



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Tecnológico de La Laguna



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

“Control Adaptable de un Sistema Modelado Mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales”

POR

Oscar Fernando Murillo García

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Jurado Zamarripa

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (03)-TDCIE-2022

Torreón, Coahuila de Zaragoza. México,

Junio 2022

Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón, Coah., **20/Junio/2022**
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/040/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M.C. OSCAR FERNANDO MURILLO GARCÍA
C. CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

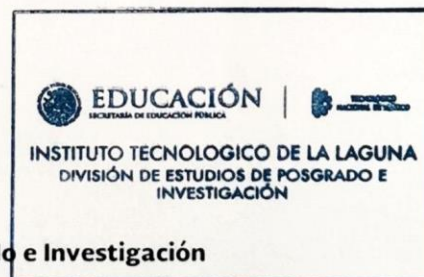
"Control Adaptable de un Sistema de Modelado Mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales "

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (03)-TDCIE-2022**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna



Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna Col. Centro C.P.
27000

Tel. 01 (871) 706-1313 | www.tecnm.mx | www.itlalaguna.edu.mx



Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón Coah., 10/Junio/2022

Asunto: Autorización de Impresión

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

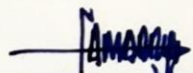
Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

“Control Adaptable de un Sistema Modelado Mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales”

Desarrollado por el **C. Oscar Fernando Murillo García**, con número de control **D1613006** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE

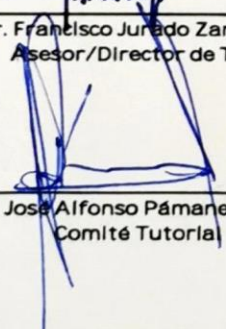
Educación Tecnológica Fuente de Innovación




Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Asesor/Director de Tesis



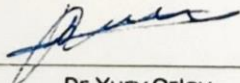
Dr. Miguel Ángel Llana Leal
Comité Tutorial



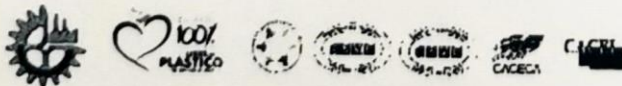
Dr. José Alfonso Pámanes García
Comité Tutorial



Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila
Comité Tutorial



Dr. Yury Orlov
Comité Tutorial Externo



A la memoria del Doctor Carlos Jaime Murillo Flores

Dedicatoria

A mis padres, Carlos Jaime y María de Lourdes, que nunca me dejaron claudicar en el intento.

A mi hija, Ana Joaquina, que con su amor incondicional me motiva día con día a ser mejor persona.

A mis hermanos, Carlos Alejandro, Jaime Gabriel, María de Lourdes, Ricardo Javier y Angel Daniel, pues cada uno de ellos me ha enseñado un poco de lo que día a día pongo en práctica.

A Jacqueline, por todo el apoyo, por su paciencia, templanza y aplomo.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a los Doctores Francisco Jurado Zamarripa, José Alfonso Pámanes García, Miguel Ángel Llama Leal, Víctor Adrián Santibáñez Dávila por todo el apoyo brindado durante el desarrollo del presente trabajo de tesis, por su paciencia y confianza.

Un especial agradecimiento al Doctor Yury Orlov, por sus valiosas aportaciones para el actual documento de tesis.

A todos mis compañeros y colegas de posgrado, Eduardo Cruz, Jorge Villalobos, Sergio López, Daniel Soto, Felipe Guerra y Romeo Falcón, quienes nunca han tenido reparo alguno en tenderme la mano cuando he necesitado de su ayuda.

Al Tecnológico Nacional de México por brindarme las facilidades para el buen desarrollo de mis estudios de doctorado, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo de la beca otorgada para la culminación de mis estudios.

Resumen

Muchos fenómenos en la naturaleza están sujetos a la interacción de diversos parámetros físicos conocidos que permiten predecir el comportamiento de tales fenómenos. En gran cantidad de casos, estos parámetros físicos no se conocen con exactitud o se desconocen por completo, por lo que técnicas de identificación pueden ser empleadas para estimar sus valores. Los sistemas en los que sus entradas y salidas varían, tanto temporal como espacialmente, son denominados como sistemas de parámetros distribuidos y son modelados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales parciales. La forma en que los parámetros físicos evolucionan con respecto al tiempo no siempre es conocida y puede llegar a inducir un comportamiento no deseado de la dinámica del sistema. Para revertir lo anterior se puede utilizar la conocida técnica de control adaptable en la frontera para la estimación de los parámetros desconocidos asegurando un comportamiento estable de la dinámica del sistema. En el presente trabajo de investigación se implementa el diseño de un control adaptable en la frontera para una ecuación diferencial parcial del tipo parabólica que describe el comportamiento del fenómeno físico de reacción-advección-difusión, bajo el supuesto del desconocimiento de los parámetros físicos que acompañan a los términos de advección y de reacción y con condiciones de frontera Robin y Neumann combinadas. Durante el proceso del diseño del control adaptable se establece una ecuación diferencial parcial de identificación de parámetros con sus respectivas condiciones de frontera y se diseñan leyes adaptables invocando el principio de equivalencia cierta con identificador pasivo. Se extiende la aplicación de las leyes de control adaptable en la frontera para un sistema representado por una ecuación diferencial parcial no lineal y se validan los resultados del desempeño del controlador mediante simulación numérica.

Abstract

Plenty of phenomena in nature are subject to the interaction of many physical known parameters which allow predicting the behavior of these phenomena. In several cases, these physical parameters are not precisely known or they are completely unknown, so identification techniques can be used to estimate their true values. Systems in which both inputs and outputs vary temporarily as well as spatially are denoted as distributed parameters systems and they are mathematically modeled by partial differential equations.

The way in which the physical parameters evolve with respect to time is not always known and can lead to undesirable behavior in the dynamics of the system. To avoid the latter, the well-known adaptive boundary control technique can be used to estimate the unknown parameters, ensuring a stable behavior of the system dynamics.

In the present research work, the design of an adaptive boundary controller is implemented for a parabolic partial differential equation that describes the behavior of the reaction-advection-diffusion phenomenon under the assumption that the physical parameters associated with the advection and reaction terms are unknown along with combined Robin and Neumann boundary conditions. During the adaptive control design process, an identifier partial differential equation is established along with its respective boundary conditions, and adaptive laws are designed following the certainty equivalence principle.

The application of the adaptive boundary control law is extended to a nonlinear partial differential equation system and the results of the controller performance are validated through numerical simulation.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación para el tema	3
1.1.1. Antecedentes	3
1.1.2. Del control adaptable en la frontera de PDEs no lineales por reali- mentación de estados	5
1.2. Objetivo de la tesis	5
1.3. Organización del documento de tesis	6
2. Fundamentos Matemáticos	7
2.1. Elementos de análisis funcional	7
2.1.1. Espacios normados	7
2.1.1.1. Secuencia Cauchy	8
2.1.1.2. Espacio de Banach	8
2.1.1.3. Espacio Hilbert (\mathcal{H})	8
2.1.1.4. Condición de Lipschitz	9
2.1.1.5. Espacios $L^p(\Omega)$	9
2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	13
2.2.1. De un sistema exponencialmente estable	14
2.3. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales	14
2.3.1. Definiciones básicas	14
2.3.1.1. PDE	15
2.3.1.2. Orden de una PDE	16
2.3.1.3. Linealidad de una PDE	16
2.3.1.4. Homogeneidad de PDEs de segundo orden	17
2.3.1.5. Clasificación básica de las PDEs	18
2.3.1.6. Solución de una PDE	18

2.3.1.7. Condiciones iniciales y de frontera	18
2.3.1.8. Buen planteamiento (Well-posedness)	19
2.3.2. Discusión	20
2.3.2.1. Ecuación de difusión o de calor	20
2.3.2.2. Ecuación de onda	20
2.3.2.3. Ecuación de Poisson	21
2.3.2.4. Ecuación de Laplace	22
2.3.2.5. Ecuación de advección o convección o de transporte	22
2.3.2.6. Ecuación de Burgers	24
2.3.2.7. Ecuación de Fisher	25
2.3.2.8. Ecuación generalizada de Burgers	25
3. Deducción del modelo matemático del caso de estudio	27
3.1. Leyes de conservación	27
3.2. Ecuaciones constitutivas	30
3.3. Fenómeno de advección	30
3.4. Fenómeno de advección y degradación	31
3.5. Fenómeno de difusión	32
3.6. Conducción de calor	36
3.7. Fenómeno de advección-difusión	37
3.8. Fenómeno de advección-difusión-degradación	38
3.9. Ecuación de reacción-advección-difusión	39
3.10. Ecuación de reacción-difusión	43
3.11. Ecuación de advección-difusión no lineal	46
3.12. Ecuación de reacción-difusión no lineal	47
3.13. Caso particular de una PDE no lineal	48
3.14. Condiciones iniciales y de frontera	49
3.14.1. Condición inicial	49
3.14.2. Condiciones de frontera	49
3.14.3. Del buen planteamiento de una PDE	50
3.15. Conclusión	51
4. Control por realimentación de estados en la frontera por backstepping	53
4.1. Control por backstepping de PDEs	54
4.1.1. Referente a la linealización de sistemas no lineales vía realimentación de estados	54
4.1.2. Extensión de la idea de linealización por realimentación para PDEs	54
4.2. Descripción del sistema RAD PDE	55
4.3. Análisis de estabilidad del sistema objetivo mediante el recurso de Lyapunov	56
4.3.1. Sistema objetivo	56
4.3.2. Función de Lyapunov	57
4.4. Diseño de la ley de control de realimentación en la frontera	59

4.4.1. Transformación a un sistema objetivo	59
4.4.1.1. Ecuación integral de Volterra	60
4.4.1.2. Obtención de la PDE kernel	61
4.4.2. Solución de la PDE kernel	63
4.4.2.1. Transformación de la PDE kernel a una ecuación integral	64
4.4.2.2. Solución de la ecuación integral	65
4.4.3. Ley de control	66
4.5. Resultados en simulación	68
4.5.1. RAD PDE en lazo abierto	68
4.5.2. RAD PDE en lazo cerrado	70
4.5.2.1. Robustez de la ley de control (4.59)	73
4.5.3. Conclusión	76
5. Control adaptable por realimentación de estados en la frontera	77
5.1. Control adaptable de PDEs	77
5.1.1. En referencia al control adaptable en dimensión finita	78
5.1.2. Extensión al control adaptable de PDEs	79
5.1.3. Principio de equivalencia cierta	79
5.2. Aplicación a una RAD PDE	80
5.3. Diseño de una ley adaptable de control de realimentación en la frontera	80
5.3.1. PDE del identificador paramétrico	81
5.3.2. PDE del error de estimación	82
5.3.3. Leyes adaptables	83
5.3.4. Función de Lyapunov	83
5.4. Resultados en simulación	86
5.4.1. RAD PDE en lazo abierto	86
5.4.2. RAD PDE en lazo cerrado	87
5.4.3. Conclusión	94
6. Control adaptable por realimentación de estados en la frontera para una	
 PDE no lineal	95
6.1. Control adaptable de NL PDEs	96
6.2. Planteamiento del objetivo de control	96
6.3. Aplicación a una NL PDE	96
6.3.1. Caso de estudio de una NL PDE	97
6.3.1.1. NL PDE en lazo abierto	97
6.4. Leyes adaptables de realimentación en la frontera para una NL PDE	100
6.4.1. Ley de control explícita	100
6.4.2. Identificador PDE	100
6.4.3. Error de estimación	101
6.4.4. Leyes adaptables	101
6.4.5. Objetivo de control	101

6.5. Resultados en simulación	101
6.5.0.1. NL PDE en lazo cerrado	101
6.5.1. Conclusión	110
7. Conclusiones	111
7.1. Aportaciones del trabajo de tesis	111
7.2. Trabajo futuro	112
7.3. Artículo publicado	112
APÉNDICE	130
A. Soluciones para ciertas clases de PDEs	131
A.0.1. Solución particular de la RD PDE (3.20)	131
A.0.2. Solución particular de la RAD PDE (3.19)	133
B. Funciones de Bessel	135
B.0.1. Funciones de Bessel de primera especie J_n	135
B.0.2. Funciones de Bessel de segunda especie I_n	136
C. Desigualdades	137
D. Solución de (4.46) por aproximaciones sucesivas	139

Índice de figuras

2.1. Superficie del comportamiento de la solución de (2.37) y su evolución en un tiempo t .	20
2.2. Superficie del comportamiento de la solución de (2.38) y su evolución en un tiempo t .	21
2.3. Superficie del comportamiento de la solución de (2.39) y su evolución en un tiempo t .	22
2.4. Superficie del comportamiento de la solución de (2.40) y su evolución en un tiempo t .	23
2.5. Superficie del comportamiento de la solución de (2.41) y su evolución en un tiempo t .	23
2.6. Superficie del comportamiento de la solución de (2.42) y (2.44) y su evolución en un tiempo t .	24
2.7. Superficie del comportamiento de la solución de (2.43) y su evolución en un tiempo t .	25
3.1. Dominio espacial de sección transversal arbitraria con dirección de flujo en x .	28
3.2. Comportamiento de la función de difusión $u = u(x, t)$ en un instante t , de regiones de mayor hacia menor concentración de especie.	33
3.3. Comportamiento de la función de difusión $u = u(x, t)$ en un instante t para el decremento e incremento de densidad de especie.	34
3.4. Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la ecuación de difusión (3.10) con $\varepsilon > 0$.	35
3.5. Evolución de $u(x, t)$ para la ecuación de difusión (3.10) con $\varepsilon > 0$ en distintos instantes de t .	35
3.6. Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la AD PDE (3.16) con $\varepsilon, b > 0$.	38
3.7. Evolución de $u(x, t)$ para la AD PDE (3.16) con $\varepsilon, b > 0$ en distintos instantes de t .	39
3.8. Evolución del comportamiento inestable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) con $\varepsilon, b, \lambda > 0$.	41
3.9. Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) en distintos instantes de t con $\varepsilon, b, \lambda > 0$.	42

3.10. Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) con $\varepsilon, b > 0$ y $\lambda < 0$.	42
3.11. Evolución de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) en distintos instantes de t con $\varepsilon, b > 0$, y $\lambda < 0$.	43
3.12. Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) con $\varepsilon, \lambda > 0$.	44
3.13. Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) en distintos instantes de t con $\varepsilon, \lambda > 0$.	44
3.14. Evolución de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) con $\varepsilon > 0$ y $\lambda < 0$.	45
3.15. Evolución de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) en distintos instantes de t con $\varepsilon > 0$ y $\lambda < 0$.	45
4.1. Diagrama de bloques para el esquema de control por realimentación de estados en la frontera.	69
4.2. Evolución del comportamiento inestable del sistema (4.1)-(4.3) en lazo abierto.	69
4.3. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (4.1)-(4.3) inestable en lazo abierto.	70
4.4. Evolución del comportamiento estable de (4.1)-(4.3) en lazo cerrado con la aplicación de (4.59) en $u_x(1, t)$.	71
4.5. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (4.1)-(4.3) estable con (4.59) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.	71
4.6. Comportamiento del esfuerzo de control de (4.59) en $u_x(1, t)$.	72
4.7. Comportamiento de $u(x, t)$ en $x = 1$ ($u(1, t)$) como consecuencia de la aplicación de (4.59) en $u_x(1, t)$.	72
4.8. Variante de la evolución del comportamiento estable de (4.1)-(4.3) en lazo cerrado para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.	73
4.9. Variante de la evolución de $u(x, t)$ del sistema (4.1)-(4.3) en lazo cerrado para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.	74
4.10. Variante del comportamiento del esfuerzo de control de (4.59) en $u_x(1, t)$ para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.	74
4.11. Variante del comportamiento de $u(x, t)$ en $x = 1$ ($u(1, t)$) para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.	75
5.1. Diagrama a bloques del esquema de control adaptable por realimentación de estados en la frontera.	86
5.2. Evolución estable de (5.1)-(5.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	87
5.3. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (5.1)-(5.3) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.	88
5.4. Evolución estable de (5.6)-(5.8) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	88
5.5. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (5.6)-(5.8) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.	89
5.6. Evolución del error de estimación (5.10) y su convergencia a cero.	89

5.7. Evolución del error de estimación $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ (5.10) y su convergencia a cero	90
5.8. Esfuerzo de la ley de control (5.9) aplicado en la frontera $u_x(1, t)$.	90
5.9. Efecto de la aplicación de la ley de control (5.9) en la frontera $u(1, t)$.	91
5.10. Estimación del parámetro λ y su convergencia a su valor real.	91
5.11. Convergencia a cero del error de estimación paramétrico $\tilde{\lambda}$.	92
5.12. Estimación del parámetro \hat{b} y su convergencia a su valor real.	92
5.13. Convergencia a cero del error de estimación paramétrico \tilde{b} .	93
6.1. Evolución convergente en el tiempo de $u(x, t)$ del sistema NL PDE (6.1)-(6.3) en lazo abierto en ausencia del término fuente $\lambda u(x, t) = 0$	98
6.2. Evolución del comportamiento de $u(x, t)$ inestable del sistema de la NL PDE (6.1)-(6.3) en lazo abierto.	98
6.3. Evolución inestable de $u(x, t)$ en lazo abierto para la NL PDE (6.1)-(6.3) en distintos instantes de t .	99
6.4. Evolución estable de (6.1)-(6.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	102
6.5. Evolución estable de (6.1)-(6.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	103
6.6. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (6.1)-(6.3) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.	103
6.7. Evolución estable de (6.5)-(6.7) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	104
6.8. Evolución estable de (6.5)-(6.7) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.	104
6.9. Evolución de $u(x, t)$ del sistema (6.5)-(6.7) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.	105
6.10. Evolución del error de estimación (5.10) y su convergencia a cero.	105
6.11. Evolución del error de estimación $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ (5.10) y su convergencia a cero.	106
6.12. Esfuerzo de la ley de control (5.9) aplicado en la frontera $u_x(1, t)$ del sistema (6.1)-(6.3).	106
6.13. Efecto de la aplicación de la ley de control (5.9) en la frontera $u(1, t)$ del sistema de (6.1)-(6.3).	107
6.14. Estimación del parámetro $\hat{\lambda}$ y su convergencia a su valor real para el caso no lineal.	107
6.15. Convergencia a cero del error de estimación paramétrico $\tilde{\lambda}$ para el caso no lineal.	108
6.16. Estimación del parámetro \hat{b} y su convergencia a su valor real para el caso no lineal.	108
6.17. Convergencia a cero del error de estimación paramétrico \tilde{b} para el caso no lineal.	109

Índice de cuadros

3.1. Dimensiones de términos relevantes utilizados.	36
---	----

Capítulo 1

Introducción

El comportamiento de fenómenos físicos en la naturaleza incluye la interacción entre variables y parámetros de un sistema que se desarrollan en el espacio y evoluciona en el tiempo. Si se desprecia la dependencia respecto a las variables espaciales del sistema, *i.e.*, el cambio de las variables se considera igual en todo el medio espacial, el sistema se denomina como **sistema de parámetros concentrados** (**LPS**, por sus siglas del inglés *Lumped Parameter Systems*), sin embargo, esto es solo una consideración para simplificar el análisis en algunos casos. Debido a la velocidad y a la forma en que las variables se propagan en un medio, todos los procesos son distribuidos en el espacio. En cada sistema en particular (y en el establecimiento de las ecuaciones diferenciales que lo modelen) debe hacerse un análisis de la conveniencia de despreciar la dependencia espacial de las variables [6] [46]. Los LPS son considerados como sistemas de dimensión finita cuyo modelado matemático se representa por medio de **ecuaciones diferenciales ordinarias** (**ODEs** de las siglas de *Ordinary Differential Equations*).

Gran cantidad de fenómenos físicos pueden ser modelados mediante **ecuaciones diferenciales parciales** (**PDEs**, por sus siglas, *Partial Differential Equations*) en el campo de la ingeniería, la física o las ciencias químicas, ya que estas disciplinas abarcan el estudio de fenómenos como el campo electromagnético, la acústica, el flujo de fluidos, transferencia de calor, resistencia de materiales, reacciones químicas y concentración, vibraciones mecánicas, entre otras, como logística, comportamiento de parvadas o incluso propagación de enfermedades y virus. Las interacciones entre las diferentes variables y parámetros de estos fenómenos hacen que se vuelva necesario correlacionarlas en un modelo matemático mediante el uso de las leyes fundamentales de la física y de la naturaleza, como las relativas a la conservación de la energía, conservación de la masa y conservación del momento. Debido a la interacción entre variables y parámetros y por la forma en que **varían, tanto espacial como temporalmente**, estos procesos se conocen como **sistemas de parámetros distribuidos** (**DPS**, por las siglas de *Distributed Parameter Systems*). Una característica esencial de los DPS es que son **sistemas de dimensión infinita** que conducen a PDEs para los cuales, en algunos escenarios, es posible utilizar una metodología

de reducción para transformar el sistema en una ODE de dimensión finita, con el fin de simplificar el DPS haciéndolo más preciso para una aplicación específica [15] [59].

Estrictamente hablando, una PDE es una función cuyo argumento es también una función, *i.e.*, *un funcional* [35], y a diferencia de una ODE, donde la solución lleva a encontrar un estado específico, la solución de una PDE lleva a encontrar una familia de funciones debido a su naturaleza de dimensión infinita, volviéndose necesario establecer ciertas condiciones que ayuden a encontrar la familia de soluciones en el interior de un dominio determinado; tales condiciones son las llamadas condiciones iniciales y de frontera y aseguran el buen planteamiento de la PDE.

Asegurar el buen planteamiento de una PDE implica que el sistema esté conformado por la propia PDE y la(s) condición(es) inicial(es) y de frontera, aunado a ciertas propiedades que deben cumplirse como existencia, unicidad y estabilidad. En el estudio del control de PDEs por realimentación de estados en la frontera es indispensable poder establecer el buen planteamiento del sistema y sus propiedades, con el fin de poder asegurar que las leyes de control diseñadas actúen en el sistema y surtan el efecto deseado cumpliendo con el buen planteamiento del problema.

Es muy común en la práctica que los parámetros y variables de una PDE cambian en forma no lineal, *i.e.*, los cambios en espacio y tiempo de los parámetros y variables dependan o estén en función tanto de las variables independientes como de las dependientes, *e.g.*, que la variación en la cantidad de población en una región dada dependa de la densidad actual de dicha población. Más adelante se ofrece una explicación más detallada para este tipo de sistemas.

Se ha señalado que los DPS tienen una naturaleza de dimensión infinita y que son descritos por PDEs, también se ha remarcado que describen fenómenos naturales y procesos en ciencias e ingeniería. En la práctica es deseable que dichos procesos sean manipulados con el objetivo de desarrollar un comportamiento deseado mediante la aplicación de sensores y actuadores que ayuden en la consecución de un objetivo de control. Dada la naturaleza de dimensión infinita de los DPS resulta imposible colocar un número infinito de sensores y actuadores a lo largo de todo el dominio en el que evolucionan este tipo de sistemas, por lo que en ciertos casos resulta sumamente útil reducirlos a sistemas de dimensión finita y representarlos vía ODEs con la finalidad de poder colocar un número finito de sensores y actuadores en el dominio.

En muchos DPS se desconocen algunos parámetros físicos constantes que contribuyen al comportamiento de la dinámica del sistema y su evolución en el tiempo. A partir de la teoría de control puede recurrirse a una técnica que ayude a estimar los parámetros constantes desconocidos, a saber, la técnica de control adaptable la cual ha probado ser muy útil en la estimación de parámetros para LPS vía ODEs y que ahora se ha extendido en su aplicación para DPS representados por PDEs. El control adaptable para PDEs contribuye a la estimación de los parámetros constantes desconocidos y aproximar la convergencia a sus valores reales aunque esto último no siempre se consigue. Dependiendo de la ubicación de los sensores y actuadores, el control de las PDEs se puede aplicar en el dominio o en la frontera.

Cabe destacar que la colocación de sensores y actuadores al interior del dominio de un

DPS es inviable además de intrusiva, por lo que la manera de poder realizar la tarea de estimación de parámetros y la consecución del objetivo de control se reduce a la colocación de sensores y actuadores únicamente en la frontera del dominio del sistema.

1.1. Motivación para el tema

1.1.1. Antecedentes

Una de las primeras publicaciones en abordar el tema de control en la frontera para sistemas de dimensión infinita es [21], que introduce una teoría para estudiar la controlabilidad de este tipo de sistemas en una forma matemática muy abstracta, pero que sienta ciertas bases para el cumplimiento del buen planteamiento de la PDE. En [81] se formula por primera vez la estabilidad de una cierta clase de PDE del tipo parabólico por realimentación de estados en la frontera mediante una metodología basada en la colocación de polos para PDEs. Los trabajos [44] y [45] formulan también el caso de estabilidad de PDEs del tipo parabólico mediante leyes de control por realimentación de estados en la frontera usando una complicada ley de control basada en la teoría de semigrupos evitando la tarea de colocación de polos que desestabilizan el sistema y en su lugar se proponen funciones en la frontera expresadas como una combinación lineal infinita de exponenciales decrecientes. En [12] y [64] se presentan los primeros aportes que proveen una solución explícita [87], mediante aproximación numérica, de la ley de control por realimentación de estados en la frontera mediante el uso de transformaciones integrales basadas en el trabajo de [13].

Los primeros trabajos en proponer una ley de control en la frontera por realimentación de estados diseñada en la forma de un operador integral, que contiene una función ‘kernel’ [86] continua, fueron reportados en [5] y [10], los cuales dan muestra del intento por trasladar la metodología ‘backstepping’ [36] al campo del control de PDEs obteniendo una solución explícita del kernel del operador integral por aproximaciones finitas. Posteriormente, el trabajo expuesto por [48] continúa con la entonces reciente metodología por backstepping para diseño de controladores en la frontera basados en un operador integral con un importante avance en la consecución de una solución explícita para el kernel del operador integral en forma analítica. En [68] se establecen los primeros diseños, basados en la metodología de backstepping para PDEs, de leyes de control resueltas de manera explícita por realimentación de estados y por realimentación de la salida. Cabe resaltar que los trabajos mencionados se establecen para ecuaciones del tipo parabólico exclusivamente; específicamente para la ecuación de calor (ecuación de difusión).

La metodología por backstepping para el diseño de leyes explícitas de control por realimentación en la frontera de PDEs es consolidada en los trabajos [69], [70] y [71], en donde se hace uso de un operador integral de Volterra (transformación integral de Volterra) [86] y de una metodología para encontrar analíticamente la solución explícita del kernel del operador integral, la cual es pieza clave en el diseño de las leyes de control.

En el campo de las PDEs no lineales pocos trabajos han sido reportados en la obtención

de leyes de control por realimentación en la frontera, entre estos se destacan los realizados por [37], [49], [82] y [83], los cuales recurren a una linealización previa de la PDE no lineal para posteriormente desarrollar la ley de control para los sistemas linealizados resultantes.

En el campo de la identificación de parámetros constantes desconocidos mediante la aplicación de técnicas de control adaptable aplicadas a sistemas modelados por PDEs, se han destacado los primeros trabajos en los que se realizaron estudios de convergencia del error de estimación a cero para cierta clase de DPS reportados en [8], [9], [28] y [62]. Estos trabajos se centraron en el diseño de un control adaptable por modelo de referencia para diferentes tipos de PDEs. Por otro lado, una metodología basada en el control adaptable cuadrático lineal de parámetros distribuidos fue presentado en [77] mientras que en [17] se propone un esquema adaptable robusto de identificación de parámetros, ambos casos para un sistema modelado por una PDE parabólica. La efectividad de una técnica con enfoque basado en el rediseño de Lyapunov se investiga en [60] para la identificación adaptable de sistemas lineales con retardo así como de DPSs.

Uno de los primeros intentos de desarrollar una metodología robusta para el diseño de controladores adaptables con actuación en la frontera para PDEs se reporta en [50] para el caso de la ecuación Burgers del comportamiento viscoso del flujo de fluidos al considerar la viscosidad como un parámetro desconocido. En [23] se reporta una estrategia de control adaptable para un sistema de cuerdas con movimiento axial en el cual la PDE modela un sistema que obedece al comportamiento de la ecuación de onda de tipo hiperbólico. En ambos casos el diseño de las leyes adaptables descansa en el método directo de Lyapunov.

En [38] se desarrolló un controlador adaptable aplicado en la frontera para una PDE parabólica que contiene un parámetro desestabilizador desconocido que afecta al interior del dominio. En [39] y [72] se aborda el problema de control adaptable en la frontera para PDEs parabólicas resuelto mediante un enfoque de realimentación de la salida. Los primeros controladores adaptables para PDEs parabólicas con actuación en la frontera y con parámetros que varían espacialmente fueron introducidos en [73]. En este último trabajo se utilizó el método directo de Lyapunov en el diseño de leyes adaptables que garantizan la convergencia a cero del error de estimación paramétrico.

Se reporta en [61] una de las primeras contribuciones relevantes en la síntesis de identificadores paramétricos para DPSs con parámetros espacialmente variables descritos por PDEs de tipo parabólico, elíptico e hiperbólico y en dónde se advierte que la convergencia del identificador no se garantiza en el caso de que la función de Lyapunov propuesta no considere condiciones de frontera mixtas para la planta. Las contribuciones presentadas en [41], [74] y [75] son de relevancia en el desarrollo de técnicas de control adaptable con actuación en la frontera para sistemas modelados por PDEs parabólicas a través del enfoque backstepping (backstepping adaptable). El enfoque por backstepping se utiliza para establecer una ley de control en la frontera por realimentación de estados mediante el uso de una expresión en la forma de un operador integral del cual se obtiene la solución explícita del kernel mismo que se aplica a la ley de control, luego se modifica dicha ley reemplazando los parámetros desconocidos por los llamados parámetros estimados. Las leyes de adaptación (de actualización) de parámetros se diseñan a través de la técnica de Lyapunov para el establecimiento del identificador paramétrico, asegurando la convergen-

cia a cero del error de estimación. La técnica backstepping adaptable para el diseño de controladores se retoma en [76] en dónde se desarrollan esquemas de identificación en línea para sistemas de PDEs parabólicas con medición y aplicación de control en la frontera y se establecen condiciones importantes en la condición frontera de la PDE para asegurar la estimación de parámetros desconocidos.

La metodología basada en un enfoque backstepping adaptable ha sido extendida para otros DPS (*e.g.*, PDEs del tipo parabólico) para establecer leyes de control aplicadas en la frontera, como es el caso de [25], [40] y de [84]. También ha sido aplicada a casos donde se reporta el diseño de un controlador adaptable con actuación distribuida y retraso en la entrada [85].

La tendencia en el diseño de leyes de control adaptable por realimentación de estados aplicadas en la frontera se ha extendido hasta casos de sistemas de PDEs acopladas de tipo hiperbólico [1] y parabólico [47].

El control adaptable en la frontera por realimentación de estados para PDEs se ha posicionado como una herramienta eficaz para la estimación del comportamiento dinámico de los estados y parámetros desconocidos de sistemas de dimensión infinita; la señal de control diseñada actúa en la frontera, evitando la colocación intrusiva (y muchas veces inviable) de sensores y actuadores en el dominio del DPS [54], [55].

1.1.2. Del control adaptable en la frontera de PDEs no lineales por realimentación de estados

El estudio de la metodología backstepping en el control en la frontera de PDEs ha sido extendida en el tratamiento de PDEs no lineales. Para algunos de los problemas que se han abordado [4] [37] [49] [50], la no linealidad aparece en el dominio de la PDE de una forma tal que no afecta sustancialmente la estabilidad del sistema, y mediante una elección, relativamente simple, de una función de Lyapunov adecuada se alcanza el objetivo de control y se logra la consecución de la estabilidad del sistema.

Un tema abierto es el de control adaptable en la frontera para PDEs no lineales con la aplicación de leyes de control explícitamente resueltas y que se aborda en el contexto de este trabajo de tesis. En el capítulo 3 del presente trabajo se presenta un modelo de este tipo de PDE, y en el desarrollo de este mismo trabajo se pretende establecer leyes de control adaptables explícitas aplicadas en la frontera para conseguir el objetivo de control, la estimación de los parámetros constantes desconocidos y de la convergencia del error de estimación a cero.

1.2. Objetivo de la tesis

Proponer un esquema de control adaptable para un sistema de PDEs no lineales a través de la combinación de las diferentes técnicas en la síntesis del control con las diferentes

parametrizaciones del sistema y los diferentes métodos para el diseño del identificador paramétrico

1.3. Organización del documento de tesis

El resto del presente documento de tesis está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 2 se destina para la explicación y definición de ciertos fundamentos matemáticos referentes a los espacios de funciones y algunos temas elementales de análisis funcional y de estabilidad, así como también ciertas definiciones referentes a las PDEs como: clasificación, orden, tipo, condiciones de frontera e iniciales y las condiciones que deben cumplirse para el buen planteamiento del problema.

En el capítulo 3 se presenta la obtención de diferentes modelos matemáticos que describen el comportamiento de fenómenos físicos y su representación por medio de PDEs. Se presenta en este capítulo el modelo de la PDE objeto de estudio del presente trabajo de tesis.

El capítulo 4 muestra la metodología utilizada para el control de PDEs por realimentación de estados en la frontera con una metodología basada en backstepping, su aplicación en un sistemas de PDEs lineal y los resultados en simulación. La metodología de backstepping es fundamental en el diseño de un controlador adaptable por realimentación de estados, estudiado en el capítulo 5.

En el capítulo 5 se presenta cómo es que se obtienen las leyes de control adaptable para el control de PDEs por realimentación de estados en la frontera, utilizando una metodología basada en equivalencia cierta y en el uso de un identificador pasivo, así como su aplicación en un sistemas de PDEs lineal y los resultados en simulación.

El capítulo 6 trata con la aplicación de las metodologías de control por realimentación de estados mencionadas, aplicadas al caso de una PDE no lineal; que es el caso de estudio del actual trabajo de tesis, y se muestran los resultados obtenidos por medio de simulaciones para diferentes escenarios propuestos.

Las conclusiones del actual trabajo de tesis se presentan en el capítulo 7, se exponen las aportaciones del mismo y los problemas abiertos.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

En este capítulo se presentan algunos conceptos de análisis funcional útiles en la descripción de los diferentes tipos de espacios de funciones normados, los cuales son relevantes en el estudio de PDEs y en el estudio de convergencia de funciones. También se presentan en este capítulo algunos elementos de análisis real utilizados principalmente en teoremas de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Por último, se hace una introducción al estudio de las PDEs con definiciones básicas, clasificación, algunas propiedades importantes y se presentan algunas ecuaciones importantes utilizadas en distintos ámbitos de la ciencia.

2.1. Elementos de análisis funcional

Para los fines del actual trabajo de tesis se designa con \mathbb{R} al conjunto de todos los números reales, se denota con \mathbb{C} al conjunto de los números complejos y al conjunto de los números naturales con \mathbb{N} , además se denota con \mathbb{R}^n al espacio vectorial de dimensión n .

2.1.1. Espacios normados

Sea X un espacio vectorial sobre un campo escalar en \mathbb{R} o en \mathbb{C} en el que se define la *norma* como $\|\cdot\|$, *i.e.*, que para toda $x \in X$, la norma $\|x\|$ es un número real no negativo que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\|x\| = 0$, si y solo si $x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, para todo escalar α ,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Desigualdad del triángulo).

La norma induce una *función de distancia* $d(x, y) = \|x - y\|$ de modo que X es un espacio métrico llamado **espacio vectorial normado** [53].

Aunque en un espacio normado se tienen los medios para llevar a cabo el análisis y estudio de la convergencia, no existe garantía de que secuencias convergentes de vectores tengan un límite dentro del espacio mismo. Una definición más general en un espacio métrico descansa en la definición del diámetro de subespacios cerrados y luego requerir que cada secuencia decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos del correspondiente espacio cuyos diámetros tienden a cero deben tener una intersección no vacía, *i.e.*, un punto que sea común a todos ellos.

2.1.1.1. Secuencia Cauchy

Dada una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio normado X , se dice que es una secuencia *Cauchy*, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que si } n \geq n_0, h \in \mathbb{N} \text{ entonces } \|x_n - x_{n+h}\| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Se puede decir que toda sucesión convergente es Cauchy.

2.1.1.2. Espacio de Banach

Si el espacio vectorial normado X es un espacio de métrica completa, *i.e.*, todas las secuencias de Cauchy convergen, entonces X es un **espacio de Banach** [53].

Definición 1. [57] *Un espacio Banach es un espacio vector normado completo.*

Un espacio de Banach es un espacio normado en el cual cada secuencia Cauchy convergente de vectores converge a un vector dentro del espacio.

2.1.1.3. Espacio Hilbert (\mathcal{H})

Suponga que la norma se asocia a un producto escalar en X . Esto es, para cada $x, y, z \in X$ y escalares α y β el producto escalar denotado por $\langle x, y \rangle$ es un escalar que satisface las condiciones:

- (i) $\langle x, y \rangle > 0$, si $x \neq 0$ y $\langle 0, 0 \rangle = 0$,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (“ $\overline{\cdot}$ ” indica el complejo conjugado en \mathbb{C}), y
- (iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Sea la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, luego las condiciones (i) y (ii) de la norma se satisfacen. Además, para cada $x, y \in X$ se cuenta con la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.2)$$

De (2.2) y teniendo en cuenta que $\mathbf{Re}\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle|$ se tiene

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathbf{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad (2.3)$$

que establece la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$, mostrando que, de hecho, es una norma. \mathbf{Re} en (2.3) denota la parte real del número complejo.

Si X es un espacio completo en esta norma, luego se dice que X es un **espacio de Hilbert** [53].

Definición 2. [57] *Un espacio Hilbert \mathcal{H} es un espacio producto interno completo, o equivalentemente un espacio Banach cuya norma es inducida por un producto interno existente $\|x\| = \{\langle x, x \rangle\}^{1/2}$*

Los espacios Hilbert comúnmente ocurren en matemáticas y física como espacios de funciones. Su estudio es contenido en una rama de las matemáticas conocida como análisis funcional. Los espacios Hilbert generalizan el espacio tridimensional Euclideo \mathbb{R}^3 . Los resultados geométricos más importantes en este último tienen generalizaciones directas a espacios Hilbert.

Una propiedad indispensable de espacios Hilbert en casi toda la física y las matemáticas aplicadas es aquella de separabilidad. Los espacios Hilbert separables poseen una base ortonormal contable. El espacio de funciones de interés es el $L_2(\mathbb{R})$ el cual es un espacio Hilbert separable.

2.1.1.4. Condición de Lipschitz

Una función f satisface la condición de *Lipschitz* sobre un intervalo $[a, b]$ si existe una constante K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ con } K > 0, \quad (2.4)$$

dónde dicha constante K es llamada como la constante de Lipschitz para f .

2.1.1.5. Espacios $L^p(\Omega)$

Sea el dominio Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\bar{\Omega}$ la correspondiente cerradura de Ω . La frontera $\partial\Omega = \Gamma$ del dominio Ω es el conjunto de puntos límite de Ω que no se encuentran en Ω .

Designe como $C(\Omega)$ al espacio de funciones reales continuas en Ω y aquellas que también son continuas hasta su primer derivada como $C^1(\Omega)$. De forma similar, para $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\Omega)$ denota las funciones que tienen derivadas de orden k continuas en Ω . Denote con $C^1(\bar{\Omega})$ a las funciones $f \in C^1(\Omega)$ para las cuales f y las derivadas de primer orden de f se extienden y son continuas hasta $\bar{\Omega}$; y de este mismo modo, se definen $C(\bar{\Omega})$ y $C^k(\bar{\Omega})$ de manera similar. Los espacios de funciones C^∞ en Ω con un soporte en Ω se denotan como C_0^∞ , donde se denomina soporte de una función al conjunto de puntos donde la función no es cero, o a la cerradura de ese conjunto.

Suponga que Ω es Lipschitz o bien Ω es de clase C^k para $k \geq 1$. Se denota como $x = x_1, \dots, x_n$ a un punto genérico de \mathbb{R}^n . Se expresa como $dx = dx_1 \dots dx_n$ a la medida de Lebesgue $\mathbb{1}$ en \mathbb{R}^n .

Para $p \in [1, \infty)$, $L^p(\Omega)$ es el espacio de funciones reales en Ω las cuales son L^p para la medida de Lebesgue y es también espacio de Banach y viene dado bajo la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.5)$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones reales medibles y acotadas en Ω , es también espacio de Banach bajo la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|. \quad (2.6)$$

Para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert bajo el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx, \quad (2.7)$$

con la norma correspondiente denotada mediante

$$\|u\| = \|u\|_{L_2(\Omega)} = \langle u, u \rangle^{1/2}. \quad (2.8)$$

Cuando $p = 2$ (2.5) toma la forma

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2.9)$$

luego (2.9) se denomina como la norma L_2 .

Designe con $W^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, al espacio de Sobolev de funciones u en $L^p(\Omega)$ cuyas distribuciones de orden menor que o igual a s están en $L^p(\Omega)$. De acuerdo a lo

anterior $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sum_{[\alpha] \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad (2.10)$$

donde $D_i u = \partial u / \partial x_i$, $i \in [1, n]$, es la notación para las derivadas parciales de una función u , $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u = (\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u) / (\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n})$, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$, y $[\alpha] = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Para $p = 2$, $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ lo que es un espacio de Hilbert para el producto escalar

$$((u, v))_{H^s(\Omega)} = \sum_{[\alpha] \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v). \quad (2.11)$$

Considere el espacio de Sobolev $H^s(\Omega)$ que contiene a $C^\infty(\bar{\Omega})$ y a $C^s(\bar{\Omega})$. El cierre de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^s(\Omega)$ se denota por $H_0^s(\Omega)$ y el cierre de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{s,p}(\Omega)$ se denota por $W_0^{s,p}(\Omega)$. En particular,

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D_i u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}, \quad (2.12)$$

$$H_0^1(\Omega) = \text{the closure of } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega), \quad (2.13)$$

los cuales son espacios de Hilbert bajo el producto escalar

$$((u, v))_{H^1(\Omega)} = (u, v) + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v). \quad (2.14)$$

Para un Ω acotado, la desigualdad de Poincaré

$$|u| \leq c_0(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (2.15)$$

implica que $H_0^1(\Omega)$ sea un espacio de Hilbert para el producto escalar

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v) \quad (2.16)$$

y la norma correspondiente

$$\|u\| = \{\langle u, u \rangle\}^{1/2} \quad (2.17)$$

sea equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$ [79].

Una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}^2 converge a un vector $a \in \mathbb{R}^2$ (notación: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) si la distancia $\|a - a_n\|$ converge a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Así, los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\| = 0,$

(iii) *para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un índice $n(\varepsilon)$ tal que $\|a - a_n\| < \varepsilon$ para toda $n \geq n(\varepsilon)$.*

Una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es llamada *fundamental* (o *Cauchy*) si las distancias $\|a_m - a_n\|$ últimamente se vuelven pequeñas para m y n grandes, más precisamente si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un índice $n(\varepsilon)$ tal que

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon \quad \text{para toda } m \geq n(\varepsilon) \quad \text{y toda } n \geq n(\varepsilon). \quad (2.18)$$

En corto pudiéramos escribir para esto

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|a_m - a_n\| = 0 \quad (2.19)$$

Es un hecho importante que cada secuencia fundamental en \mathbb{R}^2 converge a algún vector en \mathbb{R}^2 . Este hecho también es expresado diciendo que \mathbb{R}^2 es (métricamente) *completo*. De hecho, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia fundamental en \mathbb{R}^2 y $a_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2})$ para $n \geq 1$. Luego se tiene

$$\|a_m - a_n\| = \{(\alpha_{m,1} - \alpha_{n,1})^2 + (\alpha_{m,2} - \alpha_{n,2})^2\}^{1/2} \geq |\alpha_{m,k} - \alpha_{n,k}| \quad \text{para } k = 1, 2, \quad (2.20)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |\alpha_{m,k} - \alpha_{n,k}| = 0 \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (2.21)$$

Es bien sabido que \mathbb{R} es completo. Por lo tanto existen dos números reales α_1, α_2 tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = \alpha_k \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (2.22)$$

Para el vector $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - a_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\alpha_1 - \alpha_{n,1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{n,2})^2\}^{1/2} = 0 \quad (2.23)$$

Finalmente, considere el conjunto \mathcal{U} de todos los vectores $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ con coordenadas racionales α_1, α_2 . De la teoría elemental de conjuntos es sabido que \mathcal{U} es un conjunto contable. Por otro lado, dado un vector $b \in \mathbb{R}^2$ y algún número real $\varepsilon > 0$ puede encontrarse

un vector $b \in \mathcal{U}^2$ tal que $\|b - a\| < \varepsilon$, en otras palabras, el conjunto \mathcal{U} es *denso en todos lados* en \mathbb{R}^2 . El hecho que \mathbb{R}^2 contiene un conjunto contable denso en todos lados es también expresado diciendo que \mathbb{R}^2 es *separable*. [26]

De la geometría analítica elemental se tiene familiaridad con la noción del plano Euclidiano bí-dimensional y, más generalmente, el espacio Euclidiano de dimension n (también llamado el espacio n -Euclidiano). A grandes rasgos, el espacio Hilbert puede describirse como un espacio Euclidiano posiblemente de dimensión infinita. De hecho, para cada número cardinal \mathfrak{n} le corresponde un modelo estándar de espacio Hilbert de dimensión \mathfrak{n} con los números reales como escalares, y si $\mathfrak{n} = n$ es finita, luego este espacio Hilbert coincide con el espacio Euclidiano de la misma dimensión n .

Mientras los fenómenos de particular interés en la teoría de espacio Hilbert están conectados con la dimensión infinita, algunas características del espacio Euclidiano de dimensión finita son compartidas por el espacio Hilbert de dimensión arbitraria. Se considera el espacio Hilbert como una generalización del espacio Euclidiano.

En aplicaciones de la teoría de espacio Hilbert *e.g.* para ecuaciones integrales, aparecen los elementos espacios Hilbert de los cuales son funciones (más precisamente clases de funciones) sobre ciertos subconjuntos de la línea real, del plano, o más general del espacio Euclidiano de dimensión n . El estudio de este modo especial de apariencia de espacio Hilbert se inclina fuertemente sobre la teoría de integración de Lebesgue.

2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos permanecen cerca; de lo contrario, éste será inestable. Éste será asintóticamente estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos no solo permanecerán cerca, sino que también tenderán al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito.

Considere el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{2.24}$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua a tramos en t y localmente Lipschitz en x sobre $[0, \infty) \times D$ y en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen $x = 0$. El origen es un punto de equilibrio para (2.24) en $t = 0$ si

$$f(0, t) = 0 \quad \forall \quad t \geq 0. \tag{2.25}$$

2.2.1. De un sistema exponencialmente estable

Definición 3. [34] El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.24) es exponencialmente estable si existen constantes positivas c , k y λ tal que

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall \quad \|x(t_0)\| < c \quad (2.26)$$

y globalmente exponencialmente estable si (2.26) se satisface para todo estado inicial $x(t_0)$.

Teorema 1 (Estabilidad en el origen [34]). Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (2.24) y $D \subset \mathbb{R}^n$ sea un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \quad (2.28)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$, donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son funciones continuas definidas positivas en D . Luego, $x = 0$ es estable.

La demostración para este teorema puede consultarse en [34].

2.3. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales

Se incluyen ciertas definiciones básicas para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales seguido de clasificaciones y de propiedades elementales, así como de condiciones que rigen el buen planteamiento del problema para la obtención de soluciones.

2.3.1. Definiciones básicas

Las definiciones que se incluyen en esta sección se presentan en una forma clara y sencilla, sin un extensivo uso matemático para facilitar su contextualización para el actual trabajo de tesis, privilegiando un pensamiento intuitivo y sin perder, al mismo tiempo, precisión matemática. Muchas de las definiciones aquí presentadas se toman de [80] [19] [24] [20] [78] [27].

2.3.1.1. PDE

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que contiene derivadas parciales respecto tanto a las variables independientes como a las variables dependientes. Una propiedad clave que define a una PDE es que en ella hay más de una variable independiente *e.g.*, x, y, t, \dots ; además, hay una variable dependiente que es una función desconocida de estas variables $u = u(x, y, t, \dots)$.

Una PDE puede definirse de manera similar a como se define una ecuación diferencial ordinaria (ODE) [87], excepto que la variable dependiente es una función de varias variables independientes.

Definición 4. [18] *Una PDE es una ecuación que involucra como variable dependiente a una función de varias variables, y relaciona sus derivadas parciales entre si con cualquiera de las variables*

$$F(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)) = 0, \quad (2.29)$$

donde F es una función escalar con dominio Ω en \mathbb{R}^n .

Observación. En el actual trabajo de tesis se abordan exclusivamente ecuaciones cuya evolución se lleva a cabo en el tiempo t y en la variable espacial x , lo anterior para privilegiar el uso de variables dependientes u que dependan exclusivamente de las variables independientes mencionadas, *i.e.*, $u = u(x, t)$. Este tipo de ecuaciones (*e.g.*, *ecuación de difusión*) son una subclase de las llamadas *ecuaciones de evolución*.

En general, la siguiente notación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= u_x(x, t), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= u_t(x, t), \end{aligned}$$

es comúnmente utilizada para denotar la primera derivada parcial de la función u con respecto a alguna de las variables independientes ya sea x o t , y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = u_{xx}(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= u_{xt}(x, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = u_{tt}(x, t), \end{aligned}$$

para denotar la segunda derivada parcial de la función u con respecto a alguna (o algunas) de las variables independientes.

2.3.1.2. Orden de una PDE

Definición 5. [18] *El orden de una PDE obedece a la derivada más alta que aparece en la misma.*

En este contexto, la ecuación (2.29) es una PDE de **primer orden** más general en dos variables independientes x y t .

La PDE de **segundo orden** más general en dos variables independientes es de la forma

$$F(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xt}(x, t), u_{tt}(x, t)) = 0. \quad (2.30)$$

Para clarificar la notación utilizada en (2.29), (2.30) y en el resto del presente documento, en lo sucesivo la siguiente notación

$$\begin{aligned} f &= f(x, t), \\ u &= u(x, t), \\ u(0) &= u(0, t), \\ u_0 &= u(x, 0), \\ u_x &= u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \\ u_t &= u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \\ u_{xx} &= u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

será utilizada en aquellos procedimientos y casos donde no genere confusión, a menos que se especifique lo contrario.

2.3.1.3. Linealidad de una PDE

Definición 6. [27] *Un **operador diferencial lineal** es un operador que contiene derivadas parciales tal que las siguientes propiedades se cumplen*

(i) $L(v + w) = Lv + Lw,$

(ii) $L(cv) = cLv,$

para todas las funciones v y w en el dominio de L y todo escalar c .

Se dice que una PDE para alguna función desconocida u es **lineal** si la ecuación se puede escribir en la forma

$$Lu = g, \quad (2.31)$$

donde L es un operador diferencial lineal y la función g no depende de u ni de ninguna de sus derivadas. Si una PDE no puede ser escrita en la forma (2.31) entonces se dice que es **no lineal**, *e.g.*, considere la PDE

$$u_t = \operatorname{sen}(x)u_x + e^{xt},$$

cuyo operador diferencial lineal está dado por $L = \partial/\partial t - \operatorname{sen}(x)\partial/\partial x$, lo que produce la forma (2.31), *i.e.*,

$$\begin{aligned} Lu &= e^{xt}, \\ u_t - \operatorname{sen}(x)u_x &= e^{xt}, \end{aligned}$$

que corresponde a una PDE lineal. Por otro lado, considere ahora la PDE

$$u_t = \operatorname{sen}(u)u_x + e^{xt},$$

en este caso el operador diferencial es no lineal y viene dado por $L = \partial/\partial t - \operatorname{sen}(\cdot)\partial/\partial x$, donde el término $\operatorname{sen}(\cdot)$ no depende de las variables independientes x y t sino de la función u , por lo que no puede producirse la forma (2.31), *i.e.*,

$$\begin{aligned} Lu &= e^{xt}, \\ u_t - \operatorname{sen}(\cdot)u_x &= e^{xt}, \end{aligned}$$

En otras palabras, en una PDE lineal, las variables dependientes u y todas sus derivadas aparecen en una *forma lineal*.

2.3.1.4. Homogeneidad de PDEs de segundo orden

Definición 7. [20] Considere la PDE lineal en dos variables

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G \quad (2.32)$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E y F pueden ser constantes o funciones dadas en x o t ; así como G puede ser una constante o una función $G = G(x, t)$. La PDE (2.32) se dice **homogénea** si $G(x, t)$ es idénticamente cero para toda x y t . Si $G(x, t)$ no es idénticamente cero entonces la PDE (2.32) se dice que es **no homogénea**.

2.3.1.5. Clasificación básica de las PDEs

Las PDEs pueden clasificarse en tres grupos que aluden, en cierto modo, a expresiones de lugares geométricos de las conocidas secciones cónicas.

Definición 8. [20] Todas las PDEs como la ecuación (2.32) son ,

1. *Parabólicas.* Las **ecuaciones parabólicas** describen los procesos de difusión y flujo de calor y satisfacen la propiedad $B^2 - 4AC = 0$
2. *Hiperbólicas.* Las **ecuaciones hiperbólicas** describen los sistemas vibratorios y del movimiento ondulatorio y satisfacen la propiedad $B^2 - 4AC > 0$
3. *Elípticas.* Las **ecuaciones elípticas** describen los fenómenos de estado estacionario y satisfacen la propiedad $B^2 - 4AC < 0$

En la clase de PDEs parabólicas recae el caso de estudio del actual trabajo de tesis

2.3.1.6. Solución de una PDE

Definición 9. [78] Una solución de una PDE es una función $u(x, t)$ que, al ser sustituida en la ecuación, convierte a esta en una identidad para toda (x, t) en al menos alguna región del plano $x - t$.

Las PDEs pueden tener soluciones generales, pero a diferencia de las soluciones de las ODEs las soluciones generales de las PDEs no pueden depender sólo de constantes arbitrarias sino que dependen de funciones arbitrarias.

2.3.1.7. Condiciones iniciales y de frontera

Una PDE, por si sola, puede tener un número infinito de soluciones. Con la finalidad de tener una solución única para un problema en particular, deben de establecerse condiciones adicionales a la propia PDE. Estas condiciones adicionales auxiliares son generalmente de dos tipos: **condiciones iniciales** y **condiciones de frontera**.

Las condiciones iniciales para PDEs de difusión se especifican para un tiempo inicial t_0 , usualmente $t_0 = 0$, y definen el comportamiento de la función $u(x, t)$ en la longitud del dominio, *i.e.*,

$$u(x, 0) = f(x). \quad (2.33)$$

Las condiciones de frontera se usan para describir lo que sucede con el sistema descrito por la PDE en la frontera del dominio de éste. Las condiciones de frontera para PDEs de difusión se especifican en los extremos del dominio, usualmente en $x = 0$ y $x = l$, y son de tres tipos:

1. Condición de frontera de Dirichlet

$$\begin{aligned}u(0, t) &= g_1(t), & t > 0, \\u(l, t) &= g_2(t), & t > 0,\end{aligned}\tag{2.34}$$

donde, $g_k(t)$ es una función especificada en t . Si $g_k(t) = 0$, la condición es homogénea; en caso contrario será no homogénea.

2. Condición de frontera de Neumann

$$\begin{aligned}u_x(0, t) &= h_1(t), & t > 0, \\u_x(l, t) &= h_2(t), & t > 0,\end{aligned}\tag{2.35}$$

donde, $h_k(t)$ es una función especificada en t . Si $h_k(t) = 0$, la condición es homogénea; en caso contrario será no homogénea.

3. Condición de frontera de Robin

$$\begin{aligned}u_x(0, t) &= h(u(0, t) - g_1(t)), & t > 0, \\u_x(l, t) &= h(u(l, t) - g_2(t)), & t > 0,\end{aligned}\tag{2.36}$$

Si $g_k(t) = 0$, la condición es homogénea; en caso contrario será no homogénea.

En la sección [3.14](#) se ahonda en el sentido físico de las condiciones iniciales y de frontera.

2.3.1.8. Buen planteamiento (Well-posedness)

Definición 10. [\[78\]](#) *Considere un sistema de una PDE en un dominio junto con sus condiciones iniciales y de frontera; si el sistema cumple con las siguientes propiedades fundamentales:*

1. **Existencia.** *Existe al menos una solución $u(x, t)$ que satisface todas estas condiciones.*
2. **Singularidad.** *Hay a lo más una solución.*
3. **Estabilidad.** *La solución única $u(x, t)$ depende de manera estable de los datos del problema; lo que significa que si los datos se modifican un poco, la solución correspondiente cambia solo un poco,*

entonces se dice que el sistema está **bien planteado**. De no cumplir con las propiedades anteriores se dice que el problema está **mal planteado**.

2.3.2. Discusión

Con las definiciones enunciadas hasta ahora, es posible determinar la clasificación de algunas PDEs importantes en el campo de las ciencias y listadas a continuación.

2.3.2.1. Ecuación de difusión o de calor

La PDE

$$u_t(x, t) = k^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (2.37)$$

es una ecuación lineal parabólica no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Esta ecuación se utiliza en el modelado de fenómenos de transferencia de calor y transferencia de masa. Describe procesos térmicos en una dimensión, por lo general en sólidos con conductividad térmica constante, también se utiliza en la representación de procesos unidimensionales de intercambio de masa con difusividad constante.

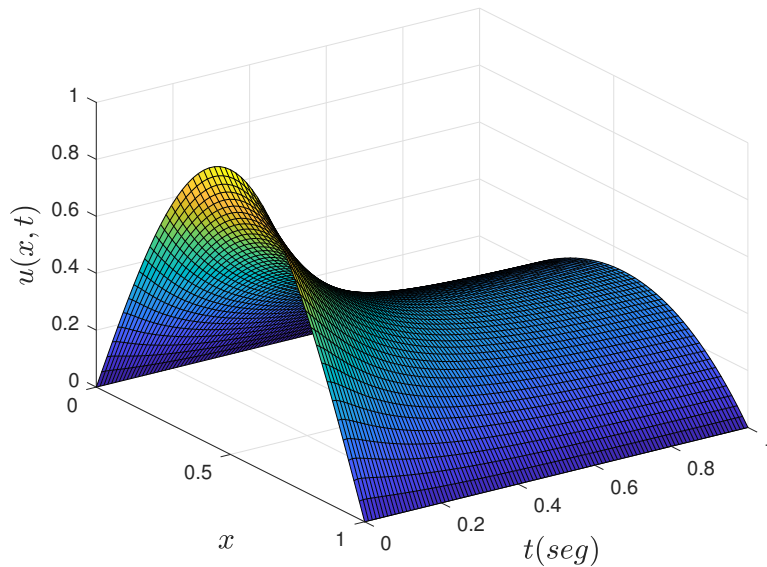


Figura 2.1: Superficie del comportamiento de la solución de (2.37) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.2. Ecuación de onda

La PDE

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (2.38)$$

es una ecuación lineal hiperbólica no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Esta ecuación es conocida también como la ecuación de la cuerda vibrante. A menudo se encuentra en fenómenos como la elasticidad, aerodinámica, acústica y en general describe el movimiento oscilatorio de las vibraciones en una dimensión.

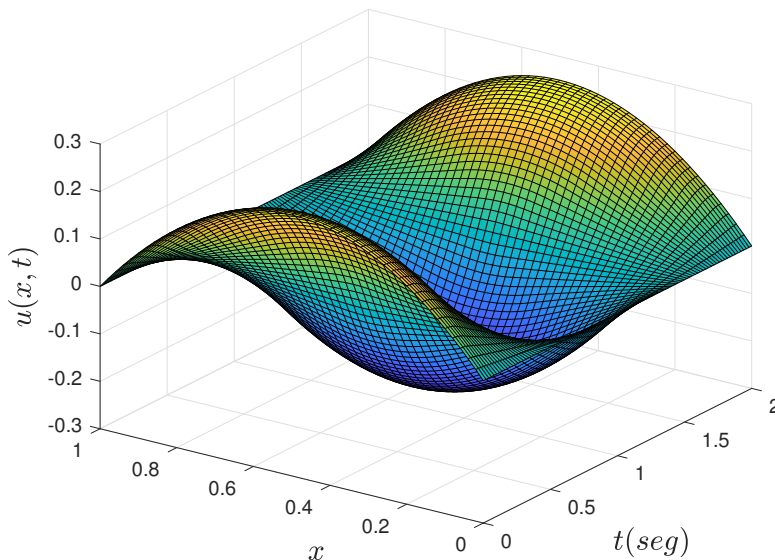


Figura 2.2: Superficie del comportamiento de la solución de (2.38) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.3. Ecuación de Poisson

La PDE

$$u_{xx}(x, t) = -f(x, t), \tag{2.39}$$

es una ecuación lineal elíptica no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

La ecuación de Poisson se encuentra con frecuencia en fenómenos de transferencia de calor y de masa (con generación o con disipación), en mecánica de fluidos, elasticidad, electrostática y otras áreas de la mecánica y la física.

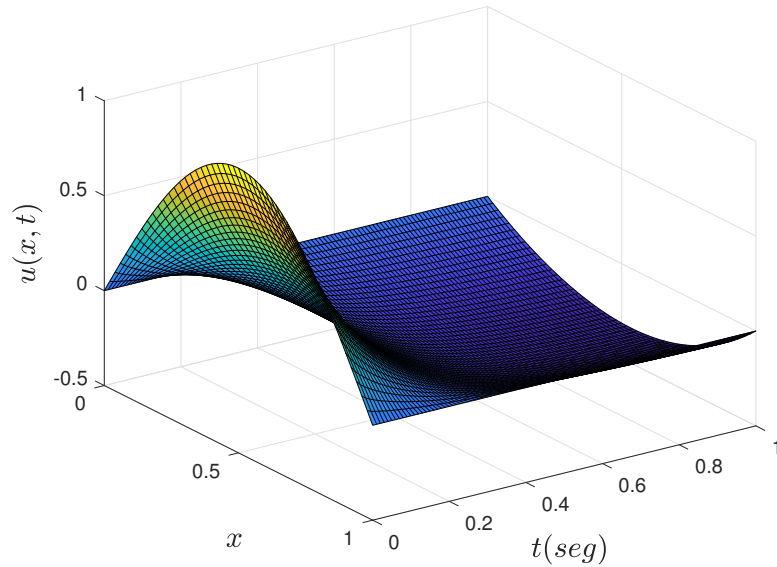


Figura 2.3: Superficie del comportamiento de la solución de (2.39) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.4. Ecuación de Laplace

La PDE

$$u_{xx}(x, t) = 0, \quad (2.40)$$

es una ecuación lineal elíptica homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

La ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de Poisson cuando $f(x, t) = 0$ (ausencia de generación o de disipación) y al igual que la ecuación de Poisson se encuentra a menudo en fenómenos de transferencia de calor y de masa, mecánica de fluidos, elasticidad y electrostática.

2.3.2.5. Ecuación de advección o convección o de transporte

La PDE

$$u_t(x, t) + b(x, t)u_x(x, t) = 0, \quad (2.41)$$

es una ecuación lineal parabólica homogénea de primer orden con coeficientes variables.

Este tipo de ecuación describe fenómenos en los que hay una transferencia neta, transporte o propagación de materia o energía con una cierta velocidad a través de un medio que comúnmente se trata de un fluido. Describen a menudo fenómenos de propagación de contaminantes en fluidos o de partículas suspendidas.

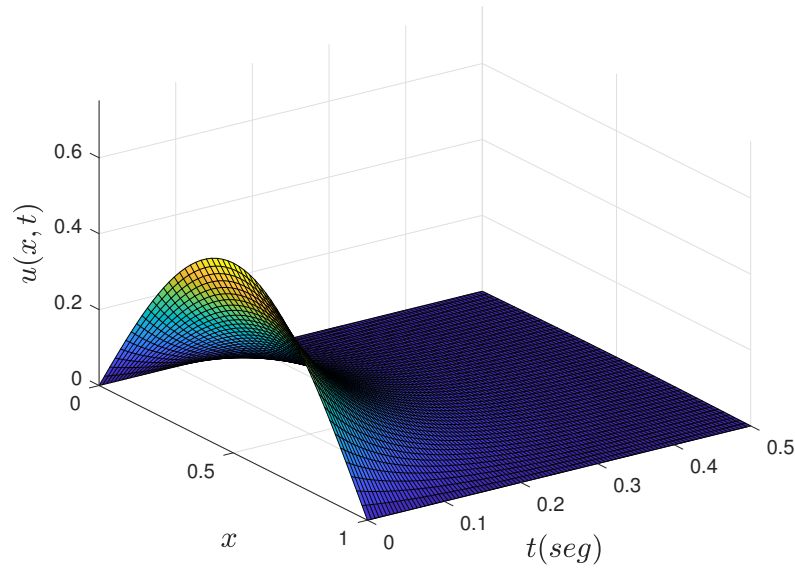


Figura 2.4: Superficie del comportamiento de la solución de (2.40) y su evolución en un tiempo t .

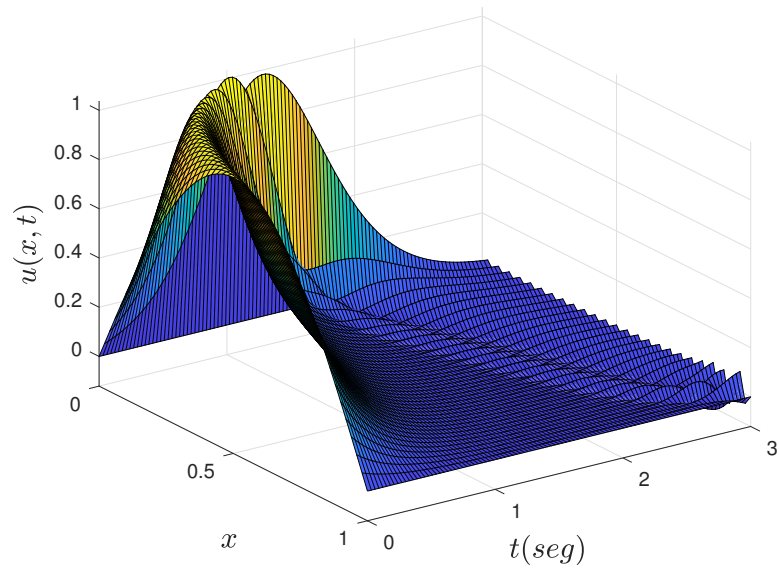


Figura 2.5: Superficie del comportamiento de la solución de (2.41) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.6. Ecuación de Burgers

La PDE

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = \nu u_{xx}(x, t), \quad (2.42)$$

es una ecuación no lineal parabólica homogénea de primer orden con coeficientes constantes.

Esta ecuación es muy común en el estudio de mecánica de fluidos para describir el comportamiento viscoso del flujo de fluidos, también puede describir el comportamiento en fenómenos relacionados con la dinámica de gases e incluso el flujo de tráfico.

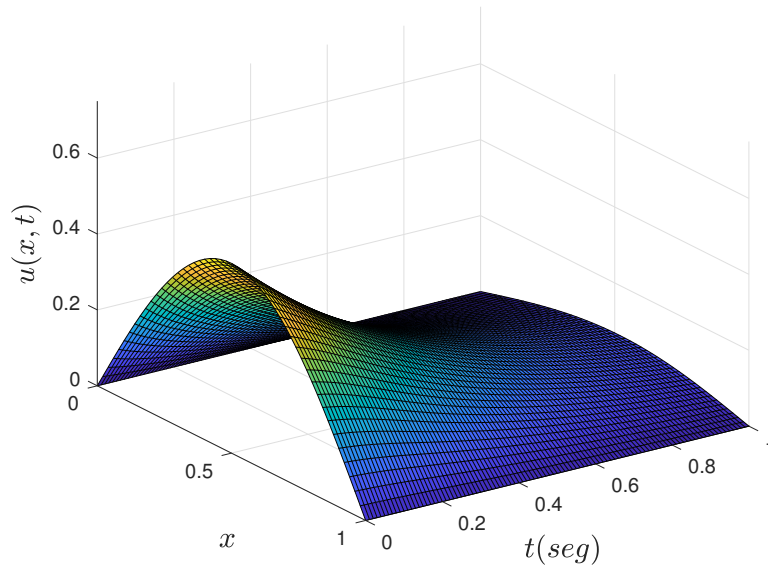


Figura 2.6: Superficie del comportamiento de la solución de (2.42) y (2.44) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.7. Ecuación de Fisher

La PDE

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t)(1 - u(x, t)), \quad (2.43)$$

es una ecuación no lineal parabólica homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

La ecuación de Fisher puede ser utilizada para modelar la propagación de ondas o para modelar el crecimiento de población útil en el modelado de fenómenos en fisiología, ecología, biología, combustión y en transición de fase entre los estados de la materia.

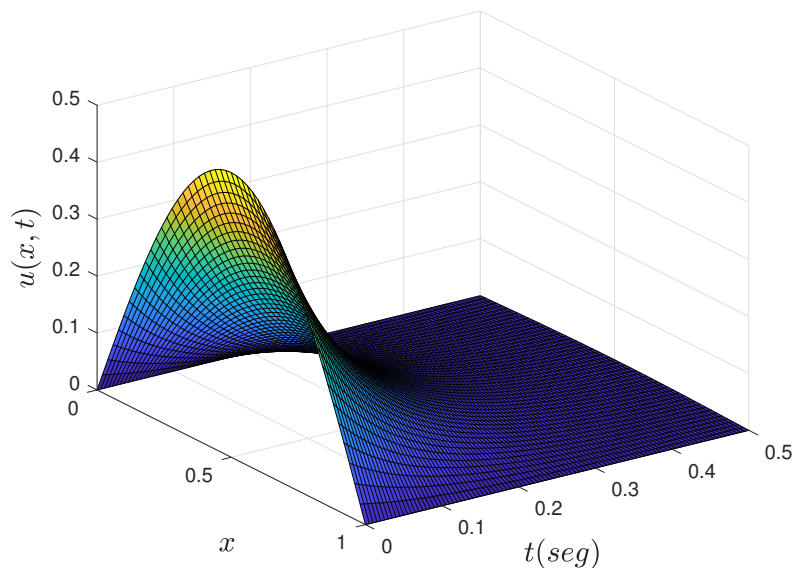


Figura 2.7: Superficie del comportamiento de la solución de (2.43) y su evolución en un tiempo t .

2.3.2.8. Ecuación generalizada de Burgers

La PDE

$$u_t(x, t) + f(u(x, t))u_x(x, t) - \nu u_{xx}(x, t) = 0, \quad (2.44)$$

es una ecuación no lineal parabólica homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

La ecuación (2.44) es un caso particular de (2.42) cuyo modelo describe fenómenos del comportamiento viscoso del flujo de fluidos en hidrodinámica cuando la densidad del fluido es variable.

Capítulo 3

Deducción del modelo matemático del caso de estudio

En este capítulo se da muestra de la obtención de diferentes modelos matemáticos que describen la relación existente entre las variables y parámetros de distintos fenómenos físicos y de como la interacción de estas ecuaciones derivan en la obtención de modelos de PDEs que son objeto de estudio del presente trabajo de tesis.

Para el desarrollo de los modelos de estudio de este trabajo se abordan solo aquellos fenómenos físicos que evolucionan en el espacio y tiempo y cuya dinámica obedece a eventos físicos de flujo, transporte y concentración de cierta cantidad de especie en un medio determinado, *e.g.*, reacciones químicas, flujo de calor o la dispersión de partículas contaminantes en un fluido.

En este capítulo se ha decidido no hacer uso de un exhaustivo rigor matemático para el desarrollo de los modelos que se consideran; en su lugar, se ha optado por hacer uso de explicaciones empíricas y ejemplificaciones basadas en observación y conocimientos básicos de ciencias físicas sin perder el formalismo matemático.

3.1. Leyes de conservación

Ciertas PDEs pueden surgir de la formulación de un balance simple de flujo o de una ley de conservación [6]. Una ley de conservación es una formulación matemática en la que se establece que la tasa de cambio de cierta cantidad en un dominio determinado debe ser igual a la tasa de cambio a la que dicha cantidad fluye a través de la frontera más la tasa de cambio a la que la cantidad se crea dentro del dominio. Como ejemplo puede considerarse lo expuesto en [52], donde se alude a la población de cierta especie de fauna en alguna región geográfica arbitraria donde la tasa de cambio de población de una especie animal deberá ser igual a la tasa con la que la población animal emigra hacia el interior

de la región, menos la tasa con la que la población emigra fuera de dicha región, más la tasa de población que nace dentro de la región, menos la tasa de población que muere. El ejemplo anterior bien puede explicar verbalmente lo que se refiere con un balance de flujo (en este caso del flujo de una población animal) o bien, de una *ley de conservación*. Se pueden formular leyes de conservación para diferentes cantidades físicas o fenómenos como: energía, masa, población o incluso para el tráfico vehicular en una carretera.

Para poder formular una apropiada ley de conservación es necesario poder cuantificar, por medio de una notación adecuada, el fenómeno físico que representa el balance de flujo. Para tal efecto, se define la variable de estado $u = u(x, t)$ que denota la densidad de una cantidad de cierta especie (población, masa, energía, etc.); esta variable de estado se mide usualmente en cantidad de especie por unidad de volumen (en algunos casos puede ser por unidad de longitud) cuya variación se asume restringida en dirección de una sola variable espacial.

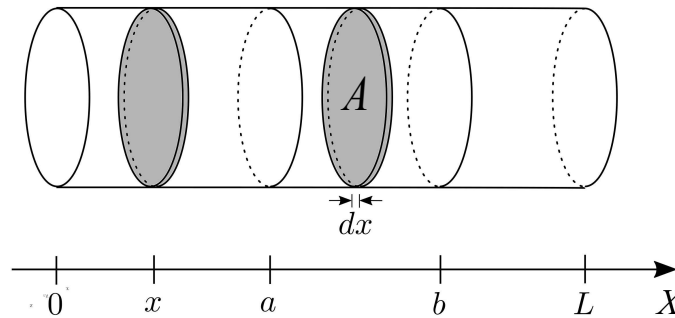


Figura 3.1: Dominio espacial de sección transversal arbitraria con dirección de flujo en x .

En la Figura [3.1](#) se observa la representación de un dominio de una forma arbitraria (un tubo en este caso) cuya dirección convenida de flujo es en la dirección espacial x señalada, en la que se identifican secciones transversales de dicho dominio donde cada una de las mismas tiene un área A . Se requiere que no exista variación alguna de $u(x, t)$ al interior de cada sección transversal. Es necesario que la cantidad de especie que se encuentre al interior del dominio sea suficientemente concentrada y continua en x para poder definir la densidad de concentración de especie en cada una de las secciones transversales del dominio. La cantidad de especie en una sección de espesor dx es $u(x, t)A dx$. Considere $\phi = \phi(x, t)$ como el flujo de la cantidad de la especie en x para un tiempo t . El flujo mide la cantidad de especie que atraviesa la sección transversal en x en un tiempo t y sus unidades están dadas en cantidad de especie por unidad de área por unidad de tiempo. De este modo, $A\phi(x, t)$ es la cantidad de especie actual que cruza la sección transversal en x en un tiempo t . Por convención, el flujo es considerado como positivo si este fluye en la dirección positiva del eje x y negativo en caso contrario. Sea $f = f(x, t)$ la tasa dada a la que se crea o destruye la cantidad de la especie dentro de la sección transversal en x en el tiempo t . La función f se denomina como el término fuente de generación si este es positivo y se denomina como el término de fuente de degeneración (o decremento) cuando es negativo y se mide en unidades de cantidad de especie por unidad de volumen por

unidad de tiempo. Luego, $f(x, t)Adx$ expresa la cantidad de especie que es creada dentro de un espesor dx por unidad de tiempo.

En la tabla mostrada en el cuadro [3.1](#) se listan las dimensiones relevantes utilizadas, para dar congruencia y dimensionamiento, en la descripción de los modelos matemáticos obtenidos en el presente capítulo.

Una ley de conservación es una relación cuantitativa existente entre u , ϕ y f^1 , la cual puede formularse considerando una sección fija, arbitraria y constante $a \leq x \leq b$ del dominio tubular de la Figura [3.1](#) en donde se requiere que la tasa de cambio de la cantidad total de la especie en la sección delimitada sea igual a la tasa de cambio con la que la cantidad de especie fluye al interior de la sección en $x = a$, menos la tasa de cambio con la que la cantidad de especie fluye al exterior de la sección en $x = b$, más la tasa de cambio con la que la cantidad de especie es creada al interior de $a \leq x \leq b$. En forma matemática lo anterior puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t)Adx = A\phi(a, t) - A\phi(b, t) + \int_a^b f(x, t)Adx. \quad (3.1)$$

A la ecuación anterior se le conoce como la ley de conservación fundamental y se trata de una expresión integral en la que se establece básicamente que debe existir un balance entre cuánto entra, cuánto sale y qué tanto es el cambio ocurrido al interior de la sección delimitada del dominio. De [\(3.1\)](#), si u tiene una primera derivada parcial continua entonces la derivada temporal en el término de la izquierda $\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t)Adx$ puede incorporarse al interior del signo integral. Cancelando la constante del área de la sección transversal A con el resto de los términos de [\(3.1\)](#) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t)Adx = \int_a^b u_t(x, t)dx.$$

Si ϕ tiene primeras derivadas parciales continuas entonces puede aplicarse el teorema fundamental del cálculo [\[33\]](#) para expresar el cambio en el flujo $\phi(a, t) - \phi(b, t)$ de [\(3.1\)](#) como la integral de una derivada, *i.e.*,

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \phi_x(x, t)dx.$$

Así, reescribiendo [\(3.1\)](#),

$$\int_a^b (u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)) dx = 0. \quad (3.2)$$

¹Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, en ocasiones se omite la notación “ (x, t) ” que denota la dependencia espacio-temporal de funciones.

De (3.2) puede deducirse que, para conservar la igualdad, debe cumplirse que

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t). \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es una versión de (3.1) obtenida bajo el supuesto de que u y ϕ son continuamente diferenciables, y resulta en una PDE que *describe la relación entre la densidad de la especie, su flujo y la tasa de cambio a la que la cantidad de la especie es creada en el medio*. A la ecuación (3.3) se le conoce como **ley fundamental de conservación**, o simplemente **ley de conservación**, donde f es el término de fuente de generación (o de degradación) y ϕ es llamado como el término de flujo.

En (3.3), los términos de fuente f y de flujo ϕ son funciones tanto de x como de t , pero su dependencia en términos de x y de t puede ser también a través de la propia densidad u . Por ejemplo, el término de generación f podría ser dado como una función de la densidad mediante $f = f(u)$, donde obviamente $u = u(x, t)$ y de manera similar ϕ podría depender de u análogamente. Este tipo de dependencias derivan en modelos no lineales explicados más adelante. Evidentemente, (3.3) es una ecuación única en la que hay dos funciones desconocidas, u y ϕ (la función que describe a f se asume como previamente dada o conocida), intuitivamente puede observarse que una segunda ecuación es necesaria para poder tener un sistema bien determinado y que relacione a u y ϕ partiendo de suposiciones basadas en propiedades físicas del propio medio.

3.2. Ecuaciones constitutivas

Cómo ya se mencionó, la ley de conservación representa una ecuación con dos funciones desconocidas, la función de estado u de la densidad de cierta especie y ϕ del flujo de cantidad de especie. Para poder crear un modelo matemático basado en la ley de conservación que pueda ser resuelto, es necesario contar con otra ecuación que establezca una correlación entre estas funciones. Este tipo de ecuaciones son las llamadas **ecuaciones constitutivas** [65], [18], [51] y [52] y relacionan la constitución interna del medio con efectos observables en el mismo. El tipo de relación establecida entre u y ϕ se basa generalmente en un razonamiento empírico o en observación experimental y dependen particularmente de las propiedades físicas del medio. En las secciones siguientes se definen ciertas ecuaciones constitutivas dependiendo del fenómeno físico que trate de modelarse.

3.3. Fenómeno de advección

El fenómeno de advección obedece al transporte de una densidad de especie en un dominio por medio de la velocidad de un flujo [30]. Un caso basado en observación correspondiente al fenómeno de advección es, por ejemplo, el de una densa nube de humo que es arrastrada por la velocidad del viento en el que se mueve. En este contexto, de la advección

de especies a través de un medio, considérese la función de la densidad de especies u siendo arrastrada por una velocidad b constante cuyas dimensiones están dadas en unidades de longitud por unidad de tiempo a través de un medio; el resultado de este fenómeno es el producto bu entre ambos términos. Las unidades resultantes de este producto están dadas en cantidad de especie por unidad de área por unidad de tiempo, mismas unidades que las del flujo ϕ . Más aún, si este fenómeno ocurre en un dominio restringido como el de la Figura 3.1, puede deducirse que

$$\phi(x, t) = bu(x, t), \quad (3.4)$$

la cual es la ecuación constitutiva que relaciona al flujo ϕ con la densidad u mediante una velocidad constante $b > 0$. Sustituyendo (3.4) en la ecuación de conservación (3.3) y considerando en esta última la ausencia del término de fuente de especie $f = 0$ se tiene

$$u_t(x, t) + bu_x(x, t) = 0. \quad (3.5)$$

La ecuación obtenida (3.5) es la ecuación conocida como **ecuación de advección**. Otros fenómenos descritos por (3.5) son los fenómenos de **transporte** y de **convección**.

Si la expresión para el flujo ϕ es una expresión no lineal que depende directamente de la densidad u , *i.e.*, $\phi = \phi(u)$, entonces la ley de conservación (3.3), con la ausencia del término fuente $f = 0$, toma la forma

$$u_t(x, t) + \phi(u(x, t))_x = u_t(x, t) + \phi'(u(x, t))u_x(x, t) = 0, \quad (3.6)$$

la cual corresponde al modelo de una ecuación de **advección no lineal**. Esta última afirmación será explicada posteriormente.

3.4. Fenómeno de advección y degradación

El fenómeno de degradación, decremento o desintegración de cierta especie o sustancia (*e.g.*, *la desintegración de una sustancia radioactiva*) puede ser modelado en el contexto de las ODEs [87] como

$$\frac{d}{dt}u(x, t) = -\lambda u(x, t),$$

donde $\lambda > 0$ es una constante de la **tasa de degradación** o de la **tasa de generación** (como se verá más adelante) de la densidad de especie u . λ puede interpretarse como la *rapidez* de generación o degradación de especie en unidades del recíproco del tiempo (t^{-1}).

El comportamiento del decremento de la densidad u , que se mueve a cierta velocidad

constante b al interior de un dominio restringido, como el de la Figura 3.1, puede modelarse fácilmente si en (3.5) se agrega el término fuente f en la forma de la tasa de degradación de la densidad de especie como $f(x, t) = -\lambda u(x, t)$, *i.e.*,

$$u_t(x, t) + bu_x(x, t) = -\lambda u(x, t). \quad (3.7)$$

El fenómeno modelado por la PDE (3.7) es llamado como fenómeno de **advección y degradación**.

3.5. Fenómeno de difusión

El concepto de difusión es tan amplio que gran cantidad de títulos incluyen definiciones diversas dependiendo del enfoque según la disciplina de estudio [24] [80] [19] [65] [30] [18] [78] [16]. Una definición simple de lo que refiere el fenómeno de difusión es [58]:

Proceso resultante del movimiento aleatorio de moléculas mediante el cual existe un flujo neto de materia desde una región de alta concentración a una región de baja concentración.

El modelado del fenómeno de difusión, en términos de este trabajo, rescata lo expuesto en [51], en donde se retoma la ley fundamental de conservación (3.3) omitiendo el término de fuente $f = 0$, *i.e.*,

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = 0. \quad (3.8)$$

Como ya se ha expuesto previamente, $u = u(x, t)$ representa la densidad de una especie o de una cantidad física y $\phi = \phi(x, t)$ representa su flujo de cantidad de especie por unidad de área y por unidad de tiempo. La ecuación (3.8) representa la descripción de cómo cambia la densidad en relación con los cambios en el flujo. En la sección 3.3 se modeló el fenómeno de advección haciendo uso de una ecuación constitutiva, mediante la cual se asume que el flujo es proporcional a la densidad, es decir, el flujo es igual a la multiplicación de la densidad por una velocidad constante ($\phi = bu$); es momento de proseguir con el modelo de un proceso de difusión.

Sea u la concentración de una especie en un dominio como el de la Figura 3.1; por definición, el fenómeno de difusión implica el flujo de partículas por movimiento aleatorio de estas y es de esperarse que el movimiento aleatorio, aunado a las colisiones de las partículas de la especie en el medio, provoquen la dispersión de las concentraciones de dicha especie, haciendo que esta pase de concentraciones más altas a concentraciones más bajas en el medio (o dominio). Este fenómeno puede trasladarse análogamente a otros tipos de especies como flujo de fluidos en un tubo, personas congregadas en un pasillo o a

la energía térmica en una barra metálica, entre otros tantos.

La figura 3.2 muestra una gráfica ilustrativa del comportamiento de la progresión de la función de difusión para un instante de tiempo dado. Puede observarse que la densidad de especie $u = u(x, t)$ se propaga (fluye) hacia las direcciones de menor concentración y que la magnitud del flujo es proporcional a la pendiente de la curva en algún punto. En la Figura 3.2, el flujo de mayor magnitud se presenta en el lado izquierdo de la gráfica, que es donde la pendiente es mayor, o más pronunciada, en tanto que el flujo de menor magnitud está en el lado derecho de la gráfica, donde evidentemente la pendiente de la curva es menor.

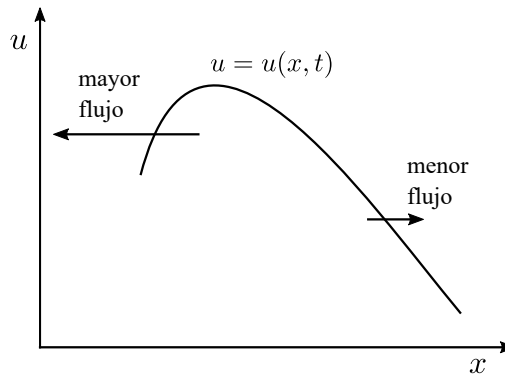


Figura 3.2: Comportamiento de la función de difusión $u = u(x, t)$ en un instante t , de regiones de mayor hacia menor concentración de especie.

Dos observaciones pueden hacerse para modelar este movimiento de partículas basado en colisiones aleatorias:

1. El movimiento es de altas concentraciones hacia bajas concentraciones,
2. Cuánto más pronunciado sea el gradiente de concentración, o la derivada, mayor será el flujo.

Queda claro entonces que el flujo depende de la pendiente de la curva de la densidad, *i.e.*, de la derivada en x de la densidad u . Mientras mayor sea la pendiente mayor es el flujo en esa dirección. Si se asume una simple relación lineal se puede establecer la siguiente ecuación constitutiva

$$\phi(x, t) = -\varepsilon u_x(x, t), \quad (3.9)$$

donde $\varepsilon > 0$ es una constante de proporcionalidad. El signo negativo de ε garantiza que si $u_x < 0$ entonces ϕ será positivo y el flujo que representa se llevará a cabo en la dirección positiva (hacia la derecha) de acuerdo a la convención establecida previamente en la Figura 3.1; por otro lado, si $u_x > 0$ entonces ϕ será negativo y el flujo irá en sentido contrario. La ecuación (3.9) es la conocida **ley de Fick** [31] y la constante ε es la **constante de**

difusión y se expresa en unidades de área por unidad de tiempo.

Al sustituir la ecuación constitutiva (3.9) en la ley de conservación (3.8) se obtiene la llamada **ecuación de difusión**

$$u_t(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = 0, \quad (3.10)$$

la cual es una de las PDEs fundamentales dentro de la matemática aplicada así como de la física, química, biología, entre otras ciencias aplicadas. La ecuación de difusión (3.10) establece que si $u_{xx} > 0$ entonces la curva de la densidad de la especie en un punto sería cóncava, es decir, $u_t < 0$ (como puede observarse en la parte derecha de la Figura 3.3), lo que implica un comportamiento de decremento en la concentración de especies en dicho punto. Por otra parte, si $u_{xx} < 0$ la curva de la densidad de la especie en un punto sería convexa, es decir, $u_t > 0$ (parte izquierda de la Figura 3.3), lo que implica un decremento en la densidad de especies en dicho punto. En todo caso, la curva de la Figura 3.3 tiende a aplanarse y estabilizar la concentración de especies ante la ausencia de un término fuente.

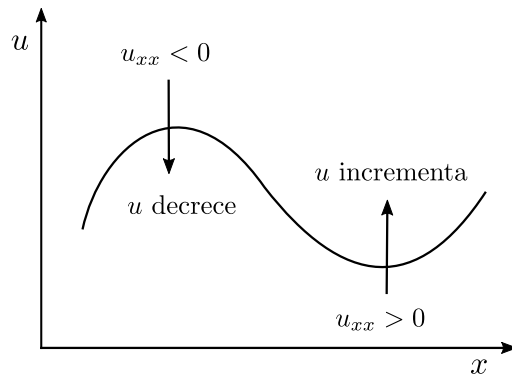


Figura 3.3: Comportamiento de la función de difusión $u = u(x, t)$ en un instante t para el decremento e incremento de densidad de especie.

La ecuación de difusión (3.10) reviste importancia en el presente trabajo de tesis y es objeto de estudio del mismo.

La Figura 3.4 muestra el comportamiento de la evolución de (3.10) para un dominio definido en $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$ mostrando un comportamiento estable del fenómeno de difusión. La Figura 3.5 muestra la evolución de (3.10) sobre el plano $x - u$ para distintos instantes en el tiempo.

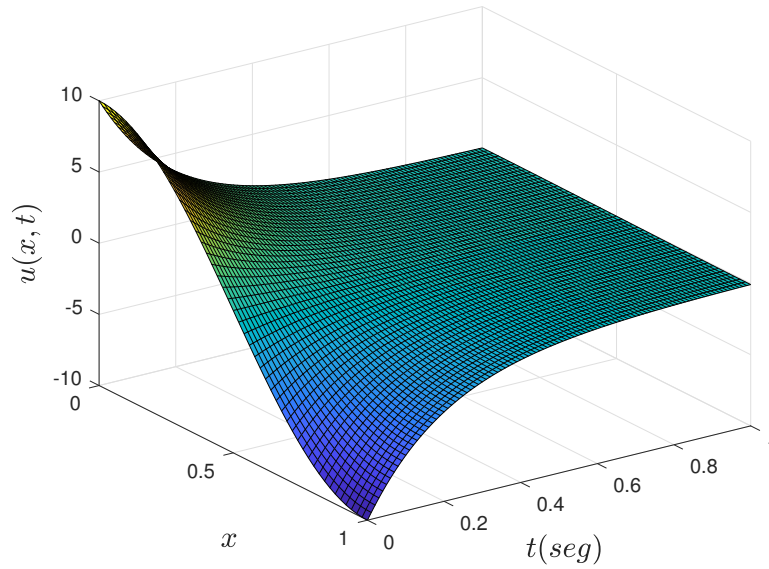


Figura 3.4: Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la ecuación de difusión (3.10) con $\varepsilon > 0$.

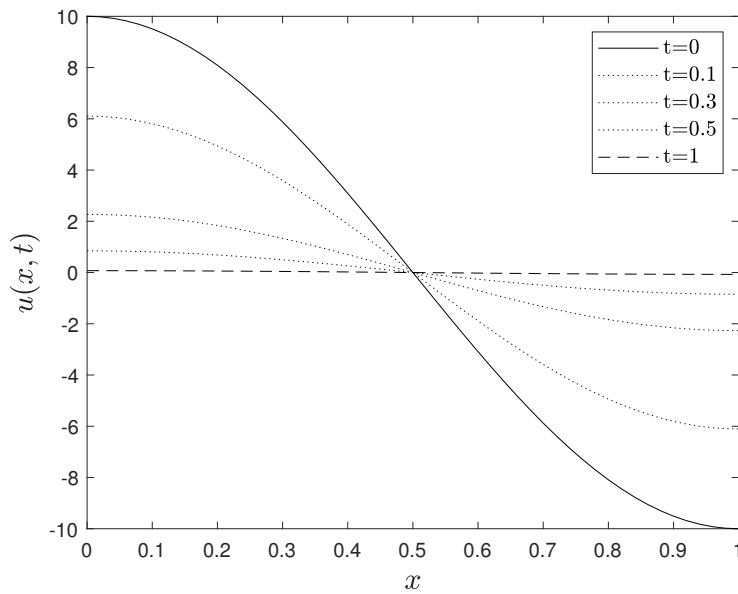


Figura 3.5: Evolución de $u(x, t)$ para la ecuación de difusión (3.10) con $\varepsilon > 0$ en distintos instantes de t .

Símbolo	Descripción	Dimensión
q	Cantidad de especies	q
t	Tiempo	t
L	Longitud	L
u	Densidad de especies	$q/(L^3)$
u_t	Derivada temporal de la densidad de especies	$q/(L^3t)$
u_x	Derivada espacial de la densidad de especies	$q/(L^3L)$
u_{xx}	Doble derivada espacial de la densidad de especies	$q/(L^3LL)$
f	Término fuente	$q/(L^3t)$
ϕ	Flujo de la densidad de especies	$q/(L^2t)$
ϕ_x	Derivada espacial del flujo de la densidad de especies	$q/(L^2tL)$
b	Velocidad del término de advección	L/t
λ	Constante de proporcionalidad de la tasa de cambio del término fuente	$1/t$
ε	Constante de difusión	L^2/t

Cuadro 3.1: Dimensiones de términos relevantes utilizados.

3.6. Conducción de calor

Considérese el flujo de calor en una dimensión en una barra de cierto material con una densidad ρ y con un calor específico C . El calor específico es la cantidad de energía requerida para aumentar en un grado de temperatura a una unidad de masa y viene dada en unidades de energía por unidad de masa por grado.

Al aplicar la ley de conservación (3.8) en el caso de la barra, puede hacerse u como la densidad de energía en la forma $u(x, t) = \rho C \theta(x, t)$ donde $\theta = \theta(x, t)$ es la temperatura en algún instante t para un punto cualquiera x de la longitud de la barra. Se asume que la energía es proporcional a la temperatura, como una suposición basada en la uniformidad del medio del que esté conformada la barra. Por lo tanto,

$$\rho C \theta_t + \phi_x(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

es una expresión para el balance de energía en dicha barra cuando no hay presente una fuente de generación de energía. Se asume que el flujo de energía ϕ puede ser representado por una función, o ecuación constitutiva, similar a la ley de Fick del tipo

$$\phi(x, t) = -K \theta_x(x, t), \quad (3.12)$$

donde K es denominada como la constante de **conductividad térmica**. En este contexto

de flujo de calor (3.12) es llamada como la **ley de Fourier** de la transferencia de calor. Esta ley, la cual es una relación constitutiva basada en evidencia obtenida de forma empírica, es la estipulación de que *el calor fluye de regiones “más calientes hacia regiones más frías” (o menos calientes)*, la cual es una forma muy simple de aludir a la segunda ley de la termodinámica [31]. Sustituyendo (3.12) en (3.11) se obtiene una expresión similar a la ley de conservación sin término de generación (3.8) pero en términos de temperatura $\theta(x, t)$, *i.e.*,

$$\theta_t(x, t) - k\theta_{xx}(x, t) = 0 \quad (3.13)$$

donde $k \equiv \frac{K}{\rho C}$.

La ecuación (3.13) es una clase de ecuación de difusión de especie también conocida como **ecuación de calor**. La constante k es la **difusividad térmica** y es una propiedad física del medio en el que se lleva a cabo dicho fenómeno. La difusividad térmica tiene las mismas unidades dimensionales que la constante de difusión ε , *i.e.* área por unidad de tiempo.

La ecuación de calor (3.13) puede ser expresada también en la forma

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 \quad (3.14)$$

la cual tiene la misma forma de la ecuación de difusión (3.10) sin pérdida de generalidad respecto al fenómeno físico de transferencia de calor que representa, ya que en sí, la transferencia de calor es un fenómeno difusivo.

3.7. Fenómeno de advección-difusión

El fenómeno de advección puede ser ejemplificado, como previamente se hizo en la sección [3.3], como un caso donde una densa nube de algún contaminante es arrastrado a una cierta velocidad por una corriente de viento a través de cierto medio; suponiendo que dicha nube contaminante ahora empieza también a diseminarse en el mismo medio (la corriente de aire), en este caso, se tienen presentes dos fenómenos, previamente analizados, como lo son el fenómeno de advección en conjunto con el fenómeno de difusión. Cuando se tienen presentes en el mismo escenario ambos fenómenos se aplica la conjunción de las ecuaciones constitutivas (3.4) y (3.9) para obtener la siguiente ecuación constitutiva del flujo

$$\phi(x, t) = bu(x, t) - \varepsilon u_x(x, t) \quad (3.15)$$

y la ley de conservación (3.8) en ausencia del término de generación se convierte en

$$u_t(x, t) + bu_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = 0, \quad (3.16)$$

la cual es la PDE conocida como la **ecuación de advección-difusión**, denominada también como **ecuación de transporte-difusión**, y en lo sucesivo como **ecuación diferencial parcial de advección-difusión (AD PDE)** por sus siglas del inglés).

La ecuación (3.16) describe el proceso mediante el cual la densidad de una especie varía respecto al tiempo al ser trasladada por el movimiento del medio a una velocidad b , mientras se difunde en el mismo medio de acuerdo con la ley de Fick y es de relevancia e interés para el desarrollo del presente trabajo.

Las figuras 3.6 y 3.7 muestran el comportamiento estable de $u(x, t)$ de la ecuación (3.16) en la región $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$. En la Figura 3.7 se puede apreciar como $u(x, t)$ tiende a converger en $u(x, t) \cong 4$ como consecuencia de la acción del fenómeno de advección en (3.16) en tanto que en la figura 3.5 la estabilidad se consigue en $u(x, t) \cong 0$ al no presentar efecto de advección.

La figura 3.7 muestra la evolución de $u(x, t)$ en distintos cortes de tiempo t para ayudar a visualizar la evolución de la convergencia de $u(x, t)$ y el comportamiento de la densidad de especie, tal como se explicó anteriormente con la figura 3.3.

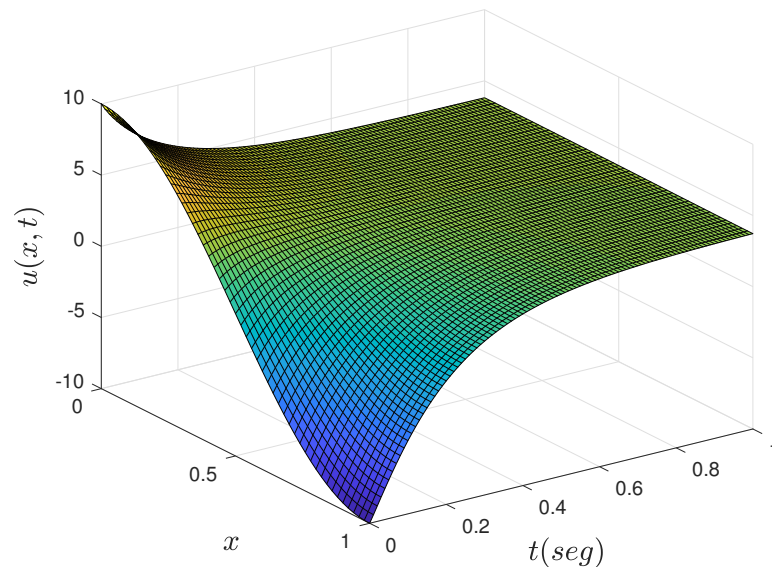


Figura 3.6: Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la AD PDE (3.16) con $\varepsilon, b > 0$.

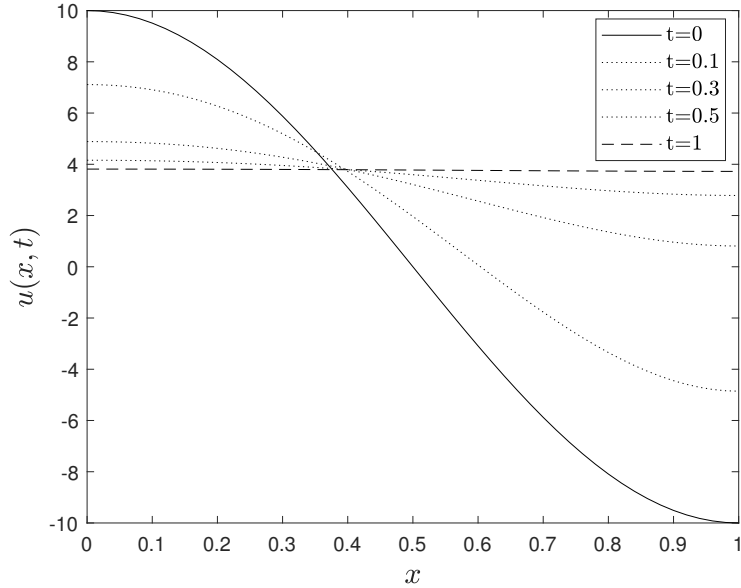


Figura 3.7: Evolución de $u(x, t)$ para la AD PDE (3.16) con $\varepsilon, b > 0$ en distintos instantes de t .

3.8. Fenómeno de advección-difusión-degradación

Si se considera la ecuación (3.16) en la que se modelan los fenómenos de advección y difusión y si además se agrega a estos el fenómeno de degradación mediante el término de fuente $f(x, t) = -\lambda u(x, t)$, el modelo (3.16) se convierte en

$$u_t(x, t) + bu_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = -\lambda u(x, t), \quad (3.17)$$

siendo esta última, la **ecuación de advección-difusión-degradación**.

Esta PDE modela y describe un proceso en el que la variación respecto del tiempo de la densidad de especie se debe a la velocidad b con que esta es llevada por el propio medio, mientras se difunde en este mismo, a medida que la especie se degrada o la especie va en decremento dentro del medio.

3.9. Ecuación de reacción-advección-difusión

El término de fuente $f = f(x, t)$ en los modelos de las secciones 3.4 y 3.8 ha sido referido como el decremento de especie asociado con fenómenos de desintegración de especie (*e.g.*, el proceso de desintegración de alguna sustancia radioactiva o la tasa de muerte en alguna población de fauna). Lo anterior sucede cuando $f(x, t) < 0$. Sin embargo, este término también se encuentra asociado a fenómenos de generación de especie cuando $f(x, t) > 0$

(*e.g.*, fenómenos de crecimiento de poblaciones de fauna o la tasa con la que una sustancia química se genera mediante un proceso reactivo). Ciertos modelos de difusión que incluyen términos de fuente, tanto de generación como de degradación de especie, son llamados comúnmente como **ecuaciones de reacción-difusión**.

En la ecuación (3.17) el término negativo de fuente $f(x, t) = -\lambda u(x, t)$ puede ser sustituido por un término positivo de fuente $f(x, t) = \lambda u(x, t)$, ocasionando que el modelo resultante obedezca a un sistema con generación de especie, *i.e.*,

$$u_t(x, t) + bu_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t). \quad (3.18)$$

Sea cualquiera el escenario para el término fuente, degradación (3.17) o generación de especie (3.18), la ecuación resultante cuenta con un término fuente reactivo $\lambda u(x, t)$ junto con términos de advección $bu_x(x, t)$ y difusión $\varepsilon u_{xx}(x, t)$. Este último modelo es utilizado para representar fenómenos de reacción química que puedan generar o consumir cantidad de especie por efecto de dicha reacción química. De (3.18) la forma generalizada para la llamada **ecuación de reacción-advección-difusión** está dada por

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) - bu_x(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (3.19)$$

donde $\lambda < 0$ es para degradación de especie y $\lambda > 0$ es para generación de especie.

Esta última PDE (3.19) se considera como una de las ecuaciones objeto de estudio para el actual trabajo de tesis y será denominada en lo subsecuente como **ecuación diferencial parcial de reacción-advección-difusión** o como **RAD PDE**, por sus siglas del inglés.

Las figuras 3.8 y 3.9, muestran la evolución de $u(x, t)$ de la ecuación (3.19) para $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$ donde claramente se ve como la evolución del comportamiento tiende a diverger debido a que el parámetro $\lambda > 0$ en el término de fuente $f = \lambda u(x, t)$ provoca generación de especie. Este término de fuente incrementa la generación de especie en el dominio, aumentando la densidad de especie que fluye y en consecuencia su comportamiento se muestra inestable. Por otro lado, en las figuras 3.10 y 3.11 la evolución del comportamiento de $u(x, t)$ de (3.19) igualmente en $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$, tiende a converger a cero, esto debido a que el parámetro $\lambda < 0$, en el término fuente $f = -\lambda u(x, t)$, ocasiona una degradación de especie en el dominio disminuyendo la densidad de especie que fluye y ocasionando que la difusión de especie se comporte estable.

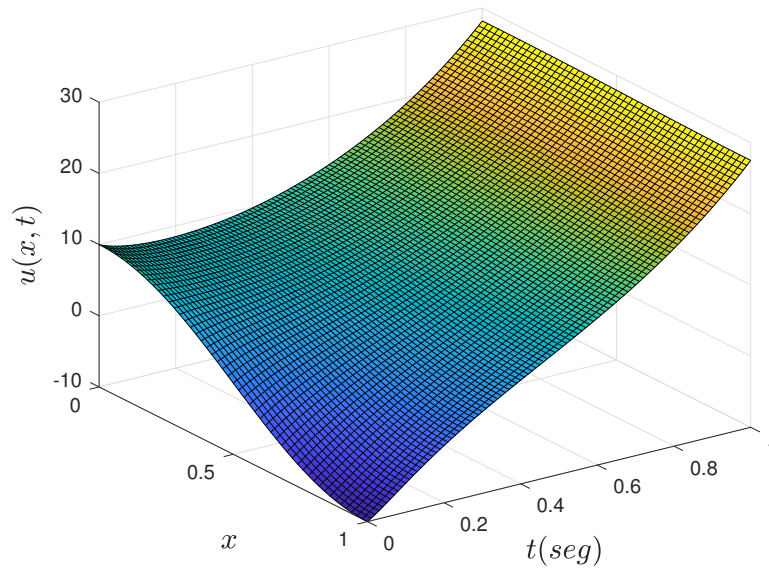


Figura 3.8: Evolución del comportamiento inestable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) con $\varepsilon, b, \lambda > 0$.

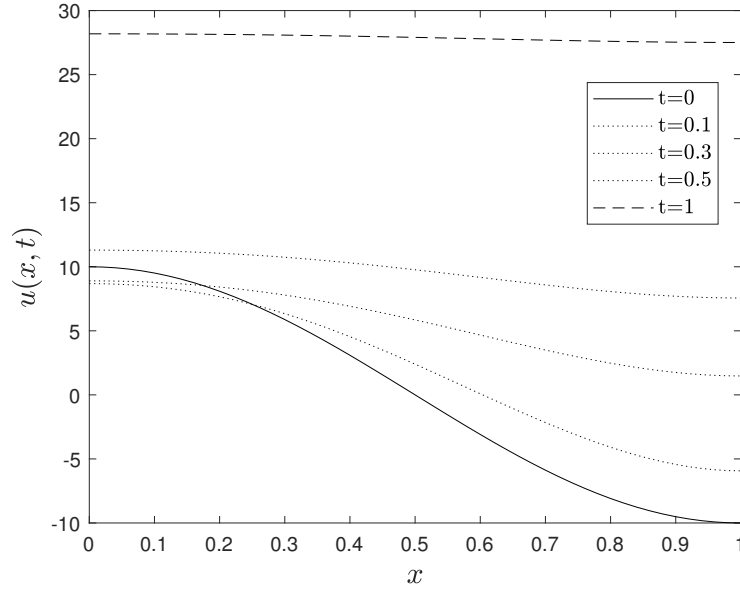


Figura 3.9: Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) en distintos instantes de t con $\varepsilon, b, \lambda > 0$.

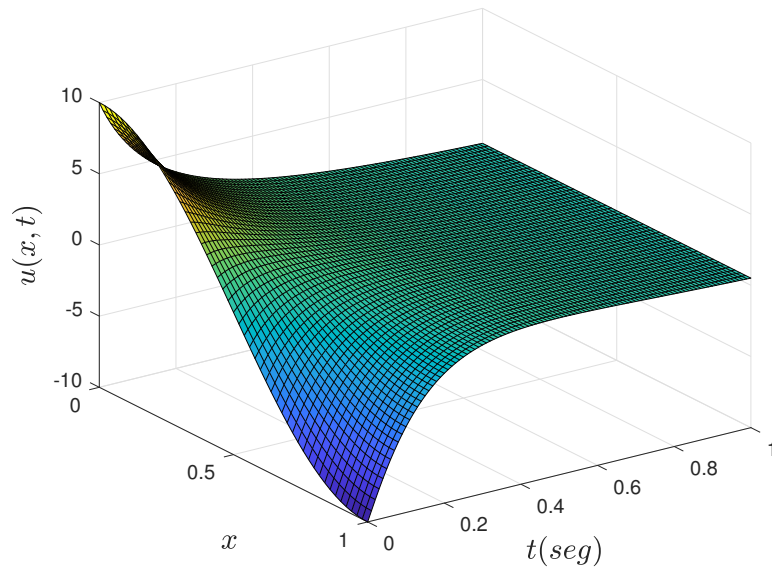


Figura 3.10: Evolución del comportamiento estable de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) con $\varepsilon, b > 0$ y $\lambda < 0$.

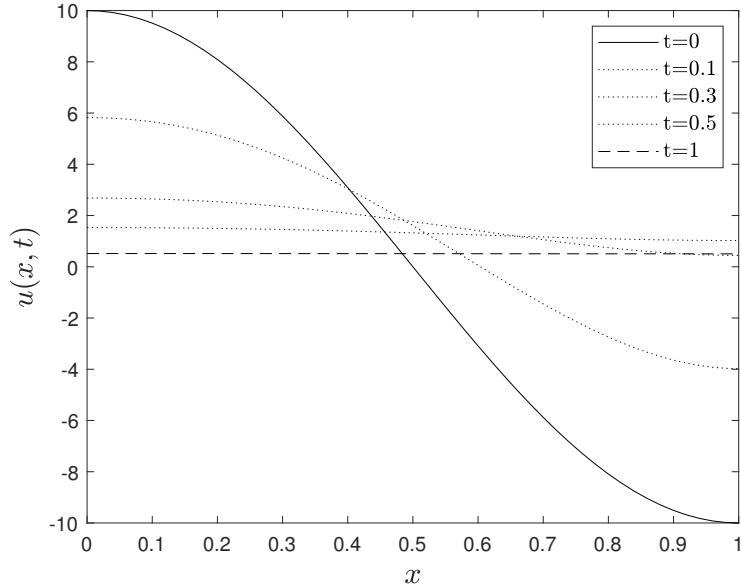


Figura 3.11: Evolución de $u(x, t)$ para la RAD PDE (3.19) en distintos instantes de t con $\varepsilon, b > 0$, y $\lambda < 0$.

3.10. Ecuación de reacción-difusión

La ecuación (3.19) en ausencia del fenómeno de advección, *i.e.* $b = 0$ y donde no existe una corriente de velocidad en el medio que *arrastre* la especie en el dominio, puede escribirse como

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (3.20)$$

donde $\lambda > 0$ ocasiona que el término de fuente sea de generación y en caso contrario $\lambda < 0$ ocasiona que el término fuente sea de degradación. En ambos casos el término de fuente $\lambda u(x, t)$ puede también denominarse como término de **reacción** (generando o consumiendo densidad de especie), dando nombre a la ecuación (3.20) como **ecuación de reacción-difusión** o bien como **ecuación diferencial parcial de reacción-difusión** (**RD PDE**, por sus siglas del inglés), la cual también es una de las PDEs objeto de estudio del actual trabajo de investigación.

A continuación se muestra la evolución de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) definida en $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$. De las figuras 3.12 y 3.13 puede observarse, una vez más, el efecto del parámetro $\lambda > 0$ en el término de reacción $\lambda u(x, t)$ (término de fuente), *i.e.* ocasionando inestabilidad en la RD PDE (3.20). Efecto contrario sucede cuando $\lambda < 0$, mostrado en las figuras 3.14 y 3.15, donde se ocasiona estabilidad para la RD PDE (3.20)

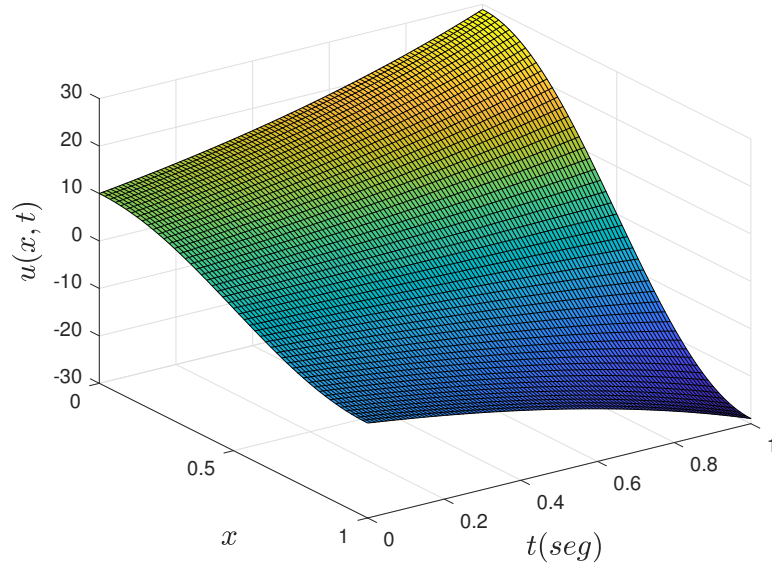


Figura 3.12: Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) con $\varepsilon, \lambda > 0$.

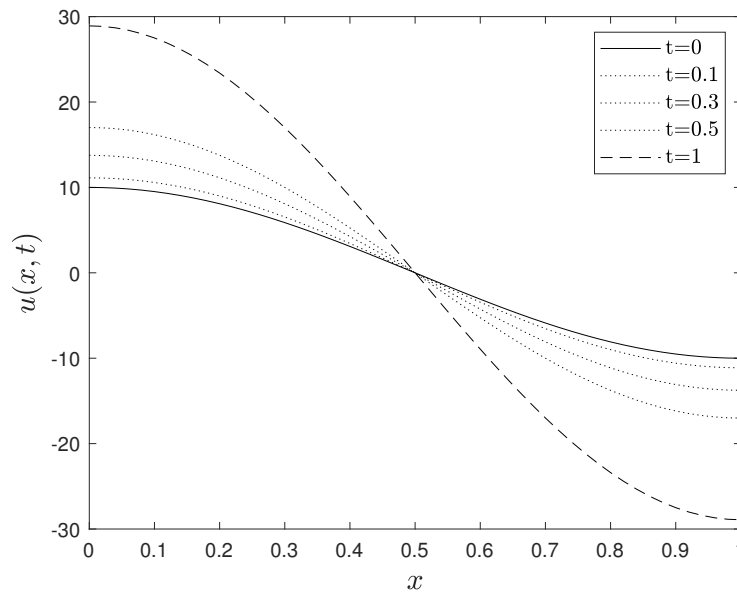


Figura 3.13: Evolución inestable de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) en distintos instantes de t con $\varepsilon, \lambda > 0$.

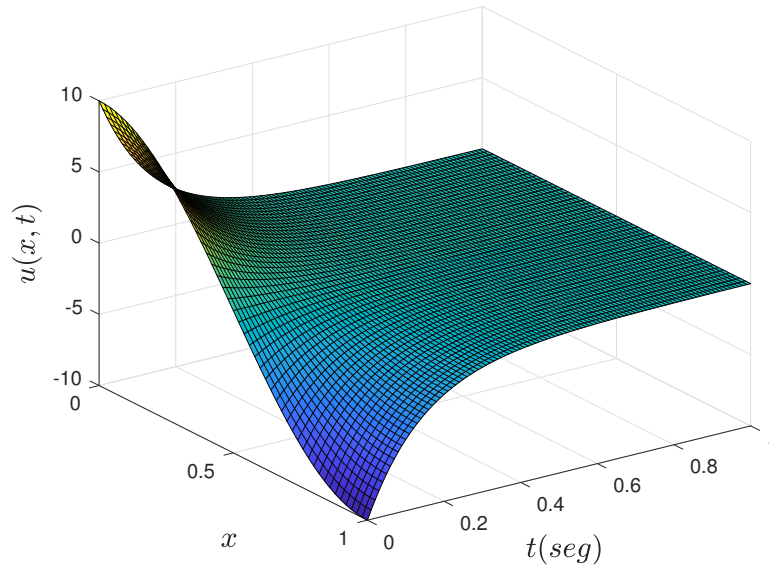


Figura 3.14: Evolución de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) con $\varepsilon > 0$ y $\lambda < 0$.

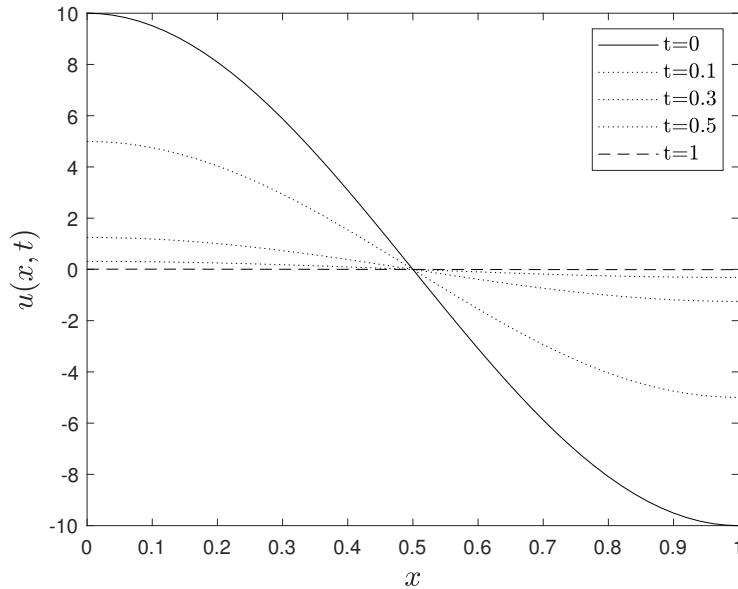


Figura 3.15: Evolución de $u(x, t)$ para la RD PDE (3.20) en distintos instantes de t con $\varepsilon > 0$ y $\lambda < 0$.

La expresión dada por (3.20) se asocia también al contexto de la transferencia de calor si a la ecuación de calor (3.14) se le agrega un término fuente de generación del tipo

$f(x, t) = cu(x, t)$, *i.e.*,

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + cu(x, t), \quad (3.21)$$

que es la **ecuación de calor con generación** [31], donde $c > 0$ es una constante de proporcionalidad de la tasa de generación del término de fuente de calor.

3.11. Ecuación de advección-difusión no lineal

Los términos de flujo de especie $\phi = \phi(x, t)$ y de fuente de especie $f = f(x, t)$, hasta ahora, han sido considerados como funciones que dependen exclusivamente de x y de t ; no obstante, su dependencia de x y t podría ser a través de la dependencia de la propia densidad de especie $u = u(x, t)$, *e.g.*, el flujo dado como una función de u como $\phi = \phi(u)$ donde, por supuesto, $u = u(x, t)$. Esto último conduce a ecuaciones no lineales (como se expuso en la sección 3.3).

Como se menciona en la sección 3.7, la combinación de las ecuaciones constitutivas (3.4) y (3.9) derivan en la obtención de una ecuación constitutiva para el flujo de especie (3.15). Si en esta última se sustituye el término de flujo de advección $bu(x, t)$ de (3.4) por un término cuya dependencia sea respecto a u , *e.g.* $Q = Q(u) = Q(u(x, t))$, se obtiene la ecuación constitutiva

$$\phi(x, t) = Q(u(x, t)) - \varepsilon u_x(x, t). \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.22) en la ley de conservación (3.8), en ausencia del término de fuente de generación, conduce a

$$u_t(x, t) + Q(u(x, t))_x - \varepsilon u_{xx}(x, t) = 0, \quad (3.23)$$

donde se tiene un término $-\varepsilon u_{xx}(x, t)$ que contribuye al flujo que obedece a la ley de Fick el cual aporta un efecto de difusión así como un término que igualmente contribuye al flujo $Q(u(x, t))$ que depende de $u(x, t)$ y aporta un efecto de advección.

Para simplificar el desarrollo de este modelo puede suponerse un caso particular en la ecuación constitutiva (3.22), en donde el término de flujo por advección sea $Q(u(x, t)) = u^2(x, t)/2$; luego la ecuación (3.23) puede expresarse en su forma más general como

$$u_t(x, t) + u(x, t)u(x, t)_x = \varepsilon u_{xx}(x, t). \quad (3.24)$$

En el contexto de la ecuación (3.24), la constante de difusión ε representa la viscosidad cinemática [31]. Esta última expresión es una ecuación en la que el término que representa el fenómeno de advección $u(x, t)u(x, t)_x$ viene dado por una expresión no lineal, siendo ésta

una **ecuación diferencial parcial de advección-difusión no lineal** (NL AD PDE por sus siglas del inglés). La ecuación (3.24) representa un balance entre la evolución de la densidad de especie en el tiempo, un fenómeno de advección no lineal que depende de la densidad de especie y entre el fenómeno de difusión también conocida como *ecuación de Burgers* [11], la cual, es fundamental para describir una amplia variedad de problemas en las ciencias físicas, químicas, biológicas y de ingeniería.

3.12. Ecuación de reacción-difusión no lineal

Considérese ahora que en la ecuación de reacción-difusión (3.20) el término de fuente se sustituye por un término no lineal $f = f(x, t, u)$ (por la dependencia en u), *i.e.*,

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + f(x, t, u). \quad (3.25)$$

Un fenómeno común es el representado por la *ley logística* [87], una ODE que establece la tasa de cambio de una densidad de especie en un dominio fijo cualquiera como

$$\frac{d}{dt}u(x, t) = \lambda u \left(1 - \frac{u(x, t)}{D} \right), \quad (3.26)$$

donde $\lambda > 0$ es el término de la tasa de crecimiento de la población u en la ecuación logística y $D > 0$ es la capacidad de sustento o de sustentación del ambiente, *i.e.* la capacidad máxima de especie que el medio es capaz de sostener [18]. Si en un inicio u es muy pequeña, el término de crecimiento lineal λu en (3.26) es dominante y esto resulta en un rápido crecimiento de la especie en el medio; a medida que u va creciendo en el tiempo el término cuadrático $-\lambda u^2/D$ actúa en (3.26) inhibiendo la tasa de crecimiento y tendiendo a estabilizarse cuando $u = D$.

Tomando la ley de conservación (3.3) y reemplazando en esta última la ley logística (3.26) en lugar del término fuente $f(x, t)$ luego

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = \lambda u \left(1 - \frac{u(x, t)}{D} \right). \quad (3.27)$$

De igual manera, el término ϕ puede reemplazarse en (3.27) por la derivada de la ley de Fick (3.9) con lo que se obtiene

$$u_t(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = \lambda u \left(1 - \frac{u(x, t)}{D} \right). \quad (3.28)$$

De este modo se obtiene una **ecuación diferencial parcial de reacción-difusión no lineal** (NL RD PDE por sus siglas del inglés). La ecuación (3.28) es la conocida *ecuación de Fisher* [22], fundamental en el estudio de la tasa de crecimiento de poblaciones de especies.

3.13. Caso particular de una PDE no lineal

El objetivo de esta sección es el de modelar nuevas PDEs no lineales recurriendo al uso de leyes de conservación y ecuaciones constitutivas. Considerando el procedimiento de la sección 3.11, donde se obtuvo la ecuación de Burgers (3.24), puede retomarse la ecuación constitutiva (3.22),

$$\phi(x, t) = Q(u(x, t)) - \varepsilon u_x(x, t), \quad (3.29)$$

en donde el término de flujo por advección viene dado por la función no lineal $Q(u(x, t))$. Definiendo este último como

$$Q(u(x, t)) = \frac{u^3(x, t)}{3}$$

y sustituyendo en (3.29) esto produce

$$\phi(x, t) = \frac{u^3(x, t)}{3} - \varepsilon u_x(x, t). \quad (3.30)$$

Derivando la ecuación constitutiva obtenida (3.30) respecto de x y sustituyendo en la ley fundamental de conservación (3.3) resulta

$$u_t(x, t) + u^2(x, t)u_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = f(x, t). \quad (3.31)$$

Reemplazando en esta última ecuación el término fuente por aquel de reacción $f(x, t) = \lambda u(x, t)$ descrito en la sección 3.9, luego

$$u_t(x, t) + u^2(x, t)u_x(x, t) - \varepsilon u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t). \quad (3.32)$$

El término $u^2(x, t)u_x(x, t)$ en (3.32) es el que produce la característica de no linealidad en el sistema y cuyo análisis había permanecido abierto en la literatura hasta el momento, por lo que es de particular interés en el presente trabajo de investigación.

La PDE (3.32) representa un caso hipotético de una ecuación diferencial parcial no lineal de reacción-advección-difusión, que bien podría tratarse de una variante a la ecuación

de Burgers con reacción incluida [63]. De lo anterior

$$u_t(x, t) + u^2(x, t)u_x(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t). \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) constituye un sistema modelado por medio de una ecuación diferencial parcial no lineal, considerada como caso de estudio para el actual trabajo de tesis.

3.14. Condiciones iniciales y de frontera

Las PDEs obtenidas a lo largo del presente capítulo tienen una evolución espacio-temporal generalizada, por un fenómeno de advección, de manera infinita, que implican el uso de una *condición inicial* que especifica la densidad de la especie en un tiempo $t = 0$ en todos los puntos del dominio espacial así como *condiciones de frontera* que delimiten el dominio en el que se desarrolla la evolución de la PDE y que especifiquen las condiciones de la densidad de la especie en estas fronteras del dominio durante todo el tiempo de la evolución del fenómeno que representan.

3.14.1. Condición inicial

Considérese un dominio de sección transversal arbitraria como el de la figura 3.1 de longitud $0 \leq x \leq l$. Entonces la condición inicial tiene la forma

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.34)$$

donde u_0 es una función que define la distribución inicial de la densidad de la especie sobre la longitud del dominio.

3.14.2. Condiciones de frontera

En este capítulo se han expuesto ecuaciones que modelan el fenómeno de difusión y cuya ecuación constitutiva (3.9) será de utilidad en la consecución de las condiciones de frontera. Existen tres tipos de condiciones de frontera que generalmente surgen en el modelado de ecuaciones de difusión.

1. La densidad $u(x, t)$ de la especie en las fronteras $x = 0$ y $x = l$ se especifica mediante una función cualquiera $g(t)$, *i.e.*,

$$u(0, t) = g_1(t), \quad t > 0, \quad (3.35)$$

$$u(l, t) = g_2(t), \quad t > 0. \quad (3.36)$$

Esta condición de frontera es llamada como **condición de frontera de Dirichlet**. Si $g(t) = 0$ se dice homogénea en tanto que será no homogénea en caso contrario.

2. El flujo ϕ (3.9) de especie en las fronteras $x = 0$ y $x = l$ se especifica mediante una función cualquiera $h(t)$, *i.e.*,

$$\varepsilon u_x(0, t) = h_1(t), \quad t > 0, \quad (3.37)$$

$$-\varepsilon u_x(l, t) = h_2(t), \quad t > 0. \quad (3.38)$$

La condición de frontera recibe el nombre de **condición de frontera de Neumann**. Si $h(t) = 0$, no existe flujo en la frontera y se dice que está completamente aislada sin intercambio alguno de especie a través de ésta. Si $h(t) = 0$ se dice homogénea en tanto que será no homogénea en caso contrario.

3. El flujo ϕ (3.9) de especie en las fronteras $x = 0$ y $x = l$ se especifica como una función de la densidad $u(x, t)$ de la especie en dicha frontera, *i.e.*,

$$\varepsilon u_x(0, t) = b(u(0, t) - g_1(t)), \quad t > 0, \quad (3.39)$$

$$-\varepsilon u_x(l, t) = b(u(l, t) - g_2(t)), \quad t > 0. \quad (3.40)$$

Esta condición de frontera es conocida con el nombre de **condición de frontera de Robin**. Al igual que las anteriores, esta condición de frontera se dice homogénea si $g(t) = 0$ y no homogénea en caso contrario.

3.14.3. Del buen planteamiento de una PDE

Si una solución única para una ecuación diferencial existe y esta depende continuamente sobre la condición inicial, luego la ecuación se dice que está bien planteada. [55]

Desde un punto de vista físico, para un fenómeno modelado por una PDE se tratan de formular condiciones auxiliares realistas que puedan en conjunto establecer el buen planteamiento del problema, en tanto que desde un punto de vista matemático, únicamente es deseable determinar si el problema en cuestión esta bien planteado o no. De acuerdo a lo descrito por la definición 10 del capítulo anterior, dada una PDE en un dominio junto a sus condiciones de frontera e inicial, tres propiedades fundamentales deben cumplirse para poder asegurar que un problema esta bien planteado: existencia, singularidad y estabilidad. Si se imponen muy pocas condiciones auxiliares, entonces podría haber mas de una solución para la PDE y no cumplirse así la condición de singularidad y el problema se torna indeterminado. Si, por otro lado, hay demasiadas condiciones auxiliares, puede que no haya ninguna solución en absoluto y no se cumpla la condición de existencia y el problema se vuelva sobredeterminado. La propiedad de estabilidad implica que la solución de la PDE no debería verse afectada significativamente por perturbaciones tan pequeñas, por lo que esta última debería cambiar muy poco.

3.15. Conclusión

De las ecuaciones obtenidas en este capítulo destacan la ecuación de difusión (3.10), la RAD PDE (3.19) y la RD PDE (3.20) para las que deben establecerse condiciones iniciales y de frontera que aseguren el buen planteamiento del problema. La importancia de estas PDEs se debe a que su evolución en el tiempo tiende a estabilizar la densidad de especie $u(x, t)$ en todo el dominio para ciertas condiciones específicas de los parámetros $\varepsilon > 0$, $b > 0$ y $\lambda > 0$. Estas PDEs serán de utilidad posteriormente en el estudio de temas relacionados con la estabilidad.

Por otro lado, la ecuación (3.33) reviste especial importancia debido a que se trata del caso de estudio del actual trabajo de tesis y corresponde a un caso que había permanecido abierto hasta el momento. Este caso particular es una PDE no lineal parabólica de segundo orden homogénea con coeficientes constantes y susceptible a inestabilidad cuando el término de fuente $\lambda u(x, t)$ es del tipo de generación para el que se establecen condiciones de frontera del tipo de Robin (3.40) en $x = 0$ y del tipo de Neumann (3.38) en $x = 1$; complementando con la respectiva condición inicial (3.34) para lograr el buen planteamiento del problema, *i.e.*,

$$u_t(x, t) + u^2(x, t)u_x(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (3.41)$$

$$\varepsilon u_x(0, t) = b(u(0, t) - g_1(t)), \quad (3.42)$$

$$-\varepsilon u_x(l, t) = h_2(t), \quad (3.43)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.44)$$

donde, $u(x, t)$ es una función definida en $x \in [0, 1] \forall t \in [0, \infty)$, siendo ε , b y λ parámetros constantes arbitrarios. El sistema conformado por (3.41)-(3.44) representa una variante hipotética, y para fines exclusivamente académicos, de la ecuación no lineal de Burgers con un término fuente incluido cuya definición física queda aún reservada.

Entre las principales fuentes de consulta de este capítulo se incluyen: [29], [52] y [6].

Capítulo 4

Control por realimentación de estados en la frontera por backstepping

La metodología de backstepping es un esquema basado en la teoría de Lyapunov abordada en [36]. La idea del backstepping es diseñar un controlador de forma recursiva considerando algunas de las variables de estado como “entradas virtuales” diseñando leyes de control intermedias para estas mismas. El backstepping logra los objetivos de estabilización y seguimiento. La prueba de estas propiedades es una consecuencia directa del procedimiento recursivo, porque se construye una función de Lyapunov para todo el sistema, incluidas las estimaciones de los parámetros.

Al ser un método con evolución y progresión en el tiempo, el concepto de **realimentación en la frontera** refiere a que la ley de control diseñada actúa directamente sobre una de las condiciones de frontera del sistema de la PDE, y que en la *arquitectura* de la ley de control diseñada se incluye la solución de la propia PDE en un instante de tiempo anterior, esto es, se “realimenta” la solución anterior de la PDE en la ley de control.

El presente capítulo está orientado a exponer la metodología de backstepping, la cual es utilizada para obtener una ley de control capaz de eliminar el efecto desestabilizador de ciertos términos presentes en una PDE prototipo mediante la aplicación de dicha ley por realimentación de estados en la frontera de la PDE. Se explican las implicaciones matemáticas y la estrategia de diseño que derivan en la consecución de la ley de control y la exposición de los resultados en simulación.

4.1. Control por backstepping de PDEs

En este capítulo se utiliza el método de backstepping para el diseño de leyes de control para PDEs por realimentación de estados en la frontera. El backstepping es un método particular para la estabilización de sistemas dinámicos y es especialmente exitoso en el área del control no lineal para ODEs [36] y que ahora se extiende para el caso de PDEs [42]. Otras estrategias han sido propuestas en la obtención de leyes de control en la frontera como en [81], en la que se propone un método basado en la colocación de polos (eigenvalores, valores propios) de la PDE, o como [44] y [45] en la que se propone el uso de una metodología basada en control óptimo además de resolver una ecuación del operador de Riccati. El backstepping es una tarea más fácil que la de resolver una ecuación del operador de Riccati o ejecutar el procedimiento para la colocación de polos, además de que con el backstepping el problema del diseño de control puede ser obtenido de manera explícita.

4.1.1. Referente a la linealización de sistemas no lineales vía realimentación de estados

Referente a lo expresado en [42], la idea principal detrás del diseño por backstepping para PDEs es muy similar a la idea detrás de las técnicas usadas para la linealización por realimentación en el control de sistemas no lineales de dimensión finita, el cual se enfoca principalmente en las no linealidades del sistema que afectan la estabilidad del mismo. La linealización por realimentación implica dos etapas. La primera de estas consiste en aplicar un cambio de variable invertible, de manera tal que el sistema aparezca ahora en una forma lineal respecto de las nuevas variables y en donde la no linealidad ha sido desplazada a la entrada de control. La segunda etapa consiste en la cancelación de las no linealidades y en la asignación de una dinámica lineal deseable exponencialmente estable en el sistema de lazo cerrado. De este modo, el sistema se comporta ahora como un sistema lineal fácil de analizar en las nuevas variables, mientras que su comportamiento en las variables originales también es predeciblemente estable debido a que el cambio de variables cuenta con una forma invertible bien definida.

4.1.2. Extensión de la idea de linealización por realimentación para PDEs

La idea expuesta en el párrafo anterior puede ser extendida en una forma similar al campo de las PDEs [42].

Primero se debe identificar el término *no deseado* en el modelo de la PDE (*i.e.*, aquel término que afecta y desestabiliza el sistema), este término puede ser obtenido al tratar de resolver el problema de la PDE junto con sus condiciones inicial y de frontera, *i.e.*, la

solución *particular*, o en términos de teoría de control, la solución en *lazo abierto* de la PDE. En el apéndice [A](#) se ofrecen las soluciones particulares para algunas PDEs relevantes para este trabajo de investigación, así como el (los) término (términos) no deseado(deseados) en cada caso.

Posteriormente, habrá de elegirse un **sistema objetivo** que deberá contar con una dinámica deseable que sea exponencialmente estable en lazo cerrado en el que el término no deseado es suprimido mediante la aplicación de un cambio de variable y de una realimentación. El cambio de variable aplicado por el sistema objetivo es el punto clave para el método backstepping, cambia los estados del sistema mediante una transformación con un **operador de Volterra (ecuación integral de Volterra o transformación de Volterra)** [\[86\]](#) que actúa sobre el mismo estado u y trae consigo la obtención inmediata de la realimentación en la frontera mediante una sencilla sustitución.

El operador de Volterra es un operador integral, donde la integral está definida en 0 en su límite inferior teniendo a x como límite superior. La transformación por sí sola no es capaz de eliminar los términos no deseados que causan inestabilidad, esta transformación solo “los lleva a la frontera”, donde el controlador por realimentación en la frontera puede cancelarlos o mitigar su efecto no deseado.

La ventaja principal de la aplicación de la transformación de Volterra es que “elimina” la parte no deseada de la PDE mientras deja a la PDE resultante de la transformación en una forma que favorece la obtención de la dinámica del sistema en lazo cerrado, además de que la transformación tiene su inversa bien definida.

4.2. Descripción del sistema RAD PDE

El sistema PDE a controlar empleando el enfoque de control en la frontera vía backstepping es del tipo RAD PDE [\(3.19\)](#) en el dominio $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$ con condiciones de frontera dadas por

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (4.1)$$

$$u_x(0, t) = \frac{-b}{2}u(0, t), \quad (4.2)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad (4.3)$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (4.4)$$

Este problema está motivado por un caso que había permanecido abierto en la literatura [\[42\]](#). Se trata de una ecuación de tipo parabólica lineal de segundo orden, en una dimensión espacial, homogénea y con coeficientes constantes. Según lo expuesto en la sección [3.9](#), el término de fuente $\lambda u(x, t)$ es un término de reacción de generación de especie que provoca inestabilidad en el sistema (Figura [3.8](#)), es por ello que este término es el término *no*

deseado para este sistema.

La condición de frontera en $x = 0$ (4.2) es del tipo Robin homogénea, la cual expresa que el flujo ϕ de especie es función de la propia densidad u y se obtiene con una combinación de las ecuaciones constitutivas (3.4) y (3.9). Por otro lado, la condición de frontera en $x = 1$ (4.3) es del tipo Neumann homogénea y establece que no existe flujo de especie en la frontera y se especifica mediante una función apoyada en la ecuación constitutiva (3.9).

Observación. El sistema (4.1)-(4.3) es **inestable en lazo abierto** cuando la condición de frontera (4.3) $u_x(1, t) = 0$. El objetivo de control es hacer al sistema (4.1)-(4.3) **estable en lazo cerrado** vía realimentación de estados en la frontera cuando la condición de frontera (4.3) obedece a la entrada de control $u_x(1, t) = U(t)$.

Finalmente, la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ define la distribución inicial que tiene la especie al interior del dominio $0 \leq x \leq 1$ en $t = 0$ y obedece a una función arbitraria dada.

4.3. Análisis de estabilidad del sistema objetivo mediante el recurso de Lyapunov

Se debe elegir un sistema objetivo que pueda mitigar el efecto desestabilizador del término no deseado de la PDE en cuestión. El sistema objetivo debe ser una PDE que desarrolle un **comportamiento deseado** y además **estable** (preferentemente exponencialmente estable) en la progresión de su perfil de solución respecto al tiempo; las PDEs (3.10) y (3.20) son ejemplos de lo anterior.

En una primera inspección, la PDE de difusión (3.10) es un buen ejemplo de una PDE que presenta un comportamiento estable cuando $u_{xx} > 0$ además de que no cuenta con un término de fuente de generación, además de que su solución explícita es de las más comunes en la literatura y puede obtenerse de una manera relativamente fácil [24]. Desde un punto de vista físico, el comportamiento de (3.10) es estable siempre que el término difusivo $\varepsilon > 0$ ya que bajo esta condición, la densidad de especie $u(x, t)$ siempre tiende a disminuir por lo que realizar un análisis de estabilidad para esta ecuación resulta redundante.

La PDE (3.20), en cambio, si cuenta con un término de fuente $\lambda u(x, t)$ que puede presentar inestabilidad en el sistema, por lo que un análisis de estabilidad resulta prudente.

La verificación de la estabilidad del sistema objetivo se obtiene mediante la selección de una apropiada función de Lyapunov y del uso del concepto de la **norma** L_2 para funciones con derivadas continuas.

4.3.1. Sistema objetivo

Sea el sistema objetivo un sistema similar al representado por la PDE (3.20) sujeto a condiciones de frontera Neumann en el dominio $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, t_0 \leq t \leq t_f\}$.

Las variables dependientes u han sido reemplazadas por w para distinguirlo del sistema original

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) - cw(x, t), \quad (4.5)$$

$$w_x(0, t) = 0, \quad (4.6)$$

$$w_x(1, t) = -\frac{1}{2}w(1, t), \quad (4.7)$$

donde, el parámetro c deberá ser $c \geq 0$ además de cumplir condición

$$c \geq \max \left\{ \frac{b^2}{4} - \lambda, 0 \right\}.$$

Dicha condición está basada en el valor de $\lambda_0 = \lambda - \frac{b^2}{4}$ de (4.24) de la sección 4.4.1, definida más adelante.

4.3.2. Función de Lyapunov

Considere la función de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx, \quad (4.8)$$

para la prueba de estabilidad del sistema objetivo. Observe que (4.8) tiene la forma de la norma L_2 , según (2.9), y por definición es no negativa, cumpliendo así uno de los requerimientos descritos por (2.27) como función candidata de Lyapunov.

Evaluando la derivada de $V(t)$ respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \int_0^1 w(x, t) w_t(x, t) dx. \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.9) produce

$$\dot{V}(t) = \int_0^1 w(x, t) w_{xx}(x, t) dx - c \int_0^1 w(x, t) w(x, t) dx. \quad (4.10)$$

Integrando por partes el lado derecho de (4.10) resulta

$$\dot{V}(t) = w(x, t)w_x(x, t)|_0^1 - \int_0^1 w_x^2(x, t)dx - c \int_0^1 w(x, t)w(x, t)dx. \quad (4.11)$$

Aplicando las condiciones de frontera (4.6)-(4.7) en (4.11) se tiene

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2}w^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2(x, t)dx - c \int_0^1 w(x, t)w(x, t)dx. \quad (4.12)$$

Puede observarse que (4.12) está acotada cuando $c > 0$. Sin embargo, no puede verificarse aún si $\dot{V}(t)$ tiende o no a cero ya que (4.12) depende también de $w_x(x, t)$ y no solo de $w(x, t)$, por lo que no puede expresarse el lado derecho de (4.12) en términos de $V(t)$.

Antes de continuar, es conveniente revisar el siguiente lema que establece la relación entre la norma L_2 para $w(x, t)$ y para $w_x(x, t)$.

Lema 1 (Desigualdad de Poincaré [42]). *Para cualquier $w(x, t)$, con derivadas continuas en $[0, 1]$, las desigualdades*

$$\int_0^1 w^2(x, t)dx \leq 2w^2(1, t) + 4 \int_0^1 w_x^2(x, t)dx, \quad (4.13)$$

$$\int_0^1 w^2(x, t)dx \leq 2w^2(0, t) + 4 \int_0^1 w_x^2(x, t)dx, \quad (4.14)$$

se mantienen.

La correspondiente prueba de este lema puede ser corroborada en [42]. Si se multiplica (4.13) por $-\frac{1}{4}$, la desigualdad de Poincaré adopta la forma

$$-\frac{1}{4} \int_0^1 w^2(x, t)dx \geq -\frac{1}{2}w^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2(x, t)dx. \quad (4.15)$$

Continuando ahora con la ecuación (4.12) y reacomodando términos se tiene

$$\dot{V}(t) + c \int_0^1 w(x, t)w(x, t)dx. = -\frac{1}{2}w^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2(x, t)dx. \quad (4.16)$$

Luego, por comparación entre (4.16) y (4.15) se tiene

$$\dot{V}(t) + c \int_0^1 w(x, t)w(x, t)dx = -\frac{1}{2}w^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2(x, t)dx \leq -\frac{1}{4} \int_0^1 w^2(x, t)dx$$

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4} \int_0^1 w^2(x, t)dx - c \int_0^1 w(x, t)w(x, t)dx$$

$$\dot{V}(t) \leq -\left(c + \frac{1}{4}\right) \int_0^1 w^2(x, t)dx.$$

Expresando esta última ecuación en términos de la función de Lyapunov (4.8) resulta

$$\dot{V}(t) \leq -\left(c + \frac{1}{4}\right) V(t). \quad (4.17)$$

Luego, integrando (4.17) se obtiene

$$V(t) \leq e^{-(c+1/4)t}V(0) \quad (4.18)$$

y teniendo en cuenta que la función de Lyapunov (4.8) tiene la forma de la norma L_2 (2.9), i.e., $V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t)dx = \frac{1}{2} \|w(x, t)\|^2$, puede establecerse

$$\|w(x, t)\| \leq e^{-(c+1/4)t/2} \|w(x, 0)\|, \quad (4.19)$$

que, de acuerdo a (2.26), se concluye que el sistema (4.5)-(4.7) es exponencialmente estable en $L_2(\Omega)$.

4.4. Diseño de la ley de control de realimentación en la frontera

El sistema (4.1)-(4.3) cuenta con un término de fuente de inestabilidad $\lambda u(x, t)$ cuando $\lambda > \pi^2$, el efecto desestabilizador que produce $\lambda > \pi^2$ puede verificarse en (A.2) del apéndice A.0.1, por lo que se procede a cancelar dicho término. Además, el sistema objetivo, con una dinámica deseable y estable, ha sido establecido en (4.5)-(4.7). Se sigue ahora, con la transformación del sistema (4.1)-(4.3) en el sistema objetivo (4.5)-(4.7).

4.4.1. Transformación a un sistema objetivo

La principal aportación de la metodología backstepping es la capacidad de eliminar los efectos que causan inestabilidad en el dominio del sistema, para lograr lo anterior se realiza un cambio de variables que involucra un operador integral de Volterra que absorbe los términos desestabilizadores que actúan en el dominio y permite que el control en la frontera elimine por completo su efecto.

Previo al empleo de la metodología backstepping, primero se reduce el sistema de la RAD PDE (4.1)-(4.3) a uno más sencillo mediante un cambio de variable [20], *i.e.*

$$u(x, t) = v(x, t)e^{-\frac{b}{2}x}. \quad (4.20)$$

Derivando (4.20) respecto al tiempo y dos veces con respecto a la variable espacial luego resulta

$$u_t = v_t e^{-\frac{b}{2}x}, \quad (4.21)$$

$$u_x = v_x e^{-\frac{b}{2}x} - \frac{b}{2}v e^{-\frac{b}{2}x}, \quad (4.22)$$

$$u_{xx} = v_{xx} e^{-\frac{b}{2}x} - b v_x e^{-\frac{b}{2}x} + \frac{b^2}{4}v e^{-\frac{b}{2}x}. \quad (4.23)$$

Sustituyendo (4.21)-(4.23) en (4.1) se tiene

$$\begin{aligned} v_t e^{-\frac{b}{2}x} &= v_{xx} e^{-\frac{b}{2}x} - b v_x e^{-\frac{b}{2}x} + \frac{b^2}{4}v e^{-\frac{b}{2}x} + b \left(v_x e^{-\frac{b}{2}x} - \frac{b}{2}v e^{-\frac{b}{2}x} \right) + \lambda v(x, t) e^{-\frac{b}{2}x}, \\ &= v_{xx} - b v_x + \frac{b^2}{4}v + b v_x - \frac{b^2}{2}v + \lambda v(x, t), \\ &= v_{xx} + \left(\lambda - \frac{b^2}{4} \right) v. \end{aligned}$$

Efectuando la misma sustitución anterior en (4.2) para $x = 0$ y en (4.3) para $x = 1$ y haciendo $\lambda_0 = \left(\lambda - \frac{b^2}{4} \right)$ se obtiene el nuevo sistema

$$v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t), \quad (4.24)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad (4.25)$$

$$v_x(1, t) = u_x(1, t)e^{\frac{b}{2}} + \frac{b}{2}u(1, t)e^{\frac{b}{2}}. \quad (4.26)$$

El sistema (4.24)-(4.26) es lo que se conoce como un sistema RD PDE.

4.4.1.1. Ecuación integral de Volterra

Considere la siguiente ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea [86]

$$w(x, t) = v(x, t) - \int_0^x k(x, y)v(y, t)dy, \quad (4.27)$$

donde $k(x, y)$ es el **kernel** de la ecuación integral. La ecuación (4.27) también es conocida como la **transformación integral de Volterra**, cuya característica más notable es que los límites de la integral van de 0 a x y no de 0 a 1. Esto hace que esta integral de Volterra tenga una relación causal en el espacio, lo que significa que para una variable x dada, la parte derecha de (4.28) depende únicamente de los valores de u en el intervalo $[0, x]$. Otra propiedad importante de la transformación de Volterra es que es invertible, de modo que la estabilidad del sistema objetivo se traduce en estabilidad del sistema original en lazo cerrado, que consta de la PDE más la realimentación en la frontera [42].

4.4.1.2. Obtención de la PDE kernel

A continuación, se utiliza la ecuación integral de Volterra (4.27) para transformar el sistema (4.24)-(4.26) en uno nuevo definido por el sistema objetivo (4.5)-(4.7), el cual, como se mencionó anteriormente, desarrolla una dinámica deseable y exponencialmente estable.

El propósito de llevar a cabo la transformación mencionada es el de determinar la función que define el kernel $k(x, y)$, y poder definir con este la ley de control por realimentación en la frontera que permita que el sistema inestable (4.1)-(4.3) se comporte como el sistema objetivo estable (4.5)-(4.7).

Derivando (4.27) respecto al tiempo t con la ayuda de la regla de Leibnitz para derivadas bajo el signo integral [33] resulta

$$w_t(x, t) = v_t(x, t) - \int_0^x k(x, y)v_t(y, t)dy. \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.24) en la expresión anterior se tiene

$$w_t(x, t) = v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t) - \int_0^x k(x, y)v_{yy}(y, t)dy - \int_0^x k(x, y)\lambda_0 v(y, t)dy.$$

Luego, integrando por partes produce

$$\begin{aligned}
w_t(x, t) &= v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t) \\
&- k(x, y)v_y(y, t)|_0^x + k_y(x, y)v(y, t)|_0^x - \int_0^x k_{yy}(x, y)v(y, t)dy \\
&- \int_0^x k(x, y)\lambda_0 v(y, t)dy, \\
&= v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t) \\
&- k(x, x)v_x(x, t) + k(x, 0)v_x(0, t) + k_x(x, x)v(x, t) - k_x(x, 0)v(0, t) \\
&- \int_0^x k_{yy}(x, y)v(y, t)dy - \int_0^x k(x, y)\lambda_0 v(y, t)dy, \\
&= v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t) \\
&- k(x, x)v_x(x, t) + k_x(x, x)v(x, t) - k_x(x, 0)v(0, t) \\
&- \int_0^x k_{yy}(x, y)v(y, t)dy - \lambda_0 \int_0^x k(x, y)v(y, t)dy. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Derivando ahora (4.27) respecto a x dos veces, siguiendo la regla de Leibnitz se tiene

$$\begin{aligned}
w_x(x, t) &= v_x(x, t) - k(x, x)v(x, t) - \int_0^x k_x(x, y)v(y, t)dy. \\
w_{xx}(x, t) &= v_{xx}(x, t) - k_x(x, x)v(x, t) - k(x, x)v_x(x, t) - k_x(x, x)v(x, t) \\
&- \int_0^x k_{xx}(x, y)v(y, t)dy. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.27), (4.29) y (4.30) en (4.5) resulta

$$\begin{aligned}
w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) + cw(x, t) &= v_{xx}(x, t) + \lambda_0 v(x, t) \\
&- k(x, x)v_x(x, t) + k_x(x, x)v(x, t) - k_x(x, 0)v(0, t) \\
&- \int_0^x k_{yy}(x, y)v(y, t)dy - \lambda_0 \int_0^x k(x, y)v(y, t)dy \\
&- v_{xx}(x, t) + k_x(x, x)v(x, t) + k(x, x)v_x(x, t) + k_x(x, x)v(x, t) \\
&+ \int_0^x k_{xx}(x, y)v(y, t)dy \\
&+ cv(x, t) - c \int_0^x k(x, y)v(y, t)dy = 0. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} & \int_0^x [k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - (\lambda_0 + c)k(x, y)] v(y, t) dy \\ & + [\lambda_0 + k_y(x, x) + k_x(x, x) + k_x(x, x) + c] v(x, t) \\ & - k_y(x, 0)v(0, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para verificar que (4.32) sea igual a cero para toda v , las siguientes tres condiciones deben satisfacerse:

$$k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - (\lambda_0 + c)k(x, y) = 0, \quad (4.33)$$

$$k_y(x, 0) = 0, \quad (4.34)$$

$$k_y(x, x) + k_x(x, x) + k_x(x, x) + c + \lambda_0 = 0. \quad (4.35)$$

(4.35) puede simplificarse usando la siguiente convención:

$$\begin{aligned} k_x(x, x) &= \frac{\partial}{\partial x} k(x, y)|_{y=x}, \\ k_y(x, x) &= \frac{\partial}{\partial x} k(x, y)|_{y=x}, \\ \frac{d}{dx} &= k_x(x, x) + k_y(x, x). \end{aligned}$$

Así,

$$k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) = (\lambda_0 + c)k(x, y), \quad (4.36)$$

$$k_y(x, 0) = 0, \quad (4.37)$$

$$k(x, x) = -\frac{x}{2}(\lambda_0 + c). \quad (4.38)$$

Estas tres últimas ecuaciones constituyen un sistema de PDE hiperbólica, cuya solución para la obtención del kernel se describe a continuación.

4.4.2. Solución de la PDE kernel

Para resolver el sistema (4.36)-(4.38) se recurre a un procedimiento de cambio de variable para expresar al kernel y al sistema en función de estas nuevas variables [20], posteriormente se reduce el sistema a una ecuación integral equivalente al sistema (4.36)-(4.38) que al resolverse, da como resultado la función kernel.

4.4.2.1. Transformación de la PDE kernel a una ecuación integral

Se introduce el siguiente cambio de variable,

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad (4.39)$$

con lo que el kernel toma la siguiente forma

$$k(x, y) = G(\xi, \eta),$$

y derivando aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} k_x(x, y) &= G_\xi(\xi, \eta) + G_\eta(\xi, \eta), \\ k_{xx}(x, y) &= G_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2G_{\xi\eta}(\xi, \eta) + G_{\eta\eta}(\xi, \eta), \\ k_y(x, y) &= G_\xi(\xi, \eta) - G_\eta(\xi, \eta), \\ k_{yy}(x, y) &= G_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2G_{\xi\eta}(\xi, \eta) + G_{\eta\eta}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones pertinentes de las expresiones anteriores en (4.36)-(4.38) se obtiene,

$$G_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\lambda_0 + c}{4} G(\xi, \eta), \quad (4.40)$$

$$G_\xi(\xi, \xi) = G_\eta(\xi, \xi), \quad (4.41)$$

$$G(\xi, 0) = -\frac{\xi}{4}(\lambda_0 + c). \quad (4.42)$$

Luego, integrando (4.40) respecto a η , desde 0 hasta η ,

$$\begin{aligned} \int_0^\eta G_{\xi\eta}(\xi, \tau) d\tau &= \frac{\lambda_0 + c}{4} \int_0^\eta G(\xi, \tau) d\tau, \\ G_\xi(\xi, \eta) - G_\xi(\xi, 0) &= \frac{\lambda_0 + c}{4} \int_0^\eta G(\xi, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Usando (4.42) en (4.43),

$$G_\xi(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c) + \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta G(\xi, \tau) d\tau. \quad (4.44)$$

Integrando (4.44) respecto a ξ desde η hasta ξ ,

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{\xi} G_{\xi}(\rho, \eta) d\rho &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_{\eta}^{\xi} d\rho + \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} G(\rho, \tau) d\tau d\rho, \\ G(\xi, \eta) - G(\eta, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi - \eta) + \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} G(\rho, \tau) d\tau d\rho, \quad (4.45)\end{aligned}$$

donde, $G(\eta, \eta)$ en (4.45) puede ser calculado como (66)

$$G(\eta, \eta) = -\frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^{\eta} d\tau + \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^{\eta} \int_0^{\tau} G(\tau, \sigma) d\sigma d\tau.$$

y sustituirse en (4.45).

Finalmente, la transformación de la PDE kernel (4.36) a una ecuación integral está dada por

$$G(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\eta + \xi) + \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^{\eta} \int_0^{\tau} G(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} G(\rho, \tau) d\tau d\rho. \quad (4.46)$$

4.4.2.2. Solución de la ecuación integral

El método de solución de (4.46) se lleva a cabo mediante el recurso de la solución por aproximaciones sucesivas, también conocido como el método de series de Neumann.

En el apéndice D se obtiene la solución (D.18) de (4.46) como

$$G(\xi, \eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta)(\xi\eta)^n}{n!(n+1)!} \left[\frac{\lambda_0 + c}{4} \right]^{n+1}. \quad (4.47)$$

Posteriormente, puede compararse (4.47) con la función de Bessel (B.9) del apéndice B.0.2, expresada de la siguiente forma cuando $m = n$ y $n = 1$,

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}, \quad (4.48)$$

lo que resulta en la solución de (4.47) de manera explícita

$$G(\xi, \eta) = -(\xi + \eta) \frac{(\lambda_0 + c)}{2} \frac{I_1(\sqrt{\xi\eta(\lambda_0 + c)})}{\sqrt{\xi\eta(\lambda_0 + c)}}. \quad (4.49)$$

Regresando (4.49) a sus variables originales x y y se tiene

$$k(x, y) = -(\lambda_0 + c)x \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)}}. \quad (4.50)$$

Con esto se obtiene la solución de la PDE del kernel (4.36)-(4.38) y la consecución de la función $k(x, y)$, la cual es fundamental en el diseño de la ley de control en la frontera para el sistema (4.1)-(4.3).

4.4.3. Ley de control

Como se mencionó anteriormente, la acción de control se aplica a través de la condición de frontera (4.3) en la forma $u_x(1, t) = U(t)$. A continuación se describe el procedimiento mediante el cual se diseña dicha ley de control.

La estrategia de diseño de la ley de control inicia considerando la expresión del cambio de variable (4.20) utilizada anteriormente y tomando su derivada con respecto a x , *i.e.*,

$$u_x(x, t) = v_x(x, t)e^{-\frac{b}{2}x} - \frac{b}{2}v(x, t)e^{-\frac{b}{2}x}; \quad (4.51)$$

posteriormente se toma la ecuación integral de Volterra (4.27) y se calcula su derivada con respecto a x con lo que resulta

$$v_x(x, t) = w_x(x, t) + k(x, x)v(x, t) + \int_0^x k_x(x, y)v(y, t)dy. \quad (4.52)$$

Sustituyendo (4.20) en (4.52) se tiene

$$v_x(x, t) = w_x(x, t) + k(x, x)u(x, t)e^{\frac{b}{2}x} + \int_0^x k_x(x, y)u(y, t)e^{\frac{b}{2}y}dy. \quad (4.53)$$

Luego, sustituyendo (4.53) y (4.20) en (4.51) resulta

$$u_x(x, t) = w_x(x, t)e^{-\frac{b}{2}x} + k(x, x)u(x, t) - \frac{b}{2}u(x, t) + \int_0^x k_x(x, y)u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-x)}dy. \quad (4.54)$$

Esta última expresión representa un diseño preliminar de la ley de control, para completar el diseño se calcula la derivada del kernel (4.50) respecto de x utilizando una de las propiedades para la derivada de una función de Bessel proporcionada en el apéndice B.0.2.

lo que produce

$$k_x(x, y) = -(\lambda_0 + c) \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)}} - (\lambda_0 + c)x^2 \frac{I_2(\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)})}{(x^2 - y^2)}. \quad (4.55)$$

Sustituyendo (4.55) y (4.38) en (4.54) se tiene

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= w_x(x, t)e^{-\frac{b}{2}x} \\ &- \frac{x}{2}(\lambda_0 + c)u(x, t) \\ &- \frac{b}{2}u(x, t) \\ &- (\lambda_0 + c) \int_0^x \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)}} u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-x)} dy \\ &- (\lambda_0 + c)x^2 \int_0^x \frac{I_2(\sqrt{(\lambda_0 + c)(x^2 - y^2)})}{(x^2 - y^2)} u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-x)} dy. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Evaluando esta última expresión en $x = 1$ produce

$$\begin{aligned} u_x(1, t) &= w_x(1, t)e^{-\frac{b}{2}} \\ &- \frac{1}{2}(\lambda_0 + c)u(1, t) \\ &- \frac{b}{2}u(1, t) \\ &- (\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)}} u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy \\ &- (\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{(1 - y^2)} u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy, \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde $w_x(1, t)$ es la condición de frontera (4.7) evaluada en $x = 1$, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
w_x(1, t) &= -\frac{1}{2}w(1, t) \\
&= -\frac{1}{2}v(1, t) + \frac{1}{2} \int_0^1 k(1, y)v(y, t)dy, \\
&= -\frac{1}{2}u(1, t)e^{\frac{b}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 k(1, y)u(1, t)e^{\frac{b}{2}y}dy, \\
&= -\frac{1}{2}u(1, t)e^{\frac{b}{2}} - \frac{(\lambda_0 + c)}{2} \int_0^1 \left(\frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)}} \right) u(1, t)e^{\frac{b}{2}y}dy.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Sustituyendo esta última expresión en (4.57) resulta

$$\begin{aligned}
u_x(1, t) &= -\frac{1}{2}(1 + \lambda_0 + c + b)u(1, t) \\
&\quad - \frac{3}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)}} u(1, t)e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy \\
&\quad - (\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{(1 - y^2)} u(y, t)e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Esta última ecuación (4.59) es la **ley de control** aplicada en la frontera por realimentación de estados $u_x(1, t) = U(t)$ en lazo cerrado para el sistema (4.1)-(4.3).

La figura 4.1 muestra un diagrama a bloques del esquema utilizado para la aplicación de la ley de control en la frontera por realimentación de estados mediante el recurso de backstepping para el sistema (4.1)-(4.3).

4.5. Resultados en simulación

Para presentar los resultados en simulación, se utiliza el caso representado por el sistema de la RAD PDE (4.1)-(4.3) en el dominio $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f\}$, sujeta a la acción de la condición inicial (4.4) .

4.5.1. RAD PDE en lazo abierto

En lazo abierto *i.e.*, sin la acción de la ley de control, el sistema es inestable cuando $\lambda > b^2/4$. Se consideran los parámetros $\lambda = 12$, $b = 1$ y la condición inicial $u_0(x) = 10 \cos(\pi x)$.

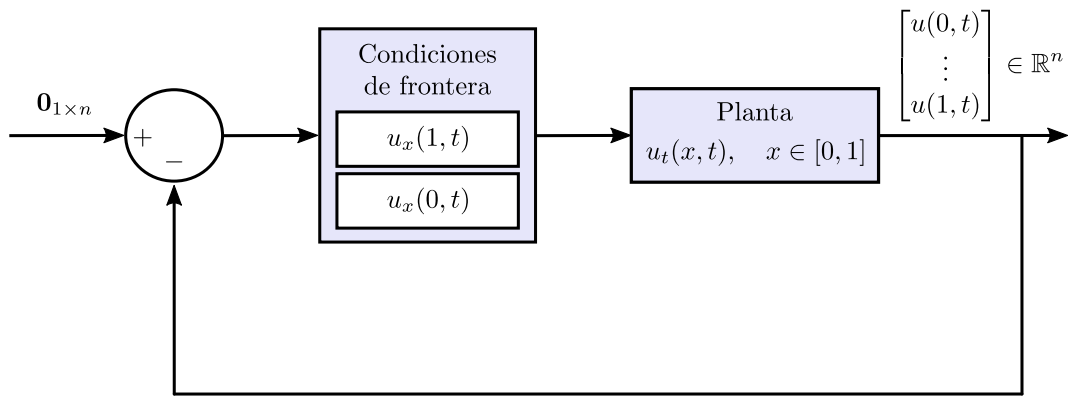


Figura 4.1: Diagrama de bloques para el esquema de control por realimentación de estados en la frontera.

Los resultados en simulación pueden observarse en la figuras [4.2](#)-[4.3](#).

Las figuras [4.2](#) y [4.3](#) muestran el sistema inestable en lazo abierto,

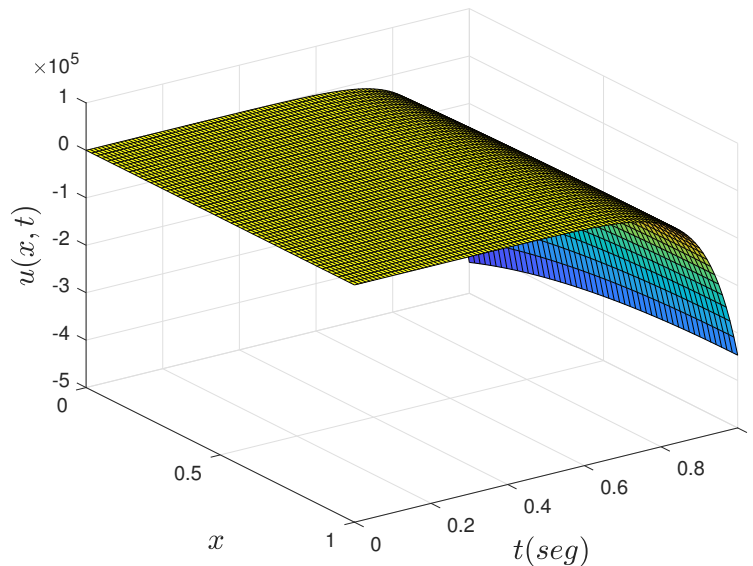


Figura 4.2: Evolución del comportamiento inestable del sistema [\(4.1\)](#)-[\(4.3\)](#) en lazo abierto.

Estas últimas figuras lucen muy diferentes en comparación con aquellas presentadas en la sección [3.9](#) aún cuando ambas PDEs son del tipo reacción-advención-difusión. La explicación a esta diferencia obedece a que las condiciones de frontera para la RAD PDE de las figuras [3.8](#) y [3.9](#) son del tipo Neumann, en tanto que las condiciones de frontera para las figuras [4.2](#) y [4.3](#) son combinadas de tipo Robin y Neumann, lo que afecta el comportamiento de la evolución de la PDE.

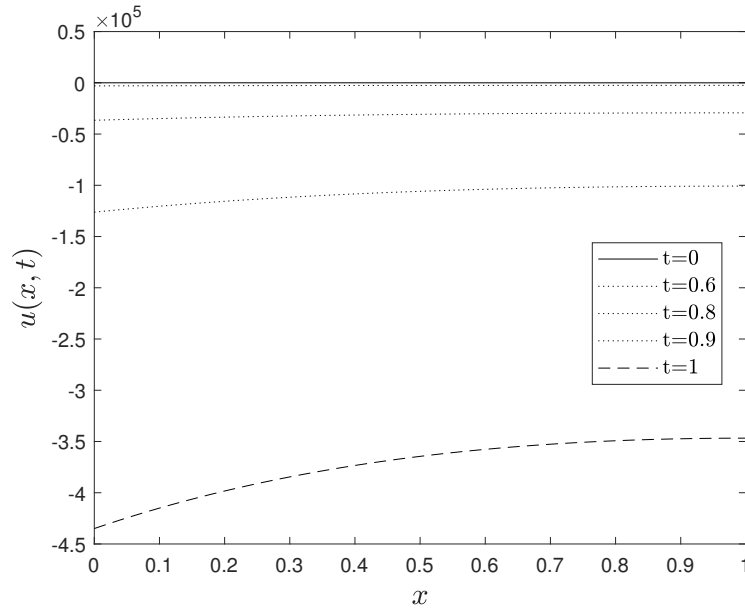


Figura 4.3: Evolución de $u(x, t)$ del sistema (4.1)-(4.3) inestable en lazo abierto.

4.5.2. RAD PDE en lazo cerrado

En lazo cerrado, *i.e.*, con la acción de la ley de control en realimentación en la frontera (4.3), el sistema se comporta de manera estable, aún cuando el parámetro $\lambda > b^2/4$. Se consideran los parámetros $\lambda = 12$, $b = 1$ y la condición inicial $u_0(x) = 10 \cos(\pi x)$. Los resultados en simulación se muestran en las figuras 4.4-4.7.

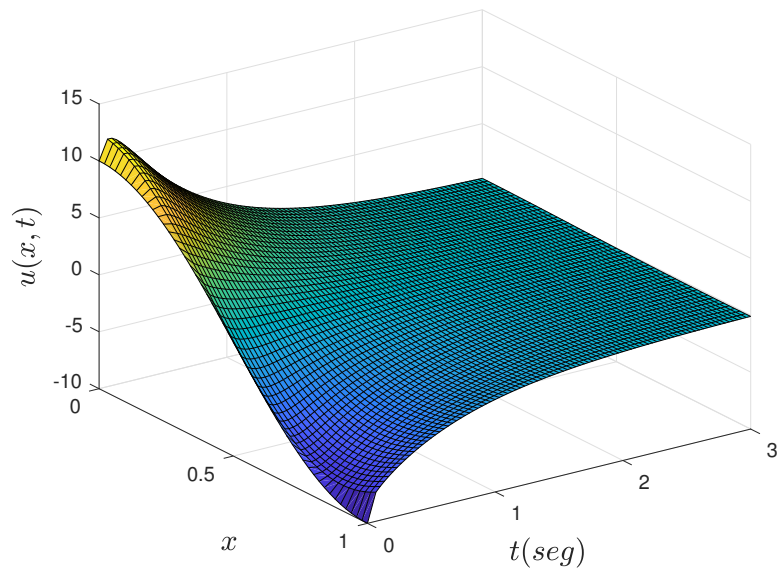


Figura 4.4: Evolución del comportamiento estable de (4.1)-(4.3) en lazo cerrado con la aplicación de (4.59) en $u_x(1,t)$.

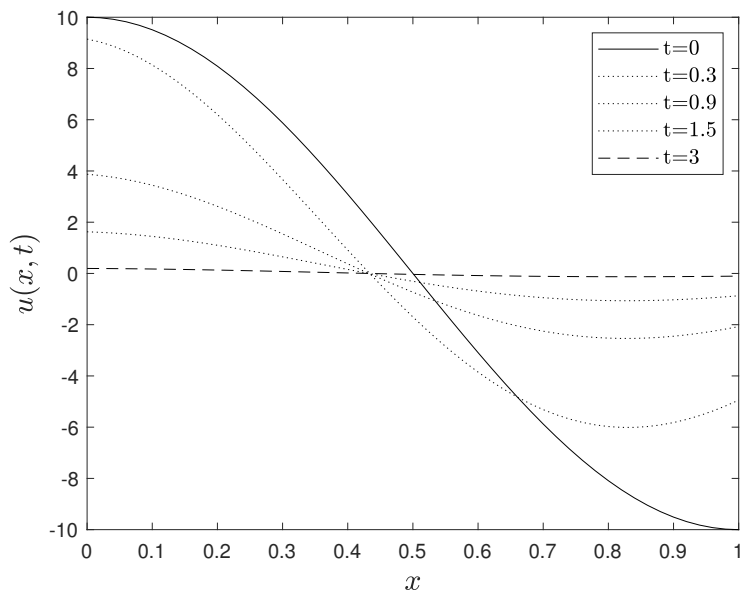


Figura 4.5: Evolución de $u(x,t)$ del sistema (4.1)-(4.3) estable con (4.59) en $u_x(1,t)$ en lazo cerrado.

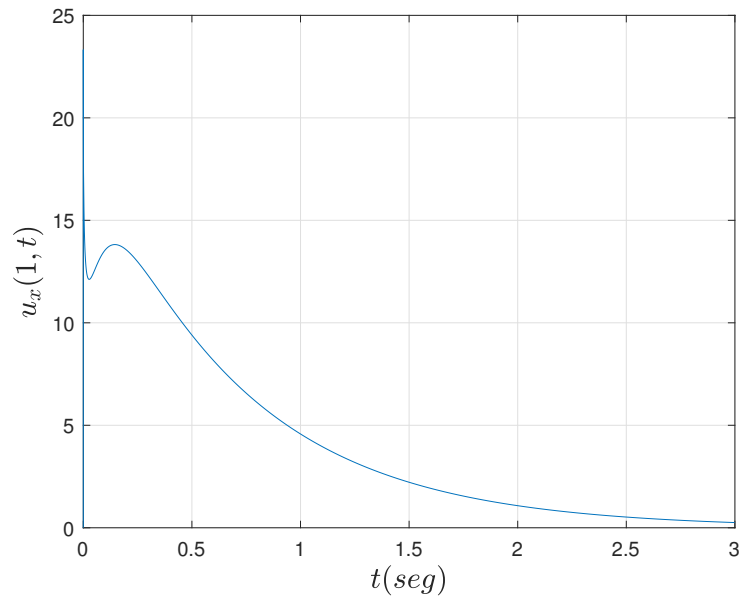


Figura 4.6: Comportamiento del esfuerzo de control de (4.59) en $u_x(1, t)$.

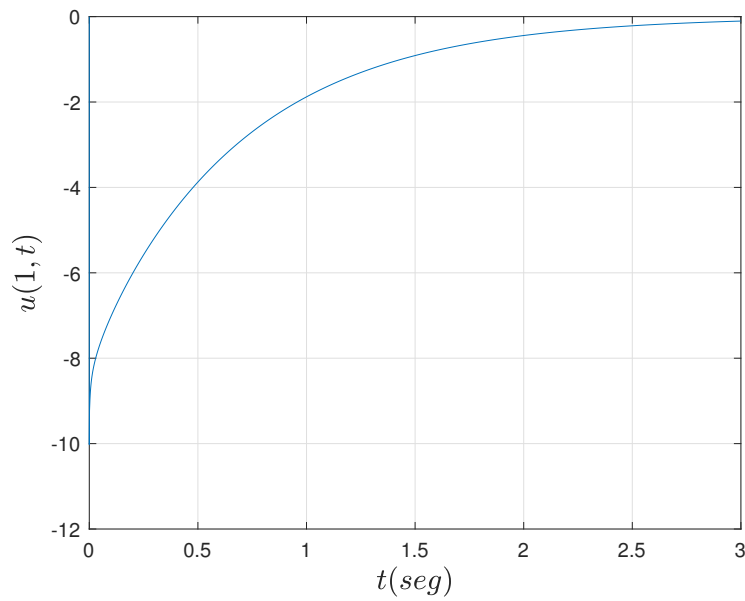


Figura 4.7: Comportamiento de $u(x, t)$ en $x = 1$ ($u(1, t)$) como consecuencia de la aplicación de (4.59) en $u_x(1, t)$

4.5.2.1. Robustez de la ley de control (4.59)

Se considera un caso adicional en lazo cerrado, para probar la robustez de la ley de control (4.59), en el que se considera hacer al parámetro λ aún más grande $\lambda = 35$, $b = 1$, y un cambio en la condición inicial un poco más compleja $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$ motivada por [14]. Las simulaciones del resultado de este escenario se muestran en las figuras 4.8-4.11.

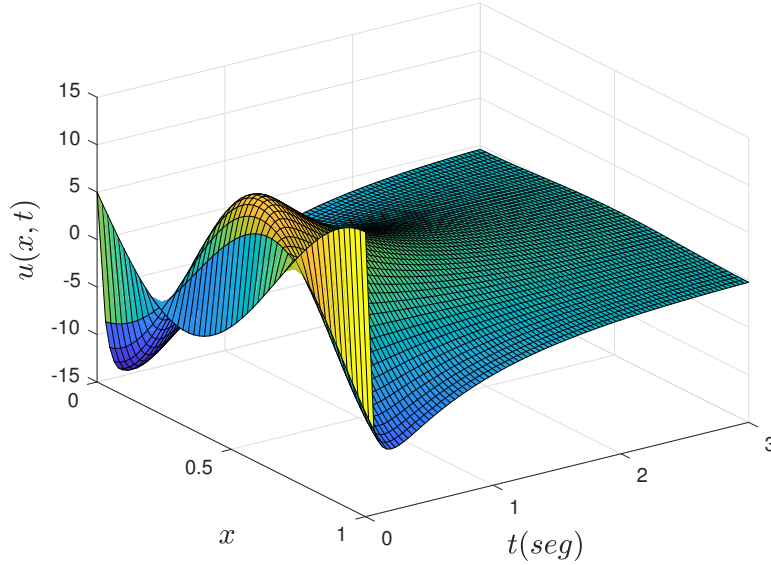


Figura 4.8: Variante de la evolución del comportamiento estable de (4.1)-(4.3) en lazo cerrado para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$

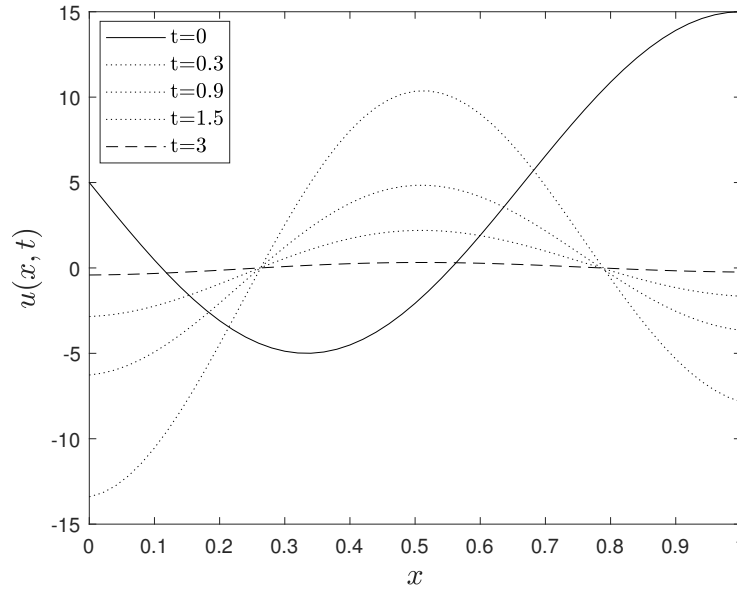


Figura 4.9: Variante de la evolución de $u(x, t)$ del sistema (4.1)-(4.3) en lazo cerrado para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.

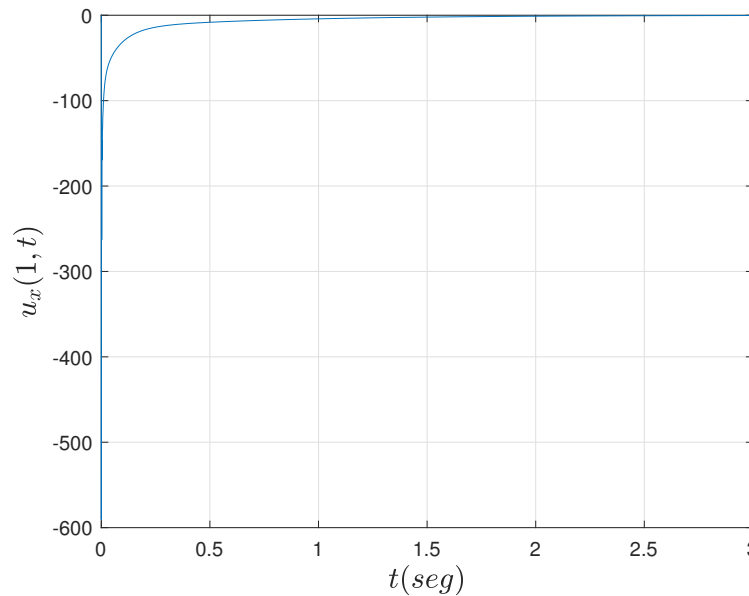


Figura 4.10: Variante del comportamiento del esfuerzo de control de (4.59) en $u_x(1, t)$ para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$.

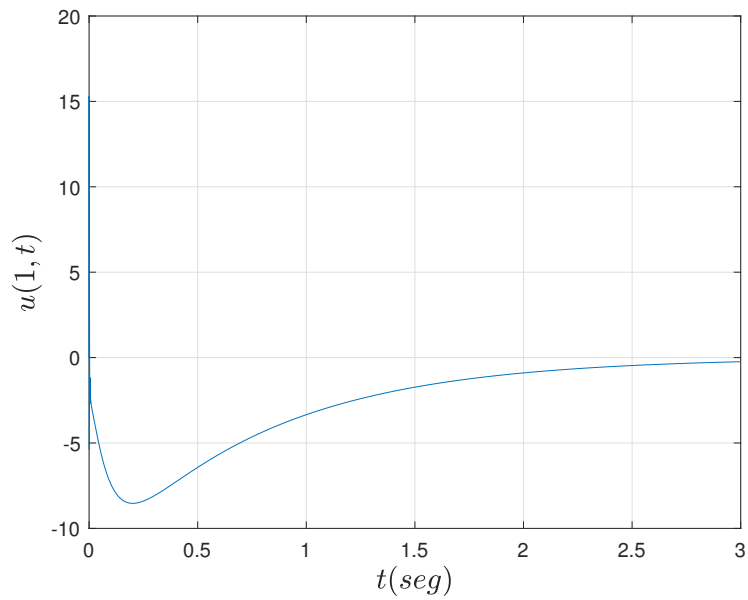


Figura 4.11: Variante del comportamiento de $u(x, t)$ en $x = 1$ ($u(1, t)$) para $\lambda = 35$ y $u_0(x) = 5(1 - 2\sin(3\pi x/2))$.

4.5.3. Conclusión

Se diseñó la ley de control (4.59) por realimentación de estados para un sistema de RAD PDE (4.1)-(4.3) inestable, usando como recurso la metodología de backstepping, para lograr que el sistema original inestable adopte un comportamiento deseable y estable de un sistema objetivo propuesto (4.5)-(4.7), para el cual, se hace un análisis de estabilidad por Lyapunov para verificar que sea exponencialmente estable. Se demuestra por medio de simulaciones que, efectivamente, la aplicación de la ley de control diseñada estabiliza el sistema abordado en esta sección y además, es lo suficientemente robusto para estabilizar dicho sistema sujeto a condiciones que incrementan la inestabilidad del mismo.

Capítulo 5

Control adaptable por realimentación de estados en la frontera

En el control de PDEs se contemplan sistemas cuya dinámica es de dimensión infinita. Técnicas de control adaptable aplicadas en el dominio continuo de una PDE han sido desarrolladas [28], siendo muchas de éstas, con un enfoque sistemático para la adaptación de parámetros mediante un control adaptable por modelo de referencia (MRAC, de las siglas del inglés *Model Reference Adaptive Control*) [62] [9]

En el caso de control adaptable de PDEs con realimentación en la frontera, la mayor dificultad viene dada por la necesidad de diseñar la realimentación para un sistema cuyos parámetros pueden ser sumamente inciertos y que puede ser inestable en lazo abierto; se requiere en este caso, la actuación simultánea tanto de control como de estimación de parámetros. Este requerimiento, de control y estimación simultánea, resulta en leyes de control adaptable no lineales (aún y cuando el sistema si sea de tipo lineal), lo que ocasiona que el comportamiento del sistema adaptable por realimentación sea difícil de predecir.

El control adaptable por realimentación de estados en la frontera para PDEs se ha posicionado como una herramienta eficaz para la estimación del comportamiento dinámico de los estados y parámetros desconocidos de sistemas de dimensión infinita; la señal de control actúa en la frontera evitando así la intrusión en el dominio del sistema bajo la premisa de que la colocación de sensores y actuadores dentro del sistema (en el dominio del sistema) se vuelve inviable [55].

5.1. Control adaptable de PDEs

En aplicaciones que incorporan el modelo dinámico (representado por PDEs) de fenómenos como el de transferencia de calor, de fluidos o de reacción química, los parámetros físicos a menudo se desconocen, por lo que existe la necesidad de una técnica de *estima-*

ción de parámetros que calcule tales parámetros desconocidos, recalculé continuamente las ganancias del controlador (*e.g.*, un método recursivo) y aplique el controlador resultante para estabilizar una planta potencialmente inestable y paraméricamente incierta.

En este capítulo se explica la metodología para el control adaptable de PDEs por realimentación de estados en la frontera. Esta metodología utiliza los controladores explícitos introducidos en el capítulo anterior y se hacen adaptables mediante el diseño de **identificadores paramétricos**, basados en pasividad, que arrojan ciertas estimaciones de parámetros, mismas que son sustituidas en la ley de control. Dicho de otro modo, se puede llevar a cabo la estimación de un parámetro desconocido en línea, luego utilizar dicha estimación en el diseño de la ley de control explícita del capítulo anterior y alcanzar la estabilidad de lazo cerrado. Los controladores diseñados de esta manera se denominan de **equivalencia cierta** [42].

El **método basado en pasividad** utiliza una copia de la planta para generar un modelo pasivo del error de estimación paramétrico. El control basado en pasividad se fundamenta en el hecho de que la interconexión de dos subsistemas pasivos genera un sistema pasivo. La estabilidad de Lyapunov del sistema interconectado sigue de la pasividad, mientras la estabilidad asintótica es usualmente alcanzada mediante la adecuada adición de amortiguamiento.

5.1.1. En referencia al control adaptable en dimensión finita

A diferencia de otros controladores basados en cierto conocimiento de los parámetros del sistema, los controladores adaptables no necesitan tal conocimiento; se adaptan a las incertidumbres de los parámetros mediante el uso de información de los errores del desempeño en línea [32]. *Un controlador adaptable es un controlador con parámetros ajustables y un mecanismo para ajustar los parámetros* [3].

El control adaptable cubre un conjunto de técnicas que proporcionan un enfoque sistemático para el ajuste (adaptación) automático de los controladores en tiempo real, con el fin de lograr o mantener un nivel de desempeño deseado del sistema de control cuando los parámetros del modelo dinámico del sistema (planta) son desconocidos.

Considérese, por ejemplo, el caso en el que los parámetros de un modelo dinámico de una planta a controlar son desconocidos pero constantes (al menos en una determinada región de operación). En tales casos, aunque la estructura del controlador no dependerá en general de los valores de los parámetros de la planta, la sintonización correcta de los parámetros del controlador no se puede realizar sin conocer sus valores. Las técnicas de control adaptable pueden proporcionar un procedimiento de sintonización automático en lazo cerrado para los parámetros del controlador. En tales casos, el efecto de la adaptación desaparece a medida que pasa el tiempo. Los cambios en las condiciones de operación del sistema, pueden requerir un reinicio del procedimiento de adaptación.

5.1.2. Extensión al control adaptable de PDEs

En muchos sistemas de parámetros distribuidos los parámetros físicos como los números de Reynolds, Rayleigh, Prandtl o Péclet, que son parámetros utilizados en el estudio de fenómenos de mecánica de fluidos y transferencia de calor, son desconocidos porque varían con las condiciones de operación. Si bien el control adaptable de sistemas de dimensión finita es un campo avanzado que ha producido métodos de control adaptable para una clase muy general de sistemas lineales invariantes en el tiempo, las técnicas de control adaptable se han desarrollado solo para unas pocas clases de PDEs restringidas por grado relativo, estabilidad, etc. o suposiciones de actuación de leyes de control en todo el dominio. Hay dos dificultades principales al tratar con PDEs con incertidumbres paramétricas (parámetros desconocidos). La primera dificultad, que también existe en las ODEs, es que incluso para las plantas lineales los esquemas adaptables no son lineales. La segunda dificultad, exclusiva de las PDEs, es la ausencia de familias de controladores parametrizados. El enfoque de backstepping elimina ésta segunda dificultad, abriendo la puerta para el uso de técnicas basadas en el enfoque de equivalencia cierta y técnicas de Lyapunov desarrolladas para sistemas de dimensión finita [67].

En [43] se mostraron métodos de diseño de control adaptable por realimentación en la frontera, *e.g.*, el método de Lyapunov y de equivalencia cierta con identificadores pasivos. En dicho trabajo se diseñaron controladores adaptables para un sistema de PDE de difusión considerado como planta de referencia, enfatizando el hecho de que dicha planta de referencia es exclusivamente una RAD PDE con condiciones de frontera de Dirichlet, para la que también se ha extendido su aplicabilidad a sistemas de PDEs en dos y tres dimensiones, y en realimentación de la salida.

5.1.3. Principio de equivalencia cierta

En el enfoque de **equivalencia cierta**, el controlador y el identificador paramétrico se diseñan por separado. En esta técnica se parte de un diseño de control para plantas conocidas. Debe contarse con una estructura para el controlador en una forma parametrizada por los parámetros desconocidos como si fueran conocidos y una relación entre los parámetros de la planta y los parámetros del controlador. Dado que los parámetros de la planta son de hecho desconocidos, se obtienen mediante un algoritmo recursivo de identificación de parámetros. Luego, los parámetros del controlador se obtienen después de obtener las estimaciones de los parámetros de la planta, de la misma manera que si estos fueran los verdaderos parámetros. A esta técnica se le conoce como el principio de equivalencia cierta. Los identificadores de parámetros utilizados en el enfoque de equivalencia cierta, para el actual trabajo de tesis, son de la clase de identificadores basados en pasividad.

El **método del identificador paramétrico basado en pasividad** [74] utiliza una copia de la planta, con el parámetro desconocido reemplazado por su estimado, para generar un modelo paramétrico que es pasivo desde el error de estimación del parámetro hasta el error entre el estado de la planta y el estado de su copia.

5.2. Aplicación a una RAD PDE

Se considera el caso de estudio de la RAD PDE (4.1)-(4.3) inestable con dominio en $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, t_0 \leq t \leq t_f\}$ y condiciones de frontera combinadas de Robin y Neumann para exponer la idea principal de la metodología de control adaptable por realimentación de estados en la frontera, *i.e.*,

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (5.1)$$

$$u_x(0, t) = -\frac{b}{2}u(0, t), \quad (5.2)$$

$$u_x(1, t) = U(t), \quad (5.3)$$

y con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (5.4)$$

donde los parámetros b y λ se consideran como los parámetros constantes desconocidos a estimar y $U(t)$ es la señal de control en la frontera.

5.3. Diseño de una ley adaptable de control de realimentación en la frontera

La metodología de control adaptable por realimentación en la frontera, para la estabilización del sistema definido por la RAD PDE (5.1)-(5.3), requiere de la ley de control por backstepping diseñada en el capítulo anterior. Se sabe de capítulos anteriores que el término $\lambda u(x, t)$ es el término que causa inestabilidad en el sistema.

La ley de control de realimentación en la frontera $u_x(1, t)$, que estabiliza el sistema (5.1)-(5.3) en lazo cerrado cuando los parámetros constantes son conocidos, viene dada por

$$\begin{aligned} u_x(1, t) &= -\frac{1}{2}(1 + \lambda_0 + c + b)u(1, t) \\ &- \frac{3}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)}} u(1, t) e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy \\ &- (\lambda_0 + c) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{(\lambda_0 + c)(1 - y^2)})}{(1 - y^2)} u(y, t) e^{\frac{b}{2}(y-1)} dy, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $\lambda_0 = \lambda - \frac{b^2}{4}$ e $I_1(\cdot)$, $I_2(\cdot)$ son funciones de Bessel de primer y segunda especie, respectivamente.

5.3.1. PDE del identificador paramétrico

Considérese ahora que los parámetros constantes b y λ del sistema (5.1)-(5.3) son desconocidos y que se desea estabilizar el sistema, aún con el desconocimiento de dichos parámetros.

Se introduce el siguiente sistema auxiliar

$$\hat{u}_t(x, t) = \hat{u}_{xx}(x, t) + \hat{b}(t)u_x(x, t) + \hat{\lambda}(t)u(x, t) + \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t)dx, \quad (5.6)$$

$$\hat{u}_x(0, t) = -\frac{\hat{b}}{2}u(0, t), \quad (5.7)$$

$$\hat{u}_x(1, t) = U(t). \quad (5.8)$$

Este sistema auxiliar (5.6)-(5.8), basado en pasividad, es llamado como **identificador paramétrico PDE**. Este identificador PDE emplea una copia de la RAD PDE original más un término adicional no lineal en conjunto con sus condiciones de frontera. En este identificador se utiliza la notación $(\hat{\cdot})$ para denotar el **valor estimado** de una función o parámetro, de tal forma que $\hat{b}(t)$ y $\hat{\lambda}(t)$ son los parámetros estimados. El término adicional no lineal al interior del identificador, *i.e.* $\gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t)dx$, funge como un amortiguamiento donde $\gamma > 0$ es una constante arbitraria, $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ es la señal del error o el **error de estimación** y $\int_0^1 u_x^2(x, t)dx$ es la norma L_2 (2.9) de $u_x(x, t)$.

La función del identificador PDE es la de ayudar en la obtención del error de estimación, el cual, durante el proceso de adaptación deberá irse reduciendo gradualmente hasta alcanzar un valor de cero durante su progresión en el tiempo.

La señal de control a utilizar en el sistema (5.6)-(5.8) es la misma que (5.5), donde se reemplazan los parámetros constantes desconocidos b y λ por sus estimados \hat{b} y $\hat{\lambda}$, respectivamente, *i.e.*,

$$\begin{aligned} u_x(1, t) &= -\frac{1}{2}(1 + \hat{\lambda}_0(t) + c + \hat{b}(t))\hat{u}(1, t) \\ &\quad - \frac{3}{2}(\hat{\lambda}_0(t) + c) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)}} \hat{u}(1, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y - 1)\right) dy \\ &\quad - (\hat{\lambda}_0(t) + c) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)})}{(1 - y^2)} \hat{u}(y, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y - 1)\right) dy. \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde $\hat{\lambda}_0(t) = \hat{\lambda}(t) - \frac{\hat{b}^2(t)}{4}$ y \exp es la constante de Euler e .

5.3.2. PDE del error de estimación

Con la finalidad de poder aproximar los valores de los parámetros desconocidos b y λ de (5.1)-(5.3) es necesario establecer una expresión capaz de comparar los parámetros estimados \hat{b} y $\hat{\lambda}$ de (5.6)-(5.8) con sus valores reales; esta expresión es la conocida **PDE del error de estimación**.

Considérese el error de estimación dado como

$$e(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t). \quad (5.10)$$

Derivando (5.10) con respecto al tiempo resulta

$$e_t(x, t) = u_t(x, t) - \hat{u}_t(x, t). \quad (5.11)$$

Luego, derivando dos veces (5.10) con respecto a la variable espacial se tiene

$$e_x(x, t) = u_x(x, t) - \hat{u}_x(x, t), \quad (5.12)$$

$$e_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t). \quad (5.13)$$

Ahora, sustituyendo (5.1) y (5.6) en (5.13) resulta

$$\begin{aligned} e_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) - \hat{b}(t)u_x(x, t) + \lambda u(x, t) - \hat{\lambda}(t)u(x, t) \\ &\quad - \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De la definición de los errores de estimación (5.13) y

$$\begin{aligned} \tilde{b}(t)u(x, t) &= bu_x(x, t) - \hat{b}(t)u_x(x, t), \\ \tilde{\lambda}(t)u(x, t) &= \lambda u(x, t) - \hat{\lambda}(t)u(x, t), \end{aligned}$$

considerando (5.10) junto con la norma L_2 (2.9), la ecuación (5.14) queda como

$$e_t(x, t) = e_{xx}(x, t) + \tilde{b}(t)u_x(x, t) + \tilde{\lambda}(t)u(x, t) - \gamma^2[e(x, t)]\|u_x(t)\|, \quad (5.15)$$

donde $\tilde{b}(t) = b - \hat{b}(t)$ y $\tilde{\lambda}(t) = \lambda - \hat{\lambda}(t)$ son los errores de estimación paramétrica.

Siguiendo un procedimiento similar al de la consecución de (5.15), se obtienen las

condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 e_x(0, t) &= u_x(0, t) - \hat{u}_x(0, t), \\
 &= -\frac{b}{2}u(0, t) + \frac{\hat{b}(t)}{2}u(0, t), \\
 &= -[b - \hat{b}(t)]u(0, t), \\
 &= -\frac{\tilde{b}(t)}{2}u(0, t)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 e_x(1, t) &= u_x(1, t) - \hat{u}_x(1, t), \\
 &= U(t) - U(t), \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

con lo que se consigue finalmente el sistema de la PDE del error de estimación (5.15) y sus condiciones de frontera (5.16) y (5.17).

5.3.3. Leyes adaptables

Hasta este punto, se han establecido, de acuerdo al enfoque de equivalencia cierta basado en pasividad, la planta de la RAD PDE con parámetros constantes desconocidos (5.1)-(5.3), la estructura de la RAD PDE con parámetros estimados (5.6)-(5.8), la RAD PDE del error de estimación (5.15)-(5.17) así como la ley de control adaptable (5.9).

El siguiente paso consiste en probar que el sistema (5.15)-(5.17) está acotado y es cuadrático integrable en el tiempo por la norma L_2 (Acotado en $L(\Omega)$).

5.3.4. Función de Lyapunov

Considere la función de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^2(x, t) dx + \frac{\tilde{b}^2(t)}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\lambda}^2(t)}{2\gamma_2}, \tag{5.18}$$

y su derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t)dx + \frac{\tilde{b}(t)}{\gamma_1}\dot{\tilde{b}}(t) + \frac{\tilde{\lambda}(t)}{\gamma_2}\dot{\tilde{\lambda}}(t), \\
&= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t)dx + \frac{\tilde{b}(t)}{\gamma_1}[\dot{b} - \dot{\tilde{b}}(t)] + \frac{\tilde{\lambda}(t)}{\gamma_2}[\dot{\lambda} - \dot{\tilde{\lambda}}(t)], \\
&= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t)dx - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{b}(t)\dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\lambda}(t)\dot{\tilde{\lambda}}(t), \tag{5.19}
\end{aligned}$$

donde $\dot{b}, \dot{\lambda} = 0$ por tratarse de parámetros constantes con $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Con la inclusión de (5.15) en la expresión anterior, luego (5.19) resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \int_0^1 e(x,t) \left(e_{xx}(x,t) + \tilde{b}(t)u_x(x,t) + \tilde{\lambda}(t)u(x,t) - \gamma^2 e(x,t)\|u_x(t)\|^2 \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{b}(t)\dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\lambda}(t)\dot{\tilde{\lambda}}(t), \\
&= \int_0^1 e(x,t)e_{xx}(x,t)dx + \tilde{b}(t) \int_0^1 e(x,t)u_x(x,t)dx + \tilde{\lambda}(t) \int_0^1 e(x,t)u(x,t)dx \\
&\quad - \gamma^2\|u_x(t)\|^2 \int_0^1 e^2(x,t)dx - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{b}(t)\dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\lambda}(t)\dot{\tilde{\lambda}}(t). \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Utilizando integración por partes para algunos términos de (5.20), en conjunto con las condiciones de frontera (5.16)-(5.17) y recordando la norma L_2 (2.9), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -\|e_x(t)\|^2 - \gamma^2\|u_x(t)\|^2\|e(t)\|^2 + \frac{\tilde{b}(t)}{2}e(0,t)u(0,t) \\
&\quad + \tilde{b}(t) \int_0^1 e(x,t)u_x(x,t)dx + \tilde{\lambda}(t) \int_0^1 e(x,t)u(x,t)dx \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{b}(t)\dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\lambda}(t)\dot{\tilde{\lambda}}(t). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Según la teoría de estabilidad de Lyapunov, recordando el Teorema 1 en la sección 2.2, la condición 2.28 debe satisfacerse, por lo que para poder asegurar esto, y según la teoría en control adaptable [36], es necesario *deshacerse* de los términos en (5.21) que no permitan garantizar que esta última sea, al menos, semi-definida negativa. Con la finalidad

de lograr lo anterior, se escogen las siguientes leyes adaptables para tal efecto, *i.e.*,

$$\dot{\hat{b}}(t) = \gamma_1 \left(\int_0^1 e(x,t)u_x(x,t)dx + \frac{1}{2}e(0,t)u(0,t) \right), \quad (5.22)$$

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = \gamma_2 \int_0^1 e(x,t)u(x,t)dx, \quad (5.23)$$

las cuales, al ser reemplazadas en (5.21), ocasionan que los últimos cinco términos de dicha expresión se cancelen, lo que conduce a

$$\dot{V}(t) = -\|e_x(t)\|^2 - \gamma^2\|u_x(t)\|^2\|e(t)\|^2, \quad (5.24)$$

garantizando con esto que $\dot{V}(t)$ en (5.24) sea *decreciente* [7], lo que implica que $V(t) < V(0)$, y en consecuencia, por la definición de $V(t)$ (5.18), $\tilde{b}(t)$, $\tilde{\lambda}(t)$ y $\int_0^1 e^2(x,t)dx$ están también acotadas.

Por último, integrando (5.24) con respecto a t , de cero a infinito, *i.e.*,

$$V(\infty) + \int_0^\infty \|e_x(t)\|^2 dt + \int_0^\infty \gamma^2\|u_x(t)\|^2\|e(t)\|^2 dt \leq V(0), \quad (5.25)$$

de donde se observa que $\|e_x(t)\|$ y $\|u_x(t)\|\|e(t)\|$ son funciones cuadrático integrables en el tiempo, *i.e.*, $\|e_x(t)\|, \|u_x(t)\|\|e(t)\| \in L_2$.

Adicionalmente, de las leyes adaptables (5.22)-(5.23) $|\dot{\hat{b}}(t)| \leq \gamma_1\|e(x,t)\|\|u_x(x,t)\|$ y $|\dot{\hat{\lambda}}(t)| \leq \gamma_2\|e(x,t)\|\|u(x,t)\|$, por lo que, $\dot{\hat{b}}(t), \dot{\hat{\lambda}}(t) \in L_2$.

De este modo queda garantizado el acotamiento de señales y que el identificador PDE (5.6)-(5.8) estima \hat{b} y $\hat{\lambda}$ mediante las leyes adaptables (5.22)-(5.23)

Lo anterior se resume en el siguiente lema.

Lema 2. *Sea el identificador (5.6)-(5.8) con leyes adaptables (5.22)-(5.23), el cual garantiza el acotamiento de señales, *i.e.*,*

$$\|e(t)\| \in L_\infty \cap L_2, \quad (5.26)$$

$$\|e_x(t)\|, \|u_x(t)\|\|e(t)\| \in L_2, \quad (5.27)$$

$$\tilde{b}(t), \tilde{\lambda}(t) \in L_\infty, \quad (5.28)$$

$$\dot{\hat{b}}(t), \dot{\hat{\lambda}}(t) \in L_2. \quad (5.29)$$

La figura 5.1 muestra un diagrama a bloques que resume el esquema del control adaptable en la frontera para el sistema (5.1)-(5.3), con (5.9) aplicado en $u_x(1, t)$, del identificador (5.6)-(5.8), también con (5.9) aplicado en $u_x(1, t)$, de la PDE del error de estimación (5.15)-(5.17) y las leyes adaptables correspondientes para asegurar la convergencia (5.22)-(5.23). El sistema a resolver se trata de un sistema conformado por ambas plantas (5.1)-(5.3) y (5.6)-(5.8) a resolver de manera simultánea.

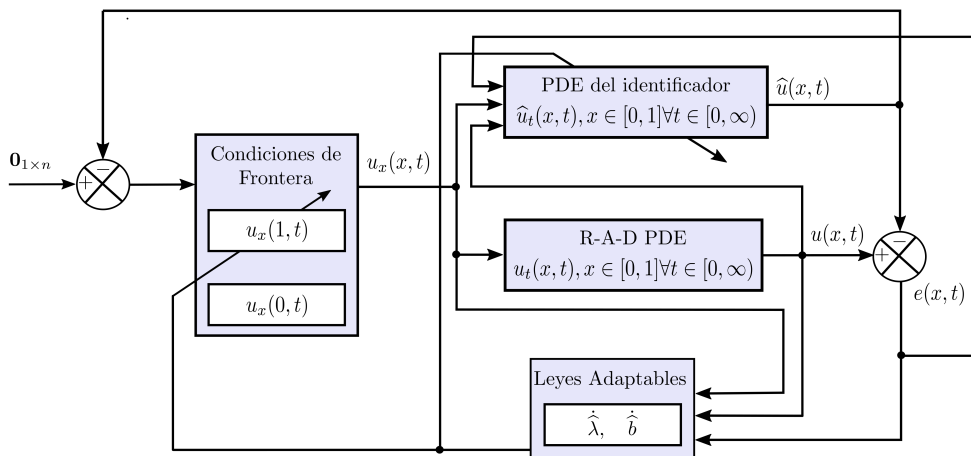


Figura 5.1: Diagrama a bloques del esquema de control adaptable por realimentación de estados en la frontera.

5.4. Resultados en simulación

En esta sección se muestran los resultados en simulación para la dinámica en lazo cerrado del control adaptable del tipo de Neumann. El objetivo principal es el mostrar la convergencia a cero del error de estimación (5.12) en función del tiempo y de como los parámetros estimados $\hat{b}(t)$ y $\hat{\lambda}(t)$ convergen a sus valores reales a medida que avanza el tiempo. Para presentar los resultados en simulación se utiliza el caso representado por los sistemas (5.1)-(5.3), (5.6)-(5.8), ambos sistemas con aplicación de la ley de control explícita (5.9) en términos de los parámetros estimados \hat{b} y $\hat{\lambda}$ junto con el sistema (5.15)-(5.17) en el dominio $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1, t_0 \leq t \leq t_f\}$, sujeta a la acción de las leyes adaptables (5.22)-(5.23) y a la condición inicial $u_0(x) = 10 \sin(\pi x)$.

5.4.1. RAD PDE en lazo abierto

Dado que el sistema de estudio para este caso es el mismo que aquel del capítulo anterior, las figuras para el caso de lazo abierto sin aplicación de control en la frontera son

las mismas figuras que aquellas mostradas en la sección 4.5. Refiérase a las figuras 4.2 y 4.3.

5.4.2. RAD PDE en lazo cerrado

En lazo cerrado, *i.e.*, con la acción de la ley de control adaptable (5.9) en realimentación en la frontera (5.3) y (5.8), el sistema se comporta de manera estable, aún cuando el parámetro $\lambda > \frac{b^2}{4}$ es la fuente de inestabilidad. Se consideran los parámetros $\lambda = 35$, $b = 1$. Los resultados en simulación se muestran en las figuras 5.2-5.13.

Las figuras 5.2-5.5 muestran la evolución estable de la planta en lazo cerrado con parámetros desconocidos (5.1)-(5.3) y del identificador paramétrico (5.6)-(5.8) cuando se aplica la ley de control adaptable (5.9) en la frontera. En las figuras 5.6 y 5.7 se observa como evoluciona el error de estimación (5.10) y su convergencia a cero en función del tiempo. El esfuerzo de control de (5.9) se muestra en la figura 5.8 que ocasiona un comportamiento estable en la planta, mientras que en la figura 5.9 se muestra el efecto del control en la frontera $u(1, t)$ de la solución $u(x, t)$ de la planta en lazo cerrado. Las figuras 5.10-5.13 muestran cómo los parámetros estimados $\hat{b}(t)$ y $\hat{\lambda}(t)$ convergen a sus valores reales a medida que avanza el tiempo.

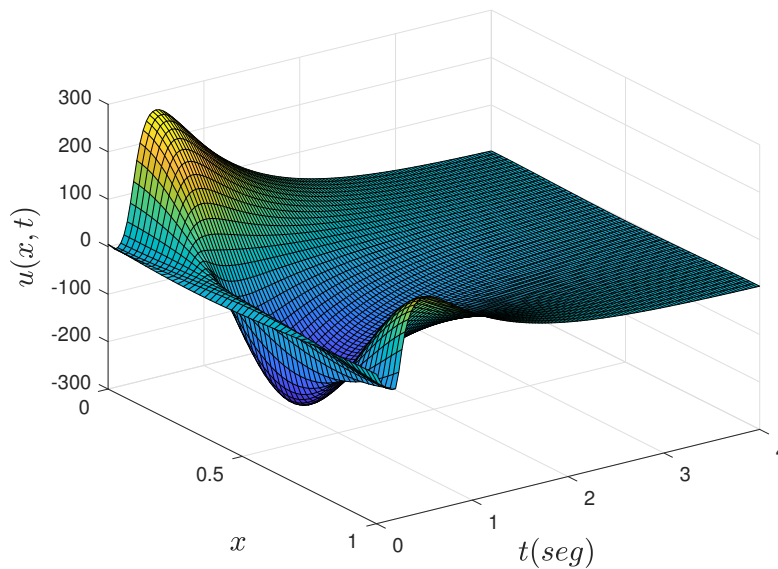


Figura 5.2: Evolución estable de (5.1)-(5.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

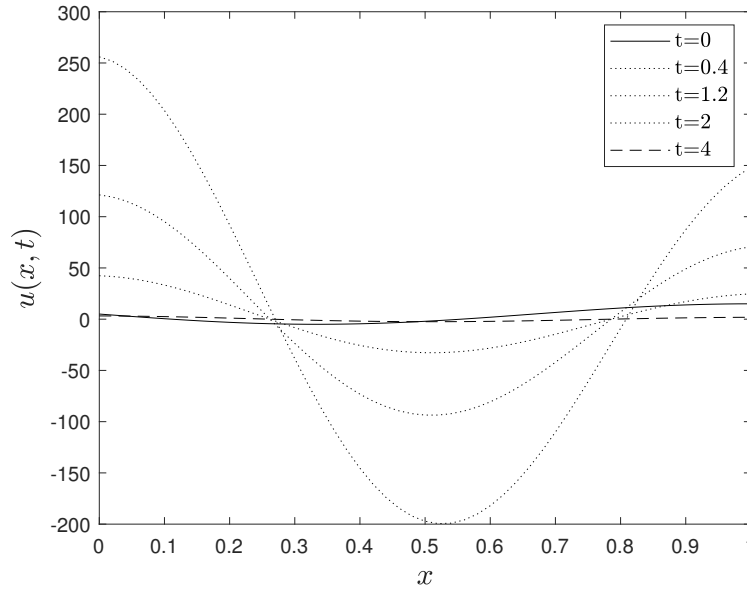


Figura 5.3: Evolución de $u(x, t)$ del sistema (5.1)-(5.3) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.

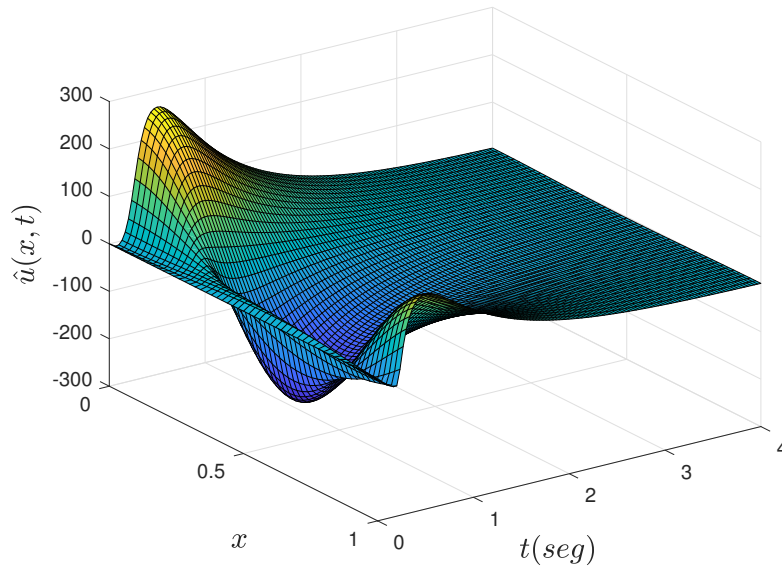


Figura 5.4: Evolución estable de (5.6)-(5.8) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

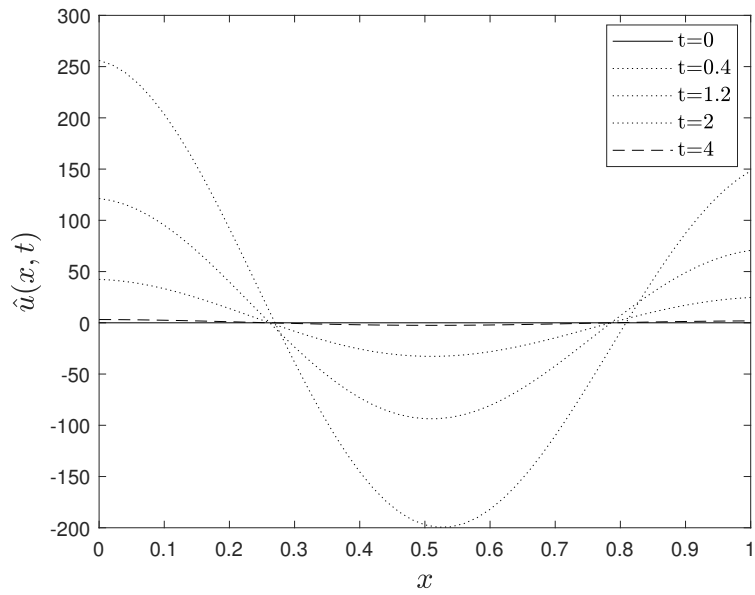


Figura 5.5: Evolución de $u(x, t)$ del sistema (5.6)-(5.8) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.

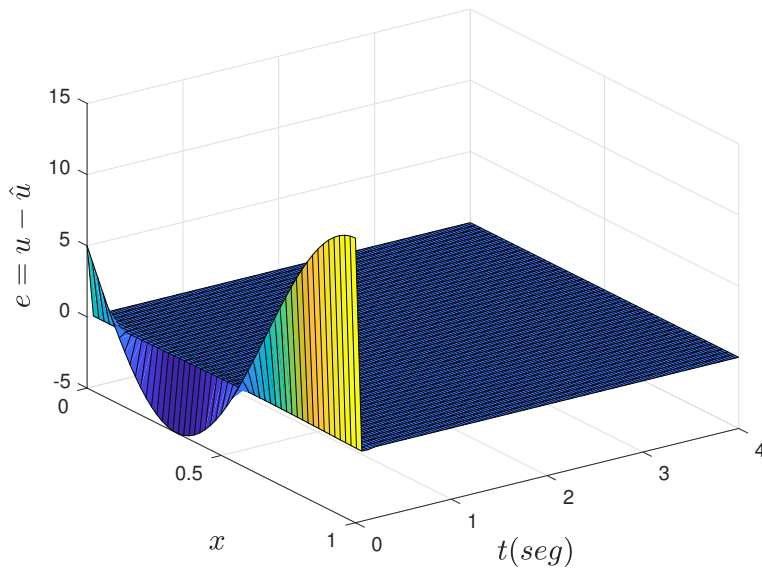


Figura 5.6: Evolución del error de estimación (5.10) y su convergencia a cero

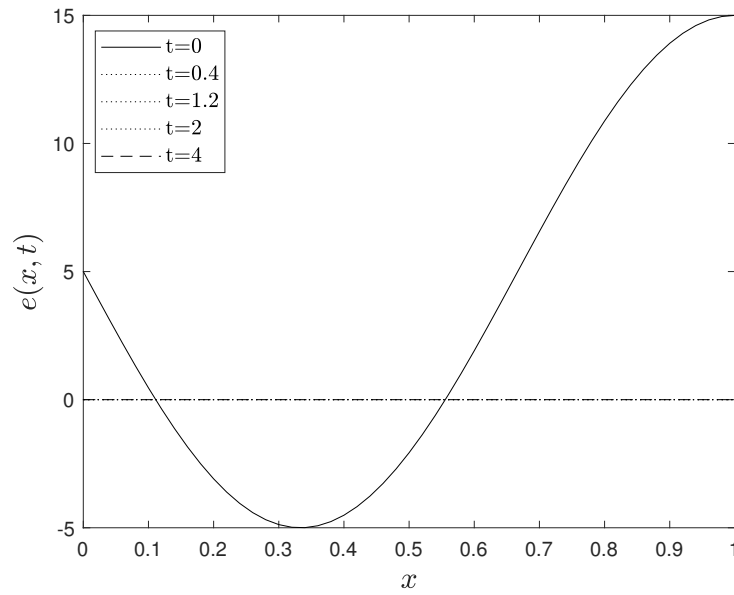


Figura 5.7: Evolución del error de estimación $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ (5.10) y su convergencia a cero

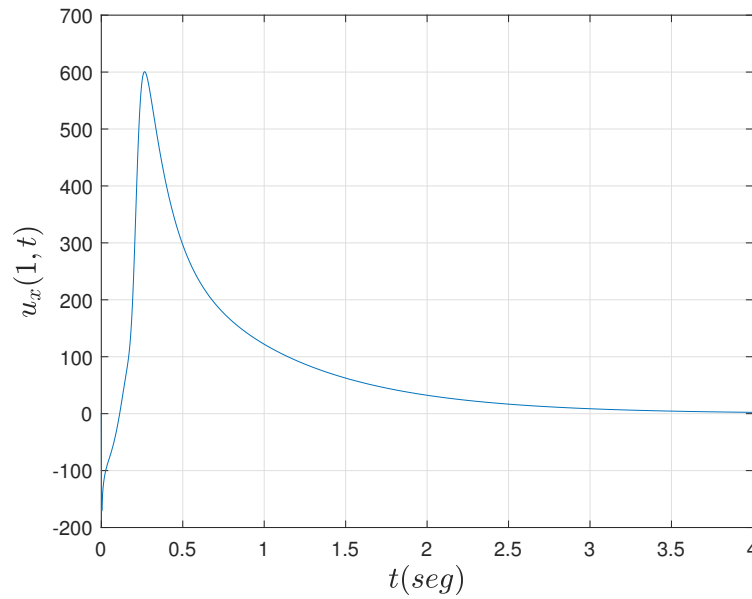


Figura 5.8: Esfuerzo de la ley de control (5.9) aplicado en la frontera $u_x(1, t)$.

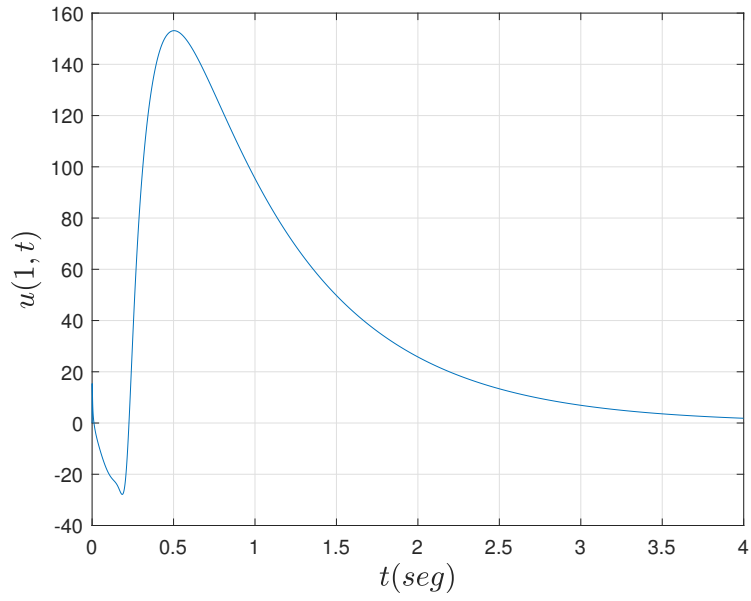


Figura 5.9: Efecto de la aplicación de la ley de control (5.9) en la frontera $u(1, t)$.

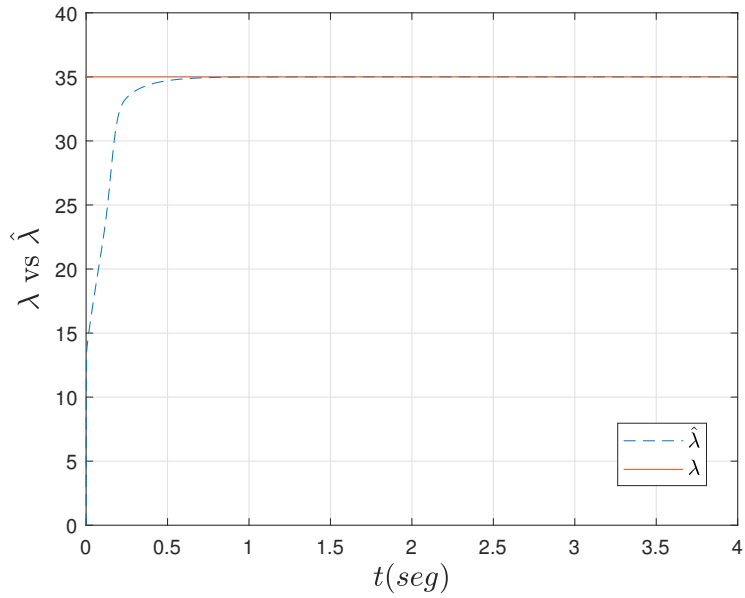


Figura 5.10: Estimación del parámetro $\hat{\lambda}$ y su convergencia a su valor real.

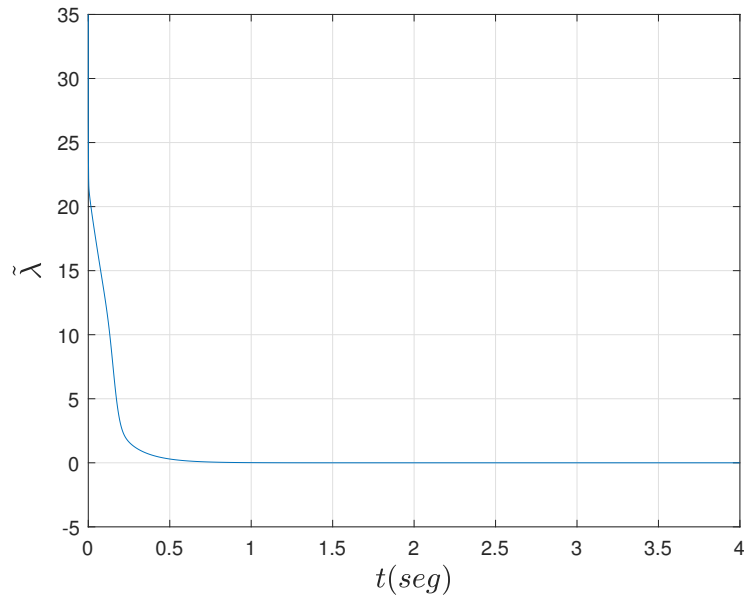


Figura 5.11: Convergencia a cero del error de estimación paramétrico $\tilde{\lambda}$.

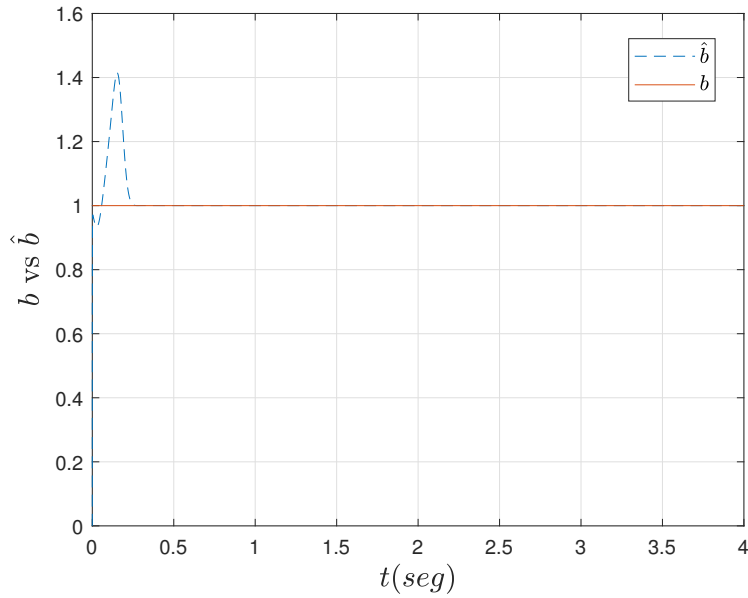


Figura 5.12: Estimación del parámetro \hat{b} y su convergencia a su valor real.

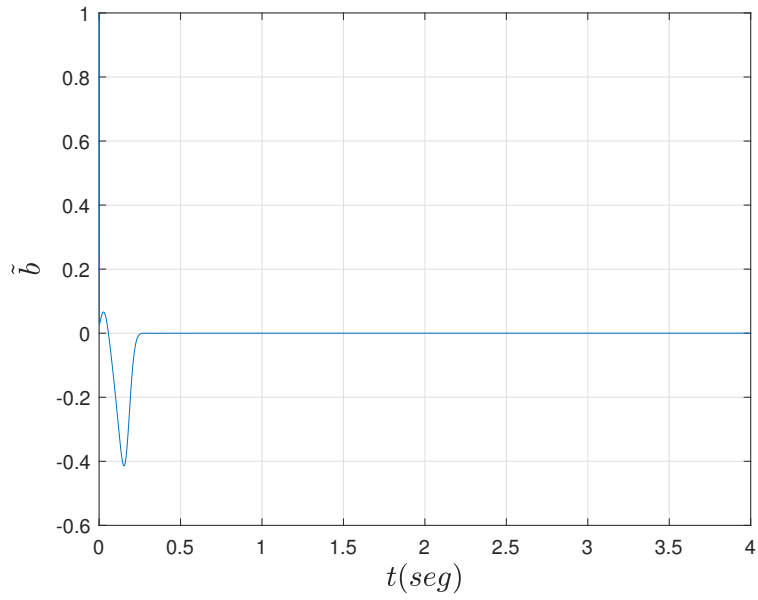


Figura 5.13: Convergencia a cero del error de estimación paramétrico \tilde{b} .

5.4.3. Conclusión

Se diseñó un controlador adaptable por realimentación de estados en la frontera del tipo Neumann para una cierta clase de RAD PDE con condiciones de frontera combinadas, del tipo Robin y Neumann, bajo el supuesto del desconocimiento de los valores constantes de los parámetros que afectan los fenómenos de advección y difusión del sistema, el cual, como ya se mencionó presenta inestabilidad. El desempeño del controlador adaptable en la frontera se evalúa mediante simulación numérica. Los resultados de la simulación de la convergencia a cero para el error de estimación, así como la convergencia de las estimaciones paramétricas a sus valores verdaderos muestran que el esquema de control adaptable en la frontera basado en backstepping, y desarrollado particularmente bajo el principio de equivalencia cierta con identificador pasivo, presenta un funcionamiento favorable para ésta determinada clase de PDE.

Capítulo 6

Control adaptable por realimentación de estados en la frontera para una PDE no lineal

En este capítulo se presenta la aplicación de la metodología para el control adaptable por realimentación de estados en la frontera del capítulo anterior a un sistema de una RAD PDE no lineal.

El control de PDEs no lineales (NL PDEs por sus siglas del inglés) es un tema en pleno desarrollo que en principio resulta sumamente demandante. Los problemas que se han abordado más frecuentemente, son aquellos en los que la no linealidad se encuentra presente en el dominio de la PDE y no en la frontera, además las no linealidades presentes son de cierto tipo que afectan levemente la estabilidad del sistema cuando una apropiada función de Lyapunov es seleccionada. Este es el caso por ejemplo de [37] donde una ecuación de viscosidad es seleccionada por ser no lineal, aunque no presenta un comportamiento altamente inestable; o el caso de [2] que revisa la aplicación de control a una PDE no lineal de Navier-Stokes en el flujo de un fluido en canal abierto. Ambos casos presentan un enfoque de diseño de control basado en el modelo directo de Lyapunov, aunque solo en [37] es por realimentación en la frontera.

Los problemas que son de mayor interés práctico y también de mayor dificultad matemática son los relacionados con el control en la frontera y con las no linealidades (que afectan negativamente el sistema) en el dominio, donde no solo es necesario sintetizar leyes complejas de realimentación de dimensión infinita y no lineal sino que también es necesario encontrar funciones complejas de Lyapunov [42].

6.1. Control adaptable de NL PDEs

El estudio de la metodología de backstepping ha sido extendida a PDEs no lineales. Algunos trabajos como [4], [49] y [50] abordan sistemas donde la no linealidad aparece en el dominio de la PDE y no es *altamente no lineal* por lo que sustancialmente no se compromete la estabilidad del sistema y una elección de una función de Lyapunov relativamente simple es suficiente para alcanzar el objetivo de control.

El control adaptable en la frontera para PDEs con términos altamente no lineales en el dominio es un tema que ha permanecido abierto por sus demandantes implicaciones matemáticas, más aún, la aplicación de leyes de control explícitamente resueltas en la frontera (como las obtenidas por el enfoque backstepping) no han encontrado aún su resolución en este contexto.

La metodología de diseño de control adaptable por realimentación en la frontera abordada en el presente trabajo de estudio se basa en el enfoque backstepping y se ha corroborado en las simulaciones mostradas en capítulos anteriores ser suficientemente robusta para absorber los efectos no deseados de los términos que generan inestabilidad.

6.2. Planteamiento del objetivo de control

Uno de los objetivos del actual trabajo de tesis es el de establecer leyes de control adaptables explícitas aplicadas en la frontera de un sistema de una NL PDE para conseguir el objetivo de control, la estimación de los parámetros desconocidos y de la convergencia del error de estimación a cero. Lo anterior bajo el supuesto de que las leyes de control, aquí desarrolladas, sean lo suficientemente robustas como para poder alcanzar dicho objetivo.

La ley de control adaptable (5.9) Neumann es lo suficientemente robusta para poder estabilizar un sistema de una NL PDE y su correspondiente ecuación del identificador (ambas definidas más adelante) cuando se aplica en realimentación en la frontera; destacando que la no linealidad de la NL PDE, y su identificador, no es altamente no lineal, consiguiendo el objetivo de control, estimando los parámetros desconocidos y alcanzando la convergencia del error de estimación a cero.

6.3. Aplicación a una NL PDE

Para la aplicación del control adaptable por realimentación en la frontera de este capítulo, se emplea el sistema (3.41)-(3.43) correspondiente a un caso particular de una PDE no lineal parabólica de segundo orden homogénea con coeficientes constantes y susceptible a inestabilidad cuando el término de fuente es del tipo de generación. Dicho sistema cuenta con condiciones de frontera del tipo de Robin homogénea en $x = 0$, y del tipo Neumann

homogénea en $x = 1$, con la aplicación de control por realimentación en esta última, *i.e.*,

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + bu^2(x, t)u_x(x, t) + \lambda u(x, t), \quad (6.1)$$

$$u_x(0, t) = \frac{b}{2}(0, t), \quad (6.2)$$

$$u_x(l, t) = U(t), \quad (6.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (6.4)$$

donde, $u(x, t)$ es una función definida en $x \in [0, 1] \forall t \in [0, \infty)$, y se ha establecido $\varepsilon = 1$. La condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ define la distribución inicial que tiene la especie al interior del dominio $0 \leq x \leq 1$ en $t = 0$ y obedece a una función arbitraria dada.

6.3.1. Caso de estudio de una NL PDE

El sistema conformado por (6.1)-(6.4) es el caso de estudio para el actual trabajo de investigación y representa una variante hipotética con fines exclusivamente académicos de la ecuación no lineal de Burgers con un término fuente incluido y para la cual queda aún por definir el fenómeno físico al que se asocia. Dicho sistema presenta un comportamiento que tiende a converger en ausencia del término fuente $\lambda u(x, t) = 0$ en (6.1) como puede apreciarse en la figura 6.1. Por otro lado, con la incorporación del término fuente en (6.1) el sistema se vuelve inestable, tal como se ve en la figura 6.2.

La naturaleza no lineal del sistema (6.1)-(6.4), aunado a la presencia de inestabilidad en su dominio, hacen de este un buen ejemplo de aplicación de un esquema de control adaptable por realimentación de estados en la frontera para lograr la estabilidad del mismo, considerando b y λ como los parámetros constantes desconocidos a estimar.

6.3.1.1. NL PDE en lazo abierto

Las figuras 6.2 y 6.3 muestran el comportamiento inestable del sistema (6.1)-(6.3) en lazo abierto.

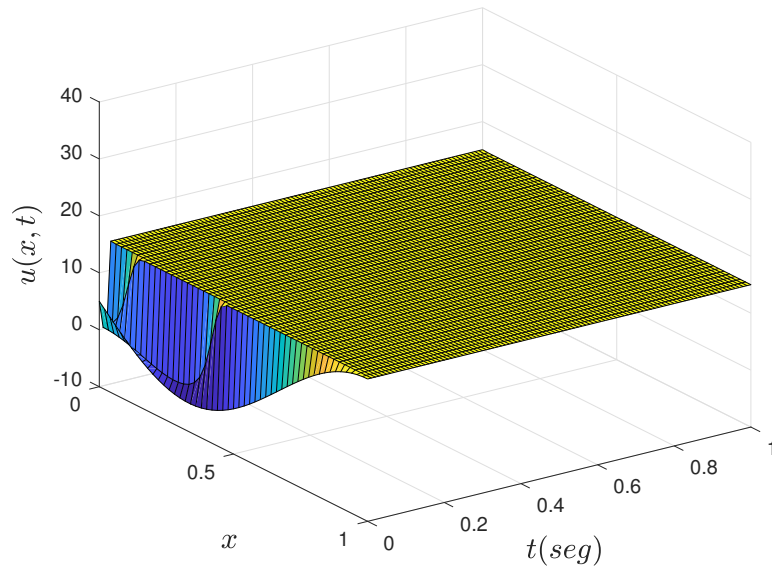


Figura 6.1: Evolución convergente en el tiempo de $u(x, t)$ del sistema NL PDE (6.1)-(6.3) en lazo abierto en ausencia del término fuente $\lambda u(x, t) = 0$

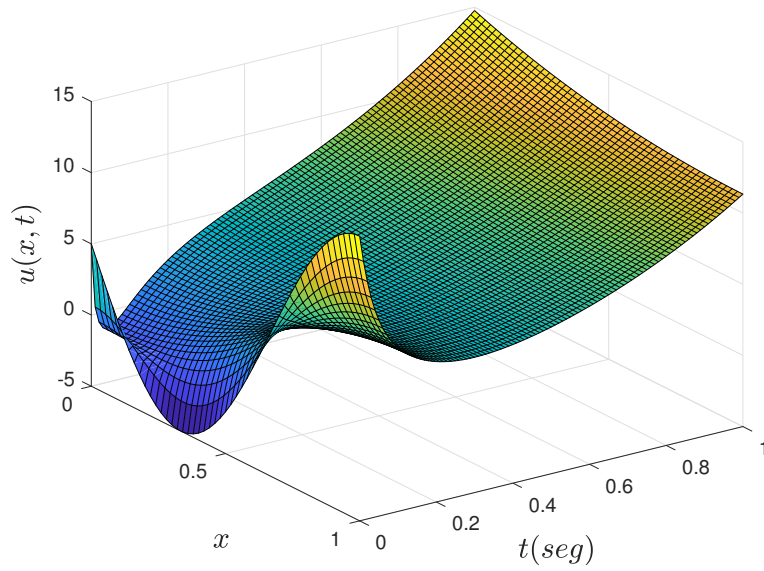


Figura 6.2: Evolución del comportamiento de $u(x, t)$ inestable del sistema de la NL PDE (6.1)-(6.3) en lazo abierto.

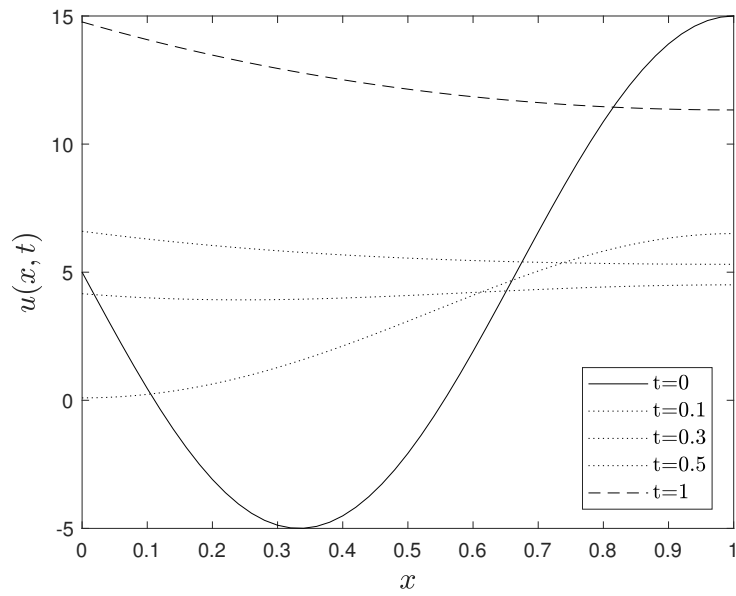


Figura 6.3: Evolución inestable de $u(x, t)$ en lazo abierto para la NL PDE (6.1)-(6.3) en distintos instantes de t .

6.4. Leyes adaptables de realimentación en la frontera para una NL PDE

En esta sección se aplica el esquema de control adaptable por realimentación en la frontera formulado en el capítulo anterior al sistema de una NL PDE (6.1)-(6.3), buscando garantizar el acotamiento de señales de acuerdo a lo señalado en el Lema 2 y consigo la estabilización del error de estimación.

6.4.1. Ley de control explícita

Considere la ley de control explícita (5.9), en función de los estimados de los estados y de los parámetros $\hat{\lambda}(t)$ y $\hat{b}(t)$,

$$\begin{aligned}
 u_x(1, t) = & -\frac{1}{2}(1 + \hat{\lambda}_0(t) + c + \hat{b}(t))\hat{u}(1, t) \\
 & - \frac{3}{2}(\hat{\lambda}_0(t) + c) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)})}{\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)}} \hat{u}(1, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y - 1)\right) dy \\
 & - (\hat{\lambda}_0(t) + c) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{(\hat{\lambda}_0(t) + c)(1 - y^2)})}{(1 - y^2)} \hat{u}(y, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y - 1)\right) dy. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

6.4.2. Identificador PDE

El sistema auxiliar para este caso toma una copia del sistema no lineal (6.1)-(6.3) para obtener el identificador paramétrico, con los estimados de los estados y de los parámetros $\hat{\lambda}(t)$ y $\hat{b}(t)$, *i.e.*,

$$\hat{u}_t(x, t) = \hat{u}_{xx}(x, t) + \hat{b}(t)u^2(x, t)u_x(x, t) + \hat{\lambda}(t)u(x, t) + \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t)dx \quad (6.5)$$

$$\hat{u}_x(0, t) = -\frac{\hat{b}}{2}u(0, t), \quad (6.6)$$

$$\hat{u}_x(1, t) = U(t). \quad (6.7)$$

6.4.3. Error de estimación

Considere el error de estimación (5.10)

$$e(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t). \quad (5.10)$$

6.4.4. Leyes adaptables

Se consideran también las leyes adaptables (5.22) y (5.23), *i.e.*,

$$\dot{b}(t) = \gamma_1 \left(\int_0^1 e(x, t) u_x(x, t) dx + \frac{1}{2} e(0, t) u(0, t) \right), \quad (5.22)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \gamma_2 \int_0^1 e(x, t) u(x, t) dx, \quad (5.23)$$

para la obtención de los parámetros estimados.

6.4.5. Objetivo de control

Conjetura 1. *Sea el sistema representado por la NL PDE (6.1)-(6.3) inestable y su correspondiente identificador paramétrico (6.5)-(6.7), ambos en lazo cerrado mediante la aplicación de la ley control (5.9) por realimentación en la frontera, que con la aplicación de las leyes adaptables (5.22) y (5.23) para los parámetros estimados, y mediante un esquema de control adaptable como el de la figura 5.1, se obtiene la estabilidad del error de estimación (5.10).*

6.5. Resultados en simulación

La ley de control adaptable (5.9) en lazo cerrado con actuación en (6.3) y (6.7), en conjunto con las leyes adaptables (5.22) y (5.23) contribuyen favorablemente para obtener el comportamiento estable de (6.1)-(6.3), y la convergencia a cero del error de estimación (2.39), aún en la presencia de un término fuente de inestabilidad $\lambda u(x, t)$. Se consideran los parámetros $\lambda = 35$, $b = 1$ para fines de simulación. Los resultados se muestran en las figuras 6.4-6.17.

6.5.0.1. NL PDE en lazo cerrado

Las figuras 6.4-6.9 muestran la evolución de la planta (6.1)-(6.3) y del identificador paramétrico (6.5)-(6.7) cuando se (5.9) en la frontera. En las figuras 6.10 y 6.11 se observa como evoluciona el error de estimación (5.10) y su convergencia a cero en función del

tiempo. El esfuerzo de control de (5.9) se muestra en la figura 6.12 que ocasiona un comportamiento estable en la planta, mientras que en la figura 6.13 se muestra el efecto del control en la frontera $u(1, t)$ de la solución $u(x, t)$ de la planta en lazo cerrado. Las figuras 6.14-6.17 muestran cómo los parámetros estimados $\hat{b}(t)$ y $\hat{\lambda}(t)$ convergen a sus valores reales a medida que avanza el tiempo.

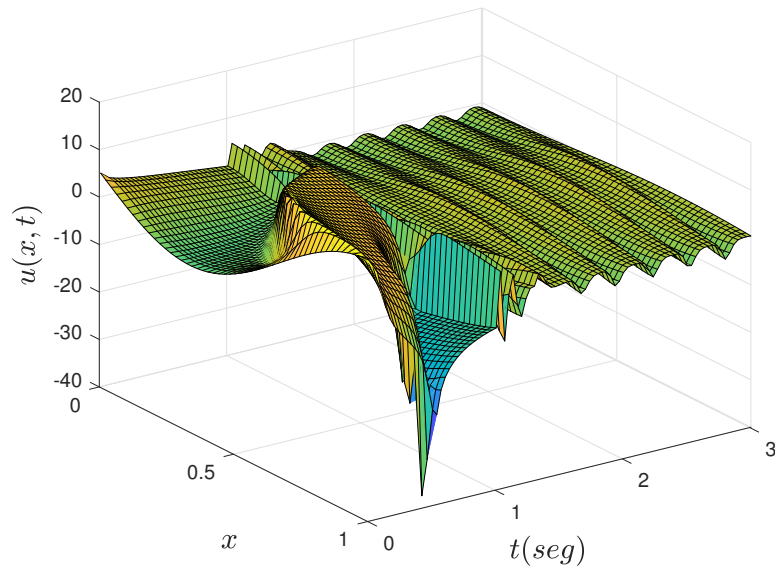


Figura 6.4: Evolución estable de (6.1)-(6.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

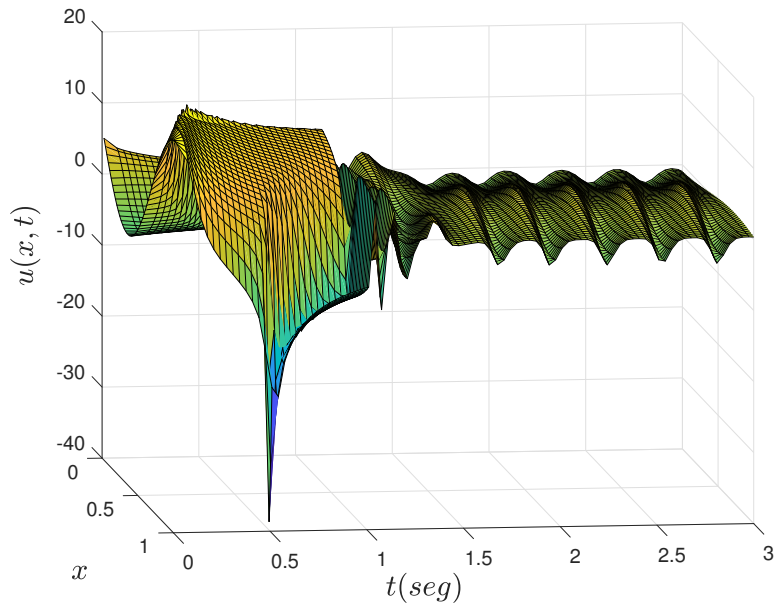


Figura 6.5: Evolución estable de (6.1)-(6.3) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

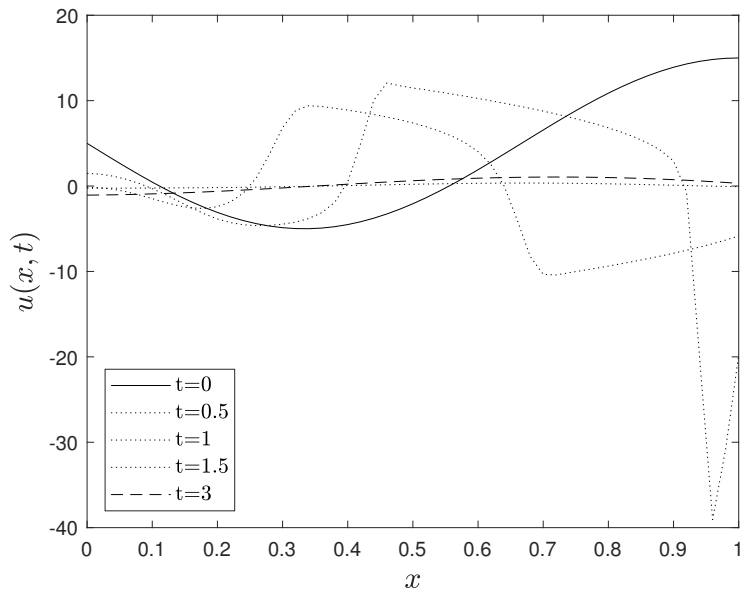


Figura 6.6: Evolución de $u(x, t)$ del sistema (6.1)-(6.3) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.

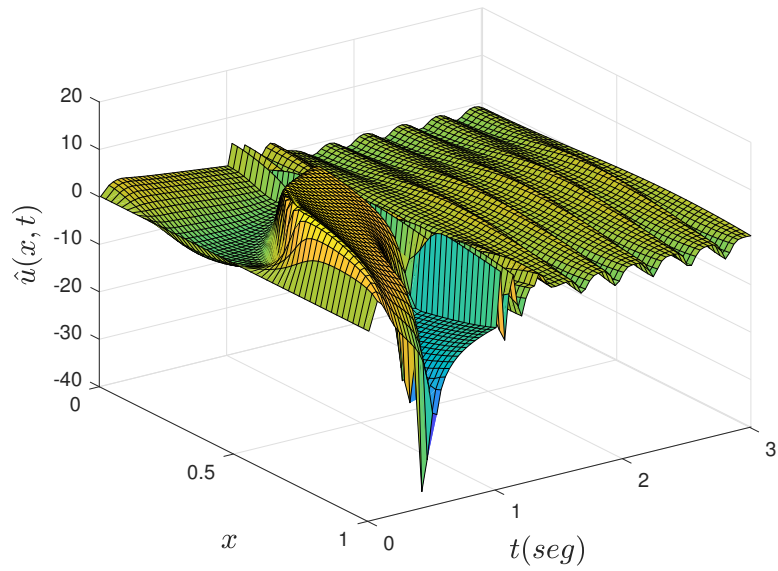


Figura 6.7: Evolución estable de (6.5)-(6.7) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

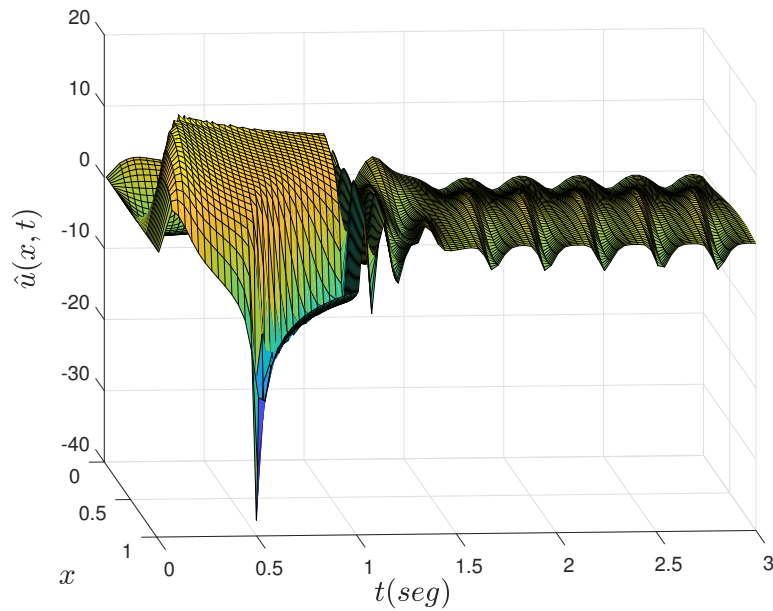


Figura 6.8: Evolución estable de (6.5)-(6.7) en lazo cerrado con la aplicación de (5.9) en $u_x(1, t)$.

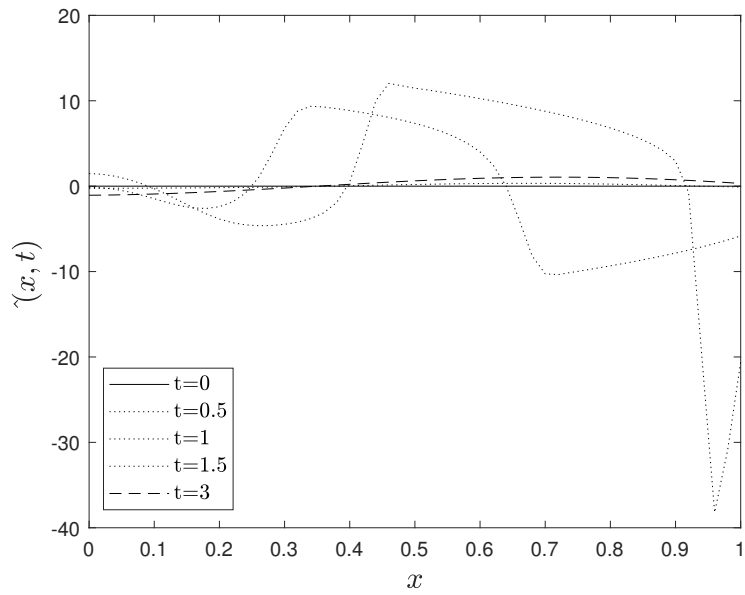


Figura 6.9: Evolución de $u(x, t)$ del sistema (6.5)-(6.7) estable con (5.9) en $u_x(1, t)$ en lazo cerrado.

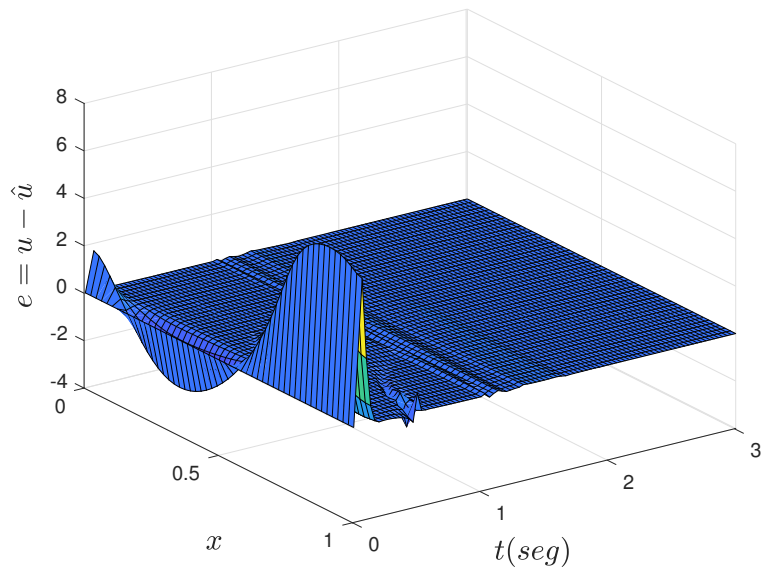


Figura 6.10: Evolución del error de estimación (5.10) y su convergencia a cero.

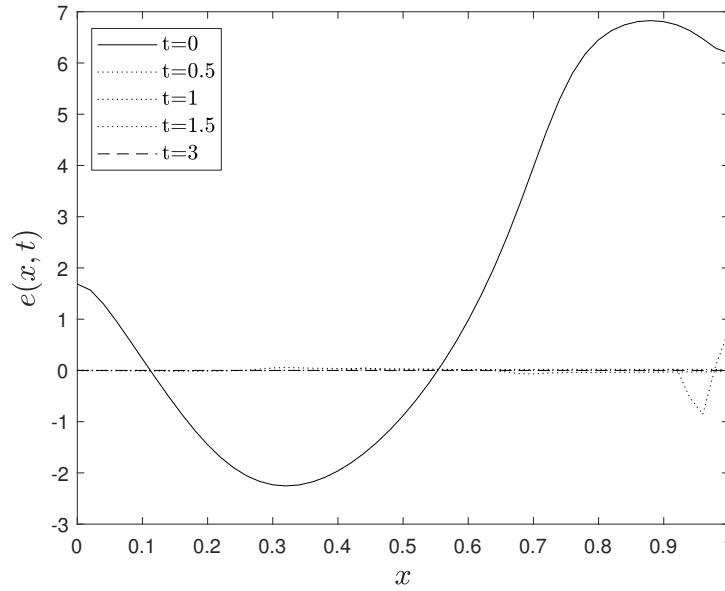


Figura 6.11: Evolución del error de estimación $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ (5.10) y su convergencia a cero.

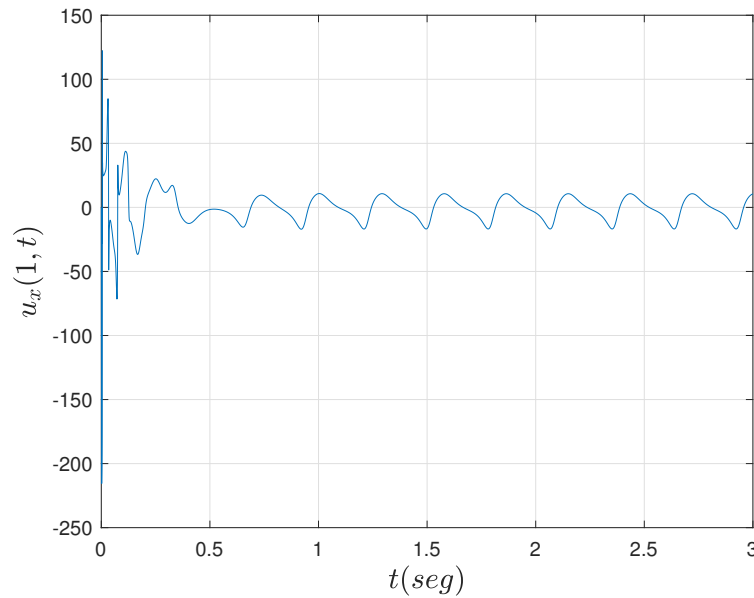


Figura 6.12: Esfuerzo de la ley de control (5.9) aplicado en la frontera $u_x(1, t)$ del sistema (6.1)-(6.3).

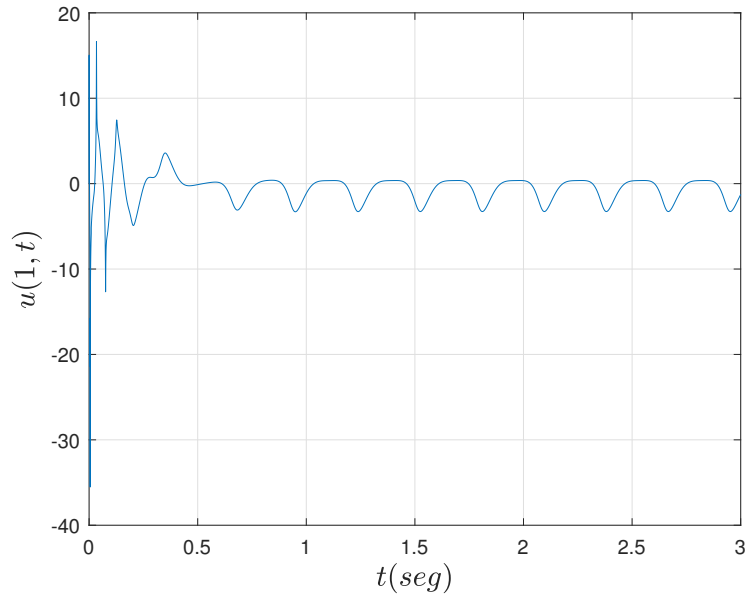


Figura 6.13: Efecto de la aplicación de la ley de control (5.9) en la frontera $u(1, t)$ del sistema de (6.1)-(6.3).

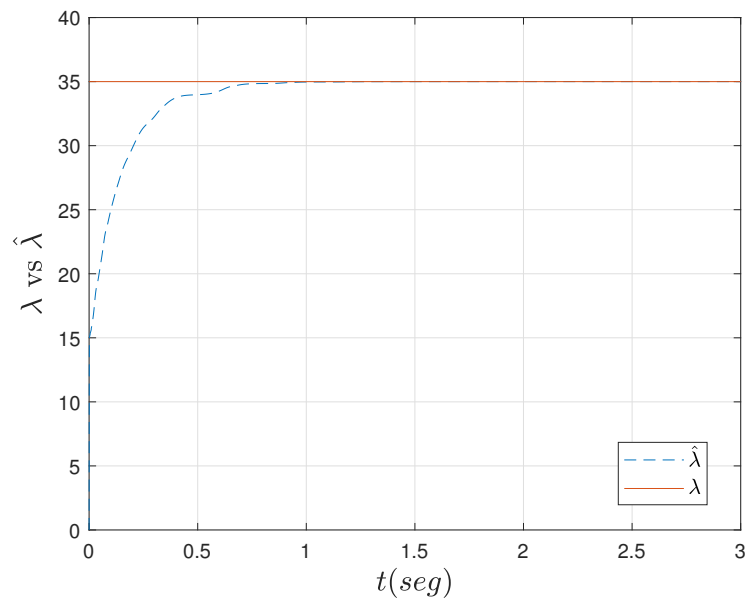


Figura 6.14: Estimación del parámetro $\hat{\lambda}$ y su convergencia a su valor real para el caso no lineal.

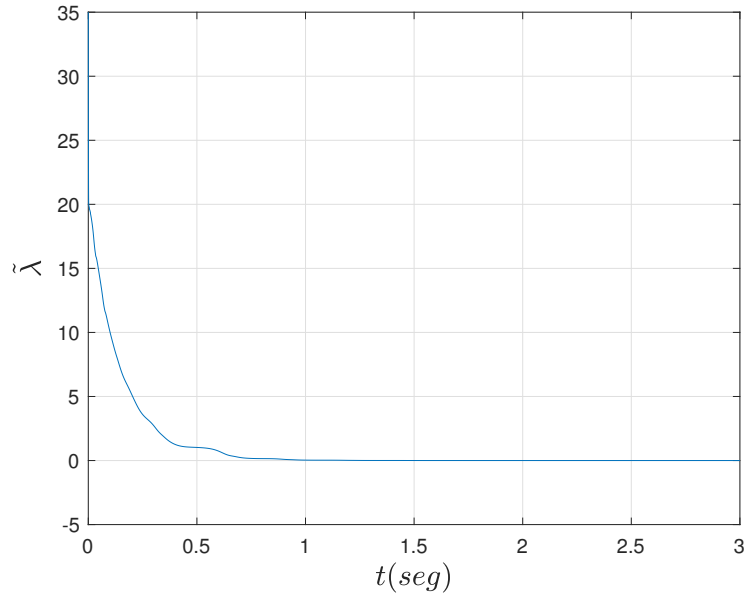


Figura 6.15: Convergencia a cero del error de estimación paramétrico $\tilde{\lambda}$ para el caso no lineal.

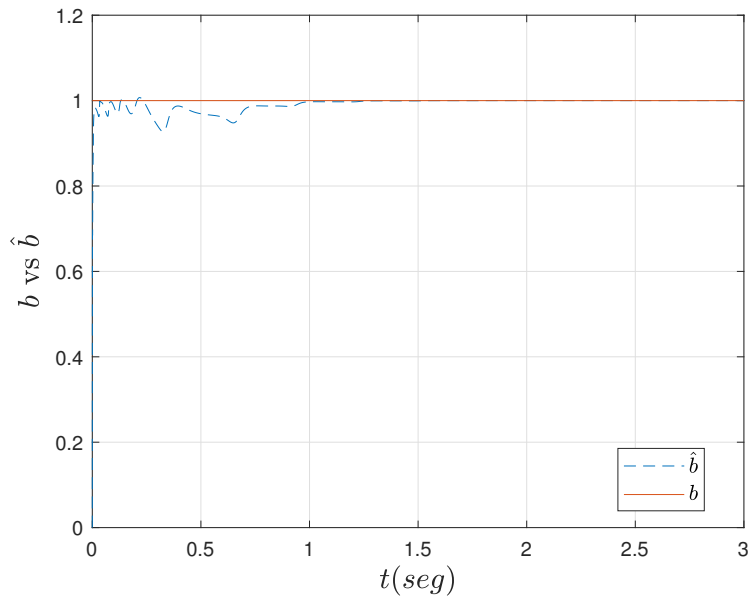


Figura 6.16: Estimación del parámetro \hat{b} y su convergencia a su valor real para el caso no lineal.

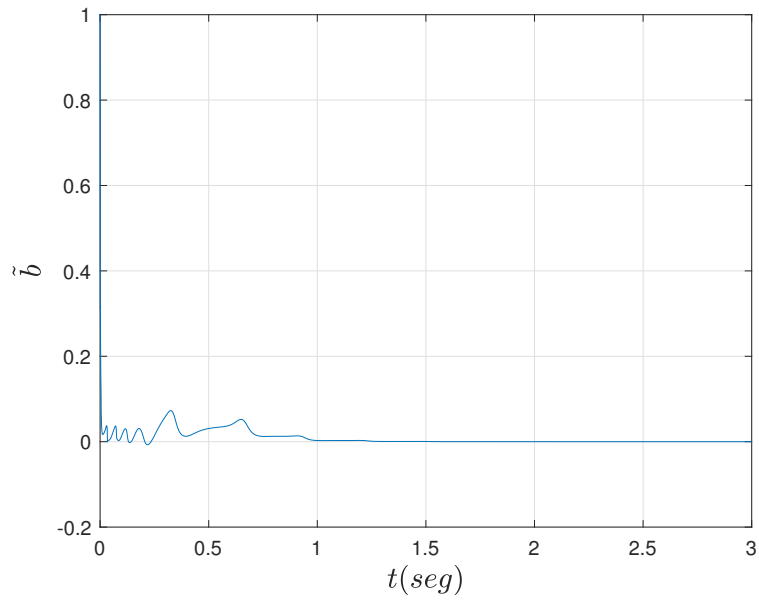


Figura 6.17: Convergencia a cero del error de estimación paramétrico \tilde{b} para el caso no lineal.

6.5.1. Conclusión

En términos de las simulaciones numéricas de esta sección, ha podido mostrarse que la ley de control adaptable (5.9) Neumann es lo suficientemente robusta para poder estabilizar un sistema de una NL PDE y su correspondiente ecuación del identificador cuando se aplica en realimentación en la frontera. Se ha podido también observar que se logran estimar los parámetros desconocidos a sus valores reales y alcanzando la convergencia del error de estimación a cero.

Capítulo 7

Conclusiones

En este documento se aborda el control adaptable por realimentación de estados en la frontera para una clase de NL PDE, con una no linealidad en el dominio, y con parámetros constantes desconocidos, mediante la aplicación de una ley de control obtenida de manera explícita. La ley de control diseñada corresponde a un caso particular que había permanecido abierto en la literatura para una RAD PDE con condiciones de frontera combinadas del tipo Robin y Neumann.

La ley de control obtenida por metodología de backstepping, y con un enfoque de equivalencia cierta, en conjunto con las leyes adaptables correspondientes, garantiza el acotamiento del error de estimación, logra llevar a cabo una estimación de los parámetros desconocidos y con esto el objetivo de control deseado.

7.1. Aportaciones del trabajo de tesis

Se destacan las siguientes aportaciones para el actual trabajo de tesis:

- Implementación de la ley de control diseñada en [14], en un esquema adaptable de control por realimentación en la frontera.
- La implementación de la metodología de control adaptable por realimentación en la frontera para el caso de una NL PDE con una no linealidad en el dominio.
- La evaluación en simulación numérica de los diferentes casos de control por realimentación en la frontera.
- Publicación de un artículo en revista indexada en el Journal Citation Reports [56].

7.2. Trabajo futuro

Durante el desarrollo del presente trabajo de investigación se han observado ciertas áreas de oportunidad entre las que destacan:

- Diseño de una ley de control por realimentación en la frontera para el caso de una RAD PDE con condiciones frontera combinadas de Robin y Neumann pero permutadas respecto a las consideradas en el presente estudio.
- Extender el actual trabajo de investigación con orientación a sistemas de NL PDEs con realimentación de la salida.
- Elaborar el diseño de una propuesta de esquema de control adaptable en la frontera para sistemas de NL PDEs con parámetros variables en el espacio.
- Desarrollar la prueba de estabilidad afín al control adaptable para el sistema de RAD PDE.
- Desarrollar la correspondiente prueba de estabilidad que complemente la suposición de robustez suficiente aplicada al sistemas de NL PDE.
- Llevar al campo experimental las leyes de control diseñadas en el actual trabajo de tesis.

7.3. Artículo publicado

Publicación en revista JCR: *Adaptive boundary control for a certain class of reaction-advection-diffusion system* aceptado en Mathematics. Por: Oscar F. Murillo-García y Francisco Jurado.

Article

Adaptive Boundary Control for a Certain Class of Reaction–Advection–Diffusion System

Oscar F. Murillo-García  and Francisco Jurado * 

División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, Revolución Blvd. and Instituto Tecnológico de La Laguna Av., Torreón 27000, Mexico; d.ofmurillo@correo.itlalaguna.edu.mx

* Correspondence: fjurado@itlalaguna.edu.mx

Abstract: Several phenomena in nature are subjected to the interaction of various physical parameters, which, if these latter are well known, allow us to predict the behavior of such phenomena. In most cases, these physical parameters are not exactly known, or even more these are unknown, so identification techniques could be employed in order to estimate their values. Systems for which their inputs and outputs vary both temporally and spatially are the so-called distributed parameter systems (DPSs) modeled through partial differential equations (PDEs). The way in which their parameters evolve with respect to time may not always be known and may also induce undesired behavior of the dynamics of the system. To reverse the above, the well-known adaptive boundary control technique can be used to estimate the unknown parameters assuring a stable behavior of the dynamics of the system. In this work, we focus our attention on the design of an adaptive boundary control for a parabolic type reaction–advection–diffusion PDE under the assumption of unknown parameters for both advection and reaction terms and Robin and Neumann boundary conditions. An identifier PDE system is established and parameter update laws are designed following the certainty equivalence approach with a passive identifier. The performance of the adaptive Neumann stabilizing controller is validated via numerical simulation.

Keywords: applied mathematics; adaptive boundary control; backstepping; computational methods; distributed parameter systems; partial differential equations; reaction–advection–diffusion equation



Citation: Murillo-García, O.F.; Jurado, F. Adaptive Boundary Control for a Certain Class of Reaction–Advection–Diffusion System. *Mathematics* **2021**, *9*, 2224. <https://doi.org/10.3390/math9182224>

Academic Editor: Francisco Ureña

Received: 18 August 2021
Accepted: 8 September 2021
Published: 10 September 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

A large number of physical phenomena in nature can be modeled by partial differential equations (PDEs) like those in the field of engineering, physics, or chemical sciences since these disciplines encompass the study of phenomena such as electromagnetic field, acoustics, fluid flow, heat transfer, strength of materials, chemical reactions and concentration, mechanical vibrations, among other like logistics, flocking behavior, or even disease spreading. These phenomena have interactions between different variables and parameters for which it becomes necessary to correlate them into a mathematical model through the use of fundamental laws of nature, like those about conservation of energy, mass, and momentum. Due to the interaction between variables and parameters and by the way in which they vary both temporally and spatially, such processes are known as distributed parameter systems (DPSs). An essential feature of the DPSs is that they are infinite-dimensional systems that lead to PDEs for which, in some scenarios, it is possible to use a reduction methodology to transform the system into a finite-dimensional ordinary differential equation (ODE) in order to simplify the DPS making it more accurate for a specific application.

The PDEs are classified into three main categories, namely, the parabolic type, elliptic type, and hyperbolic type, according to the properties that each equation may have. Each one of these latter are used to describe the behavior of different phenomena, e.g., parabolic PDEs mainly describe heat transfer and diffusion processes, elliptic PDEs describe steady

state behavior for systems like electrostatic fields, and the hyperbolic type are associated with vibrations or wave phenomena [1]. Unlike an ODE, where the solution leads to finding a specific state, the solution from a PDE lead us to find a family of functions due to its infinite-dimensional nature becoming necessary to establish certain conditions that help us to find the family of solutions inside a domain; such conditions are the so-called boundary conditions, namely, Dirichlet, Neumann, and Robin conditions, which ensures the well-posedness of the PDE [2].

In many DPSs, the physical parameters are unknown because these vary as the dynamics of the system evolve over time. From control theory, a recurrent approach has been widely used for estimation of unknown parameters from finite-dimensional systems, namely, the adaptive control technique, which has been extended to the control of infinite-dimensional PDEs. The adaptive control technique for PDEs successfully contribute to estimating the unknown parameters assuring the convergence to their true values. Depending on the location of the sensors and actuators, the control of PDEs can be performed either in the domain or at the boundary.

Some of the first works conducting studies of convergence of the estimation error to zero in DPSs were reported in [3–5]. These works were focused on the design of a model reference adaptive control (MRAC) for different types of PDEs. First, attempts on the development of a robust methodology to the design of adaptive controllers in the boundary of PDEs systems was reported in [6] to the Burgers' equation case when considering unknown viscosity as well as that for an axially moving string system in [7]; for both cases, the adaptive laws were designed through the Lyapunov's direct method. An adaptive boundary controller for a parabolic PDE, containing an unknown destabilizing parameter affecting the interior of the domain, was developed in [8]. In [9,10], it was shown how adaptive boundary control problems for unstable parabolic PDEs of infinite relative degree were solved via output feedback approach. In [11], the first adaptive controllers for parabolic PDEs with actuation at the boundary and spatially-varying parameters were introduced. In this latter work, the Lyapunov's direct method was used in the design of adaptive laws guaranteeing convergence to zero for the estimation and parametric errors. The most relevant contributions for adaptive boundary control of parabolic PDEs through a backstepping approach were reported in [12–14]. The backstepping approach was used to establish an explicit expression for the kernel gain applied to the control law. The control law is then modified substituting the unknown parameters by their estimates. Parameter update (adaptive) laws were designed through the Lyapunov's technique for the establishment of the parameter identifier assuring convergence to zero of the estimation error. In [15,16], adaptive boundary control laws were developed for wave equations, namely hyperbolic type PDEs. In [17], the design of a nonlinear adaptive controller, using the Lyapunov's technique, for a hyperbolic PDE model representing crowd dynamics was reported. A system of a reaction–advection–diffusion (R–A–D) PDE of a parabolic type with a distributed input subject to an arbitrarily large and unknown time-delay was considered in [18]; although the control was not applied at the boundary, the main contribution lies with the need to compensate unfavorable effects on communication delays. The trend in this latter work was directed in the sense of [19,20], which addresses the development of control designs for coupled PDEs systems of hyperbolic and parabolic type, respectively.

Adaptive boundary control for PDEs has been positioned as an effective tool for estimation of the dynamic behavior of the state and unknown parameters from infinite-dimensional systems; the control signal is actuated at the boundary so as not to be intrusive in the domain under the fact that placement of sensors and actuators within the system becomes unfeasible [21,22].

In [23], adaptive boundary control design methods, namely, the Lyapunov's method, and certainty equivalence approaches with passive and swapping identifiers, were shown. Backstepping controllers for boundary control of PDEs, previously designed and explicitly parametrized in physical parameters of the respective plants to be controlled, were considered as nominal controllers in the development of such adaptive control schemes. In that

work, the certainty equivalence approach with passive identifier was used for the design of an adaptive boundary controller for a two-dimensional (2D) R–A–D PDE system having Dirichlet boundary conditions with actuation in one of them. In addition, authors claim that these adaptive control methods can be extended to R–A–D PDE systems in 2D and 3D as well as to systems with spatially varying (functional) parametric uncertainties and to other types of boundary conditions. Moreover, an adaptive boundary control design method via the output–feedback approach was shown, where authors also claim that this method can be applied to general R–A–D PDE systems. In [24], an adaptive boundary controller via Lyapunov’s method for a R–A–D PDE system with unknown diffusion and advection parameters having Dirichlet boundary conditions was designed. In addition, the design of an adaptive boundary control via certainty equivalence approach with passive identifiers for a 3D R–A–D system and Dirichlet boundary conditions was included. Moreover, the certainty equivalence approach but with swapping identifiers was used to the design of an adaptive boundary controller for a R–A–D system having Dirichlet boundary conditions.

In the field of control for nonlinear PDEs, there is so much to explore. The study of the backstepping methodology is motivated from its potential for nonlinear PDEs. For some of the problems that have been addressed, the nonlinearity appears in the PDE in such a way that it does not affect stability, i.e., the choice of a Lyapunov function was simple, as it was to the case for the Burgers’ equation in [6,25–27]. Problems of most practical interest and mathematically challenging are those with boundary control and with in-domain nonlinearities. The design of nonlinear feedback laws for this latter kind of systems is a complex task. An approach which consists in spatial discretization of a nonlinear PDE plant to the development of an optimal feedback law for the resulting ODE system was introduced in [28]. However, this proposal would entail the problem of the curse of dimensionality. The feedback linearization approach has been considered for PDEs but using spatial discretization or some ways of ODE model reduction. It is well known that a bound of the numerical solution is crucial in the establishment of stability and convergence for a fully discrete scheme applied to nonlinear PDEs. The analysis for stability and convergence of the pseudospectral (Fourier collocation) method, coupled with a variety of specially designed time-stepping methods of up to fourth order, for the numerical solution of a 3D viscous Burgers’ equation with periodic boundary conditions was carried out in [29]. The major advantage of the pseudospectral method is that it is easier to implement and very efficient due to the fast Fourier transform. The ease of implementation comes from the fact that the pseudospectral approach avoids some difficulties when evaluating 3D nonlinear terms. In that work, the inverse inequality approach is avoided, which is a classical way to obtain such a bound and leads to a restriction on the time-step in terms of the spatial grid size, which can be prohibitive in two or three dimensions.

In this work, we try with a non-previously exposed case where the adaptive boundary control methodology is used for the control of a parabolic type R–A–D PDE when assuming unknown constant parameters for the reaction and advection terms and both Robin and Neumann type boundary conditions. We focus our attention on reaching convergence to zero for the estimation error by designing adaptive laws that estimate the unknown parameters where the adaptive controller signal is actuated in one of the boundaries. Our work is motivated from [24,28], where the adaptive boundary control design for the R–A–D PDE system considered here has been left as an open problem.

This paper is organized as follows: In Section 2, the properties for function spaces are summarized. In Section 3, the R–A–D PDE system is described. In addition, a Neumann stabilizing controller previously designed, in a work of our own, for the class of PDE system considered here is shown. The identifier PDE and estimation error PDE are properly established through Sections 4 and 5, respectively. In Section 6, parameter update (adaptive) laws are designed following the certainty equivalence approach with passive identifier. The performance of the adaptive boundary controller is shown in Section 7. Some concluding remarks are given at the end of the manuscript.

2. Function Spaces

Let us denote by Ω an open set of \mathbb{R}^n with boundary Γ . Assume that either Ω is Lipschitz or Ω is of class C^r for $r \geq 1$. The generic point of \mathbb{R}^n is denoted by $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. The Lebesgue measure on \mathbb{R}^n is denoted by $dx = dx_1 \dots dx_n$.

Let us denote by $C(\Omega)$ (resp. $C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ or $k = \infty$) the space of real continuous functions on Ω (resp. the space of k times continuously differentiable functions on Ω), $C(\overline{\Omega})$ (resp. $C^k(\overline{\Omega})$) represents the space of real continuous functions on $\overline{\Omega}$ (resp. the space of k times continuously differentiable functions on Ω). Let us denote by C_0^∞ the spaces of real C^∞ functions on Ω with a compact support in Ω .

For $p \in [1, \infty)$, $L^p(\Omega)$ is the space of real functions on Ω which are L^p for the Lebesgue measure. It is a Banach space for the norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{1}$$

For $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ is the space of measurable and bounded real functions on Ω . It is also a Banach space for the norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{2}$$

For $p = 2$, $L^2(\Omega)$ is a Hilbert space for the scalar product

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \tag{3}$$

with the corresponding norm denoted by

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \{(u, u)\}^{1/2}. \tag{4}$$

Let us denote by $W^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$, the Sobolev space of functions u in $L^p(\Omega)$ whose distribution derivatives of order less than or equal to s are in $L^p(\Omega)$. It is a Banach space for the norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{5}$$

where $D_i u = \partial u / \partial x_i, i \in [1, n]$, is the notation for the partial differential derivatives of a function $u, D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u = (\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u) / (\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}), \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$, and $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

For $p = 2, W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ and this is a Hilbert space for the scalar product

$$((u, v))_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v). \tag{6}$$

Let us consider the Sobolev spaces $H^s(\Omega)$ which contain $C^\infty(\overline{\Omega})$ and $C^s(\overline{\Omega})$. The closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^s(\Omega)$ (resp. $W^{s,p}(\Omega)$) is denoted by $H_0^s(\Omega)$ (resp. $W_0^{s,p}(\Omega)$). In particular,

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D_i u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}, \tag{7}$$

$$H_0^1(\Omega) = \text{the closure of } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega), \tag{8}$$

which are Hilbert spaces for the scalar product

$$((u, v))_{H^1(\Omega)} = (u, v) + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v). \tag{9}$$

For a bounded Ω , the Poincaré inequality

$$|u| \leq c_0(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{10}$$

implies that $H_0^1(\Omega)$ is a Hilbert space for the scalar product

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v) \tag{11}$$

and that the corresponding norm

$$\|u\| = \{((u, u))\}^{1/2} \tag{12}$$

is equivalent to the norm induced by $H^1(\Omega)$ [30].

3. Reaction–Advection–Diffusion (R–A–D) Equation

The R–A–D PDE model deals with the time evolution of concentration of species in a flowing medium. The adaptive boundary control methodology to be applied in this work for stabilizing a certain class of R–A–D PDE requires of the prior design a backstepping-based boundary control law (nominal backstepping controller) [23,24] that achieves the stabilization objective.

Let us consider the R–A–D system

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \lambda u(x, t), \tag{13}$$

$$u_x(0, t) = -\frac{b}{2}u(0, t), \tag{14}$$

$$u_x(1, t) = \mathcal{U}(t), \tag{15}$$

where $u(x, t)$ is a function defined in $x \in [0, 1] \forall t \in [0, \infty)$, b and λ are known constant coefficients. The system has a Robin condition imposed at the boundary $x = 0$ as well as a Neumann actuation signal $\mathcal{U}(t)$ applied on the other one boundary $x = 1$. Here, $u_{xx}(x, t)$, $bu_x(x, t)$, and $\lambda u(x, t)$ are the diffusion, advection and reaction terms, respectively. This last term is the one that causes instability in the system for $\lambda > 0$ or it behaves as a stable system otherwise. The R–A–D PDE system (13)–(15) represents a hypothetical simple case developed in one spatial dimension and rectangular coordinates.

A Neumann stabilizing controller for the system (13)–(15) was designed in [31], via the previously mentioned backstepping approach, which is given by

$$\begin{aligned} u_x(1, t) = & -\frac{1}{2}(\lambda_0 + b + 1)u(1, t) \\ & -\frac{3}{2}\lambda_0 \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)})}{\sqrt{\lambda_0(1-y^2)}} u(y, t) \exp\left(\frac{b}{2}(y-1)\right) dy \\ & -\lambda_0 \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)})}{(1-y^2)} u(y, t) \exp\left(\frac{b}{2}(y-1)\right) dy, \end{aligned} \tag{16}$$

when considering the heat equation

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t), \tag{17}$$

$$w_x(0, t) = 0, \tag{18}$$

$$w_x(1, t) = -\frac{1}{2}w(1, t), \tag{19}$$

as a target system, where “exp” stands for the Euler exponential constant, the parameter λ_0 is given as $\lambda_0 = \lambda - \frac{b^2}{4}$, and $I_1(\cdot)$, $I_2(\cdot)$ stands for modified Bessel functions of the first

and second kind, respectively. The Neumann stabilizing controller (16) is applied in the boundary condition (15) assuring the stabilization of the system even if the parameter λ is large enough. It must be noticed that the stabilizing control law (16) was designed in [31] under the assumption that the parameters b and λ from the system (13)–(15) are known.

4. Identifier PDE

Let us now consider that the constant parameters b and λ of the system (13)–(15) are unknown and that it is still desired to stabilize the system.

We begin the analysis of our case study by introducing the auxiliary system

$$\hat{u}_t(x, t) = \hat{u}_{xx}(x, t) + \hat{b}(t)u_x(x, t) + \hat{\lambda}(t)u(x, t) + \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t)dx, \tag{20}$$

$$\hat{u}_x(0, t) = -\frac{\hat{b}(t)}{2}u(0, t), \tag{21}$$

$$\hat{u}_x(1, t) = U(t). \tag{22}$$

This auxiliary system (20)–(22) is called identifier PDE. Notice here that the identifier PDE employs a copy of the original R–A–D PDE and one additional nonlinear term along with its boundary conditions. In this identifier PDE, we employ the notation (\cdot) to denote the estimate of a function or from a parameter, so that $\hat{b}(t)$ and $\hat{\lambda}(t)$ are the estimate parameters. The nonlinear additional term within the identifier is $\gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t)dx$, where $\gamma > 0$ is an arbitrary constant, $u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ is the so-called error signal or estimation error, and $\int_0^1 u_x^2(x, t)dx$ is the squared L_2 -norm of $u_x(x, t)$. The L_2 -norm is defined by

$$\|v(t)\| = \left(\int_0^1 v^2(x, t)dx\right)^{1/2}. \tag{23}$$

This identifier PDE will help us with obtaining the estimation error, which, during the adaptation process, should be gradually reduced until it becomes equal to zero as time progresses. The stabilizing control signal for the system (20)–(22) is the same as (16), but the constant parameters b, λ are being replaced by their estimates \hat{b} and $\hat{\lambda}$, respectively, i.e.,

$$\begin{aligned} u_x(1, t) = & -\frac{1}{2}(\hat{\lambda}_0(t) + \hat{b}(t) + 1)\hat{u}(1, t) \\ & -\frac{3}{2}\hat{\lambda}_0(t) \int_0^1 \frac{I_1(\sqrt{\hat{\lambda}_0(t)(1-y^2)}}{\sqrt{\hat{\lambda}_0(t)(1-y^2)}}\hat{u}(y, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y-1)\right)dy \\ & -\hat{\lambda}_0(t) \int_0^1 \frac{I_2(\sqrt{\hat{\lambda}_0(t)(1-y^2)}}{(1-y^2)}\hat{u}(y, t) \exp\left(\frac{\hat{b}(t)}{2}(y-1)\right)dy, \end{aligned} \tag{24}$$

where $\hat{\lambda}_0(t) = \hat{\lambda}(t) - \frac{\hat{b}^2(t)}{4}$.

5. Estimation Error PDE

In order to be able to approximate the value of the unknown parameters b and λ from (13)–(14), we need to establish an expression capable of comparing the estimated parameters $\hat{b}, \hat{\lambda}$ from (20)–(21) with their real values; this expression is the so-called estimation error PDE. Let us consider the estimation error

$$e(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t). \tag{25}$$

Taking the derivative of (25) with respect to time, it yields

$$e_t(x, t) = u_t(x, t) - \hat{u}_t(x, t). \tag{26}$$

Then, the first and second space derivatives from (25), i.e., the first and second derivative with respect to x , are given by

$$e_x(x, t) = u_x(x, t) - \hat{u}_x(x, t), \tag{27}$$

$$e_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t). \tag{28}$$

Now, regarding $u_t(x, t)$ and $\hat{u}_t(x, t)$ from (13) and (20), respectively, and substituting these latter in (26), we get

$$e_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \lambda u(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) - \hat{b}(t)u_x(x, t) - \hat{\lambda}(t)u(x, t) - \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \tag{29}$$

Rearranging (29) results in

$$e_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) - \hat{b}(t)u_x(x, t) + \lambda u(x, t) - \hat{\lambda}(t)u(x, t) - \gamma^2[u(x, t) - \hat{u}(x, t)] \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \tag{30}$$

Now, introducing the notation $(\bar{\cdot})$ to refer to the difference between the real and estimated parameters, regarding (25) and (28), and considering the L_2 -norm from (23), we obtain

$$e_t(x, t) = e_{xx}(x, t) + \bar{b}(t)u_x(x, t) + \bar{\lambda}(t)u(x, t) - \gamma^2 e(x, t) \|u_x(t)\|^2, \tag{31}$$

where $\bar{b}(t)$ and $\bar{\lambda}(t)$ are the parameter estimation errors, i.e.,

$$\bar{b}(t) = b - \hat{b}(t), \tag{32}$$

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda - \hat{\lambda}(t). \tag{33}$$

To determine the boundary conditions in terms of the estimation error, let us first consider (27) along with (14) and (21), and, evaluating them at $x = 0$,

$$\begin{aligned} e_x(0, t) &= u_x(0, t) - \hat{u}_x(0, t), \\ &= -\frac{b}{2}u(0, t) - \frac{\hat{b}(t)}{2}u(0, t), \\ &= -[b - \hat{b}(t)]u(0, t), \\ &= -\frac{\bar{b}(t)}{2}u(0, t). \end{aligned} \tag{34}$$

Repeating the previous process for (15) and (22) evaluated at $x = 1$ yields

$$\begin{aligned} e_x(1, t) &= u_x(1, t) - \hat{u}_x(1, t), \\ &= \mathcal{U}(t) - \hat{\mathcal{U}}(t), \\ &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Thus, we get the estimation error PDE (31) with boundary conditions (34) and (35).

6. Parameter Update Laws

Up to this point, we have established three PDE systems: the unstable R–A–D PDE (13)–(15) with unknown parameters b and λ , the identifier PDE (20)–(22) with parametric estimates $\hat{b}(t)$ and $\hat{\lambda}(t)$, and the estimation error PDE (31)–(35) which contains the preceding systems via estimation error (25). In what follows, we will prove that the system (31)–(35) is bounded and square integrable in time in the sense of the L_2 -norm (23).

Let us consider the Lyapunov function

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^2(x,t) dx + \frac{\tilde{b}^2(t)}{2\gamma_1} + \frac{\tilde{\lambda}^2(t)}{2\gamma_2} \tag{36}$$

and its time derivative given by

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t) dx + \frac{\tilde{b}(t)}{\gamma_1} \dot{\tilde{b}}(t) + \frac{\tilde{\lambda}(t)}{\gamma_2} \dot{\tilde{\lambda}}(t), \\ &= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t) dx + \frac{\tilde{b}(t)}{\gamma_1} [b - \dot{\tilde{b}}(t)] + \frac{\tilde{\lambda}(t)}{\gamma_2} [\lambda - \dot{\tilde{\lambda}}(t)], \\ &= \int_0^1 e(x,t)e_t(x,t) dx - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{b}(t) \dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\lambda}(t) \dot{\tilde{\lambda}}(t), \end{aligned} \tag{37}$$

where $\dot{b}, \dot{\lambda} = 0$ since these are constants and $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. From (31), (37) becomes

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_0^1 e(x,t)(e_{xx}(x,t) + \tilde{b}(t)u_x(x,t) + \tilde{\lambda}(t)u(x,t) - \gamma^2 e(x,t)\|u_x(t)\|^2) dx \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{b}(t) \dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\lambda}(t) \dot{\tilde{\lambda}}(t), \\ &= \int_0^1 e(x,t)e_{xx}(x,t) dx + \tilde{b}(t) \int_0^1 e(x,t)u_x(x,t) dx + \tilde{\lambda}(t) \int_0^1 e(x,t)u(x,t) dx \\ &\quad - \gamma^2 \|u_x(t)\|^2 \int_0^1 e^2(x,t) dx - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{b}(t) \dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\lambda}(t) \dot{\tilde{\lambda}}(t). \end{aligned}$$

Using integration by parts on some terms of (38) along with boundary conditions (34)–(35) and regarding the L_2 -norm (23), we get

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\|e_x(t)\|^2 - \gamma^2 \|u_x(t)\|^2 \|e(t)\|^2 + \frac{\tilde{b}(t)}{2} e(0,t)u(0,t) \\ &\quad + \tilde{b}(t) \int_0^1 e(x,t)u_x(x,t) dx + \tilde{\lambda}(t) \int_0^1 e(x,t)u(x,t) dx \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{b}(t) \dot{\tilde{b}}(t) - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\lambda}(t) \dot{\tilde{\lambda}}(t). \end{aligned} \tag{38}$$

From the adaptive control theory [32], we need to get rid of those terms that do not allow for ensuring that (38) is negative definite. In order to achieve this latter, the following adaptive laws (also known as parameter update laws) are chosen:

$$\dot{\tilde{b}}(t) = \gamma_1 \left(\int_0^1 e(x,t)u_x(x,t) dx + \frac{1}{2} e(0,t)u(0,t) \right), \tag{39}$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = \gamma_2 \int_0^1 e(x,t)u(x,t) dx, \tag{40}$$

which, when replaced in (38), causes the last five terms be cancelled, yielding

$$\dot{V}(t) = -\|e_x(t)\|^2 - \gamma^2 \|u_x(t)\|^2 \|e(t)\|^2, \tag{41}$$

which implies

$$V(t) \leq V(0). \tag{42}$$

Now, according to (36), we can see that \tilde{b} and $\tilde{\lambda}$ as well as the term $\int_0^1 e^2(x,t) dx = \|e(t)\|^2$ are all bounded functions.

Certain properties can be achieved from (41) if we integrate it, with respect to time, by setting t from zero to infinity, i.e.,

$$V(\infty) - V(0) = - \int_0^\infty \|e_x(t)\|^2 dt - \int_0^\infty \gamma^2 \|u_x(t)\|^2 \|e(t)\|^2 dt,$$

and accordingly to (42)

$$V(\infty) + \int_0^\infty \|e_x(t)\|^2 dt + \int_0^\infty \gamma^2 \|u_x(t)\|^2 \|e(t)\|^2 dt \leq V(0), \tag{43}$$

from which $\|e_x(t)\|$ and $\|u_x(t)\| \|e(t)\|$ are square integrable functions of time, i.e., $\|e_x(t)\|, \|u_x(t)\| \|e(t)\| \in \mathcal{L}_2$.

In addition, from the adaptive laws (39)–(40), $|\dot{\hat{b}}(t)| \leq \gamma_1 \|e(x, t)\| \|u_x(x, t)\|$ and $|\dot{\hat{\lambda}}(t)| \leq \gamma_2 \|e(x, t)\| \|u(x, t)\|$, so $\hat{b}(t), \hat{\lambda}(t) \in \mathcal{L}_2$.

In the manner described above, it has been proved that the system (20)–(22) effectively estimates \hat{b} and $\hat{\lambda}$ which converge to the true parameters b and λ via adaptive laws (39)–(40), allowing for the dynamics of the system (20)–(22) also converge with that from (13)–(15). Then, the following lemma can be stated.

Lemma 1. *The identifier (20)–(22) with update laws (39)–(40) guarantees*

$$\|e(t)\| \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2, \tag{44}$$

$$\|e_x(t)\|, \|u_x(t)\| \|e(t)\| \in \mathcal{L}_2, \tag{45}$$

$$\hat{b}(t), \hat{\lambda}(t) \in \mathcal{L}_\infty, \tag{46}$$

$$\dot{\hat{b}}(t), \dot{\hat{\lambda}}(t) \in \mathcal{L}_2. \tag{47}$$

From Lemma 1, although the stability of the identifier has been proven, the proof for closed-loop stability of the whole adaptive boundary control scheme designed here can be carried out along the same lines as in [24].

In Figure 1, a block diagram is shown to illustrate the adaptive control scheme for the R–A–D PDE system (13)–(15).

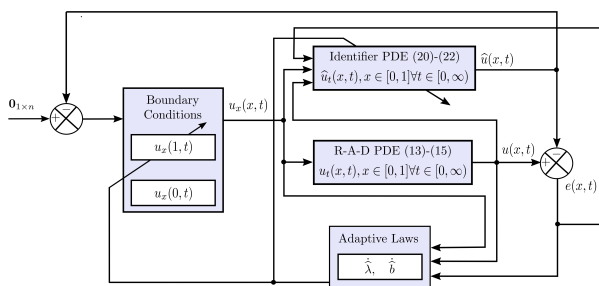


Figure 1. Adaptive boundary control scheme for the R–A–D PDE system (13)–(15).

7. Simulation Results

In this section, we discuss the simulation results from the dynamics in the closed loop of the adaptive Neumann stabilizing controller. The main objective is to show the convergence to zero for the estimation error (25) as a function of time and that the estimated parameters \hat{b} and $\hat{\lambda}$ converge to their true values as time progresses. The simulation is set to $b = 2$ and $\lambda = 12$ along with initial condition $u_0(x) = 10 \sin(\pi x)$. A built-in function in MATLAB with a previous finite discretization in space process to solve a resulting 2×2 parabolic PDE system, consisting of the R–A–D PDE system (13)–(15) and identifier PDE (20)–(22), is implemented. Figure 2 shows the dynamics of the R–A–D PDE system with adaptive Neumann control at the boundary while Figure 3 shows the progression in time of the identifier PDE. The dynamics from the identifier PDE are very similar to that from the R–A–D PDE system. Figure 4 clearly shows how the estimation error (25) converges to zero almost immediately after starting the process. In Figure 5, we can see the

effort of the control signal (24), where the parametric estimates \hat{b} and $\hat{\lambda}$ actively affect its behavior as they are computed at each time interval. Figures 6 and 7 show the progression of convergence over time of the estimated parameters $\hat{\lambda}$ and \hat{b} versus their true values, respectively. The performance of the adaptive Neumann stabilizing control scheme but for parameters set to $b = 10$ and $\lambda = 30$ and initial condition $u_0(x) = 5(1 - 2 \sin(3\pi x/2))$ is shown from Figures 8–13.

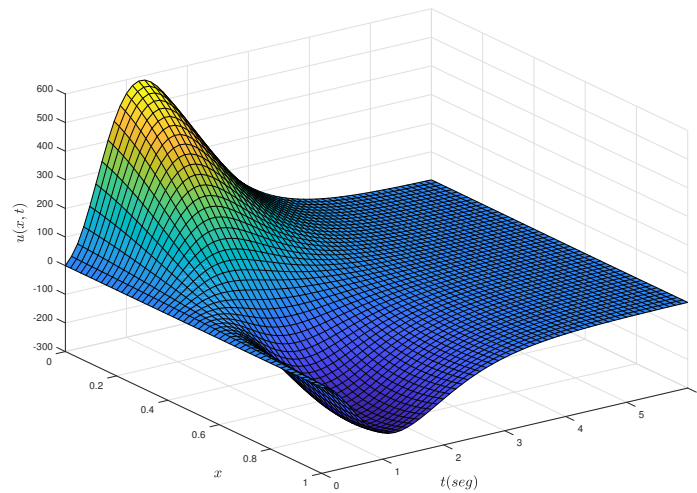


Figure 2. Dynamics in closed-loop of the adaptive boundary controller.

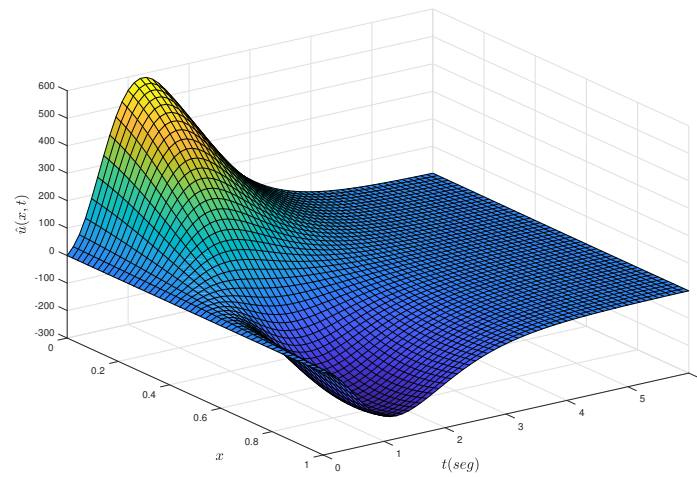


Figure 3. Dynamics of the identifier PDE.

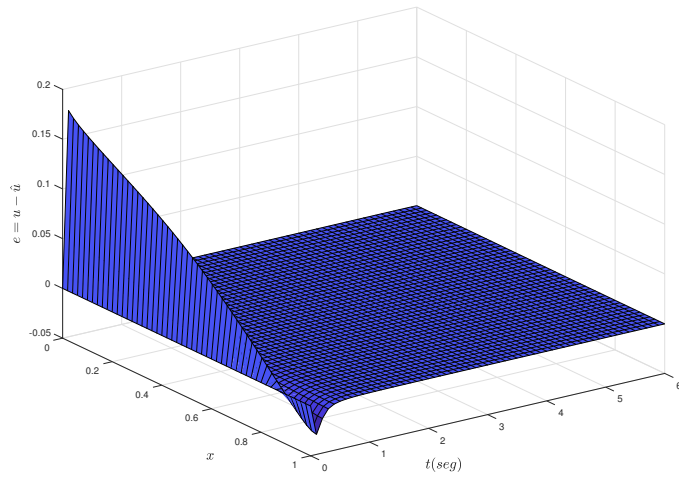


Figure 4. Convergence to zero of the estimation error.

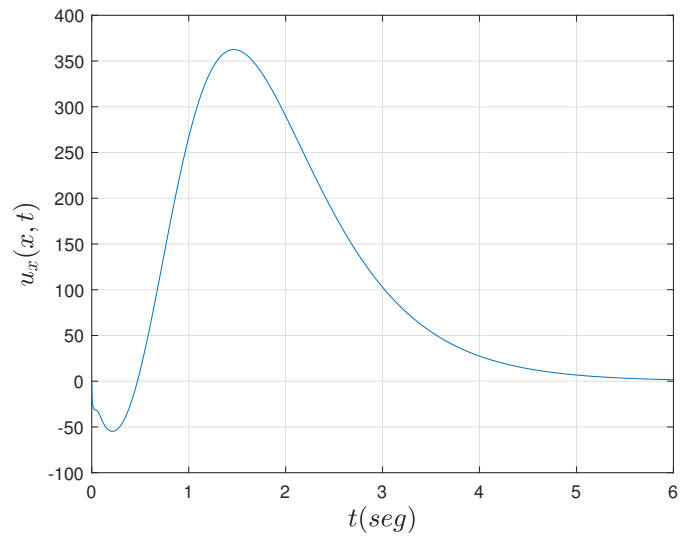


Figure 5. Control effort of the adaptive Neumann stabilizing controller.

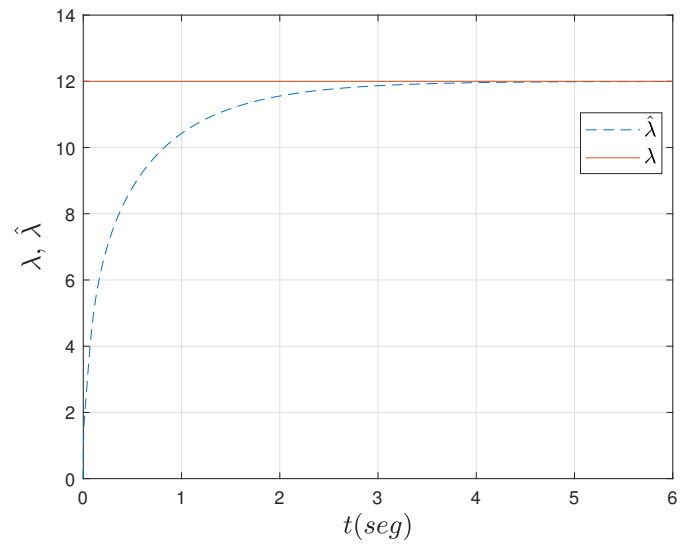


Figure 6. Progression of the convergence for $\hat{\lambda}$.

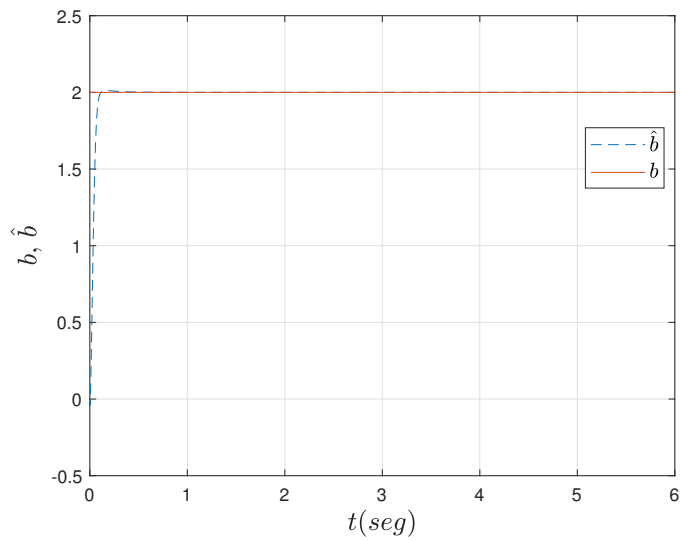


Figure 7. Progression of the convergence for \hat{b} .

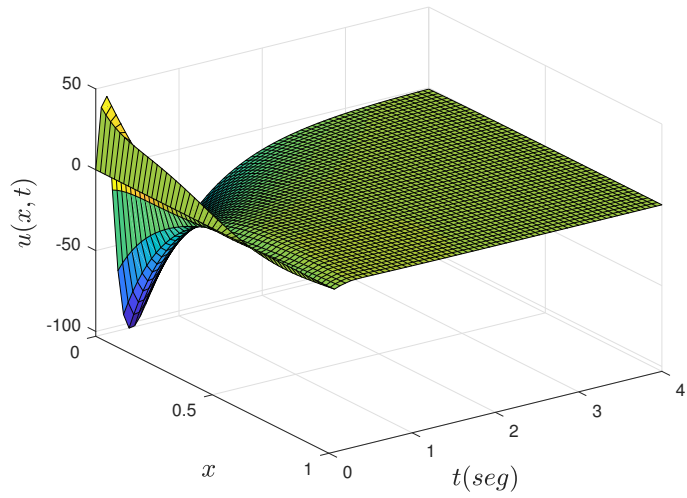


Figure 8. Performance in closed-loop of the adaptive Neumann stabilizing controller.

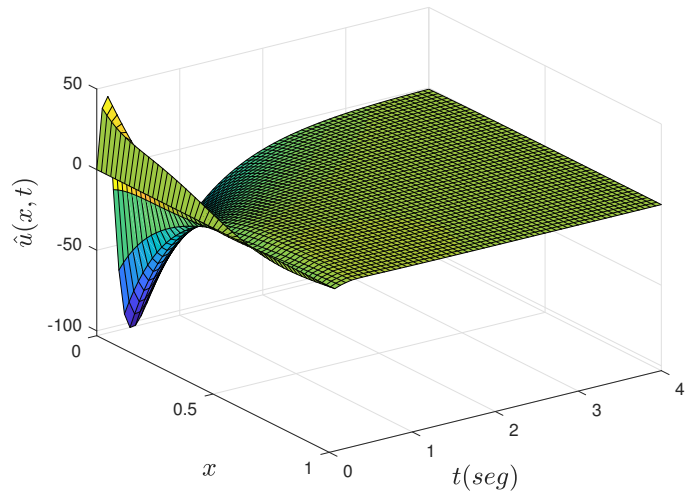


Figure 9. Dynamics of the identifier PDE.

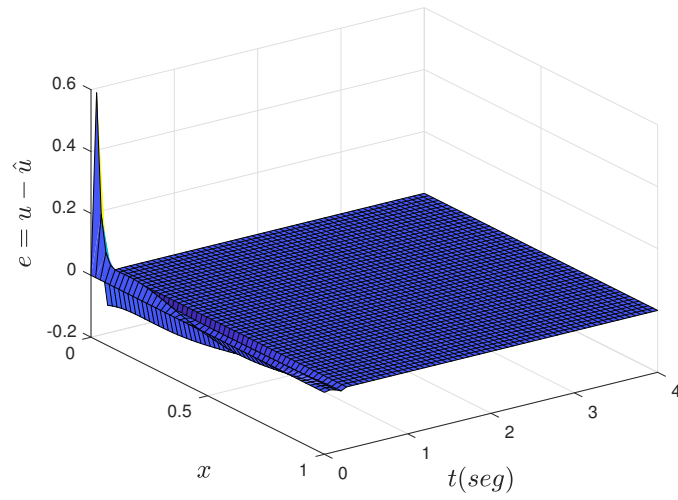


Figure 10. Dynamics of the estimation error.

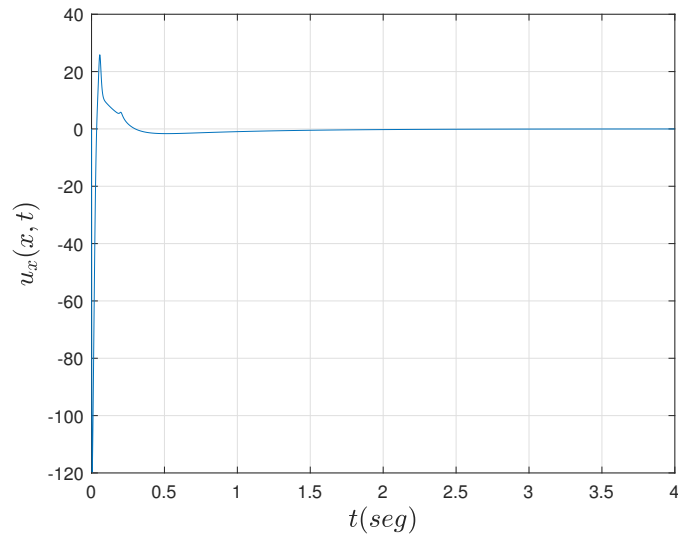


Figure 11. Control effort of the adaptive Neumann stabilizing controller.

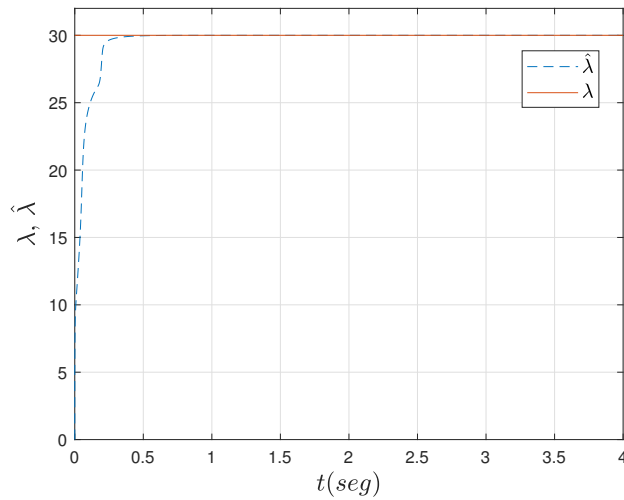


Figure 12. Progression of the convergence for $\hat{\lambda}$.

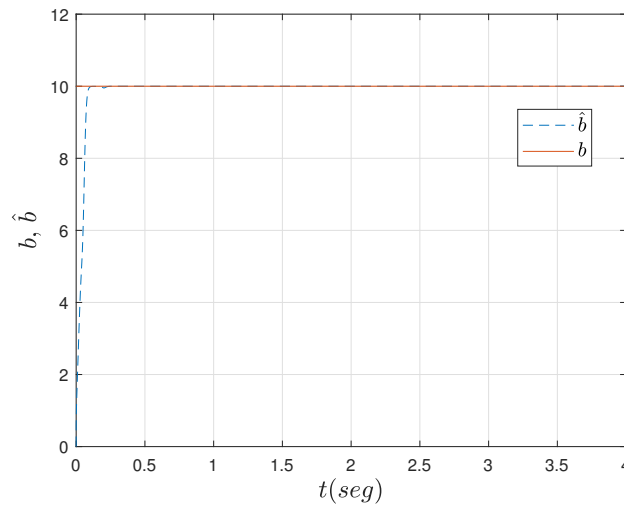


Figure 13. Progression of the convergence for \hat{b} .

8. Conclusions

In this work, an adaptive Neumann stabilizing controller is designed to a certain class of an R–A–D PDE system under the assumption of unknown constant parameters to the reaction and advection terms along with combined boundary conditions of both Robin and Neumann type. The performance of the adaptive boundary controller is evaluated via numerical simulation. Simulation results from the convergence to zero for the estimation error as well as the convergence of the parametric estimates to their true (assumed as unknowns but constant) values show that the backstepping-based adaptive boundary control scheme, particularly the certainty equivalence design with passive identifier, also works well with this certain class of PDE system. As future work, the design of an adaptive

Neumann stabilizing controller could be explored to try with boundary control of coupled R–A–D PDE systems with spatially-varying coefficients, or having the same diffusivity parameter, but with both Robin and Neumann boundary conditions or to extend our proposal to the case of distributed actuation and unknown input delay.

Author Contributions: Conceptualization, O.F.M.-G. and F.J.; methodology, O.F.M.-G. and F.J.; software, O.F.M.-G. and F.J.; validation, F.J.; formal analysis, O.F.M.-G. and F.J.; investigation, O.F.M.-G. and F.J.; data curation, O.F.M.-G. and F.J.; visualization, O.F.M.-G. and F.J.; writing—original draft preparation, O.F.M.-G. and F.J.; writing—review and editing, F.J.; supervision, F.J.; resources, F.J.; funding acquisition, F.J.; project administration, F.J. Both authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was funded by Tecnológico Nacional de México (TecNM) under project 11472.21-P and, partially, under Grant No. 34064 from the EDD 2020 program.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: Not applicable.

Acknowledgments: This work was supported by CONACYT, México, through Grant No. 456010.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

DPSs	Distributed Parameters Systems
ODEs	Ordinary Differential Equations
PDEs	Partial Differential Equations
R–A–D	Reaction–Advection–Diffusion

References

1. Evans, L.C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed.; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2010.
2. Strauss, W.A. *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd ed.; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2007.
3. Hong, K.S.; Bentsman, J. Direct Adaptive Control of Parabolic Systems: Algorithm Synthesis and Convergence and Stability Analysis. *IEEE Trans. Autom. Control* **1994**, *39*, 2018–2033. [[CrossRef](#)]
4. Orlov, Y.V. Model Reference Adaptive Control of Distributed Parameter Systems. In Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 10–12 December 1997; pp. 263–268.
5. Böhm, M.; Demetriou, M.A.; Reich, S.; Rosen, I.G. Model Reference Adaptive Control of Distributed Parameter Systems. *SIAM J. Control Optim.* **1998**, *36*, 33–81. [[CrossRef](#)]
6. Liu, W.J.; Krstic, M. Adaptive control of Burgers' equation with unknown viscosity. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* **2001**, *15*, 745–766. [[CrossRef](#)]
7. Fung, R.F.; Wu, J.W.; Lu, P.Y. Adaptive Boundary Control of an Axially Moving String System. *J. Vib. Acoust.* **2002**, *124*, 435–440. [[CrossRef](#)]
8. Krstić, M. Lyapunov Adaptive Stabilization of Parabolic PDEs-Part I: A Benchmark for Boundary Control. In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 12–15 December 2005; pp. 3164–3169.
9. Krstić, M. Lyapunov Adaptive Stabilization of Parabolic PDEs-Part II: Output Feedback and Other Benchmark Problems. In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 12–15 December 2005; pp. 3170–3175.
10. Smyshlyaev, A.; Krstić, M. Output–Feedback Adaptive Control for Parabolic PDEs with Spatially Varying Coefficients. In Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 13–15 December 2006; pp. 3099–3104.
11. Smyshlyaev, A.; Krstić, M. Lyapunov Adaptive Boundary Control for Parabolic PDEs with Spatially Varying Coefficients. In Proceedings of the American Control Conference, Minneapolis, MN, USA, 14–16 June 2006; pp. 41–48.
12. Smyshlyaev, A.; Krstić, M. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs-Part II: Estimation-based designs. *Automatica* **2007**, *43*, 1543–1556. [[CrossRef](#)]
13. Smyshlyaev, A.; Krstić, M. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs-Part III: Output feedback examples with swapping identifiers. *Automatica* **2007**, *43*, 1557–1564. [[CrossRef](#)]
14. Krstić, M.; Smyshlyaev, A. Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs—Part I: Lyapunov Design. *IEEE Trans. Autom. Control* **2008**, *53*, 1575–1591. [[CrossRef](#)]

15. He, W.; Ge, S.S. Robust adaptive boundary control of a vibrating string under unknown time-varying disturbance. *IEEE Trans. Control Syst. Tech.* **2011**, *20*, 48–58. [[CrossRef](#)]
16. Krstić, M. Adaptive Control of Anti-stable Wave PDE Systems: Theory and Applications in Oil Drilling. In Proceedings of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen, France, 3–5 July 2013; pp. 432–439.
17. Wadoo, S.A. Adaptive Control of a Hyperbolic Partial Differential Equation System with Uncertain Parameters. In Proceedings of the 15th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Anchorage, AK, USA, 16–19 September 2012; pp. 608–612.
18. Wang, S.; Diagne, M.; Qi, J. Adaptive Control of Reaction–Advection–Diffusion PDEs with Distributed Actuation and Unknown Input Delay. In Proceedings of the 2020 American Control Conference (ACC), Denver, CO, USA, 1–3 July 2020; pp. 4509–4514.
19. Aamo, O.M. Disturbance Rejection in 2×2 Linear Hyperbolic Systems. *IEEE Trans. Autom. Control* **2013**, *58*, 1095–1106. [[CrossRef](#)]
20. Li, J.; Liu, Y. Adaptive stabilization for a class of uncertain coupled parabolic equations. *Int. J. Control* **2018**, *93*, 2469–2479. [[CrossRef](#)]
21. Morris, K. *Control of Systems Governed by Partial Differential Equations in the Control Handbook*, 2nd ed.; Levine, W.S., Ed.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2011.
22. Morris, K.A. *Controller Design for Distributed Parameter Systems*; Springer: Cham, Switzerland, 2020.
23. Krstic, M.; Smyshlyaev, A. *Boundary Control of PDEs: The Backstepping Approach in the Control Handbook*, 2nd ed.; Levine, W.S., Ed.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2011.
24. Smyshlyaev, A.; Krstic, M. *Adaptive Control of Parabolic PDEs*; Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 2010.
25. Krstic, M. On global stabilization of Burgers’ equation by boundary control. *Syst. Control Lett.* **1999**, *37*, 123–142. [[CrossRef](#)]
26. Balogh, A.; Krstic, M. Burgers’ equation with nonlinear boundary feedback: H^1 stability, well posedness, and simulation. *Math. Probl. Eng.* **2000**, *6*, 189–200. [[CrossRef](#)]
27. Liu, W.J.; Krstic, M. Backstepping boundary control of Burgers’ equation with actuator dynamics. *Syst. Control Lett.* **2000**, *41*, 291–303. [[CrossRef](#)]
28. Krstic, M.; Smyshlyaev, A. *Boundary Control for PDEs: A Course on Backstepping Designs*; SIAM: Philadelphia, PA, USA, 2008.
29. Gottlieb, S.; Wang, C. Stability and convergence analysis of fully discrete Fourier collocation spectral method for 3D viscous Burgers’ equation. *J. Sci. Comput.* **2012**, *53*, 102–128. [[CrossRef](#)]
30. Temam, R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*; Springer: New York, NY, USA, 1998.
31. Cruz-Quintero, E.; Jurado, F. Boundary Control for a Certain Class of Reaction–Advection–Diffusion System. *Mathematics* **2020**, *8*, 1854. [[CrossRef](#)]
32. Ioannou, P.A.; Sun, J. *Robust Adaptive Control*; Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, USA, 1995.

Apéndice A

Soluciones para ciertas clases de PDEs

Una solución (o una solución particular) de una ecuación PDE es una función que resuelve la ecuación o, en otras palabras, la convierte en una identidad cuando se sustituye en la ecuación. Una solución se llama general si contiene todas las soluciones particulares de la ecuación en cuestión.

En cada caso se presentan los términos *no deseados* que provocan inestabilidad en cada sistema, como se menciona en la sección [4.1](#)

A.0.1. Solución particular de la RD PDE [\(3.20\)](#)

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + \lambda u(x, t). \quad (\text{A.1})$$

Primer caso de valores de frontera de Dirichlet: $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & t = 0. \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda - n^2\pi^2)t} \operatorname{sen}(n\pi x) \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) u_0(x) dx. \quad (\text{A.2})$$

El exponente en (A.2) $\lambda - n^2\pi^2$, indica la tasa de crecimiento o decremento de la solución de la PDE. Puede observarse que el sistema es estable cuando $\lambda \leq \pi^2$, e inestable cuando $\lambda > \pi^2$, siendo este último el valor (eigenvalor, valor propio) no deseado para este sistema.

Segundo caso para valores de frontera de Neumann: $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & t = 0. \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \int_0^1 u_0(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda - n^2\pi^2)t} \cos(n\pi x) \int_0^1 \cos(n\pi x) u_0(x) dx. \quad (\text{A.3})$$

En (A.3), $\lambda > \pi^2$ es el término que causa inestabilidad.

Tercer caso para valores de frontera combinados de Robin y Neumann: $0 \leq x \leq$

1

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & t = 0. \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\lambda - \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2}\right) \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2}\right) u_0(x) dx. \quad (\text{A.4})$$

Donde “exp” representa la constante de Euler e . En (A.4), $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ es el término que causa inestabilidad.

A.0.2. Solución particular de la RAD PDE (3.19)

$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \lambda u(x, t). \quad (\text{A.5})$$

Primer caso para valores de frontera de Dirichlet: $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & t = 0. \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[\left(\lambda - \frac{b^2}{4} - \pi^2 n^2 \right) t \right] \text{sen}(n\pi x) \int_0^1 \exp b(\xi - x) \text{sen}(n\pi\xi) u_0(\xi) d\xi. \quad (\text{A.6})$$

El argumento de la exponencial en (A.6) $\lambda - b^2/4 - \pi^2 n^2$, indica la tasa de crecimiento o decremento de la solución de la PDE. El sistema presenta un comportamiento inestable cuando $\lambda - b^2/4 > \pi^2$. Este último es el término no deseado para este sistema.

Segundo caso para valores de frontera de Neumann: $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) &= 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & t = 0. \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= A \exp(\lambda t) \int_0^1 \exp(bx) u_0(x) dx \\
 &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[\left(\lambda - \frac{b^2}{4} - \pi^2 n^2 \right) t \right] \frac{y_n(x)}{1 + \mu_n^2} \int_0^1 \exp \left(\frac{b(\xi - x)}{2} \right) \frac{y_n(\xi)}{(1 + \mu_n^2)} u_0(\xi) d\xi,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde

$$A = \frac{b}{e^b - 1}; \quad y_n(x) = \cos(\pi n x) + \frac{b}{2\pi n} \operatorname{sen}(\pi n x); \quad \mu_n = \frac{b}{2\pi n}$$

En (A.7), el sistema presenta un comportamiento inestable cuando $\lambda - b^2/4 > \pi^2$, siendo este el término no deseado para este sistema.

Tercer caso para valores de frontera combinados de Robin y Neumann: $0 \leq x \leq$

1

$$\begin{aligned}
 u_x(0, t) + \frac{b}{2} u(0, t) &= 0, \quad t > 0, \\
 u_x(1, t) &= 0, \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= u_0(x) \quad t = 0.
 \end{aligned}$$

Solución con $\varepsilon = 1$,

$$u(x, t) = \frac{1}{B_n} \exp \left[\left(\lambda - \frac{b^2}{4} - \mu_n^2 \right) t \right] y_n(x) \int_0^1 \exp \left(\frac{b(\xi - x)}{2} \right) y_n(\xi) u_0(\xi) d\xi \tag{A.8}$$

donde

$$B_n = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2 n^2}{b(1 + \pi^2 n^2)}; \quad y_n(x) = \cos(\mu_n x); \quad \mu_n = \frac{\pi(2n + 1)}{2}$$

En (A.8), el sistema presenta un comportamiento inestable cuando $\lambda - b^2/4 - \mu_n^2 > 0$.

Apéndice B

Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel son las soluciones a la ecuación diferencial ordinaria de orden superior (B.1), conocida como ecuación diferencial de Bessel, existen dos clases de soluciones para (B.1) llamadas como, función de Bessel de primera especie J_n y función de Bessel de segunda especie I_n . Las funciones de Bessel aparecen en descripciones matemáticas de fenómenos como la transferencia de calor, propagación de ondas electromagnéticas, flujo eléctrico, flujo de fluidos, entre otros tantos.

B.0.1. Funciones de Bessel de primera especie J_n

La función $y(x) = J_n(x)$ es solución de la siguiente ODE:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \geq 0. \quad (\text{B.1})$$

Representación en series:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!}. \quad (\text{B.2})$$

Propiedades

$$2nJ_n(x) = x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)), \quad (\text{B.3})$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \quad (\text{B.4})$$

Diferenciación

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (\text{B.7})$$

B.0.2. Funciones de Bessel de segunda especie I_n

La función $y(x) = I_n(x)$ es solución de la siguiente ODE:

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0, \quad n \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Representación en series:

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!}. \quad (\text{B.9})$$

Relación con $J_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad (\text{B.10})$$

$$I_n(ix) = i^n J_n(x). \quad (\text{B.11})$$

Propiedades:

$$2nI_n(x) = x(I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)), \quad (\text{B.12})$$

$$I_n(-x) = (-1)^n I_n(x). \quad (\text{B.13})$$

Diferenciación

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{1}{2}(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x), \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{d}{dx}(x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}(x), \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} I_n(x)) = x^{-n} I_{n+1}(x). \quad (\text{B.16})$$

Apéndice C

Desigualdades

Se presentan algunas desigualdades relevantes en el estudio de temas relacionados con la teoría de estabilidad así como para la verificación de convergencia de funciones, *i.e.*, verificar si la función bajo análisis presenta un comportamiento creciente (divergente) o decreciente (convergente).

Desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad a, b, \geq 0; \quad p \geq 1; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (\text{C.1})$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 uwdx \leq \left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w^2 dx \right)^{1/2}. \quad (\text{C.2})$$

Desigualdad de Poincaré

$$\int_0^1 w^2 dx \leq 2w^2(1) + 4 \int_0^1 w_x^2 dx, \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^1 w^2 dx \leq 2w^2(0) + 4 \int_0^1 w_x^2 dx. \quad (\text{C.4})$$

Desigualdad de Agmon

$$\max_{x \in [0,1]} |w(x, t)|^2 \leq w^2(0) + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\|, \quad (\text{C.5})$$

$$\max_{x \in [0,1]} |w(x, t)|^2 \leq w^2(1) + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\|. \quad (\text{C.6})$$

Apéndice D

Solución de (4.46) por aproximaciones sucesivas

Se ilustra el método de solución de una ecuación integral por medio del método de aproximaciones sucesivas el cual proporciona la solución de una función, en este caso $G(\xi, \eta)$, en forma de una sucesión infinita de elementos que derivan en la sumatoria dada por (D.1).

Sea la ecuación integral (4.46)

$$G(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\eta + \xi) + \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G(\rho, \tau) d\tau d\rho, \quad (4.46)$$

cuya solución viene dada por la expresión,

$$G(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta G^n(\xi, \eta), \quad (D.1)$$

dónde

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = G^{n+1}(\xi, \eta) - G^n(\xi, \eta), \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} G^{n+1}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G^n(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \\ &+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G^n(\rho, \tau) d\tau d\rho, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$G^0(\xi, \eta) = 0. \quad (\text{D.4})$$

La solución (D.1) se obtiene mediante la aplicación recursiva de la metodología de **aproximaciones sucesivas** en (D.2)-(D.4).

Para la primera iteración, en $n = 0$, la ecuación (D.3) queda como,

$$\begin{aligned} G^1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G^0(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \\ &+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G^0(\rho, \tau) d\tau d\rho, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

tomando en cuenta de (D.4) que $G^0(\xi, \eta) = 0$, los últimos dos términos de (D.5) se hacen cero, por lo que $G^1(\xi, \eta)$ queda como

$$G^1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta), \quad (\text{D.6})$$

con lo que la ecuación (D.2) resulta en,

$$\begin{aligned} \Delta G^0(\xi, \eta) &= G^1(\xi, \eta) - G^0(\xi, \eta), \\ &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

En la siguiente iteración, en $n = 1$, la ecuación (D.3) queda como,

$$\begin{aligned}
G^2(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G^1(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G^1(\rho, \tau) d\tau d\rho,
\end{aligned} \tag{D.8}$$

sustituyendo $G^1(\xi, \eta)$ de (D.6) en (D.8),

$$\begin{aligned}
G^2(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\tau + \sigma) \right] d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\rho + \tau) \right] d\tau d\rho, \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta,
\end{aligned} \tag{D.9}$$

y la ecuación (D.2) resulta en,

$$\begin{aligned}
\Delta G^1(\xi, \eta) &= G^2(\xi, \eta) - G^1(\xi, \eta), \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta - \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \right] \\
&= -\frac{1}{(2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2(\xi + \eta)\xi\eta
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Haciendo $n = 2$, la ecuación (D.3) queda como,

$$\begin{aligned}
G^3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G^2(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G^2(\rho, \tau) d\tau d\rho,
\end{aligned} \tag{D.11}$$

sustituyendo $G^2(\xi, \eta)$ de (D.9) en (D.11),

$$\begin{aligned}
G^3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\tau + \sigma) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\tau + \sigma)\tau\sigma \right] d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\rho + \tau) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\rho + \tau)\rho\tau \right] d\tau d\rho, \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^3)}(\lambda_0 + c)^3 \frac{1}{3} 2(\xi + \eta)\xi^2\eta^2, \tag{D.12}
\end{aligned}$$

con lo que la ecuación (D.2) resulta como,

$$\begin{aligned}
\Delta G^2(\xi, \eta) &= G^3(\xi, \eta) - G^2(\xi, \eta), \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^3)}(\lambda_0 + c)^3 \frac{1}{3} 2(\xi + \eta)\xi^2\eta^2 \\
&\quad - \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \right] \\
&= -\frac{1}{(2^2)(4^3)} \frac{1}{3} (\lambda_0 + c)^3 (\xi + \eta)\xi^2\eta^2. \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Para $n = 3$, la ecuación (D.3) queda como,

$$\begin{aligned}
G^4(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau G^3(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta G^3(\rho, \tau) d\tau d\rho, \tag{D.14}
\end{aligned}$$

sustituyendo $G^3(\xi, \eta)$ de (D.12) en (D.14),

$$\begin{aligned}
G^4(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_0 + c) \int_0^\eta \int_0^\tau \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\tau + \sigma) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\tau + \sigma)\tau\sigma \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2^3)(4^3)} \frac{1}{3}(\lambda_0 + c)^3 2(\tau + \sigma)\tau^2\sigma^2 \right] d\sigma d\tau \\
&+ \frac{1}{4}(\lambda_0 + c) \int_\eta^\xi \int_0^\eta \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\rho + \tau) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\rho + \tau)\rho\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2^3)(4^3)} \frac{1}{3}(\lambda_0 + c)^3 2(\rho + \tau)\rho^2\tau^2 \right] d\tau d\rho, \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^3)} \frac{1}{3}(\lambda_0 + c)^3 2(\xi + \eta)\xi^2\eta^2 \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^5)} \frac{1}{3^2}(\lambda_0 + c)^4 2(\xi + \eta)\xi^3\eta^3, \tag{D.15}
\end{aligned}$$

y la ecuación (D.2) resulta en,

$$\begin{aligned}
\Delta G^3(\xi, \eta) &= G^4(\xi, \eta) - G^3(\xi, \eta), \\
&= -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^3)} \frac{1}{3}(\lambda_0 + c)^3 2(\xi + \eta)\xi^2\eta^2 \\
&\quad - \frac{1}{(2^3)(4^5)} \frac{1}{3^2}(\lambda_0 + c)^4 2(\xi + \eta)\xi^3\eta^3 \\
&\quad - \left[-\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta) - \frac{1}{(2^2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2 2(\xi + \eta)\xi\eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2^3)(4^3)}(\lambda_0 + c)^3 \frac{1}{3} 2(\xi + \eta)\xi^2\eta^2 \right], \\
&= -\frac{1}{(2^3)(4^5)} \frac{1}{3^2}(\lambda_0 + c)^4 2(\xi + \eta)\xi^3\eta^3 \tag{D.16}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (D.7), (D.10), (D.13) y (D.16),

$$\Delta G^0(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\lambda_0 + c)(\xi + \eta), \quad (\text{D.7})$$

$$\Delta G^1(\xi, \eta) = -\frac{1}{(2)(4^2)}(\lambda_0 + c)^2(\xi + \eta)\xi\eta, \quad (\text{D.10})$$

$$\Delta G^2(\xi, \eta) = -\frac{1}{(2^2)(3)(4^3)}(\lambda_0 + c)^3(\xi + \eta)\xi^2\eta^2, \quad (\text{D.13})$$

$$\Delta G^3(\xi, \eta) = -\frac{1}{(2^3)(3^2)(4^5)}(\lambda_0 + c)^4 2(\xi + \eta)\xi^3\eta^3, \quad (\text{D.16})$$

puede observarse el siguiente patrón de comportamiento de la serie,

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = -\frac{(\xi + \eta)(\xi\eta)^n}{n!(n+1)!} \left[\frac{\lambda_0 + c}{4} \right]^{n+1} \quad (\text{D.17})$$

que, al sustituirse en (D.1), se obtiene la solución de la ecuación integral (4.46),

$$G(\xi, \eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta)(\xi\eta)^n}{n!(n+1)!} \left[\frac{\lambda_0 + c}{4} \right]^{n+1} \quad (\text{D.18})$$

Bibliografía

- [1] O. M. Aamo. Disturbance rejection in 2×2 linear hyperbolic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5):1095–1106, 2012.
- [2] O. M. Aamo and M. Krstic. *Flow control by feedback: stabilization and mixing*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [3] Aström. *Adaptive control*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1995.
- [4] A. Balogh and M. Krstić. Burgers’ equation with nonlinear boundary feedback: H^1 stability, well-posedness and simulation. *Mathematical Problems in Engineering*, 6(2-3):189–200, 2000.
- [5] A. Balogh and M. Krstic. Infinite dimensional backstepping-style feedback transformations for a heat equation with an arbitrary level of instability. *European Journal of Control*, 8(2):165–175, 2002.
- [6] H. T. Banks and H. T. Tran. *Mathematical and experimental modeling of physical and biological processes*. CRC Press, 2009.
- [7] R. G. Bartle and D. R. Sherbert. *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York, 2000.
- [8] J. Bentsman and Y. Orlov. Reduced spatial order model reference adaptive control of spatially varying distributed parameter systems of parabolic and hyperbolic types. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15(6):679–696, 2001.
- [9] M. Böhm, M. Demetriou, S. Reich, and I. Rosen. Model reference adaptive control of distributed parameter systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(1):33–81, 1998.
- [10] D. M. Boskovic, M. Krstic, and W. Liu. Boundary control of an unstable heat equation via measurement of domain-averaged temperature. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):2022–2028, 2001.
- [11] J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In *Advances in applied mechanics*, volume 1, pages 171–199. Elsevier, 1948.

- [12] J. A. Burns and D. Rubio. A distributed parameter control approach to sensor location for optimal feedback control of thermal processes. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2243–2247. IEEE, 1997.
- [13] D. Colton. The solution of initial-boundary value problems for parabolic equations by the method of integral operators. *Journal of Differential Equations*, 26(2):181–190, 1977.
- [14] E. Cruz-Quintero and F. Jurado. Boundary control for a certain class of reaction-advection-diffusion system. *Mathematics*, 8(11):1854, 2020.
- [15] R. F. Curtain and H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] L. Debnath. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [17] M. Demetriou and I. Rosen. On-line robust parameter identification for parabolic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15(6):615–631, 2001.
- [18] P. Drabek. *Elements of Partial Differential Equations*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2007.
- [19] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. Rhode Island, USA, 1998.
- [20] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Courier Corporation, 1993.
- [21] H. O. Fattorini. Boundary control systems. *SIAM Journal on Control*, 6(3):349–385, 1968.
- [22] R. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 7(4):355–369, 1937.
- [23] R.-F. Fung, J.-W. Wu, and P.-Y. Lu. Adaptive boundary control of an axially moving string system. *J. Vib. Acoust.*, 124(3):435–440, 2002.
- [24] R. Haberman. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Pearson Higher Ed., 2012.
- [25] W. He and S. S. Ge. Robust adaptive boundary control of a vibrating string under unknown time-varying disturbance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(1):48–58, 2011.
- [26] G. Helmborg. *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

- [27] T. Hillen. *Partial differential equations : theory and completely solved problems*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2012.
- [28] K. S. Hong and J. Bentsman. Direct adaptive control of parabolic systems: Algorithm synthesis and convergence and stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(10):2018–2033, 1994.
- [29] M. Humi. *Introduction to mathematical modeling*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2017.
- [30] W. H. Hundsdorfer. *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Springer, Berlin New York, 2003.
- [31] F. Incropera. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley, New York, 2002.
- [32] P. A. Ioannou. *Robust adaptive control*. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2012.
- [33] W. Kaplan. *Advanced calculus*. Addison-Wesley, Boston, 2003.
- [34] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [35] A. N. Kolmogorov. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Dover Pub, Mineola, N.Y, 1999.
- [36] M. Krstic. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley, New York, 1995.
- [37] M. Krstic. On global stabilization of burgers’ equation by boundary control. *Systems & Control Letters*, 37(3):123–141, 1999.
- [38] M. Krstic. Lyapunov adaptive stabilization of parabolic pdes-part i: A benchmark for boundary control. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3164–3169. IEEE, 2005.
- [39] M. Krstic. Lyapunov adaptive stabilization of parabolic pdes-part ii: Output feedback and other benchmark problems. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3170–3175. IEEE, 2005.
- [40] M. Krstic. Adaptive control of anti-stable wave pde systems: Theory and applications in oil drilling. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(11):432–439, 2013.
- [41] M. Krstic and A. Smyshlyaev. Adaptive boundary control for unstable parabolic pdes—part i: Lyapunov design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(7):1575–1591, 2008.
- [42] M. Krstic and A. Smyshlyaev. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. SIAM, 2008.

- [43] M. Krstic and A. Smyshlyaev. Boundary control of pdes: The backstepping approach in the control handbook, ; levine, ws, ed, 2011.
- [44] I. Lasiecka and R. Triggiani. Structural assignment of neumann boundary feedback parabolic equations: the unbounded case in the feedback loop. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 132(1):131–175, 1982.
- [45] I. Lasiecka and R. Triggiani. Stabilization and structural assignment of dirichlet boundary feedback parabolic equations. *SIAM journal on control and optimization*, 21(5):766–803, 1983.
- [46] H.-X. Li and C. Qi. *Spatio-temporal modeling of nonlinear distributed parameter systems: a time/space separation based approach*, volume 50. Springer Science & Business Media, 2011.
- [47] J. Li and Y. Liu. Adaptive stabilisation for a class of uncertain coupled parabolic equations. *International Journal of Control*, 93(10):2469–2479, 2020.
- [48] W. Liu. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(3):1033–1043, 2003.
- [49] W.-J. Liu and M. Krstić. Backstepping boundary control of burgers’ equation with actuator dynamics. *Systems & Control Letters*, 41(4):291–303, 2000.
- [50] W.-J. Liu and M. Krstić. Adaptive control of burgers’ equation with unknown viscosity. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15(7):745–766, 2001.
- [51] J. Logan. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2008.
- [52] J. Logan. *Applied Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2014.
- [53] R. McOwen. *Partial differential equations : methods and applications*. Prentice Hall, Upper Saddle, New Jersey, 2003.
- [54] K. Morris and W. Levine. Control of systems governed by partial differential equations. *The control theory handbook*, 2010.
- [55] K. A. Morris. *Controller Design for Distributed Parameter Systems*. Springer, 2020.
- [56] O. F. Murillo-García and F. Jurado. Adaptive boundary control for a certain class of reaction–advection–diffusion system. *Mathematics*, 9(18):2224, 2021.
- [57] A.-H. Najmi. *Wavelets: A concise guide*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 2012.

- [58] E. of Encyclopaedia. Diffusion. *Britannica, T.*, page <https://www.britannica.com/science/diffusion>, 2019.
- [59] S. Omatu and J. H. Seinfeld. *Distributed parameter systems: theory and applications*. Clarendon Press, 1989.
- [60] Y. Orlov. *Nonsmooth Lyapunov analysis in finite and infinite dimensions*. Springer, 2020.
- [61] Y. Orlov and J. Bentsman. Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial differentiation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2):203–216, 2000.
- [62] Y. V. Orlov. Model reference adaptive control of distributed parameter systems. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 263–268. IEEE, 1997.
- [63] A. D. Polyanin. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [64] T. I. Seidman. Two results on exact boundary control of parabolic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 11(1):145–152, 1984.
- [65] A. P. S. Selvadurai. *Partial Differential Equations in Mechanics 1 : Fundamentals, Laplace’s Equation, Diffusion Equation, Wave Equation*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [66] Y.-C. Si, C.-K. Xie, and N. Zhao. Boundary control for a class of reaction-diffusion systems. *International Journal of Automation and Computing*, 15(1):94–102, 2018.
- [67] A. Smyshlyaev. *Adaptive control of parabolic PDEs*. Princeton University Press, Princeton, 2010.
- [68] A. Smyshlyaev and M. Krstić. Explicit state and output feedback boundary controllers for partial differential equations. *Journal of Automatic Control*, 13(2):1–9, 2003.
- [69] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-d partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(12):2185–2202, 2004.
- [70] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Backstepping observers for a class of parabolic pdes. *Systems & Control Letters*, 54(7):613–625, 2005.
- [71] A. Smyshlyaev and M. Krstic. On control design for pdes with space-dependent diffusivity or time-dependent reactivity. *Automatica*, 41(9):1601–1608, 2005.

- [72] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Lyapunov adaptive boundary control for parabolic pdes with spatially varying coefficients. In *2006 American Control Conference*, pages 41–48. IEEE, 2006.
- [73] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Output-feedback adaptive control for parabolic pdes with spatially varying coefficients. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3099–3104. IEEE, 2006.
- [74] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Adaptive boundary control for unstable parabolic pdes—part ii: Estimation-based designs. *Automatica*, 43(9):1543–1556, 2007.
- [75] A. Smyshlyaev and M. Krstic. Adaptive boundary control for unstable parabolic pdes—part iii: Output feedback examples with swapping identifiers. *Automatica*, 43(9):1557–1564, 2007.
- [76] A. Smyshlyaev, Y. Orlov, and M. Krstic. Adaptive identification of two unstable pdes with boundary sensing and actuation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(2):131–149, 2009.
- [77] V. Solo and B. Bamieh. Adaptive distributed control of a parabolic system with spatially varying parameters. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*, volume 3, pages 2892–2895. IEEE, 1999.
- [78] W. A. Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [79] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, New York, 2012.
- [80] A. N. Tikhonov. *Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, New York, 1990.
- [81] R. Triggiani. Boundary feedback stabilizability of parabolic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 6(1):201–220, 1980.
- [82] R. Vazquez and M. Krstic. Boundary control for nonlinear parabolic pdes by volterra feedback linearization. In *2007 European Control Conference (ECC)*, pages 4459–4466. IEEE, 2007.
- [83] R. Vázquez Valenzuela and M. Krstic. Volterra boundary control laws for a class of nonlinear parabolic partial differential equations. *IFAC Nonlinear Control System (2004)*, pp. 1253-1258., 2004.
- [84] S. A. Wadoo. Adaptive control of a hyperbolic partial differential equation system with uncertain parameters. In *2012 15th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 608–612. IEEE, 2012.

- [85] S. Wang, M. Diagne, and J. Qi. Adaptive control of reaction-advection-diffusion pdes with distributed actuation and unknown input delay. In *2020 American Control Conference (ACC)*, pages 4509–4514. IEEE, 2020.
- [86] Wazwaz. *A First Course in Integral Equations*. World Scientific, New Jersey, 2015.
- [87] D. Zill. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, CA, 2009.