

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA



**FENOMENOS DE TRANSPORTE I
(MECANICA DE FLUIDOS)**

LIBRO DE TEXTO

Ingeniería Bioquímica

M. C. Jorge Enrique Duque Landeros

Periodo Sabático: 13 de agosto de 2018 al 12 de agosto de 2019

Contenido

PROLOGO.....	4
INTRODUCCION	6
CAPITULO 1 FUNDAMENTOS DE TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.....	7
1.1 ESTATICA DE FLUIDOS	7
1.2 BOYANTEZ	12
1.3 PROCESOS DE TRANSFERENCIA	14
1.4 LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD	14
1.5 VISCOSIDAD.....	17
1.6 FLUIDOS NO NEWTONIANOS.....	21
1.7 REGIMENES DE FLUJO.	26
1.8 ESTIMACION DE VISCOSIDAD.	29
PROBLEMAS.....	36
CAPITULO 2 ANALISIS EN FLUJO LALMINAR	45
2.1 EL POSTULADO GENERAL DE BALANCES.....	45
2.2 PERFILES DE VELOCIDAD Y DE ESFUERZO CORTANTE PARA SISTEMAS EN ESTADO ESTABLE.	49
2.2.1 Analisis de una película descendente.	49
2.2.2 Análisis del flujo en un tubo.	54
2.2.3 Flujo de un fluido en una región anular.	59
2.3 ECUACIONES DE VARIACION.....	63
2.3.1 Introduccion.	63
2.3.2 Ecuacion de continuidad.	64
2.3.3 Ecuacion de movimiento.	67
2.3.4 Viscosímetro Couette-Hatschek.	73
PROBLEMAS.	77
CAPITULO 3 ANALISIS EN FLUJO TURBULENTO.....	80
3.1 PERFIL DE VELOCIDAD EN FLUJO TURBULENTO	80
3.2 ANALISIS DIMENSIONAL.....	84

3.2.1	Analisis dimensional de la Ecuación de Navier-Stokes.	84
3.2.2	El Teorema π de Buckingham.	87
3.3	EL FACTOR DE FRICCION DE FANNING	91
3.4	CORRELACIONES PARA EL FACTOR DE FRICCION EN DUCTOS	93
	PROBLEMAS.	103
 CAPITULO 4 EL BALANCE DE ENERGIA MECANICA		106
4.1	LA ECUACION DE ENERGIA MECANICA	106
4.2	BALANCES MACROSCOPICOS	108
4.2.1	Balance de Materia.	108
4.2.2	Balance de Cantidad de Movimiento.	113
4.2.3	Balance de Energía Mecánica.	115
4.2.4	Metodo alternativo para la deducción del Balance de Energía Mecánica.	119
4.3	BALANCE DE ENERGIA MECANICA PARA FLUJO INCOMPRESIBLE ISOTERMICO	122
4.4	BALANCE DE ENERGIA PARA FLUJO COMPRESIBLE ISOTERMICO	132
4.5	MEDIDORES DE FLUJO.	135
4.5.1	Aparatos de medición de caídas de presión.	135
4.5.2	Medidor de orificio.	137
4.5.3	Medidor Venturi.	140
4.5.4	El Rotámetro.	142
4.5.5	El tubo de Pitot.	143
4.6	LECHOS EMPACADOS	145
4.6.1	Tipos de empaque.	145
4.6.2	Caída de presión en un Lecho Fijo.	147
4.7	FLUIDIZACION	152
4.7.1	Conceptos y definiciones.	152
4.7.2	Cálculo de parámetros.	155
	PROBLEMAS.	160
 BIBLIOGRAFÍA.		165
 PÁGINAS DE INTERNET		165

PROLOGO

Todos sabemos que en la prehistoria el ser humano fue esencialmente nómada, lo cual le obligaba a la búsqueda de alimento y primordialmente de agua, líquido básico para la supervivencia. En algún momento de la historia, aprendió a cultivar algunos granos, requiriendo para ello de la disposición de grandes volúmenes de agua, por lo que le fue indispensable asentarse a la ribera de algún río o en las cercanías de un lago. En la medida que los asentamientos fueron creciendo, las necesidades de alimento también lo hicieron, por lo que les fue necesario disponer cada vez de mayores volúmenes de agua. Por tanto, les fue necesario aprender a transportarla por medio de canales. Por ejemplo, los egipcios construyeron canales para llevar el agua desde el río Nilo hasta las zonas de cultivo. Aquí es conveniente recordar una historia con tintes de leyenda al respecto. Se cuenta que, hacia el siglo VI a. C., en la antigua Babilonia existió un jardín botánico denominado “Los Jardines Colgantes de Babilonia”. De acuerdo con la información disponible, se trataba de una terraza formada por piedra y tierra, en la cual crecían diferentes tipos de plantas y que era irrigada por agua proveniente de un pozo. Pudiéramos pensar que se trataba de un elevador de cangilones, movida por fuerza animal, hasta la parte superior de la terraza, en donde se vertía el agua que caía por gravedad y distribuyéndola por medio de pequeños canales.

Pero fue Arquímedes (287 a 212 a. C.) quien descubrió una de las propiedades fundamentales del agua y de todos los materiales, la densidad, estableciendo lo que se conoce como el Principio de Arquímedes, en donde se establece la relación entre el peso y el volumen de los cuerpos. Mas adelante los romanos aprovecharon todo este conocimiento para transportar agua en grandes cantidades y a grandes distancias por medio de canales, aprovechando la fuerza de gravedad, cuya inclinación fue tan precisa que les permitió controlar también el flujo. En la búsqueda del comportamiento de los materiales, fue Isaac Newton (1643 – 1727) quien descubrió la magnitud de la fuerza de atracción de la Tierra sobre los cuerpos, estableciendo la Segunda Ley de Newton. Además, descubrió que los líquidos, independientemente de su densidad, tenían otra propiedad relacionada con la movilidad, es decir, la viscosidad, que tiene relación con la fricción que ejercen todos los fluidos sobre las superficies.

Otro de los grandes investigadores de la historia fue Daniel Bernoulli (1700 – 1782), quien estableció lo que se conoce como el **Principio de Bernoulli**, que describe el comportamiento de un fluido al moverse a lo largo de un conducto cerrado, estableciendo con ello los fundamentos de la **Mecánica de Fluidos**. A continuación, Claude-Louis Henri Navier y George Gabriel Stokes en 1845 desarrollaron lo que se conoce como **Las Ecuaciones de Navier-Stokes** las cuales, mediante la aplicación de las Leyes de Newton, de la Conservación de la Materia y de la Conservación del Movimiento, describen matemáticamente la trayectoria y dirección del flujo de los fluidos. Luego Osborne Reynolds en 1883 estableció el que se conoce como **Numero de Reynolds**, que es un parámetro que permite establecer la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas de fricción viscosa, independientemente del fluido de que se trate.

Todos los esfuerzos descritos y otros mas desarrollados a lo largo de la historia, han permitido un conocimiento profundo del comportamiento no solo del agua, sino de una gran de fluidos, desde gases hasta aceites y otros materiales tan extraños en su comportamiento como los plásticos, champús, polvos, lodos, etc. Lo cual hace de la Mecánica de Fluidos una de las ramas mas importantes de la ciencia en la actualidad, ya que forma parte muy preeminente de el nivel de vida que actualmente gozamos como especie.

Jorge E. Duque L.
Agosto de 2019

INTRODUCCION

Como se menciona en el prólogo, parte muy importante de nuestro nivel de vida actual, se debe a la disposición de diferentes tipos de fluidos de uso común, los cuales van desde gases, agua, aceites, champús, alimentos líquidos o en pasta, etc. De ahí la importancia del conocimiento de sus propiedades para el transporte, empaque y manipulación. Todo esto es tema de la Mecánica de los Fluidos, por lo que es muy importante su estudio en diferentes ingenierías, tales como Ingeniería Civil, Mecánica, Electromecánica, Química, Bioquímica y otras más. Tal es el tema fundamental de este libro, el cual pretende ser el texto básico para la materia de Fenómenos de Transporte I en la carrera de Ingeniería Bioquímica.

Este libro inicia con el estudio de los fluidos en reposo, área que se conoce como **Hidrostatica** o más bien **Estática de los Fluidos**. Luego se continúa con los fundamentos de esta área con la Ley de Newton de la Viscosidad y otros modelos para fluidos cuyo comportamiento sea muy diferente al del agua y los aceites. A continuación, el segundo capítulo se dedica a la aplicación de las matemáticas para la obtención de modelos de comportamiento de los fluidos en condiciones ideales y para sistemas sencillos. Para luego desarrollar las ecuaciones de Navier – Stokes, las cuales permiten ver el grado de complejidad que tiene el movimiento de los fluidos. El capítulo 3 se dedica a el desarrollo de modelos de parámetros que permiten evaluar la magnitud de la energía perdida cuando un fluido fluye por un ducto o canal. Finalmente, en el capítulo 4 se dedica a la aplicación de todos estos conceptos y se desarrolla la Ecuación de Energía Mecánica para la determinación de la magnitud del flujo de un fluido por un ducto o bien para la dispersión de un fluido por una columna empacada, o también para el transporte neumático de polvos.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS DEL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

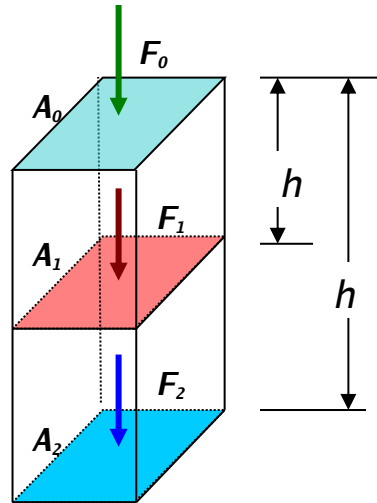
1.1 ESTATICA DE FLUIDOS

El ser humano, con su innata curiosidad, siempre se ha hecho preguntas fundamentales con respecto a los fenómenos naturales que desde siempre lo han impactado. Uno de ellos es precisamente el comportamiento del agua. Una característica del agua y de todos los fluidos, de acuerdo a su definición, es que toman la forma del recipiente que los contiene. Es decir, que entre mayor sea el recipiente, mayor es la cantidad de agua que contiene. Y lo mismo se puede decir de cualquier otro líquido. Es decir, entre mayor sea el recipiente, mayor es la masa de líquido que puede contener. Por lo que, según la Segunda Ley de Newton, mayor será el peso, de acuerdo con su definición:

$$F = ma \quad (1.1)$$

Si en ésta ecuación se considera la aceleración gravitacional, entonces la fuerza es el peso de los objetos, que no viene siendo más que la fuerza que ejerce un objeto sobre la superficie terrestre. Lo mismo sucede en cualquier cuerpo celeste, con la diferencia de que en cada uno de ellos la aceleración gravitacional es diferente, por ejemplo, en la Luna la aceleración gravitacional es un sexto de la terrestre, por esa razón los objetos tienen menor peso. Por otro lado, la masa de los objetos depende de su densidad, por lo que cada fluido, con el mismo volumen, tiene un peso diferente. Esta información es importante dado que los fluidos, en grandes masas, ejercen sobre los objetos sumergidos en ellos, un fenómeno al que se le ha denominado “presión” la cual se define como la fuerza ejercida sobre un área, tal y como se muestra en el siguiente desarrollo (Geankoplis, 2018).

Considérese un recipiente como el de la figura, el cual contiene un líquido de densidad conocida. En cada uno de los puntos a mayor profundidad la masa del fluido ejerce una fuerza mayor, como se muestra a continuación:



En la figura, la fuerza ejercida por el fluido para las profundidades representadas por los puntos 1 y 2, se expresan:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 + M_1 g = F_0 + \rho h_1 g A_1 \\ F_2 &= F_0 + M_2 g = F_0 + \rho h_2 g A_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

En estas dos ecuaciones, tanto A_0 , A_1 y A_2 son iguales, por lo que se pueden dividir entre cualquiera de ellas. Entonces, las fuerzas se transforman en presiones, quedando:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \rho g h_1 \\ p_2 &= p_0 + \rho g h_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Siendo p_0 la presión atmosférica, equivalente a 101,325 Pascales.

Y si se requiere conocer la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2, se expresa:

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) \quad (1.4)$$

En este caso, a la diferencia de presión entre la presión de la superficie y la presión en el punto 1, se le denomina **presión hidrostática**, que se expresa:

$$\boxed{p_1 - p_0 = \rho g h_1} \quad (1.5)$$

Por medio de la cual se puede expresar la presión en función de la altura (h) de la columna de un líquido de densidad (ρ) conocida, es decir:

$$\boxed{h = \frac{p - p_0}{\rho g}} \quad (1.6)$$

En 1643 Evangelista Torricelli desarrolló un experimento en el cual utilizó un tubo cerrado de un extremo, llenándolo de mercurio y colocando el extremo abierto sobre un

plato, observando que parte el mercurio empezaba a escaparse por la parte inferior. Sin embargo, no todo el mercurio se escapaba, sino que en la parte superior se formaba un espacio vacío y la altura que alcanzaba la columna de mercurio era de 760 mm, esto se puede comprobar con la ecuación antes mostrada, sustituyendo la diferencia de presión por 101,325 Pa y la densidad del mercurio que es, aproximadamente 13,600 kg/m³, obteniendo:

$$h = \frac{101,325 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{(13,600 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)} = 0.7597262 \text{ m} = \mathbf{760 \text{ mm}} \quad (1.7)$$

Igualmente, si se quiere construir un barómetro de agua, la altura de la columna que deberá tener este, será la que se indica en el siguiente resultado:

$$h = \frac{101,325 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{(1,000 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)} = \mathbf{10.33322 \text{ m}} \quad (1.8)$$

Es decir, si nos sumergimos en el agua, a una profundidad de 10.33 metros se tiene una presión equivalente a 1 atmósfera. Esto es, entre mayor sea la profundidad, mayor será la presión que ejercerá el agua.

Ahora bien, la presión que ejerce un fluido en el fondo de un recipiente dependerá de la altura del fluido, más no de la forma del recipiente ni del área transversal, de acuerdo a como se muestra en la figura 1.1.

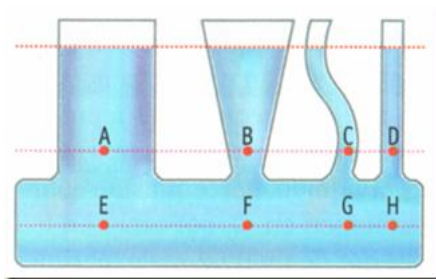


Figura 1.1 La presión en los puntos A, B, C Y D es la misma.

Esta información es muy útil ya que se aprovecha para elaborar medidores de presión por medio de tubos transparentes doblados en forma de U, a los se les denomina “**manómetros**”. Estos tubos se llenan de un líquido hasta la mitad de su altura. Si ambos extremos se mantienen abiertos a la atmósfera, la altura del líquido en ambos lados del tubo será la misma, lo cual ocurre porque al estar abiertos la presión en ambos lados corresponde a la presión atmosférica. Tal y como se observa en la figura 1.2a

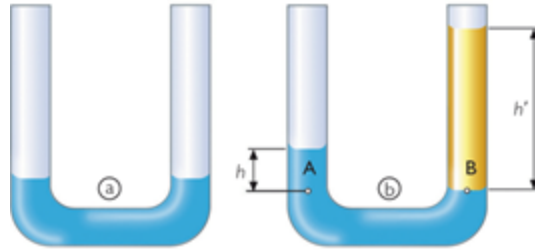


Figura 1.2. Tubo en U

Si a uno de los lados se le llena de un líquido diferente, la columna del lado izquierdo se eleva porque el líquido en el lado derecho lo desplaza y, dependiendo de la densidad del líquido amarillo, su masa desplaza una masa equivalente del líquido azul, mas su altura será diferente porque su densidad es diferente.

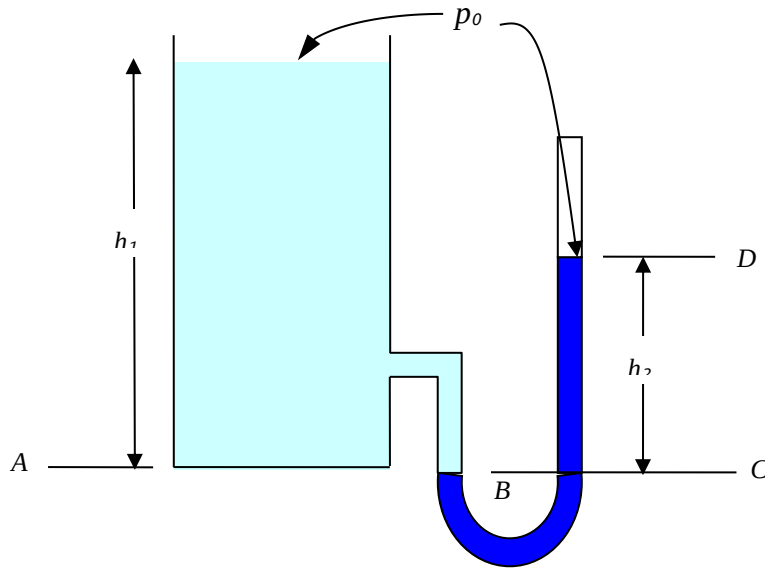
Este fenómeno se aprovecha para medir grandes alturas de un líquido de baja densidad por medio de otro de mayor densidad, tal y como se muestra en el ejemplo 1.1

Ejemplo 1.1 Medición de la altura de un líquido en un recipiente de gran tamaño.

Considérese un recipiente como el mostrado en la figura, en el cual se encuentra contenido un líquido de densidad (ρ_1) conocida. Se desea conocer la altura del fluido que se encuentra contenido el recipiente utilizando un tubo en U que contiene otro líquido inmiscible con densidad (ρ_2) también conocida.

Solución.

Para conocer la altura del líquido en el tanque, es necesario determinar la presión en el punto A, para ello se requiere desarrollar un balance de fuerzas entre los puntos A, B, y D. La presión en el punto A y el B es la misma, expresándose de la siguiente manera, siendo p_0 la presión atmosférica en el nivel superior del tanque:



Ejemplo 1.1

$$p_B = p_A = p_0 + \rho_1 g h_1$$

La presión en el punto A es equivalente a la presión en el punto B, que se encuentra al lado izquierdo del tubo en U. Y, a su vez, el punto de equilibrio entre ambos lados del tubo en **U** se muestra en la línea BC, por lo que la presión es equivalente.

Del lado derecho, la presión en el punto C se expresa:

$$p_C = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Igualmente, la p_0 es la presión en el punto D y equivale a la presión atmosférica. Al igualar a ambas ecuaciones se tiene:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Se elimina la presión atmosférica, para finalmente obtener la ecuación que nos permite calcular la altura del líquido en el tanque:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2$$

1.2 BOYANTEZ

Otro fenómeno importante en la ingeniería es el hecho de que todos los cuerpos sumergidos en un fluido tienden a sumergirse por efecto de su densidad, es decir, que todo cuerpo ejerce una fuerza equivalente a su peso que apunta hacia el centro de la tierra. Igualmente, el fluido ejerce una fuerza en dirección contraria por efecto de la fuerza de flotación que ejerce el fluido sobre el objeto (Welty, 2001). En esto se basa el principio de Arquímedes que establece que objeto desplaza fluido en una cantidad equivalente al volumen sumergido del sólido. Lo anterior se puede ejemplificar de la manera siguiente.

Considérese la siguiente figura que muestra un cuerpo sumergido en un líquido de densidad conocida:

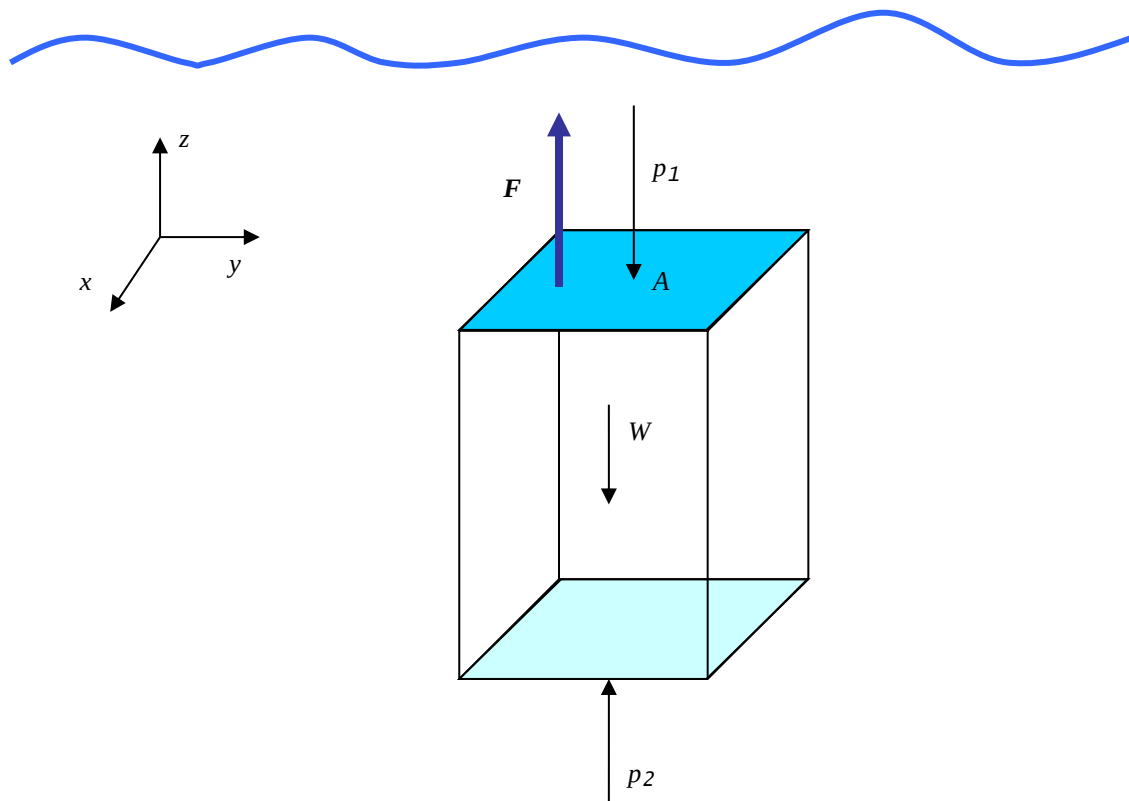


Figura 1.3 Fuerza de flotación

En el análisis de la figura, la fuerza que con dirección z , se define en forma matemática en función de un balance de un cuerpo en equilibrio, cuya expresión queda:

$$F = F_b - F_g = p_2 A - p_1 A - \rho_c h A g = (p_2 - p_1) A - \rho_c h A g \quad (1.9)$$

Si se toma la diferencia de presión en función de la fuerza que genera el fluido sobre el cuerpo, entonces se debe sustituir por la presión hidrostática que se genera debido al desplazamiento del fluido por el cuerpo:

$$F = (\rho - \rho_c) g h A = (\rho - \rho_c) g V \quad (1.10)$$

Ahora bien, si el cuerpo está parcialmente sumergido, y la parte sumergida del cuerpo equivale a V_s , entonces el peso del fluido desplazado corresponde a $\rho g V_s$, por lo que se tiene:

$$\boxed{V_s = \frac{(\rho - \rho_c)}{\rho} V} \quad (1.11)$$

Ejemplo 1.2 Fuerza ejercida sobre un cuerpo sumergido.

Un cubo de 1 pie por lado se encuentra sumergido a 10 pies por debajo de la superficie de agua. Calcular la fuerza ejercida para mantener al cuerpo en dicha posición. Si se tiene a). Corcho ($\rho = 10 \text{ lb}_m/\text{pie}^3$) y b). Acero ($\rho = 490 \text{ lb}_m/\text{pie}^3$).

a). Para corcho.

$$F = (62.4 - 10)(1) = 52.4 \text{ lb}_f = 233 \text{ N}$$

b). Para acero.

$$F = (62.4 - 490)(32.2)(1) = -427.6 \text{ lb}_f = -1902 \text{ N}$$

Los signos en ambas ecuaciones implican que el corcho ejerce hacia arriba una fuerza de 233 N, por lo que, para sostenerlo en la posición deseada, es necesario aplicar una fuerza contraria equivalente, es decir, de -233 N. En cuanto al acero, la fuerza ejercida por el cuerpo es de 1902 N hacia abajo, por lo que, para sostenerlo en la posición deseada, es necesario aplicar 1902 N hacia arriba.

1.3 PROCESOS DE TRANSFERENCIA

El universo, como un todo, se encuentra en constante actividad, la cual está siendo comunicada constantemente hacia todas las partes que lo componen. Por ejemplo, el Sol envía energía suficiente hacia la Tierra para hacer posible la existencia de seres vivos y, ocasionalmente, hidrógeno debido a las explosiones solares. En la Tierra también existe una actividad constante interna y externa, ya que en sus entrañas se produce calor y en la superficie se desarrolla el movimiento continuo de enormes masas de aire y agua. El agua, a su vez, arrastra consigo diversos minerales. El conocer como suceden todos estos fenómenos ha sido constante curiosidad del ser humano desde siempre. Es decir, ¿que hace posible que el aire lleve a las nubes cargadas de agua desde un lugar a otro para luego ser descargadas?, ¿Cómo es posible la transferencia de energía del Sol hacia la Tierra?, ¿que hace posible el movimiento del agua en los ríos?, ¿que provoca el movimiento del mar?

En todos los fenómenos descritos existe algo en común que es el transferir o transportar "algo" de un lugar a otro, siendo ese "algo" calor, masa o movimiento. Por tal razón se les ha denominado en forma genérica **FENOMENOS DE TRANSPORTE o PROCESOS DE TRANSFERENCIA**. Los Fenómenos de Transporte establecen que la transferencia de calor ocurre si existe una diferencia de temperatura entre dos puntos de un sistema. El mismo principio es aplicable al transporte de la electricidad, ya que esto sucede solamente si existe una diferencia de voltaje. En general, se puede decir que en gran número de áreas del conocimiento es aplicable el principio de transferencia que se ha expuesto.

En la carrera de Ingeniería Bioquímica es necesario el conocimiento de cómo ocurren los procesos de transferencia tanto de momento como de calor y masa. Estas áreas se pretenden cubrir en los cursos de Fenómenos de Transporte I y II y en las Operaciones Unitarias I, II y III. Y particularmente, este curso de Fenómenos de Transporte I estará dedicado al aprendizaje de los principios de la **Transferencia de cantidad de movimiento** y sus aplicaciones, a la cual se le conoce también como **Mecánica de Fluidos**.

1.4 LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

El principio fundamental de la Transferencia de cantidad de movimiento es la Ley de Newton de la viscosidad, la cual puede establecerse mediante el análisis de un experimento muy sencillo. Considérense dos placas muy grandes colocadas una sobre la otra y

separadas por un espacio Y entre ellas; dicho espacio se llena de algún fluido. La placa superior es fija y la inferior es movable, encontrándose ambas en reposo antes de iniciado el experimento, según se observa en la Figura 1.4 (Bird, 2002).

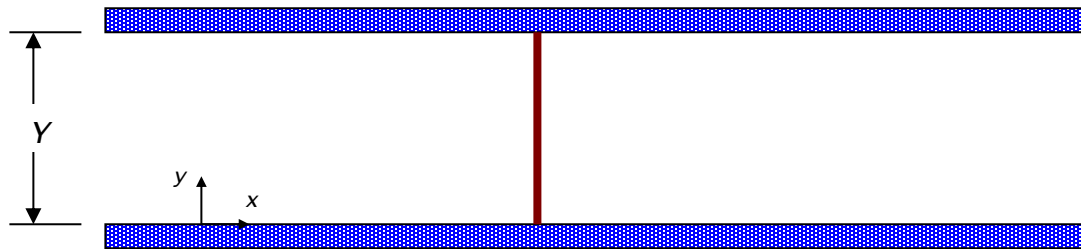


Figura 1.4 Placas paralelas

El experimento se inicia (a tiempo $t = 0$) al aplicar una fuerza F a la placa inferior, provocando que esta se mueva con una velocidad V . Sobre la placa inferior se encuentra en reposo una capa de moléculas de fluido, a las cuales les comunica su movimiento por efectos de la fricción. Sobre dicha capa se encuentra otra del mismo fluido, a la que a su vez le comunica su movimiento y así sucesivamente se va comunicando el movimiento capa tras capa hasta llegar a la placa superior. Al poco tiempo de iniciado el experimento, el disturbio provocado por la placa inferior no alcanza a llegar hasta las capas cercanas a la placa superior. Lo anterior se puede observar en la figura 1.5, en donde los perfiles de velocidad, representados por las curvas que se encuentran por debajo de la línea diagonal superior, no están totalmente desarrollados y son cambiantes a medida que transcurre el tiempo, entonces el sistema no ha alcanzado el equilibrio y por tal razón se dice que el sistema está en **estado inestable**.

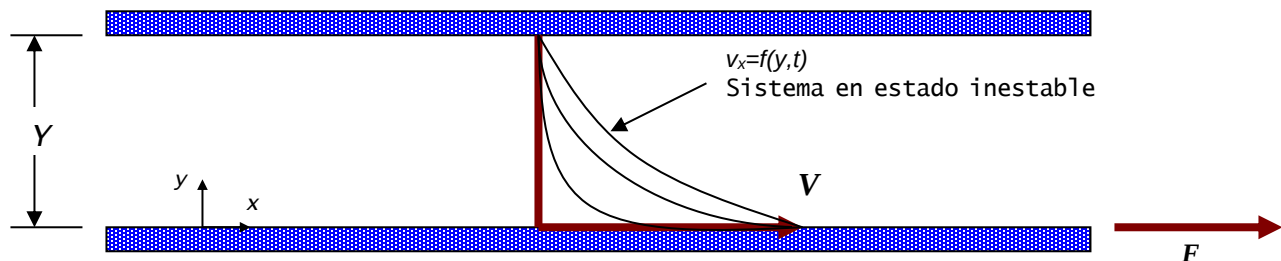


Figura 1.5 Estado inestable

Cuando el sistema alcanza el **equilibrio dinámico** el flujo se ha desarrollado totalmente, lo cual queda representado por la línea diagonal y es cuando se dice que el sistema está en **estado estable**, es decir, mientras se mantenga la fuerza inicial, la placa inferior mantiene la misma velocidad, manteniéndose también el mismo perfil de velocidades sin importar el paso del tiempo. Esto es, en el estado estable los sistemas son independientes del tiempo.

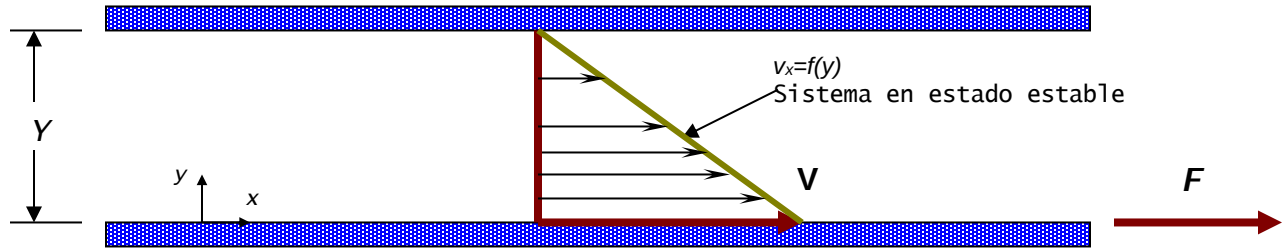


Figura 1.6 Estado estable

Al analizar el perfil de velocidades en estado estable, se puede observar que el movimiento se transfiere en la dirección perpendicular al movimiento mismo. Además, a mayor fuerza aplicada, mayor es la velocidad que se imprime a la placa, pero mayor fuerza también se requiere para que el disturbio alcance mayor distancia. Entonces, la fuerza por unidad de área es directamente proporcional a la velocidad, pero inversamente proporcional a la distancia, por lo que:

$$\frac{F}{A} \propto -\frac{V-0}{0-Y} = \frac{V}{Y} \quad (1.12)$$

a la cual se le debe agregar una constante de proporcionalidad, la que resulta ser para este caso **la viscosidad dinámica (representada por la letra griega)**, transformándose en:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \quad (1.13)$$

La viscosidad es una propiedad de los fluidos que más adelante se analizará detenidamente. Yendo nuevamente al análisis del perfil de velocidad, a la ecuación (1.13) se le puede aplicar un elemento diferencial del eje **y** logrando:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{v(y+\Delta y) - v(y)}{\Delta y} \quad (1.14)$$

a la cual, al aplicar el límite cuando el diferencial de **y** tiende a cero, la ecuación (1.14) se transforma en

$$\boxed{\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}} \quad (1.15)$$

A esta expresión se le conoce como la **ley de Newton de la viscosidad**, en donde

τ_{yx} = **esfuerzo cortante en dirección y, debido a un movimiento en** **dirección x.**

v_x = **velocidad en la dirección x** (dirección del movimiento).

y = **dirección de la transferencia del movimiento.**

1.5

VISCOSIDAD.

La ley de Newton de la viscosidad, tal y como se observa en la ecuación (1.15), establece que el movimiento se transmite si existe una diferencia de velocidades en dirección de la transferencia del movimiento. Ello es posible gracias al grado de fricción que ejerce una capa de fluido sobre otra, lo cual es determinado por el tipo de substancia que compone el fluido, por ejemplo, los gases ejercen menos fricción entre sus moléculas que los líquidos y que los metales líquidos. Al grado de fricción mencionado se le ha llamado anteriormente **viscosidad dinámica**, y sus dimensiones se pueden deducir a partir de las dimensiones del resto de las cantidades que definen a la ley de Newton. Así, si consideramos al sistema dimensional básico como fuerza (F), longitud (L) y tiempo (T), entonces:

$$\tau_{yx} = [F L^{-2}]$$

$$v_x = [L T^{-1}]$$

$$y = [L]$$

y despejando a μ de la ecuación (1.15), da como resultado

$$\mu = - \frac{\tau_{yx}}{\left(\frac{dv_x}{dy}\right)} = \frac{[FL^{-2}]}{[T^{-1}]} = [FL^{-2}T] \quad (1.16)$$

Sin embargo, el sistema dimensional más difundido es el que considera como dimensiones fundamentales a la masa (M), la longitud (L) y al tiempo (T). Sobre la base de este sistema la fuerza (F) se define dimensionalmente por medio de la segunda ley de Newton como:

$$F = m a = [M L T^{-2}]$$

y al substituir la fuerza en la ecuación (1.16), la viscosidad se expresa en el sistema dimensional MLT

$$\mu = [M L^{-1} T^{-1}]$$

Pero, aunque es de mucha utilidad, expresar las cantidades por medio de un sistema dimensional es algo muy genérico. La realidad es que todas las propiedades de los materiales están expresadas en sistemas de unidades. De ellos, existen tres que actualmente son los más utilizados en ingeniería. Uno de ellos es el sistema inglés que toma en cuenta ambos sistemas dimensionales, por lo que la viscosidad en este sistema se expresa de dos maneras:

$$\mu = (Lb_f pie^{-2} hr)$$

y

$$\mu = (lbm pie^{-1} hr^{-1})$$

en este sistema de unidades existe la dificultad de que continuamente es necesario estarse trasladando de un sistema dimensional a otro, por lo que se hace indispensable el uso del **factor de conversión gravitacional g_c** , el cual se define:

$$g_c = 32.2 (lbm/lbf) (pie/seg^2)$$

Otro sistema de unidades es el CGS, en el cual ya no se hace uso de las unidades de fuerza, sino que ya de antemano estas se supeditan a las unidades de masa, como sucede con la dina. Así, las unidades de la viscosidad son

$$\mu = (g/cm - seg.)$$

En este caso, la unidad fundamental de medición es el **Poise**, para el cual

$$1 \text{ Poise} = 1 (g/cm - seg.)$$

Aunque es más utilizado el **centipoise (cp)** que viene siendo la centésima parte del Poise.

El tercer sistema de unidades es el Sistema Internacional (SI), el cual cada vez va teniendo más aceptación por su sencillez y facilidad de uso. Aquí también se supeditan las dimensiones de fuerza a las de masa, por tanto no es necesaria ninguna transformación. Por lo que la viscosidad se define

$$\mu = (kg./m - s) = (Pa - s)$$

Siendo la unidad fundamental el Pascal-segundo (**Pa - s**), la cual es 10 veces mayor que el centipoise.

Al dividir la viscosidad dinámica entre la densidad, se obtiene una nueva cantidad denominada la **viscosidad cinemática**, que se expresa matemáticamente

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.17)$$

La cual mide el grado de difusión del movimiento, es decir, el área que abarca el disturbio en la unidad de tiempo.

Como se mencionó en el primer párrafo, la viscosidad es una propiedad que cada

fluido posee y que mide el grado de fricción que las moléculas ejercen entre sí. Dependiendo del tipo de fluido es el orden de magnitud de la viscosidad, por ejemplo, en los gases la viscosidad varía de 10^{-6} a 10^{-5} Pa - s, así se puede observar en la Tabla 1.1 en donde se muestran valores para algunos gases y su variación con respecto a la temperatura a 1 atm de presión. En la Tabla 1.2 se muestran algunos ejemplos de viscosidad para diferentes líquidos. En ellas se observa que en los líquidos ligeros y metales líquidos el orden de magnitud está en el intervalo de 10^{-4} a 10^{-3} Pa - s. Para los líquidos pesados como los aceites los valores de la viscosidad llegan a ser poco más de 10 Pa - s, como sucede con la glicerina que es uno de los fluidos de mayor viscosidad. Una observación adicional con respecto al comportamiento de los fluidos es que, con respecto a los gases la viscosidad aumenta con respecto a la temperatura, mientras que en los líquidos disminuye ¿por qué?

Tabla 1.1 Viscosidades de algunos gases a 1 atm de presión
En **Pa - s**

<i>T(°C)</i>	<i>Aire</i>	<i>CO₂</i>	<i>Nitrógeno</i>	<i>Oxígeno</i>	<i>Metano</i>	<i>Amoníaco</i>
<i>0</i>	<i>1.72×10^{-5}</i>	<i>1.38×10^{-5}</i>	<i>1.66×10^{-5}</i>	<i>1.92×10^{-5}</i>	<i>1.04×10^{-5}</i>	<i>9.30×10^{-6}</i>
<i>50</i>	<i>1.93×10^{-5}</i>	<i>1.62×10^{-5}</i>	<i>1.88×10^{-5}</i>	<i>2.18×10^{-5}</i>	<i>1.18×10^{-5}</i>	<i>1.11×10^{-5}</i>
<i>100</i>	<i>2.12×10^{-5}</i>	<i>1.85×10^{-5}</i>	<i>2.08×10^{-5}</i>	<i>2.44×10^{-5}</i>	<i>1.33×10^{-5}</i>	<i>1.30×10^{-5}</i>
<i>150</i>	<i>2.32×10^{-5}</i>	<i>2.06×10^{-5}</i>	<i>2.27×10^{-5}</i>	<i>2.67×10^{-5}</i>	<i>1.47×10^{-5}</i>	<i>1.48×10^{-5}</i>
<i>200</i>	<i>2.51×10^{-5}</i>	<i>2.27×10^{-5}</i>	<i>2.46×10^{-5}</i>	<i>2.90×10^{-5}</i>	<i>1.61×10^{-5}</i>	<i>1.66×10^{-5}</i>
<i>250</i>	<i>2.70×10^{-5}</i>	<i>2.48×10^{-5}</i>	<i>2.62×10^{-5}</i>	<i>3.10×10^{-5}</i>	<i>1.73×10^{-5}</i>	<i>1.84×10^{-5}</i>
<i>300</i>	<i>2.89×10^{-5}</i>	<i>2.68×10^{-5}</i>	<i>2.79×10^{-5}</i>	<i>3.30×10^{-5}</i>	<i>1.86×10^{-5}</i>	<i>2.02×10^{-5}</i>

(Cengel, 2011)

Tabla 1.2 Viscosidades de algunos líquidos en Pa - s

<i>T (°C)</i>	<i>Agua</i>	<i>Etanol</i>	<i>Benceno</i>	<i>Mercurio</i>	<i>Aceite de Oliva</i>	<i>Glicerina</i>
0	1.79×10^{-3}	1.78×10^{-3}	9.10×10^{-4}	1.69×10^{-3}		12.1
10	1.306×10^{-3}	1.47×10^{-3}	7.60×10^{-4}	1.62×10^{-3}		3.95
20	1.004×10^{-3}	1.20×10^{-3}	6.50×10^{-4}	1.55×10^{-3}	8.08×10^{-2}	1.48
30	8.02×10^{-4}	9.91×10^{-4}	5.60×10^{-4}	1.50×10^{-3}	5.57×10^{-2}	0.6582
40	6.53×10^{-4}	8.25×10^{-4}	4.92×10^{-4}	1.45×10^{-3}	3.72×10^{-2}	0.3073
50	5.50×10^{-4}	7.01×10^{-4}	4.36×10^{-4}	1.41×10^{-3}	2.53×10^{-2}	0.180
60	4.70×10^{-4}	5.91×10^{-4}	3.90×10^{-4}	1.37×10^{-3}	1.92×10^{-2}	
70	4.06×10^{-4}	5.03×10^{-4}	3.50×10^{-4}	1.33×10^{-3}	1.45×10^{-2}	
80	3.56×10^{-4}	4.35×10^{-4}	3.16×10^{-4}	1.30×10^{-3}	1.16×10^{-2}	
90	3.15×10^{-4}	3.76×10^{-4}	2.86×10^{-4}	1.27×10^{-3}		
100	2.82×10^{-4}	3.25×10^{-4}	2.61×10^{-4}	1.24×10^{-3}		

(Gengel, 2011), (Geankoplis, 2018)

Ejemplo 1.1

Considérese el mismo sistema mostrado por la figura 1.6. En donde la distancia entre las dos placas es de 0.5 cm y la velocidad de la placa inferior es de 10 m/s. Mientras que el fluido es un aceite cuya viscosidad es 0.07 Pa - s. Se desea determinar el esfuerzo cortante que se imprime al fluido.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{V}{Y} = \frac{(0.07 \text{ Pa} \cdot \text{s})(10 \text{ m/s})}{0.005 \text{ m}} = 140 \text{ Pa}$$

1.6

FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Existe en la naturaleza una gran cantidad de fluidos cuyo comportamiento mecánico va de acuerdo a la ley de Newton de la viscosidad, es decir, con una viscosidad independiente del esfuerzo cortante aplicado, por lo que se les conoce simplemente como **fluidos newtonianos**. Pero existen otros en los que la viscosidad es dependiente de la fuerza aplicada. La figura 1.7 muestra algunos de los tipos de fluidos existentes. Sin embargo, aún cuando en la figura se muestra casos generalizados, existe una gran variedad de fluidos no contemplados. Es decir, el estudio del comportamiento de los fluidos es una ciencia muy amplia denominada **Reología** que se define como **la ciencia de la deformación y el flujo**. Más precisamente, la Reología es la ciencia que estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, asfaltos, plásticos, pastas, plasmas y materiales cristalinos. Es decir, abarca a todos los materiales que cumplen desde la ley de Newton hasta la ley de Hooke.

La Reología define una ley general para todos los fluidos que estudia, basada en la ley de Newton, y que se expresa

$$\boxed{\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy}} \quad (1.18)$$

En donde:

$$-\frac{dv_x}{dy} = \gamma = \text{velocidad de corte}$$

$$\eta = \text{viscosidad}$$

En ella, la viscosidad es una propiedad más generalizada que aquella definida por la ley de Newton, ya que esta última puede inclusive depender de la velocidad de corte o, lo que es lo mismo, variar de acuerdo al incremento del esfuerzo cortante. Dependiendo del tipo de fluido es el comportamiento de la viscosidad. Obsérvese por ejemplo a la figura 1.7 en donde las tres curvas inferiores muestran fluidos con diferente tipo de comportamiento. La curva inferior corresponde a un **fluido dilatante**, para el cual la viscosidad aumenta con un incremento del esfuerzo cortante. La tercera curva corresponde a un **fluido pseudoplástico**, en él la viscosidad disminuye con un incremento del esfuerzo cortante. Y la recta intermedia corresponde a un fluido newtoniano, por lo que la viscosidad permanece constante e independiente del esfuerzo cortante (Geankoplis, 2018).

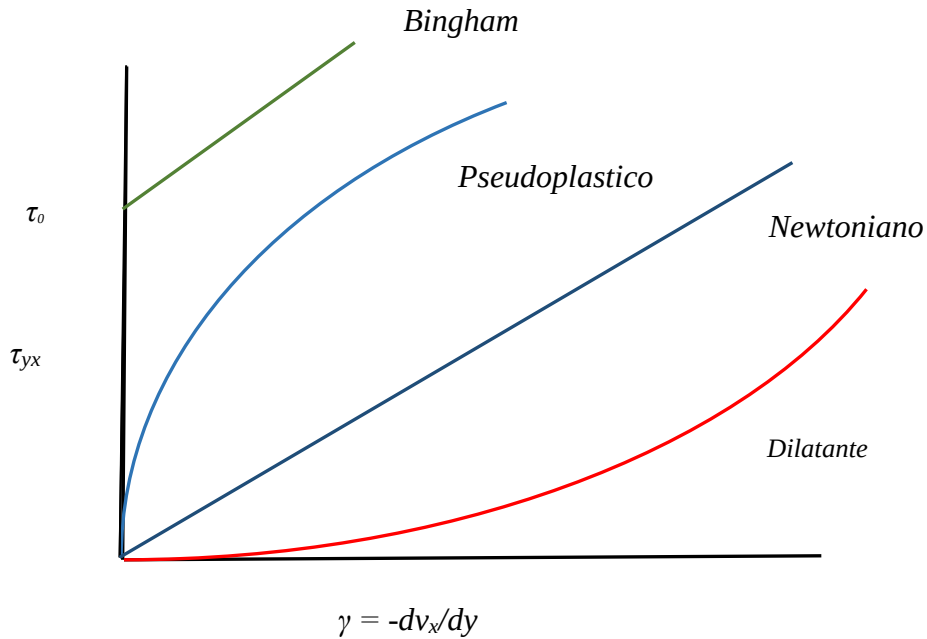


Figura 1.7 Fluidos No newtonianos

Para poder explicar y comprender el comportamiento de gran cantidad de fluidos, no sólo los mostrados en la figura 1.5, se han definido diferentes modelos, uno de ellos, y el más simple, es la ley de Newton de la viscosidad, pero existen muchos otros que van desde los puramente viscosos hasta los viscoelásticos (en los que si el esfuerzo cortante no es lo suficientemente grande vuelven a su forma original, un comportamiento similar al de los sólidos). Para la mecánica de fluidos son particularmente importantes los fluidos viscosos y, en muchos de estos, su comportamiento se apeg a dos modelos. El primero de esos modelos es el:

MODELO DE OSTWALD DE WAELE (o Ley de la Potencia).

$$\tau_{yx} = m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n = m \gamma^n \quad (1.19)$$

En la que la viscosidad se expresa de la manera siguiente:

$$\eta = m \left| -\frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1}$$

en donde: ***m = índice de consistencia.***

y para: **$n > 1.0$ fluido dilatante.**

$n < 1.0$ fluido pseudoplástico.

$n = 1.0$ fluido newtoniano.

Otro de los modelos es el:

MODELO DE BINGHAM (o plásticos Bingham).

La figura 1.7 muestra el comportamiento de los plásticos Bingham ideales con la línea que aparece en la parte superior de la misma. Este tipo de fluidos requiere un esfuerzo mínimo para que el movimiento se origine, si el esfuerzo cortante es superior a ese mínimo su comportamiento es similar al de los newtonianos, de manera que se expresa

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 & \text{si} & \quad |\tau_{yx}| > \tau_0 \\ \frac{dv_x}{dy} &= 0 & \text{si} & \quad |\tau_{yx}| < \tau_0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Las tablas 1.3 y 1.4 muestran algunos ejemplos de fluidos tipo Ostwald y Bingham respectivamente, particularmente de alimentos.

Tabla 1.3 Valores de parámetros para fluidos que siguen el modelo de Ostwald de Waele.

Fluido	Temp (K)	n	m (Pa·s ⁿ)
Puré de manzana, marca A. Densidad = 1.1 gs/c.c.	297	0.645	0.5
Puré de plátano, marca A. Densidad = 0.977 gs/c.c.	297	0.458	6.51
Miel.	197	1	5.61
Crema, 30% de grasas.	276	1	0.01379
Puré de tomate. 5.8% de sólidos totales.	305	0.59	0.2226
Pulpa de madera al 4% en agua.		0.575	20.05
Sangre humana.	300	0.89	0.00384

Tabla 1.4 Parámetros para fluidos que siguen el Modelo de Bingham.

<i>Fluido</i>	τ_o (Pa)	μ_o (Pa . s)
Miel de abeja	57.55	11.51
Mayonesa	38.37	0.663
Salsa Catsup	14.39	0.08345
Pintura de Aceite (Brillante)	0 – 2.88	0.14 – 0.391
Pintura de Aceite (Semibrillante)	4.8 - 12	0.1 – 0.351
Pintura de Aceite (Mate)	1.92 - 10	0.06 – 0.1
Pintura Vinílica	0.96 - 10	0.02 – 0.14
Barnices	0	0.09 – 0.291

Ejemplo 1.2

Los datos experimentales, obtenidos por medio de un viscosímetro de cilindro, para un puré de plátano a 340 K, fueron los siguientes

Velocidad de corte

Esfuerzo de corte

(10^{-3} s^{-1})

(10^{-4} Pa)

1	1.06
1.5	1.22
2	1.37
3	1.62
4	1.80
5	2.01
6	2.10
7	2.21

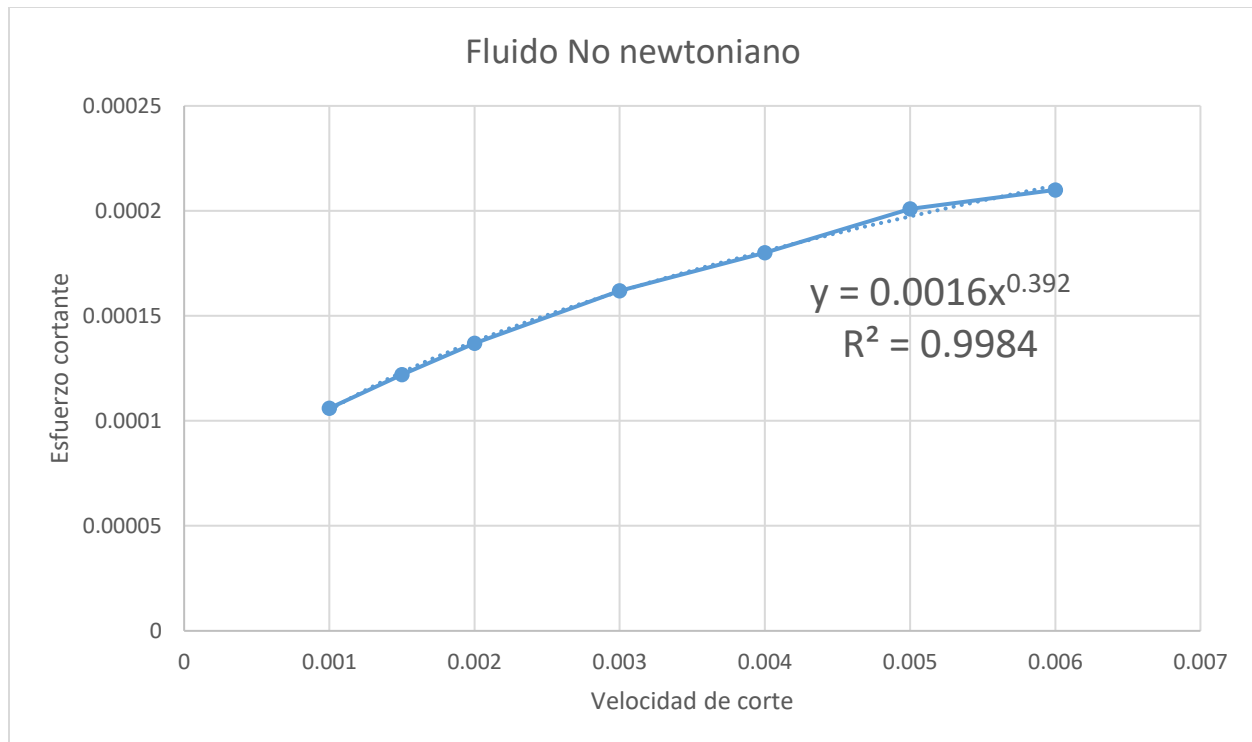


Figura 1.8 Cálculo de parámetros

La figura 1.8 es la gráfica de los datos experimentales de velocidad de corte vs esfuerzo cortante. La cual se obtuvo al vaciar los datos en una hoja de cálculo en Excel y desarrollando la gráfica que se muestra. Para desarrollar un análisis de los datos experimentales se aplica se obtiene la curva de tendencia con que cuenta el Excel y se elige el análisis para una curva potencial, que es la forma que tiene la expresión del fluido Ostwald. Dando como resultado el siguiente:

para $m = 0.0016 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$

y para $n = 0.392$

Por tanto, se trata de un fluido pseudoplástico.

1.7 REGIMENES DE FLUJO.

En la sección anterior se analizó sólo una forma de transferencia del movimiento de un fluido, es decir, la **transferencia de cantidad de movimiento por fuerzas viscosas**. Pero el flujo de un fluido es un fenómeno muy complejo ya que, coexistiendo con las fuerzas viscosas, también se encuentran las **fuerzas inerciales**. Y estas fuerzas inerciales son la causa de otra forma de transferencia que se denomina **convección**. Para entender a la convección, considérese nuevamente la figura 1.6, en ella podemos observar que, además de la fricción entre las moléculas de capas adyacentes, las moléculas de una misma capa se unas a otras en la dirección del movimiento. Dicho de otra manera, las moléculas en movimiento colisionan con otras moléculas comunicándoles de esta forma parte de su energía cinética y provocando su movimiento.

Como ya se mencionó, ambas formas de transferencia coexisten en un mismo sistema. Sin embargo, en muchos sistemas predomina uno de ellos y es lo que determina los llamados **regímenes de flujo**. Si el flujo viscoso es el que predomina, entonces se dice que el sistema está en **régimen laminar**, o bien, que es un **flujo laminar**. Si el flujo convectivo predomina, entonces el sistema se encuentra en **régimen turbulento**, o bien, se le denomina **flujo turbulento**. En el primer tipo de régimen el movimiento de las moléculas es perfectamente ordenado, de manera que las moléculas no pierden su formación. En cuanto al flujo turbulento, el movimiento es totalmente desordenado, de manera que existe un mezclado. En cambio, si el orden se pierde parcialmente, de manera

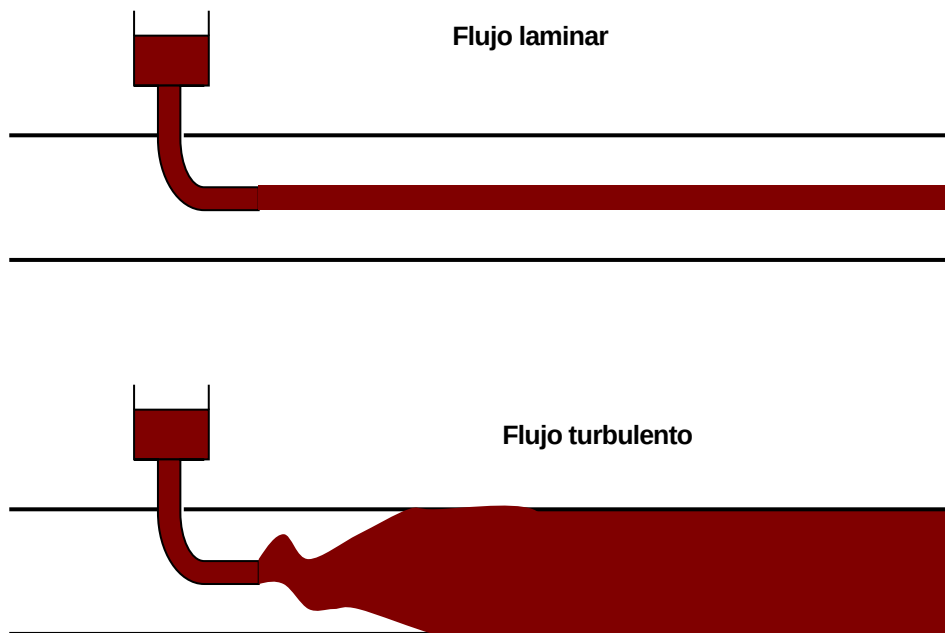


Figura 1.9 Regímenes de flujo

que existe un mezclado parcial, entonces el movimiento no es totalmente desordenado, por lo que se le denomina **flujo de transición**. En 1883 Osborne Reynolds observó este fenómeno mediante un sencillo experimento, mostrado en la figura 1.9. El experimento consiste en hacer fluir agua por un ducto y en su centro introducir una solución de agua coloreada. Cuando el flujo es lento, se agua coloreada fluye por el centro del ducto formándose una línea de color a lo largo. Se tiene entonces un flujo ordenado y se considera que el fluido está moviéndose formando placas o laminas de moléculas de fluido, por esta razón se le nombró **flujo laminar**. Cuando se incrementa el flujo, o lo que es lo mismo, por efecto de la velocidad la formación de moléculas se empieza a perder, ya que el colorante se empieza a mezclar con el agua no coloreada, sin llegar a colorearla totalmente, cuando esto sucede se dice que se tiene un **flujo de transición**. Al incrementar radicalmente la velocidad, se forman turbulencias dentro del ducto provocando que el colorante termine totalmente mezclado con el agua, por lo mismo se le ha llamado **flujo turbulento**. Ahora bien, el punto de cambio de régimen no sólo depende de la velocidad sino también del tipo de fluido y del tamaño del ducto, es decir, de la viscosidad y de la densidad del fluido y del diámetro del ducto. Combinando todas esas cantidades se obtiene el **Número de Reynolds** que se expresa:

$$Re = \frac{Dv\rho}{\mu} \quad (1.21)$$

en donde:

$D = \text{Diámetro del ducto} = [L]$

$v = \text{velocidad promedio del fluido} = [LT^{-1}]$

$\rho = \text{densidad del fluido} = [ML^{-3}]$

$\mu = \text{viscosidad del fluido} = [ML^{-1}T^{-1}]$

La ecuación (1.21) es la expresión de un número adimensional, el cual, una vez substituidas sus cantidades, es un claro indicativo del régimen de flujo. Esto es, el flujo laminar se presenta cuando el **$Re < 2,100$** , el flujo de transición se presenta entre **$2,100$ y $4,000$** y el flujo turbulento cuando **$Re > 4,000$** .

Visto de otra manera, las cantidades representadas en el número de Reynolds se pueden reacomodar de la siguiente forma

$$Re = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{D}} = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}} \quad (1.22)$$

Claramente se puede ver que el número de Reynolds es una relación de las fuerzas inerciales con respecto a las fuerzas viscosas. De tal modo que, si las fuerzas viscosas

predominan, el número de Reynolds es pequeño y se tiene el flujo laminar. En contraposición, si las fuerzas inerciales predominan, el número de Reynolds es grande y se presenta el flujo turbulento.

Cuando se tiene un fluido no-newtoniano el número de Reynolds varía, por ejemplo, si se trata de un fluido tipo Ostwald la expresión será

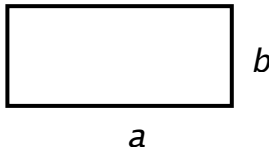
$$Re = \frac{D^n v^{2-n} \rho}{8^{n-1} m \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (1.23)$$

que es una expresión generalizada de la ecuación (1.21).

Las ecuaciones anteriormente mostradas tienen al diámetro como dimensión característica considerando un ducto cilíndrico. Sin embargo, en ocasiones los sistemas de flujo contienen tuberías que tienen otro tipo de geometría, como ejemplo se puede mencionar los sistemas de aire acondicionado, en donde los ductos son rectangulares, o bien los canales que generalmente son trapezoidales. En este caso se utiliza una cantidad denominada **radio hidráulico**, el cual se define:

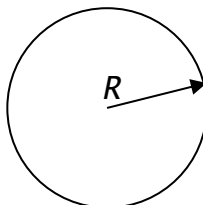
$$\text{Radio Hidráulico} = R_h = \frac{\text{Area de flujo}}{\text{Perímetro mojado}} \quad (1.24)$$

Por lo que para un conducto rectangular se expresa:



$$R_h = \frac{ab}{2(a+b)}$$

Y para un conducto circular:



$$R_h = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

De tal manera que el número de Reynolds se debe expresar de la manera siguiente:

$$Re = \frac{4R_h v \rho}{\mu}$$

Ejemplo 1.3

Por una tubería de 3 cm de diámetro fluye aceite de oliva a 20°C a razón de 40 lts/min. Determinar el tipo de régimen para este flujo.

Solución. La densidad del aceite es 914 kg/m³ y su viscosidad de 0.0808 Pa · s.

$$\text{Flujo volumétrico} = G = \left(40 \frac{\text{lts}}{\text{min}}\right) \left(\frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ lts}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}}\right) = 6.7 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Area transversal} \\ \text{de la tubería} \end{array} \right\} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0.03 \text{ m})^2}{4} = 7.068 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad promedio} \\ \text{en la tubería} \end{array} \right\} = v = \frac{G}{A} = \frac{6.7 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{7.068 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0.9431 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{(0.03 \text{ m})(0.9431 \frac{\text{m}}{\text{s}})(914 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})}{0.0808 \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 320$$

dado que el **Re < 2,100** por lo tanto el flujo es laminar.

1.8 ESTIMACION DE VISCOSIDAD.

Valores estimados experimentalmente de la viscosidad para diferentes tipos de fluidos se pueden encontrar en la bibliografía. Sin embargo, la gran mayoría de esa información se refiere a sustancias puras y, particularmente en los gases, no son comunes las referencias que muestren su dependencia con respecto a la presión, así se puede observar en las tablas 1.1 y 1.2. Para algunos fluidos newtonianos no existe tabulación, tómese por caso los barnices o los aceites porque se trata de mezclas de sustancias, en

ellos solamente se puede obtener su viscosidad experimentalmente. Para la evaluación experimental de la viscosidad de fluidos newtonianos existen diversos aparatos, pero entre los más comunes están el viscosímetro de Ostwald y el de Saybolt. La medición en el viscosímetro de Ostwald consiste en medir el tiempo que tarda en recorrer el fluido una distancia a través de un tubo capilar. En el viscosímetro de Saybolt se mide el tiempo que tarda en fluir una cantidad de fluido a través de un tubo capilar. Sin embargo, ninguno de estos viscosímetros es útil para las determinaciones de los parámetros de los fluidos no newtonianos. Para los fluidos no newtonianos se utilizan viscosímetros del tipo rotatorio que, en general, consisten en un cilindro rotatorio que se introduce en un recipiente lleno del líquido al que se desea medir la viscosidad, luego se aplica un torque al cilindro giratorio y se mide la velocidad alcanzada por dicho cilindro. El torque es una medición del esfuerzo cortante y la velocidad del cilindro se relaciona con la velocidad de corte, por lo que se gráfica la información obtenida para obtener los parámetros buscados. Existen diferentes tipos de viscosímetros rotatorios, como son los de Couette, Stormer, Brookfield, etc. Estos últimos también son útiles para determinar la viscosidad de fluidos newtonianos.

En el caso de gases, como se mencionó anteriormente, la información que proporciona la bibliografía generalmente son valores determinados a 1 atm de presión (algunas tablas mencionan que, para gases ideales, todas las propiedades son independientes de la presión, con excepción de la densidad. Ver Transferencia de Calor y Masa, 4ª edición, Cengel). No obstante, hay metodologías propuestas que consideran tanto a la presión como a la temperatura y, en algunos casos, al volumen específico. Tal es el caso de los **métodos de estados correspondientes**, en donde se requieren las condiciones de la sustancia en el punto crítico. La metodología consiste en el uso de la gráfica I.3-1 del libro de **Fenómenos de Transporte (Bird, Stewart y Lightfoot)**. En ella se relaciona la viscosidad reducida con la temperatura y presión reducidas, las cuales se definen

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_c} \quad ; \quad T_r = \frac{T}{T_c} \quad ; \quad p_r = \frac{p}{p_c} \quad (1.25)$$

Las condiciones críticas de temperatura, presión y volumen específico están disponibles en tablas termodinámicas en diferentes manuales. Además, para algunos gases también se cuenta con la viscosidad crítica, pero no son la generalidad. Sin embargo, se cuenta con algunas correlaciones para su estimación, dos de ellas son:

$$\mu_c = 6.61(MT_c)^{1/2}(\tilde{V}_c)^{2/3} \quad (1.26)$$

o bien,

$$\mu_c = 7.7M^{1/2}p_c^{2/3}T_c^{-1/6} \quad (1.27)$$

Siendo:

$$\mu_c = [\text{micropoises}] = [10^{-7} \text{Pa} \cdot \text{s}]$$

$$p_c = [\text{atm}]$$

$$T_c = [\text{K}]$$

$$\tilde{V}_c = [\text{cm}^3/\text{gmol}]$$

Una vez conocidas μ_r y μ_c , se despeja μ de la ecuación (1.25) correspondiente y se evalúa. Para la figura 1.3-2, a partir de un valor conocido de la viscosidad a condiciones dadas se evalúa μ^p para luego evaluar la viscosidad a las nuevas condiciones que se desea evaluar.

Cuando se tiene una mezcla de gases, se evalúan las condiciones críticas promedio de la mezcla, o sea:

$$p'_c = \sum_{i=1}^n x_i p_{ci} \quad ; \quad T'_c = \sum_{i=1}^n x_i T_{ci} \quad ; \quad \mu'_c = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{ci} \quad (1.28)$$

prosiguiendo con el mismo procedimiento que para gases puros.

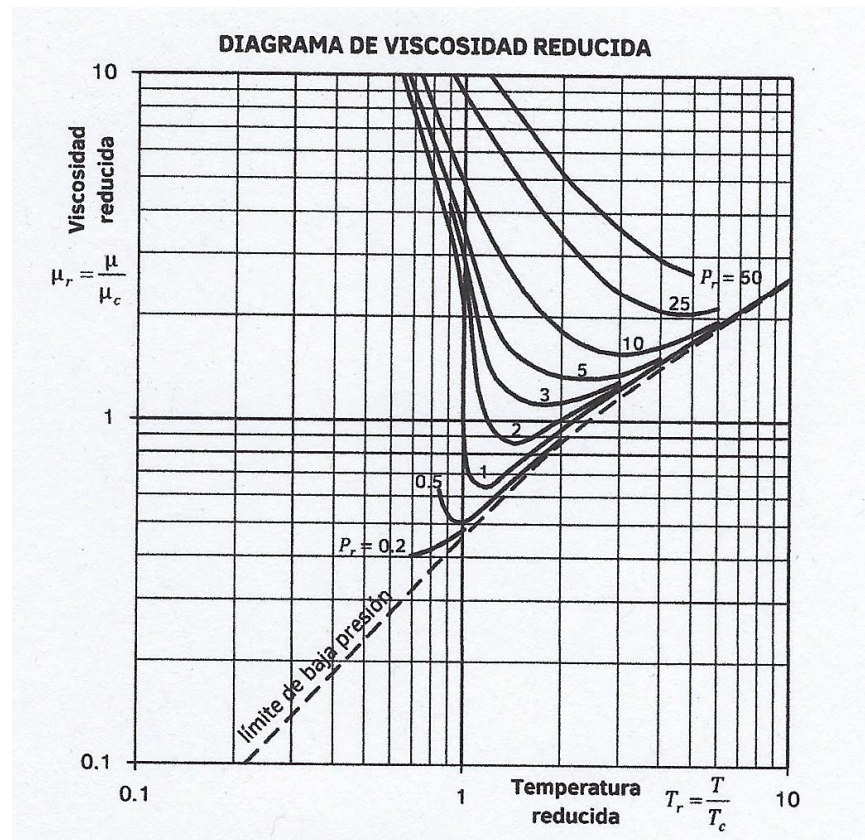


Figura 1.10
Viscosidad de
gases

Tabla 1.5 Propiedades críticas de gases

Compuesto	T_c (K)	P_c (atm)	$\tilde{V}_c$ (cm ³ /gmol)	μ_c (g/cm-seg)
H ₂	33.3	12.8	65	3.47×10^{-5}
He	5.26	2.26	57.8	2.54×10^{-5}
Aire	132.4	37	86.7	1.93×10^{-4}
O ₂	154.4	49.7	74.4	2.5×10^{-4}
N ₂	126.2	33.5	90.1	1.8×10^{-4}
CO	132.9	34.5	93.1	1.9×10^{-4}
CO ₂	304.2	72.9	94.1	3.43×10^{-4}
Cl ₂	417	76.1	124	4.2×10^{-4}
SO ₂	430.7	77.8	122	4.11×10^{-4}
CH ₄	191.1	45.8	98.7	1.59×10^{-4}
C ₂ H ₂	308.7	61.6	112.9	2.37×10^{-4}

(Bird, 2002)

Ejemplo 1.4

Se desea calcular la viscosidad de una mezcla de amoníaco al 23% mol y Freon 12 al 75% mol a una temperatura de 170°C y una presión de 450 atm. Siendo sus condiciones críticas

NH₃:

$T_c = 405.6$ K

Freon 12: (CCl₂F₂)

$T_c = 385$ K

$$p_c = 111.3 \text{ atm}$$

$$p_c = 40.7 \text{ atm}$$

$$\tilde{V}_c = 72.5 \text{ cm}^3/\text{g mol}$$

$$\tilde{V}_c = 217 \text{ cm}^3/\text{g mol}$$

$$M = 17 \text{ g/g mol}$$

$$M = 121 \text{ g/g mol}$$

Solución. Se determina primero la temperatura y presión crítica para la mezcla

$$T'_c = 0.25 (405.6) + 0.75 (385) = 390.15 \text{ K}$$

$$p'_c = 0.25 (111.3) + 0.75 (40.7) = 58.35 \text{ atm}$$

se evalúa ahora la viscosidad crítica de cada uno de los componentes y de la mezcla

$$\mu_{c_{\text{NH}_3}} = 7.7(17)^{1/2} (111.3)^{2/3} (405.6)^{-1/6} = 270 \text{ } \mu\text{p}$$

$$\mu_{c_{\text{Freon}}} = 7.7(121)^{1/2} (40.7)^{2/3} (385)^{-1/6} = 371.6 \text{ } \mu\text{p}$$

$$\mu'_c = 0.25(270) + 0.75(371.6) = 346.2 \text{ } \mu\text{p}$$

se calculan a continuación la temperatura y presión reducidas

$$T'_c = \frac{170 + 273}{390.15} = 1.14 \quad ; \quad p'_c = \frac{450}{58.35} = 7.71$$

por medio de las cuales y de la figura I.3-1 se obtiene

$$\mu'_r = 3.2$$

y el valor final de la viscosidad es

$$\mu = \mu_r \mu'_c = 3.2(346.2) = 1107.84 \text{ } \mu\text{p}$$

Ejemplo 1.5

Calcular la viscosidad del CO₂ a 114.6 atm y 40.3°C.

$$T_c = 304.2 \text{ K} \quad p_c = 72.9 \text{ atm}, \quad \mu_c = 3.43 \times 10^{-4}$$

Solución. Se evalúa primero μ_r

$$T_r = (273 + 40.3) / 304.2 = 1.03$$

$$p_r = 114.3 / 72.9 = 1.57$$

de la gráfica I.3-1 se obtiene $\mu_r = 1.5$

con la cual se calcula

$$\mu \mu_r \mu_c = 1.5(3.43 \times 10^{-4}) = 5.145 \times 10^{-4} \text{ poise}$$

Para líquidos puros es más recomendable y sencillo investigarla en la bibliografía disponible, o bien, evaluarla por medios experimentales. No obstante, existen correlaciones que permiten su evaluación, aunque en su mayor parte se refieren a hidrocarburos y, por lo mismo, están limitadas a los fluidos newtonianos, además, su error varía desde un 0% hasta cerca de un 170%, sin ser consistente, o sea, no son confiables. La correlación más confiable, pero también limitada, es la que se muestra enseguida:

$$\log \mu_L = A + \frac{B}{T} = CT + DT^2 \quad (1.29)$$

en donde:

μ_L = viscosidad de líquidos, (cp)

T = Temperatura, (K)

Las constantes **A**, **B**, **C** y **D** están dadas en la tabla 1.6 para algunos líquidos polares con errores porcentuales realmente bajos. Desgraciadamente no se cuenta con valores para todos los líquidos, por lo que la correlación se encuentra muy limitada.

Tabla 1.6 Constantes para la ecuación 1.29

Compuesto	A	B	C	D	Intervalo (°C)
Agua	-10.73	1,828	0.01966	-14.66×10^{-6}	0 a 374.2
CO ₂	-1.345	21.22	0.01034	-34.05×10^{-6}	-56.5 a 31.1

Metanol	-99.73	7,317	0.4681	-745.3×10^{-6}	-97.6 a -40
Metanol	-17.09	2,096	0.04738	-48.93×10^{-6}	-40 a 239.4
Etanol	-2.697	700.9	0.002682	-4.917×10^{-6}	-105 a 243.1
n-Propanol	-5.33	1,158	0.008722	-9.699×10^{-6}	-72 a 263.6
n-Butanol	-4.22	1,130	0.004137	-4.328×10^{-6}	-60 a 289.8
Propano	-3.372	313.5	0.01034	-20.26×10^{-6}	-187.7 a 96.7
NO ₂	-8.431	932.6	0.02759	-37.54×10^{-6}	-11.2 a 158

Ejemplo I.6

Se desea calcular la viscosidad del agua a 20°C por medio de la ecuación 1.29 y evaluar el error inducido. El valor experimental de la viscosidad es 1.005 cp.

Solución. La correlación de Andrade para este caso en particular es

$$\log \mu_L = -10.73 + \frac{1,828}{293} + 0.01966(293) - 14.66 \times 10^{-6}(293)^2 = 0.01074$$

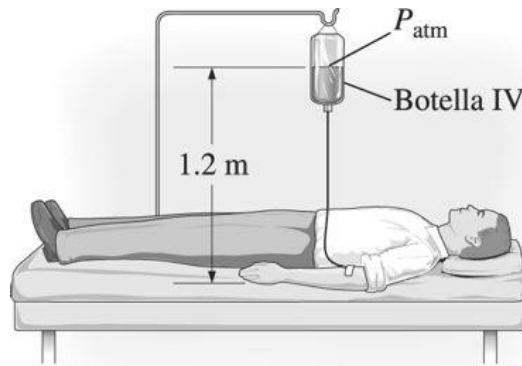
$$\mu_{L_c} = 10^{0.01074} = 1.025 \text{ (cp)}$$

y el porcentaje de error es:

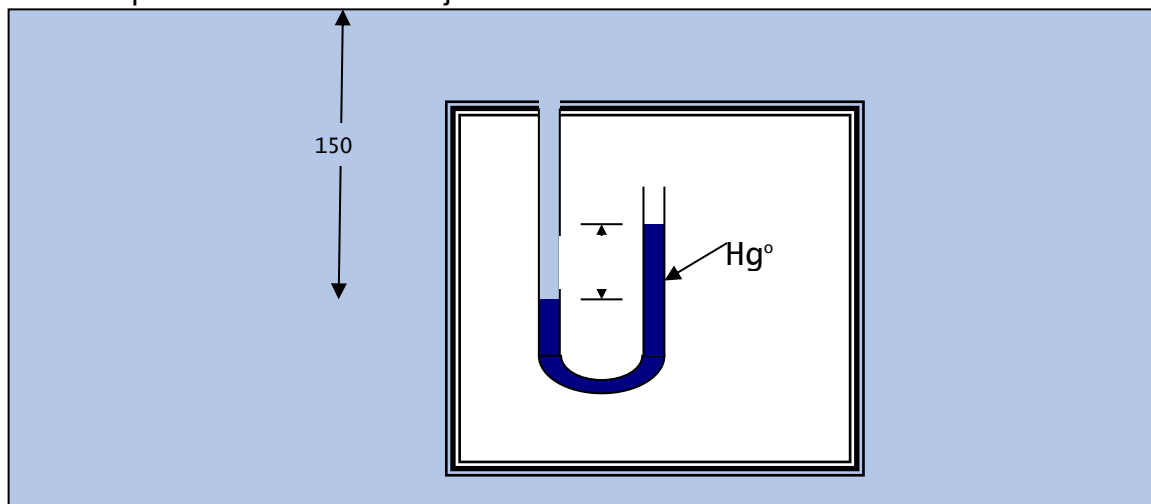
$$e = \left| \frac{1.005 - 1.025}{1.005} \right| \times 100 = 2\%$$

PROBLEMAS.

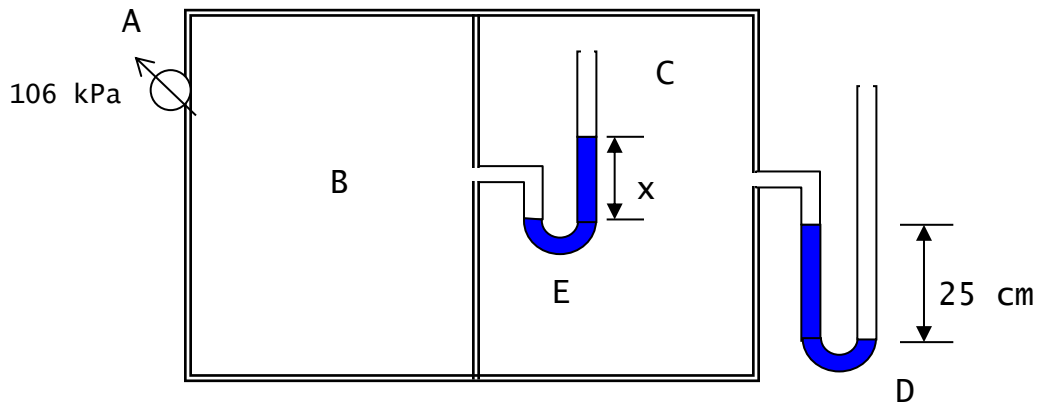
1. Las transfusiones intravenosas suelen impulsarse por gravedad cuando se cuelga la botella de sangre a una altura suficiente para contrarrestar la presión sanguínea en la vena y forzar ese fluido hacia el interior del cuerpo. Cuanto más alto se coloque la botella, mayor será el gasto del fluido. Si se considera que las presiones normales son de 80 mm para la sistólica y 120 mm para la diastólica. a) Considerando que se equilibran entre sí las presiones del fluido y la sanguínea cuando la botella está 1.2 m arriba del nivel del brazo, determine si la presión sanguínea manométrica es suficiente para contrarrestar la presión interior. b) Si la altura fuera de un metro, ¿cual sería la presión y que ocurriría? c) Si la presión manométrica del fluido a nivel del brazo es de 20 kPa para tener un gasto suficiente, determine a qué altura debe colocarse la botella y determine si el paciente tiene la presión normal o sufre de alta presión. Tome la densidad de la sangre como $1\,020\text{ kg/m}^3$.



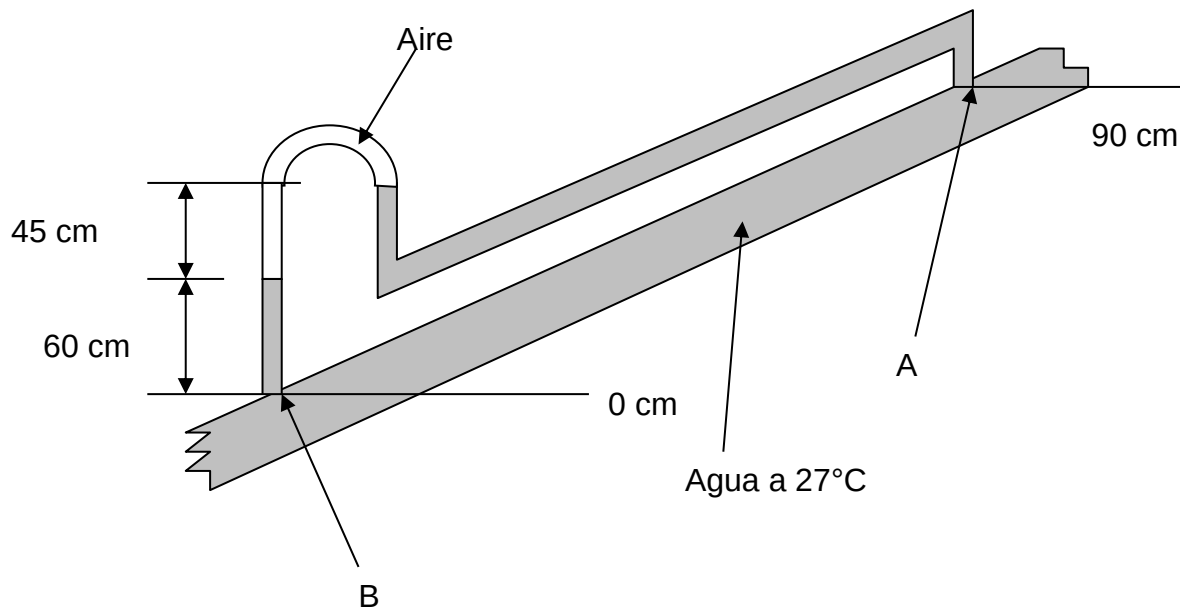
2. El sistema mostrado consta de una caja que se encuentra en lo profundo de un lago. La caja en su interior se encuentra a una presión de 1.2 atm. La profundidad a la que se encuentra la caja es de 15 m y la superficie del agua se encuentra a la presión atmosférica (100 kPa). Determinar la lectura del manómetro. Si el manómetro muestra una diferencia de altura de 200 mm, calcular la profundidad a la que se encuentra la caja.



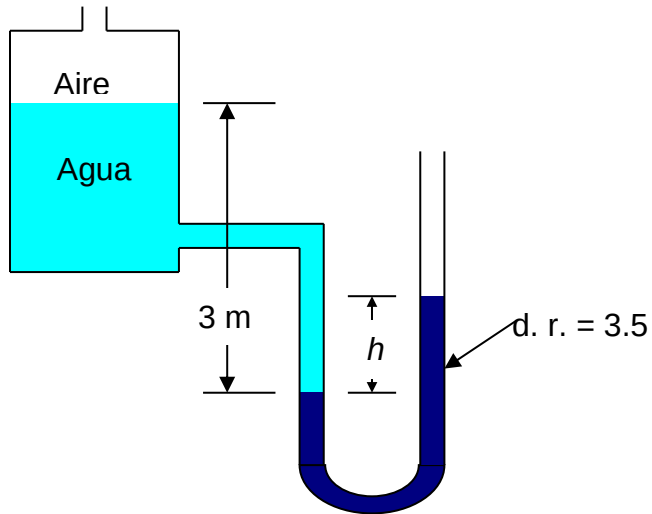
3. Los compartimientos *B* y *C* de la figura mostrada están cerrados y llenos de aire. La lectura barométrica es de 100 kPa. Cuando los manómetros *A* y *D* marcan las lecturas indicadas, ¿qué valor tendrá *x* en el manómetro *E* de mercurio?



4. Determinar la diferencia de presión entre los puntos *A* y *B* de la figura dada abajo.

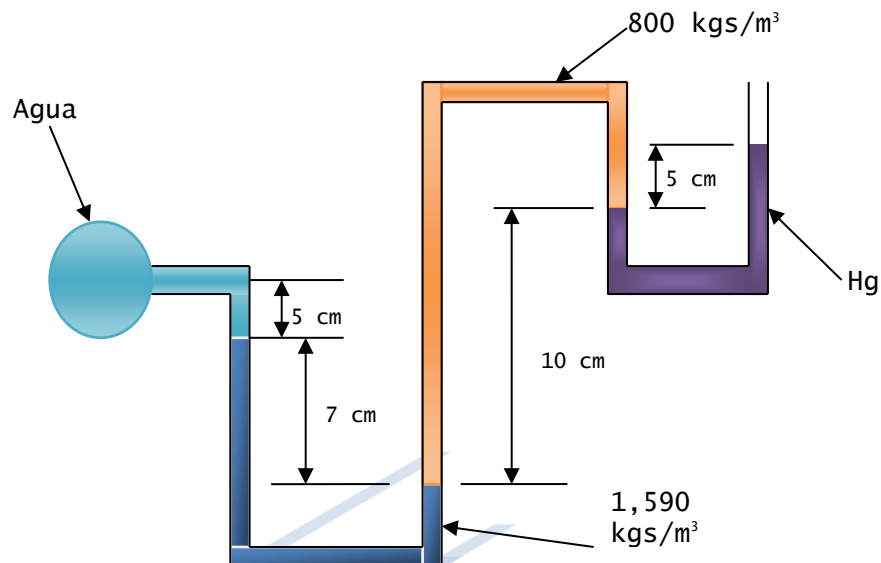


5. El manómetro de la figura permanece como se muestra cuando el recipiente se encuentra abierto a la atmósfera.

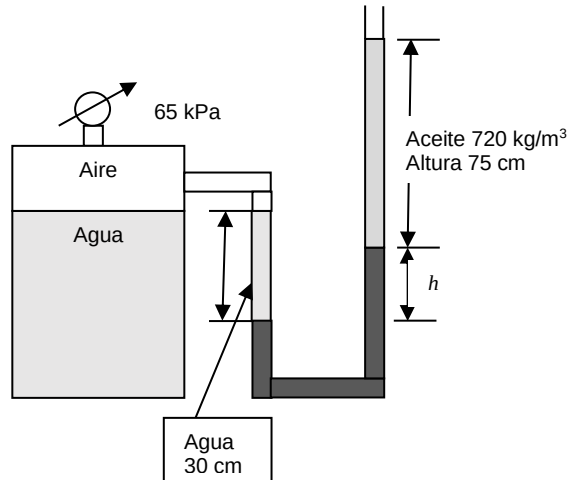


Determine la altura h del manómetro tal y como se ve en la figura. Si el recipiente se cierra y se mantiene 69 kPa de presión en el espacio que contiene aire, calcule la altura h a la que deberá de dar el manómetro.

6. Determinar la presión en la tubería que transporta agua, mostrada en la figura:

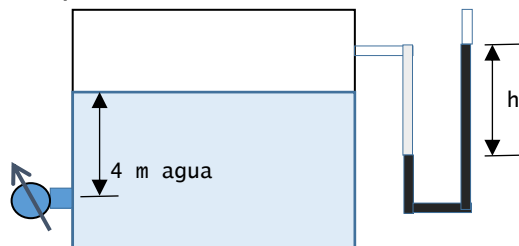


7. La presión manométrica dentro del tanque es de 65 kPa, como se muestra en la figura. Calcule la altura h indicada para la diferencia de nivel del mercurio.

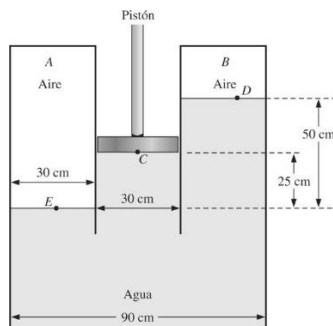


¿Cuál será la nueva altura si la presión interna se incrementa a 100 kPa?

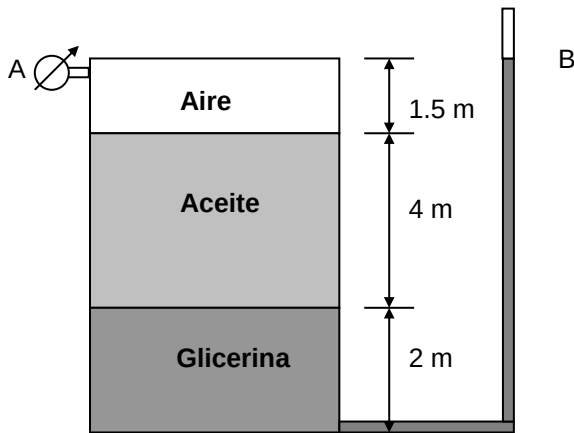
8. En la figura, se muestra un recipiente cerrado que contiene agua. El manómetro mecánico mostrado, se encuentra a una profundidad de 4 m y marca una presión de 90,000 pascales. El manómetro de la derecha es un tubo en U que contiene mercurio y muestra una diferencia de altura que se desea calcular. Después de hacer al cálculo anterior, si la diferencia de altura del mercurio se incrementa en un 20%, ¿Qué presión marcaría el manómetro mecánico?



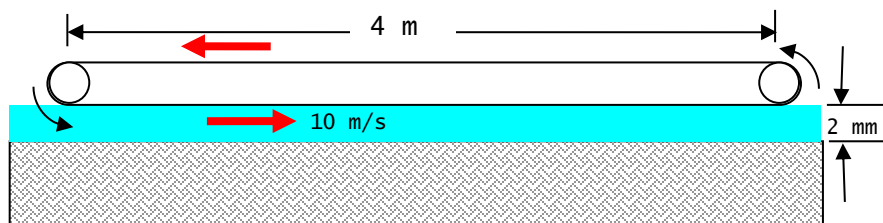
9. Dos cámaras con el mismo fluido en su base están separados por un émbolo cuyo peso es de 25 N, como se muestra en la figura. Calcule las presiones manométricas en las cámaras A y B.



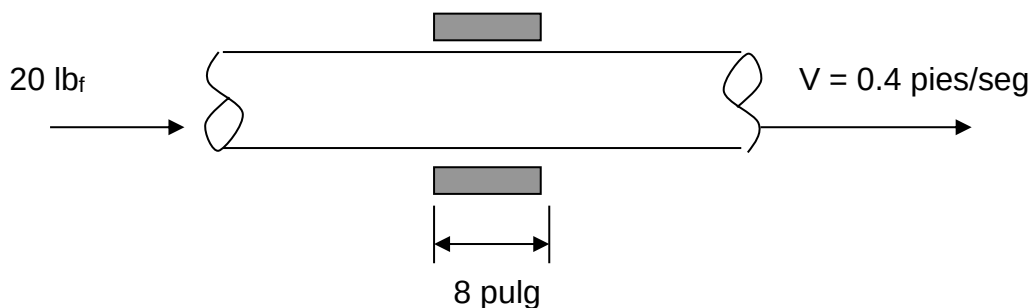
10. En la figura mostrada a continuación, ¿Qué presión manométrica en A hará que la glicerina suba hasta el nivel B? El aceite y la glicerina se encuentran a una temperatura de 25°C.



11. Una banda de 60 cm de ancho se mueve como se muestra en la figura. Calcule la potencia, en Watts, necesaria para lograr que se mueva con la velocidad mostrada.



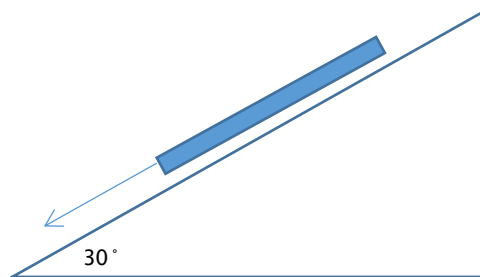
12. Determine la viscosidad del fluido que se encuentra entre la flecha y el cilindro por el que se mueve, de acuerdo con la figura dada. Siendo el diámetro del cilindro interno de 3 pulg. y el del cilindro externo de 3.006 pulgs.



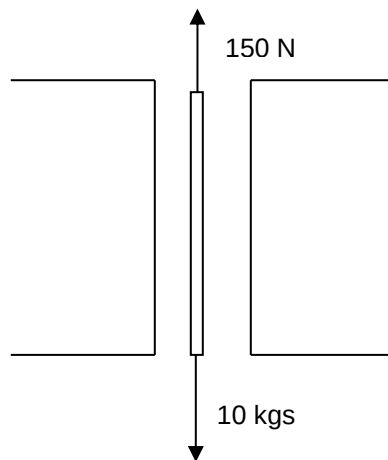
13. Un cilindro vertical de acero de 1 pulg. de diámetro y 12 pulgs. de longitud, dentro de un tubo ligeramente mayor, cae, debido a su propio peso, a una velocidad uniforme

de 0.5 pies/seg. Se llena el espacio entre el cilindro y el tubo con glicerina a una temperatura de 35°C. Determinar el espesor del espacio entre el tubo y el cilindro.

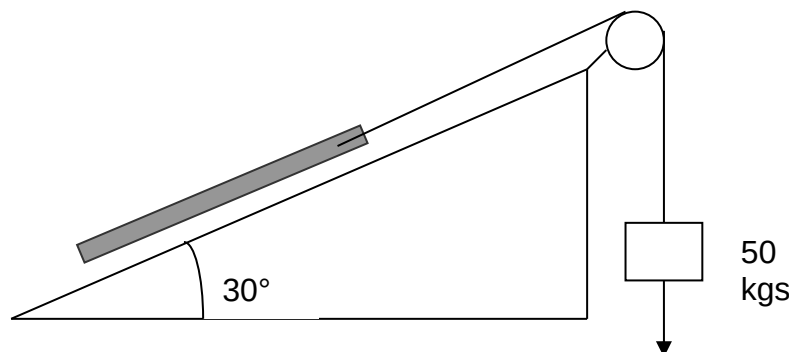
14. Un sistema de dos placas paralelas infinitamente grande separadas por un espacio de 2 mm. La placa inferior se mueve a una velocidad de 5 mm/s mientras que la superior permanece fija. El espacio entre las dos placas se encuentra un fluido Ostwald cuyo índice de consistencia es de $6.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ y su exponente es de 0.5. Determinar el esfuerzo cortante. Si la velocidad se reduce a la mitad, determinar si el esfuerzo cortante se incrementa o se reduce. Igualmente, si el espacio se reduce a la mitad, determinar si el esfuerzo cortante aumenta o se reduce. En base a los resultados, ¿se puede deducir si el fluido es dilatante o pseudoplastico?
15. Un cilindro vertical de 1 pulg. de diámetro y 12 pulgs. de longitud y una masa de 3 lb_m, dentro de un tubo ligeramente mayor cae, debido a su propio peso, a una velocidad uniforme de 0.5 pies/seg. Se llena el espacio entre el cilindro y el tubo con glicerina ($\mu = 1.547 \text{ lb}_m/\text{pie}\cdot\text{seg}$).
- Determinar el espesor del espacio entre el tubo y el cilindro y el diámetro del tubo.
 - Si el espesor de la ranura entre tubo y cilindro es de 5 mm, ¿cuál será la velocidad de caída del cilindro?
16. Un trozo de tubo de 5 cm de diámetro y 25 cm de longitud se desliza por un cilindro vertical metálico de 4.9 cm de diámetro a una velocidad constante de 4 cm/s. Para lograr esa velocidad se le aplica al tubo una fuerza de 6 N de manera constante. Se desea calcular la viscosidad del fluido que se requiere para que el tubo resbale por en el cilindro.
17. En la figura mostrada se tiene una rampa cuya inclinación es de 30° sobre la horizontal. Sobre la rampa se tiene una placa de 4 m² cuyo peso es de 10 kg, la cual resbala sobre una capa de un líquido viscoso con una separación de 2 mm. La placa se mueve a una velocidad de 0.2 m/s. Se desea saber la viscosidad del fluido.



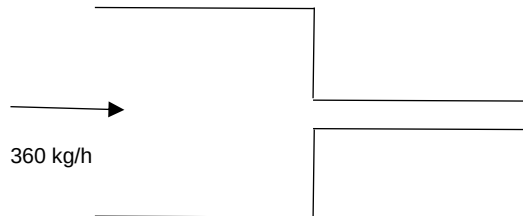
18. Se tiene una ranura de 10 mm de ancho, en una pared muy grande. Dentro de la ranura se coloca una placa de 2 m^2 y 1 mm de espesor. La placa se encuentra a 1 mm de la pared en un lado, mientras que en el otro se encuentra a 8 mm. La ranura se encuentra llena de aceite, cuya viscosidad es de $0.84 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ a 20°C . La placa se mueve a una velocidad de 40 cm/seg . Determinar la fuerza necesaria para mover la placa.
19. El sistema mostrado en la figura consiste en una ranura de 6 mm de espesor, en la parte interior se encuentra una lámina de 2 mm de espesor y de 2 m por lado. La lámina pesa 10 kgs y la ranura se encuentra llena de glicerina a 25°C . La lámina está siendo jalada hacia arriba por una fuerza de 150 N. Se desea saber a qué velocidad se está moviendo la lámina y hacia dónde (arriba o abajo).



20. El sistema mostrado en la figura consiste en una rampa de 30° de inclinación, por sobre la cual se desliza una lámina de 2 mm de espesor y de 2 m por lado. La lámina tiene una masa de 62 kg y entre la lámina y la rampa hay un espacio de 2 mm de espesor que se encuentra lleno de glicerina a 25°C . La lámina está siendo jalada hacia arriba por un objeto cuya masa es de 50 kg. Se desea saber a qué velocidad se está moviendo la lámina y en qué dirección (arriba o abajo).



21. Por un tubo de 2 pulg de diámetro está fluyendo agua a 25°C a razón de 180 L/min. Cuál será el flujo si por otro tubo de 1 pulg de diámetro fluye glicerina también a 25°C con el mismo régimen que en el otro tubo con agua.
22. ¿Cuál será la mínima velocidad en flujo turbulento que se puede obtener en un tubo de 1 pulg de diámetro, para agua a 35 °C? ¿Cuál pudiera ser si se trata de aire a 1 atmósfera y 55 °C?
23. Por una tubería de 3 pulg, que descarga hacia otra tubería de 1 pulg, circula un fluido. ¿Cuál es el número de Reynolds en el tubo de 1 pulg, si en el de 3 pulg es de 15,000?
24. Por un tubo de 4 pulgadas de diámetro fluye agua a razón de 2 kg/s ($\rho = 996 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 7.98 \times 10^{-4} \text{ Pa-s}$). Determinar el régimen al que se encuentra. Si el diámetro se reduce a 3 pulgadas, determine la variación en el número de Reynolds y el régimen de flujo. Si el fluido es glicerina a 30°C ($\rho = 1258 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 0.6582 \text{ Pa-s}$). Si se aumenta el diámetro a 8 pulgadas, determine si cambia el régimen, el flujo y la velocidad.
25. En la figura se muestran dos tubos de 10 cm y 2 cm de diámetro. El primer tubo tiene una longitud de 10 m, mientras que el segundo tiene una longitud de 7 m. Por los tubos fluye agua a razón de 360 kg/h. Calcular los siguientes parámetros:
- La velocidad y el gasto en cada uno de los tubos.
 - El régimen de flujo en cada uno de ellos.



26. Una tubería de 15 cm de diámetro descarga en dos tubos de 7.5 cm de diámetro. Por dentro de ellas pasa un fluido de tal manera que el número de Reynolds en la tubería de 15 cm es de 20,000. ¿Cuál será el Reynolds en las tuberías de 75 mm? Para probar la resistencia de una tubería, primeramente, se hace pasar agua por ella, bajo las mismas condiciones a las que va a trabajar con el líquido que va a transportar. En este caso, se quiere transportar 60 kg/min de mercurio por una tubería de 1 pulgada de diámetro. Para verificar la resistencia de la misma, se hace pasar agua a las mismas condiciones de flujo a las que va a estar el mercurio, por lo que se desea saber cuál es el flujo de agua que debería pasar por la tubería a las mismas condiciones y a una temperatura de 20°C. Calcule también tanto la velocidad del agua como la del mercurio.
27. El etano tiene una temperatura crítica de 305.4 K, una presión crítica de 48.2 atm y

un volumen crítico de $148 \text{ cm}^3/\text{gmol}$. Determinar su viscosidad a 227°C y 150 atm de presión.

28. Determine la viscosidad del SO_2 a 400°C y 200 atm .
29. Determine la viscosidad del metano a 100°C y 150 atm .
30. Se tiene una mezcla de 20% de CO , 30% de CO_2 y 50% de aire en volumen. Se desea conocer la viscosidad de la mezcla a 150°C y 120 atm .
31. Se tiene una mezcla de 50% de aire, 20% de metano y 30% de etano en volumen. Se desea conocer la viscosidad de la mezcla a 200°C y 100 atm .
32. Calcular la viscosidad del metanol a 50°C .
33. Calcular la viscosidad del etanol a 40°C .
34. Calcular la viscosidad del propanol a 65°C .
35. Calcular la viscosidad del butanol a -10°C .

CAPITULO 2

ANALISIS EN FLUJO LAMINAR

2.1 EL POSTULADO GENERAL DE BALANCES

El objetivo primordial de la ingeniería es el de diseñar, operar y controlar equipos y procesos. Pero, para poder cumplirlo, es necesario conocer los parámetros que permiten llevar a cabo su diseño o control. Los parámetros a que se hace mención dependen del tipo de transferencia que está sucediendo dentro del proceso o equipo. Por ejemplo, si se trata de una caldera se requiere conocer la cantidad de calor generada por el combustible, la temperatura de entrada del agua, la temperatura y presión de salida del vapor, la cantidad de calor necesaria para elevar el agua desde la temperatura y presión iniciales hasta las finales y la cantidad de agua evaporada por unidad de tiempo. En los sistemas en donde la mecánica de fluidos predomina o, por lo menos, la transferencia de cantidad de movimiento es uno de los tipos de transferencia que toman parte, es necesario conocer parámetros tales como el flujo másico o volumétrico del fluido involucrado, así como también su velocidad promedio, velocidad máxima y el esfuerzo cortante en la superficie del sistema principalmente. Dichos parámetros es posible obtenerlos con mayor facilidad si se cuenta con el perfil de velocidad del sistema analizado.

Para empezar, es necesario aclarar que un perfil de velocidad está representado por una función que permite determinar la velocidad de las moléculas de fluido según su posición en un sistema dado. Por lo que, se requiere definir algunos conceptos que, de pronto, pueden parecer confusos. En principio, una función se define como una expresión matemática dependiente de una variable independiente, la cual debe ser continua. En este caso, tanto la función (variable dependiente) como la variable independiente deben ser elementos del conjunto de los números reales. Es decir, que para cada valor arbitrario de la variable independiente debe existir un valor de la variable dependiente, en este caso ambos son números reales. Esto es, la función existe y toma valores dentro de un rango de valores del conjunto de los números reales de la variable independiente, al cual se le conoce como **dominio** y a los valores que toma la función se le conoce como **codominio**. O sea, que para que una función exista, debe ser continua en el rango de valores que representa el dominio.

Ahora bien, la termodinámica considera a un sistema como una región del universo sometida a estudio. Es decir, un sistema consta de un conjunto de puntos en el espacio, que además está siendo afectado por el tiempo. Con lo que se concluye que una función en tal sistema debe ser tetradimensional. Entonces, si se tiene un sistema que contiene a un fluido en movimiento, el perfil de velocidades debe de permitir conocer el valor numérico de la velocidad de las moléculas de fluido en cada punto dentro del mismo. Por lo que existe

una dicotomía, por un lado se desearía conocer la velocidad de cada una de las moléculas en cada punto del espacio, sin embargo, en la materia existen gran cantidad de huecos en donde no existe, si nos vamos al concepto fundamental de **punto**.

Por lo que, para poder definir una función real en base a la posición, es necesario modificar el concepto de punto, considerando un volumen infinitesimal, lo suficientemente grande para que contenga la cantidad suficiente de moléculas. De tal manera que permita evaluar funciones tales como densidad, flujo y otras. Es decir, tomando como ejemplo a la densidad, es necesario contar con una cantidad suficiente de moléculas cuya suma de masas permita evaluar la masa total de materia y dividirla entre el volumen ocupado por ellas. Y si se toma la velocidad como ejemplo, se considera que todas las moléculas dentro de ese volumen tienen la misma rapidez y la misma trayectoria. Solamente así, se puede considerar un sistema como una región continua, a tal sistema se le conoce como **Volumen de control** lo cual se muestra en la figura 2.1 (Welty, 2001). Y todas las funciones definidas en él, deben de ser continuas.

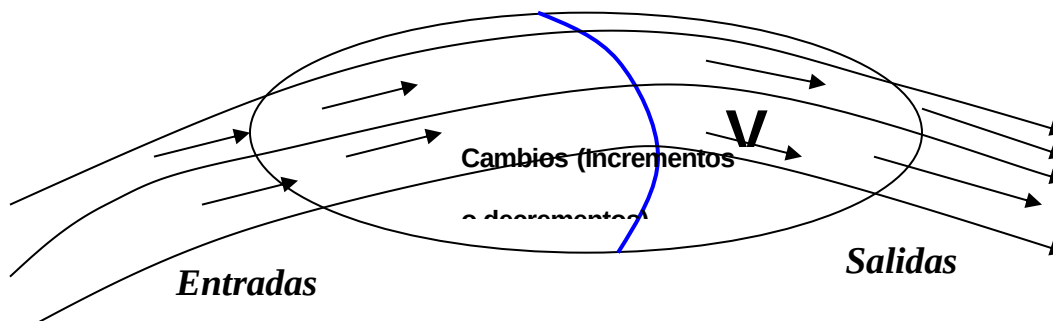


Figura 2.1 Volumen de control

Sobre esta base, más adelante, se desarrollarán las funciones que permitirán conocer el valor y la trayectoria de la velocidad y del esfuerzo cortante de las moléculas de fluido en cualquier posición en una región del espacio o volumen de control. Pero, para lograrlo, es necesario aplicar las leyes de la naturaleza que inciden en el sistema. Por esto, la primera sección de esta unidad se dedicará al establecimiento del postulado general del balance y el procedimiento general para la obtención de perfiles de velocidad. La segunda sección estará dedicada a la aplicación de los balances de materia y de cantidad de movimiento para algunos sistemas de geometría simple, con el fin de obtener sus perfiles de velocidad. Y en la tercera sección, tomando como base los balances, se obtendrán las ecuaciones de continuidad y de movimiento en su forma vectorial, aplicándose también a algunos sistemas simples.

El postulado general del balance tiene su base en la **ley de la conservación de la materia**, la cual establece que "la materia no se crea ni se destruye, solamente se transforma", postulado que es también aplicable al movimiento y, con mayor rigidez, a la energía. De manera que, para cualquier sistema, en general se define al balance como:

$$\{Entradas\} - \{Salidas\} + \{Producción\} = \{Acumulación\} \quad (2.1)$$

Particularizando para la materia y considerando que en mecánica de fluidos no se incluye la producción, en un sistema dinámico el balance se transforma en

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{materia } a \\ \text{la entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{materia } a \\ \text{la salida} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulación} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

y si se desea aplicar a la transferencia de cantidad de movimiento (momentum), se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{Momentum} \\ \text{a la entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{Momentum} \\ \text{a la salida} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de Fuerzas} \\ \text{que actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulación de} \\ \text{Momentum en} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

En la misma forma es aplicable para la transferencia de energía, resultando una expresión similar a la anterior, pero por no ser el objetivo de este curso no se va a ahondar en este tema.

En la sección 2.2, todos los sistemas a los que se va aplicar las ecuaciones (2.2) y (2.3) se van a considerar en estado estable, es decir, son independientes con respecto al tiempo (Bird, 2002). Por lo anterior, en ambas ecuaciones no se toma en cuenta el término de acumulación, simplificando ambos postulados y obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{materia } a \\ \text{la entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{materia } a \\ \text{la salida} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{momentum } a \\ \text{la entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{momentum } a \\ \text{la salida} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de Fuerzas} \\ \text{que actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Al aplicar en un sistema específico los dos postulados anteriormente expresados, ya sea en estado estable o inestable, se obtiene una ecuación diferencial, que al resolverla da como resultado una familia de funciones ya que contiene una o más constantes de integración. Y la solución particular para el sistema que se estudie, se obtiene al determinar el valor de dichas constantes y, para hacerlo, es necesario conocer las condiciones de los parámetros en las fronteras del sistema citado. Ahora bien, para conocer las condiciones mencionadas, se establecen criterios generales como los siguientes:

1. - Interfaz sólido-fluido. La velocidad del fluido es igual a la velocidad de la superficie sólida, es decir, se considera que las moléculas de fluido que se encuentran sobre la superficie se adhieren a ella.

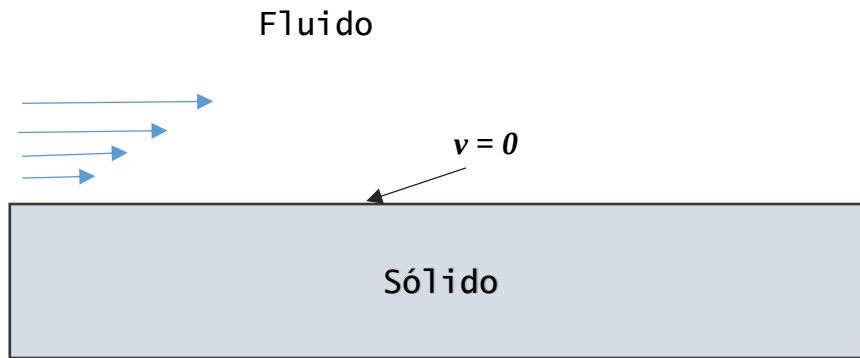


Figura 2.1 Condiciones frontera 1

2. - Interfaz líquido-gas. La transferencia de cantidad de movimiento en el gas es muchísimo menor que en el líquido, cualquiera que este sea, por lo que se puede considerar que en ese punto el esfuerzo cortante es despreciable o cero.

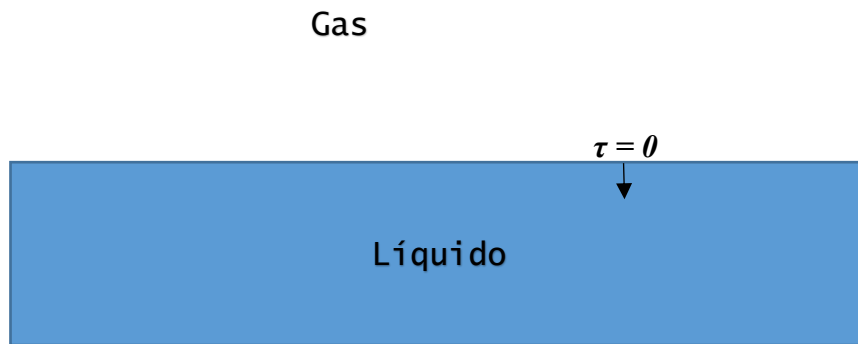


Figura 2.2 Condición frontera 2

3. - Interfaz líquido-líquido. Cuando se tienen dos líquidos de diferente viscosidad coexistiendo en un sistema, tanto la función de esfuerzo cortante como la de velocidad son continuas en el punto de contacto entre ambos fluidos donde se localiza la interfaz.

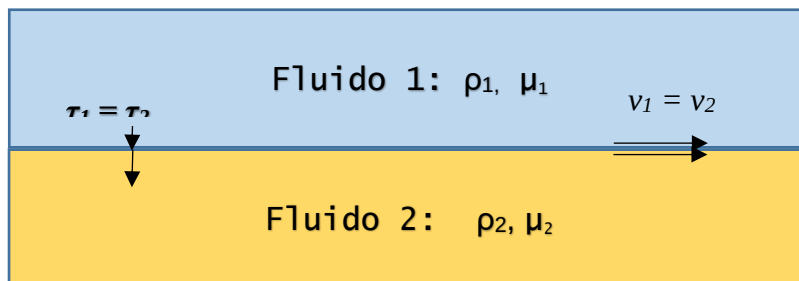


Figura 2.3 Condiciones de frontera 3

Sin embargo, no todos los casos posibles se pueden basar en los tres criterios mencionados, existen muchas situaciones en donde se debe de hacer uso de la observación y de la intuición. No es posible, hasta la fecha, desarrollar procedimientos totalmente infalibles como recetarios, en multitud de ocasiones es y será necesario hacer uso del criterio y la experiencia.

2.2 PERFILES DE VELOCIDAD Y DE ESFUERZO CORTANTE PARA SISTEMAS EN ESTADO ESTABLE.

2.2.1 Análisis de una película descendente.

Considérese el sistema bosquejado en la figura 2.4, la cual muestra una represa con una rampa inclinada para desfogar los excedentes de agua cuando el nivel se eleva demasiado. Dependiendo de la elevación del nivel de agua en la represa, es el espesor de la película de agua en la rampa.

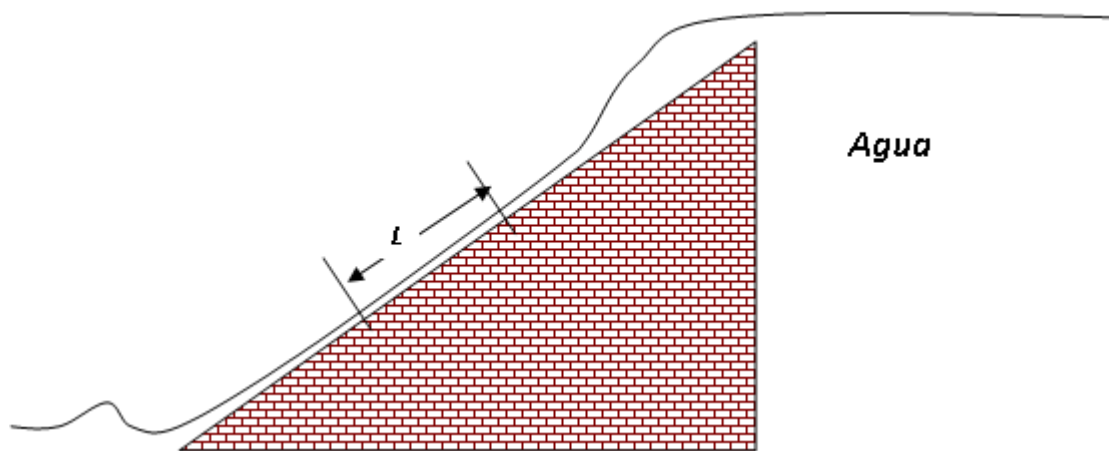


Figura 2.4 Rampa inclinada

Se desea hacer un análisis de este sistema con el propósito de obtener la velocidad promedio, el flujo volumétrico y la fuerza de arrastre del líquido sobre la rampa. Para obtener estos valores, se debe obtener primero el perfil de velocidades del sistema. Pero, para obtener el perfil de velocidades, se debe de escoger la región en donde es posible desarrollar un análisis. Por principio, no es posible desarrollarlo en la parte superior ni en la parte más baja del sistema, porque dichas regiones están siendo perturbadas por los cambios bruscos de dirección. En cambio, en la región intermedia, marcada con la letra **L**, el flujo es unidireccional y laminar, por lo que el análisis estará enfocado a dicha región.

Acto seguido, se amplifica la región seleccionada para facilitar su análisis, tal como se presenta en la figura 2.5, la cual muestra una rampa inclinada de longitud L y ancho W con una capa de líquido de espesor δ . Primeramente, en ella se debe de escoger el sistema de coordenadas más apropiado, en este caso lo es el sistema rectangular, pero existen cuatro posiciones posibles para colocar su origen, dos en la interfaz sólido-líquido y dos en la interfaz líquido-gas, siendo la posición más conveniente en la parte superior derecha. Se elige a continuación un elemento diferencial para tomarlo como base para el balance de materia y de movimiento. La figura 2.5 presenta un sistema de coordenadas con dos variables, z apunta en la dirección del movimiento y x en la dirección perpendicular del mismo; la coordenada y no se ha incluido ya que en esa dirección las funciones que caracterizan al sistema no varían. En la parte intermedia de la figura se localiza un elemento diferencial de longitud L y espesor Δx , al que se le aplican dos balances, uno de materia y el otro de movimiento (Bird, 2002).

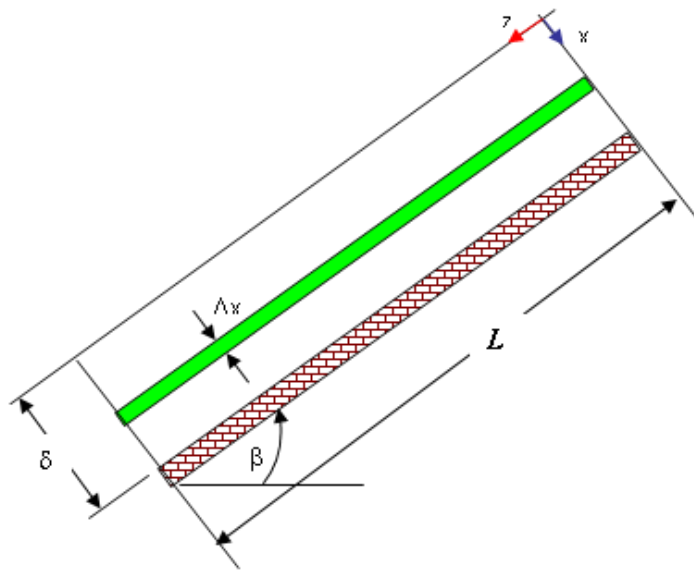


Figura 2.5 Volumen de control

El primero en aplicarse es el balance de materia, tomando en cuenta la definición de flujo másico como el producto de la densidad por la velocidad por el área transversal al flujo y siguiendo lo indicado por el postulado dado en la expresión 2.4, se establece

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de materia} \\ \text{a la entrada} \end{array} \right\} = W \Delta x \rho v_z|_{z=0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de materia} \\ \text{a la salida} \end{array} \right\} = W \Delta x \rho v_z|_{z=L}$$

substituyendo en el postulado se obtiene

$$W\Delta x\rho v_z|_{z=0} - W\Delta x\rho v_z|_{z=L} = W\Delta x\rho(v_z|_{z=0} - v_z|_{z=L}) = 0 \quad (2.6)$$

De donde se concluye que:

$$v_z|_{z=0} = v_z|_{z=L}$$

o sea, que la función velocidad no depende de la variable z .

El segundo paso corresponde a la aplicación del balance de momentum definido por la expresión 2.5. En ella el flujo de momento consta de la suma de dos partes, el flujo de momento viscoso (por efecto de la fricción viscosa) y el convectivo (por efectos inerciales), quedando definidos por

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{momentum} \\ \text{a la entrada} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{viscoso a la entrada} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{convectivo a la entrada} \end{array} \right\} \\ &= WL\tau_{xz}|_x + W\Delta x\rho v_z^2|_{z=0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de} \\ \text{momentum} \\ \text{a la salida} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{viscoso a la salida} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{convectivo a la salida} \end{array} \right\} \\ &= WL\tau_{xz}|_{x+\Delta x} + W\Delta x\rho v_z^2|_{z=L} \end{aligned}$$

y la parte de la suma de fuerzas, mediante el análisis de la figura, se concluye que la fuerza impulsora que produce el movimiento es la parte de la fuerza de gravedad que actúa en la dirección de este, definiéndose entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de fuerzas} \\ \text{que actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} = WL\Delta x\rho g \sin\beta$$

siguiendo con el procedimiento, se aplican las tres últimas expresiones en la ecuación (2.5) para lograr

$$WL\tau_{xz}|_x + W\Delta x\rho v_z^2|_{z=0} - WL\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - W\Delta x\rho v_z^2|_{z=L} + L\Delta x\rho g \sin\beta = 0$$

este tipo de ecuaciones en lo sucesivo, con el propósito de simplificar la expresión, se expresará de la manera siguiente

$$-W\Delta x\rho v_z^2|_{z=L} - WL\tau_{xz}|_x^{x+\Delta x} + WL\Delta x\rho g \sin\beta = 0 \quad (2.7)$$

El primer término de la ecuación (2.7) se puede factorizar, dando como resultado

$$W\Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=0}^{z=L} = W\Delta x \rho (v_z|_{z=0} + v_z|_{z=L})(v_z|_{z=0} - v_z|_{z=L}) = 0$$

la cual es cero dado que la conclusión del balance de materia para este sistema en particular, expresado en la ecuación (2.6), da este resultado. Por tanto, de la ecuación (2.7) se elimina el primer término para transformarlo en

$$-WL\tau_{xz}|_x^{x+\Delta x} + WL\rho g \sin\beta = 0 \quad (2.8)$$

a la que se le divide entre el elemento diferencial de volumen ($WL\Delta x$), resultando

$$-\frac{\tau_{xz}|_x^{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g \sin\beta = 0 \quad (2.9)$$

se obtiene el límite cuando el elemento diferencial de x tiende a cero y se aplica el teorema del valor medio, por lo que se obtiene la ecuación diferencial:

$$-\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g \sin\beta = 0$$

O también:

$$\boxed{\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \sin\beta} \quad (2.10)$$

Esta última ecuación, al integrarla en forma indefinida, da como resultado

$$\tau_{xz} = \rho g \sin\beta + C_1 \quad (2.11)$$

que contiene una constante de integración, que debe ser evaluada por medio de una condición frontera. Para determinar la condición frontera más adecuada, se debe recurrir nuevamente a la figura 2.5, en donde se puede observar que existe una interfaz líquido-gas en la superficie del líquido. Por tanto, lo más adecuado es

$$\text{C.F.1) en } x = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0$$

la que se aplica en la ecuación (2.11) para concluir que

$$C_1 = 0$$

la cual, al ser sustituida en la propia ecuación (2.11) determina la ecuación del perfil de esfuerzo cortante para el flujo de agua en la rampa, quedando

$$\tau_{xz} = (\rho g \sin\beta)x \quad (2.12)$$

Si el fluido es newtoniano se aplica entonces la definición de esfuerzo cortante correspondiente, es decir, la ley de Newton de la viscosidad que para este sistema es:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$$

y que una vez substituida en la ecuación (2.12), da como resultado

$$-\mu \frac{dv_z}{dx} = (\rho g \sin \beta) x$$

O bien:

$$\frac{dv_z}{dx} = - \left(\frac{\rho g \sin \beta}{\mu} \right) x \quad (2.13)$$

se obtiene ahora la integral indefinida de la ecuación (2.13), obteniendo

$$v_z = - \left(\frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} \right) x^2 + C_2$$

se debe buscar una frontera del sistema en donde se pueda evaluar o deducir el valor de la velocidad, dicha frontera es la interfaz sólido-líquido en donde se deduce que

$$\text{C.F.2) en } x = \delta ; \quad v_z = 0$$

la cual, al substituir la en la ecuación (2.13), da como resultado el valor de la constante, que es:

$$C_2 = \frac{\rho g \delta^2 \sin \beta}{2\mu}$$

al substituir la constante en la ecuación (2.13) se concluye:

$$\boxed{v_z = \frac{\rho g \delta^2 \sin \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]} \quad (2.14)$$

A esta última ecuación se le reconoce como **el perfil de velocidades** para el sistema definido en la figura 2.5, que de acuerdo a la misma se trata de una parábola y se dice entonces que el sistema tiene un perfil parabólico. Ahora bien, una vez obtenido el perfil de velocidades se pueden obtener los parámetros que generalmente se requieren para conocer el comportamiento de un sistema, como son la velocidad máxima, la velocidad promedio, el flujo volumétrico o másico y la fuerza de arrastre.

Velocidad máxima, $v_{z \text{ máx.}}$

La cual, lógicamente, se localiza en la interfaz líquido-

gas ($x = 0$) y, por tanto

$$\boxed{v_{z \text{ máx}} = \frac{\rho g \delta^2 \sin \beta}{2\mu}} \quad (2.15)$$

Flujo volumétrico, G (Gasto). Que resulta al integrar la ecuación de la velocidad en toda

el área transversal o área de flujo

$$G = \iint v_z dA = \frac{\rho g \delta^2 \sin \beta}{2\mu} \int_0^W \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.16)$$

$$G = \frac{\rho g W \delta^3 \sin \beta}{3\mu} = \frac{2}{3} v_{z_{max}} W \delta$$

Velocidad promedio, $\langle v_z \rangle$. Se obtiene tomando como base la definición del Flujo volumétrico, que es

$$\langle v_z \rangle = \frac{G}{A} = \frac{\rho g \delta^3 \sin \beta / 3\mu}{W \delta} = \frac{\rho g \delta^2 \sin \beta}{3\mu} = \frac{2}{3} v_{z_{max}} \quad (2.17)$$

Fuerza de arrastre, F_z .

Es la fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie de la rampa. Lo cual es equivalente a la pérdida de energía cinética del fluido. Y se calcula evaluando primero el esfuerzo cortante sobre la superficie de la rampa y multiplicándolo por su área.

$$F = \int_0^L \int_0^W \tau_{xz} |_{x=\delta} dy dz = \int_0^L \int_0^W \rho g \delta \sin \beta dy dz = \rho g \delta L W \sin \beta \quad (2.18)$$

2.2.2 Análisis del flujo en un tubo.

El caso más frecuente de flujo de un fluido es a través de una tubería circular, ya que no existe lugar en una ciudad en donde no se encuentre un ducto que transporta agua, que es el líquido más común, o bien gas natural. Sin embargo, actualmente se maneja una gran cantidad de fluidos newtonianos y no newtonianos, aunque el manejo de estos últimos se lleva a cabo particularmente en la industria. Se tomará entonces el caso más común para desarrollar un análisis de flujo de materia y momentum en un tubo circular para lograr, igualmente, su perfil de esfuerzo cortante y de velocidad (Bird, 2002). Para ello, primeramente, se deben observar las figuras 2.6 y 2.7. La figura 2.6 muestra un sistema de tubería que transporta agua desde un tanque elevado hasta otro punto más bajo. En la figura se observa que la tubería puede tener una serie de cambios de dirección, por lo que para el análisis que se desea desarrollar se escoge una región en donde el disturbio sea mínimo, el flujo esté completamente desarrollado y sea unidireccional. Para lo cual se localiza una región de tubería recta (definida con la letra **L**), lejos de los cambios de dirección. En dicha región se considera que el flujo es laminar y se encuentra en estado estable.

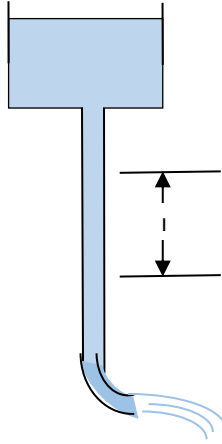


Figura 2.6
Tanque elevado conteniendo
agua, con nivel constante y
derramando un flujo constante

La figura 2.7 muestra la región L que se menciona en el párrafo anterior. Dicha región se considera que no está siendo perturbada por los efectos provocados por los codos superior e inferior, en donde al haber cambios de dirección el movimiento del fluido es bidireccional, por lo que en esas regiones el análisis se vuelve muy complejo.

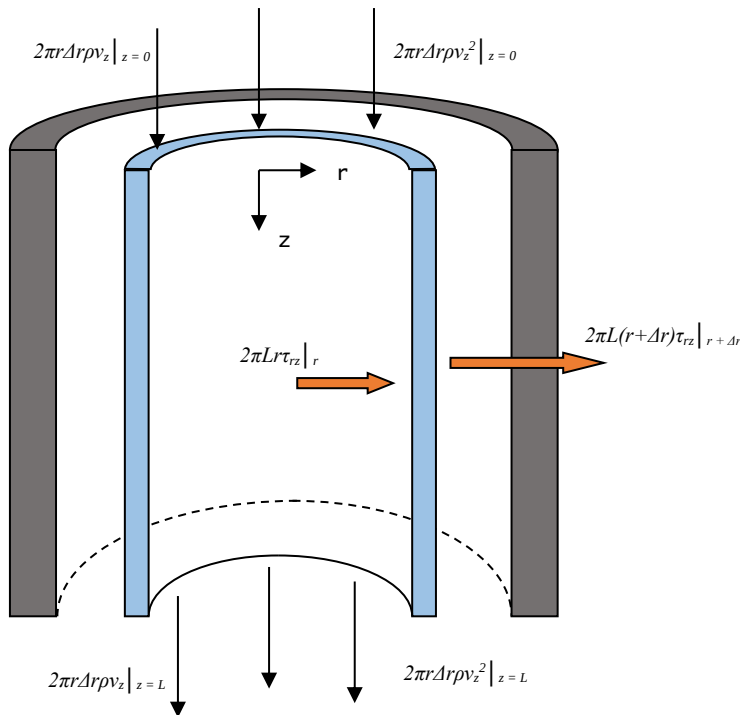


Figura 2.7 Volumen de control para el balance
materia y el balance de momentum

El procedimiento de análisis indica que primero se debe hacer un balance de materia, para el cual cada uno de sus términos se expresa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de materia} \\ \text{a la entrada} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r \rho v_z \Big|_{z=0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de materia} \\ \text{a la salida} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r \rho v_z|_{z=L}$$

y al sustituirlas en el balance de materia se obtiene

$$2\pi r \Delta r \rho (v_z|_{z=0} - v_z|_{z=L}) = 0 \quad (2.19)$$

De donde se concluye que:

$$v_z|_{z=0} = v_z|_{z=L}$$

Por tanto, la velocidad del fluido no varía en dirección axial, es decir, con respecto al eje z , la velocidad varía únicamente en forma radial, o sea, con respecto al eje r . Esta conclusión es más clara al aplicar el balance de cantidad de movimiento cuyas componentes, al analizar el elemento diferencial, se expresan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{convectivo a la entrada} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r (\rho v_z) v_z|_{z=0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{viscoso a la entrada} \end{array} \right\} = 2\pi r L \tau_{rz}|_r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{convectivo a la salida} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r (\rho v_z) v_z|_{z=L}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de momentum} \\ \text{viscoso a la salida} \end{array} \right\} = 2\pi (r + \Delta r) L \tau_{rz}|_{r+\Delta r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerza de gravedad} \\ \text{que actúa sobre el} \\ \text{elemento diferencial} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r L \rho g$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas de presión} \\ \text{a la entrada} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r p_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas de presión} \\ \text{a la salida} \end{array} \right\} = 2\pi r \Delta r p_L$$

y al sustituirlas en el balance cantidad de movimiento, se obtiene la ecuación en diferencias finitas:

$$-2\pi r \Delta r L \rho v_z^2|_{z=0}^{z=L} - 2\pi r L \tau_{rz}|_r^{r+\Delta r} + 2\pi \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r p_0 - 2\pi r \Delta r p_L = 0 \quad (2.20)$$

nuevamente, el resultado del balance de materia indica que el primer término de la ecuación (2.20) es cero, además, se le divide entre $2\pi L \Delta r$ y se aplica el límite cuando $\Delta r \rightarrow 0$, por lo que se reduce a

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{r \tau_{rz}|_r - (r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r}}{\Delta r} \right] + r \left(\frac{p_0 - p_L + \rho g L}{L} \right) = 0 \quad (2.21)$$

Ahora en esta última ecuación se define una expresión para la presión que toma en cuenta a la presión hidrostática, que es $\wp_z = p_z - \rho g z$ y, además, aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{L}\right) r} \quad (2.22)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial del sistema, se procede a su integración, cuyo resultado es:

$$r\tau_{rz} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{L}\right) \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (2.23)$$

o bien:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r}$$

La constante de integración que aparece en la ecuación se evalúa por medio de una condición frontera que no entra dentro de los criterios dados. Para el sistema que se analiza una de las fronteras es el centro del cilindro, en donde la dirección del esfuerzo cortante es perpendicular al eje z , el esfuerzo cortante se anula, es decir, es cero por lo que se expresa

C.F.1) en $r = 0$; $\tau_{rz} = 0$

la cual, aplicada a la ecuación (II.23) da como resultado para el valor de la constante:

$C_1 = 0$

que se substituye en la propia ecuación (2.23), dando como resultado:

$$\boxed{\tau_{rz} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L}\right) r} \quad (2.24)$$

Se substituye ahora la ley de Newton de la viscosidad que en coordenadas cilíndricas se expresa:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

por lo que la ecuación (2.24) se transforma en:

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L}\right) r$$

O también:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2\mu L}\right) r$$

la que una vez integrada se expresa:

$$v_z = -\left(\frac{\rho_0 - \rho_L}{4\mu L}\right)r^2 + C_2 \quad (2.25)$$

Para evaluar la constante de integración es necesario considerar una segunda condición frontera, la cual se localiza en la pared del tubo, en donde la velocidad es cero, por lo que se expresa:

C.F.2) en $r = R$; $v_z = 0$

y que una vez aplicada a la ecuación (2.25) da como resultado para la constante de integración:

$$C_2 = \left(\frac{\rho_0 - \rho_L}{4\mu L}\right)R^2$$

ahora se substituye la constante de integración en la propia ecuación (2.25) dando como resultado una expresión para el perfil de velocidades, es decir:

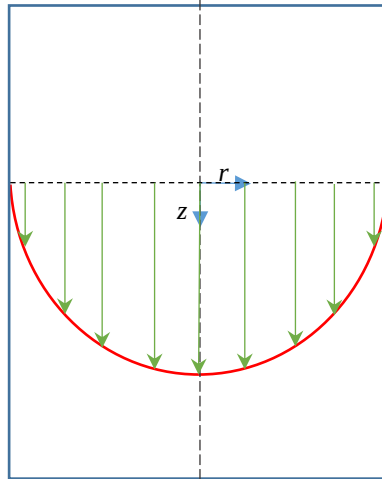


Figura 2.8 Perfil de velocidades

$$v_z = \frac{(\rho_0 - \rho_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (2.26)$$

La cual da un perfil de velocidades del tipo parabólico, ya que se trata de una ecuación de segundo orden, cuya gráfica se muestra a continuación.

Una vez obtenido el perfil de velocidades es labor muy sencilla obtener los parámetros de velocidad máxima, velocidad promedio, etc. que son muy útiles en la comprensión de un sistema como este. Por tanto, los parámetros mencionados a partir de la ecuación (2.26), son:

Velocidad máxima, $v_{zm\acute{a}x}$. La velocidad máxima se evalúa en el centro del tubo, por lo que el resultado es:

$$v_{zmax} = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L} \quad (2.27)$$

Flujo volumétrico, G . El flujo volumétrico viene siendo la suma de todos los valores de velocidad evaluados en el área de flujo, por lo que se expresa en forma de ecuación como la integral de la función de velocidad en el área de flujo del ducto. De manera que se obtiene una ecuación denominada **ecuación de Hagen y Poiseuille**, que se expresa:

$$G = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{zmax} \left[r - \frac{r^3}{R^2} \right] dr d\theta$$

y, una vez evaluada, queda:

$$G = \frac{\pi(\wp_0 - \wp_L)R^4}{8\mu L} \quad (2.28)$$

Velocidad promedio, $\langle v_z \rangle$. Que se define como la suma de todos los valores de velocidad en cada punto del área de flujo dividida entre la misma área, lo cual también corresponde al flujo volumétrico dividido entre el área transversal del ducto.

$$\langle v_z \rangle = \frac{G}{A} = \frac{G}{\pi R^2} = \frac{\pi(\wp_0 - \wp_L)R^4 / 8\mu L}{\pi R^2}$$

la cual, una vez simplificada, queda:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{8\mu L} = \frac{1}{2} v_{zmax} \quad (2.29)$$

Fuerza de arrastre, F_z . Que se define como **la fuerza ejercida por el fluido sobre el área mojada**. Por lo que se expresa en forma de ecuación:

$$F_z = \int_0^L \int_0^{2\pi} L \tau_{rz}|_{r=R} R d\theta dz = (2\pi RL) \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L} \right) R$$

y al simplificarla, queda:

$$F_z = (\wp_0 - \wp_L) \pi R^2 \pi R^2 [(\wp_0 - \wp_L) + \rho g L] \quad (2.30)$$

2.2.3 Flujo de un fluido en una región anular.

En la figura 2.9 se muestra un sistema en donde está fluyendo un fluido en la región anular formada entre la parte externa de un cilindro de radio mR y la parte interna de otro cilindro mayor de radio R (Bird, 2002).

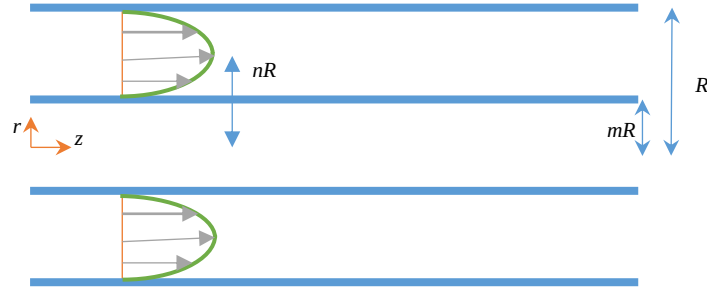


Figura 2.9 Flujo de un fluido en una región anular

Nuevamente, se debe escoger un elemento diferencial similar al de la sección anterior. Luego se debe desarrollar un balance de materia, en donde la conclusión es también idéntica al de la sección anterior, es decir, la velocidad no varía en dirección axial. y Por último, el balance de momentum da como resultado una ecuación diferencial similar que en la sección antecedente, la diferencia estriba en que en este nuevo sistema el flujo es horizontal y no tiene efecto la atracción gravitacional, entonces se expresa:

$$\boxed{\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right) r} \quad (2.31)$$

Como se ha dicho, la ecuación diferencial es idéntica al del sistema de la sección anterior, la cual viene dando como resultado una familia de funciones cuando se integra en forma indefinida, con dos constantes de integración. Lo que en realidad marca la diferencia es lo que sucede en las fronteras del sistema, ya que las fronteras no son las mismas. Para el caso del flujo en la región anular, las condiciones de frontera son dos y se expresan

$$\begin{aligned} \text{C.F.1) en } r &= mR & ; & \quad v_z = 0 \\ \text{C.F.2) en } r &= R & ; & \quad v_z = 0 \end{aligned}$$

El sistema no permite determinar **a priori** el punto en donde el esfuerzo cortante es cero, ya que dicho punto se encuentra localizado en alguna parte entre el cilindro interno y el externo (en $r = nR$), pero sólo se puede determinar una vez obtenido el perfil de velocidades.

Entonces, una vez integrada la ecuación (2.31) se obtiene la función:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{p_0 - p_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r} \quad (2.32)$$

a la cual se le substituye la ley de Newton de la viscosidad, quedando una vez simplificada:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu L}\right) r - \frac{C_1}{\mu r} \quad (2.33)$$

y una vez integrada, se expresa:

$$v_z = -\left(\frac{p_0 - p_L}{4\mu L}\right) r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \quad (2.34)$$

sobre la cual se aplican las dos condiciones frontera para obtener las ecuaciones:
para la C.F.1

$$0 = -\left(\frac{p_0 - p_L}{4\mu L}\right) (mR)^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(mR) + C_2 \quad (2.35)$$

Y para la C.F.2

$$0 = -\left(\frac{p_0 - p_L}{4\mu L}\right) R^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln R + C_2 \quad (2.36)$$

Ahora es necesario determinar el valor de las dos constantes. Primeramente, se igualan ambas ecuaciones para eliminar la C_1 dando como resultado:

$$C_1 = \left(\frac{p_0 - p_L}{4\mu L}\right) \frac{R^2(1 - m^2)}{\ln m}$$

substituyendo ahora la constante C_1 en la ecuación (II.35) y despejando la constante C_2 , se obtiene:

$$C_2 = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L} \left[1 + \frac{(1 - m^2)}{\ln m} \ln R \right]$$

corresponde ahora substituir las dos constantes así obtenidas en la ecuación (2.34) para obtener el perfil de velocidades, que se expresa:

$$v_z = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{(1 - m^2)}{\ln m} \ln \left(\frac{r}{R}\right) \right] \quad (2.37)$$

A partir de la ecuación (2.37) se obtiene la expresión para el perfil de esfuerzo cortante al derivarla y multiplicarla por la viscosidad, de manera que se obtiene la función:

$$\tau_{rz} = \frac{(p_0 - p_L)R}{4L} \left[2 \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{(1 - m^2)}{\ln m} \left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad (2.38)$$

y la localización del punto en donde el esfuerzo cortante se anula se obtiene igualando a cero la ecuación (2.38) y substituyendo a $r = nR$, la cual quedando n definida por:

$$n^2 = -\frac{(1 - m^2)}{2 \ln m} \quad (2.39)$$

Aparentemente la ecuación es negativa, pero el logaritmo es también negativo por lo que

la ecuación es en realidad positiva.

Toca el turno ahora a obtener los parámetros macroscópicos obtenidos en las dos secciones anteriores, empezando con

Velocidad máxima. La velocidad máxima se localiza en el mismo punto en donde el esfuerzo cortante es mínimo, o sea cero, esto es en $r = nR$.

$$\boxed{v_{z_{max}} = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{4\mu L} [1 - n^2(1 - 2 \ln n)]} \quad (2.40)$$

Flujo volumétrico.

$$G = \int_0^{2\pi} \int_{mR}^R v_z r dr d\theta = \frac{\pi(p_0 - p_L)R^4}{8\mu L} \left[(1 - m^4) + \frac{(1 - m^2)^2}{\ln m} \right] \quad (2.41)$$

Velocidad promedio.

$$\boxed{\langle v_z \rangle = \frac{G}{\pi(1 - m^2)R^2} = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{8\mu L} \left[\frac{(1 - m^4)}{(1 - m^2)} + \frac{(1 - m^2)}{\ln m} \right]} \quad (2.42)$$

Fuerza de arrastre.

$$F_z = -2\pi mRL\tau_{rz}|_{r=mR} + 2\pi RL\tau_{rz}|_{r=R} = \pi R^2(1 - m^2)(p_0 - p_L) \quad (2.43)$$

2.3

ECUACIONES DE VARIACION

2.3.1 Introduccion.

En la sección 2.2 se presentó un procedimiento de análisis de sistemas, por medio de tres ejemplos clásicos, en donde el fenómeno físico que predomina es la transferencia de momentum. El procedimiento establece la aplicación de los balances de materia y de momentum a un elemento diferencial escogido según el tipo de coordenadas que prevalece en cada sistema. Dicho procedimiento, aunque efectivo, una vez dominado es rutinario y tedioso, ya que al final de cuentas las ecuaciones diferenciales, salvo en algunos casos muy particulares, son similares ya que las geometrías que se manejan en la mecánica de fluidos generalmente se encuentran estandarizadas (Bird, 2002). Lo que en realidad hace diferente a los modelos matemáticos son las condiciones de frontera. Por lo anterior, el procedimiento se puede agilizar grandemente si se logran obtener ecuaciones generales que tomen en cuenta todas las posibles variables para cualquier tipo de sistema. Dichas ecuaciones se les denomina, en general, **Ecuaciones de Variación** y en particular, en la aplicación del balance de materia lo que se obtiene es la **Ecuación de Continuidad** y en el caso del balance de momentum el resultado es la **Ecuación de Movimiento**; ambas serán deducidas en la presente sección.

Pero, antes de entrar directamente al procedimiento de deducción, es necesario recordar algunas propiedades de las funciones dependientes de múltiples variables y definir algunas otras. Por principio, las funciones de velocidad y esfuerzo cortante en un sistema físico, dependen de cuatro variables, que son: la posición, determinada por tres coordenadas, y por el tiempo. Lo anterior se puede generalizar a cualquier tipo de cantidad ya que también se puede aplicar a la energía interna, energía cinética, flujo de calor, difusión molecular, o cualquier otra cantidad que caracterice a un sistema físico. Supóngase entonces que se tiene una cantidad cualquiera dependiente de las tres coordenadas y el tiempo, definida por $f = f(x,y,z,t)$ y en donde las variables x,y,z también son dependientes del tiempo, por lo que, de acuerdo a la regla de la cadena del cálculo de funciones multivariantes, la **Derivada Total con respecto al tiempo** estará dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

o en su forma vectorial:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.44)$$

En la que $d\vec{r}/dt$ viene siendo la razón de cambio de posición de un objeto que describe

una curva independiente de las líneas de flujo del sistema.

Ahora bien, cuando el objeto en cuestión viaja a través del sistema siguiendo las líneas de flujo, entonces toma la velocidad del mismo, en este caso es como si un barco fuera a la deriva en un río, entonces se obtiene la **Derivada Substantial de f con respecto al tiempo**, es decir:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

o en su forma vectorial:

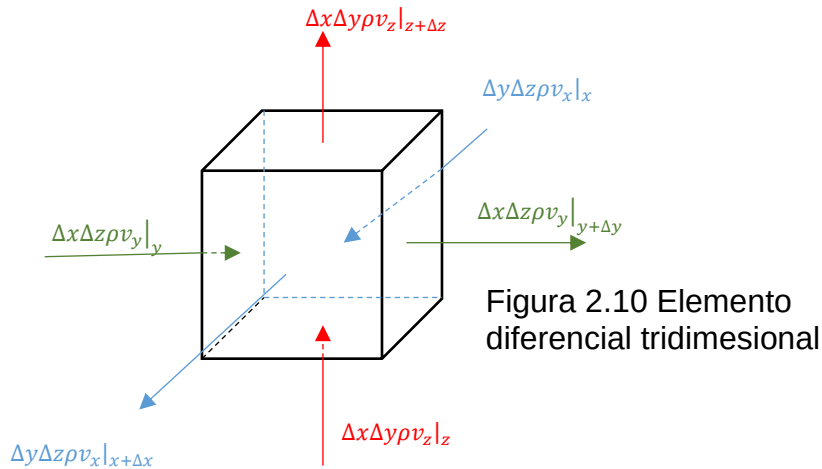
$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \quad (2.45)$$

siendo $\vec{v}$ el vector velocidad de las líneas de flujo del sistema.

Ambas derivadas y el uso de representaciones vectoriales serán de gran utilidad en el proceso deducción de las ecuaciones de continuidad y de movimiento, porque permitirán reducir grandemente expresiones con gran cantidad de términos y, con ello, simplificar su manejo algebraico.

2.3.2 Ecuacion de continuidad.

Considérese ahora que se tiene un sistema que contiene una masa enorme de fluido. Como ejemplo, se puede pensar en el mar o en la atmósfera terrestre que son grandes masas de agua y aire en continuo movimiento. Tómese un elemento diferencial de volumen dentro de esa gran masa, para la deducción se tomará un paralelepípedo rectangular como el mostrado en la figura 2.10, y aplíquesele el balance de materia expresado por la ecuación 2.2.



El paralelepípedo tiene seis caras, tres de ellas corresponden a las entradas y tres

a las salidas, considerando que están colocadas en dirección de las tres coordenadas. Y para cada una de ellas, de acuerdo con el balance de materia, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de entradas} - \\ \text{salidas de materia} \\ \text{en dirección } x \end{array} \right\} = \Delta y \Delta z \rho v_x \Big|_{x+\Delta x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de entradas} - \\ \text{salidas de materia} \\ \text{en dirección } y \end{array} \right\} = \Delta x \Delta z \rho v_y \Big|_{y+\Delta y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de entradas} - \\ \text{salidas de materia} \\ \text{en dirección } z \end{array} \right\} = \Delta x \Delta y \rho v_z \Big|_{z+\Delta z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de acumulación} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

las que una vez substituidas transforman a la expresión 2.2 en:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z \rho v_x \Big|_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z \rho v_y \Big|_{y+\Delta y} + \Delta x \Delta y \rho v_z \Big|_{z+\Delta z}$$

Y dividiendo entre $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\rho v_x \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{\rho v_y \Big|_{y+\Delta y}}{\Delta y} - \frac{\rho v_z \Big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \quad (2.46)$$

Ahora se toma el límite cuando el elemento de volumen tiende a ser muy pequeño, por lo que se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right]$$

o despejando e igualando a cero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] = 0 \quad (2.47)$$

A la expresión matemática así obtenida se le conoce como la **Ecuación de Continuidad**.

Es en este punto en donde resulta conveniente empezar a utilizar la notación vectorial, ya que permite representar ecuaciones con gran cantidad de términos en expresiones muy reducidas. Para el caso de la ecuación de continuidad, se puede reconocer en ella al operador nabla y al vector velocidad, por lo que la ecuación (2.47) se reduce a sólo dos términos, expresándose:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (2.48)$$

Ahora bien, no solamente es conveniente la notación vectorial por su representación más

concisa, sino también porque el manejo algebraico es más sencillo al tener menos términos. Lo anterior se comenta debido a que la ecuación de continuidad tiene diferentes formas de expresión, por ejemplo, al derivar el segundo término, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.49)$$

en donde, al observar los dos primeros términos se puede concluir que corresponden a la definición de la derivada substancial, por lo que la ecuación de continuidad se expresa también:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})} \quad (2.50)$$

La cual es aplicable a todo tipo de fluido, ya que toma en cuenta el cambio de la densidad en un sistema dinámico, esto es particularmente evidente cuando se trata de gases, ya que los gases son sensibles a los cambios de presión y, por lo mismo, a los cambios de posición. Considérese como ejemplo a la atmósfera terrestre, en ella el aire disminuye su densidad con la altura, es decir, en la estratósfera el aire está más enrarecido que al nivel del mar debido a que la presión es también menor.

Si el fluido en cuestión es un líquido, la ecuación (2.50) se simplifica aún más, ya que los líquidos no son tan sensibles a la presión como los gases. Es decir, para que exista un cambio notable en la densidad de los líquidos es necesario un cambio muy importante en la presión, o sea que la densidad de un líquido se puede considerar constante cuando los cambios de presión no son muy elevados. Generalmente las caídas de presión, que son las que provocan el movimiento, no son tan grandes como para provocar un cambio apreciable en la densidad de los líquidos, o sea, no hay diferencias de presión de 10 o más atmósferas. Por tanto, se consideran **fluidos incompresibles** y, dada esta característica, se elimina el primer miembro de la ecuación (2.50), logrando una nueva expresión de la **Ecuación de Continuidad para fluidos incompresibles**

$$\boxed{(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0} \quad (2.51)$$

La ecuación (2.47) se obtuvo, por simplicidad, utilizando el sistema de coordenadas rectangulares. La realidad es que los sistemas dinámicos pueden caer dentro de los tres tipos de sistemas coordenados que se manejan para sistemas reales, es decir, pueden ser coordenadas rectangulares, cilíndricas o esféricas. Y como en lo sucesivo los sistemas dinámicos que se analicen pueden caer en cualquiera de los mencionados sistemas coordenados, a continuación, se expresa la ecuación de continuidad en sus otras dos formas.

Coordenadas Cilíndricas.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0} \quad (2.52)$$

Coordenadas Esféricas.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0} \quad (2.53)$$

2.3.3 Ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento tiene su origen en el balance de cantidad de movimiento, que viene siendo un análisis de las fuerzas que afectan a un sistema, tal y como se puede constatar en la expresión (2.3). Por ello, dicha ecuación debe ser una expresión cuyas dimensiones sean de fuerza, o sea, de acuerdo a la segunda ley de Newton sus dimensiones deberán ser $F = [M L T^{-2}]$. Y como se trata de momentum o cantidad de movimiento, de acuerdo a la Física, el momentum se define dimensionalmente:

$$\{Momentum\} = [MLT^{-1}]$$

pero como se trata de sistemas dinámicos, lo que incide en ellos es el flujo de momentum, el cual se define:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{convectivo} \end{array} \right\} &= \bar{m} \vec{v} = \rho \vec{v} \vec{v} A = [MLT^{-2}] \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{viscoso} \end{array} \right\} &= \tau A = [MLT^{-2}] \end{aligned}$$

Estos conceptos se aplican al elemento diferencial utilizado para obtener la ecuación de continuidad, pero haciendo un análisis de las fuerzas que lo afectan. Para ejemplificar lo dicho la figura 2.12 muestra el momentum viscoso generado por efectos del movimiento en la dirección de la coordenada x , que es sólo una parte de las fuerzas que inciden en el sistema. Por otro lado, si la ecuación de continuidad mostró cierto grado de complejidad, la ecuación de movimiento es todavía más compleja, porque al tener dimensiones de fuerza debe tener tres componentes, una por cada coordenada. Dada la complejidad de la ecuación se deducirá solamente una de las componentes, esto es, la correspondiente a la coordenada x . Lo cual se hará mediante el uso de las figuras 2.11 y 2.12.

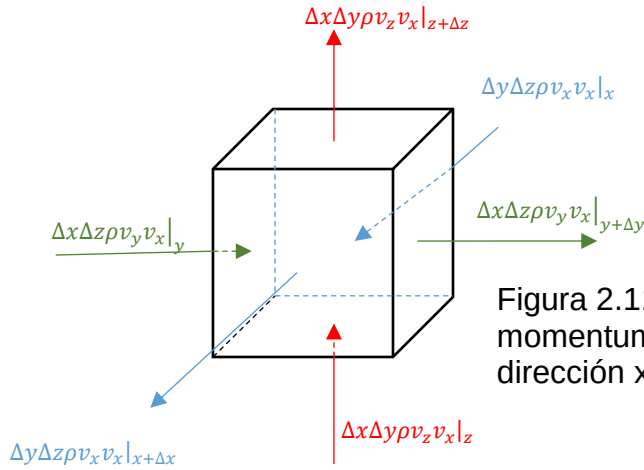


Figura 2.11 Flujo de momentum convectivo en dirección x

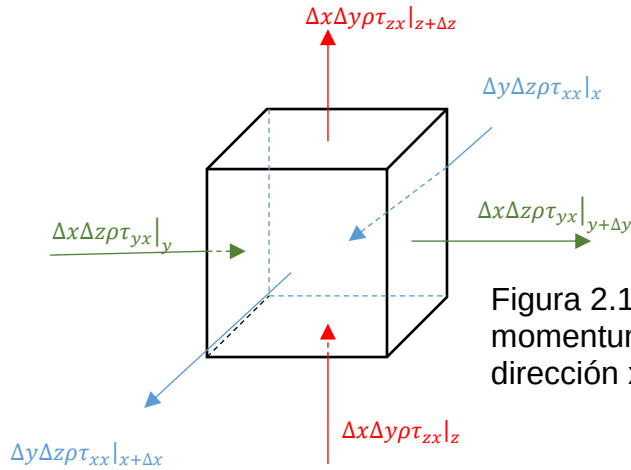


Figura 2.12 Flujo de momentum viscoso en dirección x

De acuerdo con estas dos figuras, los términos de la expresión (2.3) para la **dirección x**, son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de acumulación} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de entrada -} \\ \text{salida de momentum} \\ \text{convectivo} \end{array} \right\} = \Delta y \Delta z \rho v_x v_x \Big|_{x+\Delta x}^x + \Delta x \Delta z \rho v_y v_x \Big|_{y+\Delta y}^y + \Delta x \Delta y \rho v_z v_x \Big|_{z+\Delta z}^z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de entrada -} \\ \text{salida de momentum} \\ \text{viscoso} \end{array} \right\} = \Delta y \Delta z \tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x}^x + \Delta x \Delta z \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y}^y + \Delta x \Delta y \tau_{zx} \Big|_{z+\Delta z}^z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de fuerzas} \\ \text{que actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} = \Delta y \Delta z p \Big|_{x+\Delta x}^x + \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x$$

la cual, una vez substituida, dividida entre el elemento de volumen y obtenido el límite cuando tiende a cero el elemento de volumen, se transforma en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.54)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se hace un análisis similar para las coordenadas **y** y **z**, en el mismo elemento diferencial de volumen, dando como resultado dos ecuaciones más que se expresan

Componente en la dirección y

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.55)$$

Componente en la dirección z

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.56)$$

Así, se han obtenido tres ecuaciones de movimiento, una por cada coordenada. Pero en cada una de ellas se hizo un balance de fuerzas, o sea, que se trata de cantidades vectoriales, por lo que en realidad se obtuvieron las componentes de una ecuación vectorial cuya expresión matemática es:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = - [\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v}] - [\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}] - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g}} \quad (2.57)$$

que es la **Ecuación de Movimiento en su forma vectorial**.

La ecuación de movimiento así expresada se puede simplificar, únicamente se deben efectuar los pasos algebraicos necesarios para lograrlo. Y para lograrlo, tómese el miembro izquierdo y el primer término del miembro derecho de la ecuación (2.57), para llevar a cabo la siguiente manipulación algebraica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + [\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v}] &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} [\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}] \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) + \vec{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right] = \rho \frac{D \vec{v}}{Dt}\end{aligned}$$

por lo que la ecuación (2.57) se expresa, en su forma simplificada:

$$\boxed{\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -[\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}] - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g}} \quad (2.58)$$

En la ecuación (2.58) es todavía más evidente el cumplimiento de la ecuación de movimiento con la Segunda Ley de Newton. Lo anterior se puede concluir al analizar cada uno de sus términos en cuanto a sus componentes y dimensiones, lo cual a continuación se reseña:

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{\text{Masa}}{\text{volumen}} \times \text{aceleración} = [ML^{-2}T^{-2}]$$

$$[\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}] = \frac{\text{Flujo de momentum viscoso}}{\text{Volumen}} = [ML^{-2}T^{-2}]$$

$$\vec{\nabla} p = \frac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Volumen}} = [ML^{-2}T^{-2}]$$

$$\rho \vec{g} = \frac{\text{Fuerzas gravitacionales}}{\text{Volumen}} = [ML^{-2}T^{-2}]$$

Generalmente, en la aplicación de la ecuación (2.58) en un sistema específico, se analizan los términos de sus componentes para eliminar los que no son útiles y dejar la ecuación diferencial que determina los perfiles de esfuerzo cortante y de velocidad. Por lo que para su aplicación es mejor expresar la citada ecuación con todos sus términos, la cual para el caso de las coordenadas rectangulares se expresa:

Componente en dirección x.

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Componente en dirección y.

$$\rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

Componente en dirección z.

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

En la deducción de la ecuación de movimiento se establece que el esfuerzo cortante es una cantidad tensorial que contiene nueve componentes, ya considerando que el movimiento puede tener tres direcciones y en cada una de ellas provoca la transferencia de movimiento en tres direcciones lo cual establece nueve efectos diferentes, o bien, nueve esfuerzos cortantes, tres por cada coordenada. Siendo, el esfuerzo cortante, una de las cantidades más complejas del transporte de momentum. A continuación, se expresan las definiciones de cada una de las componentes del esfuerzo cortante para fluidos newtonianos:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & ; & & \tau_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & ; & & \tau_{zz} &= -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & ; & & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ & & & & \tau_{zy} &= \tau_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Si el sistema que se analiza se debe representar en coordenadas cilíndricas, entonces las componentes de la ecuación (2.58) se expresan de la manera siguiente

Componente en dirección r.

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

Componente en dirección θ .

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

Componente en dirección z.

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

En cuanto al esfuerzo cortante para fluidos newtonianos y coordenadas cilíndricas, se define:

$$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = -\mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

Finalmente, la ecuación (2.58) en coordenadas esféricas, se expresa
Componente en dirección r.

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \end{aligned}$$

Componente en dirección θ .

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right] \\ &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right] \end{aligned}$$

Componente en dirección ϕ .

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho g_\phi \end{aligned}$$

y las definiciones de esfuerzo cortante para fluidos newtonianos en coordenadas esféricas son:

$$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\tau_{\phi\phi} = -2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = -\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]$$

2.3.4 Viscosímetro Couette-Hatschek.

En la unidad I se mencionaron diferentes tipos de aparatos para determinar la viscosidad de los fluidos incompresibles, algunos de ellos son exclusivamente para fluidos newtonianos, otros se pueden utilizar para fluidos newtonianos y no-newtonianos. Este último tipo de viscosímetros consiste en dos cilindros concéntricos, uno de ellos fijo y el otro rotatorio. Y el principio fundamental para la determinación de la viscosidad consiste en determinar la velocidad que se le imprime al cilindro rotatorio, por efectos de un torque aplicado al mismo. Dependiendo del tipo y marca del aparato, el cilindro rotatorio puede ser el interno o el externo (Bird, 2002). En el caso del viscosímetro Couette-Hatschek el cilindro rotatorio es el externo, como se puede ver en la figura 2.13. Para poder conocer la relación entre la velocidad del cilindro y el torque aplicado, es necesario determinar el perfil de velocidad y con ello tener un modelo matemático para poder calibrarlo. En este caso se desea obtener la expresión del perfil de velocidades considerando un régimen de flujo laminar y un fluido incompresible y newtoniano. Considerar también que el cilindro exterior gira a razón de Ω_0 r.p.m.

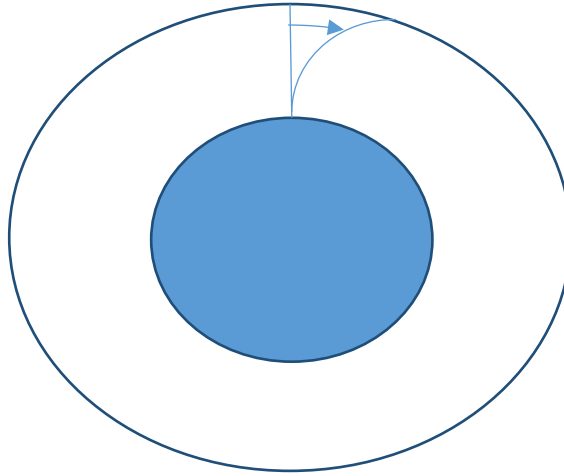


Figura 2.13
Viscosímetro Couette-
Hatschek

Solución. En primera instancia, considerando que el sistema de coordenadas cilíndricas es el apropiado para la figura que se pretende analizar, se debe hacer un análisis de la ecuación de continuidad, el cual da como resultado:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Considerando la densidad constante y despejando r , se obtiene:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \text{ por lo que } v_\theta \neq v_\theta(\theta)$$

Por lo que:

$$v_\theta = v_\theta(r)$$

A continuación, se analiza la ecuación de movimiento para coordenadas cilíndricas, obteniendo como resultado:

Componente r :
$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

Componente θ :
$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta})$$

Componente z :
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

De la componente θ se obtiene el perfil de velocidad, tomando en consideración que, de acuerdo a la figura 2.11, las condiciones de frontera son:

$$\begin{array}{ll} \text{C.F.1) en} & r = \alpha R; \quad v_\theta = 0 \\ \text{C.F.2) en} & r = R; \quad v_\theta = \Omega_0 R \end{array}$$

Al integrar por primera ocasión la ecuación obtenida para la componente θ y habiendo substituido la definición del esfuerzo cortante para fluidos newtonianos, se obtiene:

$$-\mu r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = C_1 \quad \text{o bien:} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{C_1}{\mu r^3} \quad (\text{A1})$$

al integrar nuevamente la ecuación (A1), se obtiene:

$$\frac{v_\theta}{r} = \frac{C_1}{2\mu r^2} + C_2 \quad \text{y despejando r:} \quad v_\theta = \frac{C_1}{2\mu r} + C_2 \quad (\text{A2})$$

y aplicando las condiciones de frontera se obtiene para las constantes:

$$C_1 = \frac{2\mu\Omega_0\alpha R^2}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} \quad \text{y} \quad C_2 = -\frac{\Omega_0}{\alpha\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

por lo que el perfil de velocidades se expresa finalmente:

$$\boxed{v_\theta = \frac{\Omega_0 R}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} \left[\frac{\alpha R}{r} - \frac{r}{\alpha R} \right]} \quad (\text{A3})$$

La componente r define los cambios de presión en la dirección radial por efectos de la fuerza centrífuga, por lo que al substituir el perfil de velocidad, se obtiene la ecuación:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \left[\frac{\Omega_0 R}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} \right]^2 \left[\frac{(\alpha R)^2}{r^3} - \frac{2}{r} + \frac{r}{(\alpha R)^2} \right] \quad (\text{A4})$$

al integrarla en el intervalo $[\alpha R, R]$ se obtiene la expresión:

$$\boxed{p_R - p_{\alpha R} = \rho \left[\frac{\Omega_0 R}{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} \right]^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 \right) + 2 \ln \alpha \right\}} \quad (\text{A5})$$

la cual expresa el valor de la presión ejercida sobre el cilindro exterior por efectos de la fuerza centrífuga provocada por el movimiento del fluido.

La ecuación obtenida para la componente z expresa los efectos de la presión hidrostática sobre el fondo del recipiente cilíndrico que contiene al fluido, pero como por lo

general se trata de recipientes pequeños, la altura de la columna de fluido no es muy grande, por lo que el valor de la presión en el fondo es casi igual al de la presión atmosférica.

Por otro lado, el perfil de esfuerzo cortante se obtiene a partir de la ecuación (A3), aplicándola a la definición del propio esfuerzo cortante, por lo que se obtiene:

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\mu \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Omega_0 R}{r} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha R}{r} - \frac{r}{\alpha R} \right)}{\left(\alpha \right) - \frac{1}{\alpha}} \right] \right\}$$

de donde se obtiene:

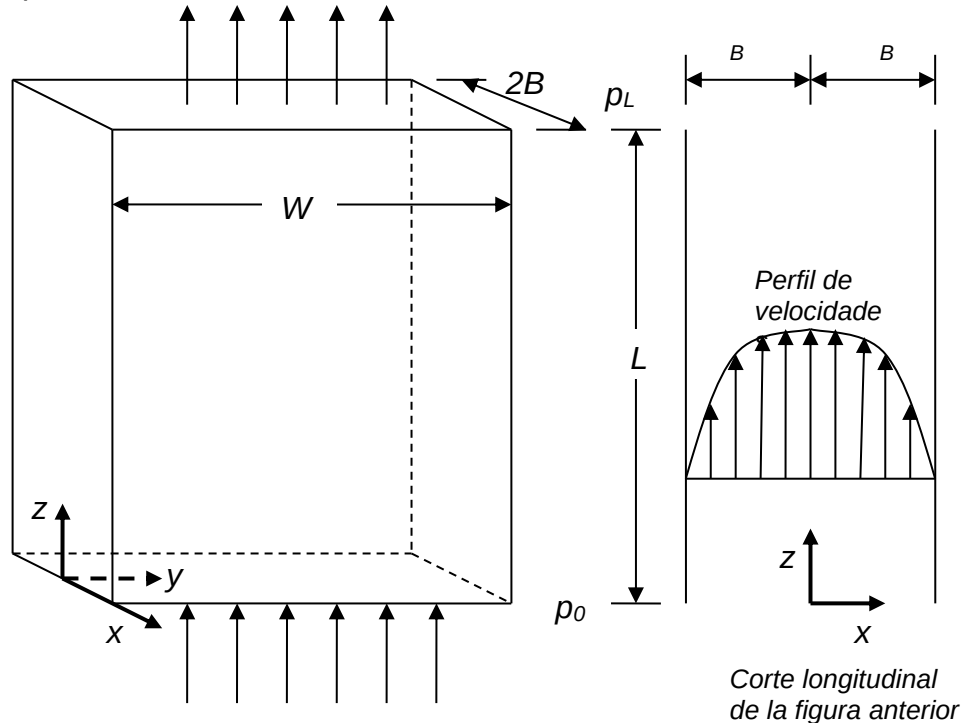
$$\tau_{r\theta} = 2\mu\Omega_0 R^2 \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right) \frac{1}{r^2} \quad (A6)$$

De esta última ecuación se puede obtener el valor del torque aplicado al cilindro exterior para provocar el movimiento. Entonces, de acuerdo a la definición del torque, es decir, fuerza por brazo de palanca, se expresa:

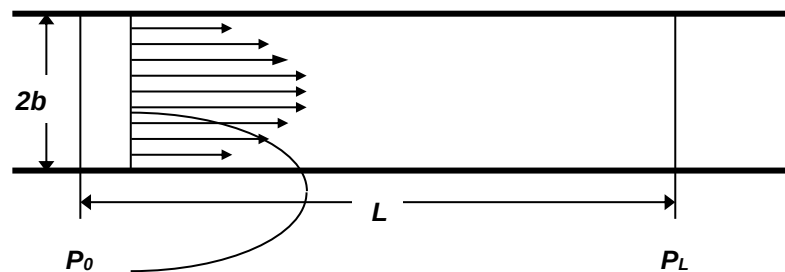
$$\mathfrak{S} = 2\pi R L (-\tau_{r\theta} \big|_{r=R}) R = 4\mu\pi R^2 L \Omega_0 \left(\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) \quad (A7)$$

PROBLEMAS.

1. Por una rendija, formada por dos paredes verticales, fluye glicerina a una temperatura de 20°C . Considerando que el flujo es laminar, está totalmente desarrollado y el flujo es unidireccional, obtener el perfil de esfuerzo cortante y el de velocidades. Así como obtener la velocidad máxima, si la altura de la rendija es de 10 m, con una caída de presión de 10,000 Pa y una abertura de 2 cm. La figura muestra la disposición del sistema que se desea analizar, en él el fluido se mueve hacia arriba, por medio de una diferencia de presión entre la parte inferior y la superior.

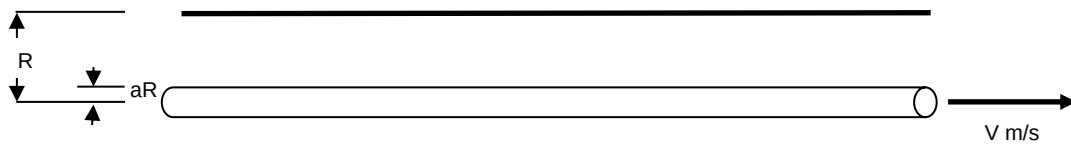


2. Se tienen dos placas infinitamente grandes, como se muestra en la figura, separadas por un espacio de espesor $2b$ en el cual se encuentra un fluido incompresible, tipo Bingham. Se tiene una diferencia de presión en el espacio L que se muestra en la propia figura. Se desea deducir la expresión para el perfil de velocidades y de

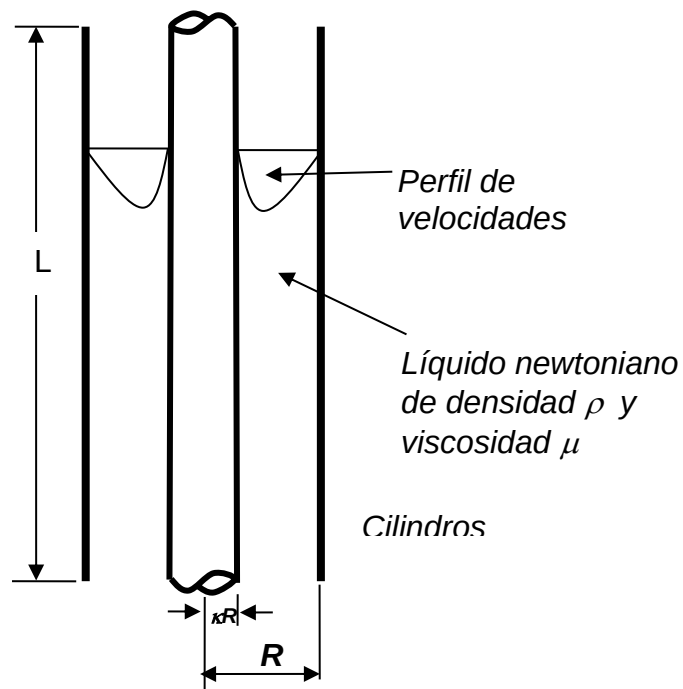


esfuerzo cortante, considerando que el flujo se encuentra completamente desarrollado y en régimen laminar, además de que las coordenadas son rectangulares y el flujo es unidireccional.

3. El sistema mostrado en la figura consta de dos cilindros concéntricos. El cilindro interno tiene un radio aR , mientras que el externo tiene un radio R . El espacio entre ambos cilindros contiene un líquido newtoniano. El cilindro interno se mueve a una velocidad V . Considere que en todo el espacio ocupado por el fluido la presión es constante. Determine el perfil de esfuerzo cortante y el de velocidades. Calcule también el valor del esfuerzo cortante en la superficie de ambos cilindros si el fluido es un aceite de motor que se encuentra a 20°C .



4. Se tienen dos tubos concéntricos cuya región anular se encuentra rellena con un líquido de viscosidad μ y densidad ρ , es decir, es newtoniano e incompresible. El tubo interior tiene un radio aR y el exterior un radio R . Los cilindros están en posición vertical y el flujo es provocado por la atracción gravitacional. Se considera que este sistema se encuentra en estado estable. El movimiento es unidireccional de acuerdo a como se muestra en la figura. Obtenga una expresión para el perfil de velocidades y el de esfuerzo cortante.



5. Desarrolle nuevamente el problema de la rampa en las mismas condiciones, pero ahora considerando que el fluido que escurre a lo largo de ella es un fluido tipo Ostwald. Repítalo también para un fluido tipo Bingham. ¿Cómo cambian las ecuaciones y los perfiles?

CAPITULO 3

ANALISIS EN FLUJO TURBULENTO

3.1 PERFIL DE VELOCIDAD EN FLUJO TURBULENTO

Los temas y problemas analizados en la unidad 2, como su nombre lo indica, se refirieron al comportamiento de un fluido en régimen de flujo laminar. Es decir, como se mencionó en la unidad 1, cuando el **$Re < 2,100$** . Siendo el flujo laminar, como el experimento de Reynolds lo indica, un fenómeno en donde las moléculas de fluido viajan por un sistema de forma totalmente ordenada. Pero, el mismo experimento de Reynolds indica que el movimiento de un fluido presenta dos regímenes más, o sea, el flujo de transición en el intervalo **$2,100 < Re < 4,000$** y el flujo turbulento a **$Re > 4,000$** .

A diferencia del régimen laminar, la transferencia de cantidad de movimiento en el régimen de flujo turbulento se desarrolla en una forma desordenada, iniciando el desorden molecular aproximadamente a **$Re = 2,100$** , por lo que se puede considerar que este es el límite en donde inicia. En este régimen las moléculas de fluido viajan a través del sistema en una forma errática siguiendo una trayectoria aleatoria. Por lo mismo, si bien son aplicables las ecuaciones de continuidad y de movimiento obtenidas en la unidad 2, el análisis del sistema para obtener su perfil de velocidades tendría que considerar más de una componente de velocidad y de presión en dirección de más de una coordenada, por lo que el resultado sería una ecuación diferencial muy compleja y matemáticamente imposible de resolver, al menos hasta el momento. Aunque se podría pensar en un programa computacional basado en algún método numérico, pero aún así sería un programa muy extenso y muy complejo.

Recuérdese que el perfil de velocidad obtenido para flujo laminar en un ducto está dado por la expresión:

$$\frac{v_z}{v_{zmax}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Para flujo turbulento, el modelo matemático propuesto que genera el perfil de velocidades más aproximado al real es:

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{zmax}} = \left[1 - \frac{r}{R} \right]^{\frac{1}{7}} \quad (3.2)$$

Las curvas obtenidas con estas dos ecuaciones se muestran en la figura 3.1, en donde se puede establecer la comparación entre el flujo laminar y el turbulento. Así, mientras el régimen laminar genera una curva parabólica debido al orden en el movimiento de sus moléculas, el perfil de velocidades en el régimen turbulento es una curva seccionalmente continua, compuesta por tres regiones (véase la figura 3.2). La región más cercana a la pared denominada **subcapa laminar**, en donde el perfil de velocidades es lineal, es una

región en donde predominan los efectos viscosos sobre los turbulentos; la región intermedia denominada **zona de transición**, en la que el perfil se aproxima a una curva logarítmica, en la cual tanto los efectos viscosos como los turbulentos son igualmente importantes; y la **zona de turbulencia totalmente desarrollada**, representado por una curva tan leve que casi parece una recta perpendicular a la pared, de hecho entre mayor es el **Re** más se aproxima a una recta.

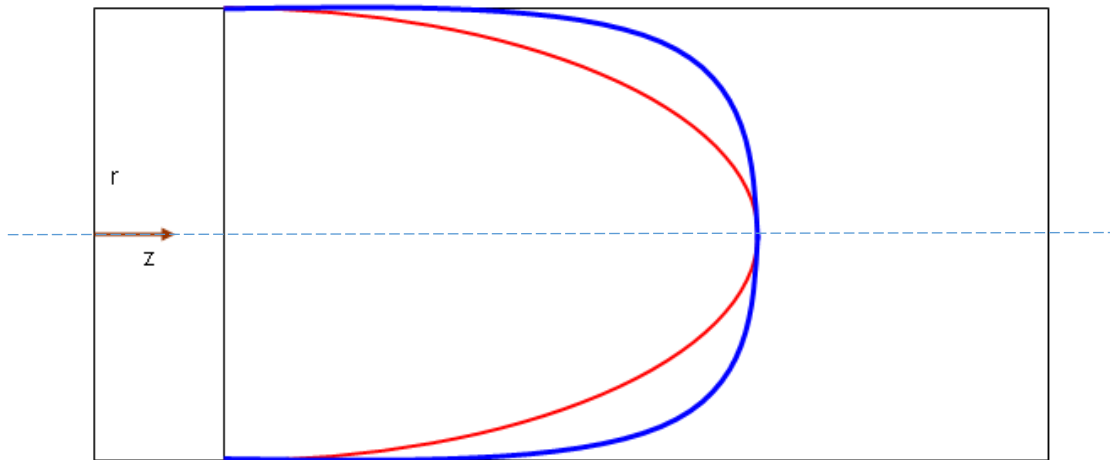


Figura 3.1 Perfiles de flujo laminar y turbulento

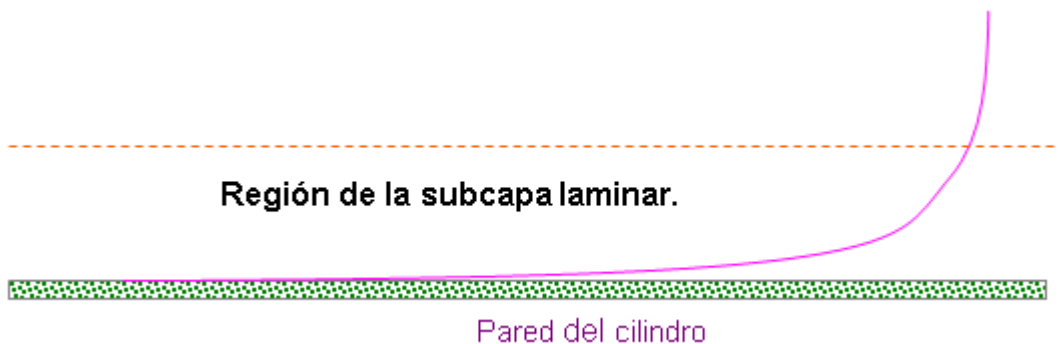


Figura 3.2 Capa límite de Schlichting, comportamiento del fluido en la región cercana a la pared

Se deben observar dos situaciones que se presentan con la ecuación (3.2). La primera es que con ella no es posible obtener el valor del esfuerzo cortante en la pared, debido a que en ese punto la derivada de la función es indeterminada. Y es importante conocer el valor del esfuerzo cortante en la pared ya que permite evaluar la energía disipada en esa región. La otra situación es que los valores de velocidad obtenidos con la ecuación (3.2) no son de la misma naturaleza que los obtenidos con la ecuación (3.1). En la ecuación

(3.1) los valores que se obtienen indican la velocidad y dirección de las moléculas que pasan por un determinado punto. Mientras que en la ecuación (3.2) los valores obtenidos no son más que promedios estadísticos de velocidad y dirección de las moléculas que pasan por un punto, es decir, por un punto pasan multitud de moléculas con diferentes velocidades y direcciones y su promedio es el obtenido por medio de esa ecuación. Por otro lado, cuando se va elevando el flujo, se eleva la velocidad y la respuesta al incremento no es inmediata sino paulatina, por tanto, debería de ser un incremento paulatino constante con respecto al tiempo, sin embargo, no sucede así, sino que la velocidad fluctúa en la medida que se incrementa el tiempo. Tal situación se muestra en la figura 3.3, en donde la velocidad real queda representada por la línea quebrada, representando las fluctuaciones, y la curva intermedia es la velocidad promedio respecto al tiempo.

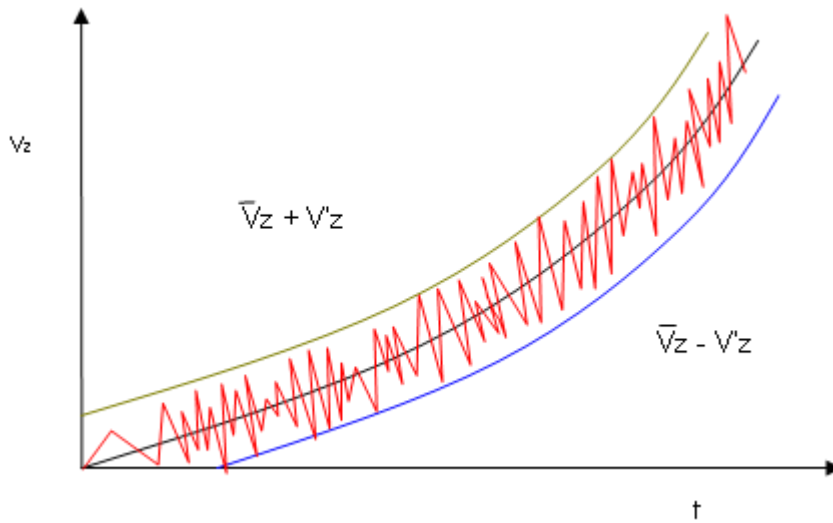


Figura 3.3 Fluctuación de la velocidad con respecto al tiempo

En la figura también se muestra la relación entre la velocidad promedio y la real, que se define:

$$V_z = \bar{V}_z + V'_z \quad (3.3)$$

en donde la velocidad promedio respecto al tiempo queda definida por:

$$\bar{V}_z = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V_z dt \quad (3.4)$$

y el promedio de las desviaciones es cero, o sea $\overline{V'_z} = 0$

Dadas las características del flujo turbulento, en igual forma se debe considerar que el esfuerzo cortante es más complejo de como fue definido por la ley de Newton de la viscosidad. Se considera entonces que el esfuerzo cortante está constituido por dos partes, una debida a la fricción viscosa y la otra debida a las turbulencias provocadas por el

movimiento desordenado, esto matemáticamente queda definido por la expresión:

$$\bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{yx}^{(l)} + \bar{\tau}_{yx}^{(t)} \quad (3.5)$$

en donde:

$\bar{\tau}_{yx}^{(l)} = \text{esfuerzo cortante debido a la fricción viscosa}$

$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \text{esfuerzo cortante provocado por las turbulencias}$

en ella, el esfuerzo cortante debido a efectos viscosos queda definido por la ley de Newton de la viscosidad, en caso de que el fluido sea newtoniano. Pero no así el esfuerzo cortante por efecto de las turbulencias. Para este caso, una de las primeras propuestas fue la de **Boussinesq** (1877), quien tomando como base la ley de Newton, definió una **viscosidad de remolino** expresando al esfuerzo cortante por turbulencias como:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3.6)$$

en donde la viscosidad de remolino depende fuertemente de la posición.

Prandtl (1925), asumió que el movimiento de las moléculas de los líquidos en los remolinos es muy similar al movimiento de las moléculas de los gases. Bajo esa suposición consideró que una molécula de fluido recorre una trayectoria antes de chocar con otra molécula, a lo que le llamó **trayectoria de mezclado** y que es muy similar a la **trayectoria media libre** definida para los gases. Y la expresión que obtuvo fue:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3.7)$$

En ella ***l*** es la **longitud de mezclado**, que viene siendo una función de la posición. Como la posición en la ecuación está representada por ***y***, que es la distancia desde la pared, entonces ***l*** es proporcional a ***y***, o bien $l = \kappa_l y$

Von Kármán (1930), tomando en cuenta la proposición de Prandtl, propuso que el esfuerzo cortante se debería expresar:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho \kappa_2^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (3.8)$$

en la que la constante tiene un valor de 0.4 de acuerdo con algunos investigadores, mientras que otros han obtenido el valor de 0.36.

Tomando en consideración la información mostrada, se puede concluir que tratar de desarrollar ecuaciones que permitan modelar el flujo de fluidos en forma analítica, contendrían tal cantidad de variables que los modelos tenderían a ser extremadamente complejos y muy difíciles de resolver mediante el uso de los procedimientos matemáticos. Sin embargo, es necesario desarrollar algún mecanismo que permita obtener información

acerca de su comportamiento y, sobre todo, de las fuerzas involucradas y de la energía disipada a causa de la fricción que se genera debido al movimiento del fluido. Estos procedimientos son semiempíricos y se muestran en las secciones siguientes.

3.2 ANALISIS DIMENSIONAL

En los temas tratados en las dos unidades anteriores, se ha venido insistiendo en que las ecuaciones obtenidas deben de ser dimensionalmente homogéneas y, en consecuencia, las variables involucradas dependen de un sistema dimensional básico. Por lo mismo, en ambas unidades se ha venido utilizando el sistema dimensional basado en la masa (**M**), la longitud (**L**) y el tiempo (**T**), mejor conocido como sistema **MLT**. Y tomando también como enlace a la segunda ley de Newton para definir a la fuerza (**F**) en función de las otras tres (Bird, 2002).

Tomando como base lo anterior, ahora se desea aplicar el sistema dimensional para hacer un análisis de las variables que afectan a un sistema. El análisis se puede desarrollar de dos formas. La primera consiste en hacer un estudio analítico de las ecuaciones que determinan la relación entre las variables de un sistema. La otra es una metodología semiempírica, que consiste en la aplicación del método científico observando las variables y propiedades del sistema para luego proponer una expresión empírica que las relacione cuidando siempre la homogeneidad dimensional.

3.2.1 Análisis dimensional de la Ecuación de Navier-Stokes.

La metodología, que a continuación se va a presentar, es la más precisa técnicamente hablando ya que su base proviene del análisis matemático, partiendo de la aplicación de las leyes fundamentales, para luego obtener las ecuaciones diferenciales por medio de la aplicación de los diferentes balances, hasta obtener el modelo matemático que permite simular al sistema y de ahí reconocer los diferentes grupos adimensionales que lo caracterizan.

Supóngase que se tiene un sistema con un fluido newtoniano en movimiento. Supóngase también que ya se aplicaron los balances correspondientes y se llegó a la conclusión de que la ecuación diferencial que lo caracteriza es la Ecuación de Movimiento y, en particular, la **Ecuación de Navier-Stokes** que se expresa matemáticamente:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v - \nabla p + \rho g \quad (3.9)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial correspondiente, se adimensionaliza cada una de las variables que participan. En el caso de la ecuación de Navier-Stokes, se tienen 4 variables independientes y dos dependientes. Las variables independientes son las tres

coordenadas y el tiempo. Las variables dependientes son la velocidad y la presión. Además, se tiene al vector gravedad cuya magnitud para gran cantidad de problemas se considera constante.

Para empezar, primero se adimensionalizan las variables que definen las tres coordenadas. Para ello se elige una longitud característica del sistema, que puede ser paralela o perpendicular al movimiento, pero siempre de acuerdo con las necesidades del problema, es decir, la elección de la longitud característica es puramente convencional. Actualmente, para muchos problemas ya se ha estandarizado, por ejemplo, si se trata de un sistema en coordenadas cilíndricas la longitud característica puede ser el radio (**R**) o el diámetro (**D**), sólo para algunos casos muy específicos se toma la longitud del cilindro. En el caso de un sistema esférico definitivamente lo es el radio (**R**) o el diámetro (**D**). La ecuación que se va a analizar se expresará en el sistema de coordenadas rectangulares y la longitud característica puede ser la longitud, la anchura o la altura del sistema. En particular, se considera la longitud (**L**) del sistema (en dirección del eje **x**) como longitud característica. Por tanto, las nuevas variables adimensionales serán:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad ; \quad y^* = \frac{y}{L} \quad ; \quad z^* = \frac{z}{L}$$

Al aplicar la longitud característica en la adimensionalización de variables se debe tener cuidado, ya que una vez definida se debe aplicar por igual a todas las variables.

El siguiente paso consiste en transformar al operador $\vec{\nabla}$. Para lograrlo primero se obtienen las derivadas de cada una de las variables:

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{1}{L}$$

para luego aplicarlo al operador $\vec{\nabla}$ por medio de la regla de la cadena:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right) i + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right) j + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial z^*}{\partial z} \right) k$$

concluyendo finalmente que:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} i + \frac{\partial}{\partial y^*} j + \frac{\partial}{\partial z^*} k \right) = \frac{1}{L} \vec{\nabla}^*$$

en donde $\vec{\nabla}^*$ es el operador nabla adimensional. De igual manera se aplica al operador de Laplace, el cual se transforma en:

$$\nabla^2 = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2}$$

Ahora corresponde la adimensionalización del vector velocidad, para lo que se debe escoger una velocidad que caracterice al sistema como lo es la velocidad promedio, la

velocidad máxima o incluso el flujo másico o el volumétrico, dependiendo de las necesidades específicas para cada sistema. Para el caso que se está tratando, se considerará una velocidad, que puede ser la velocidad promedio, por lo que la velocidad adimensional se expresa:

$$v^* = \frac{v}{\langle v \rangle}$$

El tercer paso es la adimensionalización de la variable tiempo, que por lo general es la más compleja. La dificultad consiste en encontrar alguna cantidad que tenga relación con el tiempo que tarda en ocurrir el fenómeno, por ejemplo, para una reacción química será el tiempo que transcurre desde el inicio hasta el momento en que esta llega al equilibrio. Pero en sistemas dinámicos, como lo sería un reactor químico del tipo continuo, en donde el reactivo se alimenta por la entrada y el producto se extrae en el extremo opuesto, generalmente la reacción química no llega al equilibrio. Entonces se tiene que hacer uso del **tiempo de residencia**, que no es más que el tiempo que una molécula tarda en viajar dentro del reactor desde la entrada hasta la salida. Dicho de otra manera, es el tiempo que una molécula de reactivo tiene para lograr reaccionar, así entre mayor es el tiempo de residencia, mayor es la probabilidad de que la molécula reaccione. Definido de esa manera, se induce que el tiempo de residencia de una molécula es directamente proporcional a la longitud del sistema e inversamente proporcional a la velocidad a la que se mueve. Por tanto, el tiempo adimensional se define:

$$t^* = \frac{t}{L/\langle v \rangle} = \frac{t\langle v \rangle}{L}$$

y su derivada

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dt^*}{dt} \right) = \frac{\langle v \rangle}{L} \frac{d}{dt^*}$$

Sigue el turno ahora a la presión o, más correctamente, a la caída de presión. La cual para adimensionalizarla se debe tomar en consideración la caída de presión entre la entrada y la salida, que viene siendo su máximo valor. Por lo que la caída de presión adimensional se expresa:

$$p^* = \frac{p - p_0}{p_L - p_0}$$

Finalmente, sólo queda por adimensionalizar al vector gravedad. Como se mencionó antes por lo general se considera su magnitud constante, siendo esta el valor de la gravedad al nivel del mar, esto es, 9.81 m/s² o 32.2 pies/seg². Por lo tanto, el vector gravedad adimensional se define:

$$g^* = \frac{g}{g}$$

Una vez definidas las variables adimensionales, se substituyen en la ecuación de

Navier-Stokes, por lo que al hacerlo se obtiene

$$\rho \left(\frac{\langle v \rangle}{L} \right) \frac{D(v^* \langle v \rangle)}{Dt} = \mu \left(\frac{1}{L^2} \right) \nabla^{*2} (v^* \langle v \rangle) - \left(\frac{1}{L} \right) \nabla^* p^* (p_L - p_0) + \rho g g^*$$

y al reacomodar las componentes se obtiene:

$$\frac{\rho \langle v \rangle^2}{L} \frac{Dv^*}{Dt^*} = \frac{\mu \langle v \rangle}{L^2} \nabla^{*2} v^* - \frac{(p_L - p_0)}{L} \nabla^* p^* \rho g g^* \quad (3.10)$$

ahora se multiplica la ecuación (3.10) por $L/\rho \langle v \rangle^2$, con lo que se obtiene:

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} = \left(\frac{\mu}{\rho \langle v \rangle L} \right) \nabla^{*2} v^* - \left(\frac{p_L - p_0}{\rho \langle v \rangle^2} \right) \nabla^* p^* + \left(\frac{gL}{\langle v \rangle^2} \right) g^* \quad (3.11)$$

En la ecuación se reconocen tres coeficientes que son tres grupos adimensionales. Cada uno de ellos, por afectar cada uno a un término que representa a las fuerzas que coexisten dentro del sistema, tiene un significado diferente. El primero es el número de Reynolds, el cual ya es conocido y se expresa:

$$Re = \text{Número de Reynolds} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho \langle v \rangle L}{\mu}$$

El último se denomina **número de Froude**, que viene siendo la relación de las fuerzas de gravedad con respecto a las fuerzas de inercia, y se expresa

$$Fr = \text{Número de Froude} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}} = \frac{\langle v \rangle^2}{gL}$$

el número de Froude es importante cuando se tiene sistemas con superficie libre, como es el caso de la navegación de un barco. Por último, en la parte media se encuentra el **número de Euler** que no es más que la relación existente entre las fuerzas de presión y las fuerzas de inercia y se expresa:

$$Eu = \text{Número de Euler} = \frac{\text{fuerzas de presión}}{\text{fuerzas de inercia}} = \frac{(p_L - p_0)}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2}$$

Y la manera en que se interrelacionan los tres grupos adimensionales es a través de la ecuación de Navier-Stokes adimensional.

3.2.2 El Teorema π de Buckingham.

El segundo método se utiliza para aquellos sistemas cuya geometría es muy compleja y es difícil deducir la ecuación que los gobierna. Este método está basado en el **Teorema π de Buckingham** y es aplicable a cualquier tipo de sistema. Es un método

semiempírico que lo primero, y más importante, que requiere es la observación del comportamiento del sistema a diferentes condiciones (Welly,2001). De la observación se deducen las variables que afectan al sistema. Por lo mismo, la observación del fenómeno debe ser aguda y concienzuda para lograr descubrir absolutamente todas las variables del sistema. En caso de olvidar o soslayar alguna de ellas, el método falla. De ahí se propone una relación funcional entre todas las variables. Hasta aquí el método es puramente empírico, y es precisamente en este punto en donde se aplica el Teorema π de Buckingham.

El teorema se puede enunciar de dos maneras. La primera de ellas es muy general y dice:

"Si una ecuación es dimensionalmente homogénea, se puede reducir a una relación entre una serie de grupos adimensionales".

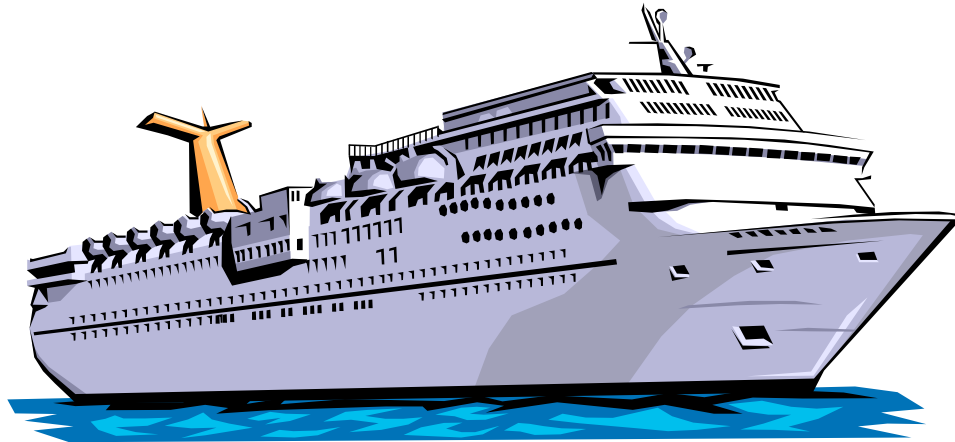
La segunda es más precisa, y dice:

"Las relaciones funcionales entre q cantidades cuyas unidades pueden expresarse en términos de u dimensiones, quedarán representadas por el producto de $(q - u)$ grupos adimensionales independientes".

Lo expresado por el teorema, indica que una relación funcional de variables puede ser reducido a una relación funcional entre variables adimensionales con menos componentes, en donde las nuevas variables son grupos adimensionales. El resto es trabajo de laboratorio, cuyo objetivo es calcular los valores de las constantes y exponentes que aparecen en la relación funcional. En caso de que se haya anexado una variable que en realidad no es importante, al evaluar las constantes se elimina por sí sola ya que su exponente se va a aproximar a cero. Ahora bien, el trabajo experimental no forma parte de la metodología, en realidad su objetivo es únicamente llegar a la simplificación o a la mínima expresión de la función propuesta al inicio.

Ejemplo 3.1 Fuerza de arrastre en un barco.

Imaginemos un barco navegando en alta mar. El agua ejerce sobre el casco una fuerza de arrastre que se opone al movimiento del barco. Entonces, la citada fuerza va a depender de las propiedades del agua, como son la densidad y la viscosidad, así como también va a depender de la velocidad con que se mueve el barco. Además, depende de su forma geométrica, siendo esta la parte más compleja del problema. La complejidad estriba en que no hay una variable que caracterice a la forma geométrica. Es por eso por lo que se escoge una forma específica y se define como variable a la longitud del barco y la correlación resultante será aplicable sólo para esa forma nada más. Por último, como el barco se mueve sobre la superficie del agua, se debe de considerar el efecto de la atracción gravitacional.



Por tanto, una vez obtenidas las variables se llega a la conclusión de que la fuerza de arrastre es dependiente del resto de las variables, por lo que funcionalmente se expresa:

$$F = f(v, L, \mu, \rho, g) \quad (3.12)$$

la que, de acuerdo con el teorema π de Buckingham, se puede reducir a:

$$n = (6 - 3) = 3 \text{ grupos adimensionales}$$

es decir, a la relación funcional entre sólo tres grupos adimensionales, de tal manera que se pudiera reducir a la siguiente expresión genérica:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3) \quad (3.13)$$

En donde π_1 , π_2 y π_3 representan a cada uno de los grupos adimensionales que forman parte de la expresión (3.13). Es necesario entonces determinar el grupo de variables que componen a cada uno de ellos. Para lograrlo, es necesario proceder de la manera siguiente:

1. Los grupos adimensionales estarán compuestos por un numero de variables igual al

número de dimensiones en que está basado el sistema dimensional. Para este caso, en particular, las dimensiones son la masa, la longitud y el tiempo, por lo que se escogen tres variables entre las seis propuestas, las cuales se van a repetir en los tres grupos, las cuales se pueden escoger de manera aleatoria, siempre y cuando en los tres estén incluidas la tres dimensiones. Para el ejemplo que nos ocupa, se escogerán a la densidad, la velocidad y la longitud (ρ, v, L)

2. Se escoge una cuarta variable de entre las restantes, la cual aparecerá solamente una vez en cada grupo.
3. Cada grupo estará compuesto por el producto de las 4 variables propuestas, estando las tres primeras elevadas a una potencia diferente y desconocida, mientras que la cuarta estará elevada a la primera potencia, por lo que la expresión matemática para cada grupo será la siguiente:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \rho^a v^b L^c F \\ \pi_2 &= \rho^a v^b L^c \mu \\ \pi_3 &= \rho^a v^b L^c g\end{aligned}$$

4. A continuación, se procede a determinar el valor numérico de cada uno de los exponentes para cada grupo. Para ello, se sustituyen las dimensiones de cada variable. Por ejemplo, para el primer grupo la expresión, en función de sus dimensiones, será:

$$\pi_1 = [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c [MLT^{-2}]$$

5. Aplicando las leyes de los exponentes, cada dimensión deberá se elevada a la suma de los exponentes a los que esta elevado:

$$\pi_1 = [M]^{a+1} [L]^{-3a+b+c+1} [T]^{-b-2}$$

De la que se obtiene un sistema de tres ecuaciones simultaneas, las cuales deberán estar igualadas a cero (0), ya que es condición necesaria para que la suma de los exponentes sea cero y el grupo sea adimensional. Este sistema estará compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}M: a + 1 &= 0 \\ L: -3a + b + c + 1 &= 0 \\ T: -b - 2 &= 0\end{aligned}$$

El cual, nos da como resultado: $a = -1, b = -2$ y $c = -2$

6. De ahí que, al sustituir estos últimos exponentes, el grupo adimensional que se obtiene es el siguiente:

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 L^2} = \text{Número de Newton} = Nw$$

7. De igual forma se procede con los otros dos grupos, de los que se obtiene:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v L} = \frac{1}{Re}$$

$$\pi_3 = \frac{gL}{v^2} = \frac{1}{Fr}$$

8. Por lo que la relación funcional genérica que se obtiene es la siguiente:

$$N_w = \varphi(Re, Fr) \quad (3.14)$$

O bien, es forma de producto:

$$N_w = K Re^m Fr^n \quad (3.15)$$

9. En la que K , m y n son desconocidas y es necesario determinarlas experimentalmente. Es decir, el análisis dimensional no resuelve el problema, únicamente lo reduce a un número menor de variables, basado en el número original de variables, pero la experimentación es necesaria para obtener un modelo matemático que caracterice el comportamiento del fenómeno que se desea resolver.

3.3 EL FACTOR DE FRICCIÓN DE FANNING

Uno de los objetivos del análisis de un sistema en la mecánica de fluidos es el de conocer la magnitud de la energía cinética, que adquiere el fluido por medio de las diferentes fuerzas impulsoras que coinciden en el mismo. Más no toda la energía cinética es aprovechable, ya que parte de ella se disipa por efectos de la fricción viscosa del fluido sobre las paredes del sistema. Es objetivo de esta sección el definir un parámetro que permita medir el grado de energía cinética disipada por fricción viscosa sobre las paredes de un sistema. Supóngase entonces que el sistema en este caso es un tubo recto, como el mostrado por la figura 3.4. En ella se va a analizar la región localizada entre los puntos $z = 0$ y $z = L$, en donde el flujo se encuentra totalmente desarrollado y con un perfil de velocidades bien definido, es decir, la región se encuentra alejada de la entrada por lo que no provoca ningún efecto en el flujo. En dicha región hay una caída de presión ($p_0 - p_L$), la cual provoca en el fluido una velocidad promedio (v_z), siendo D el diámetro del ducto, el cual transporta un fluido de densidad ρ y viscosidad μ .

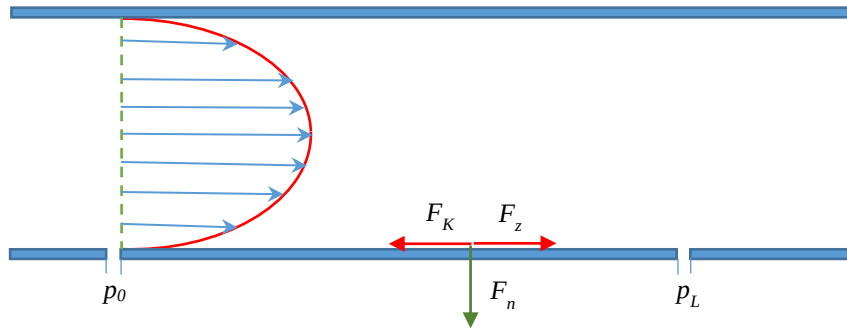


Figura 3.4 Análisis de pérdidas de energía mecánica en un tubo.
Obtención del factor de fricción

Si se observa cuidadosamente la figura 3.4, se puede deducir que sobre las paredes del ducto el fluido genera dos fuerzas, una que se debe al peso del fluido y que tiene relación con la atracción gravitacional (F_n) y la otra QUE es generada por el movimiento del fluido, es decir, está relacionada con la energía cinética (F_K). Pero como el tubo está en posición horizontal y el fluido lo llena totalmente (no hay superficie libre), por tanto, la fuerza de gravedad no actúa sobre el movimiento, por lo que F_n se elimina. En cambio, F_K actúa en dirección contraria al movimiento y se incrementa en la medida que la velocidad incrementa, o sea, F_K es proporcional a la energía cinética adquirida por el fluido, lo cual se expresa en forma de ecuación

$$F_K = f(\pi DL) \left(\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \right) \quad (3.16)$$

en ella aparece la constante de proporcionalidad f , a la que se le conoce como **factor de fricción** y que no es más que la fracción de energía cinética disipada por efectos de la fricción viscosa sobre las paredes del ducto.

En la unidad anterior, en el problema del flujo laminar de un fluido a través de un cilindro, se obtuvo una expresión para la fuerza ejercida por un fluido sobre las paredes del cilindro, la que se denominó "fuerza de arrastre" (F_z), en cambio F_K es la fuerza de retardo que ejerce la pared en contra del movimiento del fluido, por tanto, suman cero llegando finalmente a la ecuación:

$$F_z - F_K = 0 \quad (3.17)$$

Si se igualan ambas ecuaciones, se obtiene:

$$f(\pi DL) \left(\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \right) = (p_0 - p_L) \frac{\pi D^2}{4}$$

de donde al despejar f se llega a la expresión

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{(p_0 - p_L)}{\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2} \quad (3.18)$$

a la que se le conoce como **ecuación de Fanning** para el factor de fricción (Bird, 2002).

Ahora bien, generalmente el objetivo de un problema es obtener la caída de presión dada la velocidad o viceversa, aunque en ocasiones el diámetro puede ser la incógnita. Pero cualquiera que sea el caso, también el factor de fricción se desconoce, por lo que la ecuación (3.18) no es suficiente para llegar al objetivo y se debe encontrar una forma para evaluarlo. Tal es el tema que se va a tratar en la siguiente sección.

3.4 CORRELACIONES PARA EL FACTOR DE FRICCIÓN EN DUCTOS

Para evaluar el factor de fricción existen diversas correlaciones, gráficas y nomogramas para diferentes tipos de flujo y sistemas. En esta sección se dan a conocer sólo aquellas correlaciones y gráficas usadas exclusivamente en conducciones para el transporte de fluidos.

Pero antes de hacer una relación de las correlaciones existentes y su uso, es necesario plantear el fundamento básico para su proposición. Es aquí en donde se le encuentra uso inmediato al análisis dimensional. Entonces, para proponer una correlación es necesario primeramente hacer un reconocimiento de las variables que afectan al flujo de un fluido dentro de un ducto circular. Por principio, el movimiento es provocado por una caída de presión $(p_0 - p_L)$ en un ducto de diámetro D , en un tramo de longitud L , cuyo material tiene una rugosidad ε , imprimiéndole una velocidad $\langle v_z \rangle$ a un fluido con densidad ρ y viscosidad μ . La atracción gravitatoria no se toma en consideración por las razones dadas en la sección anterior. Por lo anterior, se concluye en la proposición de la relación funcional:

$$(p_0 - p_L) = h(\langle v_z \rangle, \mu, \rho, L, D, \varepsilon)$$

la cual lleva a proponer la correlación

$$(p_0 - p_L) = K \langle v_z \rangle^a \mu^b \rho^c L^d D^e \varepsilon^i \quad (3.19)$$

que puede ser reducida a una ecuación de sólo 4 grupos adimensionales de acuerdo con el teorema π de Buckingham. Por lo que se pudiera expresar en términos de grupos adimensionales de la manera siguiente:

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \pi_4) \quad (3.20)$$

Los cuales se deducen en función de las siguientes expresiones para cada grupo:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \rho^a \langle v_z \rangle^b D^c (p_0 - p_L) \\ \pi_2 &= \rho^a \langle v_z \rangle^b D^c \mu \\ \pi_3 &= \rho^a \langle v_z \rangle^b D^c \varepsilon \\ \pi_4 &= \rho^a \langle v_z \rangle^b D^c L\end{aligned}$$

Al aplicar el procedimiento, los grupos adimensionales que se obtienen son:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{(p_0 - p_L)}{\rho \langle v_z \rangle^2} \\ \pi_2 &= \frac{\mu}{\rho \langle v_z \rangle D} = \frac{1}{Re} \\ \pi_3 &= \frac{\varepsilon}{D} \\ \pi_4 &= \frac{L}{D}\end{aligned}$$

Por lo que la correlación se puede expresar en los siguientes términos:

$$\frac{(p_0 - p_L)}{\rho \langle v_z \rangle^2} = \varphi \left(Re, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{L}{D} \right) \quad (3.21)$$

Ahora bien, si se divide π_1 entre 0.5, se obtiene el número de Euler, es decir:

$$\frac{\pi_1}{1/2} = Eu$$

Y, a su vez, el número de Euler es la base del factor de fricción de Fanning, por lo que si se multiplica por $\frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right)$, se transforma en f :

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) Eu \quad (3.22)$$

De esta manera, π_1 se puede sustituir por f para finalmente proponer la correlación:

$$f = K Re^m \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^n \left(\frac{L}{D} \right)^s \quad (3.23)$$

Todas estas transformaciones se pueden realizar debido a que no se han definido los valores de la constante y de los exponentes, los cuales se determinarán por medio de experimentación.

Volviendo a la figura 3.4, si el flujo se ha desarrollado completamente, lo cual sucede cuando $L/D > 50$, el factor de fricción es independiente de L/D , por lo que su exponente ($s = 0$) indica que el término desaparece de la correlación, entonces la expresión del factor de fricción se reduce a

$$f = K Re^m \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^n \quad (3.24)$$

La ecuación así obtenida sólo establece la dependencia del factor de fricción con respecto al número de Reynolds y a la rugosidad relativa (debida al material de que está construido el ducto). Pero para poder calcular el valor específico del factor de fricción es necesario evaluar la constante y los exponentes de la ecuación (3.24), los que varían dependiendo del régimen de flujo. Ahora bien, por razones meramente prácticas, se consideran dos regímenes, el flujo laminar cuando **$Re < 2,100$** y el flujo turbulento cuando **$Re > 2,100$** , el flujo de transición no se considera por ser una región inestable difícil de reconocer su intervalo de ocurrencia por lo que se integra al flujo turbulento.

Dadas las condiciones anteriormente expuestas, a continuación se dan a conocer las correlaciones divididas en función del tipo de régimen y también respecto a la rugosidad relativa del ducto.

CORRELACIONES PARA FLUJO LAMINAR

En el régimen de flujo laminar no afecta el tipo de material de que está construido el ducto, es decir, el factor de fricción depende solamente del **Re** . Para este caso se cuenta con la información suficiente para poder deducir una correlación. Se cuenta en primer lugar con la ecuación de la velocidad promedio en ductos circulares para flujo laminar deducida en la unidad 2, la que se expresa:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(p_0 - p_L)R^2}{8\mu L} = \frac{(p_0 - p_L)D^2}{32\mu L}$$

de la que se despeja la caída de presión:

$$(p_0 - p_L) = \frac{32\mu L \langle v_z \rangle}{D^2} \quad (3.25)$$

la cual, al ser substituida en la ecuación de Fanning del factor de fricción, se obtiene:

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{32\mu L \langle v_z \rangle / D^2}{\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2}$$

que al ser simplificada se llega a la correlación buscada

$$\boxed{f = \frac{16}{\left(\frac{D \langle v_z \rangle \rho}{\mu} \right)} = \frac{16}{Re}} \quad (3.26)$$

Comparándola con la ecuación (3.24), se tiene que el valor de la constante es **$K = 16$** y de los exponentes son **$m = -1$ y $n = 0$** , no considerando así la rugosidad relativa del ducto. La razón por la que no se considera la rugosidad es debido a que los disturbios, provocados por las protuberancias de la pared del ducto, se absorben rápidamente y el flujo se mantiene completamente desarrollado y el perfil de velocidades no se ve alterado (Bird, 2002).

CORRELACIONES PARA FLUJO TURBULENTO

En el régimen de flujo turbulento se hace necesario la subdivisión de las correlaciones en dos grupos, esto es, para tubos lisos y para tubos rugosos.

Tubos hidrodinámicamente lisos

Son aquellos en los que se considera que $\varepsilon = 0$, por lo que la ecuación (3.24) se reduce a:

$$f = KRe^m \quad (3.27)$$

Una de las primeras expresiones para la evaluación del factor de fricción fue desarrollada por H. Blasius (1908), quién propuso la correlación:

$$f = \frac{0.0791}{Re^{0.25}} \quad \text{válida para } 2,100 < Re < 10^5 \quad (3.28)$$

Otra propuesta se debe a J. Nikuradse (1932), quién partiendo del perfil de velocidad para flujo turbulento, que considera la viscosidad de remolino, concluyó con la correlación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log_{10}(Re\sqrt{f}) - 0.4 \quad \text{para } Re > 3,000 \quad (3.29)$$

Tubos rugosos ($\varepsilon > 0$)

En los tubos rugosos el flujo está siendo continuamente disturbado, lo cual provoca una mayor intensidad en la turbulencia. Por ello y considerando la región de transición dada por el intervalo $(D/\varepsilon)/Re\sqrt{f} > 0.01$, Colebrook propuso la correlación (Welty, 2001):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log_{10} \left(\frac{D}{\varepsilon} \right) + 2.28 - 4 \log_{10} \left(4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re\sqrt{f}} + 1 \right) \quad (3.30)$$

Por último, cuando $(D/\varepsilon)/Re\sqrt{f} < 0.01$ el flujo es altamente turbulento y el factor de fricción es solamente dependiente de la rugosidad relativa, de ahí que Von Kármán propusiera la correlación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \left(\frac{D}{\varepsilon} \right) + 2.28 \quad (3.31)$$

En la tabla 3.1 se dan a conocer el valor de la rugosidad para algunos materiales de

construcción de tuberías.

Desafortunadamente, en estas ecuaciones, salvo en la (3.31), el calculo de f es complejo ya que se necesita utilizar un método numérico para obtener la raíz de la ecuación. Afortunadamente, ha habido suficiente investigación para obtener varias correlaciones para el calculo directo del factor de fricción, como las siguientes mostradas a continuacion:

Altshul:

$$f = 0.0275 \left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \quad (3.32)$$

$$4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8 \quad ; \quad 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 0.05$$

$$f = \frac{1}{4} \left\{ 1.8 \log \left[\frac{Re}{0.135 Re (\varepsilon/D) + 6.5} \right] \right\}^{-2} \quad (3.33)$$

con el mismo rango

Churchill:

$$f = 2 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + (A + B)^{3/2} \right]^{1/12} \quad (3.34)$$

$$A = \left[2.457 \ln \left(\frac{1}{\left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} + 0.27 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)} \right) \right]^{16}$$

$$B = \left(\frac{35530}{Re} \right)^{16}$$

e igual rango

Mandilli:

$$f = \frac{1}{4} \left\{ -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{95}{Re^{0.983}} - \frac{96.82}{Re} \right] \right\}^{-2} \quad (3.35)$$

$$5235 \leq Re \leq 10^9$$

Pavlov:

$$f = \frac{1}{4} \left\{ -2 \log \left[\frac{1}{3.7} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + \left(\frac{6.81}{Re} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad (3.36)$$

$$4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$$

En el pasado, era más usual y práctico el uso de la gráfica de **f Vs Re** (ver figura 3.4), sin embargo, aún cuando es más rápida la evaluación, es también muy imprecisa y, por tanto, el error inducido en f es grande. Actualmente, con las calculadoras modernas, es posible evaluar rápidamente el factor de fricción, aún utilizando una ecuación tan compleja como la de Colebrook, logrando con ello una mayor exactitud en el cálculo y, por ende, disminuyendo considerablemente el error.

En cuanto a la rugosidad, su valor depende del material de que está fabricada la tubería, los valores más característicos se muestran a continuación en la tabla 3.1:

Tabla 3.1 Valores de rugosidad (Geankoplis, 2018)

Material	Rugosidad en mm
Tubo estirado	0.0015
Hierro forjado y acero comercial	0.046
Hierro asfaltado	0.12
Hierro galvanizado	0.15
Hierro fundido	0.26
Acero estriado o remachado	1.8
Vidrio o plastico	Hidrodinámicamente liso

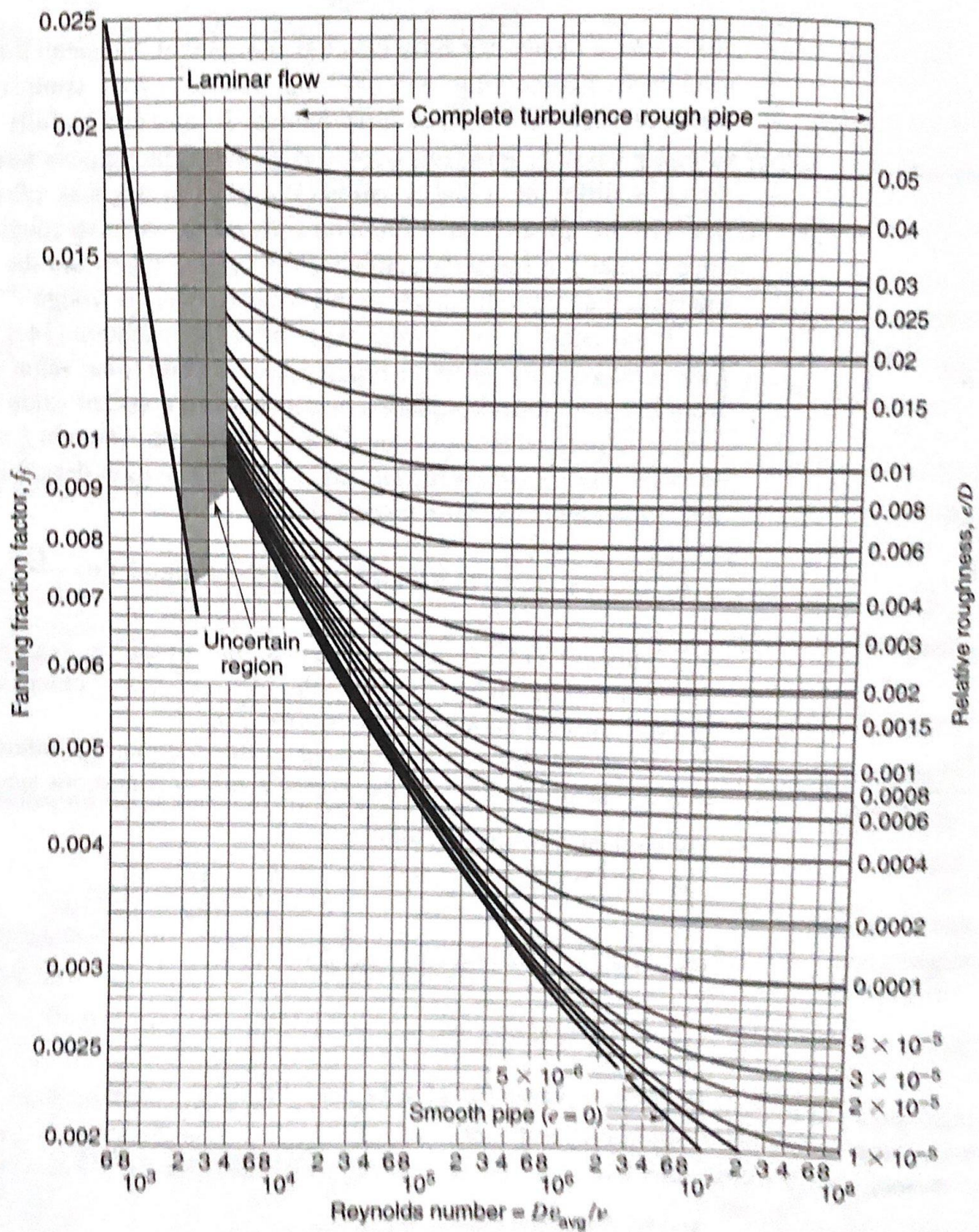


Figura 3.4 Factor de fricción de Fanning

Ejemplo 3.2 Caída de presión en un tubo circular recto.

Por un tubo de 15 m de largo y cuyo diámetro es de 1 cm, fluye benceno a 25°C, a razón de 190 L/h. Calcular la caída de presión a lo largo del tubo.

Solución.

$$\nu = 6.46 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 875 \text{ kg/m}^3$$

$$D = 0.01 \text{ m}$$

$$G = 190 \text{ lts/hr} = 5.28 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L = 15 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 4.6 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{4G}{\pi D^2} = \frac{4(5.28 \times 10^{-5})}{\pi(0.01)^2} = 0.6726 \text{ m/s}$$
$$Re = \frac{D \langle v_z \rangle}{\nu} = \frac{(0.01)(0.6726)}{6.46 \times 10^{-7}} = 9,801$$

Todos los datos anteriores se substituyen en la ecuación (3.32), para obtener:

$$f = 0.0275 \left(\frac{4.5 \times 10^{-5}}{0.01} + \frac{68}{9801} \right)^{0.25} = 0.00899$$

Y para la caída de presión, partiendo de la ecuación de Fanning, se obtiene:

$$(p_0 - p_L) = \frac{2\rho \langle v_z \rangle^2 L f}{D} = \frac{2(875)(0.6723)^2(15)(0.00899)}{0.01} = 10,666.33 \text{ Pa}$$

Ejemplo 3.3 Cálculo del flujo dada la caída de presión

Determinar el flujo másico de agua a 68°F, a través de un tubo de acero de 8 pulg de diámetro cédula 40 de 1000 pies de longitud, dada una caída de presión de 3 psi.

Solución. En este tipo de problemas la dificultad estriba en que para determinar el factor de fricción es necesario conocer la velocidad, la cual también es una incógnita, por lo que se crea un círculo vicioso. Sin embargo, analizando la ecuación de Colebrook se encuentra que se puede calcular el factor de fricción ya que el término $Re\sqrt{f}$ no contiene la la velocidad. Por tanto, existen dos métodos para resolver este problema, en el primero de

ellos se hace uso de la ecuación de Colebrook y en el segundo se utiliza la gráfica de **f** Vs **Re**.

$$p_0 - p_L = 3 \text{ Lb/pulg}^2 = 13,897 \text{ Lb}_m/\text{pie} \cdot \text{seg}^2$$

$$D = 7.981 \text{ pulg} = 0.665 \text{ pies}$$

$$L = 1000 \text{ pies}$$

$$\rho = 62.3 \text{ Lb}_m/\text{pie}^3$$

$$\mu = 6.93 \times 10^{-4} \text{ Lb}_m/\text{pie} \cdot \text{seg}$$

$$\varepsilon = 1.51 \times 10^{-4} \text{ pies}$$

$$N_{VK} = Re\sqrt{f} = \frac{D\langle v_z \rangle \rho}{\mu} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{(p_0 - p_L)}{\frac{1}{2}\rho\langle v_z \rangle^2}} = \sqrt{\frac{D^3(p_0 - p_L)}{2\mu^2 L}}$$

Que se conoce como **Numero de Von Kármán**, en donde al substituir los valores de las variables se obtiene:

$$Re\sqrt{f} = \sqrt{\frac{(0.665 \text{ pie})^3 (13,879 \text{ lb}_m/\text{pie} \cdot \text{seg}^2) (62.3 \text{ lb}_m/\text{pie}^3)}{2(6.93 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{pie} \cdot \text{seg})^2 (1,000 \text{ pies})}}$$

cuyo valor es

$$Re\sqrt{f} = 16,281$$

Y cuya rugosidad relativa es:

$$\frac{\varepsilon}{D} = 2.27 \times 10^{-4} \quad \text{y el inverso:} \quad \frac{D}{\varepsilon} = 4,405$$

Método A. Evaluación del factor de fricción por medio de la ecuación de Colebrook.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log(4,405) + 2.28 - 4 \log \left[\frac{4.67(4,405)}{16,281} + 1 \right] = 15.44$$

para evaluar la velocidad, se obtiene el Re:

$$Re = 16,281 \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right) = 16,281(15.44) = 251,378$$

De donde se despeja la velocidad:

$$\langle v_z \rangle = \frac{Re\mu}{\rho D} = \frac{(251,378)(6.93 \times 10^{-4})}{(62.3)(0.665)} = 4.2 \text{ pie/seg}$$

y para el flujo másico, se obtiene:

$$\dot{m} = \rho \langle v_z \rangle \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = \frac{\pi (62.3)(4.2)(0.665)^2}{4} = 91 \frac{\text{lb}_m}{\text{seg}} = 327,169 \text{ lb}_m/\text{hr}$$

Ejemplo 3.4 Cálculo de un sistema complejo.

Un sistema de tres ductos está dispuesto como se muestra en la figura 3.5. El ducto 1 tiene 50 m de longitud y un diámetro de 4 cm, el ducto 2 tiene 150 m de longitud y 6 cm de diámetro y el ducto 3 tiene 100 m de longitud y 8 cm de diámetro. Los 3 ductos son de acero comercial. Asuma que las pérdidas con respecto a la entrada, los accesorios y a la salida ya están considerados en los datos que se dan. La caída de presión total entre la entrada y la salida es de 147,000 Pa. Por los ductos fluye agua a 20 °C. Calcular el flujo total del agua que fluye por este sistema.

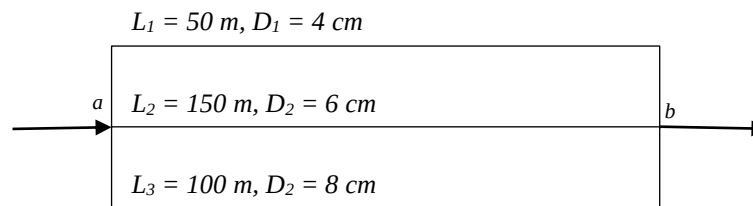


Figura 3.5 Ejemplo 3.4

Solución. Al igual que en el ejemplo anterior, se conoce la pérdida de presión entre los puntos *a* y *b*. Pero se desconoce el flujo de fluido entre esas mismas posiciones, la diferencia estriba en que ahora se tienen tres ductos paralelos, en los cuales la pérdida de presión es la misma y el flujo total se reparte entre ellos, es decir:

$$\dot{m}_T = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

siendo también desconocido el factor de fricción en cada ducto. Sin embargo, es posible calcular el Numero de Von Karman que es diferente para cada sección de ducto debido a que su longitud y diámetro es diferente. Por tanto, se procede a evaluar su valor para cada sección, obteniendo:

$$V_{K1} = Re_1 \sqrt{f_1} = \sqrt{\frac{D_1^3 (\rho_a - \rho_b) \rho}{2 \mu^2 L_1}} = \sqrt{\frac{(0.04)^3 (147,000) (998)}{2 (1.002 \times 10^{-3})^2 (50)}} = 9,670$$

$$V_{K2} = Re_2 \sqrt{f_2} = \sqrt{\frac{(0.06)^3 (147,000) (998)}{2 (1.002 \times 10^{-3})^2 (150)}} = 10,257$$

$$V_{K1} = Re_3 \sqrt{f_3} = \sqrt{\frac{(0.08)^3 (147,000) (998)}{2(1.002 \times 10^{-3})^2 (100)}} = 19,340$$

A continuación, se aplica la ecuación de Colebrook para cada sección, obteniendo:

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = 4 \log \left(\frac{0.04}{4.6 \times 10^{-5}} \right) + 2.28 - 4 \log \left[\frac{4.67(0.04/4.6 \times 10^{-5})}{9,670} + 1 \right] = 13.43$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = 4 \log \left(\frac{0.06}{4.6 \times 10^{-5}} \right) + 2.28 - 4 \log \left[\frac{4.67(0.06/4.6 \times 10^{-5})}{10,257} + 1 \right] = 13.93$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_3}} = 4 \log \left(\frac{0.08}{4.6 \times 10^{-5}} \right) + 2.28 - 4 \log \left[\frac{4.67(0.08/4.6 \times 10^{-5})}{19,340} + 1 \right] = 14.63$$

$$Re_1 = 9,670 \left(\frac{1}{\sqrt{f_1}} \right) = 9,670(13.43) = 129,868$$

$$Re_2 = 10,257(13.93) = 142,880$$

$$Re_3 = 19,340(14.63) = 282,944$$

$$\dot{m}_1 = \frac{\pi D_1 \mu Re_1}{4} = \frac{\pi(0.04)(1.002 \times 10^{-3})(129,868)}{4} = 4.088 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_2 = 6.746 \text{ kg/s}$$

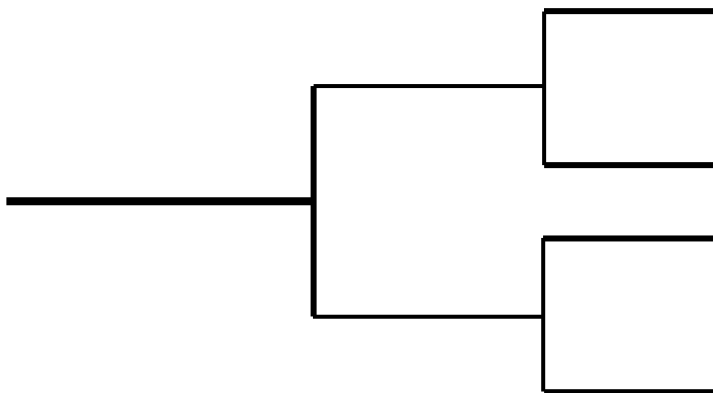
$$\dot{m}_3 = 17.813 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_T = 28.647 \text{ kg/s}$$

PROBLEMAS.

1. Un tanque, inicialmente lleno de agua hasta una altura h_0 , se vacía por medio de un orificio localizado en el fondo. Desarrollar una correlación que relacione el tiempo que tarda en vaciarse el tanque, si este depende de la altura del agua, del diámetro del tanque, del diámetro del orificio de salida, de la aceleración gravitacional, de la densidad del líquido y de la viscosidad de este.
2. El rendimiento de una chumacera que soporta un eje giratorio está en función del flujo volumétrico de aceite lubricante que se alimenta a la chumacera; el diámetro de la chumacera; de la velocidad del eje giratorio, en revoluciones por minuto; de la viscosidad, de la densidad y de la tensión superficial del lubricante. Por medio del análisis dimensional proponga una expresión que relacione el rendimiento (η , que es adimensional) con el resto de las variables propuestas.

3. El diámetro de las gotas producidas por un aspersor depende del diámetro del orificio del aspersor, de la velocidad del fluido, y de las propiedades del líquido, es decir, de la densidad, viscosidad y tensión superficial. Obtenga los grupos adimensionales que representan este sistema.
4. La fuerza ejercida por un fluido sobre una esfera sólida en caída libre depende de la velocidad de caída, del tamaño y de la densidad del objeto. También es dependiente de la densidad y viscosidad del fluido. Asimismo, es dependiente de la gravedad. Determine los grupos adimensionales que deban considerarse para este sistema.
5. Se requiere hacer un análisis dimensional para establecer la relación funcional para la formación de burbujas en una columna de burbujeo. Para ello se desea relacionar el tamaño de la burbuja formada con el diámetro del aspersor, la densidad, viscosidad y tensión superficial del líquido en la columna y finalmente de la gravedad. Para hacerlo, se desea determinar los grupos adimensionales que se requieren para establecer la función.
6. Se tiene amoníaco líquido a 20°C que fluye por una tubería de acero comercial de 1 pulg de diámetro nominal cedula 80 y que descarga a un recipiente que se encuentra a 88 kPa de presión. El tubo tiene una longitud de 15 m y la presión en el punto de entrada es de 135 kPa. Calcule el flujo másico de amoníaco que fluye por esta tubería a las condiciones dadas.
7. Considere la siguiente red de tuberías en donde entra agua a 25°C a razón de 540 L/min. En el esquema la sección 1 tiene 50 m de longitud, es de hierro colado y tiene 4 pulg de diámetro, la sección 2 es de acero comercial tiene 30 m de longitud y tiene un diámetro de 2 pulg y la tercera tiene 20 m, un diámetro de 3 pulg y es de hierro forjado. Calcule el flujo total y en cada tubo al final de la red, la velocidad a la salida de cada tubo, la caída de presión en cada sección y la caída total en toda la red.



8. Por un tubo comercial de acero, de 100 mm de diámetro, fluye un líquido cuya densidad es de 850 kg/m^3 . El gasto es de 4.25 lts/s. Si la caída de presión a través

del tramo horizontal de 60 m de longitud del tubo es de 1.75 kPa, determínese la viscosidad del líquido.

9. Por una tubería de hierro fundido ($\varepsilon = 0.26 \text{ mm}$) fluye benceno ($\rho = 875 \text{ kg/m}^3$ y $\nu = 6.46 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$). La caída de presión a lo largo de la tubería es de 1,000 Pa/m. Si la tubería tiene una longitud de 20 m y el diámetro es de 1 pulgada, determinar el flujo másico de benceno que la tubería está transportando.
10. La caída de presión en 200 m de una tubería de 1 pulg cedula 80, es de 250 mm medido con un manómetro de mercurio. Por la tubería fluye benceno a 25°C, cuyas propiedades son: densidad 873.6 kg/m³ y viscosidad 6.01 x 10⁻⁴ Pa-s. Determinar el flujo másico y volumétrico en L/h.

CAPITULO 4

EL BALANCE DE ENERGIA MECANICA

4.1 LA ECUACION DE ENERGIA MECANICA

El objetivo de esta sección es el de deducir la ecuación de energía mecánica a partir de la ecuación de movimiento. La fundamentación de la deducción descansa en la definición termodinámica de energía. Así, de acuerdo con la termodinámica el trabajo, que es una forma de energía, se define como el producto de una fuerza aplicada a un objeto para recorrer una distancia (entendida como una longitud recorrida en una dirección definida) y, siendo vectoriales tanto la fuerza como la distancia y la energía una cantidad escalar, se expresa matemáticamente:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (4.1)$$

o sea, la energía es igual al producto escalar o punto de el vector fuerza por el vector distancia, cuya magnitud es la longitud recorrida por el objeto. Ahora, si en lugar de la distancia se establece el cambio de posición con respecto al tiempo de un objeto en el espacio, el resultado es el flujo de energía extraída o adicionada para lograr que el objeto se mantenga en movimiento, para lo cual se define matemáticamente:

$$\{Potencia\} = \dot{W} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.2)$$

en donde $d\vec{r}/dt$ es la velocidad instantánea del objeto en un determinado punto y $\dot{W}$ es el flujo de energía (o potencia) adicionada al objeto para que se mantenga en movimiento. También, si el objeto viaja a la deriva siguiendo las líneas de flujo del medio en que se encuentra, entonces el flujo de energía se expresa:

$$\dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.3)$$

en la que $\vec{v}$ es la velocidad de una línea de flujo.

Como la ecuación de movimiento está expresada en dimensiones de fuerza, para transformar la ecuación de energía simplemente se aplica el producto punto con la función vectorial $\vec{v}$ del sistema en cada uno de los términos de la ecuación, por lo que se convierte en:

$$\rho \left[\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \right] = -[\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau})] - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) + \rho(\vec{v} \cdot \vec{g}) \quad (4.4)$$

Para una mejor comprensión de esta ecuación, se desglosa cada uno de los términos que la componen, quedando expresados de la manera siguiente:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \cdot p\vec{v} - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

en la que:

$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{p}\vec{v}$ = Trabajo desarrollado por fuerzas de presión

$-\mathbf{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$ = Conversión reversible a energía interna

$$\frac{D(\vec{v} \cdot \vec{v})}{Dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

en donde: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = v^2$

siendo: $\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$ = La acumulación de energía cinética

$$\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})$$

en la que:

$\vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})$ = Trabajo desarrollado por fuerzas viscosas

$-(\boldsymbol{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})$ = Conversión irreversible a energía interna

por último:

$\rho(\vec{g} \cdot \vec{v})$ = Trabajo desarrollado por fuerzas gravitacionales

Por lo que, una vez desarrollados cada uno de los términos, la ecuación (IV.4) se expresa:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -[\vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})] + [-(\boldsymbol{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})] - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{p}\vec{v} + \mathbf{p}(-\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho(\vec{g} \cdot \vec{v}) \quad (4.5)$$

siendo esta última **La Ecuación de Energía Mecánica** que, en su forma más desarrollada, se expresa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -[\vec{\nabla} \cdot (\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v})] - [\vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})] + [-(\boldsymbol{\tau} : \vec{\nabla} \vec{v})] - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{p}\vec{v} + \mathbf{p}(-\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho(\vec{g} \cdot \vec{v}) \quad (4.6)$$

Es necesario aclarar que tanto la ecuación de continuidad como la de movimiento y la de energía mecánica son ecuaciones puntuales, es decir, han sido desarrolladas para conocer el comportamiento de los fluidos a nivel infinitesimal y determinar sus características en cuanto a su velocidad, fuerzas, magnitud de la transferencia de movimiento y energía generada por efectos de fricción en una posición específica del sistema. Por lo mismo, su resolución es complicada, difícil y es poco útil en el diseño de equipos y en el desarrollo de sistemas macroscópicos, es decir, para el cálculo de sistemas de transporte su aplicación es limitada. Por ello, a continuación, se presenta la deducción de las ecuaciones macroscópicas que se utilizan en ingeniería para el cálculo de sistemas

4.2 BALANCES MACROSCOPICOS

4.2.1 Balance de Materia.

Considérese un sistema como el mostrado en la figura 4.1. En él, son aplicables la ecuación de continuidad, de movimiento y de energía mecánica. Y, por medio de ellas, es posible evaluar los perfiles de velocidad, de esfuerzo cortante, de energía cinética, potencial y otros parámetros en cada punto del sistema durante el tiempo en que transcurre el fenómeno Bird, 2002). Sin embargo, en la práctica es difícil obtenerlos debido a que la mayoría de los sistemas que se manejan en ingeniería tienen una geometría muy compleja. Por lo mismo, las ecuaciones diferenciales resultantes contienen más de una variable independiente cuya solución matemática en muchas ocasiones no es posible, dadas las restricciones de los métodos matemáticos de solución. Más en ingeniería, a falta de un conocimiento más preciso, generalmente son de gran valor el conocimiento de los parámetros macroscópicos, ya sea para el diseño como para el control de un equipo o proceso. Dichos parámetros pueden ser la velocidad promedio, la velocidad máxima, la fuerza de arrastre, el flujo másico o volumétrico, la energía cinética, la caída de presión o la masa total en el sistema en un momento determinado si se encuentra en estado inestable. Tales cantidades se pueden obtener por medio de los Balances Macroscópicos, ya sea de materia, de cantidad de movimiento o de energía mecánica, cuya representación matemática se puede obtener al integrar las ecuaciones puntuales en todo el volumen de control mostrado por la figura 4.1.

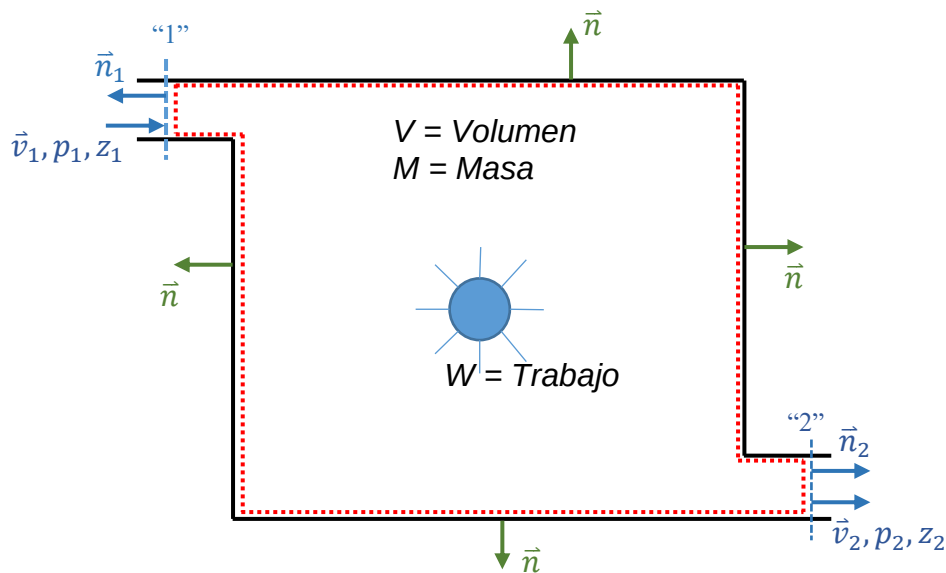


Figura 4.1 Volumen de control

El primer caso que ejemplifica lo anteriormente mencionado, es el **Balance de Materia**, que se obtiene al integrar la ecuación de continuidad en el volumen del sistema y, al hacerlo, se obtiene primeramente la ecuación en su forma vectorial:

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right) dV = 0 \quad (4.7)$$

que al desarrollarla se transforma en:

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} dV = 0 \quad (4.8)$$

y al aplicar el Teorema de la divergencia de Gauss:

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) es dependiente de las tres coordenadas y del tiempo, pero considerando que el sistema se encuentra fijo en el espacio, el tiempo no es una variable determinante por lo que se puede expresar:

$$\frac{d}{dx} (\iiint \rho dV) + \iint \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (4.10)$$

en ella se define a:

$$\iiint \rho dV = M \text{ (Masa total del sistema)}$$

por lo que respecta a la integral de área, se puede dividir en tres secciones, una correspondiente a la entrada, otra a la salida y la última a las paredes del sistema, como se puede observar en la figura 4.1, cuya suma define el área total

$$A = A_1 + A_2 + A_n \quad (4.11)$$

en donde:

A₁ = Área a la entrada del sistema.

A₂ = Área a la salida del sistema.

A_n = Área de las paredes del sistema.

con lo cual la integral de superficie de la ecuación (4.10), se expresa:

$$\iint \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \iint \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \iint \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 + \iint \rho (\vec{v}_n \cdot \vec{n}) dA_n$$

siendo las paredes del sistema rígidas y fijas la velocidad en ellas se anula, es decir, $(\vec{v}_n \cdot \vec{n}) = 0$ en esa sección, por lo que en la integral de área se elimina dicho término, quedando:

$$\iint \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \iint \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \iint \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2$$

para cada una de las dos integrales de área restantes se determina el signo de la velocidad,

en función de la dirección del vector unitario normal a cada una de las secciones, dando como resultado:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -|\vec{v}_1| = -v_1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{v}_2| = v_2$$

al hacer la sustitución, la integral de superficie queda finalmente:

$$\iint \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})dA = - \iint \rho_1 v_1 dA_1 + \iint \rho_2 v_2 dA_2 = -\rho_1 \langle v_1 \rangle A_1 + \rho_2 \langle v_2 \rangle A_2$$

en donde se define al flujo másico $\dot{m} = \rho \langle v \rangle A$, entonces:

$$\iint \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})dA = -\dot{m}_1 + \dot{m}_2$$

Substituyendo la definición de masa total y los resultados de la integral de superficie en la ecuación (4.10) se obtiene:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2} \quad (4.12)$$

la cual se conoce como el **Balance Macroscópico de Materia**. Cuando se tiene un sistema con múltiples entradas y salidas, el balance de materia se expresa:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{m}_i - \sum_{j=1}^l \dot{m}_j} \quad (4.13)$$

en la que las literales i y j representan los números progresivos de las entradas y las salidas respectivamente. Por otro lado, en caso de que el sistema se encuentre en estado estable, el balance de materia se reduce a:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \text{o también:} \quad \sum_{i=1}^n \dot{m}_i = \sum_{j=1}^l \dot{m}_j \quad (4.14)$$

Por otra parte, si el fluido es incompresible, la densidad es constante por lo que la ecuación (4.12) queda en función del volumen total del sistema y de los flujos volumétricos de entrada y salida, por lo que se expresa:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = G_1 - G_2} \quad (4.15)$$

Ejemplo 4.1 Tanque agitado con recirculación.

Se tiene un tanque, que inicialmente se encuentra lleno hasta un volumen V_0 , conteniendo una solución de una especie A y cuyo volumen total es V_T . Al iniciar el experimento, se alimenta al tanque con una solución C_{A1} a razón de G_1 pie³/min. Del tanque se extrae a la salida una solución de concentración C_{A2} a razón de G_2 pie³/min. El sistema tiene una recirculación de una fracción r del flujo de salida. Suponiendo que el tanque está bien agitado, determinar una expresión para la concentración de salida en función del

tiempo (Welty, 2001).

Solución. La figura 4.2 muestra el funcionamiento del sistema, en ella se puede observar los flujos de entrada, de salida y las condiciones iniciales, así como la recirculación. Por tanto, al inicio del experimento, o sea a $t = 0$, el volumen de solución contenido en el tanque es V_0 , con una concentración C_{A0} . Ahora, el sistema se encuentra en estado inestable, por lo que es necesario aplicar el balance de materia considerando la acumulación. Además, se encuentra variando tanto la masa total como la concentración de la especie **A**, por tanto, se debe aplicar el balance de materia dos veces, uno para la masa total y otro para la especie contenida en la solución.

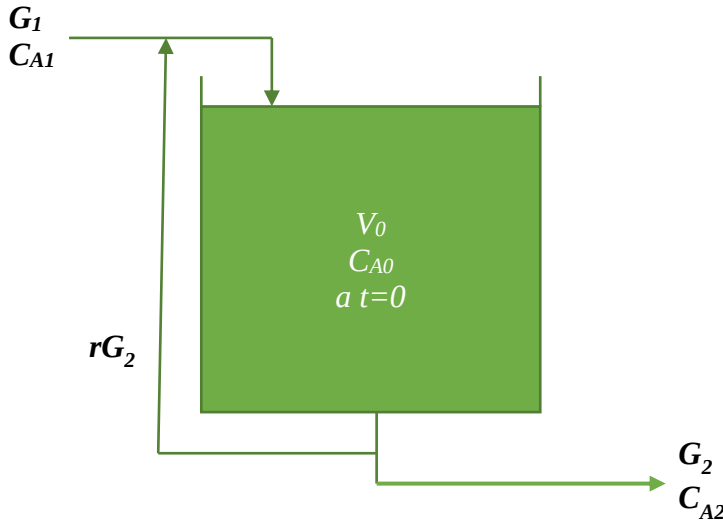


Figura 4.2 Tanque de mezclado con recirculación

BALANCE GLOBAL DE MATERIA

Siendo la solución un fluido incompresible, procede la aplicación de la ecuación (4.15), deduciendo lo siguiente:

$$\frac{dV}{dt} = G_1 + rG_2 - G_2 = G_1 + (r - 1)G_2 \quad (\text{E.1.1})$$

que al ser integrada en el intervalo $[0, t]$, da como resultado:

$$V = V_0 + [G_1 + (r - 1)G_2]t = V_0 + \beta t \quad (\text{E.1.2})$$

siendo $\beta = G_1 + (r - 1)G_2$

BALANCE DE MATERIA PARA LA ESPECIE A.

En la aplicación del balance de materia, se consideran ahora los flujos molares. Además, estando el tanque perfectamente agitado, la concentración en el interior se supone idéntica que a la salida.

$$\frac{d}{dt}(C_{A_2}V) = G_1C_{A_1} + rG_2C_{A_2} - G_2C_{A_2}$$

o desarrollando el término de acumulación:

$$C_{A_2} \frac{dV}{dt} + V \frac{dC_{A_2}}{dt} = G_1C_{A_1} + (r - 1)G_2C_{A_2} \quad \text{E1.3)}$$

Substituyendo las ecuaciones (E1.1) y (E1.2) en (E1.3), se obtiene:

$$[G_1 + (r - 1)G_2]C_{A_2} + (V_0 + \beta t) \frac{dC_{A_2}}{dt} = G_1C_{A_1} + (r - 1)G_2C_{A_2}$$

al eliminar términos se obtiene:

$$[V_0 + \beta t] \frac{dC_{A_2}}{dt} = G_1(C_{A_1} - C_{A_2})$$

la cual se integra en el intervalo $[0, t]$

$$\int_{C_{A_0}}^{C_{A_2}} \frac{dC_{A_2}}{(C_{A_1} - C_{A_2})} = \int_0^t \frac{dt}{(V_0 + \beta t)}$$

dando finalmente como resultado:

$$\ln \left[\frac{C_{A_1} - C_{A_2}}{C_{A_1} - C_{A_0}} \right] = \frac{G_1}{\beta} \ln \left[\frac{V_0 + \beta t}{V_0} \right]$$

o en su forma exponencial se presenta:

$$C_{A_2} = C_{A_1} - (C_{A_1} - C_{A_0}) \left[1 + \frac{\beta}{V_0} t \right]^{\frac{G_1}{\beta}} \quad \text{(E1.4)}$$

En caso de que el flujo de entrada sea igual al de salida, $G_1 = G_2 = G$ y $\beta = Gr$ por lo que la ecuación (E1.4) se transforma en:

$$C_{A_2} = C_{A_1} - (C_{A_1} - C_{A_0}) \left[1 + \frac{Gr}{V_0} t \right]^{-\frac{1}{r}} \quad \text{(E1.5)}$$

4.2.2 Balance de Cantidad de Movimiento.

Volviendo a la figura 4.1, se aplica el mismo procedimiento utilizado para lograr el balance de materia, pero ahora para el balance de cantidad de movimiento, es decir, integrando la ecuación de movimiento en todo el volumen del sistema, determinando de esta manera las fuerzas que se generan dentro de y se ejercen sobre el sistema. Logrando primeramente la ecuación:

$$\iiint \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = \iiint (-\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \tau - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) dV \quad (4.16)$$

Utilizando el mismo razonamiento que en la sección anterior, se definen los parámetros macroscópicos, de manera que aplicándolo término a término se obtiene cada uno de ellos. Y, en primer lugar, el término macroscópico para la acumulación se expresa:

$$\iiint \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} dV = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}$$

en donde:

$$\vec{P}_{tot} = \iiint \rho \vec{v} dV = \text{Momento total dentro del sistema}$$

A continuación, se procede a obtener el término correspondiente a la convección, al cual se le aplica el teorema de Gauss y la integral de superficie resultante se divide en tres integrales de superficie para las mismas tres secciones definidas en la ecuación (4.11), dando como resultado:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v} dV = \iint \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \iint \rho_1 \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \iint \rho_2 \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 + \iint \rho_n \vec{v}_n (\vec{v}_n \cdot \vec{n}_n) dA_n$$

considerando nuevamente que $\vec{v}_n = \vec{0}$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -v_1$ y $\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2$ se llega a:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v} dV = - \iint \rho_1 v_1 \vec{v}_1 dA_1 + \iint \rho_2 v_2 \vec{v}_2 dA_2 = - \iint \rho_1 v_1^2 (-\vec{n}_1) dA_1 + \iint \rho_2 v_2^2 \vec{n}_2 dA_2$$

en donde $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{n}_1$ y $\vec{v}_2 = v_2 \vec{n}_2$. Finalmente, al aplicar la definición de promedio para la velocidad, se reduce a:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \vec{v} dV = -\rho_1 \langle v_1^2 \rangle \vec{S}_1 + \rho_2 \langle v_2^2 \rangle \vec{S}_2$$

en donde $\vec{S}_1 = -\vec{n}_1 A_1$ y $\vec{S}_2 = \vec{n}_2 A_2$.

Ahora corresponde al término de transferencia de momento por fricción viscosa, el cual se transforma en:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} dV = \iint (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerza ejercida por} \\ \text{el fluido sobre la} \\ \text{superficie del sistema} \end{array} \right\}$$

El siguiente término define las fuerzas que provocan el movimiento por efectos de la presión, quedando:

$$\iiint \vec{\nabla} p dV = \iint p \vec{n} dA = \iint p_1 \vec{n}_1 dA_1 + \iint p_2 \vec{n}_2 dA_2 + \iint p_n \vec{n}_n dA_n$$

eliminándose el último término para obtener:

$$\iiint \vec{\nabla} p dV = -p_1 \vec{S}_1 + p_2 \vec{S}_2$$

Finalmente, se integra el término que corresponde a las fuerzas provocadas por la atracción gravitacional, para obtener:

$$\iiint \rho \vec{g} dV = \vec{g} \iiint \rho dV = M \vec{g}$$

Todos los términos así obtenidos se substituyen en la ecuación (4.16), expresándose ahora:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} == \rho_1 \langle v_1^2 \rangle \vec{S}_1 - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle \vec{S}_2 - \vec{F} + p_1 \vec{S}_1 - p_2 \vec{S}_2 + M \vec{g}} \quad (4.17)$$

que viene siendo **El Balance de Cantidad de Movimiento**. En caso de que el sistema se encuentre en estado estable, primeramente, el balance de materia determina que $\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = \rho \langle v \rangle \vec{S}$ quedando finalmente el balance de momento expresado de la manera siguiente:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} \vec{m}_1 - \frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_2 \rangle} \vec{m}_2 + p_1 \vec{S}_1 - p_2 \vec{S}_2 + M \vec{g}} \quad (4.18)$$

Ejemplo 4.2 Fuerza ejercida sobre una tubería doblada

Considérese el flujo en estado estable de un fluido incompresible en una tubería doblada con reducción de área. El sistema lo muestra la figura 4.3 y se desea determinar la fuerza que ejerce el fluido sobre la pared.

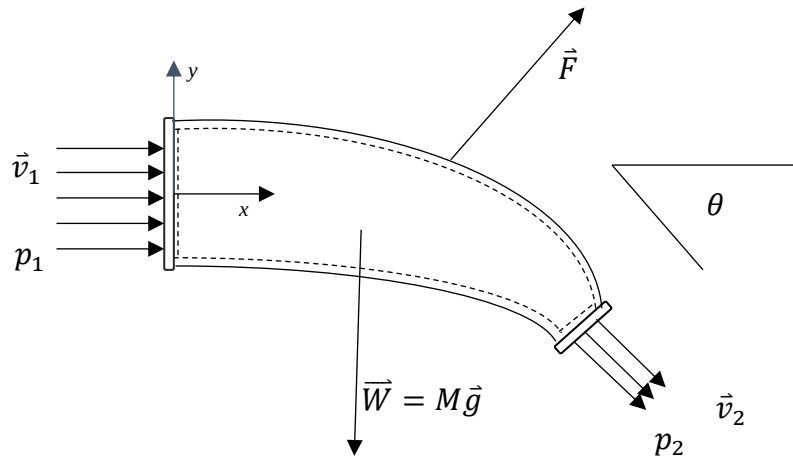


Figura 4.3 Ejemplo 4.2

Solución. Para resolver el problema, es necesario practicar dos balances sobre el sistema, uno de materia y el otro de momento. Iniciando con el balance de materia en estado estable sobre el volumen de control mostrado en la misma figura 4.3, se deduce que $m_1 = m_2$; o bien que: $\rho_1 \langle v_1 \rangle A_1 = \rho_2 \langle v_2 \rangle A_2$ siendo $\rho_1 = \rho_2$ por tanto:

$$\langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \frac{A_1}{A_2} \quad (\text{E2.1})$$

El balance de momento en estado estable da como resultado
en dirección x

$$F_x = p_1 S_{1x} - p_2 S_{2x} + \rho_1 \langle v_1 \rangle^2 S_{1x} - \rho_2 \langle v_2 \rangle^2 S_{2x}$$

como $\rho_1 = \rho_2$ y $S_{2x} = A_2 \cos \theta$ entonces:

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + \rho_1 \langle v_1 \rangle^2 A_1 - \rho_2 \langle v_2 \rangle^2 A_2 \cos \theta \quad (\text{E2.2})$$

en dirección y

$$F_y = p_1 S_{1y} - p_2 S_{2y} + \rho_1 \langle v_1 \rangle^2 S_{1y} - \rho_2 \langle v_2 \rangle^2 S_{2y} - Mg$$

$$F_y = p_2 A_2 \sin \theta + \rho_2 \langle v_2 \rangle^2 A_2 \sin \theta - W \quad (\text{E2.3})$$

4.2.3 Balance de Energía Mecánica. (ECUACION DE BERNOULLI)

Antes de integrar la ecuación puntual de energía, obtendrán los parámetros termodinámicos para cada uno de los términos que la componen. Por lo que, iniciando con

la ecuación desarrollada de energía que se expresa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) - \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] - [\tau : \vec{\nabla} \vec{v}] - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \rho (\vec{v} \cdot \vec{g}) \quad (4.6)$$

En ella, primeramente, se define:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = \rho \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) = \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{G}$$

ya que, de acuerdo con la termodinámica, la definición de la energía libre de Gibbs es:

$$d\hat{G} = \hat{V} dp - \hat{S} dT$$

pero como el tipo de sistemas que se manejan en la mecánica de fluidos son isotérmicos, el término que corresponde a la variación de la energía libre de Gibbs con respecto a la temperatura se anula, quedando $d\hat{G} = dp/\rho$, por tanto:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{G} = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} - \hat{G} (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} + \hat{G} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Por otro lado, la energía libre de Gibbs se define en función de la energía interna:

$$\hat{G} = \hat{U} + p\hat{V} - \hat{S}T$$

pero como el sistema es isotérmico, los cambios de energía interna que se generan son despreciables y la energía libre de Gibbs es nuevamente sólo función de la presión y el volumen específico, es decir $\hat{G} = p\hat{V} = p/\rho$, entonces:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{G} = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} - \rho p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} + \rho \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

El último término corresponde a la energía potencial ganada o cedida por el sistema por lo que, para generalizarla, se considera a la aceleración gravitacional $\mathbf{g}$ como un potencial de energía, definiéndose en forma general $\vec{g} = -\vec{\nabla} \hat{\phi}$ (el gradiente de una función escalar). Por tanto, dicho término se expresa:

$$\rho (\vec{g} \cdot \vec{v}) = \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{\phi} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{\phi} + \hat{\phi} (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{\phi} - \hat{\phi} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{\phi} - \frac{\partial (\rho \hat{\phi})}{\partial t}$$

en el último término, el potencial $\hat{\phi}$ se puede integrar a la derivada ya es solamente función de la posición.

Así, la ecuación (4.6) queda expresada de la manera siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \hat{A} + \hat{\phi} \right) \right] = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) - \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{G} - \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \hat{\phi} - \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] - (-\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) \quad (4.19)$$

y una vez reagrupados los términos de la ecuación, esta queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{A} + \hat{\phi})] = -\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + \hat{G} + \hat{\phi}) - \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] - (-\tau: \vec{\nabla} \vec{v}) \quad (4.20)$$

Una vez expresada la ecuación puntual de energía mecánica en función de términos termodinámicos, se procede a integrarla en todo el volumen del sistema definido en la figura 4.1. Haciéndolo así, la integral de la ecuación (4.20) se expresa:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{A} + \hat{\phi})] dV = - \iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + \hat{G} + \hat{\phi}) dV - \iiint \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] dV - \iiint (-\tau: \vec{\nabla} \vec{v}) dV \quad (4.21)$$

Si siguiendo la misma secuencia que en las dos secciones anteriores, se procede a definir cada una de las variables macroscópicas involucradas. Iniciando entonces con el término correspondiente a la acumulación, se tiene:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{A} + \hat{\phi})] dV = \frac{d}{dt} \iiint [\rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{A} + \hat{\phi})] dV = \frac{d}{dt} (K_T + A_T + \Phi_T)$$

Para el primer término de la derecha, que corresponde al flujo de energía por efectos de convección, se tiene como resultado:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + \hat{G} + \hat{\phi}) dV = \iint \rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{G} + \hat{\phi})(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

que una vez integrada se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint \rho(\frac{1}{2}v^2 + \hat{G} + \hat{\phi})(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \\ = -\rho_1 \left(\frac{1}{2} \langle v_1^3 \rangle + \hat{G}_1 \langle v_1 \rangle + \hat{\phi}_1 \langle v_1 \rangle \right) A_1 + \rho_2 \left(\frac{1}{2} \langle v_2^3 \rangle + \hat{G}_2 \langle v_2 \rangle + \hat{\phi}_2 \langle v_2 \rangle \right) A_2 \end{aligned}$$

El segundo término de la derecha corresponde al trabajo desarrollado por el sistema sobre los alrededores, quedando definido:

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] dV = W$$

Y el último se define como las **pérdidas por fricción**, o bien, la **conversión irreversible de energía mecánica a energía interna**, por efectos de la fricción viscosa del fluido sobre las paredes del sistema y se define:

$$\iiint (-\tau: \vec{\nabla} \vec{v}) dV = E_v$$

Este término provoca cambios apreciables de temperatura cuando en el sistema ocurren velocidades superiores a la velocidad del sonido, como ejemplo se puede citar al reingreso del transbordador espacial a la atmósfera terrestre, cuya velocidad es tan alta que se incendia la parte inferior de su fuselaje por efectos de la fricción con el aire. Salvo el caso anterior y algunos otros similarmente especiales, generalmente la velocidad del fluido es muy inferior a la del sonido, por lo que la fricción viscosa no es lo suficiente grande como para provocar un cambio en la temperatura superior a 1°C y, por tanto, se puede considerar isotérmico.

Finalmente, agrupando los términos macroscópicos obtenidos, se logra la ecuación:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(K_T + A_T + \Phi_T) = \rho_1 \left(\frac{1}{2} \langle v_1^3 \rangle + \hat{G}_1 \langle v_1 \rangle + \hat{\phi}_1 \langle v_1 \rangle \right) A_1 - \rho_2 \left(\frac{1}{2} \langle v_2^3 \rangle + \hat{G}_2 \langle v_2 \rangle + \hat{\phi}_2 \langle v_2 \rangle \right) A_2 - W - E_v} \quad (4.22)$$

Si el sistema se encuentra en estado estable, entonces:

$$\frac{d}{dt}(K_T + A_T + \Phi_T) = 0$$

Y

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

por lo que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho \langle v \rangle A$, transformando la ecuación (4.22) en:

$$0 = \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\langle v_1^3 \rangle}{\langle v_1 \rangle} + \hat{G}_1 + \hat{\phi}_1 \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\langle v_2^3 \rangle}{\langle v_2 \rangle} + \hat{G}_2 + \hat{\phi}_2 \right) \right] - W - E_v \quad (4.23)$$

o bien, dividiendo entre el flujo másico, se obtiene la ecuación en términos de cantidades por unidad de masa, dando como resultado la expresión:

$$\boxed{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\langle v_2^3 \rangle}{\langle v_2 \rangle} - \frac{\langle v_1^3 \rangle}{\langle v_1 \rangle} \right) + (\hat{G}_2 - \hat{G}_1) + (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1) \right] + \hat{W} + \hat{E}_v = 0} \quad (4.24)$$

Analizando la ecuación (4.24), se puede observar que los términos dentro de los corchetes se refieren a propiedades que no se pueden medir directamente, por lo que se hace necesaria una redefinición de ellos en función de cantidades que se puedan determinar por medio de aparatos de medición. El primer término dentro de los corchetes se refiere a la media de los cubos de la velocidad dividido entre la media de esta, lo cual de acuerdo con las definiciones de probabilidad se tiene que:

$$\langle v^3 \rangle \neq \langle v \rangle^3$$

para la que se define una constante de proporcionalidad, transformándose en la igualdad:

$$\langle v^3 \rangle = \alpha \langle v \rangle^3$$

y dentro de la ecuación el término correspondiente a la velocidad se substituye por:

$$\frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{\langle v \rangle^2}{\alpha}$$

en donde la constante toma los valores siguientes en función del régimen de flujo:

$\alpha = 0.5$	para	$Re < 2,100$
$\alpha = 1.0$	para	$Re > 2,100$

Para la energía libre de Gibbs, se vuelve a la definición dada en la termodinámica, quedando en función de la presión y de la densidad, transformándose así dicho término en:

$$\hat{G}_2 - \hat{G}_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Y en cuanto a la energía potencial, aunque existen muchos tipos de potencial como lo es el potencial eléctrico entre otros, en este caso se considera el potencial con respecto al cambio de posición, por lo que la función potencial se define $\hat{\phi} = gz$, por lo que el tercer término se expresa:

$$\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 = g(z_2 - z_1)$$

en donde $(z_2 - z_1)$ es la diferencia de altura entre la salida y la entrada del sistema.

Por lo tanto, una vez sustituidos los términos por sus nuevas definiciones, la ecuación (4.24) se transforma en:

$$\boxed{\frac{\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2}{2\alpha} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \hat{W} + \hat{E}_v = 0} \quad (4.25)$$

la ecuación así expresada es el **Balance Macroscópico de Energía Mecánica en estado estable**, aunque es mayormente conocida como la **Ecuación de Bernoulli**.

4.2.4 Metodo alternativo para la deducción del Balance de Energía Mecánica.

La deducción de la ecuación para el Balance de Energía Mecánica (Ecuación de Bernoulli), tal y como se desarrolló en la sección anterior, es la mas correcta ya que se aplican los conceptos y leyes de la Termodinámica en forma muy estricta. Sin embargo, es posible desarrollarla de una forma mas simple, sin apartarse de las leyes y principios establecidos por la Termodinámica. Para ello, iniciamos con la definición de la Primera Ley de la Termodinámica para un sistema cerrado. En un sistema cerrado, por definición, no hay intercambio de energía con los alrededores y pero si puede haber inyección de energía a través de las paredes, por lo que si se le adiciona calor al sistema, este puede convertirlo en trabajo, aunque no todo, y el calor no convertido se integra a la energía interna del sistema, con su consecuente elevación de temperatura, lo cual, en forma de ecuación se expresa:

$$Q - W = \Delta U$$

En un sistema abierto, como el mostrado en la figura 4.1 además de los elementos que componen la ecuación (4.26), se debe integrar la energía cinética, la energía potencial y el trabajo generado por los cambios de volumen debido a los cambios de presión por lo que, de acuerdo a sus definiciones, se tiene que:

Energía cinética:

En cuanto a la definición de energía, esta se expresa:

$$E_c = \int_1^2 m a \, dl = \int_1^2 m \frac{dv}{dt} \, dl = \int_1^2 m \frac{dl}{dt} \, dv = m \int_1^2 v \, dv = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

Energía potencial:

En este caso, la energía potencial se expresa:

$$E_p = \int_1^2 m g \, dz = m g (z_2 - z_1)$$

Trabajo total:

En cuanto a este concepto, es necesario considerar al trabajo obtenido por el elemento móvil y el efecto producido por los cambios de volumen debido a los cambios de presión, lo cual se puede expresar de la manera siguiente:

$$W = W_s + \int_1^2 V \, dp$$

Al integrar estos tres elementos a la Primera Ley de la Termodinámica, para sistemas abiertos, queda:

$$Q - \left(W_s + \int_1^2 V \, dp \right) = \Delta U + \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + m g (z_2 - z_1)$$

O bien:

$$Q - W_s = \Delta U + \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + m g (z_2 - z_1) + \int_1^2 V \, dp$$

Ahora bien, en un sistema isotérmico no hay adición de calor y, por lo mismo, no hay incremento de energía interna ya que no hay elevación de temperatura, por lo que esta última se elimina de la ecuación. Sin embargo, en cuanto al calor, se genera una pequeña cantidad de energía debido a la fricción viscosa, por lo que la ecuación se expresa:

$$-E_v - W_s = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + m g (z_2 - z_1) + \int_1^2 V \, dp$$

Al dividirla entre la masa total del sistema, esta última queda expresada de la manera siguiente:

$$\frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \hat{V} dp + \hat{W}_s + \hat{E}_v = 0$$

Considerando la corrección para la velocidad y que el volumen específico es el inverso de la densidad, esta última ecuación, queda idéntica a la ecuación (4.25)

$$\boxed{\frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2\alpha} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \hat{W}_s + \hat{E}_v = 0}$$

4.3 BALANCE DE ENERGIA MECANICA PARA FLUJO INCOMPRESIBLE ISOTERMICO.

Cuando dentro del sistema el tipo de fluido que se está manejando es incompresible ($\rho = \text{Cte.}$), al integrar el término correspondiente a la presión, en el balance de energía mecánica, se obtiene:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int_1^2 dp = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

lo cual modifica la ecuación de Bernoulli, que para flujo incompresible finalmente se tiene:

$$\boxed{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\alpha} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \widehat{W} + \widehat{E}_v = 0} \quad (4.26)$$

Dentro de la ecuación de Bernoulli se ha definido a las pérdidas por fricción:

$$\widehat{E}_v = - \iiint (\tau : \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV \quad (4.27)$$

como se mencionó anteriormente, esta variable mide la cantidad de energía mecánica perdida por efectos de la fricción viscosa, particularmente debida a la fricción de las moléculas del fluido sobre las paredes rígidas del sistema, pero también por efectos de los cambios bruscos de dirección, reducciones y expansiones súbitas y por el paso del fluido a través de válvulas u otros accesorios. Además, $\widehat{E}_v$ en su definición, es proporcional a la velocidad, al tamaño del sistema y, en consecuencia, al factor de fricción, por todo ello matemáticamente se expresa:

$$\boxed{\widehat{E}_v = \frac{v^2}{2\alpha} \left(\frac{L}{R_h} \right) f} \quad (4.28)$$

Dentro de la ecuación (4.28) se tiene la variable R_h , relacionada con el tamaño del sistema, que se define como el **Radio Hidráulico** y que viene siendo una longitud característica del sistema. Considerando que el ducto no necesariamente tiene que ser circular, ya que existen ductos de sección transversal rectangular, triangular, etc. para los cuales el radio hidráulico se define, según se presentó en la unidad 1:

$$R_h = \frac{\text{Area transversal al flujo}}{\text{Perímetro mojado del ducto}} \quad (1.24)$$

en la cual se desarrolló la relación existente entre el diámetro de un tubo circular y el mencionado radio hidráulico, con lo que se obtuvo lo siguiente:

$$R_h = \frac{D}{4}$$

Así, para un ducto circular, las pérdidas por fricción se obtienen mediante la ecuación:

$$\hat{E}_v = \frac{v^2}{2\alpha} \left(\frac{L}{D/4} \right) f \quad (4.29)$$

Siguiendo adelante con el análisis de la definición matemática de $\hat{E}_v$, la variable L se puede utilizar para definir los efectos no sólo de la longitud de una tubería en las pérdidas por fricción, sino también los efectos de los accesorios que generalmente contiene un sistema de tuberías para la transportación de un fluido. Así, las pérdidas totales por fricción se pueden definir:

$$\hat{E}_v = \hat{E}_{vL} + \hat{E}_{vA} + \hat{E}_{vR} + \hat{E}_{vE} \quad (4.30)$$

siendo:

$\hat{E}_v$ = Pérdidas totales.

$\hat{E}_{vL}$ = Pérdidas en los tramos rectos de tubería.

$\hat{E}_{vA}$ = Pérdidas en accesorios como codos, válvulas, etc.

$\hat{E}_{vR}$ = Pérdidas en reducciones súbitas.

$\hat{E}_{vE}$ = Pérdidas en expansiones súbitas.

Utilizando una definición similar a la expresada por la ecuación (4.29) se utiliza una nueva variable, denominada **Longitud equivalente**, para la evaluación de las pérdidas en accesorios. La longitud equivalente es una variable que depende del diámetro del ducto y que no es más que las pérdidas causadas por un accesorio equivalente a las causadas por un tramo recto de x veces el diámetro. Por ejemplo, la relación de la longitud equivalente al diámetro para un codo de 90° es 35, o bien:

$$L_{eq} = 35D$$

Así, cada uno de los accesorios tiene una constante diferente, la relación de constantes aparece en la tabla 4.1.

El caso es un tanto diferente para las reducciones y expansiones súbitas, cuya definición se expresa:

$$\hat{E}_{vRE} = \frac{v^2}{2\alpha} K_f \quad (4.31)$$

En donde, tomando en cuenta la figura 4.3, la velocidad que se considera, tanto para la reducción como para la expansión, es en la parte del ducto que tiene la menor sección transversal. Y la constante para la reducción súbita se calcula mediante la ecuación:

$$K_f = 0.55 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \quad (4.32)$$

Y para la expansión súbita:

$$K_f = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (4.33)$$

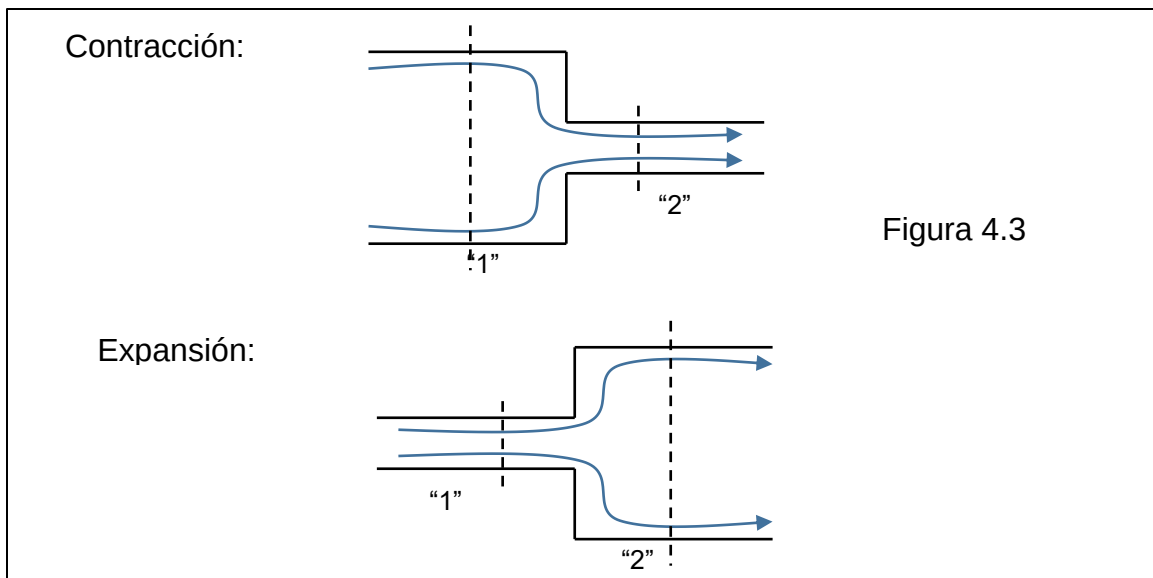


Tabla 4.1 Pérdidas en accesorios

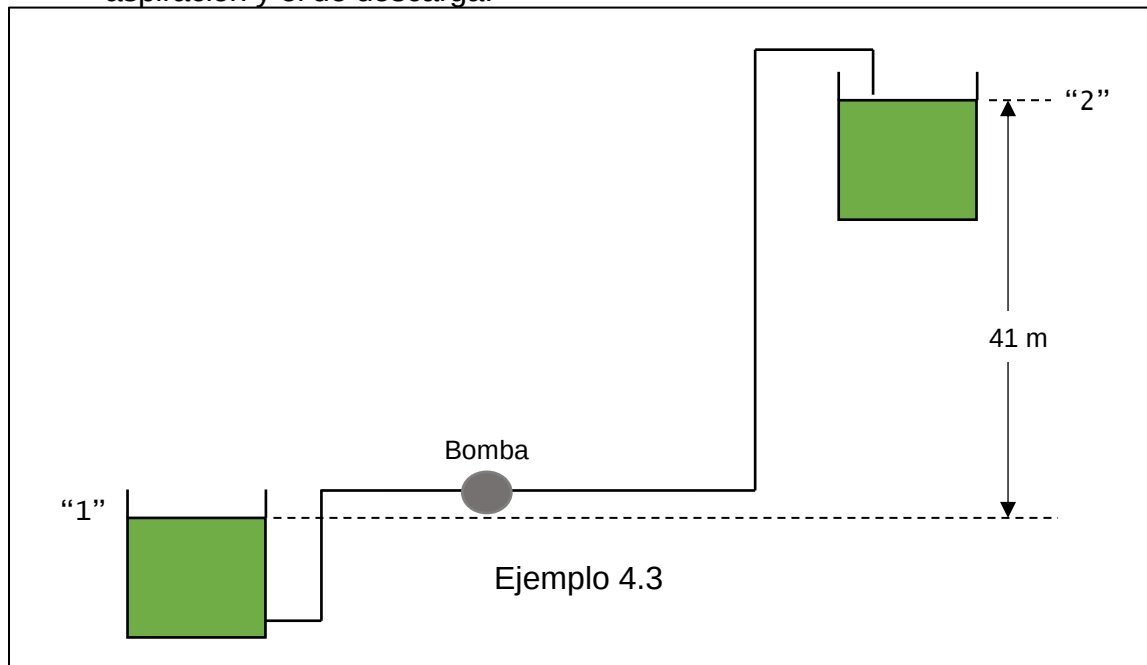
Accesorio	L_{eq}/D
Codo de 45°	17
Codo de 90°	35
Te	50
Retorno de 180°	75
Cople	2
Unión	2
Válvula de compuerta:	
Totalmente abierta	9
Abierta $\frac{3}{4}$	40
Abierta $\frac{1}{2}$	225
Abierta $\frac{1}{4}$	900
Válvula de globo:	
Abierta	300
Medio abierta	475
Válvula de ángulo: Abierta	100
Válvula check:	
De bola	3500
De bisagra	100
Medidor de agua de disco	350

(Geankoplis, 2018)

Ejemplo 4.3 Potencia y presión generada por una bomba.

Agua caliente a 80°C se bombea, desde un tanque de almacenamiento, a razón de 380 l/min. La tubería que va desde el tanque de almacenamiento a la bomba es de acero, de 6 m de longitud y 2 pulg de diámetro nominal cédula 40, conteniendo 2 codos. La tubería que va desde la bomba al tanque de descarga tiene una longitud de 60 m, 3 codos y las mismas especificaciones. La diferencia de altura entre la toma y la descarga es de 41 m.

- Calcular las pérdidas por fricción.
- Calcular la potencia teórica y la real de la bomba, considerando una eficiencia del 75%.
- Calcular el incremento de presión que da la bomba al fluido entre el punto de aspiración y el de descarga.



Solución. Los datos y propiedades para resolver el problema son:

$$G = 380 \text{ lts/min} = 6.33 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D = 2.067 \text{ pulgs} = 5.25 \text{ cm} = 0.0525 \text{ m}$$

$$L \text{ (aspiración bomba)} = 6 \text{ m}$$

$$L \text{ (descarga)} = 60 \text{ m}$$

$$(z_2 - z_1) = 41 \text{ m}$$

$$T = 80^\circ\text{C}$$

$$\rho = 971.83 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 3.565 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\epsilon = 4.6 \times 10^{-5} \text{ m}$$

a) **Cálculo de las pérdidas por fricción.** Siendo el ducto de un sólo diámetro, se considera la velocidad para el cálculo de pérdidas en el punto de salida del agua, que es la misma que en los puntos de aspiración y de expulsión de la bomba. En el punto "1" de la figura para el ejemplo 4.3, siendo el diámetro del tanque muy grande en comparación del diámetro del ducto, la velocidad es despreciable. Considerando lo anterior, los valores de velocidad para cada uno serán:

$$v_1 \approx 0$$

$$v_2 = \frac{G}{A} = \frac{4G}{\pi D^2} = \frac{4(6.33 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(0.0525\text{m})^2} = 2.924 \text{ m/s}$$

y el número de Reynolds:

$$Re_2 = \frac{Dv_2\rho}{\mu} = \frac{(0.0525)(2.924)(971.83)}{3.565 \times 10^{-4}} = 418,473$$

el factor de fricción se evalúa mediante la siguiente ecuación, dando como resultado:

$$f = 0.0275 \left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} = 0.0275 \left(\frac{4.6 \times 10^{-5}}{0.0525} + \frac{68}{418,473} \right)^{0.25} = 0.00493$$

Las pérdidas totales se tienen para un total de 66 m de tubería recta, 5 codos, una reducción y una expansión, por lo que para cada una de ellas su valor es:

$$\hat{E}_{v_A} = \frac{v_2^2}{2\alpha} \left[\frac{5(35D)}{D/4} \right] f = 2(2.924)^2(5)(35)(0.00493) = 14.75 \frac{J}{kg}$$

$$\hat{E}_{v_T} = \frac{v_2^2}{2\alpha} \left(\frac{L_T}{D/4} \right) f = \frac{2(2.924)^2(66)(0.00493)}{0.0525} = 106 \frac{J}{kg}$$

ya que el área del tanque de alimentación es muy grande con respecto al del ducto con el que se conecta, las pérdidas serán:

$$\hat{E}_{v_R} = \frac{v_2^2}{2\alpha} \left[0.55 \left(1 - \frac{A_2}{A_T} \right) \right] = \frac{2(2.924)^2(0.55)(1 - 0)}{2} = 2.35 \frac{J}{kg}$$

a la salida el ducto descarga a la atmósfera, por lo que la relación del área de descarga con respecto a la del ducto es prácticamente despreciable, por lo que las pérdidas son:

$$\hat{E}_{v_E} = \frac{v_2^2}{2\alpha} \left(1 - \frac{A_2}{A_T} \right)^2 = \frac{(2.924)^2(1 - 0)^2}{2} = 4.27 \frac{J}{kg}$$

Siendo el valor total de las pérdidas por fricción:

$$\hat{E}_v = \hat{E}_{v_L} + \hat{E}_A + \hat{E}_{v_R} + \hat{E}_{v_E} = 106 + 14.75 + 2.35 + 4.27 = 127.37 \frac{J}{kg}$$

b) Potencia teórica y real para una eficiencia del 75%

La evaluación del trabajo necesario para transportar el agua desde el tanque de abastecimiento al de descarga se determina por medio de la aplicación de la ecuación de Bernoulli. Por lo que, analizándola término a término, se obtiene:

Para el término de la energía cinética:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\alpha} = \frac{(2.924)^2 - (0)^2}{2} = 4.27 \frac{J}{kg}$$

Para la caída de presión. Al analizar la figura para el ejemplo 4.3 se observa que los puntos "1" y "2" están abiertos a la atmósfera, por lo que el valor del término correspondiente es:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{101,325 - 101,325}{971.83} = 0 \frac{J}{kg}$$

Para el término de la energía potencial. La cual queda representada con el cambio de elevación, dando como resultado:

$$g(z_2 - z_1)9.81(41) = 402.21 \frac{J}{kg}$$

Análisis de la Ecuación de Bernoulli. Substituyendo cada uno de los términos obtenidos anteriormente en la ecuación de Bernoulli, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\alpha} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \hat{W} + \hat{E}_V &= 0 \\ 4.27 + 0 + 402.21 + \hat{W} + 127.37 &= 0 \\ \hat{W} &= -533.85 \frac{J}{kg} \end{aligned}$$

en donde el trabajo es negativo ya que se adiciona al sistema y representa la energía necesaria para elevar el agua hasta el tanque elevado.

y para el trabajo teórico total:

$$W_T = \rho G \hat{W} = (971.83)(6.33 \times 10^{-3})(533.85) = 3,284.07 \frac{J}{s} (Watts)$$

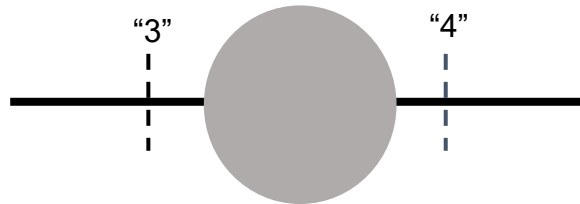
y para el trabajo real:

$$\begin{aligned} W_{real} &= \frac{W_{teo}}{\eta} = \frac{3284.07}{0.75} = 4,378.77 W \\ W_{real} &= \frac{4,378.77 W}{745.7 W/HP} = 5.87 HP \approx 6 hp \end{aligned}$$

Que representa la capacidad de la bomba necesaria para hacer fluir el agua hasta el tanque elevado en la cantidad deseada.

c) Incremento de presión provocado por la bomba.

Para calcular el incremento de presión en la línea entre el punto de aspiración y el de descarga de la bomba, se analiza nuevamente la ecuación de Bernoulli entre los puntos "3" y "4", considerando que la pérdida debida a la fricción dentro de la bomba es del 25%, o sea, se toma sólo el trabajo neto inyectado por la bomba hacia el sistema. Por lo que el análisis da como resultado:



$$\frac{v_4^2 - v_3^2}{2\alpha} + \frac{p_4 - p_3}{\rho} + g(z_4 - z_3) + \widehat{W} + \widehat{E}_v = 0$$

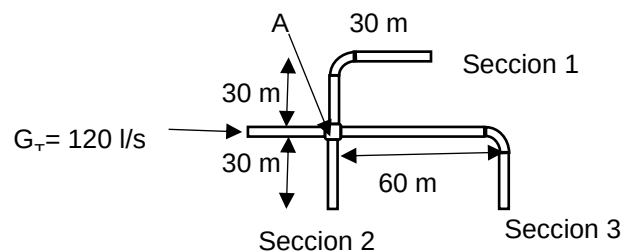
$$\frac{(2.924)^2 - (2.924)^2}{2} + \frac{p_4 - p_3}{\rho} + g(0) - 533.85 + 0 = 0$$

$$\frac{p_4 - p_3}{\rho} = 533.85 \frac{J}{kg}$$

$$p_4 - p_3 = (971.83)(533.85) = 518,811 \text{ Pa} = 5.12 \text{ atm}$$

Ejemplo 4.4 Sistema de red de tuberías con trayectoria múltiple.

Considere el sistema mostrado en la figura, la cual es la parte final de un sistema de irrigación con tres salidas. En ella los ductos lisos tienen 3 pulg de diámetro y, al final de cada salida se tiene una tobera de 1.5 pulg de diámetro. El flujo volumétrico de entrada



Ejemplo 4.4

al sistema es de 30 l/s. Calcular el flujo en cada rama y la presión a la entrada del mismo.
Solución.

Se desconocen los flujos de cada ducto, pero se conoce el flujo total a la entrada del sistema. La solución se busca mediante una metodología de prueba y error, por lo que se inicia suponiendo que los flujos en cada rama son iguales a 1/3 del total, es decir, 10 l/s. Para las diferentes variables que se van a utilizar se establece el subíndice s para la salida y el subíndice t para los ductos. Se supone también que la velocidad de entrada es muy inferior a la velocidad en cada rama y a la velocidad de salida. Por lo anterior, al aplicar la Ecuación de Energía Mecánica, se deduce que:

$$\frac{v_s^2 - v_A^2}{2\alpha} + \frac{p_s - p_A}{\rho} + g(z_s - z_A) + \widehat{W}_s + \widehat{E}_v = 0$$

En esta ecuación, se establece que:

$$v_A \approx 0$$

$$g(z_s - z_A) = 0$$

$$\widehat{W}_s = 0$$

$$\widehat{E}_v = \frac{v_t^2}{2\alpha} \left(\frac{4L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) f = \text{pérdidas en tramos rectos y codo por sección}$$

$$\alpha = 1$$

$$\frac{p_A - p_s}{\rho} = \frac{v_s^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} \left(\frac{L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) 4f$$

Aplicando el balance de materia:

$$v_s A_s = v_t A_t \quad \text{por lo que } v_s = v_t \frac{A_t}{A_s}$$

O bien:

$$v_s = v_t \left(\frac{D_t}{D_s} \right)^2$$

Por lo que la ecuación de energía se expresa:

$$\frac{p_A - p_s}{\rho} = \frac{v_t^2}{2} \left[\left(\frac{D_t}{D_s} \right)^4 + \left(\frac{L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) 4f \right] \quad (A)$$

$$v_t^2 = \frac{2(p_A - p_s)/\rho}{\left[\left(\frac{D_t}{D_s} \right)^4 + \left(\frac{4L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) f \right]}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D_t}{D_s} \right)^4 + \left(\frac{4L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) f}} \right\}$$

$$G_t = A_t v_t = \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} \left\{ \frac{A_t}{\sqrt{\left(\frac{D_t}{D_s}\right)^4 + \left(\frac{4L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t}\right)f}} \right\} \quad (B)$$

Siendo v_t la velocidad del agua dentro de los tubos de 3 pulg por lo que f se evaluara con ese diámetro. Pero como son tres secciones entre los que se divide el flujo, para iniciar el proceso de cálculo, se va a suponer que el flujo se divide en tres partes iguales, es decir, se supone que en cada sección fluyen 40 l/s (0.04 m³/s) como ya se mencionó anteriormente. Por tanto, considerando las propiedades del agua a 20°C ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa-s}$):

$$Re = \frac{4\rho G_t}{\pi\mu D_t} = \frac{4(998)(0.01)}{\pi(1.002 \times 10^{-3})(0.0762)} = 166,424$$

Utilizando la ecuación de Petukhov:

$$f = \frac{1}{4} (0.79 \ln Re - 1.64)^{-2} = \frac{1}{4} (0.79 \ln(166,424) - 1.64)^{-2} = 0.004$$

A continuación, se calcula la fracción del flujo correspondiente a la sección 1, considerando la $L_e/D_t = 37$ para un codo de 90°:

$$G_{t1} = \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} \left\{ \frac{A_t}{\sqrt{\left(\frac{0.0762}{0.0381}\right)^4 + \left(\frac{60}{0.0762} + 37\right)(4 \times 0.00312)}} \right\} = 0.185 A_t \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}}$$

$$G_{t2} = \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} \left\{ \frac{A_t}{\sqrt{\left(\frac{0.0762}{0.0381}\right)^4 + \left(\frac{30}{0.0762}\right)(4 \times 0.004)}} \right\} = 0.212 A_t \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}}$$

$$G_{t3} = \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} \left\{ \frac{A_t}{\sqrt{\left(\frac{0.0762}{0.0381}\right)^4 + \left(\frac{90}{0.0762} + 37\right)(4 \times 0.004)}} \right\} = 0.168 A_t \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}}$$

$$G_{tT} = (0.185 + 0.212 + 0.168) A_t \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}} = 0.565 A_t \sqrt{\frac{2(p_A - p_s)}{\rho}}$$

$$G_{t1} = \frac{0.185}{0.565} \times 30 = 9.82 \text{ l/s}$$

$$G_{t2} = \frac{0.212}{0.565} \times 30 = 11.25 \text{ l/s}$$

$$G_{t3} = \frac{0.168}{0.565} \times 30 = 8.92 \text{ l/s}$$

Como estos cálculos están basados en una suposición, se puede realizar un recalcu

para verificar estos resultados, por lo que se parte del cálculo de los números de Reynolds para cada sección basados en estos últimos:

$$Re_1 = \frac{9.82}{10} (166,424) = 163,428$$

$$f_1 = 0.00406$$

$$Re_2 = \frac{11.25}{10} (166,424) = 187,227$$

$$f_2 = 0.00395$$

$$Re_3 = \frac{8.92}{10} (166,424) = 148,450$$

$$f_3 = 0.00414$$

Los cuales no son muy diferentes a los calculados inicialmente, por lo que se pueden utilizar, de manera definitiva, los valores calculados con la suposición.

Para el cálculo de la caída de presión, tomamos nuevamente la ecuación (A) y se procede de la manera siguiente:

Sección 1:

$$v_{t1} = \frac{4G_{t1}}{\pi D_{t1}^2} = \frac{4(0.00982)}{\pi(0.0762)^2} = 2.15 \text{ m/s}$$

$$p_A - p_s = \frac{\rho v_t^2}{2} \left[\left(\frac{D_t}{D_s} \right)^4 + \left(\frac{L}{D_t} + \frac{L_e}{D_t} \right) 4f \right]$$

$$p_A - p_s = \frac{(998)(2.15)^2}{2} \left[\left(\frac{0.0762}{0.0381} \right)^4 + \left(\frac{60}{0.0762} + 37 \right) (4)(0.00406) \right]$$

$$p_A - p_s = 67,7787 \text{ Pa} = 0.67 \text{ atm}$$

Sección 2:

$$v_{t2} = 2.46 \text{ m/s}$$

$$p_A - p_s = 67,100 \text{ Pa} = 0.662 \text{ atm}$$

Sección 3:

$$v_{t3} = 1.95 \text{ m/s}$$

$$p_A - p_s = 68,634 \text{ Pa} = 0.677 \text{ atm}$$

En promedio se tiene una caída de presión de 0.67 atm, que se puede tomar como resultado final.

4.4 BALANCE DE ENERGIA PARA FLUJO COMPRESIBLE ISOTERMICO

Sea el caso de un sistema isotérmico en estado estable y que transporta un fluido compresible. En él la ecuación de Bernoulli es también aplicable, pero con algunas modificaciones, ya que a medida que el fluido va avanzando a lo largo de la tubería, la presión va disminuyendo y con ella la densidad, que a su vez produce variaciones en la velocidad. Entonces, iniciando con la ecuación de Bernoulli original:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\alpha} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \hat{W} + \hat{E}_v = 0 \quad (4.25)$$

En ella se debe tomar en cuenta primeramente que, para un sistema gaseoso, la energía potencial ganada por efectos del cambio de posición es despreciable; en segundo lugar, no es estrictamente indispensable la presencia de una bomba para provocar el movimiento del gas, por ejemplo, en el caso del sistema casero de gas comprimido, es suficiente la presión dentro del tanque para hacer fluir el gas hacia la hornilla de la estufa ya que se tiene un diferencial de presión entre el interior del tanque y la atmosfera; por último, generalmente el régimen de flujo de un sistema gaseoso es turbulento, por lo que en el término correspondiente a la energía cinética se puede tomar la constante $\alpha = 1$, salvo para situaciones muy especiales. Por todo lo anterior, la ecuación de Bernoulli se reduce a:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \hat{E}_v = 0 \quad (4.34)$$

Ahora bien, dado que tanto la velocidad como la densidad, la presión y las pérdidas por fricción dependen de la posición axial, la ecuación (4.34) se puede expresar en forma diferencial transformándose en:

$$v dv + \frac{dp}{\rho} + 2 \frac{v^2}{D} f dL = 0 \quad (4.35)$$

Al analizar la ecuación (4.35) se puede observar que se tienen cuatro variables, de acuerdo también a lo mencionado en el párrafo anterior, por lo que así como se presenta no es posible resolverla y, para poder hacerlo, es necesario reducirlas a sólo dos variables. La relación se puede lograr primeramente por medio de la ley de los gases ideales para obtener la relación entre la densidad y la presión, de la manera siguiente:

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{pM}{RT}$$

También, de acuerdo con el balance de materia el flujo másico es constante, por lo que la relación entre la velocidad y la densidad se expresa:

$$\dot{m} = \rho v A \quad \Rightarrow \quad \rho v = \frac{\dot{m}}{A} = G_0$$

Ahora, por la definición de la densidad, la relación entre la velocidad y la presión estará dada por:

$$v = \frac{G_0}{\rho} = \frac{RTG_0}{pM} \Rightarrow dv = -\frac{RT}{M} \frac{dp}{p^2}$$

Finalmente, se substituyen las definiciones de densidad y velocidad, con respecto a la presión, en la ecuación (4.35) para obtener:

$$v dv = \frac{RT}{pM} \left(-\frac{RT}{M} \frac{dp}{p^2} \right) \\ \frac{RTG_0}{pM} \left(-\frac{RT}{M} \frac{dp}{p^2} \right) + \frac{RT}{M} \frac{dp}{p} + 2 \left(\frac{RTG_0}{pM} \right)^2 \frac{f}{D} dL = 0 \quad (4.36)$$

La cual, al ser desarrollada, se obtiene:

$$-\frac{R^2 T^2 G_0^2}{M^2} \frac{dp}{p^3} + \frac{RT}{M} \frac{dp}{p} = -\frac{2f G_0^2 R^2 T^2}{M^2} \frac{dL}{p^2} \quad (4.37)$$

la cual, para poder ser integrada, se multiplica por Mp^2/RT :

$$-\frac{RTG_0^2}{M} \int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{2fG_0^2RT}{DM} \int_1^2 dL \quad (4.38)$$

que al ser integrada se obtiene:

$$-\frac{RTG_0^2}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} = -\frac{2fG_0^2RT}{DM} (L_2 - L_1) \quad (4.39)$$

Por último, se reacomodan los términos de la ecuación así obtenida para lograr la expresión final:

$$\boxed{p_1^2 - p_2^2 = \frac{2RTG_0^2}{M} \left[\frac{2f\Delta L}{D} + \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right]} \quad (4.40)$$

Ejemplo 4.5 Flujo compresible de un gas en una tubería.

Por una tubería de 40 pulg de diámetro interno se transporta gas natural (metano), a una distancia de 100 millas, a razón de 4.58 Lb mol/s. El sistema se supone isotérmico a 60°F. El sistema a la salida se encuentra a la presión atmosférica y se desea determinar la presión a la entrada de éste. Considerar la viscosidad del metano a 60°F en 6.99×10^{-6} Lbm/pie-s.

Solución.

D = 40 pulg = 3.33 pies

ΔL = 100 millas = 528,000 pies

p₂ = 14.7 Lb_f/pulg²

μ = 6.99×10^{-6} Lbm/pie-s

n = 4.58 Lb mol/s

$$M = 16 \text{ Lb}_m/\text{Lb mol}$$

$$T = 60^\circ\text{F} = 520^\circ\text{R}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(3.33)^2}{4} = 8.73 \text{ pies}^2$$

$$G_0 = \left(4.58 \frac{\text{lb mol}}{\text{s}}\right) \left(16 \frac{\text{lb}_m}{\text{lb mol}}\right) \left(\frac{1}{8.73 \text{ pies}^2}\right) = 8.4 \frac{\text{lb}_m}{\text{pie}^2 \cdot \text{s}}$$

$$Re = \frac{DG_0}{\mu} = \frac{(3.33)(8.4)}{6.99 \times 10^{-6}} = 4,001,717$$

considerando al tubo hidrodinamicamente liso, el valor del factor de fricción es **$f = 0.0023$**

$$R = 1545.3 \text{ pies-Lb}_f/\text{Lb mol} \cdot ^\circ\text{R}$$

Al substituir toda la información anterior en la ecuación (4.40), se obtiene:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{2(8.4)^2(1545.3)(520)}{(32.2)(16)} \left[\frac{2(0.0023)(528,000)}{3.33} + \ln\left(\frac{p_1}{14.7}\right) \right]$$

o bien:

$$p_1 = \sqrt{4.48 \times 10^6 + 2.2 \times 10^5 \left[729.37 + \ln\left(\frac{p_1}{14.7}\right) \right]}$$

la que se resuelve por el método de aproximaciones sucesivas, e iniciando con un valor para **$p_1 = 90 \text{ Lb}_f/\text{pulg}^2$** , se llega al resultado final de: **$p_1 = 89.3 \text{ Lb}_f/\text{pulg}^2$** .

4.5 MEDIDORES DE FLUJO.

Los procesos industriales y los equipos que los conforman, para su correcto funcionamiento, requieren ser controlados. Por ejemplo, en el llenado de un tanque de gas licuado, es necesario controlar la cantidad inyectada y la presión cuidando de no exceder las especificaciones del tanque. Así otros procesos requieren del control de la temperatura, el peso, la presión, el flujo de calor o de materia, etc. Algunos de ellos, como la temperatura, la presión, el volumen y el peso, es posible determinarlos directamente. Para otros, su determinación es indirecta, como es el caso del flujo de calor que se evalúa mediante la determinación de la diferencia de temperaturas entre la entrada y la salida. Igualmente sucede con el flujo másico en donde se aprovecha la disminución de la presión entre dos puntos del sistema para su evaluación. Entonces, siendo el flujo y la velocidad dos de las propiedades más importantes de un sistema, se analizarán los diferentes aparatos que se utilizan y las ecuaciones que los rigen para su evaluación. Pero, antes de analizarlos, se estudiarán los aparatos que permiten la determinación de diferencias de presión, a los cuales se les conoce como **manómetros**.

4.5.1 Aparatos de medición de caídas de presión.

Existen dos tipos básicos de manómetros para la determinación de caídas de presión. Uno de ellos es el **tubo de Bourdon**, que consiste en un tubo hueco en forma de gancho o de serpentín que al ejercer el gas presión dentro del tubo, éste tiende a estirarse; el movimiento así generado es detectado por medio de una aguja con una escala calibrada. El tubo de Bourdon es más útil en la determinación de la presión en un punto del sistema, aunque si se colocan dos medidores de este tipo en dos posiciones diferentes, es posible de esta manera conocer la caída de presión.

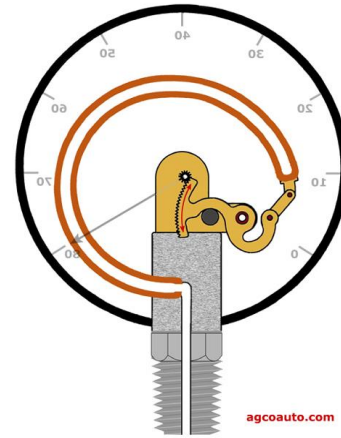
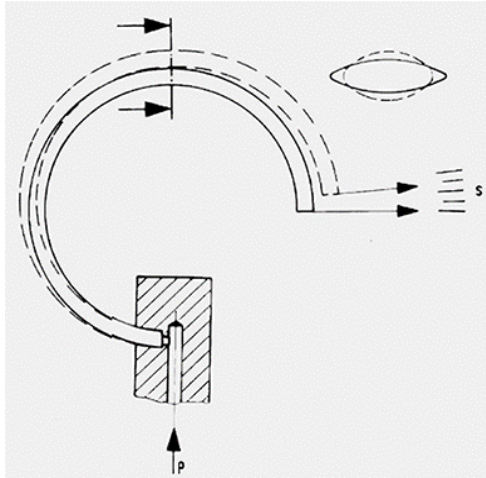


Figura 4.4 Tubo de Bourdon

Más común para el efecto es el uso de el **tubo en U**, que básicamente consiste en un tubo de vidrio doblado en forma de U. Un ejemplo del caso se muestra en la figura 4.5.

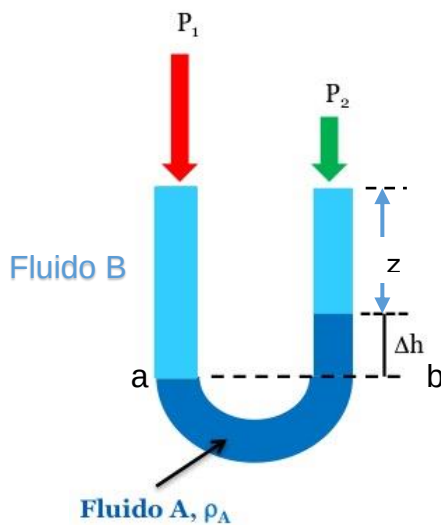


Figura 4.5 Tubo en U

Como se observa en la figura, el tubo en U está lleno de dos fluidos inmiscibles, el fluido A que se utiliza para realizar la medición y el fluido B el cual está siendo transportado por el ducto. El brazo izquierdo es el que recibe la mayor presión y el derecho la menor, lo cual provoca una diferencia de altura entre ambos brazos. Tomando como base lo anterior, se realiza el siguiente análisis matemático

La presión en el punto 1 es:

$$p_a = p_1 + (z + \Delta h)\rho_B g \quad (4.41)$$

La presión en el punto 2 es:

$$p_b = p_2 + z\rho_B g + \Delta h\rho_A g \quad (4.42)$$

en ambos puntos las presiones se igualan por lo que, igualando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$p_1 + (z + \Delta h)\rho_B g = p_2 + z\rho_B g + \Delta h\rho_A g \quad (4.43)$$

finalmente, al despejar la diferencia de presión se obtiene la ecuación que permite evaluarla:

$$\boxed{p_1 - p_2 = \Delta h(\rho_A - \rho_B)g} \quad (4.44)$$

El fluido utilizado para la medición de la diferencia de presión varía dependiendo del fluido que se está transportando. Por ejemplo, para la figura 4.5, si se transporta un gas, el fluido que se utiliza para la medición (fluido A) generalmente es agua coloreada. En cambio, si se trata de un líquido el fluido de medición más común es el mercurio.

Ejemplo 4.6 Medición de una caída de presión.

Para medir una caída de presión se utiliza un manómetro del tipo más sencillo, en un sistema que transporta agua. El fluido utilizado para la medición es mercurio. Y la diferencia de altura del mercurio entre ambos brazos es de 30 cm. Evaluar la diferencia de presión.

Solución.

$$\rho_A = 13,600 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_B = 1,000 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = \Delta h(\rho_A - \rho_B)g = (0.3)(13,600 - 1,000)(9.81) = 37,082 \text{ Pa}$$

4.5.2 Medidor de orificio.

Uno de los medidores de flujo más sencillos y fáciles de montar en un ducto, es el medidor de orificio. Este consta de una placa perforada y se encuentra montada en el ducto por medio de dos bridas construidas exprofeso. El esquema para este medidor puede ser observado en la figura 4.6, en donde se muestra que la perforación es concéntrica con respecto al ducto. El orificio causa un estrangulamiento y una expansión súbitas provocando una diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 del esquema. Como se puede observar en la misma figura, la expansión del fluido a la derecha de la placa genera una región de vacío alrededor de la región central por donde fluye el fluido y que se conoce

como **vena contracta**.

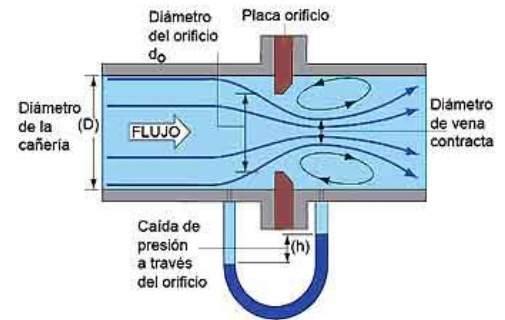
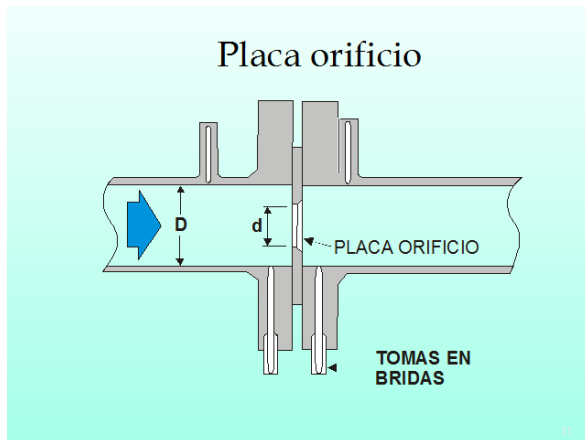


Figura 4.6 Medidor de orificio

Considérese el diámetro del ducto **D** y el del orificio **d**. Las perforaciones en los puntos 1 y 2 del ducto son terminales que van a dar a un manómetro para medir la diferencia de presión entre ambos puntos. Para ello, la localización del punto 1 por lo general es de un diámetro corriente arriba y la del punto 2 es de entre 0.3 y 0.8 diámetros después de la placa. Además, suponiendo que la velocidad en el punto 2 es la misma que la del orificio, el balance de materia en estado estable entre los puntos 1 y 2 dan como resultado:

$$m_1 = m_2 \quad ; \quad \rho_1 v_1 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$$

por lo que la velocidad promedio en el ducto con respecto a la velocidad en el orificio estará dada por la ecuación:

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \quad (4.45)$$

Para poder determinar la velocidad y el flujo es necesario hacer también un balance de energía, que da como resultado:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0$$

en donde se substituye la ecuación (4.45) para obtener:

$$v_2^2 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}$$

la cual al ser despejada se llega a la ecuación que permite la evaluación de la velocidad en el orificio y que se expresa:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(d/D)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}} \quad (4.46)$$

La ecuación así obtenida por medio de un análisis teórico no se ajusta a la realidad debido a las pérdidas ocasionadas por el estrangulamiento y expansión súbitas, por lo que se hace necesaria una corrección. Para ello se define una constante de proporcionalidad C_d que se conoce como **coeficiente de descarga**, para finalmente llegar a la ecuación:

$$v_2 = \frac{C_d}{\sqrt{1-(d/D)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}} \quad (4.47)$$

C_d ha sido determinada experimentalmente, llegando a la conclusión de que su valor es de **0.61** para **Re** mayores de **20,000** y **d₂/d₁** menor a **0.33**. En la figura 4.7 se presenta una grafica que relaciona el **Re** con el C_d .

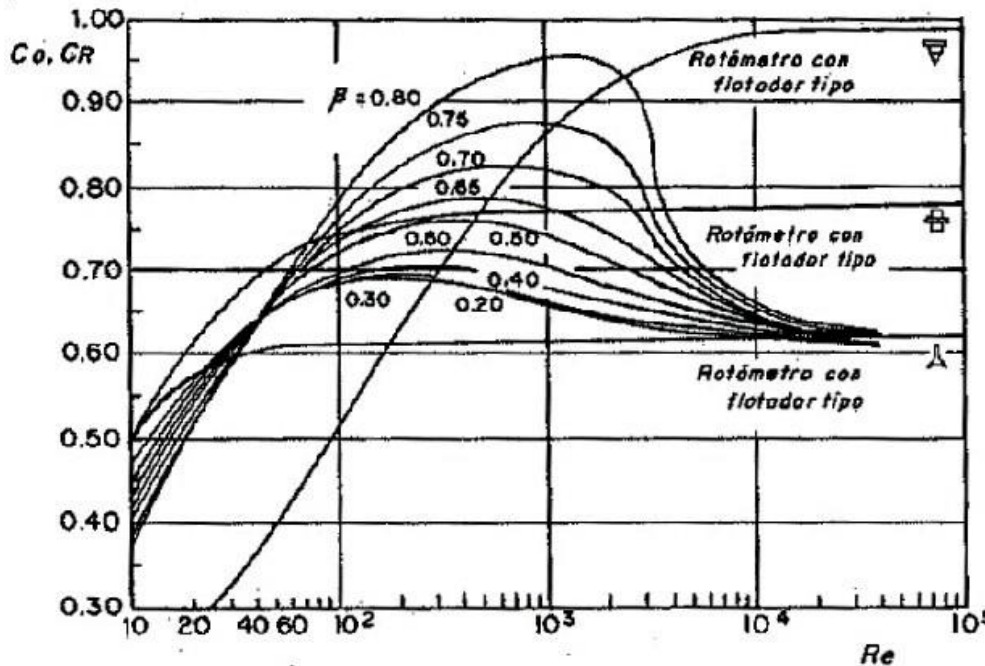


Figura 4.7 Coeficiente de descarga

4.5.3 Medidor Venturi.

Tomando la misma idea del medidor de orificio, en donde se aprovecha el cambio de presión causado por un estrangulamiento y expansión súbitas, se tiene el medidor Venturi con la diferencia de que este último es un aparato que, como se observa en la figura 4.8, en su diseño hace de la contracción y la expansión dos procesos graduales. Con este tipo de diseño se reducen las pérdidas por fricción, siendo esta una de las más grandes ventajas de este medidor sobre el medidor de orificio. Su desventaja consiste en que ocupa un espacio mucho mayor y, por lo mismo, no es tan versátil que el medidor de orificio, ya que en este último solamente se cambia una placa para reducir o aumentar el orificio según el fluido y el régimen de flujo.

Al igual que el medidor de orificio, el medidor Venturi tiene dos orificios para la medición de la presión en los puntos 1 y 2, lo cual puede ser observado en la figura 4.8. Ahora, para determinar la ecuación que permite la evaluación de la velocidad promedio, se realiza un balance de materia y un balance de energía similar al practicado en la sección anterior, concluyendo con una ecuación similar, siendo esta:

$$v_2 = \frac{C_d}{\sqrt{1-(d/D)^4}} \sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}} \quad (4.48)$$

la diferencia está en el coeficiente de descarga **C_d** cuyo valor es de **0.98** para tubos menores de 8 pulg de diámetro y **0.99** para diámetros mayores. Por otro lado, si se desea evaluar la velocidad en un sistema compresible, a la ecuación (4.48) se le multiplica por el coeficiente de expansión **Y** definido por la ecuación:

$$Y = \sqrt{r^{\frac{2}{k}} \left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{1-r^{(k-1)/k}}{1-r} \right) \left[\frac{1-(d/D)^4}{1-(d/D)^4 r^{2/k}} \right]} \quad (4.49)$$

en donde:

$$r = p_2/p_1 \text{ y } k = C_p/C_v$$

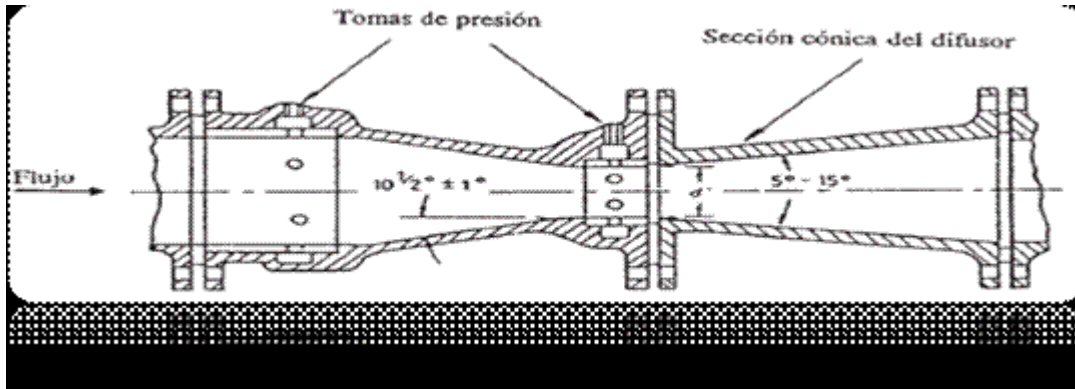


Figura 4.8 Medidor Venturi

Ejemplo 4.7 Flujo de aire en un ducto.

Por un medidor Venturi de 150 mm de diámetro mayor y 75 mm de diámetro menor, fluye aire. La presión en el ducto es de 140 kPa y la temperatura del fluido en la base del medidor es de 15°C, mostrando el manómetro diferencial una lectura de 150 mm Hg°. La presión barométrica es de 101.3 kPa. Determinar el flujo másico.

Solución.

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{(241.3/101.3)(29)}{(0.082)(288)} = 2.925 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{75}{150} = 0.5$$

$$r = \frac{p_2}{p_1} = \frac{140 + 101.3 - 101.3(150/760)}{140 + 101.3} = 0.9171$$

$$k = 1.4$$

$$Y = \sqrt{(0.9171)^{\frac{2}{1.4}} \left(\frac{1.4}{1.4 - 1} \right) \left[\frac{1 - (0.9171)^{\frac{1.4-1}{1.4}}}{1 - 0.9171} \right] \left[\frac{1 - (0.5)^4}{1 - (0.5)^4 (0.9171)^{2/1.4}} \right]} = 0.9509$$

$$v_2 = \frac{(0.98)(0.9509)}{\sqrt{1 - (0.5)^4}} \sqrt{\frac{2(101,300)(150/760)}{2.925}} = 112.57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = \rho v_2 A_2 = (2.925)(112.57) \left[\frac{\pi(0.075)^2}{4} \right] = 1.455 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

4.5.4 El Rotámetro.

El rotámetro es un medidor de flujo de caída de presión constante y área transversal variable (véase la figura 4.9). El rotámetro consiste en un tubo de vidrio vertical graduado, cuyo diámetro inferior es menor que el diámetro superior, dentro del cual se encuentra un flotador. El flotador, al pasar el fluido por el tubo de vidrio, se mueve de abajo hacia arriba y se coloca en una posición que corresponde al flujo volumétrico que en ese momento está pasando por el tubo. De acuerdo a la Física, lo que ocurre cuando el flotador se encuentra suspendido en alguna posición del tubo de vidrio, es que se encuentran en equilibrio las fuerzas que sobre el flotador concurren, es decir, la fuerza de gravedad anula a la fuerza de flotación y a la fuerza que el movimiento del fluido ejerce sobre el flotador (la presión del fluido hacia arriba), esta es la razón por la cual el tubo de vidrio es de área variable. Para calibrar el tubo de vidrio se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$G = \frac{C_d(A_t - A_f)}{\sqrt{1 - [(A_t - A_f)/A_f]^2}} \sqrt{2gV_f \frac{\rho_f - \rho_{ff}}{A_f \rho_{ff}}} \quad (4.50)$$

en donde:

G = Flujo volumétrico

C_d = Coeficiente de descarga

A_f = Área transversal del flotador

A_t = Área del tubo de vidrio en la posición del flotador

V_f = Volúmen del flotador

ρ_f = Densidad del flotador

ρ_{ff} = Densidad del fluido

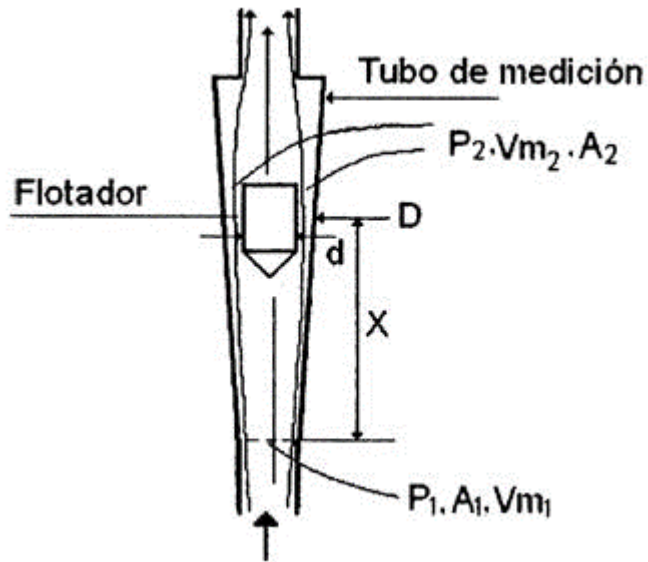


Figura 4.9
Rotámetro

4.5.5 El tubo de Pitot.

Si lo que se desea es determinar la velocidad local en un punto o el perfil de velocidades dentro de un ducto por donde fluye un fluido, no hay hasta el momento mejor aditamento que el **tubo de Pitot**. Este aparato, que se muestra en la figura 4.10, consta de un tubo hueco dentro del cual se coloca otro tubo. El tubo de Pitot se coloca en posición contraria al flujo, originando una zona de estancamiento (punto 1 de la figura), que va conectada al brazo derecho de un tubo en U. Los orificios que se encuentran a los lados del tubo exterior (punto 2 en la figura) se conecta en el brazo izquierdo del tubo en U. Entre ambos puntos se genera una diferencia de presión, permitiendo con ello la evaluación de la velocidad en el punto 1, la velocidad en el punto 2 es cero. Al hacer un balance de energía sobre el sistema se obtiene la ecuación:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (4.51)$$

El tubo de Pitot, además de su utilidad en la industria, es muy utilizado en aeronáutica para la medición de la velocidad de los aviones en el aire.

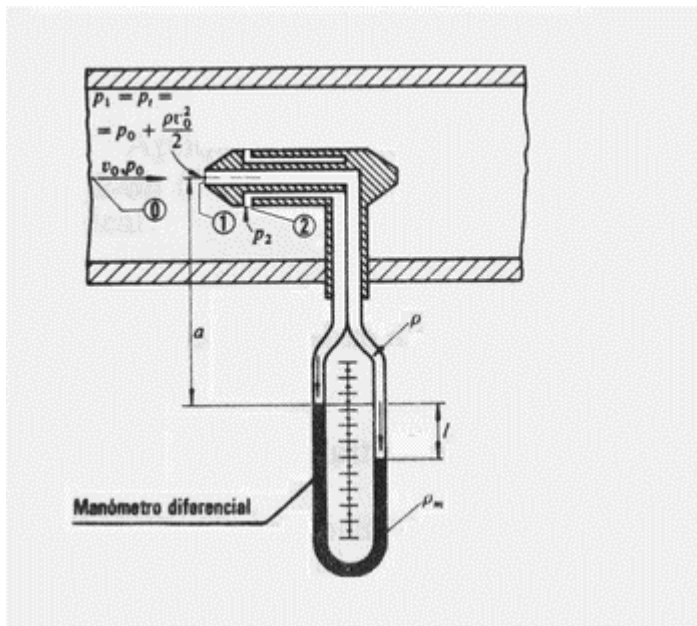
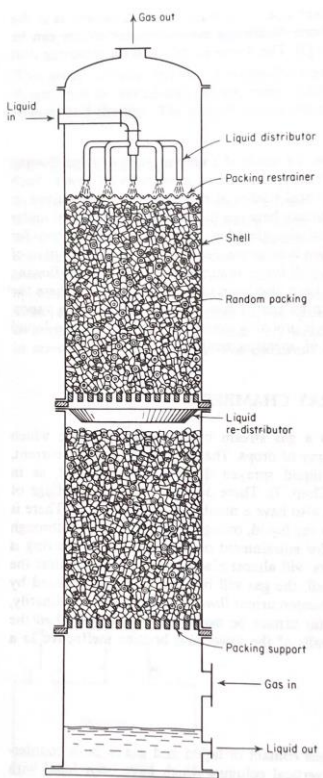


Figura 4.10
Tubo de Pitot

4.6 LECHOS EMPACADOS.

La figura 4.11 muestra el esquema de un aparato denominado **columna empacada**.



4.11 Columna empacada

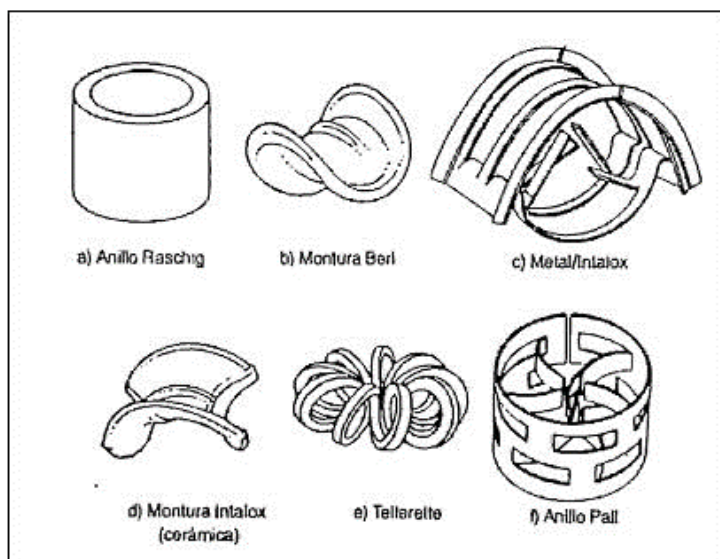
Esta consta generalmente de un cilindro con diámetros que van de las 4 pulg hasta los 20 pies y alturas de entre los 3 y los 80 pies, quizás más, dependiendo del trabajo que vaya a desarrollar. El cilindro está relleno de un material, que para algunas operaciones unitarias es necesario que sea inerte y para otras debe tomar parte activa en el proceso. Las operaciones en donde se utilizan las columnas empacadas son la absorción, la destilación, desorción, humidificación y extracción líquido-líquido, entre otros (Treybal, 1980). En tales casos el material de que está empacada la columna es inerte, sólo toma parte en la operación para dispersar el líquido e incrementar la superficie de contacto con el gas o con el otro líquido si se trata de la última operación. También se tiene este fenómeno en la separación sólido-líquido, es decir, en la filtración en donde el sólido toma parte activa puesto que se quiere separar del líquido. En el caso de los reactores químicos heterogéneos también se requiere este tipo de columnas, ya sea con lecho fijo o con lecho fluidizado, es decir, las partículas de empaque flotando por efectos del flujo del fluido que fluye por la columna. Por último, el fenómeno asimismo es aplicable al

transporte de un sólido, finamente dividido, por un ducto siendo arrastrado por un fluido a alta velocidad. En esta sección se atacará primero los efectos del fenómeno del movimiento de un fluido a baja velocidad a través de un

lecho empacado, en donde las partículas de empaque se mantienen fijas. Luego, en la siguiente sección, se analizarán los efectos del incremento de la velocidad del fluido, hasta lograr que este se mantenga suspendido dentro de la columna, fenómeno al que se le denomina **fluidización**.

4.6.1 Tipos de empaque.

Como se mencionó arriba, dependiendo del tipo de operación es el tipo de partícula que se utiliza para empaque de una columna. Cuando se trata de una operación en donde el empaque toma parte sólo como dispersor del fluido, las partículas que forman el lecho deben de ser inertes. Existen en el mercado diferentes tipos de partículas, como son los anillos Raschig (ver figura 4.12), los anillos Lessing, las monturas de Berl y bloques; el material de que se construyen puede ser porcelana, plástico o barro.



4.12 Tipos de empacado.

Las dimensiones de diversos tamaños de partículas se muestran en la tabla 5.1, en donde se muestra también el grado de dispersión que se puede lograr con ellas, es decir, la superficie por unidad de volumen de la columna.

Tabla 4.2 CARACTERISTICAS DE DIFERENTES TIPOS DE EMPACADO

Tipo	Material	Tamaño nominal, pulg.	Fraccion de huecos, ϵ .	Area superficial, (m^2/m^3)
Anillos Raschig	Cerámica	0.5	0.64	364
		1	0.74	190
		1.5	0.73	121
		2	0.74	92
Monturas de Berl	Ceramica	0.5	0.62	466
		1	0.68	249
		2		105
Anillos Pall	Metal	1	0.94	207
		1.5	0.95	128
		2	0.96	102
Intalox Metalico	Metal	1	0.97	230
		2	0.98	98

Ahora bien, dependiendo de la forma en que se realiza el empacado, es el grado de dispersión real que se logra; si el empacado se hace en forma ordenada, la caída de presión

es menor pero la dispersión es pobre ya que provoca la formación de canales y de zonas de líquido estancado; si el empacado es desordenado, la caída de presión es mayor, pero disminuye la formación de canales y de zonas de estancamiento. También se puede empacar una columna con ladrillo quebrado, partículas de coque u otro material inerte, pero con la desventaja de que disminuye la superficie para dispersión y el volumen libre para flujo dentro de la columna.

En cambio, si la columna está funcionando como un reactor heterogéneo, el empacado toma parte activa en la reacción, es decir, generalmente se trata de un catalizador. Como ejemplo se puede tomar al platino en pellets impregnado de Al_2O_3 que se utiliza en la transformación del SO_2 a SO_3 . Dichos pellets pueden ser de dos tipos, uno de ellos es compacto y el otro es poroso, con la diferencia de que en este último tipo la superficie activa se incrementa ostensiblemente, aunque también se incrementa la caída de presión en la columna. Otro ejemplo son los sistemas de tratamiento de aguas, en donde se utilizan columnas rellenas de resinas intercambiadoras de iones para la reducción de la dureza, en donde se llega al grado de la fluidización.

4.6.2 Caída de presión en un Lecho Fijo.

Desde el inicio de este tema se ha venido mencionando a la caída de presión como uno de los parámetros que dan una idea del comportamiento de una columna empacada. Es necesario entonces definir un procedimiento mediante el cual se le pueda determinar, siendo este el objetivo de la presente sección (Bird, 2002). Para poder hacerlo es necesario considerar varias suposiciones. Primero, se supone que el empacado es uniforme, permitiendo con ello que la dispersión del líquido que fluye es uniforme y, por lo mismo, se evita la formación de canales. Lo anterior se muestra en la figura 4.13. Sobre la misma figura se supone que el lecho dentro de la columna está formado por una serie de tubos de sección transversal dispereja o, por decirlo de otra manera, una serie de "**tubos torcidos**".

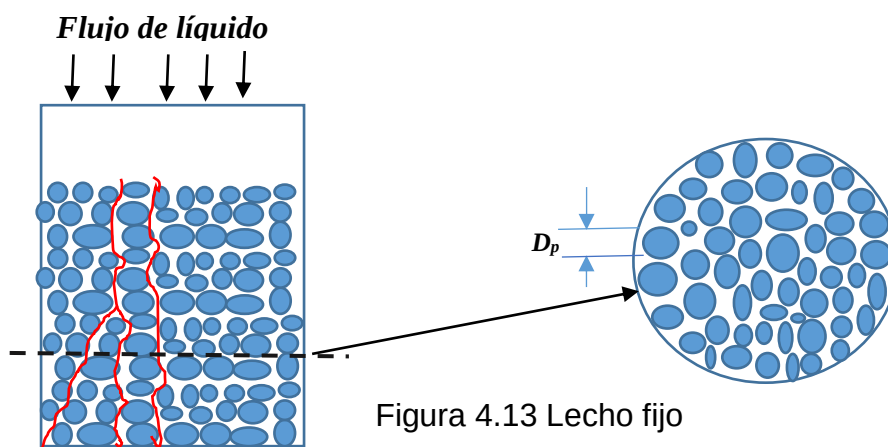


Figura 4.13 Lecho fijo

Por último, se supone que el diámetro de la columna es muy grande con respecto al diámetro de la partícula de empacado.

Tomando en consideración las suposiciones anteriores, se aplican los conceptos para tubos rectos, es decir, el factor de fricción de Fanning y la velocidad promedio con algunas modificaciones para su adaptación a columnas empacadas. Se desarrollan dos procedimientos diferentes para la determinación de la caída de presión en la sección de la columna que contiene las partículas de empacado, uno para flujo laminar y otro para flujo turbulento. Primeramente, se presentará el procedimiento para determinar la caída de presión en flujo laminar, el cual esta basado en la ecuación para el calculo de la velocidad promedio en un ducto rectilíneo, obtenida en la unidad 2 del presente documento, la cual se expresa:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\rho_0 - \rho_L) R^2}{8 \mu L} \quad (2.29)$$

Como se ha mencionado, esta ecuación se adaptará a los “tubos torcidos” que se observan en los espacios libres para flujo, es decir, en los pequeños canales que dejan libres las partículas de empacado y que es por donde fluye el fluido. En esos espacios la velocidad expresada en la ecuación es difícil de determinar ya que los pequeños canales, como ya se mencionó, no son rectos y los espacios libres para flujo varían de espesor a lo largo de la columna. Lo que sí es posible conocer es la velocidad a la entrada de la columna, en la región libre de empacado, por lo que si consideramos que el flujo de másico es constante y tomando a v_0 como la velocidad de entrada a la columna, podemos expresar matemáticamente lo siguiente:

$$\rho v_0 A_c = \rho \langle v_z \rangle A_i$$

En la que A_c es el área de la columna y A_i es el área disponible para flujo o área intersticial. Esta ecuación se puede reescribir considerando la altura de la columna de la manera siguiente:

$$v_0 A_c L = \langle v_z \rangle A_i L$$

Considerando que la densidad es constante. En ella, al lado izquierdo se tiene que $A_c L = V_c$, que corresponde al volumen de la columna y al lado derecho se tiene que $A_i L = V_H$ que viene siendo el volumen disponible para flujo o volumen hueco. De esta manera, la ecuación se transforma en:

$$v_0 V_c = \langle v_z \rangle V_H$$

En ella se define el siguiente parámetro:

$$\varepsilon = \frac{V_H}{V_c} = \text{fracción de huecos} \quad (4.51)$$

Por lo que la velocidad intersticial se expresa:

$$\langle v_z \rangle = \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (4.52)$$

Volviendo a la ecuación (2.29), en ella R corresponde al radio del ducto considerándolo un tubo recto, pero para este caso el espacio para flujo no tiene un área constante que varía a todo lo largo de la región del empacado. Por lo mismo es necesario

cambiar el enfoque para desarrollar el cálculo de la caída de presión. En primer lugar, si se observa el área transversal mostrada en la figura 4.13 esta no es homogénea y se tiene que recurrir a la definición de radio hidráulico en la cual, para un ducto circular, se dedujo que $R=2R_h$. Pero, para el caso que nos ocupa, la expresión (1.24) para radio hidráulico se redefine de la manera siguiente:

$$R_h = \frac{\text{Volumen disponible para flujo}}{\text{Area total de superficie mojada}} = \frac{V_H}{A_p} \quad (4.53)$$

En la que A_p es el área superficial de las partículas que forman parte del empacado. Ahora bien, al dividir tanto numerador como denominador entre V_c (el volumen de la columna libre de empacado), se obtiene:

$$R_h = \frac{V_H/V_c}{A_p/V_c} = \frac{\varepsilon}{a} \quad (4.54)$$

En donde aparece un nuevo parámetro que es a la cual se denomina área superficial de las partículas por unidad de volumen de la columna. Enseguida, para determinar el valor de este último parámetro, se multiplica y divide por el volumen de las partículas que contiene el lecho, dando como resultado:

$$a = \frac{A_p}{V_p} \cdot \frac{V_p}{V_c} = a_v(1 - \varepsilon) \quad (4.55)$$

En la cual, a_v corresponde al área de una partícula por volumen de esta, que se conoce como **superficie específica de una partícula**. Esto es, si consideramos que el lecho está compuesto por partículas esféricas, entonces, tomando el diámetro de la esfera como el diámetro de una partícula, se tiene que:

$$a_v = \frac{\pi D_p^2}{\pi D_p^3/6} = \frac{6}{D_p} \quad (4.56)$$

Por lo que el radio hidráulico, para columnas empacadas de lecho fijo, queda expresado de la manera siguiente:

$$R_h = \frac{D_p}{6} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \quad (4.57)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.52) y (4.57) en la ecuación (2.29), se obtiene:

$$\frac{v_0}{\varepsilon} = \frac{(\rho_0 - \rho_L)}{8\mu L} \left[\frac{2D_p}{6} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right]^2 \quad (4.58)$$

Y despejando la diferencia de presión por unidad de longitud de la columna, se tiene:

$$\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = \frac{72\mu v_0}{D_p^2} \cdot \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right] \quad (4.59)$$

Los valores de velocidad obtenidos experimentalmente, a condiciones de flujo laminar, se encuentran por debajo de los calculados por medio de la ecuación (4.59). Siendo esto lógico, ya que debido a que el fluido no escurre en línea recta sino a través de los "tubos torcidos", por lo que la longitud recorrida es mayor que la longitud de la columna dando con ello una menor velocidad, para una misma diferencial de presión. Por tanto, para que la velocidad sea menor, con la misma diferencia de presión, el miembro derecho debe ser mayor, se ha concluido que la constante con valor de 72 debe ser en realidad 150,

terminando así con la **Ecuación de Blake-Kozeny**, que se expresa:

$$\boxed{\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = \frac{150\mu v_0}{D_p^2} \cdot \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right]} \quad (4.60)$$

Substituyendo esta última ecuación en la definición del factor de fricción de Fanning y considerando como variable al flujo másico por unidad de área $G_0 = \rho v_0$ se obtiene la ecuación para el factor de fricción en lechos empacados que se expresa:

$$\boxed{f = \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{75}{D_p G_0 / \mu} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{75}{Re}} \quad (4.61)$$

La cual es válida para $\varepsilon < 0.5$ y $Re < 10$.

Para flujo turbulento se sigue un tratamiento similar, pero considerando ahora a la columna como un ducto altamente rugoso. De tal manera que el factor de fricción se supone sólo función de la rugosidad y con un valor único f_0 para cualquier columna empacada. Entonces, a partir de la definición del factor de fricción de Fanning y despejando la diferencial de presión, se obtiene:

$$\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \right) 4f_0$$

Y substituyendo en ella las ecuaciones (4.52) y (4.57) para el diámetro y la velocidad intersticial, se obtiene:

$$\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = \frac{6(1-\varepsilon)}{4D_p \varepsilon} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho v_0^2}{\varepsilon^2} \right) 4f_0 = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho v_0^2}{D_p} \cdot 3f_0$$

Como ya se mencionó, en ella el valor del factor de fricción es constante y tiene un valor de 7/12, por lo que finalmente se obtiene:

$$\boxed{\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = 1.75 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho v_0^2}{D_p}} \quad (4.62)$$

La cual es conocida como la ecuación de **Burke – Plummer** y es válida para $Re > 1,000$.

Con la ecuación de Blake-Kozeny se obtienen resultados muy confiables para velocidades bajas, es decir, para flujo laminar y con la ecuación de Burke-Plummer, los resultados son confiables para altas velocidades, pero no permiten el cálculo para el régimen de transición, el cual es una franja muy grande del Re , que se presenta entre los valores de 10 y 1,000. Estos valores se pueden calcular con gran confiabilidad por medio de la **Ecuación de Ergun**, la cual viene tomando ambas ecuaciones superpuestas, por lo que esta nueva ecuación se expresa:

$$\boxed{\frac{(\rho_0 - \rho_L)}{L} = \frac{150\mu v_0}{D_p^2} \cdot \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right] + 1.75 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho v_0^2}{D_p}} \quad (4.63)$$

La cual abarca precisamente el rango mencionado con excelentes.

Una variante de la ecuación de Ergun se obtiene al utilizar $G_0 = \rho v_0$ ya descrito anteriormente, el cual para un fluido gaseoso es constante a lo largo del lecho y haciendo los despejes apropiados, se puede expresar de la manera siguiente :

$$\left[\left(\frac{(\rho_0 - \rho_L)\rho}{G_0^2} \right) \cdot \left(\frac{D_p}{L} \right) \cdot \left(\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon} \right) \right] = 150 \left(\frac{1-\epsilon}{D_p G_0 / \mu} \right) + 1.75 \quad (4.64)$$

Como ya se mencionó, esta ecuación es muy efectiva en todos los regímenes de flujo, aunque no es la única que es posible utilizar con excelentes resultados, por ejemplo, se tiene la **Ecuación de Tallmadge**, la cual se expresa resultados (Bird, 2002):

$$\left[\left(\frac{(\rho_0 - \rho_L)\rho}{G_0^2} \right) \cdot \left(\frac{D_p}{L} \right) \cdot \left(\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon} \right) \right] = 150 \left(\frac{1-\epsilon}{D_p G_0 / \mu} \right) + 4.2 \left(\frac{1-\epsilon}{D_p G_0 / \mu} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (4.65)$$

Y que permite obtener muy buenos resultados y es comparable a la ecuación de Ergun. La comparación de resultados con respecto a estas dos ecuaciones se muestra en la figura 4.14, mostrada a continuación.

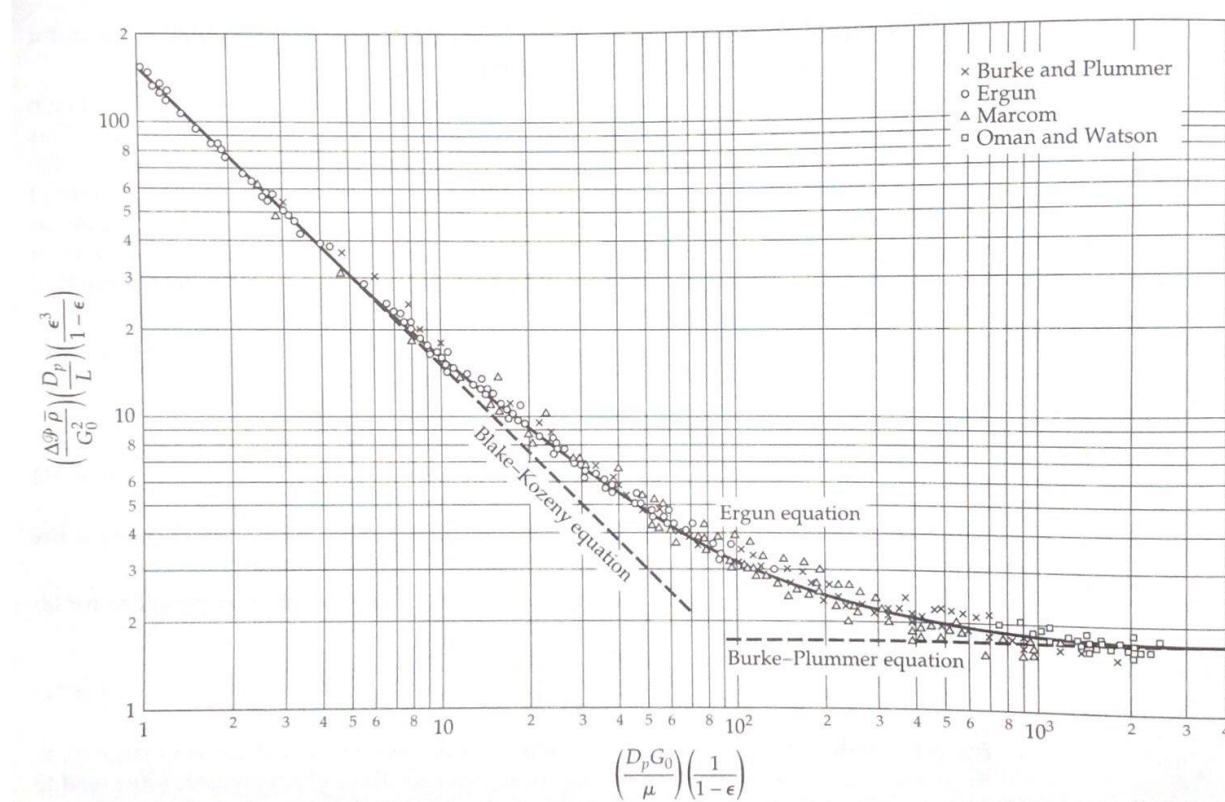


Figura 4.14

4.7 FLUIDIZACION

4.7.1 Conceptos y definiciones.

Si se tiene una columna con un lecho de partículas sólidas en su interior y se empieza a inyectar un fluido, ya sea líquido o gas, en forma ascendente, en la medida en que se aumenta el flujo de fluido, se incrementa la caída de presión. Si el flujo de fluido no es lo suficientemente elevado, las partículas se mantienen en su posición y la relación entre magnitud de flujo y caída de presión a lo largo del lecho, esta gobernada por la ecuación de Ergun, es decir, se comporta como un lecho fijo. Si el flujo de fluido se eleva sustancialmente de tal manera que la velocidad intersticial es lo suficientemente elevada para que el lecho empiece a expandirse, en ese momento, se logra la velocidad mínima de fluidización. En la figura 4.15 se puede observar el efecto de la velocidad intersticial en un lecho de sólidos.

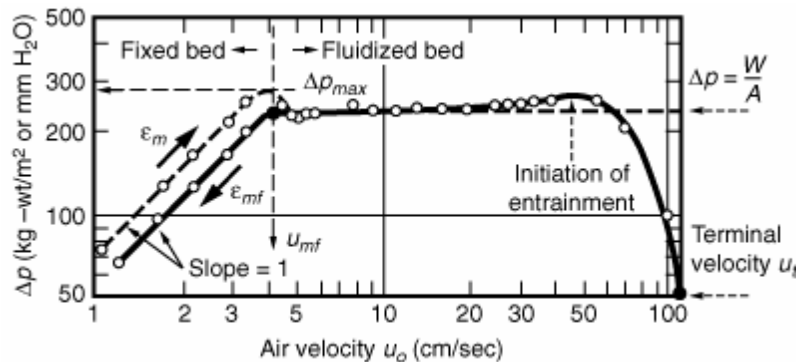


Figura 4.15 Caída de presión en lecho de fluidizado (Levenspiel, 1991)

Como se observa en la figura, la línea recta corresponde a la región de lecho fijo, en la cual al incremento de velocidad corresponde un incremento en la diferencial de presión, en concordancia con la ecuación de Ergun. De acuerdo con esta figura, a una velocidad de 4 cm/seg se tiene la velocidad mínima de fluidización, que corresponde a la velocidad a la cual inicia la expansión del lecho. De 4 a 40 cm/seg se tiene lo que se conoce **como lecho fluidizado**, que es la región a la que las partículas se mueven libremente dentro del fluido, sin salir expulsadas de la columna. Después de los 40 cm/seg, se observa que hay una disminución drástica de la diferencial de presión, lo cual corresponde a la expulsión de las partículas por la parte superior de la columna, es decir, fluyen hacia afuera de la columna y es el momento en que ocurre el **transponte neumático**.

Dependiendo del proceso en que se trate, todas estas fases ocurren en la industria. Por ejemplo, como ya se mencionó en la sección anterior, el lecho fijo sirve para aumentar el área de contacto entre dos fluidos, líquido y gas, como ocurre en absorción, destilación y humidificación. O bien, en la extracción sólido-fluido, como lo es en el secado y la extracción de café (en un percolador), aunque también los reactores utilizan este principio cuando se

requiere una reacción catalizada. En cuanto al lecho fluidizado es muy común también en catálisis, ya que gran cantidad de los catalizadores son sólidos y requieren de la fluidización del lecho. Finalmente, cuando se trata de sólidos de baja masa y un diámetro de partícula pequeño, como lo son las harinas y los talcos, su transporte dentro del proceso ocurre por medio del transporte neumático.

Todas las fases anteriormente mencionadas se pueden observar físicamente en la figura 4.16, que se muestra a continuación.

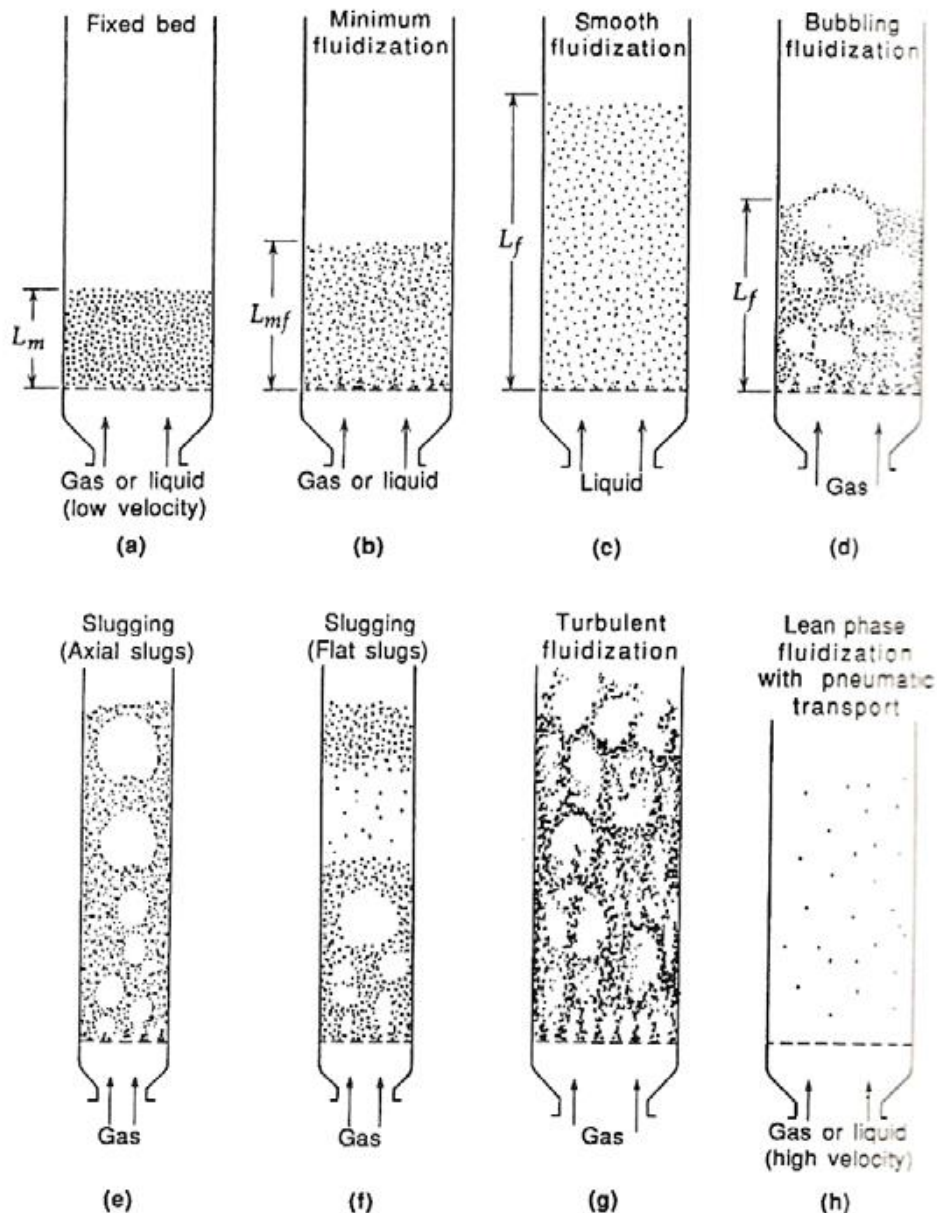


Figura 4.16 Fases de la fluidización (Levenspiel, 1991)

En la figura 4.16 se puede observar lo siguiente:

- A. En la figura 4.16 a), la fuerza ejercida por el fluido ascendente no es lo suficientemente elevada como para vencer el peso ejercido por la masa de partículas en la columna, por lo que se considera un lecho fijo.
- B. En la figura 4.16b) el flujo de fluido ascendente alcanza la velocidad mínima necesaria para iniciar la separación de las partículas, por lo que se le denomina **velocidad mínima de fluidización (v_{mf})**.
- C. La figura 4.16 c) muestra la expansión del lecho de partículas cuando la velocidad del fluido ascendente es superior a la mínima. En este caso las partículas se mueven libremente por lo que se le denomina **fluidización particular**. Para sistemas gaseosos, este fenómeno se presenta cuando las partículas son de baja masa y el gas es denso a alta presión.
- D. La figura 4.16 d) muestra lo que se conoce como **fluidización burbujeante**, situación que es más común en sistemas solido-gas, en sistemas solido-liquido es poco común. Para este caso, la velocidad del fluido es mayor que la mínima y el lecho no se eleva a una altura mucho mayor que la **altura mínima de fluidización**. Su agitación es vigorosa debido a la aparición de las burbujas que permiten un fuerte mezclado.
- E. En la figura 4.16 e) se presenta el caso en que hay coalescencia de burbujas y se aglutinan en burbujas de mayor tamaño (slugging), con lo que si las partículas son pequeñas se escurren en la cercanía de la pared. En el caso de la figura 4.16 f) las burbujas son tan grandes que abarcan el diámetro de la columna, sobre todo si el diámetro de esta es pequeño. En este caso, si las partículas son grandes, caen por dentro de la burbuja, causando una “lluvia de partículas”.
- F. En la figura 4.16 g) se presenta el caso denominado **fluidización turbulenta**, en la que la velocidad del fluido es muy superior a la mínima formando paquetes de partículas, por lo que no se reconocen claramente las burbujas. En esta situación el gas empieza a arrastrar parte de las partículas por la parte superior de la columna.
- G. En la figura 4.16h) se muestra el caso en que la velocidad del gas es de tal magnitud que arrastra la mayor parte de las partículas hacia afuera de la columna, a este fenómeno se le conoce como **transporte neumático**.

Por otro lado, la fluidización también depende del tamaño de las partículas que conforman el lecho. En la figura 4.17 se muestra la clasificación de partículas dependiendo de su tamaño obtenida por Geldart (Levenspiel, 1991). En la figura se definen cuatro clasificaciones dependiendo de su diámetro promedio:

- **C** corresponde a las partículas de menor tamaño y que son altamente cohesivas, por lo que son difíciles de fluidizar, a menos que se mezclen con partículas de mayor tamaño, tal es el caso de las harinas, talcos y almidones, entre otros.
- **A** estas partículas se fluidizan con mayor facilidad, por lo que se puede lograr una fluidización suave a baja velocidad y fluidización burbujeante controlada con burbujas de pequeño diámetro a altas velocidades.
- **B** Con partículas de esta magnitud pueden aparecer burbujas de gran tamaño, lo

cual ocurre a velocidades apenas mayores a la mínima.

- **D** Con partículas de este tamaño, se tienden a formar corrientes de chorro, denominados **lechos de chorro (spouted beds)**. Se forman canales de flujo, por lo que para su fluidización se requieren grandes caudales de gas.

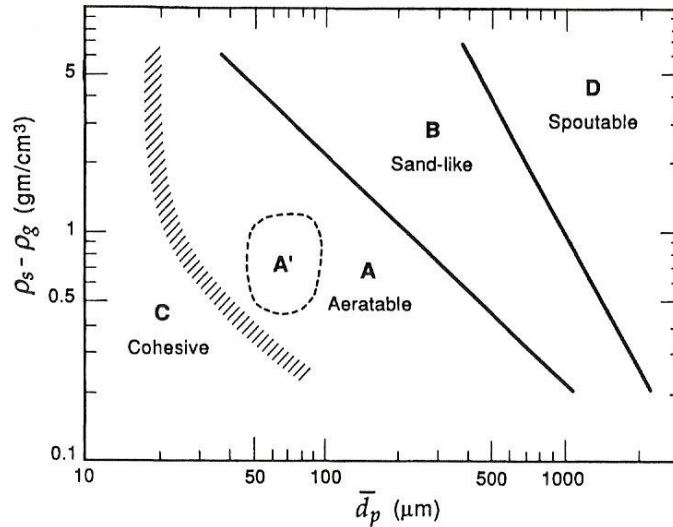


Figura 4.17 Clasificación de partículas por tamaño (Geldart)

4.7.2 Cálculo de parámetros.

El procedimiento que a continuación se presenta ha sido desarrollado primordialmente para el caso de la fluidización particular, es decir, cuando al fluir el gas por la columna las partículas se mueven libremente y existe un incremento homogéneo del lecho. En tal caso, el fenómeno se presenta en las figuras 4.16 b) y c). La figura 4.16b) es la que representa el inicio del fenómeno y, en esa situación, se tiene la que se denomina la **altura mínima de fluidización (L_{mf})**. En ese punto, la velocidad del gas ascendente logra el valor mínimo para iniciar la fluidización, a lo que se le denomina la **velocidad mínima de fluidización (v_{mf})** y la mínima separación de las partículas fluidizadas o la **fracción mínima de huecos o porosidad mínima (ϵ_{mf})**. Estos valores mínimos son mejor apreciados en un sistema gas – sólido ya que en un sistema líquido – sólido sucede a valores mayores.

Para iniciar el procedimiento que permita calcular la velocidad mínima de fluidización, se requiere recordar que la cantidad de partículas en el lecho es constante, es decir que, no importando la altura del lecho, el volumen ocupado por las partículas siempre es el mismo, lo cual matemáticamente se expresa:

$$L_1 A (1 - \epsilon_1) = L_2 A (1 - \epsilon_2) \quad (4.66)$$

Siendo el área de la columna (A) constante, y:

$$L_2 = L_1 \left(\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} \right) \quad (4.67)$$

Tabla 4.3 Fracción de huecos a condiciones de mínima fluidización (ε_{mf})

Tipo de partícula	Tamaño de partícula D_p (mm)			
	0.06	0.1	0.2	0.4
Arena gruesa ($\phi_s = 0.67$)	0.6	0.58	0.53	0.49
Arena fina ($\phi_s = 0.86$)	0.53	0.48	0.43	0.42
Antracita ($\phi_s = 0.63$)	0.61	0.60	0.56	0.52
Carbon absorbente	0.71	0.69		
Catalizador Fischer Tropch ($\phi_s = 0.58$)		0.58	0.56	0.54

(Treybal, 1980)

En la tabla 4.3 se muestra algunos ejemplos de **porosidad mínima o fracción mínima de huecos** para algunos materiales dependiendo de su tamaño de partícula. También se muestra un factor de forma (ϕ_s , que se le conoce también como **esfericidad**) que se define como el **diámetro equivalente de una esfera que tiene el mismo volumen de la partícula de material**, ya que las partículas de material tienen una forma irregular, y en gran parte de las ocasiones su forma no es esférica, la esfericidad muestra la relación entre la superficie de una esfera con respecto a la superficie de una partícula con igual volumen. En la tabla se muestra el diámetro promedio de las partículas del material correspondiente a una esfera (D_p), por lo que el diámetro de la partícula será $\phi_s D_p$, el cual se utilizará en lo sucesivo en lo que se refiere al tema que se está tratando.

Siguiendo adelante con el procedimiento, corresponde ahora la determinación de la pérdida de presión en el lecho en el momento en que inicia la fluidización. En ese instante, la fuerza ejercida por el fluido ascendente, que corresponde a la caída de presión del lecho multiplicado por el área transversal de la columna, equivale a la fuerza resultante entre el peso de la masa de material menos la fuerza de flotación del fluido desplazado, lo cual se expresa:

$$\Delta p A = L_{mf} A (1 - \varepsilon_{mf}) (\rho_p - \rho) g \quad (4.68)$$

Por lo que:

$$\frac{\Delta p}{L_{mf}} = (1 - \varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g \quad (4.69)$$

Que demuestra que la diferencial de presión en el inicio de la fluidización equivale al producto entre la fracción de partículas del lecho multiplicado por la diferencia de densidades del material menos la densidad del fluido y por la gravedad.

Ahora bien, tomando en consideración la ecuación de Ergun para partículas de forma irregular, la cual se expresa:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu v_0}{\phi_s^2 D_p^2} \cdot \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right] + 1.75 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\rho v_0^2}{\phi_s D_p} \quad (4.70)$$

Por lo que para el momento en que inicia la fluidización, la ecuación (4.70) se puede expresar:

$$(1 - \varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g = \frac{150\mu v_{mf}}{\phi_s^2 D_p^2} \cdot \left[\frac{(1-\varepsilon_{mf})^2}{\varepsilon_{mf}^3} \right] + 1.75 \frac{(1-\varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3} \cdot \frac{\rho v_{mf}^2}{\phi_s D_p}$$

Si a esta última ecuación se le multiplica por $D_p^3 \rho / \mu^2 (1 - \varepsilon_{mf})$, queda:

$$\frac{D_p^3 \rho (\rho_p - \rho)g}{\mu^2} = \frac{150 D_p v_{mf} \rho (1 - \varepsilon_{mf})}{\phi_s^2 \mu \varepsilon_{mf}^3} + 1.75 \frac{\rho^2 v_{mf}^2 D_p^2}{\phi_s \varepsilon_{mf}^3 \mu^2} \quad (4.71)$$

En esta última ecuación se reconocen dos grupos adimensionales, que son:

$$Re_{mf} = \frac{\rho v_{mf} D_p}{\mu}$$

$$Ar = \frac{D_p^3 \rho (\rho_p - \rho)g}{\mu^2} = \text{Numero de Arquimedes}$$

Por lo que la ecuación (4.71) queda finalmente expresada:

$$Ar = \frac{150(1-\varepsilon_{mf})}{\phi_s^2 \varepsilon_{mf}^3} Re_{mf} + \frac{1.75}{\phi_s \varepsilon_{mf}^3} Re_{mf}^2 \quad (4.72)$$

En esta última ecuación, se debe considerar que cuando las partículas son pequeñas, por lo general el $Re_{mf} < 20$ por lo que el segundo termino es irrelevante. Por otro lado, cuando las partículas son grandes, por lo general $Re_{mf} > 1000$, por lo que el primer termino es irrelevante y se puede eliminar.

Si no se cuenta con información suficiente de ε_{mf} y ϕ_s , se pueden considerar los siguientes valores:

$$\phi_s \mu \varepsilon_{mf}^3 \cong \frac{1}{14} \quad y \quad \frac{(1-\varepsilon_{mf})}{\phi_s^2 \mu \varepsilon_{mf}^3} \cong 11$$

(Geankoplis, 2018)

Ejemplo 4.7.1

Un lecho fluidizado está compuesto por partículas sólidas con diámetro de partícula de 0.12 mm, esfericidad de 0.88 y densidad de 1,000 kg/m³, por el cual fluye aire a 2 atm de presión y 25°C. En el lecho la fracción e huecos mínima es de 0.42.

a) Si la sección transversal de la columna vacía es de 0.3 m² y el lecho contiene 300

- kg de sólido, calcular la altura mínima para el lecho.
- b) Calcular la caída de presión para las condiciones mínimas de fluidización.
- c) Calcular la velocidad mínima de fluidización.
- d) Calcular la velocidad mínima de fluidización suponiendo que no se conocen ni la fracción de huecos ni la esfericidad.

Solución.

a) Altura mínima de fluidización.

Considerando que la densidad de las partículas sólidas es $\rho_p = 1,000 \text{ kg/m}^3$ y la masa de sólidos es $m_p = 300 \text{ kg}$, el volumen ocupado por la masa sólida debería de ser $V_p = 300/1000 = 0.3 \text{ m}^3$, considerando que $\varepsilon_p = 0$. Y siendo que el área transversal de la columna es $A = 0.3 \text{ m}^2$, la altura que tuviera el lecho si este fuera ocupado solamente por las partículas sin espacio vacío, debería ser $L_p = V/A = 0.3 \text{ m}^3/0.3 \text{ m}^2 = 1 \text{ m}$. Entonces la altura mínima del lecho será:

$$L_{mf} = L_p \left(\frac{1 - \varepsilon_p}{1 - \varepsilon_{mf}} \right) = 1 \left(\frac{1 - 0}{1 - 0.42} \right) = 1.724 \text{ m}$$

- b) Mínima caída de presión. Para determinar la caída de presión en el lecho en condiciones de mínima fluidización, se recurre a la ecuación (4.68), considerando que la densidad del aire a 2 atm de presión y 25°C es de $\rho = 1.184 \times 2 = 2.368 \text{ kg/m}^3$, se obtiene:

$$\Delta p = L_{mf}(1 - \varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g$$

$$\Delta p = 1.724(1 - 0.42)(1000 - 2.368)(9.81) = 9,786 \text{ Pa}$$

- c) Velocidad mínima de fluidización. Se calcula primeramente el número de Arquímedes:

$$Ar = \frac{D_p^3(\rho_p - \rho)g}{\mu^2} = \frac{(0.00012)^3(2.368)(1000 - 2.368)(9.81)}{(1.849 \times 10^{-5})^2} = 117.13$$

Considerando $\mu = .849 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ a 25°C.

Luego, para los coeficientes de los términos que contienen el Re_{mf} se procede:

$$\frac{150(1 - \varepsilon_{mf})}{\phi_s^2 \varepsilon_{mf}^3} = \frac{150(1 - 0.42)}{(0.88)^2 (0.42)^3} = 1516.37$$

$$\frac{1.75}{\phi_s \varepsilon_{mf}^3} = \frac{1.75}{(0.88)(0.42)^3} = 26.84$$

$$26.84Re^2 + 1516.37Re - 117.13 = 0$$

$$Re^2 + 56.49Re - 4.36 = 0$$

$$Re_1 = 0.07714$$

$$v_{mf} = \frac{\mu Re}{D_p \rho} = \frac{(1.849 \times 10^{-5})(0.07714)}{(0.00012)(2.368)} = 0.005019 \text{ m/s}$$

- d) Velocidad mínima de fluidización suponiendo que no se conocen ni la fracción de huecos ni la esfericidad.

$$1.75(14)Re^2 + 11(150)Re - 117.13 = 0$$

$$24.5Re^2 + 1650Re - 117.13 = 0$$

$$Re^2 + 67.34 - 4.78 = 0$$

$$v_{mf} = \frac{(1.849 \times 10^{-5})(0.0709)}{(0.00012)(2.368)} = 0.004614 \text{ m/s}$$

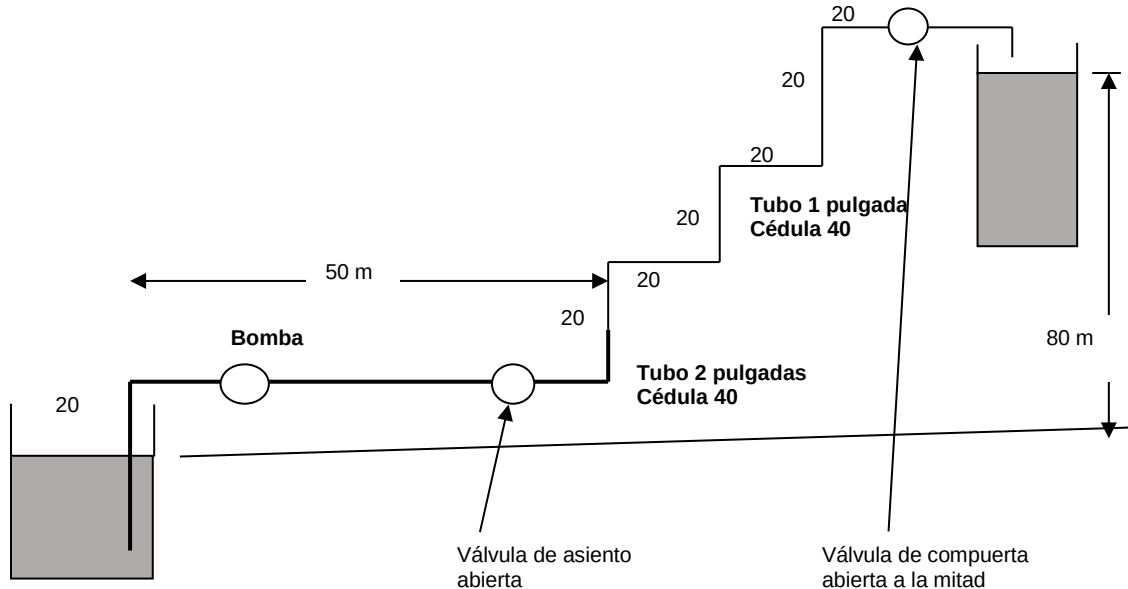
Con un error entre el primero y el segundo de:

$$\epsilon = \frac{0.005019 - 0.004614}{0.005019} \times 100 = 8.07 \%$$

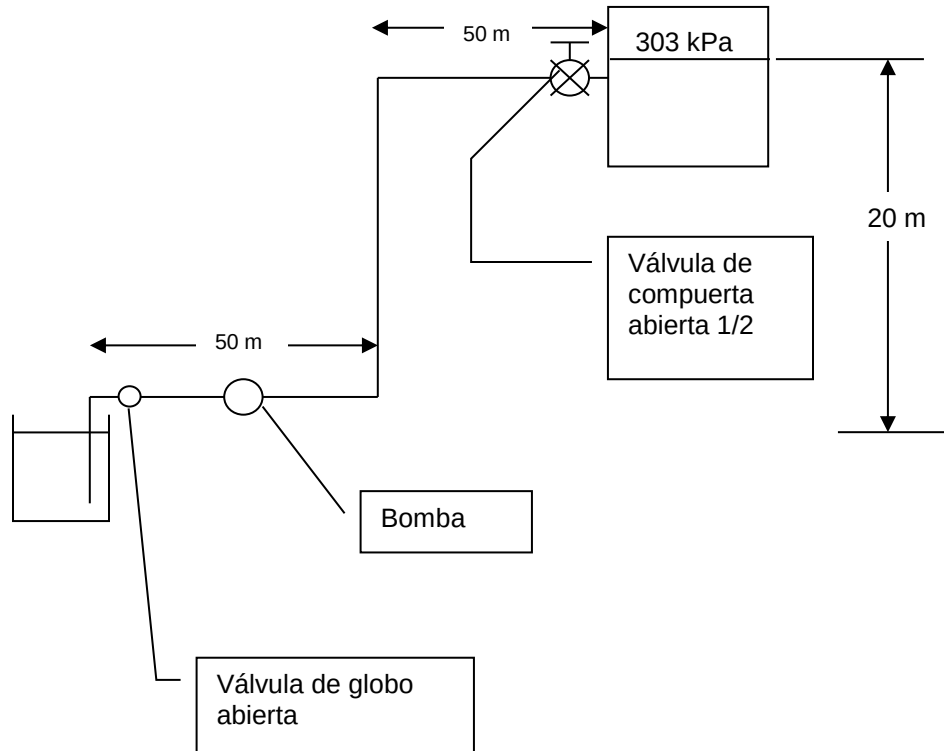
PROBLEMAS.

1. Un tanque contiene 1000 m^3 de una solución de sal. La concentración de la sal en la solución es de 10 kg/m^3 . A tiempo cero, se empieza a introducir agua limpia a razón de $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Al mismo tiempo, se inicia la extracción de solución, también a $10 \text{ m}^3/\text{min}$, de tal manera que el volumen de la solución salina es siempre de 1000 m^3 . Un agitador dentro del tanque mantiene la concentración homogénea dentro del mismo, por lo que la concentración de salida es igual a la concentración dentro del tanque. Deduzca un modelo matemático que permita calcular la concentración con respecto al tiempo. Calcule también el tiempo que tardará en reducirse la concentración a la mitad y, de igual manera, el tiempo que le tomará en salir toda la sal.
2. Un tanque bien agitado, contiene 10 toneladas de una solución de metanol con una fracción en peso de 0.05 de metanol. En un momento dado se empieza a introducir 500 kg/min de agua pura, extrayendo al mismo tiempo 500 kg/min de solución a la salida del tanque. Ambos flujos se mantienen constantes durante todo el experimento. Suponiendo que la densidad de la solución se mantiene constante, calcular el tiempo en que la solución, dentro del tanque, se reduce hasta un 1% en peso de metanol.
3. Un tanque contiene 1000 m^3 de una solución de sal. La concentración de la sal en la solución es de 10 kg/m^3 . A tiempo cero, se empieza a introducir agua limpia a razón de $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Al mismo tiempo, se inicia la extracción de solución, a $20 \text{ m}^3/\text{min}$. Un agitador dentro del tanque mantiene la concentración homogénea dentro del mismo. La concentración de salida es igual a la concentración dentro del tanque. Deduzca un modelo matemático que permita calcular la concentración con respecto al tiempo. Calcule también el tiempo que tardará en reducirse la concentración a la mitad y, de igual manera, el tiempo que le tomará en salir toda la sal.
4. Un recipiente contiene 500 kg . de una solución de sal (salmuera) al 5% en peso. Al recipiente se le alimenta salmuera al 20% en peso a razón de 30 kg./min . y se extrae por el fondo a razón de 20 kg/min .
 - a. Calcular el tiempo en que la solución en el tanque llegará a una concentración del 10%.
 - b. Determinar la cantidad total de solución que deberá haber en el tanque a ese mismo tiempo.
5. Un recipiente contiene 500 kg . de agua pura. Al recipiente se le alimenta salmuera al 20% en peso a razón de 30 kg/min y se extrae por el fondo a razón de 10 kg/min .
 - a. Calcular el tiempo en que la solución en el tanque llegará a una concentración del 10%.

- b. Determinar la cantidad total de solución que deberá haber en el tanque a ese mismo tiempo.
6. Se desea transportar 15.8 kgs/hr de benceno ($\rho = 877 \text{ kg/m}^3$ a 25°C) desde un depósito situado en la planta baja de una fábrica, hasta un reactor situado a 30 m sobre el depósito (en dirección vertical). El transporte se ha de efectuar por medio de una tubería acero de 2 pulg de cédula 40, de 50 m de longitud total, 5 codos de 90° y dos válvulas (una de asiento totalmente abierta y otra de compuerta abierta a la mitad). Siendo que el tanque de almacenamiento se encuentra aislado del ambiente y a 3 atm de presión y el reactor a 1.5 atm. Calcular:
- La potencia de la bomba que se debe instalar, si ésta tiene una eficiencia del 65%.
 - La presión en el punto de expulsión de la bomba, suponiendo que la presión de admisión es la misma que la del tanque de almacenamiento.
7. Por el sistema mostrado se transporta agua a 25°C , a razón de 180 L/min. Considere que la densidad del agua a esa temperatura es de 997.1 kg/m^3 y su viscosidad es de $8.8 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Determine:
- Las pérdidas de energía que se generan en el sistema.
 - La capacidad neta de la bomba requerida para el transporte de agua.
 - La capacidad real de la bomba si estatiene una eficiencia del 85%
 - La presión en el punto de extracción de la bomba.

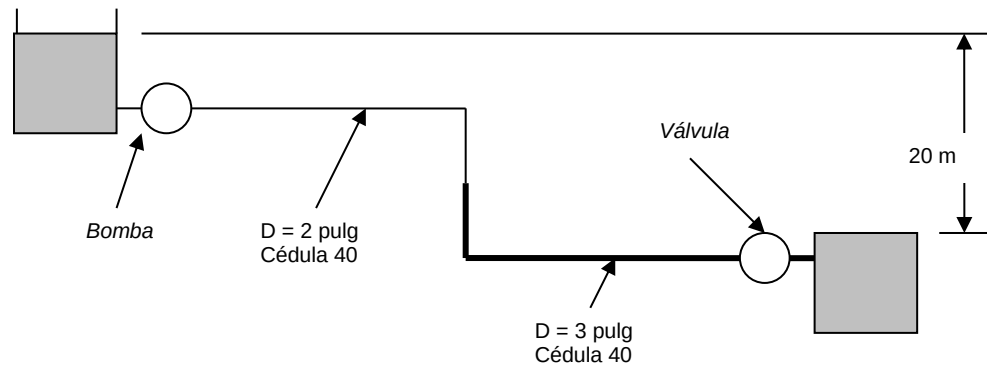


8. En el sistema mostrado se está transportando un etanol cuya densidad es de 790 kg/m^3 y viscosidad es de $1.074 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ desde un tanque abierto hasta un tanque presurizado que se mantiene a 303 kPa manométricas. El etanol se transporta por medio de una tubería de acero comercial de 3 pulgadas de diámetro nominal cédula 40 (78 mm), a razón de 120 kg/min . El tanque presurizado se encuentra a 20 m por arriba del tanque abierto. La eficiencia de la bomba es del 65% . Calcular el tamaño de la bomba requerida para realizar este trabajo.

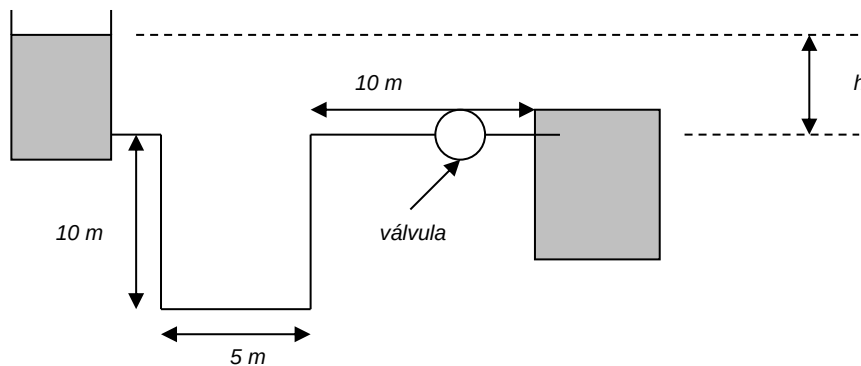


9. Se alimentar 200 kg/min de benceno desde un tanque elevado abierto a la atmósfera, hasta un tanque presurizado a 3.5 atm . El benceno es transportado por medio de una bomba, desde una toma a un costado del tanque abierto, por una tubería de acero de 2 pulgadas cédula 40 con una longitud de 61 m y un codo de 90° , a la mitad del trayecto se ensancha hacia una tubería de 3 pulgadas cédula 40 con una longitud de 61 m en línea recta, un codo de 90° y una válvula de compuerta abierta a la mitad. El tanque presurizado se encuentra a 20 metros por debajo del tanque abierto. Calcular:
- La potencia de la bomba que se debe instalar, si ésta tiene una eficiencia del 65% .

- b. La presión en el punto de expulsión de la bomba, suponiendo que la presión de admisión es la misma que la del tanque de almacenamiento,.



10. En el procesamiento de la leche, para obtener leche en polvo, se utiliza un tanque elevado para suministrar leche entera a 20°C a una cámara de aspersión, en donde se pone en contacto con aire caliente y seco. La atomización de la leche se lleva a cabo por medio de un inyector a presión, en cuya boquilla se mantiene una presión de 2.5 atm, cuando menos, para suministrar los 570 L/min que se requieren. La línea que va del tanque al aspersor es de acero y con un diámetro nominal de 2 pulg cédula 40. La tubería tiene una longitud total de 35 m, con cuatro codos de 90° y una válvula de compuerta abierta a la mitad. Calcular el nivel que se debe mantener el nivel de la leche en el tanque para lograr la presión requerida en el inyector.



11. Repetir el ejemplo 4.4 considerando que no tiene toberas.
12. Repetir el ejemplo 4.4 si el tubo es de 2 pulgadas y las toberas de 1 pulg.
13. Una columna empacada está compuesta por pequeños cilindros cuyo diámetro es

de 0.02 m y cuya altura es de 0.03. Considere que la densidad de las partículas es de 1500 kg/m^3 , mientras que la densidad del lecho es de 980 kg/m^3 de columna. Determinar la fracción de huecos, el diámetro de la partícula y la superficie específica de las partículas.

14. Una columna empacada esta rellena con cilindros sólidos con un diámetro de 2 cm y una longitud de $1.5D$. La densidad en la columna es de 980 kg/m^3 , mientras que la densidad de los cilindros es de $1,500 \text{ kg/m}^3$. Determinar la fracción de huecos, el diámetro de la partícula y el área superficial de las partículas por volumen de la columna.
15. Por una columna empacada fluye aire a 100°C , entrando a una presión de 3 atm y a razón de 0.02 kg/s . La columna consiste en un tubo circular de 10 cm de diámetro y 3.7 m de altura y esta empacada con pequeños cilindros de 1.25 cm de diámetro por 1.25 cm de altura. La fracción de huecos es de 0.4. Calcular la presión de salida.
16. Una columna empacada de 12 m de altura y 5.5 m de diámetro contiene esferas de 1 pulgada de diámetro. Propano gaseoso entra por la parte superior del lecho a una temperatura de 200°C , saliendo a la misma temperatura. La presión en el fondo de la columna es de 2 atm abs. La fracción de huecos es de 0.4. Si el propano se puede considerar un gas ideal y tiene una viscosidad de $1.2 \times 10^{-5} \text{ Pa-s}$ y el tiempo de contacto dentro de la columna entre el gas y las partículas es de 8 segundos, calcule la presión de entrada. Para la densidad, considere una presión media de 2 atm abs (no es la presión de entrada).
17. La caída de presión por un lecho empacado con partículas de mineral triturado se utiliza para conocer su diámetro promedio y su área superficial. En una columna empacada por la que fluye aire a 25°C , se registra una caída de presión de 500 kPa/m, por la que fluye aire a 0.015 m/s basados en la columna vacía. La fracción de huecos es de 0.47. Calcule el diámetro promedio de las partículas, el área superficial y la densidad del lecho, siendo la densidad de la masa sólida de partículas de $4,100 \text{ kgs/m}^3$.
18. Para limpiar un filtro de arena, se fluidiza a las condiciones mínimas utilizando agua a 25°C . Las partículas de arena tienen una densidad de $2,550 \text{ kg/m}^3$ y su diámetro promedio es de 0.4 mm.
 - a. El diámetro de la columna es de 40 cm y la altura del lecho en condiciones mínimas de fluidización es de 1.75 m. Calcular la cantidad de arena que tiene el lecho.
 - b. Calcular la caída de presión a estas condiciones y la velocidad mínima de fluidización.
 - c. Utilizando un valor de la velocidad 4 veces superior a la mínima, estimar la porosidad y la altura del lecho expandido.

BIBLIOGRAFÍA.

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lighthfoot, E.N. (2006). Fenómenos de Transporte. 2ª Edición. México: Limusa Wiley.

Brodkey, R.S., Hershey, H.C.(1988). Transport Phenomena. 1a Edición. Nueva York, N. Y.: McGraw Hill.

Fox, R.W., McDonald, A.T. (1995)Introducción a la Mecánica de Fluidos. 2ª Edición. México: McGraw Hill.

Geankoplis, C. J.,Hersel, A.A, Lepek, D. H.(2018). Transport Processes and Separation Process Principles 5ª Edicion. Boston, Mass.: Pearson Education, Inc.

Potter, M. C., Wiggert, D. C.(2002) Mecánica de Fluidos. 3ª Edición. Australia: Thomson.

Welty, J. R., Wicks, C. E., Wilson, R. E., Rorrer, G.(2001). Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. 4a Edición.: John Wiley and Sons Inc. Nueva York, N. Y.

PÁGINAS DE INTERNET.

Jimenez, J., Ortiz, C., Castillo, E., Romero, R., Godos, R. (n.d.). Consultado el 10 de febrero de 2019. Universidad Veracruzana, Facultad de Ing. Civil.
<https://www.uv.mx/ingenieriacivil/files/2013/09/manual-de-ee-hidraulica-de-tuberias-y-canales.pdf>

Martin, I. Salcedo, R., Font, R. (2011). Transporte de cantidad de movimiento solido-fluido. Consultado el 12 de febrero de 2018. Universidad de Alicante
https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/20299/9/tema4_flujo%20externo.pdf

Piña, J., Bertin, D. (2013). Procesamiento de sólidos. Consultado el 10 de marzo de 2019. Universidad Nacional del Sur, Departamento de Ing. Química.
<http://www.criba.edu.ar/cinetica/solidos/Capitulo5.pdf>

Anaya, A., Cauich, G.,Funabazama, O., Garcia, V. (2014). Evaluación de ecuaciones de factor de fricción explícito para tuberías [version electronica]. Educ. Quim. 25(2) 128-134. <http://www.scielo.org.mx/pdf/eq/v25n2/v25n2a7.pdf>