



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



Matemáticas Aplicadas a la Administración

LAD-1027
Apuntes Digitales

José Luis Álvarez Herrera
TecNM-ITSLP

TEMARIO

Tema

1

Bienvenida al curso	4
Introducción	5
1.1 Definición	7
1.2 Dominio y rango restringidos	9
1.3 Funciones multivariadas básicas	15
1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas	16
1.5 Fórmula pendiente-intersección	21
1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta	27
1.6.1 Pendiente e intersección	27
1.6.2 Pendiente y un punto	27
1.6.3 Dos puntos	28
1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda.	32
2.1 Funciones lineales	39
2.2 Modelos de equilibrio	43

Tema

2

2.2.1 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción	43
2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio	46
2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad	48
2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir	54
2.3 Sistemas de ecuaciones lineales	59
2.3.1 Métodos de eliminación suma y resta Sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3	59
2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 , 3×3 solución única	66
2.3.3 Aplicaciones a modelos económicos administrativos	73

Tema

3

3.1 Introducción a las matrices	83
3.2 Tipos especiales de matrices	85
3.3 Operaciones con matrices	88
3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2×2 , 3×3 por el método de columnas aumentadas y cofactores	93
3.5 Propiedades de los determinantes	97
3.6 Solución de la inversa de una matriz	98
3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto	105

Tema

4

4.1 Límites y continuidad	114
4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas	123
4.3 Derivadas de n -ésimo orden	126
4.4 Derivadas parciales básicas	131
4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos)	139
4.6 Aplicaciones a ingresos, costos y utilidades	146
4.7 Análisis marginal	149

Tema

5

5.1 Concepto de antiderivada	155
5.2 Reglas de integración directas	157
5.3 Integral definida	160
5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas	163

Bienvenida al curso.

Es un gusto recibirlos en este espacio de aprendizaje en donde muchos de ustedes tienen la idea de que las matemáticas son números abstractos, sin embargo; descubriremos que realmente son el lenguaje de las decisiones estratégicas.

Durante el presente semestre aprenderán a transformar datos en proyecciones financieras, a optimizar recursos a través de modelos lineales y a interpretar el cambio marginal para maximizar utilidades.

Mi objetivo principal es que desarrollen el pensamiento analítico para liderar organizaciones.

“Un administrador que domina las matemáticas no adivina el futuro: lo calcula y lo planifica.”

¡Mucho éxito en este nuevo ciclo!

Introducción a la asignatura.

Objetivo general.

La asignatura de Matemáticas Aplicadas a la Administración tiene como objetivo principal que el estudiante tenga una base sólida sobre aspectos matemáticos, que conozca los principales modelos lineales y sus representaciones gráficas para el apoyo en las aplicaciones a los modelos de oferta y demanda, analizando los conceptos de ingreso, costo, punto de equilibrio, equilibrio en el mercado, así como la solución de sistemas de ecuaciones lineales para su aplicación práctica.

Objetivos Específicos.

Que el estudiante de esta asignatura pueda analizar y aplicar los criterios matemáticos como en las funciones lineales, sistemas de ecuaciones, matrices, cálculo diferencial e integral para mejorar el análisis de las técnicas cuantitativas aplicadas a modelos económico-administrativos. Así por ejemplo:

Tema 1. Funciones matemáticas y ecuaciones lineales

Sus competencias principales en este tema son: Entender el significado de dominio y rango (resolver ejercicios). Resolver y graficar problemas donde aplique la fórmula de Pendiente- intersección. Determinar y analizar la ecuación de la línea recta aplicada a la oferta, demanda, depreciación y pronósticos.

Tema 2. Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

En este tema crea y resuelve modelos de Punto de equilibrio, grafica el punto de equilibrio. Resuelve sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de suma y resta, Eliminación y Gauss Jordán y aplica el modelo en casos prácticos.

Tema 3. Álgebra Matricial.

Aplicará la notación de una matriz para la representación matricial de datos y solucionará problemas de sistemas de ecuaciones para la solución de casos del área económica administrativa.

Tema 4. Diferenciación y sus aplicaciones

Comprenderá los conceptos de límite y continuidad para la solución de problemas relativos a tasa de promedio de cambio e incrementos y aplicará las reglas de diferenciación de máximos y mínimos como la metodología en la aplicación a Ingresos, costo y utilidad.

Tema 5. Integración y Aplicaciones

En este tema aplicará las reglas de integración para la resolución de problemas de integrales definidas en la aplicación de inconvenientes relativos al área económica y administrativa.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

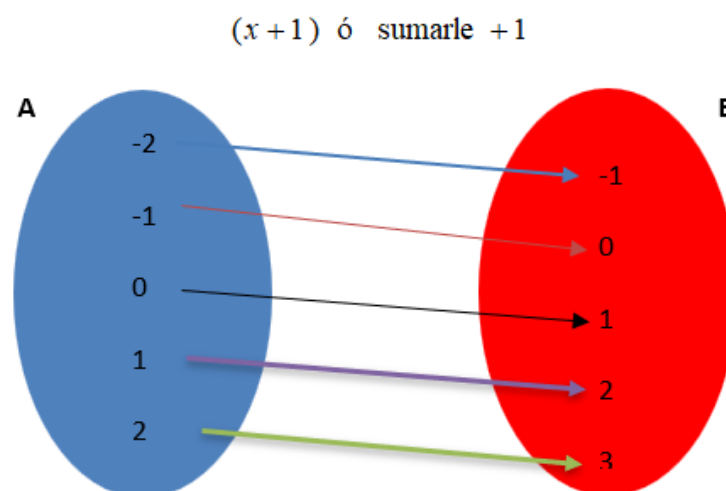
TEMA 1.

Funciones matemáticas y ecuaciones lineales

- 1.1 Definición
- 1.2 Dominio y rango restringidos
- 1.3 Funciones multivariadas básicas
- 1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas
- 1.5 Fórmula pendiente-intersección
- 1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta
 - 1.6.1 Pendiente e intersección
 - 1.6.2 Pendiente y un punto
 - 1.6.3 Dos puntos
 - 1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda

1.1 Definición

Función Matemática: Relación establecida entre dos conjuntos A y B que asigna a cada valor del conjunto A (variable Independiente) un único valor del segundo conjunto (variable dependiente).



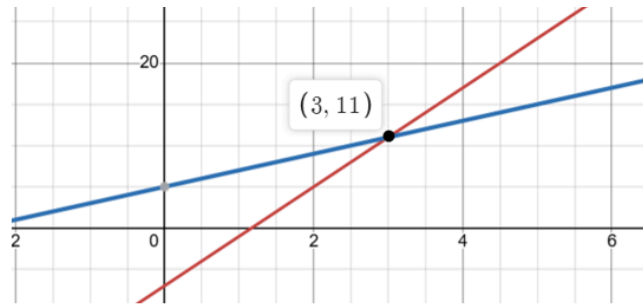
Ecuación Lineal

Una ecuación lineal o de primer grado es aquella que involucra solamente sumas y restas de variables elevadas a la primera potencia. Son llamadas

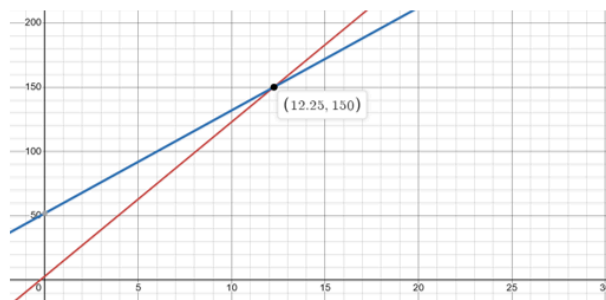
lineales porque se pueden representar como rectas en el sistema cartesiano.

Ejemplos de Ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 6x - 7 = 2x + 5 \\ & 6x - 2x = 5 + 7 \\ & 4x = 12 \\ & x = \frac{12}{4} \\ & x = 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{(13 + 2x)}{(4x + 1)} = \frac{3}{4} \\ & (13 + 2x)4 = 3(4x + 1) \\ & 52 + 8x = 12x + 3 \\ & 52 - 3 = 12x - 8 \\ & 49 = 4x \\ & x = \frac{49}{4} \end{aligned}$$



1.2 Dominio y Rango Restringidos.

El Dominio: de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada.

El Rango: de una función es el conjunto de todos los posibles valores de salida.

Ejemplo 1.

Suponga que a uno de los vendedores el patrón le ha dicho que su sueldo dependerá del número de unidades que venda a la semana. Si se establece que:

y = Sueldo semanal en dólares (variable dependiente).

x = Número de unidades vendidas a la semana (variable independiente).

Además; suponga que el patrón le ha dado al vendedor una ecuación para determinar su sueldo semanal a saber:

$$y = f(x) = 3x + 25$$

*Así entonces si vende 100 unidades; su ingreso semanal será:

$$y = f(100) = 3(100) + 25 = \$325$$

*Si vendió 75 unidades, recibirá entonces: $y = f(75) = 3(75) + 25 = \250

X	Y
D O M I N I O	R A N G O

Ejemplo 2.

En la función $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución: x puede ser sustituida por cualquier valor real.

$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$x = -3$$

$$y = (-3)^2 - 2(-3) + 1$$

$$y = 16$$

$$x = -2$$

$$y = (-2)^2 - 2(-2) + 1$$

$$y = 9$$

$$x = -1$$

$$y = (-1)^2 - 2(-1) + 1$$

$$y = 4$$

$$x = 1$$

$$y = (1)^2 - 2(1) + 1$$

$$y = 0$$

$$x = 2$$

$$y = (2)^2 - 2(2) + 1$$

$$y = 1$$

$$x = 3$$

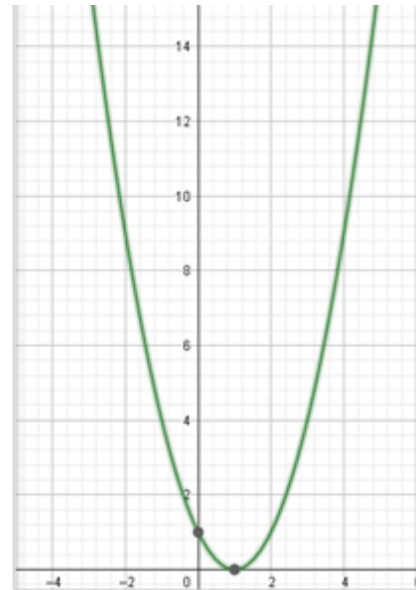
$$y = (3)^2 - 2(3) + 1$$

$$y = 4$$

$$x = 4$$

$$y = (4)^2 - 2(4) + 1$$

$$y = 9$$



X	Y
-3	16
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1
3	4
4	9

$$x = 100$$

$$y = (100)^2 - 2(100) + 1$$

$$x = -10$$

$$y = (-10)^2 - 2(-10) + 1$$

$$y = 100 + 20 + 1$$

$$y = 121$$

∴ El Dominio es: $(-\infty, +\infty)$

Y el Rango: $[0, +\infty)$

Ejemplo 3.

En la función $y = f(x) = \sqrt{x - 5}$

x puede asumir cualquier valor para el cual la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada sea positiva o cero

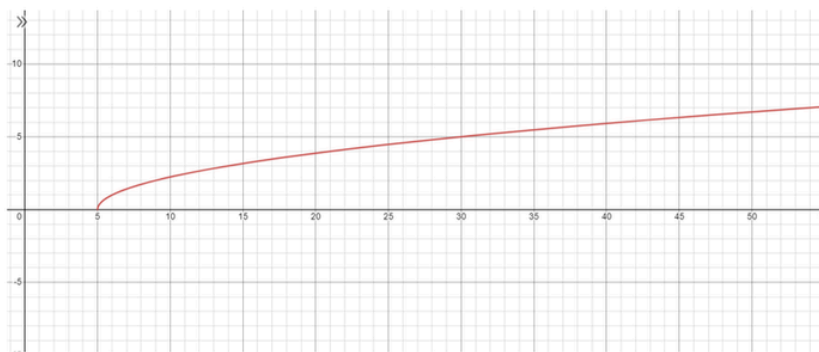
Para determinar esos valores,

$$x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

Así pues; el dominio de la función incluye todos los números reales que sean mayores o iguales a 5, esto es,

$$D = \{X|x \text{ es real y } x \geq 5\} \text{ o Dominio } [5 + \infty) \text{ y Rango: } [0 + \infty)$$



X	Y
5	0
6	1
9	2
14	3

Ejemplo 4:

$y = \frac{1}{x}$ Encontrar el dominio y el rango:

$$x = 10 \quad y = \frac{1}{10}$$

$$x = 4 \quad y = \frac{1}{4}$$

$$x = 1 \quad y = 1$$

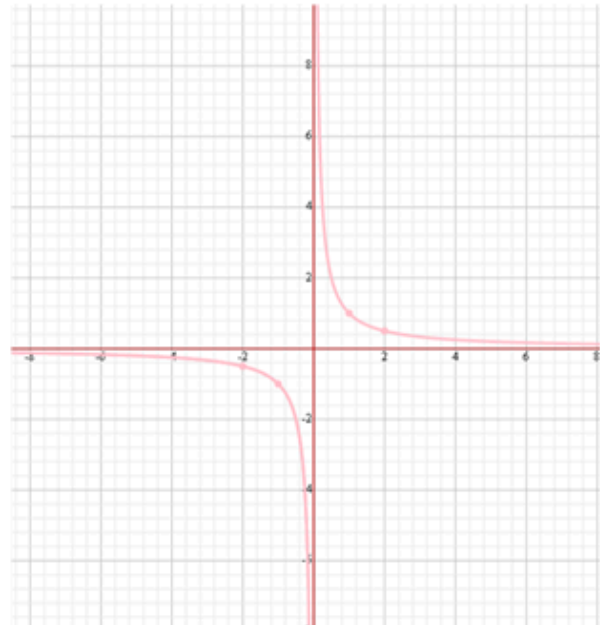
$$x = 0 \quad y = \frac{1}{0} = \infty$$

$$x = -1 \quad y = -1$$

$$x = -4 \quad y = -\frac{1}{4}$$

$$x = -10 \quad y = -\frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad y = 4$$



X	Y
-2	0.5
-1	-1
0	Indefinido
1	1
2	0.5

∴ El Dominio es:

Todos los $\mathbb{R}$ excepto el 0, o
 $(-\infty, +\infty)$ excepto el cero

o $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

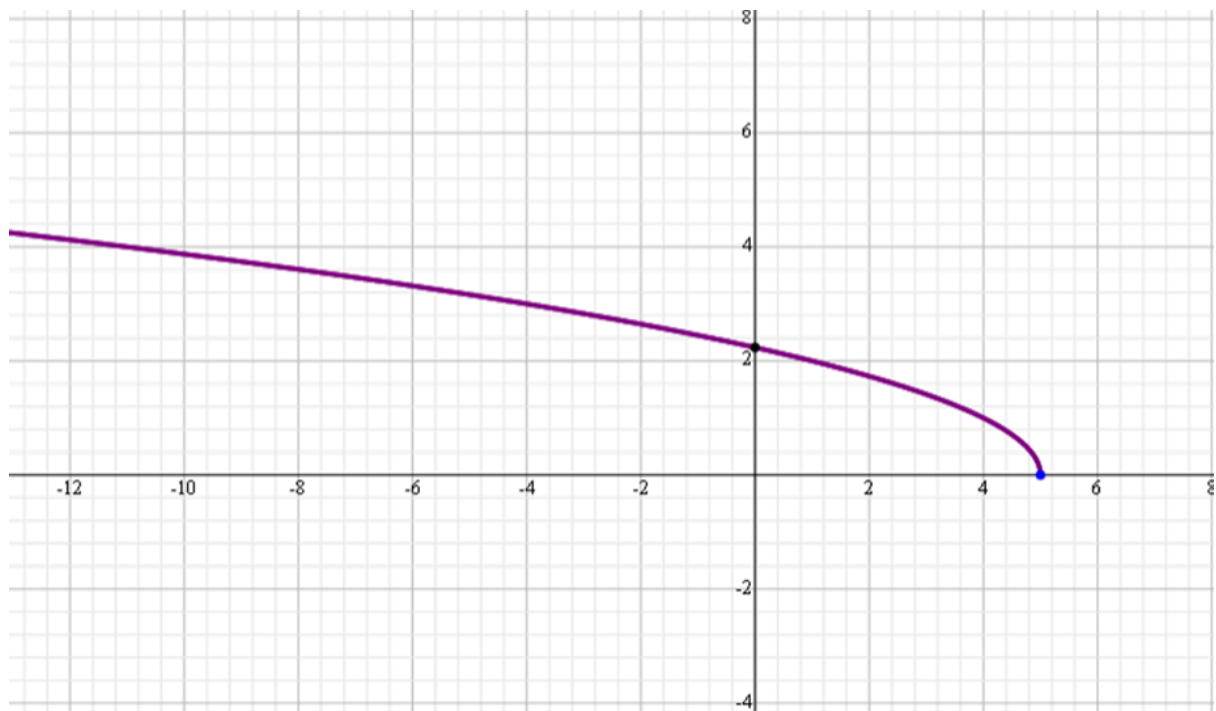
En este caso, el Rango es igual al Dominio

Ejemplo 5:

Sea la función f el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que

$$y = \sqrt{5 - x}$$

Encontrar el dominio y el rango de f y trazar la gráfica de f .



El dominio: Es todo el conjunto de los números reales ≤ 5 , o sea; $(-\infty, 5]$.

Y rango: Es el conjunto de todos los números reales no negativos, o sea; $[0, +\infty)$.

Ejemplo 6:

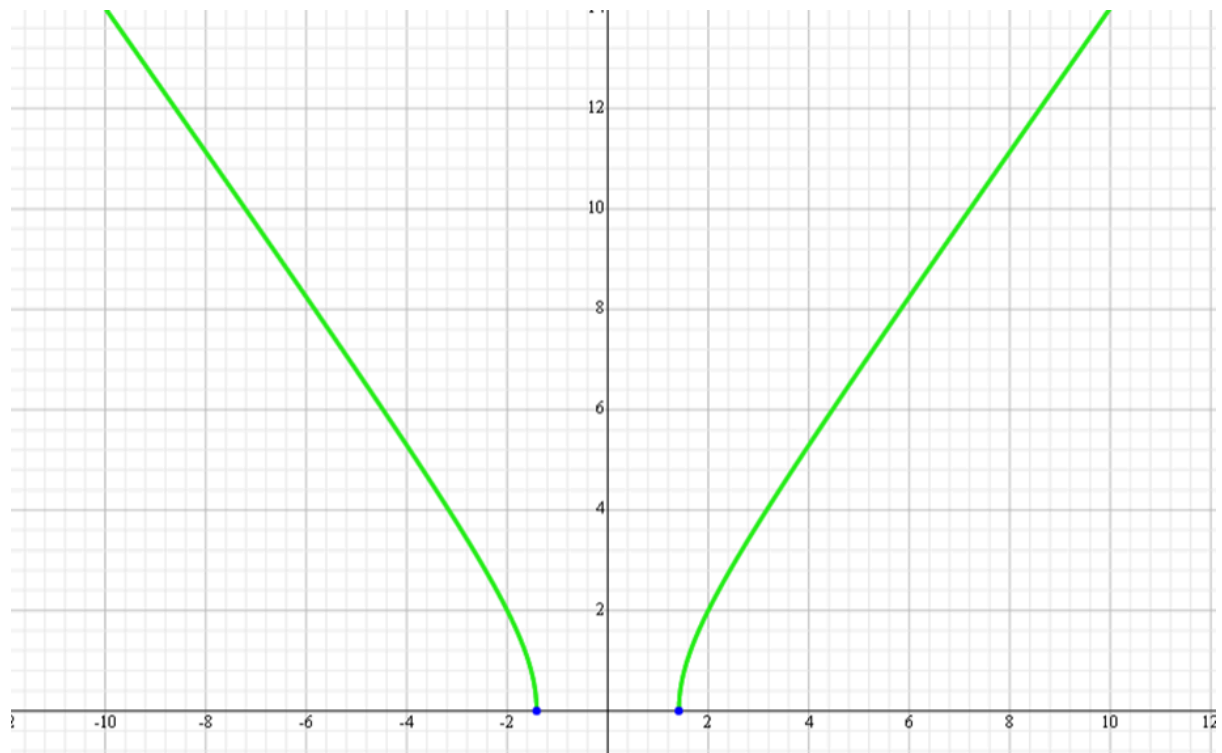
Encontrar el dominio y rango de la siguiente función $y = \sqrt{2x^2 - 4}$.

$$\textbf{Dominio: } (-\infty, -\sqrt{2}] \text{ y } [\sqrt{2}, +\infty)$$

$$\textbf{Rango: } [0, +\infty)$$

$$2x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \sqrt{2} = 1.4142$$



1.3 Funciones multivariadas básicas

En muchas funciones matemáticas el valor de una variable dependiente depende de más de una variable independiente.

Se da el nombre de funciones multivariadas a las que contienen más de una variable independiente.

En la mayor parte de las aplicaciones del mundo real, las funciones multivariadas son las adecuadas.

Una clase de funciones multivariadas es la de las funciones bivariadas. Estas (a diferencia de las funciones multivariadas) tienen dos variables independientes.

La Notación $z = f(x, y)$ indica que la variable dependiente z depende de los valores de las variables independientes x, y .

He aquí un ejemplo de una función bivariada.

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 5$$

Ejemplo: (De una función bivariada)

Si queremos evaluar $f(x, y)$ cuando $x = 0, y = 0$ esto se denota mediante $f(0, 0)$ en la función

$$z = f(0, 0) = 0^2 - 2(0)(0) + 0^2 - 5 = -5$$

$$z = f(0, 0) = 0^2 - 2(0)(0) + 0^2 - 5 = -5$$

$$z = 100 + 100 + 25 - 5 = 220$$

Ejemplo: (De una función multivariada)

Evaluar la función

$$y = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2x_4 - 25 \text{ en } f(-2, 0, 1, 4)$$

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2x_4 - 25$$

$$f(-2, 0, 1, 4) = (-2)^2 - 2(-2)(0) + (1)^2(4) - 25$$

$$y = 4 - 0 + 4 - 25 = -17$$

Ejemplo: (De una función multivariada)

$$\text{Evaluar la función } y = 4x_1x_2 + x_2 - 5x_3 - 6x_3x_4 - 2$$

$$\text{En } f(2, 4, -1, 0)$$

$$y = 4(2)(4) + 4 - 5(-1) - 6(-1)(0) - 2$$

$$= 32 + 4 + 5 + 0 - 2 = 39$$

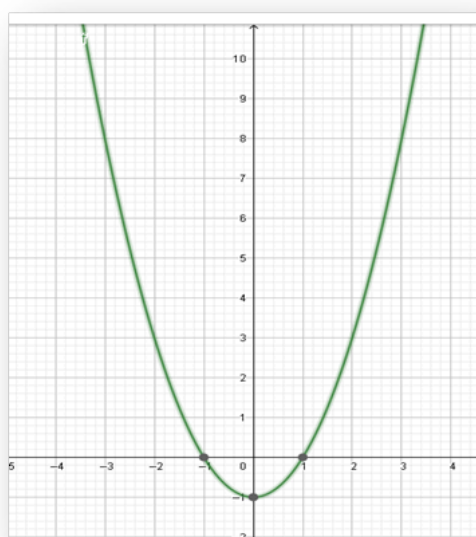
1.4 Representación Gráfica de Funciones Matemáticas

Mediante el modelo visual se podrá reforzar la comprensión de los conceptos matemáticos. Ese modelo casi siempre será una representación gráfica en donde se utiliza el plano de coordenadas o plano cartesiano. Así por ejemplo; podemos deducir cómo será la gráfica de las siguientes funciones por simple inspección y además reforzar el concepto de dominio y rango.

Encuentre la gráfica por simple inspección de:

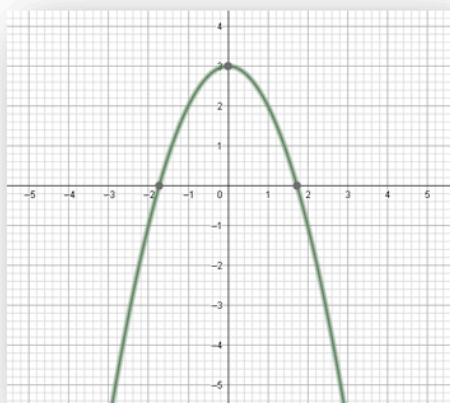
a) $f(x) = x^2 - 1$

Dominio: $(-\infty, +\infty)$ o todos los $\mathbb{R}$ **Rango:** $[-1, +\infty)$



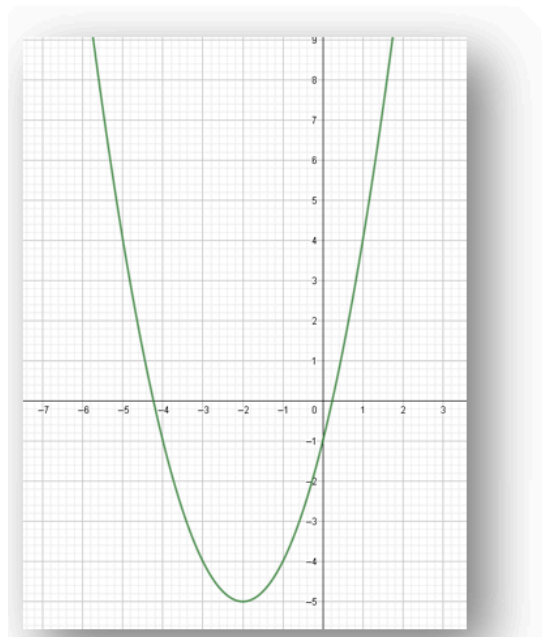
b) $f(x) = -x^2 + 3$

Dominio: $(-\infty, +\infty)$ **Rango:** $(-\infty, 3]$



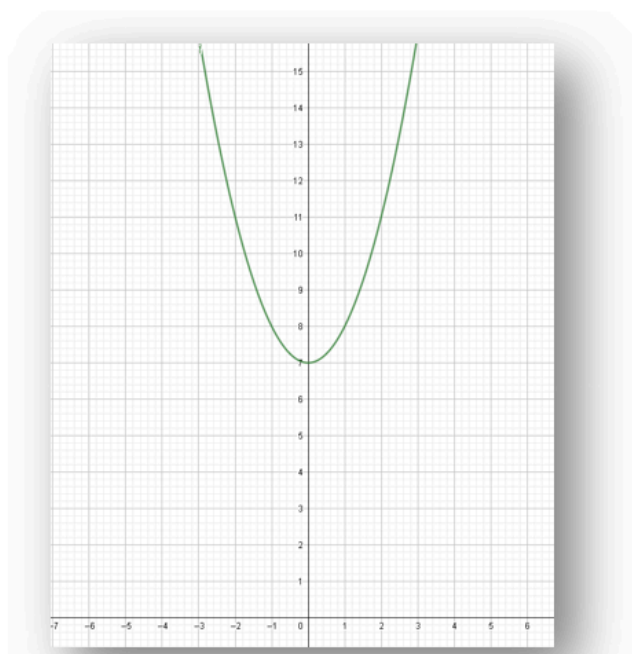
c) $f(x) = (x + 2)^2 - 5$

Dominio: $(-\infty, +\infty)$ **Rango:** $[-5, +\infty)$



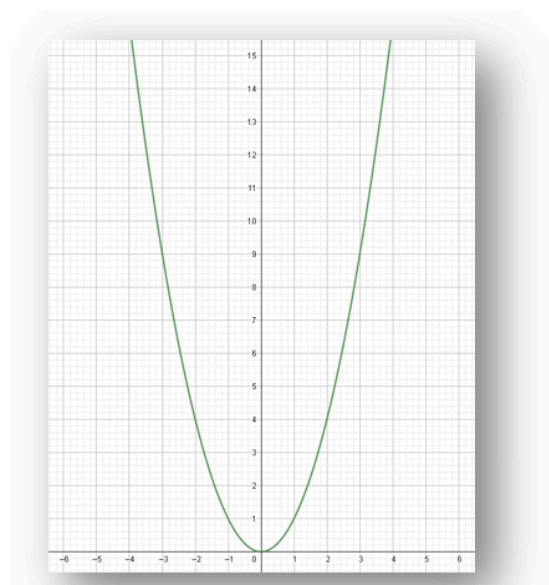
d) $f(x) = x^2 + 7$

Dominio: $(-\infty, +\infty)$ **Rango:** $[7, +\infty)$



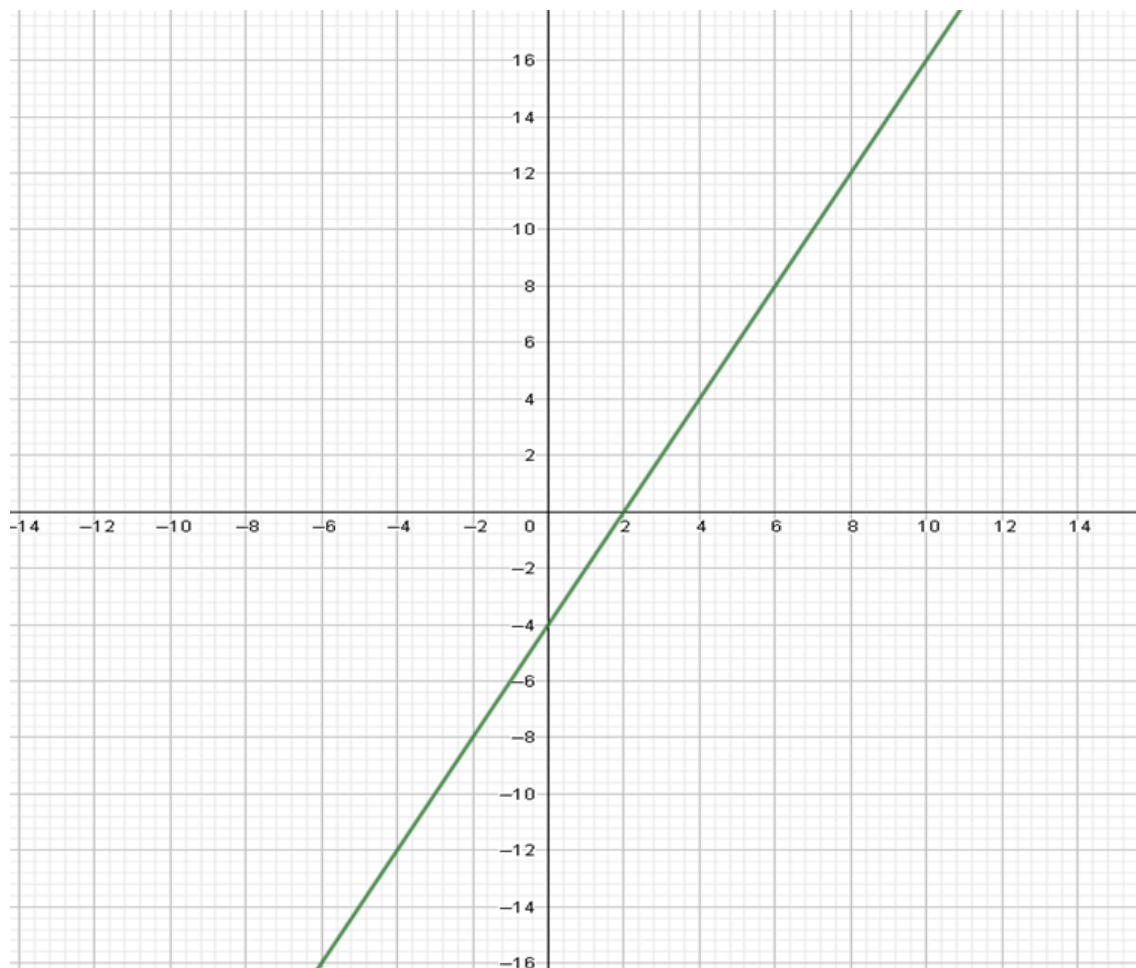
e) $f(x) = x^2$

Dominio: $[-\infty, +\infty)$ ***Rango:*** $[0, +\infty)$



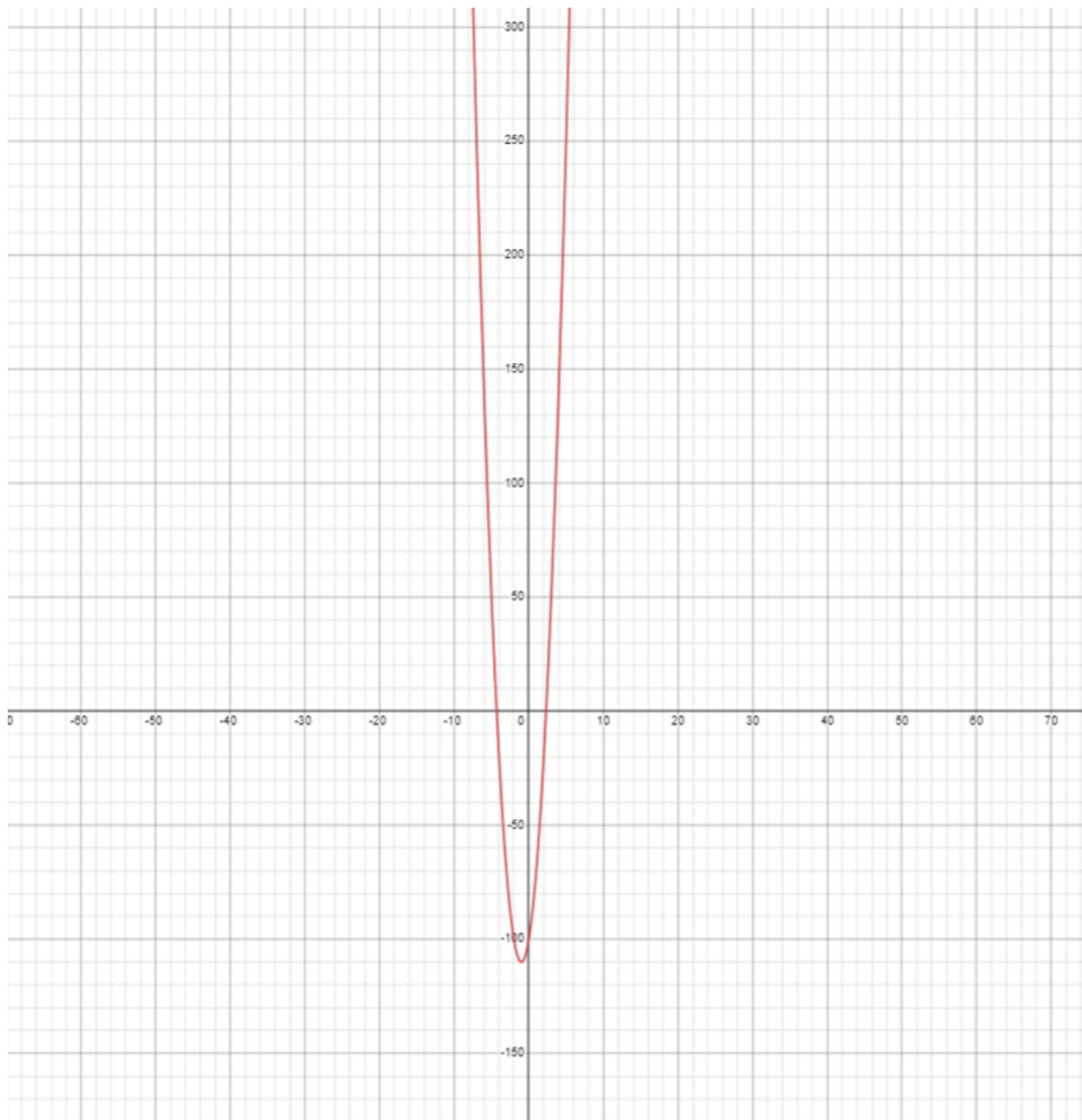
Así, por ejemplo; para trazar la gráfica de la función lineal $y = f(x) = 2x - 4$ lo hacemos arbitrariamente asignándole valores a "x" e interceptando con el valor de "y" quedando de la siguiente forma.

x	y
-4	-12
-3	-10
-2	-8
-1	-6
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4



Ejemplo 2. Para trazar la función cuadrática: $y = f(x) = 10x^2 + 20x - 100$

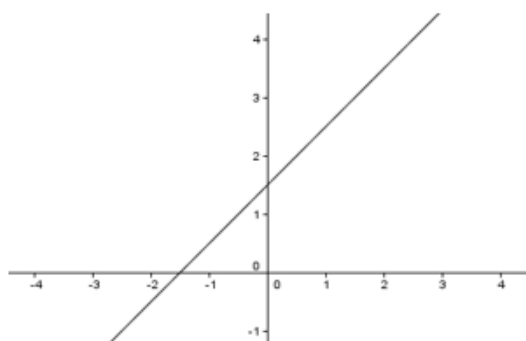
x	y
-6	140
-5	50
-4	20
-3	-70
-2	-100
-1	-110
0	-100
1	-70
2	-20
3	50
4	140



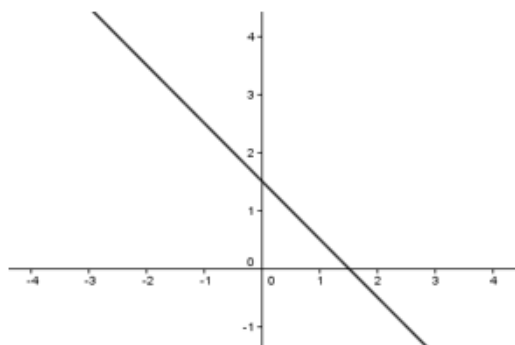
1.5 Fórmula Pendiente-Intersección

Pendiente: Cualquier línea recta, con excepciones de las líneas verticales, puede caracterizarse por medio de su pendiente. Por “pendiente” debe entenderse, que es la inclinación de una recta, ya sea que esta suba o baje a medida que el observador se mueve de izquierda a derecha a lo largo del eje x , y la tasa con la que la recta suba o baje (en otras palabras, su grado de inclinación).

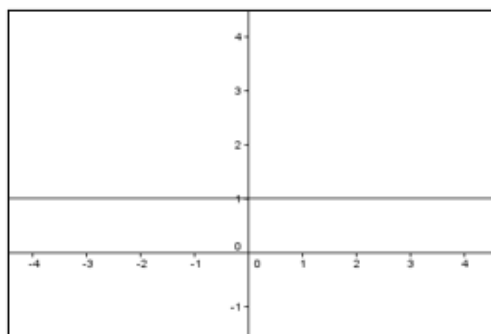
La pendiente de una línea puede ser positiva, negativa, cero o indefinida. Su representación gráfica es de la siguiente forma:



Pendiente
Positiva



Pendiente
Negativa



Pendiente
Cero



Pendiente
Indefinida

Desde otro punto de vista, la forma general de una ecuación lineal de dos variables se expresa como:

$$ax + by = c \dots\dots\dots 1)$$

Al resolver la ecuación 1) para la variable “y” se obtiene:

$$y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}$$

A esta expresión se le da el nombre de **FORMA DE PENDIENTE-INTERSECCION** de una ecuación lineal o bien; se puede expresar de la siguiente forma:

$$y = mx + k$$

Representando **m** la pendiente de la línea que representa la ecuación y **k** es la coordenada de la intersección con el eje **y**.

Ejemplo. Reescribir la siguiente ecuación en la forma pendiente-intersección.

$$5x + y = 10$$

$$y = -5x + 10$$

$$\therefore m = -5 \quad k = 10$$

Y la intersección con el eje “**y**” es igual a **(0,10)**

En los ejercicios siguientes reescriba cada ecuación en la forma de **pendiente-intersección** y determine la pendiente y la intersección con el eje **y**.

$$1) \quad 2x - 4y = 24$$

$$2) \quad -3x + 4y = 48$$

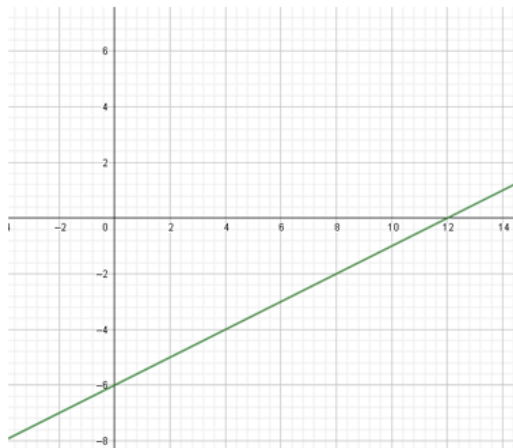
$$3) \quad x - y = 10$$

$$1) \quad 2x - 4y = 24$$

$$-4y = -2x + 24$$

$$y = \frac{1}{2}x - 6$$

X	Y
0	-6
10	-1
4	-4

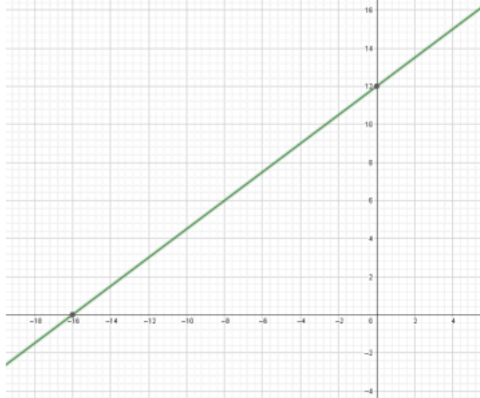


2) $-3x + 4y = 48$

$$4y = 3x + 48$$

$$y = \frac{3x}{4} + \frac{48}{4}$$

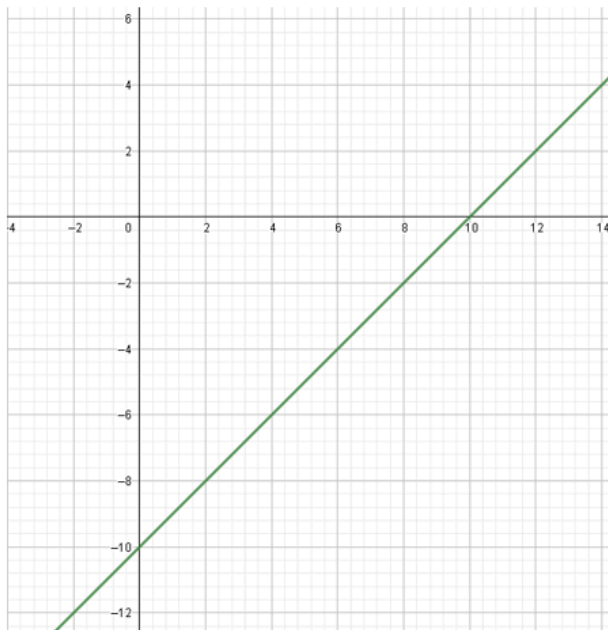
$$y = 0.75x + 12$$



X	Y
0	12
4	15
-4	9
-16	0

3) $x - y = 10$

$$y = x - 10$$



X	Y
0	-10
6	-4
10	0

Interpretaciones de la pendiente y de la intersección con el eje “y”

En muchas aplicaciones de las ecuaciones lineales, la pendiente y la intersección con el eje “y” tienen interpretaciones significativas. Tómese, por ejemplo, la ecuación de sueldo.

$$y = 3x + 25$$

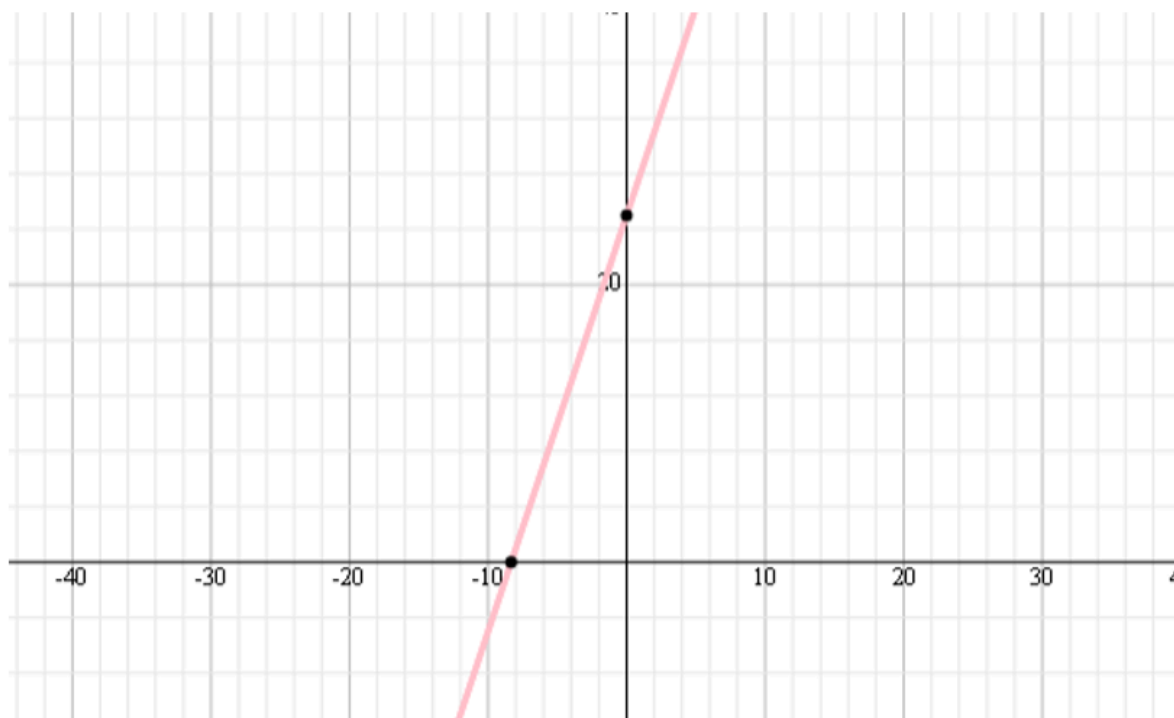
Donde: y = sueldo semanal (en dólares)

x = número de unidades vendidas durante la semana.

La ecuación de sueldo es lineal y está escrita en la forma de pendiente intersección. En una gráfica se representa con la línea como en la siguiente figura. Que tiene una pendiente de +3 y una intersección con el eje “y” igual a (0,25).

Observe que esta ecuación ha sido graficada solo para valores no negativos de “x” y “y”.

Puesto que la pendiente representa el cambio de “y” relacionado con un incremento unitario de “x”, la pendiente de +3 significa que el sueldo semanal “y” aumenta en 3 dólares por cada unidad adicional que se venda.



Ejercicios

Determinar la pendiente y la intersección con el eje “y” de las siguientes funciones.

a) $4x + 8y = 56$

$$8y = -4x + 56$$

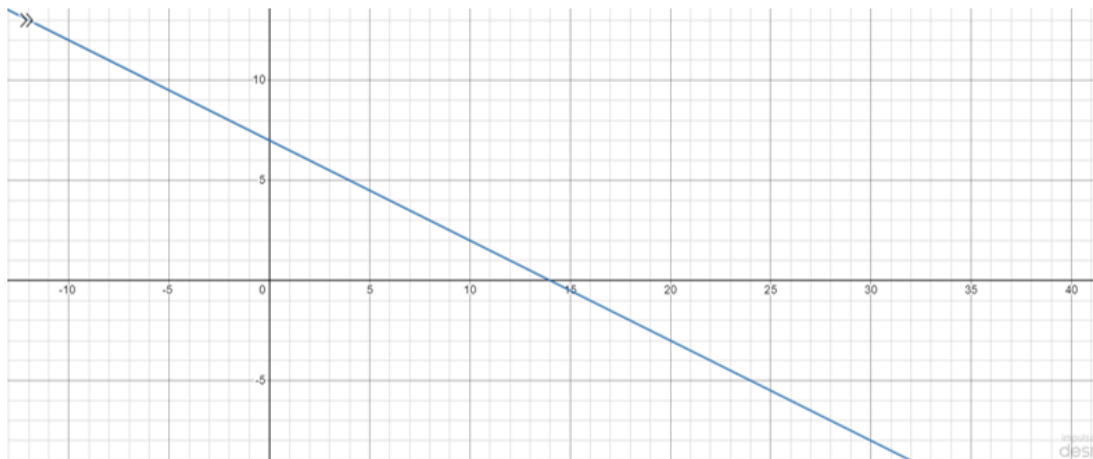
$$y = \frac{-4x}{8} + \frac{56}{8}$$

$$y = \frac{-x}{2} + 7$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ y } k = 7$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 7$$

$$\text{Si } x = 20 \rightarrow y = 2$$



Nota: Es una pendiente negativa.

b) $-2x + 3y = -18$

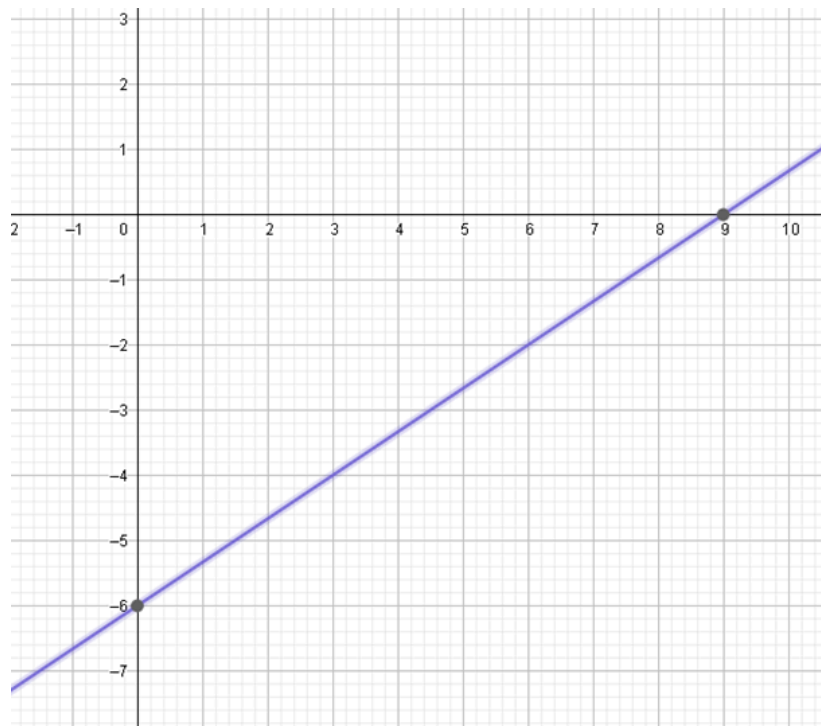
$$3y = 2x - 18$$

$$y = \frac{2}{3}x - 6$$

$$\therefore m = \frac{2}{3} ; k = -6$$

$$\text{si } x = 0 \text{ } y = -6$$

$$\text{si } x = 9 \text{ } y = 0$$



En este caso se puede interpretar como que el vendedor está obligado a vender un mínimo de 9 unidades (o aparatos). Antes o menos de las 9 unidades se consideran como pérdidas.

1.6 Determinación de la Ecuación de una Línea Recta

Al aplicar matemáticas, se inicia el análisis determinando las relaciones verdaderas o aproximadas entre las variables de interés.

Este tema sumamente importante ya que aprenderemos como determinar la ecuación para la relación lineal.

La forma en que se determina esta depende de la información disponible, una posibilidad en la pendiente e intersección en el eje "Y".

1.6.1 Pendiente e Intersección

La situación más fácil es aquella en que se conoce la pendiente " m " y la intersección con el eje " y " ($0, k$) de la línea que representa una ecuación.

Si se desea determinar la ecuación lineal basta sustituir " m " y " k " en la forma de pendiente-intersección, así también en forma general solo es cuestión de re arreglar los términos en la ecuación de pendiente-intersección.

Ejemplo 1.

Determine la ecuación de la línea recta que tiene una pendiente de -5 y una intersección en " y " de $(0,15)$.

Valores: $m = -5$ y $k = 15 \therefore \text{de } y = mx + k \dots\dots\dots y = -5x + 15$

Ejemplo 2.

Determine la ecuación de una línea recta que tenga una pendiente de $\frac{1}{2}$ y una intersección con el eje " y " en $(0,0)$.

Valores: $m = \frac{1}{2}$ y $k = 0 \therefore \text{de } y = mx + k \dots\dots\dots y = \frac{1}{2}x \text{ ó } y = \frac{1}{2}x + 0$

1.6.2 Pendiente y un punto

Otra posibilidad de una línea es que se conozca la pendiente y también un miembro del conjunto solución (es decir, las coordenadas de un punto sobre la línea), en otras palabras, pueden definirse los valores de X y Y que satisfagan una ecuación por medio del conjunto solución S , donde:

$$s = \{(x, y) | y = mx + k\}$$

Como en este tema se habla de conocer la pendiente y un punto que se encuentre sobre una línea debería satisfacer la ecuación de pendiente-intersección con el eje “y”. Esto se ilustra más fácilmente mediante algunos ejemplos:

Ejemplo:

Si la pendiente de una recta es -2 y un punto que se encuentra en ella es $(2,8)$ ¿Cuál será la ecuación de pendiente-intersección con el eje “y”?

Solución. de $y = mx + k$ de la forma pendiente interseccion

$$8 = -2(2) + k \dots\dots 8 = -4 + k \dots\dots k = 12$$

∴ la ecuacion puede reescribirse asi $y = -2x + 12$

Ejemplo:

Si la pendiente de una recta es cero y un punto que se halla sobre la línea es

$(5, -30)$ ¿Cuál será la ecuación pendiente intersección con el eje y?

$$\text{de } y = mx + k \dots\dots m = 0 \dots\dots p(5, -30)$$

$$y = 0x + k \text{ ó } (-30) = 0x + k \dots\dots k = -30$$

∴ la ecuacion pendiente – interseccion será

$$y = 0(x) - 30 \text{ ó } y = -30$$

1.6.3 Dos puntos (Determinación de la ecuación de una línea recta)

He aquí un caso más probable: algunos puntos de datos que se hallan sobre la línea han sido reunidos y se quiere determinar la ecuación de la línea. Supóngase que se nos dan las coordenadas de dos puntos que se encuentran sobre una recta. Podemos determinar la pendiente de la línea aplicando la fórmula de los dos puntos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

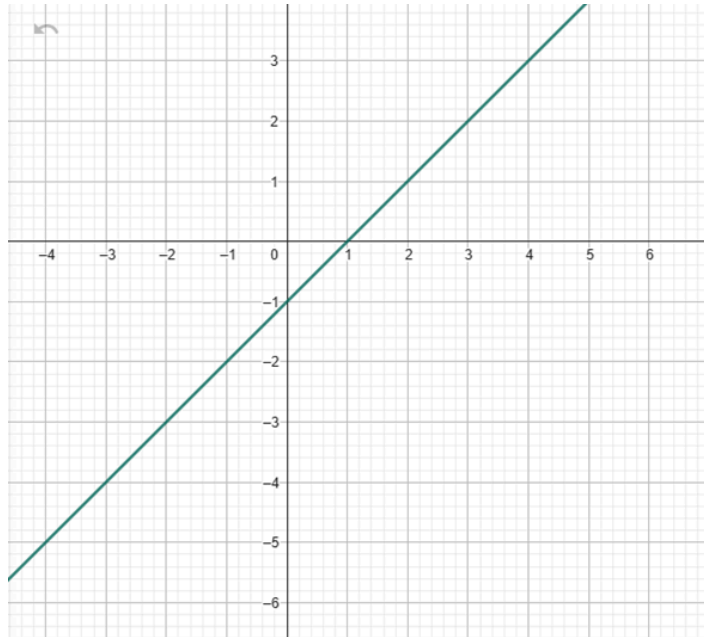
Donde $x_2 \neq x_1$

En cuanto se conozca la pendiente, será posible determinar la intersección con el eje “y” empleando uno de los dos puntos de datos y procediendo a la determinación de dicha ecuación.

Problema 1.

Determinar la ecuación de la recta que pasa por: $P_1(-4, 3)$ y $P_2(-2, 5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



X	Y
0	7
3	10
-3	4
-7	0

Calcular la pendiente de la recta.

Se calcula usando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo los puntos

$P_1(-4, 3)$ y $P_2(-2, 5)$:

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - (-4)} = \frac{2}{2} = 1$$

Usar la fórmula de la ecuación de la recta.

La ecuación de la recta en forma punto-pendiente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo; $m = 1$

y el punto $P_1 = (-4, 3)$

:

$$y - 3 = 1(x + 4)$$

Simplificar la ecuación.

Desarrollando la ecuación:

$$y - 3 = x + 4$$

Sumando 3 a ambos lados:

∴ La ecuación de la recta es: $y = x + 7$

Ejemplo...

(Dos puntos)

Determinar la ecuación de la recta que pasa por (4,2) y el origen.

Solución:

Mediante la fórmula de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (distancia entre dos puntos)

$$(-4, 2) \text{ y } (0, 0) \quad m = \frac{0 - 2}{0 - (-4)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad m = -\frac{1}{2} \quad \text{y } (-4, 2)$$

Aplicado $y = mx + k$ para encontrar "k" a

$$2 = -\frac{1}{2}(-4) + k \quad 2 = -\frac{1}{2}(-4) + k \quad 2 = 2 + k \quad k = 0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 0 \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x$$

Ejemplo (De dos puntos)

Determine la forma de pendiente-intersección caracterizada por los atributos indicado

$$P_1(x_1, y_1) \quad P_2(x_2, y_2)$$

$P_1(-4, 4)$ y $P_2(-2, -8)$ que se encuentran sobre la línea.

$$m = \frac{-8 - 4}{-2 - (-4)} = \frac{-12}{2} = -6 \quad m = -6 \quad \text{de } y = mx + k$$

Tomando a P_1 para encontrar el valor de k .

$$4 = -6(-4) + k \quad k = 4 - 24 \quad k = -20$$

$$\therefore y = -6x - 20$$

Sí ahora; invertimos las posiciones, siendo $P_1 (-2, -8)$ y $P_2 (-4, 4)$ entonces m :

$$m = \frac{4 - (-8)}{-4 - (-2)} = \frac{12}{-2} = -6 \quad m = -6$$

Y si también consideramos a $P_1 (-2, -8)$ para calcular el valor de " k "

$$k = y - mx \quad k = -8 - (-6)(-2) \quad k = -8 - 12 \quad k = -20$$

$$\therefore y = -6x - 20$$

Ejemplo:

$m = -\frac{1}{4}$, $(-2, -5)$ Se encuentra sobre la línea.

$$y = mx + k \quad k = y - mx \quad k = -5 - \left(-\frac{1}{4}\right)(-2)$$

$$k = -\frac{11}{2} \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{2}$$

Ejemplo:

(x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$(-1, 3)$ y $(2, -9)$ Están sobre la línea.

$$m = \frac{-9 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-12}{3} = -4 \quad m = -4$$

$$y = mx + k \quad k = y - mx \quad k = 3 - (-4)(-1) = -1 \quad k = -1$$

$$\therefore y = -4x - 1$$

Si ahora cambiamos de posición los puntos

$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$

$$(2, -9) (-1, 3) \quad m = \frac{3 - (-9)}{-1 - 2} = \frac{12}{-3} \quad m = -4$$

Y consideramos ahora el punto $(2, -9)$ en vez de $(-1, 3)$

$$k = y - mx \quad k = -9 - (-4)(2) \quad k = -9 + 8 \quad \therefore k = -1$$

Así $y = -4x - 1$

1.6.4 Aplicaciones a Modelos de Oferta Demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible.

Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar a varios niveles de precios, se denomina **ley de la demanda**. La ley más simple es una relación del tipo:

$$p = mx + b$$

En donde p es el precio por unidad del artículo. y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama **curva de demanda**. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x . Esto nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Es un hecho que, si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que, si el precio disminuye, la demanda del artículo se incrementará.

Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina **ley de la oferta**. La gráfica de una ecuación de la oferta se conoce como **curva de la oferta**.

Ejemplo.(Demanda).

Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de 25 dls. Cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de 20 dls. a cada rasuradora, determine la ecuación de demanda.

Solución al ejemplo de demanda

De: $p = mx + b$

$$(x, p) \quad (x, p)$$

$P1 (20, 25)$ y $P2 (30, 20)$ como $y = p = \text{demanda}$

$$(x_1, y_1)$$

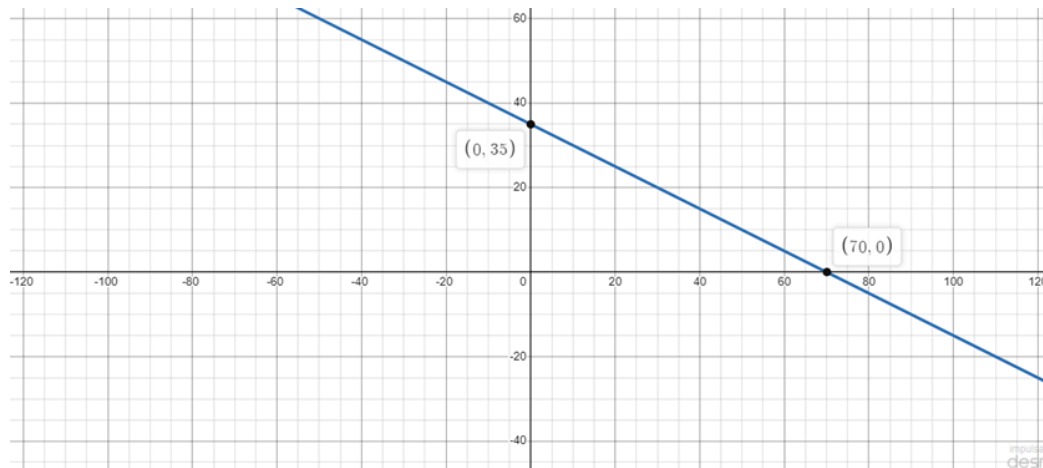

Cantidad- precio

$$y = mx + b \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{De } p_1: \quad 25 = -\frac{1}{2}(20) + b \quad b = 25 + 10 \quad b = 35$$

∴ la ecuación que rige el precio (p) ó demanda requerida es: $p = -\frac{1}{2}x + 35$



Curva de demanda lineal. O sea que: cuando el precio por unidad es 10 dls, puede tener una demanda de 30 unidades.

MODELOS DE COSTO LINEAL

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como:

COSTOS FIJOS Y COSTOS VARIABLES.

A LOS COSTOS FIJOS; Sí hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; por ej. Rentas, intereses sobre el préstamo y salarios de administración.

Y LOS COSTOS VARIABLES; dependen de la cantidad de artículos producidos como son: los materiales y mano de obra. Y finalmente

EL COSTO TOTAL es la suma de ambos; así: COSTO TOTAL = COSTOS VARIABLES + COSTOS FIJOS.

$$y_c = mx + b$$

Ejemplo:

El costo de fabricar 10 Máquinas Impresoras al día es de 350 dls, mientras que cuesta 600 dls. Producir 20 Impresoras del mismo tipo al día: suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total (y_c) de producir X Impresoras y dibuje su gráfica.

$$P_1 (10,350) \quad P_2 (20,600)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{600 - 350}{20 - 10}$$

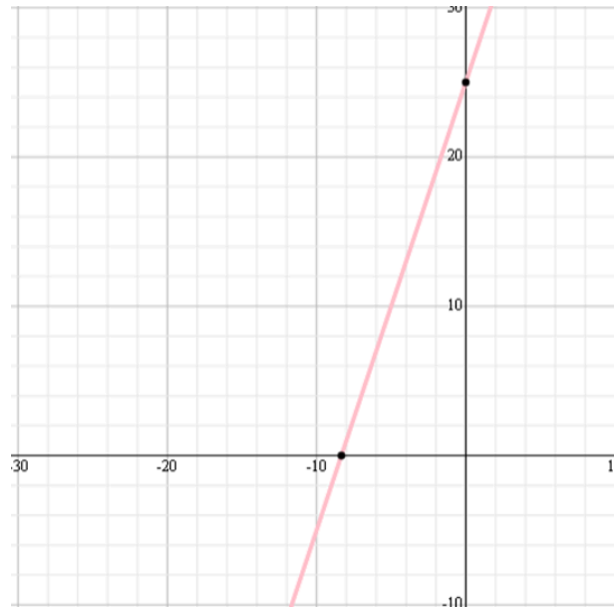
$$m = \frac{250}{10} = 25$$

$$y = mx + b \text{ con } P_1$$

$$350 = 25(10) + b$$

$$b = 100$$

$$\therefore y = 25x + 100$$



Ejemplo: De costo lineal

El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de 700 dls. y el de 120 cámaras a la semana es de 800 dls.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

$$P_1 (100,700) \quad P_2 (120,800)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{800 - 700}{120 - 100} = \frac{100}{20} = 5 \quad m = 5$$

$$\text{de } y = mx + b \text{ tomando a } P_1 \rightarrow 700 = 5(100) + b$$

$$700 - 500 = b \quad b = 200$$

$$\therefore y_c = 5x + 200$$

$$c.\text{total} = c.\text{var.} + c.\text{fijos}$$

Ejemplo: De costos lineal

El costo variable de procesar un Kg de granos de café es de \$0.50 y los costos fijos por día son de \$300.

a) Obtenga la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.

b) Determine el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

De costo total= costos variables + costos fijos

o de $y = mx + b$ en donde $m = \text{Costos variable por unidad}$

$$b = \text{Costo fijo } y c = \text{Costo}$$

$$\text{o sea; } m = 50 \text{ centavos y } b = \$300$$

a) Entonces; $yc = 0.5x + 300$

b) Si $x = 1000 \text{ Kg}$ y $yc = 0.5(1000) + 300$
 $yc = 800$



$$\text{Si } x = 0 \quad y = 300$$

$$x = 100 \quad y = 350$$

$$x = 200 \quad y = 400$$

Ejemplo: De Costo lineal

El costo variable de fabricar una mesa es de 7 dólares y los costos fijos son de 150 dls. al día.

a) Determine la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.

b) ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

C.TOTAL= Costo variable + Costos fijos

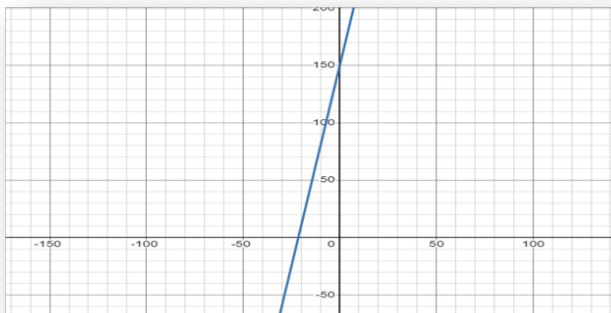
$$yc = mx + c$$

a) $\therefore yc = 7x + 150$

b) Por 100 mesas al día: $yc = 7(100) + 150$

$$yc = 700 + 150 = 850$$

$yc = 850 \text{ dls}$



FUNCIONES LINEALES DE COSTOS

El costo es la expresión cuantitativa monetaria representativa del consumo necesario de factores de la producción que se emplea para producir un bien o prestar un servicio.

Con las funciones de costos trataremos de plantear un modelo matemático simplificado de la realidad económica. Iniciaremos diciendo que los costos de producción de un bien o de prestación de un servicio tienen distintos componentes que, en un principio, le atribuiremos un comportamiento lineal, pues es el modelo más sencillo.

Las **funciones lineales** cumplen un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos. En muchos casos los problemas son lineales, pero, en otros, se buscan hipótesis que permitan transformarlos en problemas lineales ya que su solución es más sencilla.

Costo lineal

Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, deberá utilizar una serie de insumos que valorizados monetariamente le genera costos, que analizados en función a la relación total, los denominaremos costos fijos y costos variables. Los primeros, como lo indica su nombre, son independientes de las cantidades de un artículo que se produzca o un servicio que se preste (p.ej.: alquiler del local, depreciación de los bienes durables, determinados impuestos, etc.). En cambio, los costos variables dependen de la cantidad que se produzca de ese artículo o que se preste del servicio, (p.ej.: costos de materiales, de mano de obra productiva, etc.).

Ejemplo 1: El costo variable de fabricar juntas para machimbre es de 2 dls. por unidad y los costos fijos por día son de 30 dls. Escriba la fórmula de costo total y construya su gráfica. ¿Cuánto cuesta fabricar 25 juntas de machimbre por día?

Solución:

El costo total de fabricar "x" juntas de machimbre en un día es

$$C(x) = 2x + 30$$

El costo total ~~total~~ de fabricar 25 juntas de ~~machinbre~~ por día es de \$ 80.

$$C(25) = 2 \cdot 25 + 30$$

$$C(25) = 80 \text{ dls.}$$

Ejemplo 2: El costo de fabricar 10 bolsas de cartón al día es de 2,20 dls., mientras que fabricar 20 bolsas del mismo tipo cuesta 3,80 dls. Suponiendo que se trate de un modelo de costo lineal, determine la fórmula correspondiente a producir "x" bolsitas de papel en el día y construya su gráfica.

Solución:

En este caso tenemos dos puntos $P(10; 2,2)$ y $Q(20; 3,80)$, pudiendo construir la ecuación que determine la relación.

Por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$y - 2.2 = \frac{3.8 - 2.2}{20 - 10} (x - 10)$$

$$y = 0.16x + 0.6$$

Generalmente, cuando se trabaja con funciones económicas, se considera el dominio real, por lo que se le representa como una línea continua.

Actividades de Aprendizaje del Tema 1.

Investigación para Unidad 1:

- 1) ¿Qué es función?
- 2) ¿Qué es dominio?
- 3) ¿Qué es el rango?
- 4) ¿Qué es una ecuación lineal?
- 5) ¿Cuántos tipos de funciones hay?
- 6) ¿Qué significa pendiente?
- 7) ¿Qué significa ordenada?
- 8) ¿Cómo se representa la ec? de la recta?
- 9) ¿Qué diferencia existe entre el costo fijo, el costo variable y el costo total?
- 10) En la ec. de la recta cómo interpretarías cada uno de sus términos y los signos de ellos mismos.

Ejercicios para resolver de la unidad 1.

- 1) Encontrar el dominio y rango de la siguiente función $y = \frac{1}{x^2}$
- 2) Evaluar la función $y = 3x_1^2x_2 + 2x_4^3 - 5x_3 - 6x_3x_4 - 5$
En $f(2, 4, -1, 0)$
- 3) Reescribir la siguiente ecuación en la forma pendiente-intersección.
 $4x + y = 12$
- 4) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, -5)$ y el origen.
- 5) El costo de fabricar 10 puertas de madera al día es de 220 dls, mientras que fabricar 20 puertas del mismo tipo cuesta 380 dls. Suponiendo que se trate de un modelo de costo lineal, determine la fórmula correspondiente a producir "x" puertas de madera en el día y construya su gráfica.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

TEMA 2.

Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de Ecs. lineales

2.1 Funciones lineales

2.2 Modelos de equilibrio

2.2.1 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción

2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio

2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad

2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir

2.3 Sistemas de ecuaciones lineales

2.3.1 Métodos de eliminación suma y resta Sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3

2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2x2, 3x3 solución única

2.3.3 Aplicaciones a modelos económicos administrativos

2.1 Funciones Lineales

DEFINICIÓN

Una función lineal " f " con una variable independiente " x " y una variable dependiente " y " tiene la forma general $y = f(x) = ax + b$ donde a y b son valores. y $a \neq 0$.

FUNCIONES LINEALES DEL INGRESO

El dinero que entra en una organización por la venta de sus productos o por la prestación de servicios suele recibir el nombre de **ingreso**. La manera más básica de calcular el ingreso total por la venta de un servicio es:

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio})(\text{cantidad vendida})$$

En esta relación una suposición es que el precio de venta es el mismo para todas las unidades vendidas.

Si una compañía vende productos n , donde x_i es el número de unidades vendidas del producto i y p_i indica el precio del producto i , la función que permite calcular el ingreso total obtenido del producto n es:

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_nx_n \text{ Ingreso total}$$

Esta función de ingreso puede formularse de manera más concisa empleando la notación de sumatoria:

$$\text{Ingreso} \quad R = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

EJEMPLO:

Una agencia de alquiler de autos renta en \$300 diarios el uso de c/u de ellos. El ingreso total por año es una función lineal del número de días-automóvil rentado por la agencia, esto es; si

R = ingreso anual o total y $d = N^0$ de días –automóvil rentado durante el año.

$$R = f(d) = 300(d)$$

EJEMPLO:

En la empresa VW un técnico de control de calidad realiza visitas para inspeccionar el sistema de fabricación de la empresa, dicho supervisor cobra 70 dls. Por cada visita más 30 dls. Por cada hora adicional que necesite para llevar a cabo dicha inspección.

- ¿Qué función matemática representa el costo de las inspecciones? e indique cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente.
- Calcule cuál es el gasto de la empresa si el técnico utiliza 5 horas en la Inspección.
- Si la empresa paga 310dls. Entonces: ¿Cuántas horas estará ocupando el técnico para la inspección?

SOLUCION:

- ¿Qué función matemática representa el costo de las inspecciones? E indique cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente.

Si $x = \text{var. independiente. horas p/inspección}$

$y = \text{variable dependiente (dls. que cobra el técnico)}$

Apoyándonos en la forma gral. de la recta: $y = ax + b$ tenemos que:

La función será: $y = 30x + 70$

b) Calcule cuál es el gasto de la empresa si el técnico utiliza 5 horas en la Inspección.

Solamente se sustituye " x " por 5 horas. Y obtenemos el pago que realizará la empresa al técnico.

$$y = 30(5) + 70 = 220 \text{ dls.}$$

c) Si la empresa paga 310dls. Entonces: ¿Cuántas horas estará ocupando el técnico para la inspección?

Únicamente sustituimos " y " por 310 dls. de la ec. De la recta: o sea;

$$310 = 30x + 70 \quad x = \frac{310-70}{30} = \frac{240}{30} = 8 \text{ Horas}$$

∴ El técnico ocupará 8 horas para la inspección.

EJEMPLO.

Un vendedor de robots para panificadoras tiene un sueldo base de 700 dls. Mensuales, por otro lado; tiene una comisión de 95 dls. Por cada robot vendido.

a) ¿Cuál será la expresión algebraica de la función que proporciona el sueldo mensual del vendedor si depende del número de robots vendidos?

b) ¿Cuántos robots debe vender para ganar 2030 dls. en un mes?

Si $x = \text{número de robots vendidos al mes}$

$y = \text{sueldo mensual del vendedor}$

SOLUCIÓN:

a) La expresión algebraica será: $y = 700 + 95x$

700 dls. Es el costo fijo y $95x = \text{costo variable}$

b) Si el vendedor gana 2030 dls. mensuales, entonces: $y = 2030 \text{ dls.}$ Y se sustituye el sueldo en el valor de " y " y se despeja " x "

$$700 + 95x = 2030$$

$$95x = 2030 - 700$$

$$x = \frac{1330}{95}$$

$x = 14$ robots para poder ganar \$2030 dlls.

2.2 Modelos de Equilibrio

La utilidad de una organización es la diferencia entre el ingreso total y el costo total.

UTILIDAD= INGRESO TOTAL- COSTO TOTAL

Cuando el ingreso total es mayor que el costo total, la utilidad será positiva, en tales casos a la utilidad puede llamársele **ganancia o utilidad extra**.

Si el costo total es mayor que el ingreso total, la utilidad es negativa y puede dársele el nombre de **pérdida neta o déficit**.

Cuando tanto el ingreso total como el costo total son funciones lineales de la(s) misma(s) variable(s), la función de utilidad es también una función lineal de la(s) misma(s) variable(s). Esto es, si

Ingreso total= R_x la utilidad se define como:

$$C_T(x) = C_V + C_F \quad P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

2.2.1 Modelos de punto de equilibrio aplicado a la producción

Otro caso importante es **EL PUNTO DE EQUILIBRIO**, que se da cuando no hay ganancias ni pérdidas. Es decir; los costos son iguales a los ingresos o sea:

$$\text{INGRESO TOTAL} = \text{COSTO TOTAL}$$

$$R(x) = C(x)$$

EJEMPLO:

Una empresa vende un solo producto a \$65 por unidad. Los costos variables por unidad son de \$20 por concepto de materiales y de \$27.50 por concepto de mano de obra. Los costos fijos anuales ascienden a \$100 000. a) formule la función de utilidad expresada en términos de "x", número de unidades producidas y vendidas. b) ¿Qué utilidad se gana si las ventas anuales son de 20 000 unidades?

SOLUCION:

Si el producto se vende a \$65 por unidad, el ingreso total se calcula mediante la función. $R(x) = 65(x)$.

De manera análoga, el costo total anual está constituido por los costos de materiales, los costos de mano de obra y los costos fijos.

UTILIDAD = INGRESO – COSTO

$$P(x) = R(x) - C(x) \qquad C_T(x) = C_V + C_F$$

$$C_T(x) = 20x + 27.50x + 100\,000 = 47.50x + 100\,000$$

$$R(x) = \text{Ingreso total} \qquad P(x) = \text{Utilidad}$$

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso total} - \text{Costo total}$$

$$R(x) = 65x \qquad C_T(x) = C_V + C_F$$

$$C(x) = 20x + 27.50x + 100\,000$$

$$C(x) = 47.50x + 100\,000$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 65x - (47.50x + 100\,000)$$

b) Si se venden 20 000 pzas. Entonces; la utilidad será:

$$P(20\,000) = 17.50(20\,000) - 100\,000$$

$$P(20\,000) = 17.50(20\,000) - 100\,000$$

$$\text{b) } P(20\,000) = 350\,000 - 100\,000 = \underline{\$250\,000}$$

EJEMPLO:

Una empresa del área eléctrica vende un tipo de contacto en \$50 c/u, los costos variables p/unidad son de \$15 por concepto de materiales, y de \$30 por concepto de mano de obra. Los costos fijos anuales ascienden a \$50 000.

- Formule la función de utilidad expresada en términos de " x ", número de unidades producidas y vendidas.
- ¿Qué utilidad se gana si las ventas anuales son de 40 000 unidades?
- Represente gráficamente el punto de equilibrio (ingr.vs.costos tot.)

SOLUCIÓN.

- Formule la función de utilidad expresada en términos de " x ", número de unidades producidas y vendidas.

$$R(x) = 50x$$

$$C_T = \text{Ctos. de materiales} + \text{ctos. de Mano de obra} + \text{Ctos fijos.}$$

$$C_T = 15x + 30x + 50\,000$$

$$C_T = 45x + 50\,000$$

$$P_x = 50x - (45x + 50\,000)$$

$$a) P_x = 5x - 50\,000$$

b) ¿Qué utilidad se gana si las ventas anuales son de 40 000 unidades?

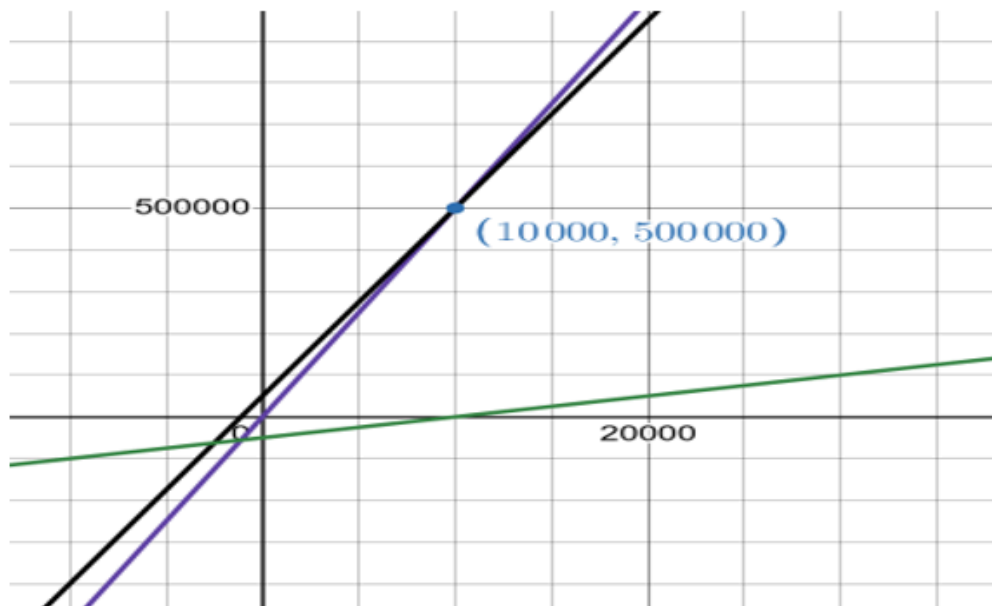
$$P_x = 5x - 50\,000$$

$$a) P_x = 5(40\,000) - 50\,000$$

$$P_x = 200\,000 - 50\,000$$

$$b) P_x = 150\,000$$

c) Represente gráficamente del punto de equilibrio
(Ingresos totales vs. Costos totales)



2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio

EJEMPLO. Representar gráficamente

$$1) \quad 4x + 5y = -32$$

$$2) \quad 3x - 5y = 11$$

Sumando 1) y 2) nos queda: $\overline{7x = -21} \rightarrow x = -3$

Sustituimos $x = -3$ en ec. 2) $\rightarrow 3(-3) - 5y = 11 \quad -9 - 5y = 11$

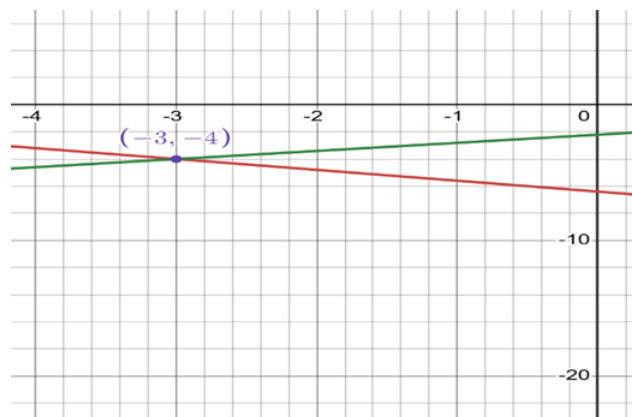
$$-5y = 11 + 9 \quad y = \frac{20}{-5} = -4 \quad y = -4$$

Sol. (-3, -4)

También se puede obtener la gráfica mediante tabulación. Para ello es suficiente el cálculo de dos puntos en cada ecuación. Así:

Ecuación	x	y
Ec. 1	0	-6.4
	-10	1.6
Ec. 2	0	-2.2
	10	3.8

GRÁFICA DE PUNTO DE EQUILIBRIO



EJEMPLO.

Una empresa invierte en dos fondos. El fondo "x" requiere 5 dls. Por unidad y el fondo "y" 2 dls. Se invierten 420 dls. En total y se compran 120 unidades.

Sistema de ecuaciones:

$$5x + 2y = 420$$

$$x + y = 120$$

Utilizando el método de eliminación:

$$5x + 2y = 420$$

$$x + y = 120(-2)$$

$$1) \quad 5x + 2y = 420$$

$$2) \quad -2x - 2y = -240$$

$$3x = 180$$

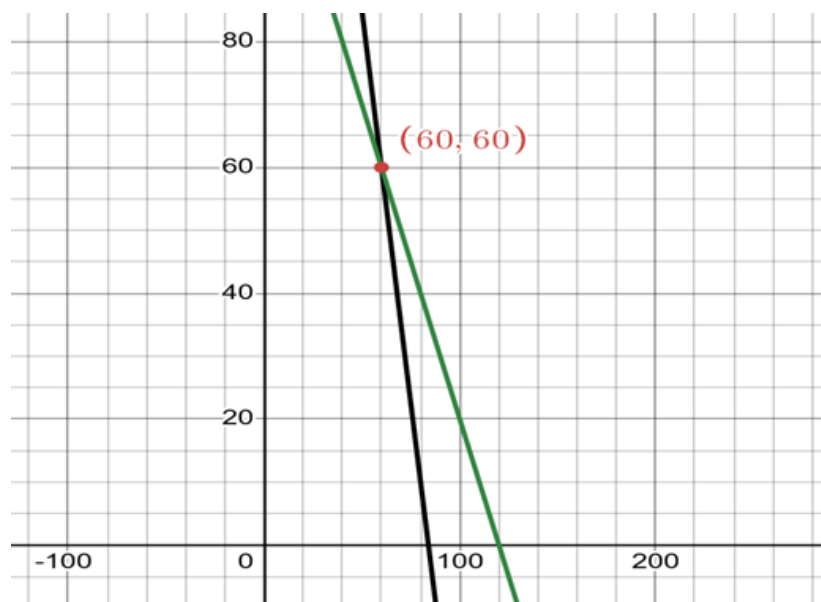
$$x = 60$$

Sustituyendo en ec. 2) $60 + y = 120$

$$y = 120 - 60 = 60$$

$$y = 60$$

Sol. (60, 60)



2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad

En la administración actual, la toma de decisiones financieras necesita entender claramente la relación que existe entre costos, volumen de producción y utilidad.

El modelo de contribución al costo fijo y a la utilidad, también conocido como modelo Costo- Volumen- Utilidad (CVU), es una herramienta fundamental que permite analizar cómo las variaciones en el nivel de ventas influyen en los resultados económicos de una empresa.

Este modelo se basa en la clasificación de los costos en fijos y variables. Los costos fijos permanecen constantes dentro de un rango relevante de operación, independientemente del volumen de producción, mientras que los costos variables cambian de manera proporcional al nivel de actividad.

A partir de esta distinción surge el concepto de contribución marginal, que representa la parte del ingreso por ventas que se destina primero a cubrir los costos fijos y, una vez cubiertos estos, a generar utilidad.

Modelo Costo–Volumen–Utilidad (CVU).

Resumen de fórmulas y significado de cada término

P = Precio de venta por unidad.

CV = Costo variable unitario.

CF = Costos fijos totales.

MC = $P - CV$ (Margen de contribución).

$Q_{PE} = CF / MC$ (Punto de equilibrio).

$U = MC \cdot Q - CF$ (Utilidad).

$MC\% = MC / P$ (Margen de contribución porcentual).

$V_{PE} = CF / MC\%$ (Punto de equilibrio en ventas).

EJEMPLO.

Problema 1. Cafetería universitaria

Una cafetería universitaria vende combos a \$120. El costo variable es \$70 y los costos fijos son \$10,000.

Preguntas y respuestas

1. ¿Cuál es el margen de contribución por combo vendido?

Respuesta: $MC = 120 - 70 = \$50$ por combo.

2. ¿Cuántos combos deben venderse para alcanzar el punto de equilibrio?

Respuesta: $Q_{PE} = 10,000 / 50 = 200$ combos.

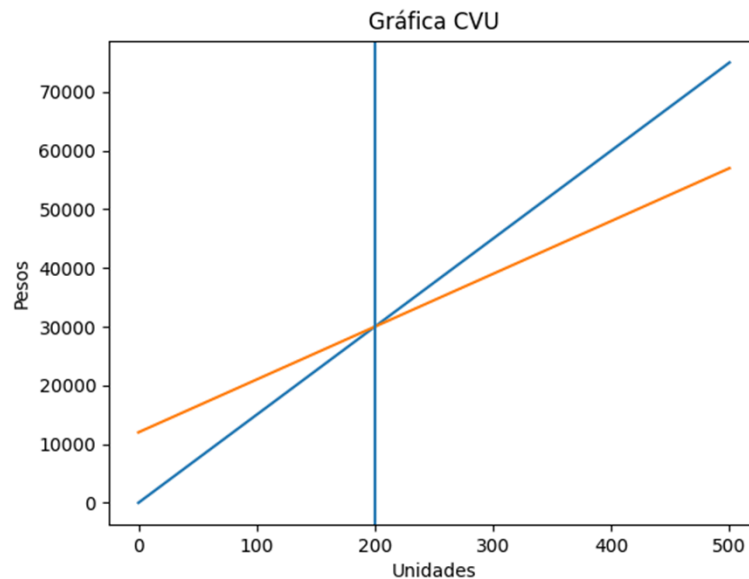
3. ¿Qué sucede con la utilidad si se venden más de 200 combos?

Respuesta: A partir del combo 201 se genera utilidad.

Desarrollo matemático resumido:

$$MC = 50$$

$$Q_{PE} = 200 \text{ unidades}$$



Interpretación de la gráfica:

A partir del punto de equilibrio los ingresos superan a los costos totales.

EJEMPLO.

Problema 2. Fábrica de camisetas

Una fábrica vende camisetas a \$150 con costo variable de \$90 y costos fijos de \$12,000.

Preguntas y respuestas

1. ¿Cuál es el margen de contribución unitario de cada camiseta?

Respuesta: $MC = 150 - 90 = \$60$ por camiseta.

2. ¿Cuántas camisetas deben venderse para no tener pérdidas?

Respuesta: $Q_{PE} = 12,000 / 60 = 200$ camisetas.

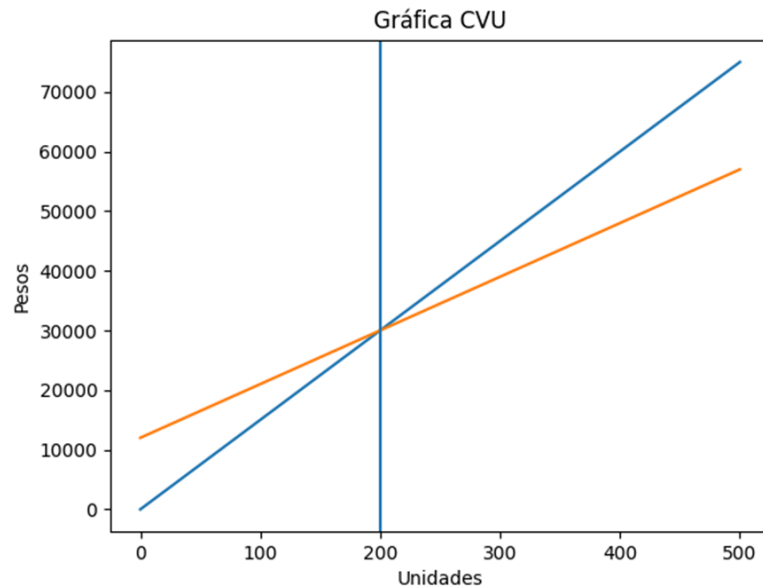
3. ¿Por qué es importante conocer este punto para la planeación financiera?

Respuesta: Permite fijar metas mínimas de ventas.

Desarrollo matemático resumido:

$$MC = 60$$

$$Q_{PE} = 200 \text{ unidades}$$



Interpretación de la gráfica:

El punto de equilibrio indica el nivel mínimo de ventas necesario.

Problema 3. Panadería local

Una panadería vende cajas de pan a \$80, con costo variable de \$50 y costos fijos de \$9,000.

Preguntas y respuestas

1. ¿Cuál es el margen de contribución por caja de pan?

Respuesta: $MC = 80 - 50 = \$30$ por caja.

2. ¿Existe utilidad o pérdida al vender 200 cajas?

Respuesta: $U = 30(200) - 9,000 = -\$3,000$ (pérdida).

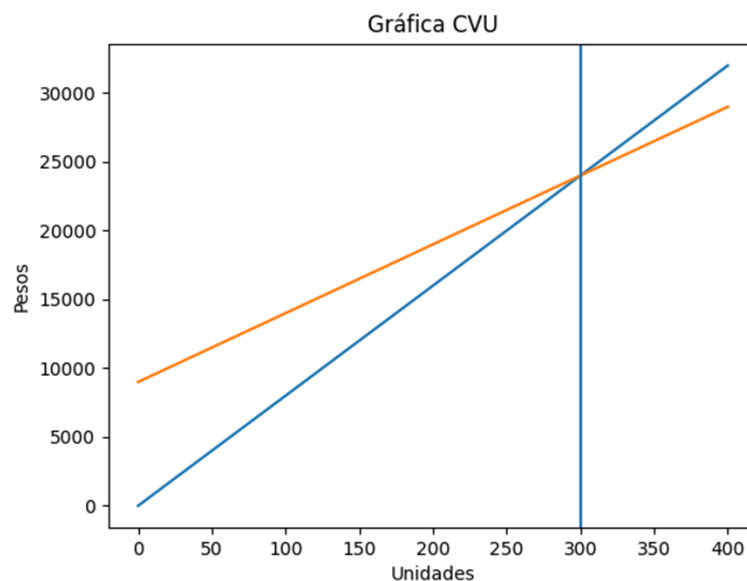
3. ¿Qué decisión administrativa podría tomarse con este resultado?

Respuesta: Incrementar ventas o reducir costos.

Desarrollo matemático resumido:

$$MC = 30$$

$$Q_{PE} = 300 \text{ unidades}$$



Interpretación de la gráfica:

Las ventas actuales no cubren los costos fijos.

EJEMPLO. Taller mecánico

Un taller cobra \$200 por servicio, con costo variable de \$120 y costos fijos de \$20,000.

Preguntas y respuestas

1. ¿Cuál es el margen de contribución por servicio?

Respuesta: $MC = 200 - 120 = \$80$ por servicio.

2. ¿Cuántos servicios deben realizarse para alcanzar el punto de equilibrio?

Respuesta: $Q_{PE} = 20,000 / 80 = 250$ servicios.

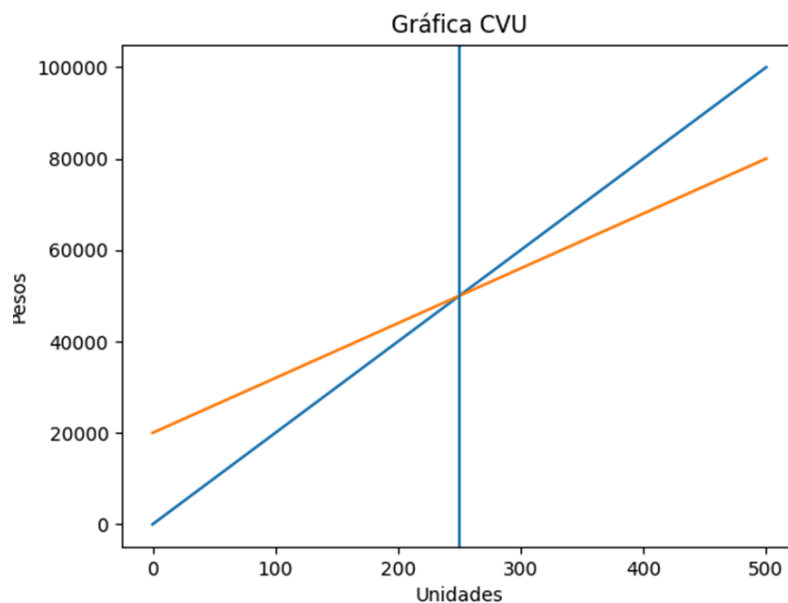
3. ¿Cómo afecta el aumento de costos fijos a las metas de venta?

Respuesta: Incrementa el número de servicios requeridos.

Desarrollo matemático resumido:

$$MC = 80$$

$$Q_{PE} = 250 \text{ unidades}$$



Interpretación de la gráfica:

El aumento de costos fijos desplaza el punto de equilibrio.

EJEMPLO. Tienda en línea

Una tienda en línea vende productos a \$100, con costo variable de \$65 y costos fijos de \$14,000.

Preguntas y respuestas

1. ¿Cuál es el margen de contribución unitario Del producto?

Respuesta: $MC = 100 - 65 = \$35$ por unidad.

2. ¿Cuánto debe vender la empresa para cubrir todos sus costos?

Respuesta: $V_{PE} = 14,000 / 0.35 = \$40,000$.

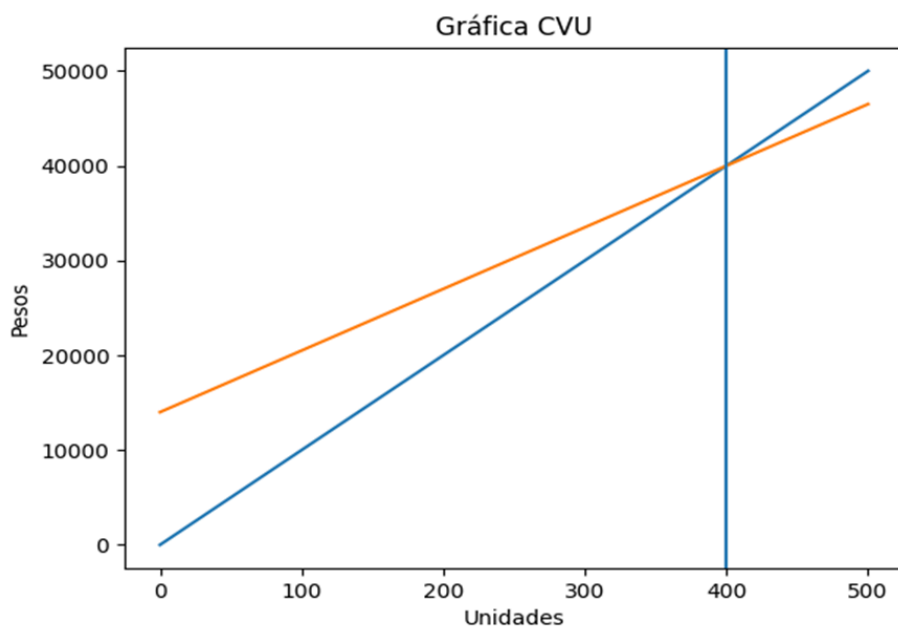
3. ¿Por qué es útil expresar el punto de equilibrio en términos monetarios?

Respuesta: Facilita la planeación de ingresos.

Desarrollo matemático resumido:

$$MC = 35$$

$$Q_{PE} = 400 \text{ unidades}$$



Interpretación de la gráfica:

El punto de equilibrio en ventas permite planear ingresos mínimos.

2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir

EJEMPLO (DE MODELO DE EQUILIBRIO)

Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales para reloj es de \$15 y los costos fijos son de \$2 000 al día. Si vende cada reloj a \$20. ¿Cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Si x es el N^* de relojes producidos y vendidos cada día.

$R(x)$ = ingreso COSTO: \$15(material)+ COSTOS FIJOS+(\$2000)

$C(x)$ = costos totales 1) $C(x)$ = costos = $15(x) + 2000$

$P(x)$ = utilidad 2) INGRESO: $R(x) = 20(x)$

CONDICION DE EQUILIBRIO:

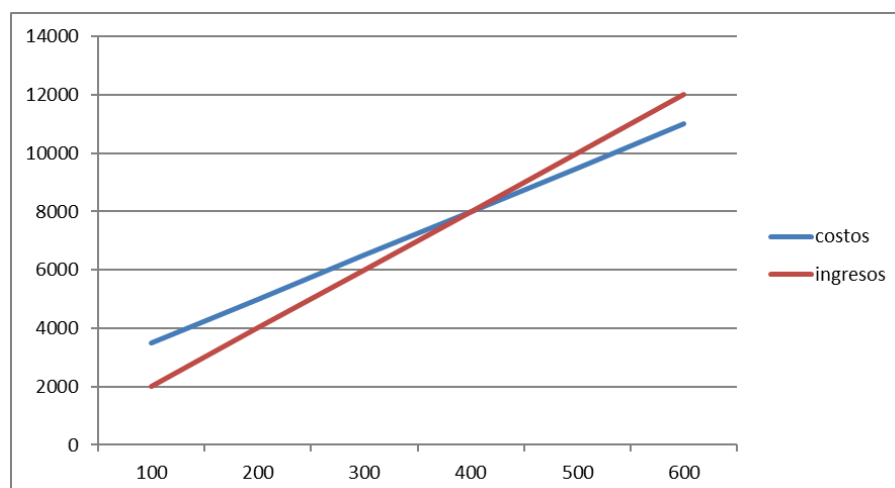
Ingresos = costos

$$20x = 15x + 2\,000$$

$$20x - 15x = 2\,000$$

$$x = \frac{2000}{5} = \mathbf{400}$$

∴ Se deben vender al día 400 relojes para que no haya ni utilidades ni pérdidas.



EJEMPLO (MODELO DE EQUILIBRIO)

Suponga que el costo diario de producir "x" sillas este dado: $C(x) = 2.5x + 300$

- a) Si cada silla se vende a 4dls. ¿Cuál es el punto de equilibrio?
b) Si el precio de venta es ahora de 5dls. por silla, ¿Cuál es el nuevo punto de equilibrio?

Costo: $C(x) = 2.5x + 300$

$$4x = 2.5x + 300$$

$$C(x) = 2.5x + 300$$

$$4x - 2.5x = 300$$

INGRESO: $R(x) = 4x$

$$1.5x = 300$$

$$x = \frac{300}{1.5}$$

$$x = 200 \text{ sillas}$$

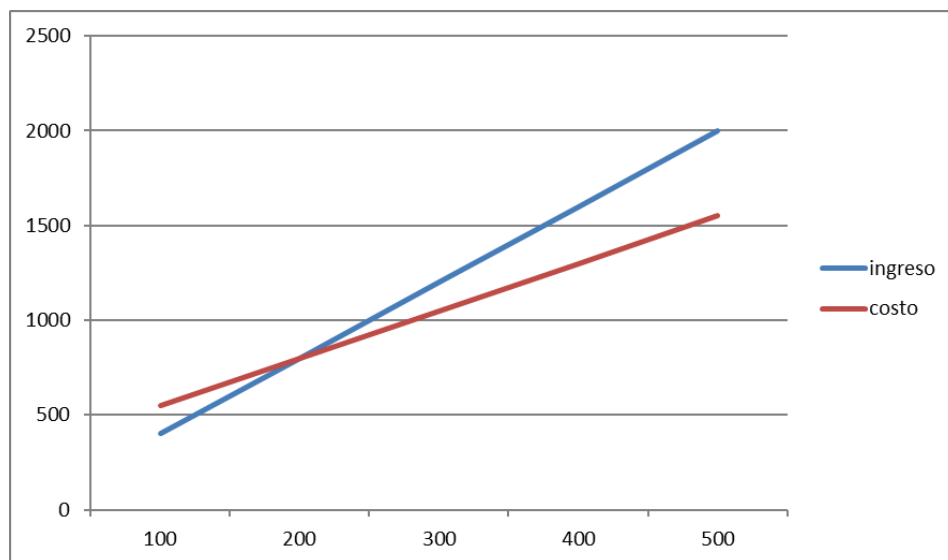
$$\text{si } R(x) = 5x$$

$$5x = 2.5x + 300$$

$$2.5x = 300$$

$$x = \frac{300}{2.5} = 120$$

$$x = 120 \text{ sillas}$$



1) $C(x) =$ si $x = 0$ $2.5(0) + 300$ $C(x) = 300$

Si $x = 200$ $2.5(200) + 300$ $C(x) = 800$

2) $R(x) = 4x$ si $x = 0$ $R(x) = 0$

Si $x = 300$ $R(x) = 1200$

EJEMPLO.

Los costos fijos por producir ciertos artículos son de 5000dls. al mes y los costos variables son de 3.50dls. Por unidad, si el producto vende c/u a 6.00dls, determine:

- a) El punto de equilibrio
- b) Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de \$1 000 mensuales y
- c) Obtenga la pérdida cuando solo 1 500 unidades se producen y venden c/mes.

Condición de equilibrio:

$$\text{INGRESOS } (R(x)) = \text{COSTOS } C(x)$$

$$6x = 3.5x + 5\,000$$

$$C. F = \$ 5\,000$$

$$2.5x = 5\,000$$

$$C. V = 3.5x$$

$$R(x) = 6x$$

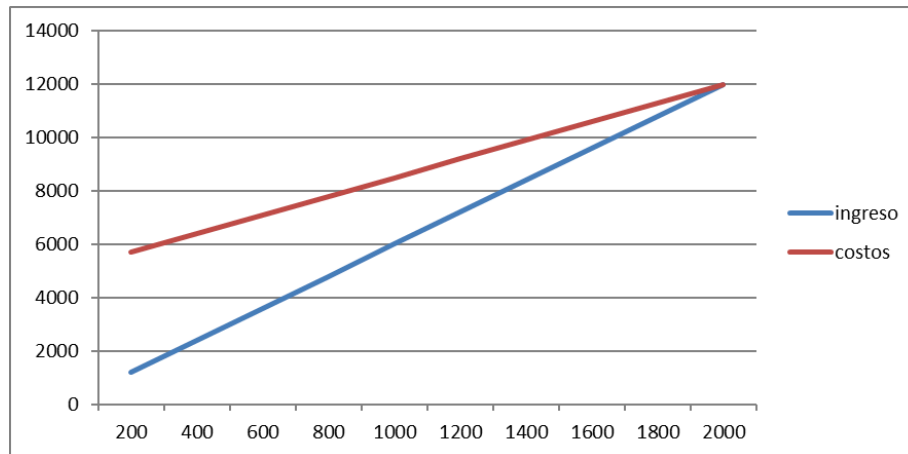
$$x = \frac{5000}{2.5} = 2000$$

$$R(x) = 6x \text{ (ingreso)}$$

x	y
0	0
1 600	9 600

$$C(x) = 3.5x + 5\,000$$

x	y
0	5 000
1 200	8 000



El costo de producir x artículos está dado por; $y = 2.8x + 600$ y cada artículo se vende a \$4.00

a) Encuentre el punto de equilibrio

b) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán ¿Cuál debería ser el precio fijado a $c/\text{artículo}$?

$$C(x) = 2.8x + 600$$

$$R(x) = 4x$$

$$4x = 2.8x + 600 \quad 3.2x = 600 \quad \mathbf{x = 187.5 \text{ artículos}}$$

$$R(x) = 4x = 4(450) = \mathbf{1\ 800}$$

EJEMPLO:

Un grupo de ingenieros quieren formar una compañía para producir detectores de humo. Han ideado un diseño y estiman que los costos variables por unidad, incluyendo material, mano de obra y costos de mercadotecnia son de 22.50 dls. Los costos fijos relacionados con la formación, operación y dirección de la compañía y la compra de equipo y maquinaria dan en total 250 000 dls. Estiman que el precio de venta será de 30 dls. Por detector.

Determine:

a) El número de detectores de humo que han de venderse para que la empresa alcance el equilibrio en el negocio.

b) Los datos preliminares de mercadotecnia indican que la empresa venderá aproximadamente 30 000 detectores de humo a lo largo de la vida del proyecto. Si les pone un precio de 30 dls. cada uno, determine las utilidades esperadas en este nivel de producción.

SOLUCION:

- a) La condición de equilibrio se presenta cuando el INGRESO TOTAL= COSTO TOTAL o cuando: $R(x) = C(x)$

El punto de equilibrio se calcula así:

$$30x = 22.50x + 250000 \quad \text{ó} \quad 7.5x = 250000 \quad y \quad X_{NE} = 33\,333 \text{ unidades}$$

EL OTRO METODO consiste en escribir primero la función de utilidad y hacerla igual a cero como sigue:

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad 30x - (22.50x + 250\,000) = 7.5x - 250\,000$$

Suponiendo que la función de utilidad P es igual a cero se tiene:

$$7.5x - 250\,000 = 0 \quad \text{o bien; a}$$

$$7.5x = 250\,000 \quad \therefore$$

$$\text{a) } x_{NE} = 33\,333 \text{ unidades.}$$

Cantidad que se debe vender para estar en equilibrio

- b) cuando se proyecta una venta de 30 000 detectores de humo

$$(30\,000) = 7.5 (30\,000) - 250\,000$$

$$(30\,000) = 225\,000 - 250\,000 = \mathbf{-25\,000}$$

$$(30\,000) = -25\,000 \text{ Tenemos pérdidas}$$

2.3 Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.3.1 Métodos de eliminación suma y resta Sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3

Una gran cantidad de problemas en negocios y economía desembocan en los denominados SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, por ejemplo; consideremos la siguiente situación:

El propietario de una tienda de televisores desea expandir su negocio comprando y poniendo a la venta dos nuevos modelos de televisores que acaban de salir al mercado. Cada televisor del primer tipo cuesta 300 dls. y cada televisor del segundo tipo 400 dls... Cada televisor del primer tipo ocupa un espacio de 4pies cuadrados, y 5 pies el segundo modelo. Si el propietario solo tiene disponibles 2 000 dls. Para su expansión y 26 pies cuadrados de espacio. ¿Cuántos modelos, de cada tipo deberán comprar y poner a la venta haciendo uso completo del capital disponible y del espacio?

SOLUCIÓN:

Suponga que el propietario compra “x” televisores del 1^{er} modelo y “y” del segundo. Entonces, le cuesta 300x (dls.) comprar el primer modelo y 400y (dls) comprar el 2^{do} tipo de televisor. Dado que la cantidad total que ha de gastar es de 2 000dls. Así que:

$$300x + 400y = 2000$$

Así mismo la cantidad de espacio ocupado por los dos tipos de televisores es de 4x pies cuadrados y “5y” pies cuadrados respectivamente. El espacio total disponible para los dos modelos es de 26 pies cuadrados.

$$\therefore 4x + 5y = 26$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$300x + 400y = 2000 \quad \text{despeje “x” de la ecuación (2)}$$

$$1) 4x + 5y = 26 \quad x = \frac{26-5y}{4}$$

$$\text{Sustituyendo “x” en la ecuación } 300\left(\frac{26-5y}{4}\right) + 400y = 2000$$

$$75(26-5y) + 400y = 2000 \quad 1950 - 375y + 400y = 2000$$

$$25y = 50 \quad y = 2$$

$$\text{Sustituye en “x” } x = \frac{26-5(2)}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad x = 4 \quad \text{Sol. (4, 2)}$$

∴ El comerciante deberá comprar 4 televisores del primer tipo y 2 del segundo si emplea todo el espacio disponible y emplea todo su capital.

Gráficamente:

Ecuación.1) $300x + 400y = 2000$

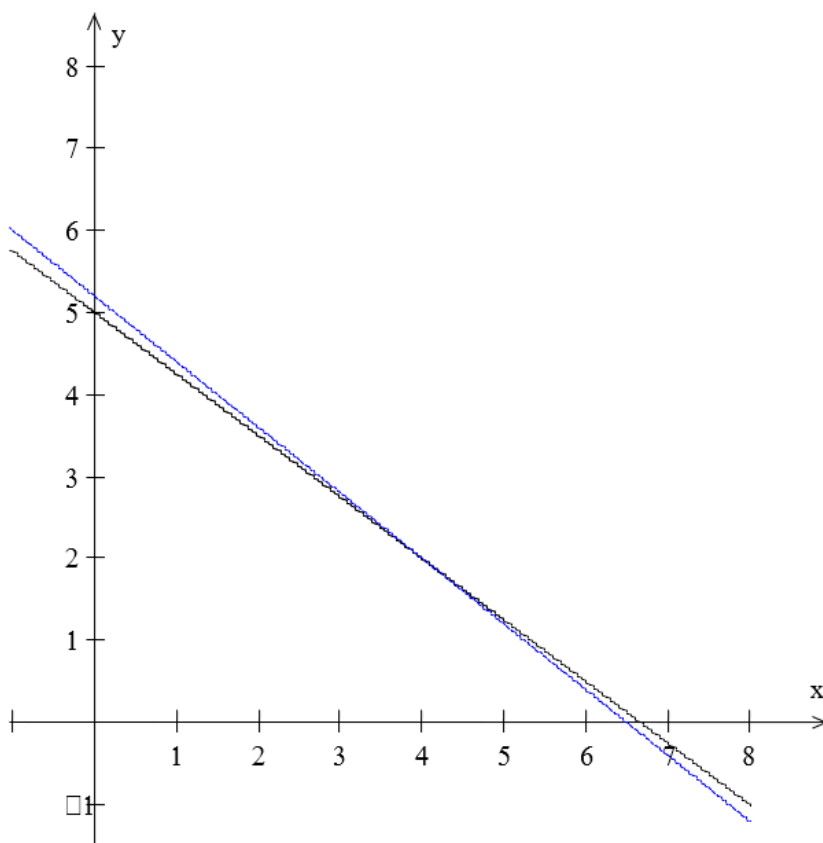
Si $x=0$ $y = \frac{2000}{400} = 5$ $y = 5$

Si $x=2$ $600+400y=2\ 000$ $y = \frac{2000-600}{400} = 3.5$

Ecuación.2) $4x+5y= 26$

Si $x=0$ $y = \frac{26}{5} = 5.2$

Si $x=3$ $12+5y= 26$ $y = \frac{26-12}{5} = 2$



Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \quad y \quad \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11$$

$$\frac{3x + 3y - 2x + 2y}{6} = 8 \quad y \quad \frac{4x + 4y + 3x - 3y}{12} = 11$$

Ecuación 1 $x+5y=48$ y $7x+y=132$ ecuación 2

$$\begin{array}{r} x+5y=48 \\ 7x+y=132 \end{array} \quad \begin{array}{r} -7x-35y=-336 \\ 7x+y=132 \\ \hline -34y=-204 \end{array} \quad -34y = -204 \quad \quad \quad \mathbf{y = 6}$$

Y de $x+5y=48$ $x=48-5(6)$ $\mathbf{x=18}$

O bien multiplicando por (-5)

$$\begin{array}{r} x + 5y = 48 \\ 7x + y = 132(-5) \end{array} \quad \begin{array}{r} x + 5y = 48 \\ -35x - 5y = -660 \\ \hline -34x = -612 \end{array} \quad \mathbf{x = 18}$$

De la ecuación 1 $x+5y=48$

Si $x=0$ $y=\frac{48}{5}$ $\mathbf{y = 9.6}$

Si $x=4$ $y=\frac{48-4}{5} = \frac{44}{5} = \mathbf{8.87}$

De la ecuación 2 $7x+y=132$

Si $x=17$ $y=132-119$ $\mathbf{y=13}$

Si $x=18$ $7(18)+y=132$ $y=132-126$ $\mathbf{y=6}$

Sol. (18, 6)

EJEMPLO:

(Decisión de adquisición). Una compañía trata de adquirir y almacenar dos tipos de artículos, x y y. cada artículo x cuesta \$3 y cada artículo y cuesta \$2.50. Cada artículo x ocupa 2 pies cuadrados de espacio del piso y cada artículo y ocupa un espacio de 1 pie cuadrado del piso. ¿Cuántas unidades de cada tipo puede adquirirse y almacenarse si se dispone de \$400 para la adquisición y 240 pies cuadrados de espacio para almacenar estos artículos?

$$3x + 2.50y = 400(2) \qquad 2x + y = 240(-3)$$

$$3x + 2.50y = 400 \qquad 2x + y = 240(-2.50)$$

$$6x + 5y = 800 \qquad -6x - 3y = -720$$

$$\begin{array}{r} \text{Resolviendo el sig. sistema} \end{array} \quad \begin{array}{r} 6x + 5y = 800 \\ -6x - 3y = -720 \\ \hline \end{array}$$

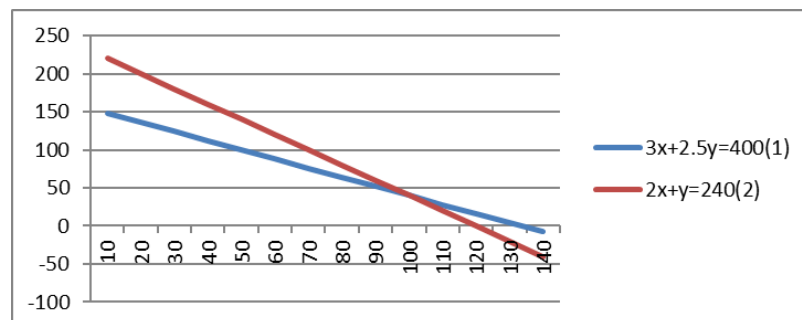
$$\begin{array}{r} 3x + 2.50y = 400(2) \\ 2x + y = 240(-3) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x + 2.50y = 400 \\ 2x + y = 240(-2.50) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 5y = 800 \\ -6x - 3y = -720 \\ \hline 2y = 80 \\ y = 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x + 2.50y = 400 \\ -5x - 2.50y = -600 \\ \hline -2x = -200 \\ x = 100 \end{array}$$

∴ solución: (100, 40)

De esta manera sabemos que podemos adquirir 100 artículos del primer tipo y 40 del segundo.

Los mismos resultados se pueden ver de manera gráfica:



Recta 1. $3x + 2.50y = 400$

Recta 2. $2x + y = 240$

EJEMPLO. (Ecuaciones de 3X3).

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para "x", "y" y "z"

$$x - y - z = 1$$

$$2x + y + 3z = 6$$

$$-4x - 2y + 3z = 6$$

De 1 despejo "x"

$$x = y + z + 1$$

Sustituyo en 2) y 3)

En 2)

$$2(y + z + 1) + y + 3z = 6$$

En 3)

$$-4(y + z + 1) - 2y + 3z = 6$$

$$\text{Simplifico: } 2y + 2z + 2 + y + 3z = 6 \quad \text{ec. 4)} \quad 3y + 5z = 4 \quad (2)$$

$$-4y - 4z - 4 - 2y + 3z = 6 \quad \text{ec. 5)} \quad -6y - z = 10$$

Multiplico por (2) la ec. 4) para eliminar las "y" de las ecs. 4) y 5) y únicamente queda;

$$10z = 8$$

$$-z = 10$$

$$\begin{array}{r} 10z = 8 \\ -z = 10 \\ \hline 9z = 18 \end{array} \quad z = 2$$

Este valor se sustituye en ec. 4) y obtenemos $y = -2$, ya conociendo "y" y "z" se sustituye en:

$$x = y + z + 1 \quad \text{y obtenemos } x = 1. \quad \text{Sol. (1, -2, 2)}$$

EJEMPLO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones para x, y, z.

$$1) \ x + y + z = 3$$

$$2) \ 2x - 3y + 4z = 1$$

$$3) \ 3x + 2y + 5z = 8$$

De 1) $x = -y - z + 3$ ec. 4)

Sustitución 4 en 2 y en 3

$$2(-y - z + 3) - 3y + 4z = 1 \quad -2y - 2z + 6 - 3y + 4z = 1$$

$$-5y + 2z = -5 \quad \text{ec. (5)}$$

Sustitución 4 en 3

Sustitución 4 en 3

$$3(-y - z + 3) + 2y + 5z = 8$$

$$-3y - 3z + 9 + 2y + 5z = 8$$

$$-y + 2z = -1 \quad \text{ec. (6)}$$

Igualo 5 y 6

Igualo 5 y 6

$$\begin{array}{rcl} -5y + 2z = -5(-1) & 5y - 2z = 5 & \\ \underline{-y + 2z = -1} & \underline{-y + 2z = -1} & \\ & 4y = 4 & \mathbf{y = 1} \end{array}$$

Si $y=1$ la sustituyo en ec.6) $-y + 2z = -1$

$$-1 + 2z = -1 \quad z = \frac{-1+1}{2} = 0 \quad \mathbf{z = 0}$$

Conociendo "y" y "z" se sustituye en ec.1).

$$x + y + z = 3 \quad x = 3 - y - z \quad x = 3 - 1 - 0 \quad \mathbf{x = 2}$$

∴ **Solución (2, 1, 0)**

EJEMPLO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + 4y - z = 6$$

$$2x + 5y - 7z = -9$$

$$3x - 2y + z = 2$$

De 1 despejo "x"

$$x = -4y + z + 6 \quad \text{ec. (4)}$$

Sust. "x" en 2 y 3

Sust. en 2

$$2(-4y + z + 6) + 5y - 7z = -9$$

$$-8y + 2z + 12 + 5y - 7z = -9$$

$$-3y - 5z = -21 \quad \text{ec. (5)}$$

Sust. 4 en 3 ó "x" en 3

$$3(-4y + z + 6) - 2y + z = 2$$

$$-12y + 3z + 18 - 2y + z = 2$$

$$-14y + 4z = -16 \quad \text{ec. (6)}$$

Igualo 5 y 6

$$-3y - 5z = -21 \quad (4) \quad \text{ec. (5)}$$

$$-14y + 4z = -16 \quad (5) \quad \text{ec. (6)}$$

$$12y - 20z = -84$$

$$-70y + 20z = -80 \quad \text{Se eliminan las } z \quad \text{y quedan:} \quad -82y = -164$$

$$y = \frac{-164}{-82} = 2 \quad y = 2$$

Sustituimos "y" en ec.5

$$-3(2) - 5z = -21 \quad -6 - 5z = -21 \quad -5z = -21 + 6 \quad z = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$z = 3$$

Conociendo "y" y "z" sustituimos en ec.. 4)

$$x = -4y + z + 6 \quad \text{ec. (4)}$$

$$x = -4(2) + 3 + 6 \quad x = 1$$

$\therefore$ la sol. es: (1,2,3)

2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas de 2x2, 3x3 solución única

El objetivo de la eliminación Gaussiana es convertir la matriz aumentada a una matriz escalonada (triangular superior) para resolver las variables mediante sustitución hacia atrás.

EJEMPLO.

Una empresa fabrica dos tipos de sillas. De escritorio (x) y de comedor (y). Para fabricar cada una de ellas se requiere de tiempos en dos departamentos (ensamble y acabado)

Ensamble: 2 horas escritorio, 1 hora comedor = 100 horas disponibles.

Acabado: 1 hora escritorio, 1 hora comedor = 80 horas disponibles.

Sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 100$$

$$x + y = 80$$

Solución.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & : & 100 \\ 1 & 1 & : & 80 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 80 \\ 2 & 1 & : & 100 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 80 \\ 0 & -1 & : & -60 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 80 \\ 0 & 1 & : & 60 \end{bmatrix}$$

$$\text{Intercambiar } R_1 \text{ y } R_2 \quad R_2 = R_2 - 2R_1 \quad R_2 = -R_2$$

Así; del renglón 2 obtenemos: $y = 60$ y sustituyendo "y" en renglón 1 obtenemos $x = 20$

Esto significa que podemos producir 20 sillas de escritorio y 60 de comedor.

Sol. (20, 60)

EJEMPLO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación Gaussiana.

$$x - y - z = 1$$

$$2x + y + 3z = 6$$

$$-4x - 2y + 3z = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -4 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = 2R_2 + R_3 \quad R_2 = \frac{R_2}{-3} \quad z = \frac{18}{9} = 2 \quad \mathbf{z = 2}$$

$$R_3 = 2R_1 - R_2 \quad R_3 = \frac{R_3}{9}$$

$$y = +\frac{5}{3}(z) = \frac{4}{3} \quad y + \frac{10}{3} = \frac{4}{3} \quad y = \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \quad y = -\frac{6}{3} \quad \mathbf{y = -2}$$

$$x - (-2) - (2) = 1 \quad x + 2 - 2 = 1 \quad \mathbf{x = 1}$$

$\therefore$ solución (1, -2, 2)

EJEMPLO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss (procedimiento simple)

$$3x + y + z = 1$$

$$x + 2y - z = 1$$

$$x + y + 2z = -17$$

Intercambio R_1 por R_2 y queda la matriz de la sig. Forma.

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & [1] & -3 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -35 \\ 0 & 0 & -1 & 88 \\ 0 & 1 & -3 & 18 \end{bmatrix} \\
 &\quad R_3 = \frac{R_3}{-1} \quad \text{ec.pivot} \quad R_2 = \frac{R_2}{-11} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -35 \\ 0 & 1 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & [1] & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad X=5 \quad Y=-6 \quad Z=-8 \\
 &\quad \text{ec.pivot} \quad \text{intercambié} \\
 &\quad \quad R_2 \text{ con } R_3
 \end{aligned}$$

Sol. (5, -6, -8)

EJEMPLO.

Resuelve el siguiente sistema por el método de Gauss (método simple)

$$2x - 5y + 3z = 4$$

$$x - 2y + z = 3$$

$$5x + y + 7z = 11$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{intercambie } R_1 \text{ con } R_2$$

ec.pivot

$$\begin{bmatrix} [1] & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & [1] & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ec.pivot}$$

$$R_2 = -(R_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & [1] & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \text{sol. } X=5 \quad Y=0 \quad Z=-2$$

$$R_3 = \frac{R_3}{13} \quad \text{ec.pivot}$$

Sol. (5, 0, -2)

EJERCICIOS.

Resolver los sig. Sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

Problema 1. Análisis de combinación de recursos

Una empresa utiliza tres tipos de recursos en un proceso productivo, representados por las variables x , y y z .

A partir del análisis de consumo y restricciones operativas, se obtuvieron las siguientes relaciones:

- La suma del recurso x , más cuatro veces el recurso y , menos el recurso z , es igual a 6.
- El doble del recurso x , más cinco veces el recurso y , menos siete veces el recurso z , es igual a -9.
- Tres veces el recurso x , menos dos veces el recurso y , más el recurso z es igual a 2

Determina la cantidad de cada recurso resolviendo el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss

$$x + 4y - z = 6$$

$$2x + 5y - 7z = -9$$

$$3x - 2y + z = 2$$

Sol. (1,2, 3)

Problema 2. Planeación de inventarios

En un almacén se manejan tres tipos de productos, cuyas cantidades se representan por x , y y z .

De acuerdo con los registros del inventario:

- La suma de los productos x y y es igual a 3.
- La suma de los productos y y z es igual a 5.
- La suma de los productos x y z es igual a 4.

Determina la cantidad de cada producto resolviendo el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss.

$$x + y = 3$$

$$y + z = 5$$

$$x + z = 4$$

Sol. (1,2, 3)

Problema 3. Distribución de actividades administrativas

Una organización distribuye su carga de trabajo semanal en tres actividades administrativas, representadas por las variables x , y y z .

El análisis de tiempos y tareas generó el siguiente modelo matemático:.

- La suma de las tres actividades es igual a 3
- El doble de la actividad x , menos tres veces la actividad y , más cuatro veces la actividad z , es igual a 1.
- Tres veces la actividad x , más dos veces la actividad y , más cinco veces la actividad z , es igual a 8.

Determina el valor asignado a cada actividad, resolviendo el sistema mediante el método de Gauss

$$x + y + z = 3$$

$$2x - 3y + 4z = 1$$

$$3x + 2y + 5z = 8$$

Sol. (2, 1,0)

EJEMPLO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por método de Gauss (proceso simple)

Una empresa industrial se encuentra evaluando la conveniencia de producir internamente o comprar a proveedores externos tres componentes clave para su proceso productivo, denominados Componente A, Componente B, Componente C.

Para apoyar la toma de decisiones, el área de costos realizó dos estudios independientes, cada uno bajo diferentes escenarios operativos, generando los siguientes modelos matemáticos.

Escenario 1. Producción interna con distintas combinaciones

En el primer escenario, se analizaron tres combinaciones de producción interna, considerando los costos asociados a cada componente. A partir del análisis financiero se obtuvieron las siguientes relaciones:

- La producción de una cantidad del componente A, cuatro del componente B y una menos del componente C, tiene un costo total equivalente a 6 unidades monetarias.
- La producción de dos unidades del componente A, cinco del componente B y siete menos del componente C, representa un costo total de -9 unidades monetarias.
- La producción de tres unidades del componente A, dos menos del componente B y una del componente C representa un costo total de 2 unidades monetarias.

Estas condiciones se modelan mediante el sistema.

$$x + 4y - z = 6$$

$$2x + 5y - 7z = -9$$

$$3x - 2y + z = 2$$

Donde:

- x representa el costo unitario del componente A
- y representa el costo unitario del componente B
- z representa el costo unitario del componente C

$$\begin{bmatrix} [1] & 4 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -7 & -9 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \\ 0 & -14 & [4] & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -82 & 0 & -164 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_3 = \frac{R_3}{4} \quad R_2 = \frac{R_2}{-82} \quad R_1 = \frac{R_1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -4 \\ 0 & [1] & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} X = 1 \\ Y = 2 \\ Z = 3 \end{matrix} \quad \text{sol.}(1,2,3)$$

Sol. (1, 2, 3)

Escenario 2. Evaluación alternativa de costos operativos

En un segundo estudio, la empresa analizó un escenario alternativo, considerando ajustes en el proceso productivo y condiciones distintas de operación. El análisis generó las siguientes relaciones entre los costos unitarios de los componentes:

- El doble del componente A, más el costo del componente B, menos tres veces el costo del componente C, es igual a -1.
- El costo del componente A, menos tres veces el costo del componente B y menos dos veces el costo del componente C, es igual a -12.
- Tres veces el costo del componente A, menos cuatro veces el costo del componente B y menos el costo del componente C, es igual a -5

Este escenario se modela mediante el sistema:

$$2x + y - 3z = -1$$

$$x - 3y - 2z = -12$$

$$3x - 4y - z = -5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -12 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} [1] & -3 & -2 & -12 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ ec pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 7 & 1 & 23 \\ 0 & 7 & [5] & 31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 28 & 0 & 84 \\ 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$R_3 = \frac{R_3}{5}$ $R_2 = \frac{R_2}{28}$ $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{31}{5} \\ 0 & [1] & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$R_1 = \frac{R_1}{5}$ sol. (1,3,2)

Sol. (1, 3, 2)

2.3.3 Aplicaciones a modelos economico-administrativos

EJEMPLO 1

Análisis de costos de producción

Una empresa fabrica tres productos A, B y C. Se sabe que:

- $1a + 2b + 1c$ cuesta \$1200
- $2a + 1b + 3c$ cuesta \$2100
- $3a + 2b + 2c$ cuesta \$2700

Determina el costo unitario de cada producto

Paso 1. Planteamiento del sistema

Sean:

- x : costo del producto A
- y : costo del producto B
- z : costo del producto C

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1200 \\ 2x + y + 2z = 2100 \\ 3x + 2y + 2z = 2700 \end{cases}$$

Paso 2. Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1200 \\ 2 & 1 & 2 & 2100 \\ 3 & 2 & 2 & 2700 \end{array} \right]$$

Paso 3. Eliminación (Gauss)

Anulamos las filas x en las filas 2 y 3

- $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$
- $F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1200 \\ 0 & -3 & 1 & -300 \\ 0 & -4 & -1 & -900 \end{array} \right]$$

Anulamos y en la fila 3

- $F_3 \rightarrow 3F_3 - 4F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1200 \\ 0 & -3 & 1 & -300 \\ 0 & 0 & -7 & -1500 \end{array} \right]$$

Paso 4. Sustitución regresiva

De la tercera ecuación:

$$-7z = -1500 \rightarrow z = 214.29$$

Segunda ecuación:

$$-3y + 214.29 = -300 \rightarrow y = 171.43$$

Primera ecuación:

$$x + 2(171.43) + 214.29 = 1200 \rightarrow x = 442.49$$

Resultado Final

- Producto A: \$442.49
- Producto B: \$171.43
- Producto C: \$214.29

EJEMPLO 2

Producción y Demanda

Una empresa manufactura produce tres artículos distintos, denominados x , y y z , los cuales se distribuyen semanalmente a diferentes centros de consumo.

Para una semana específica, el departamento de planeación estableció las siguientes restricciones de producto y demanda.

- La producción total de los 3 artículos en una semana fue de 1,200 unidades.
- La suma de la producción del artículo x , el doble del artículo y y el artículo z fue de 1,700 unidades, de acuerdo con los pedidos recibidos.
- La producción del doble del artículo x , más la del artículo y y el triple de artículo z fue de 3,100 unidades, considerando requerimientos especiales de clientes mayoristas.

Paso 1. Planteamiento del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + 2y + z = 1700 \\ 2x + y + 3z = 3100 \end{cases}$$

Paso 2. Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 1 & 2 & 1 & 1700 \\ 2 & 1 & 3 & 3100 \end{array} \right]$$

Paso 3. Eliminación

- $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$
- $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 1 & 700 \end{array} \right]$$

- $F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array} \right]$$

Paso 4. Sustitución

Resultado Final

$z = 1200, y = 500, x = 500$

Sol. (500,500, 1200)

EJEMPLO 3. Planeación de personal

Una empresa cuenta con tres áreas principales: Operaciones, Finanzas y Recursos Humanos.

- El total de empleados es 90
- Operaciones tiene el doble de empleados que finanzas
- Recursos humanos tiene 10 empleados más que finanzas

Paso 1. Planteamiento del sistema

- $x = \text{Operaciones}$
- $y = \text{Finanzas}$
- $z = \text{Recursos Humanos}$

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ x - 2y = 0 \\ y - z = 10 \end{cases}$$

Paso 2. Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

Paso 3. Eliminación

- $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 90 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix}$$

- $F_3 \rightarrow 3F_3 - F_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 90 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 120 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Sustitución

- $x = 40$

- $y = 20$

- $z = 30$

Resultado final

- Operaciones: 40 empleados
- Finanzas: 20 empleados
- Recursos Humanos: 30 empl

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios por el método de eliminación.

1)

$$x + 4y - z = 6$$

$$2x + 5y - 7z = -9$$

$$3x - 2y + z = 2$$

2)

$$x + y = 3$$

$$y + z = 5$$

$$x + z = 4$$

3)

$$x + y + z = 3$$

$$2x - 3y + 4z = 1$$

$$3x + 2y + 5z = 8$$

RESPUESTAS

1- Sol. (1,2,3)

2- Sol. (1,2,3)

3- Sol. (2, 1, 0)

1)

$$x + 4y - z = 6$$

$$2x + 5y - 7z = -9$$

$$3x - 2y + z = 2$$

2)

$$x + y = 3$$

$$y + z = 5$$

$$x + z = 4$$

3)

$$x + y + z = 3$$

$$2x - 3y + 4z = 1$$

$$3x + 2y + 5z = 8$$

RESPUESTAS

1- Sol. (1,2,3)

2- Sol. (1,2,3)

3- Sol. (2,1,0)

Ejercicios para resolver por el método de Gauss

$$\begin{array}{l} 4) \quad 2x+3y+z=1 \\ \quad 6x-2y-z=-14 \\ \quad 3x+y-z=1 \end{array} \quad \text{sol. } (-2, 3, -4)$$

$$\begin{array}{l} 5) \quad 5x-2y+z=24 \\ \quad 2x+5y-2z=-14 \\ \quad x-4y-3z=26 \end{array} \quad \text{sol. } (3, -2, 5)$$

$$\begin{array}{l} 6) \quad 4x+2y+3z=8 \\ \quad 3x+4y+2z=-1 \\ \quad 2x-y+5z=-1 \end{array} \quad \text{sol. } (5, -3, -2)$$

$$\begin{array}{l} 7) \quad 6x+3y+2z=12 \\ \quad 9x-y+4z=37 \\ \quad 10x+5y+3z=21 \end{array} \quad \text{sol. } (5, -4, -3)$$

$$\begin{array}{l} 8) \quad 2x+4y+3z=3 \\ \quad 10x-8y-9z=0 \\ \quad 4x+4y-3z=2 \end{array} \quad \text{sol. } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

Resolver los sig. Ejercicios.

9) Producir Internamente o Contratar

Una empresa del sector metalmecánico fábrica tres piezas fundamentales para su productivo, denominadas Pieza A, Pieza B y Pieza C.

Antes de decidir si continua con la producción interna o si subcontrata alguno de los procesos, el departamento de costos realiza un estudio basado en distintas combinaciones de fabricación.

Del análisis se obtuvieron las siguientes condiciones:

- Fabricar una unidad de la Pieza A, dos de la Pieza B y una de la Pieza C, dando un costo general de \$95
- Fabricar dos unidades de la Pieza A, una de la Pieza B y tres de la Pieza C genera un costo total de \$190
- Fabricar tres unidades de la Pieza A, dos de la Pieza B y dos de la pieza C genera un costo total de \$215

Si el costo unitario de cada pieza se mantiene constante:

Determinar el costo unitario de producir cada pieza, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss, y señala cual pieza sería más conveniente compara a un proveedor externo.

sol. (45, 10,30)

10) Análisis de costos para decisión de compra

Una empresa de ensamble evalúa la conveniencia de comprar o producir internamente tres componentes electrónicos: "x", "y" y "z"

Para ello, el área financiera analizó distintos escenarios de producción y obtuvo la siguiente información:

- El costo de producir dos unidades del componente "x", una del componente "y" y una del componente "z" es de \$140
- El costo de una unidad del componente "x", tres del componente "y" y dos del componente "z" es de \$185
- El costo de producir tres unidades del componente "x", dos del componente "y" y una del componente "z" es de \$175

Suponiendo costos unitarios constantes:

Determina el costo unitario resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente mediante el método de Gauss, y utiliza los resultados para apoyar la decisión administrativa de producir o comprar

sol. (32 ,1 ,75)

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

TEMA 3.

ÁLGEBRA MATRICIAL

- 3.1 Introducción a las matrices
- 3.2 Tipos especiales de matrices
- 3.3 Operaciones con matrices
- 3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2x2, 3x3 por el método de columnas aumentadas y cofactores
- 3.5 Propiedades de los determinantes
- 3.6 Solución de la inversa de una matriz
- 3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto

3.1 Introducción a las matrices

El álgebra matricial es una herramienta importante para las matemáticas aplicadas, especialmente en el ámbito administrativo. Las matrices nos permiten representar y manipular información estructurada para encontrar solución a problemas complejos. Su utilidad principal va encaminada al tratamiento de grandes volúmenes de datos y relaciones entre variables.

En el ámbito administrativo, las matrices se emplean en la optimización de procesos, la evaluación de alternativas y la toma de decisiones basadas en modelos cuantitativos; por ello, el álgebra matricial tiene una fuerte aplicación práctica en la gestión empresarial y en la mejora en la eficiencia organizacional.

Definición: Una matriz es un arreglo rectangular de números reales, encerrados en grandes paréntesis rectangulares. Normalmente denotadas con letras mayúsculas como **A**, **B**, **C**.

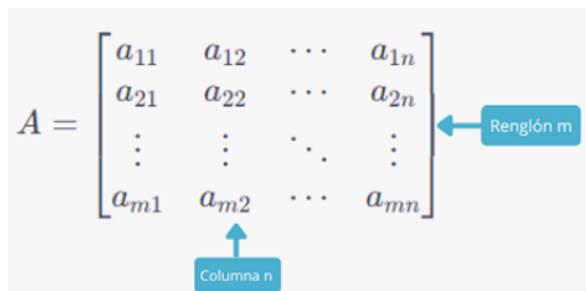
A cada número de la matriz se le llama “**elemento**” y se denota como a_{ij} , a cada uno se le identifica por su posición en el renglón (i) y la columna (j).

Atendiendo la notación de Grossman, S. I. (2012) indica que la matriz se representa de la siguiente manera:

$$A = [a_{ij}]$$

Donde a_{ij} es el elemento ubicado en el renglón i y la columna j . $i = 1, 2, 3 \dots m$
 $j = 1, 2, 3 \dots n$

Así, la matriz A desarrollada en notación matricial es:



The diagram shows a matrix A enclosed in large square brackets. Inside the brackets, the elements are arranged in four rows and four columns. The first row contains a_{11} , a_{12} , an ellipsis ($\cdots$), and a_{1n} . The second row contains a_{21} , a_{22} , an ellipsis ($\cdots$), and a_{2n} . The third row contains three vertical ellipses ($\vdots$) and a fourth vertical ellipsis ($\vdots$). The fourth row contains a_{m1} , a_{m2} , an ellipsis ($\cdots$), and a_{mn} . To the right of the matrix, a blue arrow points from a blue box labeled "Renglón m" to the fourth row. Below the matrix, a blue arrow points from a blue box labeled "Columna n" to the fourth column.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Algunos ejemplos de matrices son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = [1, 2, 3, 5, 6]$$

Los números reales que forman el arreglo se denominan entradas o elementos de la matriz. Si una matriz tiene “m” renglones y “n” columnas, se dice que su tamaño es (mxn). Así, la matriz A es de tamaño 2x3, B es una matriz 3x4, C es una matriz 4x1 y D es un vector renglón porque es de 1x5.

*Siempre se indica primero el renglón y posteriormente la columna.

3.2 Tipos especiales de Matrices.

a) Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Aplicación: Representa ponderaciones de recursos independientes. Por ejemplo, cada valor en la diagonal puede indicar el costo unitario de tres insumos distintos, sin interacción entre ellos.

b) Matriz identidad

Es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicación: En administración, simboliza la asignación directa de recursos sin transformación. Por ejemplo, un empleado asignado a un área específica sin rotación.

c) Matriz triangular (superior o inferior)

En una matriz triangular superior, todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicación: Puede modelar jerarquías administrativas, donde las decisiones fluyen de niveles superiores hacia inferiores sin retroalimentación directa.

d) Matriz simétrica

Es aquella en la que los elementos son iguales respecto a la diagonal principal: Una matriz A

Es simétrica si: $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Observa que los elementos se reflejan respecto a la diagonal Principal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{se cumple: } a_{12} = a_{21} \quad a_{13} = a_{31} \quad a_{23} = a_{32}$$

Aplicación: Representa relaciones recíprocas, como la interacción entre departamentos que comparten recursos de manera equitativa.

e) Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada Q es ortogonal si cumple que: $Q^T = Q^{-1}$ o bien; $Q^T * Q = I$

Aplicación: En administración, puede interpretarse como un modelo de rotación de personal o redistribución de funciones, manteniendo la eficiencia total del sistema.

f) Matriz de transición (estocástica)

Es una matriz cuadrada en la que cada fila representa probabilidades y la suma de sus elementos es igual a 1.

Aplicación: Se utiliza en cadenas de Markov para modelar la probabilidad de que un cliente permanezca fiel a la empresa o cambie de proveedor.

Tipos especiales de Matrices y sus aplicaciones.

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo matemático	Aplicación administrativa
Diagonal	Matriz cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	Representa costos unitarios de insumos independientes, sin interacción entre ellos.
Identidad	Matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Simboliza asignaciones directas de recursos o personal sin transformación.
Triangular	Matriz cuadrada con ceros por debajo (superior) o por encima (inferior) de la diagonal	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Modela jerarquías administrativas, donde las decisiones fluyen de niveles superiores a inferiores.
Simétrica	Matriz cuadrada en la que $a_{ij} = a_{ji}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	Representa relaciones recíprocas entre departamentos que comparten recursos equitativamente.
Ortogonal	Matriz cuadrada que cumple $Q^T * Q = I$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Modela redistribución de funciones o rotación de personal manteniendo la eficiencia total.
De transición (Estocástica)	Matriz cuadrada en la que cada fila representa probabilidades y su suma es 1.	$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$	Se usa en cadenas de Markov para proyectar fidelidad de clientes o movilidad de empleados.

3.3 Operaciones con matrices

Las operaciones con matrices son procedimientos que permiten trabajar con datos.

Organizados. Entre las principales operaciones se encuentran la suma, la resta, la multiplicación por un número (escalar), la multiplicación de matrices y otras.

Cada operación tiene reglas específicas; por ejemplo, para sumar matrices deben tener el mismo tamaño, y para multiplicarlas debemos cumplir ciertas condiciones entre filas y columnas.

Estas operaciones resultan muy útiles en áreas administrativas, pues facilitan el análisis de información, la organización de datos y el soporte para la toma de decisiones.

Propiedades de las matrices.

Las matrices poseen propiedades que permiten efectuar operaciones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones. Las más importantes son la suma y resta, la multiplicación, la transposición, la existencia de inversa (cuando aplica) y el cálculo del determinante.

1. Suma y resta de matrices.

- Solo se pueden sumar o restar matrices del mismo tamaño (igual número de filas y columnas). Se suman o restan elemento por elemento.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2. Multiplicación por un escalar

- Cada elemento de la matriz se multiplica por el número escalar.

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$$

3. Multiplicación de matrices.

- Se puede realizar si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda.

- No es conmutativa: $AB \neq BA$.
- Sí es asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

4. Matriz identidad.

- Funciona como el "1" en la multiplicación.

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

5. Transposición.

$$\text{La matriz transpuesta } (A^T)^T = A$$

6. Inversa de una matriz.

- Solo existe para matrices cuadradas y no singulares (determinante distinto de cero).

$$A \cdot A^{-1} = I$$

7. Determinante.

- Se define únicamente para matrices cuadradas (sirve para verificar si una matriz es invertible).

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Resumen de las propiedades.

Propiedad	Condiciones	Ejemplo
Suma y resta	Igual tamaño	$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Multiplicación	Columnas(A)= filas(B)	No conmutativa
Identidad	Matriz cuadrada	$A \cdot I = A$
Transposición	Siempre posible	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Inversa	Cuadrada, $\det.(A) \neq 0$	$A \cdot A^{-1} = I$
Determinante	Solo cuadradas	$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

EJEMPLOS.

Suma de matrices.

La suma de matrices puede realizarse siempre y cuando sean del mismo tamaño. Así, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 11 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 3 & 15 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 8-7 \\ 11+3 & 13+4 \\ 0+2 & 9+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 14 & 19 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

Tamaño de matrices: (3X2)

Por ejemplo, determinar la suma de A-B.

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

La multiplicación de un escalar por una matriz implica multiplicar cada

componente o elemento de la matriz por el número real dado (escalar).

Ejemplo: Multiplicar el escalar (4) por la matriz (A). Siendo $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ O sea; $4 \cdot A$.

$$= 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(-2) & 4(3) \\ 4(0) & 4(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices:

Dos matrices pueden multiplicarse solo si el número de columnas de la primera es igual al número de renglones de la segunda.

Ejemplo: Si. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ calcular AB y BA

Si observamos; tenemos dos columnas en la primera matriz y dos renglones en la segunda, por lo tanto: se cumple con la regla del producto de matrices.

$$AB = \begin{bmatrix} 1(3) + 3(5) & 1(-2) + 3(6) \\ -2(3) + 4(5) & -2(-2) + 4(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) + (-2)(-2) & 3(3) + (-2)(4) \\ 5(1) + 6(-2) & 5(3) + 6(4) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{bmatrix}$$

Si comparamos los resultados de ambos productos, podemos ver que $AB \neq BA$.

Cumpliendo con que: en la multiplicación de matrices, “**la propiedad no es conmutativa**”.

EJEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular AB y BA

$$AB = \begin{bmatrix} 2(7) + 0(2) + (-3)(-3) & 2(-1) + 0(5) + (-3)(1) & 2(4) + 0(0) + (-3)(2) & 2(7) + 0(-4) + (-3)(3) \\ 4(7) + 1(2) + 5(-3) & 4(-1) + 1(5) + 5(1) & 4(4) + 1(0) + 5(2) & 4(7) + 1(-4) + 5(3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 14 + 0 + 9 & -2 + 0 - 3 & 8 + 0 - 6 & 14 - 0 - 9 \\ 28 + 2 - 15 & -4 + 5 + 5 & 16 + 0 + 10 & 28 - 4 + 15 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{bmatrix}$$

Si intentamos resolver BA nos daremos cuenta que no se puede resolver.

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

[No se puede resolver porque el No. de columnas de la 1a. $\neq$

al No. de renglones de 2a.] Son 4 columnas en la 1ª y 2 renglones en la segunda matriz.

EJERCICIO. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ Resolver AB y BA .

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

AB no se puede realizar, ya que A tiene tres columnas y B tiene cuatro renglones.

Pero si intentamos el producto de BA , obtenemos:

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$BA = \begin{bmatrix} (-1)(1) + (-2)(0) + (3)(-3) & + (-1)(-2) + (-2)(3) + (3)(2) & + (-1)(4) + (-2)(-5) + (3)(6) \\ (5)(1) + (-7)(0) + (2)(-3) & + (5)(-2) + (-7)(3) + (2)(2) & + (5)(4) + (-7)(-5) + (2)(6) \\ (4)(1) + (-5)(0) + (8)(-3) & + (4)(-2) + (-5)(3) + (8)(2) & + (4)(4) + (-5)(-5) + (8)(6) \\ (0)(1) + (-5)(0) + (6)(-3) & + (0)(-2) + (-5)(3) + (6)(2) & + (0)(4) + (-5)(-5) + (6)(6) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 24 \\ -1 & -27 & 67 \\ -20 & -7 & 89 \\ -18 & -3 & 61 \end{bmatrix}$$

Así podemos ver que efectivamente NO siempre se puede realizar el producto de matrices y que además en las matrices no se da la propiedad conmutativa. $AB \neq BA$

Resolver las siguientes operaciones con matrices:

a) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ calcular $5 \cdot A$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $A-B=?$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A+B=?$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A \cdot B=?$

e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Respuestas: a) $5 \cdot A = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & -30 \\ -35 & 40 & 45 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 14 & -14 \\ -43 & 35 \end{bmatrix}$

3.4 Introducción a los determinantes:

Los determinantes son valores numéricos asociados a matrices cuadradas “mismo número de renglones que de columnas”. Con este concepto se puede derivar información importante y resolver problemas en áreas como administración, economía e ingeniería.

En este caso; nos enfocaremos en el área de la Administración.

El determinante de una matriz nos puede aportar información como:

- Saber si una matriz es invertible (si es diferente de cero).
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales
- Calcular áreas y volúmenes
- Analizar transformaciones lineales en espacios vectoriales.

Ejemplo:

Para una matriz 2X2 se aplica la fórmula: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

Calcular los siguientes determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 10 = 2 \quad \therefore \text{el } \det(A) = 2 \text{ como } \det(A) \neq 0, \text{ la matriz es invertible.}$$

Para las matrices de 3X3 podemos utilizar la regla de Sarrus, así:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Si ahora deseamos calcular el siguiente determinante de la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \det(B) = (1)(4)(6) + (2)(5)(1) + (3)(0)(0) - (3)(4)(1) - (2)(0)(6) - (1)(5)(0) = 24 + 10 + 0 - 12 - 0 - 0 = 22 \quad \det(B) = 22$$

Así interpretamos que el $\det(B) \neq 0 \quad \therefore$ La matriz es invertible.

Conclusión:

Si $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ la matriz es invertible (tiene solución única en sistemas).

Si $\det(A) = 0 \rightarrow$ la matriz NO es invertible (puede no tener solución o tener infinitas).

Método de columnas aumentadas.

Otro procedimiento para calcular determinantes de 3X3 consiste en aumentar renglones o columnas (Regla de Sarrus). Esto consiste en repetir las dos primeras filas debajo de la matriz (aumentar renglones) o las dos primeras columnas a la derecha de la matriz (aumentar columnas).

Ejemplo 1 (aumentando columnas).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -6 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \text{Determinante } (A) = [(0 + 70 - 12) - (126 + 0 - 16)]$$

$$= [(58) - (110)] = -52 \quad \text{Determinante } (A) = -52$$

Se toman las diagonales formadas por tres números, empezando de izquierda a derecha (hacia abajo) y luego de izquierda a derecha (hacia arriba).

Método de renglones aumentados.

Ejemplo 1

A manera de comprobación; aumentamos ahora los dos primeros renglones y resolvemos el determinante anterior.

Ahora; “solo se repiten los dos primeros renglones”.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ -7 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \text{Determinante } (A) = [(-12 + 0 + 70) - (126 + 0 - 16)]$$

$$= [(58) - (110)] = -52 \quad \text{Determinante } (A) = -52$$

Ejemplo 2. Aumentando columnas: “solo se repiten las dos primeras”.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \text{Det. } (A) = [(-126 + 0 + 40) - (+12 + 0 - 28)]$$

$$= [(-86) - (16)] = (-86 + 16) = -70$$

Aumentando renglones “solo se repiten los dos primeros”

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \text{Det. } (A) = [(-126 + 40 + 0) - (12 + 0 - 28)] = [(-86) - (-16)] =$$

$$[-86 + 16] = -70$$

Ejemplo 3.

Calcular el determinante de A.

“Aumentando columnas”

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & 9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \text{Det. } A = [(112 + 90 + 252) - (-192 - 90 + 147) = \\ [(454) - (-135)]] = [454 + 135] = 589$$

Aumentando renglones: “solo se repiten los dos primeros”.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & 9 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & -8 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{Det. } A = [(112 + 252 + 90) - 192 + 90 + 147] = \\ [(454) - (-135)] = [454 + 135] = 589$$

3.4 Determinantes por el método de cofactores

El método de cofactores se emplea para hallar el determinante de una matriz. Consiste en eliminar filas y columnas para formar submatrices, y multiplicar los elementos de la matriz original por los determinantes de dichas submatrices.

Ejemplo.

Calcular el det. (A) por cofactores, “considerar la columna 1”.

$$\begin{aligned} \text{Si } A &= \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix} \\ &= 2[(8) - (0)] - 4[(4) - (9)] + 1[(0) - (-6)] = 2(8) - 4(-5) + 1(6) \\ &= 2(8) + 20 + 6 = 16 + 20 + 6 = 42 \quad \rightarrow \text{Por columna} \end{aligned}$$

NOTA: Los signos se van alternando ya sea en columna o renglón.

Calcular el det. (A) por cofactores “considerar el renglón 1”

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + \end{bmatrix} \\ &= 2[(8) - (0)] - (-)1[(-16) - (0)] + 3[(12) - (-2)] \\ &= 2[(8) + 1(-16)] + 3[14] \\ &= 16 - 16 + 42 = 42 \quad \rightarrow \text{Por renglón} \end{aligned}$$

3.5 Propiedades de los determinantes.

1	El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales	$ A = A^t $
2	Si una matriz tiene una fila o una columna llena de ceros, su determinante da cero.	$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$
3	El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales o mltiples de cero es cero.	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 0$
4	Si se cambian dos filas o columnas entre sí, el resultado del determinante cambia de signo.	$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
5	Multiplicar todos los elementos de una fila o una columna por un número es igual a multiplicar el resultado del determinante por ese número.	$\begin{bmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
6	El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes	$[A \cdot B] = [A] \cdot [B]$
7	El determinante de la inversa de una matriz es equivalente al inverso del determinante de la matriz	$[A^{-1}] = \frac{1}{[A]}$
8	Se puede sustituir una fila de un determinante por la suma (o resta) de la misma fila más (o menos) otra fila multiplicada por un número.	$\begin{matrix} f_1 + f_2 \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
9	El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 20$
10	El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal principal.	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -4$

3.6 Solución de la inversa de una matriz.

La inversa de una matriz A (denotada A^{-1}) es una matriz cuadrada única que, al multiplicarse por la original (en cualquier orden: $A \times A^{-1}$ o $A^{-1} \times A$) produce la matriz identidad (I), similar a como un número multiplicado por su recíproco da 1.

Solo matrices cuadradas con determinante distinto de cero son invertibles.

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada. Implica calcular la matriz de cofactores, la matriz adjunta (transpuesta de la matriz de cofactores), y luego dividir la matriz adjunta por el determinante de la matriz original.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de A . $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} + & & \\ - & & \\ + & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Utilizando la columna 1.}$$

1. Calcular el determinante de la matriz A

$$\begin{aligned} & 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2[(-20) - (-2)] - 0[(15) - (4)] + 1[(6) - (16)] \\ &= 2[-18] - 0 + 1[-10] = -36 - 10 = -46 \\ &= -46 \quad \text{Det. } A = -46 \end{aligned}$$

2. Calcular matriz de cofactores

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= +[(-20) - (-2)] \\ &= +[-18] \\ c_{11} &= -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -[(0) - (2)] \\ c_{12} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= +[(0) - (-4)] \\ &= c_{13} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -[(15) - (4)] \\ c_{21} &= -11 \end{aligned}$$

$$c_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [(10) - (-4)]$$

$$c_{22} = 14$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [(6) - (16)]$$

$$c_{31} = -10$$

$$= [(-2) - (3)]$$

$$c_{23} = 5$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[(4) - (0)]$$

$$c_{32} = -4$$

$$c_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) - (0)]$$

$$c_{33} = -8$$

3. Matriz de cofactores.

$$C = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

d. Matriz Adjunta.

$$Adj.(A) = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Aplicando la definición de A^{-1} "por el método de la Adjunta" $\rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det.(A)} Adj.(A) \quad \text{Matriz inversa de A:}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para la comprobación se debe multiplicar } A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{46} & \frac{11}{46} & \frac{10}{46} \\ -\frac{2}{46} & -\frac{14}{46} & \frac{4}{46} \\ -\frac{4}{46} & -\frac{5}{46} & \frac{8}{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{36}{46} - \frac{6}{46} + \frac{16}{46}) & (\frac{22}{46} - \frac{42}{46} + \frac{20}{46}) & (\frac{20}{46} + \frac{12}{46} - \frac{32}{46}) \\ (0 + \frac{8}{46} - \frac{8}{46}) & (0 + \frac{56}{46} - \frac{10}{46}) & (0 - \frac{16}{46} + \frac{16}{46}) \\ (\frac{18}{46} + \frac{2}{46} - \frac{20}{46}) & (\frac{11}{46} + \frac{14}{46} - \frac{25}{46}) & (\frac{10}{46} - \frac{4}{46} + \frac{40}{46}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 46/46 & 0 & 0 \\ 0 & 46/46 & 0 \\ 0 & 0 & 46/46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Encontrar la A^{-1} de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Realice su comprobación.

a) Desarrolle el determinante aumentando renglones, columnas y cofactores.

NOTA: No vea el procedimiento hasta que resuelva con los diferentes métodos.

$$\begin{aligned} \text{Det.}(A) &= +1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1[(2) - (0)] - 3[(2) - (0)] + 1[(2) - (6)] \\ &= 1[2] - 3[2] + 1[-4] \\ &= 2 - 6 - 4 = -8 \quad \text{Det.}(A) = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (0)] \\ c_{11} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(3) - (1)] \\ c_{12} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [(0) - (2)] \\ c_{13} &= -2 \\ c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(1) - (3)] \\ c_{22} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -[(12) - (0)] \\ c_{13} &= -2 \\ c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [(0) - (2)] \\ c_{23} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (6)] \\ c_{31} &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -[(1) - (9)] \\ c_{32} &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (6)] \\ c_{33} &= -4 \end{aligned}$$

Matriz de cofactores.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Desarrolle el determinante aumentando renglones, columnas y

cofactores.

NOTA: No vea el procedimiento hasta que resuelva con los diferentes métodos.

$$\begin{aligned} \text{Det.}(A) &= +1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1[(2) - (0)] - 3[(2) - (0)] + 1[(2) - (6)] \\ &= 1[2] - 3[2] + 1[-4] \\ &= 2 - 6 - 4 = -8 \quad \text{Det.}(A) = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (0)] \\ c_{11} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(3) - (1)] \\ c_{12} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [(0) - (2)] \\ c_{13} &= -2 \\ c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(1) - (3)] \\ c_{22} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -[(12) - (0)] \\ c_{13} &= -2 \\ c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [(0) - (2)] \\ c_{23} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (6)] \\ c_{31} &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -[(1) - (9)] \\ c_{32} &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(2) - (6)] \\ c_{33} &= -4 \end{aligned}$$

Matriz de cofactores.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta.

$$Adj.(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{Aplicando} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det.(A)} \quad Adj.(A) \quad \rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{8} & \frac{-2}{-8} & \frac{-4}{-8} \\ \frac{-2}{-8} & \frac{-2}{-8} & \frac{8}{-8} \\ \frac{-2}{-8} & \frac{2}{-8} & \frac{-4}{-8} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Comprobación.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{8} & \frac{-2}{-8} & \frac{-4}{-8} \\ \frac{-2}{-8} & \frac{-2}{-8} & \frac{8}{-8} \\ \frac{-2}{-8} & \frac{2}{-8} & \frac{-4}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{6}{8}) & (\frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{6}{8}) & (\frac{4}{8} - \frac{16}{8} + \frac{12}{8}) \\ (-\frac{6}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8}) & (\frac{6}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8}) & (\frac{12}{8} - \frac{16}{8} + \frac{4}{8}) \\ (-\frac{2}{8} + 0 + \frac{2}{8}) & (\frac{2}{8} + 0 - \frac{2}{8}) & (\frac{4}{8} + 0 + \frac{4}{8}) \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método del álgebra lineal práctico y efectivo para resolver sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (sistemas cuadrados) y que poseen una solución única.

Utiliza determinantes para calcular el valor de cada variable.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Para aplicar la regla de Cramer, primero lo expresamos en su forma matricial, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Calculamos el determinante de la matriz: } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta = 1$$

Calculamos el valor de x :

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4}{1} = 4 \quad x = 4$$

Calculamos el valor de y :

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{5}{1} = 5 \quad y = 5$$

Sol. (4, 5)

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema utilizando la regla de Cramer.

$$\bullet \text{ Ejemplo: } \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Expresamos el sistema de ecuaciones en su forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz: Δ .

1. Resolvamos ahora aumentando columnas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [(-4) - 1 + 2] - (-2 - 4 + 1) =$$

$$= [(-3) - (-5)] = 2$$

$$\Delta = 2$$

Ahora calculamos el valor de x . A partir de: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$$\text{o bien; } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Así, para calcular Δ_x sustituimos los valores de la primera columna por la igualdad del sistema, quedando así:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces, } \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Aumentamos las dos primeras columnas.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = [(0 - 8 - 2) - (-16 + 4 + 0)]$$

$$\Delta_x = [(-10) - (-12)] = 2$$

$$\Delta_x = 2$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1 \quad \mathbf{x = 1}$$

Ahora pasamos a calcular y : pero primeramente se calcula Δ_y .
Sustituimos en la segunda columna el valor de la igualdad. Así:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta y = [(16 - 2 + 0) - (0 + 16 + 2)] = [(14) - (18)] = -4 \quad \Delta y = -4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad y = \frac{-4}{2} = -2 \quad \therefore y = -2$$

Por último pasamos a calcular el valor de z , sustituyendo primero los valores de la igualdad en la tercer columna.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(16 + 0 - 4) - (-2 - 0 + 8)] = [(12) - (6)] = 6 \quad \Delta z = 6$$

$$z = z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3$$

$$z = 3$$

$$\text{Sol}(1, -2, 3)$$

1. Comprobación

$$2x - y - 2z = -2$$

$$2(1) - (-2) - 2(3) = -2$$

$$2 + 2 - 6 = -2$$

$$-2 = -2$$

$$-x + y + z = 0$$

$$-(1) + (-2) + (3) = 0$$

$$-1 - 2 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x - 2y + z = 8$$

$$(1) - 2(-2) + (3) = 8$$

$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$8 = 8$$

3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto.

Los modelos insumo-producto son herramientas matemático-económicas que analizan las relaciones entre los distintos sectores productivos de una economía o empresa. Desarrollados por Wassily Leontief, permiten estudiar cómo la producción de un sector depende de los insumos de otros sectores.

En administración, economía e ingeniería industrial, estos modelos ayudan a:

- Planear niveles de producción
- Analizar costos
- Determinar requerimientos de materias primas
- Evaluar el impacto económico entre sectores

El modelo se fundamenta principalmente en el uso de matrices, sistemas lineales y álgebra matricial.

Conceptualmente, un modelo insumo-producto representa:

- Lo que cada sector produce
- Lo que cada sector consume de otros sectores

Su estructura matemática es: $X = (I - A)^{-1} D$

Donde:

- X = Vector de producción total
- I : matriz identidad
- A : matriz tecnológica o de coeficientes técnicos
- D : vector de demanda externa o final
- AX : Representa el consumo interno entre sectores
- $(I - A)^{-1}$ = matriz inversa del sistema económico

Ejemplo.

En una región económica existen dos sectores principales:

- Sector agrícola
- Sector ganadero

Para producir sus bienes, cada sector necesita consumir parte de la producción del otro sector y también parte de su propia producción.

Después de realizar un estudio económico, se obtuvo la siguiente información:

- *Para producir **1 unidad agrícola**, el sector agrícola consume:*
- ***0.2 unidades de productos agrícolas***
- ***0.3 unidades de productos ganaderos***

*Para producir **1 unidad ganadera**, el sector ganadero consume:*

- ***0.1 unidades agrícolas***
- ***0.2 unidades ganaderas***

Además, la demanda externa o final del mercado es:

- ***80 unidades agrícolas***
- ***60 unidades ganaderas***

Se pide determinar la producción total que debe generar cada sector para satisfacer tanto la demanda externa como el consumo interno entre sectores.

Paso 1. Formación de la matriz de coeficientes

Construimos la matriz de coeficientes de la siguiente manera:

- *Las filas → sectores que proporcionan insumos*
- *Las columnas → sectores que proporcionan esos insumos*

Acomodamos los términos: $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

Primer renglón: (0.2 0.1)

Esto indica:

- 0.2 El sector agrícola necesita 0.2 unidades agrícolas para producir una unidad agrícola.
- 0.1 El sector ganadero necesita 0.1 unidades agrícolas para producir una unidad ganadera.

Segundo renglón: (0.3 0.2)

Indica:

- 0.3: el sector agrícola necesita 0.3 unidades ganaderas para producir una unidad agrícola.
- 0.2: el sector ganadero necesita 0.2 unidades ganaderas para producir una unidad ganadera.

Paso 2. Expresamos el vector de demanda final o externa así:

$$D = (80 \ 60)$$

Esto indica:

- El mercado necesita 80 unidades agrícolas
- El mercado necesita 60 unidades ganaderas

Paso 3. Modelo matemático.

El modelo insumo-producto es: $X = AX + D$

Donde: X = producción total

AX = consumo interno

D = demanda final

Paso 4. Despeje del modelo.

Restamos AX . $\rightarrow X - AX = D$

Factorizamos: $(I - A)X = D$ finalmente: $X = (I - A)^{-1} D$

Paso 5. Como la matriz es 2×2 , la matriz identidad queda así:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 6. Calcular $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

Restamos elemento por elemento:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - 0.2 & 0 - 0.1 \\ 0 - 0.3 & 1 - 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Paso 7. Determinante.

$$\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & 0.8 \end{vmatrix} \quad D = (0.8)(0.8) - (-0.1)(-0.3)$$

$$D = 0.64 - 0.03$$

$$\mathbf{D = 0.61}$$

Con este valor de la determinante sabemos que $\neq 0$ y que por tanto sí tiene matriz inversa.

Paso 8. Calcular la inversa.

Para una matriz 2×2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Aplicando:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.61} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Paso 9. Multiplicación final

$$X = \begin{pmatrix} 1.31 & 0.16 \\ 0.49 & 1.31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Primer sector: $x_1 = 1.31 (80) + 0.16 (60) = 104.8 + 9.6 = 114.4$

Segundo sector: $x_2 = 0.49(80) + 1.31(60) = 39.2 + 78.6 = 117.8$

Resultado final. $X = \begin{pmatrix} 114.4 \\ 117.8 \end{pmatrix}$

Interpretación:

Para satisfacer la demanda del mercado y el consumo interno entre sectores, la economía debe producir aproximadamente:

- 114 unidades agrícolas
- 118 unidades ganaderas.

Esto sucede porque cada sector consume parte de la producción del otro mientras produce.

Ejemplo 2 de insumo-producto con matriz 3X3

Una región industrial está formada por tres sectores económicos:

1. Agricultura
2. Industria alimentaria
3. Transporte

Cada sector necesita consumir parte de la producción de los otros sectores para poder operar. Después de realizar un estudio económico, se obtuvo la siguiente información:

Sector Agricultura.

- 0.2 unidades agrícolas
- 0.1 unidades de alimentos
- 0.1 unidades de transporte

Sector Industria alimentaria

(Para producir 1 unidad de alimentos se requieren):

- 0.3 unidades agrícolas
- 0.2 unidades alimentarias
- 0.1 unidades de transporte

Sector Transporte.

(Para producir una unidad de transporte se requieren):

0.1 unidades agrícolas

- 0.2 unidades alimentarias
- 0.2 unidades de transporte

Demanda final del mercado

La economía necesita satisfacer:

- 150 unidades agrícolas
- 120 unidades alimentarias
- 100 unidades de transporte

Se pide: determinar la producción total requerida de cada sector utilizando el modelo insumo-producto.

Paso 1. Formación de la matriz de coeficientes.

Construimos la matriz tecnológica.

Filas > Sectores que proporcionan insumos

Columnas > Sectores que consumen dichos insumos

Interpretación de cada término:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Primer renglón. (0.2 0.3 0.1)

Significa:

- 0.2: Agricultura consume agricultura
- 0.3: Industria alimentaria consume agricultura
- 0.1: Transporte consume agricultura

Segundo renglón. (0.2 0.3 0.1)

Significa:

- 0.1: Agricultura consume alimentos.
- 0.2: Industria alimentaria consume alimentos
- 0.2: Transporte consume alimentos

Tercer renglón. (0.1 0.1 0.2)

Significa:

- 0.1: Agricultura consume transporte.
- 0.1: Industria alimentaria consume transporte
- 0.2: Transporte consume transporte

Paso 2: Vector de demanda

$$D = \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Modelo matemático.

El modelo insumo- producto es: $X = AX + D$

Paso 4: Despejar. : $X - AX = D$

Factorizar: $((I - A)X = D$ Entonces; $X = (I - A)^{-1}D$

Paso 5: Construcción de la matriz identidad. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 6: Calcular $I - A$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - 0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 - 0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 1 - 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Determinante.

$$\begin{vmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{vmatrix}$$

Desarrollando:

$$D = 0.8 \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{vmatrix} - (-0.3) \begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{vmatrix} + (-0.1) \begin{vmatrix} -0.1 & 0.8 \\ -0.1 & -0.1 \end{vmatrix}$$

Cálculo de menores:

$$\begin{aligned} &= 0.8 (0.64 - 0.02) + 0.3 (-0.08 - 0.02) - 0.1 (0.01 + 0.08) = \\ &0.8 (0.62) + 0.3 (-0.10) - 0.1(0.09) = 0.496 - 0.03 - 0.009 = \mathbf{0.457} \\ &\mathbf{D = 0.457} \end{aligned}$$

Como $D \neq 0$ la matriz tiene inversa y el sistema tiene solución única.

Paso 8: Resultado del modelo.

Después de calcular la inversa y multiplicar:

$$X = \begin{pmatrix} 265 \\ 238 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Interpretación económica completa:

Para satisfacer:

- La demanda externa
- Y el consumo interno entre sectores, la economía debe producir aproximadamente:
 - **265 unidades agrícolas**
 - **238 unidades alimentarias**
 - **190 unidades de transporte**

Interpretación sector por sector

Agricultura.

Debe producir más de 150 unidades demandadas porque:

- Parte de su producción es utilizada por alimentos y transporte.

Industria alimentaria.

Debe producir 238 unidades porque:

- Además de satisfacer al mercado,
- Abastece a agricultura y transporte.

Transporte.

Debe generar 190 unidades para:

- Cubrir movilidad productiva entre todos los sectores.

Conclusión:

La matriz de coeficientes técnicos nace del análisis de cuánto consume cada sector para producir una unidad de producto. Cada término representa una relación económica entre industrias.

Los modelos de Insumo-producto permiten:

- Analizar interdependencia económica
- Planear producción
- Optimizar recursos
- Apoyar la toma de decisiones administrativas y económicas mediante álgebra matricial.

Resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1.

Dos sectores industriales trabajan conjuntamente:

- Energía
- Manufactura

Para producir una unidad de energía:

- Se requieren 0.25 unidades energéticas
- Se requieren 0.15 unidades manufactureras.

Para producir una unidad de manufacturera:

- Se requieren 0.20 unidades energéticas
- Se requieren 0.10 unidades manufactureras.

Demanda final:

- 180 unidades de energía
- 140 manufactureras

Paso 1

Matriz tecnológica. $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.20 \\ 0.15 & 0.10 \end{pmatrix}$

Interpretación.

- 0.25 energía consume energía
- 0.20 manufactura consume energía
- 0.15 energía consume manufactura
- 0.10 manufactura consume manufactura

Paso 2. Demanda. $D = \begin{pmatrix} 180 \\ 140 \end{pmatrix}$

Paso 3. Resultado. $X = \begin{pmatrix} 305 \\ 240 \end{pmatrix}$

Interpretación.

- Energía debe producir 305 unidades
- Manufactura debe producir 240 unidades

Ejercicio 2.

Una ciudad tecnológica cuenta con tres sectores:

1. Tecnología
2. Telecomunicaciones
3. Educación

Para producir una unidad tecnológica:

- 0.15 Tecnología
- 0.10 Telecomunicaciones
- 0.05 Educación

Para producir 1 unidad de Telecomunicaciones:

- 0.20 Tecnología
- 0.25 Telecomunicaciones
- 0.10 Educación

Para producir una unidad educativa:

- 0.10 Tecnología
- 0.15 Telecomunicaciones
- 0.20 Educación

Demanda final:

- 250 Tecnológicas
- 180 Telecomunicaciones
- 160 Educativas

Paso 1 Formación de la matriz. $A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.15 \\ 0.05 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix}$

Interpretación:

Primer renglón:

- Tecnología abastece tecnología
- Tecnología abastece telecomunicaciones
- Tecnología abastece educación

Segundo renglón:

- Telecomunicaciones abastecen tecnología
- Telecomunicaciones abastecen telecomunicaciones
- Telecomunicaciones abastecen educación

Tercer renglón:

- Educación abastece tecnología
- Educación abastece Telecomunicaciones
- Educación abastece educación

Paso 2. Demanda: $D = \begin{pmatrix} 250 \\ 180 \\ 160 \end{pmatrix}$

Resultado: $X = \begin{pmatrix} 390 \\ 355 \\ 280 \end{pmatrix}$

Interpretación económica.

Para satisfacer la economía digital:

- Tecnología debe producir 390 unidades.
- Telecomunicaciones debe producir 355 unidades.
- Educación debe producir 280 unidades.

Esto demuestra la fuerte interdependencia entre Tecnología, Telecomunicaciones y educación.

TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO
INSTITUTO TECNOLOGICO DE SAN LUIS POTOSI

TEMA 4.

DIFERENCIACIÓN Y APLICACIONES

4.1 Límites y continuidad

4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas

4.3 Derivadas de n-ésimo orden

4.4 Derivadas parciales básicas

4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos).

4.6 Aplicaciones a ingresos, costos y utilidades

4.7 Análisis marginal

4.1 Límites y continuidad

Introducción.

En el estudio del cálculo aplicado a la administración, los límites y la continuidad son conceptos esenciales que permiten examinar el comportamiento de funciones relacionadas con costos, producción, utilidades, ingresos, demanda y crecimiento empresarial.

El límite analiza el valor al que se aproxima una función cuando la variable independiente se aproxima a cierto número. Esto facilita el estudio de situaciones con cambios graduales en fenómenos económicos y administrativos.

Por su parte, una función es continua cuando puede representarse gráficamente sin interrupciones, saltos o huecos. La continuidad es importante porque muchos modelos administrativos requieren procesos estables y previsibles.

Los límites y la continuidad son esenciales para:

- Comprender el cálculo diferencial
- Analizar tendencias económicas
- Estudiar crecimiento de costos y utilidades
- Modelar fenómenos administrativos

Concepto de límite.

El límite de una función representa el valor al que se aproxima la función cuando la variable se acerca a cierto punto.

Se expresa matemáticamente como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Donde:

- $x \rightarrow a$: la variable se aproxima a a .
- $f(x)$: función
- L : valor límite

NOTA: Aunque x no tome exactamente el valor de a , la función puede acercarse cada vez más a un número específico.

Límite de:	Expresión:
- Una constante	$\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- La función ideal	$\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- El producto de una función y una Constante	$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- Una suma	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- Una resta	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- Un producto	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- Un cociente	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- Una potencia	$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \text{ si } f(x) > 0$
- Un logaritmo	$\lim_{x \rightarrow c} \log f(x) = \log \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- El número e	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
- El límite del producto de las Funciones cuando x se aproxima a c , es igual a cero.	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

INDETERMINACIONES

Hay varios tipos de indeterminaciones, entre ellas las siguientes (considere ∞ como el límite que tiende a infinito y el 0 al límite cuando tiende a 0; y no al número "0")

Operaciones	Indeterminación
Sustracción	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot \infty$
División	$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$
Elevación a potencia	$1^\infty, \infty^0, 0^0$

Ejemplo.

0/0 Es una indeterminación, es decir; no es posible a priori saber cuál es el valor de un límite que tiende a cero sobre otro que también tiende a cero ya que el resultado no es siempre el mismo. Por ejemplo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2} = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0$$

Concepto de continuidad.

Una función es continua cuando:

- Existe la función en ese punto.
- Existe el límite.
- El límite y la función tienen el mismo valor.

Condición de continuidad.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Importancia en la administración:

- Estudiar costos marginales
- Analizar crecimiento de empresas
- Evaluar tendencias de mercado
- Modelar comportamiento financiero
- Predecir variaciones económicas.

EJEMPLOS.

Ejercicio 1. Límite directo.

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$

Procedimiento:

Sustituimos directamente $x = 2$

$$3(2) + 1 = 7 \quad \text{Resultado} = 7$$

Ejercicio 2. Límite con polinomios.

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 1)$

Procedimiento: sustituimos: $(3)^2 + 2(3) - 1 = 14$

$$\text{Resultado} = 14$$

Ejercicio 3. Límite indeterminado.

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Procedimiento:

Paso 1. Sustituimos: $\frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ existe indeterminación

Paso 2. Factorizar: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ entonces: $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$
simplificamos: $= (x + 2) = 2 + 2 = 4$ Resultado: $= 4$

Ejercicio 4. Continuidad

Determinar si la función $f(x) = 2x + 5$ es continua en $x = 1$

Paso 1. Evaluar la función: $f(1) = 2(1) + 5 = 7$

Paso 2. Evaluar el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$

Conclusión: como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ La función es continua.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN PRÁCTICA.

Problema 1. Costo de producción.

El costo de fabricar cierto producto está dado por: $C(x) = 5x + 200$

Donde:

- x : número de productos fabricados
- $C(x)$: Costo total

Determinar el costo cuando la producción se aproxima a 50 unidades.

Modelo matemático: $\lim_{x \rightarrow 50} (5x + 200)$

Procedimiento: $5(50) + 200 = 250 + 200 = 450$

Resultado: 450

Interpretación: Cuando la empresa produce cerca de 50 unidades, el costo total se aproxima a \$ 450.

Problema 2. Ingreso empresarial

El ingreso de una empresa está representado por: $I(x) = 10x^2 + 5$

Donde: x = cientos de productos vendidos

Determinar el ingreso cuando las ventas se aproximan a 4.

Modelo.

$\lim_{x \rightarrow 4} (10x^2 + 5)$

Procedimiento:

$10(4)^2 + 5 = 10(16) + 5 = 160 + 5 = 165$

Resultado: 165

Interpretación: Cuando las ventas se acercan a 400 productos, el ingreso se aproxima a \$165

Problema 3. Demanda de mercado.

La demanda de un producto se modela mediante: $D(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Determinar el comportamiento de la demanda cuando x se aproxima a 3.

Modelo.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Procedimiento.

Factorizamos: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

Simplificamos. $x + 3$ y sustituimos $3 + 3 = 6$

Resultado: 6

Interpretación: Cuando el mercado se aproxima al nivel crítico de 3 unidades de análisis, la demanda tiende a estabilizarse en 6 unidades.

Ejercicios para resolver. (Con solución).

1. Continuidad de funciones.

Determinar si la función: $f(x) = x^3 - 2x + 1$ es continua en $x = 2$

Paso 1. Evaluar la función. $f(2) = (2)^3 - 2(2) + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$

Paso 2. Evaluar el límite. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)$

Sustituyendo. $8 - 4 + 1 = 5$

Paso 3. Comparar. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Conclusión. La función es continua en $x = 2$

Interpretación: La función presenta un comportamiento estable y sin interrupciones cerca de $x = 2$

2. La utilidad de una empresa está dada por: $U(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

Donde: $x = \text{número de productos vendidos}$

Calcule el comportamiento de la utilidad cuando las ventas se aproximan a 6 unidades.

Modelo. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

Paso 1. Factorizar. $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$

Paso 2. Simplificar. $\frac{(x-6)(x+6)}{(x-6)} = x + 6$

Paso 3. Sustituir. $6 + 6 = 12$ **Resultado = 12**

Interpretación: Cuando las ventas se acercan a 6 unidades, la utilidad empresarial tiende a \$12.

EJEMPLOS DE LÍMITES BÁSICOS (con procedimiento)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} x = -4$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

Límite de un polinomio:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3$$

$$= 4 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right) + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4(2^2) + 3 = 19$$

Límite de una función racional:

Encontrar el $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$

Límite de una función completa:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4$
b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{0^2 + 4} = 2$
d) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 10) = 2(3)^2 - 10 = 18 - 10 = 8$
e) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{2(3)^2 - 10} = \sqrt[3]{18 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2$

Encuentra el límite:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x+1)}}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}((3x+1))} = \frac{x+5}{3x+1} = \frac{2+5}{3(2)+1} = \frac{7}{7} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4x^2 - 2x + 1)}{x(3x + 2)} = \frac{4(0)^2 - 2(0) + 1}{3(0) + 2} = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+3)} = \frac{(1)^2 + 1 + 1}{1(1+3)}$
 $= \frac{3}{4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3x + 9 = [(3)^2 + 3(3) + 9] = 9 + 9 + 9 = 27$
 $= (-3)^2 + 3(-3) + 9 = 9 - 9 + 9 = 9$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{2(x-3)}{(x+5)} = \frac{2(-1)}{7} = -\frac{2}{7}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)} = x^2 - x + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1) = 1+1 = 2$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)} = x - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 7 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 7 = 3^2 + 7(3) - 5 = 9 + 21 - 5 = 25$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{(2)^3 + 2(2) + 3}{(2)^2 + 5}} = \sqrt{\frac{8 + 4 + 3}{4 + 5}} = \sqrt{\frac{15}{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3x + 9 = (3)^2 + 3(3) + 9 = 9 + 9 + 9 = 27$$

$$n) \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 5}{2t^3 + 6} = \frac{(2)^2 - 5}{2(2)^3 + 6} = \frac{4 - 5}{16 + 6} = \frac{-1}{22}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{x^3 - 3x + 4} = \frac{2(-1) + 1}{(-1)^2 - 3(-1) + 4} = \frac{-2 + 1}{1 + 3 + 4} = \frac{-1}{8}$$

$$p) \lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3}{y + 2} = \lim_{y \rightarrow -2} \frac{(y+2)(y^2 - 2y + 4)}{(y+2)} = \lim_{y \rightarrow -2} y^2 - 2y + 4 = (-2)^2 - 2(-2) + 4$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12$$

$$q) \lim_{t \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} = \frac{(-3)^2 + 5(-3) + 6}{(-3)^2 - (-3) - 12} = \frac{9 - 15 + 6}{9 + 3 - 12}$$

$$r) \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8y + 1}{y + 3}} = \sqrt{\frac{8(1) + 1}{1 + 3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(3)^3 - 27}{3 - 3} = \frac{27 - 27}{3 - 3} = \frac{0}{0} = \infty \quad \text{Dividimos o factorizamos:}$$

Sustituimos el cociente de la división: $x^2 + 3x + 9 = [3^2 + 3(3) + 9]$

$$= 9 + 9 + 9 = 27$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^2 - 5x + 6)}{x^2 + 3x - 10} = \frac{2(2^2 - 5(2) + 6)}{2^2 + 3(2) - 10} = \frac{2(4 - 10 + 6)}{4 + 6 - 10} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{2(x-3)}{x+5} = \frac{2(2-3)}{2+5} = -\frac{2}{7}$$

4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas

Las derivadas algebraicas constituyen una de las herramientas más importantes del cálculo diferencial, pues permiten conocer la rapidez con la que cambia una variable respecto a otra. En administración, especialmente en finanzas, las derivadas se usan para analizar costos, ingresos, utilidades, demanda y producción, facilitando la toma de decisiones y la optimización de recursos.

En este tema existen numerosas fórmulas de derivación; no obstante, emplearemos las 10 primeras “más importantes”.

Cada fórmula de derivación tiene una fórmula correspondiente para la diferencial, la cual se obtiene multiplicando ambos lados de la expresión de la derivada por dx . Las diferenciales representan pequeños cambios en las variables y son ampliamente utilizadas en aproximaciones, análisis marginal y modelación matemática.

Si una función está definida por:

$$y = f(x)$$

Su derivada se representa como:

$$\frac{dy}{dx}$$

y la diferencial correspondiente se obtiene mediante:

$$dy = f'(x)dx$$

En las fórmulas que se estudiarán en este tema:

- u y v representan funciones de la variable x .
- k representa una constante
- e representa la constante matemática conocida como número de Euler cuyo valor aproximado es: 2.71828

Las fórmulas serán válidas siempre que existan las derivadas de las funciones involucradas.

10 FÓRMULAS MÁS ÚTILES EN LA ADMINISTRACIÓN.

1	Si $y = k$	$\frac{d}{dx}(k)=0$	Derivada de una constante
2	Si $y = x$	$\frac{d}{dx}(x)=1$	Derivada de la variable
3	Si $y = x^n$	$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$	Regla de la potencia
4	Si $y = ku$	$\frac{d}{dx}(ku) = k \frac{du}{dx}$	Derivada de una constante por una función
5	Si $y = u + v$	$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	Regla de la suma
6	Si $y = u - v$	$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$	Regla de la resta
7	Si $y = uv$	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	Regla del producto
8	Si $y = \frac{u}{v}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{d(u)}{dx} - u \frac{d(v)}{dx}}{v^2}$	Regla del cociente
9	Si $y = e^x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	Derivada de la función exponencial
10	Si $y = \ln(x)$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	Derivada del logaritmo natural

Ejercicios resueltos.

$$1) \frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(10x^2 + 9x + 4) &= \frac{d}{dx}10x^2 + \frac{d}{dx}9x - \frac{d}{dx}4 \\ &= 2(10)x + 9 - 0 = 20x + 9 \end{aligned}$$

$$2) \frac{d}{ds}(15 - s + 4s^2 - 5s^4) = 0 - 1 + 8s - 20s^3 = -1 + 8s - 20s^3$$

$$3) \frac{d}{dx}(x^3 - 7)(2x^2 + 3)$$

$$\begin{aligned} &= (x^3 - 7) \frac{d}{dx}(2x^2 + 3) + (2x^2 + 3) \frac{d}{dx}(x^3 - 7) \\ &= (x^3 - 7)(4x) + (2x^2 + 3)(3x^2) \\ &= 4x^4 - 28x + 6x^4 + 9x^2 = 10x^4 + 9x^2 - 28x \end{aligned}$$

$$4) \frac{d}{dx}(x^2)(3x^4 - 7x + 2) = x^2 \frac{d}{dx}(3x^4 - 7x + 2) + (3x^4 - 7x + 2) \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\begin{aligned} &= x^2(12x^3 - 7) + (3x^4 - 7x + 2)(2x) = 12x^5 - 7x^2 + 6x^5 - 14x^2 + 4x \\ &= 18x^5 - 21x^2 + 4x = 18x^5 - 21x^2 + 4x \end{aligned}$$

Aplicación de la fórmula de $\frac{u}{v}$

$$\begin{aligned} 5) \frac{d}{dx} \left(\frac{4x-5}{3x+2} \right) &= \frac{(3x+2) \frac{d}{dx} (4x-5) - (4x-5) \frac{d}{dx} (3x+2)}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{(3x+2)(4) - (4x-5)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{12x+8-12x+15}{(3x+2)^2} = \frac{23}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

Formula: $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = v \frac{d}{dx} (u) - u \frac{d}{dx} (v), v \neq 0$

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \frac{3-2x}{3+2x} \quad \text{Sol} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

$$y = \frac{3x+2}{3x+3} \quad \text{Sol} = \frac{5}{(2x+3)^2}$$

$$y = \frac{x^2+2}{3-x^2} \quad \text{Sol} = \frac{10x}{(3-x^2)^2}$$

EJEMPLOS: “Aplicación de la regla de la constante”

$$\text{a) } y = 7 \quad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{c) } s(t) = -3 \quad s'(t) = 0$$

$$\text{b) } f(x) = 0 \quad f'(x) = 0 \qquad \text{d) } y = k\pi^2, \quad k = \text{cte} \quad y' = 0$$

EJEMPLOS: “Aplicación de la regla de las potencias”

$$\text{a) } f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$$

$$\text{b) } g(x) = \sqrt[3]{x} \qquad g(x) = x^{1/3} \qquad g'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2} \qquad y = x^{-2} \qquad y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

EJEMPLOS: “Aplicación de la regla del múltiplo constante”

$$\text{a) } y = \frac{2}{x} \quad y = 2x^{-1} \quad y' = -1(2)x^{-2} = -2x^{-2} \quad y' = -\frac{2}{x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{4t^2}{5} \quad \frac{4}{5} \frac{d}{dt} (t^2) = \frac{4}{5} (2t) \quad y' = \frac{8}{5} t$$

$$\text{c) } y = 2\sqrt{x} \quad y = 2x^{\frac{1}{2}} \quad y' = \frac{1}{2} (2)x^{\frac{1}{2}-1} \qquad y' = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4.3 Derivadas de n-ésimo orden

Las derivadas de n-ésimo orden se obtienen al derivar repetidamente una función varias veces. Mientras que la primera derivada mide la tasa de cambio de una función, las derivadas de orden superior permiten analizar fenómenos como la aceleración, la concavidad y el comportamiento global de la función.

Si una función $f(x)$ se deriva una vez, se obtiene la primera derivada $f'(x)$. Al derivar nuevamente la primera derivada, se obtiene la segunda derivada $f''(x)$. Este proceso puede continuar tantas veces como sea posible hasta obtener la derivada de orden n .

La interpretación administrativa más común es la siguiente:

$f'(x)$	<i>primera derivada</i>	<i>tasa de cambio o crecimiento</i>
$f''(x)$	<i>segunda derivada</i>	<i>aceleración o desaceleración del crecimiento</i>
$f'''(x)$	<i>tercera derivada</i>	<i>cambio en la aceleración</i>
$f^n(x)$	<i>derivadas de orden superior</i>	<i>Estudia tendencias mas complejas en costos, ingresos, producción o ventas</i>

Ejemplos de derivadas de orden superior.

1) Si $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{IV}(x) = 24$$

2) Calcular la primera derivada de la función.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$$

Por ser un polinomio derivamos término a término

$$f'(x) = 2(3)x^2 - 15(2)x + 36 = 6x^2 - 30x + 36$$

3) Calcular la quinta derivada de la función: $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x - 5$

Por ser un polinomio derivamos término a término: $f'(x) = 3(4)x^3 + 5(2)x + 2$

$$f'(x) = 12x^3 + 10x + 2$$

$$f''(x) = 12(3)x^2 + 10$$

$$f''(x) = 36x^2 + 10$$

$$f'''(x) = 36(2)x = 72x$$

$$f^{IV}(x) = 72$$

$$f^V(x) = 0$$

4) Calcular la segunda derivada de: $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x-1) - (2x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} = f'(x) = \frac{(x+1)(2) - (2x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} = 3(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(3)(x+1)^{-3} \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$f''(x) = -6(x+1)^{-3}$$

Ejemplos prácticos.

1) Ejemplo de costos de producción de una fábrica de envases.

Una empresa que fabrica envases plásticos observó que sus costos de producción no aumentan de forma constante. El departamento de costos detectó que:

Al incrementar la producción, aparecen economías de escala.

- Cuando la producción es demasiado alta, los costos vuelven a crecer aceleradamente.
- Los costos fijos anuales son de 1000 dls.

Después de analizar los datos históricos, se propone el siguiente modelo:

$$C(x) = 2x^4 - 16x^3 + 48x^2 + 1000$$

Donde:

$C(x)$ Costo total Miles de dolares)

x = cientos de envases producidos

Determinar las primeras cuatro derivadas e interpretar administrativamente los resultados.

Diseño de la función.

Se parte de un modelo general: $C(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$

Como los costos crecen rápidamente a niveles altos de producción, se elige: $a = 2$

Para representar economías de escala: $b = -16$

Para mantener costos positivos: $c = 48$

Y el costo fijo: $d = 1000$

Por lo tanto: $C(x) = 2x^4 - 16x^3 + 48x^2 + 1000$

Derivadas.

$$C'(x) = 8x^3 - 48x^2 + 96x$$

$$C''(x) = 24x^2 - 96x + 96$$

$$C'''(x) = 48x - 96$$

$$C^{IV}(x) = 48$$

Interpretación administrativa.

- $C'(x) \rightarrow$ costo marginal
- $C''(x) \rightarrow$ velocidad de cambio del costo marginal
- $C'''(x) \rightarrow$ aceleración del crecimiento de costos
- $C^{IV}(x) \rightarrow$ Comportamiento estructural del modelo

2) Problema de rendimiento de una inversión financiera.

Una empresa invierte capital en un proyecto tecnológico; tras analizar el comportamiento histórico de inversiones similares, los analistas proponen que el rendimiento acumulado (en miles de dólares) durante los primeros años puede modelarse así:

Se observó que:

- La inversión inicial genera un rendimiento base de 1000 dlls.
- Cada año aporta un crecimiento lineal de 80 000 dlls.
- El proyecto genera beneficios adicionales que aumentan de forma cuadrática en razón de $12t^2$
- Debido al efecto de expansión del mercado, existe un crecimiento acelerado representado por t^4 .

Si t representa los años transcurridos desde el inicio de la inversión, determine todas las derivadas posibles e interprete sus resultados.

¿Cómo se forma la función?

Paso 1. Rendimiento inicial

La empresa ya tiene una ganancia base de: 1000 dlls.

Paso 2. Crecimiento lineal

Cada año se agregan 80 000 dlls. $\rightarrow 80t$

Paso 3 Crecimiento cuadrático

Los beneficios aumentan más rápido con el tiempo. $\rightarrow 12t^2$

Paso 4 Crecimiento acelerado

La expansión del mercado provoca un crecimiento de orden superior. $\rightarrow t^4$

Paso 5 Integrar todos los componentes.

La función queda: $R'(t) = 1000 + 80t + 12t^2 + t^4$

Derivadas:

Primera derivada $R'(t) = 80 + 24t + 4t^3$

Representa la tasa del crecimiento del rendimiento

Segunda derivada. $R''(t) = 24 + 12t^2$

Tercera derivada $R'''(t) = 24t$

Cuarta derivada $R^{IV}t = 24$

Interpretación administrativa.

- La empresa obtiene rendimientos cada vez mayores
- La velocidad de crecimiento aumenta con el tiempo
- La aceleración del rendimiento también crece
- La cuarta derivada constante indica que la estructura de crecimiento también es estable y mantiene una tendencia positiva.

Regla práctica para construir funciones en Administración.

Normalmente se forman sumando componentes:

$f(x) = \text{Valor inicial} + \text{Crecimiento lineal} + \text{Crecimiento cuadrático} + \text{Crecimiento cúbico} + \dots$

Por ejemplo: $U(x) = 5000 + 300x + 20x^2 - x^3$

Donde: 5000 = utilidad inicial

300x = utilidad generada por ventas

20x² = efecto de economías de escala

-x³ = Ineficiencias por sobreproducción

Así se justifican matemáticamente las funciones dentro de los problemas administrativos.

3) Ventas de una tienda departamental.

Una tienda departamental estudia el comportamiento de sus ventas durante los primeros meses de operación.

- La tienda inicia con ventas de \$ 500 000
- Cada mes las ventas aumentan \$120 000
- Las campañas publicitarias generan un crecimiento adicional de $15t^2$
- La saturación del mercado provoca una disminución representada por $-2t^3$

Construya la función de ventas y obtenga la tercera derivada.

Formación de la función.

- Ventas iniciales 500
- Incremento mensual constante $120t$
- Efecto de publicidad $15t^2$
- Saturación del mercado $-2t^3$
- Función completa $V(t) = 500 + 120t + 15t^2 - 2t^3$

Derivadas. $V'(t) = 120 + 30t - 6t^2$

$$V''(t) = 30 - 12t$$

$$V'''(t) = -12$$

Interpretación.

La aceleración de las ventas disminuye constantemente debido a la saturación del mercado.

Ejercicio para el alumno:

Expansión de una empresa.

Una empresa nacional estima su crecimiento mediante:

- *Expansión principal* t^7
- *Nuevas sucursales* $3t^5$
- *Gastos iniciales* $-10t^2$

Obtenga la séptima derivada.

Función. $E(t) = t^7 + 3t^5 - 10t^2$

Resultado: $E^{(7)}t = 5040$

Interpretación: La expresión presenta una tendencia positiva

4.4 Derivadas parciales básicas

Las derivadas parciales extienden el concepto de derivada ordinaria a funciones de dos o más variables independientes.

Mientras que la derivada ordinaria analiza el cambio de una variable respecto a otra, las derivadas parciales estudian el efecto de variar una sola variable manteniendo las demás constantes.

En administración, economía y finanzas es habitual encontrar resultados dependientes de varios factores simultáneamente. Por ejemplo, la utilidad puede depender de la producción y del gasto en publicidad. En esos casos, las derivadas parciales permiten medir el efecto aislado de cada factor sobre el resultado.

EJEMPLOS DE DERIVADAS PARCIALES.

Hallar las derivadas parciales de:

$$1) f(x, y) = 3x^2 + 2y^4$$

$$\text{Sol: } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 6x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 8y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 24y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 0$$

$$2) f(x, y) = 3x^2 + 4x + 2y^3 + 1$$

$$\text{Sol: } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 6x + 4 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 0$$

$$3) f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5y + 6$$

$$\text{SOL: } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 4y + 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 0$$

$$4) f(x, y) = xy$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 1$$

$$5) f(x, y) = 2x + 3y$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 0$$

$$6) f(x, y) = x^3 y^2 + 1$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 3x^2 y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 2x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 2x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 6x^2 y$$

$$7) f(x, y) = 5x^2 y^6 + x^3 + 3y^2 + 2$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 10xy^6 + 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 30x^2 y^5 + 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 10y^6 + 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 150x^2 y^4 + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 60xy^5$$

$$8) f(x, y) = 420x^2 - 80x + 150y^2 - 75y + xy$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 840x - 80 + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 300y - 75 + x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 840 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 300$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 1$$

$$9) f(x, y) = 420x^2 - 80x + 150y^2 - 75 + xy$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 840x - 80 + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 300y - 75 + x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 840 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 300$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 1$$

$$10) f(x, y) = 100x^2 - 10x + 400y^2 - 40y + 300xy$$

$$\text{SOL. } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 200x - 10 + 300y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = 800y - 40 + 300x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = 200 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = 800$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = 300$$

Ejemplo. Supongamos que la utilidad de una empresa está dada por:

$$U(x, y) = 100 + 5x + 3y$$

Donde:

- x = número de productos vendidos
- y = inversión en publicidad
- U = utilidad obtenida

La derivada parcial respecto a x es: $\frac{\partial U}{\partial x} = 5$

Esto significa que, manteniendo constante la inversión en publicidad, la utilidad aumenta 5 unidades por cada producto adicional vendido.

La derivada parcial respecto a y es: $\frac{\partial U}{\partial y} = 3$

Esto significa que manteniendo constante el número de productos vendidos, la utilidad aumenta 3 unidades por cada unidad adicional invertida en publicidad.

¿Cómo se calculan?

Para derivar parcialmente respecto a una variable:

1. Se deriva normalmente con respecto a esa variable
2. Las demás variables se consideran constantes

Ejemplo: $f(x, y) = 3x^2y + 2xy^3$

Derivada parcial respecto a x : $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 2y^3$

Derivada parcial respecto a y : $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6xy^2$

Aplicación en Administración.

Las derivadas parciales permiten responder preguntas como:

- ¿Cómo cambia la utilidad si aumenta la producción?
- ¿Cómo afecta la publicidad a las ventas?
- ¿Cuál es el efecto de incrementar el precio de un producto?
- ¿Cómo cambia el costo total cuando aumenta la mano de obra o la materia prima?

Problemas de aplicación práctica.

Beneficio de una Inversión.

Una empresa invierte en:

– x : capacitación del personal

– y : Tecnología

El beneficio esperado se modela por: $B(x, y) = 40x + 60y + 2x^2 + 3y^2$

Se forma la función:

Beneficio por capacitación: $40x$

Beneficio por tecnología: $60y$

Beneficio adicional por capacitación. $2x^2$

Beneficio adicional por tecnología: $3y^2$

Se deriva parcialmente:

Respecto a x . $\frac{\partial B}{\partial x} = 40 + 4x$

Respecto a y . $\frac{\partial B}{\partial y} = 60 + 6y$

Interpretación:

- La capacitación genera beneficios crecientes
- La tecnología también genera beneficios crecientes
- Las derivadas parciales permiten conocer el beneficio marginal de cada inversión.

✚ NOTA: Cuando se construye una función para derivadas parciales en Administración:

$$f(x,y) = \text{Aporte de } x + \text{Aporte de } y + \text{Interacción entre } x \text{ e } y.$$

$$\text{Por ejemplo: } U(x,y) = 50x + 30y + 4xy$$

Donde:

$$50x = \text{utilidad generada por ventas}$$

$$30y = \text{utilidad generada por publicidad}$$

$$4xy = \text{efecto combinado de ventas y publicidad}$$

Después de derivar parcialmente:

- Respecto a x se considera y constante
- Respecto a y , se considera x constante.

Esta es la metodología que normalmente se utiliza en problemas administrativos y económicos de derivadas parciales.

Beneficio de una inversión.

Ingresos de una cafetería.

Una cafetería desea estimar sus ingresos mensuales considerando dos factores:

- x : cientos de clientes atendidos al mes
- y : miles de pesos invertidos en publicidad

Los administradores determinan que:

- Cada centenar de clientes genera ingresos por \$80 000
- Cada mil pesos invertidos en publicidad aporta ingresos por \$50 000
- La combinación de clientes y publicidad genera un efecto adicional de $4xy$.

Construya la función de ingresos $I(x, y)$, calcule las derivadas parciales e interprete los resultados.

Formación de la función:

Ingresos por clientes: $80x$

Ingresos por publicidad $50y$

Efecto combinado: $4xy$

Función de ingresos $I(x, y) = 80x + 50y + 4xy$

Derivamos parcialmente:

Respecto a x $\frac{\partial I}{\partial x} = 80 + 4y$

Respecto a y $\frac{\partial I}{\partial y} = 50 + 4x$

Interpretación:

$\frac{\partial I}{\partial x}$ = Indica cuánto aumentan los ingresos cuando se incrementa el número de clientes, manteniendo fija la publicidad.

$\frac{\partial I}{\partial y}$ = Muestra cuánto aumentan los ingresos al incrementar la publicidad, manteniendo constante el número de clientes.

Por ejemplo, si $y = 10$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 80 + 4(10) = 120$$

Cada centenar adicional de clientes incrementa los ingresos en aproximadamente \$120 000

Ejercicios de Tarea: ejercicio 3 y 4

3. Ingresos de una fábrica de muebles

Los ingresos mensuales de una fábrica dependen de:

x : cientos de muebles vendidos.

y : miles de pesos invertidos en promoción.

La Gerencia determina:

- Ingresos por ventas: \$200,000, por cada centenar de muebles.
- Ingresos derivados de promoción: \$90,000 por cada mil pesos invertidos.
- Sinergia entre ventas y promoción: $5xy$

Construya la función de ingresos.

Formulando la función:

Ingreso por ventas: $200x$

Ingreso por promoción: $90y$

Sinergia: $5xy$

Función: $I(x, y) = 200x + 90y + 5xy$

Derivamos parcialmente:

Respecto a x $\frac{\partial I}{\partial x} = 200 + 5y$

Respecto a y $\frac{\partial I}{\partial y} = 90 + 5x$

Interpretación

La derivada parcial respecto a x representa el ingreso marginal por ventas.
Si la promoción es de $y = 8$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 200 + 40 = 240$$

Cada centenar de muebles vendidos aumenta los ingresos

aproximadamente en \$240,000.

4. Ingresos de un gimnasio

Un gimnasio desea modelar sus ingresos considerando:

- x : decenas de socios inscritos.
- y : miles de pesos invertidos en campañas de marketing

Los estudios indican:

- Cada decena de socios aporta \$150,000.
- Cada mil pesos en marketing aporta \$40,000.
- Existe una interacción positiva de $3xy$.

Determine la función de ingresos y sus derivadas parciales.

Formulando la función

Ingreso por socios: $150x$

Ingreso por marketing $40y$

Interacción entre ambos factores $3xy$

Función $I(x, y) = 150x + 40y + 3xy$

Derivamos parcialmente

Respecto a x $\frac{\partial I}{\partial x} = 150 + 3y$

Respecto a y $\frac{\partial I}{\partial y} = 40 + 3x$

Interpretación

Si el gimnasio invierte $y = 20,000$ de pesos en marketing

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 150 + 3(20) = 210$$

Cada decena adicional de socios genera aproximadamente \$210,000 de ingresos.

Asimismo, si tiene $x = 30$ decenas de socios:

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 40 + 3(30) = 130$$

Cada mil pesos adicionales invertidos en marketing genera

aproximadamente \$130,000 de ingresos.

4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos). "Enfoque a la administración"

Los máximos y mínimos son aplicaciones del cálculo diferencial que permiten encontrar los valores óptimos de una función. En administración, se utilizan para tomar mejores decisiones relacionadas con las utilidades, los costos, las ventas, la producción y las inversiones.

Un máximo representa el mayor valor que una variable puede alcanzar, como la utilidad o las ventas. Un mínimo representa el menor valor posible, como los costos o los gastos de operación.

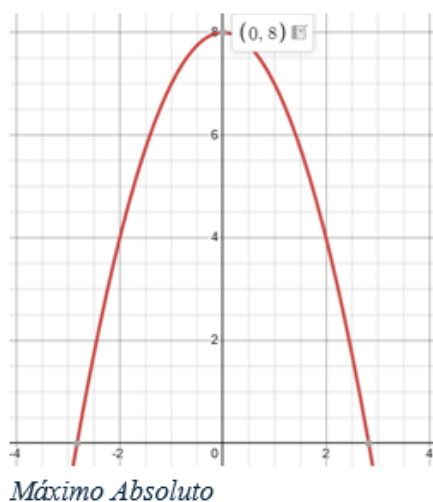
Mediante el uso de las derivadas, las empresas pueden determinar las condiciones más favorables para alcanzar sus objetivos, optimizando recursos y mejorando su desempeño. Por ello, el estudio de máximos y mínimos es una herramienta fundamental para la planeación y la toma de decisiones administrativas.

Los máximos y mínimos de una función f son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) de ésta, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo el dominio (extremos absolutos).

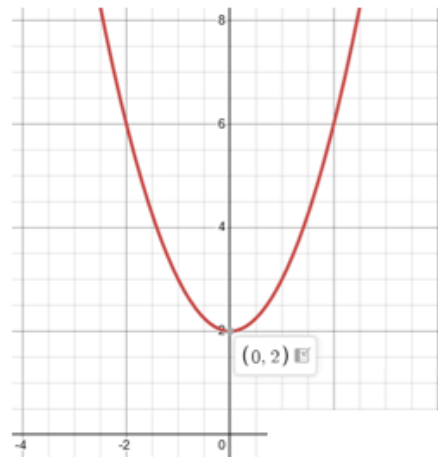
Máximos y mínimos absolutos

Los extremos absolutos son los valores de una función f más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) de todo el dominio.

- El Máximo absoluto de la función f es el valor más grande en todo el dominio



- El mínimo absoluto de la función f es el valor más pequeño en todo el dominio.



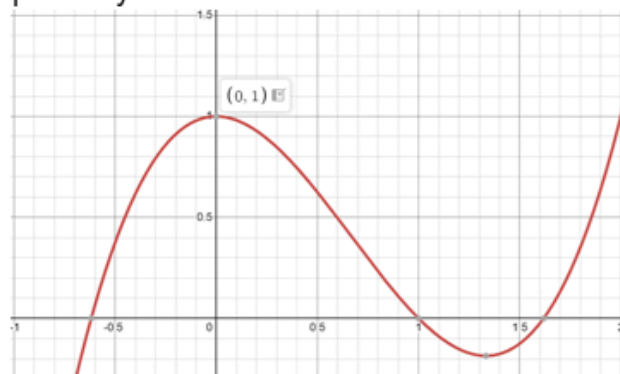
Mínimo absoluto

Los extremos absolutos también reciben el nombre de **extremos globales**.

Máximos y mínimos relativos

Los **extremos relativos** de una función f son los valores más grandes o más pequeños de una región del dominio.

- La función f tiene en M un máximo relativo si $f(M)$ es mayor que sus valores próximos a izquierda y derecha.



Máximo relativo

En términos sus derivadas, sean f y f' derivables en M . Entonces M es un máximo relativo de f si:

$$f'(M) = 0 \quad \text{y} \quad f''(M) < 0$$

También se puede decir que M es un **máximo relativo** en su entorno si a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente.

- La función f tiene en m un mínimo relativo si $f(m)$ es menor que sus valores próximos a izquierda y derecha.



En términos de sus derivadas, sean f y f' derivables en m . Entonces m es un mínimo relativo de f si:

$$f'(m) = 0 \text{ y } f''(m) > 0$$

También se puede decir que m es un mínimo relativo en su entorno si a la izquierda la función es decreciente y a la derecha creciente.

Ejemplo 1

La demanda de un artículo que produce una compañía varía con el precio que esta cobra por el artículo. La compañía determinó que los ingresos totales anuales es $I(x)$ (en miles de pesos) son una función del precio p (en pesos).

Específicamente:

$$I(p) = -50p^2 + 500p$$

a) Determine el precio que debe cobrarse con el fin de maximizar los ingresos totales.

b) ¿Cuál es el precio de los ingresos anuales totales?

Solución:

a) La función que se nos proporciona es la de ingresos totales, los cuales dependen del precio, mostrándose una función que no es lineal (cuadrática). La primera derivada de la función de ingresos es:

$$I'(p) = -100p + 500$$

Esta función muestra el ingreso marginal. Al igualar a cero para cumplir con la condición de primer orden, tenemos:

$$\begin{aligned} -100p + 500 &= 0 \\ p &= \frac{500}{100} = 5 \end{aligned}$$

El precio que la compañía debe cobrar a fin de que el ingreso se maximice es de cinco pesos por unidad.

Para verificar que existe un máximo, se obtiene la segunda derivada:

$$I''(p) = -100$$

$$I''(p) < 0$$

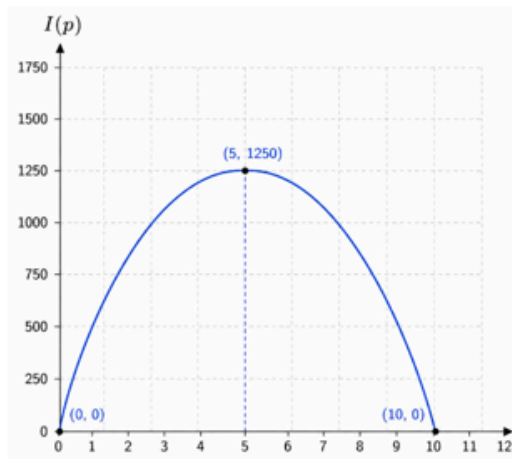
Al observar que el valor obtenido por la segunda derivada es negativo se comprueba que existe un máximo sobre $I(p) = 5$

- b) El valor de los ingresos totales anual se encuentra sustituyendo el precio que garantiza la maximización en la función de ingresos totales.

$$I(5) = -50(5)^2 + 500(5) = -50(25) + 2500 = -1250 + 2500 = 1250$$

$$I(5) = 1250$$

Podemos esperar que los ingresos anuales totales máximos sean en \$1,250 cuando la compañía cobra cinco pesos por unidad



Función Graficada:

$$I(p) = -50p^2 - 500p$$

- Vértice (máximo): (5,1250)
- Cortes con el eje p : (0,0) y (10,0)
- Eje de simetría $p = 5$
- Abre hacia abajo (parábola concava hacia abajo).

Interpretación:

El ingreso máximo a obtener es de 1,250, cuando el precio por unidad es de \$5.

Ejemplo 2

Una dependencia gubernamental de una ciudad ha estado experimentando con la estructura de precios del pasaje en el sistema de transporte público de microbuses. Abandonó la estructura de precios por zona, en la que el precio variaba dependiendo del número de zonas a través de las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema requiere de precios fijos en los cuales el pasajero puede viajar a cualquier punto de la ciudad por el mismo precio.

La dependencia realizó una encuesta entre los ciudadanos para determinar el número de personas que utilizarán el nuevo sistema de microbuses si el precio fijo es igual para todas las distancias. A partir de los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas determinaron una función de demanda aproximada, lo que expresa el número de pasajeros diarios como función del precio a cobrar.

La función demanda es:

$$x(p) = 1000 - 125p$$

Donde x es el número de pasajeros al día y p es el costo en pesos.

- Determine el precio que debe cobrarse con el fin de maximizar el ingreso diario a partir del precio del pasaje.
- ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?
- ¿Cuántos pasajeros al día se espera que viajen al pagar esa tarifa?

Solución

- a) El primer paso es determinar una función que establezca el ingreso en función del precio p . La razón por la cual se selecciona p como variables es que el problema es determinar el precio que producirá el ingreso. Además, se considera al precio como una variable de decisión, una variable cuyo valor puede ser decidido por la dependencia gubernamental

La expresión para determinar los ingresos totales es $I(p) = (p)(x)$

En este caso I está dado como función de dos variables, p y x , donde la demanda x se expresa en términos del precio p . Si sustituimos la función de demanda en la fórmula para calcular el ingreso total I , el ingreso queda en función del precio, con ello tenemos:

$$x(p) = 1000 - 125p$$

$$I(p) = p x(p)$$

$$I(p) = p(1000 - 125p) = 1000p - 125p^2$$

En este momento contamos con una función de ingresos con respecto al precio. Su primera derivada es:

$$I'(p) = 1000 - 250p$$

Igualamos a 0

$$1000 - 250p = 0$$

$$-250p = -1000$$

$$p = 4$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar la existencia de un máximo:

$$I''(p) = -250$$

$$I''(4) = -250 < 0$$

Existe un máximo para $I(p)$ para cuando $p = 4$, es decir, los ingresos diarios serán maximizados cuando se cobre una cuota fija de 4 pesos.

- b) Obtenemos el ingreso máximo esperado al sustituir el precio que maximiza el ingreso.

$$I(4) = 1000(4) - 125(4)^2 = 4000 - 125(16) = 4000 - 2000$$

$$I(4) = 2000$$

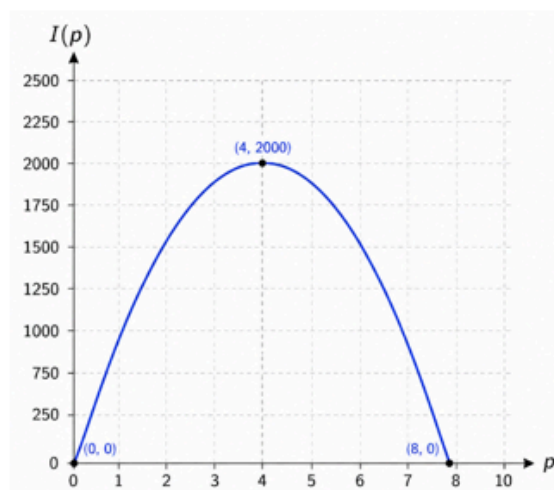
Como el precio se indica en pesos, los ingresos diarios máximos esperados son de \$2,000 pesos.

- c) El número de pasajeros que se espera cada día con una tarifa p de cuatro pesos, lo encontramos sustituyendo el valor de p en la función de demanda:

$$p = 4$$

$$x(p) = 1000 - 125p = 1000 - 125(4) = 1000 - 500 = 500$$

Con una tarifa de cuatro pesos se obtiene un ingreso máximo de 2,000 pesos con que 500 *personas* vayan



Ejemplo 3

Una compañía que se dedica a la elaboración de anuncios publicitarios decidió establecer una estrategia para reducir sus costos y, de esta manera, además de asegurar que se incrementen sus utilidades, reduce el precio para los contratantes del servicio. Después de realizar diversos estudios, la compañía obtuvo la siguiente función de costo:

$$C(x) = 10\,000 + 25x + x^2$$

x Es número de unidades:

- Determine el número de servicios que minimiza el costo promedio.
- Calculemos el costo promedio y el costo total.

Solución

- La función de costo marginal se obtiene con su primera derivada:

$$C'(x) = 25 + 2x$$

El costo promedio es:

$$Cm(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10\,000}{x} + \frac{25x}{x} + \frac{x^2}{x}$$

$$Cm(x) = \frac{10\,000}{x} + 25 + x$$

Igualando $C'(x)$ con $Cm(x)$ tenemos:

$$25 + 2x = \frac{10\,000}{x} + 25 + x$$

$$25 - 25 + 2x - x = \frac{10\,000}{x}$$

$$x^2 = 10\,000$$

$$x = \sqrt{10\,000} = 100$$

Calculamos la segunda derivada de la función de costo promedio para comprobar que este nivel de producción es un mínimo:

La función de promedio es $Cm(x) = \frac{10\,000}{x} + 25 + x = 10000x^{-1} + 25 + x$

La primera derivada es $Cm'(x) = (-1)10000x^{-2} + 1 = -10\,000x^{-2} + 1$

La segunda derivada es

$$Cm''(x) = \frac{20\,000}{x^3}$$

Si sustituimos cualquier valor positivo de x , el resultado siempre será positivo, lo que garantiza la existencia de un mínimo. De aquí se puede apreciar que el número de anuncios publicitarios necesario para minimizar el costo promedio es de 100.

- b)** Con un número de anuncios publicitarios de 100, se calcula el costo promedio y el costo total.

El costo mínimo promedio es

$$Cm(100) = \frac{10000}{100} + 25 + 1(100) = 100 + 25 + 100$$

$$Cm(100) = 225$$

El costo mínimo por anuncio es de \$225

El costo total

$$C(100) = 10\,000 + 25(100) + (100)^2$$

$$C(100) = 22\,500$$

El costo total por publicar 100 anuncios es de \$22 500

4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades

En administración es fundamental comprender la relación entre ingresos, costos y utilidades para evaluar el desempeño y tomar decisiones acertadas. Mediante funciones y derivadas es posible analizar cómo varían estos elementos cuando cambia el volumen de producción o ventas.

El ingreso es el dinero obtenido por la venta de bienes o servicios, el costo incluye los gastos para producirlos, y la utilidad resulta de restar los costos a los ingresos. El análisis de estas funciones permite determinar niveles óptimos de operación, maximizar ganancias y mejorar el uso de recursos. Por ello, estas aplicaciones son esenciales en el análisis y la planificación empresarial.

Ejemplo 1

Una empresa se dedica a prestar servicios de consultoría sobre aspectos publicitarios a diversas empresas que desean incrementar sus ventas anunciando sus productos en diversos medios realizó encuestas acerca de los costos de publicidad y determinó que las funciones de costos, al tomar en cuenta los costos de publicidad y de demanda de servicios de consultoría, son:

$$C(x) = 1200 + 25x - 0.0001x^2 \quad p(x) = 55 - \frac{x}{1000}$$

Donde en la función de los costos, $C(x)$ es el costo de prestar x servicios al considerar los costos de publicidad, y en la función de demanda p es el precio de cada servicio que se prestó y x es el número de servicios prestados.

- Determinemos el número de servicios que maximiza la ganancia.
- Calculemos el precio que garantiza la maximización de la ganancia si el precio está en miles de pesos

Solución:

- Como se proporciona una función de demanda es necesario que la expresemos como una función de ingresos, quedándonos:

$$I(x) = x P(x)$$
$$P(x) = 55 - \frac{x}{1000}$$

$$I(x) = x P(x) = x \left(55 - \frac{x}{1000} \right) = 55x - \frac{x^2}{1000}$$

Obtenemos la primera derivada de las funciones de costo e ingreso para calcular las funciones de costo marginal e ingreso marginal y recordemos que la maximización involucra que el costo marginal se iguale al ingreso marginal, por lo que tenemos:

$$\text{El costo marginal es } C'(x) = 25 - (2)0.0001x = 25 - \frac{2x}{1000} = 25 - \frac{x}{500}$$

Por lo tanto, el ingreso marginal es igual al costo de marginal cuando:

$$55 - \frac{x}{500} = 25 - 0.002x$$

Despejando y resolviendo para encontrar x tenemos:

$$\begin{aligned}
55 - 25 &= \frac{x}{500} - 0.0002x; 55 - 25 = \frac{x}{500} - \frac{0.0002x(500)}{500} \\
30 &= \frac{x}{500} - \frac{0.1x}{500} = \frac{x - 0.1x}{500} = \frac{0.9x}{500} \\
30 &= \frac{0.9x}{500} \\
x &= \frac{15000}{0.9} \\
x &= 16\,666.67 \cong 16\,667
\end{aligned}$$

Con objeto de comprobar que se produce un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
C''(x) &= -0.0002 \\
I''(x) &= -\frac{1}{500} = -0.002
\end{aligned}$$

Aquí observamos que cuando la compañía presta 16 667 servicios de consultoría, utilidad será maximizada dado que $I''(16\,667) < C''(16\,667)$.

- b) Obtenemos el precio que maximiza la ganancia sustituyendo la cantidad de unidades producidas en la función demanda:

$$\begin{aligned}
x &= 16\,667 \\
P(16\,667) &= 55 - \frac{16667}{1000} = 55 - 16.667 = 38.333
\end{aligned}$$

El precio que garantiza la maximización de la utilidad con 16 667 servicios de consultoría prestados es de \$38 333

Ejemplo 2

Una empresa desea reducir sus costos lo más posible a fin de obtener mayores utilidades y hacer que el precio de sus artículos sea más bajo que los de la competencia y posicionarse de mejor manera en el mercado. Para ello calcula que el costo de producción de x artículo es:

$$C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$$

- Determine el nivel de producción en el cual será el mínimo costo promedio.
- Calculemos el costo promedio y el costo total.

Solución:

- a) La función de costo total es $C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$, por lo que para encontrar el nivel de producción que minimiza el costo obtenemos la primera derivada quedando:

$$C'(x) = 2 + 0.002x$$

Esta primera derivada define al costo marginal. Como se quiere minimizar el costo promedio es necesario igualar el costo promedio al costo marginal.

El costo Promedio es:

$$\begin{aligned}
C_m(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{2600}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{0.001x^2}{x} \\
C_m(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x
\end{aligned}$$

Igualando $C'(x)$ con $C_m(x)$

$$2 + 0.002x = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x$$

Al resolver obtenemos:

$$\begin{aligned}2 - 2 + 0.002x - 0.001x &= \frac{2600}{x} \\0.001x &= \frac{2600}{x} \\x^2 &= \frac{2600}{0.001} = 2\,600\,000 \\x &= \sqrt{2\,600\,000} = 1612.4515 \cong 1612\end{aligned}$$

Para comprobar que este nivel de producción es un mínimo se obtiene la segunda derivada de la función de costo promedio

La función de costo promedio es:

$$C_m(x) = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x = 2600x^{-1} + 2 + 0.001x$$

La primera derivada es:

$$C'_m(x) = (-1)2600x^{-2} + 0.001 = -2600x^{-2} + 0.001x$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned}C''_m(x) &= -(-2)2600x^{-3} = 5200x^{-3} \\C''_m(x) &= \frac{5200}{x^3} > 0\end{aligned}$$

Se puede observar que en el resultado de la segunda derivada al sustituir cualquier valor de x , el resultado siempre será positivo lo que garantiza la existencia de un mínimo. De aquí se puede apreciar el nivel de producción necesario para minimizar el costo de producción es de 1612 *unidades*

- b)** Con una producción total de 1612, calculamos el costo promedio y el costo total.

El costo promedio mínimo es:

$$\begin{aligned}C_m(1612) &= \frac{2600}{1612} + 2 + 0.001(1612) = 1.6129 + 2 + 1.612 \\C_m(1612) &= 5.22\end{aligned}$$

El costo promedio mínimo por artículo es de \$5.22

El costo total es $C(1612) = 2600 + 2(1612) + 0.001(1612)^2$

$$C(1612) = 8422.544$$

El costo de producir 1612 artículos es de \$8422.5

4.7 Análisis marginal

El análisis marginal es una herramienta práctica para la toma de decisiones que permite medir los costos y beneficios de los cambios graduales en una actividad para maximizar las ganancias.

El concepto de análisis marginal se centra en comparar el beneficio adicional ("Beneficio marginal") que se deriva de un cambio en el nivel de actividad ("o producción").

Cómo realizar un análisis marginal

El análisis marginal cuantifica el impacto incremental de ciertos cambios para optimizar la toma de decisiones internas y mejorar la eficiencia operativa.

El objetivo de realizar un análisis marginal es determinar el nivel óptimo de producción o actividad donde el beneficio marginal es igual al costo marginal.

El análisis marginal comprende la descomposición de una decisión particular en una serie de opciones incrementales, en las que el costo marginal y el beneficio marginal se sopesan entre sí por cada unidad adicional de actividad.

- **Beneficio Marginal (BM):** Aumento o disminución incremental en el beneficio total de una unidad adicional de actividad.
- **Costo Marginal (CM):** Aumento o disminución incremental en el costo total debido a una unidad adicional de actividad.

Si el beneficio marginal supera al costo marginal, se considera racional proceder con la actividad incremental.

El proceso iterativo se repite hasta alcanzar el nivel óptimo, que se refiere al punto en el que el costo marginal es igual al beneficio marginal (y se maximiza el beneficio neto); por lo tanto, el análisis se suele presentar en un gráfico para ilustrar el punto estimado de producción (o rendimiento) óptimo.

Proceso para realizar un análisis marginal:

- Paso 1: Identificar la actividad que se va a analizar.
- Paso 2: Determinar el nivel de actividad actual.
- Paso 3: Definir el cambio incremental en la actividad.
- Paso 4: Calcular el costo marginal (CM) del cambio incremental.
- Paso 5: Estimar el beneficio marginal (BM) del cambio incremental.
- Paso 6: Comparar el costo marginal (CM) con el beneficio marginal (BM).

El "Beneficio Marginal (BM)", puede sustituirse por "Ingreso Marginal (IM)", que se refiere al aumento o disminución incremental de los ingresos totales por la venta de una unidad adicional.

Fórmula del análisis marginal

Beneficio neto: Diferencia entre los beneficios marginales y los costes marginales, es uno de los factores clave en el análisis marginal.

Dado un beneficio neto positivo, se entiende que la decisión de seguir adelante genera un resultado favorable para la empresa.

En resumen, si el beneficio marginal es igual al coste marginal, la entidad ha alcanzado el nivel óptimo de producción (o volumen de producción), donde se maximiza el beneficio neto total.

La fórmula para el beneficio neto total es:

$$\text{Beneficio neto} = \text{Beneficio Marginal (BM)} - \text{Coste Marginal (CM)}$$

Donde:

- $\text{Beneficio Marginal} = \frac{\text{Cambio en el beneficio total}}{\text{Cambio en la cantidad}}$
- $\text{Costo Marginal} = \frac{\text{Cambio en el costo total}}{\text{Cambio en la cantidad}}$

Si se utiliza el Ingreso Marginal (IM) en lugar del beneficio marginal (BM), se aplicara la siguiente formula.

- $\text{Ingreso Marginal} = \frac{\text{Cambio en el ingreso total}}{\text{Cambio en la cantidad}}$

¿Cómo se relaciona el análisis marginal con la maximización de beneficios?

El análisis marginal está directamente vinculado a la maximización de beneficios, teniendo en cuenta que los beneficios se maximizan en el punto donde el ingreso marginal es igual al coste marginal, al menos en teoría.

Dado que el objetivo de realizar un análisis marginal es identificar el punto de producción o consumo óptimo, donde se maximiza el beneficio neto, el objetivo final es determinar el punto de inflexión en el que el beneficio marginal (o ingreso marginal) es equivalente al costo marginal ($MB = MC$ o $MR = MC$).

Si el beneficio marginal supera el coste marginal, la empresa debería proceder a producir una cantidad adicional, ya que el beneficio neto esperado debería aumentar.

Por el contrario, si el beneficio marginal es menor que el coste marginal, la entidad no debería proceder a producir una unidad adicional, ya que el beneficio neto esperado disminuirá.

En el punto de inflexión ($IM = CM$), el ingreso adicional obtenido al producir una unidad más es igual al costo adicional de producir esa unidad.

Sin embargo, la decisión de seguir produciendo por encima del nivel determinado daría como resultado que los costes marginales superan los ingresos marginales, reduciendo así el beneficio total.

Sin embargo, la decisión de seguir produciendo por encima del nivel determinado daría como resultado que **los costes marginales** superan los ingresos marginales, reduciendo así el beneficio total.

Ejemplo 1: Cálculo de análisis marginal.

Supongamos que una empresa manufacturera está decidiendo la cantidad total de unidades que producirá el próximo mes.

La producción actual de la empresa es de 1000 unidades al mes. Sin embargo, debido a limitaciones propias de la fábrica, como equipos obsoletos, tiempos de inactividad y problemas de comunicación entre turnos, la empresa comienza a experimentar **deseconomías de escala** a niveles de producción más elevados.

El costo marginal y el ingreso marginal por cada 100 unidades adicionales son los siguientes:

Unidades Incrementales	Costo Marginal (CM)	Ingreso Marginal (IM)
+100	• \$5,000	• \$7,000
+200	• \$5,500	• \$6,500
+300	• \$6,000	• \$6,000
+400	• \$6,500	• \$5,500
+500	• \$7,000	• \$5,000

Para maximizar las ganancias, la empresa debería producir unidades adicionales hasta el punto en que el ingreso marginal sea igual o superior al costo marginal.

En este caso; la producción adicional óptima es de 200 unidades, ya que producir las siguientes 100 unidades (300 en total) resultaría en un costo marginal de \$6 000, igual al ingreso marginal, por lo que no hay ganancias adicionales.

Con una producción adicional óptima de 200 unidades, podemos calcular los siguientes datos financieros.

- *Ingresos incrementales totales* = \$7,000 + \$6,500 = \$13,500
- *Costo incremental total* = \$5,000 + \$5,500 = \$10,500
- *Beneficio incremental* = \$13,500 – \$10,500 = \$3,000

Los 3, 000 dólares representan el beneficio máximo que la empresa puede obtener al mes aumentando su volumen de producción (o rendimiento), teniendo en cuenta sus limitaciones de capacidad actuales y otros factores que pueden contribuir a las deseconomías de escala.

En conclusión; Las ineficiencias y limitaciones de fabricación que surgen con un mayor volumen de producción (es decir, la cantidad producida) contribuyen al aumento de los costos marginales que, con el tiempo superan los ingresos incrementales generados.

Ejemplo 2 Análisis marginal en una tienda de escritorios

Una empresa fabricante de escritorios produce actualmente 800 escritorios al mes. Debido a que todavía cuenta con una capacidad instalada disponible, el gerente analiza aumentar la producción. Sin embargo, conforme la producción aumenta, comienzan a presentarse horas extra, mayor desgaste de la maquinaria y costos de mantenimiento.

El departamento financiero estima el siguiente comportamiento por cada 100 escritorios adicionales.

Unidades adicionales	Costo Marginal (CM)	Ingreso Marginal (IM)
+100	• \$15,000	• \$21,000
+200	• \$17,000	• \$20,000
+300	• \$19,000	• \$19,000
+400	• \$22,000	• \$18,000
+500	• \$25,000	• \$16,000

Procedimiento

Se compara el ingreso marginal con el costo marginal para cada incremento de producción.

Producción	Comparación	Decisión
+100	$IC > CM$	Conviene producir
+200	$IC > CM$	Conviene producir
+300	$IC = CM$	Punto de equilibrio Marginal
+400	$IC < CM$	No conviene producir
+500	$IC < CM$	No conviene producir

Observamos que al producir 300 unidades adicionales, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

No obstante, desde el punto de vista administrativo, la empresa obtiene su máximo beneficio económico al producir únicamente 200 unidades adicionales, ya que producir las siguientes 100 unidades ya no incrementa la utilidad, únicamente cubren el costo de producirlas.

Cálculo del beneficio incremental

Como la decisión óptima es producir 200 unidades adicionales, se consideran únicamente los dos primeros incrementos.

Ingreso incremental total

$$IM = 21,000 + 20,000 = 41,000$$

Costo incremental total

$$CM = 15,000 + 17,000 = 32,000$$

Beneficio incremental

$$\text{Beneficio} = 41,000 - 32,000 = 9,000$$

Resultado:

La producción adicional óptima es de 200 escritorios, ya que producir las siguientes 100 unidades (300 en total), ocasionaría que el ingreso marginal sea igual al costo marginal, es decir, **ya no existiría utilidad adicional**.

Los resultados financieros son los siguientes:

- Ingresos incrementales: \$41,000
- Costos incrementales: \$32,000
- Beneficio incremental máximo: \$9,000

Ejercicio Análisis marginal Fábrica de detergentes “LimpioMax”

La empresa LimpioMax, dedicada a la fabricación de detergente líquido para uso doméstico, produce actualmente 3,000 envases por semana. Debido al incremento en la demanda por parte de supermercados y tiendas de autoservicio, el gerente de producción analiza aumentar su producción.

Sin embargo, conforme aumenta la producción, la empresa comienza a utilizar horas extra, incrementa el consumo de materias primas y requiere mayor mantenimiento de la maquinaria, lo que provoca un aumento gradual del costo marginal.

El departamento financiero estima el costo marginal y el ingreso por cada 100 envases adicionales.

Envases adicionales	Costo Marginal (CM)	Ingreso Marginal (IM)
+100	• \$8,000	• \$15,000
+200	• \$9,000	• \$14,000
+300	• \$10,500	• \$13,000
+400	• \$13,000	• \$13,000
+500	• \$ 15,500	• \$12,000
+600	• \$18,000	• \$10,500

Procedimiento

Incremento	Comparación	Decisión
+100	$IM > CM$	Conviene producir
+200	$IM > CM$	Conviene producir
+300	$IM > CM$	Conviene producir
+400	$IM = CM$	Ya no aumenta la utilidad
+500	$IM < CM$	No conviene producir
+600	$IM < CM$	No conviene producir

La producción incremental óptima es de 300 envases, ya que producir los siguientes 100 envases (400 en total) ocasionaría que el ingreso marginal fuera

igual al costo marginal, por lo que ya no existirían ganancias adicionales.

Cálculo de beneficio incremental

Como la producción adicional óptima es de 300 envases, se consideran únicamente los tres primeros incrementos.

Ingresos incrementales totales

$$IM = 15,000 + 14,000 + 13,000 = 42,000$$

Beneficio incremental máximo

$$CM = 8,000 + 9,000 + 10,500 = 27,500$$

Beneficio incremental máximo

$$Beneficio = 42,000 - 27,500 = 14,500$$

Resultado

La producción óptima es de 300 envases, ya que producir las siguientes 100 unidades, ocasionaría que el ingreso marginal sea igual al costo marginal, es decir, **ya no existiría utilidad adicional.**

- Ingresos incrementales: \$42,000
- Costos incrementales: \$27,500
- Beneficio incremental máximo: \$14,500

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

TEMA 5.

INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

- 5.1 Concepto de antiderivada
- 5.2 Reglas de integración directas
- 5.3 Integral definida
- 5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas

5.1 Concepto de antiderivada

La antiderivada constituye uno de los conceptos fundamentales del cálculo integral, ya que representa el proceso inverso de la derivación. Mientras que la derivada permite determinar la razón de cambio de una función, la antiderivada busca encontrar la función original a partir de su derivada. En otras palabras, si se conoce cómo cambia una variable, la antiderivada permite reconstruir la función que constituyó dicho cambio.

Una función $F(x)$ es una antiderivada de una función $f(x)$ si al derivar $F(x)$ se obtiene $f(x)$.

Matemáticamente se expresa como:

$$F'(x) = f(x)$$

Por esta razón la antiderivada también recibe el nombre de integral indefinida. Al obtener una antiderivada siempre se agrega una constante C , llamada **constante de integración**, ya que la derivada de cualquier constante es cero y, por lo tanto, existen infinitas funciones que tienen la misma derivada.

La integral indefinida se representa con la siguiente notación:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

El estudio de las antiderivadas es importante, porque constituye la base para resolver problemas relacionados con áreas bajo la curva, acumulación de cantidades, crecimiento de poblaciones, movimiento de partículas y diversos modelos económicos y administrativos. En administración, por ejemplo, las antiderivadas permiten obtener funciones de costo, ingreso o utilidad total cuando se conocen sus funciones marginales.

En esta unidad se aprenderá a identificar una antiderivada, aplicar las reglas básicas de integración y comprender la importancia de la constante de integración para determinar correctamente la familia de funciones que satisfacen una derivada dada.

Ejemplo 1:

$$f(x) = 3x^2$$

Entonces su antiderivada es:

$$F(x) = x^3 + C$$

Porque:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + C) = 3x^2$$

Ejemplo 2:

$$f(x) = 2x + 5$$

Su antiderivada es:

$$F(x) = x^2 + 5x + C$$

Ya que:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5x + C) = 2x + 5$$

Ejemplo 3:

$$f(x) = 4x^3 + 2x$$

Entonces su antiderivada es:

$$F(x) = x^4 + x^2 + C$$

Porque:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + x^2 + C) = 4x + 2x$$

5.2 Reglas de integración directas

Las integrales directas no requieren de la aplicación de un método para su resolución. La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede comprobarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integral indefinida, para obtener:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Reglas básicas de integración:

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración
$\frac{d}{dx}(C) = 0$	$\int 0dx = C$
$\frac{d}{dx}(kx) = k$	$\int kdx = kx + C$
$\frac{d}{dx}(k f(x)) = k f'(x)$	$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$
$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \text{sen } x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$	$\int \text{sen } x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

Resolver las siguientes Integrales mediante las fórmulas anteriores.

1) $\int 5dx = 5x + C$

2) $\int (x^{-3} + 5x^2)dx = \int x^{-3}dx + 5 \int x^2 dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 5 \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{5x^3}{3} + C$

3) $\int (x^4 - 1)x^2 dx = \int (x^6 - x^2)dx = \int x^6 dx - \int x^2 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^7}{7} - \frac{x^3}{3} + C$

4) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C$

5) $\int \left(-\frac{9}{x^4} \right) dx = \int (-9x^{-4})dx = -\frac{9x^{-3}}{-3} + c = -3x^{-3} + c = \frac{3}{x^3} + c$

6) $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (4x^3 - x^{-2})dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{x^{-1}}{-1} + c = x^4 + \frac{1}{x} + c$

7) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \int 2x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 4x^{\frac{3}{2}} + c = 4\sqrt{x} + c$

8) $\int (t^2 + 1)^2 dt = \int (t^4 + 2t^2 + 1)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t + c$

9) $\int \frac{x^3+3}{x^2} dx = \int (x + 3x^{-2})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x} + c$

$$10) \int \sqrt[3]{x}(x-4)dx = \int x^{\frac{1}{3}}(x-4)dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{1}{\frac{7}{4}}} - \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{\frac{4}{3}}} + c = \frac{3x^{\frac{7}{4}}}{7} - \frac{12x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$$

$$= \frac{3x^{\frac{7}{4}}}{7} - 3x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$11) \int \frac{x}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

$$12) \int x(x^2+3)dx = \int x^3dx + 3 \int xdx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + c \text{ ó } \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^2}{x} + 3\right)$$

$$13) \int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{1}{\frac{5}{3}}} + c = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + c$$

$$14) \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^2+x+1)dx = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{\frac{5}{2}}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} + c = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + c$$

$$15) \int (x+1)(3x-2)dx = \int (3x^2-2x+3x-2)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + c$$

$$16) \int \frac{3}{x^4}dx$$

$$\int \frac{3}{x^4}dx = \int 3x^{-4}dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{3x^{-3}}{-3} + c = -x^{-3} + c = -\frac{1}{x^3} + c$$

$$17) \int \sqrt[3]{x}dx$$

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$$

$$18) \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + c = \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3} + c$$

$$19) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$$

5.3 Integral definida

Las integrales definidas constituyen una de las herramientas más importantes del cálculo integral, ya que permiten determinar la acumulación total de una cantidad a lo largo de un intervalo específico. A diferencia de las integrales indefinidas, cuyo resultado es una familia de funciones acompañada de una constante de integración, las integrales producen un valor numérico que representa una cantidad concreta.

Geométricamente, una integral definida puede interpretarse como el área neta comprendida entre la gráfica de una función y el eje x dentro de un intervalo determinado. Este concepto surge de la necesidad de calcular áreas de regiones con formas irregulares, problema que no puede resolverse mediante las fórmulas tradicionales de la geometría.

La integral definida se representa mediante la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Donde:

$f(x)$ es la función a integrar

a es el límite inferior de integración

b es el límite superior de integración

dx es la variable respecto a la cual se integra

El valor de una integral definida se obtiene aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece la relación entre derivación e integración. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Las integrales definidas tienen numerosas aplicaciones en la administración, economía y negocios. Por ejemplo, permiten calcular ingresos totales a partir del ingreso marginal, costos totales a partir del costo marginal, crecimiento acumulado de ventas, inventarios, demanda acumulada y otras cantidades que dependen de la suma continua de números pequeños.

En este tema se estudiará el concepto de integral definida, su interpretación geométrica y económica, así como los métodos básicos para calcularla y aplicarla en la solución de problemas reales relacionados con la administración y la toma de decisiones.

Ejemplo 1

$$\int_0^1 (2x + 3) = 2 \int_0^1 x dx + 3 \int_0^1 dx = x^2 + 3x = [(1)^2 + 3(1)] - 0 = 4$$

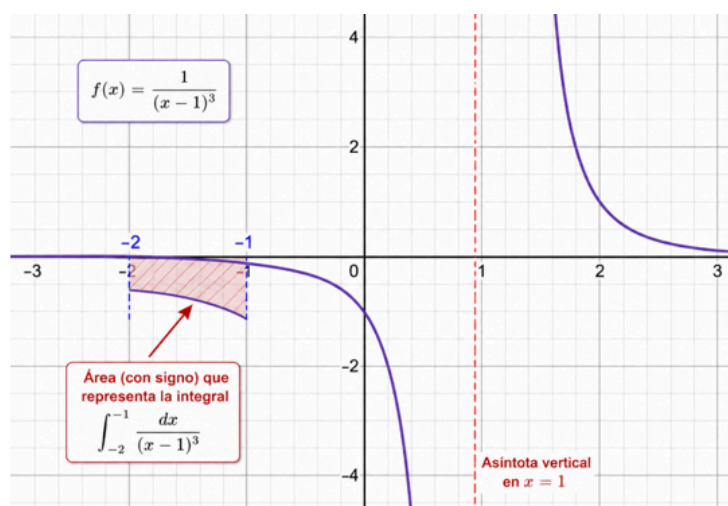
Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} &= \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+x} = 2[\sqrt{1+3} - \sqrt{1+0}] \\ &= 2[\sqrt{4} - \sqrt{1}] = 2[2 - 1] = 2\end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} &= \int_{-2}^{-1} (x-1)^{-3} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(-1-1)^2} - \frac{1}{(-2-1)^2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{9-4}{36} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{5}{36} \right] = -\frac{5}{72}\end{aligned}$$

La integral calcula el área con signo de la región sombreada:



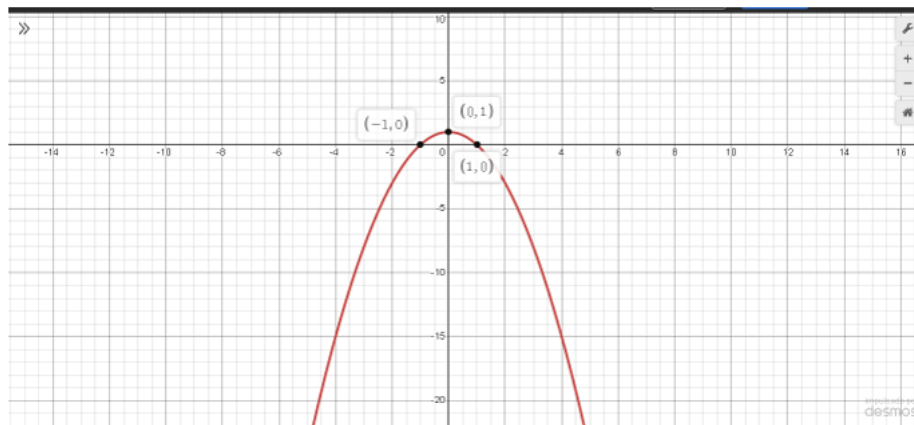
- Limitada arriba por el eje x ($y = 0$)
- Limitada abajo por la curva
- Limitada a la izquierda por $x = -2$
- Limitada a la derecha por $x = -1$

Resolver las siguientes integrales definidas.

Problema 1. Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

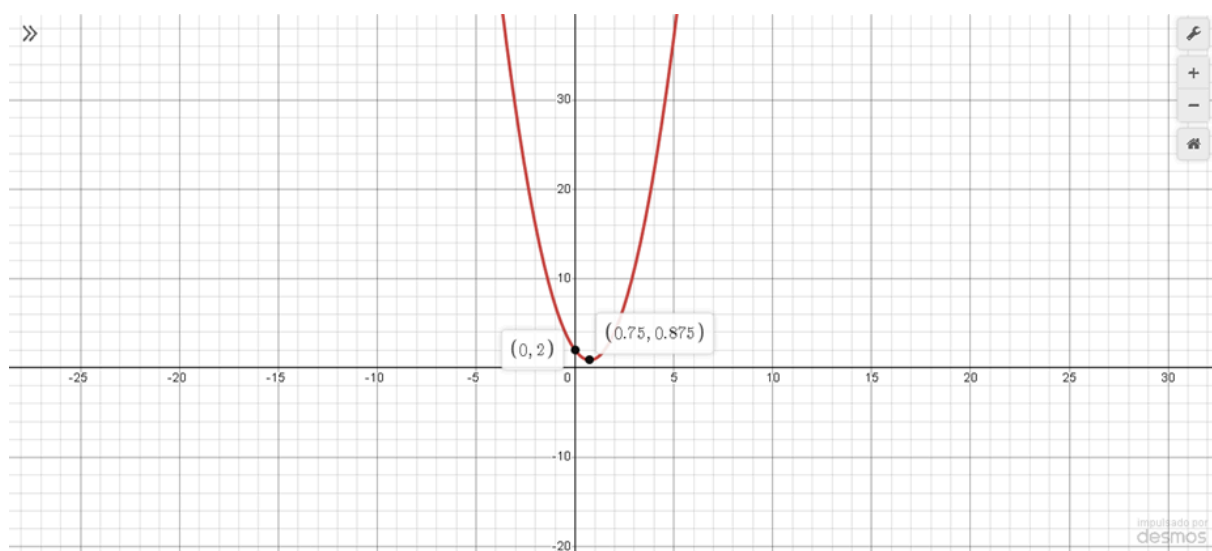
EVALUAR

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right] + c = \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{4(3)^2}{2} - 3(3) \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + \frac{4(1)^2}{2} - 3(1) \right] \\ &= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$



Problema 2. Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2) dx &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right] + c = \left[\frac{2(2)^3}{3} - \frac{3(2)^2}{2} + 2(x) \right] - [0] \\ &= \left[\frac{16}{3} - 6 + 4 \right] - 0 = \frac{16}{3} - \frac{2}{1} = \frac{16 - 6}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$



5.4 Aplicaciones del cálculo Integral a problemas de las áreas administrativas.

Ejemplo 1. Costo Total a partir del costo marginal

Una empresa dedicada a la fabricación de escritorios ha determinado que su costo marginal está dado por:

$$C'(x) = 4x + 50$$

Donde:

x = número de escritorios producidos

$C'(x)$ = costo marginal (pesos por escritorio)

Además se sabe que cuando no se produce ningún escritorio, los costos fijos son de \$8,000 se pide:

1. Obtener la función de costo total
2. Calcular el costo de producir 40 escritorios
3. Interpretar el resultado

Solución.

Paso 1. Integrar el costo marginal $C(x) = \int (4x + 50)dx = 2x^2 + 50x + C$

Paso 2. Determinar la constante. Como: $C(0) = 8000$

$$\text{Entonces, } 8000 = 2(0)^2 + 50(0) + C$$

$$C = 8000$$

La función de costo es: $C(x) = 2x^2 + 50x + 8000$

Paso 3. Calcular el costo para 40 escritorios

$$C(40) = 2(40)^2 + 50(40) + 8000$$

$$C(40) = 3200 + 2000 + 8000$$

$$C(40) = 13\,200$$

Respuesta:

El costo total es de: \$13 200

Interpretación administrativa.

La empresa necesitará invertir \$13,200 para producir 40 escritorios, considerando tanto los costos fijos como los variables.

Ejemplo 2. Ingreso total a partir del ingreso marginal

Una empresa comercial vende equipos de cómputo. El ingreso marginal está representado por:

$$I'(x) = 300 - 2x$$

Se sabe que cuando no se vende ningún equipo,

$$I(0) = 0$$

Determinar:

1. La función de ingreso
2. El ingreso obtenido por vender 60 equipos
3. Interpretar el resultado

Solución

Paso 1. Integración

$$I(x) = \int (300 - 2x)dx$$

$$I(x) = 300x - x^2 + c$$

Paso 2. Determinar la constante. Como: $I(0) = 0$

Entonces $c = 0$

La función del ingreso es: $I(x) = 300x - x^2$

Paso 3. Calcular para 60 equipos

$$I(60) = 300(60) - 60^2$$

$$I(60) = 18\,000 - 3600$$

$$I(60) = 14\,400$$

Respuesta:

El ingreso total es de: \$14 400

Interpretación Administrativa:

Al vender 60 equipos, la empresa obtiene ingresos por \$14,400, información útil para evaluar estrategias de ventas.

Ejemplo 3. Utilidad total a partir de la utilidad marginal

Una empresa de mensajería estima que su utilidad marginal es:

$$U'(x) = 120 - 6x$$

Además

$$U(0) = 5000$$

Se pide:

1. Encontrar la función de utilidad
2. Calcular la utilidad cuando se atienden 15 servicios
3. Interpretar el resultado.

Solución

Paso 1. Integrar la utilidad marginal

$$U(x) = \int (120 - 6x) dx$$

$$U(x) = 120x - 3x^2 + c$$

Paso 2. Determinar la constante. Como: $U(0) = 5000$

Entonces: $c = 5000$

La función es $U(x) = 120x - 3x^2 + 5000$

Paso 3. Calcular para 15 servicios

$$U(15) = 120(15) - 3(15)^2 + 5000$$

$$U(15) = 1800 - 675 + 5000$$

$$U(15) = 6125$$

Respuesta

La utilidad es de \$6125

Interpretación administrativa

La utilidad esperada al atender 15 servicios es de \$6,125, lo que ayuda a evaluar la rentabilidad de la operación.

Resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Producción acumulada a partir de tasa de producción

Una empresa produce componentes electrónicos. La tasa de producción por hora es:

$$P'(t) = 12t + 40$$

Donde:

- t =semanas
- $P(t)$ = piezas producidas

Al iniciar la jornada ya existen 300 piezas en inventario

Se pide:

1. Calcular la función de producción.
2. Calcular la producción acumulada después de 8 horas.
3. Interpretar el resultado.

Solución

Paso 1. Integrar

$$P(t) = \int (12t + 40)dx$$

$$P(t) = 6t^2 + 40t + c$$

Paso 2. Determinar la constante. Como: $P(0) = 300$

Entonces $c = 300$

La función queda: $P(t) = 6t^2 + 40t + c$

Paso 3. Calcular después de 8 horas.

$$P(8) = 6(8)^2 + 40(8) + 300$$

$$P(8) = 384 + 320 + 300$$

$$P(8) = 1004$$

Resultado:

La producción de piezas después de una jornada de 8 horas es de

Interpretación administrativa

Al finalizar la jornada de 8 horas, la empresa dispondrá de 1,004 piezas, dato útil para la planeación de inventarios y entregas.

Bibliografía

1. Arya. (2012) Matemáticas aplicadas a la administración y economía. Editorial: Iberoamericana.
2. Draper J.E. (2002). Matemáticas para administración y economía. México. Editorial: Harla.
3. Ernest-Haeussler Jr. Richar S. Paul. (2012) Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida. Editorial: Prentice Hall.
4. Frank S. Budnick. (2005) Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. 4ª edición Editorial: McGrawHill.
5. Jean E. Weber. (2004). Matemáticas Para Administración y Economía, 4ª ed. Oxford Univercity Press México, S. A. de C.V.,
6. Mizrahi-Sullivan. (1999) Matemáticas finitas con aplicaciones a la administración y economía. Editorial: Limusa-Wiley.
7. Arya, J. C., Lardner, R. W., & Ibarra Mercado, V. H. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5.ª ed.). Pearson Educación.
8. Budnick, F. S. (2007). Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales (4.ª ed.). McGraw-Hill Interamericana.
9. Stewart, J. (2013). Cálculo: Trascendentes tempranas (7.ª ed.). Cengage Learning.
10. Larson, R., & Edwards, B. H. (2014). Cálculo (10.ª ed.). Cengage Learning.

Programa de Matematicas Aplicadas a la Administración

No.	Temas	Subtemas	Horas sugeridas
1	Funciones matemáticas y ecuaciones lineales	1.1 Definición 1.2 Dominio y rango restringidos 1.3 Funciones multivariadas básicas 1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas 1.5 Fórmula pendiente intersección 1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta 1.6.1 Pendiente e intersección 1.6.2 Pendiente y un punto 1.6.3 Dos puntos 1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda	15
2	Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones	2.1 Funciones lineales 2.2 Modelos de equilibrio 2.2.1 Modelos de punto de equilibrio aplicado a la producción 2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio 2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo por y a la utilidad 2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar desiciones de comprar o producir 2.3 Sistemas de ecuaciones lineales 2.3.1 Métodos de eliminación suma y resta Sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3 2.3.2 Metodo de eliminación gaussiana de sistemas 2x2, 3x3,	15

		solución única 2.3.3 Aplicaciones a modelos economico-administrativos	
3	Algebra matricial	3.1 Introducción a las matrices 3.2 Tipos especiales de matrices 3.3 Operaciones con matrices 3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante 2x2, 3x3 por método de columnas aumentadas y cofactores 3.5 Propiedades de los determinantes 3.6 Solución inversa de una matriz 3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto	15
4	Diferenciación y Aplicaciones	4.1 Limites y continuidad 4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas 4.3 Derivada de n-ésimo orden 4.4 Derivadas parciales básicas 4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos) 4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades 4.7 Analisis marginal	9
5	Integración y aplicaciones	5.1 Concepto de antiderivada 5.2 Reglas de integración directas 5.3 Integral definida 5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas	6