

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Control por Modos Deslizantes Difusos
Aplicados a Robótica”**

POR

Luis Ricardo Ovalle Gamboa

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Miguel Ángel Llama Leal

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (15)-TMCIE-2015

Torreón, Coahuila, México
Diciembre 2015

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Instituto Tecnológico de La Laguna

"2015. Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Torreón, Coah., 09/ Diciembre/ 2015
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/229/2015
Asunto: Autorización de impresión
de tesis.


C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Control por Modos Deslizantes Difusos Aplicados a Robótica"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (15)-TMCIE-2015**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN


DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de La Laguna


SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado
e Investigación

ILMM/RHSR



Bvd. Revolución y Czda. Cuauhtémoc s/n Col. Centro C.P. 27000
Torreón, Coah. Tel. 7051313, e-mail: wmaster@itlalaguna.edu.mx
www.itlalaguna.edu.mx



ISO 9001:2008
REG. 74 Volumen 204 1/10

Dedicatorias

A la Sra. María del Rosario Gamboa, mi madre. Por todos esos momentos en que me apoyó de una u otra manera para poder llegar a donde estoy.

A mi Padre Miguel Ovalle, quien me ha dado a lo largo de mi vida tantos consejos para superarme al máximo de mis capacidades.

Sin ellos dos sería imposible que yo estuviese donde estoy. Por eso éste y todos los trabajos de mi vida van dedicados a ellos.

Agradecimientos

Al Dr. Miguel Ángel Llama Leal, por todo el apoyo brindado, su gran dirección y su paciencia. Por todos los consejos que me dio y por siempre estar dispuesto a apoyarme.

Al Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila, por su valiosa participación y gran interés en la realización de los controladores propuestos.

Al M.C. Francisco Ruvalcaba, por el apoyo recibido en las pruebas experimentales.

Al Dr. Ricardo Emanuel Campa Cocom, por inspirarme a estudiar teoría de control.

A mis maestros durante mis estudios de maestría, por abrir el camino a un tema tan recompensante como lo es la teoría del control.

A los ingenieros Alfredo Delgado, Isaac Gandarilla, Carlos Icazbalceta, Jorge Montoya, Marco Rodríguez y Eduardo Vielma, por su comprensión, compañerismo y amistad.

Al Instituto Tecnológico de la Laguna y CONACYT por permitirme continuar con mis estudios a través de la entrega de programas de posgrado y apoyos para la investigación en México respectivamente.

Control por Modos Deslizantes Difusos aplicados a Robótica

Luis Ricardo Ovalle Gamboa

Resumen

En este trabajo de tesis se estudia la aplicación de técnicas difusas para la reducción del "chattering" en controladores por modos deslizantes. El controlador propuesto se compara contra controladores por modos deslizantes convencionales y cuasideslizantes para analizar las propiedades de reducción del *chattering* y conservación de robustez. La aplicación se lleva a cabo en un sistema carro-péndulo, donde se estudia un controlador por modos deslizantes acoplados, para después agregar una capa de cota (boundary layer) y un sistema de inferencia difusa. Además, se trabaja con un robot de dos grados de libertad comparando la técnica de control propuesta en este trabajo contra controladores de movimiento continuos, en particular el controlador tipo Slotine-Li en su versiones no adaptable y adaptable. En ambos casos la estabilidad de los controladores se estudia mediante el método directo de Lyapunov encontrando que los esquemas propuestos cumplen con la condición de alcance en su versión por modos deslizantes puros. Los resultados se validan mediante simulación y experimentos.

Fuzzy Sliding Mode Control Applied to Robotics

Luis Ricardo Ovalle Gamboa

Abstract

In the present thesis work the application of fuzzy based techniques is studied to deal with reduction of chattering in sliding mode controllers. This control scheme is compared with conventional sliding mode controllers and quasi-sliding mode controllers. The technique is applied to a cart-pole system, where a coupled sliding mode controller is proposed so that later the discontinuous control can be changed for a quasi-sliding mode controller or a fuzzy sliding mode control. Furthermore, a case of study with a two degrees of freedom robot manipulator is proposed carrying a comparative study against the so-called Slotine-Li controller in the adaptive and non-adaptive versions. In both cases the stability of the closed loop system's origin is studied in order to ensure the reaching condition of the sliding mode control is satisfied by means of Lyapunov's direct method. The results are validated in both simulation and experiment.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	2
1.1.1. Objetivos específicos	2
1.2. Organización del documento	2
2. Lógica Difusa	4
2.1. Conjuntos difusos	5
2.2. Funciones de pertenencia	6
2.3. Estructura de un sistema de inferencia difuso	10
2.3.1. Fusificación	11
2.4. Base de reglas	11
2.4.1. Mecanismo de inferencia difusa	13
2.4.2. Defusificación	14
2.5. Teorema de aproximación universal	15
3. Control por Modos Deslizantes	16
3.1. Preliminares matemáticos	16
3.1.1. Soluciones a ecuaciones diferenciales con términos de mano derecha discontinuos	17
3.1.2. Soluciones en el sentido de Filippov	19
3.1.3. Método del control equivalente	22
3.1.4. Relación entre las soluciones en el sentido de Filippov y el método del control equivalente	23
3.2. Diseño de SMCs	24
3.3. Modos deslizantes ideales y reales	28

3.3.1. <i>Chattering</i>	29
3.4. Atenuación del <i>chattering</i>	31
3.4.1. Controladores de orden superior	31
3.4.2. Soluciones basadas en observadores asintóticos	32
3.4.3. Modos cuasideslizantes	32
3.4.4. Modos deslizantes difusos	33
4. Aplicación a un Sistema Carro-Péndulo	35
4.1. Modelado dinámico	36
4.1.1. Ecuaciones de energía cinética del sistema	36
4.1.2. Ecuaciones de energía potencial del sistema	37
4.1.3. Lagrangiano del sistema	38
4.1.4. Desarrollo del modelo dinámico sin fricción	38
4.1.5. Modelo dinámico con fricción	40
4.2. Controlador FSM	41
4.2.1. Análisis de la dinámica cero	42
4.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero	43
4.2.3. Diseño del controlador	45
4.2.4. Controlador de balanceo	50
4.3. Resultados en simulación	51
4.3.1. Planta con efecto de discretización: casos de estudio 1-3	52
4.4. Resultados experimentales	59
4.4.1. Planta con parámetros corroidos: casos experimentales 1-3	60
4.4.2. Planta con péndulo chico: casos experimentales 4-6	66
4.4.3. Análisis de los resultados	72
4.4.4. Cuadro resumen de los controladores para el sistema carro-péndulo	74
5. Aplicación a un Robot de 2 GDL	76
5.1. Modelado dinámico	77
5.1.1. Propiedades útiles del modelo dinámico	79
5.2. Controladores evaluados	81
5.2.1. Controlador Slotine-Li convencional [29]	81
5.2.2. Controlador Slotine-Li adaptable [29]	84
5.2.3. Controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos	86
5.3. Resultados en simulación	90

5.3.1. Controlador Slotine-Li convencional	92
5.3.2. Controlador Slotine-Li cuasideslizante	93
5.3.3. Controlador Slotine-Li deslizando difuso	94
5.3.4. Comentarios sobre las simulaciones	96
5.3.5. Análisis comparativo entre el controlador Slotine-Li convencional y el cuasideslizante	96
5.4. Resultados experimentales	99
5.4.1. Experimentos no perturbados	100
5.4.2. Experimentos perturbados	103
5.4.3. Análisis de resultados	108
5.4.4. Cuadro resumen de los controladores	110
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	112
6.1. Conclusiones	112
6.2. Trabajo futuro	113
APÉNDICES	115
A. Parámetros del sistema carro-péndulo	115
B. Parámetros del robot de 2 gdl	116
C. Artículo sometido al Congreso Mexicano de Robótica 2015	117

Índice de figuras

2.1. Función de pertenencia triangular	7
2.2. Función de pertenencia trapezoidal izquierda	8
2.3. Función de pertenencia trapezoidal derecha	9
2.4. Función de pertenencia impulsiva	10
2.5. Diagrama a bloques de la estructura general de un sistema difuso.	10
3.1. Ejemplo del conjunto F en caso de que las trayectorias dejen la superficie S	21
3.2. Ejemplo del conjunto F en caso de que las trayectorias se mantengan en S	21
3.3. Soluciones para dos ecuaciones con lugares geométricos diferentes y la solución en el sentido de Filippov	24
3.4. Modos deslizantes ideales ($S_I(t)$) y reales ($S_R(t)$)	29
4.1. Diagrama de cuerpo libre del sistema carro-péndulo	37
4.2. Diagrama a bloques del controlador por modos deslizantes acoplados.	48
4.3. Diagrama esquemático de la ley de control por modos cuasi deslizantes acoplados.	49
4.4. Esquema de control por modos deslizantes difusos acoplados.	50
4.5. Funciones de pertenencia de entrada	53
4.6. Funciones de pertenencia de salida	53
4.7. θ en simulación del controlador por modos deslizantes puros.	54
4.8. Evolución temporal de $\dot{\theta}$ para el controlador SMC en simulación.	54
4.9. Posición traslacional del carro para el Caso 1 de simulación.	54
4.10. Velocidad del carro para el controlador discontinuo simulado.	54
4.11. u en simulación para el Caso 1.	55
4.12. Evolución temporal de $\dot{\theta}$ para el controlador CSMC en simulación	55

4.13. Velocidad angular del péndulo para el Caso 2 en simulación.	56
4.14. Posición traslacional para el controlador con capa de cota simulado.	56
4.15. \dot{x} en simulación para el Caso 2.	56
4.16. u en simulación para el controlador por modos cuasideslizantes.	56
4.17. Posición angular del péndulo para el Caso 1 de simulación.	57
4.18. Velocidad angular del péndulo par el controlador con capa de cota simulado.	57
4.19. \dot{x} en simulación para el Caso 3.	57
4.20. \dot{x} en simulación para el controlador por modos deslizantes difusos.	58
4.21. u para el controlador FSMC en simulación.	58
4.22. Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo grande	59
4.23. θ experimental para el controlador por modos deslizantes puros con parámetros conocidos.	61
4.24. Evolución temporal de $\dot{\theta}$ para el SMC en experimentos y parámetros conocidos.	61
4.25. Posición traslacional del carro para el Caso 1 real.	61
4.26. Velocidad del carro para el controlador discontinuo experimental con parámetros conocidos.	62
4.27. u para el Caso 1 real.	62
4.28. Evolución temporal de θ para el controlador por CSMC experimental con parámetros conocidos.	63
4.29. Velocidad angular del péndulo para el Caso 1 en experimentos.	63
4.30. Posición traslacional del carro para el controlador con capa de cota en experimento y parámetros conocidos.	63
4.31. \dot{x} para el Caso 2 real.	63
4.32. u en experimentos con parámetros conocidos.	64
4.33. Posición angular del péndulo para el Caso 3 experimental.	64
4.34. Velocidad angular del péndulo para el controlador con sistema difuso en experimento y parámetros conocidos.	65
4.35. \dot{x} en experimentos del controlador por modos deslizantes difusos y paráme- tros conocidos.	65
4.36. Evolución temporal de \dot{x} para el controlador FSMC en experimentos con parámetros conocidos.	65
4.37. Señal de control para el Caso 3 real.	65
4.38. θ con parámetros subestimados en experimento para el controlador por modos deslizantes puros.	67

4.39. Evolución temporal de θ con parámetros sobrestimados para el controlador SMC experimental.	67
4.40. Posición traslacional del carro para el Caso 4 real.	67
4.41. Velocidad traslacional del carro con parámetros sobrestimados para el controlador discontinuo experimental.	67
4.42. u para el Caso 4 experimental.	68
4.43. Evolución temporal de θ con parámetros sobrestimados para el controlador CSMC en experimentos.	68
4.44. Velocidad angular del péndulo para el Caso 5 experimental.	69
4.45. Desplazamiento lineal del carro con parámetros sobrestimados para el controlador con capa de cota real.	69
4.46. \dot{x} con parámetros sobrestimados para el Caso 5 experimental.	69
4.47. u experimental con parámetros sobrestimados del controlador por modos cuasideslizantes.	69
4.48. Posición angular del péndulo con parámetros sobrestimados para el caso 6 experimental.	70
4.49. Velocidad angular del péndulo con parámetros sobrestimados para el controlador por FSMC experimental.	70
4.50. \dot{x} para el Caso 6 real.	71
4.51. \dot{x} con parámetros sobrestimados para del controlador por modos deslizantes difusos en experimentos.	71
4.52. Evolución temporal de u con parámetros sobrestimados para el controlador FSMC.	71
4.53. Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo grande.	72
4.54. Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo chico.	73
5.1. Diagrama de cuerpo libre para el robot de dos grados de libertad.	77
5.2. Diagrama a bloques del controlador Slotine-Li convencional.	82
5.3. representación gráfica del controlador Slotine-Li adaptable.	84
5.4. Diagrama a bloques del controlador Slotine-Li por modos deslizantes puros.	88
5.5. Pseudograma de control Slotine-Li por modos cuasideslizantes.	89
5.6. Diagrama de control para el controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos.	90
5.7. \hat{q}_1 en simulación para el controlador Slotine-Li.	92

5.8. Error de posición para el segundo eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li convencional,	92
5.9. Evolución de τ_1 en simulación para el controlador Slotine-Li,	92
5.10. Señal de control simulada para el controlador Slotine-Li,	93
5.11. \tilde{q}_1 en simulación para el controlador Slotine-Li robusto con capa de cota,	93
5.12. Error de posición articular para el segundo eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li cuasideslizante,	93
5.13. Evolución de la señal de control para el primer eslabón en simulación del controlador por modos cuasideslizantes,	94
5.14. τ_2 en simulación para el controlador Slotine-Li cuasideslizante,	94
5.15. Resultados en simulación para el controlador Slotine-Li deslizando difuso del error de posición para el primer eslabón,	95
5.16. \tilde{q}_1 en simulación para el controlador Slotine-Li deslizando difuso,	95
5.17. Señal de control para el primer eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li deslizando difuso,	95
5.18. Evolución de τ_2 en simulación para el controlador Slotine-Li deslizando difuso,	95
5.19. Resultados del análisis comparativo del controlador Slotine-Li convencional y su versión cuasideslizante con $K_v = K_{v0}$,	97
5.20. Resultados simulados del análisis comparativo del controlador Slotine-Li convencional y su versión cuasideslizante con k_i constante,	98
5.21. Resultados experimentales para \tilde{q}_1 para el controlador Slotine-Li,	100
5.22. \tilde{q}_2 real para el controlador Slotine-Li,	101
5.23. Evolución temporal de τ_1 en experimento para el controlador Slotine-Li,	101
5.24. Señal de control para el segundo eslabón en experimentos para el controlador Slotine-Li,	101
5.25. \tilde{q}_1 real para el controlador Slotine-Li deslizando difuso,	102
5.26. \tilde{q}_2 real para el controlador Slotine-Li deslizando difuso,	102
5.27. τ_1 real para el controlador por Slotine-Li deslizando difuso,	102
5.28. τ_2 real para el controlador por Slotine-Li deslizando difuso,	102
5.29. Error articular de la primer articulación reales para el controlador Slotine-Li perturbado,	103
5.30. \tilde{q}_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li con perturbación,	104
5.31. Señal de control en tiempo real para el controlador Slotine-Li en presencia de perturbaciones,	104

5.32. τ_2 real para el controlador Slotine-Li perturbado.	104
5.33. Resultados experimentales para \hat{q}_1 para el controlador Slotine-Li adaptable.	105
5.34. \hat{q}_2 real para el controlador Slotine-Li adaptable.	105
5.35. Señal de control de la primera articulación para el controlador Slotine-Li en su versión adaptable en experimentos.	105
5.36. Evolución temporal de τ_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li adaptable.	106
5.37. $\hat{\theta}_1$ real para el controlador Slotine-Li adaptable.	106
5.38. estimado del segundo parámetro en tiempo real para el controlador Slotine-Li adaptable.	106
5.39. Evolución temporal para la variable $\hat{\theta}_2$ en el caso experimental para el controlador Slotine-Li adaptable.	106
5.40. \hat{q}_1 real para el controlador Slotine-Li deslizante difuso perturbado.	107
5.41. \hat{q}_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos perturbado.	107
5.42. Señal de control de la primera articulación en caso de experimentos perturbados para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.	108
5.43. τ_2 experimental para el controlador Slotine-Li deslizante difuso en presencia de perturbaciones.	108
5.44. Comparación de desempeño de los controladores: normas \mathcal{L}_2 de \hat{q} para los experimentos sin perturbaciones.	109
5.45. Comparación de las normas \mathcal{L}_2 de τ para los experimentos sin perturbar.	109
5.46. Normas \mathcal{L}_2 de \hat{q} para los experimentos perturbados.	110
5.47. Norma \mathcal{L}_2 de τ para los experimentos (en presencia de perturbaciones).	110

Índice de tablas

2.1. Base de reglas para un sistema de dos entradas	13
4.1. Tabla de reglas del sistema de inferencia difusa.	50
4.2. Parámetros de los controladores en simulación.	52
4.3. Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para simulación.	52
4.4. Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para simulación.	52
4.5. Casos experimentales	59
4.6. Parámetros de los controladores experimentales.	60
4.7. Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para experimentos.	60
4.8. Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para experimentos.	60
4.9. Cuadro resumen de los controladores evaluados para el sistema carro-péndulo.	75
5.1. Tabla de reglas para el sistema de inferencia difusa.	90
5.2. Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para simulación del robot de dos grados de libertad.	91
5.3. Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para simulación del el robot de dos grados de libertad.	91
5.4. Leyenda utilizada para las Figuras 5.44-5.47.	109
5.5. Cuadro resumen de los controladores evaluados para el sistema carro-péndulo.	111
A.1. Parámetros del sistema con péndulo grande.	115
A.2. Parámetros del sistema con péndulo chico.	115
B.1. Parámetros del robot manipulador.	116

C A P Í T U L O 1

Introducción

El esquema de control por modos deslizantes es tal vez uno de los esquemas de control no lineal más utilizados debido a su robustez y relativa simplicidad de diseño, cumpliendo con muchas de las características deseables para un controlador. La principal desventaja del control por modos deslizantes es la presencia de *chattering*, una consecuencia inevitable de la naturaleza discontinua del controlador y del uso de computadoras digitales para la implementación de los controladores.

La comunidad científica ha trabajado para encontrar soluciones al efecto del *chattering*, siendo las más prominentes el uso de señales de conmutación continuas como la señal saturación o la señal tangente hiperbólica, o incremento del orden de la superficie de conmutación y el uso de sistemas difusos para el cálculo de la señal de conmutación.

El concepto de modos deslizantes difusos tiene varias acepciones completamente diferentes, mientras que en algunos casos la aplicación demanda el uso de controladores difusos para alcanzar la variedad de deslizamiento [1-2], en otros casos, se implica el control por modos deslizantes de sistemas modelados por el método Takagi-Sugeno [3]. Además, existen reportes en la literatura de controladores que utilizan un control difuso supervisor para adecuar el control de deslizamiento una vez alcanzada la superficie deslizante [4-5], así como controladores que utilizan un esquema de control de naturaleza difusa para manejar la etapa de deslizamiento [6-8]. Inclusive, existen reportes de controladores difusos utilizados para cambiar la pendiente de superficies lineales de controladores difusos [6]. El alcance de estos controladores da lugar a esquemas de control por modos

deslizantes difusos adaptables [2], [6] y [9], así como esquemas neuronales por modos deslizantes difusos [10].

La diferencia entre las distintas aproximaciones al problema es notable. El paradigma de control de modelos Takagi-Sugeno no garantiza la eliminación de las señales de alta frecuencia del controlador, mientras que la aproximación de la señal de conmutación con inferencia difusa termina en un controlador con *chattering* reducido.

1.1. Objetivo general

Esta tesis tiene como objetivo la implementación de controladores por modos deslizantes difusos a sistemas robóticos, de tal forma que se evalúe la capacidad de los mismos para reducir el *chattering* inherente al esquema de control convencional.

1.1.1. Objetivos específicos

- Diseñar un controlador de movimiento por modos deslizantes difusos para un robot manipulador de dos grados de libertad.
- Comparar el rendimiento del controlador con algún otro controlador convencional que presente una estructura similar.
- Diseñar un controlador por modos deslizantes difusos para la estabilización de un sistema carro-péndulo.
- Evaluar el desempeño del controlador por modos deslizantes difusos comparándolo con alguna técnica clásica para la reducción del *chattering*.

1.2. Organización del documento

El documento consta de seis capítulos y pudieran ser vistos como tres partes generales: los Capítulos 2 y 3 sirven como marco teórico, los Capítulos 4 y 5 dan las aplicaciones en simulación y experimentación y el Capítulo 6 resume las conclusiones y comentarios.

con respecto al trabajo.

En el Capítulo 2 se discuten las propiedades básicas de los sistemas de inferencia difusa, se abordan los conceptos elementales de conjuntos difusos y se dan las bases teóricas básicas necesarias para el diseño de un sistema de inferencia difusa.

El Capítulo 3 pudiese ser interpretado como dos partes principales: la primera parte describe los conceptos teóricos básicos para el análisis de los controladores por modos deslizantes difusos y le da el mayor contenido teórico a la tesis, mientras que la segunda parte del mismo habla de conceptos de diseño e implementación de los controladores por modos deslizantes.

El Capítulo 4 habla de la aplicación de los controladores por modos deslizantes, cuasideslizantes y deslizantes difusos a un sistema carro péndulo. El punto central del capítulo es ver las ventajas que brinda el controlador por modos deslizantes difusos con respecto a sus contrapartes para y cuasideslizante.

El Capítulo 5 presenta controladores del tipo Slotine-Li en tres versiones: la convencional, la adaptable y la robusta. Estos controladores tienen una estructura básica común (compensación prealimentada de la dinámica del manipulador); así se analiza el comportamiento del controlador por modos cuasideslizantes y deslizantes difusos a manera de comparación con respecto a técnicas del tipo PD y adaptables.

El Capítulo 6 resume las conclusiones pertinentes con respecto a los controladores analizados, además de comentarios y posibles direcciones futuras para el tema tratado.

C A P Í T U L O 2

Lógica Difusa

La noción de lógica difusa data del 1965 cuando fue introducida por Lofti A. Zadeh [11].

La lógica difusa puede ser interpretada como el intento de formalizar dos capacidades humanas: la primera es la capacidad de tomar información en un ambiente de imprecisión, incertidumbre, con información incompleta y contradictoria y con parcialidad de verdad y probabilidad; y racionalizar dicha información para tomar decisiones. La segunda característica es llevar a cabo una serie de tareas mentales realizando poco o ningún cálculo [12].

La importancia que juega la lógica difusa en la ingeniería es innegable; por ejemplo, la búsqueda de contenido que contenga la palabra "*fuzzy*" en la base de datos IEEE Xplore arroja 77,788 resultados, mientras que la búsqueda del término "*probabilistic*", siendo la teoría de probabilidad la mayor competencia de la lógica difusa para manejar incertidumbres arroja 28,098 resultados.

La aplicación de técnicas de control basadas en lógica difusa resulta en controladores altamente robustos, que dependen en poca medida, o para nada, del modelo del sistema a controlar. Ejemplos de la aplicación de esquemas difusos para el control de plantas no lineales pueden ser encontrados en [13].

El presente capítulo tiene como finalidad presentar una introducción a los conceptos

básicos referentes a la lógica difusa para, en secciones posteriores, explorar la aplicación de un sistema de inferencia difusa en un controlador por modos deslizantes.

2.1. Conjuntos difusos

Para poder explicar el concepto de conjunto difuso, primero se debe hacer alusión al concepto de conjunto en el sentido clásico. De aquí en adelante a los conjuntos definidos de una manera clara y precisa se los denominará conjuntos clásicos para evitar el uso del anglicismo “*crisp*”, o alguna equivocada traducción.

Un conjunto clásico se define como un número de elementos que comparten una cierta característica o que cumplen una restricción dada [14]. Por ejemplo, el conjunto de los números reales mayores que 5: $M = \{x|x > 5\}$. Así, el número 5 no cumple con la restricción. Cabe destacar que para poder definir un conjunto de manera apropiada, las restricciones que definen al conjunto deben ser propuestas de una manera precisa, y que no se preste a una mala interpretación. Es decir, que si se propusiera un conjunto definido por $M = \{x|x \gg 3\}$ la definición del conjunto sería incorrecta debido a que dependiendo del contexto $x \gg 3$ puede implicar $3x > 3$, $10x > 3$ o incluso $100x > 3$.

La necesidad de claridad en la definición de la frontera de un conjunto se basa en el poder discernir si un elemento forma parte o no de un conjunto en cuestión. Cabe destacar que, en un conjunto clásico, la pertenencia a un conjunto es una cuestión binaria (un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto).

El concepto básico de la lógica difusa es el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso [13], es decir que la frontera de dicho conjunto no está definida de una manera precisa y por lo tanto un elemento puede pertenecer a un conjunto de manera parcial.

La exclusividad de la pertenencia o no a un conjunto es una propiedad que pudiérase no existir en el mundo real, téngase por ejemplo la temperatura de algún cuerpo; se considera que un cuerpo está caliente o no dependiendo del contexto en el que se basa la pregunta (50°C es una temperatura descomunal cuando se habla de la temperatura

corporal de alguna persona, sin embargo la temperatura es muy baja si se habla de un horno) o de la percepción del observador (el agua que alguien utiliza para bañarse puede estar muy caliente para otra persona). Estas incógnitas representan vaguedad en la información requerida y es en esta condición que la representación clásica de conjuntos no es suficiente. Es, de hecho, la capacidad de poder tomar conceptos humanos como los aquí mencionados y expresarlos con la vaguedad implícita en ellos para utilizarlos de una manera clara y concisa lo que hace que la lógica difusa tome la importancia que tiene.

El concepto de conjunto difuso hace referencia a un subconjunto de todos los posibles elementos para una cierta variable; por ejemplo, temperatura alta y el grado en que cada elemento pertenece a dicho subconjunto.

2.2. Funciones de pertenencia

La manera más común de representar un conjunto clásico es mediante una restricción o regla [14], tórnese por ejemplo el conjunto M definido en el apartado anterior. Sin embargo esta manera no es única, así pues, es posible definir el conjunto mediante una función que tome dos valores (1 y 0) para definir el conjunto, a esto se le conoce como función característica o de pertenencia del conjunto. La función característica del ejemplo mencionado quedaría dada por:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

El conjunto M es equivalente a la función de pertenencia $\mu_M(x)$, debido a que conocer la función de pertenencia es equivalente a conocer al conjunto en sí [14].

En el caso de los conjuntos difusos, el método de definición del conjunto mediante restricciones no es aplicable, ya que la frontera del conjunto no está definida de una manera clara; debido a esto, el concepto de función de pertenencia toma una mayor importancia que en el caso de los conjuntos clásicos.

Sea U el universo de discurso para una variable en particular y defínase un conjunto difuso $X \subset U$, la función de pertenencia, o membresía, de un elemento $x \in X$ se define

como $\mu_X(x) : X \rightarrow [0, 1]$ y representa el grado en que una variable pertenece o no a un conjunto difuso.

Existe un gran número de formas que puede tomar una función de pertenencia; aquí se hablará de aquellas que son más comunes en la literatura, por ejemplo en [13].

Función de pertenencia triangular

La función de pertenencia triangular se define como:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta} & \beta \leq x \leq \gamma \\ 0 & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

La función de pertenencia triangular es una función lineal que comienza con un valor de pertenencia de 0, luego el valor de pertenencia comienza a aumentar de manera lineal en un valor α hasta el valor máximo de 1 en el punto β y de ahí en adelante comienza a decrecer hasta tomar de nuevo un valor de 0 en el punto γ . La Figura 2.1 muestra un ejemplo de una función de pertenencia. Un ejemplo de la utilización de esta función de pertenencia es la caracterización del conjunto "a tiempo". Supóngase que un evento comienza a las 12 horas, entonces la pertenencia del conjunto "a tiempo" para la hora de llegada al evento comienza a tomar un valor diferente de cero a las 11:30, alcanza su máximo a las 12 horas y retoma un valor de cero para las 12:30, entonces $\alpha = 11.5$, $\beta = 12$ y $\gamma = 12.5$.

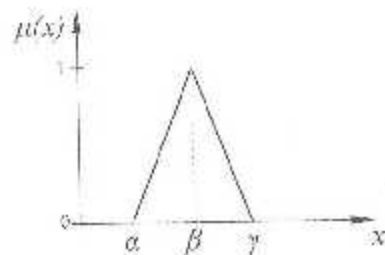


Figura 2.1: Función de pertenencia triangular

Función de pertenencia trapezoidal

La función de pertenencia trapezoidal es un caso particular de la función triangular. En esta función alguno de sus parámetros de soporte α o γ se llevan hacia el infinito; si el parámetro α se recorre, se habla de una función de pertenencia trapezoidal izquierda la cual tendrá un valor de pertenencia unitario mientras no se alcance el valor β y de ahí la pertenencia al conjunto difuso se reduce de manera lineal. Un ejemplo de la utilización de esta es la pertenencia al conjunto "muy temprano". Para un evento que comienza a las 12 horas, de las 0 horas hasta las 10 el grado de pertenencia ligado al conjunto es unitario y conforme la hora varía desde las 10 hasta las once la pertenencia baja hasta llegar a cero a las 11 horas, entonces $\beta = 10$ y $\gamma = 11$. La función de pertenencia trapezoidal izquierda se define como:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \leq \beta \\ \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta} & \beta \leq x \leq \gamma \\ 0 & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.2)$$

La Figura 2.2 muestra un ejemplo de una función de pertenencia trapezoidal izquierda.

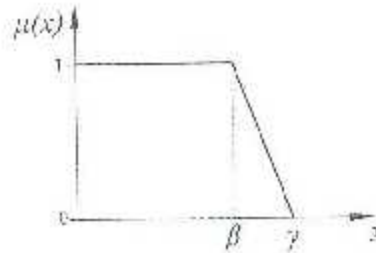


Figura 2.2: Función de pertenencia trapezoidal izquierda.

Por otro lado, si el parámetro γ es el que se modifica, se habla de una función de pertenencia derecha. Una función trapezoidal derecha tiene un grado de pertenencia igual a cero mientras no se alcance un determinado valor α . Desde este punto la pertenencia al conjunto difuso aumenta de manera lineal hasta alcanzar un grado de 1 en otro determinado valor β . Una vez alcanzado el máximo valor de pertenencia, éste no tenderá a reducirse. Un ejemplo de como pudiese ser utilizada la función de pertenencia trapezoidal es el conjunto "muy tarde". De igual manera que en el ejemplo de la función

de pertenencia trapezoidal izquierda, tómesese un evento que empieza a las 12 horas; de las 12 horas hasta las 13 la pertenencia aumenta de forma lineal alcanzando el máximo a las 13 y de ese punto en adelante la pertenencia se mantiene unitaria, entonces $\alpha = 12$ y $\beta = 13$. La función de pertenencia trapezoidal derecha se define como:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x \geq \beta \end{cases} \quad (2.3)$$

La Figura 2.3 muestra un ejemplo de una función de pertenencia trapezoidal derecha.

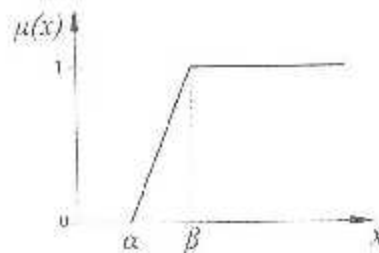


Figura 2.3: Función de pertenencia trapezoidal derecha.

Función de pertenencia impulsiva

La función de pertenencia impulsiva sólo asigna un grado de pertenencia unitario a un solo valor. Un ejemplo de su utilización es el conjunto "Exactamente las 3 en punto". La función está caracterizada por:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = x \\ 0 & \text{De otro modo} \end{cases} \quad (2.4)$$

La Figura 2.4 muestra un ejemplo de una función impulsiva.

La utilidad de funciones de pertenencia impulsivas se hace evidente en sistemas donde el tiempo que se tiene para poder realizar cálculos está restringido. La aplicación de funciones de pertenencia de salida impulsivas resulta en un algoritmo de defusificación



Figura 2.4: Función de pertenencia impulsiva

más rápido debido a que los algoritmos de defusificación utilizados se reducen a una simple multiplicación.

2.3. Estructura de un sistema de inferencia difuso

Se le denomina inferencia difusa al mapeo desde un conjunto de entrada hacia un conjunto de salida, es decir que si se conoce la relación entre un conjunto de entrada A y un conjunto de salida B , el proceso de inferencia hace referencia a la conclusión de que un conjunto de salida B' es resultado de la entrada A' . El proceso de inferencia conlleva un conjunto de pasos separados en elementos, los cuales se discutirán a detalle en esta sección. A la unión de todos estos elementos se le llama sistema de inferencia difuso [14].

La figura 2.5 muestra la estructura básica de un sistema de inferencia difuso,

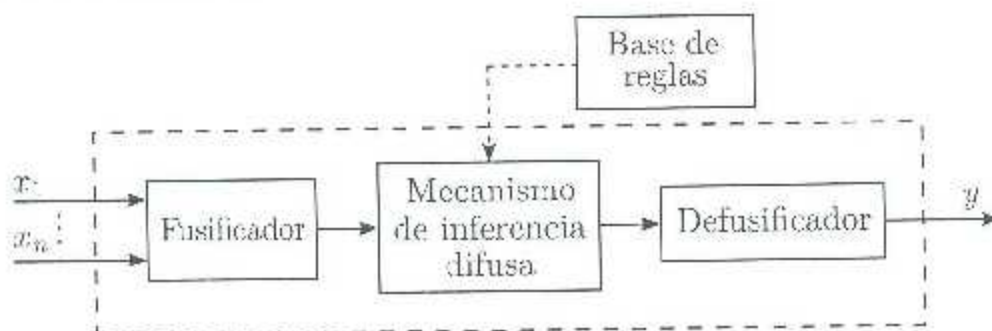


Figura 2.5: Diagrama a bloques de la estructura general de un sistema difuso.

El proceso de inferencia se describe a continuación:

- Una entrada clásica se mapea hacia un conjunto difuso en el fusificador.
- Se evalúa un conjunto de reglas en las que se contiene el conocimiento heurístico del sistema.
- Se lleva a cabo un proceso de implicación en el mecanismo de inferencia difusa para obtener un conjunto difuso de salida.
- El conjunto difuso de salida se mapea hacia un dominio clásico por el defusificador, es decir que se realiza el proceso inverso a aquel realizado por el fusificador.

2.3.1. Fusificación

El proceso de fusificación se refiere al proceso mediante el cual se asigna un grado de membresía a un conjunto difuso dada una entrada clásica. En general el proceso de fusificación arroja un número difuso, que se pudicse interpretar como un conjunto de valores de membresía que tienen un máximo en el valor de entrada y la membresía del conjunto difuso de entrada se disminuye conforme los elementos se alejan de la medición de entrada; sin embargo este resultado resulta demasiado intensivo matemáticamente para ser usado en algunas aplicaciones. Así, utilizando el método de fusificación imputiva se obtienen valores escalares para la pertenencia a los conjuntos que son equivalentes a la evaluación de la función de pertenencia de entrada correspondiente.

2.4. Base de reglas

Una de las más provechosas características de un sistema de inferencia difuso es la capacidad de embeber o incrustar conocimiento de un experto en el diseño del sistema; esto se lleva a cabo mediante un conjunto de enunciados del tipo *Si... Entonces* los cuales reciben el nombre de reglas. Las reglas utilizan el concepto de variable lingüística, por lo que se define el concepto a continuación:

Una variable lingüística es aquella que puede tomar palabras en lenguaje natural asociadas a valores; un ejemplo sería la variable "temperatura", la cual puede tomar como valores las palabras "baja", "media" o "alta". Una variable lingüística es definida por los siguientes parámetros:

- X: Nombre de la variable lingüística.
- T: Conjunto de valores lingüísticos que la variable X puede tomar
- U: Universo de discurso de la variable
- M: Regla semántica para relacionar cada valor lingüístico en T con un conjunto difuso en U.

Las reglas difusas por lo general se aplican a variables lingüísticas, es decir, dado un número de variables lingüísticas un ejemplo de regla difusa estaría dado por:

Si X_1 es T_1 y X_2 es T_1 y ... y X_n es T_1 Entonces Y_1 es T_1 y Y_2 es T_2 y ... y Y_m es T_1 .

A cada par variable-valor lingüístico se le conoce como antecedente [13]. Así como a la palabra "y" se le llama conector, existe otro conector como la operación "o", al igual que en la lógica booleana. Los conectores "y" y "o" representan intersección y unión respectivamente. Cabe hacer mención de que el número de reglas que utilice un sistema crece con el número de entradas al sistema y con el número de valores lingüísticos que cada entrada pueda tomar; si se tienen n entradas y cada una puede tomar un número m_i de valores lingüísticos, el número de reglas que un sistema difuso debe tener estará dado por $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$.

Por otra parte, a la sección a la derecha de la palabra *Entonces* se le conoce como consecuente [13]. Dependiendo de la estructura del consecuente, a los sistemas difusos se les clasifica en dos tipos principales:

- a) Sistemas tipo Mamdani: aquellos cuyos consecuentes son conjuntos difusos
- b) Sistemas tipo Takagi-Sugeno: aquellos donde el consecuente son funciones de alguna variable.

En este trabajo nos enfocaremos a la descripción de los sistemas del tipo Mamdani debido a que el proceso de diseño de controladores con sistemas Takagi-Sugeno implican ciertas cuestiones que no se abordan en los trabajos reportados en capítulos posteriores.

Recibe el nombre de base de reglas el conjunto de expresiones *Si... Entonces* que relacionan a todas las posibles combinaciones de valores lingüísticos de las entradas del sistema así como el valor lingüístico que dichas combinaciones implican para la salida.

Es en la base de reglas que se dice se ha embocóido el conocimiento de un experto para el diseño del sistema difuso. La base de reglas es comúnmente representada como una tabla o matriz que representa en cada uno de sus elementos la relación de un valor lingüístico de cada una de sus entradas, mientras que el valor presente en cada celda representa el consecuente de la regla en cuestión. La tabla en cuestión recibe el nombre de *Fuzzy Associative Memory* (FAM) o simplemente tabla de reglas difusas. La Tabla 2.1 representa una manera en la que se puede expresar la base de reglas para un sistema que consta de dos entradas y cada una de ellas se compone de cinco valores lingüísticos para la entrada, además de constar de una variable de salida compuesta de cinco valores lingüísticos.

Tabla 2.1: Base de reglas para un sistema de dos entradas

$x_2 \backslash x_1$	NG	NC	C	PC	PG
NG	A	B	B	D	E
NC	A	B	C	D	E
C	A	B	C	D	E
PC	A	B	C	D	E
PG	A	B	C	D	E

2.4.1. Mecanismo de inferencia difusa

En el mecanismo de inferencia difusa, como se explica en [14] se utilizan principios de lógica difusa para combinar las reglas hacia un mapeo que lleva de un conjunto difuso de entrada A^* hacia un conjunto difuso de salida B^* . En general se necesita un mecanismo que permita inferir una salida B^* dada la evaluación de múltiples reglas en un conjunto de entrada A^* . Los mecanismos de inferencia difusa se dividen en dos grandes grupos dependiendo de la manera en que se manejan las reglas: la inferencia basada en composición y la inferencia basada en reglas individuales.

En los mecanismos de inferencia basados en composición se toman todas las reglas propuestas y se combinan en una sola relación difusa y por lo tanto se maneja como si se hablara de una sola regla.

En los mecanismos de inferencia basados en reglas individuales cada regla en la base de

reglas determina un conjunto difuso de salida para después combinar todos los conjuntos mediante uniones o intersecciones. Los mecanismos basados en reglas individuales, en particular la inferencia producto, son las más utilizadas debido a su simplicidad y el bajo tiempo de cálculo. Es debido a esto que lo restante de esta sección se dedicará a mencionar la estructura y características de la máquina de inferencia producto.

Máquina de inferencia producto

La máquina de inferencia difusa producto arroja un conjunto difuso de salida μ_B dado una colección de conjuntos de entrada μ_{A_i} evaluados en x'_i , y un número de reglas n_R dado por la expresión: $\mu_{D^*}(y) = \max_{k=1, \dots, n_R} \{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x'_i) \mu_{B_k}(y)\}$.

2.4.2. Defusificación

Una vez obtenido el conjunto difuso de salida, el problema que queda por mencionar es el de realizar el proceso inverso al de la fusificación, el cuál recibe el nombre de defusificación. Es decir, cada un conjunto difuso se debe encontrar un valor clásico que pudiese ser utilizado para tareas definidas en el espacio clásico. En la literatura se encuentra una amplia colección de técnicas para defusificar la salida de la máquina de inferencia como las propuestas en [13], sin embargo, nos enfocaremos a la explicación de aquella que es más ampliamente utilizada, la técnica de promedio de centros.

Promedio de centros

El promedio de centros es una aproximación del método de centro de gravedad, que utiliza una colección de integrales las cuales resultan computacionalmente intensivas, i.e. que requiere muchos cálculos, y representa como su nombre lo indica, el promedio de los centros de los M conjuntos difusos de los que se compone $\mu_{D^*}(y)$. El método resulta en expresiones del tipo:

$$y^*(x^*) = \frac{\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} \bar{y}^{i_1 \dots i_n} w_{i_1 \dots i_n}(x^*)}{\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} w_{i_1 \dots i_n}(x^*)} \quad (2.5)$$

donde $\bar{y}^{i_1 \dots i_n}$ es el centro del $i_1 \dots i_n$ -ésimo conjunto difuso del que se compone la salida a defusificar y $w_{i_1 \dots i_n}$ es su altura, mientras que $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto

de valores clásicos de entrada. Como puede verse, en este método no importa la forma del conjunto de salida, pues sólo se toma en cuenta el centro y altura del conjunto; por esta razón es muy rápido en tiempo real y de una buena aproximación.

Luego, un sistema de inferencia difusa con funciones de pertenencia de entrada triangulares y de salida impulsivas, inferencia producto y defusificador promedio de centros, la salida real de un sistema difuso dado puede ser escrita como:

$$y = \frac{\sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} \bar{y}^{i_1 i_2 \cdots i_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i) \right)}{\sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i) \right)} \quad (2.6)$$

donde $\bar{y}^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ es el $i_1 \cdots i_n$ -ésimo conjunto difuso de la conclusión dada por la máquina inferencial. Observe la diferencia entre 2.6 y 2.5. En la segunda expresión se observa un producto, lo que representa la máquina de inferencia utilizada.

2.5. Teorema de aproximación universal

La más importante característica de los sistemas difusos es que éstos son capaces de aproximar cualquier función no lineal a una precisión arbitraria dependiendo de las características de sus funciones de pertenencia. A esta característica se le denomina comúnmente aproximación universal. Es debido a la aproximación universal que los sistemas de control basados en lógica difusa no requieren, en general, el modelo del sistema a controlar. A continuación se presenta el enunciado del teorema, mientras que su prueba puede ser encontrada en [13].

Teorema 1.1: Aproximación universal: *Supóngase que el universo de discurso U es un conjunto compacto en \mathbb{R}^n . Entonces, para cualquier función real continua $g(x)$ en U y un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un sistema difuso $f(x)$ en la forma de (2.6) tal que*

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \epsilon \quad (2.7)$$

C A P Í T U L O 3

Control por Modos Deslizantes

El esquema de control por modos deslizantes tiene muchas ventajas a comparación de otros esquemas debido a su naturaleza discontinua. El control suele ser ampliamente robusto y resulta en la reducción del orden del sistema [16].

Es, sin embargo, la misma naturaleza discontinua del controlador la que cae por su más grande desventaja, el fenómeno del *chattering*. Así, también la naturaleza discontinua del controlador hace el análisis del mismo más complejo que el caso de sistemas dinámicos continuos.

El presente capítulo se organiza de tal manera que el problema del análisis se discute primero para dar rigor matemático a la descripción del problema. Luego se discuten las condiciones necesarias para que un controlador sea por modos deslizantes. Se continúa con una discusión de la aplicabilidad de los modos deslizantes en un sistema real y se discute el problema del *chattering*. Al final del capítulo se discuten los métodos más comunes para la atenuación del *chattering* en controladores por modos deslizantes convencionales discutiendo las diferencias entre estos.

3.1. Preliminares matemáticos

La aplicación de técnicas para estudiar la estabilidad de ecuaciones diferenciales no lineales parte de la suposición de que la solución a dicha ecuación existe y es única.

Los teoremas de existencia y unicidad para dichos sistemas suponen que las ecuaciones cumplen con la condición Lipschitz al menos de manera local en el conjunto de interés.

Debido a la naturaleza discontinua del controlador por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) se asegura que el origen es un punto de discontinuidad, por lo que el estudio de existencia y posible unicidad de soluciones de sistemas discontinuos es necesario para poder aplicar las técnicas de estudio de estabilidad a algún sistema controlado por medio de la técnica de SMC.

3.1.1. Soluciones a ecuaciones diferenciales con términos de mano derecha discontinuos

Considere la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x); \quad (3.1)$$

una función $x(t)$ es denominada una solución de (3.1) siempre y cuando esta sea continuamente diferenciable y se cumpla que $x(t) = \int f(x)dt$ para un intervalo definido. Esta definición no es válida para ecuaciones diferenciales donde la función $f(x, t)$ no es continua, a esto se refiere la expresión de términos de mano derecha discontinuos.

Para ejemplificar lo anterior, considere el sistema $\dot{x} = 1 - 2\text{sign}(x)$. Para valores negativos de x , el sistema se reduce a $\dot{x} = 3$ y por lo tanto la solución de éste sería $x = 3t + c_1$. Por otro lado, para los valores de x positivos el sistema se reduce a $\dot{x} = -1$, esto implica que la solución está dada por $x = -t + c_2$. Conforme t se incrementa, las soluciones se acercan al valor $x = 0$, alcanzándolo en un tiempo finito, por lo que $x = 0$ debería ser parte de la solución del sistema. Esto puede ser fácilmente comprobado por medio de simulaciones, aunque se debe tener cuidado con el efecto que el periodo de muestreo tiene sobre el sistema; mientras más grande sea el periodo de muestreo, el sistema tiende a oscilar alrededor de cero con una magnitud que depende del periodo de muestreo o paso de integración, teniendo como resultado la solución $x = 0$ en el caso continuo. Sin embargo, el sistema con $x = 0$ se reduce a $\dot{x} = 1$, por lo que la solución del sistema para este caso sería $x = t + c_3$ y por lo tanto $x = 0$ no puede formar parte de la solución a excepción de un número finito de puntos.

Es por sistemas, como el ejemplo anterior, que la definición de soluciones a ecuaciones diferenciales debe ampliarse para poder manejar ecuaciones con términos de mano derecha discontinuos. En [17] se toman en cuenta los siguientes requerimientos para que una función $x(t)$ sea considerada una solución al problema citado:

1. La solución debe degradarse a la usual si se aplica a ecuaciones diferenciales con términos de mano derecha continuos.
2. Para la ecuación $\dot{x} = f(t)$, las soluciones deben solamente ser las funciones $x(t) = \int f(t)dt$.
3. Dada una condición inicial $x(t_0)$ en una región de la solución, esta debe de existir al menos para $t > t_0$ y continuar hasta la frontera de dicha región o hasta el límite cuando $t \rightarrow \infty$.
4. La definición de solución debe servir para un gran número de procesos físicos.
5. El límite de una secuencia uniformemente convergente de soluciones debe ser también una solución.
6. Bajo un cambio de variables una solución debe ser transformada a una solución.

La definición de solución como una función absolutamente continua que satisface (3.1) en casi todos los puntos no es aplicable en ecuaciones cuyos términos de mano derecha son discontinuos a través de una línea o superficie S . Si las trayectorias del sistema son atraídas hacia S por un lado, pero luego la abandonan por el otro, la definición puede aún ser aplicada. Éste no es el caso para sistemas cuyas trayectorias se atraen por ambos lados hacia la superficie, debido a que la definición tradicional no brindaría información del comportamiento del sistema cuando este se encuentre en la superficie de discontinuidad, como es el caso del esquema de control por modos deslizantes, y por lo tanto se requieren herramientas que describan el comportamiento en la región antes mencionada. A las herramientas empleadas se les conocen como métodos de continuación y en seguida se abordarán los dos métodos más socorridos en la literatura: Las soluciones en el sentido de Filippov y el método del control equivalente.

3.1.2. Soluciones en el sentido de Filippov

La idea principal de las soluciones en el sentido de Filippov [17] (F.S. por sus siglas en inglés), es el reducir las ecuaciones diferenciales en inclusiones diferenciales, las cuales son expresiones de la forma:

$$\dot{x} \in F[x, t], \quad (3.2)$$

las cuales son funciones absolutamente continuas definidas sobre un intervalo. Además la solución para (3.1) es también una solución a la inclusión diferencial (3.2). Una de las piezas clave del método es la definición del conjunto $F[x, t]$ en los puntos donde la función $f(x, t)$ es discontinua y por lo tanto el conjunto en cuestión aproximaría el comportamiento de un proceso que describa un sistema real, a excepción quizá de un conjunto de métrica cero (un conjunto T tiene métrica cero si, para cada $\epsilon > 0$ existen intervalos abiertos I_1, I_2, \dots, I_n , con $I_n = (a_n, b_n)$, tal que $T = \cup_{i=1}^n I_i$, y además $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \epsilon$), el cual se denomina M .

En los puntos de continuidad el conjunto F consiste solamente de un punto de la función f y la solución encontrada se reduce a la clásica. Si el punto en cuestión cae sobre el conjunto M y además forma parte de dos o más dominios G_1, \dots, G_k (los sentidos en los que apuntan las trayectorias del sistema), entonces el conjunto F será un segmento, un polígono convexo o un poliedro con vértices dados por $f_i(t, x)$ $i \leq k$, donde

$$f_i(t, x) = \lim_{(t, x^*) \in G_i, x^* \rightarrow x} f(t, x^*), \quad (3.3)$$

donde x^* es el estado del sistema, y x es un punto de discontinuidad. Todos los puntos de $f_i(t, x)$ pertenecen a F , pero no es necesario que todos sean vértices.

Ahora, si la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave $S = \{\varphi(x) = 0\}$, la cual es separada por los dominios G^+ y G^- , para cualquier instante de tiempo $t = \text{constante}$ para un punto x^* que se aproxima al punto $x \in S$ desde cualquiera de los dominios, la función f tendrá en el límite los valores:

$$\lim_{\substack{x^* \in G^+ \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) = f^-(t, x) \quad \lim_{\substack{x^* \in G^- \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) = f^+(t, x), \quad (3.4)$$

Luego el conjunto \bar{F} es un segmento lineal que une los extremos de los vectores que van desde x hasta f^- y f^+ .

Si para $t_1 < t < t_2$ el segmento formado yace en un costado de un plano P tangente a la superficie S en el punto x , las soluciones cruzarán un lado de la superficie y pasarán al otro (ver Figura 3.1). Lo anterior implica que las soluciones del sistema apuntan hacia el mismo sentido en relación a la superficie de discontinuidad; sin importar por donde se aproximen a esta, las soluciones tenderán a abandonarla.

Por otro lado, si el segmento interseca al plano P , en la intersección se genera el vector $f^0(t, x)$ el cual determina la velocidad del movimiento a través de la superficie S en el espacio de estados. Esto significa que la función $x(t)$, la cual satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(t, x), \quad (3.5)$$

es una solución a la ecuación (3.1) por virtud de la definición (3.2). Aún más, si las condiciones $f^0 \neq f^-$, $f^0 \neq f^+$ son satisfechas, la solución recibe el nombre de movimiento deslizante.

Una función que yace en el dominio G^+ (o G^-) para $t < t_1$ y satisface la ecuación (3.1), o de lo contrario yace en la superficie S y satisface la ecuación (3.5), es por lo tanto una solución de (3.1) para todo t .

Considérense las funciones f_N^- y f_N^+ las cuales son proyecciones normales a la superficie S de los vectores f^- y f^+ dirigidas hacia G^+ . Si los vectores f^- y f^+ se dirigen hacia la superficie S desde ambos lados, i.e. $f_N^- > 0$ y $f_N^+ < 0$, entonces en una vecindad de la superficie S esta se vuelve atractiva y por lo tanto cualquier trayectoria que se encuentre en la superficie no podrá abandonarla, implicando que una solución, la cual en un tiempo t_1 pase por la superficie S , deberá encontrarse sobre $S \forall t \geq t_1$.

Si los vectores se dirigen en sentido contrario, i.e. $f_N^- < 0$ y $f_N^+ > 0$, el comportamiento del sistema sería equivalente al de una silla de montar, es decir que si las trayectorias comienzan en S estas se encontrarán sobre la superficie, aunque con cualquier perturbación que las saque de S serán atraídas hacia los dominios G^+ o G^- alejándose de la superficie.

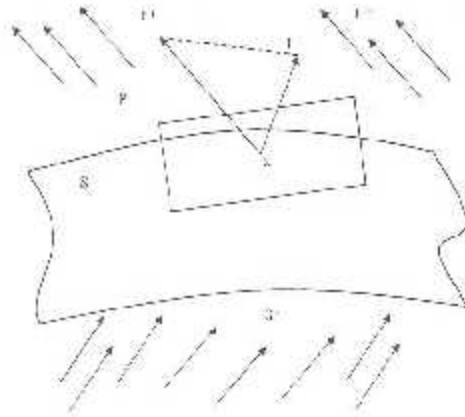


Figura 3.1: Ejemplo del conjunto F en caso de que las trayectorias dejen la superficie S .

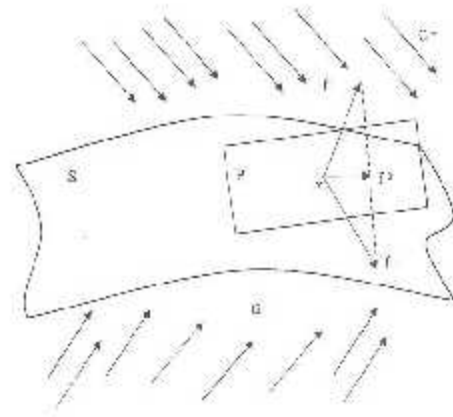


Figura 3.2: Ejemplo del conjunto F en caso de que las trayectorias se mantengan en S .

El segmento que une a las puntas de los vectores f^+ y f^- está dado por la expresión:

$$f^0 = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- \quad \alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+} \quad (3.6)$$

con la definición de α encontrada desde la condición $f_N^0 = \alpha f_N^+ - (1 - \alpha) f_N^- = 0$. Nótese entonces que las soluciones se encuentran en el mínimo conjunto convexo aceptable.

Si $\nabla\varphi \neq 0$ entonces se pueden formular las siguientes expresiones:

$$f_N^- = \frac{\nabla\varphi \cdot f^-}{|\nabla\varphi|}, \quad f_N^+ = \frac{\nabla\varphi \cdot f^+}{|\nabla\varphi|}, \quad \alpha = \frac{\nabla\varphi \cdot f^-}{\nabla\varphi \cdot (f^+ - f^-)} \quad (3.7)$$

Las soluciones entonces están dadas por dos segmentos: en la región donde la función f es continua la solución debe ser la usual, mientras que en la región de discontinuidad la solución deberá cumplir con la ecuación:

$$\dot{x} = f^0(t, x). \quad (3.8)$$

Unicidad de las soluciones en el sentido de Filippov

En [17] se dan las condiciones necesarias para la unicidad de las soluciones encontradas por el método de continuación de Filippov. En el presente documento estos resultados se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 2.1: *Sea b el conjunto que contiene a las soluciones de algún sistema con términos de mano derecha discontinuos y supóngase que el sistema presenta discontinuidades en una superficie S definida como $S = \text{boundary}(G^+) = \text{boundary}(G^-)$, y además $S \in C^2$. Así, supóngase que j^+ apunta hacia G^+ o j^- apunta hacia G^- , entonces existe una solución única en el sentido de Filippov.*

Esta proposición habla de los casos en los que las trayectorias del sistema pasan de un dominio a otro a través de la superficie de discontinuidad, además del caso de movimiento deslizante estable (aquel en que las trayectorias del sistema se ven atraídas hacia la superficie de discontinuidad). Es precisamente el último caso el que será de vital importancia para el trabajo, debido a que éste representa el comportamiento de un sistema controlado por modos deslizantes.

3.1.3. Método del control equivalente

El método de continuación de Filippov es de naturaleza geométrica, por lo cual las soluciones que este arroja, en general, son difíciles de aplicar para cuestiones de análisis. Es además por la naturaleza geométrica del método que el significado físico de las soluciones se puede perder. Así, las soluciones en el sentido de Filippov pueden no ser soluciones alcanzables por el sistema cuando se tiene una señal de control.

El método del control equivalente, según se explica en [19], se basa en encontrar soluciones en un “conjunto factible” para el vector de velocidad, i.e. que siempre existe una acción de control continua que es equivalente a la acción de control discontinua.

Desde un punto de vista geométrico, el método implica el remplazo de la ley de control en la superficie de discontinuidad por una ley continua, tal que el vector de velocidad yacza en el plano tangencial a la superficie. Cabe mencionar que el método sólo se aplica a sistemas que tienen movimientos deslizantes estables, i.e. que los dominios

G^+ y G^- apunten hacia la superficie de discontinuidad.

Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)) \quad (3.9)$$

donde f es una función (posiblemente vectorial) y $u_i(t, x)$ es una función escalar discontinua solamente en una superficie suave $S_i = \{\varphi_i = 0\}$. Las intersecciones e incluso coincidencias de las superficies no están restringidas.

En los puntos que pertenecen a m superficies, supóngase que son las primeras m , se supone que:

$$\dot{x} = f(t, x, u_1^{eq}(t, x), \dots, u_m^{eq}(t, x), u_{m+1}(t, x), \dots, u_r(t, x)) \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.10)$$

donde u_i^{eq} representa el i -ésimo control equivalente y se define tal que el valor de f sea tangente a las superficies S_1, \dots, S_m ; además el valor u_i^{eq} está contenido en el intervalo cerrado $[u_i^-, u_i^+]$. Luego, las funciones u_i^{eq} se determinan por el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\nabla \varphi_i \cdot f(t, x, u_1^{eq}(t, x), \dots, u_m^{eq}(t, x), u_{m+1}(t, x), \dots, u_r(t, x)) = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

La solución entonces se compone de dos partes: para los casos en que u_1, \dots, u_m son continuos, la solución será la usual, sin embargo en los puntos de discontinuidad la solución se define como aquella definida en el sentido usual, aunque no satisface (3.1), sino (3.10).

3.1.4. Relación entre las soluciones en el sentido de Filippov y el método del control equivalente

Existe otra interpretación geométrica para el control equivalente que es de gran utilidad cuando se habla de la relación entre este método y las soluciones en el sentido de Filippov.

Hágase variar una o más de las variables de control del sistema entre sus límites, i.e. $u_i = [u_i^-, u_i^+]$, el control equivalente será definido como el punto en que el lugar

geométrico de la función $f(t, x, v, \dots, u_r)$ intersección al plano tangencial de la superficie de discontinuidad, como se ejemplifica en la figura 3.3.

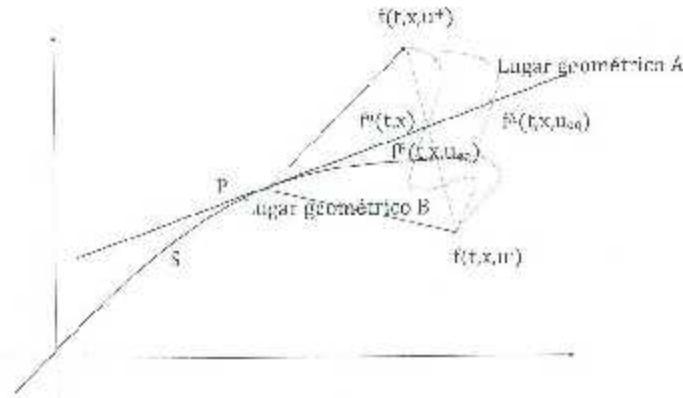


Figura 3.3: Soluciones para dos ecuaciones con lugares geométricos diferentes y la solución en el sentido de Filippov

En general, las soluciones en el sentido de Filippov y el método de control equivalente arrojan soluciones distintas al sistema (3.1) como se puede apreciar en la Figura 3.3, sin embargo en [18] se realiza el análisis para un sistema afín en el control y se encuentra que las soluciones son las mismas. Así, se dice que para sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(t, x) + b(t, x)u(t, x) \quad (3.12)$$

con $u(t, x)$ como el único elemento discontinuo del sistema, entonces las soluciones son iguales. Ahora, para el control de sistemas robóticos, los cuales son generalmente modelados por las ecuaciones de movimiento Euler y Lagrange, los sistemas suelen ser de la forma (3.12).

3.2. Diseño de SMCs

Se dice que un sistema se encuentra en modos deslizantes si este es controlado de tal forma que su comportamiento es discontinuo sobre una superficie continuamente

diferenciable y se asegura que las trayectorias experimenten movimientos deslizantes estables. Para poder asegurar que un sistema sea controlado en modo deslizante, se deben asegurar ciertas condiciones que implican la existencia de dicho modo en el comportamiento del sistema.

Como se mencionó en secciones pasadas, el movimiento deslizante estable es aquel que provoca que la superficie de discontinuidad (de aquí en adelante denominada superficie de deslizamiento, debido a que el movimiento deslizante se lleva a cabo sobre ella) adquiera la característica de ser invariante, i.e. que toda trayectoria que comienza en esta no podrá abandonarla, además de atractiva, debido a que las trayectorias en ambos lados de esta apuntan hacia la superficie.

El cumplimiento de estas condiciones es comprobable mediante el segundo método de Lyapunov. Sin embargo, al momento de realizar el análisis de estabilidad, la declaración de estabilidad asintótica no resulta suficiente [19], debido a que se implica que las trayectorias alcanzarán la superficie de deslizamiento conforme $t \rightarrow \infty$, por lo que el movimiento deslizante jamás se lleva a cabo. Así pues, asegurando la tendencia en tiempo finito de las trayectorias hacia el conjunto S , se asegura el establecimiento del movimiento deslizante. Aún más, si la superficie de deslizamiento se diseña de tal manera que $\varphi = 0 \Rightarrow x \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces se asegura estabilidad asintótica del sistema en general.

Para la existencia de un modo deslizante generalmente se habla de dos condiciones: la condición de alcance y la condición de deslizamiento. La condición de alcance generalmente trata con el problema de atractividad de las trayectorias hacia la superficie deslizante, es aquí donde la cadencia de la función φ hacia cero en tiempo finito es de suma importancia. A continuación se presentan las condiciones de deslizamiento y alcance y se muestra una prueba del alcance en tiempo finito de las trayectorias del sistema al conjunto S .

Proposición 2.2: Condición de deslizamiento [19]: Sea $\varphi(x)$ una función continuamente diferenciable cuya desaparición implique el modo deslizante de un sistema; el sistema se deslizará a través de la superficie S si $\varphi(x)\dot{\varphi}(x) < 0$.

La condición implicaría que el origen $\varphi(x) = 0$ sea asintóticamente estable con la

función candidata de Lyapunov

$$V(\varphi(x)) = \frac{1}{2}\varphi^2(x)$$

y su derivada

$$\dot{V}(\varphi) = \varphi(x)\dot{\varphi}(x) < 0. \quad (3.13)$$

Una de las condiciones para que exista la estabilidad asintótica en el origen de algún sistema es que este sea atractivo. Así, al alcanzar la superficie las trayectorias no podrán escapar de la misma y se garantizará que el movimiento deslizante se conserve.

Proposición 2.3: Condición de alcance [19]: *Sea $\varphi(x)$ una función continuamente diferenciable cuya desaparición implique el modo deslizante de un sistema, se dice que la superficie deslizante $\varphi = 0$ se alcanza en un tiempo finito si $\varphi(x)\dot{\varphi}(x) < -\eta|\varphi|$.*

La proposición 2.3 es verificable tomando la función candidata de Lyapunov:

$$V(\varphi(x)) = \frac{1}{2}\varphi^2(x) \quad (3.14)$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada. Tomando su derivada temporal se obtiene:

$$\dot{V}(\varphi(x)) = \varphi(x)\dot{\varphi}(x) < -\eta|\varphi|, \quad (3.15)$$

la cual es definida negativa, por lo que se asegura una convergencia asintótica del conjunto $\varphi(x) = 0$. Ahora, manipulando la desigualdad de (3.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi \frac{d\varphi}{dt} &< -\eta|\varphi| \\ \text{sign}(\varphi)d\varphi &< -\eta dt \\ \int_c^t \text{sign}(\varphi)d\varphi &\leq -\int_c^t \eta dt \\ |\varphi(t)| - \varphi(0) &\leq -\eta t. \end{aligned}$$

De la última desigualdad se puede encontrar una expresión analítica para la cota del tiempo en el que φ tomará por primera vez el valor de cero, dada por:

$$t_{\varphi=0} = \frac{\varphi(0)}{\eta}. \quad (3.16)$$

Ahora, debido a que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es definida negativa, se habla también de estabilidad asintótica del origen. Por lo tanto el origen es atractivo y el hecho de alcanzar el origen $\varphi(x) = 0$ en un tiempo finito implica que las trayectorias del sistema se ven forzadas a desarrollarse en este conjunto.

Cabe destacar que la condición de alcance es mucho más restrictiva que la condición de deslizamiento, así que si se llega a cumplir la condición de alcance esta sería una condición suficiente para asegurar la existencia del modo deslizante.

Para el diseño de un controlador por modos deslizantes basta con encontrar una ley de control tal que la condición $\varphi(x)\dot{\varphi}(x) < -\eta|\varphi|$ se cumpla.

El proceso de diseño de un controlador por modos deslizantes se compone de dos etapas:

- El diseño de una superficie deslizante pertinente.
- El diseño de un controlador que asegure la condición de alcance para la superficie recién propuesta.

El diseño de la superficie deslizante es relativamente sencillo, sólo existen dos restricciones para la aplicación del control por modos deslizantes convencionales:

1. La superficie debe estar definida de tal manera que $\varphi = 0 \rightarrow x \rightarrow 0$
2. La superficie debe de tener grado relativo 1.

Entiéndase por grado relativo el número de veces que se debe derivar una función de salida para que la entrada aparezca explícitamente. La restricción en el grado relativo del sistema está dada para asegurar que las trayectorias del sistema puedan apuntar hacia la superficie de discontinuidad.

El problema de control puede ser resuelto con cualquier controlador que asegure la condición de alcance sin importar la metodología que se utilice. Debido a la condición de alcance, el ingeniero de control se ve obligado a encontrar un controlador que en lazo cerrado pueda cumplir con una cota en función de un valor absoluto. Quizá la manera más sencilla sea la multiplicación de una variable por su signo, i.e. $x\text{sign}(x) = |x|$. Las discontinuidades del controlador entonces provienen de la función signo presente en el mismo.

3.3. Modos deslizantes ideales y reales

Una vez resuelto el problema del diseño del controlador es necesario hablar de problemas que surgen en el controlador en su aplicación directa en sistemas de control. El análisis presentado en la sección anterior, aunque nunca se mencionó, toma como un hecho que el sistema está obteniendo datos de una manera continua.

Debido al hecho de que hoy en día la aplicación de controladores se hace en computadoras digitales, es más que obvio que los datos se tomarían en muestras. Así pues, es necesaria la distinción entre los casos continuos y los casos muestreados, comúnmente referidos en la literatura como modos deslizantes ideales para el caso continuo y modos deslizantes reales en el caso muestreado.

Definición 3.1 Modos deslizantes ideales: Se dice que existe un modo deslizante ideal si:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \dot{\varphi} < 0 \text{ y } \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} \dot{\varphi} > 0 \quad (3.17)$$

Como se menciona, por la naturaleza digital de las computadoras actuales y por dinámicas no modeladas excitadas, el cumplimiento del modo deslizante ideal no es posible. De estas condiciones nace la necesidad de hablar de un caso más realista:

Definición 3.2 Modos deslizantes reales: Si debido a algún parámetro positivo

μ las trayectorias pertenecen al dominio:

$$|\varphi(t)| < \Delta(\mu), \lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) = 0, \quad (3.18)$$

entonces el movimiento se denomina modos deslizantes reales.

En la definición anterior μ puede ser visto como una representación matemática de dinámicas no modeladas y efectos de discretización.

En [18] se utiliza una capa de cota y un procedimiento de límite para demostrar que las soluciones son iguales en el caso en que $\mu \rightarrow 0$, además de dar una expresión para calcular la precisión de las soluciones de acuerdo al mismo parámetro. La Figura 3.4 ejemplifica la diferencia entre un modo deslizante real y un ideal. Observe que el modo deslizante real oscila en una vecindad del modo deslizante ideal; esta oscilación será el objeto de estudio para las secciones siguientes de este capítulo.

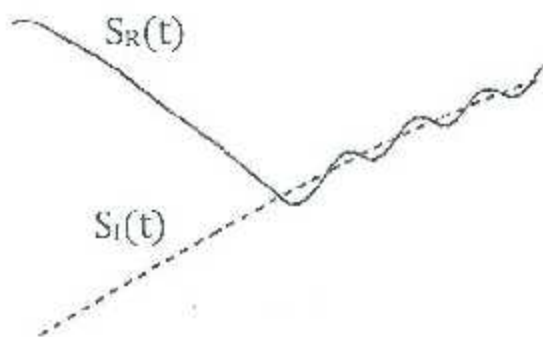


Figura 3.4: Modos deslizantes ideales ($S_I(t)$) y reales ($S_R(t)$)

3.3.1. Chattering

Además, se hablará de un fenómeno de alta frecuencia presente en los modos deslizantes reales denominado *chattering* (Se hace la aclaración de que el anglicismo *chattering* es inevitable a diferencia del término *crisis*, debido a que no existe una palabra en español que describa correctamente las oscilaciones que éste produce) y las técnicas comúnmen-

te utilizadas para su reducción en los controladores por modos deslizantes convencionales.

Ya que se ha aclarado la diferencia entre los modos deslizantes ideales y los modos deslizantes reales, se debe mencionar los efectos que tiene el no alcanzar la superficie de deslizamiento, sino que las trayectorias oscilen alrededor de una vecindad de la misma.

De acuerdo a la teoría de perturbación singular, en los sistemas con controles continuos un componente rápido del movimiento decae rápidamente y un componente lento depende de las constantes de tiempo pequeñas de forma continua. En sistemas discontinuos la solución depende continuamente de todos los componentes; los componentes rápidos excitan dinámicas muy veloces y se generan oscilaciones de frecuencias muy altas conocidas como *chattering*.

El hecho de que las trayectorias del sistema no se mantengan sobre la superficie de deslizamiento implica que el controlador siempre tenga que ejercer una acción para que las trayectorias sigan apartando hacia la superficie, lo que a su vez significa que la acción de control va a estar oscilando entre sus valores límites, es decir que $u = u^+$ o $u = u^-$. Con acciones de control tan activas los sistemas mecánicos pueden tener una gran cantidad de desgaste (pudiendo inclusive romperse en un caso extremo) y los sistemas eléctricos suelen presentar grandes pérdidas en forma de calor. Asimismo, debido a que el sistema no alcanza la superficie sino que oscila alrededor de ella, los estados del sistema presentan comportamientos oscilantes y la tendencia asintótica de los estados hacia el origen se pierde, aunque la oscilación de los estados será una fracción del tamaño de la vecindad para la superficie de deslizamiento alrededor de la cual el movimiento se lleva a cabo, es decir, que a una menor vecindad los estados tenderán a oscilar menos.

Los efectos de cuantificación en las oscilaciones de las trayectorias del sistema se estudian en [20], sin embargo en dicho trabajo se evita la discusión de los efectos del periodo de muestreo en la amplitud de las mismas.

3.4. Atenuación del *chattering*

Debido a los graves efectos del *chattering* en sistemas mecánicos, desde su aparición se ha discutido si es conveniente el uso del esquema de control por modos deslizantes a sistemas de la naturaleza mencionada. Es quizá por esta razón que el control de sistemas robóticos en forma experimental por modos deslizantes no tiene un gran auge.

Una gran parte del esfuerzo de investigación que se brinda a la teoría de modos deslizantes se enfoca a la atenuación y/o posible erradicación del efecto de *chattering*. Existe una gran variedad de técnicas, teniendo hoy en día la mayor relevancia el esquema de control por modos deslizantes de orden superior [21]. A continuación se dará una explicación del porqué no se estudia la técnica con más profundidad en este trabajo continuando con la discusión de las técnicas comunes aplicadas a controladores por modos deslizantes convencionales o de primer orden.

3.4.1. Controladores de orden superior

El esquema de control por modos deslizantes de primer orden es sólo aplicable a sistemas que tengan una superficie deslizante con grado relativo 1, es decir, que la señal de control sólo aparezca explícitamente en la dinámica de la superficie y no en su definición [21]. Esto se hace para poder controlar la manera en que las trayectorias del sistema apuntan en relación a la superficie. Desafortunadamente, la técnica de modos deslizantes de primer orden implica señales de control discontinuas y con una gran actividad. El esquema de control por modos deslizantes de orden superior tiene como propósito entonces dos cosas:

- Controlar por modos deslizantes sistemas para los cuales no es posible formular una superficie de deslizamiento con grado relativo igual a uno.
- Para sistemas con grado relativo igual a uno es posible encontrar leyes de control cuya naturaleza sea continua, debido a que el diseño se basa en la integral de alguna señal encontrada.

En teoría, el esquema de control por modos deslizantes de orden superior debería arrojar buenos resultados aplicándolo al control de sistemas robóticos, sin embargo existen

demasiados problemas abiertos en esta área hablando de robustez del controlador e incluso su aplicación a sistemas MIMO de manera general.

3.4.2. Soluciones basadas en observadores asintóticos

El principio de operación se basa en el empleo de un lazo adicional para la observación de los estados del sistema utilizando observadores asintóticos. Una vez diseñados los observadores, se diseña el controlador de tal manera que se genera un modo deslizante ideal en el espacio de los estados observados, es decir que el sistema real en verdad no es controlado por una ley discontinua debido a que los observadores asintóticos hacen las veces de filtrado en la señal de control. Es necesario que los observadores sean asintóticos debido a que una tendencia en tiempo finito a los estados reales implicaría la aplicación de un modo deslizante en el sistema y por ende el *chattering* no sería suprimido. De hecho, la aplicación de observadores en el sistema implica que la tendencia a la superficie de deslizamiento sea a su vez asintótica, por lo que el hablar de un controlador por modos deslizantes proviene de una convención.

La aplicación de un lazo de observación implica un alto costo computacional, haciendo la aplicación del esquema a sistemas donde el periodo de muestreo está críticamente limitado; además, en [22] se realizan simulaciones donde es sencillo observar que el comportamiento del sistema con la técnica de observadores asintóticos resulta muy similar a la solución cuasideslizante, el tema a tratar a continuación.

3.4.3. Modos cuasideslizantes

También conocido como solución basada en una capa de cota (boundary layer en inglés). El principio de funcionamiento es realmente simple, pues se trata de la sustitución de la señal discontinua en el controlador por una aproximación continua. En general se trata de la sustitución de una señal $\text{sign}(\cdot)$ por una función $\text{sat}(\frac{x}{\delta})$ donde el parámetro δ representa la anchura de la capa de cota. La función saturación se define como:

$$\text{sat}\left(\frac{x}{\delta}\right) = \begin{cases} \text{sign}\left(\frac{x}{\delta}\right) & \left|\frac{x}{\delta}\right| > 1 \\ \frac{x}{\delta} & \left|\frac{x}{\delta}\right| \leq 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

El reemplazo de la señal signo por una aproximación continua implica que la condición de alcance no se cumpla, sin embargo se tiene que las trayectorias alcanzan una vecindad de la superficie de deslizamiento en tiempo finito y no pueden abandonarla; de ahí el nombre de control por modos cuasideslizantes (QSMC, por sus siglas en inglés)[23]. La solución por capa de cota pudiese resultar en un comportamiento indeseable si es que la estabilidad del sistema no se puede asegurar dentro de la misma, lo que causaría que el sistema no se libre del efecto del *chattering*. La aplicación de la capa de cota, con una definición apropiada de la superficie de deslizamiento, resulta en la degradación del controlador a un esquema del tipo PD. El término degradación se utiliza para indicar que la robustez del controlador se ve comprometida dentro de la capa de cota, si bien es cierto que se tiene una cota en los estados, no es posible asegurar la tendencia asintótica de los mismos hacia el origen.

La bondad de esta técnica radica en su simplicidad, ya que el diseño del controlador no necesita ser alterado en gran manera además de que sólo se agrega un parámetro (por cada par de estados) al mismo. La carga computacional que la técnica implica es mínima con respecto a las demás y con paciencia al momento de sintonizar se pueden obtener resultados muy satisfactorios. Sin embargo, el proceso de sintonización implica un compromiso entre desempeño del controlador y reducción del *chattering*.

3.4.4. Modos deslizantes difusos

Una vez discutida la técnica de control por modos cuasideslizantes se discute la idea del control por modos deslizantes difusos. Se debe hacer la distinción de que en el presente trabajo se habla de modos deslizantes difusos (FSMC, por sus siglas en inglés) para discutir la técnica en la que la señal saturación del controlador por modos cuasideslizantes se reemplaza por un sistema de inferencia difusa de la forma $k\xi(\varphi)$, donde $\xi(\varphi)$ es un sistema de inferencia difusa de una entrada y una salida, como aquel dado por (2.6), diseñado de tal manera que las siguientes suposiciones se cumplan

- $\max\{\xi(\varphi)\} = 1$
- $\min\{\xi(\varphi)\} = -1$
- $\text{sign}\xi(\varphi) = \text{sign}(\varphi)$

- $\xi(0) = 0$

La supervisión de la ganancia de un controlador por modos deslizantes puede ser analizado de distintas maneras, tal vez la manera más común de hacerlo es suponiendo que la función saturación cambia su pendiente dependiendo de la cercanía de las trayectorias a la superficie de deslizamiento, permitiendo un acercamiento más suave al momento de entrar en la capa de cota, con lo que se alivia el efecto de la discretización y cuantificación del controlador. Otra manera de analizarlo sería pensando en que si la superficie es una combinación lineal de los estados, el controlador se degrada a un controlador del tipo PD, y por tanto se regula la ganancia del sistema, conservando la relación que existe entre la ganancia proporcional y la derivativa.

En [24], Utkin utiliza el método de la función descriptiva (Describing function) para analizar el efecto de la ganancia del controlador, concluyendo que cualquier método que ayude a aliviar la ganancia ayudaría a atenuar el *chattering* si es que se puede mantener el modo deslizante (obviamente el modo deslizante ideal es meramente teórico y no puede ser alcanzado).

C A P Í T U L O 4

Aplicación a un Sistema Carro-Péndulo

El control de sistemas subactuados suele ser un problema difícil de resolver con las técnicas de control continuos. El hecho de que un sistema sea subactuado implica que su estructura no sea cuadrada, es decir, que el número de entradas y salidas del sistema no es el mismo. Así, el ingeniero de control se ve obligado a buscar una manera de llevar el problema a la forma regular, i.e.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(x) - g(x)u \end{bmatrix},$$

ya sea mediante la transformación del sistema utilizando técnicas de geometría diferencial para encontrar una descripción adecuada para el mismo; o bien, se puede proponer una función de salida de tal manera que el controlar dicha función implique que el sistema se controlará de forma completa.

En la literatura se encuentra un gran número de aplicaciones de controladores no lineales al sistema carro péndulo, sin embargo en una gran cantidad de ellos el objetivo de control se basa en la estabilización del péndulo ignorando la dinámica del carro. Por este motivo cabe hacer la aclaración de que en el trabajo aquí reportado se estudia la

estabilización de los cuatro estados del sistema (las posiciones translacional y angular, así como sus velocidades) de manera simultánea.

En la literatura generalmente se trabaja con esquemas de linealización por realimentación para llevar al sistema a la forma regular. El controlador aquí presentado toma un enfoque diferente: se propone una superficie deslizante que contenga a los cuatro estados del sistema y se procede a analizar la dinámica residual del mecanismo cuando este alcanza el modo deslizante de tal manera que se pueden establecer condiciones de diseño de la superficie para garantizar la estabilidad de la dinámica cero, i.e. el comportamiento del sistema cuando una función de salida se mantiene en cero. El resto del diseño del controlador se completa utilizando el método del control equivalente, con lo que se asegura el alcance de los modos deslizantes.

4.1. Modelado dinámico

El sistema consta de un péndulo de giro libre montado sobre un actuador translacional, como lo es el carro, y que genera movimiento sobre un eje perpendicular al eje de rotación del péndulo.

La Figura 4.1 representa un esquema del sistema carro-péndulo, donde m_c es la masa del carro, m_p es la masa del péndulo, l es la longitud al centro de masa del péndulo, I es el momento de inercia con respecto al centro de masa del péndulo, g representa la aceleración de la gravedad, x y \dot{x} representan la posición y velocidad translacional del carro respectivamente, u representa la fuerza ejercida por el actuador translacional y θ y $\dot{\theta}$ representan la posición y velocidad angular del péndulo. Las unidades de los parámetros se dan en el Apéndice A.

4.1.1. Ecuaciones de energía cinética del sistema

Se utiliza la definición de la energía cinética translacional para encontrar que

$$\mathcal{K}_x = \frac{1}{2} \dot{x}^2 m_c. \quad (4.1)$$

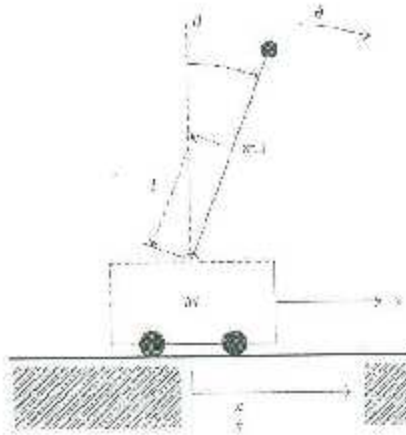


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre del sistema carro-péndulo

Mientras que el análisis del movimiento del péndulo indica que tiene componentes traslacionales y rotacionales, por lo que la energía cinética de este se da por:

$$\mathcal{K}_p = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + m_p l_y \cos(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m l_y^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2. \quad (4.2)$$

Por último, para encontrar la energía total del sistema se procede a sumar las energías anteriormente encontradas para obtener

$$\mathcal{K}_{total} = \mathcal{K}_c + \mathcal{K}_p = \frac{1}{2} \dot{x}^2 m_c + \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + m_p l_y \cos(\theta) \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m l_y^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2. \quad (4.3)$$

4.1.2. Ecuaciones de energía potencial del sistema

Debido a que el carro sólo es libre de moverse en forma perpendicular al vector de gravedad, se sabe que su energía potencial es nula, es decir,

$$\mathcal{U}_c = 0. \quad (4.4)$$

A su vez, el péndulo sólo tiene energía potencial debido al movimiento rotacional que se presenta en el sistema, por lo que se dice que

$$\mathcal{U}_p = m_p g l_y [\cos(\theta) - 1]. \quad (4.5)$$

De nuevo, tomando la suma de las energías del sistema se obtiene

$$\mathcal{U}_{total} = \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_\theta = m_0 g l_p [\cos(\theta) - 1]. \quad (4.6)$$

4.1.3. Lagrangiano del sistema

Para llevar a cabo el modelado dinámico del sistema por el método de Euler-Lagrange es necesario primero encontrar el lagrangiano del sistema, que está dado por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_{total} - \mathcal{U}_{total}.$$

Así, utilizando las expresiones de las energías encontradas anteriormente, se expresa el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 m_x + \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + m_p l_p \cos(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - \frac{1}{2} m l_p^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m_0 g l_p [\cos(\theta) - 1]$$

4.1.4. Desarrollo del modelo dinámico sin fricción

Una vez obtenido el lagrangiano del sistema, se procede a utilizar las ecuaciones de movimiento de Lagrange, las cuales están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \tau.$$

Suponiendo que el par externo aplicado sobre el péndulo es cero, se procede a desarrollar los términos de la ecuación de movimiento, encontrando las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m_x \dot{x} + m_p \dot{x} + m_0 l_p \cos(\theta) \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] &= m_x \ddot{x} + m_p \ddot{x} + m_0 l_p \cos(\theta) \ddot{\theta} - m_0 l_p \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m_g \dot{x} l_g \cos(\theta) + m_g l_g^2 \dot{\theta} - I \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] &= m_g \ddot{x} l_g \cos(\theta) - m_g \dot{x} l_g \sin(\theta) \dot{\theta} + m_g l_g^2 \ddot{\theta} - I \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -m_g \dot{x} \dot{\theta} l_g \sin(\theta) - m_g g l_g \sin(\theta) \end{aligned}$$

ya que todas las expresiones necesarias han sido obtenidas, se procede a obtener el modelo dinámico de la forma

$$m_x \ddot{x} + m_g \ddot{x} - m_g l_g \cos(\theta) \ddot{\theta} - m_g l_g \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = \tau \quad (4.7)$$

$$m_g \ddot{x} l_g \cos(\theta) - m_g l_g^2 \ddot{\theta} + I \ddot{\theta} - m_g g l_g \sin(\theta) = \mathbb{C} \quad (4.8)$$

Modelo dinámico en forma cerrada

Una vez obtenido el modelo dinámico, resulta conveniente expresarlo en forma matricial para luego poder realizar las manipulaciones convenientes de manera más sencilla, por lo que el modelo dinámico queda dado por:

$$\begin{bmatrix} m_x + m_g & m_g l \cos(\theta) \\ m_g l \cos(\theta) & m_g l^2 + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_g l \sin(\theta) \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_g g \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},$$

además, tomando en cuenta las siguientes simplificaciones

$$\gamma = m_x + m_g \quad \beta = m_g l \quad \alpha = m_g l^2 + I \quad \eta = m_g g l$$

el modelo dinámico queda descrito como:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ -\eta \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

De esta manera, el modelado dinámico directo queda descrito por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x \\ g_\theta \end{bmatrix} u \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_x \\ f_\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \eta \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \Delta \begin{bmatrix} \alpha \beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ -\beta \eta \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

con

$$\Delta = \frac{1}{\alpha \gamma - \beta^2 \cos^2(\theta)} \quad (4.12)$$

y

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

De la ecuación (4.10) se observa que el modelo dinámico se compone de dos sistemas en la forma regular, por lo que se puede hablar de un par de subsistemas, uno que describe la dinámica del subsistema del carro, y otro que describe la dinámica del subsistema del péndulo.

4.1.5. Modelo dinámico con fricción

Hasta ahora no se han tomado en cuenta los efectos de fricción del sistema, pero en el sistema real los efectos de fricción del carro son muy notables, por lo que se propone utilizar un modelo de fricción de Dahl [25] para el subsistema del carro, mientras que se supone que los efectos de fricción del péndulo son despreciables. Para considerar dichos efectos se supone que la fuerza de fricción generada es una perturbación al sistema en la variable actuada, quedando entonces la dinámica del sistema descrita por:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ -\eta \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$= \begin{bmatrix} u - (f_{ca}\dot{x} + \sigma_0 z) \\ 0 \\ \dot{z} - \frac{\sigma_0}{f_{ca}} |\dot{x}| z + \dot{x} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Debe notarse que la fricción del sistema del carro entra linealmente al vector de fuerzas, por lo que se puede considerar como una perturbación al sistema y por lo tanto el controlador se diseñará ignorando los efectos de esta al principio para después, con la incorporación de un observador y las propiedades de robustez inherentes al controlador, tratar de asegurar la estabilidad del sistema.

4.2. Controlador FSM

El proceso de diseño del controlador se basa en la propuesta de dos superficies de deslizamiento, una para el subsistema del carro y otra para el subsistema del péndulo. Una vez definidas éstas, se procede a acoplarlas con un factor de acoplamiento para obtener una única superficie que defina el comportamiento de ambos sistemas. Las superficies de deslizamiento propuestas son las siguientes: $s_\theta = c_\theta \theta + \dot{\theta}$, $s_x = c_x \dot{x} + \dot{x}$, donde c_θ , λ y c_x son parámetros constantes y positivos cuyo valor estará dado por el análisis de estabilidad de la dinámica cero, además de

$$S = \lambda s_x + s_\theta. \quad (4.16)$$

En (4.16) se representa la superficie de deslizamiento para el subsistema del péndulo (s_θ), la superficie de deslizamiento del carro (s_x) y la superficie de deslizamiento total (S).

Cabe destacar que el conseguir que el sistema entre en modos deslizantes no es una condición suficiente para demostrar la estabilidad del sistema, ya que la condición $S = 0$ puede ser alcanzada con $s_x = s_\theta$, por lo que se requiere hacer un análisis de la dinámica cero con S como función de salida.

El análisis de la dinámica cero se llevará a cabo de la manera que se propone en [26].

4.2.1. Análisis de la dinámica cero

Para resolver el problema de hacer cero la salida, con S como función de salida, se supone $S \equiv 0$ y por tanto $\dot{S} \equiv 0$, con lo que se tiene

$$S = \lambda s_x + s_\theta - \lambda(c_x x + \dot{x}) - c_\theta \theta + \dot{\theta} = 0 \quad (4.17)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\lambda} (c_x \theta + \dot{\theta} + \lambda c_x x) \quad (4.18)$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\lambda} [c_x \dot{\theta} + \ddot{\theta} - c_x (c_x \theta + \dot{\theta} + \lambda c_x x)] \quad (4.19)$$

Además, debido a que (4.17) es lineal, es posible tomar la transformada de Laplace de la misma para encontrar:

$$\lambda(c_x X(p) + pX(p) - x(0)) + (c_\theta \Theta(p) + p\Theta(p) - \theta(0)) = 0 \quad (4.20)$$

donde se utiliza p como la variable en el dominio de la frecuencia para evitar confusiones con las superficies de deslizamiento. Se despeja $X(p)$ de (4.20), para encontrar

$$X(p) = \frac{\lambda x(0) + \theta(0)}{\lambda c_x + p} - \Theta \frac{c_\theta + s}{c_x + s} \quad (4.21)$$

cuya transformada inversa de Laplace está dada por:

$$x(t) = \frac{e^{-c_x t} (\lambda x(0) + \theta(0))}{\lambda} - \frac{\theta(t) - (c_x - c_\theta) e^{-c_x t} + \theta(t)}{\lambda} \quad (4.22)$$

donde el símbolo $*$ significa convolución. Sustituyendo (4.22) en (4.19) se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{-1}{\lambda} [c_x \dot{\theta} + \ddot{\theta} - c_x (c_x \theta + \dot{\theta} + c_x a(t) - c_x \theta + (c_x - c_\theta) b(\theta))] \quad (4.23)$$

con

$$a(t) = (x(0) + \theta(0)) e^{-\alpha t}, \quad b(\theta, t) = e^{-\alpha t} * \dot{\theta}(t)$$

La ecuación (4.23) será escrita como:

$$\ddot{x} = \zeta(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta, x, t) \quad (4.24)$$

por lo que la dinámica del sistema en general se describe por:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\vartheta) \\ \beta \cos(\vartheta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta, x, t) \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \operatorname{sen}(\vartheta) \dot{\theta}^2 \\ \eta \operatorname{sen}(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Tomando la segunda ecuación de (4.25) se tiene que

$$\beta \cos(\vartheta) \zeta(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) + \alpha \ddot{\theta} - \eta \operatorname{sen}(\vartheta) \dot{\theta} = 0 \quad (4.26)$$

Después de ciertas manipulaciones algebraicas se obtiene que

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \tau(\theta) \dot{\theta} + w(\vartheta, t) &= h(\vartheta, t) \\ \tau(\vartheta) &= \frac{\beta \cos(\vartheta) (c_\theta - c_x)}{\beta \cos(\vartheta) - \alpha \lambda} \\ w(\vartheta) &= \lambda \frac{\eta \operatorname{sen}(\vartheta) - \beta c_x \cos(\vartheta) \lambda^{-1} (c_\theta - c_x) (\theta - c_x b(\theta))}{\beta \cos(\vartheta) - \alpha \lambda} \\ h(\vartheta, t) &= \frac{\lambda \beta c_x^2 \cos(\vartheta) a(t)}{\beta \cos(\vartheta) - \alpha \lambda} \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero

Teorema 1 [26]: *Defínase el conjunto $D_\alpha = (-\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon)$, con $0 < \epsilon \ll \frac{\pi}{2}$. Si los parámetros de la superficie de deslizamiento S son definidos como $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)$ y $c_x (c_\theta - c_x) \ll \lambda g$ con $c_x < c_\theta$, entonces el origen de la dinámica cero (4.27) es asintóticamente estable sobre el conjunto $D_\alpha \times \mathbf{R}$.*

Prueba: Primero, por la restricción $\lambda = \frac{\delta}{\alpha} \cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)$, y por definición de $W(\theta)$, se puede observar que el primer término de $w(\theta)$ puede ser despreciado.

Existe una función $W(\theta) = -\ln(\beta \cos(\theta) - \alpha\lambda) > 0 \quad \forall \theta \in D_\alpha$ tal que

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = w(\theta) \quad (4.28)$$

Observe, que si $W(\theta) \rightarrow \infty$, luego $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \epsilon$.

Debido al decaimiento exponencial de $a(t)$, se sabe que existe una función que depende solamente del tiempo tal que $\psi(t) \geq |h(\theta, t)|$, la cuál está dada por

$$\psi(t) = ne^{-\alpha t} \quad (4.29)$$

donde n es una constante positiva y cuyo valor estará acotado si $\theta \in D_\alpha$. Por tanto, se puede definir una función $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds = -\frac{n}{\alpha} e^{-\alpha t} < \infty \quad \forall t > 0$.

Considérese la función del tipo Lyapunov que está acotada inferiormente

$$V(\theta, \dot{\theta}, t) = e^{-\Psi(t)} [2W(\theta) + \dot{\theta}^2 + 1] \quad (4.30)$$

Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (4.27) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\theta, \dot{\theta}, t) &= -\psi(t)e^{-\Psi(t)} [2W(\theta) + \dot{\theta}^2 + 1] \\ &\quad + e^{-\Psi(t)} [2w(\theta, \dot{\theta}) + 2\dot{\theta} \ddot{\theta}] \\ &= -e^{-\Psi(t)} \\ &\quad [2\psi(t)W(\theta) + \psi(t)\dot{\theta}^2 + \psi(t) + 2r(\theta)\dot{\theta}^2 - 2h(\theta, t)] \\ &< -e^{-\Psi(t)} [\psi(t)(\dot{\theta}^2 - 2|\dot{\theta}| - 1) + 2r(\theta)\dot{\theta}^2] \\ &< -2e^{-\Psi(t)} r(\theta)\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Debido a que en las igualdades los términos dependientes del tiempo son exponenciales decrecientes, entonces la derivada de $V(\theta, \dot{\theta}, t)$ es uniformemente continua en el tiempo, además como $r(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in D_\alpha$, la derivada es semidefinida negativa. Utilizando el lema del tipo Lyapunov que se presenta en [16], el cual indica que dada una función acotada

inferiormente acotada, si su derivada temporal es semidefinida negativa y uniformemente continua con respecto a t , la derivada tiende a cero asintóticamente; se concluye que la derivada de la función del tipo Lyapunov tiende a cero. Utilizando esto, se concluye además que $\dot{\theta} \rightarrow 0$, lo que a su vez implica que $\ddot{\theta} \rightarrow 0$. Debido a que $h(\theta, t)$ contiene un término exponencial decreciente con el tiempo se sabe que $t \rightarrow \infty \Rightarrow h(\theta, t) \rightarrow 0$, por lo que la dinámica cero descrita por (4.27) se reduciría a

$$w(\theta) = 0 \Rightarrow \lambda \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

conforme $t \rightarrow \infty$, lo que implica a su vez que $\theta \rightarrow 0$. Debido a lo anterior se deduce que la dinámica cero del sistema del péndulo es asintóticamente estable. Esto a su vez, y debido a que $S = 0 \Rightarrow \dot{S} \rightarrow \dot{s}_x \Rightarrow x \rightarrow -\frac{\dot{x}}{\omega}$, asegura la estabilidad asintótica de la dinámica total del sistema.

4.2.3. Diseño del controlador

Para la obtención de la ley de control, primero se utilizará el método del control equivalente, es decir que se encontrará el control (u_{eq}) que haga $\dot{S} = 0$ para luego agregar términos que impliquen la atractividad de la superficie deslizante S . A diferencia de [26], aquí se agrega al controlador un término proporcional a la superficie de deslizamiento $k_2 S$ que es equivalente a agregar términos del tipo PD para cada subsistema, esto ayuda a la estabilidad cuando las trayectorias del sistema se encuentran lejanas a la superficie de deslizamiento.

Por lo tanto se tiene

$$\dot{S} = \lambda \dot{s}_x + \dot{s}_y = 0 \quad (4.31)$$

$$\lambda(c_x \dot{x} + \dot{x}) + c_y \dot{\theta} - \ddot{\theta} = 0 \quad (4.32)$$

$$\lambda(c_x \dot{x} + \dot{x} + g_x u_{eq}) + c_y \dot{\theta} + \dot{f}_\theta - g_\theta u_{eq} = 0 \quad (4.33)$$

$$u_{eq} = \frac{-\lambda \dot{f}_x - \dot{f}_y - \lambda c_x \dot{x} - c_y \dot{\theta}}{\lambda g_x + g_y} \quad (4.34)$$

$$u = u_{eq} + \frac{k_1 \operatorname{sign}(S) + k_2 S}{\lambda g_x + g_y} \quad (4.35)$$

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V(s) = \frac{1}{2}S^2 \quad (4.36)$$

La derivada temporal de (4.36) está dada por:

$$\dot{V}(s) - S\dot{S} = S \left[\lambda(c_x \dot{x} + \dot{f}_x + g_x u) + c_\theta \dot{\theta} + f_\theta - g_\theta u \right] \quad (4.37)$$

$$V(S) - S \left[\lambda f_x - f_\theta + \lambda c_x \dot{x} + c_\theta \dot{\theta} + (\lambda g_x + g_\theta) u \right] \quad (4.38)$$

$$\dot{V}(S) - S \left[\lambda \dot{f}_x + f_\theta - \lambda c_x \dot{x} + c_\theta \dot{\theta} - (\lambda g_x + g_\theta) \left(\frac{-\lambda f_x - f_\theta - \lambda c_x \dot{x} - c_\theta \dot{\theta}}{\lambda g_x + g_\theta} \right) \right. \\ \left. \frac{k_1 \text{sign}(S) - k_2 S}{\lambda g_x + g_\theta} \right] \quad (4.39)$$

$$\dot{V}(S) - S (-k_1 \text{sign}(S) - k_2 S) \quad (4.40)$$

$$\dot{V}(S) = -k_1 |S| - k_2 S^2 \quad (4.41)$$

lo cual implica que la superficie de deslizamiento se alcanza en tiempo finito, como se discutió en la Sección 3.2.

Una vez asegurada la estabilidad del sistema sin fricción, se procede a incorporar un estimador para la fricción de Dahl, por lo cual se propone la modificación de la ley de control de la siguiente manera:

$$u = u_{SMC} - c_{fd} \quad (4.42)$$

dónde u_{SMC} es la ley de control por modos deslizantes (sliding mode control) recién propuesta y c_{fd} es un compensador de la fricción de Dahl definido como:

$$c_{fd} = -f_{sw} \dot{x} + \sigma_0 \dot{z} \quad (4.43)$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{f_{sw}} |\dot{x}| \dot{z} + \dot{x} \quad (4.44)$$

El error entre la fuerza de fricción en el carro y el compensador de fricción, suponiendo que la velocidad del carro está disponible para la medición, está dado por

$$c_{fd} - f_{\dot{x}} = f_{vc}\dot{x} + \sigma_0\dot{z} - f_{vc}\dot{x} - \sigma_0\dot{z} - \sigma_0\dot{z} \quad (4.45)$$

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{\dot{z}} - \dot{z} = -\frac{\sigma_0}{f_{cx}}|\dot{z}|\dot{z} - \dot{x} + \frac{\sigma_0}{f_{cx}}|\dot{x}|\dot{x} - \dot{x} = -\frac{\sigma_0}{f_{cx}}|\dot{x}|\dot{\tilde{z}} \quad (4.46)$$

Se propone una nueva función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del sistema con el compensador de fricción como sigue

$$V(S, \tilde{z}) = \frac{1}{2}(S^2 + \tilde{z}^2) \quad (4.47)$$

cuya derivada temporal quedará dada por

$$\dot{V}(S, \tilde{z}) = S\dot{S} + \tilde{z}\dot{\tilde{z}} \quad (4.48)$$

$$\dot{V}(S) = -(k_1 - \sigma_0\tilde{z})|S| - k_2S^2 - \frac{\sigma_0}{f_{cx}}|\dot{\tilde{z}}|\dot{\tilde{z}}^2 \quad (4.49)$$

Si $k_1 > \sigma_0\tilde{z}_0$, el sistema cumpliría la condición de alcance en el primer instante del análisis, además el tercer término de (4.49) sería negativo en este instante, lo que implica un decremento del valor de \tilde{z} , así pues el primer término de la expresión volvería a ser negativo, por lo que se pudiese asegurar la estabilidad de los estados del sistema, sin embargo se cumple con la condición de alcance para la superficie de deslizamiento. El tercer término de (4.49) no puede ser positivo, por lo que se concluye estabilidad de \tilde{z} . Así, una vez asegurada la condición de alcance para el controlador por modos deslizantes, y gracias al análisis de la dinámica cero, se concluye estabilidad asintótica de las variables de configuración x , \dot{x} , θ y $\dot{\theta}$, asegurando el cumplimiento del objetivo de control.

La Figura 4.2 da una representación gráfica del esquema de control.

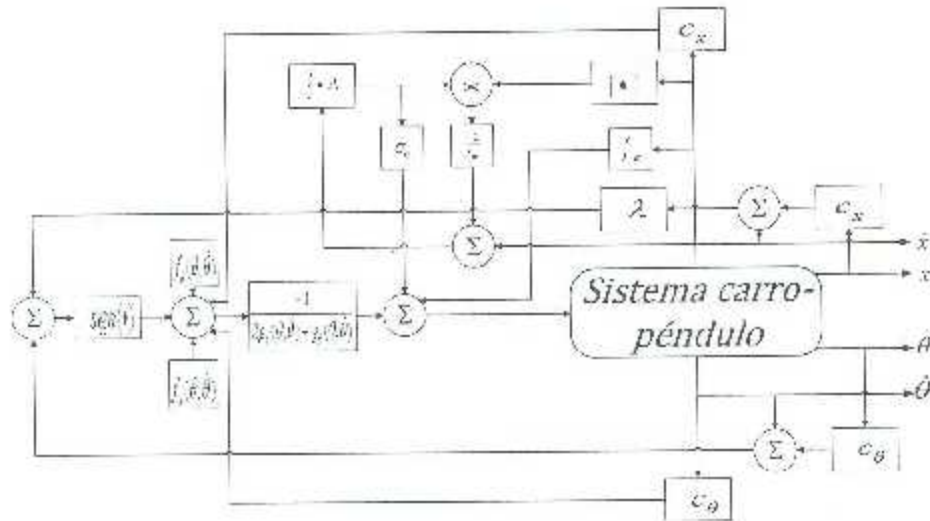


Figura 4.2: Diagrama a Bloques del controlador por modos deslizantes acoplados.

Modos cuasideslizantes

Una vez que se demostró que el controlador por modos deslizantes llegará al modo deslizante real, se procede a introducir una capa de cota al sistema, esto se hace reemplazando la función $\text{sign}(S)$ en (4.35), por una función saturación dura, la cual está definida como:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) & |x| \geq 1 \\ x & |x| < 1 \end{cases} \quad (4.50)$$

donde el argumento x sería $\frac{S}{\phi}$ y ϕ a su vez sería el ancho de la capa de cota. Por lo tanto la derivada de la función candidata de Lyapunov (4.49) sería discontinua y estaría dada por

$$\dot{V}(S) = \begin{cases} -(k_1 - \sigma_0 \frac{\phi}{2}) |S| - k_2 S^2 - \frac{\sigma_0}{j_m} |\dot{x}| \dot{x}^2 & \frac{S}{\phi} \geq 1 \\ -(k_1 + k_2 \phi - \sigma_0 \frac{\phi}{2}) \frac{S^2}{\phi} - \frac{\sigma_0}{j_m} |\dot{x}| \dot{x}^2 & \frac{S}{\phi} < 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

utilizando el mismo análisis que se utilizó para el controlador por modos deslizantes convencionales, si $k_1 > \sigma_0 \frac{\phi}{2}$, el sistema tendería asintóticamente al conjunto $S = 0$, con lo que se aseguraría a su vez que los estados tenderían asintóticamente estables al origen.

La Figura 4.3 da una representación gráfica del esquema de control.

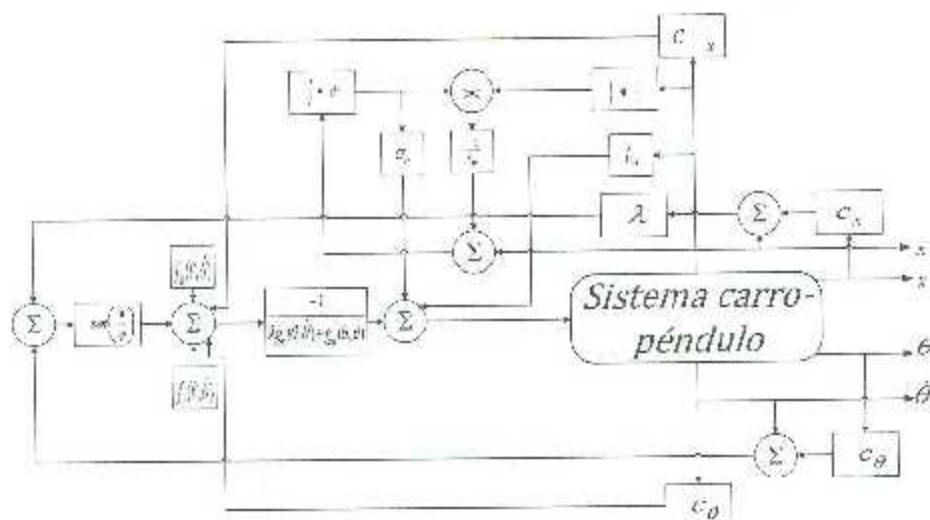


Figura 4.3 Diagrama esquemático de la ley de control por modos cuasi deslizantes acoplados.

Controlador FSM

Si $k_1 > \sigma_0 \dot{z}(0)$, se puede asegurar el alcance de la superficie de deslizamiento debido a que la dinámica del error de aproximación implica que este sólo tenderá a reducirse, además de que el tercer término de la derecha de (2.49) implica un acotamiento en el error de aproximación, por lo que se puede suponer que el error de aproximación no tenderá a ser mayor que la condición inicial de este y por tanto se consigue de nuevo una tendencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento. Esto a su vez implica una cadencia constante del error de aproximación de la fricción de Dahl; debido a lo anterior la restricción sobre el valor mínimo de la ganancia k_1 se vuelve conservadora y puede generar "chattering", por lo que la supervisión de ésta de manera indirecta por medio de un sistema de inferencia difusa $\sigma_1(S)$ resulta provechosa.

El sistema de supervisión se basará en el valor en cada instante que tenga la variable S . La Tabla 4.1 muestra la base de reglas a utilizar; entonces, el esquema de control por modos deslizantes difusos acoplados queda descrito por:

$$u_m = \frac{-\lambda f_x - f_y - \lambda c_m \dot{z} - c_m \dot{\theta}}{\lambda g_x + g_0} - \frac{k_1 \sigma_1(S) + k_2 S}{\lambda g_x + g_0} - c_{fd} \quad (4.52)$$

Tabla 4.1: Tabla de reglas del sistema de inferencia difusa.

S	NG	NM	N	Z	P	PM	PG
$o_1(S)$	NG	NM	N	Z	P	PM	PG

Es sencillo observar que el sistema de inferencia difuso $o_1(S)$ tiene el mismo signo que la variable S debido a su base de reglas, por lo que el término $k_1 o_1(S)$ es equivalente a $k_1 o_1(|S|) \text{sign}(S)$, así el sistema de inferencia difuso puede pensarse que toma el término robusto de (4.35) y mitiga el efecto de la ganancia k_1 conforme las trayectorias del sistema se acercan a la superficie de deslizamiento como una función de la variable S , por lo que se habla de una supervisión indirecta de la ganancia k_1 por medio de $o_1(S)$. La Figura 4.4 da una representación gráfica del esquema de control.

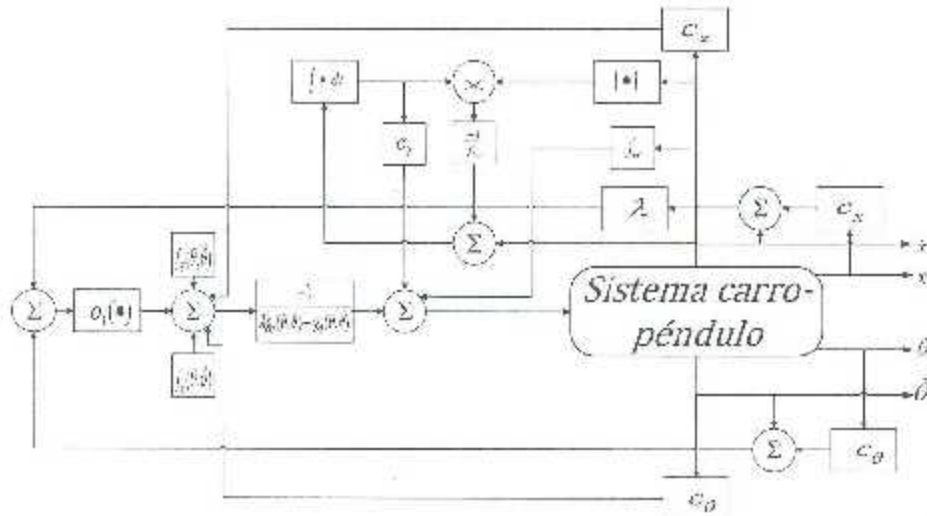


Figura 4.4: Esquema de control por modos deslizantes difusos acoplados.

4.2.4. Controlador de balanceo

Una vez que se estableció la estabilidad asintótica local del controlador, es necesario encontrar una forma segura de llevar la posición del péndulo a una región donde el controlador pueda trabajar de una manera correcta. El posicionar manualmente el

péndulo en la región descrita pudiese resultar en accidentes graves para el operador del sistema, así que, basándonos en el hecho de que las restricciones en la región de operación del controlador no dependen de la velocidad que el sistema tenga, se decidió utilizar un controlador de balanceo sencillo propuesto en [25].

El control de balanceo tiene otra ventaja. Debido a que el movimiento de traslación está restringido en el sistema real, el control de balanceo permite realizar el movimiento del péndulo desde su equilibrio estable (la posición del péndulo hacia abajo) hasta un punto arbitrariamente lejano de la región donde sucede la singularidad de manera automática.

El control de balanceo realiza movimientos en el carro dependiendo de la posición del péndulo aplicando fuerzas constantes, es decir que es un controlador del tipo bang-bang cuyo propósito es alejar al péndulo del equilibrio estable. La acción de control se describe como:

$$u = \begin{cases} F_1 & \theta - \pi > 0 \\ -F_2 & \theta + \pi < 0 \\ 0 & \theta + \pi = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

Los parámetros F_1 y F_2 deben ser obtenidos de manera experimental y varían con respecto al tiempo, así en los distintos trabajos de tesis se observa que estos valores cambian de uno a otro.

4.3. Resultados en simulación

Para la evaluación en simulación se toman un número de casos diferentes dependiendo de qué controlador se ha de evaluar. Se le denomina caso 1 al controlador por modos deslizantes puros, caso dos al controlador por modos cuasideslizantes y caso 3 al controlador por modos deslizantes difusos.

Los parámetros dinámicos del sistema con péndulo grande y rígido se presentan en el apéndice A.

Se presentará cada resultado de simulación como un apartado por su cuenta para

al final realizar un número de comentarios con respecto a todos. El proceso de sintonización para todos los casos se realiza de la misma manera, la relación entre los parámetros de la superficie de deslizamiento se mantiene constante con el fin de sólo sintonizar el parámetro c mientras que las ganancias del controlador se mantienen constantes con respecto a todos los casos, así los parámetros del controlador están dados por la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros de los controladores en simulación.

Símbolo	c	λ	c_F	c_D	k_1	k_2
Valor	30°	$\frac{g}{c} \cos(\frac{\pi}{2} - c)$	$\sqrt{\lambda g}$	$\frac{c}{g}$	35	10

Además, para el controlador CSMC, el ancho de la capa de cota está dado por: $\phi = 3.36255$.

Para el caso de simulación, las funciones de pertenencia de entrada y salida se muestran en las Figuras 4.5 y 4.6 respectivamente. Además los valores de los parámetros base de las funciones de pertenencia se dan en las Tablas 4.3 y 4.4.

Tabla 4.3: Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para simulación.

a	b	c
3.3625	0.2	0.05

Tabla 4.4: Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para simulación.

a	b	c
1	0.3	0.05

4.3.1. Planta con efecto de discretización: casos de estudio 1-3

Para llevar las simulaciones a un caso más parecido a la realidad, se tomaron en cuenta los efectos de cuantificación de los sensores que se utilizan para medir las variables de configuración del mecanismo. Además, se supone que la velocidad no está disponible

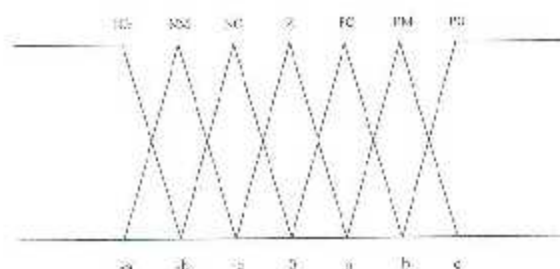


Figura 4.5: Funciones de pertenencia de entrada.

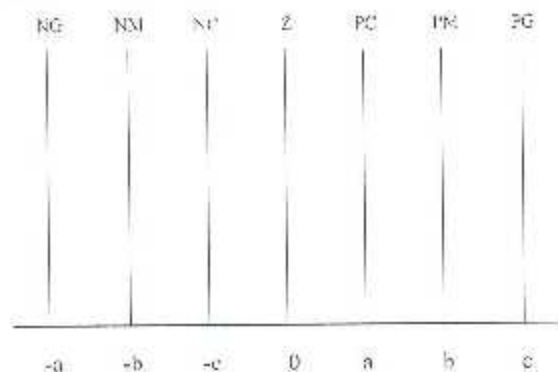


Figura 4.6: Funciones de pertenencia de salida.

para la medición, sino que se obtiene un estimado mediante derivación numérica. Para todos los casos de simulación, el péndulo parte de -179 grados y el controlador entrará en acción a los 23 grados.

Caso 1: SMC puro con discretización

Las Figuras 4.7-4.11 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y de la señal de control para el caso 1.

Resulta interesante que la señal de control para este caso resulta muy elevada. Además las variables articulares oscilan en demasía. Tal vez la oscilación más significativa está en la posición del carro. El controlador parece tener problemas para estabilizar de manera

eficiente esta variable.

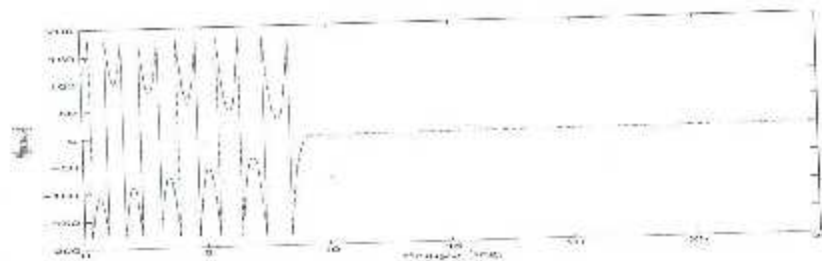


Figura 4.7: θ en simulación del controlador por modos deslizantes puros.

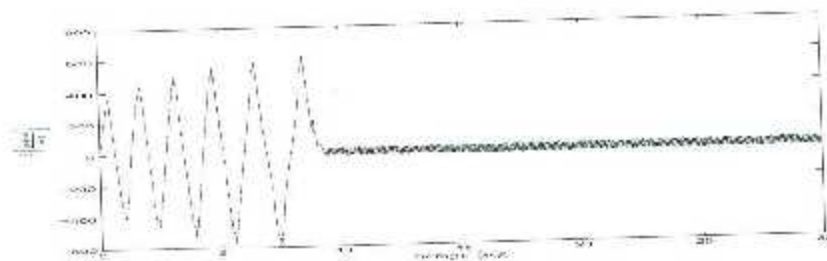


Figura 4.8: Evolución temporal de θ para el controlador SMC en simulación.

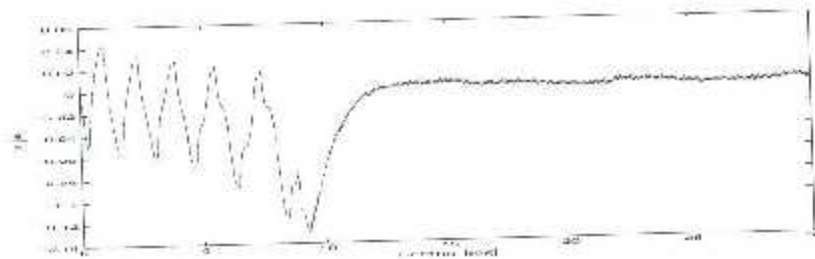


Figura 4.9: Posición traslacional del carro para el Caso 1 de simulación.

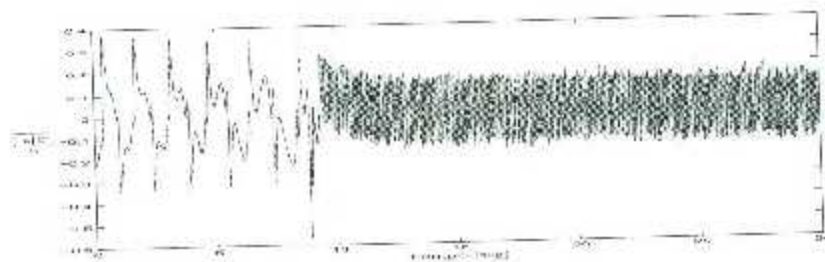
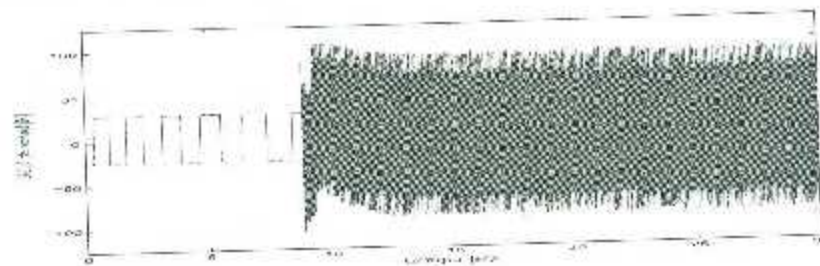


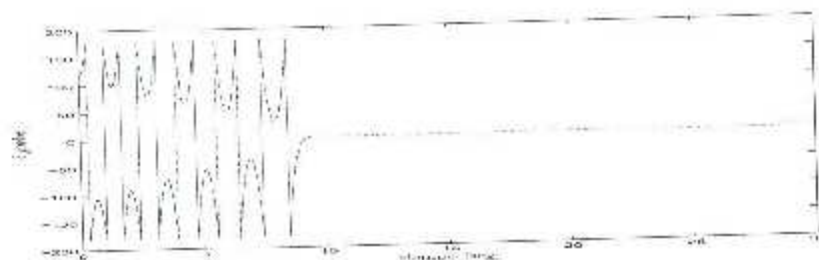
Figura 4.10: Velocidad del carro para el controlador discontinuo simulado.

Figura 4.11: u en simulación para el Caso 1.

Caso 2: CSMC con discretización

Las Figuras 4.12-4.16 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el Caso 2.

En este caso las variables parecen controlarse de una manera mucho más eficiente. La posición del carro ha bajado drásticamente de actividad y parece ser que todas las variables de configuración se controlan de manera más o menos satisfactoria. La señal de control no reduce significativamente la actividad con respecto al caso 1, por lo que se pone en juicio la capacidad del controlador por modos cuasideslizantes para realizar su función.

Figura 4.12: Evolución temporal de θ para el controlador CSMC en simulación

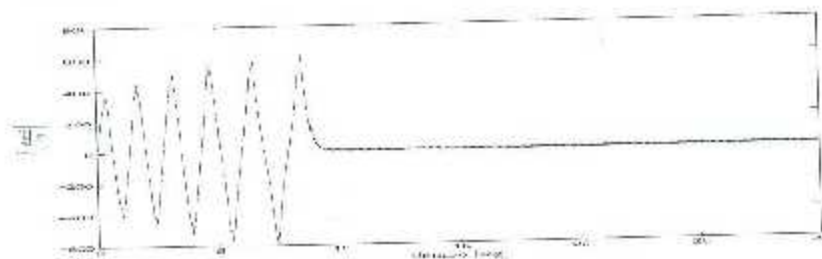


Figura 4.13: Velocidad angular del péndulo para el Caso 2 en simulación.

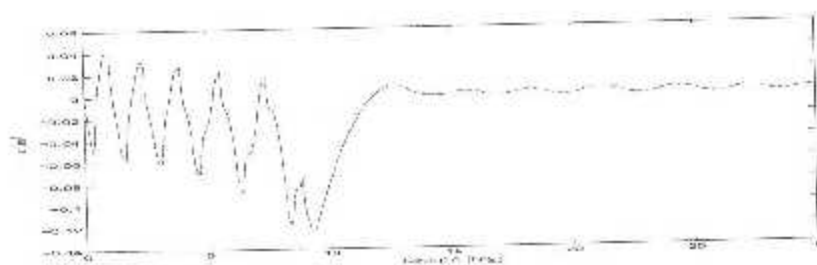


Figura 4.14: Posición translacional para el controlador con capa de cota simulado.

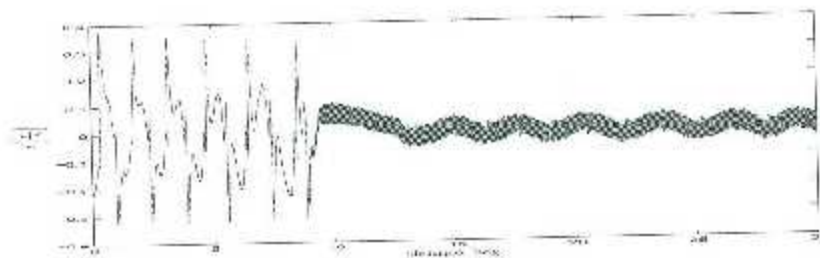


Figura 4.15: \dot{x} en simulación para el Caso 2.

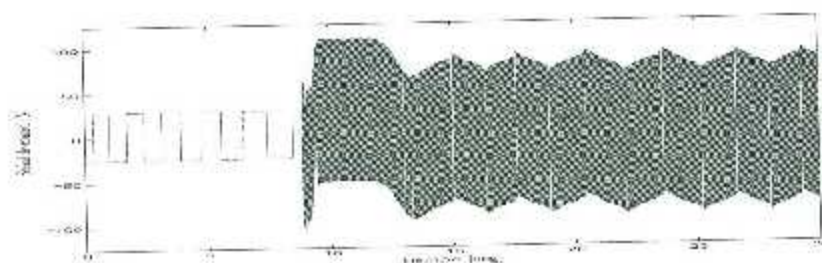


Figura 4.16: u en simulación para el controlador por modos cuasideslizantes.

Caso 3: FSMC con discretización

Las Figuras 4.17-4.21 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 3.

En este caso las oscilaciones en la posición del péndulo aumentan un poco, sin embargo se nota una reducción en la actividad de las otras tres variables de configuración con respecto al caso 2. La señal de control se reduce significativamente en actividad.



Figura 4.17: Posición angular del péndulo para el Caso 1 de simulación.

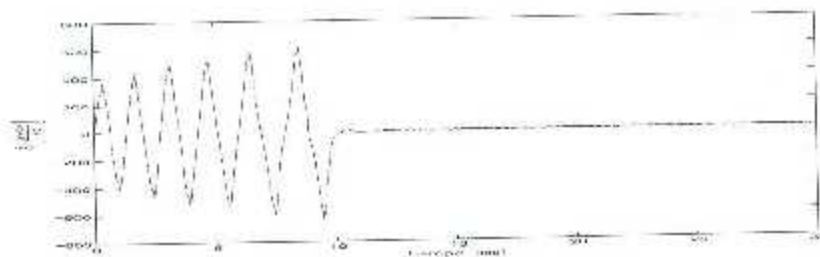


Figura 4.18: Velocidad angular del péndulo por el controlador con capa de cola simulado.

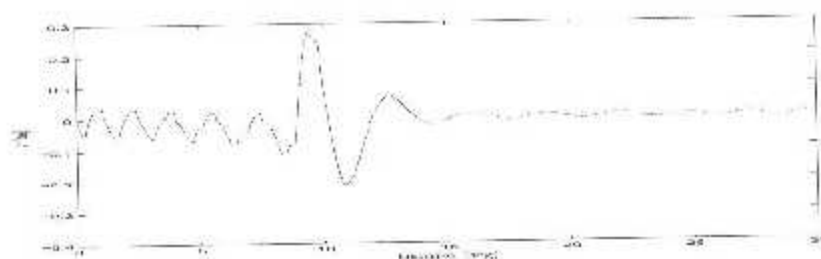


Figura 4.19: x en simulación para el Caso 3.

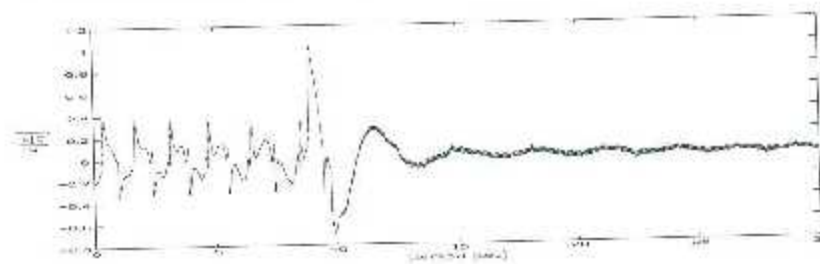


Figura 4.20: x en simulación para el controlador por modos deslizantes difusos.

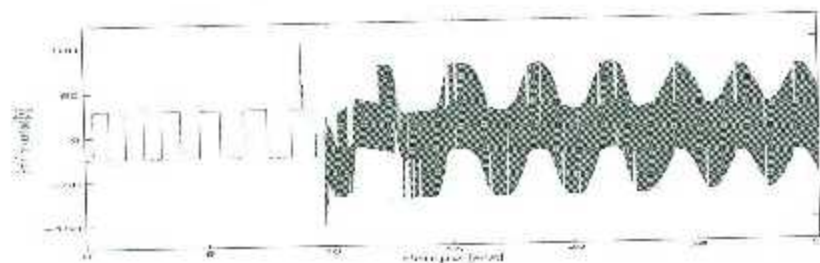


Figura 4.21: u para el controlador FSMC en simulación.

Comentarios sobre las simulaciones

En los casos de simulación donde se consideran los efectos de discretización, se hace evidente la capacidad de reducción del *chattering* en el controlador por modos deslizantes difusos. Se reduce la amplitud de las oscilaciones en la señal de control, además es sencillo ver que la actividad de la señal de control es más baja en general. En lo que concierne a las variables de configuración del sistema, se aprecia una oscilación un poco mayor de la variable del carro x , sin embargo la actividad de las velocidades de ambas variables se reducen considerablemente. En la figura 4.22 se muestran a forma de gráfica de barras las normas \mathcal{L}_2 de las variables de interés. Nótese que el desempeño de los controles cuasideslizantes y deslizantes difusos son muy parecidos para la posición del carro, sin embargo se le atribuye una norma alta a esta variable debido a un impulso grande presentado en el arranque del controlador.

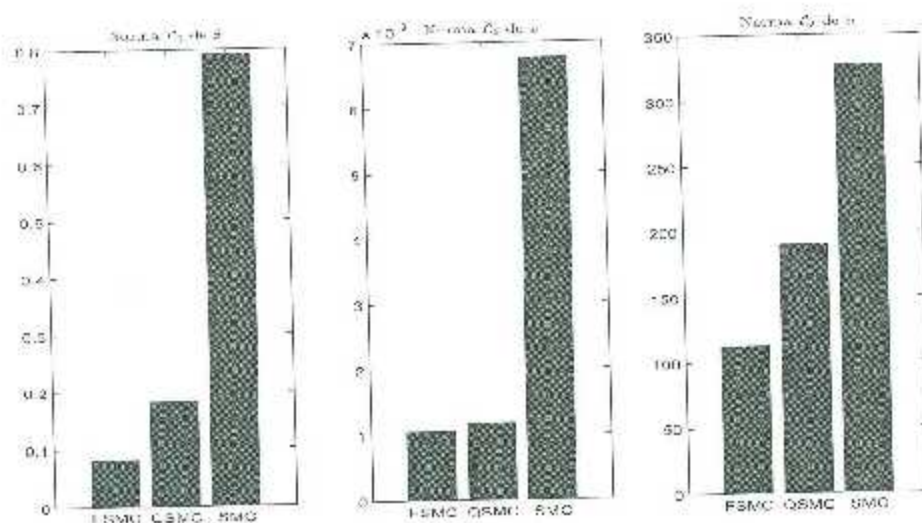


Figura 4.22: Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo grande

4.4. Resultados experimentales

En el apartado de experimentos se proponen seis casos diferentes. La Tabla 4.5 da una descripción a los casos experimentales

Tabla 4.5: Casos experimentales

Caso experimental	Controlador	Parámetros conocidos totalmente
1	SMC	Si
2	OSMC	Si
3	FSMC	Si
4	SMC	No
5	OSMC	No
6	FSMC	No

También, debido a ciertas dinámicas que no se modelan, los parámetros del controlador ceden variar con respecto a las simulaciones. En la Tabla 4.6, se muestran los parámetros en experimentos para los controladores.

Tabla 4.6: Parámetros de los controladores experimentales.

Símbolo	ϵ	λ	c_g	c_w	k_1	k_2
Valor	18°	$\frac{g}{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$	$\sqrt{\lambda g}$	$\frac{c_g}{10}$	35	10

Además, para el controlador CSMC el ancho de la capa de cota está dado por: $\phi = 3.36255$.

Para el caso de experimentos, las funciones de pertenencia de entrada y salida se muestran también en las Figuras 4.5 y 4.6 respectivamente. Además los valores de los parámetros base de las funciones de pertenencia se dan en las Tablas 4.7 y 4.8.

Tabla 4.7: Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para experimentos.

a	b	c
3.3625	1	0.12253

Tabla 4.8: Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para experimentos.

a	b	c
1	0.8	0.3

4.4.1. Planta con parámetros conocidos: casos experimentales 1-3

En los Casos 1-3 para los experimentos se busca reafirmar lo que se observó en la simulación. Obviamente en el experimento no se pueden evitar los efectos de discretización y por lo tanto estos casos son equivalentes a los casos de simulación. El periodo de muestreo para el experimento es el mismo que para la simulación y los algoritmos para la derivación se mantienen iguales a los de la simulación.

Caso 1: SMC puro con parámetros conocidos

Las Figuras 4.23-4.27 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el Caso 1 en experimentos.

Como es de esperarse de las simulaciones, la señal de control resulta con una gran actividad, sin embargo el error en el sistema del carro no se elimina completamente, sino que la respuesta oscila entre 0 y 10 cm.

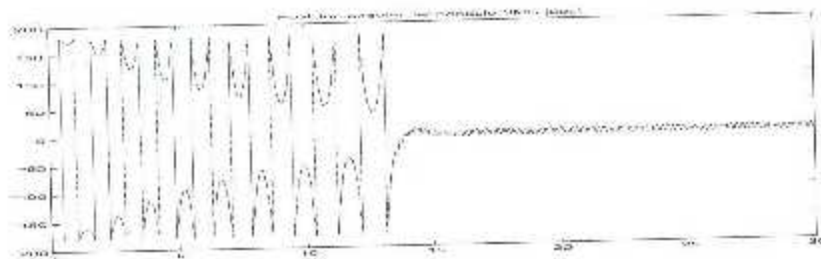


Figura 4.23: θ experimental para el controlador por modos deslizantes puros con parámetros conocidos.

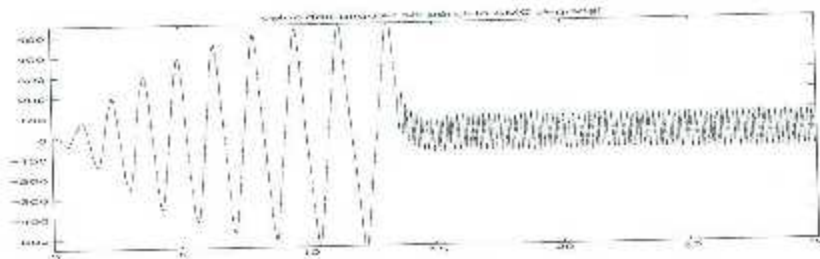


Figura 4.24: Evolución temporal de $\dot{\theta}$ para el SMC en experimentos y parámetros conocidos.

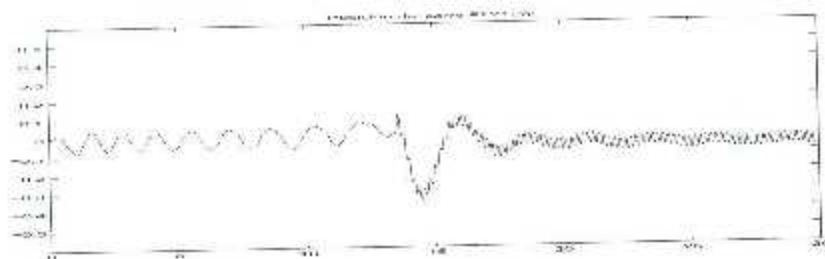


Figura 4.25: Posición traslacional del carro para el Caso 1 real.

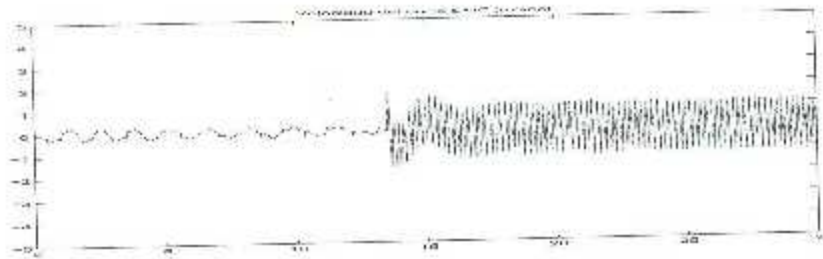


Figura 4.26: Velocidad del carro para el controlador discontinuo experimental con parámetros conocidos.

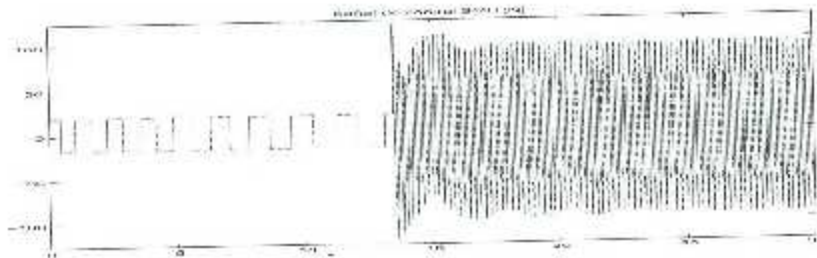


Figura 4.27: u para el Caso 1 real.

Caso 2: CSMC con parámetros conocidos

Las figuras 4.28-4.32 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 2 en experimentos.

Aquí, contrario a lo que se vio en simulación, las oscilaciones del sistema del carro aumentan con el controlador por modos cuasidestabilizantes. Sin embargo, las oscilaciones ya aparecen alrededor de cero. Además la señal de control resulta mucho más limpia de lo que se esperaba.

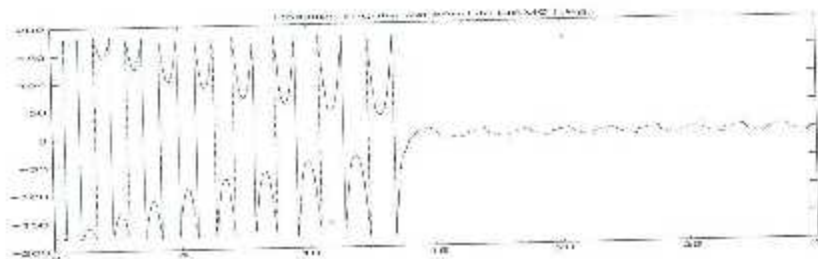


Figura 4.28: Evolución temporal de θ para el controlador por CSMC experimental con parámetros conocidos.

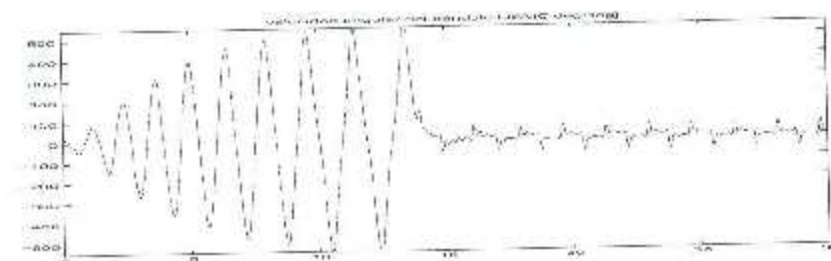


Figura 4.29: Velocidad angular del péndulo para el Caso 1 en experimentos.

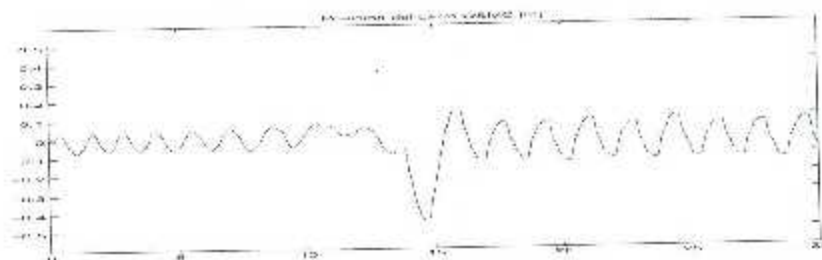


Figura 4.30: Posición translacional del carro para el controlador con capa de cota en experimento y parámetros conocidos.

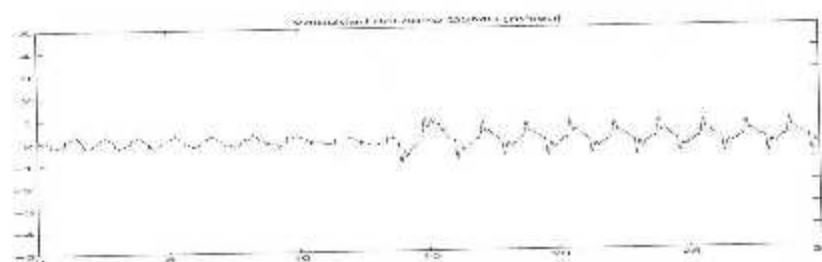


Figura 4.31: z para el Caso 2 real.

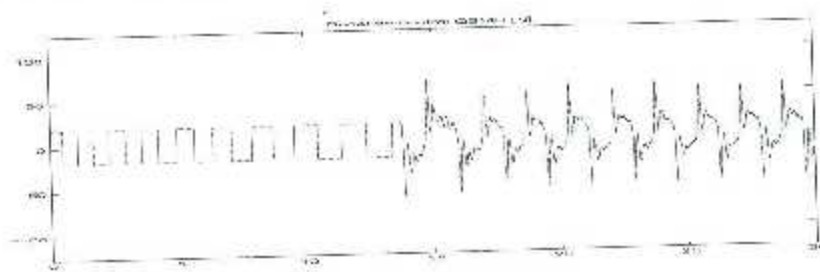


Figura 4.32: u en experimentos con parámetros conocidos.

Caso 3: FSMC con parámetros conocidos

Las figuras 4.33-4.37 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 3 en experimentos.

De nuevo, las oscilaciones del sistema del carro no se realizan alrededor de cero. Sin embargo, estas se han reducido en actividad con respecto al controlador SMC. Con lo que respecta al QSMC, el sistema del péndulo se controla de una manera mucho más eficiente, además de que los picos en la señal de control son mucho más pequeños y la oscilación en el sistema del carro resulta de una amplitud más pequeña.

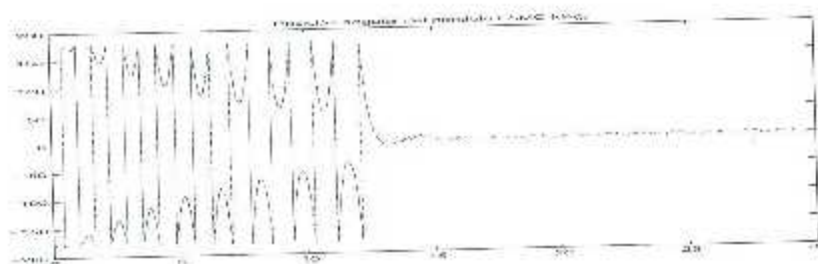


Figura 4.33: Posición angular del péndulo para el Caso 3 experimental.

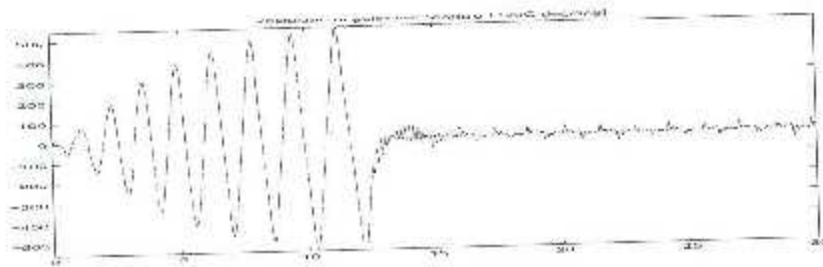


Figura 4.34: Velocidad angular del péndulo para el controlador con sistema difuso en experimento y parámetros conocidos.

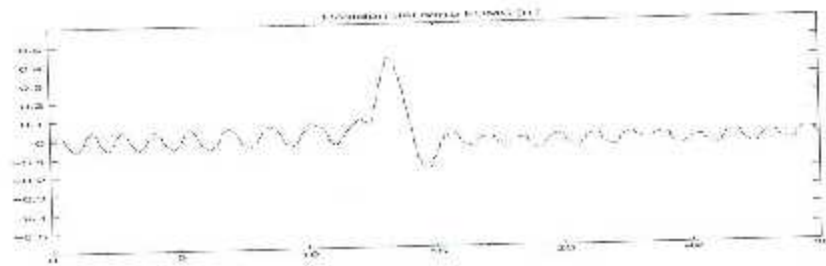


Figura 4.35: x en experimentos del controlador por modos deslizantes difusos y parámetros conocidos.

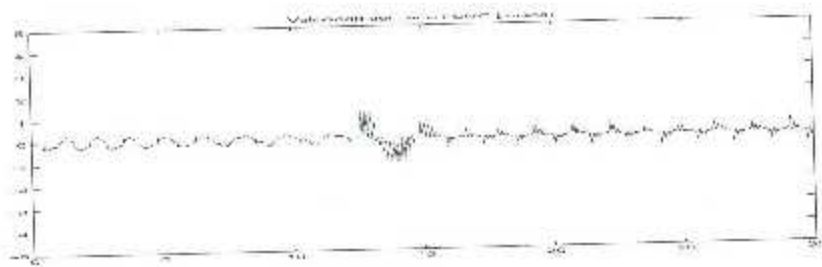


Figura 4.36: Evolución temporal de z para el controlador FSMC en experimentos con parámetros conocidos.

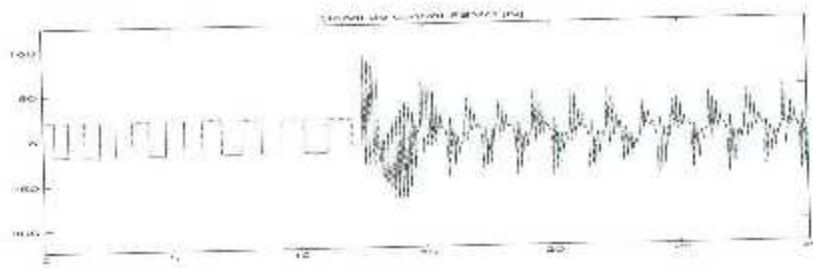


Figura 4.37: Señal de control para el Caso 3 real.

Comentarios sobre los resultados

Los experimentos hacen aún más evidente la ventaja de agregar un sistema de inferencia difuso al controlador por modos deslizantes ya que se observa que la señal de control se reduce en actividad y amplitud de manera considerable con respecto a su contraparte por modos deslizantes puros. Además las oscilaciones en el sistema del carro se reducen drásticamente con respecto al controlador por modos no deslizantes para este caso, se tiene que conservar un equilibrio entre la reducción de las oscilaciones en la señal de control y la reducción del error en las variables de configuración. Como se hará ver más adelante, utilizando el sistema de inferencia difuso se consigue un mejor rendimiento del controlador que utilizando la capa de vela.

4.4.2. Planta con péndulo chico: casos experimentales 4-6

Para estos experimentos se cambiaron la varilla y el contrapeso que componen al péndulo en el sistema físico, aunque los parámetros se reducen, se mantienen los parámetros utilizados para el cálculo del controlador con la finalidad de revisar las propiedades de robustez del mismo.

Caso 4: SMC puro con parámetros sobrestimados

Las figuras 4.38-4.42 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 4 en experimentos.

En este caso, el error presente en el caso 1 no se ha eliminado. Los resultados resultan muy similares a los del experimento con los parámetros conocidos, por lo que se habla de una gran robustez del controlador.

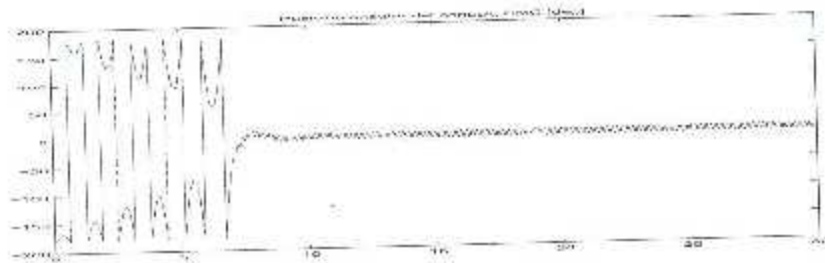


Figura 4.38: θ con parámetros sobrestimados en experimento para el controlador por modos deslizantes puros.

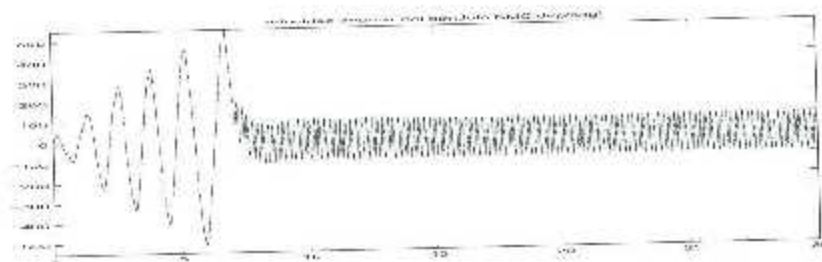


Figura 4.39: Evolución temporal de θ con parámetros sobrestimados para el controlador SMC experimental.

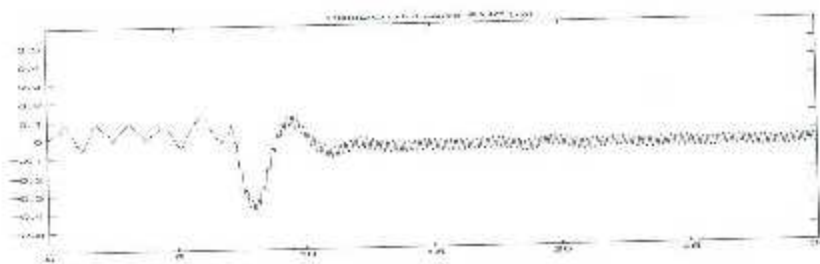


Figura 4.40: Posición traslacional del carro para el Caso 4 real.

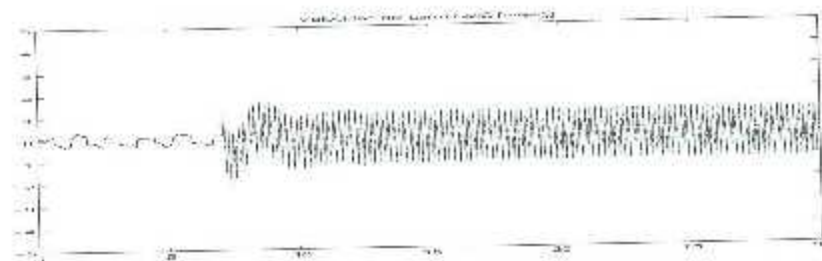


Figura 4.41: Velocidad traslacional del carro con parámetros sobrestimados para el controlador discontinuo experimental.

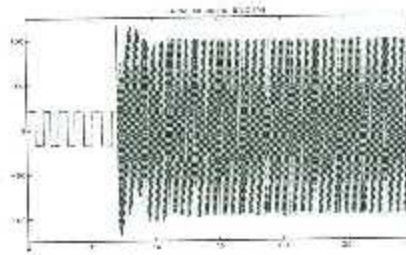


Figura 4.42: u para el Caso 4 experimental.

Caso 5: CSMC con parámetros sobrestimados

Las figuras 4.43-4.47 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 5 en experimentos.

Nótese que de nuevo la posición del carro oscila de manera considerable. La señal de control vuelve a presentar picos considerables y el péndulo oscila con una amplitud bastante alta. Sin embargo, los resultados de nuevo no varían en demasía con respecto a los experimentos con parámetros conocidos.

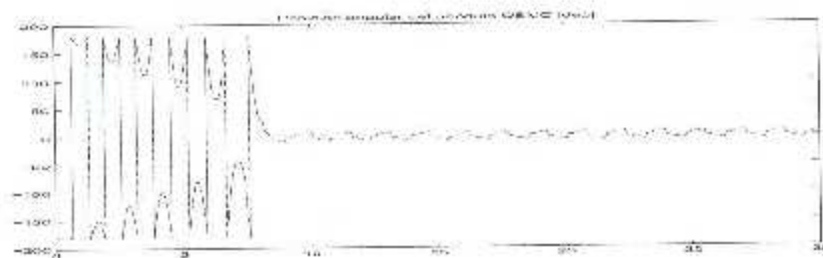


Figura 4.43: Evolución temporal de θ con parámetros sobrestimados para el controlador CSMC en experimentos.

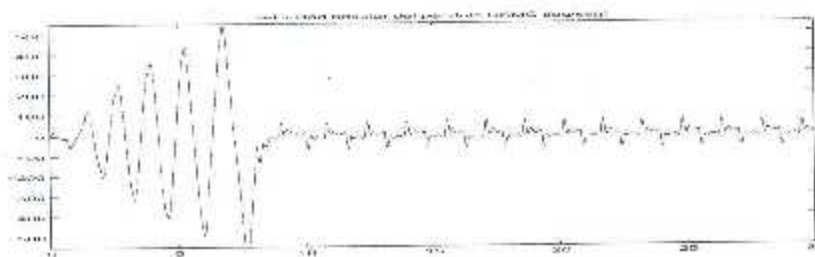


Figura 4.44: Velocidad angular del péndulo para el Caso 5 experimental.

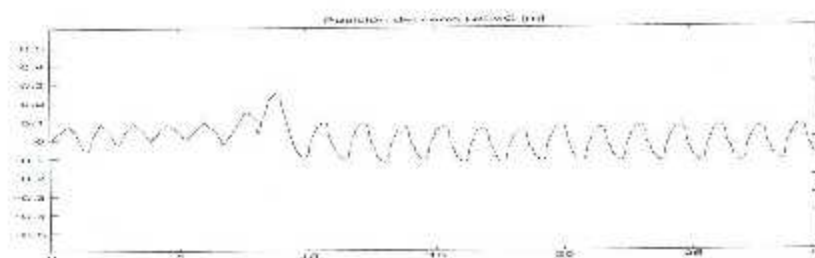


Figura 4.45: Desplazamiento lineal del carro con parámetros sobrestimados para el controlador con capa de cota real.

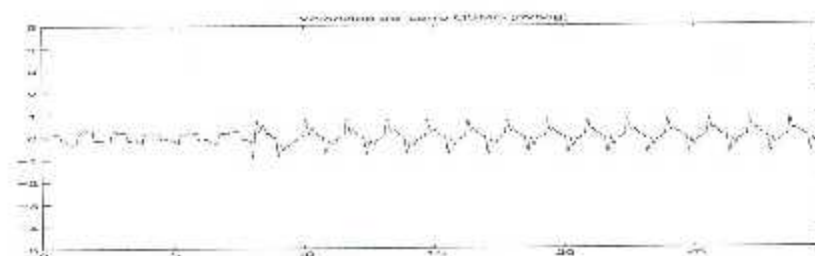


Figura 4.46: \ddot{x} con parámetros sobrestimados para el Caso 5 experimental.

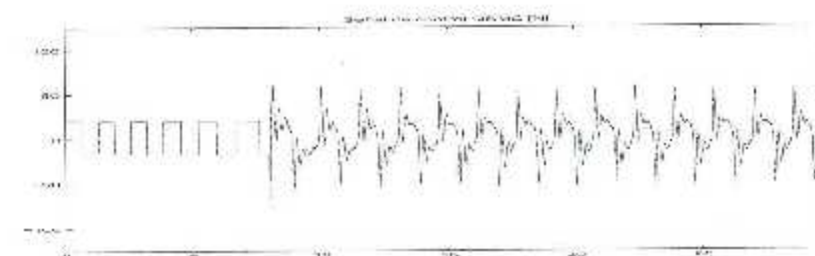


Figura 4.47: u experimental con parámetros sobrestimados del controlador por modos cuasideslizantes.

Caso 6: FSMC con parámetros sobrestimados

Las figuras 4.48-4.52 representan las evoluciones temporales de la posición angular del péndulo, velocidad angular del péndulo, desplazamiento del carro, la velocidad del carro y la señal de control para el caso 6 en experimentos.

Los resultados de nuevo no varían considerablemente con respecto al caso con parámetros conocidos. Entonces, se vuelve a concluir que presenta una menor oscilación en la posición del carro con respecto al caso cuasideslizante, aunque mantiene una actividad un poco mayor. Además, las oscilaciones en la posición del carro se reducen con respecto al Caso 4.

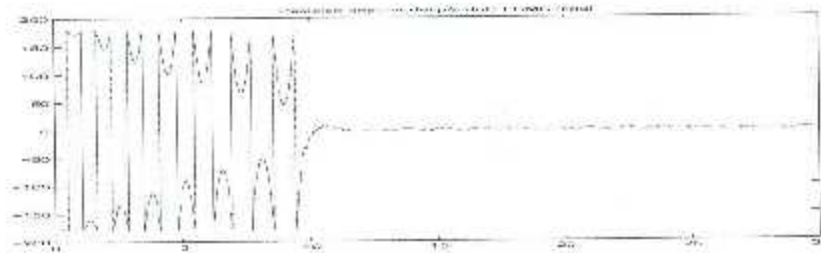


Figura 4.48: Posición angular del péndulo con parámetros sobrestimados para el caso 6 experimental.

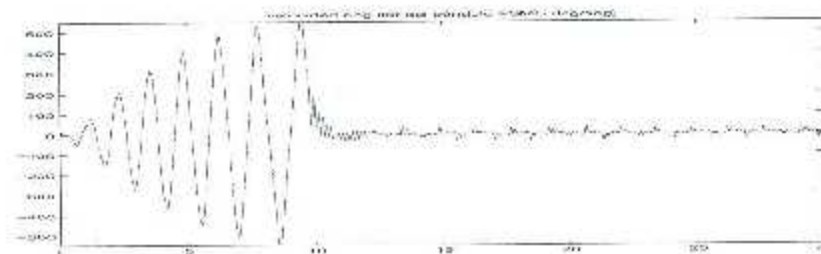


Figura 4.49: Velocidad angular del péndulo con parámetros sobrestimados para el controlador por FSMC experimental.

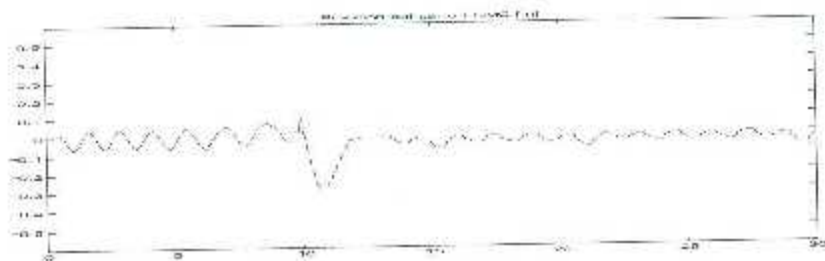


Figura 4.50: x para el Caso 6 real.

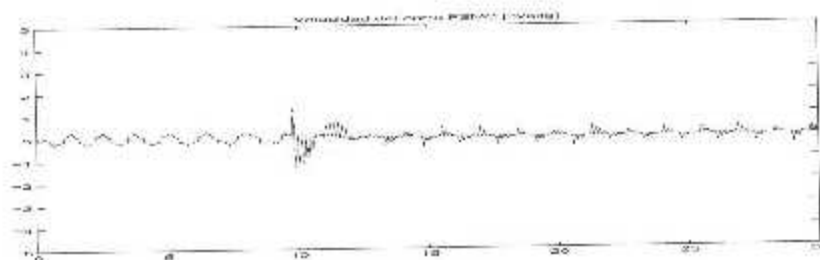


Figura 4.51: x con parámetros sobrestimados para del controlador por modos deslizantes difusos en experimento.

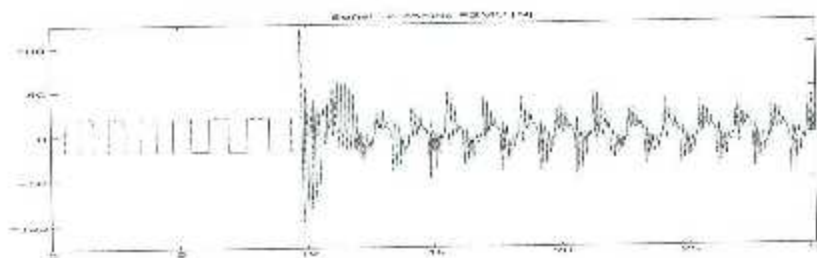


Figura 4.52: Evolución temporal de u con parámetros sobrestimados para el controlador PSMC.

Comentarios sobre los resultados

De nuevo, este experimento tiene como objetivo la validación de la robustez del controlador. En los resultados no se puede ver una diferencia significativa entre el controlador por modos cuasideslizantes y su equivalente difusa con respecto a la señal de control, sin embargo las oscilaciones reducen un poco de amplitud. La gran mejora

se observa con respecto a los estados del sistema, donde el control por modos deslizantes difusos consigue una respuesta bastante mejor que el sistema cuasideslizante.

4.4.3. Análisis de los resultados

A continuación se presentan las normas \mathcal{L}_2 de las variables articulares así como de la señal de control para los dos experimentos. Una norma pequeña implicaría que las señales tienen menos actividad y en general se conservan más cercanas a cero. La norma se toma con respecto a cada variable con la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_2(v) = \sqrt{\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T v^2 dt} \quad (4.54)$$

v es la variable de interés, t_0 es el tiempo inicial del intervalo de interés, T es el tiempo final. Las normas se muestran en las figuras 4.53 y 4.54 a manera de gráfica de barras.

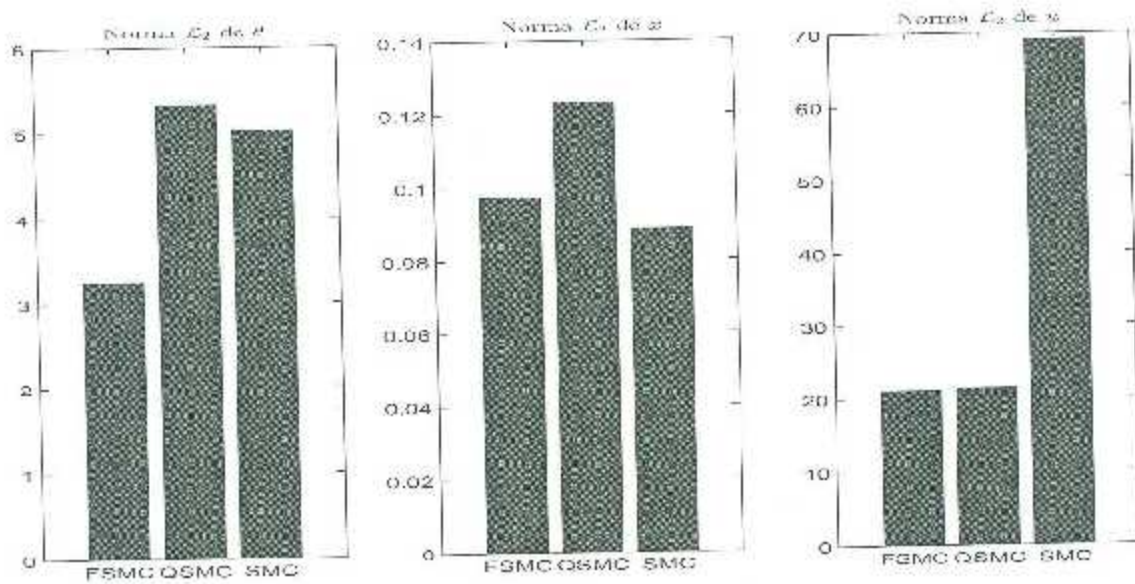


Figura 4.53: Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo grande

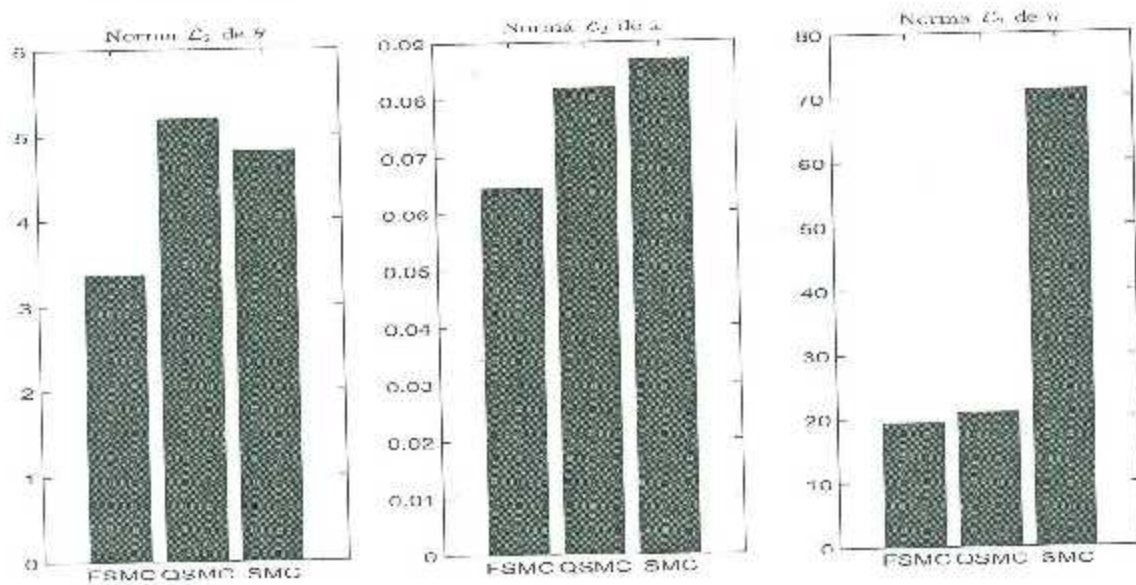


Figura 4.54: Norma \mathcal{L}_2 para el experimento con el péndulo chico

En las gráficas presentadas por las figuras 4.53 y 4.54 se observa que la norma \mathcal{L}_2 para el controlador por modos deslizantes difusos es inferior en cada caso de los experimentos con respecto a su contraparte cuasideslizante. Además, las normas de la señal de control para los dos controladores es equiparable. Así, se habla de que, en general, el controlador por modos deslizantes difusos presenta un mejor comportamiento; además conserva mejor las cualidades de robustez que su contraparte cuasideslizante.

Con lo que respecta a la comparación contra el controlador por modos deslizantes puros, se observa en la figura 4.53 que el controlador por modos deslizantes difusos presenta un comportamiento sustancialmente superior en lo que respecta al control del péndulo. Aún más, la señal de control se reduce dramáticamente con respecto al controlador por modos deslizantes puros. Si bien es cierto que el controlador por modos deslizantes convencionales controla un poco mejor el sistema del carro, la diferencia no es suficiente como para poner en juicio la superioridad del controlador por modos deslizantes difusos. En el experimento con parámetros sobrestimados, cuyos resultados se muestran en la figura 4.54, El controlador por modos deslizantes difusos se muestra claramente superior a su contraparte discontinua.

Calve hacer la aclaración de que los resultados en simulación no son muy parecidos a

los mostrados para el experimento. Nosotros creemos que se debe al desgaste de las bandas que componen el sistema de transmisión para el movimiento del carro, así como un posible aumento de la fricción en el riel desde que se parametrizó, y por lo tanto el compensador de fricción de Dhal pudiese no estar haciendo su función como se debería.

4.4.4. Cuadro resumen de los controladores para el sistema carro-péndulo

A continuación se presenta a una tabla con las leyes de control utilizadas en este capítulo. En la Tabla 4.9 se muestra el modelo dinámico con fricción del sistema, el compensador de fricción utilizado y las distintas leyes de control evaluadas para una mejor comprensión de las diferencias entre los controladores:

Tabla 4.9: Cuadro resumen de los controladores evaluados para el sistema carro-péndulo.

Modelo de la planta	$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \sec(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \eta \sec(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - (f_{ex} \dot{x} + \sigma_0 \varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix}$ $\varepsilon = -\frac{\sigma_0}{f_{ex}} \dot{x} x + \dot{x}$
Compensador de fricción de Dahl	$e_{fd} = f_{ex} \dot{x} + \sigma_0 \hat{\varepsilon}$ $\dot{\hat{\varepsilon}} = -\frac{1}{T_w} \dot{x} \hat{\varepsilon} + \dot{x}$
Superficie de deslizamiento	$s_x = c_x x + \dot{x}$ $s_\theta = c_\theta \theta + \dot{\theta}$ $S = s_x + s_\theta$
Controlador por modos deslizantes convencionales	$u = \frac{-\lambda f_x - f_\theta - \lambda c_x \dot{x} - c_\theta \dot{\theta} - k_1 \text{sign}(S) - k_2 S}{\lambda g_x + g_\theta} + e_{fd}$
Controlador por modos cuasideslizantes	$u = \frac{-\lambda f_x - f_\theta - \lambda c_x \dot{x} - c_\theta \dot{\theta} - k \text{sat}(S) - k_2 S}{\lambda g_x + g_\theta} + e_{fd}$
Controlador por modos deslizantes difusos	$u = \frac{-\lambda f_x - f_\theta - \lambda c_x \dot{x} - c_\theta \dot{\theta} - k_1 o_1(S) - k_2 S}{\lambda g_x + g_\theta} + e_{fd}$
Sistema de inferencia difuso	$o_1(S) = \frac{\sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \dots \sum_{i_n=1}^{p_n} \bar{y}^{1(i_1-i_n)}}{\sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \dots \sum_{i_n=1}^{p_n} (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{i_j}}(S))}$

C A P Í T U L O 5

Aplicación a un Robot de 2 GDL

El control de un robot manipulador suele ser un problema surgido en la aplicación de técnicas de control no lineales para sistemas MIMO.

En esta sección se abordarán tres controladores, los cuales tienen una estructura similar y por tanto se puede hablar de que son el mismo controlador en diferentes casos. Todos los controladores evaluados son de una forma similar al controlador adaptable propuesto por Slotine y Li en [27], es por ello que los controladores son llamados del tipo Slotine-Li. Así pues, se hablará del controlador en su forma convencional, aquella en que la parte de control toma la forma de un PD más una compensación de la dinámica del manipulador, la forma adaptable (modificación del controlador de tal manera que se puede adaptar una parte no conocida de la dinámica del robot manipulador) y la forma robusta. Se demostrará que la forma robusta es un controlador por modos deslizantes, además se hará un análisis comparativo entre las formas robusta y convencional en simulación y se presentarán resultados experimentales para el controlador convencional, el adaptable y el controlador por modos deslizantes difuso. Debe hacerse la mención de que en este prototipo no se prueba la versión por modos deslizantes debido al gran esfuerzo que esta ley de control impone a los accionamientos del robot y al gran costo que una descompostura en uno de los accionamientos implicaría. Así, tampoco se llevaron a cabo experimentos con la ley de control cuasideslizante, debido al pobre desempeño que ésta demostró en simulación.

5.1. Modelado dinámico

En esta sección se mencionará el modelado dinámico de un robot manipulador para, partiendo del mismo, poder luego evaluar controladores de movimiento para esta planta. Se habla en particular del robot de dos grados de libertad del Laboratorio de Mecatrónica y Control de La División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de la Laguna. Se decidió evaluar los controladores en este dispositivo debido a que es el robot más sencillo con el que se cuenta en el laboratorio y que aún presenta todos los componentes y propiedades del modelo dinámico para un robot manipulador, así que el diseño y análisis del controlador seguirían siendo válidos para un robot de n grados de libertad. Un diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 5.1.

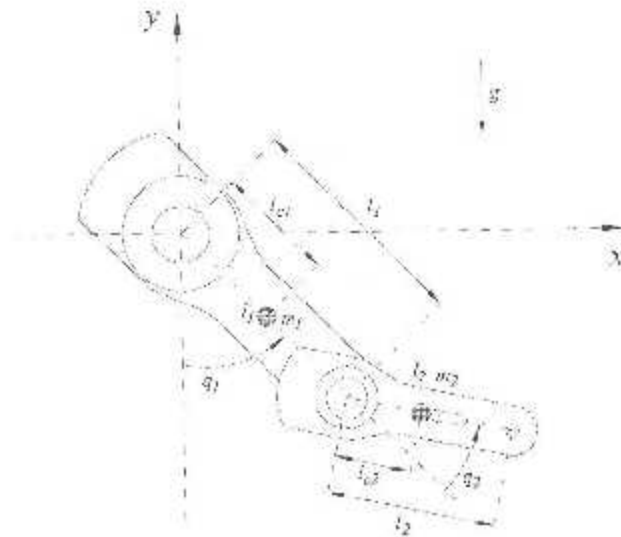


Figura 5.1: Diagrama de cuerpo libre para el robot de dos grados de libertad

donde las variables q_i son las posiciones articulares, los parámetros l_i representan la longitud y los parámetros l_{ci} representan las longitudes al centro de masa, todos del i -ésimo eslabón; mientras que g representa la aceleración de la gravedad. Para el modelo dinámico además se requieren los parámetros m_i que representarían la masa e I_{ci} los momentos de inercia con respecto al centro de masa, de nuevo del i -ésimo eslabón. Todos los valores y unidades de los parámetros del modelo dinámico se muestran en el Apéndice B.

El modelado de este robot en particular se estudia a detalle en [28], por lo que la deducción del mismo no se lleva a cabo, solamente se presentará el modelo en forma matricial y algunas propiedades útiles del modelo.

El modelo dinámico de un robot manipulador puede ser expresado en forma compacta como:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (5.1)$$

donde $M(\mathbf{q})$ es la matriz de inercias, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de pares externos los cuales se toman como entradas al robot.

El robot en cuestión, al ser de dos grados de libertad y completamente actuado, presenta el modelo dinámico de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & m_{12}(\mathbf{q}) \\ m_{21}(\mathbf{q}) & m_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} c_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ c_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & c_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde los elementos de cada matriz y vector están dados por:

$$\begin{aligned} m_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(q_2)] + I_1 + I_2 \\ m_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)] + I_2 \\ m_{21}(\mathbf{q}) &= m_{12} \\ m_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_2^2 + I_2 \\ c_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ c_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ c_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0 \\ g_1(\mathbf{q}) &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1) + m_2 l_2 g \sin(q_1 + q_2) \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_2 g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

En general la matriz de inercias es simétrica y definida positiva [28], por lo que es el

modelo puede ser manipulado para encontrar:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})]. \quad (5.3)$$

Si el problema de control a tratar es el de movimiento, i.e. el seguimiento de una trayectoria variante con el tiempo, es necesario expresar la dinámica del robot en función a los errores. Entonces definase:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (5.4)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \quad (5.5)$$

donde \mathbf{q}_d y $\dot{\mathbf{q}}_d$ son la referencia a seguir y su derivada, respectivamente además de que se supone que la función $\dot{\mathbf{q}}_d$ es continuamente diferenciable y su derivada se expresa como $\ddot{\mathbf{q}}_d$. Se ha omitido hacer la aclaración de que son funciones del tiempo con abuso de notación, pero debe tenerse en mente. Entonces, es posible expresar el modelo en la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{q}} - M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.1.1. Propiedades útiles del modelo dinámico

A continuación se nombran un conjunto de propiedades útiles del modelo dinámico para realizar las pruebas de estabilidad, todas ellas provienen de [28] y ahí es posible encontrar la prueba de cada una de ellas.

Propiedad 5.1: Positividad de la matriz de inercias. *La matriz de inercias de un robot manipulador es simétrica y definida positiva.*

Propiedad 5.2: No unicidad de la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, puede no ser única. Sin embargo El vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ si lo es.*

Propiedad 5.3: Antisimetría de las matrices $\dot{M}(\mathbf{q})$ y $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. *No importa la*

manera en que se elija la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, siempre se satisfará que:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

Aún más, si la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se elige utilizando los símbolos de Christoffel, la expresión anterior se modifica a:

$$\dot{\mathbf{x}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Propiedad 5.4: Linealidad en términos de los parámetros del modelo dinámico. Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$M(\mathbf{q})\mathbf{u} + C(\mathbf{q}, \mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\boldsymbol{\theta} + k(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (5.7)$$

donde el vector $\boldsymbol{\theta}$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y su carga. Extendiendo un poco más la propiedad, siempre es posible encontrar un vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ tal que $k(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, con lo que la propiedad pudiese ser reescrita como:

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.8)$$

La siguiente no es una propiedad establecida en la referencia citada anteriormente, sino que es una observación fácilmente comprobable:

Observación: Para el robot de dos grados de libertad a tratar, los pares gravitacionales están acotados por arriba como:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &\leq (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g + m_2 l_{c2} g \\ g_2(\mathbf{q}) &\leq m_2 l_{c2} g \end{aligned}$$

5.2. Controladores evaluados

Los controladores presentados en esta sección comparten todos una estructura similar, basándose todos en el controlador propuesto por Slotine y Li en [27]. En la fuente citada se propone un control adaptable que hasta la fecha recibe el nombre de control adaptable de Slotine-Li. En particular, en el presente trabajo se ha optado utilizar el nombre de controlador Slotine-Li para hacer alusión a la estructura compartida de los controladores.

Se decidió utilizar los controladores mencionados debido a que la prueba de estabilidad original para la versión adaptable del controlador deja entrever la relación que éste tiene con la teoría de modos deslizantes, haciendo referencia en repetidas ocasiones a una superficie de deslizamiento. Así también, aunque pruebas de estabilidad mucho más sofisticadas se pueden encontrar en [29], la prueba de estabilidad propuesta en [27] es la que se presenta en el documento para el control por modos deslizantes, debido a que las restricciones que se oponen a los parámetros de diseño son respetadas para todos los controladores. Debido a que los controladores aquí presentados son muy recurridos en la literatura, las pruebas de estabilidad se presentan a manera de comentario, mientras que su desarrollo intensivo puede ser encontrado en [29] para los controladores convencional (PD con compensación) y adaptable (PD con compensación adaptable).

5.2.1. Controlador Slotine-Li convencional [29]

Ley de Control

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q) \quad (5.9)$$

Con Λ , K_p y K_v como matrices diagonales y definidas positivas. Además se cumple que

$$\Lambda = K_v^{-1} K_p \quad (5.10)$$

Nótese entonces que si se definiera un controlador PD de la forma:

$$K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \quad (5.11)$$

Prueba de estabilidad

La función candidata de Lyapunov a utilizar será entonces:

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T M(q) [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + \dot{\bar{q}}^T K_p \bar{q} \quad (5.14)$$

Debido a la propiedad de positividad de la matriz de inercias y a que por definición la matriz K_p es definida positiva, la función candidata de Lyapunov presenta dos términos cuadráticos, además de que es relativamente sencillo ver que la función es radialmente descreciente. Para una prueba a mayor detalle, vea [29].

Una vez definida la función candidata de Lyapunov, se presenta la derivada temporal dada por:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T \dot{M}(q) [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + \frac{1}{2} [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T \dot{M}(q) [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + 2\dot{\bar{q}}^T K_p \dot{\bar{q}} \quad (5.15)$$

y evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (5.13), se tiene:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -[\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T K_v [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + 2\dot{\bar{q}}^T K_p \dot{\bar{q}} \quad (5.16)$$

Tomando $K_p = K_v \Lambda$ se tiene entonces:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -\dot{\bar{q}}^T K_v \dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T \Lambda K_v \bar{q} \quad (5.17)$$

Debido a que las matrices han sido restringidas a ser diagonales y definidas positivas, es prudente con la expresión anterior establecer que la derivada de la función candidata de Lyapunov es definida negativa, lo que indica estabilidad asintótica global y uniforme del origen.

5.2.2. Controlador Slotine-Li adaptable [29]

Ley de Control

$$\tau = K_p \bar{q} + K_v \dot{\bar{q}} + \Phi \theta + M_0(q) [\dot{\bar{q}}_d + \Lambda \bar{q}] + C_0(q, \dot{q}) [\dot{\bar{q}}_d + \Lambda \bar{q}] + g_0(q) \quad (5.18)$$

Donde Φ es una función Matricial que contiene términos no lineales en función de los estados del robot y θ es un vector que contiene los parámetros a estimar. Las matrices M_0 , $C_0(q, \dot{q})$ y el vector $g_0(q)$ representan las partes conocidas del modelo. Además, de nuevo se define Λ , K_p y K_v como matrices diagonales y definidas positivas. Además se cumple que

$$\Lambda = K_v^{-1} K_p. \quad (5.19)$$

La Figura 5.3 da una representación gráfica del esquema de control.

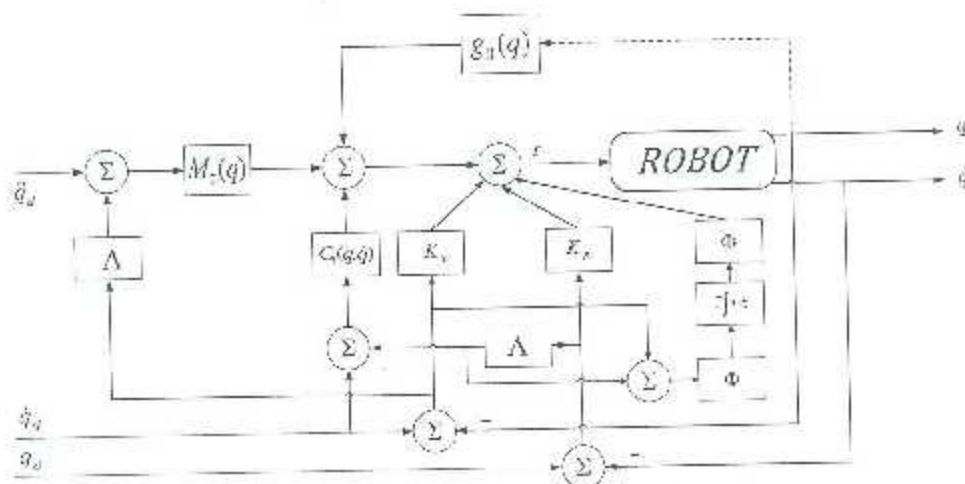


Figura 5.3: representación gráfica del controlador Slotine-Li adaptable.

Ley de adaptación

La ley de adaptación a utilizar es una ley del tipo gradiente, de la forma:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \int_0^t \Phi^T [\Lambda \tilde{q}(\sigma) + \dot{\tilde{q}}(\sigma)] d\sigma + \tilde{\theta}(0) \quad (5.20)$$

La cual será derivada en el análisis de estabilidad.

Ecuación de lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(q)^{-1} \left[-K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - \Phi \tilde{\theta} - C(q, \dot{q}) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] \right] - \Lambda \dot{\tilde{q}} \\ \Gamma \Phi^T [\Lambda \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Prueba de estabilidad

Antes de comenzar el análisis de estabilidad, se define el error de aproximación paramétrica como:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta. \quad (5.22)$$

Nótese entonces que:

$$\Phi \dot{\tilde{\theta}} = \Phi \hat{\theta} - \Phi \dot{\theta} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi \tilde{\theta} + M(q) [\dot{\tilde{q}}_d - \Lambda \tilde{q}] + C(q, \dot{q}) [\dot{\tilde{q}}_d - \Lambda \tilde{q}] + g(q) \\ &\quad - M_0(q) [\dot{\tilde{q}}_d - \Lambda \tilde{q}] - C_0(q, \dot{q}) [\dot{\tilde{q}}_d - \Lambda \tilde{q}] + g_0(q). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Además se supone que los parámetros desconocidos son constantes, i.e. que $\dot{\theta} = 0$, por lo que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$.

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} [\Lambda \tilde{q} - \dot{\tilde{q}}]^T M(q) [\Lambda \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}] + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta}. \quad (5.25)$$

Es de recalcar que la función candidata de Lyapunov es la misma que (5.14) si se considera el caso en que la dinámica es completamente conocida, i.e. $\theta = 0$.

La derivada temporal de la función queda entonces dada por:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\theta}) = [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T M(q) [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + \frac{1}{2} [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T \dot{M}(q) [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] + 2\dot{q}^T K_p \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\bar{\theta}} \quad (5.26)$$

Al momento de sustituir $\dot{M}(q)\dot{\bar{q}}$, se añade un término extra con respecto al caso convencional del controlador, y es precisamente la eliminación de este término lo que da pie a la ley de adaptación mencionada con anterioridad. Al sustituir la ley de adaptación encontramos que la derivada de la función candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\theta}) = - [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}]^T K_v [\Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}}] - 2\dot{q}^T K_p \dot{\bar{q}} \quad (5.27)$$

La cual es idéntica al caso convencional. Así pues se sabe que la derivada de la función es semidefinida negativa globalmente. Esto, aunado al hecho de que la función candidata es radialmente desacceda y menguante garantiza estabilidad uniforme del origen y que las soluciones están acotadas. En [29] se continúa el análisis para probar que se logra el objetivo de control.

5.2.3. Controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos

Ley de control

$$\tau = K_v \xi(s) \dot{\bar{q}} + M(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\bar{q}}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \bar{q}] + g(q) \quad (5.28)$$

Donde $\xi(s)$ es un sistema difuso a proponer. Además, s se propone de la manera mencionada en el apartado 5.2.1, i.e.

$$s = \Lambda \bar{q} + \dot{\bar{q}} \quad (5.29)$$

Ecuación de lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} [-K_v \xi(s) - C(q, \dot{q}) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]] - \Lambda \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Prueba de estabilidad

La prueba de estabilidad partirá desde la prueba del controlador por modos deslizantes para después agregar una capa de cota y al final el controlador por modos deslizantes difusos.

Modos deslizantes

La función candidata de Lyapunov a utilizar es:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T M(q) s \quad (5.31)$$

lo que sería equivalente al primer término de la función candidata de Lyapunov utilizada para el controlador convencional, es decir:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} [\Lambda \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}]^T M(q) [\Lambda \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}] \quad (5.32)$$

Su derivada temporal estará entonces dada por:

$$\dot{V}(s) = s^T \dot{M}(q) s + \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q) s \quad (5.33)$$

Supliendo $\xi(s)$ por $\text{sign}(s)$, con $\text{sign}(s) = [\text{sign}(s_1) \dots \text{sign}(s_n)]^T$, y evaluando las trayectorias en lazo cerrado tenemos:

$$\dot{V}(s) = s^T [-K_v \text{sign}(s) - C(q, \dot{q}) \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q) s] \quad (5.34)$$

Lo cual indica que el controlador alcanza una vecindad de la superficie de deslizamiento en tiempo finito para luego tender asintóticamente al conjunto $s = 0$. La dinámica residual para el sistema sería entonces:

$$s = 0 \Rightarrow \Lambda \tilde{q} + \dot{\tilde{q}} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{q}} = -\Lambda \tilde{q} \quad (5.37)$$

por lo que el sistema tendería asintóticamente a cero.

La Figura 5.5 da una representación gráfica del esquema de control por modos cuasideslizantes.

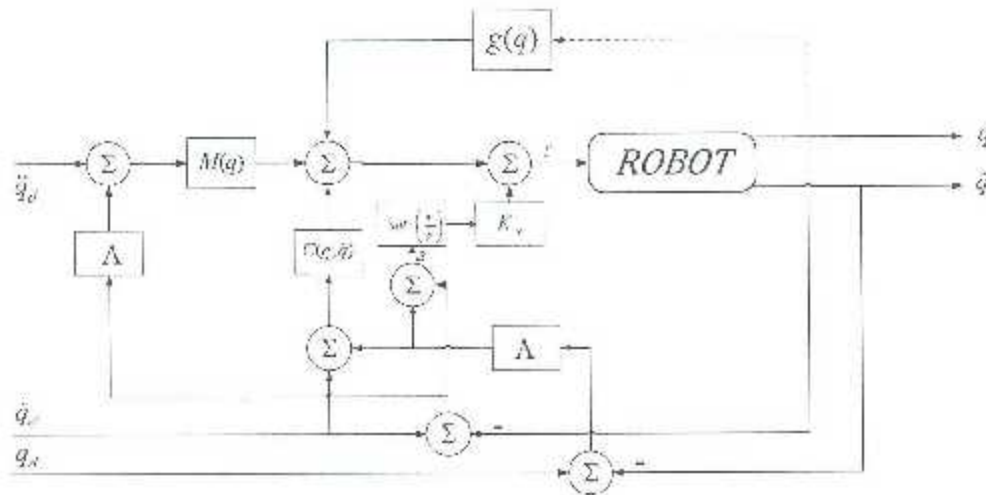


Figura 5.5: Esquema de control Slotine-Li por modos cuasideslizantes.

Modos deslizantes difusos

Para el controlador por modos deslizantes difusos, la derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\dot{V}(s) = -s^T K_v \xi(s) \quad (5.38)$$

Ahora, para el controlador por modos deslizantes difusos, debido a las suposiciones del apartado 3.4.4, se sabe que $0 \leq s_i \xi(s_i) \leq |s|$. Por lo que se sabe que la derivada de la función candidata de Lyapunov es definida negativa.

La base de reglas a utilizar para el sistema de inferencia difusa está dada por la Tabla 5.1 y está diseñada para cumplir con las condiciones del apartado 3.4.4.

Tabla 5.1: Tabla de reglas para el sistema de inferencia difusa.

s_1	NG	NM	N	Z	P	PM	PG
$\xi_1(s_1)$	NG	NM	N	Z	P	PM	PG

donde $\xi(s) = [\xi(s_1) \ \xi(s_2)]^T$. La Figura 5.6 da una representación gráfica del esquema de control por modos deslizantes difusos.

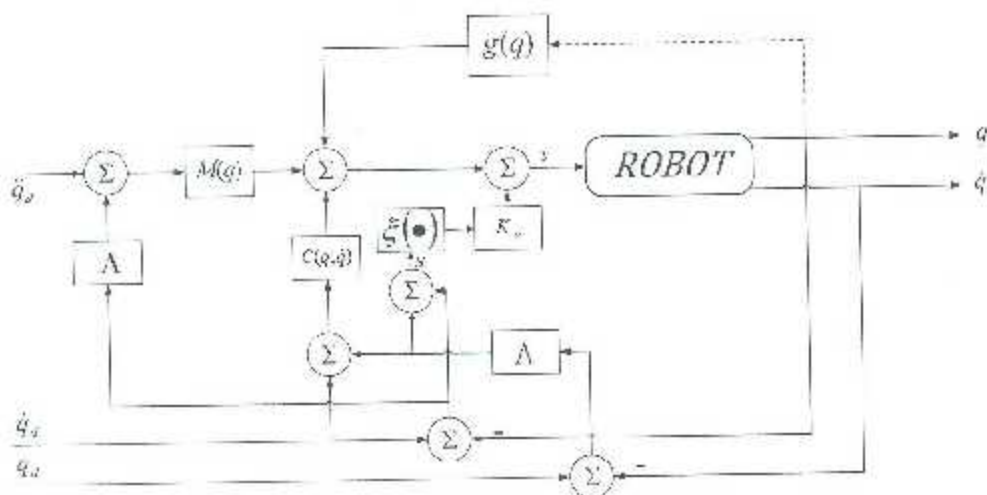


Figura 5.6: Diagrama de control para el controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos.

5.3. Resultados en simulación

Para el caso en simulación se utilizaron los siguientes parámetros para los controladores:

$$K_p = \begin{bmatrix} 157 & 0 \\ 0 & 15.7 \end{bmatrix}; K_v = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; \Lambda = K_v^{-1} K_p \quad (5.39)$$

$$\phi_1 = \phi_2 - 1.2 \quad (5.40)$$

Las funciones de pertenencia a utilizar están dadas por las figuras 4.5 y 4.6, con los parámetros de cada función de pertenencia dados en la Tabla 5.2 para las funciones de entrada y Tabla 5.3 para las de salida.

Tabla 5.2: Parámetros de las funciones de pertenencia de entrada para simulación de robot de dos grados de libertad.

eslabón	a	b	c
1	1.2	0.8	0.196
2	1.2	0.6	0.196

Tabla 5.3: Parámetros de las funciones de pertenencia de salida para simulación del robot de dos grados de libertad.

eslabón	a	b	c
1	1	0.475	0.25
2	1	0.475	0.25

La trayectoria a seguir es

$$\begin{bmatrix} \theta_{d1} \\ \theta_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \left[1 - e^{-2t^3} \right] + c_1 \left[1 - e^{-2t^3} \right] \text{sen}(\omega_1 t) \\ b_2 \left[1 - e^{-2t^3} \right] + c_2 \left[1 - e^{-2t^3} \right] \text{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.78 & b_1 &= 2 & c_1 &= 0.17 & \omega_1 &= 15 \\ a_2 &= 1.04 & b_2 &= 1.8 & c_2 &= 2.18 & \omega_2 &= 3.5 \end{aligned}$$

Las primeras dos derivadas temporales de las referencias pueden ser encontradas en [28].

Los resultados en simulación se muestran en los siguientes apartados. Las simulaciones tienen como objetivo mostrar las similitudes de los controladores mostrados, tratando el tema de la equivalencia de los controladores como una especie de conclusión de las simulaciones.

5.3.1. Controlador Slotine-Li convencional

Para el controlador Slotine-Li convencional, la evolución de los errores de posición articulares para el eslabón 1 y 2 se muestran en las Figuras 5.7 y 5.8, mientras que las señales de control se muestran en las Figuras 5.9 y 5.10. Los resultados son los esperados, mostrando señales de control limpias y una tendencia asintótica a cero en los errores de posición.



Figura 5.7: \tilde{q}_1 en simulación para el controlador Slotine-Li.



Figura 5.8: Error de posición para el segundo eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li convencional.

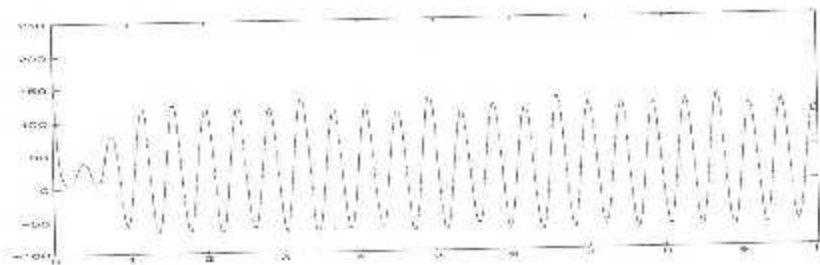


Figura 5.9: Evolución de τ_1 en simulación para el controlador Slotine-Li.

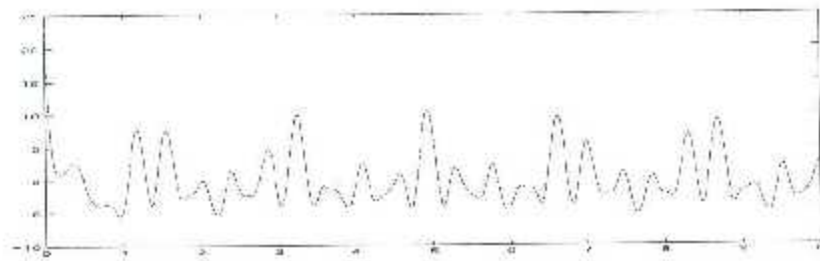


Figura 5.10: Señal de control simulada para el controlador Slotine-Li.

5.3.2. Controlador Slotine-Li cuasideslizante

Para el controlador Slotine-Li cuasideslizante, la evolución de los errores de posición articulares para el eslabón 1 y 2 se muestran en las Figuras 5.11 y 5.12, mientras que las señales de control se muestran en las Figuras 5.13 y 5.14. En las simulaciones se observa que las señales de control presentan efectos de *chattering*. A diferencia de la aplicación en el sistema carro péndulo, el efecto de las oscilaciones no tienen un impacto tan directo en las evoluciones de los errores. En las gráficas se observa que el comportamiento de los errores también es asintótico a cero, aunque tienden a oscilar un poco.

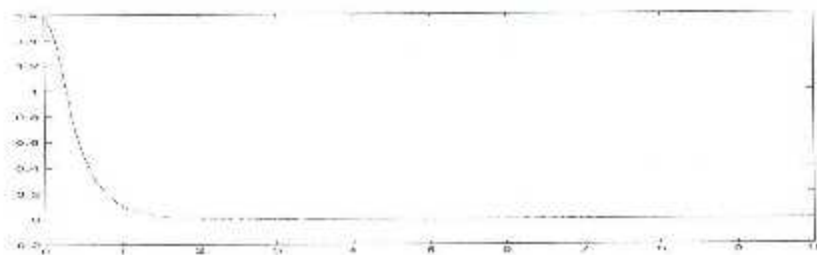


Figura 5.11: \tilde{q}_1 en simulación para el controlador Slotine-Li robusto con capa de cota.



Figura 5.12: Error de posición articular para el segundo eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li cuasideslizante.

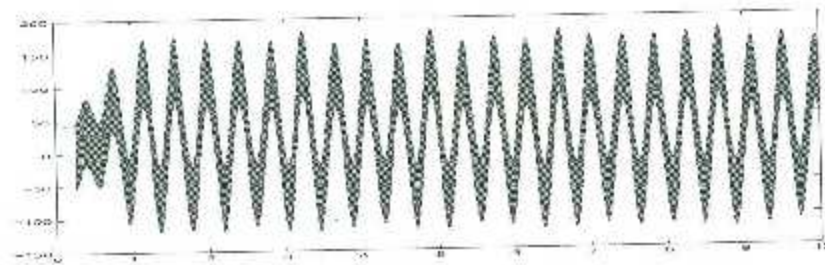


Figura 5.13: Evolución de la señal de control para el primer eslabón en simulación del controlador por modos cuasideslizantes.

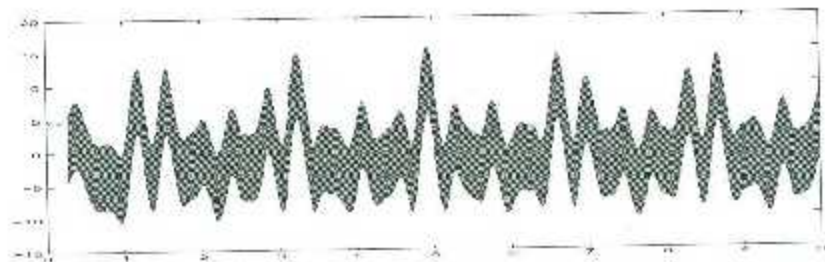


Figura 5.14: r_2 en simulación para el controlador Slotine-Li cuasideslizante.

5.3.3. Controlador Slotine-Li deslizando difuso

Para el controlador Slotine-Li deslizando difuso, la evolución de los errores de posición articulares para el eslabón 1 y 2 se muestran en las Figuras 5.15 y 5.16, mientras que las señales de control se muestran en las Figuras 5.17 y 5.18. En las gráficas se observa que las oscilaciones se han disminuido tremendamente. El ancho de la capa de cota del caso cuasideslizante y el valor en que el sistema de inferencia difusa deja de ser unitario es el mismo, por lo que se infiere que el controlador por modos deslizantes difusos realiza el alivio del *chattering* de una mejor manera que el controlador cuasideslizante.



Figura 5.15: resultados en simulación para el controlador Slotine-Li deslizante difuso del error de posición para el primer eslabón.



Figura 5.16: \tilde{q}_2 en simulación para el controlador Slotine-Li deslizante difuso

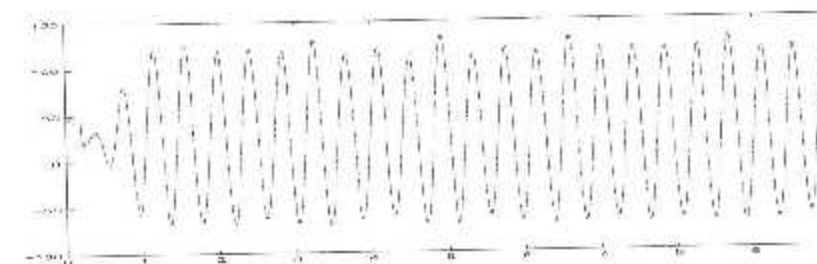


Figura 5.17: Señal de control para el primer eslabón en simulación para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.

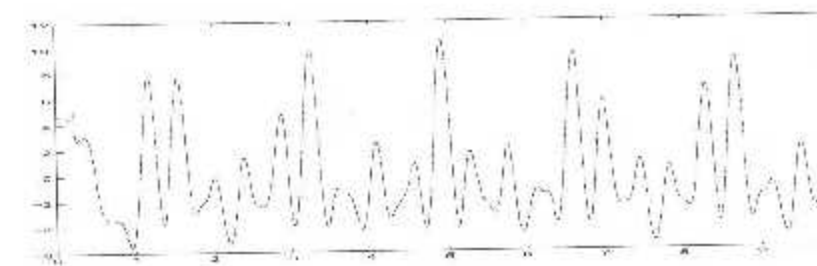


Figura 5.18: Evolución de q_2 en simulación para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.

5.3.4. Comentarios sobre las simulaciones

Los controladores realizan de manera aceptable el objetivo de control, sin embargo se nota una gran presencia de *chattering* en las señales de control para el caso cuasideslizante. El controlador por modos deslizantes difusos, por otra parte, resulta en una señal de control aparentemente continua, haciendo evidente su función de supresión del *chattering*. La señal de control resultante para el controlador por modos deslizante difusos resulta ser un poco más agresiva que la señal del controlador Slotine-Li, sin embargo los picos iniciales de la señal resultan ser menores.

5.3.5. Análisis comparativo entre el controlador Slotine-Li convencional y el cuasideslizante

Existe una relación entre el controlador Slotine-Li convencional y el controlador por modos cuasideslizantes. Supóngase que se encuentra el sistema en un modo cuasideslizante. Si la ganancia K_v del controlador es modificada para tomar en cuenta la capa de cota del controlador de manera lineal, i.e. $K_{v\phi} = K_v\phi$, en el límite cuando $\phi \rightarrow \infty$, el controlado por modos cuasideslizantes es equivalente al controlador Slotine-Li convencional. Para probar lo anterior, tómense las dos leyes de control y réstense una de la otra para encontrar (en modo cuasideslizante):

$$\tau_{SL} - \tau_{QSMC} = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} - \sum_{i=0}^n k_{vi} \frac{s_i}{\phi_i} \quad (5.42)$$

y evalúese el límite cuando $\phi_i \rightarrow \infty$

$$\lim_{\phi_i \rightarrow \infty} k_{vi} \phi \frac{s_i}{\phi_i} = k_{vi} s_i \quad (5.43)$$

Lo cual puede ser comprobado mediante la regla de L'Hôpital. Por lo que la diferencia (5.42) es nula debido a la expresión (5.12) (suponiendo las matrices K_p y K_v como diagonales). Nótese que la modificación de la ganancia en función del parámetro ϕ es indispensable. De no modificar la ganancia, el efecto del controlador se perdería, esto se observa al tomar el siguiente límite.

$$\lim_{\phi_i \rightarrow \infty} k_{vi} \frac{s_i}{\phi_i} = \frac{k_{vi} s_i}{\infty} = 0. \quad (5.44)$$

Las Figuras 5.19 y 5.20 muestra los efectos de ensanchar la capa de corte en ambos casos. La parte superior de la figura muestra el caso donde la ganancia es función de ϕ , mientras que la parte inferior muestra el caso donde no se modifica la ganancia.

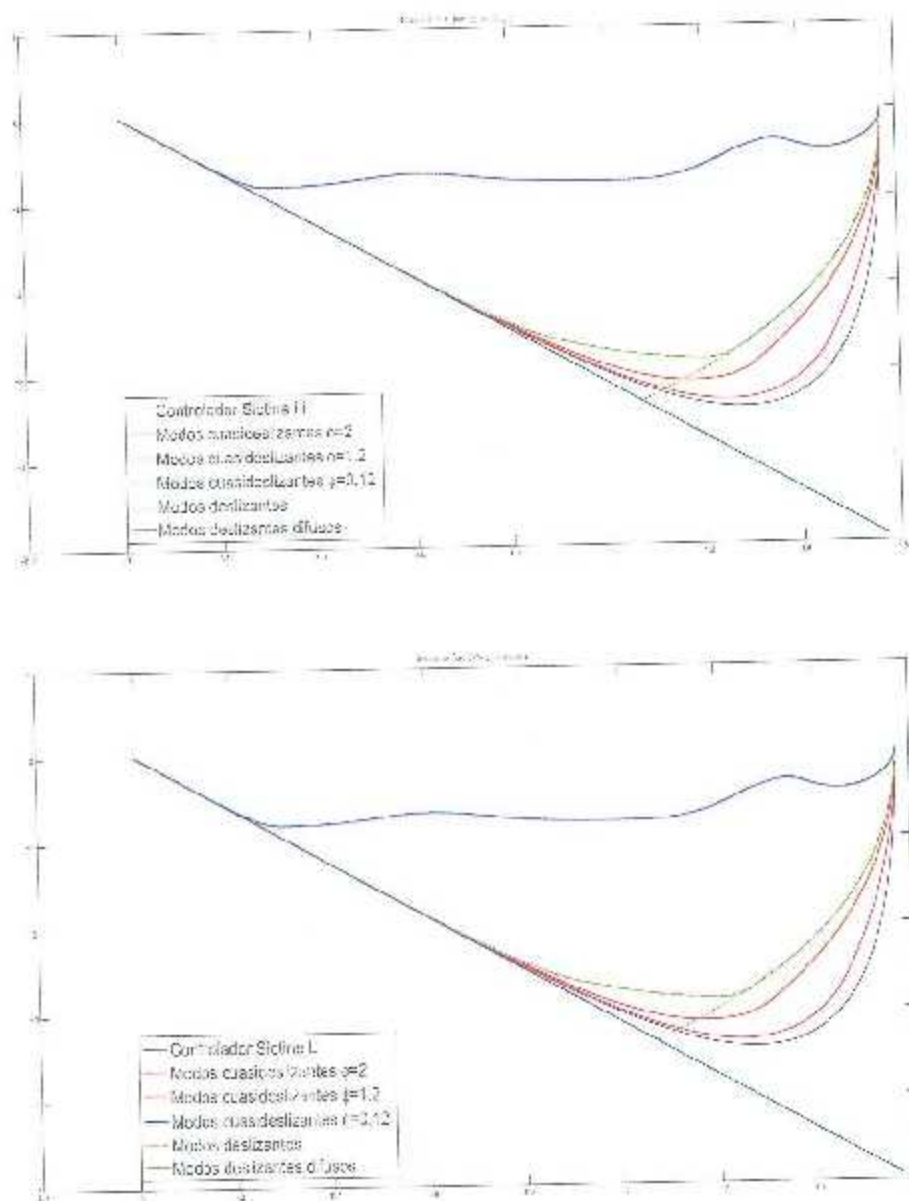


Figura 5.19: Resultados del análisis comparativo del controlador Slotine-Li convencional y su versión cuasideslizante con $K_D = K_{sl}$.

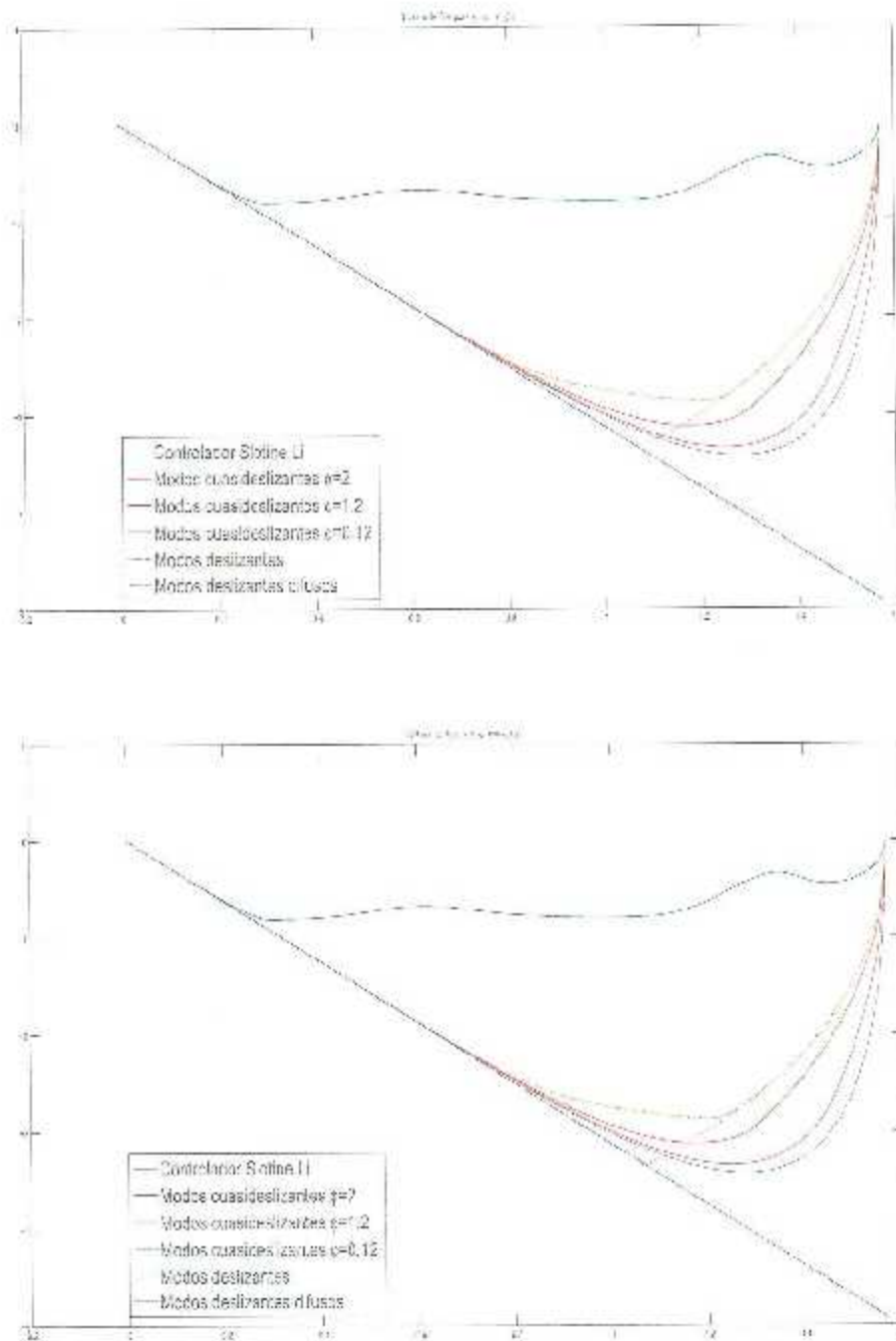


Figura 5.20: Resultados simulados del análisis comparativo del controlador Slotine-Li convencional y su versión cuasideslizante con k_d constante.

5.4. Resultados experimentales

Para la parte experimental se tuvieron dos escenarios, en el primero se trabajó con la dinámica del robot completamente conocida, exceptuando obviamente al controlador adaptable. Los parámetros utilizados para cada controlador están dados por:

$$K_p = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}; K_v = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}; \Lambda = K_v^{-1} K_p \quad (5.45)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Las referencias a seguir son de la misma forma que en simulación, sin embargo, debido a las restricciones de velocidad de los motores los parámetros a_1 y a_2 serán igual a cero. Esto implica que el sistema arrancaría ya en el modo deslizante. Además, para el caso del controlador adaptable se supone que los parámetros del segundo eslabón son desconocidos por lo que el vector de parámetros queda definido como:

$$\theta = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_2 l_{c2} \\ m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Las partes nominales de la dinámica se expresan como:

$$\begin{aligned} M_0(q) &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_0(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ g_0(q) &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1} g \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mientras que la matriz de regresión se expresa de la manera:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \end{bmatrix}.$$

Los elementos de la matriz Φ se escogen acorde para cumplir la propiedad de linealidad en los parámetros.

Los parámetros dinámicos del robot se agregan en el Apéndice B.

5.4.1. Experimentos no perturbados

A continuación se presentan los resultados experimentales para el controlador Slotine-Li convencional y por modos deslizantes difusos. El controlador por modos cuasideslizantes no se presenta, ya que se temía que el *chattering* presente pudiese dañar al robot manipulador. Sin embargo, los experimentos nos dan un marco para comparar al controlador por modos deslizantes difusos contra un controlador continuo.

Resultados para el controlador Slotine-Li convencional

Las Figuras 5.21-5.24 muestran respectivamente el error de posición para el eslabón 1, el error de posición para el eslabón 2, el par aplicado al eslabón 1 y el par aplicado al eslabón 2.

Debido a que el experimento inicia con errores de posición y velocidad iguales a cero, se observa la oscilación de los mismos alrededor de cero. Lo notable de estos resultados es que las señales de control ya presentan por sí mismas oscilaciones importantes, sobretudo para el eslabón dos. No se habla de *chattering* en este controlador debido a que su naturaleza es continua, sin embargo los resultados marcan un punto de comparación para las oscilaciones que podemos esperar del controlador por modos deslizantes difusos.

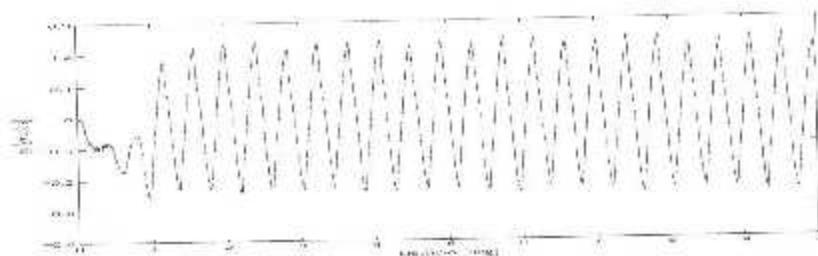


Figura 5.21: Resultados experimentales para \tilde{x}_1 para el controlador Slotine-Li.

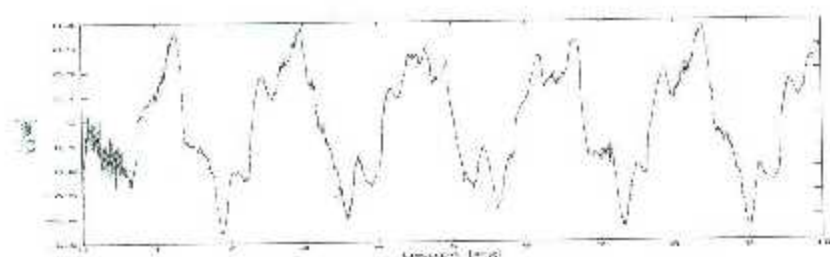
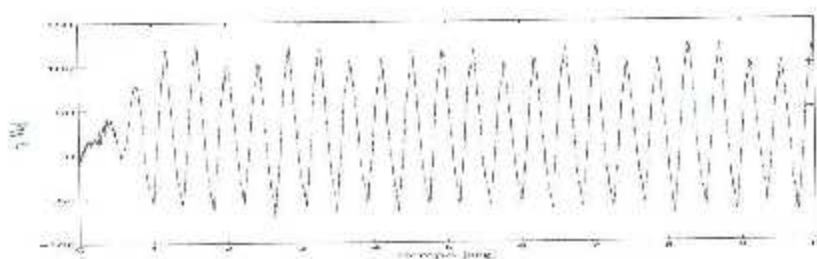
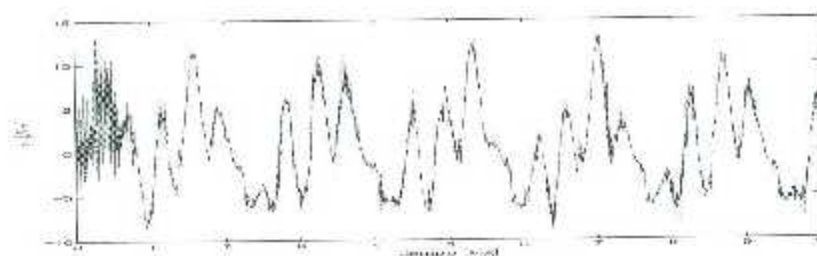
Figura 5.22: q_2 real, para el controlador Slotine-Li.Figura 5.23: Evolución temporal de τ_1 en experimento para el controlador Slotine-Li.

Figura 5.24: Señal de control para el segundo eslabón en experimentos para el controlador Slotine-Li.

Resultados para el controlador Slotine-Li deslizante difuso

Las Figuras 5.25-5.28 muestran respectivamente el error de posición para el eslabón 1, el error de posición para el eslabón 2, el par aplicado al eslabón 1 y el par aplicado al eslabón 2.

Los resultados obtenidos son bastante similares a los del controlador Slotine-Li convencional. Las oscilaciones en los pares aumentan, aunque no de forma dramática, por lo

que se concluye que el controlador hace un buen trabajo para la supresión del *chattering* manteniendo un rendimiento aceptable en lo que concierne al objetivo de control.

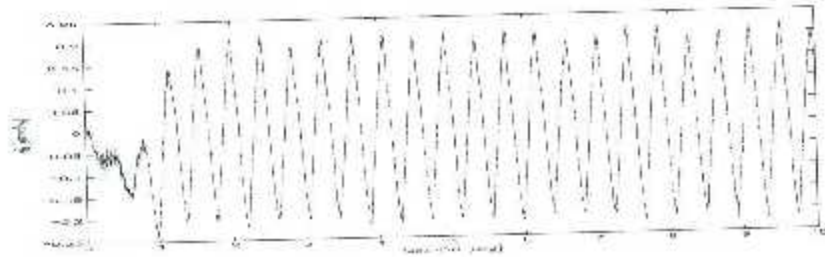


Figura 5.25: \bar{s}_1 real para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.

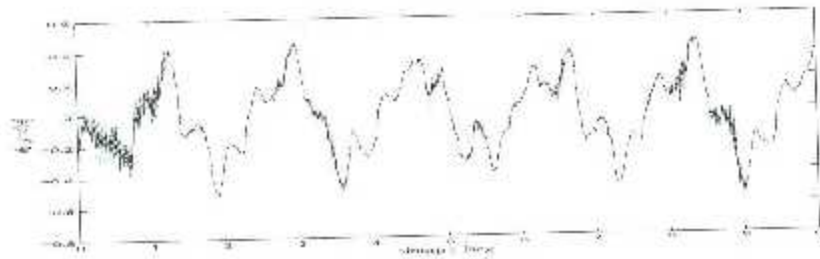


Figura 5.26: \bar{s}_2 real para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.

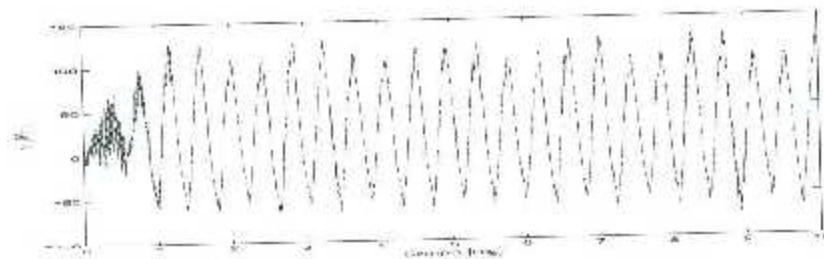


Figura 5.27: \bar{s}_3 real para el controlador por Slotine-Li deslizante difuso.

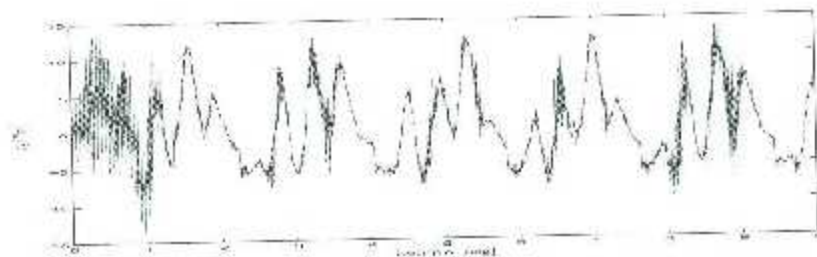


Figura 5.28: \bar{s}_4 real para el controlador por Slotine-Li deslizante difuso.

Comentarios sobre los resultados

El trabajo en general se centra sobre la supresión del *chattering* en controladores por modos deslizantes. Debido a que el controlador por modos deslizantes difusos da resultados similares a su contraparte convencional (la cuál es una ley de control continua), se dice que el controlador hace un muy buen trabajo; sin embargo, los resultados obtenidos no superan a aquellos controladores utilizados normalmente para el control de movimiento de robots manipuladores bajo estas condiciones experimentales.

5.4.2. Experimentos perturbados

En el segundo caso se supuso que el vector de gravedad es nulo, introduciendo una perturbación al sistema la cual está acotada por las cotas descritas en la observación dada dentro de la sección de propiedades del modelo dinámico. En este caso los parámetros de los controladores no fueron modificados para la prueba. Además, se agregan los resultados del controlador Slotine-Li adaptable, debido a que el control adaptable es quizá el esquema de control robusto más utilizado para el problema de control de movimiento de robots manipuladores.

Resultados con perturbación para el controlador Slotine-Li convencional

Las Figuras 5.29-5.32 muestran los resultados encontrados para el experimento perturbado. El controlador no sufre por las perturbaciones agregadas al sistema, por lo que se habla de una buena propiedad de robustez.

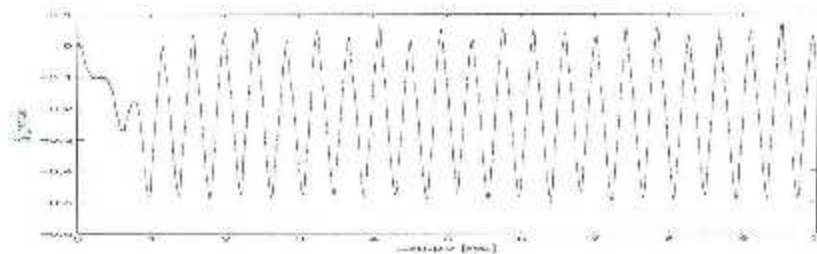


Figura 5.29: Error articular de la primera articulación reales para el controlador Slotine-Li perturbado.

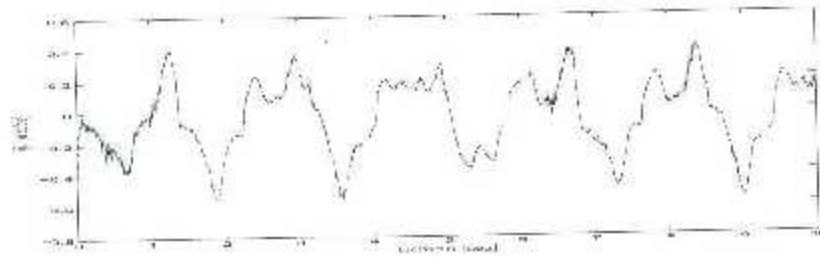


Figura 5.30: \hat{q}_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li con perturbación.

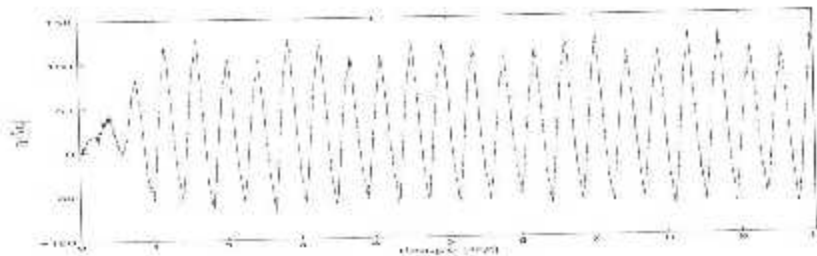


Figura 5.31: Señal de control en tiempo real para el controlador Slotine-Li en presencia de perturbaciones.

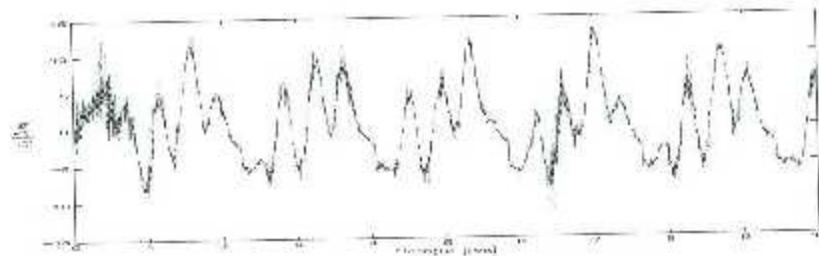


Figura 5.32: q_2 real para el controlador Slotine-Li perturbado.

Resultados para el controlador Slotine-Li adaptable

Las Figuras 5.33-5.36 muestran los resultados encontrados para el controlador Slotine-Li adaptable, mientras que las Figuras 5.37, 5.38 y 5.39 muestran los aproximados paramétricos.

Resulta sorprendente que el controlador que presenta menores oscilaciones es el controlador adaptable. Los estimados paramétricos no convergen a los valores reales, sin embargo los errores se consideran lo suficientemente pequeños (del mismo orden de magnitud

de aquellos arrojados por el controlador convencional) para hablar del cumplimiento del objetivo de control, que es precisamente lo que se espera a partir de la prueba de estabilidad.

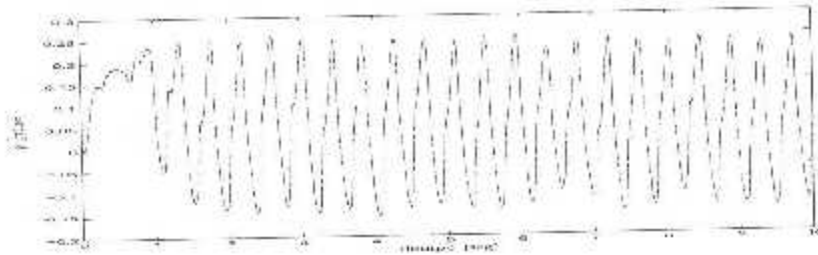


Figura 5.33: Resultados experimentales para \tilde{q}_1 para el controlador Slotine-Li adaptable.

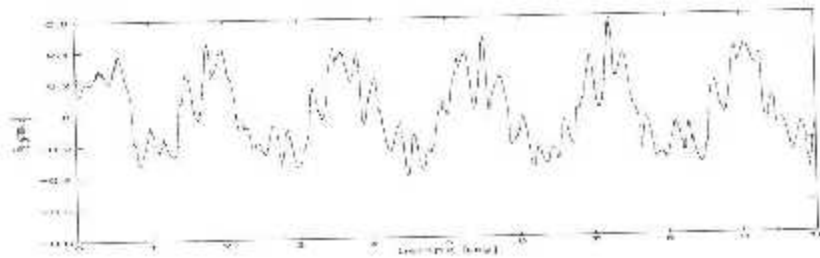


Figura 5.34: \tilde{q}_2 real para el controlador Slotine-Li adaptable.

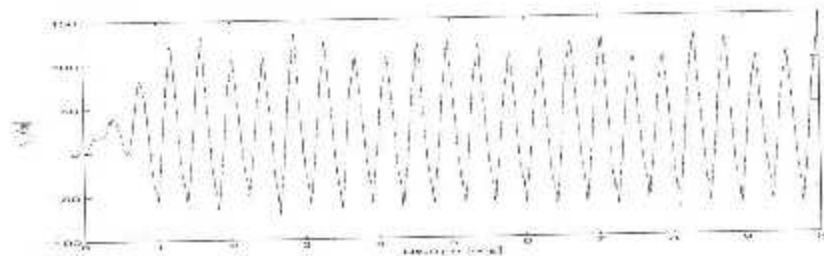


Figura 5.35: Señal de control de la primera articulación para el controlador Slotine-Li en su versión adaptable en experimentos.

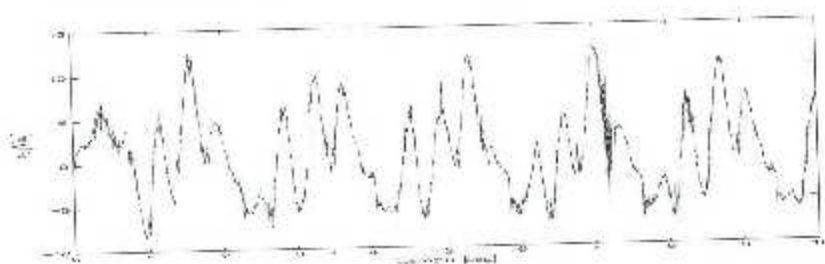


Figura 5.36: Evolución temporal de r_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li adaptable.

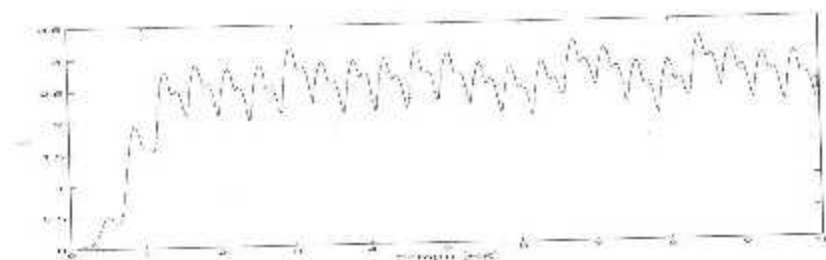


Figura 5.37: θ_1 real para el controlador Slotine-Li adaptable.

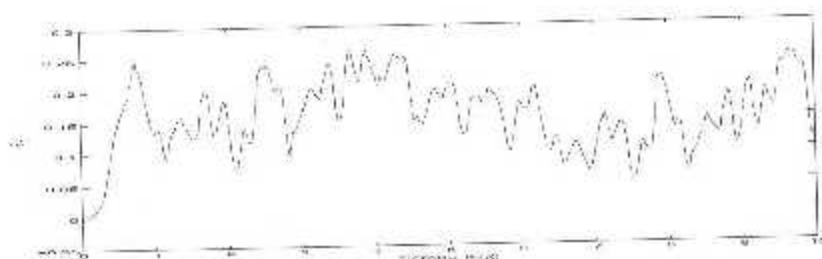


Figura 5.38: estimado del segundo parámetro en tiempo real para el controlador Slotine-Li adaptable.

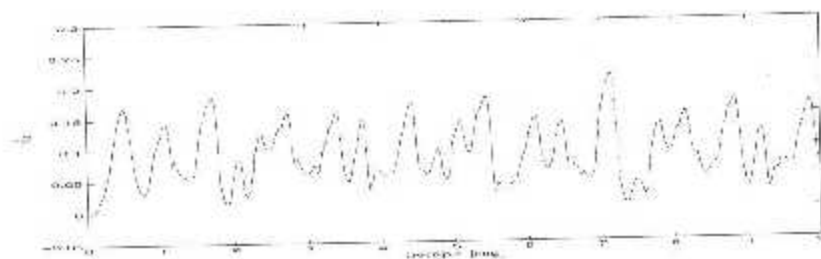


Figura 5.39: Evolución temporal para la variable q_3 en el caso experimental para el controlador Slotine-Li adaptable.

Resultados con perturbación para el controlador Slotine-Li deslizante difuso

Las Figuras 5.40-5.43 muestran los resultados encontrados para el controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos.

De nueva cuenta se observa que el objetivo de control se cumple de forma igual de satisfactoria que en el controlador continuo, así pues se dice que el controlador reduce efectivamente el *chattering*. Los resultados no resultan diferentes en gran medida con respecto al experimento no perturbado y por lo tanto se considera que se conserva en cierta medida la propiedad de robustez del controlador.

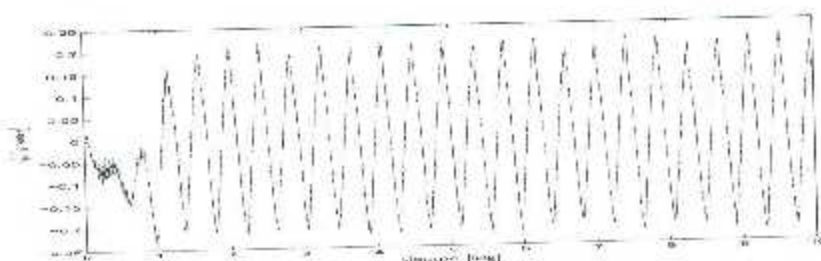


Figura 5.40: \tilde{q}_1 real para el controlador Slotine-Li deslizante difuso perturbado.

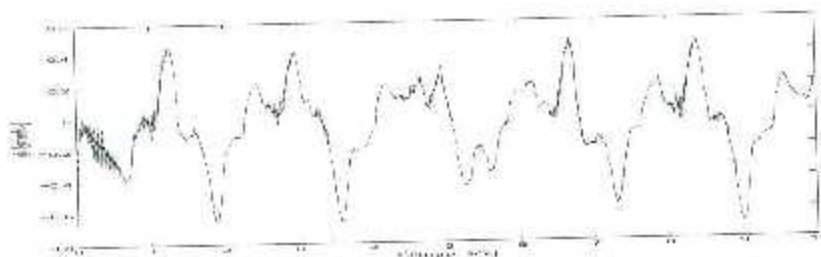


Figura 5.41: \tilde{q}_2 en experimentos para el controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos perturbado.

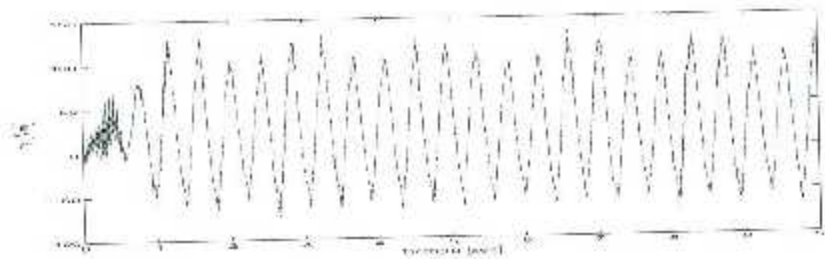


Figura 5.42: Señal de control de la primera articulación en caso de experimentos perturbados para el controlador Slotine-Li deslizante difuso.

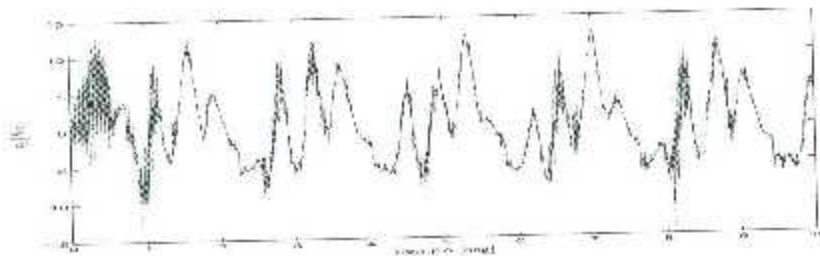


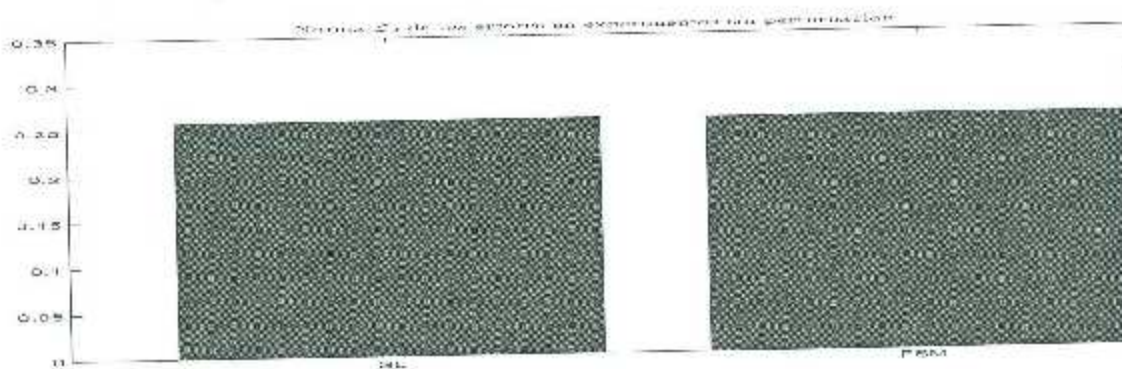
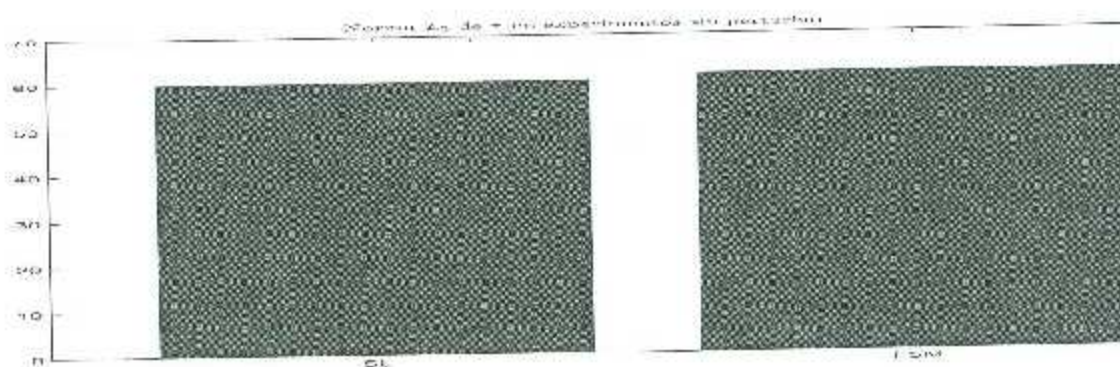
Figura 5.43: τ_2 experimental para el controlador Slotine-Li deslizante difuso en presencia de perturbaciones.

5.4.3. Análisis de resultados

Al igual que en la aplicación al sistema carro-péndulo, para la comparación de los resultados se utilizan las normas \mathcal{L}_2 de los errores. De nuevo, las normas \mathcal{L}_2 se muestran a manera de gráficas de barras para los dos casos. En las Figuras 5.44 y 5.45 se muestran las normas de los dos controladores que no han sido perturbados, mientras que en las Figuras 5.46 y 5.47 se muestran los resultados para los experimentos en presencia de perturbaciones. La Tabla 5.4 muestra las leyendas para las figuras antes mencionadas.

Tabla 5.4: Leyenda utilizada para las Figuras 5.44-5.47.

Nombre del controlador	símbolo
Slotine-Li convencional	SL
Slotine-Li por modos deslizantes difusos	FSM
Slotine-Li perturbado	SLp
Slotine-Li adaptable	SLA
Slotine-Li por modos deslizantes difusos perturbado	FSMp

Figura 5.44: Comparación de desempeño de los controladores: normas \mathcal{L}_2 de \tilde{q} para los experimentos sin perturbaciones.Figura 5.45: Comparación de las normas \mathcal{L}_2 de τ para los experimentos sin perturbar.

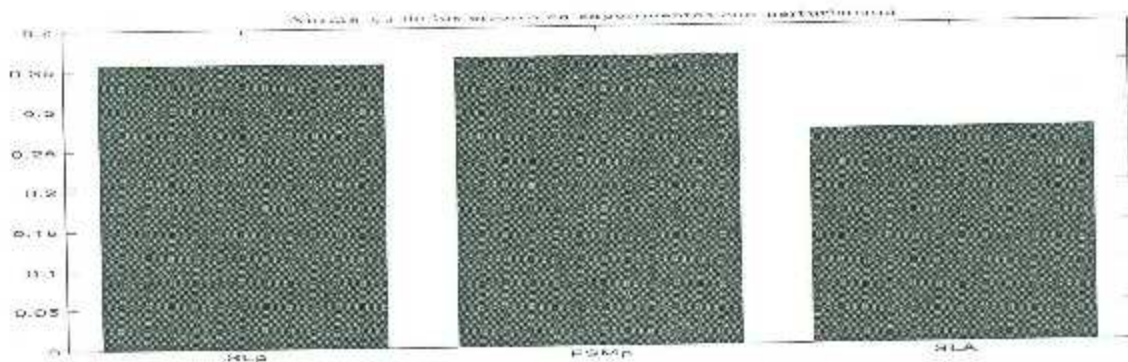


Figura 5.46: Normas \mathcal{L}_2 de \bar{q} para los experimentos perturbados.

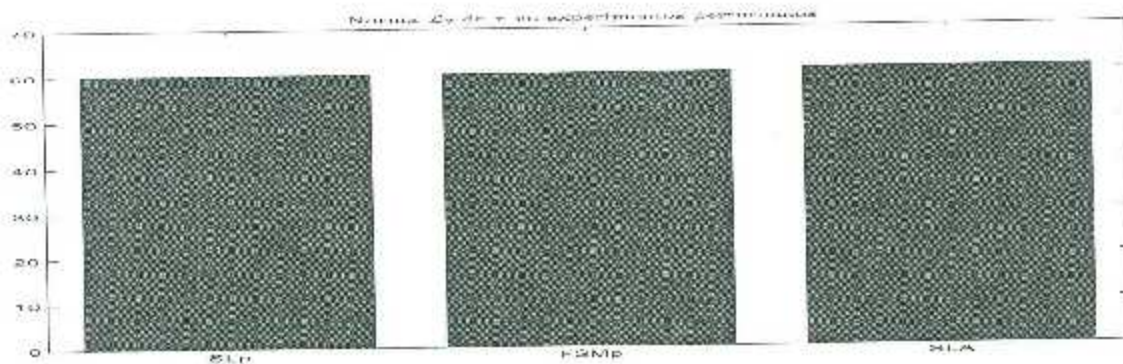


Figura 5.47: Norma \mathcal{L}_2 de τ para los experimentos (en presencia de perturbaciones).

En general el controlador por modos deslizantes difusos hace un buen trabajo en el control del sistema, sin embargo el comportamiento de este controlador no es sobresaliente con respecto a su contraparte continua. Los resultados son muy similares para las dos normas. Así, se puede hablar que con el controlador por modos deslizantes difusos se consiguió un controlador cuyo desempeño es básicamente equivalente a un controlador de naturaleza continua.

5.4.4. Cuadro resumen de los controladores

A continuación se presenta a una tabla con las leyes de control utilizadas en este capítulo. En la Tabla 5.5 se muestra el modelo dinámico del sistema robótico, y las distintas leyes de control y adaptación evaluadas para una mejor comprensión de las diferencias entre los controladores:

Tabla 5.5: Cuadro resumen de los controladores evaluados para el sistema carro-péndulo.

Modelo de la planta	$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau,$
Controlador Slotine-Li convencional	$\tau = K_p\ddot{q} + K_v\dot{\tilde{q}} + M(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g(q)$
Superficie de deslizamiento	$s = \Lambda\dot{q} + \ddot{q}$
Controlador Slotine-Li por modos deslizantes	$\tau = K_v\text{sign}(s) + M(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g(q)$
Controlador Slotine-Li por modos cuasideslizantes	$\tau = K_v\text{sat}(s) + M(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g(q)$
Controlador Slotine-Li por modos deslizantes difusos	$\tau = K_v\xi(s) + M(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g(q)$
Sistema de inferencia difusa	$\xi_i(s_i) = \frac{\sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_2=1}^{p_2} \dots \sum_{j_n=1}^{p_n} \bar{y}^{j_1 j_2 \dots j_n} \left(\prod_{k=1}^n \mu_{A_k^i}(s_k) \right)}{\sum_{l=1}^n \sum_{j_2=1}^{p_2} \dots \sum_{j_n=1}^{p_n} \left(\prod_{k=1}^n \mu_{A_k^l}(s_k) \right)}$
Controlador Slotine-Li adaptable	$\tau = K_p\ddot{q} + K_v\dot{\tilde{q}} + \Phi\theta + M_0(q)[\ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q})[\dot{q}_d + \Lambda\tilde{q}] + g_0(q)$
Ley de adaptación	$\dot{\theta} = \Gamma \int_0^t \Phi^T [\Lambda\dot{\tilde{q}}(\sigma) + \ddot{\tilde{q}}(\sigma)] d\sigma - \dot{\theta}(0)$

C A P Í T U L O 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se implementaron múltiples esquemas de control a plantas de carácter distinto para la evaluación del esquema de reducción del *chattering*, encontrando resultados muy diferentes para los dos casos estudiados.

En el caso del sistema carro péndulo se encontró un controlador relativamente sencillo que permite realizar el control de los cuatro estados simultáneamente con un bajo número de parámetros a sintonizar. La comparación entre los controladores fue directa y tuvo el objetivo de demostrar las capacidades del controlador por modos deslizantes difusos para la atenuación del *chattering*, obteniendo resultados satisfactorios en simulación y en forma experimental. El análisis de la dinámica cero para el carro-péndulo no es original, sin embargo se aportó al tema al proponer los controladores por modos cuasideslizantes y deslizantes difusos. Los análisis de estabilidad de estos no están reportados en algún otro lugar que sea del conocimiento del autor. Además, la incorporación del compensador de fricción de Dahl, y su análisis, para el controlador por modos deslizantes acoplados en sus tres versiones resultar también ser una propuesta original.

El trabajo realizado en el carro péndulo se presentó en el Congreso Mexicano de Robótica 2015, con la ponencia "Controlador por Modos Deslizantes Difusos Acoplados: Aplicación Experimental a un Sistema Carro-Péndulo", la cual fue merecedora a una

nomiación al premio Rafael Kelly 2015.

En lo que concierne al control del robot manipulador los resultados pudiesen ser interpretados de dos maneras diferentes. Si bien es cierto que el controlador no mostró una ventaja significativa con respecto a los esquemas de control convencionales, hay que recalcar que el esquema en cuestión tiene como finalidad la reducción de las oscilaciones en la señal de control y las variables articulares. Teniendo esto en cuenta y el hecho de que los resultados fueron muy parecidos a aquellos obtenidos contra un par de controladores continuos, debe pensarse que el control obtenido mediante la técnica aquí propuesta hace una excelente labor en su propósito.

De nueva cuenta, el análisis de estabilidad del controlador por modos deslizantes difusos y las suposiciones hechas para la estabilidad del controlador parecen ser originales, debido a que los análisis suelen dar dichas condiciones como obvias. En lo que concierne a la equivalencia del control Slotine-Li por modos cuasideslizantes, en el libro de Slotine y Li se habla de la degradación del controlador a un PD, sin embargo no se dan las condiciones necesarias para que se logre la igualdad, por lo que se cree que el análisis pudiera ser también original.

Hablando sobre la parte teórica del trabajo, se estudiarán las técnicas de continuación de Filippov y el método de control equivalente para poder darle un agregado de contenido teórico al tema, ya que debido a la naturaleza de las causas del problema, los enfoques suelen ser de naturaleza práctica y sus bases teóricas suelen ser limitadas.

Lo más importante del trabajo es la posibilidad de abrir una discusión sobre el tema de control por modos deslizantes, tema que en mi experiencia no es muy tratado en el laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna.

6.2. Trabajo futuro

Como ya se mencionó, uno de los objetivos del trabajo es crear una ventana de oportunidad para que se presenten más trabajos relacionados con modos deslizantes.

Para comenzar, el trabajo del sistema carro-péndulo presenta una superficie escalar y de grado relativo uno, por lo que la primer idea que viene a la mente sería la aplicación de un controlador por modos deslizantes de segundo orden.

En lo que respecta al robot manipulador, no creo que sea buena idea continuar con la aplicación de controladores por modos deslizantes. El problema de control de movimiento es un problema bastante trabajado y dudo que alguna solución que se encuentre por alguna técnica basada en modos deslizantes traiga ventajas significativas con respecto a los esquemas convencionales que se trabajan, por lo que sería interesante ver el trabajo aplicado a un tipo de planta diferente.

En la literatura se habla de la posibilidad de la aplicación de técnicas discontinuas a motores de corriente directa, tal vez una posibilidad de la aplicación de la técnica al control de movimiento de robot manipuladores se presenta si se tratase con el modelo del robot con accionadores eléctricos.

A P É N D I C E A

Parámetros del sistema carro-péndulo

Tabla A.1: Parámetros del sistema con péndulo grande.

Símbolo	m_c	m_g	l	I	f_{vx}	f_{cx}	σ_0
Valor	2.27	0.338	0.33	.015	6.33	$28.1\dot{x} > 0$ $23.2\dot{x} < 0$	8000
Unidades	<i>kg</i>	<i>kg</i>	<i>m</i>	$kg - m^2$	$\frac{N \cdot sec}{m}$	-	$\frac{N \cdot sec}{m}$

Tabla A.2: Parámetros del sistema con péndulo chico.

Símbolo	m_c	m_g	l	I	f_{vx}	f_{cx}	σ_0
Valor	2.27	0.26	0.295	0.0053	6.33	$28.1\dot{x} > 0$ $23.2\dot{x} < 0$	8000
Unidades	<i>kg</i>	<i>kg</i>	<i>m</i>	$kg - m^2$	$\frac{N \cdot sec}{m}$	-	$\frac{N \cdot sec}{m}$

A P É N D I C E B

Parámetros del robot de 2 gdl

Tabla B.1: Parámetros del robot manipulador.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Longitud del eslabón 1	l_1	0.450	m
Longitud del eslabón 2	l_2	0.450	m
Distancia al centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0.091	m
Distancia al centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0.048	m
masa del eslabón 1	m_1	23.902	kg
masa del eslabón 2	m_2	3.883	kg
Inercia con respecto al centro de masa del eslabón 1	I_1	1.266	kgm^2
Inercia con respecto al centro de masa del eslabón 2	I_2	0.093	kgm^2
aceleración de la gravedad	g	9.81	$\frac{m}{s^2}$

A P É N D I C E C

*Artículo sometido al Congreso
Mexicano de Robótica 2015*

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DIFUSOS ACOPLADOS: APLICACIÓN EXPERIMENTAL A UN SISTEMA CARRO-PÉNDULO

Luis R. Ovalle Gamboa

División de Estudios de Posgrado e Investigación
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de la Laguna
Torreón, Coahuila, 27000
Email: luis.ricardo.ovalle@gmail.com

Miguel A. Llana Leal

Francisco Ruvalcaba Granados
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de la Laguna
Torreón, Coahuila, 27000
Email: mllama02@gmail.com

RESUMEN

Este artículo presenta el diseño de un controlador por modos deslizantes difusos aplicado a un sistema carro-péndulo. Se presenta un análisis de estabilidad que garantiza la existencia del modo deslizante, además de la estabilidad de la dinámica de ceros del sistema. Se propone la aplicación de un sistema de inferencia difusa que supervisa la ganancia del término robusto en el controlador tal que el "chattering" se atenúa. La validez del controlador se demuestra por medio de experimentos.

INTRODUCCIÓN

Diferentes esquemas de control han sido propuestos para la estabilización de sistemas subactuados, esquemas lineales como el LQR [1] y no lineales como el lagrangiano controlado [2]. La aplicación de técnicas convencionales en el diseño de un controlador por modos deslizantes para un sistema subactuado requiere del uso de conceptos de geometría diferencial [3]. El esquema de control por modos deslizantes jerárquicos ha sido estudiado en un considerable número de publicaciones, considérese por ejemplo [4], aunque su estabilidad no ha sido estudiada de manera rigurosa, la mayoría de estos trabajos presentan un análisis basado en el lema de Barbalat en el cual no se analiza la dinámica de ceros del sistema.

En [5] se realiza el diseño de un controlador por modos deslizantes acoplados, este esquema sería equivalente al esquema jerárquico agregado propuesto en [4], aunque la aplicación experimental en el sistema carro-péndulo no se lleva a cabo, además de que no se consideran efectos de discretización ni cuantización en las simulaciones presentadas por lo que el efecto de "chattering" no se muestra. Otra desventaja es que el trabajo citado no considera efectos de fricción en el subsistema del carro, que en ciertos sistemas son considerables. La aplicación de sistemas de inferencia difusa para la reducción del "chattering" se discute en [6-9].

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El objetivo de control es encontrar una ley de control por modos deslizantes acoplados para estabilizar el sistema carro-péndulo de manera local, de tal manera que un controlador de balanceo lleve el péndulo desde el equilibrio estable hasta una región arbitrariamente lejana del punto donde se presenta la singularidad del sistema, y de este punto en adelante controlar el mismo por la ley de control aquí propuesta.

Modelado del sistema a controlar

El sistema experimental consta de un péndulo libre de rotar y un carro, montado sobre un actuador traslacional, que genera movimiento sobre un eje perpendicular al eje de rotación del péndulo. La Figura 1 representa un esquema del sistema carro-péndulo, donde M es la masa del carro, m es la masa del péndulo, l es la longitud al centro de masa del péndulo, I es el momento de inercia con respecto al centro de masa del péndulo, g representa la aceleración de la gravedad, x y \dot{x} representan la posición y velocidad traslacional del carro respectivamente, u representa la fuerza ejercida por el actuador traslacional y θ y $\dot{\theta}$ representan la posición y velocidad angular del péndulo. Utilizando las definiciones anteriores, se puede definir el modelo dinámico del sistema como:

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & ml^2+I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ml\sin(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Tomando en cuenta las siguientes simplificaciones:

$$\gamma = M+m \quad \beta = ml \quad \alpha = ml^2+I \quad \eta = mgl$$

el modelo dinámico queda descrito como:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta\cos(\theta) \\ \beta\cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ -\eta\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

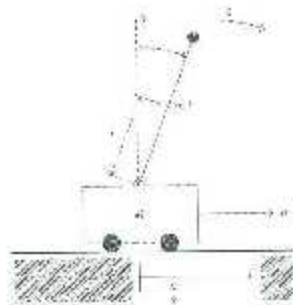


FIGURA 1: ESQUEMA DE LA PLANTA

De esta manera, el modelado dinámico directo queda descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x \\ g_\theta \end{bmatrix} u \quad (3)$$

donde

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\cos(\theta) \\ \beta\cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ \eta\sin(\theta) - f_\theta\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \Delta \begin{bmatrix} \alpha\beta\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \\ -\beta\eta\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta} + f_\theta\gamma\cos(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

con

$$\Delta = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2\cos^2(\theta)} \quad (5)$$

y

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\cos(\theta) \\ \beta\cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

De la ecuación (3) se observa que el modelo dinámico se compone de dos sistemas en la forma regular, por lo que se puede hablar de un par de subsistemas, uno que describe la dinámica del subsistema del carro, y otro que describe la dinámica del subsistema del péndulo.

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES ACOPLADOS

El proceso de diseño del controlador se basa en la propuesta de dos superficies de deslizamiento, una para el subsistema del carro y otra para el subsistema del péndulo. Una vez definidas éstas, se procede a acoplarlas con un factor de acoplamiento para obtener una única superficie que defina el comportamiento de ambos sistemas. Las superficies de deslizamiento propuestas son las siguientes: $s_\theta = c_\theta\dot{\theta} - \dot{\theta}$, $s_x = c_x\dot{x} + \dot{x}$; además de

$$S = \lambda s_x + s_\theta \quad (7)$$

La ecuación (7) representa la superficie de deslizamiento para el subsistema del péndulo (s_θ), la superficie de deslizamiento del carro (s_x) y la superficie de deslizamiento total (S).

Cabe destacar que el conseguir que el sistema entre en modos deslizantes no es una condición suficiente para demostrar la estabilidad del sistema, ya que la condición $S = 0$ puede ser alcanzada con $s_x = s_\theta$, por lo que se requiere hacer un análisis de la dinámica de ceros con S como función de salida.

El análisis de la dinámica de ceros se llevará a cabo de la manera que se propone en [5].

Análisis de la dinámica de ceros

Para resolver el problema de hacer cero la salida, con S como función de salida, se supone $S = 0$ y por tanto $\dot{S} = 0$, con lo que se tiene

$$\dot{S} = \lambda s_x + s_g - \lambda (c_x x + \dot{x}) + c_\theta \theta + \dot{\theta} = 0 \quad (8)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\lambda} (c_x \theta + \dot{\theta} + \lambda c_x x) \quad (9)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\lambda} [c_x \theta + \dot{\theta} + c_x (c_x \theta + \dot{\theta} + \lambda c_x x)] \quad (10)$$

Además, debido a que la ecuación (8) es lineal, es sencillo tomar la transformada de Laplace de la misma para encontrar:

$$x(t) = \frac{e^{-\alpha t} (\lambda x(0) + \theta(0))}{\lambda} - \frac{\theta(t) - (c_x - c_\theta) e^{-\alpha t} * \theta(t)}{\lambda} \quad (11)$$

donde el símbolo $*$ significa convolución. Sustituyendo (11) en (10) se obtiene:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\lambda} [c_x \dot{\theta} + \dot{\theta} - c_x (c_x \theta + \dot{\theta} + c_x e^{-\alpha t} * \theta(t) - c_x \theta - (c_x - c_\theta) \dot{\theta}(t))] \quad (12)$$

con

$$a(t) = (x(0) + \theta(0)) e^{-\alpha t}; \quad b(\theta, t) = e^{-\alpha t} * \theta(t)$$

La ecuación (12) será escrita como:

$$\dot{x} = \zeta(\dot{\theta}, \theta, x, t) \quad (13)$$

por lo que la dinámica del sistema en general se describe por:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(\dot{\theta}, \theta, x, t) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \eta \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Tomando la segunda ecuación de (14) se tiene que

$$\beta \cos(\theta) \zeta(\dot{\theta}, \theta, x, t) + \alpha \dot{\theta} - \eta \sin(\theta) \dot{\theta} = 0 \quad (15)$$

Después de ciertas manipulaciones se obtiene que

$$\dot{\theta} - c(\theta) \dot{\theta} + w(\theta, t) = h(\theta, t) \quad (16)$$

$$c(\theta) = \frac{\beta \cos(\theta) (c_g - \lambda c_x)}{\beta \cos(\theta) - \alpha \lambda}$$

$$w(\theta) = \lambda \frac{\eta \sin(\theta) - \beta c_x \cos(\theta) \lambda^{-1} (c_\theta - c_x) (\theta - c_x b(\theta))}{\beta \cos(\theta) - \alpha \lambda}$$

$$h(\theta, t) = \frac{\lambda \beta c_x^2 \cos(\theta) a(t)}{\beta \cos(\theta) - \alpha \lambda}$$

Análisis de estabilidad de la dinámica de ceros

Teorema 1: Defínase el conjunto $D_\varepsilon = (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, con $0 < \varepsilon \ll \frac{\pi}{2}$. Si los parámetros de la superficie de deslizamiento S son definidos como $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ y $c_x (c_\theta - c_x) \ll \lambda g$ con $c_x < c_\theta$, entonces el origen de la dinámica de ceros (16) es asintóticamente estable sobre el conjunto $D_\varepsilon \times \mathbf{R}$.

Prueba: Primero, por la restricción $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$, y por definición de $b(\theta)$, se puede observar que el primer término de $w(\theta)$ puede ser despreciado.

Existe una función $W(\theta) = -\ln(\beta \cos(\theta) - \alpha \lambda) > 0 \forall \theta \in D_\varepsilon$ tal que

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = w(\theta) \quad (17)$$

Nótese, que si $W(\theta) \rightarrow \infty$, entonces $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Debido al decaimiento exponencial de $a(t)$, se sabe que existe una función que depende sólo del tiempo tal que $\psi(t) \geq h(\theta, t)$, la cuál será dada por:

$$\psi(t) = n e^{-\alpha t} \quad (18)$$

donde n es una constante positiva y cuyo valor estará acotado si $\theta \in D_\varepsilon$. Por tanto, se puede definir una función $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds = \frac{n}{\alpha} e^{-\alpha t} < \infty \forall t > 0$. Considérese la función del tipo Lyapunov acotada por debajo

$$V(\theta, \dot{\theta}, t) = e^{-\Psi(t)} [2W(\theta) + \dot{\theta}^2 + 1] \quad (19)$$

Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (16) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\theta, \dot{\theta}, t) &= -\psi(t) e^{-\Psi(t)} [2W(\theta) + \dot{\theta}^2 + 1] \\ &\quad + e^{-\Psi(t)} [2w(\theta, t) + 2\dot{\theta} \dot{\theta}] \\ &= -e^{-\Psi(t)} \\ &\quad [2\psi(t)W(\theta) + w(t)\dot{\theta}^2 + \psi(t) + 2r(\theta)\dot{\theta}^2 - 2\lambda(\theta, t)] \\ &< -e^{-\Psi(t)} [\psi(t)(\dot{\theta}^2 - 2|\dot{\theta}| + 1) + 2r(\theta)\dot{\theta}^2] \\ &\leq -2e^{-\Psi(t)} r(\theta)\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Debido a que en las igualdades los términos dependientes del tiempo son exponenciales decadentes, entonces la derivada de $V(\theta, \dot{\theta}, t)$ es uniformemente continua en el tiempo, además como $r(\theta) > 0 \forall \theta \in D_u$, la derivada es semidefinida negativa. Utilizando el Lema del tipo Lyapunov que se presenta en [10], se concluye que la derivada tiende a cero. Utilizando esto, se concluye además que $\dot{\theta} \rightarrow 0$, lo que a su vez implica que $\theta \rightarrow 0$. Debido a que $h(\theta, t)$ contiene un término exponencial decreciente con el tiempo se sabe que $t \rightarrow \infty \Rightarrow h(\theta, t) \rightarrow 0$, por lo que la dinámica de ceros descrita por (16) se reduciría a

$$u(\theta) = 0 \Rightarrow \lambda \eta \sin(\theta) = 0$$

conforme $t \rightarrow \infty$, lo que implica a su vez que $\theta \rightarrow 0$. Debido a lo anterior se deduce que la dinámica de ceros del sistema del péndulo es asintóticamente estable. Esto a su vez, y debido a que $S = 0 \Rightarrow \dot{S} = s_y \Rightarrow x \rightarrow -\frac{z}{c_1}$ por lo que se puede asegurar la estabilidad asintótica de la dinámica total del sistema.

Diseño de la ley de control

Para la obtención de la ley de control, primero se utilizará el método del control equivalente, es decir que se encontrará el control (u_{eq}) que haga $\dot{S} = 0$ para luego agregar términos que impliquen la atractividad de la superficie deslizante S . A diferencia del trabajo [5] se agrega un término proporcional a la superficie de deslizamiento $k_2 S$ que es equivalente a agregar términos del tipo PD para cada subsistema, este ayuda a la estabilidad cuando las trayectorias del sistema se encuentran lejanas a la superficie de deslizamiento. Por lo tanto se tiene:

$$\dot{S} - \lambda s_y + s_0 = 0 \quad (20)$$

$$\lambda (c_1 \dot{x} - \dot{x}) + c_0 \dot{\theta} + \dot{\theta} = 0 \quad (21)$$

$$\lambda (c_1 \dot{x} - f_x + g_x u_{eq}) + c_0 \dot{\theta} + f_0 + g_0 u_{eq} = 0 \quad (22)$$

$$u_{eq} = \frac{-\lambda f_x - f_0 - \lambda c_1 \dot{x} - c_0 \dot{\theta}}{\lambda g_x + g_0} \quad (23)$$

$$u = u_{eq} - \frac{k_1 \text{sign}(S) - k_2 S}{\lambda g_x + g_0} \quad (24)$$

Análisis de estabilidad del controlador

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V(s) = \frac{1}{2} S^2 \quad (25)$$

La derivada temporal de (25) está dada por:

$$\dot{V}(s) = S \dot{S} = S [\lambda (c_1 \dot{x} + f_x + g_x u) + c_0 \dot{\theta} + f_0 + g_0 u] \quad (26)$$

$$\dot{V}(S) = S [\lambda f_x + f_0 + \lambda c_1 \dot{x} - c_0 \theta - (\lambda g_x + g_0) u] \quad (27)$$

$$\dot{V}(S) = -k_1 |S| - k_2 S^2 \quad (28)$$

lo cual implica que la superficie de deslizamiento se alcanza en tiempo finito.

Hasta ahora no se han tomado en cuenta los efectos de fricción del sistema, pero en el sistema experimental que se considera, los efectos de fricción del sistema del carro son muy notables, por lo que se propone utilizar un modelo de fricción de Dahl para el subsistema del carro, mientras que se supone que los efectos de fricción del péndulo son despreciables. Para considerar dichos efectos se supone que la fuerza de fricción generada es una perturbación al sistema en la variable actuada, quedando entonces la dinámica del sistema descrita por:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta \cos(\theta) \\ \beta \cos(\theta) & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ -\eta \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{bmatrix} u - (f_{xc} \dot{x} + \sigma_0 \dot{x}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0}{f_{cv}} |z| z + \dot{x} \quad (30)$$

por lo cual se propone la modificación de la ley de control de la siguiente manera:

$$u = u_{SMC} + c_{fd} \quad (31)$$

dónde u_{SMC} es la ley de control por modos deslizantes (sliding mode control) recién propuesta y c_{fd} es un compensador de la fricción de Dahl definido como:

$$c_{fd} = f_{xc} \dot{x} + \sigma_0 \dot{x} \quad (32)$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0}{f_{cv}} |z| z + \dot{x} \quad (33)$$

El error entre la fuerza de fricción en el carro y el compensador de fricción, suponiendo que la velocidad del carro está disponible para la medición, está dado por

$$c_{fd} - f_x = f_{xc} \dot{x} - \sigma_0 \dot{x} - f_{xc} \dot{x} - \sigma_0 \dot{x} - \sigma_0 \dot{z} \quad (34)$$

$$\dot{z} = \dot{z} - \dot{z} = -\frac{\sigma_0}{f_{cv}} |z| z + \dot{x} + \frac{\sigma_0}{f_{cv}} |z| z - \dot{x} = -\frac{\sigma_0}{f_{cv}} |z| z \quad (35)$$

Se propone una nueva función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del sistema con el compensador de fricción como sigue:

$$V(S, z) = \frac{1}{2} (S^2 - z^2) \quad (36)$$

cu ya derivada temporal quedará dada por:

$$\dot{V}(S, \tilde{z}) = S\dot{S} - \tilde{z} + \dot{\tilde{z}} \quad (37)$$

$$\dot{V}(S) \leq -(k_1 + \sigma_0 \tilde{z})|S| - k_2 S^2 - \frac{\sigma_0}{\lambda} |\dot{\tilde{z}} \tilde{z}| \quad (38)$$

Si $k_1 > \sigma_0 \tilde{z}(0)$, se puede asegurar el alcance de la superficie de deslizamiento debido a que la dinámica del error de aproximación implica que éste sólo tenderá a reducirse, además de que el tercer término de la derecha de (38) implica un acotamiento en el error de aproximación, por lo que se puede suponer que el error de aproximación no tenderá a ser mayor que la condición inicial de éste y por tanto se consigue de nuevo una tendencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento. Esto a su vez implica una constante cadencia del error de aproximación de la fricción de Dahl, debido a lo anterior la restricción sobre el valor mínimo de la ganancia k_1 se vuelve conservadora y puede generar "chattering", por lo que la supervisión de ésta de manera indirecta por medio de un sistema de inferencia difuso $\sigma_1(S)$ resulta provechosa.

El sistema de supervisión se basará en el valor en cada instante que tenga la variable S . La Tabla 1 muestra la base de reglas a utilizar; entonces, el esquema de control por modos deslizantes difusos acoplados queda descrito por:

$$u = \frac{-\lambda \dot{f}_a - f_0 - \lambda c_1 \dot{x} - c_0 \ddot{\theta}}{\lambda g_x + g_0} \frac{k_1 \sigma_1(S) + k_2 S}{\lambda g_x - g_0} + \ddot{\theta}_d \quad (39)$$

TABLA 1: TABLA DE REGLAS DEL SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO.

S	NG	NM	N	Z	P	PM	PG
$\sigma_1(S)$	NG	NM	N	Z	P	PM	PG

Es sencillo observar que el sistema de inferencia difuso $\sigma_1(S)$ tiene el mismo signo que la variable S debido a su base de reglas, por lo que el término $k_1 \sigma_1(S)$ es equivalente a $k_1 \sigma_1(|S|) \text{sign}(S)$, así el sistema de inferencia difuso puede pensarse que toma el término robusto de (24) y mitiga el efecto de la ganancia k_1 conforme las trayectorias del sistema se acercan a la superficie de deslizamiento, por lo que se habla de una supervisión indirecta de la ganancia k_1 por medio de $\sigma_1(S)$.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los experimentos se llevaron al cabo en el Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna, utilizando el prototipo descrito en [11].

Para los experimentos se tomaron en cuenta los parámetros descritos en la Tabla 2. Además se tomaron los siguientes valores para los parámetros del controlador:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 18^\circ & \lambda &= \frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) & c_R &= \sqrt{\lambda g} \\ c_x &= \frac{c_0}{10} & k_1 &= 35 & k_2 &= 10 \end{aligned}$$

La ganancia para la parte robusta del controlador debe ser lo suficientemente grande para permitir la estabilización del sistema del péndulo realizando un recorrido relativamente corto en el carro, por lo que es necesario encontrar la ganancia más pequeña que permita la estabilización del sistema dentro de los límites físicos del sistema.

TABLA 2: PARÁMETROS DEL PROTOTIPO EXPERIMENTAL.

Simbolo	M	m	l	l	f_0	f_1	α
Valor	2.27	.26	.263	.0053	6.32	$26.1e \pm 0$	8000
Unidades	kg	kg	m	$kg \cdot m^2$	$\frac{N \cdot m}{s}$	$\frac{N \cdot m}{s}$	$\frac{N \cdot m}{s}$

Las funciones de membresía utilizadas se muestran en las Figuras 2 y 3 con $a = 3.3625$, $b = 0.2$, $c = 0.01253$ para las funciones de entrada y $a = 1$, $b = 0.45$, $c = 0.5$ para las funciones de salida. Los experimentos realizados son para un controlador por modos deslizantes puros (SMC) y el control por modos deslizantes difusos (FSMC).

Las Figuras 4 y 5 muestran las gráficas de los resultados obtenidos, mientras que la Tabla 3 muestra las normas \mathcal{L}_2 de las posiciones angular y traslacional además de la señal de control.

Es sencillo observar que el controlador por modos deslizantes difusos hace un buen trabajo en reducir el "chattering". Además, la aplicación del sistema de inferencia difusa resulta en un controlador cuyo desempeño es superior al controlador por modos deslizantes puros para el subsistema del péndulo, manteniendo un comportamiento similar para el subsistema del carro.

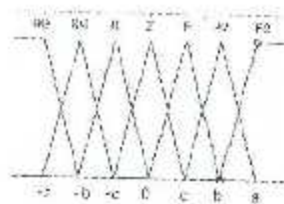


FIGURA 2: FUNCIONES DE MEMBRÉSIA DE ENTRADA

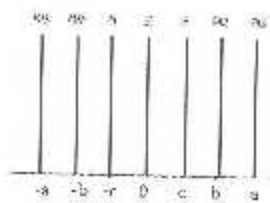


FIGURA 3: FUNCIONES DE MEMBRÉSIA DE SALIDA

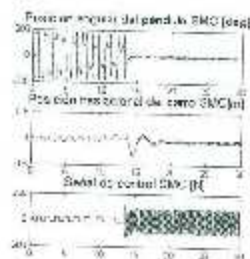


FIGURA 4: RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA LEY DE CONTROL (31).

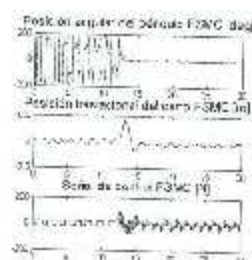


FIGURA 5: RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA LEY DE CONTROL (39).

TABLA 3: NORMAS \mathcal{L}_2 DE LOS EXPERIMENTOS.

	x	θ	\dot{x}
SMC	0.0885	5.0166	69.0471
FSMC	0.0972	3.2495	21.1464

CONCLUSIONES

En el trabajo aquí presentado se muestra el diseño de un controlador por modos deslizantes acoplados para el control de un sistema carro-péndulo. El controlador logra el objetivo de regulación para los cuatro estados del sistema simultáneamente, y su estabilidad se demuestra mediante el análisis de la dinámica de ceros. Además, con la inclusión del sistema de inferencia difusa se logra la reducción del "chattering" haciendo menos dañina la aplicación del controlador en una planta real. La inclusión del compensador de fricción de Dahl permite la reducción de la ganancia de la parte robusta del controlador, mientras que la inclusión del término tipo PD mejora el comportamiento del sistema en la fase de alcance. Los resultados experimentales de-

muestran la efectividad del controlador para un sistema real.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen y reconocen al Tecnológico Nacional de México y al CONACYT por el apoyo recibido para la realización de este trabajo.

REFERENCES

- [1] Burye, K. "Comparison of LQR and robust controllers for stabilizing inverted pendulum system". 2010 IEEE ICCCT, 2010.
- [2] Blech, A. Leonard, N. Marsden, J. "Matching and stabilization by the method of controlled Lagrangians". Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, 1998.
- [3] Utkin, V. Guldner, J. Shi, J. "Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems". CRC Press, 2009.
- [4] Wang, W. Liu, X. Yi, J. "Structure design of two types of sliding-mode controllers for a class of under-actuated systems". IEEE Control Theory Appl. Vol. 1, 2007.
- [5] Park, M. Chwa, D. "Swing-Up and Stabilization Control of Inverted Pendulum Systems via Coupled Sliding-Mode Control Method. IEEE Transactions on industrial electronics. Vol. 56, 2009.
- [6] Thangavelusamy, D. Laskshmi, P. "Elimination of Chattering Using Fuzzy Sliding Mode Controller for Drum Boiler Turbine System" Control Engineering and Applied Informatics. Vol. 15, 2013.
- [7] Mohd, A. Mehd, B. Husain, A. Danapalasingam, K. "Robust Chattering Free Backstepping Sliding Mode Control Strategy for Autonomous Quadrotor Helicopter" International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering. Vol.14, 2014.
- [8] Boubakir, A. Boudjema, F. Labiod, S. "A Neuro-fuzzy-sliding Mode Controller Using Nonlinear Sliding Surface Applied to the Coupled Tanks System" International Journal of Automation and Computing 6(1) 2009.
- [9] Roopaci, M. Jahromi, M. "Chattering-free fuzzy sliding mode control in MIMO uncertain systems. Nonlinear analysis 2009.
- [10] Slotine, J. Li, W. "Applied Nonlinear Control". Prentice Hall, 1991.
- [11] Llana, Miguel A. De la Torre, W. Jurado, F y García-Herrera, R. "Robust Takagi-Sugeno Fuzzy Dynamic Regulator for Trajectory Tracking of a Pendulum-Cart System" Mathematical Problems in Engineering, vol. 2015.

Bibliografía

- [1] Morsy, M. Moteleb, M. Dorrah, H. (2008) "*Design and Implementation of Fuzzy Sliding Mode Controller for Switched Reluctance Motor* Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists Vol II.
- [2] Wang, Wu (2009) "*Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Inverted Pendulum* Proceedings of the Second Symposium: International Computer Science and Computational Technology.
- [3] Basir, B. Ahmad, M. Hussain, A. (2013) "*Takagi Sugeno Fuzzy Sliding Mode Controller Design for a Class of Nonlinear System*" Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 7.
- [4] He, Q. Nguyen, Q. Rye, D Durrant-White, H. (2001) "*Fuzzy Sliding Mode Controllers with Applications*" IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 48.
- [5] Jing, Jiang & Wu, Qing-He. (2006) "*An Intelligent Sliding-Mode Control Algorithm for Position Tracking Servo System* International Journal of Information Technology Vol. 12.
- [6] Karrem, A. Azeem, M. (2012) "*A novel Fuzzy Logic Based Adaptive Super-twisting Sliding Mode Control Algorithm for Dynamic Uncertain Systems* International Journal of Artificial Intelligence & Applications Vol. 4.
- [7] Thangavelusarry, D. Laskshmi, P. (2013) "*Elimination of Chattering Using Fuzzy Sliding Mode Controller for Drum Boiler Turbine System*" Control Engineering and Applied Informatics. Vol. 15.
- [8] Mond, A. Mohid, B. Husain, A. Danapalasingam, K. (2014) "*Robust Chattering Free Backstepping Sliding Mode Control Strategy for Autonomous Quadrotor Helicopter*" International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering. Vol.14.

- [9] Kim, H. Shin, Y. (2005) "Design of Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller based on Fuzzy Basis Function Expansion for UFV Depth Control" International Journal of Control, Automation, and Systems, Vol 3.
- [10] Boubakir, A. Boudjema, F. Labiod, S. (2009) "A Neuro-fuzzy-sliding Mode Controller Using Nonlinear Sliding Surface Applied to the Coupled Tanks System" International Journal of Automation and Computing 06(1).
- [11] Zadeh Lofti A. (1965), *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8:338-353.
- [12] Zadeh Lofti A. (2008) "Is there a need for fuzzy logic?" Information Sciences, No. 178.
- [13] Wang, L. X. (1996), *A Course In Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall International Inc.
- [14] Mordeson, J. Nair, P.(2001), *Fuzzy Mathematics*, Springer Verlag.
- [15] Flores, A. (2014) "Control Descentralizado Difuso Adaptable: Aplicación al Robot Mitsubishi PA10-7CE". Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna.
- [16] Slotine J. J., y Li W. (1990), "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall.
- [17] Filippov, A. (1988) "Differential Equation with discontinuous Righthand Sides", Kluwer Academic Publishers.
- [18] Utkin, V (1992) "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer Verlag.
- [19] Sabauovic, A. Fridman, L. Spurgeon, S. (2004) *Variable structure systems: from principles to implementation*, The Institution of Engineering and Technology.
- [20] Bandyopadhyay, B. Janardhanan, J. y Spurgeon, S. (2013), "Advances in Sliding Mode Control", Springer.
- [21] Fridman, L. Moreno, J. Iriarte, R. (2011), "Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century", Springer.
- [22] Utkin, V. Gludner, J. y Shi, J. (2009). "Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems" CRC Press.
- [23] Shtessel, Y. Edwards, C. Fridman, L. y Levant, A. (2014), "Sliding Mode Control And Observation" Birkhäuser.

- [24] Utkin, V. y Hoon L. (2006), "*Chattering Problem in Sliding Mode Control Systems*", VSS'06. International Workshop on Variable Structure Systems.
- [25] Martínez, N. (2006), "*Desarrollo de un Sistema para Simulación y Control en Tiempo Real de un Péndulo Invertido.*", Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna.
- [26] Park y M. Chwa (2009), D. "*Swing-Up and Stabilization Control of Inverted-Pendulum Systems via Coupled Sliding-Mode Control Method*", IEEE Transactions on Industrial Electronics Vol. 56.
- [27] Slotine, J. y Li, W (1987), "*On the Adaptive Control of Robot Manipulators*", The International Journal of Robotics Research.
- [28] Kelly, R. y Santibáñez, V. (2003) "*Control de Movimiento de Robots Manipuladores*", Pearson Prentice Hall.
- [29] Kelly, R. Santibáñez, V y Loria, A. (2005) "*Control of Robot Manipulators in Joint Space*". Springer.