

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
**“Control por modos Deslizantes Dinámico
para un Sistema bola barra”**

POR
Erasmó Daniel Reyes Jaramillo

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA**

DIRECTOR DE TESIS
Dr. José Luis Meza Medina

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (16)-TMCIE-2016

Torreón, Coahuila, México
Diciembre 2016



Torreón, Coah., **19/Diciembre/2016**
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/219/2016
Asunto: Autorización de impresión
de tesis.

C. Erasmo Daniel Reyes Jaramillo
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Control por Modos Deslizantes Dinámico para un Sistema Bola-Barra"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (16)-TMCIE-2016**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna



ALI/RHSR





Torreón, Coah., 16/Diciembre/2016

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Control por Modos Deslizantes Dinámico para un Sistema Bola-Barra"

Desarrollado por el **C. Erasmo Daniel Reyes Jaramillo**, con número de control **M1413033** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. José Luis Meza Medina
Asesor/Director de Tesis

Dr. Juan Sifuentes Mijares
Comité Tutorial

Dr. Alejandro E. Dzul López
Comité Tutorial

Dr. Víctor A. Santibañez Dávila
Comité Tutorial



Control por Modos Deslizantes Dinámico para
un sistema bola-barra

Erasmus Daniel Reyes Jaramillo

División de Estudios de Posgrado
Instituto Tecnológico de La Laguna
Apartado Postal 681
Boulevard Revolución y Avenida Instituto Tecnológico de La Laguna
Torreón, Coahuila, México. C.P. 27000.

Division of Postgraduate Studies
La Laguna Institute of Technology
P.O. Box 681
Boulevard Revolution and Avenida Instituto Tecnológico de La Laguna
Torreón, Coahuila, Mexico. C.P. 27000

Dedicatorias

A mi esposa, por sus palabras de aliento, por su apoyo incondicional, por su cariño.

A mis hermanos, por estar en los momentos más importantes de mi vida.

A mis padres, por sus sabios consejos y por inculcarme los valores de superación.

Agradecimientos

Al Dr. José Luis Meza Medina, por siempre estar dispuesto a ayudarme. Por compartir su tiempo, conocimiento y experiencia. Por su paciencia, pero sobre todo, por creer en mí.

A mis amigos de maestría de la generación 2014-2016 por su apoyo y amistad.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo para la realización de este trabajo de tesis.

Control por Modos Deslizantes Dinámico para un sistema bola barra

Erasmó Daniel Reyes Jaramillo

Resumen

El control por modos deslizantes estático (SSMC, por sus siglas en inglés) es considerado un controlador robusto. Sin embargo, la señal de control presenta un fenómeno conocido como chattering. Debido al efecto de chattering, la implementación de SSMC en sistemas físicos es muy limitada.

En este trabajo de tesis se presenta el control por modos deslizante dinámico (DSMC, por sus siglas en inglés). Dicho controlador conserva las características propias de un SSMC, pero además, elimina el efecto indeseable de chattering.

Para demostrar la superioridad del DSMC frente al SSMC, se hace un estudio comparativo en simulación de ambos controladores utilizando el sistema bola barra como planta a controlar. En los estudios de simulación, se utilizan dos modelos del sistema bola barra: simplificado y completo. La ventaja de usar un modelo simplificado es que la complejidad en el diseño de los controladores se reduce, sin embargo, el comportamiento del sistema da mejores resultados cuando se usa el modelo completo. En cualquier caso, queda demostrado que el uso del DSMC elimina el efecto de chattering.

Abstract

Static sliding mode control (SSMC) is considered a robust controller. However, the control signal presents a phenomenon known as chattering. Because of the chattering effect, SSMC implementation on physical systems is very limited.

Dynamic sliding mode control (DSMC) is presented in this thesis. This controller maintains the characteristics of an SSMC, but also eliminates the undesirable effect of chattering.

To demonstrate the superiority of the DSMC versus SSMC, a comparative study is made in simulation of both controllers using the ball and beam system as a plant to be controlled. In the simulation studies, two models of the ball and beam system are used: simplified and complete. The advantage of using a simplified model is that the complexity in the design of the controllers is reduced, however, the behavior of the system gives better results when using the complete model. In any case, it has been demonstrated that the use of DSMC eliminates the effect of chattering.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Objetivos de la tesis	4
1.4. Estructura de la tesis	5
2. Modelo matemático del sistema bola barra	6
2.1. Introducción	6
2.2. Con apoyo en un extremo	6
2.2.1. Modelo matemático del motor de CD	7
2.2.2. Modelo Euler-Lagrange del sistema bola-barra	8
3. Control por modos deslizantes	13
3.1. Introducción	13
3.2. Control por modos deslizantes estático	14
3.2.1. Superficie de deslizamiento	14
3.2.2. Ley de control	15
3.3. Control por modos deslizantes dinámico	19
3.3.1. Método del control equivalente	20

3.3.2. Método de deslizamiento indirecto	21
3.4. Diseño del controlador estático y dinámico	22
3.4.1. Control por modos deslizantes estático	22
3.4.2. Control por modos deslizantes dinámico	24
3.5. Diseño del controlador estático y dinámico	26
3.5.1. Control por modos deslizantes estático	26
3.5.2. Control por modos deslizantes dinámico	27
4. Estudio en simulación	30
4.1. Modelo simplificado	30
4.2. Modelo completo	31
5. Conclusiones	34

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Sistema Quanser (Rotary Ball and Beam Experiment)	2
2.1. Diagrama esquemático del sistema bola-barra con apoyo en un extremo	7
3.1. Condición de deslizamiento.	17
3.2. Interpretación gráfica de las ecuaciones 3.3 y 3.8	17
3.3. Control por modos deslizantes dinámico DSMC	20
4.1. Posición de la bola para el SSMC y DSMC utilizando el modelo simplificado	31
4.2. Señal de control para el SSMC y DSMC usando el modelo simplificado	32
4.3. Posición de la bola para el SSMC y DSMC utilizando el modelo completo	33
4.4. Señal de control para el SSMC y DSMC usando el modelo completo	33

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Valores de los parámetros del sistema bola barra	7
4.1. Valores de los parámetros del sistema bola barra	31

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

→ porque es inestable
→ en la posición horizontal
→ Si estabiliza horizontalmente
→ tendríamos un equilibrio

1.1. Antecedentes

El sistema bola barra posee propiedades muy interesantes, es no lineal e inestable en lazo abierto. Este sistema consta esencialmente de una barra, sobre la cual se desliza libremente una bola. La barra es inclinada por medio de un motor, logrando que la bola modifique su posición sobre la barra. Tiene dos grados de libertad, uno es el movimiento de la bola sobre la barra y el otro la inclinación de la barra alrededor de su punto de apoyo. El sistema es subactuado, ya que sólo la inclinación de la barra es actuada por el motor. El sistema es generalmente ligado a problemas reales de control tales como la estabilización horizontal de un avión durante el aterrizaje, el despegue y control de cohetes espaciales, el despegue vertical de aviones, el líquido en camiones cisterna [1]. Junto con las interesantes aplicaciones, su dinámica ofrece una amplia gama de flexibilidad para implementar controladores clásicos y modernos. El sistema barra bola es un sistema ampliamente utilizado en universidades de todo el mundo para la evaluación de controladores, su implementación es sencilla dado que está conformado por pocos elementos. Se considera un equipo de laboratorio de los más importantes para la enseñanza de la teoría de control. La empresa Quanser [2], desarrolla un sistema comercial donde la barra está pivotada en un extremo, el sensor de posición de la bola es una resistencia de alambre níquel-cromo ubicada sobre un riel en el que la bola metálica se desplaza libremente. Cuando la bola rueda a lo largo del riel, actúa como el cursor de un potenciómetro, el voltaje de salida proporciona la posición de la bola. Un módulo de un servomotor se acopla a la barra mediante un eslabón, tal que la posición angular del motor



Figura 1.1: Sistema Quanser (Rotary Ball and Beam Experiment)

inclina la barra, logrando que la bola se desplace a lo largo de la barra (ver figura 1.1).

Se han aplicado varias técnicas lineales y no lineales para estabilizar la posición de la bola sobre la barra. Sin embargo, no responden al rechazo de perturbaciones ni a variaciones paramétricas. La estrategia de control por modos deslizantes ha atraído considerable atención en las dos últimas décadas tanto en la comunidad académica como en la industrial, debido principalmente a sus características robustas y facilidad para la implementación real, este esquema de control ha sido ampliamente utilizado en muchas aplicaciones tales como sistemas de levitación, sistemas automotrices, procesos químicos, robóticos, subactuados aeronáuticos y aeroespaciales [3]-[4].

El control de estructura variable por modos deslizantes fue propuesto por Emelyanov en 1950 en la Unión Soviética. Los sistemas de control de estructura variable por modos deslizantes difieren de los sistemas tradicionales de control automático en que su estructura cambia intencionalmente durante el transitorio del proceso, dependiendo del valor presente de la señal de error y de sus derivadas. Investigaciones en esta área han demostrado que los sistemas de control de estructura variable poseen varias características importantes como: 1).- solución al conflicto entre la exactitud estática y dinámica del sistema, 2).- insensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta y a las perturbaciones externas. Generalmente los controladores por modos deslizantes utilizan un control discontinuo para forzar las trayectorias de los estados hacia alguna superficie de deslizamiento sobre la cual, el sistema tiene propiedades deseadas tales como estabilidad y rechazo de perturbaciones [5].

Sin embargo, su principal desventaja es un fenómeno indeseable de oscilaciones de frecuencia y amplitud finitas, que se conoce como chattering. En la primera etapa del desarrollo de la teoría de control de modos deslizantes el chattering fue el principal obstáculo para su implementación, debido a que conduce a un control de baja precisión y alto desgaste de las piezas mecánicas que ha impedido una aplicación más amplia de la estrategia en muchos

sistemas prácticos. Diversos métodos han sido propuestos para la reducción del efecto de chattering. Uno de ellos es el de capa límite [6]. En este método básicamente se reemplaza la función discontinua de conmutación por una función continua. El inconveniente al utilizar esta técnica es que no se garantiza que las trayectorias del sistema convergan a cero [7]. Otra solución propuesta para eliminar el problema de chattering es utilizar un controlador por modos deslizantes basado en un observador [8]. Este tipo de controlador usa los estados estimados en vez de medirlos directamente de la planta, por lo tanto el observador es libre de cualquier dinámica no modelada de los actuadores o sensores. Sin embargo, el diseño de este tipo de controlador es complejo, y además, los parámetros del sistema deben ser conocidos para poder diseñar un observador adecuado. Otros métodos que aparecen en la literatura para la reducción del chattering son el control por modos deslizantes integrales [9], el control por modos deslizantes de orden superior [10], el control adaptable por modos deslizantes propuesto en [11] y el control por modos deslizantes difuso [12].

Los sistemas de control por estructura variable son caracterizados por una ley de control discontinua, que produce una conmutación que hace que las trayectorias del sistema permanezcan sobre una superficie dada en el espacio de fase. La estructura del controlador varía intencionalmente para obtener una dinámica deseada en el sistema. En una primera fase, llamada fase de alcance, la trayectoria que comienza en una condición inicial arbitraria se mueve hacia la superficie de deslizamiento; en la siguiente fase, el movimiento se restringe a la superficie de deslizamiento, por esto se llama fase de deslizamiento o modo deslizante [6]. En la fase de deslizamiento se genera un fenómeno indeseado de amplitud y frecuencia finita llamado chattering, producido por la interacción entre las dinámicas parásitas y el control por estructura variable. Una característica importante de los sistemas de control por estructura variable consiste en que en la fase de deslizamiento la dinámica del sistema está determinada por los parámetros de diseño y las ecuaciones que definen la superficie, y son insensibles a las variaciones de los parámetros del sistema y a perturbaciones externas [13].

Para obtener un buen comportamiento en la dinámica de los sistemas de estructura variable se asume que el sistema consta de varios subsistemas llamados estructuras; cada una de esas estructuras son inaceptables desde el punto de vista de la calidad del proceso de control, pues se consideran como inestabilidades. El diseño de un controlador consiste en seleccionar los parámetros para esas estructuras, como también definir la lógica de conmutación, de tal modo que las características útiles de las estructuras se conserven. En los momentos en que las estructuras cambien, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema presentarán discontinuidades en ciertas superficies del espacio de estado del sistema. Esta es precisamente la introducción de un modo deslizante dentro del sistema que es el fundamento de los algoritmos de control en esta clase de plantas.



1.2. Planteamiento del problema

El sistema bola barra no es un modelo de un sistema real en la forma que otros equipos de laboratorio lo son, tiene una dinámica que es semejante a la encontrada en muchos sistemas que desafían el control moderno, por ejemplo en sistemas aeronáuticos. Por ende es una herramienta de aprendizaje de vital importancia para estudiantes y profesionales. Una característica importante del sistema bola barra es su respuesta inestable en lazo abierto. Existen diferentes alternativas para estabilizar el sistema, las cuales están basadas en controles clásicos ó modernos. Todos los métodos ofrecen un rendimiento aceptable cuando son implementados adecuadamente, sin embargo el control por modos deslizantes convencional tiene la desventaja del problema de chattering en aplicaciones reales. Para hacer frente a este problema, existen varias alternativas [6], [8] y [9] sólo por mencionar algunas. En este trabajo de tesis se propone un diseño de un esquema de control de modos deslizantes dinámico que resuelve el problema del chattering [14]. Los resultados en simulación muestran que los controladores dinámicos reducen en gran medida el chattering normalmente asociado con los controladores en modo deslizante.

1.3. Objetivos de la tesis

Objetivo general

Analizar, diseñar y simular esquemas de control por modos deslizantes dinámicos y estáticos para un sistema bola-barra como una alternativa de solución al problema de chattering.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos perseguidos en este trabajo de investigación son los siguientes:

- Obtener un modelo matemático no lineal completo y simplificado del sistema bola-barra.
- Diseñar controladores por modos deslizantes estáticos para el modelo completo y para el modelo simplificado.
- Diseñar controladores por modos deslizantes dinámicos para el modelo completo y para el modelo simplificado.



- Realizar un estudio comparativo en simulación de los controladores por modos deslizantes estáticos y dinámicos.

1.4. Estructura de la tesis

El trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se presenta una breve introducción al control por modos deslizantes del sistema bola barra, así como los antecedentes y objetivos perseguidos durante la realización de la tesis. En el Capítulo 2 se obtiene el modelo matemático del sistema bola barra en su configuración con apoyo en un extremo. En el Capítulo 3 se analizan los controladores por modos deslizantes estáticos y dinámicos utilizando modelos simplificados y completos del sistema bola barra. El Capítulo 4 presenta un estudio en simulación de los controladores por modos deslizantes estáticos y dinámicos. Finalmente en el Capítulo 5 se dan las conclusiones y comentarios finales de esta tesis.



CAPÍTULO 2

MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA BOLA BARRA

2.1. Introducción

En este capítulo se obtiene el modelo matemático del sistema bola barra en su configuración de apoyo en un extremo. La dinámica del sistema se obtiene por el método de Euler Lagrange, siendo fundamental considerar la configuración de la estructura mecánica del sistema para obtener las energías cinética y potencial necesarias para construir el Lagrangiano. El modelo general del sistema bola barra se ha dividido en dos partes: el modelo matemático del motor y el modelo de Lagrange de la dinámica de la bola sobre la barra.

2.2. Modelo matemático con apoyo en un extremo

El sistema bola barra con apoyo en un extremo es un sistema subactuado que consiste de una bola que se mueve libremente sobre una barra, la cual está unida a un soporte fijo en un extremo, mientras que el otro extremo está montado sobre la flecha de un motor. La barra se balancea hacia arriba y hacia abajo, mediante una señal de control al motor. La posición de la bola se puede medir usando cualquier sensor de posición ya sea ultrasónico o una resistencia de alambre níquel-cromo ubicada sobre la barra. El sistema en lazo abierto es inestable y requiere de un controlador para regular automáticamente la posición de la bola.

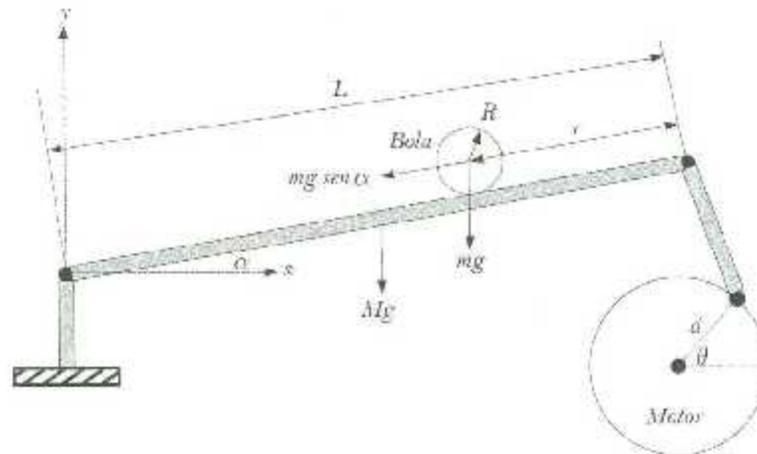


Figura 2.1: Diagrama esquemático del sistema bola-barra con apoyo en un extremo

sobre la barra. El sistema bola barra modelado en esta sección está basado en [15]. En la figura 2.1 se puede observar el diagrama esquemático del sistema con apoyo en un extremo. Los parámetros del sistema se muestran en la Tabla 2.1.

<i>Significado</i>	<i>Notación</i>	<i>Unidades</i>
Ángulo de la barra	$\alpha(t)$	<i>radianes</i>
Posición de la bola	$r(t)$	<i>m</i>
Ángulo del motor	$\theta(t)$	<i>radianes</i>
Aceleración de la gravedad	g	m/s^2
Masa de la bola	m	<i>kg</i>
Masa de la barra	M	<i>kg</i>
Longitud de la barra	L	<i>m</i>
Inercia de la bola	I_1	$kg\ m^2/rad$
Inercia de la barra	I_2	$kg\ m^2/rad$

Tabla 2.1: Valores de los parámetros del sistema bola barra

2.2.1. Modelo matemático del motor de CD

El modelado del motor puede ser dividido en dos subsistemas: eléctrico y mecánico. La parte eléctrica se puede obtener utilizando las leyes de voltaje de Kirchhoff

$$U = L_m \dot{I}_m + R_m I_m + K_b \dot{\theta} \quad (2.1)$$

donde U es la entrada de voltaje, I_m es la corriente de la armadura, R_m es la resistencia de



la armadura, L_m es la inductancia de la armadura, K_b es la fuerza contraelectromotriz y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular. El término $L_m \dot{I}_m$ es muy pequeño comparado con $R_m I_m$ y $K_b \dot{\theta}$. Debido a esto y para simplificar el modelado, el término $L_m \dot{I}_m$ se omite. El modelo matemático de un motor de CD está definido por

$$\frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(K_b + \frac{R_m B_{vm}}{K_m K_g} \right) \dot{\theta} = U \quad (2.2)$$

y por el subsistema mecánico dado por

$$\frac{1}{K_g} \left(J_m \ddot{\theta} + B_{vm} \dot{\theta} \right) = \tau_m \quad (2.3)$$

donde K_g es la constante de relación de engranes del motor, J_m es el momento de inercia efectivo, B_{vm} es el coeficiente de fricción viscosa y τ_m es el torque producido por el motor. Los dos subsistemas son acoplados mediante la ecuación

$$\tau_m = K_m I_m \quad (2.4)$$

donde K_m es la constante de torque del motor.

2.2.2. Modelo Euler-Lagrange del sistema bola-barra

El método Euler-Lagrange está basado en el lagangiano \mathcal{L} , el cual se obtiene de la diferencia de la energía cinética \mathcal{K} y la energía potencial del sistema \mathcal{U} .

Energía cinética del sistema

La energía cinética total está formada por la energía cinética de la bola más la energía cinética de la barra y está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T &= \frac{1}{2} m (\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\alpha}(t)^2) + \frac{1}{5} m \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}(t)^2 \\ &= \frac{7}{10} m \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m r(t)^2 \dot{\alpha}(t)^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}(t)^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Energía potencial del sistema

La energía potencial total del sistema cuando la bola rueda es la suma de la energía potencial de la bola más la energía potencial de la barra. La energía potencial de la bola es su peso



por la altura y está dada por:

$$U_{bola} = mgr(t) \operatorname{sen} \alpha \quad (2.6)$$

La aportación de energía potencial de la barra es:

$$U_{barra} = Mg \frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.7)$$

por lo tanto la energía potencial total del sistema es la suma de ambas energías potenciales (bola y barra).

$$U_T = mgr(t) \operatorname{sen} \alpha + Mg \frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.8)$$

Obtención del modelo Lagrangiano

A partir de la energía potencial total y la energía cinética total se obtiene el Lagrangiano.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{K}_T - U_T \\ \mathcal{L} &= \frac{7}{10} m \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m r(t)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}^2 - mgr(t) \operatorname{sen} \alpha - Mg \frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aplicando ahora las ecuaciones de movimiento de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \tau \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \quad (2.11)$$

Obteniendo las derivadas parciales y sustituyendo en las ecuaciones del movimiento de Lagrange, se obtiene:

$$mr^2 \ddot{\alpha} + I_2 \ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha} + mgr \cos \alpha + Mg \frac{L}{2} \cos \alpha = u \quad (2.12)$$

$$\frac{7}{5} m_1 \ddot{r} - m r \dot{\alpha}^2 + mg \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (2.13)$$

Simplificando, la dinámica del sistema bola barra y considerando la dinámica del motor de CD se tiene:

$$(mr^2 + K_1) \ddot{\alpha} + (2mr\dot{r} + K_2) \dot{\alpha} + \left(mgr + Mg \frac{L}{2} \right) \cos \alpha = u \quad (2.14)$$

$$K_4 \ddot{r} - r \dot{\alpha}^2 + g \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (2.15)$$



Los parámetros k_1 , k_2 , k_3 y k_4 son funciones de los parámetros del sistema:

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{R_m J_m L}{K_m K_g d} + J_1 \\k_2 &= \frac{L}{d} \left(\frac{K_m K_b}{R_m} + K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right) \\k_3 &= 1 + \frac{K_m}{R_m} \\k_4 &= 7/5\end{aligned}\tag{2.16}$$

además

$v_{in}(t)$ entrada de voltaje al motor.

$u(t) = k_3 v_{in}(t)$ entrada de control al sistema bola barra.

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) pueden reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{1}{(mgr^2 + k_1)} \left[u - (2mr\dot{r} + k_2)\dot{\alpha} - \left(mgr + \frac{L}{2}Mg \right) \cos \alpha \right] - \ddot{\alpha}\tag{2.17}$$

$$\frac{1}{k_4}(r\dot{\alpha}^2 - g \operatorname{sen} \alpha) = \ddot{r}\tag{2.18}$$

Por lo tanto, el modelo matemático del sistema bola barra (en este trabajo de tesis se le llama modelo completo) queda definido por las siguientes ecuaciones en su forma de espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{k_4} (x_1 x_4^2 - g \operatorname{sen} x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{(mx_1^2 + k_1)} \left[u - (2mx_1 x_3 + k_2)x_4 - \left(mgx_1 + \frac{L}{2}Mg \right) \cos x_3 \right]\end{aligned}\tag{2.19}$$

donde $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \alpha$ y $x_4 = \dot{\alpha}$

Comentario 1 (Equilibrio del sistema)[16]: El equilibrio del sistema puede ser descrito por las siguientes ecuaciones

$$\left(mgr_e + \frac{L}{2}Mg \right) \cos \alpha_e = u_e\tag{2.20}$$

$$\operatorname{sen} \alpha_e = 0\tag{2.21}$$



El ángulo α está físicamente limitado a $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, por lo tanto, $\sin \alpha_e = 0$ implica que $\alpha_e = 0$. Las ecuaciones anteriores implican que $r_e = \frac{1}{mg}u_e - \frac{l}{2} \frac{M}{m}$. Entonces, cualquier punto de equilibrio para el sistema bola barra debe ser tal que $\alpha_e = 0$ y $r_e = r_d$, donde r_d es la posición deseada de la bola.

Comentario 2 (Grado relativo del sistema)[16]: El enfoque básico de la técnica de linealización exacta de entrada-salida es derivar la función de salida hasta que la variable de control aparezca [6]. En el sistema bola barra la función de salida es la posición r de la bola, y la entrada está representada por la variable u . Derivando la salida $y = r$ hasta que la variable u de control aparezca, se tienen las siguiente ecuaciones

$$\dot{y} = \dot{r} \quad (2.22)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} = \frac{r}{k_1} \dot{\alpha}^2 - \frac{g}{k_1} \sin \alpha \quad (2.23)$$

$$\ddot{\ddot{y}} = f_0 + g_0 u \quad (2.24)$$

donde f_0 está dado por

$$f_0 = \frac{\dot{r} \dot{\alpha} (mr^2 + k_1)}{k_4 (mr^2 + k_1)} - \frac{2r \dot{\alpha} [(2mr\dot{r} + k_2) \dot{\alpha} + (mgr + \frac{l}{2} Mg) \cos \alpha]}{k_4 (mr^2 + k_1)} - \frac{g(mr^2 + k_1) \dot{\alpha} \cos \alpha}{k_4 (mr^2 + k_1)} \quad (2.25)$$

y g_0 está dado por

$$g_0 = \frac{2r \dot{\alpha}}{k_4 (mr^2 + k_1)} \quad (2.26)$$

Sin embargo, considerando que la región de interés es cuando $\alpha = \alpha_e = 0$ y $\dot{\alpha} = 0$, se deduce que $g_0 = 0$ en $\alpha = 0$, por lo tanto, el grado relativo del sistema no está bien definido en este punto. Debido a este inconveniente, la técnica de linealización exacta de entrada-salida no es posible de implementar en el sistema bola barra. No obstante, en [17] se propone el control de linealización entrada-salida aproximado para resolver este inconveniente. Otra aportación que se hace en [17] es la simplificación del modelo matemático del sistema bola barra, en el cual se omite el término de aceleración centrífuga $r\dot{\alpha}^2$. Este nuevo sistema (en este trabajo de tesis se le llama modelo simplificado) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-g \sin x_3}{k_4} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{(mx_1^2 + k_1)} \left[u - (2mx_1x_2 + k_2)x_4 - \left(mgx_1 + \frac{l}{2} Mg \right) \cos x_3 \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$



Este último modelo del sistema tiene la ventaja de tener un grado relativo definido. Además, reduce el nivel de complejidad en el diseño de controladores.



CAPÍTULO 3

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

3.1. Introducción

En cualquier problema de control, siempre existirá cierta discrepancia entre el modelo real de la planta y el modelo usado en el diseño del controlador. Estas discrepancias suelen ser el resultado de perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas. El diseño de leyes de control que aseguren un comportamiento deseado del sistema es una tarea desafiante. Por esta razón, diversos tipos de controladores robustos han sido propuestos en la literatura. Uno de ellos es el control por modos deslizantes (en este trabajo de tesis, se le llama control por modos deslizantes estático, SSMC por sus siglas en inglés). En general, este controlador está basado en el hecho de que es mucho más fácil controlar sistemas de primer orden que sistemas de orden superior [18]. En el control por modos deslizantes, los estados del sistema son proyectados hacia una *superficie deslizante* mediante el uso de alguna ley de control, típicamente la ley de control de alcance. Cuando la dinámica del sistema se encuentra dentro de la superficie deslizante se dice que es un *modo deslizante ideal*. Es en este punto cuando la dinámica del sistema se comporta de acuerdo a la superficie deslizante, la cual generalmente es de primer orden. El sistema controlado es totalmente invariante a perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas. Gracias a estas propiedades es que el control por modos deslizantes es considerado un controlador robusto.

3.2. Control por modos deslizantes estático

En el control por modos deslizantes se utiliza una ley de control que conmuta a diferentes valores de acuerdo a un conjunto de reglas predefinidas. A este conjunto de reglas predefinidas se le llama *función de conmutación*, la cual depende de los estados del sistema. Básicamente, el control por modos deslizantes se puede dividir en dos etapas: el diseño de la superficie deslizante y el diseño de un controlador que asegure que la superficie deslizante sea alcanzada. Cuando la dinámica del sistema se encuentra restringida en la superficie deslizante, se dice que está en modos deslizantes. Durante este deslizamiento, la dinámica del sistema es independiente de la señal de control y su comportamiento está definido por las propiedades de la superficie deslizante.

Considere el siguiente sistema no lineal en cascada de una entrada y una salida (SISO, por sus siglas en inglés)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f(x, t) + g(x, t)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta, $u, y \in \mathbb{R}$ son la entrada y salida escalar del sistema, $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_n$. El problema de control consiste en hacer que la salida del sistema y siga la trayectoria de referencia y_w .

3.2.1. Superficie de deslizamiento

Una vez que los estados del sistema alcanzan la superficie deslizante, el comportamiento del sistema está definido de acuerdo a las características de la superficie deslizante. Por lo tanto, la superficie deslizante se diseña de acuerdo al comportamiento deseado del sistema. Por ejemplo, si lo que se desea es mantener el error de seguimiento en cero, la superficie deslizante se selecciona como una ecuación diferencial en función del error de seguimiento. Generalmente, la superficie deslizante se selecciona como una ecuación lineal de los estados del sistema

$$s = S(x, t) \tag{3.2}$$



donde $S(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ es una función diferenciable. Se dice que el sistema se encuentra en modos deslizantes cuando

$$S(x, t) = 0 \quad (3.3)$$

Si por diseño, $S(x, t)$ da lugar a una ecuación diferencial, los estados del sistema convergerán asintóticamente al origen. Una de las condiciones que se deben tomar en cuenta en el diseño de la superficie deslizante es que ésta debe ser de grado relativo uno respecto a la entrada del sistema, es decir, la primera derivada de la superficie deslizante está en función de la entrada de control. La superficie deslizante puede ser también una función no lineal de los estados [19]. Una superficie deslizante lineal provoca que los estados del sistema convergan al punto de equilibrio asintóticamente, mientras que una superficie deslizante no lineal provoca convergencia en tiempo finito [20], [21].

Considere la siguiente superficie deslizante lineal

$$s = e^{(n-1)} + \dots + c_2 \dot{e} - c_1 \dot{e} + c_0 e \quad (3.4)$$

donde $e = y - y_d$ y los coeficientes c_i se seleccionan tal que el polinomio

$$\lambda^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \lambda^i = 0 \quad (3.5)$$

sea Hurwitz. Si la superficie deslizante s es cero, el error de seguimiento e convergerá asintóticamente a cero debido a que es un polinomio Hurwitz. Además, la superficie deslizante (3.4) satisface la condición de ser de grado relativo uno respecto a los estados del sistema, por que la primera derivada de s está en función de la señal de control

$$\dot{s} = f(x, t) - y_d^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)}(x, t) + g(x, t)u(t) \quad (3.6)$$

El siguiente paso es diseñar una ley de control que pueda estabilizar la dinámica de la superficie deslizante de la ecuación (3.6).

3.2.2. Ley de control

El propósito de la ley de control es llevar las trayectorias del sistema a la superficie deslizante, y una vez ahí, mantenerlas en dicha superficie sin importar las perturbaciones externas. Esto



se logra imponiendo condiciones en la ley de control para que la superficie deslizante sea atractiva. A tal condición se le denomina *condición de deslizamiento*. El método directo de Lyapunov es una herramienta para el análisis de estabilidad que no involucra la solución de ecuaciones diferenciales. Establece que si existe una función definida positiva V , y que su derivada \dot{V} sea negativa, entonces la dinámica del sistema es estable.

Considere la siguiente función definida positiva de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (3.7)$$

lo cual implica que $\dot{V} = s\dot{s}$. Por lo tanto, las trayectorias del sistema s convergen a cero si y sólo si

$$s\dot{s} < 0 \quad (3.8)$$

A la ecuación (3.8) se le llama condición de deslizamiento. Si s satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones, donde k_1 y k_2 son estrictamente positivas, entonces s satisface la condición de deslizamiento (3.8).

$$\dot{s} = -k_1s \quad (3.9)$$

$$\dot{s} = -k_2\text{sign}(s) \quad (3.10)$$

$$\dot{s} = -k_1s - k_2\text{sign}(s) \quad (3.11)$$

Las ecuaciones anteriores satisfacen $s\dot{s} < 0$ y por lo tanto, hacen que la superficie deslizante sea atractiva, como se ilustra en la figura 3.1. Las condiciones de alcance lineales similares a la ecuación (3.9) sólo garantizan convergencia asintótica de la variable deslizante, y la velocidad con la cual converge esta variable está determinada por la constante k_1 . Estas condiciones son llamadas condiciones de alcance asintótico. Las condiciones de alcance no lineales como (3.10) y (3.11) aseguran alcance en un tiempo finito de la variable deslizante, donde ese tiempo está acotado por arriba por los parámetros de diseño k_1 y k_2 y las condiciones iniciales de los estados del sistema.

El comportamiento del sistema cuando las ecuaciones (3.3) y (3.8) son satisfechas, se ilustra en la figura 3.2. Es decir, la condición de deslizamiento $s\dot{s} < 0$ ha sido cumplida y los estados del sistema son atraídos hacia la superficie deslizante. Si la superficie deslizante es igual a cero, los estados del sistema entrarán en modo deslizante y la variable de salida y seguirá a la variable de salida deseada y_d .

Considere la ecuación (3.6). La ley de control por retroalimentación aproximada que asegure $\dot{s} = 0$ está dada por



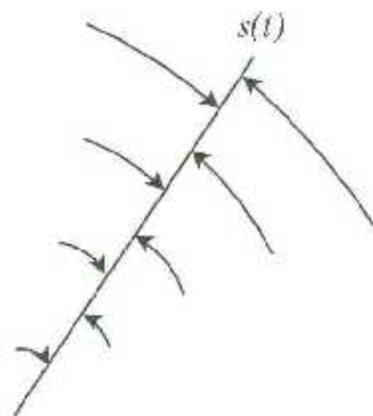


Figura 3.1: Condición de deslizamiento.

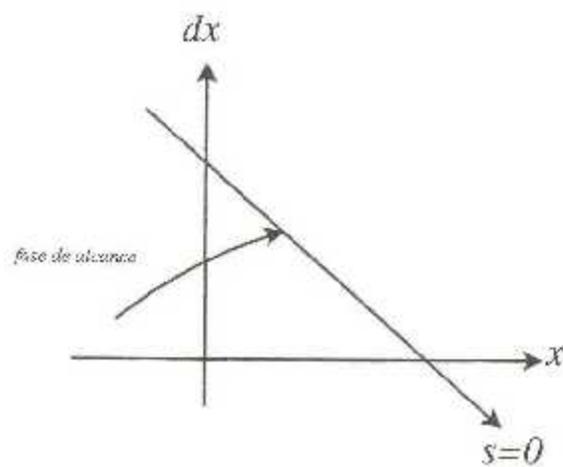


Figura 3.2: Interpretación gráfica de las ecuaciones 3.3 y 3.8

$$\hat{u} = \hat{g}(x, t)^{-1}(-\hat{f}(x, t) + \dot{y}_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)}) \quad (3.12)$$

donde $e^{(i+1)} = x_{i+2} - y_d^{(i+1)}(t)$. La robustez frente a incertidumbres en $f(x, t)$ y $g(x, t)$ es atendida por el control discontinuo. Suponga que la estructura de control está dada por

$$u = \hat{u} - \hat{g}(x, t)^{-1} k_2 \text{sign}(s); \quad k_2 > 0 \quad (3.13)$$

Considere el criterio de estabilidad cuadrática de tiempo finito

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} \leq -\eta |s| \quad (3.14)$$

donde η es un parámetro de diseño estrictamente positivo e inversamente proporcional al tiempo de alcance. La condición en k_2 está dada por [6].

$$k_2 \geq \mu(F + \eta) + \hat{g}(x, t)(\mu - 1)|\hat{u}| \quad (3.15)$$

Por lo tanto, si la ley de control (3.13) satisface la ecuación (3.15), se asegura que las trayectorias del sistema alcanzarán la superficie deslizante en un tiempo finito dado por

$$t_r \leq \frac{|s|_{t=0}}{\eta} \quad (3.16)$$

Cuando los estados del sistema están en la superficie deslizante, el error de seguimiento tiende a cero asintóticamente de acuerdo a la ecuación (3.5). La dinámica del error cuando el sistema se encuentra en modo de deslizamiento, sólo depende de los coeficientes de la ecuación (3.5) y son independientes de la señal de control. La función del controlador es forzar a los estados a alcanzar la superficie deslizante. Resumiendo, el comportamiento del sistema puede ser dividido en dos partes:

Modo de alcance: Al movimiento del sistema de $0 < t < t_r$, durante el cual las trayectorias del sistema no se encuentran en la superficie deslizante pero se acercan a ella, se le llama *modo de alcance*.

Modo deslizante: El movimiento del sistema de $t \geq t_r$, cuando las trayectorias del sistema se encuentran en la superficie deslizante, se llama *modo deslizante*.



3.3. Control por modos deslizantes dinámico

En el control por modos deslizantes estático, la superficie deslizante s solamente depende de los estados del sistema; y la derivada de la superficie deslizante \dot{s} es una función algebraica dependiente de los estados del sistema y de la señal de control. Es decir, la señal de control o su derivada no forman parte de la superficie deslizante. El concepto de *diferencia algebraica* descrito en [22] elimina esta restricción sobre la superficie deslizante y da pie al diseño de control por modos deslizantes dinámico [23]. Si un sistema tiene grado relativo ρ respecto a la superficie deslizante, hay dos posibilidades para el grado r del controlador por modos deslizantes:

Caso 1: $r = \rho$ Un sistema puede ser escrito de la forma I-O usando la salida s como:

$$\begin{aligned}\dot{s}_i &= s_{i+1} & i = 1 \dots \rho - 1 \\ \dot{s}_\rho &= f(s) + g(s)u\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde $s = (s_1, s_2, \dots, s_\rho)$

En este caso, es posible estabilizar el sistema en un tiempo finito seleccionando un controlador discontinuo.

Caso 2: $r > \rho$. En este caso, un control por modos deslizantes de orden r es aplicado a un sistema de grado relativo ρ , donde $r > \rho$. Por lo tanto, es necesario incrementar la dimensión del sistema añadiendo la entrada de control u y sus $(r - \rho - 1)$ derivadas como variables de estado. Así, el nuevo sistema aumentado (ver figura 3.3) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{s}_i &= s_{i+1} & i = 1 \dots (r - 1) \\ \dot{s}_r &= f(s, \hat{u}, \dot{u}, \dots, u^{(r-\rho-1)}) + g(s, \hat{u}, \dot{u}, \dots, u^{(r-\rho-1)})v \\ u^{(r-\rho)} &= v\end{aligned}\tag{3.18}$$

donde $s = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ y $\hat{u} = (u, \dot{u}, \dots, u^{(r-\rho-1)})$. En este caso, también es posible estabilizar el sistema en un tiempo finito seleccionando una señal de control discontinua. Dicha señal de control es la $(r - \rho)$ derivada de la señal de control. La dinámica aproximada de un actuador puede ser considerada en la etapa de diseño para obtener una señal de control implementable.

Suponga que la dinámica de ceros del nuevo sistema aumentado es estable respecto a s ,



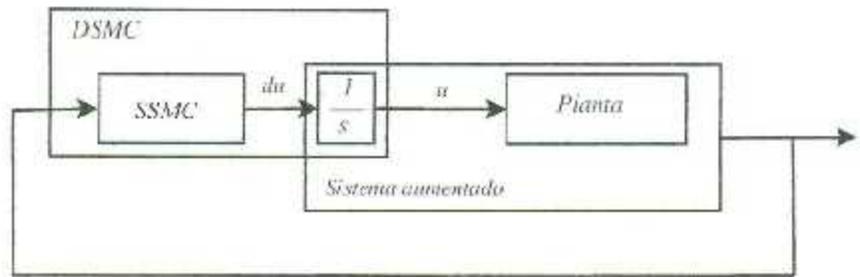


Figura 3.3: Control por modos deslizantes dinámico DSMC

entonces el control por modos deslizantes de orden r con respecto a s es equivalente a la estabilización en tiempo finito del siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{s}}_i &= s_{(i+1)} \quad i = 1 \cdots r-1 \\ \dot{\hat{s}}_r &= f(s, t) + g(s, t)v(t) \\ y &= s_1\end{aligned}\tag{3.19}$$

donde $v = u$ representa el Caso 1 y $v = u^{(r-p)}$ representa el Caso 2. Las superficies deslizantes dependientes de la entrada de control se encuentran en el segundo caso. Una superficie deslizante que contiene la variable de control asegura reducción de chattering con \dot{u} como entrada virtual de control.

Existen dos principales métodos para el diseño de superficies deslizantes dependientes de la entrada de control. El método del control equivalente descrito en [24] y el método indirecto descrito en [25]. Ambos métodos son descritos a continuación.

3.3.1. Método del control equivalente

Dado un sistema de la forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, el control equivalente propuesto en [24] está dado por

$$U_{eq} = g^{-1}(x)f(x)\tag{3.20}$$

Se selecciona una superficie deslizante dependiente de la entrada de control

$$s = u - U_{eq}\tag{3.21}$$

lo que asegura que la superficie deslizante tienda a cero y por lo tanto el sistema permanece en modos deslizantes. La derivada de la superficie deslizante está dada por



$$\dot{s} = \dot{u} - \dot{U}_{eq} \quad (3.22)$$

Se selecciona la siguiente ley de alcance

$$\dot{s} = -k \text{sign}(s) \quad (3.23)$$

Por lo tanto, la entrada de control producida por este método es la siguiente

$$\dot{u} = \dot{U}_{eq} - k \text{sign}(s) \quad (3.24)$$

donde k se selecciona de tal manera que el sistema en lazo cerrado sea estable. La señal de control propuesta en (3.24) asegura un comportamiento del sistema libre de *chattering*. Este método requiere que el sistema esté en su forma regular para que la señal de control pueda ser calculada.

3.3.2. Método de deslizamiento indirecto

El método de deslizamiento indirecto descrito en [25] se aplica a sistemas escritos en la forma I-O. Considere un sistema en espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $f(x, u, t)$ y $h(x, u, t)$ son funciones suaves. La siguiente forma diferencial I-O involucra la señal de control y sus β derivadas.

$$y^{(\beta)} = \phi(\hat{y}, \hat{u}, t) \quad (3.26)$$

donde $\hat{u} = (u, \dots, u^{(\beta)})$ y $\hat{y} = (y, \dots, y^{(\beta-1)})$. Un sistema diferencial I-O debe cumplir lo siguiente

- (a) ϕ es una función C^1
- (b) la condición de regularidad

$$\frac{\partial \phi}{\partial u^{(\beta)}} \neq 0 \quad (3.27)$$

es satisfecha.

La dinámica de ceros del sistema (3.26) está definida como $\phi(0, \hat{u}, t) = 0$. El sistema (3.26) es de fase mínima si la dinámica de ceros es uniformemente asintóticamente estable.



En general, una superficie deslizante puede ser representada como una función dependiente de los estados y ciertas derivadas de la señal de control.

$$s = S(t, y, \dots, y^{(\alpha)}, u, \dots, u^{(\beta)}) \quad (3.28)$$

Entonces, la superficie deslizante queda de la siguiente forma

$$s = \sum_{i=1}^m a_i y^{(i-1)} - \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots, u^{(\beta)}, t) \quad (3.29)$$

Se puede observar que la superficie deslizante es dependiente de la señal de control y el sistema es equivalente a un sistema lineal asintóticamente estable en modos deslizantes ideales.

Si la condición de regularidad (3.27) es satisfecha, la señal de control virtual del sistema está dado por

$$u^{(\beta+1)} = p(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta)}, t) \quad (3.30)$$

por lo tanto, el controlador dinámico se obtiene mediante una cadena de integradores.

3.4. Diseño del controlador por modos deslizantes estático y dinámico usando el modelo simplificado

3.4.1. Control por modos deslizantes estático

El modelo matemático simplificado del sistema bola barra en su forma de espacio de estados está definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-1}{k_4} (g \operatorname{sen} x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{mx_1^2 + k_1} (u - (2mx_1x_2 + k_2)x_4 - (mgx_1 + \frac{L}{2}Mg) \cos x_3) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde los estados del sistema son $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \alpha$ y $x_4 = \dot{\alpha}$.



El diseño se basa en [16]. El primer paso en el diseño del controlador es determinar la superficie deslizante. De acuerdo a (3.4), la superficie deslizante tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} s &= y^{(3)} + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + a_3 (y - y_d) \\ s &= \frac{-g}{k_4} x_4 \cos x_3 - a_1 \frac{g}{k_4} \operatorname{sen} x_3 + a_2 x_2 - a_3 (x_1 - x_d) \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$y = x_1 \quad (3.33)$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \quad (3.34)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -\frac{g}{k_4} \operatorname{sen} x_3 \quad (3.35)$$

$$\ddot{\ddot{y}} = -\frac{g}{k_4} x_4 \cos x_3 \quad (3.36)$$

Los parámetros a_0 , a_1 y a_2 se escogen de tal manera que el polinomio $P'(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ sea un polinomio Hurwitz.

El segundo paso en el diseño del controlador es proponer una señal de control u tal que $\dot{s} < 0$. La ley de control propuesta es la siguiente

$$u = \frac{1}{h_s} \left(-f_s + a_1 \frac{g x_4 \cos x_3}{k_4} + a_2 \frac{g \operatorname{sen} x_3}{k_4} - a_3 x_2 - \Gamma \operatorname{sign}(s) \right) \quad (3.37)$$

donde

$$f_s = \frac{g}{k_4} \left(\frac{(2m x_1 x_2 + k_2) x_4 + (m g x_1 + \frac{k}{2} M g) \cos x_3}{(m x_1^2 + k_1)} \cos x_3 + x_4^2 \operatorname{sen} x_3 \right) \quad (3.38)$$

$$h_s = \frac{-g}{k_4 (m x_1^2 + k_1)} \cos x_3 \quad (3.39)$$

Prueba [16] Derivando la superficie deslizante s , se tiene que

$$\dot{s} = y^{(4)} + a_1 \ddot{\ddot{y}} + a_2 \ddot{\ddot{y}} + a_3 \dot{y} \quad (3.40)$$

donde $y^{(4)}$

$$y^{(4)} = f_s + h_s u \quad (3.41)$$



entonces, \dot{s} queda de la siguiente manera

$$\dot{s} = (f_s + h_s u) - a_1 \frac{g x_4 \cos x_3}{k_4} - a_2 \frac{g \operatorname{sen} x_3}{k_4} - a_3 x_2 \quad (3.42)$$

sustituyendo el controlador (3.37) en la ecuación anterior

$$\dot{s} = -\Gamma \operatorname{sign}(s) \quad (3.43)$$

La ecuación (3.43) asegura $s\dot{s} < 0$, es decir, la superficie deslizante atrae a los estados del sistema. Una vez que las trayectorias del sistema se encuentran en modo de deslizamiento, su comportamiento se rige por las características de la superficie deslizante. Si los parámetros de la superficie deslizante se eligen de tal manera que el polinomio $P(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ sea un polinomio Hurwitz, entonces el error de seguimiento tiende a cero conforme t tiende a infinito. Además, x_2 , x_3 , y x_4 tienden a cero conforme t tiende a infinito. Es decir, todos los estados del sistema tienden a sus valores deseados conforme t tiende a infinito. El inconveniente de este controlador es el efecto de chattering producido por la señal de control, lo cual es indeseable en la práctica. A continuación, se presenta un método para la reducción del efecto de chattering.

3.4.2. Control por modos deslizantes dinámico

Para reducir el efecto de chattering, un controlador por modos deslizantes dinámico es propuesto en esta sección. Se utiliza el modelo simplificado del sistema bola barra.

El primer paso es diseñar la superficie deslizante de acuerdo a [16]. Hay que recordar que en este tipo de controladores, es necesario que la superficie deslizante esté en función de la entrada de control. Para lograr esta condición, se agrega una dinámica extra al sistema, la cual puede ser considerada como un compensador [26]. Al ser un sistema con una dinámica agregada (sistema aumentado), el orden de la superficie deslizante también aumenta. Tomando en cuenta lo anterior, la superficie deslizante está definida por

$$s = y^{(4)} + b_1 y^{(3)} + b_2 \ddot{y} + b_3 \dot{y} + b_4 (y - y_d) \quad (3.44)$$

donde b_1 , b_2 , b_3 y b_4 se eligen de tal manera que el polinomio $P(s) = s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4$ sea un polinomio Hurwitz. Entonces, la superficie deslizante queda de la siguiente manera

$$s = f_s + h_s u - b_1 \frac{g}{k_4} x_4 \cos x_3 - b_2 \frac{g}{k_4} \operatorname{sen} x_3 + b_3 x_2 + b_4 (x_1 - x_d) \quad (3.45)$$



El segundo paso en el diseño del controlador es proponer una señal de control \hat{u} tal que $\dot{s} < 0$. La ley de control propuesta es la siguiente

$$\hat{u} = \frac{1}{h_s} \left(-\dot{f}_d - h_d u - b_1(f_s + h_s u) + b_2 \frac{g}{k_4} x_4 \cos x_3 + b_3 \frac{g}{k_4} \sin x_3 - b_4 x_2 - \Gamma \text{sign}(s) \right) \quad (3.46)$$

donde f_d está dado por

$$\begin{aligned} f_d - \dot{f}_s = & \frac{g}{k_4(m x_1^2 + k_1)^2} \left\{ (2m x_1 x_2 + k_2) \cos x_3 \left[(2m x_1 x_2 + k_2) x_4 + \left(m g x_1 + \frac{L}{2} M g \right) \cos x_3 \right] \right. \\ & + 2m(m x_1^2 + k_1) \left(x_2^2 - x_1 \frac{g}{k_4} \sin x_3 \right) x_4 \cos x_3 - (2m x_1 x_2 + k_2) (m x_1^2 + k_1) x_4^2 \sin x_3 \\ & + m g x_2 (m x_1^2 + k_1) \cos^2 x_3 - 2x_4 \left(m g x_1 + \frac{L}{2} M g \right) (m x_1^2 + k_1) \sin x_3 \cos x_3 \\ & - 2x_2 (m x_1^2 + k_1) \sin x_3 \left[(2m x_1 x_2 + k_2) x_4 + \left(m g x_1 + \frac{L}{2} M g \right) \cos x_3 \right] \\ & + x_4^3 (m x_1^2 + k_1)^2 \cos x_3 - 2m x_1 x_2 \left[(2m x_1 x_2 + k_2) x_4 \cos x_3 \right. \\ & \left. \left. + \left(m g x_1 + \frac{L}{2} M g \right) \cos^2 x_3 + x_3^2 (m x_1^2 + k_1) \sin x_3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

y h_d está dado por

$$h_d = \dot{h}_s = 3 \frac{g}{k_4(m x_1^2 + k_1)} x_4 \sin x_3 + \frac{g}{k_4(m x_1^2 + k_1)^2} (4m x_1 x_2 + k_2) \cos x_3 \quad (3.48)$$

Prueba: [16] Derivando la superficie deslizante:

$$\dot{s} = y^{(5)} + b_1 y^{(4)} - b_2 y^{(3)} + b_3 \ddot{y} + b_4 \dot{y} \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= \dot{f}_s + \dot{h}_s u + h_s \dot{u} \\ &= f_d + h_d u + h_s \dot{u} \end{aligned} \quad (3.50)$$

entonces

$$\dot{s} = (f_d + h_d u + h_s \dot{u}) + b_1 (f_s + h_s u) + b_2 \frac{g}{k_4} x_4 \cos x_3 - b_3 \frac{g}{k_4} \sin x_3 + b_4 x_2 \quad (3.51)$$



Si se sustituye \hat{u} en (3.51), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f_d + h_d u + b_1(f_s + h_s u) - b_2 \frac{g}{k_4} x_1 \cos x_3 - b_3 \frac{g}{k_4} \sin x_3 + b_4 x_2 \\ &+ \left[-f_d - h_d u - b_1(f_s + h_s u) + b_2 \frac{g}{k_4} x_1 \cos x_3 + b_3 \frac{g}{k_4} \sin x_3 - b_4 x_2 - \Gamma \text{sign}(s) \right] \\ &= -\Gamma \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (3.52)$$

La señal de control propuesta produce $\dot{s} = -\Gamma \text{sign}(s)$, lo que asegura que la condición de deslizamiento $\dot{s} < 0$ se cumpla. Es decir, los estados del sistema alcanzarán la superficie deslizante en un tiempo finito. Además, si el polinomio $P(s) = s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4$ es Hurwitz, la salida del sistema $y = x_1$ convergerá asintóticamente a su valor deseado x_d . Los demás estados del sistema, x_2 , x_3 y x_4 convergerán a cero conforme t tiende a infinito. Por lo tanto, se concluye que el controlador dinámico propuesto garantiza convergencia asintótica de los estados del sistema sus valores deseados.

3.5. Diseño del controlador por modos deslizantes estático y dinámico usando el modelo completo

En la sección anterior, se utilizó el modelo simplificado del sistema bola barra para el diseño de controladores por modos deslizantes. Nótese que el modelo simplificado tiene grado relativo de tercer orden. Esta simplificación del modelo se hizo omitiendo el término $x_1 \dot{x}_4^2$. En esta sección, se utiliza el modelo completo del sistema para el diseño de controladores por modos deslizantes [16].

3.5.1. Control por modos deslizantes estático

Se definen los errores de regulación

$$e_r = r - r_d = x_1 - x_d \quad (3.53)$$

$$e_\alpha = \alpha - \alpha_e = x_3 \quad (3.54)$$

donde $r_d = x_d$ es el valor deseado a la salida del sistema y $\alpha_e = 0$. El primer paso es definir la superficie deslizante de acuerdo a [13].



$$s = x_4 - c_1 x_3 + c_2 x_2 + c_3(x_1 - x_d) \quad (3.55)$$

El segundo paso es proponer una señal de control u para que las trayectorias del sistema alcancen la superficie deslizante $s = 0$. Por consiguiente, la señal propuesta está definida por

$$\begin{aligned} u = & (2mx_1x_2 + k_2)x_4 + \left(mgx_1 + \frac{L}{2}Mg \right) \cos x_3 \\ & - \left(c_1x_4 + c_3x_2 + c_2 \frac{(x_1x_4^2 - g \operatorname{sen} x_3)}{k_4} \right) (mx_1^2 + k_1) \\ & - (mx_1^2 + k_1)\Gamma \operatorname{sign}(s) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Prueba [16] Derivando la superficie deslizante s , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \dot{x}_4 + c_1\dot{x}_3 + c_2\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_1 \\ = & \frac{u - (2mx_1x_2 + k_2)x_4 - \left(mgx_1 + \frac{L}{2}Mg \right) \cos x_3}{mx_1^2 + k_1} \\ & + c_1x_4 + c_2 \frac{x_1x_4^2 - g \operatorname{sen} x_3}{k_4} + c_3x_2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Sustituyendo el controlador propuesto en (3.57) se tiene que

$$\dot{s} = \underbrace{-\Gamma \operatorname{sign}(s)}_{\substack{\uparrow \\ \downarrow}} \quad (3.58)$$

La ecuación (3.58) asegura $\dot{s} < 0$, es decir, la superficie deslizante atrae a los estados del sistema. Una vez que las trayectorias del sistema se encuentra en modo de deslizamiento, su comportamiento se rige por las características de la superficie deslizante. El inconveniente de este controlador es el efecto de chattering producido por la señal de control, lo cual es indeseable en la práctica. A continuación, se presenta un método para la reducción del efecto de chattering.

3.5.2. Control por modos deslizantes dinámico

Para reducir el efecto de chattering, un controlador por modos deslizantes dinámico es propuesto en esta sección. Se utiliza el modelo completo del sistema bola barra.

El primer paso es diseñar la superficie deslizante de acuerdo a (3.4). Hay que recordar que en este tipo de controladores, es necesario que la superficie deslizante esté en función de la entrada de control. Para lograr esta condición, se agrega una dinámica extra al sistema, la cual



puede ser considerada como un compensador [26]. Al ser un sistema con una dinámica agregada (sistema aumentado), el orden de la superficie deslizante también aumenta. Tomando en cuenta lo anterior, la superficie deslizante está definida por

$$s = \dot{x}_2 - d_1 x_4 + d_2 x_3 + d_3 x_2 + d_4 (x_1 - x_d) \quad (3.59)$$

El siguiente paso en el diseño del controlador es proponer una u tal que $s\dot{s} < 0$. La u propuesta es la siguiente

$$\begin{aligned} \hat{u} = & (mx_1^2 + k_1) \left\{ -f + \frac{2mx_1x_2}{(mx_1^2 + k_1)^2} u \right. \\ & - d_1 \frac{u - (2mx_1x_2 + k_1)x_4 - (mgx_1 + \frac{L}{2}Mg) \cos x_3}{(mx_1^2 + k_1)} \\ & \left. - d_2 x_4 - d_3 \frac{x_1 x_4^2 - g \operatorname{sen} x_3}{k_4} - d_4 x_2 - \Gamma \operatorname{sign}(s) \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Prueba [16] Derivando la superficie deslizante s , se obtiene

$$\dot{s} = \ddot{x}_4 + d_1 \dot{x}_4 + d_2 \dot{x}_3 + d_3 \dot{x}_2 + d_4 \dot{x}_2 \quad (3.61)$$

derivando \dot{x}_4 respecto al tiempo se tiene que

$$\ddot{x}_4 = f - \frac{2mx_1x_2}{(mx_1^2 + k_1)^2} u + \frac{1}{(mx_1^2 + k_1)} \dot{u} \quad (3.62)$$

donde

$$\begin{aligned} f = & \frac{2mx_1x_2}{(mx_1^2 + k_1)^2} \left[(2mx_1x_2 + k_2)x_4 + \left(mgx_1 - \frac{L}{2}Ms \right) \cos x_3 \right] \\ & - \frac{1}{(mx_1^2 + k_1)} \left[(2mx_1x_2 + k_2)\dot{x}_4 + 2m \left(x_2^2 + \frac{x_1^2 x_4^2 - gx_1 \operatorname{sen} x_3}{k_4} \right) x_4 \right. \\ & \left. - \left(mgx_2 + \frac{L}{2}Mg \right) x_4 \operatorname{sen} x_3 + mgx_1 \cos x_3 \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Por lo tanto,



$$\begin{aligned} \dot{s} = & f - \frac{2mx_1x_2}{(mx_1^2 + k_1)^2}u + \frac{1}{(mx_1^2 + k_1)}\dot{u} \\ & - d_1 \frac{u - (2mx_1x_2 - k_2)x_1 - (mgx_1 + \frac{k}{3}Mg) \cos x_3}{mx_1^2 + k_1} \\ & + d_2x_4 + d_3 \frac{x_1x_4^2 - g \operatorname{sen} x_3}{k_4} + d_4x_2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sustituyendo el controlador propuesto en la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{s} = -\Gamma \operatorname{sign}(s) \quad (3.65)$$

La señal de control propuesta produce $\dot{s} = -\Gamma \operatorname{sign}(s)$, lo que asegura que la condición de deslizamiento $\dot{s} < 0$ se cumpla. Es decir, los estados del sistema alcanzarán la superficie deslizante en un tiempo finito.



CAPÍTULO 4

ESTUDIO EN SIMULACIÓN

Los controladores propuestos en las secciones 3.4 y 3.5 de la presente tesis, son simulados en el software Matlab-Simulink. Los parámetros de la planta se muestran en la tabla 4.1

El objetivo de los controladores propuestos es que la posición de la bola x_1 siga a la posición deseada x_d y que el ángulo de la barra x_3 converja a su punto de equilibrio $x_{3e} = 0$. Para demostrar la efectividad de los controladores, los valores deseados de x_1 fueron los siguientes

- Para $0 \leq t < 10$ (s), $x_d = 5\text{cm}$
- Para $10 \leq t$ (s), $x_d = 20\text{cm}$

4.1. Simulación usando el modelo simplificado del sistema

Los parámetros del controlador estático usados en simulación son $a_1 = 14$, $a_2 = 48$, $a_3 = 80$ y $\Gamma = 15$. Mientras que los parámetros del control dinámico son $b_1 = 14$, $b_2 = 1342$, $b_3 = 2540$, $b_4 = 2400$ y $\Gamma = 300$. En la figura 4.1 se muestra una gráfica comparativa de la respuesta del sistema entre el control estático y el control dinámico, usando el modelo simplificado del sistema. Es posible ver que ambos controladores son capaces de llevar la posición de la bola x_1 a su posición deseada x_d . En la figura 4.2 se observa una gráfica comparativa de la señal de control entre el control estático y el control dinámico. Claramente se aprecia que usando

Significado	Notación	Valores	Unidades
Masa de la bola	m	0.07	kg
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s^2
Longitud de la barra	L	0.43	m
Masa de la barra	M	0.15	kg
Resistencia de la armadura	R_m	9	Ω
Momento de inercia	J_m	7.35×10^{-4}	$\frac{Nm}{rad/s^2}$
Constante de torque del motor	K_m	0.075	$\frac{Nm}{A}$
Relación de engranes del motor	K_g	75	1 : R
Momento de inercia de la barra	J_1	0.001	kgm ²
Constante contra electromotriz	K_b	0.5625	$\frac{V}{rad/s}$

Tabla 4.1: Valores de los parámetros del sistema bola barra.

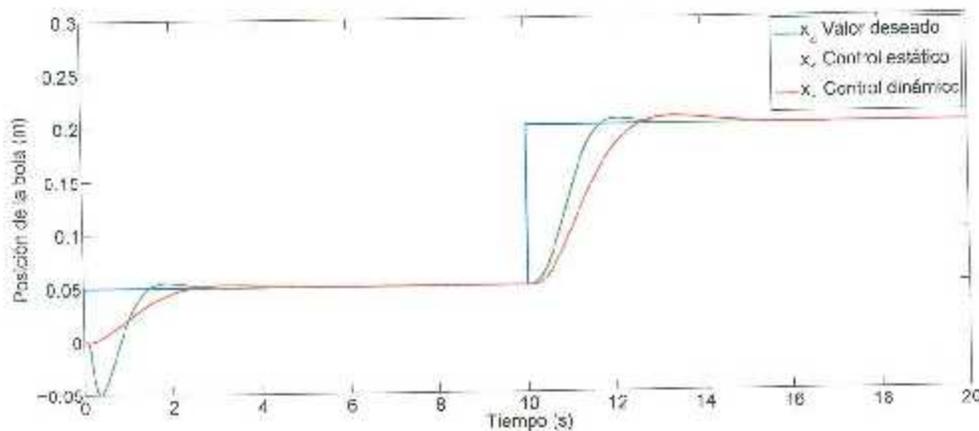


Figura 4.1: Posición de la bola para el SSMC y DSMC utilizando el modelo simplificado.

un control dinámico, el efecto de chattering es reducido casi en su totalidad. Esto demuestra la superioridad del control dinámico.

4.2. Simulación usando el modelo completo del sistema

Los parámetros del controlador estático usados en simulación son $c_1 = 14$, $c_2 = -6.85$, $c_3 = -11.42$ y $\Gamma = 0.3$. Mientras que los parámetros del control dinámico son $d_1 = 72$, $d_2 = 1342$, $d_3 = -362.5$, $d_4 = -342.5$ y $\Gamma = 6$. En la figura 4.3 se muestra una gráfica comparativa de la respuesta del sistema entre el control estático y el control dinámico, usando el modelo simplificado del sistema. Es posible ver que ambos controladores son capaces de



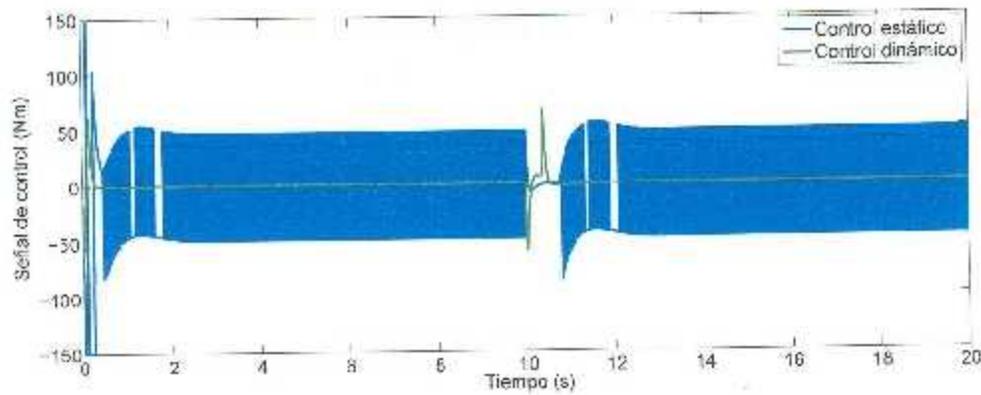


Figura 4.2: Señal de control para el SSMC y DSMC usando el modelo simplificado

llevar la posición de la bola x_1 a su posición deseada x_d . En la figura 4.4 se observa una gráfica comparativa de la señal de control entre el control estático y el control dinámico. Claramente se aprecia que usando un control dinámico, el efecto de chattering es reducido casi en su totalidad. Esto demuestra la superioridad del control dinámico.

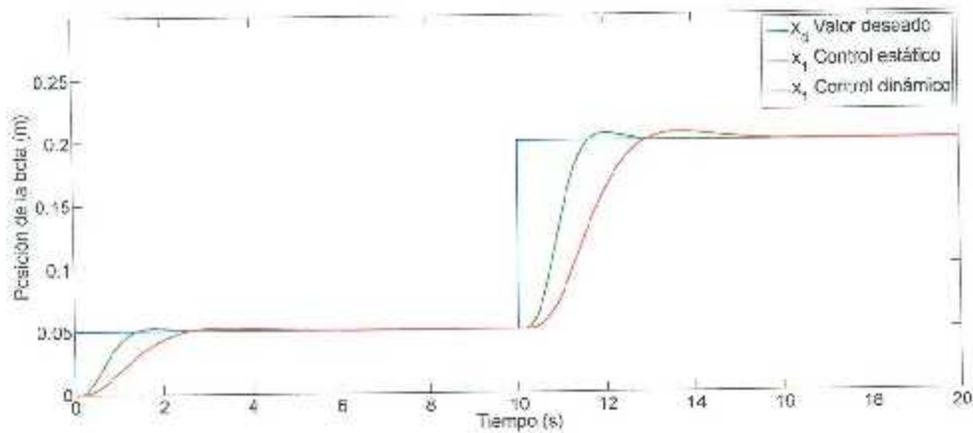


Figura 4.3: Posición de la bola para el SSMC y DSMC utilizando el modelo completo



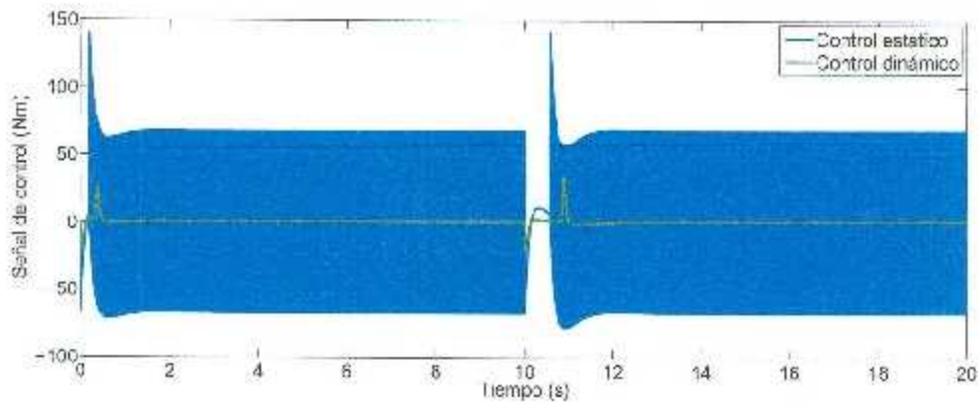


Figura 4.4: Señal de control para el SSMC y DSMC usando el modelo completo

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se realizó un análisis, diseño y simulación de esquemas de control por modos deslizantes dinámicos y estáticos para un sistema bola-barra, como una alternativa de solución al problema de chattering, logrando demostrar la efectividad del control por modos deslizantes dinámico para resolver el problema del chattering.

Se obtuvo el modelo matemático simplificado y completo del sistema bola barra en su configuración de apoyo en un extremo. La dinámica del sistema se obtuvo por el método de Euler Lagrange, siendo fundamental considerar la configuración de la estructura mecánica del sistema para obtener las energías cinética y potencial necesarias para construir el Lagrangiano. El modelo matemático completo del sistema bola barra tiene un inconveniente: no tiene grado relativo definido. Ante este problema, se simplificó el modelo omitiendo el término de aceleración centrífuga $r\dot{\alpha}^2$. De esta manera, el modelo simplificado sí tiene grado relativo definido.

Se diseñó un control por modos deslizantes estático y un control por modos deslizantes dinámico que fueron aplicados a un sistema bola barra con modelo simplificado y modelo completo. En base al estudio de simulación, se concluye que la respuesta del sistema dio mejores resultados usando el modelo completo del sistema. También, se demuestra que ambos controladores, estático y dinámico, tienen una respuesta satisfactoria, debido a que son capaces de lograr que la bola alcance su valor de referencia deseado. Por último, las simulaciones confirman que el DSMC reduce considerablemente el efecto de chattering.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Sami-ud-Din Qudrat Khan Abdul Manan Khan, Amir Iqbal Bhatti. Static & dynamic sliding mode control of ball and beam system. *International Dhurban Conference on Applied Sciences & Technology (IBCAST)*, 2012.
- [2] Quanser. *Ball and Beam Experiment*, 1991.
- [3] Vitthal S. Bandal y Pratik N. Vernekar. Design of a discrete-time sliding mode controller for a magnetic levitation system using multirate output feedback. *American Control Conference (ACC)*, 2010.
- [4] R. Xu y U. Ozgüner. Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica*, 2008.
- [5] Vadim I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. 1992.
- [6] J. J. Slotine y W. Li. *Applied Nonlinear Control*. 1991.
- [7] V.I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. CRC Press, 1999.
- [8] A. Kawamura y H. Itoh y K. Sakamoto. Chattering reduction of disturbance observer based sliding mode control. *IEEE Transactions on industry applications*, 1994.
- [9] V.I. Utkin y J. Shi. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision Control*, 1996.
- [10] L. Fridman y A. Levant. High order sliding modes. *Sliding Mode Control in Engineering*, pages 53–101, 2002.

- [11] K. Park y J. Lee. Adaptive sliding mode controller with monotonically nonincreasing gain for nonlinear uncertain systems. *IEEE International Workshop*, 1996.
- [12] C.C. Kung y C.C. Liao. Fuzzy-sliding mode controller design for tracking control of non-linear system. *Proceedings of the American Control Conference*, 1994.
- [13] J. Liu y X. Wang. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*. 2011.
- [14] Jcang-Lin Chang. Dynamic sliding mode controller design for reducing chattering. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 37(1):71-78, 2014.
- [15] Floriberto Ortiz. Modelado y control pd-difuso en tiempo real para el sistema barra-esfera. Master's thesis, CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL, 2004.
- [16] Almutairi y Zribi. On the sliding mode control of a ball on a beam system. *Springer Science+Business Media B.V.*, 2009.
- [17] Sastry S. Kokotovic P Hauser, J. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992.
- [18] Mohammad Khalid Khan. *Design and application of second order sliding mode control algorithms*. PhD thesis, 2003.
- [19] Z. Man y X.H. YU. Terminal sliding mode control of mimo linear systems. *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, 1997.
- [20] S.P. Bhatt y D.S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 2000.
- [21] Y. Tang. Terminal sliding mode control for rigid robots. *Automatica*, 1998.
- [22] M. Fliess. Generalized controller canonical form for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans, on Automatic Control*, 1990.
- [23] H. Sira-Ramirez. On the sliding mode control of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1992.
- [24] H. Sira-Ramirez. On the dynamic sliding mode control of nonlinear systems. *Int. J. Control*, 1993.
- [25] X.Y. Lu y S.K. Spurgeon. Output feedback stabilization of siso nonlinear systems via dynamic sliding modes. *Int. J. Control*, 1998.

