



Instituto Tecnológico de Chetumal
Departamento de Desarrollo Académico

Oficio No. DA-023/2026

Fecha: 18 de febrero de 2026 Chetumal, Quintana Roo

Asunto: Se notifica entrega de reporte final de período sabático.

MTRO. RAMÓN JIMÉNEZ LÓPEZ
DIRECTOR GENERAL DEL TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO
PRESENTE

**Atención: Dirección de Docencia e Innovación Educativa.
Período Sabático**

Por este conducto, envío a usted la documentación del reporte: **Intermedio 50%: ()** o **Final 100%: (X)**, de Período Sabático de la persona cuyos datos se mencionan a continuación y el cual ha quedado archivado en el expediente respectivo:

Docente: William Rivas Ruiz

RFC: RIRW530922TIO

No. Autorización: AS-1-108/2025

Programa autorizado: Elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo educacionales y Reactivos de Evaluación bajo la Modalidad B.1. Elaboración de Apuntes/B.2. Elaboración de Apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica y que corresponde a los Apuntes de la Asignatura de Mecánica Clásica con clave AEF-1042 para la Carrera de Ingeniería Eléctrica.

Periodo autorizado: 20 - enero -2025 al 19- enero - 2026

Asimismo, se anexa al presente la revisión técnica de Academia y el acta de evaluación de la Comisión Dictaminadora del plantel.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®

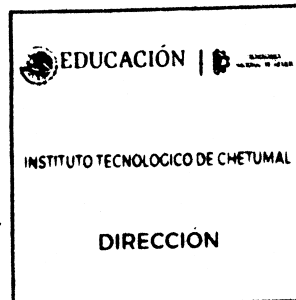
Cultura, Ciencia y Tecnología para la Superación de México®

~~MTRO. MARIO VICENTE GONZÁLEZ ROBLES~~
~~DIRECTOR~~

C.C.P.

Subdirección Académica
Departamento de Desarrollo Académico
Departamento Académico
Comisión Dictaminadora
Interesado (a).

MVGR/MAN/MY/LAT/vpd



2026
año de
Margarita
Maza



SISTEMA DE GESTIÓN
ISO 9001:2015
ISO 14001:2015
ISO 45001:2018
BICERT, S.C.





Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de Chetumal
Departamento de Desarrollo Académico

Oficio No._DA-024/2026

Fecha: 18 de febrero de 2026 Chetumal, Quintana Roo

**Asunto: Se notifica entrega de reporte
final de período sabático.**

Mtro. Mario Vicente González Robles
Director del Tecnológico Nacional de México
de Campus Chetumal
Presente

Por este conducto, los que suscriben avalamos la entrega del ejemplar del **REPORTE FINAL**, como resultado del Periodo Sabático, de acuerdo con la siguiente información:

Docente: WILLIAM RIVAS RUIZ

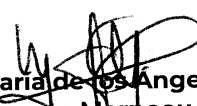
RFC: RIRW530922TIO

No. **Autorización:** AS-1-108/2025

Programa autorizado: Elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo educacionales y Reactivos de Evaluación bajo la Modalidad B.1. Elaboración de Apuntes/B.2. Elaboración de Apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica y que corresponde a los Apuntes de la Asignatura de Mecánica Clásica con clave AEF-1042 para la Carrera de Ingeniería Eléctrica.

Se confirma la entrega y resguardo en el Centro de Información de esta institución para la consulta del estudiantado y profesorado y para su integración al repositorio institucional del TecNM.

ATENTAMENTE


M.T.I. María de los Angeles
Navarrete Marneou
Nombre y firma del Subdirector(a)
Académico


Lic. Esteban Magaña Pérez
Nombre y firma del Jefe (a) del
Centro de Información

c.c.p

Departamento de Desarrollo Académico. - Presente
Archivo
Interesado (a)



2026
año de
Margarita
Maza



SISTEMA DE GESTIÓN
ISO 9001:2015
ISO 14001:2015
ISO 45001:2018
BICERT, S.C.



Chetumal Quintana Roo a 15 de Enero de 2026.

Ing. Mario Vicente González Robles.

Director del Instituto Tecnológico de Chetumal.

Presente.

Muy apreciado Sr. Director:

Con la presente reciba Ud. un atento saludo del suscrito con mis mejores deseos de éxito en este nuevo año. Aprovecho la oportunidad para informarle que he hecho entrega para lo que proceda, al Departamento de Desarrollo Académico, del Reporte Final del Periodo de Año Sabático que me fue autorizado a partir del 20 de enero de 2025 en el *Programa para la Elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo Educativos y Reactivos de Evaluación bajo la modalidad B.1 Elaboración de Apuntes / B.1.2 Elaboración de apuntes de asignatura(s): con el título específico: Mecánica Clásica / AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica / ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica.* y que corresponde a los Apuntes de la Asignatura de *Mecánica de Fluidos y Termodinámica / ELF-1017* para la mencionada Carrera.

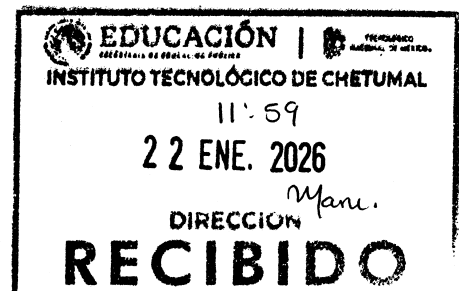
Sin más por el momento, quedo a sus respetables órdenes.

ATENTAMENTE:



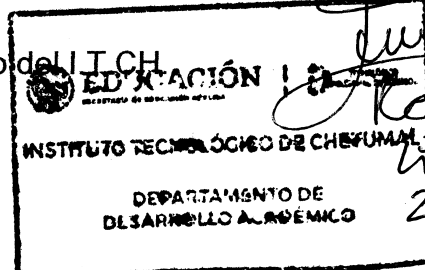
William Rivas Ruiz.

Profesor del I.T. CH.



c.c.p.- Departamento de Desarrollo Académico del I.T. CH.

- Suscrito



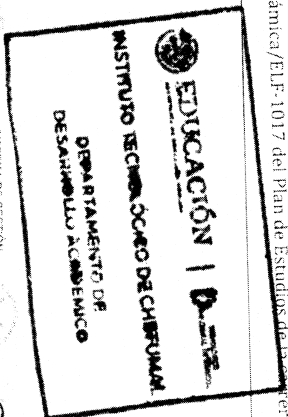
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ELECTRICIDAD Y ELECTROMECÁNICA
PRESIDENTE

Por este medio le envío los documentos del reporte final del proceso de año sabático convocatoria 1-2025 que comprende del periodo 20 de enero 2025 al 19 de enero de 2026, para efectuar los trámites correspondientes y continuar el proceso del docente adscrito al área de Ing. Eléctrica y Electrónica. Así mismo, se le solicita cordialmente hacer llegar la respuesta a este departamento a más tardar el día de del presente año. Se adjunta al correo departamental lo respectivo del proceso.

DOCENTE
Ing. WILLIAM RIVAS RUIZ

PROYECTO
En el Programa para la elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo Educativos y Reactivos de Evaluación bajo la modalidad B.1. Elaboración de Apuntes/B.2 Elaboración de apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica

ATENCIÓN
Excelencia en Educación Tecnológica
Cultura, Ciencia y Tecnología para la Superación de México®
M.E. LIZBETH ARACELI ANICULO TAPIA
JEFA DEL DEPTO. DE DESARROLLO ACADÉMICO



SISTEMA DE GESTIÓN
DE CALIDAD
ISO 9001:2015
CERTIFICADO
Nº 1001/2015



1001/2015
PLÁSTICO



Av. Ingenieros 430, 554 Andrés Bello, Quintana Roo, Col. David Guzmán Gutiérrez, Apto. Postal 57 CD. 77013
Chetumal, Quintana Roo, Tel. (983) 332238 ext. 101, www.chetumaltec.com.mx

26 ENE 2026



Educación
Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Instituto Tecnológico de Chetumal
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

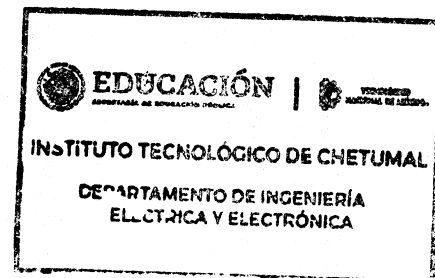
Ciudad de México, 04/febrero/2026
Oficio No. 022/2026

M.E. LIZBETH ARAÍZ ANGULO TAPIA
JEFA DE DEPTO. DE DESARROLLO ACADEMICO

Con base en lo solicitado en el memo Núm: DA/001/2026 con respecto al reporte final del proceso de año sabático de la convocatoria 1-2025 que comprendió del periodo 20 de enero 2025 al 19 de enero 2026 del Ing. William Rivas Ruíz. Me permito hacer entrega del reporte final, evaluado por el comité de la academia de Ingeniería Eléctrica y Electrónica formada por el presidente de la academia el Ing. Manuel Cipriano Díaz Carvajal y los profesores revisores Ing. German Alberto Rodríguez May. Ing. Juan Manuel Zavala Pimentel e Ing. Daniel Cante Góngora, determinando que cumple técnica y académicamente con lo establecido en la Políticas Académicas Generales de Periodo Sabático.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
Cultura, Ciencia y Tecnología para la Superación de México®



M.E. DAVID DE JESÚS SANTILLÁN SANVICENTE
JEFE DE DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

ccp. Archivo



SISTEMA DE GESTIÓN
ISO 9001:2015
ISO 14001:2015
ISO 45001:2018
BICERT, S.C.



ANÁLISIS TÉCNICO DE LA ACADEMIA

Fecha: Chetumal, Quintana Roo a 30 de enero de 2026

MTRO. MARIO VICENTE GONZÁLEZ ROBLES
Director del Instituto Tecnológico
de Chetumal

Presente

De acuerdo con la calendarización de la propuesta de trabajo, le comunico que se revisó y evaluó el reporte: **Intermedio 50%:()** o **Final 100%:(X)**, de la persona cuyos datos se mencionan a continuación:

Docente: William Rivas Ruiz

RFC: RIRW530922TIO

No. Autorización: AS-1-108/2025

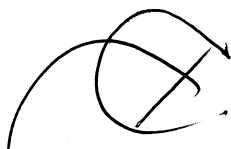
Programa autorizado: **En el programa para la Elaboración de Apuntes, Libros, objetivo educativos y Reactivos de Evaluación bajo la Modalidad B.1 Elaboración de Apuntes/ B.1.2 Elaboración de Apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 Y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica y que corresponde a los Apuntes de la Asignatura de Mecánica Clásica con clave AEF-1042 para la Carrera de Ingeniería Eléctrica.**

Periodo autorizado: **20 - enero -2025 al 19- enero-2026**

Periodo reprogramado del: (Solo llenar en caso de haberlo solicitado) **DD-MM-AAAA al DD-MM-AAAA**

Esta Academia determina que **cumple técnica y académicamente*** con lo establecido en las Políticas Académicas Generales de Periodo Sabático, por lo que está en condición para **integrarse al repositorio institucional del TecNM.**

Atentamente



Ing. Manuel Cipriano
Díaz Carvajal
(Nombre y firma)

**Presidente de la Academia de
Ing. Eléctrica y Electrónica**



Ing. German Alberto
Rodríguez May
(Nombre y firma)

**Profesor revisor Catedrático del
área de Ing. Eléctrica**



Ing. Juan Manuel
Zavala Pimentel
(Nombre y firma)
**Profesor revisor
Catedrático del área
de Ing. Eléctrica**

Vo.Bo



Ing. David de Jesús
Santillán Sanvicente

(Nombre y firma)
**Jefe del Depto. de Ing.
Eléctrica y Electrónica**



Ing. Daniel Cante Góngora
(Nombre y firma)
**Profesor revisor
Catedrático del área de
Ing. Eléctrica**

H.C.D.



Departamento de Desarrollo Académico



Chetumal, Q. Roo a 04 de febrero de 2026
MEMORÁNDUM No. DA/007/2026

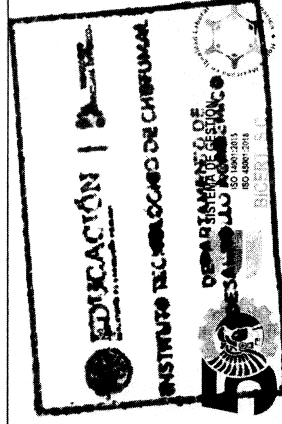
COMISIÓN DICTAMINADORA
PRESENTE

Por este medio le envío los documentos del reporte final del proceso de año sabático convocatoria 1-2025 que comprende del periodo 20 de enero 2025 al 19 de enero de 2026, para efectuar los trámites correspondientes y continuar el proceso del docente adscrito al área de Ing. Eléctrica y Electrónica. Así mismo, se le solicita cordialmente hacer llegar la respuesta a éste departamento a más tardar el día 11 de febrero del presente año. Se adjunta al correo departamental lo respectivo del proceso.

DOCENTE	PROYECTO
Ing. WILLIAM RIVAS RUIZ	En el Programa para la elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo Educativos y Reactivos de Evaluación bajo la modalidad B.1. Elaboración de Apuntes/B.2 Elaboración de apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Eléctrica

ATENTAMENTE
Excelencia en Educación Tecnológica®
Cultura, Ciencia y Tecnología para la Superación de México®

M.E. LIZBETH ARAIZ ANGULO TAMPA.
JEFA DEL DEPTO. DE DESARROLLO ACADEMICO



Av. Insurgentes #330, esq. Andrés Quintana Roo, Col. David Gustavo Gutiérrez, Apdo. Postal 67 C.P. 77013,
Chetumal, Quintana Roo. Tel. (983) 8322330 ext. 101. www.chetumal.tecnm.mx

[Handwritten signature]

DICTAMEN DE LA COMISIÓN DICTAMINADORA

Chetumal, Quintana Roo a 12 de febrero de 2026

MTRO. MARIO VICENTE GONZÁLEZ ROBLES
DIRECTOR DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL
PRESENTE

De acuerdo con la calendarización de la propuesta de trabajo y el análisis técnico de la academia, le comunico que se revisó y evaluó el reporte: **Intermedio 50%:()** o **Final 100%:(X)**, de la persona cuyos datos se mencionan a continuación:

Docente: William Rivas Ruiz

RFC: RIRW530922TIO

No. Autorización: **AS-1-108/2025**

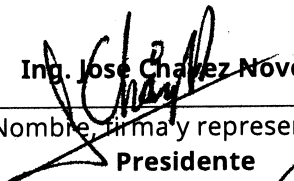
Programa autorizado. En el programa Elaboración de Apuntes, Libros, Objetivo educacionales y Reactivos de Evaluación bajo la Modalidad B.1. Elaboración de Apuntes/B.2. Elaboración de Apuntes de asignaturas: con el título específico: Mecánica Clásica/AEF-1042 y Mecánica de Fluidos y Termodinámica/ELF-1017 del Plan de Estudios de la Carrera de Ingeniería Eléctrica que corresponde a los Apuntes de la Asignatura de Mecánica Clásica con clave AEF-1042 para la Carrera de Ingeniería Eléctrica.

Periodo autorizado: 20 - enero -2025 al 19- enero - 2026

Periodo reprogramado del: (Solo llenar en caso de haberlo solicitado) DD-MM-AAAA al DD-MM-AAAA

Por lo que esta Comisión Dictaminadora encuentra y determina que se **ha cumplido** con la entrega del reporte correspondiente y con las Políticas Académicas Generales de Periodo Sabático.

ATENTAMENTE


Ing. Jose Chavez Novoa

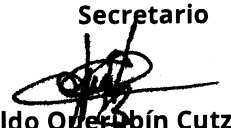
(Nombre, firma y representación)

Presidente

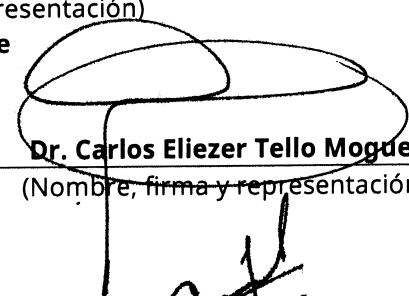

Mtro. Francisco Javier Moreno Cuahtecontzi

(Nombre, firma y representación)

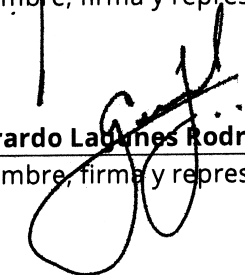
Secretario


Dr. Leopoldo Ojeda Obín Cutz Pool

(Nombre, firma y representación)


Dr. Carlos Eliezer Tello Moguel

(Nombre, firma y representación)


Ing. Gerardo Latorres Rodríguez

(Nombre, firma y representación)



CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN

Ciudad de México, 19 / Enero / 2026

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO PRESENTE.

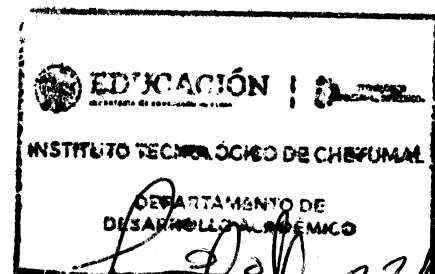
Bajo protesta de decir verdad, el suscrito abajo firmante, personal docente adscrito al Campus Chetumal del Tecnológico Nacional de México, manifiesto que en cumplimiento de mis actividades relacionadas con el Año Sabático elaboré la obra titulada "Apuntes de la Asignatura: Mecánica de Fluidos y Termodinámica para Ingeniería Eléctrica. (Clave: ELF-1017)".

Con base en lo anterior, y con fundamento en los artículos 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y 46 de su Reglamento, reconozco que el Tecnológico Nacional de México es titular de los derechos patrimoniales sobre la misma y le corresponden las facultades relativas a la divulgación, integridad de la obra y de colección, conservando el derecho a figurar como autor.

Asimismo, respondo por la autoría y originalidad de la citada obra; y relevo de toda responsabilidad al Tecnológico Nacional de México de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere que con esta obra es afectado en alguno de los derechos protegidos por la Ley en cita, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas.

ATENTAMENTE

William Rivas Ruiz



justdone Analysis Report

Plagiarism Detection Report

JustDone AI

Scan details

Scan Time

February 11th, 2026 at 20:00 CET

Total Pages

203

Total Words

50596

Plagiarism Detection

5.9%

Plagiarism types

● Identical

● Minor Changes

Excluded

○ Omitted Words

Text coverage

3.8%

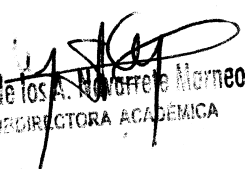
2%

Words

1

1

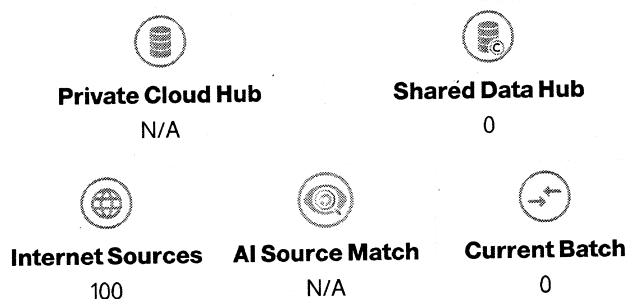
0


María de los A. Novarte Morneau
SUBDIRECTORA ACADÉMICA

Plagiarism

5.9%

Results (100)



Plagiarism types

- ☒ Identical
- ☐ Minor Changes

Excluded

- ☐ Omitted Words

Text coverage

3.8%

2%

Words

1

1

0

About Plagiarism Detection

Our AI-powered plagiarism scans offer three layers of text similarity detection: Identical, Minor Changes, and Paraphrased. Based on your scan settings we also provide insight on how much of the text you are not scanning for plagiarism (Omitted words).

● Identical

One to one exact word matches. [Learn more](#)

● Minor Changes

Words that hold nearly the same meaning but have a change to their form (e.g. "large" becomes "largely"). [Learn more](#)

○ Omitted Words

The portion of text that is not being scanned for plagiarism based on the scan settings. (e.g. the 'Ignore quotations' setting is enabled and the document is 20% quotations making the omitted words percentage 20%) [Learn more](#)

Copyleaks Shared Data Hub

Our Shared Data Hub is a collection of millions of user-submitted documents that you can utilize as a scan resource and choose whether or not you would like to submit the file you are scanning into the Shared Data Hub. [Learn more](#)

Filtered and Excluded Results

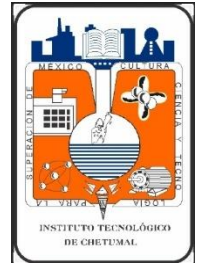
The report will generate a complete list of results. There is always the option to exclude specific results that are not relevant. Note, by unchecking certain results, the similarity percentage may change. [Learn more](#)

Current Batch Results

These are the results displayed from the collection, or batch, of files uploaded for a scan at the same time. [Learn more](#)



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO



**Campus:
Instituto Tecnológico de Chetumal**

**Mecánica de Fluidos y Termodinámica para Ingeniería
Eléctrica. *ELF-1017*
*Apuntes.***

**William Rivas Ruiz.
Profesor del I. T. CH.**

Contribución de la Asignatura “Mecánica de Fluidos y Termodinámica” a los Objetivos Formativos de la Carrera de Ingeniería Eléctrica. (Convocatoria 1-25 Periodo Sabático).

En este Análisis se deben tomar en cuenta dos elementos muy importantes: 1) *Competencia específica de la asignatura* y 2) *Objetivos Formativos* de la Carrera de Ingeniería Eléctrica para tener un adecuado punto de partida a fin relacionar ambos e identificar el aporte correspondiente.

El estudio, selección, aplicación y operación de equipos mecánicos, máquinas eléctricas y accesorios para la generación y utilización de la energía eléctrica de manera profesional y con alto sentido ético y responsable, requiere de la aplicación de los conocimientos básicos de termodinámica y de la mecánica de los fluidos en las diferentes condiciones de operación que este tipo de aparatos.

La formación de profesionales competentes en Ingeniería Eléctrica, con todos los atributos, competencias y capacidades indicados en el Objetivo del P.E. como lo son capacidad creativa, emprendedora, analítica, de liderazgo y trabajo en equipo, que realicen actividades de diseño, innovación, adaptación y transferencia de tecnologías para resolver problemas de su área solamente es posible si dicha formación tiene carácter integral. Para ello, se debe proporcionar al futuro ingeniero los elementos básicos necesarios para la interpretación ingenieril de los problemas que enfrente en el ejercicio de la profesión en el campo laboral.

En la asignatura de “*Mecánica de Fluidos y Termodinámica*” se ven conceptos que son necesarios en la formación del estudiante de Ingeniería Eléctrica como futuro profesional del área. Temas como lo son el comportamiento de fluidos en las áreas de hidro-estática e hidro-dinámica, la transferencia de la energía calorífica en fluidos a diferentes presiones, volúmenes y temperaturas otorgan la capacidad necesaria para comprender el

funcionamiento y la diferenciación de la gran diversidad de equipo utilizado en la generación y utilización de la energía eléctrica.

El conocimiento de las Unidades de las cantidades físicas y su cabal aplicación, el dominio de los modelos matemáticos, procedimientos, y la relación de todo ello con situaciones en escenarios reales o simulados, sitúa al estudiante en el esquema correcto para su formación como un profesional de la ingeniería eléctrica.

Otro aspecto que se desarrolla en la asignatura es el desarrollo de la habilidad del trabajo en equipo la cual se adquiere en las trabajos extra clase que deben cumplirse y evidenciarse a lo largo del curso en cada Unidad temática, lo que implica un gran aporte a la socialización y comportamiento ético.

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 1

Instituto Tecnológico de Chetumal
Subdirección Académica
Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Periodo: _

Nombre de la asignatura: **Mecánica de Fluidos y Termodinámica**

Plan de estudios: **Ingeniería Eléctrica**

Horas teoría–horas prácticas –créditos: **3 – 2 - 5**

1. Caracterización de la asignatura:	Aplica las leyes y principios fundamentales de la termodinámica y la mecánica de los fluidos para el diagnóstico de sistemas electromecánicos, que garanticen la solución de problemas de funcionamiento y eficiencia en las instalaciones que las utilicen. Esta materia se ubica en los primeros semestres y da sustento a las asignaturas de Centrales eléctrica, Instrumentación, control de máquinas eléctricas y control lógico programable.
2. Intención didáctica:	Se organiza el curso en cinco temas, en los cuales se desarrollan las leyes de la termodinámica y Mecánica de los fluidos con su aplicación en las centrales eléctricas de generación, la instrumentación y el control de las máquinas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 2

	empleando PLC, resaltando la importancia de conocer la física para que los alumnos sean capaces de hacer ingeniería en el marco de su contexto. En el primer tema se abordan los temas de hidrostática e hidrodinámica donde se ven los principios y leyes de Pascal, Arquímedes, Torricelli, ecuación de continuidad y de Bernoulli, así como flujo en tuberías, accesorios, bombas y turbinas. En el segundo tema se ve la introducción a la termodinámica, observando los diferentes tipos de energía y sus interrelaciones. En el tercer tema se ven los procesos y propiedades termodinámicas de los gases y del agua. En el cuarto tema se ven los temas de trabajo, energía y las leyes de conservación de la energía. En el quinto tema se ven los temas de la conversión de la energía en procesos de generación.
3. Competencia de la asignatura:	Aplica los conocimientos básicos de termodinámica y mecánica de los fluidos en el estudio, selección y aplicación de equipos mecánicos, máquinas eléctricas y accesorios para la generación y utilización de la energía eléctrica.

4.- Análisis por competencias específicas:

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 3

Competencia No.: 1

Descripción: Mecánica de Fluidos.

Aplica los principios de:

A.-La hidrostática

B.- La hidrodinámica en la solución de problemas para la aplicación de los modelos matemáticos que de ellos se derivan.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-prácticas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 4

1.1. Principio de Pascal. 1.2. Principio de Arquímedes. 1.3. Principio de Torricelli.	• Analizar lo establecido por los principios de Pascal, de Arquímedes y de Torricelli hasta lograr las conclusiones perseguidas. • Resolver problemas relacionados con el tema y analizar los resultados obtenidos. • Realizar investigación bibliográfica de los tipos de bombas y turbinas, así como la forma en que manejan la energía, efectuando un reporte detallado para su presentación en clase. • Proponer un banco de problemas de selección y cálculo de potencia en este tipo de máquinas.	1.- Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. 2.- Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. 3.- Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. 4.- Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Genéricas: • Capacidad de abstracción, análisis y síntesis • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica • Capacidad para organizar y planificar el tiempo • Capacidad de comunicación oral y escrita • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación. • Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajo en equipo. • Habilidades para buscar, procesar y analizar información	9 - 6
---	--	---	--	-------

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 5

			procedente de fuentes diversas	
Indicador de alcance		Valor del indicador		
A-La hidrostática		50%		

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007		Página 6

B.-La hidrodinámica en la solución de problemas para la aplicación de los modelos matemáticos que de ellos se derivan.	50%

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con su totalidad con las indicaciones de alcance	95-100
	Notable	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 85 y el 94 %.	85-94
	Bueno	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 75 y el 84 %.	75-84
	Suficiente	A y B con desempeño parcial	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos con el desempeño excelente	NA (No Alcanzada)

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Ejercicios	30	15	15				
Examen escrito	70	35	35				
TOTAL	100	50	50				

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 7

Competencia No.: 2

Descripción: Introducción a la Termodinámica

A. – Aplica los conceptos relativos a las propiedades térmicas de los gases y los modelos matemáticos que de ellos se derivan, para la solución de problemas de los diferentes tipos de energía.

Genéricas:

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-prácticas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 8

2.1. Formas de la energía utilizadas. 2.2. Energía, Entropía y Equilibrio. 2.3. Sistema Termodinámico. 2.4. Trabajo Termodinámico, energía cinética y energía potencial.	• Investigar las distintas formas de energía empleadas en procesos termodinámicos. • Investigar los conceptos de energía, entropía y equilibrio en los sistemas termodinámicos. • Investigar y realizar problemas relativo a trabajo termodinámico, energía cinética y energía potencial	1.- Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. 2.- Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. 3.- Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. 4.- Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	• Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica • Capacidad para organizar y planificar el tiempo • Capacidad de comunicación oral y escrita • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación. • Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. • Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajo en equipo.	9 - 6
---	--	---	---	--------------

Indicador de alcance	Valor del indicador
-----------------------------	----------------------------

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 9

A.-1.- Aplica los conceptos relativos a las propiedades térmicas de los gases y los modelos matemáticos que de ellos se derivan, para la solución de problemas de los diferentes tipos de energía.	100%

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con su totalidad con las indicaciones de alcance	95-100
	Notable	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 85 y el 94 %.	85-94
	Bueno	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 75 y el 84 %.	75-84
	Suficiente	A y B con desempeño parcial	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos con el desempeño excelente	NA (No Alcanzada)

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Ejercicios	30	30					
Examen Escrito	70	70					
Total	100	100					

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 10

4. Análisis por competencias específicas:

Competencia No.: 3

Descripción: Procesos y Propiedades Termodinámicas

1.- Aplica los modelos matemáticos derivados de las propiedades termodinámicas de los gases para entender los procesos de producción de energía eléctrica.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-prácticas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 11

3.1. Ecuaciones de estado de los gases ideales. 3.2. Energía Interna y Entalpía. 3.3. Entropía y las interrelaciones entre propiedades. 3.4. Ecuaciones de estado, diagramas y tablas que representan propiedades termodinámicas. 3.5. Procesos simples, trabajo y calor. 3.6. Interacciones, funciones de estado y funciones de camino. 3.7. Flujo de masa en un sistema abierto. 3.8. Propiedades termodinámicas del vapor de agua. 3.9. Diagramas de fases.	• Investigar y analizar las ecuaciones de estado de los gases ideales. • Investigar y analizar los conceptos de energía interna y entalpía, así como sus propiedades. • Investigar el concepto de entropía y sus propiedades. • Investigar las ecuaciones de estado, diagramas y tablas con propiedades térmicas. • Resolver problemas simples relativos a trabajo y calor. • Realizar los diagramas de fases.	1.- Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. 2.- Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. 3.- Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. 4.- Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	• Capacidad de abstracción, análisis y síntesis • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica • Capacidad para organizar y planificar el tiempo • Capacidad de comunicación oral y escrita • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación. • Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. • Habilidades interpersonales.	9 - 6 .
Indicador de alcance		Valor del indicador		

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007		Página 12

A.- 1.- Aplica los modelos matemáticos derivados de las propiedades termodinámicas de los gases para entender los procesos de producción de energía eléctrica.	100%
	100%

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con su totalidad con las indicaciones de alcance	95-100
	Notable	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 85 y el 94 %.	85-94
	Bueno	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 75 y el 84 %.	75-84
	Suficiente	A y B con desempeño parcial	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos con el desempeño excelente	NA (No Alcanzada)

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Ejercicios	30	30					
Examen Escrito	70	70					
Total	100	100					

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 13

5. Análisis por competencias específicas:

Competencia No.: 4

Descripción: Ecuaciones de la energía y de la entropía

- A.- Investiga, comprende y analiza la eficiencia de las máquinas térmicas
- B.- Comprende el concepto de entropía en los procesos irreversibles.
- C.- Los utiliza en la conservación del medio ambiente y el ahorro de energía.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-prácticas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 14

4.1. El trabajo en procesos complejos. 4.2. La ley de conservación de la energía y su ecuación. 4.3. Casos especiales de la ecuación de la energía. 4.4. Capacidades caloríficas a volumen constante y a presión constante. 4.5. Ecuación de la entropía. 4.6. Ciclo de Carnot. 4.7. Segunda ley de la termodinámica.	• Analizar el concepto de trabajo en los procesos complejos. • Investigar y analizar la ley de la conservación de la energía y sus casos especiales, resolviendo problemas simples. • Consultar fuentes de información para determinar capacidades caloríficas a volumen y presión constantes. • Investigar y analizar la ecuación de la entropía.	1.- Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. 2.- Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. 3.- Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. 4.- Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	• Capacidad de abstracción, análisis y síntesis • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica • Capacidad para organizar y planificar el tiempo • Capacidad de comunicación oral y escrita • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación. • Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.	9 - 6
--	---	--	---	-------

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 15

	• Investigar y analizar el ciclo de Carnot. • Analizar la segunda ley de la termodinámica y resolver problemas simples.		• Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajo en equipo. • Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.	
--	--	--	---	--

Indicador de alcance	Valor del indicador
A- Investiga, comprende y analiza la eficiencia de las máquinas térmicas	30%

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 16

B.- Comprende el concepto de entropía en los procesos irreversibles.	30%
C.- Los utiliza en la conservación del medio ambiente y el ahorro de energía.	40%

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con su totalidad con las indicaciones de alcance	95-100
	Notable	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 85 y el 94 %.	85-94
	Bueno	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 75 y el 84 %.	75-84
	Suficiente	A y B con desempeño parcial	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos con el desempeño excelente	NA (No Alcanzada)

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Ejercicios	30	10	10	10			
Examen Escrito	70	20	20	30			
Total	100	30	30	40			

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 17

1. Análisis por competencias específicas:

Competencia No.: 5

Descripción: Conversión de la energía

1.- Aplica los conceptos básicos de Termodinámica del Flujo, compresión y expansión de Fluidos para entender los procesos de generación de energía eléctrica.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica	Actividades de aprendizaje	Actividades de enseñanza	Desarrollo de competencias genéricas	Horas teórico-prácticas

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 18

5.1. Rendimientos de la conversión de la energía. 5.2. Trabajo producido al expandir vapor en una turbina. 5.3. Ciclo de Rankine sencillo y con recalentamiento. 5.4. Ciclo Rankine con regeneración. 5.5. Turbina de gas con ciclo abierto.	• Investigar el rendimiento en los procesos de conservación de la energía. • Analizar los conceptos de trabajo, rendimiento y ciclos de operación en las turbinas de vapor y de gas. • Analizar el trabajo producido al expandir vapor en las turbinas. • Investigar y analizar el ciclo de Rankine. • Investigar el funcionamiento de la turbina de gas con ciclo abierto. • Analizar los conceptos de conversión	1.- Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. 2.- Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. 3.- Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. 4.- Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Capacidad de abstracción, análisis y síntesis • Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica • Capacidad para organizar y planificar el tiempo • Capacidad de comunicación oral y escrita • Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación. • Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.	9 - 6
---	---	--	---	-------

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 19

	magnetohidrodinámica (MHD) e investigar sus aplicaciones en los procesos de generación de energía eléctrica.		• Habilidades interpersonales. • Capacidad de trabajo en equipo. • Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas	
--	--	--	--	--

Indicador de alcance	Valor del indicador
A.-Aplica los conceptos básicos de Termodinámica del Flujo, compresión y expansión de Fluidos para entender los procesos de generación de energía eléctrica.	100%

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007		Página 20

	100%

Niveles de desempeño:

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	Cumple con su totalidad con las indicaciones de alcance	95-100
	Notable	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 85 y el 94 %.	85-94
	Bueno	Cumple parcialmente con los indicadores de alcance, entre el 75 y el 84 %.	75-84
	Suficiente	A y B con desempeño parcial	70-74
Competencia no alcanzada	Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos con el desempeño excelente	NA (No Alcanzada)

Matriz de evaluación:

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Ejercicios	30	30					
Examen Escrito	70	70					
Total	100	100					

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales		Fecha: 22 noviembre 2022.
			Revisión: 4
	Sistema Integral de Gestión: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007	Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6	Página 21

1.-Fuentes de información y apoyos didácticos

Fuentes de información:	Apoyos didácticos:
1. Ortiz F. R. (2011) Hidráulica Generación de Energía. Ediciones de la U lta 2. Trueba C.S. (1984) .Hidráulica. CECSA 3. McNaughton K. (1987) Bombas. Selección, uso y mantenimiento. Mc Graw-Hill 4. Green R. W. (1992). Flujo de Fluidos en válvulas, accesorios y tuberías. (1ª. Ed.). McGraw-Hill 5. Balzhiser, R & Samuels, M. (1973) Termodinámica para Ingenieros. Prentice Hall International. 6. Fink D. and Beaty W.. (2012) Standard Handbook for Electrical Engineers. Mc. Graw-Hill Profesional 7. Sears F. W, Zemansky y; Young y Freedman, (2009) Física Universitaria Vol.1 (12ª. Ed.). Pearson	1 Pintarrón 1 Marcador para Pintarrón. 2 Borrador. 3 Laptop. 4 Cañón (Proyector). 5 Investigación por Internet. 6 Consulta de libros en la Biblioteca Institucional y Virtual. 7 Diversas Plataformas en Línea.

1. Calendarización de evaluación en semanas:

	Nombre del formato: Formato Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales											Fecha: 22 noviembre 2022.				
												Revisión: 4				
	Sistema Integral de Gestión: Referencia a la Norma: ISO 9001:2015 ISO 14001:2015 OSHAS 18001:2007 ISO 9001:2015 8.5.2, 8.5.6 , 8.6											Página 22				

Sermana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
TP				U1			U2			U3			U4			U5
TR																
SD																

Fecha de elaboración:

William Rivas Ruiz

Ing. David de J. Santillán Sanvicente

ÍNDICE

Unidad 1: Mecánica de Fluidos.....	1
1.1. Principio de Pascal.....	11
1.1.1 La prensa hidráulica o elevador hidráulico de Pascal.	13
1.2. Principio de Arquímedes.	17
1.3. Principio de Torricelli.	24
1.4. Caudal, Gasto y Flujo.....	24
1.5. Principio de Bernoulli.....	29
1.5.1 Ecuación del principio de Bernoulli	30
Unidad 2: Introducción a la Termodinámica	49
2.1. Formas de la energía utilizadas.....	49
2.2. Energía, Entropía y Equilibrio.	50
2.2.1 Energía.	50
2.2.2 Entropía.....	51
2.2.3 Equilibrio.	52
2.3. Sistema Termodinámico.....	52
2.3.1 Clasificación de los sistemas termodinámicos.	53
2.3.2 Las variables termodinámicas.	54
2.3.3 Clasificación básica de los procesos termodinámicos.	55
2.4 Trabajo termodinámico, energía cinética y energía potencial.....	64
Unidad 3: Procesos y Propiedades Termodinámicas.....	82
3.1. Ecuaciones de estado de los gases ideales.	82
3.1.1 Gas ideal.	82
3.1.2 El mol:	83
3.1.3 Valor numérico y unidades de la Constante Universal de los Gases Ideales.	85
3.2. Energía Interna y Entalpía.	90
3.2.1 Energía interna.....	90

3.2.2 Entalpía.....	90
3.3. Entropía y las interrelaciones entre propiedades.....	93
3.3.1 Entropía y temperatura.....	94
3.3.2 Entropía, volumen y presión.....	94
3.3.3 Procesos reversibles e irreversibles.....	94
3.4. Ecuaciones de estado, diagramas y tablas que representan propiedades termodinámicas.....	95
3.4.1 El Diagrama de Mollier del agua y su vapor.....	96
3.5. Procesos simples, trabajo y calor.....	100
3.6. Interacciones, funciones de estado y funciones de camino.....	105
3.6.1 Funciones de estado.....	105
3.6.2 Funciones de camino.....	106
3.7. Flujo de masa en un sistema abierto.....	107
3.8. Propiedades termodinámicas del vapor de agua.....	111
3.9. Diagramas de fases.....	112
Unidad 4: Energía y Entropía.....	115
4.1. El trabajo en procesos complejos. (Procesos consecutivos y Ciclo termodinámico).....	115
4.1.1 Procesos adiabáticos.....	118
4.1.2 Cambio de la energía interna (ΔU) y de la entalpía (ΔH) en los procesos adiabáticos.....	120
4.1.3 Cambio de la entalpía en un proceso adiabático.....	120
4.1.4 Coeficiente adiabático de un gas ideal.....	120
4.1.5 Ecuaciones del Trabajo en un proceso adiabático.....	121
4.1.6 Ciclo termodinámico.....	125
4.2. La ley de conservación de la energía y su ecuación.....	132
4.2.1 Relación con la primera ley de la termodinámica.....	133
4.3. Casos especiales de la ecuación de la energía.....	133

4.3.1 Ecuación del incremento energía en termodinámica.	134
4.3.2 Sistemas abiertos.	135
4.4. Capacidades caloríficas a volumen constante y a presión constante.	137
4.4.1 Capacidad calorífica de los gases ideales.	137
4.5. Ecuación de la entropía.	141
4.5.1 Ecuación de la entropía en procesos isotérmicos.	141
4.5.2 Ecuación de la entropía en procesos isobáricos.	143
4.5.3 Ecuación de la entropía en procesos isocóricos.	144
4.5.4 Ecuación de la entropía en procesos adiabáticos irreversibles.	144
4.5.5 Máquinas térmicas.	145
4.5.6 Bombas de calor.	147
4.5.8 El Ciclo de Carnot.	150
4.6. Segunda ley de la termodinámica.	155
Unidad 5: Conversión de la Energía.	165
5.1. Rendimientos de la conversión de la energía.	165
5.2. Trabajo producido al expandir vapor en una turbina.	167
5.2.1 Turbina de vapor.	167
5.2.2 Trabajo producido al expandirse el vapor en la turbina.	168
5.3. Ciclo de Rankine sencillo y con recalentamiento.	170
5.3.1 Ciclo de Rankine sencillo o simple.	170
5.3.2 Ciclo Rankin con recalentamiento.	180
5.4. Ciclo Rankine con regeneración.	187
5.5. Turbina de gas con ciclo abierto.	203

INTRODUCCIÓN.

Entender el comportamiento de los fluidos líquidos y gaseosos a la luz de los modelos y leyes de la *Mecánica de Fluidos* y los procesos de transferencia de la energía calorífica según los principios de la *Termodinámica*, es de fundamental importancia para los Ingenieros Eléctricos desde su formación como estudiantes de Ingeniería.

La generación de electricidad en plantas termoeléctricas, de gas, geotérmicas, etc., utiliza procesos en los que el calor de combustibles que calienta los fluidos, es transferido de diferentes formas para la obtención de energía eléctrica haciendo girar turbinas que conviertan la energía del calor en mecánica y finalmente, con generadores acoplados, a electricidad.

No obstante que la Mecánica de Fluidos es una rama muy amplia de la Física y que en esta Asignatura se la dedica solo la primera Unidad, se abordan los principios fundamentales y necesarios para posteriormente, en las unidades posteriores pueda facilitarse la comprensión y aplicación de las leyes termodinámicas en los procesos en los que interviene la dinámica del calor.

En el contenido del curso se abordan algunos conceptos previos que se tratan en cursos básicos de Física y Química y se aplican en los temas tratados. Se recomienda, si fuera necesario, la consulta de estos tópicos para tener más fluidez en el avance de la materia.

Aunque el nivel de complejidad del curso no es elevado, es indispensable que los estudiantes asignen el tiempo suficiente a la consulta y repaso de los temas vistos principalmente aquellos que tienen relación con conceptos previos y a la vez se aplican en apartados posteriores.

La resolución de problemas es usada como herramienta para la explicación de conceptos en algunos de los temas, pues es una muy buena estrategia para la presentación y aplicación de modelos y principios en algunas de los puntos que incluye el temario.

Como en toda asignatura de Física, la práctica adquirida a través de la resolución de ejercicios y el análisis de ejemplos resueltos es importante para familiarizarse con las ecuaciones y procedimientos utilizados en los diferentes temas.

Existe gran amplitud de fuentes de consulta para las disciplinas de Mecánica de Fluidos y de Termodinámica disponibles en la literatura e Internet, por lo que se debe tener cuidado en la selección de éstas de manera tal que se ajusten de la mejor manera al enfoque y nivel de este curso.

William Rivas Ruiz.

Unidad 1: Mecánica de Fluidos.

Los fluidos son sustancias que tienen una característica muy propia: la de fluir, ya sea en ductos cerrados como tuberías o abiertos como son los canales. Pueden ser *líquidos o gases* y son capaces de tomar la forma del recipiente que los contiene.

La **Mecánica de Fluidos**, por su parte, es la rama de la Mecánica que estudia el comportamiento de los fluidos, en cualquiera de sus estados, así como las fuerzas que actúan sobre ellos.

Características físicas de los Fluidos.

- *Densidad.* Es la medida física de la cantidad de materia por unidad de volumen. En unidades del SI se expresa en kg/m^3 .
- *Viscosidad.* Es la resistencia de los fluidos a la fluidez. Una sustancia como la miel que es muy viscosa, fluirá mucho más lento que el alcohol o el agua que tienen baja densidad.
- *Presión.* Es la fuerza que la masa de un fluido ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene o en los cuerpos que se encuentren sumergidos en él.
- *Volumen.* Es el espacio que el fluido ocupa en una región determinada.
- *Tensión superficial* es una propiedad física de los líquidos que se caracteriza por la resistencia que sus superficies oponen a cualquier aumento de su área.
- *Capilaridad.* Es una fuerza de cohesión intermolecular de los fluidos, les permite subir por un capilar en contra de la gravedad, ya que la atracción entre sus partículas es mucho mayor a la atracción de sus partículas por el material del tubo. Esto es una consecuencia, en parte de la tensión superficial.

Clasificación de los fluidos:

1. **Fluidos newtonianos.** Son los de viscosidad constante, ésta no varía independientemente de la fuerza se le aplique al fluido y obedecen las leyes de la mecánica newtoniana . Como ejemplo podemos citar el aceite y el agua que se comportan como fluidos newtonianos.
2. **Fluidos no newtonianos.** Son un tipo intermedio entre fluido y sólido, Este tipo de fluido no solo depende de su temperatura pues su viscosidad varía con ella, sino también de las fuerzas que se apliquen en él: si se los somete repentinamente a una fuerza, se comportarán como un sólido.
3. **Superfluidos.** Conocidos como “fluidos perfectos”, carecen de viscosidad, pueden fluir ante fuerza aplicada por menor que ésta sea, sin ofrecer resistencia por fricción. El helio es un ejemplo de un superfluido a temperaturas muy bajas.

Nota: Se recomienda elaborar rúbrica para encargar trabajo extra clase de los estudiantes sobre las características físicas y clasificación de los fluidos.

El abc de la Mecánica de Fluidos, por decirlo de una forma coloquial, son los Principios de Pascal, de Arquímedes y de Torricelli. Esta unidad está enfocada precisamente a estos tres principios o leyes. Aunque la Mecánica de Fluidos es una rama de la Física muy amplia, estos principios constituyen una buena base para la comprensión del comportamiento de los fluidos en aplicaciones ingenieriles y un buen punto de inicio para profundizar en esta disciplina si en el futuro fuera el caso.

Hidrostática e hidrodinámica.

La hidrostática, en la mecánica de fluidos, estudia el estado de equilibrio, es decir, cuando no existen fuerzas que modifiquen su posición. Los principios fundamentales que dan

soporte al estudio de la hidrostática son el de Pascal y el de Arquímedes que más adelante veremos a detalle.

La hidrodinámica se encarga, como su nombre lo indica, de los fluidos en movimiento.

Aunque, la hidrodinámica es la dinámica del agua, también abarca el estudio de otros fluidos y se consideran variables como la velocidad, presión, flujo y gasto del fluido. La hidrodinámica considera tres suposiciones importantes:

1.- El fluido es un líquido incompresible, su densidad no varía con la presión, como ocurre con los gases.

2.- La pérdida de energía por la viscosidad es insignificante durante el tránsito del fluido, esta pérdida es mucho menor en relación con la inercia de su movimiento.

3.- Se supone que el flujo de los líquidos es en régimen estable, que la velocidad del líquido en un punto no cambia con tiempo.

Las leyes básicas de la hidrodinámica se manifiestan en los principios de Torricelli y de Bernoulli, que también trataremos en esta unidad.

El concepto de Presión (P).

Para abordar el tema del principio de Pascal y en general la mecánica de fluidos, es indispensable primero comprender cabalmente lo que debe entenderse por *presión* en el ámbito de la física clásica.

En temas anteriores asumimos que las fuerzas aplicadas a cuerpos, se hace de manera puntual, es decir, el vector tiene su origen en un *punto* de aplicación. Sin embargo, cuando se trata de presión, se interpreta ésta como una fuerza, ya no aplicada en un punto, sino distribuida uniformemente en una superficie, de aquí que, la presión es la fuerza aplicada por unidad de área de dicha superficie.

Unidades de presión.

Dada su definición, las unidades de presión en el Sistema Internacional son Newtons por metro cuadrado (N / m^2). Esta unidad de presión recibe el nombre de *Pascal (Pa)*, en justo reconocimiento al físico francés *Blaise Pascal*, que es cuando una fuerza de un Newton se aplica uniformemente distribuida en un área de un metro cuadrado.

Existen también otras formas de expresar la presión, diferentes al Pascal que comúnmente son utilizadas según sea el campo de aplicación de la lectura como pueden ser, la presión atmosférica, la presión sanguínea, etc.

En las diversas fuentes de consulta tenemos disponibles tablas de unidades de presión de diferente amplitud que incluyen los modos más usuales de expresarla y sus respectivos factores de conversión.

Ecuación de presión. Matemáticamente la Presión P , de acuerdo a su definición, en términos del SI es:

$$P = F / A$$

Donde: P – Presión en Pascales.

F – Fuerza aplicada a la superficie en Newtons.

A – Área de la superficie en m^2

La Tabla 1.1 muestra las unidades más comúnmente utilizadas para expresar la presión con los factores de conversión.

Tabla 1.1

Tabla de conversión de unidades de presión de uso más común (construcción propia).

	psi <i>libras / pulg²</i>	atm <i>atmósfera</i>	Kg/ cm² <i>Kilogramo/ cm²</i>	cm ca. <i>cms de columna agua</i>	mmHg <i>cms de columna mercurio</i>	bar <i>bares</i>	Pa <i>Pascal</i>
psi	1	0.0680	0.0703	70.31	51.72	0.0689	7.142
atm	14.7	1	1.033	1033	760	1.0131	1.013×10^5
Kg/cm²	14.22	0.9678	1	1,000	735.6	0.98	98.1
cm ca.	0.0142	0.00096	0.0010	1	0.7355	0.0009	100
mm Hg	0.0193	0.0013	0.0013	0.0013	1	0.0013	133
bar	14.5	0.987	1.02	1024	750	1	10^5
Pa	1.4 $\times 10^{-4}$	0.987 $\times 10^{-5}$	0.102 $\times 10^{-4}$	0.01	0.0075	10^{-5}	1

Presión atmosférica (P_0).

Los gases atmosféricos tienen su propio peso y éste es soportado por la superficie del planeta debido a la gravedad. Este peso expresado por unidad de superficie es la llamada presión atmosférica también conocida como presión barométrica y se denota comúnmente como P_0 y representa al peso de la columna de aire desde un punto cualquiera de la superficie terrestre, hasta el límite superior de la atmósfera.

Las experiencias y experimentos del físico italiano Evangelista Torricelli sobre el tema, fueron aprovechadas por el genio francés Blaise Pascal (1623-1662), para medir el peso del aire atmosférico en distintos puntos geográficos con diferentes altitudes y por último, en 1654, los experimentos del físico alemán Otto von Guericke (1602-1686), demostraron

definitivamente que la presión atmosférica existía y debía ser tomada en cuenta en los estudios relativos a la presión.

Unidades de la presión atmosférica.

Como la presión atmosférica es una presión, se mide, según el Sistema Internacional de Unidades (SI) en Pascales (Pa).

Se suele emplear otras unidades, como las atmósferas (atm), bares (bar), milibares (mbar) o milímetros de mercurio (mmHg).

A continuación, un muy breve comentario del significado de cada una de estas medidas.

- **1 atmósfera** es la presión del aire equivalente a 760 mm de mercurio en sobre la superficie terrestre y es igual a 101,300 Pa (1.013×10^5 Pa).
- **1 bar** igual a 0,986923 atm (10,000 Pa).
- **1 milibar** es una milésima de bar (100 Pa), 0.0010197 atm.)
- **1 milímetro de mercurio:** presión necesaria para aumentar la altura, un milímetro de mercurio, en un tubo de Torricelli. Es equivalente a 133,3 Pa.

La presión atmosférica se mide con un barómetro, que utiliza una columna de líquido (usualmente mercurio) introducida en un tubo de Torricelli, cuyo principio se ilustra en la Figura 1.1

¿En qué consistió el experimento de Torricelli para medir la presión atmosférica?

Basado en el artículo:

<https://www.ingenierizando.com/mecanica-de-fluidos/experimento-de-torricelli/>

. El experimento que realizó en 1643 Torricelli (1608-1647), consistía en medir la presión atmosférica mediante un tubo de mercurio.

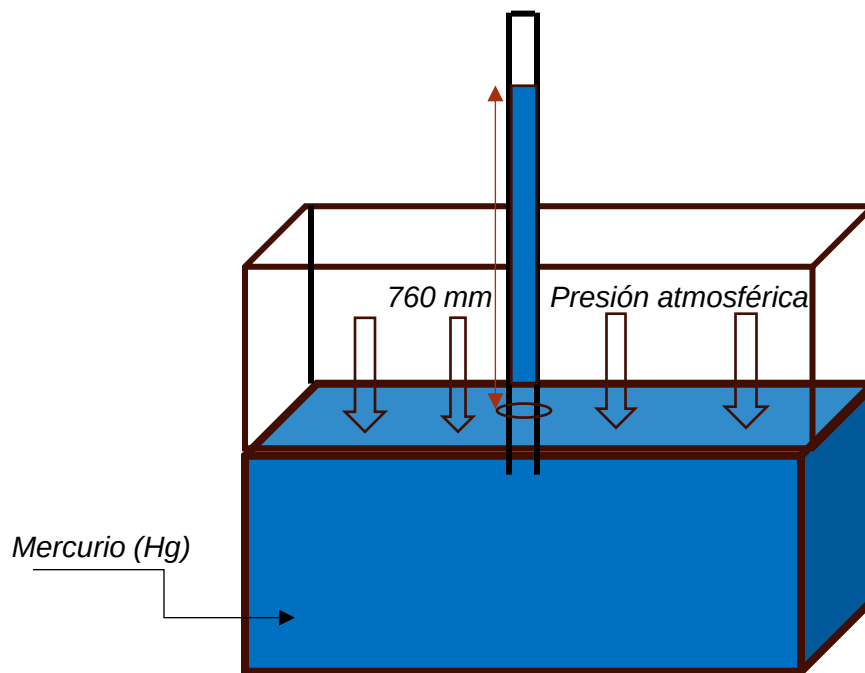
Torricelli llenó de mercurio un tubo de 1 m de longitud por completo, dicho tubo estaba cerrado por uno de sus extremos. Luego, invirtió el tubo sobre un recipiente abierto lleno de mercurio de manera que el extremo cerrado del tubo quedaba arriba fuera del recipiente y el extremo abierto estaba dentro del recipiente.

En teoría, al poner boca abajo el tubo, todo el líquido debería ser vertido al recipiente grande pero, sorprendentemente, el tubo no se vació, sino que la columna de mercurio solamente bajo unos centímetros. La altura final de la columna de mercurio era de 0,76 m, o equivalentemente, 760 mm.

Figura 1.1

*Figura ilustrativa del experimento de Torricelli para la medición de la presión atmosférica.
(Construcción propia.)*

—



Esto se debe a la presión atmosférica. La presión que el aire ejercía a la superficie del mercurio era mayor que presión que hacía el mercurio hacia el aire, por lo tanto, el mercurio en contacto con el aire no podía subir más, en consecuencia, la columna de mercurio del interior del tubo tampoco podía bajar más.

A partir de este experimento se adoptó el milímetro de mercurio como una nueva unidad de presión. De este modo, la presión atmosférica equivalía a 760 milímetros de mercurio (760 mmHg).

Posteriormente, Pascal repitió la misma experiencia, pero a diferentes alturas de una montaña y halló que el resultado del experimento de Torricelli variaba en función de la altura a la que se realizaba el ensayo. Lo que significa que la presión atmosférica también depende la altitud: cuanta más altura, menor es la presión que ejerce el aire.

Conclusiones del experimento de Torricelli para medir P_0

- Se demuestra la existencia de la presión atmosférica
- El valor de la presión atmosférica de 760 mmHg (101,325 Pa. aprox.).
- Se estableció una nueva forma de medida de presión: el milímetro de mercurio. Un milímetro de mercurio es equivalente a 133,322 Pa.
- La altura de la columna de mercurio del experimento de Torricelli depende de la altura sobre el nivel del mar en la que se hace la prueba.
- El experimento sirvió para enseñar cómo se puede generar el vacío, pues en el espacio que se generó en el tubo cerrado cuando la altura de mercurio bajó no había nada, es decir, era el vacío.

Presión en el fondo de una columna de fluido.

Cuando un fluido está en reposo y nos referimos a una columna de dicho fluido como en la Figura 1.2, entonces la presión en el fondo de la columna debida al peso, llamada *presión manométrica* está dada por la ecuación:

$$P_{man} = \rho \cdot g \cdot h$$

Donde: P_{man} – Presión manométrica.

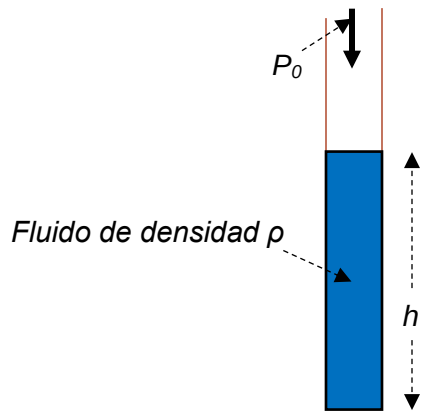
ρ – densidad del fluido.

g – aceleración de la gravedad.

h – altura de la columna del fluido.

Figura 1.2

Presión en una columna de fluido (Construcción propia.)



Presión absoluta.

Por otro lado, si la columna de fluido está abierta a la atmósfera entonces la presión en el fondo, llamada *presión absoluta*, debe considerar adicionalmente la presión atmosférica.

$$P_{abs} = P_0 + P_{man}$$

Ejemplo 1.1: Una sonda submarina se sumerge a una profundidad de 350 m. ¿Cuáles son las presiones manométrica y absoluta en la superficie de la sonda? Asílmase que la densidad del agua de mar es de 1,030 kg/m³

Resolución:

Según la ecuación de la presión manométrica:

$$P_{man} = \rho \cdot g \cdot h$$

Sustituyendo:

$$P_{man} = (1,030 \text{ kg/m}^3) \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (350 \text{ m}) = 3'536,505 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Por lo que la presión absoluta será:

$$P_{abs} = P_0 + P_{man} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} + 3'536,505 \text{ Pa} = 3'637,805 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.2 Se requiere bombear agua a una altura de 12 m desde el nivel de una bomba de pistón instalada para tal efecto. Sabiendo que el diámetro del pistón es de 10 cm ¿qué fuerza se requerirá para el bombeo?

Resolución:

$$F = P \times A = (\rho \cdot g \cdot h) \times (\pi \cdot r^2)$$

$$F = (1,000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ m}) \times [\pi \cdot (0.05 \text{ m})^2]$$

$$F = 924.57.07 \text{ N} \quad \checkmark$$

1.1. Principio de Pascal.

Es una ley que formulada por el físico y matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662) que dice:

"El incremento de la presión ejercida sobre un fluido incompresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con el mismo valor en todas direcciones, en todos los puntos del fluido y en cada una de las partes que tenga el recipiente."

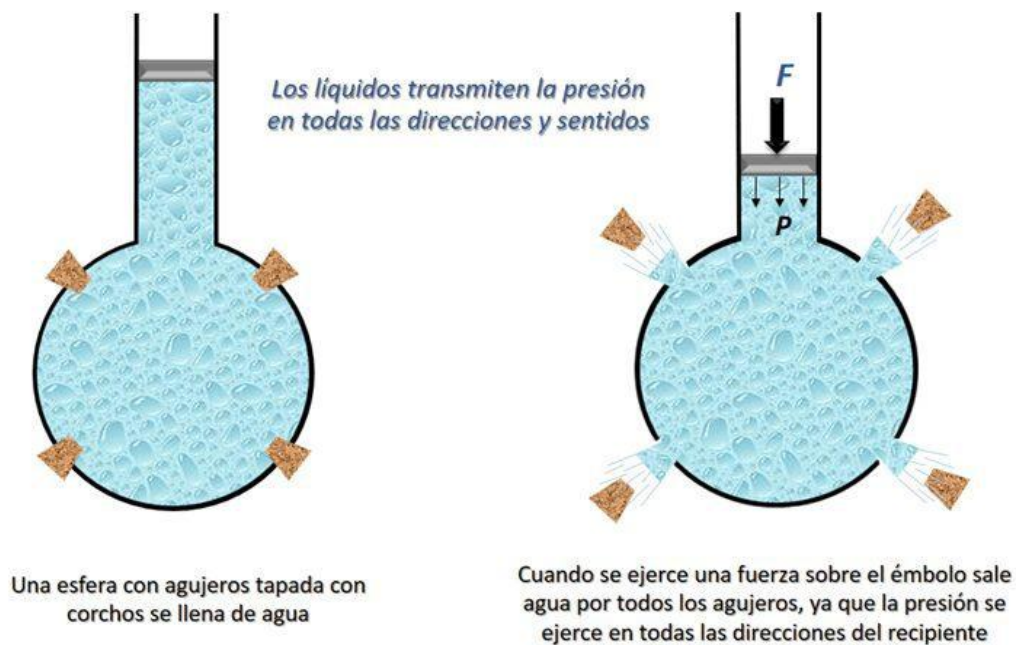
Para demostrar este principio, Pascal utilizó una esfera o balón de vidrio rígido lleno de líquido, en el que practicó diversos orificios y estaba provisto de un émbolo como se muestra en la Figura 1.3. A través del émbolo se ejerce una fuerza F lo que hace incrementar en un mismo valor, la presión en toda la superficie interna del recipiente.

Esta Ley tiene aplicaciones muy diversas en la vida cotidiana, la tecnología y proyectos de ingeniería, sobre todo en el diseño de equipos y sistemas hidráulicos.

Figura 1.3

Esquema del Balón de Pascal con el que demostró el Principio que lleva su nombre.

Referencia de la Figura: <https://citeia.com/wp-content/uploads/2021/04/image-61.jpg>



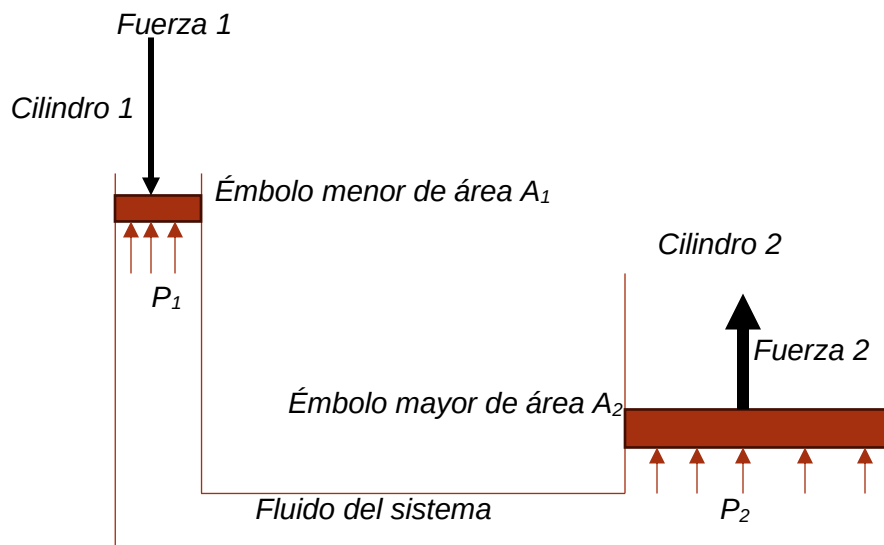
1.1.1 La prensa hidráulica o elevador hidráulico de Pascal.

Una de las aplicaciones más comunes y conocidas del principio de Pascal, es sin duda el llamado elevador hidráulico en sus más variadas versiones, que puede ser desde un simple gato hidráulico de un pequeño automóvil hasta los elevadores utilizados para levantar objetos con el peso de varias toneladas y es aquí donde se hace necesaria la correcta diferenciación de los conceptos de fuerza y presión, comentada anteriormente.

La configuración básica de un elevador hidráulico consiste en dos cilindros provistos de sendos émbolos, uno de área menor y otro de área mayor interconectados entre sí de tal manera que existe libre tránsito de un fluido que llena completamente el sistema formado por los dos cilindros y la interconexión entre ellos como se representa esquemáticamente en la Figura 1.4.

Figura 1.4

Esquema del elevador hidráulico. Principio de Pascal (construcción propia).



Al aplicar la fuerza F_1 en el émbolo menor, se desarrolla un incremento de la presión P_1 que, según el principio de Pascal se transmite por igual a todas las paredes del sistema incluyendo el émbolo mayor, por lo que el incremento de la presión P_2 es igual a P_1 , esto puede escribirse:

$$P_1 = P_2$$

Como la presión es $P = F / A$

Entonces: $F_1 / A_1 = F_2 / A_2$

O bien: $F_1 / F_2 = A_1 / A_2$

Estas dos últimas expresiones relacionan las fuerzas y las áreas presentes en cada émbolo de un elevador hidráulico y es una consecuencia directa del principio de Pascal.

Al ser la presión fuerza por unidad de área, en el émbolo del cilindro 2, se desarrollará una fuerza mayor que la aplicada en el émbolo 1 dado que su área es mayor.

Ejemplo 1.3: Un taller mecánico cuenta con un elevador hidráulico que opera con aceite como fluido de trabajo y los émbolos del mismo son de 4 y 10 cm de radio. La fuerza se aplica en el cilindro de menor radio mediante aire comprimido a) ¿Qué fuerza será necesario aplicar en el émbolo menor para elevar un vehículo de 1,500 kg?, b) ¿cuál será la carrera del émbolo pequeño si se necesita levantar el vehículo 1.0 m?

Resolución:

a)- Fuerza necesaria en émbolo menor...

Cálculo de las áreas de los émbolos:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi (0.04 \text{ m})^2 = 5.026 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi (0.10 \text{ m})^2 = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Aplicando la ecuación:

$$F_1 / F_2 = A_1 / A_2$$

$$F_1 / (1,500 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2) = 5.026 \times 10^{-3} \text{ m}^2 / 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$F_1 = 2,354.14 \text{ N} \quad \checkmark$$

b) carrera del émbolo pequeño...

El volumen de fluido desalojado en el cilindro de menor diámetro al desplazarse el pistón, se transfiere al de mayor. Si el vehículo debe subir 1.5 m se deben transferir, según la fórmula de volumen del cilindro aplicada al cilindro mayor:

$$V = \pi r_2^2 h = \pi (0.10 \text{ m})^2 (1.0 \text{ m}) = 3.141 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

Para enviar ese volumen de fluido, el émbolo menor debe desplazarse:

$$V = \pi r_1^2 h$$

$$3.141 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = \pi (0.04 \text{ m})^2 h$$

$$h = 6.24 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.4 (15.11 Serway): El resorte del medidor de presión que la Figura 1.5 es de constante de fuerza $k = 1,000 \text{ N/m}$ y el diámetro del pistón es de 2 cm. Determine a qué profundidad en el agua el resorte se comprimirá medio centímetro.

Resolución:

La fuerza necesaria para comprimir 0.05 cm el resorte es:

$$F = k \times L = 1,000 \text{ N} \times 0.005 \text{ m} = 5 \text{ N}$$

El área del pistón de 2 cm de diámetro es:

$$A = \pi d^2 / 4 = \pi (0.02 \text{ m})^2 / 4 = \pi \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Como $F = P \times A$, la presión requerida será:

$$P = F / A = 5 \text{ N} / (\pi \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Con la ecuación: $P_{\text{man}} = \rho \cdot g \cdot h$

obtenemos la profundidad a la que se logra la presión necesaria.

$$1.6 \times 10^4 \text{ Pa} = (1,000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) \times h$$

$$h = 1.62 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.5: Considere un elevador hidráulico cuyo plato mayor tiene un diámetro que duplica el del plato menor. Sobre el plato menor se coloca un objeto de 30 kg. ¿Qué masa debe colocarse sobre el mayor para equilibrar el elevador?

Resolución:

La ecuación de equilibrio es:

$$F_1 / A_1 = F_2 / A_2$$

$$(m_1 \cdot g) / A_1 = (m_2 \cdot g) / A_2$$

$$m_1 / A_1 = m_2 / A_2$$

$$m_1 / \pi \cdot r_1^2 = m_2 / \pi \cdot (2r_1)^2$$

$$m_1 / r_1^2 = m_2 / (2r_1)^2$$

$$m_1 = m_2 / (4)$$

$$m_2 = 4 \cdot m_1$$

$$m_2 = 4 \cdot 30 \text{ Kg} = 120 \text{ kg} \quad \checkmark$$

1.2. Principio de Arquímedes.

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) Ingeniero, inventor, matemático y físico quien hizo grandes aportes al desarrollo de las matemáticas y la física como ciencias, nacido en la ciudad de Siracusa, Sicilia cuando la isla era territorio griego. Se le considera uno de los genios más importantes de la matemática de la Antigüedad, a la par de Apolonio y Euclides.

El principio de Arquímedes representa uno de los legados más importantes al estudio del comportamiento de los fluidos en el área de la hidrostática. Se dice que Arquímedes dedujo este principio debido a que el Rey Hierón le encargó averiguar si la corona que había mandado a fabricar con un artesano era de oro puro o contenía algún otro metal. Simplemente sumergió la corona en agua y midió el volumen desalojado de fluido. Con el peso de la corona y la densidad conocida del oro pudo sacar de dudas al desconfiado rey.

El principio de Arquímedes establece que:

“Cuando un objeto se sumerge parcial o totalmente en un fluido, experimenta una fuerza vertical hacia arriba llamada *empuje (E)* que es equivalente al peso del volumen de fluido desplazado.” Este principio nos lleva a entender porqué unos cuerpos se hunden y otros flotan cuando son colocados en algún fluido, ya sea líquido o gaseoso.

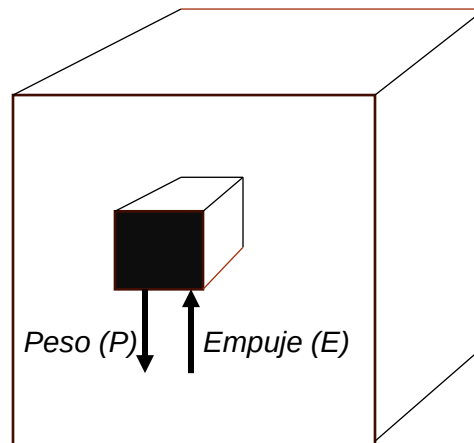
Lo anterior nos lleva a poner atención a las variables: densidad del fluido, densidad del material del objeto, volumen total del objeto, volumen del objeto que queda sumergido (total o parcial), volumen del fluido desplazado y peso del objeto. Además, debe considerarse, si fuera el caso, de que el objeto sumergido tenga espacios huecos que no aportan peso al objeto, pero sí volumen. También es necesario considerar la aceleración de la gravedad.

Explicación del Principio de Arquímedes.

Consideremos una parte del volumen de un fluido en el seno de un contenido mayor que está estático, como muestra la Figura 1.5

Figura 1.5

Principio de Arquímedes (Construcción propia.)



Esta porción del volumen total está en equilibrio en la posición en que se encuentra, por lo que su peso $mg = \rho Vg$ debe ser contrarrestado por una fuerza vertical hacia arriba equivalente. Dicha parte del volumen desplaza cualquier otra porción del fluido igual que

podiera ocupar ese espacio. Ahora imaginemos que ese espacio es ocupado por un material diferente al resto del fluido original, entonces también este material diferente experimentaría una fuerza vertical hacia arriba igual al volumen de fluido que desplaza.

Del razonamiento anterior, se deduce que, si el peso del material diferente es menor al del fluido desplazado, éste flotará en la superficie y, consecuentemente, si es mayor, se hundirá hasta tocar fondo. Si el peso del fluido desplazado es igual al peso del objeto, entonces éste permanecerá en equilibrio totalmente sumergido en el seno del fluido rasando con la superficie o en cualquier profundidad. La ecuación de equilibrio de un cuerpo que flota en un fluido es, por lo tanto:

$$P = E$$

Donde:

P – Peso de la porción sumergida del cuerpo.

E – Fuerza de empuje.

Como E es equivalente al peso del volumen de fluido desplazado:

$$E = m \cdot g = \rho_f V_f \cdot g$$

Donde:

ρ_f - Densidad del fluido.

V_f – Volumen de fluido desplazado

g – Aceleración de la gravedad

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, si el objeto contara con espacios interiores huecos sin masa, entonces dejará de hundirse una vez que se haya desplazado tanto fluido que el peso de éste iguale el peso del objeto. Queda claro entonces que las

densidades tanto del fluido como del objeto que se sumerge desempeñan un papel importante en el fenómeno físico descrito y es la base del principio de Arquímedes.

Peso aparente de un objeto. Es el peso real del objeto menos la fuerza de empuje al estar sumergido parcial o totalmente en un fluido. Es por esta razón que los cuerpos aparentemente pesan menos al sumergirse en algún fluido.

Ejemplo 1.6: Una esfera maciza que pesa 16 N se deposita en un fluido y un tercio de su volumen queda fuera de éste. Sabemos que cada litro del fluido pesa 7.8 N ¿Cuál es el diámetro de la esfera?

La esfera flota, lo tanto la fuerza de empuje E es igual al peso de la esfera...

$$E = 16 \text{ N}$$

La fuerza de empuje E equivale al peso del volumen de fluido desplazado, que es 2/3 del volumen total de la esfera:

$$E = [(2/3) \cdot V \text{ lt}] [7.8 \text{ N/lt}] = (V \cdot 5.2) \text{ N}$$

Entonces, el volumen total de la esfera se puede calcular así:

$$V \cdot 5.2 \text{ N} = 16 \text{ N}$$

$$V = 3.077 \text{ lt}$$

Cálculo del diámetro de la esfera:

$$V = 3.077 \text{ lt} = 3.077 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Fórmula del volumen de una esfera:

$$V = (4/3)\pi \cdot r^3$$

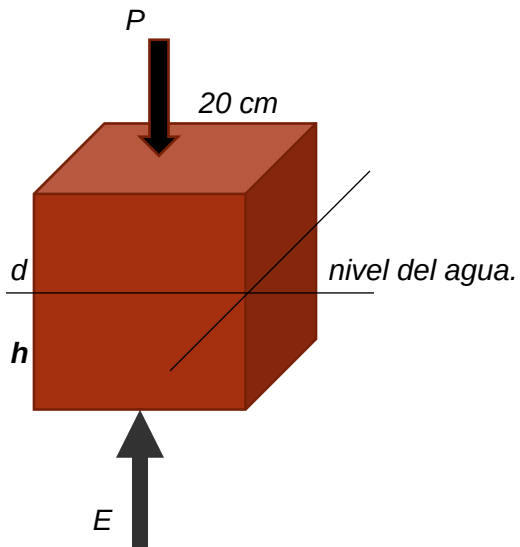
$$3.077 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = (4/3) \pi \cdot r^3 \quad r^3 = 0.734 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$r = 0.090 \text{ m.} \quad \text{Diámetro: } 0.180 \text{ m} = 18 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.7 Serway 15.27): Un cubo macizo de madera de 20 cm de arista y con una densidad de $0.65 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ se deposita en el agua y flota, como se muestra en la Figura 1.6 ¿Cuál será la distancia d , desde la parte superior del cubo hasta el nivel del agua?

Figura 1.6

Ejemplo 1.7 Cubo macizo de madera (construcción propia.)



Fuerza de Empuje E = Peso del Volumen desplazado de agua debido al Volumen sumergido de madera = Peso total del cubo

$$E = W \text{ (del agua desplazada)} = \rho \cdot V \cdot g = (1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) [0.2^2 \cdot h] \text{ m}^3 (9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$E = (392.4) \cdot h \text{ N} \uparrow \quad (\text{en términos de } h)$$

Tenemos que la fuerza de empuje E equilibra al peso del cubo, entonces:

$$(392.4) \cdot h \text{ N} = 0.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot (0.2)^3 \text{ m}^3 (9.81 \text{ m/s}^2) ; h = 0.13 \text{ m}$$

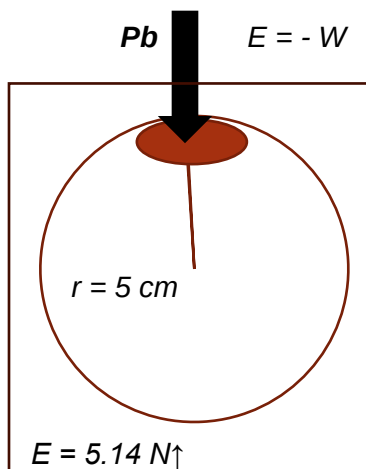
$$\text{Por lo tanto: } d = 0.20 \text{ m} - 0.13 \text{ m} = 0.07 \text{ m} = 7 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Nota: obsérvese que se utilizan las dos densidades: del fluido (agua) y del objeto (madera).

Ejemplo 1.8 (29-15 Serway): Con una masa de 100 gr y 10 cm de diámetro, una esfera delgada que cuenta con una tapa superior para introducir balines de plomo de un gramo de masa como se muestra en la Figura 1.7. ¿Qué cantidad mínima de balines se deben introducir a la esfera para hundirla en agua?

Figura 1.7

Ejemplo 1.8: Esfera hueca. (Construcción propia.)



$E = -W$ (los signos toman en cuenta el sentido de los vectores E y W)

$$E = -(\text{peso del agua desplazada}) = -W$$

$$V = (4/3)\pi r^3 \text{ volumen de la esfera}$$

$$E = -\rho V g = - (1 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3) (4/3)\pi (0.05 \text{ m})^3 (-9.81 \text{ m/s}^2)$$

Peso del objeto: $W = \text{esfera} + P_b$

$$5.14 = - (0.100 \text{ kg} + P_b)(-9.81) \dots (E = - W)$$

$P_b = 424 \text{ gr de Pb se deben agregar.}$ ✓

Ejemplo 1.9: Un objeto se hunde totalmente cuando es arrojado al agua. Dentro del fluido tiene un peso aparente de 30 N. Si la masa del objeto es de 5 kg a) ¿cuál es la fuerza de empuje y b) ¿cuál es su volumen?

Resolución:

a)- Cálculo del empuje E

$$P_{\text{real}} = m \times g = 5 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 49.05 \text{ N}$$

$$\text{Entonces: } E = P - P_{\text{aparente}} = 49.05 \text{ N} - 30 \text{ N} = 19.05 \text{ N}$$
 ✓

b) - Cálculo del volumen de desplazamiento:

$E = \text{peso del volumen desplazado de agua } 19.05 \text{ N} = \text{peso de } x \text{ Litros de agua desplazados}$

Aplicando la regla de tres al volumen del agua:

$$1 \text{ lt} \text{ ----- } 9.81 \text{ N}$$

$$x \text{ lts} \text{ ---} 19.05 \text{ N}$$

$$x = (1 \text{ lt} \times 19.05 \text{ N}) / 9.81 \text{ N} =$$

Volumen desplazado = 1.94 Litros

Por lo tanto, el Volumen del objeto = 1.94 lts ✓

1.3. Principio de Torricelli.

Ver Anexo I: presentación en PowerPoint Link: [El Principio de Torricelli](#)

1.4. Caudal, Gasto y Flujo.

Son tres conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos, específicamente en hidrodinámica. Al circular un fluido por un conducto ya sea cerrado o abierto. A continuación, se detallan ambos.

Caudal (Q).

En la Mecánica de fluidos, **caudal** es la cantidad de fluido en términos de *volumen por unidad de tiempo* que circula a través de un conducto o (tubería, cañería, oleoducto, río, canal, etc.). Se calcula tomando en cuenta el *área de la sección del ducto o de la corriente de fluido dentro de él y su velocidad*. Esto nos dará el caudal en términos volumétricos por unidad de tiempo.

$$Q = A \cdot v \quad (I)$$

Unidades del Caudal Q: $m^2 \cdot m/s = m^3/s$ (V/t)

Gasto (G).

El gasto se refiere a una medición de la cantidad volumétrica de fluido que pasó por un conducto en un determinado tiempo total. Es un concepto similar pero de enfoque diferente al caudal y tiene las mismas unidades de este último.

$$G = V / t \quad (II)$$

$G = \text{gasto en } m^3/s$

$V = \text{volumen del líquido que fluye en metros cúbicos } m^3$

$t = \text{tiempo que tarda en fluir el líquido en segundos (s)}$

Con estas dos ecuaciones:

$$Q = Av: \quad (m^3/s) \quad (I) \quad \text{y} \quad G = V/t: \quad (m^3/s) \quad (II)$$

podemos anotar que $Q = G$ solo que vistos desde diferentes enfoques:

Q : desde el enfoque del Área y la velocidad (un producto) ... y

G : desde el enfoque del Volumen y el tiempo (un cociente).

Ambos resultan en volumen del fluido por unidad de tiempo.

Combinando estas mismas ecuaciones se obtiene una relación muy útil:

$$G = V/t \quad \text{despejando} \quad V = G \cdot t$$

$$\text{como: } G = Q \quad \text{y} \quad Q = A \cdot v$$

entonces:

$$\boxed{V = A \cdot v \cdot t} \quad (III) \quad (V: \text{Volumen.} \quad v: \text{velocidad}).$$

Flujo (F).

El flujo se define como el flujo másico de fluido líquido (cantidad de masa) de líquido que circula a través de un conducto en un segundo.

$$F = m / t \quad (kg/s) \quad (IV) \quad \rho = m / V \rightarrow m = \rho V$$

$$F = \rho V/t = \rho G \quad (V) \quad (\text{flujo másico en términos del gasto})$$

o bien:

$$F = \rho \cdot A \cdot v = \rho \cdot Q \quad (\text{VI}) \quad (\text{flujo másico en términos del caudal}) \quad (\text{Kg/m}^3) (\text{m}^3/\text{s}) \rightarrow \text{Kg/s}$$

V : volumen por segundo.

Donde: F = flujo en kg/s (kilogramos sobre segundo)

m = masa del líquido que fluye en kg (kilogramos)

t = tiempo que tarda en fluir en s (segundos)

Reuniendo las ecuaciones anteriores podemos mostrar el siguiente

Formulario:

$$Q = A \cdot v: \text{ m}^2(\text{m/s}) \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (\text{I})$$

$$G = V/t: \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (\text{II})$$

$$V = A \cdot v \cdot t \quad \text{m}^3 \quad (\text{III})$$

$$F = m / t \quad (\text{kg/s}) \quad (\text{IV})$$

$$F = \rho \cdot V/t = \rho G \quad (\text{kg/s}) \quad (\text{V})$$

$$F = \rho \cdot A \cdot v = \rho Q \quad (\text{kg/s}) \quad (\text{VI})$$

Algunos ejemplos básicos.

Ejemplo 1.10: Calcular el gasto de 1.5 m³ agua que circulan por una tubería en 1/4 de minuto.

Resolución:

$$V = 1.5 \text{ m}^3/\text{s} \qquad G = V / t = 1.5 \text{ m}^3/\text{s} / 0.25 \text{ min}$$

$$t = 0.25 \text{ min} \qquad G = 6 \text{ m}^3/\text{s} \quad \checkmark$$

$$G = \text{¿?}$$

Ejemplo 1.11: Calcular el tiempo que tardará en llenarse de agua un tanque cuya capacidad es de 10m^3 al suministrarle un gasto de 40 l/s (litros sobre segundos).

Resolución: $G = V / t$

$$V = 10 \text{ m}^3 \qquad t = V / G = 10,000 \text{ l} / 40 \text{ l/s}$$

$$G = 40 \text{ l/s} \qquad t = 4.17 \text{ s} \quad \checkmark$$

$$t = \text{¿?}$$

Ejemplo 1.12: Para llenar un tanque de almacenamiento de gasolina se envió un gasto de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ durante un tiempo de 200s . ¿Qué volumen tiene el tanque?

Resolución:

$$G = 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \qquad V = G \cdot t$$

$$t = 200 \text{ s} \qquad V = (0.1 \text{ m}^3/\text{s}) (200 \text{ s})$$

$$V = \text{¿?} \qquad V = 20 \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.13: Por una tubería fluyen 1,800 litros de agua en un minuto, calcular:

a) El gasto.

b) El flujo.

Resolución:

a) El gasto. $G = V / t$

$$G = 1,800 \text{ l} / 1 \text{ min}$$

$$G = 1.800 \text{ l/min} \quad \checkmark$$

b) El flujo. $F = \rho \cdot G = 1,000 \text{ kg/m}^3 (1,800 \text{ l/min} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{l})$

$$F = 1,800 \text{ kg/min} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.14: Por una tubería de radio de 2 cm circula agua a una velocidad de 3 m/s. En una parte la tubería se estrecha y la medida del radio en ese punto es de 1.5cm ¿Qué velocidad llevará el agua al pasar por el punto más estrecho?

Resolución:

$$r_1 = 2 \text{ cm}$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s}$$

$$r_2 = 1.5 \text{ cm}$$

$$v_2 = ?$$

$$F = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$

$$\rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$

$$r_1^2 \cdot v_1 = r_2^2 v_2$$

$$v_2 = (r_1 / r_2)^2 \cdot v_1$$

$$v_2 = (0.02 / 0.015)^2 \cdot 3 \text{ m/s} =$$

$$v_2 = 5.33 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.15: Un tanque de 200 litros se llena en 3 minutos. ¿Cuál es el caudal del fluido que ingresa al tanque?

Resolución:

$$V = 200 \text{ l}$$

$$Q = G = V / t$$

$$t = 3 \text{ min}$$

$$Q = 200 \text{ l} / 3 \text{ min} = 66.67 \text{ l/min} \quad \checkmark$$

$$Q = \text{¿?}$$

Ejemplo 1.16: Por el extremo de un caño de sección circular de 2 cm de diámetro sale agua a una velocidad de 0,5 m/s. Determinar el caudal.

Resolución:

$$d1 = 2\text{cm}$$

$$Q = A \cdot v$$

$$v = 0.5 \text{ m/s}$$

$$Q = \pi \cdot (0.02^2/4) \text{ m}^2 \cdot (0.5 \text{ m/s})$$

$$Q = \text{¿?}$$

$$Q = 1.57 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0.157 \text{ l/s} \quad \checkmark$$

*Nota: Es indispensable que las unidades de las cantidades sustituidas en las ecuaciones sean **consistentes**, teniendo especial cuidado en el caso de hacer conversiones.*

1.5. Principio de Bernoulli.

Daniel Bernoulli (1700 – 1782¹). Físico – matemático nacido en Suiza y que hizo grandes aportaciones a la física en las áreas de hidrodinámica y elasticidad.

Es este Principio de Bernoulli, probablemente la aportación con la que más se reconoce su talento. Es un caso particular de la conservación de la energía, que explica matemáticamente la operación de dos componentes muy importantes del pasado reciente

de los vehículos de transporte,; el carburador para los motores de combustión interna y las alas de avión. Es de gran aplicación en la aerodinámica, hidrodinámica y es fundamental para el diseño de aeronaves, submarinos y sistemas hidráulicos.

El principio de Bernoulli establece que “*en el flujo de un fluido ideal a lo largo de un conducto sellado, la energía total del fluido permanece **constante** en toda su trayectoria.*”

1.5.1 Ecuación del principio de Bernoulli

El Principio de Bernoulli es uno de los principios básicos de la física y la ingeniería y su ecuación describe la relación entre *la velocidad* de un fluido y *su presión en términos de la energía del fluido*. Este principio es fundamental en la interpretación de la mecánica de fluidos en todas sus áreas de aplicación. Es además un claro caso del *principio de la conservación de la energía*, aplicado a un fluido que corre a lo largo de un conducto y muestra que la energía total del fluido permanece constante en todo el recorrido y es igual en cualquier punto o sección que se calcule.

La ecuación del Principio de Bernoulli reúne las expresiones energéticas aplicables en el trayecto de un fluido en un conducto, (energía de presión, energía cinética y energía potencial) y tiene la siguiente estructura:

$$P \cdot m/\rho + 1/2 \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h = \text{constante}$$

Donde:

- *P-* es la presión estática del fluido en la ubicación seleccionada.

- ρ - densidad del fluido.
- v - velocidad del fluido en la misma ubicación.
- g - aceleración gravitatoria.
- h es la altura de la ubicación considerada respecto a un nivel de referencia.

Esta expresión matemática representa el sumatorio de las energías inherentes al fluido que transita por un ducto cerrado: energía de la presión, energía cinética y energía potencial, en determinado punto de la trayectoria. *Dicho de otra manera, si la velocidad del fluido aumenta, su presión disminuirá y viceversa.* Podemos eliminar el término masa, por lo que la ecuación queda:

$$P/\rho + 1/2 \cdot v^2 + g \cdot h = \text{constante}$$

Por lo tanto, para dos puntos distintos en la trayectoria del fluido se cumple:

$$P_1/\rho + 1/2 \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = P_2/\rho + 1/2 \cdot v_2^2 + g \cdot h_2$$

Esta relación se conoce como la *ecuación de continuidad de Bernoulli* y establece que *en un fluido ideal que recorre un conducto, si no hay acumulación de masa, el caudal es constante en todos los puntos del tubo.*

En otras palabras, *el volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo es el mismo en todas las secciones del conducto.*

Si el caudal es Q , entonces:

$$Q = \text{constante}$$

Se define como el producto:

$$Q = A \cdot v$$

Donde:

A - área de determinada sección transversal del tubo y

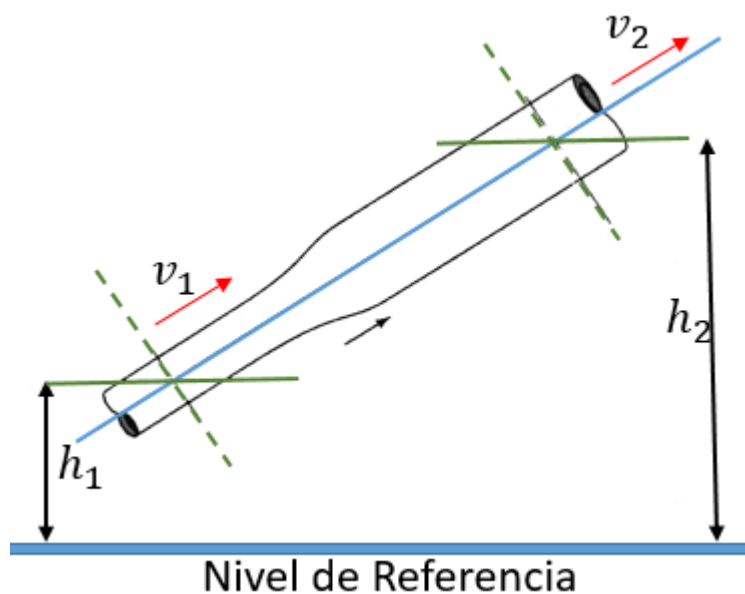
v - velocidad del fluido en esa sección.

Ejemplo 1.17 (<https://www.fisimat.com.mx/teorema-de-bernoulli/>): Un flujo de agua va de la sección 1 a la sección 2 del conducto que se muestra en la Figura 1.13. La sección 1 tiene 25 mm de diámetro, la presión manométrica es de 345 kPa, y la velocidad de flujo es de 3 m/s. La sección 2, mide 50 mm de diámetro, y se encuentra a 2 metros por arriba de la sección 1. Si suponemos que no hay pérdida de energía en el sistema. Calcule la presión " P_2 "

Figura 1.8

Referencia: (<https://www.fisimat.com.mx/teorema-de-bernoulli/>)

Ejemplo 1.17



Resolución:

$$d_1 = 25 \text{ mm} \quad d_2 = 50 \text{ mm}$$

$$P_1 = 345 \text{ KPa} \quad P_2 = ?$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s} \quad \rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$$

$$h_2 - h_1 = 2 \text{ metros.}$$

Calculemos las áreas en las dos secciones:

$$A_1 = \pi \cdot d_1^2 / 4 = \pi \cdot (0.025 \text{ m})^2 / 4 = 4.91 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi \cdot d_2^2 / 4 = \pi \cdot (0.050 \text{ m})^2 / 4 = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

la ecuación de continuidad del caudal nos dice que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Despejando v_2 :

$$v_2 = A_1 v_1 / A_2 = 4.91 \times 10^{-4} \text{ m}^2 (3 \text{ m/s}) / 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$v_2 = 0.75 \text{ m/s}$$

Según la fórmula del principio de Bernoulli:

$$P/\rho + 1/2 \cdot v^2 + g \cdot h = \text{constante}$$

Entonces:

$$P_1/\rho + 1/2 \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = P_2/\rho + 1/2 \cdot v_2^2 + g \cdot h_2$$

$$(345 \times 10^3 \text{ Pa} / 1,000 \text{ kg/m}^3) + [(1/2) \cdot (3 \text{ m/s})^2] + 9.81 \text{ m/s}^2 (0) =$$

$$P_2 / 1,000 \text{ kg/m}^3 + [(1/2) \cdot (0.75 \text{ m/s})^2] + 9.81 \text{ m/s}^2 (2 \text{ m})$$

$$349.5 = P_2 + 0.28125 + 19.62$$

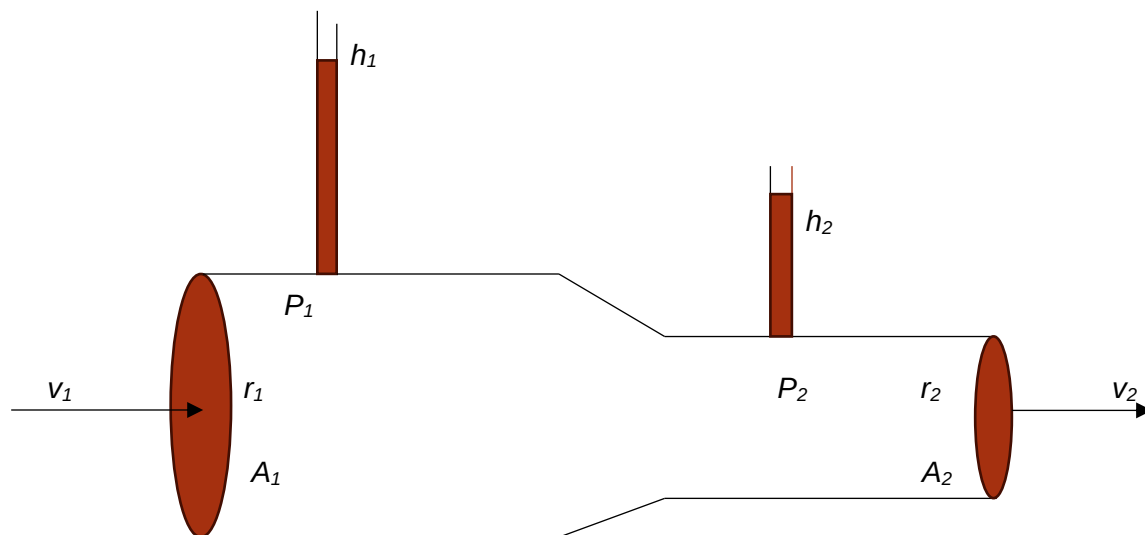
$$P_2 = 329.6 \times 10^3 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

La presión disminuyó al aumentar la velocidad del fluido tal lo como predice el principio de Bernoulli.

Ejemplo 1.18: El tubo horizontal de la Figura 1.14, transporta agua y tiene una sección $A_1 = 40 \text{ cm}^2$. En cierto punto disminuye su diámetro y adquiere una sección de un cuarto de la primera. Se sabe que el líquido corre a razón de 6 l/s. Determine la variación de presión y la diferencia de altura en los tubos verticales

Figura 1.9

Ejemplo 1.18 Tubo horizontal con reducción de diámetro. (Construcción propia.)



Resolución:

En la sección transversal mayor:

El caudal es $Q = 8 \text{ lts/s} = 8 \text{ dm}^3/\text{s} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Y el área $A_1 = 60 \text{ cm}^2$

El radio mayor es: $r_1 = \sqrt{60 \text{ cm}^2 / \pi} = 4.37 \text{ cm}$

Calculamos v_1 con la ecuación del caudal: $Q = A \cdot v$

$$8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times v_1$$

$$v_1 = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} / 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.33 \text{ m/s}$$

Y el área $A_2 = \frac{1}{4} A_1 = \frac{1}{4} 60 \text{ m}^2$

Calculamos v_2 con la ecuación de continuidad $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$; $v_2 = A_1 v_1 / A_2$

$$v_2 = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 1.33 \text{ m/s} / \frac{1}{4} \cdot 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$v_2 = 5.33 \text{ m/s}$$

El radio menor es: $r_2 = \sqrt{(\frac{1}{4}) 60 \text{ cm}^2 / \pi} = 2.18 \text{ cm}$

Aplicamos ahora la Ecuación de Bernoulli:

$$P_1/\rho + 1/2 \cdot v_1^2 + g \cdot h_1 = P_2/\rho + 1/2 \cdot v_2^2 + g \cdot h_2$$

Despejando la diferencia de presión y sustituyendo:

$$(P_1/\rho - P_2/\rho) = -1/2 \cdot v_1^2 - g \cdot h_1 + 1/2 \cdot v_2^2 + g \cdot h_2$$

$$(P_1 - P_2) = [(1/2)(v_2^2 - v_1^2) + g \cdot (h_2 - h_1)] \cdot \rho$$

$$(P_1 - P_2) = \left(\left[\frac{1}{2} \right] [(5.33 \text{ m/s})^2 - (1.33 \text{ m/s})^2] + 9.81 \text{ m/s}^2 (0.0218 \text{ m} - 0.0437 \text{ m}) \right) (1,000 \text{ kg/m}^3)$$

$$= [13.32 - 0.2148 \text{ m}^2/\text{s}^2] (1,000 \text{ kg/m}^3) = 13,105.2 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Ahora, consultando la tabla de equivalencias de unidades de presión tenemos que:

1 Pa = 0.0001 m de columna de agua, entonces la diferencia de altura en los tubos verticales de 1.31 metros. $\checkmark$

Ejercicios propuestos para resolución de los estudiantes U.1.

Ejercicio 1.- Un recipiente cúbico indeformable de un metro de arista está lleno de agua y descansa sobre un paralelepípedo rígido de 1 dm² como se muestra en la Figura 1.10. Si los pesos del recipiente del paralelepípedo son despreciables, calcúlense: a) la presión en el fondo del recipiente, b) la presión en la base del paralelepípedo.

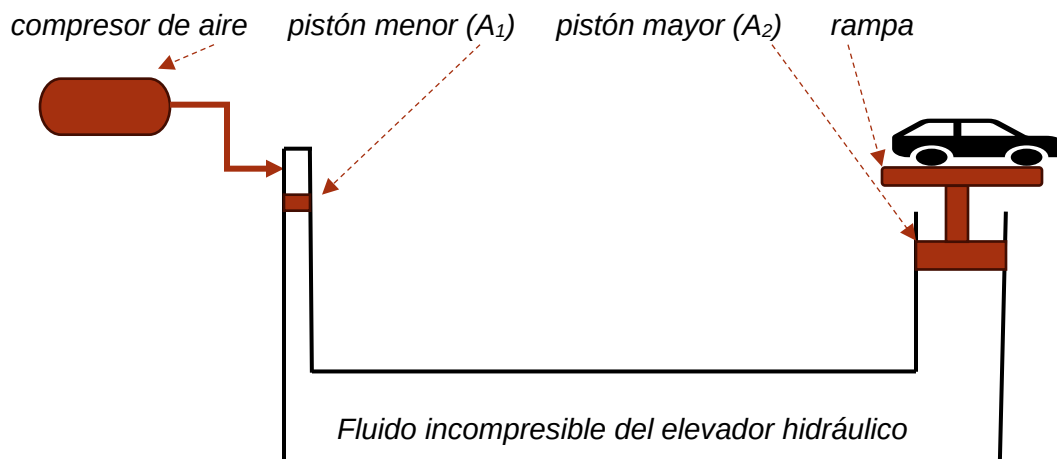
Ejercicio 2: Considere un depósito cilíndrico vertical de 4 m de altura y 15 cm de radio sellado en ambos extremos y totalmente al vacío. a) ¿cuál será la presión absoluta en cada extremo del cilindro?, b) Si se hace un orificio en una de la tapa superior del cilindro ¿cuál será su presión absoluta en la tapa superior y en la inferior?, c) Si se invierte el cilindro ¿cuál será la presión absoluta en ambas tapas?, d) ¿en un punto en la pared a la mitad de la altura?, e) si la tapa abierta queda arriba y se introduce benceno hasta $\frac{3}{4}$ de su altura ¿qué presión absoluta se tendrá en el fondo?

Ejercicio 3.- (Serway 6-15): Si el radio del planeta Tierra es de $6.38 \times 10^6 \text{ m}$ y la presión atmosférica de $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ¿Cuál es la masa de la atmósfera terrestre?

Ejercicio 4: En una rampa para subir automóviles, se usa aire comprimido que ejerce fuerza en un pistón de 5 cm de radio. La presión se transmite a un segundo pistón cuyo radio es de 15 cm. a) ¿Qué fuerza debe aplicar el aire comprimido para levantar un automóvil que pesa 13,300 N? b) ¿Qué presión de aire producirá esta fuerza? c) ¿Qué distancia deberá recorrer el pistón pequeño para que el carro suba medio metro?

Figura 1.11

Ejercicio propuesto 4: rampa para subir automóviles. (construcción propia.)

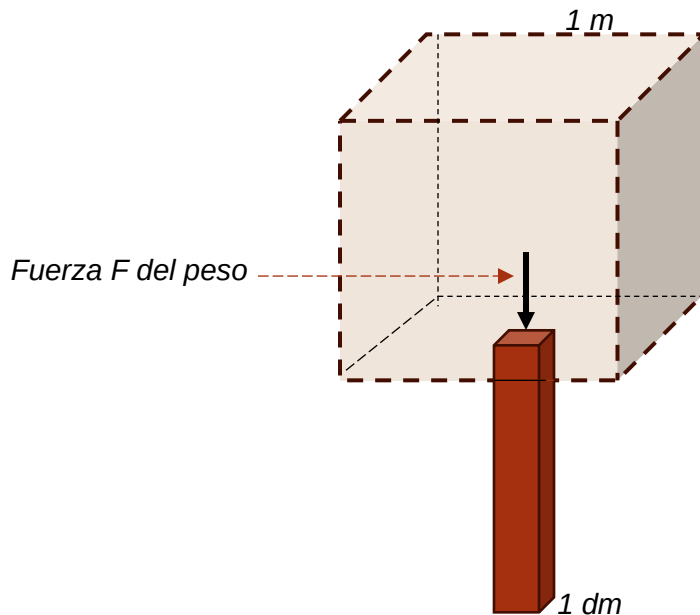


Anexo 1: Resolución de los ejercicios propuestos para resolución de los estudiantes U.1.

Ejercicio 1.- Un recipiente cúbico indeformable de un metro de arista está lleno de agua y descansa sobre un paralelepípedo rígido de 1 dm^2 como se muestra en la Figura 1.10. Si los pesos del recipiente y del paralelepípedo son despreciables, calcúlense: a) la presión en el fondo del recipiente, b) la presión en la base del paralelepípedo.

Figura 1.10

Ejercicio propuesto 1 (Construcción propia.)



a) la presión en el fondo del recipiente...

$$\text{Peso} = V \times \rho \times g = 1 \text{ m}^3 \times 1,000 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 9,810 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

b) la presión en la base del paralelepípedo...

$$\text{Presión} = F / A = 9,810 \text{ N} / 0.01 \text{ m}^2 = 981,000 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Ejercicio 2: Considere un depósito cilíndrico vertical de 4 m de altura y 15 cm de radio sellado en ambos extremos y totalmente al vacío. a) ¿cuál será la presión absoluta en cada extremo del cilindro?, b) Si se hace un orificio en una de la tapa superior del cilindro ¿cuál será su presión absoluta en la tapa superior y en la inferior?, c) Si se invierte el cilindro ¿cuál será la presión absoluta en ambas tapas?, d) ¿en un punto en la pared a la mitad de la altura?, e) si la tapa abierta queda arriba y se introduce benceno hasta $\frac{3}{4}$ de su altura ¿qué presión absoluta se tendrá en el fondo?

Resolución:

. a) presión absoluta en cada extremo del cilindro.

Como inicialmente el cilindro está sellado y al vacío, la presión manométrica y la atmosférica son cero, por lo tanto:

$$P_{abs} = P_0 + P_{man} = 0 + 0 = 0 \quad (\text{en toda la superficie interior del cilindro}) \quad \checkmark$$

b) Si se hace un orificio en una de la tapa superior del cilindro ¿cuál será su presión absoluta en la tapa superior y en la inferior?

Al practicar el orificio, se introduce el gas atmosférico y con él la presión atmosférica, que será la única en el recipiente:

$$P_{abs} = P_0 + P_{man}$$

$$P_{abs} = P_0 + 0 = P_0 \quad (\text{en ambas tapas}) \quad \checkmark$$

c) Si se invierte el cilindro...

En este caso no cambian las condiciones físicas en el interior del depósito por lo que:

$$P_{abs} = P_0 + P_{man}$$

$$P_{abs} = P_0 + 0 = P_0 \text{ (en ambas tapas)}$$

d) ¿en un punto en la pared a la mitad de la altura?

En este caso tampoco cambian las condiciones físicas en el interior del depósito por la posición del punto, por lo que:

$$P_{abs} = P_0 + P_{man}$$

$$P_{abs} = P_0 + 0 = P_0 \text{ (en un punto a media altura.)} \quad \checkmark$$

e) si la tapa abierta queda arriba y se introduce benceno hasta $\frac{3}{4}$ de su altura ¿qué presión absoluta se tendrá en el fondo?

$$\rho_{\text{benceno}} = 876 \text{ kg/m}^3$$

$$P_{abs} = P_0 + P_{man} = P_0 + (\rho_{\text{benceno}}) \cdot h \cdot g$$

$$= 101,325 \text{ Pa} + 876 \text{ kg/m}^3 \times (3/4)(4 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 127,147.33 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Ejercicio 3.- (Serway 6-15): Si el radio del planeta Tierra es de $6.38 \times 10^6 \text{ m}$ y la presión atmosférica de $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ¿Cuál es la masa de la atmósfera terrestre?

Resolución:

La presión atmosférica $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ es el peso de la atmósfera por metro cuadrado de superficie en el suelo.

La masa por metro cuadrado de superficie será:

$$m = \text{Peso} / g = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 / 9.81 \text{ m/s}^2 = 10,326.2 \text{ kg}.$$

cálculo de metros cuadrados de superficie del planeta:

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \times \pi \times (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 = 511.5 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

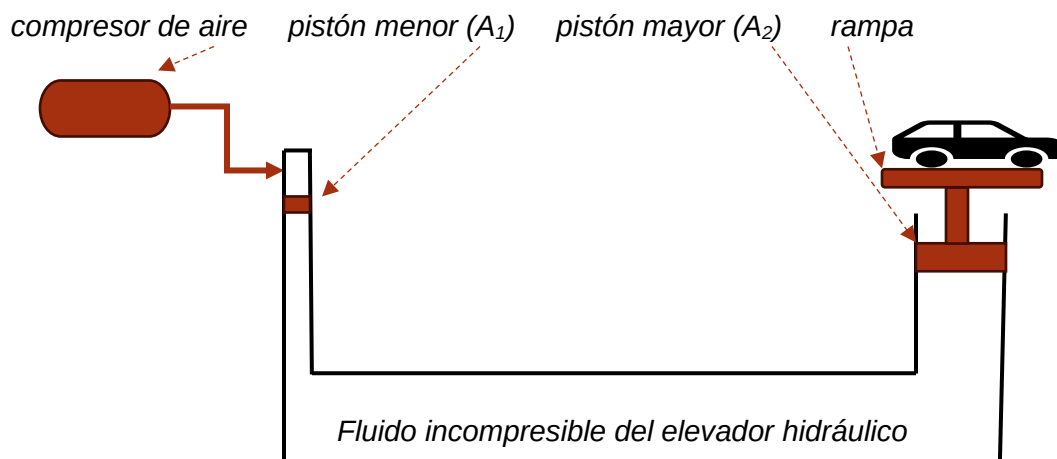
Masa total de la atmósfera:

$$m = (10,326.2 \text{ kg})(511.5 \times 10^{12} \text{ m}^2) = 5.282 \times 10^{18} \text{ kg} \quad \checkmark$$

Ejercicio 4: En una rampa para subir automóviles, se usa aire comprimido que ejerce fuerza en un pistón de 5 cm de radio. La presión se transmite a un segundo pistón cuyo radio es de 15 cm. a) ¿Qué fuerza debe aplicar el aire comprimido para levantar un automóvil que pesa 13,300 N? b) ¿Qué presión de aire producirá esta fuerza? c) ¿Qué distancia deberá recorrer el pistón pequeño para que el carro suba medio metro?

Figura 1.11

Ejercicio propuesto 4: rampa para subir automóviles. (construcción propia.)



Resolución:

a) ¿Qué fuerza debe aplicar el aire comprimido para levantar un automóvil que pesa 13,300 N?

Sean A_1 y F_1 el área del pistón menor y la fuerza del aire comprimido ejercida en él y A_2 y F_2 los correspondientes valores en el pistón mayor, entonces se cumple:

$$F_1 / A_1 = F_2 / A_2$$

$$F_1 = A_1 F_2 / A_2 = \pi \cdot 0.05^2 \times 13,000 \text{ N} / (\pi \cdot 0.15^2) = 1,478 \text{ N} \quad \checkmark$$

b) ¿Qué presión de aire producirá esta fuerza?

$$P = F / A = 1,478 \text{ N} / \pi \cdot 0.15^2 \text{ m}^2 = 188,156.5 \text{ P} \quad \checkmark$$

c) ¿Qué distancia deberá recorrer el pistón pequeño para que el carro suba medio metro?

Puede resolverse utilizando el concepto y ecuación de los trabajos iguales realizados por ambos pistones:

Sean h_1 y h_2 las carreras de los pistones 1 y 2 respectivamente...

$$T_1 = T_2; \quad F_1 \times h_1 = F_2 \times h_2$$

$$h_1 = F_2 \times h_2 / F_1 = 13,300 \text{ N} \times 0.5 \text{ m} / 1,478 \text{ N} = 4.5 \text{ m} \quad \checkmark$$

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL****INGENIERÍA ELÉCTRICA MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA****Cuestionario de evaluación. U.1**

1.- Los émbolos de una prensa hidráulica tienen sección circular y sus

diámetros son 18 cm en el menor y el triple de esa cantidad en el mayor.

a) ¿Cuál es la fuerza que se produce en el émbolo mayor cuando en el pequeño se aplica una fuerza de 15 N?

b) ¿Qué fuerza habría que aplicar en el émbolo menor para que en el émbolo mayor se tenga una fuerza de 1500 N?

2.- Un cubo macizo de madera de 25 cm de arista y con una densidad de $0.55 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ se deposita en un recipiente con glicerina ¿a qué profundidad estará la cara inferior del cubo? Es necesario elaborar un esquema del planteamiento.

3.- Una esfera sólida se pesa en el aire y se obtiene una lectura de 8 N. Luego, se sumerge completamente en agua colgada de un dinamómetro. Calcule su densidad si la lectura ahora es de solo 6.5 N.

4.- a) ¿A qué altura desde el fondo de un depósito de combustible abierto a la atmósfera debe abrirse un orificio para que el fluido salga a una velocidad de 9 m/s? La altura del combustible dentro del depósito es de 10 m. b) ¿Cuál sería la distancia horizontal que recorra el primer chorro al llegar al nivel del fondo?

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

Solución del Cuestionario de evaluación. U.1

1.- Los émbolos de una prensa hidráulica tienen sección circular y sus diámetros son 18 cm en el menor y el triple de esa cantidad en el mayor.

- a) ¿Cuál es la fuerza que se produce en el émbolo mayor cuando en el pequeño se aplica una fuerza de 15 N?
- b) ¿Qué fuerza habría que aplicar en el émbolo menor para que en el émbolo mayor se tenga una fuerza de 1500 N?

Resolución:

a) fuerza que se produce en el émbolo mayor...

$$r_1(\text{menor}) = 18 \text{ cm} \quad \text{Aplicando la ecuación: } F_1 / F_2 = A_1 / A_2$$

$$r_2(\text{mayor}) = 3r_1 \quad 15 \text{ N} / F_2 = \pi (0.18 \text{ m})^2 / \pi (3 \times 0.18 \text{ m})^2$$

$$F_1 = 15 \text{ N} \quad F_2 = 15 \text{ N} \times \pi (3 \times 0.18 \text{ m})^2 / \pi (0.18 \text{ m})^2$$

$$F_2 = ? \quad F_2 = 15 \text{ N} \times 3^2 = 135 \text{ N} \quad \checkmark$$

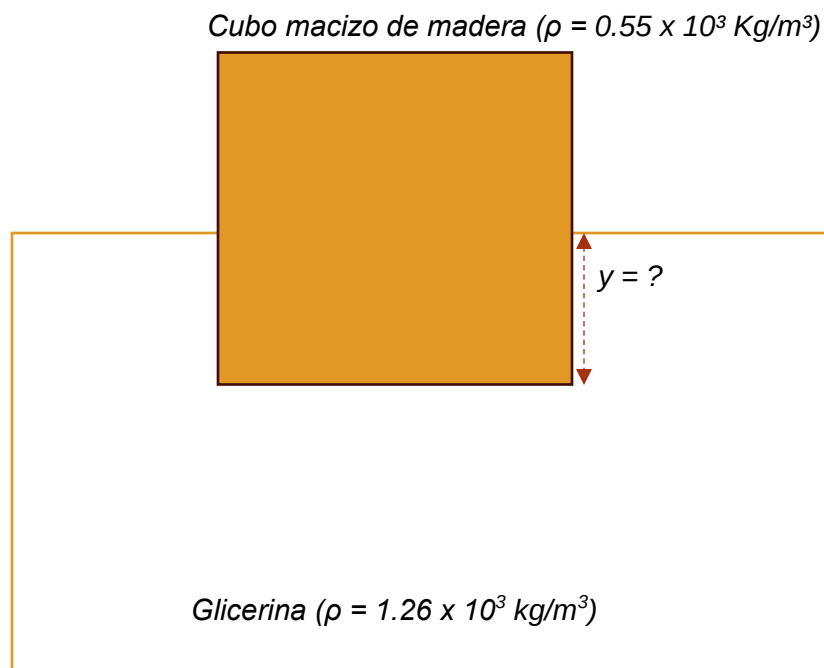
b) fuerza a aplicar en el émbolo menor para que en el embolo mayor se tenga una de 1500 N...

Aplicando la ecuación: $F_1 / F_2 = A_1 / A_2$

$$F_1 / 1,500 \text{ N} = \pi (0.18 \text{ m})^2 / \pi (3 \times 0.18 \text{ m})^2$$

$$F_1 = \pi (0.18 \text{ m})^2 \times 1,500 \text{ N} / \pi (3 \times 0.18 \text{ m})^2 = 166.7 \text{ N} \quad \checkmark$$

2.- Un cubo macizo de madera de 25 cm de arista y con una densidad de $0.55 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ se deposita en un recipiente con glicerina ¿a qué profundidad estará la cara inferior del cubo? Es necesario elaborar un esquema del planteamiento.



$$\text{Peso total del cubo} = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

$$= (0.55 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(25 \times 10^{-2} \text{ m})^3(9.81 \text{ m/s}^2) = 84.30 \text{ N}$$

Volumen de glicerina a desplazar para equilibrar el peso del cubo, que es igual al volumen sumergido del cubo:

$$\text{Peso glicerina desplazada} = \rho_{gli} \cdot V \cdot g$$

$$V = \text{Peso glicerina desplazada} / (\rho_{gli} \cdot g)$$

$$V = 84.30 \text{ N} / (1.26 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) = 6.82 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Si y es la profundidad de la cara inferior del cubo entonces:

$$(0.25 \text{ m})(0.25 \text{ m})(y) = 6.82 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$y = 109.12 \times 10^{-3} \text{ m} = 10.9 \text{ cm} \quad \checkmark$$

3.- Una esfera sólida se pesa en el aire y se obtiene una lectura de 8 N. Luego, se sumerge completamente en agua colgada de un dinamómetro. Calcule su densidad si la lectura ahora es de solo 6.5 N.

Resolución:

$$\text{Masa de la esfera: } 8 \text{ N} / 9.81 \text{ m/s}^2 = 0.815 \text{ kg.}$$

Fuerza de empuje...

$$E = P_{\text{real}} - P_{\text{aparente}} = 8 \text{ N} - 6.5 \text{ N} = 1.5 \text{ N} \quad (\text{peso del agua desplazada})$$

$$\text{Masa del agua desplazada} = 1.5 \text{ N} / 9.81 \text{ m/s}^2 = 0.1529 \text{ kg}$$

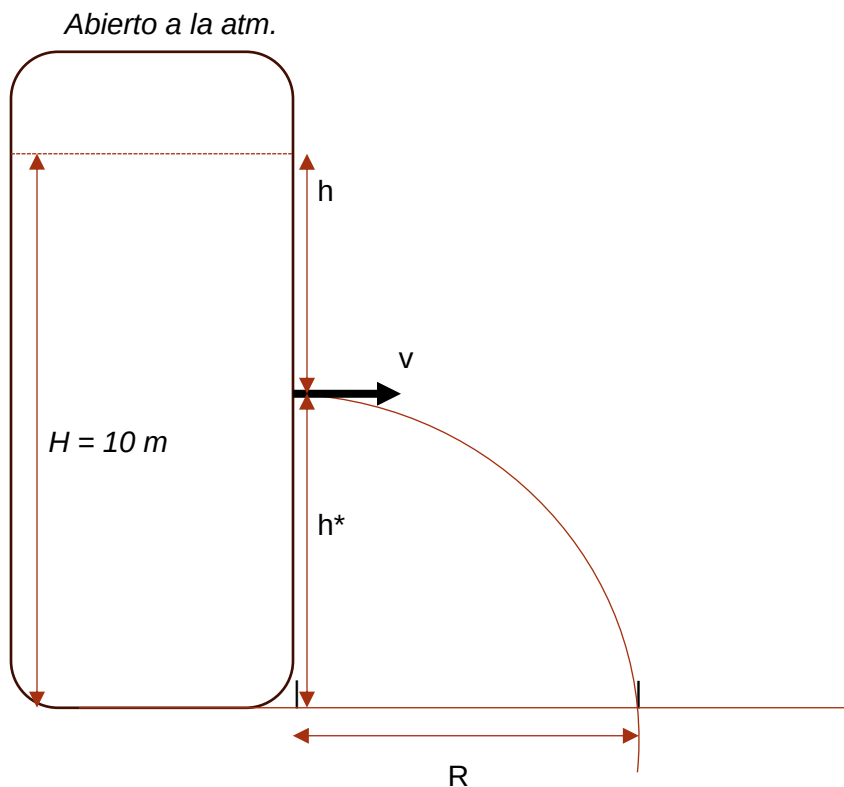
Volumen del agua desplazada...

$$m = \rho \cdot V \quad ; \quad V = m / \rho = 0.1529 \text{ kg} / 1,000 \text{ kg/m}^3 = 0.0001529 \text{ m}^3 \text{ (vol. esfera.)}$$

cálculo de la densidad de la esfera...

$$\rho = m / V = 0.815 \text{ kg} / 0.0001529 \text{ m}^3 = 5,330.28 \text{ kg/m}^3 \quad \checkmark$$

4.- a) ¿A qué altura desde el fondo de un depósito de combustible abierto a la atmósfera debe abrirse un orificio para que el fluido salga a una velocidad de 9 m/s? La altura del combustible dentro del depósito es de 10 m. b) ¿Cuál sería la distancia horizontal que recorra el primer chorro al llegar al nivel del fondo?



c) altura desde el fondo...

$$v = \sqrt{2gh}; \quad h = v^2 / 2g$$

$$h = (9 \text{ m/s})^2 / 2(9.81 \text{ m/s}^2) = 4.128 \text{ m}$$

$$\text{Por lo tanto } h^* = H - h = 10 \text{ m} - 4.128 \text{ m} = 5.872 \text{ m} \quad \checkmark$$

H : altura del fluido desde el fondo del tanque.

h : profundidad del orificio desde el nivel del fluido.

h^* : altura del orificio desde el fondo del depósito.

d) distancia horizontal...

$$R = 2\sqrt{h \cdot h^*} = 2\sqrt{4.128 \text{ m} \times 5.872 \text{ m}} = 9.846 \text{ m} \quad \checkmark$$

Unidad 2: Introducción a la Termodinámica.

La Termodinámica es la parte de la Física que se encarga del estudio de la dinámica de la *energía calorífica o calor* en la naturaleza. Esta dinámica, además de analizar la transferencia del calor en los sistemas y su interacción con su entorno, atiende también la conversión de la energía calorífica en otras formas de energía a fin de que puedan ser utilizadas según la aplicación de que se trate. En esta Unidad iniciaremos definiendo y comentando conceptos importantes para irnos adentrando en el conocimiento de la termodinámica y formarnos una idea genérica inicial de esta disciplina.

2.1. *Formas de la energía utilizadas.*

El futuro de la humanidad en gran medida depende del uso racional de la energía que tiene a su disposición en la naturaleza, pero debe ser transformada en formas útiles adaptándola a los requerimientos específicos según su aplicación y los dispositivos creados que consumen la energía para su funcionamiento. Aunque existe un gran número, las formas más destacadas de energía actualmente utilizadas son:

- 1.- Eléctrica.
- 2.- Eólica.
- 3.- Calorífica.
- 4.- Atómica.
- 5.- Magnética.
- 6.- Química.
- 7.- Cinética.

8.- Potencial.

Esta breve relación, como se mencionó, no es limitativa, sino que solo incluye aquellas más comúnmente utilizadas en las áreas industrial, urbana, la investigación, etc. La lista de energías puede ampliarse con tipos más específicos como la energía luminosa o más genéricas como la energía mecánica y la energía hidráulica. La investigación de nuevas fuentes y nuevas aplicaciones de la energía es tarea continua de científicos e investigadores para el desarrollo de todo tipo de tecnologías en equipos y dispositivos en todas las áreas de la actividad humana.

Una clasificación más genérica de las energías, atendiendo a su impacto ecológico y ambiental es en renovables, no renovables y limpias. Actualmente se busca desarrollar sistemas de generación de energía que tengan un menor impacto negativo en el medio ambiente.

2.2. *Energía, Entropía y Equilibrio.*

2.2.1 *Energía.*

Empecemos definiendo el concepto de *energía*: Se dice que un cuerpo tiene energía si tiene la capacidad de *realizar un trabajo, una acción o una transformación* en sí mismo o en su entorno. Para ello, es necesaria la conversión de parte de la energía del cuerpo de un tipo a otro. Por ejemplo, un motor eléctrico que impulsa una bomba de agua transforma la energía eléctrica en energía mecánica de rotación que a su vez se transforma en cinética al hacer circular el fluido por una tubería y si éste sube de nivel parte de la energía incrementará su energía potencial. En el apartado anterior anotamos algunos de los tipos más usuales de energía. Otro ejemplo puede verse en la transformación de energía

eléctrica en luminosa en las bombillas incandescentes, con un paso previo en calorífica. Esta transformación de la energía para su utilización según se requiera, obedece a la llamada *primera ley de la termodinámica* que establece que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma lo que nos lleva a la conclusión que la energía del universo es constante.

2.2.2 Entropía.

Por otro lado, la *entropía*, que se simboliza como (S), debe interpretarse como el grado de desorden o desgaste que con el tiempo los sistemas adquieren en forma natural como consecuencia de su dinámica propia, interna y con el entorno. Aunque la entropía es un concepto de aplicación en cualquier tipo de sistema, desde el enfoque de la termodinámica se define como la cantidad de energía de un sistema que no puede ser aprovechada en la obtención de trabajo útil y se conoce como la *segunda ley de la termodinámica* que más adelante veremos con poco más de detalle.

Un ejemplo ilustrativo lo tenemos en un vehículo cuyo rendimiento en kilómetros recorridos por litro de combustible cada vez son menos conforme el vehículo va envejeciendo, debido al desgaste de las partes que lo integran, principalmente de aquellas que más tienen que ver con el desplazamiento. El automóvil cada vez consumirá más combustible en sí mismo para funcionar y la energía de ese combustible no produce trabajo utilizable en el desplazamiento, porque se consume en hacer funcionar los sistemas ya desgastados del carro.

El cuerpo humano también es ejemplo del efecto de la entropía debido al desgaste de los órganos que lo integran y el desorden en el funcionamiento de sus sistemas. Puede decirse

que la entropía del universo va siempre en aumento, es como una ley natural que afecta todo lo que existe.

2.2.3 Equilibrio.

Ahora bien, el *equilibrio* de los sistemas es un estado hacia el cual éstos tienden en forma natural y el desorden busca precisamente este equilibrio, de aquí que orden y equilibrio no solamente no son lo mismo, sino que contrarios. Por ejemplo, si en una charola tenemos balines amarillos, rojos y azules y los ordenamos de tal forma que los del mismo color estén juntos, tendremos un escenario ordenado en cuanto al color, pero desequilibrado en esta característica ya que en una zona determinada solo tendremos balines de un color y ninguno de otros. Si desordenamos los balines para lograr una distribución homogénea de los colores, entonces podemos decir que hay un equilibrio, pues en cualquier zona de la charola encontraremos balines de los tres colores.

Es posible ahora relacionar la entropía con la búsqueda del equilibrio en los sistemas en una tendencia natural, al incrementar la entropía aumenta el desorden y se tiende al equilibrio. Los sistemas en equilibrio entonces, no tienen variación en su entropía.

En los estados de la materia podemos encontrar un ejemplo de la relación entre el desorden molecular y la entropía. Las moléculas de un gas tienen un movimiento más desordenado y caótico que las de un líquido, que es lo que determina el estado del fluido, las moléculas de un sólido guardan una estructura muy ordenada y su movimiento es muy lento, por lo que el aumento de la entropía en busca del equilibrio es mayor en los gases que en los líquidos y éstos a su vez tienen una entropía mayor que los sólidos.

2.3. Sistema Termodinámico.

Se entiende como sistema termodinámico a una porción del universo que ha sido delimitada para el estudio y análisis de sus características termodinámicas. Esta delimitación usualmente se llama *frontera* y todo aquello que está fuera de ella, el exterior, se conoce como el *entorno* del sistema. Aunque este entorno rigurosamente es el resto del universo, basta considerar la parte que tiene algún efecto en el sistema de estudio de manera tal que ubiquemos nuestro sistema y su entorno de la forma más conveniente.

La frontera de un sistema puede ser física, como la pared de un recipiente o imaginaria, siendo en este caso una línea trazada o imaginaria que delimita la zona de análisis.

Así definido, un sistema termodinámico puede ser tan pequeño o tan grande como se requiera para el análisis que se pretenda realizar, desde una molécula o célula hasta un planeta o galaxia, no existe limitante para definir el tamaño.

2.3.1 Clasificación de los sistemas termodinámicos.

Los sistemas termodinámicos pueden ser, según su interacción con su entorno:

*Sistemas aislados: aquellos que no intercambian ni materia ni energía con sus alrededores. Un ejemplo muy ilustrativo es un termo con algún líquido un su interior a cierta temperatura. Si asumimos que el recipiente está perfectamente cerrado y aislado térmicamente, entonces será un sistema termodinámico aislado. El aislamiento absoluto no existe realmente, siempre habrá alguna transferencia de energía o materia entre un sistema y su entorno pero en los casos en que ésta es prácticamente despreciable, se considera sistema aislado.

*Sistemas cerrados: En este caso el sistema es capaz de intercambiar energía con el medio que lo rodea, pero no materia. La característica de sistema cerrado se la da esta capacidad, aunque en un momento dado no exista tal intercambio. Las ollas de presión son un ejemplo

de la vida diaria de estos sistemas, así como lo son las autoclaves para la esterilización de recipientes, material de laboratorio y alimentos

*Sistemas abiertos: En esta clasificación están los sistemas que permiten el intercambio tanto de energía como materia con su entorno. Cualquier organismo vivo es un sistema abierto, el cuerpo de una persona, por ejemplo, siempre está en continuo intercambio de materia (alimentos, gases atmosféricos al respirar, aplicación cutánea de diversas sustancias, sudor y deshechos). La energía que consumimos al hacer nuestras actividades físicas, la energía solar, etc., representan el constante tránsito energético entre nuestro cuerpo y el medio circundante.

Una ciudad es un sistema abierto que intercambia productos con su entorno y en muchos casos proveen y/o consumen energía eléctrica de otras zonas de la región.

2.3.2 Las variables termodinámicas.

Para definir en términos termodinámicos un sistema, es necesario conocer los valores de las llamadas *variables termodinámicas* que expresan, en su conjunto, el *estado termodinámico* del mismo. Estas variables son la presión (P), el volumen (V) y la temperatura (T) que en un momento dado están presentes en el sistema. Estas variables guardan una estrecha relación e interdependencia entre sí, lo que es muy importante para el análisis y cálculos involucrados en el estudio de los sistemas y el diseño de equipos industriales, médicos, de transporte, etc.

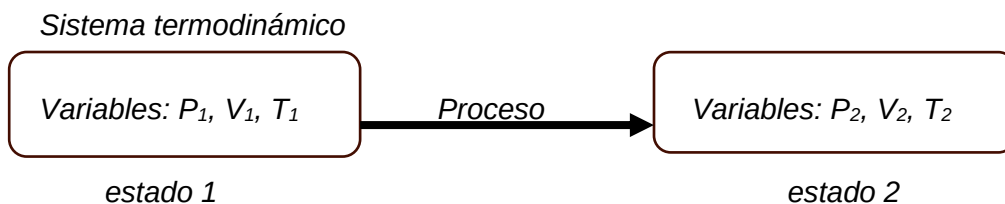
Los procesos termodinámicos.

El conjunto de valores de las variables termodinámicas de presión, volumen y temperatura definen, como se mencionó anteriormente, el llamado *estado termodinámico*

del sistema, ahora bien, el cambio del valor de una o más de ellas, dan como consecuencia un *cambio de estado termodinámico*. Los cambios de estado se logran mediante *procesos termodinámicos*, que hacen pasar al sistema de un *estado inicial* a un *estado final*. El cambio puede ser en *una, dos o las tres* variables termodinámicas. En el esquema de la Figura 2.1 se muestra cada uno de estos elementos termodinámicos comentados.

Figura 2.1

Elementos presentes en un cambio de estado termodinámico. (Construcción propia.)



2.3.3 Clasificación básica de los procesos termodinámicos.

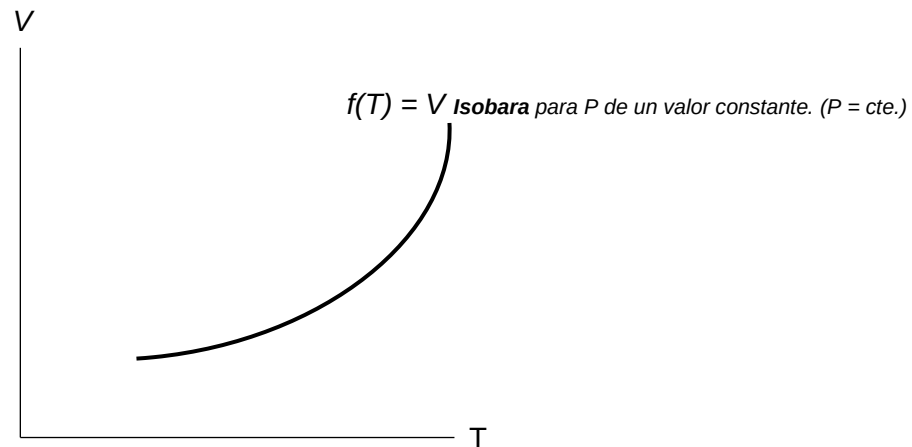
Son tres los tipos *básicos* que en se clasifican los procesos termodinámicos los cuales se presentan al *parametrizar en un valor constante* alguna de las tres variables termodinámicas del sistema, haciendo que el cambio de estado se produzca al cambiar una de las otras dos variables lo que produce el cambio en la tercera. Para cada uno de estos procesos se puede dibujar un diagrama de coordenadas que muestra el comportamiento relativo entre las variables, estos procesos se describen a continuación:

**Proceso Isobárico.*

Es el que produce un cambio de estado del sistema termodinámico a *presión (P) constante*, es decir, solo varían el volumen (V) y la temperatura (T), manteniendo la presión sin cambio. La gráfica que representa el volumen en función de la temperatura para algún valor fijo de la presión se denomina *isobara* como se muestra en la Figura 2.2.

Figura 2.2

Diagrama V-T del proceso isobárico (Construcción propia.)



Cada punto de la *isobara* relaciona, para cualquier valor de temperatura (T), el correspondiente valor del volumen (V) a la presión fija (P). Un cambio en la temperatura, provoca que el volumen varíe para mantener la presión en el mismo valor. Es importante observar que regularmente la relación entre V y T, al mantener la presión constante, no es lineal sino describe una curva cóncava por lo que:

$$f(T) = V \text{ es } \underline{\text{no lineal.}}$$

Para diferentes valores constantes de P , la línea isobara tendrá una posición también diferente generando una familia de curvas del sistema y para cada sistema en particular, la función $f(T) = V$, es propia.

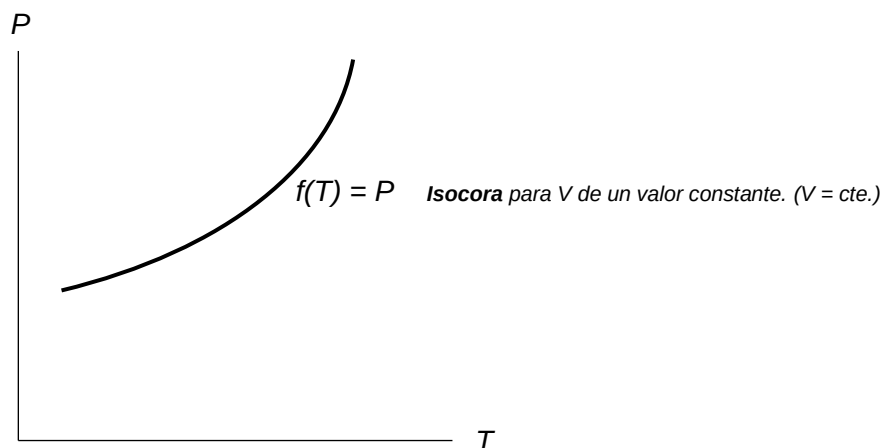
Cualquier proceso de cambio de temperatura, volumen o ambos que se produzca a la presión atmosférica P_0 , es isobárico. Un ejemplo sería calentar agua en un recipiente abierto, su volumen aumenta con la temperatura al convertirse en vapor sin cambiar la presión. Si enfriamos un globo idealmente elástico con gas, su volumen disminuirá con la temperatura, pero su presión se mantendrá con el mismo valor.

**Proceso Isocórico.*

Si el cambio de estado de un sistema termodinámico se produce en condiciones de volumen constante entonces se dice que el proceso es isocórico. También se les conoce como proceso isocoro, isovolumétrico o isométrico. Al parametrizar el volumen a un valor constante, la gráfica del proceso tiene como variables en sus ejes, la temperatura (T) y la presión (P) según puede verse en la Figura 2.3. La gráfica se llama *isocora*.

Figura 2.3

Diagrama P-T del proceso isocórico. (Construcción propia.)



Cada punto de la *isocora* relaciona, para cualquier valor de temperatura (T), el correspondiente valor del volumen (P) a un volumen fijo (V). Un cambio en la temperatura, provoca que la presión varíe para mantener el volumen en el mismo valor.

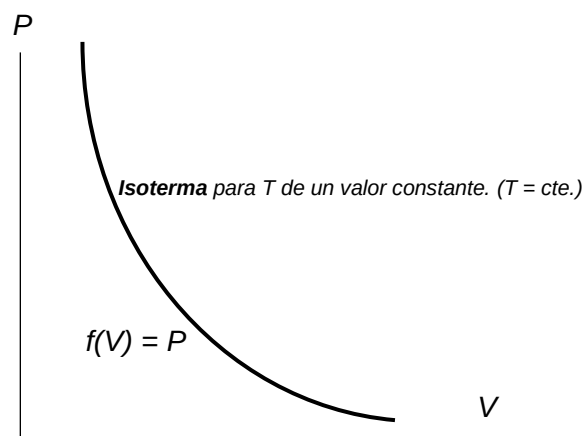
Por ejemplo, los tanques domésticos de gas butano que se instalan a cielo abierto, al calentarse por la energía solar, aumentan su presión pues el recipiente que lo contiene es rígido y no permiten la expansión, como sucedería si el gas estuviera encerrado en un globo elástico.

**Proceso Isotérmico.*

En este caso, la variable que se parametriza a un valor constante es la temperatura (T), quedando así, la presión en función del volumen. La gráfica que se genera, Figura 2.4, se nombra como la *isoterma* del proceso que contiene los valores de presión para cada valor de volumen a la temperatura a la que se produce el cambio de estado termodinámico. La fusión y la vaporización de una sustancia que normalmente absorben el calor sin variar su temperatura, son ejemplos claros de procesos isotérmicos. Otro ejemplo es el funcionamiento de los seres humanos cuya temperatura se mantiene en un valor prácticamente fijo en condiciones normales.

Figura 2.4

Diagrama P-V del proceso isotérmico. (Construcción propia.)



Cuando un proceso termodinámico que cambia el estado de un sistema se produce *sin transferencia de calor* (Q) del sistema al entorno o viceversa, se tiene entonces que es un *proceso adiabático*. Esto sucede cuando el sistema se encuentra de por sí o intencionalmente aislado, evitando que la energía calorífica transite entre el sistema y sus alrededores. En el proceso adiabático todas las variables básicas del sistema (P , V y T) pueden cambiar, a diferencia de los isobáricos, isocóricos o isotérmicos que mantienen constante una variable. La condición para que sea adiabático es que *no exista* transferencia de calor como se mencionó arriba.

Calor específico, Capacidad calorífica y equilibrio térmico.

Resulta muy oportuno echarle un vistazo a estos conceptos elementales de física que nos serán útiles para la mejor comprensión de los temas posteriores relacionados con la dinámica de la energía calorífica en un sistema termodinámico.

Calor específico c .

c : Calor necesario para elevar la temperatura de un Kg de masa de una determinada sustancia, un grado centígrado.

Capacidad calorífica C .

C : Calor necesario para elevar la temperatura de un objeto o sistema, un grado.

Unidades de calor:

*Caloría (cal): Calor necesario para elevar la temperatura de un gr de masa **de agua**, un grado centígrado que puede expresarse en Joules de acuerdo a la equivalencia:*

$$1 \text{ cal.} = 4.186 \text{ J} \quad (\text{Nm}) = (\text{Kg} \cdot \text{m/s}^2)\text{m}$$

Esta unidad (cal), es la referencia que sirve de base para la medición del calor específico de otras sustancias diferentes al agua.

Joule (J): Es la unidad de medición del calor en términos del Sistema Internacional.

O bien: $1 \text{ J} = 0.239 \text{ cal}$

Los calores específicos de las sustancias más conocidas y comúnmente utilizadas en la práctica, ya han sido medidos y se encuentran disponibles en Tablas contenidas en libros y otras fuentes de consulta.

Energía interna y el calor como energía transferida.

La energía interna de un cuerpo o sistema, es la suma de las energías cinética y potencial de sus partículas elementales que le proporcionan cierta cantidad de calor interno. Este calor no puede ser medido en forma directa, pero sí puede medirse *el cambio* que ese valor ha experimentado como efecto en un proceso termodinámico. De aquí que lo que se mide *realmente* es el *calor transferido* del entorno al sistema o del sistema al entorno, es decir la variación de Q , (ΔQ) que viene siendo el incremento o decremento de la energía interna (ΔU) del sistema.

La ecuación para calcular la cantidad de calor transferida entre una sustancia y su entorno en relación a la variación de su temperatura conlleva considerar de su calor específico c es:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Donde:

m : masa de la sustancia.

c : calor específico.

T_1 : temperatura inicial.

T_2 : temperatura final.

Ejemplo 2.1.- Tenemos 3.5 l de agua a 20°C para calentar a 25°C ¿cuánto calor se necesita?

$Q = ?$

En calorías:

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot \Delta T$$

$$Q = 3.5 \text{ l} (1,000 \text{ gr / l}) (25 - 20) ^\circ\text{C} (1 \text{ cal / gr } ^\circ\text{C}) = 17,500 \text{ cal} \quad \checkmark$$

En Joules:

$$Q = 17,500 \text{ cal} (4.186 \text{ J/cal}) = 73,255 \text{ J} \quad \checkmark$$

Equilibrio térmico.

Cuando dos o más sustancias con diferentes temperaturas entran en contacto, sucede lo que se conoce como *equilibrio térmico*, que es la igualación de las temperaturas del conjunto de las sustancias en la llamada *temperatura de equilibrio*. El cambio a la temperatura de equilibrio es resultado de la *transferencia de calor de las sustancias con mayor a las de menor temperatura*. Dicha transferencia cesa al lograrse la temperatura de equilibrio.

Ejemplo 2.2: Un trozo de metal de 0.05 Kg se calienta a 200°C, después se coloca en un recipiente con 0.4 Kg de agua a 20° C. Si la temperatura del agua llega y permanece a 22.4° C, encuentre a) el calor específico del metal, b) El calor transferido al agua.

Resolución:

a) *el calor específico del metal.*

Calor ganado por el agua = -Calor perdido por el metal

$$Q_{\text{agua}} = -Q_{\text{metal}}$$

$$m_{\text{agua}} \cdot c_{\text{agua}} \Delta T = -m_{\text{metal}} \cdot c_{\text{metal}} \Delta T ;$$

$$c_{\text{agua}} = 1 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C} = 4.186 \text{ J/gr } ^\circ\text{C} = 4,186 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C}$$

22.4 °C es la temperatura de equilibrio (T_2)

$$(0.4 \text{ Kg}) (4,186 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C}) (22.4 - 20) ^\circ\text{C} = -(0.05) c_{\text{metal}} (22.4 - 200) ^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{metal}} = 452.54 \text{ J/Kg} \quad \checkmark$$

b) *El calor transferido al agua.*

$$Q = m c \Delta t = 0.4 \text{ Kg} \times 4,186 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C} \times 2.4 ^\circ\text{C} = 4,018 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.3 (Serway).- Una bala de plata de 2 gr y una velocidad de 200 m/s choca con una pared de pino. Todo el calor generado se queda en la bala. ¿cuál es el cambio de temperatura en la bala?

Resolución:

La energía inicial de la bala es cinética...

$$E_c = (1/2) m v^2 = 0.5(2 \times 10^{-3} \text{ Kg})(200 \text{ m/s})^2 = 40 \text{ J}$$

Toda la energía cinética se transforma en calor Q . Aplicando la ecuación de transferencia:

$$Q = m \cdot c_{\text{plata}} \cdot \Delta T$$

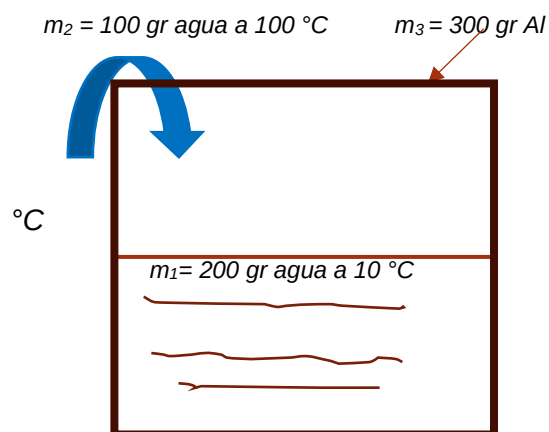
$$40 \text{ J} = (2 \times 10^{-3} \text{ Kg}) (235 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}) \Delta T$$

$$\Delta t = 85.1 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.4 (Serway): Un recipiente de 300 gr de aluminio contiene 200 gr de agua a 10°C , Figura 2.5. Si se agregan 100 gr de agua a 100°C ¿cuál es la temperatura final de equilibrio?

Figura 2.5 (construcción propia)

Ejemplo 2.4 Recipiente de aluminio.



considerando solo las aguas:

agua 1

agua 2

$$m_1 c \Delta T = - m_2 c \Delta T$$

$$200 (T_2 - 10) = - 100(T_2 - 100) ; T_2 = 40$$

(temperatura de equilibrio sin considerar el Al)

ahora tomemos en cuenta el aluminio:

agua

aluminio

$$-(m_1 + m_2) c_{\text{agua}} \cdot (T_2 - T_1) = m_3 c_{\text{Al}} \cdot (T_2 - T_1);$$

$$-300 \text{ gr} \times 4.186 \text{ J/gr } ^\circ\text{C} (t_2 - 40) ^\circ\text{C} = 300 \text{ gr} \times 0.910 \text{ J/gr } ^\circ\text{C} (t_2 - 10) ^\circ\text{C}$$

$$-1,255.8 \text{ J/}^\circ\text{C} (T_2 - 40) ^\circ\text{C} = 273 \text{ J/}^\circ\text{C} (T_2 - 10)$$

$$T_2 = 34.6 ^\circ\text{C} \quad \checkmark \quad (\text{temperatura de equilibrio al considerar el Al}).$$

2.3 Leyes de la Termodinámica.

Ver Anexo II: presentación en PowerPoint Link: Leyes de la termodinámica, Ec. del calor y calor especí.

Nota: Se recomienda solicitar a los estudiantes integrarse en equipos de trabajo y elaborar una investigación documental sobre los tópicos hasta aquí vistos para su exposición y discusión en clases.

2.4 Trabajo termodinámico, energía cinética y energía potencial.

Trabajo termodinámico.

Hemos visto que la primera ley de la termodinámica se puede interpretar como el calor intercambiado entre la energía interna y el trabajo positivo o negativo con el entorno de un sistema.

Enunciado de la Ley:

La *variación* de la energía interna de un sistema es el calor otorgado al sistema menos el trabajo realizado por el sistema.

Ecuación representativa:

$$\Delta U = Q - W$$

Recuérdese que como Q es el calor transferido, por lo que en ocasiones veremos la relación ecuación anterior de la forma:

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

Criterio convencional de signos del calor Q y del trabajo W en la ecuación:

Q es + si **entra** al sistema y W es + si **sale** del sistema.

Q es - si **sale** del sistema y W es - si **entra** al sistema.

Nota: Los signos de la ecuación son **independientes** de los de Q y W .

Criterio UIQPA (Unión Internacional de Química Pura y Aplicada):

Ahora, si usamos el criterio de signos de la UIQPA (Unión Internacional de Química Pura y Aplicada), “todo lo que entra al sistema es positivo y todo lo que sale es negativo”, el trabajo y el calor son positivos cuando aumentan la energía del sistema, es decir, tanto el trabajo como el calor son transferidos del entorno al sistema y negativos cuando disminuyen la energía interna, o sea, la transferencia se da del sistema al entorno.

Al usar el criterio UIQPA para los signos la ecuación de la primera ley de la termodinámica cambia el signo a positivo en el término W para compensar el cambio de signo de esa variable quedando:

$$\Delta U = Q + W$$

Nota: Los signos de Q y W son **independientes** de los de la ecuación en la que se sustituyan sus valores.

Ver Anexo III: presentación en PowerPoint Link: Trabajo en los procesos Termodinámicos.

Ejemplo 2.5: Considere un sistema gaseoso que realiza un trabajo de 850 J sobre su entorno.

Sabiendo que la diferencia de la energía interna entre antes y después de realizar el trabajo es de 3 kJ a) ¿Qué calor se intercambia con su entorno?, b) Suponga que el trabajo lo realiza el gas a una presión constante de 2 atm, ¿qué variación de volumen tiene lugar en el proceso?

Resolución:

a) ¿Qué calor se intercambia con su entorno?

Con signos según el criterio convencional:

Variación de energía interna $\Delta U = 3 \text{ kJ} = 3 \cdot 10^3 \text{ J}$ (positiva)

Trabajo $W = 850 \text{ J}$ (trabajo **positivo** realizado por el sistema al entorno.)

Presión constante: $P = 2 \text{ atm} = 2 \text{ atm} \cdot 101,325 \text{ Pa/atm} = 202,650 \text{ Pa}$

$\Delta U = Q - W$ (primera ley de la termodinámica)

$$Q = \Delta U + W = 3,000 \text{ J} + 850 \text{ J} = 3,850 \text{ J} \quad \checkmark$$

Esta respuesta significa que el entorno transfiere al sistema la energía suficiente (3,850 J), para que éste realice el trabajo de 850 J y además tenga la energía interna una variación positiva 3,000 J.

Con signos según el criterio UIQPA:

Variación de energía interna $\Delta U = 3 \text{ kJ} = 3 \cdot 10^3 \text{ J}$ (positiva)

Trabajo $W = - 850 \text{ J}$ (trabajo **negativo** realizado por el sistema al entorno.)

Presión constante: $P = 2 \text{ atm} = 2 \text{ atm} \cdot 101325 \text{ Pa/atm} = 202,650 \text{ Pa}$

$\Delta U = Q + W$ (primera ley de la termodinámica según UIQPA, cambio de signo de W)

$$Q = \Delta U - W = 3,000 \text{ J} - (-850 \text{ J}) = 3,850 \text{ J} \quad \checkmark$$

Observamos que las respuestas coinciden con ambos criterios.

b) variación de volumen experimentada por el gas, lo cual calculamos aplicando la expresión del trabajo termodinámico a presión constante:

Ecuación del Trabajo Termodinámico a presión constante criterio convencional (positivo):

$$W = P \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V = W / P$$

$$\Delta V = (850 \text{ J}) / (2 \text{ atm} \times 1,01325 \text{ Pa/atm}) = 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

Es decir, el gas **aumenta** su volumen.

O con el criterio UIQPA:

$$W = -p \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -W / p$$

$$\Delta V = -(-850 \text{ J}) / (2 \text{ atm} \times 1,01325 \text{ Pa/atm}) = 4.19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ (doble signo negativo)} \quad \checkmark$$

Es decir, el gas **aumenta** su volumen.

Se han utilizado cuatro ecuaciones:

$$\Delta U = Q - W \quad (\text{primera ley de la termodinámica})$$

$$W = P \cdot \Delta V \quad (\text{Trabajo a presión constante})$$

Así como sus equivalentes en el Criterio UIQPA:

$$\Delta U = Q + W \quad (\text{primera ley de la termodinámica})$$

$$W = -P \cdot \Delta V \quad (\text{Trabajo a presión constante})$$

Ejemplo 2.6: Determine la variación de energía interna que experimentan 10 g de gas cuya temperatura pasa de 34 °C a 60 °C en un proceso a volumen constante (isométrico), sabiendo que su calor específico viene dado por $c_v = 0.155 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$. ¿Cuál es el Trabajo realizado?

Resolución:

Datos

- Masa del gas $m = 25 \text{ g}$
- $c_v = 0.22 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$
- Temperatura inicial $t_i = 40 \text{ }^\circ\text{C}$
- Temperatura final $t_f = 75 \text{ }^\circ\text{C}$

*El cambio de energía interna lo produce el calor transferido en un proceso isométrico, pues al no haber variación en el volumen, **no se realiza trabajo** (W) y dada la Primera ley de la Termodinámica:*

$$\Delta U = Q + W \quad ; \quad \text{como } W = 0 \text{ entonces: } \Delta U = Q$$

y $Q = m \cdot c_v \cdot \Delta t$; tenemos que:

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta t$$

Importante: El calor específico (c) de un gas tiene dos versiones:

- 1.- Cuando la variación de la temperatura es a Presión constante (c_p) y
- 2.- Cuando la variación de la temperatura es a Volumen constante (c_v).

Aplicando la expresión anterior, nos queda:

$$\Delta U = Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T = m \cdot c_v \cdot (T_f - T_i)$$

$$= 25 \text{ gr} \cdot (0.22 \text{ cal/g}^\circ\text{C}) \cdot (75 - 40)^\circ\text{C} = 192.50 \text{ cal} \quad \checkmark$$

Calor específico del gas cuando la variación de temperatura se da a volumen constante. (c_v)

Recordar que el calor específico de una sustancia es el que se requiere para elevarle su temperatura 1 °C a un gr de la misma.

Analizar el siguiente ejemplo (aquí se aplican ambas ecuaciones):

Ejemplo 2.7: Se suministran $5.00 \times 10^3 \text{ J}$ de energía a un gas ideal para que realice $2.00 \times 10^3 \text{ J}$ de trabajo sobre su entorno en un proceso isobárico. Se pide hallar:

- a) El cambio en la energía interna del gas.
- b) El cambio en el volumen, si ahora la energía interna disminuye en $4.50 \times 10^3 \text{ J}$ y se expulsan $7.50 \times 10^3 \text{ J}$ del sistema, considerando presión constante de $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Resolución:

a) El cambio en la energía interna del gas...

Aplicando la Primera ley de la Termodinámica:

utilizaremos: $\Delta U = Q - W$ (criterio convencional de signos)

se sustituyen los valores:

$$Q = 5.00 \times 10^3 \text{ J y } W = 2.00 \times 10^3 \text{ J:}$$

$$= 5.00 \times 10^3 \text{ J} - 2.00 \times 10^3 \text{ J} = 3.00 \times 10^3 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) El cambio en el volumen.

El cambio de volumen se encuentra con el trabajo realizado a Presión constante sustituido en la ecuación de la Primera ley de la Termodinámica:

$W = P\Delta V$ (trabajo a Presión constante):

$$\Delta U = Q - W = Q - P\Delta V$$

Se dice que la energía interna disminuye, por lo tanto: $\Delta U = -4.50 \times 10^3 \text{ J}$. También nos dice que se expulsa calor: $Q = -7.50 \times 10^3 \text{ J}$. En ambos casos, el signo negativo representa disminución y pérdida, entonces:

$$-4.50 \times 10^3 \text{ J} = -7.50 \times 10^3 \text{ J} - P\Delta V$$

Donde $P = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$. Como todas las unidades están en Sistema Internacional, se procede a despejar el cambio de volumen:

$$\Delta V = (-4.50 \times 10^3 \text{ J} + 7.50 \times 10^3 \text{ J}) / (-1.01 \times 10^5 \text{ Pa}) = -2.97 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

Como el cambio de volumen es negativo, significa que el volumen disminuyó, es decir, el sistema se contrajo.

Energía cinética (E_c).

El concepto básico de la energía cinética la establece como aquella energía que un objeto, cuerpo o masa tiene como consecuencia de su velocidad. La ecuación que involucra estas variables es:

$$E_c = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot m \cdot v^2$$

En donde: E_c – energía cinética (J).

m – masa (kg).

v – velocidad (m/s).

Dada la estructura de la ecuación que la define, la energía cinética es directamente proporcional tanto a la masa como a la velocidad del objeto, es decir, a más masa y/o velocidad, mayor será la E_c .

Energía Potencial (E_p).

Esta energía, está relacionada con la masa y peso y la posición de los cuerpos, es aquella cuyo valor depende de la altura del objeto tomando en cuenta un *nivel de referencia*, en la que se asume que la energía potencial es *cero*. Este tipo de energía potencial se denomina *gravitacional* por obvias razones. Al caer un objeto, su energía potencial se transforma en cinética durante el tiempo que esté en su movimiento de caída. La fórmula que calcula la energía potencial gravitacional es:

$$E_{p_g} = m \cdot g \cdot h$$

En donde: E_{p_g} - Energía potencial gravitatoria (J).

m - masa (kg).

g – aceleración de la gravedad (m/s^2)

h - altura desde el nivel de referencia (m).

Realmente la energía potencial se genera por efecto de la presencia de las llamadas *fuerzas de campo* como es el caso del campo gravitacional. El campo magnético también genera energía potencial en los cuerpos en los que influyen sus fuerzas.

Otro tipo de energía potencial es la que almacenan los resortes y muelles al comprimirse, expandirse o flexionarse desde su posición de equilibrio. Esta energía potencial recibe el nombre de *elástica*, y se libera al recuperar el resorte o muelle su posición de equilibrio. La fórmula de la energía potencial elástica es:

$$Ep_e = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot k \cdot x^2$$

En donde: Ep_e - energía potencial elástica (J).

k – constante elástica del resorte o muelle (m/N).

x – longitud de la deformación del resorte o muelle (m).

La suma de las energías cinética y potencial de una masa o sistema se conoce como la *energía mecánica* (Em) de la masa.

$$Em = Ec + Ep = Ec + Ep_g + Ep_e$$

Ejemplo 2.8: Un pesado camión de 5 toneladas de masa, lleva una carga de 25 toneladas y avanza a una velocidad de 60 km/hr mientras que un automóvil compacto de 1,200 kg pretende desarrollar la misma energía cinética del camión. ¿Cuál es la energía cinética del camión y qué velocidad debe alcanzar el automóvil?

La fórmula de la energía cinética es: $Ec = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot m \cdot v^2$

Para el camión: $Ec = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 30,000 \text{ kg} \cdot (60 \text{ km/hr} \times 1,000 \text{ m/km} \times 1 \text{ hr}/3,600 \text{ s})^2$

$$Ec = 4'166,666.67 \text{ J} \quad \checkmark$$

Velocidad que debe alcanzar el automóvil:

$$E_c = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot m \cdot v^2;$$

$$\text{despejando: } v = \sqrt{2E_c / m} = \sqrt{2 \times 4'166,666.67 \text{ J} / 1,200 \text{ kg}} = 83.33 \text{ m/s}$$

$$= 83.33 \text{ m/s} \times 1 \text{ km}/1.000 \text{ m} \times 3,600 \text{ s}/1 \text{ hr} = 300 \text{ Km/hr} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.9: En el muelle de un Puerto de Altura, la pluma de una grúa de gran tamaño levanta un contenedor desde el piso hasta una altura de 20 metros para luego depositarlo en el buque carguero sobre la pila de contenedores ya a bordo, para lo cual deberá descenderlo 5 metros. El contenedor tiene un peso total de 12 toneladas métricas. a) ¿Cuál es la energía potencial del contenedor en lo más alto, justo antes de que descienda al buque?, b) Una vez depositado el contenedor, ¿cuál es su energía potencial?

Resolución:

Tomando al piso como nivel de referencia...

a) la energía potencial del contenedor en lo más alto...

$$E_{p_g} = m \cdot g \cdot h = 12,000 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 20 \text{ m} = 2'354,400 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) energía potencial del contenedor una vez depositado en el buque.....

$$E_{p_g} = m \cdot g \cdot h = 12,000 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times (20 - 5) \text{ m} = 1'765,800 \text{ J} \quad \checkmark$$

----- 0 -----

Ejercicios propuestos para resolución por los estudiantes.

Ejercicio propuesto 1: A un sistema termodinámico se le proporciona energía calorífica de 900 cal y 550 J de trabajo. ¿Cuál es el incremento de su energía interna?

Ejercicio propuesto 2: Se necesita que un sistema termodinámico incremente su energía interna en 4,000 cal y además realice sobre el entorno un trabajo de 2,500 cal ¿cuánto calor se le debe proporcionar?

Ejercicio propuesto 3: Un gas absorbe 1000 J de calor y se dilata en 1m^3 . Si acumuló 600 J de energía interna: a) ¿qué trabajo realizó? b) si la dilatación fue a presión constante ¿cuál fue el valor de esta presión?

Anexo 2.1: Respuesta a los Ejercicios propuestos para resolución por los estudiantes.

Ejercicio propuesto 1: A un sistema termodinámico se le proporciona energía calorífica de 900 cal y 550 J de trabajo. ¿Cuál es el incremento de su energía interna?

Resolución:

$$\Delta Q = 900 \text{ cal} = 900 \text{ cal} (4.2 \text{ J/cal}) = 3,780 \text{ J}$$

$$\Delta W = -550 \text{ J} \text{ (negativo pues absorbe trabajo, criterio convencional de signos.)}$$

$$\Delta U = ?$$

Primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \text{ (criterio convencional de signos.)}$$

Sustituyendo:

$$\Delta U = 3,780 \text{ J} - (-550 \text{ J}) = 4,330 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejercicio propuesto 2: Se necesita que un sistema termodinámico incremente su energía interna en 4,000 cal y además realice sobre el entorno un trabajo de 2,500 cal ¿cuánto calor se le debe proporcionar?

Resolución:

$$\Delta W = 2,500 \text{ cal}$$

$$\Delta U = 4,000 \text{ cal}$$

$$\Delta Q = ?$$

$$\underline{\Delta U = Q - W}; \quad Q = \Delta U + W$$

$$Q = (4,000 + 2,500) \text{ cal} = 6,500 \text{ cal} \quad \checkmark$$

En Joules:

$$Q = 6,500 \text{ cal} \times (4.2 \text{ J/cal}) = 27,300 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejercicio propuesto 3: Un gas absorbe 1000 J de calor y se dilata en 1m^3 . Si acumuló 600 J de energía interna: a) ¿qué trabajo realizó? b) si la dilatación fue a presión constante ¿cuál fue el valor de esta presión?

Resolución:

$$W = ?$$

$$\Delta U = 600 \text{ J}$$

$$Q = 1,000 \text{ J}$$

a) Trabajo realizado...

$$\Delta U = Q - W; \quad W = Q - \Delta U = (1,000 - 600) \text{ J}$$

$$W = 400 \text{ J} \quad \checkmark \quad (\text{positivo pues el sistema gaseoso entrega trabajo al entorno.})$$

(Criterio convencional)

b) *valor de la presión constante...*

$$W = P \cdot \Delta V; \quad P = W / \Delta V = 400 \text{ J} / 1 \text{ m}^3 = 400 \text{ Pa.} \quad \checkmark$$

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2: *Introducción a la Termodinámica.*

1.- *Un trozo de metal de 100 g cobre se calienta a 25°C, después se coloca en un recipiente con 0.5 Kg de un líquido a 100° C. a) Si la temperatura del metal llega y permanece a 28 °C, encuentre el calor específico del líquido. b) ¿Cuál es la variación de la Energía Interna del líquido?*

2.- *En 900 gramos de glicerina a 20 °C se sumerge una esfera de cobre de 80 gramos a 200 °C a) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio del sistema? b) ¿Cuál es la variación de la Energía Interna de la glicerina?*

3.- Conteste:

a.- Explique la Variable Física Termodinámica llamada Entropía.

b.- Considere el motor de un automóvil a gasolina funcionando como Sistema Termodinámico ¿qué Tipo de Sistema es? ¿porqué?

c.- Explique la diferencia entre calor y temperatura.

d.- Explique las leyes primera y tercera de la Termodinámica.

e.- ¿Qué se entiende como el estado de un Sistema Termodinámico?

4.- Un gas en un recipiente está a 3 atm. y ocupa un volumen de 4 m^3 ¿Cuál es el Trabajo realizado por el gas cuando a) se expande a presión constante al triple de su volumen? b) si se comprime a presión constante $1/2$ de su volumen inicial?

5.- Un gas en un recipiente está a $2.5 \times 10^3 \text{ mm Hg}$ y ocupa un volumen de 6 m^3 ¿Cuál es el Trabajo realizado por el gas cuando a) se expande a presión constante al doble de su volumen? b) si se comprime a presión constante $1/3$ de su volumen inicial?

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

Anexo 2.2: Soluciones.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2: Introducción a la Termodinámica.

1.- Un trozo de metal de 100 g cobre se calienta a 25°C, después se coloca en un recipiente con 0.5 Kg de un líquido a 100° C. a) Si la temperatura del metal llega y permanece a 28 °C, encuentre el calor específico del líquido. b) ¿Cuál es la variación de la Energía Interna del líquido?

cobre

líquido

$$a) \quad Q = mc\Delta T; \quad 100 \text{ gr} \times 0.38 \text{ J/gr } ^\circ\text{C} (28-25)^\circ\text{C} = - \quad 500 \text{ gr} \times c \times (28 - 100)^\circ\text{C};$$

$$c = 0.00317 \text{ J/gr } ^\circ\text{C}$$

$$b) \quad \Delta U = - 500 \text{ gr} \times 0.00317 \times (28 - 100)^\circ\text{C} = -114.12 \text{ J}$$

2.- En 900 gramos de glicerina a 20 °C se sumerge una esfera de cobre de 80 gramos a 200 °C a) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio del sistema? b) ¿Cuál es la variación de la Energía Interna de la glicerina?

glicerina

cobre

$$a) \quad Q = mc\Delta T; \quad 900 \text{ gr} \times 2.43 \text{ J/gr } ^\circ\text{C}(t_2-20)^\circ\text{C} = - 80 \text{ gr} \times 0.38 \text{ J/gr } ^\circ\text{C}(t_2-200)^\circ\text{C};$$

$$t_2 = 22.46 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$b) \quad \Delta U = - 900 \text{ gr} \times 2.43 \text{ J/gr } ^\circ\text{C} \times (22.46 - 20) ^\circ\text{C} = 5,380.02 \text{ J}$$

3.- Conteste:

a.- Explique la Variable Física Termodinámica llamada Entropía.

R: Es una medida del desgaste, del desorden o la energía que no puede ser transformada en trabajo de un Sistema.

b.- Considere el motor de un automóvil a gasolina funcionando como Sistema Termodinámico ¿qué Tipo de Sistema es? ¿porqué?

R: Abierto, admite la materia de la gasolina.

c.- Explique la diferencia entre calor y temperatura.

R: El Calor es Energía y la temperatura es una variable de la que depende la transferencia del Calor.

d.- Explique las leyes primera y tercera de la Termodinámica.

R: La 1ª Ley.- $\Delta U = Q - W$: El incremento de la energía interna de un sistema termodinámico es el calor que se le suministra menos el trabajo que se le aprovecha.

La 3ª Ley.- La entropía del Universo o de los Sistemas es constante en el cero absoluto de temperatura

e.- ¿Qué se entiende como el estado de un Sistema Termodinámico?

R: Es el conjunto de valores que en un momento dado tienen sus variables termodinámicas de **Presión, Volumen y Temperatura**.

4.- Un gas en un recipiente está a 3 atm. y ocupa un volumen de 4 m³ ¿Cuál es el Trabajo realizado por el gas cuando a) se expande a presión constante al triple de su volumen? b) si se comprime a presión constante 1/2 de su volumen inicial?

a) $W = -P \times \Delta V = 3 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa/atm} \times (12 - 4) \text{ m}^3 = -24.31 \times 10^5 \text{ J}$

$$b) W = -P \times \Delta V = 3 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa/atm} \times (2 - 4) \text{ m}^3 = 6.078 \times 10^5 \text{ J}$$

5.- Un gas en un recipiente está a $2.5 \times 10^3 \text{ mm Hg}$ y ocupa un volumen de 6 m^3 ¿Cuál es el Trabajo realizado por el gas cuando a) se expande a presión constante al doble de su volumen? b) si se comprime a presión constante $1/3$ de su volumen inicial?

$$a) W = -P \times \Delta V = 2.5 \times 10^3 \text{ mmHg} \times 133.32 \text{ Pa/mmHg} \times (18 - 6) \text{ m}^3 =$$

$$-3,999.6 \times 10^3 \text{ J (negativo: el sistema pierde energía)}$$

$$b) W = -P \times \Delta V = 2.5 \times 10^3 \text{ mmHg} \times 133.32 \text{ Pa/mmHg} \times (2 - 6) \text{ m}^3 =$$

$$1,333.2 \times 10^3 \text{ J (positivo: el sistema absorbe energía)}$$

Unidad 3: Procesos y Propiedades Termodinámicas.

3.1. Ecuaciones de estado de los gases ideales.

En esta Unidad nos enfocaremos a los *sistemas termodinámicos gaseosos* desde el punto de vista de los *gases ideales*, por lo que comenzaremos definiendo este concepto fundamental de la termodinámica

3.1.1 Gas ideal.

Es un gas teórico que supone un comportamiento ideal. El supuesto principal de un gas teórico es la ausencia de fuerzas intermoleculares en él de manera tal que se cumple de forma perfecta la llamada *Ley de Boyle-Mariotte*. Esta ley establece que si tenemos una determinada cantidad de gas y ésta se mantiene a temperatura constante, entonces el producto de su presión por el volumen permanece constante, es decir, al variar una de esas dos variables, la otra se ajustará a un valor tal, que el producto de esos nuevos valores de presión y volumen permanece constante.

Matemáticamente se puede expresar así:

$$PV = k \quad (k: \text{constante de Boyle})$$

donde k es constante si la temperatura y la masa del gas permanecen constantes. Las unidades de k son $N \cdot m$ o sea *Joules (J)* en el S.I.

Si consideramos dos *estados termodinámicos*, *inicial* y *final*, manteniendo constante la cantidad de gas y la temperatura, deberá cumplirse la relación:

$$P_i V_i = P_f V_f = k$$

Si quisiéramos involucrar *la masa y la temperatura*, expresaríamos el valor de k por *mol* y por *Kelvin*:

$$k = PV / nT$$

Así, la constante de Boyle se convierte en la “*constante universal de los gases*” y se expresa con la letra: R

entonces quedaría:

$$R = PV / n \cdot T \quad \text{Ecuación General de los Gases Ideales.}$$

por lo que:

$$R = P_1V_1 / n \cdot T = P_2V_2 / n \cdot T$$

En donde:

n - masa del gas en moles y

T - temperatura constante en Kelvin.

Un gas real será más cercano a uno ideal, mientras la relación entre su presión, volumen y temperatura esté más apegada a esta ecuación matemática.

Una forma más común de presentar la ecuación general de los gases es:

$$P \cdot V = R \cdot n \cdot T$$

3.1.2 El mol:

Dado que la ecuación general de los gases ideales involucra la cantidad de gas expresada en moles, repasemos este importante concepto.

La materia, para efecto de estudiar algún fenómeno físico, puede expresarse como *masa* en kilogramos (*kg*) o como *sustancia* en moles (*mol*), lo que nos lleva a la utilización del Número de Avogadro (*NA*) cuyo valor numérico, conocido como la Constante de Avogadro es:

$$NA = 6.022\ 140\ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Que es el número de moléculas que contiene un mol de cualquier sustancia.

La masa de un mol de sustancia, llamada *masa molar*, es equivalente a la masa atómica o molecular (según se haya considerado un mol de átomo o de molécula) *expresada en gramos*.

Gases monoatómicos, diatómicos y poliatómicos:

Son aquellos cuya **molécula** está formada por uno, dos o más átomos, respectivamente.

Ejemplos de *gases monoatómicos*: gases nobles (helio *He*, neón *Ne*, argón *Ar*, xenón *Xe*, criptón *Cr* y radón *Rn*).

Ejemplos de *gases diatómicos*: hidrógeno (*H₂*), nitrógeno (*N₂*), oxígeno (*O₂*), cloro (*Cl₂*).

Ejemplos de *gases Poliatómicos*: Bióxido de carbono (*CO₂*) , Metano (*CH₄*), óxido nitroso (*N₂O*), vapor de agua (*H₂O*).

Ejemplo 3.1: En **1 mol de CO₂** hay $6.022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ partículas elementales (moléculas del gas).

La masa atómica del carbono (*C*) es 12 g/mol y para el oxígeno (*O*) es de 16 g/mol.

Esto significa que 6.022×10^{23} átomos (o moléculas) de carbono (C) pesan 12 gr y la misma cantidad de moléculas de Oxígeno (O_2) pesan 32 gr. Según esto, el peso molecular del CO_2 es:

$$12 \text{ g/mol [C]} + 2 \times 16 \text{ g/mol [O}_2\text{]} = 44 \text{ g/mol.} \quad \checkmark$$

3.1.3 Valor numérico y unidades de la Constante Universal de los Gases Ideales.

El valor numérico de la constante R y sus unidades, dependen de las unidades utilizadas en las variables sustituidas en la ecuación general de los gases como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1

Valores de la constante R y sus unidades.

Unidades de presión P	Unidades de volumen V	Valor de la constante R	Unidades de la constante R
Pascales (Pa)	metro cúbico (m^3)	8.314	J/mol·K
Milímetro de mercurio (mmHg)	Litro (l)	62.3636	mmHg·l/mol·K
Atmósfera (atm)	Litro (l)	0.0821	atm·l/mol·K

Ejemplo 3.2: Un tanque sellado encierra gas oxígeno a una presión de 800 mm de mercurio a 180 °C. Si el volumen del recipiente es de 24 litros, a) ¿Cuántos moles de oxígeno contiene? b) ¿Cuántos gramos del gas?

Resolución:

Masa atómica del oxígeno: 15 u.m.a.

P = 800 mm Hg.

T = 180 °C

V = 24 l.

a) *¿Cuántos moles de oxígeno contiene?*

Con la ecuación general de los gases:

$$P \cdot V = R \cdot n \cdot T; \quad n = PV / RT$$

$$n = 800 \text{ mm Hg}(24 \text{ l}) / (62.3636 \text{ mm Hg} / \text{mol K})(180 \text{ °C} + 273) \text{ K}$$

$$n = 0.68 \text{ mol de gas } O_2 \quad \checkmark$$

b) *¿Cuántos gramos del gas?*

Como el oxígeno es un gas diatómico (O_2) y su número atómico es 16, entonces el número de gramos encerrados será:

$$(2 \times 16) \text{ gr/mol} \times 0.68 \text{ mol} = 21.76 \text{ gr de gas.} \quad (T_2 \text{ °C} + 273) \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.3: Un depósito sellado de diez litros encierra gas bióxido de carbono a la temperatura de 20 °C y una presión de 2 atm. Encuentre el número de: a) moles, b) gramos, c) moléculas de gas, d) átomos de oxígeno, e) átomos de carbono en el recipiente.

Resolución:

a) *número de moles...*

despejando n de la ecuación general de los gases y sustituyendo:

$$n = PV / RT = (2 \text{ atm})(10 \text{ l}) / (0.0821 \text{ atm} \cdot \text{l} / \text{mol} \cdot \text{K})(20 \text{ °C} + 273) \text{ K}$$

$$n = 0.83 \text{ moles.} \quad \checkmark$$

b) Número de gramos...

Fórmula del gas: CO_2

Masa del carbono en la molécula del gas (C): 12 uma

Masa del oxígeno en la molécula del gas (O_2): $2(16) = 32$ uma

Masa molecular (molar) del bióxido de carbono (CO_2): $12 + 32 = 44$ uma

Por lo tanto

$$\text{Gramos de gas: } (0.83 \text{ mol})(44 \text{ gr/mol}) = 36.63 \text{ gr} \quad \checkmark$$

c) número de moléculas de gas...

núm. de moléculas = número de moles x constante de Avogadro (A)

$$\text{núm. de moléculas} = (0.83 \text{ mol})(6.022 \ 140 \ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})$$

$$\text{núm. de moléculas} = 5.0 \times 10^{23} \text{ moléculas de } \text{CO}_2 \quad \checkmark$$

d) número de átomos de oxígeno...

$$5.0 \times 10^{23} \text{ moléculas de } \text{CO}_2 \times (2 \text{ átomos de O en cada molécula de gas})$$

$$\text{número de átomos de oxígeno} = 10 \times 10^{23} \text{ átomos de O} \quad \checkmark$$

e) número de átomos de carbono en el recipiente.

Como cada molécula del gas CO_2 tiene un átomo de carbono

Entonces:

$$\text{número de átomos de carbono} = 5.0 \times 10^{23} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.4 (Serway 19.35): Cuatro metros cúbicos de un gas a 127 °C se encuentran confinados en un cilindro con un pistón desplazable y a una presión de 30×10^3 Pa. Moviendo el pistón, el volumen del gas se reduce a 2.5 m^3 por lo que su presión aumenta a 90×10^3 Pa. ¿Cuántos grados aumenta la temperatura del gas?

Resolución:

Aplicando la relación $P_1 V_1 / n \cdot t = P_2 V_2 / n \cdot t$ tenemos:

$$30 \times 10^3 \text{ Pa} \times 4 \text{ m}^3 / n (127^\circ\text{C} + 273) \text{ K} = 90 \times 10^3 \text{ Pa} \times 2.5 \text{ m}^3 / n (T_2^\circ\text{C} + 273) \text{ K}$$

$$300 = 225 \times 10^3 / (T_2^\circ\text{C} + 273)$$

$$T_2 = 477^\circ\text{C} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.5 (Serway 19.43): Un globo elástico contiene dos metros cúbicos de un gas a 10 °C y a 1.1 atm. Al calentar el gas a 150 °C, éste se expande hasta 2.3 metros cúbicos, pero por la porosidad del globo se pierde el 5% del gas en el proceso. a) Cuál es la presión en el globo después de calentarlo? b) ¿Cuánto gas había en el globo antes de calentarlo?,

Resolución:

Los datos iniciales son:

$$V_1 = 2 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$P_1 = 1.1 \text{ atm}$$

Los valores finales:

$$V_2 = 2.3 \text{ m}^3$$

$$T_2 = 150^\circ\text{C}$$

$$n_2 = 0.95 n_1$$

a) presión en el globo después de calentarlo...

Aplicando la relación $P_1 V_1 / n \cdot t = P_2 V_2 / n \cdot t$ tenemos:

$$1.1 \text{ atm} \times 2 \text{ m}^3 / n (10^\circ\text{C} + 273) \text{ K} = P_2 \times 2.3 \text{ m}^3 / 0.95 n (150^\circ\text{C} + 273) \text{ K}$$

cancelando n en ambos miembros y resolviendo para P_2 tenemos que:

$$P_2 = 1.36 \text{ atm} \quad \checkmark$$

b) gas que había en el globo antes de calentarlo...

$$R = P_1 V_1 / n \cdot t$$

$$0.0821 \text{ atm} \cdot \text{l} / \text{mol} \cdot \text{K} = (1.1 \text{ atm}) (2,000 \text{ l}) / n (10^\circ\text{C} + 273) \text{ K}$$

$$n = 94.7 \text{ mol} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.6: Un recipiente cerrado de 20 litros contiene gas oxígeno (O_2) a 200°C y 740 mm Hg. Calcular: a) número de moles del gas, b) los gramos de oxígeno contenidos en el recipiente.

Resolución:

a) número de moles del gas...

despejando n de la ecuación general de los gases y sustituyendo:

$$n = PV / RT$$

$$P = (740 \text{ mm Hg} \times 1 \text{ atm} / 760 \text{ mm Hg}) = 0.97 \text{ atm}.$$

$$n = (0.97 \text{ atm}) (20 \text{ l}) / (0.0821 \text{ atm} \cdot \text{l} / \text{mol} \cdot \text{K}) (200^\circ\text{C} + 273) \text{ K} = 0.5 \text{ moles de } \text{O}_2 \quad \checkmark$$

b) gramos de oxígeno contenidos en el recipiente...

el gas oxígeno es diatómico (O_2) cuya masa molecular es: $16 \times 2 = 32$ umas por lo que su mol contiene 32 gr.

Entonces tendremos:

$$\text{Núm. de gramos de gas} = 32 \text{ gr/mol} (0.5 \text{ mol}) = 16 \text{ gr de } \text{O}_2 \quad \checkmark$$

3.2. *Energía Interna y Entalpía.*

3.2.1 *Energía interna.*

La energía interna (U) de un sistema termodinámico, gaseoso en este caso, es la suma de todas las energías que tiene el sistema e incluye la calorífica, cinética, potencial, eléctrica, etc., que en un momento dado pudieran estar dentro de él. Es por esta razón que un valor absoluto de U no puede medirse, pero sus incrementos (ΔU) sí pueden cuantificarse. Esta cuantificación se realiza mediante la primera ley de la termodinámica aplicada a los diferentes procesos a los que puede estar sometido el gas.

3.2.2 *Entalpía.*

La entalpía, que se simboliza como H , es la energía calorífica Q que el sistema puede intercambiar con su entorno en un proceso a presión constante. De igual manera que el valor absoluto de Q no puede ser medido, pero sus variaciones sí, con la entalpía H sucede lo mismo. Debe ser entendida como una función de estado y su variación (ΔH) en un sistema, es la cantidad de calor Q que se ha intercambiado con el entorno (ΔQ), siempre y cuando dicho intercambio haya sido mediante un proceso isobárico, es decir, a presión constante.

Variación de la energía interna (ΔU) y de la entalpía (ΔH) en los Procesos isobáricos.

El intercambio de calor del gas con el entorno puede ser aportado al o absorbido del entorno, de tal forma que, si la transferencia de calor fue a *presión constante*, se cumple que:

$$\Delta U = \Delta H = \Delta Q - W \quad (\text{primera ley de la termodinámica})$$

Donde: $\Delta Q = n C_p \Delta T$

Variación de la energía interna (ΔU) y de la entalpía (ΔH) en los Procesos isocóricos.

Si $\Delta V = 0$, no se produce trabajo ($W = 0$), entonces todo el calor transferido al gas o desde él, se traducirá en la variación de la energía interna:

$$\Delta U = \Delta Q \quad (\text{proceso isocórico})$$

entonces $\Delta U = n C_v \Delta T$

y la variación de la entalpía, entonces:

$$\Delta U = \Delta Q = \Delta H$$

En términos de la ecuación de calor:

$$\Delta H = n \cdot C_p \cdot \Delta T \quad (\text{proceso isocórico})$$

Nota importante: Como $C_p \neq C_v$ ($C_p > C_v$), entonces $\Delta H > \Delta U$ y la interpretación de la diferencia radica en que el incremento de la entalpía de la sustancia incluye no solamente el de la energía interna sino que almacena energía para la expansión si se dieran las condiciones para ello.

Variación de la energía interna (ΔU) y de la entalpía (ΔH) en los Procesos isotérmicos.

Cuando el calor se transfiere (ΔQ) a temperatura constante, toda esta energía se transforma en trabajo, por lo que no existe variación en la energía interna del sistema:

$$(\Delta U = 0).$$

$$0 = \Delta Q - W, \text{ siendo } \Delta Q = W \text{ (proceso isotérmico)}$$

En los gases ideales, al no existir cambio en la energía interna entonces tampoco lo habrá en la entalpía por lo que:

$$\Delta H = 0. \text{ (Procesos isotérmicos)}$$

Entalpías de incremento de temperatura y de cambio de estado de una sustancia.

Cuando una sustancia intercambia calor con su entorno a *presión constante* y dicho calor tiene como efecto la variación de su temperatura, entonces ese calor es de la *entalpía de incremento de temperatura* de la sustancia. Si se sigue transfiriendo calor y se llegase su temperatura de saturación, el calor será *latente de vaporización o fusión*, donde hay un *cambio de estado*, este calor será de la *entalpía de cambio de estado* que se produce a temperatura constante.

Podemos poner como ejemplo el caso de vaporizar cierta cantidad de agua que está a temperatura ambiente y presión atmosférica. Primero habrá que transferirle calor de $1 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$ para elevar su temperatura a la temperatura de saturación de $100 \text{ } ^\circ\text{C}$ y luego añadir más calor para la vaporización, que es el calor latente de vaporización del agua, que a la presión atmosférica es de 540 cal/gr que podemos consultar en tablas.

Cuando la sustancia que se calienta pasa directamente del estado sólido a vapor, entonces el calor suministrado para este proceso se denomina *entalpía de sublimación*.

Ejemplo 3.7: El calor de FUSIÓN (cambio de estado sólido a 0 °, a líquido a 0 °C) del agua es de $c = 333 \text{ J/g}$. Calcular la variación de entalpía ΔH , cuando se funden 2 moles de agua ($P_m = 18 \text{ g}$) (el agua funde a 0 grados centígrados). ¿Y para el proceso inverso?.

$$\Delta U = \Delta H = Q = mc = 2 \text{ mol} \cdot 18 \text{ gr/mol} \times 333 \text{ J/gr} = 11.99 \text{ kJ} \quad \checkmark$$

(de hielo a 0°C a agua a 0°C) (incremento de la Entalpía por cambio de estado que pasa a incrementar la energía interna de la sustancia).

Para el proceso inverso: $\Delta U = \Delta H = - 11.99 \text{ KJ}$ $\checkmark$

Ejemplo 3.8: Calcule la variación de la entalpía de un litro de agua que inicialmente está a 20 °C y se calienta a 80 °C a presión constante.

Resolución:

El calor específico del agua es: $c = 1 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$.

$$\Delta H = \Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 1,000 \text{ gr} \times 1 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C} \times (80 - 20)^\circ\text{C} = 60,000 \text{ cal} \quad \checkmark$$

Nótese que pueden utilizarse grados centígrados o kelvin, dando el mismo resultado.

3.3. Entropía y las interrelaciones entre propiedades.

En la Unidad 2 vimos el concepto de entropía (S), desde el punto de vista de la definición de esta propiedad física de los sistemas: “la *entropía* debe interpretarse como el grado de desorden o desgaste que con el tiempo los sistemas adquieren en forma natural como consecuencia de su dinámica propia, interna y con el entorno”. Desde el enfoque de la termodinámica se define como “la cantidad de energía de un sistema que no puede ser aprovechada en la obtención de trabajo útil”. Es una magnitud fundamental de la

termodinámica que guarda relación con otras variables termodinámicas del sistema como son la presión, la temperatura, el trabajo y la energía.

3.3.1 Entropía y temperatura.

Por ejemplo, como se comentó anteriormente en su momento, el aumento de la entropía de un sistema está directamente relacionado con la *temperatura* y solo si la temperatura absoluta es de cero Kelvin, este aumento se detendría. Mientras más próxima al cero absoluto (0 K) esté la temperatura de un sistema, menor será el incremento de su entropía. En la próxima unidad veremos la ecuación que relaciona estas variables.

La entropía de un sistema real siempre va en aumento, es decir, el desorden, en busca del equilibrio siempre aumenta. La única forma de detener el aumento de la entropía es llevando el sistema a la temperatura del cero absoluto, que desde el punto de vista físico no es posible. Aunque ciertamente la entropía aumenta menos a bajas temperaturas, pero físicamente es imposible mantenerla constante ya que el cero absoluto no puede alcanzarse.

3.3.2 Entropía, volumen y presión.

La variación de la entropía de un sistema puede ser afectada por variaciones en el volumen y/o presión del mismo, toda vez que la temperatura puede ser una función de estas dos últimas propiedades. Aunque la demostración matemática de esta afirmación queda fuera del alcance de este documento, este hecho resulta un tanto intuitivo, ya que sabemos que las variables termodinámicas de un sistema son interdependientes.

3.3.3 Procesos reversibles e irreversibles.

Un proceso *reversible* es aquel que permite que el sistema regrese a su estado inicial después que ha ocurrido un cambio. Esto puede darse en forma espontánea o por la intervención externa de otros procesos o sistemas. El efecto de un cambio en un proceso reversible puede invertirse y regresar al sistema a su estado original. En la realidad no existen los procesos reversibles, porque si pudiéramos regresar al sistema a su estado inicial no podríamos hacer lo mismo con los procesos y sistemas del entorno mediante los cuales logramos la reversibilidad del proceso principal. Podemos citar como ejemplo la compresión y expansión de un resorte que es capaz de almacenar energía potencial en la compresión y liberarla en la expansión. En este ejemplo consideramos como sistema principal al resorte, pero no consideramos los sistemas o procesos que permitieron la compresión.

Por otro lado, un proceso *irreversible* es aquel cuyo efecto no puede invertirse, por lo que una vez efectuado, el sistema no podrá regresar a su estado inicial. Estos procesos, que son los que en la realidad suceden, implican un incremento en la entropía de sistema y consecuentemente del entorno y el universo.

3.4. *Ecuaciones de estado, diagramas y tablas que representan propiedades termodinámicas.*

Los valores numéricos de las propiedades termodinámicas más frecuentemente utilizadas en los análisis y planteamientos físicos se encuentran disponibles en tablas publicadas en libros, artículos, manuales y todo tipo de documentos científicos, técnicos y académicos. Estas tablas, son resultado del trabajo y esfuerzo de los estudiosos del tema, que ya sea en forma particular o institucional han logrado determinar a través del tiempo.

Representan importantes herramientas para facilitar el cálculo y resolución de planteamientos en los que es necesario el uso de estos valores.

En muchos casos es importante la representación gráfica del comportamiento relativo entre dos o más variables termodinámicas, pues de esta forma visual puede apreciarse lo que sucede con determinada propiedad que es afectada por otra y resulta que la gráfica muestra dicha relación de comportamientos de forma clara en una escala y rango de valores y su consulta es muy útil en las predicciones del comportamiento de los sistemas siendo esto es de gran ayuda en la toma de decisiones al momento de las resoluciones en los análisis.

Aunque la variedad de tablas y gráficas de propiedades termodinámicas disponibles en las diversas fuentes de consulta es para ***una amplia gama de sustancias líquidas y gaseosas***, son de particular interés para este curso aquellas que atienden las propiedades *del agua y del vapor de agua*, ya que este fluido es muy utilizado en sistemas de generación de energía eléctrica y en plantas industriales fabriles como parte del proceso de fabricación o de los servicios periféricos del mismo en los que el vapor de agua es primordial.

3.4.1 El Diagrama de Mollier del agua y su vapor.

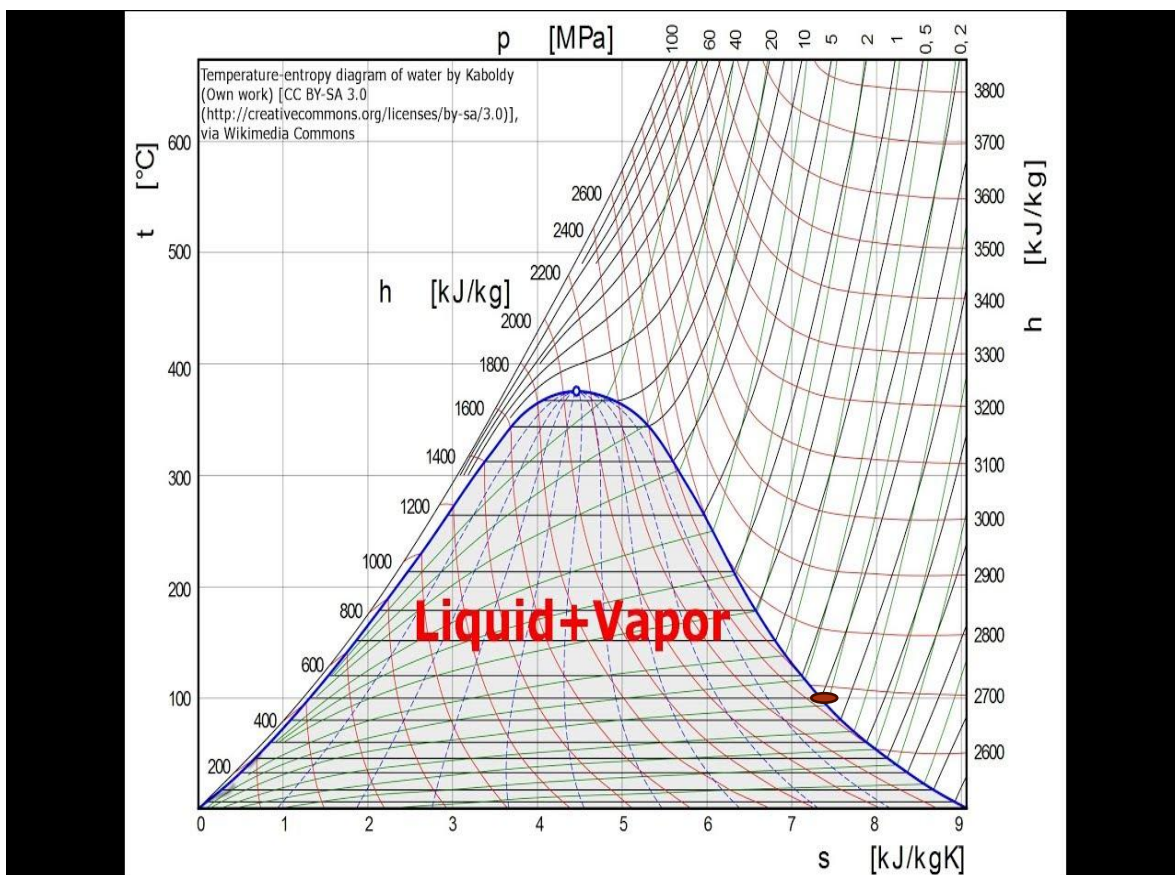
A continuación, en la Figura 3.1 se muestra el *Diagrama de Mollier* que reúne en una sola gráfica, la relación entre las variables termodinámicas de *temperatura, presión, entalpía y entropía del agua y su vapor*. En el dibujo se pueden apreciar cuatro detalles importantes: 1) la zona de *vapor húmedo* (combinación de agua líquida y vapor de agua), debajo de la línea azul de líquido saturado, 2) la línea azul propiamente dicha, (*forma de campana*), *línea de saturación* (mezcla de agua y vapor a su temperatura de saturación a diferentes presiones), 3) la zona de *vapor sobrecalentado* (vapor de agua a temperaturas mayores que la de saturación según su presión) y 4) La zona de *agua líquida no saturada*,

es decir que su estado es totalmente líquido con temperatura debajo de la de saturación. Se pueden hallar en la literatura, diferentes arreglos en el diseño de la gráfica en lo que respecta a la ubicación en ella de *las escalas* de medición de las variables de temperatura, presión, entalpía y entropía, la Figura 3.1 es uno de ellos.

Se recomienda practicar en clase y con la ayuda del profesor, la lectura de valores en esta gráfica para familiarizarse con ella y las unidades de las diferentes variables que contiene. Esto puede hacerse con el diagrama mostrado o con otro de diferente diseño.

Figura 3.1

Diagrama de Mollier del agua y vapor de agua.



Referencia de la Fuente:

<https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=2D2F8yLg&id=FC13BD211BC4E0B4ADE9150C201C53608E9C4215&thid=OIP.2D2F8yLgMFJWcQGlcnpjPpgHaEK&mediaurl=https%3A%2F%2Fyimg.com%2Fvi%2FqC7HXhaOOGY%2Fmaxresdefault.jpg&cdnurl=https%3A%2F%2Fth.bing.com%2Fth%2Fid%2FR.d83d85f322e03052567101887278cfa6%3Frik%3DFUKcjmBTHCAMFQ%26pid%3DImgRaw%26r%3D0&exph=720&expw=1280&q=Diagrama+De+Mollier+Del+Agua&FORM=IRPRST&ck=E51600FF81B659DF197E49C280C833F9&selectedIndex=2&itb=0&cw=1721&ch=832&mode=overlay>

Ejemplo 3.9 Merece la pena comentar como ejemplo, el punto en el vértice da la línea de saturación en el cual los valores que se leen de las variables termodinámicas son:

Resolución:

Temperatura: $T = 376\text{ }^{\circ}\text{C}$

Presión: $P = 22\text{ MPa}$

entalpía $H\text{ (h)} = 2,700\text{ kJ/kg}$

entropía $S = 4.4\text{ kJ/kg}$

Ejemplo 3.10 ¿Cuáles son las lecturas en el Diagrama de Mollier para el agua a presión atmosférica?

Resolución:

Se ubica en el Diagrama el punto (punto azul) en el cruce de 0.1 MPa y 100 °C que son los valores de la presión atmosférica y su respectiva temperatura de saturación para el agua, obteniendo las siguientes lecturas:

Temperatura: $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

Presión: $P = 0.1\text{ MPa}$

entalpía $H (h) = 2,680\text{ kJ/kg}$

entropía $S = 7.30\text{ kJ/kg K}$

Tablas representativas de propiedades termodinámicas.

Se han desarrollado diversas tablas que presentan a detalle los valores numéricos de las diferentes propiedades termodinámicas de los fluidos más frecuentemente utilizados en las áreas de trabajo más comunes. Nuevamente, las tablas relativas al agua y vapor de agua son de especial interés para nuestro curso.

En este sentido, podremos encontrar en las diferentes fuentes de consulta libros, artículos, internet, etc., una amplia diversidad de tablas termodinámicas. Estas tablas constituyen una excelente herramienta que facilita la resolución de planteamientos en aquellos procesos en los que está involucrada el agua y su vapor, como puede ser la generación energía eléctrica y muchos otros procesos industriales.

Se recomienda la consulta en el internet o en libros de termodinámica para practicar la lectura de valores diversos de las propiedades del agua y del vapor de agua en diferentes condiciones de presión y temperatura. En la unidad cinco de este curso se utilizarán estas tablas en la resolución de ejercicios relativos a las turbinas de vapor utilizadas en la generación de energía eléctrica.

Ver Anexo IV presentación en PowerPoint (Link): Procesos y Propiedades Termodinámicas y

Ver Anexo V PDF(Link): Tablas Propiedades Termodinámicas de diferentes sustancias entre ellas las del agua y su vapor.

3.5. *Procesos simples, trabajo y calor.*

Ecuación del trabajo en un proceso a presión constante (isobárico) en términos del cambio de temperatura.

Tenemos, como ya hemos visto, que a *presión constante* el trabajo termodinámico depende directamente del cambio de volumen y está dado por la ecuación:

$$W = P \cdot \Delta V \quad (\text{PowerPoint del numeral 2.4. U.2})$$

Aplicando la ecuación general de los gases:

$$P \cdot V = R \cdot n \cdot T; \text{ despejando } V$$

$$V = R \cdot n \cdot T / P$$

Sustituyendo en la fórmula del trabajo a presión constante:

$$W = P \cdot (V_f - V_i) = P \cdot (R \cdot n \cdot T_f / P - R \cdot n \cdot T_i / P) = R \cdot n \cdot \Delta T$$

Es decir:

$$W = R \cdot n \cdot \Delta T \quad (\text{Ec. del trabajo a presión constante en términos de } \Delta T)$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.11 (20.31 Serway): Existe un émbolo de 8,000 gr de libre desplazamiento en la parte superior dentro de un cilindro vertical de cinco centímetros cuadrados de área que contiene 0.2 moles de un gas. Dicho gas, inicialmente a 20 °C, eleva su temperatura hasta alcanzar los 300 °C. Calcular a) el trabajo realizado debido al cambio de temperatura, b) ¿en qué tipo de proceso sucede la expansión? elabore la gráfica respectiva.

Resolución:

a) *trabajo realizado debido al cambio de temperatura...*

con su peso, el émbolo desplazable mantiene constante la presión en el interior del cilindro.

$$P = F / A = 8 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 / 0.0005 \text{ m}^2 = 157 \text{ N/m}^2 \text{ (Pa)}.$$

Trabajo a presión constante: $W = P \cdot \Delta V$

Volumen inicial con la ec. general de los gases: $R = PV / nT$

$$8.314 \text{ J/mol K} = (157 \text{ Pa})(V_i) / (0.2 \text{ mol})(20 + 273 \text{ K}); V_i = 3.1 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen final: } 8.314 \text{ J/mol K} = (157 \text{ Pa})(V_f) / (0.2 \text{ mol})(300 + 273 \text{ K}); V_f = 6.07 \text{ m}^3$$

$$\text{Variación de la presión: } \Delta V = 6.07 - 3.1 = 2.97 \text{ m}^3$$

Trabajo realizado:

$$W = P \cdot \Delta V = 157 \text{ Pa} \times 2.97 \text{ m}^3 = 466.29 \text{ J (positivo criterio convencional)}.$$

Otra forma (aplicando la Ecuación del trabajo en un proceso a presión constante en términos del cambio de temperatura):

$$W = R \cdot n \cdot \Delta T = 8.314 \text{ J/mol K}(0.2)(300 - 20) \text{ K} = 466 \text{ J} \quad \checkmark$$

Obsérvese que ΔT puede calcularse con °C o K, pues es un incremento y no un valor específico.

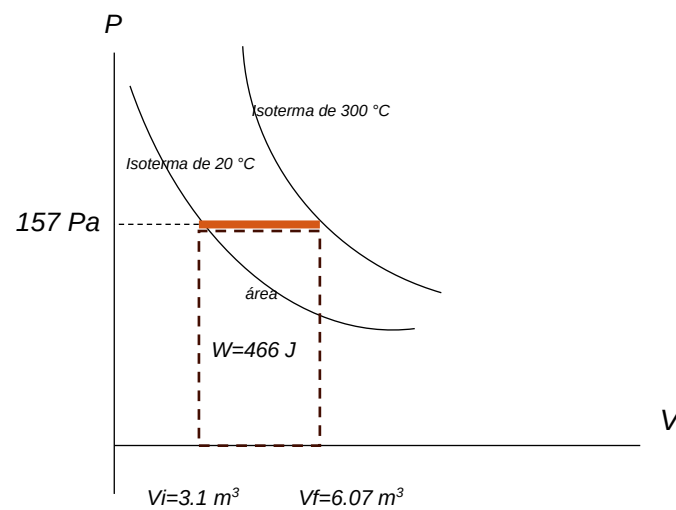
b) *tipo de proceso de la expansión y gráfica respectiva.*

El proceso es isobárico ✓

y la gráfica esquemática P - V es:

Figura 3.2

Ejemplo 3.9 Gráfica inciso b)



Ecuaciones del trabajo en un proceso a temperatura constante (isotérmico) en términos del cambio del volumen y de la presión.

Hemos visto que, a *presión constante*, el trabajo W de un sistema termodinámico guarda una relación directa con el cambio del volumen ΔV :

$$W = P \cdot \Delta V$$

Si la presión NO es constante, entonces la ecuación válida es en su forma diferencial:

$$dW = PdV \quad ; \quad W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV; \quad \text{despejando } P \text{ de la ec. gral. de los gases y sustituyendo:}$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} (RnT / V) dV; \quad \text{donde } R, n \text{ y } T \text{ son constantes, entonces:}$$

$$W = - RnT \int_{V_1}^{V_2} (dV / V); \quad W = - RnT \ln(V) \Big|_{V_1}^{V_2} = - RnT (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$W = - RnT \cdot \ln (V_2 / V_1) \quad (\text{ecuación del trabajo isotérmico con volúmenes, } V_2 > V_1, \text{ expansión})$$

Como el volumen despejado de la ecuación general de los gases es:

$$V = R \cdot n \cdot T / P \quad (R, n \text{ y } T : \text{constantes en este caso})$$

$$V_2 / V_1 = (R \cdot n \cdot T / P_2) / (R \cdot n \cdot T / P_1) = P_1 / P_2$$

Por lo tanto:

$$W = - RnT \cdot \ln (P_1 / P_2) \quad (\text{ecuación del trabajo isotérmico con presiones, } P_2 < P_1, \text{ expansión})$$

Se antepone el signo - pues el trabajo es negativo cuando lo realiza el sistema (pierde energía). (Criterio UIQPA de los signos).

Esto sucede en la *expansión* ($V_2 > V_1$) donde dV ($V_2 - V_1$) es positivo y W será negativo.

En la compresión $V_2 < V_1$ y dV ($V_2 - V_1$) es negativo y W será positivo (doble signo negativo), pues éste se realiza sobre el sistema que gana energía.

Ejemplo 3.12 (20.41 Serway): Un gas que se encuentra 127 °C experimenta una expansión isotérmica y cuadruplica su volumen. Si la cantidad del gas es de cinco moles a) Hallar el trabajo efectuado por el gas sobre su entorno y b) el calor que se transfirió al fluido para dicha expansión.

Resolución:

a) *trabajo efectuado por el gas...*

$$W = - RnT \cdot \ln (V_2 / V_1) \quad (\text{ecuación del trabajo isotérmico con volúmenes})$$

$$W = - 8.314 \text{ J/mol K} \times 5 \text{ mol} \times (127 \text{ °C} + 273) \text{ K} \cdot \ln (4V_1 / V_1)$$

$$W = -23.1 \text{ KJ} \quad \checkmark \quad (\text{signo - según criterio UIQPA, el sistema otorga trabajo, pierde energía})$$

b) *calor que se transfirió al fluido...*

Como la expansión consume todo el calor suministrado al gas entonces dicho calor es igual al trabajo de la expansión y en procesos isotérmicos ($\Delta U = 0$) si no se indica un incremento adicional en la energía interna del sistema gaseoso.

$$\Delta U = Q + W; \quad 0 = Q + W;$$

entonces $Q = - W = - (-23 \text{ KJ}) = 23.1 \text{ KJ} \quad \checkmark$ (signo + según criterio UIQPA, el sistema gana trabajo, gana energía).

Ejemplo 3.13 (20.46 Serway): Se comprimen a temperatura constante de 400 K tres moles de helio a partir de una presión de 0.5 atm hasta llegar a 1.5 atm, a) ¿cuál es el volumen

del gas después de la compresión? b) ¿cuánto trabajo realizó el gas? c) ¿cuánto calor se transfirió?

Resolución:

a) volumen del gas después de la compresión...

$$V = R \cdot n \cdot T / P = (0.0821 \text{ atm} \cdot \text{L} / \text{mol} \cdot \text{K})(3 \text{ mol})(400 \text{ K}) / 5 \text{ atm}; V = 19.7 \text{ L.} \quad \checkmark$$

b) trabajo que realizó el gas...

$$W = - R n T \cdot \ln (P_1 / P_2) = (0.0821 \text{ atm} \cdot \text{L} / \text{mol} \cdot \text{K})(3 \text{ mol})(400 \text{ K}) \ln (0.5 \text{ atm} / 1.5 \text{ atm})$$

$$W = - (-108.23) \text{ J} = 108.23 \text{ J} \quad \checkmark$$

Nota: El signo positivo de W, de acuerdo al criterio UIQPA, indica que el gas recibió trabajo del entorno para comprimirse.

c) calor que se transfirió...

No hay incremento adicional en la energía interna del gas ($\Delta U = 0$)

$$\Delta U = Q + W; \quad Q = - W = - 108.23 \text{ J} \quad \checkmark$$

Nota: El signo negativo de Q, de acuerdo al criterio UIQPA, indica que el gas entregó calor al entorno para comprimirse.

El Anexo 3.3 contiene Tabla formulario de las ecuaciones de Q, ΔU y W aplicables a cada tipo de proceso. (Link)

3.6. Interacciones, funciones de estado y funciones de camino.

3.6.1 Funciones de estado.

Hemos visto en la Unidad anterior que el estado de un sistema termodinámico está definido por los valores que en un *momento dado* tienen sus variables termodinámicas. Estas variables son intrínsecas de los sistemas como son su presión, volumen y

temperatura. Los niveles de energía interna, entropía y entalpía que en ese momento tenga el sistema son *funciones de estado* que complementan la definición de su situación física.

La *función de estado* es la relación que existe entre estas variables o sus valores cuando éste está el sistema está en equilibrio, no importando el proceso o camino mediante el cual se lograron los valores actuales. Aquí, el cambio de las funciones de estado pueden conocerse simplemente con los valores iniciales y finales, aunque se desconozca la forma en que se llevó a cabo el cambio de estado del sistema.

Un ejemplo muy ilustrativo es la energía potencial de los cuerpos que incrementa al subir con respecto a un nivel de referencia, si dos automóviles con la misma masa incrementan por igual su altura, uno de ellos con un elevador hidráulico y el otro al subir por una rampa, el incremento de la E_p será el mismo en ambos casos, sin importar el proceso utilizado para subir el vehículo.

3.6.2 Funciones de camino.

Conocidas también como funciones o variables *de proceso*, se refieren a aquellas magnitudes físicas que inciden en un sistema y que son responsables de un cambio de estado del mismo, es decir, el paso de uno a otro estado de equilibrio diferente. Las funciones más comunes de estas funciones de camino o proceso son el trabajo (W) o el calor (Q) que se transfiere a un sistema o desde él, modificando su estado de equilibrio.

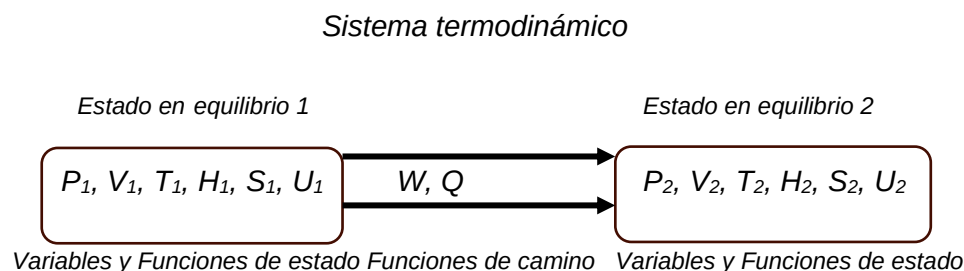
El calor y el trabajo son energía que se transfiere mediante alguno o algunos de los procesos termodinámicos ya estudiados. La energía transferida durante el proceso depende directamente del tipo y naturaleza del proceso empleado para llegar al nuevo estado de equilibrio. Una vez adquirido el equilibrio final, las funciones de camino desaparecen y se tendrá un nuevo conjunto de variables de estado presentes en el sistema

En temas anteriores hemos trabajado con estos conceptos de trabajo y calor, en los siguientes temas, abordaremos con más amplitud el tema aplicando la ecuación general de los gases y otras ecuaciones derivadas.

En la Figura 3.3 se muestra el esquema de la diferencia entre las funciones de estado y las de camino o proceso.

Figura 3.3

Funciones de estado y de camino en el cambio de estado de un sistema.



3.7. Flujo de masa en un sistema abierto.

En la Unidad uno de este programa se vieron las ecuaciones de caudal, gasto y flujo de fluidos que se transportan por algún ducto. El flujo se define como el flujo *másico* de fluido (cantidad de masa) que circula a través de un conducto en un segundo.

$$F = m / t \quad (\text{kg/s}) \qquad \rho = m / V \rightarrow m = \rho V$$

$$F = \rho V/t = \rho G \qquad (\text{flujo másico en términos del gasto})$$

o bien:

$$F = \rho \cdot A \cdot v = \rho \cdot Q \quad (\text{flujo másico en términos del caudal}) \quad (\text{Kg/m}^3) (\text{m}^3/\text{s}) \rightarrow \text{Kg/s}$$

V : volumen de fluido por segundo.

Donde: F = flujo en kg/s (kilogramos sobre segundo)

V : volumen de fluido por segundo.

m = masa del líquido que fluye en kg (kilogramos)

t = tiempo que tarda en fluir en s (segundos)

ρ = densidad del fluido

A = área de la sección del ducto

v = velocidad del fluido en el ducto

G = gasto (volumen por unidad de tiempo)

Q = caudal

En esta unidad denotaremos el flujo másico como $\dot{m}$ en vez de F dado que en temas de termodinámica se acostumbra más comúnmente este símbolo ($\dot{m}$) para esta variable por tanto podemos escribir:

$$\dot{m} = m / t = \rho \cdot G = \rho \cdot Q = \rho \cdot A \cdot v = A \cdot v \cdot \tilde{V}$$

$\tilde{V}$ = volumen específico ($1/\rho$)

Esta última igualdad múltiple puede usarse según los datos que se tengan disponibles para el cálculo y la variable que se deba calcular. Es oportuno recordar que se debe tener especial cuidado en el manejo de las unidades al momento de la sustitución de los valores.

La aplicación de esta ecuación es más bien para el aspecto hidráulico de un sistema. Un enfoque más relacionado con la termodinámica se obtiene al involucrar la ecuación general de los gases:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Despejando n:

$$n = P \cdot V / R \cdot T \quad (\text{moles})$$

en términos de masa por unidad de tiempo o flujo másico:

$$\dot{m} = \dot{n} \cdot (m_{\text{molecular}}) \quad (\text{gramos})$$

$\dot{n}$: flujo molar por unidad de tiempo.

$m_{\text{molecular}}$: masa molecular

También puede usarse la ecuación de transferencia de calor en el equilibrio térmico en un sistema delimitado:

$$m_1 c_1 \Delta T = - m_2 c_2 \Delta T \quad (\text{calor ganado por la sustancia fría igual al perdido por la caliente})$$

Cuando el sistema opera en equilibrio másico, es posible la resolución de planteamientos donde es necesario calcular masas o algún otro elemento de la ecuación.

Ejemplo 3.14: En un punto de las instalaciones hidráulicas de una lavandería industrial se mezclan dos corrientes de agua, ambas a la misma presión de 270 kPa. La primera con un flujo másico $\dot{m}_1$ de 0.75 Kg/s a una temperatura de 90 °C y la segunda con un flujo másico $\dot{m}_2$ a solo 30 °C. Se requiere que la mezcla de las dos corrientes salga a 50 °C a la misma presión de entrada. ¿Cuál debe ser el valor del flujo másico $\dot{m}_2$?

Resolución con la ecuación de equilibrio térmico:

$$m_1 c_1 \Delta T = -m_2 c_2 \Delta T$$

$$(0.75 \text{ kg/s})(1,000 \text{ cal/ kg})(50 - 90) ^\circ\text{C} = -m_2 (1,000 \text{ cal/ kg})(50 - 30) ^\circ\text{C}$$

$$(0.75 \text{ kg/s})(50 - 90) ^\circ\text{C} = -m_2 (50 - 30) ^\circ\text{C}$$

$$m_2 = - (0.75 \text{ kg/s})(- 40) ^\circ\text{C} / (20 ^\circ\text{C}) = 1.5 \text{ kg/s} \quad \checkmark$$

Resolución utilizando las tablas termodinámicas del agua:

A la presión de 270 kPa la temperatura de saturación del agua es de $T_{\text{sat}} = 130 ^\circ\text{C}$, por lo tanto, los dos flujos de entrada y el de salida tienen un estado de líquido no saturado o líquido comprimido, por lo que, la lectura de la entalpía, en las tablas termodinámicas del agua debe ser entrando por la columna respectiva de este estado. En la Tabla 3.2 se muestra la información del planteamiento y las lecturas de la tabla.

Tabla 3.2

Ejemplo 3.14 Información numérica de entrada y salida.

	Flujo másico $\dot{m}$	Temperatura T	Presión P	P_{sat} para T (Tablas)	Entalpía de líq. Sat. para T h_{ls} (Tablas)
Corriente de entrada 1.	$\dot{m}_1 = 0.75 \text{ kg/s}$	$90 ^\circ\text{C}$	270 kPa	70.14 kPa	376.92 kJ/kg
Corriente de entrada 2.	$\dot{m}_2 = \text{¿?}$	$30 ^\circ\text{C}$	270 kPa	4.246 kPa	125.79 kJ/kg
Corriente de salida.	$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$	$50 ^\circ\text{C}$	270 kPa	12.349 kPa	209.33 kJ/kg

Nota: Las entalpías de un líquido comprimido no saturado (h_l) a la presión y temperaturas reales, son iguales a las entalpías del líquido saturado (h_{ls}), a las mismas presión y temperaturas reales.

Cumpliendo la ley de la conservación de la energía:

$$\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 = \dot{m} h_3$$

$$0.75 \text{ kg/s} \times 376.92 \text{ kJ/kg} + \dot{m}_2 (125.79 \text{ kJ/Kg}) = (0.75 + \dot{m}_2) (209.33 \text{ kJ/kg})$$

$$282.69 + \dot{m}_2 (125.79 - 209.33) = 157$$

$$\dot{m}_2 = (157 - 282.69) / (125.79 - 209.33) = 1.5 \text{ Kg/s} \quad \checkmark$$

3.8. *Propiedades termodinámicas del vapor de agua.*

Como ya se vio, los valores numéricos de las propiedades termodinámicas del agua y de su vapor, se encuentran disponibles en tablas publicadas en las diferentes fuentes de consulta.

Las propiedades que se requiere consultar en la resolución de problemas en sistemas en los que este fluido forma parte son *la temperatura, la presión, el volumen específico, así como la energía interna, entalpía y entropía específicas*. El término *específico*, se refiere a que los valores están referidos a una cantidad definida de materia, el Kg en el S.I.

El comportamiento del agua y su vapor en los procesos termodinámicos solo puede ser cabalmente interpretado a la luz de los valores de estas propiedades y sus variaciones. Por ejemplo, la ruta cíclica del agua y del vapor de agua en todo el proceso de generación de eléctrica en una planta termoeléctrica, está sujeta a múltiples cambios en los que la energía calorífica es transferida a todo lo largo de la ruta lo que implica diferentes cambios

en las propiedades termodinámicas del fluido de trabajo que es el agua al pasar por los equipos como la turbina y el condensador entre otros para transformar la energía del agua y su vapor en energía mecánica que posteriormente se convertirá en energía eléctrica mediante un generador.

En otros ejemplos, la energía de agua y su vapor son aprovechados para realizar otras operaciones en los procesos industriales de diverso tipo y los cálculos de diseño y operación de estas plantas requiere del conocimiento y manejo de las propiedades termodinámicas del agua.

Se recomienda realizar en el aula, ejercicios de práctica de lecturas de las variables termodinámicas del agua, del vapor de agua y sus mezclas (vapor húmedo), con el apoyo del profesor. Recomendar a los estudiantes un juego de tablas para su consulta y si es posible, contar con un juego impreso de ellas, sobre todo para las evaluaciones del tema.

3.9. Diagramas de fases.

El diagrama de fases es un gráfico en el plano cartesiano que tiene en el eje horizontal la variable de temperatura (T) y el vertical la presión (P). En el plano P - T así formado, se encuentran las llamadas *líneas de equilibrio*, que representan los pares de valores de estas variables (*presión y temperatura*) en los que coexisten en equilibrio las dos fases cuyas áreas están a ambos lados de la línea. Estas líneas de equilibrio separan los tres estados físicos de una sustancia y se pueden identificar también tres: *sólido-líquido*, *sólido-vapor* y *líquido-vapor*.

Un diagrama de fases puede ser construido para una sustancia o una mezcla de dos o más de ellas. Nuevamente, para este curso es de particular interés el *Diagrama de Fases del Agua*, que podemos encontrar en las diferentes fuentes de consulta. Un ejemplo de este

presiones, la que separa las áreas de líquido y vapor son las temperaturas de *ebullición* según la presión y de igual forma la frontera entre la zona de sólido y vapor representan las temperaturas de *sublimación*. Esto aplica para el diagrama de fases de cualquier otra sustancia.

Cualquier punto situado en el área de estado sólido corresponde al par ordenado (T, P) de valores correspondientes de presión y temperatura en los que el agua se encuentra en estado sólido. Asimismo, los puntos en las áreas de líquido y vapor, serán para esos estados respectivamente.

El punto de intersección de las tres líneas de equilibrio es conocido como el *punto triple* que corresponde a los valores de presión y temperatura en los que se tiene la coexistencia de los tres estados de una sustancia, que para el caso del agua son de $0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 0.00603 atm .

Otro punto de importancia especial es el llamado *punto crítico*. Este punto nos indica la temperatura máxima del vapor de agua ($374\text{ }^{\circ}\text{C}$) a la cual ésta puede licuarse aumentando la presión (a 218 atm), es decir, a una temperatura mayor de $374\text{ }^{\circ}\text{C}$ y el agua será vapor y no hay presión que la vuelva líquida si no disminuye su temperatura por debajo del punto crítico.

Resulta de particular interés lo que sucede con el agua a la presión atmosférica ($P = 1\text{ atm}$). A esta presión, como sabemos, fusión es a los $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y la ebullición se presenta a los $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. El diagrama de fases del agua es una muy útil herramienta en situaciones en los que se debe conocer el estado físico del fluido a determinada presión y temperatura.

Unidad 4: Energía y Entropía.

4.1. El trabajo en procesos complejos. (Procesos consecutivos y Ciclo termodinámico)

En la realidad puede darse que un procedimiento industrial o de otro tipo, el cambio de estado del fluido de trabajo sea de un único proceso termodinámico, pero de igual manera se presentan procedimientos en los que suceden varios procesos *consecutivos* que llevan, desde un *estado inicial*, la sustancia de trabajo a través dos o más cambios de estado hasta llegar un *estado final*. Este conjunto de procesos se conoce como proceso complejo ya que involucra diferentes transformaciones con diversos cambios de las variables termodinámicas del fluido.

En los casos en que el proceso complejo sigue una secuencia tal que la sustancia vuelve a su estado inicial entonces se dice que se produce un *ciclo termodinámico*. El trabajo efectuado en los procesos complejos es la suma de los trabajos de cada uno de los procesos que tuvieron lugar en la trayectoria de la secuencia abierta o el ciclo recorrido.

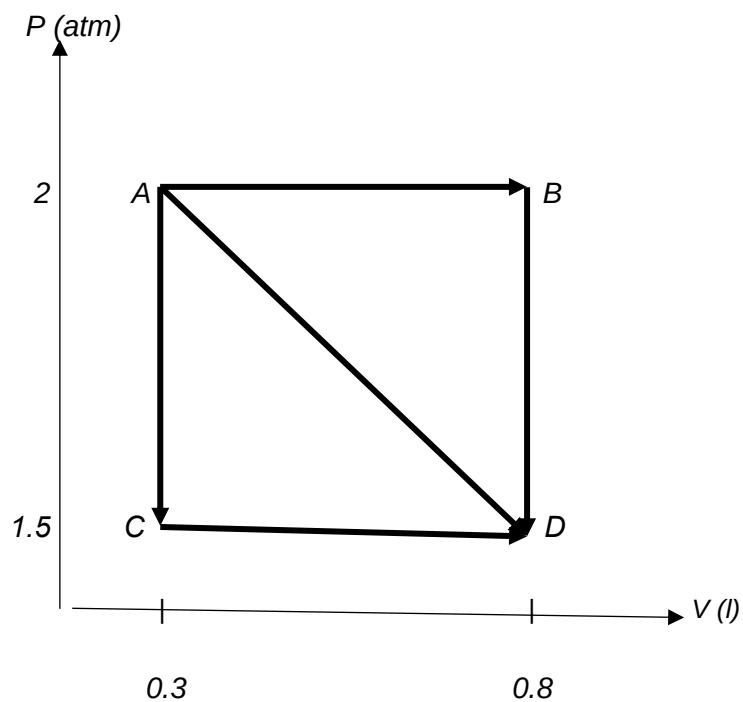
La representación gráfica de esta trayectoria se aprecia en un diagrama presión-volumen (P - V). Si es un proceso complejo de trayectoria abierta, el trabajo está representado por el área debajo de dicha trayectoria entre los límites que correspondan al estado inicial y el final. En los casos de trayectorias cerradas o ciclos, el área encerrada en el bucle será la representativa del trabajo neto realizado. Debe tomarse en cuenta que en un proceso complejo, el trabajo puede ser transferido del sistema a entorno o viceversa, del entorno al sistema, lo que obliga a tener en cuenta los signos algebraicos del trabajo en cada etapa según el criterio de signos utilizado.

El cálculo del trabajo en cada etapa del proceso complejo debe involucrar las ecuaciones que correspondan al tipo de trabajo de cada etapa del proceso como se verá en los ejemplos.

Ejemplo: 4.3 (Serway 20.43): La energía interna de un mol de gas es de 91 J y su volumen es de 0.3 litros cuando su presión se calibra a 2 atm. Luego, su presión es recalibrada a 1.5 atm lo que hace que su energía interna se duplique y su volumen sea de 0.8 litros. Estos cambios se pueden lograr mediante las rutas ABD, ACD o AD mostradas en la Figura 4.1. Hallar para cada ruta: a) el trabajo realizado por el gas y b) la transferencia de energía calorífica necesaria.

Figura 4.1

Ejemplo 4.3



Ruta ABD

a) el trabajo realizado por el gas...

Con la fórmula de trabajo a presión constante en términos del cambio de volumen:

$$W_{AB} = -P \cdot \Delta V = -2 \text{ atm} (1.013 \times 10^5 \text{ N/m}) (0.8 - 0.3) \times 10^{-3} \text{ l} (m^3/l)$$

$$W_{AB} = -1.013 \times 10^2 \text{ J} \quad (\text{negativo según criterio UIQPA de los signos, el sistema otorga trabajo al entorno})$$

$$W_{BD} = 0 \quad (\text{sin cambio de volumen no se realiza trabajo})$$

$$W_{ABD} = -1.013 \times 10^2 \text{ J} + 0 = -1.013 \times 10^2 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) la transferencia de energía calorífica...

$$\Delta U_{ABD} = Q + W_{ABD} \quad (\text{Primera ley de la termodinámica con signos UIQPA})$$

$$(182 - 91) \text{ J} = Q + (-1.013 \times 10^2) \text{ J}$$

$$Q = 192.3 \text{ J} \quad \checkmark \quad (\text{positivo, el sistema absorbe energía del entorno})$$

Ruta ACD

a) el trabajo realizado por el gas...

$$W_{AC} = 0 \quad (\text{sin cambio de presión no se realiza trabajo})$$

$$W_{CD} = -P \cdot \Delta V = -1.5 \text{ atm} (1.013 \times 10^5 \text{ N/m}) (0.8 - 0.3) \text{ l} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{l}$$

$$W_{CD} = -76 \text{ J} \quad (\text{negativo según criterio UIQPA de los signos, el sistema otorga trabajo al entorno})$$

$$W_{ACD} = 0 + (-76 \text{ J}) = -76 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) la transferencia de energía calorífica...

$$\Delta U_{ACD} = Q + W_{ACD} \quad (\text{Primera ley de la termodinámica con signos UIQPA})$$

$$(182 - 91) \text{ J} = Q + (-76 \text{ J})$$

$$Q = 167 \text{ J} \quad \checkmark \quad (\text{positivo, el sistema absorbe energía del entorno})$$

Ruta AD

$$W_{AD} = \text{área debajo la línea } \underline{AD} = \text{área debajo la línea } \underline{AB} - \text{área del triángulo } \underline{ABD}$$

$$W_{AD} = [101.3 \text{ J}] - [(0.8 - 0.3) \text{ l} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{l} \times (2 - 1.5) \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{atm}] / 2$$

$$W_{AD} = 88.6 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) la transferencia de energía calorífica...

$$\Delta U_{AD} = Q + W_{AD} \quad (\text{Primera ley de la termodinámica con signos UIQPA})$$

$$(182 - 91) \text{ J} = Q + (-88.6 \text{ J})$$

$$Q = 180 \text{ J} \quad \checkmark \quad (\text{positivo, el sistema absorbe energía del entorno})$$

----- 0 -----

4.1.1 Procesos adiabáticos.

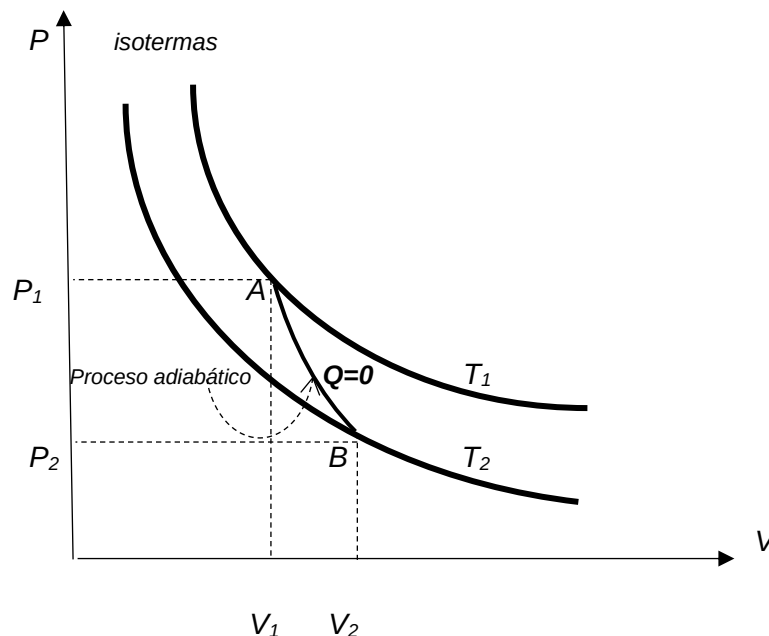
Cuando en la Unidad 2 vimos los tipos de procesos termodinámicos, comentamos que son tres los principales: isobárico, isocórico e isotérmico. Sin embargo, un proceso termodinámico igualmente importante es conocido con el nombre de *adiabático*.

Un proceso adiabático es aquel con el que se produce un cambio de estado de sistema termodinámico sin que exista intercambio de calor con el entorno ($Q=0$), ya sea desde el

sistema al entorno o del entorno hacia el sistema. En los procesos reales esto se logra con la utilización de aislantes térmicos en los elementos físicos de los equipos del sistema que podrían presentar un intercambio significativo de energía calorífica con el exterior, como por ejemplo los ductos de circulación del gas refrigerante en los equipos de aire acondicionado o por ser procesos que ocurren en un tiempo tan breve que no da oportunidad para la transferencia del calor. En los procesos adiabáticos puede haber variación de la presión, del volumen y de la temperatura. El diagrama P - V de la Figura 4.2 muestra dicho comportamiento de este tipo de procesos en una expansión adiabática del gas ($V_2 > V_1$). Obsérvese que la línea del proceso adiabático AB , *no debe confundirse con una isoterma*.

Figura 4.2

Grafica P - V de un proceso adiabático. (Construcción propia.)



4.1.2 Cambio de la energía interna (ΔU) y de la entalpía (ΔH) en los procesos adiabáticos.

Al ser nula la transferencia de calor en estos procesos y aplicar la primera ley de la termodinámica a los procesos adiabáticos se tiene:

$$\Delta U = Q - W \quad (\text{criterio convencional de signos}); \text{ si } Q = 0 \text{ entonces:}$$

$$\Delta U = -W$$

4.1.3 Cambio de la entalpía en un proceso adiabático.

En los procesos adiabáticos, aunque no existe transferencia de calor, *el trabajo* intercambiado entre el gas y su entorno modifica la energía interna del sistema, por lo que se produce un cambio de la entalpía igual al trabajo intercambiado es decir:

$$\Delta H = \Delta U = -W \quad (\text{criterio convencional de signos})$$

4.1.4 Coeficiente adiabático de un gas ideal.

Este coeficiente denotado por (γ , *gamma minúscula*), es el cociente en las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes, por lo que su definición es:

$$\gamma = C_P / C_V$$

Si a este cociente le aplicamos en el numerador la *Relación de Mayer*, vista con anterioridad queda:

$$\gamma = (R + C_V) / C_V$$

Como C_V difiere si el gas es monoatómico, diatómico o poliatómico, como se muestra en la Tabla 4.1, entonces γ también diferirá para cada tipo de gas:

$$\text{Gases monoatómicos: } \gamma = (R + C_V) / C_V = [R + (3/2) \cdot R] / (3/2) R = 1.7$$

$$\text{Gases diatómicos: } \gamma = (R + C_V) / C_V = [R + (5/2) \cdot R] / (5/2) R = 1.4$$

Gases poliatómicos: $\gamma = (R + C_V) / C_V = [R + (7/2) \cdot R] / (7/2) R = 1.3$

La importancia del coeficiente adiabático γ de un gas ideal radica en que cuando éste está sometido a un proceso adiabático AB , las presiones y volúmenes iniciales y finales se relacionan mediante la ecuación:

$$P_A / (V_B)^\gamma = P_B / (V_A)^\gamma$$

4.1.5 Ecuaciones del Trabajo en un proceso adiabático.

Finalmente, para calcular el *trabajo realizado* en un proceso adiabático AB , se utiliza alguna de las siguientes ecuaciones que también involucran γ :

$$W_{AB} = (P_B V_B - P_A V_A) / (1 - \gamma)$$

O bien:

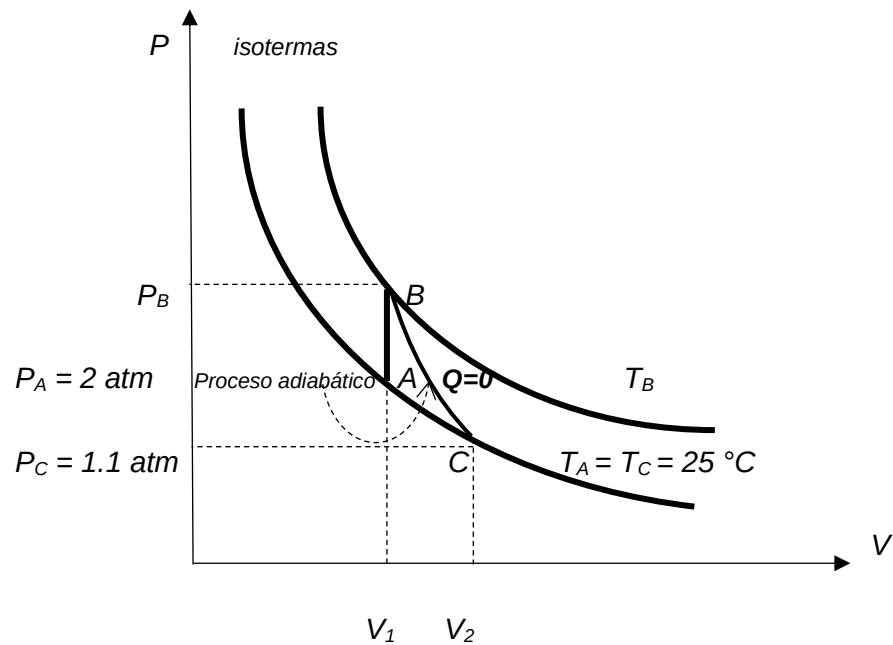
$$W_{AB} = n \cdot R \cdot \Delta T / (1 - \gamma)$$

Ejemplo: 4.4: Cien moles de un gas ideal diatómico que inicialmente está a una presión de 2 atm y 25 °C, punto A en la gráfica de la Figura 4.3, se somete a dos procesos

termodinámicos consecutivos: el primero es un proceso isocórico que le eleva la temperatura y la presión hasta la posición del punto B de dicha gráfica. Seguidamente se le aplica un proceso adiabático lo cual lo lleva al estado del punto C, con el mismo valor inicial de la temperatura y una presión de 1.1 atm. Encuentre los valores de P, V y T que se desconozcan en cada uno de los estados A, B y C y el trabajo realizado durante el proceso.

Figura 4.3

Ejemplo 4.4 Diagrama P-V



En la Tabla 4.2 se concentran las variables conocidas (Dato) y desconocidas (¿?) del planteamiento.

Tabla 4.2

Ejemplo 4.4 Variables del proceso por cada estado termodinámico.

Variables / Estados	A	B	C

Presión (P)	Dato: $P_A = 2 \text{ atm}$	¿? $P_B = 2.54 \text{ atm}$ ✓	Dato: $P_C = 1.1 \text{ atm}$
Volumen (V)	¿? $V_A = 1.22 \text{ m}^3$ ✓	¿? $V_B = 1.22 \text{ m}^3$ ✓	¿? $V_C = 2.22 \text{ m}^3$ ✓
Temperatura (T)	Dato: $T_A = 25 \text{ }^\circ\text{C}$	¿? $T_B = 104.5 \text{ }^\circ\text{C}$ ✓	Dato: $T_C = 25 \text{ }^\circ\text{C}$

Los datos y los resultados están señalados con “Dato” y el símbolo “✓” respectivamente.

Ahora se procede a calcular las variables desconocidas en cada estado marcadas con ¿? en la Tabla 4.2 y anotar los resultados en la misma. El orden de cálculo depende de cuáles son los datos disponibles y qué fórmulas son aplicables conforme se van obteniendo los valores desconocidos.

Nos damos cuenta que conociendo P_A y T_A podemos calcular V_A con la ecuación general de los gases ideales:

$$P_A V_A = R \cdot n \cdot T_A$$

$$V_A = R \cdot n \cdot T_A / P_A = (8.314 \text{ J/mol K})(100 \text{ mol})(25 + 273)\text{K} / (2 \text{ atm})(1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm})$$

$$\underline{V_A = 1.22 \text{ m}^3} \quad \checkmark$$

Como el proceso AB es isocórico entonces:

$$V_B = V_A = 1.22 \text{ m}^3$$

$$\underline{V_B = 1.22 \text{ m}^3} \quad \checkmark$$

Tenemos también la información parra calcular V_C :

$$V_C = R \cdot n \cdot T_C / P_C = (8.314 \text{ J/mol K})(100 \text{ mol})(25 + 273)\text{K} / (1.1 \text{ atm})(1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm})$$

$$\underline{V_C = 2.22 \text{ m}^3} \quad \checkmark$$

Ya estamos en condiciones de calcular P_B al inicio del proceso adiabático mediante la ecuación:

$$P_B / (V_C)^\gamma = P_C / (V_B)^\gamma$$

$$P_B = P_C (V_C / V_B)^\gamma = (1.1 \text{ atm})(2.22 \text{ m}^3 / 1.22 \text{ m}^3)^{1.4}$$

$$\underline{P_B = 2.54 \text{ atm}} \quad \checkmark$$

Procedemos a calcular T_B con la ecuación general de los gases:

$$T_B = P_B V_B / R \cdot n = (2.54 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/atm} \times 1.22 \text{ m}^3) / (8.314 \text{ J/mol K} \times 100 \text{ mol})$$

$$T_B = 377.5 \text{ K}$$

$$\underline{T_B = 104.5 \text{ }^\circ\text{C}} \quad \checkmark$$

Finalmente se calcula el trabajo...

Dado que el primer proceso es a volumen constante se tiene que: $W_{AB} = 0$

El trabajo en el proceso adiabático BC es:

$$W_{BC} = (P_C V_C - P_B V_B) / (1 - \gamma)$$

$$W_{BC} = (1.1 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} \times 2.22 \text{ m}^3 - 2.54 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} \times 1.22 \text{ m}^3) / (1 - 1.4)$$

$$\underline{W_{BC} = 1.67 \times 10^5 \text{ J} = 167 \text{ KJ}} \quad \checkmark$$

O bien con la fórmula:

$$W = n \cdot R \cdot \Delta T / (1 - \gamma) = 100 \times 8.314 \times (25 - 104.5) / (1 - 1.4) = 165,240.75 \text{ J}$$

$$\underline{W_{BC} = 1.65 \times 10^5 \text{ J} = 165 \text{ KJ}} \quad \checkmark$$

4.1.6 Ciclo termodinámico.

Cuando la secuencia de los procesos aplicados a un sistema termodinámico es de manera tal que el último proceso lo regresa al estado inicial de la secuencia, se dice que se tiene un *ciclo termodinámico*. Las máquinas térmicas y los enfriadores son ejemplos reales de aplicación de ciclos termodinámicos que se repiten una y otra vez en el fluido de trabajo de estos equipos que comentaremos a detalle más adelante.

El Trabajo neto realizado en un ciclo es la suma de los trabajos de cada uno de los procesos que componen el ciclo y su representación gráfica en el *plano P-V*, es el área que encierra la ruta cerrada del mismo.

Diagrama de un ciclo termodinámico en el plano P-V

Representado en el *diagrama P-V (presión-volumen)*, de la Figura 4.4, un ciclo termodinámico adopta la forma de una ruta cerrada. En este diagrama, el volumen de un sistema está representado en las *abscisas* y la presión en las *ordenadas*, de forma que se tiene que el trabajo por cambio de volumen, para cada proceso, es igual al *área descrita entre la línea que representa el proceso y el eje de abscisas*.

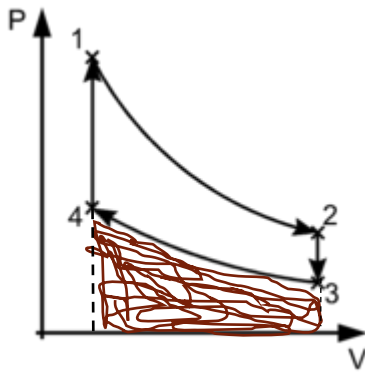
El sentido de avance, indicado por las puntas de flecha, nos indica si el incremento de volumen es positivo ($V_2 > V_1$, hacia la derecha en expansión), *el trabajo W* es positivo o negativo ($V_2 < V_1$, hacia la izquierda en compresión) y, como consecuencia, *el trabajo W* es negativo, según el *criterio convencional de signos* en la primera ley de la termodinámica.

Por lo tanto, se puede concluir que el *área encerrada por el ciclo termodinámico*, representa el **trabajo neto** realizado por el sistema en un ciclo completo, si éste avanza

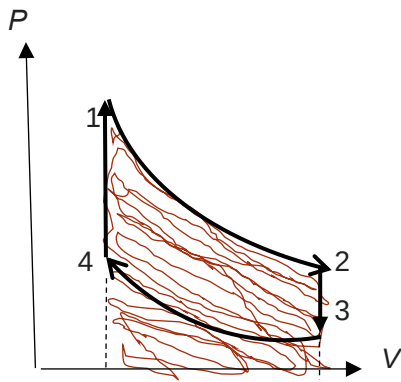
en *sentido horario* o, por el contrario, el trabajo total *ejercido sobre* el sistema si lo hace en *sentido antihorario*.

Figura 4.4

Representación gráfica del trabajo de un ciclo termodinámico.

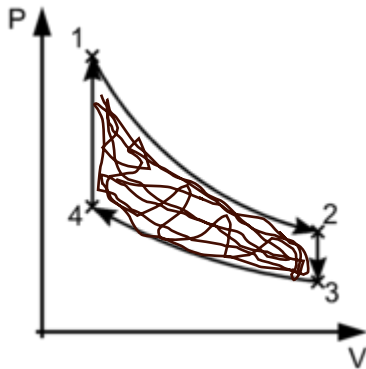


Área sombreada: Trabajo otorgado **al** Sistema
durante el proceso 3-4 (-)
Compresión ($V_4 < V_3$).



Área sombreada: Trabajo otorgado **por el** Sistema
Durante el Proceso 1-2 (+)
Expansión ($V_2 > V_1$).

***Nótese que los trabajos de los Procesos 2-3 y 4-1 son **cero** pues no existe área debajo de ellos.*



Área sombreada: Trabajo neto del ciclo.

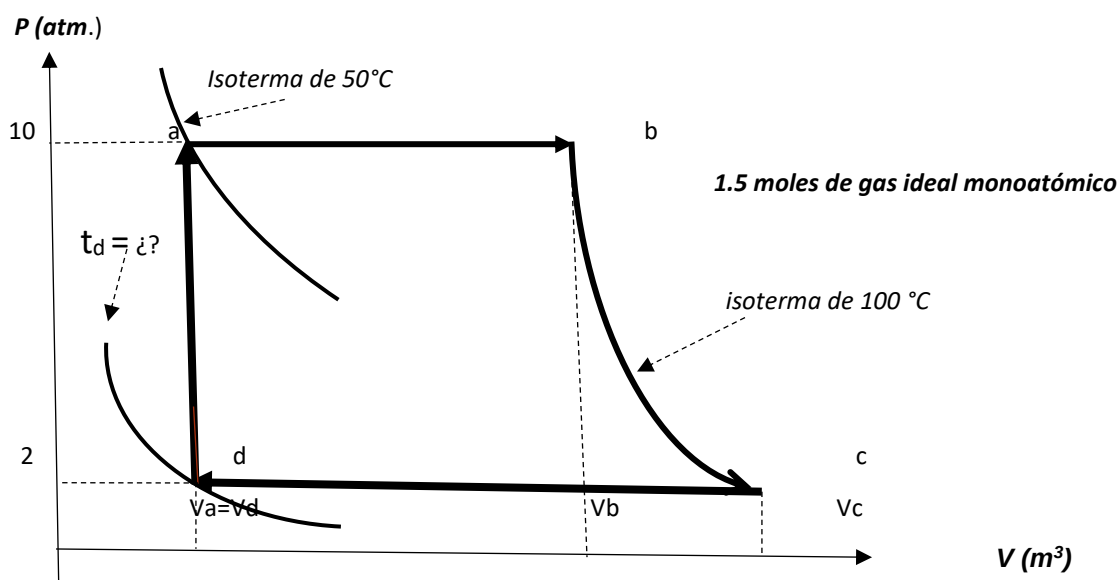
Como el trabajo del proceso 3-4 es negativo, la suma algebraica de las dos áreas representativas de los trabajos de los procesos 1-2 y 3-4 resulta ser el área que está dentro de ciclo, siendo la que representa el trabajo neto del mismo.

Ejemplo 4.5: Defina el Ciclo Termodinámico aplicado a un gas ideal, descrito en la Figura 4.5 (Calcular las variables de estado desconocidas en cada estado y el Trabajo neto realizado por el Ciclo Termodinámico).

Nota: Se dice que un **Ciclo Termodinámico** está *totalmente definido* cuando cada uno de sus estados (nodos), están determinados (variables termodinámicas P, V, t y el trabajo W del ciclo son conocidos).

Figura 4.5

Ejemplo 4.5 Representación del ciclo termodinámico.



En este ejemplo de Ciclo Termodinámico se pueden observar lo siguiente:

i.- Es una serie cíclica de cuatro estados: a , b , c y d .

ii.- Es un ciclo de cuatro procesos:

ab .- A presión constante, Isobárico a 10 atm ósferas. (varían t y V)

bc .- A temperatura constante, Isotérmico a 100°C . El Proceso se desarrolla sobre la isoterma correspondiente. (varían P y V)

cd .- A presión constante, Isobárico a 2 atm . (varían t y V)

da .- A volumen constante, Isométrico (varían t y P) (línea vertical)

iii.- En la tabla se muestran las variables termodinámicas de estado conocidas y las desconocidas (que deberán calcularse), en los estados a , b , c y d .

iv.- Se deben calcular tanto las variables de estado desconocidas, como el trabajo neto total del ciclo que es la **suma** de los trabajos individuales de cada proceso.

v.- El sentido del Ciclo es horario.

vi.- Se deben calcular tanto las variables de estado desconocidas, como el trabajo neto total del ciclo que es la **suma** de los trabajos individuales de cada proceso.

En la Tabla 4.3 y en la Figura 4.6 se muestra una representación del ciclo y los valores conocidos y desconocidos en cada estado.

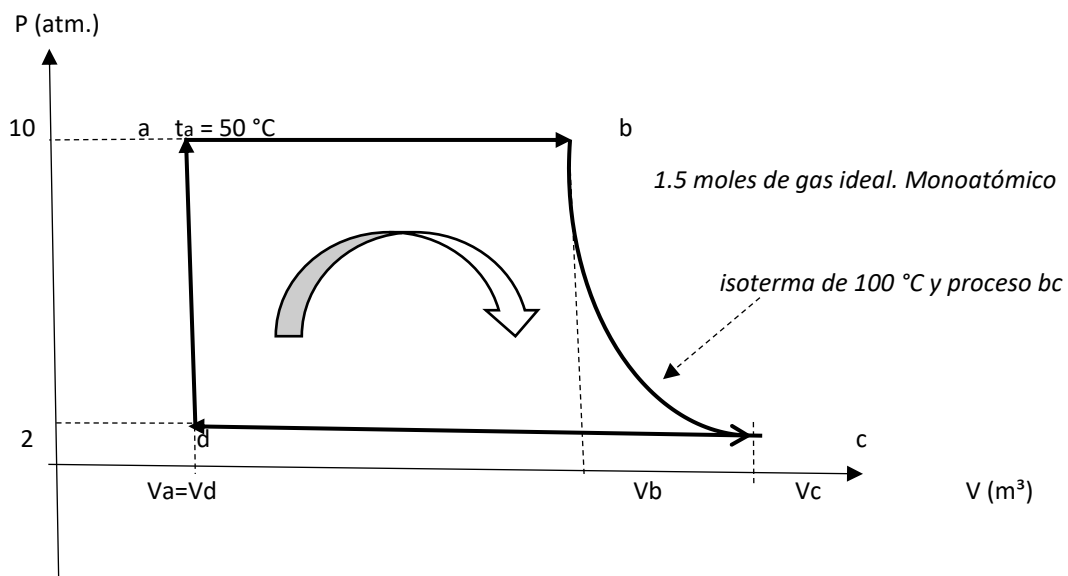
Tabla 4.3

Ejemplo 4.5

Estados	a	b	c	d
Variables				
V	¿?	¿?	¿?	¿?
P	10 atm	10 atm	2 atm	2 atm
T	50 °C	100 °C	100 °C	¿?

Figura 4.6

Ejemplo 4.5 Variables conocidas y por calcular por estado.



Resolución:

Cálculo de volúmenes con la ecuación general de los gases ideales:

$$V_b = n \cdot R \cdot T_b / P_b = 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} (100^\circ \text{C} + 273) \text{K} / 10 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm}$$

$$V_b = 4.592 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

$$V_d = V_a = n \cdot R \cdot T_a / P_a = 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} (50^\circ \text{C} + 273) \text{K} / 10 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5$$

$$\text{Nm/atm} = V_d = V_a = 3.9764 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

$$V_c = n \cdot R \cdot T_c / P_c = 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} (100^\circ \text{C} + 273) \text{K} / 2 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} =$$

$$V_c = 2,296 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 2.296 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

Cálculo de la temperatura T_d :

$$T_d = P_d V_d / n \cdot R = 2 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} \times 3.9764 \times 10^{-3} / 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/molK} = 64.6 \text{ K}$$

$$T_d = -208.4^\circ \text{C} \quad \checkmark$$

Cálculo del Trabajo W del Ciclo Termodinámico:

**Adviértase que las Ecuaciones de Trabajo usadas no incluyen el signo (-). (criterio convencional, perspectiva del entorno).*

$$W_{ab} = P \Delta V = P (V_b - V_a) \text{ (Proceso isobárico)}$$

$$W_{ab} = 10 \text{ atm} \times 1.013 \times (4.592 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 3.9764 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 623.6 \text{ J} \quad \checkmark$$

O bien:

$$W_{ab} = P\Delta V = n \cdot R \cdot (T_b - T_a) \text{ (Proceso isobárico)}$$

$$W_{ab} = 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times (100 - 50) \text{ K} = 623.55 \text{ J} \quad \checkmark$$

$$W_{bc} = n \cdot R \cdot T \times \ln(P_b/P_c) \text{ (isotérmico)}$$

$$= 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times (100^\circ\text{C} + 273) \text{ K} \times \ln(10 \text{ atm} / 2 \text{ atm})$$

$$= 7,486.6 \text{ J} \quad \checkmark$$

O bien:

$$W_{bc} = n \cdot R \cdot T \times \ln(V_d/V_b)$$

$$= 1.5 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times (100^\circ\text{C} + 273) \text{ K} \times \ln(22.96 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / 4.592 \times 10^{-3} \text{ m}^3)$$

$$= 7,486.6 \text{ J} \text{ (isotérmico)} \quad \checkmark$$

$$W_{cd} = P\Delta V = P(V_d - V_c) = 2 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} (V_d - V_c) \text{ (Proceso isobárico)}$$

$$W_{cd} = 2 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} \times (397.64 - 2,296) \times 10^{-5} \text{ m}^3 = -3,840 \text{ J} \quad \checkmark$$

$$W_{da} = 0 \quad \checkmark$$

(Proceso isovolumétrico, isométrico o isocórico) (no hay variación en el Volumen, por tanto no hay trabajo)

$$T_{\text{neto}} = 623.55 + 7,486.6 - 3,840 = 4,264 \text{ J} \quad \checkmark$$

Nota: El Trabajo neto resultó positivo, el entorno ganó energía. (Perspectiva del entorno).

4.2. La ley de conservación de la energía y su ecuación.

Esta ley es uno de los conceptos en los que se fundamenta gran parte del estudio de los fenómenos de la Física. Esta ley postula **que “la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma”**

La ecuación de la conservación de la energía se plantea de la siguiente forma:

$$Et = Ei + W + Q \quad (\text{criterio UIQPA})$$

Donde:

Et: energía total

Ei: energía inicial

W: trabajo transferido

Q: calor transferido

Esta relación nos dice que en *un sistema cerrado (el cual permite la transferencia de energía con su entorno)*, la energía total de un sistema después de un proceso, es igual a su *energía inicial más la transferencia del trabajo y el calor que tuvieron lugar durante el proceso*. Los signos de los *valores numéricos* de **W** y **Q** al sustituirlos en esta ecuación son independientes de los signos en la misma y serán según el sentido en el que se produjo la transferencia, desde el sistema a su entorno o viceversa.

4.2.1 Relación con la primera ley de la termodinámica.

Si escribimos esta ecuación como:

$$E_t - E_i = Q + W$$

Al tomar E_t como la energía final, notaremos que el miembro izquierdo es precisamente el incremento de la energía interna (ΔU) del sistema por lo que la ecuación se transforma quedando:

$$\Delta U = Q + W$$

que es la ecuación representativa de la *primera ley de la termodinámica* la cual hemos aplicado al cálculo de las variaciones de la energía interna y transferencia de trabajo y calor en procesos termodinámicos simples y complejos en temas anteriores en esta misma unidad y la anterior.

En otras palabras, la ley de la conservación de la energía, desde el punto de vista de la termodinámica, tiene su mejor enfoque en la primera ley de la misma, es por eso que esta primera ley también se conoce como ley de la conservación de la energía.

Ahora bien, aunque queda fuera del ámbito de este curso, diremos que desde el punto de vista de la mecánica clásica, la conservación de la energía está presente en todos los fenómenos físicos que estudia esta rama de la física como son caída libre, energía cinética y potencial, péndulo simple, fricción, colisiones y muchos temas más.

No obstante se han resuelto diversos ejemplos del tema con la aplicación de la primera ley de la termodinámica, se recomienda consultar algunas lecturas sobre el tema de la conservación de la energía disponibles en las diversas fuentes.

4.3. Casos especiales de la ecuación de la energía.

4.3.1 Ecuación del incremento energía en termodinámica.

Hemos visto que ecuación de la energía tiene en termodinámica es una expresión que guarda el siguiente formato:

$$E_t = E_i + W + Q$$

Donde:

E_t – energía total del sistema.

Q – calor transferido durante el proceso de cambio.

W – trabajo realizado durante el proceso.

Desde el punto de vista del incremento de la energía total que incluye las energías interna, cinética y potencial del sistema, podemos escribir:

$$\Delta E_t = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

De esta ecuación se presentan casos especiales que se aplican según las condiciones propias de determinados sistemas y procesos.

Sistemas cerrados.

- Sin modificación de la E_c y E_p .

En este caso

$$\Delta E_c = 0 \text{ y}$$

$$\Delta E_p = 0$$

Por lo que la ecuación queda:

$$\Delta E_t = \Delta U = Q + W$$

Que es la expresión de la *primera ley de la termodinámica* la cual hemos estudiado y aplicado con anterioridad.

- Sin transferencia de calor.

Cuando los cambios se dan sin transferencia de calor entre el sistema y su entorno, se dice que el proceso es *adiabático*.

Aquí se cumple que: $Q = 0$; entonces:

$$\Delta E_t = \Delta U = W$$

- Sin cambio en el volumen del sistema:

En estas condiciones el proceso se denomina *isocórico* y el trabajo $W = 0$, por tanto:

$$\Delta U = Q$$

4.3.2 Sistemas abiertos.

En este tipo de sistema deben ser consideradas las variaciones en la entalpía y las energías cinética y potencial además de los cambios de la energía interna ΔU . La correspondiente versión de la ecuación de la energía es:

$$\Delta E_t = \Delta U + \Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Como sabemos, la entalpía de un sistema es la cantidad de calor que un sistema es capaz de intercambiar con su entorno en condiciones de presión constante, entonces ΔH

es la cantidad de este calor que se intercambi6 cuando se ha realizado un proceso isob6rico. La f6rmula para calcular la entalpía es:

$$H = U + P \cdot V$$

Donde:

H – entalpía.

U – energía interna.

P – presi6n.

V – volumen.

El incremento de la entalpía se encuentra mediante la ecuaci6n:

$$\Delta H = \Delta U + P \cdot \Delta V$$

Donde: $\Delta U = C_v \Delta T$

Otra ecuaci6n útil para ΔH es:

$$\Delta H = C_p \Delta T$$

Por otro lado:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Delta E_p = g(h_f - h_i)$$

En determinados casos de bombas, turbinas o intercambiadores de calor, se puede despreciar Q o W , simplificando el c6lculo y an6lisis del balance de la energía.

Se debe tener siempre en cuenta que existen dos criterios para los signos en la transferencia de Q y W , el convencional y el UIQPA. En este apartado se utiliza el primero.

4.4. Capacidades caloríficas a volumen constante y a presión constante.

4.4.1 Capacidad calorífica de los gases ideales.

En el caso de los gases, el calentamiento produce variaciones significativas en la presión y en el volumen del gas. Dos casos relevantes en el proceso de calentar un gas se presentan cuando por algún medio se mantiene constante ya sea la presión o el volumen del fluido. Para estas dos situaciones se tiene que la *capacidad calorífica* de cada gas es diferente, es decir que la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gas un grado, no es la misma si el proceso se efectúa manteniendo constante la presión (isobárico) o constante el volumen (isométrico). Además, cuando se trabaja con gases resulta más conveniente utilizar la materia expresada en *moles*, el mol de cada tipo de gas tiene diferente masa, lo que confirma esta conveniencia. Para diferenciar esta importante propiedad en sus dos versiones, se utiliza la siguiente nomenclatura:

C_p *capacidad calorífica en el calentamiento a presión constante.*

C_v *capacidad calorífica en el calentamiento a volumen constante.*

El valor de las capacidades caloríficas de los gases depende de su estructura atómica-molecular y puede expresarse en términos de la constante universal de los gases ideales R , como se muestra en la Tabla 4.1:

Tabla 4.1

Capacidad calorífica de los gases según su estructura molecular.

<i>Estructura molecular del gas.</i>	<i>Capacidad calorífica molar a volumen constante.</i> C_v <i>(J/mol K)</i>	<i>Capacidad calorífica molar a presión constante.</i> C_p <i>(J/mol K)</i>
<i>Monoatómico.</i>	$(3/2) R = 12.5$	$(5/2) R = 20.8$
<i>Diatómico.</i>	$(5/2) R = 20.8$	$(7/2) R = 29.1$
<i>Poliatómico.</i>	$(7/2) R = 29.1$	$(9/2) R = 37.41$

Puede verse ahora la llamada *Relación de Mayer* (por el físico alemán Julius Robert Mayer) entre C_p y C_v que establece que:

$$C_p - C_v = R$$

Esta relación de Mayer es útil en la resolución de problemas de cálculo del trabajo en procesos termodinámicos cíclicos como se verá más adelante.

Ecuación de calor Q para los gases.

La ecuación de calor $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$, en el caso de los gases adquiere los formatos:

$$Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T \quad \text{para procesos a presión constante.}$$

$$\text{o: } Q = n \cdot C_v \cdot \Delta T \quad \text{para procesos a volumen constante.}$$

n – cantidad de sustancia del gas expresada en moles.

Ejemplo 4.1: Dentro de un cilindro con pistón móvil hay dos moles de gas ideal monoatómico a 20 °C y se le suministra 500 J de calor manteniendo la presión constante. Hallar: a) El incremento de la temperatura del gas, b) El trabajo realizado por el gas, c) el valor del cociente V_i/V_f .

Resolución:

a) *El incremento de la temperatura del gas...*

Como el proceso se efectúa a presión constante aplicamos la ecuación:

$$Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T;$$

despejando $\Delta T = Q / (n \cdot C_p)$

$$\Delta T = 500 \text{ J} / (2 \text{ mol} \times (5/2)R) = 100 / R = 12.02 \text{ K (o } ^\circ\text{C)} \quad \checkmark$$

b) *El trabajo realizado a presión constante por el gas...*

$$W = R \cdot n \cdot \Delta T$$

$$W = (8.314 \text{ J/mol K}) (2 \text{ mol}) (12.02 \text{ K}) = 200 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) *el valor del cociente V_i/V_f ...*

$$V_i / V_f = (n_i R T_i / P_i) / (n_f R T_f / P_f)$$

Como $P_i = P_f$ y $n_i = n_f$, la expresión queda:

$$V_i / V_f = T_i / T_f = (20 + 273) / (20 + 273 + 12.02) = 0.16 \quad \checkmark$$

Nótese que en los procesos isobáricos se cumple la relación:

$$V_i / V_f = T_i / T_f$$

Ejemplo: 4.2 (Serway 19.21): En un proceso abierto a la atmósfera, a un mol de gas hidrógeno inicialmente a 300 K, se le eleva su temperatura 120 K. Encuentre: a) el calor absorbido por el gas, b) el trabajo efectuado, c) la variación de la energía interna del fluido.

Resolución:

a) el calor absorbido por el gas...

El gas hidrógeno es diatómico y como el calentamiento es a presión constante entonces recurriremos a su calor específico $C_p = (7/2) R = 29.1 \text{ J/mol K}$

Sustituyendo en la ecuación de calor:

$$Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T; \quad Q = (1 \text{ mol})(29.1 \text{ J/mol K})(120 \text{ K}) = 3,492 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) el trabajo efectuado...

$$W = R \cdot n \cdot \Delta T = (8.314 \text{ J/mol K})(1 \text{ mol})(120 \text{ K}) = 998 \text{ J} \quad \checkmark \quad (\text{positivo según criterio convencional})$$

(positivo, trabajo efectuado por el gas sobre el entorno)

*Otra forma (con el valor de C_p):

Despejando ΔT de la ecuación de calor: $\Delta T = Q / n \cdot C_p$

Sustituyendo en la ecuación de trabajo:

$$W = R \cdot n \cdot \Delta T = R \cdot Q / C_p = (8.314 \text{ J/mol K}) (3,492 \text{ J}) / (29.1 \text{ J/mol K})$$

$$W = 998 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) *variación de la energía interna del fluido...*

Con la ecuación de la primera ley de la termodinámica en procesos isobáricos:

$$\Delta U = Q - W = (3,492 - 998) \text{ J} = 2,494 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.5. Ecuación de la entropía.

La medición de la entropía en términos absolutos no puede realizarse como sucede con otros aspectos que integran la energía interna de los sistemas termodinámicos, sin embargo es posible medir *el cambio* de la entropía de antes a después de la ocurrencia de un proceso. La ecuación para esta importante función termodinámica difiere para cada tipo de proceso, como a continuación se muestra:

4.5.1 Ecuación de la entropía en procesos isotérmicos.

La ecuación que nos permite calcular el cambio de entropía en este tipo de procesos es:

$$\Delta S = Q / T$$

Donde: ΔS – variación de la entropía.

Q – calor transferido entre el sistema y su entorno.

T – temperatura a la que se transfirió el calor.

Las unidades de ΔS son J/K o $J/kg K$ cuando se reporta por unidad de masa o $J/mol K$ si se usan moles de sustancia.

Esta igualdad es válida para los procesos reversibles. Para procesos irreversibles el valor calculado de ΔS resulta ser el cambio mínimo de la entropía por lo que la expresión se transforma en una desigualdad:

$$\Delta S \geq Q / T$$

Es decir, obtendremos el *valor mínimo* del cambio de entropía, sin tomar en cuenta la parte de la energía transferida que no se pudo transformar en trabajo útil. Si sustituimos el equivalente de Q según la primera ley de la termodinámica, ($Q = \Delta U + W$), en la primera expresión de ΔS :

$$\Delta S = (\Delta U + W) / T \quad \text{como } \Delta U = 0 \text{ en procesos isotérmicos}$$

$$\Delta S = W / T$$

$$\text{pero: } W = n \cdot R \cdot T \ln(V_2/V_1) = n \cdot R \cdot T \ln(P_1/P_2)$$

por lo que la ecuación queda:

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln(V_2/V_1) = n \cdot R \cdot \ln(P_1/P_2)$$

Nótese que aquí se combinan tres ecuaciones: la de entropía, la del primer principio de la termodinámica y la del trabajo.

Ejemplo 4.6: Una muestra de un mol de gas ideal monoatómico está a una presión de 10 atm a una temperatura de 300 K. El gas se comprime a temperatura constante hasta que su presión es de 1 atm ¿cuál es el cambio de su entropía?

Resolución:

En los procesos isotérmicos $\Delta T = 0$ y $\Delta U = 0$, pero $Q \neq 0$

$$\Delta S = (\Delta U + W) / T = W / T$$

Por lo tanto:

$$\Delta S = R \cdot n \cdot \ln(P_1 / P_2) = 8.314 \text{ J/mol K} \times (1 \text{ mol}) \times \ln(10/1)$$

$$\Delta S = 19.14 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.5.2 Ecuación de la entropía en procesos isobáricos.

Aquí, la presión es constante, pero existe cambio en la temperatura, la ecuación de la entropía en este tipo de procesos es:

$$\Delta S = C_p \cdot \ln(T_f / T_i)$$

Nota: El resultado de esta ecuación es en J/mol K.

Ejemplo 4.7: Dos moles de gas oxígeno (O_2) incrementan su temperatura de 27 a 127 °C en un proceso a presión constante. calcular el cambio de la entropía del gas.

Resolución:

$$\Delta S = C_p \cdot \ln(T_f / T_i)$$

El calor específico a presión constante del gas oxígeno O_2 es $C_p = 29.355 \text{ J/mol K}$

$$\Delta S = 29.355 \text{ J/mol K} \times \ln(400 / 300) = 8.441 \text{ J/mol K}$$

Como se tienen dos moles del gas:

$$\Delta S_{\text{total para dos moles y un incremento de } 1000\text{K}} = 8.441 \text{ J/mol K} \times 2 \text{ mol} \times 100 \text{ K}$$

$$\Delta S = 1,688.2 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.5.3 Ecuación de la entropía en procesos isocóricos.

Cuando el volumen no cambia en un proceso, el trabajo es nulo, es decir:

$$Q = \Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T \quad \text{y} \quad dS = dQ / T$$

$$\text{Entonces } \Delta S = n \cdot C_v \cdot \ln(T_2 / T_1)$$

4.5.4 Ecuación de la entropía en procesos adiabáticos irreversibles.

En los procesos adiabáticos la temperatura, la presión y el volumen del sistema pueden cambiar. El cambio de entropía queda en función del cambio de la temperatura y el volumen según la ecuación:

$$\Delta S = C_v \times \ln(T_2/T_1) + R \times \ln(V_2/V_1)$$

Ecuación de la entropía en procesos adiabáticos reversibles.

$$\text{aquí } Q = 0 \quad \text{entonces:} \quad \Delta S = 0$$

4.5.5 Máquinas térmicas.

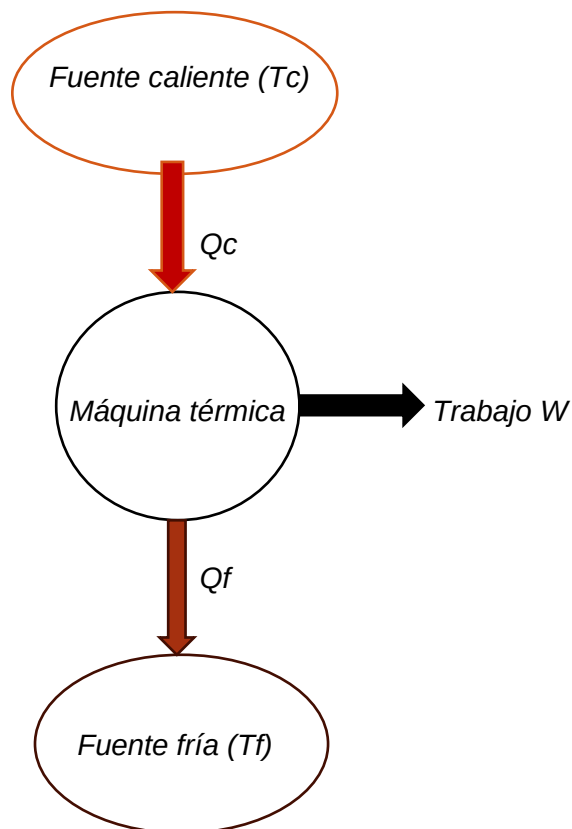
Una máquina térmica es aquella que transforma el calor en trabajo. Estos dispositivos absorben calor “caliente” Q_c de una *fente caliente* con temperatura T_c , con el que producen trabajo W y descargan el calor “frío” residual Q_f a una *fente fría* con una temperatura T_f . Este proceso **es cíclico** y se realiza con una sustancia de trabajo como vapor o gas. Aquí la temperatura T_c es mayor que la temperatura T_f .

$$T_c > T_f$$

En la Figura 4.8 se muestra una representación esquemática de una máquina térmica.

Figura 4.8

Esquema de una máquina térmica.



Resulta claro que el trabajo W producido, es la diferencia entre el calor de entrada menos el de salida:

$$W = Q_c - Q_f$$

La eficiencia de una máquina térmica es *la relación* entre el trabajo que la máquina es capaz de entregar y el calor que recibe para ello. Esta eficiencia térmica, generalmente se denota con el símbolo: η (*letra eta minúscula*). La relación es:

$$\eta = W / Q_c$$

o bien:

$$\eta = (Q_c - Q_f) / Q_c$$

o:

$$\eta = 1 - (Q_f / Q_c)$$

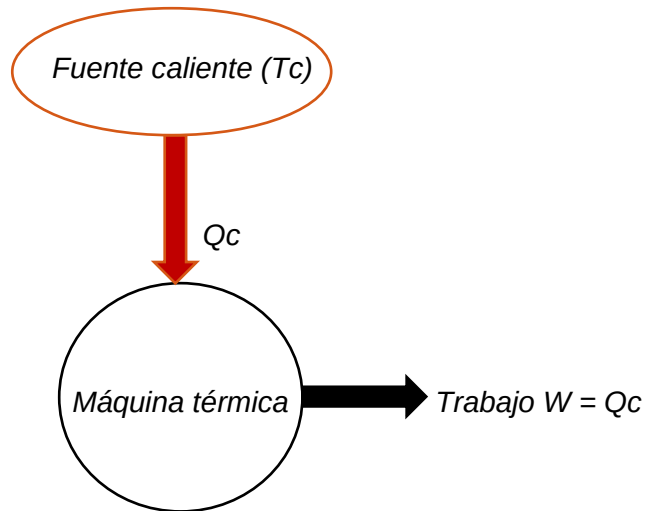
en función de la temperatura:

$$\eta = 1 - (T_f / T_c)$$

No es posible construir una máquina que transforme en trabajo todo el calor que se le suministra debido a la energía que consume la propia máquina para funcionar. Esta máquina se conoce como imposible y su esquema se muestra en la Figura 4.9.

Figura 4.9

Máquina térmica imposible.

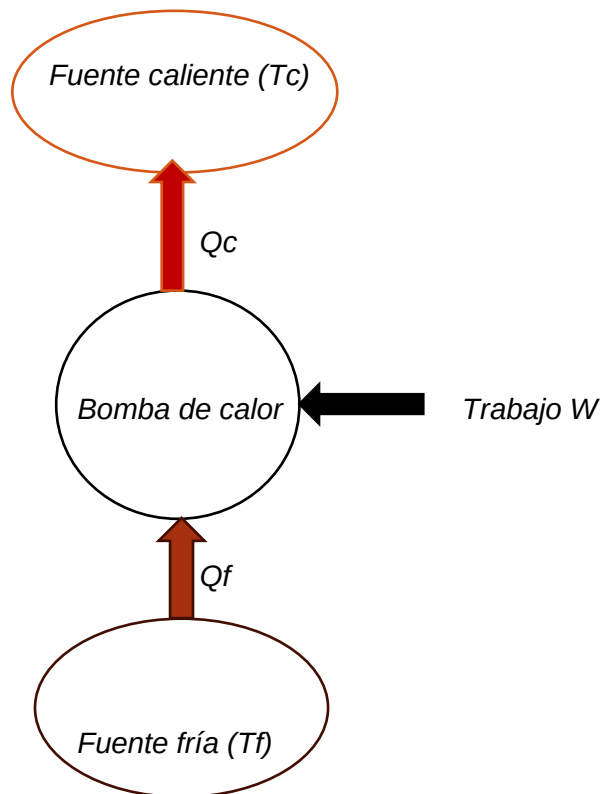


4.5.6 Bombas de calor.

Cuando la función del equipo es contraria a la de una máquina térmica, es decir, absorbe trabajo y calor de la fuente fría y lo transfiere a la fuente caliente, entonces se trata de una *bomba de calor*. El esquema de operación de estos dispositivos se muestra en la Figura 4.10.

Figura 4.10

Esquema de funcionamiento de una bomba de calor.



La eficiencia de las bombas de calor, normalmente conocida como *coeficiente de operación* (*COP*) tiene dos versiones, la del *calor bombeado* y la del *calor absorbido*. La primera es la razón entre el calor transferido a la fuente caliente y el trabajo suministrado a la bomba y la segunda, la razón entre el calor absorbido y dicho trabajo.

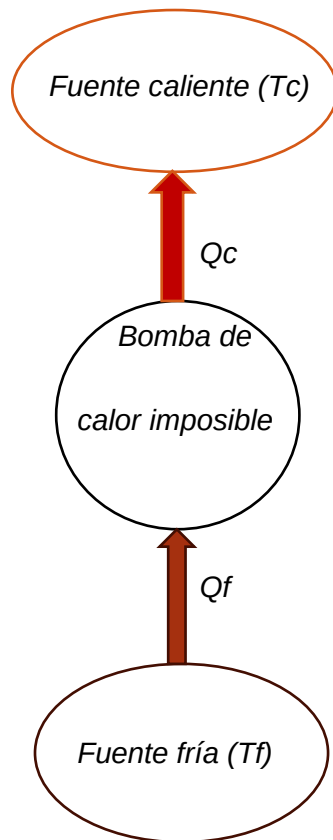
$$COP_{\text{(calor bombeado)}} = Q_c / W$$

$$COP_{\text{(calor absorbido)}} = Q_f / W$$

Similarmente a las máquinas térmicas imposibles, no se puede construir una bomba de calor que transfiera todo el calor extraído de una fuente fría a una fuente caliente sin que se le tenga que suministrar trabajo. Así, el caso imposible se representa en la Figura 4.11

Figura 4.11

Esquema de un frigorífico imposible.



Ejemplo 4.8 (22.3 Serway) Una bomba de calor absorbe 120 J por ciclo y tiene un coeficiente de operación de 5. Hallar a) el trabajo realizado por ciclo y b) el calor que entrega a la fuente caliente por ciclo.

Resolución:

a) el trabajo realizado por ciclo...

$$COP_{(\text{calor absorbido})} = Q_f / W$$

$$5 = 120 \text{ J} / W \quad W = 24 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) el calor que entrega a la fuente caliente por ciclo.

$$W = Q_c - Q_f \quad Q_c = W + Q_f = 24 \text{ J} + 120 \text{ J} = 144 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.9 (22.7 Serway) Cierta combustible suministra, para cada ciclo de funcionamiento, 1,600 J de energía calorífica a una máquina térmica que a su vez descarga 1,000 J de calor a la atmósfera. Calcular a) la eficiencia de la máquina, b) el trabajo desarrollado por ciclo, c) la potencia que entrega la máquina si cada ciclo dura 0.3 segundos.

Resolución:

a) la eficiencia de la máquina...

$$\eta = 1 - (Q_f / Q_c) = 1 - (1,000 \text{ J} / 1,600 \text{ J}) = 0.375 \text{ (37.5 \%)} \quad \checkmark$$

b) el trabajo desarrollado por ciclo...

$$W = Q_c - Q_f = (1,600 - 1,000) \text{ J} = 600 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) la potencia que entrega la máquina si cada ciclo dura 0.3 segundos.

$$\text{Potencia} = W / t = 600 \text{ J} / 0.3 \text{ s} = 2 \text{ KW} \quad \checkmark$$

4.5.8 El Ciclo de Carnot.

Como vimos, un ciclo termodinámico es aquella serie consecutiva de procesos aplicados a un sistema de forma tal que la sustancia de trabajo regresa a su estado final mediante el último proceso, esto hace que la ruta de la serie sea cíclica.

El ciclo de Carnot es un ciclo *ideal* de cuatro procesos o etapas que describe el funcionamiento de una máquina térmica reversible. Fue propuesto por físico e ingeniero francés Sadi Carnot y se aplica para el cálculo de la máxima eficiencia posible en la *conversión de calor en trabajo* de este tipo de dispositivos.

Etapas del ciclo de Carnot.

1. Expansión isotérmica ($A \rightarrow B$): El gas absorbe calor (Q_c) de un foco caliente y se expande a temperatura constante (temperatura caliente T_c), disminuyendo su presión y realiza trabajo sobre el entorno.
2. Expansión adiabática ($B \rightarrow C$): El gas se sigue expandiendo, pero ahora sin intercambio de calor ($Q = 0$) por lo que su temperatura disminuye de T_c a T_f (temperatura fría) y su presión sigue disminuyendo.
3. Compresión isotérmica ($C \rightarrow D$): El gas cede calor (Q_f) a temperatura constante (temperatura fría T_f) a un foco frío, por lo que se comprime y el entorno realiza trabajo sobre el gas.
4. Compresión adiabática ($D \rightarrow A$): Se comprime el gas pero sin intercambio de calor, la temperatura entonces aumenta de T_f a T_c y el sistema vuelve al estado inicial.

Eficiencia del ciclo de Carnot.

La eficiencia (η), dado que es aplicado a una máquina térmica se define como:

$$\eta = 1 - (T_f / T_c)$$

donde:

- T_c es la temperatura del foco caliente y
- T_f la del foco frío (*en Kelvin*).

Notas importantes sobre el ciclo de Carnot:

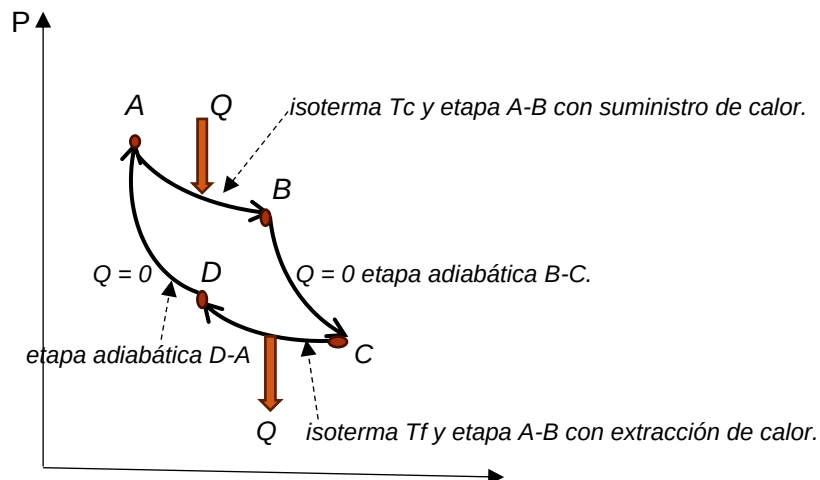
- . Es un ciclo reversible, sin pérdidas.
- . Representa la máxima eficiencia teórica posible.
- . Ninguna máquina real puede superarlo.
- . Puede funcionar como motor térmico o como bomba de calor (si se invierte el ciclo).

Diagrama P-V del ciclo de Carnot.

Una gráfica muy útil que ayuda a un entendimiento más claro del ciclo de Carnot es el diagrama *P-V* que se muestra en la Figura 4.12.

Figura 4.12

Diagrama P-V del ciclo de Carnot (construcción propia).



V

Ejemplo 4.10 (22.11 Serway) Se presenta el proyecto de aprovechar el gradiente de temperatura del mar para la instalación de una planta de energía eléctrica diseñada para operar entre el rango de temperaturas entre 20 °C y 5 °C, temperaturas de la superficie y el fondo del agua respectivamente. Calcular: a) La eficiencia máxima de la planta, b) la energía térmica que se absorbe por hora para una potencia de salida de 75 MW.

Resolución:

a) *-La eficiencia máxima de la planta...*

$$\eta = 1 - (T_f / T_c) = 1 - (5\text{ °C} + 273)\text{ K} / (20\text{ °C} + 273)\text{ K} = 0.052 = 5.2\% \quad \checkmark$$

b) *la energía térmica que se absorbe por hora para una potencia de salida de 75 MW...*

$$\eta = W / Q_c;$$

$$Q_c = W / \eta = (75 \times 10^6 \text{ J/s}) \times 3,600 \text{ s/hr} / 0.052 = 5.2 \times 10^6 \text{ J/hr} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.11: La máxima eficiencia de un motor que trabaja bajo el régimen de Carnot es del 48% y la temperatura de operación del motor es de 330 °C en la cámara la combustión. ¿Cuál es la temperatura de los gases de escape?

Resolución:

$$\eta = 0.48$$

$$\eta = 1 - (T_f / T_c)$$

$$T_c = 330\text{ °C} = 603\text{ K}$$

$$T_f = (1 - \eta) T_c = (1 - 0.48) \times 603\text{ K} = 313.56\text{ K} = 40.56\text{ °C} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.12 (22.17 Serway): Un equipo de acondicionamiento de aire recibe calor de su fuente fría a una temperatura de 13 °C y lo bombea al exterior que registra 30 °C. Calcular a) el máximo coeficiente de operación, b) si el coeficiente de operación real es de un tercio del máximo y el equipo libera 8×10^4 J de calor por segundo ¿cuál es su potencia?

Resolución:

a) el máximo coeficiente de operación

$$\eta = 1 - (T_f / T_c) = 1 - (13 \text{ °C} + 273) \text{ K} / (30 \text{ °C} + 273) \text{ K} = 0.056$$

$$\text{como } \eta = W / Q_c \quad \text{y} \quad \text{COP} = Q_c / W$$

$$\text{entonces } \text{COP}_{(\text{calor bombeado})} = 1 / \eta = 1 / 0.056 = 17.8 \quad \checkmark$$

b) si el coeficiente de operación real es de un tercio del máximo y el equipo libera 8×10^4 J de calor por segundo ¿cuál es su potencia?

$$\text{COP}_{\text{real}} = 17.8 / 3 = 5.77$$

$$Q_c = 8 \times 10^4 \text{ J/s}$$

$$\text{COP}_{(\text{calor bombeado})} = Q_c / W$$

$$W = Q_c / \text{COP}_{(\text{calor bombeado})} = 8 \times 10^4 \text{ J/s} / 5.77 = 13.86 \text{ J/s}$$

$$\text{Potencia} = 13.86 \text{ KW} \quad \checkmark$$

4.6. Segunda ley de la termodinámica.

En la Unidad 2 vimos el concepto genérico: *“la entropía, que se simboliza como (S), debe interpretarse como el grado de desorden o desgaste que con el tiempo los sistemas adquieren en forma natural como consecuencia de su dinámica propia, interna y con el entorno”* y del enfoque termodinámico de esta variable fundamental en donde señalamos: *“desde el enfoque de la termodinámica se define como la cantidad de energía de un sistema que no puede ser aprovechada en la obtención de trabajo útil”*. Se aclaró que un valor discreto específico de la entropía no puede ser calculado, sin embargo, puede conocerse el valor de su variación (ΔS) en el sistema.

En el apartado 4.5 se abordó el tema de la entropía y de la ecuación que se aplica para calcular esta variación atendiendo el tipo de proceso termodinámico que produjo el cambio de estado del sistema.

La segunda ley de la termodinámica fue el resultado final, de los trabajos del físico francés Sadi Carnot en 1854 y el científico alemán Rudolf Clausius en la misma década de 1850 quien, entre otras importantes aportaciones, declaró que: *“el calor no puede transferirse de un punto a baja temperatura a otro a temperatura más alta sin la ocurrencia de otros cambios simultáneos.”*

Lord Kelvin postuló la segunda ley de la termodinámica así: *“es imposible que una máquina transfiera calor, sin ayuda externa, de un cuerpo a otro de mayor temperatura”*.

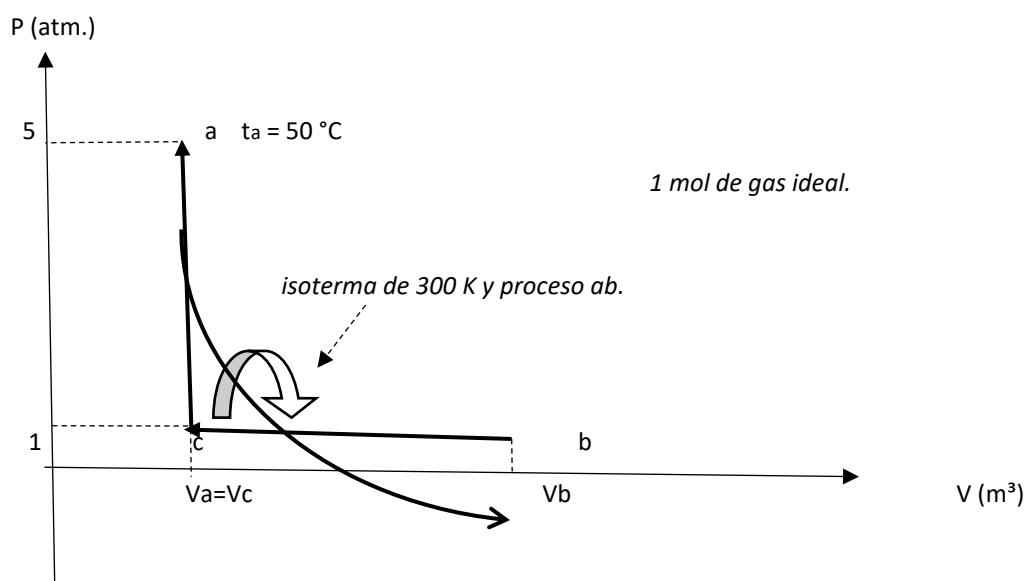
Existen muchas profundizaciones y aportaciones sobre el estudio de la segunda ley de la termodinámica y sus aplicaciones e implicaciones. Las más básicas de ellas llevan a las ecuaciones que hemos utilizado anteriormente que nos dan un horizonte suficientemente amplio para este curso.

Ejercicios propuestos para resolución por los estudiantes.

Ejercicio propuesto 1: Una serie cíclica de tres procesos termodinámicos llevan a un mol de gas ideal a igual número de estados diferentes, a, b y c, tal como lo muestra la Figura 4.13. Calcular a) los valores de las variables desconocidas en cada estado, b) el trabajo neto del ciclo, c) calor neto transferido durante el ciclo, d) incremento de la energía interna del ciclo.

Figura 4.13

Ejercicio propuesto 1:



Ejercicio propuesto 2:

Una máquina de Carnot entrega una potencia de 250 KW en cada ciclo ($Pot = \text{Trabajo/tiempo}$) y el rango entre sus fuentes de energía es de 35 °C a 550 °C ¿Cuánta energía absorbe la máquina en un ciclo de operación si éste dura un segundo?

Ejercicio propuesto 3:

Una máquina de Carnot con una potencia de 200 KW funciona entre un rango de temperaturas de 30 °C a 600 °C ¿Cuánta energía calorífica se absorbe y se pierde por hora de operación?

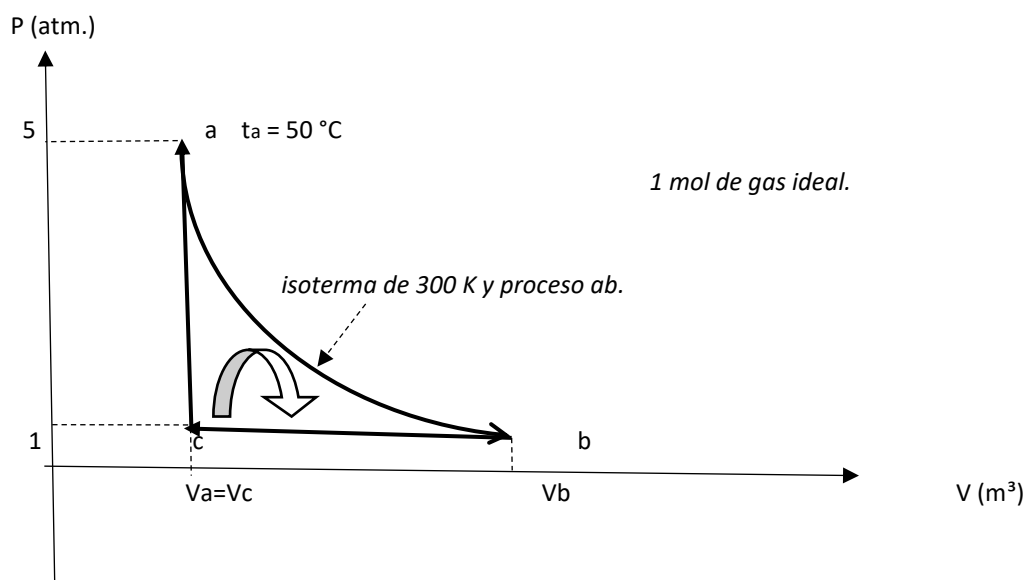
Anexo 1: Resolución de los Ejercicios propuestos para práctica de los estudiantes.

Ejercicio propuesto 1:

Una serie cíclica de tres procesos termodinámicos llevan a un mol de gas ideal a igual número estados diferentes, a, b y c, tal como lo muestra la Figura 4.13. Calcular a) los valores de las variables desconocidas en cada estado, b) el trabajo neto del ciclo, c) Calor neto transferido durante el ciclo, d) Incremento de la energía interna (ΔU) del ciclo.

Figura 4.13

Ejercicio propuesto 1:



Resolución:

a) calcular los valores de las variables desconocidas en cada estado.

En la Tabla 4.4 aparecen los valores conocidos de las variables P , V y T los estados en los que se desconocen.

Tabla 4.4

Ejemplo 4.6 Variables conocidas y por calcular en cada estado.

Estados Variables	a	b	c
P	5 atm	1 atm	1 atm
V	¿?	¿?	¿?
T	300 K	300 K	¿?

Tipos de procesos del ciclo:

Proceso ab: isotérmico.

Proceso bc: isobárico.

Proceso ca: isocórico.

En los estados a y b conocemos dos de las tres variables (P y T), por lo que podemos calcular V_a y V_b con la ecuación general de los gases ideales:

$$V_a = nRT_a / P_a = 1 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times 300 \text{ K} / (5 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm})$$

$$V_a = 0.005 \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

$$V_b = nRT_b / P_b = 1 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times 300 \text{ K} / (1 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm})$$

$$V_b = 0.025 \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

$$V_c = V_a = 0.005 \text{ m}^3 \quad \checkmark$$

Ahora obtenemos el valor de la temperatura T_c con la ecuación general:

$$T_c = P_c V_c / nR = 1 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} \times 0.005 \text{ m}^3 / (1 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J/molK})$$

$$T_c = 61 \text{ K} \quad \checkmark$$

Hasta aquí, hemos **definido completamente** el ciclo termodinámico pues hemos determinado los tipos de procesos y conocemos los valores de P , V , y T en todos los estados.

b) Cálculo del trabajo neto del ciclo.

Trabajo del proceso ab , (isotérmico)...

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln(P_a / P_b) = 8.314 \text{ J/mol K} \times 1 \text{ mol} \times 300 \text{ K} \times \ln(5/1) = 4,014.26 \text{ J}$$

Trabajo del proceso bc , (isobárico)...

$$W_{bc} = P (V_c - V_b) = 1 \text{ atm} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm/atm} (0.005 - 0.025) \text{ m}^3 = - 2,026 \text{ J}$$

Trabajo del proceso ca (isocórico)...

$$W_{ca} = 0 \text{ (pues sin cambio de volumen no se realiza trabajo)}$$

Trabajo neto total del ciclo:

$$W_{\text{neto}} = 4,014.26 \text{ J} - 2,026 \text{ J} = 1,988.26 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) Calor neto transferido durante el ciclo...

$$Q_{\text{neto}} = Q_{ab} \text{ (proceso isotérmico)} + Q_{bc} \text{ (isobárico)} + Q_{ca} \text{ (isocórico)}$$

$$Q_{ab} \text{ (proceso isotérmico)} = W_{ab} = 4,014.26 \text{ J}$$

$$Q_{bc} \text{ (isobárico)} = nC_p(T_c - T_b) = 1 \text{ mol} \times 29.1 \text{ J/mol K} \times (61 - 300)\text{K}$$

$$Q_{bc} \text{ (isobárico)} = - 6, 954.9 \text{ J}$$

$$Q_{ca} \text{ (isocórico)} = \Delta U \quad (W = 0) ;$$

$$\Delta U = nC_v(T_a - T_c) = 1 \text{ mol} \times 20.8 \text{ J/mol K} \times (300 - 61) \text{ K}$$

$$Q_{ca} \text{ (isocórico)} = 4,971.2 \text{ J}$$

$$\text{Calor neto transferido} = 4,014.26 \text{ J} - 6,954.9 \text{ J} + 4,971.2 \text{ J} = 2,030.56 \text{ J} \quad \checkmark$$

d) *Incremento de la energía interna (ΔU) del ciclo...*

$$\Delta U_{ab} = 0 \text{ (por ser proceso isotérmico)}$$

$$\Delta U_{bc} = nC_v(T_c - T_b) = 1 \text{ mol} \times 29.1 \text{ J/mol K} \times (61 - 300) \text{ K} = - 6,954.9 \text{ J}$$

$$\Delta U_{ca} = nC_v(T_a - T_c) = 1 \text{ mol} \times 29.1 \text{ J/mol K} \times (300 - 61) \text{ K} = 6,954.9 \text{ J}$$

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = 0 \quad \checkmark$$

Ejercicio propuesto 2:

Una máquina de Carnot entrega una potencia de 250 KW en cada ciclo (Pot = Trabajo/tiempo) y el rango entre sus fuentes de energía es de 35 °C a 550 °C ¿Cuánta energía absorbe la máquina en un ciclo de operación si éste dura un segundo?

Resolución:

$$\text{Potencia} = 250 \times 10^3 \text{ J/s}$$

$$T_c = 550\text{ }^{\circ}\text{C} = 823\text{ K}$$

$$T_f = 35\text{ }^{\circ}\text{C} = 308\text{ K};$$

$$\text{Potencia} = \text{Trabajo} / \text{tiempo};$$

$$\text{Trabajo: } T = \text{Potencia} \times \text{tiempo} = 250 \times 10^3 \text{ J/seg} = 250 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\eta = 1 - (T_f / T_c) = 1 - (308 / 823) \text{ K} = 0.6257$$

$$Q_c = T / \eta = 250 \times 10^3 \text{ J} / 0.6257 = 399.55 \times 10^3 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejercicio propuesto 3:

Una máquina de Carnot con una potencia de 200 KW funciona entre un rango de temperaturas de 30 °C a 600 °C ¿Cuánta energía calorífica se absorbe y se pierde por hora de operación?

Resolución:

Energía absorbida por hora...

$$\text{Potencia} = 200 \text{ KW} = 200,000 \text{ J/s} = 200,000 \text{ J/s} \times 3,600 \text{ s/hr} = 7.2 \times 10^8 \text{ J/hr}$$

$$\eta = 1 - (T_f / T_c) = 1 - (30\text{ }^{\circ}\text{C} + 273) / (600\text{ }^{\circ}\text{C} + 273) = 0.653 = 65.3\%$$

$$Q_c = W / \eta = 7.2 \times 10^8 \text{ J/hr} / 0.653 = 11.026 \times 10^8 \text{ J/hr} \quad \checkmark$$

Calor perdido por hora:

$$Q_f = Q_c - W = 11.026 \times 10^8 \text{ J/hr} - 7.2 \times 10^8 \text{ J/hr} = 3.826 \times 10^8 \text{ J/hr} \quad \checkmark$$

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4

1.- La máxima eficiencia de un motor que trabaja bajo el régimen de Carnot es del 48% y la temperatura de operación del motor es de 230°C en la cámara la combustión. ¿Cuál es la temperatura de los gases de escape?

2.- Una máquina de Carnot entrega una potencia de 200 KW y el rango entre sus fuentes de energía es de 30°C a 510°C a) ¿Cuánta energía absorbe la máquina en un turno de ocho horas de operación? b) ¿Cuánta de esa energía se pierde por hora?

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4

Solución

1.- La máxima eficiencia de un motor que trabaja bajo el régimen de Carnot es del 48% y la temperatura de operación del motor es de 230 °C en la cámara la combustión. ¿Cuál es la temperatura de los gases de escape?

$$\eta = 0.48; \quad T_c = 230 \text{ °C} = 503 \text{ K};$$

$$T_f = (1 - \eta) T_c = (1 - 0.48)(503 \text{ K}) = 261.56 \text{ K} = -11.44 \text{ °C}$$

2.- Una máquina de Carnot entrega una potencia de 200 KW y el rango entre sus fuentes de energía es de 30 °C a 510 °C a) ¿Cuánta energía absorbe la máquina en un turno de ocho horas de operación? b) ¿Cuánta de esa energía se pierde por hora?

$$\eta = 1 - (T_f/T_c) = 1 - (30 + 273)K / (510 + 273)K = 0.613 ;$$

a)

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ J/s}$$

$$Q_c = \text{Potencia} / \eta = 200 \times 10^3 \text{ J/s} \times 3600 \text{ s/hr} \times 8 \text{ hr} / 0.613 = 9.4 \times 10^9 \text{ J}$$

b)

$$\eta = 1 - (Q_f/Q_c); \quad Q_f = (1 - \eta) Q_c$$

$$Q_f = (1 - 0.613) (9.4 \times 10^9 \text{ J}) = 3.63 \times 10^9 \text{ J}$$

Unidad 5: Conversión de la Energía.

5.1. Rendimientos de la conversión de la energía.

La ley de la conservación de la energía que está representada por la primera ley de la termodinámica nos dice que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma. Es aquí precisamente, en la transformación de la energía, de un tipo a otro, donde se hace patente el efecto de la entropía (S) en los sistemas. El cambio de la entropía (ΔS) no depende del proceso en sí, sino de las condiciones en que se da el proceso, es decir, el estado físico de los elementos del sistema en el que ocurre.

Sirva como ejemplo la transformación de la *energía química* del combustible de un motor que se transforma primero en *energía calorífica*, luego en *energía mecánica* y finalmente en *trabajo útil*. No toda la energía química del combustible es transformada en calor ni todo éste es transformado en trabajo útil. Si bien se cumple la ley de la conservación de la energía, en cada transformación se “pierde” una cantidad de energía principalmente como calor que se disipa al entorno. Esto se debe a la fricción, fatiga de los materiales, consumo de energía en el funcionamiento propio del motor, del resto del vehículo y diversas condiciones físicas de las partes sujetas a desgaste que provocan un mayor consumo de energía en los mismos sistemas dejando una cantidad menor para la realización del trabajo útil para el que está destinada la máquina.

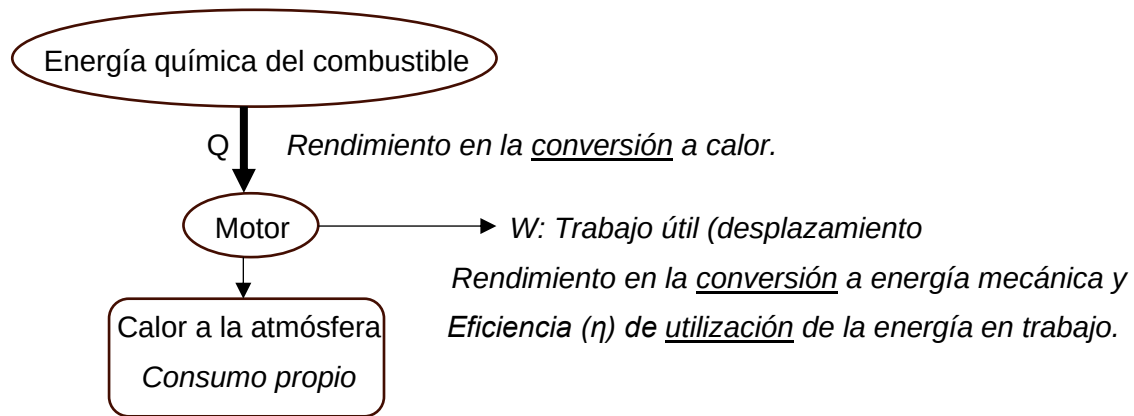
Ahora bien, el *rendimiento de la conversión de energía* es la razón o cociente de la energía útil *después* de la conversión entre la energía total que se utilizó para obtenerla.

$$\text{Rendimiento de la conversión} = \text{Energía útil} / \text{Energía total}$$

No debe confundirse el *rendimiento* de la conversión de la energía con la *eficiencia* de una máquina, esta última, como vimos en la unidad anterior, representa el *trabajo útil* que es capaz de realizar una máquina con la energía que se le suministra. En el ejemplo de un carro, el motor es donde se da el *rendimiento* térmico y el coche en su conjunto, tendrá su *eficiencia* para aprovechar la energía útil que entrega el motor para el desplazamiento del vehículo.

Figura 5.1

Rendimiento energético y eficiencia de un automóvil.



Ejemplo 5.1: Al motor de un automóvil se le suministran 12,000 J de energía química a través de su combustible que transforma en 9,000 J de calor de los cuales 4,000 J es energía útil para el trabajo de desplazamiento y el resto lo consume en sí mismo y en disipar calor a la atmósfera, a) ¿cuál es el rendimiento del motor en la conversión de energía química a calor? b) ¿cuál es la eficiencia del vehículo respecto al uso del calor suministrado?

Resolución:

a) rendimiento del motor...

*Rendimiento de la conversión de energía química a calor = Energía calorífica útil /
Energía total suministrada*

$$= 9,000 \text{ J} / 12,000 \text{ J} = 0.75 \text{ (75\%)} \quad \checkmark$$

*b) Eficiencia de la utilización del calor en trabajo = Energía calorífica útil / Energía total
suministrada*

$$\eta = W / Q_c$$

$$\eta = 4,000 \text{ J} / 9,000 \text{ J} = 0.44 \text{ (44.44 \%)} \quad \checkmark$$

5.2. Trabajo producido al expandir vapor en una turbina.

5.2.1 Turbina de vapor.

Es una máquina térmica que funciona aprovechando la energía del vapor de agua a *alta presión, temperatura y velocidad* transformándola en energía mecánica la cual impulsa un eje haciéndolo girar. Los componentes principales de una turbina de vapor son la *carcasa*, el *rotor* que consta de un eje sobre el cual están dispuestos anillos o carretes en los que

están montadas las *paletas o álabes*. Las *toberas de inyección* del vapor son las encargadas de introducir el vapor a la turbina.

Existe gran variedad de turbinas de vapor, pero todas ellas operan bajo los mismos principios y es la termodinámica la disciplina que nos ayuda en gran parte del diseño, operación y mantenimiento de las mismas

5.2.2 Trabajo producido al expandirse el vapor en la turbina.

Cuando el vapor de agua se expande dentro de la turbina, la energía que lo mantenía comprimido y a alta temperatura es liberada al entorno, esta energía se transfiere al rotor de la turbina, transformándose en *energía mecánica* rotativa que puede ser aprovechada para **realizar trabajo** en forma directa en algún proceso industrial o fabril haciendo funcionar otras máquinas o para mover un generador eléctrico y así obtener electricidad que es un tipo de energía más versátil y más fácil de transferir, por medio de cables conductores, a los equipos y máquinas diseñados para operar con electricidad.

El vapor, en su expansión, golpea a los álabes del rotor haciéndolo girar y transformando su energía térmica y cinética en energía mecánica rotativa. En el interior de la carcasa existen otros álabes *fijos a la misma*, cuya función es direccionar la inyección del vapor en la forma más eficiente. Realmente una turbina de vapor cuenta con un buen número de elementos para su funcionamiento y control, los mencionados aquí son solo los de carácter genérico.

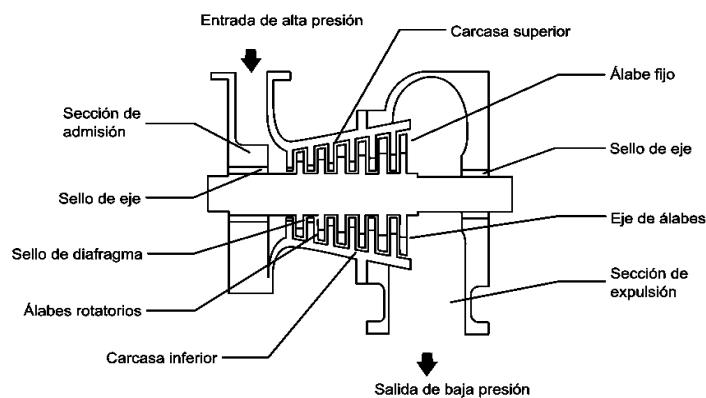
En las Figuras 5.2 y 5.3 se muestran en forma esquemática la configuración de estos elementos básicos en una turbina de vapor. Se recomienda a los estudiantes consultar diversos materiales como videos y esquemas gráficos sobre los componentes de una turbina de vapor y su funcionamiento. La Comisión Federal de Electricidad (CFE) es la empresa paraestatal responsable en México de la generación y suministro de energía

eléctrica en el País, esta encomienda la logra en gran parte con la operación de plantas termoeléctricas y ha elaborado y puesto a disposición una amplia variedad de material disponible sobre el tema de las turbinas de vapor, el funcionamiento y mantenimiento de éstas y de los equipos que forman parte de todo el proceso como son las calderas, condensadores y demás, para disponer del vapor necesario y en las condiciones adecuadas para el funcionamiento de estas plantas.

Adicionalmente se dispone en la internet de material publicado por diferentes fuentes relacionadas con el tema de mayor o menor amplitud. Es así como se dispone de suficiente información libre para su consulta sobre esta temática.

Figura 5.2

Elementos básicos principales de una turbina de vapor.

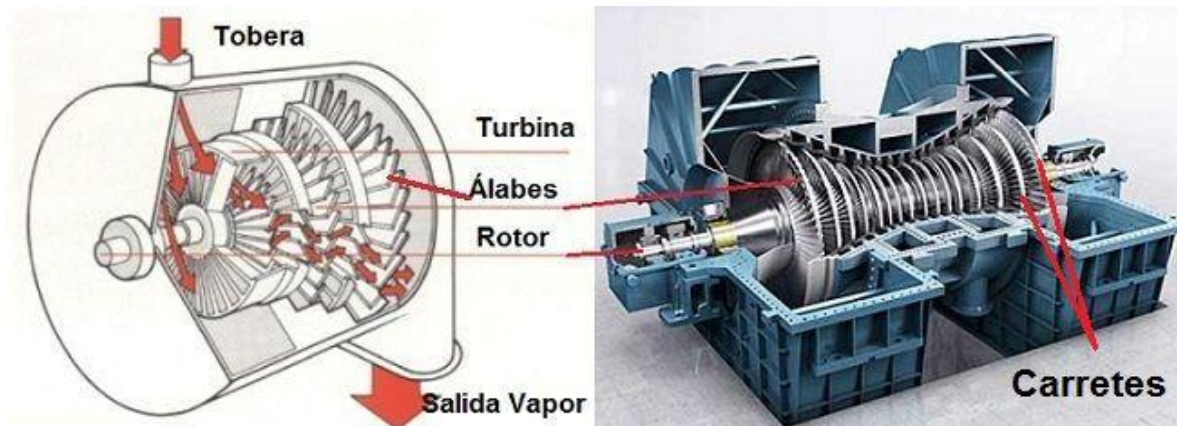


Referencia de la fuente de consulta de la imagen:

<https://power-mi.com/es/content/análisis-de-vibraciones-de-turbinas-de-vapor>

Figura 5.3

Turbina de vapor. Partes básicas.



Referencia de la fuente de consulta de la imagen:

<https://www.areatecnologia.com/mecanismos/imagenes/turbina.jpg>

5.3. Ciclo de Rankine sencillo y con recalentamiento.

5.3.1 Ciclo de Rankine sencillo o simple.

El ciclo Rankine simple es un *ciclo termodinámico ideal* utilizado principalmente en plantas termoeléctricas para convertir la energía térmica del vapor de agua en trabajo mecánico y luego en energía eléctrica. El vapor de agua, en las condiciones requeridas, se obtiene de una *caldera* y la conversión a trabajo mecánico se lleva a cabo en una *turbina de vapor* cuyo eje está acoplado a un generador para obtener finalmente electricidad. Debe su nombre al ingeniero William Rankine (1820-1872) nacido en Escocia y se le considera pionero de la termodinámica. Desarrolló, entre otras aportaciones, la teoría de turbinas de vapor y la escala absoluta de temperatura que también lleva su nombre.

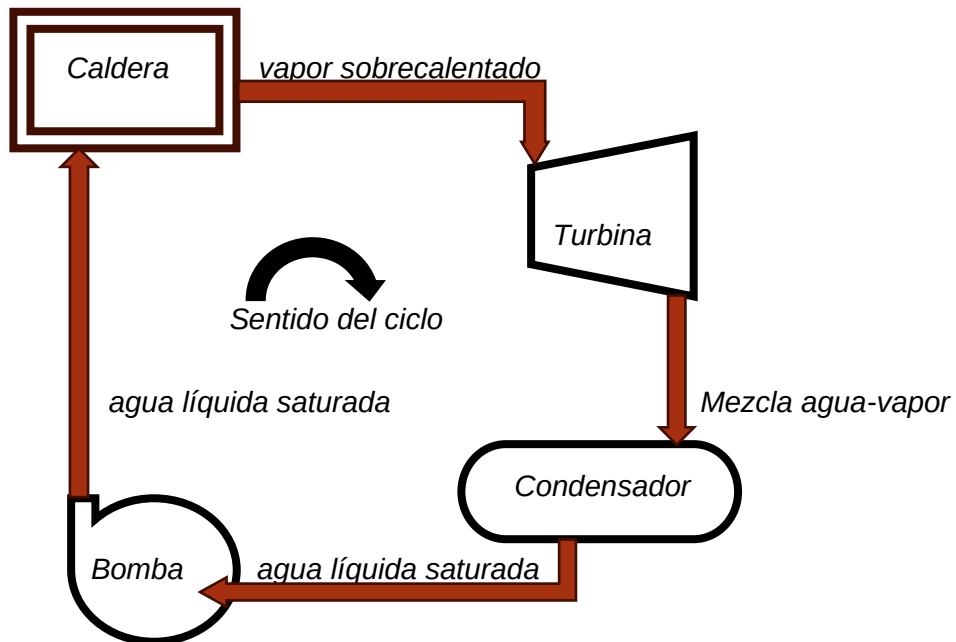
Aunque la conversión del calor en trabajo se obtiene en la turbina, el ciclo requiere de otros equipos básicos por los que circula el agua y su vapor los cuales son una caldera, un condensador y una bomba. Estos elementos, interconectados entre sí, desempeñan un papel específico en los cambios de estado del fluido de trabajo a lo largo del ciclo que se repite una y otra vez, logrando la operación continua del sistema.

Si comenzamos el ciclo en la caldera, aquí el agua es transformada en vapor a muy alta temperatura y presión que es entregado a la turbina para producir energía mecánica en el eje del rotor y posteriormente en electricidad el generador. Una vez que el vapor ha cedido su energía a la turbina pasa a un condensador para terminar su conversión a agua en estado líquido que finalmente es enviada de nuevo a la caldera por una bomba para reiniciar el ciclo.

Como se mencionó, estos cuatro dispositivos son los necesarios para la realización del ciclo propiamente dicho, sin embargo, en una planta termoeléctrica real existen otros elementos de apoyo y de control al sistema lo que redundaría en una planta de mayor complejidad y tamaño. En la Figura 5.4 se muestra de manera esquemática la disposición de estos elementos básicos.

Figura 5.4

*Equipos básicos para la operación de una turbina de vapor en ciclo Rankine simple.
(construcción propia.)*

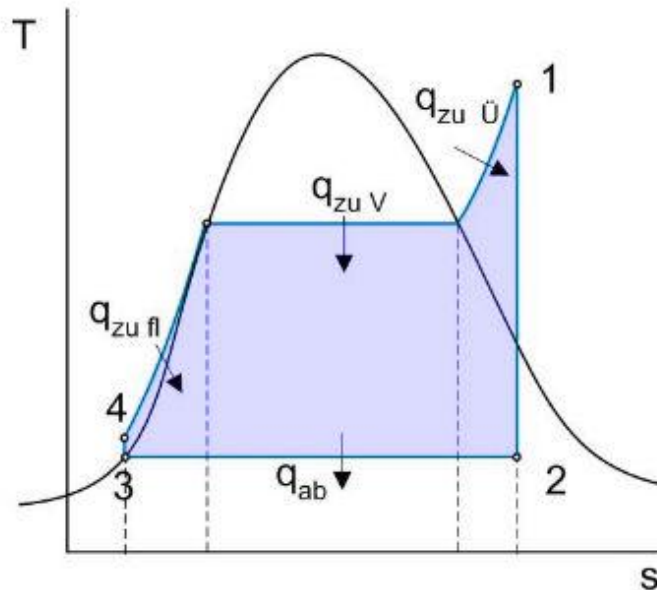


Es importante recalcar que en los equipos mostrados en la Figura 5.3 tienen lugar los procesos termodinámicos del fluido, es decir, los *cambios de estado termodinámico* y en las flechas están indicados *los estados físicos a la salida* de cada uno de ellos.

Ahora, la Figura 5.5 muestra la gráfica entropía-temperatura (S - T) *representativa del Ciclo Rankine Simple*, en ella la curva de forma de campana es la *línea de saturación* y los lados del polígono irregular 1-2-3-4-1 representan los diferentes procesos del fluido en su recorrido por el ciclo.

Figura 5.5

Gráfica S-T del ciclo Rankine simple.



Referencia de la imagen:

<https://www.explicacion.net/wp-content/uploads/2018/12/diagrama-ciclo-rankine.jpg>

El lado 1-2 representa la turbina en la que el vapor a alta presión proveniente de la caldera se expande en un proceso isoentrópico disminuyendo su presión a la del condensador, transformando el calor en energía mecánica que se transfiere al rotor y enviando al condensador una *mezcla de vapor y líquido saturados*. Al porcentaje de vapor en esta mezcla se la conoce como la *calidad* de dicha mezcla que se denota como X' , siendo un elemento importante en el cálculo del trabajo realizado por la turbina.

Un *proceso isoentrópico* es aquel en el que la entropía no cambia, por lo que no hay transferencia de materia ni calor con el entorno lo que a su vez implica que también es *adiabático*. Este proceso isoentrópico es además *reversible*, luego entonces es de carácter *ideal* teórico. Aunque en la práctica las turbinas no son completamente

isoentrópicas, con esta idealización se puede evaluar el desempeño de las turbinas reales.

En el *lado 2-3*, el condensador, se retira calor a presión constante mediante un sistema periférico de refrigeración transformando la mezcla totalmente a líquido saturado.

La bomba, *lado 3-4*, toma el líquido saturado del condensador y lo transfiere a la caldera aumentándole la presión en una compresión isoentrópica. La bomba siempre recibe líquido saturado y descarga líquido saturado comprimido

La caldera, *lado 4-1*, suministra calor al fluido de trabajo en tres etapas: 1ª- para llevar el líquido a su temperatura de saturación de acuerdo a su alta presión. 2ª- luego el calor realiza el cambio de fase (*líquido a vapor*) a temperatura constante y 3ª- el vapor es sobrecalentado a alta temperatura y presión. Las presiones de entrada y salida de la caldera son iguales.

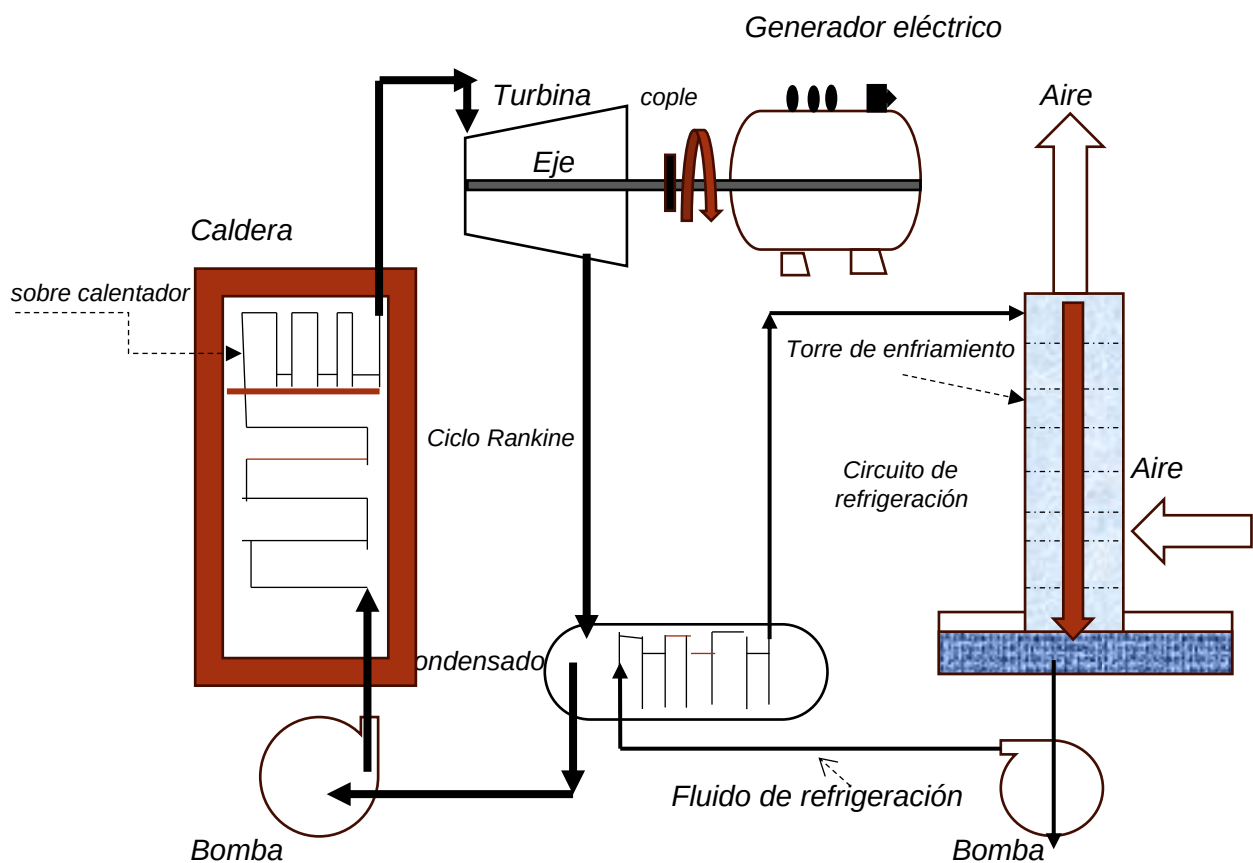
En un ciclo ideal como el descrito, la turbina y la bomba producen procesos isoentrópicos mas en la realidad, esta condición no se cumple estrictamente. La caldera y el condensador que *idealmente* no presentan pérdidas de carga, en situaciones reales sí existen estas pérdidas. Las variaciones de la entropía en la turbina y la bomba reales, tienen un efecto significativo en el rendimiento del ciclo real respecto del ideal, aunque el efecto de las pérdidas en la caldera y el condensador es bastante menor. Asimismo, en la Figura 5.4 se indican las etapas en las que el calor (Q) es suministrado (*4-1*) en la caldera y retirado (*2-3*) en el condensador.

Conforme la tecnología avanza las turbinas de vapor van incorporando elementos que pueden sofisticar su configuración y de alguna forma su operación, buscando el mejoramiento de su rendimiento y eficiencia, no obstante, las partes *elementales* mencionadas de estas fabulosas máquinas térmicas forman su *configuración básica*.

En la Figura 5.6 se describe, también en forma esquemática, el recorrido del agua y su vapor por el circuito físico en una planta termoeléctrica en el que se ilustra el sistema de enfriamiento conectado al condensador, que regularmente es una torre de enfriamiento atmosférica que retira el calor del fluido del circuito de refrigeración mediante aire a tiro natural o forzado.

Figura 5.6

Circuito del recorrido del agua y su vapor en planta termoeléctrica. (Construcción propia)



Mediante el *Ejemplo 5.2* veremos el tipo de información que se necesita para la resolución de planteamientos relativos al cálculo del *trabajo real* de una turbina de vapor y los *procedimientos, ecuaciones y herramientas* utilizadas. Cabe mencionar que las *entalpías y entropías* en los diferentes puntos del circuito son elementos fundamentales

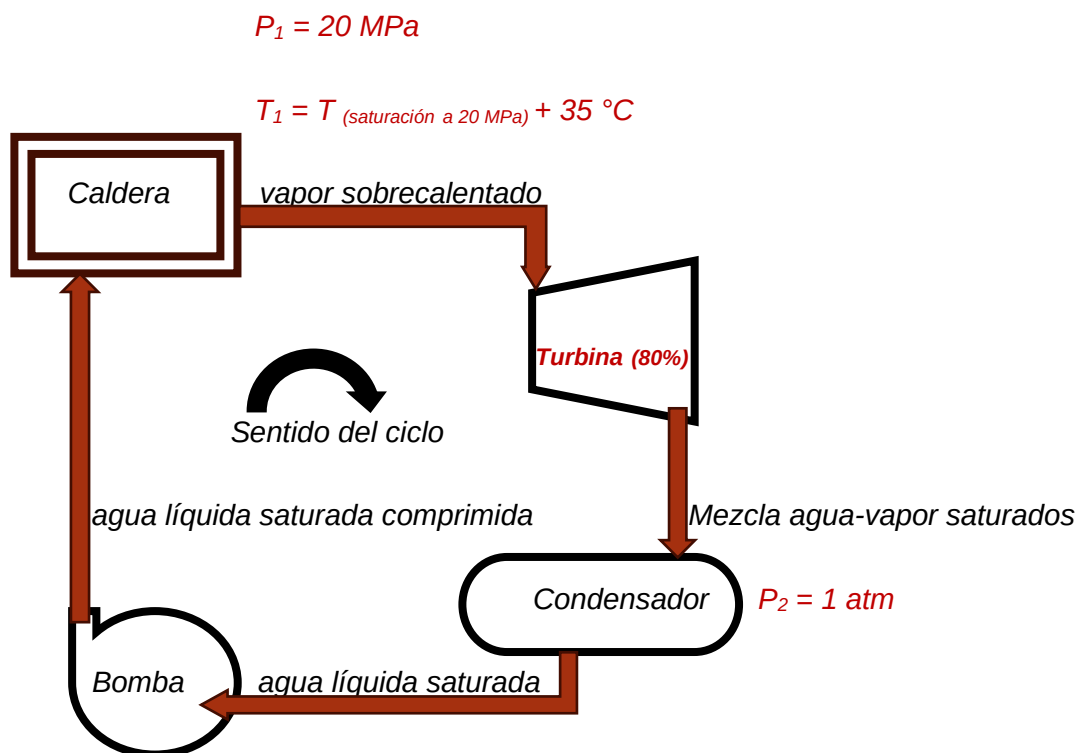
en el procedimiento de cálculo como se verá en dicho ejemplo. Además, es muy importante tener en cuenta el estado del fluido en cada etapa del recorrido para hacer la consulta en la tabla de vapor correcta correspondiente en cada caso.

Ejemplo 5.2 Una turbina de vapor isoentrópica cuyo rendimiento es del 80 %, es alimentada desde una caldera con fluido de trabajo a una presión de 20 MPa con una temperatura calibrada a 35 °C por encima de su temperatura de saturación. El circuito, mostrado en la Figura 5.7, cuenta con un condensador que opera a la presión atmosférica y recibe de la turbina una mezcla de agua y vapor saturados. El estado del fluido de trabajo en cada etapa se indican en la Figura. Se pide obtener el trabajo real de la turbina.

Resolución:

Figura 5.7

Ejemplo 5.2 (construcción propia)



Utilizando Tablas de Vapor encontramos la temperatura de saturación del vapor a la presión de 20 MPa y le sumamos 35 °C para obtener T_1 que es la temperatura total del vapor recalentado que ingresa a la turbina.

$$T_{(\text{saturación a 20 MPa})} = 365 \text{ °C}$$

$$T_1 = 365 \text{ °C} + 35 \text{ °C} = 400 \text{ °C}$$

Ahora, consultando nuevamente las tablas de vapor encontramos los valores de la entalpía y de la entropía del vapor de entrada a la turbina.

$$H_1 = H_{vs}(20 \text{ MPa y } 400 \text{ °C}) = 2.818 \text{ KJ/Kg}$$

$$S_1 = S_{vs}(20 \text{ MPa y } 400 \text{ °C}) = 5.554 \text{ KJ/Kg}$$

Como se trata de una turbina de vapor isoentrópica la entropía a la salida es igual a la de entrada:

$$S_2 = S_1 = 5.554 \text{ KJ/Kg}$$

La presión a la salida es la atmosférica como se declara en el planteamiento:

$$P_2 = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 0.1013 \text{ MPa}$$

Con esta información consultamos la temperatura de saturación a la salida de la turbina (T_2) que es la entrada al condensador:

$$T_2 = T_{\text{sat}} (P_2 = 0.1013 \text{ MPa y } S_2 = 5.554 \text{ KJ/Kg}) = 99.63 \text{ °C}$$

La calidad X' (porcentaje de vapor) de la mezcla de vapor y líquido saturados que la turbina transfiere al condensador se relaciona con la entropía mediante la ecuación:

$$S_{2\text{teórica}} = S_{2vs} X' - S_{2ls}(1-X')$$

Nota: S_{2vs} y S_{2ls} se consultan en las tablas de vapor para los valores de P_2 y T_2 .

Al despejar X' tenemos:

$$X' = (S_{2\text{teor}} - S_{2\text{ls}}) / (S_{2\text{vs}} - S_{2\text{ls}})$$

Sustituyendo:

$$X' = (5.554 \text{ KJ/Kg} - 1.3026 \text{ KJ/Kg}) / (7.3594 \text{ KJ/Kg} - 1.3026 \text{ KJ/Kg})$$

$$X' = 0.702 \quad (70.2 \%)$$

Similarmente la calidad de la mezcla vapor - líquido saturados y su entalpía, se relacionan con la fórmula:

$$H_{2\text{teórica}} = H_{2\text{vs}} X' - H_{2\text{ls}}(1-X') \quad \text{por lo tanto:}$$

$$H_{2\text{teórica}} = 2,625.5 \text{ KJ/Kg} (0.702) + 417.46 \text{ KJ/Kg}(1 - 0.702)$$

$$H_{2\text{teórica}} = 2,002.6 \text{ KJ/Kg}$$

Nota: $H_{2\text{vs}}$ y $H_{2\text{ls}}$ se consultan en las tablas de vapor para los valores de P_2 y T_2 .

El trabajo teórico realizado por el vapor sobre la turbina es la diferencia entre las entropías a la entrada y salida de la turbina, que es el calor entregado por el vapor en ella:

$$W_{\text{teórico vapor}} = H_2 - H_1 = 2,002.6 \text{ KJ/Kg} - 2,818.1 \text{ KJ/Kg} = -815.5 \text{ KJ/Kg}$$

El trabajo teórico de la turbina es el mismo del vapor pero de signo contrario:

$$W_{\text{teórico turbina}} = 815.5 \text{ KJ/Kg}$$

Finalmente, el rendimiento del 80% es la razón del trabajo real entre el teórico:

$$W_{\text{real}} / W_{\text{teórico}} = 0.80; \quad W_{\text{real}} = 0.80 \times 815.5 \text{ KJ/Kg} = 652.4 \text{ KJ/Kg} \quad \checkmark$$

Podemos calcular la entalpía real a la salida de la turbina con la relación:

$$H_{2\text{ real}} = H_{1\text{ real}} - W_{\text{real}} = (2,818.1 - 652.4) \text{ KJ/Kg} = 2,165.7 \text{ KJ/Kg} \quad \checkmark$$

Nota: Obsérvese la principal importancia de la entropía y entalpía del fluido a la entrada y a la salida de la turbina. En la salida, el valor de S y H es la suma de los valores por separado para el vapor y el líquido saturados o solo del vapor si éste es seco.

En este ejemplo se siguió la siguiente secuencia para su resolución:

PASOS PARA EL CÁLCULO DEL TRABAJO REAL REALIZADO POR UNA TURBINA DE VAPOR ISOENTRÓPICA.

Identificación de DATOS:

P_1 (presión del vapor de entrada de la Turbina), P_2 (presión del vapor a la salida de la Turbina), Grados de sobrecalentamiento del Vapor de entrada a la Turbina y eficiencia de la Turbina.

PASOS:

- 1.- Con P_1 , presión a la entrada de la turbina (dato), se determina mediante Tablas de Vapor, T_{1sat} (temperatura de saturación del vapor de entrada a la presión P_1)
- 2.- Se suman: T_{1sat} + temperatura de sobrecalentamiento (dato), para tener T_1 (temperatura de entrada del vapor sobrecalentado a la Turbina).
- 3.- Con P_1 y T_1 se localizan en las tablas de vapor H_1 y S_1 (entalpía y entropía del vapor saturado y sobrecalentado a la entrada de la Turbina).
- 4.- Tomando $S_2 = S_1$ (por ser Turbina isoentrópica) y P_2 , se localiza en las tablas el respectivo valor de T_{2sat} (temperatura de saturación del vapor y agua a la salida de la Turbina).
- 5.- Se localizan en tablas los valores de: S_{2ls} (entropía de líquido saturado) y S_{2vs} (entropía de vapor saturado), ambos a P_2 , presión a la salida de la turbina.

6.- Se calcula X' (**calidad** del vapor a la salida de la turbina, que es el porcentaje de vapor contenido en la mezcla líquido-vapor saturados) mediante la ecuación:

$$X' = (S_{2 \text{ teórica}} - S_{2ls}) / (S_{2vs} - S_{2ls})$$

7.- Se toma de las tablas los valores de H_{2ls} y H_{2vs} (entalpía del líquido y del vapor saturados) para los valores de P_2 y T_{2sat} (*presión y temperatura de saturación a la salida de la Turbina*).

8.- Se calcula $H_{2 \text{ teórica}}$ mediante la ecuación:

$$H_{2 \text{ teórica}} = H_{2vs} (X') + H_{2ls}(X' - 1)$$

9.- Se obtiene el Trabajo teórico realizado por el vapor con:

$$W_{\text{teórico vapor}} = H_{2 \text{ teórica}} - H_1 \text{ (negativo)}$$

10.- El Trabajo teórico de la Turbina será el del vapor con signo cambiado (**positivo**).

$$W_{\text{teórico turbina}} = - W_{\text{teórico vapor}}$$

11.- Con el trabajo teórico de la Turbina y su *Rendimiento (dato)*, se calcula finalmente el Trabajo Real de la Turbina:

$$W_{\text{real turbina}} = (\text{Rendimiento}) \times (W_{\text{teórico turbina}})$$

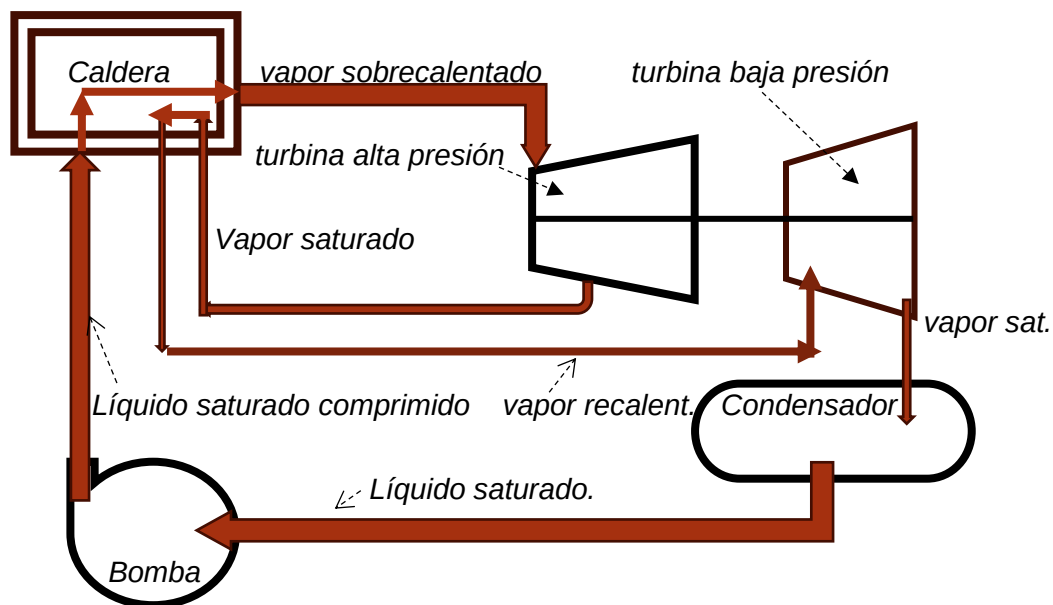
5.3.2 Ciclo Rankin con recalentamiento.

A diferencia del ciclo Rankine simple, el ciclo también ideal con recalentamiento es que, con el propósito de *mejorar el rendimiento* del sistema, una vez que el vapor se ha expandido en la turbina de alta presión, se extrae de ella el vapor ya a una *presión intermedia* y se regresa a la caldera para elevarle nuevamente la temperatura manteniendo su presión, llamando a este paso el *recalentamiento*. Este vapor recalentado a presión intermedia se alimenta a una segunda turbina llamada de *baja presión* la cual

descarga a un condensador vapor saturado o húmedo, en el que se obtiene totalmente *líquido saturado* que es impulsado a la caldera por medio de la bomba a la presión de la primera, como líquido saturado *comprimido*. En la Figura 5.8 se muestra la configuración básica del sistema que opera con el ciclo Rankine con recalentamiento.

Figura 5.8

Ciclo Rankine con recalentamiento. (construcción propia)



Desde el punto de vista de los cálculos, el calor aportado por la caldera debe considerar el suministrado tanto en el primer paso como en el segundo y el trabajo total es la suma de los trabajos de las turbinas de alta y baja presión. A continuación, el Ejemplo 5.3 muestra un planteamiento y su resolución de este ciclo.

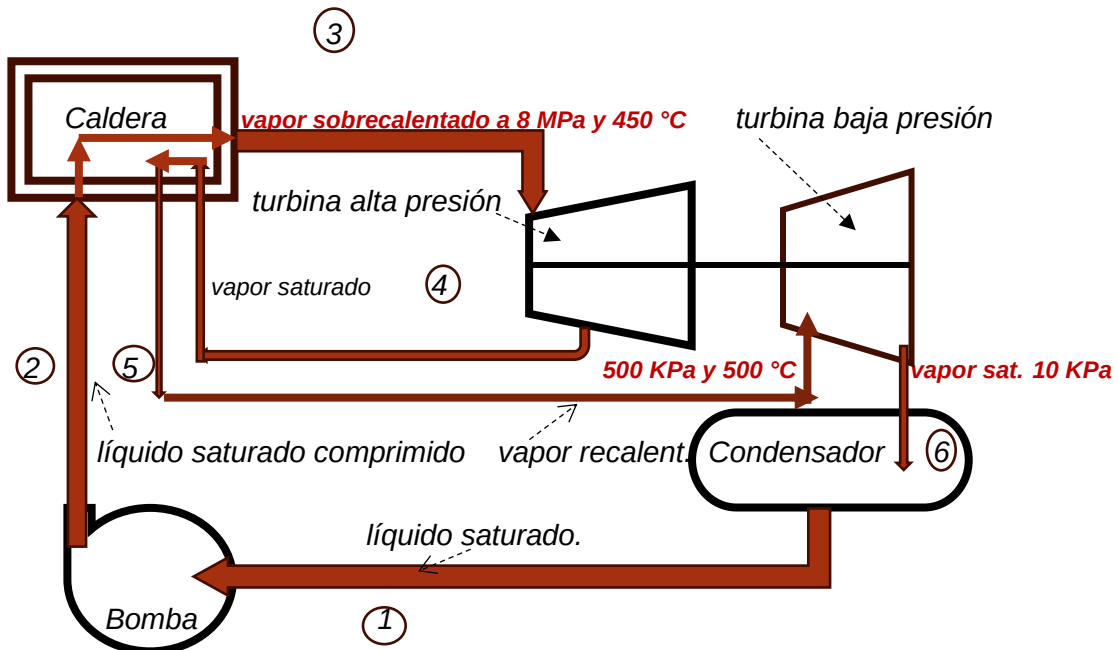
Ejemplo 5.3

Referencia: <https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=ciclo+rankine+con+recalentamiento&mid=706B9378A83E5B9051A8706B9378A83E5B9051A8&FORM=VAMGZC>

Un sistema que opera con el ciclo Rankine con recalentamiento y agua, cuenta con una caldera que suministra vapor sobrecalentado a la turbina de alta presión con una presión de 8 MPa a 450 °C y a la turbina de baja presión a 500 KPa a 500 °C la cual descarga vapor saturado a baja presión de 10 KPa al condensador. Se espera que el sistema aporte una potencia neta de 5,000 KW. Calcular a) la eficiencia térmica del ciclo y b) el flujo másico de fluido de trabajo a través de la caldera.

Figura 5.9

Ejemplo 5.3 (construcción propia)



Resolución:

a) la eficiencia térmica del ciclo---

Calculemos las entalpías (h) y entropías (s) del fluido de trabajo en cada etapa del circuito...

Empecemos con la salida del condensador y entrada a la bomba (punto 1 de la Figura 5.9)

$$h_1 = 191.83 \text{ KJ/Kg (tabla: líq./vap. sat. para líq. sat. a 10 KPa)}$$

$$s_1 = 0.64943 \text{ KJ/Kg K (tabla: líq./vap. sat. para líq. sat. a 10 KPa)}$$

Ahora en el punto 2, salida de la bomba y entrada a la caldera.

$$s_2 = s_1 = 0.64943 \text{ KJ/Kg K ; (bomba isoentrópica)}$$

para hallar h_2 recurrimos a la ecuación de trabajo de la bomba (W_b) en términos de la entalpía:

$$W_b = h_2 - h_1;$$

$$h_2 = h_1 + W_B$$

$$W_b = V_{\text{esp.}} (P_2 - P_1) \quad (V_{\text{esp.}} : \text{volumen específico})$$

$$V_{\text{esp.}} (\text{tabla: líq./vap. sat. para líq. sat. a } P_1=10 \text{ KPa}) = 0.00101 \text{ m}^3/\text{Kg}$$

$$h_2 = 191.83 \text{ KJ/Kg} + 0.00101 \text{ m}^3/\text{Kg}(8,000 - 10) \text{ KPa}$$

$$h_2 = 199.37 \text{ KJ/Kg}$$

Sigamos con el punto 3, salida de la caldera y entrada a la turbina de alta presión.

Consultando la tabla de vapor sobrecalentado a $P_3 = 8 \text{ MPa}$ y $T_3 = 450 \text{ °C}$, tenemos:

$$h_3 = 3,272 \text{ KJ/Kg}$$

$$s_3 = 3.5551 \text{ KJ/Kg K}$$

Ahora el punto 4, la extracción de vapor saturado de la turbina de alta presión, pero a una presión intermedia que se devuelve a la caldera.

$$s_4 = s_3 = 3.5551 \text{ KJ/Kg K} \quad (\text{turbina isoentrópica})$$

consultando la tabla de líquido-vapor saturado para vapor saturado a $P_4 = 500 \text{ KPa} = 0.5 \text{ MPa}$ tenemos:

regla de tres:

$$\text{si } h = 2,748.7 \text{ KJ/Kg para } s = 6.8213 \text{ KJ/Kg K}$$

$$\Rightarrow h_4 = ? \text{ para } s_4 = 3.5551 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_4 = 2,641.4 \text{ KJ/Kg}$$

Toca ahora el punto 5. Salida del vapor recalentado como vapor sobrecalentado a presión intermedia de 500 KPa a 500 °C.

Consultando la tabla de vapor sobrecalentado para $P_5 = 500 \text{ KPa}$ y $T_5 = 500 \text{ °C}$ tenemos:

$$h_5 = 3,483.9 \text{ KJ/Kg}$$

$$\text{y } s_5 = 8.0873 \text{ KJ/Kg K}$$

Finalmente trabajamos el punto 6, salida de vapor saturado de baja presión y entrada al condensador.

$$s_6 = s_5 = 8.0873 \text{ KJ/Kg K} \quad (\text{turbina isoentrópica})$$

según la tabla de vapor saturado para $P = 10 \text{ KPa}$ tenemos:

regla de tres:

$$\text{si } h = 2,584.7 \text{ KJ/Kg para } s = 8.1502 \text{ KJ/Kg K}$$

$$\Rightarrow h_6 = ? \text{ para } s_6 = 8.0873 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_6 = 2,564.7 \text{ KJ/Kg}$$

La eficiencia térmica del ciclo es la razón del trabajo útil neto aprovechado entre el calor total que la caldera suministra que es la suma del calor suministrado en el primer sobrecalentamiento del vapor proveniente de la bomba más en el segundo sobrecalentamiento (recalentamiento) del vapor proveniente de la extracción de la turbina de alta presión:

$$Q_{\text{total caldera}} = (h_3 - h_2) + (h_5 - h_4) = (3,272 - 199.37) \text{ KJ / Kg} + (3,483.9 - 2,641.4) \text{ KJ/Kg}$$

$$Q_{\text{total caldera}} = 3,915.13 \text{ KJ/Kg}$$

El trabajo total de las turbinas es la suma de los trabajos individuales.

$$W_{\text{turbinas}} = (h_3 - h_4) + (h_5 - h_6) = (3,272 - 2,641.4) + (3,483.9 - 2,564.7) =$$

$$W_{\text{turbinas}} = 1,550 \text{ KJ/Kg}$$

El trabajo de la bomba es:

$$W_b = h_2 - h_1 = 199.37 - 191.83 = 7.54 \text{ KJ/Kg}$$

Entonces el trabajo neto del ciclo es:

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{turbina}} - W_{\text{bomba}} = 1,550 - 7.54 = 1,542.5 \text{ KJ/Kg}$$

Ahora calculamos la eficiencia térmica del ciclo:

$$\eta = W_{\text{neto}} / Q_{\text{caldera}} = 1,542.5 \text{ KJ/Kg} / 3,915.13 \text{ KJ/Kg}$$

$$\eta = 0.394 \text{ (39.4 \%)} \quad \checkmark$$

b) Finalmente, el flujo másico del ciclo será:

$$W_{\text{neto}} = \text{Potencia} / \dot{m}$$

$$\dot{m} = \text{Potencia} / W_{\text{neto}} = 5,000 \text{ KW/s} / 1,542.5 \text{ KJ/Kg}$$

$$\dot{m} = 3.23 \text{ Kg/s de vapor} \quad \checkmark$$

5.4. Ciclo Rankine con regeneración.

El ciclo Rankine con regeneración mejora la eficiencia térmica del ciclo realizando además de la *primera extracción* de vapor de la turbina de alta presión para el *recalentamiento*, una *segunda extracción* de una fracción del vapor que circula por esta turbina de alta presión para la *regeneración* en un *calentador de agua cerrado*, regeneración que consiste en precalentar el agua proveniente del condensador. La tercera extracción de vapor, cuyo estado se desconoce, se hace en la turbina de baja presión y se envía a un *calentador de agua abierto*. Este calentador abierto recibe, además otros dos flujos, el líquido saturado proveniente del calentador cerrado (segunda extracción), que previamente se hace pasar por una *trampa* cuyo propósito es disminuir la presión manteniendo constante la entalpía y el líquido igualmente saturado proveniente del condensador por medio de una bomba. Es decir, el calentador abierto reúne las dos extracciones parciales de fluido hechas en las turbinas con el líquido saturado del condensador, restableciendo el *flujo másico total* que es tomado por una segunda bomba y enviado a la caldera haciéndolo pasar previamente por el calentador cerrado para precalentar el líquido saturado total, aumentando la eficiencia térmica al aprovechar el calor residual de las turbinas.

El Ejemplo 5.4 incluye la Figura 5.10 en la que se muestra el diagrama esquemático de la configuración de un sistema que opera con el ciclo Rankine con *recalentamiento y regeneración*. Haremos uso de este ejemplo y su diagrama para ilustrar el procedimiento, ecuaciones y tablas de vapor utilizadas en la resolución del planteamiento de un Ciclo termodinámico Rankine con recalentamiento y regeneración. En el diagrama se aprecia el orden del recorrido de la sustancia de trabajo (*agua*) en todo el circuito del ciclo con los equipos que participan en dicho recorrido y las diferentes etapas de la ruta del fluido indicando sus estados en cada etapa del trayecto.

Aunque el diagrama es similar al del ciclo con solo recalentamiento, al considerar el proceso de regeneración aparecen nuevos elementos y recorridos del fluido por lo que se debe poner especial cuidado en la diferenciación e interpretación del mismo, sobre todo en lo que respecta a los sentidos de flujo.

Ejemplo 5.4 Referencia:

<https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=ciclo+rankine+con+regeneración&mid=89E0AE69733E23B86A6189E0AE69733E23B86A61&FORM=VIRE>

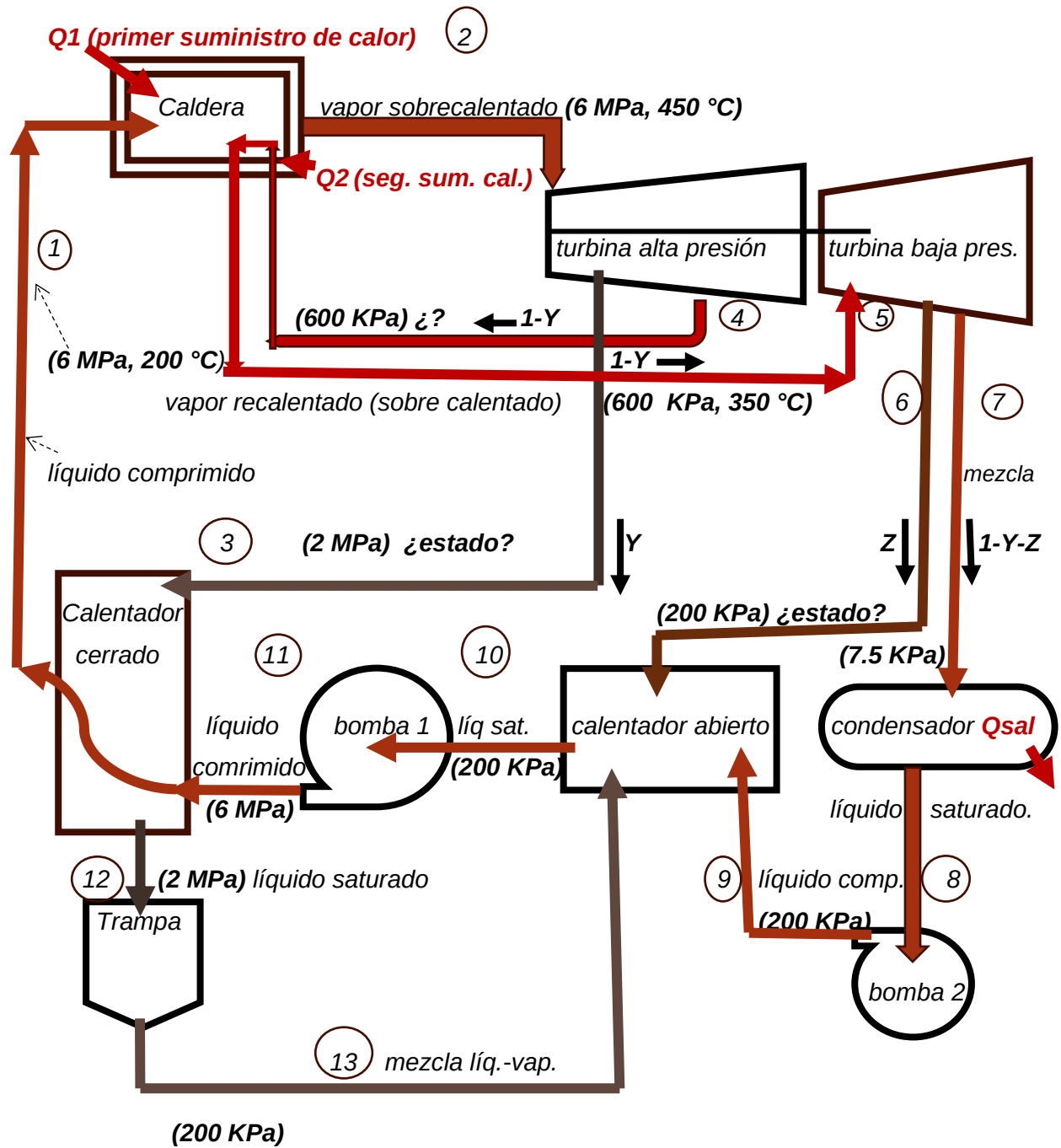
Una planta que opera con ciclo Rankine con recalentamiento y regeneración cuenta con dos turbinas, una de alta y otra de baja presión. La caldera envía vapor a la turbina de alta presión a 6 MPa y 450 °C y en ella se expande hasta los 600 KPa. El vapor recalentado que se suministra a la turbina de baja presión a 350 °C. El condensador trabaja a la presión de 7.5 KPa. La extracción de vapor de la turbina de baja es a una presión de 2 MPa que se introduce el calentador cerrado en un estado de líquido saturado a 2 MPa para luego transferirse a una trampa de estrangulación y de allí a un calentador abierto. La extracción de la fracción de vapor de la turbina de baja presión es a 200 KPa que también se envía al calentador abierto que opera a 200 KPa. La entrada de agua a la caldera tiene una temperatura de 200 °C. Se sabe que la potencia neta del ciclo es de 120 MW y que las eficiencias de las turbinas y bombas isoentrópicas son de 0.85 y 0.95 respectivamente. Se pide calcular: a) Rendimiento térmico del ciclo y b) Flujo másico de vapor de entrada en la turbina de alta presión en Kg/h.

Resolución:

Figura 5.10

Ejemplo 5.4

Ciclo Rankine con recalentamiento y regeneración (construcción propia)



En la Tabla 5.1 se desglosan las variables conocidas y por calcular en cada etapa del recorrido del ciclo indicado en la Figura 5.10, así como el estado del fluido de trabajo en los puntos en los que es conocido y en los que debe ser determinado. En los cálculos se indican la ecuación a utilizar, los valores consultados en las tablas de vapor y finalmente el resultado de las operaciones.

Tabla 5.1

Ejemplo 5.4

Etapas	Posición	Estado del fluido	Variables conocidas (datos)	Variables por calcular
1	Calentador cerrado a caldera	Líquido comprimido	$P_1 = 6 \text{ MPa}$ $T_1 = 200 \text{ °C}$	h_1 s_1
2	Caldera a turbina de alta presión	Vapor sobresaturado	$P_2 = 6 \text{ MPa}$ $T_2 = 450 \text{ °C}$	h_2 s_2
3	Turbina alta presión a calentador cerrado. (Primera extracción)	Por determinar	$P_3 = 2 \text{ MPa}$	h_3 s_3
4	Turbina de alta presión a caldera	Por determinar: (Vapor sobrecalentado o mezcla vap.-líq. saturados)	$P_4 = 600 \text{ KPa}$	h_4 s_4
5	Caldera a turbina de baja presión	Vapor sobrecalentado (del recalentamiento)	$T_5 = 350 \text{ °C}$	h_5 s_5

Etapa	Posición	Estado del fluido	Variables conocidas (datos)	Variables por calcular
6	Turbina de baja presión a calentador abierto (segunda extracción)	Por determinar	$P_6 = 200$ KPa	h_6 s_6
7	Turbina de baja presión a condensador	Mezcla vapor-líquido saturados	$P_7 = 7.5$ KPa	h_7 s_7
8	Condensador a bomba 2	Líquido saturado	$P_8 = 7.5$ KPa	h_8 s_8
9	Bomba 2 a calentador abierto	Líquido comprimido	$P_9 = 200$ KPa	h_9 s_9
10	Calentador abierto a bomba 1	Líquido saturado	$P_{10} = 200$ KPa	h_{10} s_{10}
11	Bomba 1 a calentador cerrado	Líquido comprimido		h_{11} s_{11}
12	Calentador cerrado a trampa	Líquido saturado	$P_{12} = 2$ MPa	h_{12} s_{12}
13	Trampa a calentador abierto	Mezcla vapor-líquido saturados		h_{13} s_{13}

Notas importantes: 1) Los intercambiadores de calor (caldera, calentadores cerrado y abierto y condensador trabajan a presión constante. 2) Las bombas siempre reciben líquido saturado y entregan líquido comprimido. 3) Las calderas reciben líquido comprimido y entregan vapor sobrecalentado. 4) Las turbinas producen potencia y las bombas consumen potencia.

Cálculo de las variables desconocidas en cada etapa (según tabla).

① Calentador cerrado a caldera:

Entalpía $h_1 = h_f + v_f(P_1 + P_{\text{sat } T_1})$

$$h_f = 852.45 \text{ KJ/Kg}$$

$$v_f = 0.001157 \text{ m}^3/\text{Kg}$$

$$P_{\text{sat } T_1} = 1.5538 \text{ MPa} = 1,553.8 \text{ KPa}$$

Tabla: líq. sat. a 200 °C

$$P_1 = 6 \text{ MPa} = 6,000 \text{ KPa} \text{ (dato)}$$

$$h_1 = 852.45 \text{ KJ/Kg} + 0.001157 \text{ m}^3/\text{Kg} (6,000 \text{ KPa} + 1,553.8 \text{ KPa})$$

$$\underline{h_1 = 857.4 \text{ KJ/Kg}}$$

② Caldera a turbina de alta presión:

Entalpía h_2 y entropía s_2 .

$$\underline{h_2 = 3,302.9 \text{ KJ/Kg}} \quad \underline{s_2 = 6.7219 \text{ KJ/Kg K}} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} h_2 \\ s_2 \end{matrix}} \right\} \text{Tabla: vapor sobrecalentado a } 6 \text{ MPa y } 450 \text{ °C}$$

③ Turbina de alta presión a calentador cerrado (Primera extracción).

Estado del fluido, entalpía h_3 y entropía s_3

Para determinar el estado del fluido en la etapa 3 se consulta, con P_3 , la tabla de líquido saturado anotando los siguientes valores:

$$\text{Para } P_3 = 2 \text{ MPa : } h_f = 908.47 \text{ KJ/Kg} \quad s_f = 2.4467 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_g = 2,798.3 \text{ KJ/Kg} \quad s_g = 6.3390 \text{ KJ/Kg K}$$

ahora comparamos s_3 con s_g

$$s_3 = s_2 \quad (\text{turbina isoentrópica}) \quad \text{entonces } s_3 = 6.7219 \text{ KJ/Kg}$$

y resulta que: $s_3 > s_g$

pues: $6.7219 \text{ KJ/Kg K} > 6.3390 \text{ KJ/Kg K}$

por lo que el estado en la etapa 3 es de vapor sobrecalentado, por lo tanto, en la correspondiente tabla se consulta, para $P_3 = 2 \text{ MPa}$, el valor de $h_{3 \text{ teórica}}$ para el de $s_3 = 6.7219 \text{ KJ/Kg K}$.

Ahora bien, en la tabla de vapor sobrecalentado NO está este valor de s_3 , por lo que se toman las entalpías de los valores vecinos mayor y menor de s y se interpola para encontrar h_3 ...

Para	$s = 6.5453$	----	$h = 2,902.5$
	$s = \underline{6.7664}$	----	$h = \underline{3,023.5}$
incrementos	0.2211		121

regla de tres:

$$121 / 0.2211 = \Delta h_{3 \text{ teórica}} / (6.7219 - 6.5453)$$

$$\Delta h_{3 \text{ teórica}} = 96.64$$

$$h_{3 \text{ teórica}} = 2,902.5 + 96.64 = 2,999.1 \text{ KJ/Kg}$$

ya estamos en condiciones para hallar h_3 ...

$$\text{Con la ecuación de eficiencia: } \eta_{\text{turb. alta}} = (h_2 - h_3) / (h_2 - h_{3 \text{ teórica}})$$

$$\text{se despeja } h_3 = h_2 - \eta_{\text{turb. alta}} (h_2 - h_{3 \text{ teórica}})$$

$$h_3 = 3,302.9 - 0.85(3,302.9 - 2999.1)$$

$$\underline{h_3 = 3,046.67 \text{ KJ/Kg}}$$

④ Turbina de alta presión a caldera...

Con $P_4 = 600 \text{ KPa}$, se consulta la tabla de líquido saturado anotando los siguientes valores:

$$\text{Para } P_3 = 600 \text{ KPa: } h_f = 670.38 \text{ KJ/Kg} \quad s_f = 1.9308 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_g = 2,756.2 \text{ KJ/Kg} \quad s_g = 6.7593 \text{ KJ/Kg K}$$

determinamos el valor de s_4 ...

$$s_4 = s_3 = s_2 \quad (\text{turbina isoentrópica})$$

entonces $s_4 = 6.7219 \text{ KJ/Kg K}$

ahora comparamos s_4 con s_f y s_g : $1.9308(s_f) < 6.7219(s_4) < 6.7593(s_g)$

como s_4 está entre s_f y s_g , el estado teórico 4 es una mezcla de líquido y vapor saturados, por lo que es necesario calcular la calidad X' de la mezcla.

Nota: Es "estado teórico" pues la condición isoentrópica de la turbina ($s_4 = s_3 = s_2$) también lo es.

$$\text{de la ecuación } s = s_g X' + s_f (1 - X')$$

despejamos $X' = (s - s_f) / (s_g - s_f)$ y sustituimos para valores del punto 4:

$$X' = (6.7219 + 1.9308) / (6.7593 + 1.9308) = 0.995$$

con este valor de calidad X' se obtiene la entalpía teórica en la etapa 4 con la ecuación:

$$h_{\text{teórica}} = h_g X' + h_f (X' - 1) \quad \text{y sustituimos para valores del punto 4:}$$

$$h_{4 \text{ teórica}} = 2,756.2 \times 0.995 + 670.38(0.995 - 1)$$

$$h_{4 \text{ teórica}} = 2,739.0671 \text{ KJ/Kg}$$

ya estamos en condiciones para hallar h_4 (real)...

$$h_4 = h_2 - \eta_{\text{turbina alta presión}} (h_2 - h_{4 \text{ teórica}}) = 3,302.9 - 0.85 \times (3,302.9 - 2,739.067)$$

$$\underline{h_4 = 2,823.6 \text{ KJ/Kg}}$$

como $h_4 > h_g$ ($2,823.6 > 2,756.2$), el estado real en la etapa 4 es de vapor sobrecalentado.

⑤ Caldera a turbina de baja presión (Vapor sobrecalentado del recalentamiento).

Sabemos que: $P_5 = P_4 = 600 \text{ KPa}$ y $T_5 = 350 \text{ °C}$

Podemos tomar los valores de h_5 y s_5 directamente de la tabla de vapor sobrecalentado...

$$h_5 = 3,165.7 \text{ KJ/Kg} \quad \text{y} \quad s_5 = 7.5464 \text{ KJ/Kg k}$$

⑥ Turbina de baja presión a calentador abierto (segunda extracción)

Estado del fluido, entalpía h_6 y entropía s_6 .

Para determinar el estado del fluido en la etapa 6 se consulta, con P_6 , la tabla de líquido saturado anotando los siguientes valores:

Para $P_6 = 200 \text{ KPa} = 0.2 \text{ MPa}$:

$$h_f = 504.70 \text{ KJ/Kg} \quad s_f = 1.5301 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_g = 2,706.7 \text{ KJ/Kg} \quad s_g = 7.1271 \text{ KJ/Kg K}$$

ahora comparamos s_6 con s_g

$$s_6 = s_5 \quad (\text{turbina isoentrópica}) \quad \text{entonces } s_6 = 7.5464 \text{ KJ/Kg}$$

y resulta que: $s_6 > s_g$

pues: $7.5464 \text{ KJ/Kg K} > 7.1271 \text{ KJ/Kg K}$

por lo que el estado en la etapa 6 es de vapor sobrecalentado, por lo tanto, en la correspondiente tabla se consulta, para $P_6 = 200 \text{ KPa} = 0.2 \text{ MPa}$, el valor de $h_{6 \text{ teórica}}$ para el de $s_6 = 7.5464 \text{ KJ/Kg K}$.

Ahora bien, en la tabla de vapor sobrecalentado NO está este valor de s_6 , por lo que se toman las entalpías de los valores vecinos mayor y menor de s y se interpola para encontrar $h_3...$

Para	$s = 7.5066$	----	$h = 2,870.5$
	$s = \underline{7.7086}$	----	$h = \underline{2,971.0}$
incrementos:	0.202		100.5

regla de tres:

$$100.5 / 0.202 = \Delta h_{6 \text{ teórica}} / (7.5464 - 7.5066)$$

$$\Delta h_{6 \text{ teórica}} = 19.8 \text{ KJ/Kg}$$

$$h_{6 \text{ teórica}}: 2,870.5 + 19.8 = 2,890.3 \text{ KJ/Kg}$$

ya estamos en condiciones para hallar $h_6...$

$$\text{Con la ecuación de eficiencia: } \eta_{\text{turb. alta}} = (h_5 - h_6) / (h_5 - h_{6 \text{ teórica}})$$

$$\text{se despeja } h_6 = h_5 - \eta_{\text{turb. alta}} (h_5 - h_{6 \text{ teórica}})$$

$$h_6 = 3,165.7 - 0.85(3,165.7 - 2,890.3)$$

$$\underline{h_6 = 2,931.6 \text{ KJ/Kg}}$$

⑦ Turbina de baja presión a condensador.

Entropía y entalpía.

El estado en la etapa 7 es de líquido y vapor saturados, por lo tanto, en la correspondiente tabla se consulta, para $P_7 = 7.5 \text{ KPa}$, anotando los siguientes valores:

Para $P_7 = 7.5 \text{ KPa}$:

$$h_f = 168.79 \text{ KJ/Kg} \quad s_f = 0.5764 \text{ KJ/Kg K}$$

$$h_g = 2574.8 \text{ KJ/Kg} \quad s_g = 8.2515 \text{ KJ/Kg K}$$

determinamos el valor de s_7 ...

$$s_7 = s_5 \text{ (turbina isoentrópica)}$$

$$\text{entonces } \underline{s_7 = 7.5464 \text{ KJ/Kg K}}$$

$$\text{ahora comparamos } s_7 \text{ con } s_f \text{ y } s_g: \quad 0.5764(s_f) < \underline{7.5464(s_7)} < 8.2515(s_g)$$

como s_7 está entre s_f y s_g , el estado teórico en 4 es una mezcla de líquido y vapor saturados, por lo que es necesario calcular la calidad X' de la mezcla.

Nota: Es "estado teórico" pues la condición isoentrópica de la turbina ($s_7 = s_5$) también lo es.

$$\text{de la ecuación } s = s_g X' - s_f (1 - X')$$

despejamos $X' = (s + s_f) / (s_g - s_f)$ y sustituimos para valores del punto 7:

$$X' = (7.5464 + 0.5764) / (8.2515 + 0.5764) = 0.92$$

con este valor de calidad X' se obtiene la entalpía teórica en la etapa 7 con la ecuación:

$h_{\text{teórica}} = h_g \cdot X' + h_f (X' - 1)$ y sustituimos para valores del punto 7:

$$h_{7 \text{ teórica}} = 2,574.8 \times 0.92 + 168.79(0.92 - 1)$$

$$h_{7 \text{ teórica}} = 2,355.3128 \text{ KJ/Kg}$$

ya estamos en condiciones para hallar h_7 (real)...

$$h_7 = h_5 - \eta_{\text{turbina alta presión}} (h_5 - h_{7 \text{ teórica}}) = 3,165.7 - 0.85 \times (3,165.7 - 2,355.3128)$$

$$\underline{h_7 = 2,476.8685 \text{ KJ/Kg}}$$

como $h_f > h_7 < h_g$ ($2,823.6 > 2,756.2$), se confirma que el estado real en la etapa 4 es de una mezcla de líquido y vapor saturados.

⑧ Condensador a la entrada de bomba 2.

Entalpía y volumen específico.

En la tabla de líquido saturado para la $P_8 = 7.5 \text{ KPa}$ se consulta la entalpía h_f y el volumen específico v_f a la salida del condensador o entrada a la bomba 2...

$$\underline{h_8 = 168.79 \text{ KJ/Kg}}$$

$$\underline{v_{f8} = 0.001008 \text{ m}^3/\text{Kg}}$$

Nota: las variables que se deben conocer a la entrada de las bombas son la entalpía y el volumen específico y en ellas la entropía permanece constante.

⑨ Bomba 2 a calentador abierto.

Trabajo ideal (W_{ideal}), trabajo real (W_{real}) y entalpía (h_9).

$$W_{ideal} = v_{f entrada} (P_{salida} - P_{entrada})$$

$$v_{f entrada} = 0.001008 \text{ m}^3/\text{Kg} \quad \text{tabla: líquido saturado a } P_9 = 7.5 \text{ KPa}$$

$$= 0.001008 \text{ m}^3/\text{Kg} (200 - 7.5) \text{ KPa} = 0.194 \text{ KJ/Kg}$$

Con la fórmula de eficiencia de la bomba: $\eta_{bomba} = W_{ideal} / W_{real}$

Despejamos W_{real} : $W_{real} = W_{ideal} / \eta_{bomba} = 0.194 / 0.95 = 0.204 \text{ KJ/Kg}$

Ahora calculamos la entalpía h_9 ...

$$h_9 = h_8 + W_{real} = 168.79 + 0.204 = 169 \text{ KJ/Kg}$$

$$\underline{h_9 = 169 \text{ KJ / Kg}}$$

⑩ Calentador abierto a bomba 1.

Entalpía y volumen específico.

En la tabla de líquido saturado para la $P_{10} = 200 \text{ KPa}$ se consulta la entalpía h_f y el volumen específico v_f a la salida del condensador...

$$\underline{h_{10} = 504.70 \text{ KJ / Kg}}$$

$$\underline{v_{f10} = 0.0010061 \text{ m}^3/\text{Kg}}$$

Nota: las variables que se deben conocer a la **entrada** de las bombas son la **entalpía y el volumen específico** y en ellas la **entropía** permanece constante.

⑪ Bomba 1 a calentador cerrado

Trabajo ideal (W_{ideal}), trabajo real (W_{real}) y entalpía (h_9).

$$W_{ideal} = v_{f entrada} (P_{salida} - P_{entrada})$$

$$V_{f \text{ entrada}} = 0.001061 \text{ m}^3/\text{Kg} \quad \text{tabla: líquido saturado a } P_9 = 200 \text{ KPa} = 0.2 \text{ MPa}$$

$$W_{\text{ideal}} = 0.001061 \text{ m}^3/\text{Kg} (6,000 - 200) \text{ KPa} = 6.154 \text{ KJ/Kg}$$

$$\text{Con la fórmula de eficiencia de la bomba: } \eta_{\text{bomba}} = W_{\text{ideal}} / W_{\text{real}}$$

$$\text{Despejamos } W_{\text{real}}: \quad W_{\text{real}} = W_{\text{ideal}} / \eta_{\text{bomba}}$$

$$W_{\text{real}} = (W_{\text{ideal}} / \eta)_{\text{bomba 1}} = 6.154 \text{ KJ/Kg} / 0.95 = 6.4778 \text{ KJ/Kg}$$

Ahora calculamos la entalpía h_9 ...

$$h_{11} = h_{10} + W_{\text{real}} = 504.70 \text{ KJ/Kg} + 6.4778 \text{ KJ/Kg}$$

$$\underline{h_{11} = 511.17 \text{ KJ/Kg}}$$

nota: a la **salida** de las bombas debe calcularse: **Trabajo ideal** (W_{ideal}), **trabajo real** (W_{real}) y **entalpía** (h_9).

(12) Calentador cerrado a trampa.

Entalpía.

$$h_{12} = 908.79 \text{ KJ/Kg} \quad \text{Tabla: líquido saturado a } 2,000 \text{ KPa} = 2 \text{ MPa}$$

(13) Trampa a calentador abierto.

Entalpía.

En las trampas se da un proceso isoentálpico, por lo tanto:

$$\text{entalpía}_{13} = \text{entalpía}_{12} \quad (h_{13} = h_{12})$$

$$h_{13} = 908.79 \text{ KJ/Kg}$$

Una vez que se tienen las entalpías en todas las etapas del sistema, se proceda a calcular las fracciones de fluido de las extracciones de las turbinas de alta presión (y) y de baja presión (z), para lo que recurrimos primeramente a un balance de energía en el calentador cerrado para obtener el valor de y :

Energía que entra = energía que sale

$$yh_3 + h_{11} = h_1 + yh_{12}$$

Reordenando: $yh_3 + yh_{12} = h_1 + h_{11}$

Despejando y : $y = (h_1 - h_{11}) / (h_3 - h_{12})$

Sustituyendo: $y = 857.4 - 511.17 / (3044.4 - 908.79) =$

$$y = 0.16$$

ahora el balance de energía en el calentador abierto:

$$zh_6 + (1-y-z)h_9 + yh_{13} = h_{10}$$

despejando z : $z = (h_{10} - h_9 + yh_9 - yh_{13}) / (h_6 - h_9)$

sustituyendo:

$$z = (504.70 - 169 + 0.16 \times 169 - 0.16 \times 908.79) / (2,931.6 - 169)$$

$$z = 0.08$$

obtenemos ahora el flujo másico con la ecuación de la potencia neta...

$$(Poten.)_{neta} = \dot{m} \times W_{neta}$$

$$\dot{m} = (Poten.) / W_{neta} = 120 \text{ MW} / W_{neta}$$

$$W_{neta} = W_{turbinas} - W_{bombas}$$

$$W_{\text{turbinas}} = W_{\text{alta presión}} + W_{\text{turbina baja presión}}$$

$$= [(h_2 - h_3) + (1 - y)(h_3 - h_4)] + [(1 - y)(h_5 - h_6) + (1 - y - z)(h_6 - h_7)]$$

$$= [(3,302.9 - 3,046.6) + (1 - 0.16) (3,046.6 - 2,823.6)] + [(1 - 0.16)(3,165.7 - 2,931.6) + (1 - 0.16 - 0.08) (2,931.6 - 2,476.8685)] = 446.7 + 541.1 = 987.8 \text{ KJ/Kg}$$

$$W_{\text{bombas}} = W_{\text{bomba 1}} + W_{\text{bomba 2}} = (h_{11} - h_{10}) + (1 - y - z) (h_9 - h_8)$$

$$W_{\text{bombas}} = (511.17 \text{ KJ/Kg} - 504.70 \text{ KJ/Kg}) + (1 - 0.16 - 0.08) (169 \text{ KJ/Kg} - 168.79 \text{ KJ/Kg})$$

$$W_{\text{bombas}} = 6.47 + 0.1596 = 6.63 \text{ KJ/Kg}$$

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{turbinas}} - W_{\text{bombas}} = 987.8 \text{ KJ/Kg} - 6.63 = 981.17 \text{ KJ/Kg}$$

Ahora procedemos a calcular el flujo másico ($\dot{m}$) con la ecuación que relaciona el trabajo neto con la potencia:

$$(\text{Poten.})_{\text{neta}} = \dot{m} \times W_{\text{neto}}; \quad \dot{m} = (\text{Poten.})_{\text{neta}} / W_{\text{neto}} \quad (\text{la potencia neta es un dato})$$

$$\dot{m} = 120 \text{ KW} / 981.17 \text{ KJ/Kg} = 120,000 \text{ KJ/s} / 981.17 \text{ KJ/Kg} = 122.3 \text{ Kg/s}$$

$$\dot{m} = 122.3 \text{ Kg/s} (3,600 \text{ s} / \text{h}) = 440,280 \text{ Kg/h.} \quad \checkmark$$

(flujo másico total por hora en la caldera)

Nota: para obtener los valores másicos por hora de las extracciones (fracciones y y z) se multiplica el flujo másico total dichas fracciones respectivamente.

Ahora calculemos la eficiencia térmica (η) del ciclo aplicando la ecuación:

$$\eta = W_{\text{neto}} / Q_{\text{total suministrado}} \quad (Q_{\text{total}} : \text{ calor suministrado al ciclo } \underline{\text{en la caldera}})$$

$$Q_{\text{total suministrado}} = Q_1 + Q_2 = (h_2 - h_1) + (1 - y)(h_5 - h_4)$$

$$Q_{\text{total suministrado}} = (3,302.9 - 857.4) + (1 - 0.16)(3,165.7 - 2,823.6) = 2,732.9 \text{ KJ/Kg}$$

$$\text{Sustituyendo: } \eta = W_{\text{neto}} / Q_{\text{total}} = 981.17 \text{ KJ/Kg} / 2,732.9 \text{ KJ/Kg}$$

$$\eta = 0.36 \text{ (36\%)} \quad \checkmark$$

otra manera de calcular la eficiencia térmica es:

$$\eta = 1 - (Q_{\text{extraído}} / Q_{\text{total suministrado}}); \quad (Q_{\text{extraído}} : \text{ en el condensador})$$

$$Q_{\text{extraído}} = (1 - y - z)(h_7 - h_8) = (1 - 0.16 - 0.08)(2,476.868 - 168.79)$$

$$Q_{\text{extraído}} = 1,754.14 \text{ KJ/Kg}$$

$$\text{Por lo tanto: } \eta = 1 - (1,754.14 / 2,732.9) = 0.36 \text{ (36\%)} \quad \checkmark$$

5.5. Turbina de gas con ciclo abierto.

Aunque el principio de funcionamiento de este tipo de turbina es en esencia en mismo de las turbinas de vapor, un fluido gaseoso que se expande haciendo girar un eje con rodetes de álabes, aquí el fluido de trabajo es una mezcla de aire con combustible que se

prende elevando su temperatura para expandirse a altas presiones. Esta máquina térmica es de construcción muy compacta, tiene la ventaja de un arranque y paro muy rápidos lo que hace que su mejor aplicación, cuando de la generación de energía eléctrica se trata, sea para satisfacer picos de demanda y generación eléctrica de emergencia.

Ver Anexo VI: Presentación en PowerPoint que aborda este tema (Link):

Turbinas de Gas de Ciclo Abierto.

----- 0 -----

Nota: Para evaluar los temas de esta Unidad se recomienda integrar a los estudiantes en equipos de trabajo y encargar la resolución de problemas similares a los que se describen y discutirlos en clases a fin de que se practiquen los procedimientos aplicados.

ANEXOS

Anexo I



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

UNIDAD 1



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
DE MÉXICO

PRESENTACIÓN

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA.

EL PRINCIPIO DE TORRICELLI

El principio de Torricelli.

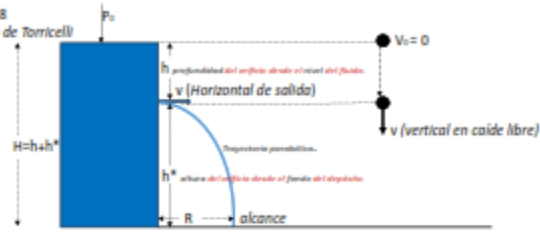
Evangelista Torricelli (1608-1647)

Físico y matemático italiano a quien se atribuye la invención del barómetro. Sus contribuciones a la geometría fueron fundamentales para desarrollo del cálculo integral. Al morir Galileo, fue ascendido a profesor de matemáticas de la Academia Florentina.

En su obra *Opera geométrica*, publicada en 1644, explicó, entre otros temas, los resultados de sus experimentos sobre la mecánica de fluidos. En esta área destaca el llamado, en su honor, el *Principio de Torricelli*:

"En un depósito abierto a la atmósfera, la velocidad horizontal de salida de un fluido líquido, por un orificio, está en función de la profundidad del orificio medida desde el nivel del fluido y equivale a la velocidad que adquiere un objeto en caída libre, una distancia igual a la profundidad del orificio."

Figura 1.8
Principio de Torricelli



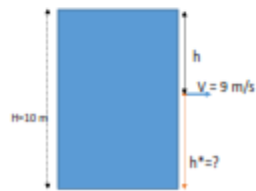
De la cinemática: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$; como $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$ y $a = g$, entonces:

$$v = \sqrt{2gh}$$

En ocasiones se utiliza un factor C_d de corrección por fricción y queda: $v = C_d \sqrt{2gh}$

Ejemplo 1.10: Determine a qué altura desde el piso, se debe perforar un orificio en un tanque abierto de la Figura 1.10, para que el líquido salga a una velocidad de 9 m/s, si la altura del fluido en su interior, desde el fondo es 10 m.

Figura 1.9 Ejemplo 1.10



$$v = \sqrt{2gh}; \quad h = v^2 / 2g$$

$$H = (9 \text{ m/s})^2 / 2(9.81 \text{ m/s}^2) = 4.13 \text{ m}$$

$$\text{Por lo tanto } h^* = 10 - 4.13 = 5.87 \text{ m} \quad \checkmark$$

H : altura del fluido desde el fondo del tanque.

h : profundidad del orificio desde el nivel del fluido.

h^* : altura del orificio desde el fondo del depósito.

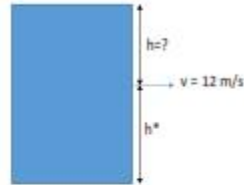
Ejemplo 1.11: Determine a qué profundidad desde la superficie del líquido, Figura 1.10 se debe abrir un orificio en un tanque abierto, con agua, para que ésta salga a 12 m/s.

$$v = \sqrt{2gh}; \quad h = v^2 / 2g$$

$$h = (12 \text{ m/s})^2 / 2(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.34 \text{ m} \quad \checkmark$$

Figura 1.10

Ejemplo 1.11



Notas: 1) El valor de h^* no afecta el valor de v .

2) El valor de la velocidad es instantáneo pues inmediatamente disminuye la altura del fluido y v depende de h .

Alcance: El chorro de fluido lleva trayectoria parabólica, entonces se puede calcular el alcance R que se define como la distancia horizontal recorrida por el fluido.

Como v es horizontal y constante, el avance del chorro en ese sentido será:

$$R = s = v \cdot t \quad (1) \quad ; \text{ en la que: } v = \sqrt{2gh}$$

y tomando la ecuación de la cinemática: $x - x_0 = v_{x0}t + (1/2)at^2$,

donde $x_0=0$, $v_{x0}=0$, $a=g$ y $x=h^*$

$$\text{Sustituyendo y despejando } t: \quad t = \sqrt{2h^*/g}$$

$$\text{Sustituyendo en (1) tenemos: } R \text{ (al nivel del fondo del fluido)} = \sqrt{2gh} \sqrt{2h^*/g}$$

$$R = 2\sqrt{h h^*}$$

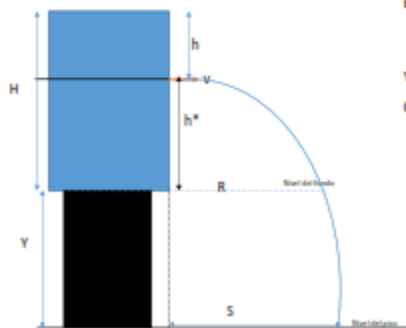
Ejemplo 1.12: ¿Con qué velocidad sale un líquido de un tanque asentado en el piso, por un orificio que se encuentra a una profundidad de 1.4 m y cuál es la distancia horizontal que recorrerá?. La altura total del líquido dentro del tanque es de 5 m.

$$v = \sqrt{2gh} = v = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(1.4 \text{ m})} = 5.24 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$R = 2\sqrt{hh^*} = 2\sqrt{(1.4 \text{ m})(5 - 1.4) \text{ m}} = 4.49 \text{ m} \quad \checkmark$$

Cuando el fondo del depósito está por encima del piso, Figura 1.11, entonces el alcance es mayor...

Figura 1.11 Fondo del depósito por más arriba del piso.



El tiempo de caída será:

$$t = \sqrt{2(h + Y)/g}$$

Y – altura sobre el piso del fondo del tanque.

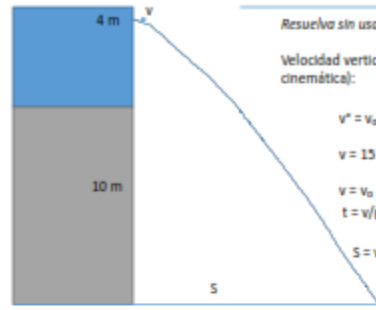
Como $s = vt$ y $v = \sqrt{2gh}$

entonces el valor de

$$S = 2\sqrt{h(h + Y)}$$

Ejemplo 1.13.- Un depósito de agua descansa sobre una base de 10m de alto como muestra la figura 1.12 y en su interior la profundidad del líquido es de 4m. Se perfora un orificio a la mitad de su profundidad, ¿a qué distancia de la base en el piso chocará el chorro de agua?

Figura 1.12 Ejemplo 1.13



$$S = 2\sqrt{h(h+y)} = 2\sqrt{2(10+2)} = 9.79 \text{ m}$$

Resuelva sin usar la fórmula directa de Torricelli para S.

Velocidad vertical del agua al llegar al piso (Por la ecuación cinemática):

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0) ; v^2 = 2g(y) = 2 \times 9.81 \times 12 ;$$

$$v = 15.34 \text{ m/s}$$

$$v = v_0 + g \cdot t ; v_0 = 0$$

$$t = v/g = 15.34 \text{ m/s} / 9.81 \text{ m/s}^2 = 1.56 \text{ s.}$$

$$S = v \cdot t = \sqrt{2gh} \cdot t$$

$$S = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)^2} (1.56 \text{ s}) = 9.79 \text{ m} \checkmark$$

LINKS PARA EJERCICIOS DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI:

1.- <https://es.khanacademy.org/science/physics/fluids/fluid-dynamics/a/what-is-bernoullis-equation>

2.- <https://www.fisimat.com.mx/teorema-de-bernoulli/>

Anexo II



UNIDAD 2

PRESENTACIÓN

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA.

LEYES O PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA

**CAPACIDAD CALORÍFICA*
**CALOR ESPECÍFICO*

Qué son las leyes de la termodinámica?

Las leyes de la termodinámica (o los principios de la termodinámica) describen el comportamiento de **tres** cantidades físicas fundamentales, **la temperatura**, **la energía** y **la entropía**.

Matemáticamente, estos principios se describen mediante ecuaciones que **explican el comportamiento de los sistemas termodinámicos**.

Existen cuatro leyes de la termodinámica

Primera Ley de la Termodinámica: "Ley de la Conservación de la Energía".

Al suministrar una cantidad determinada de energía calorífica a un sistema físico, el incremento neto de su energía interna (U), podrá calcularse como el **calor suministrado** (Q_c) menos la energía del **trabajo** (W) **efectuado** por el sistema sobre sus alrededores.

Expresado en una fórmula: $\Delta U = Q - W$.



Segunda Ley de la Termodinámica.

La segunda ley, también llamada «Ley de la Entropía».

Esta ley introduce un concepto fundamental en física: la entropía (S), que representa el **grado de desorden** de un sistema.

Resulta que en cada proceso físico en el que hay una transferencia de energía, cierta cantidad de ella no puede realizar trabajo, esa energía es calor. Ese calor lo libera el sistema y lo que hace es aumentar el desorden del sistema: su entropía. La entropía es una medida numérica del desorden de un sistema.

La formulación de esta ley establece que **el cambio en la entropía (dS) será siempre igual (o mayor) al calor transferido (dQ) dividido por la temperatura (T) del sistema.**

O sea, que: $dS \geq dQ / T$ (en términos diferenciales) o:

$$\Delta S \geq \Delta Q / T; \text{ (ecuación de la entropía)}$$

en ocasiones leeremos: $S \geq Q / T$ o $S = Q / T$, en el entendido que, en esta última expresión, S y Q se refieren a las variaciones de Entropía y Calor (ΔS y ΔQ)

Tercera Ley de la Termodinámica

La tercera ley plantea que la entropía de un sistema que sea llevado al cero absoluto, será una constante de valor definido y no variará.

Dicho en otras palabras:

- Al llegar al cero absoluto (cero en unidades Kelvin), los procesos de los sistemas se detienen.
- Al llegar al cero absoluto (cero en unidades Kelvin), no hay variación de la Entropía

Es decir: (en $T = 0\text{ K}$, $\Delta S = 0$).

Resulta difícil alcanzar el llamado **cero absoluto** ($-273,15^\circ\text{C}$), pero podemos pensar esta ley analizando lo que ocurre en un congelador: los alimentos que depositemos allí se enfriarán tanto, que se ralentizarán o incluso detendrán los procesos bioquímicos en su interior. Por eso se retarda su descomposición y será apto su consumo durante mucho más tiempo.

Cuarta Ley de la Termodinámica (ley "cero" del equilibrio térmico).

Equilibrio Térmico, este principio dicta que: "Si dos sistemas están en equilibrio térmico de forma independiente con un tercer sistema, deben estar también en equilibrio térmico entre sí". Puede expresarse lógicamente del siguiente modo:

si $T_A = T_C$ y $T_B = T_C$, entonces $T_A = T_B$.

Esta ley nos permite comparar la energía térmica de tres cuerpos distintos A, B, y C. Si el cuerpo A se encuentra en equilibrio térmico con el cuerpo C (o sea, tienen la misma temperatura) y B también tiene la misma temperatura que C, entonces A y B poseen igual temperatura.

Otra forma de enunciar este principio es argumentar que al poner en contacto dos cuerpos con distintas temperaturas, intercambian calor hasta que sus temperaturas se igualan.

Ejemplo (20.2 Serway pág. 343).- Un trozo de metal de 0.05 Kg se calienta a 200 °C, después se coloca en un recipiente que contiene 0.4 Kg de agua a 20 °C. Si la temperatura del agua es de 22.4 °C al alcanzar el equilibrio térmico, encuentre el calor específico c del metal.



calor ganado por el agua = calor cedido por el metal

(ley de la conservación de la energía)

$$m \cdot c \cdot \Delta t_{\text{(agua)}} = - m \cdot c \cdot \Delta t_{\text{(metal)}}$$

calor ganado (+) calor cedido (-)

$$0.4 \text{ Kg} \cdot 4,186 \text{ J/Kg}^\circ\text{C} (22.4 - 20)^\circ\text{C} = - 0.05 \text{ Kg} \cdot c_{\text{metal}} (22.4 - 200)^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{metal}} = 452.54 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$$

¿Cuál es el calor transferido al agua?

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 0.4 \text{ Kg} \cdot 4,186 \text{ J/Kg}^\circ\text{C} \cdot 2.4^\circ\text{C} = 4,018 \text{ J}$$

este calor incrementa la energía interna del agua: $\Delta U(\text{agua}) = 4,018 \text{ J}$
y decrementa la del metal en la misma cantidad: $\Delta U(\text{metal}) = -4,$



Ejemplo (20.3 pág. 245 Serway I): Una bala de plata de 2 gr a una velocidad de 200 m/s choca con una pared de pino. Todo el calor generado por el impacto se queda en la bala, a) ¿Cuál es el cambio de temperatura en la bala? b) Resuelva para el caso de bala de plomo.

Ejemplo (20.3 pág. 245 Serway I): Una bala de plata de 2 gr a una velocidad de 200 m/s choca con una pared de pino. Todo el calor generado por el impacto se queda en la bala, a) ¿Cuál es el cambio de temperatura en la bala? b) Resuelva para el caso de bala de plomo.

a)

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3} \text{ Kg})(200 \text{ m/s})^2 = 40 \text{ J} \rightarrow \text{(Energía cinética de la bala que se transforma en calor y pasa a incrementar la energía interna de la bala incrementando su temperatura).}$$

Con la Ecuación del calor transferido calculamos el incremento de la temperatura:

$$Q = mc\Delta t; \quad \Delta t = Q/mc = 40 \text{ J} / (2 \times 10^{-3} \text{ Kg})(234 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C}) = 85.5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) ¿si la bala fuera de plomo?

$$\Delta t = Q/mc = 40 \text{ J} / (2 \times 10^{-3} \text{ Kg})(128 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C}) = 156.25 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Nota: Aunque la energía transferida en los casos de la plata y el plomo es la misma, el incremento de la temperatura es diferente debido a los diferentes calores específicos de los dos metales.

- Ejercicio (20.8 Serway).- Se calientan balines de cobre de un gramo a 100 °C ¿Cuántos de estos balines se deben agregar a 500 gr de agua a 20 °C para que ésta suba su temperatura a 25 °C?

- Ejercicio (20.8 Serway I).- Se calientan balines de cobre de un gramo a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ¿Cuántos de estos balines se deben agregar a 500 gr de agua a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ para que ésta suba su temperatura a 25 y cuál es el incremento de su energía interna? $^{\circ}\text{C}$?



$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

$$m \cdot c \cdot \Delta t_{\text{(calor ganado por el agua)}} = -m \cdot c \cdot \Delta t_{\text{(calor perdido por el cobre)}}$$

$$(500\text{ gr})(4.186\text{ J/gr }^{\circ}\text{C})(25-20)\text{ }^{\circ}\text{C} = -m(0.387\text{ J/gr }^{\circ}\text{C})(25-100)\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$m_{\text{cobre}} = 360.60\text{ gr. } (361\text{ balines})$$

o bien :

$$(500\text{ gr})(1\text{ cal/gr }^{\circ}\text{C})(25-20)\text{ }^{\circ}\text{C} = -m(0.0924\text{ cal/gr }^{\circ}\text{C})(25-100)\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$m_{\text{cobre}} = 360.75\text{ gr. } (361\text{ balines})$$

$$\Delta U_{\text{del agua}} = (500\text{ gr})(1\text{ cal/gr }^{\circ}\text{C})(25-20)\text{ }^{\circ}\text{C} = 2,500\text{ cal}$$

$$\Delta U_{\text{del Cu}} = (360.6\text{ gr})(0.0924\text{ cal/gr }^{\circ}\text{C})(25-20)\text{ }^{\circ}\text{C} = 2,499\text{ cal}$$

- Ejercicio (20.8 Serway I): Un recipiente de 300 gr de aluminio contiene 200 gr de agua a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ Si se agregan 100 gr de agua a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ¿cuál es la temperatura final de equilibrio? **$R = 34.7\text{ }^{\circ}\text{C}$**

•

- Ejercicio (20.8 Serway I): Un recipiente de 300 gr de aluminio contiene 200 gr de agua a 10 °C. Si se agregan 100 gr de agua a 100 °C ¿cuál es la temperatura final de equilibrio?

$$m_1 \cdot c \cdot (t_f - t_i)_{\text{agua}} = m_2 \cdot c \cdot (t_i - t_f)_{\text{aluminio}} \quad \text{Arreglando por separado, obtenemos la ecuación de aquí}$$

$$200 \times (t_f - 10) = -100 \times (t_f - 100) \quad ; \quad t_f = 40 \text{ °C}$$

(Calor ganado por el agua fría = calor perdido por el agua caliente)

Ahora atendamos el contacto entre el agua y el aluminio ($C_{Al} = 0.9 \text{ J/g} \cdot \text{°C}$)

agua	aluminio
(200 + 100)gr	(4.186 J/g·°C)(12 - 40)°C = -300gr(0.9 J/g·°C)(12 - 10)°C

Variación de la energía interna ΔU en el agua y el aluminio:

En el agua inicialmente fría, $\Delta U = m \cdot c \cdot (t_f - t_i)_{\text{agua}} = 200 \times (4.186 \text{ J/g} \cdot \text{°C})(34.7 - 10) = 20,578.84 \text{ J}$

En el agua inicialmente caliente, $\Delta U = m \cdot c \cdot (t_f - t_i)_{\text{agua}} = 100 \times (4.186 \text{ J/g} \cdot \text{°C})(34.7 - 100) = -27,334.58 \text{ J}$

En el aluminio, $\Delta U = m \cdot c \cdot (t_f - t_i)_{\text{aluminio}} = 300 \text{ gr} \times (0.9 \text{ J/g} \cdot \text{°C})(34.7 - 10) = 6,669 \text{ J}$

Anexo III



UNIDAD 2

PRESENTACIÓN

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA.

TRABAJO EN LOS PROCESOS TERMODINÁMICOS



PROCESOS TERMODINÁMICOS. Sistema Termodinámico. Def.

Gas ideal - Def: Es un gas que cumple con la ecuación:

$$R = PV / nt; \quad nt: \text{número de moles de gas en el sistema}$$

R: Constante Universal de los gases ideales

Sistemas termodinámicos gaseosos.

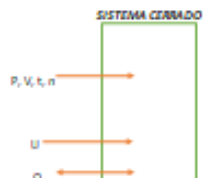
Principales variables termodinámicas de los gases:

I - Masa (m o n)

II - Presión (P)

III - Volumen (V)

IV - Temperatura (T)



Energía interna (U): No puede calcularse.

- Incremento de U : ΔU ; Calor transferido (Q) que sí puede calcularse.

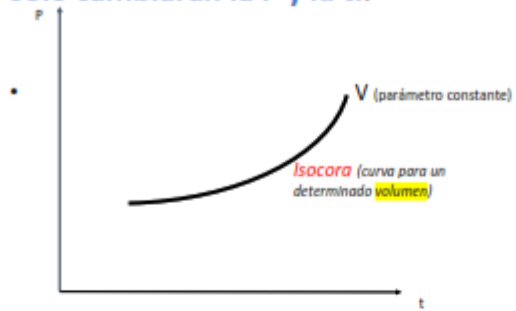
Consideremos un sistema *cerrado* en el que no hay intercambio másico con el entorno (*m: constante*), entonces las variables que definirán el comportamiento del sistema serán: Presión (P), Volumen (V) y Temperatura (t).

Por otro lado, si el proceso termodinámico del sistema es:

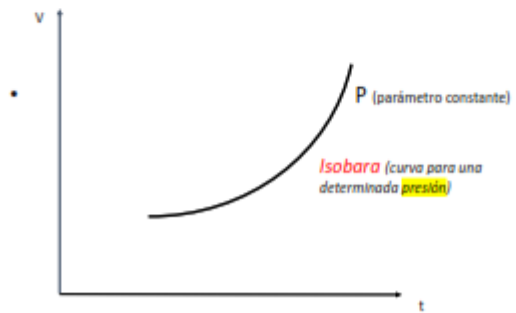
- i.- a V constante (*isométrico*), entonces solo cambiarán la P y la t.
- ii.- a P constante (*isobárico*), solo cambiarán el V y la t.
- iii.- a t constante (*isotérmico*), solo cambiarán el V y la P.

Diagramas (*curvas*) de procesos isométricos, isobáricos e isotérmicos.

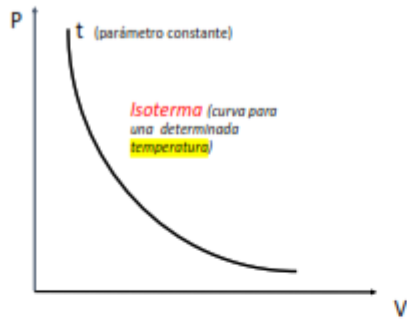
Proceso isométrico, isovolumétrico o isocórico
solo cambiarán la P y la t..



Proceso isobárico, solo cambiarán el V y la t.



Proceso isotérmico, solo cambiarán el V y la P.



Tema: Trabajo termodinámico en los procesos termodinámicos.

De la Mecánica Clásica sabemos que el trabajo (W) se produce en el desplazamiento (s) de una fuerza (F) y sigue la siguiente ecuación:

$$W = F \cdot s \quad (\text{dimensionalmente: N} \cdot \text{m} = \text{J})$$

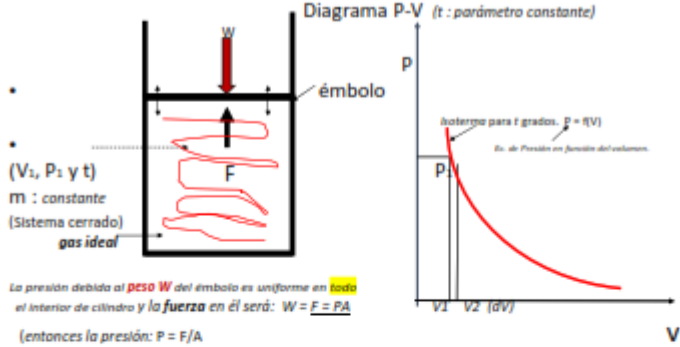
De igual manera, en termodinámica se requiere de **esos dos** elementos (F y s) para producir trabajo.

*La fuerza $\underline{F}$ se produce por la presión P ($F = P \cdot A$) y

*El desplazamiento $\underline{s}$ se produce por el cambio de volumen del sistema.

Esto se muestra considerando un cilindro sellado y lleno de gas con una de sus tapas desplazable como se muestra en la figura y atendiendo el diagrama P-V de procesos isotérmicos:

Trabajo termodinámico en los procesos isotérmicos.



Retomando la ecuación de trabajo, para desplazar la tapa hacia arriba es:

trabajo $W = F \cdot s = (P \cdot A) \cdot s = P(A \cdot s) = P \cdot V$ en notación diferencial: $dW = d(P \cdot V)$ (esto nos ubica en el diagrama isotérmico P-V de la diapositiva anterior).

Si t : constante (Procesos isotérmicos), entonces la presión es función del volumen $P = f(V)$ (ecuación de la isoterma en el diagrama P-V) entonces la diferencial se aplica a la variable V :

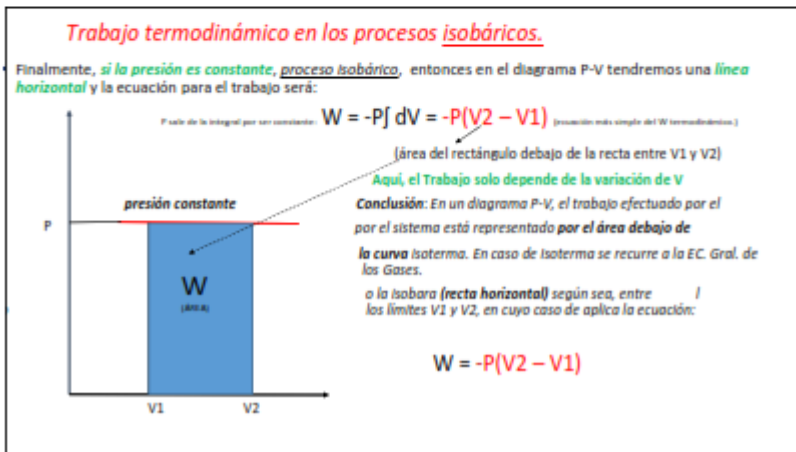
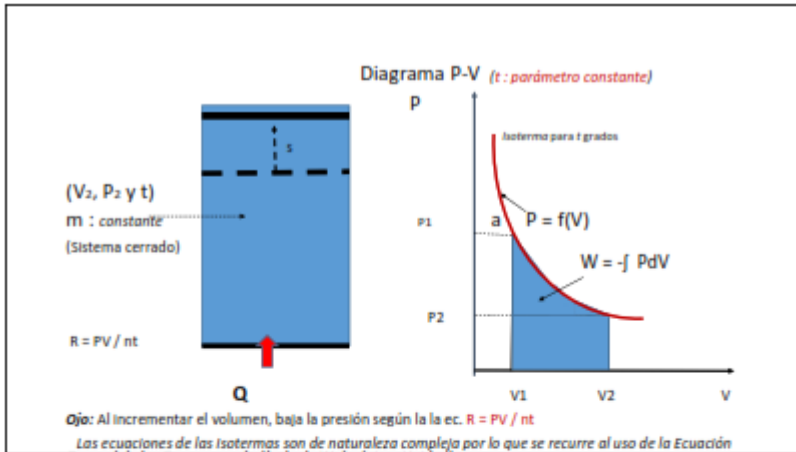
$$dW = PdV ; W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

nota: Se antepone el signo - pues el trabajo es negativo cuando lo realiza el sistema (pierde energía).
 Esto sucede en la expansión ($V_2 > V_1$) donde dV ($V_2 - V_1$) es positivo y W será negativo. En la compresión $V_2 < V_1$ y dV ($V_2 - V_1$) es negativo y W será positivo (doble signo negativo) pues éste se realiza sobre el sistema que gana energía. (Criterio UQPA de los signos).

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} f(V) dV$$

(área debajo de la isoterma entre V_1 y V_2)

aquí se necesitaría tener la ec. de la isoterma que relacione P en términos de V e integrarla entre V_1 y V_2 .



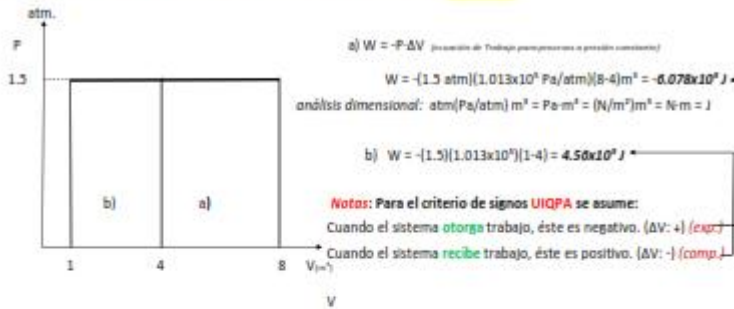
Trabajo termodinámico en los procesos isocóricos.

Dado que para producir trabajo es necesario que exista desplazamiento, el cual es efecto del cambio de volumen del sistema ya sea de expansión o compresión, en los procesos isocóricos o isométricos no se produce trabajo pues el volumen no varía en estos procesos.

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE TRABAJO TERMODINÁMICO

- Ejercicio 1 (20.30 Serway I).- Un gas en un recipiente está a 1.5 atm y ocupa un volumen de 4 m³ ¿Cuál es el Trabajo (W) realizado por el gas cuando : a) se expande a presión constante al doble de su volumen? b) si se comprime a 1/2 de su volumen inicial?

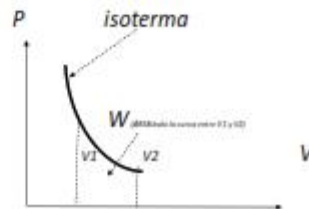
- Adviértase que como P es constante, la ecuación de W aplicable es: $W = -P \Delta V$



Ejemplo 2.- Un gas en un recipiente está a $2.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ y ocupa un volumen de 2 m³ ¿Cuál es el Trabajo realizado por el gas cuando a temp. constante: a) se expande al triple de su volumen? b) si se comprime a 1/2 de su volumen inicial (Nótese que aquí, ni la presión ni el volumen son constantes, sino que P es función V). La temp. sí es constante.

Por lo que la ecuación aplicable es. $W = \int P dV = \int f(V) dV$ (área debajo de la isoterma entre V1 y V2)

- Pero ecuaciones de las isotermas son de naturaleza compleja por lo que se recurre al uso de la Ecuación General de los Gases para el cálculo de W según se muestra en la próxima Unidad. La expansión se produce a lo largo de la isoterma (a T constante).



Anexo IV



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

UNIDAD 3



PRESENTACIÓN

MECÁNICA DE FLUIDOS Y TERMODINÁMICA.

PROCESOS Y PROPIEDADES TERMODINÁMICAS

PROCESOS TERMODINÁMICOS. Sistema Termodinámico. Def.

Gas ideal - Def:- Es un gas que cumple con la ecuación:

$$R = PV / n$$

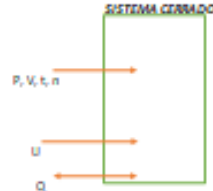
n: número de moles de gas en el sistema
R: Constante Universal de los gases ideales

Sistemas termodinámicos gaseosos:

Principales variables termodinámicas de los gases:

- I.- Masa (m o n)
- II.- Presión (P)
- III.- Volumen (V)
- IV.- Temperatura (T)

SISTEMA CERRADO



Energía interna. (U). No puede calcularse.

- Incremento de U : ΔU ; Calor transferido(Q) que sí puede calcularse.

Si consideramos dos estados termodinámicos, inicial y final, manteniendo constante la cantidad de gas y la temperatura, deberá cumplirse la relación:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = k$$

Si quisiéramos involucrar la masa y la temperatura, expresaríamos el valor de k por mol y por grado Kelvin:

$$k = PV / nt$$

Así, la constante de Boyle se convierte en la “constante universal de los gases” y se expresa con la letra: R

$$\text{entonces quedaría: } R = PV / nt \text{ entonces: } P_1V_1/n_1t_1 = P_2V_2/n_2t_2 = R$$

En donde n : masa del gas en moles y t : temperatura en K

Esta última ecuación se conoce como **Ecuación General de los Gases Ideales**.

Repasemos ahora algunos conceptos importantes...

Gas ideal: Un gas ideal es un [gas teórico](#).

El concepto de gas ideal es útil porque se comporta según la [Ecuación de los gases ideales](#):

$$R = PV / nt$$

mol:

El **mol** (símbolo: **mol**) es la unidad con que se mide la cantidad de sustancia (n), una de las siete magnitudes físicas fundamentales del Sistema Internacional de Unidades.

Un mol de una sustancia contiene $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ entidades elementales (moléculas).

Esta cifra es el valor numérico fijo de la constante de Avogadro, y se denomina *número de Avogadro* (N_A) y su unidad es mol^{-1} .

La masa de un mol de sustancia, llamada *masa molar*, es equivalente a la masa atómica o molecular (según se haya considerado un mol de átomo o de molécula) *expresada en gramos*.

Ejemplo: **1 mol de CO₂**: hay $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ partículas.

La **masa atómica** del carbono (C) es 12 g/mol y para el oxígeno (O) es de 16 g/mol.

Esto significa que 6.022×10^{23} átomos de carbono pesan 12 gr y de O: 32 gr
Según esto, el peso molecular del **CO₂** es:

$$12 \text{ g/mol [C]} + 2 \times 16 \text{ g/mol [O]} = 44 \text{ g/mol}$$

Gases **monoatómicos**, **diatómicos** y **poliatómicos**: son aquellos cuya molécula está formada por uno, dos o más átomos, resp.

Ejemplos de gases monoatómicos: gases nobles (helio, neón, argón, xenón, kriptón y radón).

diatómicos: hidrógeno, nitrógeno, oxígeno, cloro.

Poliatómicos: CO_2 , CH_4 (metano), N_2O (óxido nitroso), vapor de agua H_2O .

CALOR ESPECÍFICO DE LOS GASES

Calor específico (c)

- Por definición sabemos que el **calor específico** de una sustancia es aquel que se le requiere transferir para elevar la temperatura de **un gramo, un grado Centigrado**.

- Ahora bien, **en los gases**, esa transferencia de energía calorífica se puede realizar en **dos** tipos de procesos: **isocóricos** (a volumen constante) o **isobáricos** (a presión constante).
- Resulta que el calor específico de un gas tiene **valor diferente!** para los procesos isocóricos (C_v) que para los isobáricos (C_p).

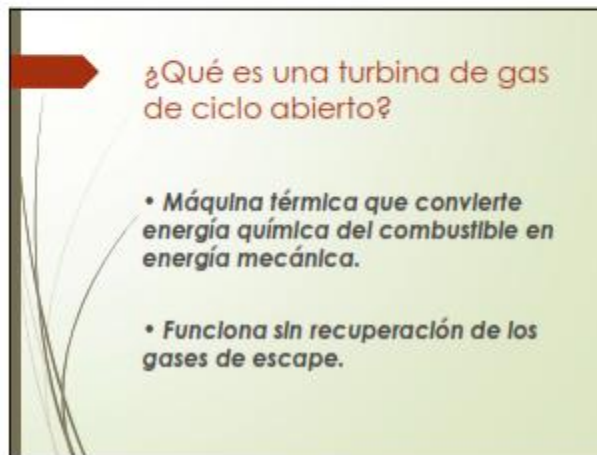
- Estos valores están *estrechamente relacionados* con la Constante Universal de los gases R y con la naturaleza atómica de la molécula del gas (*monoatómica, diatómica o poliatómica*) y se expresan en $J/mol\ K$ a diferencia que el calor específico de otras sustancias que se expresan como $J/gr\ ^\circ C$.

TABLA DE VALORES C_p Y C_v PARA GASES.

	C_p	C_v
<u>monoatómicos</u>	$(5/2)R = 20.8\ J/mol\ K$	$(3/2)R = 12.5\ J/mol\ K$
<u>diatómicos</u>	$(7/2)R = 29.1$ "	$(5/2)R = 20.8$ "
<u>poliatómicos</u>	$(9/2)R = 37.4$ "	$(7/2)R = 29.1$ "

- $R = 8.314472\ J/mol\ K$ (valor de R utilizado en esta tabla)
- nótese que para cada tipo de gas se cumple la relación: $C_p - C_v = R$ (Relación de Mayer)

Anexo VI



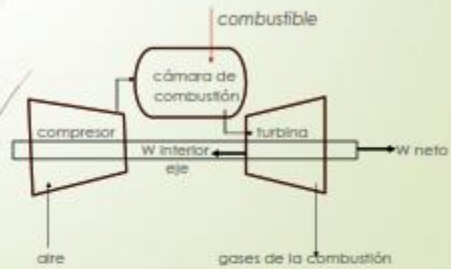
Principio de funcionamiento

1. Se aspira y comprime aire atmosférico.
2. El aire comprimido entra a una cámara de combustión y se mezcla con un combustible.
3. La mezcla se quema generando gases de alta temperatura y presión.
4. Los gases se expanden en la turbina produciendo trabajo mecánico.
5. Los gases producto de la combustión son expulsados a la atmósfera.

Componentes principales

- Compresor axial o centrífugo.
- Cámara de combustión.
- Turbina de expansión.
- Sistema de control y combustible.

Diagrama esquemático de la configuración de una turbina de gas de ciclo abierto.



Ventajas del ciclo abierto

- Arranque y paro rápidos.
- Alta relación potencia-peso.
- Bajo costo de instalación.
- Mantenimiento relativamente sencillo.

Desventajas

- ▣ • *Bajo rendimiento térmico.*
- ▣ • *Emisiones elevadas.*
- ▣ • *Mayor consumo específico de combustible.*

Aplicaciones

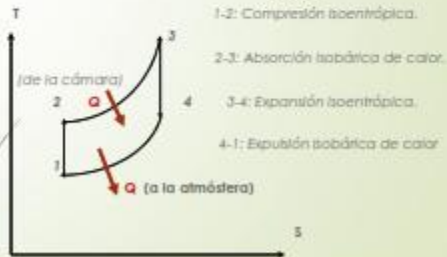
- ▣ • *Generación eléctrica de emergencia.*
- ▣ • *Centrales de pico.*
- ▣ • *Aviación.*
- ▣ • *Compresión de gas natural.*

El Ciclo Brayton.

- Aunque el ciclo termodinámico con el que operan las turbinas de gas que nos ocupa es abierto a la atmósfera, es posible modelarlo **idealmente** como si se tratara de un ciclo cerrado el cual inicia y termina en las condiciones atmosféricas y está integrado por cuatro procesos:
- 1-2: Compresión isentrópica.
- 2-3: Absorción de calor isobárica.
- 3-4: Expansión isentrópica.
- 4-1: Expulsión de calor isobárica.

Diagrama Temperatura – Entropía del Ciclo Brayton

ETAPAS



Notas: 1: en 1-2 al aumentar la presión, aumenta la temperatura.
2: las curvas 2-3 y 4-1 son isobaras.

Ciclo Brayton con regeneración.

La regeneración en el ciclo Brayton consiste en aprovechar el calor de los gases de escape para precalentar los gases de admisión a la cámara de combustión y así mejorar la eficiencia calorífica del ciclo.

Diagrama esquemático de una turbina de gas de ciclo abierto con regeneración.

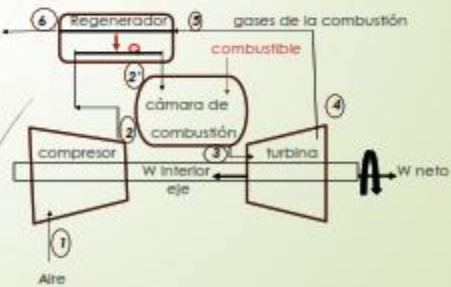
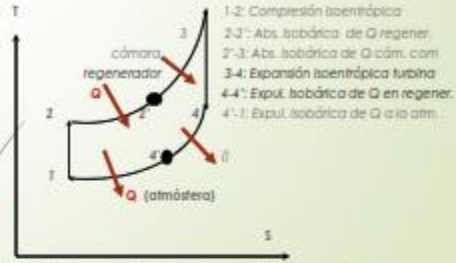


Diagrama Temperatura – Entropía del Ciclo Brayton con regeneración.

ETAPAS



Notas: 1: en 1-2 al aumentar la presión, aumenta la temperatura.
 2: las curvas 2-3 y 4-1 son isobaras.

Ejemplo.

- Referencia: <https://3dargy.co/documento/guia/tema-especifico/tema-problemas-de-turbina-de-gas.html>
- Una turbina de gas que trabaja con un ciclo abierto regenerativo presenta un turbocompresor axial, con una relación de compresión de 4:1, que consume 12 kg/s de aire. La temperatura de entrada a la turbina es de 527°C, la caída de presión en el regenerador (lado aire) y en la cámara de combustión es 3 % y 2 % respectivamente. En el escape de la turbina existe una pérdida de presión de 0.044 bar, en su salida hacia la atmósfera, debido al regenerador.
- Determinar:
 - a) La potencia desarrollada.
 - b) Consumo específico.
 - c) Rendimiento efectivo

Además se cuenta con la siguiente información:

Relación de compresión: 4:1

Fujo másico de entrada de aire al compresor: $\dot{m} = 12 \text{ Kg/s}$

Temperatura a la entrada de la turbina: $T_3 = 527^\circ\text{C} = 1,100 \text{ K}$

Condiciones de entrada al compresor:

$T_1 = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$

$P_1 = 0,1 \text{ MPa} = 101 \text{ KPa}$

Rendimientos:

Compresor.- interno: $\eta_i = 0,55$ mecánico: $\eta_m = 0,99$

Turbina.- interno: $\eta_i = 0,87$ mecánico: $\eta_m = 0,99$

Cámara de Combustión: $\eta_{cc} = 0,95$

Regenerador: $\eta_r = 0,50$

Poder calorífico del combustible: $\text{PCI} = 43,7 \text{ MJ/Kg}$

Aire: $\gamma_{\text{aire}} = 1,4$ (coef. adiabático) $C_p \text{ aire} = 1,003 \text{ KJ/Kg K}$

Gases de combustión: $\gamma_{\text{gases}} = 1,33$ $C_p \text{ gases} = 1,14 \text{ KJ/Kg K}$

Resolución:

Para resolver el problema planteado primero debemos calcular el valor de las temperaturas y presiones en cada etapa del recorrido del fluido teniendo en cuenta que en este caso se plantea un ciclo Brayton con regeneración.

COMPRESOR:

Con la relación isentrópica de temperaturas y presiones a la entrada y salida del compresor calculamos $T_{2\text{teórica}}$:

$$(T_{2\text{teórica}} / T_1)_{\text{comp}} = [(P_2 / P_1)]_{\text{comp}}^{1/\gamma} \cdot (1/\gamma)_{\text{aire}}$$

$$\text{Despejando } T_{2\text{teórica}} = \{ [(P_2 / P_1)]_{\text{comp}}^{1/\gamma} \cdot (1/\gamma)_{\text{aire}} \} \cdot (T_1)_{\text{comp}}$$

$$\text{Sustituyendo: } T_{2\text{teórica}} = [(4/1)]_{\text{comp}}^{1/1,4} \cdot (1,4 - 1) \cdot 288 \text{ K}$$

$$T_{2\text{teórica comp.}} = 427,97 \text{ K}$$

Ahora podemos obtener la temperatura real a la salida del compresor (**T2 real**) con la ecuación de la eficiencia térmica interna del compresor ($\eta_{i \text{ comp.}}$):

$$\eta_{i \text{ comp.}} = (T2 \text{ teórica} - T1) / (T2 \text{ real} - T1)$$

$$\text{despejando } T2 \text{ real} = [(T2 \text{ teórica} - T1) / \eta_{i \text{ comp.}}] + T1$$

$$T2 \text{ real} = [(427.97 - 288) \text{ K} / 0.85] + 288$$

$$T2 \text{ real} = 452.67 \text{ K}$$

■ La presión real a la salida del compresor (**P2 real**) se calcula con la relación de compresión:

$$P2 / P1 = 4/1$$

$$P2 / 101 = 4/1$$

$$P2 = 404 \text{ KPa}$$

TURBINA:

La presión real a la entrada de la turbina (**P3 real**) será la de salida del compresor (P2) menos las caídas de presión en el regenerador y en la cámara de combustión:

$$P3 \text{ real} = P2 - \Delta P \text{ regen} - \Delta P \text{ cám. comb.}$$

$$P3 \text{ real} = (404 \text{ Pa} - 12 - 8) \text{ KPa}$$

$$P3 \text{ real} = 384 \text{ KPa}$$

- La presión real a la salida de la turbina (**P4_{real}**), es la suma de la presión atmosférica P_a más la de escape:

$$P4_{real} = (101 + 4.4) \text{ KPa} = 105.4 \text{ KPa}$$

$$P4_{real} = 105.4 \text{ KPa}$$

La temperatura teórica (**T4_{teórica}**) a la salida de la turbina, (idealmente isentrópica) se calcula con la relación correspondiente:

$$T3_{real} / T4_{teórica} = [(P3_{real} / P4_{teórica})]^{1/\gamma} = [(P3_{real} / P4_{teórica})]^{1/1.33}$$

Despejando

$$T4_{teórica} = T3_{real} / [(P3_{real} / P4_{teórica})]^{1/\gamma} = T3_{real} / [(P3_{real} / P4_{teórica})]^{1/1.33}$$

$$= (1,100 \text{ K}) / [(384 / 105.4) \text{ KPa}]^{1/1.33} = 798.2 \text{ K}$$

$$T4_{teórica} = 798.2 \text{ K}$$

- Con la ecuación de la eficiencia térmica interna de la turbina obtenemos la temperatura real a la salida (**T4_{real}**):

$$\eta_{turb} = (T3_{real} - T4_{real}) / (T3_{real} - T4_{teórica})$$

$$\text{despejando: } T4_{real} = T3_{real} - \eta_{turb} (T3_{real} - T4_{teórica})$$

$$T4_{real} = 1,100 \text{ K} - 0.87(1,100 - 798.2)$$

$$T4_{real} = 837.43 \text{ K}$$

■ Regenerador:

La temperatura real de entrada al regenerador (T_{3real}) es la misma de la salida de la turbina:

$$T_{3real} = T_{4real}$$

$$T_{3real} = 839.17 \text{ K}$$

Con la ecuación de la eficiencia del regenerador calculamos la temperatura real a la salida del mismo (T_{6real}):

$$\eta_{reg} = (T_{6real} - T_{2real}) / (T_{3real} - T_{2real})$$

$$\text{desp. } T_6 = \eta_{reg}(T_{3real} - T_{2real}) + T_{2real} = 0.8(839.17 - 452.67) \text{ K} + 452.67 \text{ K}$$

$$T_{6real} = 761.8 \text{ K}$$

■ Procedemos ahora a resolver los incisos:

a) La potencia efectiva desarrollada (Ne).

La potencia efectiva es la potencia generada por la turbina menos la consumida por el compresor y su ecuación involucra los flujos másicos del combustible y aire, es importante recordar que en el compresor circula solo aire y en la turbina una mezcla de aire y combustible. La ecuación es:

$$Ne = (\dot{m}_{comb} + \dot{m}_{aire}) W_{turb} - \dot{m}_{aire} W_{comp}$$

Cálculo del flujo másico de combustible ($\dot{m}_{comb}$)

La relación entre los flujos másicos es:

$$FA_{real} = \dot{m}_{comb} / \dot{m}_{aire}$$

■ Cámara de combustión

Además de la FA real tenemos la FA teór que depende del incremento de la temperatura ΔT en la cámara de combustión. La eficiencia de la cámara de combustión (η_{cc}) se define como el cociente entre estos dos valores. La FA teór debe consultarse en tablas.

$$\eta_{cc} = FA_{teór} / FA_{real}$$

$$\Delta T = T_{3teór} - T_{3real} = 1,100 - 761.8 = 338.2 \text{ K}$$

$$FA_{teór} = 0.0094 \quad (\text{para } \Delta T = 338.2 \text{ K y } T_{3real} = 761.8 \text{ K}) \text{ (tablas)}$$

$$\text{despejando } FA_{real} = FA_{teór} / \eta_{cc} = 0.0094 / 0.98 = 0.0096$$

Regresando a la ecuación de FA real: $FA_{real} = \dot{m}_{comb} / \dot{m}_{aire}$

$$\text{despejando: } \dot{m}_{comb} = FA_{real} \times \dot{m}_{aire} = 0.0096 \times 12 \text{ Kg/s} = 0.115 \text{ Kg/s}$$

$$\dot{m}_{comb} = 0.115 \text{ Kg/s}$$

■ Para calcular la eficiencia efectiva (η_e), ahora es necesario encontrar el trabajo entregado por el compresor según se eficiencia mecánica:

$$W_{útil\ comp} = W_{total} / \eta_{mec\ comp} = (T_2\ real - T_1) C_p\ aire / \eta_{mec}$$

$$= (452.67 - 288) \text{ K} \times 1.003 \text{ KJ/Kg K} / 0.99$$

$$= 166.83 \text{ KJ/Kg}$$

Sigue el trabajo útil de la turbina:

$$W_{útil\ turb} = \eta_{mec\ turb} \times W_{total\ turb}$$

$$= 0.99 [(1,100 - 839.17) \text{ K} \times 1.14 \text{ KJ/Kg K}]$$

$$= 294.37 \text{ KJ/Kg}$$

8. Tenemos ya la información para calcular la potencia efectiva:

$$N_e = (\dot{m}_{comb} + \dot{m}_{aire}) W_{comb} - \dot{m}_{aire} W_{comp} \\ = (1.115 \text{ Kg/s} + 12 \text{ Kg/s}) 294.37 \text{ KJ/Kg} - \\ (12 \text{ Kg/s})(166.83 \text{ KJ/Kg})$$

$$N_e = 1,554.33 \text{ KW}$$

- b) Consumo específico de combustible (Ce).

$$Ce = \dot{m}_{comb} / N_e = 414,000 \text{ gr/h} / 1,554.33 \text{ KW} \\ \text{Ce} = 264.65 \text{ gr/KWh}$$

- c) Rendimiento efectivo del conjunto instalado:

$$\eta_e = N_e / (\dot{m}_{comb} \times PC) \\ = 1,554.33 \text{ KW} / (0.115 \text{ Kg/s} \times 43,700 \text{ KJ/Kg}) \\ \eta_e = 0.31$$

O bien: $\eta_e = 3,600 \text{ J/h} / (43.7 \text{ MJ} \times 264.65 \text{ J/KWh})$

$$\eta_e = 0.31$$

Referencias

1.- <https://www.ingenierizando.com/mecanica-de-fluidos/experimento-de-torricelli/>

Experimento de Torricelli para medir la presión atmosférica.

2.- <https://citeia.com/wp-content/uploads/2021/04/image-61.jpg>

Esquema del Balón de Pascal.

3.- Serway Raymond A. (1995) Física tomo I. Tercera edición revisada. McGrawHill Interamericana Editores.

Ejercicios para resolver.

4.- <https://www.fisimat.com.mx/teorema-de-bernoulli/>

Ejemplo (texto)

5.- <https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=2D2F8yLg&id=FC13BD211BC4E0B4ADE9150C201C53608E9C4215&thid=OIP.2D2F8yLgMFJWcQGlcniPpgHaEK&mediurl=https%3A%2F%2Fyimg.com%2Fvi%2FqC7HXhaOOGY%2Fmaxresdefault.jpg&cdnurl=https%3A%2F%2Fth.bing.com%2Fth%2Fid%2FR.d83d85f322e03052567101887278cfa6%3Frik%3DFUKcjmBTHCAMFQ%26pid%3DImqRaw%26r%3D0&exph=720&expw=1280&q=Diagrama+De+Mollier+Del+Agua&FORM=IRPRST&ck=E51600FF81B659DF197E49C280C833F9&selectedIndex=2&itb=0&cw=1721&ch=832&mode=overlay>

Diagrama de Mollier del agua y del vapor de agua.

6.- <https://www.aiophotoz.com/diagrama-de-fases-del-agua/ZGhZ3JhbWEtZGUtZmFzZXMtZGVsLWFndWF8fGFpb3Bob3Rvei5jb918fGh0dHBZ Oi8vaW1hZ9Uuc9xpZGVzaGFyZWNkbi5jb90vZXhwbzMwNy0xMzExMjcXMTgtcGh wYXBwMDIvOTUvZGhZ3JhbWEtZGUtZmFzZXMtZGVsLWFndWEtNi09MzquanBnP9NiP TEzODU1NTk3MjE.gif.html>

Diagrama de fases del agua.

7.- <https://power-mi.com/es/content/análisis-de-vibraciones-de-turbinas-de-vapor>

Imagen de turbina de vapor.

8.- <https://www.areatecnologia.com/mecanismos/imagenes/turbina.jpg>

Imagen componentes básicos de una turbina de vapor.

9.- <https://www.explicacion.net/wp-content/uploads/2018/12/diagrama-ciclo-rankine.jpg>

Gráfica S-T del ciclo Rankine simple.

10.-

<https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=ciclo+rankine+con+recalentamiento&&mid=706B9378A83E5B9051A8706B9378A83E5B9051A8&FORM=VAMGZC>

Ejemplo (enunciado)

11.-

<https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=ciclo+rankine+con+regeneración&mid=89E0AE69733E23B86A6189E0AE69733E23B86A61&FORM=VIRE>

Ejemplo (enunciado).

12.- Referencia: <https://1library.co/document/q0xx0olq-ejercicio-resuelto-problema-de-turbinas-de-gas.html>

Ejemplo (enunciado y solución).

13.- <https://es.scribd.com/document/430206066/Tablas-y-Graficos-Termodinamicos>

Tablas y graficas de termodinámica.



GARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN
Ciudad de México, 19 / Enero / 2026

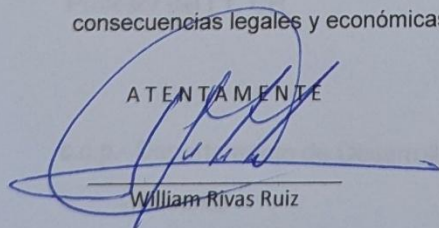
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO PRESENTE.

Bajo protesta de decir verdad, el suscrito abajo firmante, personal docente adscrito al Campus Chetumal del Tecnológico Nacional de México, manifiesto que en cumplimiento de mis actividades relacionadas con el Año Sabático elaboré la obra titulada "Apuntes de la Asignatura: Mecánica de Fluidos y Termodinámica para Ingeniería Eléctrica. (Clave: ELF-1017)".

Con base en lo anterior, y con fundamento en los artículos 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y 46 de su Reglamento, reconozco que el Tecnológico Nacional de México es titular de los derechos patrimoniales sobre la misma y le corresponden las facultades relativas a la divulgación, integridad de la obra y de colección, conservando el derecho a figurar como autor.

Asimismo, respondo por la autoría y originalidad de la citada obra; y relevo de toda responsabilidad al Tecnológico Nacional de México de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere que con esta obra es afectado en alguno de los derechos protegidos por la Ley en cita, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas.

ATENTAMENTE


William Rivas Ruiz

Plagiarism

Analysis Report

3.4%

Results (100)

 Private Cloud Hub N/A	 Shared Data Hub 0	
 Internet Sources 100	 AI Source Match N/A	 Current Batch 0

Plagiarism types

	Text coverage	Words
☒ Identical	1.8%	758
☐ Minor Changes	1.6%	665
Excluded		
☐ Omitted Words		0

About Plagiarism Detection

Our AI-powered plagiarism scans offer three layers of text similarity detection: Identical, Minor Changes, and Paraphrased. Based on your scan settings we also provide insight on how much of the text you are not scanning for plagiarism (Omitted words).

☒ Identical

One to one exact word matches. [Learn more](#)

☐ Minor Changes

Words that hold nearly the same meaning but have a change to their form (e.g. "large" becomes "largely"). [Learn more](#)

☐ Omitted Words

The portion of text that is not being scanned for plagiarism based on the scan settings. (e.g. the 'Ignore quotations' setting is enabled and the document is 20% quotations making the omitted words percentage 20%) [Learn more](#)

Copyleaks Shared Data Hub

Our Shared Data Hub is a collection of millions of user-submitted documents that you can utilize as a scan resource and choose whether or not you would like to submit the file you are scanning into the Shared Data Hub. [Learn more](#)

Filtered and Excluded Results

The report will generate a complete list of results. There is always the option to exclude specific results that are not relevant. Note, by unchecking certain results, the similarity percentage may change. [Learn more](#)

Current Batch Results

These are the results displayed from the collection, or batch, of files uploaded for a scan at the same time. [Learn more](#)

V-B
Marta de los Angeles Mattheou
SUBDIRECTORA ACADEMICA

Analysis Report

Plagiarism Detection Report
JustDone AI

Scan details

Scan Time
January 17th, 2026 at 18:33 CET

Total Pages
167

Total Words
41596

Plagiarism Detection

3.4%

V. Bo.
Mario de los A. Nolasco Hurtado
SUBDIRECTOR ACADÉMICA

Plagiarism types

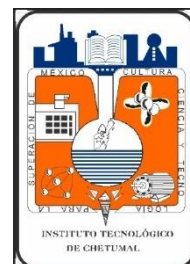
- ☒ Identical
- ☐ Minor Changes
- ☐ Excluded
- ☐ Omitted Words

Text coverage

Text coverage	Words
1.8%	758
1.6%	665
	0



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO



**Campus:
Instituto Tecnológico de Chetumal**

Mecánica Clásica para Ingeniería Eléctrica. AEF-1042
Apuntes.

William Rivas Ruiz.
Profesor del I. T. CH.

Contribución de la Asignatura “Mecánica Clásica” a los Objetivos Formativos de la Carrera de Ingeniería Eléctrica.

En este Análisis se deben tomar en cuenta dos elementos muy importantes: 1) *Competencia específica de la asignatura* y 2) *Objetivos Formativos* de la Carrera de Ingeniería Eléctrica para tener un adecuado punto de partida a fin relacionar ambos e identificar el aporte correspondiente.

La formación de profesionales competentes en Ingeniería Eléctrica, con todos los atributos y competencias que implica el logro del Objetivo del P.E. solamente es posible si dicha formación tiene carácter integral. Para ello, se debe proporcionar al futuro ingeniero los elementos básicos necesarios para la interpretación ingenieril de los problemas que enfrente en el ejercicio de la profesión en el campo laboral.

Esta asignatura de Mecánica Clásica contiene en su temática, los elementos básicos de las disciplinas de estática y dinámica haciendo énfasis en el *enfoque vectorial* para su aplicación en la resolución de planteamientos diversos que se le pueden presentar. Es innegable la importancia que los temas de la Mecánica Clásica que contiene esta Asignatura y su aporte a la formación del Ingeniero Eléctrico. Criterios valiosos para interpretación y resolución de problemas de Ingeniería, así como una visión más amplia para las diferentes alternativas que el egresado pueda seleccionar en el ejercicio de la profesión constituyen muestra de esa importancia.

El conocimiento desde las Unidades de las cantidades físicas y su cabal aplicación, hasta el dominio de los modelos matemáticos, procedimientos, y la relación de todo ello con situaciones en escenarios reales o simulados, sitúa al estudiante en el esquema correcto para su formación como un profesional de la ingeniería eléctrica.

Otro aspecto que se desarrolla en la asignatura es el desarrollo de la habilidad del trabajo en equipo la cual se adquiere en las trabajos extra clase que deben cumplirse y

evidenciarse a lo largo del curso en cada Unidad temática, lo que implica un gran aporte a la socialización y comportamiento ético.

INSTRUMENTACIÓN DIDÁCTICA.

Instituto Tecnológico de Chetumal

Subdirección Académica

Instrumentación Didáctica para la Formación y Desarrollo de Competencias Profesionales

Periodo: Enero - Junio 2024

Nombre de la asignatura: Mecánica Clásica.

Plan de estudios: IELE – 2010 - 209

Horas teoría: 3 horas prácticas: 2 créditos: 5

1. Caracterización de la asignatura: (1)	La presente asignatura ayuda al Ing. en nanotecnología, Ingeniería Química, Ingeniería en Materiales e Ingeniero Eléctrico, para adquirir los elementos básicos para la interpretación de los sistemas físicos en equilibrio estático y dinámico que contribuyen a su formación técnico-científica. La mecánica clásica emplea las matemáticas, como una herramienta fundamental para representar los múltiples fenómenos físicos en modelos matemáticos; se relaciona con química ya que comparten el estudio de la materia y energía; en biología ayuda a comprender los fenómenos físicos que suceden con los seres vivos. Así mismos sienta las bases para comprender mejor todos aquellos eventos, que se
---	--

	pueden presentar en temas relacionados con la Nanofísica y la Nanoquímica. Se induce al alumno a desarrollar competencias tales como: la investigación, observación, análisis; aplicando métodos, conceptos y leyes de la física, para realizar modelos que ayuden a comprender y explicar el comportamiento de fenómenos que ocurren en su entorno, fomentando además un pensamiento técnico-científico.
--	--

2. Intención didáctica: (2)	Se desarrolla la asignatura en cinco unidades temáticas, la unidad uno aborda estudio de magnitudes y todo aquello que se pueda medir, para utilizar apropiadamente aquellas que se consideran como magnitudes fundamentales, múltiplos, escalares y vectoriales que permitan comprender los conceptos y leyes de la física. La unidad dos se enfoca al estudio de los cuerpos en movimiento en dos y tres dimensiones, por medio de observaciones sistemáticas de los patrones de movimiento, se debe abordar cada tema haciendo énfasis en el tipo de movimiento que se genera para evaluarlo correctamente, además de ejemplificar cada uno de ellos con aspectos de la vida cotidiana, para posteriormente despertar la inquietud de investigar lo que sucede a niveles de la escala micro y nano. La unidad tres se desarrolla el concepto de partícula, masa y fuerza que son fundamentales en la comprensión y aplicación de las leyes de Newton, de igual manera se introduce el término fricción y momento angular, con el objetivo de comprender lo que sucede, cuando estas se presentan durante el movimiento de un cuerpo o partícula, utilizando correctamente los conceptos y modelos matemáticos para aplicarlos de manera científica. En la unidad cuatro se estudia la relación que existe entre trabajo, energía y potencia con el fin de analizar y resolver problemas donde se presenten estos fenómenos y relacionarlos conceptos como son tiempo, velocidad, fuerza, etc. Por último en la unidad cinco se analiza todos los conceptos relacionados
---------------------------------------	---

	con un sistema de partículas, para comprender que es el centro de masa y lo que sucede cuando este está en movimiento, se vuelve a aplicar aquí la conservación de la energía, y los choques elásticos e inelásticos desde el punto de vista energético. Todas las unidades se pueden acompañar con la solución de ejemplos y aplicaciones prácticas, con la ayuda incluso de software especializado, que corrobore los modelos matemáticos planteados en la teoría, y nuevamente hacer hincapié en despertar el interés en el alumno de investigar y comprender como se aplicarían todos estos conceptos a otras escalas.
3. Competencia de la asignatura: (3)	OBJETIVOS GENERAL(ES) DEL CURSO (Competencias específicas a desarrollar en el curso) Competencias específicas: • Analizar los sistemas físicos con base a los conceptos de Mecánica Clásica, para su posterior aplicación • Resolver problemas utilizando las matemáticas como herramienta y empleando software para ingeniería.

4. Análisis por competencias específicas: (4)

(U1) Conceptos Fundamentales. (4.1)

Competencias específicas. Descripción:

A.-Conocer los diferentes sistemas de unidades.

B.-Distinguir entre unidad fundamental y unidad compuesta.

C.-Comprender las características de los vectores y escalares. (4.1)

(4.2)

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica (4.3)	Actividades de aprendizaje (4.4)	Actividades de enseñanza (4.5)	Desarrollo de competencias genéricas (4.6)	Horas teórico-prácticas (4.7)
U1.-Conceptos Fundamentales. 1.1 Cantidades físicas.	Preparar un resumen que trate sobre los conceptos de Cantidades Físicas desde un punto de vista de aplicación a los fenómenos físicos observables.	Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. Mostrar los procedimientos de resolución aplicables	Localizar las fuentes de información necesarias para estudiar y hacer las consultas necesarias. Razonar para resolver ejemplos relativos a los temas aplicando los conceptos vistos.	11 horas teóricas 5 horas prácticas

		a los temas incluidos en la unidad. Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. Encargar la realización de trabajos en equipos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Trabajo colaborativo en equipo. Preparar presentaciones por computadora para explicar los nuevos conocimientos. Comunicación verbal hacia grupos.	
1.2 Sistemas de unidades	Realizar investigación documental referente a los diferentes sistemas de unidades.			
1.3 Vectores y sus operaciones.	Elaborar modelos a escala para representar la adición y sustracción de			

1.4 Conceptos de espacio, tiempo y marco de referencia	cantidades vectoriales. Realizar investigación documental referente a los conceptos de espacio, tiempo y marco de referencia.			
--	---	--	--	--

Indicador de alcance (4.8)	Valor del indicador (4.9)
A) Conocer los diferentes sistemas de unidades.	30%
B) Distinguir entre unidad fundamental y unidad compuesta.	30%
C) Comprender las características de los vectores y escalares.	40%

Niveles de desempeño: (4.10)

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
		a) Se adapta a situaciones y contextos complejos. Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas en estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio. b) Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas. Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura. Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes de información adicionales (Internet, documentales), usa más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma, etc.	

Competencia alcanzada	Excelente	c) Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad). Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes, para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo. d) Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico; (por ejemplo el uso de las tecnologías de la información estableciendo previamente un criterio). Ante temas de una asignatura, introduce cuestionamientos de tipo ético, ecológico, histórico, político, económico, etc.; que deben tomarse en cuenta para comprender mejor, o a futuro dicho tema. Se apoya en foros, autores, bibliografía, documentales, etc. para sustentar su punto de vista. e) Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje. En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia. f) Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada. Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) (instrumentación didáctica) para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso.	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Desempeño Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA (no alcanzada)

Matriz de evaluación: (4.11)

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Examen escrito	70	x	x	x			Resolución de problemas.
Trabajo colaborativo por equipo o individual.	30	x	x	x			Resolución de un conjunto de ejercicios.
	Total	30	30	40			

4.- Análisis por competencias específicas: (4)**(U2) Cinemática. (4.1)**

Competencias Específicas Descripción:

A.- Analizar los distintos tipos de movimientos y

B.- Comprender la relación existente entre tiempo, distancia, velocidad, aceleración etc. (4.2)

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica (4.3)	Actividades de aprendizaje (4.4)	Actividades de enseñanza (4.5)	Desarrollo de competencias genéricas (4.6)	Horas teórico-prácticas (4.7)
(U2) Cinemática. 2.1 Movimiento rectilíneo.	o Buscar la aplicación de las ecuaciones de	Hacer del conocimiento de los participantes las	Localizar las fuentes de información necesarias para	11 horas teóricas.

2.2 Movimiento bajo aceleración constante. 2.3 Movimiento circular. 2.4 Movimiento curvilíneo general.	la Cinemática dentro del entorno. o Plantear y resolver problemas prácticos referentes a los distintos tipos de movimiento. o Participar en mesas de trabajo colaborativo para comentar y crear el conocimiento con base en las investigaciones previas.	principales fuentes de información que podrán consultar. Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	estudiar y hacer las consultas necesarias. . Razonar para resolver ejemplos relativos a los temas aplicando los conceptos vistos. Trabajo colaborativo en equipo. Preparar presentaciones por computadora para explicar los nuevos conocimientos. Comunicación verbal hacia grupos.	5 horas prácticas.
---	---	--	---	---------------------------

Indicador de alcance (4.8)	Valor del indicador (4.9)
A.- Analizar los distintos tipos de movimientos	50%
B.- Comprender la relación existente entre tiempo, distancia, velocidad, aceleración etc. (4.2)	50%

Niveles de desempeño: (4.10)

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	a) Se adapta a situaciones y contextos complejos. Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas en estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio. b) Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas. Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura. Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes de información adicionales (Internet, documentales), usa más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma, etc. c) Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad). Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes, para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo. d) Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico; (por ejemplo el uso de las tecnologías de la información estableciendo previamente un criterio). Ante temas de una asignatura, introduce cuestionamientos de tipo ético, ecológico, histórico, político, económico, etc.; que deben tomarse en cuenta para comprender mejor, o a futuro dicho tema. Se apoya en foros, autores, bibliografía, documentales, etc. para sustentar su punto de vista.	95-100

		e) Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje. En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia. f) Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada. Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) (instrumentación didáctica) para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso.	
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Desempeño Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA (no alcanzada)

Matriz de evaluación: (4.11)

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Examen escrito	70	x	x				Resolución de problemas.
Trabajo colaborativo por equipo.	30	x	x				Resolución de un conjunto de ejercicios.
	Total	50	50				

(U3) Dinámica de una Partícula. (4.1)

Competencias Específicas, Descripción:

A- Analizar y comprender la relación existente entre fuerza, desplazamiento, velocidad y

aceleraciones de partículas y masas mediante la segunda Ley de Newton.

B.- Conocer y analizar el concepto de fricción y su acción durante el movimiento de una partícula.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica (4.3)	Actividades de aprendizaje (4.4)	Actividades de enseñanza (4.5)	Desarrollo de competencias genéricas (4.6)	Horas teórico-prácticas (4.7)
(U3) Dinámica de una Partícula. 3.1 Concepto de partícula, masa y fuerza 3.2 Leyes de Newton 3.3 Fricción 3.4 Momento angular 3.5 Fuerzas centrales	o Participar en mesas de trabajo colaborativo para comentar y crear el conocimiento con base en las investigaciones previas. o Realizar investigación documental referente a partícula, masa, fuerza y leyes de Newton. o Demostrar de manera práctica las Leyes de Newton. o Determinar el coeficiente de fricción estática entre	Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula.	Localizar las fuentes de información necesarias para estudiar y hacer las consultas necesarias. Razonar para resolver ejemplos relativos a los temas aplicando los conceptos vistos. Trabajo colaborativo en equipo. Preparar presentaciones por computadora para explicar los nuevos conocimientos.	11 horas teóricas 5 horas prácticas

	diferentes materiales.	Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Comunicación verbal hacia grupos.	
--	------------------------	---	-----------------------------------	--

Indicador de alcance (4.8)	Valor del indicador (4.9)
A.- Analizar y comprender la relación existente entre fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleraciones de partículas y masas mediante la segunda Ley de Newton.	50%
B.- Conocer y analizar el concepto de fricción y su acción durante el movimiento de una partícula. (4.2)	50%

Niveles de desempeño: (4.10)

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
		a) Se adapta a situaciones y contextos complejos. Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas en estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio. b) Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas. Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura.	

Competencia alcanzada	Excelente	Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes de información adicionales (Internet, documentales), usa más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma, etc. c) Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad). Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes, para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo. d) Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico; (por ejemplo el uso de las tecnologías de la información estableciendo previamente un criterio). Ante temas de una asignatura, introduce cuestionamientos de tipo ético, ecológico, histórico, político, económico, etc.; que deben tomarse en cuenta para comprender mejor, o a futuro dicho tema. Se apoya en foros, autores, bibliografía, documentales, etc. para sustentar su punto de vista. e) Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje. En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia. f) Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada. Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) (instrumentación didáctica) para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso.	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Desempeño Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA (no alcanzada)

Matriz de evaluación: (4.11)

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Examen escrito	70	x	x				Resolución de problemas.
Trabajo colaborativo por equipo.	30	x	x				Resolución de un conjunto de ejercicios.
	Total	50	50				

(U4) Trabajo y Energía (4.1)

Competencias Específicas Descripción:

- 1.- Comprender y analizar la relación existente entre fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleraciones.
- 2.- Su aplicación en los conceptos de trabajo y energía.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica (4.3)	Actividades de aprendizaje (4.4)	Actividades de enseñanza (4.5)	Desarrollo de competencias genéricas (4.6)	Horas teórico-prácticas (4.7)
(U4) Trabajo y Energía 4.1 Concepto de trabajo 4.2 Potencia 4.3 Energía cinética 4.4 Energía potencial	o Realizar investigación documental referente a trabajo, potencia, energía potencial y energía	Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar.	Localizar las fuentes de información necesarias para estudiar y hacer las consultas necesarias.	11 horas teóricas 5 horas prácticas

4.5 Fuerzas conservativas 4.6 Principio de conservación de la energía 4.7 Conservación en el trabajo mecánico 4.8 Fuerzas no conservativas	cinética. o Participar en mesas de trabajo colaborativo para comentar y crear el conocimiento con base en el punto anterior. o Demostrar en forma experimental el concepto de E_p y E_c o Demostrar en forma experimental la ley de conservación de la energía.	Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad. Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Razonar para resolver ejemplos relativos a los temas aplicando los conceptos vistos. Trabajo colaborativo en equipo. Preparar presentaciones por computadora para explicar los nuevos conocimientos. Comunicación verbal hacia grupos.	
--	--	--	--	--

Indicador de alcance (4.8)	Valor del indicador (4.9)
A.- Analizar y comprender la relación existente entre fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleraciones y	50%
B.-Su aplicación en los conceptos de trabajo y energía	50%

Niveles de desempeño: (4.10)

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
Competencia alcanzada	Excelente	a) Se adapta a situaciones y contextos complejos. Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas en estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio. b) Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas. Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura. Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes de información adicionales (Internet, documentales), usa más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma, etc. c) Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad). Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes, para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo. d) Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico; (por ejemplo el uso de las tecnologías de la información estableciendo previamente un criterio). Ante temas de una asignatura, introduce cuestionamientos de tipo ético, ecológico, histórico, político, económico, etc.; que deben tomarse en cuenta para comprender mejor, o a futuro dicho tema. Se apoya en foros, autores, bibliografía, documentales, etc. para sustentar su punto de vista. e) Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje. En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia. f) Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada. Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) (instrumentación didáctica) para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso.	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94

	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	70-74
Competencia no alcanzada	Desempeño Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA (no alcanzada)

Matriz de evaluación: (4.11)

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Examen escrito	70	x	x				Resolución de problemas.
Trabajo colaborativo por equipo.	30	x	x				Resolución de un conjunto de ejercicios.
	Total	50	50				

(U5) Sistemas de Partículas (4.1)

Competencias Específicas Descripción:

A.- Generalizar las ecuaciones y principios del movimiento de la partícula al movimiento de un sistema de partículas.

Temas y subtemas para desarrollar la competencia específica (4.3)	Actividades de aprendizaje (4.4)	Actividades de enseñanza (4.5)	Desarrollo de competencias genéricas (4.6)	Horas teórico-prácticas (4.7)
(U5) Sistemas de Partículas 5.1 Dinámica de un sistema de partículas 5.2 Movimiento del centro de masa 5.3 Teorema de conservación de la cantidad de movimiento 5.4 Teorema de conservación de la energía 5.5 Colisiones elásticas e inelásticas 5.6 Cuerpo rígido	o Construir modelos a escala de cuerpos compuestos para determinar la posición del centro de masa. o Analizar distintos problemas en forma teórica y comparar resultados con la ayuda de software especializado.	Hacer del conocimiento de los participantes las principales fuentes de información que podrán consultar. Mostrar los procedimientos de resolución aplicables a los temas incluidos en la unidad.	Localizar las fuentes de información necesarias para estudiar y hacer las consultas necesarias. Razonar para resolver ejemplos relativos a los temas aplicando los conceptos vistos. Trabajo colaborativo en equipo.	11 horas teóricas 5 horas prácticas

		Propiciar la participación del grupo en la resolución de ejemplos en el aula. Encargar la realización de trabajos extraclase y someterlos a discusión grupal.	Preparar presentaciones por computadora para explicar los nuevos conocimientos. Comunicación verbal hacia grupos.	
--	--	---	---	--

Indicador de alcance (4.8)	Valor del indicador (4.9)
A.- Aplicar las ecuaciones y principios del movimiento de la partícula al movimiento de un sistema de partículas.	100%

Niveles de desempeño: (4.10)

Desempeño	Nivel de desempeño	Indicadores de alcance	Valoración numérica
		a) Se adapta a situaciones y contextos complejos. Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas en estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio. b) Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas. Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura. Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes	

Competencia alcanzada	Excelente	de información adicionales (Internet, documentales), usa más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma, etc. c) Propone y/o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad). Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes, para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo. d) Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico; (por ejemplo el uso de las tecnologías de la información estableciendo previamente un criterio). Ante temas de una asignatura, introduce cuestionamientos de tipo ético, ecológico, histórico, político, económico, etc.; que deben tomarse en cuenta para comprender mejor, o a futuro dicho tema. Se apoya en foros, autores, bibliografía, documentales, etc. para sustentar su punto de vista. e) Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje. En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia. f) Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada. Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) (instrumentación didáctica) para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente durante el curso.	95-100
	Notable	Cumple cuatro de los indicadores definidos en desempeño excelente.	85-94
	Bueno	Cumple tres de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	75-84
	Suficiente	Cumple dos de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	70-74
	Desempeño Insuficiente	No se cumple con el 100% de evidencias conceptuales, procedimentales y actitudinales de los indicadores definidos en el desempeño excelente.	NA (no alcanzada)
Competencia no alcanzada			

Matriz de evaluación: (4.11)

Evidencia de aprendizaje	%	Indicadores de alcance					Evaluación formativa de la competencia
		A	B	C	...	N	
Examen escrito	70	x					Resolución de problemas.
Trabajo colaborativo por equipo.	30	x					Resolución de un conjunto de ejercicios.
	Total	100					

1. Fuentes de información y apoyos didácticos (5)

Fuentes de información:	Apoyos didácticos:
1. SEARS, ZEMANSKY, YOUNG, FREEDMAN, FÍSICA UNIVERSITARIA. VOL I, ED. ADDISON WESLEY. 2. BEER Y JOHNSTON, MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS: DINÁMICA, ED. MCGRAW HILL. 3. HIBBELER, MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS: DINÁMICA, ED. PEARSON 4. MERIAM J. L., MECÁNICA PARA INGENIEROS: DINÁMICA, ED. REVERTE. 5. BELA I. SANDOR, INGENIERÍA MECÁNICA: DINÁMICA, ED. PRENTICE HALL 6. BEDFOR FOWLER, MECÁNICA PARA INGENIEROS: DINÁMICA, ED. ADDISON WESLEY.	Presentaciones en computadora. Pintarrón. Computadora. Proyector

7. HIGDON-STILES-DAVIS-EVCES-WEESE, INGENIERÍA
MECÁNICA TOMO II: DINÁMICA VECTORIAL, ED.
PRENTICE HALL.
8.- Diversos Artículos y publicaciones de intrenet.

1. Calendarización de evaluación en semanas: (6)

Sermana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
TP tiempo planeado	ED			EF U1			EF U2			EF U3			EF U4			EF U5	ES
TR tiempo real																	
SD segui departamental																	

William Rivas Ruiz

Ing. David de Jesús Santillán Sanvicente

Nombre y firma del profesor

Nombre y firma del Jefe de Departamento Académica

ÍNDICE

UNIDAD 1: Conceptos Fundamentales.....	1
1.1. Cantidades físicas.	1
1.2. Sistemas de unidades.....	3
1.3. Conceptos de espacio, tiempo y marco de referencia.....	5
1.4. Vectores.	7
1.4.1. Descomposición.	7
1.4.2. Suma y resta de dos vectores.	11
1.4.3. Vector Unitario.....	23
1.4.4. Productos.	25
1.5. Equilibrio de la partícula.....	32
UNIDAD 2: Cinemática de la Partícula.....	45
2.1. Movimiento rectilíneo.	45
2.1.1. Movimiento Rectilíneo Uniforme:	45
2.1.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)	53
2.2. Movimiento curvilíneo.	74
2.2.1. Movimiento circular uniforme (m. c. u.).	75
UNIDAD 3: Dinámica de una Partícula.	93
3.1. Concepto de partícula, masa y fuerza.....	93
3.2. Leyes de Newton.	95
3.3. Fuerza de fricción o rozamiento.....	109
3.4. TORQUE (T).....	121
3.5. Momento angular (L).	127
3.6. Fuerzas centrales.	129
UNIDAD 4: Trabajo y energía.	145
4.1. Concepto de trabajo.	145
4.2. Potencia (P).....	154
4.3. Energía cinética.	158
4.5. Fuerzas conservativas.	164
4.6. Principio de conservación de la energía.	171
4.7. Conservación en el trabajo mecánico.	172
4.8. Fuerzas no conservativas.	173
UNIDAD 5: Sistemas de partículas.	192
5.1. Cuerpo rígido.	192
5.2. Cantidad de movimiento.	195
5.3. Colisiones elásticas e inelásticas.	201

5.4. Movimiento del centro de masa.	207
5.5. Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento.	209
5.6. Teorema de conservación de la energía.	210

INTRODUCCIÓN.

Sin duda, la Física es una disciplina muy importante en la preparación de los futuros ingenieros eléctricos, de hecho, la interpretación y comprensión de los fenómenos naturales tanto los más cotidianos como aquellos extraordinarios se logra a la luz de los conceptos que la Física, como ciencia ha establecido.

La Mecánica Clásica, parte fundamental de la Física, adquiere una importancia primordial en los saberes básicos de las ingenierías y la ingeniería eléctrica no es la excepción.

Se ha desarrollado y publicado una amplia gama de material sobre las diversas ramas de la física, que está a disposición de los estudiantes y profesores de ingeniería. Además, en cuanto a la Mecánica Clásica se refiere, las fuentes de consulta son particularmente abundantes ya que desde los estudios de Preparatoria son ampliamente utilizadas. Este trabajo pretende principalmente poner a disposición de ellos, un documento que guarde la secuencia e interrelación de los temas y subtemas de la asignatura de Mecánica Clásica del Programa Educativo de la carrera de Ingeniería Eléctrica que se imparte en los planteles del Tecnológico Nacional de México.

Se abordan los temas iniciando con los comentarios conceptuales necesarios para ubicar al estudiante en el ámbito específico de que se trate y se complementa con la resolución de ejemplos en los que se aplican las ecuaciones y métodos previamente comentados. Los antecedentes académicos necesarios para el curso de Mecánica Clásica de Ingeniería Eléctrica son diversos, el álgebra, geometría, trigonometría y cálculo son la base matemática para un avance fluido en los temas. Además, los cursos previos de física que los estudiantes llevan en la secundaria y la preparatoria, integran un excelente y necesario soporte para este curso en ingeniería.

Se ha evitado el uso excesivo de pequeños pasos intermedios en los procedimientos de resolución de los ejercicios con la intención de no cansar al lector y un poco despertar su interés en la comprobación mediante la ejecución de dichos pasos.

De ninguna manera estos apuntes son de carácter limitativo sino más bien, constituyen una referencia para el contenido y avance del curso y tanto estudiantes como profesores podrán ampliar y enriquecer cada tema con la consulta de otros materiales disponibles sobre los tópicos.

Espero sinceramente que este material sea de utilidad para sus lectores y que encuentren en él, un apoyo que facilite de alguna forma el éxito en los cursos de Mecánica Clásica.

William Rivas Ruiz

UNIDAD 1: Conceptos Fundamentales

1.1. Cantidades físicas.

Las **cantidades físicas** son propiedades físicas que se pueden medir y expresar numéricamente. También se conocen como *Magnitudes Físicas*. Un ejemplo de ello es la *longitud*, pues se puede medir el largo o el desplazamiento de un objeto y expresarlo mediante un número.

Se tienen dos tipos de cantidades o magnitudes físicas: *las escalares y las vectoriales*.

Las Cantidades Escalares son aquellas que se expresan únicamente mediante un número llamado **magnitud o módulo** y su correspondiente *unidad*, según sea la naturaleza de la característica física que se mida y el tipo de unidad en el que se desee expresar la medición.

Las Cantidades vectoriales se refieren a las que, además del del número que expresa la magnitud y de la unidad a utilizar, es necesario especificar *la dirección y el sentido* de la medición.

Entre algunas cantidades físicas escalares están:

- Cantidad de sustancia.
- Frecuencia.
- Longitud.
- Masa.
- Resistencia eléctrica.
- Temperatura.
- Tiempo.
- Trabajo.

- Área.
- Volumen.
-

Ejemplos de cantidades vectoriales son:

- Desplazamiento
- Velocidad
- Aceleración
- Fuerza
- Peso

Existen las cantidades físicas *fundamentales* y *las derivadas*. Las fundamentales son aquellas que resultan de la *medición directa* de lo que se mida, mientras que las derivadas son combinaciones de dos o más cantidades fundamentales.

Las siete Cantidades Físicas Fundamentales son:

- 1.- Longitud.
- 2.- Masa.
- 3.- Tiempo.
- 4.- Temperatura.
- 5.- Intensidad de corriente eléctrica.
- 6.- Cantidad de sustancia.
- 7.- Intensidad luminosa.

Estas magnitudes **no pueden ser expresadas en términos de otras magnitudes ni tampoco expresarse entre sí.**

Para realizar una medición de estas magnitudes, se requiere de un patrón de medición, éste es capaz de determinar una *unidad de medida*, de tal forma que la magnitud puede ser expresada como un múltiplo o submúltiplo de dicha unidad.

A partir de ellas se obtienen las Cantidades Físicas Derivadas, ejemplos de este tipo de mediciones son la velocidad (combinación de longitud y tiempo) y la fuerza (masa, longitud y tiempo). Se tiene un gran número de Cantidades Físicas Derivadas aplicables a los más diversos temas de Física.

Las **magnitudes físicas** (cantidades físicas) *describen y cuantifican los* fenómenos físicos que ocurren a nuestro alrededor, esto va desde cómo se comportan el tiempo, hasta cómo se puede interpretar la temperatura y otras magnitudes como por ejemplo: la velocidad, el volumen, la presión, la carga eléctrica, etc.

1.2. Sistemas de unidades.

Como se mencionó, una vez efectuada la medición física, es necesaria la utilización de las unidades adecuadas para expresar completamente la medición. Una unidad de medición hace referencia al patrón de comparación utilizado precisamente como *unidad*. En este sentido se utiliza el llamado *Sistema Internacional de Unidades* (S. I.), adoptado por la gran mayoría de los países y en la edición de libros y artículos de carácter técnico-científico. También es de uso frecuente el Sistema de Unidades Inglesas, principalmente en países anglosajones.

A continuación, las Tablas 1.1 y 1.2 muestran las cantidades Físicas Fundamentales y derivadas con sus respectivas unidades

Tabla 1.1*Magnitudes Físicas Fundamentales*

Nombre. Símbolo	Unidad (S.I.)	
1.- Longitud.	Metro.	m
2.- Masa.	Kilogramo.	Kg
3.- Tiempo.	Segundo.	s
4.- Temperatura.	Kelvin.	K
5.- Intensidad de corriente eléctrica.	Amperio.	A
6.- Cantidad de sustancia.	Mol	mol
7.- Intensidad luminosa.	Candela.	cd

Tabla 1.2*Algunas Magnitudes Físicas Derivadas*

Magnitud Física	Nombre de la unidad (S.I.)	Símbolo
Área	metro cuadrado	m ²
Volumen	metro cúbico	m ³
Frecuencia	hertz	Hz
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/ m ³
Rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s
Velocidad angular	radian por segundo	rad/s
Aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/ s ²
Aceleración angular	radian por metro cuadrado	rad/ s ²
Fuerza	newton	N
Presión	pascal	Pa
Trabajo, Energía	joule	J
Potencia	watt	W
Carga eléctrica	coulomb	C
Potencial eléctrico, voltaje inducido	voltio	V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω
Capacitancia	faradio	F

Flujo magnético	weber	Wb
Inductancia	henrio	H

Referencia: Magnitud física - Mi Profe <https://miprofe.com/magnitud-fisica/>

1.3. Conceptos de espacio, tiempo y marco de referencia.

El espacio y el tiempo, vistos como dimensiones separadas, son el lugar y el momento en el que ocurren los fenómenos físicos y de todo tipo. En la actualidad, se entiende como el espacio tiempo, ya no como dimensiones aparte sino más bien como un concepto relativista. Ahora bien, *Marco de Referencia*, debe interpretarse como la perspectiva desde la cual se observa el fenómeno físico de manera tal que, para diferentes marcos de referencia se tendrán diferencias en la observación del mismo evento.

Todos los principios físicos y los modelos matemáticos aplicables a un evento serán válidos por igual para un marco de referencia determinado. La literatura que aborda esta temática es muy extensa en las diferentes fuentes de información disponibles.

Conceptos de Espacio, Tiempo y Marco de Referencia

El espacio, el tiempo y el marco de referencia son conceptos fundamentales en la Física y nos ayudan a comprender y describir el movimiento de los objetos en el universo.

Aquí se comenta brevemente cada uno de ellos:

Referencia: <https://www.studocu.com/esmx/messages/question/3264319/conceptos-de-espacio-tiempo-y-marco-de-referencia>

Espacio

El espacio se refiere a la extensión tridimensional en la que los objetos existen y se mueven. En la física clásica, se considera que el espacio es absoluto y continuo, lo que significa que es independiente de los objetos que lo ocupan y puede dividirse en partes más pequeñas sin límites definidos. Sin embargo, en la teoría de la relatividad de Einstein, el espacio se considera relativo y se ve afectado por la presencia de masa y energía.

Tiempo

El tiempo es una dimensión en la que los eventos ocurren de manera secuencial. Es una medida de la duración entre dos sucesos y nos permite ordenar los eventos en el pasado, presente y futuro. En la física clásica, el tiempo se considera absoluto y uniforme, lo que significa que fluye de manera constante e independiente de los objetos y su movimiento. Sin embargo, la teoría de la relatividad de Einstein muestra que el tiempo puede ser relativo y se ve afectado por la velocidad y la gravedad.

Marco de Referencia

Un marco de referencia es un sistema de coordenadas y reglas que se utiliza para describir y medir el movimiento de los objetos. Es un punto de referencia desde el cual se observa y se mide el movimiento. Puede ser fijo o en movimiento, y su elección afecta la forma en que se describen las posiciones y velocidades de los objetos. Por ejemplo, si estás en un automóvil en movimiento, tu marco de referencia sería el automóvil, y los objetos dentro del automóvil se describirían en relación con él.

En resumen, el espacio, el tiempo y el marco de referencia son conceptos esenciales para comprender el movimiento de los objetos en el universo. El espacio es la extensión tridimensional en la que los objetos existen, el tiempo es la dimensión en la que los eventos ocurren de manera secuencial, y el marco de referencia es el sistema de coordenadas y reglas desde el cual se observa y se mide el movimiento.

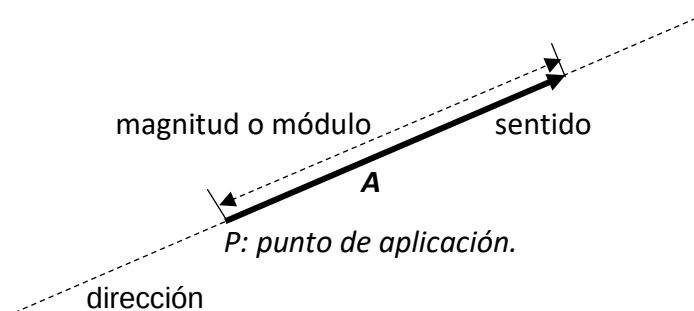
1.4. Vectores.

1.4.1. Descomposición.

Un vector es la representación gráfica de una cantidad vectorial mediante una flecha. La longitud de la misma representa la *magnitud* de la cantidad vectorial, la línea recta que contiene al vector es la *dirección*, mientras que la punta de la flecha indica el *sentido*, Figura 1.1. Se acostumbra nombrar los vectores usando letras mayúsculas.

Figura 1.1

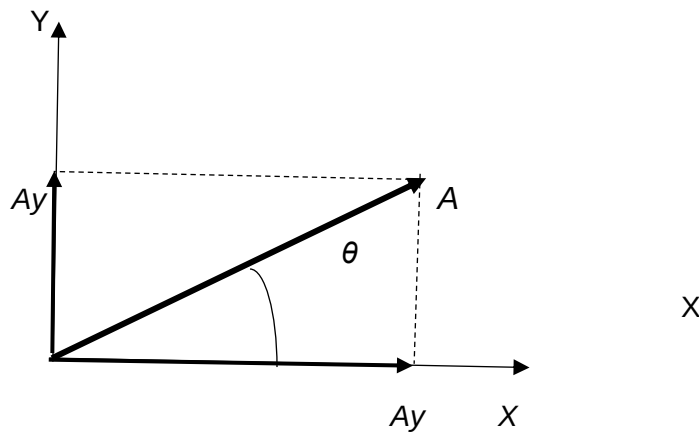
El Vector A



La descomposición de un vector se refiere a la obtención dos vectores que entre sí forman un ángulo de 90° y cuyo efecto es equivalente al del vector original en el punto de aplicación. Estos dos vectores se llaman componentes rectangulares y normalmente, al tomar como referencia los ejes de coordenadas cartesianas se asignan como componente X y componente Y respectivamente a las proyecciones del vector sobre los Ejes como se muestra en la Figura 1.2

Figura 1.2

Descomposición de Vector A en componentes rectangulares



Obtención de las componentes rectangulares de un vector.

Los valores de las componentes rectangulares X e Y de un vector se calculan con la aplicación de los principios básicos de la geometría y la trigonometría.

Regularmente se inicia conociendo el ángulo θ que el vector forma con el Eje X tomando el sentido contra-horario como positivo y trazando la proyección del vector sobre el eje para formar un triángulo rectángulo como se indica en *Figura 1.2*.

Seguidamente, para el cálculo de las componentes, mediante las relaciones trigonométricas de los triángulos rectángulos, se aplican las ecuaciones:

$$A_x = A \cdot \cos \theta \quad \text{y} \quad A_y = A \cdot \sin \theta$$

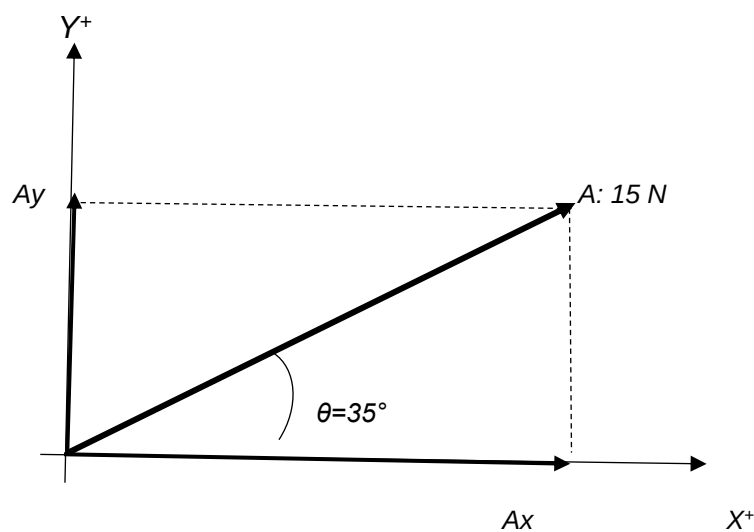
La magnitud o módulo de los vectores son positivas, serán sus componentes rectangulares las que tomen signos positivo o negativo según el sentido en relación con los Ejes: positivo para la derecha en X y arriba en Y y negativo para la izquierda y abajo respectivamente, a continuación, un ejemplo:

Ejemplo 1.1: Calcule las componentes rectangulares de un vector A de 15 Newtons que forma un ángulo de 35 grados con el lado positivo del eje X. Elabore el diagrama representativo.

La Figura 1.3 muestra el planteamiento del problema.

Figura 1.3

Ejemplo1.1 Gráfica



Cálculo de Ax: $A_x = A \cdot \cos \theta = (15 \text{ N}) \cdot \cos 35^\circ = 12.29 \text{ N}$ ✓

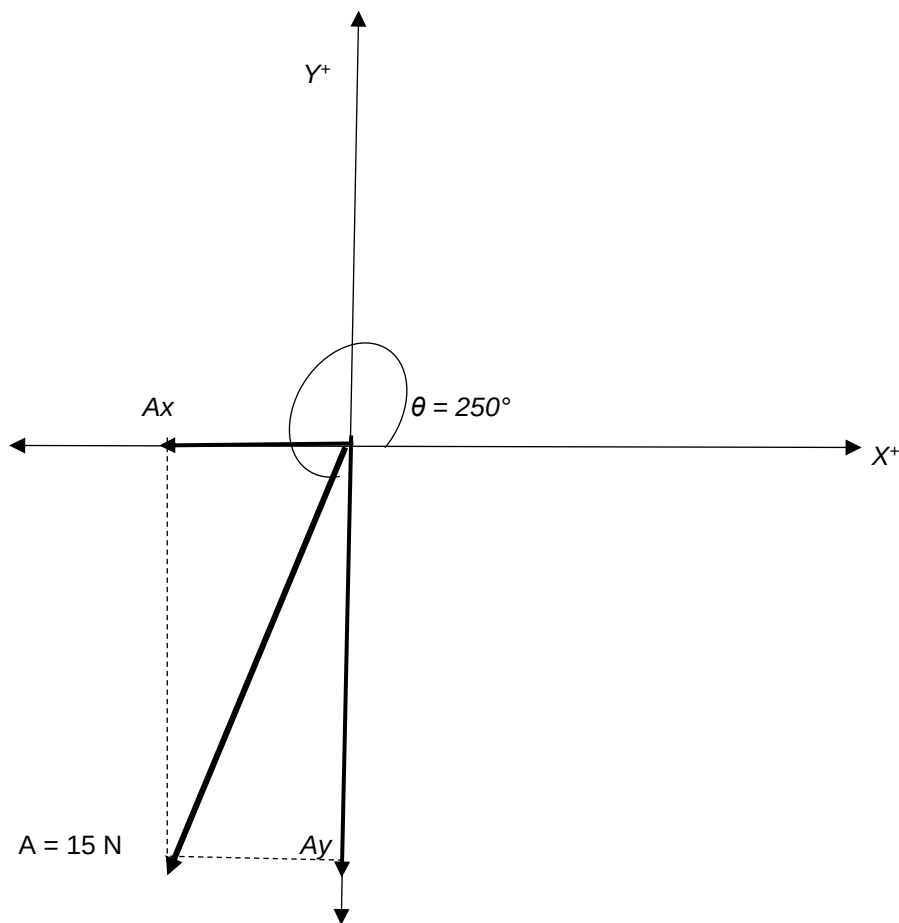
Cálculo de Ay: $A_y = A \cdot \sin \theta = (15 \text{ N}) \cdot \sin 35^\circ = 8.60 \text{ N}$ ✓

El anterior es un caso en el que el vector se encuentra en el primer cuadrante, sin embargo, las ecuaciones aplican para cualquier cuadrante. Veamos un ejemplo con el vector ubicado en el tercero:

Ejemplo 1.2: Calcule las componentes rectangulares de un vector A de 15 Newtons que forma un ángulo de 250 grados con el lado positivo del eje X. Elabore el diagrama representativo.

Figura 1.4

Ejemplo 1.2. Componentes rectangulares del vector $A = 15\text{ N}$



Cálculo de A_x :

$$A_x = A \cdot \cos \theta = (15\text{ N}) \cdot \cos 250^\circ = -5.13\text{ N} \quad \checkmark$$

Cálculo de A_y :

$$A_y = A \cdot \sin \theta = (15\text{ N}) \cdot \sin 250 = -14.09\text{ N} \quad \checkmark$$

Nota: Respetando el criterio de iniciar el ángulo θ en X^+ , las ecuaciones automáticamente arrojan los signos correctos de las componentes.

1.4.2. Suma y resta de dos vectores.

Suma de dos vectores por métodos gráficos.

Método del Paralelogramo.

Esta forma de sumar dos vectores solo requiere de una gráfica a escala del planteamiento del problema que muestre la magnitud de los vectores concurrentes en el punto de aplicación y el ángulo que forman entre sí, seguidamente se completa el paralelogramo y el vector representativo de la suma llamado *Resultante*, será la diagonal que une el punto de aplicación de los vectores originales con el vértice opuesto. La magnitud o módulo de la resultante será la longitud de dicha diagonal y su dirección y sentido la que indique este vector.

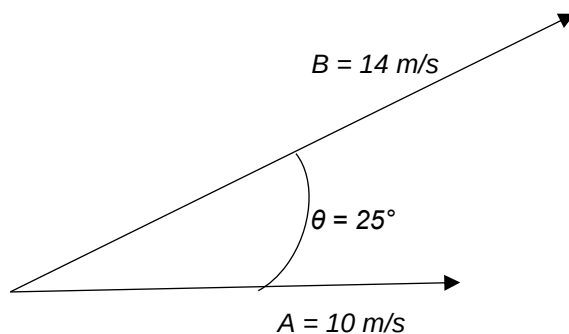
Este método no requiere la aplicación de ecuaciones sino elaborar el diagrama a escala y la medición de la resultante con precisión, utilizando instrumentos de geometría.

Ejemplo 1.3 : Hallar la resultante de los vectores de velocidad $A = 10 \text{ m/s}$ y $B = 14 \text{ m/s}$ y que forman entre sí un ángulo de 25 grados.

*Paso 1: Se trazan los vectores concurrentes a escala formando el ángulo de 25° .
Figura 1.5.*

Figura 1.5

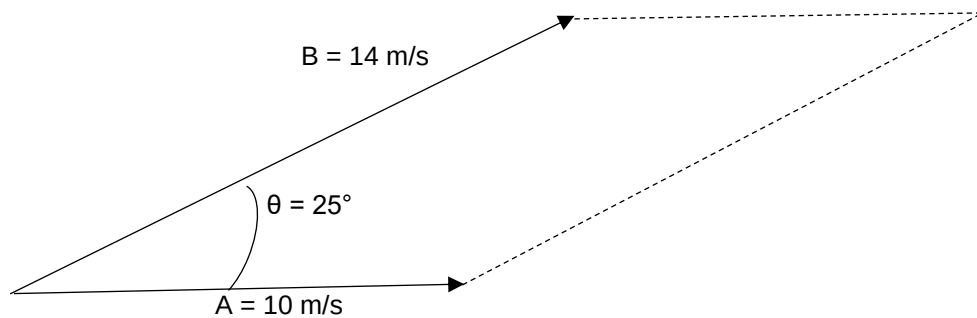
Ejemplo 1.3; paso1: trazo de vectores A y B



Paso 2: Se completa el paralelogramo, Figura 1.6

Figura 1.6

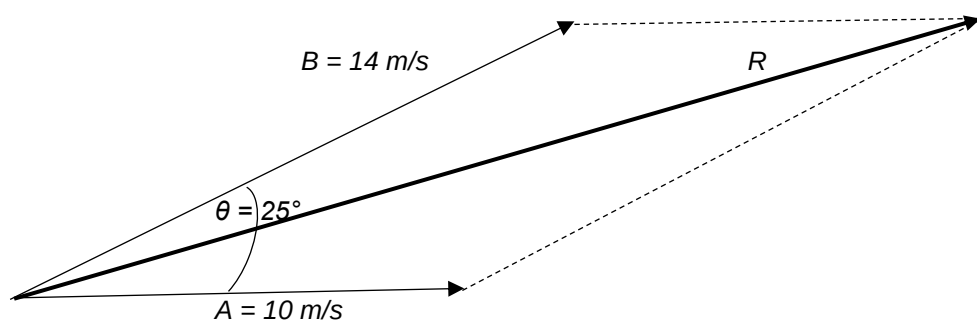
Ejemplo 1.3; paso 2: Trazo del paralelogramo



Paso 3: Se traza la diagonal representativa de la resultante R de la suma:

Figura 1.7

Ejemplo 1.3; paso 3: Trazo de la resultante de la suma

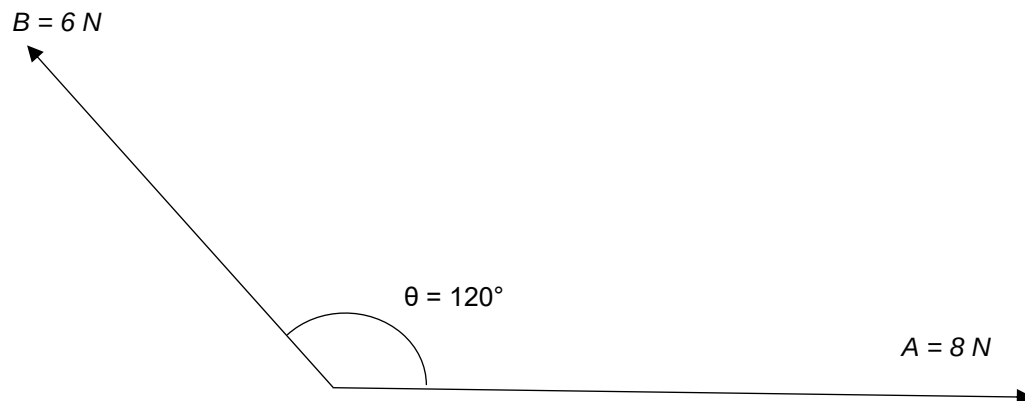
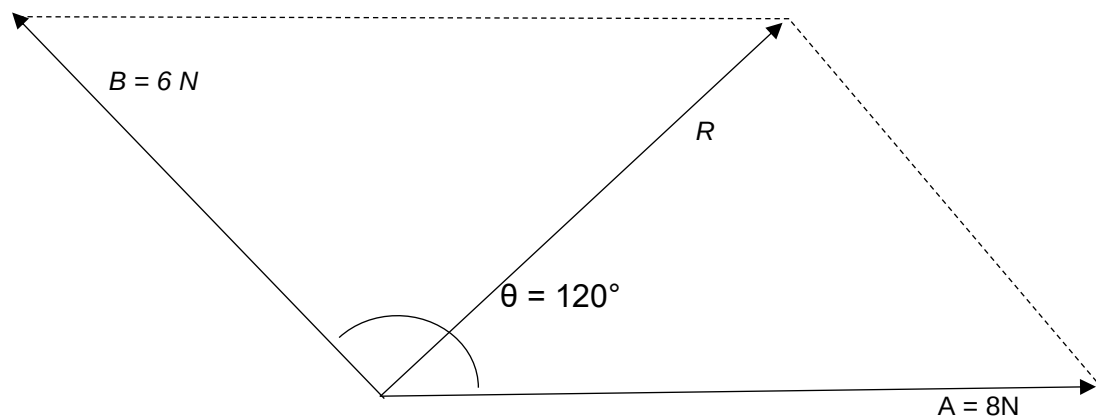


Paso 4: Se mide la longitud de la diagonal representativa de la resultante R de la suma:

$$R = 11. __ \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.4: Hallar la resultante de los vectores de fuerza $A = 8 \text{ N}$ y $B = 6 \text{ N}$ y que forman entre sí un ángulo de 120° .

Se trazan los vectores concurrentes a escala formando el ángulo de 120° . Figura 1.8

Figura 1.8*Ejemplo 1.4; Vectores A y B**Se completa el paralelogramo y se traza la resultante.***Figura 1.9***Ejemplo 1.4; Complementación del paralelogramo y trazo de la resultante**Se mide la longitud de la diagonal representativa de la resultante R de la suma:*

$$R = 6.3\text{ N} \quad \checkmark$$

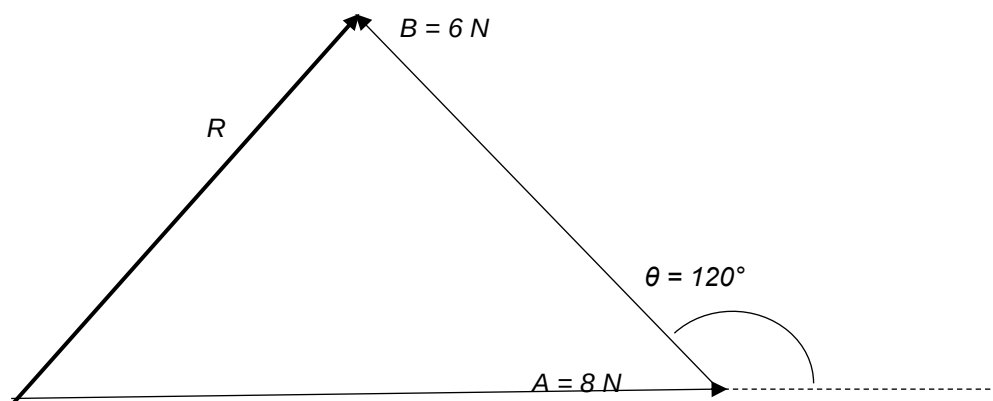
Suma de dos vectores por métodos gráficos. Método del Triángulo.

En este método de suma de dos vectores, éstos se dibujan a escala, uno a continuación del otro haciendo que sus direcciones formen el ángulo indicado entre ellos, la resultante será el vector que une el origen del primero con el final del segundo.

Ejemplo 1.5: Hallar la resultante de los vectores de fuerza $A = 8\text{ N}$ y $B = 6\text{ N}$ y que forman entre sí un ángulo de 120 grados aplicando el método del triángulo.

Figura 1.10

Ejemplo 1.5 Suma de dos vectores por el método de triángulo



Se mide la longitud de la diagonal representativa de la resultante R de la suma

$$R = 6.3\text{ N} \quad \checkmark$$

Resta de dos vectores ($A - B$) por método gráfico.

Aquí se trazan los vectores a escala formando el ángulo que se indique y la resultante de la resta será el vector que una el extremo final del vector sustraendo (B) con el del vector minuendo (A).

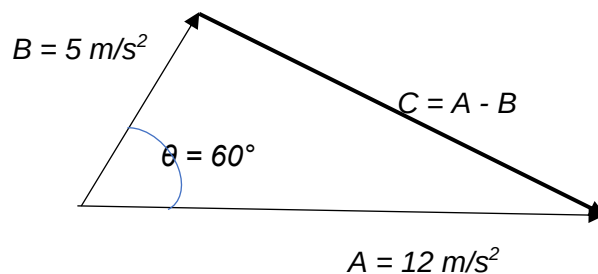
Ejemplo 1.6: Obtener gráficamente el vector C resultante de la resta $A - B$ de los vectores de aceleración $A = 12 \text{ m/s}^2$ y $B = 5 \text{ m/s}^2$ y que forman un ángulo de 60° .

Figura 1.11.

Tenemos que $C = A - B$

Figura 1.11

Ejemplo 1.6 Resta de vectores por el método gráfico.



Suma de dos vectores por *Método Analítico*.

En este método, el cálculo de la resultante es mediante la aplicación de fórmulas matemáticas, específicamente la de la *Ley de los Cosenos* que establece que en un triángulo en el cual se conocen la longitud de dos de sus lados y el ángulo que forman, *el cuadrado* de la longitud del tercer lado sigue la ecuación:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2(B \cdot C) \cos \theta$$

Siendo B y C los lados conocidos y θ el ángulo que forman.

Nota importante: No debe confundirse la ecuación de la ley de los cosenos con la fórmula para calcular la componente rectangular X de un vector referido al sistema de coordenadas.

Aunque es un método analítico, es conveniente trazar un diagrama esquemático (no necesariamente a escala), que muestre el planteamiento del problema y su resolución. Como el procedimiento utiliza la ley de los cosenos que está referida a triángulos, entonces se construye un triángulo con los dos vectores que se suman y la resultante, como en el método gráfico y se aplica la ecuación al triángulo obtenido como se muestra en el siguiente ejemplo:

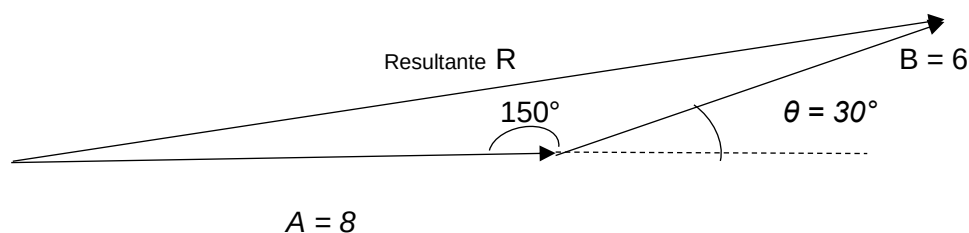
Ejemplo 1.7: Obtener el módulo de la resultante de la suma de dos vectores, de 8 y 6 unidades, que forman un ángulo de $\theta = 30^\circ$ entre sí, Figura 1.12. Aplique la ley de los cosenos.

Sean: Vector $A = 8 u$ y Vector $B = 6 u$

Trazamos el diagrama representativo:

Figura 1.12

Ejemplo 1.7 Suma de dos vectores por el método de la ley de los cosenos



Dado que el ángulo θ formado entre los vectores es exterior al triángulo y el respectivo ángulo interior es el suplementario, debe cambiarse el signo del tercer término de la ecuación de la ley de los cosenos quedando:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2(A \cdot B) \cos \theta$$

Sustituyendo...

$$R^2 = 8^2 + 6^2 + 2(8 \cdot 6) \cos 30^\circ = 183.13 u^2$$

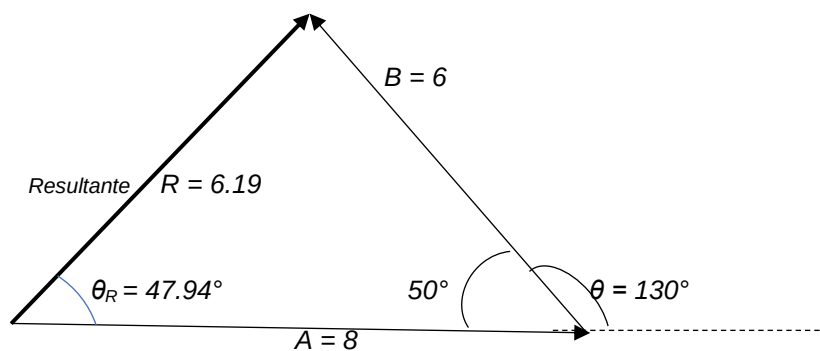
Por lo tanto:

$$R = \sqrt{183.13} = 13.53 \, u \quad \checkmark$$

Ejemplo 1.8: Obtener el módulo de la resultante de la suma de dos vectores, de 8 y 6 unidades, que forman un ángulo de $\theta = 130^\circ$ entre sí. Aplique la ley de los cosenos.

Figura 1.13

Ejemplo 1.8 Suma de dos vectores por el método de la ley de los cosenos



$$R^2 = A^2 + B^2 + 2(A \cdot B) \cos \theta$$

Sustituyendo...

$$R^2 = 8^2 + 6^2 + 2(8 \cdot 6) \cos 130^\circ = 38.29 \, u^2$$

Por lo tanto:

$$R = \sqrt{38.29} = 6.19 \, u \quad \checkmark$$

La dirección de R (θ_R), puede calcularse con la *Ley de los senos* aplicada al triángulo de la figura.

$$6.19 / \sin 50^\circ = 6 / \sin \theta_R ;$$

$$\theta_R = \arcsin [6 / (6.19 / \sin 50^\circ)]$$

$$\theta_R = 47.94^\circ \quad \checkmark$$

Resta de dos vectores aplicando la ley de los cosenos.

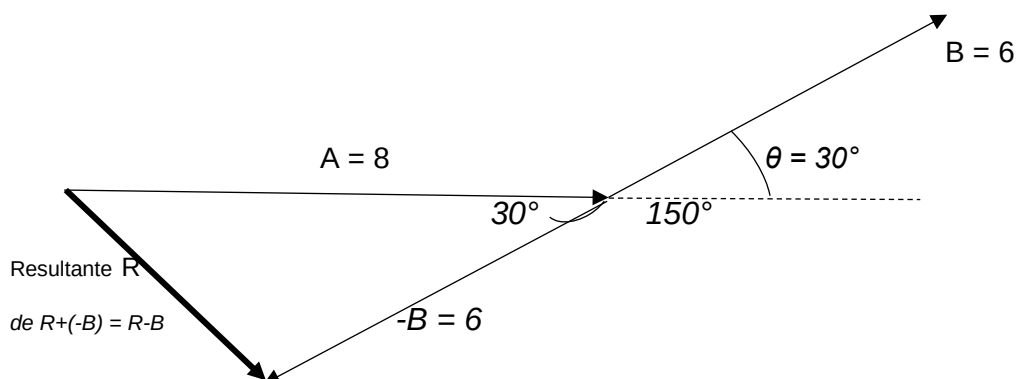
Cuando se tiene un vector A definido en magnitud, dirección y sentido, se define el vector -A, como el vector de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario, por lo tanto, sumar los vectores $B + (-A)$ equivale a restarlos $B - A$. Lo anterior nos indica que, para efectuar dicha resta, basta invertir el vector sustraendo y efectuar la suma con la nueva posición.

Ejemplo 1.9: Obtener el módulo de la resultante de restar el vector de 6 unidades al vector de 8 unidades, si forman un ángulo de $\theta = 30^\circ$ entre sí. Aplique la ley de los cosenos.

Sean: Vector A = 8 u y Vector B = 6 u

Figura 1.14

Ejemplo 1.9 Diagrama representativo:



Dado que el ángulo θ formado entre los vectores es interior al triángulo, la ecuación de la ley de los cosenos se aplica con el tercer término negativo.

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2(A \cdot B) \cos \theta$$

Sustituyendo...

$$R^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8 \cdot 6) \cos 30^\circ = 16.86 u^2$$

Por lo tanto:

$$R = \sqrt{16.86} = 4.1 \text{ u} \quad \checkmark$$

Suma de vectores por el método de componentes rectangulares.

Notación de un vector en sus componentes rectangulares.

Esta manera de describir un vector A está basada en referencia al sistema de coordenadas cartesianas y generalmente utiliza el formato $A(A_x, A_y)$ en donde A_x es la magnitud de la componente en X y A_y la de la componente en Y . Se supone que el punto de aplicación de vector es el origen del sistema.

Cuando los vectores están expresados en términos de sus componentes rectangulares X e Y o éstas pueden obtenerse, entonces la resultante de la suma (o resta) puede calcularse mediante los valores de las componentes. Primero se calculan las componentes R_x y R_y de la resultante.

R_x es la suma (o resta) de las componentes X de los vectores involucrados y R_y la suma de las componentes Y . Luego, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene el módulo o magnitud de la resultante R . Finalmente es posible calcular la dirección de R , ángulo con respecto a X^+ , aplicando la relación trigonométrica de la tangente de los triángulos rectángulos.

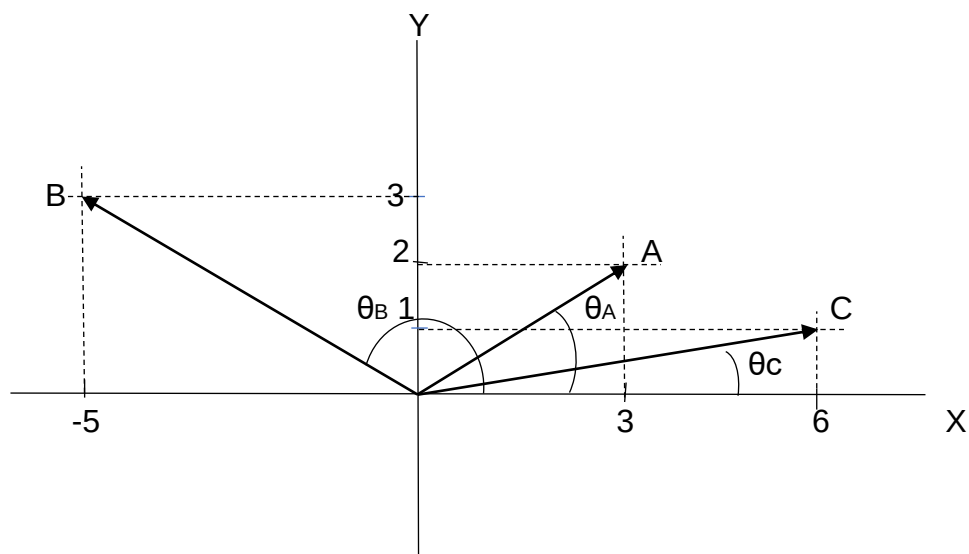
Mediante este procedimiento se facilitan las cosas cuando la operación incluye más de dos vectores.

Ejemplo 1.10: Dados los tres vectores $A(3,2)$, $B(-5,3)$ y $C(6,1)$ unidades, calcular la magnitud y dirección cada vector y de la resultante de la suma. Elabore el diagrama que ilustre el ejercicio.

Ubiquemos los vectores $A(3,2)$, $B(-5,3)$ y $C(6,1)$ en el sistema de coordenadas.

Figura 1.15

Ejemplo 1.10 Diagrama ilustrativo.



Los módulos de los vectores se encuentran con el teorema de Pitágoras:

$$\begin{array}{ccc} \checkmark & \checkmark & \checkmark \\ A = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6 \, u. & B = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = 5.83 \, u, & C = \sqrt{6^2 + 1^2} = 6.08 \, u \end{array}$$

Calculemos ahora los ángulos de sus direcciones respectivas.

Como sabemos, la dirección de un vector es el ángulo que guarda con el eje X^+ , por lo que los ángulos θ_A , θ_B y θ_C pueden calcularse con la función tangente de los triángulos rectángulos con la fórmula:

$$\theta = \text{arc. tan (componente Y/ componente X)}$$

$$\theta_A = \text{arc. tan } 2/3 = 33.69^\circ \checkmark, \theta_B = \text{arc. tan } 3/-5 = 149^\circ \checkmark, \theta_C = \text{arc. tan } 1/6 = 9.46^\circ \checkmark$$

Magnitud de las componentes rectangulares de la resultante de la suma:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 3 + (-5) + 6 = 4 \text{ u}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ u}$$

Magnitud de la resultante:

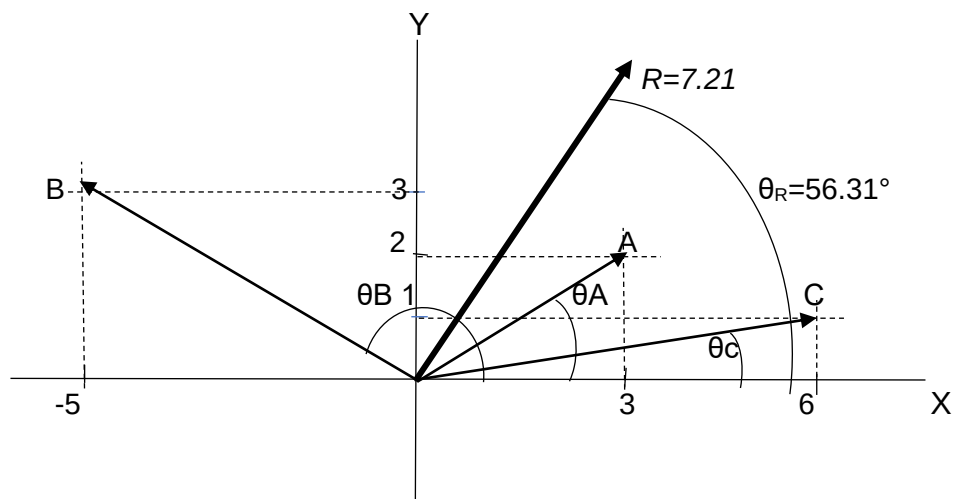
$$R = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21 \text{ u} \quad \checkmark$$

Dirección de la resultante:

$$\theta_R = \text{arc. tan } (6/4) = 56.31^\circ \quad \checkmark$$

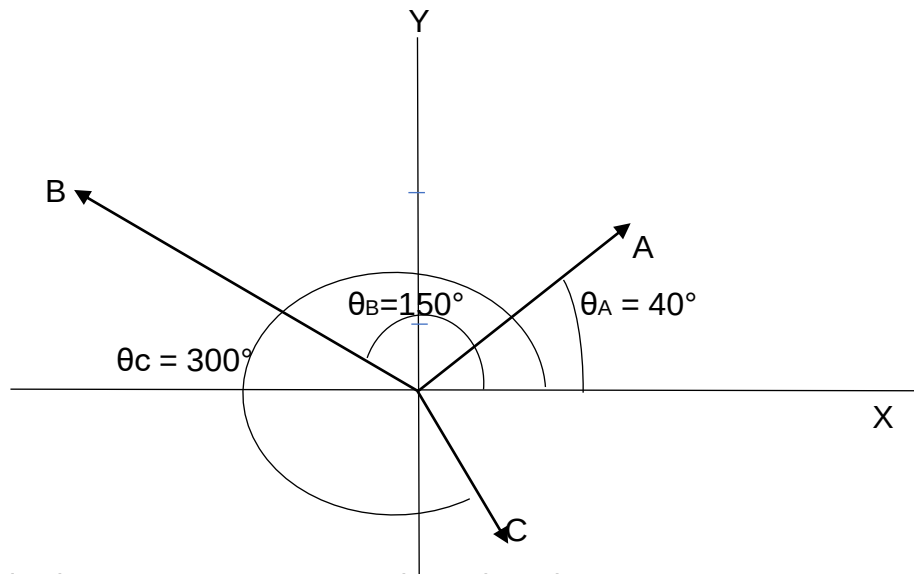
Figura 1.16

Ejemplo 1.10 Ubicando la resultante en el diagrama:



Ejemplo 1.11(Cuando se conocen las magnitudes y direcciones de los vectores que se involucran en la suma): Considere los vectores $A = 45 \text{ u}$ con una dirección $\theta_A = 40^\circ$, $B = 60 \text{ u}$ con $\theta_B = 150^\circ$ y $C = 25 \text{ u}$ con $\theta_C = 300^\circ$. Encuentre la magnitud y dirección de la resultante de la suma de los tres vectores. Elabore el diagrama que ilustre el ejercicio.

Coloquemos los vectores $A = 45 \text{ u}$ con $\theta_A = 40^\circ$, $B = 60 \text{ u}$ con $\theta_B = 150^\circ$ y $C = 25 \text{ u}$ con $\theta_C = 300^\circ$. en el sistema de coordenadas.

Figura 1.17*Ejemplo 1.11 Diagrama de situación**Se calculan las componentes rectangulares de cada vector...*

$$A_x = A \cdot \cos \theta_A = 45 \cos 40^\circ = 34.47; \quad A_y = A \cdot \sin \theta_A = 45 \sin 40^\circ = 28.92$$

$$B_x = B \cdot \cos \theta_B = 60 \cos 150^\circ = -51.96; \quad B_y = B \cdot \sin \theta_B = 60 \sin 150^\circ = 30$$

$$C_x = C \cdot \cos \theta_C = 25 \cos 300^\circ = 12.5; \quad C_y = C \cdot \sin \theta_C = 25 \sin 300^\circ = -21.65$$

Las componentes de la resultante son:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 34.47 - 51.96 + 12.5 = -4.99 \text{ u}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 28.92 + 30 - 21.65 = 37.27 \text{ u}$$

Módulo o magnitud de la resultante:

$$R = \sqrt{(-4.99)^2 + (37.27)^2} = \sqrt{1,413.95} = 37.6 \text{ u} \quad \checkmark$$

Dirección de la resultante:

$$\theta_R = \text{arc. tang}(R_y / R_x) = \text{arc. tan}(-4.99/37.27) = -7.625^\circ$$

$$\theta_R = 360^\circ - 7.625^\circ = 352.37^\circ \text{ (con respecto a } X^+ \text{ en sentido contrahorario).} \quad \checkmark$$

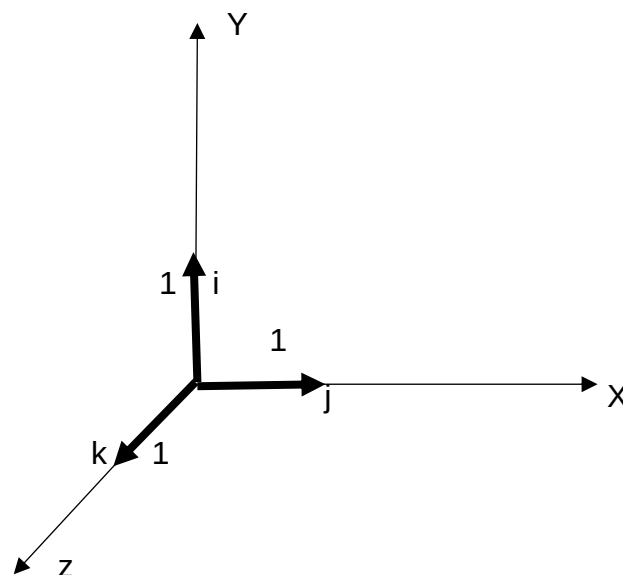
1.4.3. Vector Unitario.

Definición: Es aquel cuyo módulo o magnitud es igual a uno.

Los vectores unitarios muy utilizados en las operaciones de vectores son los que coinciden con los ejes coordenados X, Y y Z y ambos tienen su punto de aplicación en el origen del sistema. Estos vectores unitarios reciben el nombre de i , j y k respectivamente como se muestra en la Figura 1.18.

Figura 1.18

Vectores unitarios i , j , k .

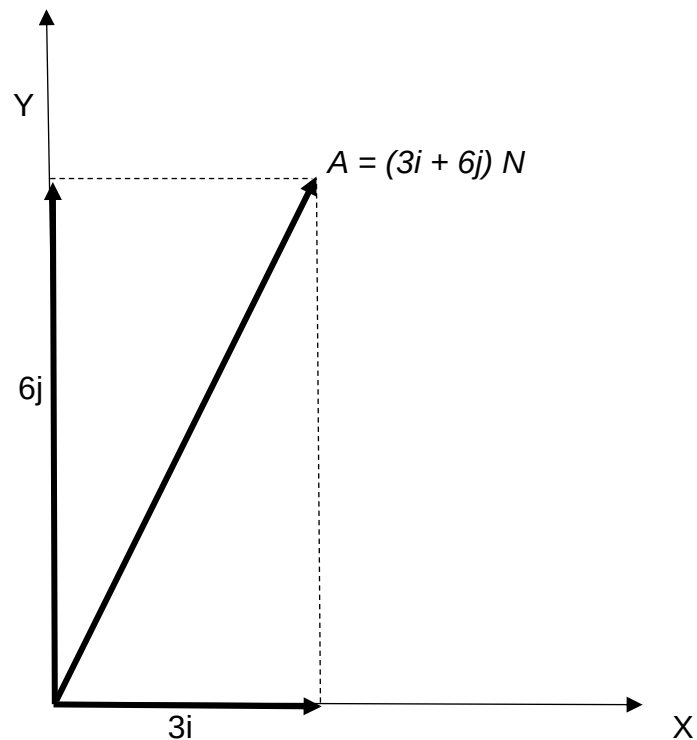


Este concepto, aunque muy sencillo, es de gran utilidad en la operación con vectores, ya que se utiliza en la llamada notación de vectores con vectores unitarios que consiste en expresar un vector como la suma de sus componentes y éstos, como el producto de la magnitud de la componente en cada eje por el vector unitario del eje correspondiente. En este curso nos referimos mayormente a vectores ubicados en el plano bidimensional de los Ejes X e Y por lo que se manejan los vectores unitarios i y j como se indica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.12: Grafique el vector de fuerza $A = (3i, 6j)$ N.

Figura 1.19

Ejemplo 1.12 Gráfica del vector A



Nota: El vector puede estar ubicado en cualquier cuadrante, según los signos de sus componentes.

Podemos ver entonces que expresar un vector con vectores unitarios es especificar sus componentes en cada eje, por lo que esto así se considera en las operaciones.

Ejemplo 1.13: Sumar los vectores $A = (8i + 2j)$, $B(4i - 5k)$ y $C(-7i - k)$

Sea R la resultante de la suma solicitada: $R = A + B + C$ entonces:

$$R = (8i + 2j) + (4i - 5k) + (-7i - k)$$

Se suman, respetando los signos, las componentes en las direcciones de cada eje:

$$R = 8i + 4i - 7i + 2j - 5k - k = (8 + 4 - 7)i + (2 - 5 - 1)j = 5i - 4j \quad \checkmark$$

1.4.4. Productos.

Veremos tres tipos de productos que involucran vectores: Producto de un escalar por un vector, el producto escalar de dos vectores y el producto vectorial de dos vectores.

Producto de un escalar por un vector. En este caso, el resultado es un vector en la misma dirección y sentido que el vector original pero cuya magnitud es el producto aritmético del escalar por la magnitud de dicho vector. Si el escalar fuera de signo negativo entonces el vector resultado de la operación invierte su sentido, aunque conserva la misma dirección.

Ejemplo 1.14: Obtenga el producto del escalar $a = 2$ por el vector $A = (5i + 6j)$ unidades. Calcule también el módulo y dirección de A y del resultado. Trace la gráfica..

Sea B el vector buscado: $B = 2(5i + 6j) = (10i + 12j)$ u ✓

Figura 1.20

Ejemplo 1.14 Gráfica del vector A

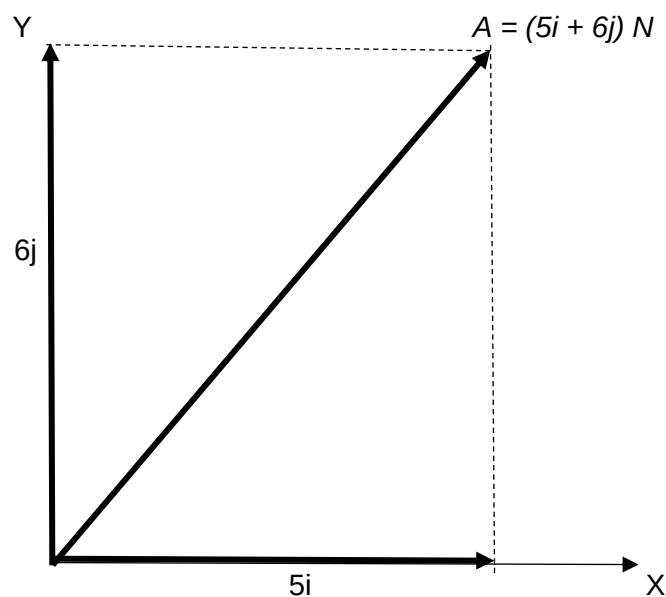
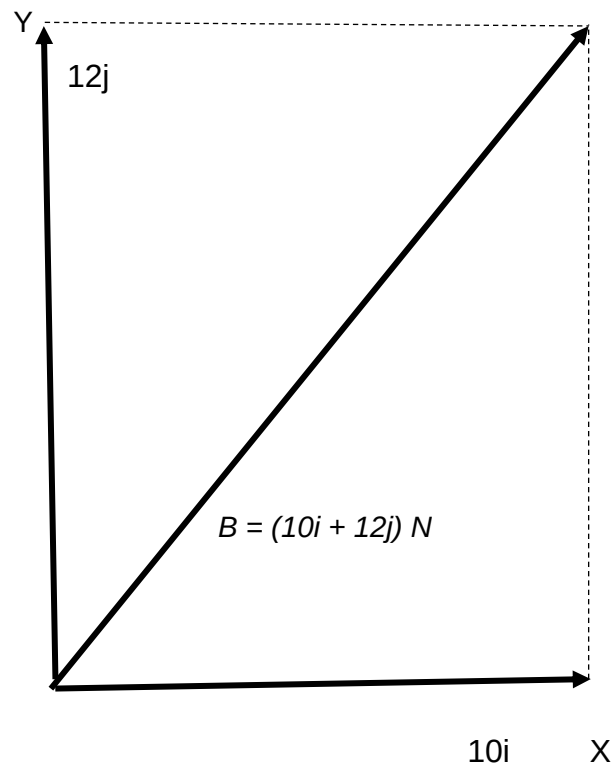


Figura 1.21*Ejemplo 1.14 Gráfica del vector B*

Nótese que el efecto del escalar, al multiplicar el vector es en *dos aspectos*: en su *magnitud*, que será mayor o menor según si el escalar es mayor o menor a uno y en su *sentido* que será el mismo o contrario si el signo del escalar es positivo o negativo.

En el ejemplo anterior, si el valor del escalar fuera -2 , entonces la magnitud del vector B sería el *doble* de A , se situaría en el tercer cuadrante en la misma recta de dirección, pero en *sentido contrario*.

Producto escalar de dos vectores. Recibe este nombre del hecho de que el resultado de multiplicar dos vectores en este tipo de producto es un escalar. También se conoce como *Producto Punto*, por la forma de notación que utiliza.

Esta forma de multiplicar dos vectores obedece la siguiente

Definición: Es el producto aritmético de las magnitudes o módulos de los vectores A y B multiplicar por el coseno del ángulo θ que forman entre sí dichos vectores.

Notación. El Producto escalar de los vectores A y B , se expresa así:

$$A \cdot B = |A| \times |B| \times \cos \theta \quad (\text{escalar})$$

Ejemplo 1.15: Calculemos el **producto escalar**, usando la fórmula con el coseno del ángulo θ , si los vectores A y B tienen magnitudes $|A| = 5$ y $|B| = 2$, y el ángulo entre ellos es 60 grados.

Usando la fórmula:

$$A \cdot B = |A| \times |B| \times \cos(\theta) = 5 \times 2 \times \cos(60^\circ) = 5 \times 2 \times 0.5 = 5 \text{ (escalar)} \quad \checkmark$$

La ecuación se simplifica para $\theta = 90^\circ$ quedando:

$$A \cdot B = |A| \times |B| \quad (\text{escalar})$$

Cuando los vectores están expresados en notación de *vectores unitarios*, entonces el procedimiento utiliza la siguiente fórmula:

$$A \cdot B = (|A_i| \cdot |B_i|) + (|A_j| \cdot |B_j|) + (|A_k| \cdot |B_k|) \quad (\text{escalar})$$

Nota: Si el ejercicio se limita a vectores en dos dimensiones, simplemente se elimina el sumando que corresponda a la dimensión faltante.

Ejemplo 1.16: Sean los vectores $A = (12i - 7j + 4k)$ y $B = (3i + 15j - 8k)$, hallar el producto escalar de A y B .

Con la ecuación indicada:

$$A \cdot B = (|A_i| \cdot |B_i|) + (|A_j| \cdot |B_j|) + (|A_k| \cdot |B_k|) = (12 \times 3) + (-7 \times 15) + (4 \times -8) = \\ = 36 - 105 - 32 = -99 \quad \checkmark \text{ (escalar)}$$

Es necesario aclarar que el producto escalar de dos vectores es, como puede observarse, *conmutativo*.

Producto vectorial de dos vectores. También conocido como *producto cruz*, esta operación resulta en *otro vector* el cual es perpendicular al plano que contiene a los dos vectores que se multiplican, es decir, es una operación tridimensional. El sentido del vector resultante se determina por la llamada *regla de la mano derecha* la cual se explica más adelante.

El módulo del vector, producto vectorial de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman.

Por lo tanto, dados dos vectores A y B, **la fórmula del producto vectorial o producto cruz es:**

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{vector})$$

Para mostrar la diferencia entre los el producto vectorial y el escalar, utilicemos los mismos datos de los ejemplos anteriores.

Ejemplo: Calculemos el **producto vectorial**, usando la fórmula con el ángulo, si los vectores A y B tienen magnitudes $|A| = 5$ y $|B| = 2$, y el ángulo entre ellos es 60 grados.

$$A \times B = |A| \times |B| \times \text{sen}(\theta) = 5 \times 2 \times \text{sen}(60^\circ) = 5 \times 2 \times 0.8660 = 8.660 \text{ (vector)} \quad \checkmark$$

Si los vectores están expresados en *notación de vectores unitarios* (i, j, k), es necesario recurrir a las operaciones con determinantes, construyendo y resolviendo el determinante del siguiente formato:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Donde: u es el primer vector, v el segundo;

i, j y k son los vectores unitarios en las direcciones X, Y y Z .

u_1, u_2 y u_3 las componentes del vector u .

v_1, v_2 y v_3 las componentes del vector v .

Ejemplo 1.17: Realizar el producto vectorial de los vectores:

$$u = (2, -3, 1) \quad y \quad v = (-3, 1, 2)$$

Construyamos el determinante colocando en la primera fila los vectores unitarios i, j y k , en la segunda las componentes del vector u y en la tercera las componentes del vector v quedando así:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicamos la regla de Sarrus:

$$u \times v = i(-3)(2) + j(2)(-3) + k(2)(1) - k(-3)(-3) - j(2)(2) - i(1)(1)$$

$$u \times v = -7i - 7j - 7k \quad \checkmark$$

Que son las componentes del vector resultante del producto vectorial.

La resolución del mismo producto vectorial tratando el determinante por el *método de los adjuntos* es como sigue:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = i \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = -7i - 7j - 7k \quad \checkmark$$

Nota: Cuando algún vector no tenga componente en la dirección de alguno o algunos de los ejes, se tomará como cero el valor respectivo y con ello se construirá y resolverá el determinante. Debe señalarse que el producto vectorial de dos vectores *NO es conmutativo*.

Regla de la mano derecha.

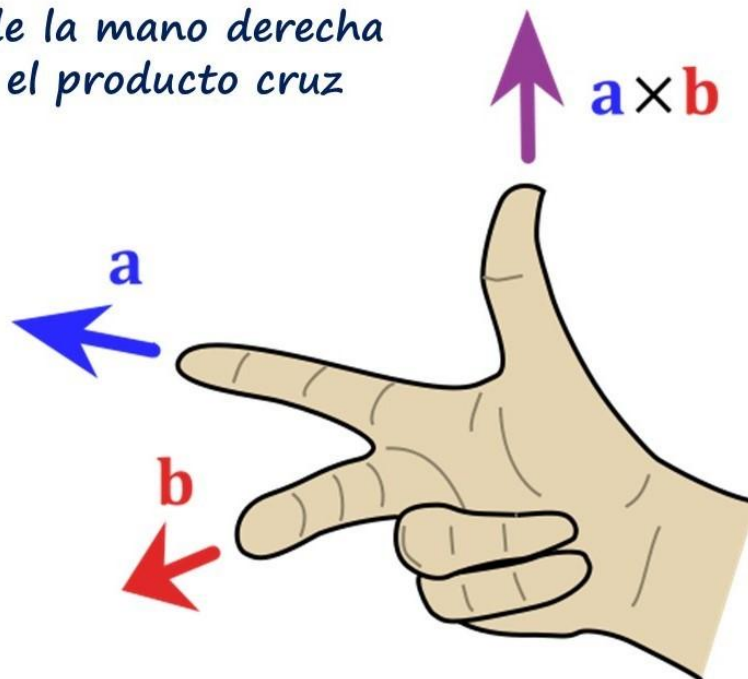
Esta regla nos ayuda a determinar la dirección y sentido del vector resultante del producto vectorial, en relación con los dos vectores involucrados en la operación.

Los pasos para usar la regla de la mano derecha son:

1. Extiende los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha y colócalos de manera que formen 90° entre ellos (como se indica en la figura de abajo).
2. Coloca el dedo índice de la mano derecha en la dirección del primer vector del producto vectorial.
3. Coloca el dedo medio de la mano derecha en la dirección del segundo vector del producto vectorial.
4. El vector resultante del producto vectorial tiene la dirección y sentido que indica el dedo pulgar.

Figura 1.22

*Regla de la mano derecha
para el producto cruz*



Referencia de la figura:

<https://www.bing.com/images/search?q=producto+vectorial+de+dos+vectores&qpv=pr oducto+vectorial+de+dos+vectores&form=IGRE&first=1>

1.5. Equilibrio de la partícula.

Este concepto elemental de la Mecánica establece que: si la Resultante de todos los vectores externos que actúan sobre una partícula es igual a cero, entonces ésta estará en equilibrio. Esto es válido tanto para un conjunto de vectores en una, dos o tres dimensiones y para cualquier tipo de vector. El siguiente ejemplo de dos dimensiones muestra lo anterior.

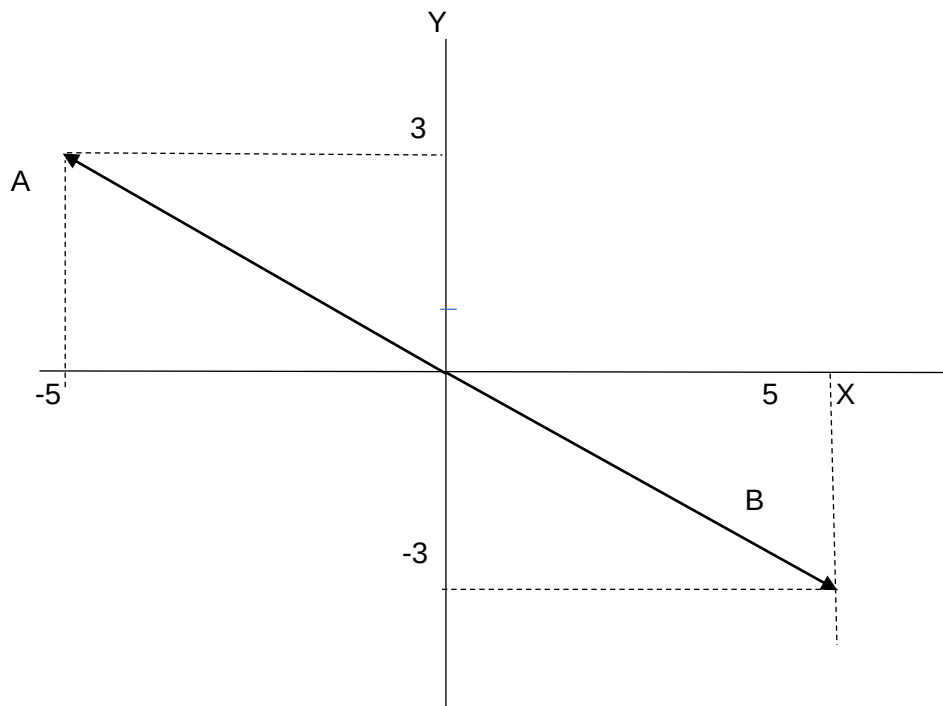
Ejemplo 1.18: Un vector A tiene una componente negativa de 5 unidades en el eje X y una positiva de 3 unidades en el eje Y. a) Denote A en términos de sus vectores unitarios, b) Determine el módulo y dirección de A, c) ¿Qué vector B producirá el equilibrio? Dibuje el diagrama.

$$a) \quad A = (-5i + 3j) \quad \checkmark$$

$$b) \quad |A| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = 5.83 \text{ unidades.} \quad \checkmark$$

$$\theta_A = \text{arc. tan } (3 / -5) = -31^\circ \quad \checkmark$$

$$c) \quad B = (5i - 3j) \quad \checkmark$$

Figura 1.23*Ejemplo 1.18 Diagrama*

Ejemplo 1.19: Considere los vectores $A = -2i + j - 3k$ y $B = 5i + 3j - 2k$. Hallar: a) Magnitud de cada vector, b) Resultante y componentes de la suma $A + B$, c) El vector que equilibra la partícula a la que se aplican estos vectores.

a) Si $V A = -2i + j - 3k$ y $B = 5i + 3j - 2k$. entonces

$$Ax = -2, Ay = 1 \text{ y } Az = -3 \quad \text{y} \quad Bx = 5, By = 3 \text{ y } Bz = -2$$

Entonces las magnitudes serán:

$$|A| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2} \quad \text{y} \quad |B| = \sqrt{Bx^2 + By^2 + Bz^2}$$

$$|A| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = 3.74 \quad \checkmark \quad \text{y}$$

$$|B| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = 6.16 \quad \checkmark$$

b) Sea C el vector resultante de la suma $A + B$:

$$C = (-2i + j - 3k) + (5i + 3j - 2k) = 2i + 4j - 5k \quad \checkmark$$

c) El vector equilibrante será:

$$E = -2i - 4j + 5k \quad \checkmark$$

U.1 Conceptos fundamentales.

Ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1: Obtenga el módulo y dirección de la resultante de los siguientes vectores $A = 35 \text{ N}$ y $B = 40 \text{ N}$ que forman un ángulo de 34° por los métodos a) del paralelogramo, b) del triángulo, c) de las componentes rectangulares, d) de las leyes de cosenos y senos.

Ejercicio 2: Encuentre la magnitud y dirección de la resultante de la suma de dos vectores $A = 350 \text{ u}$ y $B = 160 \text{ u}$ que forman un ángulo de 45° entre sí.

Ejercicio 3: Un móvil realiza tres desplazamientos partiendo del origen en cada uno. En el primero se sitúa en las coordenadas $(5,3)$, en el segundo en $(1,-3)$ y en el tercero en $(6,-4)$. Halle la magnitud y dirección de cada desplazamiento y del desplazamiento resultante y denote los vectores con notación unitaria. Trace el diagrama que ilustre el planteamiento y la resolución.

Soluciones en el anexo 1.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

Ingeniería Eléctrica

Mecánica Clásica.

Cuestionario de evaluación de la unidad 1: *Conceptos fundamentales.*

Ejercicio 1.- Considere los vectores $A = 12$ y $B = 10$ con un ángulo de 55° entre ellos. Encuentre a) La magnitud de la Resultante de la suma por el método del paralelogramo, b) La magnitud y dirección de la Resultante de la suma por el método de componentes rectangulares, c) La magnitud y dirección de la Resultante de la suma por el método de la ley de los cosenos. Considere el vector A coincidente con el eje X^+ , d) Exprese los vectores A , B y R en términos de vectores unitarios.

Ejercicio 2.- Sean los vectores $A = 3i + 4j - 2k$, $B = -5i + 7j$ y $C = 3j + 8k$, encuentre la magnitud de los vectores D , E y F si:

$$\text{I) } D = 2A - 3B - C, \quad \text{II) } E = -4A + 2B \quad \text{y} \quad \text{III) } F = A - B - C$$

Soluciones en el anexo 2.

Unidad 1

Anexo 1

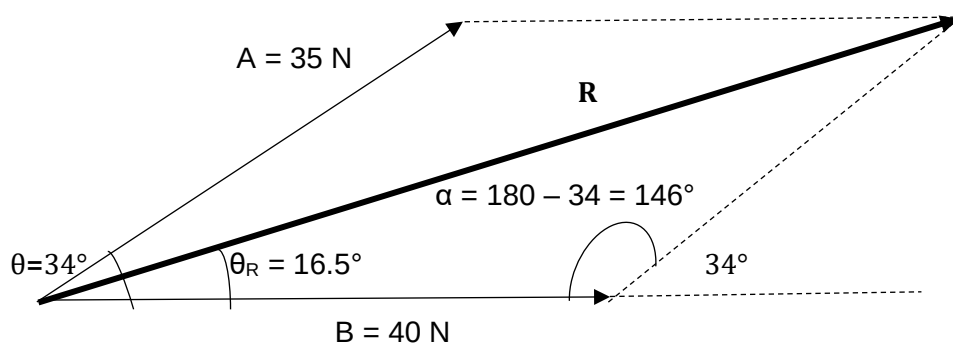
Respuesta a los ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1: Obtenga el módulo y dirección de la resultante de los siguientes vectores $A = 35\text{ N}$ y $B = 40\text{ N}$ que forman un ángulo de 34° por los métodos a) del paralelogramo, b) del triángulo, c) de las componentes rectangulares, d) de las leyes de cosenos y senos.

Solución:

a) Método gráfico del paralelogramo.

Los vectores concurrentes y el ángulo, se dibujan a escala y completamos el paralelogramo, entonces trazamos la resultante R como se muestra:



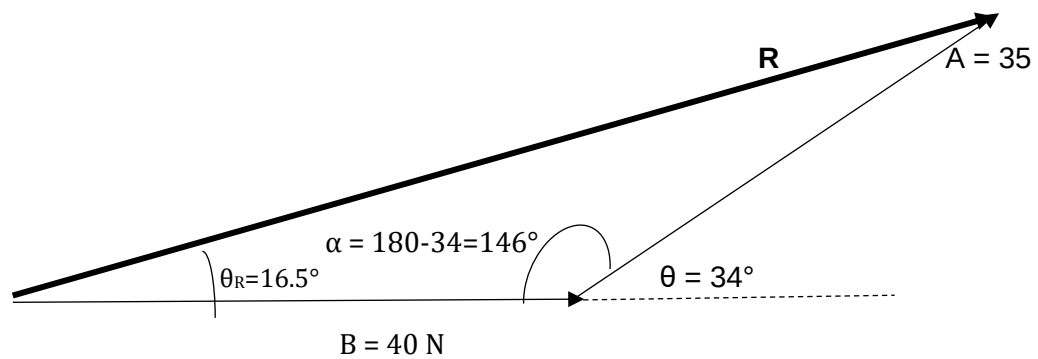
El ángulo α es el suplementario de 34° ($180 - 34 = 146^\circ$)

Medimos la longitud de la resultante con la misma escala y con la mayor exactitud posible así como el ángulo θ_R :

$$R = 71.65\text{ N} \quad \checkmark \quad ; \quad \theta_R = 16.5^\circ \quad \checkmark$$

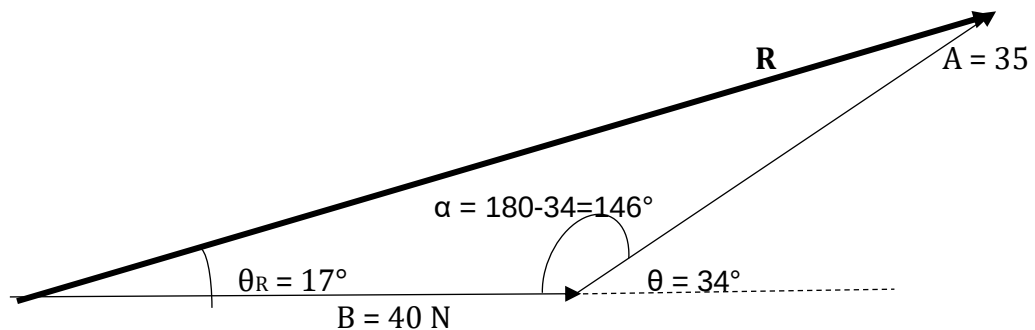
b) Método gráfico del triángulo.

Dibujamos a escala los vectores uno a continuación del otro y completamos el triángulo. Aquí el ángulo θ entre los vectores se ubica entre la línea de dirección de uno de los vectores y el otro.



Procedemos a medir R y θ_R : $R = 71.65$ ✓ $\theta_R = 16.5^\circ$ ✓

c) Método analítico de la ley de los cosenos y ley de los senos.



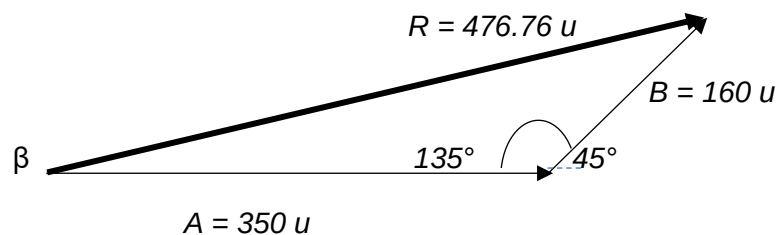
$$R = \sqrt{35^2 + 40^2 - 2 \times 35 \times 40 \times \cos 146^\circ} = 71.73 \text{ N} \quad \checkmark$$

Ángulo θ_R de la resultante, **con respecto al vector B**.

$$A / \sin \theta_R = 71.73 / \sin 146^\circ \quad ; \quad \sin 146^\circ = 0.2728 \quad ; \quad \theta_R = 15.83^\circ \quad \checkmark$$

Ejercicio 2: Encuentre la magnitud y dirección de la resultante de la suma de dos vectores $A = 350 \text{ u}$ y $B = 160 \text{ u}$ que forman un ángulo de 45° entre sí.

Construimos el triángulo esquemático con los vectores y aplicamos la ley de los cosenos:



Aplicamos la ley de los cosenos:

$$R = \sqrt{350^2 + 160^2 - 2(350)(160)\cos 135^\circ}$$

$$R = 476.76 \text{ N} \quad \checkmark$$

Dirección de la resultante mediante la ley de senos:

$$476.76 / \sin 135^\circ = 160 / \sin \beta$$

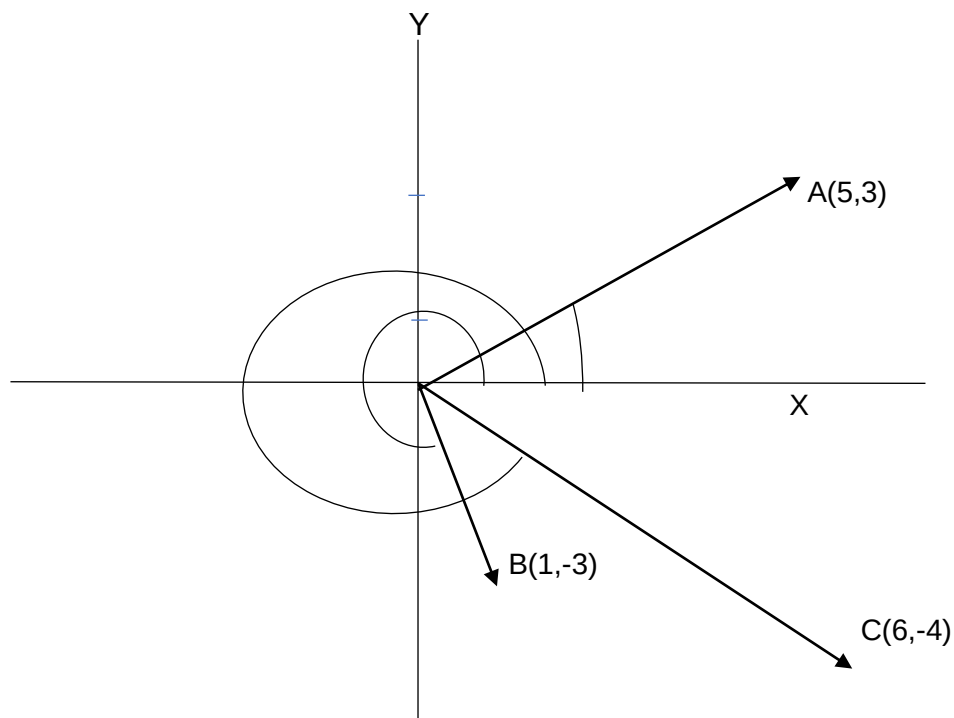
$$\beta = 13.71^\circ \quad \checkmark$$

Ejercicio 3: Un móvil realiza tres desplazamientos partiendo del origen en cada uno.

En el primero se sitúa en las coordenadas (5,3), en el segundo en (1,-3) y en el tercero en (6,-4). Halle la magnitud y dirección de cada desplazamiento y del desplazamiento

resultante y denote los vectores con notación unitaria. Trace el diagrama que ilustre el planteamiento y la resolución.

Nombremos como A, B y C los vectores de los desplazamientos en el orden en que se realizan y tracemos el diagrama esquemático.



Magnitud de los desplazamientos:

$$|A| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = 5.83 \text{ u} \quad \checkmark$$

$$|B| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = 3.162 \text{ u} \quad \checkmark$$

$$|C| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = 7.211 \text{ u} \quad \checkmark$$

Dirección de los desplazamientos:

$$\theta_A = \tan^{-1} (3/5) = 31^\circ \quad \checkmark$$

$$\theta_B = \tan^{-1} (-3/1) = -71.56^\circ = 288.44^\circ \quad \checkmark$$

$$\theta_C = \tan^{-1} (-4/6) = -33.7^\circ = 326.3^\circ \quad \checkmark$$

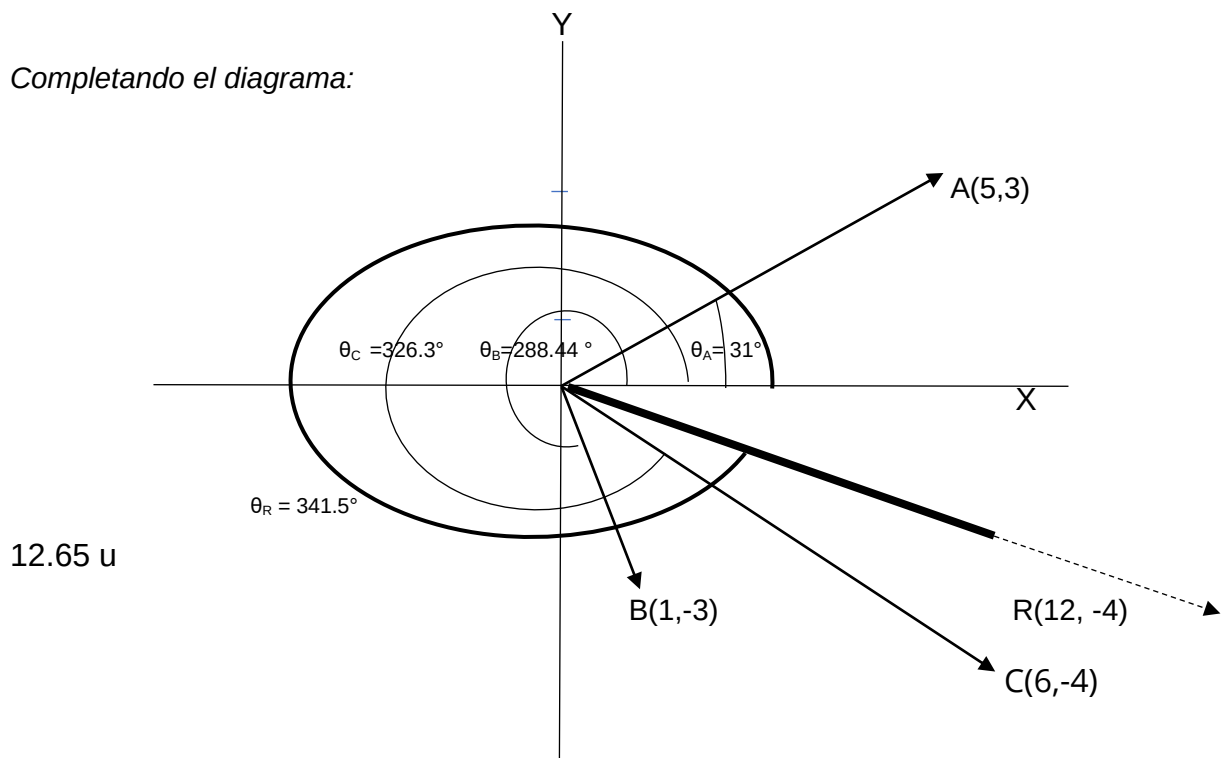
Magnitud de la resultante:

$$\text{Componente } R_x = 5 + 1 + 6 = 12 \text{ u; Componente } R_y = 3 - 3 - 4 = -4 \text{ u}$$

$$\text{Módulo de la resultante: } |R| = \sqrt{(12)^2 + (-4)^2} = 12.65 \text{ u} \quad \checkmark$$

$$\text{Dirección de la Resultante: } \theta_R = \tan^{-1} (-4 / 12) = -18.435^\circ = 341.5^\circ \quad \checkmark$$

Completando el diagrama:



Los vectores expresados con vectores unitarios:

$$A = (5i + 3j) ; \quad B = (i - 3j) ; \quad C = (6i - 4j) ; \quad R = (12i - 4j)$$

Unidad 1

Anexo 2: Solución al Cuestionario de evaluación de la Unidad 1: Conceptos fundamentales.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

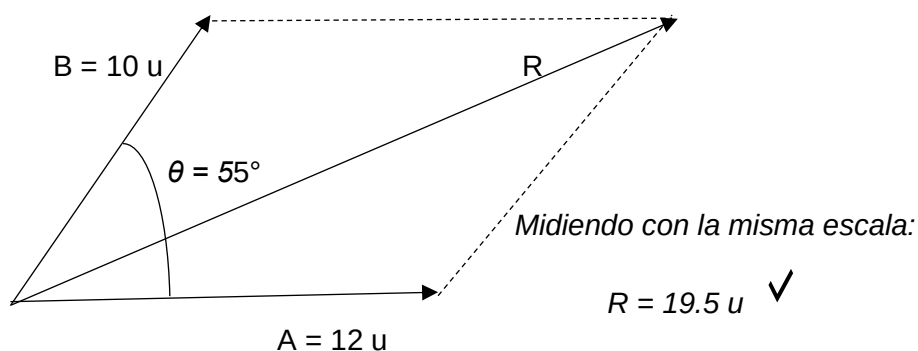
Ingeniería Eléctrica

Mecánica Clásica.

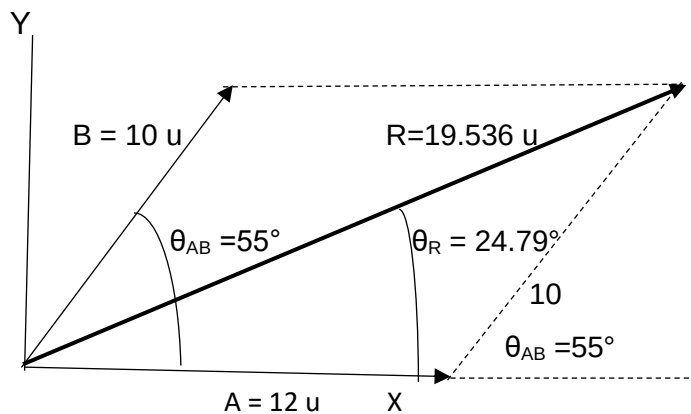
Ejercicio 1.- Considere los vectores $A = 12$ y $B = 10$ con un ángulo de 55° entre ellos. Encuentre a) La magnitud de la Resultante de la suma por el método del paralelogramo, b) La magnitud y dirección de la Resultante de la suma por el método de componentes rectangulares, c) La magnitud y dirección de la Resultante de la suma por el método de la ley de los cosenos. Considere el vector A coincidente con el eje X^+ , d) Exprese los vectores A , B y R en términos de vectores unitarios.

Solución:

a) Método del paralelogramo...



b) Método de componentes rectangulares...



Se calculan las componentes rectangulares de cada vector...

$$A_x = A \cdot \cos \theta_A = 12 \cos 0^\circ = 12 \text{ u} ; \quad A_y = A \cdot \sin \theta_A = 12 \sin 0^\circ = 0$$

$$B_x = B \cdot \cos \theta_B = 10 \cos 55^\circ = 5.7357 \text{ u} ; \quad B_y = B \cdot \sin \theta_B = 10 \sin 55^\circ = 8.1915 \text{ u}$$

Se calculan las componentes rectangulares de la resultante de la suma...

$$R_x = A_x + B_x = 12 + 5.7357 = 17.7357 \text{ u}$$

$$R_y = A_y + B_y = 0 + 8.1915 = 8.1915 \text{ u}$$

Módulo de la resultante:

$$R = \sqrt{(17.7357)^2 + (8.1915)^2} = 19.536 \text{ u} \quad \checkmark$$

Dirección de la resultante:

$$\theta_R = \text{arc. tang}(R_y / R_x) = \text{arc. tan}(8.1915/17.7357) = 24.79^\circ \quad \checkmark$$

c) Magnitud y dirección de la Resultante con ley de los cosenos...

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2(A \cdot B) \cos \theta$$

Sustituyendo...

$$R^2 = 12^2 + 10^2 + 2(12 \cdot 10) \cos 55^\circ \text{ u}^2$$

$$R = \sqrt{381.658} = 19.536 \text{ u} \quad \checkmark$$

La dirección de R (θ_R), puede calcularse con la *Ley de los senos* aplicada al triángulo inferior del paralelogramo de la figura.

$$19.536 / \sin 125^\circ = 10 / \sin \theta_R ; \theta_R = \arcsin [10 / (19.536 / \sin 125^\circ)]$$

$$\theta_R = 24.79^\circ \quad \checkmark$$

d) Notación con vectores unitarios:

$$A = 12\mathbf{j} \quad \checkmark ; \quad B = 5.7357\mathbf{i} + 8.1915\mathbf{j} \quad \checkmark ; \quad R = 17.7357\mathbf{i} + 8.1915\mathbf{j} \quad \checkmark$$

Ejercicio 2.- Sean los vectores $A = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $B = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $C = 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, encuentre la magnitud de los vectores D, E y F si: I) $D = 2A - 3B - C$, II) $E = -4A + 2B$ y III) $F = A - B - C$

Solución:

$$\text{I) } D = 2A - 3B - C = 2(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 3(-5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) - (3\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$$

$$D = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + 15\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k} =$$

$$D = 21\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

$$|D| = \sqrt{21^2 + (-3)^2 + (-12)^2} = 24.37 \text{ u} \quad \checkmark$$

$$\text{II)} \quad E = -4A + 2B = -4(3i + 4j - 2k) + 2(-5i + 7j) =$$

$$E = -12i - 16j + 8k - 10i + 14j$$

$$E = -22i - 2j + 8k$$

$$|E| = \sqrt{(-22)^2 + (-2)^2 + (8)^2} = 23.494 \text{ u} \quad \checkmark$$

$$\text{III)} \quad F = A - B - C = 3i + 4j - 2k - (-5i + 7j) - (3j + 8k)$$

$$F = 3i + 4j - 2k + 5i - 7j - 3j - 8k$$

$$F = 8i - 6j - 10k$$

$$|F| = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2 + (-10)^2} = 14.142 \text{ u} \quad \checkmark$$

UNIDAD 2: Cinemática de la Partícula

Cinemática: Es la rama de la Física que estudia el movimiento de los objetos sin considerar la fuerza que lo produce ni masa del objeto, solo distancia recorrida, desplazamiento y tiempo.

Variables involucradas: S, d, t

2.1. Movimiento rectilíneo.

Es, como su nombre lo indica, aquel que describe una línea recta en su trayectoria. Veremos dos tipos básicos: el *movimiento rectilíneo uniforme (mru)* y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (mrúa)*.

2.1.1. Movimiento Rectilíneo Uniforme:

Se refiere al que se produce en línea recta y a la misma velocidad.

La definición de velocidad es la rapidez de cambio de posición o desplazamiento con respecto del tiempo por lo que sigue la siguiente ecuación:

$$v = s / t = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{---- def. M.R.U.}$$

Las unidades de la velocidad en el S.I. son metros por segundo (m/s) no obstante pueden utilizarse unidades deferentes según el planteamiento del problema.

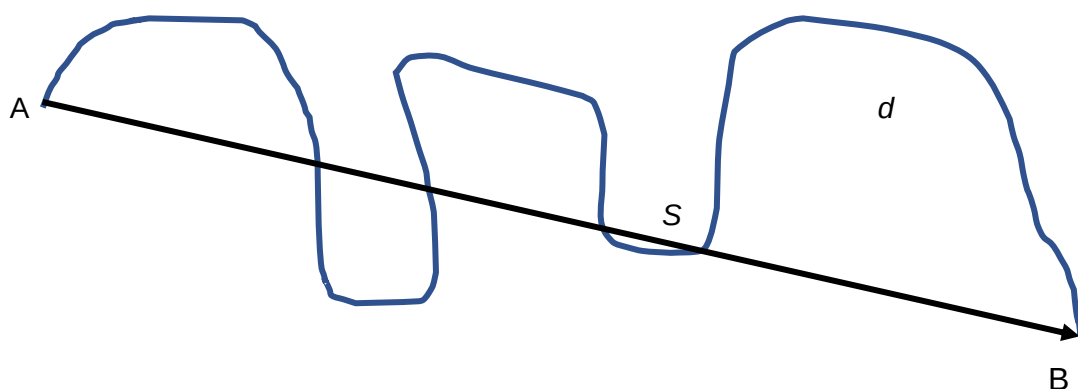
Diferencia entre distancia recorrida (d) y Desplazamiento (S).

Aunque en el lenguaje cotidiano suelen estos dos términos usarse como sinónimos, en Física significan dos conceptos diferentes. Cuando una partícula se mueve de un punto A a otro B, se entiende como *distancia recorrida* d al número de unidades de

longitud por la que la partícula pasó en toda su trayectoria sin importar si ésta fue recta, curva o combinación de ambas. Además, la distancia recorrida es una *cantidad escalar*. El desplazamiento es, por definición, la longitud de la *línea recta* que une el punto de partida A con el de llegada B. El desplazamiento es una *cantidad vectorial*, el vector tiene su punto de aplicación en el punto de partida y su final en el de llegada. Estos conceptos se comparan en la siguiente figura en la que la distancia recorrida está representada por la línea curva y el desplazamiento por el vector que une los puntos A y B que recibe el nombre de *vector de desplazamiento*.

Figura 2.1

Diferencia entre distancia recorrida (d) y Desplazamiento (s).



Es claro que la magnitud del vector de desplazamiento S es menor a la de la distancia recorrida d en el caso representado en la figura y que **solo en el movimiento rectilíneo** la *distancia recorrida (recorrido) d es igual a la magnitud del vector de desplazamiento (S)*

Velocidad media, rapidez media y velocidad instantánea.

Cuando el movimiento es rectilíneo pero la velocidad *no es uniforme*, se calcula la *velocidad media* (v_{med}) que en ocasiones simbolizaremos como ($\bar{v}$).

$v_{med} = \vec{v} = \text{desplazamiento total} / \text{tiempo total empleado}$

$v_{med} = S_{total} / t_{total}$ Como $\underline{S}$ es vectorial entonces $\underline{v}_{med}$ es vectorial.

Por otro lado, la rapidez media r_{media} se encuentra dividiendo la distancia total recorrida (o recorrido) d entre el tiempo empleado:

$r_{media} = d / t_{total}$ Como $\underline{d}$ es escalar entonces $\underline{r}$ es escalar.

Es importante recordar que **solo en el movimiento rectilíneo** la *distancia recorrida* (recorrido) (d) es igual en magnitud al desplazamiento (S).

Ejemplo2.1 : Un automóvil circula por una carretera sinuosa recorriendo una distancia de 800 metros en 50 segundos. Finalmente se localiza a 60 metros en línea recta de su posición inicial. ¿Cuáles son los valores de su velocidad media y de su rapidez?

Aunque su recorrido fue de 800 m, su desplazamiento fue de solo 60 m; entonces:

Velocidad media: $\vec{v} = 60 \text{ m} / 50 \text{ s} = 1.2 \text{ m/s}$ (vectorial). ✓

Rapidez: $r = 800 \text{ m} / 50 \text{ s} = 16 \text{ m/s}$ (escalar). ✓

Ejemplo 2.2 (3.4 Serway): Un trotador corre en línea recta con una velocidad media de 5 m/s durante 4 minutos y después con una velocidad media de 4 m/s durante 3 min, a) ¿cuál es su desplazamiento total? b) ¿cuál es la distancia total recorrida? c) ¿cuál es su velocidad media en todo ese tiempo?

(por ser movimiento rectilíneo $d = s$)

$v_{med} = S_{total} / t_{total}$; $S_{total1} = v_{med} \times t_{total} = 5 \text{ m/s} (4\text{min} \times 60 \text{ s/min}) = 1,200 \text{ m}$

$S_{total2} = v_{med} \times t = 4 \text{ m/s} (3\text{min} \times 60 \text{ s/min}) = 720 \text{ m}$

$$a) \quad S_{\text{total de la trayectoria}} = 1,200 \text{ m} + 720 \text{ m} = 1,920 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$b) \quad d_{\text{total}} = S_{\text{total de la trayectoria}} = 1,920 \text{ m} \quad (\text{por ser en línea recta}) \quad \checkmark$$

$$c) \quad t_{\text{total}} = 240 \text{ s} + 180 \text{ s} = 420 \text{ s}$$

$$v_{\text{med}} = S_{\text{total}} / t_{\text{total}} = 1,920 \text{ m} / 420 \text{ s} = 4.57 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.3 (3.5 Serway): Un atleta nada la distancia de 50 m en una piscina en 20 segundos y recorre la misma distancia de regreso hasta la posición de salida en 22 segundos. Determine su velocidad media en; a) la primera mitad del recorrido, b) la segunda mitad del recorrido, c) el recorrido completo.

$$a) \quad \tilde{v} = S / t = 50 \text{ m} / 20 \text{ s} = 2.5 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$b) \quad \tilde{v} = S / t = 50 \text{ m} / 22 \text{ s} = 2.27 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$c) \quad \tilde{v} = S / t = (50 \text{ m} - 50 \text{ m}) / 42 \text{ s} = 0 \quad \checkmark \quad (\text{los desplazamientos de ida y vuelta son de signo opuesto por lo que el desplazamiento total es cero})$$

Ejemplo 2.4 (3.7 Serway): Un automóvil viaja 200 Km a una rapidez media de 40 Km/hr. Un segundo automóvil sale una hora después y llega al mismo lugar en el mismo momento ¿cuál es la velocidad media del segundo automóvil?

$$d = 200 \text{ km}$$

$$r_{\text{med1}} = 40 \text{ Km/hr} \quad \text{escalar}$$

$$r_{\text{med}} = d/t ; t = d/r_{\text{med}} \quad t_1 = 200 / 40 = 5 \text{ hrs. (Tiempo de viaje del primer automóvil).}$$

t_2 para el segundo aut. = 4 hr. (una hora menos)

$$S = 200 \text{ km}$$

$$v_{med} = S/t = 200 / 4 = 50 \text{ Km/hr vectorial} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.5: Un automóvil tiene una velocidad de 140 km/h al pasar por una determinada señal de un camino. Tres minutos más tarde, un segundo auto pasa por dicha señal a 230km/h. Las velocidades de los automóviles son constantes y el camino recto. ¿Cuánto tardará el segundo automóvil en alcanzar al primero?

Resolución:

Sean x_1 , v_1 , la distancia recorrida y la velocidad, respectivamente, por el primer automóvil desde la señal, hasta que es alcanzado por el segundo.

Sean x_2 , v_2 la distancia recorrida y la velocidad, respectivamente, del segundo automóvil desde la señal, hasta que alcanza al primero.

Entonces: $x_1 = v_1 \cdot t_1 = (140 \text{ km / hr}) \cdot t$

Tiempo de diferencia: $3 \text{ min} = 3/60 \text{ h} = 0.05 \text{ h}$

$$x_2 = 230 \text{ km/hr} (t - 0.05) \text{ hr}$$

como lógicamente $x_1 = x_2$

$$140 \cdot t = 230 \text{ km/hr} (t - 0.05) \text{ hr}$$

Resolviendo:

$$t = 0.13 \text{ hr} = 7.8 \text{ min} \quad \checkmark$$

Velocidad instantánea.

Otro concepto muy valioso cuando el movimiento no es uniforme es el de la **velocidad instantánea** que representa la velocidad momentánea (*cuando t tiende a cero*) de la partícula al pasar por determinado punto. Hay que destacar que ésta es la misma en cualquier momento y posición en el caso del M.R.U.

Vector de desplazamiento y vector de posición.

Cuando se hace uso de un sistema de coordenadas rectangulares en el planteamiento de un ejercicio, entonces es útil la representación de los vectores de desplazamiento y de posición. En el m.r.u. el vector de desplazamiento tiene la misma dirección y sentido que el de velocidad y su magnitud coincide con la trayectoria total de su movimiento. El *vector de posición de un punto* se define como aquel que parte del origen y termina en las coordenadas del punto, por tanto, se tiene un vector de posición inicial y uno final cuando la partícula cambia de posición. En el siguiente ejemplo se muestra lo anterior.

Ejemplo 2.6: Una partícula inicialmente ubicada en el punto (2, 3) se mueve a una velocidad uniforme de $(4i + j)$ m/s durante 2 segundos, encuentre el nuevo vector de posición de la partícula y su magnitud, el módulo de su desplazamiento y las coordenadas de B. Trace el diagrama que ilustre todos los vectores involucrados.

Sea $P_A = (2i + 3j)$ m y $v = (4i + j)$ m/s como los vectores de posición inicial y velocidad respectivamente y B el punto de la posición final de la partícula y calculemos los desplazamientos en dirección de cada uno de los ejes coordenados tomando por separado la velocidad en cada uno según el vector descrito.

$$\text{Desplazamiento en dirección del eje X: } S_x = (v_x)t = (4 \text{ m/s})(2s) = 8 \text{ m}$$

$$\text{Desplazamiento en dirección del eje Y: } S_y = (v_y)t = (1 \text{ m/s})(2s) = 2 \text{ m}$$

El vector de posición final y su módulo en el punto B de la partícula serán:

$$P_B = [(2 + 8)i + (3 + 2)j] \text{ m} = (10i + 5j) \text{ m} \quad \checkmark$$

$$|P_B| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \text{ m} \quad \checkmark \text{ (distancia en línea recta del origen a B)}$$

El vector de desplazamiento es:

$$S = (8i + 2j) \text{ m} \quad \checkmark$$

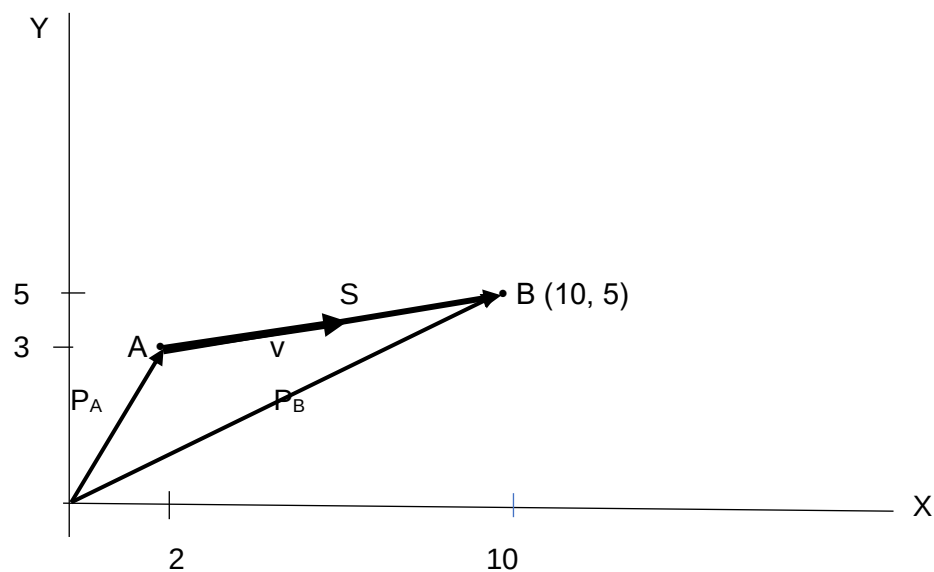
y su módulo:

$$|S| = \sqrt{8^2 + 2^2} = 8.24 \text{ m} \quad \checkmark \text{ (distancia en línea recta de A a B)}$$

Coordenadas de B: (10, 5) $\checkmark$

Figura 2.2

Ejemplo 2.6: Gráfica esquemática



Nótese que los vectores **S** y **v** aplicados a la partícula, tienen la misma dirección y sentido.

Según el diagrama y de acuerdo a la resta de vectores, podemos escribir que;

$$S = P_B - P_A = (10i + 5j) - (2i + 3j) = (8i + 2j) \text{ m} \quad \checkmark$$

Lo que es una forma diferente de encontrar S .

La velocidad como desplazamiento o cambio de posición con respecto del tiempo.

Cuando se dispone de una ecuación que relaciona la posición con el tiempo, entonces la velocidad puede calcularse derivando dicha ecuación. *En el caso del M.R.U. esta ecuación es de primer grado considerando que éste es en una sola dimensión y en dirección del eje X generalmente.*

Ejemplo 2.7: Una partícula se mueve a lo largo del eje X y su posición obedece la ecuación $x = 5t + 3$ en donde x está en metros y t en segundos ¿cuál es su velocidad? ¿es uniforme?

Como la velocidad es el cambio de posición con respecto del tiempo, entonces el Cálculo

diferencial nos permite expresar que la velocidad es la primera derivada de $x = 5t + 3$, es decir:

$$v = dx/dt = d(5t + 3)/dt = 5 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Este resultado nos muestra que la velocidad no varía en el tiempo por lo que es la misma en todo momento pues no contiene la variable t , por tanto:

v es uniforme. $\checkmark$

Nota: En la ecuación de la posición $x = 5t + 3$, el término independiente 3 indica que el movimiento inicia en punto $x = 3$ cuando $t = 0$. Si se quiere conocer la posición de la partícula en cualquier tiempo, basta sustituir en la ecuación de x el valor correspondiente de t . Por ejemplo, para $t = 8 \text{ s}$, $x = 5(8) + 3 = 43 \text{ m}$.

2.1.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)

Empecemos definiendo el concepto de *aceleración*: es la variación de la velocidad con respecto del tiempo y se simboliza como a .

En unidades internacionales, la aceleración se expresa como m/s^2 , es decir, el cambio de la velocidad en metros por segundo cada segundo, algebraicamente:

$$a: m/s / s = m / s^2$$

La fórmula básica que define la aceleración es:

$$a = \Delta v / \Delta t = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$$

La aceleración es una *cantidad vectorial* pues tiene magnitud, dirección y sentido y su vector *puede o no* ser colineal con un vector de velocidad que inicialmente tenga la partícula si fuera el caso. Se debe señalar que la aceleración incrementa la velocidad de un cuerpo en la misma dirección y sentido de esta primera, de tal manera de que si existe velocidad en otra dirección, entonces la velocidad total será la resultante de estas dos velocidades.

En el caso que nos ocupa, el M.R.U.A., la velocidad de la partícula es instantánea en cualquier posición pues se asume que la variación de a es continua además de uniforme. El vector de aceleración puede expresarse también en términos de vectores unitarios i, j cuando se usan los ejes coordenados.

Ejemplo 2.8: Un objeto se mueve en línea recta y cuando pasa por el punto A, lleva una velocidad de 23 m/s, a los 5 segundos su velocidad es de 34 m/s ¿cuál es su aceleración si se desplaza en M.R.U.A.?

$$a = \Delta v / \Delta t = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) = (34 - 23) m/s / (5 - 0) s$$

$$a = 2.2 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

La velocidad media en el Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Sabemos que cuando la velocidad de una partícula es variable, la velocidad media $\tilde{v}$ se formula así:

$$\tilde{v} = S_{\text{total}} / t_{\text{total}} ; \quad \text{si hacemos } S_{\text{total}} = x_2 - x_1 \text{ y } t_{\text{total}} = t_2 - t_1$$

$$\tilde{v} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (I)}$$

Si la variación es uniforme (M.R.U.A.) entonces la velocidad media también puede formularse:

$$\tilde{v} = (v_1 + v_2) / 2 \quad \text{----- (II)}$$

la ecuación que define la aceleración es:

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

si igualamos las ecuaciones (I) y (II) tenemos:

$$(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) = (v_1 + v_2) / 2$$

de donde:

$$(x_2 - x_1) = (t_2 - t_1) (v_1 + v_2) / 2$$

$$\text{o bien:} \quad (x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

despejando $(t_2 - t_1)$ en (III) y sustituyendo en (IV) obtenemos:

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

finalmente, despejando v_2 de (III) y sustituyendo en (IV) queda:

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

Estas seis ecuaciones, de (I) a (VI), son normalmente conocidas como las *fórmulas básicas de la cinemática* y constituyen una herramienta muy útil para resolver diversos planteamientos sobre este tema.

Ejemplo 2.9 (3.24 Serway): Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje X durante 10 segundos a velocidad constante de 50 m/s. Después acelera uniformemente hasta 80 m/s en los siguientes 5 segundos. Encuentre a) La aceleración en los primeros 10 segundos, b) su aceleración en el intervalo de $t = 10$ s a $t = 15$ s, c) el desplazamiento de $t = 0$ a $t = 15$ s, d) rapidez media de $t = 10$ s a $t = 15$ s, e) rapidez media de $t = 0$ a $t = 15$ s.

a) La aceleración en los primeros 10 segundos:

Ya que en los primeros 10 s se mueve a velocidad uniforme:

$$a = 0 \quad \checkmark$$

b) su aceleración en el intervalo de $t = 10$ s a $t = 15$ s.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$a = (80 - 50) \text{ m/s} / (15 - 10) \text{ s} = 6 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

c) el desplazamiento de $t = 0$ a $t = 15$ s.

En este lapso ocurren dos tipos de movimientos: m.r.u. en los primeros 10 segundos y m.r.u.a de $t = 10$ s a $t = 15$ s.

Desplazamiento de $t = 0$ s a $t = 10$ s, ecuación (I):

$$\tilde{v} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) \quad (\text{con distancias y tiempo})$$

$$50 \text{ m/s} = (x_2 - 0) \text{ m} / (10 - 0) \text{ s} \quad ; \quad \underline{x_2 = 500 \text{ m (m.r.u.)}}$$

Desplazamiento de $t = 10 \text{ s}$ a $t = 15 \text{ s}$, ecuación (IV):

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad (\text{con velocidades y tiempo})$$

$$(x_2 - 0) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (80 + 50) \text{ m/s} (15 - 10) \text{ s} \quad ; \quad \underline{x_2 = 325 \text{ m (m.r.u.a.)}}$$

Desplazamiento total de $t = 10 \text{ s}$ a $t = 15 \text{ s}$:

$$S_{\text{total}} = 500 \text{ m} + 325 \text{ m} = 825 \text{ m} \quad \checkmark$$

d) rapidez media de $t = 10 \text{ s}$ a $t = 15 \text{ s}$, ecuación (II):

$$\tilde{v} = (v_1 + v_2) / 2$$

$$\tilde{v} = (50 + 80) / 2 = 65 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

e) rapidez media de $t = 0$ a $t = 15 \text{ s}$, ecuación (I):

$$\tilde{v} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$$

$$\tilde{v} = (825 - 0) / (15 - 0) = 55 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

f) ¿ en qué momento y posición la velocidad instantánea en el tramo acelerado es igual a la velocidad media del mismo tramo?

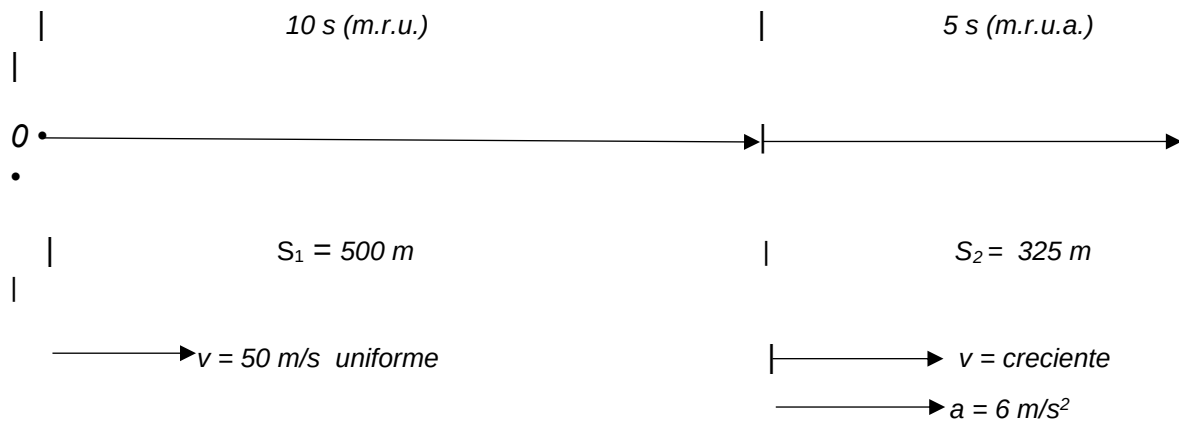
$$\text{Datos: } v_1 = 50 \text{ m/s} \quad v_2 = \tilde{v} = 65 \text{ m/s} \quad ; \quad a = 6 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad t_1 = 10 \text{ s}$$

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ --(III)} \quad ; \quad 6 \text{ m/s}^2 = (65 - 50) \text{ m/s} / (t_2 - 10) \text{ s} \quad ; \quad t_2 = 12.5 \text{ s} \quad \checkmark$$

$$\tilde{v} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) \text{ --(I)} \quad ; \quad 65 \text{ m/s} = (x_2 - 500) \text{ m} / (12.5 - 10) \text{ s} \quad ; \quad 662.5 \text{ m} \quad \checkmark$$

Figura 2.3

Ejemplo 2.9 Gráfica esquemática ilustrativa



Ejemplo 2.10 (3.25 Serway): Un cuerpo se mueve con una aceleración uniforme y tiene una velocidad de 12 m/s cuando su posición es de $x = 3 \text{ m}$. Su movimiento es rectilíneo. Si su posición es de -5 después de dos segundos:

a) ¿cuál es su aceleración?

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(-5 - 3) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) a (2 - 0)^2 \text{ s} + 12 \text{ m/s} (2 - 0)$$

$$a = -16 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

(el signo negativo indica que el sentido del vector de $\underline{a}$ es hacia la izquierda).

b) ¿cuál es su velocidad en ese momento? ($t = 2 \text{ s}$)

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-16 \text{ m/s}^2 = (v - 12) (2 - 0)$$

$$v = -20 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

(el signo negativo indica que el sentido del vector de $\underline{v}$ es hacia la izquierda en ese momento).

Otro procedimiento (para inciso b):

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

$$(-5 - 3) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (v + 12) \text{ m/s} (2 - 0)$$

$$v_1 = -20 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

c) ¿cuál es su posición al término del primer segundo?

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(x_2 - 3) = \left(\frac{1}{2}\right) (16 \text{ m/s}^2)(1 - 0)^2 \text{ s}^2 + 12(1 - 0)$$

$$x_2 = 7 \text{ m.} \quad \checkmark$$

Otro procedimiento (en dos pasos):

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$12 \text{ m/s} = (v_2 - 12) \text{ m/s} / (1 - 0) \quad ; \quad \underline{v = -4 \text{ m/s}} \text{ (velocidad en } t = 1 \text{ s)}$$

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

$$(x_2 - 3) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (12 - 4) \text{ m/s} (1 - 0) \text{ s}$$

$$x_2 = 7 \text{ m.} \quad \checkmark$$

d) ¿cuál será su posición al terminar el primer medio segundo?

En dos pasos:

Paso 1.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$-16 \text{ m/s}^2 = (v_2 - 12) / (0.5 - 0) \text{ , } \underline{v_2 = 4 \text{ m/s}} \text{ (velocidad en } t = 0.5 \text{ s)}$$

Paso 2.

$$(x_2 - x_1) = (\frac{1}{2}) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

$$(x_2 - 3) \text{ m} = (\frac{1}{2}) (12 + 4) \text{ m/s} (0.5 - 0) \text{ s}$$

$$x_2 = 7 \text{ m} \quad \checkmark$$

Paso 2 (otro procedimiento).

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \text{ ----- (V)}$$

$$(x_2 - 3) \text{ m} = [(4)^2 - (12)^2] / 2(-16) =$$

$$x_2 = 7 \text{ m} \quad \checkmark$$

Observe que en $t = 0.5 \text{ s}$ la posición es de $x = 7 \text{ m}$ y la velocidad 4 m/s hacia la derecha y que en $t = 1$ la partícula está en la misma posición $x = 7 \text{ m}$ pero con la velocidad -4 m/s (hacia la izquierda ya de regreso)

e) ¿en qué momento estará en reposo?

Nota: Cuando la partícula llega al reposo, $v_2 = 0$

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$-16 \text{ m/s}^2 = (0 - 12) \text{ m/s} / (t_2 - 0)$$

$$t = 0.75 \text{ s} \quad \checkmark$$

f) ¿en qué posición se encuentra cuando empieza su retorno?

Los datos son:

$$v_1 = 12 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0$$

$$x_0 = 3 \text{ m}$$

$$a = -6 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 0.75 \text{ s}$$

una forma de resolver es:

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \text{ ---- (V)}$$

$$(x_2 - 3) \text{ m} = [(0)^2 - (12)^2] / 2(-16) \text{ m/s}^2$$

$$x_2 = 7.5 \text{ m} \quad \checkmark$$

otra forma:

$$(x_2 - x_1) = (\frac{1}{2}) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

$$(x_2 - 3) \text{ m} = (\frac{1}{2}) (12 + 0) \text{ m/s} (0.75 - t_1) \text{ s}$$

$$x_2 = 7.5 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.11: Una partícula con M.R.U.A. situada en el punto (4, 7) con una velocidad de $v = (5i + 4j) \text{ m/s}$, sufre una aceleración $a = (2i + 3j) \text{ m/s}^2$ por un lapso de 3 segundos. Encuentre la magnitud y dirección de los vectores de posición y velocidad de la partícula al inicio y final de dicho lapso de tiempo y de la aceleración en todo el tiempo. Elabore un diagrama representativo.

Importante: Como este es un movimiento en dos dimensiones (X e Y), observe que los cálculos se realizan por separado en cada una de ellas.

Al inicio del tiempo:

Denotemos P_1 y v_1 la Posición y velocidad al inicio del lapso de tiempo entonces...

magnitud de la posición inicial: $|P_1| = \sqrt{P_{1i}^2 + P_{1j}^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8.06 \text{ m}$ ✓

dirección de la posición inicial: $\theta_{P1} = \tan^{-1} (P_{1j} / P_{1i}) = \tan^{-1} (7 / 4) = 60.25^\circ$ ✓

magnitud de la velocidad inicial: $|v_1| = \sqrt{v_{1i}^2 + v_{1j}^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6.403 \text{ m/s}$ ✓

dirección de la velocidad inicial: $\theta_{v1} = \tan^{-1} (v_{1j} / v_{1i}) = \tan^{-1} (4 / 5) = 38.66^\circ$ ✓

Sea $\underline{a}$ la aceleración uniforme durante todo el tiempo.

magnitud de la aceleración: $|a| = \sqrt{a_i^2 + a_j^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.60 \text{ m/s}^2$ ✓

dirección de la aceleración: $\theta_a = \tan^{-1} (a_j / a_i) = \tan^{-1} (3 / 2) = 56.31^\circ$ ✓

Al final del tiempo:

Denotemos P_2 , y v_2 , la Posición y velocidad al final del lapso de tiempo entonces...

Velocidad final después de 3 segundos, con ecuación (III):

En eje X $a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$

$$2 \text{ m/s}^2 = (v_{x2} - 5) \text{ m/s} / (3 - 0) \text{ s} ; v_{x2} = 11 \text{ m/s}$$

En eje Y $a = (v_{y2} - v_{y1}) / (t_2 - t_1)$

$$3 \text{ m/s}^2 = (v_{y2} - 4) \text{ m/s} / (3 - 0) \text{ s} ; v_{y2} = 13 \text{ m/s}$$

Vector final de velocidad: $v_2 = (11i + 13j) \text{ m/s}$

magnitud de v_2 : $|v_2| = \sqrt{11^2 + 13^2} = 17.03 \text{ m/s}$ ✓

Dirección de v_2 : $\theta_{v2} = \tan^{-1} (13/ 11) = 49.76^\circ$ ✓

Coordenadas (x_2, y_2) de la posición final utilizando la ecuación (IV):

en X: $(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_{x1} + v_{x2}) (t_2 - t_1)$

$$(x_2 - 4) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (5 + 11) \text{ m/s} (3 - 0) \text{ s}; x_2 = 28 \text{ m}$$

en Y: $(y_2 - y_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_{y1} + v_{y2}) (t_2 - t_1)$

$$(y_2 - 7) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (4 + 13) \text{ m/s} (3 - 0) \text{ s}; y_2 = 32.5 \text{ m}$$

Vector final de posición: $P_2 = (28 i + 32.5 j) \text{ m}$

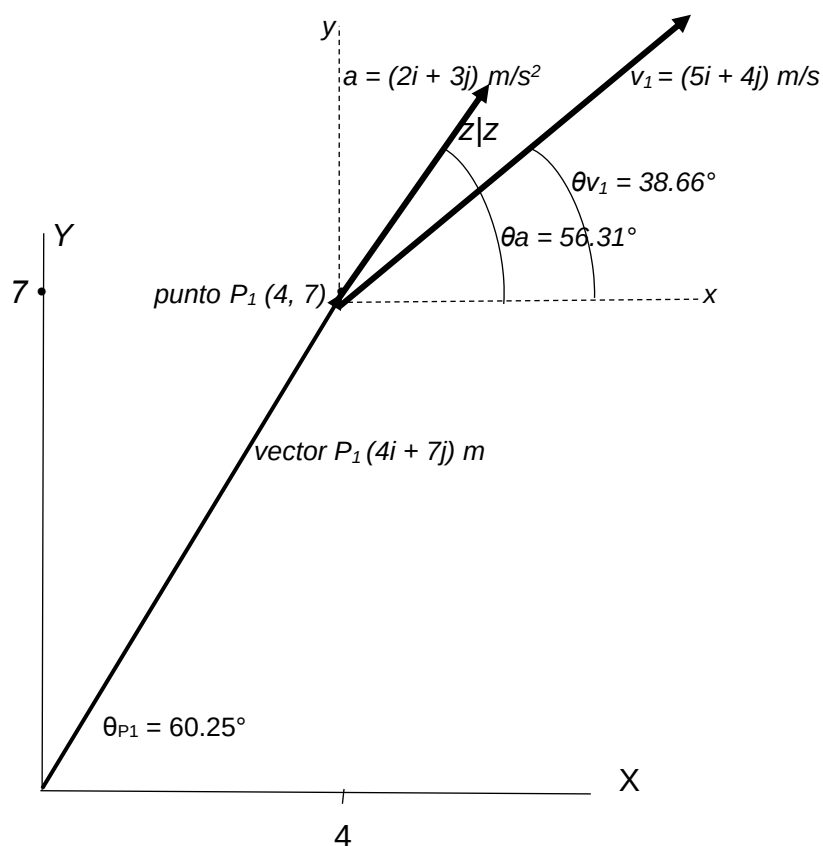
Magnitud de P_2 : $P_2 = \sqrt{28^2 + 32.5^2} = 42.9 \text{ m} \quad \checkmark$

Dirección de P_2 : $\theta_{P2} = \tan^{-1} (32.5/28) = 49.25^\circ \quad \checkmark$

Figura 2.4

Ejemplo 2.11 gráficas esquemáticas (no a escala precisa) inicial y final

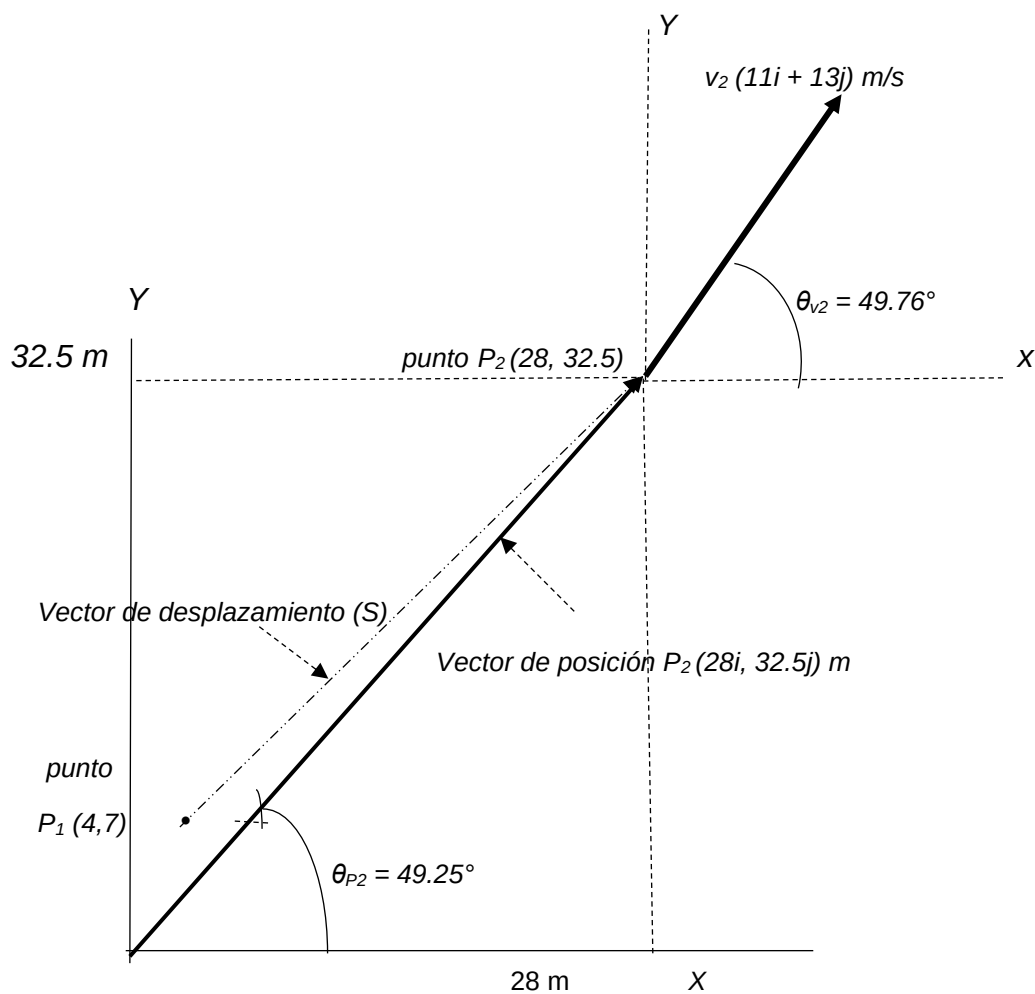
Gráfica posición inicial (P_1).



Debe observarse que el origen para los vectores de velocidad y aceleración es la posición de la partícula pues ahí están aplicados.

Figura 2.5

Ejemplo 2.11 Gráfica esquemática posición final P_2 después de 3 segundos.



Nótese que después de 3 segundos no existe ya aceleración, entonces tampoco vector.

Ejemplo 2.12 (4.5 Serway): En $t = 0$, una partícula que se mueve en el plano XY con aceleración constante tiene una velocidad de $(3i - 2j) \text{ m/s}$ en el origen. En $t = 3 \text{ s}$, su

velocidad es $(9i + 7j)$ m/s. Encuentre a) la magnitud y dirección de la aceleración, b) sus coordenadas en cualquier instante t . Utilice los vectores en su notación con vectores unitarios sin separar los cálculos para cada dimensión.

a) magnitud y dirección de la aceleración:

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{--- (III)}$$

$$a = [(9i + 7j) \text{ m/s} - (3i - 2j) \text{ m/s}] / (3 \text{ s} - 0) = (6i + 9j) \text{ m/s} / 3 \text{ s} = (2i + 3j) \text{ m/s}^2$$

$$\text{magnitud: } |a| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.6 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

$$\text{dirección: } \theta_a = \tan^{-1}(3/2) = 56.31^\circ \quad \checkmark$$

b) coordenadas en cualquier instante t :

si no se separan los cálculos para cada eje, entonces en las ecuaciones debe usarse el vector de desplazamiento $\underline{r}$ en lugar la diferencia de posiciones, como se muestra a continuación:

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(r_2 - r_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(r_2 - 0) = \left(\frac{1}{2}\right) (2i + 3j) \text{ m/s}^2 (t_2 - 0) s^2 + (3i - 2j) \text{ m/s}(t_2 - 0)s$$

$$r_2 = 3t i - 2t j \quad t_2^2 i + 3/2 t^2 j$$

$$r_2 = (3 + t) t \cdot i + [-2 + (3/2) t] t \cdot j \quad \checkmark$$

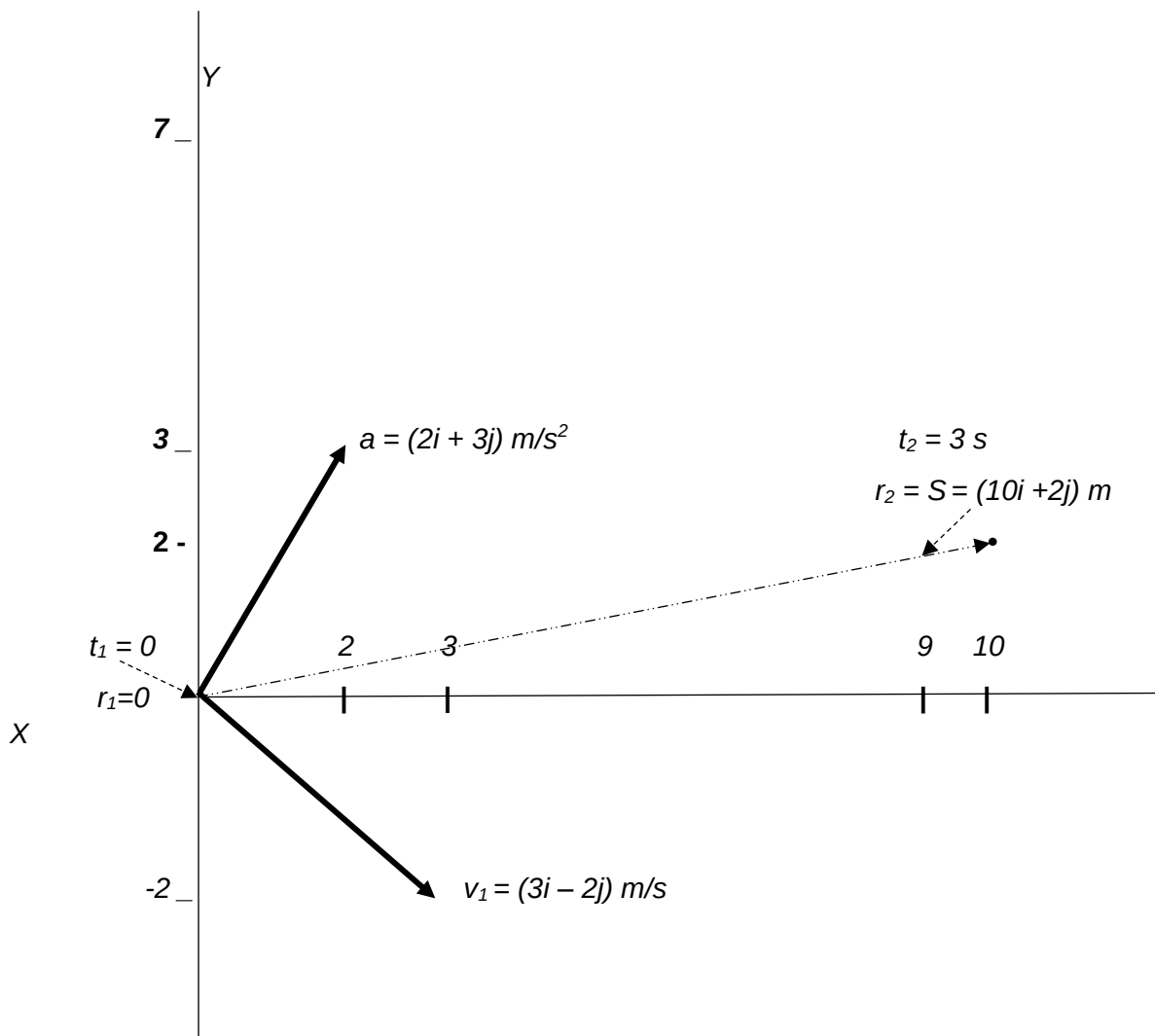
En esta última expresión se sustituye el valor de t en el que se requiera conocer sus coordenadas, por ejemplo para $t = 2$ s:

$$r_2 = (3 + 2) 2 \cdot i + [-2 + (3/2) 2] 2 \cdot j = (10 i + 2 j) m$$

entonces coordenadas de la partícula en $t = 2$: (10, 2).

Figura 2.6

Ejemplo 2.12 Diagrama esquemático



Notas: - Ambas componentes del vector de velocidad cambian pues el vector de aceleración tiene componentes en los dos ejes.

-Las componentes del vector de aceleración permanecen constantes.

-No se muestra en la figura el nuevo vector de velocidad v_2

La aceleración como cambio de la velocidad con respecto del tiempo.

Si la ecuación que relaciona la posición con el tiempo es de *segundo grado*, entonces se tiene un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A.). En este caso, la primera derivada dx/dt sigue siendo la velocidad, pero ésta queda aún en función del tiempo por lo que es velocidad instantánea, lo que indica su variabilidad que es precisamente la aceleración. Obteniendo la segunda derivada (d^2x/dt^2) llegamos al valor de la aceleración uniforme pues ya no tendremos involucrado al tiempo.

Debemos precisar que si la función que relaciona la posición $\underline{x}$ con el tiempo $\underline{t}$ fuera de *tercer grado*, se tendría el caso de que la aceleración también es variable con respecto al tiempo y no sería un M.R.U.A.

Ejemplo 2.13 (3.56 Serway): El desplazamiento de un cuerpo (en m) como función del tiempo (en s) es: $x = 5 + 4t - 3t^2$. a) ¿cuál es la velocidad como función del tiempo? ¿cuáles son las velocidades y aceleración en b) $t = 0.1$ s c) $t = 0$?

a) *velocidad como función del tiempo:*

$$v = dx/dt = d(5 + 4t - 3t^2) / dt = (4 - 6t) \text{ m/s} \quad \checkmark$$

b) *velocidad y aceleración en $t = 0.1$ s.*

$$v_{t=0.1 \text{ s}} = (4 - 6 \times 0.1) = 4 - 0.6 = 3.4 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$a = d^2x / dt^2 = d[dx / dt] / dt = d(4 - 6t) / dt = -6 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

c) velocidad y aceleración en $t = 0$.

$$v_{t=0 \text{ s}} = (4 - 6 \times 0) = 4 - 0 = 4 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$a_{t=0 \text{ s}} = -6 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.14 (3.57 Serway): La aceleración de un barco de motor como función del tiempo está dada por la ecuación $a = Bt - Ct^2$ donde las unidades de a son m/s^2 . a) ¿cuáles son las unidades de B y C ? b) ¿cuál es la velocidad en función del tiempo si el barco sale del reposo en $t = 0$? c) ¿en qué tiempo $t > 0$ la aceleración es cero? d) ¿cuál es la velocidad en el tiempo t encontrado en c)?

a) unidades de B y C :

como debe mantenerse la consistencia de las unidades en ambos lados de la ecuación $a = Bt - Ct^2$ y siendo las unidades de a , m/s^2 , entonces debemos escribir:

$$\text{m/s}^2 = (\text{m/s}^3)(\text{s}) - (\text{m/s}^4)(\text{s}^2)$$

$$\text{m/s}^2 = (\text{m/s}^2) - (\text{m/s}^2)$$

por lo que: $B: (\text{m/s}^3) \quad \checkmark \quad \text{y}$

$C: (\text{m/s}^4) \quad \checkmark$

b) la velocidad en función del tiempo si el barco sale del reposo en $t = 0$.

La ecuación de la velocidad en función del tiempo se obtiene integrando $a = Bt - Ct^2$, entonces:

$$v = \int (Bt - Ct^2) dt$$

$$v = (B/2)t^2 - (C/3)t^3 + c$$

como el barco sale del reposo en $t = 0$, tenemos que:

$$v = (B/2)t^2 - (C/3)t^3 \quad \checkmark$$

c) tiempo $t > 0$ donde la aceleración es cero.

sustituimos el valor de $a = 0$ en su ecuación:

$$a = Bt - Ct^2 ; \quad 0 = Bt - Ct^2 ; \quad 0 = B - Ct ; \quad t = B/C \quad \checkmark$$

d) velocidad en el tiempo t encontrado en c ($t = B/C$).

sustituyendo $t = B/C$ en la ecuación de velocidad:

$$v = (B/2)t^2 - (C/3)t^3 = (B/2)(B/C)^2 - (C/3)(B/C)^3 = B^3/2C^2 - B^3/3C^2$$

$$v = B^3/6C^2 \quad \checkmark$$

Caída libre.

La caída libre de una partícula u objeto supone que ésta solo está influenciada por la llamada aceleración vertical de la gravedad que denotaremos como $g = -9.81 \text{ m/s}^2$ (el signo negativo indica que g es hacia abajo) la cual se considera uniforme. Puede comenzar en el reposo o con una velocidad inicial por lo que las seis ecuaciones básicas (I a VI) de la cinemática son válidas en este tema simplemente sustituyendo en ellas g en vez de $\underline{a}$ y y en vez de $\underline{x}$ dado que el movimiento es vertical quedando:

$$\tilde{v} = (y_2 - y_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (I)}$$

$$\tilde{v} = (v_1 + v_2) / 2 \quad \text{----- (II)}$$

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$(y_2 - y_1) = (\frac{1}{2}) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g \quad \text{----- (V)}$$

$$(y_2 - y_1) = (\frac{1}{2}) g (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{--- (VI)}$$

Es importante recalcar que la velocidad en la caída libre es negativa ya que es en el sentido hacia abajo del eje Y, por lo que al sustituirla en alguna de las ecuaciones debe hacerse con el signo menos. Si el término de velocidad de la ecuación tiene signo positivo, el dato se escribe negativo, si el término de velocidad de la ecuación tiene signo negativo, entonces deben tomarse en cuenta ambos signos negativos, el de la velocidad y el de la ecuación.

Ejemplo 2.15 (3.45 Serway modificado): Un objeto cae desde una altura de 44 m golpeándose finalmente contra una caja metálica que se aplasta 46 cm. Despreciando

la resistencia del aire calcule: a) la velocidad del objeto al chocar contra la caja, b) Su aceleración durante el aplastamiento de la caja y c) el tiempo que tardó el aplastamiento.

a) la velocidad del objeto al chocar contra la caja:

$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g \quad \text{----- (V)}$$

$$(-44 - 0)m = (v_2^2 - 0)m^2/s^2 / 2(-9.81 \text{ m/s}^2)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática: $v_2 = 29.38 \text{ m/s}$ y $v_2 = -29.38 \text{ m/s}$ ✓ ↓

(se toma el valor negativo pues es velocidad hacia abajo)

b) Su aceleración durante el aplastamiento de la caja

En este caso la aceleración no es de la gravedad, sino que el cuerpo se desacelera al aplastar la caja, (desaceleración positiva hacia arriba).

$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(-0.46 - 0) m = [(0^2 - (-29.38)^2] / 2a ; \quad a = 938.34 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark \uparrow$$

Ejemplo 2.16 (3.46 Serway): Un objeto se lanza directamente hacia abajo con una velocidad inicial de 8 m/s desde una altura de 30 m ¿En qué momento golpea el suelo el objeto?

Datos: $y_1 = 0$; $y_2 = -30 \text{ m}$; $v_1 = -8 \text{ m/s}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $t_1 = 0$; $t_2 = ?$

Utilizando la ecuación (VI): $(y_2 - y_1) = (\frac{1}{2}) g (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1)$

Sustituyendo: $-30 \text{ m} - 0 = (\frac{1}{2}) (-9.81 \text{ m/s}^2)(t_2 - 0)^2 + (-8 \text{ m/s})(t_2 - 0)s$

Queda la ecuación cuadrática: $4.9 t^2 + 8t - 30 = 0$

Resolviendo: $t = 1.79 \text{ s}$; y $t = - 3.42 \text{ s}$.

Como el tiempo no puede ser negativo, la respuesta es:

$$t_2 = 1.79 \text{ s} \quad \checkmark$$

otra forma (en dos pasos):

paso 1- se calcula la velocidad de impacto con el suelo.

$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g \quad \text{----- (V)}$$

$$(- 30 - 0) \text{ m} = [(v_2)^2 - (-8 \text{ m/s})^2] / 2(-9.81 \text{ m/s}^2)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$v_2 = - 25.55 \text{ m/s} \text{ (se toma el valor negativo pues la velocidad es hacia abajo)}$$

paso 2- se calcula el tiempo de impacto.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$(-9.81 \text{ m/s}^2) = [v_2 - (- 25.55)] \text{ m/s} / (t_2 - 0) \text{ s}$$

$$t_2 = 1.79 \text{ s} \quad \checkmark$$

Tiro vertical.

Es el caso contrario a la caída libre, la partícula inicia su movimiento vertical con una velocidad hacia arriba positiva y debido a la aceleración de la gravedad hacia abajo, la velocidad disminuye hasta llegar a cero e iniciar la caída libre si no es detenida.

Las ecuaciones para el tiro vertical son las mismas que en la caída libre, salvo que la velocidad es positiva en la trayectoria ascendente, si la partícula llega al reposo e inicia su descenso, entonces la velocidad se vuelve negativa.

Ejemplo 2.17: Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 20 m/s. Calcular:

- a) Su altura a los 2 segundos.
- b) La magnitud de la velocidad que llevará a los 2 segundos.
- c) La altura máxima alcanzada.
- d) El tiempo que tardará en el aire.

a) altura a los 2 segundos.

$$\text{Datos: } y_1 = 0; \quad y_2 = ?; \quad t_1 = 0; \quad t_2 = 2 \text{ s}; \quad v_1 = 20 \text{ m/s}$$

$$(y_2 - y_1) = \left(\frac{1}{2}\right) g (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{--- (VI)}$$

$$(y_2 - 0) = \left(\frac{1}{2}\right) (-9.81 \text{ m/s}^2) (2 \text{ s} - 0)^2 + (20 \text{ m/s})(2 \text{ s} - 0)$$

$$y_2 = -19.62 \text{ m} + 40 \text{ m} = 20.38 \text{ m} \quad \checkmark$$

b) velocidad que a los 2 segundos.

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (v_2 - 20 \text{ m/s}) / (2 \text{ s} - 0); \quad v_2 = 0.38 \text{ m/s} \uparrow \quad \checkmark$$

c) La altura máxima alcanzada.

$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g \quad \text{----- (V)}$$

$$(y_2 - 0) = [0 - (20 \text{ m/s})^2] / 2(-9.81 \text{ m/s}^2); \quad y_2 = 20.38 \text{ m} \quad \checkmark$$

d) El tiempo que tardará en el aire.

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (0 - 20 \text{ m/s}) / (t_2 - 0) \text{ s}; \quad t_2 = 2.04 \text{ s} \quad (\text{tiempo de ascenso})$$

$$\text{Tiempo en el aire: } 2.04 \text{ s} \times 2 = 4.08 \text{ s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.18 (3.52 Serway): Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba de tal manera que alcanza una rapidez de 19.6 m/s al llegar a la mitad de su altura máxima. ¿Cuáles son: a) su altura máxima b) su velocidad un segundo después de ser lanzado y c) su aceleración al alcanzar su altura máxima?

a) altura máxima.

Tomemos 19.6 m/s como v_1 en la segunda mitad ascendente, entonces $v_2 = 0$

y sea $t_1 = 0$ en ese momento, calculamos el tiempo de la segunda mitad así:

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (0 - 19.6 \text{ m/s}) / (t_2 - 0) \text{ s};$$

$$t_2 = -19.6 \text{ m/s} / -9.81 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ s}$$

por tanto, la segunda mitad medirá:

$$(y_2 - y_1) = (\frac{1}{2}) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

$$(y_2 - 0) = (\frac{1}{2}) (19.6 + 0) (2 - 0)$$

$$y_2 = 19.6 \text{ m}$$

por lo que la altura máxima será:

$$y_{\text{máx.}} = 19.6 \times 2 = 39.2 \text{ m} \quad \checkmark$$

b) velocidad un segundo después del lanzamiento.

$$V_2 = 19.6 \text{ m/s}; t_1 = 1; t_2 = 2\text{s}; g = -9.81 \text{ m/s}^2; v_1 = ?$$

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (19.62 - v_1) \text{ m/s} / (2 - 0) \text{ s}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 2\text{s} = 19.62 \text{ m/s} - v_1$$

$$v_1 = 29.43 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

c) aceleración al alcanzar su altura máxima.

Ahí su movimiento cambia de ascendente a descendente.

Como el objeto en su altura máxima está en reposo, puede decirse que su

aceleración instantánea es cero. $\checkmark$

2.2. Movimiento curvilíneo.

Este movimiento es en *dos dimensiones* y la partícula u objeto describe una trayectoria curva. Analizaremos dos tipos:

- *Movimiento circular uniforme.*

- *Tiro parabólico, (lanzamiento de proyectiles).*

2.2.1. Movimiento circular uniforme (m. c. u.).

Es aquel que tiene de trayectoria una circunferencia de radio R. Como origen del sistema de referencia se utiliza el centro de dicha circunferencia.

En él se cumple:

- El módulo (magnitud) del vector de posición es constante e igual al radio.
- El espacio recorrido es el arco de la circunferencia.
- El vector velocidad es siempre perpendicular al radio.
- Todos tienen aceleración normal (más comúnmente llamada centrípeta).

Velocidad angular ω . (letra griega omega minúscula):

Se define como el ángulo de giro ϕ en *radianes* en la unidad de tiempo según el S.I.:

$$\omega = \phi / t \quad \text{rad / seg}$$

Otra unidad de velocidad angular muy usada es las rpm (vueltas o revoluciones por minuto) o rps (revoluciones por segundo). La siguiente expresión muestra la relación entre estas diferentes maneras:

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Movimiento circular uniforme.

Es aquel que gira con velocidad angular constante.

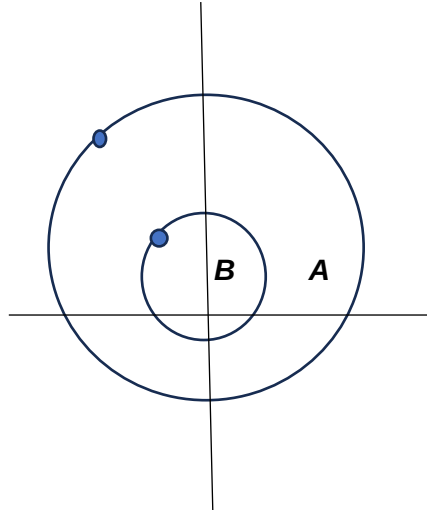
No obstante que ω es constante, hay una aceleración: la aceleración normal o centrípeta a_c que está dirigida al centro de la circunferencia en todo momento.

La aceleración centrípeta a_c está en función de la velocidad angular del cuerpo y del radio de la circunferencia que describe mediante la ecuación:

$$a_c = \omega^2 r \quad (\text{ii}) \quad r \text{ (radio)}$$

También puede expresarse en función de la velocidad tangencial y el radio:

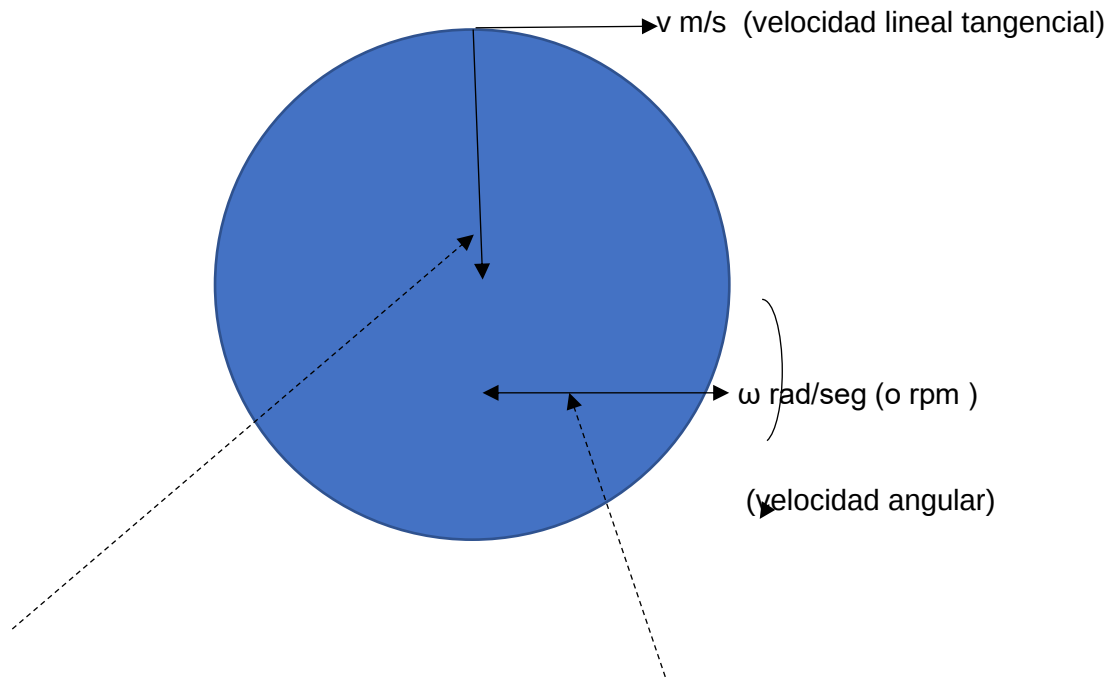
$$a_c = v^2 / r \quad (\text{iii}) \quad \text{Observemos la siguiente figura:}$$

Figura 2.7*Velocidad angular*

Imaginemos dos puntos A y B de un disco que gira con velocidad angular constante, el punto B, más interno, al describir una vuelta completa, recorre menos distancia que A.

Por lo tanto, el punto A va a mayor velocidad tangencial v que B, aunque la velocidad angular ω es la misma para ambos, pues giran el mismo ángulo en el mismo tiempo.

La Figura 2.8 muestra los principales elementos que están presentes en el movimiento circular uniforme.

Figura 2.8*Principales elementos de movimiento circular uniforme*

$$a_c = \omega^2 r \quad (\text{ii})$$

r (radio)

$$a_c = v^2 / r \quad (\text{iii})$$

En este movimiento se definen dos magnitudes:

- 1.- el período y
- 2.- la frecuencia.

El período (T) se define como el *tiempo* que tarda un móvil en dar una vuelta completa. En el SI se mide en segundos.

$$T = t / \# \text{ rev.} \quad (\text{iv})$$

Ejemplo 2.19: si en 20 segundos el móvil da 5 vueltas

$$t = 20 \text{ s } \text{ y } \# \text{ rev} = 5 \text{ rev} \quad \checkmark$$

$$T = 20 \text{ s} / 5 \text{ rev} = 4 \text{ s/rev} \quad \checkmark$$

La frecuencia (f) se define como el número de revoluciones que da el móvil en la unidad de tiempo (1segundo). En el SI se mide en Hz.(Hertz).

la relación entre ambas magnitudes es:

$$f = 1 / T \text{ o bien: } 1 / (\text{s} / \# \text{ rev})$$

$$f = 1/T = \# \text{ rev./s} \quad (\text{v})$$

En el ejemplo anterior:

$$f = 1 / T = 1 / (t / \# \text{ rev}) = 1 / (20 \text{ s} / 5 \text{ rev}) = (1 / 4 \text{ s/rev}) = 0.25 \text{ rev/ s}$$

$$f = 0.25 \text{ Hz} \quad \checkmark$$

Otras relaciones útiles en el movimiento circular uniforme:

$$S = \varphi r. \quad (\text{vi}) \quad S: (\text{desplazamiento, m}) \quad \varphi: (\text{ángulo, en radianes}); r: (\text{radio, metros})$$

$$S = \omega t r \quad (\text{vii}); \quad \omega: (\text{velocidad angular, rad/s}); t: (\text{tiempo, segundos}).$$

$$\varphi = \omega t \quad (\text{viii}) \quad \varphi: (\text{ángulo girado, radianes})$$

$$v = \omega r \quad (\text{ix}); \quad v: (\text{velocidad lineal, m/s}); \quad \omega: (\text{velocidad angular, rad/s}).$$

$$\omega = \varphi/t = 2\pi/T = 2\pi f \quad (\text{x}) \quad T: (\text{periodo, s/rev}); f: (\text{frecuencia, \#rev/s})$$

Nótese que cuanto mayor es el radio, mayor es la velocidad lineal tangencial para el mismo valor de velocidad angular.

Como:

$$a_c = \omega^2 r \text{ (ii)} \quad \text{y} \quad v^2 = \omega^2 r^2 \text{ (vi)}$$

entonces:

$$a_c = v^2 / r \text{ (iii)}$$

Ejemplo 2.20: Un disco de 15 cm de radio gira a 45 rpm. Calcula: a) La velocidad angular; b) La velocidad lineal de un punto de la periferia del disco; c) El número de vueltas que da el disco en 30 min; d) El desplazamiento lineal de un punto de la periferia del disco en ese tiempo; e) Período y frecuencia del movimiento; f) La aceleración normal o centrípeta de un punto de la periferia del disco.

$$r = 15 \text{ cm.}$$

a.-)

Rotación: 45 rpm.

$$\omega = \phi / t \text{ (i)}$$

$$\omega = 45 \text{ rpm} \times 2\pi / 60 \text{ ;}$$

$$\omega = 45 \times \pi / 30 = 4.71 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

$$\text{b.-)} \quad v = \omega r \text{ (viii)}$$

$$v = (4.71 \text{ rad/s}) 0.15 \text{ m} =$$

$$v = 0.706 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$\text{c.-)} \quad \text{núm. de vueltas en 30 min :}$$

$$45 \text{ rpm} \times 30 \text{ min} = 1,350 \text{ vueltas.} \quad \checkmark$$

$$\text{d.-)} \quad S = \omega r t \text{ (vii)}$$

$$S = 4.71 \text{ rad/seg} \times 30 \text{ min} \times 60 \text{ seg/min} \times 0.15 \text{ m}$$

$$= 1,217.7 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$\text{e.-)} \quad T = t / \# \text{ rev.} \quad (\text{iv})$$

$$T = 1 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} / 45 \text{ rev / min}$$

$$T = 1.33 \text{ s/rev} \quad \checkmark$$

$$f = 1 / T \quad (\text{v})$$

$$f = 1 / 1.33 \text{ s/rev} = 0.75 \text{ rev/s} \quad \checkmark$$

$$\text{f.-)} \quad a_c = \omega^2 r \quad (\text{ii})$$

$$a_c = (4.71 \text{ rad/s})^2 \times 0.15 \text{ m} = 0.7065 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.21: Las aspas de 75 cm de un molino giran con velocidad angular constante. Si dan

90 vueltas por minuto, calcula: a) La velocidad angular en radianes por segundo; b) El período y la frecuencia; c) La aceleración normal o centrípeta de un punto de la periferia; d) El desplazamiento lineal y angular de un punto de la periferia en 2 min

$$r = 75 \text{ cm}$$

$$f = 90 \text{ rpm} \quad \text{a) velocidad angular: } \omega = \phi / t$$

$$\omega = \text{rpm} \times 2\pi \text{ rad} / 60 \text{ s} = 90\pi / 30 = 9.42 \text{ rad / s} \quad \checkmark$$

$$\text{b) -el período: } T = t / \# \text{ rev}$$

$$T = 60 \text{ s} / 90 \text{ rev} = 0.67 \text{ s/rev}$$

$$\text{- la frecuencia: } f = 1 / T$$

$$f = 1 / 0.67 = 1.49 \text{ rev/s} \quad \checkmark$$

$$\text{c.-) aceleración normal o centrípeta: } a_c = \omega^2 \times r$$

$$a_c = (0.67)^2 \times 0.75 = 0.33 \text{ m/seg}^2 \quad \checkmark$$

desplazamiento lineal y angular en 2 min.

$$S = \omega r t = 9.42 \text{ rad/s} \times (2 \times 60) \times 0.75 \text{ m} = 828 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$\phi = \omega t = 9.2 \text{ rad/s} \times (2 \times 60) = 1,104 \text{ rad.} \quad \checkmark$$

Tiro parabólico.

Este tema se aborda mediante presentación en PowerPoint en el siguiente [link](#):

U.2 Ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1.- (4.7 Serway): Un pez nada sobre un plano horizontal con una velocidad $v_1 = (4i + j) \text{ m/s}$ en un punto en el océano cuya distancia desde cierta roca es $r_1 = (10i - 4j) \text{ m}$. Después de nada con aceleración constante durante 20 segundos, su velocidad es $v_2 = (20i - 5j) \text{ m/s}$. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración, su magnitud y dirección inmediatamente después de esos 20 segundos? b) ¿En qué posición se encuentra el pez en $t = 25 \text{ s}$ y a qué velocidad y dirección se está moviendo? c) ¿cuál es su distancia a la roca?

Ejercicio 2.- Un camión se mueve a velocidad constante de 90 km/h por una autopista recta.

- ¿qué distancia recorre en 2 horas?
- ¿qué distancia recorre por segundo?
- ¿cuánto tardará en recorrer 10km?

Ejercicio 3.- En el mismo instante, una motocicleta sale de la ciudad A y otra de la ciudad B, con la intención de encontrarse en el camino recto de 60 kilómetros que une ambas ciudades. Sabiendo que las velocidades de las motocicletas son 70km/h y 55km/h, calcular cuánto tardarán en encontrarse.

Ejercicio 4 Movimiento Circular Uniforme (M. C. U.): Una rueda de 40 cm de radio gira con un período de 1.5 s. Considera un punto A en la periferia de la rueda y un punto B en el medio de la rueda y calcula para dichos puntos: a) La frecuencia; b) Velocidad

lineal y angular; c) Desplazamiento lineal, angular y número de vueltas que da en 10 min.

Ejercicio 5: Un coche toma una curva de 250 m de radio a una velocidad de 60 km/h. Determina: a) La velocidad angular (rpm); b) Período y frecuencia; c) La aceleración normal o centrípeta; d) Ángulo de la curva si tarda 15 s en dar la curva; e) Espacio lineal que recorre el coche en ese tiempo.

Ejercicio 6. - (3.36 Serway): Dos trenes expreso parten con una diferencia de 5 minutos. Partiendo del reposo, cada uno es capaz de alcanzar una rapidez máxima de 160 km/h después de acelerar

uniformemente a lo largo de una distancia de 2.0 kilómetros. a) ¿Cuál es la aceleración de cada

tren? b) ¿Cuán lejos está el primer tren cuando el segundo inicia su carrera? c) ¿Cuán lejos está uno del otro cuando ambos viajan a la misma velocidad máxima?

Ejercicio 7 (6.40 Tippens). Un proyectil sale disparado desde el suelo con una velocidad de 35 m/s a un ángulo de 32° . ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

Ejercicio 8 (6.41 Tippens). El proyectil del problema anterior (6.40), se eleva y cae, golpeando una cartelera de anuncios instalada 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es el tiempo de vuelo y qué distancia horizontal máxima recorrió el proyectil?

Unidad 2

Anexo 1

Respuesta a los ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1.- (4.7 Serway): Un pez nada sobre un plano horizontal con una velocidad $v_1 = (4i + j)$ m/s en un punto en el océano cuya distancia desde cierta roca es $r_1 = (10i - 4j)$ m. Después de nada con aceleración constante durante 20 segundos, su velocidad es $v_2 = (20i - 5j)$ m/s. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración, su magnitud y dirección inmediatamente después de esos 20 segundos? b) ¿En qué posición se encuentra el pez en $t = 25$ s y a qué velocidad y dirección se está moviendo? c) ¿cuál es su distancia a la roca?

componentes de la aceleración, su magnitud y dirección después de 20 segundos.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$a = [(20i - 5j) - (4i - j)] \text{ m/s} / (20 - 0) \text{ s}$$

$$a = [(4/5) i - (3/10) j] \text{ m/s}^2 \quad \checkmark \quad (\text{componentes de } a).$$

$$|a| = \sqrt{(4/5)^2 + (-3/10)^2} = 0.8544 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark \quad (\text{magnitud de } a)$$

$$\theta_a = \tan^{-1} [(-3/10) / (4/5)] = -20.55^\circ = 339.55^\circ \quad \checkmark \quad (\text{dirección de } a \text{ desde } X^+)$$

a) posición del pez en $t = 25$ s y dirección en la que se está moviendo.

$$(x_2 - x_1) = (\frac{1}{2}) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(r_2 - r_1) = (\frac{1}{2}) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1)$$

$$(r_2 - 0) = (\frac{1}{2})[(4/5) i - (3/10) j] \text{ m/s}^2 (25 - 0)^2 \text{ s}^2 + (4i + j) \text{ m/s} (25 - 0) \text{ s}$$

$$\mathbf{r}_2 = 360 \mathbf{i} - 72.75 \mathbf{j} \quad \checkmark \quad (\text{vector de posición en } t = 25 \text{ s})$$

Encontremos el vector de la velocidad en $t = 25 \text{ s}$...

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$[(4/5) \mathbf{i} - (3/10) \mathbf{j}] \text{ m/s}^2 = [\mathbf{v}_2 - (4\mathbf{i} - \mathbf{j})] \text{ m/s} / (25 - t_1) \text{ s}$$

$$\mathbf{v}_2 = (24 \mathbf{i} - 6.5 \mathbf{j}) \text{ m/s} \quad \checkmark \quad (\text{velocidad en } t = 25 \text{ s})$$

entonces:

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{24^2 + (-6.5)^2} = 24.9 \text{ m/s}$$

$$\theta_{\mathbf{v}_2} = \tan^{-1} (-6.5 / 24) = -15.15^\circ = 344.85^\circ \quad (\text{dirección de } \mathbf{v}_2)$$

Por lo que la dirección del movimiento en $t = 25 \text{ s}$ es: $344.85^\circ \quad \checkmark$

su distancia a la roca:

tomando el vector de posición $\mathbf{r}_2$ en $t = 25 \text{ s}$...

$$\mathbf{r}_2 = 360 \mathbf{i} - 72.75 \mathbf{j}$$

$$|\mathbf{r}_2| = \sqrt{360^2 + (-72.75)^2} = 367.56 \text{ m} \quad \checkmark \quad (\text{distancia a la roca}).$$

Ejercicio 2.- Un camión se mueve a velocidad constante de 90 km/h por una autopista recta.

¿qué distancia recorre en 2 horas?

¿qué distancia recorre por segundo?

d. ¿cuánto tardará en recorrer 10km?

a) ¿qué distancia recorre en 2 horas?

La ecuación del movimiento es:

$$v = d / t; \quad d = v \cdot t$$

sustituimos los datos...

$$d = 90 \text{ km/h} \times 2 \text{ hr} = 180 \text{ km} \quad \checkmark$$

b) distancia que recorre por segundo.

$$d = v \cdot t$$

$$d = 90 \text{ km/h} \times (1 \text{ h} / 3,600 \text{ s}) = 0.025 \text{ km} = 25 \text{ m} \quad \checkmark$$

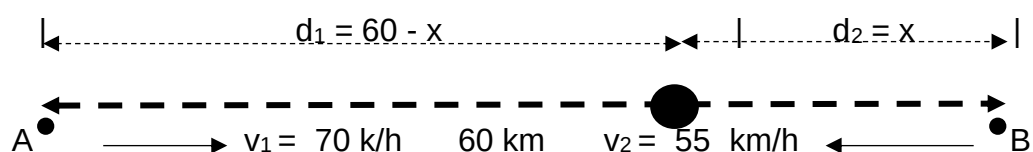
c): tiempo en recorrer 10km.

$$t = d / v = 10 \text{ km} / 90 \text{ km/h} = 0.111 \text{ hr}$$

$$t = 0.111 \text{ h} (3,600 \text{ s/h}) = 400 \text{ s} = 6.67 \text{ min}$$

Ejercicio 3.- En el mismo instante, una motocicleta sale de la ciudad A y otra de la ciudad B, con la intención de encontrarse en el camino recto de 60 kilómetros que une ambas ciudades. Sabiendo que las velocidades de las motocicletas son 70km/h y 55km/h, calcular cuánto tardarán en encontrarse.

El diagrama de la situación es:



Como la distancia entre las ciudades es 60 km, si una motocicleta recorre X km, la otra recorrerá $(60 - X)$ km.

Sabemos que el tiempo es el mismo para ambas motocicletas.

$$t_1 = t_2 = t$$

Para la motocicleta que circula a 55 km/h tenemos

$$x = 55t$$

y para la otra

$$60 - x = 70t$$

Tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 55t \\ 60 - x = 70t \end{cases}$$

Resolvemos:

$$t = 0.48 \text{ h} = 28.8 \text{ min} \quad \checkmark$$

Ejercicio 4 Movimiento Circular Uniforme (M. C. U.): Una rueda de 40 cm de radio gira con un período de 1.5 s. Considera un punto A en la periferia de la rueda y un punto B en el medio de la rueda y calcula para dichos puntos: a)

La frecuencia; b) Velocidad lineal y angular; c) Desplazamiento lineal, angular y número de vueltas que da en 10 min.

$T = 1.5 \text{ s}$ a) frecuencia.

$$f = 1/T = \# \text{ rev./s} \quad (v)$$

$$f = 1 / 1.5 = 0.67 \text{ rev/s} \quad \checkmark$$

$$r_1 = 40 \text{ cm} \quad \text{b)} \quad v = \omega r \quad (\text{ix}); \quad \omega = \varphi/t = 2\pi/T = 2\pi f \quad (\text{x})$$

$$v_1 = \omega r = (2\pi/T) = (2\pi/1.5)0.40 = 1.67 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$r_2 = 20 \text{ cm} \quad v_2 = (2\pi/1.5)0.20 = 0.83 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$\text{c) } S = \omega t r \quad (\text{vii});$$

$$S_1 = (2\pi/T) \times t \times r = (2\pi/1.5) (10 \text{ min} \times 60) 0.40 = 1,002 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$S_2 = (2\pi/T) \times t \times r = (2\pi/1.5) (10 \text{ min} \times 60) 0.20 = 500.1 \text{ m} \quad \checkmark$$

$$\varphi = \omega t \quad (\text{viii})$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \omega t = (2\pi/T) \times t = (2\pi/1.5) \text{ rad/s} (10 \text{ min} \times 60) = 800 \text{ rad.}$$

✓

$$f = 1/T = \# \text{ rev./s} \quad (\text{v})$$

$$f = \# \text{ vueltas} = f \times t = 0.67 \text{ rev/s} \times 10 \text{ min} \times 60 = 402 \text{ rev.} \quad \checkmark$$

Ejercicio 5: Un coche toma una curva de 250 m de radio a una velocidad de 60 km/h. Determina: a) La velocidad angular (rpm); b) Período y frecuencia; c) La aceleración normal o centrípeta; d) Ángulo de la curva si tarda 15 s en dar la curva; e) Espacio lineal que recorre el coche en ese tiempo.

$r = 250 \text{ m}$ a) velocidad angular ω (rpm).

$v = 60 \text{ km/h}$

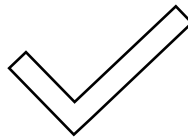
$$\omega = \phi / t \quad (\text{i})$$

$$v = \omega r \quad (\text{ix});$$

$$\omega = v / r$$

$$= 60 \text{ km/h} \times (1 \text{ h} / 60 \text{ min}) / 0.25 \text{ km} = 4 \text{ rad/min}$$

$$\omega = 4 \text{ rad/min} \times (1 \text{ vuelta} / 2\pi \text{ rad}) = 0.6366 \text{ rpm} \quad \checkmark$$



b) Período y frecuencia .

$$T = t / \# \text{ rev.} \quad (\text{iv})$$

$$T = 1 \text{ min} (60\text{s/min}) / 0.6366 \text{ rev}$$

$$T = 94.25 \text{ s/rev.} \quad \checkmark$$

$$f = 1/T = \# \text{ rev./s} \quad (\text{v})$$

$$f = 1/94.25 \text{ s/rev} = 0.01061 \text{ rev/s} \quad \checkmark$$

c) La aceleración normal o centrípeta.

$$a_c = v^2 / r \text{ (iii)} = (60 \text{ km/h})^2 / 0.250 \text{ km} = 240 \text{ km/h}^2$$

$$a_c = (240 \text{ km/h}^2) \times (1,000 \text{ m/km}) / 3,600^2 \text{ s}^2/\text{hr}^2$$

$$a_c = 0.0185185 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

d) Ángulo de la curva si tarda 15 s en darla.

$$\phi = \omega t \text{ (viii)}; \quad \phi = 4 \text{ rad/min} \times (15 \text{ s}) (1 \text{ min} / 60 \text{ s}) = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ \quad \checkmark$$

e) Espacio lineal que recorre el coche en ese tiempo.

$$S = \phi r. \text{ (vi)}; S = 1 \text{ rad} \times 250 \text{ m} = 250 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejercicio 6.- (3.36 Serway): Dos trenes expreso parten con una diferencia de 5 minutos. Partiendo del reposo, cada uno es capaz de alcanzar una rapidez máxima de 160 km/h después de acelerar uniformemente a lo largo de una distancia de 2.0 kilómetros. a) ¿Cuál es la aceleración de cada tren? b) ¿Cuán lejos está el primer tren cuando el segundo inicia su carrera? c) ¿Cuán lejos está uno del otro cuando ambos viajan a la misma velocidad máxima?

aceleración de cada tren.

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(2 - 0) \text{ km} = [(160)^2 - (0)^2] \text{ km}^2 / 2a;$$

$$a = 6,400 \text{ km/h}^2 = 0.4938 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

distancia del primer tren cuando el segundo inicia su carrera.

-tiempo para alcanzar la velocidad máxima de 160 km/h:

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

$$(2 - 0) \text{ km} = \left(\frac{1}{2}\right) (0 + 160) \text{ km/h} (t_2 - 0)$$

$$t_2 = 0.025 \text{ h} = 1.5 \text{ min} = 90 \text{ s.}$$

-distancia recorrida en 5 min: (1.5 min con M.R.U.A. y 3.5 min con M.R.U.)

$$\text{M.R.U.A.: } (x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

$$(x_2 - 0) \text{ km} = \left(\frac{1}{2}\right) (0 + 160) \text{ km/h} (0.025 - 0) \text{ h; } x_2 = 2 \text{ km}$$

$$\text{M.R.U.: } v = s / t = (x_2 - x_1) / t \text{ ---- def. M.R.U.}$$

$$160 \text{ km/h} = (x_2 - x_1) / [3.5 \text{ min} \times (1 \text{ h}/60 \text{ min})]; x_2 = 9.33 \text{ km}$$

Entonces, cuando el segundo tren inicia su carrera el primero está a:

$$2 + 9.33 = 11.33 \text{ km} \quad \checkmark$$

distancia entre los trenes cuando ambos viajan a la misma velocidad máxima.

En los dos km que el segundo alcanza la máxima velocidad, en 1.5 min, el primero avanza adicionalmente:

$$v = s / t = (x_2 - x_1) / t \text{ ---- def. M.R.U.}$$

$$v = s / t = (x_2 - x_1) / t$$

$$160 \text{ km/h} = s / 1.5 \text{ min} (1 \text{ h}/60 \text{ min})] = 4 \text{ km}$$

Entonces cuando ambos viajan a la velocidad máxima la separación entre ellos es:

$$11.33 + 4 - 2 = 13.33 \text{ km} \quad \checkmark$$

Ejercicio 7 (6.40 Tippens). Un proyectil sale disparado desde el suelo con una velocidad de 35 m/s a un ángulo de 32°. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

$$Y_{\text{máx}} = (v_0^2 \sin^2 \theta_0) / 2g$$

$$Y_{\text{máx}} = (35 \text{ m/s})^2 \sin^2 32^\circ / 2(9.81 \text{ m/s}^2) = 17.53 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejercicio 8 (6.41 Tippens). El proyectil del problema anterior (6.40), se eleva y cae, golpeando una cartelera de anuncios instalada 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es el tiempo de vuelo y qué distancia horizontal total que recorrió el proyectil?

Componente vertical de la velocidad inicial.

$$v_{y1} = (35 \text{ m/s}) \sin 32^\circ = 18.547 \text{ m/s}$$

tiempo de vuelo de ascenso:

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (0 - 18.547) \text{ m/s} / (t_2 - 0) \text{ s}$$

$$t_2 = 1.89 \text{ s}$$

Tiempo de vuelo de descenso:

como la cartelera está a 8 m de altura, el descenso del proyectil será de:

$$(17.53 - 8) \text{ m} = 9.53 \text{ m}$$

$$(y_2 - y_1) = \left(\frac{1}{2}\right) g (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{--- (VI)}$$

$$(-9.53 - 0) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (-9.81 \text{ m/s}^2) (t_2 - 0)^2 + 0(t_2 - 0)$$

$$t_2 = 1.39 \text{ s}$$

$$\text{Tiempo total de vuelo: } (1.89 + 1.39) = 3.28 \text{ s} \quad \checkmark$$

:

distancia horizontal total que recorrió el proyectil

Componente horizontal de la velocidad inicial.

$$v_{x1} = (35 \text{ m/s}) \cos 32^\circ = 29.68 \text{ m/s}$$

distancia total horizontal recorrida:

$$v = s / t = (x_2 - x_1) / t \quad \text{---- def. M.R.U.}$$

$$29.68 \text{ m/s} = (x_2 - 0) / 3.28 \text{ s} = 97.65 \text{ m} \quad \checkmark$$

UNIDAD 3: Dinámica de una Partícula.

3.1. Concepto de partícula, masa y fuerza

Partícula: Es la concepción simplificada de un cuerpo como un todo, asumiendo que toda su masa está concentrada en un solo punto para facilitar el análisis de su movimiento. Dicho punto se conoce como el *centro de masa*.

Una partícula, no necesariamente debe interpretarse como un corpúsculo (ejemplo: automóvil, persona, etc.).

Masa: Es una característica inherente a la materia de un cuerpo o partícula y es independiente del medio que lo rodea, es decir un cuerpo tendrá la misma masa en cualquier lugar en el Universo. La medición de la masa, es una cantidad física escalar.

Unidad de masa: La unidad de masa es el Kilogramo y su símbolo es Kg, esto en el Sistema Internacional de Unidades (SI)

El Kilogramo Patrón:

El Kilogramo Patrón es un modelo físico real de la unidad de medida de masa en el (SI). Este patrón, generalmente en forma de cilindro de platino e iridio, sirve como referencia primaria para calibrar balanzas y sistemas de medición de masas en todo el mundo.

La inercia. - Es la tendencia que tienen los objetos a mantener su estado inercial de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, ya sea en su velocidad o en su dirección, por lo que existen dos tipos de inercia o estados inerciales: inercia de reposo e inercia de M.R.U.

Cambios del estado inercial:

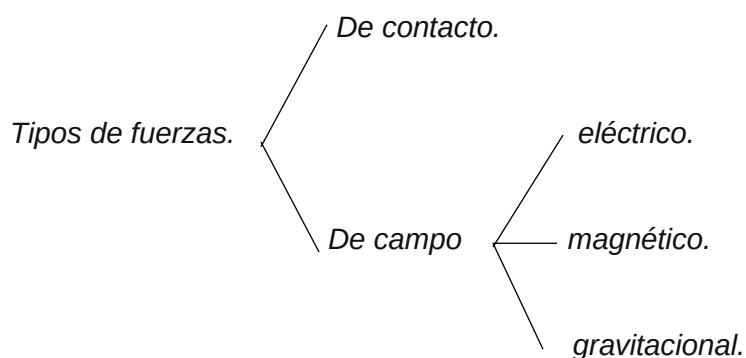
- a- Del reposo a M.R.U.
- b- De M.R.U. al reposo.
- c- Cambio de velocidad, ya sea incremento o decremento (siempre a M.R.U.).
- d- Cambio de dirección de M.R.U. sin cambio de velocidad.

Fuerza. – Es la manifestación de la energía como la capacidad de cambiar el estado inercial de un cuerpo o partícula. También puede definirse como la energía capaz de desarrollar un trabajo. Esta última definición se interpretará u usará en el tema de Trabajo más adelante. La fuerza, tiene magnitud o módulo, dirección y sentido, por lo que es de naturaleza vectorial. Para definir completamente una fuerza es necesaria su magnitud, dirección y sentido.

Si se aplican varias fuerzas simultáneas a un objeto y éste no cambia su estado inercial, entonces el efecto total del conjunto de fuerzas sobre el objeto es cero. Si la resultante de las fuerzas es diferente de cero, el objeto cambiará su estado inercial. El estado inercial estará cambiando en tanto la fuerza siga aplicada.

De igual manera puede decirse que si un cuerpo está cambiando su estado inercial, entonces significa que una fuerza está actuando sobre él.

Una clasificación útil de fuerzas para este tema es la siguiente:



3.2. Leyes de Newton.

Isaac Newton (4 de enero de 1643, 31 de marzo de 1727):

Físico y matemático inglés del siglo XVII (1643 – 1727). Entre sus aportaciones más relevantes a la física clásica están la explicación de la gravitación universal y los tres principios básicos de la mecánica clásica, estos últimos explican el movimiento de los cuerpos mediante las tres leyes que llevan su nombre.

En su obra: “Principios Básicos de la Filosofía Natural” deja un legado cuyos conceptos y aplicaciones son válidos hasta el día de hoy y son la piedra angular de la física clásica también llamada física Newtoniana, en honor a este notable genio.

Primera Ley de Newton.

Galileo y Kepler sentaron las primeras bases científicas sobre el tema del movimiento de los cuerpos. Sin embargo fue Newton quien desarrolla una teoría estructurada del movimiento y es así como postula la primera ley de tres.

También llamada *ley de la inercia*, esta primera ley establece que un objeto permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.), siempre y cuando no se aplique ninguna fuerza externa que modifique esta situación. Es decir, no modificará su estado inercial a menos que una fuerza o la resultante diferente de cero de un conjunto de ellas actúe sobre el objeto obligando al cambio.

Esta ley de no se representa por una ecuación determinada, ya que es una ley conceptual enunciativa más que una fórmula matemática, sin embargo, puede ser representada mediante la expresión

$$\text{Si } F = 0 \quad \text{o} \quad \text{si } \sum F = 0 \quad \text{entonces:} \quad dv / dt = 0$$

Interpretación:

Si la resultante de las fuerzas (ΣF) aplicadas sobre un cuerpo es nula, el cambio en su velocidad con respecto al tiempo (dv / dt), también será nulo y viceversa.

La Primera Ley de Newton no es aplicada en planteamientos de física mediante una fórmula matemática, sino a través de la comprensión del concepto de inercia y su efecto en el movimiento de los cuerpos.

La primera ley de Newton muestra que la materia no se modifica por sí misma, sino que a través de la acción de una **fuerza externa**. Asimismo, que un cuerpo que se encuentre en movimiento, se mantendrá de esta manera si no se le aplica el efecto de una fuerza.

Segunda Ley de Newton.

Esta Ley de Newton relaciona la aceleración que es una variable de la *cinemática* con la fuerza y la masa, variables de la *cinética*. El postulado de esta ley es como sigue:

Si al aplicar de una fuerza externa sobre un cuerpo, éste se acelera, la aceleración es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a su masa.

La segunda ley de Newton se representa mediante la fórmula:

$$a = F / m$$

donde: a – aceleración.

F – Fuerza aplicada.

m – masa del cuerpo.

Unidades: En el Sistema Internacional (SI), las unidades son:

La aceleración en m/s^2 .

La Fuerza en Newtons (N).

La masa en kg.

Recordemos que el Newton es la fuerza que se necesita para imprimirle, a una masa de 1 kg, una aceleración de $1 m/s^2$.

Las unidades del Newton son el $kg \cdot m/s^2 = N$.

Una forma muy común de escribir esta ecuación es despejando la fuerza F:

$$F = m \times a$$

El cálculo del peso de un objeto es un caso de aplicación directa de la ecuación anterior la cual toma la conocida forma:

$$P = W = m \times g$$

Donde W: peso del objeto en unidades de fuerza (N).

m: masa del objeto (kg).

g: aceleración de la gravedad.

Como puede verse, la segunda ley de Newton nos proporciona el peso al sustituir la aceleración por la de la aceleración gravitatoria y la fuerza es precisamente el peso.

Ejemplo 3.1: ¿Cuál es la fuerza mínima que necesaria para levantar un objeto que tiene una masa de 17 kg?

Calculemos el peso de cuerpo con la segunda ley de Newton:

$$P = m \times g = 17 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 116.77 \text{ N}$$

Aplicando ahora la primera ley de Newton, aplicando una fuerza vertical hacia arriba de 116.77 N el objeto seguirá en reposo ya que resultante será cero. Según la segunda ley, se debe ejercer una fuerza mayor a 116.77 N para que el objeto suba.

Nótese que en este ejemplo se aplican la primera y la segunda ley de Newton.

Ejemplo 3.2 (5.17Serway): Dos fuerzas, $F_1 = (3i - 5j) \text{ N}$ y $F_2 = (2i + j) \text{ N}$ se aplican sobre un cuerpo de 1.5 kg. a) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración, b) Si el cuerpo está inicialmente en reposo en el origen, ¿cuál es su vector de posición en $t = 4 \text{ s}$? Trace un diagrama esquemático que muestre el planteamiento y la resolución del ejercicio.

la aceleración.

La fuerza resultante es:

$$R = F_1 + F_2 = (3i - 5j) \text{ N} + (2i + j) \text{ N} = (5i - 4j) \text{ N}$$

$$\text{El módulo de } R: |R| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = 6.4 \text{ N}$$

$$\text{La dirección de } R: \theta_R = \tan^{-1} (-4 / 5) = -38.66^\circ = 321.34^\circ$$

La aceleración: $a = F / m = 6.4 \text{ N} / 1.5 \text{ kg} = 4.26 \text{ m/s}^2$ ✓

La dirección de la aceleración es la misma que la de la fuerza que la produce, entonces:

$$\theta_a = 321.34^\circ \quad \checkmark$$

a) el vector de posición en $t = 4 \text{ s}$.

Las componentes de la aceleración son:

$$a_x = 4.26 \text{ m/s}^2 \times \cos(321.34^\circ) = 3.326 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = 4.26 \text{ m/s}^2 \times \sin(321.34^\circ) = -2.661 \text{ m/s}^2$$

- el desplazamiento en x :

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) a (t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) \quad \text{----- (VI)}$$

$$(x_2 - 0) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (3.326 \text{ m/s}^2) (4 \text{ s} - 0)^2 + 0(4 \text{ s} - 0)$$

$$X_2 = 26.56 \text{ m}$$

- el desplazamiento en y :

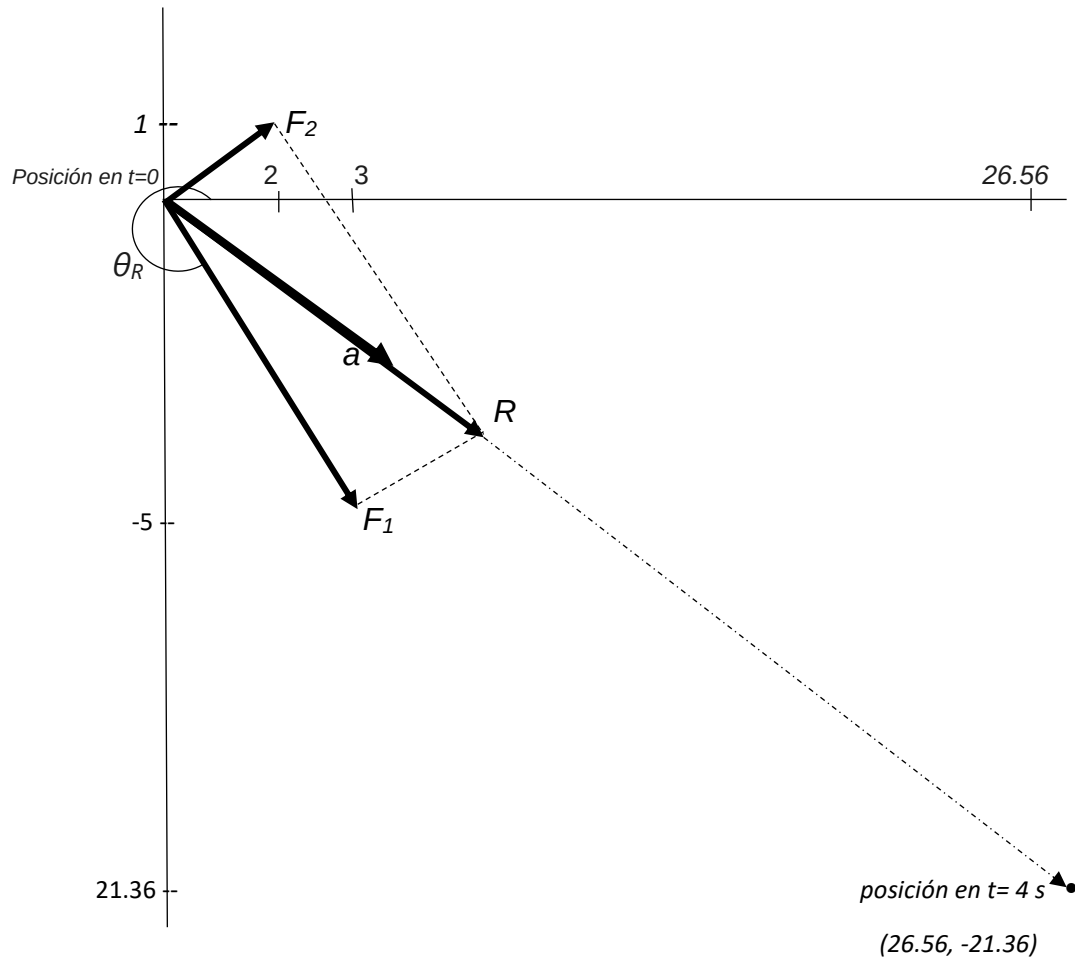
$$(y_2 - 0) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (-2.661) \text{ m/s}^2 (4 \text{ s} - 0)^2 + 0(4 \text{ s} - 0) \quad \text{----- (VI)}$$

$$y_2 = -21.36 \text{ m}$$

el vector de posición en $t = 4$ s es: $r_{t=4s} = (26.56 \hat{i} + -21.36 \hat{j})$ m ✓

Figura 3.1

Ejemplo 3.2 Gráfica representativa esquemática.



Ejemplo 3.3 (5.43 Serway): Una persona de 72 kg se coloca en una báscula en el interior de un ascensor inicialmente en reposo. El ascensor sube y en 0.8 segundos logra su máxima rapidez la cual es de 1.2 m/s manteniendo esta velocidad durante 5 segundos. En

este momento desacelera y logra detenerse en 1.5 segundos. Qué peso registrará a báscula a) ¿Cuándo el ascensor está en reposo? b) ¿Durante el ascenso acelerado? c) ¿en el ascenso a velocidad constante? y d) durante la desaceleración?

a) Cuándo el ascensor está en reposo...

Antes del movimiento, $v = 0$, $a = 0$ entonces la balanza solo registra el peso de la persona:

$$P = m \times g = 72 \text{ kg} \times (-9.81 \text{ m/s}^2) = -706.32 \text{ N} \quad \checkmark$$

(El signo negativo indica que el vector del peso tiene sentido hacia abajo)

b) durante el ascenso acelerado...

Es un lapso de tiempo con aceleración.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$a = (1.2 - 0) \text{ m/s} / (0.8 - 0) \text{ s}$$

$$a = 1.5 \text{ m/s}^2$$

La fuerza que se ejercen en los pies de la persona para imprimirle esta aceleración es:

$$F = m \times a = 72 \text{ kg} \times 1.5 \text{ m/s}^2 = 108 \text{ N}$$

Peso registrado por la balanza: $P + F = (706.32 + 108) \text{ N}$

$$= 814.32 \text{ N} \quad \checkmark$$

c) subiendo a velocidad constante.

Aquí no hay aceleración por lo que no hay fuerza adicional al peso de la persona sobre la balanza, por tanto, la lectura será de -706.32 N. ✓

d) *Lectura durante el periodo de desaceleración (aceleración negativa).*

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$a = (0 - 1.2) \text{ m/s} / (1.5 - 0) \text{ s}$$

$$a = -0.8 \text{ m/s}^2 \quad \downarrow$$

La fuerza que se ejercen en los pies de la persona para imprimirle esta aceleración es:

$$F = m \times a = 72 \text{ kg} \times (-0.8 \text{ m/s}^2) = -57.6 \text{ N} \quad \downarrow$$

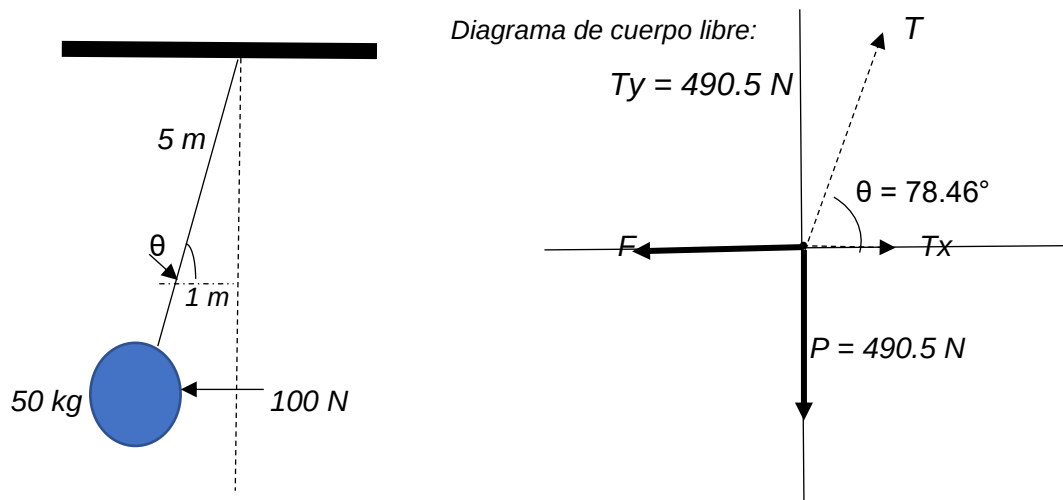
como la aceleración es hacia abajo entonces la reacción de la balanza a esta desaceleración es contraria a la fuerza para acelerar en el ascenso por lo que:

$$\text{Peso registrado por la balanza: } P - F = (706.32 - 57.6) \text{ N} = 648.72 \text{ N} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.4 (5.29 Serway): A una bola que tiene una masa de 50 kg que pende de un cable de cinco metros de largo sujeta firmemente a una viga en su extremo superior, como lo muestra la Figura 3.2, se le aplica una fuerza en dirección horizontal que la desvía en la misma dirección y la separa un metro de su posición vertical ¿Cuál es el valor de dicha fuerza?

Figura 3.2

Ejemplo 3.4 Diagrama del planteamiento.



Como existe el equilibrio, entonces:

$$\sum F_x = 0 \quad y \quad \sum F_y = 0$$

$$T_y = P = m \times g = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$$

$$\theta = \cos^{-1}(1/5) = 78.46^\circ$$

$$\tan 78.46^\circ = 490.5 \text{ N} / T_x; \quad T_x = 100 \text{ N}$$

$$F = T_x = 100 \text{ N} \quad \checkmark$$

Tercera Ley de Newton.

La tercera ley de Newton, también llamada principio de acción y reacción, postula:

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo, éste opondrá otra fuerza en sentido contrario de la misma magnitud y dirección.

Esta ley puede representarse mediante la siguiente expresión matemática:

$$F_{A \text{ a } B} = - F_{B \text{ a } A}$$

Ejemplo 3.5: Una masa de 15 kg reposa en el piso ¿qué fuerza ejerce el piso sobre la masa?

Como existe equilibrio, la reacción del piso equilibra a la fuerza de acción del peso de la masa:

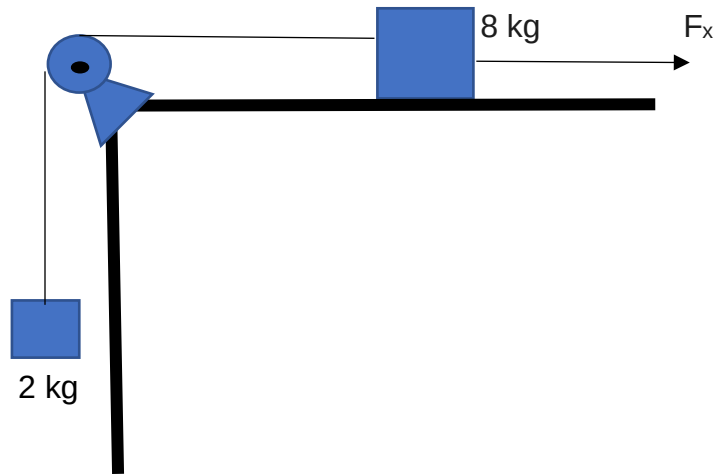
$$P = m \times g = 15 \text{ kg} \times (-9.81 \text{ m/s}^2) = - 147.15 \text{ N} \downarrow$$

$$F \text{ del piso} = 147.15 \text{ N} \uparrow \checkmark$$

Si además se adiciona una fuerza vertical hacia abajo de 25 N ¿cuál sería la reacción total del piso?

$$F \text{ del piso} = 147.15 \text{ N} + 25 \text{ N} = 172.15 \text{ N} \uparrow \checkmark$$

Ejemplo 3.6 (5.37 Serway): En la Figura 3.6, F_x actúa sobre el bloque de 8 kg. a) ¿Para qué valor mínimo de F_x se logrará acelerar hacia arriba la masa de 2 kg? b) ¿Para qué valores de F_x será cero la tensión en la cuerda?

Figura 3.3*Ejemplo 3.6 Diagrama representativo*

a) ¿Para qué valor mínimo de F_x acelerará hacia arriba la masa de 2 kg?

Como la tensión de la cuerda se debe al peso de la masa de 2 kg, ésta se acelerará hacia abajo. Para que la aceleración sea hacia arriba, F_x como mínimo se debe superar este peso.

$$P_{2kg} = 2 \text{ kg} \times (-9.81 \text{ m/s}^2) = -19.62 \text{ N} \downarrow$$

Por lo tanto: $F_x > 19.62 \text{ N} \longrightarrow \checkmark$

b) ¿Para qué valor máximo de F_x será cero la tensión en la cuerda?

Para nulificar la tensión de la cuerda por el peso de la masa de 2 kg, la F_x debe aplicarse hacia la izquierda, así la tensión resultante será cero. La aceleración de la masa de 8 kg debe ser igual a la de la masa de 2 kg (9.81 m/s^2), pero debida a F_x .

$$F_x = m \times g = 8 \text{ kg} (-9.81 \text{ m/s}^2) = -78.4 \text{ N}$$

Por lo tanto: $F_x < -78.4 \text{ N}$ ← ✓

El plano inclinado.

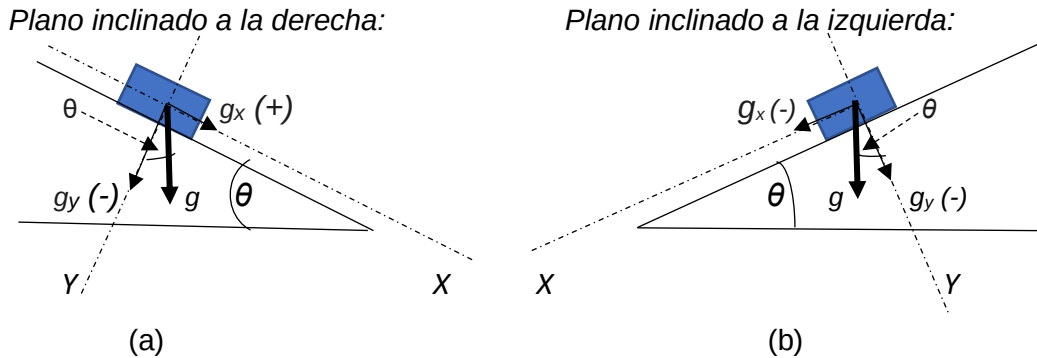
En diversas aplicaciones el desplazamiento de objetos sucede no en el plano horizontal ni en el vertical, sino en un plano inclinado determinado ángulo θ respecto a la horizontal.

En estos casos, para la resolución de problemas, debe considerarse que el sistema de ejes coordenados es tal, que el eje X ya no es horizontal, sino paralelo al plano, por lo que el eje Y es perpendicular a dicho plano.

Además, la aceleración de la gravedad g , al no coincidir con el eje Y, tendrá componentes en ambos ejes (g_x y g_y), por lo que deberá cuidarse su signo. La aceleración de la gravedad y el peso *siempre serán verticales hacia abajo* no importa si el movimiento es en un plano horizontal o inclinado. La magnitud o módulo de g y P se tomarán *positivas* pues como se dijo, no coincide con el eje Y, sino que se ubican en el tercer o cuarto cuadrante y dependiendo del sentido de la inclinación del plano, *sus componentes* son las que pueden ser *negativas o positivas*. En los diagramas de la Figura 3.4 se muestran estos detalles.

Figura 3.4

Planos inclinados a la derecha (a) y a la izquierda (b)



Nótese que en (a), g se ubica en el *cuarto cuadrante* y g_x es positiva, mientras que en (b), g se ubica en el *tercer cuadrante* y g_x es negativa. En ambos casos g_y es negativa. Se toma $|g| = 9.81 \text{ m/s}^2$, su magnitud.

Debe observarse que cuando el eje Y es vertical y g coincide con él, entonces todo el valor de g está en g_y como *negativo*, $g_y = g = -9.81 \text{ m/s}^2$ y $g_x = 0$.

Ejemplo 3.7: Un objeto de 19 kg descansa en un plano inclinado 50° l. Encuentre las componentes del peso paralela y perpendicular al plano inclinado. Resuelva a) inclinando el plano a la derecha y b) a la izquierda.

a) *inclinando el plano hacia la derecha.*

Componente de g en el eje X (paralela al plano inclinado, g en el cuarto cuadrante, diagrama a).

$$g_x = 9.81 \text{ m/s}^2 \times \cos(270 + 50)^\circ = \underline{7.5149 \text{ m/s}^2}$$

Componente del peso en el eje X:

$$P_x = 19 \text{ kg} \times 7.5149 \text{ m/s}^2 = 142.783 \text{ N} \quad \checkmark$$

Componente de g en el eje Y (perpendicular al plano inclinado, g en el cuarto cuadrante, diagrama a).

$$g_y = 9.81 \text{ m/s}^2 \times \sin(270 + 50)^\circ = -6.3 \text{ m/s}^2$$

Componente del peso en el eje Y:

$$P_y = 19 \text{ kg} \times (-6.3057 \text{ m/s}^2) = -119.8091 \text{ N} \quad \checkmark$$

b) inclinando el plano hacia la izquierda.

Componente de g en el eje X (paralela al plano inclinado, g en el tercer cuadrante, diagrama b).

$$g_x = 9.81 \text{ m/s}^2 \times \cos(270 - 50)^\circ = -7.5149 \text{ m/s}^2$$

Componente del peso en el eje X:

$$P_x = 19 \text{ kg} \times (-7.5149 \text{ m/s}^2) = -142.783 \text{ N} \quad \checkmark$$

Componente de g en el eje Y (perpendicular al plano inclinado, g en el tercer cuadrante, diagrama b).

$$g_y = 9.81 \text{ m/s}^2 \times \sin(270 - 50)^\circ = -6.3057 \text{ m/s}^2$$

Componente del peso en el eje Y:

$$P_y = 19 \text{ kg} \times (-6.3057 \text{ m/s}^2) = -119.8091 \text{ N} \quad \checkmark$$

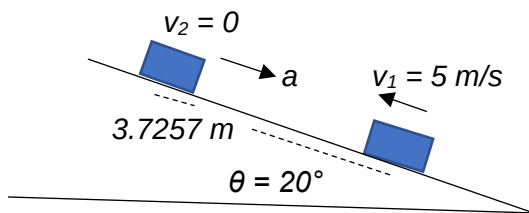
La diferencia entre las dos alternativas es el signo de g_x y por lo tanto de P_x , debida a la orientación de la inclinación del plano.

NOTA: Si no hay instrucción alguna sobre el sentido de la inclinación del plano, entonces se puede seleccionar arbitrariamente.

Ejemplo 3.8 (5.41 Serway): Se aplica una velocidad inicial de 5 m/s a una caja, para subirla por un plano inclinado 20° con el piso, como ilustra la Figura 3.5. ¿qué distancia avanzará la caja sobre el plano?

Figura 3.5

Ejemplo 3.8 Desplazamiento hacia arriba en plano inclinado



componente de g en X :

$$a = g_x = (9.81 \text{ m/s}^2) \cos (270 + 20)^\circ = 3.355 \text{ m/s}^2$$

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(x_2 - 0) = [(0)^2 - (-5 \text{ m/s})^2] / 2(3.355) \text{ m/s}^2$$

$$x_2 = 3.7257 \text{ m} \quad \checkmark$$

3.3. Fuerza de fricción o rozamiento.

Cuando dos superficies en contacto se mueven entre sí, se produce lo que llamamos fricción. La fricción es una fuerza (f) que se genera por el rozamiento entre las superficies en contacto y es opuesta al movimiento relativo entre ellas.

Para que se produzca el movimiento entre dos superficies en contacto debe superarse la fricción entre ellas, mientras esto no suceda, la fuerza aplicada F y la de fricción f , llamada fuerza de *fricción estática* f_s , estarán en equilibrio. La fuerza F *mínima* necesaria para mover un objeto sujeto a fricción, es *igual y opuesta* a la fuerza de *fricción estática máxima*, es decir:

$$f_{s_{\text{máx}}} = - F_{\text{mín}}$$

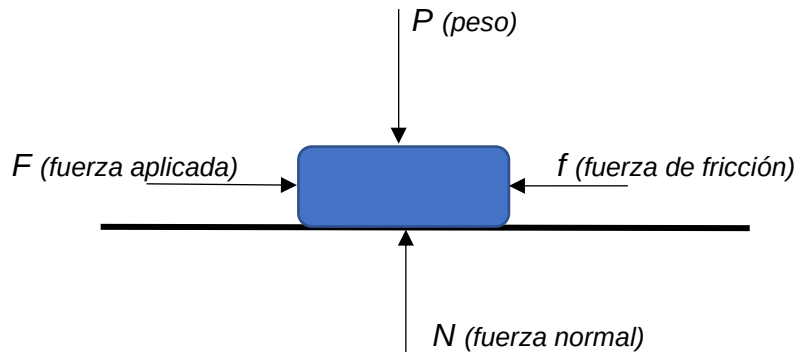
Una vez que se inicia el movimiento, la fricción disminuye, lo que se conoce como fuerza de *fricción dinámica* f_k . Si la fuerza aplicada F sigue aumentando, la velocidad del movimiento aumenta, pero la f_k disminuye. La fuerza de fricción dinámica, justo al inicio del movimiento, es máxima ($f_{k_{\text{máx}}}$) y va decreciendo conforme la fuerza aplicada aumenta hasta llegar a un valor mínimo ($f_{k_{\text{mín}}}$), sin importar si F siga en aumento.

La fuerza de fricción o rozamiento entre dos superficies depende del *coeficiente de fricción cinético o estático* (μ_k o μ_s), según si existe desplazamiento o no, entre los materiales de ambas superficies y de la fuerza perpendicular que los mantiene en contacto llamada *normal* (N). Los *coeficientes* μ_k y μ_s , los encontramos en la literatura ya determinados y tabulados para los materiales más comunes. Estos coeficientes son *adimensionales*.

En la Figura 3.6 tenemos las fuerzas que intervienen cuando a un objeto en una superficie horizontal se le aplica una fuerza F , manteniendo el contacto mediante el efecto de su propio peso:

Figura 3.6

Fuerza de fricción en plano horizontal.



En tanto no exista movimiento, f equilibrará a F y será fuerza de fricción estática f_s y μ_s los que tomen en cuenta. Si F aumenta, en el momento en que se produzca movimiento, la fuerza de fricción será f_k y se considerará el coeficiente μ_k .

La ecuación que relaciona $f_{s\text{máx}}$, μ_s y la fuerza normal N es:

$$f_{s\text{máx}} = \mu_s(N) \quad \dots (a)$$

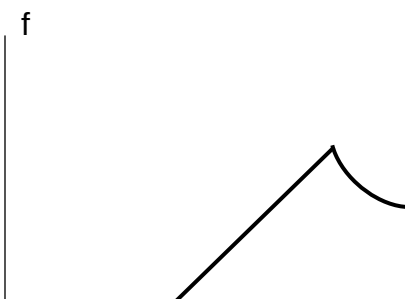
La ecuación que relaciona $f_{k\text{mín}}$, μ_k y la fuerza normal N es:

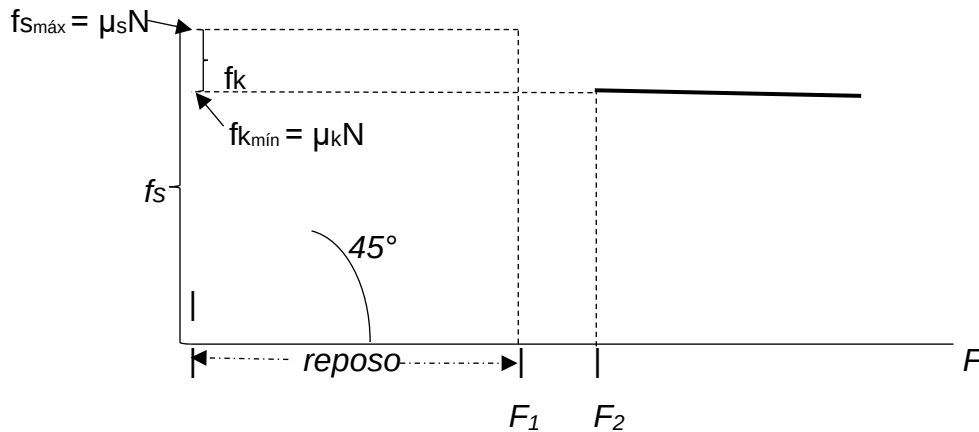
$$f_{k\text{mín}} = \mu_k(N) \quad \dots (b)$$

La Figura 3.7 muestra la Gráfica del comportamiento de la fuerza de fricción f contra la fuerza aplicada F .

Figura 3.7

Gráfica Fuerza aplicada contra fuerza de fricción $F - f$





Notas:

- Atendiendo la fuerza aplicada F , entre 0 y F_1 , el objeto no se moverá pues la aparición de f_s la equilibrará y la gráfica será una línea recta a 45° . En este rango de fuerzas el coeficiente de fricción estático μ_s es el aplicable.
- En F_1 , se da el máximo $f_{s\text{máx}}$ y aparecerá el movimiento si F sigue aumentando y la fuerza de fricción será dinámica f_k y el coeficiente de fricción μ_k será el que se aplique.
- Para valores de F entre F_1 y F_2 , tenemos un f_k decreciente hasta un mínimo $f_{k\text{mín}}$, y un gradiente de aceleración creciente hasta llegar, en F_2 , a una aceleración estable con el incremento de F .
- A partir de F_2 la fuerza de fricción dinámica permanece con el valor mínimo constante sin importar que F aumente.

Una ecuación muy útil para el cálculo de μ_k , cuando se tiene la información necesaria es:

$$\mu_k = - (v_2 - v_1)^2 / 2g (x_2 - x_1) \quad . \quad (c)$$

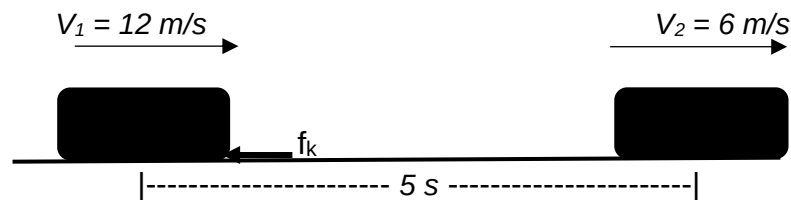
donde: v_1 : velocidad inicial del objeto; x_1 : posición inicial; g : aceleración de la gravedad.

v_2 : velocidad final del objeto; x_2 : posición final

Ejemplo 3.9 (5.56 Serway): En un partido de hockey sobre la superficie de un lago congelado, el puck inicia su trayectoria a 12.0 m/s. Después de 5 segundos reduce su velocidad a solo 6 m/s, como lo muestra la Figura 3.8. a) calcule la aceleración media del puck b) calcule el valor de μ_k entre el hielo y el puck c) ¿cuánto avanza el puck en esos primeros cinco segundos?

Figura 3.8

Ejemplo 3.9 Deslizamiento de un puck de hockey



a) la aceleración media del puck...

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$a = (6 - 12) \text{ m/s} / (5 - 0) \text{ s} = - 1.2 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

b) coeficiente de rozamiento...

Primero calculamos la distancia recorrida al cambiar la velocidad:

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(x_2 - 0) \text{ m} = [(6^2 - 12^2) \text{ m}^2/\text{s}^2] / 2(-1.2 \text{ m/s}^2)$$

$$x_2 = 45 \text{ m}$$

Ahora calculamos μ_k ...

$$\mu_k = - (v_2^2 - v_1^2) / 2g(x_2 - x_1) \quad \dots (c)$$

$$\mu_k = - (6^2 - 12^2) \text{ m}^2/\text{s}^2 / 2 \times (-9.81) \text{ m/s}^2 (45 - 0) \text{ m}$$

$$\mu_k = 0.122 \quad \checkmark$$

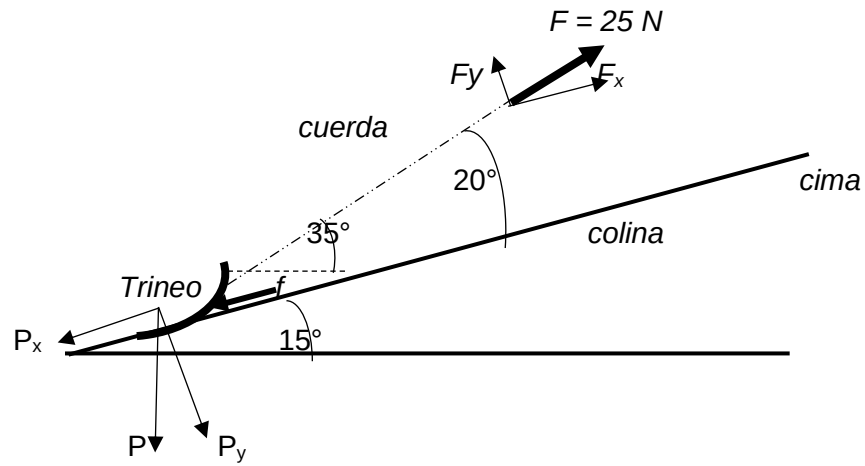
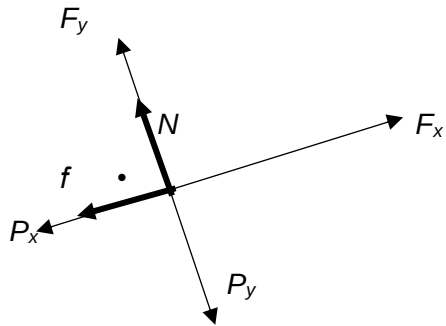
c) ¿cuánto avanza el puck en esos primeros cinco segundos?

$$(x_2 - x_1) = (\frac{1}{2}) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \quad \text{----- (IV)}$$

$$(x_2 - 0) \text{ m} = (\frac{1}{2}) (12 + 6) \text{ m/s} (5 - 0) \text{ s}$$

$$x_2 = 45 \text{ m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.10 (5.53 Serway): Sobre la nieve, se jala un trineo montaña arriba con una inclinación de 15° , por medio de un cable que guarda un ángulo de 35° con la horizontal, aplicando una fuerza de 25 N. a) calcular μ_k entre el trineo y la nieve, b) al llegar a la cima quien jala suelta el trineo y éste se desliza hacia abajo; ¿cuál es su aceleración a lo largo de la pendiente?

Figura 3.9*Ejemplo 3.10 Trineo hacia arriba de una colina***Figura 3.10***Ejemplo 3.10 a) Diagrama de cuerpo libre del trineo en el ascenso:*

-Componentes de la fuerza aplicada F (F_x y F_y).

-Componentes del peso P (P_x y P_y).

-Fuerza de fricción f (en contra del movimiento).

a) coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la nieve.

$$fk_{\min} = \mu_k(N) \dots (b) ; \quad \mu_k = fk_{\min} / N$$

como la velocidad de ascenso es constante, entonces hay equilibrio en X:

$$P_x + f_{k_{\min}} + F_x = 0 ; \quad f_{k_{\min}} = - P_x - F_x$$

$$N = P_y - F_y \quad (\text{la fuerza Normal es disminuida por la componente } F_y)$$

Sustituyendo...

$$\mu_k = f_{k_{\min}} / N = (- P_x - F_x) / (P_y - F_y)$$

$$\mu_k = [- 60 \text{ N} \cos (270 - 15^\circ) - (25 \text{ N} \cos 20^\circ)] / [- 60 \text{ N} \sin (270 - 15^\circ) - (25 \text{ N} \sin 20^\circ)]$$

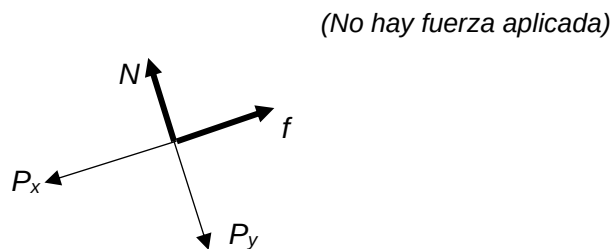
$$\mu_k = - 8 \text{ N} / 49.45 \text{ N}$$

$$\mu_k = 0.161 \text{ (adimensional)} \quad \checkmark$$

b- aceleración de descenso a lo largo de la pendiente.

Figura 3.11

Ejemplo 3.10 b) Diagrama de cuerpo libre del trineo en el descenso:



$$a = F / m \quad (\text{segunda ley de Newton})$$

$$F = P_x + f_k = P_x + \mu_k N = P_x + \mu_k (-P_y) \quad (\text{la fuerza normal solo reacciona a la componente } P_y)$$

Sustituyendo...

$$a = 60 \text{ N} \cos (270 - 15^\circ) + 0.161 [- 60 \text{ N} \sin (270 - 15^\circ)] / (-60 \text{ N} / -9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$a = (-15.53 + 9.33) / 6.11$$

$$a = -1.01 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

(note que el signo negativo indica que la aceleración es hacia el lado izquierdo del eje X, no que sea decreciente).

La segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular uniforme.

En la Unidad 2, vimos que en el movimiento circular uniforme se tiene la aceleración normal o centrípeta cuya ecuación es:

$$a_c = v^2 / r$$

entonces, según la segunda ley de Newton, la fuerza *también centrípeta* que produce esta aceleración en una masa que gira será:

$$F_c = m(v^2 / r)$$

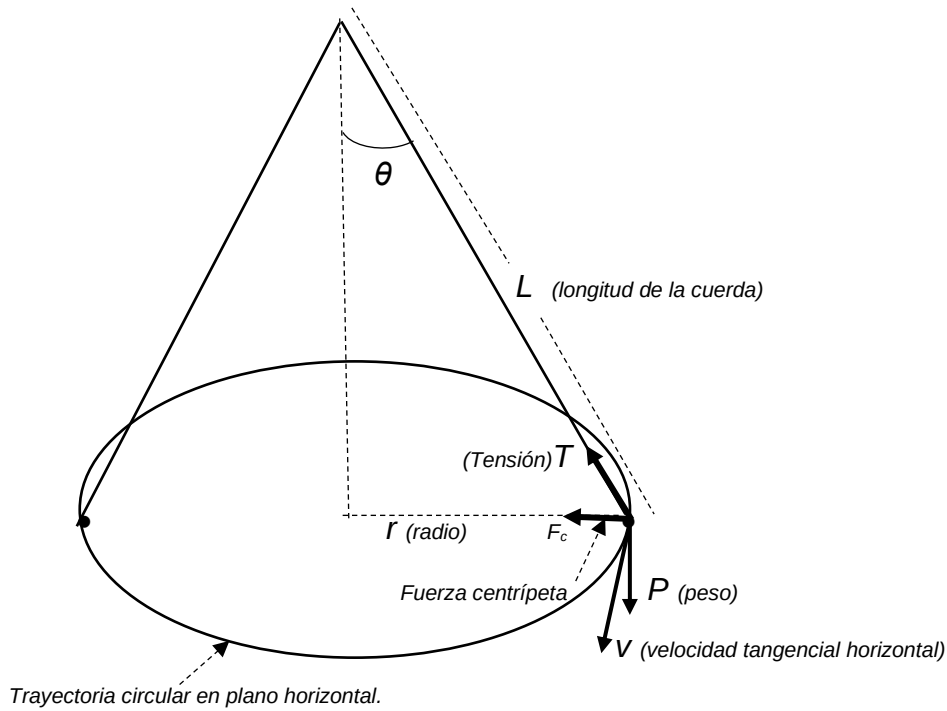
Cuando una masa gira en el extremo de una cuerda, F_c también recibe el nombre de *tensión*.

El caso del péndulo cónico.

Aquí, una masa cuelga de un cable de largo L , girando a una velocidad v y que forma un ángulo θ con la vertical, describiendo una trayectoria circular de radio r como se muestra en la Figura 3.12.

Figura 3.12

El Péndulo cónico



Las ecuaciones que relacionan las variables indicadas en la gráfica y que se obtienen con el manejo algebraico de despejes y sustituciones de fórmulas ya conocidas son:

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \theta} \quad g: \text{aceleración gravitatoria.}$$

$$r = L \cdot \sin \theta$$

$$v = \sqrt{L \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \tan \theta}$$

$$v = \sqrt{L \cdot g \cdot \sin^2 \theta / \cos \theta} \quad v: \text{velocidad tangencial.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{L \cdot \cos \theta / g} \quad T: \text{periodo.}$$

$$\omega = \sqrt{g / (L \cdot \cos \theta)} \quad \omega: \text{velocidad angular.}$$

$$F_c = P \cdot \tan \theta \quad F_c: \text{Fuerza centrípeta.}$$

$$T_{\text{ensión}} = \sqrt{(F_c)^2 + P^2} \quad T_{\text{ensión}} : \text{Tensión en la cuerda.}$$

Mientras más rápido sea el giro, el radio de la trayectoria circular aumentará, la circunferencia horizontal irá subiendo, por lo que el ángulo θ y la tensión de la cuerda incrementarán.

Ejemplo 3.11 ([Microsoft Word - penduloconico.doc](#)): Una cuerda atada a una viga tiene un metro de longitud y sostiene un objeto de dos kg en su extremo inferior como muestra la Figura 3.13.

Ejemplo 3.11 ([Microsoft Word - penduloconico.doc](#)): Una masa de 2 Kg está colgada del techo mediante una cuerda de 1 m de longitud, gira describiendo circunferencias horizontales de 30 cm de radio, como muestra la Figura 3.13. Calcular: a)

a) la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa.

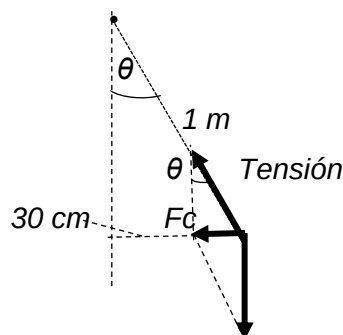
b) Velocidad angular y frecuencia.

c) Si la velocidad angular es ahora el doble, calcular el nuevo ángulo de la cuerda con la vertical y su nueva tensión.

Figura 3.13

Ejemplo 3.11 Péndulo cónico con masa de 2 kg

Diagrama de cuerpo libre de la masa...



P

Resolución:

a.- la resultante...

$$P = mg = 2 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 19.62 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$\theta = \arcsin (1/3)^\circ = 17.45^\circ$$

$$\tan \theta = F_c / P ; \quad F_c = P \cdot \tan \theta$$

$$F_c = 19.62 \text{ N} \times \tan 17.45^\circ = 6.16 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$T_{\text{ensión}} = \sqrt{(F_c)^2 + P^2} = \sqrt{(6.16 \text{ N})^2 + (19.62 \text{ N})^2}$$

$$T_{\text{ensión}} = 20.564 \text{ N} \quad \checkmark$$

b) Velocidad angular y frecuencia.

$v = \omega r$ (ix); v : (velocidad lineal, m/s); ω : (velocidad angular, rad/s).

$$F_c = m \times a_c ;$$

$$a_c = F_c / m = 6.16 \text{ N} / 2 \text{ kg} = 3.08 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \omega^2 r ;$$

$$\omega = \sqrt{a_c / r} = \sqrt{3.08 \text{ m/s}^2 / 0.3 \text{ m}} = 3.20 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

periodo T:

$$\omega = 2\pi/T; \quad T = 2\pi / \omega = 2\pi / 3.20 \text{ rad/s} = 1.96 \text{ s/rev}$$

frecuencia f :

$$f = 1 / T = 1 / 1.765 \text{ s/rev} = 0.5666 \text{ rev/s} \quad \checkmark$$

c) nuevos ángulo y tensión si la velocidad angular se duplica.

Nueva velocidad angular:

$$\omega = 3.56 \text{ rad/s} \times 2 = 7.12 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{g / (L \cdot \cos \theta)}$$

$$7.12 \text{ rad/s} = \sqrt{9.81 \text{ m/s}^2 / (1 \text{ m} \cdot \cos \theta)} \quad ; \quad \theta = 78.84^\circ \quad \checkmark$$

$$T_{\text{tensión}} = \sqrt{(Fc)^2 + P^2}$$

$$Fc = P \cdot \tan \theta = 19.62 \tan 78.84^\circ = 99.47 \text{ N}$$

$$T_{\text{tensión}} = \sqrt{(99.47 \text{ N})^2 + (19.62 \text{ N})^2}$$

$$= 101.4 \text{ N} \quad \checkmark$$

O bien:

$$T_{\text{tensión}} = P / \cos \theta = 19.62 \text{ N} / \cos 78.84^\circ = 101.4 \text{ N} \quad \checkmark$$

3.3 FRICCIÓN.

Este tema se aborda mediante presentación en PowerPoint en el siguiente [link](#):

3.4. TORQUE (T).

Definición (<https://ecosistema.buap.mx/forms/files/dspace>):

El **torque** o **momento de una fuerza** es una magnitud vectorial siendo matemáticamente el producto vectorial de dos vectores, uno de posición y otro de fuerza referidos a un objeto específico. Puede ser entendido como «**esfuerzo de torsión**»

En este sentido, el torque hace que se produzca o tienda a producirse un *giro* en el objeto al que se la aplica.

El torque, respecto de un punto, es el producto de la fuerza por la distancia en ángulo recto del punto a la fuerza. Se considera positivo si el sentido de rotación es horario y negativo en caso contrario.

Puesto que el torque de una fuerza es el producto de una longitud por una fuerza, las unidades de éste será el Newton-metro ($N\cdot m$). Un símbolo muy usado para el torque es la letra *tau* estilizada para diferenciarla entre otras variables físicas como temperatura, tensión o tiempo.

Por otro lado, la ecuación del torque tiene la siguiente forma:

$$\text{Torque} = \text{Fuerza} \times \text{Distancia} \times \text{seno } \theta$$

Donde:

θ : ángulo entre la fuerza y la dirección de la posición del punto de aplicación de la misma con referencia al punto de giro.

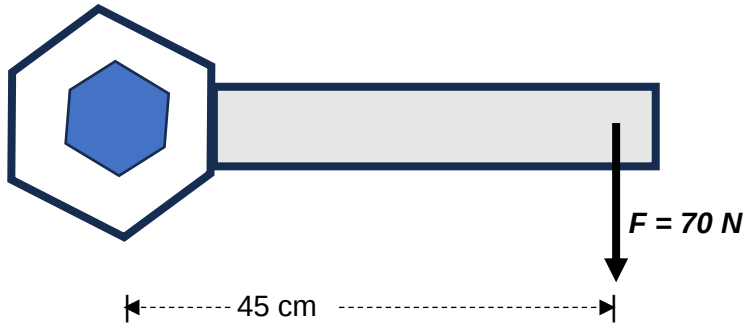
La diferencia, en otras palabras, radica en **el enfoque vectorial** del torque y en **el enfoque genérico** del momento.

. Además, el momento es de naturaleza *estática* y solo está disponible por un momento y a diferencia de Torque, *no puede producir aceleración angular* ya que es solo una fuerza *momentánea*.

Teorema de Varignon:

“El momento de la resultante de un sistema plano de fuerzas concurrentes respecto a un punto cualquiera es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo centro.”

Ejemplo 3.12 (**Momento de una Fuerza - Ejercicios Resueltos - Fisimat**): Se hace girar una tuerca con una llave, según la Figura 3.15. Si la longitud de ésta es de 25 cm y la fuerza de 50 N perpendicular a la llave, ¿Cuál es el momento y el torque de apriete transmitido a la tuerca?

Figura 3.15*Ejemplo 3.12 Momento y torque en una tuerca.**datos:*

$$d = 45\text{ cm}$$

$$F = 70\text{ N (Sentido horario)}$$

$$M = \text{¿?}$$

Momento = Fuerza x Distancia*Sustituyendo:*

$$M = |70\text{ N}| \times 0.45\text{ m} = 31.5\text{ N}\cdot\text{m} \quad \checkmark$$

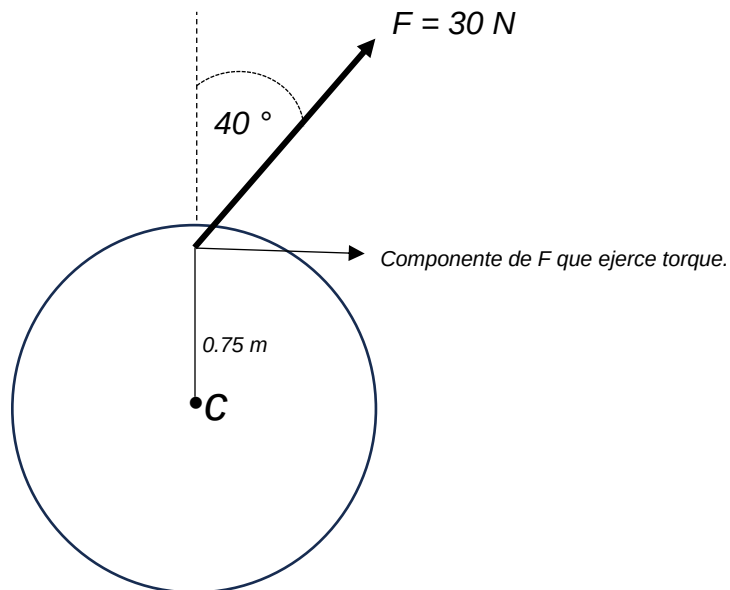
*Cálculo del Torque...***Torque = Fuerza x Distancia x seno θ**

$$T = 70\text{ N} \times 0.5\text{ m} \times \sin 90^\circ = 31.5\text{ N}\cdot\text{m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.13: Supongamos que tenemos una polea que gira alrededor de su eje y aplicamos una fuerza de 30 newtons en el plano de la polea, pero en dirección 40° respecto a la vertical, a 0.75 m del eje hasta el punto de aplicación de la fuerza como se muestra en la Figura 3.16. Calcular el torque de la fuerza sobre la polea.

Figura 3.16

Ejemplo 3.13 Torque de una Fuerza aplicada a una polea



Torque = Fuerza x Distancia x seno θ

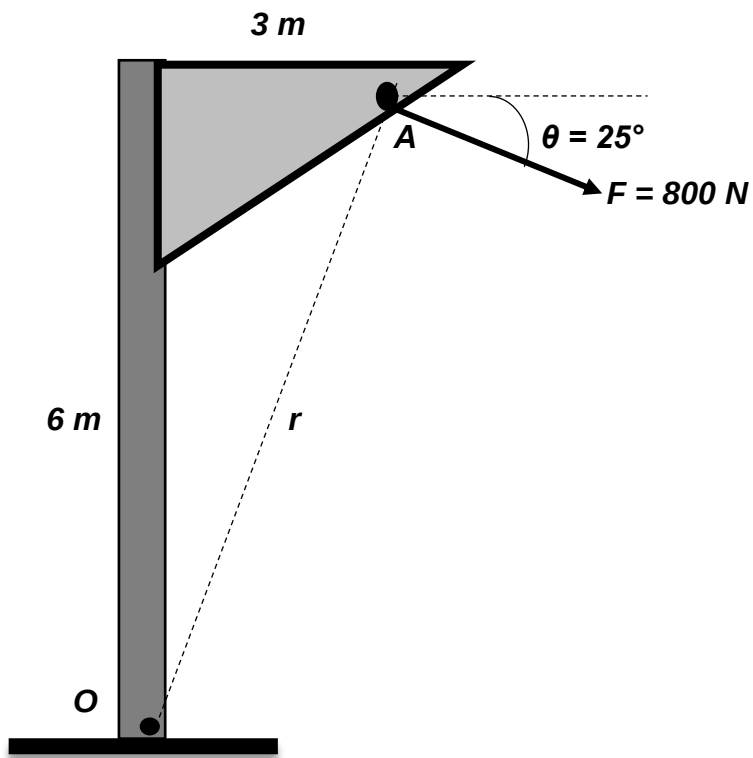
$$T = 30 \text{ N} \times 0.75 \text{ m} \times \sin 40^\circ = 14.46 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \checkmark$$

Ejemplo 3.14: ([Momento de una Fuerza - Ejercicios Resueltos - Fisimat](#)): ¿Cuánto vale el momento de la fuerza F respecto del punto O de la Figura 3.17, si F es de 725 N.?

Figura 3.17

Ejemplo 3.14 Teorema de Varignon aplicado a un soporte

- Figura para el ejercicio



Las componentes rectangulares de la Fuerza...

$$F_x = 800 \text{ N} \times \cos 25^\circ = 725.04 \text{ N}$$

$$F_y = - 800 \text{ N} \times \sin 25^\circ = - 388.09 \text{ N}$$

Las componentes del vector de posición del punto O...

$$r_x = 3 \text{ m}$$

$$r_y = 6 \text{ m}$$

Cada componente de la fuerza F efectúa su propio momento en sentido horario (positivo)...

$$M_{ox} = 725.04 \text{ N} \times 6 \text{ m} = 4,350.24 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{oy} = 388.09 \text{ N} \times 3 = 1,164.27 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El momento total en el punto O es entonces:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{ox} + \mathbf{M}_{oy} = 4,350.24 \text{ N}\cdot\text{m} + 1,164.27 \text{ N}\cdot\text{m} = 5,514.21 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{perpendicular al plano y en sentido horario}). \checkmark$$

3.5. Momento angular (L).

El momento angular representa la *cantidad de movimiento de rotación* de un cuerpo y se define matemáticamente como el producto del *momento de inercia* I por la velocidad angular en relación a cierto punto. Es una cantidad vectorial. También recibe el nombre de momento cinético. Usualmente se simboliza como L y de acuerdo a su definición su ecuación es:

$$L = I \cdot \omega \quad \omega: \text{velocidad angular} \quad \text{pero: } I = m \cdot r^2$$

$$\text{Entonces: } L = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

$$\text{Como } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$L = 2 \pi \cdot f \cdot m \cdot r^2 \quad f: \text{frecuencia}$$

O bien:

$$L = 2\pi \cdot m \cdot r^2 / T \quad T: \text{periodo}$$

Sabemos que $v = r \cdot \omega$; entonces:

$$L = m \cdot v \cdot r$$

Donde:

m – masa.

v – velocidad tangencial de rotación.

r – radio de rotación.

Estas ecuaciones combinan las diferentes variables involucradas en el movimiento circular y en conjunto proporcionan un enfoque integral del tema.

Análisis dimensional para el momento angular L :

$$L = m \cdot v \cdot r = \text{kg} \cdot (\text{m/s}) \cdot \text{m} = \text{Kg m}^2 / \text{s}. \quad (\text{S.I.})$$

Ley de la conservación del momento angular.

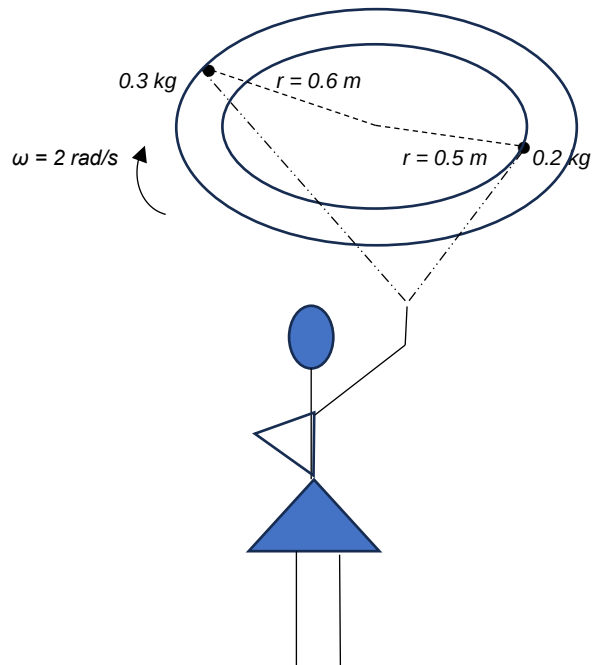
Esta ley postula que el momento angular total de un sistema será constante, mientras no se le ejerza un momento de externo que no esté en equilibrio.

En consecuencia, cuando un cuerpo gira sobre un eje y de algún modo acerca su masa hacia dicho eje, entonces r disminuye, disminuyendo el valor del momento de inercia. La conservación de la energía mantiene el momento angular y da como consecuencia un incremento de la energía cinética rotacional incrementando a su vez su velocidad de giro. Si la masa del cuerpo aumenta, entonces su velocidad de giro disminuirá y los momentos de inercia y angular también lo harán.

Ejemplo 3.15: Una muchacha baila haciendo girar dos boleadoras al mismo tiempo y ambas a una velocidad angular de 2 rad/s, Figura 3.18. Calcule el momento angular de las boleadoras.

Figura 3.18

Ejemplo 3.15 Giro de dos boleadoras



$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega ;$$

$$L = 0.2 \text{ kg} \times (0.5 \text{ m})^2 \times 2 \text{ rad/s} + 0.3 \text{ kg} \times (0.6 \text{ m})^2 \times 2 \text{ rad/s}$$

$$L = 0.316 \text{ kg m}^2 / \text{s} \quad \checkmark$$

3.6. Fuerzas centrales.

Una fuerza central entre partículas es aquella cuya dirección es a lo largo de la línea recta las une y su magnitud depende únicamente de la distancia entre ellas. La fuerza

puede ser de atracción o de repulsión. La fuerza gravitacional y la fuerza electrostática son ejemplos de fuerzas centrales.

Las fuerzas centrales son de *carácter conservativo*, es decir, actúan según el *principio de conservación de la energía mecánica*.

La fuerza electrostática y la fuerza de un resorte pueden considerarse como ejemplos prácticos y cotidianos de fuerzas centrales.

Ejemplos de **fuerzas centrales**:

- ***Fuerza gravitacional.***
- ***Fuerza electrostática.***
- ***Oscilador armónico.***

Principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_m = E_c + E_p$$

Cuando todas las fuerzas que actúan sobre un sistema son de carácter conservativo, la energía mecánica total de dicho sistema permanece sin cambio. Como por definición la energía mecánica de un sistema es la suma de su energía cinética más su energía potencial, podemos escribir la ecuación

$$E_m = E_c + E_p$$

Si sobre el sistema actúa alguna fuerza *no conservativa* (como la fuerza de rozamiento), esta ley no aplicaría.

Ecuación del principio de la conservación de la energía mecánica

Si la energía mecánica es constante, por consecuencia, en un sistema cambiante, la suma de los valores iniciales de la energía cinética y la energía potencial es igual a la suma de sus valores finales.

$$Em = \text{constante}$$

$$Em_i = Em_f$$

$$Ec_i + Ep_i = Ec_f + Ep_f$$

Donde:

- Em_i y Em_f : energías mecánicas inicial y final.
- Ec_i y Ec_f : energías cinéticas inicial y final.
- Ep_i y Ep_f : energías potenciales inicial y final.

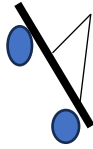
Cuando una persona patinando con monopatín según la Figura 3.19, hace un movimiento de vaivén hacia arriba y abajo, la energía mecánica se conserva.

La trayectoria repetitiva de un patinador, como se muestra en la figura 3.19, despreciando el efecto de la fricción que es una fuerza no conservativa, es un caso en el que se tiene la conservación de la energía mecánica. A medida que el patinador desciende por la pendiente su energía potencial en la posición más elevada va disminuyendo transformándose en energía cinética sucediendo lo contrario en su ascenso manteniendo constante su energía mecánica.

Figura 3.19

Conservación de la energía mecánica en un patinador.





asume total ausencia de fricción.

Se puede calcular la energía cinética y la energía potencial, tomando el nivel de referencia del sistema en cualquier momento aplicando las ecuaciones:

$$E_c = (\frac{1}{2})m \cdot v^2$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Energía mecánica de un muelle

Cuando se comprime o alarga un muelle este almacena energía, pero cuando se deja ir el muelle adquiere una velocidad. Por lo tanto, un muelle puede tener energía potencial elástica y energía cinética.

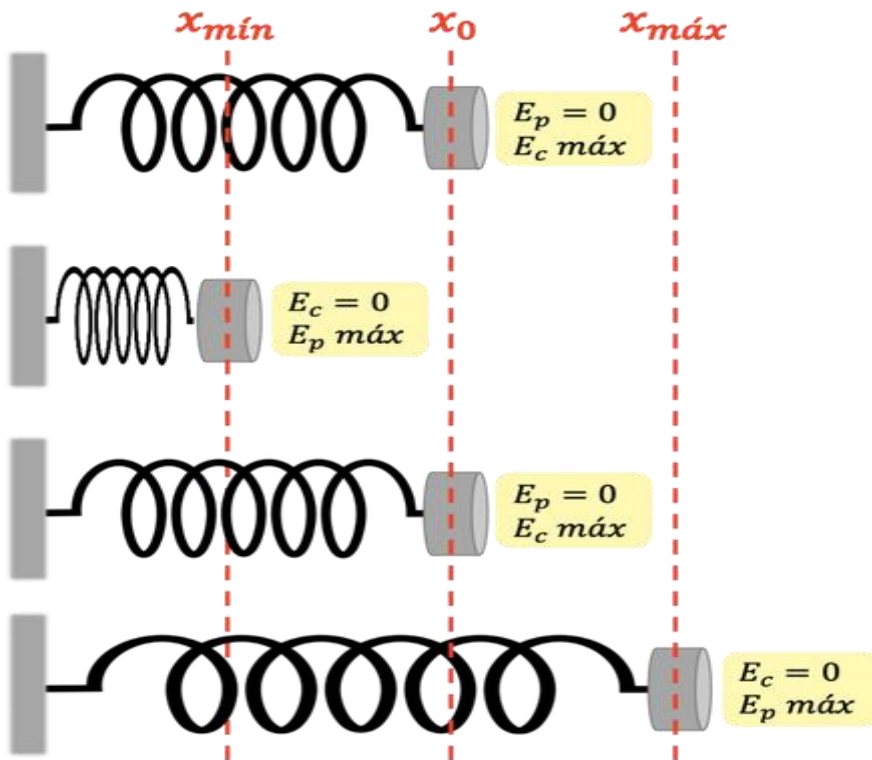
Además, si no se tiene en cuenta la fricción, la energía del muelle no se pierde, sino que se transforma (principio de conservación de la energía mecánica). De manera que la energía potencial elástica se puede convertir en energía cinética y al revés, pero la energía total no se reducirá.

Así pues, cuando la energía potencial elástica sea máxima, esto es, cuando el muelle esté estirado o comprimido completamente, la energía cinética será nula. Asimismo, cuando la energía cinética sea máxima, es decir, cuando el muelle se encuentre en la posición de equilibrio, la energía potencial elástica será nula, Figura 3.20.

Figura 3.20

Energía cinética y potencial máximas y mínimas en un muelle.

<https://www.ingenierizando.com/dinamica/ Conservación de la energía mecánica>



De modo que el muelle va desde la posición máxima hasta la posición mínima de manera continuada, produciendo así un movimiento oscilatorio.

Las ecuaciones para calcular la energía cinética y la energía potencial de un muelle que hace un movimiento armónico simple son las siguientes:

$$E_c = (1/2) m \cdot v^2$$

$$E_p = (1/2) k \cdot x^2$$

Donde:

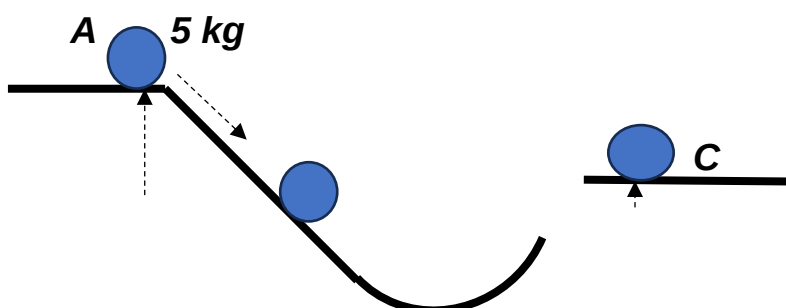
- E_c es la energía cinética.
- E_p es la energía potencial.
- M es la masa del cuerpo que realiza el movimiento armónico simple.
- v es la velocidad del cuerpo que realiza el movimiento armónico simple.
- k es la constante de elasticidad del muelle, cuyas unidades son N/m.
- x es la elongación del cuerpo que describe el movimiento armónico simple.

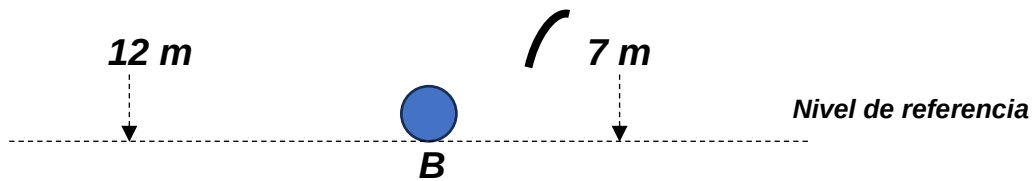
Ejemplo 3.16 (de la conservación de la energía mecánica).

- Un cuerpo de masa $m = 7 \text{ kg}$ sigue el camino que se muestra en la Figura 3.21. Teniendo en cuenta que la velocidad inicial del cuerpo es nula, calcula lo siguiente despreciando la fricción del cuerpo con el suelo y tomando el valor de la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. a) Energía potencial del cuerpo en el punto A, b) Energía cinética del cuerpo en el punto B, c) Velocidad con la que llega el cuerpo al punto C.
- La Figura 3.21 indica la ruta sin rozamiento de un objeto cuya masa es de 5 kg . El objeto parte del reposo de la posición A y la ruta es tal que la altura con respecto al nivel de referencia es variable. Calcular: a) su energía potencial en A, b) su energía cinética en B y c) la velocidad en C.

Figura 3.21

Ejemplo 3.16 Diagrama representativo.





a) su energía potencial en A

$$E_{pA} = mgh = 5 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 12 \text{ m} = 588.6 \text{ J} \quad \checkmark$$

En el punto A no existe velocidad, entonces la energía potencial es la energía mecánica total y es máxima y es la energía total del sistema.

Como no se tiene rozamiento, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica. En el punto B, toda la energía potencial de A se habrá transformado en energía cinética, ya que en el punto B la altura, con respecto al nivel de referencia es nula, y por lo tanto, la energía potenciales cero.

$$E_{CB} = E_{pA} = 588.6 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) la velocidad en e punto C...

La energía potencial en C es:

$$E_{pC} = mgh = 5 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 7 \text{ m} = 343.35 \text{ J}$$

La energía mecánica se conserva, calculamos la energía cinética en C mediante la diferencia entre la energía mecánica total menos la potencial en ese punto:

$$E_{mC} = E_{cC} + E_{pC}$$

$$E_{cC} = E_{mC} - E_{pC}$$

$$E_{cC} = 588.6 \text{ J} - 343.35 \text{ J} = 245.25 \text{ J}$$

Con ecuación de la energía cinética obtenemos su valor en C:

$$v_C = \sqrt{2E_{cC} / m} = \sqrt{2 \times 245.25 \text{ J} / 7 \text{ kg}} = 9.904 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1.- (5.1 Serway): Una fuerza F aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2 . La misma fuerza aplicada un objeto de masa m_2 produce una aceleración de 1 m/s^2 . a) ¿Cuál es el valor de la razón m_1/m_2 ? b) Si se sujetan las dos masas, calcule la aceleración con la misma fuerza F .

Ejercicio 2.- (<https://www.ingenierizando.com/dinamica/tercera-ley-de-newton>): Un cuerpo de $0,3 \text{ kg}$ cuelga de un hilo, asimismo, otro cuerpo de $0,1 \text{ kg}$ cuelga del anterior mediante otro hilo, tal y como se muestra en la siguiente imagen. Si se ejerce una fuerza de 6 N hacia arriba, ¿cuál es la aceleración de todo el sistema? ¿Y cuál es la tensión del segundo hilo?

Ejercicio 3.- (5.40 Serway): Un bloque resbala hacia abajo de un plano liso que tiene una inclinación de $\theta = 15^\circ$. Si el bloque que parte del reposo desde la parte superior del plano y la longitud del mismo es de 2 m , calcule a) la aceleración del bloque y b) su rapidez cuando llaga a la parte inferior

Ejercicio 4.- (5.36 Serway): Se ata una cuerda de masa $m = 0.8 \text{ kg}$ a un bloque cuya masa es $m = 4 \text{ kg}$. Se aplica una fuerza de 12 N en el extremo libre de la cuerda al sistema cuerda-bloque a través de una superficie horizontal sin fricción. ¿Cuál es la aceleración del sistema? ¿Qué fuerza ejerce la cuerda sobre el bloque?

Ejercicio 5.- (5.48 Serway): Un bloque de 25 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal áspera. Se requiere una fuerza horizontal de 75 N para hacer que el bloque se ponga en movimiento. Una vez que se encuentra en movimiento, se requiere se requiere una fuerza horizontal de 60 N para mantenerlo en movimiento con rapidez constante. Calcule los coeficientes de rozamiento estático y cinético a partir de esta información.

Ejercicio 6.- (5.63 Serway): Un bloque se desliza hacia abajo de un plano inclinado a 30° con aceleración constante. El bloque parte del reposo desde arriba y recorre 18 m hasta abajo, en donde su rapidez es de 3 m/s. Determine a) la aceleración del bloque y b) el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado.

Ejercicio 7.- (<https://www.fisimat.com.mx/> Momento Angular - Ejercicios Resueltos): Un disco de masa $m = 2\text{ kg}$ y radio $r = 0.5\text{ m}$ gira con una velocidad angular inicial de $\omega_0 = 10\text{ rad/s}$. Se deja caer una masa puntual de $m = 0.1\text{ kg}$ sobre el borde del disco. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del sistema?

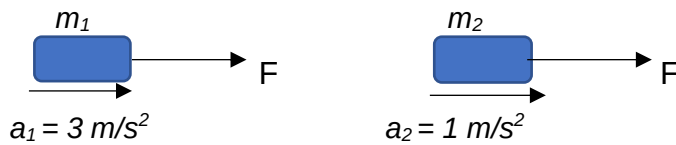
Unidad 3

Anexo 3

Respuesta a los ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1.- (5.1 Serway): Una fuerza F aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2 . La misma fuerza aplicada un objeto de masa m_2 produce una aceleración de 1 m/s^2 . a) ¿Cuál es el valor de la razón m_1/m_2 ? b) Si se sujetan las dos masas, calcule la aceleración con la misma fuerza F .

a)- valor de la razón m_1/m_2 .



$$F = m \times a; \quad m = F / a$$

$$m_1 = F / 3 \text{ m/s}^2; \quad m_2 = F / 1 \text{ m/s}^2$$

$$m_1/m_2 = (F / 3 \text{ m/s}^2) / (F / 1 \text{ m/s}^2)$$

$$m_1/m_2 = 1/3 \quad \checkmark$$

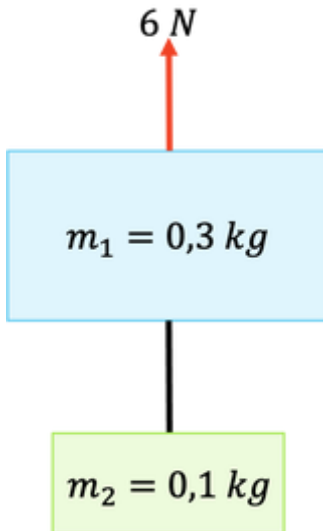
b) aceleración de las dos masas sujetas con la misma fuerza

$$a = F / m = F / (F/3 + F/1)$$

$$a = 0.75 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Ejercicio 2.- (<https://www.ingenierizando.com/dinamica/tercera-ley-de-newton>): Un cuerpo de $0,3 \text{ kg}$ cuelga de un hilo, asimismo, otro cuerpo de $0,1 \text{ kg}$ cuelga del anterior mediante otro hilo, tal y como se muestra en la siguiente imagen. Si se ejerce una fuerza

de 6 N hacia arriba, ¿cuál es la aceleración de todo el sistema? ¿Y cuál es la tensión del segundo hilo?



En este caso tenemos que utilizar la segunda ley de Newton y la tercera ley de Newton para resolver el problema.

En primer lugar, calcularemos la fuerza del peso que actúa sobre cada cuerpo:

$$P_1 = m_1 \times g = 0.3 \times 9.81 = 2.94 \text{ N}$$

$$P_2 = m_2 \times g = 0.1 \times 9.81 = 0.981 \text{ N}$$

Ahora planteamos la ecuación de la segunda ley de Newton a todo el sistema:

$$\sum F = m \times a; \quad (6 - P_1 - P_2) \text{ N} = m \times a$$

Sustituimos los datos y despejamos la aceleración para hallar su valor:

$$(6 - 2.94 - 0.98) \text{ N} = (0.3 + 0.1) \text{ kg} \times a;$$

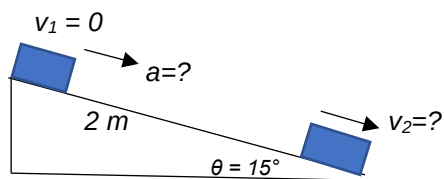
$$a = 5.2 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Por otro lado, la fuerza T que hace el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 será, según la tercera ley, opuesta a la fuerza que hace el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1. Además, como sabemos la aceleración del cuerpo 2 y su peso, volvemos a plantear la ecuación de las fuerzas pero esta vez solo sobre el cuerpo 2:

$$F = m \times a; \quad T - P_2 = m_2 \times a; \quad T - 0.98 = 0.1 \times 5.2;$$

$$T = 0.52 + 0.98 = 1.5 \text{ N} \quad \checkmark$$

Ejercicio 3.- (5.40 Serway): Un bloque resbala hacia debajo de un plano liso que tiene una inclinación de $\theta = 15^\circ$. Si el bloque que parte del reposo desde la parte superior del plano y la longitud del mismo es de 2 m, calcule a) la aceleración del bloque y b) su rapidez cuando llega a la parte inferior.



a) la aceleración del bloque.

$$a = g_x = (9.81 \text{ m/s}^2) \cos (270 + 15)^\circ = 2.54 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

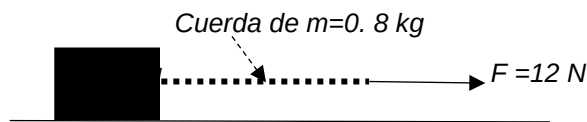
a) su rapidez cuando llega a la parte inferior.

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(2 - 0) \text{ m} = [(v_2)^2 - (0)^2] / 2(2.54 \text{ m/s}^2) = 3.187 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejercicio 4.- (5.36 Serway): Se ata una cuerda de masa $m = 0.8 \text{ kg}$ a un bloque cuya masa es $M = 4 \text{ kg}$. Se aplica una fuerza de 12 N en el extremo libre de la cuerda al sistema cuerda-bloque a través de una superficie horizontal sin fricción. ¿Cuál es la aceleración del sistema? ¿Qué fuerza ejerce la cuerda sobre el bloque?

Diagrama representativo:



- aceleración del sistema:

$$a = F / m = 12 \text{ N} / (4 + 0.8) \text{ kg}$$

$$a = 2.94 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

- fuerza que ejerce la cuerda sobre el bloque:

$$F = m \times a = 4 \text{ kg} \times 2.94 \text{ m/s}^2 = 11.76 \text{ N} \quad \checkmark$$

Ejercicio 5.- (5.48 Serway): Un bloque de 25 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal áspera. Se requiere una fuerza horizontal de 75 N para hacer que el bloque se ponga en movimiento. Una vez que se encuentra en movimiento, se requiere se requiere una fuerza horizontal de 60 N para mantenerlo en movimiento con rapidez constante. Calcule los coeficientes de rozamiento estático y cinético a partir de esta información.

Si se necesitan 75 N para que se produzca el movimiento, entonces:

$$f_{s\text{máx}} = 75 \text{ N}$$

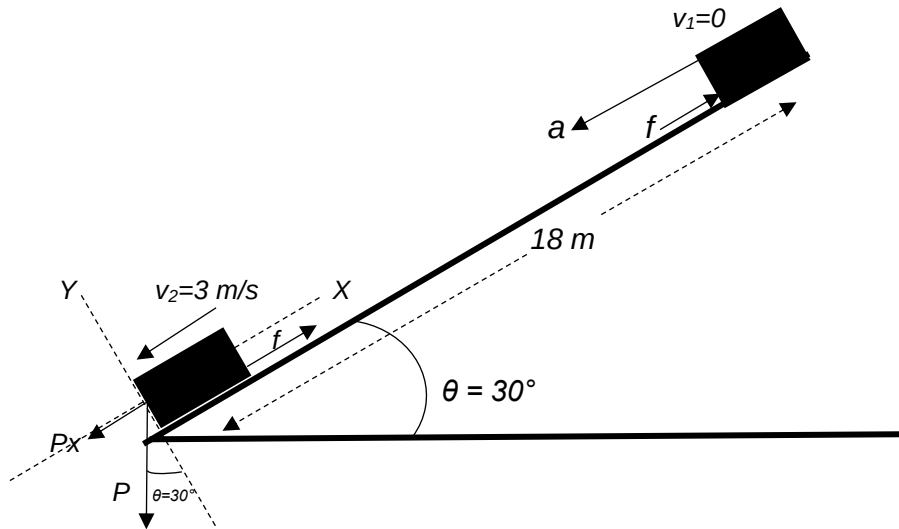
$$f_{s\text{máx}} = \mu_s(N) \quad \dots (a) \quad ; \quad \mu_s = f_{s\text{máx}} / N = 75 \text{ N} / (25 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$\mu_s = 0.305 \quad \checkmark$$

$$f_{k\text{mín}} = \mu_k(N) \quad \dots (b) \quad ; \quad \mu_k = f_{k\text{mín}} / N = 60 \text{ N} / (25 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$\mu_k = 0.244 \quad \checkmark$$

Ejercicio 6.- (5.63 Serway): Un bloque se desliza hacia debajo de un plano inclinado a 30° con aceleración constante. El bloque parte del reposo desde arriba y recorre 18 m hasta abajo, en donde su rapidez es de 3 m/s. Determine a) la aceleración del bloque y b) el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado.



a) la aceleración del bloque...

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(-18 - 0) m = [(3 \text{ m/s } v_2)^2 - (0)^2] / 2a$$

$$a = -0.25 \text{ m/s}^2$$

b) coeficiente de rozamiento cinético...

$$\left. \begin{array}{l} F = m \times a \\ F = Px + f_k \end{array} \right\} m \times a = Px + f_k$$

$$m \times a = m \times g \times \cos(270 - \theta)^\circ - \mu_k N$$

$$m \cancel{\times} a = m \cancel{\times} g \times \cos(270 - \theta) - \mu_k m \times g \cancel{\times} \sin(270 - \theta)^\circ$$

$$a = g \times \cos(270 - \theta) - \mu_k \times g \times \sin(270 - \theta)^\circ$$

$$-0.25 \text{ m/s}^2 = 9.81 \text{ m/s}^2 \times \cos(270 - 30)^\circ - \mu_k \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times \sin(270 - 30)^\circ$$

$$\mu_k = 0.548 \quad \checkmark$$

Ejercicio 7. - (<https://www.fisimat.com.mx/Momento Angular - Ejercicios Resueltos/>): Un disco de masa $m=2\text{kg}$ y radio $r=0.5\text{m}$ gira con una velocidad angular inicial de $\omega_0=10 \text{ rad/s}$. Se deja caer una masa puntual de $m=0.1\text{kg}$ sobre el borde del disco. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del sistema?

Calculamos el momento de inercia del disco:

$$I_{\text{disco}} = (1/2)mr^2 = (1/2)(2 \text{ kg})(0.5 \text{ m})^2 = 0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia de la masa puntual es:

$$I_{\text{masa}} = mr^2 = (0.1 \text{ kg})(0.5 \text{ m})^2 = 0.025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por conservación del momento angular:

$$I_{\text{total}}\omega_0 = (I_{\text{disco}} + I_{\text{masa}})\omega_f$$

Sustituimos los valores:

$$(0.25)(10) = (0.25 + 0.025)\omega_f$$

Resolviendo para ω_f :

$$\omega_f = 9.09 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

UNIDAD 4: Trabajo y energía.

4.1. Concepto de trabajo.

Producto escalar de dos vectores.

Antes de abordar el concepto de trabajo, revisaremos el del *producto escalar de dos vectores* ya que es de utilidad para el manejo de las operaciones matemáticas en la resolución de los diferentes planteamientos de este tema. Este producto entre dos vectores recibe el nombre de escalar porque al realizarlo el resultado es justamente una *cantidad escalar*. También suele llamarse *producto punto* y se denota de la siguiente forma:

$$A \cdot B = c \quad c: \text{escalar}$$

Donde A y B son la magnitud de los vectores y c el resultado escalar del producto.

Pueden presentarse dos casos en los planteamientos en los que es necesario calcular el producto escalar o producto punto de dos vectores:

Caso 1.- Cuando se conocen las magnitudes de los vectores A y B .

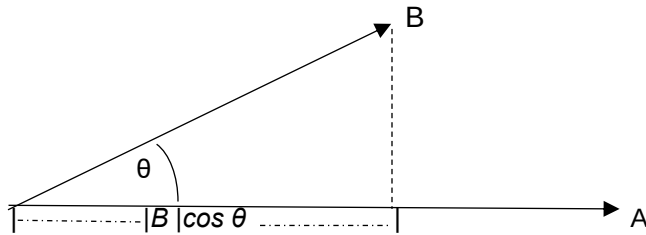
En esta situación, el producto punto de estos vectores se define por la ecuación:

$$A \cdot B = (A)(B) \cos \theta \quad (\text{escalar}), \text{ siendo } \theta \text{ el ángulo formado entre los vectores.}$$

La interpretación Geométrica del producto escalar de dos vectores se representa en la Figura 4.1.

Figura 4.1

Producto escalar de los vectores A y B



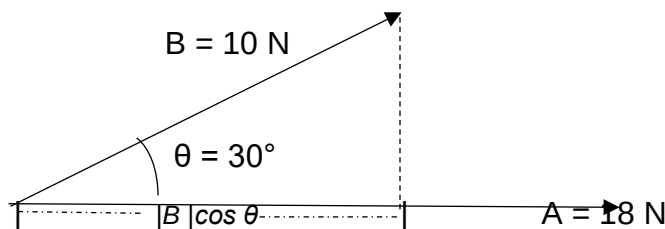
En el diagrama puede apreciarse que $A \cdot B$, según su ecuación, es el producto aritmético de la magnitud del vector A por la proyección de B sobre A , $(|B| \cos \theta)$. Puede verse además que el producto escalar es *conmutativo*, es decir:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Ejemplo 4.1: Sean los vectores $A = 18 \text{ N}$ y $B = 10 \text{ N}$ que forman entre sí un ángulo de 30° , *Figura 4.2*, calcular el producto escalar de ellos.

Figura 4.2

Ejemplo 4.1 Producto escalar $A \cdot B$



$$A \cdot B = (A)(B) \cos \theta = 18 \times 10 \times \cos 30^\circ = 155.884 \quad \checkmark$$

$$B \cdot A = (A)(B) \cos \theta = 10 \times 18 \times \cos 30^\circ = 155.884$$

Caso 2. - Si A y B son vectores que vienen dados en términos de sus vectores unitarios i, j, k .

Sean los vectores $A = A_i + A_j + A_k$ y $B = B_i + B_j + B_k$

$$A \cdot B = (A_i + A_j + A_k) \cdot (B_i + B_j + B_k)$$

$$A \cdot B = A_i B_i (i \cdot i) + A_i B_j (i \cdot j) + A_i B_k (i \cdot k) + A_j B_i (j \cdot i) + A_j B_j (j \cdot j) + A_j B_k (j \cdot k) + A_k B_i (k \cdot i) + A_k B_j (k \cdot j) + A_k B_k (k \cdot k).$$

El ángulo entre dos vectores con vectores unitarios diferentes (por ejemplo i y j) es 90° por lo que

$$i \cdot j = (1 \times 1) \cos 90^\circ = 0$$

entonces todos los productos punto con esta condición en la expresión anterior se cancelan.

El ángulo entre dos vectores unitarios iguales (por ejemplo i e i) es 0° , por lo que

$$i \cdot i = (1 \times 1) \cos 0^\circ = 1$$

entonces todos estos productos punto en la expresión anterior permanecen quedando finalmente:

$$A \cdot B = A_i B_i (i \cdot i) + A_j B_j (j \cdot j) + A_k B_k (k \cdot k) = A_i B_i (1) + A_j B_j (1) + A_k B_k (1)$$

$A \cdot B = A_i B_i + A_j B_j + A_k B_k$	(escalar)
---	-----------

Conclusión: El producto escalar de dos vectores expresados en notación de sus vectores unitarios es la suma de los productos aritméticos de las componentes i, j y k de la misma dirección de los vectores entre sí como se indica en la expresión anterior. El resultado de esta suma es una cantidad escalar.

Ejemplo 4.2: Sean los vectores $A = (3i - 2j + 3k) \text{ N}$ y $B = (-i + 3j - 4k) \text{ N}$ que forman entre sí un ángulo de 50° , ¿Cuánto vale el producto escalar $A \cdot B$?

Aplicando la ecuación: $A \cdot B = A_i B_i + A_j B_j + A_k B_k$

$$A \cdot B = (3)(-1) + (-2)(3) + (3)(-4) = -21 \text{ N} \quad \checkmark$$

Ahora definamos el concepto de trabajo...

Cuando una fuerza es aplicada a un cuerpo y éste se desplaza una distancia d, se dice que la fuerza efectuó un trabajo sobre el objeto. Matemáticamente, el trabajo está definido como el producto escalar de los vectores de fuerza F y de desplazamiento S . Si denotamos como T el trabajo realizado entonces:

$T = F \cdot S = (A)(B) \cos \theta$

Siendo θ el ángulo entre la dirección de los vectores de fuerza y de desplazamiento.

La unidad del trabajo en el Sistema Internacional (SI) es el Newton-metro ($N \cdot m$) conocido como *Joule* o *Julio*, nombrada así en honor del físico inglés James Prescott Joule y representa el trabajo realizado por una fuerza de un Newton sobre un objeto cuando éste se desplaza una distancia de un metro *en dirección de la fuerza*, por efecto de dicha fuerza.

Cálculo del trabajo con vectores en forma de vectores unitarios.

Si se conocen las componentes x , y y z de la fuerza y del desplazamiento, entonces aplica la ecuación.

$$T = F \cdot S = A_i B_i + A_j B_j + A_k B_k \quad (\text{Note que en esta ecuación no aparece el } \cos \theta)$$

Cuando varias fuerzas son aplicadas a un objeto, el trabajo realizado es la suma de los trabajos individuales de cada fuerza, que es igual al trabajo de la fuerza resultante de todas las fuerzas.

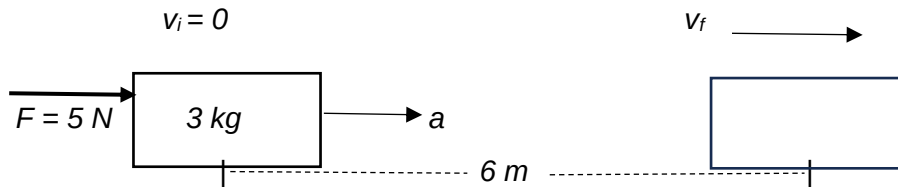
Si un sistema de coordenadas es utilizado de referencia, debe respetarse el signo de los ejes para asignar el de las fuerzas y el desplazamiento. En general, si el sentido de una fuerza es en contra al desplazamiento sus signos serán también contrarios. Un ejemplo de tales fuerzas es la de *fricción* que siempre se opone al movimiento.

Ejemplo 4.3: Una masa de 3 kg, inicialmente en reposo, se desplaza 6 m por la aplicación de una fuerza de 5 N como se muestra en la Figura 4.3. Hallar a) el trabajo realizado por

la fuerza sobre la masa, b) la aceleración de la masa durante la aplicación de la fuerza, c) su velocidad al final de ese trayecto y d) el tiempo que tomó el recorrido.

Figura 4.3

Ejemplo 4.3 Trabajo de una fuerza F



a) el trabajo realizado por la fuerza.

$$T = F \cdot S = (F)(S) \cos \theta = (5 \text{ N})(6 \text{ m}) \cos 0^\circ = 30 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) la aceleración de la masa.

$$a = F / m = 5 \text{ N} / 3 \text{ s} = 1.7 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

c) su velocidad al final.

$$(x_2 - x_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2a \quad \text{----- (V)}$$

$$(6 \text{ m} - 0) = [(v_2)^2 - 0] / 2(1.7 \text{ m/s}^2)$$

$$v_2 = 4.51 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

d) el tiempo que tomó el recorrido.

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{----- (III)}$$

$$1.7 \text{ m/s}^2 = (4.51 \text{ m/s} - 0) / (t_2 - 0) \text{ s}$$

$$t_2 = 2.65 \text{ s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.4: Una fuerza $F = (2i + 5j) \text{ N}$ le provoca a un objeto un desplazamiento

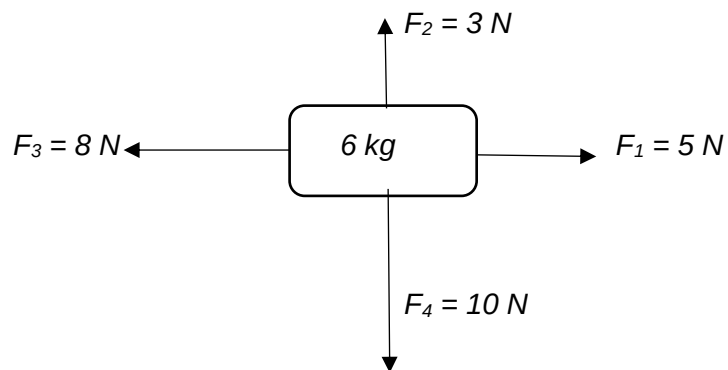
$S = (3i - 4j) \text{ m}$. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza F .

$$T = F \cdot S = A_i B_i + A_j B_j + A_k B_k = (2 \text{ N})(3 \text{ m}) + (5 \text{ N})(-4 \text{ m}) = -14 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.5: Considere el diagrama de cuerpo libre de la Figura 4.4

Figura 4.4

Ejemplo 4.5 Diagrama de cuerpo libre. Aceleración y trabajo de una fuerza F



Hallar a) la magnitud y dirección de la aceleración del cuerpo y b) El trabajo efectuado si se produce un desplazamiento de 4 m.

Calculemos primero la Resultante de las fuerzas y su dirección...

$$R = (-8 + 5)i \text{ N} + (-10 + 3)j \text{ N} = (-3i - 7j) \text{ N}$$

$$|R| = \sqrt{(-3 \text{ N})^2 + (-7 \text{ N})^2} = 7.615 \text{ N}; \quad \theta_R = \tan^{-1} = (-7/-3) = 66.8^\circ$$

$$\theta_R = 180^\circ + 66.8^\circ \quad \theta_R = 246.8^\circ \text{ (tercer cuadrante)}$$

a) *magnitud y dirección de la aceleración...*

$$a = F / m = 7.615 \text{ N} / 6 \text{ kg} = 1.27 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

$$\text{dirección:} \quad \theta_a = 246.8^\circ \text{ (la misma dirección de R)} \quad \checkmark$$

b) *trabajo efectuado en un desplazamiento de 4 m.*

$$|S| = 4 \text{ m}$$

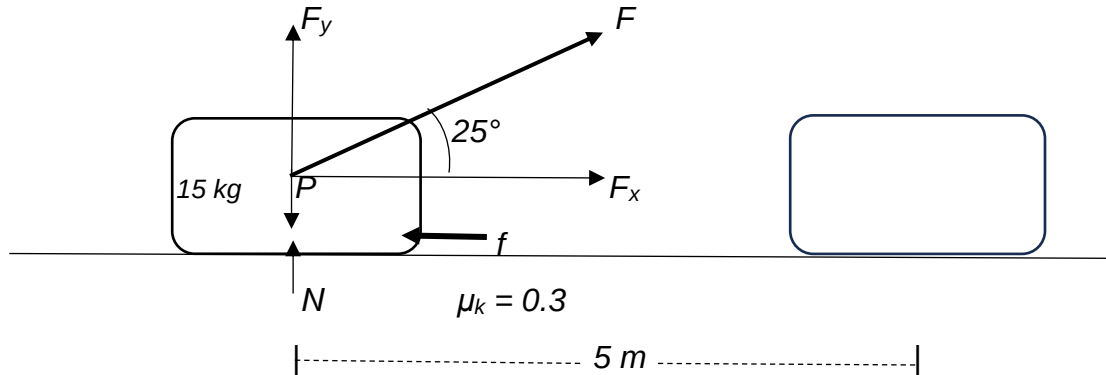
$$T_F = F \cdot S = (F)(S) \cos \theta = (7.615 \text{ N})(4 \text{ m}) \cos 0^\circ = 30.46 \text{ J} \quad \checkmark$$

(En esta fórmula, θ es el ángulo entre R y S)

Ejemplo 4.6 (7.8 Serway): El bloque de 15 kg de la Figura 4.5 es arrastrado por una fuerza constante de 70 N por una superficie áspera horizontal. Dicha fuerza guarda un ángulo de 25° con la horizontal. El bloque se desplaza 5 m y $\mu_k = 0.3$. Calcule el trabajo realizado por a) la fuerza aplicada, b) la fuerza de rozamiento, c) por la fuerza normal, d) la fuerza de gravedad, e) ¿cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?

Figura 4.5

Ejemplo 4.6: Diagrama representativo que muestra los vectores que actúan sobre el bloque.



a) trabajo realizado por la fuerza aplicada...

$$T_F = F \cdot S = (F)(S) \cos \theta = (70 \text{ N})(5 \text{ m}) \cos 25^\circ = 317.2 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) trabajo realizado por la fuerza de rozamiento...

$$f_k = \mu_k N ; \quad N = P + F_y = [(15 \text{ kg} \times (-9.81 \text{ m/s}^2)] + (70 \text{ N} \sin 25^\circ) = -117.56 \text{ N}$$

(nótese que N se ve disminuida pues F_y alivia en el peso sobre la superficie)

$$f_k = 0.3 (-117.56 \text{ N}) = -35.27 \text{ N}$$

$$T_{f_k} = f_k \cdot S = (f_k)(S) \cos \theta = (-35.27 \text{ N})(5 \text{ m}) \cos 180^\circ = -176.35 \text{ J} \quad \checkmark$$

(trabajo negativo por ser f_k contraria al movimiento)

(recuérdese que el Trabajo en escalar).

c) trabajo realizado por la fuerza Normal...

-como no hay desplazamiento vertical entonces:

$$T_N = 0 \quad \checkmark$$

d) *trabajo realizado por la fuerza de gravedad...*

$$T_g = 0 \quad \checkmark$$

e) *trabajo neto realizado sobre el bloque...*

$$T_{\text{neto}} = 317.2 \text{ J} - 176.35 \text{ J} = 140.85 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.2. Potencia (P).

Hemos aprendido que el trabajo es el efecto de desplazamiento de una fuerza una aplicada a un objeto. Sin embargo, nada se ha dicho a cerca del tiempo que se utilice para dicho desplazamiento. No será lo mismo que un trabajo se realice por ejemplo en 10 segundos que en 40. La diferencia radica en lo que en física se conoce como *potencia*.

La potencia se define en física como la razón del trabajo efectuado entre el tiempo empleado para ello. Su ecuación genérica es:

$$P = T / t$$

Potencia media (P_m).

Cuando una fuerza ejecuta trabajo sobre un objeto, la fuente de la fuerza *transfiere energía* al objeto, es decir, *el trabajo es una manifestación de la energía (energía mecánica)*. Entonces podemos escribir:

$$P_m = \Delta T / \Delta t$$

Donde ΔT es la energía total transferida al objeto en forma de trabajo mediante la fuerza y Δt el tiempo total utilizado.

Es claro que la potencia media está referida a un lapso de tiempo de t_1 a t_2 ($t_2 - t_1 = \Delta t$).

Potencia instantánea (P).

Se define como: $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta t) = dT / dt = d(F \cdot S) / dt = F (dS / dt)$

$$P = F \cdot v$$

Unidades de P: $(N)(m/s) = 1 \text{ N} \cdot m / s = 1 \text{ J} / s = 1 \text{ watt (W)}$ (En el sistema internacional)

Otra unidad de potencia también en ocasiones usada es el hp:

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb} / s = 746 \text{ W}$$

Ejemplo 4.7 (7.57 Serway): Un automóvil de 1,500kg se acelera uniformemente desde el reposo hasta una rapidez de 10 m/s en 3 s. Calcule a) el trabajo realizado sobre el automóvil en este tiempo, b) la potencia promedio entregada por el motor en los primeros 3 s y c) la potencia instantánea entregada por el motor en $t = 2 \text{ s}$.

a) el trabajo realizado por el automóvil de $t = 0$ a $t = 3 \dots$

$$T = F \cdot S$$

Encontremos la distancia recorrida en 3 s ...

$$(x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

$$(x_2 - 0) = \left(\frac{1}{2}\right) (0 + 10) \text{ m} \times (3 \text{ s} - 0); \quad x_2 = 15 \text{ m, entonces } S = 15 \text{ m.}$$

Ahora calculemos la aceleración...

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$a = (10 - 0) \text{ m/s} / (3 - 0) \text{ s} = 10/3 \text{ m/s}^2$$

la fuerza que se aplicó al automóvil es:

$$F = m \times a = 1,500 \text{ kg} \times (10/3 \text{ m/s}^2) = 5,000 \text{ N}$$

$$\text{Trabajo efectuado: } T = F \cdot S = 5,000 \text{ N} \cdot (15 \text{ m}) = 75,000 \text{ J} = 75 \text{ kJ} \quad \checkmark$$

b) *potencia promedio entregada por el motor en los primeros 3 s.*

$$P_m = \Delta T / \Delta t = 75,000 \text{ J} / 3 \text{ s} = 25,000 \text{ W} \quad \checkmark$$

c) *potencia instantánea entregada por el motor en $t = 2 \text{ s}$.*

velocidad a los 2 s...

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$(10/3) \text{ m/s}^2 = (v_2 - 0) / (2 - 0) \text{ s} ; \quad v_{t=2 \text{ s}} = 20/3 \text{ m/s}.$$

$$P = F \cdot v = 5,000 \text{ N} \times (20/3 \text{ m/s}) = 33.33 \text{ kJ.} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.8 (7.60 Serway): Un vehículo puede desplazarse a una velocidad máxima de 31 m/s cuando la carretera es horizontal y rectilínea y el motor le entrega una potencia de 130,000 W. Si un tramo de la carretera es inclinado a razón de 1/20, a) ¿cuál sería su velocidad máxima en dicho tramo? b) Si una pendiente del camino es de 1/10 y la velocidad es de 10 m/s, ¿cuál es la potencia?. El vehículo pesa 2,500 N y la fricción y el viento tienen un efecto constante.

$$a) \quad P_{inst.} = f_t \times v$$

$$130,000 \text{ W} = f_t \times 31 \text{ m/s}; f_t = 4,193.54 \text{ N}$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1}(1/20) = 2.866^\circ$$

$$v = P / f_t = 130,000 \text{ W} / [4,193.54 \text{ N} + 2,500 \text{ N} \times (1/20)] = 30,987 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

 $\text{sen } 2.866^\circ$ componente X del peso.

b) *potencia útil en un plano inclinado de 1 en 10 si está viajando a 10 m/s...*

$$v = P / f_t$$

$$10 \text{ m/s} = P / [4,193.54 \text{ N} + 2,500 \text{ N} (1/10)]$$

$$P = 44,435.4 \text{ W} \quad \checkmark$$

(*) *Desplazamiento hacia arriba del plano inclinado.*

4.3. Energía cinética.

En física *la energía cinética* se define como *el trabajo realizado* por las fuerzas que actúan sobre una *masa y la acelera* desde una velocidad inicial hasta otra final, frecuentemente se representa con el símbolo E_c , el cual utilizaremos aquí.

La ecuación representativa de la E_c es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

En la mecánica clásica, la energía cinética depende únicamente de la masa y de la velocidad del cuerpo. La energía cinética es una de las formas fundamentales de energía mecánica, que se manifiesta en cualquier cuerpo en movimiento ya sea que se muevan una sola dirección (traslación) o en giros (rotación) o en combinación de ambos son una manifestación de la energía cinética.

Generación de energía eléctrica.

- Las turbinas eólicas transforman la energía cinética del viento en energía eléctrica.
- En las plantas hidroeléctricas, el movimiento del agua (energía cinética) se usa para mover turbinas y generar electricidad.

Trabajo en el cambio de energía cinética.

Ecuación de trabajo: $T = F \cdot S$

Pero:

$$F = m \cdot a$$

$$S = (x_2 - x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) \text{ ----- (IV)}$$

Entonces:

$$T = m \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1)$$

Como

$$a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \text{ ----- (III)}$$

$$T = m \cdot [(v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (v_1 + v_2) (t_2 - t_1)$$

Simplificando y reordenando finalmente se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$T = Ec_2 - Ec_1$$

$$T = \Delta Ec$$

Por tanto, el trabajo realizado por una fuerza sobre una masa, es la energía cinética que la fuerza le transfiera a la masa cambiándole su velocidad.

La energía del trabajo puede ser transferida del entorno a la masa u objeto (algún equipo mecánico), trabajo positivo o viceversa, de la masa o equipo al entorno, trabajo negativo. Según este criterio toda energía que entra a un sistema se considera positivo y aquella que el sistema otorga es negativa.

Ejemplo 4.9: <https://www.fisimat.com.mx/energia-cinetica/> Un cohete de 2,000 kg tiene una velocidad de 800 m/s antes de alcanzar su máxima aceleración. Si la velocidad aumenta un 50%, ¿cuánto aumenta su energía cinética?

$$m = 2,000 \text{ kg}$$

$$v_1 = 800 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 150 \% (v_1) = 1.5(800 \text{ m/s}) = 1,200 \text{ m/s}$$

energía cinética antes de alcanzar su máxima aceleración...

$$Ec_1 = (\frac{1}{2})mv^2 = (\frac{1}{2}) (2,000 \text{ kg}) (800 \text{ m/s})^2 = 640'000,000 \text{ J}$$

después que aumentó al 50%...

$$Ec_2 = (\frac{1}{2})mv^2 = (\frac{1}{2}) (2,000) (1,200)^2 = 1,440'000,000 \text{ J}$$

Aumento de su energía cinética...

$$\Delta Ec = 1,440,000,000 \text{ J} - 640,000,000 \text{ J} = 800'000,000 \text{ J} \quad \checkmark$$

Esta ΔEc es consecuencia del trabajo que el combustible realiza sobre cohete.

Ejemplo 4.10: <https://www.fisimat.com.mx/energia-cinetica/> Un objeto tiene una masa de 2 kg y su energía cinética es de 50 J. ¿Cuál es su velocidad?

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$Ec = 50 \text{ J}$$

$$Ec = (\frac{1}{2})mv^2$$

$$v = \sqrt{2Ec / m} = \sqrt{2(50 \text{ J}) / 2 \text{ kg}} = 7.07 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

4.4. Energía potencial.

Es la energía mecánica que tiene un objeto en razón de su posición en relación con un nivel de referencia previamente determinado.

El físico inglés William Rankine en el siglo XIX, introdujo el uso de esta manera de nombrar esta este tipo de energía.

Los principales tipos principales de energía potencial, según sea la fuerza que origina son:

- Energía potencial gravitacional.
- Energía potencial elástica.

El primer caso corresponde al campo gravitacional *de la Tierra* sobre la masa de cualquier objeto situada en dicho campo como caso particular de la ley de la gravitación universal.

Se considera que en una posición dada, los objetos capaces de almacenar energía potencial guardan una energía potencial correspondiente a ella, cuando se aplica fuerza y experimentan un cambio de posición, entonces tendrán un cambio en su energía potencial, de ahí que la forma de expresar dicha energía sea en términos de ΔE_p .

Ecuación de la energía potencial.

Para el caso de la energía *potencial gravitacional* la ecuación es:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

Donde:

- E_p .- *energía potencial.*
- m .- *masa en kilogramos.*
- g .- *aceleración de la gravedad.*

- h . - altura en metros.

Esta expresión nos proporciona el trabajo T que se realiza al elevar un objeto de masa m a una altura h . Este trabajo se almacena como energía potencial según la altura h a la que se llevó el objeto desde su posición inicial y que, al soltarlo, se transforma en energía cinética durante su caída que también puede ser aprovechada para producir trabajo nuevamente.

En el tipo de energía *potencial elástica*, podemos citar como ejemplos típicos los *arcos* y los *resortes*.

Un arco, cuando se tensa, almacena energía potencial, que se transforma en energía cinética de la flecha al soltarse.

De igual forma un resorte, si se comprime o estira desde su posición de equilibrio, almacena energía que observamos como la tensión que obtenemos y que es utilizada por el mecanismo al cual está integrado el resorte.

Los cuerpos elásticos presentan un límite en su capacidad de carga antes de deformarse permanentemente. Cuando su deformación rebasa el límite elástico, el objeto no recuperará su forma original.

La fórmula para el cálculo de la energía potencial elástica que guarda un muelle o resorte es:

$$\Delta E_{pe} = (1/2) (kx^2)$$

Dónde,

- E_{pe} . - energía potencial elástica.

- k .- constante de fuerza del resorte.
- x .- longitud de estiramiento o compresión.

Otros tipos de energía potencial:

Química:

- Los alimentos tienen energía potencial química. Nuestro cuerpo digiere esta energía potencial y proporciona la energía necesaria para las funciones corporales.
- La energía potencial química de un petardo que se libera al explotar éste.

eléctrica:

La que poseen las cargas eléctricas en un [campo eléctrico](#).

nuclear:

Almacenada en el núcleo de [los átomos](#) y es liberada en reacciones nucleares, como la fisión en las centrales nucleares o la fusión en el Sol.

Unidad de energía potencial.

La energía potencial tiene las unidades de **$\text{kg m}^2 / \text{s}^2$** y se expresa utilizando el *Joule* (J).

Ejemplo 4.11 (8.33 pág. 175 Física. Conceptos y Aplicaciones. Séptima Edición Revisada. Paul E. Tippens.): Una fuerza media de 600 N comprime Un resorte es comprimido 4 cm. con una fuerza de 600 N ¿Cuánto trabajo realiza el resorte? ¿Cuánto cambia la energía potencial del resorte?

De acuerdo a la definición de trabajo, éste será:

$$T_F = F \cdot S = (600 \text{ N})(0.04 \text{ m}) = 24 \text{ J} \quad \checkmark$$

Este es el trabajo realizado por la fuerza aplicada, el resorte produce un trabajo igual, pero en sentido contrario, por lo que la respuesta es:

$$T_{\text{resorte}} = -24 \text{ J} \quad \checkmark$$

El resorte almacena la energía del trabajo realizado sobre él para comprimirlo como energía potencial elástica, la variación de ésta en el resorte será entonces:

$$\Delta E_{pe} = 24 \text{ J} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.12 (Ejercicio 8.31 pág. 175 Física. Conceptos y Aplicaciones. Séptima Edición Revisada. Paul E. Tippens): Una bala de cañón alcanza una velocidad de 60 m/s ¿cuál será su altura si se sabe que energía potencial es un medio de la cinética?

$$E_c = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(m)(60 \text{ m/s})^2$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_p = m \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot h = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)(m)(60 \text{ m/s})^2 \right]$$

Igualando, simplificando, despejando y efectuando las operaciones...

$$h = 91.8 \text{ m} \quad \checkmark$$

4.5. Fuerzas conservativas.

En la U.3 tuvimos el primer acercamiento con el tema de fuerzas conservativas al definir el concepto de *fuerzas centrales*: Las fuerzas centrales son de *carácter conservativo*, es decir, actúan según el *principio de conservación de la energía mecánica*. La energía mecánica es la *suma de las energías potencial y cinética* de un objeto o sistema y esta suma se conserva.

Ahora bien, desde el punto de vista del trabajo, una fuerza es conservativa cuando aquel, (el trabajo), ***depende sólo de la posición de los puntos inicial y final*** y no de la *trayectoria* seguida para moverse de uno a otro. Las fuerzas conservativas tienen su mejor ejemplo en las fuerzas de campo, gravitatorio o eléctrico y en dispositivos como los *resortes*.

Las fuerzas conservativas producen cambios en la **energía potencial**. El trabajo de las *fuerzas conservativas* equivale a la variación de la energía potencial:

$$T_{\text{cons}} = - \Delta E_p$$

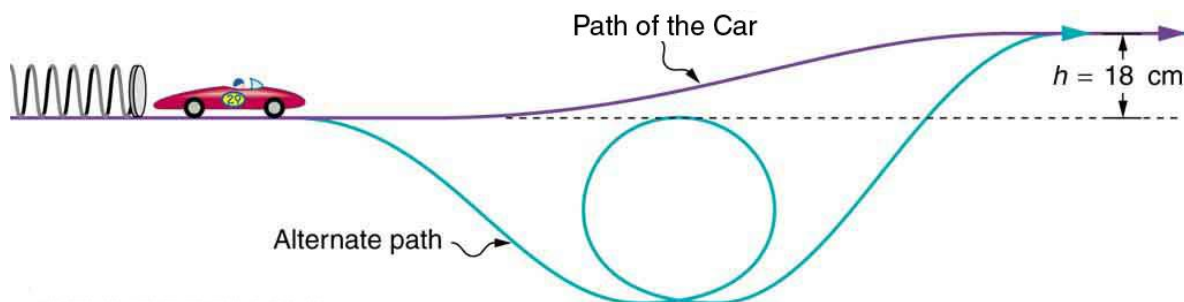
El **trabajo neto** de las fuerzas conservativas en una trayectoria cíclica es cero. Un objeto en movimiento en el campo de una fuerza conservativa que se *opone a su movimiento*, realiza un trabajo que ***incrementa la energía potencial*** del objeto, esto sucederá mientras exista tal oposición del campo. Una fuerza realiza trabajo positivo cuando el desplazamiento y la fuerza tienen el mismo sentido. Las fuerzas que no cumplen con las características de las conservativas son llamadas *no conservativas* o *dissipativas* pues disipan la energía mecánica del sistema (la fuerza de fricción y las de campo *magnético* son ejemplos de ellas).

Ejemplo 4.13

([https://espanol.libretexts.org/Fisica/Fisica_Conceptual/Introducci%C3%B3n_a_la_F%C3%ADsica_\(Parque\)/03%3A_Mec%C3%A1nica_I_-_Energ%C3%ADa_y_Momento%2C_Oscilaciones_y_Ondas%2C_Rotaci%C3%B3n_y_Fluidos/03%3A_Trabajo_y_Energ%C3%ADa/3.05%3A_Fuerzas_conservadoras%2C_energ%C3%ADa_potencial_y_conservaci%C3%B3n_de_energ%C3%ADa](https://espanol.libretexts.org/Fisica/Fisica_Conceptual/Introducci%C3%B3n_a_la_F%C3%ADsica_(Parque)/03%3A_Mec%C3%A1nica_I_-_Energ%C3%ADa_y_Momento%2C_Oscilaciones_y_Ondas%2C_Rotaci%C3%B3n_y_Fluidos/03%3A_Trabajo_y_Energ%C3%ADa/3.05%3A_Fuerzas_conservadoras%2C_energ%C3%ADa_potencial_y_conservaci%C3%B3n_de_energ%C3%ADa)): Un pequeño automóvil de juguete de 100 g, Figura 4.6, impulsado por un muelle comprimido. El carro va en una pista elevada 180 cm arriba de donde partió. El muelle almacena una energía potencial de 0.200 J. Asumiendo que la fricción es despreciable, encuentre (a) la velocidad del automóvil justo antes de que inicie la bajada y (b) su rapidez en la cima.

Figura 4.6

Ejemplo 4.13 Energía de un muelle o resorte.



El pequeño carro está en los campos de dos fuerzas conservativas, gravitacional y elástica, entonces la conservación de la energía mecánica es aplicable.

$$E_{m_i} = E_{m_f}$$

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f}$$

o

$$(\frac{1}{2})mv_i^2 + (mgh_i + Eps_i) = (\frac{1}{2})mv_f^2 + (mgh_f + Eps_f)$$

Donde h es la altura (posición vertical) y Eps es la energía potencial del muelle.

Resolución:

(a) la velocidad del automóvil justo antes de que inicie la bajada

Tomando la altura de salida como referencia y la v_i es cero, eliminando términos en la ecuación de conservación de energía mecánica podemos escribir:

$$Eps_i = (\frac{1}{2})mv_f^2.$$

Lo que muestra que toda la energía potencial se transforma en cinética, entonces...

$$v_f = \sqrt{(2)(0.200 \text{ J}) / 0.100 \text{ kg}} = 2.00 \text{ m/s.} \quad \checkmark$$

(b) su rapidez en la cima.

Haciendo el mismo tipo de análisis para encontrar qué términos son cero, la conservación de la energía mecánica queda:

Haciendo cero los términos que lo son en ecuación de la conservación de la energía mecánica queda:

$$Eps_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

Lo que significa que la energía potencial elástica del muelle se transforma parte en gravitacional y parte en cinética.

Despejando:

$$v_f = \sqrt{(2)(E_{ps_i} - mgh_i) / m}$$

$$v_f = \sqrt{0.0472 \text{ J} / 0.100 \text{ kg}} = 0.687 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

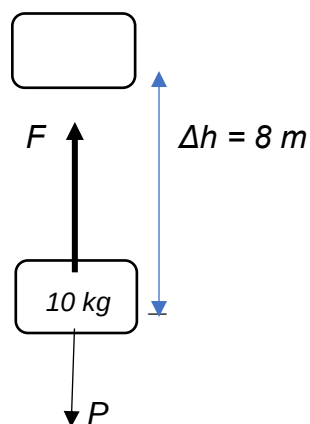
Discusión

Note que no se calcula en forma directa el trabajo de las fuerzas conservativas, sino mediante el cambio que producen en la energía potencial.

Ejemplo 4.14: El Peso como fuerza conservativa. -Determinar el trabajo del peso cuando al subir 12 m un cuerpo de 15 kg como muestra la Figura 4.7 a) en forma vertical, Figura 4.7 b) Por una rampa sin fricción con 30° de pendiente,

Figura 4.7 a

Ejemplo 4.14 a) El Peso como fuerza conservativa



a.- verticalmente...

$$F = -P = -m \cdot g$$

$$T = F \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h \cdot \cos \theta = (15 \text{ kg})(-9.81 \text{ m/s}^2) \cdot 12 \text{ m} \cdot \cos 180^\circ = -1,765.8 \text{ J} \quad \checkmark$$

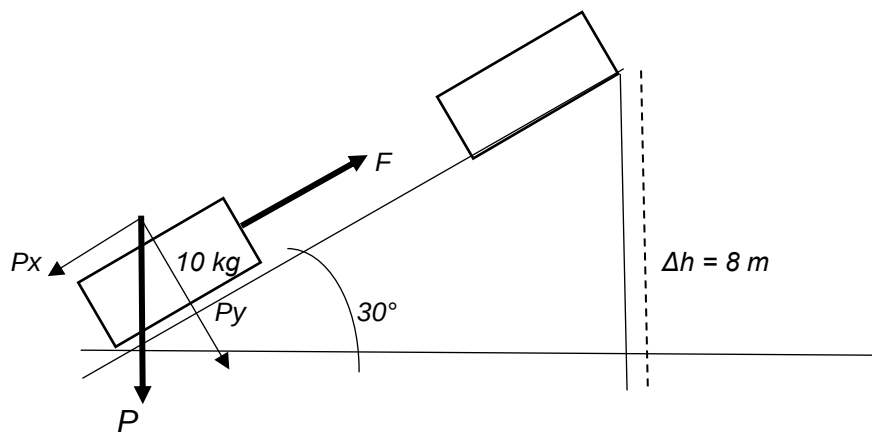
El signo negativo del trabajo T significa que la fuerza F es contraria al desplazamiento Δh .

Recuerde que el trabajo es escalar.

b.- Por una rampa sin fricción con 30° de pendiente...

Figura 4.7 b

Ejemplo 4.14 b) El Peso como fuerza conservativa en una rampa



$$P_x = (15 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \cos (270 - 30)^\circ = -73.57 \text{ N}$$

$$S_x = 8 / \sin 30^\circ = 16 \text{ m}$$

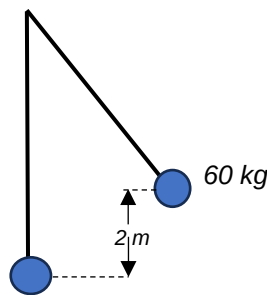
$$T_x = -73.57 \text{ N} \times 16 \text{ m} = -1,177.12 \text{ J} \quad \checkmark$$

El trabajo es independiente **del camino**, debido a que el peso es una fuerza del campo gravitacional la cual es conservativa.

Ejemplo 4.15: Una masa para demoler de 60 kg tipo péndulo se eleva una altura de 2 m por arriba de su posición de equilibrio y luego es liberada. Despreciando la fricción del aire ¿con qué velocidad chocará con un muro si lo hace en el punto más bajo de su trayectoria?

Figura 4.8

Ejemplo 4.15 Energía Mecánica de una masa de demolición.



la energía mecánica total en las posiciones inicial y final es la misma...

$$(E_{c_i} + E_{p_i}) = (E_{c_f} + E_{p_f})$$

$$mgh_i + (\frac{1}{2})mv_i^2 = mgh_f + (\frac{1}{2})mv_f^2$$

Tomando como inicial la posición más elevada donde la velocidad es cero y la altura es 2 m. En la posición final, en la posición más baja, la altura es cero y ya adquirió la velocidad que no conocemos. Sustituimos los datos en la ecuación anterior:

$$60 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} + (\frac{1}{2})60 \text{ kg} \times 0 = 60 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0 + (\frac{1}{2})60 \text{ kg} \times v_f^2$$

$$60 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} = (\frac{1}{2})60 \text{ kg} \times v_f^2$$

$$9.81 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} = (\frac{1}{2}) \times v_f^2$$

$$v_f = 6.26 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 4.16: Un objeto de 15 kg cae libremente 18 m. Calcular la energía potencial, cinética y total a) en lo más alto; b) en el piso.

a) *en lo más alto...*

$$E_p = mgh = 15 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 18 \text{ m} = 2,648.7 \text{ J}$$

$E_c = 0$ (como $v = 0$ en este punto, no tiene energía cinética)

$$E_{total} = E_p + E_c = 2,648.7 \text{ J} + 0 = 2,648.7 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) *en el piso...*

como la altura $h = 0$, entonces $E_p = 0$

Toda la E_p del cuerpo se transforma en E_c al nivel del piso, por lo tanto:

$$E_c = 2,648.7 \text{ J}$$

$$E_{total} = E_p + E_c = 0 + 2,648.7 \text{ J} = 2,648.7 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.6. Principio de conservación de la energía.

El concepto de este principio es tema obligado desde los primeros cursos de Física en la Secundaria. A menudo se nombra también como Ley de la Conservación de la Energía.

Este principio es más genérico que el de la conservación de la energía mecánica y se refiere a la energía desde un punto de vista más global.

Existe en la literatura, de las diferentes fuentes (internet, libros, artículos, etc.), gran cantidad de material sobre este tema fundamental de la física. Se recomienda la consulta de algunas de ellas para mayor abundamiento sobre el particular.

La conservación de la energía abarca además de la energía de las fuerzas conservativas, las de las no conservativas.

El enfoque de la conservación de la energía mecánica fue tratado en el apartado anterior. Para la conservación de la energía total (energía mecánica más otras energías), es necesario incluir en la ecuación el o los términos que representen los tipos de energía presentes en un proceso dado.

4.7. Conservación en el trabajo mecánico.

Se dice que una fuerza efectúa trabajo mecánico en un sistema, si ésta produce desplazamiento. El trabajo mecánico puede ser positivo o negativo dependiendo si el sentido de la fuerza es igual o contrario al desplazamiento.

Cuando las fuerzas que producen el desplazamiento son de naturaleza conservativa, la energía mecánica no varía, es decir, *la E_c más la E_p es constante*. Hemos definido con anterioridad el concepto de fuerzas conservativas.

La energía potencial es modificada por las fuerzas conservativas y este cambio puede ser expresado como el trabajo efectuado por ellas.

$$T_{fcons} = - \Delta E_p$$

La conservación (de la energía) en el trabajo mecánico se presenta en la parte de dicho trabajo que producen las fuerzas conservativas. La otra parte del trabajo que es producido por las fuerzas disipativas no se conserva.

Trabajo extraclase: Elaborar un mapa conceptual sobre el tema “Conservación en el trabajo mecánico”

4.8. Fuerzas no conservativas.

Las fuerzas no conservativas son aquellas cuyo trabajo también depende del camino que sigan, no solo de la posición inicial y final. Para un mayor recorrido, mayor será el trabajo realizado por la fuerza si es no conservativa.

El ejemplo más común es la fuerza de fricción, pues el valor de su trabajo será según la trayectoria descrita.

Si el trabajo efectuado por una fuerza depende de su trayectoria, entonces ésta será de no conservativa. El ejemplo más común es la fuerza de fricción, pues el valor de su trabajo será según la trayectoria descrita.

Las fuerzas no conservativas llamadas son disipativas, como se mencionó anteriormente, ya que disipan energía en forma de calor. La energía mecánica de un sistema disminuirá después de que una fuerza no conservativa actúe sobre él.

Ejemplos de fuerzas no conservativas:

- Fuerza de empuje

- Fuerza de amortiguamiento
- Fuerza magnética

Trabajo de las fuerzas no conservativas.

La energía mecánica de un sistema sufre cambios si fuerzas disipativas actúan en él, debido a que el trabajo de estas fuerzas proviene de la energía mecánica del sistema la cual se consume o transforma, la cantidad de energía mecánica perdida es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. El trabajo de una fuerza no conservativa es el *cambio* de la energía mecánica entre un valor inicial y uno final:

$$T_{nc} = \Delta Em = Em_f - Em_i$$

Donde:

- T_{nc} : trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.
- ΔEm : variación de la energía mecánica.

Por ejemplo, si un carro deja de ser acelerado, va disminuyendo su velocidad debido a la fricción entre las ruedas y el piso, ya que *el rozamiento es una fuerza no conservativa en contrasentido al desplazamiento*. Por lo tanto, la energía mecánica del carro disminuye por la reducción de su energía cinética debida al trabajo de la fricción que es equivalente a esta pérdida.

Dos fuerzas no conservativas *equivalentes* harán un trabajo diferente si sus trayectorias son diferentes. Si es mayor el recorrido, mayor será el trabajo realizado.

A diferencia de las fuerzas conservativas, trabajo de una fuerza no conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada cíclica no es cero.

Cuando un cuerpo se desplaza de un punto A a otro B por la acción de fuerzas no conservativas, se cumple la ecuación siguiente de energías:

$$Em_B = Em_A - E_{fnc}$$

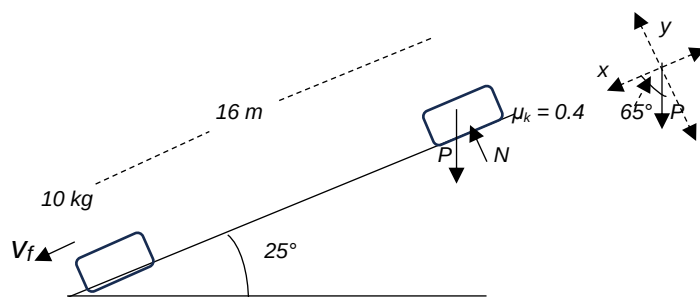
Es decir, la energía mecánica en el punto final es menor pues se ve reducida por el trabajo efectuado por las fuerzas no conservativas.

Por lo tanto, si en desplazamiento del objeto no participan fuerzas no conservativas, entonces $E_{fnc} = 0$ y la energía mecánica permanece constante con las fuerzas conservativas.

Ejemplo 4.17: Una caja de 10 kg resbala 16 m hacia abajo de un plano con una pendiente de 25° como en Figura 4.9. Si el coeficiente de fricción cinético es de 0.4 ¿cuál será su velocidad al final de su trayectoria?

Figura 4.9

Ejemplo 4.17 Diagrama de equilibrio representativo. Bloque en plano inclinado.



aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}
 &Em_i = Em_f + T_{fnc} \quad (Em: \text{Energía mecánica}) \quad (T_{fnc}: \text{trabajo de fuerzas no conservativas}). \\
 &Ep_i + Ec_i = Ep_f + Ec_f + T_{fnc} \\
 &Ep_{gi} + Ep_{ei} + Ec_i = Ep_{gf} + Ep_{ef} + Ec_f + T_{fnc} \quad (Ep_g: \text{energía potencial gravitacional}) \\
 &\quad (Ep_e: \text{energía potencial elástica})
 \end{aligned}$$

En este ejercicio la energía potencial solo está presente en su forma gravitacional, al no haber en el sistema un elemento de resorte o similar, por lo que no existe energía potencial elástica (Ep_{ei} y $Ep_{ef} = 0$).

$$mgh_i + (\frac{1}{2})mv_i^2 = mgh_f + (\frac{1}{2})mv_f^2 + T_{fnc} \quad (T_{fnc}: \text{trabajo de fuerzas no conservativas}).$$

$$mgh_i + (\frac{1}{2})mv_i^2 = mgh_f + (\frac{1}{2})mv_f^2 + f_k S \quad (f_k: \text{fuerza de fricción cinética}).$$

Tenemos que $v_i = 0$ y $h_f = 0$; entonces la ecuación queda:

$$mgh_i = (\frac{1}{2})mv_f^2 + f_k S$$

ahora hallemos la altura inicial...

$$h_i = (16 \text{ m}) \text{ sen } 25^\circ = 6.76 \text{ m}$$

cálculo la fuerza normal N ...

$$N = -Py = P \text{ sen } 25^\circ = - (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \text{ sen } (180 + 65)^\circ = 88.91 \text{ N}$$

la fuerza de fricción es:

$$f_k = \mu_k N = (0.4)(88.91 \text{ N}) = 35.56 \text{ N}$$

como se cumple la conservación de la energía, tenemos:

$$(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(6.76 \text{ m}) = (\frac{1}{2})(10 \text{ kg}) v_f^2 + 35.56 \text{ N} (16 \text{ m})$$

$$v_f = 4.3 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Nota: Una parte de la energía potencial se convierte en cinética y la otra en trabajo en contra de la fricción que finalmente se disipa como calor.

Ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1 (7.7 Serway): Se usa una fuerza horizontal de 150 N para empujar una caja de 40 kg sobre una superficie horizontal y áspera a través de una distancia de 6 m. Si la caja se mueve con rapidez constante, determine: a) el trabajo efectuado por la fuerza de 150 N, b) el trabajo efectuado por la fuerza de fricción y c) el coeficiente de fricción cinética, d) el trabajo neto,

Ejercicio 2 (**7.55 Serway**): Un levantador de pesas levante 250 kg a una altura de 2 m en 1.5 segundos. ¿cuál es su potencia útil?

Ejercicio 3: Un cuerpo de 130 kg parte del reposo y es acelerado uniformemente recorriendo 950m. ¿Qué potencia desarrolla el cuerpo si para realizar el recorrido emplea 15 segundos y alcanza una velocidad de 60 m/s?

Ejercicio 4: (**32.7 Serway**) Una partícula de 0.6 kg tiene una rapidez de 2 m/s en el punto A y su energía cinética en el punto B es de 7.5 J. ¿Cuál es a) su energía cinética en A, b) su velocidad en B, c) el trabajo total efectuado de A a B, d) la partícula absorbió u otorgó trabajo?

Ejercicio 5 (**Ejercicio 8.37 pág. 175 Física. Conceptos y Aplicaciones. Séptima Edición Revisada. Paul E. Tippens.**) ¿Qué velocidad inicial debe impartirse a una masa de 5 kg para elevarla a una altura de 10 m? ¿Cuáles la energía total en cualquiera de los puntos de su trayectoria? Resp. 14 m/s, 490 J

Ejercicio 6: Un bloque con una masa de 10 kg se desliza 15 m hacia abajo de un plano inclinado 30°. Si la fuerza de fricción cinética es de 5 N ¿cuál será su velocidad al final de su trayectoria?

Ejercicio 7: Un objeto de 15 kg cae desde una altura de 12 m. Hallar la energía potencial y cinética cuando el objeto pasa en su caída por un punto ubicado a 5 m de altura.

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA CLÁSICA

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4

Trabajo y Energía.

1.- Utilizando la definición de producto escalar, determine los ángulos entre los siguientes pares de vectores: a) $A = 3i - 2j$ y $B = 4i - 4j$, b) $A = i - 2j + 2k$ y $B = 3j + 4k$.

2.- Una carreta cargada con ladrillos tiene una masa total de 18 kg y se tira de ella a una rapidez constante por medio de una cuerda. La cuerda está inclinada 20° por encima de la horizontal y la carreta se mueve en un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el piso y la carreta es de 0.5. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?, b) cuando la carreta se mueve 20 m ¿cuánto trabajo se ha ejercido en la carreta por medio de la cuerda?, c) ¿cuánto trabajo se efectúa por la fuerza de rozamiento?

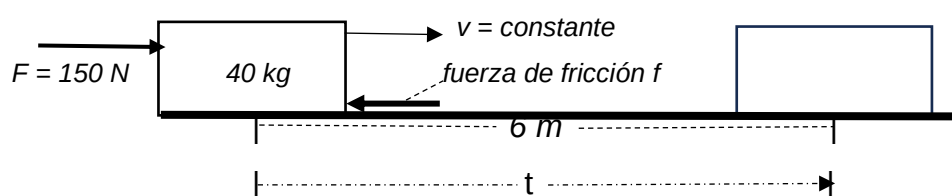
3.- Una jaula de masa igual a 10 kg se jala hacia arriba de un plano inclinado con una rapidez inicial de 1.5 m/s. La fuerza con la que se jala la jaula es de 100 N paralela al plano inclinado, en cual forma un ángulo de 20° con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.4 y la jaula se desplaza una distancia de 5 m, a) ¿cuánto trabajo se realiza en contra de la gravedad? b) ¿cuánto trabajo se realiza en contra de la fricción? c) ¿cuánto trabajo realiza la fuerza de 100 N? d) ¿cuál es trabajo total realizado?, e) ¿cuál es el trabajo neto? Haga el diagrama de cuerpo libre.

4.- Un atleta de 65 kg recorre una distancia de 600 m hacia arriba de una montaña cuya inclinación es de 20° con respecto a la horizontal. El atleta realiza esta hazaña en 80 s. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, a) ¿cuánto trabajo realiza?, b) ¿cuál es su salida de potencia durante la carrera?

ANEXO U.4

Respuesta a los ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

Ejercicio 1 (7.7 Serway): Se usa una fuerza horizontal de 150 N para empujar una caja de 40 kg sobre una superficie horizontal y áspera a través de una distancia de 6 m. Si la caja se mueve con rapidez constante, determine: a) el trabajo efectuado por la fuerza de 150 N, b) el trabajo efectuado por la fuerza de fricción y c) el coeficiente de fricción cinética, d) el trabajo neto,



a) Trabajo efectuado por la fuerza de 150 N.

$$T_F = F \cdot S = (F)(S)\cos \theta = (150 \text{ N})(6 \text{ m}) \cos 0^\circ = 900 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) Trabajo efectuado por la fuerza de fricción f .

$$f = - F$$

Como la velocidad es constante, la fuerza de fricción equilibra a la fuerza aplicada, por lo tanto son iguales pero de signo opuesto. El trabajo efectuado por f será entonces negativo e igual al efectuado por F ...

$$T_f = - T_F = - 900 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) coeficiente de fricción cinética.

$$f_k = \mu_k N$$

ya que el plano de desplazamiento es horizontal, $N = P = 40 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2$

$$\mu_k = f_k / N = -150 \text{ N} / [40 \text{ kg} \times (-9.81 \text{ m/s}^2)] = 0.383 \text{ adimensional. } \checkmark$$

d) el trabajo neto.

Los trabajos de F y f son iguales y de signo contrario por lo que el trabajo neto es:

$$T_{\text{neto}} = T_F + T_f = 900 \text{ J} + (-900 \text{ J}) = 0 \quad \checkmark$$

Ejercicio 2 (7.55 Serway): Un levantador de pesas levante 250 kg a una altura de 2 m en 1.5 segundos. ¿cuál es su potencia útil?

$$P = F \cdot v = 250 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times (2 \text{ m} / 1.5 \text{ s}) = 3.27 \text{ kW} \quad \checkmark$$

Ejercicio 3: Un cuerpo de 130 kg parte del reposo y es acelerado uniformemente recorriendo 950m. ¿Qué potencia desarrolla el cuerpo si para realizar el recorrido emplea 15 segundos y alcanza una velocidad de 60 m/s?

$$m = 130 \text{ kg}$$

$$v_1 = 0 \text{ m/s}; \quad v_2 = 60 \text{ m/s}$$

$$d = 950 \text{ m} = S$$

$$t_1 = 0; \quad t_2 = 15 \text{ s}$$

aplicamos la fórmula:

$$P = F \times v = m \cdot a \times v = m \cdot [(v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)] \times [S / (t_2 - t_1)]$$

Sustituyendo:

$$P = (130 \text{ kg}) \times [(60 - 0) \text{ m/s} / (15 - 0) \text{ s}] \times [950 \text{ m} / (15 - 0) \text{ s}] = 32,933.33 \text{ kW}$$

$$P = 32.93 \text{ kW} \quad \checkmark$$

Ejercicio 4: (32.7 Serway) Una partícula de 0.6 kg tiene una rapidez de 2 m/s en el punto A y su energía cinética en el punto B es de 7.5 J. ¿Cuál es a) su energía cinética en A, b) su velocidad en B, c) el trabajo total efectuado de A a B, d) la partícula absorbió u otorgó trabajo?

a) su energía cinética en A...

$$E_{cA} = (\frac{1}{2})mv_A^2 = (\frac{1}{2})(0.6 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2 = 1.2 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) su velocidad en B...

$$v_B = \sqrt{2E_c / m} = \sqrt{2 (7.5 \text{ J}) / 0.6 \text{ kg}} = 5 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

c) el trabajo total efectuado...

$$T_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} (0.6 \text{ kg}) (5^2 - 2^2) (\text{m/s})^2 = 6.3 \text{ J} \quad \checkmark$$

d) ¿se absorbió u otorgó trabajo por la partícula?

Respuesta: Se absorbió trabajo. $\checkmark$

Ejercicio 5 (Ejercicio 8.37 pág. 175 Física. Conceptos y Aplicaciones. Séptima Edición Revisada. Paul E. Tippens). ¿Qué velocidad inicial debe impartirse a una masa de 5 kg para elevarla a una altura de 10 m? ¿Cuáles la energía total en cualquiera de los puntos de su trayectoria? Resp. 14 m/s, 490 J

De la cinemática:

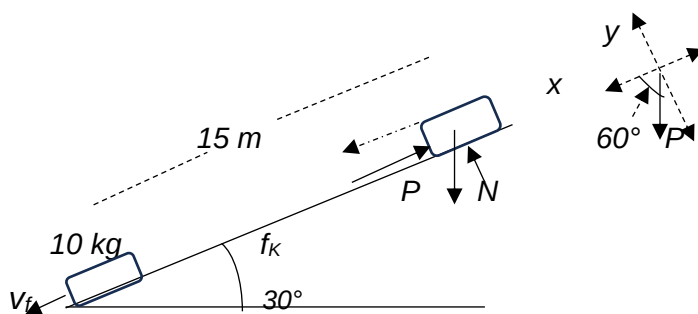
$$(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g \quad \text{----- (V)}$$

$$(10 - 0) \text{ m} = [(0)^2 - (v_1)^2] / 2(-9.81) \text{ m/s}^2$$

$$v_1 = 14 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejercicio 6: Un bloque con una masa de 10 kg se desliza 15 m hacia abajo de un plano inclinado 30°. Si la fuerza de fricción cinética es de 5 N ¿cuál será su velocidad al final de su trayectoria?

Diagrama de equilibrio representativo:



la ecuación genérica de la conservación de la energía con fuerzas conservativas y no conservativas es:

$$mgh_i + (\frac{1}{2})mv_i^2 = mgh_f + (\frac{1}{2})mv_f^2 + T_{fnc} \quad (T_{fnc}: \text{trabajo de fuerzas no conservativas}).$$

En este ejercicio la energía potencial solo está presente en su forma gravitacional, al no haber en el sistema un elemento de resorte o similar, por lo que no existe energía potencial elástica ($E_{p_{ei}}$ y $E_{p_{ef}} = 0$).

$$mgh_i + (\frac{1}{2})mv_i^2 = mgh_f + (\frac{1}{2})mv_f^2 + f_k S \quad (f_k: \text{ fuerza no conservativa de la fricción cinética}).$$

Tenemos que $v_i = 0$ y $h_f = 0$; entonces la ecuación queda:

$$mgh_i = (\frac{1}{2})mv_f^2 + f_k S$$

ahora hallamos la altura inicial...

$$h_i = (15 \text{ m}) \sin 30^\circ = 7.5 \text{ m}$$

la fuerza de fricción cinética es: 5 N

Sustituimos en la ecuación de conservación de la energía

$$(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(7.5 \text{ m}) = (\frac{1}{2})(10 \text{ kg}) v_f^2 + 5 \text{ N} (15 \text{ m})$$

$$v_f = 11.5 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Nota: La energía potencial inicial en parte se transforma en la energía cinética al final de la trayectoria y el resto se transforma en el trabajo de empuje para vencer la fuerza no conservativa de la fricción, esta energía se disipa como calor.

Ejercicio 7: Un objeto de 15 kg cae desde una altura de 12 m. Hallar la energía potencial y cinética cuando el objeto pasa en su caída por un punto ubicado a 5 m de altura.

En lo más alto...

$$E_p = mgh = 15 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 12 \text{ m} = 1,765.8 \text{ J}$$

$$E_c = 0$$

A 5 m de altura...

$$E_p = mgh = 15 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 5 \text{ m} = 735.75 \text{ J}$$

La diferencia en su E_p se transformó en E_c según la ley de la conservación de la energía mecánica, entonces a la altura de 5 m...

$$E_c = 1,765.8 \text{ J} - 735.75 \text{ J} = 1,030.05 \text{ J} \quad \checkmark$$

T E C N O L Ó G I C O N A C I O N A L D E M É X I C O

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHETUMAL

INGENIERÍA ELÉCTRICA

MECÁNICA CLÁSICA

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4

Trabajo y Energía.

Solución.

1.- Utilizando la definición de producto escalar, determine los ángulos entre los siguientes pares de vectores: a) $A = 3i - 2j$ y $B = 4i - 4j$, b) $A = i - 2j + 2k$ y $B = 3j + 4k$.

Definición de producto escalar: $A \cdot B = |A| \times |B| \cos \theta$

a)

$$\cos \theta = (A \cdot B) / |A| \times |B|$$

$$(A \cdot B) = (3 \times 4) + (-2) \times (-4) = 20 ; |A| \times |B| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} \times \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 20.4$$

$$\cos \theta = 20 / 20.4 = 0.9803 \quad \theta = 11.36^\circ \quad \checkmark$$

b)

$$\cos \theta = (A \cdot B) / |A| \times |B|$$

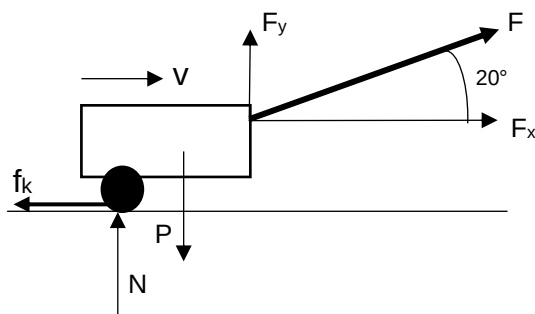
$$(A \cdot B) = (1 \times 0) + (-2) \times (3) + 2 \times 4 = 2$$

$$|A| \times |B| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{0^2 + 3^2 + (4)^2} = 15$$

$$\cos \theta = 2 / 15 = 0.1333 \quad \theta = 82.33^\circ \quad \checkmark$$

2.- Una carreta cargada con ladrillos tiene una masa total de 18 kg y se tira de ella a una rapidez constante por medio de una cuerda. La cuerda está inclinada 20° por encima de la horizontal y la carreta se mueve en un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el piso y la carreta es de 0.5. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?, b) cuando la carreta se mueve 20 m ¿cuánto trabajo se ha ejercido en la carreta por medio de la cuerda?, c) ¿cuánto trabajo se efectúa por la fuerza de rozamiento? Dibuje el diagrama de cuerpo libre.

Diagrama de cuerpo libre...



a) *tensión en la cuerda...*

$$f_k = F_x \quad (\text{pues } v \text{ es constante})$$

$$\mu_k N = F_x$$

$$\mu_k (P - F_y) = F_x$$

$$0.5 \times (18 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 - F \sin 20^\circ) = F \cos 20^\circ$$

$$F = 79.55 \text{ N} \quad \checkmark$$

b) la carreta se mueve 20 m ¿cuánto trabajo se ha ejercido en la carreta?

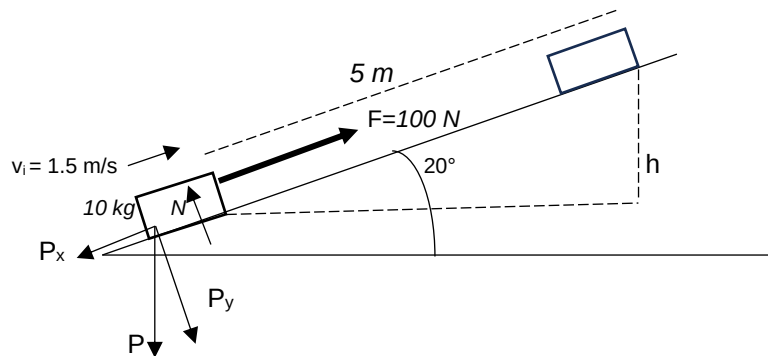
$$F_x = 79.55 \text{ N} \times \cos 20^\circ = 74.75 \text{ N}$$

$$T = F_x \cdot S = 74.75 \text{ N} \times 20 \text{ m} = 1,495.05 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) trabajo de la fuerza de rozamiento...

$$T_{fk} = -1,495.05 \text{ J} \quad \checkmark$$

3.- Una jaula de masa igual a 10 kg se jala hacia arriba de un plano inclinado con una rapidez inicial de 1.5 m/s. La fuerza con la que se jala la jaula es de 100 N paralela al plano inclinado, en cual forma un ángulo de 20° con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.4 y la jaula se desplaza una distancia de 5 m, a) ¿cuánto trabajo se realiza en contra de la gravedad? b) ¿cuánto trabajo se realiza en contra de la fricción? c) ¿cuánto trabajo realiza la fuerza de 100 N? d) ¿cuál es trabajo total realizado?, e) ¿cuál es el trabajo neto? Haga el diagrama de cuerpo libre.



a) trabajo en contra de la gravedad...

$$h = 5 \text{ m} \times \sin 20^\circ = 1.71 \text{ m}$$

componente vertical de $F = 100 \text{ N} \times \sin 20^\circ = 34.20 \text{ N}$

$$T_{\text{contra } g} = 34.20 \text{ N} \times 1.71 \text{ m} = 58.482 \text{ J} \quad \checkmark$$

b) trabajo en contra de la fricción.

$$f_k = \mu_k N = 0.4 \times 10 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \sin (270 - 20) = 36.87 \text{ N}$$

$$T_{\text{contra } f_k} = 36.87 \text{ N} \times 5 \text{ m} = 184.35 \text{ J} \quad \checkmark$$

c) trabajo que realiza la fuerza de 100 N...

$$T_{\text{fuerza } F} = 100 \text{ N} \times 5 \text{ m} = 500 \text{ J} \quad \checkmark$$

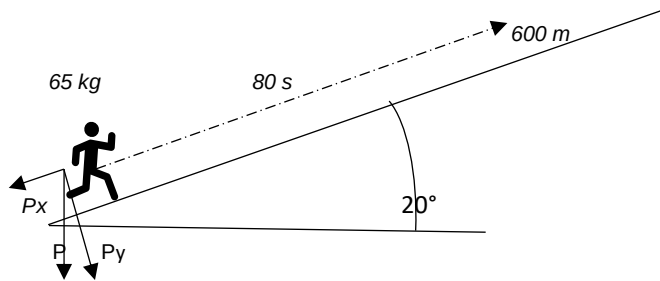
d) trabajo total realizado...

$$T_{\text{total}} = 500 + 184.35 \text{ J} = 684.35 \text{ J} \quad \checkmark$$

e) trabajo neto...

$$T_{\text{neto}} = 500 \text{ J} - 184.35 \text{ J} = 315.65 \text{ J} \quad \checkmark$$

4.- Un atleta de 65 kg recorre una distancia de 600 m hacia arriba de una montaña cuya inclinación es de 20° con respecto a la horizontal. El atleta realiza esta hazaña en 80 s. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, a) ¿cuánto trabajo realiza?, b) ¿cuál es su salida de potencia durante la carrera?



a) trabajo realizado...

$$T = 65 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \sin 20^\circ \times 600 \text{ m} = 130.85 \text{ kJ} \quad \checkmark$$

b) salida de potencia

$$P = 130.85 \text{ J} / 80 \text{ s} = 1.63 \text{ kW} \quad \checkmark$$

UNIDAD 5: Sistemas de partículas.

Hemos estudiado el movimiento de objetos mediante un modelo de partículas puntuales para explicar diversos conceptos y principios fundamentales de la Mecánica. Hasta ahora, no consideramos otras características necesarias para describir fenómenos físicos reales. Se requiere de una concepción más detallada para seguir desarrollando los temas físicos, de aquí que es necesario trabajar con el concepto de *sistema de partículas*. Un cuerpo, que posee determinada materia, está formado por muchas partículas, y así es precisamente como se define un sistema de partículas.

Una forma de clasificar muy común de los sistemas de partículas es como continuos y discretos. Los continuos son rígidos o deformables, lo que significa que un sólido puede ser deformable aunque continuo, y los discretos deformables o indeformables.

5.1. Cuerpo rígido.

Definición.

En Física, *cuerpo rígido* es la idealización de los objetos en que se asume que éstos son indeformables cuando se les aplica fuerzas del exterior.

La rigidez absoluta de los objetos, aunque en la realidad no es del todo cierta, pues al aplicarles fuerzas externas sufren algún grado de deformación, ésta es despreciable, pero esta idealización permite simplificar el análisis de planteamientos relativos a los *cuerpos rígidos*. Además de su masa, las *dimensiones* de los objetos deben ser consideradas cuando se suponen cuerpos rígidos, lo que no sucede con las partículas.

En los cuerpos rígidos, además de las fuerzas externas están las internas que son las responsables de mantener precisamente la rigidez y consecuentemente la característica de cuerpo rígido.

Ejemplos de cuerpos rígidos.

Las palancas son un buen ejemplo de cuerpo rígido, aunque las palancas reales se deforman al aplicar una fuerza en alguno de sus puntos, al resolver problemas de este mecanismo básico la ecuación utilizada supone que la palanca no se flexiona o no sufre deformación alguna.

Un sólido es rígido **es indeformable**, si las partículas que lo constituyen mantienen sus distancias y posiciones constantes.

Los ejes y la mayoría de las partes de motores sufren deformaciones casi imperceptibles en su funcionamiento por lo que pueden considerarse cuerpos rígidos.

En general, la rigidez es una característica fundamental en el comportamiento y funcionalidad de muchos elementos mecánicos sometidos a la acción de fuerzas en máquinas y estructuras de uso común y cotidiano en todas las áreas de actividad. Al igual que las partículas, los cuerpos rígidos pueden trasladarse, rotar o tener una combinación de estos movimientos. Un cuerpo rígido puede interpretarse y estudiarse como un sistema continuo de partículas.

Otros ejemplos de cuerpos rígidos son:

- Dos esferas de metal unidas por una varilla delgada y ligera.
- La Tierra en su recorrido alrededor del Sol.

- Un cilindro rodando en un plano inclinado.
- Un péndulo simple, compuesto por una masa que cuelga de un hilo y se balancea de un lado a otro.

Traslación y rotación de un cuerpo rígido

Si todas las partículas que forman una masa se desplazan en la misma dirección y a la misma velocidad, entonces tenemos una *traslación* de la masa. Por otro lado, si todas las partículas giran alrededor de un solo eje a la misma velocidad angular, tendremos una *rotación* de la masa.

El centro de masa.

Es el punto en el que se asume que toda la masa de un cuerpo o sistema de partículas se reúne. Esta suposición es necesaria para el análisis del sistema u objeto si no es el caso de una partícula individual.

Si la densidad de un cuerpo es uniforme, el centro de masa coincide el [centroide](#) geométrico o baricentro. En un disco circular sería su centro. Se dan los casos en los que el centro de masa se ubica fuera del cuerpo como por ejemplo un aro que lo tiene en su centro en el cual no hay masa.

El centro de gravedad

Es el punto en el que suponemos se concentra peso del sistema de partículas, que es la resultante del vector peso de cada una de las partículas. El centro de gravedad, asume

la acción de un campo gravitatorio, en caso de no existir éste, sólo tendremos un centro de masas.

En este caso lo que concentramos en un solo punto es el peso del cuerpo por lo que en consecuencia, el cuerpo debe estar bajo la influencia de un campo gravitatorio y si éste es uniforme entonces los centros de masa y de gravedad coincidirán.

5.2. Cantidad de movimiento.

También conocida como momento lineal, se genera para para cuantificar el desplazamiento de un cuerpo según su masa y su velocidad. Ambas variables tienen un efecto directo en la cantidad de movimiento del cuerpo, es decir si se incrementa la masa o la velocidad del cuerpo o ambas, su cantidad de movimiento aumentará.

Por ejemplo, un avión con trescientos pasajeros viajando a alta velocidad y tomando en cuenta su gran masa, adquiere una gran cantidad de movimiento, pero comparativamente, la cantidad de movimiento de un ciclista es baja, pues es lento y su masa es pequeña.

Fórmula.

Matemáticamente, la cantidad de movimiento, representada por p , es igual al producto de su masa por su velocidad lo que nos arroja una cantidad vectorial:

$$p = m \cdot v$$

Este vector p tiene la misma dirección y sentido que el de velocidad v y sus unidades son $kg \cdot m / s$.

Impulso de una fuerza.

Al aplicar una fuerza externa a una masa, ésta sufre una aceleración, es decir, cambia su velocidad y como consecuencia su cantidad de movimiento $\mathbf{p}$ se modifica. Esta variación se conoce como *impulso* (I) y podemos expresar que:

$$I = \Delta p = p_f - p_i = mv_f - mv_i = m(v_f - v_i)$$

Donde: m : masa.

v_f : velocidad final.

v_i : velocidad inicial.

Si involucramos la fuerza que causa el impulso, entonces recurrimos al tiempo de aplicación:

$$I / \Delta t = m(v_f - v_i) / \Delta t = m \cdot a = F$$

$$\text{Entonces: } F = I / \Delta t$$

O bien:

$$I = F \cdot \Delta t$$

Dada su estructura, esta ecuación puede representarse gráficamente en el plano *Fuerza-Tiempo* de manera muy sencilla como se muestra en el ejemplo 5.1:

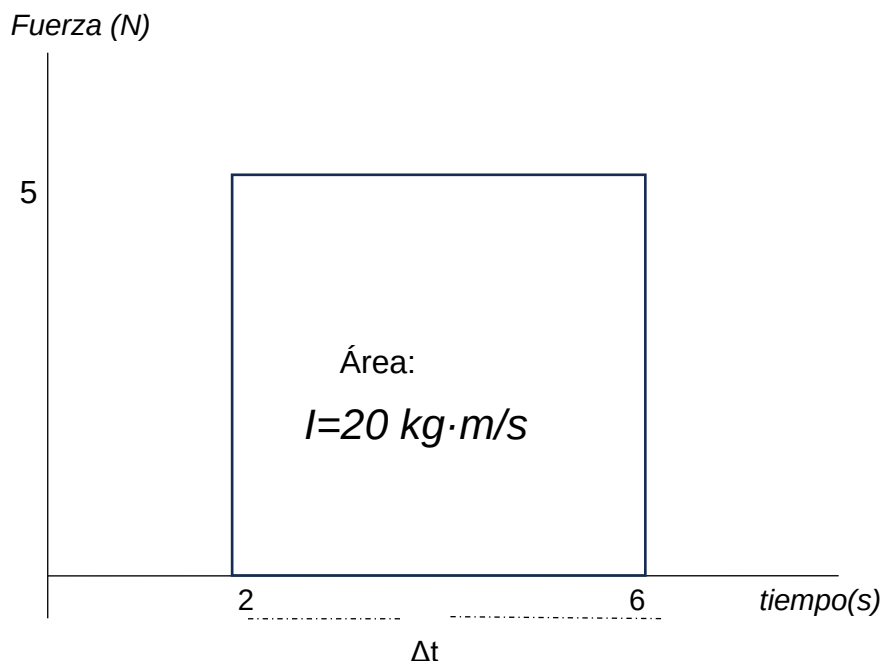
Ejemplo 5.1 Suponga que una fuerza de 5 N es aplicada a un objeto en el lapso de tiempo que va del segundo dos al seis. Calcule y muestre gráficamente el impulso transmitido al objeto.

Aplicando la fórmula de impulso:

$$I = F \cdot \Delta t = 5 \text{ N} \times (6 - 2) \text{ s} = 20 \text{ N} \cdot \text{s} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \checkmark$$

Figura 5.1

Ejemplo 5.1 Gráfica en el plano F-t: El área del rectángulo de la figura de arriba representa el valor del impulso I .



Veamos ahora un ejemplo sencillo.

Ejemplo 5.2 (9.2 Serway): Un vehículo ligero se desplaza de tal manera que genera un momento lineal idéntico al de un pesado camión. Si la masa del vehículo ligero es de 1,200 kg la del camión de 5,000 kg y este último lleva una velocidad de 10 m/s, ¿cuál es la velocidad del otro?

Como los momentos lineales son iguales, podemos escribir:

$$p_{\text{coche}} = p_{\text{camión}}$$

$$(m \cdot v)_{\text{coche}} = (m \cdot v)_{\text{camión}}$$

$$1,200 \text{ kg} \times v_{\text{coche}} = 5,000 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}$$

$$V_{\text{coche}} = 41.67 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.2 (9.2 Serway): La masa de un carro es de 1,500 kg y se mueve con una velocidad de 8 m/s dirigiéndose al oriente. En un momento dado y durante tres segundos, gira al norte para continuar a la misma velocidad. Calcular: a) el impulso en el giro, b) la fuerza empleada.

a) el impulso aplicado al auto durante la vuelta.

En realidad, el auto recibe dos impulsos:

- I_E .- el que cambia su velocidad de 8 m/s a cero en dirección este.
- I_N .- el que cambia su velocidad de cero a 8 m/s en dirección norte.

El primer impulso:

$$I = m(v_f - v_i)$$

$$I_E = 1,500 \text{ kg} (0 - 8 \text{ m/s}) = -12,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} \text{ (dirección este)}$$

El segundo impulso:

$$I_N = 1,500 \text{ kg} (8 \text{ m/s} - 0) = 12,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} \text{ (dirección norte)}$$

La resultante de esos dos impulsos será:

$$I_R = \sqrt{(-12,000)^2 + (12,000)^2} = 1.7 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} \quad \checkmark$$

$$\theta_{IR} = 135^\circ \text{ (desde el este, sentido horario)}$$

observe que como los impulsos son vectoriales, la suma también lo es.

b) fuerza ejercida sobre el auto durante la vuelta.

$$F = I / \Delta t$$

$$F = 1.7 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m/s} (3 \text{ s}) = 5.67 \times 10^3 \text{ N} \quad \checkmark$$

Conservación del momento lineal o cantidad de movimiento.

Conservación de la cantidad de movimiento

El principio de conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal:

“La cantidad de movimiento de un sistema es constante si la suma de fuerzas externas al sistema es nula”

En otras palabras: la cantidad de movimiento inicial es equivalente a la final.

Cuando se tienen varios cuerpos que interactúan solo entre ellos, pero no con el entorno, el momento lineal del conjunto también permanece constante.

La ecuación del principio de conservación de la cantidad de movimiento es la siguiente:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} + \dots + m_kv_{ki} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} + \dots + m_kv_{kf}$$

Donde:

- m_k es la masa de la partícula k .
- mv_{ki} es la velocidad inicial de la partícula k .
- mv_{kf} es la velocidad final de la partícula k .
-

Ejemplo 5.4 (9.21 Serway): Un esquí puede desplazarse sobre una superficie horizontal de hielo sin fricción. Sobre el esquí en reposo está una persona cuya masa es de 45 kg. Luego la persona empieza a desplazarse a 1.5 m/s sobre el esquí con relación al mismo. a) Calcular la velocidad del esquiador relativa a la superficie del hielo, si el esquí tiene una masa de 150 kg b) ¿Cuál es la velocidad del esquí también en relación al hielo?

a)- velocidad del esquiador, relativa a la superficie del hielo (v_{re})...

La cantidad de movimiento se conserva, por lo que usamos la ecuación:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} + \dots + m_kv_{ki} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} + \dots + m_kv_{kf}$$

como solo son dos masas (esquiador y esquí), la ecuación queda:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

al estar inicialmente la muchacha y el tablón en reposo, no hay momento inicial.

$$0 = (45 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) + (150 \text{ kg})(v_{2f})$$

$$v_{2f} = - 67.5 / 150 = - 0.45 \text{ m/s} \quad (\text{velocidad de retroceso del esquí})$$

entonces:

$$v_{re} = 1.5 - 0.45 = 1.05 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

b)- velocidad del esquí relativa a la superficie del hielo (v_{resq})...

$$(v_{resq}) = - 0.45 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Este concepto es particularmente útil para la resolución de planteamientos del siguiente apartado de *colisiones* como se verá a continuación.

5.3. Colisiones elásticas e inelásticas.

Las colisiones o choques, son encuentros entre cuerpos en movimiento. Se clasifican en *elásticas* e *inelásticas*. La diferencia básica entre las dos es desde el punto de vista de la conservación de la energía, particularmente de la cinética, mientras en las primeras la energía cinética se conserva en su totalidad, en las segundas parte de ella se transforma en calor debido a la deformación que sufren los objetos que colisionan.

Otra clasificación muy frecuente es en *unidimensionales* y *bidimensionales* atendiendo las trayectorias de los cuerpos después del encuentro.

Colisiones unidimensionales.

En las colisiones idealmente elásticas, los objetos no sufren deformación permanentemente y no se genera calor como producto de la colisión.

Una colisión idealmente inelástica es cuando los objetos se unen entre sí y se deforman de manera permanente.

En las colisiones ideales elásticas, se cumple la ley de la conservación de la energía, además *existe conservación de la cantidad de movimiento*. Esto quiere decir que esta cantidad física es constante, o sea, del mismo valor antes y después de la colisión. Esto queda planteado en la ecuación del principio de conservación de la *cantidad de movimiento*:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} + \dots + m_kv_{ki} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} + \dots + m_kv_{kf} \dots [1]$$

Colisiones idealmente inelásticas.

Debe observarse que, en las colisiones inelásticas, como los cuerpos se juntan en una sola masa, entonces existe una sola v_f que es la de la masa equivalente a la suma de las masas iniciales antes de la colisión.

Si nos referimos a las colisiones inelásticas de *dos masas*, la ecuación anterior queda:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f \quad \dots [2]$$

$$\text{de donde:} \quad v_f = (m_1v_{1i} + m_2v_{2i}) / (m_1 + m_2)$$

y si $m_1 = m_2 \dots$

$$v_f = v_{1i} + v_{2i} \quad \dots [3]$$

En los choques inelásticos la energía cinética de los cuerpos que colisionan sufre variación, ya que alguna fracción de ella se transforma en energía calórica en la deformación de los objetos durante la colisión generando una diferencia entre los valores antes y después del choque. Esta energía en forma de calor es:

$$E_{C_{calor}} = E_{C_f} - E_{C_i} \quad \dots [4]$$

Colisiones perfectamente elásticas.

La ecuación del principio de conservación de la *energía cinética* aplicable a los choques *idealmente elásticos* es:

$$(\frac{1}{2})m_1v_{1i}^2 + (\frac{1}{2})m_2v_{2i}^2 + \dots + (\frac{1}{2})m_kv_{ki}^2 = (\frac{1}{2})m_1v_{1f}^2 + (\frac{1}{2})m_2v_{2f}^2 + \dots + (\frac{1}{2})m_kv_{kf}^2 \quad \dots [5]$$

Si nos referimos a las colisiones elásticas perfectas de *dos masas*, la ecuación anterior queda:

$$(\frac{1}{2})m_1v_{1i}^2 + (\frac{1}{2})m_2v_{2i}^2 = (\frac{1}{2})m_1v_{1f}^2 + (\frac{1}{2})m_2v_{2f}^2 \dots [6]$$

Esta ecuación y la conservación del momento lineal resueltas para v_{1f} y v_{2f} dan como resultado las siguientes expresiones muy útiles:

$$v_{1f} = [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)] v_{1i} + [(2m_2)/(m_1 + m_2)] v_{2i} \dots [7]$$

$$v_{2f} = [(2m_1)/(m_1 + m_2)] v_{1i} + [(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)] v_{2i} \dots [8]$$

Casos especiales:

1)- si $m_1 = m_2 \dots$

$$v_{1f} = v_{2i} \dots [9] \text{ (intercambio de velocidades)}$$

2)- si $v_{2i} = 0$ y $m_1 \neq m_2$ (masa 2 en reposo)

$$v_{1f} = [(m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [10]$$

$$v_{2f} = [(2m_1) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [11]$$

3)- si $m_1 \gg m_2$ y $v_{2i} = 0$ (masa muy grande choca contra masa pequeña en reposo)

$$v_{1f} = v_{1i} \dots [12]$$

$$v_{2f} = 2v_{1i} \dots [13]$$

4)- si $m_2 \gg m_1$ y $v_{2i} = 0$ (masa pequeña choca contra masa muy grande en reposo)

$$v_{1f} \approx - v_{1i} \dots [14]$$

$$v_{2f} \ll 2v_{1i} \approx 0 \quad \dots [15]$$

Coeficiente de restitución (e).

Las colisiones totalmente elásticas y totalmente inelásticas son ideales. En realidad, siempre hay un grado de elasticidad llamado coeficiente de restitución usualmente denotado por **e** que es su valor numérico. La ecuación de e relaciona las velocidades iniciales y finales de los objetos en una colisión es la que se muestra a continuación:

$$e = (v_{2f} - v_{1f}) / (v_{2i} - v_{1i}) \quad \dots [16]$$

El rango de e va de 0 para colisiones idealmente no elásticas a 1 para colisiones idealmente elásticas, además es adimensional.

Si no se especifica la existencia de e, entonces la colisión se asumirá de carácter ideal

Este conjunto de ecuaciones ([1] a [16]), es aplicable a los problemas de colisiones que se plantean a continuación. Es importante distinguir cuales ecuaciones se aplican si la colisión es inelástica y cuáles si es elástica

Ejemplo 5.5 (9.32 Serway): Dos bolas de billar tienen velocidades de 2.0 m/s y -0.5 m/s antes de que se encuentren en una colisión elástica perfecta y frontal. ¿Cuáles son sus velocidades finales?

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \dots [9] \quad (\text{intercambio de velocidades})$$

Respuesta: En este caso, las bolas de billar únicamente intercambiarán sus velocidades. ✓

Ejemplo 5.6 (9.31 Serway): Ocurre una colisión de frente e idealmente elástica entre un cuerpo que se desplaza a 30 cm/s con un segundo cuerpo en reposo. Si las masas son de 10 gr y 20 gr del primero y segundo cuerpos respectivamente, calcule a) la rapidez de cada cuerpo después de la colisión, b) la fracción energética entregada al segundo cuerpo por el primero.

a) la velocidad final de cada cuerpo...

$$v_{1f} = [(m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [10]$$

$$v_{1f} = [(0.010 - 0.020) \text{ kg} / (0.010 + 0.020) \text{ kg}] (0.30) \text{ m/s} = -0.10 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = -10 \text{ cm/s} \quad \checkmark$$

$$v_{2f} = [(2m_1) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [11]$$

$$v_{2f} = [(2 \times 0.010) \text{ kg} / (0.010 + 0.020) \text{ kg}] (0.30) \text{ m/s} = 0.20 \text{ m/s} = 20 \text{ cm/s} \quad \checkmark$$

b) la fracción de la energía total transferida al segundo cuerpo de 20 g...

$$Ec_i = Ec_{1i} = (\frac{1}{2})m_1v_{1i}^2 = (\frac{1}{2})(0.01 \text{ kg})(0.30^2)\text{m}^2/\text{s}^2 = 4.5 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$Ec_{2f} = (\frac{1}{2})m_2v_{2f}^2$$

$$Ec_{2f} = (\frac{1}{2})(0.02 \text{ kg})(0.20)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$Ec_{2f} / Ec_{1i} = 4 \times 10^{-4} \text{ J} / 4.5 \text{ J} = 1 \times 10^{-4} = 0.889 \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.7: (<https://www.ingenierizando.com/dinamica/choques-fisica/>) Una bola de masa $m_1=5 \text{ kg}$ con una velocidad inicial 6 m/s choca elásticamente con otra bola de $m_2=$

0,400 kg en reposo. Si las dos bolas salen disparadas hacia la misma dirección y sentido, ¿cuál es la velocidad de cada bola después del choque.

Ejemplo 5.7: Un móvil con una masa de 15 kg colisiona elásticamente con otro de masa 0.50 kg estacionado. Calcule la velocidad de cada móvil luego de la colisión si la velocidad del móvil en movimiento es de 10 m/s.

Sustituimos los valores del enunciado en las ecuaciones:

$$v_{1f} = [(m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [10]$$

$$v_{1f} = [(15 - 0.5) \text{ kg} / (15 + 0.5) \text{ kg}] (10 \text{ m/s}) = 9.35 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$v_{2f} = [(2m_1) / (m_1 + m_2)] v_{1i} \dots [11]$$

$$v_{2f} = [(2 \times 15) \text{ kg} / (15 + 0.5) \text{ kg}] (10 \text{ m/s}) = 19.35 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

Ejemplo 5.8: Dos cuerpos, con velocidades de 8 m/s hacia la derecha y 5 m/s hacia la izquierda, chocan frontalmente de forma elástica. Luego del choque, el primer cuerpo queda con una velocidad de 3 m/s hacia la izquierda. Calcular la velocidad y sentido final del segundo cuerpo.

Nótese que no se da información de las masas. Además, se asume que la colisión es totalmente elástica pues no se especifica lo contrario, por lo que $e = 1$.

$$e = (v_{2f} - v_{1f}) / (v_{2i} - v_{1i}) \dots [16]$$

$$1 = [(v_{2f} - (-3))] / (-5 - 8)$$

$$v_{2f} = -16 \text{ m/s (hacia la izquierda).} \quad \checkmark$$

5.4. Movimiento del centro de masa.

Cuando un sistema de partículas o cuerpo se desplaza, este desplazamiento está indicado por el movimiento de su centro de masa. La interpretación correcta es considerar que el sistema concentra toda su masa en dicho punto al cual se aplica la resultante de las fuerzas que actúan en el sistema. La trayectoria del sistema es la del centro de masa.

En el caso de un cuerpo rígido, el centro de masa está fijo en relación al cuerpo si tiene densidad uniforme y se ubica en el centroide.

Si estamos trabajando con un cuerpo rígido de densidad uniforme, se puede asumir que su centro de masa tiene una posición fija que regularmente coincide con su centroide.

Cálculo de la posición del centro de masa.

El vector r del centro de masa de un sistema de n partículas, viene dado por:

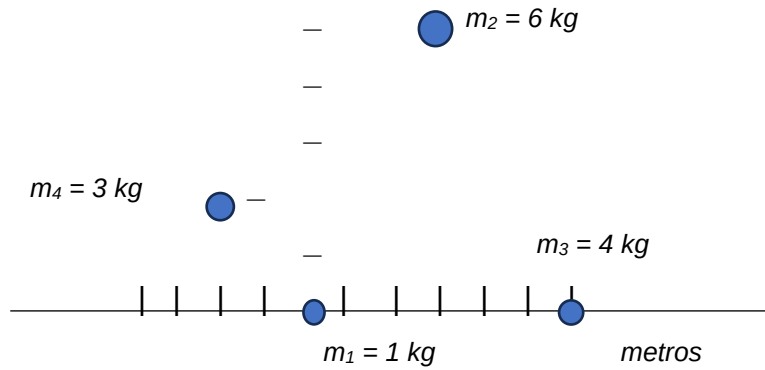
$$r = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

Ejemplo 5.9 (<https://www.fisicalab.com/apartado/centro-de-masas>): Encuentre el centro de masas de las partículas que aparecen en la Figura 5.2. Se supone que el sistema es rígido y el sistema de referencia se encuentra expresado en metros.

Figura 5.2

Ejemplo 5.9 Localización del Centro de masas (escala x2)

metros



Resolución:

- $m_1 = 0.5 \text{ kg}$ $m_2 = 3 \text{ kg}$ $m_3 = 2 \text{ kg}$ $m_4 = 1.5 \text{ kg}$
- $r_1 = 0$ $r_2 = (6 \cdot i + 10 \cdot j) \text{ m}$ $r_3 = 12 \cdot i$ $r_4 = (-4 \cdot i + 4 \cdot j) \text{ m}$

La posición del centro de masas viene dada por el vector:

$$r_{cm} = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

aplicando a 4 partículas, por separado para las coordenadas x e y queda:

$$x_{CM} = (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + m_4 \cdot x_4) / (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

$$= [1 \cdot 0 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 3(-4)] \text{ kg} \cdot \text{m} / (1 + 6 + 4 + 3) \text{ kg} =$$

$$= 72/14 \text{ m} = 5.14 \text{ m}$$

$$y_{CM} = (m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_4 \cdot y_4) / (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

$$= (1 \cdot 0 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4) \text{ kg} \cdot \text{m} / (14) \text{ m}$$

$$= 72/14 \text{ m} = 5.14 \text{ m}$$

el vector de posición y coordenadas del centro de masas es:

$$r_{CM} = (5.14 \cdot i + 5.14 \cdot j) \text{ m} \text{ (vector de posición)} \quad \checkmark$$

$$= (5.14, 5.14) \text{ m (coordenadas)}$$

Ejemplo 5.10: Masas de 2, 2, 1, 3, 1 y 4 gramos están localizadas respectivamente en los puntos (1,1) (2,3) (4,6) (-3,1) (-2,-2) (-4,-1) . Encontrar el vector de posición del centro de masa del sistema

$$r = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

$$r_i = [2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)] / (2 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4)$$

$$r_i = 1.3 \text{ m}$$

$$r_j = [2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)] / (2 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4)$$

$$r_j = 0.846 \text{ m}$$

entonces el vector de posición es: $r = (1.3i + 0.846j) \text{ m}$ ✓

Ecuaciones de la velocidad y del momento lineal del centro de masa.

$$V_{cm} = (m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

$$\underline{V_{cm} = (m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n) / m_{total}}$$

$$p_{total} = m_{total} V_{cm}$$

o bien:

$$\underline{p_{total} = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n}$$

5.5. Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento.

Este teorema postula que la cantidad de movimiento de un sistema permanece sin cambio constante cuando éste es sometido a una interacción.

También puede expresarse: si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas es cero, el valor de su cantidad de movimiento o momento lineal permanece sin cambio.

En un sistema de partículas aislado, la cantidad de movimiento siempre se conserva, ya que en este tipo de sistemas la fuerza resultante de todas las fuerzas externas es igual a cero.

5.6. Teorema de conservación de la energía.

(Primera ley de la termodinámica).

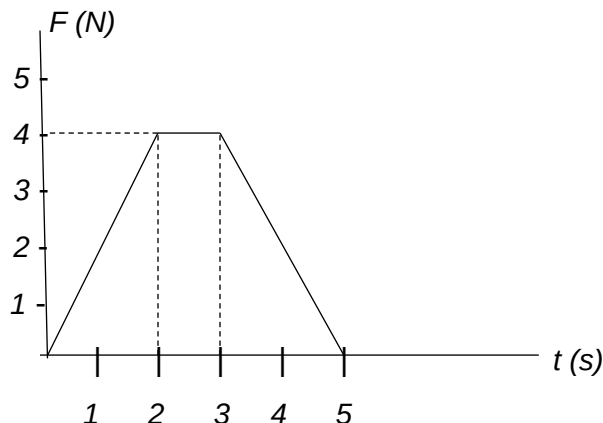
Desde nuestros primeros cursos de física aprendemos que la energía no se crea ni se destruye, sino que se transforma. Este declarativo es uno de los principios científicos más significativos postulado desde el siglo pasado. En el año de 1842 el físico Julius Mayer demostró experimentalmente, que la energía mecánica del trabajo no desaparecía, sino que se transformaba en energía calorífica. Posteriormente se comprobó que esta ley es aplicable a toda la naturaleza en su conjunto siendo entonces reconocida como la primera ley de la termodinámica.

En los apartados anteriores se trataron los conceptos de estos dos teoremas y se resolvieron ejercicios de aplicación de sus ecuaciones. A continuación, se comentan algunos detalles adicionales tanto del teorema de la conservación de la cantidad de movimiento como el del teorema de conservación de la energía correspondientes a los puntos 5.5 y 5.6 mediante presentación en PowerPoint en el siguiente [link](#):

U.5

Ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

1Ejercicio (9.5 Serway): La fuerza F_x que actúa sobre una partícula de 2 kg varía con el tiempo como se muestra en la figura. Encuentre: a) el impulso de la fuerza, b) la velocidad final de la partícula si originalmente se encontraba en reposo, y c) la velocidad final de la partícula si inicialmente se movía a lo largo del eje X con una velocidad de -2 m/s.



2Ejercicio (9.10 Serway): Si se duplica la magnitud del momento de un objeto, a) ¿qué le ocurre a la energía cinética? b) si la energía cinética del objeto se triplica ¿qué le ocurre a su momento?

3Ejercicio: Un automóvil de 1,000 kg viaja a 20 m/s y se encuentra frontalmente con un camión de 2,000 kg que viaja a 5 m/s. Tras la colisión, los dos vehículos se quedan juntos. ¿Cuál es la velocidad de los vehículos después del choque?

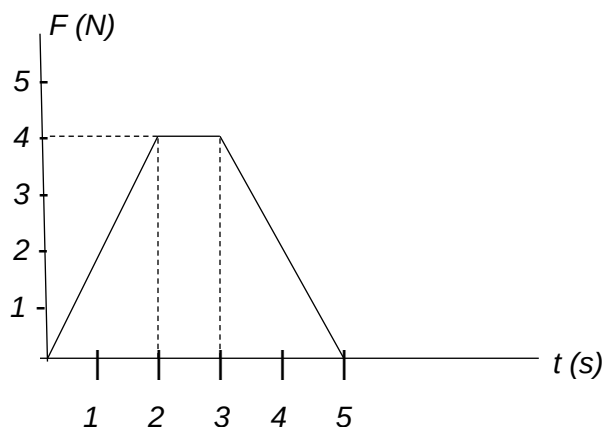
4Ejercicio: Un cuerpo de 0.2 kg lleva una velocidad de 4 m/s al chocar de frente contra otro cuerpo de 0.1 kg que lleva una velocidad de 2 m/s. Considerando la colisión completamente inelástica, ¿qué velocidad llevarán los dos cuerpos si permanecen unidos después del choque?

5Ejercicio: Un vehículo de 1,500 kg de masa se mueve hacia la derecha a una velocidad de 30 m/s por una carretera recta. Delante de él, a 25 m otro vehículo más pesado de 2,300 kg, viaja a 20 m/s en el mismo sentido. Calcular: a) la posición del centro de masa del sistema formado por los dos vehículos, b) la velocidad del centro de masa y c) el momento lineal total:

ANEXO U.5

Respuesta a los ejercicios propuestos para resolución por parte de los estudiantes.

1Ejercicio (9.5 Serway): La fuerza F_x que actúa sobre una partícula de 2 kg varía con el tiempo como se muestra en la figura. Encuentre: a) el impulso de la fuerza, b) la velocidad final de la partícula si originalmente se encontraba en reposo, y c) la velocidad final de la partícula si inicialmente se movía a lo largo del eje X con una velocidad de -2 m/s.



a) el impulso de la fuerza...

El impulso es el área bajo la gráfica F-t:

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 = (2 \times 4)/2 + (1 \times 4) + (2 \times 4)/2$$

$$A_{total} = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \checkmark$$

b) la velocidad final de la partícula si originalmente se encontraba en reposo...

$$I = m(v_f - v_i)$$

$$12 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2 \text{ kg} \times (v_f - 0) \text{ m/s}$$

$$v_f = 6 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

c) *velocidad final si inicialmente se movía a lo largo del eje X a -2 m/s...*

$$I = m(v_f - v_i)$$

$$12 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2 \text{ kg} \times [v_f - (-2)] \text{ m/s}$$

$$v_f = 4 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

2Ejercicio (9.10 Serway): Si se duplica la magnitud del momento de un objeto, a) ¿qué le ocurre a la energía cinética? b) si la energía cinética del objeto se triplica ¿qué le ocurre a su momento?

a) *¿qué le ocurre a la energía cinética si el momento se duplica...?*

Tomemos v_i como la velocidad inicial del objeto, entonces su momento o cantidad de movimiento será:

$$p = m \cdot v_i$$

al duplicar p se duplica también su velocidad:

$$2p = 2(m \cdot v_i) = m \cdot 2v_i \quad (\text{se supone masa constante})$$

La energía cinética inicial es:

$$E_{ci} = \left(\frac{1}{2}\right)mv_i^2$$

y la final:

$$E_{cf} = \left(\frac{1}{2}\right)m(2v_i)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)m(4v_i^2) = 4\left(\frac{1}{2}\right)mv_i^2 = 4 E_{ci}$$

Por lo tanto, la energía cinética se cuadruplica. $\checkmark$

b) si la energía cinética del objeto se triplica ¿qué le ocurre a su momento?

$$E_{ci} = (\frac{1}{2})mv_i^2$$

$$E_{cf} = 3E_{ci}$$

$$(3)(\frac{1}{2})m(v_i)^2 = (\frac{1}{2})m(v_f)^2$$

$$3(v_i)^2 = (v_f)^2 \quad ; \quad (v_f) = \sqrt{3} \overline{v_i}$$

$$P = mv = m \sqrt{3} \overline{v_i} = \sqrt{3} \overline{mv_i}$$

Por lo tanto, el momento lineal incrementa $\sqrt{3}$ veces. ✓

3Ejercicio: Un automóvil de 1,000 kg viaja a 20 m/s y se encuentra frontalmente con un camión de 2,000 kg que viaja a 5 m/s. Tras la colisión, los dos vehículos se quedan juntos. ¿Cuál es la velocidad de los vehículos después del choque?

Se trata de un choque inelástico, por lo que se conserva el momento, pero no así energía cinética, además solo existe una velocidad final...

Fórmula para este caso:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f \quad \dots [2]$$

Sustituyendo:

$$(1,000\text{kg})(20 \text{ m/s}) + (2,000\text{kg})(5 \text{ m/s}) = (1,000 \text{ kg} + 2,000 \text{ kg})v_f$$

$$20,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} + 10,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = (3,000 \text{ kg})v_f$$

$$v_f = 30,000 \text{ kg}\cdot\text{m/s} / 3,000 \text{ kg} = 10 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

4Ejercicio: Un cuerpo de 0.2 kg lleva una velocidad de 4 m/s al chocar de frente contra otro cuerpo de 0.1 kg que lleva una velocidad de 2 m/s. Considerando la colisión completamente inelástica, ¿qué velocidad llevarán los dos cuerpos si permanecen unidos después del choque?

datos:

$$m_1 = 0.2 \text{ kg}$$

$$v_{1i} = 4 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 0.1 \text{ kg}$$

$$v_{2i} = 2 \text{ m/s}$$

la fórmula de conservación del momento lineal:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Al ir en sentido opuesto, después del choque tienen igual magnitud de velocidad:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f ;$$

por lo tanto, se aplica:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \quad \dots [2]$$

$$0.2 \text{ kg} \times 4 \text{ m/s} + [0.1 \text{ kg} \times (-2 \text{ m/s})] = (0.2 + 0.1) v_f$$

$$v_f = 2 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

5Ejercicio: Un vehículo de 1,500 kg de masa se mueve hacia la derecha a una velocidad de 30 m/s por una carretera recta. Delante de él, a 25 m otro vehículo más pesado de 2,300 kg, viaja a 20 m/s en el mismo sentido. Calcular: a) la posición del

centro de masa del sistema formado por los dos vehículos, b) la velocidad del centro de masa y c) el momento lineal total:

a) posición del centro de masa...

$$x_{CM} = (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

$$x_{CM} = (1,500 \text{ kg} \cdot 0 + 2,300 \text{ kg} \cdot 25 \text{ m}) / (1,500 \text{ kg} + 2,300 \text{ kg})$$

$$x_{CM} = 15.1315 \text{ m} \quad \checkmark$$

b) velocidad del centro de masa...

$$v_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

$$v_{cm} = (1,500 \text{ kg} \cdot 30 \text{ m/s} + 2,300 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}) / (1,500 \text{ kg} + 2,300 \text{ kg})$$

$$v_{cm} = 23.947 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

c) el momento lineal total...

$$p_{total} = m_{total} v_{cm} = (1,500 + 2,300) \text{ kg} \times 23.947 \text{ m/s}$$

$$p_{total} = 91,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \checkmark$$

ANEXOS

ANEXO I

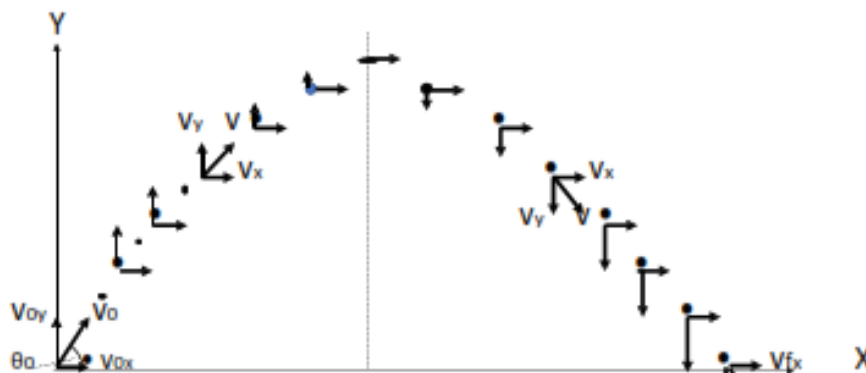
 TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO	UNIDAD 2 PRESENTACIÓN	
<i>CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.</i> <i>MOVIMIENTO CURVILÍNEO.</i> <i>TIRO PARABÓLICO</i>		

Definición.

El Tiro Parabólico es aquel que en su trayectoria describe una *parábola*.

- Aquí se verá el caso del lanzamiento de un proyectil en el cual el plano de la parábola descrita por éste está en el plano vertical.
- Se supone que los efectos de la resistencia del aire son despreciables, es decir, no se toman en cuenta. Solo se consideran la velocidad inicial v_0 y el ángulo de salida θ_0 .
- Como este movimiento es en dos dimensiones (X e Y), los cálculos pueden hacerse más sencillos si se separan para cada dimensión.
- En la dirección de X , tendremos un *M.R.U.* y la de Y un *tiro vertical* y una *caída libre* (*M.R.U.A.*). Las ecuaciones en ambos casos son las ya vistas y utilizadas en esos temas..

GRÁFICA ILUSTRATIVA DEL TIRO PARABÓLICO



- La velocidad en X permanece constante en el ascenso y descenso. $V_{fx} = V_{0x}$

- La velocidad en Y disminuye hasta cero en el ascenso y aumenta en el descenso hasta $-V_{0y}$.

Algunos comentarios adicionales importantes del tiro parabólico.

- El vector de la velocidad total v , siempre es tangencial a la parábola.
- El plano de la parábola es vertical.
- La trayectoria parabólica es simétrica.
- La aceleración de la gravedad es vertical hacia abajo en todo punto.
- La magnitud de la velocidad v , en puntos a la misma altura en ambos lados de la parábola, son iguales y de signo contrario.

Ejemplo (4.13 Serway): Se dispara un proyectil desde el nivel del piso con una velocidad $v = (12i + 24j)$ m/s. a) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad después de cuatro segundos? b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en el cual la altura es máxima?

a) las componentes horizontal y vertical de la velocidad después de cuatro segundos

componente horizontal: $v_{x(t=4s)} = 12 \text{ m/s}$ (M.R.U.) $\rightarrow \checkmark$

componente vertical: $g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$ ----- (III)

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (v_{y(t=4s)} - 24) \text{ m/s} / (4 - 0) \text{ s}$$

$$v_{y(t=4s)} = -15.24 \text{ m/s} \downarrow \text{ (M.R.U.A.) } \checkmark$$

b) coordenadas del punto en el cual la altura es máxima.

absisa: $g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$ ----- (III)

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (0 - 24) \text{ m/s} / (t - 0); \quad t = 2.44 \text{ s} \quad (\text{tiempo de ascenso total})$$

Nota: En el tiempo de ascenso total el proyectil avanza la mitad del desplazamiento horizontal total en donde está la absisa del punto de máxima altura. Como tenemos un M.R.U. entonces...

$$x = v \times t = 12 \text{ m/s} \times 2.44 \text{ s} = 29.4 \text{ m}$$

ordenada: $(y_2 - y_1) = [(v_2)^2 - (v_1)^2] / 2g$ ----- (V)

$$(y_2 - 0) \text{ m} = [(0)^2 - (24 \text{ m/s})^2] / 2 \times -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$y_2 = 29.4 \text{ m}$$



Punto máximo: (29.4, 29.4) m

Dos ecuaciones muy útiles en el tiro parabólico son:

$$Y_{\text{máx}} = (v_0^2 \sin^2 \theta_0) / 2g \quad (Y_{\text{máx}}: \text{altura máxima de la parábola})$$

$$R = (v_0^2 \sin 2\theta_0) / g \quad (R: \text{alcance total horizontal al mismo nivel del lanzamiento})$$

Resolución del inciso b) del ejemplo anterior usando estas dos ecuaciones

Calculamos v_0^2 con el teorema de Pitágoras y las componentes de la velocidad inicial:

$$v_0^2 = 12^2 + 24^2 = 720 \text{ (m/s)}^2 ; v_0 = \sqrt{720} = 26.83 \text{ m/s}$$

Calculamos θ_0 :

$$\theta_0 = \arctan(24/12) = 63.43^\circ$$

Ahora hallamos $Y_{\text{máx}}$:

$$Y_{\text{máx}} = (v_0^2 \sin^2 \theta_0) / 2g = 720 \text{ (m/s)}^2 \times \sin^2 63.43^\circ / 2(-9.81 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ m}$$

Calculemos ahora el alcance máximo R:

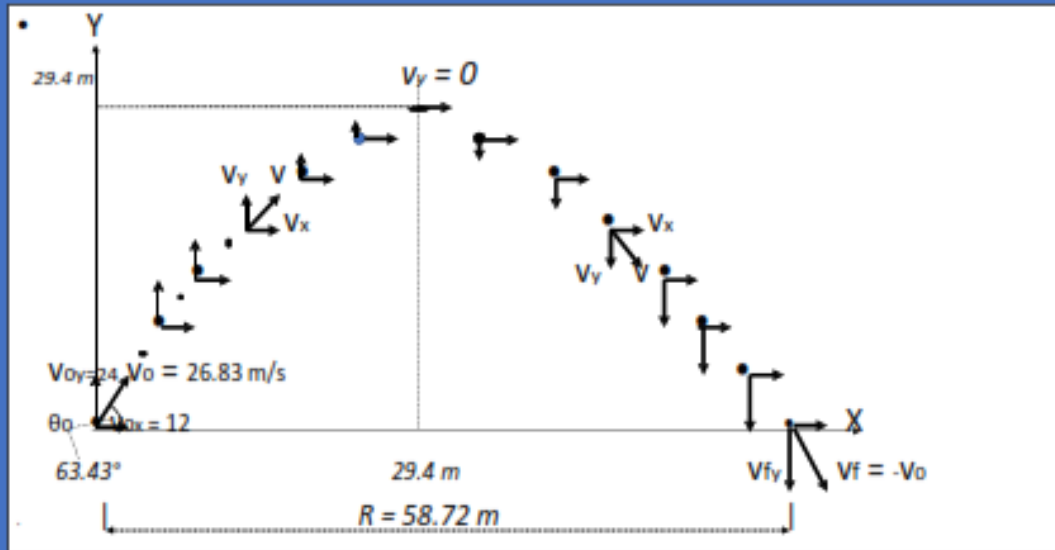
$$R = (v_0^2 \sin 2\theta_0) / g = 720 \text{ (m/s)}^2 \sin 2(63.43^\circ) / -9.81 \text{ m/s}^2$$

$R = 58.72 \text{ m}$; como la abscisa de la altura máxima es $\frac{1}{2}R$ ésta es:

$$x_{Y_{\text{máx}}} = \frac{1}{2}(58.72 \text{ m}) = 29.4 \text{ m}$$

finalmente, *Punto máximo: (29.4, 29.4) m* ✓ *(mismo resultado)*

GRÁFICA ILUSTRATIVA DEL EJERCICIO.



Ejemplo (4.15 Serway): Se lanza horizontalmente un proyectil desde el techo de un edificio de 35 m de alto. El proyectil choca contra el suelo a una distancia de 80 m de la base del edificio. Calcule a) el tiempo que el proyectil se encuentra en el aire, b) su velocidad inicial al ser lanzado y final justo antes de que choque contra el suelo, c) el ángulo de lanzamiento del proyectil.

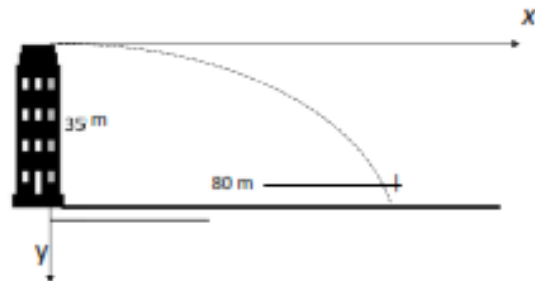
a) tiempo que el proyectil se encuentra en el aire.

fijando el origen en el techo del edificio...

$$(y_2 - y_1) = \left(\frac{1}{2}\right) g (t_2 - t_1)^2 + v_{1y}(t_2 - t_1) \quad \text{--- (VI)}$$

$$(-35 - 0) \text{ m} = \left(\frac{1}{2}\right) (-9.81 \text{ m/s}^2) (t_2 - 0)^2 + 0(t_2 - 0)$$

$$t_2 = 2.67 \text{ s} \quad \text{tiempo de descenso.}$$



Ejemplo (4.15 Serway): Se lanza horizontalmente un proyectil desde el techo de un edificio de 35 m de alto. El proyectil choca contra el suelo a una distancia de 80 m de la base del edificio. Calcule a) el tiempo que el proyectil se encuentra en el aire, b) su velocidad inicial al ser lanzado y final justo antes de que choque contra el suelo.

b) su velocidad inicial al ser lanzado:

$$v_{0x} = d / t = 80 \text{ m} / 2.67 \text{ s}$$

$$v_{0x} = 30 \text{ m/s}$$

– velocidad final justo antes del choque:

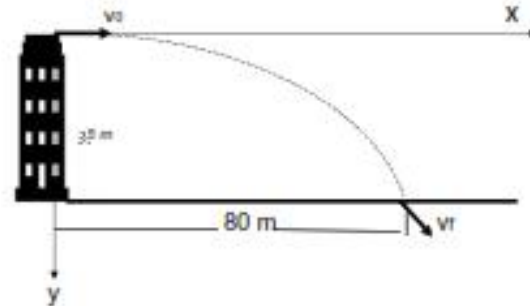
$$v_{0x} = 30 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$g = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) \quad \text{--- (III)}$$

$$-9.81 \text{ m/s}^2 = (v_{y_2} - 0) / (2.67 \text{ s} - 0)$$

$$v_{y_2} = -26.16 \text{ m/s}$$

$$v_f = (30i - 26.16j) \text{ m/s} = 39.77 \text{ m/s} \quad \checkmark$$



ANEXO 2



UNIDAD 3

PRESENTACIÓN

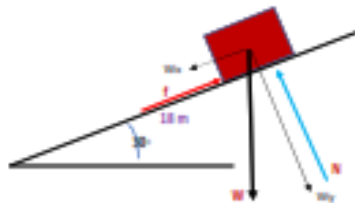
FRICCIÓN

FUERZA DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO



Ejemplos del Tema de Fricción.

Ejemplo 1.- Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado 30° con **aceleración constante**. El bloque parte del reposo y recorre 18 m a donde llega a una velocidad de 3 m/s. Determine: a) La aceleración del bloque y b) El coeficiente de fricción entre la superficies en rozamiento. (μ).

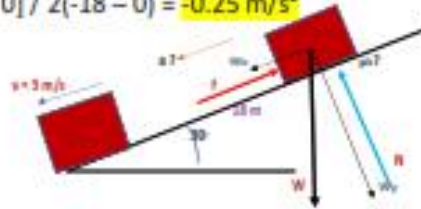


Ejemplos del Tema de Fricción.

Ejemplo 1.- Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado 30° con **aceleración constante**. El bloque parte del reposo y recorre 18 m a donde llega a una velocidad de 3 m/s. Determine: a) La aceleración del bloque y b) El coeficiente de fricción entre la superficies en rozamiento. (μ).

a) Con la ecuación V:

$$a = (v^2 - v_0^2) / 2(x - x_0) = [(-3)^2 - 0] / 2(-18 - 0) = -0.25 \text{ m/s}^2$$



Ejemplo del Tema de Fricción. Aplicado al Plano inclinado.

Ejemplo 1.- Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado 30° con **aceleración constante**. El bloque parte del reposo y recorre 18 m a donde llega a una velocidad de 3 m/s. Determine: a) La aceleración del bloque y b) El coeficiente de fricción entre la superficies en rozamiento. (μ).

b)

$$a = -0.25 \text{ m/s}^2$$

Sea T la fuerza que produce la aceleración. (La componente del peso W_x hacia abajo del Plano menos la fricción)

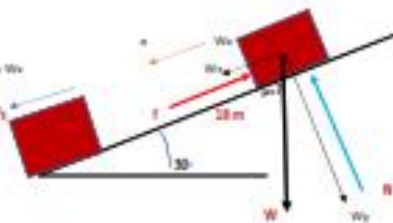
$$T = m \cdot a \quad y \quad T = W_x - f. \text{ entonces: } m \cdot a = W_x - f \quad a = 3 \text{ m/s}^2$$

por lo tanto:

$$m \cdot a = m \cdot g \sin(30^\circ) - \mu k m g \cos(30^\circ)$$

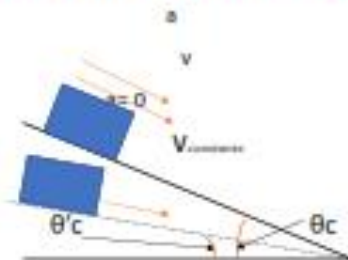
$$a = g \sin(30^\circ) - \mu k g \cos(30^\circ) \quad (\text{cancelando } m)$$

$$-0.25 = (9.81)(0.5) - \mu k (0.866) \quad \mu k = 0.538$$



- Los coeficientes de fricción estáticos y dinámicos están ya determinados para diferentes parejas de materiales y se pueden consultar en tablas.

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE μ_s Y μ_k .



$$\mu_s = \tan \theta_c$$

$$\mu_k = \tan \theta'_c$$

$$\theta'_c < \theta_c$$

Procedimiento: Se coloca el bloque en plano horizontal abatible en un extremo y se procede a inclinar el plano levantando el otro extremo. μ_s será la tangente del ángulo θ_c en el que justo empieza el movimiento. μ_k lo encontraremos con la tangente del ángulo θ'_c que logra una velocidad constante al reducir θ_c .

OTRA FORMA PARA EL CÁLCULO DE μ_k (usando el Plano Horizontal)

4 Condiciones: " Cuando una masa se desliza sobre una superficie horizontal de una posición x_0 a otra x , con una **velocidad inicial v_0 conocida** y se frena hasta una **velocidad final menor v** y **exclusivamente** por efecto de la **fricción**, entonces el coeficiente de fricción dinámico μ_k está dado por la ecuación:

- $\mu_k = - (v^2 - v_0^2) / 2g(x - x_0)$ ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)
- $\mu_k = - (-v_0^2) / 2g(x)$ (si llega al reposo; $v = 0$ y tomamos $x_0 = 0$)



Ejemplo 2:

Un puck de hockey que está sobre un lago congelado se golpea e inicia su movimiento a una velocidad de 12 m/s. En 5 segundos su velocidad es de 0 m/s. a) ¿Cuál es la aceleración del puck? b) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción dinámico entre el puck y el hielo? c) ¿qué distancia recorre el puck en esos 5 segundos?

$$\mu_k = - (v^2 - v_0^2) / 2g(x - x_0) \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \quad \mu_k = - (-v_0^2) / 2g(x) \quad (\text{si llega al reposo; } v = 0)$$

$$v_0 = 12 \text{ m/s} \quad v = 0 \text{ m/s} \quad x_0 = 0 \quad t = 5 \text{ seg.} \quad t_0 = 0$$

a) (IV): $a = (V - V_0) / (t - t_0) = (0 - 12) / 5 = -1.2 \text{ m/s}^2$

b) (V): $x - x_0 = (v^2 - v_0^2) / 2a$; $x = (0 - 12^2) / 2(-1.2) = 60 \text{ m}$; $\mu_k = (v^2 - v_0^2) / 2g(x - x_0) = 0 - 12^2 / 2 \times 9.81 \times 60$ $\mu_k = 0.122$

c) (IV): $x - x_0 = (1/2)(V + V_0)(t - t_0) = (1/2)(12 + 0)(5 - 0) = 45 \text{ m}$



Ejemplo 3: Se arrastra un trineo de 60 N a velocidad constante hacia arriba de una colina con una inclinación de 15° con respecto a la horizontal con una fuerza de 25 N usando una cuerda que forma un ángulo de 35° también con respecto a la horizontal. a) Calcule el coeficiente de fricción dinámico μ_k , b) En la cima, se suelta el trineo y éste se desliza en línea recta hacia abajo ¿cuál es la aceleración a lo largo de la pendiente?

a) $f_k = \mu_k \cdot N$; $\mu_k = f_k / N = (F_x + W_x) / (-W_y + F_y)$

$\mu_k = [(25 \cos 35^\circ) + 60 \cos(270 - 15)^\circ] / [-60 \sin(270 - 15)^\circ + 25 \sin 35^\circ] = 0.161$

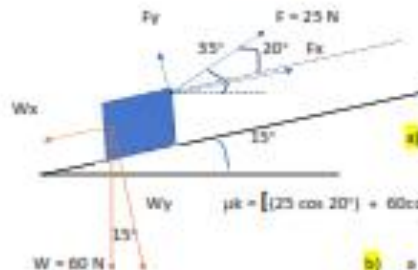
b) $a = F/m = (W_x + f_k) / m$ (ya no hay F aplicada)

Nota: El supuesto correcto es que los 2 vectores (W y F) tengan el mismo punto de aplicación (centro de masa). Para mayor claridad:

$a = [(60 \cos(255^\circ)) + 0.161(-60 \sin 255^\circ)] / (-60 / 9.81)$

$a = -1.01 \text{ m/s}^2$

se colocaron en puntos diferentes.



ANEXO 3

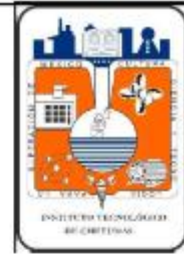


UNIDAD 5 PRESENTACIÓN

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

5.5 TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

5.6 TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.



Teoremas de conservación

Son postulados de principios fundamentales en física que declaran que ciertas propiedades físicas de un sistema permanecen constantes en el tiempo y espacio, no obstante los cambios que ocurran dentro del sistema. Estos principios explican cómo suceden muchos fenómenos naturales y cómo funcionan diversos dispositivos de uso cotidiano.

En mecánica dos de estos teoremas que tienen una importancia primordial son sin duda el de la conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal y el de la conservación de la energía.

5.5 Teorema de conservación de la cantidad de movimiento.

El Teorema, Ley o Principio de conservación de la cantidad de movimiento, o de conservación del momento lineal, dice que:

“Si la sumatoria de las fuerzas externas aplicadas a un sistema de partículas es cero, la cantidad de movimiento del sistema se conserva, es decir, la cantidad de movimiento antes de la interacción, es igual a la cantidad de movimiento después de la interacción”.

Orígenes.

El concepto de cantidad de movimiento tuvo una evolución histórica desde el siglo XIV hasta el siglo XVII.

El concepto de cantidad de movimiento tuvo una evolución histórica, desde el siglo XIV hasta el siglo XVII.

- En el siglo XIV William of Ockham⁶ (1285-1347), asignó a los objetos móviles una propiedad responsable del mantenimiento de su movimiento que llamó “carga” (correspondiente a la “cantidad de movimiento” actual).
- Jean Buridan (1300-1358). formuló una versión de inercia y consideró que la “carga” que transportaban los objetos móviles, debía ser proporcional al peso y relacionada con su velocidad.
- Galileo, Descartes y otros físicos del siglo XVII toman estos planteamientos y desarrollan los conceptos de impulso y **cantidad de movimiento**.
- René Descartes (Francia, 1596 – 1650) finalmente plantea y define de manera explícita el principio de conservación de **momentum**.
- Análisis de corte histórico de la conservación de momentum desde la visión de René Descartes: Un estudio para la enseñanza de la mecánica Andrea Carolina Martin Bautista. Trabajo de Grado para optar al título de Licenciada en Física. UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA LICENCIATURA EN FÍSICA. BOGOTÁ D.C 2022

Ecuación.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} + \dots + m_k v_{ki} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} + \dots + m_k v_{kf}$$

m: masa

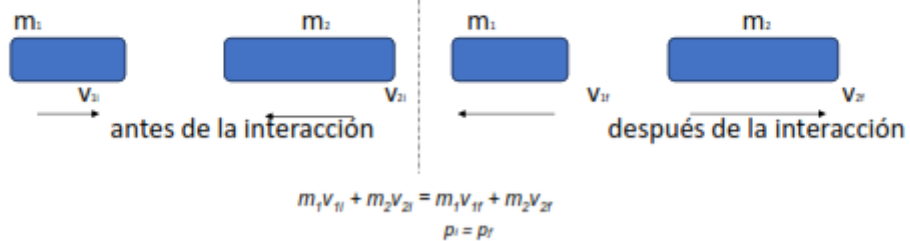
v: velocidad

k: número de partículas del sistema.

Representación.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} + \dots + m_k v_{ki} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} + \dots + m_k v_{kf}$$

Representación gráfica para $k = 2$:



5.6 Teorema de conservación de la ENERGÍA.

El principio de conservación de la energía, también llamado *Primera Ley de la Termodinámica*, establece que:

«En un sistema aislado, la energía no puede ser creada o destruida, es decir, la energía total antes de la transformación es igual a la energía total después de la transformación»

En otras palabras, en un sistema aislado la energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma en otro u otros tipos de energías.

Orígenes.

- Ley de conservación de la energía de Leibniz
- En 1686, Gottfried Leibniz, matemático alemán, propuso por vez primera *la ley de conservación de la energía* la cual establece que: *la energía se conserva en un sistema cerrado*, es decir, que la energía no se crea ni se destruye, sino que solo se *transfiere*. Esta ley de conservación de la energía se conoce con el nombre de la ley de conservación de la energía de Leibniz.
- Ley de conservación de la energía de Sadi Carnot
- Siglo y medio después, en 1824, el ingeniero francés Sadi Carnot postuló una versión de carácter más genérico de esta ley que se conoce como *la ley de conservación de la energía de Sadi Carnot* que reconoce que la energía se conserva en un sistema cerrado, pero también se transforma entre diferentes tipos, como *calor, trabajo mecánico, luz y electricidad*.

Ecuación.

$$E_{total} = E_i + W + Q$$

En donde:

E_f: Energía después de la interacción.

E_i: Energía antes de la interacción.

W: Trabajo realizado durante la interacción.

Q: Calor transferido durante la interacción.

Los 3 Postulados de la Conservación de la Energía.

- 1. No existe, ni puede existir, algo que genere energía.
 - (Por ejemplo; un generador eléctrico realmente no genera electricidad, lo que hace es que la energía cinética en el generador la transforma en eléctrica).
- 2. No existe, ni puede existir, algo que haga desaparecer la energía.
- 3. Si se observa que la cantidad de energía varía, siempre será por un intercambio de energía con algún otro cuerpo o con el entorno.

- Conservación de la energía mecánica.
- En la unidad anterior vimos de manera más precisa el caso de la conservación de la energía mecánica cuya ecuación es:
 - $E_m = E_c + E_p$
 - Se estableció que en el caso de fuerzas conservativas, la E_m permanece constante, es decir con el mismo valor antes y después de un cambio en el sistema es decir:
 - $E_m = E_{m_i}$ *(en ausencia de fuerzas disipativas).*
 - $E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf}$
 - Siendo: E_{ci} y E_{pi} : energía cinética y potencial iniciales.
 - E_{cf} y E_{pf} : energía cinética y potencial finales.

Referencias

1-(Regla de la mano derecha):

<https://www.bing.com/images/search?q=producto+vectorial+de+dos+vectores&qpv=producto+vectorial+de+dos+vectores&form=IGRE&first=1>

2-(tabla algunas magnitudes físicas derivadas)

Fuente: Internet libre. Magnitud física - Mi Profe <https://miprofe.com/magnitud-fisica/>

3-(espacio, tiempo y marco de referencia)

Fuente:<https://www.studocu.com/es-mx/messages/question/3264319/conceptos-de-espacio-tiempo-y-marco-de-referencia>

4-Microsoft Word - penduloconico.doc

5-<https://ecosistema.buap.mx/forms/files/dspace>

6-Momento de una Fuerza - Ejercicios Resueltos - Fisimat

7.- [https://www.ingenierizando.com/dinamica/ Conservación de la energía mecánica](https://www.ingenierizando.com/dinamica/Conservación%20de%20la%20energía%20mecánica)

8.- <https://www.ingenierizando.com/dinamica/choques-fisica/>

9- <https://enciclopedia.com/el-principio-de-conservacion-de-la-energia-concepto-y-ejemplos-de-aplicacion/>

10- <https://www.fisicalab.com/apartado/centro-de-masas>

11- Serway Raymond A. (1995) Física tomo I. Tercera edición revisada. McGrawHill Interamericana Editores.

12-Tippens Paul E. (2007). Física, conceptos y aplicaciones (séptima edición). McGrawHill Interamericana Editores.

13-Julían Pérez Porto y Ana Gardey. Actualizado el 2 de agosto de 2021. *Torque - Qué es, definición y concepto*. Disponible en <https://definicion.de/torque/>

CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECN

Ciudad de México, 19 / Agosto / 2025

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO PRESENTE.

Bajo protesta de decir verdad, el suscrito abajo firmante, personal docente adscrito al Campus Chetumal del Tecnológico Nacional de México, manifiesto que en cumplimiento de mis actividades relacionadas con el Año Sabático elaboré la obra titulada "Apuntes de la Asignatura: Mecánica Clásica para Ingeniería Eléctrica. (Clave: AEF-1042)

Con base en lo anterior, y con fundamento en los artículos 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y 46 de su Reglamento, reconozco que el Tecnológico Nacional de México es titular de los derechos patrimoniales sobre la misma y le corresponden las facultades relativas a la divulgación, integridad de la obra y de colección, conservando el derecho a figurar como autor.

Asimismo, respondo por la autoría y originalidad de la citada obra; y relevo de toda responsabilidad al Tecnológico Nacional de México de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere que con esta obra es afectado en alguno de los derechos protegidos por la Ley en cita, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas.

A T E N T A M E N T E

William Rivas Ruiz