Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Ensenada

Ecuaciones Diferenciales

Samuel de Jesús Hidalgo Orellana

Prólogo por

Dra. Sara Eugenia Hernández Ayón

Mtro. Christian Guillermo Hernández Hernández

Dedicatoria

En memoria de mi suegra, la señora Felipa Sánchez Moreno, quien con su cariño y ejemplo iluminó siempre a nuestra familia.

A mi querida familia —Lupita, Nadia, Enya, Ian, Kendra y Jorge Samuel—, mi más profundo agradecimiento por su amor y paciencia durante el año sabático que dio origen a el libro de Ecuaciones Diferenciales.

Con gratitud al Instituto Tecnológico de Ensenada y a su director por el apoyo que hizo posible esta obra.

Que este libro sea una herramienta útil para maestros y alumnos del TecNM y contribuya a formar ingenieros excelentemente preparados.

Prólogo

Presentar el resultado del trabajo académico del Dr. Samuel de Jesús Hidalgo Orellana es, para nosotros, un honor que asumimos con profundo respeto y admiración. La obra que el lector tiene ante sí, Ecuaciones Diferenciales, constituye un aporte sobresaliente dentro de la literatura docente del Tecnológico Nacional de México y, al mismo tiempo, una síntesis madura de más de tres décadas de labor incansable en la formación de ingenieros.

A lo largo de estas páginas se reconoce de inmediato la huella característica del Dr. Hidalgo: rigor conceptual, claridad metodológica y una constante preocupación por enlazar la teoría matemática con los problemas reales que enfrentan las distintas ramas de la ingeniería. Su tratamiento de las ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones lineales de orden superior, la transformada de Laplace, los sistemas lineales y las series de Fourier refleja no solo dominio técnico, sino una experiencia docente amplia y profunda, tejida a lo largo de años de enseñanza y reflexión.

Nos complace destacar la calidad y pertinencia de los ejemplos seleccionados. Cada problema, desde el análisis de la dinámica en un circuito RL con excitación variable hasta el estudio detallado de las vibraciones en un sistema masa–resorte–amortiguador, pasando por la respuesta transitoria de circuitos RLC o la aproximación armónica de señales no senoidales, demuestra una comprensión exhaustiva de los fenómenos físicos y una gran sensibilidad pedagógica. Estos modelos no están colocados como simples ejercicios; constituyen auténticas ventanas hacia la aplicación de la matemática en la ingeniería moderna.

Un rasgo notable de la obra es el equilibrio logrado entre los métodos analíticos clásicos y la verificación computacional mediante plataformas ampliamente reconocidas como Mathematica, MATLAB, Maple y Octave. La inclusión de más de trescientos ejemplos resueltos con precisión y corroborados mediante software científico aporta una confiabilidad excepcional y prepara al lector para enfrentar las herramientas que la ingeniería contemporánea demanda.

Este libro, elaborado durante el año sabático 2024–2025 en el Instituto Tecnológico de Ensenada, trasciende el marco de un texto universitario. Representa, en esencia, una manifestación del compromiso del Dr. Hidalgo con la educación pública, con su institución y con generaciones de estudiantes que han encontrado en su enseñanza no solo conocimiento matemático, sino un ejemplo de disciplina, ética profesional y entrega al servicio académico.

Como colegas que hemos sido testigos del impacto del Dr. Hidalgo en el Sistema de Institutos Tecnológicos del TecNM, consideramos esta obra como un legado académico de gran valor. Su contenido no solo fortalece la formación matemática de los futuros ingenieros, sino que también refleja la trayectoria de un profesor cuya dedicación ha dejado una marca profunda en la comunidad educativa.

Con esta convicción, presentamos este libro con el más alto reconocimiento a la labor del autor y con la certeza de que será una referencia indispensable en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en nuestro país.

Con consideración distinguida, **Dra. Sara Eugenia Hernández Ayón**

Mtro. Christian Guillermo Hernández Hernández

Introducción

Este libro, de Ecuaciones Diferenciales, nace del año sabático que el Instituto Tecnológico de Ensenada me concedió para volcar más de treinta años de experiencia docente en un texto completo, claro y útil para los alumnos del Tecnológico Nacional de México.

Posiblemente sea la última obra que publique antes de mi retiro del sistema de institutos tecnológicos, y la concibo como un legado para las generaciones futuras de ingenieros, en plena sintonía con el Modelo Educativo del TecNM —centrado en el Humanismo para la Justicia Social—, que busca formar profesionales e investigadores capaces de aplicar y generar conocimientos con pensamiento crítico, sentido ético, actitudes emprendedoras, capacidad creativa y, sobre todo, una sólida orientación hacia la innovación tecnológica que contribuya al desarrollo nacional y regional.

Las ecuaciones diferenciales son el lenguaje natural con el que la ingeniería describe, analiza y transforma el cambio: circuitos que oscilan, sistemas que vibran, señales que viajan, máquinas que se controlan de forma inteligente. Este texto busca responder, de manera sencilla y rigurosa, a las preguntas esenciales que todo estudiante se plantea al enfrentarse a ellas: ¿qué es una ecuación diferencial?, ¿de dónde surge?, ¿cómo se resuelve?, ¿para qué sirve en el mundo real? Teoría, método y aplicación van siempre de la mano, promoviendo el desarrollo de competencias que permitan solucionar problemas complejos, evaluar críticamente modelos matemáticos y proponer soluciones innovadoras en escenarios tecnológicos reales y cambiantes.

La obra se organiza en cinco temas fundamentales, diseñados para fortalecer el pensamiento crítico para la educación tecnológica y la capacidad de innovación que demanda el Modelo Educativo del TecNM:

Tema I. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (separables, lineales, exactas, Bernoulli), base para modelar fenómenos simples como crecimiento poblacional, circuitos RC o movimiento básico, fomentando el análisis crítico de supuestos y limitaciones del modelo.

Tema II. Ecuaciones lineales de orden superior, con coeficientes constantes o variables (Cauchy-Euler, reducción de orden), aplicadas a vibraciones mecánicas, sistemas de control y estructuras, donde el estudiante aprende a innovar en el diseño de soluciones estables y eficientes.

Tema III. Transformada de Laplace, herramienta poderosa que convierte problemas diferenciales en algebraicos, ideal para analizar circuitos eléctricos y sistemas de control automático, potenciando la capacidad de integrar tecnología avanzada en la resolución creativa de problemas.

Tema IV. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, resueltos mediante eliminación, valores propios o Laplace; esenciales en el modelado de sistemas acoplados (motores, robots, redes eléctricas), promoviendo el pensamiento sistémico y la innovación en ingeniería mecatrónica y automatización.

Tema V. Series de Fourier, para representar y analizar señales y fenómenos periódicos en procesamiento de señales, control y electromecánica, abriendo camino a la innovación en tecnologías de comunicación y análisis de datos.

Para su elaboración se consultaron referencias clásicas y modernas, y se emplearon herramientas como Mathematica, MATLAB, Maple y Octave con el fin de ofrecer soluciones exactas,

visualizaciones claras y ejemplos prácticos que acerquen la teoría al mundo real de la ingeniería, en línea con la dimensión tecnológica-científica y la apuesta por la vanguardia tecnológica que impulsa el TecNM.

Este no es solo un libro de fórmulas: es una invitación a comprender profundamente, a calcular con precisión, a pensar críticamente sobre los modelos matemáticos y a aplicar con creatividad e innovación los conocimientos adquiridos. Aspiro a que sirva tanto al estudiante que aprende de forma autónoma como al profesor que busca un apoyo sólido en el aula, y que contribuya a formar ingenieros capaces de imaginar, diseñar, innovar y resolver —con responsabilidad social y sentido ético— los retos tecnológicos y sociales del mañana.

Agradezco profundamente al Instituto Tecnológico de Ensenada la oportunidad de realizar este proyecto y confío en que estas páginas perduren como un recurso valioso para nuestra comunidad académica del TecNM, alineado con su compromiso de formar profesionistas competentes, críticos, innovadores y comprometidos con el desarrollo humano y tecnológico de México

Índice

Tema I. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	
	Página
Introducción	11
Resumen	15
1.1 Teoría preliminar	16
1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)	16
1.1.2 Soluciones de las ecuaciones diferenciales	18
1.1.3 Problema de valor inicial	30
1.1.4 Teorema de existencia y unicidad	38
1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias	42
1.2.1 Variables separables y reducibles	43
1.2.2 Homogéneas	48
1.2.3 Exactas	51
1.2.4 Lineales	54
1.2.5 De Bernoulli	62
1.3 Aplicaciones	69
Conclusiones	80
Bibliografía	81

Tema II. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior	
2.1 Teoría preliminar	83
2.1.1 Definición de ecuación diferencial de orden n	83
2.1.2 Problemas de valor inicial	86
2.1.3 Teorema de existencia y unicidad	86
2.1.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas	90
2.1.4.1 Principio de superposición	90
2.1.5 Dependencia e independencia lineal. Wronskiano	92
2.1.6 Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas	99
2.1.6.1 Reducción de orden	99
2.2 Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes	108
2.2.1 Ecuación característica de una ecuación diferencial lineal de orden superior	108
2.3 Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas	114
2.3.1 Método de los coeficientes indeterminados	114
2.3.2 Variación de parámetros	123
2.4 La ecuación diferencial de Cauchy-Euler.	129
2.5 Aplicaciones	135
Conclusiones	142
Bibliografía	143

Tema III. Transformada de Laplace	
Introducción	145
3.1 Teoría preliminar	146
3.1.1 Definición de la transformada de Laplace. Propiedades	148
3.1.2 Condiciones suficientes de existencia para la transformada de una función	159
3.2 Transformada directa	161
3.3 Transformada inversa	165
3.4 Función escalón unitario	172
3.5 Teoremas de traslación	175
3.6 Transformada de funciones multiplicadas por t^n, y divididas entre t	178
3.7 Transformada de una derivada y derivada de una transformada	182
3.8 Teorema de convolución	193
3.9 Transformada de una integral	204
3.10 Transformada de una función periódica	207
3.11 Transformada de la función delta de Dirac	209
3.12 Aplicaciones	211
Conclusiones	219
Bibliografía	221

Tema IV. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales	
4.1 Teoría preliminar.	224
4.1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	224
4.1.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos	230
4.1.3 Solución general y solución particular de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	233
4.2 Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	243
4.3 Método de los operadores	245
4.4 Utilizando la transformada de Laplace	261
4.5 Aplicaciones.	274
Conclusiones	284
Bibliografía	286

Tema V. Introducción a las Series de Fourier	
Introducción	288
5.1 Teoría preliminar.	289
5.2 Series de Fourier.	291
5.3 Series de Fourier en cosenos, senos y de medio intervalo.	307
Conclusiones	322
Bibliografía	324

Resumen

Ecuaciones Diferenciales es un libro —no un simple compendio de apuntes— concebido y elaborado durante mi año sabático en el Instituto Tecnológico de Ensenada. Aunque en la red existan miles de recursos y cientos de textos sobre el tema (algunos sin duda más exhaustivos o elegantes), este es único: lleva mi voz, mi ritmo, mis ejemplos favoritos y la experiencia de más de treinta años enseñando a estudiantes del Tecnológico Nacional de México.

Dirigido a las carreras de Ingeniería Electromecánica, Mecatrónica, Sistemas Computacionales, Eléctrica y Electrónica del TecNM, el libro se organiza en cinco bloques esenciales:

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden
2. Ecuaciones lineales de orden superior
3. Transformada de Laplace
4. Sistemas de ecuaciones diferenciales
5. Series de Fourier

Cada sección ofrece demostraciones detalladas paso a paso, ejemplos resueltos y verificados personalmente (con apoyo de Mathematica, MATLAB, Maple, Octave e inteligencia artificial para garantizar precisión), gráficas claras y aplicaciones reales en circuitos, vibraciones, control y procesamiento de señales. Todas las fórmulas y expresiones están compuestas en LaTeX para lograr una presentación impecable.

No pretende ser el mejor libro del mundo, sino el libro que yo hubiera querido tener como alumno y como profesor: personal, cuidado y útil. En sus páginas está mi forma de entender y enseñar las matemáticas aplicadas, así como el deseo sincero de dejar a las próximas generaciones de ingenieros del TecNM un recurso propio y duradero.

Tras más de tres décadas de docencia y varias publicaciones previas, esta obra probablemente cierre mi trayectoria en el sistema tecnológico. Agradezco profundamente al Instituto Tecnológico de Ensenada el espacio y la confianza para hacerla realidad.

Tema I Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1.1 Teoría preliminar

1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)

Una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se denomina ecuación diferencial. Relación matemática que involucra derivadas de variables dependientes respecto a variables independientes.

Orden: Mayor grado de derivación presente en la ecuación.

Grado: Exponente de la derivada de mayor orden, cuando la ecuación está libre de fracciones y raíces en sus términos.

Linealidad: Una ecuación es lineal si las variables dependientes y sus derivadas aparecen en forma lineal (sin productos, potencias no lineales ni funciones no lineales); de lo contrario, es no lineal.

Problema No. 1

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en derivadas parciales

Ecuación diferencial	Ecuación diferencial
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$
$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \cos(2x)$	$\frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Ecuación en derivadas parciales	$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 3x = \sin t$
$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Ecuación en derivadas parciales	$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{8v}{\partial t} = v$ Ecuación en derivadas parciales
$\frac{d^4y}{dx^4} + x\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} = xe^x$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Ecuación en derivadas parciales

Definición

Una ecuación diferencial que involucra derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se denomina ecuación diferencial ordinaria.

Definición

Una ecuación diferencial que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente se denomina ecuación diferencial parcial.

Definición

El orden de la derivada de mayor grado presente en una ecuación diferencial se denomina el orden de la ecuación diferencial.

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden (n), en la variable dependiente (y) y la variable independiente (x), es una ecuación que está en, o puede expresarse en, la forma

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),$$

Donde $a_0(x)$ no es idénticamente cero

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria no lineal es una ecuación diferencial ordinaria que no es lineal.

Problema No. 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$	$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$
$\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2 + 1$	$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$

Problema No. 3

$$x^2y''' + (y')^3 l\,\mathrm{n}|y| = \sqrt[3]{x + (y'')^2}$$

Orden 3, grado 1, No lineal. **Justificación**: Aparece y''' (tercera derivada) como la más alta, y''' está elevada a la potencia 1, $(y')^3$, $ln|y|$ y $(y'')^2$ rompen la linealidad

1.1.2 Soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Definición

Una solución de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación al sustituirla en ella. Para una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de la forma

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, una función $y = \phi(x)$ es una solución si al reemplazar (y) y sus derivadas en la ecuación, se obtiene una identidad válida.

Tipos de Soluciones

- **Solución General**: Incluye todas las posibles soluciones de una EDO, parametrizadas por constantes arbitrarias. Para una EDO de orden (n), la solución general tiene (n) constantes.
- **Solución Particular**: Una solución específica obtenida al asignar valores a las constantes arbitrarias, generalmente usando condiciones iniciales o de contorno.
- **Solución Singular**: Una solución que no se obtiene de la solución general y satisface la ecuación en ciertos puntos (común en EDO no lineales).
- **Solución de Ecuaciones Parciales**: Para ecuaciones en derivadas parciales (EDP), las soluciones son funciones de varias variables que satisfacen la ecuación en un dominio.

El método a emplear depende del tipo de ecuación diferencial en consideración.

Supongamos que resolvemos una ecuación diferencial utilizando uno u otro de los diversos métodos. ¿Significa esto necesariamente que hemos encontrado una solución explícita, expresada en la llamada forma cerrada como una suma finita de funciones elementales conocidas? Es decir, en términos generales, cuando hemos resuelto una ecuación diferencial, ¿significa esto necesariamente que hemos encontrado una "fórmula" para la solución? La respuesta es "no". Relativamente pocas ecuaciones diferenciales tienen soluciones expresables de esta manera; de hecho, una solución en forma cerrada es realmente un lujo en las ecuaciones diferenciales.

En los temas 2 y 4 consideraremos ciertos tipos de ecuaciones diferenciales que sí tienen soluciones en forma cerrada y estudiaremos los métodos exactos disponibles para encontrar estas soluciones deseables. Tales ecuaciones son en realidad una minoría, y se debe considerar qué significa "resolver" ecuaciones para las cuales no están disponibles métodos exactos. Dichas ecuaciones se resuelven aproximadamente mediante diversos métodos. Entre estos métodos se encuentran los métodos de series, los métodos numéricos y los métodos gráficos. Los métodos de series producen soluciones en forma de series infinitas; los métodos numéricos proporcionan valores aproximados de las funciones solución correspondientes a valores seleccionados de las variables independientes; y los métodos gráficos generan aproximadamente las gráficas de las soluciones (las curvas integrales). Estos métodos no son tan deseables como los métodos exactos debido a la cantidad de trabajo que implican y porque los resultados obtenidos son solo aproximados; pero si los métodos exactos no son aplicables, no queda más remedio que recurrir a métodos aproximados.

Problema No.4

Ecuación	Tipo	Orden	Grado	Linealidad
$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$	EDO	1	1	Lineal
$\frac{dy}{dx} = y^2 + x$	EDO	1	1	No lineal
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$	EDO	2	1	Lineal
$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$	EDO	2	1	No lineal
$\frac{d^4y}{dx^4} + x\frac{dy}{dx} = xe^x$	EDO	4	1	Lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	EDP	2	1	Lineal
$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	EDP	1	1	No lineal
$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	EDP	2	1	Lineal
$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$	EDO	1	2	No lineal
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y = 0$	EDO	2	3	No lineal
$\sqrt{\frac{dy}{dx}} + y^2 = x$	EDO	1	2	No lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	EDP	2	1	Lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$	EDP	2	1	Lineal

Problema No. 5

Para determinar el orden y el grado de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y^{1/2} = 0$$

Paso 1: Identificar el Orden

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden presente en la ecuación.

En este caso, la derivada de mayor orden es $\frac{d^2y}{dx^2}$, que es una derivada de segundo orden.

Paso 2: Determinar el Grado

El grado de una ecuación diferencial es el exponente de la derivada de mayor orden, siempre que la ecuación sea polinómica en sus derivadas.

La ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^{1/2}$$

La derivada de mayor orden $\frac{d^2y}{dx^2}$ está elevada a la potencia 1 (implícitamente).

Aunque el término $y^{1/2}$no es polinómico en y, el grado se define en función de la derivada de mayor orden, que en este caso sí es polinómica (exponente 1). Por lo tanto, el grado es 1.

Respuesta Final:

$$\boxed{\text{Orden} = 2,\ \text{Grado} = 1}$$

Problema No. 6

Para determinar el orden y el grado de la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{3/2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Paso 1: Identificar el Orden

El orden corresponde a la derivada de mayor orden presente.

La derivada de mayor orden es $\frac{d^3y}{dx^3}$, que es de tercer orden.

Paso 2: Determinar el Grado

El grado es el exponente de la derivada de mayor orden, si la ecuación es polinómica.

Originalmente, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{3/2}$ no es polinómico. Al elevar al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

La derivada de mayor orden $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ tiene exponente 3.

Respuesta Final

$$\boxed{\text{Orden} = 3,\ \text{Grado} = 3}$$

Problema No. 7

Ecuación diferencial original:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{1/3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} = 0$$

Paso 1: Determinar el orden

La derivada de mayor orden presente es $\frac{d^4y}{dx^4}$, que es una derivada de cuarto orden.

Por lo tanto, Orden = 4.

Paso 2: Determinar el grado

Para encontrar el grado, primero debemos eliminar los exponentes fraccionarios:

1. Elevamos ambos lados de la ecuación al mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes (3 y 2), que es 6:

$$\left[\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{1/3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}\right]^6 = 0^6$$

2. Desarrollamos usando el binomio de Newton:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{6/3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{6/2} + \text{términos cruzados} = 0$$

3. Simplificamos los exponentes:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

El grado de la ecuación diferencial es el exponente de la derivada de mayor orden en su forma polinómica, que en este caso es 2.

Resultado final:

Orden = 4, Grado = 2

Problema No. 8

Ecuación Original:

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^{1/4} = x^2$$

Paso 1: Determinación del Orden

Identificamos la derivada de mayor orden presente en la ecuación:

$$\frac{d^5y}{dx^5} \quad \text{(Quinta derivada)}$$

Orden = 5

Paso 2: Determinación del Grado

Transformamos la ecuación a forma polinómica:

Elevamos ambos miembros a la cuarta potencia para eliminar el exponente fraccionario:

$$\left[\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^{1/4}\right]^4 = (x^2)^4$$

Simplificamos los exponentes:

$$\frac{d^5y}{dx^5} = x^8$$

Identificamos el exponente de la derivada de mayor orden:

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^1 \quad \text{(Exponente 1)}$$

Conclusión

La ecuación diferencial tiene:

$$\boxed{\text{Orden} = 5,\ \text{Grado} = 1}$$

Problema No. 9

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2} = x^2 + y^2$$

Paso 1: Determinación del Orden

Identificamos la derivada de mayor orden presente en la ecuación:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{(Tercera derivada)}$$

Orden = 3

Paso 2: Determinación del Grado

Transformamos la ecuación a forma polinómica:

Elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el exponente fraccionario:

$$\left[\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2}\right]^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Simplificamos los exponentes:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (x^2 + y^2)^2$$

Identificamos el exponente de la derivada de mayor orden:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^1 \quad \text{(Exponente 1)}$$

La ecuación diferencial tiene:

$$\boxed{\text{Orden} = 3,\ \text{Grado} = 1}$$

Problema No. 10

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2} = x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}$$

Paso 1: Determinación del Orden

Identificamos la derivada de mayor orden presente en la ecuación:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{(Tercera derivada)}$$

Orden = 3

Paso 2: Determinación del Grado

Transformamos la ecuación a forma polinómica:

Aislamos el término con la derivada de mayor orden:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} = x$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2} = x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}$$

Grado: El grado es el exponente de la derivada de mayor orden cuando la ecuación está en forma polinómica. Elevamos ambos lados al cuadrado para eliminar las raíces:

$$\left(\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/2}\right)^2 = \left(x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} + \frac{dy}{dx}$$

La derivada de mayor orden $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$aparece con exponente 1 en los términos donde está presente.

Conclusión

La ecuación diferencial tiene:

$$\boxed{\text{Orden} = 3,\ \text{Grado} = 1}$$

Ejemplo especial No. 1

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 = 0.$

El objetivo es demostrar que esta ecuación no admite ninguna solución (real, clásica o débil) en ningún intervalo abierto, por pequeño que sea.

Supongamos, por contradicción, que existe una función $y(x)$ diferenciable en algún intervalo abierto I que satisface la ecuación diferencial

$|\frac{dy}{dx}| + |y| + 1 = 0$para todo $x \in I$

Por propiedades del valor absoluto se tiene que

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \geq 0 \quad \text{y} \quad |y| \geq 0$$

en todo punto de I. Sumando estas desigualdades obtenemos

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| \geq 0.$$

Agregando 1 al lado izquierdo resulta

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 \geq 1.$$

Es decir, la expresión del lado izquierdo de la ecuación diferencial es siempre mayor o igual a 1 (y estrictamente mayor que 0) en todo punto donde y sea diferenciable.

Sin embargo, la ecuación exige que dicha expresión sea igual a 0. Esto es imposible, pues

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 \geq 1 > 0.$$

Se llega a una contradicción. Por lo tanto, no existe ninguna solución (ni siquiera en un intervalo arbitrariamente pequeño) para la ecuación diferencial

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 = 0.$$

Ejemplo especial No. 2

Un ejemplo simple de una ecuación diferencial ordinaria que no tiene solución en los números reales es:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

Interpretación: el cuadrado de cualquier número real es ≥ 0, por lo tanto nunca puede valer -1.

Conclusión: No existe ninguna función real y(x) que satisfaga la ecuación. No tiene solución en los reales.

Ejemplo especial No. 3

Ejemplo clásico de ecuación diferencial con condición inicial imposible: $y' = y$

Condición inicial: $y(0) = 5 \quad \text{y al mismo tiempo} \quad y(0) = 7$

La solución general de la ecuación es: $y = Ce^x$

Pero no existe ningún valor de la constante C que pueda satisfacer al mismo tiempo:

- $y(0) = C = 5$
- $y(0) = C = 7$

Conclusión: El problema con valor inicial es imposible (no tiene solución). Es inconsistente por la condición inicial contradictoria.

Ejemplo especial No. 4

Soluciones complejas en ecuaciones diferenciales

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1 \qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \pm i$$

Definición

Considera la ecuación diferencial ordinaria de orden (n).

1. $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

Donde F es una función real de sus $n + 2$ argumentos: $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$

Sea (f) una función real definida para todo (x) en un intervalo real (I) y que posee una derivada de orden (n) (y, por lo tanto, todas las derivadas de orden inferior) para todo $x \in I$. La función (f) se denomina una **solución explícita** de la ecuación diferencial (1) en (I) si cumple con los siguientes dos requisitos:

A. $F\left[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right]$

está definida para todo $x \in I$, y

B. $F\left[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right] = 0$

para todo $x \in I$

Es decir, la sustitución de $f(x)$ y sus diversas derivadas por (y) y sus derivadas correspondientes, respectivamente, en (1) reduce (1) a una identidad en (I).

Una relación $g(x, y) = 0$ se denomina una solución implícita de (1) si esta relación define al menos una función real (f)de la variable (x) en un intervalo (I), tal que esta función es una solución explícita de (1) en dicho intervalo.

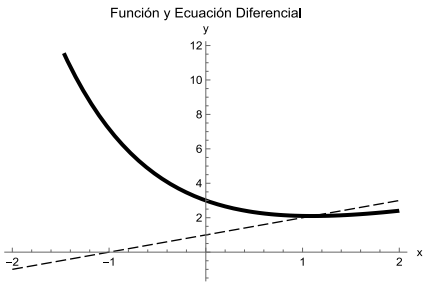
Tanto las soluciones explícitas como las implícitas generalmente se denominarán simplemente soluciones.

En términos generales, podemos decir que una solución de la ecuación diferencial (1) es una relación —explícita o implícita— entre (x) y (y), que no contiene derivadas, y que satisface idénticamente la ecuación (1).

Problema No. 11

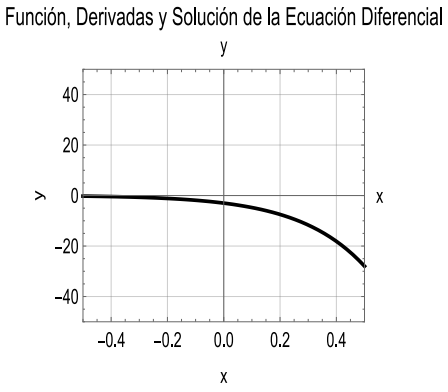
Demuestra que la función $f(x) = x + 3e^{-x}$ es una solución de la ecuación diferencial:

$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$ correspondiente en la Columna II en cada intervalo $a < x < b$ del eje x.

$y = x + 3e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - 3e^{-x}$ $\frac{dy}{dx} + y = (1 - 3e^{-x}) + (x + 3e^{-x})$ $1 - 3e^{-x} + x + 3e^{-x} = 1 + x = x + 1$ Conclusión $y = x + 3e^{-x}$ satisface la ecuación para todo (x), por lo que es una solución en cualquier intervalo $a < x < b$.	

Problema No. 12

Demuestra que la función $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ es una solución de $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

$y = 2e^{3x} - 5e^{4x},$ $\frac{dy}{dx} = 6e^{3x} - 20e^{4x},$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 18e^{3x} - 80e^{4x}$ $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y$ $= (18e^{3x} - 80e^{4x})$ $- 7(6e^{3x} - 20e^{4x})$ $+ 12(2e^{3x} - 5e^{4x})$ $[$ $= (18e^{3x} - 80e^{4x}) - (42e^{3x} - 140e^{4x})$ $+ (24e^{3x} - 60e^{4x})$ $e^{3x}: 18 - 42 + 24 = 0,$ $e^{4x}: -80 + 140 - 60 = 0$	Conclusión: $(f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x})$ satisface la ecuación para todo (x). 

Problema No. 13

Verificar que $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$ es una solución de $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$. Calculamos las derivadas y sustituimos:

1. Derivadas:

$$y = e^x + 2x^2 + 6x + 7, \quad \frac{dy}{dx} = e^x + 4x + 6, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + 4$$

2. Sustitución:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (e^x + 4) - 3(e^x + 4x + 6) + 2(e^x + 2x^2 + 6x + 7)$$

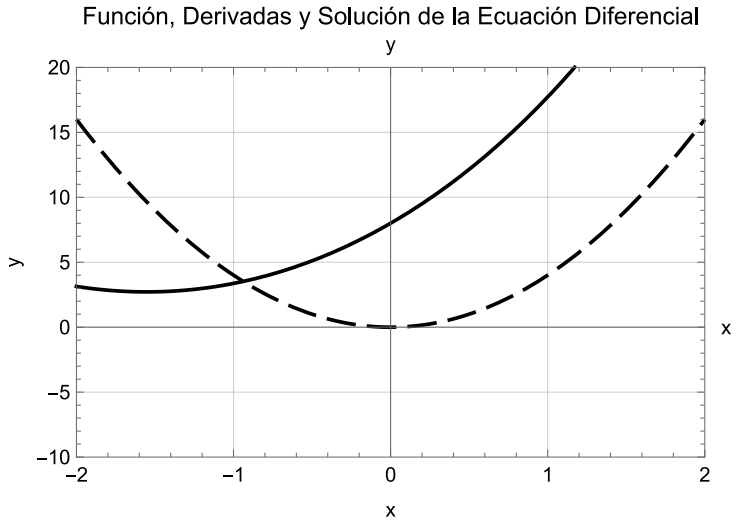
Simplificamos:

$$= (e^x + 4) - (3e^x + 12x + 18) + (2e^x + 4x^2 + 12x + 14)$$

$$e^x : 1 - 3 + 2 = 0, \quad x^2 : 4, \quad x : -12 + 12 = 0, \quad \text{constantes} : 4 - 18 + 14 = 0$$

$$= 4x^2$$

Conclusión: $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$ satisface la ecuación para todo x



Problema No. 14

Verificar que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es una solución de $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$:

1. Derivadas:

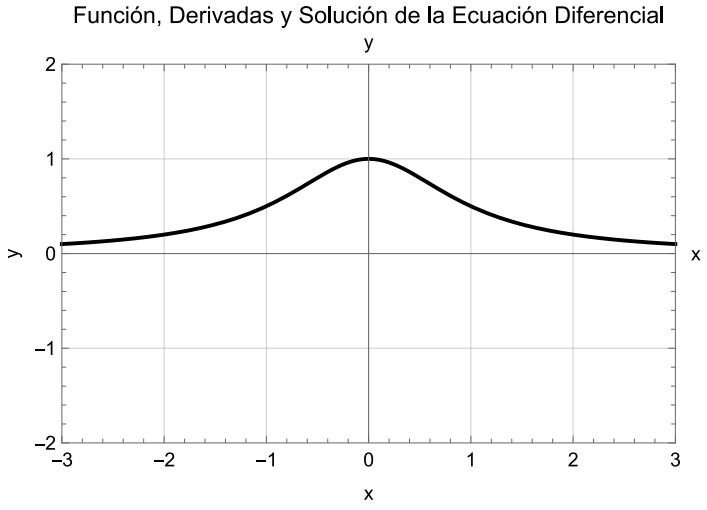
$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

2. Sustitución:

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = (1+x^2)\cdot\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} + 4x\cdot\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^2} - \frac{8x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2x^2-2+2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{0}{(1+x^2)^2} = 0$$

3. Conclusión: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ satisface la ecuación para todo (x)



1.1.3 Problema de valor inicial (PVI).

El problema de valor inicial **(PVI**) para una ecuación diferencial de primer orden consiste en encontrar una solución ($y(x)$) de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ que satisfaga una condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son valores dados. La solución describe una curva que pasa por el punto (x_0, y_0). Bajo condiciones de existencia y unicidad (como (f) y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas), el **PVI** tiene una solución única en un intervalo alrededor de x_0

Definición

Considera la ecuación diferencial de primer orden

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$…….(1)

Donde (f) es una función continua de $(x)y(y)$ en algún dominio (D) del plano (xy); y sea

$$(x_0, y_0)$$

un punto de (D). El problema de valor inicial asociado con la ecuación diferencial (1) consiste en encontrar una solución ϕ de la ecuación diferencial (1), definida en algún intervalo real que contenga x_0 , y que satisfaga la condición inicial: $\phi(x_0) = y_0$

En la notación abreviada habitual, este problema de valor inicial puede escribirse como:

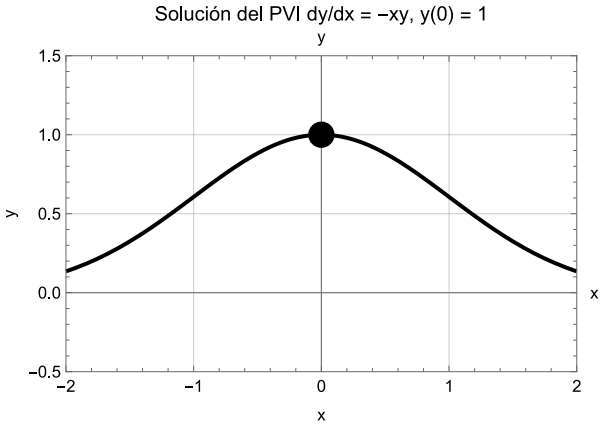
En la notación abreviada habitual, este problema de valor inicial puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Para resolver este problema, debemos encontrar una función ϕ que no solo satisfaga la ecuación diferencial (1), sino que también cumpla con la condición inicial de que tiene el valor y_0 cuando (x) tiene el valor x_0. La interpretación geométrica de la condición inicial, y por lo tanto de todo el problema de valor inicial, es fácilmente comprensible. La gráfica de la solución deseada ϕ debe pasar por el punto con coordenadas (x_0, y_0). Es decir, interpretado geométricamente, el problema de valor inicial consiste en encontrar una curva integral de la ecuación diferencial (1) que pase por el punto (x_0, y_0).

El método para encontrar la solución deseada ϕ depende de la naturaleza de la ecuación diferencial del problema, es decir, de la forma de $f(x,y)$. Ciertos tipos especiales de ecuaciones diferenciales tienen una familia de soluciones de un parámetro cuya ecuación puede encontrarse exactamente siguiendo procedimientos definidos más adelante. Si la ecuación diferencial del problema es de alguno de estos tipos especiales, primero se obtiene la ecuación de su familia de soluciones de un parámetro y luego se aplica la condición inicial a esta ecuación en un intento de obtener una solución "particular" ϕ que satisfaga todo el problema de valor inicial (ver gráfico).

El problema de valor inicial (PVI) para una ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ busca una solución $\phi(x)$ que satisfaga tanto la ecuación como la condición inicial $\phi(x_0) = y_0$. Geométricamente, esto implica encontrar una curva integral que pase por (x_0, y_0). Para ecuaciones especiales (por ejemplo, separables o lineales), se obtiene una familia de soluciones de un parámetro y se usa la condición inicial para hallar la solución particular. Si no es posible encontrar una solución exacta, se recurre a métodos aproximados (numéricos o gráficos).



Gráfica 1. Una solución "particular" ϕ que satisfaga todo el problema de valor inicial

Problema No. 15

Demuestre que

$y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ es solución del PVI $y(0) = 6, \quad y'(0) = 2$

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 2$$

1. Calculamos las derivadas:

$$y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}, \quad \frac{dy}{dx} = 8e^{2x} - 6e^{-3x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 16e^{2x} + 18e^{-3x}$$

2. Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = (16e^{2x} + 18e^{-3x}) + (8e^{2x} - 6e^{-3x}) - 6(4e^{2x} + 2e^{-3x})$$

$$e^{2x} : 16 + 8 - 24 = 0, \quad e^{-3x} : 18 - 6 - 12 = 0$$

$$= 0$$

La ecuación se satisface.

3. Verificamos las condiciones iniciales:

$$y(0) = 4e^0 + 2e^0 = 4 + 2 = 6 \quad (\text{satisface } y(0) = 6)$$

$$y'(0) = 8e^0 - 6e^0 = 8 - 6 = 2 \quad (\text{satisface } y'(0) = 2)$$

Conclusión: $y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ es solución del PVI.

¿Es ($y = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ una solución del PVI?

1. Derivadas:

$$y = 2e^{2x} + 4e^{-3x}, \quad \frac{dy}{dx} = 4e^{2x} - 12e^{-3x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 8e^{2x} + 36e^{-3x}$$

2. Sustitución en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = (8e^{2x} + 36e^{-3x}) + (4e^{2x} - 12e^{-3x}) - 6(2e^{2x} + 4e^{-3x})$$

$$e^{2x} : 8 + 4 - 12 = 0, \quad e^{-3x} : 36 - 12 - 24 = 0$$

$$= 0$$

La ecuación se satisface.

3. Condiciones iniciales:

$$y(0) = 2e^0 + 4e^0 = 2 + 4 = 6 \quad (\text{satisface } y(0) = 6)$$

$$y'(0) = 4e^0 - 12e^0 = 4 - 12 = -8 \quad (\text{no satisface } y'(0) = 2)$$

Conclusión: $y = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ satisface la ecuación diferencial, pero no la condición inicial $y'(0) = 2$. Por lo tanto, no es solución del PVI, ya que las condiciones iniciales determinan una solución única.

Problema No. 16

a) Dado que toda solución de $\frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}$ puede ser escrita de la forma $y = (x^2 + c)e^{-x}$, determinar el valor de la constante arbitraria (c) utilizando la condición inicial $y(0) = 2$.
b) Solución del problema de valor inicial: $y(-1) = e + 3$

a) 1. Aplicamos la condición inicial $y(0) = 2$: $y(0) = (0^2 + c)e^0 = c = 2$

Por lo tanto, $(c = 2)$, y la solución particular es: $y = (x^2 + 2)e^{-x}$

2. Verificamos que satisface la ecuación diferencial: $y = (x^2 + 2)e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-x} + (x^2 + 2)(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = (2xe^{-x} - x^2e^{-x} - 2e^{-x}) + (x^2 + 2)e^{-x} = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - 2e^{-x} + x^2e^{-x} + 2e^{-x} = 2xe^{-x}$$

El lado izquierdo coincide con el lado derecho $(2xe^{-x})$.

3. Conclusión: La solución del PVI es: $y = (x^2 + 2)e^{-x}$

Solución del problema de valor inicial: $y(-1) = e + 3$

Dado el PVI: $\frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}, \quad y(-1) = e + 3$

y sabiendo que la solución general es $y = (x^2 + c)e^{-x}$ determinamos (c).

b) 1. Aplicamos la condición inicial $y(-1) = e + 3$:

$$y(-1) = ((-1)^2 + c)e^1 = (1 + c)e = e + 3$$

$$1 + c = \frac{e+3}{e} = 1 + \frac{3}{e}, \quad c = \frac{3}{e}$$

La solución particular es: $y = \left(x^2 + \frac{3}{e}\right)e^{-x}$

2. Verificamos: $\frac{dy}{dx} = 2xe^{-x} - \left(x^2 + \frac{3}{e}\right)e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} + y = \left(2xe^{-x} - x^2e^{-x} - \frac{3}{e}e^{-x}\right) + \left(x^2 + \frac{3}{e}\right)e^{-x} = 2xe^{-x}$$

Se satisface la ecuación.

3. Conclusión: La solución es: $y = \left(x^2 + \frac{3}{e}\right)e^{-x}$

Problema No. 17

Dado que toda solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ puede escribirse en la forma $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, para alguna elección de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 , demuestre que los problemas de valores en la frontera (a) y (b) poseen soluciones, pero que (c) no.

$$(a): \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

La solución general es: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

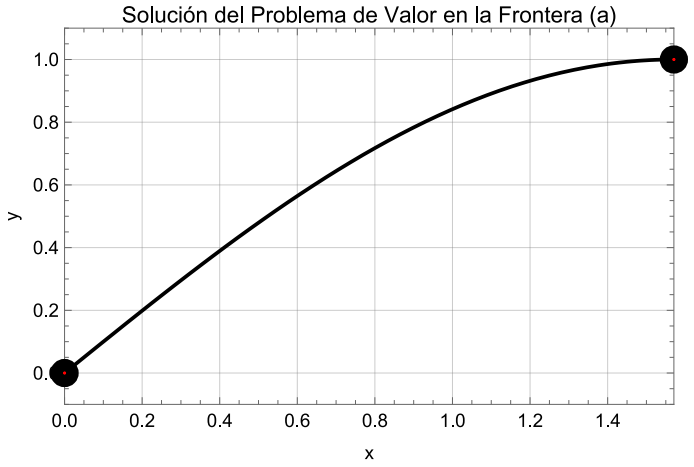
1. Condición $y(0) = 0$: $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0, c_2 = 0$

Entonces, $y = c_1 \sin x$.

2. Condición $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: $$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \sin\frac{\pi}{2} = c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Solución: $y = \text{sen}\, x$

Verificación: $y'' = -senx$, $y'' + y = -senx + senx = 0$. Además, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. El problema tiene solución.



Gráfica del problema de valor en la frontera. Inciso a)

b)

$$(b): \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, y(0) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

La solución general es: $y = c_1 \,\text{sen}\, x + c_2 \cos x$, $y' = c_1 \cos x - c_2 \,\text{sen}\, x$

1. Condición $y(0) = 1$: $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 1 c_2 = 1$

Entonces, $y = c_1 \,\text{sen}\, x + \cos x$, $y' = c_1 \cos x - \text{sen}\, x$.

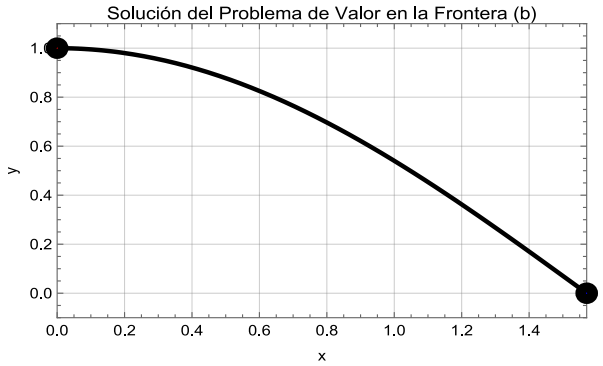
2. Condición $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

Se satisface para cualquier $(c_1). Elegimos(c_1 = 0). Solución: y = \cos x$

Verificación: $y'' = -\cos x\,, y'' + y = -\cos x + \cos x = 0.$ Además, $y(0) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

El problema tiene solución.



Gráfica del problema de valor en la frontera. Inciso b)

c)

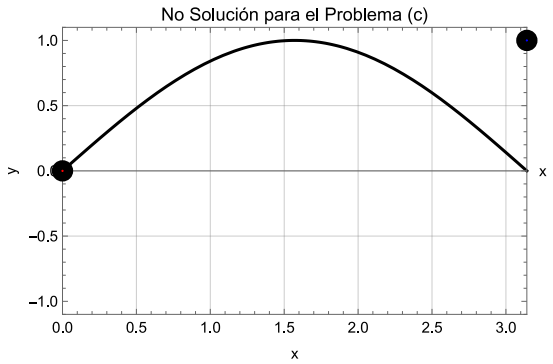
$$(c): \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1$$

La solución general es: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

1. Condición $y(0) = 0$: $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0, c_2 = 0$. Entonces, $y = c_1 \sin x$.

2. Condición $y(\pi) = 1$: $y(\pi) = c_1 \sin \pi = c_1 \cdot 0 = 0 \neq 1$

No existe (c_1) que satisfaga $y(\pi) = 1$.Las condiciones son inconsistentes, por lo que no hay solución.



Gráfica del inciso c). Soluciones inconsistentes

Problema No. 18

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$$

Solución

Integramos por primera vez:

$$\frac{dy}{dx} = \int 2\ dx = 2x + C_1$$

Aplicamos $y'(1) = 0$:

$$0 = 2(1) + C_1 \Rightarrow C_1 = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

Integramos por segunda vez:

$$y(x) = \int (2x - 2)\ dx = x^2 - 2x + C_2$$

Aplicamos $y(0) = 1$:

$$1 = 0 - 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$$

Solución final:

$$\boxed{y(x) = x^2 - 2x + 1}$$

Problema No. 19

Dada la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

con las condiciones iniciales $y(1) = 1\ y\ \ y'(1) = 1.$

Paso 1: Obtener la solución general

Integramos la ecuación dos veces:

$$\frac{dy}{dx} = \int 2\ dx = 2x + C_1$$

$$y(x) = \int (2x + C_1)\ dx = x^2 + C_1x + C_2$$

La solución general es:

$$y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$$

Paso 2: Aplicar las condiciones iniciales

1. Para $(y'(1) = 1)$:

$$y'(x) = 2x + C_1$$

$$y'(1) = 2 \cdot 1 + C_1 = 2 + C_1 = 1, \qquad C_1 = -1$$

Sustituimos $(C_1 = -1)$:

$$y(x) = x^2 - x + C_2$$

2. Para $(y(1) = 1)$:

$$y(1) = 1^2 - 1 + C_2 = 1 - 1 + C_2 = C_2 = 1$$

Sustituimos $(C_1 = -1) y (C_2 = 1)$:

$$y(x) = x^2 - x + 1$$

Paso 3: Verificación

- Ecuación diferencial: $y''(x) = 2$

$$y(1) = 1: y(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

$$y'(1) = 1: y'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Solución final:

$$\boxed{y(x) = x^2 - x + 1}$$

Ejemplo especial No. 5

Ecuación diferencial con soluciones complejas inmediatas:

$$y = i\,x + C_1 \quad \text{o} \quad y = -i\,x + C_2$$

Ejemplo especial No. 6

Ecuación que parece "imposible" en reales, pero tiene solución compleja bonita

$$y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 0$$

Solución (compleja): $y(x) = i\tan(ix)$

Nota: esta función es real en la franja vertical $-\pi/2 < Im(x) < \pi/2$, pero imaginaria pura en el eje real (excepto $x = 0$).

1.1.4 Teorema de existencia y unicidad.

El Teorema de Existencia y Unicidad es un resultado fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que garantiza, bajo ciertas condiciones, que un problema de valor inicial (**PVI**) tiene una solución y que esta solución es única en un intervalo alrededor del punto inicial. Específicamente, para una EDO de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, el teorema establece que si $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una región que contiene el punto (x_0, y_0), entonces existe un intervalo donde el PVI tiene una solución única.

Significado:

- Existencia: Asegura que hay al menos una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial.
- Unicidad: Garantiza que no hay otra solución diferente que también satisfaga las mismas condiciones, lo que es crucial para modelar fenómenos físicos donde se espera un comportamiento determinista (por ejemplo, en circuitos eléctricos o sistemas dinámicos).
- Aplicación en ingeniería: Proporciona confianza en que los modelos matemáticos (como el crecimiento de una señal en un circuito RC tienen soluciones predecibles y únicas bajo condiciones adecuadas.

Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $f(x, y)$ una función definida en un dominio $D \subset R^{\mathbb{2}}$, y sea $(x_0, y_0) \in D$. Si: $f(x, y)$ es continua en(D). La derivada parcial $(\frac{\partial f}{\partial y})$ existe y es continua en (D), entonces existe un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ donde el problema de valor inicial: $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ tiene una solución única $y(x)$.

Problema No. 24

Consideremos el siguiente PVI: $\frac{dy}{dx} = -xy, \quad y(0) = 1$

Verificación de las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad:

Sea $f(x, y) = -xy$

Continuidad de (f): $(f(x, y) = -xy$ es continua en $(R^{\mathbb{2}})$, ya que es un producto de funciones continuas.

Continuidad de $(\frac{\partial f}{\partial y})$: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-xy) = -x$

La función $(-x)$ es continua en $(R^{\mathbb{2}})$.

Como (f) y $(\frac{\partial f}{\partial y})$ son continuas en $(R^{\mathbb{2}})$, que incluye $\big((0,1)\big)$, el teorema garantiza una solución única en un intervalo alrededor de $(x = 0)$.

Resolución del PVI

La ecuación es separable:

Integramos

$$\int \frac{dy}{y} = \int -x\ dx, \qquad \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}+c} = ke^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k = e^c$$

Condición inicial $y(0) = 1$:

$$y(0) = ke^0 = k = 1$$

Solución:

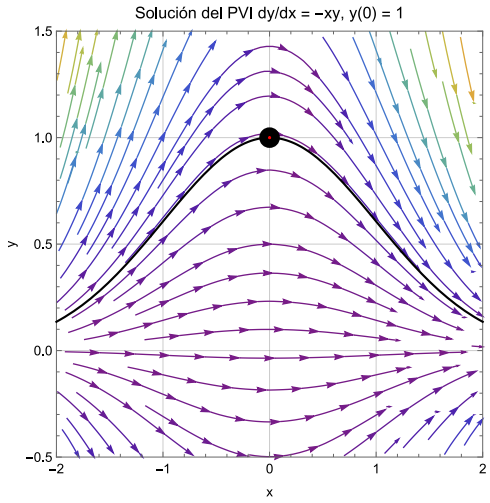
$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3. Verificación numérica:

En $(x = 0)$: $(y = e^0 = 1)$, satisface $y(0) = 1$.

En $(x = 1)$: $(y = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065)$, $(\frac{dy}{dx} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \approx -0.6065)$, coincide con $(f(1{,}0.6065) = -1 \cdot 0.6065)$.

La solución satisface la ecuación diferencial y la condición inicial.



Verificación gráfica de las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad:

Análisis del Teorema de Existencia y Unicidad para la Ecuación Diferencial

Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

Repite este análisis cuando la condición inicial se cambia a

$$(y(0) = 1).$$

Análisis

El Teorema de Existencia y Unicidad establece que, para el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

si las funciones

$$(f(x, y))\ y\ (\frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

son continuas en algún rectángulo abierto que contiene el punto inicial $((x_0, y_0))$, entonces existe una solución única en algún intervalo que contiene a (x_0).

En este caso,

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}$$

Ambas funciones son continuas siempre que $(y \neq 1)$.

Caso 1: $(y(0) = -1)$

Punto inicial: $((0, -1))$.

Como $(y = -1 \neq 1), (f(x, y))\ y\ (\frac{\partial f}{\partial y})$ son continuas en un rectángulo abierto alrededor de $(0, -1))$ que no cruce $(y = 1)$.

Por lo tanto, el teorema garantiza la existencia y unicidad de una solución en algún intervalo que contiene a $(x = 0)$.

Caso 2: $(y(0) = 1)$

Punto inicial: $((0,1))$.

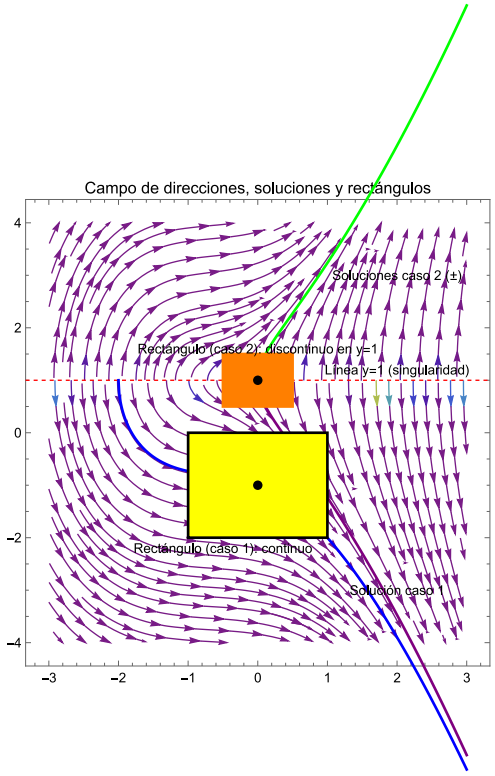
En este punto, $(y = 1)$, por lo que $(f(x, y))\ y\ (\frac{\partial f}{\partial y})$ no están definidas (el denominador se anula).

Las hipótesis del teorema no se cumplen, por lo que no se garantiza ni la existencia ni la unicidad de la solución.

Conclusión

Con $(y(0) = -1)$: existe y es única una solución en algún intervalo alrededor de $(x = 0)$.

Con $(y(0) = 1)$: el teorema no garantiza nada; podría no existir solución, o existir y no ser única.



Caso 1 $(y(0) = -1)$: La gráfica muestra una única solución (curva azul) que parte de (0, -1), se acerca asintóticamente a y=1 por debajo y existe en un intervalo alrededor de $x = 0$; el rectángulo amarillo confirma la continuidad de f y $\partial f/\partial y$.

Caso 2 $(y(0) = 1)$: Aparecen dos soluciones (verde y púrpura) que emergen de (0, 1) con tangentes verticales, solo para x ≥ 0; el rectángulo naranja incluye la singularidad en $y = 1$, explicando la falta de unicidad.

En resumen, la línea roja discontinua $(y = 1)$ actúa como barrera: separa regiones de unicidad (abajo) de no unicidad (en el punto singular).

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ o $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$, son fundamentales en la modelación de fenómenos donde la tasa de cambio de una variable depende de sí misma y/o de una variable independiente. Son esenciales en disciplinas como la ingeniería, física, biología y economía, ya que describen procesos dinámicos como el crecimiento exponencial (poblaciones, señales), el enfriamiento (ley de Newton), circuitos eléctricos (RC) o cinética química. Su simplicidad relativa las convierte en la base para entender sistemas más complejos, proporcionando herramientas para predecir comportamientos y optimizar diseños en aplicaciones prácticas.

Métodos de Solución

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, dependiendo de su tipo:

- Separación de Variables: Aplicable a ecuaciones separables $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, donde se integra tras separar términos. Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = -xy$
- Factores Integrantes: Usado para ecuaciones lineales $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, multiplicando por un factor $e^{\int P(x)\,dx}$. Ejemplo: $\frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}$
- Ecuaciones Exactas: Para ecuaciones de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, se encuentra una función potencial.
- Sustituciones Especiales: Como en ecuaciones homogéneas o de Bernoulli, que se transforman en formas resolubles.

Métodos Numéricos: Cuando no hay solución analítica, se usan métodos como Euler o Runge-Kutta.

Problemas de Valor Inicial (PVI): Se resuelven combinando estos métodos con condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, apoyados por el Teorema de Existencia y Unicidad.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ o $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$ son la base para entender temas avanzados en ecuaciones diferenciales, proporcionando conceptos y técnicas esenciales. En las ecuaciones diferenciales de orden superior, introducen soluciones generales y PVI, preparando para métodos como reducción de orden. En los Sistemas de Ecuaciones: Las EDO de primer orden son componentes de sistemas dinámicos, resueltos con matrices. En la Transformada de Laplace: La resolución de EDO lineales de primer orden facilita transformar derivadas y condiciones iniciales. En Temas Avanzados: Preparan para EDP, métodos numéricos y series de Fourier, modelando sistemas complejos en ingeniería.

Conclusión: Las EDO son fundamentales para desarrollar habilidades analíticas y aplicar modelos en electromecánica, mecatrónica y electrónica, siendo el cimiento para estudios avanzados.

1.2.1 Variables separables y reducibles

El método de separación de variables es una de las técnicas más fundamentales y ampliamente utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden debido a su simplicidad, versatilidad y aplicabilidad en una amplia gama de problemas prácticos. A continuación, se argumenta su relevancia:

Simplicidad y accesibilidad:

La separación de variables es un método directo que transforma una EDO en un problema de integración, accesible incluso para estudiantes con conocimientos básicos de cálculo. No requiere técnicas avanzadas como factores integrantes o transformadas, lo que lo hace ideal como introducción al estudio de EDO.

Amplia aplicabilidad:

Este método es aplicable a ecuaciones que modelan fenómenos en diversas disciplinas, como el crecimiento poblacional, el decaimiento radiactivo, el enfriamiento de Newton, circuitos eléctricos (RC) y procesos químicos. Por ejemplo, la ecuación $\frac{dy}{dt} = ky$ describe el crecimiento exponencial, común en biología y física.

Solución explícita o implícita:

El método permite obtener soluciones explícitas (cuando (y) se expresa como función de (x) o implícitas, lo que proporciona flexibilidad para adaptarse a las necesidades del problema.

Base para métodos más avanzados:

La separación de variables es un precursor para técnicas más complejas, como su extensión a ecuaciones diferenciales parciales (EDP), donde se usa para resolver problemas como la ecuación del calor o la ecuación de onda.

Interpretación física:

Las soluciones obtenidas suelen tener interpretaciones físicas claras, como tasas de cambio proporcionales a una variable, lo que facilita la conexión entre la matemática y las aplicaciones reales.

Consideraciones para resolver EDO de primer orden mediante separación de variables

Para aplicar correctamente el método de separación de variables, se deben tener en cuenta varias consideraciones prácticas y teóricas:

Identificación de la forma adecuada:

La ecuación debe poder escribirse como $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, donde las variables (x) y (y) puedan separarse completamente. Si la ecuación no tiene esta forma, se deben explorar otras técnicas (e.g., ecuaciones homogéneas o factores integrantes).

Dominio de las funciones: Es crucial verificar dónde $g(y) \neq 0$, ya que la separación implica dividir por (g(y)). Puntos donde $g(y) = 0$ pueden generar soluciones singulares o regiones donde la solución no está definida.

Integración:

La resolución depende de la capacidad de calcular las integrales $\int \frac{1}{g(y)}\, dy$ y $\int f(x)\, dx$.

Si estas integrales no son elementales, puede ser necesario usar métodos numéricos o aproximaciones.

Constantes de integración:

La integración introduce una constante (C), que genera una familia de soluciones generales. Si se proporciona una condición inicial (e.g., $y(x_0) = y_0$), se usa para determinar (C) y obtener una solución particular.

Soluciones singulares:

Además de la solución general, se deben buscar soluciones singulares, como $y = \text{constante}$, que satisfagan $g(y) = 0$. Estas soluciones no siempre surgen del proceso de separación.

Condiciones de contorno o iniciales:

Las condiciones iniciales deben ser consistentes con el dominio de la solución. Por ejemplo, si la solución involucra logaritmos, el argumento debe ser positivo.

Verificación:

Siempre es recomendable verificar la solución sustituyéndola en la EDO original para confirmar su validez y detectar posibles errores.

Problema No. 20

(separación de variables)

Para resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -6xy$ con la condición inicial $(y(0) = 7)$ usando separación de variables, procedemos como sigue:

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y} = -6x\, dx$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -6x\, dx$$

Obtenemos:

$$\ln|y| = -3x^2 + C_1$$

Exponenciamos para resolver (y):

$$|y| = e^{-3x^2+C_1} = e^{C_1}e^{-3x^2}$$

Sea $(C = e^{C_1})$,entonces:

$$y = \pm Ce^{-3x^2} = Ae^{-3x^2}$$

donde $(A = \pm C)$es una constante arbitraria.

Aplicamos la condición inicial $(y(0) = 7)$:

$$y(0) = Ae^{-3(0)^2} = A = 7$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y = 7e^{-3x^2}$$

Verificamos:

$$\frac{dy}{dx} = 7 \cdot (-6x)e^{-3x^2} = -42xe^{-3x^2}$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$-6xy = -6x \cdot 7e^{-3x^2} = -42xe^{-3x^2}$$

La solución satisface la ecuación diferencial y la condición inicial.

La solución final es:

$$\boxed{y = 7e^{-3x^2}}$$

Problema No.21

(separación de variables)

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$ con la condición inicial $(y(1) = 3)$ usando separación de variables:

Separamos las variables:

$$(3y^2 - 5)\,dy = (4 - 2x)\,dx$$

Integramos ambos lados:

$$\int (3y^2 - 5)\ dy = \int (4 - 2x)\ dx$$

$$\int (3y^2 - 5)\ dy = y^3 - 5y + C_1$$

$$\int (4-2x)\ dx = 4x - x^2 + C_2$$

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C$$

donde $(C = C_2 - C_1)$.

Aplicamos la condición inicial $(y(1) = 3)$:

$$3^3 - 5 \cdot 3 = 4 \cdot 1 - 1^2 + C$$

$$27 - 15 = 4 - 1 + C, \qquad 12 = 3 + C, \qquad C = 9$$

Por lo tanto, la solución implícita es:

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + 9$$

Verificamos:

$$\frac{d}{dx}(y^3 - 5y) = (3y^2 - 5)\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(4x - x^2 + 9) = 4 - 2x$$

Sustituyendo $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}\right)$, se cumple:

$$(3y^2 - 5) \cdot \frac{4 - 2x}{3y^2 - 5} = 4 - 2x$$

La condición inicial $(y(1) = 3)$ satisface $(3^3 - 5 \cdot 3 = 27 - 15 = 12) y (4 \cdot 1 - 1^2 + 9 = 4 - 1 + 9 = 12)$.

La solución final es:

$$\boxed{y^3 - 5y = 4x - x^2 + 9}$$

Problema No. 22

(separación de variables)

$$\left(y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = 0\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$

Separamos variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\int y^{-2}\ dy = \int -x^{-2}\ dx, \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=C, \qquad x+y=Cxy$$

$$y=\frac{x}{Cx-1}$$

Solución final:

$$\boxed{x+y=Cxy \quad \text{o} \quad y=\frac{x}{Cx-1}}$$

Problema No. 23

(Separación de variables)

Para resolver

$$\frac{dy}{dx}=(64xy)^{1/3}$$

Separamos variables:

$$\frac{dy}{y^{1/3}}=4x^{1/3}\,dx$$

Integramos:

$$\int y^{-1/3}\,dy=\int 4\,x^{1/3}\,dx, \qquad \frac{3}{2}y^{2/3}=3x^{4/3}+C$$

$$y^{2/3}-2x^{4/3}=C$$

$$y=\left(2x^{4/3}+C\right)^{3/2}$$

Solución final:

$$\boxed{y^{2/3}-2x^{4/3}=C \quad \text{o} \quad y=\left(2x^{4/3}+C\right)^{3/2}}$$

1.2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias Homogéneas.

Definición

La ecuación diferencial de primer orden $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ se dice que es homogénea si, cuando se escribe en la forma derivativa $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, existe una función (g) tal que ($f(x,y)$) puede expresarse en la forma $g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Teorema

Si la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (2)

es homogénea, entonces el cambio de variables ($y = vx$) transforma la ecuación (2) en una ecuación separable en las variables (v) y (x).

Problema No. 25

Ejemplos de ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$ Aquí, $f(x,y) = 1 + \frac{y}{x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$, donde $g(v) = 1 + v$ y $v = \frac{y}{x}$. Como la función depende solo de $\frac{y}{x}$, la ecuación es homogénea.	$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2}$$ La ecuación es homogénea porque $f(x,y)$ se expresa como una función de $\frac{y}{x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{3x + y}$$ La ecuación es homogénea porque depende únicamente de $\frac{y}{x}$.	$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$ La ecuación es homogénea porque depende únicamente de $\frac{y}{x}$.

Problema no. 26

Verifique que la ecuación diferencial $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ es homogénea.

$$2xy\,dy = -(x^2 - 3y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

$$f(x,y) = \frac{3(vx)^2 - x^2}{2x(vx)} = \frac{3v^2x^2 - x^2}{2vx^2} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

Como $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{3v^2-1}{2v}$, la ecuación es homogénea

Problema No. 27

Verifica que la ecuación diferencial $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - x\,dy = 0$ es homogénea

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = x\,dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$f(x,y) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

Para verificar si la ecuación es homogénea, sustituimos $(v = \frac{y}{x}$, de modo que $(y = vx)$. Entonces:

$$f(x,y) = \frac{vx + \sqrt{x^2 + (vx)^2}}{x} = \frac{vx + \sqrt{x^2(1 + v^2)}}{x} = \frac{vx + x\sqrt{1 + v^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{donde} \quad g(v) = v + \sqrt{1 + v^2}$$

Como $(f(x,y)$ depende únicamente de $(\frac{y}{x})$, la ecuación es homogénea.

Antes de proceder con la solución efectiva de ecuaciones homogéneas, consideraremos un procedimiento ligeramente diferente para reconocer dichas ecuaciones. Una función (F) se denomina homogénea de grado (n) si $F(tx, ty) = t^n F(x,y)$. Esto significa que si sustituimos (tx) y (ty) por (x) y (y), respectivamente, en $F(x,y)$, y luego factorizamos t^n, el otro factor que permanece es la expresión original $F(x,y)$ misma.

Problema No. 28

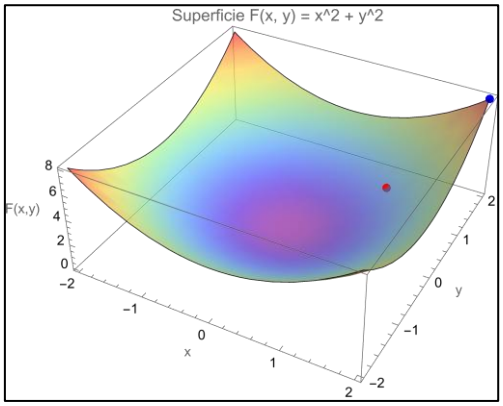
Demostración de homogeneidad de la función $F(x,y) = x^2 + y^2$

Dada la función $(F(x,y) = x^2 + y^2$, verificamos si es homogénea de grado (n). Según la definición, (F) es homogénea de grado (n) si: $F(tx,ty) = t^n F(x,y)$

Sustituimos (x)por (tx) y (y) por (ty):

$$F(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2F(x,y)$$

Por lo tanto, $(F(x,y) = x^2 + y^2)$ es homogénea de grado 2, ya que $(n = 2)$.



La gráfica muestra el paraboloide con dos puntos que ilustran la homogeneidad.

1.2.3 Exactas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Definición

Sea (F) una función de dos variables reales tal que (F) tiene derivadas parciales primeras continuas en un dominio (D). El diferencial total (dF) de la función (F) se define por la fórmula

$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$, para todo$(x,y) \in D$.

Definición

La expresión

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad (3)$$

se denomina un diferencial exacto en un dominio (D) si existe una función (F) de dos variables reales tal que esta expresión es igual al diferencial total $\big(dF(x,y)\big)$ para todo $(x,y) \in D$). Es decir, la expresión (3) es un diferencial exacto en (D) si existe una función (F) tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$.

Si $(M(x,y), dx + N(x,y), dy)$ es un diferencial exacto, entonces la ecuación diferencial: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta.

Teorema

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad (6)$$

donde (M) y (N) tienen derivadas parciales primeras continuas en todos los puntos (x,y) de un dominio rectangular (D).

1. Si la ecuación diferencial (2.6) es exacta en (D), entonces: $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$
2. Inversamente, si: $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad (7)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces la ecuación diferencial (6) es exacta en (D).

Problema No. 29

Consideremos la ecuación diferencial: $y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$. Verifica si es una ecuación diferencial exacta.

$$M(x,y) = y^2, \quad N(x,y) = 2xy$$

Calculamos las derivadas parciales: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$

Verificar la condición de exactitud. Comparamos: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$. Dado que: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

para todo $((x,y) \in R^{\mathbb{2}}$, la ecuación es exacta

Problema No. 30

Consideremos la ecuación diferencial:

$$(2x\sin y + y^3e^x)\,dx + (x^2\cos y + 3y^2e^x)\,dy = 0$$

$$M(x,y) = 2x\sin y + y^3e^x, \quad N(x,y) = x^2\cos y + 3y^2e^x$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x\sin y + y^3e^x) = 2x\cos y + 3y^2e^x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y + 3y^2e^x) = 2x\cos y + 3y^2e^x$$

Comparamos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos y + 3y^2e^x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos y + 3y^2e^x$$

Dado que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

para todo $((x,y) \in R^{\mathbb{2}}$, la ecuación es exacta

Problema No. 31

Determinar si la ecuación diferencial $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$ es exacta:

Identificamos

$$M(x,y) = 6xy - y^3), (N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - y^3) = 6x - 3y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4y + 3x^2 - 3xy^2) = 6x - 3y^2$$

Verificamos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dado que: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Sí, la ecuación es exacta

Problema No. 32

Determinar si la ecuación diferencial $(3y^2 + 5x^2y)dx + (3xy + 2x^3)dy = 0$ es exacta:

Identificamos

$$M(x,y) = 3y^2 + 5x^2y, \qquad N(x,y) = 3xy + 2x^3$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 5x^2y) = 6y + 5x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3xy + 2x^3) = 3y + 6x^2$$

Comparamos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y + 5x^2 \neq 3y + 6x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Solución final:

La ecuación no es exacta

1.2.4 Lineales.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son un tipo fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que se presentan en diversas aplicaciones científicas y de ingeniería.

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ donde ($P(x)$) y ($Q(x)$) son funciones continuas de (x) en un intervalo dado, y (y) es la función desconocida. La ecuación es lineal porque (y) y su derivada aparecen de forma lineal (sin potencias ni productos entre ellas.

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente (y) y la variable independiente (x) si es, o puede ser, escrita en la forma

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. …….(6)

Teorema

La ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ tiene un factor integrante de la forma

$$e^{\int P(x)\,dx}.$$

Una familia de soluciones de un parámetro para esta ecuación es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\ dx + C,$$

es decir,

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\ dx + C\right).$$

Además, puede demostrarse que esta familia de soluciones de un parámetro de la ecuación lineal (6) incluye todas las soluciones de (6).

Problema No. 33

Dada la ecuación diferencial:

$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^2$, la reescribimos en la forma estándar dividiendo por (x):

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x.$$

El factor integrante es:

$e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{x+\ln|x|} = xe^x \quad (\text{para } x > 0).$

Multiplicamos la ecuación por (xe^x):

$$xe^x\frac{dy}{dx} + (x+1)e^x y = x^2e^x.$$

El lado izquierdo es la derivada de un producto:

$\frac{d}{dx}(y \cdot xe^x) = x^2e^x.$

Integramos ambos lados:

$$y \cdot xe^x = \int x^2e^x \, dx + C.$$

Calculamos la integral por partes:

$$\int x^2e^x \, dx = x^2e^x - \int 2x\, e^x \, dx, \quad \int 2x\, e^x \, dx = 2xe^x - \int 2\, e^x \, dx = 2xe^x - 2e^x.$$

Entonces:

$$\int x^2e^x \, dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + C_2 = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_2.$$

Por lo tanto:

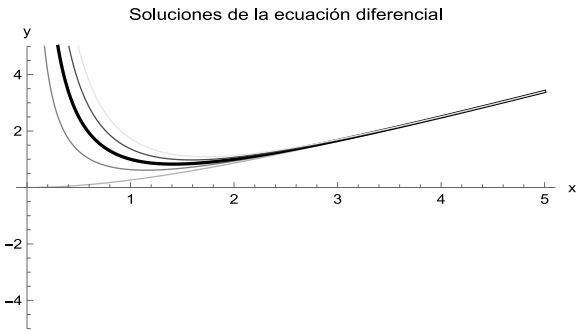
$$y \cdot xe^x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Despejamos (y):

$$y = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}{xe^x} = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{C}{xe^x}.$$

La solución general es:

$$y = x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{C}{xe^x}, \quad x > 0.$$



Problema No. 34

Solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x} y = e^{-2x},$$

está en la forma estándar con $P(x) = 2 + \frac{1}{x}) y (Q(x) = e^{-2x}$

El factor integrante es:

$$e^{\int \left(2+\frac{1}{x}\right) dx} = e^{2x+\ln|x|} = xe^{2x} \quad (\text{para } x > 0).$$

Multiplicamos la ecuación por (xe^{2x}):

$$xe^{2x} \frac{dy}{dx} + (2x+1)e^{2x} y = xe^{2x} \cdot e^{-2x} = x.$$

El lado izquierdo es:

$$\frac{d}{dx}(y \cdot xe^{2x}) = x.$$

Integramos:

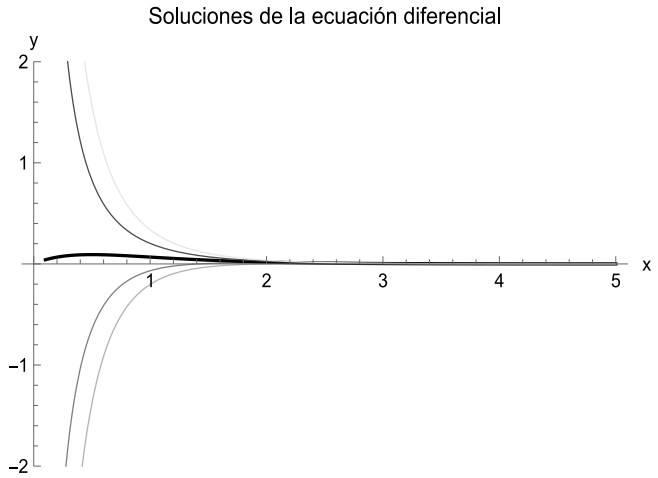
$$y \cdot xe^{2x} = \int x \, dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Despejamos (y):

$$y = \frac{\frac{x^2}{2} + C}{xe^{2x}} = \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{C}{xe^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{x}{2} + \frac{C}{x}\right).$$

La solución general es:

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left(\frac{x}{2} + \frac{C}{x}\right), \quad x > 0.$$



Problema No. 35

Solución del problema de valor inicial

Dada la ecuación diferencial:

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x, \quad y(2) = 1,$$

la reescribimos en la forma estándar dividiendo por $(x^2 + 1)$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2 + 1}y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

El factor integrante es:

$$e^{\int \frac{4x}{x^2+1} dx} = e^{2\ln(x^2+1)} = (x^2 + 1)^2.$$

Multiplicamos la ecuación por $((x^2 + 1)^2)$:

$$(x^2 + 1)^2\frac{dy}{dx} + 4x(x^2 + 1)y = x(x^2 + 1).$$

El lado izquierdo es:

$$\frac{d}{dx}[y(x^2 + 1)^2] = x(x^2 + 1).$$

Integramos:

$$y(x^2 + 1)^2 = \int x\,(x^2 + 1)\,dx + C = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Despejamos (y):

$$y = \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 4C}{4(x^2+1)^2}.$$

Aplicamos la condición inicial $(y(2) = 1)$:

$$1 = \frac{2^4 + 2 \cdot 2^2 + 4C}{4(2^2+1)^2} = \frac{16 + 8 + 4C}{4 \cdot 25} = \frac{24 + 4C}{100}.$$

Resolviendo:

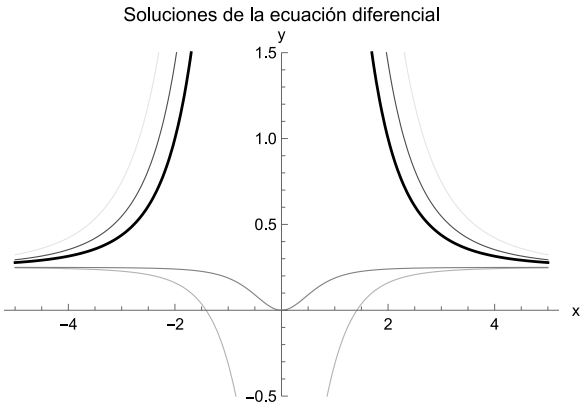
$100 = 24 + 4C$, $4C = 76$, $C = 19$.

La solución particular es:

$$y = \frac{x^4 + 2x^2 + 76}{4(x^2+1)^2}.$$

La solución general es:

$$y = \frac{x^4 + 2x^2 + 4C}{4(x^2+1)^2}.$$



Problema No. 36

Resolver

$$x\frac{dy}{dx}+2y=7x^2),(y(2)=5$$

Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=7x$$

Factor integrante:

$$e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$$

$$\int\frac{2}{x}\,dx=2\ln|x|\,,\quad e^{2\ln|x|}=|x|^2=x^2$$

Multiplicamos:

$$\frac{d}{dx}(x^2y)=7x^3$$

Integramos:

$$x^2y=\frac{7x^4}{4}+C,\qquad y=\frac{7x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$$

Condición inicial

$$y(2)=5:\quad \frac{7\cdot 4}{4}+\frac{C}{4}=7+\frac{C}{4}=5,\qquad C=-8$$

Solución:

$$y=\frac{7x^2}{4}-\frac{8}{x^2}$$

Problema No. 37

Resolver

$$2x\frac{dy}{dx}+y=10\sqrt{x}$$

Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2x}y=\frac{5}{\sqrt{x}}$$

Factor integrante:

$$e^{\int\frac{1}{2x}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln x}=x^{1/2}=\sqrt{x}$$

Multiplicamos por

$$\sqrt{x}: \quad \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x^{-1/2}y = 5$$

Reconocemos:

$$\frac{d}{dx}\left(y\sqrt{x}\right) = 5$$

Integramos:

$$y\sqrt{x} = 5x + C, \qquad y = \frac{5x + C}{\sqrt{x}} = 5\sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Solución final:

$$\boxed{y = 5\sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}}$$

Problema No. 38

Resolver

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} = 4x^2, \qquad v = \frac{dy}{dx}$$

Sustituimos

$$v = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx}, \qquad x^2\frac{dv}{dx} + 3xv = 4x^2$$

Forma estándar:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = 4$$

Factor integrante:

$$e^{\int \frac{3}{x}dx} = x^3$$

$$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\ln|x|$$

$$e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln|x|} = e^{\ln|x|^3} = |x|^3$$

Para

$$x > 0, \qquad |x|^3 = x^3$$

Multiplicamos:

$$\frac{d}{dx}(x^3 v) = 4x^3$$

Integramos:

$$(x^3 v = x^4 + C_1, \qquad v = x + \frac{C_1}{x^3}).$$

Integramos

$$v = \frac{dy}{dx}: \quad y = \int \left(x + \frac{C_1}{x^3}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2$$

Solución general:

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{x^2} + C_2, \qquad C = -\frac{C_1}{2}$$

Solución final:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{x^2} + C_2}$$

1.2.5 Ecuación de Bernoulli.

Un tipo de ecuación bastante especial que puede reducirse a una ecuación lineal mediante una transformación adecuada. Esta es la llamada ecuación de Bernoulli.

La ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial de primer orden no lineal de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

donde ($n \neq 0, 1$). Puede transformarse en una ecuación lineal mediante la sustitución ($v = y^{1-n}$), lo que resulta en:

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x).$$

Esta ecuación lineal se resuelve usando un factor integrante. La ecuación de Bernoulli modela problemas con dependencias no lineales en diversas áreas, y su solución general incluye una solución particular más términos dependientes de una constante arbitraria (C).

Definición

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (7)$$

se denomina ecuación diferencial de Bernoulli.

Observamos que si $(n = 0)o(1)$, entonces la ecuación de Bernoulli (7) es en realidad una ecuación lineal y, por lo tanto, puede resolverse fácilmente como tal. Sin embargo, en el caso general en el que $(n \neq 0)o(1)$, esta situación simple no se cumple y debemos proceder de una manera diferente. Ahora enunciamos Teorema que proporciona un método de solución para el caso general.

Teorema

Supongamos que $(n \neq 0)\ o\ (1)$,. Entonces, la transformación ($v = y^{1-n}$), reduce la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

a una ecuación lineal en (v).

Problema No. 39

(Ecuación diferencial de Bernoulli)

Consideremos la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

Esta es una ecuación de Bernoulli de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$, con $P(x) = 1, Q(x) = x$ y $(n = 3)$. Para resolverla, realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-2}$, de modo que $y = v^{-1/2}$. Derivamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(v^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2}v^{-3/2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$-\frac{1}{2}v^{-3/2}\frac{dv}{dx} + v^{-1/2} = x\left(v^{-1/2}\right)^3$$

Dado que $\left(v^{-1/2}\right)^3 = v^{-3/2}$, la ecuación se convierte en:

$$-\frac{1}{2}v^{-3/2}\frac{dv}{dx} + v^{-1/2} = xv^{-3/2}$$

Multiplicamos ambos lados por $-2v^{3/2}$:

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de la forma $(\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x))$, con $(P(x) = -2$ y $(Q(x) = -2x)$. El factor integrante es:

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x}$$

El lado izquierdo es la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}(ve^{-2x}) = -2xe^{-2x}$$

Integramos ambos lados:

$$ve^{-2x} = \int -2x\,e^{-2x}\,dx$$

Resolvemos la integral usando integración por partes. Sea $(u = -2x), (dv = e^{-2x}\,dx)$, entonces $(du = -2\,dx), (v = -\frac{1}{2}e^{-2x})$:

$$\int -2x\, e^{-2x}\, dx = (-2x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-2)\, dx$$

$$= xe^{-2x} - \int e^{-2x}\, dx$$

$$= xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Por lo tanto:

$$ve^{-2x} = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Multiplicamos por (e^{2x}):

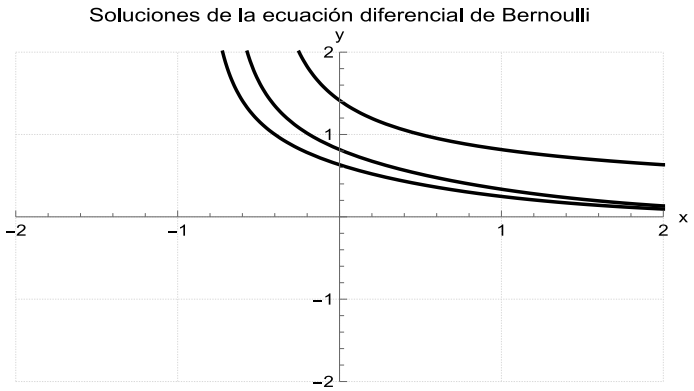
$$v = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Sustituimos $(v = y^{-2})$:

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}}}$$



Problema No. 40

Consideremos la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=6x^2$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $(\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)), con\ (P(x)=\frac{3}{x})y\ (Q(x)=6x^2).$ Procedemos a resolverla usando el método del factor integrante.

Paso 1: Factor integrante

El factor integrante es: $e^{\int P(x)dx}=e^{\int \frac{3}{x}dx}=e^{3\ln|x|}=|x|^3$

Consideramos (x^3) como factor integrante (asumiendo $(x>0); para\ (x<0)$, la constante se ajustará).

Paso 2: Multiplicar por el factor integrante

Multiplicamos la ecuación por (x^3): $x^3\frac{dy}{dx}+x^3\cdot\frac{3}{x}y=x^3\cdot 6x^2$

Simplificamos: $x^3\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x^5$

El lado izquierdo es la derivada de (yx^3): $\frac{d}{dx}(yx^3)=6x^5$

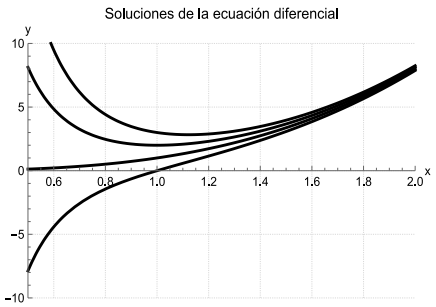
Paso 3: Integrar

Integramos ambos lados: $yx^3=\int 6x^5dx=6\cdot\frac{x^6}{6}+C=x^6+C$

Paso 4: Despejar (y)

Dividimos por (x^3): $y=\frac{x^6+C}{x^3}=x^3+\frac{C}{x^3}$

Por lo tanto, la solución general es: $y=x^3+\frac{C}{x^3}$



Problema No. 41

Consideremos la ecuación diferencial: $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1$

Paso 1: Reorganizar en la forma estándar

Dividimos por (x^4):

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x^3}{x^4} y = \frac{1}{x^4}$$

Simplificamos:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^4}$$

Paso 2: Factor integrante

El factor integrante es:

$e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln|x|} = x^2 \quad (\text{para } x \neq 0)$

Paso 3: Multiplicar por el factor integrante

Multiplicamos la ecuación por (x^2): $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{x^2}$

El lado izquierdo es la derivada de (yx^2): $\frac{d}{dx}(yx^2) = \frac{1}{x^2}$

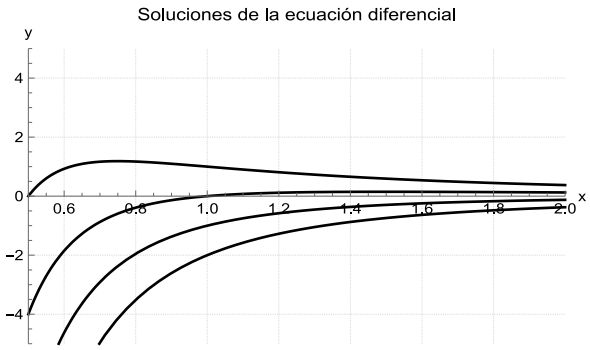
Paso 4: Integrar

Integramos ambos lados: $yx^2 = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

Paso 5: Despejar (y)

Dividimos por (x^2): $y = \frac{-\frac{1}{x} + C}{x^2} = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

Por lo tanto, la solución general es: $\boxed{y = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$



Problema No. 42

(Ecuación de Bernoulli)

Para resolver la ecuación de Bernoulli

$$x\frac{dy}{dx}+6y=3xy^{4/3}$$

Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{6}{x}y=3y^{4/3}$$

Sustitución de Bernoulli:

$$n=\frac{4}{3},\qquad v=y^{1-\frac{4}{3}}=y^{-\frac{1}{3}},\qquad y=v^{-3},\qquad \frac{dy}{dx}=-3v^{-4}\frac{dv}{dx}$$

Sustituimos:

$$x\left(-3v^{-4}\frac{dv}{dx}\right)+6v^{-3}=3(v^{-3})^{4/3}=3v^{-4}$$

Multiplicamos por

$$v^4:\quad -3x\frac{dv}{dx}+6v=3,\qquad \frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=-\frac{1}{x}$$

Factor integrante:

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

Multiplicamos:

$$\frac{d}{dx}\left(v\cdot\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^3}$$

Integramos:

$$v\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2x^2}+C,\qquad v=\frac{1}{2}+Cx^2$$

Volvemos a

$$y:\ y^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+Cx^2,\qquad y=\left(\frac{1}{2}+Cx^2\right)^{-3}$$

Solución final:

$$\boxed{y=\left(\frac{1}{2}+Cx^2\right)^{-3}}$$

Problema No. 43

(Ecuación de Bernoulli)

Para resolver la ecuación de Bernoulli

$$x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2$$

Reorganizamos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x^2}$$

Sustitución de Bernoulli

$$((n=2)):\ \ v = y^{-1} = \frac{1}{y}, \qquad y = \frac{1}{v}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituimos:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{v} = \frac{1}{v^2x^2}$$

Multiplicamos por

$$-v^2:\ \ \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2}$$

Factor integrante:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x), (e^{\ln x} = x$$

Multiplicamos:

$$\frac{d}{dx}(xv) = -\frac{1}{x}$$

Integramos:

$$xv = -\ln x + C, \qquad v = -\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$$

Volvemos a

$$(y):\ \ \frac{1}{y} = \frac{C - \ln x}{x}, \qquad y = \frac{x}{C - \ln x}$$

Solución final:

$$\boxed{y = \frac{x}{C - \ln x}}$$

1.3 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son fundamentales en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, ya que modelan fenómenos donde la tasa de cambio de una variable depende de su valor actual y, a veces, de otras variables. A continuación, se presenta un listado de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en distintos campos, incluyendo circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, térmicos, hidráulicos y otros, con ejemplos específicos y una breve descripción de cómo se utilizan.

Circuitos eléctricos

Descripción: Las ecuaciones diferenciales de primer orden modelan el comportamiento de circuitos eléctricos simples, como los circuitos RC (resistencia-condensador) y RL (resistencia-inductor), donde la corriente o el voltaje cambian con el tiempo.

Ejemplo: Circuito RC en serie.

La ecuación diferencial que describe la carga $Q(t)$ en un condensador en un circuito RC es:

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V(t)$$

donde (R) es la resistencia, (C) es la capacitancia, y $V(t)$ es el voltaje aplicado.

Aplicación: Modela la carga o descarga de un condensador, como en filtros electrónicos o circuitos de temporización.

Otro ejemplo: Circuito RL.

La corriente $\big(I(t)\big)$ en un circuito RL satisface:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=V(t)$$

donde (L) es la inductancia. Esto se usa en fuentes de alimentación y transformadores.

Sistemas mecánicos

Descripción: Estas ecuaciones modelan el movimiento de sistemas mecánicos con una sola variable dependiente, como la velocidad o el desplazamiento, en presencia de fuerzas como fricción o amortiguamiento.

Ejemplo: Movimiento amortiguado de un objeto con fricción.

La velocidad $v(t)$ de un objeto que se mueve bajo una fuerza de fricción proporcional a su velocidad se modela como:

$$m\frac{dv}{dt}+kv=F(t)$$

donde (m) es la masa, (k) es la constante de fricción, y $F(t)$es una fuerza externa.

Aplicación: Describe el movimiento de un paracaidista o un vehículo frenando con resistencia viscosa.

Otro ejemplo: Sistema masa-resorte con fricción.

La ecuación para el desplazamiento $x(t)$ en un sistema con amortiguamiento es:

$$m\frac{dx}{dt} + cx = F(t)$$

Usada en suspensión de vehículos o sistemas de absorción de vibraciones.

Sistemas térmicos

Descripción: Las ecuaciones diferenciales de primer orden modelan la transferencia de calor en sistemas donde la temperatura cambia con el tiempo, como en el enfriamiento o calentamiento de objetos.

Ejemplo: Ley de enfriamiento de Newton.

La temperatura $T(t)$ de un objeto que se enfría en un ambiente a temperatura constante T_a sigue:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde (k) es la constante de enfriamiento.

Aplicación: Modela el enfriamiento de un café, un motor, o el calentamiento de un horno.

Otro ejemplo: Calentamiento de un fluido en un tanque

La temperatura de un fluido mezclado en un tanque con entrada y salida de calor se modela con ecuaciones similares, ajustadas por flujos térmicos.

Sistemas hidráulicos

Descripción: Estas ecuaciones describen el flujo de fluidos en tuberías, tanques, o sistemas de drenaje, considerando tasas de entrada y salida.

Ejemplo: Llenado o vaciado de un tanque.

La altura $h(t)$ del nivel de agua en un tanque con un orificio de salida se modela como:

$$A\frac{dh}{dt} = Q_{\text{in}} - k\sqrt{h}$$

donde (A) es el área de la sección transversal del tanque, Q_{in} es el flujo de entrada, y $k\sqrt{h}$ representa el flujo de salida (ley de Torricelli).

Aplicación: Diseño de sistemas de riego, tanques de almacenamiento, o embalses.

Otro ejemplo: Flujo en tuberías con resistencia.

La presión $P(t)$ en una tubería con flujo viscoso puede modelarse con ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, usadas en sistemas de distribución de agua.

Crecimiento y decaimiento (poblacional, químico, radiactivo)

Descripción: Las ecuaciones diferenciales de primer orden modelan procesos de crecimiento exponencial o decaimiento, como poblaciones, reacciones químicas, o desintegración radiactiva.

Ejemplo: Crecimiento poblacional.

La población $P(t)$ de una especie con tasa de crecimiento proporcional a su tamaño sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Aplicación: Modela el crecimiento de bacterias, poblaciones animales, o difusión de tecnologías.

Otro ejemplo: Decaimiento radiactivo.

La cantidad $N(t)$ de una sustancia radiactiva satisface:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Usada en datación por carbono-14 o medicina nuclear.

Sistemas químicos (reacciones químicas)

Descripción: Modelan la concentración de reactivos o productos en reacciones químicas de primer orden.

Ejemplo: Reacción química de primer orden.

La concentración $C(t)$ de un reactivo sigue:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

Aplicación: Usada en farmacocinética para modelar la eliminación de un medicamento en el cuerpo o en procesos industriales como la descomposición de compuestos.

Sistemas financieros

Descripción: Las ecuaciones diferenciales modelan el crecimiento de capital con interés continuo o la amortización de préstamos.

Ejemplo: Interés compuesto continuo.

El saldo $S(t)$ en una cuenta con interés continuo satisface:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

donde (r) es la tasa de interés.

Aplicación: Cálculo de inversiones a largo plazo o crecimiento de fondos.

Modelos epidemiológicos

Descripción: Modelan la propagación de enfermedades en poblaciones, especialmente en las etapas iniciales.

Ejemplo: Modelo SIR simplificado.

En la fase inicial de una epidemia, la tasa de infectados $I(t)$ puede aproximarse con: $\frac{dI}{dt} = \beta I$

donde β es la tasa de infección.

Aplicación: Predicción de brotes de enfermedades como el COVID-19 en sus primeras etapas.

Sistemas biológicos

Descripción: Modelan procesos biológicos como la absorción de nutrientes o el crecimiento de tejidos.

Ejemplo: Absorción de glucosa.

La concentración de glucosa en la sangre $G(t)$ puede modelarse como:

$$\frac{dG}{dt} = -kG + R(t)$$

donde $R(t)$ es la tasa de ingreso de glucosa.

Aplicación: Control de niveles de azúcar en pacientes diabéticos.

Sistemas de control

Descripción: Las ecuaciones diferenciales de primer orden se usan en sistemas de control para modelar respuestas dinámicas simples.

Ejemplo: Control de temperatura en un termostato.

La temperatura $T(t)$ en un sistema controlado puede modelarse como: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{set}})$ donde T_{set} es la temperatura deseada.

Aplicación: Diseño de sistemas de calefacción o refrigeración.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son versátiles y se aplican en:

- Circuitos eléctricos: Carga/descarga en circuitos RC y RL.
- Sistemas mecánicos: Movimiento con fricción o amortiguamiento.
- Sistemas térmicos: Enfriamiento o calentamiento (ley de Newton).
- Sistemas hidráulicos: Flujo en tanques o tuberías.
- Crecimiento y decaimiento: Poblaciones, radiactividad, reacciones químicas.

- Finanzas: Interés compuesto continuo.
- Epidemiología: Propagación inicial de enfermedades.
- Biología: Procesos metabólicos.
- Control: Sistemas dinámicos simples.

Problema No. 44

Para ciertos valores de la constante m, la función f definida por $f(x) = e^{mx}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$

Determine todos los valores de m.

Solución

Para encontrar los valores de m tales que $f(x) = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada, sustituimos $y = e^{mx}$ en la ecuación. Calculamos las derivadas:

$y = e^{mx}$, $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = m^3e^{mx}$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$m^3e^{mx} - 3m^2e^{mx} - 4me^{mx} + 12e^{mx} = 0.$$

Factorizamos e^{mx}, que no es cero para todo x:

$$e^{mx}(m^3 - 3m^2 - 4m + 12) = 0.$$

Para que la ecuación se satisfaga, el polinomio característico debe ser igual a cero:

$$m^3 - 3m^2 - 4m + 12 = 0.$$

Resolvemos este polinomio. Probamos posibles raíces racionales usando el teorema de la raíz racional (factores de 12 divididos por factores de 1: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$). Evaluamos $m = 2$:

$$2^3 - 3(2^2) - 4(2) + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0.$$

Por lo tanto, $m = 2$ es una raíz.

Dividimos el polinomio $m^3 - 3m^2 - 4m + 12$ entre $m - 2$ usando división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

El cociente es $m^2 - m - 6$, por lo que el polinomio se factoriza como:

$$(m-2)(m^2-m-6)=0.$$

Factorizamos el polinomio cuadrático:

$$m^2-m-6=(m-3)(m+2)=0.$$

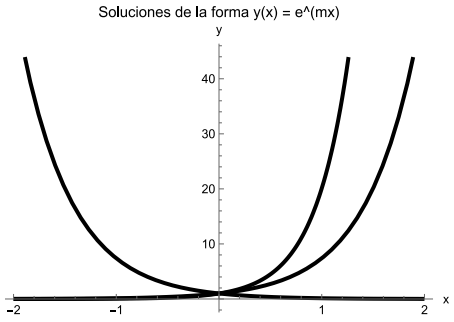
Las raíces son $m=3$ y $m=-2$. Por lo tanto, las raíces del polinomio característico son:

$$m=-2,\quad m=2,\quad m=3.$$

El polinomio es de grado 3, por lo que tiene a lo sumo tres raíces. Como las raíces encontradas son distintas, no hay raíces múltiples ni otras soluciones.

Respuesta final: Los valores de m para los cuales $f(x)=e^{mx}$ es una solución de la ecuación diferencial son:

$$\boxed{m=-2,\ 2,\ 3}.$$



Problema No. 45

Dado que la solución de la ecuación diferencial

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}-6y=0$$

puede escribirse de la forma $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ para algunas constantes arbitrarias c_1, c_2, c_3, resuelva el problema de valor inicial con las condiciones $y(2)=0$, $y'(2)=2$, y $y''(2)=6$.

Solución

La solución general dada es:

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3.$$

Calculamos las derivadas:

Primera derivada: $y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2$,

Segunda derivada: $y''=2c_2+6c_3x$.

Aplicamos las condiciones iniciales en $x=2$:

1. Para $y(2)=0$:

$$y(2) = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + c_3 \cdot 2^3 = 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0.$$

2. Para $y'(2) = 2$:

$$y'(2) = c_1 + 2c_2 \cdot 2 + 3c_3 \cdot 2^2 = c_1 + 4c_2 + 12c_3 = 2.$$

3. Para $y''(2)=6$:

$$y''(2) = 2c_2 + 6c_3 \cdot 2 = 2c_2 + 12c_3 = 6, \quad c_2 + 6c_3 = 3.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0$, ecuación 1

$c_1 + 4c_2 + 12c_3 = 2$, ecuación 2

$c_2 + 6c_3 = 3$ ecuación 3

De la ecuación (3)

$c_2 = 3 - 6c_3$.

Sustituimos $c_2 = 3-6c_3$ en las ecuaciones 1 y 2:

Para la ecuación 1:

$$2c_1 + 4(3 - 6c_3) + 8c_3 = 2c_1 + 12 - 24c_3 + 8c_3 = 2c_1 + 12 - 16c_3 = 0, \qquad c_1 = 8c_3 - 6.$$

Para la ecuación 2:

$$(8c_3 - 6) + 4(3 - 6c_3) + 12c_3 = 8c_3 - 6 + 12 - 24c_3 + 12c_3 = -4c_3 + 6 = 2,$$

$-4c_3 = -4, c_3 = 1.$

Sustituimos $c_3 = 1$ en: $c_2 = 3 - 6 \cdot 1 = -3, \quad c_1 = 8 \cdot 1 - 6 = 2.$

Por lo tanto, las constantes son $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 1$. La solución es: $y = 2x - 3x^2 + x^3$.

$y(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $\quad y'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $\quad y''(x) = 6x - 6$.

Evaluamos en $x = 2$:

$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 - 12 + 4 = 0$, $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2$,

$y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6$.

Las condiciones iniciales se satisfacen.

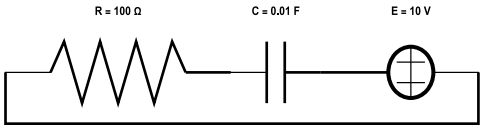
La solución del problema de valor inicial es: $\boxed{y = x^3 - 3x^2 + 2x}$.

Problema No. 46

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Circuito Eléctrico (Circuito RC)

Problema: Un circuito RC en serie tiene una resistencia $R = 100\Omega$, un capacitor $C = 0.01\text{F}$, y una fuente de voltaje constante $E = 10\text{V}$. Inicialmente, el capacitor está descargado ($q(0) = 0$). Determine la carga $q(t)$ en el capacitor en función del tiempo.



Solución: La ecuación diferencial es:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

Sustituyendo $R = 100$, $C = 0.01$, $E = 10$:

$$100\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.01} = 10, \qquad \frac{dq}{dt} + q = 0.1$$

El factor integrante es $e^{\int 1dt} = e^t$. Multiplicamos por e^t:

$$e^t\frac{dq}{dt} + e^t q = 0.1e^t, \qquad \frac{d}{dt}(qe^t) = 0.1e^t$$

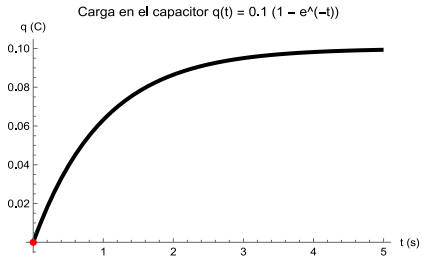
Integramos:

$$qe^t = 0.1e^t + k, \qquad q(t) = 0.1 + ke^{-t}$$

Con $q(0) = 0$: $q(0) = 0.1 + k = 0,\ k = -0.1$

La solución es: $q(t) = 0.1(1 - e^{-t})$

Interpretación: La carga $q(t)$ aumenta exponencialmente desde 0 hasta 0.1C, con una constante de tiempo $\tau = RC = 1\text{s}$.



Problema No. 47

Mecánica (Movimiento con fricción viscosa)

Problema: Un objeto de masa $m = 2\text{kg}$ se mueve en un medio con fricción viscosa ($b = 4\text{N}\cdot\text{s/m}$). Se aplica una fuerza constante $F = 8\text{N}$, con velocidad inicial $v(0) = 0\text{m/s}$. Determine la velocidad $v(t)$.

Solución: La ecuación es:

$$m\frac{dv}{dt} = F - bv$$

Sustituyendo $m = 2$, $b = 4$, $F = 8$:

$$2\frac{dv}{dt} = 8 - 4v, \qquad \frac{dv}{dt} + 2v = 4$$

El factor integrante es $e^{\int 2dt} = e^{2t}$. Multiplicamos:

$$e^{2t}\frac{dv}{dt} + 2e^{2t}v = 4e^{2t}, \qquad \frac{d}{dt}(ve^{2t}) = 4e^{2t}$$

Integramos:

$$ve^{2t} = 2e^{2t} + k, \qquad v(t) = 2 + ke^{-2t}$$

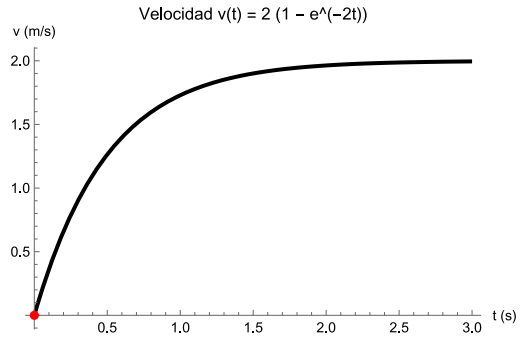
Con $v(0) = 0$:

$$v(0) = 2 + k = 0, \qquad k = -2$$

La solución es:

$$v(t) = 2(1 - e^{-2t})$$

Interpretación: La velocidad $v(t)$ aumenta desde 0 hasta una velocidad terminal de 2m/s, con una constante de tiempo $\tau = m/b = 0.5\text{s}$.



Problema No. 48

Hidráulica (Vaciado de un tanque)

Problema: Un tanque cilíndrico contiene inicialmente $V_0 = 1000\text{l}$ de agua. El agua sale por un orificio ($a = 0.01\text{m}^2$) con velocidad $v = \sqrt{2gh}$, donde $g = 9.8\text{m/s}^2$ y el área del tanque es $A = 1\text{m}^2$. Determine la altura $h(t)$.

Solución: La ecuación es:

$$A\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

Sustituyendo $a = 0.01$, $A = 1$, $g = 9.8$:

$$\frac{dh}{dt} = -0.01\sqrt{19.6h} \approx -0.0443\sqrt{h}$$

Separamos variables:

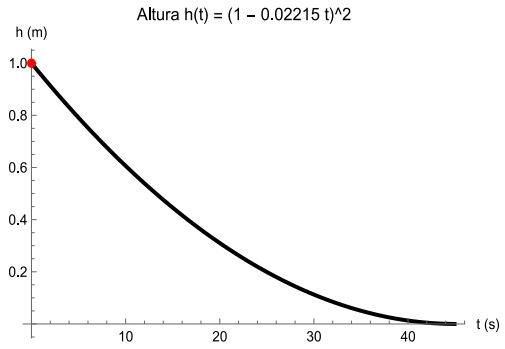
$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.0443\,dt$$

Integramos: $2h^{1/2} = -0.0443t + k$, $h^{1/2} = -0.02215t + \frac{k}{2}$

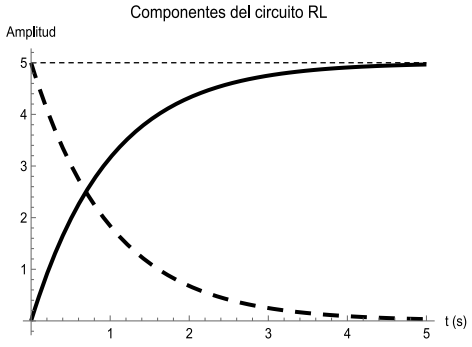
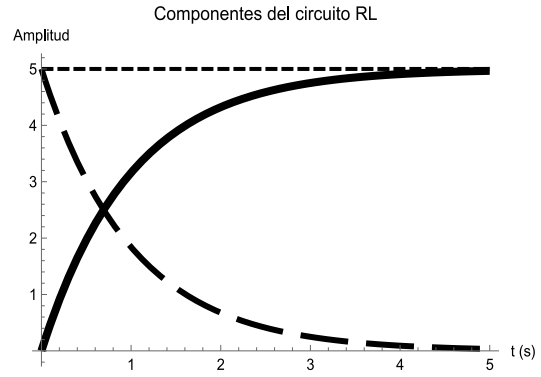
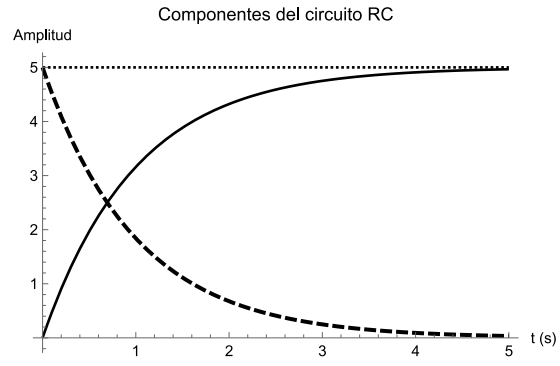
Con $h(0) = 1$ (de $V_0 = Ah$): $h(0) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 1$, $k = 2$

La solución es: $h(t) = (1 - 0.02215t)^2$, El tanque se vacía cuando $h(t) = 0$, en $t \approx 45.15\text{s}$.

Interpretación: La altura $h(t)$ disminuye cuadráticamente hasta 0 en aproximadamente 45.15s.



Problema No. 49

Sistema	Modelo
	$$\frac{di_L}{dt}+\frac{R}{L}i_L=\frac{1}{L}V(t)$$ Suposiciones: $R = 1\ \Omega$ $L = 1\,\mathrm{H}$ $V(t) = 5\,\mathrm{V}$ (voltaje constante para simplicidad) Condición inicial: $$i_L(0) = 0$$ La ecuación se convierte en: $\frac{di_L}{dt} + i_L = 5$
	$$\frac{di_L}{dt}+\frac{R}{L}i_L=\frac{R}{L}i(t)$$ Suposiciones: $R = 1\ \Omega$ $L = 1\,\mathrm{H}$ $$i(t) = 5\,\mathrm{A}$$ (corriente constante para simplicidad) Condición inicial: $$i_L(0) = 0$$ La ecuación se convierte en: $$\frac{di_L}{dt} + i_L = 5$$
	$$\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{RC}V_C=\frac{1}{C}i(t)$$ Suposiciones: $R = 1\ \Omega$ $$C = 1\,\mathrm{F}$$ $$i(t) = 5\,\mathrm{A}$$ (corriente constante para simplicidad) Condición inicial: $$V_C(0) = 0$$ La ecuación se convierte en: $$\frac{dV_C}{dt} + V_C = 5$$

Conclusiones

El capítulo uno de los apuntes de ecuaciones diferenciales, diseñado para estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de Ensenada y del Tecnológico Nacional de México, establece las bases fundamentales para comprender esta disciplina esencial en las ciencias e ingeniería. En la sección 1.1, se abordan conceptos preliminares clave, como la definición de una ecuación diferencial, su orden, grado y linealidad, proporcionando una comprensión clara de su estructura matemática. Se exploran las soluciones de estas ecuaciones, destacando la importancia de los problemas de valor inicial y el teorema de existencia y unicidad, que garantizan condiciones bajo las cuales una solución existe y es única. La sección 1.2 se centra en las ecuaciones diferenciales ordinarias, clasificándolas en categorías como variables separables, homogéneas, exactas, lineales y de Bernoulli, ofreciendo métodos específicos para su resolución. Finalmente, la sección 1.3 presenta aplicaciones prácticas que ilustran la relevancia de estas ecuaciones en problemas reales de ingeniería, desde modelado de sistemas físicos hasta análisis dinámico.

Para dominar esta materia, es indispensable un sólido conocimiento de cálculo diferencial, integral y álgebra lineal, ya que estos forman la base matemática para resolver y analizar ecuaciones diferenciales. Este campo tiene infinitas aplicaciones en ciencias e ingeniería, desde la dinámica de fluidos hasta el diseño de circuitos eléctricos, lo que lo convierte en un pilar para la formación de ingenieros. Los apuntes, con más de 45 problemas resueltos, combinan teoría rigurosa con ejemplos prácticos, apoyados en herramientas computacionales como MATLAB, Mathematica y Octave para la generación de gráficas, facilitando una comprensión visual y práctica. Este material busca ser un recurso complementario valioso para estudiantes y académicos del Tecnológico, consolidando el aprendizaje a través de la práctica. La elaboración de estos apuntes requirió innumerables horas de dedicación, reflejando un esfuerzo meticuloso por ofrecer un contenido claro y accesible. Parafraseando a José Saramago, “el conocimiento, como un río, fluye hacia quienes se atreven a navegar sus aguas con esfuerzo y constancia”, un mensaje que resuena en el compromiso de estos apuntes por guiar a los estudiantes en su travesía académica.

Bibliografía

Arnold, V. I. (1992). Ordinary differential equations (3rd ed.). Springer.

Enfocado en la teoría cualitativa y geométrica de ecuaciones diferenciales, ideal para estudiantes avanzados.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2021). Elementary differential equations and boundary value problems (12th ed.). Wiley.

Este libro es un texto clásico para cursos introductorios, con un enfoque claro en ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas de valor de contorno.

Braun, M. (1992). Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics (4th ed.). Springer.

Enfocado en aplicaciones prácticas en física, biología e ingeniería, con un estilo claro.

Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill.

Un texto avanzado que se centra en la teoría matemática de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Edwards, C. H., Penney, D. E., & Calvis, D. (2014). Differential equations and boundary value problems: Computing and modeling (5th ed.). Pearson.

Combina teoría con aplicaciones computacionales, adecuado para estudiantes de ciencias e ingeniería.

Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos (3rd ed.). Academic Press.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2017). Fundamentals of differential equations (9th ed.). Pearson.
Cubre ecuaciones diferenciales ordinarias con un enfoque accesible y ejemplos aplicados.

Ross, S. L. (1984). Differential equations (3rd ed.). Wiley.

Un texto clásico que cubre tanto ecuaciones ordinarias como parciales, con un enfoque riguroso.

Simmons, G. F. (2016). Differential equations with applications and historical notes (3rd ed.). CRC Press.

Ofrece una perspectiva histórica junto con aplicaciones modernas, ideal para un enfoque más profundo.

Zill, D. G. (2017). A first course in differential equations with modeling applications (11th ed.). Cengage Learning.

Ideal para estudiantes de ingeniería, incluye aplicaciones prácticas y modelado matemático.

Tema II Ecuaciones diferenciales ordinarias orden superior

2.1 Teoría preliminar.

2.1.1 Definición de ecuación diferencial de orden n.

2.1.2 Problemas de valor inicial.

2.1.3 Teorema de existencia y unicidad.

2.1.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

2.1.4.1 Principio de superposición.

2.1.5 Dependencia e independencia lineal. Wronskiano.

2.1.6 Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

2.1.6.1 Reducción de orden.

2.2 Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes.

2.2.1 Ecuación característica de una ecuación diferencial lineal de orden superior.

2.3 Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

2.3.1 Método de los coeficientes indeterminados.

2.3.2 Variación de parámetros.

2.4 La ecuación diferencial de Cauchy-Euler.

2.5 Aplicaciones.

Conclusiones

Bibliografía

2.1 Teoría preliminar.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

El tema de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias es de gran importancia tanto teórica como práctica. Teóricamente, es un tema de simplicidad y elegancia. Prácticamente, las ecuaciones diferenciales lineales surgen en una variedad de aplicaciones en la ciencia y la ingeniería. Afortunadamente, muchas de las ecuaciones diferenciales lineales que aparecen son de un tipo especial, lineales con coeficientes constantes, para las cuales existen métodos explícitos de solución. El propósito principal de este capítulo es estudiar algunos de estos métodos.

2.1.1 Definición de ecuación diferencial de orden n.

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son aquellas de orden $n \geq 2$, donde la derivada de mayor orden de la variable dependiente aparece en la ecuación. En particular, las ecuaciones diferenciales lineales de orden (n) tienen la forma general:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x)$$

donde $a_i(x)$ son coeficientes que pueden depender de (x), y ($F(x)$) es una función forzante. Si $F(x) = 0$, la ecuación es homogénea; de lo contrario, es no homogénea. Las ecuaciones lineales de orden superior, especialmente las de segundo orden, son fundamentales debido a su simplicidad teórica y su aplicabilidad práctica.

Métodos explícitos de solución

Para ecuaciones lineales con coeficientes constantes, existen métodos explícitos de solución, especialmente efectivos para ecuaciones de segundo orden. Los principales métodos son:

Ecuaciones homogéneas:

Se resuelven encontrando las raíces de la ecuación característica. Por ejemplo, para una ecuación de segundo orden:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

la ecuación característica es $ar^2 + br + c = 0$. Las soluciones dependen de la naturaleza de las raíces (reales distintas, reales repetidas o complejas conjugadas), dando lugar a soluciones exponenciales, amortiguadas o sinusoidales.

Ejemplo: Para $y'' + 3y' + 2y = 0$, la ecuación característica $r^2 + 3r + 2 = 0$ tiene raíces

$r = -1, -2$, por lo que la solución general es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

Ecuaciones no homogéneas:

Se resuelve combinando la solución de la ecuación homogénea con una solución particular. Los métodos principales son:

Método de coeficientes indeterminados: Se propone una solución particular basada en la forma de $\big(F(x)\big)$ (e.g., polinómica, exponencial, senoidal).

Método de variación de parámetros: Se buscan soluciones particulares ajustando los parámetros de la solución homogénea.

Ejemplo: Para $y'' + y = \sin(x)$, la solución homogénea es $y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, y una solución particular puede ser $y_p = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$.

Otros métodos:

Transformadas de Laplace: Convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en el dominio de la transformada, útil para condiciones iniciales específicas.

Series de potencias: Aplicable a ecuaciones con coeficientes variables, aunque menos común en problemas de ingeniería práctica.

Importancia en ingeniería eléctrica, mecánica, mecatrónica y sistemas

- Ingeniería eléctrica:

Las ecuaciones diferenciales de orden superior modelan circuitos eléctricos complejos, como circuitos RLC (resistencia, inductancia, capacitancia). Por ejemplo, la ecuación de un circuito RLC serie es una ecuación de segundo orden:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t),$$

donde $\big(q(t)\big)$ es la carga, y ($V(t)$) es la fuente de voltaje. La solución describe el comportamiento transitorio y estable del circuito, crucial para el diseño de filtros, amplificadores y osciladores.

Aplicaciones: Diseño de sistemas de control, análisis de señales y estabilidad de redes eléctricas.

- Ingeniería mecánica:

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden modelan sistemas mecánicos, como vibraciones de masas acopladas o sistemas masa-resorte-amortiguador:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t),$$

donde (m) es la masa, (c) el coeficiente de amortiguamiento, (k) la constante del resorte y $F(t)$) una fuerza externa. Estas ecuaciones permiten analizar vibraciones, resonancia y estabilidad estructural.

Aplicaciones: Diseño de suspensiones, análisis de estructuras bajo cargas dinámicas y dinámica de maquinaria.

- Ingeniería mecatrónica:

Combina principios de eléctrica y mecánica para modelar sistemas integrados, como robots o sistemas de control automático. Las ecuaciones diferenciales describen la dinámica de actuadores, sensores y sistemas de retroalimentación.

Ejemplo: En un servomotor, una ecuación diferencial de segundo orden modela la relación entre el torque, la velocidad angular y la posición, permitiendo un control preciso.

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden (n) en la variable dependiente (y) y la variable independiente (x) es una ecuación que está en, o puede expresarse en, la forma

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \quad (2.1)$$

donde (a_0) no es idénticamente cero. Asumiremos que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ y (F) son funciones reales continuas en un intervalo real $a \leq x \leq b$ y que $a_0(x) \neq$) para cualquier (x) en $a \leq x \leq b$). El término del lado derecho $(F(x))$ se denomina término no homogéneo. Si (F) es idénticamente cero, la Ecuación (2.1) se reduce a

$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$, (2.2)

y entonces se llama homogénea.

La Ecuación general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n es:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \quad (2.1)$$

Para $n = 2$, la ecuación (2.1) se reduce a una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden

$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$. (2.3)

Si $F(x) = 0$ la ecuación anterior corresponde a la ecuación diferencial de segundo orden homogénea.

$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$. (2.4)

Asumiremos que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ y F son funciones reales continuas en un intervalo real $a \leq x \leq b$

Ejemplos No. 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de orden superior

$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x$	$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 2x\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x}$	$\frac{d^5y}{dx^5} + x^2\frac{d^4y}{dx^4} + 4x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + y = \cos x$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 2x\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$	$\frac{d^8y}{dx^8} + x^2\frac{d^6y}{dx^6} + 3x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} + 5y = \cos x$
$y'' + 4y' + 3y = e^2t$	$y^{(4)} + 3y''' + 5y'' + 4y' + 2y = \sin(3t) + \cos(2t)$

Ejemplo No. 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de orden superior

$y'' + 3y' + 2y = 0$	$y''' + 4y'' - y' = 0$	$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
$y^{(5)} - y^{(3)} + y' = 0$	$y^{(6)} + 5y^{(4)} - 3y'' = 0$	$y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$
$y^{(8)} + y^{(4)} - y = 0$	$y^{(9)} - 3y^{(6)} + y^{(3)} = 0$	$y^{(5)} + 2y^{(4)} - 3y^{(3)} + 4y'' - 5y' + 6y = 0$

2.1.2 Problemas de valor inicial.

Un problema de valor inicial (**PVI**) para una ecuación diferencial de orden superior consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden *n* junto con condiciones iniciales especificadas en un punto dado. Estas condiciones permiten determinar una solución única dentro de un intervalo válido.

Los PVI para ecuaciones de orden superior son fundamentales en modelado de sistemas dinámicos (mecánica, circuitos eléctricos, etc.). La combinación de teoría de existencia-unicidad y técnicas de solución permite obtener respuestas precisas bajo condiciones específicas. La linealidad y la continuidad de los coeficientes juegan un papel clave en la garantía de soluciones válidas.

Estructura del PVI

Para una EDO de orden *n*, el PVI se expresa como:

$$y(n) = f\big(x, y, y', \dots, y(n-1)\big), y(n) = f\big(x, y, y', \dots, y(n-1)\big),$$

sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(x0) = y0, y'(x0) = y1, \dots, y(n-1)(x0) = yn - 1. y(x0) = y0, y'(x0) = y1, \dots, y(n-1)(x0) = yn - 1.$$

Aquí, $x0$ es el punto donde se imponen las condiciones, $y\, y0, y1, \dots, yn - 1y0, y1, \dots, yn - 1$ son valores conocidos.

2.1.3 Teorema de existencia y unicidad.

Teorema:

Existencia y Unicidad de Soluciones para Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden (n):

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x),$$

definida en un intervalo (I). Si los coeficientes $(a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x))$ y la función no homogénea $\big(F(x)\big)$ son continuos en (I), y $(a_n(x) \neq 0)$ para todo $(x \in I)$, entonces para

cualquier punto $(x_0 \in I)$ y cualquier conjunto de valores iniciales $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, existe una solución única $\big(y(x)\big)$ de la ecuación que satisface las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Además, esta solución está definida en todo el intervalo (I).

Hipótesis:

Los coeficientes $(a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones continuas en el intervalo (I).

La función no homogénea $\big(F(x)\big)$ es continua en el intervalo (I).

El coeficiente principal $(a_n(x) \neq 0)$ para todo (x) en el intervalo (I).

El punto inicial (x_0) pertenece al intervalo(I).

Las condiciones iniciales $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ son valores arbitrarios

Ejemplo No. 3

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x,$$

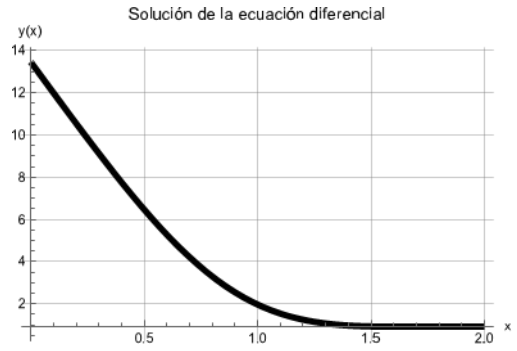
con las condiciones iniciales:

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = -5.$$

Continuidad: Los coeficientes

$a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 3x^2$, $a_0(x) = x^3$ y el término no homogéneo $F(x) = e^x$ son continuos en $(-\infty, \infty)$, y $a_2(x) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, se cumplen todas las hipótesis del Teorema.

Existencia y unicidad: Según el Teorema, existe una solución única para la ecuación diferencial en $(-\infty, \infty)$ que satisface $y(1) = 2, y'(1) = -5$



Ejemplo No. 4

Resolver la ecuación diferencial:

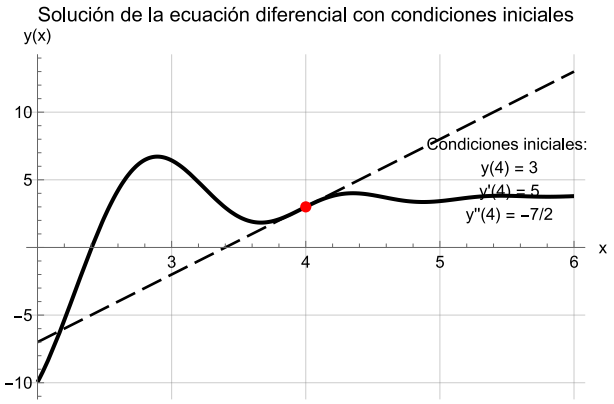
$$2\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x\,,$$

con las condiciones iniciales:

$$y(4) = 3, \quad y'(4) = 5, \quad y''(4) = -\frac{7}{2}.$$

Los coeficientes $a_3(x) = 2$, $a_2(x) = x$, $a_1(x) = 3x^2$, $a_0(x) = -5$, y el término no homogéneo $F(x) = \sin x$ son **continuos** en $(-\infty, \infty)$, y $a_3(x) = 2 \neq 0$. Se cumplen todas las hipótesis del Teorema.

Existencia y unicidad: Según el Teorema, existe una solución única para la ecuación en $(-\infty, \infty)$ que satisface $y(4) = 3$, $y'(4) = 5$, $y''(4) = -\frac{7}{2}$.



Corolario:

Sea (f) una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n):

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

tal que: $f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = 0$, donde (x_0) es un punto en el intervalo $(a \leq x \leq b)$ en el cual los coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ son todos continuos y $(a_n(x) \neq 0)$.

Conclusión: entonces, $,(f(x) = 0)$ para todo (x) en $(a \leq x \leq b)$. Entonces, este corolario establece que esta solución es la solución "trivial" (f), tal que $f(x) = 0$ para todo(x) en el intervalo mencionado.

Ejemplo No. 5

Problema: La solución única (f) de la ecuación homogénea de tercer orden:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0,$$

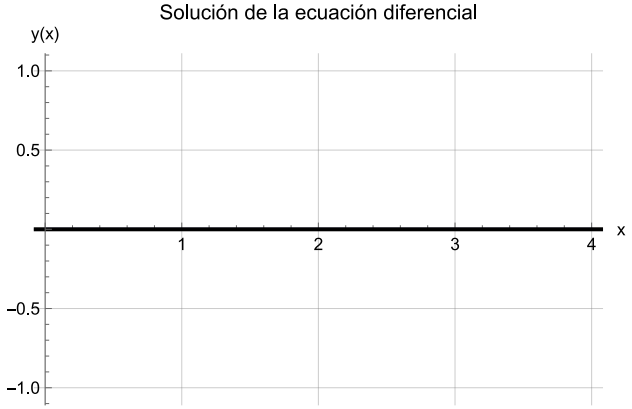
tal que: $f(2) = 0, \quad f'(2) = 0, \quad f''(2) = 0$, es la solución trivial (f), tal que $(f(x) = 0)$ para todo (x).

Dado que $f(x) = 0$ es una solución trivial que satisface:

$\frac{d^3}{dx^3}(0) + 2\frac{d^2}{dx^2}(0) + 4x\frac{d}{dx}(0) + x^2(0) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$

y también cumple las condiciones iniciales:

$f(2) = 0, \quad f'(2) = 0, \quad f''(2) = 0$, la unicidad implica que $f(x) = 0$ es la única solución.



La gráfica muestra una línea horizontal en $y = 0$, confirmando la solución trivial.

2.1.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Consideramos ahora los resultados fundamentales relacionados con la ecuación homogénea

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \quad (2.2)$$

Primero enunciamos el siguiente teorema básico:

Teorema sobre ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Hipótesis. Sean $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ cualquiera (m) soluciones de la ecuación diferencial homogénea (2.2)

Conclusión. Entonces $(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m)$ también es una solución de la ecuación diferencial (2.2), donde $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ son (m) constantes arbitrarias.

Definición. Si $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ son (m) funciones dadas, y $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ son (m) constantes, entonces la expresión $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$ se denomina una combinación lineal de $(f_1, f_2, \dots, f_m)$.

En términos de este concepto, el Teorema anterior puede enunciarse como sigue:

2.1.4.1 Principio de superposición.

Teorema (Principio de superposición)

Cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea (2.2) es también una solución de la ecuación (2.2)

En particular, cualquier combinación lineal $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$

Cualquier combinación lineal de (m) soluciones $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden.

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \quad (2.3)$$

es también una solución de (2.3).

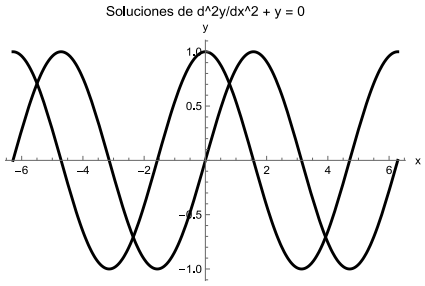
Ejemplo No. 6

Verificar que $y = \sin(x)\ \ y\ \ y = \cos(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(x), \frac{d^2y}{dx^2} + y = -\sin(x) + \sin(x) = 0.$

La ecuación se satisface, por lo que $\sin(x)$ es una solución.

$\frac{dy}{dx} = -\sin(x), \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos(x)$. Sustituyendo en la ecuación: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$
La ecuación se satisface, por lo que $cos(x)$ es una solución.



Ejemplo No. 7

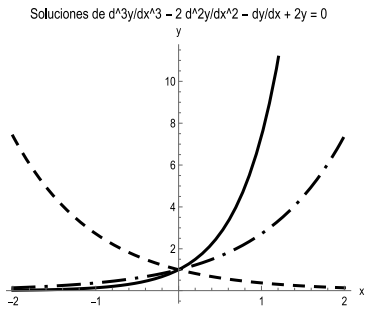
Verificar que $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Para: $y = e^x$, Derivadas: $(y' = e^x), (y'' = e^x), (y''' = e^x)$.

Sustituyendo: $e^x - 2e^x - e^x + 2e^x = 0$. Solución verificada. Para: $y = e^{-x}$, Derivadas: $(y' = -e^{-x}), (y'' = e^{-x}), (y''' = -e^{-x})$. Sustituyendo: $(-e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} + 2e^{-x} = 0)$. Solución verificada

Para: $y = e^{2x}$, Derivadas: $:(y' = 2e^{2x}), (y'' = 4e^{2x}), (y''' = 8e^{2x})$. Sustituyendo: $:(8e^{2x} - 8e^{2x} - 2e^{2x} + 2e^{2x} = 0)$. Solución verificada



Consideramos ahora qué constituye la llamada solución general de (2.2). Para entender esto, primero introducimos los conceptos de dependencia lineal e independencia lineal.

2.1.5 Dependencia e independencia lineal. El Wronskiano.

Definición

Las (n) funciones $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ se denomina linealmente dependientes en $(a \le x \le b)$ si existen constantes $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, no todas cero, tales que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$ para todo (x) tal que ($a \le x \le b$)

En particular, dos funciones $(f_1) y (f_2)$ son linealmente dependientes en $(a \le x \le b)$ si existen constantes (c_1, c_2), no ambas cero, tales que

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo (x) tales que ($a \le x \le b$)

Ejemplo No. 8

Ejemplos de funciones linealmente dependientes

1. $(f_1(x) = \sin(x)), (f_2(x) = 2\sin(x))$: $(2f_1(x) - f_2(x) = 0), con (c_1 = 2), (c_2 = -1).$

2. $(f_1(x) = x), (f_2(x) = 3x)$: $(3f_1(x) - f_2(x) = 0), con (c_1 = 3), (c_2 = -1).$

Conclusión. Ambos pares de funciones son linealmente dependientes porque una es múltiplo constante de la otra.

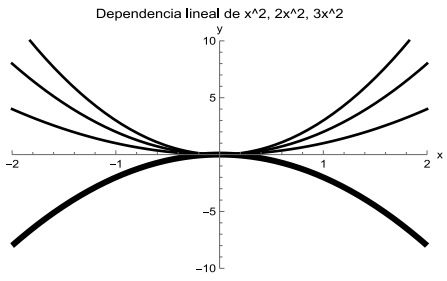
Ejemplo No.9

Ejemplo de funciones linealmente dependientes: $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2x^2, f_3(x) = 3x^2$:

$$3f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) = 0, conc_1 = 3, c_2 = -1, c_3 = -1$$

Conclusión. Las funciones son linealmente dependientes porque una combinación no trivial de ellas da cero.

Ejemplo No. 10

Definición de funciones: Se definen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2, y\ f_3(x) = 3x^2$ Combinación lineal: Se define $3f_1(x) - f_2(x) - f_3(x)$, que es igual a cero, demostrando la dependencia lineal. Representación gráfica de la dependencia lineal de funciones	

La gráfica mostrará tres parábolas $(x^2, 2x^2, 3x^2)$ en negro, escaladas verticalmente, y una línea negra de mayor grosor discontinua en $y = 0$, confirmando visualmente que la combinación lineal $3x^2 - 2x^2 - 3x^2 = 0$, se satisface para todo (x), lo que demuestra la dependencia lineal de las funciones.

Consideramos ahora qué constituye la llamada solución general de (2.2). Para entender esto, primero introducimos los conceptos de dependencia lineal e independencia lineal.

Definición

Las (n) funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ se denominan linealmente independientes en el intervalo

$a \leq x \leq b$ si no son linealmente dependientes en él. Es decir, las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ son linealmente independientes en $a \leq x \leq b$ si la relación $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$ para todo(x) tal que $a \leq x \leq b$ implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

En otras palabras, la única combinación lineal de $f_1, f_2, \dots, f_n$ que es idénticamente cero en

$a \leq x \leq b$ es la combinación lineal trivial $0f_1 + 0f_2 + \cdots + 0f_n$.

En particular, dos funciones f_1 y f_2 son linealmente independientes en $a \leq x \leq b$ si la relación

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo (x) en $a \leq x \leq b$ implica que $c_1 = c_2 = 0$.

Teorema

La ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n)

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \quad (2.2)$$

siempre posee (n) soluciones que son linealmente independientes. Además, si $(f_1, f_2, \dots, f_n)\ son(n)$ soluciones linealmente independientes de (2.2), entonces toda solución (f) de (2.2) puede expresarse como una combinación lineal $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ de estas (n) soluciones linealmente independientes mediante una elección adecuada de las constantes $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n), este teorema nos asegura primero que existe un conjunto de (n) soluciones linealmente independientes. Una vez garantizada la existencia de dicho conjunto linealmente independiente, el teorema nos indica que cualquier solución de (2.2) puede escribirse como una combinación lineal de este conjunto de (n) soluciones linealmente independientes mediante una elección adecuada de las constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Definición

Si $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ son (n) soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n)

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \quad (2.2)$$

en ($a < x < b$), entonces el conjunto $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ se denomina conjunto fundamental de soluciones de (2.2), y la función (f) definida por

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \quad a < x < b,$$

Donde $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ son constantes arbitrarias, se denomina una solución general de (2.2) en $(a < x < b)$.

El siguiente teorema proporciona un criterio simple para determinar si (n) soluciones de (2.2) son linealmente independientes o no. Primero introducimos otro concepto.

Definición

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$, (n)funciones reales, cada una de las cuales tiene una derivada de orden $(n-1)$ en un intervalo real $a < x < b$. El determinante

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_{1'}(x) & f_{2'}(x) & \dots & f_{n'}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

En donde las primas denotan derivadas, se llama el Wronskiano de estas (n) funciones. Observamos que $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ es en sí misma una función real definida en $a < x < b$. Su valor en (x) se denota por $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x)$ o por $W[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$.

Teorema

Las (n) soluciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) (2.2) son linealmente independientes en $a < x < b$ sí y solo si el Wronskiano de $f_1, f_2, \dots, f_n$ es distinto de cero para algún (x) en el intervalo $a < x < b$.

Además, tenemos:

Teorema

El Wronskiano de (n) soluciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ de (2.2) es o idénticamente cero en $a < x < b$, o bien nunca es cero en $a < x < b$.

Ejemplo No. 11 Ross, S. M. (2010)

Las soluciones $(e^x), (e^{-x})y(e^{2x})$ de la ecuación diferencial $(\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0)$ son linealmente independientes en todo el intervalo real, para $W(e^x, e^{-x}, e^{2x})$

El Wronskiano se calcula como:

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \det\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante:

$$W = e^x(-e^{-x} \cdot 4e^{2x} - 2e^{2x} \cdot e^{-x}) - e^{-x}(e^x \cdot 4e^{2x} - 2e^{2x} \cdot e^x) + e^{2x}(e^x \cdot e^{-x} - (-e^{-x}) \cdot e^x)$$

$$= e^x(-4e^x - 2e^x) - e^{-x}(4e^{3x} - 2e^{3x}) + e^{2x}\big(1 - (-1)\big) = -6e^{2x} - 2e^{2x} + 2e^{2x} = -6e^{2x}.$$

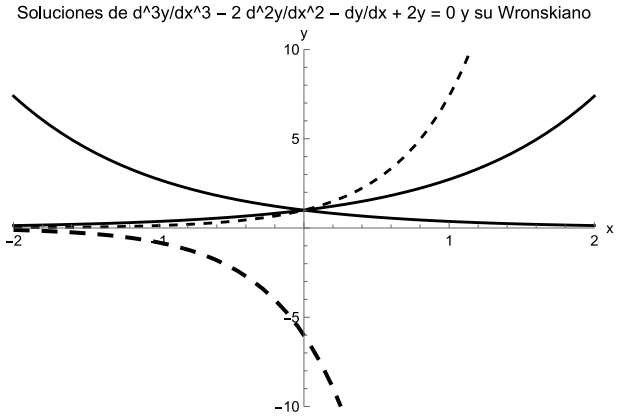
Dado que $(-6e^{2x} \neq 0)$ para todo (x), las funciones son linealmente independientes.

e^x: una curva exponencial creciente (línea continua negra).

e^{-x}: una curva exponencial decreciente (línea continua negra).

e^{2x}: una curva exponencial de crecimiento más rápido (línea segmentada negra).

El Wronskiano $-6e^{2x}$: una curva exponencial negativa (línea segmentada negra con espesor), que nunca es cero, confirmando la independencia lineal de las funciones según el Teorema



Ejemplo No. 12. Ross, S. M. (2010)

(a) Verificar que e^x y e^{3x} son soluciones de la ecuación diferencial

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$ en $a < x < b$

Para $y = e^x$, $\frac{dy}{dx} = e^x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = e^x - 4e^x + e^x = e^x - 4e^x + e^x = -2e^x + e^x + e^x = 0.$$

La ecuación se satisface, por lo que e^x es una solución en $a < x < b$

Para $y = e^{3x}$, $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 9e^{3x} - 4 \cdot 3e^{3x} + e^{3x} = 9e^{3x} - 12e^{3x} + e^{3x} = -2e^{3x} = 0.$$

La ecuación se satisface, por lo que e^{3x} es una solución en $a < x < b$

(b) El Teorema que asegura que $5e^x + 2e^{3x}$, $6e^x - 4e^{3x}$ y $-e^x + 5e^{3x}$ son soluciones.

El Teorema (Teorema Básico sobre Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas) establece que cualquier combinación lineal de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución. Dado que e^x y e^{3x} son soluciones de la ecuación diferencial, las combinaciones lineales: $5e^x + 2e^{3x}$ (con $c_1 = 5$, $c_2 = 2$), $6e^x - 4e^{3x}$ (con $c_1 = 6$, $c_2 = -4$), $-e^x + 5e^{3x}$ (con $c_1 = -1$, $c_2 = 5$),son también soluciones en $a < x < b$, ya que son combinaciones lineales de e^x y e^{3x}.

(c) ¿Por qué $3e^x$, $-4e^x$, $5e^x$, y $6e^x$son también soluciones?

Cada una de estas funciones es una combinación lineal de la solución e^x, ya que:

$3e^x = 3 \cdot e^x + 0 \cdot e^{3x}$, $-4e^x = -4 \cdot e^x + 0 \cdot e^{3x}$, $5e^x = 5 \cdot e^x + 0 \cdot e^{3x}$, $6e^x = 6 \cdot e^x + 0 \cdot e^{3x}$.

Por el Teorema, cualquier combinación lineal de soluciones es también una solución. Como e^xy e^{3x}

son soluciones, y estas funciones son combinaciones lineales con $c_2 = 0$, todas son soluciones de la ecuación diferencial en $a < x < b$.

Ejemplo No. 13 (Rainville, E.D, 1968)

Demuestra que las funciones (e^x), $(\cos x)$, y $(\sin x)$ son linealmente independientes

Matriz del Wronskiano: $$W(e^x, \cos x, \sin x) = \det \begin{bmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{bmatrix}$$

Determinante: $= e^x(\sin^2 x + \cos^2 x) + e^x \cos x\,(\sin x + \cos x) + e^x \sin x\,(\sin x - \cos x) = e^x + e^x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2e^x.$

Conclusión: como $(W = 2e^x \neq 0)$ para todo(x), por el teorema, las funciones (e^x), $(\cos x)$, $y(\sin x)$ son linealmente independientes en cualquier intervalo $a < x < b$

Ejemplo No. 14 (Rainville, E.D, 1968)

Demostrar que (1), $(\sin x)$, $y(\cos x)$ son linealmente independientes

Wronskiano: $$W(1, \sin x, \cos x) = \det \begin{bmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{bmatrix}$$

Conclusión: $W = 1 \cdot [(\cos x)(-\cos x) - (-\sin x)(-\sin x)] = -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1.$ Como ($W = -1 \neq 0$) para todo (x), las funciones son linealmente independientes

Ejemplo No. 15 (Rainville, E.D, 1968)

Demuestre que 1, $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$ son linealmente dependientes

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$, $1 \cdot 1 - 1 \cdot \sin^2 x - 1 \cdot \cos^2 x = 0,$

$(c_1 = 1), (c_2 = -1), (c_3 = -1)$, no todas cero indican dependencia lineal

Wronskiano: $$W(1, \sin^2 x, \cos^2 x) = \det \begin{bmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & 2\sin x \cos x & -2\cos x \sin x \\ 0 & 2\cos^2 x - 2\sin^2 x & -2\sin^2 x + 2\cos^2 x \end{bmatrix} = 0.$$

El Wronskiano es idénticamente cero, confirmando la dependencia lineal por el Teorema.

Ejemplo No. 16. Ross, S. M. (2010)

Considera la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(a) Demuestra que (x) y x^2 son soluciones linealmente independientes de esta ecuación en el intervalo $0 < x < \infty$.

(b) Escribe la solución general de la ecuación dada.

(c) Encuentra la solución que satisface las condiciones $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$. Explica por qué esta solución es única. ¿En qué intervalo está definida esta solución?

Solución

(a) verificar que $(x)y(x^2)$ son soluciones linealmente independientes.

Para $(y_1 = x)$: $(y_1' = 1), (y_1'' = 0)$, entonces $x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2 \cdot x = 0$.

Para $(y_2 = x^2)$: $(y_2' = 2x), (y_2'' = 2)$, entonces $x^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2x + 2 \cdot x^2 = 2x^2 - 4x^2 + 2x^2 = 0$.

Wronskiano:

$(W(x, x^2) = \det\begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = x \cdot 2x - x^2 \cdot 1 = x^2 \neq 0\ )en\ (0 < x < \infty\ )$. Por el Teorema, son linealmente independientes.

b) Solución general: $(y(x) = c_1 x + c_2 x^2)$.

c) Solución particular, unicidad e intervalo. Con $(y(x) = c_1 x + c_2 x^2), (y'(x) = c_1 + 2c_2 x)$, aplicamos $(y(1) = 3), (y'(1) = 2)$: $c_1 + c_2 = 3, \quad c_1 + 2c_2 = 2$.

Resolviendo: $(c_2 = -1), (c_1 = 4)$.

Solución: $(y(x) = 4x - x^2)$

Unicidad: Por el Teorema de Existencia y Unicidad, la solución es única en $0 < x < \infty$, donde los coeficientes son continuos. Intervalo: la solución está definida en $0 < x < \infty$.

2.1.6 Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son un pilar fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales debido a su amplio uso en modelado de fenómenos físicos, químicos, biológicos e ingenieriles. Estas ecuaciones se caracterizan por tener un término independiente igual a cero, lo que implica que todas las soluciones forman un espacio vectorial, y su resolución proporciona una comprensión profunda de sistemas dinámicos lineales. La forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) es:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

Donde $a_i(x)$ son los coeficientes, que pueden ser constantes o funciones de (x).

Características y estructura de las soluciones

El espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) tiene dimensión (n), lo que significa que se necesitan (n) soluciones linealmente independientes para formar la solución general:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde c_i son constantes arbitrarias determinadas por condiciones iniciales o de contorno. La linealidad de la ecuación garantiza que cualquier combinación lineal de soluciones también es una solución, lo que facilita la construcción de la solución general una vez que se identifican las soluciones fundamentales

Relevancia en aplicaciones

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas modelan sistemas donde la respuesta es proporcional a la perturbación, como en circuitos RLC, oscilaciones mecánicas, o procesos de difusión. La solución general describe el comportamiento intrínseco del sistema sin fuerzas externas, lo que es crucial para entender su dinámica natural.

2.1.6.1 Reducción de orden.

El método de reducción de orden, al proporcionar una vía para obtener soluciones completas, permite analizar estos sistemas incluso en contextos no estándar, como ecuaciones con coeficientes variables que surgen en problemas de geometría variable o medios no uniformes.

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son esenciales en el análisis de sistemas lineales, y el método de reducción de orden destaca como una herramienta poderosa y flexible para encontrar soluciones completas. Su capacidad para simplificar ecuaciones de orden superior, su aplicabilidad a coeficientes variables y su papel en la construcción de soluciones linealmente independientes lo convierten en un método de gran importancia en la teoría y práctica de las ecuaciones diferenciales. Herramientas computacionales modernas, como Mathematica, complementan este método al permitir verificar soluciones o resolver ecuaciones resultantes de manera eficiente, reforzando su utilidad en aplicaciones científicas e ingenieriles.

Teorema

Hipótesis:

Sea (f) una solución no trivial de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n):

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

Conclusión: La transformación $y = f(x)v$ reduce la ecuación anterior a una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n-1$ en la variable dependiente $w = \frac{dv}{dx}$.

Este teorema establece que si se conoce una solución no nula de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) anterior, entonces, mediante la transformación adecuada, podemos reducir la ecuación dada a otra ecuación lineal homogénea que es de un orden inferior al original.

Ejemplo No. 17

Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$(x^2+1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y = 0,$$

y sabiendo que una solución es $(y_1 = x)$, encontramos una solución linealmente independiente usando el método de reducción de orden.

Paso 1: Verificar la solución dada

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = 1, \quad \left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right) = 0.$$

Sustituimos en la ecuación original: $(x^2+1)(0) - 2x(1) + 2(x) = -2x + 2x = 0.$

$(y_1 = x)$ es una solución

Paso 2: Aplicar reducción de orden

Proponemos una segunda solución de la forma: $y_2 = v(x)y_1(x) = v(x)x.$

Calculamos las derivadas: $\left(\frac{dy_2}{dx}\right) = x\left(\frac{dv}{dx}\right) + v(x)$,

$$\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\right) = x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) = x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Sustituimos en la ecuación original

$$(x^2+1)\left(x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)-2x\left(x\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\right)+2(xv)=0.$$

Expandimos cada término:

Primer término: : $((x^2+1)\left(x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)=x(x^2+1)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2(x^2+1)\left(\frac{dv}{dx}\right)$).

Segundo término:$(-2x\left(x\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\right)=-2x^2\left(\frac{dv}{dx}\right)-2xv)$. Tercer término: $(2(xv)=2xv)$.

Combinamos: $x(x^2+1)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2(x^2+1)\left(\frac{dv}{dx}\right)-2x^2\left(\frac{dv}{dx}\right)-2xv+2xv=0.$

Los términos ($-2x\ v\ +\ 2x\ v$) se cancelan, quedando:

$$x(x^2+1)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+[2(x^2+1)-2x^2]\left(\frac{dv}{dx}\right)=0.$$

Simplificando el coeficiente de$\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)$:

$$2(x^2+1)-2x^2=2x^2+2-2x^2=2.$$

Así, la ecuación es: $x(x^2+1)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)+2\left(\frac{dv}{dx}\right)=0.$

Paso 3: Reducir a una ecuación de primer orden

Hacemos $(w=\left(\frac{dv}{dx}\right)$, por lo que $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right)$. La ecuación reducida se convierte en:

$$x(x^2+1)\left(\frac{dw}{dx}\right)+2w=0.$$

Dividimos por $(x(x^2+1)$, asumiendo $(x\neq 0)$, $(x^2+1\neq 0)$:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)+\frac{2}{x(x^2+1)}w=0$$

Paso 4: Resolver la ecuación de primer orden mediante variables separables

$$\frac{\left(\frac{dw}{dx}\right)}{w}=-\frac{2}{x(x^2+1)}.$$

Integramos: $\ln|w|=-\int\frac{2}{x(x^2+1)}\,dx+c.$

Descomponemos la integral usando fracciones parciales: $\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$.

Multiplicamos por$(x(x^2+1))$: $2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$.

Expandimos: $2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A$.

Equivalemos coeficientes: (x^2): $(A+B=0)$, (x): $(C=0)$, $(A=2)$, entonces, $(A=2), (B=-2), (C=0)$:

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Integramos:

$$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = 2\ln|x| - \ln(x^2+1) + c_1 = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + c_1.$$

Por lo tanto: $\ln|w| = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + c$.

Exponenciamos

$$w = c_2 \frac{x^2+1}{x^2}.$$

$$(w = \left(\frac{dv}{dx}\right)):$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = c_2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Integramos: $v = c_2\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_3$.

Paso 5: Construir la segunda solución

La segunda solución es: $y_2 = xv = x\left[c_2\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_3\right] = c_2(x^2-1) + c_3 x$.

Para obtener una solución linealmente independiente, tomamos$(c_3 = 0)$ (evitando el término $((y_1 = x))y(c_2 = 1)$: $y_2 = x^2 - 1$.

Paso 6: Verificar independencia lineal

Calculamos el Wronskiano de $(y_1 = x)y(y_2 = x^2 - 1)$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 1 = 2x^2 - x^2 + 1 = x^2 + 1.$$

Como $(x^2 + 1 \neq 0)$, las soluciones son linealmente independientes

Paso 7: Solución general

La solución general es: $y = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$

Paso 8: verificar $(y_2 = x^2 - 1)$

Calculamos las derivadas: $\left(\frac{dy_2}{dx}\right) = 2x, \quad \left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) = 2.$

Sustituimos en ecuación original: $(x^2 + 1)(2) - 2x(2x) + 2(x^2 - 1) = 2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^2 - 2 = 0.$

Esto confirma que $(y_2 = x^2 - 1)$ es una solución

Ejemplo No. 18

Dada la ecuación diferencial:

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y = 0,$$

Y sabiendo que $(y_1 = x)$ es una solución, encontrar una solución linealmente independiente usando reducción de orden

Solución del problema: Reducción de orden

Paso 1: Verificar la solución dada

Calculamos las derivadas de $(y_1 = x)$:

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right) = 1, \quad \left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right) = 0.$$

Sustituimos en ecuación original

$$x^2(0) - 4x(1) + 4(x) = -4x + 4x = 0.$$

Esto confirma que $(y_1 = x)$ es una solución

Paso 2: Aplicar reducción de orden

Proponemos: $y_2 = v(x)x.$

Derivadas:

$$\left(\frac{dy_2}{dx}\right) = x\left(\frac{dv}{dx}\right) + v(x),$$

$$\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) = x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Sustituimos en ecuación original:

$$x^2\left(x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) - 4x\left(x\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\right) + 4(xv) = 0.$$

Expandimos:

Primer término : $(x^3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2x^2\left(\frac{dv}{dx}\right))$.

Segundo término: $(-4x^2\left(\frac{dv}{dx}\right) - 4xv)$.

Tercer término: ($4x\ v$).

Combinamos:

$$x^3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + 2x^2\left(\frac{dv}{dx}\right) - 4x^2\left(\frac{dv}{dx}\right) - 4xv + 4xv = 0.$$

Los términos ($-4x\ v\ +\ 4x\ v$) se cancelan

$$x^3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - 2x^2\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0.$$

Dividimos por (x^2):

$$x\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

<u>Paso 3: Reducir a primer orden</u>

Hacemos:

$(w = \left(\frac{dv}{dx}\right))$, por lo que $(\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right))$.

Se reduce a

$$x\left(\frac{dw}{dx}\right) - 2w = 0.$$

Reorganizamos: $\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{2w}{x}$.

Paso 4: Resolver la ecuación de primer orden

La ecuación es separable: $\frac{dw}{w} = \frac{2}{x}dx$.

Integramos: $\ln|w| = 2\ln|x| + c = \ln(x^2) + c$.

Exponenciamos: $w = c_1 x^2$.

Como: $(w = \left(\frac{dv}{dx}\right))$ y $\left(\frac{dv}{dx}\right) = c_1 x^2$.

Integramos:

$$v = c_1 \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Paso 5: Construir la segunda solución

$$y_2 = xv = x\left(c_1 \frac{x^3}{3} + c_2\right) = c_1 \frac{x^4}{3} + c_2 x.$$

Tomamos:$(c_2 = 0), (c_1 = 3)$: $y_2 = x^4$.

Paso 6: Verificar independencia lineal

Wronskiano de $(y_1 = x), (y_2 = x^4)$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix} = x \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 1 = 4x^4 - x^4 = 3x^4.$$

Como $(3x^4 \neq 0)$ para $(x \neq 0)$, las soluciones son linealmente independientes

Paso 7: Solución general

$$y = c_1 x + c_2 x^4$$

Paso 8: Verificar $(y_2 = x^4)$

Derivadas:

$$\left(\frac{dy_2}{dx}\right) = 4x^3, \quad \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2}\right) = 12x^2.$$

Sustituimos en:

$$x^2(12x^2) - 4x(4x^3) + 4(x^4) = 12x^4 - 16x^4 + 4x^4 = 0.$$

Esto confirma que $(y_2 = x^4)$ es una solución

Ejemplo No. 19

Dado que $y = (x + 1)$ es una solución de $(x + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3(x + 1)\frac{dy}{dx} + 3y = 0$, encuentra una solución linealmente independiente reduciendo el orden. Escribe la solución general.

Solución del problema

Dado que $\big(y = (x + 1)\big)$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$(x + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3(x + 1)\frac{dy}{dx} + 3y = 0,$$

se requiere encontrar una solución linealmente independiente reduciendo el orden y escribir la solución general.

Paso 1: Verificación de la solución dada

Sustituimos $(y = x + 1)$ en la ecuación:

Derivadas:

$$(\frac{dy}{dx} = 1), (\frac{d^2y}{dx^2} = 0).$$

Sustituyendo:

$$(x + 1)^2 \cdot 0 - 3(x + 1) \cdot 1 + 3(x + 1) = 0.$$

Esto confirma que $(y = x + 1)$ es una solución.

Paso 2: Reducción de orden

Dado que $(y_1 = x + 1)$ es una solución, asumimos $(y_2 = v(x) \cdot y_1 = v(x)(x + 1))$:

$$(y_2 = (x + 1)v(x)),$$

$$(\frac{dy_2}{dx} = v'(x)(x + 1) + v(x)),$$

$$(\frac{d^2y_2}{dx^2} = v''(x)(x + 1) + 2v'(x)).$$

Sustituyendo en la ecuación original y simplificando, se obtiene una ecuación para $(v(x))$. La ecuación se reduce a:

$$(x + 1)v''(x) - (x + 1)v'(x) = 0,$$

lo que lleva a $(v''(x) - v'(x) = 0)$. Resolviendo $w(x) = v'(x)$:

$$\frac{dw}{dx} - w = 0,$$

Cuyas soluciones $(w(x) = C_1 e^x)$, por lo que $(v'(x) = C_1 e^x)$. Integrando

$$v(x) = C_2 + C_1 e^x.$$

Tomando$(C_1 = 1) y (C_2 = 0)$ para una solución linealmente independiente

$$y_2(x) = (x + 1)e^x.$$

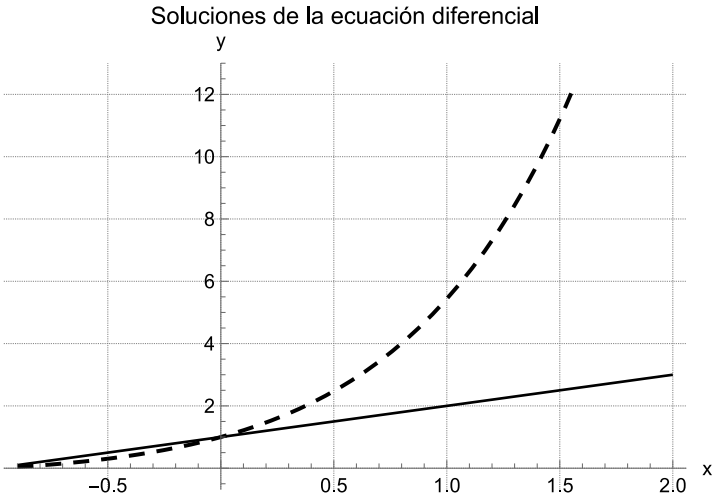
Paso 3: Solución general

La solución general es una combinación lineal de$(y_1) y (y_2)$:

$y(x) = C_1(x + 1) + C_2(x + 1)e^x$, donde $(C_1) y (C_2)$ son constantes arbitrarias

Paso 4: Gráfica

$(y_1 = x + 1) y (y_2 = (x + 1)e^x$, con $((C_2 = 1))$



2.2 Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes.

La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

Introducción

En esta sección consideramos el caso especial de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) −ésimo en la que todos los coeficientes son constantes reales. Es decir, nos ocuparemos de la ecuación:

$$a_0\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + a_1\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_n y = 0, (2.3)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son constantes reales. Mostraremos que la solución general de esta ecuación puede encontrarse explícitamente.

2.2.1 Ecuación característica de una ecuación diferencial de orden superior

En un intento por encontrar soluciones de una ecuación diferencial, naturalmente nos preguntaríamos si alguna función conocida podría tener las propiedades necesarias para ser una solución. La ecuación diferencial (2.3) requiere una función tal que, si ella y sus diversas derivadas se multiplican cada una por ciertas constantes, los a_i, y los productos resultantes, $a_i f^{(n-i)}$, se suman, el resultado será igual a cero para todos los valores de (x) para los cuales este resultado esté definido. Para que esto ocurra, necesitamos una función tal que sus derivadas sean múltiplos constantes de sí misma. ¿Conocemos funciones (f) que tengan la propiedad de que:

$\frac{d^k f}{dx^k} = c_k f(x)$, para todo (x)? La respuesta es "sí", pues la función exponencial (f) tal que

$f(x) = e^{mx}$, donde (m) es una constante, cumple que: $\frac{d^k}{dx^k}(e^{mx}) = m^k e^{mx}$.

Por lo tanto, buscaremos soluciones de (2.3) de la forma $y = e^{mx}$, donde la constante (m) se elegirá de modo que e^{mx} satisfaga la ecuación. Suponiendo entonces que $y = e^{mx}$ es una solución para cierto (m), tenemos:

Derivadas de $y = e^{mx}$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = me^{mx}, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = m^2 e^{mx}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = m^n e^{mx}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3):

$a0m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$, o equivalente:

$e^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n) = 0.$ (2.4)

Dado que $e^{mx} \neq 0$, obtenemos la ecuación polinómica en la incógnita (m):

Esta ecuación se denomina ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial dada (2.4). Si $y = e^{mx}$

es una solución de (2.3), entonces la constante (m) debe satisfacer (2.4). Por lo tanto, para resolver (2.3), escribimos la ecuación auxiliar (2.4) y la resolvemos para (m). Observa que (2.4) se obtiene formalmente a partir de (2.3) reemplazando la derivada de orden (k) −ésimo en (4.23) por m^k (para $k = 0, 1, 2, \dots, n$). Surgen tres casos, dependiendo de si las raíces de (2.4) son reales y distintas, reales y repetidas, o complejas.

Caso 1. Raíces reales distintas

Teorema

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n)-ésimo con coeficientes constantes, dada por (2.3). Si la ecuación auxiliar (2.4) tiene (n) raíces reales distintas $m_1, m_2, \dots, m_n$, entonces la solución general de (4.23) es:

$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$, donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Caso 2. Raíces reales repetidas

Teorema

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) −ésimo con coeficientes constantes, dada por (2.3). Si la ecuación auxiliar (2.4) tiene una raíz real (m) que ocurre (k) veces, entonces la parte de la solución general de (2.3) correspondiente a esta raíz repetida de multiplicidad (k) es:

$$a_0\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + a_1\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_n y = 0. (2.3)$$

Si la ecuación auxiliar: $a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0, (2.4)$

tiene raíces reales, se presentan los siguientes casos:

Si la ecuación auxiliar (2.4) tiene una raíz real (m) que ocurre (k) veces, entonces la parte de la solución general de (2.3) correspondiente a esta raíz repetida de multiplicidad (k) es:

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx}.$$

Si, además, las raíces restantes de la ecuación auxiliar (2.4) son los números reales distintos $(m_{k+1}, \dots, m_n)$, entonces la solución general de (2.3) es:

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

Sin embargo, si alguna de las raíces restantes también está repetida, entonces las partes de la solución general de (2.3) correspondientes a cada una de estas otras raíces repetidas son expresiones similares a la correspondiente a (m) en la parte 1.

Caso 3. Raíces complejas conjugadas

Teorema

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de orden (n) –ésimo con coeficientes constantes, dada por:

$$a_0\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + a_1\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_n y = 0. (2.3)$$

Si la ecuación auxiliar:

$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0 (2.4)$ tiene raíces complejas conjugadas, se presentan los siguientes casos:

Si la ecuación auxiliar (2.4) tiene las raíces complejas conjugadas $(a + bi)$ y $(a - bi)$, ninguna de ellas repetida, entonces la parte correspondiente de la solución general de (2.3) puede escribirse como:

$$y = e^{ax}(c_1 \sin b\, x + c_2 \cos b\, x).$$

Sin embargo, si $(a + bi)$ y $(a - bi)$ son raíces de multiplicidad (k) de la ecuación auxiliar (2.4), entonces la parte correspondiente de la solución general de (2.3) puede escribirse como:

$$y = e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right)\sin b\, x + \left(c_{k+1} + c_{k+2} x + c_{k+3} x^2 + \cdots + c_{2k} x^{k-1}\right)\cos b\, x\right].$$

Ejemplo No. 20

Encuentra la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales.

1. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 5\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6y = 0,$

la ecuación característica es: $m^2 - 5m + 6 = 0.$

Factorizando: $((m-2)(m-3) = 0)$, con raíces $(m_1 = 2), (m_2 = 3).$

La solución general es: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}.$

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y = 0,$

la ecuación característica es: $m^2 - 2m - 3 = 0.$

Factorizamos: $((m-3)(m+1) = 0), con\ raíces (m_1 = 3), (m_2 = -1).$

La solución general es: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}.$

3. $4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 12\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5y = 0,$

dividimos por 4:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 3\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{5}{4}y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$m^2 - 3m + \frac{5}{4} = 0.$$

Resolvemos: $(m_1 = \frac{5}{2}), (m_2 = \frac{1}{2}).$

La solución general es: $y = c_1e^{\frac{5}{2}x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}.$

Ejemplo No. 21

Dada la ecuación:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y = 0,$$

la ecuación característica es: $m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0.$

$$(m^2 - 2m - 3) = 0), \qquad (m_1 = 1), (m_2 = 3), (m_3 = -1).$$

La solución general es: $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$.

Ejemplo No. 22

Dada la ecuación:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y = 0,$$

la ecuación característica es:

$$m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0.$$

Raíz: $(m = 2)$, con multiplicidad $(k = 2)$.

La solución general es: $y = (c_1 + c_2x)e^{2x}$.

Ejemplo No. 23

Dada la ecuación:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5y = 0,$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 2m + 5 = 0.$$

Raíces ($m = -1 \pm 2i$).

La solución general es: $y = e^{-x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$.

Ejemplo No. 24

Dada la ecuación:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + 4\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 14\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 20\left(\frac{dy}{dx}\right) + 25y = 0,$$

la ecuación característica es:

$$m^4 + 4m^3 + 14m^2 + 20m + 25 = (m^2 + 2m + 5)^2 = 0.$$

Raíces($m = -1 \pm 2i$), cada una con multiplicidad($k = 2$).

La solución general es:

$$y = e^{-x}[(c_1 + c_2x)\sin 2\,x + (c_3 + c_4x)\cos 2\,x].$$

Ejemplo No. 25

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 10 con coeficientes constantes, con raíces de la ecuación auxiliar:

$$4, 4,\ 4,\ 4,\ 2 + 3i,\ 2 - 3i,\ 2 + 3i,\ 2 - 3i,\ 2 + 3i,\ 2 - 3i,$$

la solución general es:

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{4x} + e^{2x}[(c_5 + c_6x + c_7x^2)\sin 3\,x + (c_8 + c_9x + c_{10}x^2)\cos 3\,x],$$

Donde $(c_1, c_2, \ldots, c_{10})$ son constantes arbitrarias

2.3 Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden (n) tienen la forma

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, donde $g(x) \neq 0$ es el término no homogéneo. La solución general de estas ecuaciones se compone de dos partes: la solución homogénea y_h , que satisface la ecuación asociada $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = 0$, y una solución particular y_p, que satisface la ecuación completa. La solución general es $y = y_h + y_p$. La solución homogénea se obtiene mediante la ecuación característica para coeficientes constantes o métodos como la reducción de orden para coeficientes variables. Para encontrar y_p , se emplean métodos como coeficientes indeterminados, que propone una forma para y_p basada en ($g(x)$ (e.g., polinómica para ($g(x)$ polinómico, exponencial o sinusoidal para términos similares), ajustando coeficientes al sustituir en la ecuación. Alternativamente, el método de variación de parámetros asume $y_p = u_1(x)y_1 + \cdots + u_n(x)y_n$, donde $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea, y los $u_i(x)$.

2.3.1 El método de coeficientes indeterminados

Ahora consideramos la ecuación diferencial (no homogénea):

$$a_0\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + a_1\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_n y = F(x), (2.5)$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, pero el término no homogéneo (F) es (en general) una función no constante de (x). Recordemos que la solución general de (2.5) puede escribirse como:

$$y = y_c + y_p,$$

donde y_c es la función complementaria, es decir, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (ecuación (2.5) con (F) reemplazado por 0), y y_p es una integral particular, es decir, cualquier solución de (2.5) que no contenga constantes arbitrarias. En temas anteriores aprendimos cómo encontrar la función complementaria; ahora consideramos métodos para determinar una integral particular.

Primero consideramos el método de coeficientes indeterminados. Desde un punto de vista matemático, la clase de funciones (F) a las que se aplica este método es en realidad bastante restringida; pero esta clase matemáticamente limitada incluye funciones que aparecen con frecuencia y son de considerable importancia en diversas aplicaciones físicas. Y este método tiene una ventaja distinta: ¡cuando se aplica, es relativamente simple!

El Método

Comenzamos introduciendo ciertas definiciones preliminares.

Llamaremos a una función una función coeficientes indeterminados (CI) si es:

Definición

(1) una función definida por uno de los siguientes casos:
(i) x^n, donde (n) es un entero positivo o cero,

(ii) e^{ax} , donde (a) es una constante $\neq 0$,

(iii) $\sin(bx + c)$, donde (b) y (c) son constantes, $b \neq 0$,

(iv) $\cos(bx + c)$, donde (b) y (c) son constantes, $b \neq 0$,

o (2) una función definida como un producto finito de dos o más funciones de estos cuatro tipos.

Ejemplo No. 26

Ejemplos de funciones UC de los cuatro tipos básicos $(i), (ii), (iii), (iv)$de la definición anterior son aquellos definidos respectivamente por:

$$x^3, \quad e^{-2x}, \quad \sin\left(\frac{3x}{2}\right), \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ejemplos de funciones CI definidas como productos finitos de dos o más de estos cuatro tipos básicos son aquellos definidos respectivamente por:

$$x^2 e^{3x}, \quad x\cos 2\,x, \quad e^{5x}\sin 3\,x, \quad \sin 2\,x\cos 3\,x, \quad x^3 e^{4x}\sin 5\,x.$$

El método de coeficientes indeterminados se aplica cuando la función no homogénea (F) en la ecuación diferencial es una combinación lineal finita de funciones CI.

Observa que, dada una función CI (f), cada derivada sucesiva de (f) es o bien un múltiplo constante de una función CI o bien una combinación lineal de funciones CI.

Definición

Consideremos una función CI (f). El conjunto de funciones que consta de (f) misma y todas las funciones CI linealmente independientes de las cuales las derivadas sucesivas de (f) son ya sea múltiplos constantes o combinaciones lineales se denominará el conjunto CI de (f)

Ejemplo No. 27

La función (f), definida para todo (x) real para $(x) = x^3)$, es una función CI. Calculando las derivadas de (f), encontramos:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6 = 6 \cdot 1, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{para} \quad n > 3.$$

Las funciones UC linealmente independientes de las cuales las derivadas sucesivas de (f) son ya sea múltiplos constantes o combinaciones lineales son aquellas dadas por: $x^2, \quad x, \quad 1.$

Por lo tanto, el conjunto CI de (x^3) es el conjunto $(S = \{x^3, x^2, x, 1\})$.

Ejemplo No. 28

La función (f), definida para todo (x) real por $(f(x) = sin2x)$, es una función CI. Calculando las derivadas de (f), encontramos: $f'(x) = 2\cos 2x, \quad f''(x) = -4\sin 2x.$

La única función CI linealmente independiente de la cual las derivadas sucesivas de (f) son múltiplos constantes o combinaciones lineales es aquella dada por $(\cos 2x)$. Por lo tanto, el conjunto CI de $(\sin 2x)$ es el conjunto $(S = \{\sin 2x, \cos 2x\})$.

Ejemplo No. 29

La función (f) definida para todo (x) real por $(f(x) = x^2 \sin x)$, es el producto de dos funciones CI definidas por (x^2) y $(\sin x)$. Por tanto, , (f) es en si misma una función CI. Calculando las derivadas de (f), encontramos

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x,$$

$$f''(x) = 2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x,$$

$$f'''(x) = 6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x.$$

No aparecerán ``nuevos'' tipos de funciones al continuar derivando. Cada derivada de (f) es una combinación lineal de alguna de las seis funciones CI dadas por $(x^2\sin x), (x^2\cos x), (x\sin x), (x\cos x), (\sin x), y(\cos x)$. Por tanto, el conjunto $(S = \{x^2\sin x, x^2\cos x, x\sin x, x\cos x, \sin x, \cos x\})$ es el conjunto CI de $(x^2\sin x)$. Observe cuidadosamente que $(x^2), (x), y\ (1)$ no son miembros de este conjunto de CI

Aclaración

Observa que el conjunto UC del producto $x^2\sin x$ es el conjunto de todos los productos obtenidos al multiplicar los diversos miembros del conjunto CI $\{x^2, x, 1\}$ los diversos miembros del conjunto CI $\{\sin x, \cos x\}$a observación ilustra la situación general respecto al conjunto CI de una función CI definida como un producto finito de dos o más funciones CI de los cuatro tipos básicos. En particular, supongamos que (h) es una función CI definida como el producto (fg) de dos funciones CI básicas (f) y (g). Entonces, el conjunto CI de la función producto (h) es el conjunto de todos los productos obtenidos al multiplicar los diversos miembros del conjunto CI de (f) por los diversos miembros del conjunto CI de (g)

FUNCIONES DE COEFICIENTES INDETERMINADOS (CI)	CONJUNTO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS (CI)
(x^n)	$(\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, 1\})$
(e^{ax})	$(\{e^{ax}\})$
$(\sin(bx+c))$ o $(\cos(bx+c))$	$(\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\})$
$(x^n e^{ax})$	$(\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, x^{n-2}e^{ax}, \dots, xe^{ax}, e^{ax}\})$
$((x^n \sin(bx+c))$ o $(x^n \cos(bx+c))$	$(\{x^n \sin(bx+c), x^n \cos(bx+c), x^{n-1} \sin(bx+c), x^{n-1} \cos(bx+c), \dots, x \sin(bx+c), x \cos(bx+c), \sin(bx+c), \cos(bx+c)\})$
$(e^{ax} \sin(bx+c))$ o $(e^{ax} \cos(bx+c))$	$(\{e^{ax} \sin(bx+c), e^{ax} \cos(bx+c)\})$
$(x^n e^{ax} \sin(bx+c))$ o $(x^n e^{ax} \cos(bx+c))$	$(\{x^n e^{ax} \sin(bx+c), x^n e^{ax} \cos(bx+c), x^{n-1}e^{ax} \sin(bx+c), x^{n-1}e^{ax} \cos(bx+c), \dots, xe^{ax} \sin(bx+c), xe^{ax} \cos(bx+c), e^{ax} \sin(bx+c), e^{ax} \cos(bx+c)\})$

Ejemplo No. 30

Función: $f(x)$: $(x^3 \cos 2\,x)$

Conjunto de CI: $(\{x^3 \sin 2\,x, x^3 \cos 2\,x, x^2 \sin 2\,x, x^2 \cos 2\,x, x \sin 2\,x, x \cos 2\,x, \sin 2\,x, \cos 2\,x\})$

Ejemplo No. 31

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{2x} - 10\sin x$$

1. Solución Complementaria (y_c)

Resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

La ecuación característica es:

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

Resolviendo:

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Las raíces son $m = 3\ y\ m = -1$. Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

2. Solución Particular (y_p)

Usamos el método de coeficientes indeterminados. El término no homogéneo es $2e^{2x} - 10\sin x$, por lo que proponemos:

$$y_p = Ae^{2x} + B\cos x + C\sin x$$

Calculamos sus derivadas:

$$y_p' = 2Ae^{2x} - B\sin x + C\cos x$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x} - B\cos x - C\sin x$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$(4Ae^{2x} - B\cos x - C\sin x) - 2(2Ae^{2x} - B\sin x + C\cos x) - 3(Ae^{2x} + B\cos x + C\sin x) = 2e^{2x} - 10\sin x$$

Simplificamos:

$$-3Ae^{2x} + (-4B - 2C)\cos x + (2B - 4C)\sin x = 2e^{2x} - 10\sin x$$

Igualamos coeficientes:

$$-3A = 2, \qquad A = -\frac{2}{3}$$

$$-4B - 2C = 0, \qquad 2B + C = 0 \quad (1)$$

$$2B - 4C = -10 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema:

De (1): $C = -2B$. Sustituyendo en (2):

$$2B - 4(-2B) = -10, \qquad 10B = -10, \qquad B = -1$$

$$C = -2(-1) = 2$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = -\frac{2}{3}e^{2x} - \cos x + 2\sin x$$

Solución General

La solución general es la suma de la solución complementaria y la particular:

$$y = y_c + y_p = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x} - \cos x + 2\sin x$$

Ejemplo No. 32

Se da la ecuación diferencial no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

Encuentre la solución utilizando el método de coeficientes indeterminados

Solución

Solución complementaria

La ecuación homogénea asociada es: $y'' - 3y' + 2y = 0$

La ecuación característica es: $m^2 - 3m + 2 = 0$

Resolviendo:

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \qquad m_1 = 2, \quad m_2 = 1$$

Por lo tanto, la solución complementaria es: $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Solución particular

Usamos el método de coeficientes indeterminados para el lado derecho $(2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x})$.

Término $(2x^2)$:

Proponemos $(y_{p1} = Ax^2 + Bx + C)$. Sustituyendo y resolviendo, se obtiene

$$y_{p1} = x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

Término $(e^x + 2xe^x)$:

Dado que $(m = 1)$ es una raíz de la ecuación característica, proponemos $(y_{p2} = x(Dx + E)e^x)$. Resolviendo:

$$y_{p2} = (-x^2 + 3x)e^x$$

Término $(4e^{3x})$:

Proponemos $(y_{p3} = Fe^{3x})$. Resolviendo

$$y_{p3} = 2e^{3x}$$

La solución particular completa es:

$$y_p = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + (-x^2 + 3x)e^x + 2e^{3x}$$

Solución general

La solución general es:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 7/2 + (-x^2 + 3x)e^x + 2e^{3x}}$$

Ejemplo No. 33

Resolver la ecuación diferencial no homogénea:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$$

1. Solución Complementaria (y_c)

Resolvemos primero la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

La ecuación característica es:

$$m^4+m^2=0, \qquad m^2(m^2+1)=0$$

Las raíces son:

$$m = 0 \ doble \ , \quad m = \pm i$$

Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x$$

2. Solución Particular (y_p)

El término no homogéneo es $3x^2+4\sin x-2\cos x$. Proponemos una solución particular que cubra todos los términos, considerando que $cos\ x\ y\ sin\ x$ ya aparecen en (y_c) (resonancia):

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx\cos x + Ex\sin x$$

Calculamos las derivadas necesarias:

$$y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D\cos x - Dx\sin x + E\sin x + Ex\cos x \setminus$$

$$y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C - D\sin x - D\sin x - Dx\cos x + E\cos x + E\cos x - Ex\sin x \setminus$$

$$= 12Ax^2 + 6Bx + 2C - 2D\sin x - Dx\cos x + 2E\cos x - Ex\sin x$$

$$y_p''' = 24Ax + 6B - 2D\cos x - D\cos x + Dx\sin x - 2E\sin x - E\sin x - Ex\cos x$$

$$= 24Ax + 6B - 3D\cos x + Dx\sin x - 3E\sin x - Ex\cos x$$

$$y_p'''' = 24A + 3D\sin x + D\sin x + Dx\cos x - 3E\cos x - E\cos x + Ex\sin x$$

$$= 24A + 4D\sin x + Dx\cos x - 4E\cos x + Ex\sin x$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$y_p'''' + y_p'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

$$(24A + 4D\sin x + Dx\cos x - 4E\cos x + Ex\sin x) + (12Ax^2 + 6Bx + 2C - 2D\sin x - Dx\cos x + 2E\cos x - Ex\sin x) = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

Simplificamos:

$$12Ax^2 + 6Bx + (24A + 2C) + (4D - 2D)\sin x + (-4E + 2E)\cos x = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

Igualamos coeficientes:

$$12A = 3\,, \qquad A = \frac{1}{4}$$

$$6B = 0, \qquad B = 0$$

$$24A + 2C = 0, \qquad 6 + 2C = 0, \qquad C = -3$$

$$2D = 4, \qquad D = 2$$

$$-2E = -2, \qquad E = 1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 2x\cos x + x\sin x$$

3. Solución General

La solución general es la suma de la solución complementaria y particular:

$$y = y_c + y_p = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 2x\cos x + x\sin x$$

2.3.2 Variación de parámetros.

Aunque el proceso de aplicar el método de coeficientes indeterminados es en realidad bastante directo (involucra solo técnicas de álgebra universitaria y diferenciación), el método se aplica en general a una clase bastante pequeña de problemas. Por ejemplo, no sería aplicable a la ecuación aparentemente simple:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$$

Por lo tanto, buscamos un método para encontrar una integral particular que se aplique en todos los casos (incluyendo coeficientes variables) en los que se conoce la función complementaria. Dicho método es el método de variación de parámetros, que ahora consideramos.

Método de Variación de Parámetros para Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Forma general de la ecuación

Consideremos la ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Paso 1: Solución complementaria

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Supongamos que hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)\ y\ y_2$. Entonces la solución complementaria es:

$$y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

Paso 2: Suposición para la solución particular

El método de variación de parámetros consiste en reemplazar las constantes $C_1\ y\ C_2$ por funciones $u_1(x)\ y\ u_2(x)$:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones

Para encontrar $u_1(x)\ y\ u_2(x)$imponemos las siguientes condiciones:

Primera condición: $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$

Segunda condición (derivando y_p):

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

Al sustituir en la ecuación original, obtenemos:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

Paso 4: Resolución del sistema

Tenemos el sistema:

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = g(x)$$

Que podemos resolver usando la regla de Cramer. El Wronskiano es:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_{1'} & y_{2'} \end{vmatrix} = y_1 y_{2'} - y_2 y_{1'}$$

Las soluciones son:

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Integrando obtenemos:

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Paso 5: Solución particular final

La solución particular es entonces:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Paso 6: Solución general

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Ejemplo No. 34

$$y'' + y = \sec x$$

Solución complementaria: $y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Wronskiano: $W(\cos x\,, \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Calculamos:

$$u_1 = -\int \sin x \sec x \, dx = -\int \tan x \, dx = \ln|\cos x|$$

$$u_2 = \int \cos x \sec x \, dx = \int 1 \, dx = x$$

Solución particular:

$$y_p = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

Solución general:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

Ejemplo No. 35

Resolver la ecuación no homogénea: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot x$

1.- Solución complementaria $((y_c))$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

La ecuación característica es: $m^2 + 1 = 0,\ m = \pm i$

Por lo tanto, la solución complementaria es: $y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2.- Solución particular$\big((y_p)\big)$ Por variación de parámetros

Aplicamos el método de variación de parámetros, donde: $y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$

Paso 1: Calcular el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Paso 2: Determinar $(u_1')y(u_2')$

$$u_1' = -\frac{y_2 g(x)}{W} = -\frac{\sin x \cot x}{1} = -\cos x$$

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W} = \frac{\cos x \cot x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \csc x - \sin x$$

Paso 3: Integrar para encontrar $(u_1)y(u_2)$

$$u_1 = -\int \cos x \; dx = -\sin x$$

$$u_2 = \int (\csc x - \sin x) \; dx = \ln|\csc x - \cot x| + \cos x$$

Paso 4: Construir (y_p)

$$y_p = (-\sin x)\cos x + [\ln|\csc x - \cot x| + \cos x]\sin x$$

$$y_p = -\sin x \cos x + \sin x \ln|\csc x - \cot x| + \sin x \cos x$$

$$y_p = \sin x \ln|\csc x - \cot x|$$

3. Solución General

La solución general es la suma de la solución complementaria y particular:

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln|\csc x - \cot x|$$

Nota sobre la simplificación

Recordemos que: $\csc x - \cot x = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Por lo que la solución puede expresarse alternativamente como:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

Ejemplo No. 36

Resolver la ecuación no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sec^2(2x)$$

Solución complementaria $((y_c))$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

La ecuación característica es: $m^2 + 4 = 0,\ m = \pm 2i$

Por lo tanto, la solución complementaria es: $y_c = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

2. Solución Particular $\left((y_p)\right)$ por Variación de Parámetros

Aplicamos el método de variación de parámetros, donde: $y_p = u_1(x)\cos(2x) + u_2(x)\sin(2x)$

Paso 1: Calcular el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2$$

Paso 2: Determinar $(u_1')y(u_2')$

$$u_1' = -\frac{y_2 g(x)}{W} = -\frac{\sin(2x)\sec^2(2x)}{2} = -\frac{\sin(2x)}{2\cos^2(2x)}$$

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W} = \frac{\cos(2x)\sec^2(2x)}{2} = \frac{1}{2\cos(2x)}$$

Paso 3: Integrar para encontrar $(u_1)y(u_2)$

Para (u_1):

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}\,dx = -\frac{1}{4}\sec(2x)$$

Para (u_2):

$$u_2 = \frac{1}{2}\int \sec(2x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$$

Paso 4: Construir y_p

$$y_p = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x)\ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$$

3. Solución General

La solución general es la suma de la solución complementaria y particular:

$$y = y_c + y_p = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x)\ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$$

2.4 La ecuación diferencial de Cauchy-Euler.

En las secciones anteriores hemos visto cómo obtener la solución general de la ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes constantes. Hemos observado que, en tales casos, la forma de la función complementaria puede determinarse fácilmente. Sin embargo, la ecuación lineal general de orden *n* con coeficientes variables es un asunto completamente diferente, y solo en ciertos casos especiales es posible obtener explícitamente la función complementaria en forma cerrada. Un caso especial de considerable importancia práctica, afortunadamente resoluble, es la llamada **ecuación de Cauchy-Euler** (o ecuación equidimensional). Esta es una ecuación de la forma:

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son constantes. Cada término contiene una expresión de la forma:

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k}$$

para $k = 0,1,\ldots,n$.

¿Cómo debería procederse para resolver tal ecuación? Casi la única idea esperanzadora que surge en esta etapa de nuestro estudio es intentar una transformación. Pero, ¿qué transformación deberíamos intentar y a dónde nos llevará?

Mientras que ciertamente vale la pena detenerse un momento para considerar qué tipo de transformación podríamos usar al resolver un ``nuevo'' tipo de ecuación cuando la encontramos por primera vez, definitivamente no vale la pena gastar mucho tiempo buscando artificios ingeniosos que los matemáticos han conocido durante muchos años.

Los hechos se establecen en el siguiente teorema.

Teorema

La transformación $(x = e^t)$ reduce la ecuación diferencial de Cauchy-Euler de orden (n):

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x),$$

a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = G(t),$$

Donde $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ son constantes derivadas de $(a_0, a_1, \ldots, a_n), y\ (G(t) = F(e^t))$.

Demostración $caso$ ($n = 2$)

Sustituyendo $(x = e^t)((x > 0))$

$$a_0 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x),$$

se obtiene:

$$a_0 \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = F(e^t),$$

que se simplifica a:

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 y = G(t).$$

Observaciones

El punto es singular $(x = 0)$ es singular $((a_0 x^n = 0))$

Para $(x < 0)$, usar $(x = -e^t)$.

Ejemplo No. 37

Encuentra la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales en los Ejercicios siguientes. En cada caso, asume $x > 0$.

Solución de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

Reconocemos que es una ecuación de Cauchy-Euler de la forma: $a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$,

$(a_0 = 1), (a_1 = -3)\ y\ (a_2 = 3)$, $(x = e^t)$, $(x = e^t)((t = \ln x))$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

Transformar la ecuación original

Sustituyendo en la ecuación:

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) - 3x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + 3y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Resolver la ecuación con coeficientes constantes

La ecuación característica es: $m^2 - m + 3 = 0.$

Raíces:

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow m_1 = 3,\ m_2 = 1.$$

Solución general en términos de (t):

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}.$$

Regresar a la variable original (x). Como $(t = \ln x)$:

$$y(x) = C_1 e^{3\ln x} + C_2 e^{\ln x} = C_1 x^3 + C_2 x.$$

Solución Final: $\boxed{y(x) = C_1 x^3 + C_2 x}$, $(C_1)\ y\ (C_2)$ son constantes arbitrarias

Verificación. Sustituyendo la solución en la ecuación original:

$y = C_1 x^3 + C_2 x\ ,\quad y' = 3C_1 x^2 + C_2\ ,\ y'' = 6C_1 x$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2(6C_1 x) - 3x(3C_1 x^2 + C_2) + 3(C_1 x^3 + C_2 x)$$

$$= 6C_1 x^3 - 9C_1 x^3 - 3C_2 x + 3C_1 x^3 + 3C_2 x = 0.$$

Se verifica que la solución satisface la ecuación diferencial.

Ejemplo No. 38

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Sustitución $x = e^t$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Ecuación transformada:

$$4\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-4\frac{dy}{dt}+3y=0$$

$$4\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}+3y=0$$

Ecuación característica:

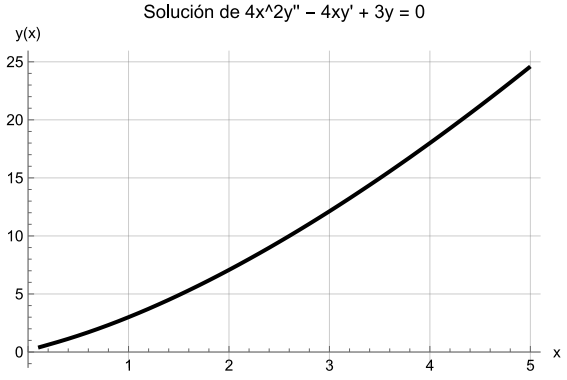
$$4m^2-8m+3=0$$

$$m=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}=\frac{8\pm4}{8}\Rightarrow m_1=\frac{3}{2},\ m_2=\frac{1}{2}$$

Solución general:

$$y(t)=C_1e^{\frac{3}{2}t}+C_2e^{\frac{1}{2}t}$$

$$y(x)=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2x^{\frac{1}{2}}$$



Ejemplo No. 39

Resolvemos la ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}-6y=0$$

Aplicamos la transformación estándar para ecuaciones de Cauchy-Euler:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

Ecuación transformada

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 3\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 6\frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

Simplificando:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

Ecuación característica

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

Factorizando:

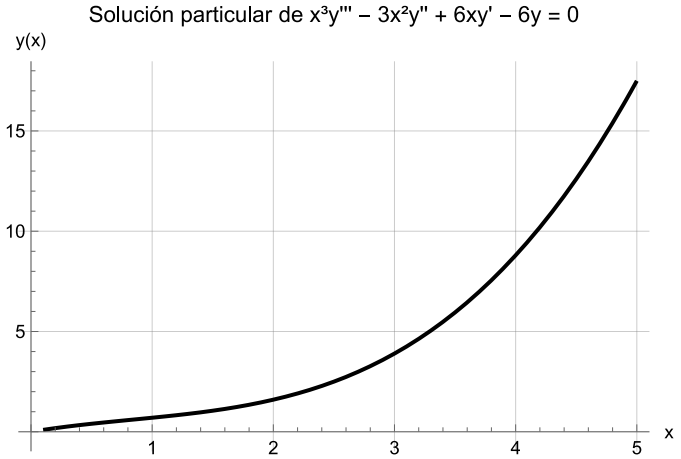
$$(m-1)(m-2)(m-3) = 0, \qquad m = 1,2,3$$

Solución general}

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$$

Volviendo a la variable original $x = e^t$:

$$y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$



Problema No. 40

Consideremos la ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

Condiciones iniciales $(y(1) = 5), (y'(1) = 4)$.

Paso 1: Método de solución

$$(y = x^t).(y' = tx^{t-1}), (y'' = t(t-1)x^{t-2})$$

$$x^2 \cdot t(t-1)x^{t-2} - 2x \cdot tx^{t-1} - 10x^t = 0$$

Simplificamos:

$$t(t-1)x^t - 2tx^t - 10x^t = 0$$

Dividimos por $(x^t)\ para\ ((x \neq 0))$:

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

Resolvemos la ecuación característica:

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}, \qquad m = 5, -2$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 x^5 + c_2 x^{-2}$$

Paso 2: Condiciones iniciales

$$1.(y(1) = 5):$$

$$c_1 + c_2 = 5$$

$$2.(y'(x) = 5c_1 x^4 - 2c_2 x^{-3}), \qquad (y'(1) = 4):$$

$$5c_1 - 2c_2 = 4$$

Resolvemos el sistema:

De $(c_1 + c_2 = 5), \quad (c_2 = 5 - c_1). \quad (5c_1 - 2c_2 = 4)$:

$$5c_1 - 2(5 - c_1) = 4, \qquad 5c_1 - 10 + 2c_1 = 4, \qquad 7c_1 = 14, \qquad c_1 = 2$$

Entonces:

$$c_2 = 5 - 2 = 3$$

Solución particular:

$$y(x) = 2x^5 + \frac{3}{x^2}$$

2.5 Aplicaciones

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son herramientas fundamentales en diversas ramas de la ingeniería, como la electromecánica, mecatrónica, eléctrica, electrónica y sistemas computacionales, ya que permiten modelar y analizar sistemas dinámicos complejos con múltiples grados de libertad. Estas ecuaciones, que incluyen tanto las homogéneas como las no homogéneas, así como las de tipo Cauchy-Euler, se resuelven mediante métodos como la ecuación característica, el principio de superposición, coeficientes indeterminados, variación de parámetros y el Wronskiano para garantizar existencia y unicidad de soluciones. A continuación, se describen sus aplicaciones específicas en cada disciplina, destacando su relevancia en el diseño y optimización de sistemas.

En ingeniería electromecánica, las ecuaciones diferenciales de orden superior modelan vibraciones en sistemas mecánicos, como en motores o estructuras sometidas a fuerzas dinámicas. Por ejemplo, un sistema masa-resorte-amortiguador se describe mediante ecuaciones como $y'' + 2\zeta\omega_n y' + \omega_n^2 y = 0$, cuya solución general, obtenida a partir de la ecuación característica, describe el desplazamiento oscilatorio. Estas soluciones permiten diseñar sistemas que minimicen vibraciones indeseadas, asegurando estabilidad y durabilidad en maquinaria pesada o componentes electromecánicos. El principio de superposición es clave para combinar soluciones en sistemas con múltiples modos de vibración.

En mecatrónica, las ecuaciones diferenciales son esenciales para el diseño de sistemas de control automático, como en brazos robóticos o vehículos autónomos. Una ecuación típica es $y'' + ay' + by = f(t)$, donde $f(t)$ representa una entrada externa, como una señal de control. Métodos como la variación de parámetros o coeficientes indeterminados permiten encontrar soluciones particulares que modelan la respuesta del sistema ante entradas sinusoidales o escalonadas, optimizando la precisión y velocidad de respuesta en actuadores o sensores. El Wronskiano asegura la independencia lineal de las soluciones homogéneas, garantizando un control robusto.

En ingeniería eléctrica y electrónica, las ecuaciones diferenciales de orden superior modelan el comportamiento de circuitos RLC (resistor, inductor, capacitor) bajo fuentes de voltaje o corriente variables. Por ejemplo, la ecuación

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = V(t)$$

describe la carga ($q(t)$) en un capacitor. Para un circuito con $V(t) = \sin(\omega t)$, el método de coeficientes indeterminados proporciona una solución particular que modela la respuesta transitoria y permanente, crucial para diseñar filtros, osciladores o sistemas de transmisión de señales. En casos de resonancia, se requiere ajustar la forma de la solución particular, lo que resalta la importancia de la teoría de existencia y unicidad.

En sistemas computacionales, las ecuaciones diferenciales de orden superior se aplican en el modelado de redes neuronales artificiales, algoritmos de aprendizaje automático y sistemas embebidos. Por ejemplo, ecuaciones de tipo Cauchy-Euler, como $t^2y'' + aty' + by = 0$, pueden modelar tasas de aprendizaje en algoritmos dinámicos o la respuesta de sistemas de control embebidos en microcontroladores. La reducción de orden es útil para simplificar estas ecuaciones, mientras que el análisis de dependencia lineal mediante el Wronskiano asegura que las soluciones

sean completas. Estas aplicaciones son críticas para optimizar el rendimiento de sistemas computacionales en tiempo real, como en robótica o inteligencia artificial.

Problema No. 41:

Circuito RLC en Ingeniería Eléctrica

La ecuación diferencial que modela un circuito RLC con

$$L = 1\,\text{H}, \qquad R = 2\,\Omega, \qquad C = 0.5\,\text{F}, \qquad y \qquad V(t) = 10\sin(2t)$$

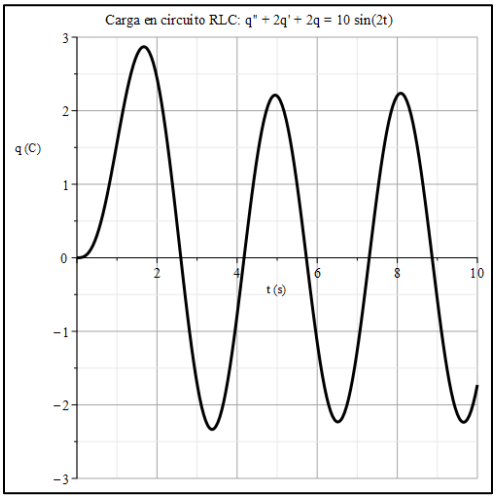
$$q'' + 2q' + 2q = 10\sin(2t)\,, \quad q(0) = 0, \quad q'(0) = 0.$$

La solución homogénea es $q_h = e^{-t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t))$. Usando el método de coeficientes indeterminados, la solución particular es $q_p = -\sin(2t) - 2\cos(2t)$. La solución general es:

$$q(t) = e^{-t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) - \sin(2t) - 2\cos(2t).$$

Aplicando las condiciones iniciales, , $(c_1 = 2), (c_2 = -2)$. La solución particular es:

$$q(t) = e^{-t}(2\cos(t) - 2\sin(t)) - \sin(2t) - 2\cos(2t)\,.$$



Problema No. 42

Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

La ecuación diferencial es:

$$y'' + 2y' + 4y = 5\cos(2t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

La solución general es:

$$y(t) = e^{-t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) + \frac{5}{4}\sin(2t)\,.$$

Calculamos la derivada $(y'(t))$:

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{5}{4}\sin(2t)\right].$$

Para el término homogéneo:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)\right]$$
$$= -e^{-t}\left(c_1\cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) + e^{-t}\left(-c_1\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + c_2\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right).$$

Simplificando:

$$= e^{-t}\left[\left(c_2\sqrt{3} - c_1\right)\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \left(c_1\sqrt{3} + c_2\right)\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right].$$

Para el término particular:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{5}{4}\sin(2t)\right] = \frac{5}{4}\cdot 2\cos(2t) = \frac{5}{2}\cos(2t)\,.$$

Entonces:

$$y'(t) = e^{-t}\left[\left(c_2\sqrt{3} - c_1\right)\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \left(c_1\sqrt{3} + c_2\right)\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right] + \frac{5}{2}\cos(2t)\,.$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$(y(0) = c_1 = 0, \qquad c_1 = 0).$$

$$(y'(0) = \left(c_2\sqrt{3} - c_1\right) + \frac{5}{2} = c_2\sqrt{3} + \frac{5}{2} = 0, \qquad c_2 = -\frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

La solución particular es:

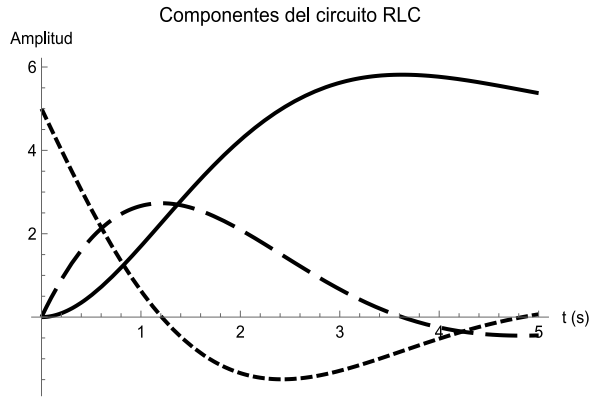
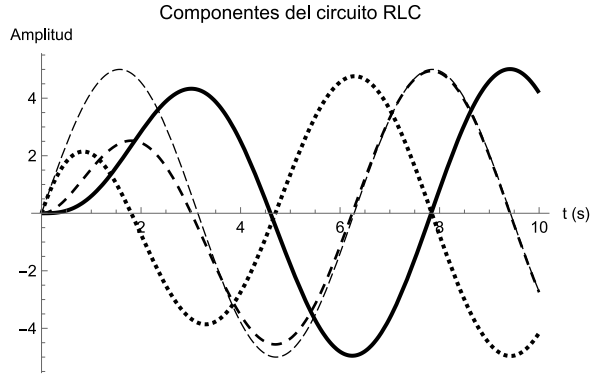
$$y(t) = e^{-t}\left(-\frac{5}{2\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) + \frac{5}{4}\sin(2t)\,.$$

Problema No. 43

Sistema	Modelo (Ecuación Diferencial)
Sistema eléctrico (circuito RLC) Descripción: Circuito en serie con resistencia (R), inductancia (L), capacitancia (C), y voltaje externo ($v(t)$). La variable es la corriente ($i(t)$).	$\boxed{L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{dv(t)}{dt}}$
Sistema mecánico (masa-resorte-amortiguador) Descripción: Sistema con masa (m), amortiguador con coeficiente (c), resorte con constante (k), y fuerza externa ($F(t)$). La variable es el desplazamiento ($x(t)$).	$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)}$
Sistema hidráulico (tanque con flujo) Descripción: Tanque con área (A), resistencia hidráulica R_h, inductancia hidráulica L_h, capacitancia hidráulica $C_h=A$, y flujo de entrada $Q_{\text{in}}(t)$. La variable es la altura del agua ($h(t)$).	$\boxed{L_h\frac{d^2h}{dt^2}+R_h\frac{dh}{dt}+\frac{h}{A}=Q_{\text{in}}(t)}$
Sistema térmico (intercambio de calor) Descripción: Cuerpo con capacitancia térmica C_t, resistencia térmica R_t, inductancia térmica L_t , y flujo de calor externo ($Q(t)$). La variable es la temperatura ($T(t)$).	$\boxed{L_t\frac{d^2T}{dt^2}+R_t\frac{dT}{dt}+\frac{T}{C_t}=Q(t)}$

En resumen, las ecuaciones diferenciales de orden superior son indispensables para abordar problemas dinámicos en estas disciplinas de ingeniería. Su resolución, apoyada en métodos analíticos y herramientas computacionales como Maple, permite a los ingenieros diseñar sistemas más eficientes, estables y precisos, desde maquinaria electromecánica hasta circuitos electrónicos y algoritmos computacionales avanzados.

Problema No. 44

Sistema	Modelo
	$$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{LC}V_C=\frac{1}{C}i'(t)$$ Suposiciones: $R = 1\ \Omega$ $L = 1\,\mathrm{H}$ $C = 1\,\mathrm{F}$ (usaremos $Ccap$ para evitar conflictos con constantes protegidas en Mathematica) $i(t) = 5t$ (una corriente lineal para que $i'(t) = 5$) Condiciones iniciales: $V_C(0) = 0,$ La ecuación se convierte en: $$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{1}{R\cdot C_{\mathrm{cap}}}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{L\cdot C_{\mathrm{cap}}}V_C=\frac{1}{C_{\mathrm{cap}}}\cdot 5$$ $$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{dV_C}{dt}+V_C=5$$
	$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{1}{CL}i(t)$$ Valores específicos asumidos: $R = 1\ \Omega$ (resistencia) $L = 1\,\mathrm{H}$ (inductancia) $C = 1\,\mathrm{F}$ (capacitancia) $i(t) = 5sin(t)$ Condiciones iniciales: $i_L(0) = 0, iL'(0) = 0$ Sustituyendo estos valores en la ecuación $$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{1\cdot 1}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{1\cdot 1}i_L=\frac{1}{1\cdot 1}\cdot 5\sin(t)$$ Simplificando $$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{di_L}{dt}+i_L=5\sin(t)$$

Problema No. 45

Un sistema mecánico donde la masa (M) está sujeta a un amortiguamiento total combinado con ($B_1 + B_2$) y una fuerza externa ($F(t)$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B_1 + B_2}{M}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{M}F(t)$$

Suposiciones:

$M = 1\,\text{kg}$ (masa)

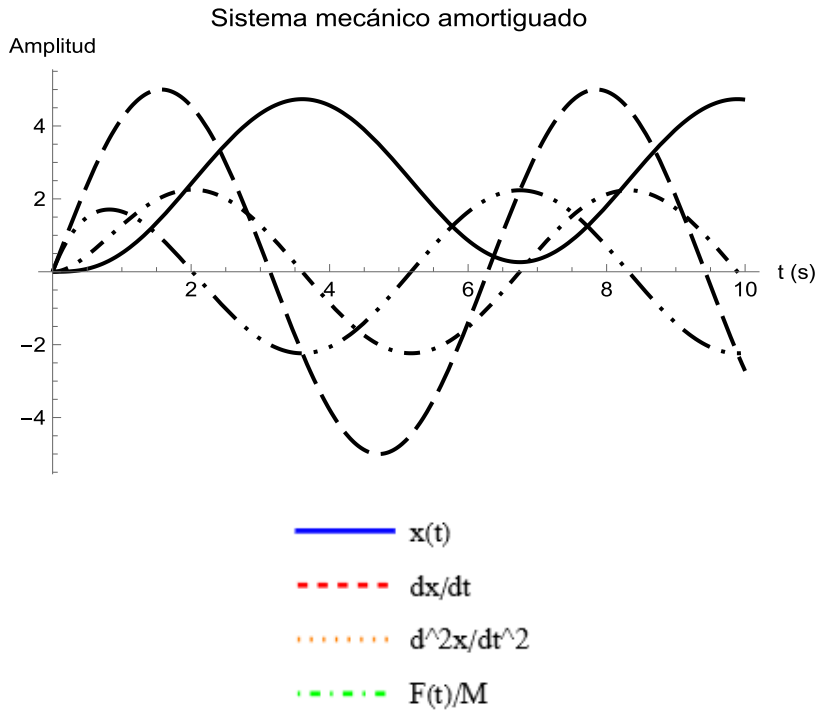
$B_1 = 1\,\text{N·s/m}$ (amortiguamiento)

$B_2 = 1\,\text{N·s/m}$ (fricción)

$F(t) = 5\sin(t)\ \text{N}$ (fuerza externa sinusoidal)

Condiciones iniciales : $x(0) = 0)$, $(\frac{dx}{dt}(0) = 0)$ (reposo)

Donde: B_1 es el amortiguamiento, B_2 es la fricción, M es la masa, y $F(t)$ es la fuerza externa.



Problema No. 46

El problema describe un sistema hidráulico que consiste en un tanque con un área de sección transversal fija (A), donde la altura del líquido ($h(t)$) varía con el tiempo. Este sistema recibe dos flujos de entrada $q_1(t)$ y $q_2(t)$, y tiene dos flujos de salida determinados por resistencias hidráulicas R_{H1} y R_{H2}, influenciados por la presión hidrostática $\gamma = \rho g$. La ecuación diferencial modela la tasa de cambio de la altura como el balance entre los flujos de entrada y salida, considerando la densidad del líquido ρ y la gravedad (g). La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right)\gamma h = \frac{q_1(t) + q_2(t)}{A}$$

Donde:

$\big(h(t)\big)$ es la altura del líquido $((\mathrm{m}))$,

(A) es el área de la sección transversal $((\mathrm{m}^2))$,

(R_{H1}) y (R_{H2}) son las resistencias hidráulicas $(\mathrm{kg}/(\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s})$ o unidades ajustadas

$q_1(t)$ y $q_2(t)$ son los gastos de entrada $((\mathrm{m}^3/\mathrm{s}))$,

$\gamma = \rho g$, donde ρ es la densidad del líquido $((\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3))$ y g es la aceleración gravitacional $(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2)$

$(q_1 = \frac{\gamma h}{R_{H1}})$ y $(q_2 = \frac{\gamma h}{R_{H2}})$ son los gastos de salida.

$A = 1\,\mathrm{m}^2$ (área de la sección transversal)

$\gamma = 9810\,\mathrm{N}/\mathrm{m}^3$ ($\rho = 1000\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$, $g = 9.81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$para agua)

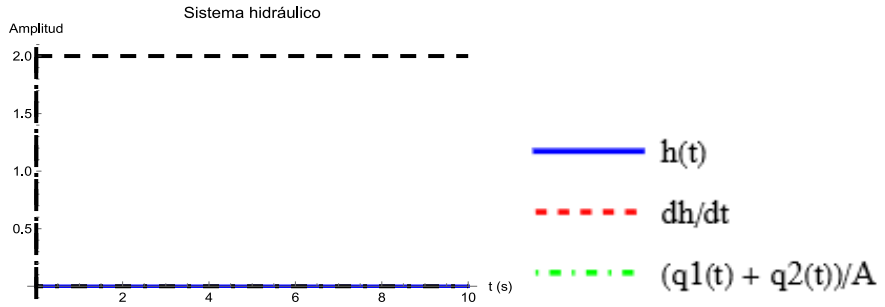
$R_{H1} = 1\,\mathrm{kg}/(\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s})$ (resistencia hidráulica 1)

$R_{H2} = 1\,\mathrm{kg}/(\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s})$ (resistencia hidráulica 2)

$q_1(t) = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ (gasto de entrada 1 constante)

$q_2(t) = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ (gasto de entrada 2 constante)

Condición inicial: $h(0) = 0$ (altura inicial cero)



Conclusiones

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior. El capítulo II, dedicado a las ecuaciones diferenciales de orden superior, aborda de manera integral los fundamentos teóricos y prácticos necesarios para comprender y resolver este tipo de ecuaciones, esenciales en disciplinas como la ingeniería y las ciencias aplicadas. Se exploraron temas clave, comenzando con la teoría preliminar, que establece las bases conceptuales. La definición de una ecuación diferencial de orden (n) proporciona el marco para identificar estas ecuaciones, mientras que los problemas de valor inicial permiten modelar fenómenos dinámicos con condiciones específicas. El teorema de existencia y unicidad garantiza que, bajo ciertas condiciones, las soluciones son únicas, lo que es crucial para aplicaciones prácticas. Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se estudiaron en detalle, destacando el principio de superposición, que permite combinar soluciones para formar nuevas soluciones, y la importancia del Wronskiano para determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de soluciones. La solución general de estas ecuaciones, obtenida mediante la ecuación característica, se complementa con técnicas como la reducción de orden, que simplifica la resolución de ecuaciones de orden superior. Para ecuaciones no homogéneas, los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros ofrecen herramientas robustas para encontrar soluciones particulares, mientras que las ecuaciones de Cauchy-Euler abordan casos con coeficientes variables, comunes en problemas de ingeniería. El capítulo incluye más de 50 problemas resueltos, que ilustran aplicaciones en ingeniería mecánica, eléctrica, mecatrónica y sistemas computacionales, como vibraciones en sistemas masa-resorte, circuitos RLC y control automático. Estos ejemplos prácticos refuerzan la comprensión de los conceptos teóricos, mostrando cómo las ecuaciones modelan fenómenos reales. Este material es especialmente valioso para los alumnos y alumnas del Instituto Tecnológico de Ensenada y del Tecnológico Nacional de México, ya que proporciona una base sólida para abordar problemas de ingeniería. Además, sirve como recurso de apoyo para el personal docente, facilitando la enseñanza de conceptos complejos mediante ejemplos claros y estructurados. En resumen, el capítulo II es una herramienta integral que combina teoría, métodos de resolución y aplicaciones prácticas, fortaleciendo el aprendizaje y la aplicación de las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Bibliografía

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). Elementary differential equations and boundary value problems (10th ed.). Wiley.

Este libro clásico cubre ecuaciones diferenciales de orden superior, incluyendo teoremas de existencia y unicidad, métodos de resolución y aplicaciones en ingeniería.

Zill, D. G. (2018). A first course in differential equations with modeling applications (11th ed.). Cengage Learning.

Proporciona una introducción completa a ecuaciones diferenciales lineales y no homogéneas, con énfasis en métodos como coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2014). Differential equations and boundary value problems: Computing and modeling (5th ed.). Pearson.

Incluye un tratamiento detallado de ecuaciones de Cauchy-Euler, el Wronskiano y aplicaciones en sistemas mecánicos y eléctricos.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2012). Fundamentals of differential equations (8th ed.). Pearson.

Cubre ecuaciones diferenciales de orden superior, con un enfoque en la ecuación característica y el principio de superposición, ideal para estudiantes de ingeniería.

Simmons, G. F. (2016). Differential equations with applications and historical notes (3rd ed.). CRC Press.

Ofrece una perspectiva histórica y práctica sobre ecuaciones diferenciales, con ejemplos de aplicaciones en ingeniería mecánica y eléctrica.

Braun, M. (1993). Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics (4th ed.). Springer.

Enfocado en aplicaciones prácticas, incluye problemas resueltos de ecuaciones diferenciales no homogéneas y sistemas masa-resorte.

Kreyszig, E. (2011). Advanced engineering mathematics (10th ed.). Wiley.

Un texto ampliamente utilizado que aborda ecuaciones diferenciales de orden superior y sus aplicaciones en ingeniería, con énfasis en métodos numéricos y analíticos.

Polking, J., Boggess, A., & Arnold, D. (2005). Differential equations with boundary value problems (2nd ed.). Pearson.

Cubre el teorema de existencia y unicidad, el Wronskiano y métodos como la reducción de orden, con ejemplos prácticos.

Tenenbaum, M., & Pollard, H. (1985). Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences. Dover Publications.

Un texto clásico que explica ecuaciones diferenciales lineales y no homogéneas, con un enfoque accesible para estudiantes.

Ross, S. L. (1984). Differential equations (3rd ed.). Wiley.

Proporciona una introducción rigurosa a ecuaciones diferenciales de orden superior, incluyendo el método de variación de parámetros y aplicaciones.

Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill.

Un libro fundamental que profundiza en la teoría de ecuaciones diferenciales, incluyendo el teorema de existencia y unicidad y el Wronskiano.

Ince, E. L. (1956). Ordinary differential equations. Dover Publications.

Un texto clásico que aborda ecuaciones diferenciales de orden superior, con un enfoque en la teoría y métodos analíticos.

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). Differential equations (4th ed.). Brooks/Cole.

Incluye ejemplos prácticos de ecuaciones de Cauchy-Euler y aplicaciones en ingeniería, con un enfoque en la visualización de soluciones.

Farlow, S. J. (1994). Partial differential equations for scientists and engineers. Dover Publications.

Aunque enfocado en ecuaciones parciales, incluye secciones sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y sus aplicaciones.

Sánchez, D. A. (2008). Ordinary differential equations and their applications. Springer.

Este libro ofrece un tratamiento moderno de ecuaciones diferenciales, con aplicaciones en sistemas dinámicos y control.

Haberman, R. (2012). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems (5th ed.). Pearson.

Incluye un capítulo introductorio sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, con aplicaciones en ingeniería mecánica y eléctrica.

Tema III La transformada de Laplace

Introducción

3.1 Teoría preliminar.

3.1.1 Definición de la transformada de Laplace. Propiedades.

3.1.2 Condiciones suficientes de existencia para la transformada de una función.

3.2 Transformada directa.

3.3 Transformada inversa.

3.4 Función escalón unitario.

3.5 Teoremas de traslación.

3.6 Transformada de funciones multiplicadas por t^n , y divididas entre t.

3.7 Transformada de una derivada y derivada de una transformada.

3.8 Teorema de convolución.

3.9 Transformada de una integral.

3.10 Transformada de una función periódica.

3.11 Transformada de la función delta de Dirac.

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

En este capítulo presentaremos un concepto fundamental para resolver problemas de valor inicial: la transformada de Laplace. Esta transforma una función adecuada ($f(t)$), dependiente de una variable real (t), en una función relacionada ($F(s)$), donde (s) es una variable compleja. Al aplicar esta transformada a un problema de valor inicial que involucra una ecuación diferencial lineal con una función desconocida de (t), el problema se convierte en uno algebraico en términos de (s). Este método es especialmente poderoso en el campo de la ingeniería, donde las ecuaciones diferenciales surgen con frecuencia en el análisis de sistemas dinámicos, como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos y procesos de control. La transformada de Laplace simplifica la resolución de estos problemas al transformar ecuaciones diferenciales complejas en ecuaciones algebraicas más manejables, facilitando la obtención de soluciones precisas y eficientes. El capítulo abordará los siguientes temas:

Teoría preliminar: Definición de la transformada de Laplace, sus propiedades y las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de una función. Transformada directa. Transformada inversa. Función escalón unitario. Teoremas de traslación. Transformada de funciones multiplicadas por t^n y divididas entre (t). Transformada de una derivada y derivada de una transformada. Teorema de convolución. Transformada de una integral. Transformada de una función periódica. Transformada de la función delta de Dirac.

Más adelante explicaremos cómo se realiza esta transformación y cómo el problema algebraico resultante permite encontrar la solución del problema de valor inicial. Primero, definiremos la transformada de Laplace y exploraremos sus propiedades fundamentales y más útiles.

3.1 Teoría preliminar.

La transformada de Laplace es fundamental para comprender su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales, especialmente en problemas de valor inicial. Los aspectos clave incluyen:

Definición de la Transformada de Laplace: Se define como una transformación integral que convierte una función ($f(t)$) (dependiente del tiempo, $t \geq 0$) en una función $\big(F(s)\big)$ en el dominio de una variable compleja (s). Matemáticamente, se expresa como:

F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$

Esta transformación convierte ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, simplificando su resolución.

Propiedades Fundamentales: Entre las propiedades más útiles están la linealidad (la transformada de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de sus transformadas), el teorema de traslación, la transformada de derivadas, y la transformada de integrales. Estas propiedades permiten manipular ecuaciones diferenciales de manera eficiente.

Condiciones de Existencia: Para que la transformada de Laplace de una función ($f(t)$) exista, la función debe ser de crecimiento exponencial acotado (es decir,

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

para alguna constante (M) y (a)) y debe ser seccionalmente continua en cada intervalo finito de $t \geq 0$. Estas condiciones garantizan que la integral converja para ciertos valores de (s).

La transformada de Laplace es especialmente valiosa en ingeniería porque transforma ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en ecuaciones algebraicas más fáciles de resolver, lo que es crucial para analizar sistemas dinámicos como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, y procesos de control.

Para comprender la transformada de Laplace y su aplicación en ecuaciones diferenciales, un estudiante de ingeniería debe tener los siguientes antecedentes:

Cálculo Diferencial e Integral: Dominio de derivadas, integrales definidas e impropias, y técnicas de integración como integración por partes, ya que la transformada de Laplace es una integral impropia.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Conocimiento básico de ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden, así como de problemas de valor inicial.

Álgebra Lineal: Familiaridad con la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, ya que la transformada convierte ecuaciones diferenciales en sistemas algebraicos.

Funciones Especiales: Conocimiento de funciones exponenciales, sinusoidales, y polinómicas, comunes en las aplicaciones de la transformada.

Números Complejos: Comprensión básica de números complejos, ya que la variable (s) en la transformada de Laplace puede ser compleja, especialmente en el análisis de estabilidad de sistemas.

Pierre-Simon Laplace. El matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace (1749–1827) es el principal responsable del desarrollo de la transformada que lleva su nombre. Aunque su trabajo original se centró en la teoría de probabilidad y la mecánica celeste, la transformada de Laplace se derivó de sus estudios sobre integrales y series en el contexto de ecuaciones diferenciales. Su trabajo sentó las bases para el uso moderno de esta herramienta en matemáticas e ingeniería.

La transformada de Laplace ha tenido un impacto profundo en diversas áreas del mundo real, especialmente en:

Ingeniería Eléctrica: Se utiliza para analizar circuitos eléctricos, modelando el comportamiento de corrientes y voltajes en sistemas lineales mediante funciones de transferencia.

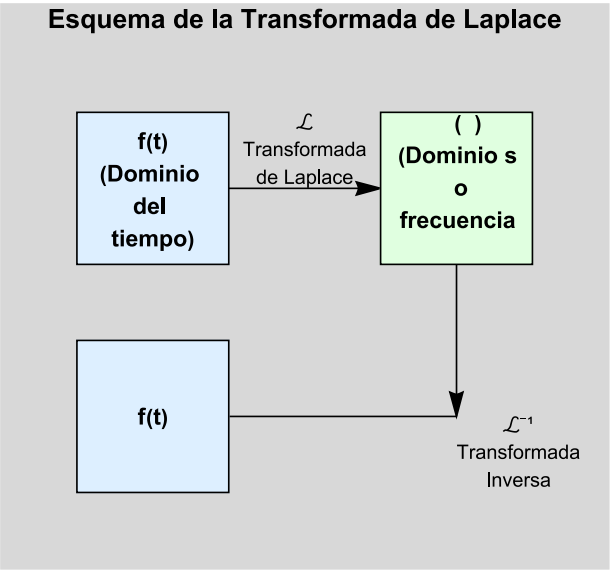
Ingeniería Mecánica: Facilita el análisis de sistemas dinámicos, como amortiguadores, resortes, o estructuras sometidas a vibraciones.

Control Automático: Es esencial para diseñar controladores y analizar la estabilidad de sistemas, como en robótica o sistemas de regulación.

Procesamiento de Señales: Permite descomponer señales en sus componentes frecuenciales, crucial en telecomunicaciones y audio.

Física e Ingeniería Química: Se aplica en el modelado de procesos dinámicos, como difusión de calor, reacciones químicas, o transferencia de masa.

La transformada de Laplace ha revolucionado la resolución de problemas al proporcionar un método sistemático y eficiente para abordar ecuaciones diferenciales lineales, transformando problemas complejos en el dominio del tiempo en problemas algebraicos más simples en el dominio de (s). Su versatilidad y aplicabilidad la han convertido en una herramienta indispensable en la ingeniería y las ciencias aplicadas.



3.1.1 Definición de la transformada de Laplace. Propiedades.

Definición

Sea (f) una función de valor real de la variable real (t), definida para $t > 0$. Sea (s) una variable que asumiremos como real, y consideremos la función (F) definida por:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt,$

para todos los valores de (s) para los cuales esta integral existe. La función (F) definida por la integral anterior se denomina la transformada de Laplace de la función (f). Denotaremos la transformada de Laplace (F) de (f) como $L\{f\}$ y denotaremos ($F(s)$) como $Lf(t)$.

Para garantizar que la integral que define la transformada de Laplace exista para algún rango de valores de (s), es necesario imponer restricciones adecuadas a la función (f) considerada. Esto lo haremos en breve; sin embargo, primero determinaremos directamente las transformadas de Laplace de algunas funciones simples.

Problema No. 1

Para obtener la transformada de Laplace de la función $(f(t) = 1)\ para\ (t > 0)$, usamos la definición:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Sustituyendo $(f(t) = 1)$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\ dt.$$

Evaluamos la integral:

$$\int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}\right) - \left(-\frac{1}{s}e^{0}\right).$$

Para $s > 0$, el término $(e^{-sb} \to 0)$ cuando $(b \to \infty)$, y $(e^0 = 1)$, por lo que

$$F(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}.$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Problema No. 2

Para obtener la transformada de Laplace de la función $(f(t) = t)$ para $(t > 0)$, usamos la definición:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Sustituyendo $(f(t) = t)$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\ dt.$$

Usamos integración por partes, con $(u = t), (du = dt), (dv = e^{-st}\ dt), y (v = -\frac{1}{s} e^{-st})$. Entonces:

$$\int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = \left[-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt\,.$$

Evaluamos el primer término:

$$\left[-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{b}{s} e^{-sb}\right) - 0.$$

Para $s > 0$, $\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{se^{sb}} = 0$ (por $L'Hôpital$), por lo que este término es 0

El segundo término es:

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\ dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Problema No. 3

Para obtener la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$ para $t > 0$, usamos la definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Sustituyendo $(f(t) = e^{at})$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ dt.$$

Evaluamos la integral:

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty.$$

Para $s > a$, el término $e^{-(s-a)t} \to 0$ cuando $(t \to \infty)$, y para $t = 0$, $e^0 = 1$. Entonces:

$$F(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{s-a}.$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Problema No. 4

Para obtener la transformada de Laplace de la función $f(t) = \sin(bt)$ para $t > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Sustituyendo $(f(t) = \sin(bt))$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin(bt)\ dt.$$

Usamos integración por partes.

Sea $(u = \sin(bt)), (du = b\cos(bt)\ dt), (dv = e^{-st}\, dt), (v = -\frac{1}{s}e^{-st}). Entonces$:

$$\int e^{-st} \sin(bt)\ dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\sin(bt) + \frac{b}{s}\int e^{-st}\cos(bt)\ dt.$$

Para la integral restante, aplicamos integración por partes nuevamente con:

$$(u = \cos(bt)), (du = -b\sin(bt)\ dt), (dv = e^{-st}\, dt), (v = -\frac{1}{s}e^{-st}):$$

$$\int e^{-st} \cos(bt)\ dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(bt) - \frac{b}{s}\int e^{-st}\sin(bt)\ dt.$$

Sustituyendo, resolvemos $para(I = \int e^{-st}\sin(bt)\ dt)$.Después de combinar términos y evaluar los límites $de\ (\ t\ =\ 0\ )\ a\ (\ t\ \to \infty), para\ (\ s\ >\ 0\ )$:

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin(bt) - \frac{b}{s^2}e^{-st}\cos(bt)\right]_0^\infty.$$

$En(t \to \infty), los\ términos\ tienden\ a\ 0. En\ (t = 0), (\sin(0) = 0), (\cos(0) = 1), por\ lo\ que$:

$$F(s) = 0 - \left(0 - \frac{b}{s^2}\right) = \frac{b}{s^2}.$$

La transformada final es:

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0.$$

Problema No. 5

Para obtener la transformada de $Laplace\ de\ la función\ (f(t) = \cos(bt))\ para\ (t > 0)$, usamos la definición:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Sustituyendo $(f(t) = \cos(bt))$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos(bt)\ dt.$$

Usamos integración por partes. $Sea(u = \cos(bt)), (du = -b\sin(bt)\ dt), (dv = e^{-st}\, dt), (v = -\frac{1}{s}e^{-st})$. Entonces:

$$\int e^{-st} \cos(bt)\ dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(bt) + \frac{b}{s}\int e^{-st}\sin(bt)\ dt.$$

Para la integral restante, aplicamos integración por partes nuevamente con:

$$(u = \sin(bt)), (du = b\cos(bt)\ dt), (dv = e^{-st}\, dt), (v = -\frac{1}{s}e^{-st}):$$

$$\int e^{-st} \sin(bt)\ dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\sin(bt) - \frac{b}{s}\int e^{-st}\cos(bt)\ dt.$$

Resolviendo el sistema resultante y evaluando los límites de:

$(t = 0)\ a\ (t \to \infty), para\ (s > 0)$:

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos(bt) - \frac{b}{s^2}e^{-st}\sin(bt)\right]_0^\infty.$$

$En\ (t \to \infty), los\ términos\ tienden\ a\ 0. En\ (t = 0), (\cos(0) = 1), (\sin(0) = 0), por\ lo\ que$:

$$F(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s}\cdot 1 - 0\right) = \frac{1}{s}.$$

La transformada final es:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0.$$

En los problemas anteriores, hemos verificado directamente que la integral que define la transformada de Laplace existe para un cierto rango de valores de (s). Ahora identificaremos una clase de funciones para las cuales esto siempre es cierto. Para ello, primero analizaremos algunas propiedades de las funciones.

Propiedades básicas de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales, y su utilidad radica en las siguientes propiedades fundamentales:

La transformada de Laplace es un **operador lineal**, es decir, para funciones $(f(t))$ y $\big(g(t)\big)$ con transformadas de Laplace definidas y constantes (a), (b):

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Esta propiedad permite descomponer problemas complejos en combinaciones lineales de funciones más simples.

Traslación en el dominio del tiempo: $Si\ L\{f(t)\} = F(s)$), entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \text{para } s > a.$$

Esto es útil para manejar funciones multiplicadas por exponenciales, comunes en sistemas dinámicos.

Transformada de derivadas: Para una función $\big(f(t)\big)$ derivable: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$

y para derivadas de orden superior:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{n\mathcal{L}}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Esta propiedad convierte ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Transformada de integrales: Si $(g(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau)$, entonces: $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}.$

Esto permite analizar sistemas con términos integrales.

Teorema de convolución: La transformada de la convolución de dos funciones

$((f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau)$ es:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Esta propiedad es útil para resolver ecuaciones integrales.

Transformada de funciones periódicas: Para una función periódica $\big(f(t)\big)$ con período (T):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\ dt.$$

Esto simplifica el análisis de sistemas con comportamiento periódico.

Estas propiedades, junto con las condiciones de existencia (como que la función sea seccionalmente continua y de crecimiento exponencial acotado), hacen de la transformada de Laplace una herramienta esencial para resolver problemas en ingeniería y ciencias aplicadas, al transformar ecuaciones diferenciales complejas en problemas algebraicos más manejables.

Problema No. 6

Transformada de Laplace de $f(t) = \cos^2(at)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2(at) = \frac{1 + \cos(2at)}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos^2(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos(2at)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2at)\}.$$

Por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

$$\mathcal{L}\{\cos(2at)\} = \frac{s}{s^2 + (2a)^2} = \frac{s}{s^2 + 4a^2}, \quad s > 0.$$

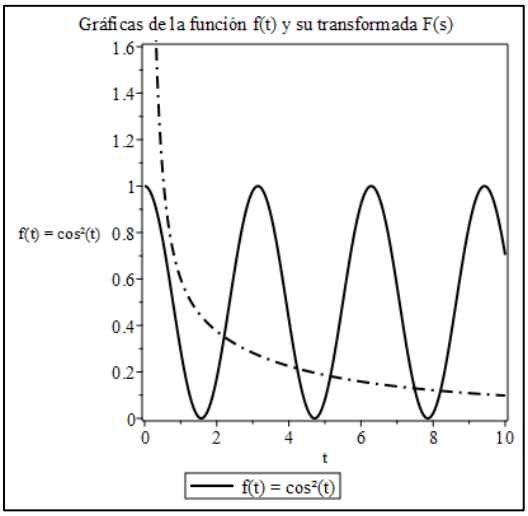
Combinamos:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(at)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2 + 4a^2 + s^2}{s(s^2 + 4a^2)} = \frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(at)\} = \frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}, \quad s > 0.$$

La función cumple la **propiedad de linealidad** de la transformada de Laplace, al descomponer $(\cos^2(at))$ en una combinación de funciones



Problema No. 7

Para encontrar la transformada de $Laplace\ de\ (f(t) = \sin(at)\sin(bt))\ para(t > 0)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Usamos la identidad trigonométrica:

$$\sin(at)\sin(bt) = \frac{1}{2}\big[\cos\big((a-b)t\big) - \cos\big((a+b)t\big)\big].$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\sin(bt)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos\big((a-b)t\big)\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos\big((a+b)t\big)\}.$$

Por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}\{\cos\big((a-b)t\big)\} = \frac{s}{s^2 + (a-b)^2}, \quad s > 0,$$

$$\mathcal{L}\{\cos\big((a+b)t\big)\} = \frac{s}{s^2 + (a+b)^2}, \quad s > 0.$$

Combinamos:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\sin(bt)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2 + (a-b)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2 + (a+b)^2}.$$

Simplificando:

$$F(s) = \frac{1}{2}s\left[\frac{1}{s^2 + (a-b)^2} - \frac{1}{s^2 + (a+b)^2}\right] = \frac{1}{2}s\cdot\frac{4ab}{(s^2 + (a-b)^2)(s^2 + (a+b)^2)}$$
$$= \frac{2abs}{(s^2 + (a-b)^2)(s^2 + (a+b)^2)}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\sin(bt)\} = \frac{2abs}{(s^2 + (a-b)^2)(s^2 + (a+b)^2)}, \quad s > 0.$$

La función cumple la **propiedad de linealidad** de la transformada de Laplace, al descomponer $(\sin(at)\sin(bt))$ en una combinación lineal de funciones coseno.

Problema No. 8

Transformada de Laplace de $(f(t) = \cos^3(at))$

Usamos la identidad trigonométrica:

$$\cos^3(at) = \frac{3\cos(at) + \cos(3at)}{4}.$$

Por la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}\{\cos^3(at)\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}\{\cos(at)\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\cos(3at)\}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos(3at)\} = \frac{s}{s^2 + 9a^2}, \quad s > 0.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{\cos^3(at)\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2 + 9a^2} = \frac{s(s^2 + 7a^2)}{(s^2 + a^2)(s^2 + 9a^2)}, \quad s > 0.$$

Transformada de $(g(t) = \cos^2(at)\,\mathrm{si\,n}(at))$

Usamos la identidad:

$$\cos^2(at)\sin(at) = \left(\frac{1 + \cos(2at)}{2}\right)\sin(at) = \frac{1}{4}\sin(at) + \frac{1}{4}\sin(3at)\,.$$

Por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(at)\sin(at)\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\sin(at)\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\sin(3at)\}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(3at)\} = \frac{3a}{s^2 + 9a^2}, \quad s > 0.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(at)\sin(at)\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3a}{s^2 + 9a^2} = \frac{a(s^2 + 3a^2)}{(s^2 + a^2)(s^2 + 9a^2)}, \quad s > 0.$$

Problema No.9

Transformada de Laplace de ($(f(t) = t^3$)

Dado que $(\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3})$, encontrar $(\mathcal{L}\{t^3\})$ usando la propiedad de multiplicación por (t):

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Para $(f(t) = t^2)$, tenemos $(t \cdot t^2 = t^3)$, y:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^2\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right).$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{d}{ds}(2s^{-3}) = 2 \cdot (-3)s^{-4} = -\frac{6}{s^4}.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = -\left(-\frac{6}{s^4}\right) = \frac{6}{s^4}, \quad s > 0.$$

La función cumple la propiedad de multiplicación por (t) de la transformada de Laplace.

3.1.2 Condiciones suficientes de existencia para la transformada de una función.

La transformada de Laplace de una función $\big(f(t)\big)$, definida para $t \geq 0$, se expresa como: $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$ para algún rango de valores de (s). Las condiciones suficientes que garantizan esta convergencia son:

Seccional Continuidad: La función $\big(f(t)\big)$ debe ser seccionalmente continua en cada intervalo finito ($[0, b]$) para $b > 0$. Esto implica que $\big(f(t)\big)$ puede tener un número finito de discontinuidades de salto en cada intervalo, pero es continua dentro de subintervalos definidos, asegurando que la integral sea bien definida en cada segmento.

Crecimiento Exponencial Acotado: La función debe satisfacer $|f(t)| \leq Me^{at}$ para todo $t \geq 0$, donde $M > 0$ y (a) son constantes reales. Esta condición asegura que el término $e^{-st} f(t)$ decaiga lo suficientemente rápido cuando $t \to \infty$, permitiendo la convergencia de la integral para $\mathrm{Re}(s) > a$.

Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias, ya que algunas funciones (como la función delta de Dirac) pueden tener transformadas de Laplace en contextos especializados sin cumplirlas estrictamente. En la práctica, funciones comunes como polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas cumplen estas condiciones, haciendo que la transformada de Laplace sea una herramienta clave para resolver ecuaciones diferenciales en ingeniería y ciencias, al transformar problemas complejos en el dominio del tiempo en problemas algebraicos más simples.

Las condiciones suficientes de existencia para la transformada de Laplace (seccional continuidad y crecimiento exponencial acotado) son fundamentales porque aseguran que la transformada sea aplicable a una amplia gama de problemas prácticos en ingeniería y ciencias. Estas condiciones permiten transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, facilitando el análisis de sistemas dinámicos.

Análisis de Circuitos Eléctricos: En ingeniería eléctrica, la transformada de Laplace se usa para analizar circuitos RC, RL y RLC, modelando corrientes y voltajes. Las condiciones aseguran que funciones como $e^{at}\sin(bt)$ (señales oscilantes amortiguadas) tengan transformadas bien definidas, permitiendo diseñar filtros y estabilizar circuitos.

Sistemas Mecánicos: En ingeniería mecánica, se aplica a sistemas de masas y resortes o vibraciones. Las condiciones garantizan que funciones como te^{at} (respuestas transitorias) sean transformables, facilitando el cálculo de desplazamientos o amortiguaciones.

Control Automático: En sistemas de control, la transformada modela la estabilidad y respuesta de sistemas. Las condiciones permiten analizar funciones periódicas o exponenciales, esenciales para diseñar controladores en robótica o automatización.

Procesamiento de Señales: En telecomunicaciones, la transformada convierte señales temporales en el dominio de la frecuencia. Las condiciones aseguran que señales como $\cos(bt)$ sean manejables, optimizando el diseño de sistemas de comunicación.

Problema No. 10

Condiciones de Existencia para la Transformada de Laplace

Consideremos $(f(t) = te^{2t}) para (t \geq 0)$.

1. **Seccional Continuidad**: La función Consideremos $(f(t) = te^{2t})$ es continua en $[0, \infty)$, ya que es el producto de funciones continuas. Esto satisface la condición de seccional continuidad.

2. **Crecimiento Exponencial Acotado**: Verificamos $(|f(t)| = te^{2t} \leq Me^{at})$. Para $(a = 3), (M = 1)$, comprobamos que $(t \leq e^{t})$, lo cual es cierto para $(t \geq 0)$. Así, $(te^{2t} \leq e^{3t})$, y la transformada converge para $(\text{Re}(s) > 3)$.

Transformada: Usamos

$$(\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}).$$

Para

$$(f(t) = e^{2t}), (\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}), (s > 2).$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad s > 2.$$

Ejemplo Numérico}: Para $(s = 3)$:

$$F(3) = \frac{1}{(3-2)^2} = 1.$$

Aproximamos numéricamente $(\int_0^{10} t\, e^{-t}\, dt)$:

$$[-te^{-t} - e^{-t}]_0^{10} = -11e^{-10} + 1 \approx 0.9995,$$

lo que confirma la convergencia hacia 1, consistente con $(F(3))$.

3.2 Transformada directa.

La transformada de Laplace directa es una herramienta matemática utilizada en análisis de sistemas y ecuaciones diferenciales para transformar una función del dominio del tiempo, ($f(t)$), definida para $t \geq 0$, en una función del dominio de la frecuencia compleja, ($F(s)$), donde (s) es una variable compleja ($s = \sigma + j\omega$). Se define como:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$

Esta integral convierte una función temporal en una representación en el dominio de la variable compleja (s), facilitando la resolución de ecuaciones diferenciales lineales al transformarlas en ecuaciones algebraicas. La transformada es especialmente útil en ingeniería y física, por ejemplo, en el análisis de circuitos eléctricos, sistemas de control y dinámica de sistemas, ya que simplifica el manejo de condiciones iniciales y permite analizar la respuesta en frecuencia.

Para que la transformada exista, la integral debe converger, lo que suele requerir que ($f(t)$) sea de crecimiento exponencial limitado. La transformada de Laplace tiene propiedades como linealidad, cambio de escala, diferenciación e integración en el dominio del tiempo, que facilitan su aplicación. En resumen, es una técnica poderosa para simplificar el análisis de sistemas dinámicos al pasar del dominio temporal al de la frecuencia compleja.

<u>Problema No. 11</u>

Transformada de Laplace directa aplicada a funciones comunes

Función escalón unitario: $(f(t) = u(t))$

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}, \quad \text{para } Re(s) > 0.$$

Función exponencial: $(f(t) = e^{at}u(t))$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } Re(s) > a.$$

Función seno: $(f(t) = \mathrm{si\,n(a}t)\, u(t))$

Usando la identidad $(\sin(\mathrm{a}t) = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j})$, la transformada es:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\mathrm{a}t)\} = \int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\mathrm{a}} - \frac{1}{s + j\mathrm{a}}\right) = \frac{\mathrm{a}}{s^2 + a^2}, \quad \text{para } Re(s) > 0.$$

Tabla de Transformada de Laplace

Función	Transformada
$f(t) = u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$
$(f(t) = tu(t))$	$F(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$
$(f(t) = t^n u(t), \quad (n = 1,2,\dots)$	$F(s) = \mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
$f(t) = e^{at}u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}$
$f(t) = te^{at}u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{te^{at}u(t)\} = \frac{1}{(s-a)^2}$
$f(t) = \sin(\omega t)\, u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\, u(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$f(t) = \cos(\omega t)\, u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\, u(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$f(t) = e^{at}\sin(\omega t)\, u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\sin(\omega t)\, u(t)\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$f(t) = e^{at}\cos(\omega t)\, u(t))$	$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\cos(\omega t)\, u(t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$f(t) = \delta(t)$ impulso de Dirac	$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$
$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)), (n = 1,2,\dots)$	$F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)\right\} = \frac{1}{s^n}$
$f(t) = \sinh(\omega t)\, u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{\sinh(\omega t)\, u(t)\} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$f(t) = \cosh(\omega t)\, u(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\, u(t)\} = \frac{s}{s^2-\omega^2}$

Propiedades Fundamentales de la Transformada de Laplace

Teorema A:

Linealidad de la transformada de Laplace

Si $\big(f(t)\big)$ y $\big(g(t)\big)$ tienen transformadas de Laplace, y (a, b) son constantes, entonces:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

La transformada de Laplace es una operación lineal, es decir, distribuye sobre sumas y escalares.

Teorema B:

Transformada de la derivada

Si $\big(f(t)\big)$ es continua, derivable y su derivada $\big(f'(t)\big)$ tiene transformada de Laplace, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

La transformada de la derivada de una función depende de (s), la transformada de la función y su valor inicial en $(t = 0)$.

Teorema 1

Definición de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función $\big(f(t)\big)$, definida para ($t \geq 0$, es:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$, siempre que la integral converja para $Re(s) > \sigma$

Define la transformada de Laplace como una integral que convierte una función del tiempo en una función de la variable compleja (s).

Teorema 2:

Existencia de la transformada de Laplace

Si $\big(f(t)\big)$ es continua por tramos en$[0, \infty)$ y de orden exponencial $(i.e., (|f(t)| \leq Me^{ct}))$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $Re(s) > c)$

La transformada existe para funciones que no crecen más rápido que una exponencial.

Teorema 3:

Transformada de derivadas de orden superior

Si $(f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$ son continuas y $f^{(n)}(t)$ tiene transformada de Laplace, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

La transformada de la derivada $(n) - ésima$ incluye términos con las condiciones iniciales hasta la derivada $\big((n-1)\big)$.

Teorema 4:

Transformada de la integral.

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s))$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\ du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

La transformada de la integral de una función es la transformada de la función dividida por (s).

Teorema 5:

Propiedad de traslación en el tiempo

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces para $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Un retraso en el tiempo introduce un factor exponencial e^{-as} en la transformada.

Teorema 6:

Propiedad de convolución

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s))y(\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$$

Donde $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\ du)$.

La transformada de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas.

3.3 Transformada inversa.

Hasta ahora en este capítulo nos hemos ocupado del siguiente problema: Dada una función (f), definida para $(t > 0)$, encontrar su transformada de Laplace, que denotamos como $L\{f\}$) o (F). Ahora consideremos el problema inverso: Dada una función (F), encontrar una función (f) cuya transformada de Laplace sea la función dada (F). Introducimos la notación $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ para denotar tal función (f), denotamos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ como $\big(f(t)\big)$, y llamamos a tal función una transformada inversa de (F). Es decir, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ significa que $\big(f(t)\big)$ es tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Surgen de inmediato tres preguntas:

1. Dada una función (F), ¿existe una transformada inversa de (F)?

"No necesariamente", ya que existen funciones (F) que no son transformadas de Laplace de ninguna función (f). Para que (F) sea una transformada, debe poseer ciertas propiedades de continuidad y también comportarse de manera adecuada cuando $s \to \infty$. Las transformadas inversas correspondientes a numerosas funciones (F) han sido determinadas y tabuladas.

2. Suponiendo que (F) tiene una transformada inversa, ¿es esta transformada inversa única?

La unicidad de la transformada inversa, probablemente relacionado con el hecho de que, bajo ciertas condiciones (por ejemplo., funciones continuas por tramos de orden exponencial), la transformada inversa es única salvo en un conjunto de medida nula.

3. ¿Cómo se encuentra una transformada inversa?

A través de métodos prácticos para calcular la transformada inversa de Laplace.

Métodos para Encontrar la Transformada Inversa de Laplace

La transformada inversa $(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t))$ se encuentra comúnmente utilizando los siguientes métodos prácticos:

Uso de tablas: Se consulta una tabla de transformadas de Laplace para identificar una función $f(t)$ cuya transformada $\big(Lf(t)\big)$ coincida con $\big(F(s)\big)$.

Descomposición en fracciones parciales: Si $\big(F(s)\big)$ es una función racional, se descompone en fracciones simples, y cada término se transforma inversamente usando tablas.

Teorema de la convolución: Si $\big(F(s) = G(s)H(s)\big)$, entonces

$f(t) = (g * h)(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)\ du$, Donde $(g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}) y (h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\})$.

Problema No. 12

Utilice la para encontrar $L^{-1}\{F(s)\}$ una de las funciones (F) definidas en los problemas siguientes

$$F(s) = \frac{2}{s^2+9}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\, u(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Para $s^2 + 9 = s^2 + 3^2$, tenemos $\omega = 3$, por lo que

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\, u(t)\} = \frac{3}{s^2+9}.$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{2}{s^2+9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{\sin(3t)\, u(t)\}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\} = \frac{2}{3}\sin(3t)\, u(t).$$

Para $t \geq 0$, $u(t) = 1$, por lo que:

$$f(t) = \frac{2}{3}\sin(3t)\,.$$

Problema No. 13

$$F(s) = \frac{3s}{s^2-4}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\, u(t)\} = \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

Para $(s^2 - 4 = s^2 - 2^2), tenemos(\omega = 2)$, por lo que:

$$\mathcal{L}\{\cosh(2t)\, u(t)\} = \frac{s}{s^2-4}.$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 - 4} = 3 \cdot \frac{s}{s^2 - 4} = 3\mathcal{L}\{\cosh(2t)\, u(t)\}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2 - 4}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 4}\right\} = 3\cosh(2t)\, u(t).$$

Para $t \geq 0,\ (u(t) = 1)$, por lo que:

$$f(t) = 3\cosh(2t)\,.$$

Problema No. 14

$$F(s) = \frac{5}{(s-2)^4}), \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at} u(t)\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Para $(s-2)^4$, tenemos $(a = 2)$ y $(n + 1 = 4)$, por lo que:

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{2t} u(t)\} = \frac{3!}{(s-2)^{3+1}} = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{5}{(s-2)^4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{(s-2)^4} = \frac{5}{6}\mathcal{L}\{t^3 e^{2t} u(t)\}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s-2)^4}\right\} = \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^4}\right\} = \frac{5}{6}t^3 e^{2t} u(t).$$

Para $(t \geq 0), (u(t) = 1)$, por lo que:

$$f(t) = \frac{5}{6}t^3 e^{2t}.$$

Problema No. 15

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+7}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Primero, completamos el cuadrado en el denominador:

$$s^2 + 4s + 7 = (s^2 + 4s + 4) + 7 - 4 = (s+2)^2 + 3.$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+3}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos(\omega t)\,u(t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

$$(s+2)^2 + 3 = \big(s-(-2)\big)^2 + \big(\sqrt{3}\big)^2), \qquad (a=-2), (\omega = \sqrt{3})$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos\big(\sqrt{3}t\big)\,u(t)\} = \frac{s-(-2)}{\big(s-(-2)\big)^2+\big(\sqrt{3}\big)^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3}.$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3}\right\} = e^{-2t}\cos\big(\sqrt{3}t\big)\,u(t).$$

$$(t \geq 0), \qquad (u(t) = 1)$$

$$f(t) = e^{-2t}\cos\big(\sqrt{3}t\big).$$

Problema No. 16

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 3s}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Primero, factorizamos el denominador:

$$s^3 + 4s^2 + 3s = s(s^2 + 4s + 3) = s(s+1)(s+3).$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}.$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}.$$

Multiplicamos por $(s(s+1)(s+3))$:

$$1 = A(s+1)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+1).$$

Expandimos:

$$1 = A(s^2 + 4s + 3) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + s) = (A + B + C)s^2 + (4A + 3B + C)s + 3A.$$

Igualamos coeficientes:

$$3A = 1, \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$(s): (4A + 3B + C = 0$$

$$(s^2): (A + B + C = 0)$$

Sustituyendo

Entonces:

$$F(s) = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/6}{s+3}.$$

Usamos la tabla de transformadas:

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}.$$

Por lo tanto:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s}+\frac{-1/2}{s+1}+\frac{1/6}{s+3}\right\}=\frac{1}{3}u(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{6}e^{-3t}u(t).$$

Para $(t\geq 0), y\ (u(t)=1)$, por lo que:

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}.$$

Problema No. 17

$$F(s)=\frac{2s+7}{(s+3)^4},\qquad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

Reescribimos el numerador:

$$2s+7=2(s+3)+1.$$

Entonces:

$$F(s)=\frac{2(s+3)+1}{(s+3)^4}=\frac{2(s+3)}{(s+3)^4}+\frac{1}{(s+3)^4}=\frac{2}{(s+3)^3}+\frac{1}{(s+3)^4}.$$

Usamos la tabla de transformadas, donde:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}u(t)\}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

$$\frac{2}{(s+3)^3}=\frac{2}{\big(s-(-3)\big)^3},\qquad (a=-3),(n+1=3,\qquad n=2), y\ (2!=2):$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\}=\frac{2}{(s+3)^3},\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^3}\right\}=t^2e^{-3t}u(t).$$

$$\frac{1}{(s+3)^4}=\frac{1}{\big(s-(-3)\big)^4},\qquad (a=-3),(n+1=4,\qquad n=3), y\ (3!=6):$$

$$\mathcal{L}\{t^3e^{-3t}u(t)\}=\frac{6}{(s+3)^4}\ ,\qquad \frac{1}{(s+3)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{(s+3)^4}.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^4}\right\}=\frac{1}{6}t^3e^{-3t}u(t).$$

Por la linealidad:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)^4}\right\} = t^2e^{-3t}u(t) + \frac{1}{6}t^3e^{-3t}u(t).$$

$$(t \geq 0), \qquad u(t) = 1$$

$$f(t) = t^2e^{-3t} + \frac{1}{6}t^3e^{-3t} = e^{-3t}\left(t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) = e^{-3t} \cdot \frac{t^3 + 12t^2}{6} = \frac{t^2(t+12)}{6}e^{-3t}.$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{t^2(t+12)}{6}e^{-3t}.$$

Problema No. 18

$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)}$
$F(s) = \frac{5}{(s+2)^5}$	$f(t) = \frac{5}{24}t^4e^{-2t}.$
$F(s) = \frac{7}{(2s+1)^3}$	$f(t) = \frac{7}{16}t^2e^{-\frac{1}{2}t}.$
$F(s) = \frac{8(s+1)}{(2s+1)^3}$	$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(t + \frac{1}{4}t^2\right).$
$F(s) = \frac{s-2}{s^2+5s+6}$	$f(t) = -4e^{-2t} + 5e^{-3t}.$
$F(s) = \frac{s+10}{s^2+2s-8}e^{-2s}$	$f(t) = (-e^8e^{-4t} + 2e^{-4}e^{2t})u(t-2).$

3.4 Función escalón unitario.

En la aplicación de la transformada de Laplace a ciertos problemas de ecuaciones diferenciales, necesitaremos encontrar la transformada de una función que tenga una o más discontinuidades finitas. Al tratar con estas funciones, encontraremos que el concepto de la llamada función escalón unitario es muy útil.

Para cada número real ($a \geq 0$), la función escalón unitario (u_a)se define para ($t \geq 0$) por:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

En particular, si $(a = 0)$, esto se convierte formalmente en:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

pero dado que hemos definido (u_a) solo para ($t \geq 0$), esto se reduce a:

$$u_0(t) = 1 \quad \text{para } t \geq 0$$

La función u_a así definida satisface la hipótesis de teorema 1, por lo que $\mathcal{L}\{u_a(t)\}$ existe. Usando la definición de la transformada de Laplace, encontramos:

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_0^a e^{-st}(0)\, dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)\, dt$$

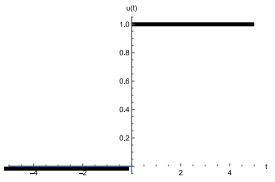
$$= 0 + \lim_{R\to\infty} \int_a^R e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_a^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sR} + \frac{1}{s} e^{-sa}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{s} e^{-sa} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad (s > 0)$$

Una variedad de las llamadas funciones escalonadas pueden expresarse como combinaciones lineales adecuadas de la función escalón unitario (u_a): Luego, utilizando el Teorema 2 (la propiedad de linealidad) $\mathcal{L}\{u_a(t)\})$, , podemos obtener fácilmente la transformada de Laplace de dichas funciones escalonadas.



Problema No. 19

Consideremos la función $f(t) = 3u(t-1)$, donde $u(t-1)$ es la función escalón unitario con retraso en $(t = 1)$. Se define como:

$$f(t) = 3u(t-1) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 1 \\ 3 \; si \; t \geq 1 \end{cases}$$

Valores numéricos:

$$(t = 0): (f(0) = 3 \cdot 0 = 0).$$

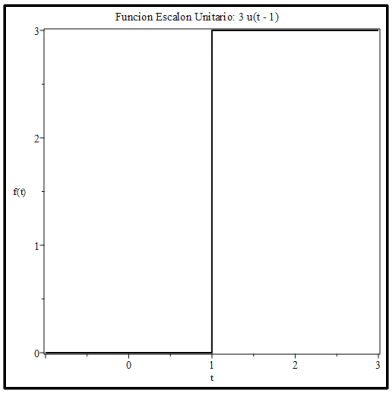
$$(t = 1): (f(1) = 3 \cdot 1 = 3).$$

$$(t = 2): (f(2) = 3 \cdot 1 = 3).$$

Su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{3u(t-1)\} = 3 \cdot \frac{e^{-s}}{s} = \frac{3e^{-s}}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Este ejemplo modela, por ejemplo, una señal que se activa con una amplitud constante de 3 en $t = 1$, como podría ocurrir en un sistema eléctrico o mecánico. Gráfica de la función escalón unitario



Problema No. 20

$$f(t) = 4u(t-3) - 2u(t-5)$$

La función $\big(f(t) = 4u(t-3) - 2u(t-5)\big)$ combina dos funciones escalón unitario, representando un pulso que se activa en $(t = 3)$ y se reduce en $(t = 5)$. Se define como:

$$f(t) = 4u(t-3) - 2u(t-5) = \begin{cases} 0 & si \; t < 3 \\ 4 & si \; 3 \leq t < 5 \\ 2 & si \; t \geq 5 \end{cases}$$

Valores numéricos:

$$(t = 2): (f(2) = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0).$$

$$(t = 4): (f(4) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 4).$$

$$(t = 6): (f(6) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2).$$

Para la transformada de Laplace, usamos la misma entrada de la Tabla 9.1:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

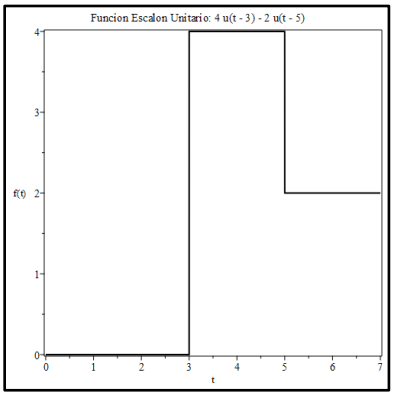
Entonces:

$$(u(t-3)), con(a = 3): (\mathcal{L}\{u(t-3)\} = \frac{e^{-3s}}{s}).$$

$$(u(t-5)), con(a = 5): (\mathcal{L}\{u(t-5)\} = \frac{e^{-5s}}{s}).$$

Por la linealidad:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{4u(t-3) - 2u(t-5)\} = 4\mathcal{L}\{u(t-3)\} - 2\mathcal{L}\{u(t-5)\} = 4 \cdot \frac{e^{-3s}}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$$
$$= \frac{4e^{-3s} - 2e^{-5s}}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$



La última función escalón unitario mencionada, $f(t) = 4u(t-3) - 2u(t-5)$, representa un pulso rectangular o una señal que se activa y modifica en instantes específicos del tiempo, lo cual es común en aplicaciones de ingeniería, física y teoría de señales

En términos gráficos, $\big(f(t)\big)$ describe un pulso rectangular de amplitud 4 entre $t = 3$ y $t = 5$, que luego se estabiliza en una amplitud de 2 para $t \geq 5$. Este tipo de función es típico en sistemas donde una entrada se activa por un período finito y luego se modifica, como en circuitos electrónicos con interruptores, sistemas de control con cambios programados, o modelado de fuerzas externas en ecuaciones diferenciales.

3.5 Teorema de traslación.

El Teorema de Traslación

Si una función $\big(f(t)\big)$ tiene transformada de Laplace $L\{f(t)\} = F(s),$ entonces la transformada de la función retrasada $f(t-a)u(t-a)$, donde $u(t-a)$ es el escalón unitario con retraso en $t = a \geq 0$, es: $L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s),$ para $s > \sigma$,

donde σ asegura la convergencia de ($F(s)$). Este teorema permite modelar señales o fuerzas que se activan en un instante $t = a$, facilitando la resolución de ecuaciones diferenciales con términos discontinuos o retrasados, como en sistemas de control o circuitos.

El teorema de traslación es una herramienta fundamental en el análisis de sistemas dinámicos mediante transformadas de Laplace. Este teorema, que establece que si $\{f(t)\} = F(s)$, entonces $L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ para $a \geq 0$, tiene varias aplicaciones prácticas.

Modelado de señales con retrasos: Representa señales que se activan en $(t = a)$, como interruptores en circuitos o pulsos en sistemas de control.

Ecuaciones diferenciales con términos discontinuos: Resuelve ecuaciones con fuerzas externas que comienzan en un instante específico

Análisis de sistemas con retardos: Estudia procesos con retrasos temporales, como en redes o control industrial.

Funciones escalonadas: Modela funciones con discontinuidades, como pulsos rectangulares, usando combinaciones de $(u(t-a))$.

El Teorema de Traslación permite modelar funciones con retrasos en transformadas de Laplace. Sus aplicaciones prácticas son:

Sistemas de control: Modela señales que se activan en $(t = a)$, como entradas en procesos industriales.

Circuitos eléctricos: Representa interruptores o pulsos de voltaje/corriente que comienzan en un instante específico.

Sistemas mecánicos: Describe fuerzas externas con retraso en sistemas masa-resorte o amortiguadores.

Telecomunicaciones: Analiza señales con retardos en redes, como paquetes de datos.

Áreas de la ingeniería: Ingeniería de control, eléctrica, mecánica y telecomunicaciones, para resolver ecuaciones diferenciales con discontinuidades.

Problema No. 21

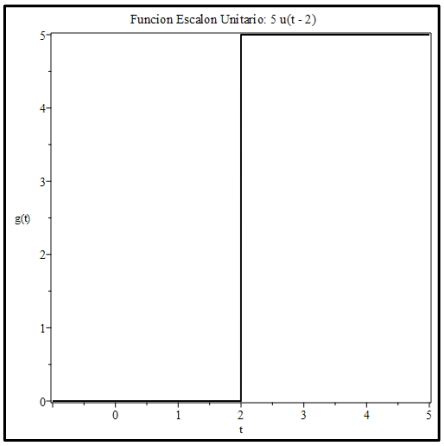
$g(t) = 5u(t-2)$

$$g(t) = 5u(t-2) = \begin{cases} 0 \; si \; t \; < \; 2, \\ 5 \; si \; t \; \geq 2 \end{cases}$$

$g(1) = 0, \qquad g(2) = 5, \qquad g(3) = 5$

$f(t) = 5u(t), \qquad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s}$ $, de \; acuerdo \; al \; teorema \; con \; a = 2$:

$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-2s} \cdot \frac{5}{s} = \frac{5e^{-2s}}{s}$, para $s > 0$.



La gráfica mostrará: $g(t) = 0$

para $t \; < \; 2$ (línea horizontal en $y \; = \; 0$).

Un salto discontinuo a $g(t) = 5$ en $t \; = \; 2$.

$g(t) = 5$ para $t \; \geq 2$ (línea horizontal en $y \; = \; 5$).

La línea será negra, con el salto claramente visible en $t \; = \; 2$

Problema No. 22

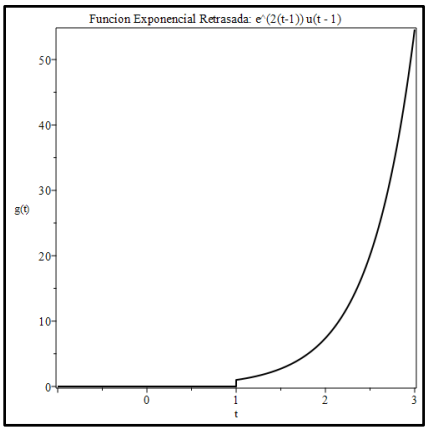
$g(t) = e^{2(t-1)}u(t-1)$

$g(t) = e^{2(t-1)}u(t-1) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ e^{2(t-1)} & si\ t \geq 1 \end{cases}$

$g(0) = 0, \qquad g(1) = 1, \qquad g(2) = e^2 \approx 7.389$

$f(t) = e^{2t}u(t)), \qquad \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s-2}$, *de acuerdo al teorema con* $(a = 1)$:

$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-s} \cdot \dfrac{1}{s-2} = \dfrac{e^{-s}}{s-2}$, para $s > 2$.



La gráfica mostrará: $g(t) = 0$ para $t < 1$(línea horizontal en $y = 0$).

Un salto en $t = 1$, donde $g(t) = e^{2(t-1)}$ comienza, con $g(1) = 1$.

Un crecimiento exponencial para $t \geq 1$, por ejemplo, $g(2) = e^2 \approx 7.389$.

La curva será una línea negra, con una discontinuidad en $t = 1$ seguida de un crecimiento exponencial.

3.6 Transformada de funciones multiplicadas por t^n , y divididas entre t.

En el estudio de la **transformada de Laplace**, es común encontrarse con funciones que están multiplicadas por potencias de *t* (t^n) o divididas entre *t*. Estas situaciones requieren propiedades específicas para calcular sus transformadas.

Demostración:

Si $(\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s))$, entonces la transformada de Laplace de $t^n f(t))$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Partimos de la definición de la transformada de Laplace de $(f(t))$:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

Diferenciamos (n) veces respecto a (s):

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \frac{d^n}{ds^n}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt\right)$$

$= \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}(e^{-st}) f(t)\, dt$ (Intercambio de derivada e integral)

$$= \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} f(t)\ dt \quad (\text{Pues } \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-st} = (-t)^n e^{-st})$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st} f(t)\ dt$$

$$= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

Despejando $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Problema No. 23

Para: $f(t) = \sin(at)$, $(\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2})$:

$$\mathcal{L}\{t\sin(at)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$f(t) = t^2e^{3t}u(t))$$

$$f(t) = t^2e^{3t}u(t), \qquad g(t) = e^{3t}u(t), \qquad y \quad (n=2)$$

1. Calculamos $\mathcal{L}\{g(t)\}$):

$$\mathcal{L}\{e^{3t}u(t)\} = \frac{1}{s-3}, \quad \text{para } s > 3 \quad \text{(Tabla)}.$$

2. Aplicamos el Teorema para ($n = 2$):

$$\mathcal{L}\{t^2e^{3t}u(t)\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{d^2}{ds^2}((s-3)^{-1}).$$

3. Derivadas:

$\frac{d}{ds}((s-3)^{-1}) = -(s-3)^{-2} = -\frac{1}{(s-3)^2}$, $\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{(s-3)^2}\right) = 2(s-3)^{-3} = \frac{2}{(s-3)^3}$.

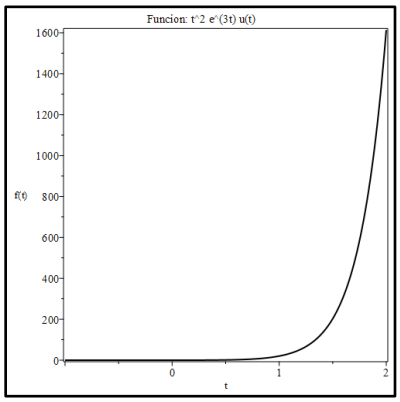
Entonces: $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}u(t)\} = \frac{2}{(s-3)^3}$.

4. Verificación:

Por la Tabla, $(\mathcal{L}\{t^ne^{at}u(t)\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}})$. $Para(n=2), (a=3)$:

$$\mathcal{L}\{t^2e^{3t}u(t)\} = \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3}, \quad \text{coincide.}$$

La gráfica será una curva negra que comienza en $(0,0)$ y crece rápidamente para $t > 0$.



3.6 Transformada de funciones multiplicadas por t^n, y divididas entre t (continuación)

1. Multiplicación por t^n

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Para (n) entero positivo:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

2. División por (t)

Si $L\{f(t)\} = F(s) \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s))$, $y\ existe$ $(\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t})$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\ d$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$$

Demostración

Consideremos:

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}\ , \qquad f(t) = t g(t)$$

Aplicando el teorema anterior para ($n\ =\ 1$):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Pero: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, luego:

$$F(s) = -\frac{d}{ds} G(s) \quad \text{donde } G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Integrando ambos lados desde (s) $hasta$ (∞):

$$\int_s^\infty F(u) du = -G(u)|_s^\infty = G(s) - \lim_{u\to\infty} G\,(u)$$

Como $\lim_{u\to\infty} G\,(u) = 0$ por propiedades de la transformada, obtenemos:

$$G(s) = \int_s^\infty F(u) du$$

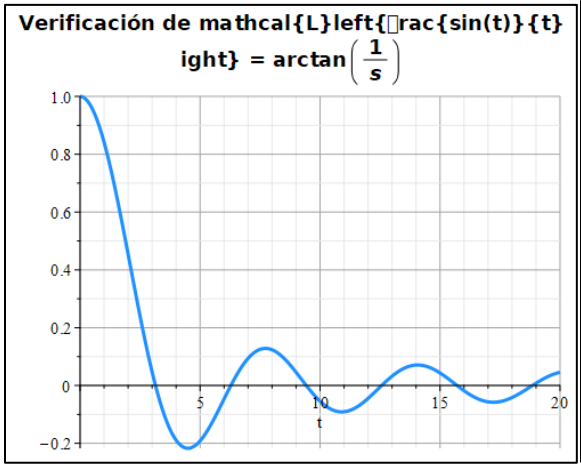
Problema No. 24

Calcular: $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$:

$$\text{Sabemos que } \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\text{Entonces } \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \arctan u\,|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$



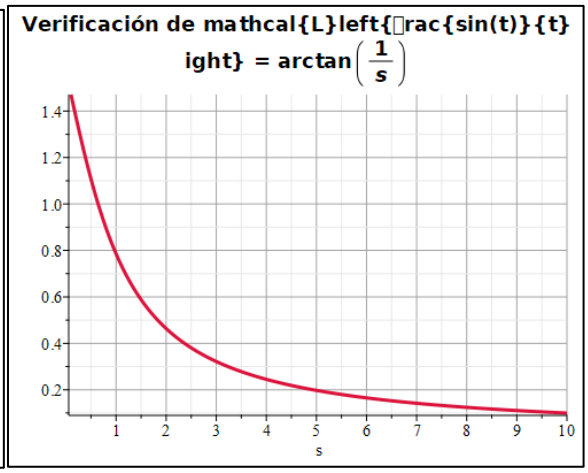


Gráfico izquierdo: Muestra $\frac{\sin t}{t}$ con su característica oscilación amortiguada

Gráfico derecho: Muestra la transformada que decae suavemente desde $\sim 1.57 (\pi/2)$ hacia 0

Ejemplos comunes

Multiplicación por (t):

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Multiplicación por t^2:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2F(s)}{ds^2}$$

porque $(-1)^2 = 1$)

División por (t):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\ du$$

(se suele cambiar la variable de integración a (u) o τ)Estas propiedades son fundamentales para resolver ecuaciones diferenciales y manipular transformadas en el dominio (s).

3.7 Transformada de una derivada y derivada de una transformada.

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática fundamental en el análisis de ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y procesamiento de señales. Entre sus propiedades, la transformada de una derivada y la derivada de una transformada destacan por su capacidad para simplificar problemas diferenciales y temporales en expresiones algebraicas.

Transformada de una Derivada en la Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace de una función $f(t)$, definida para $t \geq 0$, se expresa como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt,$$

Donde $s = \sigma + i\omega$ es una variable compleja y la integral converge si $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{at}$ para alguna constante $M > 0)$, $(a \in R)$, y $(\mathrm{Re}(s) > a)$.

La Transformada de una derivada establece que, si $\big(f(t)\big)$ es continua, diferenciable, y $(f'(t))$ es de orden exponencial, entonces:

La transformada de una derivada establece que, si $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, donde $(f(0) = \lim_{t\to 0^+} f\ (t))$ es la condición inicial.

Para derivadas de orden superior, la propiedad se generaliza como:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Demostración

Calculamos la transformada de la primera derivada:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\ dt.$$

Usamos integración por partes, $con(u = e^{-st}), (du = -se^{-st}\, dt), (dv = f'(t)\, dt), y(v = f(t))$.La fórmula es:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = [e^{-st} f(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Evaluamos el primer término:

En $(t \to \infty)$, si $f(t)$ es de orden exponencial y $\mathrm{Re}(s) > a$, entonces $e^{-st} f(t) \to 0$

En $(t = 0)$, el término es $(-f(0))$.

El segundo término es $\big(sF(s)\big)$. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0).$$

Esta propiedad es fundamental para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, convirtiendo derivadas en operaciones algebraicas e incorporando condiciones iniciales. Es ampliamente utilizada en ingeniería (circuitos eléctricos, sistemas de control) y análisis de señales, simplificando el análisis de sistemas dinámicos.

La derivada de una transformada en la Transformada de Laplace

La derivada de una transformada es una propiedad de la Transformada de Laplace que relaciona la transformada de una función multiplicada por (t) en el dominio del tiempo con la derivada de su Transformada de Laplace en el dominio de (s).

Definición

La Transformada de Laplace de una función $\big(f(t)\big)$, definida para $t \geq 0$, se expresa como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt,$$

Donde $s = \sigma + i\omega$ es una variable compleja y la integral converge si $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{at}$ para alguna constante, y $M > 0), (a \in R), y(\mathrm{Re}(s) > a)$

La derivada de una transformada establece que, si $(F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\})$, entonces:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s).$$

Para el caso general de $t^n f(t)$, la propiedad se extiende como:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Demostración

Calculamos la transformada de $(tf(t))$:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, f(t)\, dt.$$

Consideramos $(F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt)$. Derivamos $F(s)$ con respecto a(s):

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Bajo condiciones de convergencia, intercambiamos la derivada y la integral:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)\ dt = -\int_0^\infty t\, e^{-st}f(t)\, dt.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{ds}F(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}, \qquad \mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s).$$

La generalización para $t^n f(t)$ se obtiene derivando repetidamente.

Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes mediante la Transformada de Laplace

El método de la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica en el dominio de (s), incorporando las condiciones iniciales automáticamente. A continuación, se detallan los pasos generales:

Formulación del problema: Consideramos una ecuación diferencial lineal de orden (n) con coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t),$$

con condiciones iniciales $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$, donde $\left(g(t)\right)$ es el término no homogéneo.

Aplicar la Transformada de Laplace: Transformamos cada término de la ecuación utilizando la propiedad de la transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt.$$

donde$(s)\ =\ L\{y(t)\}$. El término $\left(g(t)\right)$ se transforma en$(s)\ =\ L\{g(t)\}$.

Formar la ecuación algebraica: Sustituimos las transformadas en la ecuación original, obteniendo una ecuación algebraica en $\left(Y(s)\right)$.

Resolver para ($Y(s)$): Despejamos $\left(Y(s)\right)$ resolviendo la ecuación algebraica.

I**nvertir la transformada**: Aplicamos la transformada inversa, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, para obtener la solución en el dominio del tiempo, usando tablas de transformadas o descomposición en fracciones parciales si es necesario.

Verificar la solución: Comprobamos que la solución satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

Ahora consideraremos varios ejemplos detallados que ilustrarán el procedimiento descrito anteriormente.

Problema No. 25

Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} - 2y = e^{5t}, \quad y(0) = 3.$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} - 2y\right\} = \mathcal{L}\{e^{5t}\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{5t}\}$$

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$sY(s) - 3 - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$(s-2)Y(s) = \frac{1}{s-5} + 3$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-5} + 3}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-5)(s-2)} + \frac{3}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-5)(s-2)} + \frac{3}{s-2}$$

$$\frac{1}{(s-5)(s-2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-2}$$

$$1 = A(s-2) + B(s-5)$$

Para $s = 5: 1 = A(5-2), A = 1/3$

Para $s = 2: 1 = B(2-5), B = -1/3$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-5} - \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{3}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3(s-5)} + \frac{\frac{8}{3}}{s-2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s-5)} + \frac{8/3}{s-2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{8}{3}e^{2t}$$

Problema No. 26

Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6.$$

Solución

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 8y\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 8$$

$$\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] - 8Y(s) = 0$$

$$[s^2Y(s) - 3s - 6] - 2[sY(s) - 3] - 8Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - 3s - 6 - 2sY(s) + 6 - 8Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 2s - 8)Y(s) = 3s$$

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}$$

$$Y(s) = \frac{3s}{(s-4)(s+2)}$$

$$\frac{3s}{(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2}$$

$$3s = A(s+2) + B(s-4)$$

$s = 4$:

$$12 = A(4+2), 12 = 6A, A = 2$$

$s = -2$:

$$-6 = B(-2-4), -6 = -6B, B = 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}$$

Problema No. 27

Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\sin t\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solución

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + y\right\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\sin t\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\sin t\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$[s^2Y(s) - 0 - 0] + Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5}$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$$1 = (As+B)(s^2+4s+5) + (Cs+D)(s^2+1)$$

$$s = i\colon 1 = (Ai+B)(-1+4i+5) = (Ai+B)(4+4i)$$

$$1 = (4B-4A) + i(4A+4B), \qquad 4B-4A = 1, \quad 4A+4B = 0$$

$$A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{8}$$

$$s^2+4s+5 = (s+2)^2+1$$

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{8}s + \frac{1}{8}}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2+1}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)((s+2)^2+1)} = \frac{-\frac{1}{8}s+\frac{1}{8}}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2+1}$$

$$1 = \left(-\frac{1}{8}s+\frac{1}{8}\right)((s+2)^2+1) + (Cs+D)(s^2+1)$$

$s=-2: 1 = (1/8\cdot 2 + 1/8)(1) + (D-2C)(5), 1 = 3/8 + 5D - 10C$

$$5D-10C = \frac{5}{8}, \qquad D-2C = \frac{1}{8}$$

$Coef.S^3 \;\; 0 = -1/8 + C, \qquad C = 1/8$

$D - 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \quad D - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \quad D = \frac{3}{8}$

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{8}s+\frac{1}{8}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{8}s+\frac{3}{8}}{(s+2)^2+1}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{s}{(s+2)^2+1} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{8}e^{-2t}\cos t + \frac{3}{8}e^{-2t}\sin t\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{8}(-\cos t + \sin t + e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\sin t)$$

Problema No. 28

Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 3y = 20\sin t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=-2.$$

Solución

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 3y\right\} = \mathcal{L}\{20\sin t\}$$

$$[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] - 5[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 7[sY(s) - y(0)] - 3Y(s) = \frac{20}{s^2+1}$$

$$[s^3Y(s)+2]-5s^2Y(s)+7sY(s)-3Y(s)=\frac{20}{s^2+1}$$

$$(s^3-5s^2+7s-3)Y(s)=\frac{20}{s^2+1}-2$$

$$Y(s)=\frac{20-2(s^2+1)}{(s^2+1)(s^3-5s^2+7s-3)}=\frac{-2s^2+18}{(s^2+1)(s-1)^2(s-3)}$$

$$Y(s)=\frac{20}{(s^2+1)(s-1)^2(s-3)}$$

$$\frac{20}{(s^2+1)(s-1)^2(s-3)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{(s-1)^2}+\frac{E}{s-3}$$

$$20=(As+B)(s-1)^2(s-3)+C(s^2+1)(s-3)+D(s^2+1)(s-3)+E(s^2+1)(s-1)^2$$

$$s=1: 20=D\cdot 2\cdot(-2), D=-5$$

$$s=3: 20=E\cdot 10\cdot 4, \quad E=1/2$$

$$s=0: 20=-3B-3D, \quad 20=-3B+15, \quad B=-5/3$$

$$s=2: 20=(-1/2\cdot 2+B)\cdot 1\cdot(-1)+1/2\cdot 5\cdot(-1)+(-5)\cdot 5\cdot(-1)+1/2\cdot 5\cdot 1, B$$
$$=-3/2, \quad A=-1/2, \quad C=1/2$$

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{5}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^t-5te^t+\frac{1}{2}e^{3t}$$

Problema No. 29

Usa la Transformada de Laplace para resolver cada uno de los problemas de valor inicial mostrados en la primera columna. La solución se muestra en la segunda columna

$\frac{dy}{dt} - y = e^{3t}, \quad y(0) = 2.$	$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{t}$
$\frac{dy}{dt} + y = 2\sin t\,, \quad y(0) = -1.$	$y(t) = \sin t - \cos t$
$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$	$y(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{5t}$
$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 12y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$	$y(t) = \frac{17}{7}e^{3t} + \frac{11}{7}e^{-4t}$
$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$	$y(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}t^2\right)e^{-t} - \frac{1}{4}t^2e^{-2t}$
$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = 36t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6.$	$y(t) = \left(-1 - 3t - \frac{3}{2}t^2\right)e^{t} + 3e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} + 6t$
$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 2y = 10\cos t\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 3.$	$y(t) = \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{7}{5}e^{-2t}\sin t - \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$
$\frac{d^4y}{dt^4} - 4\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0.$	$y(t) = \left(1 + \frac{1}{6}t^3\right)e^{t}$

Problema No. 30

Consideremos un circuito RLC en serie con una resistencia $R = 4\ \Omega$, una inductancia $L = 1$ H, una capacitancia $C = \frac{1}{5}$ F, y una fuente de voltaje $E(t) = 10\sin t$ V. La ecuación diferencial que describe la corriente $\big(i(t)\big)$ en el circuito se deriva de la ley de Kirchhoff:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}.$$

Sustituyendo $L = 1, R = 4, C = \frac{1}{5}$, y $E(t) = 10\sin t$, donde $\frac{dE}{dt} = 10\cos t$, la ecuación es:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 5i = 10\cos t.$$

Suponemos condiciones iniciales típicas para un circuito inicialmente en reposo: $i(0) = 0$ (sin corriente inicial) y $i'(0) = 0$ (sin carga inicial en el inductor).

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 5i = 10\cos t\,, \quad i(0) = 0, \quad i'(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 5i\right\} = \mathcal{L}\{10\cos t\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2i}{dt^2}\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} + 5\mathcal{L}\{i\} = \frac{10s}{s^2+1}$$

$$[s^2I(s) - si(0) - i'(0)] + 4[sI(s) - i(0)] + 5I(s) = \frac{10s}{s^2+1}$$

$$[s^2I(s) - 0 - 0] + 4[sI(s) - 0] + 5I(s) = \frac{10s}{s^2+1}$$

$$(s^2 + 4s + 5)I(s) = \frac{10s}{s^2+1}$$

$$I(s) = \frac{10s}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}$$

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1$$

$$I(s) = \frac{10s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)}$$

$$\frac{10s}{(s^2+1)((s+2)^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2+1}$$

$$10s = (As+B)((s+2)^2+1) + (Cs+D)(s^2+1)$$

$$s = i\colon 10i = (Ai+B)(-1+2i+1), 10i = (Ai+B)(2i), 10i = 2iB - 2A$$

$$-2A = 0, \quad 2B = 10, \qquad A = 0, \quad B = 5$$

$$s = -2 + i\colon 10(-2+i) = (C(-2+i)+D)(5), -20 + 10i = 5(-2C + Ci + D)$$

$$-20 + 10i = (-10C + 5D) + 5Ci,\ -10C + 5D = -20,\quad 5C = 10,\ C = 2,\quad D = -2$$

$$I(s) = \frac{5}{s^2+1} + \frac{2s-2}{(s+2)^2+1}$$

$$I(s) = \frac{5}{s^2+1} + \frac{2(s+2)-6}{(s+2)^2+1} = \frac{5}{s^2+1} + \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{6}{(s+2)^2+1}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+1} + \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{6}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$i(t) = \frac{5}{13}\cos t + \frac{20}{13}\sin t - \frac{5}{13}e^{-2t}\cos t - \frac{15}{13}e^{-2t}\sin t$$

3.8 Teorema de convolución.

El teorema de convolución es útil para obtener la transformada inversa de Laplace de algunas funciones. Simplifica la resolución de ecuaciones diferenciales lineales al convertir convoluciones en el dominio del tiempo en productos en el dominio de Laplace, facilitando cálculos en sistemas dinámicos como circuitos eléctricos o sistemas mecánicos.

El teorema de convolución establece que la transformada (de Laplace o Fourier) de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas. Es decir, para la transformada de Laplace:

El teorema de convolución para la transformada inversa de Laplace establece que si una función $F(s)$ en el dominio de Laplace se puede expresar como el producto de dos transformadas de Laplace, es decir:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s),$$

entonces:

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau.$$

Nota: la integral de convolución tiene una gran importancia en varias áreas de la física y las matemáticas, como teoría de circuitos eléctricos, cálculo operacional, análisis de Fourier, Transformada de Laplace, etc.

Propiedades de la convolución para la transformada de Laplace

Sean $\big(f(t)\big), \big(g(t)\big) y \big(h(t)\big)$ funciones continuas por tramos en $([0,\infty))$y de orden exponencial, y sea $(\delta(t))$ la función delta de Dirac. La convolución se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\ d\tau.$$

A continuación, se presentan las principales propiedades de la convolución en el contexto de la transformada de Laplace:

1. Propiedad conmutativa

$$f * g = g * f$$

Explicación: El orden de las funciones en la convolución no afecta el resultado:

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau)\ d\tau.$$

Se demuestra con el cambio de variable ($u = t - \tau$) . Es útil en sistemas lineales donde el orden de aplicación de funciones no altera la salida.

2. Propiedad asociativa

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Explicación: La convolución de tres funciones es independiente del orden de agrupación. Se deriva de la definición de la convolución y cambios de variable en integrales dobles. Facilita el análisis de sistemas con múltiples componentes.

3. Propiedad distributiva

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

Explicación: La convolución distribuye sobre la suma de funciones:

$$\int_0^t f(\tau)[g(t-\tau) + h(t-\tau)]\ d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\ d\tau.$$

Refleja la linealidad de la convolución, útil en sistemas con entradas combinadas.

4. Propiedad del elemento neutro

$$f\ *\ \delta =\ f$$

Explicación: La convolución con la función delta de Dirac deja la función sin cambios:

$$(f * \delta)(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)\ d\tau = f(t).$$

La delta es el elemento neutro, fundamental en sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) para modelar respuestas al impulso.

5. Propiedad de desplazamiento

Si $g_\tau(t) = g(t-\tau)$, entonces:

$$(f * g_\tau)(t) = (f * g)(t-\tau)$$

Explicación: Desplazar una función en la convolución desplaza el resultado en la misma cantidad. Es útil para modelar retardos temporales en sistemas dinámicos.

6. Propiedad de escalamiento

Si $f_a(t) = f(at))y(g_b(t) = g(bt)$, entonces:

$$(f_a * g_b)(t) = \frac{1}{|ab|}(f * g)\left(\frac{t}{ab}\right)$$

Explicación: Escalar las funciones en el tiempo afecta la amplitud y el eje temporal de la convolución. Es relevante en análisis de sistemas donde las señales se comprimen o dilatan.

7. Propiedad de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

Explicación: La transformada de Laplace de la convolución es el producto de las transformadas de Laplace de las funciones. Esta es la base del teorema de convolución, esencial para resolver ecuaciones diferenciales y analizar sistemas LTI.

8. Propiedad de derivación

Si $\big(f(t)\big)$ y $\big(g(t)\big)$ son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dt}(f * g)(t) = f' * g = f * g'$$

Explicación: La derivada de la convolución es la convolución de la derivada de una función con la otra. Es útil en ecuaciones diferenciales donde aparecen términos de convolución.

Propiedades de la convolución para la transformada inversa de Laplace

Las propiedades de la convolución para la transformada inversa de Laplace son, en esencia, las mismas que las propiedades de la convolución para la transformada de Laplace, ya que la convolución es una operación definida en el dominio del tiempo, y la transformada de Laplace (y su inversa) solo cambia el dominio de análisis (del tiempo a la frecuencia o viceversa). Esto significa que las propiedades de la convolución, como la conmutatividad, asociatividad, distributiva, etc., se mantienen idénticas, ya que se aplican a las funciones $\big(f(t)\big)\ y\big(g(t)\big)$ en el dominio del tiempo, independientemente de si estamos trabajando con la transformada o su inversa.

Sin embargo, para aclarar el contexto de la transformada inversa de Laplace, el teorema de convolución se enfoca en cómo un producto en el dominio de Laplace ($F(s) = G(s) \cdot H(s)$) se traduce en una convolución en el dominio del tiempo al aplicar la transformada inversa:

Propiedades

Sean $\big(f(t)\big), \big(g(t)\big) y \big(h(t)\big)$ funciones continuas por tramos en ($[0, \infty)$) y de orden exponencial, con transformadas de Laplace ($\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$), ($\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$), y ($\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = H(s)$).

La convolución en el dominio del tiempo se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\ d\tau.$$

El teorema de convolución para la transformada inversa de Laplace establece que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot H(s)\}(t) = (g*h)(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\ d\tau.$$

Las propiedades de la convolución en el dominio del tiempo, que se aplican al calcular la transformada inversa, son las siguientes:

1. Propiedad conmutativa

$$f * g = g * f$$

Explicación: La convolución es simétrica:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\ d\tau.$$

Se demuestra con el cambio de variable ($u = t - \tau$). Implica que:

$$(\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\cdot G(s)\}).$$

2. Propiedad asociativa

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

Explicación: La convolución de tres funciones es independiente del orden de agrupación. Esto permite que $(\mathcal{L}^{-1}\{\big(F(s)\cdot G(s)\big)\cdot H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot\big(G(s)\cdot H(s)\big)\}$. Se deriva de cambios de variable en integrales dobles.

3. Propiedad distributiva

$$f*(g+h) = f*g + f*h$$

Explicación: La convolución distribuye sobre la suma:

$$\int_0^t f(\tau)[g(t-\tau)+h(t-\tau)]\ d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\ d\tau.$$

Esto corresponde a $(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot\big(G(s)+H(s)\big)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot H(s)\})$.

4. Propiedad del elemento neutro

$$f * \delta = f$$

Explicación: La convolución con la función delta de Dirac deja la función sin cambios:

$$(f*\delta)(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)\ d\tau = f(t).$$

Esto implica que $(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot 1\}=f(t)), ya\ que(\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s)=1)$.

5. Propiedad de desplazamiento

Si $g_\tau(t)=g(t-\tau)$, entonces:

$$(f*g_\tau)(t)=(f*g)(t-\tau)$$

Explicación: Desplazar una función en la convolución desplaza el resultado. En el contexto de la transformada inversa, esto se relaciona con $(\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s\tau}G(s)\})$.

6. Propiedad de escalamiento

$Si(f_a(t)=f(at))y(g_b(t)=g(bt))$, entonces:

$$(f_a*g_b)(t)=\frac{1}{|ab|}(f*g)\left(\frac{t}{ab}\right)$$

Explicación: Escalar las funciones en el tiempo afecta la amplitud y el eje temporal de la convolución, lo que se refleja en $(\mathcal{L}^{-1})$ al manipular productos escalados

7. Propiedad de la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot H(s)\}(t)=(g*h)(t)=\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\ d$$

Explicación: El producto de dos transformadas de Laplace en el dominio (s) corresponde a la convolución de sus antitransformadas en el dominio del tiempo. Esta es la base del teorema de convolución para la transformada inversa.

8. Propiedad de derivación

Si $\big(f(t)\big)y\big(g(t)\big)$ son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dt}(f*g)(t)=f'*g=f*g'$$

Explicación: La derivada de la convolución es la convolución de la derivada de una función con la otra, útil para analizar $(\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\cdot G(s)\})$.

Problema No. 31

Encontrar la transformada inversa de Laplace de

$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$, utilizaremos el teorema de convolución y las tablas de transformadas de Laplace.

El teorema de convolución para la transformada inversa de Laplace establece que si:

$F(s) = G(s) \cdot H(s)$, donde $(s) = L\{g(t)\}(s)$ y $(s) = L\{h(t)\}(s)$, entonces:

Resolución de la transformada inversa usando el teorema de convolución

Queremos encontrar la transformada inversa de Laplace de:

$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$, utilizando el teorema de convolución y tablas de transformadas de Laplace.

Paso 1: Descomposición de $(F(s))$

El teorema de convolución para la transformada inversa de Laplace establece que si:

$$F(s) = G(s) \cdot H(s),$$

Donde $(G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s))\ y\ (H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s))$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = (g * h)(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\ d\tau.$$

Observamos que:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

Esto es un producto de dos transformadas de Laplace. Usando tablas estándar:

$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$), por lo que $g(t) = 1$

$\mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$) , por lo que $(h(t) = \sin(t)$

Por lo tanto:

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s).$$

Por el teorema de convolución:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}(t) = (1 * \sin(t))(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(t-\tau)\ d\tau.$$

Paso 2: Cálculo de la convolución

Evaluamos la integral:

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\ d\tau.$$

Hacemos un cambio de variable: sea ($u = t - \tau$), entonces ($du = -d\tau$), ($d\tau = -du$) , y los límites cambian:

Cuando ($\tau = 0$), ($u = t$),

Cuando ($\tau = t$), ($u = 0$).

La integral se convierte en:

$$f(t) = \int_t^0 \sin(u)\,(-du) = \int_0^t \sin(u)\ du.$$

Calculamos:

$$\int_0^t \sin(u)\ du = [-\cos(u)]_0^t = -\cos(t) - (-\cos(0)) = -\cos(t) + 1 = 1 - \cos(t)\,.$$

Por lo tanto:

$$f(t) = 1 - \cos(t)\,.$$

Paso 3: Verificación

Para verificar, calculamos la transformada de Laplace de $(f(t) = 1 - \cos(t))$:

$$f(t) = 1 - \cos(t)\,.$$

Usando tablas:

$$(\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}),$$

$$(\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Unimos con denominador común $(s(s^2+1))$:

$$\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=\frac{1\cdot(s^2+1)-s\cdot s}{s(s^2+1)}=\frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Esto coincide con $\big(F(s)\big)$, confirmando que:

$$f(t)=1-\cos(t)\,,\quad t\geq 0.$$

(Para $(t<0)$, $(f(t)=0)$, debido a la transformada de Laplace unilateral).

Respuesta final

La transformada inversa de Laplace de $(F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)})$, es:

$$\boxed{f(t)=1-\cos(t)\,,\quad t\geq 0.}$$

Problema No. 32

Encuentra la transformada inversa de Laplace de $(H(s)=\frac{1}{s^2+5s+6})$, usando el teorema de convolución y las tablas de transformación.

$$(H(s)=F(s)\cdot G(s))$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\;d\tau.$$

Reescribimos:

$$H(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+3}.$$

Usando tablas:

$$(\mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s)=\frac{1}{s+2}),\qquad (f(t)=e^{-2t}),$$

$$(\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)=\frac{1}{s+3}),\qquad (g(t)=e^{-3t}).$$

Entonces:

$$h(t)=(e^{-2t}*e^{-3t})(t)=\int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}\;d\tau.$$

Evaluamos:

$$\int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}\,d\tau = e^{-3t}\int_0^t e^{-2\tau+3\tau}\,d\tau = e^{-3t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau = e^{-3t}[e^{\tau}]_0^t = e^{-3t}(e^t-1)$$
$$= e^{-2t} - e^{-3t}.$$

Verificación:

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}-e^{-3t}\}(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{(s+3)-(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

Respuesta final:

$$\boxed{h(t) = e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0.}$$

Problema No. 33

Transformada inversa de $\left(H(s) = \frac{1}{s^2+3s-4}\right)$

El teorema de convolución establece que si $(H(s) = F(s)\cdot G(s))$,entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Reescribimos:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s-4} = \frac{1}{(s+4)(s-1)} = \frac{1}{s+4}\cdot\frac{1}{s-1}.$$

Usando tablas:

$$\left(\mathcal{L}\{e^{-4t}\}(s) = \frac{1}{s+4}\right), \qquad (f(t) = e^{-4t}),$$

$$\left(\mathcal{L}\{e^{t}\}(s) = \frac{1}{s-1}\right), \qquad (g(t) = e^{t}).$$

Entonces:

$$h(t) = (e^{-4t} * et)(t) = \int_0^t e^{-4\tau}e^{t-\tau}\,d\tau.$$

Evaluamos:

$$\int_0^t e^{-4\tau}e^{t-\tau}\,d\tau = e^t\int_0^t e^{-5\tau}\,d\tau = e^t\left[-\frac{1}{5}e^{-5\tau}\right]_0^t = e^t\left(-\frac{1}{5}e^{-5t}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$$
$$= \frac{1}{5}(e^t - e^{-4t}).$$

Verificación:

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}(e^{t} - e^{-4t})\right\}(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+4}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{(s+4)(s-1)}.$$

Respuesta final:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{5}(e^{t} - e^{-4t}), \quad t \geq 0.}$$

Problema No. 34

Transformada inversa de: $\left(H(s) = \frac{1}{s(s^2+9)}\right)$

El teorema de convolución establece que$(H(s) = F(s)\cdot G(s))$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau.$$

Reescribimos:

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+9}.$$

Usando tablas:

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \qquad (f(t) = 1),$$

$$\left(\mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}\sin(3t)\right\}(s) = \frac{1}{s^2+9}\right), asíque\left(g(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)\right).$$

Entonces:

$$h(t) = \left(1 * \frac{1}{3}\sin(3t)\right)(t) = \frac{1}{3}\int_0^t \sin\big(3(t-\tau)\big)\ d\tau.$$

Evaluamos:

$$\frac{1}{3}\int_0^t \sin\big(3(t-\tau)\big)\ d\tau = \frac{1}{3}\int_0^t \sin(3u)\ du = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{3}\cos(3u)\Big]_0^t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(1-\cos(3t))$$
$$= \frac{1}{9}(1-\cos(3t)).$$

Verificación:

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{9}(1-\cos(3t))\right\}(s) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{s(s^2+9)} = \frac{1}{s(s^2+9)}.$$

Respuesta final:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{9}(1-\cos(3t)), \quad t \geq 0.}$$

Problema No. 35

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+3)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+3}.$$

$$h(t) = (t * e^{-3t})(t) = \int_0^t \tau e^{-3(t-\tau)}\, d\tau.$$

$$\int_0^t \tau e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = e^{-3t} \int_0^t \tau e^{3\tau}\, d\tau.$$

$$\int_0^t \tau e^{3\tau}\, d\tau = \left[\frac{\tau e^{3\tau}}{3} - \frac{e^{3\tau}}{9}\right]_0^t = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + \frac{1}{9}.$$

$$h(t) = e^{-3t}\left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3t}.$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3t}\right\}(s) = \frac{1}{3s^2} - \frac{1}{9s} + \frac{1}{9(s+3)} = \frac{1}{s^2(s+3)}.$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{9}(3t - 1 + e^{-3t}), \quad t \geq 0.}$$

3.9 Transformada de una integral.

La transformada de Laplace es una herramienta fundamental en ingeniería y matemáticas aplicadas para resolver ecuaciones diferenciales e integrales. Una de sus propiedades más útiles es la transformada de una integral, que convierte una operación de integración en el dominio del tiempo en una expresión algebraica en el dominio de la frecuencia compleja s.

La transformada de Laplace de la integral de $\big(f(t)\big)$ es:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Demostración

Usando integración por partes:

Sea

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Partimos de la definición:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] e^{-st}dt$$

Aplicamos integración por partes con:

$$u = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad du = f(t)dt\backslash$$

$$dv = e^{-st}dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Obtenemos:

$$\int_0^\infty u\,dv = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Evaluando los límites:

$$t = \infty: -\frac{e^{-s\infty}}{s} \cdot \text{constante} = 0$$

$$t = 0: -\frac{e^0}{s} \cdot 0 = 0$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{F(s)}{s}$$

Variable Muda (τ).

La variable (τ). evita ambigüedades:

$$\int_0^t f(\tau)\ d\tau \quad \text{(correcto)} \quad \text{vs} \quad \int_0^t f(t)\ dt \quad \text{(incorrecto).}$$

Problema No. 36

$$\int_0^t e^{-3\tau}\ d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-3\tau}\ d\tau\right\} = \frac{1}{s(s+3)}.$$

Problema No. 37

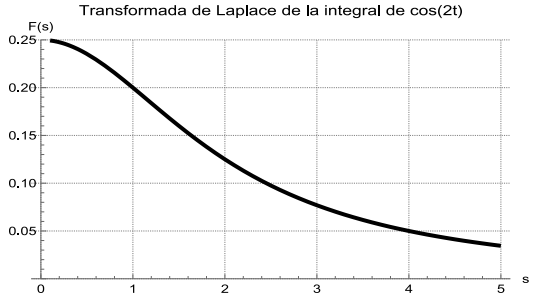
$$\int_0^t \tau\sin(\tau)\ d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau\sin(\tau)\ d\tau\right\} = \frac{2}{(s^2+1)^2}.$$

Problema No. 38

$$\int_0^t \cos(2\tau)\ d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(2\tau)\ d\tau\right\} = \frac{1}{s^2+4}.$$



Problema No. 39

Aplicaciones

1. Circuitos Eléctricos

La carga en un capacitor:

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{I(s)}{s}$$

Ejemplo para circuito RC:

$$Q(s) = \frac{V_0}{s(RCs+1)} \quad , \qquad \mathcal{L}^{-1} \quad Q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

2. Control PID.

(Proporcional-Integral-Derivativo) es un mecanismo de retroalimentación ampliamente utilizado en ingeniería para mantener estable un sistema y reducir errores entre una señal deseada (setpoint) y la señal medida

Acción integral:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{K_i E(s)}{s}$$

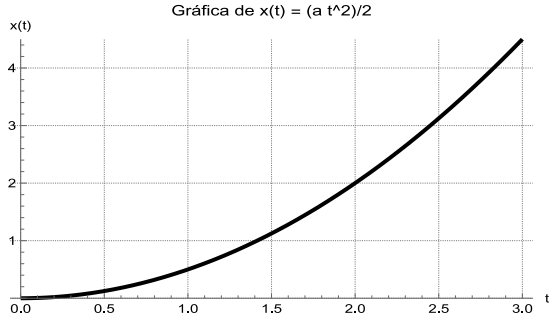
3. Mecánica

Desplazamiento desde velocidad:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{V(s)}{s}$$

Caso con $(v(t) = at)$:

$$X(s) = \frac{a}{s^3} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{at^2}{2}$$



3.10 Transformada de una función periódica.

La Transformada de Laplace de funciones periódicas permite simplificar el análisis de señales que se repiten cada intervalo fijo T. Para una función $f(t)$ con periodo $T > 0$, la transformada puede expresarse en términos de una sola oscilación mediante una fórmula compacta. Esta propiedad es particularmente útil en ingeniería para estudiar sistemas sometidos a excitaciones periódicas.

Algunas aplicaciones en el área de la ingeniería: Análisis de Circuitos: Estudio de respuestas a señales periódicas en filtros y amplificadores, Control de Vibraciones: Análisis de sistemas mecánicos sometidos a fuerzas periódicas, Procesamiento de Señales: Diseño de filtros para formas de onda repetitivas en telecomunicaciones

Fórmula Fundamental

Si $f(t)$ es periódica con periodo T y seccionalmente continua, su Transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(u)e^{-su}\,du \quad (t = u + nT)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}\right) \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$$

Problema No. 40

Función Diente de Sierra

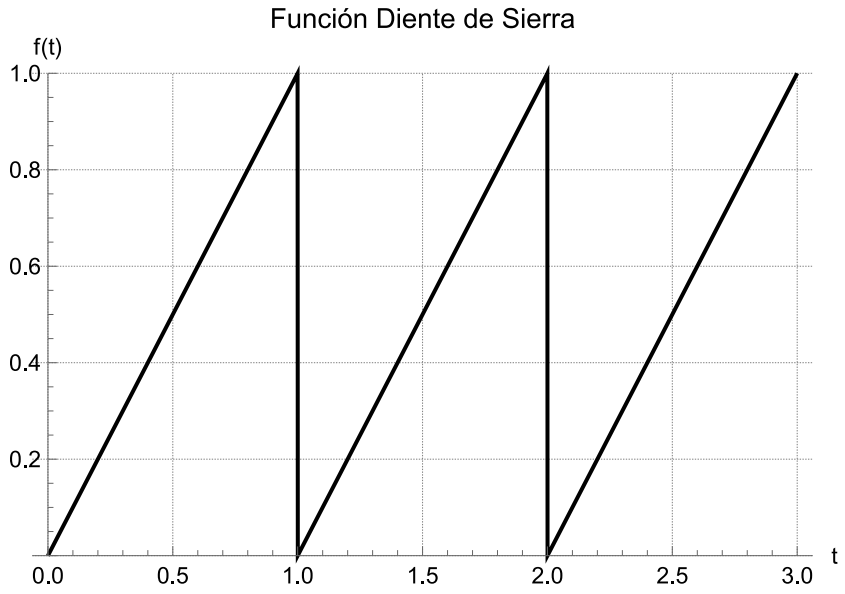
Para $f(t) = \frac{A}{T}$, $en\ \ 0 \leq t <$ T

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{A}{Ts^2} - \frac{Ae^{-sT}}{s(1-e^{-sT})}$$

Onda Senoidal Rectificada

$$f(t)\ =\ |\,sin\,(\omega t)|\ con\ T\ =\ \pi/\omega:$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\omega \coth\left(\frac{\pi s}{2\omega}\right)}{s^2+\omega^2}$$



3.11 Transformada de la función delta de Dirac.

La función Delta de Dirac $\delta(t)$) es una herramienta matemática fundamental en ingeniería y física para modelar fenómenos impulsivos o eventos de duración infinitesimal, pero con efectos finitos. Aunque no es una función en el sentido tradicional (sino una *distribución*), su utilidad radica en su capacidad para representar acciones instantáneas, como un golpe repentino, una carga eléctrica momentánea o una fuerza aplicada en un tiempo negligible. La Transformada de Laplace de $\delta(t)$ simplifica enormemente el análisis de sistemas dinámicos sometidos a este tipo de excitaciones, permitiendo convertir problemas diferenciales complejos en ecuaciones algebraicas manejables.

En un contexto eléctrico, la función delta de Dirac puede representar un impulso instantáneo de corriente o voltaje. Por ejemplo, en un circuito (RLC), un impulso de corriente modelado por $\delta(t)$ introduce una condición inicial instantánea, y su transformada de Laplace ($F(s) = 1$) indica que todas las frecuencias están presentes con igual amplitud, lo cual es útil para analizar la respuesta del sistema. En hidráulica, $\delta(t)$ podría modelar un golpe de ariete instantáneo en una tubería, y su transformada de Laplace permite analizar la respuesta dinámica del sistema en el dominio de la frecuencia.

Naturaleza de la Función Delta

La función $\delta(t)$ se define mediante dos propiedades clave:

La transformada de Laplace de una función $\big(f(t)\big)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\ dt.$$

Para la función delta de Dirac $\delta(t)$, calculamos:

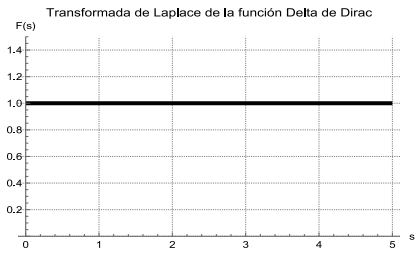
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\ dt.$$

Usando la propiedad de muestreo de la delta:

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\ dt = e^{-s\cdot 0} = 1.$$

Por lo tanto: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$

Para una delta desplazada ($\delta(t-a)$), con $a \geq 0$): $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}\ dt = e^{-sa}$.



Problema No. 41

Eléctrico: Circuito RLC

Un impulso de corriente $i(t) = I_0$ se aplica a un circuito (RLC). La transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{I_0\delta(t)\} = I_0 \cdot 1 = I_0.$$

El voltaje en el capacitor:

$$V_C(s) = \frac{I_0}{sC}.$$

Un impulso de corriente $I_0\delta(t)$ en un circuito (RLC) tiene transformada $L\{I_0\delta(t)\} = I_0$, usada para analizar el voltaje transitorio en el capacitor

Hidráulico: Golpe de Ariete

Un cierre instantáneo de válvula genera una presión $p(t) = P_0\delta(t)$. Su transformada es:

$$\mathcal{L}\{P_0\delta(t)\} = P_0 \cdot 1 = P_0.$$

La ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Un golpe de ariete modelado como $P_0\delta(t)$ tiene transformada P_0 , que facilita el análisis de la propagación de ondas de presión en una tubería.

Térmico: Calentamiento Instantáneo

Un pulso de calor $q(t) = Q_0\delta(t)$ se aplica a una barra. Su transformada es:

$$\mathcal{L}\{Q_0\delta(t)\} = Q_0 \cdot 1 = Q_0.$$

La ecuación de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q_0\delta(t).$$

Térmico: Un pulso de calor $Q_0\delta(t)$ en una barra tiene transformada Q_0, usada para estudiar la distribución de temperatura.

3.12 Aplicaciones

(Circuito RLC)

Resolver el problema de un circuito RLC en serie utilizando la transformada de Laplace, vamos a proceder paso a paso. El objetivo es encontrar la carga ($q(t)$) y la corriente ($i(t)$) para $t > 0$, dadas las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $i(0) = 0$.

Solución del circuito RLC usando la transformada de Laplace

Dado el circuito RLC en serie con $(L = 3\,\mathrm{H}), (R = 16\,\Omega), (C = 0.02\,\mathrm{F}), y\ una\ fem\ de (E(t) = 300\,\mathrm{V})$, con condiciones iniciales $(q(0) = 0), (i(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0$.

La ecuación diferencial para un circuito RLC en serie es:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Sustituyendo los valores dados:

$$3\frac{d^2q}{dt^2} + 16\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.02}q = 300.$$

Dado que $(\frac{1}{0.02} = 50)$, la ecuación se convierte en:

$$3\frac{d^2q}{dt^2} + 16\frac{dq}{dt} + 50q = 300.$$

Dividiendo toda la ecuación por 3 para simplificar:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{16}{3}\frac{dq}{dt} + \frac{50}{3}q = 100.$$

La corriente está dada por $(i(t) = \frac{dq}{dt})$.

Paso 2: Aplicar la transformada de Laplace

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, usando las propiedades:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2q}{dt^2}\right\} = s^2Q(s) - sq(0) - q'(0), \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} = sQ(s) - q(0), \quad \mathcal{L}\{q(t)\} = Q(s), \quad \mathcal{L}\{100\} = \frac{100}{s}.$$

Dado que $(q(0) = 0)\ y\ (q'(0) = i(0) = 0), la\ transformada\ es$:

$$s^2Q(s) - s \cdot 0 - 0 + \frac{16}{3}(sQ(s) - 0) + \frac{50}{3}Q(s) = \frac{100}{s}.$$

Simplificando:

$$s^2Q(s) + \frac{16}{3}sQ(s) + \frac{50}{3}Q(s) = \frac{100}{s}.$$

Factorizamos $(Q(s))$:

$$Q(s)\left(s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}\right) = \frac{100}{s}.$$

Por lo tanto:

$$Q(s) = \frac{100}{s\left(s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}\right)}.$$

Paso 3: Resolver la ecuación característica

El denominador incluye la ecuación característica:

$$s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3} = 0.$$

Multiplicamos por 3 para eliminar fracciones:

$$3s^2 + 16s + 50 = 0.$$

Calculamos el discriminante:

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 50 = 256 - 600 = -344.$$

Dado que ($\Delta < 0$), $las\ raíces\ son\ complejas. Las\ raíces\ son$:

$$s = \frac{-16 \pm \sqrt{-344}}{6} = \frac{-16 \pm \sqrt{344}i}{6}.$$

Sabemos que $(\sqrt{344} = \sqrt{4 \cdot 86} = 2\sqrt{86}), por\ lo\ que$:

$$s = \frac{-16 \pm 2\sqrt{86}i}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{86}i}{3}.$$

Las raíces son:

$$s_1 = -\frac{8}{3} + \frac{\sqrt{86}}{3}i, \quad s_2 = -\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{86}}{3}i.$$

Por lo tanto, la ecuación característica tiene raíces complejas ($s = \alpha \pm \beta i$), con:

$$\alpha = -\frac{8}{3}, \quad \beta = \frac{\sqrt{86}}{3}.$$

Paso 4: Descomposición en fracciones parciales

Tenemos:

$$Q(s) = \frac{100}{s\left(s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}\right)}.$$

Proponemos la descomposición:

$$Q(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}}.$$

Multiplicamos por el denominador común ($s\left(s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}\right)$):

$$100 = A\left(s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}\right) + (Bs + C)s.$$

Expandimos:

$$100 = As^2 + \frac{16}{3}As + \frac{50}{3}A + Bs^2 + Cs.$$

Agrupamos términos:

$$100 = (A + B)s^2 + \left(\frac{16}{3}A + C\right)s + \frac{50}{3}A.$$

Igualamos coeficientes con ($100 = 0s^2 + 0s + 100$):

Término en (s^2): $(A + B = 0,\ B = -A)$.

Término en (s): $(\frac{16}{3}A + C = 0,\ C = -\frac{16}{3}A)$.

Término constante: $(\frac{50}{3}A = 100,\ A = 100 \cdot \frac{3}{50} = 6)$.

Entonces:

$$A = 6, \quad B = -6, \quad C = -\frac{16}{3} \cdot 6 = -32.$$

Por lo tanto:

$$Q(s) = \frac{6}{s} + \frac{-6s - 32}{s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}}.$$

Paso 5: Completar el cuadrado en el denominador

Para el término cuadrático:

$$s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3}.$$

Completamos el cuadrado:

$$s^2 + \frac{16}{3}s = s^2 + \frac{16}{3}s + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \left(s + \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{64}{9}.$$

Entonces:

$$s^2 + \frac{16}{3}s + \frac{50}{3} = \left(s + \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} + \frac{50}{3} = \left(s + \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{150 - 64}{9} = \left(s + \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{86}{9}.$$

Dado que $(\frac{86}{9} = \left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2), el\ denominador\ es$:

$$\left(s + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2.$$

El numerador del segundo término es:

$$-6s - 32 = -6\left(s + \frac{16}{3}\right).$$

Ajustamos:

$$s + \frac{16}{3} = \left(s + \frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3}.$$

Entonces:

$$-6\left(s + \frac{16}{3}\right) = -6\left(s + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) = -6\left(s + \frac{8}{3}\right) - 16.$$

Por lo tanto:

$$\frac{-6s - 32}{\left(s + \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{86}{9}} = \frac{-6\left(s + \frac{8}{3}\right) - 16}{\left(s + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}.$$

Separamos:

$$\frac{-6\left(s+\frac{8}{3}\right)-16}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}=\frac{-6\left(s+\frac{8}{3}\right)}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}+\frac{-16}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}.$$

Por lo tanto:

$$Q(s)=\frac{6}{s}-\frac{6\left(s+\frac{8}{3}\right)}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}-\frac{16}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}.$$

Paso 6: Transformada inversa de Laplace

Tomamos la transformada inversa de cada término:

1. Primer término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s}\right\}=6.$$

2. Segundo término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6\left(s+\frac{8}{3}\right)}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\cos(bt)\,.$$

Con $(a=-\frac{8}{3}),(b=\frac{\sqrt{86}}{3})$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{8}{3}}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}=e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6\left(s+\frac{8}{3}\right)}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}=-6e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

3. Tercer término:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-16}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\sin(bt).$$

Ajustamos:

$$\frac{1}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{86}}{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{86}}{3}}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{86}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{86}}{3}}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}=\frac{3}{\sqrt{86}}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-16}{\left(s+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{86}}{3}\right)^2}\right\}=-16\cdot\frac{3}{\sqrt{86}}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=-\frac{48}{\sqrt{86}}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Simplificamos el coeficiente:

$$\frac{48}{\sqrt{86}}=\frac{48\sqrt{86}}{86}=\frac{24\sqrt{86}}{43}.$$

La carga es:

$$q(t)=6-6e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)-\frac{24\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Paso 7: Encontrar la corriente $(i(t))$

La corriente es $(i(t)=\frac{dq}{dt})$. Derivamos término por término:

1. Derivada del término constante:

$$\frac{d}{dt}(6)=0.$$

2. Derivada del término coseno:

$$\frac{d}{dt}\left(-6e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right).$$

Usamos la regla del producto. $Sea(u = e^{-\frac{8}{3}t}), (v = \cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right))$:

$$u' = -\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}, \quad v' = -\frac{\sqrt{86}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right) = -\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right) - e^{-\frac{8}{3}t}\cdot\frac{\sqrt{86}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Multiplicamos por (-6):

$$-6\left(-\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right) - \frac{\sqrt{86}}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right)$$
$$= 16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right) + 2\sqrt{86}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

3. Derivada del término seno:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{24\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right).$$

Sea $(u = e^{-\frac{8}{3}t}), (v = \sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right))$:

$$u' = -\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}, \quad v' = \frac{\sqrt{86}}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right) = -\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right) + e^{-\frac{8}{3}t}\cdot\frac{\sqrt{86}}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Multiplicamos por $(-\frac{24\sqrt{86}}{43})$:

$$-\frac{24\sqrt{86}}{43}\left(-\frac{8}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right) + \frac{\sqrt{86}}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right).$$

Calculamos:

$$-\frac{24\sqrt{86}}{43}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=\frac{64\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right),$$

$$-\frac{24\sqrt{86}}{43}\cdot\frac{\sqrt{86}}{3}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=-\frac{24\cdot 86}{43\cdot 3}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=-\frac{2064}{129}e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)$$
$$=-16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Sumamos las derivadas:

$$i(t)=\left(16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)+2\sqrt{86}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right)$$
$$+\left(-16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)+\frac{64\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)\right).$$

Agrupamos términos:

Coseno: $(16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)-16e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=0)$.

Seno: $(2\sqrt{86}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)+\frac{64\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)=\left(2\sqrt{86}+\frac{64\sqrt{86}}{43}\right)e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right))$.

Calculamos el coeficiente:

$$2\sqrt{86}+\frac{64\sqrt{86}}{43}=\sqrt{86}\left(2+\frac{64}{43}\right)=\sqrt{86}\cdot\frac{86+64}{43}=\sqrt{86}\cdot\frac{150}{43}=\frac{150\sqrt{86}}{43}.$$

Por lo tanto, la corriente es:

$$i(t)=\frac{150\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Solución final

La carga en el capacitor es:

$$q(t)=6-6e^{-\frac{8}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right)-\frac{24\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

La corriente en el circuito es:

$$i(t)=\frac{150\sqrt{86}}{43}e^{-\frac{8}{3}t}\sin\left(\frac{\sqrt{86}}{3}t\right).$$

Conclusiones

El capítulo dedicado a la Transformada de Laplace constituye una herramienta fundamental para los estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de Ensenada y del Tecnológico Nacional de México, al proporcionar una base teórica sólida y práctica para abordar problemas en diversas áreas de la ingeniería, como eléctrica, hidráulica, térmica, y de control, entre otras. A continuación, se resumen las principales conclusiones del capítulo, considerando los temas tratados:

Definición y Propiedades: La transformada de Laplace se presentó como una técnica poderosa que transforma ecuaciones diferenciales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, simplificando su resolución. Sus propiedades, como linealidad, facilitan el manejo de sistemas complejos.

Condiciones de Existencia: Se establecieron las condiciones suficientes para que una función tenga transformada de Laplace, asegurando que funciones de crecimiento exponencial limitado sean tratables, lo cual es crucial para aplicaciones prácticas en ingeniería.

Transformada Directa e Inversa: La transformada directa permite convertir funciones del tiempo en funciones del dominio (s), mientras que la transformada inversa recupera la solución en el dominio temporal. Estas herramientas son esenciales para resolver ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales.

Función Escalón Unitario: La función escalón unitario, modelada como ($u(t)$), y su transformada $L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ son fundamentales para describir señales que se activan en un instante, como interruptores en circuitos eléctricos.

Teoremas de Traslación: Los teoremas de traslación en el tiempo y en la frecuencia permiten manejar funciones desplazadas, simplificando el análisis de sistemas con retardos o modulaciones.

Transformada de Funciones Modificadas: Las transformadas de funciones multiplicadas por t^n o divididas por (t) amplían la aplicabilidad de la transformada, permitiendo resolver ecuaciones con términos polinómicos o fraccionarios, comunes en modelado de sistemas.

Transformada de Derivadas e Integrales: La transformada de derivadas $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^-)$ y de integrales permite resolver ecuaciones diferenciales e integrales directamente en el dominio de Laplace, incorporando condiciones iniciales de manera eficiente.

Teorema de Convolución: El teorema de convolución proporciona un método para combinar sistemas lineales, representando la respuesta de un sistema como la convolución de la entrada con la respuesta al impulso, con transformada $\big(F(s)G(s)\big)$.

Transformada de Funciones Periódicas: La transformada de funciones periódicas, como ondas cuadradas, permite analizar señales repetitivas, comunes en circuitos electrónicos y sistemas mecánicos.

Transformada de la Función Delta de Dirac: La transformada de $\delta(t)$, dada por $L\{\delta(t)\} = 1$, modela impulsos instantáneos, esenciales para estudiar fenómenos como golpes de ariete en hidráulica, impulsos eléctricos, o calentamiento instantáneo en sistemas térmicos.

El capítulo ofrece una exposición clara de los aspectos teóricos necesarios para comprender la transformada de Laplace, complementada con más de 50 ejercicios resueltos que ilustran cada subtema. Estos ejercicios, acompañados en su mayoría por explicaciones detalladas, refuerzan el aprendizaje y permiten a los estudiantes aplicar los conceptos a problemas prácticos. Este material, parte del libro Apuntes de Ecuaciones Diferenciales, es una valiosa herramienta didáctica para alumnos y docentes, fomentando una comprensión profunda y práctica del tema. Esperamos que los estudiantes y profesores del Instituto Tecnológico de Ensenada y del Tecnológico Nacional de México aprovechen este recurso para fortalecer sus conocimientos en ecuaciones diferenciales y su aplicación en ingeniería, contribuyendo a su formación profesional.

Bibliografía

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2020). Elementary differential equations and boundary value problems (11th ed.). Wiley.

Un texto clásico que cubre la transformada de Laplace con ejemplos y ejercicios aplicados a ingeniería.

Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2014). Fourier series and boundary value problems (8th ed.). McGraw-Hill Education.

Incluye la transformada de Laplace y su relación con series de Fourier, útil para funciones periódicas.

Doetsch, G. (1974). Introduction to the theory and application of the Laplace transformation. Springer.

Un texto avanzado sobre la teoría matemática de la transformada de Laplace y sus aplicaciones.

Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2016). Modern control systems (13th ed.). Pearson.

Aplica la transformada de Laplace al análisis de sistemas de control en ingeniería eléctrica.

Grewal, B. S. (2014). Higher engineering mathematics (44th ed.). Khanna Publishers.

Cubre la transformada de Laplace con ejemplos resueltos y aplicaciones en ingeniería.

Hsu, H. P. (2013). Schaum's outline of signals and systems (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

Introduce la transformada de Laplace con ejercicios prácticos en señales y sistemas.

Kreyszig, E. (2011). Advanced engineering mathematics (10th ed.). Wiley.

Ofrece un tratamiento completo de la transformada de Laplace y sus aplicaciones en ingeniería.

Lathi, B. P., & Green, R. A. (2017). Linear systems and signals (3rd ed.). Oxford University Press.

Explica la transformada de Laplace en el contexto de circuitos eléctricos y señales.

Ogata, K. (2009). Modern control engineering (5th ed.). Prentice Hall.

Utiliza la transformada de Laplace para el diseño y análisis de sistemas de control.

Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. (1996). Signals and systems (2nd ed.). Prentice Hall.

Un texto fundamental para señales y sistemas, con énfasis en la transformada de Laplace.

Roberts, M. J. (2011). Signals and systems: Analysis using transform methods and MATLAB (2nd ed.). McGraw-Hill Education.

Proporciona un enfoque práctico con aplicaciones en MATLAB para la transformada de Laplace.

Ross, S. L. (1984). Differential equations (3rd ed.). Wiley.

Un libro clásico que cubre la transformada de Laplace en el contexto de ecuaciones diferenciales, con un enfoque claro y numerosos ejemplos para estudiantes de ingeniería.

Schiff, J. L. (1999). The Laplace transform: Theory and applications. Springer.

Un texto dedicado a la transformada de Laplace, con aplicaciones en ecuaciones diferenciales y física.

Spiegel, M. R. (1965). Schaum's outline of Laplace transforms. McGraw-Hill Education.

Contiene cientos de ejercicios resueltos sobre transformadas de Laplace, ideal para estudiantes.

Widder, D. V. (2010). The Laplace transform. Dover Publications.

Un libro teórico que profundiza en las matemáticas de la transformada de Laplace y sus aplicaciones.

Tema IV Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

4.1 Teoría preliminar.

4.1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.1.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos.

4.1.3 Solución general y solución particular de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.2 Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.3 Método de los operadores.

4.4 Utilizando la transformada de Laplace.

4.5 Aplicaciones.

Conclusiones

Bibliografía

4.1 Teoría preliminar.

En los capítulos anteriores, nos hemos enfocado en el estudio de una ecuación diferencial con una función desconocida. Ahora abordaremos sistemas de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones desconocidas y, de manera más general, sistemas de (n) ecuaciones diferenciales con (n) funciones desconocidas. Nos limitaremos exclusivamente a sistemas lineales y comenzaremos explorando diferentes tipos de estos sistemas. A continuación, introduciremos los operadores diferenciales y presentaremos un método basado en operadores para resolver sistemas lineales, acompañado de algunas aplicaciones fundamentales de este enfoque. Posteriormente, examinaremos la teoría fundamental y el método básico de resolución para un tipo estándar de sistema lineal, considerando inicialmente el caso particular de dos ecuaciones con dos funciones desconocidas.

4.1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales son un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de múltiples variables interdependientes que evolucionan con el tiempo, donde cada ecuación es lineal en las variables y sus derivadas. Estos sistemas son fundamentales en áreas como la física, ingeniería, biología y economía, ya que modelan fenómenos dinámicos como oscilaciones, circuitos eléctricos, dinámica de poblaciones y sistemas mecánicos. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede expresarse en la forma general:

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales está compuesto por un conjunto de ecuaciones diferenciales, donde cada ecuación describe la tasa de cambio de una función desconocida en términos de sí misma, otras funciones y, posiblemente, términos forzantes. En su forma general, un sistema de (n) ecuaciones con (n) funciones desconocidas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ se expresa como:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

donde:

$(x_i(t))$: Son las funciones desconocidas (variables dependientes) que representan las incógnitas del sistema.

$(a_{ij}(t))$: Son los coeficientes del sistema, que pueden ser constantes o funciones continuas de la variable independiente (t).

$f_i(t))$: Son los términos forzantes, que representan entradas externas al sistema.

$(\frac{dx_i}{dt})$: Representan las derivadas de las funciones respecto a la variable independiente (t), usualmente asociada al tiempo.

El sistema es f lineal porque las funciones $x_i(t))$ y sus derivadas aparecen de forma lineal, es decir, sin productos entre ellas, potencias no lineales u otras operaciones no lineales. Si $f_i(t) = 0$para todo (i), el sistema se denomina homogéneo; de lo contrario, es no homogéneo. Además, el sistema es de primer orden} si solo involucra derivadas primeras; sistemas de orden superior pueden transformarse en sistemas de primer orden mediante la introducción de variables auxiliares.

En forma matricial, el sistema puede escribirse de manera compacta como:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

donde:

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$: Es el vector columna de las funciones desconocidas.

$A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$: Es la matriz de coeficientes de dimensión $(n \times n)$.

$f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T$:Es el vector de forzamiento

Esta representación matricial facilita el análisis y la resolución del sistema, especialmente cuando se utilizan herramientas de álgebra lineal.

Nos ocuparemos de sistemas de este tipo que tienen coeficientes constantes. Un ejemplo de dicho sistema es:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + t^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^t$$

Diremos que una solución del sistema anterior es un par ordenado de funciones reales $\big((f, g)\big)$ tal que $\big(x = f(t)\big), \big(y = g(t)\big)$ satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones del sistema en algún intervalo real $(a < t < b)$.

El sistema lineal general de tres ecuaciones diferenciales de primer orden con tres funciones desconocidas $(x), (y)y(z)$ tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z + f_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z + f_2(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z + f_3(t)$$

Al igual que en el caso de los sistemas de la forma anterior, en este caso también nos ocuparemos de sistemas con coeficientes constantes. Un ejemplo de tal sistema es:

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + 2x - 3y + z = t,$$

$$2\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} - x + 4y - 5z = \sin t,$$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} - 3x + 2y - z = \cos t$$

Diremos que una solución del sistema es una terna ordenada de funciones reales $\big((f, g, h)\big)$ tal que $\big(x = f(t)\big), \big(y = g(t)\big), \big(z = h(t)\big)$ satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones del sistema (7.2) en algún intervalo real $(a < t < b)$.

Los dos sistemas anteriores contienen únicamente derivadas de primer orden. Ahora consideraremos un sistema lineal básico que involucra derivadas de orden superior. Este es el sistema lineal general de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos funciones desconocidas (x) e (y), que tiene la forma:

$$a_1(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_3(t)\frac{dx}{dt} + a_4(t)\frac{dy}{dt} + a_5(t)x + a_6(t)y = F_1(t),$$

$$b_1(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + b_3(t)\frac{dx}{dt} + b_4(t)\frac{dy}{dt} + b_5(t)x + b_6(t)y = F_2(t)$$

También en este caso nos ocuparemos de sistemas con coeficientes constantes. Un ejemplo de tal sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 3t + 1,$$

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 4x + y = 0$$

Para enteros positivos fijos (m) y (n), podríamos proceder de manera similar para describir sistemas lineales generales de (n) ecuaciones diferenciales de orden (m) con (n) funciones desconocidas y proporcionar ejemplos de cada tipo de sistema. Sin embargo, en lugar de ello, continuaremos introduciendo el tipo estándar de sistema lineal mencionado en el párrafo introductorio al inicio del capítulo, del cual realizaremos un estudio más sistemático posteriormente. Presentamos este tipo estándar como un caso particular del sistema inicial de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con dos funciones desconocidas (x) e (y). Consideramos un caso especial del sistema lineal inicial, que tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + F_1(t),$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + F_2(t)$$

Este sistema se conoce como la forma normal en el caso de dos ecuaciones diferenciales lineales con dos funciones desconocidas. La característica distintiva de este sistema se evidencia en la manera en que aparecen las derivadas. Un ejemplo de un sistema de este tipo con coeficientes variables es:

$$\frac{dx}{dt} = t^2x + (t+1)y + t,$$
$$\frac{dy}{dt} = te^t x + t^3 y - e^t$$

Mientras que un ejemplo con coeficientes constantes es:

$$\frac{dx}{dt} = 5x + y + t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 3y + 2t$$

La forma normal de un sistema lineal de tres ecuaciones diferenciales con tres funciones desconocidas (x), (y) y (z) se expresa como:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z + F_1(t),$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z + F_2(t),$$
$$\frac{dz}{dt} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z + F_3(t)$$

Un ejemplo de un sistema de este tipo con coeficientes constantes es:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + z + t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 4y + 5z - t^2,$$
$$\frac{dz}{dt} = 4x + y - 3z + 2t + 1$$

La forma normal de un sistema lineal general de (n) ecuaciones diferenciales con (n) funciones desconocidas $x_1, x_2, \dots, x_n$ se expresa como:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t)$$

Una propiedad fundamental importante de un sistema lineal normal es su relación con una ecuación diferencial lineal de orden (n) con una sola función desconocida. Específicamente, consideremos la ecuación diferencial lineal de orden (n), en su forma normalizada (es decir, con el coeficiente de la derivada de mayor orden igual a uno), dada por:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t)$$

donde (x) es la función desconocida. Definamos las siguientes variables:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

A partir de la anterior expresión, se tiene que:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$$

y, además:

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

Usando las ecuaciones anteriores la ecuación diferencial de orden (n) puede transformarse en el sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + F(t)$$

Este sistema es un caso particular del sistema lineal normal de (n) ecuaciones con (n) funciones desconocidas. Por lo tanto, observamos que una ecuación diferencial lineal de orden (n) de la forma normal con una función desconocida está íntimamente relacionada con un sistema lineal normal de (n) ecuaciones diferenciales de primer orden con (n) funciones desconocidas.

4.1.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos.

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos es un conjunto de ecuaciones diferenciales que describe la evolución de múltiples funciones desconocidas interdependientes, donde cada ecuación es lineal y no incluye términos forzantes externos. Estos sistemas modelan fenómenos dinámicos en los que las variables evolucionan sin influencias externas, como oscilaciones en sistemas mecánicos, dinámicas de poblaciones en equilibrio o circuitos eléctricos sin fuentes externas. La homogeneidad implica que la solución trivial ($x = 0$) siempre es válida, y las soluciones generales son combinaciones lineales de soluciones fundamentales, gracias al principio de superposición. Su estudio es fundamental en matemáticas aplicadas, ya que permite analizar comportamientos como estabilidad, oscilaciones y convergencia en diversos campos científicos y de ingeniería.

Un sistema de (n) ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden con (n) funciones desconocidas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ se expresa en forma matricial como:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

donde $(A(t) = \left[a_{ij}(t)\right])$ es una matriz $(n \times n)$ de coeficientes, que pueden ser constantes o funciones de (t), y el término forzante es nulo $(\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{0}$. En forma explícita, el sistema es:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n, \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n.
\end{aligned}$$

Donde

Son Funciones desconocidas $((\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T))$: Representan las variables dependientes del sistema, que son funciones de la variable independiente (t) (usualmente el tiempo).

Es la Matriz de coeficientes $(A(t) = \left[a_{ij}(t)\right] : Matriz(n \times n$) que contiene los coeficientes de las funciones desconocidas. Los $a_{ij}(t)$ pueden ser constantes o variables.

Las Derivadas $\left((\frac{dx_i}{dt})\right)$: Representan las tasas de cambio de las funciones desconocidas respecto a (t).

La Homogeneidad: La ausencia de un término forzante $(\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{0})$ distingue al sistema homogéneo, lo que implica que todas las soluciones son combinaciones lineales de soluciones fundamentales

Sistema de dos ecuaciones con coeficientes constantes:

$$\frac{dx}{dt} = x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 2y$$

Representa un sistema mecánico de dos masas acopladas sin forzamiento externo.

Sistema de tres ecuaciones con coeficientes constantes:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 4y + 5z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 4x + y - 3z$$

Puede modelar un circuito eléctrico con tres mallas sin fuentes externas.

Sistema de dos ecuaciones con coeficientes variables:

$$\frac{dx}{dt} = tx + (t+1)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = te^t x - t^2 y$$

Representa un sistema dinámico con interacciones que varían con el tiempo.

Sistema de orden superior transformado $\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0\right)$

$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = -x_1 - 3x_2 - 2x_3$

Donde

$$(x_1 = x), (x_2 = \frac{dx}{dt}), (x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}).$$

Métodos de Solución

Valores y Vectores Propios (para coeficientes constantes): Se buscan soluciones de la forma:

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t})$, donde λ son los valores propios de (A), obtenidos de $\det(A - \lambda I) = 0)$. La solución general es una combinación lineal de soluciones particulares.

Matriz exponencial (para coeficientes constantes):

La solución es

$$(\mathbf{x}(t) = e^{At\mathbf{x_0}}), donde(e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}).$$

Matriz fundamental (para coeficientes constantes o variables): Se busca una matriz $(\Phi(t))$ que satisfaga $(\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t))$. La solución general es $(\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c})$

Métodos Numéricos: Para sistemas complejos o con coeficientes variables, se usan métodos como Euler o Runge-Kutta, implementados en software como MATLAB o Python.

Aplicaciones

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos se utilizan en:

Física: Oscilaciones en sistemas mecánicos (ej., masas acopladas con resortes) o circuitos eléctricos sin fuentes externas.

Biología: Dinámicas de poblaciones en equilibrio, como interacciones depredador-presa sin perturbaciones.

Ingeniería: Análisis de estabilidad en sistemas de control automático sin entradas externas.

Matemáticas: Transformación de ecuaciones de orden superior en sistemas de primer orden.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos son herramientas esenciales para modelar sistemas dinámicos sin forzamiento externo. Su resolución combina técnicas analíticas y numéricas, permitiendo analizar estabilidad y comportamiento dinámico en diversas aplicaciones científicas y tecnológicas.

4.1.3 Solución general y solución particular de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales tienen soluciones que pueden expresarse en términos de una solución general y una solución particular, dependiendo de las condiciones iniciales o forzamientos del sistema.

Solución General de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Forma general del sistema

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes puede escribirse como:

$$\boldsymbol{X}'(t) = A\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t)$$

donde:

$\boldsymbol{X}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)^T$ es el vector de funciones incógnita

A es una matriz constante de $n \times n$, $\boldsymbol{F}(t)$ es el vector de términos no homogéneos

Solución general del sistema homogéneo ($\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{0}$)

La solución general del sistema homogéneo $\boldsymbol{X}'(t) = A\boldsymbol{X}$ depende de los autovalores de A

Caso 1: Autovalores reales distintos

Si A tiene n autovalores reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con auto vectores correspondientes $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$, la solución general es:

$$\boldsymbol{X_H}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v_n}$$

Caso 2: Autovalores repetidos

Para un autovalor λ con multiplicidad m:

2.1. Si hay m auto vectores linealmente independientes

La solución es análoga al caso de autovalores distintos:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda t}\boldsymbol{v_i}$$

2.2. Si hay menos de m autovectores

Se buscan vectores propios generalizados. Para un autovalor λ de multiplicidad m con $k < m$ autovectores, las soluciones son de la forma:

$$e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{v_0} + t\boldsymbol{v_1} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{v_2} + \cdots + \frac{t^p}{p!}\boldsymbol{v_p}\right]$$

Donde

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})^{p+1}\boldsymbol{v_p} = \boldsymbol{0}.$$

Caso 3: Autovalores complejos

Para un valor complejo $\lambda = \alpha + i\beta$ con autovecto $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, se obtienen dos soluciones reales

$$\boldsymbol{X_1}(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\,\boldsymbol{a} - \sin(\beta t)\,\boldsymbol{b}]$$
$$\boldsymbol{X_2}(t) = e^{\alpha t}[\sin(\beta t)\,\boldsymbol{a} + \cos(\beta t)\,\boldsymbol{b}]$$

Solución particular del sistema no homogéneo

Cuando $\boldsymbol{F}(t) \neq \boldsymbol{0}$, la solución general es:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X_H}(t) + \boldsymbol{X_P}(t)$$

Método de coeficientes indeterminados. Aplicable cuando $\boldsymbol{F}(t)$ es del tipo:

Polinomial, exponencial, trigonométrico o combinaciones lineales de los anteriores

Se propone una forma similar a $\boldsymbol{F}(t)$ con coeficientes a determinar.

Método de variación de parámetros}

Solución general:

$$\boldsymbol{X_P}(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)dt$$

Donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo.

Problema No. 1

Consideremos el sistema:

$$x' = 2x + y$$

$$y' = 3x + 4y$$

Solución del sistema homogéneo

Matriz del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores

Ecuación característica:

$$de\, t(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Auto vectores

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 5$:

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución general homogénea

$$\mathbf{X}_H(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución particular (si hubiera término no homogéneo)

Si $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{X}_P(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y resolviendo para a y b.

Solución general completa

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{X}_P(t)$$

Expresando los componentes explícitamente:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} + x_{p1}(t) \\ -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} + x_{p2}(t) \end{bmatrix}.$$

Problema No. 2

Ejemplo con Autovalores Complejos

Consideremos el sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} x' = x - 5y + 2e^{-t} \\ y' = 2x - y + cos\, t \end{cases}$$

Paso 1: Solución del sistema homogéneo

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. Cálculo de autovalores

$$de\, t(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0$$

$$\lambda = \pm 3i \text{(Autovalores complejos conjugados)}$$

1.2. Cálculo de auto vectores

Para $\lambda = 3i$:

$$(A - 3iI)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Ecuación reducida: $(1-3i)v_1 - 5v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = \frac{5}{1-3i} v_2$

Tomando $v_2 = 1 - 3i$ (para eliminar el denominador):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.3. Solución general homogénea

Usando la fórmula para autovalores complejos $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

$$\boldsymbol{X_H}(t) = C_1 e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\, \boldsymbol{a} - \sin(\beta t)\, \boldsymbol{b}] + C_2 e^{\alpha t}[\sin(\beta t)\, \boldsymbol{a} + \cos(\beta t)\, \boldsymbol{b}]$$

Donde $\alpha = 0, \beta = 3, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X}_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3\,t - 0\sin 3\,t \\ \cos 3\,t - (-3)\sin 3\,t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3\,t + 0\cos 3\,t \\ \sin 3\,t + (-3)\cos 3\,t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ (C_1 + 3C_2)\cos 3t + (C_2 - 3C_1)\sin 3t \end{pmatrix}$$

Paso 2: Solución particular del sistema no homogéneo

El término no homogéneo es:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ \cos t \end{pmatrix}$$

2.1. Método de coeficientes indeterminados

Proponemos una solución particular que combine las formas de $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{X}_P(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-t} \\ B\cos t + C\sin t \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema original:

$$\begin{cases} -Ae^{-t} = Ae^{-t} - 5(B\cos t + C\sin t) + 2e^{-t} \\ -B\sin t + C\cos t = 2Ae^{-t} - (B\cos t + C\sin t) + \cos t \end{cases}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{array}{rc} \text{Para } e^{-t}\text{:} & -A = A + 2 \Rightarrow A = -1 \\ \text{Para } \cos t\text{:} & 0 = -5B \text{y} C = -B + 1 \\ \text{Para } \sin t\text{:} & -B = -5C \text{y} - C = -C \text{(redundante)} \end{array}$$

Resolviendo: $B = 0, C = 1$. Así:

$$\mathbf{X}_P(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Paso 3: Solución general completa

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_H(t) + \mathbf{X}_P(t) = \begin{pmatrix} 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t - e^{-t} \\ (C_1 + 3C_2)\cos 3t + (C_2 - 3C_1)\sin 3t + \sin t \end{pmatrix}$$

Paso 4: Solución particular con condiciones iniciales

Si $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 5C_1 - 1 = 4 \\ C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}$$

La solución particular es:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t - e^{-t} \\ (1-1)\cos 3t + \left(-\frac{1}{3} - 3\right)\sin 3t + \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t - e^{-t} \\ -\frac{10}{3}\sin 3t + \sin t \end{pmatrix}$$

Problema No. 3

Solución del sistema de ecuaciones diferenciales

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - 4y = e^t, (1) \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{4t}, (2) \end{cases}$$

Paso 1: Simplificación del sistema

Definimos $S = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$, transformando el sistema a:

$$\begin{cases} S - 2x - 4y = e^t, (1) \\ S - y = e^{4t}. (2) \end{cases}$$

Restamos (2') de (1'):

$$-2x - 3y = e^t - e^{4t} \Longrightarrow 2x + 3y = e^{4t} - e^t. (3)$$

Paso 2: Expresión para S

De la ecuación (2'):

$$S = y + e^{4t} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + e^{4t}. (4)$$

Paso 3: Resolución para $y(t)$

De la ecuación (3) despejamos x:

$$x = \frac{e^{4t} - e^t - 3y}{2}$$

Derivamos x respecto a t y sustituimos en (4):

$$\frac{4e^{4t} - e^t - 3\frac{dy}{dt}}{2} + \frac{dy}{dt} = y + e^{4t}$$

Simplificando obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{4t} - e^t. \quad (5)$$

Resolvemos esta EDO lineal usando el factor integrante $\mu(t) = e^{2t}$:

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t} + Ce^{-2t}$$

Paso 4: Solución para $x(t)$

Sustituimos $y(t)$ en la ecuación (3):

$$x(t) = -\frac{3}{2}Ce^{-2t}$$

Solución general del sistema

$$x(t) = -\frac{3}{2}Ce^{-2t}, y(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t} + Ce^{-2t},$$

donde C es una constante arbitraria de integración.

Problema No. 4

Dado el sistema:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = -2t, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - y = t^2, \quad (2)$$

Paso 1: Simplificación del sistema

Definimos $S = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$, transformando el sistema a:

$$S - x = -2t, \quad (1')$$

$$S - 3x - y = t^2. \quad (2')$$

De (1') obtenemos:

$$S = x - 2t$$

Paso 2: Sustitución y reducción

Sustituimos S en (2'):

$$(x - 2t) - 3x - y = t^2$$

$$-2x - y - 2t = t^2$$

$$2x + y = -t^2 - 2t \quad (3)$$

Paso 3: Derivación y solución

Derivamos la ecuación (3) respecto a t:

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=-2t-2$$

Sabemos que $S=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=x-2t$, por lo que:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=x-2t$$

Restamos esta última ecuación de la derivada de (3):

$$\frac{dx}{dt}=-2t-2-x+2t=-2-x$$

$$\frac{dx}{dt}+x=-2 \quad (4)$$

Paso 4: Resolución de la EDO lineal

Resolvemos la ecuación (4) usando el factor integrante $\mu(t)=e^{\int 1dt}=e^{t}$:

$$e^{t}\frac{dx}{dt}+e^{t}x=-2e^{t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{t}x)=-2e^{t}$$

Integrando ambos lados:

$$e^{t}x=-2e^{t}+C\Longrightarrow x(t)=-2+Ce^{-t}$$

Paso 5: Solución para $y(t)$

De la ecuación (3):

$$y=-t^{2}-2t-2x=-t^{2}-2t-2(-2+Ce^{-t})=-t^{2}-2t+4-2Ce^{-t}$$

Solución general

$$x(t)=-2+Ce^{-t},$$

$$y(t)=-t^{2}-2t+4-2Ce^{-t},$$

donde C es una constante arbitraria de integración.

Problema No. 5

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

Paso 1: Formulación matricial

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo de autovalores

Calculamos los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$de\, t(A - \lambda I) = \left| \begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{matrix} \right| = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

Paso 3: Determinación de auto vectores

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Obtenemos $v_{11} = -v_{12} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 4$:

$$(A - 4I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Obtenemos $v_{21} = 2v_{22} \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Paso 4: Construcción de la solución general

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Expresado en forma escalar:

$$x(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}$$

$$y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

donde c_1 y $c_2$son constantes que se determinan mediante condiciones iniciales.

Paso 5: Solución particular

Si consideramos las condiciones iniciales $x(0) = 1, y(0) = 0$:

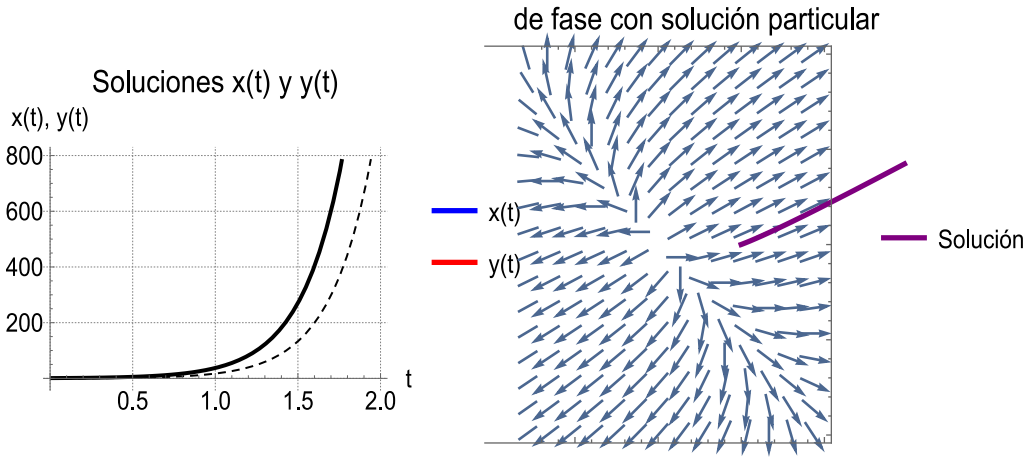
$$c_1 + 2c_2 = 1$$

$$-c_1 + c_2 = 0$$

Resolviendo obtenemos $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$, por lo que la solución particular es:

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t}$$



4.2 Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Tipo de sistema	**Métodos principales**
Homogéneo (*A* constante)	Matriz exponencial, autovalores/auto vectores
Homogéneo (*A*(*t*) variable)	Matriz fundamental, eliminación
No homogéneo	Variación de parámetros, coeficientes indeterminados, Laplace

Homogéneo (*A* constante)

Caso	**Método**	**Solución General**
Autovalores reales distintos	Diagonalización / Auto vectores	$c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$
Autovalores complejos	Forma trigonométrica (Euler)	$e^{\alpha t}[a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)]$
Autovalores repetidos	Auto vectores generalizados	$e^{\lambda t}[v + tw]$
Matriz exponencial	e^{At} (serie infinita o Jordan)	$e^{At}c$

Homogéneo (*A*(*t*) variable)

Método	**Fórmula de Solución**
Matriz fundamental	$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$
Eliminación	$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots = 0$
Wronskiano	$W(t) = de\,\mathrm{t}\big(\Phi(t)\big) \neq 0$
Variación parámetros	$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt$

No homogéneo

Método	**Fórmula de Solución**
Variación de parámetros	$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt$
Coeficientes indeterminados	$\mathbf{x}_p(t) = \sum$(Forma análoga a $\mathbf{b}(t)$)
Transformada de Laplace	$\mathcal{L}\mathbf{x}'(s) = A\mathcal{L}\mathbf{x}(s) + \mathcal{L}\mathbf{b}(s)$

4.3 Método de los operadores.

En esta sección, presentaremos un **método operacional simbólico** para resolver sistemas lineales con coeficientes constantes. Este enfoque se basa en el uso de **operadores diferenciales**, los cuales definiremos a continuación.

Definición del Operador Diferencial

Sea *x*(*t*) una función *n*-veces diferenciable respecto a la variable independiente *t*. Representamos la operación de **derivación respecto a *t*** mediante el símbolo *D*, al que llamaremos **operador diferencial**. Así, la primera derivada dt/dx se expresa como:

$$Dx = \frac{dx}{dt}$$

De manera análoga, denotamos las derivadas de orden superior como:

$$D^n x = \frac{d^n x}{dt^n} \quad \text{para } n \in N$$

Operadores con Coeficientes Constantes

Extendiendo esta notación, podemos combinar *D* con constantes para formar operadores más complejos:

$$(D + c)x = \frac{dx}{dt} + cx$$

$$(aD^n + bD^m)x = a\frac{d^n x}{dt^n} + b\frac{d^m x}{dt^m}$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes.

Operador Diferencial Lineal General

Una **expresión diferencial lineal** con coeficientes constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$\mathcal{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

se escribe compactamente en notación operacional como:

$$\mathcal{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

Observación Clave

Los operadores D^n , D^{n-1} , … , D no **representan multiplicaciones**, sino **operaciones de derivación** aplicadas a la función *x*(*t*). La expresión:

$$\mathcal{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

sin aplicar a ninguna función, se denomina **operador diferencial lineal** con coeficientes constantes

$$\mathcal{L}x = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x$$

Problema No. 6

Considere el operador diferencial lineal:

$$\mathcal{L} = 3D^2 + 5D - 2$$

Donde D denota el operador de derivación $\frac{d}{dt}$. Si $x(t)$ es una función dos veces diferenciable, la acción de $\mathcal{L}sobrex(t)$se expresa como:

Sea $x(t) = t^3$. Aplicamos $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}x = 3\frac{d^2 x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 2x$$

$$\mathcal{L}(t^3) = 3D^2(t^3) + 5D(t^3) - 2(t^3)$$

$$= 3 \cdot 6t + 5 \cdot 3t^2 - 2t^3$$

$$= 18t + 15t^2 - 2t^3.$$

A continuación, analizaremos las propiedades fundamentales de los operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes. Para simplificar la notación, denotaremos este operador mediante $\mathcal{L}$. Es decir:

$$\mathcal{L} = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

Donde: $D^k \equiv \frac{d^k}{dt^k}$ representa el operador de derivación de orden k $a_i \in \mathbb{R}(o\mathbb{C})$ son coeficientes constantes y n es el orden del operador diferencial

Propiedades útiles del operador diferencial lineal con coeficientes constantes.

Propiedad	Descripción Matemática
Linealidad	$\mathcal{L}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_{1\mathcal{L}}x_1 + c_{2\mathcal{L}}x_2$
Conmutatividad	$\mathcal{L}_{1\mathcal{L}_2} = \mathcal{L}_{2\mathcal{L}_1}$
Factorización	$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_n)x$
Anulación	$L\left(e^{\lambda t}\right) = P(\lambda)e^{\lambda t}$ (donde Pes el polinomio característico)
Superposición	$\mathcal{L}x_1 = 0\ y\ \mathcal{L}x_2 = 0,$ $\mathcal{L}(c_1x_1 + c_2x_2) = 0$
Teorema Fundamental	Solución general: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Problema No. 7

Cálculo de $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 f(t)$

Dados los operadores y función:

$$\mathcal{L}_1 = D^2 + 1, \quad \mathcal{L}_2 = 3D + 2, \quad f(t) = t^3$$

Paso 1: Aplicar $\mathcal{L}_2$ a $f(t)$

$$\mathcal{L}_2 f(t) = (3D + 2)t^3$$
$$= 3D(t^3) + 2t^3$$
$$= 3\left(\frac{d}{dt}t^3\right) + 2t^3$$
$$= 3(3t^2) + 2t^3$$
$$= 9t^2 + 2t^3$$

Paso 2: $\mathcal{L}_1$ al resultado anterior

$$\mathcal{L}_1\big(\mathcal{L}_2 f(t)\big) = (D^2 + 1)(2t^3 + 9t^2)$$
$$= D^2(2t^3 + 9t^2) + 1(2t^3 + 9t^2)$$
$$= \frac{d^2}{dt^2}(2t^3 + 9t^2) + 2t^3 + 9t^2$$
$$= \frac{d}{dt}(6t^2 + 18t) + 2t^3 + 9t^2$$
$$= (12t + 18) + 2t^3 + 9t^2$$
$$= 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18$$

Resultado final

$$\boxed{\mathcal{L}_{1\mathcal{L}_2} f(t) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 18}$$

Método de Operadores para Sistemas Lineales con Coeficientes Constantes

A continuación, presentamos un **método operacional simbólico** para resolver sistemas lineales con coeficientes constantes. Describiremos el procedimiento de manera formal, sin abordar, en esta instancia, su justificación teórica.

Considere un sistema lineal de la forma:

$$\mathcal{L}_1 x + \mathcal{L}_2 y = f_1(t),$$
$$\mathcal{L}_3 x + \mathcal{L}_4 y = f_2(t),$$

donde:

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, $x(t)$ e $y(t)$ son funciones desconocidas, $f_1(t) y f_2(t)$ son funciones dadas.

Operador	**Expresión General**
L_1	$a_n D^n + a_n{}^{-1} D^{n-1} + \cdots + a^1 D + a^0$
L_2	$b_m D^m + b_m{}^{-1} D^{m-1} + \cdots + b^1 D + b^0$
L_3	$c_k D^k + c_k{}^{-1} D^{k-1} + \cdots + c^1 D + c^0$
L_4	$d_l D^l + d_l{}^{-1} D^{l-1} + \cdots + d^1 D + d^0$

Problema No. 8

Expresa el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales mediante operadores diferenciales

$$2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 3x = t$$
$$2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 3x + 8y = 2$$

$$(2D - 3)x - 2Dy = t$$
$$(2D + 3)x + (2D + 8)y = 2$$
$$\mathcal{L}_1 x + \mathcal{L}_2 y = t\,, \quad \mathcal{L}_3 x + \mathcal{L}_4 y = 2$$

Operadores diferenciales:

$$\mathcal{L}_1 = 2D - 3,\ \mathcal{L}_2 = -2D,\ \mathcal{L}_3 = 2D + 3,\ \mathcal{L}_4 = 2D + 8$$

Problema No. 9

Resuelve el sistema anterior usando operadores diferenciales

Sistema original

$$2x' - 2y' - 3x = t \quad (1)$$

$$2x' + 2y' + 3x + 8y = 2 \quad (2)$$

Forma operacional

$$(2D - 3)x - 2Dy = t \quad (1')$$

$$(2D + 3)x + (2D + 8)y = 2 \quad (2')$$

Método de eliminación: Sumamos (1') + (2'):

$$[(2D - 3) + (2D + 3)]x + [-2D + (2D + 8)]y = t + 2$$

$$4Dx + 8y = t + 2 \quad (3)$$

Restamos (2') - (1'):

$$[(2D + 3) - (2D - 3)]x + [2D + 8 - (-2D)]y = 2 - t$$

$$6x + (4D + 8)y = 2 - t \quad (4)$$

Resolver para y

$$y = \frac{t + 2 - 4Dx}{8}$$

Sustituyendo en (4):

$$6x + (4D + 8)\left(\frac{t + 2 - 4Dx}{8}\right) = 2 - t$$

Ecuación para x

$$(16D^2 + 24D + 72)x = -4D(t + 2) - 8(t + 2) + 8(2 - t)$$

$$= -4 - 8t - 16 + 16 - 8t$$

$$= -4 - 16t$$

Solución general

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t/2} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8}$$

$$y(t) = -C_1 e^{-3t} + \frac{C_2}{2} e^{-t/2} + \frac{t}{8} + \frac{3}{16}$$

Problema No. 10

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x-4y=e^{t} \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-y=e^{4t} \quad (2)$$

Paso 1: Forma Operacional ($D = d/dt$)

$$(D-2)x+(D-4)y=e^{t} \quad (1')$$
$$Dx+(D-1)y=e^{4t} \quad (2')$$

Paso 2: Restar ecuaciones para eliminar Dx

$$(1')-(2') \Rightarrow (-2)x+(-3)y=e^{t}-e^{4t}$$

$$\Rightarrow 2x+3y=e^{4t}-e^{t} \quad (3)$$

Paso 3: Resolver para x en términos de y

$$x=\frac{e^{4t}-e^{t}-3y}{2} \quad (4)$$

Paso 4: Sustituir x en (2')

$$D\left(\frac{e^{4t}-e^{t}-3y}{2}\right)+(D-1)y=e^{4t}$$

$$\frac{4e^{4t}-e^{t}-3Dy}{2}+Dy-y=e^{4t}$$

Paso 5: Simplificar y resolver para y

$$(-D-2)y=-2e^{4t}+e^{t}$$

$$(D+2)y=2e^{4t}-e^{t} \quad \text{(ED lineal de 1er orden)}$$

Solución para $y(t)$:

$$y(t)=Ce^{-2t}+\frac{2}{6}e^{4t}-\frac{1}{3}e^{t}=Ce^{-2t}+\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}e^{t}$$

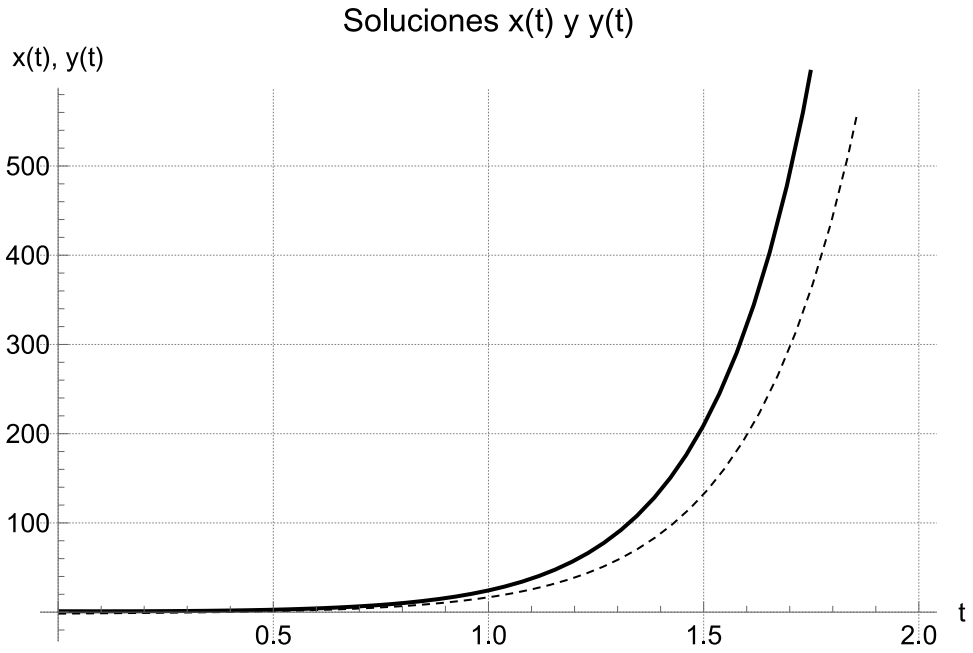
Solución para $x(t)$ usando (4):

$$x(t) = \frac{e^{4t} - e^{t} - 3\left(Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}\right)}{2} = -\frac{3}{2}Ce^{-2t} + \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}$$

Solución general final:

$$x(t) = -\frac{3}{2}Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

$$y(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}$$



Problema No.11

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-x=-2t \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-3x-y=t^2 \quad (2)$$

Paso 1: Forma Operacional: $D \equiv \frac{d}{dt}$:

$$(D-1)x+Dy=-2t \quad (1')$$

$$(D-3)x+(D-1)y=t^2 \quad (2')$$

Paso 2: Eliminación de Términos

Restamos (1') - (2'):

$$[(D-1)-(D-3)]x+[D-(D-1)]y=-2t-t^2$$

$$2x+y=-t^2-2t \quad (3)$$

Paso 3: Resolución para y

Despejamos y:

$$y=-t^2-2t-2x \quad (4)$$

Paso 4: Sustitución en (1')

Sustituimos (4) en (1'):

$$(D-1)x+D(-t^2-2t-2x)=-2t$$

$$Dx-x-2t-2-2Dx=-2t$$

$$-Dx-x-2=0$$

$$(D+1)x=-2 \quad \text{(ED lineal)}$$

Paso 5: Solución para $x(t)$

Factor integrante: $\mu(t)=e^{\int 1dt}=e^t$

Solución: $x(t) = e^{-t}(\int -2e^{t}dt + C)$

$$x(t) = Ce^{-t} - 2$$

Paso 6: Solución para $y(t)$

Sustituimos $x(t)$ en (4):

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2(Ce^{-t} - 2)$$

$$= -2Ce^{-t} - t^2 - 2t + 4$$

Solución General Final

$$x(t) = Ce^{-t} - 2$$

$$y(t) = -2Ce^{-t} - t^2 - 2t + 4$$

Problema No. 12

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^t \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{3t} \quad (2)$$

Paso 1: Forma Operacional

Definimos $D \equiv \frac{d}{dt}$:

$$(D-1)x + (D-3)y = e^t \quad (1')$$

$$(D+1)x + Dy = e^{3t} \quad (2')$$

Paso 2: Eliminación de Términos

Restamos (1') - (2'):

$$[(D-1) - (D+1)]x + [(D-3) - D]y = e^t - e^{3t}$$

$$-2x - 3y = e^t - e^{3t} \quad (3)$$

Paso 3: Resolución para x

Despejamos x:

$$x = -\frac{1}{2}(e^t - e^{3t} + 3y) \quad (4)$$

Paso 4: Sustitución en (2')

Sustituimos (4) en (2'):

$$(D+1)\left(-\frac{1}{2}(e^t - e^{3t} + 3y)\right) + Dy = e^{3t}$$

Desarrollando:

$$-\frac{1}{2}(e^t - 3e^{3t} + 3Dy) + \frac{1}{2}(e^t - e^{3t} + 3y) + Dy = e^{3t}$$

Simplificando:

$$\left(-\frac{3}{2}D + \frac{3}{2} + D\right)y = e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t}$$

$$\left(-\frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\right)y = 2e^{3t}$$

Paso 5: Solución para $y(t)$

Resolvemos la EDO:

$$-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}+\frac{3}{2}y=2e^{3t}$$

Multiplicamos por -2:

$$\frac{dy}{dt}-3y=-4e^{3t}$$

Factor integrante:

$$\mu(t)=e^{-3t}$$

$$y(t)=e^{3t}\left(\int -4e^{3t}\,e^{-3t}dt+C\right)=e^{3t}(-4t+C)=Ce^{3t}-4te^{3t}$$

Paso 6: Solución para $x(t)$

Sustituimos $y(t)$ en (4):

$$x(t)=-\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{3t}+3(Ce^{3t}-4te^{3t})\right)=-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{3}{2}Ce^{3t}+6te^{3t}$$

Solución General Final

$$x(t)=-\frac{1}{2}e^{t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}C+6t\right)e^{3t}$$

$$y(t)=(C-4t)e^{3t}$$

Aplicaciones

Aplicaciones en Mecánica

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales surgen en la formulación matemática de numerosos problemas en **mecánica clásica**, **ingeniería estructural** y **dinámica de fluidos**. A continuación, analizaremos un ejemplo concreto que ilustra esta conexión, mientras que otros problemas relacionados se proponen en los ejercicios al final de esta sección.

Sistema Masa-Resorte Acoplado

Considere dos masas $m_1 y\ m_2$ conectadas:

Donde:

$k_1,\ k_2$: constantes de los resortes

$x_1(t), x_2(t)$: desplazamientos desde el equilibrio

$F_1(t), F_2(t)$: fuerzas externas aplicadas

Ecuaciones de Movimiento

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m_1\backslash dv[2]x_1t = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1(t)$$
$$m_2\backslash dv[2]x_2t = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 + F_2(t)$$

Forma Matricial

El sistema puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}$$

O en notación compacta:

$$\boldsymbol{M\ddot{x} + Kx = F}(t)$$

Caso Particular: Sistema No Forzado: Cuando $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2 + k_3}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema No. 13

Ejemplo de sistema eléctrico RLC (Usando el operador diferencial)

Consideremos un circuito con:

$$Resistencia\ R\ =\ 2\Omega$$
$$Inductancia\ L\ =\ 1H$$
$$Capacitancia\ C\ =\ 0.5F$$
$$Fuente\ de\ voltaje\ V(t) = 10sin(t)$$

Ecuaciones del circuito

Aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,,dt = V(t)$$

Derivando una vez para eliminar la integral:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dV}{dt}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 2i = 10\cos(t)$$

Solución mediante operadores diferenciales

Ecuación homogénea:

$$(D^2 + 2D + 2)i = 0$$

Raíces características:

$$D = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Solución homogénea:

$$i_h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$$

Solución particular:

$$i_p(t) = K\cos t + M\sin t$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(-K + 2M + 2K)\cos t + (-M - 2K + 2M)\sin t = 10\cos t$$

Resolviendo:

$$K\ +\ 2M\ =\ 10$$
$$-2K\ +\ M\ =\ 0$$

Obtenemos $K\ =\ 2, M\ =\ 4$.

Solución general: $i(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + 2\cos t + 4\sin t$

Problema No. 14

Sistema Hidráulico de Dos Tanques Acoplados

Consideremos dos tanques de agua conectados con:

Altura del tanque 1: $h_1(t)[m]$

Altura del tanque 2: $h_2(t)[m]$

Área del tanque 1: $A_1 = 2\text{m}^2$

Área del tanque 2: 1m^2

Resistencia de la válvula 1: $R_1 = 0.5\text{m}^2/\text{min}$

Resistencia de la válvula 2: $R_2 = 1\text{m}^2/\text{min}$

Flujo de entrada: $Q_{in} = 3\text{m}^3/\text{min}$

Modelado del Sistema

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_{in} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$2\frac{dh_1}{dt} = 3 - 2(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = 2(h_1 - h_2) - h_2$$

Solución mediante Operadores Diferenciales

Expresamos en forma matricial con $D = \frac{d}{dt}$:

$$(2D + 2)h_1 - 2h_2 = 3$$

$$-2h_1 + (D + 3)h_2 = 0$$

Aplicamos el método de eliminación:

$$(D^2 + 5D + 2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3D + 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ecuación característica:

$$m^2 + 5m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Solución homogénea:

$$h_{1h}(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$
$$h_{2h}(t) = \frac{2}{3 - m_1} C_1 e^{m_1 t} + \frac{2}{3 - m_2} C_2 e^{m_2 t}$$

Solución particular (estado estacionario):

$$h_{1p} = \frac{11}{4}\text{m}$$
$$h_{2p} = \frac{3}{2}\text{m}$$

Solución General Final

$$\boxed{\begin{array}{c} h_1(t) = \frac{11}{4} + C_1 e^{-0.438t} + C_2 e^{-4.562t} \\ h_2(t) = \frac{3}{2} + 0.813 C_1 e^{-0.438t} + 5.123 C_2 e^{-4.562t} \end{array}}$$

4.4 Utilizando la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace es una herramienta matemática poderosa y ampliamente utilizada en el análisis y resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como lineales con coeficientes constantes. Este método transforma ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo en ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia, facilitando su resolución al reducir la complejidad de las operaciones diferenciales a manipulaciones algebraicas. A continuación, se describen sus ventajas, el procedimiento general y la formulación matemática asociada.

Ventajas de la Transformada de Laplace

Simplificación del problema: Convierte ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, que son más fáciles de resolver, especialmente en sistemas lineales.

Incorporación de condiciones iniciales: Permite incluir las condiciones iniciales directamente en la formulación, evitando la necesidad de resolver constantes de integración posteriormente.

Versatilidad: Es aplicable a sistemas con entradas no homogéneas (como funciones escalón, impulsos o sinusoidales) y a ecuaciones con coeficientes constantes.

Eficiencia en sistemas acoplados: Facilita la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas al transformarlos en un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas.

Análisis de estabilidad y respuesta: La representación en el dominio de Laplace permite analizar propiedades como la estabilidad y la respuesta del sistema mediante los polos de la función de transferencia.

Procedimiento General. El procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace sigue estos pasos:

Aplicar la transformada de Laplace: Transformar cada ecuación diferencial del sistema al dominio de Laplace, utilizando las propiedades de la transformada (como la linealidad y la transformada de derivadas) y considerando las condiciones iniciales.

Obtener un sistema algebraico: Las ecuaciones diferenciales se convierten en un sistema de ecuaciones algebraicas en términos de las variables transformadas ($Y(s)$).

Resolver el sistema algebraico: Resolver el sistema resultante para encontrar las funciones en el dominio de Laplace, ($Y(s)$), utilizando métodos como sustitución, eliminación o matrices (por ejemplo, la regla de Cramer o inversión de matrices).

Aplicar la transformada inversa de Laplace: Transformar las soluciones del dominio de Laplace al dominio del tiempo para obtener las funciones ($y(t)$), empleando tablas de transformadas, descomposición en fracciones parciales o técnicas de contorno, según sea necesario.

Verificar la solución: Comprobar que las soluciones satisfacen las ecuaciones originales y las condiciones iniciales.

Formulación Matemática. Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$a_{11}\frac{d^2y_1}{dt^2} + a_{12}\frac{dy_1}{dt} + a_{13}y_1 + a_{14}\frac{dy_2}{dt} + a_{15}y_2 = f_1(t),$$
$$a_{21}\frac{d^2y_2}{dt^2} + a_{22}\frac{dy_2}{dt} + a_{23}y_2 + a_{24}\frac{dy_1}{dt} + a_{25}y_1 = f_2(t),$$

Con condiciones iniciales: $y_1(0), y_1'(0), y_2(0), y_2'(0)$, la transformada de Laplace de cada término se calcula utilizando:

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$,

$\mathcal{L}\{\frac{dy}{dt}\} = sY(s) - y(0)$,

$\mathcal{L}\{\frac{d^2y}{dt^2}\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$

Aplicando la transformada a cada ecuación, se obtiene un sistema algebraico de la forma:

$$\begin{cases}(a_{11}s^2 + a_{12}s + a_{13})Y_1(s) + (a_{14}s + a_{15})Y_2(s) = F_1(s) + \ termino\ de\ condiciones\ iniciales, \\ (a_{21}s^2 + a_{22}s + a_{23})Y_2(s) + (a_{24}s + a_{25})Y_1(s) = F_2(s) + \ termino\ de\ condiciones\ iniciales\end{cases}$$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son las transformadas de las funciones de entrada $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Este sistema se resuelve para $Y_1(s)$ y $Y_2(s)$, y luego se aplica la transformada inversa $L^{-1}\{Y_i(s)\}$ $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

En conclusión, la transformada de Laplace es una técnica eficiente y sistemática para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, ofreciendo un enfoque claro y estructurado que combina rigor matemático con aplicabilidad práctica.

Ventajas Clave de la Transformada de Laplace para Resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

La transformada de Laplace es una herramienta matemática excepcionalmente poderosa para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, ya que simplifica problemas complejos al transformarlos del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. A continuación, se amplían y detallan las ventajas clave de este método, destacando su utilidad práctica y teórica, especialmente para aplicaciones en ingeniería.

Conversión de Derivadas en Polinomios

La propiedad fundamental de la transformada de Laplace, definida como $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ para la segunda derivada, transforma operaciones diferenciales en multiplicaciones por polinomios en la variable (s). Esta conversión elimina la necesidad de realizar integraciones directas o resolver ecuaciones diferenciales mediante métodos tradicionales, como la variación de parámetros o el método de coeficientes indeterminados, que pueden ser laboriosos. En el dominio de Laplace, las ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas, lo que simplifica significativamente el proceso de resolución, especialmente para sistemas de orden superior o con términos no homogéneos complejos. Esta ventaja es particularmente útil en aplicaciones de ingeniería, como el análisis de circuitos eléctricos o sistemas mecánicos, donde las derivadas representan tasas de cambio físicas.

Manejo Automático de Condiciones Iniciales

Una de las características más destacadas de la transformada de Laplace es su capacidad para incorporar directamente las condiciones iniciales del sistema (como ($f(0)$), ($f'(0)$), etc.) en la formulación de las ecuaciones algebraicas resultantes. Esto elimina la necesidad de determinar constantes de integración en la solución general, como ocurre en métodos clásicos. Por ejemplo, al transformar una ecuación diferencial, los valores iniciales se integran automáticamente en los términos constantes del dominio (s), lo que permite obtener una solución particular sin pasos adicionales. Esta propiedad es especialmente valiosa en problemas de ingeniería donde las condiciones iniciales, como el desplazamiento o la velocidad inicial en un sistema mecánico, son conocidas y críticas para la solución. Además, esta característica asegura que la solución sea única y específica para las condiciones dadas, lo que es fundamental en aplicaciones prácticas.

Ideal para Sistemas Acoplados

La transformada de Laplace es particularmente efectiva para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas, donde las variables están interrelacionadas. Al transformar cada ecuación del sistema al dominio de Laplace, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas que puede resolverse utilizando técnicas de álgebra matricial, como la regla de Cramer, eliminación de Gauss o la inversión de matrices. Este proceso "desacopla" las ecuaciones, permitiendo resolverlas de manera más directa en el dominio (s).

Capacidad para Manejar Entradas Complejas

La transformada de Laplace es altamente efectiva para tratar sistemas con funciones de entrada no homogéneas, como impulsos (delta de Dirac), funciones escalón, exponenciales o sinusoidales. Estas funciones tienen transformadas de Laplace bien definidas, lo que permite modelar respuestas a entradas realistas en sistemas físicos. Por ejemplo, en el análisis de circuitos eléctricos, la transformada de Laplace facilita el estudio de respuestas transitorias y estacionarias ante señales como un pulso o un cambio abrupto de voltaje.

Análisis de Estabilidad y Respuesta del Sistema

Al trabajar en el dominio de Laplace, es posible analizar propiedades del sistema, como la estabilidad, mediante el estudio de los polos de las funciones ($Y(s)$). Los polos, que son las raíces del denominador de la función de transferencia, determinan si el sistema es estable (polos en el semiplano izquierdo) o inestable (polos en el semiplano derecho). Este análisis es crucial en aplicaciones de ingeniería, como el diseño de sistemas de control o estructuras mecánicas, donde la estabilidad es una prioridad.

Flexibilidad en la Transformada Inversa

Una vez resuelto el sistema algebraico en el dominio (s), la transformada inversa de Laplace permite recuperar las soluciones en el dominio del tiempo. Técnicas como la descomposición en

fracciones parciales, el uso de tablas de transformadas o métodos numéricos facilitan este proceso. Esta flexibilidad asegura que el método sea aplicable incluso a sistemas complejos, siempre que las transformadas inversas puedan calcularse o aproximarse.

En resumen, la transformada de Laplace ofrece un enfoque sistemático, eficiente y versátil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, transformando problemas complejos en operaciones algebraicas manejables. Su capacidad para incorporar condiciones iniciales, desacoplar sistemas acoplados y analizar propiedades dinámicas lo convierte en una herramienta indispensable para estudiantes y docentes del área de ingeniería, particularmente en contextos académicos como el Instituto Tecnológico de Ensenada y el Tecnológico Nacional de México, donde se busca formar profesionales capaces de abordar problemas prácticos con rigor matemático.

Procedimiento para Resolver un Sistema de Ecuaciones Diferenciales mediante la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, transformando ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. Este procedimiento es especialmente útil en ingeniería debido a su claridad y aplicabilidad práctica. A continuación, se detalla el procedimiento paso a paso.

Paso 1: Identificar el Sistema y las Condiciones Iniciales

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$a_{11}\frac{d^2y_1}{dt^2} + a_{12}\frac{dy_1}{dt} + a_{13}y_1 + a_{14}\frac{dy_2}{dt} + a_{15}y_2 = f_1(t),$$
$$a_{21}\frac{d^2y_2}{dt^2} + a_{22}\frac{dy_2}{dt} + a_{23}y_2 + a_{24}\frac{dy_1}{dt} + a_{25}y_1 = f_2(t),$$

donde $\left(y_1(t)\right)$ y $\left(y_2(t)\right)$ son las variables dependientes, $\left(f_1(t)\right)$ y $\left(f_2(t)\right)$son funciones de entrada, y los coeficientes $\left(a_{ij}\right)$ son constantes. Identifique las condiciones iniciales: $(y_1(0), y_1'(0), y_2(0), y_2'(0))$.

Paso 2: Aplicar la Transformada de Laplace

Aplique la transformada de Laplace $(\mathcal{L}\cdot)$a ambos lados de cada ecuación, utilizando las propiedades:

$$\left(Ly(t) = Y(s)\right), \left(L\frac{dy}{dt} = sY(s) - y(0)\right), \left(L\frac{d^2y}{dt^2} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right), \left(Lf(t) = F(s)\right).$$

Esto convierte el sistema en:

$$(a_{11}s^2 + a_{12}s + a_{13})Y_1(s) + (a_{14}s + a_{15})Y_2(s) = F_1(s) + \text{términos iniciales},$$

$$(a_{24}s + a_{25})Y_1(s) + (a_{21}s^2 + a_{22}s + a_{23})Y_2(s) = F_2(s) + \text{términos iniciales}.$$

Paso 3: Formar y Resolver el Sistema Algebraico

Organice las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11}s^2 + a_{12}s + a_{13} & a_{14}s + a_{15} \\ a_{24}s + a_{25} & a_{21}s^2 + a_{22}s + a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) + \text{términos iniciales} \\ F_2(s) + \text{términos iniciales} \end{bmatrix}$$

Resuelva para$(Y_1(s))y(Y_2(s))$ utilizando:

Eliminación o sustitución para sistemas pequeños.

Regla de Cramer: $(Y_1(s) = \frac{\det(A_1)}{\det(A)})$, $(Y_2(s) = \frac{\det(A_2)}{\det(A)})$, donde (A) es la matriz de coeficientes.

Inversión de matrices: $\left(\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \text{vector de términos independientes}\right)$.

Paso 4: Aplicar la Transformada Inversa de Laplace

Calcule $\big(y_1(t) = L^{-1}Y_1(s)\big)y\big(y_2(t) = L^{-1}Y_2(s)\big)$utilizando:

Tablas de transformadas de Laplace.

Descomposición en fracciones parciales para funciones racionales.

Métodos numéricos o software (MATLAB, SymPy) para casos complejos.

Por ejemplo, si $\left(Y_1(s) = \frac{1}{s+2}\right)$,entonces $(y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t})$.

Paso 5: Verificar la Solución

Sustituya $\big(y_1(t)\big)y\big(y_2(t)\big)$en las ecuaciones originales para verificar que las satisfacen.

Confirme que las condiciones iniciales $\big(y_1(0), y_1'(0), y_2(0), y_2'(0)\big)$se cumplen.

En aplicaciones de ingeniería, valide que las soluciones tengan sentido físico.

Ejemplo No. 15

Considere el sistema:

$$y_1'' + 2y_2' = 0,$$
$$y_2'' - y_1' + y_2 = 0,$$

con $(y_1(0) = 1), (y_1'(0) = 0), (y_2(0) = 0), (y_2'(0) = 1).$

Aplique la transformada:

$$s^2Y_1(s) - s + 2sY_2(s) = 0,$$
$$-sY_1(s) + 1 + (s^2 + 1)Y_2(s) = 0.$$

Resuelva el sistema algebraico para $(Y_1(s))\ y\ (Y_2(s))$.

Aplique la transformada inversa para obtener $(y_1(t))\ y\ (y_2(t))$.

Verifique las soluciones.

Este procedimiento es ideal para aplicaciones en ingeniería, como el análisis de circuitos o sistemas dinámicos.

Ejemplo No. 16

Solución de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales mediante la Transformada de Laplace

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace:

$$\frac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t,$$
$$\frac{dy}{dt} - 2x - y = 4e^t,$$

con condiciones iniciales $(x(0) = -1), (y(0) = 0).$

Paso 1: Aplicar la Transformada de Laplace

Aplicamos la transformada de Laplace $(\mathcal{L}\cdot)$,utilizando:

$$(\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)),$$

$$(\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)), (\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)),$$

$$(\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1})(para(s > 1)).$$

Primera ecuación:

$$\frac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t$$

Transformando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - 6\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 8\mathcal{L}\{e^t\}$$

$$sX(s) - x(0) - 6X(s) + 3Y(s) = \frac{8}{s-1}$$

Sustituyendo $(x(0) = -1)$:

$$sX(s) - (-1) - 6X(s) + 3Y(s) = \frac{8}{s-1}$$

$$(s-6)X(s) + 3Y(s) = \frac{8}{s-1} - 1 = \frac{8-(s-1)}{s-1} = \frac{9-s}{s-1}$$

Ecuación (1):

$$(s-6)X(s) + 3Y(s) = \frac{9-s}{s-1}$$

Segunda ecuación:

$$\frac{dy}{dt} - 2x - y = 4e^t$$

Transformando:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{x\} - \mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^t\}$$

$$sY(s) - y(0) - 2X(s) - Y(s) = \frac{4}{s-1}$$

Sustituyendo $(y(0) = 0)$:

$$(s-1)Y(s) - 2X(s) = \frac{4}{s-1}$$

Ecuación (2):

$$-2X(s) + (s-1)Y(s) = \frac{4}{s-1}$$

Paso 2: Formar el Sistema Algebraico

El sistema es:

$$(s-6)X(s)+3Y(s)=\frac{9-s}{s-1},$$

$$-2X(s)+(s-1)Y(s)=\frac{4}{s-1}.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9-s}{s-1} \\ \frac{4}{s-1} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Resolver el Sistema Algebraico

Usamos la regla de Cramer. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\Delta=(s-6)(s-1)-(3)(-2)=s^2-7s+6+6=s^2-7s+12=(s-3)(s-4)$$

Para $(X(s))$:

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \frac{9-s}{s-1} & 3 \\ \frac{4}{s-1} & s-1 \end{vmatrix}=\frac{9-s}{s-1}(s-1)-3\cdot\frac{4}{s-1}=(9-s)-\frac{12}{s-1}=\frac{(9-s)(s-1)-12}{s-1}$$

$$=\frac{-s^2+10s-21}{s-1}$$

$$X(s)=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\frac{-s^2+10s-21}{s-1}}{(s-3)(s-4)}=\frac{-(s-3)(s-7)}{(s-1)(s-3)(s-4)}=\frac{-(s-7)}{(s-1)(s-4)}$$

Para $(Y(s))$:

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} s-6 & \frac{9-s}{s-1} \\ -2 & \frac{4}{s-1} \end{vmatrix}=(s-6)\cdot\frac{4}{s-1}-\frac{9-s}{s-1}\cdot(-2)=\frac{4(s-6)+2(9-s)}{s-1}=\frac{2s-6}{s-1}$$

$$=\frac{2(s-3)}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\frac{2(s-3)}{s-1}}{(s-3)(s-4)}=\frac{2}{(s-1)(s-4)}$$

Paso 4: Aplicar la Transformada Inversa de Laplace

Para $(x(t))$:

$$X(s) = \frac{-(s-7)}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

Resolviendo: $(-(s-7) = A(s-4) + B(s-1))$.

Para $(s = 1)$: $(-(1-7) = A(1-4),\ 6 = -3A,\ A = -2)$.

Para $(s = 4)$: $(-(4-7) = B(4-1), 3 = 3B, B = 1)$.

$$X(s) = \frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-4}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-4}\right\} = -2e^t + e^{4t}$$

Para $(y(t))$:

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

Resolviendo: $(2 = A(s-4) + B(s-1))$.

Para $(s = 1)$: $(2 = A(1-4),\ 2 = -3A,\ A = -\frac{2}{3})$.

Para $(s = 4)$: $(2 = B(4-1),\ 2 = 3B, B = \frac{2}{3})$.

$$Y(s) = -\frac{2/3}{s-1} + \frac{2/3}{s-4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2/3}{s-1} + \frac{2/3}{s-4}\right\} = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$$

Paso 5: Verificar la Solución

Solución:

$$x(t) = -2e^t + e^{4t}, \quad y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$$

Condiciones iniciales:

$(x(0) = -2e^0 + e^{4\cdot 0} = -2 + 1 = -1)$, satisface

$(y(0) = -\frac{2}{3}e^0 + \frac{2}{3}e^{4\cdot 0} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0)$, satisface

Ecuaciones:

Derivadas: $(x'(t) = -2e^t + 4e^{4t}), (y'(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t})$.

Primera ecuación: $(x' - 6x + 3y = (-2e^t + 4e^{4t}) - 6(-2e^t + e^{4t}) + 3\left(-\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}\right) = 8e^t)$.

Segunda ecuación: $(y' - 2x - y = \left(-\frac{2}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{4t}\right) - 2(-2e^t + e^{4t}) - \left(-\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}\right) = 4e^t)$.

Ambas ecuaciones se satisfacen.

Solución Final

$$\boxed{x(t) = -2e^t + e^{4t}, \quad y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}}$$

Problema No. 17

Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución del sistema lineal dado que satisface las condiciones iniciales proporcionadas.

Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales

$$\frac{dx}{dt} - 2y = 0 \quad \text{(Ecuación 1)}$$
$$\frac{dy}{dt} + x - 2y = 2 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Condiciones iniciales: $x(0) = 3, y(0) = 0$.

Paso 1: Aplicar Transformada de Laplace}

Definimos

$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)\ y\ \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

Ecuación 1: $sX(s) - x(0) - 2Y(s) = 0$

$$sX(s) - 3 - 2Y(s) = 0 \quad (1')$$

Ecuación 2: $sY(s) - y(0) + X(s) - 2Y(s) = L\{2\}$

$$(s-2)Y(s) + X(s) = \frac{2}{s} \quad (2')$$

Paso 2: Resolver el Sistema Algebraico

De (1'):

$$X(s) = \frac{3 + 2Y(s)}{s}$$

Sustituyendo en (2'):

$$(s-2)Y(s) + \frac{3 + 2Y(s)}{s} = \frac{2}{s}$$

Multiplicando por s:

$$s(s-2)Y(s) + 3 + 2Y(s) = 2$$

Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{-1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{-1}{(s-1)^2 + 1}$$

Paso 3: Transformada Inversa para $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{-1}{(s-1)^2 + 1} = -e^t sin\, t$$

Paso 4: Encontrar $x(t)$

Sustituyendo $Y(s)$ en (1'):

$$X(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s[(s-1)^2 + 1]}$$

Descomposición en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{s-2}{s^2 - 2s + 2} = \frac{2}{s} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

Transformada inversa:

$$x(t) = 2 + e^t \cos t - e^t \sin t$$

Solución Final

$x(t) = 2 + e^t(\cos t - \sin t),\ y(t) = -e^t \sin t$

Verificación

$x(0) = 2 + e^0(\cos 0 - \sin 0) = 3,\ y(0) = -e^0 \sin 0 = 0$

Problema No. 18

$$\begin{matrix} \frac{dx}{dt} - 5x + 2y = 3e^{4t} \\ \frac{dy}{dt} - 4x + y = 0 \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} x(0) = 3 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$\begin{matrix} sX(s) - 3 - 5X(s) + 2Y(s) = \frac{3}{s-4} \\ sY(s) - 4X(s) + Y(s) = 0 \end{matrix}$$

Reorganizando:

$$\begin{matrix} (s-5)X(s) + 2Y(s) = 3 + \frac{3}{s-4} \\ -4X(s) + (s+1)Y(s) = 0 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema algebraico:

$$X(s) = \frac{3s^2 - 9s}{(s-4)(s^2 - 4s - 3)}, \quad Y(s) = \frac{12s}{(s-4)(s^2 - 4s - 3)}$$

Descomposición en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{1}{s-4} + \frac{2}{s-1} + \frac{0}{s+3}, \quad Y(s) = \frac{4}{s-4} - \frac{4}{s-1} + \frac{0}{s+3}$$

Transformada inversa:

$$\begin{matrix} x(t) = e^{4t} + 2e^{t} \\ y(t) = 4e^{4t} - 4e^{t} \end{matrix}$$

Problema No. 19

$$\begin{matrix} \frac{dx}{dt} - 2x - 3y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + x + 2y = t \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} x(0) = -1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$sX(s) + 1 - 2X(s) - 3Y(s) = 0$$
$$sY(s) + X(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Reorganizando:

$$(s-2)X(s) - 3Y(s) = -1$$
$$X(s) + (s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Resolviendo el sistema algebraico:

$$X(s) = \frac{-(s+2) + \frac{3}{s^2}}{(s-2)(s+2)+3} = \frac{-s^3 - 2s^2 + 3}{s^2(s^2-1)}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{s-2}{s^2}}{s^2 - 1} = \frac{s-1}{s^2(s^2-1)}$$

Descomposición en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

Transformada inversa:

$$x(t) = e^t - 2 - 3t$$
$$y(t) = t - 1 + e^{-t}$$

4.5 Aplicaciones.

La teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales es una herramienta fundamental en ingeniería, ya que permite modelar, analizar y resolver problemas dinámicos en una amplia variedad de disciplinas. Los sistemas de ecuaciones diferenciales describen cómo múltiples variables interactúan y evolucionan con el tiempo, lo que los hace ideales para problemas donde varias componentes están interrelacionadas. A continuación, detallo los principales problemas de ingeniería que se pueden abordar con esta teoría, con explicaciones, argumentos, ejemplos concretos y una discusión sobre los métodos de resolución, incluyendo casos que requieren procedimientos específicos debido a su complejidad.

1. Sistemas Mecánicos:

Vibraciones y Dinámica de Sistemas:

En ingeniería mecánica, los sistemas de ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar el comportamiento dinámico de sistemas con múltiples grados de libertad, como masas conectadas por resortes y amortiguadores, o estructuras sometidas a vibraciones. Estos sistemas son comunes en el diseño de vehículos, puentes, edificios y maquinaria. La interdependencia entre las posiciones y velocidades de las masas genera sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas.

Ejemplo:

Un sistema de dos masas conectadas por resortes y amortiguadores puede modelarse como:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0,$$
$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + c_2 \frac{dx_2}{dt} + k_2(x_2 - x_1) = 0,$$
$$x_1(0) = x_{10}, \dot{x}_1(0) = v_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dot{x}_2(0) = v_{20}$$

Donde x_1 y x_2 son los desplazamientos de las masas, m_i las masas, c_i los coeficientes de amortiguamiento, y k_i las constantes de los resortes.

Métodos de Resolución:

Método de valores propios: Para sistemas lineales homogéneos, se convierte el sistema en una forma matricial $\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$, y se resuelve calculando los valores propios y vectores propios para obtener los modos de vibración.

Transformada de Laplace: Útil para sistemas con condiciones iniciales específicas, transformando las ecuaciones al dominio de la frecuencia y resolviendo algebraicamente.

Métodos numéricos (como Runge-Kutta): Para sistemas no lineales o con términos de forzamiento complejos, se recurre a métodos numéricos debido a la dificultad de obtener soluciones analíticas.

Aplicación:

Este modelo se usa en el diseño de suspensiones de vehículos, análisis de vibraciones en puentes o edificios, y optimización de maquinaria rotativa para evitar resonancias.

2. Sistemas Eléctricos: Circuitos Eléctricos Acoplados

En ingeniería eléctrica, los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan circuitos con múltiples ramas que incluyen resistencias, inductores y capacitores. Las corrientes y voltajes en las ramas están interrelacionadas, lo que genera sistemas acoplados. Este enfoque es crucial para analizar circuitos RLC, filtros y sistemas de control.

Ejemplo:

Un circuito con dos mallas que comparten un inductor puede modelarse como:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = V(t),$$
$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0,$$
$$i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$$

Donde i_1 y i_2 son las corrientes en las mallas, L_i las inductancias, R_i las resistencias, (M) la inductancia mutua, y $(V(t))$ una fuente de voltaje.

Métodos de Resolución:

Transformada de Laplace: Ideal para circuitos con condiciones iniciales y forzamientos externos, transformando el sistema al dominio (s) para resolverlo.

Análisis en el dominio del tiempo: Para sistemas simples, se puede resolver usando eliminación o métodos matriciales.

Métodos numéricos: En circuitos con no linealidades (como diodos), se usan métodos como Euler o Runge-Kutta.

Aplicación:

Modelado de transformadores, filtros de frecuencia, y sistemas de distribución de energía. Por ejemplo, en el diseño de circuitos para telecomunicaciones, se analizan las corrientes para garantizar un rendimiento óptimo.

3. Sistemas de Control: Estabilidad y Respuesta Dinámica

En ingeniería de control, los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan la dinámica de sistemas con retroalimentación, como robots, sistemas de navegación o procesos industriales. Estos sistemas suelen ser complejos debido a las interacciones entre variables de estado (posición, velocidad, etc.).

Ejemplo:

Un sistema de control para un péndulo invertido puede representarse como:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{g}{l}\sin(x_1) + \frac{1}{ml^2}u(t),$$
$$x_1(0) = \theta_0, x_2(0) = 0$$

Donde x_1 es el ángulo del péndulo, x_2 su velocidad angular, ($u(t)$) la fuerza de control, (g) la gravedad, (l) la longitud, y (m) la masa.

Métodos de Resolución:

Linealización: Para sistemas no lineales como este, se linealiza alrededor de un punto de equilibrio (e.g., $\sin(x_1) \approx x_1$) y se resuelve como un sistema lineal.

Transformada de Laplace: Para analizar la respuesta del sistema a entradas específicas.

Métodos numéricos: En sistemas no lineales complejos, se usan simulaciones numéricas (e.g., MATLAB o Python) para obtener trayectorias.

Aplicación:

Diseño de controladores para drones, robots industriales, y sistemas de estabilización en vehículos autónomos.

4. Sistemas de Fluidos y Transferencia de Calor

En ingeniería química, mecánica y civil, los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan el flujo de fluidos, la transferencia de calor o la difusión en sistemas con múltiples componentes. Por ejemplo, el flujo en tuberías interconectadas o la distribución de temperatura en un intercambiador de calor.

Ejemplo:

El flujo en dos tanques conectados con entrada y salida de fluido puede modelarse como:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{k_1}{A_1}h_1 + \frac{k_2}{A_1}(h_2 - h_1) + \frac{Q_{\text{in}}}{A_1},$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{k_1}{A_2}h_1 - \frac{k_2}{A_2}(h_2 - h_1) - \frac{k_3}{A_2}h_2,$$
$$h_1(0) = h_{10}, h_2(0) = h_{20}$$

Donde h_1 y h_2 son las alturas de fluido en los tanques, A_i las áreas, k_i las constantes de flujo, y Q_{in} el flujo de entrada.

Métodos de Resolución:

Transformada de Laplace: Para sistemas lineales con condiciones iniciales.

Métodos matriciales: Resolución directa para sistemas lineales.

Simulación numérica: Para sistemas con flujos no lineales o condiciones variables.

Aplicación:

Diseño de sistemas de tuberías, intercambiadores de calor, y procesos químicos como reactores.

5. Sistemas Biológicos y Biomédicos

En ingeniería biomédica, los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan interacciones biológicas, como la dinámica de poblaciones celulares, la propagación de señales neuronales o la cinética de fármacos. Estos sistemas son complejos debido a las no linealidades y las interacciones múltiples.

Ejemplo:

Un modelo de interacción depredador-presa (adaptado a procesos biológicos) puede ser:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy,$$
$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

Donde (x) y (y) representan las poblaciones de dos especies, y (a, b, c, d) son parámetros de interacción.

Métodos de Resolución:

Linealización: Para analizar el comportamiento cerca de puntos de equilibrio.

Métodos numéricos: Debido a la no linealidad, se usan métodos como Runge-Kutta o simulaciones en software como MATLAB.

Análisis cualitativo: Estudio de puntos fijos y estabilidad.

Aplicación:

Modelado de enfermedades infecciosas, diseño de sistemas de administración de fármacos, y análisis de redes neuronales.

6. Sistemas Estructurales: Análisis de Deformaciones

En ingeniería civil y mecánica, los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan la deformación y el comportamiento dinámico de estructuras como vigas, placas o edificios bajo cargas variables. La interacción entre diferentes partes de la estructura genera sistemas acoplados.

Ejemplo:

La deflexión de dos vigas acopladas puede modelarse como:

$$EI\frac{d^4y_1}{dx^4} = q_1(x) + k(y_2 - y_1),$$
$$EI\frac{d^4y_2}{dx^4} = q_2(x) - k(y_2 - y_1),$$
$$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

Donde y_1, y_2 son las deflexiones, (EI) la rigidez, $q_i(x)$ las cargas, y (k) la constante de acoplamiento.

Métodos de Resolución:

Métodos analíticos: Para sistemas simples, se resuelve usando condiciones de contorno.

Métodos numéricos: Como el método de elementos finitos para sistemas complejos.

Transformadas integrales: Para simplificar las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Aplicación:

Diseño de puentes, edificios y estructuras sometidas a cargas dinámicas como vientos o sismos.

Consideraciones sobre Complejidad y Métodos

Sistemas Lineales: Para sistemas lineales con coeficientes constantes, la transformada de Laplace y los métodos matriciales (valores propios) son los más eficientes. Por ejemplo, el sistema

$\frac{dx}{dt} - 2y = 0$, $\frac{dy}{dt} + x - 2y = 2$

que resolvimos anteriormente se abordó con Laplace debido a su simplicidad y las condiciones iniciales claras.

Sistemas No Lineales: En casos como el modelo depredador-presa, las no linealidades (e.g., términos (xy)) requieren métodos numéricos o linealización. La complejidad aumenta porque no siempre hay soluciones analíticas cerradas.

Sistemas Complejos o de Alto Orden: En problemas estructurales o de control, las ecuaciones pueden ser de orden superior o incluir múltiples variables. Aquí, los métodos numéricos (Runge-Kutta, elementos finitos) o software especializado (MATLAB, Simulink) son esenciales.

Condiciones Iniciales y Forzamientos: La transformada de Laplace es ideal para sistemas con condiciones iniciales específicas o forzamientos externos (como $(V(t))$ en circuitos o Q_{in} en tanques), mientras que métodos numéricos son preferibles para forzamientos no estándar.

P0roblema No. 20

1. Circuito Eléctrico (Transformada de Laplace)

$$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 - i_2 = 0,$$
$$\frac{di_2}{dt} + i_1 + i_2 = 0,$$
$$i_1(0) = 1, i_2(0) = 0$$

Transformada de Laplace

Pasos:

1. Aplicar la transformada de Laplace a ambas ecuaciones:

Para

$\frac{di_1}{dt} + 2i_1 - i_2 = 0$:

$$sI_1(s) - i_1(0) + 2I_1(s) - I_2(s) = 0, \qquad (s+2)I_1(s) - I_2(s) = 1$$

Para

$\frac{di_2}{dt} + i_1 + i_2 = 0$:

$$sI_2(s) - i_2(0) + I_1(s) + I_2(s) = 0, \qquad I_1(s) + (s+1)I_2(s) = 0$$

2. Resolver el sistema algebraico:

$$\begin{cases} (s+2)I_1(s) - I_2(s) = 1, \\ I_1(s) + (s+1)I_2(s) = 0 \end{cases}$$

De la segunda: $I_1(s) = -(s+1)I_2(s)$.Sustituir en la primera:

$$(s+2)[-(s+1)I_2(s)] - I_2(s) = 1, \qquad -(s^2+3s+3)I_2(s) = 1, \qquad I_2(s) = \frac{-1}{s^2+3s+3}$$

Entonces: $I_1(s) = -(s+1)I_2(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+3}$.

3. Factorizar el denominador: $s^2 + 3s + 3 = (s+1)(s+3)$.

Para $I_2(s) = \frac{-1}{(s+1)(s+3)}$:

$$\frac{-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}, \qquad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$I_2(s) = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)}, \qquad i_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Para $I_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$ + ajuste usando la primera ecuación:

$$i_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Solución:

$$i_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad i_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Problema No. 21

2. Vibraciones Mecánicas (Operadores Diferenciales)

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1 - x_2 = 0,$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

Método: Operadores Diferenciales

1. Escribir en términos de operadores $\left(D = \frac{d}{dt}\right)$:

$$(D^2 + 3)x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_1 - (D^2 + 1)x_2 = 0$$

2. Eliminar x_2:

De la segunda: $x_1 = (D^2 + 1)x_2$.Sustituir en la primera:

$$(D^2 + 3)(D^2 + 1)x_2 - x_2 = 0, \qquad (D^4 + 4D^2 + 2)x_2 = 0$$

3. Resolver la ecuación característica: $r^4 + 4r^2 + 2 = 0$, $r^2 = -2 \pm \sqrt{2}$.

Raíces: $r = \pm\sqrt{2}i, \pm 2i$.

Solución general:

$$x_2(t) = A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right) + C\cos(2t) + D\sin(2t)$$

4. Encontrar $x_1(t)$:

$$x_1 = (D^2+1)x_2 = -\sqrt{2^2}A\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2^2}B\sin\left(\sqrt{2}t\right) - 2^2C\cos(2t) - 2^2D\sin(2t) + x_2$$

$$x_1(t) = (1-2)A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + (1-2)B\sin\left(\sqrt{2}t\right) + (1-4)C\cos(2t) + (1-4)D\sin(2t)$$

5. Aplicar condiciones iniciales:

$$x_1(0) = (1-2)A + (1-4)C = 1, \quad \dot{x_1}(0) = (1-2)\sqrt{2}B + (1-4)2D = 0$$

$$x_2(0) = A + C = 0, \quad \dot{x_2}(0) = \sqrt{2}B + 2D = 0$$

Resolver: $A = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, B = 0, D = 0.$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{2}\cos(2t), \quad x_2(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Solución:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{2}\cos(2t), \quad x_2(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Problema No. 22

3. Flujo en Tanques (Factor Integrante)

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y,$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0$$

Método: Factor Integrante

1. Derivar una ecuación de segundo orden:

De la primera: $y = \frac{dx}{dt} + 2x.$

Derivar: $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}.$

Sustituir en la segunda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = x - 2\left(\frac{dx}{dt} + 2x\right), \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

2. Resolver la ecuación:

Ecuación característica: $r^2 + 4r + 3 = 0,\ r = -1, -3.$

Solución general: $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$.

3. Encontrar $y(t)$:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} + 2x = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} + 2Ae^{-t} + 2Be^{-3t} = Ae^{-t} - Be^{-3t}$$

4. Aplicar condiciones iniciales:

$$x(0) = A + B = 1, \quad y(0) = A - B = 0$$

Resolver: $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$.

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Solución:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Problema No. 23

4. Sistema de Control (Método de Matrices)

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2,$$
$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

Método:} Matrices (Valores Propios)

1. Escribir en forma matricial:

$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}2.$

Calcular valores propios:

$$de\,t\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda(-3-\lambda) - (1)(-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Raíces: $\lambda = -1, -2.$

3. Encontrar vectores propios:

Para $\lambda_1 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda_2 = -2$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

4. Solución general:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \quad x_2(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

5. Aplicar condiciones iniciales:

$$x_1(0) = c_1 + c_2 = 1, \quad x_2(0) = -c_1 - 2c_2 = 0$$

Resolver: $c_1 = 2, \ \ c_2 = -1$.

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Solución:

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Conclusiones

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son una herramienta fundamental en el estudio de fenómenos dinámicos en ingeniería y ciencias, abordados de manera metodológica en este capítulo para cumplir con los objetivos del curso de Ecuaciones Diferenciales del Instituto Tecnológico de Ensenada. El material presentado cubre de forma integral los contenidos de los temas establecidos: teoría preliminar, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, sistemas homogéneos, solución general y particular, métodos de solución, método de los operadores, transformada de Laplace y aplicaciones. A continuación, se resumen las conclusiones, diseñadas para ser claras y útiles tanto para estudiantes como para docentes. La teoría preliminar proporciona los fundamentos necesarios para comprender los sistemas de ecuaciones diferenciales, definiendo conceptos como linealidad, homogeneidad y condiciones iniciales. Se establece que un sistema lineal de primer orden tiene la forma $\dot{x} = Ax + f(t)$, donde la homogeneidad implica $f(t) = 0$. Esta base teórica permite a los estudiantes del Instituto Tecnológico de Ensenada abordar problemas con claridad, comprendiendo la estructura matemática subyacente. Los temas 4.1.1 y 4.1.2 desarrollan los sistemas lineales y homogéneos, destacando que los sistemas homogéneos tienen soluciones de la forma:

$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$, donde λ_i y $\mathbf{v}_i$son los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

Para sistemas no homogéneos, se introduce el concepto de solución particular, complementando la solución homogénea. Los ejemplos resueltos, como el sistema $\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2$, ilustran cómo encontrar soluciones generales y particulares, adaptadas al nivel de los estudiantes para garantizar su comprensión. En el tema 4.1.3, se enfatiza la diferencia entre la solución general, que incluye todas las posibles soluciones del sistema homogéneo, y la solución particular, que satisface condiciones iniciales específicas. Los ejemplos presentados, como el circuito eléctrico resuelto con transformada de Laplace, muestran cómo aplicar condiciones iniciales (ejemplo., $i_1(0) = 1, i_2(0) = 0$) para obtener soluciones únicas, reforzando la relevancia práctica de este concepto. El tema 4.2 introduce los métodos de solución, incluyendo eliminación, operadores, transformada de Laplace y matrices. Cada método se ilustra con ejemplos prácticos, como el sistema de flujo en tanques resuelto por eliminación, que transforma el sistema en una ecuación de segundo orden resoluble por factor integrante. Este enfoque metodológico permite a los estudiantes seleccionar la técnica adecuada según la estructura del sistema, fomentando un aprendizaje activo y comprensible. El método de los operadores (4.3) se aplica en ejemplos como el sistema de vibraciones mecánicas, donde se usa el operador $D = \frac{d}{dt}$ para reducir el sistema a una ecuación característica. La resolución paso a paso, como en $\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1 - x_2 = 0$, muestra cómo obtener soluciones oscilatorias (e.g.,

$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$), haciendo el método accesible para los estudiantes al conectar la teoría con aplicaciones físicas. La transformada de Laplace (4.4) se presenta como una herramienta poderosa para sistemas con condiciones iniciales y forzamientos externos, como en el circuito eléctrico resuelto con $i_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$. Los pasos simplificados, desde la transformada hasta la inversa, ayudan a los estudiantes a manejar sistemas lineales de manera eficiente, con énfasis en su utilidad en ingeniería eléctrica. Finalmente, el tema 4.5 destaca aplicaciones prácticas en ingeniería, como circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas, flujo en tanques y sistemas de control.

Cada ejemplo, resuelto con un método diferente (Laplace, operadores, factor integrante, matrices), conecta la teoría con problemas reales, mostrando cómo modelar fenómenos dinámicos en contextos relevantes para los estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de Ensenada. Este material está diseñado para ser claro y accesible, con ejemplos que desglosan los procedimientos en pasos comprensibles, apoyando el aprendizaje autónomo y la enseñanza en el aula. Aunque existen recursos como videos, documentos PDF y herramientas de inteligencia artificial, el libro sigue siendo un pilar esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje, proporcionando una guía estructurada y confiable para estudiantes y docentes. Esperamos que este contenido sea una herramienta valiosa para el curso, facilitando la comprensión y aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros.

Bibliografía

Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). Differential equations (4th ed.).

Brooks/Cole.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2022). Elementary differential equations and boundary value problems (12th ed.). Wiley.

Braun, M. (1993). Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics (4th ed.). Springer.

Chen, G., & Zhou, J. (2005). Vibration and damping in distributed systems. CRC Press.

Edwards, C. H., Penney, D. E., & Calvis, D. (2020). Differential equations and linear algebra (4th ed.). Pearson.

Farlow, S. J. (1994). Partial differential equations for scientists and engineers. Dover Publications.

Greenberg, M. D. (2012). Advanced engineering mathematics (2nd ed.). Prentice Hall.

Haberman, R. (2013). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems (5th ed.). Pearson.

Kreyszig, E. (2011). Advanced engineering mathematics (10th ed.). Wiley.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2018). Fundamentals of differential equations (9th ed.). Pearson.

Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Prentice Hall.

Ross, S. L. (2004). Differential equations (3rd ed.). Wiley.

Simmons, G. F. (2016). Differential equations with applications and historical notes (3rd ed.). CRC Press.

Strang, G. (2007). Computational science and engineering. Wellesley-Cambridge Press.

Zill, D. G. (2020). A first course in differential equations with modeling applications (11th ed.). Cengage Learning.

Tema V Introducción a las Series de Fourier

Introducción

5.1 Teoría preliminar.

5.2 Series de Fourier.

5.3 Series de Fourier en cosenos, senos y de medio intervalo.

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

En esta sección del libro **Apuntes de Ecuaciones Diferenciales**, se abordarán de manera concisa los fundamentos y aplicaciones de las **Series de Fourier**, divididos en los siguientes temas clave:

Teoría Preliminar

Se introducirán los conceptos básicos necesarios para comprender las Series de Fourier, como **funciones periódicas**, **ortogonalidad de senos y cosenos**, y las **condiciones de Dirichlet** (que garantizan la convergencia de la serie). Este marco teórico es esencial para aplicar correctamente las herramientas posteriores.

Series de Fourier

Se estudiará la representación de funciones periódicas mediante series infinitas de términos trigonométricos, incluyendo el cálculo de los **coeficientes de Fourier**. Se explicará cómo estas series permiten descomponer señales complejas en componentes sinusoidales simples.

Series de Fourier en Cosenos, Senos y de Medio Intervalo

Se analizarán las simplificaciones que surgen al trabajar con funciones **pares o impares**, dando lugar a series exclusivas de cosenos o senos. Además, se cubrirán las **series de medio intervalo**, útiles para funciones definidas en intervalos acotados $[0, L]$, con extensiones pares o impares según las condiciones de frontera.

Enfoque Pedagógico

Este apartado está diseñado para que el estudiante:

Comprenda la **transición entre análisis continuo y discreto** de funciones.

Aplique las Series de Fourier en problemas prácticos de ingeniería, como procesamiento de señales o vibraciones mecánicas.

Adquiera bases sólidas para temas avanzados, como la **Transformada de Fourier** y métodos numéricos.

Al finalizar, el estudiante estará preparado para utilizar estas técnicas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales y en el modelado de sistemas dinámicos, consolidando su formación matemática con herramientas de alto impacto en la ingeniería moderna.

5.1 Teoría preliminar.

¿Qué son las Series de Fourier?

Las Series de Fourier son una herramienta matemática que permite representar funciones periódicas (como señales eléctricas, ondas sonoras o vibraciones mecánicas) como una suma infinita de términos seno y coseno. Esta descomposición en componentes armónicas simplifica el análisis de fenómenos complejos, transformándolos en una superposición de oscilaciones básicas. Su principal virtud es que, bajo ciertas condiciones, cualquier señal periódica puede reconstruirse a partir de estas funciones trigonométricas, lo que las hace indispensables en ingeniería y física.

Origen y Desarrollo

Las Series de Fourier fueron introducidas por el matemático francés **Jean-Baptiste Joseph Fourier** a principios del siglo XIX, mientras estudiaba la propagación del calor en cuerpos sólidos. Fourier demostró que incluso funciones discontinuas podían expresarse mediante series trigonométricas, lo que generó controversia en su época, pero sentó las bases para aplicaciones revolucionarias en múltiples disciplinas. Su trabajo no solo resolvió problemas prácticos en termodinámica, sino que también impulsó el desarrollo del análisis matemático moderno.

Utilidad en Ingeniería

En ingeniería, las Series de Fourier son fundamentales porque permiten:

Analizar señales periódicas y no periódicas: En telecomunicaciones, se usan para descomponer señales en sus frecuencias componentes (análisis espectral).

Diseñar filtros y sistemas de control: Ayudan a eliminar ruido o aislar componentes específicos de una señal.

Resolver ecuaciones diferenciales parciales: Son clave en la solución de la ecuación del calor, la ecuación de onda y problemas de vibraciones en estructuras.

Optimizar sistemas eléctricos: Permiten estudiar armónicos en circuitos de corriente alterna, evitando distorsiones en redes de potencia.

Aplicaciones Prácticas

Procesamiento de señales: Compresión de audio (MP3) y imágenes (JPEG), donde se eliminan componentes de frecuencia irrelevantes.

Ingeniería mecánica: Análisis de vibraciones en motores, turbinas y estructuras sometidas a cargas dinámicas.

Electrónica: Diseño de circuitos resonantes y sistemas de transmisión de datos.

Robótica: Control de movimientos oscilatorios en brazos mecánicos.

Importancia en el Programa de Estudios de Ingeniería

Incluir Series de Fourier en el currículo de ingeniería es esencial porque:

1. Proporciona herramientas para modelar sistemas reales: Muchos fenómenos físicos son periódicos o pueden aproximarse como tales.
2. Fomenta el pensamiento analítico: Los estudiantes aprenden a descomponer problemas complejos en partes manejables.
3. Prepara para tecnologías avanzadas: Su aplicación es transversal en áreas como inteligencia artificial (procesamiento de señales) y energías renovables (análisis de armónicos en redes eléctricas).

Ventajas para los Estudiantes

Habilidad para resolver problemas multidisciplinarios: Desde vibraciones en puentes hasta procesamiento de imágenes médicas.

Mejor comprensión de sistemas dinámicos: Las Series de Fourier son la base para estudiar transformadas más avanzadas (como la Transformada de Fourier).

Competencias en simulación computacional: Software como MATLAB y Python usan estas técnicas para análisis numérico.

Relación con Dinámica de Sistemas

En dinámica de sistemas, las Series de Fourier permiten:

Modelar respuestas en frecuencia: Por ejemplo, cómo un edificio responde a vibraciones sísmicas.

Analizar estabilidad: En sistemas de control, se usan para estudiar la respuesta a entradas periódicas.

Predecir comportamientos oscilatorios: En aerodinámica, ayudan a entender fluctuaciones de presión en alas de aviones.

Por qué es una Unidad Clave en Ecuaciones Diferenciales

Las Series de Fourier son una extensión natural de las ecuaciones diferenciales porque:

Proveen soluciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales: Muchas ecuaciones que describen fenómenos físicos (calor, onda) se resuelven con estas series.

Vinculan matemáticas puras con aplicaciones: Los estudiantes ven cómo teorías abstractas resuelven problemas concretos.

Son puente hacia temas avanzados: Como transformadas integrales y métodos espectrales.

Las Series de Fourier no son solo un tema matemático abstracto, sino una herramienta poderosa que conecta teoría con aplicaciones reales en ingeniería. Su inclusión en los programas de estudio es indispensable para formar profesionales capaces de enfrentar desafíos tecnológicos modernos, desde el diseño de circuitos hasta la simulación de sistemas complejos. Dominar este tema abre puertas a innovación y eficiencia en prácticamente todas las ramas de la ingeniería.

5.2 Series de Fourier.

Daniel Bernoulli y Leonard Euler emplearon series trigonométricas en sus estudios sobre cuerdas vibrantes y fenómenos astronómicos. La serie presentada en la Ecuación siguiente, conocida como serie trigonométrica o serie de Fourier, ofrece ventajas significativas sobre las series de potencias para representar funciones, especialmente en contextos donde los fenómenos son periódicos, como los movimientos astronómicos, los latidos cardíacos, las mareas y las vibraciones de cuerdas. Por ello, es natural expresar estas funciones en términos de funciones sinusoidales periódicas.

Suponemos que la serie trigonométrica converge y que su suma es una función continua $\big(f(x)\big)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$, definida como:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\,.$$

Nuestro objetivo es derivar fórmulas para los coeficientes $(a_0),(a_n)y(b_n)$en términos de $(f(x))$. A diferencia de las series de potencias, donde los coeficientes se calculan mediante derivadas $\left(\left(c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)\right)$, en las series de Fourier utilizamos integrales.

Para encontrar (a_0),integramos ambos lados de la ecuación en $([-\pi,\pi])$,asumiendo que es válido integrar la serie término por término:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\right]dx\,.$$

Esto da:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\;dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\;dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\;dx\right).$$

Dado que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\;dx=\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin(n\pi)-\sin(-n\pi))=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\;dx=\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi))=0,$$

para ($n\;=\;1,2,3,\ldots$), los términos de la suma se anulan, dejando:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\;dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi.$$

Por lo tanto:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx.$$

Para determinar los coeficientes (b_n) $\big((n = 1,2,3, \dots)\big)$, multiplicamos ambos lados de la serie de Fourier, dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

por $(\mathrm{si\,n}(mx))$,donde (m) es un entero positivo, e integramos término por término en el intervalo $([-\pi, \pi])$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right] \sin(mx)\ dx.$$

Utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, sabemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\ dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx)\ dx = 0 \quad \text{para todo } n, m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{si\,n}(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} o\, s(nx)\, \mathrm{ccos}\,(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Por lo tanto, todos los términos de la suma se anulan excepto cuando $(n = m)$, lo que da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\ dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\ dx = b_m \pi.$$

Resolviendo para (b_m)y reemplazando (m) por (n), obtenemos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx, \quad n = 1,2,3, \dots.$$

De manera análoga, para determinar (a_n),multiplicamos ambos lados de la serie por $\big(cos(mx)\big)$ e integramos en $([-\pi, \pi])$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right] \cos(mx)\ dx.$$

Aplicando nuevamente las propiedades de ortogonalidad, los términos se anulan excepto cuando $(n = m)$, resultando en:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\ dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\ dx = a_m \pi.$$

Por lo tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Además, recordando el cálculo previo de (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx.$$

Estas fórmulas (para $(a_0), (a_n), y\ (b_n)$) se derivaron asumiendo que $\big(f(x)\big)$ es una función continua en $([-\pi, \pi])$ y que la integración término por término es válida. Sin embargo, las series de Fourier también se aplican a una clase más amplia de funciones: las funciones continuas a trozos, que son continuas en $([-\pi, \pi])$ excepto en un número finito de discontinuidades removibles o de salto (sin discontinuidades infinitas). Para una discusión detallada sobre los tipos de discontinuidades.

Definición

Sea $\big(f(x)\big)$ una función continua a trozos en el intervalo $([-\pi, \pi])$. La serie de Fourier de $(f(x))$ es la representación de la forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

donde los coeficientes de Fourier $(a_0), (a_n) y (b_n)$se definen como:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Estos coeficientes, conocidos como los coeficientes de Fourier de $\big(f(x)\big)$, permiten descomponer la función en una suma infinita de funciones seno y coseno que representan sus componentes de frecuencia en el intervalo $([-\pi, \pi])$.

Problema No. 1

Encontrar los coeficientes de Fourier y la serie de Fourier de la función de onda cuadrada definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

con $(f(x + 2\pi) = f(x))$.

La serie de Fourier de $\big(f(x)\big)\ en\ ([-\pi, \pi])$ es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

donde los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Cálculo de (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\ dx = \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot \pi = 1.$$

Cálculo de (a_n):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Cálculo de (b_n):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}(\cos(n\pi) - \cos(0))\right) = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Entonces:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar}, \\ 0 & \text{si } n \text{ es par}. \end{cases}$$

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\sin\big((2k+1)x\big) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right).$$

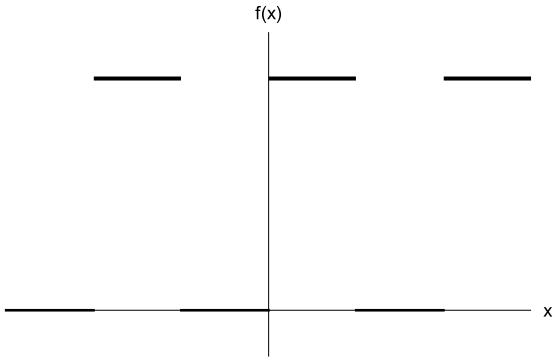


Figura 1(a)

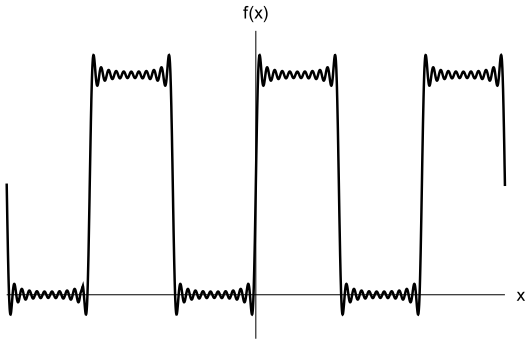


Figura 1(b

En ingeniería, la función de onda cuadrada se emplea para modelar fuerzas aplicadas a sistemas mecánicos y fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, como las generadas por el encendido y apagado repetitivo de un interruptor. Estrictamente, la gráfica de la función $\big(f(x)\big)$ se representa como se muestra en la Figura 1(a), con valores definidos en los puntos de discontinuidad. Sin embargo, comúnmente se ilustra como en la Figura 1(b), donde su forma alternante entre dos niveles constantes explica el término "onda cuadrada".

Problema No. 2

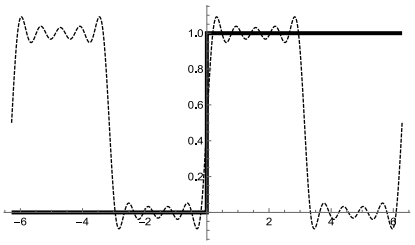
La función escalón periódico se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & -\frac{T}{2} < t < 0, \end{cases}$$

con $\big(f(t+T) = f(t)\big)$.

Su serie de Fourier es

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$



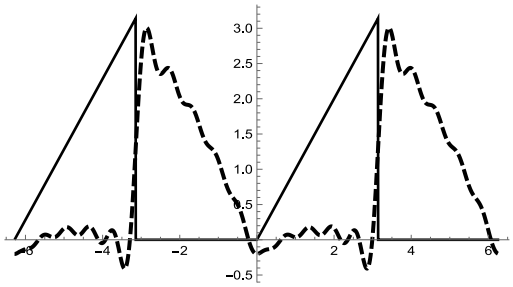
La función rampa periódica se define como:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & -\frac{T}{2} < t < 0, \end{cases}$$

con $\big(f(t+T) = f(t)\big)$.

Su serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{T}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{T}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \frac{T}{2\pi n} (-1)^n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right].$$

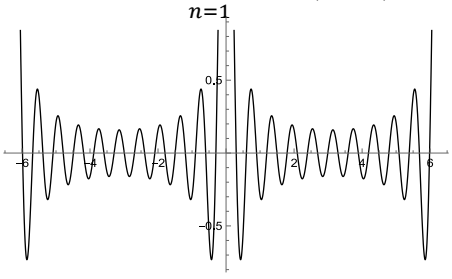


La función impulso periódico es:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Su serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$



Problema No. 3

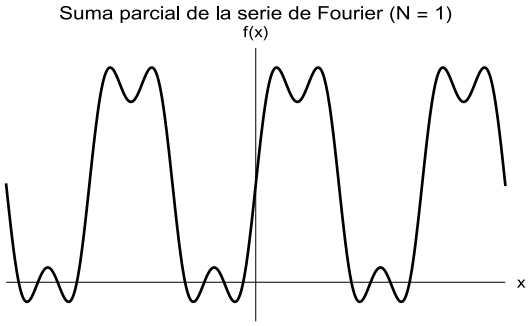
La función de onda cuadrada, definida previamente como:

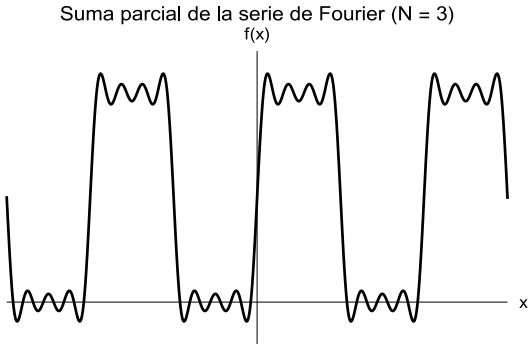
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

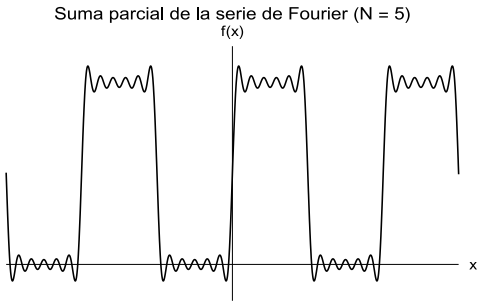
con período 2π, tiene una serie de Fourier dada por:

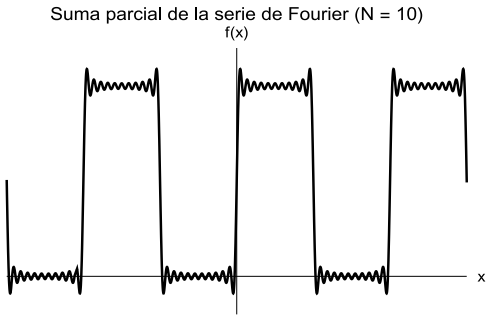
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)x\big)$$

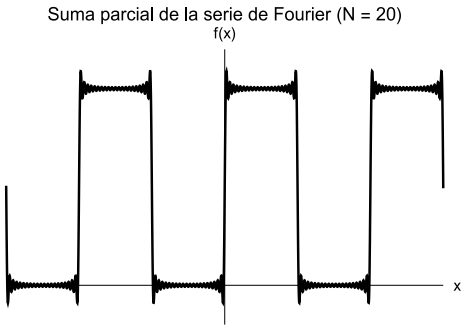
generaremos en seis gráficas separadas correspondientes a las sumas parciales para $N = 1, 3, 5, 10, 20, 50$ términos, en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ para mostrar la periodicidad.

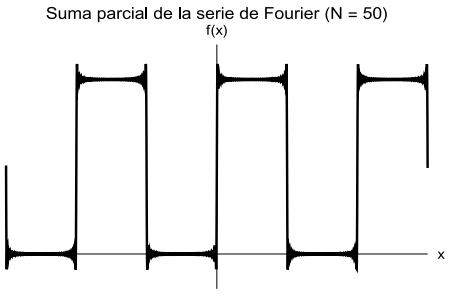












Teorema de Convergencia de Fourier:

Sea $\big(f(x)\big)$ una función periódica con período (2π),tal que $\big(f(x)\big)$ y su derivada $\big(f'(x)\big)$ son continuas a trozos en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Entonces, la serie de Fourier de $\big(f(x)\big)$, dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

es convergente. La suma de la serie coincide con $(f(x))$ en todos los puntos donde $\big(f(x)\big)$ es continua. En los puntos de discontinuidad, la suma de la serie es igual al promedio de los límites por la izquierda y por la derecha, es decir:

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)],$$

donde $(f(x^-) = \lim_{x\to x^-} f\,(x)) y (f(x^+) = \lim_{x\to x^+} f\,(x))$.

Aplicando este teorema a la función de onda cuadrada del Problema No. 1, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

con período (2π), confirmamos lo observado en las gráficas de las sumas parciales. En $(x = 0)$, los límites son:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f\,(x) = 0, \quad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f\,(x) = 1.$$

De manera similar, en otros puntos de discontinuidad $((x = n\pi)$, con (n) entero), se tiene $(f(n\pi^-) = 1) y (f(n\pi^+) = 0)$para (n) impar, y viceversa para (n) par. El promedio de estos límites es:

$$\frac{1}{2}[f(n\pi^-) + f(n\pi^+)] = \frac{1}{2}[0 + 1] = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el Teorema de Convergencia de Fourier implica que, en ($x = n\pi$):

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\big((2k+1)n\pi\big) = \frac{1}{2},$$

lo cual es consistente, ya que $\big(\sin\big((2k+1)n\pi\big) = 0\big)$para (n) entero, haciendo que la suma de los términos seno sea nula. Este resultado es evidente en los puntos de discontinuidad, donde la serie converge al valor promedio de la función.

Sea $\big(f(x)\big)$ una función continua a trozos en $[-\pi,\pi]$ con período (2π). Su serie de Fourier se expresa como:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Esta serie representa $\big(f(x)\big)$ en puntos de continuidad y converge al promedio de los límites laterales en puntos de discontinuidad, proporcionando una herramienta fundamental para analizar fenómenos periódicos.

Problema No. 4

Consideremos la función $f(x) = |x|$, definida en $[-\pi, \pi)$ con periodo (2π)

Cálculo de los coeficientes de Fourier

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\ dx.$$

Usamos integración por partes: $(u = x), (dv = \cos(nx)\ dx), (du = dx), (v = \frac{1}{n}\sin(nx))$.

$$\int x\cos(nx)\ dx = \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

$$\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Para (b_n):

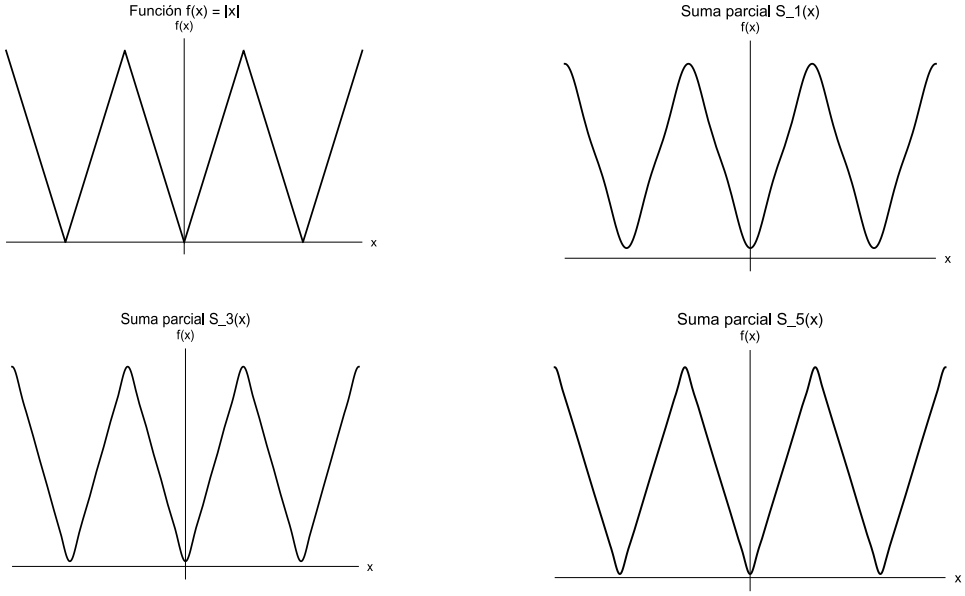
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\ dx = 0 \quad \text{(función par)}.$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

Convergencia

La serie converge a $(|x|)$ en $(-\pi < x < \pi)$ y a π en $(x = \pm\pi)$, donde $\big(f(x)\big)$ es continua.



La gráfica, correspondiente a la función $f(x) = |x|$ definida en $[-\pi, \pi)$ con período 2π , junto con sus sumas parciales de la serie de Fourier ($S_1(x)$, $S_3(x)$), ilustra cómo la serie de Fourier aproxima la función original a medida que se incluyen más términos.

Problema No. 5

Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

con período (2π).

Cálculo de los coeficientes de Fourier

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\ dx \right) = \frac{1}{\pi}(-\pi + \pi) = 0.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos(nx)\ dx \right) = 0 \quad \text{(función impar).}$$

Para (b_n):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\sin(nx)\ dx \right) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\ dx.$$

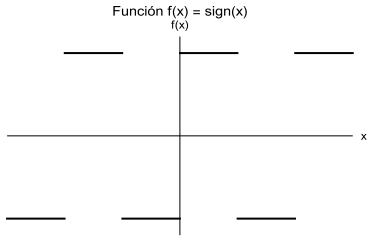
$$\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx) \right]_{0}^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}, b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

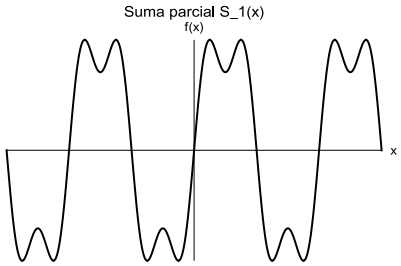
Serie de Fourier

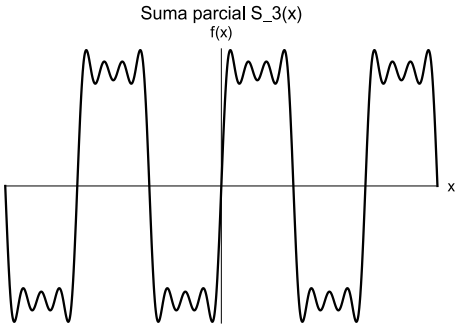
$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

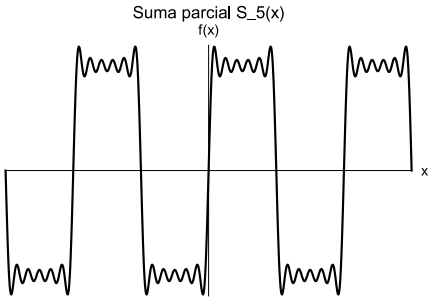
Convergencia

La serie converge a (-1) en ($-\pi < x < 0$), a (1) en ($0 < x < \pi$), y a (0) en ($x = n\pi$).









La gráfica correspondiente a la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x < \pi, \end{cases}$ definida en

$[-\pi, \pi)$ con período 2π , junto con sus sumas parciales de la serie de Fourier ($S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_5(x)$), ilustra cómo la serie de Fourier aproxima esta función discontinua a medida que se incluyen más términos

Problema No. 6

Consideremos la función $(f(x) = \pi - |x|)$, definida en $[-\pi, \pi)$ con periodo (2π)

Cálculo de los coeficientes de Fourier

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\ dx.$$

Usamos integración por partes: $(u = \pi - x), (dv = \cos(nx)\ dx), (du = -dx), (v = \frac{1}{n}\sin(nx))$.

$$\int (\pi - x)\cos(nx)\ dx = \frac{(\pi - x)\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)dx = \left[\frac{(\pi - x)\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2}, a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Para (b_n):

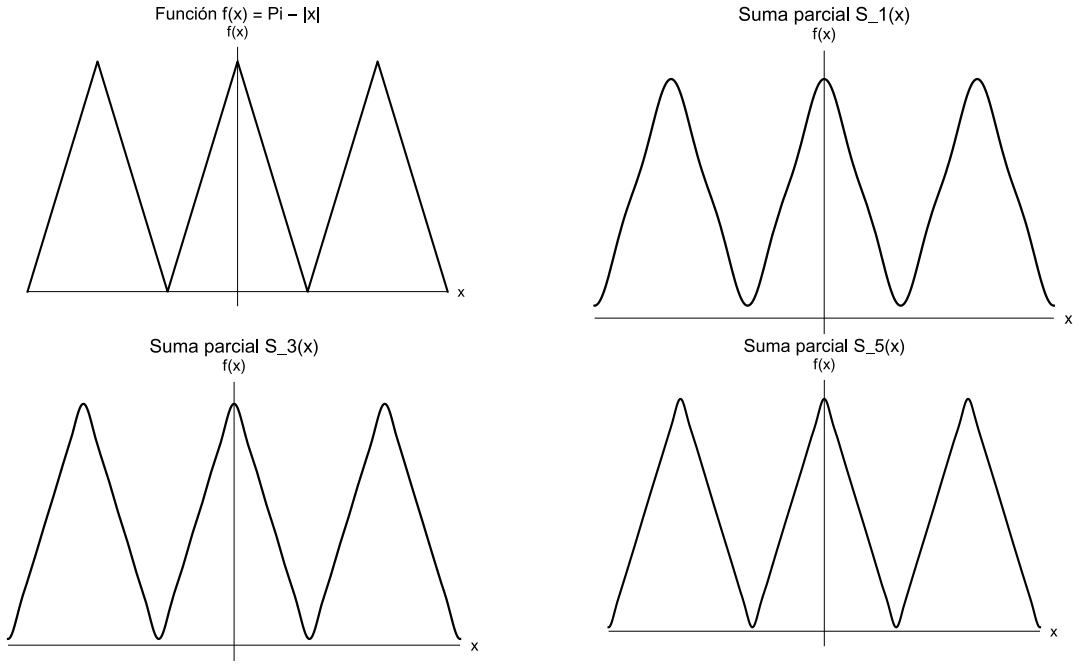
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\sin(nx)\ dx = 0 \quad \text{(función par).}$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

Convergencia

La serie converge a ($\pi - |\ x\ |$) en $(-\pi \leq x < \pi)$,donde $\big(f(x)\big)$ es continua.



La función es continua en $[-\pi, \pi)$, por lo que la serie converge a $f(x) = \pi - |x|$ en $-\pi \leq x < \pi$. En $x = \pm\pi$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, y la serie converge a (0).

Problema No. 7

Serie de Fourier para $(f(x) = x^2)$

Consideremos la función $(f(x) = x^2)$, definida en $[-\pi, \pi)$ con periodo (2π)

Cálculo de los coeficientes de Fourier}

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\ dx.$$

Usamos integración por partes: $(u = x^2), (dv = \cos(nx)\ dx), (du = 2x\,dx), (v = \frac{1}{n}\sin(nx))$.

$$\int x^2\cos(nx)\ dx = \frac{x^2\sin(nx)}{n} - \frac{2}{n}\int x\sin(nx)\ dx.$$

Para el segundo término: $(u = x), (dv = \sin(nx)\ dx), (du = dx), (v = -\frac{1}{n}\cos(nx))$.

$$\int x\sin(nx)\ dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx).$$

$$\int x^2\cos(nx)\ dx = \frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2}{n}\left(\frac{x\cos(nx)}{n} - \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right).$$

Evaluamos:

$$\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}, a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Para (b_n):

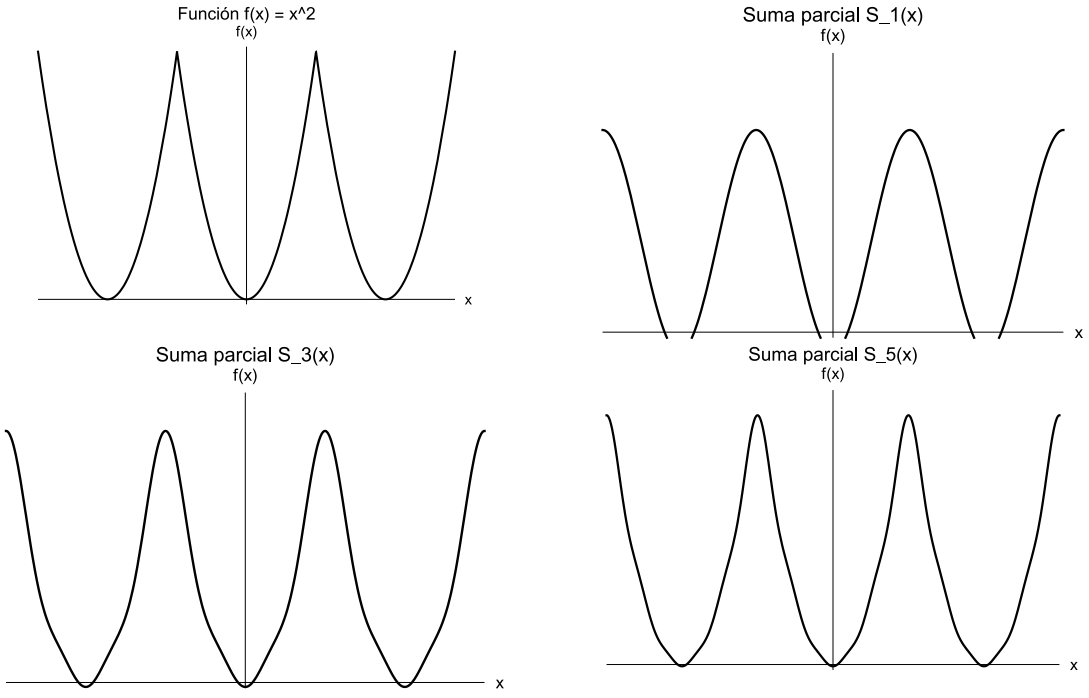
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\ dx = 0 \quad \text{(función impar)}.$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\,.$$

Convergencia

La función $(f(x) = x^2)$ es continua en $[-\pi, \pi)$. La serie converge a x^2 para $\big(x \in [-\pi, \pi)\big)$,y a $(\pi^2) en (x = \pm\pi)$.



Gráfica de $f(x) = x^2$: Muestra una parábola en cada período, con un mínimo en $x = 0, \pm 2\pi$ ($f(x) = 0$) y máximos en $x = \pm\pi, \pm 3\pi$ ($f(x) = \pi^2$).

5.3 Series de Fourier en cosenos, senos y de medio intervalo.

Las series de Fourier en cosenos, senos y de medio intervalo son extensiones que se enfocan en funciones definidas en intervalos específicos (e.g., $[0, \pi]$) o con simetrías específicas (par o impar), lo que permite simplificar las series y adaptarlas a problemas prácticos, como los que surgen en ecuaciones diferenciales parciales (e.g., ecuaciones de calor u onda).

Series de Fourier completas (repaso)

Hasta ahora, hemos trabajado con series de Fourier completas para funciones periódicas de período 2π , definidas en $[-\pi, \pi)$:

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Series de Fourier en cosenos, senos y de medio intervalo

Series de Fourier en cosenos (extensión par)

Definición: La serie de Fourier en cosenos representa una función $\big(f(x)\big)$ definida en $[0, \pi]$ extendida como una función par al intervalo $[-\pi, \pi]$, con período 2π. Esto elimina los términos de seno ($b_n = 0$), ya que las funciones pares satisfacen $f(-x) = f(x)$.

Para una función $\big(f(x)\big)$ definida en $[-\pi, \pi)$ extendida como par con período 2π, la serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx.$$

El factor $\frac{2}{\pi}$ surge porque la integral se evalúa solo en $[0, \pi]$, pero la extensión par asegura que la función se define en $[-\pi, \pi]$.

Ejemplo para $(f(x) = x^2)\ en\ ([0, \pi])$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

La serie es:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\,.$$

Converge a (x^2) en $[0,\pi]$ y a x^2 en $[-\pi,0))$ por la extensión par.

La serie en cosenos es ideal para problemas donde la función debe ser par, como en ecuaciones de calor con condiciones de contorno simétricas (e.g., $u_x(0,t)=0$).

Series de Fourier en senos (extensión impar)

La serie de Fourier en senos representa una función $\big(f(x)\big)$ definida en $[0,\pi]$ extendida como una función impar al intervalo $[-\pi,\pi]$, con período 2π. Esto elimina los términos de coseno ($a_n = 0$), ya que las funciones impares satisfacen $f(-x) = -f(x)$.

Para una función $\big(f(x)\big)$ definida en $[0,\pi]$, extendida como impar con período 2π, la serie es:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Para $(f(x)=x)$en $([0,\pi])$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

La serie es:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,.$$

Converge a $(x)\ en\ ((0,\pi)), a\ (-x)\ en\ ((-\pi,0)), y\ a(0)\ en\ (x=n\pi)$.

La serie en senos es útil para problemas con condiciones de contorno antisimétricas ($u(0,t)=0$), comunes en ecuaciones de onda.

Series de Fourier de medio intervalo

Las series de medio intervalo representan una función $\big(f(x)\big)$ definida en ([0, L]), extendida al intervalo $[-L, L]$ como par o impar, con período $(2L)$. En el contexto de $L = \pi$, esto coincide con las series en cosenos o senos, pero el concepto se generaliza a cualquier (L).

Para una función $\big(f(x)\big)$ en $([0, L])$, extendida como par o impar con período ($2L$):

Cosenos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \quad a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\ dx.$$

Senos:

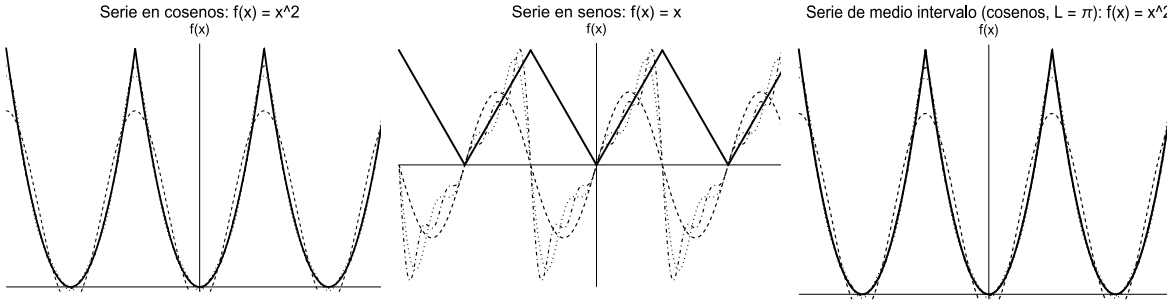
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\ dx.$$

Estas series son útiles en ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno simétricas o antisimétricas.

Ejemplo (medio intervalo, cosenos, $L = \pi$): Para $f(x) = x^2$ en $[0, \pi]$, la serie en cosenos es la misma que en la sección 2, ya que x^2 es par. Ejemplo (medio intervalo, senos, $L = \pi$): Usamos $f(x) = x$ en $[0, \pi]$, como en la serie en senos.

Las series de medio intervalo generalizan las series en cosenos y senos para cualquier (L), útiles en problemas de ecuaciones diferenciales parciales con diferentes longitudes de dominio.

Graficas las series en cosenos para $f(x) = x^2$, en senos para $f(x) = x$, y un ejemplo de medio intervalo con $L = \pi$.



Problema No, 8

Serie de Fourier completa para $(f(x) = x)$

Consideremos la función $(f(x) = x)$, definida en $\big([-\pi, \pi)\big)$ con período (2π).

Cálculo de los coeficientes de Fourier

La serie de Fourier es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\ dx = 0 \quad (\text{porque } x\cos(nx) \text{ es impar}).$$

Para (b_n):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\ dx \quad (\text{porque } x\sin(nx) \text{ es par}).$$

Usamos integración por partes: $(u = x), (dv = \sin(nx)\ dx), (du = dx), (v = -\frac{1}{n}\cos(nx))$.

$$\int x\sin(nx)\ dx = -x\cdot\frac{1}{n}\cos(nx) + \int \frac{1}{n}\cos(nx)\ dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx).$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ dx = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

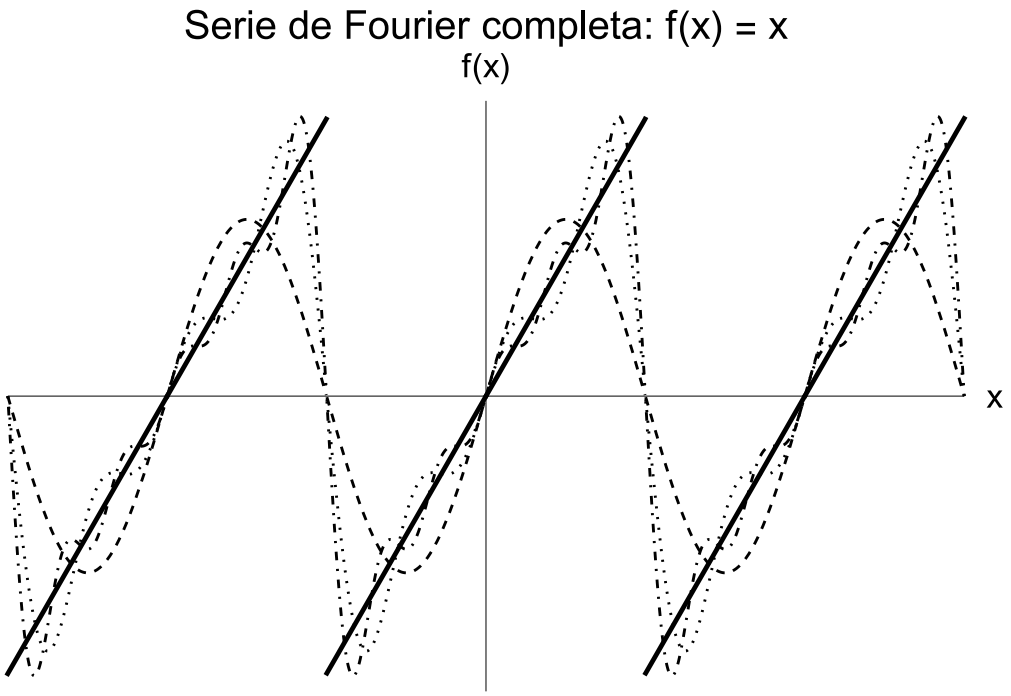
Serie de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)\,.$$

Convergencia

La función $(f(x) = x)$ es continua a trozos en $\big([-\pi, \pi)\big)$ con una discontinuidad en $(x = \pm\pi)$ debido a la periodicidad $((f(-\pi) = -\pi(f(\pi^{-}) = \pi))$.

La serie converge a: $(\ x\ )\ \ en\ \ (-\pi < \ x\ < \ \pi)$, $(\frac{f(-\pi^{-})+f(\pi^{-})}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0)\ en\ (x = \pm\pi)$.



Problema No. 9

Serie de Fourier en cosenos para $(f(x) = x)$

Consideremos la función $(f(x) = x), definida\ en([0, \pi])$,extendida como par $a\left([-\pi, \pi)\right)$ con período (2π), es decir, $(f(-x) = f(x) = x)$.

Cálculo de los coeficientes

La serie es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\ dx.$$

Usamos integración por partes: $(u = x), (dv = \cos(nx)\ dx), (du = dx), (v = \frac{1}{n}\sin(nx))$.

$$\int x\cos(nx)\ dx = x\cdot\frac{1}{n}\sin(nx) - \int \frac{1}{n}\sin(nx)\ dx = \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

$$\int_0^{\pi} x\cos(nx)\ dx = \left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi\sin(n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\cos(0)$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

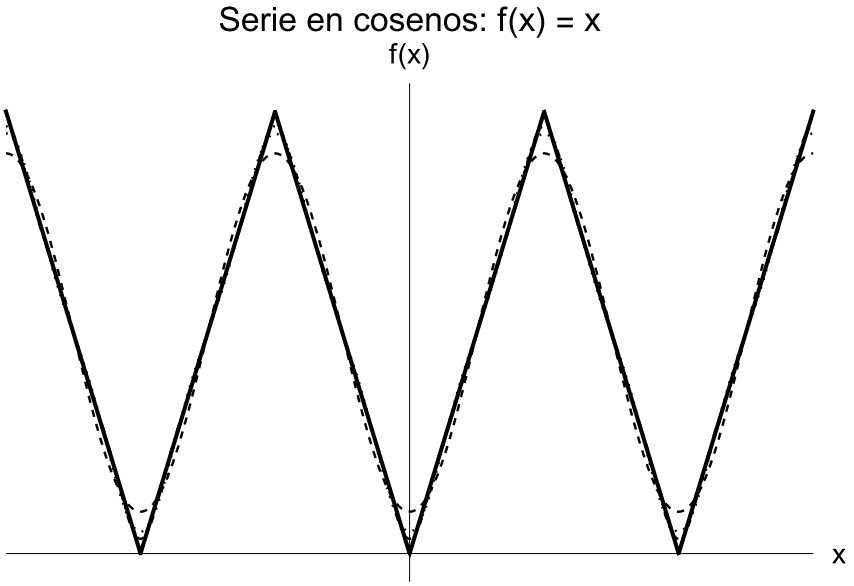
Convergencia

La función extendida es $(f(x) = |x| \square)$ en $\big([-\pi, \pi)\big)$, continua. La serie converge a:

$$(x)\ en\ (0 \leq x < \pi),$$

$$(-x)\ en\ (-\pi < x < 0),$$

$$(\pi)\ en\ (x = \pm\pi).$$



Problema No. 10

Serie de Fourier en senos para $(f(x) = x)$

Consideremos la función $(f(x) = x)$, definida en $([0, \pi])$, extendida como impar a $\big([-\pi, \pi)\big)$, es decir, $(f(-x) = -f(x))$.

Cálculo de los coeficientes

La serie es:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

Para (b_n):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ dx.$$

Usamos integración por partes: $(u = x), (dv = \sin(nx)\ dx), (du = dx), (v = -\frac{1}{n}\cos(nx))$.

$$\int x\sin(nx)\ dx = -x\cdot\frac{1}{n}\cos(nx) + \int \frac{1}{n}\cos(nx)\ dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx).$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ dx = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,.$$

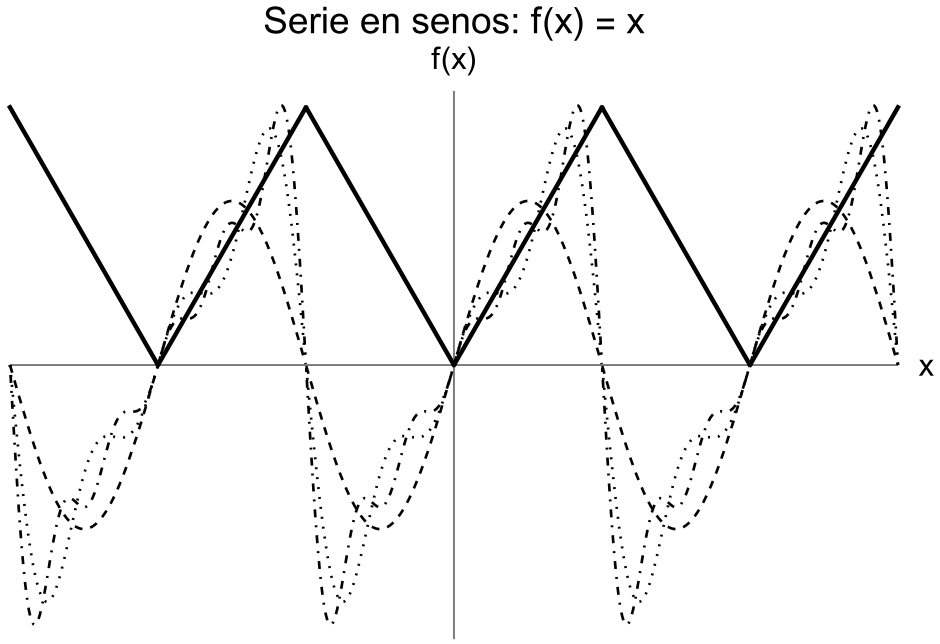
Convergencia

La función extendida es $(f(x) = x)$ en $\big([0, \pi)\big)$, $(f(x) = -x)$ en $\big([-\pi, 0)\big)$. La serie converge a:

$$(x)\ en\ (0 < x < \pi),$$

$$(-x)\ \ en\ (-\pi < x < 0),$$

en $(x = n\pi)$ (Promedio de los límites laterales)



Problema No. 11

Serie de Fourier de medio intervalo para $(f(x) = x)$, $(L = \pi)$,cosenos

Consideremos la función $(f(x) = x)$, definida en $([0, \pi])$, extendida como par con período (2π).

Cálculo de los coeficientes

La serie es:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\ dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Para (a_n):

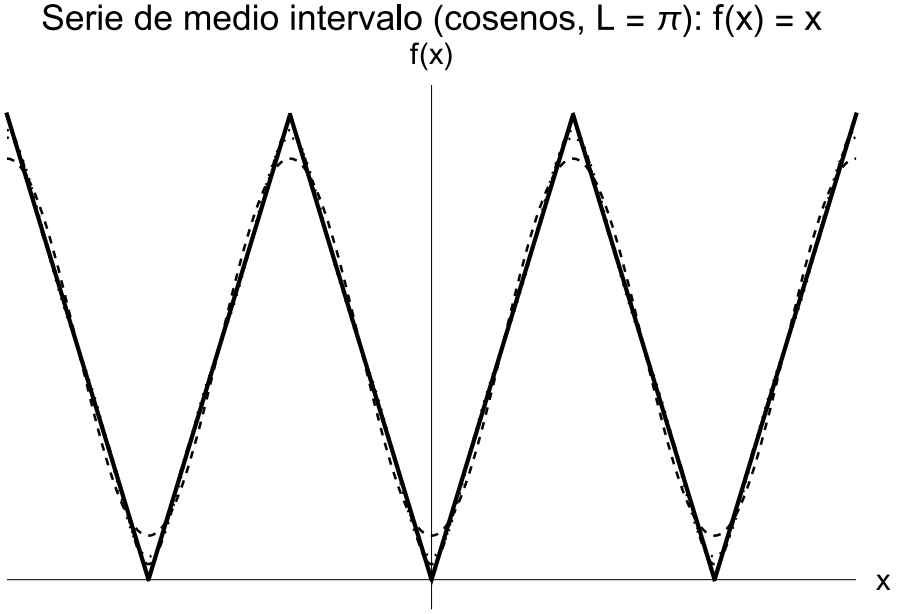
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos\ (nx)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

Convergencia

La función extendida es $(f(x) = |x|)$ en $\big([-\pi, \pi)\big)$.La serie converge a: $(\ x\ )\ en\ (\ 0\ \leq x\ <\ \pi)$, $(\ -x\ )\ en\ (\ -\pi <\ x\ <\ 0\ )$, $(\ \pi)\ en\ (\ x\ =\ \pm\pi)$.



Problema No. 12

Conducción de calor en una barra usando series de Fourier

Consideremos una barra de longitud (π),con extremos a $(0°C)$, y distribución inicial de temperatura $(u(x,0)=x)$. La ecuación de calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0,$$

con condiciones:

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad u(x,0)=x.$$

Solución por separación de variables

Buscamos $\big(u(x,t)=X(x)T(t)\big)$. Sustituyendo:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

Para $(X(x))$:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0,\quad X(\pi)=0.$$

Solución: $(X(x)=A\cos\big(\sqrt{\lambda}x\big)+B\sin\big(\sqrt{\lambda}x\big))$.

$$X(0)=0,\qquad A=0,\quad X(\pi)=B\sin\big(\sqrt{\lambda}\pi\big)=0,\qquad \sqrt{\lambda}\pi=n\pi,\quad \lambda=n^2.$$

$$X_n(x)=\sin(nx),\quad n=1,2,3,\dots.$$

Para $(T(t))$:

$$T'(t)+n^2T(t)=0,\quad T_n(t)=e^{-n^2t}.$$

Solución general:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)\,e^{-n^2t}.$$

Condición inicial

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=x,\quad 0<x<\pi.$$

Calculamos la serie de Fourier en senos:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\sin(nx)\;dx.$$

Integración por partes: $(u = x), (dv = \sin(nx)\;dx), (du = dx), (v = -\frac{1}{n}\cos(nx))$.

$$\int x\,\sin(nx)\;dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\,.$$

$$\int_0^{\pi} x\,\sin(nx)\;dx = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Solución final

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,e^{-n^2t}.$$

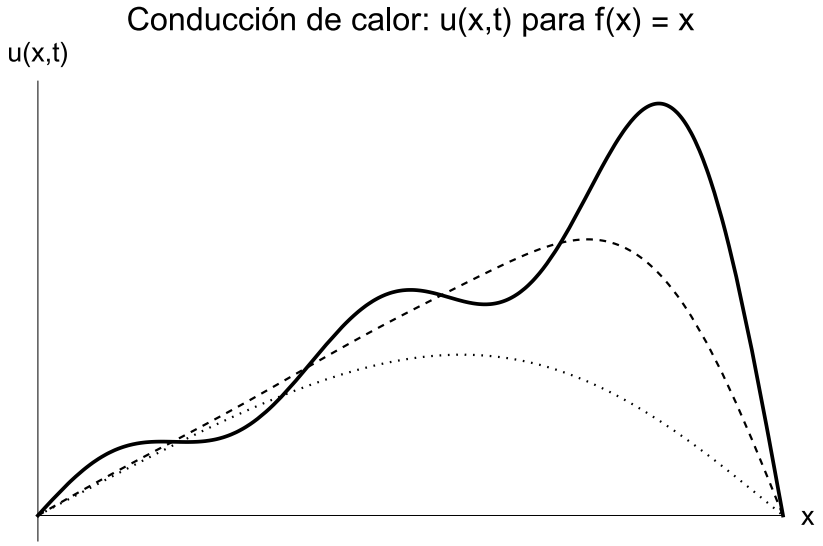
Convergencia

La serie converge a:

$(\,x\,)\;en\;(\,0 < x < \pi)\;para\;(\,t = 0\,)$,

$(\,0\,)\;en\;(\,x = 0, \pi)$,

$(\,0\,)\;para\;(\,t \to \infty)$, debido al decaimiento exponencial.



Problema No. 13

Ejemplo: Análisis de una onda cuadrada en ingeniería eléctrica

Consideremos una señal de voltaje periódica $\big(v(t) = \text{sign}(t)\big)$,definida en $\big([-\pi, \pi)\big)$con período (2π):

$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le t < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Queremos encontrar su serie de Fourier para analizar sus componentes de frecuencia.

Cálculo de los coeficientes de Fourier

La serie de Fourier es:

$$v(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right),$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\ dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\cos(nt)\ dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t)\sin(nt)\ dt.$$

Para (a_0):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\ dt + \int_{0}^{\pi} 1\ dt\right) = \frac{1}{\pi}(-\pi + \pi) = 0.$$

Para (a_n):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos(nt)\, dt + \int_{0}^{\pi} cos(nt)\, dt\right) = 0\text{(función impar).}$$

Para (b_n):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin(nt)\ dt + \int_{0}^{\pi} \sin(nt)\ dt\right).$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(nt)\ dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \int_{0}^{\pi} \sin(nt)\ dt = -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\left(-\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) + \left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Serie de Fourier

$$v(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sin}(nt).$$

Convergencia

La serie converge a:

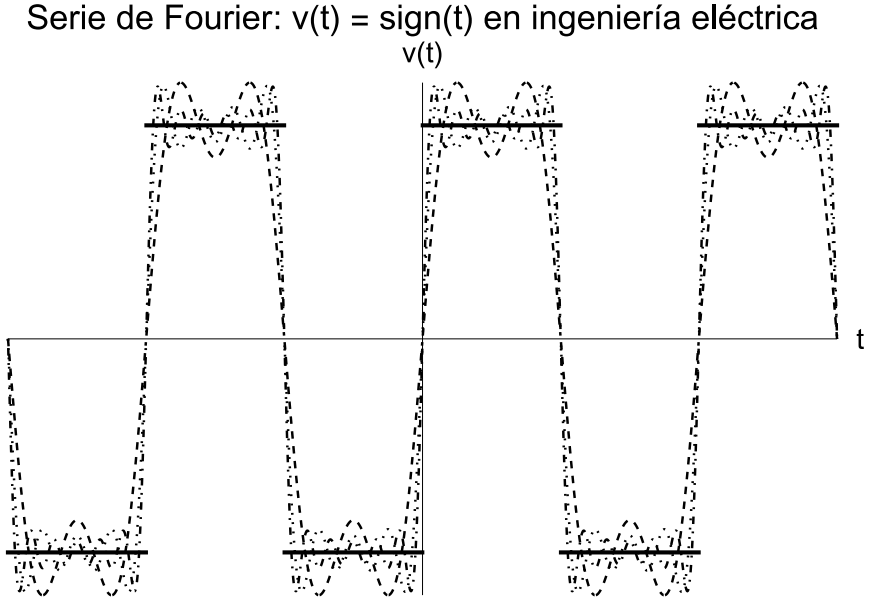
$(-1)\ en\ (-\pi < t < 0)$,

$(1)\ en\ (0 < t < \pi)$,

$(0) en (t = n\pi)$ (promedio de los límites laterales).

Aplicación

La serie descompone la onda cuadrada en armónicos impares, útil para analizar la respuesta de un circuito a cada frecuencia, como en el diseño de filtros o sistemas de comunicación.



Conclusiones

El estudio de las Series de Fourier, constituye un pilar esencial de las matemáticas aplicadas, con un impacto significativo en el campo de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en ingeniería. A continuación, se presentan las conclusiones principales, destacando los conceptos fundamentales, los ejemplos tratados, y la relevancia educativa de este tema, articulados con un enfoque claro y elegante.

La teoría preliminar establece los cimientos de las series de Fourier, ofreciendo un marco conceptual que permite descomponer funciones periódicas en combinaciones de ondas sinusoidales. Conceptos como la periodicidad, la simetría par e impar, y la definición de los coeficientes de Fourier sientan las bases para un análisis riguroso. El principio de convergencia, que asegura la aproximación precisa de funciones en puntos continuos y un comportamiento específico en discontinuidades, proporciona una guía teórica indispensable, ilustrada con ejemplos como las funciones valor absoluto, signo, y cuadrática.

Se introduce la representación completa de funciones periódicas mediante series que combinan senos y cosenos, destacando cómo la simetría de una función simplifica su análisis. A través de ejemplos cuidadosamente seleccionados, se exploró la descomposición de funciones pares e impares, revelando patrones de convergencia. Las visualizaciones generadas mediante herramientas computacionales, como las sumas parciales de orden bajo, medio y alto, ilustraron la progresión hacia la función original, destacando fenómenos como las oscilaciones en funciones con discontinuidades.

Las Series de Fourier en Cosenos, Senos y de Medio Intervalo enriquece el estudio al considerar funciones definidas en intervalos específicos, extendidas como pares o impares, y generalizadas a dominios arbitrarios. Las series en cosenos capturan la simetría par, logrando aproximaciones suaves, mientras que las series en senos reflejan comportamientos impares, con oscilaciones características en puntos de discontinuidad. Las series de medio intervalo amplían la aplicabilidad al adaptarse a diferentes longitudes de dominio, ofreciendo una herramienta versátil para problemas especializados. Las gráficas computacionales ilustraron con claridad cómo estas extensiones modelan funciones y su convergencia.

Los ejemplos prácticos demostraron la relevancia de las series de Fourier en la resolución de problemas reales. En el ámbito térmico, se analizó la evolución de la temperatura en una barra, mostrando cómo las series modelan procesos dinámicos. En ingeniería eléctrica, la descomposición de una señal periódica en sus componentes de frecuencia permitió explorar su comportamiento en circuitos, un aspecto crucial para el diseño de sistemas de comunicación. Estas aplicaciones subrayan la capacidad de las series de Fourier para transformar problemas complejos en soluciones manejables.

Las series de Fourier constituyen un campo vasto, con aplicaciones que abarcan desde el análisis de señales hasta la modelación de fenómenos físicos. Los apuntes, centrados en el Tema V—el último de los apuntes de ecuaciones diferenciales—capturan los elementos esenciales: fundamentos teóricos, series completas, y series especializadas. Aunque el tema es extenso y su dominio completo requiere un estudio prolongado, los apuntes ofrecen una síntesis clara y precisa, brindando una base sólida para comprender y aplicar estas series en contextos prácticos.

Los ejemplos desarrollados y las visualizaciones computacionales son recursos pedagógicos excepcionales, que hacen accesibles conceptos complejos al ilustrar la convergencia y fenómenos asociados. La estructura del tema, con cálculos detallados y representaciones gráficas, fomenta una comprensión profunda y conecta la teoría matemática con aplicaciones prácticas, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos en ingeniería con rigor y creatividad.

El tema de las series de Fourier, ofrece una introducción sofisticada y práctica a una herramienta matemática indispensable. Los ejemplos y aplicaciones prácticas destacan su versatilidad en la resolución de problemas del mundo real, desde procesos térmicos hasta análisis de señales. Aunque el tema es amplio, los apuntes destilan sus conceptos fundamentales con claridad, proporcionando una base robusta para que los estudiantes exploren y apliquen las series de Fourier con confianza en el ámbito de la ingeniería.

Bibliografía

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2020). Elementary differential equations and boundary value problems (11th ed.). Wiley.

Este libro de texto clásico cubre las series de Fourier en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales, con aplicaciones en problemas de calor y vibraciones.

Bracewell, R. N. (2000). The Fourier transform and its applications (3rd ed.). McGraw-Hill.

Ofrece un tratamiento detallado de las series y transformadas de Fourier, con énfasis en aplicaciones en procesamiento de señales.

Carslaw, H. S. (2003). Introduction to the theory of Fourier's series and integrals (3rd ed.). Dover Publications.

Un texto fundamental que explora la teoría de las series de Fourier y sus aplicaciones en matemáticas puras.

Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2014). Fourier series and boundary value problems (8th ed.). McGraw-Hill Education.

Proporciona una introducción clara a las series de Fourier, con ejemplos en problemas de contorno en ingeniería.

Davis, H. F. (1989). Fourier series and orthogonal functions. Dover Publications.

Cubre series de Fourier y funciones ortogonales, con un enfoque en su desarrollo matemático y aplicaciones.

Dym, H., & McKean, H. P. (1985). Fourier series and integrals. Academic Press.

Un texto avanzado que profundiza en la teoría de las series de Fourier y sus conexiones con el análisis matemático.

Folland, G. B. (1992). Fourier analysis and its applications. Wadsworth & Brooks/Cole.

Explora las series de Fourier y sus aplicaciones en análisis matemático, con ejemplos en física e ingeniería.

Haberman, R. (2018). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems (5th ed.). Pearson.

Un libro de texto que integra las series de Fourier en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, con aplicaciones prácticas.

Hsu, H. P. (1997). Fourier analysis. Simon & Schuster.

Un texto introductorio que cubre las series de Fourier con un enfoque accesible para estudiantes de ingeniería.

Kammler, D. W. (2007). A first course in Fourier analysis (2nd ed.). Cambridge University Press.

Proporciona una introducción moderna a las series de Fourier, con aplicaciones en procesamiento de señales y vibraciones.

Kreyszig, E. (2011). Advanced engineering mathematics (10th ed.). Wiley.

Incluye un capítulo detallado sobre series de Fourier y sus aplicaciones en problemas de ingeniería.

Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2010). Discrete-time signal processing (3rd ed.). Prentice Hall.

Aborda las series de Fourier en el contexto del procesamiento digital de señales, relevante para ingeniería eléctrica.

Pinkus, A., & Zafrany, S. (1997). Fourier series and integral transforms. Cambridge University Press.

Un texto que combina la teoría de las series de Fourier con transformadas integrales, ideal para estudiantes avanzados.

Tolstov, G. P. (1976). Fourier series. Dover Publications.

Un libro clásico que ofrece un tratamiento claro y riguroso de las series de Fourier, con ejemplos prácticos.

Zill, D. G. (2017). Differential equations with boundary-value problems (9th ed.). Cengage Learning.

Cubre las series de Fourier en el contexto de ecuaciones diferenciales, con aplicaciones en problemas de contorno.