

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Identificación Distribuida de Sistemas
Equivalentes Basado en el Análisis de EOFs
y la Aplicación Vector Fitting”**

POR

Ing. Luis Jesús Limones Ríos

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Pedro Esquivel Prado

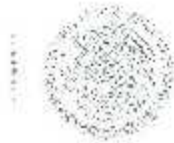
ISSN: 0188-9060



RIITEC: (01)-TMCIE-2017

Torreón Coah. de Zaragoza México

Enero 2017



"Año de Centenario de la Promulgación de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos"

Torreón, Coah., **30/Enero/2017**

Dependencia: DFP/CPCIE

Oficio: DEPII/CPCIE/023/2017

Asunto: Autorización de impresión
de tesis

C. Luis Jesús Limones Ríos
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Identificación distribuida de sistemas equivalentes basado en el análisis de EOFs y la
aplicación Vector Fitting"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (01)-TMCIE-2017**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA LAGUNA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de La Laguna

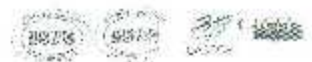


SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

A.T./IHJ



Bvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna s/n Cul. Centro C.P. 27000
Torreón, Coah. Tel. (871)7051313, e-mail: winaster@tla.laguna.edu.mx





Torreón, Coah., 13/Enero/2017

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Identificación distribuida de sistemas equivalentes basado en el análisis de EOFs y la aplicación Vector Fitting"

Desarrollado por el **C. Limones Ríos Luis Jesús**, con número de control **M1513009** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. Pedro Esquivel Prado
Asesor/Director de Tesis

Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Comité Tutorial

Dr. Francisco S. Bellschopp Sánchez
Comité Tutorial

Dr. Víctor M. Cabrera Morelos
Comité Tutorial



AGRADECIMIENTOS

En primera instancia quiero agradecer a mi familia que sin importar lo que suceda siempre estaremos apoyándonos. Quiero agradecer especialmente a mi abuelo Biol. Jesús Ríos Gloria, en vida quizá no logre agradecerle. Gracias por todo abuelo.

Debo agradecer a las personas que hacen posible el que haya concluido mi grado de estudios a nivel maestría siendo que dentro de este grupo se encuentra la División de Estudios de Posgrado e Investigación en el cual se encuentra adscrito mi director de tesis, el Dr. Pedro Esquivel Prado, cuyo apoyo unido a su paciencia me llevo a concluir una etapa más. A mis profesores y a los doctores que siempre respondían a mis dudas de la mejor manera posible. Gracias a todos.

Por último, pero no menos importante, debo agradecer al CONACYT cuyo apoyo económico fue esencial para cubrir los gastos generados durante mi periodo como estudiante de maestría.

DEDICATORIA

A mi familia.

"La vida trata sobre el camino del autodescubrimiento del Ser, para ello es necesario la experiencia de vida y la adquisición de conocimientos. Vivan y satisfáganse tanto de lo bueno como de lo malo, más nunca caigan en la pérdida. Al final del camino, no son necesarias las explicaciones".

RESUMEN

Existen una gran variedad de metodologías para la obtención de la aproximación equivalente de respuesta del sistema, enfocados principalmente a dividir la red de estudio en dos zonas; una zona de red en estudio a detalle y una zona de red equivalente. La metodología propuesta en el presente trabajo considera principalmente la respuesta en frecuencia del sistema en estudio, para, mediante la descomposición modal espectral, desarrollar la estimación de un sistema equivalente dinámico de orden reducido con una distribución modal basada en bandas de frecuencias.

La metodología propuesta para la obtención de sistemas equivalentes basado en el análisis de las funciones empíricas ortogonales (EOFs, por sus siglas en inglés) con una distribución modal extendida al dominio de la frecuencia y la aplicación *Vector Fitting* en combinación con la realización balanceada, es aplicable para sistemas lineales invariantes en el tiempo del tipo múltiples-entradas / múltiples-salidas (MIMO, por sus siglas en inglés).

Un ejemplo concreto de aplicación para la metodología propuesta en la presente tesis, está enfocado al estudio de oscilaciones de diferentes rangos de frecuencias, priorizando en el presente estudio las oscilaciones de baja frecuencia en los efectos electromecánicos entre generadores de diferentes áreas.

ABSTRACT

There is a great variety of methodologies to obtain equivalent system response approach, mainly focused on dividing the study network into two zones, a network area under study, and an equivalent network zone. The proposed methodology in the present work takes into account the frequency response of the system under study to develop the estimation of a reduced-order dynamic equivalent system with a modal distribution based on frequency bands using spectral modal decomposition.

The proposed methodology for obtaining equivalent systems based on the analysis of the Empirical Orthogonal Functions (EOFs) with an extended modal distribution to the frequency domain and the Vector Fitting application in combination with the realization balanced is applicable for multiple-inputs / multiple-outputs (MIMO) time invariant linear systems.

A specific example of application for the methodology proposed in this thesis is focused on the study of oscillations of different frequency ranges, prioritizing in the present study the low frequency oscillations in the electromechanical effects between generators of different areas.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|------|
| AGRADECIMIENTOS..... | ii |
| DEDICATORIA | iii |
| RESUMEN | iv |
| ABSTRACT | v |
| ÍNDICE GENERAL..... | vi |
| ÍNDICE DE FIGURAS | viii |
| ÍNDICE DE TABLAS | ix |
| Capítulo 1 | 1 |
| Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 1 |
| 1.2. Justificación | 3 |
| 1.3. Breve revisión del trabajo previo | 5 |
| 1.4. Objetivo | 8 |
| 1.4.1. Objetivo general..... | 8 |
| 1.4.2. Objetivo específico..... | 8 |
| 1.5. Referencias bibliográficas | 9 |
| Capítulo 2 | 12 |
| Vector Fitting..... | 12 |
| 2.1. Introducción | 12 |
| 2.2. Aproximación racional..... | 13 |
| 2.3. Método VF..... | 14 |
| 2.4. Realización balanceada | 17 |
| 2.5. Ejemplo..... | 20 |
| 2.6. Referencias bibliográficas | 24 |
| Capítulo 3 | 26 |
| Análisis en funciones ortogonales empíricas | 26 |
| 3.1. Introducción | 26 |
| 3.2. Fundamentos Teóricos en el Análisis de EOFs | 27 |
| 3.2.1. Método de EOFs en el dominio del tiempo | 27 |
| 3.2.2. Método de EOFs para redes eléctricas con gran dispersión geográfica | 30 |

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO/Instituto Tecnológico de La Laguna
División de Estudios de Posgrado e Investigación.

| | | |
|-------------|---|----|
| 3.2.3. | Método de EOFs con una distribución modal extendida al dominio de la frecuencia | 33 |
| 3.3. | Metodología propuesta..... | 36 |
| 3.4. | Referencias bibliográficas | 41 |
| Capítulo 4. | Aplicaciones | 44 |
| 4.1. | Introducción..... | 44 |
| 4.2. | Sistema de gran tamaño | 44 |
| 4.2.1. | Resultados | 46 |
| 4.3. | Referencia bibliográfica..... | 54 |
| Capítulo 5. | Conclusiones y trabajo futuro..... | 55 |
| 5.1. | Conclusiones..... | 55 |
| 5.2. | Trabajo futuro | 56 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1. Ubicación de los lugares de las raíces estables..... | 18 |
| Figura 2.2. Configuración de la red | 20 |
| Figura 2.3. Circuito equivalente π para la línea de transmisión (TL)..... | 21 |
| Figura 2.4. Comparación de resultados entre la señal real y la estimada por medio de VF..... | 22 |
| Figura 3.1. Diagrama de los sistemas equivalentes..... | 39 |
| Figura 3.2. Diagrama simplificado de la metodología propuesta..... | 41 |
| Figura 4.1. Diagrama unifilar del sistema de 16 generadores..... | 45 |
| Figura 4.2. Distribución de la energía modal asociado a modos electromecánicos inter-área..... | 46 |
| Figura 4.3. Primer coeficiente modal en el dominio de la frecuencia..... | 48 |
| Figura 4.4. Segundo coeficiente modal en el dominio de la frecuencia..... | 48 |
| Figura 4.5. Tercer coeficiente modal en el dominio de la frecuencia..... | 49 |
| Figura 4.6. Cuarto coeficiente modal en el dominio de la frecuencia..... | 49 |
| Figura 4.7. Localización de los eigenvalores entre el modelo real y el equivalente de orden reducido..... | 50 |
| Figura 4.8. Comparación entre señal original del generador 1 contra la aproximación de orden reducido de VF y RB..... | 51 |
| Figura 4.9. Comparación entre señal original del generador 8 contra la aproximación de orden reducido de VF y la RB..... | 51 |
| Figura 4.10. Comparación entre señal original del generador 12 contra la aproximación de orden reducido de VF y RB..... | 52 |
| Figura 4.11. Grupos de generadores coherentes..... | 54 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 4.1. Coeficientes estimados mediante VF y RB. | 47 |
| Tabla 4.2. Error global entre las señales obtenidas por medio de VF y la RB contra la señal original .. | 52 |

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Debido al incremento poblacional e industrial observado en las últimas décadas en todo el mundo, los tamaños y grados de interconexión de las redes eléctricas convencionales han experimentado una continua y sostenida expansión. Es conocido que uno de los problemas actuales vinculados a este incremento en las redes eléctricas está asociado a la búsqueda continua y la adopción de métodos de análisis para grandes redes que conlleve una alta precisión en su modelado para representar fidedignamente la dinámica global del sistema original, así como de establecer herramientas y técnicas computacionales que satisfagan los requerimientos de óptimo desempeño.

En los últimos años se han propuesto diversas metodologías para la obtención de equivalentes de orden reducido del modelo de red real, que hacen uso de rutinas de ajuste tanto lineal como no lineal, que rigen la respuesta de cada uno de los elementos básicos que la forman a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés). Estas metodologías se han creado con el fin de aproximar mediante un modelo equivalente con un número menor de ODEs la respuesta del sistema para grandes redes de potencia. Algunas características de estas metodologías son resumidas a continuación, las cuales pueden ser consultadas con un mayor detalle por el lector en [1]-[16].

- En [3] es presentado el uso de la técnica basada en la descomposición de valor singular (SVD, por sus siglas en inglés) a un modelo en espacio de estados, el cual

representa al sistema original, y su posterior aproximación equivalente por medio de la técnica de Gauss-Seidel.

- En [4] se propone la estimación polinomial y la partición en subrangos de frecuencias de la respuesta en el dominio de la frecuencia del modelo original, donde el procedimiento consta de la aplicación del método *Vector Fitting* (VF) a cada subrango y la utilización de la realización balanceada con el objetivo de eliminar los valores singulares de menor contribución a la dinámica del sistema. Cabe destacar que en el procedimiento la realización balanceada es implementada con el fin de obtener y simplificar el modelo de orden reducido equivalente al modelo original.
- En [5] se nos muestra un análisis comparativo entre las metodologías *AutoRegresive Moving Average* (ARMA), *Vector Fitting* en el Dominio Z (ZD-VF, por sus siglas en inglés) y *Vector Fitting* via Convolución en el Dominio del Tiempo (TD-VF, por sus siglas en inglés). Esta comparación se lleva a cabo con el fin de obtener una aproximación racional de la respuesta de un sistema en el dominio del tiempo, concluyendo que TD-VF resulta la mejor opción para el modelo racional de la respuesta de un sistema en el dominio del tiempo.
- En [7] se muestra el uso de los métodos de subespacios de Krylov para la obtención de la reducción del sistema o modelo original ampliamente dispersos aplicado a sistemas de potencia. En el texto se hace notar que para el uso de esta metodología es necesario particionar el sistema de potencia en dos áreas: el área de estudio y un área externa.
- En [8] se presenta la reducción de modelos por medio del Truncamiento Balanceado (*Balanced Truncation*). En dicho trabajo de investigación se nos menciona que la condición que conlleva la buena integración y uso de la metodología en cuestión

son necesarios los estudios del gramiano de controlabilidad y observabilidad en la reducción óptima del modelo original.

- Una comparación entre la Descomposición Ortogonal Propia (POD, por sus siglas en inglés) contra los métodos de subespacios de Krylov es dado en [9].
- En [10] la reducción de modelos por medio del balanceo diferencial basado en los operadores no lineales de Hankel es mostrado.

1.2. Justificación

La amplia dispersión geográfica y diversificación de zonas donde se encuentran instalados los miles de elementos que constituyen la estructura de los grandes sistemas de potencia han sido un reto para los actuales operadores en centros de control y manejo de energía. Recientemente, la aparición e interconexión distribuida de nuevas fuentes de energía eléctrica proveniente desde fuentes de recursos renovables a la red eléctrica, ha agravado más ésta situación. La obtención de equivalentes dinámicos de red con características distribuidas ha sido una tarea de intensa investigación reciente que en la actualidad no ha sido del todo resuelta, lo cual representa la principal fuente de motivación al proponer el desarrollo del presente trabajo.

Existen una gran variedad de metodologías para la obtención de la aproximación equivalente de respuesta del sistema, enfocados principalmente a dividir la red de estudio en dos zonas, una zona de red en estudio a detalle y una zona de red equivalente. Un ejemplo de la comparación entre algunas de estas metodologías es presentado en [5] (se puede observar la comparación entre las metodologías ARMA, ZD-VF y ID-VF) y [9] (Se comparan las metodologías POD contra los métodos de subespacios de Krylov). Estas metodologías han sido limitadas para casos particulares de la red eléctrica y asociadas a una zona exclusiva de éstas, sin considerar

apropiadamente aspectos del modelado distribuido, grado de interconexión y reducción de orden del modelo asociado a bandas de frecuencias al interconectar nuevos elementos y dispositivos en diferentes zonas geográficas de la red eléctrica.

Recientemente, una técnica basada en el análisis de las Funciones Ortogonales Empíricas (EOFs, por sus siglas en inglés) ha sido ampliamente utilizada en el modelado de sistemas distribuidos en diferentes áreas de investigación, destacando su adecuación en sistemas de potencia. Su aplicación ha sido basada en estudios de obtención de parámetros dinámicos y monitoreo en línea de redes eléctricas en el dominio del tiempo. Así, en este trabajo, el análisis de las funciones ortogonales es extendido para su aplicación al dominio de la frecuencia y la obtención de reducción de modelos bajo los nuevos requerimientos de la industria energética, aprovechando los beneficios que se obtienen al utilizar sus propiedades implícitas de descomposición modal. Esta novedosa extensión en la aplicación del análisis de las EOFs al dominio de la frecuencia, contribuirá en estudios asociados a la estimación distribuida de oscilaciones transitorias asociadas a bandas de frecuencia específicas en redes eléctricas grandemente distribuidas e interconectadas.

La metodología propuesta toma por completo en consideración la respuesta en frecuencia del sistema en estudio para luego, mediante la descomposición modal espectral, desarrollar la estimación de un sistema equivalente dinámico de orden reducido con una distribución modal basada en bandas de frecuencias, así como en su aplicación y validación en sistemas lineales invariantes en el tiempo del tipo "múltiples-entradas / múltiples-salidas" (MIMO, por sus siglas en inglés).

Complementado la extensión en la nueva aplicación del análisis de las EOFs al dominio de la frecuencia, la metodología propuesta hace uso del algoritmo de VF para estimar la respuesta producida en representación de modelos lineales en espacio de

estado. La representación en modelo lineal de espacio de estado equivalente es estimada desde los coeficientes dependientes de la frecuencia, los cuales son obtenidos como resultado del análisis de FOFs. El procedimiento VF es utilizado debido a la facilidad en cuanto a la disponibilidad gratuita de software además de su ya reconocida confiabilidad y precisión al momento de realizar aproximaciones de sistemas equivalentes, como puede ser consultado en [4]-[6]. Adicionalmente, la representación en espacio de estados obtenida a través de VF es procesada a través de la realización balanceada, la cual nos permite garantizar una reducción de orden de modelo equivalente dinámico del modelo real que cumple con los criterios de observabilidad y controlabilidad del sistema, producido con un mínimo de estados disponibles.

La metodología propuesta en este trabajo puede ser utilizada para realizar análisis de oscilaciones dinámicas, por medio del estudio de la respuesta del Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) en bandas de frecuencia específicas. Por ejemplo, en un SEP se podrían analizar diversos fenómenos transitorios producidos principalmente por maniobras de interconexión, contingencias naturales, energizaciones de líneas, generación distribuida, flujos de cargas, entre otras.

1.3. Breve revisión del trabajo previo

A continuación, se presentan algunos avances científicos que se han desarrollado a través del constante mejoramiento y aparición de nuevas técnicas en el área de análisis de redes eléctricas de gran dimensión donde se describen las contribuciones y sus metodologías propuestas para la obtención de sistemas equivalentes de redes eléctricas de gran tamaño [17]-[21].

En [17] se nos presenta una metodología para la construcción de equivalentes dinámicos. La metodología propuesta se realiza a través de la identificación de la

velocidad y aceleración de los generadores pertenecientes al sistema eléctrico con el fin de crear grupos coherentes. En el contexto descrito, el sistema equivalente dinámico es obtenido en base a la obtención de grupos coherentes los cuales se forman por medio de los generadores cuyas variables (velocidad y aceleración) son iguales. Posteriormente, se reemplazan los grupos coherentes de los generadores por un sistema equivalente en cada lugar donde se le asocia un grupo coherente; la condición al realizar este paso recae en la entrega de la misma cantidad de energía contribuida al sistema. Por su parte, en [18] se nos muestra de manera general algunas aplicaciones para los sistemas equivalentes de sistemas de gran dispersión geográfica, destacando en funciones la reducción de sistemas eléctricos de gran dispersión geográfica para su posterior estudio de manera controlada, la redimensión del sistema original para su uso en simuladores en tiempo real y, por último, para su aplicación dentro de sistemas de seguridad que requieren el modelado dinámico en tiempo real.

Dentro de la metodología que se presenta en [18] se aloja la información perteneciente a los generadores en grupos de coherencia (clúster) para la obtención de modelos equivalentes de segundo orden correspondiente al clúster de generadores. Posteriormente, con los nuevos clústeres se reconstruye la red. Para finalizar, se utiliza la reducción de la red eléctrica por medio de la metodología Ward-PV, con la cual se asegura que el modelo obtenido sea el indicado para el análisis en estado estable, además de ser un método adecuado para la obtención de modelos dinámicos. Otra nueva alternativa y metodología para la reducción del orden del sistema proveniente de las redes eléctricas de gran dispersión geográfica es dado en [19]. En primera instancia, dentro del modelo, la matriz del sistema es reorganizada por los eigenvalores que la conforman. Enseguida la reducción del sistema se realiza por medio de la correlación de los generadores con mayor contribución energética al sistema. Por

último, el procesamiento para la obtención de la matriz característica del sistema con un orden reducido es dada por medio de la implementación de la iteración de los cocientes inversos de Rayleigh. En [20] se propone preservar los modos oscilatorios del sistema original por medio de una metodología basada en la relocalización virtual de los generadores que contiene el sistema en los límites de los buses del área de estudio. Luego, las mediciones del flujo activo de potencia son obtenidas de las líneas de transmisión, enlazando la parte tanto externa como interna de las áreas de estudio. Posteriormente, se procesan los datos obtenidos para obtener los modos oscilatorios pertenecientes al sistema. Por último, se obtiene el sistema equivalente. Por su parte, [21] nos presenta una metodología útil para la obtención de sistemas equivalentes dinámicos que pueden ser utilizados en programas como el PSS/E. Se nos menciona que uno de los motivos principales para la obtención de sistemas equivalentes son las limitaciones que tienen los programas de estabilidad transitoria mencionando como un ejemplo el software EMTDC/PSCAD en cuanto al tamaño de los sistemas eléctricos que pueden manejar. La metodología utilizada en [21] se basa en 3 pasos: identificación de la coherencia, algoritmo de adición del generador y la reducción de la red. La reducción de la red es realizada por medio del método de Ward-PV.

Derivado desde el estudio detallado de trabajos previos dado en esta sección, sobre técnicas para el análisis de grandes redes eléctricas y la determinación de redes equivalentes dinámicas, se ha notado que la metodología propuesta en este trabajo de investigación representa una técnica alternativa con amplias expectativas para su integración general en estudio de grandes redes ampliamente dispersas.

1.4. Objetivo

1.4.1. Objetivo general

Proponer una metodología general basada en la aplicación en el dominio de la frecuencia, de las EOFs en combinación con el procedimiento VF, con el fin de obtener sistemas equivalentes dinámicos de orden reducido en la forma de modelo lineal en espacio de estado para redes eléctricas con gran dispersión geográfica asociado a bandas de frecuencias específicas.

1.4.2. Objetivo específico

- Investigar y comprender las herramientas VF y el análisis de las EOFs en el dominio de la frecuencia.
- Desarrollar un marco conceptual riguroso sobre la aplicación del análisis EOFs en el dominio de la frecuencia.
- Desarrollar una herramienta computacional en el entorno de programación de Matlab a partir de la metodología propuesta.
- Comprobar la validación numérica de la metodología propuesta considerando un sistema de red de prueba IEEE de 16 generadores, 68 buses.

1.5. Referencias bibliográficas

- [1] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting," in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052-1061, Jul 1999.
- [2] U. D. Annakkage et al., "Dynamic System Equivalents: A Survey of Available Techniques," in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, no. 1, pp. 411-420, Jan. 2012.
- [3] A. Ramirez, A. Semlyen and R. Iravani, "Order reduction of the dynamic model of a linear weakly periodic system-part I: general methodology," in *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 857-865, May 2004.
- [4] A. Ramirez, "Vector Fitting-Based Calculation of Frequency-Dependent Network Equivalents by Frequency Partitioning and Model-Order Reduction," in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 24, no. 1, pp. 410-415, Jan. 2009.
- [5] A. Ubolli and B. Gustavsen, "Comparison of Methods for Rational Approximation of Simulated Time-Domain Responses: ARMA, ZD-VF, and TD-VF," in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 26, no. 1, pp. 279-288, Jan. 2011.
- [6] J.A. Martinez-Velasco, "Power System Transients: Parameter Determination", CRC Press, 2009, ISBN 9781420065299, pp. 557-590.
- [7] D. Chariotis and M. A. Pat, "Model reduction in power systems using Krylov subspace methods," *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2005, 2005, pp. 1412 Vol. 2.
- [8] H. Sandberg, "Model reduction of linear systems using extended balanced truncation," *2008 American Control Conference*, Seattle, WA, 2008, pp. 4654-4659.

- [9] M. R. Hasan, R. V. Sabariego, C. Geuzaine and Y. Paquay, "Proper orthogonal decomposition versus Krylov subspace methods in reduced-order energy-converter models," 2016 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), Leuven, 2016, pp. 1-6.
- [10] Y. Kawano; J. M. A. Scherpen, "Model Reduction by Differential Balancing based on Nonlinear Hankel Operators," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. PP, no. 99, pp. 1-1.
- [11] A.C. Antoulas, D.C. Sorensen, "Approximation of large-scale dynamical systems", SIAM, 2005, ISBN 0-89871-529-6.
- [12] Z. Zhu, G. Geng and Q. Jiang, "Power System Dynamic Model Reduction Based on Extended Krylov Subspace Method," in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 31, no. 6, pp. 4483-4494, Nov. 2016.
- [13] A. B. H. Adamou-Mitiche; L. Mitiche, "Multivariable Systems Model Reduction Based on the Dominant Modes and Genetic Algorithm," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. PP, no. 99, pp. 1-1.
- [14] L. Pyta and D. Abel, "Nonlinear model reduction of the Navier-Stokes-Equations," 2016 American Control Conference (ACC), Boston, MA, 2016, pp. 5249-5254. doi: 10.1109/ACC.2016.7526492.
- [15] G. Scarcioffi and A. Astolfi, "Model Reduction by Matching the Steady-State Response of Explicit Signal Generators," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 61, no. 7, pp. 1995-2000, July 2016.
- [16] Iraj Rahimi Pordanjani, Wilson Xu, "Improvement of vector fitting by using a new method for selection of starting poles," in Electric Power Systems Research, Volume 107, pp. 206-212, Feb. 2014.

- [17] M. Y. Hussain and V. G. Rau, "Coherency identification and construction of dynamic equivalent for large power system," 1993 2nd International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, APSCOM-93., 1993, pp. 887-892 vol.2.
- [18] Jorge L. Jardim, Armando M. Leite da Silva, A methodology for computing robust dynamic equivalents of large power systems. *Electric Power Systems Research*, Volume 143, February 2017, Pages 513-521, ISSN 0378-7796, <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2016.11.003>.
- [19] H. Ping, I. Jibin, W. Yunbing, W. Xiaoning, D. Xiaoyong and Z. Yong, "Analysis of Special Mode Order Reduction of Large Power System," 2010 International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application, Changsha, 2010, pp. 290-294.
- [20] M. R. A. Patemina, J. M. Ramirez and A. Zamora, "Model order reduction of large scale power system by modal decomposition," 2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM), Boston, MA, USA, 2016, pp. 1-5.
- [21] Jin-Yi Kim, Dong-Jun Won and Seung-II Moon, "Development of the dynamic equivalent model for large power system," 2001 Power Engineering Society Summer Meeting. Conference Proceedings (Cat. No.01CH37262), Vancouver, BC, Canada, 2001, pp. 973-977 vol.2.

CAPÍTULO 2

VECTOR FITTING

2.1. Introducción

En la actualidad, el algoritmo de VF se ha propuesto para generar de forma precisa una estimación equivalente en función racional a la respuesta en frecuencia de un sistema determinado, tal como redes eléctricas y líneas de transmisión en sistemas de potencia, considerando una amplia gama de rangos de frecuencias [1]-[4]. Existen dos razones por las cuales VF ha tenido una amplia aceptación en la estimación racional en aplicaciones de sistemas eléctricos; estas razones son la estabilidad numérica y la velocidad de convergencia computacional que ofrece. Además, VF solventa los problemas numéricos cuando realiza aproximaciones de sistemas con un alto grado de resonancias considerando amplios espectros de frecuencias [5].

El procedimiento VF es básicamente una reformulación de las iteraciones de Sanathanan-Koerner usando como base fracciones parciales [6]. El algoritmo que utiliza VF consiste en dos pasos, los cuales son: la etapa de identificación de polos y la etapa de identificación de residuos. De estas etapas hablaremos con detenimiento en próximas secciones [1]-[7].

2.2. Aproximación racional

Una aproximación racional en el dominio de la frecuencia y derivado desde la respuesta de un sistema $f(s)$ puede ser expresada en la forma de una función racional polinomial como:

$$f(s) \approx \frac{c_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_M s^M}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_N s^N} \quad (2.1)$$

con $M \leq N$, siendo M y N el orden del polinomio respectivo. Además, su representación suele ser comúnmente expresada en una sumatoria de fracciones parciales de la forma:

$$f(s) \approx \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - a_n} + d + sh \quad (2.2)$$

donde, $s = j\omega$ (frecuencia compleja). Además, $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ (expresado en radianes por segundo). Los residuos c_n y los polos a_n pueden ser cantidades reales o pueden venir en pares de valores conjugados complejos. Asimismo, d y h son valores reales. A través del método, la estimación de los coeficientes es llevada a cabo mediante la solución por mínimos cuadrados de un sistema lineal de la forma:

$$Ax = b \quad (2.3)$$

donde:

$$A_i = [1 \quad s_i \quad \dots \quad s_i^M \quad -s_i f_i \quad \dots \quad -s_i^N f_i] \quad (2.4)$$

$$x = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_M \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N]^T \quad (2.5)$$

$$b = [f_1 \dots f_p]^T \quad (2.6)$$

En (2.4)-(2.6) se utiliza la definición $f_l = f(s_l)$ para $l=1,2,\dots,p$ siendo $p \geq N$ el número de mediciones a considerar.

2.3. Método VF

El método VF es ampliamente usado en diferentes campos de estudio en sistemas de potencia, destacando el campo de modelado de redes y sistemas equivalentes así como en el modelado de líneas de transmisión tanto aéreas como subterráneas, transformadores de potencia, máquinas eléctricas entre otros. El objetivo principal tras la metodología de VF es la aproximación de una función $f(s)$ mediante una función racional de la forma (2.2).

El método de VF se desarrolló para realizar la aproximación de una función en el dominio de la frecuencia a través de dos etapas en las cuales se proponen un conjunto de polos iniciales. Dentro del procedimiento VF los polos de inicio se actualizan mediante un proceso de recalcu y reubicación. Así, a continuación, se detallan claramente las dos etapas características en la aplicación del procedimiento en cuestión.

Etapas 1: Identificación de polos

Especificando un conjunto de polos iniciales \bar{a}_n para la ecuación (2.2), además, multiplicaremos $f(s)$ con una función desconocida $\sigma(s)$ con lo cual obtendremos:

$$\begin{bmatrix} \sigma(s)f(s) \\ \sigma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s-\bar{a}_n} + d + sh \\ \sum_{n=1}^N \frac{\bar{c}_n}{s-\bar{a}_n} + 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Podemos observar de (2.7) que la aproximación racional para $\sigma(s)$ tiene los mismos polos que $\sigma(s)f(s)$. Además, para altas frecuencias se ha forzado a que $\sigma(s)$ tenga un valor unitario.

Al multiplicar la segunda fila de (2.7) con $f(s)$ e igualando con el primer renglón de la ecuación (2.7) se obtendrá:

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - \bar{a}_n} + d + sh \right) \approx \left(\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} + 1 \right) f(s) \quad (2.8)$$

la cual, también puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$(\sigma f)_{fit}(s) \approx \sigma_{fit}(s) f(s). \quad (2.9)$$

Podemos observar que en (2.9) se le ha agregado el subíndice *fit* a las aproximaciones. La expresión (2.8) es lineal en las incógnitas c_n , d , h y \tilde{c}_n , por lo que la ecuación puede evaluarse para un conjunto de frecuencias, resultando en un sistema sobredeterminado de la siguiente forma:

$$Ax = b, \quad (2.10)$$

Al obtener el vector de solución en (2.10) que está representado por el vector X , se calcularán los coeficientes para $f(s)$ perteneciente a (2.8). Así, el procedimiento de actualización de los polos se lleva a cabo mediante el proceso que se presenta a continuación.

De (2.8) y (2.9) se tiene

$$(\sigma f)_{fit}(s) = h \frac{\prod_{n=1}^{n+1} (s - z_n)}{\prod_{n=1}^{n+1} (s - \bar{a}_n)}, \quad (2.11)$$

$$(\sigma f)_{\beta_i}(s) = \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (s - \tilde{z}_n)}{\prod_{n=1}^{N-1} (s - a_n)}; \quad (2.12)$$

luego, tomando en cuenta (2.11) y (2.12) se tiene:

$$f(s) = \frac{(\sigma f)_{\beta_i}(s)}{\sigma_{\beta_i}(s)} = h \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (s - \tilde{z}_n)}{\prod_{n=1}^{N-1} (s - \tilde{z}_n)} \quad (2.13)$$

En la ecuación (2.13) se muestra que los polos de $f(s)$ son iguales a los ceros que se encuentran en $\sigma_{\beta_i}(s)$. Se debe observar que los polos iniciales se han cancelado durante el proceso de división, esto debido a que los polos usados en $(\sigma f)_{\beta_i}$ y $\sigma_{\beta_i}(s)$ tienen los mismos valores. Además, se obtendrá un conjunto de polos adecuados para $f(s)$ por medio del cálculo de los ceros que contiene. En ocasiones es posible que los nuevos polos generados sean inestables; sin embargo, esto se corrige invirtiendo los signos de su parte real.

Etapas 2: Identificación de residuos

Se podrían calcular los residuos de $f(s)$ por medio de la ecuación (2.13). Sin embargo, se puede obtener un resultado aún más preciso si se evalúa la ecuación original (2.2) con los ceros que pertenecen a $\sigma_{\beta_i}(s)$ como los nuevos polos a_i para $f(s)$ [1]. Esto resulta en un problema lineal sobredeterminado que tiene la forma de la ecuación (2.10), en donde la solución del vector λ contiene el valor de las incógnitas c_n , d y h .

Para la selección de los polos de inicio, la metodología de VF recomienda la siguiente forma:

$$a_n = -\alpha - j\beta, \quad (2.14)$$

$$a_{n+1} = -\alpha - j\beta, \quad (2.15)$$

en donde:

$$\alpha = \frac{\beta}{100}, \quad (2.16)$$

El término β es una cantidad linealmente distribuida en el rango de frecuencias de interés.

2.4. Realización balanceada

La realización balanceada es considerada como una de las técnicas esenciales para la reducción del orden del modelo en sistemas eléctricos de potencia. Esto se debe a que al utilizarla se pueden garantizar los criterios de controlabilidad y observabilidad del sistema. Es introducida por primera vez por Bruce C. Moore en [8]. A continuación, se presenta una breve reseña de esta técnica.

El objetivo de utilizar la realización balanceada es el de obtener un sistema reducido de modos truncados a partir de un sistema de orden completo. La interpretación de reducción es comúnmente representada como

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \\ y = Cx \quad \Rightarrow \quad y_r = C_r x_r \end{array} \quad (2.17)$$

Sistema original Sistema reducido

donde $x_r \in \mathbb{R}^n$ representa el vector del estado del sistema reducido, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada del sistema y $y_r \in \mathbb{K}$ es el vector de salida del sistema truncado.

Una de las consideraciones habituales para determinar si el sistema dinámico es forzado a ser linealmente estable por medio de la realización balanceada consiste en verificar el lugar de las raíces en el plano complejo de la matriz A en (2.17), en donde se dice que el sistema es estable si todos los eigenvalores de la matriz A se encuentran en la parte abierta localizada en el plano izquierdo, es decir, $\text{Re}(A) < 0$. De no cumplir con la consideración anterior, se dice que el sistema es inestable. Ilustrativamente, en la Figura 2.1 se muestra la localización del lugar de las raíces para un ejemplo arbitrario, con el fin de mostrar la estabilidad de un sistema en el plano complejo.

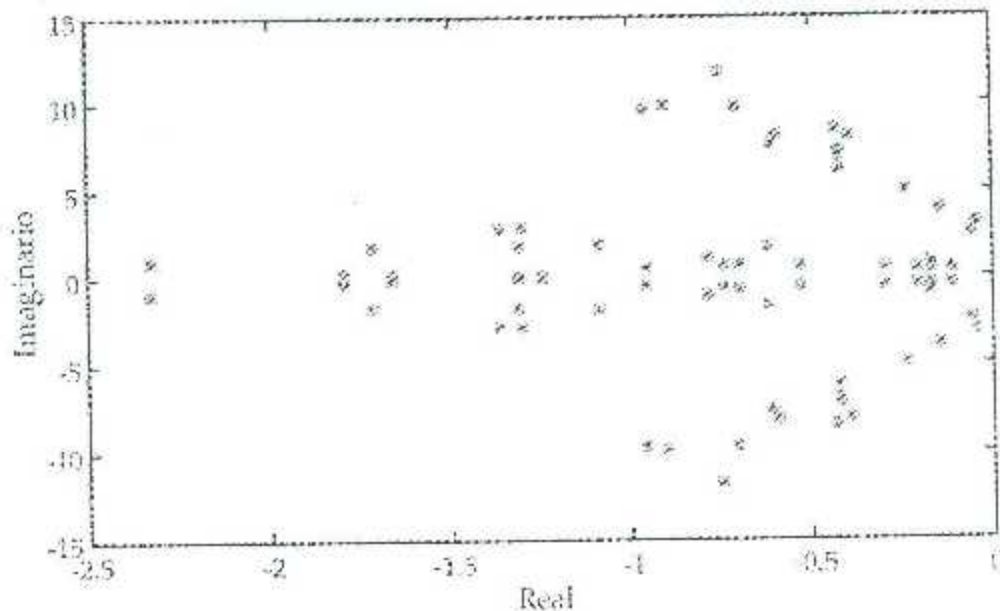


Figura 2.1. Ubicación de los lugares de las raíces estables.

El criterio de controlabilidad perteneciente a la realización balanceada está dado por medio de la matriz que se presenta a continuación [9]:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (2.18)$$

a la cual se le conoce como *matriz de controlabilidad*.

En (2.18), la fila de elementos se encuentra llena o bien, en otras palabras, $\langle A, \text{Im}B \rangle := \sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(A^i B) = \mathbb{R}^n$. Otra manera de ver este criterio de controlabilidad de manera equivalente es por medio de:

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^* \tau} d\tau. \quad (2.19)$$

En (2.19), $W_c(t)$ representa la matriz de controlabilidad, además se dice que es positiva definida para cada $t > 0$.

El criterio de observabilidad es representado por medio de la matriz que se presenta a continuación:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

En (2.20), la columna se encuentra en un rango completo o $\bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Ker}(CA^i) = 0$. El Kernel, $\text{Ker}(\cdot)$, es conocido como espacio nulo. Una manera equivalente de ver el criterio de observabilidad se presenta por medio de la siguiente ecuación:

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau \quad (2.21)$$

cuando se cumple la condición $t > 0$. Para conocer más acerca de la realización balanceada se puede consultar [8]-[10].

2.5. Ejemplo

A continuación se presenta un caso ilustrativo de estudio para aplicar el procedimiento de VF en la identificación equivalente y la reducción balanceada aplicado a un sistema tipo una sola entrada / una sola salida (SISO, por sus siglas en inglés). El modelo equivalente se compara con el modelo original. El caso de estudio corresponde a una red eléctrica monofásica cuyas características se describen a continuación.

Se consideran tres líneas aéreas monofásicas con características idénticas, el conductor eléctrico es de tipo "Ostrich" construido en aluminio, tiene una longitud de $l=100$ km en cada segmento. La conexión del sistema se muestra en Figura 2.2.

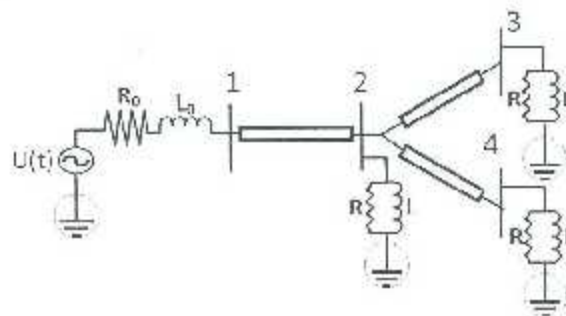


Figura 2.2. Configuración de la red

La altura del conductor es $h=27$ m, tiene un radio $r=1$ cm y una resistencia DC equivalente a 8.9954×10^{-6} Ω /m. El voltaje correspondiente de la fuente es $u(t)=\text{sen}(\omega_c(t))$ con $\omega_c=120\pi$. La resistencia e inductancia interna están dadas por $R=0.001$ Ω y $L=0.005$ H; respectivamente. Al final de cada línea existe una carga R-L.

(resistencia e inductancia) conectada en paralelo con los valores de $R=1 \Omega$ y $L=0.3 \text{ H}$. El modelo equivalente para la línea o cable considerado para el circuito equivalente es mostrado en la Figura 2.3.

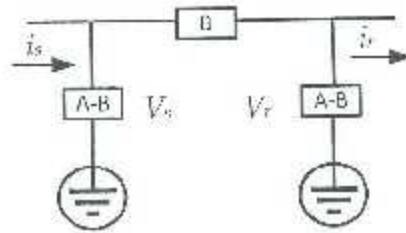


Figura 2.3. Circuito equivalente π para la línea de transmisión (TL)

La Figura 2.3 corresponde a un modelo completamente dependiente del dominio de la frecuencia. La relación voltaje-corriente entre las terminales de entrada y salida está dada por:

$$\begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Consideraremos la función de transferencia (admitancia) vista desde el bus 1 como la función $g(s)$ de la cual obtendremos el sistema equivalente. La función $g(s)$ será evaluada con 1000 puntos espaciados equitativamente dentro del rango para las frecuencias que van desde 0 a 3 kHz ($f = [0 \dots 3]$). El tiempo de simulación será desde los 0 a 0.25 segundos. La relación corriente(I)/voltage(V) vista desde el bus 1 está dada por:

$$\frac{I_1}{V_1} = Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21} - Y_3 \quad (2.23)$$

con

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= A + Y_c = [-B \quad 0 \quad 0], \quad Y_{22} = [-B \quad 0 \quad 0] \\
 Y_{23} &= \begin{bmatrix} 3A + \frac{R-sL}{sRL} & -B & B \\ -B & A + \frac{R+sL}{sRL} & 0 \\ -B & 0 & A - \frac{R+sL}{sRL} \end{bmatrix} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

En (2.24), $A = Y_c \coth(\gamma l)$, y $B = Y_c \operatorname{csch}(\gamma l)$ con Y_c como la admitancia característica de la línea y γ como la función de propagación.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 2.4, en la cual se puede observar una comparación de la respuesta del sistema (señal real), la estimación obtenida mediante el programa de VF y la aproximación equivalente con reducción de orden a través de la realización balanceada. Cabe señalar que la estimación VF fue realizada considerando una ecuación con un orden de aproximación de 24 para el modelo racional derivado, esta última cantidad es proporcional al número de polos generados (es decir, 24 polos generados).

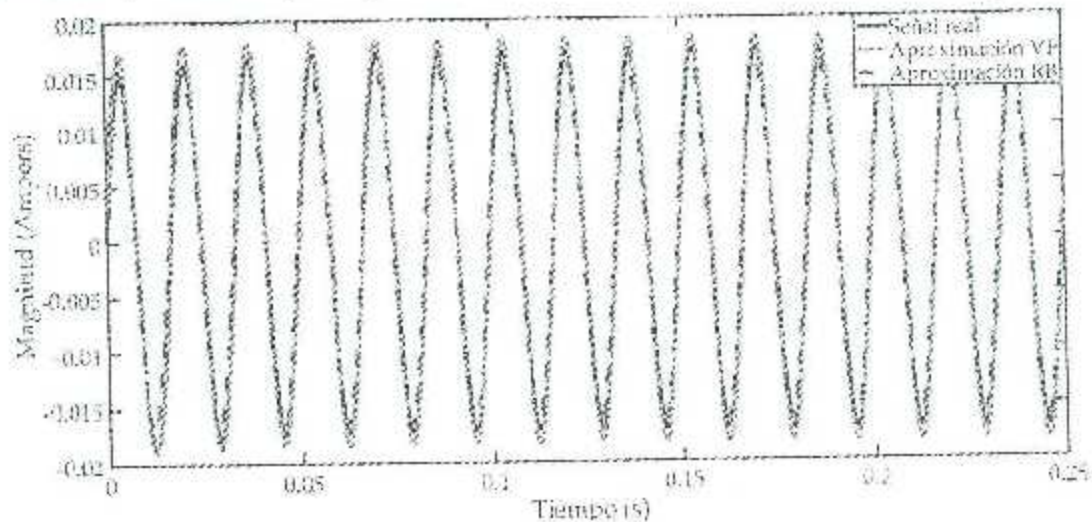


Figura 2.4. Comparación de resultados entre la señal real y la estimada por medio de VF.

Como se puede observar en la Figura 2.4, la señal obtenida por medio de la aproximación VF es muy similar a la señal real. Para comprobar el error existente en esta comparación de señales se obtuvo el error RMS relativo que existe entre la señal original y la reconstruida por medio de la aproximación VF. El error RMS relativo obtenido fue de 0.0824 *rms*.

En la Figura 2.4 también podemos observar la señal obtenida al aplicar la reducción del modelo equivalente usando la realización balanceada, con la cual se redujo el orden de aproximación de 24 a solo 2 polos (esto con el fin de observar la capacidad de la realización balanceada). El error RMS relativo entre la señal real y la señal obtenida por medio de la realización balanceada fue de 0.1765 *rms*.

El presente ejemplo se realizó con el fin de estudiar como VF realiza la aproximación de una señal en el dominio de la frecuencia y su procedimiento de aplicación. Cabe hacer notar que, dependiendo de la precisión que se desee alcanzar al momento de utilizar VF para reducir el orden de aproximación es posible ajustar algunas variables encontradas dentro del código de VF (valores máximos y mínimos de error) y descritas en el manual que acompaña al programa de VF en el compilado que se puede descargar desde su página web oficial. Estas variables pueden ser manipuladas con el fin de obtener señales de mayor precisión según sean nuestras necesidades. Sin embargo, debemos recordar que el orden del sistema equivalente a obtener siempre deberá ser del menor orden posible para cumplir con la obtención de modelos equivalentes de orden reducido. Para ayudar a mantener un menor orden para la obtención de un sistema equivalente y cumplir con los criterios de observabilidad y controlabilidad, se aplicó la realización balanceada posterior al procedimiento de VF.

2.6. Referencias bibliográficas

- [1] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052-1061, July 1999.
- [2] B. Gustavsen, "Improving the pole relocating properties of vector fitting," in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 21, no. 3, pp. 1587-1592, July 2006.
- [3] C.-C. Lei, Y. Wang, Q. Chen and N. Wong, "A decade of vector fitting development: Applications on signal/power integrity", *IAENG Transactions on Engineering Technologies*, vol. 5, no. 1, pp. 435-449, Oct. 2010.
- [4] Y. S. Mekonnen, J. Schutt-Aine, Jilin Tan, C. Kumar and D. Milosevic, "Combining rational interpolation with the vector fitting method," *IEEE 14th Topical Meeting on Electrical Performance of Electronic Packaging*, 2005., 2005, pp. 51-54.
- [5] Y. S. Mekonnen and J. E. Schutt-Aine, "Fast broadband macromodeling technique of sampled time/frequency data using z-domain vector-fitting method," *2008 58th Electronic Components and Technology Conference*, Lake Buena Vista, FL, 2008, pp. 1231-1235.
- [6] L. Knockaert, F. Ferranti and T. Dhaene, "Vector Fitting vs. Levenberg-Marquardt: Some experiments," *Signal Propagation on Interconnects*, 2009. SPI '09, IEEE Workshop on, Strasbourg, 2009, pp. 1-4.
- [7] S. Lefteriu and A. C. Antoulas, "On the Convergence of the Vector-Fitting Algorithm," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 61, no. 4, pp. 1435-1443, April 2013.

- [8] Moore, B., "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol.26, no.1, pp.17,32, Feb 1981.
- [9] K. Zhou J. C. Doyle K. Glover, "Robust and Optimal Control", 1996, Prentice-Hall.
- [10] S. Ghosh and N. Senroy, "A comparative study of two model order reduction approaches for application in power systems," 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, San Diego, CA, 2012, pp. 1-8.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS EN FUNCIONES ORTOGONALES EMPÍRICAS

3.1. Introducción

El análisis en EOFs es considerado un método óptimo de descomposición estadístico basado en el grado de varianza modal por medio del cual podemos descomponer un conjunto de datos multivariantes en una combinación lineal de vectores ortogonales, considerando la respuesta discretizada de las variables originales de interés. Estos vectores ortogonales suelen ser conocidos como funciones ortogonales, los cuales son independientes entre sí (es decir, cumplen con la condición de vectores ortogonales). Además, se les conoce como funciones empíricas ya que trabajan con bases de datos o señales discretizadas provenientes desde mediciones adquiridas por sensores.

El uso que se le ha dado dentro del procesamiento de señales proviene de llevar a cabo la descomposición de una señal en términos de funciones ortogonales básicas o modos estáticos. Dentro de la metodología propuesta por descomposición vectorial, las funciones ortogonales obtenidas posteriores al procesamiento de la señal tienen una clasificación basada en el nivel prioritario y caracterizado por la cantidad de energía contenida en cada modo asociado a su varianza estadística. En la señal descompuesta, dentro de los primeros modos obtenidos (o modos de primer orden), se podrá observar que estos modos contienen la mayor concentración de energía para la reconstrucción principal de la señal introducida. En los modos finales de menor contribución de energía y mayor varianza se asocian las pequeñas oscilaciones que conforman en menor medida a la señal original. Habitualmente, a estas pequeñas oscilaciones se les

conoce como ruido ambiente causado principalmente por los equipos de medición y durante el envío de los registros de datos. En algunos casos estas señales son descartadas para la reconstrucción de la señal original, esto debido a la poca contribución energética que representan para el sistema. Lo mencionado anteriormente puede ser consultado con mayor detalle en [1]- [5]. Además, se encontrará con una expansión del tema en general.

3.2. Fundamentos Teóricos en el Análisis de EOFs

3.2.1. Método de EOFs en el dominio del tiempo

El método de descomposición por medio de las EOFs convencionales en aplicaciones a la respuesta del sistema desde series multivariantes en el dominio del tiempo puede encontrarse de una manera simplificada dentro de [6], mientras que en [2] y [7] se encontrará un análisis más profundo referente a las bases matemáticas que sustentan el método de EOFs así como sus propiedades intrínsecas.

Por lo anterior y con el objetivo de mostrar la representación equivalente del modelo basado en el análisis de EOFs, consideraremos un conjunto de datos reales (R) obtenidos por medio de la respuesta de un sistema (señal de entrada a la metodología de EOFs), cuyas variaciones están dadas en espacio (x) y tiempo (t). Así, los datos obtenidos en series pueden disponer de una representación por medio de un arreglo vectorial $x_i = (x_i(1), x_i(2), x_i(3), \dots, x_i(n))$. Sin embargo, el conjunto de datos es comúnmente representado por medio de un arreglo matricial equivalente. El arreglo matricial es dado por la forma de $X(x, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, en donde n nos indica la cantidad de

muestras y m la cantidad de variables medidas en el conjunto de datos. La matriz equivalente es representada por:

$$X(x, t) = \begin{bmatrix} R(x_1, t_1) & R(x_2, t_1) & R(x_3, t_1) & \dots & R(x_n, t_1) \\ R(x_1, t_2) & R(x_2, t_2) & R(x_3, t_2) & \dots & R(x_n, t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_1, t_m) & R(x_2, t_m) & R(x_3, t_m) & \dots & R(x_n, t_m) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para la matriz descrita en (3.1), cada columna n corresponde a la respuesta del sistema en un tiempo específico (información temporal), mientras que cada renglón m corresponde a la distribución del sistema (información espacial).

La idea fundamental en la cual se basa el método de descomposición por medio de las EOFs proviene de la suposición de tener un conjunto de campos escalares R^* , siendo cada uno una función $R = R(x)$ definida dentro del dominio comprendido en $0 \leq x \leq 1$. Considerando el espacio de Hilbert L^2 para encontrar una representación precisa para los elementos contenidos en R^* , debemos recordar que el espacio L^2 es definido como un espacio de funciones cuadrático-integrales con valores reales o complejos. Por lo tanto, $L^2([0,1])$ define el espacio de funciones que son definidas en el intervalo unitario que es comprendido en $0 \leq x \leq 1$. A continuación, se muestra la ecuación que define el espacio del producto interno perteneciente al espacio de Hilbert:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g^*(x) dx, \quad (3.2)$$

donde el símbolo $*$ denota el conjugado complejo. A partir de (3.2) utilizaremos el teorema de Karhunen-Loève para obtener una representación en forma de sumatoria para esta metodología. El teorema mencionado es una representación de un proceso estocástico (familia uniparamétrica de variables aleatorias indexadas mediante el tiempo).

El teorema es representado mediante la siguiente ecuación:

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e_k(t) \quad (3.3)$$

En (3.3), Z_k representa las variables aleatorias no correlacionadas de a pares, y e_k son las funciones reales continuas en $[a, b]$ ortogonales de a pares en $L^2[a, b]$. Debemos tomar en cuenta que, considerando el contexto del espacio de Hilbert, deseamos encontrar una base $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, la cual debe ser óptima para la serie de datos de la representación matricial dada en (3.1). Así, tomando en cuenta que podemos aplicar el teorema de Karhunen-Loève (3.3) a (3.2) se tiene que

$$X_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j^*(x). \quad (3.4)$$

En (3.4), a_j representa los eigenvectores también conocidos como modos y φ_j contiene el vector que contiene las funciones ortogonales empíricas provenientes de la respuesta del sistema. Debemos notar que en (3.4) aún no es tomada en cuenta la componente temporal t de la respuesta del sistema. Para incluir el componente temporal dentro del dominio del espacio unidimensional definido en $0 \leq x \leq 1$, debemos considerar el tiempo de duración T del fenómeno dentro del espacio de Hilbert como una correlación espacio-temporal definida como $L^2([0, 1] \times [0, T])$. Para este caso, la integral anteriormente vista en (3.2) que representa el producto interno del espacio de Hilbert se convierte en una integral doble tanto para el espacio x como para el tiempo t . Al resolver dicha integral, obtendremos la formulación en la cual se basa la descomposición de una señal por medio de las EOFs tradicionales (espacio-tiempo) [6]:

$$X(x,t) = \sum_{i=1}^p a_{ij}(t) \phi_{ij}^*(x) \quad (3.5)$$

En (3.5) podemos observar que p nos indicará la cantidad de modos, $a_{ij}(t)$ son los coeficientes modales dependientes del tiempo (eigenvectores) y el vector $\phi_{ij}^*(x)$ es conocido como EOFs.

Junto al concepto de las EOFs convencionales (espacio-temporales) existe la matriz de covarianza, la cual nos indica el grado de variación conjunta de los componentes espaciales y temporales. Los componentes son calculados por medio de los eigenvectores y las eigenfunciones de esta matriz de covarianza. Para el caso de las EOFs tradicionales, la matriz de covarianza es real y simétrica. Además, posee un conjunto de eigenvectores ortogonales con eigenvalores positivos reales. La matriz de covarianza se representa de la siguiente manera [6]:

$$C = \frac{1}{n} X^T(x,t) X(x,t), \quad (3.6)$$

donde el superíndice T nos indica operación de transposición vectorial.

3.2.2. Método de EOFs para redes eléctricas con gran dispersión geográfica

Para el uso de las EOFs en el análisis de redes eléctricas de potencia con amplias áreas geográficas (gran dispersión geográfica) es necesario utilizar una metodología adecuada para la obtención de los modos que describan al sistema ante condiciones oscilatorias. De tal forma que, para este tipo de análisis, encontraremos los fundamentos para realizarlo en [8]-[11], donde se menciona que el método consiste en la expansión de cada campo de datos reales al campo de los datos complejos. El motivo

para hacer esta expansión es para detectar las características de propagación de formas de ondas presentadas dentro del sistema eléctrico durante disturbios eléctricos, utilizando la división de una función de correlación espacio-temporal y la transformada de Hilbert para la obtención de información de la fase. Por lo anterior, a través de la aplicación del análisis de EOFs, el conjunto de datos, el cual contiene la respuesta dinámica del sistema, se expresa mediante:

$$X(x,t) = X_{swc}(x,t) + X_{twc}(x,t). \quad (3.7)$$

En (3.7), X_{swc} nos indica la componente de onda estacionaria (swc, por sus siglas en inglés) y X_{twc} nos indica la componente de onda viajera (twc, por sus siglas en inglés). Estas formas de ondas son dadas dentro de la descomposición del registro original proveniente de la señal de entrada y están descritas respectivamente por:

$$X_{swc}(x,t) = \sum_{j=1}^p a_{swc(j)}(t) \phi_{swc(j)}^H(x) \quad (3.8)$$

$$X_{twc}(x,t) = \sum_{j=1}^q R_{twc(j)}(t) S_{twc(j)} \cos(\omega_{twc(j)} t)$$

$$X_{swc}(x,t) = \sum_{j=1}^q a_{swc(j)}(t) \phi_{swc(j)}^H(x) \quad (3.9)$$

$$X_{twc}(x,t) = \sum_{j=1}^q R_{twc(j)}(t) S_{twc(j)} \cos(\omega_{twc(j)} t + K_{twc(j)} x + \pi)$$

En (3.8) y (3.9) el superíndice H denota matriz hermitiana. La descomposición del registro de mediciones en sus componentes de ondas viajeras y estacionarias consiste en la extensión de los datos reales, $X(x,t)$, de la señal de entrada al espacio complejo utilizando la transformada de Hilbert. Esta expansión se realiza con el fin de

llevar a cabo el análisis de las EOFs al campo de información compleja $X_C(x,t) \in \mathbb{C}^{N \times n}$. Para este caso, la matriz de covarianza descrita en (3.6) también puede describirse de la siguiente forma:

$$C = \frac{1}{N} X_C^H X_C = C_R + iC_I \quad (3.10)$$

En (3.10), $i = \sqrt{-1}$, los subíndices C , R e I indican que los vectores son complejos, reales e imaginarios; respectivamente. Asumiendo que la matriz $X(x,t)$ es transformada en una matriz de datos complejos formada por sus componentes imaginarios, obtenemos que:

$$X_{CV}(x,t) = X_{RV}(x,t) + iX_{IV}(x,t). \quad (3.11)$$

En (3.11), CV proviene de las siglas de vector complejo en inglés, RV define las siglas en inglés de vector real e IV hace referencia al vector imaginario; por sus siglas en inglés. Para esta ecuación, la matriz de correlación (3.10) es aplicada a (3.11). La aproximación obtenida a partir de (3.11), en términos de una suma de modos empíricos dominantes (base ortogonal empírica) los términos de p y q son dados de la siguiente manera:

$$X_{CV}(x,t) \in \mathbb{R}^{N \times n} = \sum_{j=1}^p a_{RVj}(t) \phi_{RVj}(x) + i \sum_{j=1}^q a_{IVj}(t) \phi_{IVj}(x). \quad (3.12)$$

Para mayor detalle sobre la descripción y metodología presentada en esta sección el lector puede referirse a [9].

3.2.3. Método de EOFs con una distribución modal extendida al dominio de la frecuencia

La extensión en la aplicación del análisis de redes eléctricas de potencia por medio de las EOFs con una distribución modal extendida al dominio de la frecuencia es con el fin de estudiar las oscilaciones electromecánicas que pueden ser causadas por una diversa cantidad de eventos presentes en diferentes rangos de frecuencias, como por ejemplo, podemos mencionar efectos por maniobras programadas o durante contingencias, interconexión de elementos de red tales como generadores, líneas de transmisión, cargas, dispositivos de control y esquemas de protección, entre otras. Un ejemplo concreto de aplicación para la metodología propuesta en la presente tesis está enfocado al estudio de oscilaciones de diferentes rangos de frecuencias, priorizando en el presente estudio las oscilaciones de baja frecuencia en los efectos electromecánicos entre generadores de diferentes áreas.

Las oscilaciones electromecánicas de baja frecuencia se encuentran en el rango de frecuencias comprendidas de 0.1 a 2.0 Hz, estas tienen un impacto directo sobre los generadores involucrados en la red. Estas oscilaciones son un tema de estudio continuo en el análisis de sistemas de potencia altamente interconectados, ya que al igual que otras fallas producidas en el sistema eléctrico de potencia (SEP) deben de ser controladas para evitar daños perjudiciales a los elementos que conforman el sistema eléctrico [12], [13].

La metodología que se presenta a continuación, basada en el análisis de las EOFs con una distribución modal extendida al dominio de la frecuencia, es aplicable para sistemas lineales invariantes en el tiempo del tipo MIMO. Al formular esta metodología se toma en cuenta que la respuesta en frecuencia del sistema a analizar es conocida,

siendo de interés el análisis de la respuesta del SEP. Consideraremos al sistema como lineal e invariante en el tiempo (LTI), esto debido a que independientemente de la naturaleza no lineal del SEP las oscilaciones electromecánicas pueden analizarse por medio de la aplicación de técnicas para el análisis de sistemas lineales [13]. Por lo que, para nuestro propósito, se asume que la variación de la respuesta en el dominio de la frecuencia de la relación de entrada y salida del sistema MTMO es del tipo LTI, el cual está conformado por una matriz de relación entrada-salida de dimensión $m \times n$ dada por:

$$G(\chi, s) \in C^{m \times n} = \begin{bmatrix} g_1(s_1) & g_2(s_1) & \dots & g_n(s_1) \\ g_1(s_2) & g_2(s_2) & \dots & g_n(s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(s_m) & g_2(s_m) & \dots & g_n(s_m) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

En (3.13), $s_k = i \cdot \Omega$, para $k=1..m$, donde m se encuentra en el rango de frecuencias angulares sujetas al análisis por medio de las EOFs con $\Omega = [\omega_{n1(m)} \dots \omega_{nm(m)}]$. La variable χ es la representación espacial para la función variable en el dominio de la frecuencia $g_{j,1..n}(s)$. Estas funciones son conocidas como respuestas en el dominio de la frecuencia, las cuales provienen del modelo adoptado para el estudio de los sistemas eléctricos y constituyen el rango de frecuencias y la distribución geográfica en donde se lleva a cabo el estudio.

Con el fin de analizar la respuesta en frecuencia del sistema a estudiar, es necesario que el análisis por medio de las EOFs se realice por medio de un arreglo vectorial complejo para detectar la distribución y coherencia modal espectral. Esto se realiza por medio de la información contenida en la matriz de función de transferencia asociada a la respuesta global de sistema. Por lo cual, en base a la teoría vista desde [8]

- [11] y tomando como base lo observado en [9], consideraremos a (3.12) como nuestra base.

En el caso de que los datos obtenidos sean puramente imaginarios, la transformada de Hilbert puede utilizarse para formar una función en cuadratura a la respuesta original, la cual permitirá obtener información de fase desde estos datos. Para ello, la función que utiliza Matlab se presenta como $g_i(s) = i\text{-hilbert}(g(s)/i)$. Para esta metodología, es necesario que las funciones base óptimas sean obtenidas desde los eigenvectores de la matriz resultante de cruce espectral, la cual está dada por:

$$C_{\omega} \in C^{m \times m} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1n}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(\omega) & H_{m2}(\omega) & \dots & H_{mn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Dentro del arreglo matricial dado en (3.14), $H_{jk}(\omega)$ hace referencia al análisis de cruce espectral entre las series en el dominio de la frecuencia que comprenden las j -th y k -th series, esta operación es originada por:

$$\langle g_j^*(\omega), g_k(\omega) \rangle = H_{jk}(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad (3.15)$$

En (3.15), $\langle \rangle$ nos indica el promedio de conjunto (ensemble average) y $*$ nos indica que la variable a la que se le asocia dicho símbolo es un conjugado de g_j . Se puede demostrar de manera directa que el análisis de cruce espectral es un operador hermítico ("Hermitian"; para más información de dicho operador ver [14]).

Ahora usaremos H_{jk} para resolver el problema del eigenvalor, donde la base ortogonal empírica para la descomposición espectral se obtiene a través de: