

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

Estabilización de un Vehículo de dos Ruedas Mediante el Enfoque LPV.

presentada por

Ing. José Christian de Jesús Galicia González.

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dr. Francisco Ronay López Estrada

Cuernavaca, Morelos, México. Febrero de 2016.

Cuernavaca, Mor., 5 de febrero de 2016
OFICIO No. SAC/114/2016

Asunto: Autorización de impresión de tesis

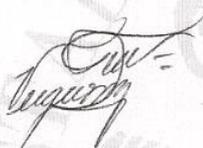
ING. JOSÉ CHRISTIAN DE JESÚS GALICIA GONZÁLEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "**Estabilización de un Vehículo de dos Ruedas Mediante el Enfoque LPV**", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGÍA AL SERVICIO DE MÉXICO"



DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



Cuernavaca, Mor., 2 de febrero de 2016.

OFICIO No. DIE/027/2016
Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. José Christian de Jesús Galicia González** con número de control MIBCE071 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"ESTABILIZACIÓN DE UN VEHÍCULO DE DOS RUEDAS MEDIANTE EL ENFOQUE LPV"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manjarés Astorga Zaragoza
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

M.C. Francisco Reyna López Estrada
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5695660

REVISOR 1

Dr. Luis Gerardo Vela Valdés
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 7980044

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica
Cédula profesional 4214833

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
Expediente

CMAZ/ltr

SEP CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACION
TECNOLÓGICO
RECIBIDO
05 FEB 2016
Omepm
SERVICIOS ESCOLARES



Dedicatorias.

A mis padres por el amor que siempre me han brindado.

Mi madre María del Rosario González Marín que siempre se preocupa por mí.

Mi padre José Galicia Osorio que todo lo aprendí de él.

A todos los miembros de mi familia, desde la inocencia del más pequeño hasta la experiencia del más grande, este trabajo es de ustedes también.

A Alma por su amor y apoyo incondicional, pero principalmente por llegar a mi vida justo en el momento correcto.

Agradecimientos.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por brindarme la oportunidad de realizar estudios de posgrado. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme becado durante año y medio y durante mi estancia en el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez.

Al Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza por su paciencia, comprensión y excelente actitud al asesorarme durante la maestría.

Al Dr. Francisco Ronay López Estrada por su paciencia igualmente y sus excelentes comentarios puntuales que fortalecieron en gran medida esta tesis.

A mis revisores el Dr. Juan Reyes Reyes y el Dr. Luis Gerardo Vela Valdés por sus atinadas observaciones y personalidades que me hicieron una mejor persona.

A mis profesores Dr. Carlos Daniel García Beltrán, Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez, Dr. Manuel Adam Medina que gracias a su gran conocimiento y dedicatoria hicieron el aprendizaje más sencillo.

A mis compañeros y amigos Roy, Jashiel, Marcos, Genaro, Gabriel, Audomaro, Iris, Regalado, Valdivia, Carbot, Moy, Juan Pablo, Adriana, Jesús, Tury y en general a todos pues hicieron agradable mi estancia en CENIDET.

A Lorena porque siempre está apoyando y es una persona muy agradable.

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados en simulación de la estabilización de una bicicleta mediante el enfoque lineal de parámetros variables (LPV). El prototipo se encuentra en el laboratorio de electrónica del CENIDET cuya instrumentación contiene un actuador en el manubrio.

Se analizó el comportamiento dinámico angular para obtener un modelo de la bicicleta LPV. Dicho modelo LPV considera a la velocidad traslacional como parámetro variable en el tiempo medible en línea.

Se presenta el diseño de un controlador LPV por retroalimentación de estados basado en un observador de estados de orden completo LPV con base en la teoría de estabilidad de Lyapunov. El observador LPV es debido a que la instrumentación del prototipo no permite tener todos los estados medibles en línea.

Tanto la ganancia de retroalimentación como la ganancia de observador fueron formuladas en términos de búsquedas numéricas de Desigualdades Lineales Matriciales Parametrizadas (PLMI).

Adicional al sistema de estabilización, se realizó la colocación de polos en regiones adecuadas mediante el enfoque de desigualdades lineales matriciales (LMI) para obtener una adecuada respuesta transitoria para los objetivos de control que requiere el sistema.

Finalmente se presenta el desempeño del enfoque LPV propuesto mediante simulaciones a lo largo de una velocidad decreciente que demuestran la evolución de: los eigenvalores, los estados reales, del error de estimación del observador LPV y el movimiento del centro de masa de la bicicleta en el plano.

Abstract

In this work are presented the simulation results in the stabilization of a bicycle by the linear parameter variant (LPV) approach. The prototype is in the CENIDET's electronics laboratory whose instrumentation containing one actuator on the handlebar.

The angular dynamic behavior of the bicycle to get a LPV model it was analyzed. That LPV model consider the traslational bicycle as parameter varying in time measurable on line.

Design of a LPV state feedback controller based on LPV full order state observer in based to the Lyapunov's stability theory is presented. The LPV observer is due to the prototype's instrumentation does not allow the measurable states online.

Both the feedback's gain and the observer's gain was formulated in terms of computing the Parameterized Linear Matrix Inequalities (PLMI).

In addition to the stabilizing system, the pole placement in suitable regions by Linear Matrix Inequality (LMI) approach to get a transient response suitable to the objectives controls that systems requires is realized.

Finally the performance from the proposed LPV approach is presented by simulations along to decrecient traslational velocity that shows the evolution of: the eigenvalues, the real states, the error of estimation from LPV observer and the center of mass of the bicycle on plane.

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Estado del Arte	3
1.2. Planteamiento del Problema.	6
1.3. Hipótesis	7
1.4. Objetivos	7
1.4.1. Objetivo General	7
1.4.2. Objetivos Particulares	7
1.5. Justificación	8
1.6. Estructura de la tesis.	8
2. Marco Teórico.	11
2.1. Visión General de los Sistemas LPV.	12
2.2. Clasificación de Sistemas LPV.	16
2.2.1. Sistemas Politópicos.	16
2.2.2. Sistema LPV Polinomial.	18
2.2.3. Sistema LPV por Transformación Lineal Fraccional (LFT).	23
2.3. Relajación de PLMIs.	24
2.3.1. Relajación de PLMIs por discretización (gridding).	25
2.4. Colocación de polos en sistemas LPV.	27
2.5. Conclusiones	29
3. Modelo de la Bicicleta.	31
3.1. Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.	32
3.2. Ecuaciones de movimiento reducidas.	45
3.3. Adecuación de las ecuaciones de movimiento a un modelo LPV.	50
3.4. Comportamiento del modelo LPV en lazo abierto.	54
3.5. Conclusiones.	56

ÍNDICE GENERAL

4. Sistema de estabilización.	57
4.1. Análisis de la división del sistema de control.	58
4.2. Controlador Estabilizante LPV.	63
4.3. Observador de estados de orden completo LPV.	66
4.4. Conclusiones.	68
5. Resultados de las simulaciones.	70
5.1. Parámetros de diseño.	71
5.2. Solución mediante el toolbox de control para resolver LMIs de MatLab.	73
5.3. Simulación del sistema.	75
5.4. Conclusiones	83
6. Conclusiones generales	85
6.1. Resultados	85
6.2. Líneas de trabajo futuras	86
Bibliografía	95
A. Terminología y Simbología.	96
B. Código para encontrar ganancias $K(jh)$ y $L(jh)$.	97

Índice de figuras

2.1. Diagrama de Venn de los sistemas no lineales.	14
2.2. Ejemplificación de los puntos de equilibrio con un cuerpo cónico.	16
2.3. Sistema LPV (2.28) escrito en forma LFT donde $H(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1}B + D$	23
2.4. Región $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$	28
3.1. La bicicleta dividida en 4 subsistemas: Marco trasero rf , marco delantero ff , llanta trasera rw y llanta delantera fw	32
3.2. Terminología de la bicicleta.	33
3.3. Grados de libertad angulares de la bicicleta.	34
3.4. Modelo de cuerpo rígido.	35
3.5. Distribución de masas de la bicicleta.	36
3.6. Propiedades relevantes de inercia del ensamble frontal.	37
3.7. Configuración general del marco esquelético de la bicicleta.	39
3.8. Fuerzas que actúan sobre la bicicleta (para pequeños ángulos).	40
3.9. Inclinación de la bicicleta vista desde la parte trasera.	41
3.10. Esqueleto de la bicicleta en vertical que muestra la diferencia entre la dirección de la llanta delantera y la dirección general de la bicicleta P_r	42
3.11. Momento de dirección M_ψ y F_{x_f}	43
3.12. Momentos verticales sobre la bicicleta cuando solo presenta ángulo de inclinación.	43
3.13. Momentos verticales sobre el ensamble frontal cuando solo presenta ángulo de dirección vista de lado.	44
3.14. Momentos verticales sobre el ensamble frontal visto desde arriba del eje de dirección.	44
3.15. Ilustración del ángulo de giro θ	45
3.16. Definición de x_f en términos de x, θ, ψ	46
3.17. Definición de θ_f en términos de θ y ψ	46

ÍNDICE DE FIGURAS

3.18. Parte real de los eigenvalores del sistema (3.44) que está en función de la velocidad $v(t)$	55
4.1. Diagrama a bloques del sistema completo: Estabilización por retroalimentación de estados y estimación de los estados no medibles en línea.	60
5.1. Ganancia de retroalimentación $K(jh)$ para estabilizar el sistema LPV.	73
5.2. Ganancias del observador $L(jh)$ para asegurar la convergencia de los estados estimados a los estados reales.	74
5.3. Parte real de los eigenvalores del sistema completo a través del rango de velocidad de 0 m/s a 5 m/s	76
5.4. Eigenvalores de la matriz $A(v(t)) + BK(v(t))\hat{x}(t)$ en el plano complejo.	77
5.5. Evolución de los estados ϕ , δ , $\dot{\phi}$ y $\dot{\delta}$ en lazo cerrado con retroalimentación $u(t) = K(v(t))\hat{x}(t)$	78
5.6. Evolución de los estados ante una perturbación en ϕ	80
5.7. Evolución del error de estimación.	81
5.8. Movimiento en el plano xy del centro de masa de la bicicleta completa.	83
B.1. Primera parte del código para hallar $K(jh)$	97
B.2. Segunda parte del código para hallar $K(jh)$	99
B.3. Tercera parte del código para hallar $K(jh)$	100
B.4. Primera parte del código para hallar $L(jh)$	101
B.5. Segunda parte del código para hallar $L(jh)$	102
B.6. Tercera parte del código para hallar $L(jh)$	103

Índice de tablas

3.1. Parámetros de la bicicleta completa.	50
3.2. Parámetros de la llanta trasera	50
3.3. Parámetros del marco trasero.	51
3.4. Parámetros del marco frontal.	51
3.5. Parámetros de la llanta frontal.	51
A.1. Terminología.	96

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 1

Introducción.

"La vida es como una bicicleta. Para mantener tu balance, debes mantenerte en movimiento".

Albert Einstein.

Este trabajo está enfocado al estudio del diseño de un sistema de control estabilizante de una bicicleta para recuperar la posición vertical. Es bien conocido que en una bicicleta estática es complicado mantener dicha posición, mientras que en movimiento es más fácil.

Debido a este interesante comportamiento se ha estudiado la dinámica de la bicicleta con el propósito de mejorar su funcionamiento.

En la literatura existen un gran número de ecuaciones y explicaciones cualitativas extensas de auto-estabilidad, pues para cada modelo de bicicleta se tienen diferentes consideraciones tal como se explica en [1]. Una forma de proceder es analizar únicamente los modelos de bicicleta que intervienen directamente con el ángulo de inclinación.

La mayoría de los trabajos en la literatura consideran a la bicicleta con tres grados de libertad que son: el ángulo del manubrio $\delta(t)$, el ángulo de inclinación $\phi(t)$ y la velocidad traslacional $v(t)$.

Cuando una persona monta una bicicleta, esta actúa sobre los tres grados de libertad $\delta(t)$, $\phi(t)$, y $v(t)$, pero el caso de estudio es un vehículo no tripulado y es

1. INTRODUCCIÓN.

complicado colocar actuadores en los tres grados de libertad al tratar de emular a un conductor que pedalea, da dirección y mueve su centro de gravedad.

Cuando un sistema tiene menos actuadores que grados de libertad, se dice que es un sistema subactuado [2]. Estas características del sistema pueden considerarse en el diseño del modelo para obtener una representación Lineal de Parámetros Variables (LPV) de la bicicleta, pues estos sistemas pueden convertir una variable del sistema en un parámetro variable [3].

El principal interés de los sistemas LPV es su habilidad para aproximar una amplia variedad de sistemas no lineales mediante un número finito de modelos Lineales Invariantes en el tiempo (LTI). Los modelos LTI que componen el sistema LPV generalmente están relacionados por funciones de programación que dependen de un parámetro variable en el tiempo.

En [4] validan un modelo aproximado de la bicicleta cuya dinámica depende explícitamente de la velocidad al quedar las no linealidades del modelo implícitas dentro de un parámetro variable en el tiempo $v(t)$.

Otro interés importante reside en el diseño de controladores LPV, pues en la ley de control se pueden usar los parámetros variables en el tiempo, dando lugar al desarrollo de sistemas de estabilidad y desempeño.

Análogo al diseño de controladores LPV se pueden formular observadores LPV cuya importancia es debida a que no siempre es posible tener todos los estados medibles en línea.

La instrumentación del prototipo de bicicleta presente en el laboratorio de electrónica del CENIDET no permite tener todos los estados en línea. Y en el caso de la metodología LPV, también es necesario tener los parámetros variables medibles en línea.

Por lo anterior, en este trabajo se trata con el problema de estabilización de un sistema subactuado LPV (con la velocidad traslacional como parámetro variable medible en línea) mediante el diseño de un controlador estabilizante por retroalimentación de estados LPV basado en un observador de estados de orden completo LPV,

desarrollando la colocación de polos del controlador estabilizante LPV y del observador de estados de orden completo LPV para obtener un desempeño de la respuesta transitoria acorde a los requerimientos de control del sistema.

1.1. Estado del Arte

En 1818, Karl Von Drais muestra que una persona manejando un artilugio de dos ruedas alineadas podía balancearse por dirigir la rueda delantera [5].

En 1901 el matemático francés Carvallo [6] haciendo mención del uso del cálculo de la geometría de Grassman y calculos de estabilidad similares a Routh-Hurwitz usa ecuaciones dinámicas de cuerpos rígidos para mostrar que algunas bicicletas podían en un rango adecuado de velocidad balancearse ellas mismas.

Posteriormente Jones [7] realiza un reporte técnico en el que se corrige la configuración geométrica para eliminar no linealidades y deriva correctamente las ecuaciones de movimiento para la bicicleta.

Fué hasta 1987 que Papadopoulos [8] se concentra en obtener una notación compacta y simple relativa a la inclinación de la bicicleta para obtener las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones presentadas en este trabajo están con base en este reporte de Papadopoulos.

Por último, Meijaard et al. [1] utilizando el principio de D' Alembert junto con momentos de equilibrios angulares obtienen las ecuaciones de movimiento lineales, de igual forma las ecuaciones de movimiento fueron validadas en los programas SPACAR y AutoSim. Un análisis más detallado del estado del arte del modelado de la bicicleta se puede ver en Schwab [9]

En Getz [10] emplearon controladores para la manipulación del manubrio y la velocidad en la llanta trasera para seguimiento de trayectorias definidas. En Huang et al. [11] y Keo [12] utilizan balancines para recobrar la vertical.

En Chen [13] utilizan control difuso para control del manubrio y de velocidad para seguimiento de trayectorias definidas. En Roqueiro et al. [14] diseñan un controlador en modos deslizantes para un vehículo de tres ruedas pero aplicable al caso de estudio

1. INTRODUCCIÓN.

debido a que el objetivo de control es mantener la vertical.

En Corno et al. [15] se realiza un controlador deslizante LPV para la bicicleta. En Yi et al. [16] diseñaron un controlador para seguimiento de trayectoria y mantenían la vertical al aprovechar la autoestabilización de la bicicleta a ciertas velocidades de traslación.

Estas metodologías no tratan con el modelo no lineal de la bicicleta sino que emplean técnicas adaptables y robustas, en tanto que un modelo LPV aproxima mejor la dinámica del modelo y la teoría del diseño de sus controladores es más extensa.

Los sistemas LPV fueron introducidos por Shamma [17, 18] como modelos matemáticos para diseñar y garantizar un adecuado desempeño de retroalimentación tal que el parámetro variable capturaba las no linealidades de la planta.

El término LPV fué adoptado para distinguir estos sistemas de los sistemas Lineales Invariantes en el tiempo (LTI) que se obtienen de linealizar en un punto de operación un sistema no lineal y los sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV) que se obtienen de linealizar sobre una trayectoria de operación un sistema no lineal, mientras que un sistema LPV está linealizado sobre la trayectoria de un parámetro variable en el tiempo.

Con el paso de los años se han hecho progresos significativos para los sistemas LPV. Tal es el caso de las técnicas de control robusto LPV que ante disturbios desconocidos proporcionan un mejor desempeño que los controladores robustos LTI [19].

Otro progreso significativo es que algunas soluciones para sistemas LTI formuladas en términos de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI) han sido extendidas para sistemas LPV [20]. Posteriormente se hicieron avances significativos como controladores H_2 y H_∞ .

Un controlador H_∞ proporciona robustez a los sistemas ante variaciones paramétricas desconocidas como se ve en Chilali [21] y Scherer [22]. Para mejorar el desempeño de estos controladores Xu [23, 24] propone técnicas de conmutación de controladores y de sistemas aplicando la metodología a un modelo de aeronave F-16. No obstante los métodos son aplicables bajo la asunción de pequeños cambios en los

parámetros programados.

Para cambios paramétricos mayores, Lacerda et al. [25] diseña un compensador robusto para plantas estables LPV politópicas que considera un conocimiento en tiempo no real de los parámetros dependientes.

El enfoque H_∞ se puede extender al control tolerante a fallas en sistemas LPV como se ve en Lopez-Estrada et al. [26], donde se diseña un observador de estimación de fallas (FEO) para sistemas Descriptores Lineales de Parámetros Variables (DLPV). Una técnica de identificación de modelos LPV para aplicaciones reales se ofrece en Giarré et al. [27].

Existe una amplia variedad de herramientas y metodologías para sistemas LPV. Mohammadpour [28] realiza el desarrollo de metodologías de control de sistemas LPV y proporciona varias aplicaciones, también Briat [3] desarrolla teoría concerniente a controladores y observadores robustos de sistemas LPV y luego extendió la teoría hacia sistemas LPV con retrasos.

En Genc [29] se realiza un estudio de modelado de sistemas de control LPV aplicados al control de un motor de inyección para comprobar la efectividad de distintos enfoques LPV. Estos trabajos sobre herramientas y metodologías son aplicables para casi cualquier tipo de sistema LPV; sin embargo, es necesario estudiar el tipo de aplicaciones para vehículos no tripulados y analizar el tipo de metodología propuesta.

En Sename et al. [30] se tratan métodos recientes sobre controladores robustos a variaciones paramétricas con el enfoque LPV para la aplicación a vehículos dinámicos como cohetes de propulsión, robots bípedos y vehículos de carretera.

En Abdullah [31] se realiza un modelo de referencia para control de sistemas LPV enfocado a sistemas dinámicos.

Existe una metodología de controlador LPV llamada ganancias programadas vista en Sato et al. [19] donde desarrollan controladores de ganancias programadas por retroalimentación de estados usando parámetros no medibles mediante el desarrollo de soluciones H_∞ y H_2 ; sin embargo, esta metodología no considera cambios bruscos en los parámetros no medibles.

1. INTRODUCCIÓN.

Algunas aplicaciones de controladores LPV recientes enfocados a vehículos dinámicos parecidos a la bicicleta son: Yang [32] que realiza una metodología de diseño de autopilotado para liberación de misiles basado en un modelo de control predictivo. Kwiatkowski et al. [33] diseña un controlador PID LPV para control de carga de un motor de encendido por chispa.

En Brezoescu et al. [34] se desarrolló un controlador de seguimiento de trayectoria basado en la teoría de Lyapunov para un vehículo aéreo en presencia de viento. En Abbas et al. [35] diseñan un controlador LPV por retroalimentación de estados para el control del momento en un giroscopio, esto aporta al caso de estudio pues la bicicleta contiene efectos giroscópicos en su dinámica. Ambos trabajos de investigación están con base en la teoría de estabilidad de Lyapunov a través de desarrollo de LMIs.

En Apkarian and Tuan [36] se enfocan al desarrollo de LMIs que dependen de uno o más parámetros variables en el tiempo llamadas PLMIs. Mientras que [37] se enfoca en el desarrollo de LMIs para controladores H_2/H_∞ con colocación de polos y también para la intersección de adecuadas regiones LMI.

1.2. Planteamiento del Problema.

La bicicleta tiene 3 importantes grados de libertad concernientes a su estabilización sobre los que un conductor puede actuar:

1. Velocidad traslacional $v(t)$.
2. Ángulo del manubrio $\delta(t)$.
3. Ángulo de inclinación $\phi(t)$.

Al tener actuadores en estos tres grados de libertad la tarea de diseño de controladores se simplifica; sin embargo, no es aplicable a los vehículos para transporte pues los actuadores en el ángulo de inclinación aumentarían considerablemente las dimensiones de la bicicleta.

El actuador en la velocidad traslacional es una decisión muy importante, pues en vehículos no tripulados el controlador debe poder cumplir con el objetivo de control y se sabe que la disminución de la velocidad a lo largo del movimiento realizado es

una cuestión natural del sistema.

Las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento dinámico de la bicicleta son muy extensas, debido a ello, es difícil obtener un modelo que capture correctamente la dinámica lateral de la bicicleta.

Los modelos LPV permiten emular el comportamiento de un sistema no lineal mediante modelos LTI ponderados por uno o más parámetros variables. El modelo resultante es más fácil de tratar pues al retirar variables también disminuye el número de ecuaciones simultáneas.

La estabilización de la bicicleta es un problema de control importante debido a que para ciertos valores de velocidad la bicicleta es inestable y al tratarlo como un modelo LPV la velocidad se puede transformar en un parámetro variable $v(t)$, el ángulo de inclinación se convierte en la variable controlada $\phi(t)$ y el ángulo de inclinación se transforma en la variable manipulada $\delta(t)$, lo anterior es debido a tener solamente un actuador y 3 grados de libertad, es decir, el sistema es subactuado.

1.3. Hipótesis

Es posible lograr la estabilización de un vehículo de dos ruedas sin conductor mediante un controlador estabilizante LPV con colocación de polos en la región LMI $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ basado en un observador de estados de orden completo LPV con colocación de polos en la región LMI $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Estabilizar un vehículo de dos ruedas sin conductor con un solo actuador mediante el enfoque LPV.

1.4.2. Objetivos Particulares

1. Representar el modelo de la bicicleta como un modelo LPV.

1. INTRODUCCIÓN.

2. Diseño de un controlador estabilizante LPV basado en observador de estados LPV de orden completo que estabilice el sistema.
3. Colocación de polos en regiones adecuadas LMI para un transitorio adecuado.
4. Simulación del control estabilizante LPV basado en observador de estados LPV de orden completo.

1.5. Justificación

Como se mencionó anteriormente la bicicleta tiene 3 grados de libertad principales que debido a los requerimientos para relevancia de este trabajo solo se considerará el actuador en el ángulo del manubrio $\delta(t)$. De esta forma uno o más de los grados de libertad sin actuador pueden ser considerados, bajo ciertas consideraciones, como un parámetro variable en el tiempo.

La mayor parte de la teoría se basa en que los estados del sistema y el parámetro variable sean medibles en línea; sin embargo, la instrumentación de la bicicleta no permite esto, por ello, el control estabilizante LPV basado en observador permite corregir este problema con un desempeño aceptable.

Los controladores basados en observadores no solo dependen de la velocidad de convergencia de los estados sino que también dependen de la velocidad en que los estados observados convergen a los estados reales, por lo que es de esperar que, el transitorio de dichos sistemas sea más lento o tenga oscilaciones pronunciadas.

Para corregir esta problemática existen diversas técnicas de colocación de polos en adecuadas regiones LMI con el propósito obtener un desempeño aceptable del transitorio del sistema. El control de este tipo de sistemas subactuados de naturaleza inestable es un reto importante de control y presenta las bases para controlar sistemas parecidos como giroscopios, cohetes de propulsión, robots bípedos entre otros.

1.6. Estructura de la tesis.

La presente tesis está compuesta por seis Capítulos ordenados adecuadamente para que el lector pueda comprender los pasos tomados para resolver la hipótesis de esta

tesis.

En el Capítulo 2 se presenta un marco teórico acerca de los sistemas Lineales de Parámetros Variables en el tiempo (LPV), proporcionando un contexto de su formación, su estructura general, la forma de representar un sistema no lineal en un sistema LPV, sus similitudes con un sistema LTI y sus principales ventajas ante otro tipo de sistemas.

Se estudian los principales tipos de sistemas LPV y sus respectivas representaciones. También se presenta un análisis de estabilidad de dichos sistemas ahondando más en el que se utilizó en esta tesis con base en la teoría de estabilidad de Lyapunov tratando la relajación de matrices para tratar adecuadamente con los tipos de sistemas LPV.

En el Capítulo 3 se trata el modelo de la bicicleta tratando únicamente con la dinámica de balanceo de la bicicleta y no con la ubicación en el espacio, obteniendo 4 ecuaciones de movimiento con 4 grados de libertad que posteriormente se reducen al tener consideraciones especiales generando 2 ecuaciones de movimiento con 2 grados de libertad.

Posteriormente se provee de una interpretación algorítmica para sustituir más fácilmente los valores reales de la bicicleta, el sistema se representa mediante un modelo LPV que considera la velocidad traslacional como un parámetro variable en el tiempo y se adecuan las ecuaciones de movimiento en un sistema de ecuaciones lineales en la forma de Euler-Lagrange. Finalmente se hace un análisis del sistema LPV en lazo abierto.

En el Capítulo 4 se realiza la representación del sistema en espacio de estados LPV y se realiza la formulación del problema de control formulando la solución mediante la teoría vista en el Capítulo 2. Se justifica el uso del observador de orden completo y la justificación de la ley de control utilizada.

Usando los Lemas del Capítulo 2, se formulan PLMIS para la estabilización del sistema LPV, así mismo, se deducen Corolarios para la colocación de polos del sistema LPV en la intersección de unas adecuadas regiones de desigualdades lineales matriciales (LMI) con el propósito de obtener un transitorio adecuado para las exigencias

1. INTRODUCCIÓN.

del diseño del controlador.

En el Capítulo 5 se presentan los parámetros de diseño utilizados, el resultado de la búsqueda numéricas de las PLMIs y finalmente los resultados de las simulaciones de la formulación del problema de control comprobando la colocación de polos en las regiones deseadas mediante distintas simulaciones.

En el Capítulo 6 se dan las conclusiones generales, los aportes de este trabajo de tesis así como los trabajos futuros que de este documento se puedan derivar.

Finalmente se presentan Anexo B donde se presenta el código del control toolbox de MatLab para resolver LMIs utilizado para encontrar las ganancias de retroalimentación $K(jh)$ y de observador $L(jh)$.

Capítulo 2

Marco Teórico.

En este Capítulo se explica la teoría de un sistema Lineal de parámetros variantes en el tiempo (LPV), las formas comunes de su representación, sus ventajas y desventajas con respecto a otros tipos de sistemas y su representación matemática.

En la Sección 2.1 se provee una visión general de los sistemas LPV esclareciendo que tipos de sistemas califican como un LPV y los problemas que conlleva lograr su representación. También se presentan nociones de estabilidad y puntos de equilibrio.

En la Sección 2.2 se presenta la teoría de los tipos principales de representación de sistemas LPV sobre los cuales se puede extender teoría existente para sistemas LTI, se presenta el análisis de estabilidad de Lyapunov para los tipos principales de sistemas LPV.

En la Sección 2.3 se presenta la relajación de PLMIs de forma general y posteriormente se aborda la técnica del grilleo y se menciona la de Suma de Cuadrados (SoS).

Finalmente en la sección 2.4 se analiza la colocación de polos con el propósito de obtener una respuesta transitoria adecuada a las exigencias de control que se requieran de los sistemas LPV.

Se utiliza una función de Lyapunov común para sistemas LPV polinomiales y se hace la extensión del sistema a una intersección de regiones LMI conocidas.

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. Visión General de los Sistemas LPV.

Un sistema no lineal es una representación matemática de un sistema real que describe su comportamiento con respecto al tiempo. Estos sistemas no lineales por lo general implican una representación matemática muy complicada y extensa mediante sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs).

Su descripción general en espacio de estados tiene la siguiente forma general:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de estados y el vector de entradas de control.

Generalmente, el diseño real de las técnicas de control no lineal es una tarea sumamente compleja, incluso si el sistema no lineal es completamente conocido [38]. Algunas veces se puede deducir una representación (LTI) para trabajar en un punto de operación del sistema no lineal.

Un sistema LTI se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el vector de estados, el vector de entradas de control y el vector de salidas medidas respectivamente. A , B y C son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

Un sistema LTI (2.2) es obtenido por linealizar en un punto de operación un sistema no lineal. Por ello no es posible garantizar estabilidad y desempeño para las diferentes trayectorias entre distintos puntos de operación de un sistema no lineal representado como un sistema LTI.

Una alternativa para representar modelos no lineales es por la representación LTV que se obtiene normalmente al desarrollar la extensión en series de Taylor truncada a primer orden del modelo no lineal [39].

Este tipo de representación de sistemas no tienen asociada una teoría de análi-

2.1 Visión General de los Sistemas LPV.

sis y síntesis en un nivel de madurez como la encontrada en los sistemas LTI y en consecuencia, las potenciales aplicaciones están restringidas a problemas con una estructura particular.

La descripción en variables de estado de los sistemas LTV está completamente definida a través de la dependencia explícita del tiempo de las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ como se aprecia en la ecuación(2.3):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el vector de estados, el vector de entradas de control y el vector de salidas medidas respectivamente. $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son matrices dependientes del tiempo de dimensiones adecuadas.

Otra alternativa para representar sistemas no lineales es mediante el enfoque Lineal de Parámetros Variables (LPV). Esta representación LPV es un caso especial de los de sistemas LTV pues la varianza en el tiempo está implícita en los parámetros, mientras que el caso LTV la varianza en el tiempo se caracteriza a través de una función en el tiempo.

Los sistemas LPV se volvieron muy populares debido a que pueden representar con cierto grado de precisión sistemas complejos no lineales por medio de un conjunto de modelos locales lineales interpolados por funciones de programación convexas [28, 3].

El principal atractivo de la representación LPV es debido a que estas funciones de programación implican variaciones paramétricas, describiendo la varianza en el tiempo y el comportamiento no lineal. Ésto permite aplicar poderosas técnicas desarrolladas para sistemas LTI a sistemas no lineales [40].

Los sistemas LPV se describen en espacio de estados de la siguiente forma [41]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\vartheta(t))x(t) + B(\vartheta(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^r$ son el vector de estados, el vector de entradas de control, el vector de salidas medidas y el vector de parámetros

2. MARCO TEÓRICO.

variables respectivamente.

$A(v(t))$, $B(v(t))$ son matrices dependientes de los parámetros de dimensiones adecuadas y se asume que C es una matriz constante de apropiadas dimensiones no afectada por las variaciones paramétricas.

Este tipo de representación LPV es la más común y se utiliza en diferentes trabajos: [2], [40] y [41]. Una revisión detallada del estado del arte de sistemas LPV se puede ver en [42].

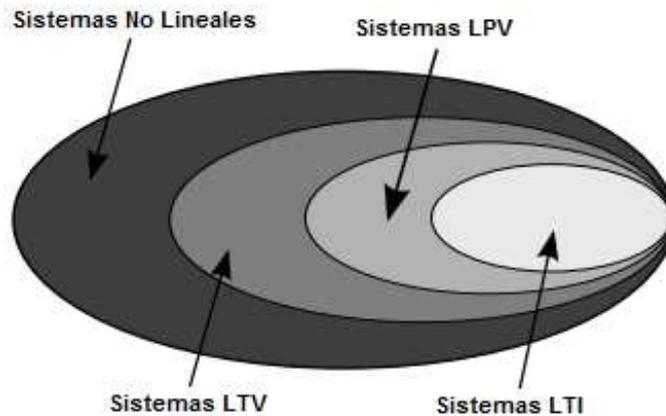


Figura 2.1: Diagrama de Venn de los sistemas no lineales.

En la Fig. 2.1 se puede apreciar que los sistemas LPV aproximan mejor el sistema no lineal que el sistema LTI.

Generalmente cuando se consideran sistemas LPV surgen dos problemas [3]:

- Cada trayectoria para los coeficientes de la varianza en el tiempo son conocidos (*e.g.* $a(t) = \sin(t)$).
- Los coeficientes de las trayectorias son desconocidos pero que permanezcan dentro de un intervalo de valores conocidos (*e.g.* $a(t) \in [a_{min}, a_{max}]$ y eventualmente $\dot{a}(t) \in [d_{min}, d_{max}]$).

La estabilidad de sistemas LPV tiene diferentes formas de análisis, siendo el análisis de estabilidad de Lyapunov la más tratada.

2.1 Visión General de los Sistemas LPV.

La idea principal detrás de la teoría de estabilidad de Lyapunov es la de que, si es posible encontrar una función de Lyapunov no negativa que envuelva la energía contenida dentro del sistema a analizar, esta función de Lyapunov decrezca con el tiempo y tenga como punto de equilibrio el 0, entonces se dice que el sistema es estable.

Teorema 2.1.1. (Teorema de estabilidad de Lyapunov [43]). *Considere el sistema dinámico general:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.5)$$

Tal que $x(0) = x_0$. Si existe una función $V(x(t))$ tal que:

1. $\eta \|x(t)\|_2^2 \leq V(x(t)) \leq \varepsilon \|x(t)\|_2^2$, $\eta, \varepsilon > 0$.
2. *La derivada de $V(x(t))$ sobre las trayectorias de solución del sistema (2.5) satisface $\frac{\partial V}{\partial x} Ax(t) \leq -\theta \|x(t)\|_2^2$, $\theta > 0$ y $\dot{V}(0) = 0$.*

Entonces el sistema es asintóticamente estable y $V(x(t))$ es llamada una función de Lyapunov para (2.5).

Demostración.

Es bien conocido que si los eigenvalores de la matriz A tiene parte real negativa, entonces el sistema es asintóticamente estable. Ahora bien, la solución del sistema (2.5) es $x(t) = e^{At}x_0$ muestra que esta converge a 0 si y solo si la función es decreciente. Esto se verifica si y solo si los eigenvalores se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Para sistemas LTIs la función de Lyapunov está en términos de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI), por lo que para sistemas LPV la función de Lyapunov estará en términos de Desigualdades Lineales Matriciales Parametrizadas (PLMI) [44].

Un cuerpo en un punto de equilibrio, si no se le perturba, no sufre aceleración de traslación o rotación, porque la suma de todas las fuerzas y la suma de todos los momentos que actúan sobre el cuerpo son cero.

Sin embargo, si el cuerpo se desplaza ligeramente, son posibles tres resultados:

1. Punto de equilibrio estable: Se da si el cuerpo regresa a su posición original.
2. Punto de equilibrio inestable: Se da si el objeto se aparta más de su posición original.

2. MARCO TEÓRICO.

3. Punto de equilibrio neutro o indiferente: Se da cuando el objeto permanece en su nueva posición.

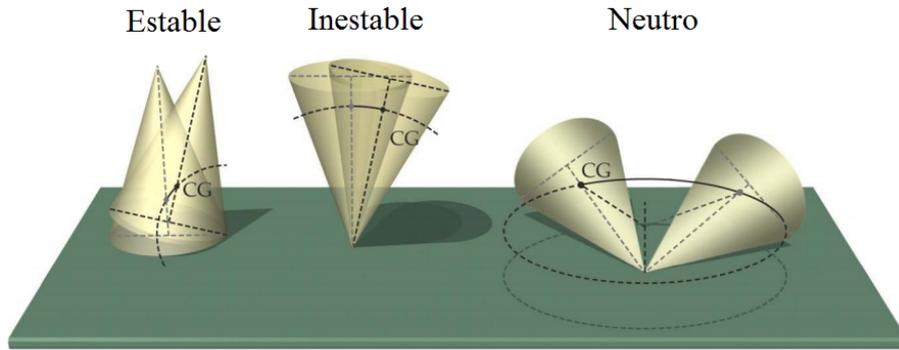


Figura 2.2: Ejemplificación de los puntos de equilibrio con un cuerpo cónico.

En la Figura 2.2 se puede apreciar la ejemplificación de los puntos de equilibrio de un cuerpo cónico en donde CG es el centro de gravedad de dicho cuerpo.

El punto de equilibrio estable es de mucho interés ya que al conocer las propiedades que lo hacen estable, se pueden hacer manipulaciones adecuadas para convertir los otros puntos de equilibrio en estables o mover dicho punto de equilibrio por medio de técnicas de control [45].

2.2. Clasificación de Sistemas LPV.

Entre la amplia variedad de sistemas LPV, es posible generalizar tipos principales de sistemas LPV por la forma de involucrar el parámetro variable en el tiempo dentro del sistema [3]:

1. Formulación Politópica.
2. Formulación Polinomial.
3. Formulación por Transformación Lineal Fraccional (LFT).

2.2.1. Sistemas Politópicos.

Los sistemas politópicos son muy extendidos en el diseño y análisis de control robusto. Han sido estudiados en diversos artículos, por ejemplo mirar [46, 47, 48].

Un sistema politópico variante en el tiempo es un sistema gobernado por las siguientes expresiones [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\vartheta(t))x(t) + B(\vartheta(t))u(t) \\ y(t) = C(\vartheta(t))x(t) + F(\vartheta(t))u(t) \end{cases}. \quad (2.6)$$

Donde

$$\begin{bmatrix} A(\vartheta(t)) & B(\vartheta(t)) \\ C(\vartheta(t)) & F(\vartheta(t)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_a^p} \vartheta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & F_i \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Con $\sum_{i=1}^{N_a^p} \vartheta_i(t) = 1$, $\vartheta_i(t) \geq 0$, donde N_a^p es el número de vértices de los parámetros variables en el tiempo $\vartheta(t)$ e i es el valor de cada uno de los vértices del politopo.

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^r$ son el vector de estados del sistema, el vector de entradas del sistema, el vector de salidas del sistema y el vector de parámetros variables en el tiempo respectivamente.

A , B , C y F son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Para expresar de forma concisa como resolver un sistema LPV politópico concerniente a esta tesis se tratará con una formulación primitiva [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{N_a^p} \vartheta_i(t) A_i x(t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donde $x(t)$ son los estados del sistema y $\vartheta(t) \in \Gamma$ donde:

$$\Gamma := \left\{ \text{col}_{i=1}^N(\vartheta_i(t)) : \sum_{i=1}^{N_a^p} \vartheta_i(t) = 1, \vartheta_i(t) \geq 0 \right\} \quad (2.9)$$

Una condición suficiente y necesaria para estabilidad cuadrática está dada en la siguiente proposición:

Proposition 2.2.1.1 [3] *El sistema LPV politópico (2.8) es cuadráticamente estable si y solo si existe una matriz $P = P^T > 0$ tal que:*

$$A_i^T P + P A_i < 0. \quad (2.10)$$

Se cumpla $\forall i = 1, \dots, N_a^p$.

2. MARCO TEÓRICO.

Demostración: Definida la función de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ con $P = P^T > 0$ cuya derivada es:

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T (A(\vartheta(t))^T P + P A(\vartheta(t))) x(t) < 0. \quad (2.11)$$

La estabilidad cuadrática del punto de equilibrio $x_{eq} = 0$ del sistema (2.8) es probada si $\dot{V}(x(t)) < 0$ para toda $x \neq 0$. Esto produce la siguiente Desigualdad Lineal Matricial (LMI) dependiente del parámetro:

$$\sum_{i=1}^{N_a} \vartheta_i(t) (A_i^T P + P A_i) < 0 \quad (2.12)$$

para cualquier $\vartheta(t) \in \Gamma$.

Suficiencia:

Se asume que $A_i^T P + P A_i < 0 \forall i = 1, \dots, N_a$. Entonces es obvio que (2.12) sostiene que la suma de matrices definidas negativas es también una matriz definida negativa.

Necesidad:

Como (2.12) debe cumplirse para cada valor de $\vartheta(t) \in \Gamma$ entonces debe cumplirse para todos los vértices del politopo y esto implica :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \forall i = 1, \dots, N_a. \quad (2.13)$$

Un hecho interesante del resultado previo es la transformación de la LMI dependiente del parámetro (2.12) en un conjunto de N_a LMI's independientes del parámetro variable en el tiempo $\vartheta(t)$.

2.2.2. Sistema LPV Polinomial.

Los sistemas polinomiales son la clase más común de representación LPV y por ello tienen una teoría más extensa y trabajos más especializados [49, 50].

Son una generalización de sistemas LPV afines y multiafines, en un sistema LPV afín solamente se tiene un parámetro variable en el tiempo involucrado solamente en una matriz, mientras que en un sistema LPV multiafín este parámetro variable en

el tiempo puede estar involucrado en una o más matrices en una representación en espacio de estados.

Se analizará el caso más general que puede ser fácilmente aplicable a un afín o multiafín.

Su expresión general está dada por [3]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\vartheta(t)) + B(\vartheta(t))u(t) \\ y(t) = C(\vartheta(t)) + F(\vartheta(t)) \end{cases} \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{bmatrix} A(\vartheta(t)) & B(\vartheta(t)) \\ C(\vartheta(t)) & F(\vartheta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & F_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_b} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & F_i \end{bmatrix} \vartheta^{\alpha_i}. \quad (2.15)$$

Donde $\alpha_i = [\alpha_i^1 \dots \alpha_i^N]$ y $\vartheta^{\alpha_i} = \vartheta_1^{\alpha_i^1}, \vartheta_2^{\alpha_i^2}, \dots, \vartheta_N^{\alpha_i^N}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^r$ son el vector de estados del sistema, el vector de entradas del sistema, el vector de salidas del sistema y el vector de parámetros variables en el tiempo respectivamente. A , B , C y F son matrices constantes de dimensiones apropiadas.

Tales sistemas son ligeramente más complicados para analizar, pero recientemente, algunos enfoques han traído interesantes soluciones para el análisis y síntesis de control para este tipo de sistemas.

Para expresar de forma concisa como resolver un sistema LPV polinomial que concierne al trabajo de investigación de este tipo de sistemas se tratará directamente con una formulación primitiva [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\vartheta(t))x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \vartheta(t) &\in U_\vartheta \subsetneq \mathbb{R}^{N_b}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y:

$$U_\vartheta = \{\vartheta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^q, |\vartheta_i(t)| \leq \varphi\}. \quad (2.17)$$

Donde φ es valor máximo que el parámetro variable en el tiempo puede tomar. Eventualmente :

2. MARCO TEÓRICO.

$$\dot{\vartheta}(t) \in V_{\vartheta} \subsetneq \mathbb{R}^{N_b}. \quad (2.18)$$

Donde:

$$V_{\vartheta} = \left\{ \vartheta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^q, \left| \dot{\vartheta}_i(t) \right| \leq \rho \right\}. \quad (2.19)$$

Donde ρ es el valor máximo que la derivada del parámetro variable puede tomar. Entonces se expresan las condiciones de estabilidad del sistema (2.16) en el Lema 2.2.2.1.

Lema 2.2.2.1. [3] *El sistema (2.16) es cuadráticamente estable si y solo si existe una matriz continuamente diferenciable $P = P^T > 0$ con $V(x(t)) := x(t)^T P x(t) > 0$ como función de Lyapunov $\forall x(t) \neq 0$, $V(0) = 0$ y $\dot{V}(0, v(t)) = 0 \forall v(t) \in V_{\vartheta} \cap U_{\vartheta}$ tal que (2.20) permanece $\forall \vartheta(t) \in U_{\vartheta}$:*

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T (A(\vartheta(t))^T P + P A(\vartheta(t))) x(t) < 0 \quad (2.20)$$

Demostración.

Se define la función de Lyapunov $V(x(t)) := x(t)^T P x(t) > 0$ con $P = P^T > 0$. Ahora se calcula la derivada de la función de Lyapunov elegida:

$$\dot{V}(x(t)) := x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t) < 0. \quad (2.21)$$

Ahora sustituyendo (2.16) en (2.21) y factorizando $x(t)^T$ y $x(t)$ tenemos que:

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T (P A(\vartheta(t)) + A(\vartheta(t))^T P) x(t) < 0. \quad (2.22)$$

Que es equivalente a la existencia de una matriz $\tilde{N} = \tilde{N}^T > 0$ que satisface la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T (P A(\vartheta(t)) + A(\vartheta(t))^T P) x(t) + \tilde{N} = 0. \quad (2.23)$$

Por lo que si es posible encontrar las matrices \tilde{N} , $P \in \mathbb{S}_{++}^n \times \mathbb{S}_{++}^n$ de la ecuación de Lyapunov (2.23) entonces el sistema (2.16) tiene estabilidad asintótica.

La LMI (2.20) del Lema 2.2.2.1 solo funciona para pequeñas variaciones de los parámetros variables en el tiempo $\vartheta(t)$, por lo que la negatividad de los eigenvalores del sistema no son suficientes para asegurar estabilidad global de un sistema LPV.

Este se debe a que al convertir una representación no lineal a una LPV una o más variables pasan a ser parámetros variables en el tiempo $\vartheta(t)$, al hacer esto, se reduce el número de ecuaciones simultaneas y la dinámica de la variable del sistema no lineal se puede perder si no se agregan consideraciones especiales a la función de Lyapunov.

La tarea de buscar las matrices \tilde{N} y P puede no ser factible debido a un amplio rango de valores de $\vartheta(t)$, pues si se quiere emular el comportamiento del sistema no lineal, no basta con que \tilde{N} y P se satisfagan al evaluar en los vértices de un polítopo, sino que se deben cumplir para todas las trayectorias de los parámetros variables en el tiempo para todo el rango de valores de $\vartheta(t) \in U_\vartheta$.

Esta problemática se resolvió en esta tesis al tratar con una Función de Lyapunov dependiente de los parámetros obteniendo así el Lema 2.2.2.2 que se construye haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov [43].

Lema 2.2.2.2. *El sistema (2.16) es policuadráticamente estable y robustamente estable ante variaciones paramétricas si y solo si existe una matriz parametrológicamente dependiente continuamente diferenciable $P(\vartheta(t)) = P(\vartheta(t))^T > 0$ con $V(x(t), \vartheta(t)) := x^T P(\vartheta(t)) x(t) > 0$ como función de Lyapunov dependiente del parámetro $\forall x(t) \neq 0$, $V(0) = 0$ y $\dot{V}(0, \vartheta(t)) = 0$, $\forall \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t) \in V_\vartheta \cap U_\vartheta$ tal que:*

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T \left(A(\vartheta(t))^T P(\vartheta(t)) + P(\vartheta(t)) A(\vartheta(t)) + \rho \frac{\partial P(\vartheta(t))}{\partial \vartheta(t)} \right) x(t) < 0 \quad (2.24)$$

Entonces la solución del sistema (2.16) presenta estabilidad policuadrática y es exponencialmente estable para todas las trayectorias del parámetro variable en el tiempo $\vartheta(t)$ y la estabilidad es robusta ante variaciones paramétricas.

Demostración.

Se define la función de Lyapunov $V(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T P(\vartheta(t)) x(t) > 0$ con $P(\vartheta(t)) = P(\vartheta(t))^T > 0$. Ahora se calcula la derivada de la función de Lyapunov elegida:

2. MARCO TEÓRICO.

$$\dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := x(t)^T \left(P(\vartheta(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial P(\vartheta(t))}{\partial \vartheta(t)} \dot{\vartheta}(t)x(t) \right) + \dot{x}(t)^T P(\vartheta(t))x(t) < 0. \quad (2.25)$$

Ahora sustituyendo (2.16) en (2.25) y factorizando $x(t)^T$ y $x(t)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := & x(t)^T \left(P(\vartheta(t))A(\vartheta(t)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial P(\vartheta(t))}{\partial \vartheta(t)} \dot{\vartheta}(t) + A(\vartheta(t))^T P(\vartheta(t)) \right) x(t) < 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Que es equivalente a la existencia de una matriz parametroldependiente $\tilde{N}(\vartheta(t)) = \tilde{N}(\vartheta(t))^T > 0$ tal que la ecuación de Lyapunov (2.27) se satisface.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \vartheta(t)) := & x(t)^T \left(P(\vartheta(t))A(\vartheta(t)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial P(\vartheta(t))}{\partial \vartheta(t)} \dot{\vartheta}(t) + A(\vartheta(t))^T P(\vartheta(t)) \right) x(t) + \tilde{N}(\vartheta(t)) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Entonces, si es posible encontrar las matrices parametroldependientes $P(\vartheta(t))$, $\tilde{N}(\vartheta(t)) \in \mathbb{S}_{++}^n \times \mathbb{S}_{++}^n$ de la ecuación de Lyapunov (2.27), esto equivaldría a que el sistema (2.16) tiene estabilidad asintótica que permanece $\forall \vartheta(t) \in U_\vartheta$ y $\forall \dot{\vartheta}_i := \text{col}_{i=1}^{N_\vartheta}(\dot{\vartheta}_i(t)) \in V_\vartheta$ donde $\dot{\vartheta}_i$ es el conjunto de vertices en donde la derivada del parámetro variable en el tiempo se desenvuelve. Finalmente el término $\rho = \max\{\dot{\vartheta}(t)\}$ se sustituye por $\dot{\vartheta}(t)$ multiplicando a $\frac{\partial P(\vartheta(t))}{\partial \vartheta(t)}$ para limitar el máximo rango de variación de $\vartheta(t)$.

Del Lema 2.2.2.2 se obtiene una formulación politópica que solo contiene 2 vértices relativos a la derivada de la velocidad, es decir, esta formulación no solo depende de los parámetros variables en el tiempo, sino que también de su primer derivada y es suficiente con considerar la cota superior ρ del conjunto V_ϑ para cualquier derivada de los parámetros en el polítopo.

Lo anterior corrige el problema de la pérdida de la dinámica de los parámetros variables en el tiempo durante el proceso de adecuar un modelo no lineal a un modelo LPV.

2.2.3. Sistema LPV por Transformación Lineal Fraccional (LFT).

Este tipo de formulación LPV puede enbebir un sistema LPV polinomial tratando en dos partes el sistema: la parte con la varianza del parámetro y la parte constante para el análisis por separado [51].

El sistema es reescrito como la interconexión de dos sistemas [51]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Fu(t) \\ u(t) = \Theta(\vartheta(t))y(t). \end{cases} \quad (2.28)$$

Con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^r$ son el vector de estados del sistema, el vector de entradas del sistema, el vector de salidas del sistema y el vector de parámetros variables en el tiempo respectivamente. A , B , C , F y Θ son matrices constantes de dimensiones apropiadas.

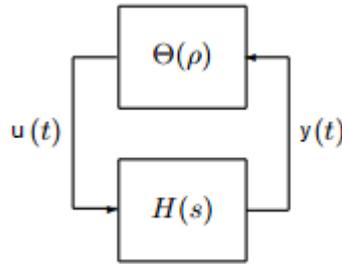


Figura 2.3: Sistema LPV (2.28) escrito en forma LFT donde $H(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1}B + D$

Tal como se describe en la Figura 2.3, las matrices del sistema (\tilde{A} , B , C , D) son constantes y forman el subsistema $H(s)$, mientras que la parte del parámetro variante en el tiempo es el resto del sistema.

La estabilidad de dichos sistemas depende de la estabilidad del sistema LTI que contiene una amplia variedad de análisis de controlabilidad [45] y de la estabilidad del sistema LPV analizada en las Secciones 2.2.1 y 2.2.2. La estabilidad de ambos no

2. MARCO TEÓRICO.

necesariamente satisface la estabilidad del sistema completo [52].

Para un análisis más profundo de sistemas LPV LFT se recomienda revisar estos trabajos acerca de la teoría de estabilidad y control [52, 40], existen aplicaciones recientes de sistemas LPV LFT que pueden verse en [40, 53, 54, 55].

2.3. Relajación de PLMIs.

Las Desigualdades Lineales Matriciales Parametrizadas dependen de uno o más parámetros variables, por lo que la LMI tiene soluciones infinitas.

Las PLMIs pueden ser reducidas a un problema de dimensión finita por proyectar $\vartheta(t)$ en bases finitas. Por ejemplo una base finita vista en [36]:

$$f(\vartheta(t)) = \vartheta_i^p, i = 1, \dots, N_b^p. \quad (2.29)$$

Donde $f(\vartheta(t))$ es una función que depende de $\vartheta(t)$, ϑ_i^p es el valor del parámetro variable en el i th instante y N_b^p el número total de bases finitas, p es el número de parámetros variables en el tiempo. Una opción para la matriz $P(\vartheta(t))$ puede ser:

$$P(\vartheta(t)) = \sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p f(\vartheta(t)). \quad (2.30)$$

Donde las matrices $P_i^p = P_i^{pT}$ tienen que ser determinadas. Y una opción para la matriz $A(\vartheta(t))$ puede ser:

$$A(\vartheta(t)) = \sum_{i=1}^{N_b^p} A_i^p f(\vartheta(t)). \quad (2.31)$$

Entonces las condiciones de estabilidad policuadrática con robustez a variaciones del parámetro variable en el tiempo se transforman en (2.32) que es deducida en el Corolario 2.3.1 que a su vez es deducido del Lema 2.2.2.2 desarrollado para esta tesis.

Corolario 2.3.1 *El sistema (2.16) es policuadráticamente estable y robusto a variaciones del parámetro variable en el tiempo si y solo si existe una matriz $P_i^p = (P_i^p)^p$ tal que las LMIs:*

$$\left(\sum_{i=1}^{N_b^p} A_i^p f(\vartheta(t)) \right)^T \left(\sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p f(\vartheta(t)) \right) + \left(\sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p f(\vartheta(t)) \right) \left(\sum_{i=1}^{N_b^p} A_i^p f(\vartheta(t)) \right) + \sum_{i=1}^{N_a^p} \dot{\vartheta}_i \left(\sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p \frac{\partial f(\vartheta(t))}{\partial \vartheta_i} \right) \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p f(\vartheta(t)) > 0 \quad (2.33)$$

Permanece para toda $\vartheta(t) \in U_\vartheta$ y toda $\dot{\vartheta}_i := \text{col}_{i=1}^{N_a^p}(\dot{\vartheta}_i) \in V_\vartheta$ donde $\dot{\vartheta}_i$ es el conjunto de vértices del polítopo en donde $\dot{\vartheta}(t)$ se desenvuelve.

Esto convierte un problema de dimensión infinita en uno de dimensión finita donde solo se buscan N_b^p matrices. En este caso, N_a^p solo toma 2 valores: 0 y ρ , pues son los vértices considerados para $\dot{\vartheta}(t)$ en una formulación LPV polinomial.

Por lo anterior, se tiene una formulación politópica LPV dentro de la formulación polinomial LPV tal como se explicó en la Sección 2.2.2.

La idea central, generalmente admitida es la de mimificar el comportamiento del sistema al reproducir los mismos parámetros dependientes para $P(\vartheta(t))$.

Existen diversas técnicas para relajar PLMIs, la más intuitiva y utilizada es la de gridding, vista en la Sección 2.3.1.

Otro tipo de relajación es el método de Suma de Cuadrados (SoS) que consiste en describir un conjunto de valores del parámetro por un conjunto de desigualdades polinomiales usando una variación del procedimiento- S [56].

Para más información acerca de esta técnica consultar [57, 58, 59].

2.3.1. Relajación de PLMIs por discretización (gridding).

Esta relajación es aplicable para cada tipo de PLMI provista de tal forma que los coeficientes de las PLMIs son constantes para cualquier valor en el conjunto del parámetro variable en el tiempo.

2. MARCO TEÓRICO.

Esta es la más simple e intuitiva forma de relajar PLMIs pues reemplaza el problema inicial con infinitos valores por una versión discretizada que envuelve un número finito de LMIs; sin embargo, la densidad del grileo es desconocida y difícil de determinar debido a que existen regiones críticas donde la LMI no tiene solución y es impensable conocer estas regiones.

Surge una paradoja importante pues el hecho de conocer donde no es factible una PLMI es equivalente a conocer donde si es factible lo cual se conoce hasta después de efectuar al búsqueda numérica.

Para resolver esto existen enfoques probabilísticos que han sido desarrollados para este tipo de situaciones como puede verse en [60, 61, 62].

También existen ciertos tutoriales para resolver PLMI's como el mostrado en [63].

La PLMI (2.32) del Corolario 2.3.1 es aproximada por la colección finita de LMIs (2.34) y (2.35) obtenidas por dividir el intervalo $[0, \varphi]$ en N_b^p subintervalos y para la derivada parcial $\sum_{i=1}^{N_b^p} \dot{\vartheta}_i \left(\sum_{i=1}^{N_b^p} P_i^p \frac{\partial f(\vartheta(t))}{\partial \vartheta_i} \right)$ se utilizó un aproximación por diferencias finitas [2].

$$(A(ih)^p)^T P(ih)^p + P(ih)^p A(ih)^p \pm \rho \frac{P(ih+h)^p - P(ih)^p}{h} < 0, \quad i = 0, \dots, (N_b - 1)^p, \quad (2.34)$$

$$P(ih)^p > 0, \quad i = 0, \dots, (N_b - 1)^p. \quad (2.35)$$

Donde h es el ancho de subintervalos de los parámetros variables en el tiempo, p es el número de parámetros variables en el tiempo, $A(ih)^p$ es la matriz A correspondiente al $(ih)^p$ valor de los parámetros variables en el tiempo.

$P(ih)^p$ es la matriz P correspondiente al $(ih)^p$ valor de los parámetros variables en el tiempo, ρ es la cota máxima permitida para $\dot{\vartheta}(t)$ y N_b^p es el número de subintervalos en que se dividió el parámetro variable en el tiempo.

Es importante notar que la discretización puede ser no uniforme sobre la trayectoria del parámetro variable en el tiempo, de hecho, se ha demostrado que puede ser la mejor opción.

Por ejemplo, en un polinomio de interpolación de Lagrange, si los puntos son igualmente espaciados, las funciones interpoladas oscilan alrededor de la curva real (llamado el fenómeno Runge [64]), entonces los eigenvalores pueden cambiar entre puntos de la discretización.

Para interpolaciones con funciones y sus derivadas se puede considerar el polinomio de interpolación de Hermite [65].

Aunque estos métodos dan ideas de un esquema de discretización, para funciones desconocidas es muy complicado debido al elevado número de LMIs locales. Para más detalles acerca de estos tópicos, buscar ejemplos en [66, 67].

En términos de complejidad computacional, un sistema que tiene p parámetros discretizados en $N_b - 1$ puntos. Esto significa que el número total de puntos es $(N - 1)^p$, esto implica que el número de LMIs a resolver simultáneamente depende de la densidad de grillado y del número de parámetros variables en el tiempo.

2.4. Colocación de polos en sistemas LPV.

Es bien conocido que la respuesta transitoria de un sistema LTI y para un sistema LPV está definida por la colocación de sus polos [30].

Para restringir los eigenvalores a moverse solo en regiones prescritas, se pueden colocar restricciones en la búsqueda de las LMIs con el propósito de asegurar una respuesta transitoria satisfactoria.

Las regiones de interés incluyen la región α -estable, sectores cónicos, discos, etc. Una región adecuada y comunmente usada es el conjunto $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ de números complejos $x + jy$ tal que [21]:

$$x < -\alpha < 0, |x + jy| < \gamma, \tan \beta x < -|y| \quad (2.36)$$

2. MARCO TEÓRICO.

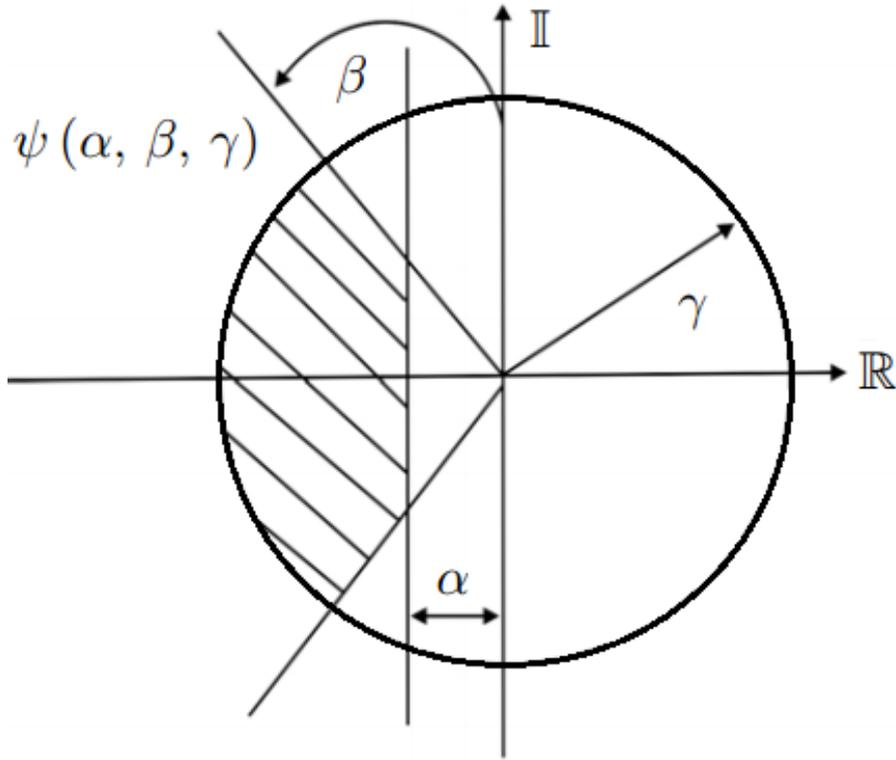


Figura 2.4: Región $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$

En un sistema dinámico estable, el transitorio del sistema está regido por sus eigenvalores que pueden o no contener parte real o parte imaginaria, la parte real dicta que tan veloz es el estado en converger al estado estable mientras que la parte imaginaria dicta el tamaño de sobretiros durante el transitorio [45].

Tal como se muestra en la Figura 2.4 confinar los polos del sistema a estas regiones LMI aseguran según en [21]:

- α evitar estabilidad marginal y tiempo de asentamiento.
- β oscilaciones adecuadas y la frecuencia de los modos de oscilación.
- γ una frecuencia natural no amortiguada aceptable $\omega_d = \gamma \cos \beta$.

Con el propósito de simplificar el análisis de la colocación de polos, se analizará un sistema dinámico LPV (2.16). Entonces se dice que el sistema LPV es $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ -estable si se cumplen las siguientes restricciones LMI (presentadas en [21]).

$$P(\vartheta(t))A(\vartheta(t)) + P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T + 2\alpha P(\vartheta(t)) < 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma P(\vartheta(t)) & A(\vartheta(t))P(\vartheta(t)) \\ P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T & -\gamma P(\vartheta(t)) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \beta(A(\vartheta(t))P(\vartheta(t)) + P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T) & \cos \beta(A(\vartheta(t))P(\vartheta(t)) - P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T) \\ \cos \beta(P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T - A(\vartheta(t))P(\vartheta(t))) & \sin \beta(A(\vartheta(t))P(\vartheta(t)) + P(\vartheta(t))A(\vartheta(t))^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

Donde $P(\vartheta(t)) = P(\vartheta(t))^T > 0$. Las tres regiones LMI son derivadas del teorema de estabilidad de Lyapunov y son la intersección de tres regiones elementales LMI: una región α -estable, un sector cónico y un sector disco.

2.5. Conclusiones

Los sistemas no lineales se pueden linealizar para obtener un modelo LTV que aproxima un sistema no lineal con varianzas en el tiempo que pueden ser conocidas o no.

Un sistema LPV es un caso especial de sistema LTV pero con la varianza del tiempo implícita en los parámetros, a su vez un sistema LPV es un conjunto de sistemas LTI interpolados por funciones de programación que dependen de la varianza en el tiempo de los parámetros.

Por lo anterior, un sistema LPV aproxima mejor un sistema no lineal que un sistema LTI y permite aplicar extensiones de técnicas para los sistemas LTI ampliamente estudiados que no se podrían generalizar o extender para sistemas LTV.

Existen tres técnicas globales para tratar con sistemas LPV, estas se caracterizan una de otras debido principalmente a como se involucran los parámetros variantes en el sistema.

Dentro de estas tres técnicas se abordó más extensamente la formulación polinomial al ser la más intuitiva y simple de las formulaciones y como se verá en el Capítulo 3 el modelo del sistema puede ser abordado como un sistema LPV polinomial con el parámetro variable en el tiempo $\vartheta(t)$ dentro de la región U_ϑ y eventualmente $\dot{\vartheta}(t)$ dentro de la región V_ϑ .

2. MARCO TEÓRICO.

Cuando se consideran sistemas polinomiales LPV con robustez a variaciones paramétricas variables en el tiempo, las LMIs resultantes son de dimensión infinita, para resolver este problema se utilizan los métodos de suma de cuadrados o la discretización del parámetro variable en el tiempo $\vartheta(t)$.

Para finalizar este capítulo se desarrolló una formulación LMI para la colocación de polos en la región $\psi = (\alpha, \beta, \gamma)$ con el propósito de obtener una respuesta transitoria adecuada al diseño de control.

Capítulo 3

Modelo de la Bicicleta.

En este Capítulo se presentan las ecuaciones de movimiento linealizadas exhaustivamente confirmadas por adecuadas investigaciones o aplicaciones tales como AutoSim y SPACAR [8, 9].

En la Sección 3.1 se analiza exhaustivamente el modelo de la bicicleta y se obtienen las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento de la bicicleta en cuanto a sus momentos angulares.

En la Sección 3.2 se reducen las ecuaciones de movimiento tratadas en la sección previa considerando solamente pequeños cambios en los grados de libertad.

En la Sección 3.3 se da una interpretación algorítmica de las ecuaciones de movimiento linealizadas por considerar pequeñas variaciones en los ángulos para el modelo de la bicicleta bajo estudio.

Se presentan los nuevos grados de libertad para tratar el modelo como un sistema LPV. Las ecuaciones de movimiento se escriben en la forma de Euler-Lagrange.

En esta misma Sección se proveen los datos reales de la bicicleta presente en el laboratorio de electrónica en el CENIDET para sustituir los valores reales.

Finalmente en la Sección 3.4 se realiza el análisis del sistema en lazo abierto y se trata una pequeña explicación de ciertas representaciones y adecuaciones matemáticas útiles para aplicar la metodología LPV.

3. MODELO DE LA BICICLETA.

3.1. Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

El modelo de la bicicleta consiste de cuatro cuerpos rígidos: un marco trasero que incorpora un cuerpo rígido, el marco delantero que incluye el manubrio, la llanta trasera y la llanta delantera. Esto puede verse en la Figura 3.1.

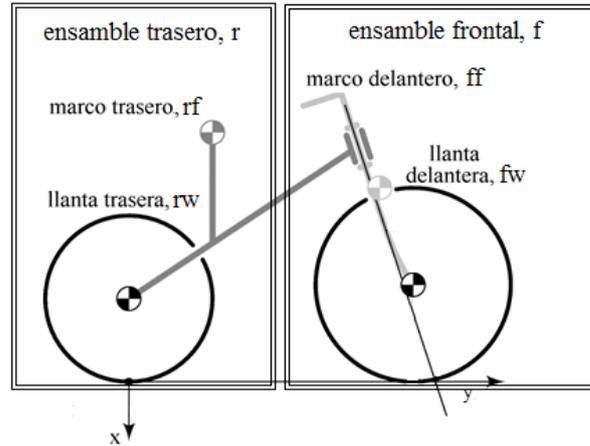


Figura 3.1: La bicicleta dividida en 4 subsistemas: Marco trasero rf , marco delantero ff , llanta trasera rw y llanta delantera fw .

Los coeficientes utilizados en la Figura 3.1 son:

- rw para la llanta trasera.
- rf para el marco trasero.
- ff para el marco delantero.
- fw para la llanta delantera.
- f para el ensamblaje delantero que es el conjunto del marco delantero (ff) más la llanta delantera (fw).
- r para el ensamblaje trasero que es el conjunto del marco trasero (rf) más la llanta trasera (rw).
- x y y son direcciones de los ejes globales xy .

No hay fricción en los puntos de contacto de las llantas con el suelo, tampoco propulsión ni control de un conductor. Estas consideraciones hacen el modelo energéticamente coservativo.

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

La posición global de referencia en el plano cartesiano localiza el cero en el punto de contacto de la llanta trasera con el suelo tal como puede verse en la Figura 3.1.

Para poder describir las características físicas de la bicicleta, su movimiento y las fuerzas que actúan sobre ella se analizará por pequeñas partes para entender el porque se usó este modelo de bicicleta.

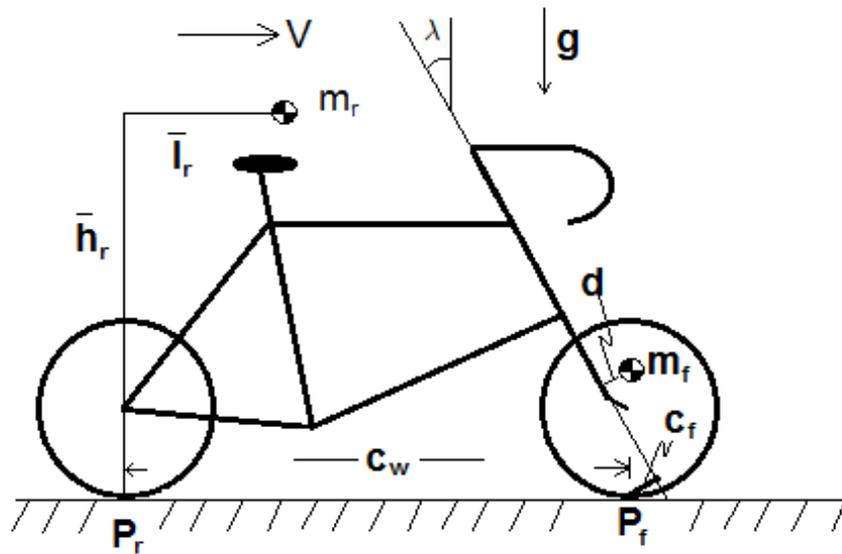


Figura 3.2: Terminología de la bicicleta.

En la Figura 3.2 se muestra el esquema de la bicicleta en donde:

- m_r es la masa total del ensamble trasero que incorpora al marco trasero rf y a la masa total de la llanta trasera rw .
- \bar{l}_e, \bar{h}_r son las coordenadas del centro de masa de ensamble trasero r .
- m_f es la masa total del ensamble frontal que incluye a la llanta delantera fw y el marco delantero ff .
- P_r, P_f son puntos de contacto trasero y delantero respectivamente.
- λ es el ángulo de inclinación del eje de dirección con respecto a la vertical.
- d es la distancia perpendicular del centro de masa de m_f del eje de dirección.
- c_f es la distancia perpendicular del punto de contacto frontal P_f al eje de dirección.

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

3.5 y 3.6.

Dinamicamente la bicicleta se puede tratar como dos cuerpos rígidos unidos en el eje de dirección.

Como puede apreciarse en la Figura 3.3, para aceleraciones rotacionales \ddot{X} , $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\psi}$ la fuerza resultante puede ser encontrada usando los momentos de inercia de los ensambles delantero y trasero considerando a las llantas como no rotatorias.

Las rotaciones de las llantas producen un efecto giroscópico que puede ser incorporado al modelado asumiendolo como una parte del momento angular H_r del ensamble trasero y también H_f como parte del momento angular del ensamble frontal, son considerados positivos cuando la bicicleta presenta movimiento de avance.

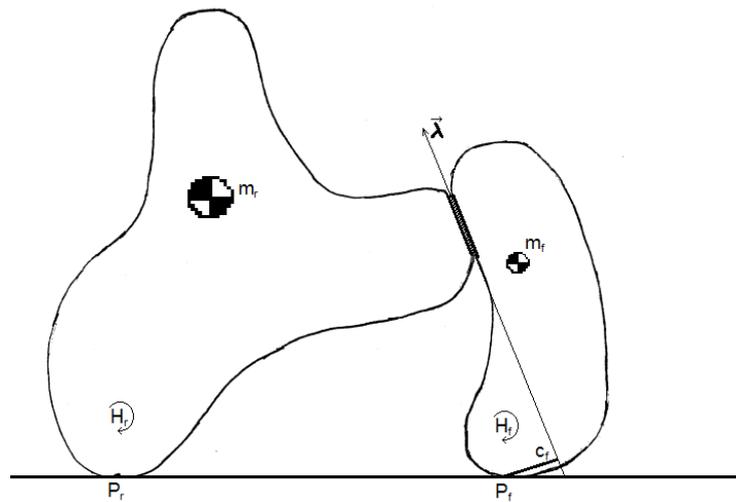


Figura 3.4: Modelo de cuerpo rígido.

En la Figura 3.4 se muestra el modelo de cuerpo rígido de la bicicleta donde:

- $\vec{\lambda}$ es un vector unitario sobre el eje de dirección.
- H_r , H_f son momentos angulares relativos al ensamble trasero y al ensamble frontal respectivamente.

3. MODELO DE LA BICICLETA.

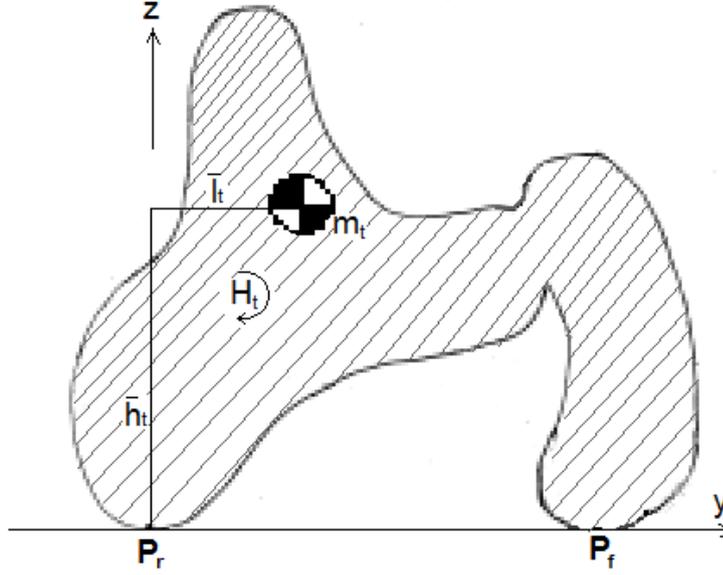


Figura 3.5: Distribución de masas de la bicicleta.

En la Figura 3.5 se muestra la distribución de masa de la bicicleta, en donde:

- m_t es la masa total.
- y, z son los ejes para el ensamble trasero en P_r .
- \bar{l}_t, \bar{h}_t son las posiciones generales del centro de masa m_t en el plano yz .
- H_t es el giro total resultante de las llantas, resultado de la suma de los momentos angulares H_r y H_f .

T es el momento de inercia total para la bicicleta relativo al punto P_r en los ejes yz de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

En términos de tensores inerciales de centros de masa tenemos que $R_{\bar{ij}}$ (inercia del centro de masa del ensamble trasero) en m_r para el ensamble trasero y $F_{\bar{ij}}$ (inercia del centro de masa del ensamble frontal) en m_f para el ensamble frontal tenemos que:

$$T_{yy} = m_r \bar{h}_r^2 + R_{\bar{y}\bar{y}} + m_f \bar{h}_f^2 + F_{\bar{y}\bar{y}}, \quad (3.2)$$

$$T_{zz} = m_r \bar{l}_r^2 + R_{\bar{z}\bar{z}} + m_f (c_w + \bar{l}_f)^2 + F_{\bar{z}\bar{z}} \quad (3.3)$$

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

y

$$T_{yz} = -m_r \bar{h}_r \bar{l}_r + R_{\bar{y}z} - m_f \bar{h}_f (c_w + \bar{l}_f) + F_{\bar{y}z}. \quad (3.4)$$

Las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) son obtenidas de [68] donde se demuestra que la bicicleta no necesita de giroscopios o efectos de movimientos del centro de masa sobre la bicicleta para ser estabilizada a velocidades relativamente pequeñas.

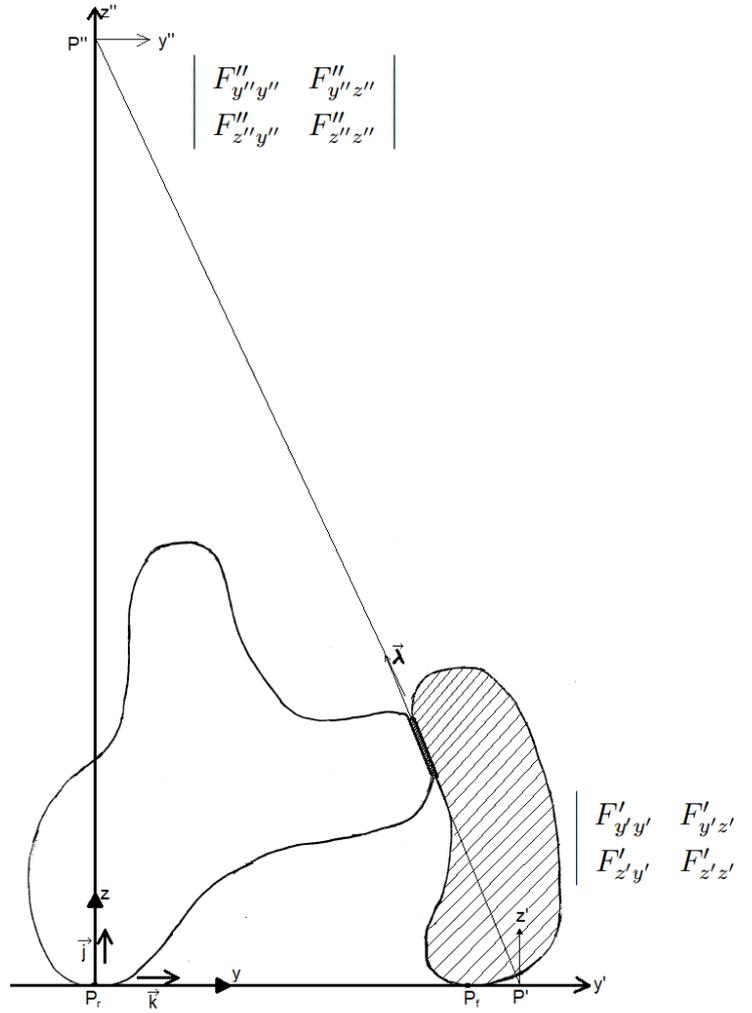


Figura 3.6: Propiedades relevantes de inercia del ensamblaje frontal.

donde:

- P' es el punto en el plano yz donde el eje de dirección intersecta al eje y .
- P'' es el punto en el plano yz donde el eje de dirección intersecta al eje z .

3. MODELO DE LA BICICLETA.

- y', z' son ejes paralelos al plano yz para P' .
- y'', z'' son ejes paralelos al plano yz para P'' .
- \vec{j}, \vec{k} son vectores unitarios sobre y y z respectivamente.
- F' es el momento de inercia del ensamble frontal evaluado en y' y z' .
- F'' es el momento de inercia del ensamble frontal evaluado en y'' y z'' .

En términos generales, en estos diagramas solo se consideran pequeñas desviaciones de los ángulos de inclinación y dirección, de esta misma forma, para propósitos geométricos se considera que los puntos de contacto de las llantas son puntuales y no una superficie como sucede en realidad.

Por supuesto, para encontrar T en la ecuación (3.1) y para encontrar F' y F'' en la Figura 3.6, es necesario tener los tensores inerciales de los centros de masas. Hasta este punto, los tensores inerciales F' y F'' de la Figura 3.6 no son necesarios, lo que si se necesita en este punto son:

- El momento polar de inercia sobre el eje de dirección, es el torque sobre el eje de dirección requerido por unidad de aceleración angular sobre dicho eje, escrito de la siguiente forma:

$$\left(F' \cdot \vec{\lambda}\right) \cdot \vec{\lambda} = F'_{\lambda\lambda} = m_f d^2 + F_{\bar{y}y} \sin^2 \lambda - F_{\bar{y}z} \sin 2\lambda + F_{\bar{z}z} \cos^2 \lambda. \quad (3.5)$$

- El torque sobre el eje de dirección requerido por unidad de aceleración angular sobre el eje y y vice versa, escrito de la siguiente forma:

$$\left(F' \cdot \vec{\lambda}\right) \cdot j = F'_{\lambda y} = -m_f \bar{h}_f d - F_{\bar{y}y} \sin \lambda + F_{\bar{y}z} \cos \lambda. \quad (3.6)$$

- El torque sobre el eje de dirección requerido por unidad de aceleración angular sobre el eje z y vice versa, escrito de la siguiente forma:

$$\left(F'' \cdot \vec{\lambda}\right) \cdot k = F''_{\lambda z} = m_f (c_w + \bar{l}_f) d - F_{\bar{y}z} \sin \lambda + F_{\bar{z}z} \cos \lambda. \quad (3.7)$$

Las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) son obtenidas de [8] en donde fueron calculadas para generar las ecuaciones simultaneas que rigen los movimientos angulares de la bicicleta.

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

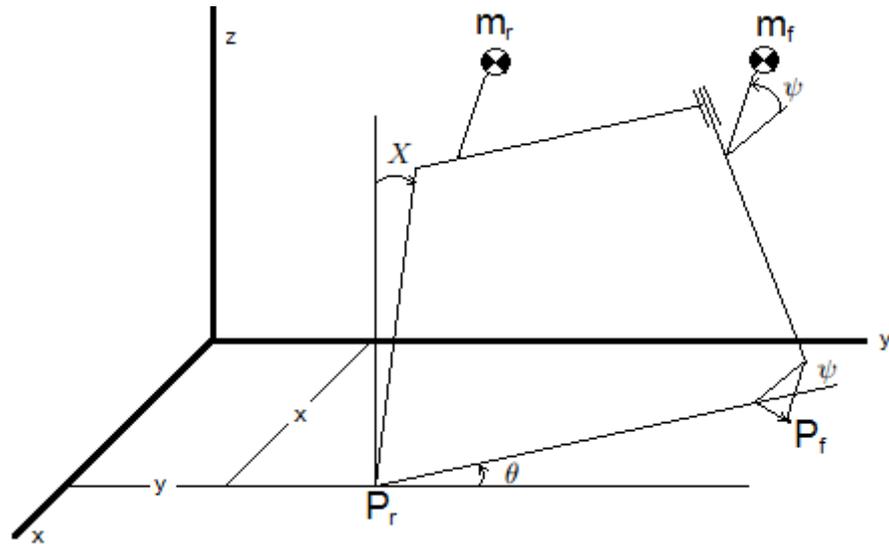


Figura 3.7: Configuración general del marco esquelético de la bicicleta.

donde:

- x y y son el desplazamiento de P_r dentro del plano xy .
- X es la inclinación del ensamble trasero.
- θ es la dirección de la llanta trasera.
- ψ es la dirección del ensamble frontal con respecto al ensamble trasero.

Asumiendo que ambas llantas tocan el plano xy , entonces la configuración de la bicicleta y la posición de cada centro de masa sobre ella está completamente determinado por y y x que es la posición del contacto trasero P_r , por θ y X del ensamble trasero, por ψ y por la cantidad de rotación de ambas llantas. Esto puede apreciarse en la Figura 3.7 [8].

Lo que concierne a este caso de estudio es el movimiento lateral de la bicicleta, por lo que tomando V , H_r y H_f como constantes, solo se analizan los movimientos que envuelven los desplazamientos de los centros de masas en el plano yz , por lo que solamente conciernen las variables x , θ , X y ψ que para simplicidad de análisis únicamente se considerarán pequeñas perturbaciones en dichas variables.

3. MODELO DE LA BICICLETA.

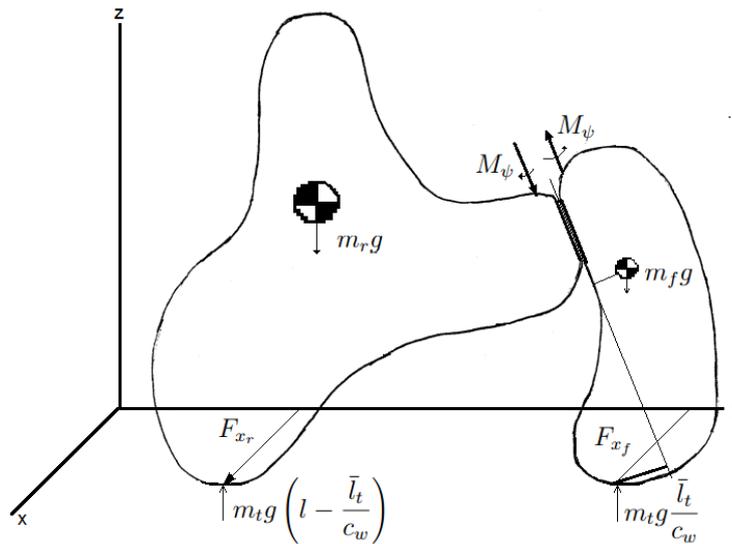


Figura 3.8: Fuerzas que actúan sobre la bicicleta (para pequeños ángulos).

donde:

- $m_r g$ actúa sobre el centro de masa de ensamble trasero (puede incluir el peso de un conductor).
- $m_f g$ actúa sobre el centro de masa de ensamble frontal.
- $m_t g \left(l - \frac{\bar{l}_t}{c_w} \right)$ actúa verticalmente sobre P_r .
- $m_t g \frac{\bar{l}_r}{c_w}$ actúa verticalmente sobre P_f .
- F_{x_f} actúa sobre la dirección en x de P_f .
- F_{x_r} actúa sobre la dirección en x de P_r .
- M_ψ es un momento sobre λ que actúa sobre el ensamble frontal y es un momento de reacción sobre el ensamble trasero.

Mediante la condición de que los puntos de contacto P_r y P_m están restringidos a moverse solo en la dirección de avance de las llantas se eliminan el ángulo θ y la variable x .

Entonces, se reducen las ecuaciones a dos que envuelven θ y x y dos que no y están en función de las variables X y ψ .

En las siguientes ecuaciones se buscan las fuerzas o momentos verticales y horizontales de gravedad, la de los puntos de contacto y el momento de dirección aplicado

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

por el conductor en el ensamble delantero.

Se desarrolla un análisis de aproximación por linealización en la que los senos y cosenos son omitidos por considerar pequeños ángulos.

Una linealización puede ser considerada “exacta” si los movimientos son lo suficientemente pequeños, para algunos sistemas, la linealización es muy precisa incluso para movimientos largos.

De acuerdo con [69], este enfoque es equivalente a usar la conservación del momento lineal en x para la bicicleta completa como puede verse en la ecuación (3.8)

La suma de las fuerzas aplicadas en x es igual a la suma de fuerzas generadas por el movimientos de los centros de masas en x en un movimiento general (para toda la bicicleta) [8]:

$$m_t \ddot{x} + m_t \bar{h}_t \ddot{X} - m_t \bar{l}_t \ddot{\theta} - m_f d \ddot{\psi} = F_{x_r} + F_{x_f}. \quad (3.8)$$

La gravedad influye en la dinámica del sistema como un momento en el centro de masa de la bicicleta completa tal como se muestra en la Figura 3.1

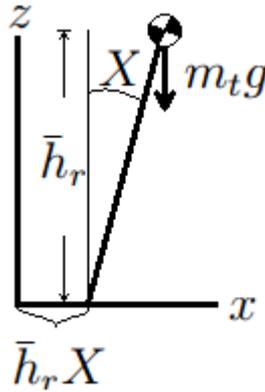


Figura 3.9: Inclinación de la bicicleta vista desde la parte trasera.

Pero en el ensamble frontal es distinto, pues la gravedad influye en el centro de masa del ensamble frontal siendo $m_f g$ (cuando la bicicleta no presenta inclinación), la gravedad también influye como una fuerza vertical en P_f siendo $m_t g \frac{\bar{l}_t}{c_w}$, esto debido al offset agregado por la dirección el ensamble frontal con respecto al ensamble trasero.

3. MODELO DE LA BICICLETA.

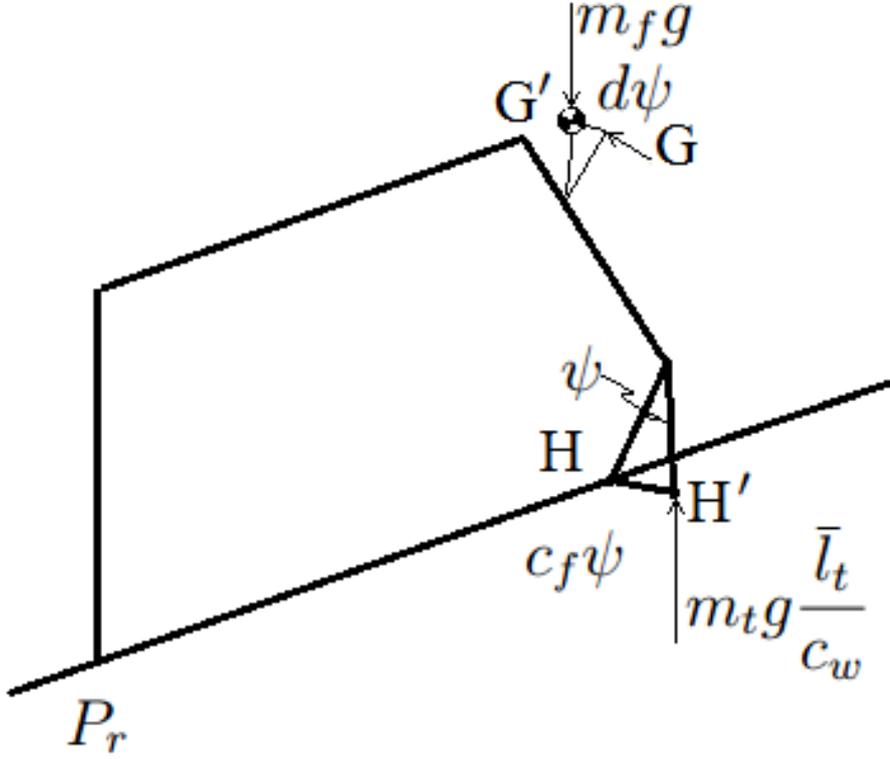


Figura 3.10: Esqueleto de la bicicleta en vertical que muestra la diferencia entre la dirección de la llanta delantera y la dirección general de la bicicleta P_r .

Como se puede apreciar en la Figura 3.10 el punto de contacto frontal P_f contiene un desfase con la línea $P_r H$ de magnitud $c_f \psi$, por lo que P_f ejerce un momento de $-(c_f \psi) \left(m_t g \frac{\bar{l}_t}{c_w} \right)$ sobre la dirección de $P_r H$, al mismo tiempo, m_f presenta un desfase del marco trasero de magnitud $d\psi$, por lo que ejerce un momento de $-(d\psi) (m_f g)$ sobre la dirección de $P_r H$.

El momento total en X en la línea del ensamblaje trasero en un movimiento general es igual a la suma de los momentos debidos a fuerzas externas sobre la misma línea del ensamblaje trasero (para toda la bicicleta) [8]:

$$m_t \bar{h}_t \ddot{x} + T_{yy} \ddot{X} + T_{yz} \ddot{\theta} + F'_{\lambda y} \ddot{\psi} - H_t \dot{\theta} - H_f \cos \lambda \dot{\psi} = g m_t \bar{h}_t X - g m_f d\psi - c_f \left(m_t g \frac{\bar{l}_t}{c_w} \right) \psi. \quad (3.9)$$

El momento total en θ en un movimiento general es igual a la suma de los momentos de las fuerzas externas (para toda la bicicleta) [8]:

3.1 Ecuaciones de movimiento de la bicicleta.

$$-m_t \bar{l}_t \ddot{x} + T_{zy} \ddot{X} + T_{zz} \ddot{\theta} + F''_{\lambda z} \ddot{\psi} + H_t \dot{X} - H_f \sin \lambda \dot{\psi} = -c_w F_{x_f}. \quad (3.10)$$

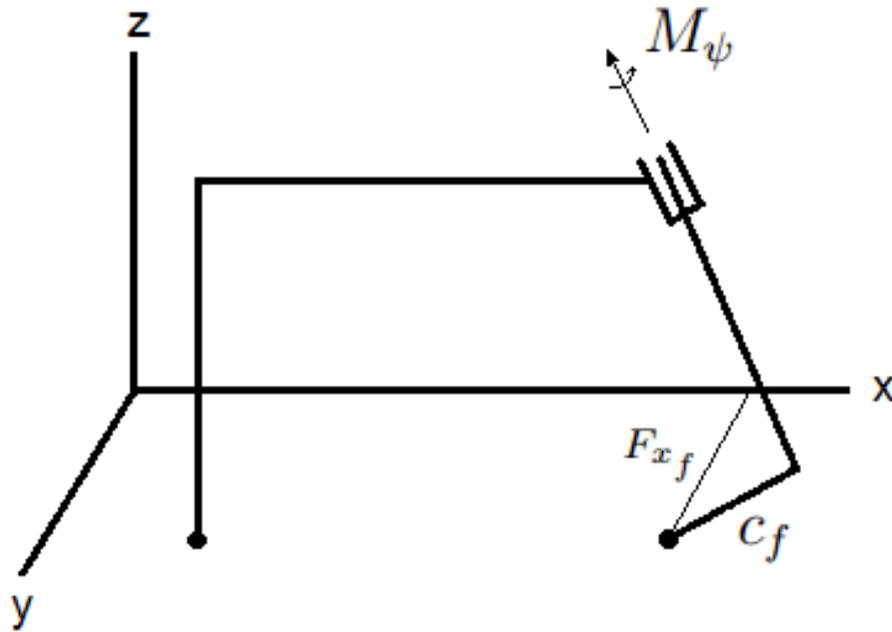


Figura 3.11: Momento de dirección M_ψ y F_{x_f} .

En la Figura 3.11 se pueden apreciar los momentos M_ψ y F_{x_f} son el momento inducido por un control directamente sobre el manubrio y el momento horizontal ejercido sobre el eje de dirección en el punto de contacto frontal P_f .

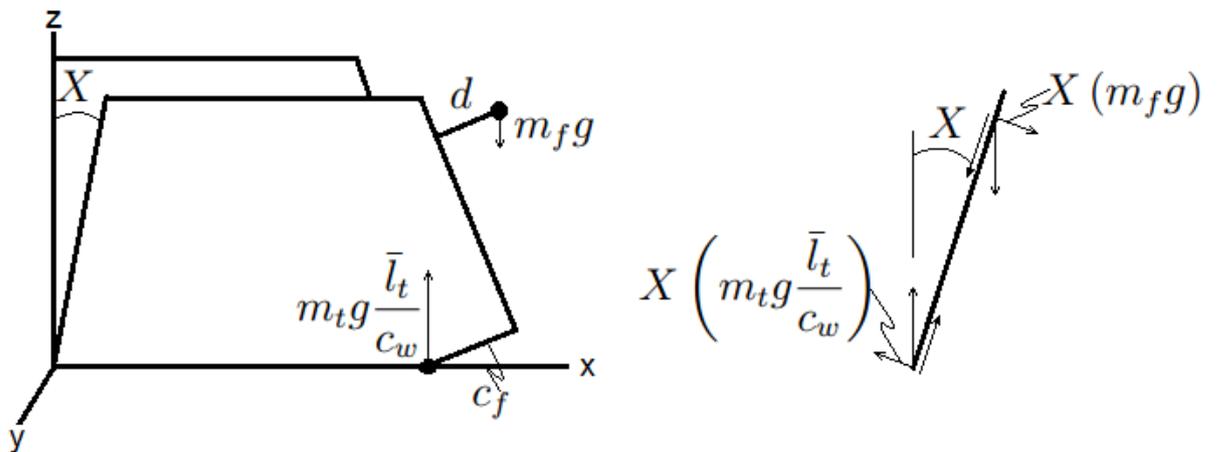


Figura 3.12: Momentos verticales sobre la bicicleta cuando solo presenta ángulo de inclinación.

3. MODELO DE LA BICICLETA.

En la parte izquierda de la Figura 3.12 se pueden apreciar las fuerzas verticales del ensamble frontal vista desde un lado, mientras que en la parte derecha se pueden apreciar las fuerzas verticales en una vista trasera del marco trasero.

Lo anterior se cumple solo cuando la bicicleta no presenta ángulo de dirección, es decir, solo está inclinada, la fuerza de reacción vertical en el punto de contacto frontal P_f y la fuerza gravitacional sobre m_f se encuentra en función de X que son perpendiculares al plano de la bicicleta, estas fuerzas actúan sobre c_f y d .

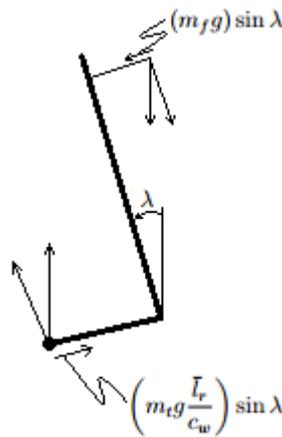


Figura 3.13: Momentos verticales sobre el ensamble frontal cuando solo presenta ángulo de dirección vista de lado.

En la Figura 3.13 se aprecia la vista lateral del ensamble frontal cuyas fuerzas verticales actúan de forma perpendicular al eje de dirección.

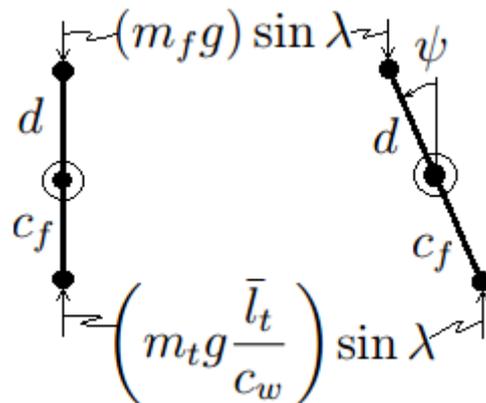


Figura 3.14: Momentos verticales sobre el ensamble frontal visto desde arriba del eje de dirección.

3.2 Ecuaciones de movimiento reducidas.

En la Figura 3.14 se presenta la vista del ensamble frontal visto desde arriba, los componentes del eje de dirección ejecutan un momento debido a ψ .

Cuando la bicicleta no presenta ángulo de inclinación, estas dos fuerzas presentan desplazamiento desde el plano de la bicicleta y ya no pasan a través del eje de dirección; cuando esto ocurre, es fácil ver que solo las componentes perpendiculares al eje de dirección (multiplicadas por $\sin \lambda$) producen un momento proporcional a sus desplazamientos laterales ψd y ψc_f .

El momento total en ψ sobre el eje de dirección $\vec{\lambda}$ en un movimiento general es igual a la suma de los momentos externos sobre el mismo eje (solo para ensamble frontal) [8]:

$$\begin{aligned}
 -m_f d \ddot{x} + F'_{\lambda y} \ddot{X} + F'_{\lambda \lambda} \ddot{\psi} + H_f (\dot{X} \cos \lambda + \dot{\theta} \sin \lambda) &= M_\psi + c_f F_{x_f} - g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f \right) X \\
 + g \sin \lambda \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f \right) \psi &= M_\psi + c_f F_{x_f} - g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f \right) X + g (\sin \lambda) \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f \right) \psi.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

3.2. Ecuaciones de movimiento reducidas.

Las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) son válidas para cualquier fuerza horizontal F_{x_r} y F_{x_f} y en particular lo son si las fuerzas aplicadas no provocan un deslice sobre los puntos de contacto P_r y P_f .

Para obtener la ecuación en términos de las variables que describen el movimiento, se necesita obtener x_f (Figura 3.16) y $\theta_f = \theta + \psi \cos \lambda$ (Figura 3.17).

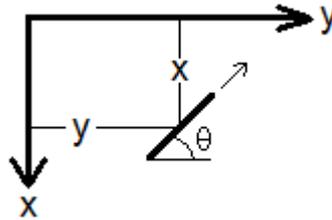


Figura 3.15: Ilustración del ángulo de giro θ .

3. MODELO DE LA BICICLETA.

En la Figura 3.15 podemos observar que la razón de cambio de x y de y definen el ángulo θ de la siguiente forma [4]:

$$\frac{\nabla x}{\nabla y} = -\tan \theta \text{ o similarmente } \dot{x} \approx -V\theta \text{ (para pequeñas } \theta). \quad (3.12)$$

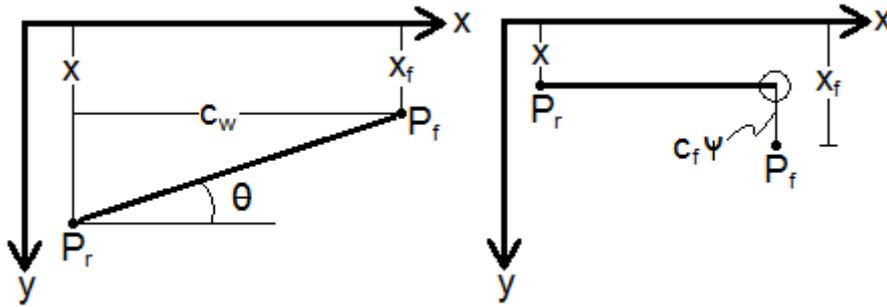


Figura 3.16: Definición de x_f en términos de x , θ , ψ .

En la Figura 3.16 en la parte izquierda se ve la configuración de la bicicleta cuando $\psi = 0$, por lo que, $x_f \approx x - c_w\theta$, mientras que en la parte derecha se ve la configuración de la bicicleta con $\theta = 0$, por lo que, $x_f \approx x + c_f\psi$, esto es debido al movimiento de P_f causado por giros en el ensamble frontal.

Combinando ambas tenemos que:

$$x_f = x - c_w\theta + c_f\psi. \quad (3.13)$$

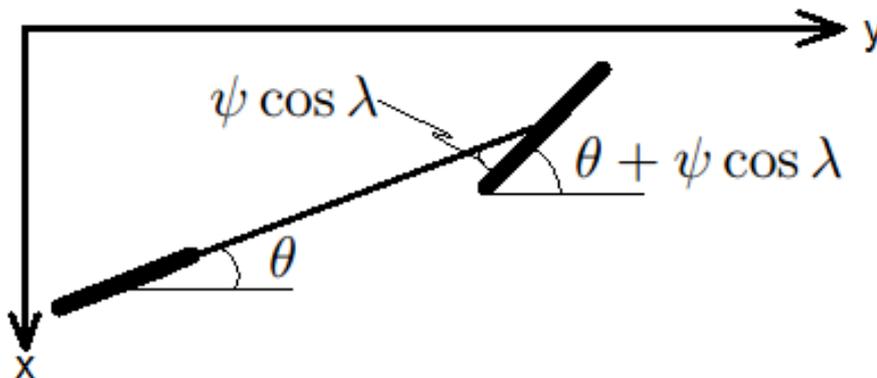


Figura 3.17: Definición de θ_f en términos de θ y ψ .

La dirección de la rueda frontal θ_f es la suma de la dirección de la rueda trasera

3.2 Ecuaciones de movimiento reducidas.

θ más la dirección del ensamble frontal relativo al ensamble trasero.

Con estas relaciones, ahora se pueden expresar los términos ψ y $\dot{\psi}$ en función de los términos $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y \ddot{x} .

Usando la restricción de giro de la llanta frontal expresada en (3.12) se hace una extensión a la llanta frontal usando (3.13) se obtiene según en [8]:

$$-c_w \dot{\theta} + c_f \dot{\psi} = V \psi \cos \lambda. \quad (3.14)$$

Despejando $\dot{\theta}$ tenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{c_f}{c_w} \dot{\psi} + V \frac{\cos \lambda}{c_w} \psi. \quad (3.15)$$

Diferenciado para obtener $\ddot{\theta}$ tenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{c_f}{c_w} \ddot{\psi} + V \frac{\cos \lambda}{c_w} \dot{\psi}. \quad (3.16)$$

Finalmente (3.12) puede ser diferenciado y sustituyendo $\dot{\theta}$ obtenemos:

$$\ddot{x} = -V \dot{\theta} = -V \frac{c_f}{c_w} \dot{\psi} - V^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} \psi. \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.16) y (3.17) en las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) para eliminar $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y x , se obtienen cuatro ecuaciones y solo dos variables.

Lo que concierne en este punto es presentar solo las ecuaciones dinámicas del movimiento, por lo que lo más conveniente es reordenar las ecuaciones para que las fuerzas desconocidas no aparezcan en dos de estas, de esta manera, la ecuaciones dinámicas de movimiento quedan en función de las variables X y ψ .

La ecuación (3.9) (con x y θ eliminados) ya se encuentra de esta forma y debido a que relata los momentos angulares sobre la línea en la que se mueve el ensamble trasero, será llamada la **ecuación de inclinación**.

Para las otras, simplemente se elimina F_{x_f} de (3.10) y (3.11) y dejamos M_ψ en el lado derecho de la ecuación, esta será llamada la **ecuación de dirección**.

La ecuación (3.8) no es necesaria a menos que se desee encontrar F_{x_r} [8].

3. MODELO DE LA BICICLETA.

Las dos ecuaciones obtenidas se escriben de la siguiente forma [4]:

$$M_{XX}\ddot{X} + M_{X\psi}\ddot{\psi} + C_{X\psi}\dot{\psi} + K_{XX}X + K_{X\psi}\psi = 0. \text{ Ecuación de inclinación.} \quad (3.18)$$

y

$$M_{\psi X}\ddot{X} + M_{\psi\psi}\ddot{\psi} + C_{\psi X}\dot{X} + C_{\psi\psi}\dot{\psi} + K_{\psi X}X + K_{\psi\psi}\psi = M_{\psi}. \text{ Ecuación de dirección} \quad (3.19)$$

Los coeficientes de la ecuación de inclinación son:

- $M_{XX} = T_{yy}$.
- $M_{X\psi} = F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w}T_{yz}$.
- $C_{XX} = 0$.
- $C_{X\psi} = -\left(H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w}H_t\right) + v_t \left(T_{yz} \frac{\cos \lambda}{c_w} - \frac{c_f}{c_w}m_t \bar{h}_t\right)$.
- $K_{XX} = -gm_t \bar{h}_t$.
- $K_{X\psi} = g\nu - H_t v_t \frac{\cos \lambda}{c_w} - v_t^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} m_t \bar{h}_t$.

Los coeficientes de la ecuación de dirección son:

- $M_{\psi X} = F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w}T_{yz}$.
- $M_{\psi\psi} = F'_{\lambda\lambda} + 2\frac{c_f}{c_w}F''_{\lambda z} + \frac{c_f^2}{c_w^2}T_{zz}$.
- $C_{\psi X} = H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w}H_t$.
- $C_{\psi\psi} = v_t \left(\frac{\cos \lambda}{c_w}F''_{\lambda z} + \frac{c_f}{c_w} \left(\frac{\cos \lambda}{c_w}T_{zz} + \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f\right)\right)\right)$.
- $K_{\psi X} = g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f\right)$.
- $K_{\psi\psi} = -g\nu \sin \lambda + v_t H_f \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{c_w} + v_t^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} \left(m_f d + m_t \frac{\bar{l}_t}{c_w} c_f\right)$.

Es importante notar que varios coeficientes son funciones de la velocidad. Inclusive, el momento angular H_f para la llanta delantera puede ser escrita como:

$$H_f = v_t \left(\frac{D_{yy}}{R_{fw}}\right). \quad (3.20)$$

3.2 Ecuaciones de movimiento reducidas.

Donde R_{fw} es el radio de la llanta frontal, D_{yy} es el momento de inercia de la llanta frontal y similarmente para la llanta trasera.

La ecuación dinámica de movimiento fué obtenida en función del ángulo de dirección y del ángulo de inclinación combinando (3.18) y (3.19) admite la siguiente representación Euler-Lagrange:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = F_t(t). \quad (3.21)$$

Donde $q(t) \in \mathbb{R}^c$ son las coordenadas generalizadas con $q(t) = \begin{bmatrix} X & \psi \end{bmatrix}^T$, $F_t(t) \in \mathbb{R}^c$ son las fuerzas externas introducidas al sistema, que en este caso, solo contiene a la fuerza sobre el ángulo de dirección M_ψ , entonces $F_t(t) = \begin{bmatrix} 0 & M_\psi \end{bmatrix}^T$. M , C y K son matrices de inercias, amortiguaciones y rigidez respectivamente.

$$M = \begin{bmatrix} T_{yy} & F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w} T_{yz} \\ F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w} T_{yz} & F'_{\lambda\lambda} + 2\frac{c_f}{c_w} F''_{\lambda z} + \frac{c_f^2}{c_w^2} T_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\left(H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w} H_t\right) + v_t \left(T_{yz} \frac{\cos \lambda}{c_w} - \frac{c_f}{c_w} m_t \bar{h}_t\right) \\ H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w} H_t & v_t \left(\frac{\cos \lambda}{c_w} F''_{\lambda z} + \frac{c_f}{c_w} \left(\frac{\cos \lambda}{c_w} T_{zz} + \left(m_f d + m_t \frac{\bar{t}_t}{c_w} c_f\right)\right)\right) \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$K = \begin{bmatrix} gm_t \bar{h}_t & g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{t}_t}{c_w} c_f\right) - H_t v_t \frac{\cos \lambda}{c_w} - v_t^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} m_t \bar{h}_t \\ g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{t}_t}{c_w} c_f\right) & -g \left(m_f d + m_t \frac{\bar{t}_t}{c_w} c_f\right) \sin \lambda + v_t H \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{c_w} + v_t^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} \nu \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Las ecuaciones dinámicas de movimiento (3.18) y (3.19) son tratadas en [9] que presenta las ecuaciones de movimiento corroboradas por programas de modelado de sistemas físicos como SPACAR y el software de sistemas simbólicos AutoSim.

De esta forma este mismo modelo matemático obtenido primeramente en [8] ha funcionado como punto de partida para el estudio de la estabilización de múltiples sistema dinámicos similares.

Cabe destacar que la ecuación (3.21) es una extensión adecuada para tratarla en la Sección 3.3 y no es presentada tal cual en ninguno de los trabajos citados en esta tesis pero es una derivación directa de las ecuaciones presentadas en los trabajos

3. MODELO DE LA BICICLETA.

mencionados.

3.3. Adecuación de las ecuaciones de movimiento a un modelo LPV.

Esta Sección da una interpretación algorítmica de las ecuaciones de movimiento linealizadas por considerar pequeñas variaciones en los ángulos para el modelo de la bicicleta bajo estudio presentado por Meijaard et al. [1] pero con las modificaciones mencionadas en la Sección 3.2 y nuevas modificaciones que acomodan la representación del sistema como un modelo LPV afin a la matriz A .

La representación LPV de la bicicleta ahora contiene dos grados de libertad $X(t)$ y $\psi(t)$ y un parámetro variable en el tiempo $v(t)$, donde por conveniencia para diferenciar entre el modelo normal de la bicicleta y la adecuación LPV se utiliza el cambio de variables:

$$X(t) = \phi(t), \quad (3.25)$$

$$\psi(t) = \delta(t). \quad (3.26)$$

Las dimensiones y propiedades mecánicas se presentan en las Tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.

Parámetro	Símbolo	Valor
Base de las llantas	c_w	1.02 <i>m</i>
Trail	c_f	0.08 <i>m</i>
Ángulo lambda	λ	0.262 <i>rad</i>
Gravedad	g	9.81 <i>N/kg</i>
Velocidad de avance	v_t	variable $\frac{m}{s}$

Tabla 3.1: Parámetros de la bicicleta completa.

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio	R_{rw}	0.3 <i>m</i>
Masa	m_{rw}	2 <i>kg</i>
Momentos de inercia	(A_{xx}, A_{yy}, A_{zz})	(0.06, 0.12, 0.06) <i>kgm</i> ²

Tabla 3.2: Parámetros de la llanta trasera

3.3 Adecuación de las ecuaciones de movimiento a un modelo LPV.

Parámetro	Símbolo	Valor
Posiciones de centros de masas	(x_{rf}, y_{rf}, z_{rf})	$(0.9, 0, -0.9)m$
Masa	m_{rf}	$85kg$
Momentos de inercia	$\begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & B_{xz} \\ 0 & B_{yy} & 0 \\ B_{xz} & 0 & B_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,2_r & 0 & 2,4 \\ 0_r & 11 & 0 \\ 2,4_r & 0 & 2,8 \end{bmatrix} kgm^2$

Tabla 3.3: Parámetros del marco trasero.

Parámetro	Símbolo	Valor
Posiciones de centros de masas	(x_{ff}, y_{ff}, z_{ff})	$(0.9, 0, -0.7)m$
Masa	m_{ff}	$4kg$
Momentos de inercia	$\begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ C_{xz} & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0546 & 0 & -0,0162 \\ 0 & 0,06 & 0 \\ -0,0162 & 0 & 0,0114 \end{bmatrix} kgm^2$

Tabla 3.4: Parámetros del marco frontal.

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio	R_{fw}	$0.35m$
Masa	m_{fw}	$3kg$
Momentos de inercia	(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz})	$(0.14, 0.28, 0.14)kgm^2$

Tabla 3.5: Parámetros de la llanta frontal.

El sistema es simétrico sobre el eje vertical y las llantas son rotacionalmente simétricas sobre sus propios ejes. Los momentos de inercias de las masas están dadas en el centro de la masa de cada cuerpo a lo largo de los ejes globales xyz .

Considerando la bicicleta de la Figura 3.1 y la Tabla 3.1 Para el sistema como un todo, el cálculo de la masa total y el correspondiente centro de masa con respecto marco de referencia se definen de la siguiente forma según [4]:

$$x_t = \frac{x_{rf}m_{rf} + x_{ff}m_{ff} + wm_{fw}}{m_t}, \quad (3.27)$$

$$\bar{h}_t = \frac{-R_{rw}m_{rw} + z_{rf}m_{rf} + z_{ff}m_{ff} - R_{fw}m_{fw}}{m_t}. \quad (3.28)$$

El cálculo de los momentos de inercias de las masas relativo al marco de referencia sobre los ejes globales del sistema como un todo son según [4]:

3. MODELO DE LA BICICLETA.

$$T_{yy} = A_{yy} + B_{yy} + C_{yy} + D_{yy} + m_{rw}R_{rw}^2 + m_{rf}z_{rf}^2 + m_{ff}z_{ff}^2 + m_{fw}R_{fw}^2, \quad (3.29)$$

$$T_{yz} = B_{yz} + C_{yz} - m_{rf}x_{rf}z_{rf} - m_{ff}x_{ff}z_{ff} + m_{fw}wR_{fw}, \quad (3.30)$$

$$T_{zz} = A_{zz} + B_{zz} + C_{zz} + D_{zz} + m_{rf}x_{rf}^2 + m_{ff}x_{ff}^2 + m_{fw}w^2. \quad (3.31)$$

Para el ensamble frontal, el cálculo de la masa total y el correspondiente centro de masa con respecto marco de referencia se definen de la siguiente forma:

$$m_f = m_{ff} + m_{fw}, \quad (3.32)$$

$$c_f = \frac{x_{ff}m_{ff} + wm_{fw}}{m_f}, \quad (3.33)$$

$$z_f = \frac{z_{ff}m_{ff} - R_{fw}m_{fw}}{m_f}. \quad (3.34)$$

El cálculo de los momentos de inercias de las masas relativo al marco de referencia sobre los ejes globales del ensamble frontal son:

$$F_{yy} = C_{yy} + D_{yy} + m_{ff}(z_{ff} - z_f)^2 + m_{fw}(R_{fw} + z_f)^2, \quad (3.35)$$

$$F_{yz} = C_{yz} - m_{ff}(x_{ff} - c_f)(z_{ff} - z_f) + m_{fw}(w - c_f)(R_{fw} + z_f), \quad (3.36)$$

$$F_{zz} = C_{zz} + D_{zz} + m_{ff}(x_{ff} - c_f)^2 + m_{fw}(c_w - c_f)^2. \quad (3.37)$$

La distancia perpendicular del centro de masa del ensamble delantero f al eje de dirección es:

$$h = (x_f - c_w - c_f) \cos(\lambda) - z_f \sin(\lambda). \quad (3.38)$$

La distancia perpendicular del trail mecánico a la base de las llantas c_w es:

$$f = \frac{c_f}{c_w}. \quad (3.39)$$

3.3 Adecuación de las ecuaciones de movimiento a un modelo LPV.

El cálculo de los momentos angulares de la llanta delantera y la frontal sobre el eje y :

$$H_r = v_t \left(\frac{A_{yy}}{R_{rw}} \right), \quad (3.40)$$

$$H_f = v_t \left(\frac{D_{yy}}{R_{fw}} \right), \quad (3.41)$$

$$H_t = H_r + H_f. \quad (3.42)$$

El cálculo del término de un momento estático que aparece frecuentemente:

$$m_e = m_f h + f m_t x_t. \quad (3.43)$$

Ahora las ecuaciones de movimiento linealizadas por considerar pequeñas variaciones en lo ángulos en función de los grados de libertad $q(t) = (\phi(t), \delta(t))^T$ que consideraba a la velocidad como una constante v_t , ahora fué adecuado para depender de la velocidad y se puede escribir como un parámetro variable $v(t)$.

$$M\ddot{q}(t) + [Cv(t)]\dot{q}(t) + [K_0 + K_1v(t)^2]q(t) = F_t(t). \quad (3.44)$$

En donde M , C , K_0 y K_1 son matrices constantes de apropiadas dimensiones, $v(t)$ es el tercer grado de libertad tomado como parámetro variable en el tiempo. $F_t(t)$ son los pares aplicados a los grado de libertad $\phi(t)$ y $\delta(t)$.

Los elementos de la matriz de masas M , de amortiguaciones C , de rigidez independiente de $v(t)$ K_0 y de rigidez que multiplican a $v(t)^2$ K_1 son:

$$M = \begin{bmatrix} T_{yy} & F'_{\lambda x} + fT_{yz} \\ F'_{\lambda y} + fT_{yz} & F'_{\lambda\lambda} + 2fF''_{\lambda z} + f^2T_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & f \left(\frac{D_{yy}}{R_{fw}} + \frac{A_{yy}}{R_{rw}} \right) + \frac{D_{yy}}{R_{fw}} \cos(\lambda) + T_{yz} \frac{\cos(\lambda)}{c_w} - f m_t \bar{h}_t \\ f \left(\frac{D_{yy}}{R_{fw}} + \frac{A_{yy}}{R_{rw}} \right) + \frac{D_{yy}}{R_{fw}} \cos(\lambda) & F''_{\lambda z} \frac{\cos(\lambda)}{c_w} + f \left(m_e + T_{zz} \frac{\cos(\lambda)}{c_w} \right) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} g m_t \bar{h}_t & g m_e \\ g m_e & -g m_e \sin(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3. MODELO DE LA BICICLETA.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{D_{yy}}{R_{fw}} + \frac{A_{yy}}{R_{rw}}\right) \frac{\cos(\lambda)}{c_w} - \bar{h}_t m_t \frac{\cos \lambda}{c_w} \\ 0 & \frac{D_{yy}}{R_{fw}} \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{c_w} + \frac{\cos \lambda}{c_w} m_e \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ahora sustituyendo los valores vistos en las Tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 tenemos los siguientes valores de M , C , K_0 y K_1 :

$$M = \begin{bmatrix} 5,1874 & 0,2319 \\ 0,2319 & 0,0269 \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 55,7872 & 2,5740 \\ 2,5740 & 0,2498 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 7,1031 \\ 0 & 0,3361 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0,011 & -3,4172 \\ 0,0594 & -0,1922 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Los coeficientes de las matrices M , C , K_0 y K_1 difieren de los valores numéricos presentados por [4] pues cambian las dimensiones de la bicicleta y en [4] consideran un cuerpo rígido de 70 Kg incorporado en el marco trasero de la bicicleta y en esta tesis no se considera dicho cuerpo.

3.4. Comportamiento del modelo LPV en lazo abierto.

Tal y como se puede apreciar en la ecuación (3.44) ahora se tiene un modelo que tiene involucrada un parámetro variable $v(t)$ que actúa sobre C y en K_1 se presenta de forma cuadrática $v(t)^2$. Esto califica a la representación matemática como un modelo LPV afin que como se vió en el Capítulo 2, es un sistema LPV polinomial.

Es imperativo conocer primero el comportamiento del modelo obtenido en lazo abierto, esto proporciona información necesaria para saber que tipo de controlador se necesita y cuales son los puntos críticos donde prestar mayor atención (El sistema se encuentra su representación de espacio de estados visto en el Capítulo 4 en las ecuaciones (4.1, 4.2 y 4.3)).

3.4 Comportamiento del modelo LPV en lazo abierto.

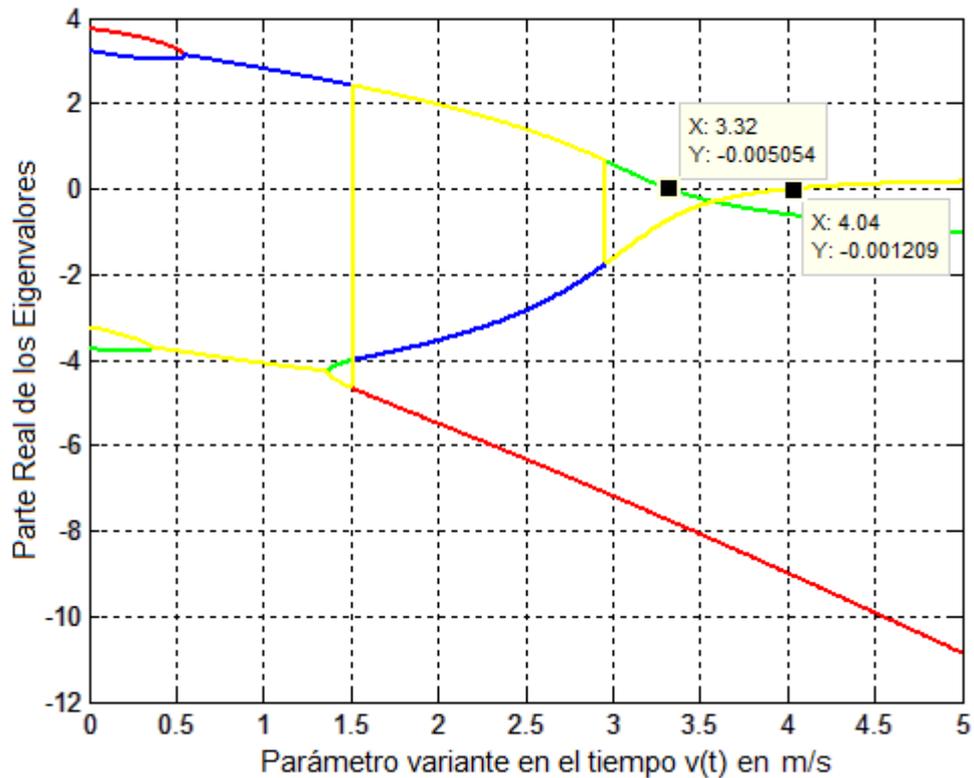


Figura 3.18: Parte real de los eigenvalores del sistema (3.44) que está en función de la velocidad $v(t)$.

Como se observa en la Figura 3.18, las partes reales de los eigenvalores del sistema (3.44) muestran estabilidad para valores de $v(t)$ entre los $3,32\text{ m/s}$ y $4,04\text{ m/s}$, esto es, que la bicicleta se balancea ella misma en posición vertical, pues la parte real de los eigenvalores es negativa.

Como se ve en [70], para valores de velocidad mayores a $4,04\text{ m/s}$ se puede estabilizar la bicicleta por un adecuado movimiento del conductor para modificar el centro de gravedad.

Es más fácil controlar una bicicleta en velocidades altas; sin embargo, para velocidades cercanas a 0 m/s se necesitaría una mayor potencia para mover el centro de masa que corrija la vertical de la bicicleta.

Como se vió en la sección 3.1, los dos grados de libertad importantes que dictan por completo el movimiento de la bicicleta concerniente a su inclinación son $\phi(t)$ y

3. MODELO DE LA BICICLETA.

$\delta(t)$ y concernientemente a lo que se desea lograr en este trabajo, es mantener el grado de libertad $\phi(t) \approx 0$ para ello se colocará un actuador en el manubrio con el fin de actuar directamente sobre el grado de libertad $\delta(t)$.

3.5. Conclusiones.

La representación del modelo de la bicicleta puede variar mucho debido al comportamiento que se desea describir, en este caso se hacen las mayores consideraciones siempre teniendo en cuenta de salvar la dinámica completa concerniente a la dinámica lateral de la bicicleta.

Posteriormente se redujeron las ecuaciones de movimiento por considerar pequeños cambios en los grados de libertad y se obtuvo un modelo mucho más compacto y práctico siempre tratando de conservar fielmente la dinámica real dentro del modelo obtenido.

Por hacer adecuadas manipulaciones se logró obtener una representación del modelo LPV en forma de Euler-Lagrange y mediante la interpretación algorítmica del modelo se lograron sustituir los valores reales del modelo de la bicicleta.

Se logró analizar el sistema LPV en lazo abierto y se llegó a la conclusión de que para velocidades pequeñas no basta con mover el centro de masa de la bicicleta para recuperar la vertical sino que es necesario colocar un actuador en el grado de libertad $\delta(t)$.

Se puede lograr mantener la vertical aún para velocidades cercanas a 0 m/s pero pagando el costo de que el movimiento en el plano de la bicicleta hace muy difícil el posteriormente poder hacer un seguimiento de trayectorias.

Capítulo 4

Sistema de estabilización.

En este Capítulo se presenta la formulación del problema de control con base en la teoría de control de sistemas LTI convenientemente extendida a los sistemas LPV.

Así mismo, dichas extensiones de la teoría de control de sistemas LTI, son debidamente justificadas a medida que se van utilizando con el fin de comprender correctamente el método utilizado.

En la Sección 4.1 se realiza un análisis del modelo de la bicicleta junto con el controlador estabilizante LPV y el observador de estados de orden completo LPV.

Se justifica el procedimiento realizado para la obtención del controlador estabilizante LPV y una justificación del uso de un observador de orden completo LPV.

En la Sección 4.2 se redacta un Corolario que brinda la solución para controlar el sistema completo haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov utilizando la relajación de la PLMI vista en el Capítulo 2 y que hace la colocación de polos en una región que es la intersección de adecuadas regiones LMI.

En la Sección 4.3 se presenta el desarrollo de un observador de estados de orden completo LPV con las mismas consideraciones acerca del máximo cambio permitido en el parámetro variable $v(t)$.

Se redacta un Corolario que proporciona la solución para la convergencia de los estados estimados a los estados reales haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov, la relajación de PLMIs y la colocación de polos del observador hacia la

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

intersección de adecuadas regiones LMI.

El observador de estados de orden completo se debe realizar posterior al cálculo de las ganancias del observador pues el observador utiliza estas ganancias para el cálculo de las ganancias de observador.

4.1. Análisis de la división del sistema de control.

Se desea diseñar un sistema de control LPV retroalimentado que estabilice la bicicleta en posición vertical.

Tal como se vió en el Capítulo 3, el sistema cuenta con tres grados de libertad fundamentales:

1. El ángulo del manubrio con respecto al marco trasero de la bicicleta r ($\delta(t)$).
2. El ángulo de inclinación de la bicicleta con respecto al eje z ($\phi(t)$).
3. La velocidad de traslación ($v(t)$).

De estos tres grados de libertad, $v(t)$ fue convenientemente tomado como el parámetro variable en el tiempo y permitió tratar el sistema como LPV, el grado de libertad $\phi(t)$ se convierte en la variable controlada por lo que $\delta(t)$ se convierte en la variable manipulada.

Por lo anterior el sistema es sub-actuado pues contiene menos actuadores que grados de libertad.

El sistema (3.46) admite la siguiente representación en espacio de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_0 + K_1 v(t)^2 & -Cv(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u(t) \right). \quad (4.1)$$

Con $x = [\phi \ \delta \ \dot{\phi} \ \dot{\delta}]^T$. Como $M_\phi(t)$ se considera una perturbación, se considera como única fuerza de entrada $M_\delta(t)$, la representación en espacio de estados del modelo de la bicicleta toma la siguiente forma general:

4.1 Análisis de la división del sistema de control.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(v(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donde:

$$A(v(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13,67 & 0,23 - 1,319v(t)^2 & -0,164v(t) & -0,552v(t) \\ 4,857 & 10,81 - 1,13v(t)^2 & 3,621v(t) & -2,388v(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,339 \\ 7,457 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $v(t) \in \mathbb{R}^r$ son el vector de estados, el vector de entradas, el vector de salidas y el parámetro variable en el tiempo respectivamente. Como se observa en la ecuación (4.3), la dinámica de la planta depende fuertemente de la velocidad de traslación $v(t)$ que está involucrada dentro de la matriz $A(v(t))$.

Las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) son propias de esta tesis y unas ecuaciones analogas que incorporan un cuerpo rígido en el marco trasero son vistas en [71].

Para poder diseñar un sistema de control LPV retroalimentado es necesario que el parámetro variable en el tiempo $v(t)$ y los estados del sistema sean medidos en línea; sin embargo, como se aprecia en (4.3) la matriz C indica que solamente se tiene conocimiento de dos estados.

Por lo que asumiendo que el sistema (4.2) cumple con las condiciones de controlabilidad y observabilidad [71], se formula un controlador LPV retroalimentado con un observador de estados LPV de orden completo.

En la Fig. 4.1 se muestra el sistema LPV con un observador de estados LPV de

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

orden completo, donde la ley de control es de la forma:

$$u(t) = K(v(t))\hat{x}(t). \quad (4.4)$$

Donde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son el vector de entradas y el vector de estados estimados respectivamente. $K(v(t))$ es una matriz de ganancias de apropiadas dimensiones que depende el parámetro variable en el tiempo cuyo objetivo es la de disminuir el valor de los estados lo más rápido posible a 0.

El cálculo de la matriz $K(v(t))$ se verá más adelante en este mismo Capítulo en la Sección 4.2.

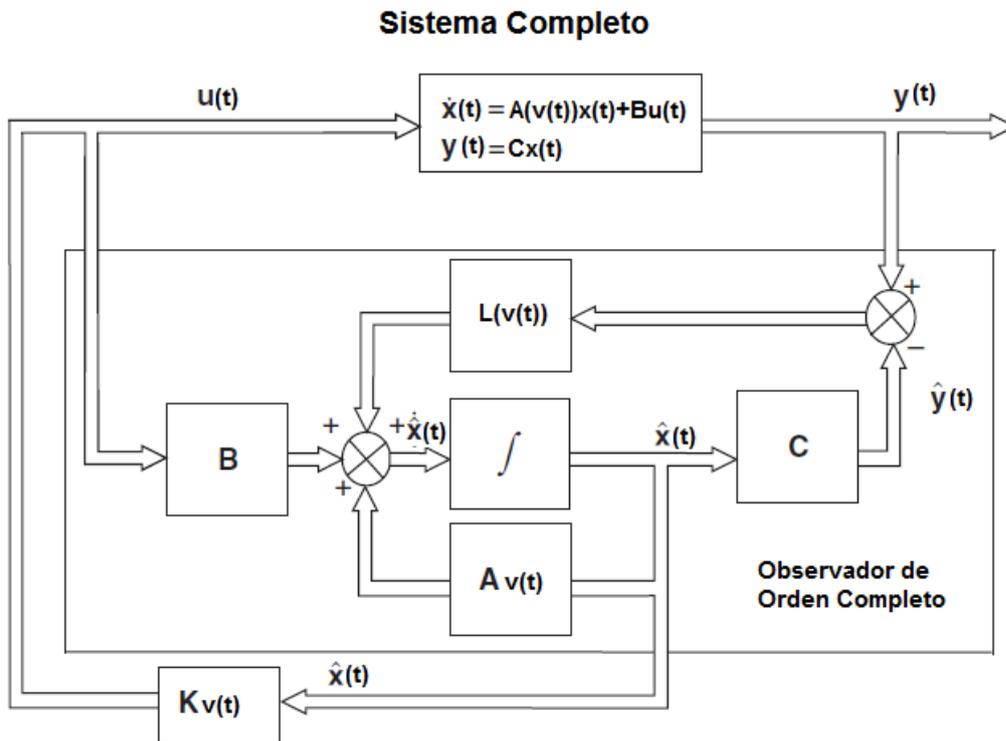


Figura 4.1: Diagrama a bloques del sistema completo: Estabilización por retroalimentación de estados y estimación de los estados no medibles en línea.

Esta ley de control (4.4) es usada a menudo en sistemas cuyos estados no es posible medir debido a la complejidad de instalar algún sensor o por el inconveniente del costo del mismo.

4.1 Análisis de la división del sistema de control.

Por lo anterior se procede a estimarlos en línea haciendo uso un observador de estados de orden completo. La dinámica del observador de estados de orden completo es la siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= A(v(t))\hat{x}(t) + Bu(t) + L(v(t))(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Donde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $\hat{h}(t) \in \mathbb{R}^p$, $v(t) \in \mathbb{R}^r$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son el vector de estados estimado, el vector de entradas, el vector de salidas estimado, el parámetro variable en el tiempo y el vector de salidas respectivamente.

$L(v(t))$ es una matriz de ganancias de apropiadas dimensiones que depende del parámetro variable en el tiempo cuyo objetivo es la de disminuir lo más rápido posible la diferencia entre el estado estimado y el estado real.

El cálculo de la matriz $L(v(t))$ al igual que la matriz $K(v(t))$ se verá más adelante en este mismo Capítulo en la Sección 4.3.

Para cumplir el objetivo de control se requiere que los estados converjan a cero así como la dinámica del error de estimación, por lo que para un diseño correcto y ordenado, debemos hacer la representación total del sistema incluyendo la dinámica del controlador y la dinámica del error de estimación.

La convergencia de los estados estimados a los estados reales es equivalente a la convergencia del error de estimación, por esto, el error se define como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).\tag{4.6}$$

Entonces:

$$\hat{x}(t) = x(t) - e(t).\tag{4.7}$$

Combinando (4.2), (4.4), (4.5) y (4.6) se obtienen las ecuaciones en lazo cerrado de la dinámica del sistema y del error de observación:

$$\dot{x}(t) = (A(v(t)) + BK(v(t)))x(t) + BK(v(t))e(t)\tag{4.8}$$

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

$$\dot{e}(t) = (A(v(t)) - L(v(t))C) e(t). \quad (4.9)$$

Utilizando (4.8) y (4.9) en un único sistema se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v(t)) + BK(v(t)) & BK(v(t)) \\ O & A(v(t)) - L(v(t))C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Donde O una matriz de ceros de apropiadas dimensiones.

La ecuación característica brinda importante información acerca de la dinámica del sistema y puede apreciarse fácilmente que la ecuación característica es:

$$|(A(v(t)) + BK(v(t))) (A(v(t)) - L(v(t))C)|. \quad (4.11)$$

Para que el sistema completo sea estable, es necesario que las matrices $A(v(t)) + BK(v(t))$ y $A(v(t)) - L(v(t))C$ sean estables. La matriz $A(v(t)) + BK(v(t))$ es la dinámica del sistema si este tuviera una ley de control de:

$$u(t) = K(v(t))x(t) \quad (4.12)$$

Por lo que la dinámica del sistema quedaría definida por:

$$\dot{x}(t) = (A(v(t)) + BK(v(t))) x(t) \quad (4.13)$$

Mientras que la matriz $A(v(t)) - L(v(t))C$ corresponde a la dinámica de error de estimación definido en (4.9).

Debido a la forma de la ecuación característica es fácil notar que la dinámica del observador no influye en la dinámica del controlador y es posible hacer el diseño del controlador estabilizante y del observador de orden completo por separado.

Es importante notar que el cálculo de la ecuación característica se simplifica en gran medida debido a que la dinámica de los errores de estimación (4.9) no depende de los estados actuales $x(t)$; en cambio, la dinámica de los estados (4.8) depende tanto de los estados $x(t)$ como de los errores de estimación $e(t)$.

Debido a esto, se optó por utilizar un observador de estados de orden completo, pues un observador de estados de orden reducido agrega dinámicas extras al sistema

y la matriz O ya no sería vacía, por lo que ya no se podrían tratar por separado sino en un solo sistema en el que se busca encontrar 2 matrices de ganancias.

4.2. Controlador Estabilizante LPV.

Considerando el sistema dinámico LPV (4.2) donde el parámetro variable en el tiempo es $v(t) \in \mathbb{R}^q \forall t \in \mathbb{R}^+$ y debido a que la disminución de la velocidad es una cuestión natural de la bicicleta, $v(t)$ resulta ser continuamente diferenciable $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Haciendo uso del Lema 2.2.2.2 con el sistema dinámico LPV de la bicicleta (4.13) se obtiene la siguiente restricción PLMI.

$$\begin{aligned} \dot{V} \left(x(t), v(t) \right) &:= x(t)^T \left((A(v(t)) + BK(v(t)))^T P(v(t)) \right. \\ &\left. + P(v(t)) (A(v(t)) + BK(v(t))) + \rho \frac{\partial P(v(t))}{\partial v(t)} \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

De lo anterior se establece que el problema de diseñar un controlador por retroalimentación de estados que garantice estabilidad exponencial del sistema LPV descrito por 4.2 y 4.3 puede resolverse por el desarrollo de una búsqueda numérica de un par de matrices parametro dependientes $P(v(t))$ y $K(v(t))$ que satisfagan la PLMI 4.14.

Esta PLMI es un problema de factibilidad no lineal que se resuelve por hacer adecuadamente ciertas manipulaciones [72], esta restricción no convexa se puede satisfacer si existen las siguientes matrices:

$$S(v(t)) \doteq P(v(t))^{-1} > 0, \quad R(v(t)) \doteq K(v(t))P(v(t))^{-1}. \quad (4.15)$$

Que satisfacen la siguiente restricción PLMI:

$$A(v(t))S(v(t)) + BR(v(t)) + S(v(t))A^T(v(t)) + R^T(v(t))B^T - \rho \frac{\partial S(v(t))}{\partial v(t)} < 0 \quad (4.16)$$

Las soluciones para las PLMIs pueden ser encontradas a través de eficientes herramientas de optimización [73].

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

La PLMI (4.16) es una familia infinita de LMIs entrelazadas por un parámetro variable en el tiempo conocido, se considera el enfoque propuesto en [?] que propone la discretización del parámetro variable en el tiempo dividiendo el intervalo $[0, \varphi]$ en N_b subintervalos, es decir, que para encontrar la solución del problema es necesario reducir el problema a una colección finita de LMIs y así limitar la búsqueda numérica.

Utilizando la ecuación 2.32 y (4.16) tenemos la siguiente PLMI relajada:

$$S(jh) > 0, j = 0, \dots, N - 1$$

$$A(jh)S(jh) + BR(jh) + S(jh)A^T(jh) + R^T(jh)B^T \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} < 0. \quad (4.17)$$

Para $j = 0, \dots, N_b - 1$, donde h es el ancho de subintervalos de la velocidad. Al resolver la PLMI (4.16) se obtiene la ganancia de retroalimentación $K(jh)$. Desafortunadamente, $K(jh)$ no contiene consideraciones sobre esfuerzo de control del actuador o tiempo de estabilización.

Para resolver este problema se considera la colocación de polos por restringir los eigenvalores del sistema (4.13) a moverse solo en regiones prescritas para asegurar un transitorio satisfactorio, evitando estabilidad marginal, oscilaciones pronunciadas, saturaciones en el actuador, etc.

Lo que se pretende es confinar los eigenvalores del sistema a la intersección de estas tres regiones elementales LMI tal como se aprecia en la Figura 2.4 y haciendo la extensión de la PLMI (4.17) a las regiones LMI 2.35, 2.36 y 2.37 se obtiene el Corolario 4.2.1:

Corolario 4.2.1. *El sistema (4.2) es robustamente estable si existe una función de Lyapunov dependiente del parámetro $V(x(t), v(t)) = x(t)^T P(v(t))x(t) > 0, \forall x(t) \neq 0$ y $V(0) = 0$ con $P(v(t)) = P(v(t))^T > 0$ cuya solución está actuada en la región LMI $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ tal que:*

$$\begin{aligned} & A(jh)S(jh) + S(jh)A^T(jh) + BR(jh) + R^T(jh)B \\ & \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} + 2\alpha_e S(jh) < 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_e S(jh) & A(jh)S(jh) + BR(jh) \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} \\ * & -\gamma_e S(jh) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma(jh) & \Theta(jh) \\ \Lambda(jh) & \Xi(jh) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

con:

$$\Delta(jh) = \sin \beta_e \left(A(jh)S(jh) + BR(jh) + S(jh)A^T(jh) + R^T(jh)B^T \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} \right) \quad (4.21)$$

$$\Theta(jh) = \cos \beta_e \left(A(jh)S(jh) + BR(jh) - S(jh)A^T(jh) - R^T(jh)B^T \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} \right) \quad (4.22)$$

$$\Lambda(jh) = \cos \beta_e \left(-A(jh)S(jh) - BR(jh) + S(jh)A^T(jh) + R^T(jh)B^T \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} \right) \quad (4.23)$$

$$\Xi(jh) = \sin \beta_e \left(A(jh)S(jh) + BR(jh) + S(jh)A^T(jh) + R^T(jh)B^T \pm \rho \frac{S(jh+h) - S(jh)}{h} \right) \quad (4.24)$$

Demostración

La demostración de este corolario es una extensión de la teoría de estabilidad de Lyapunov a la región $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ deducido del Lema 2.2.2.2 al utilizar (4.17) como base. Las PLMIs (4.18), (4.19) y (4.20) son la intersección de tres regiones LMI demostradas en [21].

Al final, la ganancia de retroalimentación que confina los polos a la región $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ y que estabiliza el sistema LPV (4.2) queda definida por:

$$K(jh) = R(jh)S^{-1}(jh) \quad (4.25)$$

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

4.3. Observador de estados de orden completo LPV.

El mismo procedimiento para el desarrollo de las LMIs para la estabilización de la bicicleta se emplea para colocar los polos de la dinámica del error de estimación.

Haciendo uso del Lema 2.2.2.2 con la dinámica del error de observador de orden completo LPV de la bicicleta (4.9) se obtiene la siguiente restricción PLMI.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), v(t)) := e(t)^T & \left((A(v(t)) + L(v(t))C)^T P(v(t)) \right. \\ & \left. + P(v(t)) (A(v(t)) + L(v(t))C) + \rho \frac{\partial P(v(t))}{\partial v(t)} \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Al igual que en el diseño del control estabilizante, la solución de la PLMI se encuentra por el desarrollo de una búsqueda numérica de un par de matrices $P(v(t))$ y $L(v(t))$ que satisfagan la PLMI (4.26).

Según [18] para resolver este problema de factibilidad PLMI no lineal se necesitan adecuar algunas manipulaciones con las variables para obtener la restricción LMI ya relajada, donde:

$$Q(v(t)) \doteq P(v(t))L(v(t)). \quad (4.27)$$

Debe satisfacer la siguiente restricción PLMI:

$$P(v(t))A(v(t)) + Q(v(t))C + A^T(v(t))P(v(t)) + C^T Q^T(v(t)) - \rho \frac{\partial P(v(t))}{\partial v(t)} < 0 \quad (4.28)$$

Las soluciones para las PLMIs pueden ser encontradas a través de eficientes herramientas de optimización [73], pues la PLMI (4.28) conduce a un número infinito de LMIs.

Se considera el enfoque propuesto en [2] en donde se propone la discretización del parámetro variable dividiendo el intervalo $[0, \varphi]$ en N_b subintervalos, conduciendo la solución del problema a una colección finita de LMI's.

4.3 Observador de estados de orden completo LPV.

Para resolver la derivada parcial, se utiliza una aproximación por diferencias finitas. Por lo que la nueva restricción PLMI queda definida por $P(jh) > 0$, $j = 0, \dots, N_b - 1$ en:

$$P(jh)A(jh) + Q(jh)C + A^T(jh)P(jh) + C^T Q^T(jh) \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} < 0 \quad (4.29)$$

donde $j = 0, \dots, N-1$ y h es el ancho de los subintervalos de la velocidad. Al resolver la PLMI (4.29) se obtiene la ganancia de retroalimentación $L(jh)$.

Lo que se pretende es confinar los eigenvalores del sistema LPV (4.2) en la intersección de estas tres regiones elementales LMI tal como se aprecia en la Figura 2.4.

Cada región es una extensión de la teoría de estabilidad de Lyapunov [21] por lo que el conjunto de números complejos $x+jy$ tal que (2.28) y haciendo la extensión de la LMI (4.29) a estas regiones se obtiene el Corolario 4.3.1 del Lema 2.2.2.2 desarrollado en esta tesis al utilizar (4.29), 2.35, 2.36 y 2.37:

Corolario 2.4.1. *El sistema (4.9) es robustamente estable si existe una función de Lyapunov dependiente del parámetro $V(e(t), v(t)) := e(t)^T P(v(t))e(t) > 0$, $\forall e(t) \neq 0$ y $V(0) = 0$ con $P(v(t)) = P(v(t))^T > 0$ cuya solución está acotada en la región LMI $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ tal que:*

$$\begin{aligned} & P(jh)A(jh) + A^T(jh)P(jh) - Q(jh)C - C^T Q^T(jh) \\ & \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} + 2\alpha_o P(jh) < 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_o P(jh) & P(jh)A(jh) - Q(jh)C \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} \\ * & -\gamma_o P(jh) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} \Upsilon(jh) & \Omega(jh) \\ \zeta(jh) & \chi(jh) \end{pmatrix} < 0. \quad (4.32)$$

Con:

$$\Upsilon(jh) = \sin \beta_o \left(P(jh)A(jh) + A^T(jh)P(jh) - Q(jh)C - C^T Q^T(jh) \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} \right) \quad (4.33)$$

4. SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.

$$\Omega(jh) = \cos \beta_o \left(P(jh)A(jh) - A^T(jh)P(jh) - Q(jh)C + C^T Q^T(jh) \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} \right) \quad (4.34)$$

$$\zeta(jh) = \cos \beta_o \left(-P(jh)A(jh) + A^T(jh)P(jh) + Q(jh)C - C^T Q^T(jh) \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} \right) \quad (4.35)$$

$$\chi(jh) = \sin \beta_o \left(P(jh)A(jh) + A^T(jh)P(jh) - Q(jh)C - C^T Q^T(jh) \pm \rho \frac{P(jh+h) - P(jh)}{h} \right) \quad (4.36)$$

Demostración

La demostración de este corolario es una extensión de la teoría de estabilidad de Lyapunov a la región $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ que es la intersección de tres regiones elementales LMI demostradas en [21].

Con estas PLMIs se confinan los polos de la dinámica del error (4.9) a moverse solamente en las regiones prescritas: la región α_o -estable, un disco de radio γ_o y un sector cónico de ángulo β_o .

Al final la ganancia de observador que confina los polos de la dinámica del error $L(jh)$ a la región $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ y que asegura la convergencia asintótica de los estados estimados a los estados reales del sistema LPV (4.2) queda definida por:

$$L(jh) = S^{-1}(jh)Q(jh). \quad (4.37)$$

4.4. Conclusiones.

Fué preciso justificar el uso del controlador estabilizante LPV así como el observador de estados de orden completo como un sistema completo al analizar ambas partes como un solo sistema.

Se optó por utilizar un observador de estados de orden completo y no un observador de estados de orden reducido para justificar el diseño por separado del controlador estabilizante LPV por retroalimentación de estados.

Siempre que se obtiene una restricción LMI es necesario que esta tenga solución y para ello es necesario relajar la LMI, en este caso una PLMI.

Una vez relajada la PLMI, se discretizó y posteriormente se extendió a un conjunto de regiones especiales LMI $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ que previenen estabilidad marginal, oscilaciones pronunciadas y velocidad de convergencia respectivamente entre otros efectos indeseados.

Capítulo 5

Resultados de las simulaciones.

El problema de la estabilización de la bicicleta sin conductor fué abordado mediante la metodología de controlador LPV que acepta una variación máxima de ρ . Aparte de contemplar los cambios bruscos de velocidad $v(t)$, también se hizo la colocación de polos del sistema en la región $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$.

Se muestran: Los parámetros de diseño considerados para la bicicleta, la solución de las PLMIs mediante el control toolbox de matlab [74] para encontrar las ganancias de retroalimentación y de observador.

De igual forma se realizó la colocación de polos para el observador de estados de orden completo en la región $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$.

Se muestra la evolución de los estados del sistema completo con condiciones iniciales diferentes de cero y posteriormente su respuesta ante perturbaciones.

Se muestra en este Capítulo la simulación del observador con distintas condiciones iniciales a fin de poner a prueba la estabilidad del sistema completo.

Finalmente se muestra la evolución de movimiento en el plano xy de la bicicleta con el propósito de comprender los efectos colaterales de mantener la estabilidad de la bicicleta, pues no se tiene consideración alguna sobre la trayectoria que tomará la bicicleta al no contemplarlo en el modelado visto en el Capítulo 3.

5.1. Parámetros de diseño.

La ganancia de control estabilizante $K(jh)$ y la ganancia de observador $L(v(t))$ se encuentran por desarrollar una búsqueda numérica que satisfaga las PLMIs (4.22), (4.23), (4.24), (4.32), (4.33) y (4.34) que confinan los eigenvalores del sistema a 2 regiones LMI definidas por $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ y $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$.

Los valores numéricos de las cotas de la región $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ se pueden tomar como parámetros de diseño pues lo que se quiere del observador es que los estados estimados convergan lo más rápido a los estados reales.

Se pueden escoger los valores para α_o , β_o y γ_o con el fin de garantizar que el cálculo de las ganancias aseguren una convergencia suave sin oscilaciones pronunciadas que define la región mostrada en la Figura 2.3 (Es importante aclarar que se buscaron los valores de α_o , β_o y γ_o a prueba y error):

$$\alpha_o = 0,4, \beta_o = \frac{\pi}{4}, \gamma_o = 1 \quad (5.1)$$

Estos valores para α_o , β_o y γ_o fueron elegidos por prueba y error, no con alguna función de minimización, pero para cuestiones prácticas esto no afecta al transitorio del sistema.

Lo ideal sería que γ_o fuera lo más pequeña posible pues de esta forma se asegura que la parte real de los eigenvalores del sistema no se alejan demasiado del 0.

Para β_o lo ideal sería que fuera lo más cercano a $\frac{\pi}{2}$, pues de esta forma, la parte imaginaria de los eigenvalores del sistema serían muy pequeñas, lo que equivale a que las oscilaciones en el transitorio sean lo menos pronunciadas posibles.

Para α_o lo que se desea es que no esté muy cerca 0 para evitar que el sistema sea marginalmente estable.

Para más información de la parte real e imaginaria de los eigenvalores ver la Sección 2.4 o la siguiente referencia acerca de sistemas de segundo orden [45].

La región $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ se trata de forma distinta pues depende de distintos factores. Para obtener resultados óptimos de estabilización, es indispensable que la dinámica

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

del observador sea de al menos diez veces más rápida que la del controlador estabilizante.

Se dice que la dinámica de un sistema es más rápida que otro si la parte real de sus polos dominantes se encuentra más cerca del origen [45], por ello se realiza el simple cálculo de:

$$\alpha_e = 10\alpha_o = 10 * 0,4 = 4 \quad (5.2)$$

Las restricciones de β_e y γ_e se eligen tomando en cuenta las limitaciones del único actuador presente en la bicicleta, pues para garantizar el mínimo coeficiente de amortiguamiento (ζ) y una máxima frecuencia natural.

Se tiene que, para frecuencias naturales mayores a 25 rad/s el par de dirección sería de $1,5 \text{ N/m}$ [2], debido a lo anterior, se elige una frecuencia natural no amortiguada (ω_n) de 20 rad/s para no saturar al actuador.

Otro parámetro de diseño es elegir el coeficiente de amortiguamiento (ζ) pues entra el conflicto que para un ζ cercano a 1, el sistema tardaría demasiado en alcanzar el estado estable, mientras que para un ζ cercano a 0 el sistema tendría demasiadas oscilaciones pronunciadas.

Es común que normalmente se elijan coeficientes de amortiguamiento de 0,7 pues presenta ventaja al converger en un tiempo aceptable y alcanzar el valor deseado más rápido que un ζ mayor; sin embargo, en este sistema se requiere un poco más de velocidad de convergencia por lo que se ha elegido un ζ de 0,6. Por lo que β_e y γ_e quedan definidas por las siguientes ecuaciones [21]:

$$\beta_e = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0,6) = 0,9273 \text{ rad} \quad (5.3)$$

$$\gamma_e = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{\sin(\beta_e)} = \frac{20 * \sqrt{1 - (0,6)^2}}{\sin(0,9273)} = 20 \quad (5.4)$$

5.2. Solución mediante el toolbox de control para resolver LMIs de MatLab.

Mediante el control toolbox de matlab para resolver LMI's, se definió adecuadamente la búsqueda numérica para las PLMI's eligiendo $N_b = 100$ para la discretización del parámetro variable en el tiempo $v(t)$.

Lo que se hizo fué encontrar una ganancia de retroalimentación $K(jh)$ para cada punto de operación de la discretización del parámetro variable $v(t)$, de igual forma se encontraron las ganancias de observador $L(jh)$.

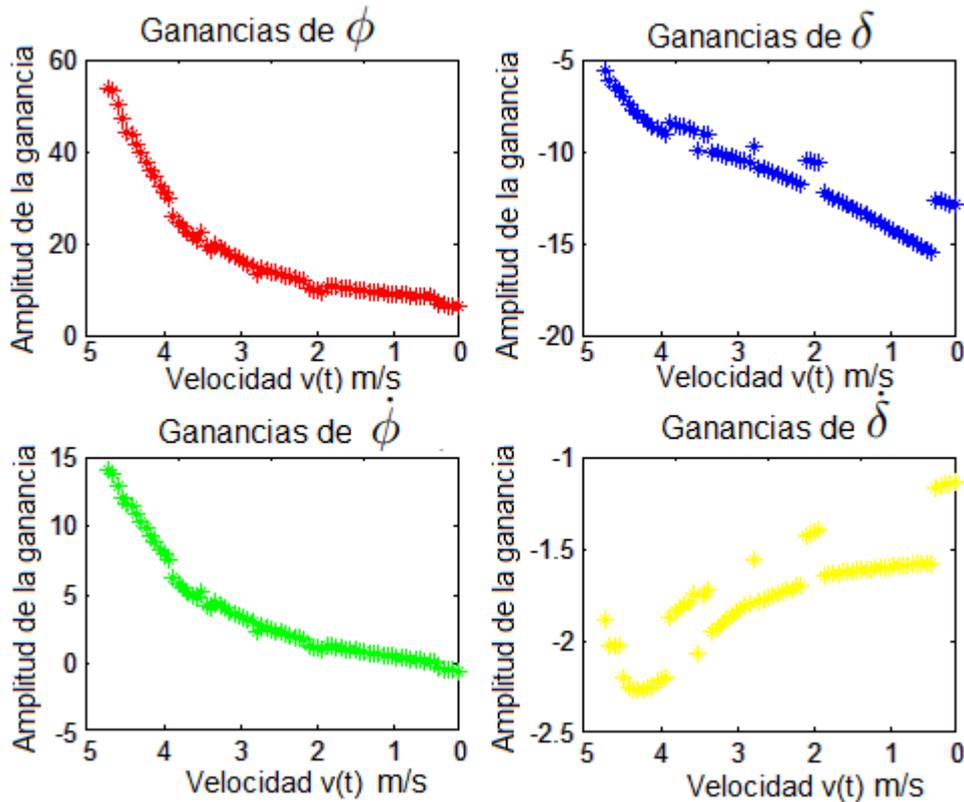


Figura 5.1: Ganancia de retroalimentación $K(jh)$ para estabilizar el sistema LPV.

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

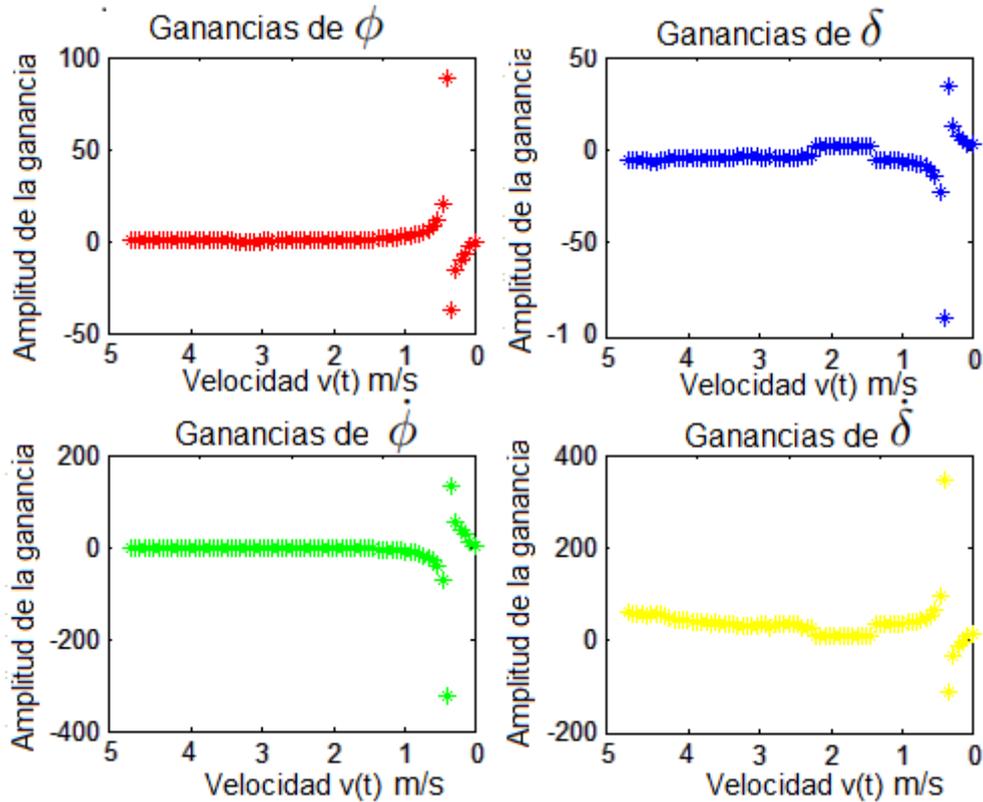


Figura 5.2: Ganancias del observador $L(jh)$ para asegurar la convergencia de los estados estimados a los estados reales.

En la Figura 5.1 y 5.2, se pueden observar las ganancias de retroalimentación $K(jh)$ y de observador $L(jh)$ respectivamente, que varían en función de la velocidad dada en m/s .

Es importante notar que no siempre se sigue una trayectoria definida, pues para ciertos valores de la discretización de $v(t)$ seguir la misma trayectoria de ganancias resultaría en salir de las regiones $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ y $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$.

Al realizar la búsqueda numérica el control toolbox realiza las mismas iteraciones hasta encontrar cualquier valor valido para las LMI's y al no encontrar solución en el mismo número de iteraciones, entonces el control toolbox arroja el primer resultado satisfactorio.

También se pueden agregar parámetros de diseño a fin de encontrar una sola trayectoria de solución las ganancias de $K(jh)$ y $L(jh)$, siempre teniendo en cuenta que no siempre la LMI tendrá solución pero se pueden encontrar ganancias cercanas

a las trayectorias presentes.

5.3. Simulación del sistema.

Tal como se vió en el Capítulo 3 en la Figura 3.18, la estabilidad de la dinámica de la bicicleta solo se presenta en el rango de velocidad de entre los $3,32 m/s$ y los $4,04 m/s$ y el objetivo de control es lograr la estabilización de la bicicleta para un rango desde $0 m/s$ hasta los $5 m/s$.

Es importante aclarar que existen valores en los que la velocidad de avance $v(t)$ hace que la matriz $A(v(t))$ sea no controlable, una de las velocidades para las que no es valido el controlador es $0 m/s$ pues la matriz $A(v(t))$ deja de ser de orden completo y no cumple con las condiciones de observabilidad ni controlabilidad, las demás velocidades para las son $v(t) \in \left\{ 1,83051628 \quad 0,033863576 \right\}$, esto es analizado en [71].

El sistema aproxima la velocidad al punto de operación más cercano al que corresponde uno de los 100 puntos de operación de $v(t)$, es decir, para $1,83051628 m/s$ corresponde a $1,83 m/s$ y para $0,033863576 m/s$ corresponde a $0,05 m/s$. Subsannando el problema de la pérdida de controlabilidad en dichos puntos.

Lo anterior no es valido para una velocidad nula pues el sistema aplicaría la ganancias de retroalimentación $K(v(t))$ correspondiente a la velocidad $0,05 m/s$ pero una bicicléta estática no es controlable con los actuadores presentes en este sistema.

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

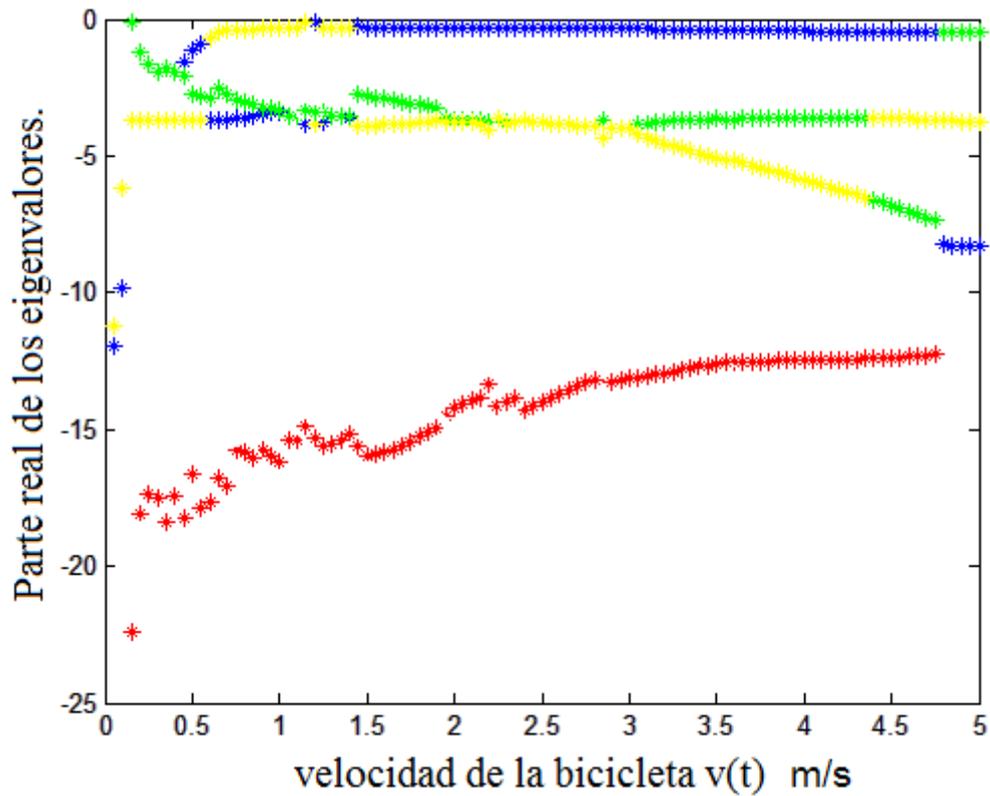


Figura 5.3: Parte real de los eigenvalores del sistema completo a través del rango de velocidad de 0 m/s a 5 m/s .

En la Figura 5.3 se muestra la parte real de los eigenvalores de $A(v(t)) + BK(v(t))\hat{x}(t)$, se ha logrado la estabilización del sistema para todo el rango de velocidad previsto para $v(t)$.

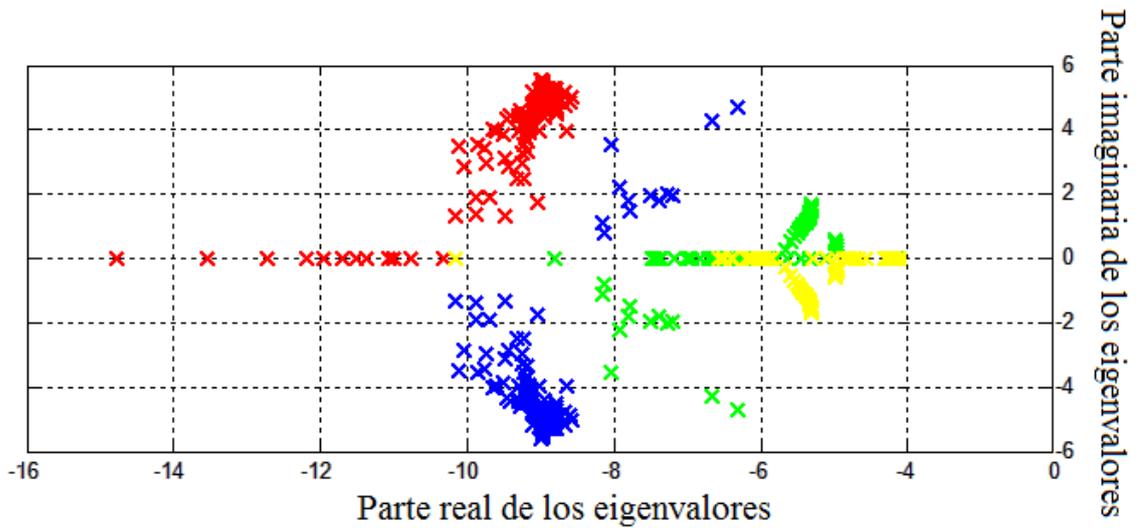


Figura 5.4: Eigenvalores de la matriz $A(v(t)) + BK(v(t))\hat{x}(t)$ en el plano complejo.

En la Figura 5.4 se muestran los eigenvalores de la matriz $A(v(t)) + BK(v(t))\hat{x}(t)$ en el plano complejo y se puede apreciar que los eigenvalores están confinados a liar solamente en las región $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ pues los eigenvalores permanecen después del -4 y antes del 20 correspondientes a α_e y γ_e y dentro del ángulo $\beta_e = 0,9273 \text{ rad}$.

La media de desaceleración de una bicicleta promedio es aproximadamente de $0,25 \text{ m/s}^2$ [71], para la bicicleta en cuestión, esto significaría que en 20 segundos, la bicicleta pasará de 5 m/s a 0 m/s .

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

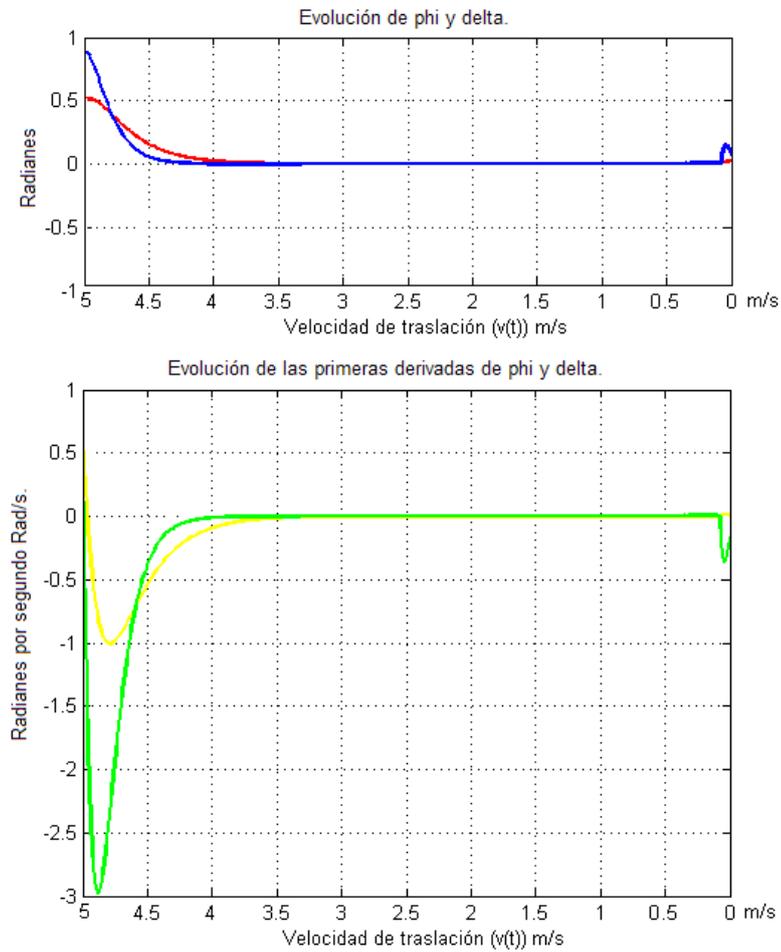


Figura 5.5: Evolución de los estados ϕ , δ , $\dot{\phi}$ y $\dot{\delta}$ en lazo cerrado con retroalimentación $u(t) = K(v(t))\hat{x}(t)$.

En la Figura 5.5 se consideraron las siguientes condiciones iniciales de los estados:

- $\phi = 0,5 \text{ rad}$
- $\delta = 0,875 \text{ rad}$
- $\dot{\phi} = 0,625 \text{ rad/s}$
- $\dot{\delta} = 0,5 \text{ rad/s}$

Se puede apreciar que a pesar que las condiciones iniciales son diferentes de cero, el sistema es capaz de recuperar la vertical y sin ninguna otra perturbación permanece estable hasta llegar a regiones cercanas al cero.

Para este tipo de velocidades cercanas a cero, es más complicado controlar el sistema pues la discretización de la velocidad es cada $0,05\text{ m/s}$ y para velocidades tan bajas es mucho más sensible el sistema pues la ganancias para $0,05\text{ m/s}$ y las ganancias para $0,1\text{ m/s}$ difieren demasiado entre ellas, cosa que no sucede a velocidades más altas como en $3,35\text{ m/s}$ y $3,4\text{ m/s}$ cuyas ganancias son casi similares.

El problema anterior se debe principalmente a un error en la discretización, pues casi nunca una discretización uniforme es la mejor solución para captar fielmente algún fenómeno físico.

Esto demostró que ciertos cálculos de ganancias no son necesarios y que donde la dinámica es más crítica se debería hacer una discretización más precisa para captar mejor la dinámica del sistema.

Otro problema que puede surgir es que la LMI no tenga solución en ciertas regiones y esas regiones deben ser tratadas adecuadamente a través de diferentes técnicas [61].

Solo conociendo este tipo de regiones críticas y las regiones donde no tiene solución la LMI se podría hacer una correcta discretización del sistema.

No se pueden conocer estas regiones hasta que se está desarrollando la búsqueda numérica y para realizar la búsqueda numérica fué necesario previamente discretizar el sistema, en [62] se aborda esta situación en la que se proveé de forma probabilística en que regiones las LMIs tienen solución y donde se necesita hacer más precisa la discretización.

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

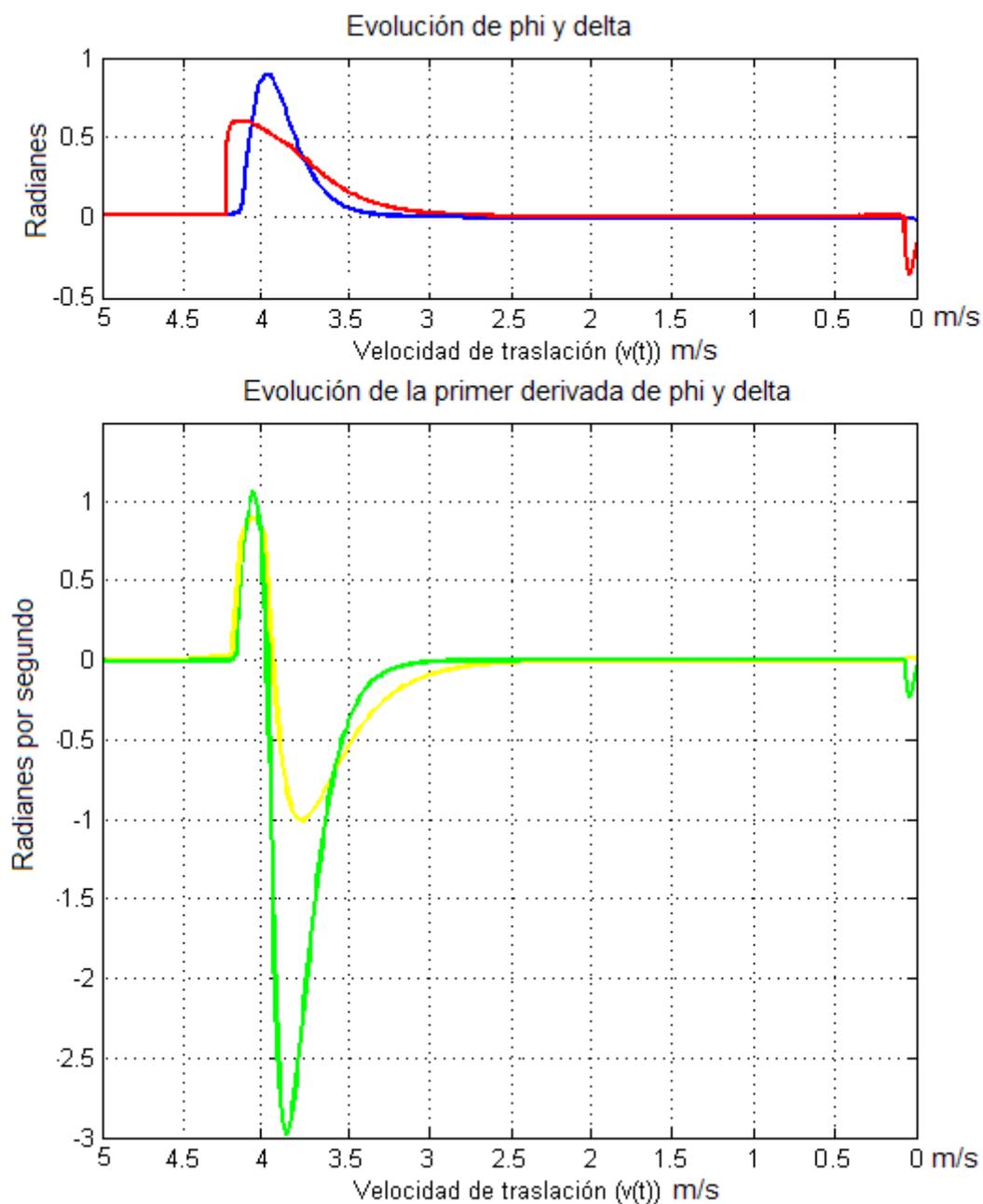


Figura 5.6: Evolución de los estados ante una perturbación en ϕ .

En la Figura 5.6 se muestra la evolución de los estados del sistema con condiciones iniciales iguales a cero pero con una perturbación de $0,5\text{ rad}$ y a pesar de que es la misma magnitud del ángulo que en la Figura 5.5 tarda un poco más en alcanzar el estado estable que cuando las condiciones iniciales son diferentes de cero y eso que solo la perturbación es sobre el ángulo ϕ .

5.3 Simulación del sistema.

De forma similar si una perturbación de igual magnitud sucede cuando la velocidad es cercana a 0, el controlador tardaría más en estabilizarse o inclusive no se estabilizaría si durante el transitorio la velocidad de traslación llega a 0 m/s .

Hay que tener en cuenta que la dinámica es así de lenta debido a que los estados son estimados y que la magnitud de la perturbación fué agregada drásticamente como una señal de impulso, si la perturbación hubiera sido más gradual el controlador estabilizante basado en observador hubiera empezado a corregir el problema en cuanto se detectara la perturbación.

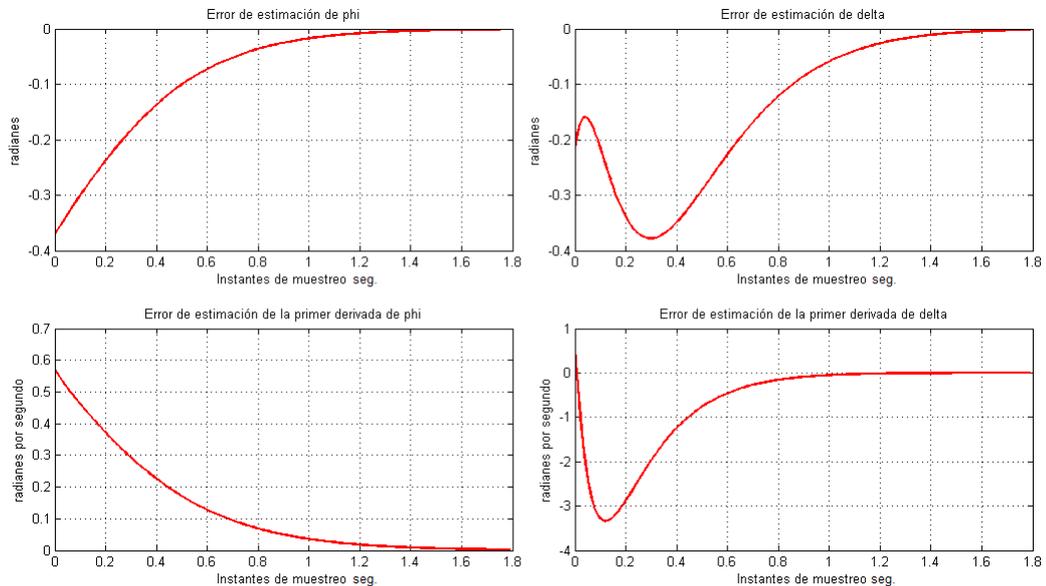


Figura 5.7: Evolución del error de estimación.

En la Figura 5.7 se consideraron las siguientes condiciones iniciales de los estados:

- $\phi(0) = \frac{\pi}{5} \text{ rad.}$
- $\delta(0) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$
- $\dot{\phi}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s.}$
- $\dot{\delta}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s.}$

Con el propósito de comprobar la convergencia asintótica de los estados estimados a los estados reales en la Figura 5.7 se muestran los estados estimados con condiciones iniciales: $\phi_o(0) = \delta_o(0) = \dot{\phi}_o(0) = \dot{\delta}_o(0) = 1 \text{ rad.}$

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

Y tal como se muestra en la Figura 5.7 se ha conseguido la convergencia asintótica de los estados estimados a los estados reales a pesar de tener condiciones iniciales muy diferentes, es bien sabido que, para una dinámica más aproximada de los estados estimados a los estados reales las condiciones iniciales deben ser parecidas.

Como se mencionó en el Capítulo 3, el modelo de la bicicleta fué obtenido para estar en función de $\phi(t)$ y de $\delta(t)$ con el propósito de que captar por completo la dinámica de movimiento de la bicicleta respecto a mantener la vertical de la bicicleta.

Con el fin de observar más comportamientos de la bicicleta se ha calculado la evolución de posición del centro de masa de la bicicleta completa y se ha graficado su movimiento en el plano xy tal como se puede apreciar en la Figura 5.8.

Una vez que el control estabilizante basado en observador ha estabilizado la bicicleta, esta sigue en línea recta hasta que la velocidad de traslación $v(t)$ llega a 0 m/s con lo que la bicicleta caerá sin remedio, pues como puede verse en el Capítulo 3 en la ecuación (3.54), la matriz $A(v(t))$ con una velocidad de avance $v(t)$ de 0 m/s se convierte en una matriz singular y por lo tanto no cumple con las condiciones de observabilidad ni controlabilidad.

Las condiciones iniciales con las que se simuló el recorrido de la bicicleta visto en la Figura 5.8 fueron:

- $\phi(0) = \frac{\pi}{5}\text{ rad}$
- $\delta(0) = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$
- $\dot{\phi}(0) = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$
- $\dot{\delta}(0) = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$

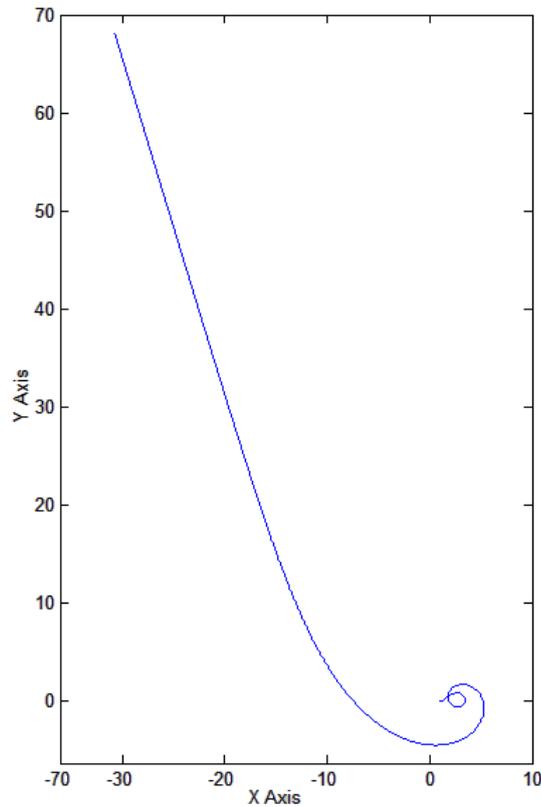


Figura 5.8: Movimiento en el plano xy del centro de masa de la bicicleta completa.

5.4. Conclusiones

El uso del parámetro de diseño ρ visto en los Capítulos 2 y 4 en las ecuaciones (2.20) y (4.15) resuelve el problema que tienen diferentes metodologías como:

- Ganancias programadas
- Controladores LPV sin consideración en el máximo cambio permitido en los parámetros variables.

En el primer caso, la metodología de ganancias programadas únicamente funciona si los cambios del parámetro variables son muy lentos [75], pues fué ideada esta metodología para pocos cambios e incluso solamente dos posiciones del parámetro variable.

El segundo caso es el de los controladores LPV que no consideran el máximo cambio posible en el parámetro variable, esto se resuelve por agregar en la LMI principal (4.20) el siguiente término: $\rho \frac{\partial S(v(t))}{\partial v(t)}$ donde ρ es el máximo del rango de $\dot{v}(t)$.

5. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

Los parámetros de diseño para la colocación de polos en la región $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ para el observador se buscaron lo más convenientemente posible con la ventaja de que estos no presentan limitaciones físicas debidas a los actuadores.

En cambio para la estabilización del sistema en la misma región es limitada por la fuerza que puede proporcionar el actuador y a partir de este punto se calcularon los valores para α_e , β_e y γ_e con el propósito de no saturar al único actuador presente en el sistema.

Se demostró la efectividad y fiabilidad de dicho sistema de estabilización y de observador al presentar los eigenvalores del sistema y dentro de la región prescrita anteriormente.

Las condiciones iniciales para los estados del sistema no deben ser exageradas pues el análisis del diseño es para ángulos pequeños, aún así, se mostro que para una condiciones iniciales relativamente grandes el sistema responde de manera adecuada y aún ante perturbaciones fuertes el sistema se logra estabilizar.

No se tienen consideraciones al movimiento hecho por la bicicleta al mover el manubrio para estabilizarse, debido a esto la bicicleta necesita una amplia zona de al menos $140 m^2$, esto puede suponer un problema que se puede resolver al incluir en el modelo de la bicicleta la ubicación de la bicicleta en el plano xy y así poder desarrollar sistemas de seguimiento de trayectoria que al mismo tiempo mantenga la vertical de la bicicleta.

Capítulo 6

Conclusiones generales

6.1. Resultados

En este trabajo de investigación, se analizó de manera adecuada la teoría necesaria para estabilizar un sistema de naturaleza inestable de tres grados de libertad: $\phi(t)$, $\delta(t)$ y $v(t)$, de los cuales una es la variable controlada, la variable manipulada y un parámetro variable en el tiempo.

Para lograr lo anterior se tuvo que manipular de manera correcta el modelo de la bicicleta con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento reducidas y linealizadas por considerar pequeños cambios en los momentos angulares.

Se diseñó un sistema de control capaz de balancear automáticamente una bicicleta sin conductor en posición vertical.

Debido a que la dinámica del sistema depende de un parámetro variable en el tiempo $v(t)$ y es medible en línea, se logró representar el modelos de la bicicleta como un modelo LPV.

La instrumentación del prototipo no proporcionaba todos los estados por lo que se desarrolló un control estabilizante LPV por colocación de polos basado en un observador de estados de orden completo.

Todo formulado en términos de la región LMI $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$. Con el fin de obtener un transitorio adecuado se acotaron los valores de α_e , β_e y γ_e adecuadamente para no saturar el único actuador presente en la bicicleta.

6. CONCLUSIONES GENERALES

Todo lo anterior para obtener un buen controlador estabilizante de una bicicleta que asegure una convergencia asintótica suave y sin oscilaciones pronunciadas que considere el cambio máximo de la velocidad: ρ que es la cota máxima del rango variación permitida: $Q = \{v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q, |\dot{v}_i(t)| \leq \rho_i, 1, \dots, t \in \mathbb{R}_+\}$

Gracias a que el controlador estabilizante LPV está basado en un observador de estados LPV, se puede no tener la instrumentación suficiente para medir todos los estados de la bicicleta, ahorrando en coste monetario al ocupar menos sensores especializados y tarjetas de adquisición de datos si se tuviera que implementar dicho controlador.

6.2. Líneas de trabajo futuras

Se pueden realizar futuras investigaciones en el desarrollo de un controlador para el seguimiento de trayectorias modificando la matriz $A(v(t))$ para incluir las posiciones x y y del mapa coordenado, el prototipo necesitará sensores adicionales para conocer la posición global de la bicicleta si se desea un buen desempeño del sistema.

Igualmente se puede proponer un control de velocidad que en conjunto con este controlador se puedan seguir trayectorias predefinidas.

Se tiene que contar que para velocidades cercanas a 0 m/s el sistema requiere más potencia en el actuador, un observador de alta ganancias que siga sin alterar la matriz característica del sistema completo.

También se necesitaría de una discretización más especializada a las dinámicas cercanas a la velocidad nula. Todo lo anterior con el fin de, hacer a la bicicleta un vehículo más autónomo.

Se pueden desarrollar estimadores de fallas y control tolerante a fallas en actuadores, existen diversos métodos de detección de fallas en sistemas LPV, haría falta la extensión de este trabajo a la estimación de fallas en actuadores o al control tolerante a fallas con acomodación de fallas en actuadores y de igual forma para fallas en sensores.

También se pueden desarrollar controladores H_∞ para el desarrollo de contro-

ladores robustos a perturbaciones, tomando a $T_\phi(t)$ como una perturbación con el propósito de minimizar efectos no deseados en el transitorio del sistema.

Bibliografía

- [1] Jaap P Meijaard, Jim M Papadopoulos, Andy Ruina, and Arend L Schwab. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2084):1955–1982, 2007.
- [2] Vito Cerone, Davide Andreo, Mats Larsson, and Diego Regruto. Stabilization of a riderless bicycle a linear-parameter-varying approach. *control systems. IEEE Control Systems Magazine*, 30:23–32, 2010.
- [3] Corentin Briat. *Commande et observation robustes des Systemes LPV Retardés*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 19–64, 2008.
- [4] Jaap P Meijaard, Jim M Papadopoulos, Andy Ruina, and AL Schwab. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, 9(2): 343–376, 2013.
- [5] T Goetz. von drais von sauerbronn kfcl. draisinen. *Journal für Literatur, Kunst, Luxus und Mode*, pages 365–377, 1820.
- [6] ME Carvallo. *THEORIE DE MOUVEMENT DU MONOCYCLE ET DE LA BYCYCLETTE*, volume 5 of 2. *Journal de L'Ecole Polytechnique*, pages 10–30, 1901.
- [7] David EH Jones. The stability of the bicycle. *Physics today*, 23(4):34–40, 1970.
- [8] Jim M Papadopoulos. Bicycle steering dynamics and self-stability: a summary report on work in progress. *Cornell Bicycle Research Project, Cornell University*, pages 1–23, 1987.
- [9] JP Schwab, AL y Meijaard. A review on bicycle dynamics and rider control. *Vehicle System Dynamics*, 51(7):1059–1090, 2013.

-
- [10] Jerrold E Getz, Neil H y Marsden. Control for an autonomous bicycle. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1397–1402. IEEE, 1995.
- [11] Yonghua Huang, Qizheng Liao, Lei Guo, and Shimin Wei. Balanced motions realization for a mechanical regulators free and front-wheel drive bicycle robot under zero forward speed. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10, 2013.
- [12] Masaki Keo, Lychek y Yamakita. Controller design of an autonomous bicycle with both steering and balancer controls. In *Control Applications,(CCA) & Intelligent Control,(ISIC), 2009 IEEE*, pages 1294–1299. IEEE, 2009.
- [13] Thanh-Son Chen, Chih-Keng y Dao. Fuzzy control for equilibrium and roll-angle tracking of an unmanned bicycle. *Multibody system dynamics*, 15(4):321–346, 2006.
- [14] Nestor Roqueiro, M de Faria, and Enric Fossas. Sliding mode controller and flatness based set-point generator for a three wheeled narrow vehicle. In *18th IFAC World Congress. Milano, italy*, volume 18, pages 11925–11930, 2011.
- [15] Matteo Corno, Sergio M Savaresi, and Gary J Balas. On linear-parameter-varying (lpv) slip-controller design for two-wheeled vehicles. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(12):1313–1336, 2009.
- [16] Jingang Yi, Dezhen Song, Anthony Levandowski, and Suhada Jayasuriya. Trajectory tracking and balance stabilization control of autonomous motorcycles. In *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, pages 2583–2589. IEEE, 2006.
- [17] Michael Shamma, Jeff S y Athans. Guaranteed properties for nonlinear gain scheduled control systems. In *Decision and Control, 1988., Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, pages 2202–2208. IEEE, 1988.
- [18] M. Shamma, Jeff S y Athans. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(8):898–907, 1990.
- [19] Masayuki Sato, Yoshio Ebihara, and Dimitri Peaucelle. Gain-scheduled state-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters: H2 and hinf problems. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 3094–3099. IEEE, 2010.

BIBLIOGRAFÍA

- [20] Graziano Chesi. Exact robust stability analysis of uncertain systems with a scalar parameter via lmi. *Automatica*, 49(4):1083–1086, 2013.
- [21] Pascal Chilali, Mahmoud y Gahinet. Hinf design with pole placement constraints: an lmi approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(3):358–367, 1996.
- [22] Carsten W Scherer. Robust mixed control and lpv control with full block scalings. *Advances in LMI Methods in Control, SIAM*, pages 187–208, 1999.
- [23] He Xu, Zhao Jun, and Georgi M Dimirovski. A blending method control of switched lpv systems with slow-varying parameters and its application to an f-16 aircraft model. In *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, pages 1765–1770. IEEE, 2011.
- [24] He Xu, Zhao Jun, Georgi M Dimirovski, and Chen Chao. Switching control for lpv polytopic systems using multiple lyapunov functions. In *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, pages 1771–1776. IEEE, 2011.
- [25] Márcio J Lacerda, Ricardo CLF Oliveira, and Pedro LD Peres. Hinf parameter-dependent filter design for arbitrarily time-varying lpv systems. *18th IFAC World Congress, Milano, Italy*, 1612:7927–7932, 2011.
- [26] Francisco-Ronay Lopez-Estrada, J-C Ponsart, CM Astorga-Zaragoza, and Didier Theilliol. Fault estimation observer design for descriptor-lpv systems with unmeasurable gain scheduling functions. In *Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), 2013 Conference on, Nice, France*, pages 269–274. IEEE, 2013.
- [27] L Giarré, D Bauso, P Falugi, and B Bamieh. Lpv model identification for gain scheduling control: An application to rotating stall and surge control problem. *Control Engineering Practice*, 14(4):351–361, 2006.
- [28] Carsten W Mohammadpour, Javad y Scherer. *Control of linear parameter varying systems with applications*. Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, Germany, 1-4, 2012.
- [29] Ali Umut Genc. *Linear parameter-varying modelling and robust control of variable cam timing engines*. PhD thesis, University of Cambridge, Cambridge, U.K., 77-150, 2002.

-
- [30] Olivier Sename, Peter Gaspar, and József Bokor. *Robust control and linear parameter varying approaches: application to vehicle dynamics*. Springer, Heidelberg, Germany, 3-20, 2013.
- [31] Mohamed Abdullah, Ali y Zribi. Model reference control of lpv systems. *Journal of the Franklin Institute*, 346(9):854–871, 2009.
- [32] Yuyu Yang, Baoqing y Zhao. Autopilot design method for the blended missile based on model predictive control. *International Journal of Aerospace Engineering*, 1(1):1–13, 2015.
- [33] A Kwiatkowski, H Werner, JP Blath, A Ali, and M Schultalbers. Linear parameter varying pid controller design for charge control of a spark-ignited engine. *Control Engineering Practice*, 17(11):1307–1317, 2009.
- [34] A Brezoescu, R Lozano, and P Castillo. Lyapunov-based trajectory tracking controller for a fixed-wing unmanned aerial vehicle in the presence of wind. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 29:372–384, 2014.
- [35] Hossam Seddik Abbas, Ahsan Ali, Seyed Mahdi Hashemi, and Herbert Werner. Lpv state-feedback control of a control moment gyroscope. *Control Engineering Practice*, 24:129–137, 2014.
- [36] Pierre Apkarian and Hoang Duong Tuan. Parameterized lmis in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1241–1264, 2000.
- [37] Mahmoud Chilali, Pascal Gahinet, and Pierre Apkarian. Robust pole placement in lmi regions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 44(12):2257–2270, 1999.
- [38] James Xu, Shengyuan y Lam. *Robust control and filtering of singular systems*, volume 332. Springer, Berlin Heidelberg, Germany, 11-69, 2006.
- [39] Shiqi Zhou. Formally exact first-order taylor series expansion for density functional theory. *New Journal of Physics*, 4(1):36, 2002.
- [40] Andrés Marcos, Murray Kerr, Gabriele De Zaiacomo, Luis F Peñín, Zoltán Szabó, Gábor Rödönyi, and József Bokor. Application of lpv/lft modeling and data-based validation to a re-entry vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Chicago, Illinois, U.S.*, 2009.

BIBLIOGRAFÍA

- [41] Mickael Rodrigues, Habib Hamdi, Naceur Benhadj Braiek, and Didier Theilliol. Observer-based fault tolerant control design for a class of lpv descriptor systems. *Journal of the Franklin Institute, Lyon, France*, 351(6):3104–3125, 2014.
- [42] Herbert Hoffmann, Christian y Werner. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *Control Systems, IEEE*, 23(2):416–433, 2014.
- [43] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3):531–534, 1992.
- [44] HD Tuan and P Apkarian. Relaxations of parameterized lmis with control applications. In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1747–1752. IEEE, 1998.
- [45] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, Madrid, España, 5a edition, 164-183, 2003.
- [46] Floriane Anstett, Gilles Millérioux, and Gérard Bloch. Polytopic observer design for lpv systems based on minimal convex polytope finding. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 3(1):23–43, 2009.
- [47] Renato Borges, Pedro LD Peres, et al. Hinf lpv filtering for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 1692–1697. IEEE, 2006.
- [48] Graziano Chesi, Andrea Garulli, Alberto Tesi, and Antonio Vicino. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous lyapunov functions. *Automatica*, 43(2):309–316, 2007.
- [49] RCLF Oliveira, VJS Leite, MC De Oliveira, and PLD Peres. An lmi characterization of polynomial parameter-dependent lyapunov functions for robust stability. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on, Seville, Spain*, pages 5024–5029. IEEE, 2005.
- [50] Zabala-Río Brizuela-Mendoza, Astorga-Zaragoza. Regiones lmi para el diseño de controlares de sistemas lpv polinomiales. *Congreso Latinoamericano de Control Automático*, 2014.

-
- [51] Andy Packard. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22(2):79–92, 1994.
- [52] Francesco Casella and Marco Lovera. Lpv/lft modelling and identification: overview, synergies and a case study. In *Computer-Aided Control Systems, 2008. CACSD 2008. IEEE International Conference on, San Antonio, Texas, U.S.*, pages 852–857, 2008.
- [53] Paulo C Pellanda, Pierre Apkarian, and Hoang Duong Tuan. Missile autopilot design via a multi-channel lft/lpv control method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(1):1–20, 2002.
- [54] Emilie Roche, Olivier Sename, and Daniel Simon. Lft/hinf varying sampling control for autonomous underwater vehicles. In *4th IFAC Symposium on System, Structure and Control*, volume 30, pages 81–88, 2010.
- [55] Joël Bordeneuve-Guibé, Daniel Alazard, and Jean Desmariaux. Lpv techniques for the control of an airborne micro-launcher. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Toulouse, France*, pages 2071–2088, 2014.
- [56] C. W. J. Hol. C. W. Scherer. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semidefinite programs. *Mathematical Programming Series B, Delf, Netherlands*, 253–258, 2006.
- [57] P. A. Parrilo. K. Gatermann. Symmetry groups, semidefinite programs and sum of squares. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 192:95–128, 2004.
- [58] J William Helton. "positive" noncommutative polynomials are sums of squares. *Annals of Mathematics, San Diego, California, U.S.*, pages 675–694, 2002.
- [59] Pablo A Parrilo. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. PhD thesis, Citeseer, Pasadena, California, U.S., 55–100, 2000.
- [60] Jeremy G VanAntwerp and Richard D Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control, Illinois, U.S.*, 10(4):363–385, 2000.
- [61] Giuseppe C Calafiore, Fabrizio Dabbene, and Roberto Tempo. Randomized algorithms for probabilistic robustness with real and complex structured uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(12):2218–2235, 2000.

BIBLIOGRAFÍA

- [62] Roberto Tempo, Er-Wei Bai, and Fabrizio Dabbene. Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samples. In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volume 3, pages 3424–3428. IEEE, 1996.
- [63] Braatz VanAntwerp. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control, Illinois, U.S.*, 3:419–429, 2005.
- [64] Nick Trefethen. Six myths of polynomial interpolation and quadrature. *Mathematics Today, Oxford*, 47(4):184–188, 2011.
- [65] R. L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis 8th Edition*. CENGAGE Learning, 431-496, 2004.
- [66] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Number 55. Courier Corporation, Washington, D.C., U.S., 875-930, 1964.
- [67] B. A. Barsky R. H. Bartels, J. C. Beatty. *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. San Francisco, U.S., 129-148, 1998.
- [68] JDG Kooijman, JP Meijaard, Jim M Papadopoulos, Andy Ruina, and AL Schwab. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 332(6027):339–342, 2011.
- [69] Steve Collins, Andy Ruina, Russ Tedrake, and Martijn Wisse. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers. *Science*, 307(5712):1082–1085, 2005.
- [70] Robin S Limebeer, David JN y Sharp. Bicycles, motorcycles, and models. *Control Systems, IEEE*, 26(5):34–61, 2006.
- [71] J. A. Brizuela, C. M. Astorga, and A. Zabala. Controlador de ganancias programadas aplicado a la estabilizacion de una bicicleta sin conductor. *Congreso Nacional de Control Automatico, Ensenada, Baja California, México*, 13:36–41, 2013.
- [72] Klaus Trangbæk, Jakob Stoustrup, and Jan Dimon Bendtsen. Gain scheduling of observer-based controllers with integral action. In *IEEE Conference on Decision and Control, Aalborg, Denmark*, pages 1393–1398, 2006.

- [73] Stephen P Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM, 7-47, 1994.
- [74] PM Gahinet, Arkadii Nemirovskii, Alan J Laub, and Mahmoud Chilali. The lmi control toolbox. In *IEEE conference on decision and control*, volume 2, pages 2038–2038. INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERS INC (IEE), 1994.
- [75] Andrew White, Jongeun Choi, and Guoming Zhu. Gain-scheduling control of port-fuel-injection processes. In *Control Engineering Practice, Michigan, U.S.*, pages 380–394. IEEE, 2011.

Apéndice A

Terminología y Simbología.

Tabla A.1: Terminología.

Notación	Significado
LPV	Linear Parameter Varying.
LTI	Linear Time Invariant.
PLMI	Parametrized Linear Matrix Inequality.
LMI	Linear Matrix Inequality.
LFT	Linear Fractional Transformation.
LTV	Linear Time Variant.
FEO	Fault Estimation Observer.
DLPV	Descriptor Linear Parameter Varying.
SoS	Sume of Squares.
ODE	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Apéndice B

Código para encontrar ganancias $K(jh)$ y $L(jh)$.

En este apéndice se muestra el código utilizado del control toolbox para resolver LMI's de MatLab para encontrar estas matrices parametrizadas se muestra por bloques:

```
1 - close all
2 - clear all
3 - clc
4
5 - A0=[0 0 1 0;0 0 0 1;13.67 0.225 0 0;4.857 10.81 0 0];
6 - A1=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 -0.164 -0.552;0 0 3.621 -2.388];
7 - A2=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 -1.319 0 0;0 -1.125 0 0];
8 - B=[0;0;-0.339;7.457];
9
10 - k=input('Intervalo, ');
11 - h=0.05;
12 - %t=0.05/h;
13 - kh=k*h;
14 - khh=k*h+h;
15
16 - A=A0+k*h*A1+k^2*h^2*A2;
17
18 - alpha=0.1;
19 - beta=0.9273;
20 - gamma=20;
21
```

Figura B.1: Primera parte del código para hallar $K(jh)$

En la Figura B.1 se muestra la primera parte del código para encontrar la matriz

B. CÓDIGO PARA ENCONTRAR GANANCIAS $K(JH)$ Y $L(JH)$.

de ganancias que estabiliza el sistema (4.12), se muestra la división de la matriz $A(v(t))$ en tres matrices:

$$A0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13,67 & 0,23 & 0 & 0 \\ 4,86 & 10,81 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,164 & -0,552 \\ 0 & 0 & 3,621 & -2,388 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

$$A2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,319 & 0 & 0 \\ 0 & -1,125 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

de forma que:

$$A(v(t)) = A0 + A1 * v(t) + A2 * v(t)^2 \quad (B.4)$$

La LMI a resolver se encuentra discretizada donde k es el instante de muestreo y h es el ancho de los subintervalos por lo que la velocidad actual $v(t)$ es aproximada a uno de los 100 puntos de operación para $v(t)$.

El programa está hecho para recibir información de en que punto de operación se está trabajando, tal como puede verse en la línea 10 de la Figura B.1, en la línea 11 de la misma Figura se aprecia que el ancho de los subintervalos es $h = 0,05$ y en la línea 16 se muestra la ecuación B.4 lista para ser tratada por el control toolbox de MatLab.

Finalmente en la Figura B.1 en las líneas 18, 19 y 20 se muestran los valores de α_e , β_e y γ_e .

```

22 -     setlmis([]);
23 -     X=lmivar(1,[4 1]);
24 -     Y=lmivar(2,[1 4]);
25 -     % X>0
26 -     lmiterm([-1 1 1 X],1,1);
27 -     %Restricciones asociadas al parámetro alpha
28 -     lmiterm([2 1 1 X],A,kh,'s');
29 -     lmiterm([2 1 1 Y],B,kh,'s');
30 -     lmiterm([2 1 1 X],2*alpha,1);
31 -     lmiterm([2 1 1 X],1,khh);
32 -     lmiterm([2 1 1 X],-1,kh);
33 -     lmiterm([2 1 1 X],-1,khh);
34 -     lmiterm([2 1 1 X],1,kh);
35 -     %Restricciones asociadas al parámetros gamma
36 -     lmiterm([3 1 1 X],-gamma,kh);
37 -     lmiterm([3 1 2 X],A,kh);
38 -     lmiterm([3 1 2 Y],B,kh);
39 -     lmiterm([3 1 2 X],1,khh);
40 -     lmiterm([3 1 2 X],-1,kh);
41 -     lmiterm([3 1 2 X],-1,khh);
42 -     lmiterm([3 1 2 X],1,kh);
43 -     lmiterm([3 2 2 X],-gamma,kh);

```

Figura B.2: Segunda parte del código para hallar $K(jh)$

En la Figura B2 se muestra la segunda parte del código para hallar $K(jh)$ en donde en la línea 22 se muestra la inicialización del control toolbox de MatLab, mientras que en las líneas 22 y 23 se declaran las LMI a buscar, siendo $X = S(v(t))$ y $Y = R(v(t))$ y en la línea 26 se declara la primer LMI, esto es, $S(v(t)) > 0$ en donde el primer número (-1) significa que la LMI debe ser mayor que cero debido al signo negativo y el número 1 significa que es la LMI.

Posteriormente, los dos unos siguientes indican la posición del cuadrante en donde se agrega la LMI, después de estos unos viene la variable LMI que en este caso es X , posteriormente, fuera de los corchetes se encuentran dos unos, estos premultiplican y posmultiplican respectivamente a la variable LMI, finalmente en algunas ocasiones se coloca una 's' para indicar que también tiene que incluir el conjugado de la LMI en cuestión.

Y de esta forma se completa el resto del código para encontrar las LMI's (4.22) y (4.23) y en la Figura B.2 se continua el código para resolver la LMI (4.24).

B. CÓDIGO PARA ENCONTRAR GANANCIAS $K(jh)$ Y $L(jh)$.

```
44      %Restricciones asociadas al parámetro beta
45 -    lmiterm([4 1 1 X],sin(beta)*A,kh,'s');
46 -    lmiterm([4 1 1 Y],sin(beta)*B,kh,'s');
47 -    lmiterm([4 1 1 X],sin(beta),khh);
48 -    lmiterm([4 1 1 X],-sin(beta),kh);
49 -    lmiterm([4 1 1 X],-sin(beta),khh);
50 -    lmiterm([4 1 1 X],sin(beta),kh);
51 -    lmiterm([4 2 1 X],cos(beta)*(-A),kh);
52 -    lmiterm([4 2 1 X],kh,cos(beta)*(A)');
53 -    lmiterm([4 2 1 Y],cos(beta)*(-B),kh);
54 -    lmiterm([4 2 1 -Y],kh,cos(beta)*B');
55 -    lmiterm([4 2 1 X],cos(beta),khh);
56 -    lmiterm([4 2 1 X],-cos(beta),kh);
57 -    lmiterm([4 2 1 X],-cos(beta),khh);
58 -    lmiterm([4 2 1 X],cos(beta),kh);
59 -    lmiterm([4 2 2 X],sin(beta)*A,kh,'s');
60 -    lmiterm([4 2 2 Y],sin(beta)*B,kh,'s');
61 -    lmiterm([4 2 2 X],sin(beta),khh);
62 -    lmiterm([4 2 2 X],-sin(beta),kh);
63 -    lmiterm([4 2 2 X],-sin(beta),khh);
64 -    lmiterm([4 2 2 X],sin(beta),kh);
65
66 -    LMIsys=getlmis;
67 -    [tmin,xfeas]=feasp(LMIsys);
68 -    X=dec2mat(LMIsys,xfeas,X);
69 -    Y=dec2mat(LMIsys,xfeas,Y);
70 -    K=Y*inv(X)
71 -    wov=A+B*K;
72 -    Eigwv=eig(wov)
73
```

Figura B.3: Tercera parte del código para hallar $K(jh)$

En la Figura B.3 se muestra la segunda parte del código para hallar $K(jh)$ en donde se termina de codificar la LMI (4.24) y en la línea 66 se da la instrucción de leer las LMI's escritas mientras que en las líneas 67 y 68 se da la instrucción de hacer la búsqueda numérica para la solución de X y de Y .

Finalmente en la línea 70 se calcula matriz $K(jh)$ y en las líneas 71 y 72 se calculan los eigenvalores del sistema con ley de control de $u(t) = K(v(t))x(t)$ solo para comprobar que los valores se encuentren dentro de la región preestablecida $\psi(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$.

De forma similar en que se calcularon las ganancias de estabilización $K(jh)$, se procede para encontrar la ganancia de observador $L(jh)$ codificando las LMI's (4.32),

(4.33) y (4.34).

```
112 - k=input('Intervalo, ');
113 - K1=K1a(k, :);
114 - BK=B*K1;
115 - h=0.05;
116 - kh=k*h;
117 - khh=k*h+h;
118
119 - A=A0+k*h*A1+k^2*h^2*A2;
120 - alpha=0.4;
121 - beta=pi/4;
122 - gamma=1;
123
```

Figura B.4: Primera parte del código para hallar $L(jh)$.

Debido a que la ley de control es $u(t) = K(v(t))x(t)$ es necesario contar con la matriz $K(jh)$ en el estado actual para hacer el cálculo de la ganancia $L(jh)$ en ese punto, por ello el sistema ya debe de contar con la ganancias $K(jh)$ de ese instante, en la Figura B.4.

Lo anterior se puede apreciar en la línea 114, los valores de α_o , β_o y γ_o son 0,4, $\frac{\pi}{4} rad$, y 1 respectivamente mientras que el resto del código es similar al visto en la Figura B.1.

B. CÓDIGO PARA ENCONTRAR GANANCIAS $K(JH)$ Y $L(JH)$.

```
124 -     setlmis([]);
125 -     S=lmivar(1,[4 1]);
126 -     R=lmivar(2,[4 1]);
127 -     % S>0
128 -     lmiterm([-1 1 1 S],1,1);
129 -     %Restricciones asociadas al parámetro alpha
130 -     lmiterm([2 1 1 S],1,A,'s');
131 -     lmiterm([2 1 1 R],1,-C,'s');
132 -     lmiterm([2 1 1 S],1,BK,'s');
133 -     lmiterm([2 1 1 S],2*alpha,1);
134 -     %Restricciones asociadas al parámetro Beta
135 -     lmiterm([3 1 1 S],sin(beta),A,'s');
136 -     lmiterm([3 1 1 R],sin(beta),-C,'s');
137 -     lmiterm([3 1 1 S],sin(beta),BK,'s');
138 -     lmiterm([3 2 1 S],cos(beta),(-A));
139 -     lmiterm([3 2 1 S],cos(beta)*A',1);
140 -     lmiterm([3 2 1 R],cos(beta),C);
141 -     lmiterm([3 2 1 -R],cos(beta)*(-C'),1);
142 -     lmiterm([3 2 1 S],cos(beta),(-BK));
143 -     lmiterm([3 2 1 S],cos(beta)*BK',1);
144 -     lmiterm([3 2 2 S],sin(beta),A,'s');
145 -     lmiterm([3 2 2 R],sin(beta),-C,'s');
146 -     lmiterm([3 2 2 S],sin(beta),BK,'s');
```

Figura B.5: Segunda parte del código para hallar $L(jh)$.

En la Figura B.5 se muestra la segunda parte del código para hallar $L(jh)$ en donde en la línea 124 se muestra la inicialización del control toolbox de MatLab, mientras que en las líneas 125 y 126 se declaran las LMI a buscar, siendo $S = S(v(t))$ y $R = R(v(t))$ y en la línea 128 se declara la primer LMI, esto es, $S(v(t)) > 0$ en donde el primer número (-1) significa que la LMI debe ser mayor que cero debido al signo negativo y el número 1 significa que es la LMI.

Posteriormente, los dos unos siguientes indican la posición del cuadrante en donde se agrega la LMI, después de estos unos viene la variable LMI que en este caso es S , posteriormente, fuera de los corchetes se encuentran dos unos, estos premultiplican y posmultiplican respectivamente a la variable LMI, finalmente en algunas ocasiones se coloca una 's' para indicar que también tiene que incluir el conjugado de la LMI en cuestión.

Y de esta forma se completa el resto del código para encontrar las LMI's (4.32) y (4.34) y en la Figura B.3 se continua el código para resolver la LMI (4.33).

```

147      %Restricciones asociadas al parámetros gamma
148 -    lmiterm([4 1 1 S],1,-gamma);|
149 -    lmiterm([4 1 2 S],1,A);
150 -    lmiterm([4 1 2 R],1,-C);
151 -    lmiterm([4 1 2 S],1,BK);
152 -    lmiterm([4 2 2 S],1,-gamma);
153
154 -    LMIsys=getlmis;
155 -    [tmin,xfas]=feasp(LMIsys);
156 -    S=dec2mat(LMIsys,xfas,S);
157 -    R=dec2mat(LMIsys,xfas,R);
158 -    K=inv(S)*R
159 -    wov=A-K*C+B*K1;
160 -    Eigwv=eig(wov)
161

```

Figura B.6: Tercera parte del código para hallar $L(jh)$.

En la Figura B.6 se muestra la segunda parte del código para hallar $L(jh)$ en donde se termina de codificar la LMI (4.33) y en la línea 154 se da la instrucción de leer las LMI's escritas mientras que en las líneas 156 y 157 se da la instrucción de hacer la búsqueda numérica para la solución de S y de R .

Finalmente en la línea 158 se calcula matriz $K(jh)$ y en las líneas 159 y 160 se calculan los eigenvalores del sistema con ley de control de $u(t) = K(v(t))x(t)$ solo para comprobar que los valores se encuentren dentro de la región preestablecida $\psi(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$.