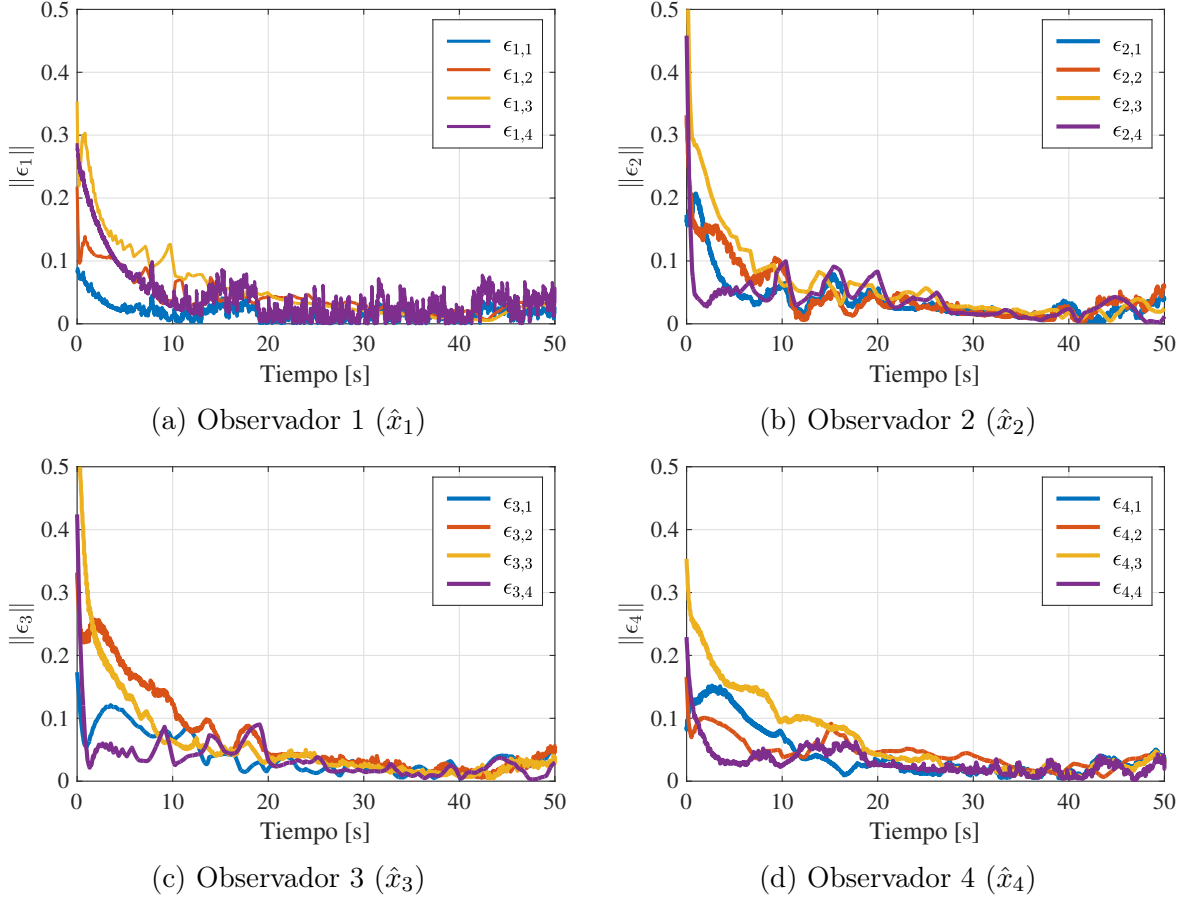


Figura 4.10: Norma del error de estimación de posición $\|\epsilon_i(t)\|$ para cada VANT usando cada observador, bajo ruido de medición de varianza 0.01.

Para complementar el análisis cualitativo, se lleva a cabo una evaluación cuantitativa del rendimiento de los observadores utilizando los indicadores ITAE (error absoluto medio ponderado en el tiempo), IAE (error absoluto integral) e ISE (error cuadrático integral), definidos como:

$$\text{ITAE}_i = \int_0^{70} t \|\epsilon_i(t)\| dt, \quad (4.83)$$

$$\text{IAE}_i = \int_0^{70} \|\epsilon_i(t)\| dt, \quad (4.84)$$

$$\text{ISE}_i = \int_0^{70} \|\epsilon_i(t)\|^2 dt, \quad (4.85)$$

donde $\epsilon_i(t) = \hat{x}_i(t) - x(t)$ representa el error de estimación del observador i .

La tabla 4.2 resume los valores medios de estas métricas para cada observador en los tres escenarios considerados: sin ruido (N), ruido con varianza 0.001 (ruido bajo) (L) y ruido con varianza 0.01 (ruido alto) (H).

En la tabla 4.2 se observa que, en todos los escenarios, el observador $\hat{x}_1$ presenta los valores más bajos de ITAE e IAE, lo que indica una convergencia más rápida y un

Tabla 4.2: Métricas de rendimiento promedio por observador para los tres escenarios de ruido.

Observador	ITAE [m·s ²]			IAE [m·s]			ISE [m ² ·s]		
	N	L	H	N	L	H	N	L	H
$\hat{x}_1$	15.11	29.10	58.24	1.41	1.70	2.42	0.14	0.14	0.18
$\hat{x}_2$	23.11	37.15	65.01	1.85	2.12	2.77	0.19	0.20	0.24
$\hat{x}_3$	24.96	37.91	64.59	2.16	2.41	3.02	0.27	0.28	0.31
$\hat{x}_4$	25.42	36.06	62.41	1.93	2.10	2.70	0.17	0.17	0.21

error acumulativo menor. Por otro lado, el observador $\hat{x}_3$ registra sistemáticamente los valores más altos de ISE, lo que sugiere la presencia de picos de error transitorios más pronunciados, especialmente en presencia de ruido.

Como era de esperar, un aumento de la intensidad del ruido degrada las métricas de todos los observadores. Sin embargo, incluso en el escenario de alto ruido (varianza 0.01), los valores de IAE e ISE se mantienen dentro de límites razonables, lo que demuestra que los observadores mantienen un rendimiento adecuado incluso en presencia de ruido en las mediciones.

Así se ha diseñado y validado un observador distribuido con salidas de medición muestreadas para sistemas lineales sujetos a perturbaciones, incorporando un esquema dinámico activado por eventos para la transmisión de estimaciones entre agentes vecinos, junto con un diseño capaz de atenuar el ruido de medición. La validación, llevada a cabo utilizando un conjunto de cuatro VANT en escenarios con y sin ruido, demostró una estimación precisa del estado completo, con el error de estimación convergiendo a un vecindario acotado alrededor de cero, lo que refleja la robustez del esquema propuesto frente al ruido de medición. Los resultados obtenidos confirman la viabilidad, la robustez y el buen rendimiento del método propuesto. Por último, aunque los resultados actuales son prometedores, el trabajo futuro se centrará en abordar dinámicas no modeladas, así como en analizar el impacto de múltiples retrasos temporales tanto en el proceso de medición como en los canales de comunicación entre agentes.

4.6 Caso de estudio. Satélites en LEO.

En esta sección se presenta la validación del observador distribuido con comunicación activada por eventos, ilustrada mediante un ejemplo numérico de control de seguimiento de satélites en órbita terrestre baja (LEO). El escenario supone un satélite objetivo en una órbita circular de radio r_0 con velocidad angular $\omega_0 = \sqrt{g/r_0^3}$, donde g es el parámetro de gravedad estándar, que sirve de referencia para la dinámica relativa linealizada de los satélites perseguidores descrita por las ecuaciones de Clohessy-Wiltshire, [Alfriend et al. \(2009\)](#) en un sistema de coordenadas diestro centrado en la masa objetivo, con

los ejes alineados con la tangente de la órbita eje- x , el vector Tierra-satélite eje- y y la dirección del momento angular eje- z , respectivamente.

$$u_x(t) = \ddot{p}_x(t) - 2\omega_0\dot{p}_y(t) \quad (4.86)$$

$$u_y(t) = \ddot{p}_y(t) + 2\omega_0\dot{p}_x(t) - 3\omega_0^2 p_y(t) \quad (4.87)$$

$$u_z(t) = \ddot{p}_z(t) + \omega_0^2 p_z(t) \quad (4.88)$$

La posición del satélite objetivo viene definida por $p_x(t)$, $p_y(t)$ y $p_z(t)$, mientras que sus entradas de control son $u_x(t)$, $u_y(t)$ y $u_z(t)$. La velocidad angular del satélite se denota por ω_0 . Siguiendo a [Chen et al. \(2023\)](#), expresamos las ecuaciones diferenciales lineales (4.86)–(4.88) en forma de espacio de estados. Definiendo el vector de estado $\zeta(t) = [\bar{\zeta}_1(t) \ \bar{\zeta}_2(t)]^T$, donde: $\bar{\zeta}_1(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$ contiene los componentes de posición. $\bar{\zeta}_2(t) = [\dot{p}_x(t) \ \dot{p}_y(t) \ \dot{p}_z(t)]^T$ contiene los componentes de velocidad y la entrada de control $u(t) = [u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t)]^T$, la dinámica del sistema en (4.1) emplea las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 & 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

donde la velocidad angular del satélite objetivo ω_0 se fija en 0.001 rad/s. Además, la entrada de control se define como

$$u(t) = [-F_1 \ -F_2] \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_1(t) - \varrho_1(t) \\ \bar{\zeta}_2(t) - \varrho_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

donde

$$\varrho_1(t) = \begin{bmatrix} 1.15 \sin(2\pi \cdot 0.012 \cdot t + 0.5) \\ 0.88 \cos(2\pi \cdot 0.0085 \cdot t) \\ 1.12 \sin(2\pi \cdot 0.0115 \cdot t + 1.3) \end{bmatrix}, \quad \varrho_2(t) = \dot{\varrho}_1(t)$$

Las matrices F_1 y F_2 representan las matrices de ganancia de retroalimentación y se

definen como:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 27.0750 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4150 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6100 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 10.4500 & 0.0020 & 0 \\ -0.0020 & 4.7500 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7500 \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

El esquema de comunicación entre los observadores consta de tres nodos interconectados que forman un grafo dirigido fuertemente conectado. En esta topología, el observador 1 recibe información del observador 3, el observador 2 del observador 1, y el observador 3 de los observadores 1 y 2. Este patrón de interconexión crea un flujo de información cíclico que garantiza la accesibilidad mutua entre todos los nodos de la red. La matriz laplaciana correspondiente que describe esta topología viene dada por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Para el diseño del observador, primero se revisa la observabilidad conjunta o global y la observabilidad local, como se explica en [1.4](#), es decir:

$$\mathcal{O} = \text{obsv}(A, C) \quad (\text{global}), \quad \mathcal{O}_i = \text{obsv}(A, C_i) \quad (\text{local para } i = 1, 2, 3),$$

con los rangos correspondientes $\text{rank}(\mathcal{O}_1) = 4$, $\text{rank}(\mathcal{O}_2) = 3$ y $\text{rank}(\mathcal{O}_3) = 2$. Este análisis de rango revela que, mientras que cada par local (A, C_i) es no observable, el par global (A, C) mantiene una observabilidad total ($\text{rank}(\mathcal{O}) = 6 = n$), permitiendo el diseño del observador distribuido. Para abordar esta falta de observabilidad local, se implementan las transformaciones matriciales utilizando matrices ortogonales T_i .

Para el cálculo de la ganancia de acoplamiento se siguen los términos establecidos en el Teorema [5](#), obteniendo $\gamma = 0.9$ para este caso de estudio. Este valor, junto con los parámetros de comunicación por eventos $b_i = 1$ y $\theta_i = 0.1$ ($i \in \mathcal{V}$), respeta las condiciones del teorema. Las matrices de ganancia para los tres observadores son las siguientes:

El cálculo de las ganancias L_1 a L_3 y W_1 a W_3 requiere una serie de pasos analíticos previos, descritos en este capítulo y en los anteriores. Dichos cálculos preparatorios proporcionan los resultados intermedios necesarios para resolver las ecuaciones en [\(4.18\)](#).

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.1390 \\ 38.6025 \\ 0 \\ 0.0125 \\ 0.0500 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0007 \\ 0 \\ -11.2996 \\ 1.5786 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.2000 \\ 0 \\ 0 \\ 12.7100 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 0, 1), W_2 = \text{diag}(1, 0, 1, 0, 0, 1), W_3 = \text{diag}(1, 1, 0, 1, 1, 0).$$

Las condiciones iniciales de posición empleadas en las simulaciones se presentan en la Tabla 4.3. En todos los escenarios (sistema real y observadores locales), las velocidades iniciales se fijaron a cero: $\dot{p}_x(0) = \dot{p}_y(0) = \dot{p}_z(0) = 0$.

Tabla 4.3: Condiciones iniciales de posición

Estado	p_x [m]	p_y [m]	p_z [m]
$\zeta(0)$	0.05	0.04	0.03
$\hat{\zeta}_1(0)$	0.045	0.036	0.027
$\hat{\zeta}_2(0)$	-0.075	-0.06	-0.045
$\hat{\zeta}_3(0)$	0.10	0.08	0.06

Los componentes de posición $\bar{\zeta}_1(t) = [p_x(t) \ p_y(t) \ p_z(t)]^T$ y sus estimaciones correspondientes, obtenidas utilizando tres observadores diferentes, se muestran en las Figuras 4.11a, 4.11b y 4.11c. Los resultados muestran que todas las estimaciones convergen hacia el estado real del sistema.

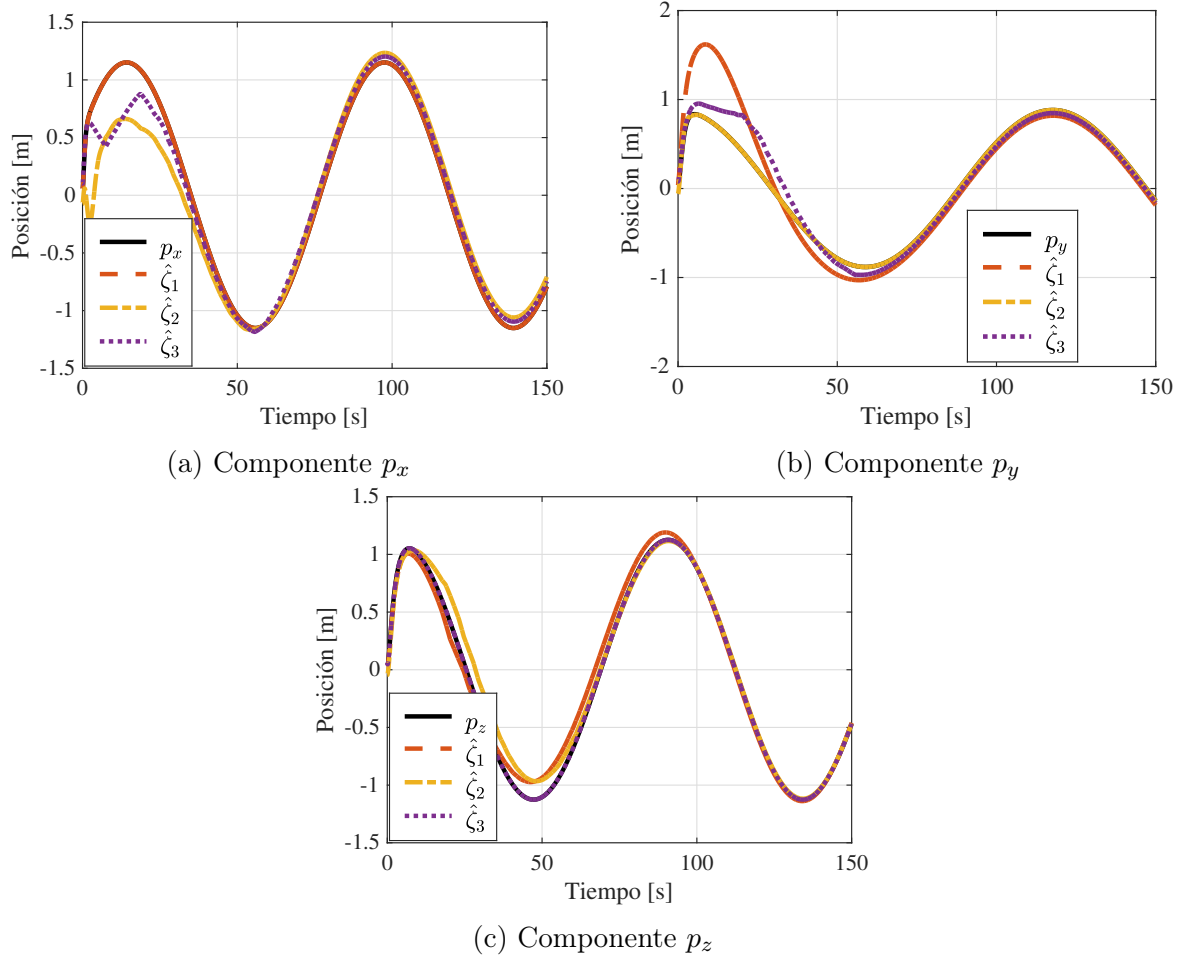


Figura 4.11: Las componentes p_x , p_y y p_z de la posición y sus respectivas estimaciones.

La figura 4.12 muestra los instantes de activación generados por la condición de activación (4.7), registrando un número de comunicaciones considerablemente menor: 77, 160 y 117 eventos para los observadores 1, 2 y 3, respectivamente. Esto demuestra que nuestra estrategia activada por eventos alcanza propiedades de convergencia comparables al enfoque periódico de Galicia-Galicia et al. (2024b) (que requiere 30000 eventos por nodo), al tiempo que reduce drásticamente la frecuencia de comunicación.

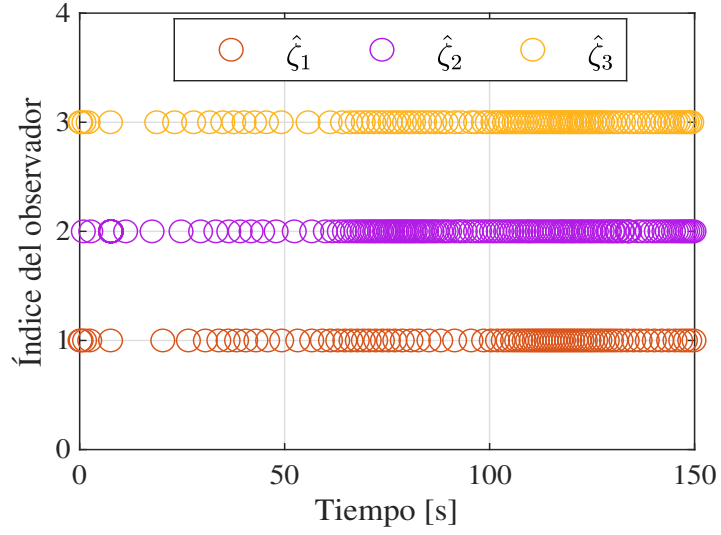


Figura 4.12: Instantes de activación de $\hat{\zeta}_i$.

En esta sección se ha estudiado un observador distribuido con comunicación activada por eventos para sistemas lineales. El enfoque propuesto reduce significativamente la frecuencia de comunicación entre nodos sin reducir el rendimiento de la estimación, mediante un esquema de activación asíncrona con umbrales dinámicos adaptativos. La validación experimental en un escenario de red de sensores con satélites de seguimiento en órbita terrestre baja (LEO) demuestra que el enfoque mantiene una convergencia exponencial al tiempo que logra una reducción sustancial de la comunicación en comparación con las estrategias de comunicación continua.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1 Contribuciones principales

El capítulo 2 presenta la primera contribución original en el ámbito de los observadores distribuidos. A diferencia de enfoques previos, este trabajo aborda el caso en el que las mediciones se muestrean a períodos heterogéneos y están sujetas a retardos múltiples. Como se aprecia en las gráficas, el observador propuesto converge a los valores correctos del estado, a pesar de las diferencias en los tiempos de muestreo y la presencia de retardos. Este aporte se encuentra en el primer artículo indexado derivado de la investigación, titulado: “Distributed Observer for Linear Systems with Multirate Sampled Outputs Involving Multiple Delays” Galicia-Galicia et al. (2024b).

La segunda contribución se presenta en la sección (2.2) del capítulo 2, donde se aborda por primera vez en esta tesis el problema del ruido en las mediciones. Se demostró que, al sincronizar un conjunto de observadores completos, el ruido se reduce significativamente, garantizando la convergencia al valor real del estado. A diferencia de trabajos previos, este esquema incorpora mediciones muestreadas y corrompidas por ruido, ampliando su aplicabilidad en entornos realistas. El esquema propuesto se evaluó en una estructura tipo edificio de dos pisos, utilizando únicamente mediciones de posición. Los resultados confirman su eficacia incluso bajo condiciones de muestreo heterogéneo y ruido. Esta contribución fue publicada en conferencia Galicia-Galicia et al. (2024a).

La tercera contribución se presenta en el capítulo 3, donde se extiende el marco de trabajo desarrollado en Galicia-Galicia et al. (2024b) al abordar el problema de las comunicaciones multitasa entre observadores. La principal contribución de este esquema es un diseño de observador que relaja significativamente las restricciones para el cálculo de las ganancias del observador L_i , la ganancia de acoplamiento γ y la ganancia de peso en las comunicaciones W_i . Además, se presenta la descomposición del error para evaluar, por un lado, la parte observable con las mediciones muestreadas y, por otro, la parte no

observable con la comunicación entre observadores. Por último, el esquema se evalúa en un entorno de pruebas realista considerando condiciones operativas realistas. Los resultados obtenidos en la estructura tipo edificio de cinco pisos fueron obtenidos del prototipo real para la evaluación del observador propuesto a diferencia de la mayoría de los casos estudiados en la literatura, que suelen ser académicos y numéricos. Esta contribución fue publicada en el artículo “Multirate sampled-data distributed observer synthesis for building-type structures”.

La cuarta contribución se presenta en el capítulo [4](#), en el que se abordan dos problemáticas clave en observadores distribuidos: la optimización de recursos mediante comunicación activada por eventos y las mediciones muestreadas corrompidas por ruido. En este esquema de observador distribuido, el cálculo de las ganancias del observador considera el ruido en la medición. Para ello, se propone un esquema de observador distribuido que ha sido probado en dos casos de estudio presentes en el mismo capítulo. En el primer caso, se tiene un conjunto de 4 UAVs en el que solo se dispone de la posición absoluta de un UAV, mientras que las posiciones de los otros UAVs se obtienen a partir de posiciones relativas. El segundo caso retoma el escenario del capítulo [2](#) (satélites en LEO), pero ahora incorpora comunicación por eventos y un cálculo de ganancias más flexible.

En conjunto, las contribuciones avanzan en la teoría de observadores distribuidos al incorporar condiciones realistas como el muestreo heterogéneo, los retardos, el ruido y la comunicación limitada, además de validar los esquemas en estructuras civiles y sistemas multiagente, superando las limitaciones de los enfoques puramente académicos o numéricos.

5.2 Conclusiones específicas por esquema

■ Primera contribución (Capítulo [2](#))

Problema abordado: Mediciones muestreadas a períodos heterogéneos y con retardos múltiples.

Aportación: Diseño de un observador distribuido que converge al estado real a pesar de estas condiciones.

Publicación: Artículo “Distributed Observer for Linear Systems with Multirate Sampled Outputs Involving Multiple Delays” [Galicia-Galicia et al. \(2024b\)](#).

■ Segunda contribución (Sección [\(2.2\)](#) del Capítulo [2](#))

Problema abordado: Ruido en las mediciones.

Aportación: Sincronización de observadores completos que reduce significativamente el ruido y garantiza convergencia. Validado en estructura de dos pisos con mediciones de posición.

Publicación: Conferencia “Synchronized estimation of displacement in a structure using multi-sensors under different sampling periods” Galicia-Galicia et al. (2024a).

■ **Tercera contribución (Capítulo 3)**

Problema abordado: Comunicaciones multitasa entre observadores.

Aportación:

- Relajación de restricciones en el cálculo de L_i , γ y W_i .
- Descomposición del error en parte observable (mediciones) y no observable (comunicación).
- Validación realista con datos de una estructura tipo edificio de cinco pisos.

Publicación: Artículo “Multirate sampled-data distributed observer synthesis for building-type structures”.

■ **Cuarta contribución (Capítulo 4)**

Problemas abordados:

- Optimización de recursos mediante comunicación activada por eventos.
- Mediciones muestreadas con ruido.

Aportación: Diseño de observador distribuido que considera el ruido en el cálculo de ganancias. Validado en:

- **Caso 1:** 4 UAVs con una sola posición absoluta y las demás relativas. Publicación: Artículo “Distributed observer with multi-rate measurements and event-triggered communication for disturbed linear systems”.
- **Caso 2:** Retoma el escenario del capítulo 2 (Satélites en LEO) con comunicación por eventos y ganancias más relajadas. Publicación: Conferencia “Distributed event-triggered estimation over sensor networks for satellite tracking in LEO”.

5.3 Direcciones de investigación futura

A partir de los resultados obtenidos en esta tesis, se identifican diversas líneas de investigación que permitirían extender y robustecer aún más el diseño de observadores distribuidos en condiciones realistas:

- **Entradas desconocidas y dinámicas no modeladas:** Extender el esquema propuesto para estimar simultáneamente el estado y las entradas desconocidas o perturbaciones no modeladas.
- **Filtrado de mediciones ruidosas:** Incorporar un filtro explícito en el diseño del observador distribuido para mejorar la estimación en escenarios con ruido severo en las mediciones.
- **Retardos y ruido en las comunicaciones:** Generalizar los esquemas presentados para considerar retardos variables, pérdida de paquetes y ruido en los canales de comunicación entre observadores, más allá de los retardos en las mediciones.

Bibliografía

- Abdullah, A. Synchronization and secure communication of uncertain chaotic systems based on full-order and reduced-order output-affine observers. *Applied Mathematics and Computation*, 219(19):10000–10011, 2013.
- Aghajanian, S., Amini, F., and Moaveni, B. Luenberger observer application in decentralised control of civil structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*, 170(10):765–773, 2017.
- Alfriend, K., Vadali, S. R., Gurfil, P., How, J., and Breger, L. *Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation*, volume 2. Elsevier, 2009.
- Bertollo, R., Millán, P., Orihuela, L., Seuret, A., and Zaccarian, L. Distributed hybrid observer with prescribed convergence rate for a linear plant subject to disturbances using multi-hop decomposition. *arXiv preprint arXiv:2203.10817*, 2022.
- Beyhan, S. Runge–kutta model-based nonlinear observer for synchronization and control of chaotic systems. *ISA transactions*, 52(4):501–509, 2013.
- Bouraoui, I., Farza, M., Ménard, T., Ben Abdenmour, R., M’Saad, M., and Mosrati, H. Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs—application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55:78–87, 2015.
- Campos-Martínez, S.-N., Hernández-González, O., Guerrero-Sánchez, M.-E., Valencia-Palomo, G., Targui, B., and López-Estrada, F.-R. Consensus tracking control of multiple unmanned aerial vehicles subject to distinct unknown delays. *Machines*, 12(5):337, 2024.
- Cao, G. and Wang, J. A distributed reduced-order unknown input observer. *Automatica*, 155:111174, 2023.
- Chavez-Moreno, R., Tang, Y., Hernandez, J.-C., and Ji, H. Contracting angular velocity observer for small satellites. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 54(6):2762–2775, 2018.

- Chen, B., Wang, J., Lu, X., Chen, C., and Zhao, S. Networked microgrids for grid resilience, robustness, and efficiency: A review. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 12(1):18–32, 2021a.
- Chen, G., Liu, Z., Yu, G., and Liang, J. A new view of multisensor data fusion: research on generalized fusion. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:1–21, Oct. 2021b.
- Chen, K., Wang, J., Zhong, X., and Lai, G. Distributed observer design for linear systems under time-varying communication delay. *Complexity*, 2021:1–12, 2021c.
- Chen, K., Zhu, Z., Zeng, X., and Wang, J. Distributed observers for state omniscience with stochastic communication noises. *Mathematics*, 11(9):1997, 2023.
- Chi, J. and Su, H. Formation tracking of multiple rectangular agents based on fully distributed observer. *Journal of the Franklin Institute*, 361(9):106900, 2024.
- Chong, C.-Y., Chang, K.-C., and Mori, S. A review of forty years of distributed estimation. In *2018 21st International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–8. IEEE, 2018.
- Clohesy, W. and Wiltshire, R. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the aerospace sciences*, 27(9):653–658, 1960.
- Concha, A., Alvarez-Icaza, L., and Garrido, R. Simultaneous parameter and state estimation of shear buildings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70:788–810, 2016.
- Dolk, V., Borghers, D. P., and Heemels, W. Output-based and decentralized dynamic event-triggered control with guaranteed $\mathcal{L}_p$ -gain performance and zeno-freeness. *IEEE Transactions on automatic control*, 62(1):34–49, 2016.
- D’Ippolito, F., Garraffa, G., Sferlazza, A., and Zaccarian, L. A hybrid observer for localization from noisy inertial data and sporadic position measurements. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 49:101360, 2023.
- Elmenreich, W. An introduction to sensor fusion. *Vienna University of Technology, Austria*, 502(1-28):37, 2002.
- Fang, W. and Zhu, F. Distributed state observer for systems with multiple sensors under time-delay information exchange. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 24(13), 2024.
- Farza, M., Hernández-González, O., Ménard, T., Targui, B., M’saad, M., and Astorga-Zaragoza, C.-M. Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs. *Automatica*, 89:125–134, 2018.

- Fioravanti, C., Gasparri, A., Panzieri, S., and Oliva, G. Distributed state estimation for interdependent and switching multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 196:105984, 2025.
- Galaz-Palma, R., Targui, B., Hernández-González, O., Valencia-Palomo, G., Espinoza-Molina, A., and Guerrero-Sánchez, M.-E. Robust observer for input and state estimation in building structure systems. *Journal of Vibration and Control*, 29(19-20): 4422–4438, 2023.
- Galicia-Galicia, L.-A., Hernández-González, O., Garcia-Beltran, C. D., Guerrero-Sánchez, M.-E., Castro-Gómez, J.-F., and Valencia-Palomo, G. Synchronized estimation of displacement in a structure using multi-sensors under different sampling periods. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*, 7(1):144–149, 2024a.
- Galicia-Galicia, L.-A., Hernández-González, O., Garcia-Beltran, C. D., Valencia-Palomo, G., and Guerrero-Sánchez, M.-E. Distributed observer for linear systems with multirate sampled outputs involving multiple delays. *Mathematics*, 12(18):2943, 2024b.
- Gao, B., Hu, G., Gao, S., Zhong, Y., and Gu, C. Multi-sensor optimal data fusion based on the adaptive fading unscented kalman filter. *Sensors*, 18(2):488, 2018.
- Gavin, H. P., Morales, R., and Reilly, K. Drift-free integrators. *Review of scientific instruments*, 69(5):2171–2175, 1998.
- Ge, P., Li, P., Chen, B., and Teng, F. Fixed-time convergent distributed observer design of linear systems: A kernel-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- González-Miranda, J. M. *Synchronization and control of chaos: an introduction for scientists and engineers*. World Scientific, 2004.
- Grave, I. and Tang, Y. A new observer for perspective vision systems under noisy measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2):503–508, 2015.
- Hackett, J. and Shah, M. Multi-sensor fusion: a perspective. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1324–1330 vol.2, 1990.
- Hall, D. L. and Llinas, J. An introduction to multisensor data fusion. *Proceedings of the IEEE*, 85(1):6–23, 1997.
- Han, W., Trentelman, H. L., Wang, Z., and Shen, Y. A simple approach to distributed observer design for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(1): 329–336, 2018.

- He, C. and Huang, J. Leader-following consensus of multiple rigid body systems by a sampled-data distributed observer. *Automatica*, 146:110658, 2022.
- He, C. and Huang, J. Leader-following consensus of multiple uncertain rigid body systems by a sampled-data adaptive distributed observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 35(5):1719–1738, 2025.
- He, Q. and Liu, W. Formation control for linear multi-agent systems with asynchronously sampled outputs. *Information Sciences*, 658:119992, 2024.
- He, S., Shin, H.-S., Xu, S., and Tsourdos, A. Distributed estimation over a low-cost sensor network: A review of state-of-the-art. *Information Fusion*, 54:21–43, 2020.
- Huang, S., Yuzhe, L., and Junfeng, W. Distributed state estimation for linear time-invariant dynamical systems: A review of theories and algorithms. *Chinese Journal of Aeronautics*, 35(6):1–17, 2022.
- Hussain, G., Siddique, M., Hussain, M. M., Hassan, M. T., and Aslam, N. Synchronization of n-non-linear slave systems with master system using non-adaptive and adaptive coupled observers. *Energies*, 14(11):3190, 2021.
- Jenabzadeh, A., Shu, Z., Huang, T., Zhu, Q., Shang, Y., and Cui, Y. Distributed estimation and motion control in multi-agent systems under multiple attacks. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 22:12548–12559, 2025.
- Karaked, P., Saengphet, W., and Tantrairatn, S. Multi-sensor fusion with extended kalman filter for indoor localization system of multirotor uav. In *2022 19th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE)*, pages 1–5. IEEE, 2022.
- Khaleghi, B., Khamis, A., Karray, F. O., and Razavi, S. N. Multisensor data fusion: A review of the state-of-the-art. *Information fusion*, 14(1):28–44, 2013.
- Kim, K., Choi, J., Chung, J., Koo, G., Bae, I.-H., and Sohn, H. Structural displacement estimation through multi-rate fusion of accelerometer and rtk-gps displacement and velocity measurements. *Measurement*, 130:223–235, 2018.
- Kim, S., Pakzad, S., Culler, D., Demmel, J., Fenves, G., Glaser, S., and Turon, M. Wireless sensor networks for structural health monitoring. In *Proceedings of the 4th international conference on Embedded networked sensor systems*, pages 427–428, 2006.
- Kim, T., Shim, H., and Cho, D. D. Distributed luenberger observer design. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6928–6933. IEEE, 2016.

- Kim, T., Lee, C., and Shim, H. Completely decentralized design of distributed observer for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(11):4664–4678, 2019.
- Kong, L., Peng, X., Chen, Y., Wang, P., and Xu, M. Multi-sensor measurement and data fusion technology for manufacturing process monitoring: a literature review. *International journal of extreme manufacturing*, 2(2):022001, 2020.
- Lei, Y., Jiang, Y., and Xu, Z. Structural damage detection with limited input and output measurement signals. *Mechanical systems and signal processing*, 28:229–243, 2012.
- Li, M., Xu, T., Shi, Y., Wei, K., Fei, X., and Wang, D. Adaptive kalman filter for real-time precise orbit determination of low earth orbit satellites based on pseudorange and epoch-differenced carrier-phase measurements. *Remote Sensing*, 14(9):2273, 2022.
- Li, S., Xiao, F., Wang, A., and Zheng, Y. Distributed observers for linear time-invariant systems with time-varying delays: A switching event-triggered approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025.
- Li, W. and Fu, Z. Unmanned aerial vehicle positioning based on multi-sensor information fusion. *Geo-Spatial Information Science*, 21(4):302–310, 2018.
- Liu, B., Wang, L., Jin, Y.-H., Huang, D.-X., and Tang, F. Control and synchronization of chaotic systems by differential evolution algorithm. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(2):412–419, 2007.
- Liu, W. and Huang, J. Sampled-data cooperative output regulation of linear multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(10):4805–4822, 2021.
- Liu, X., Du, C., Liu, H., and Lu, P. Distributed event-triggered consensus control with fully continuous communication free for general linear multi-agent systems under directed graph. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(1):132–143, 2018.
- Luenberger, D. G. Convergence rate of a penalty-function scheme. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(1):39–51, 1971.
- Luo, Y., Zhu, J., Cao, J., and Yao, Y. Aperiodically intermittent output feedback consensus control for second-order leader-following multi-agent systems based on observer. *Journal of the Franklin Institute*, 360(5):3750–3769, 2023.
- Ma, K., Zhang, H., Wang, R., and Zhang, Z. Target tracking system for multi-sensor data fusion. In *2017 IEEE 2nd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC)*, pages 1768–1772. IEEE, 2017.

- Ma, Z., Choi, J., Yang, L., and Sohn, H. Structural displacement estimation using accelerometer and fmcw millimeter wave radar. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 182:109582, 2023.
- Mahboubi, H., Asadi, M. M., Blouin, S., and Aghdam, A. G. A computationally efficient connectivity index for weighted directed graphs with application to underwater sensor networks. *IEEE Access*, 10:54822–54832, 2022.
- Millán, P., Rodríguez Del Nozal, A. R., Álvaro, Zaccarian, L., Orihuela, L., and Seuret, A. Distributed implementation and design for state estimation. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):6483–6488, 2017.
- Miller, T., Durlik, I., Kostecka, E., Kozłowska, P., Łobodzińska, A., Sokołowska, S., and Nowy, A. Integrating artificial intelligence agents with the internet of things for enhanced environmental monitoring: Applications in water quality and climate data. *Electronics*, 14(4):696, 2025.
- Mitra, A. and Sundaram, S. Secure distributed observers for a class of linear time invariant systems in the presence of byzantine adversaries. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2709–2714. IEEE, 2016.
- Mitra, A. and Sundaram, S. Distributed observers for lti systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11):3689–3704, 2018.
- Morales-Valdez, J., Alvarez-Icaza, L., and Concha, A. On-line adaptive observer for buildings based on wave propagation approach. *Journal of Vibration and Control*, 24(16):3758–3778, 2018.
- Morales-Valdez, J., Avilés, J. D., Ramírez-Neria, M., and Sagredo-Hernández, L. R. Displacement and velocity estimation in building structures using an algebraic observer. *IEEE Access*, 2024.
- Morgül, Ö. and Solak, E. Observer based synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, 54(5):4803, 1996.
- Nazarahari, M. and Rouhani, H. 40 years of sensor fusion for orientation tracking via magnetic and inertial measurement units: Methods, lessons learned, and future challenges. *Information Fusion*, 68:67–84, 2021.
- Nebot Roglá, P. *Agent-Based Architecture for Multirobot Cooperative Tasks: Design and Applications*. PhD thesis, Universitat Jaume I, Castellón, Spain, Jan. 2008.
- Olfati-Saber, R. Distributed kalman filtering for sensor networks. In *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5492–5498. IEEE, 2007.

- Olfati-Saber, R. and Murray, R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(9): 1520–1533, 2004.
- Oliva-Gonzalez, L. J., Morales-Valdez, J., Rodríguez-Torres, A., and Martínez-Guerra, R. Algebraic pi observer for velocity and displacement in civil structures from acceleration measurement. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 208:111017, 2024.
- Ortega, R., Nuño, E., and Bobtsov, A. Distributed observers for lti systems with finite convergence time: A parameter-estimation-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(10):4967–4974, 2020.
- Ortega, R., Nuno, E., and Bobtsov, A. An algebraic, distributed state observer for continuous-and discrete-time linear time-invariant systems with time-varying communication graphs. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 36(6):1340–1352, 2022.
- Park, S. and Martins, N. C. An augmented observer for the distributed estimation problem for lti systems. In *2012 American Control Conference (ACC)*, pages 6775–6780. IEEE, 2012a.
- Park, S. and Martins, N. C. Necessary and sufficient conditions for the stabilizability of a class of lti distributed observers. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 7431–7436. IEEE, 2012b.
- Park, S. and Martins, N. C. Design of distributed lti observers for state omniscience. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(2):561–576, 2016.
- Paziewski, J., Sieradzki, R., Rapinski, J., Tomaszewski, D., Stepniak, K., Geng, J., and Li, G. Integrating low-cost gnss and mems accelerometer for precise dynamic displacement monitoring. *Measurement*, 242:115798, 2025.
- Pena Ramirez, J., Fey, R. H., and Nijmeijer, H. Synchronization of weakly nonlinear oscillators with huygens’ coupling. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(3):033118, 2013.
- Pérez, J., Tang, Y., and Grave, I. Nonlinear observers for a class of neuronal oscillators in the presence of strong measurement noise. In *Advances in Neural Networks–ISNN 2018: 15th International Symposium on Neural Networks, ISNN 2018, Minsk, Belarus, June 25–28, 2018, Proceedings 15*, pages 736–744. Springer, 2018.
- Qu, X., Ding, X., Li, X., Yu, W., and Xu, Y.-L. Assessing and mitigating impacts of structural inclination on acceleration measurements and estimated displacements using

- integrated gnss and accelerometer structural health monitoring systems. *Measurement*, 253:117578, 2025.
- Ramírez-Rasgado, F., Astorga-Zaragoza, C.-M., Hernández-González, O., Guerrero-Sánchez, M.-E., Osorio-Gordillo, G.-L., and Reyes-Reyes, J. Observer synthesis for uncertain nonlinear systems with nonuniformly sampled and delayed output. *IEEE Systems Journal*, 2022a.
- Ramírez-Rasgado, F., Hernández-González, O., Farza, M., M’Saad, M., Astorga-Zaragoza, C.-M., and Dahhou, B. On high-gain observer redesign with respect to the nature of the available outputs. In *2022 10th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 190–195. IEEE, 2022b.
- Ramírez-Rasgado, F., Farza, M., M’Saad, M., Hernández-González, O., and Astorga-Zaragoza, C. Observer design for a class of disturbed nonlinear systems with multirate sampled outputs involving multiple long time-varying delays. In *2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 493–498, 2021.
- Rego, F. C., Pu, Y., Alessandretti, A., Aguiar, A. P., Pascoal, A. M., and Jones, C. N. A distributed luenberger observer for linear state feedback systems with quantized and rate-limited communications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(9): 3922–3937, 2020.
- Rego, F. F. Distributed observers for ltv systems: A distributed constructibility gramian based approach. *Automatica*, 155:111117, 2023.
- Rego, F. F. C., Aguiar, A. P., Pascoal, A. M., and Jones, C. N. A design method for distributed luenberger observers. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3374–3379, 2017.
- Ren, W. Formation keeping and attitude alignment for multiple spacecraft through local interactions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(2):633–638, 2007.
- Ren, W. and Cao, Y. *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*. Springer Science & Business Media, 2010.
- Rodríguez Del Nozal, Á., Millán, P., and Orihuela, L. Data fusion based on subspace decomposition for distributed state estimation in multi-hop networks. *Sensors*, 19(1): 9, 2018.
- Rodríguez Del Nozal, Á., Millán, P., Orihuela, L., Seuret, A., and Zaccarian, L. Distributed estimation based on multi-hop subspace decomposition. *Automatica*, 99: 213–220, 2019a.

- Rodríguez Del Nozal, Á., Orihuela, L., and Millán, P. Estimación distribuida de sistemas LTI basada en confianza. In *XL Jornadas de Automática*, pages 435–441. Universidade da Coruña, Servizo de Publicacións, 2019b.
- Rodriguez-Torres, A., Morales-Valdez, J., and Yu, W. Alternative tuning method for proportional-derived gains for active vibration control in a building structure. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, page 01423312211021052, 2021.
- Siljak, D. D. *Decentralized control of complex systems*. Courier Corporation, 2011.
- Silm, H., Ushirobira, R., Efimov, D., Richard, J.-P., and Michiels, W. A distributed finite-time observer for linear systems. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1731–1736. IEEE, 2017.
- Silm, H., Efimov, D., Michiels, W., Ushirobira, R., and Richard, J.-P. A simple finite-time distributed observer design for linear time-invariant systems. *Systems & Control Letters*, 141:104707, 2020a.
- Silm, H., Ushirobira, R., Efimov, D., Fridman, E., Richard, J.-P., and Michiels, W. Distributed observers with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(11):5354–5361, 2020b.
- Soares, J. M., Aguiar, A. P., Pascoal, A. M., and Martinoli, A. A distributed formation-based odor source localization algorithm-design, implementation, and wind tunnel evaluation. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1830–1836. IEEE, 2015.
- Tanaka, T., Wada, T., and Fujisaki, Y. Asynchronous distributed cooperative full-state observer via gossip protocol. *IFAC-PapersOnLine*, 55(40):229–234, 2022.
- Tang, Y., Ji, H., and Wang, X. Multi-sensor observer designs for a class of nonlinear systems. In *2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA)*, pages 1296–1301. IEEE, 2019.
- Thenozhi, S., Yu, W., and Garrido, R. A novel numerical integrator for velocity and position estimation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 35(6): 824–833, 2013.
- Tian, H., Cai, X., Xiao, F., and Wei, B. A distributed observer based on event-triggered communication for lti systems. In *2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation (ICCA)*, pages 636–641. IEEE, 2020.

- Torchiaro, F. A., Gagliardi, G., Tedesco, F., and Casavola, A. Distributed unknown input observers for discrete-time linear time-invariant systems. *arXiv preprint arXiv:2504.16815*, 2025.
- Tsanousa, A., Bektsis, E., Kyriakopoulos, C., González, A. G., Leturiondo, U., Gialampoukidis, I., Karakostas, A., Vrochidis, S., and Kompatsiaris, I. A review of multisensor data fusion solutions in smart manufacturing: Systems and trends. *Sensors*, 22(5): 1734, 2022.
- Wang, L. and Chen, S. Fully distributed observer-based leader-following consensus of linear multiagent systems by adaptive dynamic event-triggered schemes. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 55(1):332–342, 2025.
- Wang, L. and Morse, A. S. A distributed observer for a time-invariant linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(7):2123–2130, 2017.
- Wang, L., Morse, A. S., Fullmer, D., and Liu, J. A hybrid observer for a distributed linear system with a changing neighbor graph. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1024–1029. IEEE, 2017.
- Wang, L., Liu, J., and Morse, A. S. A distributed observer for a continuous-time linear system. In *2019 American Control Conference (ACC)*, pages 86–91. IEEE, 2019a.
- Wang, L., Liu, J., Morse, A. S., and Anderson, B. D. A distributed observer for a discrete-time linear system. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 367–372. IEEE, 2019b.
- Wang, L., Liu, J., and Morse, A. S. A distributed observer for a continuous-time linear system with time-varying network. *arXiv preprint arXiv:2003.02134*, 2020.
- Wang, L., Liu, J., and Morse, A. S. A hybrid observer for estimating the state of a distributed linear system. *Automatica*, 146:110633, 2022.
- Wang, S. and Guay, M. Distributed state estimation for jointly observable linear systems over time-varying networks. *Automatica*, 163:111564, 2024.
- Wang, S., Pan, Y.-J., and Guay, M. Distributed state estimation for linear time-invariant systems with aperiodic sampled measurement. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 11(4):1835–1844, 2024.
- Wu, Y., Zhang, H., Wang, Z., and Huang, C. Distributed event-triggered consensus of general linear multiagent systems under directed graphs. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 52(1):608–619, 2022.

- Xiao, L., Boyd, S., and Lall, S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus. In *IPSN 2005. Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, 2005.*, pages 63–70. IEEE, 2005.
- Xin, Y. and Cheng, Z. Observer-based consensus for linear multi-agent systems with intermittent communication. *Neurocomputing*, 377:234–242, 2020.
- Xu, H., Wang, J., Wang, H., Zhao, S., and Lin, H. Distributed observer design for achieving asymptotical omniscience over time-variant disconnected networks. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):3565–3570, 2020.
- Xu, Y., Zhang, H., Li, L., and Zhao, N. Observer-based distributed dynamic event-triggered control for vehicle formation under switching communication topology and external disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, page 108099, 2025.
- Yang, G., Rezaee, H., Alessandri, A., and Parisini, T. State estimation using a network of distributed observers with switching communication topology. *Automatica*, 147: 110690, 2023.
- Yang, J. and Zhu, F. Synchronization for chaotic systems and chaos-based secure communications via both reduced-order and step-by-step sliding mode observers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(4):926–937, 2013.
- Yang, J. N., Lin, S., Huang, H., and Zhou, L. An adaptive extended kalman filter for structural damage identification. *Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures*, 13(4):849–867, 2006.
- Yang, Z., Liu, H., Qian, C., Shu, B., Zhang, L., Xu, X., Zhang, Y., and Lou, Y. Real-time estimation of low earth orbit (leo) satellite clock based on ground tracking stations. *Remote Sensing*, 12(12):2050, 2020.
- Yao, Y., Luo, Y., Cao, J., and Li, A. Sample-based event-triggered consensus control for cooperative-competitive leader-follower linear multi-agent systems based on disturbance observers: State and output feedback design. *Information Sciences*, 694: 121701, 2025.
- Yingrong, Y., Jianglong, Y., Yishi, L., and Zhang, R. Distributed state estimation for heterogeneous mobile sensor networks with stochastic observation loss. *Chinese Journal of Aeronautics*, 35(2):265–275, 2022.

- You, W., Li, F., Liao, L., and Huang, M. Data fusion of uwb and imu based on unscented kalman filter for indoor localization of quadrotor uav. *Ieee Access*, 8:64971–64981, 2020.
- Zhang, J., Huang, M., Wan, N., Deng, Z., He, Z., and Luo, J. Missing measurement data recovery methods in structural health monitoring: The state, challenges and case study. *Measurement*, page 114528, 2024.
- Zhang, L., Lu, M., Deng, F., and Chen, J. Distributed state estimation under jointly connected switching networks: Continuous-time linear systems and discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(2):1104–1111, 2023.
- Zhang, Y. and Tian, Y.-P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology. *Automatica*, 45(5):1195–1201, 2009.
- Zheng, Z., Qiu, H., Wang, Z., Luo, S., and Lei, Y. Data fusion based multi-rate kalman filtering with unknown input for on-line estimation of dynamic displacements. *Measurement*, 131:211–218, 2019.
- Zhou, D.-D. Dynamic event-triggered distributed observer for linear systems. *ISA transactions*, 2023.
- Zhu, H. and Su, H. Event-based robust adaptive distributed observer under directed graphs. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 55:5258–5269, 2025a.
- Zhu, H. and Su, H. Hybrid-triggered distributed observer design with measurement and event-verifying sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025b.
- Zhu, Z. and Zhu, S. Asynchronous kalman filtering for dynamic response reconstruction by fusing multi-type sensor data with arbitrary sampling frequencies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 215:111395, 2024.
- Zhu, Z., Lu, J., and Zhu, S. Multi-rate kalman filtering for structural dynamic response reconstruction by fusing multi-type sensor data with different sampling frequencies. *Engineering Structures*, 293:116573, 2023.
- Zhuang, X., Tian, Y., Wang, H., and Ahmed-Ali, S. Event-triggered joint adaptive high-gain observer design for delayed output-sampled nonlinear systems with unknown parameters and output injection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 142:108541, 2025.

A Diseño experimental de la estructura tipo edificio de cinco pisos

Para la evaluación del esquema de observación distribuido propuesto en el capítulo 3, se realizaron experimentos en un entorno realista que a continuación se presenta.

Prototipo estructural

El prototipo del modelo experimental es una estructura que representa un edificio de cinco pisos a escala reducida, mostrado en la Figura 1. La estructura está construida en aluminio, con tres columnas fabricadas intencionadamente en latón para introducir asimetría estructural. Las columnas se caracterizan por una sección transversal cuadrada, con una anchura de 6.35 mm. La estructura principal mide 1.8 m de largo y tiene una base rectangular de 60 por 50 cm. El primer piso tiene una altura de 31 cm, mientras que los pisos intermedios restantes miden 36 cm. La estructura de corte asume masas globales en cada nivel de piso, cuyos valores se presentan más adelante en la Tabla 1.

Mesa vibratoria y sistema de excitación

Para caracterizar el sistema estructural, el prototipo se montó en una mesa vibratoria accionada por servomotores Parker, modelo 406T03LXR. El centro de control para mover la mesa vibratoria consiste en una computadora con Windows XP, equipada con una tarjeta National Instruments PC1 6713 y una licencia de MATLAB. Esta tarjeta se encarga de generar las trayectorias de movimiento de la estructura y enviarlas a los servomotores utilizando el software especializado Motion Planner de PARK, diseñado para generar la señal de excitación externa que emula los movimientos de un terremoto. La comunicación entre la computadora y los actuadores de los servomotores se establece a través de un puerto serie que opera a 9600 baudios/s.

Instrumentación: sensores de aceleración y desplazamiento

Para medir la respuesta estructural, el prototipo del edificio se equipó con acelerómetros basados en MEMS, modelo ADXL203E, con un rango de medición de ± 1.7 g, un ancho de banda de $[0 - 50]$ Hz y un rango de salida de $[0 - 10]$ V. Estos sensores se instalaron para medir la aceleración absoluta en cada planta y la excitación externa ejercida sobre la estructura.

Además, se montaron en cada planta sensores de desplazamiento basados en tecnología láser, de la serie OptoNCDT de Micro-Epsilon, modelo ILD 1302-200, para medir el desplazamiento relativo a la plataforma de la mesa vibratoria. Este tipo de dispositivo tiene un rango de medición de 200 mm, una resolución de 0.1 mm y funciona a una

frecuencia de muestreo de 750 Hz. Proporcionan una salida de corriente analógica en el rango de $[4 - 20]$ mA. Utilizando una resistencia de $500\ \Omega$ y un diseño electrónico adecuado, la salida también puede ser una señal de $[0 - 10]$ V. Estas mediciones de desplazamiento se utilizan exclusivamente para validar el desplazamiento estimado proporcionado por el observador.

Sistema de adquisición de datos

Las mediciones de los sensores se adquirieron mediante convertidores analógico-digitales y se transmitieron al centro de adquisición de datos, que consta de una estación de trabajo y de dos placas de adquisición de datos. La estación de trabajo consiste en un ordenador Advantech equipado con un procesador Intel Core i7-4770S a 3.1 GHz, un disco duro de 500 GB y 8 GB de RAM. Las tarjetas de adquisición de datos utilizadas son de la serie PCIe 6221M de National Instruments, que cuentan con 16 canales de entrada analógica con una resolución de 16 bits y una frecuencia de muestreo de 250 kS/s, lo que garantiza la medición simultánea de las respuestas tanto de aceleración como de desplazamiento. La estación de trabajo funciona con el sistema operativo Windows XP y utiliza MATLAB 2011a con la caja de herramientas Real-Time Windows Target en Simulink. El sistema se configuró con un tiempo de muestreo fijo de 1 ms para garantizar la adquisición y el procesamiento sincronizados de datos en tiempo real.



Figura 1: Prototipo de edificio de cinco pisos a escala reducida.

Identificación de parámetros estructurales

Para implementar el observador propuesto, los parámetros estructurales se estimaron utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados descrito en la referencia [Morales-Valdez et al. \(2018\)](#), capaz de funcionar sin conexión y basándose únicamente en mediciones de aceleración. Los parámetros identificados para el edificio de cinco pisos se presentan en la Tabla [1](#). Estos parámetros definen el modelo de masa concentrada utilizado para el diseño del observador en aplicaciones de monitoreo estructural.

Tabla 1: Parámetros estructurales del prototipo de edificio de cinco pisos

Piso	m_i [kg]	$\hat{c}_i$ [N·s/m]	$\hat{k}_i$ [N/m]
1	10.78	700.14	19011
2	9.17	278.18	12108
3	9.14	546.84	11966
4	9.12	372.54	11850
5	9.08	375.97	12406

Señal de excitación sísmica

Para poner de relieve el rendimiento del observador propuesto en un contexto realista, se llevaron a cabo experimentos utilizando el registro norte-sur del terremoto de la Ciudad de México de 1985, registrado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT), como señal para perturbar la estructura. Dicho registro se escaló temporalmente para que coincidiera con el prototipo experimental; véase la Figura [2](#). La señal contiene una frecuencia predominante de aproximadamente 1.5 Hz, que coincide con el modo de vibración fundamental del prototipo experimental, lo que la hace adecuada para la excitación.

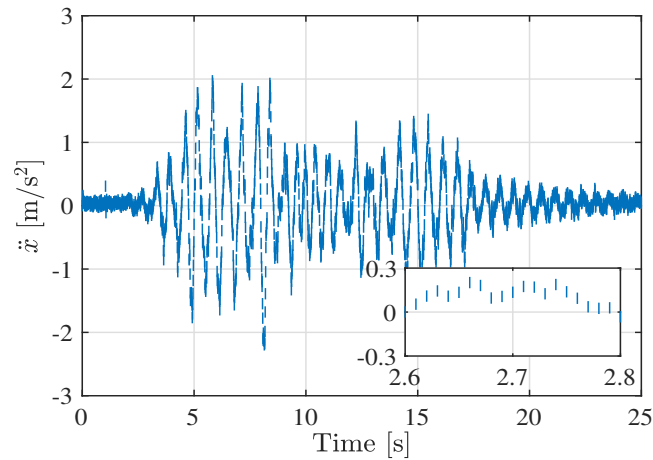


Figura 2: Componente norte-sur normalizada del terremoto de la Ciudad de México de 1985.

Procedimiento de cálculo de aceleraciones relativas

Con el propósito de aislar la respuesta estrictamente dinámica del edificio debida a su deformación interna, se calculó para cada piso la aceleración relativa respecto de la base mediante la resta punto a punto en el dominio del tiempo de la aceleración absoluta de la mesa vibratoria de la aceleración absoluta correspondiente a cada nivel.

El vector de estado se define como $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan los vectores de los desplazamientos de los pisos $\nu_i(t)$ y las velocidades $\dot{\nu}_i(t)$, respectivamente, con $i = 1, \dots, n$; $n = 5$ describe el número de pisos de la estructura, tal y como se muestra en la ecuación (3.58).

Para las ecuaciones (2.60)–(2.62) se tienen las siguientes matrices diagonales de masa, amortiguamiento y rigidez:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_o &= \text{diag} \begin{bmatrix} 9.1378 & 9.3594 & 9.6701 & 9.633 & 9.3019 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_o &= \text{diag} \begin{bmatrix} 37.3 & 311.4 & 849.5 & 1077.4 & 1560.4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_o &= \text{diag} \begin{bmatrix} 1118 & 9449 & 23188 & 36477 & 44902 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resumen del procedimiento experimental

A continuación se describe de manera secuencial el procedimiento experimental implementado:

1. Preparación del sistema estructural

- Se montó sobre la mesa vibratoria el edificio a escala de cinco pisos, rígidamente fijado a la mesa en su base.
- La mesa vibratoria se configuró para operar en un grado de libertad horizontal, simulando el movimiento del suelo durante un sismo.
- En simulink se desarrollo la planta como se muestra en la Figura 3

MODELO REAL DE LA PLANTA

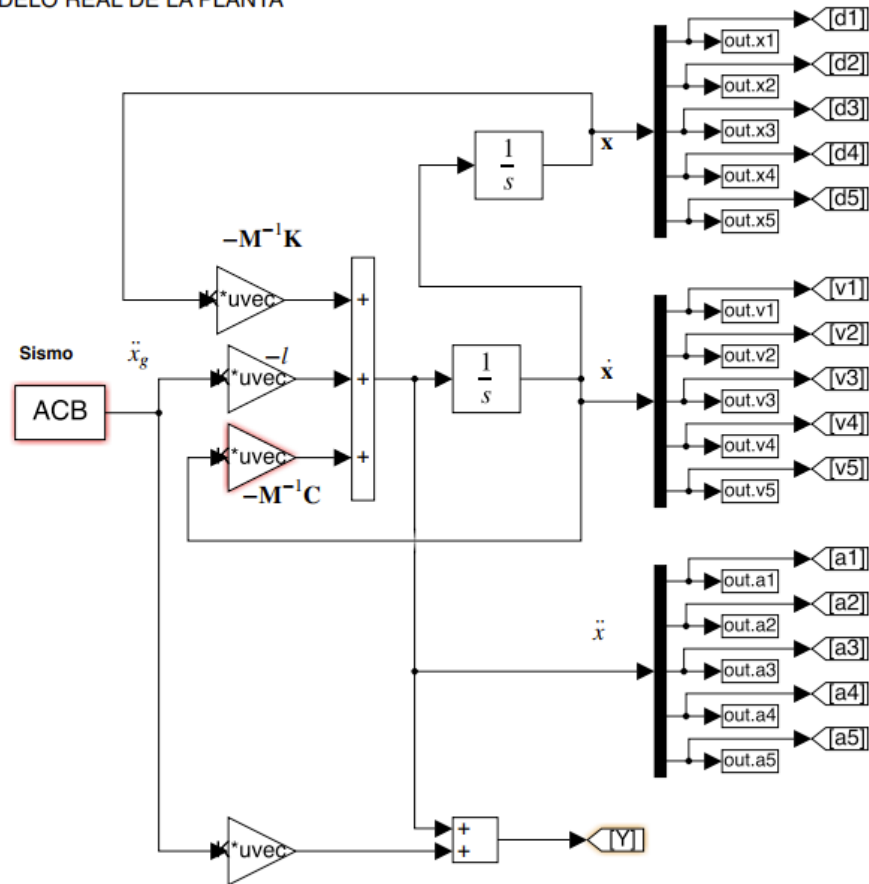


Figura 3: Modelo real de la planta (edificio de cinco pisos instrumentado).

2. Selección y acondicionamiento de la señal sísmica de entrada

- Se seleccionó el registro norte-sur del terremoto de la Ciudad de México de 1985 (SCT).
- Dicho registro fue escalado temporalmente para adecuarse a las leyes de semejanza del prototipo experimental.

3. Instrumentación

- Se instalaron seis acelerómetros MEMS ADXL203E:
 - Uno en la mesa vibratoria (base del edificio).
 - Uno en cada uno de los cinco pisos.
- Se instalaron seis sensores láser OptoNCDT ILD 1302-200 en los mismos puntos para medir desplazamientos relativos a la mesa.
- Todos los sensores se conectaron al sistema de adquisición de datos con sincronización temporal común.

4. Configuración del sistema de adquisición

- Se utilizaron dos tarjetas PCIe 6221M de National Instruments.
- Se configuró un tiempo de muestreo fijo de 1 ms en MATLAB 2011a con Real-Time Windows Target.

5. Registro de mediciones absolutas

- Se aplicó a la mesa vibratoria la señal sísmica escalada.
- Durante el ensayo se registraron simultáneamente:
 - Aceleraciones absolutas de la mesa y de cada piso.
 - Desplazamientos relativos de cada piso respecto a la mesa.
 - En Simulink se presentaron las mediciones. Figura 4

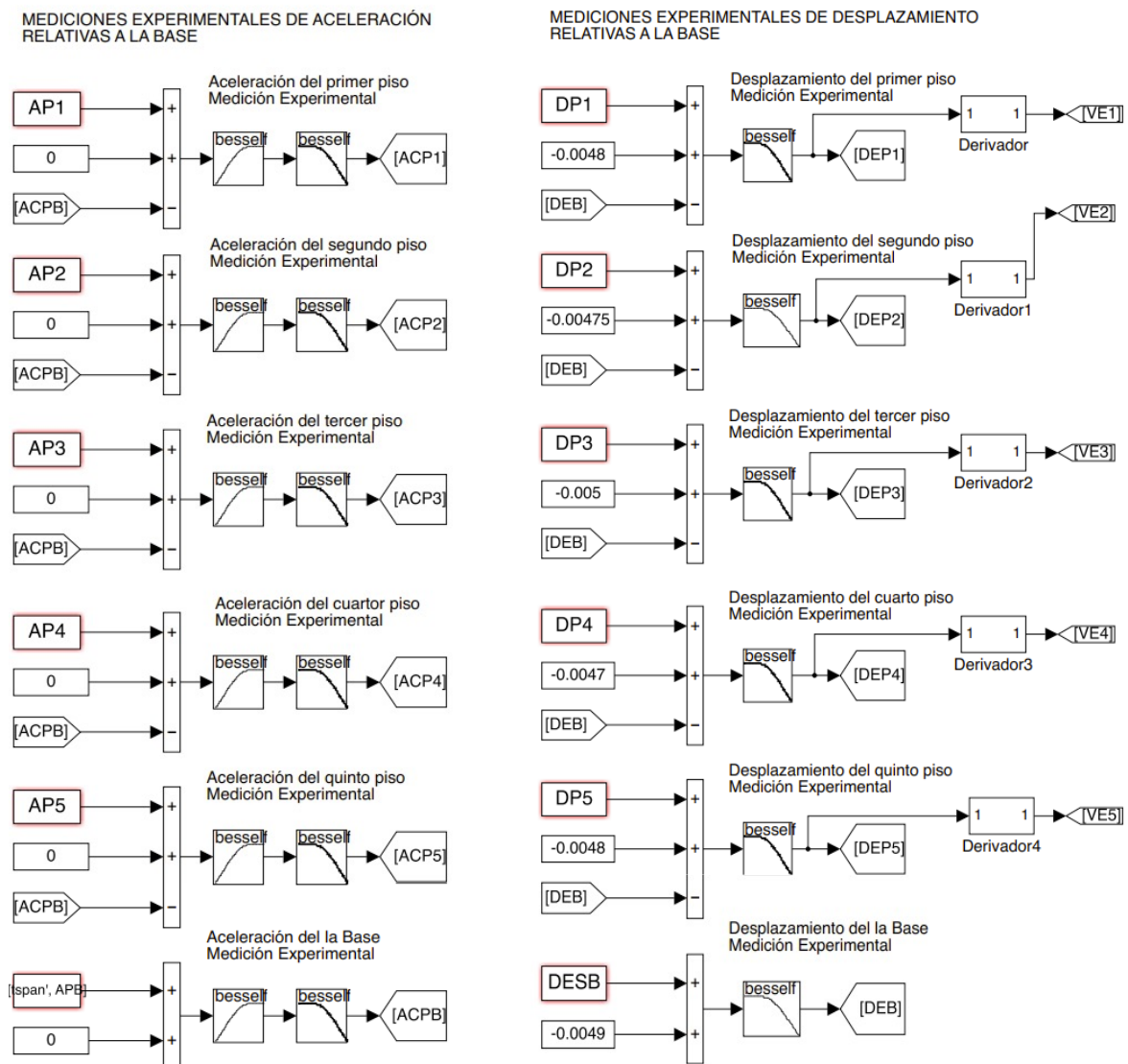


Figura 4: Mediciones experimentales de aceleración y desplazamiento relativos a la base.

6. Cálculo de aceleraciones relativas (post-procesamiento)

- Para cada instante de tiempo t y para cada piso i (con $i = 1, \dots, 5$), se calculó la aceleración relativa mediante:

$$a_{rel,i}(t) = a_{abs,piso i}(t) - a_{abs,mesa}(t)$$

- Este cálculo se realizó muestra por muestra en el dominio del tiempo.

7. Validación de resultados

- Los desplazamientos medidos por los sensores láser se utilizaron para validar los desplazamientos estimados por el observador propuesto.

En esta fase se obtuvieron las mediciones y se realizaron los ajustes necesarios para generar la base de datos utilizada en las simulaciones del observador.

B Metodología empleada para el desarrollo de observadores distribuidos

A continuación, se presentan las metodologías empleadas en cada uno de los enfoques de observadores propuestos, las cuales se aplican según el caso de estudio correspondiente a los capítulos 2, 3 y 4.

Observador distribuido con mediciones muestreadas a diferentes tasas de muestreo y ruido en la medición.

Paso 1. (Observabilidad conjunta). Al diseñar un observador, es necesario verificar la propiedad de observabilidad del sistema. En el caso de un observador distribuido, se requiere que el sistema sea conjuntamente observable, aunque los subsistemas individuales no lo sean. Revisar la ecuación (1.8)

Paso 2. (Matriz de transformación). Se requiere un cambio de coordenadas para descomponer los subsistemas en componentes observables y no observables. Revisar las ecuaciones (1.11)-(1.12)

Paso 3. (Balanceo de la matriz Laplaciana). Calcular el vector fila positivo G , tal que la matriz $G\mathcal{L}$ corresponde al Laplaciano del grafo dirigido balanceado que se obtiene al ajustar los pesos en el grafo original. Revisar el lema (1)

Paso 4. (Calcular ψ). La desigualdad (2.11) asegura que la combinación entre la red de comunicación ($\check{\mathcal{L}}$) y las ganancias locales es definida positiva. Además, permite desacoplar las ganancias locales L_i , M_i del diseño de la ganancia de acoplamiento γ .

Paso 5. (Ganancia de acoplamiento γ). La ganancia $\gamma > 0$ controla la intensidad de la comunicación entre los observadores. Para garantizar la estabilidad del sistema de error, γ debe elegirse suficientemente grande. Revisar la ecuación (2.22)

Paso 6. (Ganancia del observador L_i). Se calcula la ganancia L_i para estabilizar la parte observable del sistema local. La parte no observable será estimada mediante la comunicación con los vecinos, usando la matriz M_i que proyecta la parte no observable. Revisar la ecuación (2.13)

Paso 7. Configurar el solver de ecuaciones diferenciales con retardos (DDE): opciones = DDESET('MaxStep', Δt)

Paso 8. Se calculan los retardos para cada uno de los observadores.

Paso 9. Se resuelve el sistema DDE, el cual incluye funciones que definen: (i) la dinámica continua del sistema en lazo cerrado y de los tres observadores distribuidos para un satélite (modelo de Hill-Clohessy-Wiltshire), junto con una referencia sinusoidal y su derivada para el seguimiento de trayectoria, así como las estimaciones del estado completo mediante la predicción de las mediciones muestreadas; (ii) los retardos asociados. Revisar (2.18) en el teorema 1

Paso 10. Se presentan los resultados.

Repositorio de códigos

A continuación se presentan los repositorios donde se encuentran los códigos de simulación del Caso de estudio 1 (Sistema con mediciones muestreadas y retardos).

📁 Satélites (<https://n9.cl/yp3jg>). Incluye los códigos:

📄 VersionT1.m presenta la simulación de un observador distribuido para un satélite con mediciones muestreadas y retardos. Es el código principal.

📄 SatCD2_delBIENT.m presenta la función de la dinámica continua del sistema en lazo cerrado y de los tres observadores distribuidos para un satélite. Es invocado por VersionT1.m.

📄 Sat_sampling_delBIENT.m Define los retardos. Es invocado por VersionT1.m.

📄 satellite_Adri_v2.m presenta la simulación de un observador distribuido para un satélite con mediciones muestreadas sin retardos.

📄 satelites_continuos_mv1.m Contiene la simulación de un observador distribuido tradicional para un satélite.

Observador sincronizado con mediciones muestreadas a diferentes tasas de muestreo y ruido en la medición.

Paso 1: Modelado del sistema y construcción de matrices (A, E, C) a partir de parámetros del edificio (ecuaciones [2.59](#) [2.60](#)).

Paso 2: Diseño de la ganancia del observador local K usando ubicación de polos (Teorema [2](#)). Se asegura que $A - KC$ sea Hurwitz.

Paso 3: Definición de los períodos de muestreo. Cada observador i tiene su propio período de muestreo diferentes h_i .

Paso 4: Generación de ruido de medición para cada sensor (periódico, gaussiano, etc.) y adquisición de mediciones muestreadas.

Paso 5: Implementación del observador sincronizado para $p = 3$ observadores (ecuación [\(2.81\)](#)). Cada observador tiene dinámica [\(2.64\)](#)

Paso 6: Configuración del solver temporal.

Paso 7: Cálculo de la estimación sincronizada como promedio de los estados estimados.

Paso 8: Almacenamiento de resultados y generación de gráficas comparativas.

Repositorio de códigos

A continuación se presentan los repositorios donde se encuentran los códigos de simulación del Caso de estudio 2 (Sistema con mediciones muestreadas y ruido).

⇒ Edificio_2_pisos (<https://n9.cl/2kl dm>). Incluye el código:

📄 CD_estructuraVFg.m presenta la simulación de un observador sincronizado para un edificio de dos pisos, con mediciones de posición obtenidas mediante muestreo a diferentes frecuencias.

Observador distribuido con mediciones muestreadas a diferentes tasas de muestreo y comunicación periódica

Paso 1. (Modelado del sistema estructural) Se definen los parámetros físicos: masa m_i , rigidez k_i y amortiguamiento c_i para cada piso $i = 1, \dots, N$. (Revisar ecuaciones (3.57)–(3.63)).

Paso 2. (Observabilidad conjunta) Al diseñar un observador distribuido, es necesario verificar la propiedad de observabilidad del sistema. Se requiere que el sistema sea conjuntamente observable, aunque los subsistemas individuales no lo sean. Revisar la ecuación de observabilidad conjunta adaptada al modelo estructural (1.8).

Paso 3. (Matriz de transformación) Se requiere un cambio de coordenadas para descomponer cada subsistema en componentes observables y no observables. Para cada sensor i se calcula la matriz de transformación T_i . Revisar las ecuaciones de partición utilizadas en el código (1.11)–(1.12).

Paso 4: (Partición de las salidas por sensor) Cada piso dispone de un sensor que mide su aceleración. Por tanto, se extraen las filas individuales de la matriz C .

Paso 5: (Diseño local de ganancias L_i y W_i) Para la parte observable de cada subsistema se diseña una ganancia L_i por asignación de polos. Para inyectar la información de los vecinos exclusivamente en la parte no observable de cada observador la matriz W_i . Revisar las ecuaciones (3.12).

Paso 6: (Definición del grafo de comunicación) Se establece una topología de comunicación entre los $\mathcal{V}$ observadores mediante un grafo dirigido fuertemente conexo. Revisar el lema 1.

Paso 7: (Ganancia de acoplamiento γ) Revisar la ecuación (3.16)

Paso 8: (Configuración de muestreo y comunicación) Revisar el algoritmo 3.4.1.

Paso 9: (Evaluación del desempeño) Una vez finalizada la simulación, se comparan las estimaciones con los estados reales de datos experimentales. Se calculan las siguientes métricas:

- RMSE (raíz del error cuadrático medio) (3.65).

- MAE (error absoluto medio) (3.66).
- Coeficiente de determinación R^2 (3.67)

Repositorio de códigos

A continuación se presentan los repositorios donde se encuentran los códigos de simulación del Caso de estudio 3 (Sistema con mediciones muestreadas y comunicación periódica).

📁 Edificio_5_pisos (<https://n9.cl/rhq74>) Incluye los códigos:

- 📄 Experimento_sample_petit.m presenta la simulación de un observador distribuido con salidas de medición muestreadas a diferentes tasas y comunicación periódica. El caso de estudio es una estructura tipo edificio de cinco pisos, con las mediciones de una base de datos tratada. En este experimento se consideran las condiciones del primer experimento reportado.
- 📄 Experimento_sample_large.m En este experimento se consideran las condiciones del segundo experimento reportado.
- 📄 Metrica_ruido_1_varianza.m presenta los resultados en el que se toman las condiciones del tercer experimento reportado y se añade ruido a las mediciones con una varianza de 1.
- 📄 Metrica_ruido_05_varianza.m presenta los resultados en el que se toman las condiciones del tercer experimento reportado y se añade ruido a las mediciones con una varianza de 0.5.
- 📄 Metrica_sin_ruido.m presenta los resultados en el que se toman las condiciones del tercer experimento reportado sin ruido.

Observador distribuido con mediciones de salidas muestreadas a diferentes tasas de muestreo con ruido añadido y comunicación activada por eventos.

Paso 1. al Paso 3. Revisar la sección B.

Paso 4. Definimos los parámetros para reducir el número de activación de eventos. Revisar la variable dinámica interna (4.6), así como la condición de evento (4.7).

- θ_i Permite que el threshold sea más restrictivo.
- b_i Hace que ϕ decaiga más rápido.
- μ Tiene efecto en el consenso.

Paso 5. Definir la ganancia L_{io} según el teorema 5 en la ecuación 4.21 y la ecuación 4.18.

Paso 6. Calcular la ganancia de acoplamiento γ de acuerdo al teorema 5 así como el intervalo de muestreo máximo.

Paso 7. Almacenamiento de resultados y generación de gráficas comparativas

Repositorio de códigos

A continuación se presentan los repositorios donde se encuentran los códigos de simulación del Caso de estudio 4 (Conjunto de cuatro VANTs) y del Caso de estudio 5 (Satélites en LEO).

➤ VANT (<https://n9.cl/bd80te>) Incluye los códigos:

📄 event_con_ruido_MAX.m y event_con_ruido_MIN.m presentan la simulación de un observador distribuido para un conjunto de cuatro VANT, con mediciones de salida muestreadas a diferentes tasas de muestreo y con ruido añadido, así como una comunicación dinámica activada por eventos.

📄 event_SIN_ruido.m presenta la simulación de un observador distribuido para un conjunto de cuatro VANT, con mediciones de salida muestreadas a diferentes tasas de muestreo con una comunicación dinámica activada por eventos.

📄 LMI_evet_Lau.m presenta el cálculo de la ganancia L_1 con LMI robusta.

📄 LMI_evet_Lau2.m presenta el cálculo de la ganancia L_2 con LMI robusta.

📄 LMI_evet_Lau3.m presenta el cálculo de la ganancia L_3 con LMI robusta.

📄 LMI_evet_Lau4.m presenta el cálculo de la ganancia L_4 con LMI robusta.

📄 mis_datos.mat contiene la ganancia L_1 calculada.

📄 mis_datos2.mat contiene la ganancia L_2 calculada.

📄 mis_datos3.mat contiene la ganancia L_3 calculada.

📄 mis_datos4.mat contiene la ganancia L_4 calculada.

➤ Satélites (<https://n9.cl/4v95c>) Incluye el código:

📄 Satellite_event.m presenta la simulación de un observador distribuido para la estimación de posición y velocidad de un satélite en LEO, con mediciones de posición obtenidas mediante muestreo a diferentes frecuencias y la comunicación dinámica activada por eventos.

Lista de variables

Variables generales

Sistema y estado

Variable	Descripción
$x(t) \in \mathbb{R}^n$	Vector de estado del sistema
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal del estado
n	Dimensión del vector de estado
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de dinámica del sistema
$B \in \mathbb{R}^{n \times q}$	Matriz de entrada
$u(t) \in \mathbb{R}^q$	Vector de entrada de control
$C \in \mathbb{R}^{\rho \times n}$	Matriz de salida global
$C_i \in \mathbb{R}^{\rho_i \times n}$	Matriz de salida del sensor i
$y(t) \in \mathbb{R}^\rho$	Vector de salida (mediciones)
ρ	Dimensión total de la salida ($\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$)
ρ_i	Dimensión de la salida del sensor i
N	Número de sensores/agentes en la red

Observabilidad

Variable	Descripción
$\mathcal{O}(A, C)$	Matriz de observabilidad del par (A, C)
$\mathcal{U}_i$	Subespacio no observable del par (A, C_i)
v_i	Dimensión del subespacio observable del par (A, C_i)
$n - v_i$	Dimensión del subespacio no observable del par (A, C_i)

Observadores y estimación

Variable	Descripción
$\hat{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$	Estado estimado por el observador i
$\epsilon_i(t) = \hat{x}_i(t) - x(t)$	Error de estimación del observador i
$\eta_i(t)$	Variable auxiliar (predictor del error de salida)
$z_i(t) = C_i \epsilon_i(t) - \eta_i(t)$	Variable auxiliar para el análisis de estabilidad
$L_i \in \mathbb{R}^{n \times \rho_i}$	Ganancia de corrección del observador local
$W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de ponderación (proyección sobre el subespacio no observable)
$\gamma \in \mathbb{R}$	Ganancia de acoplamiento entre observadores
μ	Tasa de decaimiento deseada (estabilidad)
r_i	Parámetro de diseño auxiliar en la condición LMI (Lema 2)
ψ	Constante positiva en la condición de acoplamiento (Lema 2)

Red de comunicación

Variable	Descripción
$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$	Grafo dirigido ponderado de comunicación
$\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$	Conjunto de nodos (observadores/agentes)
$\mathcal{E}$	Conjunto de aristas dirigidas del grafo
$\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]$	Matriz de adyacencia ponderada
α_{ij}	Peso de la arista del nodo j al nodo i
$\mathcal{D}$	Matriz diagonal de grados de entrada
d_i	Grado de entrada del nodo i
$\mathcal{L}$	Matriz laplaciana del grafo
g_i	Pesos positivos tales que $g\mathcal{L} = 0$ y $g\mathbf{1}_N = N$
$G = \text{diag}(g_1, \dots, g_N)$	Matriz diagonal de pesos g_i
$\check{\mathcal{L}} = G\mathcal{L} + \mathcal{L}^T G$	Laplaciana simétrica del grafo balanceado
$\lambda_2(\check{\mathcal{L}})$	Segundo valor propio más pequeño de $\check{\mathcal{L}}$

Muestreo de mediciones

Variable	Descripción
t_k^i	k -ésimo instante de muestreo del sensor i
$\Delta_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i$	Intervalo de muestreo del sensor i en el paso k
$\Delta_{\text{máx}}^i$	Cota superior del intervalo de muestreo del sensor i
$\Delta_{\text{máx}}$	Cota superior global del intervalo de muestreo
Ψ	Cota máxima teórica del intervalo de muestreo (Cap. 3)
χ_{θ_L}	Cota máxima teórica del intervalo de muestreo (Cap. 4)

Funciones de Lyapunov y estabilidad

Variable	Descripción
$V(\epsilon, t)$	Función candidata de Lyapunov
$P = P^T > 0$	Matriz simétrica definida positiva en la función de Lyapunov
$\lambda_{\text{mín}}(P), \lambda_{\text{máx}}(P)$	Valores propios mínimo y máximo de P
$\sigma = \sqrt{\lambda_{\text{máx}}(P)/\lambda_{\text{mín}}(P)}$	Relación de condicionamiento de P
$a_{\theta_L}, b_{\theta_L}$	Constantes de convergencia en las desigualdades diferenciales
$\eta(\Delta)$	Tasa de convergencia exponencial en función del intervalo de muestreo
ζ_1, ζ_2	Parámetros auxiliares de estabilidad del subsistema no observable
β_1, β_2	Coeficientes en la desigualdad diferencial del Lema 4 (Cap. 3)

Descomposición de observabilidad

Variable	Descripción
$T_i = [O_i \ U_i]$	Matriz ortogonal de transformación del nodo i ($T_i T_i^T = I_n$)
$O_i \in \mathbb{R}^{n \times v_i}$	Base ortonormal del subespacio observable de (A, C_i)
$U_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-v_i)}$	Base ortonormal del subespacio no observable de (A, C_i)
$A_{io} \in \mathbb{R}^{v_i \times v_i}$	Dinámica de la parte observable (coordenadas transformadas)
$A_{iu} \in \mathbb{R}^{(n-v_i) \times (n-v_i)}$	Dinámica de la parte no observable (coordenadas transformadas)
$A_{ir} \in \mathbb{R}^{(n-v_i) \times v_i}$	Acoplamiento entre subespacios observable y no observable
$C_{io} \in \mathbb{R}^{p_i \times v_i}$	Matriz de salida en coordenadas transformadas
L_{io}	Ganancia del observador para la parte observable
P_{io}, P_{iu}	Matrices definidas positivas en la función de Lyapunov local
$\epsilon_{io}(t), \epsilon_{iu}(t)$	Componentes observable y no observable del error del nodo i

Variables por capítulo

Capítulo 2 — Observador distribuido con mediciones multitasa y retardo

Variable	Descripción
$\bar{y}(t)$	Salida muestreada y con retardo
$\tau_i(t_k^i)$	Retardo en la medición del sensor i en el instante t_k^i
$\tau_{\max}^i$	Cota superior del retardo del sensor i
$\tau_{\max}$	Cota superior global del retardo
$d_{\max} = \Delta_{\max} + \tau_{\max}$	Suma de cotas de muestreo y retardo
χ_i	Cota superior para $\Delta_{\max}^i + \tau_{\max}^i$ por nodo
χ	Cota superior global para $d_{\max}$
$\delta_i(t) = t - (t_k^i - \tau_i(t_k^i))$	Tiempo transcurrido desde la última medición corregida por retardo
ξ	Constante auxiliar: $\xi = \ C\ \ A\ + \ C\ \gamma \ P^{-1}\ \ \mathcal{L} \otimes I_n\ $
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Constantes de la desigualdad diferencial del Lema 4
$\sigma(\delta) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}\delta)e^{-\mathbf{a}\delta}$	Tasa de convergencia exponencial (Lema 4)

Variable	Descripción
p	Número de observadores a sincronizar
$y_i(t_{k,i})$	i -ésima medición de salida (potencialmente ruidosa)
$w_i(t_{k,i})$	Ruido de medición aditivo del sensor i
K	Ganancia del observador de orden completo
K_a	Ganancia de acoplamiento del observador sincronizado
$\hat{z}_i(t)$	Estado estimado por el i -ésimo observador sincronizado
$\hat{z}_o$	Estimación promedio (salida del observador sincronizado)
M, D, S	Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez (estructura)
$z_1(t), z_2(t)$	Vectores de desplazamientos y velocidades de los pisos
$g(t)$	Señal sísmica de entrada
ξ	Vector de distribución de la señal sísmica

Capítulo 3 — Observador distribuido con comunicación periódica multitasa

Variable	Descripción
$\mathring{t}_h^i = hT^i$	h -ésimo instante de comunicación del agente i
T^i	Período de comunicación propio del agente i
T_m, T_M	Cotas inferior y superior de los períodos de comunicación
$\mathring{T}$	Cota teórica máxima del período de comunicación
$\vartheta_i(t) = \epsilon_i(t) - \epsilon_i(\mathring{t}_h^i)$	Deriva del error de estimación entre instantes de comunicación
ϑ	Constante auxiliar de acotamiento de $\ \vartheta_i(t)\ $
$V_M(\epsilon_u)(t)$	Valor máximo de $V(\epsilon_u)$ en el intervalo $[\mathring{t}_h^i, t]$
M_d, C_d, K_d	Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez (estructura 5 pisos)
$\nu_i(t), \dot{\nu}_i(t)$	Desplazamiento y velocidad del piso i
$\ddot{x}_g(t)$	Aceleración del suelo (entrada sísmica)
Γ_d	Vector de distribución de la excitación sísmica

Capítulo 4 — Observador distribuido con comunicación por eventos

Variable	Descripción
$\zeta_i(t_k^i)$	Ruido de medición del sensor i en el instante t_k^i
$D_i = I_{\rho_i}$	Matriz de acoplamiento del ruido de medición del sensor i
$\mathcal{Z}$	Cota superior del ruido: $\ \zeta_i(t_k^i)\ \leq \mathcal{Z}$
$\Delta_{\bar{H}}$	Cota superior global del intervalo de muestreo (Cap. 4)
ω_k^i	k -ésimo instante de comunicación (evento) del agente i
$\phi_i(t)$	Variable dinámica interna para el umbral de activación
$\theta_i > 0$	Parámetro del umbral de activación del evento
$b_i > 0$	Parámetro de decaimiento de $\phi_i(t)$
$\delta_i(t) = \hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\omega_k^i)$	Diferencia entre estado actual y último estado transmitido
$\bar{\delta}$	Parámetro de la LMI para manejo del ruido (Teorema 5)
Ξ	Matriz de la condición LMI (Teorema 5)
$c_{\theta_L} = \mathcal{Z}/(2\sqrt{\lambda_{\min}(P)})$	Constante del conjunto residual de error (efecto del ruido)
$\mathcal{V}_i^{\text{out}}$	Conjunto de vecinos de salida del agente i

Variables por caso de estudio

Caso 1: Satélite perseguidor en LEO (Capítulos 2 y 4)

Variable	Descripción
ω_0	Velocidad angular del satélite objetivo (0.001 rad/s)
g	Parámetro gravitacional estándar
$\mathbf{r}_0$	Radio de la órbita circular de referencia
$p_x(t), p_y(t), p_z(t)$	Componentes de posición relativa del satélite
$u_x(t), u_y(t), u_z(t)$	Entradas de control
$\zeta(t) = [\bar{\zeta}_1(t), \bar{\zeta}_2(t)]^T$	Vector de estado (posición y velocidad)
$\bar{\zeta}_1(t)$	Componentes de posición
$\bar{\zeta}_2(t)$	Componentes de velocidad
F_1, F_2	Matrices de ganancia de realimentación del controlador
$\varrho_1(t), \varrho_2(t)$	Trayectoria deseada de posición y velocidad
$\hat{\zeta}_i(t)$	Estimación del estado por el observador i

Caso 2: Estructura tipo edificio de dos pisos (Capítulo 2)

Variable	Descripción
$n = 2$	Número de pisos
m_i	Masa del piso i
d_i	Constante de amortiguamiento entre pisos
s_i	Constante de rigidez entre pisos
$z_1(t)$	Vector de desplazamientos de los pisos
$z_2(t)$	Vector de velocidades de los pisos
$\Delta \bar{M}_i$	Período de muestreo del i -ésimo observador sincronizado

Caso 3: Estructura tipo edificio de cinco pisos (Capítulo 3)

Variable	Descripción
$n = 5$	Número de pisos
$x_1(t), x_2(t)$	Vectores de desplazamiento y velocidad de los pisos
$y_i(t)$	Aceleración medida en el piso i
$\ddot{x}_g(t)$	Aceleración del suelo (entrada sísmica)
M_d, C_d, K_d	Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez
Γ_d	Vector de distribución de la excitación sísmica

Caso 4: Conjunto de cuatro VANTs (Capítulo 4)

Variable	Descripción
$p_i \in \mathbb{R}^3$	Posición del VANT i
$v_i \in \mathbb{R}^3$	Velocidad del VANT i
$a_i \in \mathbb{R}^3$	Aceleración del VANT i
$x \in \mathbb{R}^{24}$	Vector de estado global del sistema de cuatro VANTs
$u \in \mathbb{R}^{12}$	Vector de entrada de control global
S_i	Matriz de estructura de medición del VANT i
K	Matriz de ganancia del controlador (asignación de polos)
$p_{d,i}$	Posición deseada del VANT i

Métricas de rendimiento

Variable	Descripción
MAE	Error absoluto medio (<i>Mean Absolute Error</i>)
RMSE	Raíz del error cuadrático medio (<i>Root Mean Square Error</i>)
R^2	Coefficiente de determinación
ITAE	Error absoluto integral ponderado por tiempo (<i>Integral Time Absolute Error</i>)
IAE	Error absoluto integral (<i>Integral Absolute Error</i>)
ISE	Error cuadrático integral (<i>Integral Square Error</i>)