



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Instituto Tecnológico de La Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Estudio sobre la homogeneización de la matriz
Jacobiana de robots manipuladores”**

POR

Ing. Daniel Roberto Soto Delgado

TESIS

**PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Alfonso Pámanes García

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (18)-TMCIE-2019
Torreón, Coahuila de Zaragoza. México
Septiembre 2019

A mis padres

Agradecimientos

A Dios, que sin Él yo no soy nada.

A mis padres, quienes nunca me han abandonado.

Al doctor José Alfonso Pámanes García, quien compartió conmigo su invaluable conocimiento, por tenerme la confianza y la paciencia para haberme ofrecido la oportunidad de trabajar con él.

A mis maestros del área de Mecatrónica y Control, por su paciencia y por su dedicación, además de compartir sus conocimientos también me enseñaron lo que es la humildad.

A Oscar Murillo, quién me brindó su valiosa ayuda cuando lo necesitaba, sin su ayuda la conclusión de este trabajo hubiera sido mucho más complicada.

A mis compañeros del Posgrado, a mis compañeros de generación, con quienes compartí la misma experiencia.

De manera especial a Alfredo Delgado, Romeo Falcón, Sergio López, Oscar Murillo, Eduardo Cruz. Su compañía y amistad hicieron de este trayecto una experiencia inolvidable.

Al CONACYT, por la beca que me brindó, que hizo posible mis estudios, y al Instituto Tecnológico de La Laguna, por abrirme las puertas para poder superarme.

Resumen

En esta tesis se analizan diferentes enfoques propuestos en la literatura para la homogeneización de la matriz jacobiana de robots manipuladores, que permitan evaluar su desempeño cinemático de manera consistente. Se incluye un enfoque para la homogeneización de la matriz jacobiana basado en los parámetros inerciales de un órgano terminal de geometría ideal. Los análisis desarrollados incluyen la aplicación de los enfoques considerados a la planificación de movimiento de robots. Con este estudio se pretende contribuir a la definición de un enfoque unificado para la homogeneización de la matriz jacobiana y su utilización en el cálculo de índices de desempeño cinemático

Abstract

Different approaches proposed in the literature for the homogenization of the Jacobian matrix are analyzed in this thesis, in order to define a homogenized matrix that can be applied for evaluation of the kinematic performance of robotic manipulators in a consistent way. An approach for homogenization of the Jacobian matrix is included that is based on the inertial parameters of an ideal geometry end-effector. The developed analysis include the application of the considered approaches to robot motion planning. This study aims to contribute to the definition of a unified approach for the homogenization of the Jacobian matrix and its use in the calculation of kinematic performance indices.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado de velocidad del órgano terminal y matriz jacobiana	2
1.2. Objetivo de la tesis	3
1.2.1. Objetivos específicos	3
1.3. Organización de la tesis	4
2. Índices de desempeño y homogeneización de la matriz jacobiana	5
2.1. Índice de manipulabilidad	5
2.2. Número de condicionamiento	10
2.3. Longitud característica para la homogeneización de la matriz jacobiana	10
2.3.1. Índices de manipulabilidad en robots planares	11
2.4. Índice de manipulabilidad dinámica	13
3. Robot manipulador serial Fanuc ARC Mate 100 iC	15
3.1. Descripción de la cadena cinemática	18
3.2. Análisis cinemático	19
3.3. Homogeneización de la matriz jacobiana	22
4. Robot manipulador paralelo 3-<u>RRR</u>	23

4.1. Modelo cinemático inverso de posición y modos de funcionamiento	24
4.1.1. Análisis vectorial	24
4.2. Modelo cinemático directo de velocidad	33
4.3. Homogeneización de la matriz jacobiana paralela usando la longitud caracte- rística	39
5. Aplicación de matrices jacobianas homogeneas al análisis del desempeño cinemático de robots.	41
5.1. Energía cinética de un órgano terminal ideal (esfera)	41
5.2. Homogeneización de la matriz jacobiana por parámetros inerciales basada en una geometría ideal esférica	43
5.3. Simulaciones con el robot Fanuc ARC Mate 100ic/12	44
5.3.1. Reconfiguración del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC	44
5.3.2. Movimiento del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC durante la des- cripción de una ruta especificada	46
5.4. Energía cinética de un órgano terminal ideal (disco)	48
5.5. Reconfiguración para una posición especificada del órgano terminal del mani- pulador 3- <u>R</u> RR	49
5.5.1. Inverso del número de condicionamiento $\kappa^{-1}(\bar{A})$ y $\kappa^{-1}(A^*)$	49
5.5.2. Posturas isotrópicas y mapeo del vector k_e	52
6. Conclusión	56
6.1. Contribuciones	57
6.2. Trabajos futuros	57
Bibliografía	58
Apéndices	60

A.	Código del manipulador Fanuc Arc Mate 100iC	61
7.	Código de Matlab del robot <u>3-RRR</u>	75

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de robots manipuladores.	2
2.1. Manipulador de 2 grados de libertad	5
2.2. Elipse en el espacio de velocidades operacionales rotando \dot{x}^* y \dot{y}^*	7
2.3. Mapeo del espacio de velocidades articulares al espacio de velocidades operacionales de un manipulador 2R.	8
2.4. Submatrices J_{TA} y J_{RW} de la matriz jacobiana	9
2.5. Manipulador planar 3-R isotrópico	11
3.1. Robot manipulador serial Fanuc modelo ARC Mate 100iC/12.	15
3.2. Espacio de trabajo y dimensiones del manipulador.	16
3.3. Rangos de rotación de las articulaciones del manipulador serial <i>Fanuc</i> modelo <i>ARC Mate</i> 100iC/12.	17
3.4. Diagrama de alambre del robot serial de 6 grados de libertad.	18
4.1. Descripción geométrica del robot paralelo 3- <u>RRR</u>	23
4.2. Equema vectorial del robot paralelo 3- <u>RRR</u>	24
4.3. Vector \mathbf{r}_{C_1}	25
4.4. Vector \mathbf{r}_{C_2}	26
4.5. Vector \mathbf{r}_{C_3}	26

4.6. Análisis vectorial de C_1	27
4.7. Análisis vectorial de C_2	29
4.8. Análisis vectorial de C_3	30
4.9. Modos de funcionamiento Mf del manipulador 3- <u>R</u> RR.	33
4.10. Análisis vectorial para la pierna 1	33
4.11. Análisis vectorial para la pierna 2	35
4.12. Análisis vectorial para la pierna 3	37
4.13. Configuración isotrópica ideal (con $\alpha = 90$)	40
5.1. Secuencia de posturas en diagrama de alambre del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC	44
5.2. Evolución de los índices de manipulabilidad traslacional normalizada w_A^* y rotacional w_w durante la reconfiguración del robot.	45
5.3. Evolución del índice de manipulabilidad global usando la matriz \mathbf{J}^*	45
5.4. Evolución de los diferentes índices de manipulabilidad durante el seguimiento de la ruta	46
5.5. Posturas del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC durante la tarea circular.	47
5.6. Número de condicionamiento con respecto a la orientación de la PM	50
5.7. Posturas del manipulador 3- <u>R</u> RR con valores desde $\phi = -105^\circ$ a $\phi = 110^\circ$	51
5.8. Elipsoide de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = -116.2^\circ$	52
5.9. Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = -65.6^\circ$	53
5.10. Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = 17.62^\circ$	54
5.11. Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = 49.82^\circ$	55

Índice de tablas

3.1. Tabla de parámetros DHM.	19
4.1. Valores de ε que definen los Mf del manipulador 3- <u>RRR</u>	32

Capítulo 1

Introducción

La automatización industrial ha sido caracterizada por sus periodos de rápida innovación por medio de distintos recursos, entre ellos la aplicación de robots industriales, los cuales, a través de los años, han evolucionado gradualmente hasta convertirse en agentes prácticamente imprescindibles en las modernas líneas de manufactura de las medianas y grandes industrias. A medida que el uso de robots se hizo más rentable en su trabajo, y la mano de obra humana seguía siendo más costosa, los robots industriales se convirtieron en los principales protagonistas de la automatización.

Entre los sistemas mecánicos robóticos existentes hoy en día, los brazos manipuladores son los más empleados en la industria. Su arquitectura está constituida por cadenas cinemáticas simples. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado arquitecturas integradas con múltiples cadenas cinemáticas, de tipo arborescente y en paralelo, que conforman sistemas mecánicos robóticos más complejos. Un manipulador, en general, es un sistema mecánico con el propósito de *manipular* objetos. Teniendo en cuenta su arquitectura, los robots manipuladores pueden clasificarse en dos tipos: seriales y paralelos como los que se muestran en la figura 1.1.

Similares a un brazo humano, los robots seriales están constituidos por un conjunto de eslabones unidos por articulaciones que pueden ser tanto rotacionales como prismáticas. Este tipo de arreglo forma una cadena cinemática de tal manera que cada eslabón se conecta a un eslabón predecesor y otro sucesor a excepción del primer y último eslabones, los cuales sólo están unidos a un sucesor y un antecesor respectivamente. Los robots manipuladores seriales son usados comúnmente en la industria para tareas del tipo *pick and place*, de ensamble, de soldadura, de pintura, etc.

Los robots manipuladores paralelos, en cambio, se distinguen por tener una plataforma fija, una plataforma móvil y varias piernas. Cada pierna está formada por una cadena cinemática de tipo serial cuyos extremos están conectadas a las plataformas fija y móvil. Contrario a los manipuladores seriales, los robots paralelos cuentan con articulaciones no actuadas lo que complica el análisis de este tipo de manipuladores. El diseño de los ma-

nipuladores paralelos permite que éstos desplacen su órgano terminal a aceleraciones más grandes y con una mayor precisión que los manipuladores seriales, con un menor consumo de energía.



(a) Serial KUKA KR 1000 titan.

(b) Paralelo ABB IRB 360.

Figura 1.1: Ejemplos de robots manipuladores.

1.1. Estado de velocidad del órgano terminal y matriz jacobiana

El estudio de robots manipuladores ha sido de gran interés en la comunidad científica debido a que se busca obtener el desempeño óptimo de manipuladores durante la ejecución de las tareas a realizar. A partir del modelado cinemático de robots manipuladores es posible obtener la matriz jacobiana, la cual, define la relación que existe entre las velocidades articulares del manipulador y el estado de velocidad de su órgano terminal. El vector de estado de velocidad (o *twist*, por su denominación en inglés) de un robot manipulador serial de 6 grados de libertad (g.d.l) está dado por

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

donde el vector *twist* se define como:

$$\mathbf{t} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Los vectores \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega}$ son la velocidad lineal y la velocidad angular del punto de interés (o *tool center point* -TCP-) del órgano terminal órgano terminal, respectivamente. En (1.1), $\dot{\mathbf{q}}$

es el vector de dimensión 6 de las velocidades articulares del robot, mientras que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es la matriz jacobiana del robot que, por simplicidad, será expresada como \mathbf{J} . La matriz \mathbf{J} está en función de los parámetros geométricos que definen el diseño y la postura instantánea \mathbf{q} del manipulador. La mayoría de los manipuladores industriales poseen una arquitectura que permite controlar de manera independiente tanto los desplazamientos traslacionales como los rotacionales del órgano terminal. Observe que las unidades de los renglones de la matriz jacobiana asociados a la velocidad lineal del órgano terminal son distintas a las unidades de los renglones asociados a la velocidad angular. Así, dicha matriz no es dimensionalmente homogénea, lo cual complica la definición de un índice que caracterice globalmente, de manera coherente, el desempeño cinemático de los manipuladores a partir de la matriz jacobiana. Observe que un índice de desempeño cinemático de un manipulador debería poder extraerse de dicha matriz de manera natural toda vez que ésta caracteriza la conversión de los movimientos articulares en desplazamiento del órgano terminal a través de la ecuación (1.1). En consecuencia, en la literatura se han propuesto diferentes enfoques para la homogeneización de la matriz jacobiana, como el método basado en la *longitud característica* [1], y su aplicación en la definición de índices de desempeño cinemático [2, 14, 6] que han sido aplicados en el diseño y planificación de robots manipuladores [3, 15, 16, 17]. Sin embargo, debido a las limitaciones inherentes a tales enfoques, hasta ahora no existe una teoría unificada que sea aceptada generalmente por la comunidad científica para la homogeneización de la matriz jacobiana.

1.2. Objetivo de la tesis

Con el presente estudio se pretende contribuir a la definición de un enfoque unificado para la homogeneización de la matriz jacobiana y su utilización en el cálculo de índices de desempeño cinemático, se analizan diferentes enfoques propuestos en la literatura para la homogeneización de la matriz jacobiana y para la evaluación del desempeño cinemático de robots manipuladores. Se incluye un enfoque propuesto [4] recientemente para la homogeneización de la matriz jacobiana el cual está basado en los parámetros inerciales de un órgano terminal de geometría ideal. Los análisis que se desarrollan incluyen la aplicación de los enfoques considerados a la planificación de movimientos de robots.

1.2.1. Objetivos específicos

1. Evaluar la aplicación de diversos índices de desempeño existentes actualmente en la literatura al análisis del desempeño cinemático de manipuladores paralelos y seriales, considerando la la matriz jacobiana homogeneizada mediante parámetros inerciales.
2. Aplicar los análisis desarrollados en los enfoques considerados a la planificación de movimiento de un robot paralelo planar de 3 grados de libertad y de un robot serial de 6 grados de libertad.

1.3. Organización de la tesis

Esta tesis se divide en 6 capítulos. En el capítulo 2 se muestra el estudio bibliográfico sobre los índices de desempeño cinemático propuestos en la literatura como el *índice de manipulabilidad* y el *número de condicionamiento*, así como un nuevo enfoque basado en el elipsoide de inercia generalizado de robots manipuladores.

En el capítulo 3 se desarrolla el modelo directo de velocidad del robot serial Fanuc ARC Mate 100iC de 6 grados de libertad del Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de La Laguna. Se establece el problema de la no homogeneidad de la matriz jacobiana y se revisan los índices de desempeño propuestos en la literatura, incluyendo el de manipulabilidad de Yoshikawa y el número de condicionamiento de la matriz jacobiana.

En el capítulo 4 se desarrolla el modelo directo de velocidad de un robot paralelo 3-RRR y se definen sus matrices jacobianas serial y paralela. Se establece el carácter no homogéneo de la matriz jacobiana paralela y se definen los índices de desempeño cinemático basados en la matriz jacobiana paralela homogeneizada, que se aplican a este manipulador.

En el capítulo 5 se describe el enfoque propuesto en [4] para la homogeneización de las matrices jacobianas y se aplica al manipulador serial Fanuc ARC Mate 100iC y al manipulador paralelo 3-RRR. Se presenta una comparación de los diferentes índices de desempeño basados en matrices jacobianas homogeneizadas, aplicados a la evaluación del desempeño cinemático de robots.

Finalmente, en el capítulo 6 se presenta un resumen del trabajo realizado, así como el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Índices de desempeño y homogeneización de la matriz jacobiana

Un *índice de desempeño cinemático* de un robot manipulador se define como una cantidad escalar con la cual es posible medir la calidad del comportamiento de dicho sistema mecánico bajo un criterio de transmisión de movimiento desde los actuadores de las articulaciones hasta el órgano terminal [5]. En la literatura, los índices de desempeño han sido extensamente aplicados en el diseño de robots manipuladores, así como en la tarea de planificación de sus movimientos. Los principales índices de desempeño cinemático propuestos en la literatura se describen en las siguientes dos secciones. Posteriormente se presenta un resumen del concepto de homogeneización de la matriz jacobiana de manipuladores.

2.1. Índice de manipulabilidad

Considere el manipulador 2R de la figura 2.1.

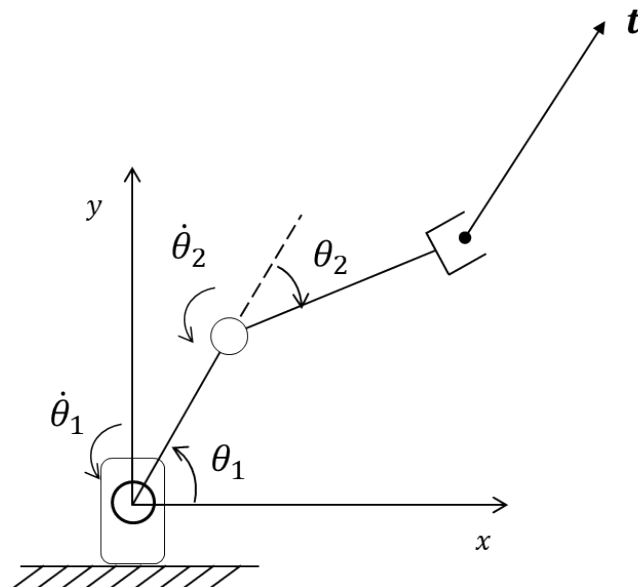


Figura 2.1: Manipulador de 2 grados de libertad

El modelo directo de velocidad del manipulador está dado por

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.1)$$

A partir de la descomposición en valores singulares (SVD por su acrónimo en inglés *singular value decomposition*), se sabe que:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (2.2)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son, respectivamente, matrices ortogonales de dimensiones $m \times m$ y $n \times n$; $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz diagonal de los valores singulares de \mathbf{J} , de dimensión $m \times n$. Sustituyendo (2.2) en (2.1), se tiene

$$\mathbf{t} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.3)$$

o bien

$$\mathbf{U}^T\mathbf{t} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.4)$$

Definiendo ahora

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{U}^T\mathbf{t}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{V}^T\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

entonces se tiene que

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}^*. \quad (2.7)$$

Los vectores \mathbf{t}^* , $\dot{\mathbf{q}}^*$ son los vectores \mathbf{t} , $\dot{\mathbf{q}}$ pero con componentes referidas a marcos ortonormales rotados con respecto a los marcos originales ortonormales de los espacios de velocidad operacional y de velocidad articular, de dimensión m y dimensión n , respectivamente. Si \mathbf{J} es una matriz de rango completo, la expresión (2.7) puede escribirse como

$$\mathbf{t}^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^* \quad (2.8)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^* \\ \dot{\theta}_2^* \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

donde σ_1, σ_2 son los valores singulares de \mathbf{J} . De (2.9) se tiene que

$$\dot{\theta}_1^* = \frac{\dot{x}^*}{\sigma_1}, \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta}_2^* = \frac{\dot{y}^*}{\sigma_2}. \quad (2.11)$$

Ahora bien, restringiendo las velocidades articulares mediante

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1 \quad (2.12)$$

esto es,

$$\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 = 1 \quad (2.13)$$

del mismo modo, se tiene que

$$\|\dot{\mathbf{q}}^*\| = 1 \quad (2.14)$$

y, por lo tanto

$$(\dot{\theta}_1^*)^2 + (\dot{\theta}_2^*)^2 = 1. \quad (2.15)$$

Así, sustituyendo (2.10) y (2.11) en (2.15) resulta

$$\left(\frac{\dot{x}^*}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}^*}{\sigma_2}\right)^2 = 1. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) describe una elipse cuyos semiejes mayor y menor coinciden con los ejes \dot{x}^* y \dot{y}^* , respectivamente, como se aprecia en la figura 2.2.

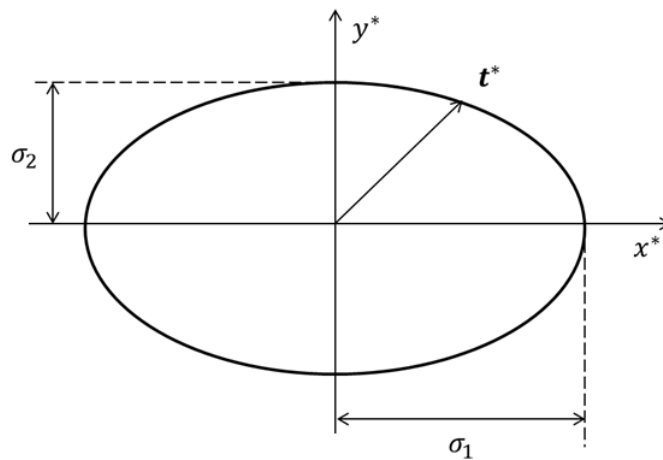


Figura 2.2: Elipse en el espacio de velocidades operacionales rotando \dot{x}^* y \dot{y}^* .

Observando la figura 2.2, se puede apreciar que, siempre que $\dot{\mathbf{q}}$ satisfaga $\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1$, se tiene que

- a) $\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1$ define una circunferencia en el espacio de velocidades articulares y cada punto en la misma representa una combinación de $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ tal que se satisface (2.13).
- b) La circunferencia del espacio de velocidades articulares definida mediante $\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1$, se mapea en el espacio de velocidades operacionales, a través de la matriz jacobiana, como una elipse.
- c) Los semiejes mayor y menor de la elipse son de longitudes iguales a σ_1 y σ_2 y dependen de la postura \mathbf{q} del manipulador. Entonces, bajo el criterio de Yoshikawa, una postura eficiente es aquella que genera un elipse de máxima área en el espacio de velocidades operacionales. En esta postura, el manipulador es capaz de producir desplazamientos del órgano terminal en cualquier dirección con la mayor velocidad posible.

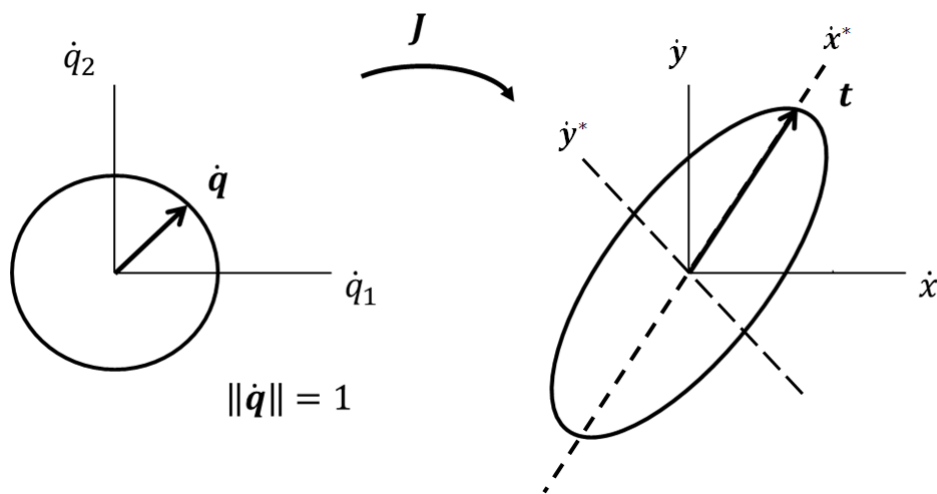


Figura 2.3: Mapeo del espacio de velocidades articulares al espacio de velocidades operacionales de un manipulador 2R.

En el mapeo representado en la figura 2.3 se observa que las direcciones de los semiejes mayor y menor de la elipse están determinadas por los vectores unitarios que especifican la primera y segunda columna de la matriz de rotación \mathbf{U}^T que define al vector \mathbf{t}^* en la ecuación (2.5).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es posible calcular el área del elipse. Se sabe que el área del elipse de la figura 2.3 está dada por

$$A = kw. \quad (2.17)$$

Donde k es igual a π y, además, w es igual al producto de las longitudes de los semiejes de la elipse, que son los valores singulares de \mathbf{J} . Se observa también que el producto de los valores singulares es igual a la raíz cuadrada del determinante del producto de la matriz jacobiana por su transpuesta, es decir:

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (2.18)$$

De estas dos últimas expresiones, se puede observar que el área máxima de la elipse es obtenida mediante el máximo valor de w . En consecuencia, para lograr la máxima eficiencia en las transformaciones de velocidades articulares a velocidades operacionales, es necesario usar una postura con el que se obtenga el valor máximo de la variable w . Esta variable es definida por Yoshikawa en [6] como *índice de manipulabilidad*. Al extender este análisis para un manipulador de n grados de libertad, se prueba que su índice de manipulabilidad también está dado por (2.18), es decir, dicha ecuación es una fórmula general para manipuladores de n grados de libertades.

Ahora bien, en (2.18) se puede observar que la *manipulabilidad* depende directamente de la matriz jacobiana \mathbf{J} y, como se ha mencionado anteriormente, en manipuladores con capacidad de controlar la posición y la orientación del órgano termina, esto implica una mezcla de dimensiones que impide evaluar eficazmente la capacidad del manipulador para efectuar simultáneamente los dos tipos de movimiento del órgano terminal: traslacional y rotacional. Teniendo en consideración lo anterior, Yoshikawa en [7] propone índices adecuados para cuantificar de manera independiente las *manipulabilidades* traslacional y rotacional. Bajo este enfoque, si se desea evaluar tales índices en un manipulador, éste debe satisfacer las siguientes condiciones:

- El manipulador es considerado como integrado por dos sub-cadenas cinemáticas: la primera asociada al *brazo* y la otra a la *muñeca*. El brazo contiene n_A articulaciones ($n_A \geq 3$) y la muñeca contiene n_w articulaciones ($n_w \geq 3$).
- Todas las articulaciones de la muñeca son rotacionales y sus ejes son concurrentes.

Para manipuladores que satisfacen las condiciones anteriores, la *manipulabilidad traslacional* (w_A) del *brazo* y la *manipulabilidad rotacional* (w_W) de la *muñeca* del manipulador, se definen, respectivamente, como

$$w_A = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{TA}\mathbf{J}_{TA}^T)}, \quad (2.19)$$

$$w_W = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{RW}\mathbf{J}_{RW}^T)}, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{J}_{TA} y \mathbf{J}_{RW} son submatrices de la matriz jacobiana del robot como se indica a continuación.

$$\mathbf{J} = \begin{array}{c} \mathbf{J}_{TA} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{61} \\ J_{21} & J_{21} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{62} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{63} \\ \hline J_{41} & J_{42} & J_{34} & J_{44} & J_{45} & J_{64} \\ J_{51} & J_{52} & J_{35} & J_{54} & J_{55} & J_{65} \\ J_{61} & J_{62} & J_{36} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{array} \right] \\ \mathbf{J}_{RW} \end{array}$$

Figura 2.4: Submatrices \mathbf{J}_{TA} y \mathbf{J}_{RW} de la matriz jacobiana

2.2. Número de condicionamiento

Salisbury et. al., en [2], aplicaron por primera vez este índice en el diseño de una mano robótica para minimizar la propagación de errores entre los pares en las articulaciones de la cadena cinemática y las fuerzas aplicadas por el último eslabón (órgano terminal) en los dedos de la mano. El número de condicionamiento de \mathbf{J} también se puede aplicar para minimizar la propagación de errores en términos de la velocidad.

Basado en el número de condicionamiento de la matriz jacobiana, es posible definir un *índice de condicionamiento cinetostático* [5] para robots manipuladores como una medición global del desempeño de manipuladores. La definición del número de condicionamiento requiere que todos los elementos de la matriz posean las mismas unidades físicas, lo cuál se tiene que asegurar primero con el fin de introducir este concepto. El número de condicionamiento de una matriz jacobiana *dimensionalmente homogénea* $\bar{\mathbf{J}}$ se define como

$$\kappa(\bar{\mathbf{J}}) = \|\bar{\mathbf{J}}\| \|\bar{\mathbf{J}}^T\|. \quad (2.21)$$

Si la *norma 2* de la matriz es usada en (2.21), se tiene

$$\|\bar{\mathbf{J}}\|_2 = \max_i \{\sigma_i\} \equiv \sigma_M, \quad \|\bar{\mathbf{J}}^{-1}\|_2 = \max_i \left\{ \frac{1}{\sigma_i} \right\} = \frac{1}{\sigma_m} \quad (2.22)$$

donde

$$\sigma_m \equiv \min_i \{\sigma_i\}. \quad (2.23)$$

Es evidente que la *norma 2* está dada en términos de los valores singulares de la matriz. Como consecuencia, esta norma es marco-invariante. Entonces, el *número de condicionamiento* de la *norma 2* $\kappa_2(\bar{\mathbf{J}})$ está dado por

$$\kappa_2(\bar{\mathbf{J}}) \equiv \frac{\sigma_M}{\sigma_m}. \quad (2.24)$$

Observe que los valores que puede adquirir el número de condicionamiento abarca un rango que va desde la unidad hasta infinito. El número de condicionamiento obtiene su mínimo valor de unidad para matrices con valores singulares identicos, es decir, matrices *isotrópicas*. Los *manipuladores isotrópicos* son aquellos cuya matriz jacobiana puede obtener un número de condicionamiento igual a uno. Si los elementos de la matriz jacobiana tienen diferentes unidades, su número de condicionamiento es indefinido por lo que es necesario recurrir a un enfoque para obtener una matriz jacobiana homogeneizada.

2.3. Longitud característica para la homogeneización de la matriz jacobiana

Debido a que, en la mayoría de los robots manipuladores industriales las matrices jacobianas presentan casos de no homogeneidad, esto es, algunos elementos de la matriz son

adimensionales, mientras que otros tienen unidades de longitud, es imposible utilizar un índice de desempeño que evalúe, de manera global, el desempeño cinemático de ese tipo de manipuladores. Es por esto que el concepto de longitud característica L se introduce con el fin de lograr adimensionar los elementos de la matriz jacobiana resolviendo el problema de su falta de homogeneidad. La longitud característica es definida por Tandirci *et. al.* en [8] en donde los elementos con unidades de longitud de la matriz jacobiana son divididos entre la longitud característica para conseguir que la matriz completa sea adimensional y obtener el número de condicionamiento mínimo para una postura dada, empleando un procedimiento de optimización.

2.3.1. Índices de manipulabilidad en robots planares

Partiendo del análisis del robot 3-R planar isotrópico mostrado en la figura 2.5, la matriz jacobiana de este manipulador esta definida como

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathbf{E}s_1 & \frac{1}{L}\mathbf{E}s_2 & \frac{1}{L}\mathbf{E}s_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde $s_i, i = 1, 2, 3$ es la proyección de dimensión 2 de los vectores de posición r_i definido como el vector de posición de O_i al punto P en el plano de movimiento X - Y , *i.e.*, $s_i = [x_i \ y_i]^T$. La matriz \mathbf{E} es definida como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

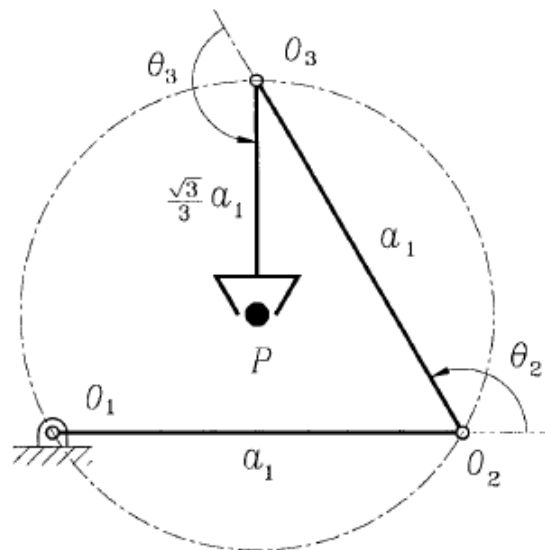


Figura 2.5: Manipulador planar 3-R isotrópico

Para poder obtener parámetros geométricos isotrópicos se deben verificar las condiciones de isotropía, esto es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} \mathbf{E} \left[\sum_1^3 (s_k s_k^T) \right] \mathbf{E}^T & \frac{1}{L} \left(\sum_1^3 s_k^T \right) \mathbf{E}^T \\ \frac{1}{L} \mathbf{E} \sum_1^3 s_k & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

por lo tanto

$$\sigma^2 = 3, \quad (2.27)$$

$$\sum_1^3 s_k = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{L^2} \mathbf{E} \left(\sum_1^3 (s_k s_k^T) \right) \mathbf{E}^T = \sigma^2 \mathbf{I}_2, \quad (2.29)$$

donde \mathbf{I}_2 es una matriz identidad de dimensión 2×2 . La ecuación (2.27) establece que cualquier valor singular de \mathbf{J} es igual a $\sqrt{3}$; la ecuación (2.28) establece que el punto de operación es el centroide de los centros de todas las articulaciones del manipulador si la matriz jacobiana es isotrópica. Observe que, dado que \mathbf{E} es una matriz ortogonal y $\sigma^2 = 3$, la ecuación (2.29) puede ser reescrita en una forma más simple

$$\frac{1}{L^2} \left(\sum_1^3 (s_k s_k^T) \right) = (3) \mathbf{I}_2. \quad (2.30)$$

Si se define $s_k = [x_k \quad y_k]^T$ entonces, de (2.28)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2.31)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \quad (2.32)$$

y desarrollando (2.30) se puede demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3L^2 \quad (2.33)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2L^2 \quad (2.34)$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \quad (2.35)$$

pero además, de la figura 2.5 (considerando la configuración isotrópica que da el triángulo equilátero) se verifica que

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = \frac{1}{3} a^2 = d^2 \quad (2.36)$$

donde d es la distancia del centro del triángulo a cada uno de sus vértices. Sumando (2.33) y (2.34) y usando (2.36)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 6L^2 = a^2 = 3d^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}a \quad (2.37)$$

de donde se puede extraer que

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2}d. \quad (2.38)$$

Es muy simple ahora observar que la longitud de los tres eslabones de este manipulador isotrópico son $a_1 = a_2 = \sqrt{3}d$ y $a_3 = d$. El manipulador en una postura isotrópica es mostrado en la figura 2.5.

2.4. Índice de manipulabilidad dinámica

El índice de manipulabilidad presentada en las secciones precedentes está basada en cinemática por lo que la dinámica del manipulador es ignorada completamente. Por lo tanto, a pesar de que esto puede ser aplicado en el diseño conceptual de brazos mecánicos y la evasión de singularidades sin considerar la dinámica de brazos robóticos, no es adecuado para el diseño detallado de brazos o para control de movimiento de altas velocidades ni altas presiciones. En esta sección se introduce el concepto de manipulabilidad dinámica para la evaluación de la habilidad de manipulabilidad, tomando en cuenta la dinámica del mecanismo.

Se asume que la dinámica del manipulador está dada por

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.39)$$

de (2.39) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \quad (2.40)$$

o bien, por simplicidad:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h} - \mathbf{g}] \quad (2.41)$$

por otra parte, se sabe que el modelo directo de velocidad es

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.42)$$

Obteniendo la derivada temporal de (2.42) se obtiene el modelo directo de aceleración

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.43)$$

La ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.44)$$

ó

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_r \quad (2.45)$$

donde $\mathbf{a}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$. Ahora bien, considerando la ecuación trivial

$$\mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+ = \mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+ \quad (2.46)$$

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{J}\mathbf{J}^+ + (\mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+) \quad (2.47)$$

donde $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$. El término $\mathbf{a}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede ser interpretado como la aceleración virtual causada por la relación no lineal entre los dos sistemas coordinados de \mathbf{q} y \mathbf{r} . Multiplicando (2.47) por \mathbf{a}_r

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r &= \mathbf{J}\mathbf{J}^+ \mathbf{a}_r + (\mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+) \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_r &= \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{J}^+ \mathbf{a}_r + (\mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+) \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sustituyendo la ecuación (2.41) en la ecuación (2.45)

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h} - \mathbf{g}] + \mathbf{a}_r \quad (2.49)$$

y sustituyendo ahora la ecuación (2.48)

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h} - \mathbf{g}] + \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{J}^+ \mathbf{a}_r + (\mathbf{I}_m - \mathbf{J}\mathbf{J}^+) \mathbf{a}_r \quad (2.50)$$

es posible reescribir la ecuación (2.50) como

$$\dot{\mathbf{t}}^* = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\tau}^* \quad (2.51)$$

Observe que la ecuación (2.51) es similar a la ecuación (1.1) mediante la cual se obtiene el índice de manipulabilidad por medio de (2.18) por lo que, de igual manera es posible utilizar (2.51) para obtener un índice que mida la manipulabilidad dinámica el cuál está dado por

$$w_d = \sqrt{\det \left[(\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}) (\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})^T \right]} \quad (2.52)$$

Ahora bien, puesto que

$$\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{J}^T = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{J}^T \quad (2.53)$$

la ecuación (2.52) puede ser escrita como

$$w_d = \sqrt{\det \left(\mathbf{J} (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{J}^T \right)} \quad (2.54)$$

Capítulo 3

Robot manipulador serial Fanuc ARC Mate 100 iC

El modelo del robot de soldadura que se estudia en este capítulo es el ARC[©] Mate 100iC de Fanuc (ver figura 3.1). El ARC Mate[©] iC/12 es un robot especialmente diseñado para tareas de soldadura de arco. Su característica principal es una muñeca hueca para la integración de micro-alambre y el mayor desempeño de movilidad de su clase. En la figura 3.2 se indican, en vistas ortogonales, las dimensiones principales del robot y en la figura 3.3 se aprecian los rangos de rotación de sus articulaciones.



Figura 3.1: Robot manipulador serial Fanuc modelo ARC Mate 100iC/12.

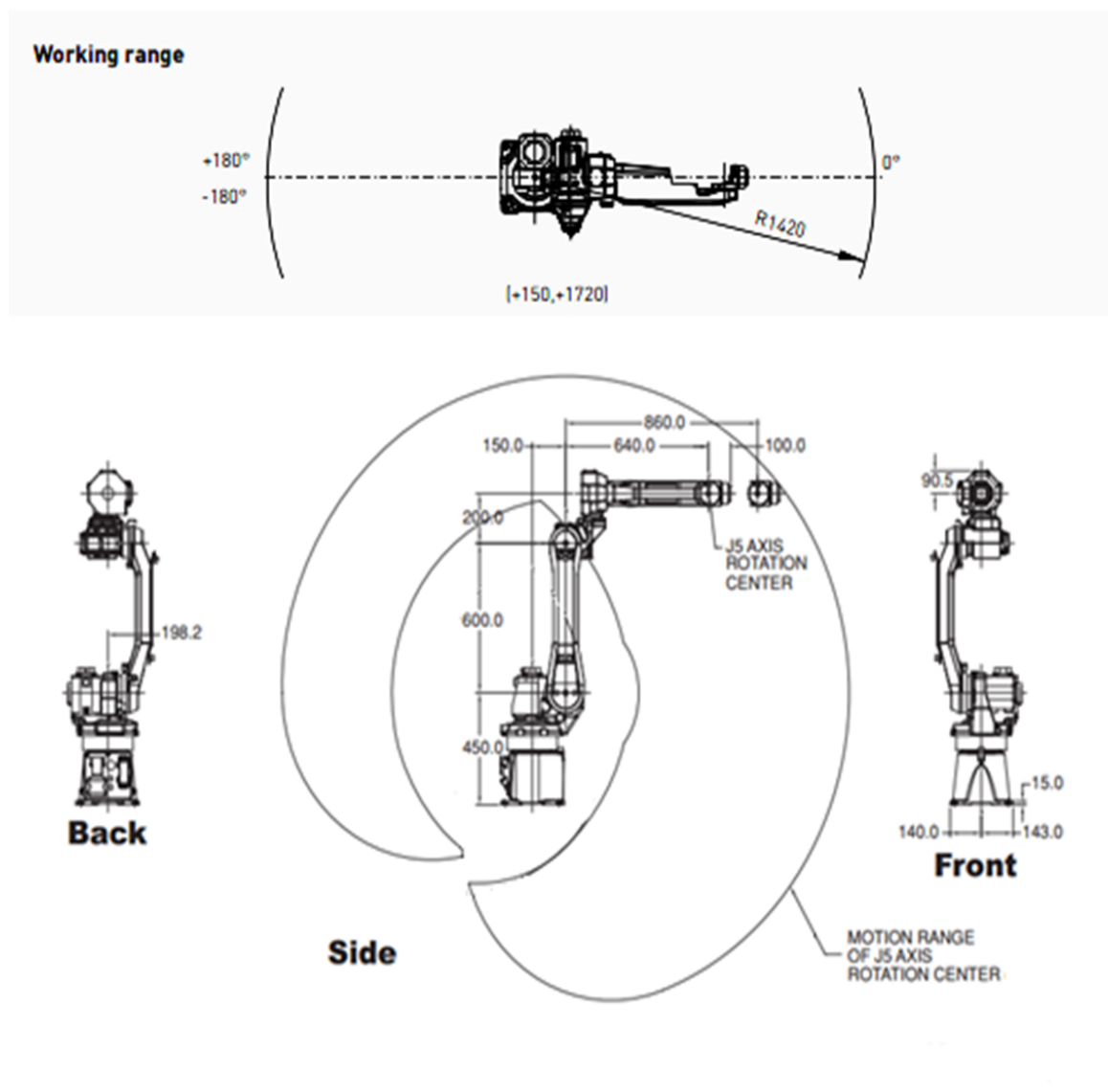


Figura 3.2: Espacio de trabajo y dimensiones del manipulador.

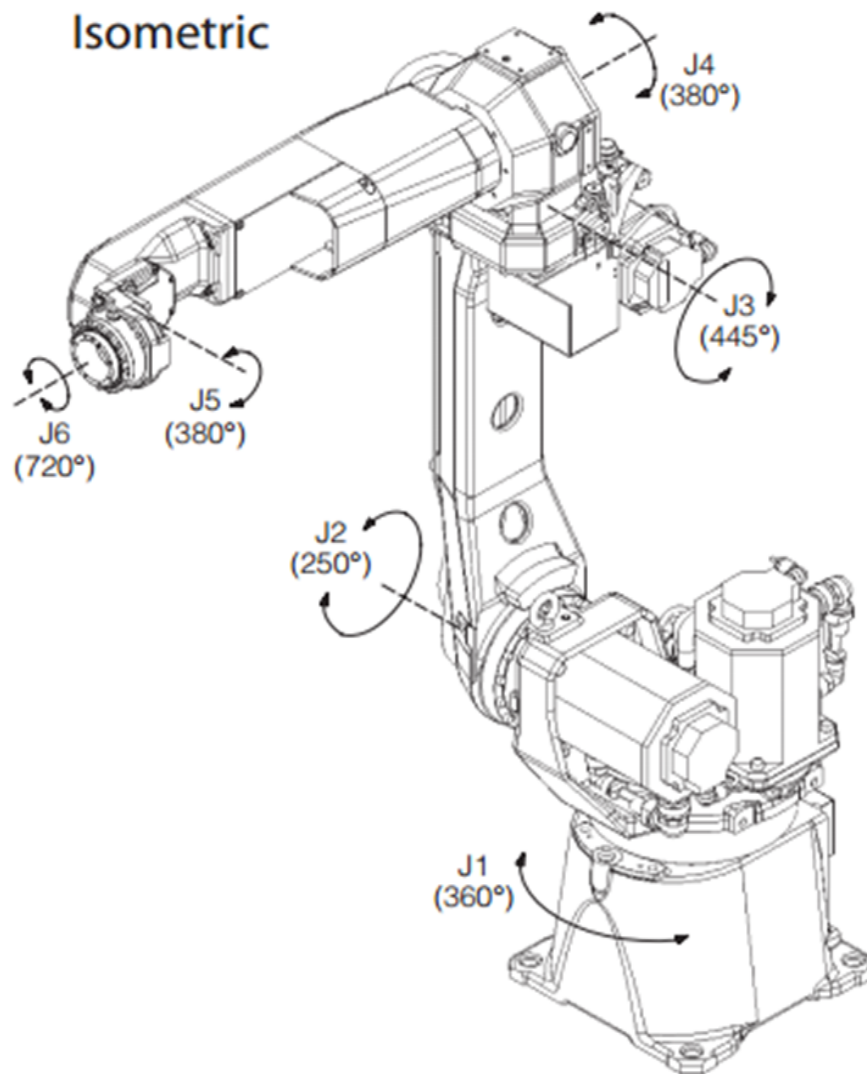


Figura 3.3: Rangos de rotación de las articulaciones del manipulador serial *Fanuc* modelo *ARC Mate 100iC/12*.

Algunas características a destacar son las que se enlistan a continuación.

- Un brazo rígido con avanzada tecnología de servomotores, capaz de otorgar el mejor desempeño de velocidad y aceleración, reduciendo el tiempo de ciclo en un 15%.
- Un mecanismo único de accionamiento de la muñeca que permite la operación en espacios estrechos y la instalación de alta densidad.
- Enrutamiento del micro-alambre a través de un antebrazo hueco que proporciona una administración eficiente de cables con alimentación estable de alambre para una soldadura de alto rendimiento.
- Integración en el robot de cables de alimentación de soldadura además de cables de control de alimentador de alambre y mangueras de gas de asistencia.
- La capacidad de carga mejorada de la muñeca que permite el soporte de varias herramientas.

3.1. Descripción de la cadena cinemática

Puesto que las relaciones existentes entre las coordenadas operacionales y las variables articulares de un robot dependen de la estructura geométrica de este, resulta de interés establecer un procedimiento normalizado para la descripción de dicha estructura, y de esa manera simplificar el tratamiento de los problemas del modelado cinemático directo y cinemático inverso.

La figura 3.4 muestra el modelo de alambre del robot serial de 6 grados de libertad Fanuc ARC Mate 100iC/12. En ella se muestran los marcos asignados según la convención de Denavit-Hartenberg modificada (DHM) [10]. A partir de estos marcos se identifican los parámetros geométricos que se muestran en la tabla 3.1. En esta misma representación se muestra un marco ortogonal suplementario $O_h-x_h-y_h-h_z$ asignado a la punta de la antorcha del robot el cual es usado para simplificar la descripción de la posición y orientación del órgano terminal. La posición y orientación del marco h con respecto al marco 6, unido a la herramienta con el origen en el centro de la muñeca, está definida mediante la siguiente matriz homogénea:

$${}^6_H T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & -0.7071 & d_{h_x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 & d_{h_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde $d_{h_x} = -0.05m$, $d_{h_z} = 0.5m$

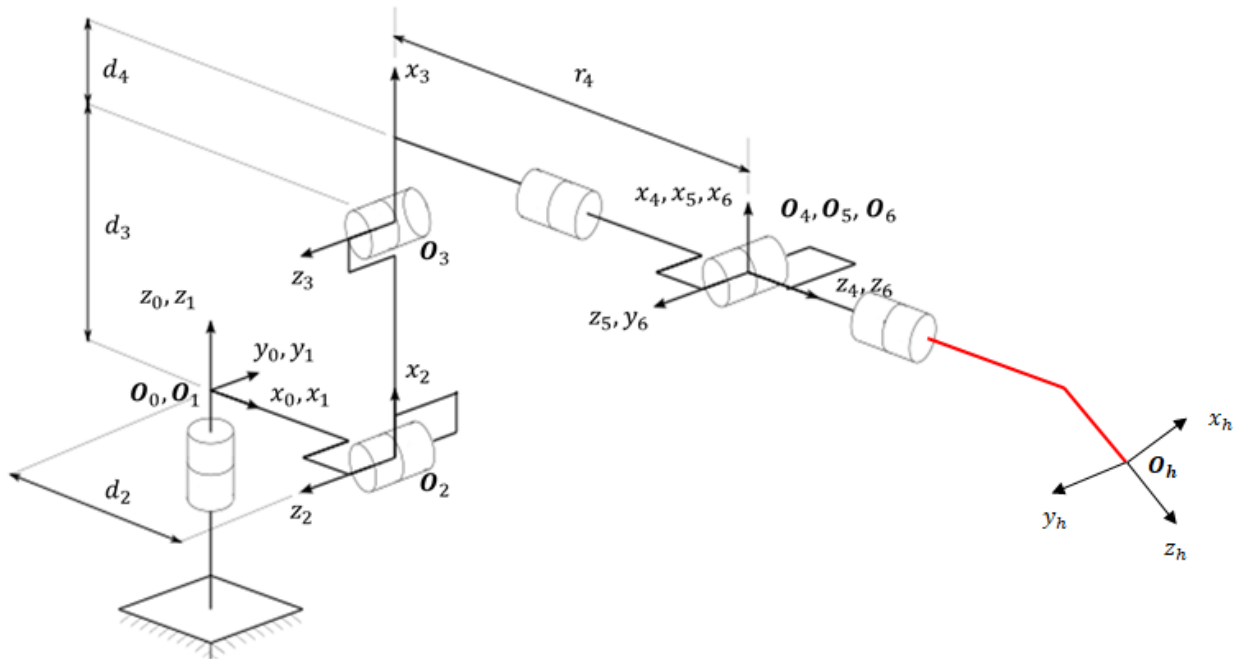


Figura 3.4: Diagrama de alambre del robot serial de 6 grados de libertad.

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j°	r_j
1	0	0°	0	θ_1	0
2	0	90°	d_2	θ_2	0
3	0	0°	d_3	θ_3	0
4	0	90°	d_4	θ_4	r_4
5	0	-90°	0	θ_5	0
6	0	90°	0	θ_6	0

Tabla 3.1: Tabla de parámetros DHM.

donde $d_2 = 0.15 \text{ m}$, $d_3 = 0.60 \text{ m}$, $d_4 = 0.20 \text{ m}$, $r_4 = 0.64 \text{ m}$.

Por medio de la Tabla 3.1 podemos definir las 6 *matrices elementales* del robot (3.3)

$$\begin{aligned}
{}^0_1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & d_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3_4T &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & -1 & -r_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5_6T &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

las cuales describen la posición y orientación del marco Σ_j con respecto al marco Σ_{j-1} para $j = 1, 2, 3 \dots 6$ y donde $s_i = \text{sen}(\theta_i)$, $c_i = \text{cos}(\theta_i)$ para $i = 1, 2, 3 \dots 6$.

3.2. Análisis cinemático

Modelo cinemático directo de posición

El modelo cinemático directo de posición de un robot manipulador es la relación que permite determinar el vector

$$x = f(q) \tag{3.3}$$

de coordenadas operacionales del robot en función de su configuración q . Mediante las propiedades de las matrices de transformación homogéneas, se puede obtener la matriz de transformación 0_hT

$${}^0_hT = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T {}^6_hT \tag{3.4}$$

que se obtiene con el producto de las *matrices elementales* en orden ascendente y consecutivo. El lado izquierdo de (3.4) contiene implícitamente las coordenadas operacionales

mientras que el producto de las matrices del lado derecho determina implícitamente las componentes de la función vectorial f de la ecuación (3.3). En consecuencia, el desarrollo de este producto equivale a la resolución del modelo directo de posición

$${}^0_h T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Los elementos T_{14}, T_{24}, T_{34} de (3.5) definen la posición del marco h con respecto al marco 0 en sus componentes x, y, z , respectivamente, esto es

$$p_x = T_{14}, \quad (3.6)$$

$$p_y = T_{24}, \quad (3.7)$$

$$p_z = T_{34}, \quad (3.8)$$

Por otra parte, mediante los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ (correspondientes a rotaciones sucesivas en el orden Z - Y - Z) podemos definir la orientación a partir de la matriz de rotación

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Modelo cinemático directo de velocidad

Como se menciono anteriormente, el vector de estado de velocidad (o *twist* por su denominación en inglés) de un robot manipulador serial de 6 grados de libertad (g.d.l) está dado por

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.10)$$

donde el vector *twist* es

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Los vectores \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega}$ son la velocidad lineal y la velocidad angular del punto de interés (o *tool center point* -TCP-) del órgano terminal. En (3.10) $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de dimensión 6, de las velocidades articulares del robot mientras que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es la matriz jacobiana del robot que, por simplicidad, será expresada como \mathbf{J} .

La matriz jacobiana básica de un robot determina la relacion existente entre las velocidades articulares y el estado de velocidad del órgano terminal del robot. El vector del estado

de velocidad es expresado en términos de sus componentes cartesianas. Las expresiones simbólicas que componen la matriz jacobiana $J \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ del robot Fanuc ARC Mate 100ic/12, dadas por el paquete *SYMORO* [11], están dadas por

$$J(1,1) = -(d_2 s(t_1)) - d_3 c(t_2) s(t_1) - d_4 c(t_2 + t_3) * s(t_1) - r_4 s(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.12)$$

$$J(1,2) = r_4 c(t_1) c(t_2 + t_3) - d_3 c(t_1) s(t_2) - d_4 c(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.13)$$

$$J(1,3) = r_4 c(t_1) c(t_2 + t_3) - d_4 c(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.14)$$

$$J(1,4) = 0 \quad (3.15)$$

$$J(1,5) = 0 \quad (3.16)$$

$$J(1,6) = 0 \quad (3.17)$$

$$J(2,1) = d_2 c(t_1) + d_3 c(t_1) c(t_2) + d_4 c(t_1) c(t_2 + t_3) + r_4 c(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.18)$$

$$J(2,2) = r_4 c(t_2 + t_3) s(t_1) - d_3 s(t_1) s(t_2) - d_4 * s(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.19)$$

$$J(2,3) = r_4 c(t_2 + t_3) s(t_1) - d_4 s(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.20)$$

$$J(2,4) = 0 \quad (3.21)$$

$$J(2,5) = 0 \quad (3.22)$$

$$J(2,6) = 0 \quad (3.23)$$

$$J(3,1) = 0 \quad (3.24)$$

$$J(3,2) = d_3 c(t_2) + d_4 c(t_2 + t_3) + r_4 s(t_2 + t_3) \quad (3.25)$$

$$J(3,3) = d_4 c(t_2 + t_3) + r_4 * s(t_2 + t_3) \quad (3.26)$$

$$J(3,4) = 0 \quad (3.27)$$

$$J(3,5) = 0 \quad (3.28)$$

$$J(3,6) = 0 \quad (3.29)$$

$$J(4,1) = 0 \quad (3.30)$$

$$J(4,2) = s(t_1) \quad (3.31)$$

$$J(4,3) = s(t_1) \quad (3.32)$$

$$J(4,4) = c(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.33)$$

$$J(4,5) = c(t_4) s(t_1) - c(t_1) c(t_2 + t_3) s(t_4) \quad (3.34)$$

$$J(4,6) = c(t_1) c(t_5) s(t_2 + t_3) + c(t_1) c(t_2 + t_3) c(t_4) s(t_5) + s(t_1) s(t_4) s(t_5) \quad (3.35)$$

$$J(5,1) = 0 \quad (3.36)$$

$$J(5,2) = -c(t_1) \quad (3.37)$$

$$J(5,3) = -c(t_1) \quad (3.38)$$

$$J(5,4) = s(t_1) s(t_2 + t_3) \quad (3.39)$$

$$J(5,5) = -(c(t_1) c(t_4)) - c(t_2 + t_3) s(t_1) s(t_4) \quad (3.40)$$

$$J(5,6) = c(t_5) s(t_1) s(t_2 + t_3) + c(t_2 + t_3) c(t_4) s(t_1) s(t_5) - c(t_1) s(t_4) s(t_5) \quad (3.41)$$

$$J(6,1) = 1 \quad (3.42)$$

$$J(6,2) = 0 \quad (3.43)$$

$$J(6,3) = 0 \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

$$J(6,4) = -c(t_2 + t_3) \quad (3.46)$$

$$J(6,5) = -(s(t_2 + t_3)s(t_4)) \quad (3.47)$$

$$J(6,6) = -(c(t_2 + t_3)c(t_5)) + c(t_4)s(t_2 + t_3) * s(t_5) \quad (3.48)$$

donde $t_i \equiv \theta_i$, para $i = 1, 2, \dots, 6$.

La arquitectura del robot Fanuc permite controlar tanto la velocidad lineal como la velocidad angular del órgano terminal. Así, los tres primeros renglones de la matriz jacobiana están asociados a la velocidad lineal del órgano terminal mientras que los últimos tres renglones están asociados a la velocidad angular. En consecuencia, la diferencia de dimensiones impide evaluar de manera consistente la facilidad de efectuar movimientos del órgano terminal.

3.3. Homogeneización de la matriz jacobiana

Uno de los principales inconvenientes para el uso efectivo de los índices de desempeño cinemático es que la matriz jacobiana debe de ser dimensionalmente homogénea, ya que el cálculo de un índice con ésta implica una mezcla de unidades por lo que no es posible definir un significado físico y consistente.

El tema de la homogeneización de la matriz jacobiana de manipuladores ha sido estudiado en la literatura. Angeles *et. al.* en [1] introduce el concepto de la *longitud característica* con el fin de homogeneizar la matriz jacobiana. La *longitud característica* se aplica como divisor de los elementos de la matriz jacobiana asociados a los componentes de la velocidad lineal del órgano terminal. La *longitud característica* de un robot isotrópico de 6 g.d.l. es la raíz cuadrada de las distancias de las articulaciones al punto de operación cuando la raíz se encuentra en una postura mínima del número de condicionamiento, esto es:

$$L = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_1^6 d_k^2}. \quad (3.49)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana homogeneizada mediante la longitud característica \bar{J} está dada por

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} J_{11}/L & J_{12}/L & J_{13}/L & J_{14}/L & J_{15}/L & J_{16}/L \\ J_{21}/L & J_{22}/L & J_{23}/L & J_{24}/L & J_{25}/L & J_{26}/L \\ J_{31}/L & J_{32}/L & J_{33}/L & J_{34}/L & J_{35}/L & J_{36}/L \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

De este modo se logra obtener una matriz jacobiana de carácter adimensional la cual puede ser usada para la obtención de un índice de desempeño.

Capítulo 4

Robot manipulador paralelo 3-RRR

El robot manipulador paralelo 3-RRR está conformado por una plataforma móvil triangular equilátera (PM) $C_1C_2C_3$ y tres cadenas seriales simétricas RRR unidas a una plataforma fija triangular equilátera (PF) $A_1A_2A_3$ formando tres cadenas cinemáticas cerradas $A_1B_1C_1C_2B_2A_2$, $A_2B_2C_2C_3B_3A_3$ y $A_3B_3C_3C_1B_1A_1$ (ver figura 4.1). El radio del círculo circunscrito a la PM se denota como r , mientras que el radio del círculo circunscrito a la PF es R . Las longitudes de los eslabones de las piernas son l_1 y l_2 . El punto P correspondiente al centroide de la PM representa el TCP del órgano terminal con coordenadas x_p y y_p . Junto con el ángulo de orientación ϕ de la misma plataforma constituyen las variables operacionales del robot. El marco de referencia Σ_0 coincide con la articulación A_1 y cuyo eje x_0 pasa a través de A_2 . Las articulaciones A_i ($i = 1, 2, 3$) son activas (representadas en color gris en la figura) mientras que las articulaciones B_i y C_i son pasivas.

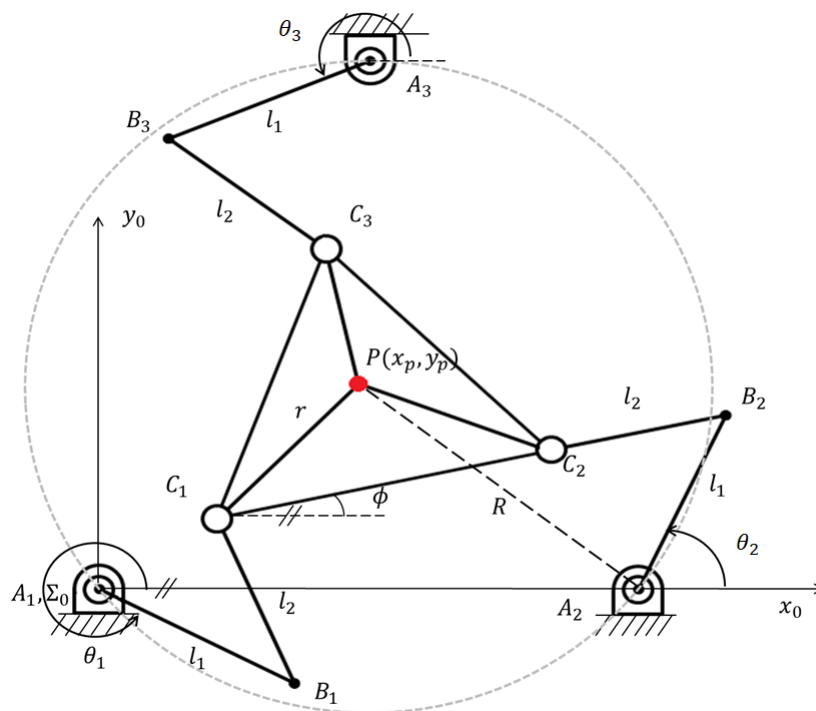


Figura 4.1: Descripción geométrica del robot paralelo 3-RRR

4.1. Modelo cinemático inverso de posición y modos de funcionamiento

Para un manipulador 3-RRR cuya arquitectura se especifica mediante los parámetros geométricos dados en el párrafo precedente, la resolución del problema inverso de posición del manipulador 3-RRR consiste en determinar el valor de las variables articulares actuadas (ver figura 4.2) θ_1, θ_2 y θ_3 a partir de las coordenadas operacionales deseadas de la plataforma móvil x_p, y_p y ϕ . La dirección de los vectores $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ y \mathbf{r}_3 proporcionan la solución del modelo cinemático inverso de posición del manipulador 3-RRR, ya que podemos obtener los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ desconocidos originalmente.

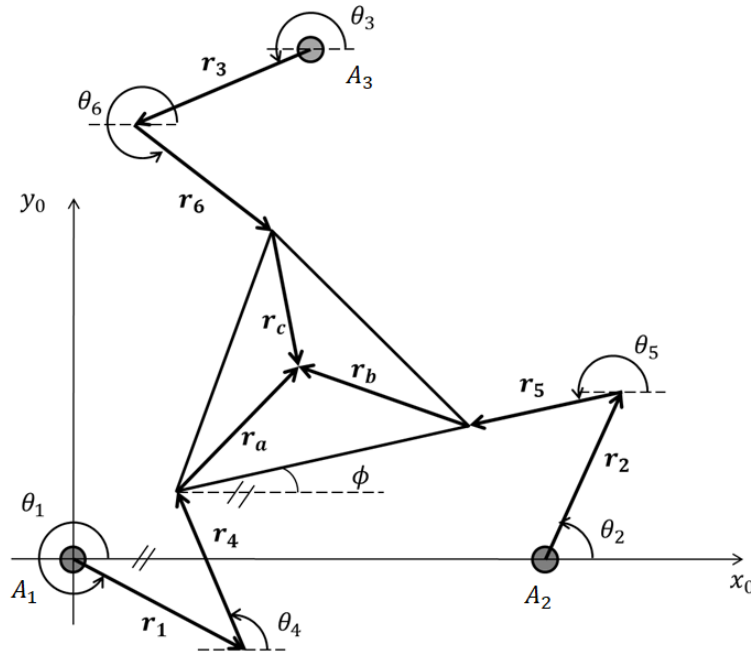


Figura 4.2: Equema vectorial del robot paralelo 3-RRR.

4.1.1. Análisis vectorial

Mediante un análisis vectorial se pueden determinar los vectores de posición $\mathbf{r}_{C_1}, \mathbf{r}_{C_2}$ y \mathbf{r}_{C_3} de los vértices C_1, C_2 y C_3 de la plataforma móvil (ver figura 4.5), siendo estos dados como

$$\mathbf{r}_{C_1} = \begin{bmatrix} r_{C_{1x}} \\ r_{C_{1y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p - r_{ax} \\ y_p - r_{ay} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} r_{C_{2x}} \\ r_{C_{2y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p - r_{bx} \\ y_p - r_{by} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}_{C_3} = \begin{bmatrix} r_{C_{3x}} \\ r_{C_{3y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p - r_{cx} \\ y_p - r_{cy} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

A continuación, se obtienen los vectores r_1, r_2, \dots, r_6 mediante la aplicación de la fórmula (4.4) de Chace [12]

$$\mathbf{A} = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\right)^2} (\hat{C} \times \hat{k}) + \left(\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C}\right) \hat{C} \quad (4.4)$$

correspondiente al caso 4 de ecuaciones vectoriales planas (de la forma $A = B + C$ donde las magnitudes de A, B Y C se conocen y cuyas incógnitas son las direcciones de dos vectores de la ecuación).

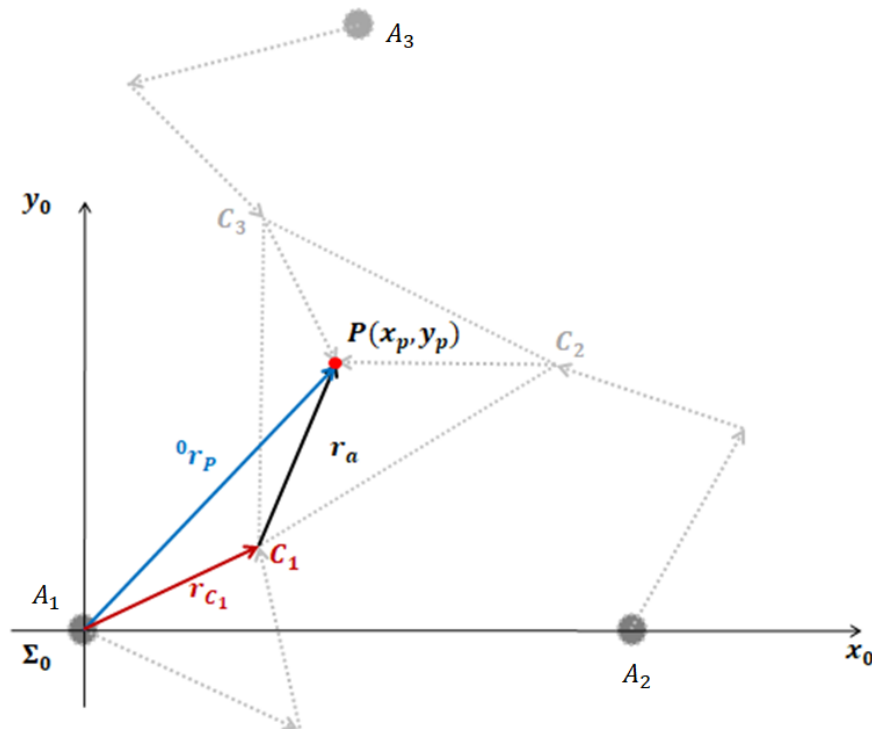
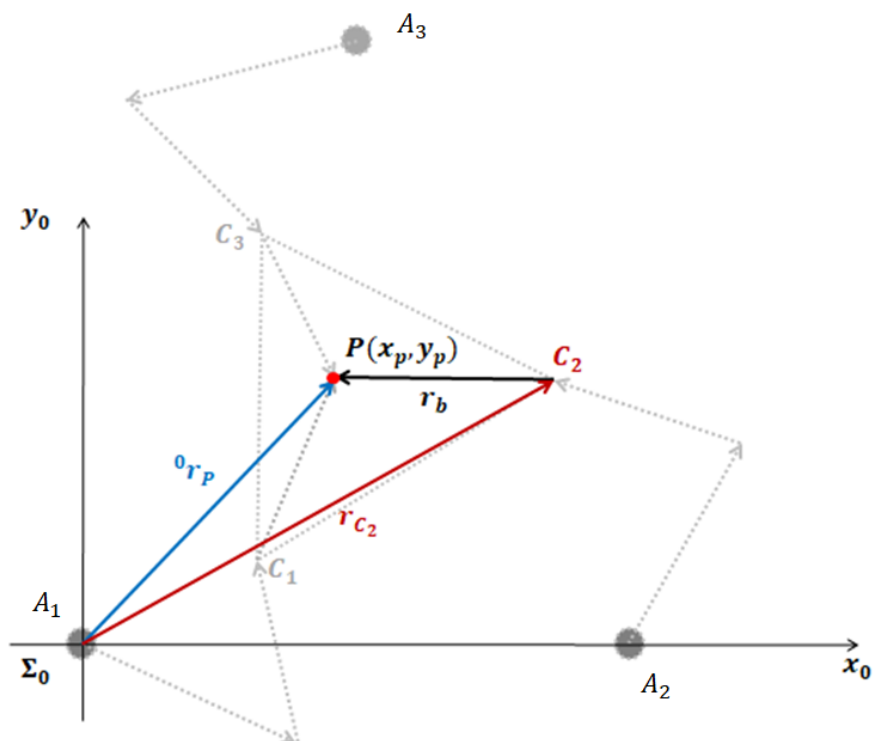
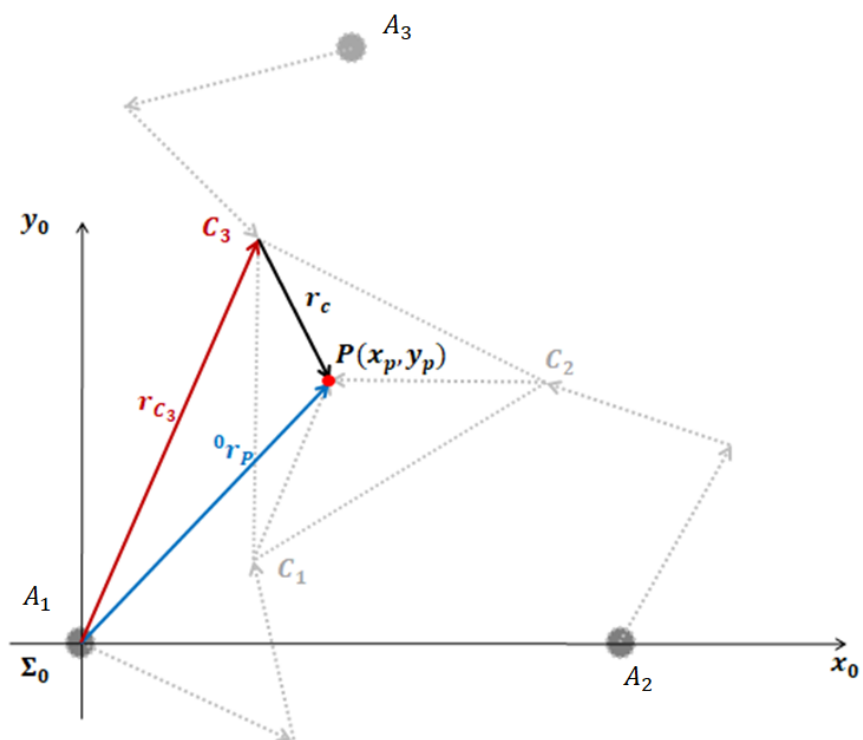


Figura 4.3: Vector \mathbf{r}_{C_1} .

Figura 4.4: Vector r_{C_2} .Figura 4.5: Vector r_{C_3} .

En la expresión (4.4) A, B y C son las magnitudes de los vectores \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} . \hat{C} es el vector unitario conocido que define la dirección del vector \mathbf{C} y \tilde{k} es el vector unitario en la dirección del eje z del marco ortonormal Σ_0 . Del esquema vectorial asociado al vértice C_1 (ver figura 4.6) se obtiene la ecuación

$$\mathbf{r}_{C_1} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \quad (4.5)$$

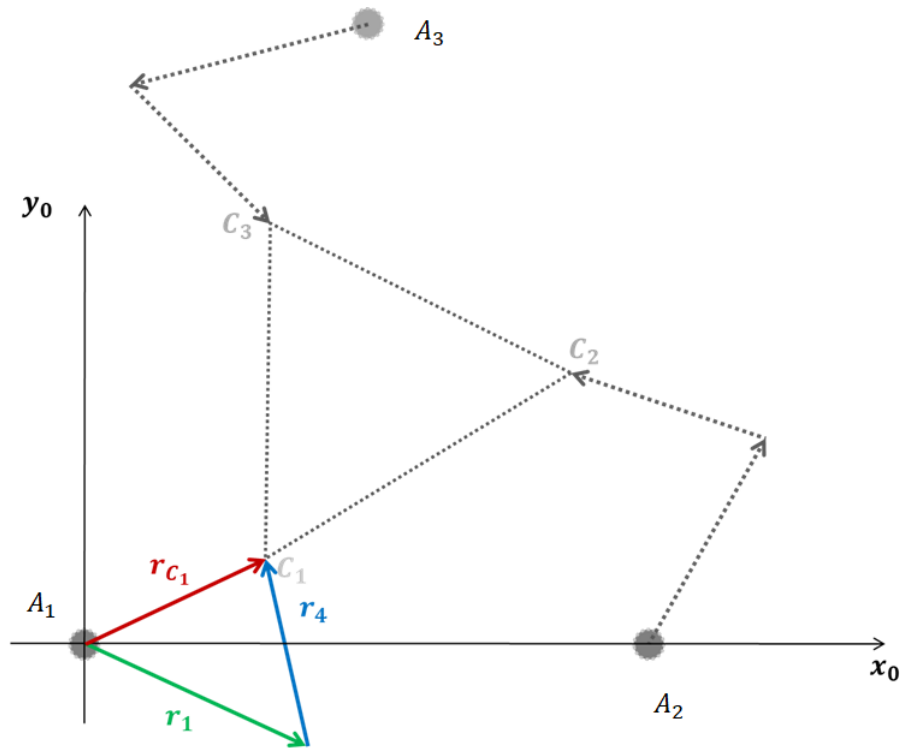


Figura 4.6: Análisis vectorial de C_1

La ecuación (4.5) puede ser reescrita en términos de las magnitudes y direcciones de cada vector, como se indica en la ecuación

$$r_{C_1} \hat{r}_{C_1} = r_1 \hat{r}_1 + r_4 \hat{r}_4. \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.6) se sabe que la magnitud r_{C_1} y dirección \hat{r}_{C_1} son conocidas. Sin embargo, se desconocen las direcciones \hat{r}_1 y \hat{r}_4 .

$$r_{C_1} = \sqrt{r_{C_{1x}}^2 + r_{C_{1y}}^2} = k_1, \quad (4.7)$$

$$\hat{r}_{C_1} = \frac{r_{C_{1x}}}{k_1} \hat{i} + \frac{r_{C_{1y}}}{k_1} \hat{j} = r_{C_{1ux}} \hat{i} + r_{C_{1uy}} \hat{j}. \quad (4.8)$$

Las expresiones (4.7) y (4.8) son, respectivamente, la *magnitud* y *dirección* del vector \mathbf{r}_{C_1} . Aplicando ahora la fórmula (4.4) para encontrar \mathbf{r}_1

$$\mathbf{r}_1 = \pm \sqrt{l_1^2 - \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_1^2}{2k_1} \right)^2} \left((r_{C_{1ux}} \hat{i} + r_{C_{1uy}} \hat{j}) \times \hat{k} \right) + \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_1^2}{2k_1} \right) (r_{C_{1ux}} \hat{i} + r_{C_{1uy}} \hat{j}), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{r}_1 = \pm \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4}k_1^2} (r_{C_{1uy}} \hat{i} - r_{C_{1ux}} \hat{j}) + \frac{1}{2}k_1 (r_{C_{1ux}} \hat{i} + r_{C_{1uy}} \hat{j}), \quad (4.10)$$

Y definiendo

$$g_1 \equiv \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4}k_1^2},$$

$$\varepsilon_1 = \pm 1,$$

luego

$$\mathbf{r}_1 = \varepsilon_1 g_1 (r_{C_{1uy}} \hat{i} - r_{C_{1ux}} \hat{j}) + \frac{1}{2}k_1 (r_{C_{1ux}} \hat{i} + r_{C_{1uy}} \hat{j}), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 g_1 r_{C_{1uy}} + \frac{1}{2}k_1 r_{C_{1ux}} \\ \frac{1}{2}k_1 r_{C_{1uy}} - \varepsilon_1 g_1 r_{C_{1ux}} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Despejando \mathbf{r}_4 de (4.5) se obtiene

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} r_{C_{1x}} \\ r_{C_{1y}} \end{bmatrix} - \mathbf{r}_1 \quad (4.13)$$

Realizando un segundo análisis vectorial para la posición del vértice C_2 (ver figura 4.7) se obtiene la ecuación

$$\mathbf{r}_{C_2}^* = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 \quad (4.14)$$

donde $\mathbf{r}_{C_2}^* = \mathbf{r}_{C_2} - S_x$.

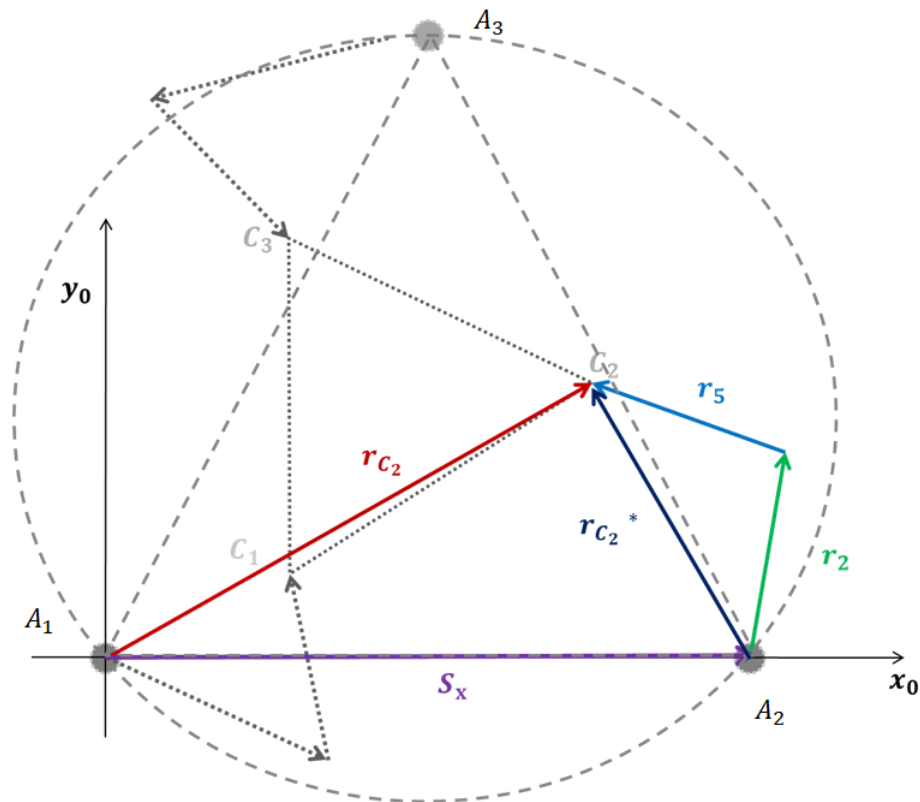


Figura 4.7: Análisis vectorial de C_2 .

Con $S_x = \sqrt{3}$ y sobre la horizontal en dirección \hat{i} , $\mathbf{r}_{C_2}^*$ se puede definir como

$$\mathbf{r}_{C_2}^* = \begin{bmatrix} r_{C_{2x}} - S \\ r_{C_{2y}} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

cuya *magnitud* y *dirección* están dados por

$$r_{C_2} = \sqrt{(r_{C_{2x}} - S)^2 + r_{C_{2y}}^2} = k_2, \quad (4.16)$$

$$\hat{r}_{C_2} = \frac{r_{C_{2x}} - S}{k_2} \hat{i} + \frac{r_{C_{2y}}}{k_2} \hat{j} = r_{C_{2ux}} \hat{i} + r_{C_{2uy}} \hat{j}. \quad (4.17)$$

Aplicando ahora la fórmula (4.4) para encontrar \mathbf{r}_2

$$\mathbf{r}_2 = \pm \sqrt{l_1^2 - \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_2^2}{2k_2} \right)^2} \left((r_{C_{2ux}} \hat{i} + r_{C_{2uy}} \hat{j}) \times \hat{k} \right) + \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_2^2}{2k_2} \right) (r_{C_{2ux}} \hat{i} + r_{C_{2uy}} \hat{j}), \quad (4.18)$$

$$\mathbf{r}_2 = \pm \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4} k_2^2 (r_{C_{2uy}} \hat{i} - r_{C_{2ux}} \hat{j})} + \frac{1}{2} k_2 (r_{C_{2ux}} \hat{i} + r_{C_{2uy}} \hat{j}), \quad (4.19)$$

Y definiendo

$$g_2 \equiv \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4}k_2^2},$$

$$\varepsilon_2 = \pm 1,$$

luego

$$\mathbf{r}_2 = \varepsilon_2 g_2 (r_{C_{2uy}} \hat{i} - r_{C_{2ux}} \hat{j}) + \frac{1}{2} k_2 (r_{C_{2ux}} \hat{i} + r_{C_{2uy}} \hat{j}), \quad (4.20)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 g_2 r_{C_{2uy}} + \frac{1}{2} k_2 r_{C_{2ux}} \\ \frac{1}{2} k_2 r_{C_{2uy}} - \varepsilon_2 g_2 r_{C_{2ux}} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Despejando \mathbf{r}_5 de (4.14) se obtiene

$$\mathbf{r}_5 = \begin{bmatrix} r_{C_{2x}} - S \\ r_{C_{2y}} \end{bmatrix} - \mathbf{r}_2. \quad (4.22)$$

Realizando un tercer análisis vectorial de la posición del vértice C_3 (ver figura 4.8) se obtiene la ecuación

$$\mathbf{r}_{C_3}^* = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_6, \quad (4.23)$$

donde $\mathbf{r}_{C_3}^* = \mathbf{r}_{C_3} - \frac{1}{2} S_x - \frac{\sqrt{3}}{2} S_y$.

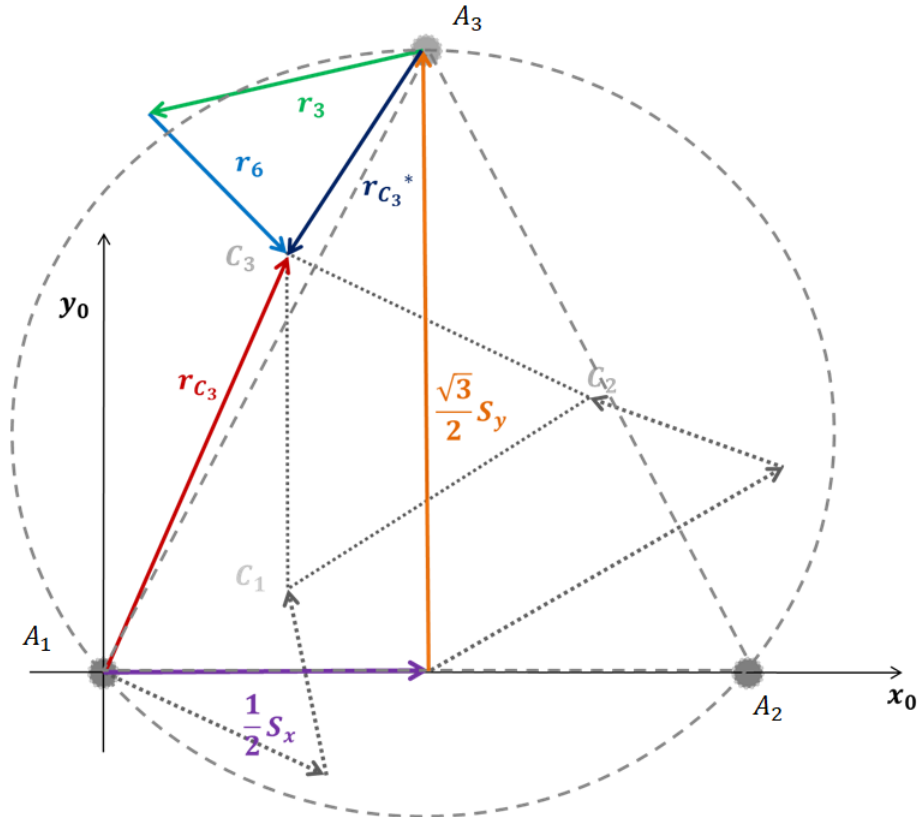


Figura 4.8: Análisis vectorial de C_3 .

Observando en la figura 4.8 que $S/2$ se encuentra en la horizontal con dirección \hat{i} y $S\sqrt{3}/2$ en posición vertical con dirección \hat{j} , \mathbf{r}_{C_3} puede definirse como

$$\mathbf{r}_{C_3} = \begin{bmatrix} r_{C_{2x}} - S/2 \\ r_{C_{2y}} - \sqrt{3}S/2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

cuya *magnitud* y *dirección* están dados por

$$r_{C_3} = \sqrt{(r_{C_{2x}} - S/2)^2 + (r_{C_{2y}} - \sqrt{3}S/2)^2} = k_3, \quad (4.25)$$

$$\hat{r}_{C_3} = \frac{r_{C_{2x}} - S/2}{k_3} \hat{i} + \frac{r_{C_{2y}} - \sqrt{3}S/2}{k_3} \hat{j} = r_{C_{3ux}} \hat{i} + r_{C_{3uy}} \hat{j}. \quad (4.26)$$

Aplicando ahora la fórmula (4.4) para encontrar \mathbf{r}_3

$$\mathbf{r}_3 = \pm \sqrt{l_1^2 - \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_3^2}{2k_3} \right)^2} \left((r_{C_{3ux}} \hat{i} + r_{C_{3uy}} \hat{j}) \times \hat{k} \right) + \left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + k_3^2}{2k_3} \right) (r_{C_{3ux}} \hat{i} + r_{C_{3uy}} \hat{j}), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{r}_3 = \pm \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4}k_3^2} (r_{C_{3uy}} \hat{i} - r_{C_{3ux}} \hat{j}) + \frac{1}{2}k_3 (r_{C_{3ux}} \hat{i} + r_{C_{3uy}} \hat{j}). \quad (4.28)$$

Definiendo

$$g_3 \equiv \sqrt{l_1^2 - \frac{1}{4}k_3^2},$$

$$\varepsilon_3 = \pm 1,$$

así

$$\mathbf{r}_3 = \varepsilon_3 g_3 (r_{C_{3uy}} \hat{i} - r_{C_{3ux}} \hat{j}) + \frac{1}{2}k_3 (r_{C_{3ux}} \hat{i} + r_{C_{3uy}} \hat{j}), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 g_3 r_{C_{3uy}} + \frac{1}{2}k_3 r_{C_{3ux}} \\ \frac{1}{2}k_3 r_{C_{3uy}} - \varepsilon_3 g_3 r_{C_{3ux}} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Despejando \mathbf{r}_6 de (4.23) se obtiene:

$$\mathbf{r}_6 = \begin{bmatrix} r_{C_{3x}} - S/2 \\ r_{C_{3y}} - \sqrt{3}S/2 \end{bmatrix} - \mathbf{r}_3. \quad (4.31)$$

Los vectores \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 pueden ser escritos como:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 g_1 r_{C_{1uy}} + \frac{1}{2} k_1 r_{C_{1ux}} \\ \frac{1}{2} k_1 r_{C_{1uy}} - \varepsilon_1 g_1 r_{C_{1ux}} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 g_2 r_{C_{2uy}} + \frac{1}{2} k_2 r_{C_{2ux}} \\ \frac{1}{2} k_2 r_{C_{2uy}} - \varepsilon_2 g_2 r_{C_{2ux}} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_3 g_3 r_{C_{3uy}} + \frac{1}{2} k_3 r_{C_{3ux}} \\ \frac{1}{2} k_3 r_{C_{3uy}} - \varepsilon_3 g_3 r_{C_{3ux}} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

La dirección de los vectores (4.32), (4.33) y (4.34) proporcionan la solución del modelo cinemático inverso de posición del manipulador 3-RRR ya que

$$\theta_1 = \text{atan2}(r_{1y}, r_{1x}), \quad (4.35)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(r_{2y}, r_{2x}), \quad (4.36)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(r_{3y}, r_{3x}). \quad (4.37)$$

Dado a que existen dos posibles valores para $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 que determinan dos soluciones para cada uno de los vectores asociados a las piernas del robot, la combinación de estas soluciones establecen ocho modos de funcionamiento (*Mf*) para el manipulador, como se indica en la tabla 4.1. En la figura 4.9 se muestran las posturas correspondientes a los *Mf* del manipulador que permiten ubicar a la PM en la pose deseada mostrada. Observe que ésta pose de la PM es la misma en los 8 casos.

	ε_1	ε_2	ε_3
<i>Mf</i> 1	+1	+1	+1
<i>Mf</i> 2	+1	+1	-1
<i>Mf</i> 3	+1	-1	+1
<i>Mf</i> 4	+1	-1	-1
<i>Mf</i> 5	-1	+1	+1
<i>Mf</i> 6	-1	+1	-1
<i>Mf</i> 7	-1	-1	+1
<i>Mf</i> 8	-1	-1	-1

Tabla 4.1: Valores de ε que definen los *Mf* del manipulador 3-RRR.

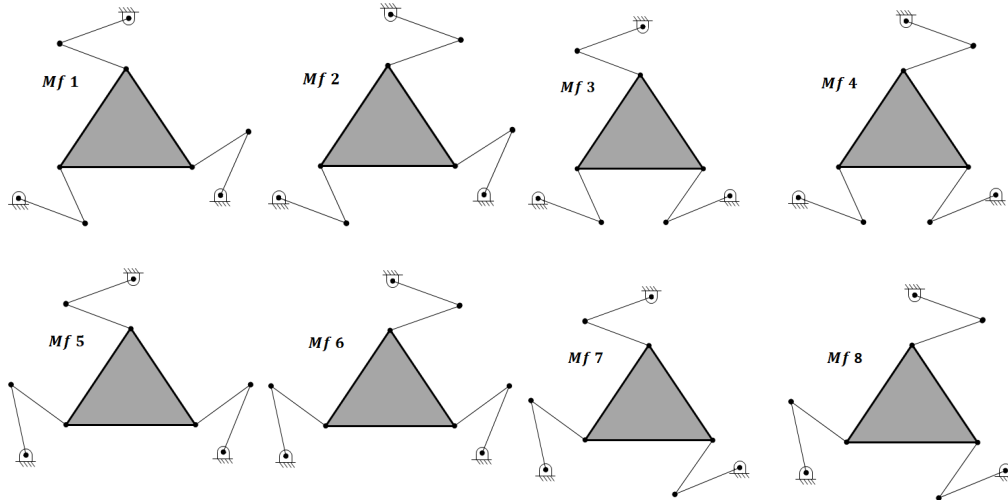


Figura 4.9: Modos de funcionamiento Mf del manipulador 3-RRR.

4.2. Modelo cinemático directo de velocidad

Pierna 1

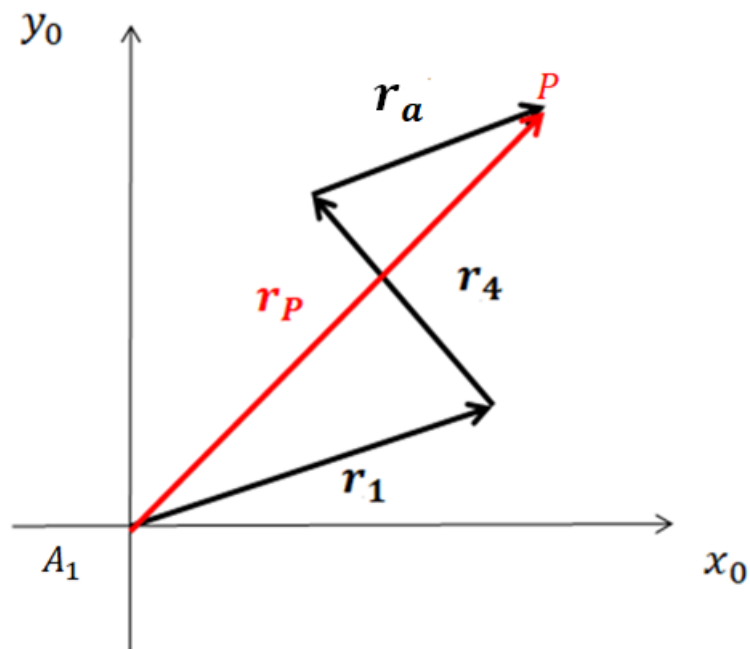


Figura 4.10: Análisis vectorial para la pierna 1

Partiendo de un nuevo análisis vectorial (véase la figura 4.10) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_a \quad (4.38)$$

Ubicando del lado izquierdo de la expresión los términos conocidos, la ecuación (4.38) es reescrita como:

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_a = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \quad (4.39)$$

Derivando (4.39) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_a = \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_4 \quad (4.40)$$

Tomando en cuenta que la derivada de un vector está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se aplica (4.41) a los vectores $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_4$ y $\dot{\mathbf{r}}_a$:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = r_1(\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1) \quad (4.42)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_4 = r_4(\boldsymbol{\omega}_4 \times \hat{\mathbf{r}}_4) \quad (4.43)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_a = r_a(\boldsymbol{\omega}_a \times \hat{\mathbf{r}}_a) \quad (4.44)$$

Nótese que:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \theta_1^0 \mathbf{z}_1 \quad (4.45)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_z} = \boldsymbol{\omega}_a \quad (4.46)$$

Además:

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \begin{bmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.42), (4.43) y (4.44) en (4.40):

$$\dot{\mathbf{r}}_P - r_a(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_a) = r_1(\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1) + r_4(\boldsymbol{\omega}_4 \times \hat{\mathbf{r}}_4) \quad (4.48)$$

Multiplicando escalarmente por $\hat{\mathbf{r}}_4$:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 - r_a(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_a) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 = r_1(\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 + r_4(\boldsymbol{\omega}_4 \times \hat{\mathbf{r}}_4) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 \quad (4.49)$$

El producto $(\boldsymbol{\omega}_4 \times \hat{\mathbf{r}}_4) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4$ es igual a cero por lo que la ecuación (4.49) queda como:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 - r_a(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_a) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 = r_1(\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 \quad (4.50)$$

Realizando los productos correspondientes:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 = v_{P_x} r_{4_{ux}} + v_{P_y} r_{4_{uy}} \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_a = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{P_z} \\ r_{a_{ux}} & r_{a_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{a_{uy}} \omega_{P_z} \\ r_{a_{ux}} \omega_{P_z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_a) \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = -(r_{a_{uy}} r_{2_{ux}} - r_{a_{ux}} r_{2_{uy}}) \omega_{P_z} \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ r_{1_{ux}} & r_{1_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{1_{uy}} \dot{\theta}_1 \\ r_{1_{ux}} \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}}_4 = (r_{1_{ux}} r_{4_{uy}} - r_{1_{uy}} r_{4_{ux}}) \dot{\theta}_1 \quad (4.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.51), (4.53) y (4.55) en (4.50):

$$v_{P_x} r_{4_{ux}} + v_{P_y} r_{4_{uy}} + (r_{a_{uy}} r_{4_{ux}} - r_{a_{ux}} r_{4_{uy}}) r_a \omega_{P_z} = (r_{1_{ux}} r_{4_{uy}} - r_{1_{uy}} r_{4_{ux}}) r_1 \dot{\theta}_1 \quad (4.56)$$

Pierna 2

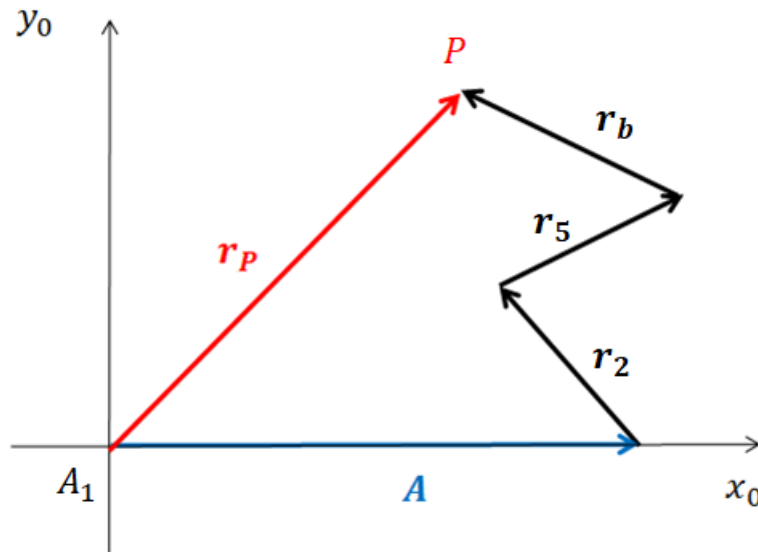


Figura 4.11: Análisis vectorial para la pierna 2

Al igual que en el análisis anterior, partiendo del análisis vectorial (ver la figura 4.11) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{A} + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_b \quad (4.57)$$

Ubicando del lado izquierdo de la expresión los términos conocidos, la ecuación (4.38) es reescrita como:

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_b - \mathbf{A} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 \quad (4.58)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_b - \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_5 \quad (4.59)$$

Aplicando nuevamente (4.41) a los vectores $\dot{\mathbf{r}}_2$, $\dot{\mathbf{r}}_5$, $\dot{\mathbf{r}}_b$ y $\dot{\mathbf{A}}$:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = r_2(\boldsymbol{\omega}_4 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \quad (4.60)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_5 = r_5(\boldsymbol{\omega}_5 \times \hat{\mathbf{r}}_5) \quad (4.61)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_b = r_b(\boldsymbol{\omega}_b \times \hat{\mathbf{r}}_b) \quad (4.62)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = 0 \quad (4.63)$$

Observe que:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \theta_2^0 \mathbf{z}_2 \quad (4.64)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_z} = \boldsymbol{\omega}_b \quad (4.65)$$

Sustituyendo (4.60), (4.61), (4.62) y (4.63) en (4.59):

$$\dot{\mathbf{r}}_P - r_b(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_b) = r_2(\boldsymbol{\omega}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2) + r_5(\boldsymbol{\omega}_5 \times \hat{\mathbf{r}}_5) \quad (4.66)$$

Multiplicando escalarmente por $\hat{\mathbf{r}}_5$:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 - r_b(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_b) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 = r_2(\boldsymbol{\omega}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 + r_5(\boldsymbol{\omega}_5 \times \hat{\mathbf{r}}_5) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 \quad (4.67)$$

El producto $(\boldsymbol{\omega}_5 \times \hat{\mathbf{r}}_5) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5$ es igual a 0 por lo que la ecuación (4.67) queda como:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 - r_b(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_b) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 = r_2(\boldsymbol{\omega}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 \quad (4.68)$$

Realizando los productos correspondientes:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 = v_{P_x} r_{5_{ux}} + v_{P_y} r_{5_{uy}} \quad (4.69)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_b = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{P_z} \\ r_{b_{ux}} & r_{b_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{b_{uy}}\omega_{P_z} \\ r_{b_{ux}}\omega_{P_z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_b) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 = -(r_{b_{uy}}r_{5_{ux}} - r_{b_{ux}}r_{5_{uy}})\omega_{P_z} \quad (4.71)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ r_{2_{ux}} & r_{2_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{2_{uy}}\dot{\theta}_2 \\ r_{2_{ux}}\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$(\boldsymbol{\omega}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}}_5 = (r_{2_{ux}}r_{5_{uy}} - r_{2_{uy}}r_{5_{ux}})\dot{\theta}_2 \quad (4.73)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.69), (4.71) y (4.73) en (4.68):

$$v_{P_x} r_{5_{ux}} + v_{P_y} r_{5_{uy}} + (r_{b_{uy}} r_{5_{ux}} - r_{b_{ux}} r_{5_{uy}}) \mathbf{r}_b \omega_{P_z} = (r_{2_{ux}} r_{5_{uy}} - r_{2_{uy}} r_{5_{ux}}) \mathbf{r}_2 \dot{\theta}_2 \quad (4.74)$$

Pierna 3

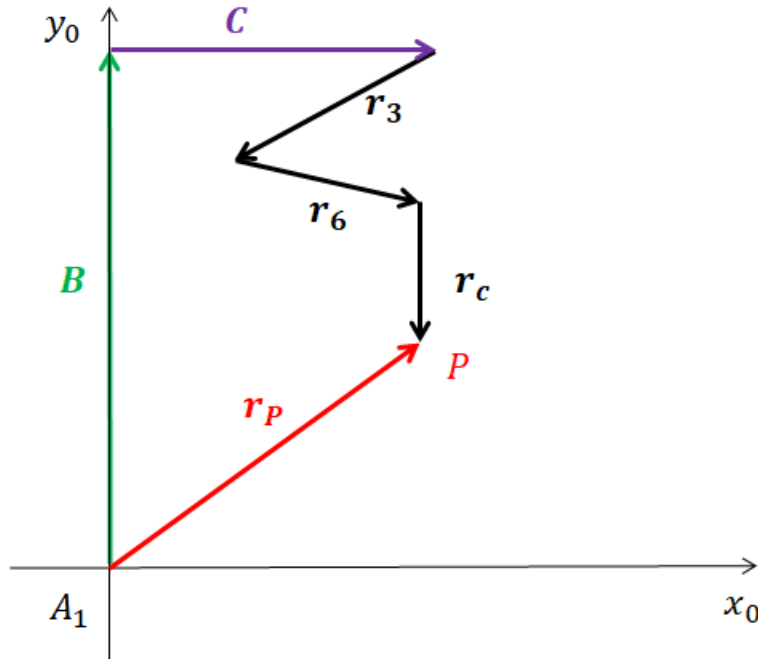


Figura 4.12: Análisis vectorial para la pierna 3

Del mismo modo que en los análisis anteriores, se parte de un análisis vectorial (véase la figura 4.12) de donde se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_c. \quad (4.75)$$

Ubicando del lado izquierdo de la expresión los términos conocidos, la ecuación (4.75) es reescrita como:

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_c - \mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_6 \quad (4.76)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_c - \dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{r}}_3 + \dot{\mathbf{r}}_6 \quad (4.77)$$

Utilizando (4.41) en los vectores $\dot{\mathbf{r}}_3$, $\dot{\mathbf{r}}_6$, $\dot{\mathbf{r}}_c$, $\dot{\mathbf{B}}$ y $\dot{\mathbf{C}}$:

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{r}_3(\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3) \quad (4.78)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_6 = \mathbf{r}_6(\boldsymbol{\omega}_6 \times \hat{\mathbf{r}}_6) \quad (4.79)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\omega}_c \times \hat{\mathbf{r}}_c) \quad (4.80)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (4.81)$$

$$\dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (4.82)$$

Observe que

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \theta_3^0 \mathbf{z}_3 \quad (4.83)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_z} = \boldsymbol{\omega}_c \quad (4.84)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.78), (4.79), (4.80), (4.81) y (4.82) en (4.77):

$$\dot{\mathbf{r}}_P - r_c(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_c) = r_3(\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3) + r_6(\boldsymbol{\omega}_6 \times \hat{\mathbf{r}}_6) \quad (4.85)$$

Multiplicando escalarmente por $\hat{\mathbf{r}}_6$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 - r_c(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 = r_3(\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 + r_6(\boldsymbol{\omega}_6 \times \hat{\mathbf{r}}_6) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 \quad (4.86)$$

El producto $(\boldsymbol{\omega}_6 \times \hat{\mathbf{r}}_6) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6$ es igual a cero por lo que (4.86) queda como:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 - r_c(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 = r_3(\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 \quad (4.87)$$

Realizando los productos correspondientes:

$$\dot{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 = v_{P_x} r_{6_{ux}} + v_{P_y} r_{6_{uy}} \quad (4.88)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{P_z} \\ r_{c_{ux}} & r_{c_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{c_{uy}}\omega_{P_z} \\ r_{c_{ux}}\omega_{P_z} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_c) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 = -(r_{c_{uy}}r_{6_{ux}} - r_{c_{ux}}r_{6_{uy}})\omega_{P_z} \quad (4.90)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ r_{3_{ux}} & r_{3_{uy}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{3_{uy}}\dot{\theta}_3 \\ r_{3_{ux}}\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$(\boldsymbol{\omega}_3 \times \hat{\mathbf{r}}_3) \cdot \hat{\mathbf{r}}_6 = (r_{3_{ux}}r_{6_{uy}} - r_{3_{uy}}r_{6_{ux}})\dot{\theta}_3 \quad (4.92)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.88), (4.90) y (4.92) en (4.87):

$$v_{P_x} r_{6_{ux}} + v_{P_y} r_{3_{uy}} + (r_{c_{uy}}r_{6_{ux}} - r_{c_{ux}}r_{6_{uy}})r_c\omega_{P_z} = (r_{3_{ux}}r_{6_{uy}} - r_{3_{uy}}r_{6_{ux}})r_3\dot{\theta}_3 \quad (4.93)$$

Por lo tanto, la solución al modelo cinemático directo de velocidad está dada por las ecuaciones (4.56),(4.74) y (4.93).

Ecuación de velocidad

Las ecuaciones (4.56),(4.74) y (4.93) pueden representarse también como

$$\mathbf{A}\mathbf{t}^* = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.94)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r_{4ux} & r_{4uy} & (r_{4ux}r_{ay} - r_{4uy}r_{ax}) \\ r_{5ux} & r_{5uy} & (r_{5ux}r_{by} - r_{5uy}r_{bx}) \\ r_{6ux} & r_{6uy} & (r_{6ux}r_{cy} - r_{6uy}r_{cx}) \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_1(r_{1ux}r_{4uy} - r_{1uy}r_{4ux}) & 0 & 0 \\ 0 & r_2(r_{2ux}r_{5uy} - r_{2uy}r_{5ux}) & 0 \\ 0 & 0 & r_3(r_{3ux}r_{6uy} - r_{3uy}r_{6ux}) \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{t}^* = \begin{bmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \\ \omega_{P_z} \end{bmatrix}, \quad (4.97)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

La matriz \mathbf{A} es conocida como la matriz jacobiana **paralela** y la matriz \mathbf{B} como la matriz jacobiana **serial** del manipulador.

4.3. Homogeneización de la matriz jacobiana paralela usando la longitud característica

Tal y como se propone en [13], para el manipulador paralelo 3-RRR la matriz jacobiana paralela homogeneizada $\bar{\mathbf{A}}$ se obtiene dividiendo la tercera columna de \mathbf{A} entre la longitud característica $L_c = \sqrt{2}r$ como se muestra a continuación

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} r_{4ux} & r_{4uy} & (r_{4ux}r_{ay} - r_{4uy}r_{ax})/\sqrt{2}r \\ r_{5ux} & r_{5uy} & (r_{5ux}r_{by} - r_{5uy}r_{bx})/\sqrt{2}r \\ r_{6ux} & r_{6uy} & (r_{6ux}r_{cy} - r_{6uy}r_{cx})/\sqrt{2}r \end{bmatrix}. \quad (4.99)$$

De esta manera, el inverso del número de condicionamiento $\kappa^{-1}(\mathbf{A})$ puede ser interpretado como la "distancia" de la postura del manipulador a una postura singular paralela. Las condiciones geométricas para que el manipulador 3-RRR alcance una postura isotrópica ideal, es decir, una postura que se encuentra lo más alejado posible de las singularidades paralelas, la base A_i de cada pierna debe de formar un círculo de radio l_1 con su centro en B_i con $\|PB_i\| = \sqrt{l_2^2 + r^2}$ (vea figura 4.13). Así, el radio R de la base del triángulo está dado por

$$\| \sqrt{l_2^2 + r^2} - l_1 \| \leq R \leq \sqrt{l_2^2 + r^2} + l_1 \quad (4.100)$$

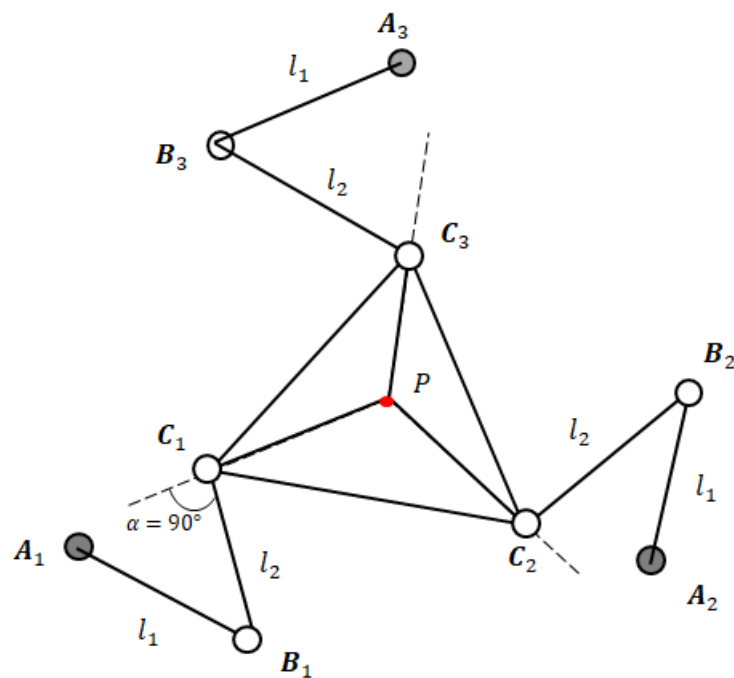


Figura 4.13: Configuración isotrópica ideal (con $\alpha = 90$)

donde r y R representan los radios de las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos que forman las plataformas móvil y fija, respectivamente, del manipulador. Los parámetros geométricos del prototipo experimental 3-RRR del Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de La Laguna que se estudia en este trabajo satisfacen las condiciones dadas por (4.100).

Capítulo 5

Aplicación de matrices jacobianas homogeneas al análisis del desempeño cinemático de robots.

En el presente capítulo se muestran distintos casos en los que es aplicado un método propuesto en [4] para la homogeneización de la matriz jacobiana usando parámetros inerciales de un órgano terminal ideal por medio de simulaciones de movimiento de robots manipuladores. Se da la introducción a la energía cinética de un organo terminal de geometría ideal: como introducción se describe una esfera para el caso de un manipulador serial 6R, y un disco para el caso de un manipulador paralelo 3-RRR. Para cada uno de los manipuladores se realizaron dos simulaciones de movimiento en donde se evalúa la calidad del comportamiento cinemático durante la ejecución de la tarea por medio del uso de los índices de desempeño descritos en este trabajo.

5.1. Energía cinética de un órgano terminal ideal (esfera)

Considere que el órgano terminal de un robot manipulador es una esfera sólida con masa m_s y radio r_s . Durante el movimiento del manipulador la energía cinética del órgano terminal puede ser calculada por

$$k = \frac{1}{2} \mathbf{v}_G^T \mathbf{l} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_s^T \mathbf{h}_G \quad (5.1)$$

donde

- \mathbf{v}_G es el vector de velocidad lineal del centro de masa de la esfera (G).
- $\mathbf{l} \equiv m_s \mathbf{v}_G$ es el vector de momentum lineal de la esfera,
- $\boldsymbol{\omega}_s$ es el vector de velocidad angular de la esfera,
- $\mathbf{h}_G \equiv I_s \boldsymbol{\omega}_s$ es el momentum angular de la esfera con respecto a su centro de masa. I_s es la matriz de inercia del cuerpo con respecto a un marco ortogonal con origen en el centro de masa. Dicha matriz está dada por

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}m_s r_s^2. \quad (5.3)$$

Los vectores \mathbf{v}_G y $\boldsymbol{\omega}_s$ de (5.1) son expresados en términos de sus componentes con respecto a un marco ortogonal unido al órgano terminal como se muestra enseguida

$$\mathbf{v}_G = \begin{bmatrix} v_{G_x} \\ v_{G_y} \\ v_{G_z} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_s = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Usando estas componentes y los parámetros inerciales del órgano terminal esférico en (5.1) la energía cinética es expresada como

$$k = \frac{m_s}{2} (v_{G_x}^2 + v_{G_y}^2 + v_{G_z}^2) + \frac{m_s r_s^2}{5} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2). \quad (5.5)$$

Tomando en cuenta (5.5) es posible definir un vector \mathbf{k}_e de 6 dimensiones tal que

$$\|\mathbf{k}_e\|^2 = k \quad (5.6)$$

donde $\|\mathbf{k}_e\|$ denota la norma euclidiana de \mathbf{k}_e . Así, se puede apreciar que el vector \mathbf{k}_e está asociado a la energía cinética y que puede ser escrito como

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e_T} \\ \mathbf{k}_{e_R} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

donde \mathbf{k}_{e_T} y \mathbf{k}_{e_R} son vectores asociados con la energía cinética correspondientes a los movimientos traslacional y rotacional del órgano terminal, respectivamente. En términos de sus componentes ortogonales con respecto al marco unido al órgano terminal, estos vectores son

$$\mathbf{k}_{e_T} = \lambda_T \begin{bmatrix} v_{G_x} \\ v_{G_y} \\ v_{G_z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{e_R} = \lambda_R \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

donde $\lambda_T = \sqrt{\frac{m_s}{2}}$ y $\lambda_R = \sqrt{\frac{m_s r_s^2}{5}}$.

5.2. Homogeneización de la matriz jacobiana por parámetros inerciales basada en una geometría ideal esférica

Es posible establecer una partición de la matriz jacobiana mediante cuatro sub-matrices, como se muestra enseguida:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{TA} & \mathbf{J}_{TW} \\ \mathbf{J}_{RA} & \mathbf{J}_{RW} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde

$$\mathbf{J}_{TA} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{13} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{23} \\ \mathbf{J}_{31} & \mathbf{J}_{32} & \mathbf{J}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{TW} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{14} & \mathbf{J}_{15} & \mathbf{J}_{16} \\ \mathbf{J}_{24} & \mathbf{J}_{25} & \mathbf{J}_{26} \\ \mathbf{J}_{34} & \mathbf{J}_{35} & \mathbf{J}_{36} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{RA} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{41} & \mathbf{J}_{42} & \mathbf{J}_{43} \\ \mathbf{J}_{51} & \mathbf{J}_{52} & \mathbf{J}_{53} \\ \mathbf{J}_{61} & \mathbf{J}_{62} & \mathbf{J}_{63} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{RW} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{44} & \mathbf{J}_{45} & \mathbf{J}_{46} \\ \mathbf{J}_{54} & \mathbf{J}_{55} & \mathbf{J}_{56} \\ \mathbf{J}_{64} & \mathbf{J}_{65} & \mathbf{J}_{66} \end{bmatrix}.$$

Los elementos de las matrices \mathbf{J}_{TA} y \mathbf{J}_{TW} son los coeficientes de las velocidades articulares que producen \mathbf{v}_G mientras que los elementos de \mathbf{J}_{RA} y \mathbf{J}_{RW} son los coeficientes de las velocidades articulares que definen $\boldsymbol{\omega}_S$.

Tomando en cuenta (5.1), (5.8) y (5.9) se pueden calcular los vectores del arreglo \mathbf{k}_e como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{eT} \\ \mathbf{k}_{eR} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \dot{\mathbf{q}} \quad (5.10)$$

donde \mathbf{J}^* es la matriz jacobiana homogeneizada obtenida a partir de los parámetros inerciales del órgano terminal y que está definida por

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} \lambda_T \mathbf{J}_{TA} & \lambda_T \mathbf{J}_{TW} \\ \lambda_R \mathbf{J}_{RA} & \lambda_R \mathbf{J}_{RW} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

La matriz jacobiana \mathbf{J}^* es dimensionalmente homogénea con sus elementos en unidades de $kg^{\frac{1}{2}} \cdot m$. Estos elementos fueron definidos por los parámetros inerciales del órgano terminal, los parámetros geométricos y la postura del manipulador. Mediante (5.10) la matriz homogeneizada \mathbf{J}^* determina los componentes ortogonales de \mathbf{k}_{eT} y \mathbf{k}_{eR} asociados a la energía cinética del órgano terminal; así, aplicando \mathbf{J}^* se puede evaluar la eficacia para transformar velocidades articulares a energía cinética del órgano terminal.

5.3. Simulaciones con el robot Fanuc ARC Mate 100ic/12

5.3.1. Reconfiguración del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC

Con el fin de evaluar el desempeño cinemático del robot manipulador utilizando la matriz \mathbf{J}^* se hizo una simulación, hecha en Matlab[®], la cual consiste en una reconfiguración interna del robot realizando una única rotación en Z del órgano terminal, variando los valores de ψ en un rango de $90^\circ - 270^\circ$. La posición óptima del órgano terminal es determinada obteniendo los valores máximos para la manipulabilidad. En la figura ?? se muestra una secuencia de posturas que toma el robot a lo largo del barrido mientras que en la figura 5.2 muestra el comportamiento de los índices de manipulabilidad rotacional y traslacional normalizada a lo largo de la simulación. Observe que el punto máximo de ambos índices es alcanzado con $\psi = 180^\circ$ donde a su vez, $\theta_5 = 90^\circ$.

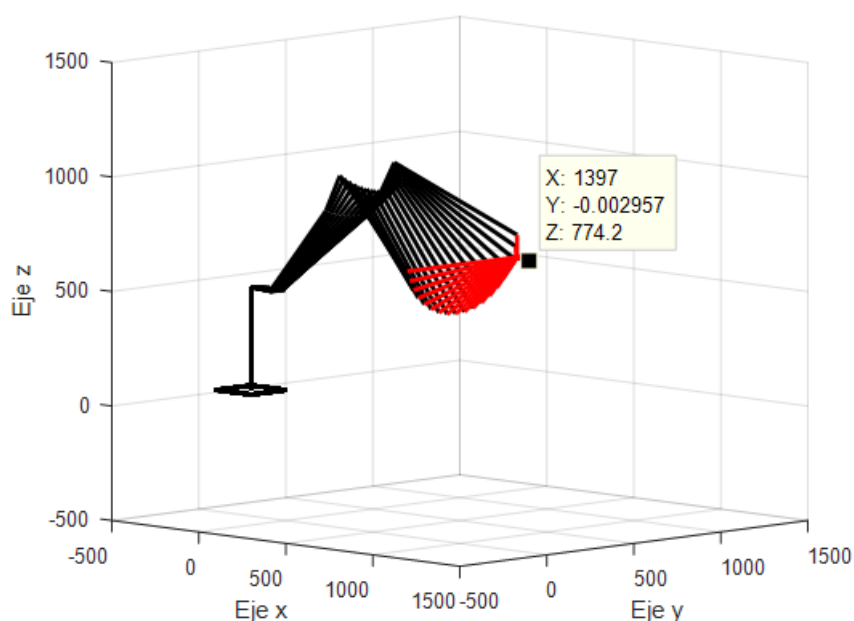


Figura 5.1: Secuencia de posturas en diagrama de alambre del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC

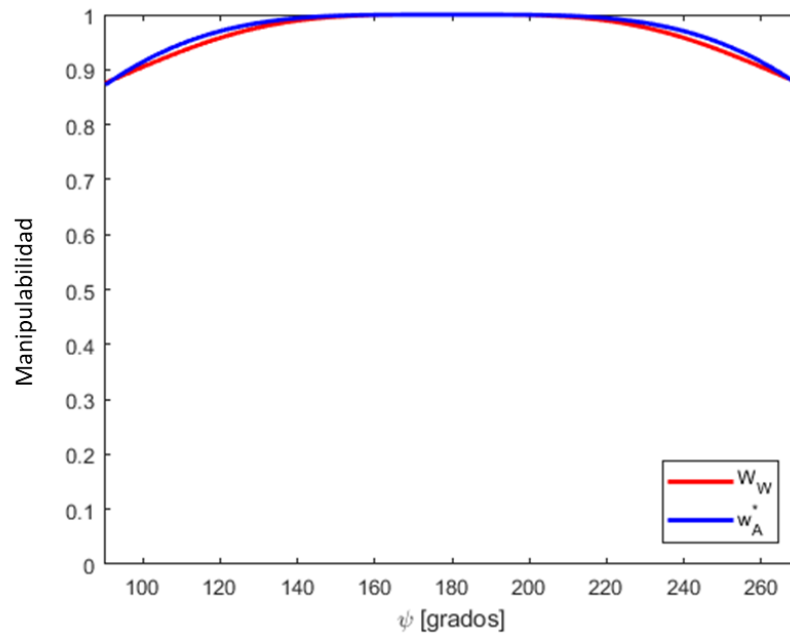


Figura 5.2: Evolución de los índices de manipulabilidad traslacional normalizada w_w^* y rotacional w_w durante la reconfiguración del robot.

Los índices de manipulabilidad obtenidos en la figura 5.2 se calculan usando la matriz \mathbf{J} sin homogeneizar.

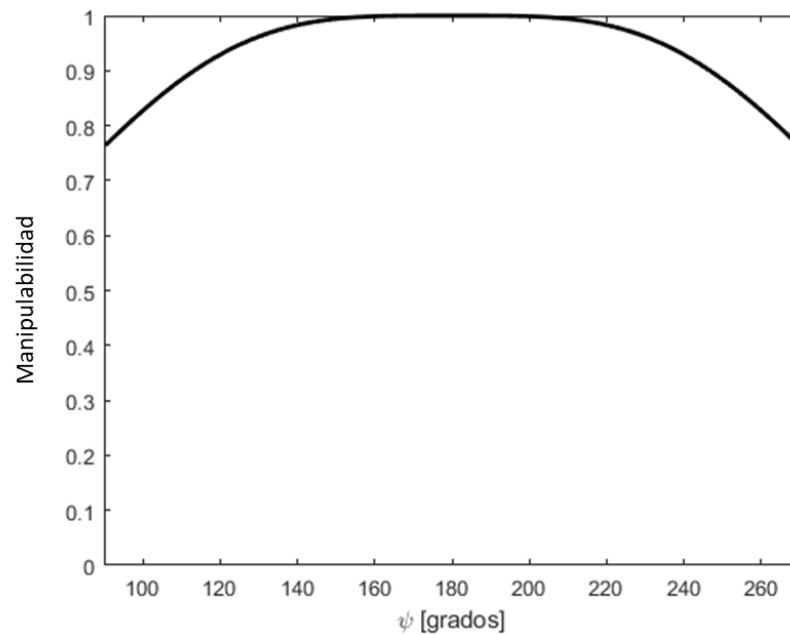


Figura 5.3: Evolución del índice de manipulabilidad global usando la matriz \mathbf{J}^*

En la Figura 5.3 se muestran las manipulabilidades obtenidas durante la ejecución de la tarea. Observe que el manipulador alcanza las máximas manipulabilidades en el rango de

$\psi = 160^\circ$ a 200° . Sin embargo, debido a que la matriz jacobiana \mathbf{J} no ha sido homogeneizada no es posible evaluar los movimientos traslacional y rotacional como uno solo. Por otra parte, la Figura 5.3 es obtenida a partir de la matriz jacobiana \mathbf{J}^* homogeneizada por parámetros inerciales y se puede apreciar que se obtiene un único valor para cada postura instantánea del robot el cuál sirve para evaluar tanto el movimiento traslacional como el movimiento rotacional del robot.

5.3.2. Movimiento del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC durante la descripción de una ruta especificada

Se realizó, además, una simulación de seguimiento de una ruta circular en el plano $Y - Z$ para evaluar el desempeño cinemático usando la manipulabilidad de Yoshikawa homogeneizando a la matriz jacobiana básica usando los métodos anteriormente presentados. La simulación fue hecha en Matlab[®]. La gráfica de la figura 5.4 muestra las curvas de evolución de los índices de manipulabilidad a lo largo de la ruta. Se puede apreciar nuevamente que un análisis global utilizando la matriz jacobiana \mathbf{J} es imposible debido al problema de homogeneidad. En esta misma gráfica se muestra la curva correspondiente a la manipulabilidad global obtenida mediante la matriz jacobiana $\bar{\mathbf{J}}$ homogeneizada por medio de la longitud característica y la curva correspondiente a la manipulabilidad global obtenida mediante la matriz jacobiana \mathbf{J}^* homogeneizada por medio de los parámetros inerciales. Observe que, a pesar de que ambas curvas se encuentran coincidentes, la curva de la manipulabilidad obtenida mediante \mathbf{J}^* tiene una ventaja sobre la manipulabilidad obtenida mediante $\bar{\mathbf{J}}$ en el sentido de que la primera cuenta con una interpretación física descrita en términos de la energía cinética. En cambio, $\bar{\mathbf{J}}$ se obtiene en términos adimensionales la cual no representa una magnitud física.

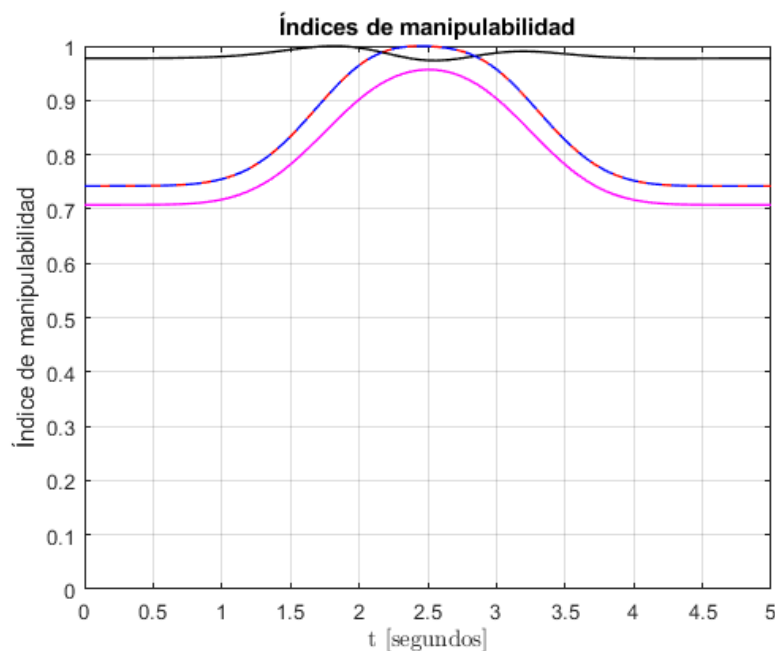


Figura 5.4: Evolución de los diferentes índices de manipulabilidad durante el seguimiento de la ruta

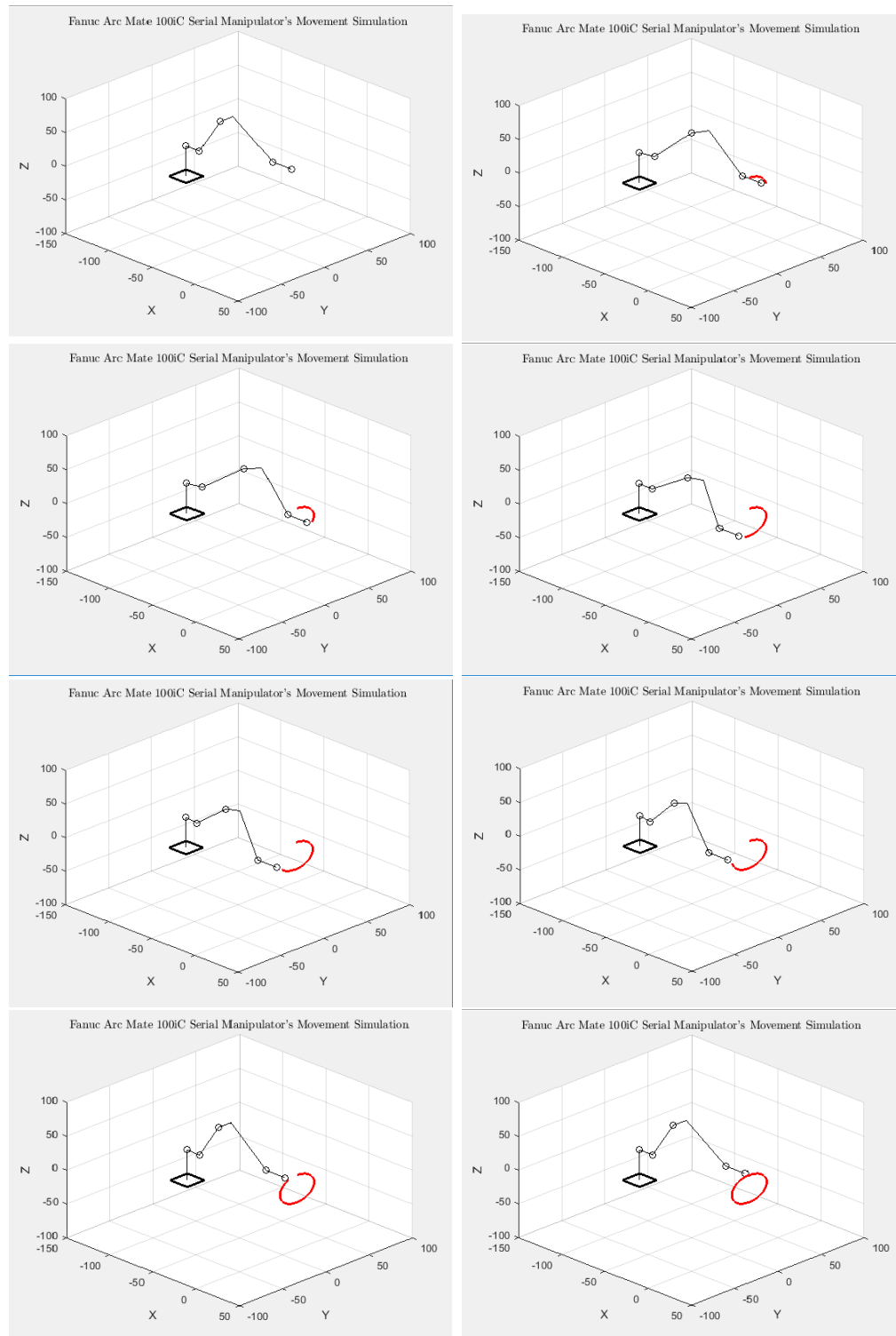


Figura 5.5: Posturas del manipulador Fanuc ARC Mate 100iC durante la tarea circular.

5.4. Energía cinética de un órgano terminal ideal (disco)

Considere ahora el caso de un robot manipulador planar con un órgano terminal sólido en forma de disco, cuya masa y radio son denotados como m_d y r_d , respectivamente. La energía cinética de este disco puede ser expresada como:

$$k = \frac{1}{2} \mathbf{v}_g^T l + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_d^T \mathbf{h}_g \quad (5.12)$$

donde

- \mathbf{v}_g es el vector de velocidad del centro de masa del disco g ,
- $l \equiv m_d v_g$ es el vector de momentum lineal del disco,
- $\boldsymbol{\omega}_d$ es el vector de velocidad del disco,
- $\mathbf{h}_g \equiv I_z \boldsymbol{\omega}_s$ es el momentum angular del disco con respecto a su centro de masa. I_z es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje Z de un marco ortogonal con su origen en el centro de masa que está dado por

$$I_z = \frac{1}{2} m_d r_d^2. \quad (5.13)$$

Las velocidades de (5.12) son expresadas en términos de sus componentes con respecto a un marco ortogonal unido al órgano terminal como

$$\mathbf{v}_g = \begin{bmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_d = [\omega_z]. \quad (5.14)$$

Debido a que el manipulador paralelo 3-RRR solo tiene desplazamiento en el plano $X-Y$, no existe velocidad lineal en el eje Z pero sí existe velocidad angular en ese eje. Por otra parte, no existen velocidades angulares en los ejes X ni Y . Es posible representar (5.12) en términos de los componentes de las velocidades y los parámetros inerciales del disco en el órgano terminal como

$$k = \frac{m_d}{2} [v_{gx}^2 + v_{gy}^2] + \frac{m_d r_d^2}{4} [\omega_z^2]. \quad (5.15)$$

Considerando (5.15), es posible definir un vector $\mathbf{k}_e \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ tal que

$$\|\mathbf{k}_e\|^2 = k, \quad (5.16)$$

donde $\|\mathbf{k}_e\|$ designa la norma euclidiana del vector \mathbf{k}_e . Así, se puede observar que \mathbf{k}_e es un vector asociado a la energía cinética del órgano terminal que puede ser escrito como

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e_T} \\ \mathbf{k}_{e_R} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

donde \mathbf{k}_{e_T} y \mathbf{k}_{e_R} son vectores asociados a la energía cinética correspondiendo al movimiento traslacional y rotacional del órgano terminal, respectivamente. En términos de sus componentes ortogonales con respecto al marco unido al órgano terminal estos vectores son descritos como

$$\mathbf{k}_{e_T} = \lambda_T \begin{bmatrix} v_{g_x} \\ v_{g_y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{e_R} = \lambda_R [\omega_z], \quad (5.18)$$

con $\lambda_T \equiv \sqrt{\frac{m_d}{2}}$ y $\lambda_R \equiv \sqrt{\frac{m_d r_d^2}{4}}$, considerando que

$$\|\mathbf{k}_{e_T}\|^2 + \|\mathbf{k}_{e_R}\|^2 = k. \quad (5.19)$$

Ahora bien, aplicando las constantes λ_T y λ_R obtenidas a la matriz de la ecuación(4.94) se tiene que la matriz jacobiana paralela homogeneizada con estos parámetros es

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_T} r_{4_u x} & \frac{1}{\lambda_T} r_{4_u y} & \frac{1}{\lambda_R} (r_{4_u x} r_{a_y} - r_{4_u y} r_{a_x}) \\ \frac{1}{\lambda_T} r_{5_u x} & \frac{1}{\lambda_T} r_{5_u y} & \frac{1}{\lambda_R} (r_{5_u x} r_{b_y} - r_{5_u y} r_{b_x}) \\ \frac{1}{\lambda_T} r_{6_u x} & \frac{1}{\lambda_T} r_{6_u y} & \frac{1}{\lambda_R} (r_{6_u x} r_{c_y} - r_{6_u y} r_{c_x}) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

En consecuencia, la matriz (5.20) permite calcular los vectores \mathbf{k}_{e_T} y \mathbf{k}_{e_R} mediante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e_T} \\ \mathbf{k}_{e_R} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.21)$$

que finalmente determina la energía cinética del órgano terminal a través de (5.19).

5.5. Reconfiguración para una posición especificada del órgano terminal del manipulador 3-RRR

Mediante el paquete de software Matlab[©] se hizo la simulación del movimiento del robot manipulador 3-RRR para la obtención gráfica de κ^{-1} . Los parámetros geométricos utilizados para esta simulación son los que fueron usados en [13] y con desplazamiento nulo en el plano $x - y$ y con ϕ variando de -105° a 110° . En la figura 5.7 se pueden observar las distintas posturas del manipulador durante la simulación.

5.5.1. Inverso del número de condicionamiento $\kappa^{-1}(\bar{\mathbf{A}})$ y $\kappa^{-1}(\mathbf{A}^*)$

Mediante el uso del comando *cond* de Matlab[©] se obtuvo el número de condicionamiento κ para la matriz homogeneizada con la longitud característica $\bar{\mathbf{A}}$ y la matriz homogeneizada

por parámetros inerciales A^* . Posteriormente se obtiene el inverso del número de condicionamiento κ^{-1} para la normalización. Estos valores fueron graficados con respecto a ϕ a lo largo del movimiento realizado por el manipulador paralelo, el cual consiste en un movimiento rotacional sin desplazamiento lineal de la plataforma móvil desde $\phi_{inicial} = -105^\circ$ hasta $\phi_{final} = 110^\circ$. La figura 5.6a muestra la gráfica de $\kappa^{-1}(\bar{A})$ y la figura 5.6b muestra la gráfica de $\kappa^{-1}(A^*)$ con respecto a la orientación de la PM. Para la obtención de estas gráficas se tomó en cuenta que el punto P , que corresponde al centro de la PM, tiene las coordenadas $(x = 8.66, y = 5)$ y que el manipulador opera en el $Mf1$.

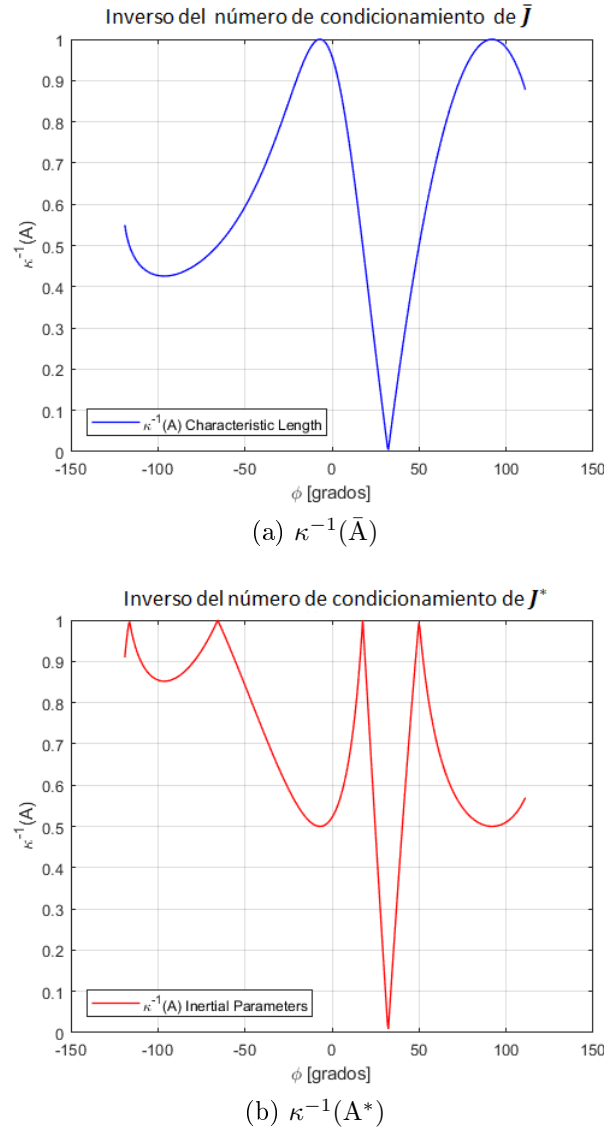


Figura 5.6: Número de condicionamiento con respecto a la orientación de la PM

Observando la Figura 5.6b se puede apreciar que el inverso del número de condicionamiento de la matriz jacobiana homogeneizada por parámetros inerciales $\kappa^{-1}(A^*)$ alcanza su valor máximo en cuatro posturas diferentes durante la tarea. Cuando el robot alcanza estos valores se dice que el manipulador se encuentra en una postura *isotrópica* mediante las cuales se obtiene un rendimiento óptimo del manipulador. Por otra parte, la curva de $\kappa^{-1}(\bar{A})$ solo

alcanza la isotropía en dos posturas demostrando una desventaja ante la obtención de \mathbf{A}^* .

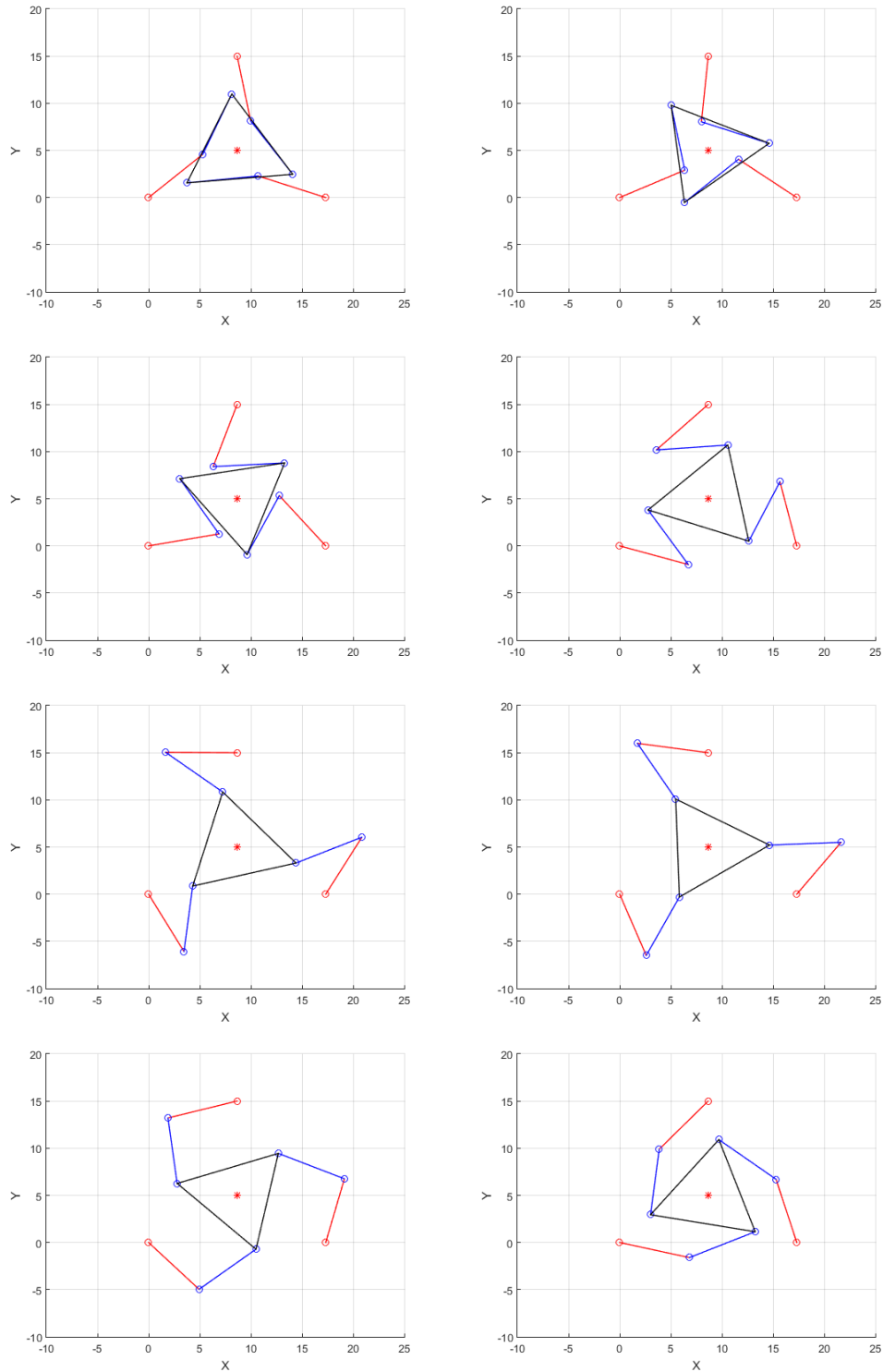


Figura 5.7: Posturas del manipulador 3-RRR con valores desde $\phi = -105^\circ$ a $\phi = 110^\circ$.

5.5.2. Posturas isotrópicas y mapeo del vector k_e

Observando la figura 5.6b se puede apreciar que el manipulador paralelo alcanza su valor máximo en cuatro posturas diferentes a lo largo de la trayectoria. En las figuras 5.8 a 5.11 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación para las distintas posturas isotrópicas graficando a la vez los puntos del vector k_e asociados a la energía cinética del manipulador. El conjunto de puntos representados describe una esfera en las cuatro posturas isotrópicas consideradas.

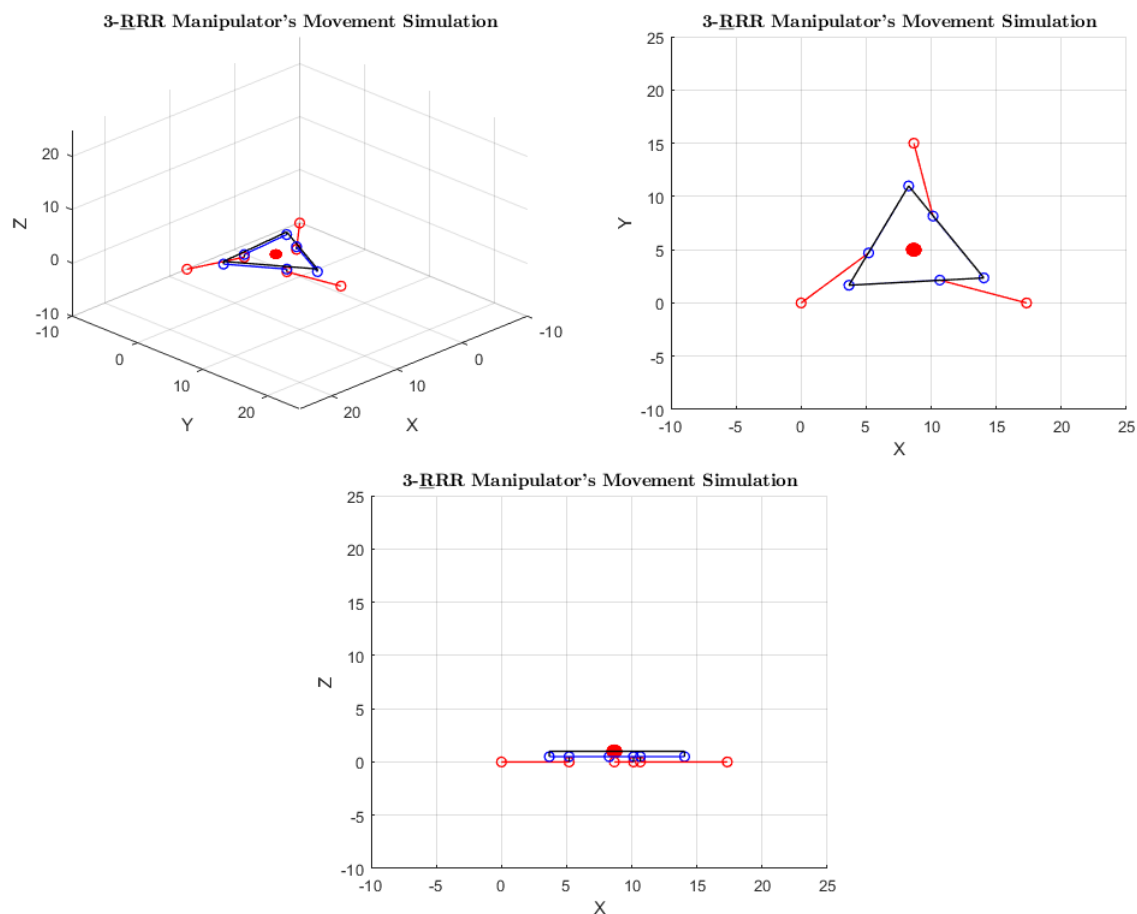


Figura 5.8: Elipsoide de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = -116.2^\circ$.

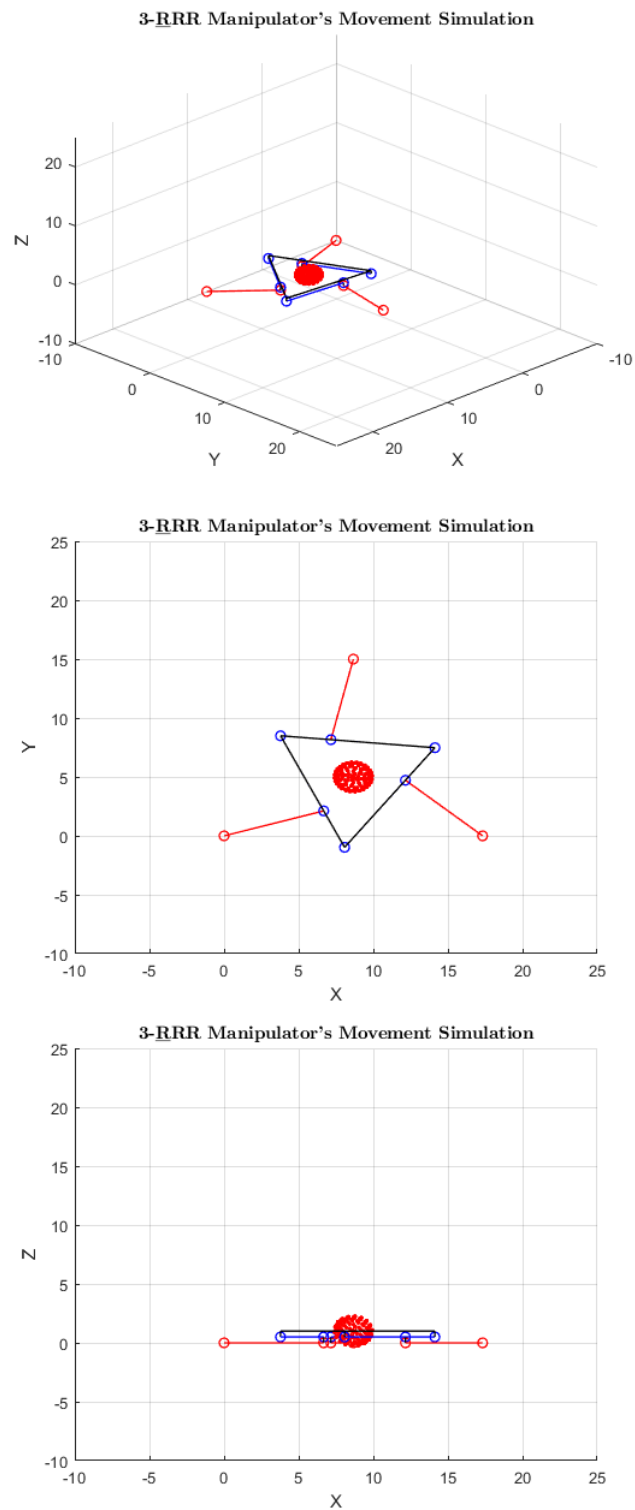


Figura 5.9: Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = -65.6^\circ$

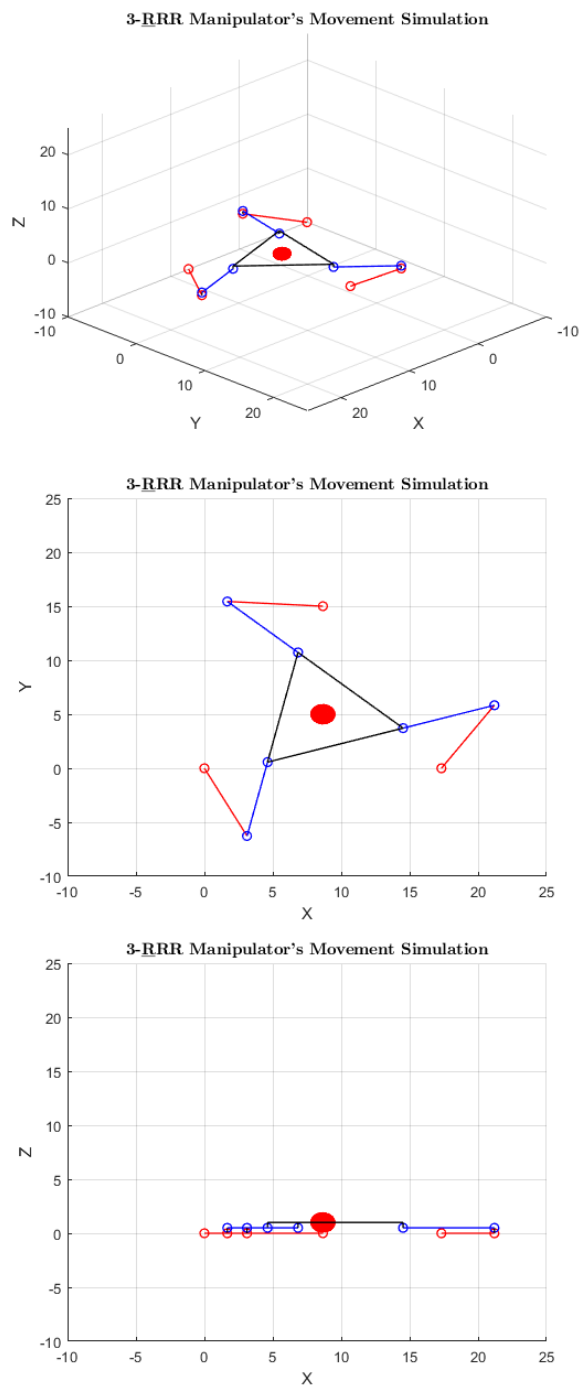


Figura 5.10: Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = 17.62^\circ$

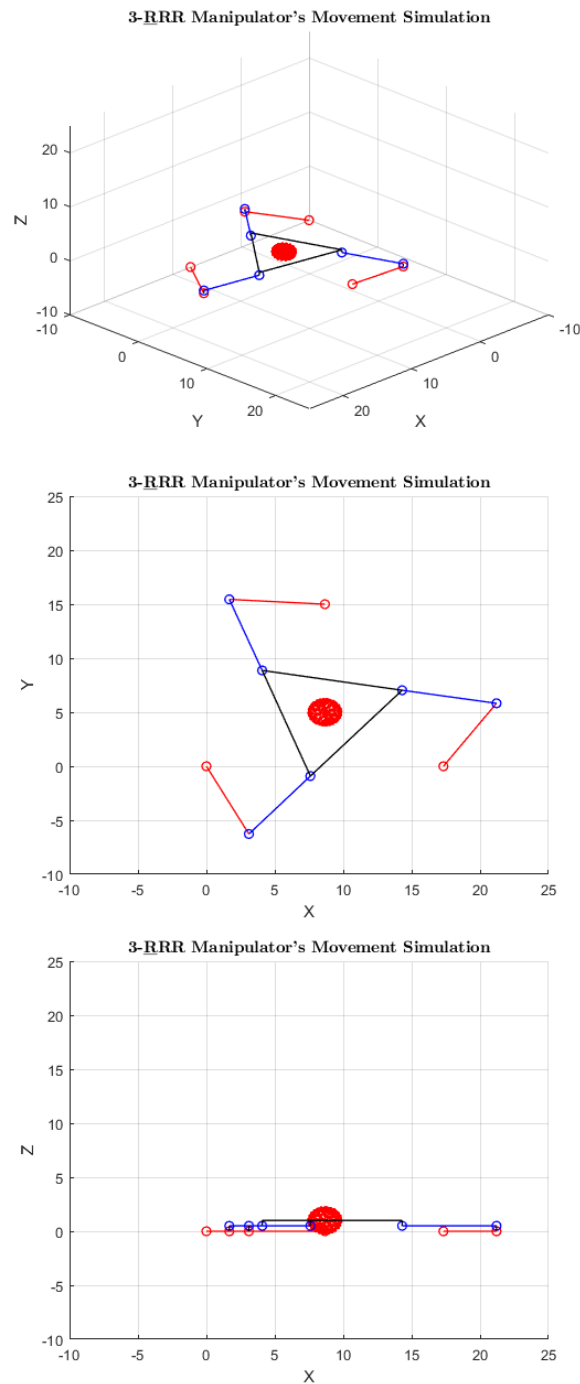


Figura 5.11: Esfera de energía cinética en la postura isotrópica cuando $\phi = 49.82^\circ$

Se observa en la Figura 5.9 que con la postura isotrópica obtenida para $\phi = -65.6^\circ$, el vector k_e se mapea en una esfera de mayor tamaño en comparación con las esferas de energía cinética obtenidas en los otros casos (figuras 5.8, 5.10 y 5.11). En consecuencia esta postura isotrópica refleja un mejor desempeño.

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo de tesis se efectuaron estudios concernientes a la homogeneización de la matriz jacobiana de robots manipuladores. En particular, se aplicó un método original para la homogeneización de la matriz jacobiana de robots manipuladores de manipuladores seriales y paralelos. Este método permite medir el desempeño cinemático de manipuladores teniendo como criterio la capacidad de éstos para generar energía cinética con su órgano terminal, tanto con el movimiento traslacional como con el rotacional de dicho eslabón. Los resultados obtenidos demuestran que un índice de desempeño de un manipulador sólo tiene sentido definirlo si posee unidades físicas que puedan dimensionarlo, de tal manera que mida algún concepto físico del órgano terminal relacionado con sus movimientos traslacionales y rotacionales, pues el objetivo de un manipulador es generar estos movimientos a partir de los desplazamientos articulares de la cadena cinemática. En efecto, como quedó demostrado en esta tesis, el hecho de que los índices de desempeño y las posturas isotrópicas de un robot obtenidas con matrices jacobianas homogeneizadas con longitudes características (matrices con elementos adimensionales) sean diferentes a los obtenidos con matrices jacobianas homogeneizadas mediante parámetros inerciales, demuestra que los conceptos de desempeño cinetostático e isotropía dependen del significado físico de las unidades de los elementos de dichas matrices, aún si éstas están relacionadas con el mismo manipulador. El uso de los parámetros inerciales es un método de homogeneización de la matriz jacobiana formulado de tal manera que los elementos de esa matriz son dimensionados con unidades asociados a la energía cinética del órgano terminal. Con ello se logra proporcionar un significado físico a la aplicación de índices de desempeño típicos, con lo que se consigue una evaluación del desempeño cinemático de forma global y coherente. Al conocimiento del autor de esta tesis, este método de homogeneización es único con estas características en la actualidad.

Imponer a una matriz jacobiana un carácter adimensional mediante la aplicación de un factor sin un claro significado físico impide toda interpretación física de cualquier índice que se defina a partir de dicha matriz. Por otra parte, se debe observar que el concepto de isotropía, en física es utilizado para calificar a un cuerpo cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección en que son examinadas. Es decir, que las magnitudes asociadas a algún concepto físico que se desee medir en algún cuerpo isotrópico son las mismas independientemente de la dirección en la que se mida. Al utilizar el enfoque de la longitud característica a la matriz jacobiana los elementos de ésta pierden su dimensión y, por lo tanto, el concepto de isotropía se vuelve ambiguo. Por otra parte, utilizando el enfoque propuesto con parámetros inerciales

es posible obtener un significado físico para el concepto de isotropía.

6.1. Contribuciones

1. Extensión de un método para la homogeneización de la matriz jacobiana de robots manipuladores al caso de un manipulador paralelo. Este método fue originalmente propuesto para su aplicación en un manipulador serial [4].
2. Extensión del concepto del uso de la energía cinética del órgano terminal de un robot manipulador como criterio de desempeño cinemático del manipulador, para su aplicación al caso de un manipulador paralelo. Este concepto fue originalmente aplicado al caso de un robot manipulador serial [4].
3. Extensión de un método para la evaluación del desempeño cinemático de un manipulador paralelo mediante el índice de manipulabilidad global, para su aplicación al caso de un manipulador paralelo. Este método se aplicó originalmente en un manipulador serial [4].
4. Extensión de un método para la evaluación del desempeño cinemático de un manipulador paralelo mediante el número de condicionamiento de la matriz jacobiana, para su aplicación al caso de un manipulador paralelo. Este método se aplicó originalmente en un manipulador serial [4].
5. Identificación de nuevas posturas isotrópicas del manipulador paralelo 3-RRR, las cuales no han sido reportadas en la literatura hasta ahora.

6.2. Trabajos futuros

1. Generalizar las contribuciones para su aplicación a manipuladores seriales y paralelos de cualquier arquitectura y considerando al órgano terminal con una geometría arbitraria.
2. Publicar los resultados de la tesis en una revista científica de circulación internacional.

Bibliografía

- [1] Angeles, J. and López-Cajún, C.S. *Kinematic isotropy and the conditioning index of serial robotic manipulators*. The International Journal of Robotics Research 11.6 (1992): 560-571.
- [2] Salisbury, J. K. and Craig J.J. *Articulated hands: Force control and kinematic issues*. The International Journal of Robotics Research 1.1 (1982): 4-17.
- [3] Chiu, S. L. *Task compatibility of manipulator postures*. The International Journal of Robotics Research 7.5 (1988): 13-21.
- [4] Pamanes J.A. and Moreno H.A.; *Homogenization of the Jacobian Matrix of Manipulators by Using Inertial Parameters* Proceedings of the 4th IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics, Mechanisms and Machine Science, pp.219-226, (2019)
- [5] Angeles, J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems* Third Edition New York: Springer-Verlag, 2002.
- [6] Yoshikawa, T. *Manipulability of robotic mechanisms*. The International Journal of Robotics Research 4.2 (1985): 3-9.
- [7] Yoshikawa, T. *Translational and rotational manipulability of robotic manipulators*. Proceedings of the American Control Conference. 1990.
- [8] Tandirici, M., Angeles, J. and Ranjbaran, F. *The Characteristic Point and the Characteristic Length of Robotic manipulators*. Proceedings of ASME 22nd Biennial Conference Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical System, Scottsdale, AZ. Vol. 45. 1992.
- [9] Nabavi, S., Akbarzadeh, A., Enferadi, J., and Kardan, I *A homogeneous payload specific performance index for robot manipulators based on the kinetic energy*. Mechanism and Machine Theory 130 (2018): 330-345.
- [10] Khalil, W., Kleinfinger, *A new geometric notation for open and closed-loop robots*; Proceedings of the 1986 IEEE Conference on Robotics and Automation (1986).
- [11] Khalil, W., Creusot, D., Chevallereau, C., and Bennis, F. *SYMORO+: symbolic modeling of robots*; User guide. Lab. Auto. Nantes (LAN), (1994).
- [12] Shigley J.E. and Uicker Jr. J.J. *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, McGraw Hill, Primera Edición, 2001.

-
- [13] Alba G.O., Wenger P., and Pámanes J.A. *Performance Indices For Kinematically Redundant Parallel Planar Manipulators*, Problems of Mechanics 1(22). (2006):1-24.
- [14] Alba, O, Wenger Ph., and Pamanes, A. *Consistent kinetostatic indices for planar 3-DOF parallel manipulators, application to the optimal kinematic inversion*. ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference.
- [15] Nakamura, Y., Hanafusa H., and Yoshikawa T. *Task-priority based redundancy control of robot manipulators*. The International Journal of Robotics Research 6.2 (1987): 3-15.
- [16] Angeles, J., Ranjbaran F., and Patel R. V. *On the design of the kinematic structure of seven-axes redundant manipulators for maximum conditioning*. Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1992.
- [17] Reveles, D., Pámanes, J.A., and Wenger, Ph. *Trajectory planning of kinematically redundant parallel manipulators by using multiple working modes*. Mechanism and Machine Theory 98 (2016): 216-230.
- [18] Reveles Ramos D. *Estudio sobre las condiciones de cambio del modo de funcionamiento de robots paralelos*, Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, México, febrero del 2011.
- [19] Reveles Ramos D. *Contribución al estudio de la planificación de trayectorias de manipuladores paralelos*, Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, México, noviembre del 2015.

Apéndices

Apéndice A

Código del manipulador Fanuc Arc Mate 100iC

```
1 % Programa que simula el movimiento de un robot serial FANUC ARC MATE 100iC
  y graficación
2 % de la manipulación usando la matriz jacobiana homogeneizada
3 % mediante el uso de parámetros inerciales por:
4 % Daniel Roberto Soto Delgado No. de ctrol. M1713039
5 % _____ %
6 %Parámetros de graficación:
7 np=100;
8
9 %Epsilon
10 e = 1;
11
12 %Parámetros geométricos
13 d2=15;
14 d3=60;
15 d4=20;
16 r4=64;
17 dhh=22;
18 radio=20;
19
20 ms = 5;
21 rs = 10;
22 % Especificación de la base del robot en el marco 0
23
24 sp1=[0 0 0 1]';
25 sp2=[0 0 -45 1]';
26 b1=[-10 10 -45 1]';
27 b2=[10 10 -45 1]';
28 b3=[10 -10 -45 1]';
29 b4=[-10 -10 -45 1]';
```



```
30
31 % Especificacion de los vertices de la pinza en el marco 4:
32
33 p1=[5 2.5 0 1]';
34 p2=[5 2.5 5 1]';
35 p3=[5 -2.5 0 1]';
36 p4=[5 -2.5 5 1]';
37 p5=[-5 2.5 0 1]';
38 p6=[-5 2.5 5 1]';
39 p7=[-5 -2.5 0 1]';
40 p8=[-5 -2.5 5 1]';
41
42 %Parámetros del movimiento del robot:
43 T=5;
44
45 aa=-110; %25;
46 bb=0;
47 cc=0;
48
49 %Emplazamiento en piso:
50 Te0= [1 0 0 aa
51        0 1 0 bb
52        0 0 1 cc
53        0 0 0 1];
54
55 T0e=inv(Te0);
56
57 %Emplazamiento de la tarea:
58 xt=10;
59 yt=2;
60 zt=4;
61
62 Temt=[0 0 -1 xt;
63        0 1 0 yt;
64        1 0 0 zt;
65        0 0 0 1];
66
67 %Rotacion de la pinza:
68
69 alfa=0;
70 beta=0;
71 gamma=pi;
72
73 Ralfa=[cos(alfa) -sin(alfa) 0 ;
74        sin(alfa)  cos(alfa) 0 ;
75        0           0       1 ];
```

```

76
77
78 Rbeta=[cos(beta) 0 sin(beta) ;
79         0      1  0      ;
80        -sin(beta) 0 cos(beta)];
81
82 Rgamma=[ 1      0      0      ;
83          0      cos(gamma) -sin(gamma) ;
84          0      sin(gamma)  cos(gamma)];
85
86 Rth=Ralfa*Rbeta*Rgamma;
87
88 T6h=[ 0 1 0 0;
89       -1 0 0 0;
90        0 0 1 dhh;
91        0 0 0 1];
92 Th6=inv(T6h);
93
94 for i=0:np
95     t=T*i/np;
96     funt=(t/T)-(1/(2*pi))*(sin(2*pi*t/T));
97     phi=2*pi*((t/T)-(1/(2*pi))*(sin(2*pi*t/T)));
98
99     px=radio*cos(phi);
100    py=radio*sin(phi);
101    pz=0;
102
103 Tth=[Rth(1,1) Rth(1,2) Rth(1,3) px;
104       Rth(2,1) Rth(2,2) Rth(2,3) py;
105       Rth(3,1) Rth(3,2) Rth(3,3) pz;
106       0      0      0      1];
107
108 %Matriz snap
109
110 Snap=T0e*Temt*Tth*Th6;
111
112     sx=Snap(1,1);
113     sy=Snap(2,1);
114     sz=Snap(3,1);
115
116     nx=Snap(1,2);
117     ny=Snap(2,2);
118     nz=Snap(3,2);
119
120     ax=Snap(1,3);
121     ay=Snap(2,3);

```

```

122     az=Snap(3,3);
123
124     Px=Snap(1,4);
125     Py=Snap(2,4);
126     Pz=Snap(3,4);
127
128     %Modelo inverso de posición
129     t1 = atan2(Py,Px);
130
131     %Equation type 6
132     Z1=-d2 + Px*cos(t1) + Py*sin(t1);
133
134     B1 = 2*(-(d4*Pz) - r4*Z1);
135     B2 = 2*(Pz*r4 - d4*Z1);
136     B3 = (d3*d3) - (d4*d4) - (Pz*Pz) - (r4*r4) - (Z1*Z1);
137     raiz1=sqrt((B1*B1) + B2*B2 - (B3*B3));
138     if B1^2+B2^2<B3^2
139         raiz1=0;
140     end
141     SQ = (B1*B3 + B2*raiz1*e)/(B1*B1 + B2*B2);
142     CQ = (B2*B3 - B1*raiz1*e)/(B1*B1 + B2*B2);
143     t23 = (atan2( SQ , CQ ));
144     t2 = atan2(-((-Pz - r4*cos(t23) + d4*sin(t23))/d3) , (Z1 - d4*cos(t23) - r4*
        sin(t23))/d3 );
145
146     t3 = t23-t2;
147
148     %Equation type 2
149     X=-(ay*cos(t1)) + ax*sin(t1);
150
151     Y=-(ax*cos(t1)*cos(t23)) - ay*cos(t23)*sin(t1) - az*sin(t23);
152
153     %X*cos(t4) + Y*sin(t4) = 0;
154
155     %Solution
156     t4 = atan2(-X,Y );
157
158     %Equation type 3
159     Y=-(cos(t4)*(ax*cos(t1)*cos(t23) + ay*cos(t23)*sin(t1) + az*sin(t23))) - (-
        ay*cos(t1)) + ax*sin(t1))*sin(t4);
160
161     Y1=az*cos(t23) - ax*cos(t1)*sin(t23) - ay*sin(t1)*sin(t23);
162
163     %Solution
164     t5 = atan2(-Y , -Y1 );
165

```

```

166 %Equation type 3
167 Y=-(cos(t4)*(-(sy*cos(t1)) + sx*sin(t1))) + (sx*cos(t1)*cos(t23) + sy*cos(
    t23)*sin(t1) + sz*sin(t23))*sin(t4);
168
169 Y1=-(cos(t4)*(-(ny*cos(t1)) + nx*sin(t1))) + (nx*cos(t1)*cos(t23) + ny*cos(
    t23)*sin(t1) + nz*sin(t23))*sin(t4);
170
171 %-sin(t6) = Y
172 %-cos(t6) = Y1
173
174 %Solution
175 t6 = atan2(-Y , -Y1 );
176
177 theta1(i+1,1) = rad2deg(t1);
178 theta2(i+1,1) = rad2deg(t2);
179 theta3(i+1,1) = rad2deg(t3);
180 theta4(i+1,1) = rad2deg(t4);
181 theta5(i+1,1) = rad2deg(t5);
182 theta6(i+1,1) = rad2deg(t6);
183
184 s1=sin(t1);
185 c1=cos(t1);
186 s2=sin(t2);
187 c2=cos(t2);
188 s3=sin(t3);
189 c3=cos(t3);
190 s4=sin(t4);
191 c4=cos(t4);
192 s5=sin(t5);
193 c5=cos(t5);
194 s6=sin(t6);
195 c6=cos(t6);
196
197
198
199 % Matrices de transformación
200 T01=[c1 -s1  0  0;
201      s1  c1  0  0;
202      0   0  1  0;
203      0   0  0  1];
204
205 T12=[c2 -s2  0  d2;
206      0   0 -1  0;
207      s2  c2  0  0;
208      0   0  0  1];
209

```

```

210 T23 =[c3 -s3  0  d3;
211      s3  c3  0  0;
212      0  0  1  0;
213      0  0  0  1];
214
215 T34=[c4 -s4  0  d4;
216      0  0 -1 -r4;
217      s4  c4  0  0;
218      0  0  0  1];
219
220 T45=[c5 -s5  0  0;
221      0  0  1  0;
222     -s5 -c5  0  0;
223      0  0  0  1];
224
225 T56=[c6 -s6  0  0;
226      0  0 -1  0;
227      s6  c6  0  0;
228      0  0  0  1];
229
230 %Vector para el codo
231 vp3=[20 0 0 1]';
232
233 %Vector para el primer eslabon a la base
234 esb=[0 0 0 1]';
235
236 %Vector para la herramienta
237 vph=[0 0 dhh 1]';
238 vpinza=[1 0 0 0;
239         0 1 0 0;
240         0 0 1 0;
241         0 0 -2.5 1]';
242
243 %Matrices
244 T02=T01*T12;
245 T03=T02*T23;
246 T03pr=T03*vp3;
247 T04=T03*T34;
248 T05=T04*T45;
249 T06=T05*T56;
250 T04ph=T06*vph;
251
252 %Coordenadas de los eslabones
253 x2=T02(1,4);
254 y2=T02(2,4);
255 z2=T02(3,4);

```

```

256
257 x3=T03(1,4);
258 y3=T03(2,4);
259 z3=T03(3,4);
260
261 xpr=T03pr(1);
262 ypr=T03pr(2);
263 zpr=T03pr(3);
264
265 x4=T04(1,4);
266 y4=T04(2,4);
267 z4=T04(3,4);
268
269 x4h=T04ph(1);
270 y4h=T04ph(2);
271 z4h=T04ph(3);
272
273 %Transformacion de las coordenadas de los extremos de los eslabones del
274 %marco 0 al marco e:
275 rp02=Te0*[x2 y2 z2 1]';
276 rp03=Te0*[x3 y3 z3 1]';
277 rppr03=Te0*[xpr ypr zpr 1]';
278 rp04=Te0*[x4 y4 z4 1]';
279 rp04h=Te0*[x4h y4h z4h 1]';
280
281     %Transformación de los vértices de la pinza
282     Te6=[0 0 1 rp04h(1);
283         0 1 0 rp04h(2);
284         1 0 0 rp04h(3);
285         0 0 0 1];
286 %Te4=Te0*Tpinza;
287 pnz1=Te6*p1;
288 pnz2=Te6*p2;
289 pnz3=Te6*p3;
290 pnz4=Te6*p4;
291 pnz5=Te6*p5;
292 pnz6=Te6*p6;
293 pnz7=Te6*p7;
294 pnz8=Te6*p8;
295
296
297 %Arreglos de la pinza
298 ar12x=[pnz1(1) pnz2(1)];
299 ar12y=[pnz1(2) pnz2(2)];
300 ar12z=[pnz1(3) pnz2(3)];
301

```

```
302 ar24x=[pnz2(1) pnz4(1)];
303 ar24y=[pnz2(2) pnz4(2)];
304 ar24z=[pnz2(3) pnz4(3)];
305
306 ar13x=[pnz1(1) pnz3(1)];
307 ar13y=[pnz1(2) pnz3(2)];
308 ar13z=[pnz1(3) pnz3(3)];
309
310 ar15x=[pnz1(1) pnz5(1)];
311 ar15y=[pnz1(2) pnz5(2)];
312 ar15z=[pnz1(3) pnz5(3)];
313
314 ar37x=[pnz3(1) pnz7(1)];
315 ar37y=[pnz3(2) pnz7(2)];
316 ar37z=[pnz3(3) pnz7(3)];
317
318 ar78x=[pnz7(1) pnz8(1)];
319 ar78y=[pnz7(2) pnz8(2)];
320 ar78z=[pnz7(3) pnz8(3)];
321
322 ar86x=[pnz8(1) pnz6(1)];
323 ar86y=[pnz8(2) pnz6(2)];
324 ar86z=[pnz8(3) pnz6(3)];
325
326 ar65x=[pnz6(1) pnz5(1)];
327 ar65y=[pnz6(2) pnz5(2)];
328 ar65z=[pnz6(3) pnz5(3)];
329
330 ar57x=[pnz5(1) pnz7(1)];
331 ar57y=[pnz5(2) pnz7(2)];
332 ar57z=[pnz5(3) pnz7(3)];
333
334 ar34x=[pnz3(1) pnz4(1)];
335 ar34y=[pnz3(2) pnz4(2)];
336 ar34z=[pnz3(3) pnz4(3)];
337
338 %Especificaciond e arreglos
339 %Eslabón a base
340 esabx=[esb(1) aa];
341 esaby=[esb(2) bb];
342 esabz=[esb(3) cc];
343
344 %Primer eslabón:
345 es1x=[aa rp02(1)];
346 es1y=[bb rp02(2)];
347 es1z=[cc rp02(3)];
```

```

348
349 %Segundo eslabón:
350 es2x=[rp02(1) rp03(1)];
351 es2y=[rp02(2) rp03(2)];
352 es2z=[rp02(3) rp03(3)];
353
354 %Codo prima
355 es3prx=[rp03(1) rppr03(1)];
356 es3pry=[rp03(2) rppr03(2)];
357 es3prz=[rp03(3) rppr03(3)];
358
359 %Cuarto eslabon
360 es4x=[rppr03(1) rp04(1)];
361 es4y=[rppr03(2) rp04(2)];
362 es4z=[rppr03(3) rp04(3)];
363
364 %Eslabon a la herramienta
365 es4hx=[rp04(1) rp04h(1)];
366 es4hy=[rp04(2) rp04h(2)];
367 es4hz=[rp04(3) rp04h(3)];
368
369 rpp=rp04h+[5 0 0 1]';
370
371 %Se guardan las coordenadas de 04 en un arreglo
372     pnx(i+1)=rp04h(1);
373     pny(i+1)=rp04h(2);
374     pnz(i+1)=rp04h(3);
375
376 pn1x(i+1)=rp04(1);
377 pn1y(i+1)=rp04(2);
378 pn1z(i+1)=rp04(3);
379
380 pn2x(i+1)=rpp(1);
381 pn2y(i+1)=rpp(2);
382 pn2z(i+1)=rpp(3);
383 %Transformada de los puntos de la base del robot y de los extremos
384 %de los ejes del marco 0 en el marco e
385 s1n = Te0*sp1;
386 s2n = Te0*sp2;
387 b1n = Te0*b1;
388 b2n = Te0*b2;
389 b3n = Te0*b3;
390 b4n = Te0*b4;
391
392 s1x=[s1n(1) s2n(1)];
393 s1y=[s1n(2) s2n(2)];

```



```

394 s1z=[s1n(3) s2n(3)];
395
396 b1x=[b1n(1) b2n(1)];
397 b1y=[b1n(2) b2n(2)];
398 b1z=[b1n(3) b2n(3)];
399
400 b2x=[b2n(1) b3n(1)];
401 b2y=[b2n(2) b3n(2)];
402 b2z=[b2n(3) b3n(3)];
403
404 b3x=[b3n(1) b4n(1)];
405 b3y=[b3n(2) b4n(2)];
406 b3z=[b3n(3) b4n(3)];
407
408 b4x=[b4n(1) b1n(1)];
409 b4y=[b4n(2) b1n(2)];
410 b4z=[b4n(3) b1n(3)];
411
412 figure(1)
413 clf
414 hold on
415
416 %Graficacion de la ruta del OT:
417
418 if i>1
419     for j=2:i
420 %         plot3([pn1x(j-1),pn1x(j)], [pn1y(j-1),pn1y(j)], [pn1z(j-1),pn1z(j)
421 %             ], 'g');
422 %         hold on
423 %         plot3([pn2x(j-1),pn2x(j)], [pn2y(j-1),pn2y(j)], [pn2z(j-1),pn2z(j)], 'r
424 %             ', 'linewidth', 2);
425 %         hold on
426 %         if j==i
427 %             end
428 %         end
429 %     end
430 % end
431 %Grafica de la base
432 plot3(b1x,b1y,b1z, 'k', b2x, b2y, b2z, 'k', b3x,b3y,b3z, 'k', b4x,b4y,b4z, 'k'
433 %     , 'linewidth', 2);
434 plot3(s1x,s1y,s1z, 'k', 'MarkerSize', 5);
435 grid on
436 %Graficación del robot en la configuración actual (iteración i)
437 plot3(es1x,es1y,es1z, 'k-o');
438 hold on

```

```

437 plot3(es2x,es2y,es2z, 'k-o');
438 hold on
439 plot3(es4x,es4y,es4z, 'k');
440 hold on
441 plot3(es3prx,es3pry,es3prz, 'k');
442 hold on
443 plot3(es4hx,es4hy,es4hz, 'k-o');
444 hold on
445
446 %% Graficación de la pinza
447 % plot3(ar12x,ar12y,ar12z, 'r','linewidth',2)
448 % hold on
449 % plot3(ar24x,ar24y,ar24z, 'r','linewidth',2)
450 % hold on
451 % plot3(ar13x,ar13y,ar13z, 'r','linewidth',2)
452 % hold on
453 % plot3(ar15x,ar15y,ar15z, 'k','linewidth',2)
454 % hold on
455 % plot3(ar37x,ar37y,ar37z, 'k','linewidth',2)
456 % hold on
457 % plot3(ar78x,ar78y,ar78z, 'b','linewidth',2)
458 % hold on
459 % plot3(ar86x,ar86y,ar86z, 'b','linewidth',2)
460 % hold on
461 % plot3(ar65x,ar65y,ar65z, 'b','linewidth',2)
462 % hold on
463 % plot3(ar57x,ar57y,ar57z, 'b','linewidth',2)
464 % hold on
465 % plot3(ar34x,ar34y,ar34z, 'r','linewidth',2)
466 % hold on
467 grid on
468 view([1 -1 1]);
469 %view([0 0 1]);
470 axis ([-150,50,-100,100,-100,100,])
471
472 %Matriz jacobiana
473 JAC(1,1)= -(d2*sin(t1)) - d3*cos(t2)*sin(t1) - d4*cos(t2 + t3)*sin(t1)-r4*
      sin(t1)*sin(t2 + t3);%d2*s1-d3*s12;
474 JAC(2,1)= d2*cos(t1) + d3*cos(t1)*cos(t2) + d4*cos(t1)*cos(t2 + t3)+ r4*cos
      (t1)*sin(t2 + t3);%d2*c1+d3*c12;
475 JAC(3,1) = 0;
476 JAC(1,2)= r4*cos(t1)*cos(t2 + t3) - d3*cos(t1)*sin(t2) - d4*cos(t1)*sin(t2
      + t3);%d3*s12;
477 JAC(2,2)= r4*cos(t2 + t3)*sin(t1) - d3*sin(t1)*sin(t2) - d4*sin(t1)*sin(t2
      + t3);%d3*c12;
478 JAC(3,2) = d3*cos(t2) + d4*cos(t2 + t3) + r4*sin(t2 + t3);

```

```

479 JAC(4,2) = sin(t1);
480 JAC(5,2) = -cos(t1);
481 JAC(6,2) = 0;
482 JAC(1,3) = r4*cos(t1)*cos(t2 + t3) - d4*cos(t1)*sin(t2 + t3);
483 JAC(2,3) = r4*cos(t2 + t3)*sin(t1) - d4*sin(t1)*sin(t2 + t3);
484 JAC(3,3) = d4*cos(t2 + t3) + r4*sin(t2 + t3);
485 JAC(4,3) = sin(t1);
486 JAC(5,3) = -cos(t1);
487 JAC(6,3) = 0;
488 JAC(1,4) = 0;
489 JAC(2,4) = 0;
490 JAC(3,4) = 0;
491 JAC(4,4) = cos(t1)*sin(t2 + t3);
492 JAC(5,4) = sin(t1)*sin(t2 + t3);
493 JAC(6,4) = -cos(t2 + t3);
494 JAC(1,5) = 0;
495 JAC(2,5) = 0;
496 JAC(3,5) = 0;
497 JAC(4,5) = cos(t4)*sin(t1) - cos(t1)*cos(t2 + t3)*sin(t4);
498 JAC(5,5) = -(cos(t1)*cos(t4)) - cos(t2 + t3)*sin(t1)*sin(t4);
499 JAC(6,5) = -(sin(t2 + t3)*sin(t4));
500 JAC(1,6) = 0;
501 JAC(2,6) = 0;
502 JAC(3,6) = 0;
503 JAC(6,1) = 1;
504 JAC(4,6) = cos(t1)*cos(t5)*sin(t2 + t3) + cos(t1)*cos(t2 + t3)*cos(t4)*sin(
    t5)+sin(t1)*sin(t4)*sin(t5);
505 JAC(5,6) = cos(t5)*sin(t1)*sin(t2 + t3) + cos(t2 + t3)*cos(t4)*sin(t1)*sin(
    t5)- cos(t1)*sin(t4)*sin(t5);
506 JAC(6,6) = -(cos(t2 + t3)*cos(t5)) + cos(t4)*sin(t2 + t3)*sin(t5);
507
508 %Jacobiana traslacional
509 JACTRA=[JAC(1,1) JAC(1,2) JAC(1,3);
510         JAC(2,1) JAC(2,2) JAC(2,3);
511         JAC(3,1) JAC(3,2) JAC(3,3)];
512
513 %Jacobiana rotacional
514 JACROT=[JAC(4,4) JAC(4,5) JAC(4,6);
515         JAC(5,4) JAC(5,5) JAC(5,6);
516         JAC(6,4) JAC(6,5) JAC(6,6)];
517
518 % Jacobiana generalizada
519
520 JAC = [JAC(1,1) JAC(1,2) JAC(1,3) JAC(1,4) JAC(1,5) JAC(1,6);
521        JAC(2,1) JAC(2,2) JAC(2,3) JAC(2,4) JAC(2,5) JAC(2,6);
522        JAC(3,1) JAC(3,2) JAC(3,3) JAC(3,4) JAC(3,5) JAC(3,6);

```

```

523     JAC(4,1) JAC(4,2) JAC(4,3) JAC(4,4) JAC(4,5) JAC(4,6);
524     JAC(5,1) JAC(5,2) JAC(5,3) JAC(5,4) JAC(5,5) JAC(5,6);
525     JAC(6,1) JAC(6,2) JAC(6,3) JAC(6,4) JAC(6,5) JAC(6,6)];
526
527
528 LT = sqrt(ms/2);
529 LR = sqrt((2*ms*rs^2)/5);
530 L = 0.7390;
531
532 JACH = [LT*JAC(1,1) LT*JAC(1,2) LT*JAC(1,3) LT*JAC(1,4) LT*JAC(1,5) LT*JAC
(1,6);
533     LT*JAC(2,1) LT*JAC(2,2) LT*JAC(2,3) LT*JAC(2,4) LT*JAC(2,5) LT*JAC
(2,6);
534     LT*JAC(3,1) LT*JAC(3,2) LT*JAC(3,3) LT*JAC(3,4) LT*JAC(3,5) LT*JAC
(3,6);
535     LR*JAC(4,1) LR*JAC(4,2) LR*JAC(4,3) LR*JAC(4,4) LR*JAC(4,5) LR*JAC
(4,6);
536     LR*JAC(5,1) LR*JAC(5,2) LR*JAC(5,3) LR*JAC(5,4) LR*JAC(5,5) LR*JAC
(5,6);
537     LR*JAC(6,1) LR*JAC(6,2) LR*JAC(6,3) LR*JAC(6,4) LR*JAC(6,5) LR*JAC
(6,6)];
538
539 JACL =[JAC(1,1)/L JAC(1,2)/L JAC(1,3)/L JAC(1,4)/L JAC(1,5)/L JAC(1,6)/L;
540     JAC(2,1)/L JAC(2,2)/L JAC(2,3)/L JAC(2,4)/L JAC(2,5)/L JAC(2,6)/L;
541     JAC(3,1)/L JAC(3,2)/L JAC(3,3)/L JAC(3,4)/L JAC(3,5)/L JAC(3,6)/L;
542     JAC(4,1) JAC(4,2) JAC(4,3) JAC(4,4) JAC(4,5) JAC(4,6);
543     JAC(5,1) JAC(5,2) JAC(5,3) JAC(5,4) JAC(5,5) JAC(5,6);
544     JAC(6,1) JAC(6,2) JAC(6,3) JAC(6,4) JAC(6,5) JAC(6,6)];
545
546 fnor = 4.1898e+09; %5.0425e+09;
547 fnortra = 4.0218e+05; % 4.5101e+05;
548 fnorlong = 9.2855e+05;
549 wvgl = sqrt(det(JACH*JACH'));
550 wvgl(i+1,1)= wvgl/fnor;
551 wvlongitud = sqrt(det(JACL*JACL'));
552
553
554 Wtrn1=sqrt(det(JACTRA*JACTRA'));
555 Wrot1(i+1)=sqrt(det(JACROT*JACROT'));
556 Wtrn(i+1,1)=Wtrn1/fnortra;
557 Wvlong(i+1,1) = wvlongitud/fnorlong;
558
559 title('Fanuc Arc Mate 100iC Serial Manipulator's Movement Simulation', '
Interpreter', 'latex')
560 legend('Ruta de la tarea', 'Location', 'north')
561 % legend('boxoff')

```

```
562 xlabel('X');
563 ylabel('Y');
564 zlabel('Z');
565 pause(0.01)
566 end
567 t = 0:T/np:T;
568
569 figure(2)
570 clf
571 plot(t,wgln,'r','linewidth',1)
572 hold on
573 plot(t,Wtrn,'k','linewidth',1)
574 hold on
575 plot(t,Wrot1, 'm', 'linewidth',1)
576 hold on
577 plot(t,WWlong, 'b—', 'linewidth',1)
578 hold on
579 grid on
580 title('Manipulabilidad')
581 legend('Manipulabilidad global h. con parámetros inerciales ','
Manipulabilidad traslacional','Manipulabilidad rotacional','
Manipulabilidad global h. con longitud característica ','Location','
southwest')
582 dim = [.15 .6 .3 .3];
583 xlabel('t [segundos]','interpreter','latex');
584 grid on
585 hold on
586 axis ([0,T,0,1])
587
588 figure(3)
589 clf
590 plot(t,WWlong, 'm', 'linewidth',1)
591 hold on
```

Capítulo 7

Código de Matlab del robot 3-RRR

```
1 % Programa que simula el movimiento de un robot paralelo 3-RRR por: Daniel
  Roberto Soto Delgado No. de ctrol. M1713039
2
3 clc;
4 clear all;
5 np = 100;          %Número de puntos para la simulación
6 T = 5;            %Tiempo de duración de la simulación en segundos
7
8 % Modos de funcionamiento
9 eps1 = 1;
10 eps2 = 1;
11 eps3 = 1;
12
13 % Parámetros del robot paralelo
14 mp = 5.8579;      %masa de la plataforma movil
15 r = 6;           %radio del círculo circunscrito en la PM en centímetros
16 R = 10;          %radio del círculo circunscrito en la PF en centímetros
17 l1 = 7;          %longitud de las piernas en centímetros
18 l2 = l1;
19 zp = 0;
20
21 % Posición y orientación inicial
22 xpini = 8.66;     %Punto inicial en X
23 ypini = 5;        %Punto inicial en Y
24 phiini = deg2rad(-105); %Orientación inicial de la PM
25
26 % Incrementos de la posición y orientación
27 delxp = 0;        %incrementos en X
28 delyp = 0;        %incrementos en Y
29 delphi = deg2rad(215); %Incrementos de Phi
30
31 %—————Solución al problema inverso de posición————— %
```

```

32 for i=1:np
33     t = T*(i/np);
34
35     fc = t/T - (1/(2*pi))*sin((2*pi*t)/T);
36
37 xp = xpini + delxp*fc;
38 yp = ypini + delyp*fc;
39
40 phi(:,i) = phiini + delphi*fc;
41
42 sph = sin(phi(i));
43 cphi = cos(phi(i));
44
45 phif(:,i) = rad2deg(phi(i));
46
47 % Vectores conocidos %
48 r7x = (sqrt(3)/2)*r*cphi-(r/2)*sph;
49 r7y = (sqrt(3)/2)*r*sphi+(r/2)*cphi;
50 r7z = 0;
51
52 r8x = -(sqrt(3)/2)*r*cphi-(r/2)*sph;
53 r8y = -(sqrt(3)/2)*r*sphi+(r/2)*cphi;
54 r8z = 0;
55
56 r9x = r*sphi;
57 r9y = -r*cphi;
58 r9z = 0;
59
60 % Plataforma móvil %
61 rC1x = xp-r7x;
62 rC1y = yp-r7y;
63
64 rC2x = xp-r8x;
65 rC2y = yp-r8y;
66
67 rC3x = xp-r9x;
68 rC3y = yp-r9y;
69
70 % Vectores PM al punto P%
71 r7 = [r7x r7y r7z]';
72 r8 = [r8x r8y r8z]';
73 r9 = [r9x r9y r9z]';
74
75 % Vertices %
76 rC1 = [rC1x rC1y]';
77 rC2 = [rC2x rC2y]';

```

```

78 rC3 = [rC3x rC3y]';
79
80 %%%%%%%%%%
81 S = sqrt(3)*R;
82 k1 = sqrt(rC1x^2+rC1y^2);
83 k2 = sqrt((rC2x - S)^2 + rC2y^2);
84 k3 = sqrt((rC3x - S/2)^2 + (rC3y - (sqrt(3)*S)/2)^2);
85
86 rC1ux = rC1x/k1;
87 rC1uy = rC1y/k1;
88 rC2ux =(rC2x - S)/k2;
89 rC2uy = rC2y/k2;
90 rC3ux =(rC3x - S/2)/k3;
91 rC3uy =(rC3y - (sqrt(3)*S)/2)/k3;
92
93 g1 = (l1^2 - l2^2 + k1^2)/(2*k1);
94 g2 = (l1^2 - l2^2 + k2^2)/(2*k2);
95 g3 = (l1^2 - l2^2 + k3^2)/(2*k3);
96
97 h1 = sqrt(l1^2 - g1^2);
98 h2 = sqrt(l1^2 - g2^2);
99 h3 = sqrt(l1^2 - g3^2);
100 %%%%%%%%%%
101
102 % Obtención de los vectores r1-r6 %
103 r1 = [eps1*h1*rC1uy + g1*rC1ux;
104       g1*rC1uy - eps1*h1*rC1ux];
105 r2 = [eps2*h2*rC2uy+g2*rC2ux;
106       g2*rC2uy-eps2*h2*rC2ux];
107 r3 = [eps3*h3*rC3uy + g3*rC3ux;
108       g3*rC3uy - eps3*h3*rC3ux];
109 r4 = [rC1x rC1y]'-r1;
110 r5 = [rC2x - S rC2y]'-r2;
111 r6 = [(rC3x - S/2) (rC3y - (sqrt(3)*S)/2)]' - r3;
112
113 r1x = r1(1);
114 r1y = r1(2);
115 r2x = r2(1);
116 r2y = r2(2);
117 r3x = r3(1);
118 r3y = r3(2);
119 r4x = r4(1);
120 r4y = r4(2);
121 r5x = r5(1);
122 r5y = r5(2);
123 r6x = r6(1);

```



```

124 r6y = r6(2);
125
126 % Coordinadas articulares
127
128 theta1 = atan2(r1y,r1x);
129 theta2 = atan2(r2y,r2x);
130 theta3 = atan2(r3y,r3x);
131
132 t1 = rad2deg(theta1);
133 t2 = rad2deg(theta2);
134 t3 = rad2deg(theta3);
135 P = [xp yp 0];
136
137 % Cálculo de los vectores unitarios %
138 r4u = r4/norm(r4);
139 r4ux = r4u(1);
140 r4uy = r4u(2);
141
142 r5u = r5/norm(r5);
143 r5ux = r5u(1);
144 r5uy = r5u(2);
145
146 r6u = r6/norm(r6);
147 r6ux = r6u(1);
148 r6uy = r6u(2);
149
150 % Matriz jacobiana Paralela %
151 A = [r4ux r4uy (r4ux*r7y-r4uy*r7x);
152      r5ux r5uy (r5ux*r8y-r5uy*r8x);
153      r6ux r6uy (r6ux*r9y-r6uy*r9x)];
154
155 % Matriz jacobiana Serial %
156 B = [(r1x*r4ux-r1y*r4uy)          0          0;
157      0          (r2x*r5ux-r2y*r5uy)          0;
158      0          0          (r3x*r6ux-r3y*r6uy)];
159
160 % Homogeneización de la Matriz jacobiana paralela (A)
161
162 % Factores de homogeneización
163 LT = sqrt(mp/2);
164 LR = sqrt((mp*r^2)/4);
165
166 LTi = inv(LT);
167 LRi = inv(LR);
168
169 % Matriz A homogeneizada con parámetros inerciales

```

```

170 Ahm = [LTi*(A(1,1)) LTi*(A(1,2)) L Ri*(A(1,3));
171         LTi*(A(2,1)) LTi*(A(2,2)) L Ri*(A(2,3));
172         LTi*(A(3,1)) LTi*(A(3,2)) L Ri*(A(3,3))];
173
174 % % % Matriz A homogeneizada con longitud característica
175 % % Ahm = [A(1,1) A(1,2) (A(1,3))/(sqrt(2)*r);
176 % %         A(2,1) A(2,2) (A(2,3))/(sqrt(2)*r);
177 % %         A(3,1) A(3,2) (A(3,3))/(sqrt(2)*r)];
178
179 K(:,i) = cond(Ahm);
180 k(:,i) = inv(K(i));
181
182 % Construcción de los eslabones para las piernas %
183
184 esr1x=[0,r1x];
185 esr1y=[0,r1y];
186 esr1z=[0,0];
187
188 esr4x=[r1x,rC1(1)];
189 esr4y=[r1y,rC1(2)];
190 esr4z=[0,0];
191
192 esr2x=[S,r2(1)+S];
193 esr2y=[0,r2(2)];
194 esr2z=[0,0];
195
196 esr5x=[esr2x(2),rC2(1)];
197 esr5y=[esr2y(2),rC2(2)];
198 esr5z=[0,0];
199
200 esr3x=[S/2,r3(1)+(S/2)];
201 esr3y=[(sqrt(3)*S)/2,r3(2)+(sqrt(3)*S)/2];
202 esr3z=[0,0];
203
204 esr6x=[esr3x(2),rC3(1)];
205 esr6y=[esr3y(2),rC3(2)];
206 esr6z=[0,0];
207
208 platx1 = [rC1(1),rC2(1)];
209 platy1 = [rC1(2),rC2(2)];
210 platz1 = [0,0];
211
212 platx2 = [rC2(1),rC3(1)];
213 platy2 = [rC2(2),rC3(2)];
214 platz2 = [0,0];
215

```

```
216 platx3 = [rC3(1),rC1(1)];
217 platy3 = [rC3(2),rC1(2)];
218 platz3 = [0,0];
219
220 pnx(i) = xp;
221 pny(i) = yp;
222 pnz(i) = zp;
223
224 figure(1)
225 clf
226 % Graficacion de la ruta del OT:
227 if i-1>1
228 for j=2:i-1
229 plot3([pnx(j-1),pnx(j)], [pny(j-1),pny(j)], [pnz(j-1),pnz(j)], 'b', 'linewidth'
      ,3);
230 hold on
231 if j==i-1
232 plot3([pnx(j),pnx(j+1)], [pny(j),pny(j+1)], [pnz(j),pnz(j+1)], 'b', 'linewidth'
      ,3);
233 end
234 end
235 end
236
237 % Organo terminal
238 plot3(xp, yp, zp, 'r-*', 'linewidth', 1)
239 hold on
240 % Pierna 1
241 plot3(esr1x,esr1y,esr1z, 'r-o', 'linewidth',1)
242 hold on
243 plot3(esr4x,esr4y,esr4z, 'b-o', 'linewidth',1)
244 hold on
245 % Pierna 2
246 plot3(esr2x,esr2y,esr2z, 'r-o', 'linewidth',1)
247 hold on
248 plot3(esr5x,esr5y,esr5z, 'b-o', 'linewidth',1)
249 hold on
250 % Pierna 3
251 plot3(esr3x,esr3y,esr3z, 'r-o', 'linewidth',1)
252 hold on
253 plot3(esr6x,esr6y,esr6z, 'b-o', 'linewidth',1)
254 hold on
255 % Plataforma móvil
256 plot3(platx1,platy1,platz1, 'k', 'linewidth',1)
257 hold on
258 plot3(platx2,platy2,platz2, 'k', 'linewidth',1)
259 hold on
```

```
260 plot3(platx3,platy3,platz3,'k','linewidth',1)
261 hold on
262
263 axis([-10,25,-10,20,-20,20])
264 view([0,0,1])
265 title('\textbf{3-\underline{R}RR Manipulator's Movement Simulation}','
        Interpreter','latex')
266 xlabel('X');
267 ylabel('Y');
268 zlabel('Z');
269 grid on
270
271 figure(2)
272 clf
273 plot(phif,k,'r','linewidth',1)
274 title('\kappa^{-1}(A) versus \phi')
275 xlabel('\phi [grados]');
276 ylabel('\kappa^{-1}(A)');
277 legend('\kappa^{-1}(A)','Location','southwest')
278 dim = [.15 .6 .3 .3];
279 str = {'$x = 8.66$', '$y = 5.0$', '$Mf1$'};
280 annotation('textbox',dim,'String',str,'FitBoxToText','on','Interpreter','
        Latex','EdgeColor','none');
281 hold on
282 axis([-150,150,0,1])
283
284 pause(0.01)
285 end
```



"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **13/Septiembre/2019**
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/004/2019
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

C. Daniel Roberto Soto Delgado
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

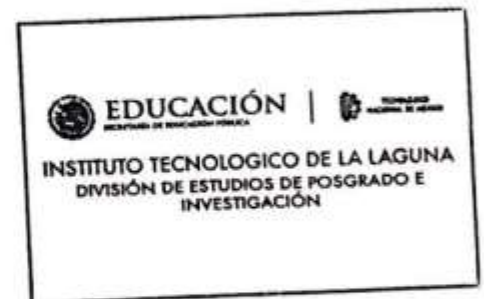
Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Estudio sobre la homogenización de la matriz jacobiana de robots manipuladores"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (18)-TMCIE-2019**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de La Laguna



JIHJ/GSL





"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **10/Septiembre/2019**

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Estudio sobre la homogenización de la matriz jacobiana de robots manipuladores"

Desarrollado por el **C. Daniel Roberto Soto Delgado**, con número de control **M1713039** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. José Alfonso Pámanes García
Asesor/Director de Tesis

Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom
Comité Tutorial

Dr. Juan Sifuentes Mijares
Comité Tutorial

Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Comité Tutorial

