



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Diseño e implementación de un controlador multivariable
con estructura RST

presentada por

MC. Cesar Augusto Peregrino de la Cruz

como requisito para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias de la Electrónica

Director de tesis

Dra. Guadalupe López López

Codirector de tesis

Dr. Nelly Ramírez Corona

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2026.

 cenidet [®] Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Revisión: 0
	Página 1 de 1	

Cuernavaca, Mor., a 06 de agosto de 2026.

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Subdirector Académico
Presente

At'n: Dr. Juan Reyes Reyes
Presidente del Claustro Doctoral
del Departamento De Ingeniería Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante **Cesar Augusto Peregrino de la Cruz**, manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado **"DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROL ROBUSTO MULTIVARIABLE CON ESTRUCTURA RST"**, realizado bajo la dirección de la **Dra. Ma. Guadalupe López López** y codirección de la **Dra. Nelly Ramírez Corona**, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

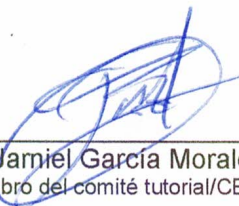
ATENTAMENTE



Dra. Ma. Guadalupe López López
Directora de tesis/CENIDET



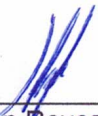
Dra. Nelly Ramírez Corona
Codirector de Tesis/ CENIDET



Dr. Jarniel García Morales
Miembro del comité tutorial/CENIDET



Dr. Moisés Bulmaro Ramos Martínez
Miembro del comité tutorial/CENIDET



Dr. Juan Reyes Reyes
Miembro del comité tutorial/CENIDET

Reciba un cordial saludo.

c.c.p: Mtra. Verónica Sotelo Boyas/ Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
c.c.p: Dr. Jarniel García Morales/ Jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica.
c.c.p: Expediente.



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Subdirección Académica

Cuernavaca Mor, 12/agosto/2026

Oficio No. SAC/248/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis

CESAR AUGUSTO PEREGRINO DE LA CRUZ
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROL ROBUSTO MULTIVARIABLE CON ESTRUCTURA RST"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

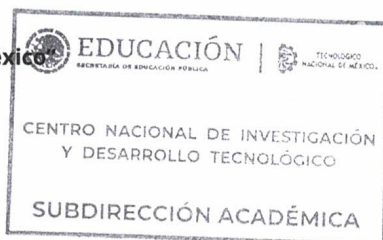
Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

Excelencia en Educación Tecnológica®

"Conocimiento y Tecnología al servicio de México"

CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



c.c.p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



2026
año de
Margarita
Maza

cenidet
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos Tel. 01 (777) 3627770, ext. 4104,
e-mail: acad_cenidet@tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx

Dedicatoria

A mi familia,

porque sin su apoyo, sacrificio y amor incondicional, este camino nunca habría sido posible. Los llevo conmigo en cada página escrita. En especial, a quienes ya no están entre nosotros para ver este logro consumado, pero cuya memoria y ejemplo permanecen vivos.

A mis compañeros,

por su amistad, su confianza y su apoyo. Aprendí que el camino se hace más llevadero cuando se recorre acompañado.

Al Creador,

por encima de todo, a Él sea la gloria. No fue solo mérito propio haber llegado hasta aquí; fue gracia. Hubo momentos en que las fuerzas faltaron, y fue Su presencia la que sostuvo cada paso.

“Todo lo puedo en Cristo que me fortalece.”

— Filipenses 4:13

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de este trabajo doctoral.

A mis directores de tesis y a mi comité de revisores, por su orientación rigurosa, sus comentarios acertados y la retroalimentación constante a lo largo de este proceso. En especial, a la Dra. Guadalupe, por supervisar mi desarrollo profesional con dedicación y compromiso.

A mis compañeros de posgrado, por compartir conocimientos, experiencias y, sobre todo, por hacer más llevadera esta etapa con su amistad y solidaridad.

A mi familia, por su apoyo incondicional a pesar de la distancia, y a todas aquellas personas que, aun sin ser parientes, mostraron su disposición a ayudarme en los momentos más exigentes de este camino.

Al **Tecnológico de México**, por ser la institución que me ha formado profesionalmente y que continúa brindándome las condiciones para crecer en el ámbito académico.

De manera especial, al **Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT)**, por el apoyo otorgado a través de la beca para la realización de mis estudios de posgrado durante el desarrollo de esta tesis doctoral. Sin dicho respaldo, este trabajo no habría sido posible.

A todos, muchas gracias.

Abstract

The relevance of reliable control systems in the process industry is well-established. Industrial processes are often multivariable, nonlinear, and characterized by strong cross-coupling interactions among variables. Traditional control strategies, such as multi-loop PID controllers, exhibit poor performance on these complex systems, even when combined with decoupling schemes. To address this issue, this work proposes the design of an alternative centralized controller based on the polynomial RST structure. Historically, the RST structure has led to control laws that are flexible, robust, and high-performing for Single-Input Single-Output (SISO) systems. The main contribution of this thesis is the extension of this classical RST methodology to Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) systems. The proposed centralized control law successfully manages the nonlinearities, strong interactions, and complex dynamic behaviors of multivariable processes that conventional PID controllers fail to control efficiently.

Resumen

La relevancia de los sistemas de control confiables en la industria de procesos está ampliamente consolidada. Los procesos industriales son frecuentemente multivariantes, no lineales y se caracterizan por fuertes interacciones de acoplamiento cruzado entre sus variables. Las estrategias de control tradicionales, como los controladores PID multilazo, presentan un desempeño deficiente en estos sistemas complejos, incluso cuando se combinan con esquemas de desacoplamiento. Para abordar esta problemática, este trabajo propone el diseño de un controlador centralizado alternativo basado en la estructura polinomial RST. Históricamente, la estructura RST ha dado lugar a leyes de control flexibles, robustas y de alto desempeño para sistemas de una entrada y una salida (SISO). La contribución principal de esta tesis es la extensión de esta metodología clásica RST a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). La ley de control centralizada propuesta gestiona con éxito las no linealidades, las fuertes interacciones y los comportamientos dinámicos complejos de los procesos multivariantes que los controladores PID convencionales no logran controlar de manera eficiente.

Índice general

Agradecimientos	ii
Nomenclatura	xiii
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	5
1.1.1. Estructura de control RST	5
1.1.2. Controladores multivariables	7
1.1.3. Estructuras de control mediante ecuación diofántica	8
1.1.4. Sistemas de Control para reactores CSTR	11
1.1.5. Análisis y conclusiones del estado del arte	12
1.2. Planteamiento del problema	14
1.3. Objetivos	15
1.3.1. Objetivo general	15
1.3.2. Objetivos específicos	15
1.4. Propuesta de solución y metodología	16
1.5. Contribuciones de la tesis	17
1.6. Organización del documento	17
2. Marco Teórico	19
2.1. Sistemas multivariables	19
2.1.1. Estructura de modelos multivariables lineales	21
2.1.2. Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD)	24
2.1.3. Controlabilidad y observabilidad	26
2.2. Ecuación Diofántica e Identidad de Bézout	27
2.3. Análisis de Interacciones: RGA, SVD e Índice de Niederlinski	30

2.3.1.	Descomposición en Valores Singulares (SVD) y Direccionalidad .	30
2.3.2.	Matriz de Ganancias Relativas (RGA)	31
2.3.3.	Índice de Niederlinski	32
2.4.	Estructura y diseño del controlador polinomial RST (SISO)	33
2.5.	Colocación de Polos de Espacio Aumentado con Acción Integral (ASPPIA)	37
2.5.1.	Formulación matemática	37
2.5.2.	Sintonización mediante asignación de polos	38
2.6.	Estrategia de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC)	39
2.6.1.	Formulación matemática	40
2.7.	Índices de Desempeño	41
3.	Metodología	44
3.1.	Ley de control RST para sistemas multivariables centralizados	44
3.2.	Modelado del CSTR, rendimiento en lazo abierto e identificación de los retos de control	51
3.2.1.	Modelo no lineal y parametrización de un CSTR	52
3.2.2.	Análisis de trayectoria y estabilidad del sistema mediante planos de fase	53
3.2.3.	Linealización del sistema en 2 puntos de operación	56
3.2.4.	Pruebas para la evaluación de la estructura de control descentrali- zada basadas en el modelo lineal	57
3.2.5.	Definición del problema de control del CSTR	61
3.3.	Controladores centralizados y descentralizados basados en RST para el sistema CSTR	62
3.3.1.	Modelo de la planta para la síntesis de control	62
3.3.2.	Procedimiento de diseño del control	63
3.3.3.	Ejemplo numérico: Leyes de control centralizadas y descentraliza- das para los puntos de equilibrio 1 y 5	64
3.3.4.	Análisis de robustez mediante margen de disco	65
3.4.	Control basado en RST SISO vs. RST MIMO: Una comparación de rendimiento	68
3.4.1.	Escenarios de prueba	68
3.4.2.	Respuestas del control centralizado y descentralizado ante diversos escenarios de pruebas	70
3.4.3.	Análisis adicional de la influencia de las condiciones iniciales . .	77

3.4.4. Control RST SISO vs. MIMO: Seguimiento de referencia (Setpoint Tracking)	79
3.4.5. Comparación con ASPPIA (Colocación de Polos de Espacio Aumentado con Acción Integral) y MPC	81
4. Conclusiones y Trabajos a Futuro	90
4.1. Conclusiones	90
4.1.1. Sobre el marco teórico y la formulación algebraica	90
4.1.2. Sobre el análisis de la planta CSTR	91
4.1.3. Sobre el desempeño del controlador RST MIMO centralizado . .	92
4.1.4. Sobre las implicaciones prácticas	93
4.2. Trabajo Futuro	93
4.2.1. Extensión al dominio de tiempo discreto	93
4.2.2. Aplicación a sistemas con denominadores no comunes	94
4.2.3. Extensión a sistemas no cuadrados	94
4.2.4. Control tolerante a fallas	95
4.2.5. Resolución de la ecuación de Bézout mediante otras metodologías	95
4.2.6. Sintonización del controlador mediante otras metodologías . . .	96
4.2.7. Reto de llevarlo a una experimentación real	96

Índice de figuras

1.1. Representación esquemática de un esquema de control descentralizado (SISO) y un esquema de control centralizado (MIMO).	2
2.1. Clasificación de los sistemas de control en función del número de entradas y salidas.	20
2.2. Estructura de control RST en forma canónica para una planta SISO. . .	34
3.1. Estructura de control RST para sistemas multivariantes con bloques de funciones de transferencia.	45
3.2. Esquema del reactor CSTR.	52
3.3. Retratos de fase del sistema CSTR.	54
3.4. Retratos de fase para cada punto de operación.	55
3.5. Diagrama de Nyquist generalizado para el controlador multivariable centralizado.	67
3.6. Ruido añadido a las entradas de control.	69
3.7. Diagrama de bloques de la estructura de control RST descentralizado. .	70
3.8. Diagrama de bloques de la estructura de control RST centralizado. . .	71
3.9. Respuesta de temperatura de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 1).	72
3.10. Respuesta de concentración de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 1).	73

3.11. Comparación de las leyes de control bajo condiciones iniciales variantes, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida (Diseño basado en la linealización en el punto de equilibrio 1).	73
3.12. Trayectoria de la respuesta del control centralizado superpuesta en el plano de fase para la temperatura en el punto de equilibrio 1.	74
3.13. Respuesta de temperatura de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 5).	75
3.14. Respuesta de concentración de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 5).	75
3.15. Comparación de las leyes de control bajo condiciones iniciales variantes, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida (Diseño basado en la linealización en el punto de equilibrio 5).	76
3.16. Trayectoria de la respuesta del control MIMO superpuesta en los planos de fase.	77
3.17. Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada (MIMO) y descentralizada (SISO).	78
3.18. Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada (MIMO) y descentralizada (SISO).	78
3.19. Comparación de los esfuerzos de control generados por las estructuras centralizada y descentralizada.	78
3.20. Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada y descentralizada.	80
3.21. Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada y descentralizada.	80
3.22. Esfuerzos de control generados por los controladores durante el escenario de seguimiento secuencial de referencia (del punto de equilibrio 1 al 5).	80
3.23. Comparación de la Temperatura de las estructuras de control centralizada y descentralizada.	82
3.24. Comparación de la Concentración de las estructuras de control centralizada y descentralizada.	82

3.25. Esfuerzos de control generados por las estructuras de control centralizada y descentralizada (transición del punto de equilibrio 5 al 1).	82
3.26. Comparación de la respuesta de temperatura: RST centralizado vs. ASPPIA.	85
3.27. Comparación de la respuesta de concentración: RST centralizado vs. ASPPIA.	86
3.28. Comparación de la respuesta de temperatura: RST centralizado vs. MPC.	88
3.29. Comparación de la respuesta de concentración: RST centralizado vs. MPC.	89

Índice de tablas

1.1. Resumen de estrategias de Control Descentralizado y SISO en la literatura reciente.	8
1.2. Resumen de estrategias de Control Centralizado Multivariable en la literatura.	9
3.1. Parámetros del modelo del CSTR.	53
3.2. Entradas y salidas del sistema.	53
3.3. Puntos de operación recomendados del sistema.	54
3.4. Parámetros del modelo en régimen permanente.	58
3.5. Entradas y salidas del sistema en régimen permanente.	59
3.6. Matrices de función de transferencia para los puntos de equilibrio 1 y 5	59
3.7. Matrices de ganancia estática de los modelos lineales para los puntos de equilibrio 1 y 5	60
3.8. Matrices RGA para los puntos de equilibrio 1 y 5	60
3.9. Métricas de controlabilidad y estabilidad	61
3.10. Polos del sistema y auxiliares para los Puntos de Operación 1 y 5 . . .	64
3.11. Ley de control descentralizada para el punto de equilibrio 1.	65
3.12. Ley de control descentralizada para el punto de equilibrio 5.	66
3.13. Resultados del análisis de margen de disco para el controlador MIMO. .	66
3.14. Condiciones iniciales	68
3.15. Magnitud y tiempo de cada evento	71
3.16. Métricas de rendimiento para el control Descentralizado vs. Multivariable (Linealizado en el Punto de Operación 1)	72
3.17. Métricas de rendimiento para el control Descentralizado vs. Multivariable (Linealizado en el Punto de Operación 5)	76

3.18. Condiciones iniciales para la evaluación del diseño de control basado en la linealización del Punto de Operación 1	77
3.19. Comparación de los controles RST SISO y MIMO. Índices de rendimiento para el seguimiento de referencia.	81
3.20. Colocación de polos en lazo cerrado para el controlador ASPPIA.	84
3.21. Parámetros de diseño del controlador MPC.	87

Nomenclatura

Símbolo	Descripción
<i>Fracciones matriciales y ecuación de Bézout</i>	
$N_R(s)$	Matriz polinomial numeradora de la RMFD
$D_R(s)$	Matriz polinomial denominadora de la RMFD
$N_L(s)$	Matriz polinomial numeradora de la LMFD
$D_L(s)$	Matriz polinomial denominadora de la LMFD
M_S	Matriz generalizada de Sylvester (estructura de bloques de Toeplitz)
θ	Vector de coeficientes incógnita de $\mathcal{S}(s)$ y $\mathcal{R}(s)$
d_{cl}	Vector de coeficientes de la matriz polinomial deseada $\mathcal{D}(s)$
<i>Controlador ASPPIA — sistema aumentado</i>	
A_e	Matriz de estado del sistema aumentado con integradores
B_e	Matriz de entrada del sistema aumentado
$x_e(t)$	Vector de estado aumentado, $x_e = [x^\top, x_I^\top]^\top$
$x_I(t)$	Vector de integrales del error de seguimiento
$\mathcal{K}$	Matriz de ganancias compuesta, $\mathcal{K} = [K_x \ K_I]$
K_x	Ganancia proporcional de retroalimentación de estados
K_I	Ganancia de acción integral

Análisis de interacciones (RGA / SVD / Niederlinski)

Λ_{RGA}	Matriz de ganancias relativas (RGA)
λ_{ij}	Elemento (i, j) de la matriz RGA
$\bar{\sigma}$	Valor singular máximo de la planta
$\underline{\sigma}$	Valor singular mínimo de la planta
$\gamma(G)$	Número de condición de la planta, $\gamma = \bar{\sigma}/\underline{\sigma}$
CN	Número de condición (<i>Condition Number</i>)
N_I	Índice de Niederlinski
Σ	Matriz diagonal de valores singulares (SVD)

Control Predictivo Basado en Modelo (MPC)

N_p	Horizonte de predicción
N_c	Horizonte de control ($N_c \leq N_p$)
T_s	Tiempo de muestreo
Q	Matriz de ponderación del error de seguimiento
R	Matriz de ponderación del esfuerzo de control

Variables y parámetros del reactor CSTR

T	Temperatura del reactor (estado x_1 y salida) [K]
C	Concentración del reactivo en el reactor (estado x_2 y salida) [mol/L]
q_f	Flujo volumétrico de alimentación (entrada u_1) [L/min]
q_c	Flujo volumétrico de refrigerante (entrada u_2) [L/min]
T_f	Temperatura de la corriente de alimentación [K]
T_c	Temperatura de la corriente de refrigerante [K]
C_f	Concentración del reactivo en la alimentación [mol/L]

V	Volumen del tanque del reactor [L]
E/R	Energía de activación normalizada con la constante de gases [K]
K_0	Factor pre-exponencial de Arrhenius [1/min]
K_1	Constante del calor de reacción [K·L/(mol·min)]
K_2	Constante de transferencia de calor de la camisa [L]
K_3	Constante de flujo de la camisa de enfriamiento [L/min]
$\mathcal{K}_{1st}$	Matriz de ganancia estática en el punto de equilibrio 1
$\mathcal{K}_{5st}$	Matriz de ganancia estática en el punto de equilibrio 5
$\Delta_1(s)$	Polinomio característico linealizado en el punto de equilibrio 1
$\Delta_5(s)$	Polinomio característico linealizado en el punto de equilibrio 5
$\mathcal{G}_1(s)$	Matriz de funciones de transferencia en el punto de equilibrio 1
$\mathcal{G}_5(s)$	Matriz de funciones de transferencia en el punto de equilibrio 5

Acrónimos

ASPPIA	Colocación de Polos de Espacio Aumentado con Acción Integral (<i>Augmented-State Pole Placement with Integral Action</i>)
BIBO	Estabilidad Entrada Acotada–Salida Acotada (<i>Bounded-Input Bounded-Output</i>)
CN	Número de Condición (<i>Condition Number</i>)
CSTR	Reactor de Tanque Agitado Continuo (<i>Continuous Stirred Tank Reactor</i>)
DRL	Aprendizaje por Refuerzo Profundo (<i>Deep Reinforcement Learning</i>)
IAE	Integral del Valor Absoluto del Error (<i>Integral of Absolute Error</i>)
ICD	Diseño por Canales Individuales (<i>Individual Channel Design</i>)
ISE	Integral del Cuadrado del Error (<i>Integral of Squared Error</i>)

ITAE	Integral del Tiempo por el Valor Absoluto del Error (<i>Integral of Time-weighted Absolute Error</i>)
ITSE	Integral del Tiempo por el Cuadrado del Error (<i>Integral of Time-weighted Squared Error</i>)
LMI	Inecuaciones Matriciales Lineales (<i>Linear Matrix Inequalities</i>)
LMFD	Descripción de Fracción Matricial por la Izquierda (<i>Left Matrix Fraction Description</i>)
LMPC	Control Predictivo Lineal Basado en Modelo (<i>Linear Model Predictive Control</i>)
LQR	Regulador Lineal Cuadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
LTI	Lineal e Invariante en el Tiempo (<i>Linear Time-Invariant</i>)
MFD	Descripción de Fracciones Matriciales (<i>Matrix Fraction Description</i>)
MIMO	Múltiples Entradas Múltiples Salidas (<i>Multiple Inputs Multiple Outputs</i>)
MPC	Control Predictivo Basado en Modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
NMPC	Control Predictivo No Lineal (<i>Nonlinear Model Predictive Control</i>)
PLC	Controlador Lógico Programable (<i>Programmable Logic Controller</i>)
PPO	Optimización de Políticas Proximales (<i>Proximal Policy Optimization</i>)
PSO	Optimización por Enjambre de Partículas (<i>Particle Swarm Optimization</i>)
QP	Programación Cuadrática (<i>Quadratic Programming</i>)
RGA	Arreglo/Matriz de Ganancias Relativas (<i>Relative Gain Array</i>)
RMFD	Descripción de Fracción Matricial por la Derecha (<i>Right Matrix Fraction Description</i>)
RST	Controlador de Estructura Polinomial con polinomios R , S y T
SIMO	Una Entrada Múltiples Salidas (<i>Single Input Multiple Outputs</i>)
SISO	Una Entrada Una Salida (<i>Single Input Single Output</i>)

SVD	Descomposición en Valores Singulares (<i>Singular Value Decomposition</i>)
-----	--

Capítulo 1

Introducción

El diseño de sistemas de control efectivos es un pilar fundamental en la optimización de procesos industriales, ya que contribuye significativamente a mejorar la calidad del producto, optimizar el uso de recursos y, en última instancia, reducir los costos de producción (Landau, 1998). El control preciso de múltiples variables resuelve problemas críticos de seguridad y eficiencia en una amplia variedad de sectores, abarcando desde procesos químicos complejos hasta exigentes aplicaciones en la ingeniería aeroespacial. En un entorno industrial donde la eficiencia y la precisión son imperativos, los sistemas multivariantes (MIMO, por sus siglas en inglés) destacan por su complejidad inherente, dado que involucran múltiples entradas y salidas que interactúan de manera interdependiente, lo que genera desafíos significativos en su control (Garrido et al., 2012).

El control eficaz de estos sistemas es crucial no solo para asegurar la estabilidad del proceso, sino también para cumplir con los estrictos estándares de calidad y seguridad que demanda la industria moderna. Los enfoques de control convencionales, como los esquemas descentralizados que emplean controladores de una entrada y una salida (SISO), han sido ampliamente utilizados debido a su simplicidad y facilidad de implementación, ya que fraccionan un sistema complejo en lazos independientes. Sin embargo, cuando las interacciones y el acoplamiento entre las variables del proceso son considerables, estos métodos resultan insuficientes para mantener un rendimiento óptimo (Khandelwal y Detroja, 2020). En arquitecturas descentralizadas, un emparejamiento incorrecto de las señales de entrada y salida es una causa bien documentada de inestabilidad, oscilaciones persistentes, respuestas lentas y saturación en los actuadores. Esta limitación ha

impulsado la necesidad de explorar y desarrollar estrategias de control centralizado más avanzadas que procesen todo el conjunto de variables de forma simultánea, calculando acciones coordinadas que puedan abordar de manera eficaz las complejidades y desafíos asociados con los sistemas MIMO (Wang, 2007).

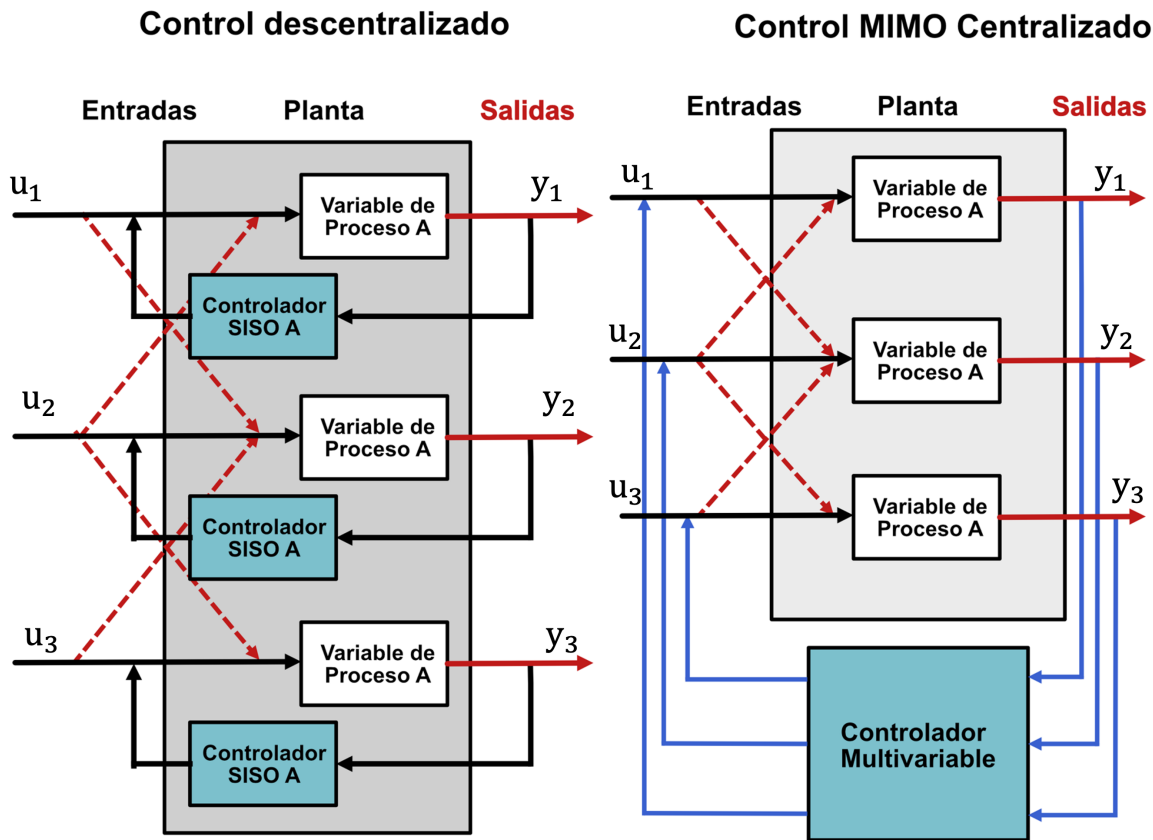


Figura 1.1: Representación esquemática de un esquema de control descentralizado (SISO) y un esquema de control centralizado (MIMO).

En respuesta a estas necesidades operativas, el control de estructura polinomial RST (Reference Tracking Signal) ha emergido como una alternativa prometedora y sumamente robusta, especialmente en escenarios donde se requiere un control preciso y adaptable. El control RST se distingue por su capacidad para proporcionar un seguimiento de trayectoria superior y una regulación efectiva, gracias a su arquitectura analítica que integra dos grados de libertad: un componente de retroalimentación (feedback) gestionado por los polinomios R y S , y un componente de prealimentación (feedforward) dirigido por el polinomio T . Esta dualidad permite que el sistema no solo responda adecuadamente

a las perturbaciones externas, sino que también mantenga un rendimiento consistente ante variaciones en las condiciones operativas y la incertidumbre paramétrica (Babesse et al., 2016).

El diseño clásico de controladores RST, basado en la resolución de la ecuación diofántica, ofrece un enfoque sistemático para la síntesis de controladores discretos y continuos. Este método, reconocido por su elegancia matemática y efectividad, permite un ajuste fino del comportamiento dinámico del sistema mediante la asignación directa de polos, asegurando que se cumplan estrictamente los márgenes de estabilidad y desempeño especificados (Ostertag y Godoy, 2005). Para trasladar estas ventajas a plantas interactivas complejas, la síntesis matemática debe evolucionar hacia un marco algebraico unificado. Al emplear matrices polinomiales y plantear la solución algorítmica de la ecuación de Bézout o diofántica matricial extendida, se vuelve posible calcular las matrices polinomiales que darán forma a la ley de control centralizada multivariable. En particular, la flexibilidad del esquema de control polinomial propuesto permite adoptar el método de diseño por canales individuales (elemento por elemento) para su resolución práctica, simplificando significativamente el cálculo del controlador al desacoplar el problema matricial global en ecuaciones diofánticas escalares independientes sin comprometer el rigor de la asignación de polos.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar e implementar una metodología analítica que extienda las capacidades del control RST a sistemas MIMO, adaptando su estructura para enfrentar los desafíos específicos que presentan los procesos caracterizados por una alta complejidad. Para validar el rigor de esta propuesta, el controlador se diseña y evalúa sobre un Reactor de Tanque Agitado Continuo (CSTR). Este sistema constituye un referente clásico (benchmark) de alta exigencia, ya que exhibe dinámicas fuertemente no lineales, multiplicidad de estados de equilibrio (biestabilidad) y baja controlabilidad direccional, condiciones bajo las cuales los lazos descentralizados pueden presentar una degradación significativa de su desempeño o incluso inestabilidad. Esta investigación no solo busca aportar soluciones prácticas para gestionar el acoplamiento severo y mejorar el control en aplicaciones reales, sino también contribuir al avance del conocimiento en el diseño de sistemas centralizados que mejoren la coordinación en entornos industriales exigentes.

Además, este estudio se enmarca en un contexto tecnológico donde los avances en algoritmos de control son cruciales para mantener la competitividad y la innovación.

Al prescindir de soluciones intensivas en datos y ofrecer un diseño transparente y computacionalmente eficiente, los desarrollos en controladores RST multivariables tienen el potencial de ofrecer mejoras significativas en la eficiencia y la estabilidad de los procesos. Esto cobra especial relevancia en plantas donde las dinámicas no lineales y las interacciones cruzadas presentan desafíos inmanejables para las estrategias de control tradicionales.

1.1. Estado del arte

1.1.1. Estructura de control RST

El control de estructura polinomial RST ha emergido como una alternativa robusta y sumamente flexible frente a los esquemas clásicos. A diferencia de los controladores convencionales de un solo grado de libertad, el controlador RST integra dos grados de libertad mediante los polinomios R y S para el componente de retroalimentación (enfocado en el rechazo de perturbaciones) y el polinomio T para el componente de prealimentación (garantizando un seguimiento preciso de trayectorias). Esta dualidad en la arquitectura permite un desempeño consistente ante variaciones operativas y ha despertado un gran interés en la comunidad científica.

La estructura de control RST se remonta a los años ochenta, cuando surgió como una extensión de los compensadores clásicos a la que se le incorporó un grado de libertad adicional (Godoy y Ostertag, 2006). Desde entonces, el control con estructura RST ha sido ampliamente estudiado y se han establecido diversas metodologías de diseño a través de trabajos fundamentales como el de (Åström y Wittenmark, 1982).

Posteriormente, en (Landau y Karimi, 1998) se presentó una metodología para el diseño de un controlador RST aplicado a un sistema identificado de una planta, combinado con un diseño de control robusto. Este enfoque fue mejorado por la identificación del modelo de la planta en lazo cerrado y una resintonización del controlador, destacando la importancia de un buen controlador para mejorar la calidad del producto y reducir los costos de producción. Landau continuó este trabajo en (Landau y Gianluca Zito, 2007), donde se detalla la implementación de técnicas digitales para el diseño de controladores aplicados a diferentes tipos de procesos.

El diseño de controladores RST se aborda típicamente a través de mejoras algorítmicas y ajustes para aplicaciones específicas. Por ejemplo, (Jacknoon et al., 2016) propuso la sintonización de controladores RST utilizando optimización por enjambre de partículas (PSO). Como resultado, su diseño mejoró la robustez y el rendimiento en el control de motores de corriente continua. Recientemente, la optimización de controladores RST con algoritmos genéticos ha demostrado ser efectiva para mejorar el control de velocidad de motores de inducción lineal, entregando soluciones robustas que demostraron un seguimiento preciso de la referencia y un eficiente rechazo de perturbaciones (Laid et al., 2023).

Además, la flexibilidad de los controladores RST para gestionar diferentes demandas operacionales ha sido demostrada en unidades de accionamiento de motores de inducción controlados por vector. Estos resultados evidencian su potencial para reemplazar a los controladores PI convencionales, gracias a una mayor precisión de seguimiento y a su insensibilidad frente a perturbaciones (Jha et al., 2019). Finalmente, (Abdurraqueeb et al., 2023) propuso un controlador RST para mejorar la estabilidad de convertidores boost DC-DC que suministran cargas de potencia y voltaje constantes en una microred DC. Los resultados de la simulación verificaron la eficacia del esquema de control para mantener la estabilidad y regular el voltaje del bus DC en diferentes condiciones.

Las estructuras de control RST emplean un método de asignación de polos basado en la resolución de la ecuación diofántica, el cual permite encontrar los polinomios de los bloques R , S y T que controlan el sistema. En casos donde se requiere un seguimiento de error para entradas de orden mayor, se utilizan metodologías que emplean una segunda ecuación diofántica o una ecuación auxiliar, como se muestra en (Ostertag y Godoy, 2005) y (Godoy y Ostertag, 2006).

Para extender estas capacidades y obtener los polinomios para la estructura de control RST en sistemas multivariantes (MIMO), es necesario resolver la ecuación matricial de Bézout extendida. Sin embargo, trabajar con matrices polinomiales añade complejidad, ya que los cálculos matriciales no son conmutativos¹, lo que complica la resolución de las ecuaciones diofánticas. La representación de sistemas multivariantes mediante Descripciones en Fracciones Matriciales (MFD) es una analogía cercana a trabajar con sistemas escalares, lo que permite obtener estructuras en espacio de estados mejor acopladas y transformar la síntesis en un marco algebraico unificado (Thomas Kailath, 1980).

Se han desarrollado diversos métodos para la solución de ecuaciones diofánticas matriciales, como el uso de la estructura especial de Sylvester o bloques de Sylvester (Hromčík et al., 2006), y algoritmos computacionales avanzados para la resolución de la ecuación diofántica polinomial, como los presentados en (Tzekis, 2007) y (Tzekis et al., 2013). Por otro lado, (Basilio y Moreira, 2004) propuso un algoritmo matemático para la resolución de la ecuación de Bézout polinomial generalizada mediante matrices MFD, y su aplicación ha sido estudiada en trabajos recientes como (Vardoulakis y Wei, 2018),

¹La no conmutatividad indica que el orden de los factores altera el producto. Para dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

donde se diseñó un compensador para la estabilización de un péndulo doble invertido. Adicionalmente, como alternativa para mitigar la complejidad computacional y de diseño de los esquemas matriciales acoplados globales, se destaca en la literatura el método de diseño por canales individuales (ICD - *Individual Channel Design*), desarrollado en los trabajos pioneros de O'Reilly y Leithead (O'Reilly y Leithead, 1991) y formalizado estructural y dinámicamente en (Leithead y O'Reilly, 1992a,b). Esta aproximación permite descomponer un sistema multivariable complejo en lazos de control de una sola entrada y una sola salida (SISO) físicamente independientes, lo que hace posible aplicar técnicas clásicas de sintonización y análisis de estabilidad canal por canal a través del planteamiento de ecuaciones diofánticas escalares desacopladas.

1.1.2. Controladores multivariables

Sin embargo, la principal limitación de los esquemas descentralizados en sistemas altamente acoplados es el emparejamiento incorrecto de señales de entrada y salida (input-output pairing) (Wang, 2007). Investigaciones recientes advierten que basarse únicamente en la Matriz de Ganancia Relativa (RGA) es insuficiente cuando el número de condición de la planta es elevado, lo que en ciertos escenarios puede conducir a inestabilidad, oscilaciones persistentes y saturación de los actuadores (Khandelwal y Detroja, 2020; Liu et al., 2019). Para ilustrar el panorama actual de estas técnicas frente a dichos retos, la Tabla 1.1 resume diversas metodologías descentralizadas evaluadas en la literatura reciente, destacando tanto sus ventajas operativas como los desafíos inherentes a su implementación.

Para abordar estos escenarios complejos, los enfoques centralizados evitan el desacoplamiento estático y adoptan una visión algorítmica global, como en (Lin et al., 2004), donde se garantiza la estabilidad en lazo cerrado mediante algoritmos basados en LMIs (Qing-Guo Wang y Hang, 2008). Estudios como (Shen et al., 2014) y (Garrido et al., 2012) han demostrado la efectividad de las estrategias de control centralizado para procesar todas las variables medidas simultáneamente y compensar las perturbaciones activamente.

Recientemente, se ha visto un cambio hacia metodologías apoyadas en herramientas de optimización, como en (Khandelwal y Detroja, 2020), donde se propone un diseño centralizado PI con desacoplamiento óptimo. En la misma línea, autores como (Pandey et al., 2024) y (Zrigan et al., 2023) integran programación lineal y optimización metaheurística

Tabla 1.1: Resumen de estrategias de Control Descentralizado y SISO en la literatura reciente.

Referencia	Estrategia Evaluada	Ventajas Observadas	Desafíos asociados
Deifalla et al. (Deifalla y Abdalla, 2025)	Optimización evolutiva en un control PID sintonizado por Algoritmos Genéticos (GA).	Reduce los tiempos de subida y minimiza drásticamente el sobreimpulso respecto a métodos clásicos de Ziegler-Nichols.	Dificultad para equilibrar el tiempo de asentamiento bajo la optimización de métricas.
Yoder and Strasser (Yoder y Strasser, 2025)	Control Activo (PID / Fuzzy PID) integrando solvers base para Dinámica de Fluidos (CFD).	Gran reducción en errores de temperatura y tiempos de respuesta contra el esquema convencional para un CSTR.	Inestabilidad física al simular flujos, con riesgo permanente del fenómeno escape térmico (<i>run-away</i>).
Suo et al. (Suo et al., 2020)	Análisis CSTR Multivariable y retroalimentación de rango-dividido con estabilización para válvulas.	Facilita el análisis predictivo con base en las inestabilidades detectadas e identifica una región segura de bifurcación crítica.	Cambios dramáticos entre la transición estable a la inestable alterando en fracciones el equilibrio.

para afinar dinámicamente el control de interacciones cruzadas. Otros trabajos como (Guo et al., 2020) y (Chang y Chen, 2014) aplican técnicas de optimización avanzadas en sistemas discretos. En la frontera de la complejidad, (Xu et al., 2023) y (Rajpoot et al., 2024) abordan los desafíos en sistemas acoplados al proponer estrategias basadas en Aprendizaje por Refuerzo Profundo (DRL, por sus siglas en inglés) y el algoritmo de Optimización de Políticas Proximales (PPO), lo que permite demostrar tiempos de asentamiento superiores frente al acoplamiento severo (Yu et al., 2025). Una síntesis de las aportaciones y limitaciones de estas y otras estrategias centralizadas contemporáneas se consolida en la Tabla 1.2.

1.1.3. Estructuras de control mediante ecuación diofántica

La transición de la teoría de control clásica a la síntesis algebraica moderna se fundamenta en la resolución de ecuaciones polinomiales. La ecuación diofántica (o identidad de Bézout) constituye el núcleo matemático que permite traducir los requerimientos dinámicos de la planta en una estructura de control que pueda ser implementada en la práctica. Al transformar la dinámica en un problema algebraico, se habilita la asignación directa de polos, garantizando así los márgenes de estabilidad requeridos.

Tabla 1.2: Resumen de estrategias de Control Centralizado Multivariable en la literatura.

Referencia	Estrategia / Algoritmo	Ventajas / Aportaciones	Limitaciones
Okienková et al. (Okienková et al., 2025)	Modelo MPC Robusto, Realimentación de estado, Intervención LMI y Estimador Kalman Extendido.	Garantiza la eficiencia y la estabilidad robusta al 100 % aún ante incertidumbres paramétricas gracias a predictores con modelado politópico.	Alto costo computacional asociado a la resolución de las inecuaciones matriciales lineales (LMI).
Yu et al. (Yu et al., 2025)	Red Neural Inteligente (PPO) de Aprendizaje por Refuerzo junto a funciones matemáticas de premio.	Esquema altamente estable previniendo de forma excelente perturbaciones indeseadas del reactor sin recurrir a controladores clásicos MPC o PID.	Desafío constante en cuanto a la escalabilidad de seguridad continua de espacio de aprendizaje sobre el estado local.
Banerjee et al. (Banerjee et al., 2024)	Control predictivo MPC (3 DoF) con modelado de regresión orientada a algoritmos basados en datos (MoD).	Formulación excepcional para el manejo y rechazo ante disturbios sin perjudicar al sistema, obteniendo de esta forma modelos locales robustificados.	Lidiar con la gran direccionalidad del proceso central al encontrarse ante inyecciones paramétricas por altas interacciones cruzadas.
Rajpoot et al. (Rajpoot et al., 2024)	Dinámica inteligente Deep (RL); Evaluaciones bajo directrices de Gradiente Orientado y Decisiones con Red Neural.	Reduce el tiempo general en asentamientos dinámicos superando la viabilidad de modelos de horizonte finito de NMPC con matrices constantes.	Se requiere el conocimiento continuo de un escenario amplio en constante operación para que este controlador garantice eficiencia al entrenarse.
Hajaya y Shaqarin (Hajaya y Shaqarin, 2019)	Linealización Exacta en retroalimentación, la cual impone cancelar dinámicas complejas a estados en plano formal.	Una herramienta precisa para anular grandes oscilaciones sinusoidales y transiciones que afectarían seriamente un CSTR no lineal sin afectar un rendimiento global.	Presenta debilidades en implementaciones físicas y analíticas al buscar encuadrar este formato con estrictas restricciones operativas.

La ecuación diofántica es clave en el diseño de controladores discretos y continuos, especialmente en la estructura RST, lo que facilita la colocación de polos y asegura la estabilidad y robustez del sistema (Khadraoui et al., 2014; Ostertag y Godoy, 2005). La resolución de ecuaciones con matrices polinomiales tiene importantes aplicaciones en control óptimo multivariable, estabilización robusta y rechazo de perturbaciones.

Un enfoque pionero en la obtención de polinomios mediante la ecuación diofántica fue presentado en (Yamada y Funahashi, 1993), donde se propone un algoritmo sin necesidad de resolver ecuaciones matriciales complejas, lo que simplifica el proceso de diseño de controladores. Este trabajo fue seguido por (Prokop y Korbel, 2015), que aplicó la ecuación diofántica para el diseño de controladores PI para sistemas MIMO, y por (Carriegos et al., 2019), que utilizó la teoría de particiones en monoides reducidos para resolver la ecuación diofántica.

Recientemente, se han desarrollado algoritmos avanzados para la solución de ecuaciones diofánticas, como el uso de bases de Grobner para módulos en (Xiao et al., 2021), y su aplicación en control predictivo de sistemas MIMO con retardos, abordando el problema de la función de transferencia matricial (Inoue et al., 2020). Asimismo, se han propuesto alternativas algebraicas que evitan la formulación tradicional de Sylvester; por ejemplo, en (Kong et al., 2009) se resuelve la identidad de Bézout generalizada transformando el problema en una ecuación matricial de Stein con matrices nilpotentes, mientras que en (Zhou et al., 2009) se emplea dicha ecuación de Stein para calcular de manera sistemática las descripciones en fracciones matriciales (MFD) coprimas de la planta.

La representación de sistemas multivariables mediante Descripciones en Fracciones Matriciales (MFD) es una técnica efectiva para manejar la complejidad de los cálculos matriciales en el diseño de controladores multivariables. Por ejemplo, (Basilio y Moreira, 2004) propuso un algoritmo para la resolución de la ecuación de Bézout polinomial generalizada mediante matrices MFD, el cual muestra su robustez al basarse en la descomposición de valores singulares de los coeficientes reales de las matrices. Para mejorar la eficiencia y los aspectos numéricos en este tipo de algoritmos, (Zúñiga Anaya y Henrion, 2008) propuso un algoritmo de Toeplitz optimizado para el cálculo del espacio nulo de matrices polinomiales, lo que ofrece una mayor robustez y menor coste computacional al resolver la ecuación diofántica. La aplicación de estas técnicas ha sido explorada en trabajos recientes, como en (Vardulakis y Wei, 2018), donde se diseñó un compensador para estabilizar un sistema SIMO utilizando la ecuación diofántica

matricial polinomial.

1.1.4. Sistemas de Control para reactores CSTR

Para evaluar rigurosamente las metodologías analíticas de control multivariable, el Reactor de Tanque Agitado Continuo (CSTR) se ha consolidado como un referente (benchmark) clásico y sumamente exigente. Desde el punto de vista físico, estos reactores exhiben dinámicas fuertemente no lineales, multiplicidad de estados de equilibrio (bistabilidad) y comportamiento de fase no mínima² (Hajaya y Shaqarin, 2019; Suo et al., 2020). Además, su desempeño está íntimamente ligado a la cinética de los reactivos, lo que presenta el riesgo inminente de fuga térmica si la temperatura y la concentración no se coordinan de forma matemática precisa (Yoder y Strasser, 2025).

Los Reactores de Tanque Agitado Continuo (CSTR) son esenciales en la industria química, pero su control presenta desafíos formidables debido a esta complejidad dinámica y sus características no lineales. Es crucial gestionar múltiples variables como temperatura y concentración de manera simultánea para mantener la estabilidad del sistema (Bhat et al., 2018). Históricamente, en la industria se ha dependido de estrategias fundamentales como la configuración de retroalimentación simple (SFC) para el seguimiento, o el control en cascada (CCC) y control paralelo (PCC) para atenuar perturbaciones en lazos locales (Hussein et al., 2025).

Sin embargo, frente al fuerte acoplamiento, el Control Predictivo de Modelo (MPC, por sus siglas en inglés) ha surgido como una técnica líder y el estándar industrial para abordar las complejidades inherentes de los CSTR. El MPC proporciona una forma de predecir y optimizar el rendimiento del reactor en horizontes de tiempo futuros basándose en un modelo explícito del proceso y resolviendo restricciones operativas de las válvulas (Pekař y Havlena, 2004; Shyamalagowri y Rajeswari, 2014). Se ha comprobado que el MPC, junto con formulaciones de control óptimo basadas en datos (Model-on-Demand), supera a los métodos clásicos durante transiciones críticas de equilibrio (Banerjee et al., 2024).

Además, la aplicación de estrategias de control avanzadas como la lógica difusa y el control adaptativo también ha sido explorada ampliamente, ofreciendo respuestas adaptativas

²Un sistema es de fase no mínima si posee al menos un cero en el semiplano derecho del plano s (o fuera del círculo unitario en tiempo discreto), lo que se traduce físicamente en un comportamiento de respuesta inicial inversa (*undershoot*) ante un cambio tipo escalón.

a las condiciones cambiantes del reactor y mejorando la estabilidad y eficiencia de los sistemas de control (Colbu et al., 2021; Wang y Ying, 2012). Investigaciones recientes proponen la hibridación de PIDs con algoritmos evolutivos (Deifalla y Abdalla, 2025) para mejorar los índices de desempeño frente a perturbaciones de entrada. Por otro lado, en (Sainz-García et al., 2022) se presenta un esquema de control adaptativo orientado a la atenuación de perturbaciones de banda estrecha en la entrada y salida de un reactor CSTR no isotérmico. Finalmente, (Meena et al., 2023) presenta una nueva estrategia de control para reactores CSTR que se caracterizan por sus propiedades de integración y la presencia de tiempo muerto. El método propuesto integra un predictor de Smith con control de orden fraccionario de doble grado de libertad para mejorar considerablemente la robustez global del CSTR.

1.1.5. Análisis y conclusiones del estado del arte

El desarrollo y aplicación de controladores RST ha demostrado ser una técnica analítica robusta y flexible, especialmente en entornos industriales donde la precisión y la adaptabilidad frente a perturbaciones son cruciales. A pesar de los avances significativos en su formulación clásica para sistemas escalares (SISO), la extensión de este esquema hacia arquitecturas multivariantes (MIMO) presenta áreas que requieren una investigación profunda, así como desafíos matemáticos que deben abordarse para maximizar el potencial de estas metodologías frente a dinámicas fuertemente acopladas.

Uno de los desafíos más notables en la implementación del control RST centralizado es la resolución de la ecuación diofántica matricial extendida, la cual se complica inherentemente por la no conmutatividad de las operaciones matriciales. La resolución efectiva de estas ecuaciones requiere técnicas computacionales y algebraicas avanzadas que puedan manejar el alto grado de complejidad matemática involucrada. Aunque se han desarrollado métodos para abordar esta problemática, como las estructuras de bloques de Sylvester (Hromčík et al., 2006) y algoritmos computacionales específicos (Tzekis et al., 2013), la necesidad de soluciones analíticas más eficientes y generalizables sigue siendo un área abierta y fundamental para la investigación en la teoría de control moderna.

En el panorama actual, el control RST centralizado se compara de manera muy favorable frente a otras metodologías avanzadas, como el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC) y los controladores apoyados en Redes Neuronales o Aprendizaje por Refuerzo

Profundo (DRL). Si bien el MPC se ha consolidado como el estándar industrial por su manejo natural de restricciones, su alta demanda computacional y la necesidad de resolver problemas de optimización en cada instante de muestreo dificultan su implementación en hardware estándar bajo dinámicas muy rápidas. Por su parte, los enfoques basados en inteligencia artificial a menudo sufren de opacidad estructural (*cajas negras*). En contraste, el control RST multivariable destaca por su elegancia matemática y transparencia analítica, lo que ofrece una mayor simplicidad computacional en línea y una robustez superior al reasignar los polos del sistema de manera directa, aunque el esfuerzo matemático recaiga en la etapa de diseño fuera de línea.

El campo del control RST y su aplicación multivariable está en constante evolución. Una de las perspectivas futuras más prometedoras es la hibridación de esta técnica con herramientas de aprendizaje automático (*machine learning*) para la sintonización dinámica. Esto podría permitir la adaptación en tiempo real de los parámetros polinomiales del controlador frente a cambios severos en las condiciones del proceso, lo que mejoraría la eficiencia del sistema. Sin embargo, el paso previo e indispensable para llegar a ese punto es consolidar la base matemática determinista para sistemas acoplados; esto incluye el desarrollo de algoritmos algebraicos más ágiles para la resolución de ecuaciones diofánticas y la exploración de representaciones que simplifiquen el manejo de matrices polinomiales.

Es en este contexto donde el enfoque del presente trabajo cobra una alta relevancia. Dado que la inmensa mayoría de los procesos industriales, como el reactor CSTR, presentan interacciones complejas que pueden comprometer la estabilidad de los lazos descentralizados convencionales, por lo que resulta conveniente diseñar leyes de control centralizadas. El objetivo central es tomar el controlador RST, tradicionalmente restringido a sistemas SISO, y escalar su metodología empleando matrices polinomiales para gobernar sistemas MIMO de forma global y coordinada.

Para calcular los coeficientes de los polinomios en la ley de control clásica, se plantea y resuelve la ecuación o identidad de Bézout. A pesar de que diversos trabajos han propuesto métodos para la solución de esta ecuación en su forma matricial, existen pocos trabajos orientados a una adaptación efectiva y sistemática de este esquema para el control multivariable práctico. Extender esta metodología requiere encontrar una representación unificada adecuada de la planta, donde las Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD) constituyen el puente matemático ideal para plantear la identidad

de Bézout, lo que permite su resolución y garantiza el cumplimiento de las diversas estructuras canónicas matriciales existentes.

En conclusión, aunque el control de estructura polinomial RST ha demostrado ser una herramienta formidable, su aplicabilidad directa en entornos industriales multivariados aún enfrenta barreras algebraicas importantes. Superar la complejidad de las matrices polinomiales mediante un marco de diseño unificado no solo enriquecerá la teoría de control multivariable, sino que proveerá a la industria de una alternativa centralizada analítica, transparente y altamente competitiva frente a los algoritmos de optimización actuales, capaz de manejar las interacciones cruzadas y las no linealidades de los procesos más exigentes.

1.2. Planteamiento del problema

El control polinomial RST ha demostrado ser una metodología eficiente, flexible y exitosa para la regulación de procesos industriales. Su principal ventaja radica en la simplicidad de implementación, fundamentada en el manejo de polinomios cuyas funciones de transferencia permiten un tratamiento analítico directo. El cálculo de los polinomios del controlador se realiza mediante la resolución de la ecuación de Bézout, lo que garantiza la asignación precisa de los polos del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, esta estructura ha permanecido restringida exclusivamente a sistemas SISO o, en el mejor de los casos, a sistemas multivariados previamente desacoplados en lazos SISO independientes.

En la ingeniería de procesos, la gran mayoría de los sistemas industriales es inherentemente multivariable, no lineal y presenta fuertes interacciones cruzadas entre las variables. Si bien un enfoque descentralizado puede operar adecuadamente cuando las interacciones entre canales son modestas, este esquema resulta ineficiente e incluso inestable cuando el acoplamiento es significativo. En tales escenarios, el desacoplamiento estático degrada el desempeño individual de cada canal, y los lazos independientes entran en conflicto mutuo, provocando oscilaciones, saturación de actuadores y, en casos extremos, la divergencia del sistema.

Ante esta problemática, se identifican áreas de oportunidad en la literatura, dado que no se cuenta con una metodología ampliamente adoptada para la adaptación sistemática y validada del esquema de control RST orientado al control multivariable centralizado

de procesos con dinámicas complejas. En particular, la resolución de la ecuación de Bézout en su forma matricial polinomial, necesaria para obtener las matrices de los controladores $\mathcal{R}(s)$, $\mathcal{S}(s)$ y $\mathcal{T}(s)$, permanece como un desafío algebraico abierto que requiere un tratamiento riguroso mediante Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD). La coprimicidad izquierda de la MFD de la planta, discutida en el Capítulo 2, constituye precisamente la condición algebraica que garantiza la resolubilidad de dicha ecuación y, por ende, la viabilidad del diseño centralizado propuesto.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Proponer una arquitectura de control multivariable centralizado con estructura RST que, fundamentada en la resolución de la ecuación de Bézout matricial polinomial mediante Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD), garantice un desempeño robusto de seguimiento de referencia y rechazo de perturbaciones en sistemas MIMO con fuertes interacciones cruzadas.

1.3.2. Objetivos específicos

- Generalizar el esquema clásico de control con estructura RST a un marco multivariable mediante la formulación y resolución de la ecuación de Bézout matricial polinomial, empleando Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD).
- Realizar un análisis estático y dinámico de la planta para evaluar el nivel de interacción entre las variables (RGA, SVD, índice de Niederlinski) y determinar la viabilidad del diseño del controlador centralizado.
- Evaluar el desempeño de las leyes de control sintetizadas ante diversos escenarios de prueba, incluyendo perturbaciones en la entrada y salida, ruido de medición, cambios de referencia y variaciones en las condiciones iniciales.
- Comparar el desempeño del controlador RST multivariable centralizado con esquemas de control de referencia reconocidos, tales como la colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA) y el control predictivo basado en modelo (MPC), bajo condiciones idénticas de simulación.

1.4. Propuesta de solución y metodología

El enfoque propuesto consiste en extender la estructura de control RST robusta, originalmente diseñada para sistemas SISO, a un esquema centralizado MIMO. Para ello, se plantea la resolución de la ecuación de Bézout en su forma matricial polinomial generalizada, obteniendo las matrices polinomiales $\mathcal{R}(s)$, $\mathcal{S}(s)$ y $\mathcal{T}(s)$ que conforman la ley de control centralizada. La validación se realiza sobre un Reactor de Tanque Agitado Continuo (CSTR), seleccionado como caso de estudio por sus dinámicas no lineales, multiplicidad de estados de equilibrio y bajo condicionamiento direccional, condiciones que representan un escenario de alta exigencia para cualquier estrategia de control.

La metodología de investigación se estructura en las siguientes etapas:

1. **Modelado y linealización de la planta.** Obtención del modelo fenomenológico del CSTR y linealización en múltiples puntos de operación para capturar la variabilidad dinámica del sistema.
2. **Análisis de interacciones.** Evaluación cuantitativa del acoplamiento mediante la Matriz de Ganancias Relativas (RGA), la Descomposición en Valores Singulares (SVD), el número de condición y el índice de Niederlinski, determinando la viabilidad de esquemas descentralizados frente a la necesidad de un control centralizado.
3. **Síntesis del controlador RST MIMO.** Resolución de la ecuación de Bézout matricial polinomial mediante la estructura de Sylvester generalizada, obteniendo las matrices del controlador y asignando los polos deseados del sistema en lazo cerrado.
4. **Comparación y análisis del esquema de control RST centralizado y descentralizado.**
5. **Diseño de controladores de referencia.** Implementación de controladores ASPPIA (colocación de polos de espacio aumentado con acción integral) y MPC (control predictivo basado en modelo) para establecer líneas base de comparación bajo condiciones idénticas de simulación.
6. **Evaluación comparativa.** Simulación del sistema bajo escenarios que incluyen perturbaciones en las entradas y salidas, ruido de medición, cambios de referencia

y condiciones iniciales adversas. Cuantificación del desempeño mediante índices integrales de error.

1.5. Contribuciones de la tesis

Las principales contribuciones de este trabajo se resumen a continuación:

- **Extensión del controlador RST a sistemas MIMO:** se propone una metodología sistemática para adaptar la estructura de control polinomial RST a un esquema centralizado multivariable, mediante la formulación y resolución de la ecuación de Bézout matricial polinomial empleando Descripciones en Fracciones Matriciales (MFD).
- **Validación sobre un sistema de referencia.** El controlador RST MIMO propuesto se diseña y evalúa sobre un Reactor de Tanque Agitado Continuo (CSTR) que exhibe dinámicas fuertemente no lineales, multiplicidad de estados de equilibrio y acoplamiento severo entre variables, constituyendo un benchmark para la evaluación de estrategias de control multivariable.
- **Evaluación comparativa.** Se realiza una comparación del controlador RST MIMO propuesto frente a dos paradigmas de control multivariable ampliamente reconocidos: la colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA) y el control predictivo basado en modelo (MPC), bajo escenarios de transición entre múltiples puntos de operación, perturbaciones y condiciones adversas.

1.6. Organización del documento

Para presentar el desarrollo de esta metodología de manera estructurada, el presente documento se organiza en los siguientes capítulos. El **Capítulo 1** aborda la presente introducción, el análisis crítico del estado del arte y el planteamiento formal del problema de investigación. El **Capítulo 2** expone el marco teórico y matemático, definiendo las propiedades fundamentales de los sistemas multivariables, las descripciones matriciales fraccionarias y el planteamiento de las ecuaciones diofánticas. En el **Capítulo 3** se desarrolla la metodología completa, abarcando la extensión del controlador RST al caso multivariable, el modelado fenomenológico, la linealización y el análisis dinámico en

el plano fase del reactor CSTR, la síntesis algebraica de los controladores, así como la evaluación comparativa y rigurosa del controlador centralizado propuesto frente a los esquemas de referencia mediante diversos escenarios de simulación y perturbaciones. Finalmente, el **Capítulo 4** reúne las conclusiones generales derivadas de la investigación y esboza las perspectivas de trabajo futuro para continuar perfeccionando la robustez de la arquitectura propuesta.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se establecen los fundamentos teóricos y matemáticos necesarios para la comprensión y síntesis de la ley de control centralizada propuesta en esta tesis. En primer lugar, la Sección 2.1 presenta la formalización de los sistemas multivariables y las representaciones matriciales empleadas para su descripción. Posteriormente, la Sección 2.2 introduce la ecuación diofántica y la identidad de Bézout como herramientas centrales para la síntesis algebraica. La Sección 2.3 aborda las métricas de análisis de interacciones cruzadas que determinan la viabilidad de esquemas descentralizados. Finalmente, las Secciones 2.4, 2.5 y 2.6 describen las estructuras de control que serán empleadas y comparadas en los capítulos subsiguientes.

2.1. Sistemas multivariables

Desde una perspectiva teórica, un sistema dinámico se clasifica como multivariable o MIMO (*Multiple Inputs-Multiple Outputs*) cuando posee un vector de variables manipuladas que debe controlar simultáneamente a un vector de variables medidas. Esto contrasta fundamentalmente con los sistemas SISO (*Single Input-Single Output*), en los cuales el análisis se reduce a la relación escalar entre una única entrada y una única salida.

Mientras que en el diseño SISO el desafío principal radica en lidiar con la dinámica temporal (retardos, inercias y constantes de tiempo), la característica intrínseca y más compleja de los sistemas multivariables es el **acoplamiento cruzado** (*cross-coupling*).

En este contexto, la aplicación de una señal en una sola entrada no solo afecta a su salida directamente asociada, sino que se propaga dinámicamente hacia el resto de las variables de salida del sistema (véase Fig. 2.1).

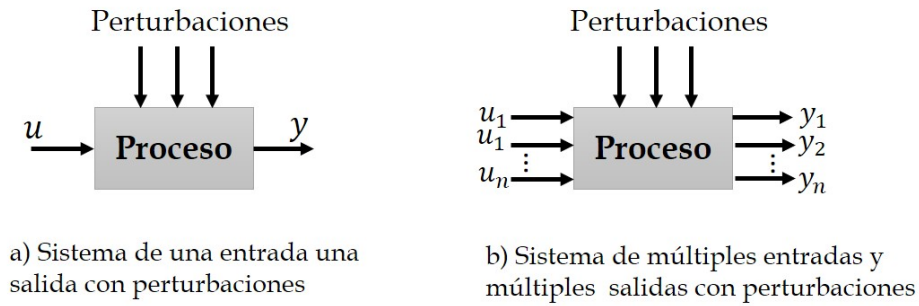


Figura 2.1: Clasificación de los sistemas de control en función del número de entradas y salidas.

A diferencia de los sistemas escalares, donde es posible diseñar estrategias de control aisladas, la interdependencia en los sistemas MIMO invalida el principio de superposición independiente. Un intento de controlar el sistema mediante lazos descentralizados provoca que las acciones de un actuador funcionen como perturbaciones no medidas para los demás lazos. Por lo tanto, el enfoque de diseño exige una coordinación algorítmica global, donde el controlador tenga conocimiento simultáneo del estado de todas las variables.

Adicional al acoplamiento, los sistemas multivariables introducen una propiedad exclusiva conocida como **direccionalidad**. En un sistema SISO, la ganancia de la planta depende únicamente de la frecuencia de excitación. Por el contrario, en un sistema MIMO, la ganancia depende fuertemente de la dirección espacial del vector de entrada. Esto significa que ciertas combinaciones de entradas pueden inducir ganancias sustancialmente elevadas, mientras que otras combinaciones en diferentes direcciones pueden producir atenuaciones significativas, lo que genera plantas mal condicionadas y difíciles de controlar si no se emplea el enfoque analítico adecuado.

Finalmente, la representación matemática de estos fenómenos constituye un reto en sí mismo. En los sistemas MIMO, no existe una forma canónica única que describa la planta. La relación entrada-salida no puede definirse por un polinomio simple, sino que requiere entidades algebraicas superiores, como matrices de funciones de transferencia o representaciones en el espacio de estados. Para el diseño de controladores analíticos avanzados, esto obliga a abandonar el álgebra escalar y transitar hacia el dominio de

las matrices polinomiales, lo cual exige garantizar no solo la estabilidad de los canales individuales, sino también la estabilidad asintótica global del sistema interconectado.

2.1.1. Estructura de modelos multivariantes lineales

Como se estableció previamente, la descripción de sistemas multivariantes exige el uso de entidades algebraicas superiores a los polinomios escalares. La teoría de control asociada a estos sistemas presenta una complejidad mayor, dado que los productos matriciales carecen de la propiedad conmutativa, lo que invalida muchas de las simplificaciones algebraicas empleadas en el análisis escalar.

En esta subsección se establecen las definiciones y la notación formal necesarias para describir de manera rigurosa la estructura de los modelos multivariantes lineales. La representación aquí desarrollada constituye el fundamento algebraico sobre el cual se construyen las leyes de control presentadas en los capítulos subsiguientes. Cabe señalar que, si bien la formulación general contempla sistemas rectangulares ($p \neq m$), el desarrollo posterior de la síntesis de controladores se restringe a **sistemas cuadrados** ($p = m$), condición necesaria para garantizar la invertibilidad de la matriz de transferencia y, por ende, la resolubilidad de las ecuaciones de diseño. A continuación se introducen las definiciones formales necesarias:

Definición 2.1.1 Sea $\mathbb{K}$ un campo. Un polinomio $P(s)$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ en la variable indeterminada s es una expresión de la forma

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^{n-k} = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \quad (2.1)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $(a_0, \dots, a_n)$ es una secuencia finita de elementos en $\mathbb{K}$. Si el coeficiente principal es no nulo ($a_0 \neq 0$), se dice que el grado de P es n , lo cual se denota como $\deg(P) = n$. El anillo de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se denota convencionalmente como $\mathbb{K}[s]$, mientras que el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n se denota como $\mathbb{K}_n[s]$.

Definición 2.1.2 Una matriz con entradas en $\mathbb{K}[s]$ se denomina *función matricial polinomial*. El conjunto de tales matrices se denota como $M(s) \in \mathbb{M}_{p \times m}(\mathbb{K}[s])$.

Definición 2.1.3 Sea $\mathbb{F}(s)$ el anillo de funciones racionales $g(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$, y sea $\mathbb{F}_{pr}(s)$ el anillo de funciones racionales propias o estrictamente propias. Una matriz

$\mathbf{G}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{p \times m}$ se conoce como una matriz de transferencia propia (o matriz de funciones de transferencia propias).

Para un sistema discreto o continuo MIMO lineal e invariante en el tiempo (LTI), la relación entrada-salida en el dominio de Laplace se expresa como

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{U}(s) \in \mathbb{R}^m$ son las transformadas de Laplace de los vectores de salida $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ y de entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, respectivamente:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Además, $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(\mathbb{K}_n[s])^{p \times m}$ es la matriz de funciones de transferencia del sistema, definida como

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \cdots & g_{pm}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Cada entrada $g_{ij}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ es propia o estrictamente propia $\forall 1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq m$:

$$g_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}, \quad (2.5)$$

donde $n_{ij}(s) \in \mathbb{K}_{b_{ij}}[s]$ y $d_{ij}(s) \in \mathbb{K}_{a_{ij}}[s]$ se definen como

$$n_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{b_{ij}} n_{ij,k} s^{b_{ij}-k} = n_{ij,0} s^{b_{ij}} + n_{ij,1} s^{b_{ij}-1} + n_{ij,2} s^{b_{ij}-2} + \cdots + n_{ij,b_{ij}-1} s + n_{ij,b_{ij}}, \quad (2.6)$$

$$d_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{a_{ij}} d_{ij,k} s^{a_{ij}-k} = d_{ij,0} s^{a_{ij}} + d_{ij,1} s^{a_{ij}-1} + d_{ij,2} s^{a_{ij}-2} + \cdots + d_{ij,a_{ij}-1} s + d_{ij,a_{ij}}. \quad (2.7)$$

Aquí, $a_{ij} = \deg(d_{ij}(s))$ y $b_{ij} = \deg(n_{ij}(s))$, asumiendo un coeficiente principal unitario ($d_{ij,0} = 1$) para que el denominador sea mónico. La condición de que cada función de transferencia $g_{ij}(s)$ sea propia implica que $a_{ij} \geq b_{ij}$. En términos prácticos, esto significa que la función matemática no requiere calcular derivadas puras de la señal de entrada, una operación que amplificaría el ruido de alta frecuencia y demandaría energía ilimitada en los actuadores. Por lo tanto, esta restricción algebraica es la que garantiza que cada canal de interacción sea *viable* e implementable en la práctica. A nivel global, se dice que la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ es *propia* si y solo si todas sus entradas individuales cumplen con esta propiedad.

Si bien la representación (2.4) ofrece una descripción entrada por entrada del sistema, para la síntesis algebraica de controladores resulta conveniente factorizar la matriz de transferencia empleando un denominador escalar común. Retomando (2.4) y reescribiéndola mediante un polinomio escalar denominador $\mathcal{A}(s) \in \mathbb{K}_\alpha[s]$, la representación factorizada $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{p \times m}$ adopta la forma:

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{\mathcal{A}(s)} \mathcal{B}(s) \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{A}(s)$ es el denominador escalar común, definido como un polinomio mónico. Nótese que $\mathcal{G}(s)$ denota la representación factorizada de la misma planta $\mathbf{G}(s)$ definida en (2.4), es decir, $\mathcal{G}(s) \equiv \mathbf{G}(s)$; la notación caligráfica se adopta únicamente para distinguir esta factorización con denominador común de la forma general entrada por entrada.

$$\mathcal{A}(s) = \sum_{k=0}^{\alpha} A_k s^{\alpha-k} = s^{\alpha} + A_1 s^{\alpha-1} + A_2 s^{\alpha-2} + \cdots + A_{\alpha-1} s + A_{\alpha}, \quad (2.9)$$

con $\alpha = \deg(\mathcal{A})$ y $A_0 = 1$. La matriz polinomial numeradora $\mathcal{B}(s) \in \mathbb{M}_{p \times m}(\mathbb{K}_n[s])$ se define como:

$$\mathcal{B}(s) = \begin{bmatrix} B_{1,1}(s) & B_{1,2}(s) & \cdots & B_{1,m}(s) \\ B_{2,1}(s) & B_{2,2}(s) & \cdots & B_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p,1}(s) & B_{p,2}(s) & \cdots & B_{p,m}(s) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Las entradas de esta matriz, $\forall 1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq m$, son polinomios en la variable s . Cada elemento $B_{ij}(s) \in \mathbb{K}_{\beta_{ij}}[s]$ con $\beta_{ij} = \deg(B_{ij})$ se expresa como:

$$B_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\beta_{ij}} B_{ij,k} s^{\beta_{ij}-k} = B_{ij,0} s^{\beta_{ij}} + B_{ij,1} s^{\beta_{ij}-1} + B_{ij,2} s^{\beta_{ij}-2} + \cdots + B_{ij,\beta_{ij}-1} s + B_{ij,\beta_{ij}} \quad (2.11)$$

Es importante destacar que la introducción de un denominador escalar común $\mathcal{A}(s)$ implica, en general, un incremento artificial en el orden de algunos numeradores $B_{ij}(s)$ con respecto a los $n_{ij}(s)$ originales, debido a la multiplicación cruzada necesaria para igualar los denominadores individuales $d_{ij}(s)$. Esta factorización presupone implícitamente que el sistema es **controlable y observable** (véase la Subsección 2.1.3), o bien que las eventuales cancelaciones polo-cero introducidas corresponden a modos estables. La representación factorizada de las ecuaciones (2.8)–(2.11) será empleada como base formal para la síntesis algebraica de los controladores en los capítulos subsiguientes.

2.1.2. Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD)

La representación factorizada con denominador escalar común presentada en la ecuación (2.8) constituye un caso particular de una familia más general de representaciones matriciales denominadas Descripciones de Fracciones Matriciales (MFD, por sus siglas en inglés: *Matrix Fraction Descriptions*). Estas representaciones, introducidas formalmente por Rosenbrock y desarrolladas extensivamente por Kailath, permiten extender el concepto de función de transferencia racional escalar al dominio matricial, proporcionando el marco algebraico necesario para la síntesis de controladores multivariables (Thomas Kailath, 1980).

Definición 2.1.4 Sea $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{p \times m}$ una matriz de transferencia racional pro-

pia. Una Descripción de Fracción Matricial por la Derecha (RMFD) de $\mathbf{G}(s)$ es una factorización de la forma

$$\mathbf{G}(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s) \quad (2.12)$$

donde $N_R(s) \in \mathbb{M}_{p \times m}(\mathbb{K}[s])$ es la matriz polinomial numeradora y $D_R(s) \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{K}[s])$ es la matriz polinomial denominadora, con $\det(D_R(s)) \neq 0$.

Definición 2.1.5 *Análogamente, una Descripción de Fracción Matricial por la Izquierda (LMFD) de $\mathbf{G}(s)$ se define como*

$$\mathbf{G}(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s) \quad (2.13)$$

donde $D_L(s) \in \mathbb{M}_{p \times p}(\mathbb{K}[s])$ y $N_L(s) \in \mathbb{M}_{p \times m}(\mathbb{K}[s])$.

La representación con denominador escalar común empleada en la ecuación (2.8) corresponde a un caso particular de LMFD donde $D_L(s) = \mathcal{A}(s)I_p$, siendo $\mathcal{A}(s)$ un polinomio escalar e I_p la matriz identidad de dimensión $p \times p$. Esta simplificación resulta particularmente conveniente para la síntesis del controlador RST propuesto en este trabajo, ya que reduce la complejidad algebraica al mantener un denominador escalar compartido por todos los canales.

Una MFD se denomina *irreducible* (o *coprime*) si las matrices polinomiales constituyentes no comparten factores comunes no triviales. Formalmente, una RMFD $\mathbf{G}(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$ es irreducible si y solo si la matriz compuesta

$$\begin{bmatrix} N_R(s) \\ D_R(s) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

tiene rango columna completo para todo $s \in \mathbb{C}$. Esta condición es análoga a la coprimidad escalar $\gcd(B(s), A(s)) = 1$. De manera análoga, la LMFD $\mathbf{G}(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$ es irreducible si y solo si la matriz apilada horizontalmente

$$\begin{bmatrix} D_L(s) & N_L(s) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

tiene rango fila completo para todo $s \in \mathbb{C}$. En el caso particular de la planta $\mathcal{G}(s) = \mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{B}(s)$ empleada en este trabajo, dicha condición se reduce a exigir que el polinomio escalar $\mathcal{A}(s)$ y la matriz polinomial $\mathcal{B}(s)$ no compartan factores comunes con raíces

en el semiplano derecho ($\text{Re}(s) \geq 0$), es decir, que no existan cancelaciones polo-cero inestables en la planta.

Estabilidad interna y su relación con la coprimicidad

La relevancia práctica de la coprimicidad para el diseño de controladores reside en la distinción entre dos conceptos de estabilidad que, aunque relacionados, no son equivalentes en general:

- **Estabilidad BIBO** (*Bounded-Input Bounded-Output*): ante entradas acotadas la salida es acotada. Se verifica comprobando que los polos de la función de transferencia en lazo cerrado posean parte real estrictamente negativa.
- **Estabilidad interna**: todos los modos del sistema son estables, incluidos los que pudieran quedar ocultos por cancelaciones polo-cero entre la planta y el controlador. Esta condición es más fuerte que la BIBO y es la que tiene significado físico real en ingeniería.

Una cancelación polo-cero inestable, es decir, compartir un factor común con raíz en el semiplano derecho, produce un sistema que parece BIBO estable en la función de transferencia global, pero cuyo estado interno diverge ante cualquier perturbación real. La coprimicidad de la MFD garantiza la ausencia de tales cancelaciones, lo que hace que la estabilidad BIBO y la estabilidad interna del lazo cerrado sean equivalentes. Este requisito justifica algebraicamente la condición de coprimidad en la ecuación de Bézout matricial presentada en la Sección 2.2.

2.1.3. Controlabilidad y observabilidad

Las propiedades de controlabilidad y observabilidad son condiciones necesarias para la síntesis de controladores mediante asignación de polos y para garantizar que la representación factorizada de la planta no introduzca cancelaciones polo-cero inestables. A continuación se establecen las definiciones formales pertinentes.

Definición 2.1.6 *Un sistema LTI descrito por el par (A, B) se dice controlable si, para cualquier estado inicial $x(0) = x_0$ y cualquier estado final x_f , existe una entrada $u(t)$ definida en un intervalo finito $[0, t_f]$ que transfiere el estado del sistema de x_0 a x_f . Una*

condición equivalente es que la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

tenga rango completo, es decir, $\text{rango}(\mathcal{C}) = n$.

Definición 2.1.7 Un sistema LTI descrito por el par (A, C) se dice observable si el estado inicial $x(0)$ puede determinarse de manera única a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ en un intervalo finito $[0, t_f]$. Una condición equivalente es que la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

tenga rango completo, es decir, $\text{rango}(\mathcal{O}) = n$.

Ambas propiedades son duales entre sí y son requisitos indispensables para el diseño de controladores por asignación de polos. En el contexto del presente trabajo, la controlabilidad del par (A_e, B_e) del sistema aumentado (véase la Sección 2.5) garantiza la existencia de una ganancia $\mathcal{K}$ que ubique los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas. Es importante señalar que, en el marco polinomial, la coprimicidad de $\mathcal{A}(s)$ y $\mathcal{B}(s)$ es la condición algebraica equivalente a la controlabilidad y observabilidad del sistema en espacio de estados: ambas garantizan que no existen modos dinámicos inaccesibles o inobservables, y, por ende, que todos los polos pueden ser asignados libremente mediante la ecuación de Bézout. La ausencia de coprimicidad, equivalente a la pérdida de controlabilidad u observabilidad, impide la síntesis de un controlador estabilizante de cualquier tipo.

2.2. Ecuación Diofántica e Identidad de Bézout

Una ecuación diofántica es una ecuación algebraica con dos o más incógnitas, cuyos coeficientes pertenecen a un dominio específico, tradicionalmente los números enteros o naturales. Un ejemplo simple de una ecuación diofántica lineal es:

$$ax + by = c \quad (2.18)$$

Para que esta ecuación tenga solución en los números enteros, es un teorema fundamental que c debe ser divisible por el máximo común divisor (MCD) de a y b . Si esta condición se cumple, la ecuación puede tener un número finito de soluciones o infinitas. Las soluciones de las ecuaciones diofánticas son un pilar en diversas áreas de la teoría de números, pero su aplicabilidad se extiende a campos aplicados como la criptografía y, de manera muy destacada, a la síntesis en el control de procesos.

En el contexto de la teoría de control moderna, la ecuación diofántica (frecuentemente referida en este ámbito como la Identidad de Bézout) se utiliza para resolver problemas de asignación de dinámica en sistemas descritos mediante relaciones entrada-salida. Estas relaciones se modelan mediante funciones de transferencia que operan sobre anillos de polinomios en lugar de simples variables escalares complejas. En este enfoque, el diseño del sistema de control se transforma en un problema algebraico, facilitando una formulación directa para asegurar la estabilidad.

Para un sistema escalar SISO, la ecuación diofántica lineal polinomial adopta la siguiente forma estructural:

$$A(s)S(s) + B(s)R(s) = D(s) \quad (2.19)$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios conocidos en la variable de Laplace s , que representan la dinámica en lazo abierto de la planta (denominador y numerador, respectivamente). Por su parte, $D(s)$ es el polinomio característico deseado que define el comportamiento en lazo cerrado. Las incógnitas a determinar son los polinomios del controlador, $S(s)$ y $R(s)$. De manera análoga a la condición del MCD en los números enteros, para que esta ecuación polinomial tenga una solución garantizada para cualquier $D(s)$, los polinomios de la planta $A(s)$ y $B(s)$ deben ser *coprimos* (es decir, no compartir raíces inestables ocultas).

Al transitar hacia sistemas multivariables (MIMO), la formulación exige un salto cualitativo hacia el álgebra de matrices. La ecuación diofántica se extiende a una forma matricial polinomial:

$$\mathcal{A}(s)I_p\mathcal{S}(s) + \mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{D}(s) \quad (2.20)$$

donde $\mathcal{A}(s)$ es el denominador escalar común de la planta, $I_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la matriz identidad (siendo p el número de salidas del sistema) y $\mathcal{B}(s) \in \mathbb{M}_{p \times m}(\mathbb{K}[s])$ es la matriz de numeradores polinomiales de la planta para las m entradas. Por su parte, las incógnitas $\mathcal{S}(s) \in \mathbb{M}_{p \times p}(\mathbb{K}[s])$ y $\mathcal{R}(s) \in \mathbb{M}_{m \times p}(\mathbb{K}[s])$ corresponden a las matrices polinomiales del controlador, mientras que $\mathcal{D}(s) \in \mathbb{M}_{p \times p}(\mathbb{K}[s])$ representa la matriz polinomial característica que define el comportamiento dinámico deseado en lazo cerrado.

La existencia de solución para esta ecuación está garantizada por el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.2.1 (Identidad de Bézout Matricial) *La ecuación $\mathcal{A}(s)I_p\mathcal{S}(s) + \mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{D}(s)$ admite solución $(\mathcal{S}(s), \mathcal{R}(s))$ de matrices polinomiales para cualquier $\mathcal{D}(s)$ arbitrario si y solo si las matrices polinomiales $\mathcal{A}(s)I_p$ y $\mathcal{B}(s)$ son **coprimas por la izquierda**, es decir, la LMF $\mathcal{G}(s) = (\mathcal{A}(s)I_p)^{-1}\mathcal{B}(s)$ es irreducible.*

Este resultado es la generalización directa del Teorema de Bézout escalar: así como en el caso SISO la coprimicidad de $A(s)$ y $B(s)$ es condición necesaria y suficiente para resolver la ecuación diofántica escalar, en el caso MIMO la coprimicidad izquierda de las matrices polinomiales de la planta garantiza la resolubilidad de la ecuación matricial y, por ende, la viabilidad de la asignación de polos centralizada. En esta representación extendida de Bézout, la no conmutatividad de las operaciones matriciales complica significativamente el análisis matemático. Sin embargo, la síntesis algebraica permite estructurar el problema igualando los coeficientes de las mismas potencias de s en ambos lados de la ecuación. Esto transforma el cálculo de las matrices polinomiales $\mathcal{R}(s)$ y $\mathcal{S}(s)$ en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la forma $M_S x = d_{cl}$, donde M_S es la matriz generalizada de Sylvester construida a partir de los coeficientes del modelo de la planta.

La resolución rigurosa de esta ecuación diofántica matricial es crucial para el diseño de sistemas de control robustos, donde las interacciones entre múltiples entradas y salidas deben ser activamente compensadas de forma global. La importancia de este marco algebraico para proporcionar soluciones transparentes en presencia de dinámicas complejas es ampliamente reconocida. Por ejemplo, Skogestad y Postlethwaite destacan el uso del análisis multivariable en la síntesis de controladores y su relevancia para

garantizar márgenes de estabilidad y robustez del sistema frente a perturbaciones (Skogestad y Postlethwaite, 2010).

2.3. Análisis de Interacciones: RGA, SVD e Índice de Niederlinski

El diseño de estrategias de control para sistemas multivariantes exige una evaluación matemática rigurosa de las interacciones cruzadas antes de seleccionar una arquitectura. Las herramientas fundamentales para este propósito son la *Descomposición en Valores Singulares* (SVD), la *Matriz de Ganancias Relativas* (RGA) y el *Índice de Niederlinski*. En conjunto, estos métodos permiten cuantificar el grado de acoplamiento direccional, la sensibilidad de la planta frente a incertidumbres y la viabilidad técnica de utilizar esquemas de control descentralizados frente a la necesidad de un enfoque centralizado.

2.3.1. Descomposición en Valores Singulares (SVD) y Direccionalidad

En el análisis multivariable, la Descomposición en Valores Singulares (SVD) es una herramienta de álgebra lineal que permite evaluar la direccionalidad espacial de la planta y su controlabilidad. Matemáticamente, cualquier matriz compleja A de dimensión $n \times m$ puede factorizarse como:

$$A = U\Sigma V^T \quad (2.21)$$

donde U ($n \times n$) y V ($m \times m$) son matrices unitarias ortogonales, es decir, $U^T U = I$ y $V^T V = I$. La matriz Σ es una matriz diagonal de dimensión $n \times m$ que contiene a los **valores singulares** reales y no negativos del sistema, típicamente ordenados de forma descendente ($\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k = \underline{\sigma} \geq 0$).

Las columnas de U y V representan las direcciones principales de salida y de entrada de la planta, respectivamente. Desde la perspectiva de control, el valor singular máximo ($\bar{\sigma}$) indica la dirección espacial donde la planta presenta la mayor ganancia (la dirección "fuerte"), mientras que el valor singular mínimo ($\underline{\sigma}$) revela la dirección donde la ganancia es menor (la dirección "débil." más difícil de controlar).

Número de Condición

A partir de los valores singulares extremos, se define el Número de Condición (γ , también denominado *Condition Number*, CN) de la matriz A (o de la planta G evaluada en una frecuencia específica):

$$CN = \gamma(G) = \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \geq 1 \quad (2.22)$$

El Número de Condición es un indicador crítico de la sensibilidad del sistema. Si nominalmente la salida es $y = Gu$, frente a un error o incertidumbre no estructurada en las entradas Δu , el error en la salida será $\Delta y = G\Delta u$. Una planta con un $\gamma(G)$ elevado se denomina *mal condicionada*. Un proceso mal condicionado amplifica severamente los errores de modelado y la sensibilidad al ruido, lo que indica que el diseño de un controlador robusto será un desafío considerable y que la planta es altamente propensa a la inestabilidad bajo esquemas descentralizados convencionales.

2.3.2. Matriz de Ganancias Relativas (RGA)

Propuesto originalmente por Bristol, el Arreglo o Matriz de Ganancias Relativas (RGA) es la métrica más utilizada para cuantificar las interacciones cruzadas y guiar el emparejamiento de variables en esquemas descentralizados. La ganancia relativa, denotada como λ_{ij} , mide la relación entre la ganancia estática de la planta desde u_j hasta y_i con todos los demás lazos abiertos, frente a la misma ganancia pero con todos los demás lazos cerrados (controlados de manera perfecta):

$$\lambda_{ij} = \frac{(\partial y_i / \partial u_j)_{u_k=0, k \neq j}}{(\partial y_i / \partial u_j)_{y_k=0, k \neq i}} \quad (2.23)$$

Para una matriz de transferencia cuadrada $G(s)$ de dimensión $n \times n$, la matriz RGA se calcula analíticamente mediante la siguiente operación matricial:

$$RGA(G) = G \circ (G^{-1})^T \quad (2.24)$$

Donde el operador $\circ$ representa el producto elemento a elemento (producto de Hadamard o de Schur), y $(G^{-1})^T$ es la transpuesta de la matriz inversa. Una propiedad notable de

la RGA es que es invariante a la escala (adimensional), y la suma de los elementos en cada fila y columna es exactamente igual a 1.

En el diseño de lazos descentralizados, se busca que los elementos diagonales de la RGA se aproximen a la unidad ($\lambda_{ii} \approx 1$), lo que sugiere que las interacciones dinámicas de los otros lazos tendrán un impacto mínimo sobre ese emparejamiento. Valores negativos o muy grandes indican emparejamientos indeseables. Sin embargo, **la literatura moderna advierte que basarse exclusivamente en la RGA es engañoso en plantas mal condicionadas**. Si el número de condición de la planta es alto, la RGA presentará elementos muy grandes en magnitud, lo que significa que el sistema sufrirá de una grave competencia algorítmica si no se recurre a un enfoque de control centralizado.

2.3.3. Índice de Niederlinski

Como complemento al análisis direccional, el Índice de Niederlinski (N_I) constituye un criterio analítico utilizado para descartar rápidamente la viabilidad de implementar esquemas descentralizados con acción integral. Este índice provee una condición necesaria (aunque no suficiente) para la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Para una planta de dimensión $n \times n$, y asumiendo que los lazos de control individuales (en la diagonal) son estables, el índice se define relacionando el determinante de la matriz de la planta completa G con el producto de las funciones de transferencia de su diagonal principal, usualmente evaluado en estado estacionario ($s = 0$):

$$N_I = \frac{\det G(0)}{\prod_{i=1}^n g_{ii}(0)} \quad (2.25)$$

Un valor $N_I > 0$ sugiere que las interacciones, aunque presentes, permiten un margen matemático en el cual los controladores PID descentralizados podrían estabilizar la planta si se sintonizan cuidadosamente de forma secuencial o simultánea.

En marcado contraste, si el índice arroja un valor negativo o nulo ($N_I \leq 0$), el teorema dictamina de manera concluyente que el esquema de control descentralizado será inevitablemente inestable. En tales escenarios físicos (comunes en sistemas con fuertes acoplamientos termodinámicos o reacciones químicas complejas), la interacción destructiva entre los lazos individuales conduce inevitablemente a la inestabilidad. Es en este punto límite donde las arquitecturas aisladas fracasan y la implementación de una

estrategia de control centralizada global, como el diseño polinomial RST matricial, se vuelve una necesidad absoluta para asegurar la operatividad y estabilidad de la planta.

2.4. Estructura y diseño del controlador polinomial RST (SISO)

Una vez establecido el marco algebraico para la descripción de sistemas multivariables y las herramientas de análisis de interacciones, es necesario definir la estructura de control que será extendida al caso MIMO en el Capítulo 3. La estructura de control RST es un regulador polinomial de dos grados de libertad que constituye una arquitectura de control con ventajas significativas respecto a los reguladores PI convencionales. Su diseño puede realizarse tanto en el dominio continuo como en el discreto; en el presente trabajo se adopta exclusivamente el enfoque en tiempo continuo. La arquitectura RST se compone de tres filtros polinomiales escalares: $R(s) \in \mathbb{K}_\rho[s]$ y $S(s) \in \mathbb{K}_\sigma[s]$, que determinan el desempeño en regulación, y $T(s) \in \mathbb{K}_\tau[s]$, que garantiza el seguimiento de la señal de referencia (Landau, 1998). Cada filtro es un polinomio escalar en la variable de Laplace s , con la siguiente estructura:

$$R(s) = \sum_{k=0}^{\rho} R_k s^{\rho-k} = R_0 s^{\rho} + R_1 s^{\rho-1} + \cdots + R_{\rho-1} s + R_{\rho} \quad (2.26)$$

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\sigma} S_k s^{\sigma-k} = s^{\sigma} + S_1 s^{\sigma-1} + \cdots + S_{\sigma-1} s + S_{\sigma} \quad (2.27)$$

$$T(s) = \sum_{k=0}^{\tau} T_k s^{\tau-k} = T_0 s^{\tau} + T_1 s^{\tau-1} + \cdots + T_{\tau-1} s + T_{\tau} \quad (2.28)$$

donde $\rho = \deg(R)$, $\sigma = \deg(S)$ y $\tau = \deg(T)$. Los coeficientes R_k , S_k y T_k son constantes escalares pertenecientes al campo $\mathbb{K}$. Cabe señalar que $S(s)$ se define como un **polinomio mónico**, es decir, su coeficiente líder es unitario ($S_0 = 1$).

Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)$ la función de transferencia de una planta SISO LTI, expresada como el cociente de dos polinomios:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.29)$$

donde $A(s) \in \mathbb{K}_a[s]$ es el polinomio denominador (mónico, con $A_0 = 1$) y $B(s) \in \mathbb{K}_b[s]$

es el polinomio numerador:

$$A(s) = \sum_{k=0}^a A_k s^{a-k} = s^a + A_1 s^{a-1} + \dots + A_{a-1} s + A_a \quad (2.30)$$

$$B(s) = \sum_{k=0}^b B_k s^{b-k} = B_0 s^b + B_1 s^{b-1} + \dots + B_{b-1} s + B_b \quad (2.31)$$

con $a = \deg(A)$ y $b = \deg(B)$, donde $a \geq b$ para que la función de transferencia sea propia.

La estructura de control RST en su forma canónica para una planta SISO se ilustra en la Fig. 2.2. En esta configuración, $y(t)$ denota la salida del sistema, $r(t)$ la señal de referencia y $e(t)$ el error de seguimiento, para todo $t > 0$.

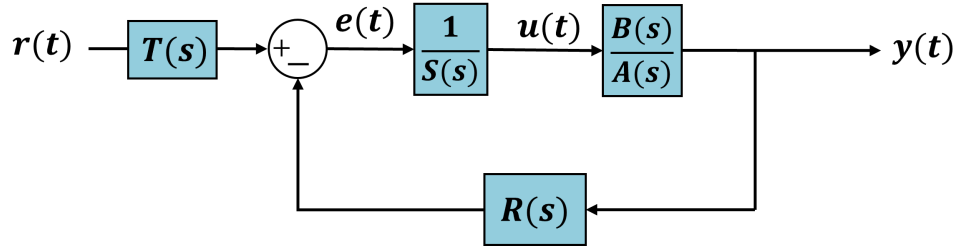


Figura 2.2: Estructura de control RST en forma canónica para una planta SISO.

A partir del diagrama de bloques, las ecuaciones que describen el flujo de señales en el lazo cerrado son:

$$e(t) = T(s) r(t) - R(s) y(t) \quad (2.32a)$$

$$u(t) = \frac{1}{S(s)} e(t) \quad (2.32b)$$

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)} u(t) \quad (2.32c)$$

Sustituyendo (2.32b) en (2.32c), e incorporando (2.32a) en la expresión resultante, se obtiene:

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)S(s)} (T(s) r(t) - R(s) y(t)) \quad (2.33)$$

Reordenando los términos:

$$A(s)S(s) y(t) + B(s)R(s) y(t) = B(s)T(s) r(t) \quad (2.34)$$

de donde se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B(s) T(s)}{A(s) S(s) + B(s) R(s)} \quad (2.35)$$

Para la implementación en simulación, los bloques del controlador se expresan como funciones de transferencia racionales: el bloque de retroalimentación $\frac{R(s)}{S(s)}$ y el bloque de prealimentación $\frac{T(s)}{S(s)}$. La condición de causalidad exige que ambas funciones de transferencia sean propias o estrictamente propias, es decir, $\deg(R) \leq \deg(S)$ y $\deg(T) \leq \deg(S)$.

Los coeficientes de los polinomios $R(s)$ y $S(s)$ se determinan mediante la técnica de asignación de polos, la cual consiste en resolver la identidad diofántica polinomial (ecuación de Bézout):

$$A(s) S(s) + B(s) R(s) = D(s) \quad (2.36)$$

donde $D(s) \in \mathbb{K}_d[s]$ es el polinomio característico deseado en lazo cerrado, definido como un polinomio mónico ($D_0 = 1$):

$$D(s) = \sum_{k=0}^d D_k s^{d-k} = s^d + D_1 s^{d-1} + \dots + D_{d-1} s + D_d \quad (2.37)$$

Las raíces de $D(s)$ determinan la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado y, por lo tanto, su comportamiento dinámico (velocidad de respuesta, amortiguamiento y estabilidad). Para que la ecuación (2.36) admita una solución para cualquier $D(s)$ arbitrario, es condición necesaria y suficiente que $A(s)$ y $B(s)$ sean coprimos, es decir, $\gcd(A(s), B(s)) = 1$.

Las restricciones de grado sobre los polinomios del controlador se derivan de las condiciones de causalidad y de la igualdad de grados en ambos lados de (2.36). Sea $a = \deg(A)$ y $b = \deg(B)$ con $a \geq b$. De la condición de causalidad $\deg(R) \leq \deg(S)$ y considerando que el lado izquierdo de (2.36) debe igualar el grado de $D(s)$, se obtiene que la solución de mínimo grado satisface:

$$\deg(S) = a, \quad \deg(R) = a - 1 \quad (2.38)$$

Esto se verifica dado que $\deg(A \cdot S) = 2a$ y $\deg(B \cdot R) \leq b + (a - 1) \leq 2a - 1 < 2a$, lo

cual garantiza que la condición de causalidad $\deg(R) = a - 1 < a = \deg(S)$ se satisface. De la igualdad de grados en (2.36), el grado del polinomio deseado resulta:

$$\deg(D) = \deg(A) + \deg(S) = 2a \quad (2.39)$$

El polinomio característico deseado se parametriza típicamente como un producto de factores que reflejan la dinámica en lazo cerrado deseada:

$$D(s) = \prod_{i=1}^{2a} (s - p_i) \quad (2.40)$$

donde $\{p_i\}$ son los polos deseados, seleccionados con parte real negativa para garantizar estabilidad.

Finalmente, el polinomio de prealimentación $T(s)$ se calcula para garantizar una ganancia estática unitaria en el seguimiento de referencia. Aplicando el *teorema del valor final*, la condición de seguimiento perfecto en estado estacionario ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r_\infty$ ante una referencia constante $r(t) = r_\infty$) requiere que la función de transferencia en lazo cerrado de referencia a salida tenga ganancia unitaria en $s = 0$:

$$T(0) = \frac{D(0)}{B(0)} \quad (2.41)$$

En el caso más simple, $T(s)$ se elige como una constante escalar $T = D(0)/B(0)$, lo cual satisface automáticamente la condición $\deg(T) = 0 \leq \deg(S)$. Cuando se requiere conformación del transitorio de seguimiento, $T(s)$ puede definirse como un polinomio de grado superior, siempre que $\deg(T) \leq \deg(S)$ para garantizar la viabilidad de implementación del prefiltro.

En la práctica, el presente trabajo adopta estas formulaciones en el dominio continuo como base para el diseño del controlador RST escalar. Nótese que en las secciones precedentes se emplean letras romanas (A, B, R, S, T, D) para denotar polinomios escalares, mientras que las letras caligráficas ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{D}$) se reservan para las extensiones matriciales presentadas en el Capítulo 3.

2.5. Colocación de Polos de Espacio Aumentado con Acción Integral (ASPPIA)

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador RST multivariable propuesto, es necesario establecer controladores de referencia que permitan una comparación rigurosa. En esta sección y en la siguiente se presentan dos paradigmas de control multivariable ampliamente reconocidos: la colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA) y el control predictivo basado en modelo (MPC).

La colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA, por sus siglas en inglés: *Augmented-State Pole Placement with Integral Action*) es una estrategia de control centralizado ampliamente reconocida por su capacidad para manejar sistemas MIMO garantizando error nulo en estado estacionario mediante la incorporación de integradores. Esta estructura constituye una referencia clásica en el diseño de controladores multivariables (Franklin et al., 2019; Ogata et al., 2010).

2.5.1. Formulación matemática

El principio de diseño consiste en aumentar el modelo en espacio de estados de la planta con integradores que actúan sobre el error de seguimiento. Considere el modelo linealizado en espacio de estados de un sistema MIMO en tiempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.42}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas. Para eliminar el error en estado estacionario ante referencias constantes por partes y mejorar el rechazo de perturbaciones, se introduce un nuevo vector de estados $x_I(t) \in \mathbb{R}^p$, definido como la integral del error entre la referencia $r(t)$ y la salida $y(t)$:

$$\dot{x}_I(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t)\tag{2.43}$$

Combinando (2.42) y (2.43), la dinámica del sistema aumentado se expresa como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_I(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_e(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix}}_{x_e(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_e} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{E_e} r(t) \quad (2.44)$$

donde $x_e(t) \in \mathbb{R}^{n+p}$ denota el vector de estado aumentado, y A_e , B_e son las matrices del sistema aumentado. La ley de control MIMO se formula entonces como una combinación lineal de los estados medidos y las integrales del error:

$$u(t) = -K_x x(t) - K_I x_I(t) = -\mathcal{K} x_e(t) \quad (2.45)$$

donde $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix}$ es la matriz de ganancias compuesta. Aquí, K_x representa la ganancia de retroalimentación proporcional de estados y K_I proporciona la acción integral. Los polos en lazo cerrado del sistema son los valores propios de $A_e - B_e \mathcal{K}$.

2.5.2. Sintonización mediante asignación de polos

La matriz de ganancias $\mathcal{K}$ se calcula mediante la técnica de asignación de polos sobre el par aumentado (A_e, B_e) . Los polos en lazo cerrado, dados por $\det(sI - (A_e - B_e \mathcal{K})) = 0$, se ubican en posiciones del plano complejo que definan la dinámica deseada (velocidad de respuesta, amortiguamiento y estabilidad).

En principio, la asignación de polos permite ubicar polos reales y complejos de manera arbitraria. Sin embargo, se deben respetar varias restricciones estructurales y prácticas:

- **Implementación real.** Dado que A_e , B_e y $\mathcal{K}$ tienen valores reales, los polos complejos deben especificarse en pares conjugados $(\sigma \pm j\omega)$ para producir ganancias reales.
- **Controlabilidad del sistema aumentado.** La asignación exacta de polos requiere que (A_e, B_e) sea controlable. Incluso cuando (A, B) es controlable, el aumento con integradores puede introducir modos poco controlables (o no controlables) dependiendo de las salidas seleccionadas y de las propiedades de rango de (A, B, C) . Esto es particularmente relevante en configuraciones MIMO y debe verificarse para cada modelo de punto de operación.

- **Limitaciones de multiplicidad y sensibilidad numérica.** En la asignación de polos multivariable, los polos repetidos (o casi repetidos) pueden ser inviables o conducir a soluciones mal condicionadas, especialmente cuando la multiplicidad solicitada excede el rango de entrada. Además, ubicaciones de polos agresivas, como dinámicas rápidas y/o pares complejos de alta frecuencia, pueden producir ganancias $\mathcal{K}$ muy grandes, amplificando el ruido de medición, induciendo la saturación de los actuadores y aumentando la sensibilidad a la discrepancia del modelo, degradando así la robustez.
- **Acción integral y saturación del actuador (*windup*).** El estado integral x_I puede acumularse durante la saturación o los cambios abruptos en el punto de operación, lo que podría causar sobreimpulsos u oscilaciones. A menudo es necesaria una compensación anti-windup para obtener un rendimiento satisfactorio en los límites operativos.

Estas restricciones delimitan el dominio donde la asignación de polos proporciona un rendimiento confiable sin ganancia o sensibilidad excesivas. En la práctica, esto frecuentemente conduce a una sintonización conservadora, seleccionando un ancho de banda y un amortiguamiento moderados para evitar ganancias agresivas.

2.6. Estrategia de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC)

El Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés: *Model Predictive Control*) es una estrategia de control avanzada que utiliza un modelo matemático interno de la planta para predecir la evolución futura de los estados del sistema a lo largo de un horizonte de predicción finito, denotado como N_p . En cada instante de muestreo k , el controlador resuelve un problema de optimización restringido para determinar una secuencia de incrementos de control óptimos que minimicen una función de costo específica, sujeta a restricciones físicas sobre las entradas y salidas (Camacho et al., 2026).

2.6.1. Formulación matemática

El modelo de predicción se basa en la representación linealizada en espacio de estados en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ representan los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente. El objetivo de control es calcular la secuencia de control óptima $\Delta U = \{\Delta u(k|k), \dots, \Delta u(k + N_c - 1|k)\}$ que minimice la siguiente función de costo cuadrática J :

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\hat{y}(k+i|k) - r(k+i)\|_Q^2 + \sum_{j=0}^{N_c-1} \|\Delta u(k+j|k)\|_R^2 \quad (2.47)$$

sujeto a las restricciones operativas:

$$\begin{aligned} u_{min} &\leq u(k+j|k) \leq u_{max} \\ \Delta u_{min} &\leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{max} \\ y_{min} &\leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{max} \end{aligned} \quad (2.48)$$

En la formulación anterior:

- $\hat{y}(k+i|k)$ denota el vector de salida predicho en el paso $k+i$, calculado con base en la información disponible en el paso k .
- $r(k+i)$ es la trayectoria de referencia (*setpoint*).
- N_c es el horizonte de control ($N_c \leq N_p$), que determina el número de movimientos de control libres a optimizar.
- $Q \succeq 0$ y $R \succ 0$ son las matrices de ponderación que penalizan el error de seguimiento y el esfuerzo de control (tasa de cambio), respectivamente.

El problema de optimización se resuelve en cada paso de tiempo k mediante un solucionador de programación cuadrática (QP). De acuerdo con el principio de *horizonte*

deslizante, solo el primer elemento de la secuencia óptima, $\Delta u^*(k|k)$, se aplica a la planta. En el siguiente instante $k + 1$, el horizonte se desplaza, el estado se actualiza con nuevas mediciones y el problema de optimización se resuelve nuevamente.

La principal ventaja del MPC frente a otras estrategias de control multivariable radica en su capacidad nativa para incorporar restricciones operativas directamente en la formulación del problema de control. Sin embargo, esta ventaja conlleva un costo computacional significativo, dado que el problema de optimización debe resolverse en cada instante de muestreo, lo que puede limitar su aplicabilidad en sistemas con dinámicas rápidas o hardware con recursos limitados. Cabe destacar que la formulación aquí presentada corresponde al Control Predictivo lineal estándar (LMPC) basado en el modelo linealizado local de la planta. Versiones avanzadas de esta metodología, tales como el MPC no lineal (NMPC), el MPC robusto o el MPC económico, que forman parte del estado del arte actual, ofrecen capacidades adicionales frente a no linealidades o incertidumbres severas, a costa de una complejidad matemática y una carga computacional en tiempo real sustancialmente mayores.

2.7. Índices de Desempeño

Para evaluar y comparar la calidad de la respuesta de un sistema de control, la inspección visual de las gráficas a menudo resulta insuficiente. Para realizar un análisis objetivo y cuantitativo, se emplean los *índices de desempeño*. Estos índices comprimen el comportamiento de la señal de error $e(t) = r(t) - y(t)$ a lo largo del tiempo en un único valor numérico, penalizando distintas características de la respuesta transitoria. A continuación, se describen los cuatro índices clásicos utilizados en este trabajo para comparar la efectividad de los controladores:

- **IAE (Integral del Valor Absoluto del Error):**

$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.49)$$

Este índice suma el área absoluta bajo la curva del error. Penaliza de forma equitativa tanto los errores grandes iniciales como los pequeños pero oscilatorios. Un IAE bajo suele indicar un desempeño general equilibrado en toda la respuesta.

■ **ISE (Integral del Cuadrado del Error):**

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.50)$$

Al elevar el error al cuadrado, el ISE penaliza fuertemente los errores grandes (que típicamente ocurren al inicio de un cambio de referencia o perturbación abrupta) y es tolerante con los errores pequeños. Suelen asociarse a respuestas iniciales rápidas, aunque con un ligero sobreimpulso residual.

■ **ITAE (Integral del Tiempo multiplicada por el Valor Absoluto del Error):**

$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (2.51)$$

La multiplicación por el factor temporal t implica que los errores que ocurren en el tiempo inicial no son severamente penalizados, pero los errores que persisten prolongadamente en el tiempo (como tiempos de asentamiento largos u oscilaciones sostenidas) reciben un castigo muy alto. Minimizar el ITAE asegura un sistema que se estabiliza rápidamente y sin oscilaciones de larga duración.

■ **ITSE (Integral del Tiempo multiplicada por el Cuadrado del Error):**

$$\text{ITSE} = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad (2.52)$$

Este índice combina las propiedades matemáticas del ISE y el ITAE. Penaliza los errores grandes que ocurren con un ligero retardo temporal, lo que promueve transitorios agresivos pero exigiendo que el error caiga a cero rápidamente a medida que el tiempo avanza.

El análisis conjunto de estas métricas permite obtener una perspectiva completa sobre el comportamiento de lazo cerrado, revelando qué diseño amortigua mejor, cuál responde más rápido y cuál elimina el error en estado estacionario de manera más robusta.

En este capítulo se han presentado los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de la ley de control centralizada propuesta: la formalización algebraica de los sistemas multivariados mediante representaciones matriciales y MFD, la ecuación diofántica como herramienta de síntesis, las métricas de análisis de interacciones cruzadas, las tres estructuras de control RST, ASPPIA y MPC, así como los índices integrales de

desempeño. En el Capítulo 3 se desarrolla la extensión de la estructura RST al caso MIMO, se presenta el caso de estudio del reactor CSTR y se lleva a cabo la síntesis del controlador centralizado propuesto.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se presenta el desarrollo completo de la metodología propuesta. La Sección 3.1 extiende la estructura de control RST al caso multivariable, derivando la ecuación de Bézout matricial y el procedimiento de síntesis algebraica. La Sección 3.2 introduce el modelo no lineal del reactor CSTR, su linealización y el análisis de interacciones que motiva el uso de un esquema centralizado. Las secciones restantes presentan el diseño numérico de los controladores, los resultados de simulación bajo diversos escenarios de prueba y la comparación cuantitativa con los esquemas de referencia ASPPIA y MPC.

3.1. Ley de control RST para sistemas multivariables centralizados

En la sección anterior se presentó la estructura de control RST para sistemas SISO, compuesta por los polinomios escalares $R(s)$, $S(s)$ y $T(s)$, cuyo diseño se fundamenta en la solución de la ecuación diofántica escalar. En esta sección se extiende dicho marco al caso multivariable, proponiendo una estructura RST MIMO centralizada basada en matrices polinomiales. La extensión requiere sustituir los polinomios escalares del caso SISO por sus contrapartes matriciales: el denominador escalar $A(s)$ se generaliza al polinomio escalar común $\mathcal{A}(s)$, el numerador $B(s)$ a la matriz polinomial $\mathcal{B}(s)$, y los filtros del controlador $R(s)$, $S(s)$ y $T(s)$ a las matrices $\mathcal{R}(s)$, el polinomio escalar $\mathcal{S}(s)$ y la matriz $\mathcal{T}(s)$, respectivamente. De manera análoga, el polinomio característico deseado

$D(s)$ se extiende a la matriz polinomial $\mathcal{D}(s)$. La estructura resultante se ilustra en la Fig. 3.1.

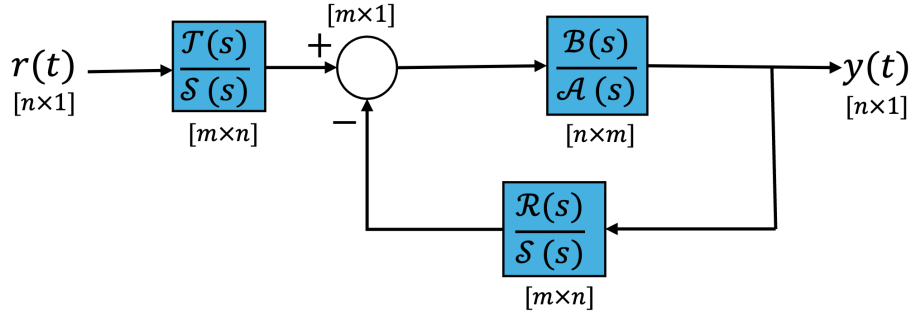


Figura 3.1: Estructura de control RST para sistemas multivariables con bloques de funciones de transferencia.

Sea una planta multivariable representada por la función de transferencia matricial $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{F}_{pr}(\mathbb{K}[s])^{n \times m}$, descrita mediante la representación factorizada introducida en las ecuaciones (2.8)–(2.11) del capítulo anterior. Para el desarrollo de la ley de control RST MIMO, esta representación adopta la siguiente forma:

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{A}(s) \in \mathbb{K}_\alpha[s]$ es un denominador común escalar (análogo a $A(s)$ en el caso SISO) y $\mathcal{B}(s) \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K}_{\beta_{ij}}[s])$ es la matriz polinomial numeradora (generalización del numerador escalar $B(s)$), para $1 \leq i \leq n$ salidas y $1 \leq j \leq m$ entradas del sistema. Nótese que la notación fraccionaria $\mathcal{B}(s)/\mathcal{A}(s)$ utilizada aquí es algebraicamente equivalente a la representación en fracciones matriciales izquierdas $\mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{B}(s)$ introducida en el capítulo anterior (2.8), dado que $\mathcal{A}(s)$ es un polinomio *escalar* y, por tanto, su inverso actúa como un escalar sobre $\mathcal{B}(s)$:

$$\mathcal{A}(s) = \sum_{k=0}^{\alpha} A_k s^{\alpha-k} = s^{\alpha} + A_1 s^{\alpha-1} + A_2 s^{\alpha-2} + \cdots + A_{\alpha-1} s + A_{\alpha} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{B}(s) = \begin{bmatrix} B_{11}(s) & B_{12}(s) & \cdots & B_{1m}(s) \\ B_{21}(s) & B_{22}(s) & \cdots & B_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}(s) & B_{n2}(s) & \cdots & B_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{B}(s)$ es el bloque que contiene los ceros de las funciones de transferencia dentro del sistema. Sus entradas son las siguientes:

$$B_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\beta_{ij}} B_{ij,k} s^{\beta_{ij}-k} = B_{ij,0} s^{\beta_{ij}} + B_{ij,1} s^{\beta_{ij}-1} + \cdots + B_{ij,\beta_{ij}-1} s + B_{ij,\beta_{ij}} \quad (3.4)$$

donde $\alpha = \deg(\mathcal{A}(s))$ y $\beta_{ij} = \deg(B_{ij}(s))$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. El lazo de control RST MIMO resultante se ilustra en la Fig. 3.1. A diferencia del caso SISO donde $S(s)$ es un polinomio escalar, en la extensión MIMO $\mathcal{S}(s)$ se mantiene como un polinomio escalar mónico de grado σ compartido por todos los canales:

$$\mathcal{S}(s) = \sum_{k=0}^{\sigma} S_k s^{\sigma-k} = s^{\sigma} + S_1 s^{\sigma-1} + S_2 s^{\sigma-2} + \cdots + S_{\sigma-1} s + S_{\sigma} \quad (3.5)$$

donde $\sigma = \deg(\mathcal{S}(s))$. Los bloques $\mathcal{R}(s)$ y $\mathcal{T}(s)$ son matrices polinomiales que generalizan los polinomios escalares $R(s)$ y $T(s)$ del caso SISO, con la siguiente estructura:

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) & \cdots & R_{1n}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) & \cdots & R_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1}(s) & R_{m2}(s) & \cdots & R_{mn}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) & \cdots & T_{1n}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) & \cdots & T_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1}(s) & T_{m2}(s) & \cdots & T_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{R}(s) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}_{\rho_{ij}}[s])$ es la matriz del controlador de retroalimentación y $\mathcal{T}(s) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}_{\tau_{ij}}[s])$ es la matriz de prealimentación. Cada entrada de estas matrices es un polinomio escalar en la variable s ; para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, dichas entradas se expresan como:

$$R_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\rho_{ij}} R_{ij,k} s^{\rho_{ij}-k} = R_{ij,0} s^{\rho_{ij}} + R_{ij,1} s^{\rho_{ij}-1} + \cdots + R_{ij,\rho_{ij}-1} s + R_{ij,\rho_{ij}} \quad (3.7)$$

$$T_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\tau_{ij}} T_{ij,k} s^{\tau_{ij}-k} = T_{ij,0} s^{\tau_{ij}} + T_{ij,1} s^{\tau_{ij}-1} + \cdots + T_{ij,\tau_{ij}-1} s + T_{ij,\tau_{ij}} \quad (3.8)$$

donde $\rho_{ij} = \deg(R_{ij}(s))$, $\tau_{ij} = \deg(T_{ij}(s))$, y $R_{ij,k}, T_{ij,k} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes de los respectivos polinomios en la indeterminada s . De manera análoga a la derivación SISO presentada en la sección anterior, el análisis del sistema en lazo cerrado parte de las

ecuaciones de flujo de señales:

$$e(t) = \mathcal{T}(s)r(t) - \mathcal{R}(s)y(t) \quad (3.9a)$$

$$y(t) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)}u(t) \quad (3.9b)$$

$$u(t) = \frac{1}{\mathcal{S}(s)}e(t) \quad (3.9c)$$

Sustituyendo (3.9c) en (3.9b), e incorporando (3.9a) en la expresión resultante (procedimiento análogo al caso escalar), se obtiene:

$$y(t) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)} \frac{1}{\mathcal{S}(s)} e(t) = \frac{\mathcal{B}(s)}{\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)} (\mathcal{T}(s)r(t) - \mathcal{R}(s)y(t)) \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n y(t) = \mathcal{B}(s) (\mathcal{T}(s)r(t) - \mathcal{R}(s)y(t)) \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la **matriz identidad** de orden n , definida como:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matriz identidad $\mathbf{I}_n$ surge de manera natural en (3.11) al expresar la multiplicación del escalar polinomial común $\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)$ por el vector de salidas del sistema, dado que $y(t) = \mathbf{I}_n y(t)$.

A partir de esta relación, agrupando los términos de salida en el miembro izquierdo de la igualdad se obtiene la ecuación característica en lazo cerrado:

$$(\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n + \mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s))y(t) = \mathcal{B}(s)\mathcal{T}(s)r(t) \quad (3.13)$$

Esta expresión constituye la base para la formulación de la ecuación de Bézout matricial. Al ser $\mathcal{A}(s) \in \mathbb{K}_\alpha[s]$ y $\mathcal{S}(s) \in \mathbb{K}_\sigma[s]$ polinomios escalares, su producto $\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)$ afecta directamente a la diagonal principal a través de la matriz identidad:

$$\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n = \text{diag}(\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s), \dots, \mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)) \quad (3.14)$$

Esta formulación permite postular la **ecuación de diseño de lazo cerrado**: se impone que el operador del denominador en lazo cerrado, compuesto por el término diagonal $\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n$ y el término de acoplamiento de la ley de control $\mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s)$, sea igual a una matriz polinomial de referencia $\mathcal{D}(s)$, libremente especificable, que define la dinámica deseada en todos los canales. El modelo de referencia en lazo cerrado $\mathcal{D}(s) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}_{\gamma_{ij}}[s])$ (generalización del polinomio $D(s)$ del caso SISO) posee la siguiente estructura:

$$\mathcal{D}(s) = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) & \dots & D_{1n}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) & \dots & D_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}(s) & D_{n2}(s) & \dots & D_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Cada elemento de $\mathcal{D}(s)$ tiene la siguiente forma:

$$D_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\gamma_{ij}} D_{ij,k} s^{\gamma_{ij}-k} = D_{ij,0} s^{\gamma_{ij}} + D_{ij,1} s^{\gamma_{ij}-1} + \dots + D_{ij,\gamma_{ij}-1} s + D_{ij,\gamma_{ij}} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n + \mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{D}(s) \quad (3.17)$$

Esta ecuación es la **identidad de Bézout matricial extendida** y constituye la generalización directa de (2.36). La presencia de la matriz identidad $\mathbf{I}_n$ en esta formulación posee implicaciones conceptuales profundas sobre cómo la estructura del controlador aborda las interacciones dinámicas del proceso:

- **Control descentralizado (diagonal)**: bajo un esquema descentralizado clásico donde se restringe la matriz del controlador $\mathcal{R}(s)$ a una estructura diagonal, la presencia de la matriz identidad $\mathbf{I}_n$ en el primer término implica que el diseño para cada canal directo se reduce a resolver n ecuaciones diofánticas escalares independientes del tipo $\mathcal{A}(s)\mathcal{S}_{ii}(s) + B_{ii}(s)R_{ii}(s) = D_{ii}(s)$. En este caso, los acoplamientos dinámicos fuera de la diagonal del producto $\mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s)$ (representados por $B_{ij}(s)R_{jj}(s)$) permanecen sin compensar, lo que degrada el desempeño y la estabilidad global del lazo cerrado si la interacción física entre canales es severa.
- **Control centralizado (lleno)**: al emplear una matriz polinomial completa $\mathcal{R}(s)$ en un esquema centralizado, los elementos fuera de la diagonal se diseñan de

forma específica para compensar activamente las dinámicas cruzadas de la planta contenidas en la matriz $\mathcal{B}(s)$. Esto otorga la libertad algebraica necesaria para asignar de forma libre y completa todos los elementos (tanto diagonales como fuera de ella) de la matriz característica deseada $\mathcal{D}(s)$.

Para la implementación práctica, en lugar de resolver de forma directa el sistema matricial completo y acoplado, se adopta el método de diseño por canales individuales. Bajo este enfoque metodológico, para cada elemento de transferencia $G_{ij}(s) = B_{ij}(s)/\mathcal{A}(s)$, se plantea y resuelve una ecuación diofántica escalar de forma independiente:

$$\mathcal{A}(s)S_{ji}(s) + B_{ij}(s)R_{ji}(s) = D_{ij}(s) \quad (3.18)$$

donde $R_{ji}(s)$ y $S_{ji}(s)$ corresponden a los polinomios del elemento (j, i) de las matrices del controlador $\mathcal{R}(s)$ y $\mathcal{S}(s)$, respectivamente, y $D_{ij}(s)$ es el polinomio de lazo cerrado para dicho canal.

Para asegurar una respuesta homogénea y unificada del sistema multivariable, se define que todos los canales compartan el mismo polinomio característico deseado, de modo que $D_{ij}(s) = D_{cl}(s)$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, con $D_{cl}(s) \in \mathbb{K}_\gamma[s]$. Este método de diseño por canales individuales proporciona importantes ventajas prácticas: preserva el rigor de la asignación de polos para cada interacción del proceso, y permite que los coeficientes de los polinomios resultantes $S_{ji}(s)$ y $R_{ji}(s)$ adquieran valores numéricos específicos adaptados a la ganancia y la constante de tiempo correspondientes a cada canal de transferencia del reactor CSTR.

Cabe destacar que, para contrarrestar las problemáticas clásicas asociadas al diseño por canales individuales (tales como la dependencia circular en la sintonización de lazos y la sensibilidad ante acoplamientos cruzados no compensados), en este trabajo se adoptan dos decisiones de diseño fundamentales. En primer lugar, se utiliza una matriz polinomial de retroalimentación $\mathcal{R}(s)$ completa (no diagonal), lo que permite que los elementos fuera de la diagonal compensen dinámicamente las interacciones cruzadas entre canales. En segundo lugar, se impone un polinomio característico de lazo cerrado unificado ($D_{cl}(s)$) para todas las ecuaciones diofánticas directas y cruzadas, asegurando que todos los lazos compartan la misma velocidad de respuesta y evitando el conflicto dinámico de sintonización iterativa. Finalmente, la limitación en la estimación de robustez inherente a los diseños SISO independientes se subsana mediante una validación global de la robustez

del lazo cerrado MIMO empleando el análisis de margen de disco en la Sección 3.3.4, garantizando la estabilidad frente a variaciones dinámicas simultáneas en todos los canales.

A partir de esta ecuación, la ley de control se sintetiza determinando el polinomio $\mathcal{S}(s)$ y las matrices polinomiales $\mathcal{R}(s)$ y $\mathcal{T}(s)$ que satisfagan las especificaciones de desempeño deseadas. Para su implementación, los bloques del controlador se expresan mediante funciones de transferencia matriciales con entradas racionales polinomiales, tal como se muestra en la Fig. 3.1.

Como alternativa teórica general, el procedimiento empleado para resolver la ecuación matricial polinomial (3.17) de forma acoplada y directa se denomina síntesis algebraica. De manera análoga al caso escalar, la determinación de las matrices del controlador $\mathcal{R}(s)$ y del polinomio $\mathcal{S}(s)$ se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, obtenido al igualar los coeficientes de cada potencia de s en ambos lados de la ecuación diofántica matricial. Esto conduce al sistema lineal:

$$M_S \cdot \theta = d_{cl} \quad (3.19)$$

donde d_{cl} es el vector de coeficientes de la matriz polinomial deseada en lazo cerrado $\mathcal{D}(s)$, θ es el vector de coeficientes incógnita de $\mathcal{S}(s)$ y $\mathcal{R}(s)$, y M_S es la matriz de Sylvester generalizada, construida a partir de los coeficientes de las matrices de la planta $\mathcal{A}(s)$ y $\mathcal{B}(s)$ en una estructura de bloques de Toeplitz. La resolución de (3.19) proporciona los parámetros exactos del controlador que garantizan la asignación de polos definida por $\mathcal{D}(s)$.

La estrategia de control descentralizado puede obtenerse como un caso particular del marco centralizado descrito anteriormente. En este enfoque, el sistema multivariable se trata como un conjunto de lazos SISO independientes, lo que implica que los términos de acoplamiento cruzado son despreciables o han sido compensados previamente. En consecuencia, únicamente los elementos diagonales de las matrices polinomiales se consideran activos, con lo que se recuperan las ecuaciones escalares de la sección anterior. Bajo la condición $m = n$, y asumiendo que $\mathcal{B}(s)$, $\mathcal{R}(s)$ y $\mathcal{D}(s)$ son matrices diagonales, se tiene:

$$\mathcal{B}(s) \approx \text{diag}(B_{11}(s), \dots, B_{nn}(s)) \quad (3.20)$$

$$\mathcal{R}(s) = \text{diag}(R_{11}(s), \dots, R_{nn}(s)) \quad (3.21)$$

$$\mathcal{D}(s) = \text{diag}(D_{11}(s), \dots, D_{nn}(s)) \quad (3.22)$$

Al imponer estas restricciones, la función de transferencia en lazo cerrado de (3.13) se reduce a la expresión escalar SISO presentada en (2.35) para cada lazo i :

$$\frac{y_i(t)}{r_i(t)} = \frac{B_{ii}(s)T_{ii}(s)}{A(s)S(s) + B_{ii}(s)R_{ii}(s)} \quad (3.23)$$

De igual forma, al aplicar estas restricciones a la ecuación de Bézout MIMO generalizada (3.17), la ecuación matricial se desacopla en n ecuaciones escalares independientes, recuperando la ecuación diofántica SISO (2.36). Para el i -ésimo lazo diagonal ($i = j$, con $1 \leq i \leq n$), el elemento (i, i) de $\mathbf{I}_n$ vale 1, por lo que:

$$A(s)S(s) + B_{ii}(s)R_{ii}(s) = D_{ii}(s) \quad (3.24)$$

Esta simplificación demuestra que los controladores SISO descentralizados constituyen un caso particular estructuralmente integrado dentro del marco RST MIMO centralizado aquí propuesto.

Una vez establecido el marco algebraico de la ley de control RST MIMO, la siguiente sección presenta el caso de estudio: el reactor CSTR, cuya complejidad dinámica e interacciones cruzadas severas motivan y justifican el uso de este esquema centralizado.

3.2. Modelado del CSTR, rendimiento en lazo abierto e identificación de los retos de control

El Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR, por sus siglas en inglés) es un sistema de referencia ampliamente empleado en la práctica del control de procesos. Como se mencionó anteriormente, su comportamiento no lineal puede dar lugar a multiplicidad de estados estacionarios. Su naturaleza multivariable es fuente de una interacción significativa entre las variables; además, es propenso a exhibir comportamiento de fase no mínima y puede ser inestable o presentar retardos de tiempo. La complejidad dinámica hace que el control y la optimización del CSTR constituyan retos formidables. El presente trabajo propone un controlador centralizado RST para ser evaluado en la operación de dicho reactor. Un análisis preliminar del sistema, tanto con su modelo no lineal como con el linealizado, proporciona indicaciones sobre las complejidades del

problema de control.

3.2.1. Modelo no lineal y parametrización de un CSTR

La simulación dinámica de la planta MIMO del CSTR se desarrolla con base en el modelo no lineal y los parámetros descritos por (Pekař y Havlena, 2004). El modelo obedece a los balances dinámicos de masa y energía establecidos para el CSTR. Considera una única reacción exotérmica e irreversible. El esquema del reactor, que ilustra las entradas y salidas, se muestra en la Fig. 3.2. El reactor es una planta de dos grados de libertad. Las entradas del sistema son los flujos volumétricos de alimentación y de refrigerante. Las salidas del sistema son la temperatura y la composición del reactivo en el producto. El modelo matemático se basa en la suposición principal de mezcla perfecta en el CSTR, lo que implica que la temperatura y la concentración del reactivo son espacialmente uniformes en todo el recipiente e idénticas a las de la corriente de salida. El volumen de líquido se considera constante, bajo el supuesto de que la densidad del fluido y la capacidad calorífica permanecen invariantes con respecto a los cambios de temperatura y composición.

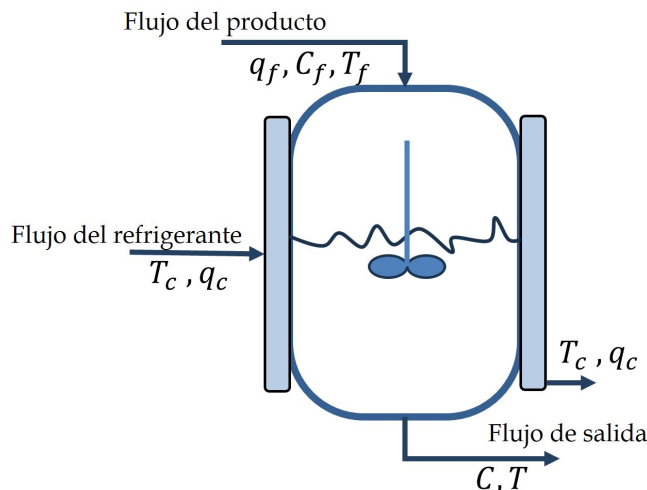


Figura 3.2: Esquema del reactor CSTR.

Químicamente, el sistema modela una sola reacción irreversible de primer orden, con una velocidad de reacción que sigue una dependencia de Arrhenius respecto a la temperatura. En cuanto al balance de energía, el sistema se trata como no adiabático con un sistema de enfriamiento; sin embargo, se desprecian las dinámicas de la pared de la camisa de enfriamiento y del fluido refrigerante, al suponer un estado cuasi-estacionario donde

la tasa de transferencia de calor está determinada instantáneamente por el caudal de refrigerante y la diferencia de temperatura entre el suministro de refrigerante y el contenido del reactor. Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema se detallan en (3.25).

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{q_f}{V}(T_f - T) - K_1 C e^{\frac{-E}{RT}} + K_2 q_c \left(1 - e^{\frac{-K_3}{q_c}}\right) (T_c - T) \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{q_f}{V}(C_f - C) - K_0 C e^{\frac{-E}{RT}}\end{aligned}\quad (3.25)$$

Tabla 3.1: Parámetros del modelo del CSTR.

Símbolo	Descripción	Unidad
T_f	Temp. de alimentación	K
T_c	Temp. del refrigerante	K
C_f	Conc. de alimentación	mol/L
V	Volumen del tanque	L
E/R	Energía de activación	K
K_0	Factor preexponencial	1/min
K_1	Cte. calor de reacción	K·L/(mol·min)
K_2	Cte. transf. de calor	L
K_3	Cte. flujo de camisa	L/min

Tabla 3.2: Entradas y salidas del sistema.

Símbolo	Descripción	Unidad
<i>Entradas</i>		
q_f	Flujo producto	L/min
q_c	Flujo refrigerante	L/min
<i>Salidas</i>		
T	Temp. del reactor	K
C	Conc. del reactivo	mol/L

Las variables se definen en las Tablas 3.1 y 3.2. T y C son los estados y las salidas del sistema, mientras que q_f y q_c son las entradas del sistema. En (Pekař y Havlena, 2004) se propuso analizar el comportamiento del sistema en los cinco puntos de equilibrio definidos en la Tabla 3.3.

3.2.2. Análisis de trayectoria y estabilidad del sistema mediante planos de fase

El análisis de estabilidad se centra en el control de los puntos de operación 1 y 5 para el CSTR, modelado como un sistema dinámico de segundo orden conforme a (3.25). Para investigar cómo evolucionan sus soluciones a lo largo del tiempo desde diversas condiciones iniciales, se construyeron retratos de fase que describen el campo vectorial definido por las derivadas de estado bajo una entrada constante. En términos generales,

Tabla 3.3: Puntos de operación recomendados del sistema.

Punto de operación	q_c [L/min]	C [mol/L]	T [K]
1	110.0	0.1298	432.94
2	105.0	0.1062	437.25
3	98.9	0.0848	442.07
4	88.3	0.0585	450.03
5	68.8	0.0295	465.00

el sistema se expresa mediante los estados $\dot{x} = f(x)$, donde f es una función vectorial no lineal. El gráfico vectorial resultante de $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ sobre el espacio (x_1, x_2) forma el plano de fase, representado en la Fig. 3.3.

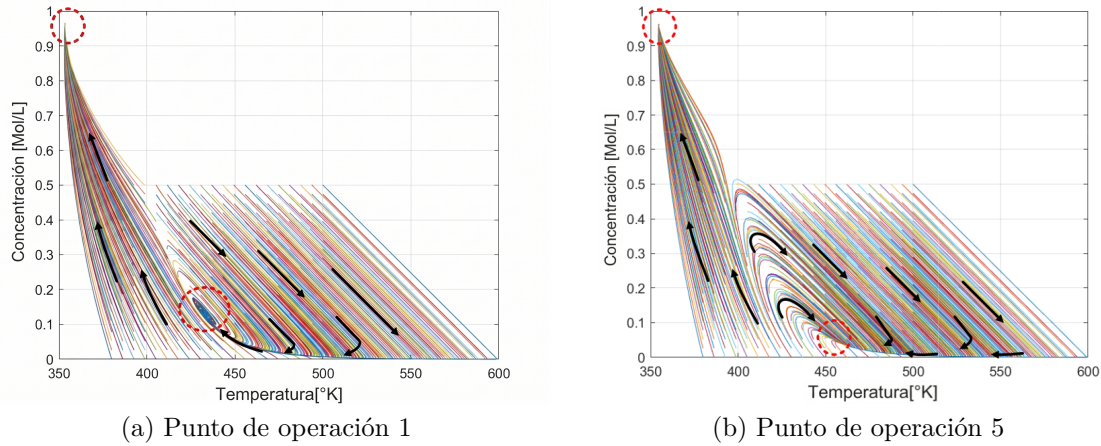


Figura 3.3: Retratos de fase del sistema CSTR.

Este sistema exhibe biestabilidad, caracterizada por dos equilibrios estables: un atractor en el cuadrante superior derecho, definido como un nodo, y un atractor en espiral en el cuadrante central inferior. La presencia de la espiral sugiere un comportamiento oscilatorio amortiguado como respuesta natural del sistema en esa región. Adicionalmente, existe un punto de silla inestable entre estos equilibrios estables, el cual delimita una línea separatriz que bifurca el retrato de fase en dos cuencas de atracción distintas. Cada cuenca corresponde a un conjunto de condiciones iniciales que conducen las trayectorias del sistema hacia un equilibrio estable específico. En la Fig. 3.4 se presentan los planos de fase individuales, cada uno correspondiente a uno de los cinco puntos de equilibrio

bajo diferentes condiciones de flujo de fluido en la camisa, especificados en la Tabla 3.3.

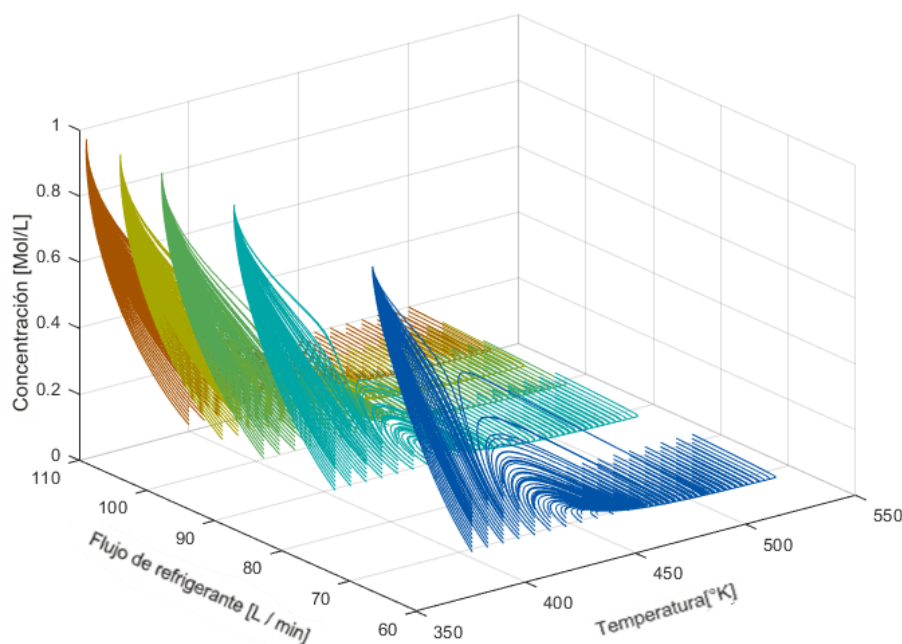


Figura 3.4: Retratos de fase para cada punto de operación.

El comportamiento observado para el CSTR introduce retos significativos para el control del proceso. Una alta conversión de reacción requiere operar cerca de la parte inferior del plano de fase dentro de la cuenca de atracción de la espiral estable, pero cerca de la cuenca de atracción vinculada al nodo estable. Este posicionamiento es crucial para lograr la estabilidad y el rendimiento deseado del CSTR.

Numerosos factores contribuyen a las complejidades inherentes asociadas con el control del CSTR bajo el comportamiento especificado. Si bien es factible que una ley de control maneje eficazmente perturbaciones significativas y devuelva el reactor a la región estable de la cuenca de la espiral, incluso perturbaciones menores tienen el potencial de empujar este sistema no lineal más allá de la separatriz. Tal cruce puede arrastrar la dinámica del reactor hacia la cuenca de atracción del equilibrio no deseado. La respuesta del CSTR puede ser un cambio hacia un equilibrio inestable o indeseable, lo que potencialmente compromete el rendimiento de la ley de control. Del mismo modo, el control debe abordar cualquier cambio sustancial en la referencia (setpoint) con precisión para garantizar que la trayectoria transitoria evite el sobreimpulso y no cruce la separatriz.

A continuación se examinan las implicaciones de utilizar un enfoque de control lineal descentralizado para gestionar el rendimiento del CSTR con el comportamiento mostrado en los retratos de fase de la Fig. 3.3. Esta estrategia tiende a pasar por alto elementos clave dentro del retrato de fase, como la separatriz, los puntos de silla y los atractores estables. Como resultado, el diseño de este control tiene dos fallas principales: la falta de coordinación entre las entradas de control y su aplicabilidad confinada a un rango operativo estrecho. En el CSTR, que es un sistema no lineal multivariable, la regulación de x_1 en torno a una referencia afectará inherentemente a x_2 y viceversa. Dado que los dos controladores independientes operan en paralelo sin coordinación, terminan compitiendo entre sí. Esta falta de coordinación puede resultar en un desempeño deficiente, oscilaciones y, más críticamente, sobreimpulso en la respuesta del sistema. Además, depender de técnicas de control lineal limita la precisión del modelo y restringe la eficacia del control a una ventana operativa estrecha. El sistema en lazo cerrado puede desviarse fácilmente de la trayectoria deseada, aumentando el riesgo de saturación en las salidas. En resumen, la adopción de un marco de control lineal desacoplado corre el riesgo de simplificar excesivamente las complejidades inherentes a este sistema multivariable no lineal, socavando así su capacidad para gestionar la dinámica global de la planta de forma eficaz.

A continuación se examina con mayor detalle el comportamiento del sistema, utilizando el modelo linealizado y las matrices de ganancia en estado estacionario para cuantificar la complejidad del problema de control.

3.2.3. Linealización del sistema en 2 puntos de operación

El sistema se linealiza en los puntos de operación 1 y 5 definidos en la Tabla 3.3. Mediante el uso de una expansión en series de Taylor truncada, se obtiene una representación en el espacio de estados linealizada para el sistema LTI con p entradas, q salidas y n variables de estado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{3.26}$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$

es el vector de entradas, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de entrada y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ es la matriz de salida. Para este sistema, los valores matriciales para la representación lineal en el espacio de estados se muestran en (3.27).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} K_2 u_2(e^{\frac{-K_3}{u_2(t)}} - 1) - \frac{u_1(t)}{V} - \frac{1}{x_1(t)^2} \left(\frac{E}{R} K_1 x_2(t) e^{\frac{-E}{R x_1(t)}} \right) & K_1 e^{\frac{-E}{R x_1(t)}} \\ -\frac{1}{x_1(t)^2} \left(\frac{E}{R} K_0 x_2(t) e^{\frac{-E}{R x_1(t)}} \right) & \frac{u_1(t)}{V} - K_1 e^{\frac{-E}{R x_1(t)}} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{(T_f - x_1(t))}{V} & k_2(e^{\frac{-K_3}{u_2(t)}} - 1)(T_c - x_1(t)) - (K_2 K_3 e^{\frac{-K_3}{u_2(t)}}(T_c - x_1(t))) - (K_2 K_3 e^{\frac{-K_3}{u_2(t)}}(T_c - x_1(t))) \\ \frac{(C_f - x_2(t))}{V} & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_f \\ q_c \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Consideramos el punto de operación nominal descrito en las Tablas 3.4 y 3.5 para linealizar el sistema en torno a ambos puntos de equilibrio. Los modelos resultantes son las matrices de funciones de transferencia mostradas en la Tabla 3.6.

3.2.4. Pruebas para la evaluación de la estructura de control descentralizada basadas en el modelo lineal

Al diseñar un sistema de control para un proceso MIMO complejo, un análisis preliminar ayuda a determinar si un control descentralizado simple es factible. Las herramientas de evaluación en estado estacionario son útiles para este propósito. Los ingenieros normalmente comienzan con el Arreglo de Ganancia Relativa (RGA, por sus siglas en inglés) para cuantificar las interacciones del proceso e identificar los emparejamientos óptimos de entrada-salida. Vale la pena señalar que confiar únicamente en el RGA puede

Tabla 3.4: Parámetros del modelo en régimen permanente.

Parámetro	Pto. Op. 1	Pto. Op. 5
T_f	350 K	350 K
T_c	350 K	350 K
C_f	1 mol/L	1 mol/L
V	100 L	100 L
E/R	10000 K	10000 K
K_0	$7,2 \times 10^{10}$ 1/min	$7,2 \times 10^{10}$ 1/min
K_1	$1,44 \times 10^{13}$	$1,44 \times 10^{13}$
K_2	0.1 L	0.1 L
K_3	700 L/min	700 L/min

no proporcionar una comprensión completa del comportamiento del sistema.

Una vez que se establece un emparejamiento, se calcula el Número de Condición (CN) para evaluar la controlabilidad inherente de la planta. Un CN alto revela una planta "mal condicionada" que es altamente sensible a las variaciones en la ganancia, lo que sugiere que las estrategias de control independientes y directas probablemente fallarán. En tales casos, un enfoque de control multivariable completo y más robusto se vuelve esencial. Finalmente, el Índice de Niederlinski (NI) es una métrica clave para el análisis de estabilidad. Incluso si los emparejamientos del RGA parecen aceptables, la inestabilidad indicada por un NI negativo revela que las interacciones de los lazos podrían desestabilizar todo el sistema.

La matriz del Arreglo de Ganancia Relativa (RGA) se calcula utilizando la ecuación (2.24) definida en la Sección 2.3.2. Las matrices de ganancia estática K_{1st} y K_{5st} se presentan en la Tab. 3.7 para cada punto de equilibrio.

Las matrices RGA resultantes se muestran en la Tab. 3.8. Los elementos resaltados muestran los emparejamientos más adecuados entre entradas y salidas para el diseño de lazos de control SISO. El mejor emparejamiento para el equilibrio 1 es $q_c - C$ y $q_f - T$, mientras que para el equilibrio 5, es $q_f - C$ y $q_c - T$.

Utilizamos las ecuaciones (2.22) y (2.25), definidas en las Secciones 2.3.1 y 2.3.3 del

Tabla 3.5: Entradas y salidas del sistema en régimen permanente.

Var.	Pto. Op. 1	Pto. Op. 5
<i>Entradas</i>		
q_f	100 L/min	100 L/min
q_c	110 L/min	68.8 L/min
<i>Salidas</i>		
T	432.94 K	432.94 K
C	0.13 mol/L	0.13 mol/L

Tabla 3.6: Matrices de función de transferencia para los puntos de equilibrio 1 y 5

Equilibrio 1	
$\mathcal{G}_1(s) = \frac{1}{\Delta_1(s)} \begin{bmatrix} -0,83s + 5,29 & -0,819s - 6,309 \\ 0,01s + 0,06 & 0,038 \end{bmatrix} \quad (3.29)$	
$\Delta_1(s) = s^2 + 9,691s + 77,16$	
Equilibrio 5	
$\mathcal{G}_5(s) = \frac{1}{\Delta_5(s)} \begin{bmatrix} -1,15s + 24,9 & -1,15s - 39,0 \\ 0,015s - 0,021 & 0,052 \end{bmatrix} \quad (3.30)$	
$\Delta_5(s) = s^2 + 26,64s + 48,72$	

marco teórico, para determinar el CN y el NI para los emparejamientos especificados. Los resultados se presentan en la Tab. 3.9.

El valor RGA de 0.637 en el punto de equilibrio 1 indica un emparejamiento adecuado de las entradas y salidas de control, y sugiere que el sistema exhibe un comportamiento interactivo sin dejar de ser controlable. Sin embargo, una consideración más profunda del CN, que se sitúa en 123, indica un mal condicionamiento dentro de un marco de control simple. El CSTR en el punto de equilibrio 1 exhibe discrepancias pronunciadas en la ganancia, con una proporción de 123 entre las direcciones de alta y baja ganancia. Como resultado, los enfoques de control descentralizado probablemente no cumplirán con los requisitos de rendimiento en este escenario. Por lo tanto, se recomienda una estrategia

Tabla 3.7: Matrices de ganancia estática de los modelos lineales para los puntos de equilibrio 1 y 5

Equilibrio 1		Equilibrio 5	
$\mathcal{K}_{1st} = \begin{bmatrix} 0,0685 & -0,0818 \\ 0,0007 & 0,0005 \end{bmatrix}$	(3.31)	$\mathcal{K}_{5st} = \begin{bmatrix} 0,5111 & -0,8007 \\ -0,0004 & 0,0011 \end{bmatrix}$	(3.32)

Tabla 3.8: Matrices RGA para los puntos de equilibrio 1 y 5

Equilibrio 1		Equilibrio 5	
$\Lambda_{\text{RGA},1} = \begin{bmatrix} 0,3629 & \mathbf{0,6371} \\ \mathbf{0,6371} & 0,3629 \end{bmatrix}$	(3.33)	$\Lambda_{\text{RGA},5} = \begin{bmatrix} \mathbf{2,37} & -1,37 \\ -1,37 & \mathbf{2,37} \end{bmatrix}$	(3.34)

de control multivariable más avanzada para un seguimiento efectivo del setpoint o de la trayectoria.

De forma aislada, el valor RGA de 2.37 en el punto de equilibrio 5 es una señal de advertencia, pero no es intrínsecamente un defecto crítico. Este valor indica que un controlador descentralizado directo puede enfrentar desafíos debido a interacciones significativas dentro del sistema. Sin embargo, la adopción de un emparejamiento RGA negativo no es factible, ya que esto implicaría inestabilidad potencial. El número de condición de 3940 es el factor primordial a considerar. Este valor elevado indica que el sistema está gravemente mal condicionado, lo que complica la posibilidad de lograr una sintonización de un único controlador capaz de gestionar eficazmente ambas direcciones de entrada-salida. Si bien el RGA alerta al diseñador de control sobre problemas potenciales de interacción, el CN subraya un problema estructural fundamental dentro de la matriz de ganancia estática del sistema. Es probable que falle cualquier intento de controlar este sistema con lazos descentralizados. En su lugar, se requiere un diseño de controlador multivariable avanzado que pueda manejar de manera efectiva la diferencia significativa en la ganancia direccional.

Tabla 3.9: Métricas de controlabilidad y estabilidad

	Número de condición	Índice de Niederlinski
Punto de operación 1	$CN_1 = 123,09$	$NI_1 = 2,755$
Punto de operación 5	$CN_5 = 3940,6$	$NI_5 = 0,42196$

3.2.5. Definición del problema de control del CSTR

Este análisis, combinando retratos de fase con métricas de control descentralizado, confirma que el CSTR es un sistema no lineal multivariable sumamente desafiante. Notablemente, el punto de equilibrio 5 está **gravemente mal condicionado**, como lo demuestra su número de condición ($CN = 3941$). Incluso la estrategia de control para el punto de equilibrio 1, aunque algo factible, presenta retos considerables. A pesar de aprobar la prueba de estabilidad de Niederlinski ($NI = 2,755$ y $0,42196$, respectivamente), ambos sistemas son altamente interactivos y son difíciles o virtualmente imposibles de sintonizar para un rendimiento robusto.

El desafío central es que el comportamiento dinámico del sistema no es fijo. Identificamos tres problemas fundamentales:

- Las características de controlabilidad cambian drásticamente con el caudal, como lo evidencian los cambios en el número de condición.
- El plano de fase y su separatriz dependen de las condiciones de flujo, lo que lleva a alteraciones en las cuencas estables de atracción.
- El análisis RGA indica que el emparejamiento óptimo entrada-salida se invierte en las diferentes regiones operativas, lo que complica la implementación de una arquitectura de control fija.

Por lo tanto, este sistema exige más que un controlador convencional. Este estudio propone extender un marco de control RST SISO lineal, bien establecido, a una estructura de control multivariable, lo que ofrece una estrategia mejorada y adaptada para abordar de manera efectiva la biestabilidad del sistema, las fuertes interacciones y la dinámica, las cuales dependen fuertemente de las condiciones de entrada.

3.3. Controladores centralizados y descentralizados basados en RST para el sistema CSTR

Esta sección describe el diseño de: (i) un sistema de control descentralizado basado en RST SISO (Sección 2.4) y (ii) un sistema de control centralizado basado en RST MIMO (Sección 3.1) para el CSTR de 2×2 , teniendo como objetivo los puntos de equilibrio 1 y 5 mostrados en las Tablas 3.4 y 3.5. El diseño se basa en modelos lineales derivados en cada punto de operación, formulados como matrices de funciones de transferencia con un polinomio característico común. El modelo se expresa en la estructura matemática general definida en la ecuación (2.8) y la función de transferencia multivariable específica para el caso de estudio numérico se detalla en la Tabla 3.6.

3.3.1. Modelo de la planta para la síntesis de control

Los lazos de control SISO independientes se sintetizan con base en los elementos diagonales de las funciones de transferencia reportadas en la Tabla 3.6, para los puntos de equilibrio 1 y 5. Las leyes de control resultantes se combinan para formar las leyes de control descentralizadas. Se define $x = [x_1(t), x_2(t)]^\top = [T, C]^\top$ y $u = [u_1(t), u_2(t)]^\top = [q_f, q_c]^\top$, tomando en cuenta el emparejamiento resultante del análisis RGA, el cual difiere entre ambos puntos de equilibrio.

El controlador descentralizado se calculó utilizando las siguientes funciones de transferencia, donde los subíndices 1 y 5 representan el punto de equilibrio 1 y 5, respectivamente:

$$g_{12}(s)_1 = \frac{-0,819s - 6,309}{s^2 + 9,691s + 77,16} \quad (3.35)$$

$$g_{21}(s)_1 = \frac{0,01s + 0,06}{s^2 + 9,691s + 77,16} \quad (3.36)$$

$$g_{11}(s)_5 = \frac{-1,15s + 24,9}{s^2 + 26,64s + 48,72} \quad (3.37)$$

$$g_{22}(s)_5 = \frac{0,052}{s^2 + 26,64s + 48,72} \quad (3.38)$$

El controlador RST centralizado se sintetizó utilizando los modelos lineales completos de la planta detallados en la Tabla 3.6, correspondientes al CSTR en los puntos de operación 1 y 5. Siguiendo el marco matemático definido en la Sección 3.1, la planta se

representa mediante una Descripción de Fracciones Matriciales (MFD, por sus siglas en inglés), asegurando que todas las funciones de transferencia compartan un polinomio característico común. La ley de control se sintetiza mediante la asignación de polos al resolver la ecuación extendida de Bézout (3.17).

3.3.2. Procedimiento de diseño del control

El núcleo del diseño es la selección del grado del polinomio del controlador. Para cualquier par de polinomios $R(s)$ y $S(s)$, se deben considerar tres criterios clave:

1. **Criterio de viabilidad de implementación física (que la función sea propia).** Para que un controlador en tiempo continuo pueda ser construido en la realidad, su función de transferencia debe ser propia. Esta condición impone la restricción esencial de que $\deg(R(s)) \leq \deg(S(s))$.
2. **Asignación de polos para lograr robustez.** La dinámica deseada en lazo cerrado se define por la matriz del modelo de referencia $D(s)$ o $\mathcal{D}(s) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}_{\rho_{ij}}[s])$ para el esquema MIMO. De acuerdo con (Pekař y Havlena, 2004), los polos de referencia se derivan de los polos en lazo abierto, mientras que los polos auxiliares se establecen en tres veces la parte real de los polos de la planta. Los polos dominantes dictan la velocidad de respuesta del sistema, y los polos auxiliares proporcionan robustez ante comportamientos no modelados. Los grados de los polinomios deben ser lo suficientemente altos como para resolver la ecuación diofántica (Bézout) mediante la asignación de polos: la ecuación (3.17) para el control centralizado y la (3.24) para el control descentralizado. En la práctica, los diseñadores a menudo aumentan los grados de $R(s)$ y $S(s)$ más allá de sus requisitos mínimos para añadir flexibilidad, mejorando así la robustez.
3. **Medidas para mejorar el rendimiento en lazo cerrado.** Para garantizar un error en estado estacionario nulo, el controlador debe incorporar acción integral. Esta tarea se logra forzando al controlador a tener un polo en $s = 0$. En esta estructura, esto implica que $S(s)$ debe contener una raíz en el origen, lo cual se logra estableciendo $S(s) = s \cdot S'(s)$, aumentando así $\deg(S)$ en uno.

3.3.3. Ejemplo numérico: Leyes de control centralizadas y des-centralizadas para los puntos de equilibrio 1 y 5

Para el ejemplo numérico, los polos se especifican en la Tabla 3.10.

Tabla 3.10: Polos del sistema y auxiliares para los Puntos de Operación 1 y 5

Tipo de polo	Punto de Operación 1	Punto de Operación 5
Polos del sistema	$-4,8456 \pm 7,3265i$	$(-1,975)(-24,661)$
Polos auxiliares	$(-4,84)^2(-14,52)^2$	$(-5,926)(-73,984)$

Para el Punto de Operación 1, la ley de control se calcula aplicando el método de diseño por canales individuales. A modo de ilustración, para el canal de acoplamiento cruzado $u_2 \rightarrow y_1$ (que vincula el flujo de refrigerante con la temperatura del reactor, elemento $G_{12}(s)$ de la planta), se plantea y resuelve la ecuación diofántica escalar (3.39):

$$\begin{aligned}
 (s^2 + 9,691s + 77,16)(s^2 + S_0s) + (-0,819s - 6,309)(r_2s^2 + r_1s + r_0) \\
 = s^4 + 38,76s^3 + 516,43s^2 + 2729,6s + 4929,3
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Este procedimiento se repite de manera secuencial e independiente para cada uno de los elementos de transferencia de la planta ($G_{11}(s)$, $G_{21}(s)$ y $G_{22}(s)$) con respecto al mismo polinomio característico deseado $D_d(s) = s^4 + 38,76s^3 + 516,43s^2 + 2729,6s + 4929,3$, el cual ubica los polos en $(s + 4,8456)^2(s + 14,52)^2$.

Para el mismo lazo de control, se determina el prefiltro polinomial $T(s)$ como ejemplo. Para lograr un error en estado estacionario nulo ante una entrada escalón, $T(s)$ se elige como una ganancia escalar (un polinomio de grado 0) que asegura que el canal correspondiente tenga una ganancia estática unitaria en lazo cerrado. Una vez que se determinan los polinomios $R(s)$ y $S(s)$ usando (3.39), el correspondiente $T(s)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{-0,819s - 6,309}{s^4 + 38,76s^3 + 516,43s^2 + 2729,6s + 4929,3} T(s) = 1 \implies T(s) = \frac{4929,3}{-6,309} \approx -781,31 \tag{3.40}$$

La ley de control centralizada se da para los puntos de equilibrio 1 y 5 en las ecuaciones (3.41) y (3.42), respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s)_1 &= \begin{bmatrix} 15,148s^2 + 54,225s + 934,16 & 2650,7s^2 + 26785s + 89039 \\ -27,016s^2 - 245,27s - 782,86 & 0,2178s^2 + 1,067s + 0,196 \end{bmatrix} \\ \mathcal{S}(s)_1 &= \begin{bmatrix} s^2 + 41,59s & s^2 + 5,9414s \\ s^2 + 6,9s & s^2 + 29,029s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}(s)_1 = \begin{bmatrix} 934,16 & 89039 \\ -782,86 & 13072 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s)_5 &= \begin{bmatrix} 8,1048s^2 + 218,31s + 452,49 & -11278s^2 - 302103s - 590335 \\ 5,0375s^2 + 136,37s - 288,84 & 3847,7s^2 + 103811s + 217826 \end{bmatrix} \\ \mathcal{S}(s)_5 &= \begin{bmatrix} s^2 + 54,24s & s^2 + 154,38s \\ s^2 + 39,13s & s^2 + 44,92s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}(s)_5 = \begin{bmatrix} 452,49 & -590335 \\ -288,84 & 217826 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Finalmente, la ley de control descentralizada se detalla en las Tablas 3.11 y 3.12 para los puntos de equilibrio 1 y 5, respectivamente:

Tabla 3.11: Ley de control descentralizada para el punto de equilibrio 1.

Lazo de control de temperatura	Lazo de control de concentración
$R_{21}(s)_1 = -27,016s^2 - 245,272s - 782,86$	$R_{12}(s)_1 = 2655,1s^2 + 26877s + 89223$
$S_{21}(s)_1 = s^2 + 6,9035s$	$S_{12}(s)_1 = s^2 + 5,9426s$
$T_{21}(s)_1 = -784,86$	$T_{12}(s)_1 = 89039$

(3.43)

(3.44)

3.3.4. Análisis de robustez mediante margen de disco

Para evaluar la estabilidad del esquema de control MIMO centralizado propuesto frente a incertidumbres de modelado, se empleó el análisis de Margen de Disco (Disk Margin).

Tabla 3.12: Ley de control descentralizada para el punto de equilibrio 5.

Lazo de control de temperatura	Lazo de control de concentración
$R_{11}(s)_5 = 8,1048s^2 + 218,31s + 452,49$ $S_{11}(s)_5 = s^2 + 54,247s$ $T_{11}(s)_5 = 452,49$	$R_{22}(s)_5 = 3847,8s^2 + 103810s + 217830$ $S_{22}(s)_5 = s^2 + 44,926s$ $T_{22}(s)_5 = 217830$
(3.45)	(3.46)

A diferencia de los márgenes de ganancia y fase clásicos de un solo lazo, que evalúan los lazos de forma independiente, el método del margen de disco considera variaciones simultáneas de ganancia y fase en todos los canales de entrada y salida. Este enfoque define una región de exclusión circular, denotada como $D(\alpha)$, centrada en el punto crítico $(-1, 0)$ en el plano de Nyquist. El tamaño de este disco, determinado por el parámetro α , representa la cantidad máxima de incertidumbre combinada que el sistema puede tolerar manteniendo la estabilidad en lazo cerrado (Skogestad y Postlethwaite, 2010).

Tabla 3.13: Resultados del análisis de margen de disco para el controlador MIMO.

Parámetro	Valor	Descripción
Margen de disco (α)	0.7777	Índice de robustez crítico
Margen de ganancia (GM)	$[0,125, 7,998]$	Variación de ganancia tolerable ($\approx \pm 18$ dB)
Margen de fase (PM)	$\pm 75,75^\circ$	Variación de fase tolerable

Los resultados cuantitativos del análisis de robustez se resumen en la Tabla 3.13. El sistema exhibe un índice de robustez de $\alpha \approx 0,78$, que corresponde a un margen de ganancia garantizado de aproximadamente ± 18 dB y un margen de fase de $\pm 75,7^\circ$. El Diagrama de Nyquist Multivariable (Fig. 3.5) visualiza estos resultados a través de los cuatro canales de entrada-salida (sistema de 2×2). Se extraen las siguientes observaciones:

- **Estabilidad Global:** Las trayectorias de respuesta en frecuencia (líneas azules) en todas las subgráficas no encierran el punto crítico ni invaden el disco de exclusión definido. De acuerdo con el Criterio de Nyquist Generalizado, esto confirma la

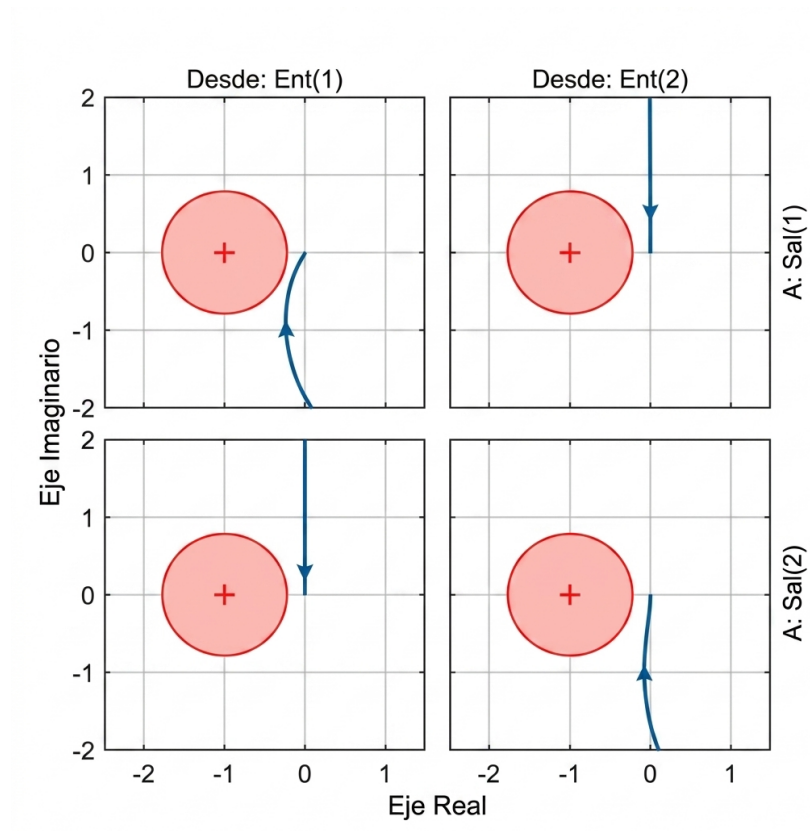


Figura 3.5: Diagrama de Nyquist generalizado para el controlador multivariable centralizado.

estabilidad nominal del sistema en lazo cerrado.

- **Alta Robustez:** El disco de exclusión es significativamente grande ($\alpha = 0,78$), y las trayectorias de Nyquist permanecen muy por fuera de esta región. Los márgenes calculados superan significativamente los requisitos estándar de control de procesos (típicamente $GM > 6$ dB y $PM > 45^\circ$).

El análisis demuestra que el controlador propuesto proporciona no solo estabilidad nominal, sino también una robustez excepcional. Los altos márgenes de ganancia y fase indican que el sistema puede soportar severos errores de modelado, degradación de actuadores o perturbaciones de acoplamiento cruzado sin correr el riesgo de inestabilidad. Esto valida la efectividad del diseño centralizado para el CSTR.

3.4. Control basado en RST SISO vs. RST MIMO: Una comparación de rendimiento

3.4.1. Escenarios de prueba

Se llevó a cabo una evaluación comparativa de las estructuras de control descentralizada y multivariable bajo varios escenarios críticos:

1. **Variaciones en las Condiciones Iniciales.** Debido a la sensibilidad de la planta CSTR, analizamos el rendimiento del controlador al iniciar desde estados fuera de equilibrio. Los valores iniciales específicos utilizados para estas simulaciones se enumeran en la Tabla 3.14. La temperatura inicial se encuentra entre los valores correspondientes al punto 1 (432.94 K) y al punto 5 (465 K), mientras que la concentración inicial corresponde a una conversión menor y no está en equilibrio con la temperatura inicial.

Tabla 3.14: Condiciones iniciales

Estados		Valor
T	(Temperatura del reactor)	440 K
C	(Concentración del reactor)	0,15 mol/L

2. **Rechazo de Ruido en la Entrada.** Para simular factores del mundo real como

la inestabilidad de la bomba o fluctuaciones en la línea de suministro, se superpone una señal de ruido aleatorio (Gaussiano) con un rango de ± 5 en las entradas de control, como se ilustra en la Fig. 3.6.

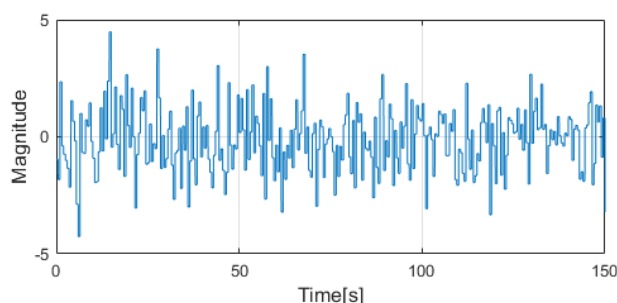


Figura 3.6: Ruido añadido a las entradas de control.

3. **Rechazo de Perturbaciones en la Salida.** Los controladores se prueban ante perturbaciones en la salida. Estas representan factores externos no medidos como cambios en la temperatura ambiente, fugas o fallas en la instrumentación que pueden afectar negativamente las condiciones internas del reactor. En la simulación, la perturbación se introduce en el sistema como una señal escalón. Esta señal es persistente, comienza en un tiempo específico y continúa hasta el final de la simulación.
4. **Seguimiento de Referencia (Setpoint Tracking).** La evaluación del rendimiento del seguimiento de referencia es crucial para proporcionar flexibilidad operativa en entornos industriales. Un seguimiento preciso es esencial para alejar el sistema de regiones indeseables o de la separatriz. En la práctica industrial, a menudo el CSTR necesita cambiar entre puntos de operación para optimizar el rendimiento de la reacción, reducir el consumo de energía o adaptarse a los cambios en el suministro de materia prima. El controlador también debe adherirse a trayectorias de referencia estrictas durante las fases de arranque y parada para garantizar la seguridad y una operación confiable. Además, las tasas de conversión del reactor deben alinearse con las demandas de los procesos aguas abajo y las restricciones de inventario. Por lo tanto, la ley de control debe asegurar transiciones suaves y rápidas entre estados de equilibrio, evitando sobreimpulsos que puedan empujar el sistema hacia una cuenca de atracción indeseada.

Las simulaciones se realizaron para comparar la efectividad de los enfoques de control descentralizado y multivariable centralizado. Para estas pruebas, la Fig. 3.7 presenta la

estructura del lazo de control RST SISO, mientras que la Fig. 3.8 ilustra la estructura de la arquitectura de control RST MIMO.

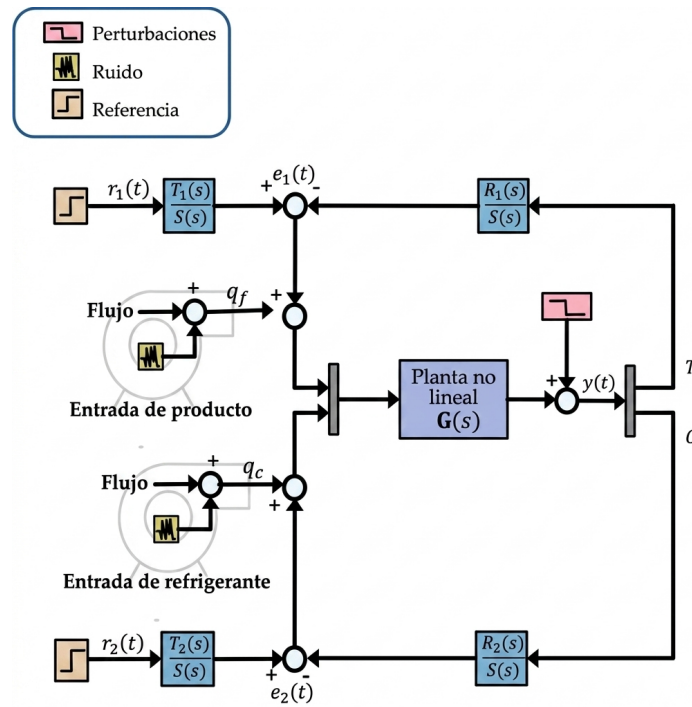


Figura 3.7: Diagrama de bloques de la estructura de control RST descentralizado.

3.4.2. Respuestas del control centralizado y descentralizado ante diversos escenarios de pruebas

En las figuras a continuación, el rendimiento del sistema en lazo cerrado asociado con la estructura de control descentralizada se etiqueta con la leyenda "SISO", mientras que el rendimiento de la estructura de control centralizada se etiqueta con la leyenda "MIMO". Las características del ruido de entrada, los eventos de perturbación y los cambios de referencia considerados en las pruebas del sistema de control se detallan en la Tabla 3.15.

Para la primera prueba, la referencia durante el intervalo $t = 0$ a 50 s corresponde a las condiciones de operación en el punto 1. Las respuestas de ambas estructuras de control, centralizada y descentralizada, se muestran en la Fig. 3.9 para la regulación de temperatura y en la Fig. 3.10 para la regulación de concentración. Para comparar de manera objetiva y cuantitativa la efectividad de ambos enfoques de control, se calcularon

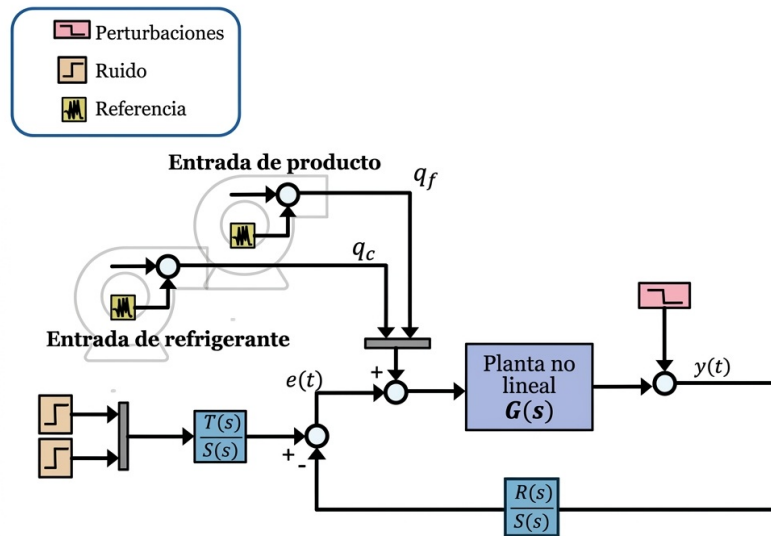


Figura 3.8: Diagrama de bloques de la estructura de control RST centralizado.

Tabla 3.15: Magnitud y tiempo de cada evento

Evento	Magnitud	Tiempo
Ruido añadido a las entradas	± 4 L/min	0 s
Perturbaciones en la salida	-3 K	50 s
Cambio de referencia en Temp.	+2 K	100 s
Cambio de ref. en Concentración	-0,03 mol/L	100 s

las métricas de rendimiento (IAE, ISE, ITAE e ITSE), fundamentadas analíticamente en la Sección 2.7 del marco teórico.

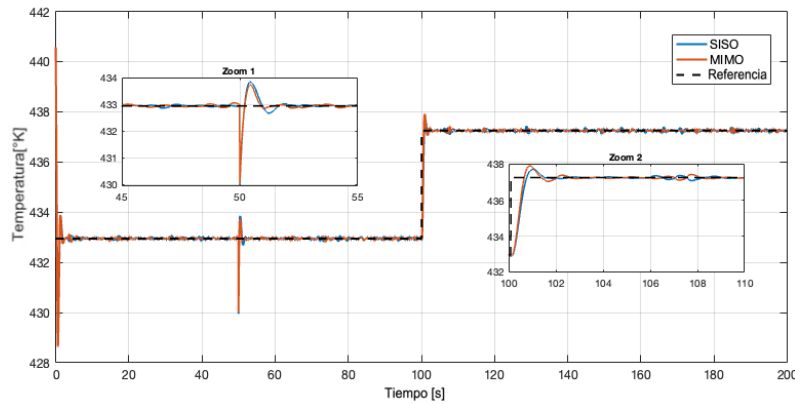


Figura 3.9: Respuesta de temperatura de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 1).

Tabla 3.16: Métricas de rendimiento para el control Descentralizado vs. Multivariable (Linealizado en el Punto de Operación 1)

Índice	Temperatura		Concentración	
	SISO	MIMO	SISO	MIMO
IAE	11.723	11.54	0.04613	0.045
ISE	20.962	20.5	0.00017	0.00022
ITAE	619.65	594.92	3.229	3.1911
ITSE	622.74	542.96	0.01446	0.01742

Con base en los índices de rendimiento reportados en la Tabla 3.16, el controlador MIMO superó al SISO en casi todas las métricas para la regulación de temperatura. No obstante, para la regulación de concentración se aprecia una ligera ventaja del esquema SISO. En general, ambas estrategias siguieron las referencias de manera eficiente y las acciones de control se mantuvieron dentro de los límites operativos durante todo el escenario de prueba, como se evidencia en la Fig. 3.11. En las secciones siguientes se presentan pruebas adicionales ante condiciones más exigentes.

En la Fig. 3.12, se puede observar cómo las trayectorias de temperatura se mueven a

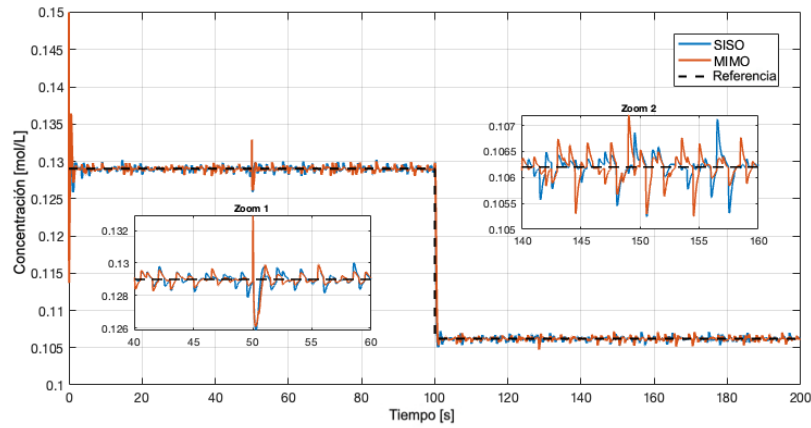
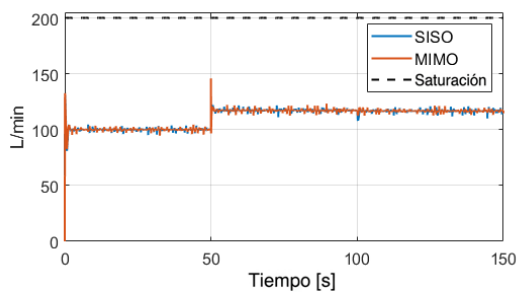
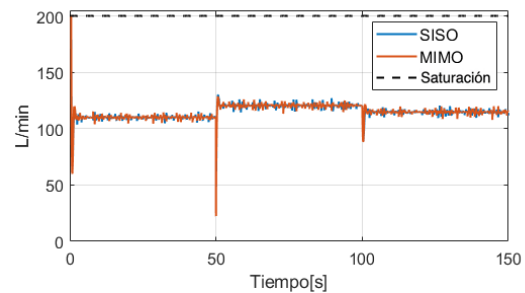


Figura 3.10: Respuesta de concentración de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 1).



(a) Ley de control del flujo del producto



(b) Ley de control del flujo de refrigerante

Figura 3.11: Comparación de las leyes de control bajo condiciones iniciales variantes, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida (Diseño basado en la linealización en el punto de equilibrio 1).

través de regiones de operación con dinámicas variables. El comportamiento del sistema puede cambiar significativamente si las condiciones iniciales se desvían demasiado de la región linealizada, como se demostrará en las pruebas posteriores.

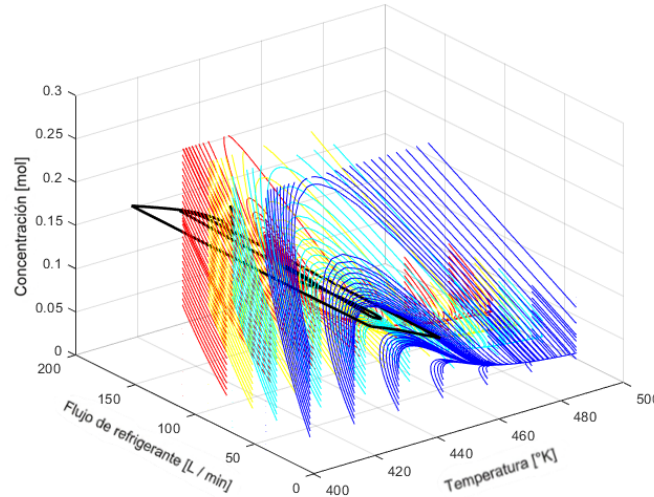


Figura 3.12: Trayectoria de la respuesta del control centralizado superpuesta en el plano de fase para la temperatura en el punto de equilibrio 1.

Para el segundo escenario de prueba, durante el intervalo de $t = 0$ a 50 s la referencia corresponde a las condiciones de operación en el Punto 5. Los mismos escenarios de prueba con las características mostradas en la Tabla 3.15 se emplean para evaluar las estructuras de control SISO y MIMO alrededor del Punto de Operación 5.

La Fig. 3.13 demuestra que la estructura de control MIMO sigue con éxito la referencia de temperatura, manteniendo un rendimiento robusto a pesar de la introducción de ruido en la entrada, perturbaciones en la salida y condiciones iniciales variantes.

Por el contrario, la estructura SISO no logra alcanzar la referencia; en su lugar, el controlador se estabiliza en un punto de equilibrio dentro de la segunda cuenca de atracción. La entrada de control fuerza a la temperatura a permanecer cerca de los 350 K, lo cual corresponde a la temperatura de equilibrio del nodo encontrado en los retratos de fase sin importar el caudal de refrigerante.

En cuanto a la regulación de concentración, la Fig. 3.14 muestra que ambos controladores mantienen con éxito el nivel de referencia de concentración. El fallo del lazo

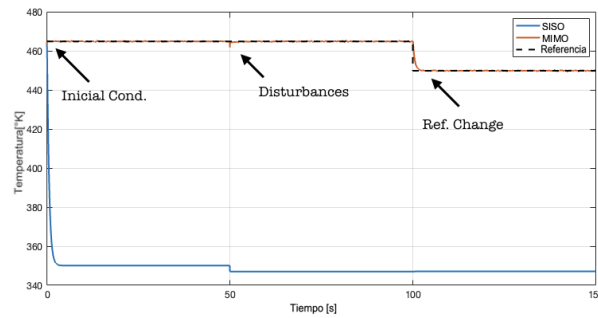


Figura 3.13: Respuesta de temperatura de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 5).

de temperatura SISO, mientras el lazo de concentración permanece estable, resalta las limitaciones de los lazos descentralizados independientes.

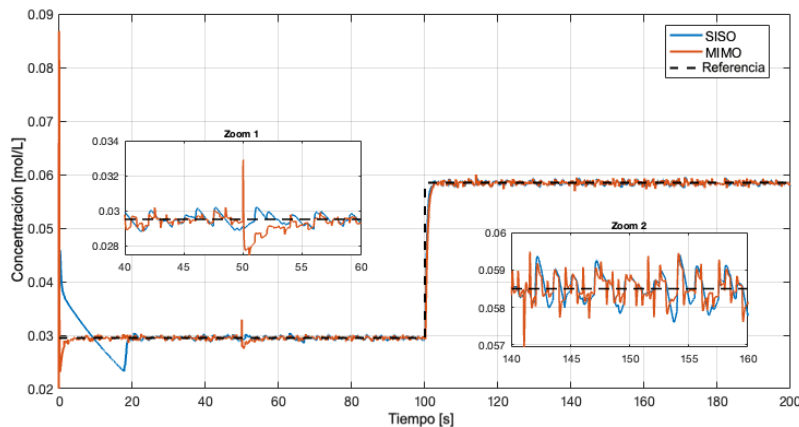
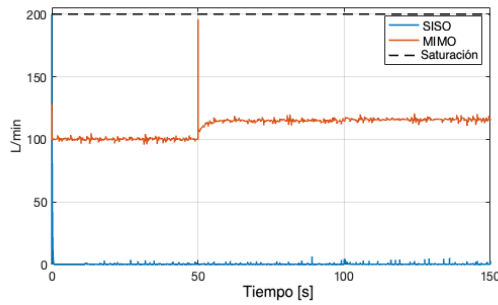
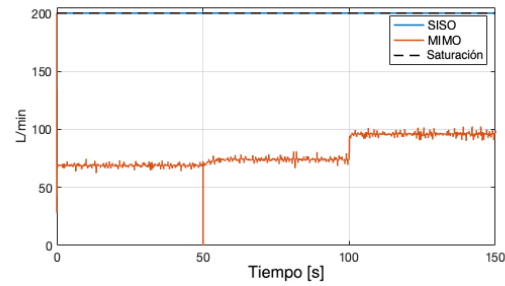


Figura 3.14: Respuesta de concentración de las estructuras de control descentralizada vs. multivariable ante variaciones en las condiciones iniciales, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida. (Diseño de control basado en la linealización del modelo en el punto de equilibrio 5).

Este resultado es consistente con el análisis RGA presentado en la Sección 2.3. Dicho análisis reveló que el emparejamiento óptimo entrada-salida se invierte entre las dos regiones de operación. Dado que el controlador descentralizado depende de emparejamientos fijos, no puede adaptarse a este cambio estructural, lo que resulta en el fallo observado en el lazo de temperatura. El rendimiento resultante se ilustra adicionalmente mediante las señales de control en la Fig. 3.15, donde el flujo de producto en el esquema



(a) Ley de control del flujo del producto.



(b) Ley de control del flujo del refrigerante.

Figura 3.15: Comparación de las leyes de control bajo condiciones iniciales variantes, ruido en la entrada y perturbaciones en la salida (Diseño basado en la linealización en el punto de equilibrio 5).

SISO disminuye casi a cero, mientras que el flujo de refrigerante se satura en su límite superior. Aunque el esquema de control permite la regulación adecuada de una variable, la otra no logra alcanzar su referencia (setpoint).

Tabla 3.17: Métricas de rendimiento para el control Descentralizado vs. Multivariable (Linealizado en el Punto de Operación 5)

Índice	Temperatura		Concentración	
	SISO	MIMO	SISO	MIMO
IAE	16727	26.049	0.0817	0.05973
ISE	$1,874 \times 10^6$	105.93	0.00044	0.00072
ITAE	$1,228 \times 10^6$	1773.2	4.1298	4.0861
ITSE	$1,34 \times 10^8$	6897.8	0.02742	0.03424

El examen de los índices de rendimiento en la Tabla 3.17 revela una clara diferencia entre las dos estructuras de control con respecto a la respuesta de temperatura. Si bien la diferencia en el control de concentración es mínima, es importante resaltar la capacidad de la estructura de control MIMO para manejar condiciones iniciales ubicadas más lejos del punto de operación. A medida que la temperatura se ajusta al setpoint, la trayectoria del sistema se mueve a través de diferentes regiones operativas como se muestra en la Fig. 3.16. La relación cambiante entre las variables, como lo revelan los retratos de fase del sistema no lineal, obliga a la estructura de control SISO a lidiar con comportamientos complejos.

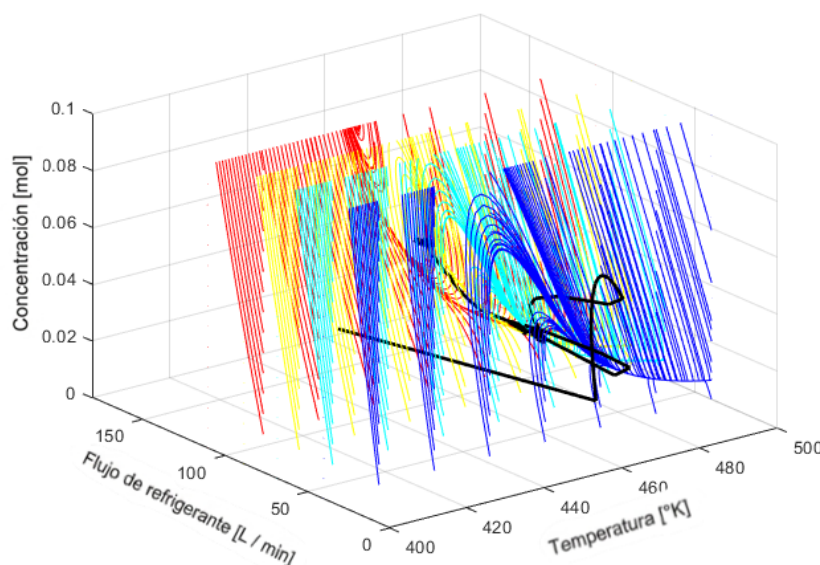


Figura 3.16: Trayectoria de la respuesta del control MIMO superpuesta en los planos de fase.

3.4.3. Análisis adicional de la influencia de las condiciones iniciales

Investigamos cómo se ve influenciado el rendimiento de las estructuras de control a medida que las condiciones iniciales se alejan del equilibrio. Las nuevas condiciones iniciales consideradas se detallan en la Tabla 3.18.

Tabla 3.18: Condiciones iniciales para la evaluación del diseño de control basado en la linealización del Punto de Operación 1

Estados	Valor
T (Temperatura del reactor)	450 K
C (Concentración del reactor)	0,15 mol/L

Las Figs. 3.17 y 3.18 muestran claramente la disparidad de rendimiento entre las dos estructuras ante los cambios en las condiciones iniciales. En este escenario, únicamente la estructura de control MIMO sigue las referencias de manera efectiva; la estructura SISO desestabiliza el sistema. Las señales de control resultantes se ilustran en la Fig. 3.19.

El análisis de las gráficas de las señales de control en la Fig. 3.19 demuestra la agresividad

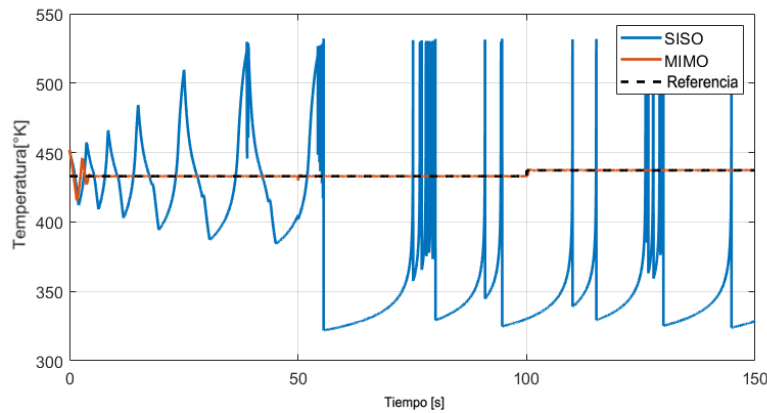


Figura 3.17: Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada (MIMO) y descentralizada (SISO).

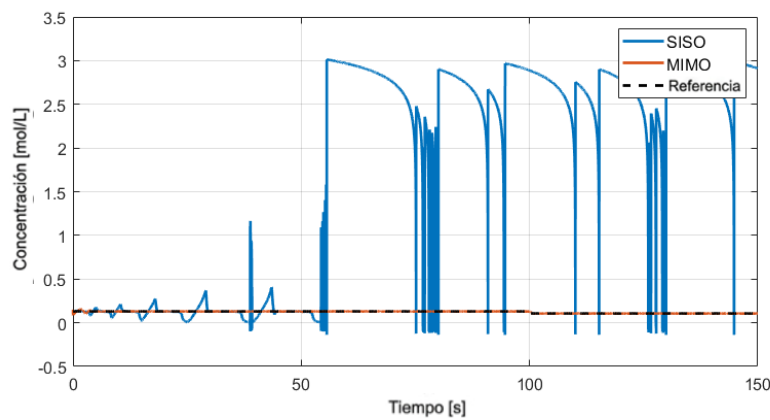
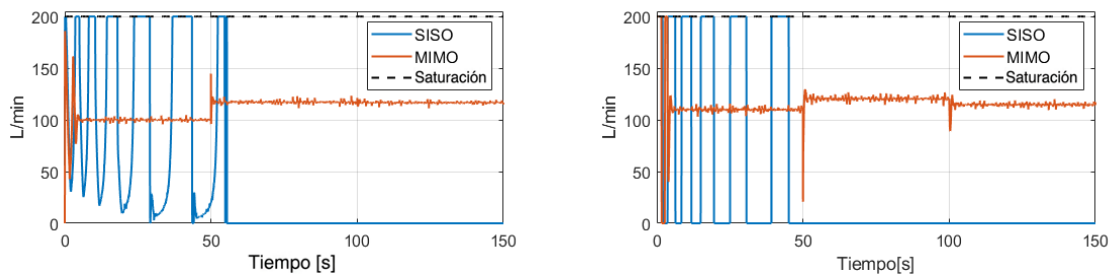


Figura 3.18: Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada (MIMO) y descentralizada (SISO).



(a) Esfuerzo de control del flujo del producto. (b) Esfuerzo de control del flujo del refrigerante.

Figura 3.19: Comparación de los esfuerzos de control generados por las estructuras centralizada y descentralizada.

inherente de la estrategia de control SISO. A partir de esta observación, se concluye que, aunque ambos controladores exhiben un rendimiento satisfactorio en condiciones nominales, la imposición de condiciones iniciales más desafiantes conduce a una inestabilidad considerable en el sistema controlado por SISO. Este comportamiento resalta sus limitaciones para adaptarse a escenarios dinámicos complejos. Dado que los lazos de control SISO operan de manera independiente y en paralelo sin coordinación, entran en conflicto entre sí. Como resultado, se observa un desempeño deficiente caracterizado por oscilaciones. El sistema en lazo cerrado diverge y exhibe saturación de las entradas.

3.4.4. Control RST SISO vs. MIMO: Seguimiento de referencia (Setpoint Tracking)

Se evalúa la robustez de los controladores comparando su rendimiento en una trayectoria escalonada de largo alcance. Para el seguimiento de temperatura, el setpoint se desplaza cada 50 segundos, desde el Punto de Equilibrio 1 (432.94 K) hasta el Punto de Equilibrio 5 (465 K), con pasos intermedios en 437.25 K, 442.07 K y 450.03 K. Este escenario está diseñado para forzar al controlador —linealizado en el Punto de Equilibrio 1— a operar muy fuera de su región de diseño. El rendimiento del control de temperatura se muestra en la Fig. 3.20.

Para el seguimiento de la concentración, el setpoint se mueve cada 50 segundos, comenzando desde el Punto de Equilibrio 1 (0,1298 mol/L) y terminando en el Punto de Equilibrio 5 (0,0295 mol/L) con pasos intermedios en 0,1062, 0,0848 y 0,0585 mol/L. El rendimiento del control de concentración se presenta en la Fig. 3.21.

La Fig. 3.22 presenta los esfuerzos de control generados por los controladores ante los cambios secuenciales de referencia. Los resultados demuestran que ambas estrategias manejaron eficazmente el seguimiento del setpoint, poniendo de manifiesto su robustez ante modificaciones de referencia.

Como se mencionó anteriormente, el control del CSTR bajo estudio incorpora un grado extra de libertad en comparación con configuraciones convencionales. El enfoque estándar implica ajustar la calidad del producto únicamente mediante la manipulación del flujo de refrigerante, con un estricto énfasis en no impactar el volumen general de producción. El enfoque propuesto consiste en manipular tanto el flujo de refrigerante como el flujo de producto, afectando mínimamente el nivel de producción.

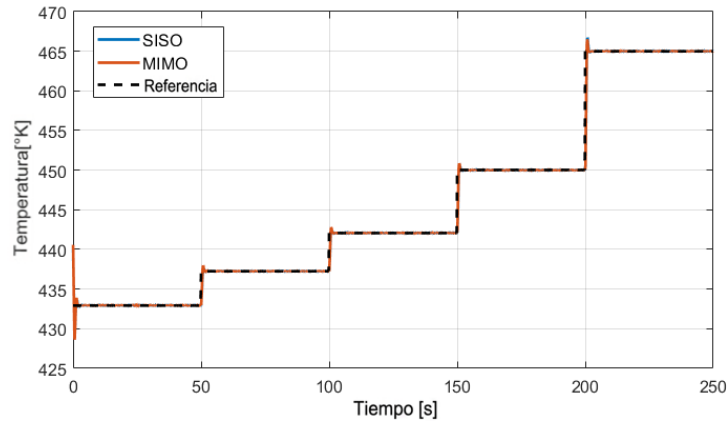


Figura 3.20: Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada y descentralizada.

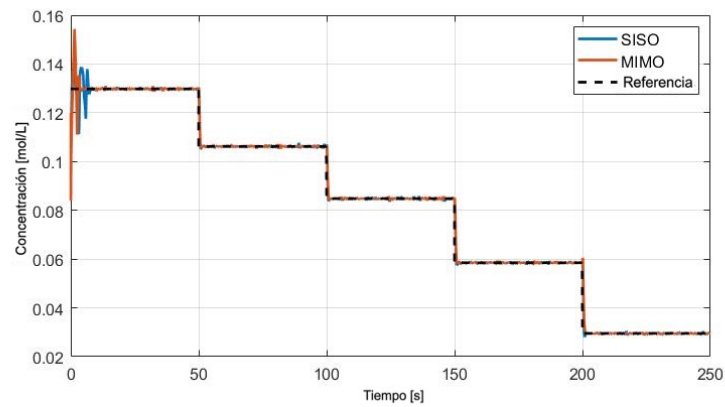
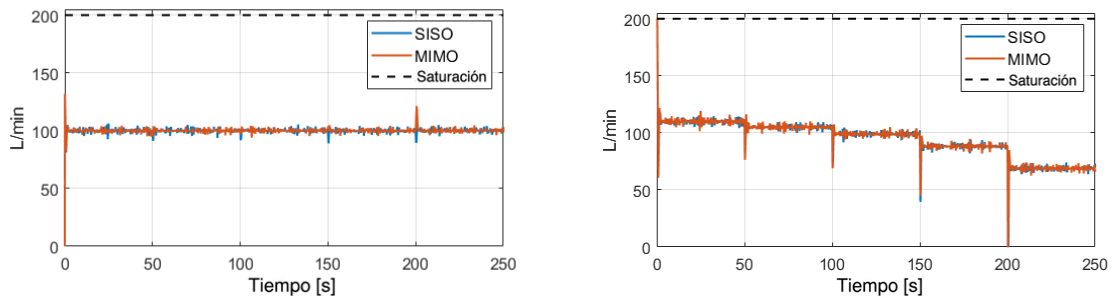


Figura 3.21: Comparación de la respuesta de las estructuras de control centralizada y descentralizada.



(a) Esfuerzo de control del flujo del producto. (b) Esfuerzo de control del flujo del refrigerante.

Figura 3.22: Esfuerzos de control generados por los controladores durante el escenario de seguimiento secuencial de referencia (del punto de equilibrio 1 al 5).

La flexibilidad del control se pone de manifiesto en la Fig. 3.22: el sistema ajusta significativamente los niveles de temperatura y concentración sin alterar sustancialmente el caudal del producto, incluso bajo variados escenarios de prueba. El rendimiento cuantitativo de ambos esquemas se sintetiza en la Tabla 3.19.

Tabla 3.19: Comparación de los controles RST SISO y MIMO. Índices de rendimiento para el seguimiento de referencia.

Índice	Control de Temperatura		Control de Concentración	
	SISO	MIMO	SISO	MIMO
IAE	26.948	25.062	0.0832	0.09156
ISE	116.46	104.64	0.00066	0.00093
ITAE	3289.7	2976.2	9.5075	10.818
ITSE	18245	16123	0.09244	0.13019

Estas pruebas revelaron un buen rendimiento de ambas estructuras de control. No obstante, se ha observado que cuando las condiciones iniciales se desvían significativamente del punto de equilibrio, la estructura de control SISO puede presentar dificultades para mantener la estabilidad del sistema. A continuación se evalúa el seguimiento de temperatura en una trayectoria inversa. El setpoint se ajusta cada 50 segundos, desde el Punto de Equilibrio 5 (465 K) hasta el Punto de Equilibrio 1 (432.94 K), recorriendo los mismos pasos intermedios en orden inverso. Este escenario emplea el controlador basado en el modelo linealizado en el Punto de Equilibrio 5 y, de igual manera, el sistema opera muy lejos de su región de diseño. Los resultados de temperatura se presentan en la Fig. 3.23.

La estructura de control SISO descentralizada falló esta prueba. Como se muestra en la Fig. 3.23, el controlador de temperatura no logró seguir la referencia y, en su lugar, fue capturado por el equilibrio estable en la segunda cuenca de atracción.

3.4.5. Comparación con ASPPIA (Colocación de Polos de Espacio Aumentado con Acción Integral) y MPC

Para evaluar el mérito relativo del controlador RST MIMO robusto propuesto, sin desviar el enfoque principal de esta tesis hacia una evaluación comparativa exhaustiva de control clásico frente a predictivo, se incluye un análisis comparativo conciso contra

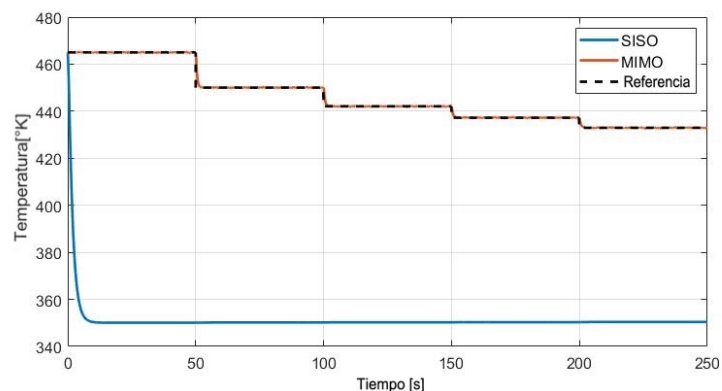


Figura 3.23: Comparación de la Temperatura de las estructuras de control centralizada y descentralizada.

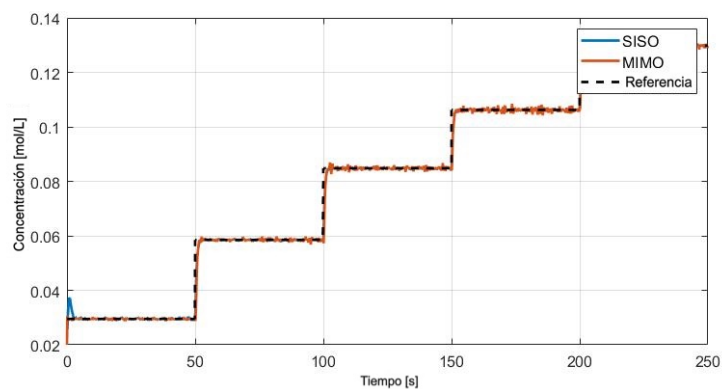
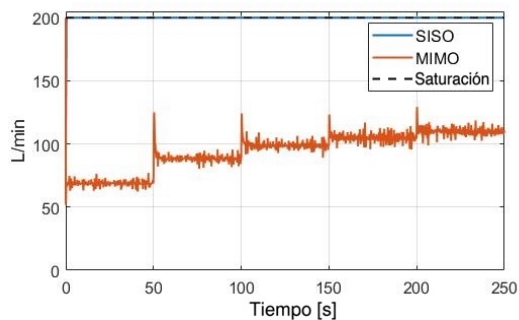
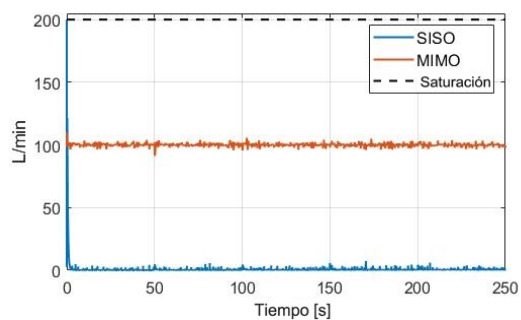


Figura 3.24: Comparación de la Concentración de las estructuras de control centralizada y descentralizada.



(a) Esfuerzo de control del flujo del producto. (b) Esfuerzo de control del flujo del refrigerante.

Figura 3.25: Esfuerzos de control generados por las estructuras de control centralizada y descentralizada (transición del punto de equilibrio 5 al 1).

dos de los paradigmas de control multivariable centralizado más reconocidos: (i) un servocontrol de colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA, véase la Sección 2.5) y (ii) una formulación convencional de Control Predictivo Basado en Modelo lineal (LMPC, véase la Sección 2.6). El objetivo es proporcionar una línea base de referencia representativa bajo el mismo protocolo de simulación, transiciones dinámicas no lineales y perturbaciones externas considerados en este capítulo.

Línea base ASPPIA

El controlador ASPPIA se incluye como una línea base clásica de control centralizado. Este esquema combina la retroalimentación de variables de estado con una acción integral para garantizar error nulo en estado estacionario ante señales de referencia y perturbaciones de carga constantes por tramos, constituyendo una referencia clásica para la validación de técnicas avanzadas.

Para esta comparación, el diseño de ASPPIA se realizó en tiempo continuo a partir del modelo linealizado en el espacio de estados en torno al Punto de Operación 5 (definido por las variables nominales y parámetros de equilibrio detallados en las Tablas 3.4 y 3.5). Este modelo lineal local se representa mediante las matrices en tiempo continuo (A, B, C, D) con $C = \mathbf{I}_2$ y $D = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, que corresponden a la descripción en variables físicas de desviación $\Delta x(t) = x(t) - x_{eq}$ y $\Delta u(t) = u(t) - u_{eq}$, donde el vector de estados físicos y salidas es $x = y = [T, C]^\top$ y el vector de entradas de control es $u = [q_f, q_c]^\top$.

Siguiendo la formulación matemática de la Sección 2.5, la dinámica de la planta se extiende mediante dos estados integrales asociados al error de seguimiento, definiendo el vector de estados integrales $x_I(t) \in \mathbb{R}^2$ como:

$$x_I(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (3.47)$$

donde $r(t) = [T_{ref}, C_{ref}]^\top$ representa las trayectorias de referencia deseadas. La representación en variables de estado de este sistema aumentado de dimensión $n + p = 4$ queda determinada por las matrices continuas $A_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $B_e \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ descritas en (2.44).

La sintonización del controlador ASPPIA se efectúa mediante la técnica de asignación de polos aplicada sobre el par aumentado (A_e, B_e) , lo que garantiza estabilidad interna y define las características del transitorio en lazo cerrado. Para asegurar una comparación

justa y consistente con el controlador RST centralizado propuesto en este trabajo, el conjunto de polos en lazo cerrado se seleccionó de forma idéntica a los valores de diseño del esquema RST MIMO especificados en la Tabla 3.10. De este modo, los cuatro polos del polinomio característico deseado se componen como se indica en la Tabla 3.20.

Tabla 3.20: Colocación de polos en lazo cerrado para el controlador ASPPIA.

Polos	Posición
Dominantes	$\{-1,9755, -24,6614\}$
Auxiliares	$\{-5,9265, -73,9842\}$
Totales colocados	$\{-1,9755, -24,6614, -5,9265, -73,9842\}$

Los polos se asignaron de forma exacta mediante el algoritmo multivariable de la función `place` de MATLAB, lo que permite sintetizar la matriz de ganancias compuesta $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ (según se define en (2.45)).

De acuerdo con el formalismo del control integral aumentado, la matriz de ganancias obtenida se particiona en la forma $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_p & K_i \end{bmatrix}$, donde $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la ganancia proporcional de estados que actúa sobre el vector de desviaciones físicas y $K_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ representa la ganancia de acción integral asociada a los integradores de error. La ley de control continua expresada en variables físicas de la planta está dada por:

$$u(t) = u_{eq} - K_p(x(t) - x_{eq}) - K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau \quad (3.48)$$

donde x_{eq} y u_{eq} son los valores de operación nominal en el Punto de Operación 5 (Tablas 3.4 y 3.5). Al resolver el problema de asignación de polos multivariable, las matrices de ganancia proporcional e integral resultantes son:

$$K_p = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0046 & -0,6763 \\ -0,0402 & -5,0538 \end{bmatrix}, \quad K_i = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0000 & -6,9264 \\ 0,1458 & 6,9295 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para evaluar de manera rigurosa la robustez de ASPPIA, la planta no lineal del reactor CSTR se simuló bajo el mismo protocolo de prueba que el controlador RST centralizado. Este protocolo incluye el mismo cronograma de transiciones entre puntos de operación (desde condiciones iniciales de desequilibrio $T_0 = 450$ K y $C_0 = 0,02$ mol/L), el mismo

ruido en la entrada de los actuadores y perturbaciones constantes en la salida de temperatura.

La respuesta de temperatura mostrada en la Fig. 3.26 y la respuesta de concentración mostrada en la Fig. 3.27 ilustran el desempeño dinámico en el Punto de Operación 5. Se observa que ambos controladores proporcionan una atenuación de perturbaciones comparable, donde el control RST centralizado robusto propuesto presenta un rendimiento ligeramente superior bajo la perturbación de salida. La diferencia más notable aparece después del cambio de referencia subsiguiente, donde el controlador propuesto logra un seguimiento más estricto con una menor desviación transitoria y una atenuación más rápida. Esto demuestra que la formulación polinomial del RST MIMO centralizado posee una mayor capacidad intrínseca para compensar el fuerte acoplamiento e inestabilidad local del reactor CSTR en este régimen agresivo de operación, comparado con la rigidez paramétrica de la sintonización lineal clásica de ASPPIA.

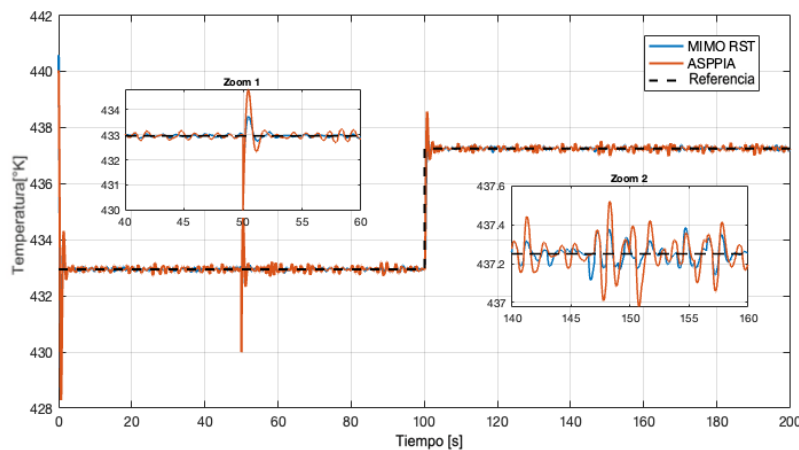


Figura 3.26: Comparación de la respuesta de temperatura: RST centralizado vs. ASPPIA.

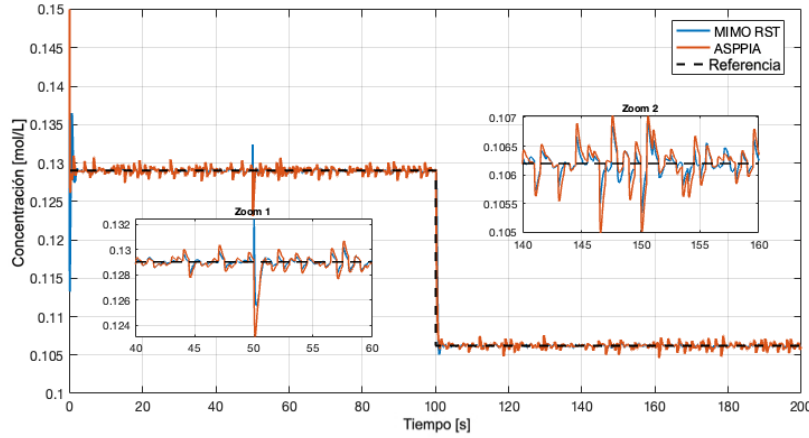


Figura 3.27: Comparación de la respuesta de concentración: RST centralizado vs. ASPPIA.

Línea base del Control Predictivo Basado en Modelo (MPC)

El MPC, cuya formulación teórica se presenta en la Sección 2.6, es un marco de control multivariable de amplio uso industrial que resuelve, en cada instante de muestreo, un problema de optimización bajo restricciones a lo largo de un horizonte de predicción finito. Para la comparación presentada en este trabajo, se diseñó un controlador MPC estándar utilizando el modelo lineal de la planta en espacio de estados correspondiente al Punto de Operación 5, derivado de la linealización del modelo no lineal del CSTR descrita anteriormente (véanse las Tablas 3.4 y 3.5). El modelo predictivo interno del MPC utiliza la representación en variables de estado continuas (A, B, C, D) con $C = \mathbf{I}_2$ y $D = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, lo que permite la medición directa de ambos estados (temperatura y concentración).

Los parámetros de diseño del controlador MPC se resumen en la Tabla 3.21. El tiempo de muestreo se fijó en $T_s = 0,05$ s, lo que resulta en un horizonte de predicción de $N_p \cdot T_s = 4$ s, suficiente para capturar la dinámica dominante del sistema. El horizonte de control se limitó a $N_c = 5$ pasos para reducir la carga computacional del solver QP manteniendo un grado de libertad adecuado en la optimización.

La ponderación de las variables de salida en la función de costo se realizó empleando el criterio de la regla de Bryson, que normaliza los pesos de cada variable de salida con respecto a la magnitud máxima aceptable de su desviación. Dado que la concentración opera en un rango numérico significativamente menor que la temperatura ($C \approx 0,03$ mol/L

Tabla 3.21: Parámetros de diseño del controlador MPC.

Parámetro	Valor	Descripción
<i>Horizontes y muestreo</i>		
T_s	0.05 s	Tiempo de muestreo
N_p	80	Horizonte de predicción (4 s)
N_c	5	Horizonte de control
<i>Pesos de la función de costo (2.47)</i>		
Q	diag(1, 400)	Pesos de salida (regla de Bryson)
R	diag(0,1, 0,1)	Pesos de tasa de control
<i>Restricciones de actuadores (2.48)</i>		
u_1 (flujo de producto)	[0, 200] L/min	Límites de posición
Δu_1	± 20 L/min	Límites de tasa
u_2 (flujo de refrigerante)	[0, 150] L/min	Límites de posición
Δu_2	± 20 L/min	Límites de tasa

frente a $T \approx 465$ K), el factor de penalización asignado a la concentración ($Q_{22} = 400$) es sustancialmente mayor que el de la temperatura ($Q_{11} = 1$), lo que asegura que el optimizador penalice proporcionalmente los errores en ambas variables. Por otra parte, los pesos de penalización de la tasa de cambio de las variables manipuladas ($R = \text{diag}(0,1, 0,1)$) imponen un compromiso entre la velocidad de respuesta y la suavidad de la señal de control.

Las restricciones en los actuadores modelan los límites físicos de operación de las válvulas de control: el flujo de producto u_1 y el flujo de refrigerante u_2 están acotados en el rango [0, 200] y [0, 150] L/min, respectivamente, con una tasa máxima de cambio de ± 20 L/min por paso de muestreo. La simulación se realizó con condiciones iniciales $T_0 = 450$ K y $C_0 = 0,02$ mol/L, que difieren del punto de equilibrio nominal ($T_{eq} = 465$ K, $C_{eq} = 0,0295$ mol/L), lo que permite evaluar la capacidad del MPC para estabilizar el sistema desde un estado fuera de equilibrio. Finalmente, para garantizar la equidad comparativa, el controlador MPC fue evaluado bajo el mismo protocolo de pruebas dinámicas detallado en la Sección 3.4.1. Esto incluyó idénticos perfiles de ruido de medición en los actuadores, perturbaciones en la salida de temperatura y cambios tipo

escalón en las referencias aplicados a los esquemas RST y ASPPIA.

Discusión de los resultados comparativos

La evaluación comparativa de desempeño dinámico se estructuró a través de trayectorias con transiciones de puntos de operación y perturbaciones severas de carga, con el fin de estresar el margen de robustez de las leyes de control bajo condiciones no lineales. Los resultados reportados a continuación se centran en el Punto de Operación 5, que representa el régimen de mayor inestabilidad térmica. Las Figuras 3.28 y 3.29 contrastan la respuesta temporal de temperatura y concentración, respectivamente, para el esquema RST centralizado robusto propuesto y la línea base del MPC estándar.

El esquema RST propuesto demuestra una alta efectividad en régimen estacionario local y un desempeño de regulación superior durante las transiciones de referencia, amortiguando de forma más rápida las oscilaciones transitorias causadas por el fuerte acoplamiento del reactor. En particular, se demuestra que el controlador RST centralizado de síntesis analítica alcanza un rendimiento comparable al de la línea base del MPC lineal basado en optimización numérica en línea bajo los escenarios evaluados, reduciendo el sobreimpulso transitorio sin incurrir en un esfuerzo de control excesivo ni requerir el cómputo recursivo en tiempo real de un problema de programación cuadrática.

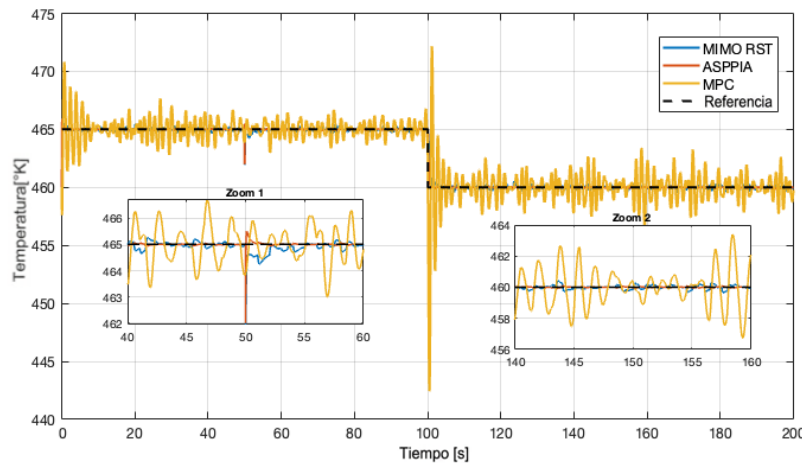


Figura 3.28: Comparación de la respuesta de temperatura: RST centralizado vs. MPC.

Es importante destacar que, si bien existen formulaciones avanzadas de control predictivo (como MPC no lineal, robusto o adaptativo), en este trabajo la comparación se restringe deliberadamente a una estructura de MPC lineal convencional de base. El objetivo no es

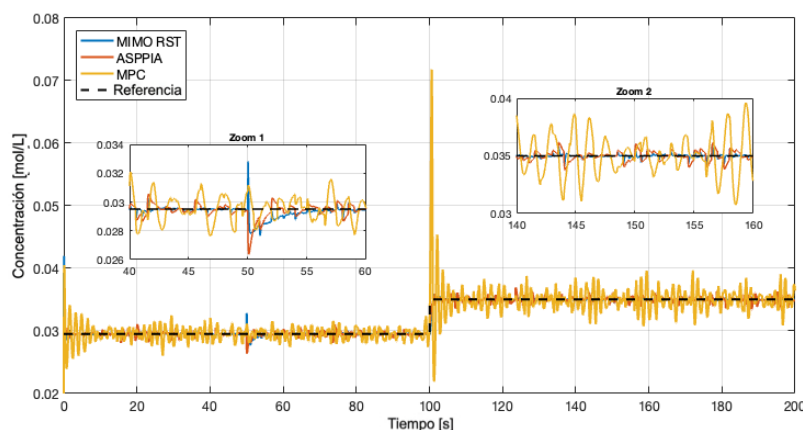


Figura 3.29: Comparación de la respuesta de concentración: RST centralizado vs. MPC.

realizar un estudio exhaustivo sobre las variantes de algoritmos basados en optimización, sino establecer una cota de referencia clásica y de amplia aceptación científica sobre la cual contrastar el potencial de la formulación polinomial centralizada. Del mismo modo, aunque el esquema RST centralizado propuesto puede combinarse con mecanismos adaptativos, su análisis básico en lazo cerrado permite sentar las bases de la metodología sin introducir factores de confusión dinámicos.

En este sentido, los resultados empíricos y analíticos corroboran que el controlador RST centralizado robusto ofrece un desempeño dinámico multivariable equivalente o superior al del servocontrol clásico por colocación de polos de espacio aumentado con acción integral (ASPPIA), y comparable al del MPC lineal de referencia. La formulación polinomial centralizada del RST logra un compromiso favorable en las transiciones dinámicas y perturbaciones evaluadas, compensando las interacciones sin requerir la optimización numérica recurrente en tiempo real propia del MPC.

En este capítulo se ha presentado la extensión de la estructura de control RST al caso MIMO, la validación sobre el CSTR mediante dos puntos de operación y múltiples escenarios de prueba, y la comparativa cuantitativa con los esquemas de referencia ASPPIA y MPC. Los resultados demuestran que el controlador RST centralizado propuesto garantiza estabilidad interna, rechaza perturbaciones y sigue trayectorias de referencia en condiciones donde los esquemas descentralizados colapsan, con una carga computacional de diseño notablemente inferior a la del MPC. El Capítulo 4 presenta las conclusiones generales de la investigación y las perspectivas de trabajo futuro.

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajos a Futuro

4.1. Conclusiones

El presente trabajo ha planteado, desarrollado y validado una metodología sistemática para la extensión del controlador de estructura polinomial RST al caso multivariable centralizado. A lo largo de los capítulos precedentes se construyó un marco teórico-práctico coherente que abarca desde los fundamentos algebraicos polinomiales hasta la evaluación comparativa sobre un sistema de referencia confiable. Las conclusiones que se derivan de esta investigación se articulan en torno a cuatro ejes: el marco teórico, la metodología de síntesis, los resultados de desempeño y las implicaciones prácticas.

4.1.1. Sobre el marco teórico y la formulación algebraica

La descripción de la planta mediante descripciones de fracciones matriciales (MFD) con denominador escalar común $\mathcal{A}(s)$ constituye el puente algebraico que hace posible la generalización del esquema RST. Su virtud fundamental es que preserva la estructura polinomial del problema SISO: la no conmutatividad de las matrices queda absorbida en la matriz numeradora $\mathcal{B}(s)$, mientras que las operaciones sobre $\mathcal{A}(s)$ retienen el álgebra escalar. Esto permite plantear la identidad de Bézout matricial extendida

$$\mathcal{A}(s)\mathcal{S}(s)\mathbf{I}_n + \mathcal{B}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{D}(s) \quad (4.1)$$

como un problema lineal de asignación de coeficientes. La coprimicidad izquierda de las matrices polinomiales de la planta es la condición algebraica necesaria y suficiente que garantiza la existencia de solución para cualquier matriz de lazo cerrado deseada $\mathcal{D}(s)$.

Un hallazgo metodológico relevante es el papel del método de diseño por canales individuales para la resolución práctica de esta identidad. En lugar de resolver el sistema matricial acoplado global (que tiene una elevada complejidad numérica), la descomposición de la identidad de Bézout en ecuaciones diofánticas escalares independientes para cada elemento de la planta ($G_{ij}(s)$) permite calcular de forma exacta el controlador. Esta metodología reduce el coste computacional del diseño y permite que los coeficientes del polinomio de denominador $S_{ji}(s)$ se adapten a las características específicas de cada canal, manteniendo al mismo tiempo la dinámica de lazo cerrado uniforme a través de un único polinomio característico de diseño $D_d(s)$. Asimismo, las problemáticas inherentes a este diseño elemento por elemento (tales como la dependencia en la sintonización y la sensibilidad ante acoplamientos) fueron contrarrestadas eficazmente mediante la adopción de una matriz polinomial de retroalimentación $\mathcal{R}(s)$ completa para compensar activamente las interacciones cruzadas, y la posterior verificación de robustez multivariable mediante el margen de disco, garantizando la estabilidad global frente a incertidumbres dinámicas simultáneas.

De esta manera, el controlador centralizado resultante preserva la estructura polinomial original, lo que proporciona una solución altamente eficiente y viable para reactores CSTR no lineales.

4.1.2. Sobre el análisis de la planta CSTR

El análisis cuantitativo del reactor de tanque agitado continuo (CSTR) reveló la inadecuación estructural de los esquemas descentralizados para este sistema. La matriz de ganancias relativas (RGA) mostró valores alejados de la identidad en los puntos de operación estudiados, lo que indica un acoplamiento cruzado significativo. El número de condición (CN) elevado confirmó una alta sensibilidad direccional que penaliza la robustez de los lazos independientes. Adicionalmente, el índice de Niederlinski (NI) negativo en los puntos de operación más exigentes evidenció que cualquier lazo descentralizado estable individualmente puede convertirse en inestable al cerrar todos los lazos simultáneamente, lo que valida la necesidad inherente de un enfoque centralizado.

El análisis del plano fase y la multiplicidad de equilibrios ilustraron la alta no linealidad del sistema: la separatriz entre cuencas de atracción impone restricciones severas a la amplitud de los cambios de referencia admisibles, y la proximidad a dicha frontera determina en gran medida la exigencia de las transiciones evaluadas. Esta caracterización dinámica motivó el diseño de los escenarios de prueba comparativos, asegurando condiciones representativas y estresantes para todos los controladores.

4.1.3. Sobre el desempeño del controlador RST MIMO centralizado

Los resultados de simulación demuestran de forma consistente que el controlador RST centralizado propuesto satisface los cuatro objetivos específicos planteados en la introducción:

- **Seguimiento de referencia.** El controlador logra transiciones suaves entre los puntos de operación evaluados, con tiempos de establecimiento y sobreimpulsos comparables al MPC de línea base y superiores al esquema descentralizado en los regímenes de mayor acoplamiento.
- **Rechazo de perturbaciones.** Ante perturbaciones escalón en las salidas y ruido aditivo en las entradas de control, el RST centralizado atenúa efectivamente las desviaciones en estado estacionario, gracias a la acción integral implícita incorporada en $\mathcal{S}(s)$ mediante la inclusión del integrador como polo deseado de lazo cerrado.
- **Robustez en transiciones entre puntos de operación.** En las transiciones hacia el punto de operación 5, el de mayor dificultad dinámica, el controlador centralizado mantiene la viabilidad del lazo cerrado, mientras el esquema descentralizado exhibe oscilaciones sostenidas o pérdida de estabilidad, validando la hipótesis de investigación.
- **Ventaja computacional frente al MPC.** El RST centralizado ofrece un desempeño equiparable al ASPPIA y al MPC de línea base, con la ventaja adicional de una carga computacional en tiempo real significativamente inferior a la del MPC y una transparencia analítica que los enfoques basados en optimización no ofrecen. En el diseño fuera de línea, la resolución del sistema lineal $M_S \theta = d_{cl}$ se traduce en una ley de control de implantación directa, sin necesidad de resolución iterativa

en tiempo real.

4.1.4. Sobre las implicaciones prácticas

Desde una perspectiva de ingeniería de procesos, la contribución central es demostrar que es posible sintetizar un controlador centralizado multivariable a partir de herramientas algebraicas elementales, polinomios, matrices de Sylvester y álgebra lineal, sin recurrir a rutinas de optimización numérica en línea. Esta propiedad hace al esquema RST MIMO especialmente atractivo para aplicaciones con restricciones computacionales, donde la predictibilidad del tiempo de ejecución del controlador es un requisito de seguridad.

Asimismo, la naturaleza modular de la síntesis, al separar la identificación de $\mathcal{A}(s)$ y $\mathcal{B}(s)$, la especificación de $D_{cl}(s)$ y la resolución del sistema lineal, facilita la resintonización ante cambios en el modelo de la planta, lo que apoya su aplicación en esquemas de control adaptativo o de conmutación entre múltiples modelos lineales. En síntesis, los resultados respaldan la hipótesis de investigación: el control RST MIMO mediante la ecuación de Bézout matricial y la representación MFD produce un controlador centralizado eficaz, con estructura analítica transparente y bajo costo computacional en línea.

Finalmente, es importante destacar que este trabajo representa una primera etapa en esta línea de investigación. El objetivo principal fue demostrar que es posible diseñar y aplicar estructuras de control RST multivariables. De esta manera, esta tesis es un primer paso sencillo pero riguroso para lograr una estructura de control centralizada completa, dejando una base firme y abriendo varias opciones de estudio a futuro para seguir mejorando esta metodología.

4.2. Trabajo Futuro

Los resultados de este trabajo abren diversas líneas de investigación que permitirían ampliar el alcance, la generalidad y la aplicabilidad práctica del esquema propuesto. A continuación se describen las direcciones más relevantes:

4.2.1. Extensión al dominio de tiempo discreto

La formulación presentada opera en el dominio de tiempo continuo. Una extensión natural e industrialmente relevante es la síntesis del controlador RST MIMO directamente en

tiempo discreto, empleando matrices polinomiales en la variable de adelanto z en lugar de s . Este paso es fundamental para la implementación en controladores lógicos programables (PLC) y sistemas embebidos de tiempo real, donde el período de muestreo es un parámetro de diseño crítico. La ecuación de Bézout matricial y la estructura de Sylvester admiten de forma directa esta transposición; sin embargo, la elección del polinomio de lazo cerrado deseado $D_d(z)$ debe contemplar los criterios de estabilidad discreta, raíces dentro del círculo unitario y el efecto del período de muestreo sobre la coprimidad de la representación MFD.

4.2.2. Aplicación a sistemas con denominadores no comunes

Una restricción de la metodología propuesta es el supuesto de que todas las funciones de transferencia de la planta comparten el mismo denominador escalar $\mathcal{A}(s)$. Esta condición simplifica la representación MFD pero no siempre se satisface en plantas reales con modales estructuralmente distintos. Una dirección de investigación abierta es la extensión de la síntesis RST a plantas cuyas funciones de transferencia presentan denominadores individualmente distintos, donde la planta admite únicamente una representación MFD con denominador matricial $\mathcal{A}(s)$ no diagonal. En este caso, la ecuación de Bézout toma su forma más general y la condición de coprimidad debe verificarse mediante el máximo divisor común matricial por la izquierda (LGCD), empleando herramientas como la forma normal de Hermite o las bases de Gröbner para módulos sobre anillos de polinomios.

4.2.3. Extensión a sistemas no cuadrados

La formulación actual asume una planta cuadrada ($m = n$, igual número de entradas y salidas). Muchos procesos industriales son inherentemente no cuadrados debido a la redundancia de actuadores o a restricciones operativas que limitan el número de entradas disponibles. Extender el controlador RST MIMO a este contexto requiere reformular la ecuación de Bézout para matrices rectangulares y analizar las condiciones de existencia de solución en términos de la estructura de ceros invariantes de transmisión de la planta. Las representaciones MFD no cuadradas, junto con las formas normales de Smith-McMillan, ofrecen el marco algebraico adecuado para abordar este problema, cuya resolución ampliaría significativamente el rango de aplicabilidad del esquema propuesto.

4.2.4. Control tolerante a fallas

El marco RST centralizado puede extenderse hacia un esquema de control tolerante a fallas mediante la incorporación de un módulo de detección y diagnóstico de fallas (FDD) que monitoree la coherencia entre las salidas medidas y el modelo de la planta. Ante la detección de una falla en un actuador o sensor, la ley de control podría reconfigurarse resolviendo una nueva instancia del sistema $M_S \theta = d_{cl}$ con un modelo de planta modificado que refleje el modo de falla activo. Este enfoque aprovecha directamente la modularidad de la síntesis algebraica y podría integrarse con técnicas de observación robusta para estimar las salidas no medibles durante la reconfiguración, lo que garantiza la continuidad operativa del proceso.

4.2.5. Resolución de la ecuación de Bézout mediante otras metodologías

En el presente trabajo, la resolución de la ecuación de Bézout matricial se abordó utilizando una matriz de Sylvester asociada a la descomposición por canales individuales. Sin embargo, para futuros desarrollos se plantea explorar metodologías de resolución alternativas que aporten ventajas numéricas o conceptuales. Entre las metodologías clásicas, se contempla el empleo de representaciones en el espacio de estados (como las formas canónicas de control u observación) para mapear el problema polinomial a un problema equivalente de asignación de polos mediante realimentación de estados y observadores. Asimismo, se pueden evaluar enfoques basados en matrices de Sylvester globales (bloques de Toeplitz) para resolver el sistema de forma directa y simultánea. Por otra parte, entre las metodologías modernas, se propone la utilización de bases de Gröbner para realizar divisiones polinomiales multivariantes sobre anillos de polinomios no conmutativos, lo que resulta idóneo cuando no se dispone de un denominador escalar común. Adicionalmente, la reformulación de la ecuación de Bézout en términos de ecuaciones matriciales de Stein o Lyapunov representa una alternativa moderna prometedora para optimizar la resolución en sistemas de alta dimensión, previniendo problemas de condicionamiento numérico.

4.2.6. Sintonización del controlador mediante otras metodologías

La sintonización del controlador RST propuesto se basó en la asignación de un polinomio característico de lazo cerrado uniforme $D_{cl}(s)$. Como trabajo futuro, se plantea la incorporación de metodologías alternativas de sintonización que optimicen el desempeño dinámico y la robustez. Dentro de los enfoques clásicos, se estudiará la sintonización en el dominio de la frecuencia mediante el modelado de la respuesta en frecuencia, utilizando diagramas de Bode y Nyquist para especificar márgenes de fase y ganancia multivariables. También se considera el uso de la teoría de reguladores óptimos lineales cuadráticos (LQR/LQG) para definir de manera óptima las trayectorias de los polos deseados. En cuanto a las metodologías modernas, se explorará el uso de optimización metaheurística (como algoritmos genéticos o optimización por enjambre de partículas, PSO) para realizar una búsqueda inteligente de las raíces óptimas de $D_{cl}(s)$ sujetas a restricciones de robustez multivariable. Asimismo, se propone integrar la síntesis robusta H_∞ y la síntesis μ para incorporar de forma explícita las cotas de incertidumbre dinámica no estructurada en el diseño.

4.2.7. Reto de llevarlo a una experimentación real

Finalmente, el paso desde las simulaciones numéricas hacia un entorno físico real representa una línea prioritaria para validar la aplicabilidad práctica de la propuesta. El principal reto consiste en trasladar la ley de control centralizada a una experimentación real, lo cual exige confrontar las limitaciones físicas del hardware y de los sistemas de adquisición de datos. Entre estos aspectos destacan la presencia de ruido de medición y sesgos no modelados en sensores de temperatura y concentración, la cuantización de las señales en los convertidores analógico-digitales y digital-analógicos, y los retardos inherentes a las redes de comunicación industrial o tiempos de muestreo y ejecución física en controladores lógicos programables (PLC). Adicionalmente, las discrepancias dinámicas inevitables del modelo físico real (fricción en válvulas, dinámicas de la chaqueta de calentamiento y variaciones dinámicas del volumen) requieren un esquema con alta robustez ante perturbaciones e incertidumbre de parámetros. La superación de este reto demanda el diseño de un protocolo experimental riguroso, que inicie con pruebas de hardware en el lazo (*hardware-in-the-loop*, HIL) para certificar el comportamiento temporal antes del despliegue físico definitivo.

Bibliografía

- Abdurraqueeb, Akram M. et al. (2023). «Stability Improvement of a DC Boost Converter Supplying a Constant Power Load via a Digital Robust Control Technique». En: *2023 3rd International Conference on Emerging Smart Technologies and Applications, eSmarTA 2023*. DOI: [10.1109/ESMARTA59349.2023.10293684](https://doi.org/10.1109/ESMARTA59349.2023.10293684).
- Åström, K. J. y B. Wittenmark (1982). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall. URL: https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=TynEAgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=computer+controlled+systems+astrom&ots=ogGSxQDjqu&sig=ir_p-Q-hhFwKC52q9BXSQRbrRNc.
- Babesse, Saad, Djameledine Ameddah y Fouad Inel (2016). «Comparison between RST and PID Controllers Performance of a Reduced Order Model and the Original Model of a Hydraulic Actuator Dedicated to a Semi-Active Suspension». En: *World Journal of Engineering* 13.1, págs. 66-71. DOI: [10.1108/WJE-02-2016-008](https://doi.org/10.1108/WJE-02-2016-008).
- Banerjee, S. et al. (2024). «Data-Driven Control of Highly Interactive Systems using 3DoF Model-On-Demand MPC: Application to a MIMO CSTR». En: *IFAC-PapersOnLine* 58, págs. 420-425.
- Basilio, J. C. y M. V. Moreira (jul. de 2004). «A Robust Solution of the Generalized Polynomial Bezout Identity». En: *Linear Algebra and Its Applications* 385.1-3, págs. 287-303. DOI: [10.1016/j.laa.2003.11.030](https://doi.org/10.1016/j.laa.2003.11.030).
- Bhat, Vinayambika S., I. Thirunavukkarasu y S. Shanmugapriya (2018). «Design of Centralized Robust Pi Controller for a Multivariable Process». En: *journal of engineering science and technology*.
- Camacho, Eduardo F., Carlos Bordons y José M. Maestre (2026). «Introduction to Model Predictive Control». En: págs. 1-23. DOI: [10.1007/978-3-031-87596-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-87596-0_1).

- Carriegos, Miguel V., Noemí DeCastro García y Ángel Luis Muñoz Castañeda (jun. de 2019). «Partitions, Diophantine Equations, and Control Systems». En: *Discrete Applied Mathematics* 263, págs. 96-104. DOI: [10.1016/j.dam.2018.01.015](https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.01.015).
- Chang, Wei Der y Chih Yung Chen (2014). «PID Controller Design for MIMO Processes Using Improved Particle Swarm Optimization». En: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 33.5, págs. 1473-1490. DOI: [10.1007/s00034-013-9710-4](https://doi.org/10.1007/s00034-013-9710-4).
- Colbu, Stefania - Cristiana et al. (2021). «Stability Analysis and Control for Non-isothermal CSTR Reactors». En: 2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC), págs. 504-509. DOI: [10.1109/ICSC50472.2021.9666616](https://doi.org/10.1109/ICSC50472.2021.9666616).
- Deifalla, M. y B.K. Abdalla (2025). «Performance Evaluation of PID Tuning Techniques for CSTR Temperature Control: Classical and Evolutionary Approaches». En: *Journal of Karary University for Engineering and Science*.
- Franklin, Gene F, J David Powell y Abbas Emami-Naeini (2019). «Feedback Control of Dynamic Systems Eighth Edition». En: URL: <https://lccn.loc.gov/2017032553>.
- Garrido, Juan, Francisco Vázquez y Fernando Morilla (2012). «Centralized Multivariable Control by Simplified Decoupling». En: *Journal of Process Control* 22.6, págs. 1044-1062. DOI: [10.1016/j.jprocont.2012.04.008](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2012.04.008).
- Godoy, Emmanuel y Eric Ostertag (ene. de 2006). «RST-controller Design: A Rational Teaching Method Based on Two Diophantine Equations». En: IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). IFAC Secretariat, págs. 541-546. DOI: [10.3182/20060621-3-es-2905.00093](https://doi.org/10.3182/20060621-3-es-2905.00093).
- Guo, Huiru, Zhi Yong Feng y Jinhua She (2020). «Discrete-Time Multivariable PID Controller Design with Application to an Overhead Crane». En: *International Journal of Systems Science* 51.14, págs. 2733-2745. DOI: [10.1080/00207721.2020.1801881](https://doi.org/10.1080/00207721.2020.1801881).
- Hajaya, M. y T. Shaqarin (2019). «Control of a Benchmark CSTR Using Feedback Linearization». En: *JORDANIAN JOURNAL OF ENGINEERING AND CHEMICAL INDUSTRIES (JJEI)* 2, págs. 67-75.
- Hromčík, Martin, Radek Frízel y Zdeněk Hurák (2006). «Banded Matrix Solvers and Polynomial Diophantine Equations». En: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)* 5, págs. 531-536. DOI: [10.3182/20060705-3-fr-2907.00091](https://doi.org/10.3182/20060705-3-fr-2907.00091).
- Hussein, S.A., M. El-Affendi y A.A. El-Latif (2025). «Advanced Control Strategies for Nonlinear Continuous Stirred Tank Reactors Using Emerging Technologies». En: *International Conference on Smart Systems and Emerging Technologies*. Vol. 1401. Springer Nature Switzerland, págs. 292-307. DOI: [10.1007/978-3-031-91235-1_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-91235-1_26).

- Inoue, Akira et al. (2020). «Model Predictive Control of Multivariable Plants Using Interactor and Solving Procedure of Matrix Polynomial Diophantine Equations». En: *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration* 13.3, págs. 84-89. DOI: [10.9746/jcmsi.13.84](https://doi.org/10.9746/jcmsi.13.84).
- Jacknoon, Aman, Mohamed Hassan y Sami El Ferik (abr. de 2016). «Design of RST Controllers Based on Intelligent Optimization Algorithms». En: *Proceedings of 2016 Conference of Basic Sciences and Engineering Studies, SGCAC 2016*, págs. 177-182. DOI: [10.1109/SGCAC.2016.7458025](https://doi.org/10.1109/SGCAC.2016.7458025).
- Jha, Bhola et al. (2019). «Vector-Controlled Induction Motor Drives Using Intelligent Rst Robust Controller». En: *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 768. Springer Verlag, págs. 649-667. DOI: [10.1007/978-981-13-0617-4_62](https://doi.org/10.1007/978-981-13-0617-4_62).
- Khadraoui, Sofiane et al. (2014). «A Measurement-Based Technique for Designing Fixed-Order RST Controllers and Application to a Coupled Water Tank System». En: *Systems Science and Control Engineering* 2.1, págs. 484-492. DOI: [10.1080/21642583.2014.920281](https://doi.org/10.1080/21642583.2014.920281).
- Khandelwal, Shubham y Ketan P. Detroja (2020). «The Optimal Detuning Approach Based Centralized Control Design for MIMO Processes». En: *Journal of Process Control* 96, págs. 23-36. DOI: [10.1016/j.jprocont.2020.10.006](https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2020.10.006).
- Kong, He, Guang-Ren Duan y Bin Zhou (2009). «A Stein equation approach for solutions to the Bezout identity and the generalized Bezout identity». En: *Proceedings of the 2009 Chinese Control Conference*. IEEE, págs. 126-130. DOI: [10.1109/CHICC.2009.5272658](https://doi.org/10.1109/CHICC.2009.5272658).
- Laid, Khettache et al. (mayo de 2023). «Optimization of RST Controller for Speed Control of Linear Induction Motor Using Genetic Algorithm». En: *Recent Advances in Electrical & Electronic Engineering* 17.3, págs. 260-268. DOI: [10.2174/2352096516666230519114514](https://doi.org/10.2174/2352096516666230519114514).
- Landau, I. D. (1998). «The R-S-T Digital Controller Design and Applications». En: *Control Engineering Practice* 6.2, págs. 155-165. DOI: [10.1016/S0967-0661\(98\)00016-1](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(98)00016-1).
- Landau, I. D. y A. Karimi (1998). «Robust Digital Control Using Pole Placement with Sensitivity Function Shaping Method». En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 8.2, págs. 191-210. DOI: [10.1002/\(SICI\)1099-1239\(199802\)8:2<191::AID-RNC323>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199802)8:2<191::AID-RNC323>3.0.CO;2-J).
- Landau, Ioan Doré y Gianluca Zito (2007). *Digital Control Systems : Design , Identification and Implementation*. Springer.

- Leithead, W. E. y J. O'Reilly (1992a). « m -input m -output feedback control by individual channel design: Part 1. Structural issues». En: *International Journal of Control* 56.6, págs. 1347-1397. DOI: [10.1080/00207179208934369](https://doi.org/10.1080/00207179208934369).
- (1992b). «Performance issues for individual channel design». En: *International Journal of Control* 55.2, págs. 265-312. DOI: [10.1080/00207179208934241](https://doi.org/10.1080/00207179208934241).
- Lin, Chong, Qing Guo Wang y Tong Heng Lee (2004). «An Improvement on Multi-variable PID Controller Design via Iterative LMI Approach». En: *Automatica* 40.3, págs. 519-525. DOI: [10.1016/j.automatica.2003.10.008](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2003.10.008).
- Liu, L. et al. (2019). «A Review of Industrial MIMO Decoupling Control». En: *International Journal of Control, Automation and Systems* 17, págs. 1246-1254. DOI: [10.1007/s12555-018-0367-4](https://doi.org/10.1007/s12555-018-0367-4).
- Meena, Rammurthi et al. (sep. de 2023). «Smith-Predictor Based Enhanced Dual-DOF Fractional Order Control for Integrating Type CSTRs». En: *International Journal of Chemical Reactor Engineering* 21.9, págs. 1091-1106. DOI: [10.1515/IJCRE-2022-0216/MACHINEREADABLECITATION/RIS](https://doi.org/10.1515/IJCRE-2022-0216/MACHINEREADABLECITATION/RIS).
- O'Reilly, J. y W. E. Leithead (1991). «Multivariable control by 'individual channel design'». En: *International Journal of Control* 54.1, págs. 1-46. DOI: [10.1080/00207179108934150](https://doi.org/10.1080/00207179108934150).
- Ogata, Katsuhiko et al. (2010). «Modern Control Engineering Fifth Edition». En.
- Okienková, K. et al. (2025). «Robust Model Predictive Control of the Van De Vusse Reaction With Uncertain Extended Prediction Model and LMI-Based Design». En: *IEEE Access* 13, págs. 182088-182106.
- Ostertag, Eric y Emmanuel Godoy (2005). «RST-controller Design for Sinewave References by Means of an Auxiliary Diophantine Equation». En: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC '05* 2005.4, págs. 6905-6910. DOI: [10.1109/CDC.2005.1583273](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1583273).
- Pandey, S.K., J. Dey y S. Banerjee (2024). «Control of Generalized Decoupled MIMO Systems Based on Linear Programming Method». En: *IETE Journal of Research* 70, págs. 3901-3927. DOI: [10.1080/03772063.2023.2215211](https://doi.org/10.1080/03772063.2023.2215211).
- Pekař, J. y V. Havlena (2004). «Control of CSTR using model predictive controller based on mixture distribution». En: *IFAC Proceedings Volumes* 37, págs. 793-798. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)31322-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)31322-8).
- Prokop, Roman y Jiří Korbel (2015). «Matrix Equations in Multivariable Control». En: *WSEAS Transactions on Systems and Control* 10, págs. 320-327.

- Qing-Guo Wang Wen-Jian Cai, Zhen Ye y Chang-Chieh Hang (2008). *PID Control for Multivariable Processes*. Singapore: Springer.
- Rajpoot, V. et al. (2024). «Comparison of Reinforcement Learning and Model Predictive Control for a Nonlinear Continuous Process». En: *IFAC-PapersOnLine* 57, págs. 304-308.
- Sainz-García, Susana Haydee et al. (2022). «Adaptive Control for Narrow Bandwidth Input and Output Disturbance Rejection for a Non-Isothermal CSTR System». En: *Mathematics* 10.18, pág. 3224. DOI: [10.3390/math10183224](https://doi.org/10.3390/math10183224).
- Shen, Yuling, Youxian Sun y Wei Xu (jun. de 2014). «Centralized PI/PID Controller Design for Multivariable Processes». En: *Industrial and Engineering Chemistry Research* 53.25, págs. 10439-10447. DOI: [10.1021/ie501541s](https://doi.org/10.1021/ie501541s).
- Shyamalagowri, M. y R. Rajeswari (2014). «Model Predictive Control Design for Nonlinear Process Control Reactor Case Study: CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor)». En: *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology* 3.3, págs. 88-94.
- Skogestad, Sigurd y Ian Postlethwaite (2010). *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley.
- Suo, L. et al. (2020). «Study on the Nonlinear Dynamics of the Continuous Stirred Tank Reactors». En: *Processes* 8, pág. 1436.
- Thomas Kailath (1980). *Linear Systems*. Prentice-Hall.
- Tzekis, P. A. (2007). «A New Algorithm for the Solution of a Polynomial Matrix Diophantine Equation». En: *Applied Mathematics and Computation* 193.2, págs. 395-407. DOI: [10.1016/j.amc.2007.03.076](https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.076).
- Tzekis, P. A., E. Antoniou y S. Vologiannidis (2013). «Computation of the General Solution of a Multivariate Polynomial Matrix Diophantine Equation». En: *2013 21st Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2013 - Conference Proceedings*, págs. 677-682. DOI: [10.1109/MED.2013.6608796](https://doi.org/10.1109/MED.2013.6608796).
- Vardoulakis, Antonis y Cui Wei (2018). «Balance Control of the Pendubot via the Polynomial Matrix Approach». En: *2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2018* 2, págs. 19-24. DOI: [10.1109/CoDIT.2018.8394798](https://doi.org/10.1109/CoDIT.2018.8394798).
- Wang, Qing-Guo (ago. de 2007). «Decoupling Control». En: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Berlin Heidelberg, págs. 1-9. DOI: [10.1007/3-540-46151-5_1](https://doi.org/10.1007/3-540-46151-5_1).

- Wang, Zaiying y Liu Ying (2012). «Study on the Temperature Dual Control of CSTR with Coil Cooling and Jacket Cooling and Application». En: *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, págs. 3359-3363. DOI: [10.1109/WCICA.2012.6358454](https://doi.org/10.1109/WCICA.2012.6358454).
- Xiao, Fanghui, Dong Lu y Dingkan Wang (2021). «Solving Multivariate Polynomial Matrix Diophantine Equations with Gröbner Basis Method». En: *Journal of Systems Science and Complexity* 12001030. DOI: [10.1007/s11424-021-0072-x](https://doi.org/10.1007/s11424-021-0072-x).
- Xu, J ; et al. (oct. de 2023). «Multivariable Coupled System Control Method Based on Deep Reinforcement Learning». En: *Sensors 2023, Vol. 23, Page 8679* 23.21, págs. 8679-8679. DOI: [10.3390/S23218679](https://doi.org/10.3390/S23218679).
- Yamada, Manabu y Yasuyuki Funahashi (1993). «A Simple Algorithm for Solutions of Diophantine Equation». En: *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers* 0261.2.
- Yoder, E. y W. Strasser (2025). «Need for Control: Instability of Continuous Stirred Tank Polymerization Reactor Simulations». En: *Industrial & Engineering Chemistry Research* 64, págs. 23847-23857. DOI: [10.1021/acs.iecr.5c03903](https://doi.org/10.1021/acs.iecr.5c03903).
- Yu, M. et al. (2025). «PPO-based resilient control framework for safer operation of exothermic CSTR». En: *Process Safety and Environmental Protection* 193, págs. 558-576.
- Zhou, Bin, Guang-Ren Duan y Z.-Y. Li (2009). «A Stein matrix equation approach for computing coprime matrix fraction description». En: *IET Control Theory & Applications* 3.3, págs. 317-330. DOI: [10.1049/iet-cta.2008.0128](https://doi.org/10.1049/iet-cta.2008.0128).
- Zrigan, A.F. et al. (2023). «Optimized PID Controller and Generalized Inverted Decoupling Design for MIMO System». En: *2023 IEEE International Conference on Advanced Systems and Emergent Technologies (IC_ASET)*, págs. 1-6. DOI: [10.1109/IC_ASET58101.2023.10150957](https://doi.org/10.1109/IC_ASET58101.2023.10150957).
- Zúñiga Anaya, J. C. y D. Henrion (2008). «An improved Toeplitz algorithm for polynomial matrix null-space computation». En: *Applied Mathematics and Computation* 201.2, págs. 622-628. DOI: [10.1016/j.amc.2008.10.037](https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.10.037).

Article

Unified Algebraic Framework for Centralized and Decentralized MIMO RST Control for Strongly Coupled Processes

Cesar A. Peregrino ¹, Guadalupe Lopez Lopez ^{1,*}, Nelly Ramirez-Corona ², Victor M. Alvarado ^{1,*},
Froylan Antonio Alvarado Lopez ³ and Monica Borunda ⁴

¹ Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, TecNM/CENIDET, Cuernavaca 62493, Morelos, Mexico; d18ce039@cenidet.tecnm.mx

² Departamento de Ingeniería Química, Alimentos y Ambiental, Universidad de las Américas Puebla, Cholula 72810, Puebla, Mexico; nelly.ramirez@udlap.mx

³ Département de Mathématiques, Faculté Sciences et Ingénierie, Université de Toulouse, 31062 Toulouse, France; froylan.alvarado-lopez@univ-tlse3.fr

⁴ SECIHTI, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Tecnológico Nacional de México, Cuernavaca 62490, Morelos, Mexico; monica.bp@cenidet.tecnm.mx

* Correspondence: guadalupe.ll@cenidet.tecnm.mx (G.L.L.); victor.am@cenidet.tecnm.mx (V.M.A.); Tel.: +52-777-362-7770 (ext. 2219) (G.L.L.); +52-777-362-7770 (ext. 2222) (V.M.A.)

Abstract

Reliable multivariable control is critical for industrial sectors where processes exhibit severe nonlinearities and interactions. A Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR) is a rigorous benchmark for testing control strategies addressing these complexities. This work first establishes a linear MIMO mathematical framework to define the specific structure of such interactive systems. Analysis via phase planes and steady-state analysis reveals low controllability, bistability, and strong coupling, leading to the collapse of traditional decoupled control schemes. To address these issues via multivariable control, we propose a centralized MIMO RST control structure synthesized via a Matrix Fraction Description (MFD) and the extended Bézout equation. Simulations for performance evaluation and comparison highlight the following key findings: (1) the centralized RST maintains stability and tracking precision in regions where decentralized RST loops fail; (2) it exhibits performance comparable to the Augmented State Pole Placement with Integral Action (ASPPIA) method and outperforms the standard Model-Based Predictive Control (MPC) baseline, particularly during critical equilibrium point transitions; and (3) it offers a robust yet computationally simple design that provides superior flexibility for pole placement, accommodating future identification-based models and adaptive tuning. These results validate our algebraic synthesis as a robust, computationally efficient solution for managing highly interactive nonlinear dynamics.

Keywords: centralized MIMO control; RST control structure; extended Bézout equation; process interaction; algebraic synthesis; phase plane analysis; matrix fraction description

MSC: 93C35; 93B55; 93-10



Academic Editor: Haitao Li

Received: 15 December 2025

Revised: 4 February 2026

Accepted: 12 February 2026

Published: 14 February 2026

Copyright: © 2026 by the authors.

Licensee MDPI, Basel, Switzerland.

This article is an open access article distributed under the terms and

conditions of the [Creative Commons Attribution \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

1. Introduction

Accurate control of multiple variables solves safety and efficiency issues in sectors that range from chemical processes to aerospace engineering. This broad type of application underscores the pivotal role of cutting-edge control systems. In this vein, the core part of this paper is the guidance for an advanced control strategy of multivariable chemical plants.