TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO INSTITUTO TECNOLOGICO DE CD. CUAUHTEMOC

PROGRAMA EDUCATIVO:
INGENIERIA EN GESTION EMPRESARIAL

APUNTES DE LA ASIGNATURA:
INVESTIGACION DE OPERACIONES

ELABORADO POR: M.A. JOSE LUIS MARTINEZ TORRES

CONTRIBUCION ACADEMICA

Esta asignatura posibilita al estudiante para desarrollar modelos que le permitan responder de una manera más rápida, efectiva y apropiada a la intensa dinámica de las organizaciones. El desarrollo tecnológico, el incremento en la productividad de las empresas y la presencia de todo tipo de organizaciones en mercados que antes eran cerrados a la presencia de productos y servicios del exterior han generado una dinámica de competencia extraordinaria esto obliga a las organizaciones locales a mejorar su desempeño. Es en este entorno de alta competencia en el que el deberá desenvolverse, apoyado en sus conocimientos que les permitan a las organizaciones ser competitivas, de aquí la importancia de la investigación de operaciones y de la aplicación de los métodos cuantitativos en las empresas. Las herramientas que le permitirán asumir ese papel protagónico son sin duda parte de este curso de Investigación de Operaciones el cual aporta al perfil la capacidad para: Estructurar una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para la toma de decisiones, Diseñar e implementar sistemas y procedimientos para la optimización de recursos, Aplicar técnicas para la programación y control de proyectos.

Esta asignatura aporta al Ingeniero en Gestión Empresarial la capacidad para diseñar y aplicar modelos matemáticos, relacionados a las organizaciones que ayuden a la toma de decisiones. Diseña e implementa sistemas y procedimientos para la toma de decisiones en la optimización de recursos. Aplica técnicas para la medición y evaluación de la productividad en las organizaciones. Formula y aplica modelos lineales a situaciones reales Identifica las posibilidades de cambios en los sistemas productivos con base en el análisis de sensibilidad. Optimiza los recursos empleados en la organización usando las técnicas de programación lineal.

INDICE / CONTENIDO

1. Toma de decisiones. 7

1.1. Ambientes y criterios para la toma de decisiones. 8

1.2. Toma de decisiones bajo modelos de certidumbre, incertidumbre y riesgo. 8

1.3. Enfoque cuantitativo en la toma de decisiones. 9

1.4. Teoría de la utilidad. 12

1.5. La obtención de datos para la toma de decisiones. 13

1.6. Árboles de decisión. 13

2. Programación lineal. 18

2.1. Formulación y aplicación de modelos de programación lineal. 19

2.2. Método gráfico. 25

2.3. Método simplex. 27

2.3.1. Método algebraico. 27

2.3.2. La tabla simplex. 27

2.4. Método dual. 28

2.5. Método dual-simplex. 30

2.6. Análisis de resultados. 32

3. Asignación y transporte. 35

3.1. Método de Esquina Noroeste. 38

3.2. Método de Costo Mínimo. 41

3.3. Método de Aproximación de Vogel. 42

3.4. Método de Asignación. 43

4. Líneas de espera. 46

4.1. Estructura básica de los modelos de línea de espera. 47

4.1.1. Un servidor, una cola. 49

4.1.2. N servidores, una cola. 52

4.1.3. N servidores, n colas. 56

4.2. Criterios bajo la distribución de Poisson y Exponencial para la selección del modelo apropiado de líneas de espera. 58

4.3. Aplicación de modelos de decisión en líneas de espera. 60

4.4. Inferencia de resultados. 65

5. Modelos de pronósticos e Inventarios. 67

5.1. Modelos de pronósticos. 68

5.1.1. Modelos de pronósticos para un nivel constante. 68

5.1.2. Efectos estacionales en los modelos de pronósticos. 70

5.2. Suavizado exponencial en modelos de tendencia lineal. 72

5.3. Errores en los pronósticos. 73

5.4. Pronósticos causales con regresión lineal. 74

5.5. Definición y tipos de inventarios. 76

5.5.1. Ventajas y desventajas de los inventarios. 77

5.5.2. Costos de inventarios. 78

5.6. Modelos Determinísticos. 78

5.7. Modelos probabilísticas. 87

5.8. Planeación de requerimientos de materiales. 92

6. Redes. 94

6.1. Gráfica de Gantt. 95

6.2. Método de la ruta crítica (PERT/CPM). 95

6.2.1. Terminología. 96

6.2.2. Construcción de una red. 96

6.2.3. Determinación de la ruta crítica. 98

6.2.4. Compresión de redes. 100

6.2.5. Análisis de una red PERT. 100

6.3. Programación y control de proyectos basados en costos. 102

INTRODUCCION

Este programa de estudios considera los aspectos operativos más relevantes de una organización y está encaminado al conocimiento y aplicación de las herramientas que permitan la optimización de las operaciones.

El tema uno aborda la importancia de la toma de decisiones en las organizaciones, la importancia de la disposición de la información para apoyar la toma de decisiones y el tipo de información que apoya la decisión, esto es decisiones basadas en condiciones de certeza, de incertidumbre y de riesgo.

En tema dos se estudian los diferentes métodos de la programación lineal como el método gráfico para dos variables y los métodos basados en el simplex para la determinación de la mezcla adecuada de productos o recursos para lograr la optimización de la utilidad a partir de su maximización de utilidades o la disminución de costos. Para reforzar los conocimientos adquiridos en esta unidad se recurre a estudios de casos y al uso de software de propósito general para obtener la solución óptima.

En el tema tres se consideran los problemas de asignación y transporte. Una parte importante de los costos de operación de las empresas está determinado por los costos de transporte de mercancías, materiales e insumos, en esta unidad se analizan ejercicios que involucran la asignación y el traslado de mercancía de uno o varios puntos llamados orígenes a uno o más puntos considerados destinos, y contemplando el objetivo de la disminución de costos por transporte, los métodos como el método de la esquina noroeste, aproximación de voguel y el de costo mínimo entre otros, son utilizados en esta unidad como herramienta heurística para determinar la mejor combinación origen destino que permita optimizar el resultado.

En el tema cuatro se analizan las líneas de espera. La tendencia en las empresas de servicio es mejorar la atención al cliente, parte importante de esta mejora involucra el tiempo que los clientes deben permanecer haciendo cola hasta recibir la atención por parte del proveedor del servicio, la búsqueda de las empresas para mantener cautivos a sus clientes merced al servicio y la atención y la lucha por hacerse de nuevos clientes está apoyada en el análisis del tiempo que deben pasar los clientes en espera de recibir atención la herramienta que nos permite la optimización de esta condición es la teoría de colas o líneas de espera. En el sector de la manufactura la situación de análisis debe involucrar el análisis del tiempo que las materias primas e insumos deben permanecer dentro de las instalaciones de manufactura hasta su completo procesamiento, la importancia de esto se aprecia en el llamado tiempo de respuesta, en la medida que este tiempo de respuesta disminuya se incrementa la satisfacción del cliente y con ello se logra una ventaja competitiva.

El tema cinco considera el estudio y análisis de los modelos de pronósticos e inventarios. La aplicación de la heurística para tratar de predecir el comportamiento de los mercados y sobre esa base tomar decisiones tan importantes como frecuencia de abastecimiento de materiales, tamaño de lotes, compra de insumos, contratación de personal son de vital importancia para el éxito de las organizaciones en la medida que un mal pronóstico lleve a tomar decisiones y medidas incorrectas de ahí la importancia de los pronósticos, del otro lado el análisis de los inventarios es hoy práctica frecuente en las empresas como consecuencia del impacto que provocan los altos inventarios en los resultados operativos y financieros de las organizaciones, la tendencia en la administración de inventarios es el incremento en la rotación de los mismos a partir de la disminución a partir del llamado lote económico de fabricación. Para analizar ambos conceptos se considera en este tema el estudio de casos y la solución de problemas prácticos apoyados en software como Excel, así como el análisis de un caso real con exposición plenaria en grupo.

En el tema seis, se aborda la administración de proyectos por medio de redes. La importancia de la duración de un proyecto estriba no solo en el servicio al cliente proporcionado, sino también en los costos involucrados en las actividades realizadas en el mismo proyecto. Para estudiar este impacto y su solución en las organizaciones, se deben considerar todas las actividades, recursos e insumos involucrados en la terminación de un proyecto, el impacto económico de terminar un proyecto en la fecha comprometida de finalización, terminarlo antes o después de esta fecha. Para realizar este estudio se recurre a herramientas como las gráficas de Gantt, el Pert o el CPM. La reafirmación de conocimientos en esta unidad se logra partir de la solución de ejemplos prácticos resueltos en clase y el uso de software de propósito general para ejemplos más complejos, así como al estudio de casos y la asignación de proyectos de investigación de casos reales.

TEMA 1 TOMA DE DECISIONES

1.1 Ambientes y criterios para la toma de decisiones.
1.2 Toma de decisiones bajo modelos de certidumbre, incertidumbre y riesgo.
1.3 Enfoque cuantitativo en la toma de decisiones.
1.4 Teoría de la utilidad.
1.5 La obtención de datos para la toma de decisiones.
1.6 Árboles de decisión.

Actividades de aprendizaje

- Analizar y discutir en clase la diferencia entre mejora y optimización de las organizaciones.
- Generar en el grupo una lluvia de ideas para discutir y analizar la importancia de la aplicación de la teoría de las decisiones en administración.
- Analizar y discutir la diferencia entre modelos de decisión basados en certeza, riesgo e incertidumbre.
- Solución de problemas que conduzcan a obtener una utilidad con la aplicación de modelos de Maxi-Max, Maxi-Min y valor esperado.
- Identificar y diferenciar los datos necesarios para estructurar problemas y visualizar las
- posibles alternativas de decisión, utilizando árboles de decisión.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

1.1 Ambientes y criterios para la toma de decisiones.

¿Cómo debe actuarse al tomar una decisión? ¿Qué debe hacerse para tomar la mejor decisión? El resultado de este marco de referencia es un enfoque general conocido como el método científico (definir el problema, recolectar datos, definir soluciones, alternativas, evaluar las soluciones, seleccionar las mejores alternativas y ponerla en práctica). Además, se han desarrollado varios modelos matemáticos para problemas específicos.

El término toma de decisiones se refiere a la selección de una alternativa de entre un conjunto de ellas; Significa escoger.
Ciertos tipos de problemas son comunes en administración, por ejemplo:

- Determinar si un nuevo producto propuesto se debe hacer o no.
- Determinar cuándo ordenar un artículo para inventario y en qué cantidad ordenar.
- Para la planeación.
- Para la programación.

El objetivo de la solución racional de problemas es encontrar el óptimo; Puede ser ganancia máxima o costo mínimo o algún otro criterio.

1.2 Toma de decisiones bajo modelos de certidumbre, incertidumbre y riesgo.

Aquí se supondrá que se ha definido el problema, que se tienen todos los datos y que se han identificado los cursos de acción alternativos. La tarea es entonces seleccionar la mejor alternativa en base a la siguiente teoría de decisiones:

Bajo certidumbre
Sí se pueden predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción entonces se tiene una tarea de toma de decisiones bajo certidumbre.
Ejemplos:
¿en dónde comer? ¿en dónde comprar el material de la oficina? ¿qué modo de transporte usar para los productos?
Modelos y técnicas de investigación de operaciones:

- El análisis de punto de equilibrio.
- Programación lineal.
- Programación de la producción.
- Control de inventarios.

Todos los modelos determinísticos, que serán útiles para evaluar las consecuencias y seleccionar el mejor curso de acción.

Bajo incertidumbre
Ahora no se tiene conocimiento de las probabilidades de los eventos futuros.
Ejemplos:

- Cuántos productos ordenar sin saber cuántos pueden venderse.
- Tratar de adivinar si al tirar una moneda el resultado es cara o cruz sin saber si la moneda tiene 2 caras o tiene 2 cruces.
- Tratar de decidir hoy si se debe aceptar una oferta de trabajo sin saber si después se tendrá una mejor.

Se tienen varios métodos para manejar problemas de este tipo.

- Reducir la incertidumbre obteniendo información adicional sobre el problema.
- Introducir abiertamente en el problema los sentimientos subjetivos de optimismo y pesimismo.
- Convertir el problema a uno bajo riesgo.

- Emplear el principio de la razón insuficiente esto es suponer que todos los eventos son igualmente probables.

Bajo riesgo
Incluye aquellas decisiones para las que las consecuencias de una acción dada dependen de algún evento probabilístico.

1.3 Enfoque cuantitativo en la toma de decisiones.

Los métodos cuantitativos se emplean de 3 maneras:

- Como guía en la toma de decisiones.
- Como ayuda en la toma de decisiones.
- Para automatizar la toma de decisiones.

Criterios bajo incertidumbre:

Ejemplo 1:
Una instalación recreativa debe decidir acerca del nivel de abastecimientos para satisfacer Asus clientes durante uno de los días de fiesta.
El número exacto de clientes no se conoce, pero se espera que esté en una de cuatro categorías: 200, 250, 300 o 350 clientes, el nivel ideal está basado desde el punto de vista de costos como sigue:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	8	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15
Min	5	7	8	15

Criterio de Laplace
Se conoce como principio de razón insuficiente.
El criterio de Laplace supone la misma probabilidad (usando el ejemplo) de los 4 niveles de clientes ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$) entonces $P_{i,j} = 1/4$ y los costos esperados para las 4 alternativas (a_1, a_2, a_3, a_4) son:

$E\{a_1\} = (1/4)(5 + 10 + 18 + 25) = 14.5$
$E\{a_2\} = (1/4)(8 + 7 + 8 + 23) = 11.5$
$E\{a_3\} = (1/4)(21 + 18 + 12 + 21) = 18$
$E\{a_4\} = (1/4)(30 + 22 + 19 + 15) = 21.5$

Por lo tanto, el mejor nivel de inventario (costo) es la alternativa 2, $E\{a_2\} = 11.5$

Criterio Optimista (MiniMin) en el caso de costos:
$E\{a_1\} = \text{Min}(5, 10, 18, 25) = 5$, Mejor alternativa
$E\{a_2\} = \text{Min}(8, 7, 8, 23) = 7$
$E\{a_3\} = \text{Min}(21, 18, 12, 21) = 12$
$E\{a_4\} = \text{Min}(30, 22, 19, 15) = 15$

Criterio Pesimista (MiniMax):
$E\{a_1\} = \text{Max}(5, 10, 18, 25) = 25$
$E\{a_2\} = \text{Max}(8, 7, 8, 23) = 23$
$E\{a_3\} = \text{Max}(21, 18, 12, 21) = 21$, Mejor alternativa
$E\{a_4\} = \text{Max}(30, 22, 19, 15) = 30$

Criterio de deploración MiniMax de Savage
Obtener la matriz de deploración en base a: $r(a_i, \theta_j)$ - Min $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (5, 7, 8, 15))$

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Max
a_1	0	3	10	10	10
a_2	3	0	0	8	8
a_3	16	11	4	6	16
a_4	25	15	11	0	25

La mejor alternativa por lo tanto es la 2 bajo este criterio $E\{a_2\} = 8$

Criterio de Hurwicz
Este criterio representa un intervalo de actitudes desde lo mas optimista a lo mas pesimista en base a un valor **α** entre 0 y 1 en donde un valor de 0.5 representa el equilibrio entre optimismo y pesimismo.
Lo cual es necesario calcular $E\{a_i\} = \alpha \min v(a_i, \theta_j) + (1 - \alpha) \max v(a_i, \theta_j)$

Volviendo al ejemplo con un valor de $\alpha = 0.5$

	Min	Max	VE
a_1	5	25	15
a_2	7	23	15
a_3	12	21	16.5
a_4	15	30	22.5

Se puede observar que el mejor VE = 15 correspondiendo a las alternativas 1 y 2.

En el caso de ganancias (utilidades, beneficios) los criterios se adecuan:

Criterio de Laplace. Se selecciona la alternativa con el mayor valor esperado.
Criterio Optimista. Cambia a MaxiMax
Criterio Pesimista. Cambia a MaxiMin.
Criterio de Savage. La resta para obtener la matriz de deploración cambia a: Max (θ_j) - $r(a_i, \theta_j)$
Criterio de Hurwicz. La fórmula cambia a: $E\{a_i\} = \alpha \max v(a_i, \theta_j) + (1 - \alpha) \min v(a_i, \theta_j)$

Criterios bajo riesgo:

Criterio del valor esperado.

Donde se desea maximizar el beneficio esperado (o minimizar el costo esperado).

Ejemplo 2:
Star Productions, una productora de series de televisión acaba de firmar un contrato para producir un nuevo espectáculo de primera línea. El presidente de la empresa desea determinar la inversión inicial apropiada para el programa piloto de dos horas y para los siguientes ocho episodios de una serie de una hora.
Se tienen las alternativas:

1. Nivel inferior (L): Ningún actor tiene reconocimiento.
2. Nivel moderado (M): El actor principal tiene reconocimiento.
3. Nivel alto (H): Mas de uno de los actores tienen reconocimiento.

Implicaciones financieras:

1. Fracaso (F): Menos de 10% de los espectadores ven el programa.
2. Éxito (S): Entre 10% y 20% de los espectadores ven el programa.
3. Gran éxito (G): Mas de 20% de los espectadores ven el programa.

	Ganancia ($ millones)		
Decisiones	**F**	**S**	**G**
L	-2	5	8
M	-5	10	12
H	-8	6	15

Probabilidades estimadas de los resultados:

	F	**S**	**G**
Probabilidad	0.4	0.4	0.2

Cálculos:

Alternativa	Ganancia esperada	VE
L	0.4(-2) + 0.4(5) + 0.2(8) =	2.8
M	0.4(-5) + 0.4(10) + 0.2(12) =	4.4
H	0.4(-8) + 0.4(6) + 0.2(15) =	2.2

Ganancia esperada con información perfecta:
VE = 0.4(-2) + 0.4(10) + 0.4(15) = 6.2

Diferencia = 6.2 – 4.4 = 1.8 → el tener información perfecta.

Ejemplo 3:
Home Appliances vende refrigeradores, estufas y otros, se decidió entrar al ramo de los aparatos electrónicos con una marca de televisión para los siguientes 5 años se tienen las siguientes alternativas:

1. Adquirir la representación de una compañía bien conocida (B), pero de costo alto.
2. Una compañía que tiene productos estándar que no tiene renombre (N), cuesta menos.
3. Adquirir la representación de una compañía nueva (I) es riesgosa, posibilidad de una ganancia alta.

De acuerdo con una investigación de mercado se cuenta con la siguiente información.

Tabla de Ganancias (millones)

	Resultados		
	Bajas	Promedio	Altas
Decisiones	**L**	**A**	**H**
B	-5	4	7
N	-1	2	5
I	-1	3	15

Tabla de Probabilidades

	Bajas	Promedio	Altas
Decisiones	**L**	**A**	**H**
B	0.3	0.5	0.2
N	0.4	0.4	0.2
I	0.6	0.3	0.1

Cálculos:

Alternativa	Ganancia esperada	VE
B	0.3(-5) + 0.5(4) + 0.2(7) =	1.9
N	0.4(-1) + 0.4(2) + 0.2(5) =	1.4
I	0.6(-1) + 0.3(3) + 0.1(15) =	1.8

1.4 Teoría de la utilidad.

Hasta ahora, el aplicar la regla de decisión, se ha supuesto que el pago esperado en términos monetarios es la medida adecuada de las consecuencias de tomar una acción. Sin embargo, en muchas situaciones esta suposición no es apropiada.
Por ejemplo, suponga que se ofrece a un individuo la oportunidad de 1) aceptar un 50% de posibilidades de ganar $100,000 o nada o 2) recibir $40,000 con seguridad. Muchas personas preferirán los $40,000 aún cuando el pago esperado con 50% de posibilidades de ganar $100,000 es $50,000. Una compañía no siempre estará dispuesta a invertir una gran suma de dinero en un nuevo producto, aunque la ganancia esperada sea sustanciosa, si existe un riesgo de perder la inversión y quedar en bancarrota. Las personas compran seguros, aunque sea una mala inversión desde el punto de vista del pago esperado.
¿Invalidan estos ejemplos el material interior? Por fortuna la respuesta es no, ya que existe una manera de transformar los valores monetarios en una escala apropiada que refleje las preferencias del tomador de decisiones. Esta escala se llama función de utilidad del dinero.

Volviendo al ejemplo 3 (home Appliances) se genera lo siguiente:

Ganancia	P	Utilidad (100 x P)
15	-	100
7	0.40	40
5	0.30	30
4	0.25	25
3	0.20	20
2	0.16	16
-1	0.10	10
-1	0.10	10
-5	-	0

Tabla de Utilidad de acuerdo con la curva

	Resultados		
	Bajas	Promedio	Altas
Decisiones	**L**	**A**	**H**
B	0	25	40
N	10	16	30
I	10	20	100

Cálculos:

Alternativa	Ganancia esperada	VE
B	0.3(0) + 0.5(25) + 0.2(40) =	20.5
N	0.4(10) + 0.4(16) + 0.2(30) =	16.4
I	0.6(10) + 0.3(20) + 0.1(100) =	22

1.5 La obtención de datos para la toma de decisiones.

- Los modelos de cualquier clase, sin importar su refinamiento y exactitud, prueban ser poco prácticos si no están respaldados por datos confiables.
- Si se distorsionan las estimaciones, la solución que se obtenga, pese a ser óptimo en un sentido matemático, realmente será de calidad inferior desde la perspectiva del sistema real.
- En algunos casos, quizá no se conoce con certeza los datos. Más bien se determina a través de distribuciones de probabilidades (modelos probabilísticos o estocásticos) en contraste a los modelos determinísticos.
- Algunas veces se construye un modelo en base o según una hipótesis y es necesario reconstruir el modelo para manejar la ausencia de datos.
- La recopilación de datos puede realmente ser la parte más difícil para determinar un modelo.
- Mientras acumula experiencia el o la analista de IO deberá desarrollar medios para recolectar y documentar datos, en una forma útil, para proyectos tanto actuales como futuros.

1.6 Árboles de decisión.

Un árbol de decisión proporciona una forma para desplegar visualmente el problema y después organizar el trabajo de cálculos qué se describió en las secciones anteriores. Estos árboles de decisión son especialmente útiles cuando debe tomarse una serie de decisiones.

En secciones anteriores se presentaron criterios de decisión para evaluar lo que se pueden denominar alternativas de una sola etapa en el sentido de que ninguna decisión a futuro dependerá de la que se tome ahora. En esta sección se considera un proceso de decisión de múltiples etapas en el cual se toman decisiones dependientes una tras otra. Se puede hacer una representación gráfica del problema de decisión mediante el uso de un árbol de decisión. Esta representación facilita el proceso de toma de decisiones. El ejemplo que sigue ilustra los fundamentos del procedimiento del árbol de decisión.

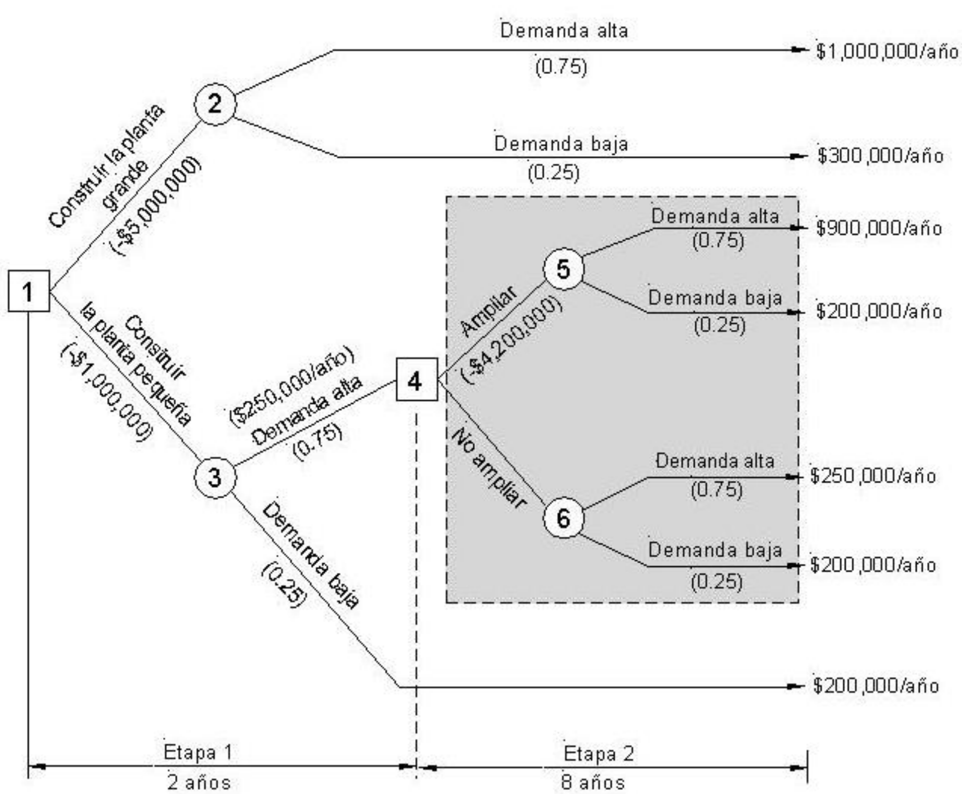
Ejemplo 1:
Una compañía tiene ahora las opciones de construir una planta de tamaño completo o una pequeña que se pueda ampliar después. La decisión depende principalmente de las demandas futuras del producto que producirá la planta. La construcción de una planta de tamaño completo puede justificarse en términos económicos si el nivel de demanda es alto. En caso contrario, quizá sea recomendable construir una planta pequeña ahora y después decidir en 2 años si ésta se debe ampliar.
El problema de decisión de múltiples etapas se presenta aquí porque si la compañía decide construir ahora una planta pequeña, en 2 años deberá tomarse una decisión a futuro relativa a la expansión de dicha planta. Dicho de otra manera, el proceso de decisión implica 2 etapas: una decisión ahora relativa a la dimensión o tamaño de la planta y una decisión de aquí a 2 años referente a la expansión de la planta (suponiendo que se decide construir una planta pequeña ahora).
Se presentan un resumen del problema como un árbol de decisión. Se supone que la demanda puede ser alta o baja. El árbol de decisión tiene 2 tipos de nodos: un cuadro representa un punto de

decisión y un círculo de nota un evento probabilístico. Por lo tanto, comenzando con el nodo uno (un punto de decisión), debemos tomar una decisión referente al tamaño de la planta. El nodo 2 es un evento probabilístico del cual emanan 2 ramas que representan demanda baja y alta, dependiendo de las condiciones del mercado. Estas condiciones se representarán al asociar probabilidades con cada rama. El nodo 3 es también un evento probabilístico del cual emanan 2 ramas que representan demanda alta y baja.

Lógicamente, la compañía considerará la posible expansión a futuro de la planta pequeña sólo si la demanda en los 2 primeros años resulta ser elevada. Esta es la razón por la que el nodo cuatro representa un punto de decisión, dónde las 2 ramas que de él emanan representan las decisiones de expansión y de no expansión. Una vez más, los nodos 5 y 6 son eventos probabilísticos y las ramas que emanan de cada uno representan demanda alta y baja.

Los datos del árbol de decisión deben incluir (1) las probabilidades asociadas con las ramas que emanan de los eventos de oportunidad y (2) los ingresos asociados con diversas alternativas del problema. Supóngase que la compañía está interesada en estudiar el problema en un periodo de 10 años. Un estudio del mercado señala que las probabilidades de tener demandas altas y bajas en los 10 años siguientes son 0.75 y 0.25, respectivamente. La construcción inmediata de una planta grande costará \$5 millones y una planta pequeña costará solo \$1 millón. La expansión de la planta pequeña de aquí a 2 años se calcula costará \$4.2 millones. Los cálculos o estimaciones del ingreso anual de cada una de las alternativas están dados de la manera siguiente.

1. La planta completa y la demanda alta (baja) producirán \$1,000,000 (\$300,000 anualmente).
2. La planta pequeña y una baja demanda generarán \$200,000 anuales.
3. La planta pequeña y una demanda alta producirán \$250,000 para cada uno de los 10 años.
4. La planta pequeña ampliada con demanda alta (baja) generará \$900,000 (\$200,000 anualmente).
5. La planta pequeña sin expansión y con alta demanda y en los 2 primeros años, seguida de una baja demanda producirá \$200,000 en cada uno de los 8 años restantes.



Ahora para evaluar las alternativas. La decisión final debe señalar qué hacer en los nodos de decisión 1 y 4.
La evaluación de las alternativas está basada en el uso del criterio del valor esperado. Los cálculos empiezan en la etapa dos y después retroceden a la etapa 1. Por lo tanto, en los últimos 8 años, podemos evaluar las 2 alternativas en el nodo 4 de la manera siguiente:

E {5} = (900,000 x 0.75 + 200,000 x 0.25) x 8 – 4,200,000 = $1,600,000
E {6} = (250,000 x 0.75 + 200,000 x 0.25) x 8 = **$1,900,000**

Por lo tanto, en el nodo 4, la decisión indica que no habrá expansión y la ganancia neta esperada es:
E {4} = $1,900,000

Ahora se pueden remplazar todas las ramas que emanan del nodo 4 por una sola rama, que representa la ganancia neta de los últimos 8 años. Ahora se efectúan los cálculos de la etapa 1 que corresponden al nodo 1 como sigue:

E {2} = (1,000,000 x 0.75 + 300,000 x 0.25) x 10 – 5,000,000 = **$3,250,000**
E {3} = (1,900,000 + 500,000) x 0.75 + 2,000,000 x 0.25 – 1,000,000 = $1,300,000

Por lo tanto, la decisión optima en el nodo 1 (E {1} = $3,250,000) consiste en construir ahora una planta grande. Tomar esta decisión ahora elimina evidentemente la consideración de las alternativas en el nodo 4.

Ejemplo 2:

La GOFERBROKE COMPANY Es dueña de unos terrenos en los que puede haber petróleo. Un geólogo consultor ha informado a la gerencia que piensa que existe una posibilidad de 1 a 4 de encontrar petróleo.
Debido a esta posibilidad, otra compañía petrolera ha ofrecido comprar las tierras en $90,000. Sin embargo, la Goferbroke Está considerando conservarla para perforar ella misma. Si encuentra petróleo, la ganancia esperada de la compañía será aproximadamente de $700,000; incurrirá en una pérdida de $100,000 si encuentra un pozo seco (sin petróleo).

Sin embargo, otra opción anterior a tomar una decisión es llevar a cabo una exploración sísmica detallada en el área para obtener una mejor estimación de la probabilidad de encontrar petróleo.
Esta compañía está operando sin mucho capital por lo que una pérdida de $100,000 sería bastante seria. El costo es de $30,000 dólares.
Para cuantificar este proceso sea S una variable aleatoria para la que se definen sus valores posibles como sigue:
S= Estadístico obtenido de la exploración sismológica
S=0: sondeos sísmicos no favorables; es poco probable que haya petróleo.
S=1: sondeos sísmicos favorables; es bastante probable que haya petróleo.

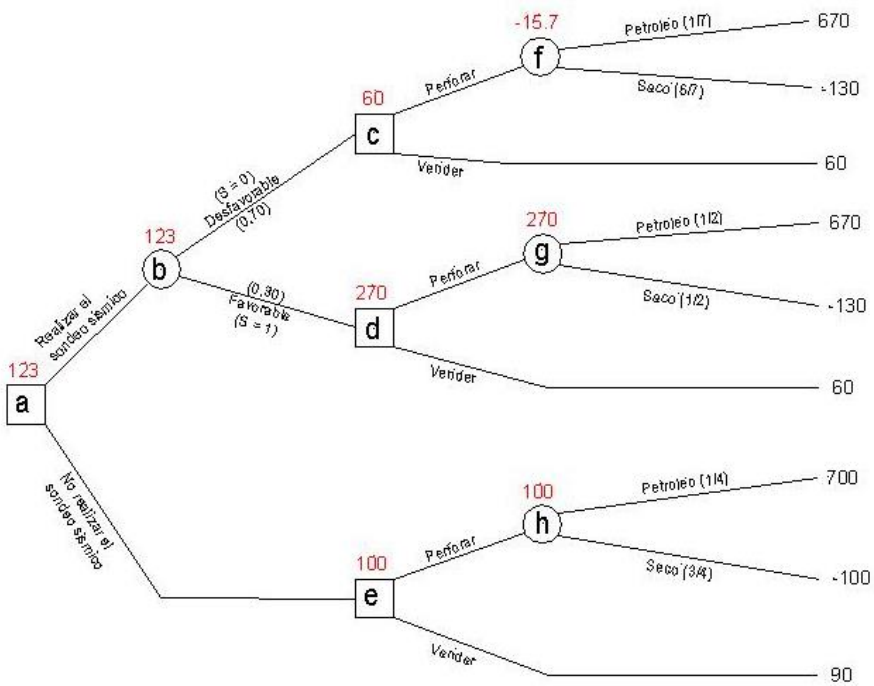
Con base en la experiencia, si hay petróleo (es decir, si el verdadero estado de la naturaleza es θ_1), entonces la probabilidad de que S=0 es
$P(S=0 \mid \theta=\theta_1) = 0.4$, de manera que $P(S=1 \mid \theta=\theta_1) = 1 - 0.4 = 0.6$.

De igual manera, si no hay petróleo (es decir, si el verdadero estado de la naturaleza es θ_2), entonces la probabilidad de que S=0 se estima como
$P(S=0 \mid \theta=\theta_2) = 0.8$, de manera que $P(S=1 \mid \theta=\theta_2) = 1 - 0.8 = 0.2$.

Probabilidades a posteriori

Aplicación del algoritmo tabular al cálculo de la distribución a posteriori para el problema.

P(Ɵ=Ɵ$_i$)	0.25	0.75				Distribución a posteriori de Ɵ	
	P (S=s | Ɵ=Ɵ$_i$)		P (S=s | Ɵ=Ɵ$_i$) P (Ɵ=Ɵ$_i$)		P(S=s) = Suma	P (S=s | Ɵ=Ɵ$_i$) P (Ɵ=Ɵ$_i$) / P(S=s)	
	Ɵ1	Ɵ2	Ɵ1	Ɵ2		Ɵ1	Ɵ2
S=0	0.4	0.8	0.10	0.60	0.70	1/7	6/7
S=1	0.6	0.2	0.15	0.15	0.30	½	½



Al seguir las trayectorias abiertas de izquierda a derecha se llega a la siguiente política óptima.

- Hacer el sondeo sísmico.
- Si el resultado es desfavorable vender el terreno.
- Si el resultado es favorable perforar en busca de petróleo.
- El pago esperado (incluyendo los costos de experimentación) es 123.

Software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados), se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos y uno de los cuales es precisamente el de análisis de decisión (Decision Analysis) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos así como los análisis de sensibilidad a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill

TEMA 2 PROGRAMACION LINEAL.

2.1 Formulación y aplicación de modelos de programación lineal.
2.2 Método gráfico.
2.3 Método simplex.
2.3.1 Método algebraico.
2.3.2 La tabla simplex.
2.4 Método dual.
2.5 Método dual-simplex.
2.6 Análisis de resultados.

Actividades de aprendizaje.

- Realizar investigación documental.
- Presentación al grupo de las partes componentes de un modelo de programación lineal
- Aplicar estos modelos para mezcla de productos.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

2.1 Formulación y aplicación de modelos de programación lineal.

Para ser más específicos, algunos de los problemas que se han resuelto con técnicas de IO, como la programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión. La programación dinámica se ha aplicado en tareas tales como la planeación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planeación de la producción. La teoría de colas ha tenido aplicación en problemas referentes al congestionamiento del tránsito, máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de mano de obra, a la programación de la producción, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presas, y administración de hospitales. Otras técnicas de IO como la teoría de inventarios, la teoría de juegos y la simulación han tenido exitosas aplicaciones.

Un modelo de decisión debe contener 3 elementos:

1. Alternativas de decisión, de las cuales se hace una selección.
2. Restricciones para excluir alternativas infactibles.
3. Criterios para evaluar y por consiguiente clasificar alternativas factibles.

Construcción del modelo matemático.
La construcción de un modelo matemático se puede iniciar respondiendo a las 3 preguntas siguientes:
¿Qué busca determinar el modelo? dicho de otra manera cuáles son las **variables** (incógnitas) del problema.
¿Qué **restricciones** deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las limitaciones del sistema representado por el modelo?
¿Cuál es el **objetivo** (meta) que necesita alcanzarse para determinar la solución óptima (mejor) de entre todos los valores factibles de las variables?

Ejemplo 1

Reddy Mikks Company posee una pequeña fábrica de pinturas qué produce colorantes para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. La disponibilidad máxima diarias y los requisitos diarios de materia prima se resumen en la tabla:

	Toneladas de M.P. por tonelada de pintura		Disponibilidad máxima (Toneladas)
	Exterior	Interior	
M.P. A	1	2	6
M.P. B	2	1	8

Un estudio de mercado ha establecido hoy que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada. El estudio señala a sí mismo, que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a dos toneladas diarias. El precio al mayoreo por tonelada es $3000 para la pintura de exteriores y $2000 para la pintura de interiores.

¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto? (Desarrollar el modelo matemático solamente).

Variables:
X_1 = Toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente.
X_2 = Toneladas de pintura para interiores producidas diariamente.

Función Objetivo:
$$max\, z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a: (Restricciones)
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$

Restricción de no negatividad:
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Ejemplo 2

La compañía Wyndor Glass produce articulos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas de vidrio. Tiene 3 plantas. Los Marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta uno, los Marcos de madera se fabrican en la planta 2 y en la planta 3 se produce el vidrio y se ensamblan los productos. La gerencia general decidió reorganizar la línea de producción para emprender la fabricación de uno o 2 productos nuevos. Uno de los productos propuestos producto uno es una puerta de vidrio de 8 ft con marco de aluminio. El otro producto 2 es una ventana grande 4 * 6 ft para vidrio doble con marco de madera.
Después de un estudio se tiene lo siguiente:

1. el porcentaje de la capacidad de producción en cada planta que está disponible.
2. El porcentaje de esta capacidad qué requiere cada unidad producida por minuto.
3. La ganancia unitaria por cada producto.

	Capacidad Usada por unidad de tasa de producción		Capacidad disponible
	Producto 1	Producto 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia unitaria	\$3	\$5	

(Modelo matemático)

Variables:
X_1 = Cantidades del producto 1 (puerta)
X_2 = Cantidades del producto 2 (ventana)

Función Objetivo:
$max\, z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a: (Restricciones)

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\; &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

Restricción de no negatividad:
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Ejemplo 3

Acaban de diagnosticar que mari tiene cáncer en una etapa bastante avanzada en el área de la vejiga. Mari recibirá los cuidados más avanzados e incluyen una terapia de radiación extensa.
El diseño de la terapia de radiación es un proceso muy delicado. La meta principal es elegir la combinación de rayos que debe utilizarse y la intensidad de cada uno para generar la mejor distribución de la dosis posible (kilo rads) una vez diseñado el tratamiento se administra en varias semanas. Después de un análisis exhaustivo el equipo médico estimó con detalle los datos necesarios para el diseño del tratamiento.

Área	Fracción de la dosis de entrada por área (promedio)		Restricciones sobre la dosis promedio total (Kilo rads)
	Rayo 1	Rayo 2	
Anatomía sana	0.4	0.5	Minimizar
Tejido critico	0.30	0.1	≤ 2.7
Región del tumor	0.5	0.5	= 6
Centro del tumor	0.6	0.4	≥ 6

(Modelo matemático)

Variables:
X_1 = Rayo 1 (Dosis promedio (kilo rads))
X_2 = Rayo 2 (Dosis promedio (kilo rads))

Función Objetivo:
$$Min\, z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

Sujeto a: (Restricciones)
$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$
$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$
$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

Restricción de no negatividad:
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ejemplo 4

Birdeyes Real Estate Co. Posee 800 acres de tierra de primera clase, pero no urbanizada en un lago escénico en la parte central de Ozark Mountains. Debido a la falta de servicio de drenaje o desagüe por alcantarillado, se utilizan muchos tanques sépticos, la mayoría instalados de forma inadecuada.
Para controlar la degradación en la calidad del agua, se presentaron y aprobaron reglamentos aplicables a todas las urbanizaciones futuras.

1. Sólo se pueden construir casas para una, dos y tres familias, donde las unifamiliares constituyen cuando menos el 50% del total.
2. Para limitar el número de tanques sépticos, se requieren tamaños de lote mínimos de dos, tres y cuatro acres para casas de una, dos y tres familias respectivamente.
3. Se deben establecer áreas de recreo de un acre cada una a razón de un área por cada 200 familias.
4. Para preservar la ecología del lago, no se puede extraer agua del subsuelo para uso en la casa o el jardín.

El presidente de Birdeyes Real estate estudia la posibilidad de urbanizar los 800 acres incluirá casas para una, dos y tres familias. El estima que el 15% del terreno se utilizará en la apertura de calles y vías de acceso para los servicios. También calcula los ingresos derivados:

Unidad habitacional	Sencilla	Doble	Triple
Ingreso neto por unidad ($)	1000	1200	1400

El costo de conexión del servicio de agua es proporcional al número de unidades que se construyen. Sin embargo, la comunidad estipula que se deberá colectar un mínimo de $100,000 para que el proyecto sea económicamente factible.
Además, la expansión del sistema acuífero está limitado ah 200000 galones por día pico. Los datos que siguen resumen el costo de conexión del servicio de agua y el consumo de agua en una familia de tamaño medio:

Unidad habitacional	Sencilla	Doble	Triple	Recreo
Costo de servicio de agua por unidad ($)	1000	1200	1400	800
Consumo de agua por unidad (Gal./día)	400	600	840	450

(Modelo matemático)

Variables:
X_1 = Número de unidades de casas unifamiliares.
X_2 = Número de unidades de casas para dos familias.
X_3 = Número de unidades de casas para tres familias.
X_4 = Número de áreas de recreo.

Función Objetivo:
$$Max\, z = 1000x_1 + 15000x_2 + 2000x_3$$

Sujeto a: (Restricciones)
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 680$$
$$1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 800x_4 \geq 100000$$
$$4000x_1 + 600x_2 + 840x_3 + 450x_4 \leq 200000$$
$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 0.5$$
$$x_4 \geq \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{200}$$

Restricción de no negatividad:
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4$$

Ejemplo 5

Un experimento social interesante en la región del mediterráneo es el sistema de kibutzim, o comunidades agrícolas comunales, en Israel. Es usual que algunos grupos se unan para compartir los servicios técnicos comunes y coordinar su producción. Un ejemplo es un grupo de 3 kibutzim al que se llamará la confederación sur. En la actualidad están planeando la producción agrícola para el próximo año. Se tienen los siguientes datos:

Kibutz	Terreno para uso (acres)	Asignación de Agua (pies-acres)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Cosecha	Cantidad máxima (acres)	Consumo de agua (pies-acre / acre)	Rendimiento neto (dólares / acre)
Remolacha	600	3	400
Algodón	500	2	300
Sorgo	325	1	100

los tres kibutzim están de acuerdo en que cada uno sembrará la misma proporción de sus tierras irrigables disponibles.

Cualquier combinación, se puede sembrar en cualquiera de los que kibutzim. El trabajo consiste en planear cuántos acres deben asignarse a cada tipo de cosecha en cada kibutz, cumpliendo con las restricciones dadas.

(Modelo matemático)

Variables:

	Asignación (acres)		
Cosecha	Kibutz 1	Kibutz 2	Kibutz 3
Remolacha	X_1	X_2	X_3
Algodón	X_4	X_5	X_6
Sorgo	X_7	X_8	X_9

Función Objetivo:

$$Max\, z = 400(x_1 + x_2 + x_3) + 300(x_4 + x_5 + x_6) + 100(x_7 + x_8 + x_9)$$

Sujeto a: (Restricciones)
Terreno:

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$$
$$x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$$
$$x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$$

Cosecha:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$$
$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$$
$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$$

Agua:

$$3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$$
$$3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$$
$$3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$$

Misma proporción:

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_6}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

Restricción de no negatividad:

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

Ejemplo 6

La compañía NORY & LEETS, es una productora de acero, está localizada en Steel Town, emplea cerca de 50,000 residentes, hoy la contaminación del aire debido a los altos hornos está arruinando la apariencia de la ciudad y la salud de sus habitantes.
Los nuevos directores han decidido seguir políticas de responsabilidad social. Los nuevos estándares requieren la reducción anual de estos contaminantes:

Contaminante	Reducción requerida (millones de libras) en la tasa de emisión anual	Reducción en la tasa de emisiones con el uso de:					
		Chimeneas más altas		Filtros		Mejores combustibles	
		Altos hornos	Hornos de hogar abierto	Altos hornos	Hornos de hogar abierto	Altos hornos	Hornos de hogar abierto
Partículas	60	12	9	25	20	17	13
Óxidos de azufre	150	35	42	18	31	56	49
Hidrocarburos	125	37	53	28	24	29	20

hoy se busca cómo lograr estas reducciones en forma económica. La fabricación de acero tiene dos fuentes principales de contaminación, los altos hornos para fabricar el arrabio y los hornos de hogar abierto para transformar el hierro en acero.
Se tienen tres métodos de abatimiento, pero tienen limitaciones tecnológicas. Se dan los datos en millones de libras por año (ver tabla).

Se llevó a cabo un análisis para estimar el costo total anual de cada método de abatimiento.

Método de abatimiento	Costo (Millones de dólares)	
	Altos hornos	Hornos de hogar abierto
Chimeneas más altas	8	10
Filtros	7	6
Mejores combustibles	11	7

Este plan consistirá en especificar qué tipo de método de abatimiento debe emplearse y a qué fracción para: (1) los altos hornos y (2) los hornos de hogar abierto.

(Modelo matemático)

Variables:
X_1 = Chimeneas más altas, altos hornos.
X_2 = Chimeneas más altas, hornos de hogar abierto.
X_3 = Filtros, altos hornos
X_4 = Filtros, hornos de hogar abierto
X_5 = Mejores combustibles, altos hornos
X_6 = Mejores combustibles, hornos de hogar abierto

Función Objetivo:
$$Min\, z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$$

Sujeto a: (Restricciones)
Reducción de emisiones:
$$12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60$$
$$35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 150$$
$$17x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 125$$

tecnológicas:
$$x_j \leq 1, \qquad j = 1,2,3,4,5,6$$

Restricción de no negatividad:
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4,5,6$$

Ejemplo 7

MG Auto Company tiene plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleans. Sus centros de distribución principales están ubicados en Denver y Miami. Las capacidades de las tres plantas durante el trimestre próximo son de 1000, 1500 y 1200 automóviles. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son de 2300 y 1400 vehículos. El costo del transporte de un automóvil por tren es aproximadamente de 8 centavos por milla. El diagrama de la distancia recorrida entre las plantas y los centros de distribución son los siguientes:

Plantas:	Centros de distribución (distancias en millas)	
	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleans	1275	850

Por lo tanto, el siguiente modelo de programación lineal representa el modelo matemático con restricciones de igualdad:

Este es el caso de un modelo de transporte, en el cual se busca cubrir la demanda de los centros de distribución, con la capacidad de las plantas de producción (oferta) a costo mínimo.

Variables:

Fuente (plantas)	Destino (número de automóviles)	
	Denver	Miami
Los Ángeles	X_1	X_2
Detroit	X_3	X_4
Nueva Orleans	X_5	X_6

Función Objetivo:

$$Min\, z = 80x_1 + 215x_2 + 100x_3 + 108x_4 + 102x_5 + 68x_6$$

Sujeto a: (Restricciones)

$$x_1 + x_2 = 1000$$
$$x_3 + x_4 = 1500$$
$$x_5 + x_6 = 1200$$

$$12x_1 + 9x_3 + 25x_5 = 2300$$
$$35x_2 + 42x_4 + 18x_6 = 1400$$

Restricción de no negatividad:

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4,5,6$$

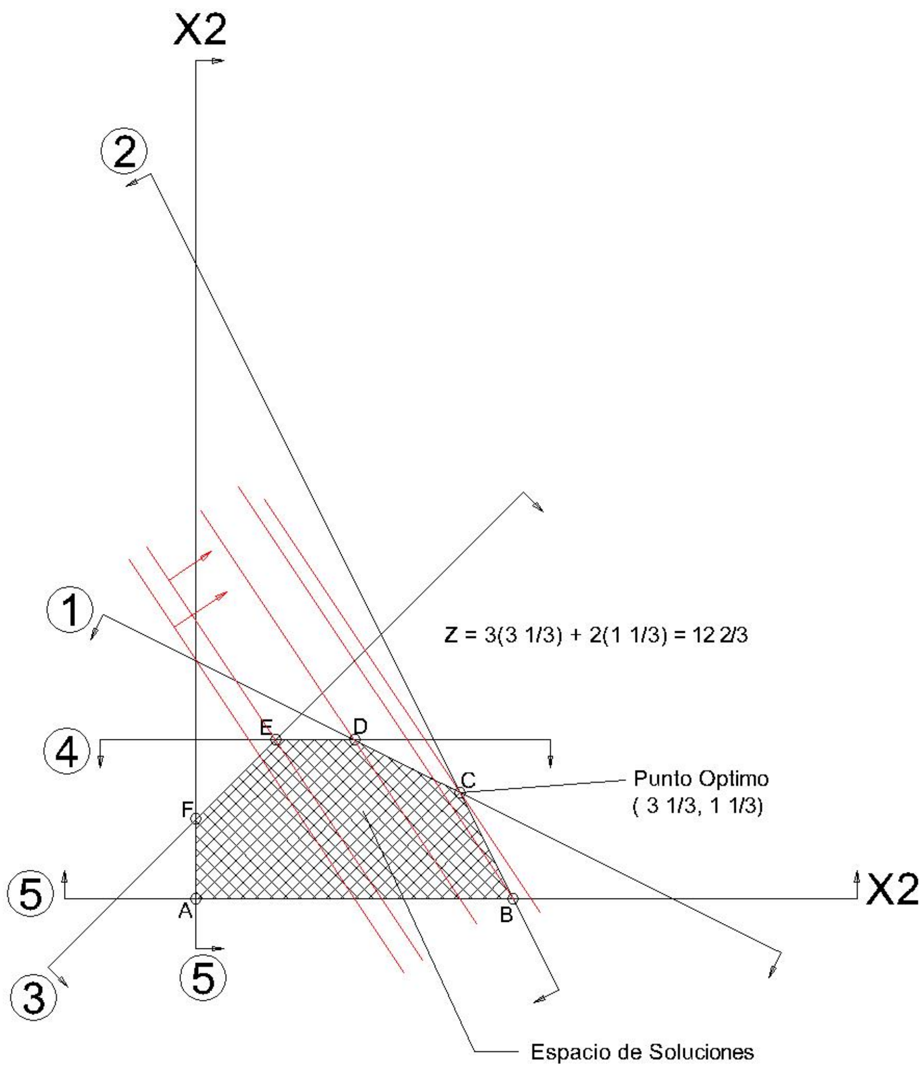
2.2 Método gráfico.

En esta parte consideraremos la solución de modelo de programación lineal (PL) de Reddy Mikks (pinturas). El modelo se puede resolver en forma gráfica porque solo tiene **dos** variables. Para modelos con tres o más variables el modelo grafico es impráctico o imposible.

Variables:

X_1 = Toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente.
X_2 = Toneladas de pintura para interiores producidas diariamente.

$max\, z = 3x_1 + 2x_2$ Coordenadas (2, 0) – (0, 3)
Sujeto a: (Por cada restricción deducir dos puntos para graficar)
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (1), Coordenadas (0, 3) – (6, 0)
$2x_1 + x_2 \leq 8$ (2), Coordenadas (0, 8) – (4, 0)
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (3), Coordenadas (0, 1) – (-1, 0)
$x_2 \leq 2$ (4), Línea horizontal en x2 = 2
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (5), Ejes



Observar en la gráfica:

- El espacio de soluciones, acotado de acuerdo con el sentido de la desigualdad de la restricción son cuatro restricciones y la restricción de no negatividad.
- La restricción de no negatividad se representa directamente sobre los ejes x1 y x2, observe el sentido, esto obliga que la solución se encuentre en el primer cuadrante de la gráfica.
- En el espacio de soluciones se forman 6 puntos de inflexión o puntos extremos (A, B, C, D, E, F), que es donde se encuentra la solución óptima al modelo.
- La solución se obtiene directamente usando la función objetivo (maximizar), la línea roja, una vez

graficada esta línea se desliza en el sentido de maximizar y el ultimo punto que toca en este caso el punto "C" ese es el óptimo.

- Por lo tanto, se concluye que es necesario producir 3.33 Toneladas de pintura para exteriores diaria y 1.33 Toneladas de pintura para interiores diaria para obtener un ingreso máximo de $12,666.66 por día.

2.3 Método simplex.

El método gráfico indica que la solución óptima de un programa lineal siempre está asociada con un punto esquina del espacio de soluciones. Este resultado es clave del método simplex para resolver cualquier modelo de programación lineal.
La transición a la solución óptima implica un procedimiento que determina en forma algebraica los puntos esquina. Esto se logra convirtiendo todas las desigualdades en ecuaciones, para después manipularlas en forma sistemática.
Una propiedad general del método simplex es que resuelve la PL en interaciones. Cada iteración desplaza la solución a un nuevo punto esquina que tiene el potencial de mejorar la solución de la función objetivo. El proceso termina cuando ya no se pueden obtener mejoras.
El método simplex implica cálculos voluminosos lo que hace que la computadora sea una herramienta esencial para resolver los problemas de PL.

2.3.1 Método algebraico.

Ejemplo: Usando como prototipo el modelo de las pinturas de Reddy Mikks nótese que este modelo es de maximizar y todas las restricciones son del tipo menor o igual esto sin considerar la condición de no negatividad, este es el caso del uso del método simplex mas directo, cuando esta condición no se cumple es necesario usar otras variantes del método simplex.

Modelo Original:

$$\begin{aligned} max\, z &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformar a su forma algebraica:

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 8 \\ -x_1 + x_2 + s_3 &= 1 \\ x_2 + s_4 &= 2 \end{aligned}$$

- Todas las restricciones son igualdades
- La F.O. se despeja e iguala a cero
- Se agregan variables de holgura (s1, s2, …) para poder igualar las restricciones.
- La solución inicial es factible pero no optima (x1=0, x2=0, s1=6, s2=8, s3=1, s4=2, z=0), por la condición de no negatividad la solución debe ser positivo o cero.

2.3.2 La tabla simplex.

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	s4	L.D.	
z	-3	-2	0	0	0	0	0	
s1	1	2	1	0	0	0	6	6
s2	2	1	0	1	0	0	8	4
s3	-1	1	0	0	1	0	1	-1
s4	0	1	0	0	0	1	2	

A partir de esta tabla inicia el procedimiento por medio de iteraciones.

- Esta tabla presenta una solución básica inicial pero no optima, ya que tenemos coeficientes negativos en z (-3, -2) correspondientes a x1 y x2 respectivamente, se observa que estas son variables son no básicas.
- Las variables s1, s2, s3, s4 son las variables básicas iniciales ya que en cada columna correspondiente se tiene un uno y los demás ceros.
- En este caso -3 es más negativo por lo tanto x1 entra y sale s2 ya que es la razón menor de dividir el L.D. entre la variable que entra excluir razones negativas y división por cero.
- Cuando se dice que una variable entra y otra sale, la variable que entra en la columna correspondiente debe haber un uno y los demás ceros, procedimiento visto en algebra lineal.

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	s4	L.D.	
z	0	- 1/2	0	1 1/2	0	0	12	
s1	0	1 1/2	1	- 1/2	0	0	2	1 1/3
x1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
s3	0	1 1/2	0	1/2	1	0	5	3 1/3
s4	0	1	0	0	0	1	2	2

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	s4	L.D.
z	0	0	1/3	1 1/3	0	0	12 2/3
x2	0	1	2/3	- 1/3	0	0	1 1/3
x1	1	0	- 1/3	2/3	0	0	3 1/3
s3	0	0	-1	1	1	0	3
s4	0	0	- 2/3	1/3	0	1	2/3

- Se observa en esta última tabla tenemos la solución óptima ya no se tienen coeficientes negativos en la fila de la función objetivo.
- Por lo tanto, la solución óptima es: z= 12.6666, x1=3.3333, x2=1.33333, s1=0, s2=0, s3=3, s4=0.666.
- Se observa que s1 y s2 son igual acero, lo que significa que estos dos recursos se utilizan en su totalidad.

2.4 Método dual.

Teoría primal-dual
El problema dual es un problema de PL auxiliar que se define directa y sistemáticamente a partir del modelo PL original o primal.
El dual se obtiene simétricamente del primal de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Para toda restricción primal hay una variable dual.

2. Para toda variable primal hay una restricción dual.

3. Los coeficientes de las restricciones de una variable primal forman los coeficientes del primer miembro de la restricción dual correspondiente y el coeficiente objetivo de la misma variable se convierte en el segundo miembro de la restricción dual.

Ahora tenemos:

Función objetivo estándar del primal	**Dual**		
	Función Objetivo	**Restricciones**	**Variables**
Maximización	Minimización	≥	Irrestrictas
Minimización	Maximización	≤	Irrestrictas

Formulación del problema dual

Ejemplo 1:

Primal:	Primal estándar:	Dual:	Dual final:
$Max\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ $Sujeto\ a$: $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Max\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ $Sujeto\ a$: $x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0$	$Min\ w = 10y_1 + 8y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_1, y_2\ irrestrictas$	$Min\ w = 10y_1 + 8y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_2\ irrestricta$

Observar que al obtener el dual a partir del primal estándar se definen las variables irrestrictas, en este caso y_1 quedo como variable no negativa.

Ejemplo 2:

Primal:	Primal estándar:	Dual:	Dual final:
$Min\ z = 5x_1 - 2x_2$ $Sujeto\ a$: $-x_1 + x_2 \geq -3$ $2x_1 + 3x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min\ z = 5x_1 - 2x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 - x_2 + s_1 = 3$ $2x_1 + 3x_2 + s_2 = 5$ $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$	$Max\ w = 3y_1 + 5y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \leq 5$ $-y_1 + 3y_2 \leq -2$ $y_1 \leq 0$ $y_2 \leq 0$ $y_1, y_2\ irrestrictas$	$Max\ w = 3y_1 + 5y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \leq 5$ $-y_1 + 3y_2 \leq -2$ $y_1 \leq 0$ $y_2 \leq 0$

Ejemplo 3:

Primal:	Primal estándar:	Dual:	Dual final:
$Max\ z = 5x_1 + 6x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + 2x_2 = 5$ $-x_1 + 5x_2 \geq 3$ $4x_1 + 7x_2 \leq 8$ $x_1 irrestricta, x_2 \geq 0$	$Max\ z = 5x_1 + 6x_2$ $Sujeto\ a$: $x'_1 - x"_1 + 2x_2 = 5$ $-x'_1 + x"_1 + 5x_2 - s_1 = 3$ $4x'_1 - 4x"_1 + 7x_2 + s_2 = 8$ $x'_1, x"_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$	$Min\ w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$ $Sujeto\ a$: $y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5$ $-y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5$ $2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$ $-y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$ $y_1, y_2, y_3\ irrestrictas$	$Min\ w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$ $Sujeto\ a$: $y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5$ $-y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5$ $2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$ $-y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$ $y_1\ irrestrictas$

Relación Primal-Dual

Se puede demostrar cómo se puede obtener la solución óptima del modelo dual directamente de la tabla simplex optima del primal.

Ejemplo:

Primal:	Dual:
$Max\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ $Sujeto\ a$: $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Min\ w = 10y_1 + 8y_2$ $Sujeto\ a$: $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $2y_1 - y_2 \geq 12$ $y_1 + 3y_2 \geq 4$ $y_1 \geq 0$ $y_2\ irrestricta$

				y1	y2	
Basica	**x1**	**x2**	**x3**	**s1**	**R**	**L.D.**
z	0	0	3/5	5 4/5	- 2/5	54 4/5
x2	0	1	- 1/5	2/5	- 1/5	2 2/5
x1	1	0	1 2/5	1/5	2/5	5 1/5

Observar que la solución del modelo dual se obtiene directamente de la tabla final del primal en este caso:

$$w = 54\frac{4}{5}$$

$$y_1 = 5\frac{4}{5}$$

$$y_2 = -\frac{2}{5}$$

De la misma forma es posible resolver el modelo dual y obtener la solución de primal, la razón de esto es que puede ser ventajoso resolver el dual y no el primal.

El uso del método simplex-dual, como la relación prima-dual son útiles para análisis de sensibilidad.

2.5 Método dual-simplex.

Existe una clase de problemas PL que no tienen una solución factible básica inicial con solo holguras, pero que pueden resolverse sin utilizar variables artificiales. El procedimiento para resolver esta clase de problemas se llama método simplex dual. En este método la solución comienza siendo infactible y óptima (en comparación con el simplex que comienza siendo factible pero no óptimo).

Condición de factibilidad:
la variable que sale es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen arbitrariamente). Sí todas las variables básicas son no negativas el proceso termina y se alcanza la solución factible óptima.

Condición de optimidad:
la variable que entra se elige de las variables no básicas como sigue: tome los coeficientes de z entre los coeficientes correspondientes a la variable que sale. Ignore los coeficientes asociados a denominadores positivos o cero. La variable que entra es aquella con el cociente más pequeño de las razones si el problema es de minimización o el valor absoluto más pequeño de las razones si el problema es de maximización rompa los empates arbitrariamente. Sí todos los denominadores son cero o positivos el problema no tiene ninguna solución factible.

Ejemplo:

Min z$=2x_1 + x_2$

Sujeto a:

$3x_1 + x_2 \geq 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Forma estándar: ((1) todas las restricciones cambiarlas a ≤, (2) agregar las variables de holgura correspondientes)

z-$2x_1 - x_2$=0 Sujeto a: $-3x_1 - x_2 \le -3$ $-4x_1 - 3x_2 \le -6$ $x_1 + 2x_2 \le 3$ *No negatividad* $x_1, x_2 \ge 0$	z-$2x_1 - x_2$=0 Sujeto a: $-3x_1 - x_2 + s_1 = -3$ $-4x_1 - 3x_2 + s_2 = -6$ $x_1 + 2x_2 + s_3 = 3$ *No negatividad* $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	L.D.
z	-2	-1	0	0	0	0
s1	-3	-1	1	0	0	-3
s2	-4	-3	0	1	0	-6
s3	1	2	0	0	1	3
	0.5	0.33333333				

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	L.D.
z	- 2/3	0	0	- 1/3	0	2
s1	-1 2/3	0	1	- 1/3	0	-1
x2	1 1/3	1	0	- 1/3	0	2
s3	-1 2/3	0	0	2/3	1	-1
	2/5			1		

Basica	x1	x2	s1	s2	s3	L.D.
z	0	0	- 2/5	- 1/5	0	2 2/5
x1	1	0	- 3/5	1/5	0	3/5
x2	0	1	4/5	- 3/5	0	1 1/5
s3	0	0	-1	1	1	0

Se observa que en esta tabla final en la columna L.D. ya no se tienen números no negativos por lo tanto el proceso termina, sin embargo, es necesario verificar, de acuerdo con la función objetivo si se tiene el mínimo, que en este caso sí, ya que no tenemos coeficientes positivos en “z”.

z=	2.40
x1=	0.60
x2=	1.20
s1=	0.00
s2=	0.00
s3=	0.00

Considerando el caso en que no sea así, supóngase que el modelo original no es de minimizar, es de maximizar, por lo tanto, no se tiene la solución óptima, ya que se tienen coeficientes negativos en “z” por lo que hay que proceder de acuerdo con el método simplex.

En el modelo desarrollado con el método dual simplex las restricciones son del tipo ≤ y ≥, en el caso de una restricción de igualdad, se convierten en dos desigualdades.

$3x_1 + x_2 = 3$ →	$3x_1 + x_2 \geq 3$ $3x_1 + x_2 \leq 3$

2.6 Análisis de resultados.

Consideraremos su aplicación en el modelo de las pinturas para interiores y exteriores. (Reddy Mikks)

Variables:
X_1 = Toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente.
X_2 = Toneladas de pintura para interiores producidas diariamente.

Primal	Dual
$max\, z = 3x_1 + 2x_2$ (ganancia) Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (M.P. A) $2x_1 + x_2 \leq 8$ (M.P. B) $-x_1 + x_2 \leq 1$ (Limite en demanda) $x_2 \leq 2$ (Limite en demanda) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$Min\, w = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4$ Sujeto a: $y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3$ $2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$ $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Tabla primal optima:

			y1	y2	y3	y4	
Basica	x1	x2	s1	s2	s3	s4	L.D.
z	0	0	1/3	1 1/3	0	0	12 2/3
x2	0	1	2/3	- 1/3	0	0	1 1/3
x1	1	0	- 1/3	2/3	0	0	3 1/3
s3	0	0	-1	1	1	0	3
s4	0	0	- 2/3	1/3	0	1	2/3

A continuación, se resume la información que se puede obtener de la tabla simplex, ya sea directamente o con cálculos sencillos.

Utilizando el modelo de Redy Mikks tenemos:

SOLUCION OPTIMA

X1= 3 1/3, producir 3.333 toneladas de pintura para exteriores diarias.
X2= 1 1/3, producir 1.333 toneladas de pintura para interiores diarias
Z= 12 2/3, la ganancia resultante es de $12,666.66 por día

ESTADO DE LOS RECUROS

Recurso	**Holgura**	**Estado del recurso**
Materia Prima A	S1 = 0	Escaso
Materia Prima B	S2 = 0	Escaso
Limite del exceso de pintura de interiores sobre exteriores	S3 = 3	Abundante
Limite de demanda de pintura para interiores	S4 = 2/3	Abundante

VALOR UNITARIO EN UN RECURSO

Es la tasa de mejora en el valor optimo de z como resultado de incrementar la cantidad disponible de ese recurso.
Las variables duales señalan que los valores unitarios (precios sombra) de los recursos 1, 2, 3 y 4 son:

			y1	y2	y3	y4	
Basica	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**	**s4**	**L.D.**
z	0	0	1/3	1 1/3	0	0	12 2/3

Y1 = 1/3 miles / tonelada adicional de M.P. A
Y2 = 4/3 miles / tonelada adicional de M.P. B
Y3 = 0
Y4 = 0

CAMBIO MAXIMO EN LA DISPONIBILIDAD DE RECURSOS

El cambio afectará sólo al segundo miembro de la tabla, esto es un cambio de ese tipo sólo afectará la factibilidad de la solución. Esto quiere decir que el incremento debe restringirse al intervalo o rango que mantendrá la no negatividad del segundo miembro de las ecuaciones de las restricciones en la tabla óptima.

Supóngase que se considera cambiar el primer recurso en la cantidad Δ_1. Si Δ_1 es positivo, aumentará el recurso; si es negativo el recurso disminuye. (De la tabla optima, columna de s1 correspondiente a la M.P. A)

$x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0, \Delta_1 = -2$ (1)
$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 \geq 0, \Delta_1 = 10$ (2)
$s_3 = 3 - \Delta_1 \geq 0, \Delta_1 = 3$ (3)
$s_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\Delta_1 \geq 0, \Delta_1 = 1$ (4)
Para determinar el intervalo admisible para Δ_1, se consideran dos casos.

1. $\Delta_1 > 0$, La relación (1) se satisface siempre para $\Delta_1 > 0$, las relaciones (2), (3) y (4) producen los siguientes limites respectivos: $\Delta_1 \leq 10$, $\Delta_1 \leq 3$ y $\Delta_1 \leq 1$, por lo tanto, las cuatro relaciones se satisfacen por $\Delta_1 \leq 1$.
2. $\Delta_1 < 0$, las relaciones (2), (3) y (4) se satisfacen siempre para $\Delta_1 < 0$ en tanto que la relación (1) produce el límite $\Delta_1 \geq -2$.

Al combinar los casos 1 y 2, se ve que: $-2 \leq \Delta_1 \leq 1$, producirá siempre una solución factible, por lo que el rango factible para la M.P. A tiene un rango de 4 a 7 toneladas.

CAMBIO MAXIMO EN LA RELACION UTILIDAD / COSTOS MARGINALES

Nuestra meta consiste que en determinar el intervalo de variación de los coeficientes de la función objetivo (uno a la vez) para el cual se mantiene el óptimo actual.
Para ilustrar los cálculos supóngase que la ganancia o utilidad marginal de x_1 en el modelo de Reddy Mikks se cambia de 3 a 3 + ∂_1 donde ∂_1 representa un cambio positivo o bien negativo.

Po lo tanto: F.O. $z = (3 + \partial_1)x_1 + 2x_2$

Básica	X1	X2	S1	S2	S3	S4	L.D.
z	0	0	$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\partial_1$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\partial_1$	0	0	
X1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3

El cambio no afectara la optimidad en tanto los coeficientes de z de las variables no básicas se mantengan no negativas (Max.). Esto es:

(1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\partial_1 \geq 0, \partial_1 \leq 1$
(2) $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\partial_1 \geq 0, \partial_1 \geq -2$

Por lo tanto, el rango de variación será: $-2 \leq \partial_1 \leq 1$, por lo que el rango será de 1 a 4 miles.

El tratamiento en la variable no básica es directo. Cualquier cambio, afectara solo a ese coeficiente en la tabla optima.

Supóngase la modificación de s1 de 0 a 0 + ∂_3 esto resulta en:

Básica	X1	X2	S1	S2	S3	S4	L.D.
z	0	0	$\frac{1}{3} - \partial_3$	$\frac{4}{3}$	0	0	12 2/3

Por lo tanto, todo lo que tenemos que hacer en el caso de una variable no básica es disminuir el coeficiente de z de la variable no básica en la cantidad en la cual se incremente el coeficiente original de la variable.

Uso de software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema 2 se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados (Simplex, dual-simplex, relación primal-dual, análisis de resultados), se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos y uno de los cuales es precisamente el de programación lineal (Linear Programing) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos, así como los análisis de resultados a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill

Tema 3 Asignación y Transporte

3.1. Método de la Esquina Noroeste.
3.2. Método de Costo Mínimo.
3.3. Método de aproximación de Vogel.
3.4. Método de asignación.

Actividades de aprendizaje.

- Elaborar investigación documental o bibliográfica.
- Realizar un resumen o síntesis de la actividad anterior.
- Resolver ejercicios relacionados y hacer notar las diferencias y similitudes entre los distintos métodos de solución y sus resultados.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

El modelo de transporte busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos. Entre los datos del modelo se cuentan:

1. Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de la demanda en cada destino.
2. El costo de transporte unitario de la mercancía de cada fuente a cada destino.

Como sólo hay una mercancía un destino puede recibir su demanda de una o más fuentes. El objetivo del modelo es determinar la cantidad qué se enviará de cada fuente a cada destino tal que se minimice el costo de transporte total.
La suposición básica del modelo es que el costo de transporte en una ruta es directamente proporcional al número de unidades transportadas. La definición de unidad de transporte variará dependiendo de la mercancía que se transporte por ejemplo podemos hablar de una unidad de transporte como cada una de las vigas de acero que se necesitan para construir un puente. o bien, se puede utilizar el equivalente a la carga de un camión de la mercancía como unidad de transporte en cualquier caso las unidades de oferta y demanda deben ser consistentes con la definición de unidad de transporte.

Si x_{ij} representa la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, entonces, el modelo general de PL que representa el modelo de transporte es

$$minimizar\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, para\ todas\ las\ i\ y\ j$$

El primer conjunto de restricciones estipula que la suma de los envíos desde una fuente no puede ser mayor que su oferta; en forma análoga, el segundo conjunto requiere que la suma de los envíos a un destino satisfaga su demanda.
El modelo que se acaba de describir implica que la oferta total debe ser cuando menos igual a la demanda total. Cuando la oferta total es igual a la demanda total la formulación resultante recibe el nombre de modelo de transporte equilibrado. Este difiere del modelo solo en el hecho de que todas las restricciones son ecuaciones, es decir

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo (Modelo de transporte estándar)
MG Auto Company hoy tiene plantas en Los Ángeles, detroit y nueva Orleans. Sus centros de distribución principales están ubicados en Denver y Miami.
Las capacidades de las 3 plantas durante el trimestre próximo son de 1000, 1500 y 1200 automóviles. Las demandas trimestrales en los 2 centros de distribución son de 2300 y 1400 vehículos. El costo de transporte de un automóvil por tren es aproximadamente de 8 centavos por milla.
El diagrama de la distancia recorrida entre las plantas y los centros de distribución son los siguientes:

Distancias	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleans	1275	850

el diagrama de distancias puede traducirse en costo por automóvil (redondeando a números enteros).

Costo unitario	Denver	Miami
Los Ángeles	80	215
Detroit	100	108
Nueva Orleans	102	68

Al generar la tabla de transporte se tiene:

Destinos

Fuentes	Denver	Miami	Oferta
L.A.	80	215	1000
Detroit	100	108	1500
N.O.	102	68	1200
Demanda	2300	1400	3700

Notar que el modelo esta balanceado, es decir. La oferta es igual a la demanda.

Ahora supóngase que la capacidad de la planta de Detroit es de 1300 automóviles (en vez de 1500). Se dice que la situación está desbalanceada o sea hay un faltante de 200 vehículos (3700 – 3500) como la oferta es menor que la demanda, se agrega una fuente (planta ficticia), la cual representa la cantidad faltante en ese destino y el costo unitario correspondiente es cero (Otro enfoque es que estos costos pueden ser de penalización por cada unidad de demanda insatisfecha).

Destinos

Fuentes	Denver	Miami	Oferta
L.A.	80	215	1000
Detroit	100	108	1300
N.O.	102	68	1200
Planta Ficticia	0	0	200
Demanda	2300	1400	3700

De manera análoga, si la oferta es mayor que la demanda, podemos agregar un destino ficticio representando un excedente en la planta y costo unitario cero (de igual manera estos costos pueden ser de almacenamiento por guardar el automóvil en la planta). Supóngase que la demanda en Denver disminuye en 1900 vehículos.

Destinos

Fuentes	Denver	Miami	Ficticio	Oferta
L.A.	80	215	0	1000
Detroit	100	108	0	1500
N.O.	102	68	0	1200
Demanda	1900	1400	400	3700

Una vez que se plantea el modelo se procede a su resolución. El método aplica los pasos del método simplex, y difiere solo en los detalles de la implementación de las condiciones de optimidad y factibilidad.

Los pasos básicos de la técnica de transporte son
Paso 1: Determinar una solución factible inicial.
Paso 2: Determínese la variable que entra, que se elige entre las variables no básicas. Si todas las variables satisfacen la condición de optimidad, detenerse; de lo contrario dirigirse al paso 3.
Paso 3: Determínese la variable que sale (mediante el uso de la condición de factibilidad) de entre las variables de la solución básica actual; después obténgase la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

3.1. Método de la Esquina Noroeste.

Método de aproximación para obtener una solución inicial al modelo de transporte y solo implica el Paso 1 de la técnica.

Ejemplo: (prototipo balanceado)

Fuentes \ Destinos	1	2	3	4	Oferta
1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
Demanda	5	15	15	10	45

Una solución factible básica inicial debe incluir m + n -1 variables básicas, esto es: 3 + 4 – 1 = 6

El método implica en seleccionar la variable con la esquina mas noroeste y tachar la columna o renglón que quede satisfecho (en caso de empate se rompe arbitrariamente y solo tachar el renglón o la columna no ambos) Para luego repetir el proceso de manera sistemática el procedimiento termina cuando un renglón o una columna quede sin tachar.

Para el ejemplo planteado queda de la siguiente manera:

Fuentes \ Destinos	1	2	3	4	Oferta
1	10 / 5	0 / 10	20	11	15
2	12	7 / 5	9 / 15	20 / 5	25
3	0	14	16	18 / 5	5
Demanda	5	15	15	10	45

Esta solución inicial (asignación), proporciona un costo total:

CT = 5(10) + 10(0) + 5(7) + 15(9) + 5(20) + 5(18) = $410

Ahora hay que utilizar el paso 2 y paso 3 de la técnica (determinar la variable que sale y la que entra hasta llegar a la solución optima o corroborar que ya se tiene la solución óptima), para ello se utilizan los multiplicadores deben satisfacer las ecuaciones:

Ecuación (1): $u_i + v_j = c_{ij}, para\ cada\ variable\ basica\ x_{ij}$
Ecuación (2): $u_p + v_q - c_{pq}, para\ cada\ variable\ no\ basica\ x_{pq}$

Usando la ecuación (1): Se recomienda empezar con $u_1 = 0$

		1	2	3	4	
		v_1=10	v_2=0	v_3=2	v_4=13	Oferta
1	u_1=0	10 5	0 10	20	11	15
2	u_2=7	12	7 5	9 15	20 5	25
3	u_3=5	0	14	16	18 5	5
Demanda		5	15	15	10	45

Usando la ecuación (2):

		1	2	3	4	
		v_1=10	v_2=0	v_3=2	v_4=13	Oferta
1	u_1=0	10 5	0 10	20 (-)	11 (+2)	15
2	u_2=7	12 (+5)	7 5	9 15	20 5	25
3	u_3=5	0 (+15)	14 (-)	16 (-)	18 5	5
Demanda		5	15	15	10	45

Al observar la tabla se determina que se tienen tres variables con valores no negativos (+2, +5, +15), lo cual significa que se puede mejorar el costo en esta cantidad por cada unidad reubicada en esa variable, en este caso la variable que entra es x_{31}, esto implica que si ya no se tienen valores no negativos el procedimiento termina y se tiene la solución óptima; Ahora hay que determinar la variable que sale

		1	2	3	4	
		v_1=10	v_2=0	v_3=2	v_4=13	Oferta
1	u_1=0	D 10 5	A 0 10	20 (-)	11 (+2)	15
2	u_2=7	12 (+5)	D 7 5	9 15	A 20 5	25
3	u_3=5	A 0 (+15)	14 (-)	16 (-)	D 18 5	5
Demanda		5	15	15	10	45

Como se observa en la tabla hay que formar un ciclo de compensación con la variable que entra y las variables básicas, el método asegura que solo hay un ciclo a formar, en este caso las variables con las etiquetas A (aumenta), D (disminuye), de las variables que disminuyen se selecciona aquella variable con la menor cantidad asignada (los empates se rompen arbitrariamente) en este caso se selecciona a x_{34} como la variable que sale, luego en esta cantidad se compensa de acuerdo al ciclo cerrado, aumentando (A) y disminuyendo (D).

		1 ($v_1=10$)	2 ($v_2=0$)	3 ($v_3=2$)	4 ($v_4=13$)	Oferta
1	$u_1=0$	10 / 0	0 / 15	20	11	15
2	$u_2=7$	12	7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
3	$u_3=5$	0 / 5	14	16	18	5
Demanda		5	15	15	10	45

Esta es la nueva solución con un costo total:

CT = 0(10) + 15(0) + 0(7) + 15(9) + 10(20) + 5(0) = $335

Otra manera de obtener el costo total, esto es, se asignan 5 unidades con un (+15) de mejora en la solución inicial:

CT = $410 – 5(15) = $335

De nuevo, se vuelve a determinar la variable que entra y la variable que sale hasta llegar a la solución óptima, es decir este procedimiento es iterativo.

		1 ($v_1=10$)	2 ($v_2=0$)	3 ($v_3=2$)	4 ($v_4=13$)	Oferta
1	$u_1=0$	D 10 / 0	A 0 / 15	20 (-)	11 (+2)	15
2	$u_2=7$	A 12 (+5)	D 7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
3	$u_3=-10$	0 / 5	14 (-)	16 (-)	18 (-)	5
Demanda		5	15	15	10	45

		1 ($v_1=10$)	2 ($v_2=0$)	3 ($v_3=2$)	4 ($v_4=13$)	Oferta
1	$u_1=0$	10	0 / 15	20	11	15
2	$u_2=7$	12 / 0	7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
3	$u_3=-10$	0 / 5	14	16	18	5
Demanda		5	15	15	10	45

Esta es la nueva solución con un costo total: (el costo total no se modifica por la asignación 0)

CT = 15(0) + 0(12) + 0(7) + 15(9) + 10(20) + 5(0) = $335

Al repetirse el procedimiento se tiene:

		1	2	3	4	
		$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	Oferta
1	$u_1=0$	10 (-)	0 D 15	20 (-)	11 A (+2)	15
2	$u_2=7$	12 0	7 A 0	9 15	20 D 10	25
3	$u_3=-5$	0 5	14 (-)	16 (-)	18 (-)	5
Demanda		5	15	15	10	45

		1	2	3	4	
		$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	Oferta
1	$u_1=0$	10	0 5	20	11 10	15
2	$u_2=7$	12 0	7 10	9 15	20	25
3	$u_3=-5$	0 5	14	16	18	5
Demanda		5	15	15	10	45

Costo total de esta nueva asignación:
CT = 5(0) + 10(11) + 0(12) + 10(7) + 15(9) + 5(0) = $315

De nuevo se repite el procedimiento:

		1	2	3	4	
		$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=11$	Oferta
1	$u_1=0$	10 (-)	0 5	20 (-)	11 10	15
2	$u_2=7$	12 0	7 10	9 15	20 (-)	25
3	$u_3=-5$	0 5	14 (-)	16 (-)	18 (-)	5
Demanda		5	15	15	10	45

Observar en la tabla que ya no hay una variable que sale, por lo tanto, la asignación actual, proporciona un costo total de $315.

3.2. Método de Costo Mínimo.

El procedimiento es: Asignar el valor mas grande posible a la variable con el menor costo unitario de toda la tabla (los empates se rompen arbitrariamente). Táchese el renglón o columna satisfecho; Si un renglón y columna se satisfacen de manera simultanea solo uno puede tacharse. Después de ajustar la oferta y la demanda se repite el proceso.

Destinos

Fuentes	1	2	3	4	Oferta
1	10 0	0 15	20	11 0	15
2	12	7	9 15	20 10	25
3	0 5	14	16	18	5
Demanda	5	15	15	10	45

Esta solución inicial (asignación), proporciona un costo total:

CT = 0(10) + 15(0) + 0(11) + 15(9) + 10(20) + 5(0) = $335

Ahora hay que utilizar el paso 2 y paso 3 de la técnica (determinar la variable que sale y la que entra hasta llegar a la solución óptima o corroborar que ya se tiene la solución óptima).

3.3. Método de aproximación de Vogel.

Este método es heurístico y suele producir una mejor solución inicial optima, o próxima al nivel optima.

Los pasos del procedimiento son los siguientes:

1. Para cada renglón (columna) reste los dos costos menores del renglón (columna).
2. Identifique el renglón o columna con la mayor penalización, rompiendo empates en forma arbitraria. Asigne el mayor valor posible a la variable con el costo más bajo del renglón o columna seleccionado. Ajuste la oferta y la demanda y tache el renglón o columna satisfecho. Si un renglón o columna se satisfacen al mismo tiempo solo uno de ellos se tacha.
3. (a) Si solo hay un renglón o columna sin tachar, deténgase. (b) Si solo hay un renglón (columna) con oferta (demanda) positiva sin tachar, asignar a través del método de costo mínimo. (c) Se puede asignar cero. (d) de lo contrario dirigirse paso (1).

Destinos

Fuentes	1	2	3	4	Oferta		
1	10	0 15	20	11	15	10	10
2	12 0	7 0	9 15	20 10	25	2	5
3	0 5	14	16	18	5	14	
Demanda	5	15	15	10	45		
	10	7	7	7			
	2	7	11	9			

Lo cual proporciona el costo total:
CT = 15(0) + 0(12) + 0(7) + 15(9) + 10(20) + 5(0) = $335
Observar que se tiene una asignación de ceros en una posición diferente al método de costo mínimo, esto se debe a que se tiene empates a la hora de asignar por lo que se genera tachar la columna o el renglón de manera indistinta.

Ahora hay que utilizar el paso 2 y paso 3 de la técnica (determinar la variable que sale y la que entra hasta llegar a la solución óptima o corroborar que ya se tiene la solución óptima).

3.4. Método de asignación.

Considérese la situación de asignar m trabajos (o trabajadores) a n máquinas. Un trabajo i (=1, 2, …, m) cuando se asigna a la máquina j (=1, 2, …, n) incurre en un costo cij. El objetivo es el asignar los trabajos a las máquinas (un trabajo por máquina) al menor costo total.
La situación se conoce como problema de asignación. La oferta disponible en cada fuente es 1; para toda a_i. De manera análoga, la demanda requerida en cada destino es 1 para toda b_j. Si un trabajo no puede asignarse a cierta máquina el elemento c_{ij} se toma igual a M.
Antes de que el modelo se puede resolver es necesario balancear el problema sumando trabajos o máquinas ficticias, dependiendo de si m < n o m > n.
Por lo tanto, el modelo esta dado por:

$$minimizar\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0\ o\ bien\ 1$$

El método húngaro.

Este método indica que si se puede generar una nueva matriz c'_{ij} con cero registros y si estos elementos cero o un subconjunto de estos constituyen una solución factible esta solución es óptima puesto que el costo no puede ser negativo.
Los elementos cero se generan restando el menor elemento de cada renglón (columna) del renglón (columna) correspondiente.

Ejemplo 1:

Maquina

Trabajo	1	2	3	
1	5 x_{11}	7 x_{12}	9 x_{13}	1
2	14 x_{21}	10 x_{22}	12 x_{23}	1
3	15 x_{31}	13 x_{32}	16 x_{33}	1
	1	1	1	3

Simplificando la tabla se tiene:

	M1	M2	M3
T1	5	7	9
T2	14	10	12
T3	15	13	16

Usando los renglones primero se resta el menor costo de cada renglón a los elementos del renglón, debe haber al menos un cero por cada renglón y cada columna.

	M1	M2	M3	
T1	0	2	4	5
T2	4	0	2	10
T3	2	0	3	13

	M1	M2	M3
T1	0	2	2
T2	4	0	0
T3	2	0	1
	0	0	2

Observar que ya se puede asignar en donde hay ceros solamente (área sombreada), a un costo mínimo de $30.

T1	M1	=	$5
T2	M3	=	12
T3	M2	=	13
		TOTAL=	$30

No siempre es posible obtener una asignación factible como en el ejemplo. Por lo tanto, se requieren otras reglas para obtener la solución óptima.

Ejemplo 2:

Ejecutando los mismos pasos iniciales que el ejemplo anterior se obtiene:

	M1	M2	M3	M4	
T1	1	4	6	3	1
T2	9	7	10	9	7
T3	4	5	11	7	4
T4	8	7	8	5	5

	M1	M2	M3	M4
T1	0	3	5	2
T2	2	0	3	2
T3	0	1	7	3
T4	3	2	3	0
	0	0	3	0

	M1	M2	M3	M4
T1	0	3	2	2
T2	2	0	0	2
T3	0	1	4	3
T4	3	2	0	0

En este caso no es posible una asignación factible a los elementos cero. Por lo tanto, el procedimiento consiste en trazar un número mínimo de líneas a través de alguno de los renglones y columnas tal que se tachen todos los ceros.
El paso siguiente consiste en seleccionar el menor elemento no tachado. Este elemento se sustrae de todos y cada uno de los elementos no tachados y se suma a todo el elemento situado en la intersección de 2 líneas.

Debe advertirse que, si la solución óptima no se obtuvo en el paso anterior, el procedimiento dado de trazo de líneas debe repetirse hasta que se logre una asignación factible.

	M1	M2	M3	M4
T1	0	3	2	2
T2	2	0	0	2
T3	0	$\boxed{1}$	4	3
T4	3	2	0	0

	M1	M2	M3	M4
T1	0	2	1	1
T2	3	0	0	2
T3	0	0	3	2
T4	4	2	0	0

Observar que la asignación es posible (solución óptima):

T1	M1	=	$1
T2	M3	=	10
T3	M2	=	5
T4	M4	=	5
		TOTAL	$21

Uso de software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema 4 se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados, se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos de los cuales se usaría el módulo de Transporte (Transportation) y el módulo de asignación (Assignment) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos, así como los análisis de sensibilidad a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill

TEMA 4 LINEAS DE ESPERA.

4.1 Estructura básica de los modelos de línea de espera.
4.1.1 Un servidor, una cola.
4.1.2 N servidores, una cola.
4.1.3 N servidores, n colas.
4.2 Criterios bajo la distribución de Poisson y Exponencial para la selección del modelo apropiado de líneas de espera.
4.3 Aplicación de modelos de decisión en líneas de espera.
4.4 Inferencia de resultados.

Actividades de aprendizaje.

- Realizar investigación documental.
- Presentación al grupo de las partes componentes de un modelo de líneas de espera.
- Aplicar estos modelos para solución de ejercicios prácticos.
- Especificar el modelo apropiado de líneas de espera, ante determinada cantidad de colas y servidores.
- Resolver ejercicios prácticos relacionados.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

4.1 Estructura básica de los modelos de línea de espera.

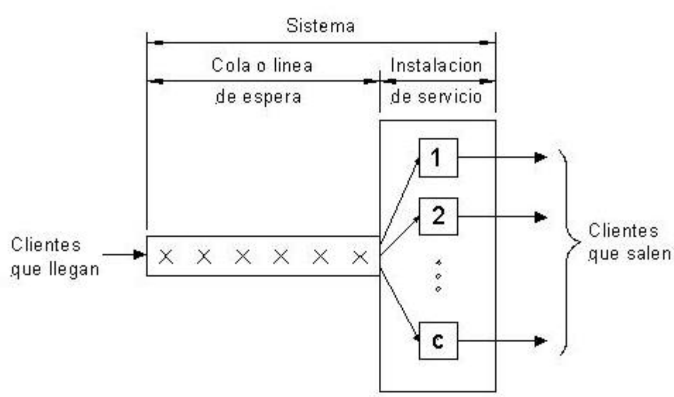
Una situación de línea de espera se genera de la manera siguiente. Cuando el cliente llega a la instalación se forma en una línea de espera (cola o fila). El servidor elige a un cliente de la línea de espera para comenzar a prestar el servicio. Al culminarse un servicio coma se repite el proceso de elegir a un nuevo cliente (en espera). Se supone que no se pierde tiempo entre el momento en que un cliente ya atendido sale de la instalación y la admisión de un nuevo cliente de la línea de espera.

Ahora se ve que los elementos básicos de un modelo de espera dependen de los siguientes factores:

1. Distribución de llegadas (llegadas individuales o masivas en grupo).
2. Distribución del tiempo de servicio (servicio individual o masivo).
3. Diseño de la instalación de servicio (estaciones en serie, en paralelo o en red).
4. Disciplina de servicio (FCFS, LCFS, SIRO) y Prioridad de servicio.
5. Tamaño de la línea de espera (finita o infinita).
6. Fuente de llamadas (finita o infinita).
7. Conducta humana (cambios, elusión y renuncia).

Existen tantos modelos de espera cómo variaciones de los factores citados. En este tema consideraremos varios modelos que parecen ser útiles en aplicaciones prácticas. En esta sección se indica que la distribución de Poisson y exponencial desempeñan una función importante en la representación de las llegadas y tiempos de servicio en muchas situaciones de espera.

En esta sección se estudian situaciones de espera que combinan procesos de llegadas y salidas. Se limita la atención a líneas de espera donde los clientes son atendidos por c servidores en paralelo, de manera que se pueda dar servicio a c clientes al mismo tiempo. Todos los servidores ofrecen servicios iguales desde el punto de vista del tiempo que se requiere para atender a cada cliente. El número de clientes en el sistema en cualquier punto se define como aquel que incluye aquellas personas que están en la línea de espera y en servicio.



Una anotación adecuada para resumir las características principales de las líneas de espera en paralelo se ha estandarizado universalmente en el formato siguiente,

***(a/b/c)** :(d/e/f)*

donde los símbolos a, b, c, d, e y f representan elementos básicos del modelo en la forma siguiente.

a≡ distribución de llegadas
b≡ distribución del tiempo de servicio (o de salidas)
c≡ número de servidores en paralelo (c=1,2, …, ∞)

d≡ disciplina de servicio (por ejemplo, FCFS, LCFS, SIRO)
e≡ número máximo admitido en el sistema (en línea de espera + en servicio)
f≡ tamaño de la fuente de llamadas

la notación estándar reemplaza los símbolos a y b de llegadas y salidas por los códigos siguientes.

M≡ distribución de llegadas o salidas de Poisson (o markoviana); o, lo que es lo mismo, distribución exponencial entre llegadas o de tiempo del servicio
D≡ tiempo entre llegadas o del servicio constante o determinista
E_k≡ distribución de Erlang o gamma de la distribución de tiempo entre llegadas o de servicio con el parámetro K
GI≡ distribución de llegadas general independientemente (o tiempo entre llegadas)
G≡ distribución de salidas general (o de tiempo de servicio)
Para ilustrar la notación, considérese (DG, disciplina general en notación de kendall)

(M/D/10) :(DG/N/∞)

Aquí tenemos llegadas de Poisson, tiempo de servicio constante y 10 servidores en paralelo en la instalación. La disciplina del servicio es general (DG) en el sentido de que pudiera ser FCFS, LCFS, SIRO o cualquier procedimiento que pueden utilizar los servidores para decidir el orden en el que se escogerá a los clientes de la línea de espera para iniciar el servicio. Independientemente de cuántos clientes lleguen a la instalación, el sistema (línea de espera + servicio) puede alojar sólo a un máximo de N clientes; todos los demás deberán buscar ser atendidos en cualquier otra parte. Por último, la fuente que genera los clientes que entran a la instalación tiene una capacidad infinita.

El objetivo final de analizar situaciones de espera consiste en generar medidas de desempeño para evaluar los sistemas reales. Como cualquier sistema de espera opera como función del tiempo, c debe decidir con anticipación sí interesa analizar el sistema en condiciones transitorias o de estado estable. Las condiciones transitorias prevalecen cuando el comportamiento del sistema sigue dependiendo del tiempo. Por otra parte, las líneas de espera con llegadas y salidas combinadas inician en condiciones transitorias y llegan gradualmente al estado estable después de haber transcurrido un tiempo lo suficientemente grande, siempre que los parámetros del sistema permitan se alcance el estado estable. Se advierte que el análisis de estado transitorio es bastante complejo, desde el punto de vista matemático, por lo que no se considerará en esta presentación.
Lo primero es desarrollar un modelo qué estado estable para la línea de espera generalizada de Poisson con c servidores en paralelo. El resultado principal que se obtiene de este modelo hoy es la determinación de las probabilidades de estado estable de tener n clientes en el sistema. Estas probabilidades se usan para desarrollar las medidas de desempeño del modelo generalizado de líneas de espera.

Ahora podemos calcular las medidas de desempeño de estado estable de líneas de espera en forma directa. Se pueden usar para analizar la operación de las líneas de espera con el fin de hacer recomendaciones sobre el desempeño del sistema. Entre las principales medidas de desempeño se cuentan: el número estimado de clientes en espera, el tiempo estimado de espera por el cliente y la utilización estimada del servicio.
Sea
L_s = número esperado de clientes en el *sistema*
L_q = número esperado de clientes en la *fila*
W_s = tiempo estimado de espera en el *sistema*
W_q = tiempo estimado de espera en la *fila*

Aprovechando los resultados del modelo generalizado, se estudia en esta sección las colas especializadas de Poisson.

4.1.1 Un servidor, una cola.

MODELO (M/M/1): (DG/∞/∞)
El presente modelo tiene llegadas y salidas Poisson con tasas medias λ(Lambda) y μ(Mu), respectivamente, se infiere $\lambda_{ef} = \lambda$.
Definiendo ρ(Ro) = λ / μ, debe se ρ < 1, La expresión para p_n para n se reduce a:

$$p_n = \rho^n p_0$$

$$p_0(1+\rho+\rho^2+\cdots)=1 \quad p_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \quad p_0 = 1-\rho \quad p_n = (1-\rho)\rho^n$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} \quad L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Porcentaje de utilización.

$$\frac{\bar{c}}{c} \times 100 \qquad \bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ejemplo 1:
En una instalación de servicio de lavado de autos, la información que se tiene indica que los autos que llegan para ser atendidos, según una distribución de Poisson, con media de 4 por hora. El tiempo para lavar y asear cada automóvil, varia, pero se advierte que sigue una distribución exponencial con media de 10 min. por automóvil. La instalación no puede atender a más de un auto a la vez.
Para analizar esta situación utilizando los resultados del modelo debemos suponer que la fuente de llamadas es tan grande que se puede considerar infinita. Además, existe suficiente espacio de estacionamiento para dar cabida a todos los autos que lleguen.
En la situación dada tenemos λ = 4 autos por hora y μ = 60 / 10 = 6 autos por hora como ρ = λ / μ =al 4 / 6 es menor que 1, el sistema puede operar en condiciones de estado estable. La salida del modelo se muestra. El valor L_q = 1.33 autos nos da una idea acerca de cuántos autos están esperando, en promedio, cuando llega un cliente. Sin embargo, se observa que L_q representa un valor esperado, de modo que el número de autos en espera, en cualquier momento, puede ser mayor o menor qué 1.333 autos. Podría entonces interesarnos determinar el número de lugares de estacionamiento, de manera que se asocie una probabilidad razonable de que un auto que llegue encuentre lugar. Por ejemplo, suponer que se necesita proporcionar suficientes lugares de estacionamiento, de modo que un auto que llegue encuentre un lugar por lo menos el 90% de las veces.
Si s representa el número deseado de lugares de estacionamiento, el requisito es equivalente a decir que el número de clientes en el sistema debe ser por lo menos uno menos que el número máximo que el sistema entero (s lugares de estacionamiento más un servidor) puede recibir. La condición se reduce a

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_s \geq 0.9$$

el valor acumulado de P_n es 0.86831 para n = 4 y de 0.91221 para n = 5. Esto significa que el número de espacios s para estacionamiento debe ser por lo menos de 5.
Podemos obtener más información acerca de la operación de la instalación de lavado de autos. Por ejemplo, el porcentaje de tiempo que la instalación está inactiva es igual a la probabilidad de que no haya automóviles en el lugar; es decir, P_0 = 0.3333, Lo que significa que la instalación de servicio está inactiva el 33% del tiempo. Por otro lado, el tiempo de espera calculado desde el momento en que llega el automóvil hasta que sale, puede ser de utilidad para determinar la comodidad del servicio, desde el punto de vista del cliente. En el resultado vemos que W_S = 0.5 horas. Este tiempo parece ser muy largo y el gerente de la instalación deservicio debe idear un medio de acelerar la tasa de

servicio.

1/μ=	10	minutos por automovil		
λ=	4	autos por hora		
μ=	6	autos por hora		
ρ=	0.66666667			
Ls=	2	numero de autos esperados en el sistema.		
Lq=	1.33333333	numero de autos esperados en la fila.		
Ws=	0.5	horas (tiempo estimado de espera en el sistema)		
Wq=	0.33333333	horas (tiempo estimado de espera en la fila)		

TABLA DE PROBABILIDADES:

n	Pn	Pn acum.
0	0.33333333	0.33333333
1	0.22222222	0.55555556
2	0.14814815	0.7037037
3	0.09876543	0.80246914
4	0.06584362	0.86831276
5	0.04389575	0.9122085
6	0.02926383	0.94147234
7	0.01950922	0.96098156

MODELO (M/M/1): (DG/N/∞)

La diferencia entre este modelo y el anterior es que el número máximo de clientes permitido en el sistema es N (longitud máxima de la línea de espera N - 1). Esto significa que cuando haya N clientes en el sistema, se impiden todas las nuevas llegadas o no se les permite unirse a la línea de espera.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1, \ldots \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \qquad \text{para toda } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Haciendo $\rho = \lambda/\mu$, obtenemos

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación

$$\sum_{n=0}^{N} p_n = 1, \quad \text{que da} \quad p_0(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^N) = 1$$

o bien

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\,\rho^n, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1}, & \rho = 1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho\{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_N)$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = L_s - \frac{\lambda(1-p_N)}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1-p_N)}$$

Ejemplo 2:
Considere la instalación de lavado de autos del ejemplo 1. Suponga que la instalación tiene un total de cuatro lugares de estacionamiento. Si el estacionamiento está lleno, los carros que llegan buscarán servicio en otra parte.
Observando que N = 4 + 1 = 5, encontramos. Una información que puede interesar al propietario de la instalación es saber cuántos clientes se pierden debido al limitado espacio de estacionamiento. Esto equivale a determinar el valor de λ_{PN} o bien, equivalentemente, $\lambda - \lambda_{ef}$.

$$\lambda - \lambda_{ef} = 4 - 3.8075 = 0.1925 \text{ autos / hora}$$

o bien, con base en un día de 8 horas, la instalación pierde aproximadamente 2 ($\cong$ 8 x 0.1925) autos por día en promedio, o sea, (2 / (4 x 8)) x 100 = 6.25% de todos los carros que llegan por día. Una decisión respecto a incrementar el tamaño del estacionamiento a más de cuatro lugares debe basarse en el “valor” de clientes perdidos.
El tiempo total esperado desde el momento de llegada de un auto hasta que se lava es W_S = 0.3736 horas aproximadamente 22 minutos que es menor que W_S = 30 minutos para el caso cuando todos los autos son admitidos en la instalación. Esta reducción de aproximadamente 25% se logra a costa de perder un promedio de 6.25% de los autos que llegan por día, debido a la falta de espacios de estacionamiento.

1/μ=	10	minutos por automovil		
λ=	4	autos por hora		
μ=	6	autos por hora		
N=	5	4 + 1		
ρ=	0.66666667		λef=	3.8075188
Ls=	1.42255639	numero de autos esperados en el sistema.		
Lq=	0.78796992	numero de autos esperados en la fila.		
Ws=	0.37361769	horas (tiempo estimado de espera en el sistema)		
Wq=	0.20695103	horas (tiempo estimado de espera en la fila)		

TABLA DE PROBABILIDADES:

n	Pn	Pn acum.
0	0.36541353	0.36541353
1	0.24360902	0.60902256
2	0.16240602	0.77142857
3	0.10827068	0.87969925
4	0.07218045	0.9518797
5	0.0481203	1

4.1.2 N servidores, una cola.

MODELO (M/M/c): (DG/ ∞ /∞)
En este modelo los clientes llegan con una tasa constante λ y un máximo de c clientes pueden ser atendidos simultáneamente. La tasa de servicio por servidor activo es también constante e igual a μ.

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right) p_0, & 0 \leq n \leq c \\ \left(\dfrac{\rho^n}{c^{n-c} c!}\right) p_0, & n > c \end{cases}$$

$$p_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right\}^{-1}$$

$$\frac{\rho}{c} < 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\, p_0 = \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right] p_c$$

$$L_s = L_q + \rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo 3:

En una pequeña ciudad operan dos compañías de autos de alquiler. Cada una de las compañías posee dos autos de alquiler y si se sabe que comparten el mercado casi en partes iguales. Esto lo hace evidente el hecho que las llamadas llegan a la oficina de despacho de cada compañía a la tasa de 10 por hora. El tiempo promedio por dejada es de 11.5 minutos. La llegada de llamadas sigue una distribución de Poisson, mientras que los tiempos de dejada son exponenciales.

Las dos compañías fueron compradas hace poco por uno de los hombres de negocios de la ciudad. Después de tomar el mando de las dos compañías su primera acción fue intentar reunir las dos, en una oficina de despacho, con la esperanza de ofrecer un servicio más rápido a sus clientes. Sin embargo, observó que el uso (la razón de las llamadas que llegan por hora a las dejadas) de cada compañía es

$$100\,\frac{\lambda}{c\mu} = \frac{100 \times 10}{2 \times (60/11.5)} = 95.8\%$$

(obsérvese que cada automóvil representa un servidor.) Como resultado, el costo de reubicar las dos compañías en una oficina puede no ser justificable puesto que cada una de las oficinas de despacho actuales parece estar comillas demasiado ocupada comillas, como lo indica el elevado factor de uso.

Para analizar el problema del nuevo dueño, es necesario hacer una comparación entre las dos situaciones que siguen:

1. Dos líneas de espera independientes, cada una del tipo (M/M/2): (DG/∞/∞) con λ = 10 llamadas por hora y μ = 5.217 dejadas por hora.
2. Una línea de espera del tipo (M/M/4): (DG/∞/∞) con λ = 2 x 10 = 20 llamadas por hora y μ = 5.217 dejadas por hora.

Observar que en ambos casos μ representa el número de dejadas que puede hacer un solo automóvil por hora.

El factor de uso en la segunda situación es

$$\frac{100\lambda}{c\mu} = \frac{100 \times 20}{4 \times 5.217} = 95.8\%$$

Se mantiene igual a los factores de uso cuando las dos oficinas de despacho se mantienen sin reunir. Este resultado parece confirmar la sospecha del propietario de que la reunión no está justificada. Sin embargo, sí se considera Otras medidas de desempeño, la imagen será diferente. Específicamente, calculando el tiempo de espera estimado de un cliente hasta que se le envía un taxi.

Los resultados muestran que W_q = 2.157 horas para el caso de dos líneas de espera y 1.045 horas cuando están unidas. Esto significa que el tiempo estimado de espera hasta que llega un taxi se reduce aproximadamente en un 50%. la conclusión es que la unión de servicios conducirá normalmente a una operación más efectiva, en cuanto a ofrecer un servicio más rápido a los clientes, aun si la utilización de ambos servicios por separado es alta (o sea, de 95.8% en este ejemplo). (Desde luego, el dueño tiene más por qué preocuparse ya que, aún después de reunir las dos compañías, esperar más de 1 hora por un servicio de 11.5 minutos es demasiado. Evidentemente, necesita incrementar el número de taxis.)

c=	2	servidores (taxis)		
1/μ=	11.5	minutos por dejada		
λ=	10	llamadas por hora		
μ=	5.2173913	llamadas por hora		
ρ=	1.91666667		ρ/c=	0.95833333
Ls=	23.4893617	numero de autos esperados en el sistema.		
Lq=	21.572695	numero de autos esperados en la fila.		
Ws=	2.34893617	horas (tiempo estimado de espera en el sistema)		
Wq=	2.1572695	horas (tiempo estimado de espera en la fila)		

TABLA DE PROBABILIDADES:

n	Pn	Pn acum.
0	0.0212766	0.0212766
1	0.04078014	0.06205674
2	0.03908097	0.10113771
3	0.0374526	0.1385903
4	0.03589207	0.17448237
5	0.03439657	0.20887894
6	0.03296338	0.24184232
7	0.0315899	0.27343222
8	0.03027366	0.30370588
9	0.02901226	0.33271813
10	0.02780341	0.36052155
11	0.02664494	0.38716648

n	ρn
0	1
1	1.91666667
Σ=	2.91666667

c=	4	servidores (taxis)		
1/μ=	11.5	minutos por dejada		
λ=	20	llamadas por hora		
μ=	5.2173913	llamadas por hora		
ρ=	3.83333333		ρ/c=	0.95833333
Ls=	24.7445369	numero de autos esperados en el sistema.		
Lq=	20.9112036	numero de autos esperados en la fila.		
Ws=	1.23722685	horas (tiempo estimado de espera en el sistema)		
Wq=	1.04556018	horas (tiempo estimado de espera en la fila)		

TABLA DE PROBABILIDADES:

n	Pn	Pn acum.
0	0.00421061	0.00421061
1	0.01614067	0.02035127
2	0.03093628	0.05128755
3	0.03952969	0.09081723
4	0.03788262	0.12869985
5	0.03630417	0.16500402
6	0.0347915	0.19979552
7	0.03334185	0.23313738
8	0.03195261	0.26508998
9	0.03062125	0.29571124
10	0.02934537	0.3250566
11	0.02812264	0.35317924

n	ρn
0	1
1	3.83333333
2	7.34722222
3	9.38811728
Σ=	21.5686728

MODELO (M/M/c): (DG/ N /ꝏ), c ≤ N

Hoy esta situación de espera difiere de la anterior en que se impone un límite n sobre la capacidad del sistema (es decir, tamaño máximo de la línea de espera = N - c). En términos del modelo para el modelo actual están dadas por

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq c \\ c\mu, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}\, p_0, & 0 \leq n \leq c \\ \dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}\, p_0, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

$$p_0 = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1-(\rho/c)^{N-c+1}\right)}{c!(1-\rho/c)} \right]^{-1}, & \rho/c \neq 1 \\ \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N-c+1) \right]^{-1}, & \rho/c = 1 \end{cases}$$

$$L_q = \begin{cases} p_0 \dfrac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{1 - \left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right\}, & \rho/c \neq 1 \\ p_0 \dfrac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!}, & \rho/c = 1 \end{cases}$$

$$L_s = L_q + (c - \bar{c}) = L_q + \frac{\lambda_{\text{ef}}}{\mu}$$

$$\bar{c} = \text{número estimado de servidores inactivos} = \sum_{n=0}^{c} (c-n)p_n$$

$$\lambda_{\text{ef}} = \lambda(1 - p_N) = \mu(c - \bar{c})$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{ef}}} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1-p_N)}$$

Ejemplo 4:
En el problema de la reunión de compañías de autos de alquiler unificada (ejemplo 3), aunque el dueño comprende que el tiempo de espera calculado es excesivo, no puede obtener fondos para comprar otras unidades. Para resolver el problema de la espera excesiva, pese a ello, instruyó a la oficina de despacho a dar una disculpa a los posibles clientes por la falta de disposición de automóviles una vez que la lista de espera hacienda a 16 clientes.
Para estudiar el efecto de la decisión del dueño sobre el tiempo de espera, se comprende que tener una lista de espera de 16 clientes es equivalente a tener 16 + 4 = 20 clientes en el sistema, ya que la compañía tiene cuatro automóviles (servidores).

Por lo tanto, el modelo de espera se reduce a (M/M/4): (DG/20/∞), dónde $\lambda = 20$ por hora y $\mu = 5.217$ por hora.

El tiempo de espera estimado W_q antes de fijar un límite sobre la capacidad del sistema era de 1.05 horas, que es 3 veces mayor que el nuevo tiempo de espera calculado de 0.303 (= 18 minutos). Notar que esta notable reducción se logra a expensas de perder cerca de 3.4% de los clientes potenciales ($P_{20} = 0.03433$). desde luego, el resultado no indica qué efecto tendrá, a la larga, la posible pérdida de la buena voluntad de los clientes en la operación de la compañía.

c=	4	servidores (taxis)		
1/μ=	11.5	minutos por dejada		
λ=	20	llamadas por hora		
μ=	5.217391304	llamadas por hora		
N=	20	16 + 4		
			ρ/c=	0.95833333
ρ=	3.833333333		λef=	19.3140073
Ls=	9.554064447	numero de clientes esperado en el sistema.		
Lq=	5.852213042	numero de clientes esperado en la fila.		
Ws=	0.49467023	horas (tiempo estimado de espera en el sistema)		
Wq=	0.303003563	horas (tiempo estimado de espera en la fila)		

TABLA DE PROBABILIDADES:

n	Pn	Pn acum.		n	ρn
0	0.00753232	0.00753232		0	1
1	0.0288739	0.03640622		1	3.83333333
2	0.05534164	0.09174786		2	7.34722222
3	0.07071432	0.16246219		3	9.38811728
4	0.06776789	0.23023008		Σ=	21.5686728
5	0.06494423	0.29517431			
6	0.06223822	0.35741253			
7	0.05964496	0.41705749			
8	0.05715975	0.47421724			
9	0.0547781	0.52899534			
10	0.05249568	0.58149101			
11	0.05030836	0.63179937			
12	0.04821218	0.68001154			
13	0.04620333	0.72621488			
14	0.0442782	0.77049307			
15	0.04243327	0.81292634			
16	0.04066522	0.85359156			
17	0.03897083	0.8925624			
18	0.03734705	0.92990944			
19	0.03579092	0.96570037			
20	0.03429963	1			

4.1.3 N servidores, n colas.

MODELO DE SERVICIO DE MAQUINAS (M/M/R): (DG/ K / K), R < K

Este modelo supone que se dispone de R técnicos en reparaciones para dar servicio a un total de K máquinas. Como una máquina descompuesta no puede generar nuevas llamadas mientras está en servicio, el modelo es un ejemplo de una fuente de llamadas finita.

El modelo se puede tratar como un caso especial del modelo generalizado. Si definimos λ como la tasa de descompostura por máquina, se tiene

$$\lambda_n = \begin{cases} (K-n)\lambda, & 0 \le n \le K \\ 0, & n \ge K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le R \\ R\mu, & R \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \binom{K}{n}\rho^n p_0, & 0 \le n \le R \\ \binom{K}{n}\dfrac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}}p_0, & R \le n \le K \end{cases}$$

$$p_0 = \left\{\sum_{n=0}^{R}\binom{K}{n}\rho^n + \sum_{n=R+1}^{K}\binom{K}{n}\frac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}}\right\}^{-1}$$

$$L_q = \sum_{n=R+1}^{K}(n-R)p_n$$

$$(R > 1)$$

$$L_s = L_q + (R - \bar{R}) = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

$$L_q = K - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)(1 - p_0)$$

$$(R = 1)$$

$$L_s = K - \frac{1 - p_0}{\rho}$$

$$\bar{R} = \text{número esperado de técnicos} = \sum_{n=0}^{R}(R-n)p_n$$

$$\lambda_{ef} = \mu(R - \bar{R}) = \lambda(K - L_s)$$

Ejemplo 5:
Un taller de maquinaria tiene un total de 22 máquinas. En promedio, una máquina se descompone cada 2 horas. Toma 12 minutos en promedio, repararla. El propietario tiene interés en determinar el número de técnicos en relación necesarios para mantener el taller funcionando en forma razonablemente fluida.
Podemos analizar la situación, investigando la eficiencia de la operación como una función del número de técnicos en reparación. Usando $\lambda = 0.5$ descomposturas por hora y $\mu = 5$ reparaciones por hora se resumen alguno de los resultados del modelo como una función de R = 1, 2, 3 y 4.
L_S representa básicamente el número promedio de máquinas descompuestas en cualquier momento. La productividad del taller se puede calcular entonces, como el número promedio de máquinas activas, dividido entre el número total de máquinas en el taller. La siguiente tabla resume los resultados (verificar).

Técnicos en reparación, R	1	2	3	4
Productividad del taller (%)	45.44	80.15	88.79	90.45

Observando estos resultados notamos que incrementando el número de técnicos de 1 a 2, la productividad del taller pasa del inaceptable nivel de 45.44% al nivel razonable de 80.15%. El crecimiento marginal en la productividad que resulta de incrementar R de 2 a 3 o de 3 a 4 no es tan pronunciado. Se puede concluir entonces, que el número de técnicos debe ser por lo menos igual a 2. Cualquier incremento más allá de este nivel se debe basar en consideraciones económicas relativas

al incremento en la producción, en comparación con los gastos adicionales de contratar más técnicos. Este aspecto se analiza con más detalle.
En los cálculos podrías sorprender que λ_{ef}, que es la tasa promedio de descomposturas en el taller crezca con R. Observar que conforme aumenta el número de técnicos, las máquinas estarán activas con mayor frecuencia, incrementando así también la frecuencia de las reparaciones. De hecho, podemos hacer “crítico” este punto citando el caso extremo de no tener ningún técnico, en cuyo caso λ_{ef} será nula, una vez que todas las máquinas estén inactivas. Este ejemplo sirve para demostrar que λ_{ef} no se puede utilizar en el modelo presente como una medida de la efectividad del servicio de reparación.

	K=1			K=2				K=3				K=3	
Po=	0.00040403		Po=	0.05637557	R̄=		Po=	0.10778661	R̄=		Po=	0.11992958	R̄=
Ls=	12.0040403		Lq=	2.60455125	0.23677739		Lq=	0.51268834	1.04660803		Lq=	0.11021652	2.01001968
Lq=	11.0044444		Ls=	4.36777387	4.36777387		Ls=	2.46608031	2.46608031		Ls=	2.10019684	2.10019684
Ws=	2.40177846		Ws=	0.49543079			Ws=	0.25249211			Ws=	0.21107715	
Wq=	2.20177846		Wq=	0.29543079			Wq=	0.05249211			Wq=	0.01107715	
λef=	4.99797983		λef=	8.81611307			λef=	9.76695985			λef=	9.94990158	
%=	45.44%		%=	80.15%			%=	88.79%			%=	90.45%	

4.2 Criterios bajo la distribución de Poisson y Exponencial para la selección del modelo apropiado de líneas de espera.

La aplicación de la teoría de la espera en la práctica implica dos aspectos principales:

1. Selección del modelo matemático adecuado que representará al sistema real en forma apropiada con el objeto de determinar las medidas de desempeño del sistema.
2. Implantación de un modelo de decisión basado en las medidas de desempeño del sistema con el fin de diseñar la instalación de servicio.

La selección de un modelo específico para analizar una línea de espera, sea analítico o por simulación, está determinado principalmente por las distribuciones de los tiempos de llegada y de servicio. En la práctica, la determinación de estas distribuciones implica observar las líneas de espera durante su operación y registrar los datos pertinentes. Surgen dos preguntas normales respecto a la recolección de los datos necesarios:

1. ¿Cuándo observar el sistema?
2. ¿Cómo registrar los datos?

en la mayoría de las líneas de espera se tienen lo que se llama períodos ocupados, durante los cuales la tasa de llegadas al sistema crece en comparación con la de otros periodos del día. Una variación característica de la tasa de llegadas. Por ejemplo, el tránsito de entrada y salida en una carretera que conduce a una ciudad, alcanza su nivel más alto, o pico, durante las horas de mayor afluencia, que son alrededor de las 8:00 AM y las 5:00 PM en situaciones como ésta será necesario recopilar los datos durante los periodos de mayor actividad. El sistema debe diseñarse para tomar en cuenta esas condiciones extremas.
La recolección de datos relativos a llegadas y salidas se pueden efectuar utilizando una de dos maneras:

1. Medir el tiempo entre llegadas (o salidas) sucesivas para determinar los tiempos entre arribos (o servicio).
2. Contar el número de llegadas (o salidas) durante una unidad de tiempo seleccionada(por ejemplo, una hora).

El primer método se diseña para que proporcione las distribuciones de los tiempos entre arribos, o servicios, y el segundo método para que de las distribuciones del número de llegadas, o salidas. En la mayoría de los modelos analíticos de líneas de espera podemos describir los procesos de entrada y salida, ya sea por el número de eventos (llegadas, o salidas) o bien, por el tiempo entre eventos (entre arribos, o tiempos de servicio).

El procedimiento para la recolección de datos se puede basar en el uso de un cronómetro o de un dispositivo de registro automático. En este caso, probablemente una técnica manual daría como resultado una distorsión de los datos.

Después de recopilar los datos en la manera descrita, la información debe resumirse en una forma adecuada que nos permita determinar la distribución asociada. Esto se logra, generalmente, resumiendo primero las observaciones en forma de un histograma de frecuencias. Así, podemos sugerir una distribución teórica que se ajuste a los datos observados (por ejemplo, Poisson, exponencial, normal). Hoy se puede aplicar entonces una prueba estadística para verificar la “bondad del ajuste” de la distribución propuesta. Si la distribución resultante se ajusta a la hipótesis de la distribución exponencial de Poisson exigida por los modelos de líneas de espera más usados, podemos utilizar la mayor parte de los resultados para representar la situación práctica. Si no es así, puede ser necesario buscar otros métodos de análisis para completar el estudio. La simulación es muy adecuada para investigar situaciones de mal comportamiento enfilas que no se pueden analizar por medio de los modelos teóricos estándar de líneas de espera.

El siguiente paso es idear modelos de decisión que se puedan usar y la optimización del diseño de los sistemas de líneas de espera. De acuerdo con el espíritu general de la investigación de operaciones, nos interesa desarrollar modelos de decisión que minimicen los costos totales, asociados con la operación de líneas de espera.

Modelos de decisión en líneas de espera.

En general, un modelo de costos en líneas de espera busca equilibrar los costos de espera contra los costos de incrementar el nivel de servicio. Conforme crece el nivel de servicio, los costos de éste también crecen y disminuye el tiempo de espera de los clientes. El nivel de servicio óptimo se presenta cuando la suma de los dos costos es un mínimo.

La naturaleza de algunas situaciones de líneas de espera puede impedir el uso de modelos de decisión de costos. En particular, el costo de esperar es generalmente el más difícil de estimar. Para ilustrar este punto, se clasifican las situaciones en línea de espera en las siguientes tres amplias categorías:

1. Sistemas humanos. Tanto el servidor como el cliente son seres humanos, como sucede en la operación de un supermercado, un restaurante o un banco.
2. Sistemas semiautomáticos. Sólo el cliente o el servidor es un ser humano, cómo en la situación de reparación de maquinaria, donde la máquina hoy descompuesta es el cliente y el mecánico es el servidor.
3. Sistemas automáticos. Ni el cliente ni el servidor son seres humanos cómo en un centro de cómputo, donde los programas son el cliente y la unidad procesadora central es el servidor.

En esta clasificación, el grado de participación humana en la operación de la instalación es generalmente una medida del grado de dificultad de implementar modelos de costos. A este respecto, los sistemas humanos son los más complejos, principalmente debido a la dificultad de estimar el costo de esperar. De hecho, los sistemas humanos incluyen dos tipos: el primero se refiere a las situaciones donde los intereses del cliente y del servidor son mutuos; el segundo incluye sistemas donde los intereses pueden entrar en conflicto. Una ilustración del primer tipo es la situación del almacén de herramientas en un taller de maquinaria. Aquí los clientes son los operadores que buscan reemplazo de herramienta y los servidores son los empleados encargados de entregar las herramientas. En esta situación tanto el cliente como el servidor trabajan para mantener un nivel de productividad aceptable. Bajo esta premisa, la espera se traduce básicamente en pérdida de producción, que en la mayoría de los casos es fácilmente cuantificable.

El caso de un sistema humano donde los intereses del cliente y del servidor no son mutuos, se ejemplifica con la operación de un banco o una tienda de abarrotes. En estos dos sistemas es difícil asignar un valor monetario al costo de esperar. Ciertamente, el costo de esperar para los mismos individuos puede variar, dependiendo de la situación de la línea de espera en que se encuentren. Por ejemplo, un individuo se puede irritar con la idea de esperar más de un par de minutos en la fila de una cafetería, pero está dispuesto a esperar más de media hora para ver una película.

Lo que queremos evidenciar es que no todos los modelos de líneas de espera se pueden optimizar usando modelos de costos. En tales casos, uno debe buscar otros medios para tomar decisiones de diseño. Por ejemplo, en un restaurante de servicio rápido se diseñaría la instalación, para tranquilizar a los clientes, limitando el tiempo de espera promedio de 2 a 3 minutos por cliente esperando. Este tipo de modelo de decisión se basa en el uso de un nivel de aceptación que la instalación debe proporcionar. Así, un promedio de espera de 2 minutos es el nivel que esperamos sea aceptado por los clientes.
Aunque el uso de niveles de aceptación para diseñar un sistema de filas no está definido como el uso de un modelo de optimización de costos, el procedimiento compensa un vacío.

4.3 Aplicación de modelos de decisión en líneas de espera.

En esta sección se desarrollan los modelos de costos y de nivel de aceptación.

MODELOS DE COSTO.

Los modelos de costo básicamente equilibran los dos tipos de costo en conflicto:

1. Costo de ofrecer el servicio
2. Costo que resulta de la demora en el ofrecimiento del servicio.

A. Tasa optima de servicio

Este modelo trata la situación de un solo servidor donde se conoce la tasa λ de llegadas. Se desea determinar la tasa μ óptima de servicio con base en un modelo de costo apropiado.
Sean

$CEO(\mu)$ = Costo estimado de operar la instalación por unidad de tiempo, dada μ
$CEE(\mu)$ = Costo estimado de espera por unidad de tiempo, dada μ

Se quiere entonces determinar el valor de μ qué minimiza la suma de esos dos costos.
Las formas específicas de CEO y CEE como funciones de μ dependen de la situación en estudio. Por ejemplo, estas funciones pueden ser o no lineales; también pueden ser continuas o discretas, dependiendo de la característica de μ.

Ejemplo 6:
Una compañía impresora desea adquirir una copiadora comercial de alta velocidad para cubrir la creciente demanda en su servicio de copiado. La tabla siguiente presenta un resumen de las especificaciones de diferentes modelos:

Tipo de copiadora	Costo de operación (por hora)	Rapidez (hojas por minuto)
1	$15	30
2	$20	36
3	$24	50
4	$27	66

los pedidos llegan a la compañía según una distribución de Poisson, a razón de cuatro cada 24 horas. La cantidad de cada pedido es aleatorio, pero se estima que en promedio es de 10000 copias. Los contratos con los clientes estipulan una multa por entrega tardía de $80 por día y por pedido.
Utilizando un tamaño promedio por pedido de 10000 copias, la tasa de servicio de las diferentes copiadoras se puede resumir como sigue:

Tipo	Tasa de servicio, μ, (pedidos por día)
1	4.32
2	5.18
3	7.20
4	9.50

El calculo del valor de μ para el tipo 1 se ilustra en el ejemplo.

Tiempo por pedido promedio = $\frac{10\,000}{30} \times \frac{1}{60} = 5.56\ horas$

Tiempo de servicio correspondiente = $\frac{24}{5.56} = 4.32\ pedidos/dia$

Un modelo de costo apropiado para la situación reconoce que μ se encuentra en cuatro valores discretos, correspondientes a los cuatro tipos de copiadoras. Esto indica que la tasa óptima de servicio se puede obtener comparando los costos totales correspondientes.
La determinación del costo total asociado con cada tipo de copiadora se hace como sigue. Tomando un día (24 horas) como unidad de tiempo, el costo de operar la instalación por día está dada por

$$CEO_i = 24C_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

dónde C_i es el costo de operación por hora de la copiadora i. Por otra parte, el costo de espera por día necesita algunas consideraciones. Como los contratos estipulan una multa de $80 por día por entrega tardía, podemos expresar este elemento de costo como

$$CEE_i = 80L_{si}$$

dónde L_{si} , es el número promedio de trabajos no terminados con la copiadora i. La función de costo total se reduce entonces a

$$CET_i = 24C_i + 80L_{si}$$

podemos determinar los valores de L_{si}, qué es el número esperado en el sistema para el tipo i, con las fórmulas del (M/M/1):(DG/∞/∞). La tabla siguiente resume los resultados:

Copiadora i	λi	μi	Lsi
1	4	4.32	12.5
2	4	5.184	3.378378
3	4	7.2	1.25
4	4	9.504	0.726744

con esta información calculamos CET_i para i = 1, 2, 3, 4 cómo se muestra más adelante. Todos los costos son por día.

Copiadora i	CEOi	CEEi	CETi
1	$360.00	$ 1,000.00	$1,360.00
2	$480.00	$ 270.27	$750.27
3	**$576.00**	**$ 100.00**	**$676.00**
4	$648.00	$ 58.14	$706.14

los cálculos muestran qué, de acuerdo con la información, la copiadora tipo 3 tiene el menor costo total por día.

B. Numero óptimo de servidores

El modelo anterior puede ampliarse para determinar el número óptimo de servidores en paralelo en una instalación. Sí c es el número de servidores en paralelo, el problema se reduce a determinar el valor de c que minimiza.

$$CET(c) = CEO(c) + CEE(c)$$

El valor óptimo de c debe satisfacer las siguientes condiciones necesarias:

$$CET(c-1) \geq CET(c) \quad y \quad CET(c+1) \geq CET(c)$$

Como aplicación de estas condiciones considere las siguientes funciones de costo:

$$CEO(c) = C_1 c$$
$$CEE(c) = C_2 L_s(c)$$

dónde
C_1 = costo por servidor adicional por unidad de tiempo
C_2 = costo por tiempo unitario de espera por cliente
$L_s(c)$ = número esperado de clientes en el sistema, dado c

Aplicando las condiciones necesarias dadas, se obtiene

$$L_s(c) - L_s(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c-1) - L_s(c)$$

El valor de C_1/C_2 indica ahora dónde debe comenzar la búsqueda para él c óptimo.

Ejemplo 7:
En una instalación de almacenamiento de herramienta, las solicitudes de intercambio de herramienta ocurren según una distribución de Poisson con media de 17.5 solicitudes por hora. Cada empleado de la instalación puede manejar un promedio de 10 solicitudes por hora. El costo de incluir un nuevo empleado a la instalación se estima en $6 por hora. El costo de la producción perdida por máquina en espera por hora se estima en $30 la hora. ¿A cuántos empleados debe contratar la instalación?
La determinación del óptimo c se efectúa realizando los cálculos que se indican a continuación.

λ=	17.5	Solicitudes por hora
μ=	10	Solicitudes por hora
C_1=	6	$ por hora
C_2=	30	$ por hora
C_1 / C_2 =	0.2	

c	Ls (c)	Ls (c - 1) - Ls (c)
1	∞	-
2	7.467	∞
3	2.217	5.25
4	1.842	0.375
5	1.769	0.073
6	1.754	0.015
7	1.75	0.004

$$L_s(4) - L_s(5) = .073 < 0.2 < 0.375 = L_s(3) - L_s(4)$$

En consecuencia, el optimo es c = 4 empleados.

MODELO DE NIVEL DE ACEPTACION

El modelo del nivel de aceptación reconoce la dificultad de estimar los parámetros de costo y, por lo tanto, está basado en un análisis más directo. Emplea directamente las características de operación del sistema al decidir sobre los valores "óptimos" de los parámetros de diseño. La optimidad aquí se considera en el sentido de satisfacer ciertos niveles de aceptación establecidos por el decisor. Dichos niveles se definen como los límites superiores sobre los valores de las medidas conflictivas que desea balancear o equilibrar el decisor.
En el modelo de servidores múltiples donde se requiere determinar el valor óptimo del número c de servidores, las dos medidas en conflicto pueden tomarse como

Tiempo promedio de espera en el sistema W_s.
Porcentaje X de tiempo inactivo de los servidores.

Estas dos medidas reflejan las aceptaciones del cliente y del servidor. Sean α y β los niveles de aceptación (limites superiores) para W_s y X. Entonces el método de nivel de aceptación puede expresarse matemáticamente como sigue.
Determine el numero c de servidores tal que

$$W_s \leq \alpha \quad y \quad X \leq \beta$$

La expresión para W_s se conoce del análisis de (M/M/c):(DG/∞/∞). La expresión de X está dada por

$$X = \frac{100}{c}\sum_{n=0}^{c}(c-n)P_n = 100\left(1-\frac{\rho}{c}\right)$$

Ejemplo 8:
En el ejemplo anterior, suponer que se desea determinar el numero de empleados tal que el tiempo de espera estimado hasta que se reciba una herramienta se mantenga por debajo de 20 minutos. Al mismo tiempo, se desea que el porcentaje de tiempo que los empleados estén inactivos u ociosos no pase del 15%.
La siguiente tabla resume Ws y X para diferentes valores de c. Cuando c crece, Ws, decrece y X crece.

c	1	2	3	4	5	6	7	8
Ws (minutos)	∞	25.6	7.6	6.3	6.1	6.0	6.0	6.0
X /%)	0	12.5	41.7	56.3	65.0	70.8	75.0	78.1

Para que Ws se mantenga por debajo de 20 minutos, debemos contar cuando menos con 3 empleados. Por otra parte, mantener ocupados a los empleados el 85% del tiempo requiere se limite su número a un máximo de 2 empleados. Por lo tanto, los 2 niveles de aceptación no se pueden satisfacer en forma simultánea y debe relajarse una de las 2 condiciones si se desea hallar una solución factible.
Se observa qué ocurre una disminución sustancial en Ws cuándo c aumenta de 2 a 3. Cualquier incremento adicional tendrá poco efecto en el valor de Ws. En términos de x, aumentar c de 2 a 3 incrementará más de 3 veces el porcentaje de tiempo ocioso para los empleados. Por lo tanto, la elección entre c = 2 y c = 3 debe hacerse en vista de si “vale la pena” reducir el tiempo ocioso de la máquina de 25.6 minutos a 7.6 minutos, aunque el tiempo ocioso de los empleados aumente de 12.5% al 41.7%.

Para la toma de una decisión específica en el caso del método del nivel de aceptación, se puede determinar un intervalo en el parámetro de costo C_2 resultante de la selección de c para niveles de aceptación dados. Seleccionar específicamente C_2 en vez de C_1 porque suele ser más difícil estimar el costo de espera en la mayoría de los modelos de líneas de espera. Por lo tanto, el procedimiento que aquí se presenta supone que C_1, el costo incremental asociado con la adquisición de un servidor adicional se puede determinar sin demasiada dificultad.
A partir del modelo de costo el óptimo c debe satisfacer

$$L_s(c) - L_s(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c-1) - L_s(c)$$

por lo tanto, en condiciones óptimas, c2 queda en el intervalo

$$\frac{C_1}{L_s(c-1) - L_s(c)} \leq C_2 \leq \frac{C_1}{L_s(c) - L_s(C+1)}$$

con el siguiente ejemplo se ilustra la aplicación del método.

Ejemplo 9:
En el ejemplo anterior se pueden estimar intervalos C_2 para c = 2 y c = 3. Mediante el uso de C_1 = \$6, se obtienen los siguientes resultados.

C = 2

$$\frac{6}{\infty} \leq C_2 \leq \frac{6}{5.25}$$

Que da

$$0 \leq C_2 \leq \$1.14$$

C = 3

$$\frac{6}{5.25} \leq C_2 \leq \frac{6}{0.375}$$

Que da

$$\$1.14 \leq C_2 \leq \$16$$

Quizá los intervalos en C2 dadas c = 2 y c = 3 puedan ayudar a hacer una elección mas selectiva entre la contratación de 3 o 3 empleados. Para c = 2, el intervalo en C2 indica que el valor de una maquina que espera una herramienta no puede exceder \$1.14 en términos de producción perdida. Este calculo referente al valor de la maquina parece muy bajo. En forma alternativa, para c = 3 un limite superior de \$16 sobre el valor de C2 parece mas razonable. Por lo tanto, es más lógico emplear 3 trabajadores en vez de 2.

4.4 Inferencia de resultados.

La teoría de la espera ofrece modelos para analizar la operación de establecimientos o instalaciones de servicio en los cuales ocurren en forma aleatoria la llegada y/o el servicio de clientes. Los ejemplos que se presentaron demuestran que el análisis de la espera produce resultados que quizá no sean evidentes en forma intuitiva.

Las distribuciones de Poisson y exponencial son importantes en el análisis de la espera. Estas se caracterizan por instalaciones de servicio en las que las llegadas y el servicio son completamente aleatorias. Aunque se pueden implantar otras distribuciones en modelos de espera, el análisis es mucho más complejo que en las líneas de espera de Poisson. Además, la complejidad del análisis no hace posible que se asegure mucha información cómo en los modelos de Poisson.

La duda que se tiene en relación con la teoría de la espera es que tan eficiente resulta en la práctica. Las limitaciones que impone el análisis matemático parecen dificultar la determinación de aplicaciones reales que se ajusten al modelo. No obstante, con el paso del tiempo se han reportado muchas aplicaciones óptimas de la espera.

Los ejemplos desarrollados proporcionan resultados que describen el comportamiento de un número de situaciones que se presentan en las líneas de espera. El uso de estos resultados en el contexto de un modelo de decisión con el fin de diseñar sistemas no es inherente a la teoría de las líneas de espera. Se desarrollaron ejemplos que compensa esta deficiencia entre los resultados de la teoría de líneas de espera o filas y su empleo dentro del marco de modelo de decisión.

Tener en cuenta que se presentan tres tipos de dificultades al aplicar la teoría de la espera en la práctica.

1. Dificultad de representar a través de modelos situaciones en términos matemáticos, en especial aquellas en las que el cliente y diagonal o el servidor son seres humanos.
2. Dificultad para obtener resultados analíticos utilizables para ciertos modelos matemáticos.
3. Dificultad para determinar parámetros de costo.

En los casos donde es difícil estimar los parámetros de costo, puede ser más efectivo reemplazar el modelo de costo con un modelo apropiado de nivel de aceptación. La simulación también se recomienda como un método alternativo para analizar situaciones complejas de líneas de espera para las que no se dispone de modelos matemáticos fáciles.

Software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados), se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos y uno de los cuales es precisamente el de líneas de espera (Waiting Lines) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos, así como la inferencia de resultados a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill

TEMA 5 MODELOS DE PRONOSTICOS E INVENTARIOS.

5.1 Modelos de pronósticos.
 5.1.1 Modelos de pronósticos para un nivel constante.
 5.1.2 Efectos estacionales en los modelos de pronósticos.
5.2 Suavizado exponencial en modelos de tendencia lineal.
5.3 Errores en los pronósticos.
5.4 Pronósticos causales con regresión lineal.
5.5 Definición y tipos de inventarios.
 5.5.1 Ventajas y desventajas de los inventarios.
 5.5.2 Costos de inventarios.
5.6 Modelos determinísticos.
5.7 Modelos probabilísticos.
5.8 Planeación de requerimiento de materiales.

Actividades de aprendizaje.

- Realizar investigación documental.
- Presentación al grupo de las partes componentes de modelos de pronósticos e
- inventarios
- Especificar el modelo apropiado de pronósticos e inventarios
- Resolver ejercicios prácticos relacionados.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

5.1 Modelos de pronósticos.

En la teoría de inventarios se analiza la búsqueda de la política óptima de inventarios. Estas políticas dependen, en parte, de algún pronóstico de la venta o del consumo de los artículos de interés. Los pronósticos son un componente esencial para que cualquier sistema de inventarios tenga éxito.

Sin embargo, pronosticar no debe relacionarse exclusivamente con problemas de control de inventarios. Otras áreas en donde los pronósticos juegan un papel importante incluyen la comercialización, la planeación financiera y la planeación de la producción. Sin duda, las decisiones gerenciales muy rara vez se toman sin contar con alguna forma de pronóstico. Entonces, un pronóstico es una herramienta básica en la toma de decisiones de la administración.
Para obtener pronósticos se pueden emplear técnicas cualitativas o cuantitativas. En el primer caso, un pronóstico es casi siempre el resultado de una expresión de los juicios u opiniones de uno o más expertos, y este enfoque se conoce como técnica subjetiva.

En la obtención de pronósticos se usan dos técnicas cuantitativas basadas en estadísticas convencionales: el análisis de series de tiempo y el análisis de regresión. Una serie de tiempo estadística hoy es una serie de valores numéricos que toma una variable aleatoria a lo largo de un período. El análisis de series de tiempo aprovecha técnicas que utilizan estos datos para pronosticar los valores que la variable de interés tomará en un periodo futuro. Al pronosticar, en general, se analizan las series de datos históricos para estimar uno o más valores futuros de la serie de tiempo. El pronóstico depende de un modelo de comportamiento de esa serie de tiempo.
En el análisis de regresión, la variable que se va a pronosticar (variable dependiente) se expresa como una función matemática de otras variables (independientes).

Estos métodos de pronósticos se pueden usar al mismo tiempo unos y otros. Sin duda, la técnica subjetiva se usa con frecuencia junto con el análisis de series de tiempo o con el análisis de regresión.

5.1.1 Modelos de pronósticos para un nivel constante.

Una vez que se elige la forma del modelo, se puede dar una representación matemática del proceso generador de la serie de tiempo. Suponer que el proceso generador de la serie de tiempo se identifica como un modelo de nivel constante superpuesto con fluctuaciones aleatorias El pronóstico del valor de la serie de tiempo es razonable esperar que sea una función de alguno o todos los valores observados de la serie de tiempo.
Ahora se presentan cuatro alternativas de procedimientos de pronóstico para el modelo de nivel constante introducido en el párrafo anterior.

Procedimiento de pronóstico del último valor
El procedimiento de pronóstico del último valor utiliza el valor de la serie de tiempo observado en el tiempo como el pronóstico para el tiempo t +1, es decir, F_{t+1}. Por lo tanto,

$$F_{t+1} = x_t$$

Este procedimiento tiene la desventaja de ser impreciso, su varianza es grande debido a que se basa en una muestra de tamaño uno. Vale la pena considerarlo hoy sólo sí la suposición sobre el nivel constante es insegura hp y el proceso cambia con rapidez de manera que lo que hoy ocurre antes del tiempo t hoy es irrelevante o lleva a conclusiones equivocadas o hola si la suposición de que el error aleatorio tiene varianza constante es poco razonable y la varianza condicional en el tiempo t es en realidad muy pequeña.

Procedimiento de pronóstico por promedio
En lugar de descartar todas las observaciones menos la más reciente, este procedimiento obtiene el promedio de todas las observaciones como el pronóstico para el siguiente periodo, esto es,

$$F_{t+1} = \sum_{i=1}^{t} \frac{x_i}{t}$$

Esta estimación es excelente si el proceso es muy estable, si las suposiciones sobre el modelo de soporte son correctas. Con frecuencia existe escepticismo sobre la persistencia del modelo de soporte cuando el período es demasiado largo. Las condiciones cambian inevitablemente a través del tiempo. Debido a la objeción natural a usar datos muy antiguos, este procedimiento en general se limita a procesos jóvenes.

Procedimiento de pronóstico por promedios móviles
en lugar de usar datos muy antiguos que pueden ya no ser relevantes, este procedimiento obtiene el promedio de los datos de los últimos n periodos como el pronóstico para el siguiente.

$$F_{t+1} = \sum_{i=t-n+1}^{t} \frac{x_i}{n}$$

Este pronóstico se actualiza con facilidad de un periodo a otro. Todo lo que se necesita cada vez es eliminar la primera observación y agregar la última.
El estimador de promedios móviles combina las ventajas de los estimadores de último valor y del promedio hoy en el sentido de que usa sólo datos recientes y al mismo tiempo usa varias observaciones. Una desventaja de este procedimiento es que coloca el mismo peso. Hoy intuitivamente se esperaría que un buen procedimiento diera mayor peso a la observación más reciente que a las observaciones más antiguas que pueden ser menos representativas de las condiciones actuales.

Procedimiento de pronóstico por suavizamiento exponencial
este procedimiento utiliza la fórmula

$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1-\alpha)F_n$$

en dónde α (0 < α < 1) se llama constante de suavizamiento. El pronóstico es sencillamente una suma ponderada de la última observación x_t y el pronóstico anterior. Dada esta relación recursiva entre F_{t+1} y F_t de manera alternativa se puede expresar como

$$F_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \cdots$$

en esta forma, se vuelve evidente que el suavizamiento exponencial da el mayor peso a x_t y menos peso a las observaciones anteriores. La primera forma revela que el cálculo del pronóstico es sencillo ya que no se tienen que conservar los datos anteriores del periodo t; todo lo que se necesita es x_t y el pronóstico anterior F_t.
Otra forma para expresar la técnica de suavizamiento exponencial está dada por

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(x_t - F_t)$$

Que proporciona una justificación heurística para este procedimiento. El pronóstico de la serie de tiempo es el tiempo t+1 es solo el pronóstico anterior en el tiempo t más el producto del error del pronóstico en el tiempo t y el factor de descuento α. Esta forma alternativa es a menudo más fácil de utilizar.

Una desventaja del suavizamiento exponencial es que se queda atrás cuando hay una tendencia continúa, si el modelo de nivel constante es incorrecto y la medida aumenta con regularidad, el pronóstico se quedará varios períodos atrás. Es sencillo hacerle un ajuste por tendencia y (un ajuste estacional).

Otra desventaja del procedimiento es que es difícil elegir una constante apropiada de suavizado α. El suavizamiento exponencial se puede ver como un filtro estadístico que tiene como entrada los datos originales de un proceso estocástico y cómo salida estimaciones de una medía que varía con el tiempo. Si selecciona una α pequeña, la respuesta al cambio es lenta y se obtienen estimadores suaves. Si α es grande la respuesta al cambio es rápida con una gran variabilidad en los resultados. Existe la necesidad de un balance que dependerá del grado de estabilidad del proceso. Se sugiere que α no debe exceder a 0.3 y que una elección razonable para α es aproximadamente 0.1. Este valor se puede aumentar temporalmente sí se espera un cambio en el procedimiento al iniciar el pronóstico. En un principio parece razonable elegir el pronóstico para el periodo 2 de acuerdo con

$$F_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)(estimacion\ inicial)$$

en donde se debe elegir alguna estimación inicial del nivel constante A. Sí se dispone de datos históricos, esta estimación puede ser el pronóstico de esos datos.

5.1.2 Efectos estacionales en los modelos de pronósticos.

En muchos problemas de pronósticos existen efectos estacionales que deben tomarse en cuenta en el modelo. Por ejemplo, en el caso del distribuidor de bicicletas sería razonable pensar que las ventas son muy bajas durante la temporada del mal tiempo de invierno que más adelante en el año, y que las ventas de otoño culminan con la venta de Navidad.
Suponer que el proceso generador de la serie de tiempo observada se puede representar por un nivel constante superpuesto con efectos estacionales y fluctuaciones aleatorias. Este modelo se puede representar por

$$X_t = AI_t^* + e_t$$

en donde X_t es la variable aleatoria que se observa en el tiempo t, A es una constante, I_t^* Es el índice o factor estacional para el periodo t y e_t es el error aleatorio qué ocurre en el tiempo t (que con frecuencia se supone que tiene valor esperado igual a cero y varianza constante).
Desafortunadamente ambos factores son desconocidos y los niveles suavizados en el tiempo t son útiles antes de hacer el pronóstico. Se puede utilizar el suavizamiento exponencial para este propósito.

$$S_t = \alpha \frac{x_t}{I_{t-p}} + (1-\alpha)S_{t-1},$$
$$I_t = \gamma \frac{x_t}{S_t} + (1-\gamma)I_{t-p}$$
$$F_{t+1} = S_t I_{t-p+1}$$

En donde *p* es el número de periodos en el ciclo estacional.

El pronóstico para dentro de m periodos (m = 1, 2, …) está dado por

$$F_{t+m} = S_t I_{t-p+m}$$

EJEMPLO
Considerar el ejemplo de las bicicletas. Después de examinar los datos históricos, se encontró que el modelo de tendencia lineal era inadecuado y se cambió por el modelo estacional. Las cifras de las ventas estacionales o trimestrales para el año pasado y este se dan en la tabla. El factor de tiempo t que se usará para cada trimestre también se da en la tabla. La meta ahora es usar el procedimiento

para desarrollar un pronóstico F4 para el otoño de este año.
Una manera razonable de hacer la estimación de los factores estacionales es dividir las ventas trimestrales del último año por el promedio trimestral de ventas del año. Estos valores se muestran en la última columna de la tabla. La estimación inicial del nivel constante A se elige como el promedio de los cuatro trimestres del año anterior $S_0 = 2950$. Se usará $\alpha = 0.1$ y $\gamma = 0.2$.

Trimestre	**t**	**Año pasado**	**t**	**Este año**	**t**	**Factor estacional inicial**
Invierno	-3	2786	1	2800	-3	0.944
Primavera	-2	2928	2	2925	-2	0.993
Verano	-1	3025	3	3040	-1	1.025
Otoño	0	3061			0	1.038
		11800				

$$F_1 = S_0 I_{-3} = 2950(0.944) = 2785$$

$$S_1 = \alpha \frac{x_1}{I_{-3}} + (1-\alpha)S_0$$
$$= 0.1\frac{2800}{0.944} + 0.9(2950) = 2952$$
$$I_1 = \gamma \frac{x_1}{S_1} + (1-\gamma)I_{-3}$$
$$= 0.2\frac{2800}{2952} + 0.8(0.944) = 0.945$$
$$F_2 = S_1 I_{-2} = 2952(0.993) = 2931$$

$$S_2 = \alpha \frac{x_2}{I_{-2}} + (1-\alpha)S_1$$
$$= 0.1\frac{2925}{0.993} + 0.9(2952) = 2951$$
$$I_2 = \gamma \frac{x_2}{S_2} + (1-\gamma)I_{-2}$$
$$= 0.2\frac{2925}{2951} + 0.8(0.993) = 0.993$$
$$F_3 = S_2 I_{-1} = 2951(1.025) = 3025$$

$$S_3 = \alpha \frac{x_3}{I_{-1}} + (1-\alpha)S_2$$
$$= 0.1\frac{3040}{1.025} + 0.9(2951) = 2952$$
$$I_3 = \gamma \frac{x_3}{S_3} + (1-\gamma)I_{-1}$$
$$= 0.2\frac{3040}{2952} + 0.8(1.025) = 1.026$$

Pronostico deseado F_4

$$F_4 = S_3 I_0 = 2952(1.038) = 3064$$

De manera similar, el pronostico actual para el próximo invierno es

$$F_5 = S_3 I_1 = 2952(0.945) = 2790$$

5.2 Suavizado exponencial en modelos de tendencia lineal.

Todos los procedimientos de pronósticos que se presentaron para el modelo de nivel constante se atrasan respecto al proceso si este tiene, una tendencia continua. El proceso generador de las series de tiempo observadas se puede representar por una tendencia lineal superpuesta con fluctuaciones aleatorias. Se denota la pendiente de la tendencia lineal por B, donde la pendiente se llama factor de tendencia. El modelo se representa por

$$X_t = A + Bt + e_t$$

En dónde X_t es la variable aleatoria que se observa en el tiempo t, A es una constante, B es el factor de tendencia y e_t es el error aleatorio qué ocurre en el tiempo t (que con frecuencia se supone que tiene valor esperado igual a cero y varianza constante).
Sí x_t es el valor observado de la serie de tiempo en el tiempo t, entonces un nivel suavizado S_t en el tiempo t, será una combinación lineal de x_t y el valor suavizado en el periodo t – 1 corregido sumando la tendencia (pendiente) para indicar el paso de una unidad de tiempo; es decir,

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B)$$

En donde la constante de suavizamiento α satisface 0 < α < 1. El pronóstico para el tiempo t + 1 se puede obtener de nuevo, esto es,

$$F_{t+1} = S_t + B$$

la tendencia (pendiente) B es desconocida, por lo que tendrá que estimarse y de nuevo se puede usar el suavizamiento exponencial para esto, es decir,

$$B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1}$$

en dónde B_t es el valor suavizado de la tendencia en el tiempo t β (0 < β < 1) es otra constante de suavizado (quizá diferente de α). Así, S_t se puede expresar como

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1})$$

y el pronóstico para los próximos m periodos, (m = 1, 2, …) está dado por

$$F_{t+m} = S_t + mB_t$$

Hola al igual se requiere un valor inicial para comenzar el proceso de suavizamiento para el modelo con tendencia lineal. Esta inicialización, con frecuencia se obtiene ajustando una línea recta a algunos datos históricos. La línea ajustada se puede usar para obtener un valor inicial del nivel suavizado de la serie de tiempo S0 y un valor inicial del nivel suavizado de la tendencia, B0. Hoy entonces,

$$S_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)(S_0 + B_0)$$
$$B_1 = \beta(S_1 - S_0) + (1-\beta)B_0$$

si se desea un pronóstico para el periodo 2, se puede obtener como sigue

$$F_2 = S_1 + B_1$$

EJEMPLO
Un distribuidor de bicicletas desea pronosticar las ventas de cierto modelo de bicicleta. Principia el otoño y quiere un pronóstico para las ventas de invierno con el fin de planear el reabastecimiento del invierno.
Hoy las ventas del invierno, primavera y verano anteriores fueron 2800, 2925 y 3040, respectivamente. Con base en estas 3 observaciones, se usa el procedimiento de suavizamiento exponencial con α = 0.1 y β = 0.1 para calcular el pronóstico. El periodo t corresponde a la temporada t de este año, de manera que x_1 = 2800, x_2 = 2925 y x_3= 3040 en donde F_5 es el pronóstico deseado.

De las cifras de ventas anteriores a este año, si ajustó una recta a los datos Para indicar la tendencia hacia arriba de las ventas de este modelo de bicicleta. El valor sobre la recta que corresponde al otoño pasado y la pendiente es S_0 = 2750 y B_0 = 100.

Usando las fórmulas anteriores se ve que el valor suavizado de las ventas para el otoño pasado es

S_1 = 0.1(2800) + 0.9(2750 + 100) = 2845
B_1 = 0.1(2845 – 2750) + 0.9(100) = 99.5

S_2 = 0.1(2925) + 0.9(2845 + 99.5) = 2943
B_2 = 0.1(2943 – 2845) + 0.9(99.5) = 99.4

S_3 = 0.1(3040) + 0.9(2943 + 99.4) = 3042
B_3 = 0.1(3042 – 2943) + 0.9(99.4) = 99.4

Por lo tanto, el pronóstico de ventas para el próximo invierno es

F5 = 3042 + 2(99.4) =3241

5.3 Errores en los pronósticos.

Se han presentado varias técnicas de pronóstico junto con los distintos modelos de series de tiempo en lo que se basan. ¿Cuál es la comparación entre estas técnicas, en particular cuando no se conoce el proceso generador, circunstancia común en la práctica? Es necesario contar con alguna medida de desempeño.

El error de pronóstico E_t se define como la diferencia entre el valor observado de la serie de tiempo en el periodo t y el pronóstico para el periodo t, es decir,

$$E_t = x_t - F_t$$

el error de pronóstico también se conoce cómo residual. Un procedimiento de pronósticos que produce valores absolutos “pequeños” de E_t es la deseada. Una medida de desempeño es la media de cuadrados de los errores (MCE) asociada con la técnica de pronóstico. Si se trata de *n* períodos, entonces

$$MCE = \frac{E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2}{n}$$

5.4 Pronósticos causales con regresión lineal.

Con frecuencia los problemas estadísticos manejan datos en los que existe una relación entre dos variables. Esta afirmación implica que el valor esperado de una variable con respecto a la otra variable, esto es,

$$E[Y|X = x] = A + Bx$$

Esta relación entre X y Y se conoce como modelo de grado de asociación.

El modelo de grado de asociación no es el único modelo de interés. En algunos casos, existe una relación funcional entre dos variables que pueden estar linealmente ligadas. En un contexto de pronósticos, una de las dos variables es el tiempo, mientras que la otra es la variable de interés. Un ejemplo de este tipo es el contexto del proceso generador de la serie de tiempo representada por una tendencia lineal superpuesta con fluctuaciones aleatorias, esto es,

$$X_t = A + Bt + e_t$$

En donde A es una constante, B es la pendiente y et es el error aleatorio que se supone que tiene media cero y varianza constante. Entonces

$$E(X_t) = A + Bt$$

En la notación estándar del análisis de regresión, X representa a la variable independiente y Y representa a la variable dependiente de interés. En consecuencia, la expresión que sigue dicha notación para este modelo especial de series de tiempo se convierte en

$$Y_t = A + Bt + e_t$$

Método de mínimos cuadrados.

Suponga que se traza una recta arbitraria entre los datos, dada por la expresión. $\tilde{y} = a + bx$. Se puede obtener una medida de qué también se ajusta esta recta a los datos calculando la suma de cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos reales a la recta ajustada. Los valores y_i representan a la variable dependiente y las x_i representan a la variable independiente. De note por $\widetilde{y}_i$ el punto sobre la recta ajustada que corresponde a x_i. La medida de ajuste propuesta está dada por

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widetilde{y_i})^2$$

el método usual para identificar la mejor recta ajustada es el método de mínimos cuadrados. Este método selecciona aquella recta, *a* + *bx* qué minimiza *Q*. *a* y *b* Se obtienen sencillamente igualando a cero las derivadas parciales de *Q* respecto a *a* y *b* y resolviendo las ecuaciones que se obtienen.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)/n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2/n}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

La recta ajustada o de regresión es útil para pronosticar. Para un valor de x, el valor correspondiente de y representa el pronóstico.

El tomador de decisiones puede estar interesado en alguna medida de incertidumbre que esté asociada con este pronóstico. Esta medida se obtiene, siempre y cuando se puedan hacer ciertas suposiciones.
La suposición de que las Y_i tiene una distribución normal no es crítica al determinar la incertidumbre en el pronóstico, pero la suposición de la varianza constante si es crucial. Se requiere una estimación de esta varianza.
Una estimación no sesgada de σ^2 está dada por

$$S_{y|x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \tilde{y}_i)^2}{n-2}$$

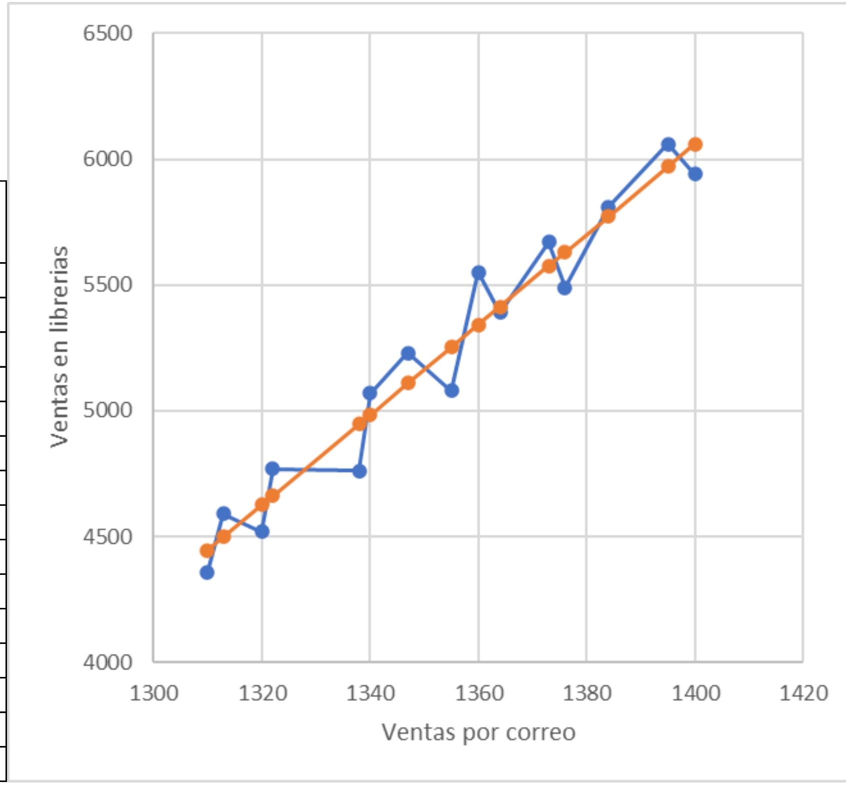
Podemos probar cuan bien se ajusta $\tilde{y}$ a los datos primarios calculando el coeficiente de correlación r usando la formula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

Donde $-1 \leq r \leq 1$. Un ajuste perfecto ocurre cuando $r = \pm 1$. En general, entre más cerca está el valor $|r|$ a 1, mejor es el ajuste lineal.

EJEMPLO
Una editora de libros de texto está preocupada por la corrida inicial en prensa de sus libros. Ella vende libros tanto en librerías como por correo. Este último método se vale de una campaña publicitaria con los medios de comunicación y por correo directo. La campaña publicitaria se lleva a cabo antes de la publicación del libro. El gerente de ventas ha observado que existe una relación lineal interesante entre el número de pedidos por correo y el número de libros vendidos en la librería durante el primer año. Sugiere que esta relación se puede aprovechar para determinar el tamaño de la impresión inicial para libros subsecuentes.
Así, si las ventas de un libro a través de los pedidos por correo se denotan por x, y las ventas hechas por conducto de las librerías se denota por y, Suponer que se tienen datos de las ventas en librerías y las ventas por correo de 15 libros distintos.

Ventas por correo (x_i)	Ventas en librerias (y_i)
1310	4360
1313	4590
1320	4520
1322	4770
1338	4760
1340	5070
1347	5230
1355	5080
1360	5550
1364	5390
1373	5670
1376	5490
1384	5810
1395	6060
1400	5940



Datos calculados:

n =	15						
$\bar{x}$ =	1353.133	**a =**	-19041.865	**$S^2_{y\|x}$ =**	17034.131	**$S_{y\|x}$ =**	130.5149
$\bar{y}$ =	5219.333	**b =**	17.930	**r =**	0.9724	**r^2 =**	0.9456

Entonces, la estimación de mínimos cuadrados para las ventas en las librerías $\tilde{y}$ cuando la cantidad de las ventas por correo es x está dada por

$$\tilde{y} = -19041.865 + 17.930x$$

Y esta es la recta que se dibuja en la gráfica. Se hace referencia a ella como la recta de regresión. Es útil para pronosticar. Para un valor de x, el valor correspondiente de y representa el pronóstico.

5.5 Definición y tipos de inventarios.

Los inventarios se relacionan con el mantenimiento de cantidades suficientes de bienes (refacciones, materias primas, productos en proceso, productos terminados) que garanticen una operación fluida en un sistema de producción o en una actividad comercial.

En general, la complejidad de los modelos de inventario depende de si la demanda es determinística o probabilística. Dentro de ambas categorías, la demanda puede variar, o no, con el tiempo. Por ejemplo, el consumo de gas natural que se utiliza en la calefacción doméstica es estacional. Aun cuando dicho patrón se repite anualmente, el consumo en un mismo mes puede variar de un año a otro, dependiendo, por ejemplo, de la severidad del clima.

En situaciones prácticas, el patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir uno de cuatro tipos:

- Determinístico y constante (estático) con el tiempo.
- Determinístico y variable (dinámico) con el tiempo.
- Probabilístico y estacionario a lo largo del tiempo.
- Probabilístico y no estacionario a lo largo del tiempo.

Esta clasificación supone la disponibilidad de datos confiables para pronosticar la futura demanda.

En función del desarrollo de modelos de inventario, la primera categoría es la más sencilla analíticamente, y la cuarta es la más compleja. Por otra parte, la primera categoría es la menos probable que ocurra en la práctica, y la cuarta es la más prevalente. En la práctica, el objetivo es balancear la sencillez y la precisión del modelo.

¿Cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable? Una "estimación aproximada" inicial se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo durante un periodo específico (por ejemplo, mensualmente). Entonces puede usarse el coeficiente de variación $V = \frac{Desviacion\ estandar}{Media} \times 100$ para valorar la naturaleza de la demanda utilizando el siguiente lineamiento:

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es "de manera aproximada" constante y V es razonablemente pequeño (< 20%), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante
2. Si la demanda mensual promedio varía de manera apreciable entre los diferentes meses, pero V permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.
3. Si en el caso 1 V es alto (> 20%) pero aproximadamente constante, entonces la demanda es probabilística y estacionaria.
4. El caso restante es la demanda probabilística no estacionaria, la cual ocurre cuando los promedios y los coeficientes de variación varían apreciablemente mes con mes.

5.5.1 Ventajas y desventajas de los inventarios.

Los inventarios los ha considerado tradicionalmente el comercio y la industria, como un mal necesario: Muy poca reserva puede ocasionar costosas interrupciones en la operación del sistema y demasiada reserva puede arruinar la ventaja competitiva y el margen de ganancia del negocio. Desde ese punto de vista, la única manera efectiva de manejar los inventarios es minimizar su impacto adverso, encontrando un justo medio entre los dos casos extremos.

El resultado es buscar un nivel de inventario que balancee las dos situaciones extremas minimizando una función de costo apropiada. El problema se reduce a controlar el nivel del inventario diseñando una política de inventario que responda dos preguntas:

1. ¿Cuánto pedir?
2. ¿Cuándo pedir?

5.5.2 Costos de inventarios.

La base del modelo de inventario es la siguiente función de costo genérica:

$$\begin{pmatrix} Costo \\ total\ del \\ inventario \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Costo\ de \\ compra \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ de \\ preparacion \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ de \\ retencion \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ por \\ escasez \end{pmatrix}$$

1. El **costo de compra** es el precio por unidad de un artículo de inventario. En ocasiones, el artículo se ofrece con un descuento si el tamaño del pedido excede una cantidad determinada, lo cual es un factor al momento de tomar la decisión de cuánto pedir.
2. El **costo de preparación** representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido (no importa su tamaño).
3. El **costo de retención (almacenamiento)** representa el costo de mantener las existencias de algo. Incluye el interés sobre el capital y el costo del almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El **costo por escasez (faltante)** es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de pérdida de lealtad del cliente.

Los costos descritos son conflictivos en el sentido de que el incremento de uno puede provocar la reducción de otro (por ejemplo, pedir con más frecuencia eleva el costo de preparación, pero reduce el costo de retención del inventario). El propósito de la minimización de la función de costo del inventario total es balancear estos costos conflictivos.
Un sistema de inventario puede requerir revisiones periódicas (por ejemplo, pedir al inicio de cada semana o cada mes). Alternativamente, el sistema puede estar basado en revisiones continuas, colocando un nuevo pedido cuando el nivel del inventario se reduce a un punto de volver a pedir específico. Un ejemplo de los dos tipos ocurre en tiendas al menudeo. La revisión es periódica si el artículo se repone cada semana o cada mes. Es continua si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario se reduce por debajo de un determinado nivel.

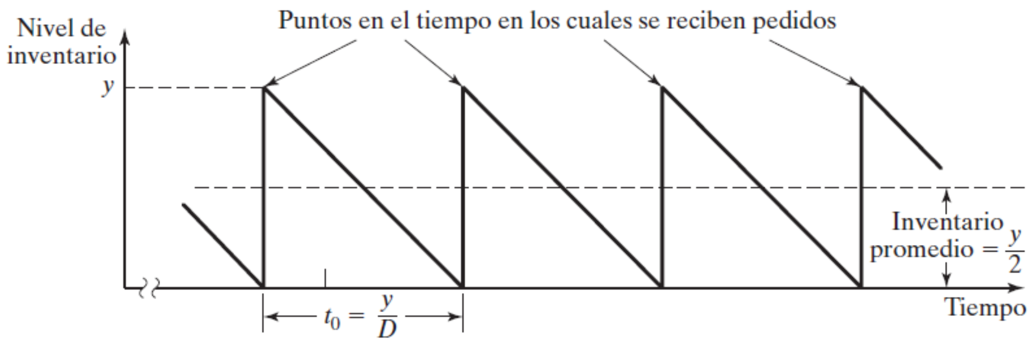
5.6 Modelos determinísticos.

Se presenta tres variaciones del modelo de cantidad de pedido económico (EOQ, por sus siglas en inglés) con demanda estática (constante). Estos modelos son analíticamente simples.

Modelo EOQ clásico.

El más simple de los modelos de inventario implica una demanda de tasa constante con reposición de pedidos instantánea y sin escasez. Defina
y = Cantidad de pedido (número de unidades)
D = Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)
t_0 = Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)

Patrón de inventario en el modelo EOQ clásico



El nivel de inventario sigue el patrón ilustrado en la figura. Cuando el inventario llega al nivel cero, se recibe al instante un pedido de y unidades de tamaño. Las existencias se agotan uniformemente a una tasa de demanda constante, D. El ciclo de pedido de este patrón es

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

El modelo de costo requiere dos parámetros de costo.

K = Costo de preparación asociado con la colocación de un pedido (dólares por pedido)

h = Costo de retención (dólares por unidad de inventario por unidad de tiempo)

Dado que el nivel de inventario promedio es $\frac{y}{2}$, el costo total *por unidad de tiempo* (TCU, por sus siglas en inglés) es

$$\begin{aligned}\text{TCU}(y) &= \text{Costo de preparación por unidad de tiempo} + \text{Costo de retención por unidad de tiempo} \\ &= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de retención por ciclo } t_0}{t_0} \\ &= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0} \\ &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right)\end{aligned}$$

El valor óptimo de la cantidad de pedido y se determina minimizando el TCU(y). Suponiendo que y es continua, una condición necesaria para la optimalidad es

$$\frac{d\,\text{TCU}(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

La condición también es suficiente porque TCU(y) es convexa.

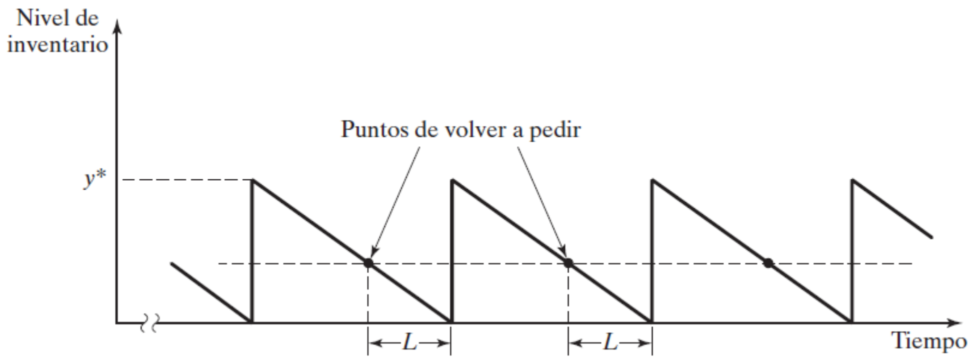
La solución de la ecuación da por resultado el EOQ y^* como

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima para el modelo propuesto es

$$\text{Pedido } y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \text{ unidades de cada } t_0^* = \frac{y^*}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

En realidad, un nuevo pedido no tiene que recibirse en el instante que se pide. En su lugar, puede ocurrir un tiempo de espera (tiempo de anticipación) positivo L, entre la colocación y el recibo de un pedido como se muestra en la figura. En este caso el punto de volver a pedir (punto de reorden) ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a *LD* unidades.



La figura asume que el tiempo de espera L es menor que la duración del ciclo t_0*, lo cual por lo general puede no ser el caso. Si así sucediera, definimos el tiempo de espera efectivo como

$$L_e = L - nt_0^*$$

El parámetro n es el valor entero más grande no mayor que L/ t_0*. La fórmula reconoce que después de n ciclos el intervalo real entre la colocación y la recepción de dos pedidos sucesivos es Le. Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el inventario llega a L_eD unidades, y la política de inventario puede volverse a formular como Pedir la cantidad y* siempre que el nivel del inventario se reduzca a L_eD unidades.

EJEMPLO

Las luces de neón en el campus de la Universidad de Arkansas se reemplazan a razón de 100 unidades por día. La planta física pide las luces de neón de forma periódica. Iniciar un pedido de compra cuesta $100. Se estima que el costo de una luz de neón almacenada es de aproximadamente $.02 por día. El tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política de inventario óptima para pedir las luces de neón.

Con los datos del problema, tenemos

D = 100 unidades por día
K = $100 por pedido
h = $.02 por unidad por día
L = 12 días

Por lo tanto,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La duración del ciclo asociado es

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10\,\text{días}$$

Ya que el tiempo de espera L (= 12 días) excede la duración del ciclo t_0^* (=10 días), debemos calcular L_e. El número de ciclos enteros incluidos en L es

$$n = \left(\text{entero más grande } \leq \frac{L}{t_0^*}\right) = \left(\text{entero más grande } \leq \frac{12}{10}\right) = 1$$

Por lo tanto,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a

$$L_eD = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario es

Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 200 unidades.

El costo de inventario diario asociado con la política propuesta es

$$\begin{aligned}\text{TCU}(y) &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$.02\left(\frac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día}\end{aligned}$$

Modelo EOQ, reposición uniforme (en lugar de instantánea) y escasez.

Considere la situación de inventarios en la cual las existencias se reponen de manera uniforme (en lugar de instantáneamente) a una tasa *a*. El consumo ocurre a la tasa constante *D*. Ya que el consumo también ocurre durante el periodo de reposición, es necesario que ***a > D***. El costo de preparación es K por pedido, y el costo de retención es h por unidad, por unidad de tiempo. Si y es el tamaño del pedido y no se permite que haya escasez, se demuestra que

(a) El nivel máximo del inventario es $y\left(1 - \frac{D}{a}\right)$

(b) El costo total por unidad de tiempo dado y es

$$CTU(y) = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{D}{a}\right)y$$

(c) La cantidad de pedido económica es

$$y = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1 - \frac{D}{a}\right)}}$$

En el modelo EOQ clásico, suponer que se permite la escasez y que el costo de ella por unidad de tiempo es *p*. Si *w* es la cantidad de escasez y la cantidad ordenada *y*

$$CTU(y, w) = \frac{KD}{y} + \frac{h(y - w)^2 + pw^2}{2y}$$

$$y = \sqrt{\frac{2KD(p+h)}{ph}}$$

$$w = \sqrt{\frac{2KDh}{p(p+h)}}$$

Ahora, en un solo modelo en el que están presentes tanto la escasez como el surtido uniforme. Muestra que se presentan los resultados siguientes:

$$CTU(y,w) = \frac{KD}{y} + \frac{h\left\{y\left(1-\frac{D}{a}\right)-w\right\}^2 + pw^2}{2\left(1-\frac{D}{a}\right)y}$$

$$y = \sqrt{\frac{2KD(p+h)}{ph\left(1-\frac{D}{a}\right)}}$$

$$w = \sqrt{\frac{2KDh\left(1-\frac{D}{a}\right)}{p(p+h)}}$$

EOQ con reducciones de precios.

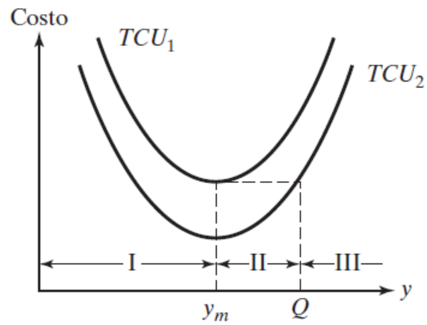
Este modelo es el mismo EOQ básico, excepto que el artículo en inventario puede adquirirse con un descuento si el tamaño del pedido, y, excede un límite dado, q. Matemáticamente, el precio de compra unitario, c, es

$$c = \begin{Bmatrix} c_1, \text{ si } y \le q \\ c_2, \text{ si } y > q \end{Bmatrix}, c_1 > c_2$$

Por consiguiente,

$$\text{Costo de compra por unidad de tiempo} = \begin{cases} \frac{c_1 y}{t_0} = \frac{c_1 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_1, \; y \le q \\ \frac{c_2 y}{t_0} = \frac{c_2 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_2, \; y > q \end{cases}$$

$$\text{TCU}(y) = \begin{cases} TCU_1(y) = Dc_1 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y,\ y \le q \\ TCU_2(y) = Dc_2 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y,\ y > q \end{cases}$$



$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

La determinación de la cantidad de pedido óptima y^* depende de dónde queda el punto de reducción de precios, q, con respecto a las zonas I, II y III, delineadas en la figura 13.4 por los intervalos $(0, y_m)$, (y_m, Q) y (Q, ∞), respectivamente. El valor de $Q(> y_m)$ se determina a partir de la ecuación

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$$

o

$$c_2D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = TCU_1(y_m)$$

la cual se simplifica a

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

$$y^* = \begin{cases} y_m, \text{ si } q \text{ se encuentra en las zonas I o III} \\ q, \text{ si } q \text{ se encuentra na la zona II} \end{cases}$$

Los pasos para determinar y^* son

Paso 1. Determine $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Si q está en la zona I, entonces $y^* = y_m$. De lo contrario, vaya al paso 2.

Paso 2. Determine $Q(> y_m)$ a partir de la ecuación Q

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

Defina las zonas II y III. Si q está en la zona II, $y^* = q$. De lo contrario, q está en la zona III, y $y^* = y_m$.

EJEMPLO

LubeCar se especializa en cambios de aceite rápidos. El taller compra aceite automotriz a granel a \$3 por galón descontado a \$2.50 si la cantidad de pedido es de más de 1000 galones. El taller atiende aproximadamente 150 automóviles por día, y cada cambio de aceite requiere 1.25 galones. LubeCar guarda el aceite a granel a un costo de \$.02 por galón por día. Incluso, el costo de colocar un pedido es de \$20. El tiempo de espera es de 2 días para la entrega. Determine la política de inventario óptima.

El consumo de aceite por día es

$$D = 150 \text{ autos por día} \times 1.25 \text{ galones por auto} = 187.5 \text{ galones por día}$$

También tenemos

$h = \$.02$ por galón por día
$K = \$20$ por pedido
$L = 2$ días
$c_1 = \$3$ por galón
$c_2 = \$2.50$ por galón
$q = 1000$ galones

Paso 1. Calcule

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02}} = 612.37 \text{ galones}$$

Como $q = 1000$ es mayor que $y_m = 612.37$, nos vamos al paso 2.

Paso 2. Determine Q.

$$\begin{aligned} TCU_1(y_m) &= c_1 D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2} \\ &= 3 \times 187.5 + \frac{20 \times 187.5}{612.37} + \frac{.02 \times 612.37}{2} \\ &= 574.75 \end{aligned}$$

Por consiguiente la ecuación Q se calcula como

$$Q^2 + \left(\frac{2 \times (2.5 \times 187.5 - 574.75)}{.02}\right)Q + \frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02} = 0$$

o

$$Q^2 - 10{,}599.74Q + 375{,}000 = 0$$

La solución $Q = 10{,}564.25$ $(> y_m)$ define las zonas como

$$\text{Zona I} = (0, 612.37)$$
$$\text{Zona II} = (612.37, 10{,}564.25)$$
$$\text{Zona III} = (10{,}564.25, \infty)$$

Ahora, $q(= 1000)$ queda en la zona II, la cual produce la cantidad de pedido óptima $y^* = q = 1000$ galones.

Dado un tiempo de espera de 2 días, el punto de volver a pedir es $2D = 2 \times 187.5 = 375$ galones. Por lo tanto, la política de inventario óptima es "*Pedir 1000 galones cuando el nivel de inventario se reduzca a 375 galones*".

Cantidad de pedido económica (EOQ) de varios artículos con limitación de almacenamiento.

Este modelo se ocupa de varios artículos cuyas fluctuaciones de inventario individuales siguen el patrón mostrado en EOQ clásico (no se permiten faltantes). La diferencia es que los artículos compiten por un espacio de almacenamiento limitado.

Defina para el artículo $i, i = 1, 2, \ldots, n$,

D_i = Tasa de demanda
K_i = Costo de preparación
h_i = Costo de retención unitario por unidad de tiempo
y_i = Cantidad de pedido
a_i = Requerimiento de área de almacenamiento por unidad de inventario
A = Área de almacenamiento máxima disponible para todos los n artículos

Conforme a la suposición de que no se permiten faltantes, el modelo matemático que representa la situación del inventario se da como

$$\text{Minimizar TCU}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leq A$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

Para resolver el problema, primero abordamos la situación no restringida:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Si la solución satisface la restricción, entonces el proceso termina. De lo contrario, la restricción es obligatoria y debe ser activada.

Esto se logra formulando la función de Lagrange como

$$\begin{aligned} L(\lambda, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= \text{CTU}(y_1, \ldots, y_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right) \end{aligned}$$

donde λ (< 0) es el multiplicador de Lagrange.

Los valores óptimos de y_i y λ pueden encontrarse igualando a cero las primeras derivadas parciales respectivas. Esto da

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{K_i D_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0$$

La segunda ecuación implica que y_i^* debe satisfacer la restricción de almacenamiento en el sentido de igualdad.

De la primera ecuación

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}$$

Observe que y_i^* depende de λ^*, el valor óptimo de λ. También, para $\lambda^* = 0$, y_i^* da la solución del caso irrestricto.

El valor λ^* puede encontrarse por ensayo y error sistemáticos. Ya que por definición $\lambda < 0$ en el caso anterior de minimización, entonces ensayando los valores negativos sucesivos de λ, el valor de λ^* deberá resultar en valores simultáneos de y_i^* que satisfagan la restricción dada en el sentido de igualdad. Por consiguiente, la determinación de λ^* automáticamente proporciona y_i^*.

EJEMPLO

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i(unidades por día)	h_i(\$)	a_i(pies^2)
1	10	2	.30	1
2	5	4	.10	1
3	15	4	.20	1
Área de almacenamiento total disponible = 25 pies^2				

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}$$

se elabora la tabla siguiente:

λ	y_1	y_2	y_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i y_i - A$
0	11.5	20.0	24.5	+31
−0.05	10.0	14.1	17.3	+16.4
−0.10	9.0	11.5	14.9	+10.4
−0.15	8.2	10.0	13.4	+ 6.6
−0.20	7.6	8.9	12.2	+ 3.7
−0.25	7.1	8.2	11.3	+ 1.6
−0.30	6.7	7.6	10.6	− 0.1

Para $A = 25$ pie^2, la restricción de almacenamiento se satisface en el sentido de igualdad para un valor de λ entre -0.25 y -0.3. Este valor es igual a λ^* y puede ser estimado por interpolación lineal. Los valores correspondientes de y_i deberán, por consiguiente, proporcionar y_i^* directamente. Ya que de la tabla λ^* parece muy cercano a -0.3, los y_i^* óptimos están más o menos dados por

$$y_1^* = 6.7, \quad y_2^* = 7.6, \quad \text{y} \quad y_3^* = 10.6$$

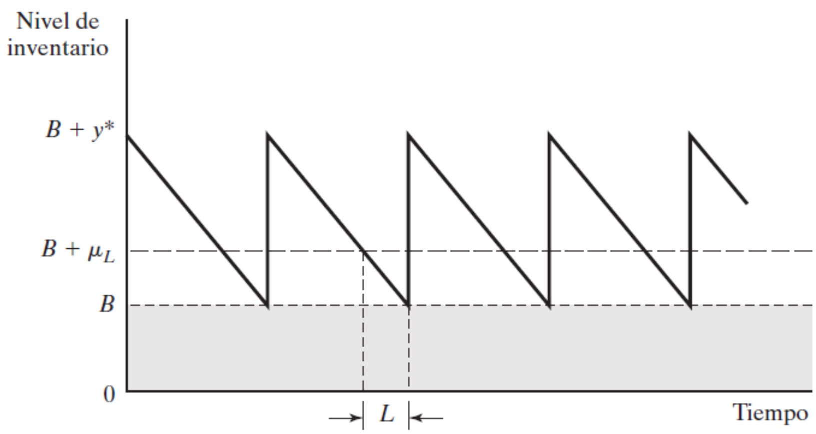
Si $A \geq 56$ (= 11.5 + 20.0 + 24.5), los valores irrestrictos de y_i correspondientes a $\lambda = 0$ proporcionan y_i^*. En este caso la restricción es inactiva.

5.7 Modelos probabilísticos.

Se presentan dos modelos: (1) una versión "probabilizada" del modelo EOQ determinístico que utiliza existencias de reserva para satisfacer las demandas probabilísticas, y (2) un modelo EOQ probabilístico más exacto que incluye la demanda aleatoria directamente en la formulación.

Modelo EOQ "probabilizado"

Para representar de forma aproximada la naturaleza probabilística de la demanda. El periodo crítico durante el ciclo de inventario ocurre entre la colocación y la recepción de pedidos. Éste es el lapso en que se podrían presentar los faltantes (agotamiento de las existencias). La idea entonces es mantener existencias de seguridad constantes que eviten la probabilidad de faltantes. Por intuición, una probabilidad de pocos faltantes implica mayores existencias de reserva, y viceversa.



La figura ilustra la relación entre las existencias de reserva, B, y los parámetros del modelo EOQ determinístico que incluyen el tiempo de espera, L; la demanda promedio durante el tiempo de espera, μL, y la cantidad económica de pedido (EOQ), y*. Observe que L es el tiempo de espera efectivo ya definido

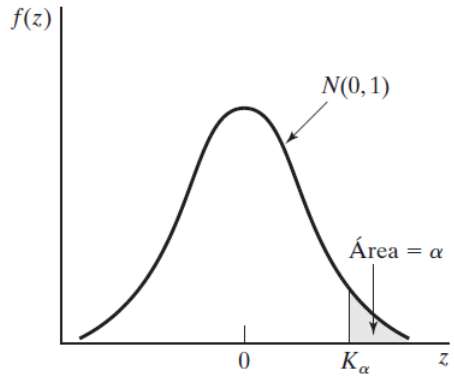
La suposición principal del modelo es que la demanda por unidad de tiempo es normal con media D y desviación estándar σ; es decir, N (D, σ). Con arreglo a esta suposición, la demanda durante el tiempo de espera L también debe ser normal con media μL = DL y desviación estándar $\sigma_L = \sqrt{(L\sigma^2)}$. La fórmula para σ_L supone que L es (representado de forma aproximada si es necesario por) un valor entero.
El tamaño de las existencias de reserva B se determina de modo que la probabilidad de faltantes durante L sea a lo sumo α. Si x_L es la demanda durante el tiempo de espera L, entonces

$$P\{x_L \geq B + \mu L\} \leq \propto$$

Utilizando N (0, 1), $z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$, Se obtiene

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \propto$$

Definiendo el parámetro K_α para la distribución normal estándar de modo que P {z ≥ K_α} ≤ α se desprende que



$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$

La cantidad $\sigma_L K_\alpha$ proporciona el valor mínimo de B. (El valor de K_α puede determinarse desde la tabla normal estándar.

EJEMPLO

En el ejemplo , donde se determina la política de inventario de las luces de neón, la cantidad económica de pedido es de 1000 unidades. Suponga que la demanda *diaria* es $N(100, 10)$; es decir, $D = 100$ unidades y que la desviación estándar es $\sigma = 10$ unidades. Determine el tamaño de las existencias de reserva, B, utilizando $\alpha = .05$.

Según el ejemplo , el tiempo de espera *efectivo* es $L = 2$ días. Por lo tanto,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ unidades}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ unidades}$$

Si $K_{.05} = 1.645$, las existencias de reserva se calculan como

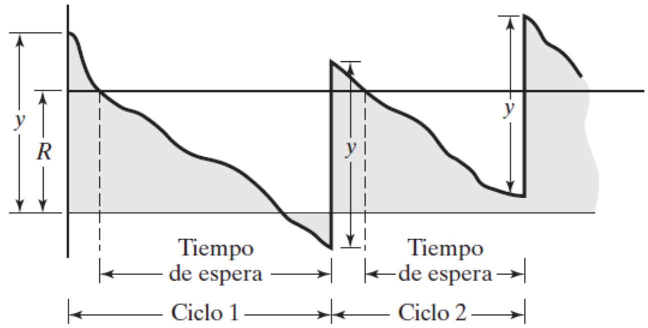
$$B \geq 14.14 \times 1.645 \approx 23 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario óptimo (de reserva) requiere pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 223 ($= B + \mu_L = 23 + 2 \times 100$) unidades.

Modelo EOQ probabilístico.

La base para el desarrollo del modelo EOQ “probabilizado” es “plausible”, pero no hay razón alguna para creer que el modelo produce una política de inventario óptima. El hecho de que la información pertinente en relación con la naturaleza probabilística de la demanda se ignore en un principio, sólo para ser “revivida” de una manera totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, basta para refutar la optimalidad. Para remediar la situación, se presenta un modelo más preciso en el cual la naturaleza probabilística de la demanda se incluye directamente en la información del modelo. Por supuesto, la precisión más alta se obtiene a expensas de cálculos más complejos.

La figura ilustra un cambio típico del nivel de inventario con el tiempo. Pueden o no ocurrir faltantes durante los tiempos de espera (posiblemente aleatorios), como se ilustra por los ciclos 1 y 2, respectivamente. La política exige pedir la cantidad *y*, siempre que la cantidad del inventario disponible se reduzca a un nivel *R*. Como en el caso determinístico, el nivel de volver a pedir *R* es una función del tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido. Los valores óptimos de y y *R* se determinan minimizando la suma esperada de los costos de retención y los costos de faltantes por unidad de tiempo.



El modelo está basado en tres suposiciones:

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de espera se pone en rezago.
2. No se permite más de un pedido pendiente.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de espera permanece estacionaria con el tiempo.

Para desarrollar la función de costo total por unidad de tiempo, sean

f(x) = fdp de la demanda, x, durante el tiempo de espera
D = Demanda esperada por unidad de tiempo
h = Costo de retención por unidad de inventario por unidad de tiempo
p = Costo por faltantes por unidad de inventario
K = Costo de preparación por pedido

Ahora se determinan los elementos de la función de costos.

1. *Costo de preparación.* La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{y}$, de modo que el costo de preparación por unidad de tiempo es aproximadamente $\frac{KD}{y}$.
2. *Costo de retención esperado.* Si I es el nivel de inventario promedio, el costo de retención esperado por unidad de tiempo es hI. El nivel de inventario promedio se calcula como

$$I = \frac{(y + E\{R - x\}) + E\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - E\{x\}$$

La fórmula promedia los inventarios inicial y final esperados en un ciclo, el cual es $y + E\{R-x\}$ y $E\{R-x\}$, respectivamente. Como una aproximación, la expresión ignora el caso en que $R - E\{x\}$ pueda ser negativo.

3. *Costo por faltantes esperado.* Los faltantes ocurren cuando $x > R$. Su valor esperado por ciclo se calcula como

$$S = \int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Debido a que se supone que p es proporcional sólo a la cantidad faltante, el costo esperando por ciclo es pS, y, basándose en $\frac{D}{y}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo por faltante por unidad de tiempo es $\frac{pS}{y/D} = \frac{pDS}{y}$.

La función de costo total resultante por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E\{x\}\right) + \frac{pD}{y}\int_R^{\infty}(x - R)f(x)\,dx$$

Los valores óptimo, y^* y R^*, se determinan a partir de

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^{\infty} f(x)dx = 0$$

Estas dos ecuaciones dan por resultado

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \tag{1}$$

$$\int_R^{\infty} f(x)\,dx = \frac{hy^*}{pD} \tag{2}$$

Los valores óptimos de y^* y R^* no pueden determinarse en formas cerradas. Se aplica un algoritmo iterativo, desarrollado por Hadley y Whitin (1963, págs. 169-174) a las ecuaciones (1) y (2) para determinar la solución. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones, siempre que haya una solución factible.

Para $R = 0$, las ecuaciones (1) y (2) producen

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{h}}$$

$$\tilde{y} = \frac{PD}{h}$$

Los valores óptimos únicos de y y R existen cuando $\tilde{y} \geq \hat{y}$. El valor mínimo de y^* es $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$, el cual ocurre cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son

Paso 0. Use la solución inicial $y_1 = y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, y sea $R_0 = 0$. Establezca $i = 1$, y continúe con el paso i.

Paso i. Use y_i para determinar R_i a partir de la ecuación (2). Si $R_i \approx R_{i-1}$, deténgase; la solución óptima es $y^* = y_i$ y $R^* = R_i$. De lo contrario, use R_i en la ecuación (1) para calcular y_i. Establezca $i = i + 1$, y repita el paso i.

EJEMPLO

Electro utiliza resina en su proceso de fabricación a razón de 1000 galones por mes. Colocar un pedido le cuesta \$100 a Electro. El costo de retención por galón por mes es de \$2, y el costo por faltante por galón es de \$10. Los datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de espera es uniforme en el rango (0, 100) galones. Determine la política de colocación de pedidos óptima para Electro.

Utilizando los símbolos del modelo, tenemos

$D = 1000$ galones por mes
$K = \$100$ por pedido
$h = \$2$ por galón por mes
$p = \$10$ por galón
$f(x) = \frac{1}{100}, 0 \leq x \leq 100$
$E\{x\} = 50$ galones

Primero tenemos que verificar si el problema tiene una solución única. Con las ecuaciones de $\hat{y}$ y $\tilde{y}$ obtenemos

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10 \times 50)}{2}} = 774.6 \text{ galones}$$

$$\tilde{y} = \frac{10 \times 1000}{2} = 5000 \text{ galones}$$

Debido a que $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existe una solución única para y^* y R^*.

La expresión para S se calcula como

$$S = \int_R^{100} (x - R)\frac{1}{100}\,dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

Utilizando S en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$y_i = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000S} \text{ galones} \qquad (3)$$

$$\int_R^{100} \frac{1}{100}\,dx = \frac{2y_i}{10 \times 1000} \qquad (4)$$

La ecuación (4) produce

$$R_i = 100 - \frac{y_i}{50} \qquad (5)$$

Ahora utilizamos las ecuaciones (3) y (5) para determinar la solución óptima.

Iteración 1

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 100}{2}} = 316.23 \text{ galones}$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ galones}$$

Iteración 2

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = .19971 \text{ galones}$$

$$y_2 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times .19971} = 319.37 \text{ galones}$$

Por consiguiente,

$$R_2 = 100 - \frac{319.39}{50} - = 93.612$$

Iteración 3

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = .20399 \text{ galones}$$

$$y_3 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times .20399} = 319.44 \text{ galones}$$

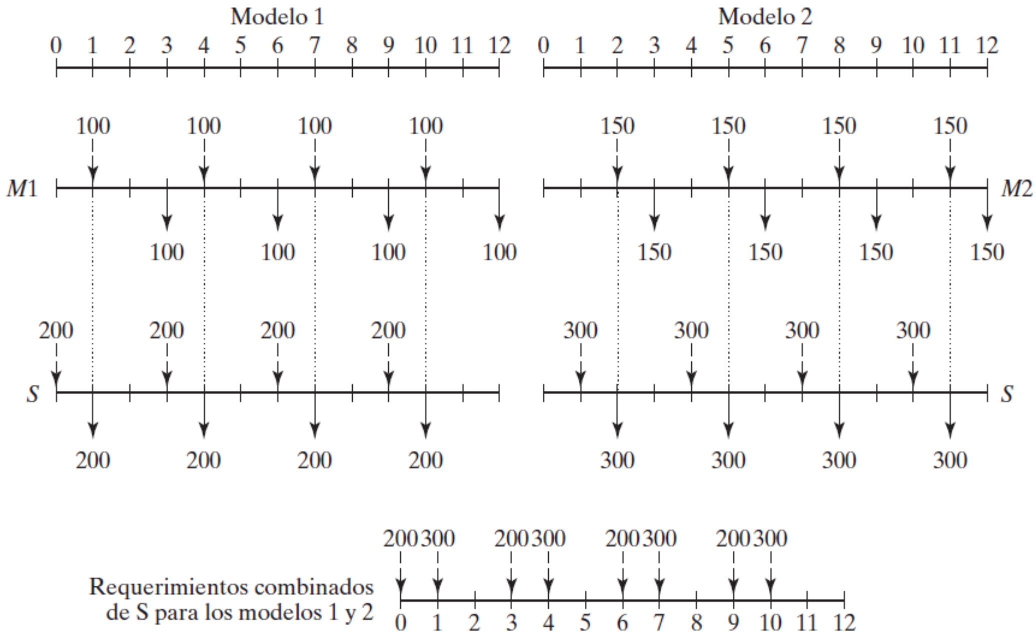
Por lo tanto,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \text{ galones}$$

Debido a que $y_3 \approx y_3$ y $R_3 \approx R_2$, la solución óptima es $R^* \approx 93.611$ galones, $y^* \approx 319.44$ galones. Se puede utilizar el archivo *excelContRev.xls* para determinar la solución a cualquier grado de precisión especificando la tolerancia $|R_{i-1} - R_i|$. La política de inventario óptima exige pedir aproximadamente 320 galones siempre que el nivel del inventario se reduzca a 94 galones.

5.8 Planeación de requerimiento de materiales.

Una situación en la cual ocurre la demanda determinística dinámica es la planeación de requerimiento de materiales (MRP, por sus siglas en inglés). La idea de la MRP se describe con un ejemplo. Suponga que las demandas trimestrales durante el año siguiente para dos modelos finales, M1 y M2, de un producto dado son 100 y 150 unidades, respectivamente. Al final de cada trimestre se entregan los lotes trimestrales. El tiempo de espera de producción es de dos meses para Ml y de un mes para M2. Cada unidad de M1 y M2 utiliza 2 unidades de un subensamble S. El tiempo de espera para la producción de S es de un mes.



La figura muestra los programas de producción para Ml y M2. Los programas se inician con la demanda trimestral de los dos modelos (mostrada por flechas sólidas) que ocurre al final de los meses 3, 6, 9 y 12. Dados los tiempos de espera para M1y M2, las flechas de rayas muestran los inicios planeados de cada lote de producción.

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamble S debe coincidir con la ocurrencia de las flechas de rayas M1 y M2. Esta información se muestra por medio de las flechas sólidas en la gráfica S, donde la demanda S resultante es de 2 unidades por unidad de M1 y M2. Utilizando un tiempo de espera de un mes, las flechas de rayas en la gráfica S dan los programas de producción de S. De acuerdo con estos dos programas, la demanda combinada de S correspondiente a M1 y M2 puede determinarse entonces como se muestra en la parte inferior de la figura. La demanda variable pero conocida resultante de S es típica de la situación, donde aplica la EOQ dinámica.

Software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados), se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos y de los cuales cuenta con los módulos de pronósticos (Forecasting) e inventarios (inventory) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos, así como la inferencia de resultados a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill

TEMA 6 REDES.

6.1 Grafica de Gantt.
6.2 Método de la ruta crítica (PERT/CPM).
6.2.1 Terminología.
6.2.2 Construcción de una red.
6.2.3 Determinación de la ruta crítica.
6.2.4 Compresión de redes.
6.2.5 Análisis de una red PERT.
6.3 Programación y control de proyectos basados en costos.

Actividades de aprendizaje

- Realizar investigación documental.
- Presentación al grupo.
- Clase demostrativa.
- Resolver ejercicios prácticos relacionados: Construir diagramas de redes, manipular la ruta crítica para poder establecer la relación tiempo-costo.

Como apoyo al tema se anexan complementos educacionales, están organizados por carpeta una por cada tema.

6.1 Grafica de Gantt.

Un proyecto define una combinación de actividades interrelacionadas que deben ejecutarse en un cierto orden antes que el trabajo completo pueda terminarse. Las actividades están interrelacionadas en una secuencia lógica en el sentido que algunas de ellas no pueden comenzar hasta que otras se hayan terminado. Una actividad en un proyecto, generalmente se ve como un trabajo que requiere tiempo y recursos para su terminación. En general, un proyecto es un esfuerzo de un solo período; esto es, la misma sucesión de actividades puede no repetirse en el futuro.

En el pasado, la programación de un proyecto (en el tiempo) se hizo con poca planeación. La mejor herramienta conocida era el diagrama de barras de Gantt, el cual especifica los tiempos de inicio y terminación de cada actividad en una escala de tiempo horizontal. Su desventaja es que la interdependencia entre las diferentes actividades (la cual controla principalmente el progreso del proyecto) hoy no puede determinarse a partir del diagrama de barras. Las complejidades crecientes de los proyectos actuales han exigido técnicas de planeación más sistemáticas y efectivas, con el objeto de optimizar la eficiencia en la ejecución del proyecto. Aquí la eficiencia implica efectuar la mayor reducción en el tiempo requerido para terminar el proyecto, mientras se toma en cuenta la factibilidad económica de la utilización de los recursos disponibles.

Ejemplo de un gráfico de Gantt, de un proyecto para una casa habitación.

			SEMANAS													
Numero	**Actividad**		**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**Responsable**	**Costo**
1	Cavar cimientos	**P**													1	30
		R														
2	Vaciar cimientos	**P**													1	40
		R														
3	Colocar bloques de cimientos	**P**													2	25
		R														
4	Terminar la obra negra	**P**					ϕ									**95**
		R														
5	Instalar el piso principal	**P**													3	50
		R														
6	Erguir la estructura	**P**													4	90
		R														
7	Fijar el aislamiento externo	**P**													2	40
		R														
8	Instalar los tableros del cielo	**P**													3	30
		R														
9	Instalar las ventanas	**P**													1	20
		R														
10	Terminar la obra negra	**P**												ϕ		**230**
		R														

Actividad **P =** Programado **R =** Avance real **ϕ =** Objetivo

6.2 Método de la ruta crítica (PERT/CPM).

La administración de proyectos ha evolucionado como un nuevo campo con el desarrollo de dos técnicas analíticas para la planeación, programación y control de proyectos. Son el método de ruta crítica (CPM) y la técnica de evaluación y revisión de proyectos (PERT). Las dos técnicas fueron desarrolladas por dos grupos diferentes casi simultáneamente (1956-1958). El CPM (Critical Path Method) fue desarrollado primero por E. I. du Pont de Nemours & Company como una aplicación a los proyectos de construcción y, posteriormente, se extendió a un estado más avanzado por Mauchly

Associates. El PERT (Project Evaluation and Review Technique), por otra parte, fue desarrollado por la marina de Estados Unidos, por una organización consultora, con el fin de programar las actividades de investigación y desarrollo para el programa de misiles Polaris.

6.2.1 Terminología.

Los métodos PERT y CPM están básicamente orientados en el tiempo, en el sentido que ambos llevan a la determinación de un programa de tiempo. Aunque los dos métodos fueron desarrollados casi independientemente, ambos son asombrosamente similares. Quizá la diferencia más importante es que originalmente las estimaciones en el tiempo para las actividades se supusieron determinantes en CPM y probables en PERT. Ahora PERT y CPM comprenden realmente una técnica y las diferencias, si existe alguna, son únicamente históricas. En adelante, ambas se denominarán técnicas de “programación de proyectos”.
La programación de proyectos por PERT-CPM consiste en 3 fases básicas: Planeación, Programación y control de un proyecto.

Planeación:
- Inicia descomponiendo el proyecto en actividades.
- Determinar el tiempo para cada actividad.
- Construir un diagrama de red (nodos y flechas) donde cada flecha representa una actividad.

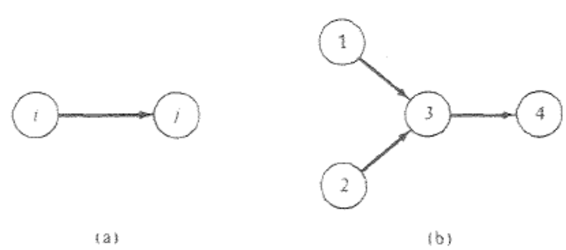
Programación:
- Construir un diagrama de tiempo, donde se señalan las actividades críticas que requieren atención especial.

Control:
- El uso del diagrama de flechas y la grafica de tiempo para hacer reportes periódicos del progreso.

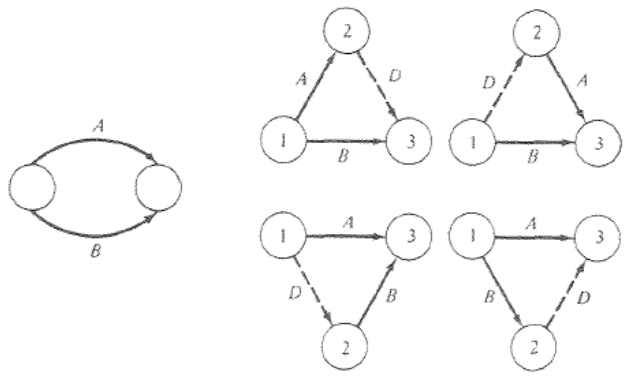
6.2.2 Construcción de una red.

Las reglas para construir el diagrama de flechas son:

Regla 1. Cada actividad esta representada por una y solo una flecha en la red.



Regla 2. Dos actividades diferentes no pueden identificarse por los mismos eventos terminal y de inicio.



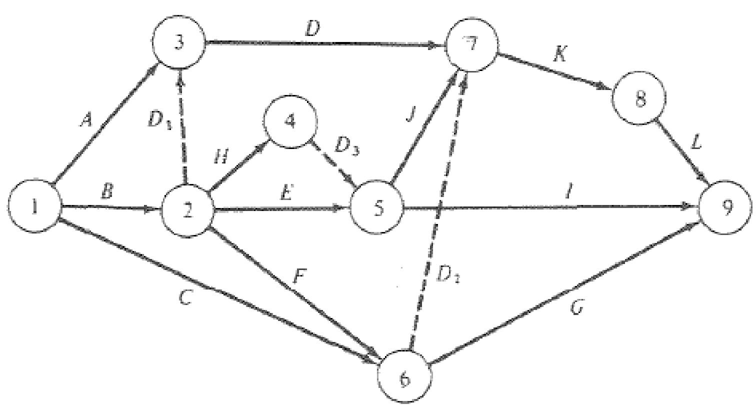
(a) (b)

Regla 3. A fin de asegurar la relación de precedencia correcta en el diagrama de flechas, las siguientes preguntas den responderse cuando se agrega cada actividad a la red.

(a) ¿Qué actividad debe terminarse inmediatamente antes de que esta actividad pueda comenzar?
(b) ¿Qué actividades deben seguir a esta actividad?
(c) ¿Qué actividades deben efectuarse simultáneamente con esta actividad?

EJEMPLO:
Construya el diagrama de flechas que comprenda las actividades A, B, C, … y L que satisfagan las siguientes relaciones:

1. A, B y C, son las actividades iniciales del proyecto que comienza simultáneamente.
2. A y B preceden a D.
3. B precede a E, F y H.
4. F y C preceden a G.
5. E y H preceden a I y J.
6. C, D, F y J preceden a K.
7. K precede a L.
8. I, G y L son las actividades finales del proyecto.

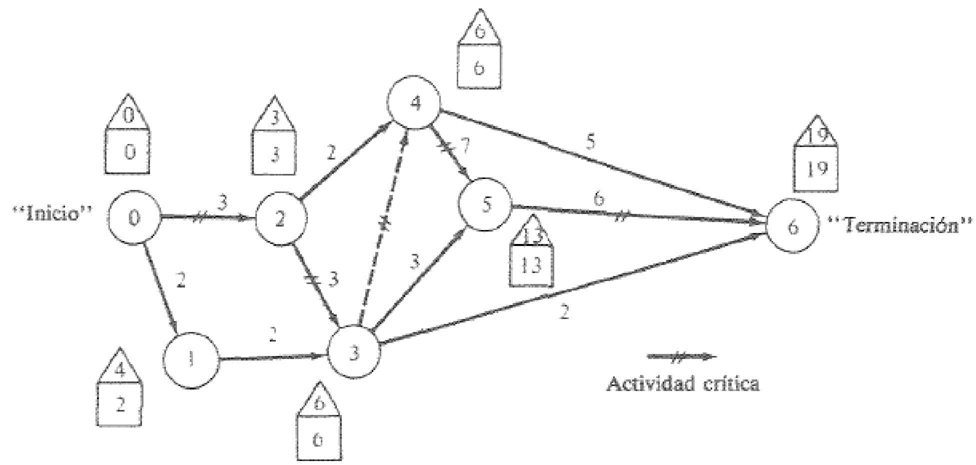


El diagrama de flechas resultante se muestra en la figura. Las actividades ficticias D_1 y D_2 se usan para establecer relaciones de precedencia correctas. D_3 se utiliza para identificar las actividades E y H con eventos finales únicos. Los eventos del proyecto están numerados de tal manera que su orden ascendente indica el sentido de progreso en el proyecto.

6.2.3 Determinación de la ruta crítica.

La ruta critica identifica todas las actividades criticas del proyecto. El método para determinar tal ruta critica se ilustra en un ejemplo numérico.

EJEMPLO:
Considere la siguiente red.



□ Cálculos hacia adelante
Δ Cálculos hacia atrás

Los cálculos hacia adelante se dan por:

□ TIP_i = Tiempo de inicio más próximo
$TIP_j = \max \{TIP_i + D_{ij}\}$ para la actividad (i, j)
Donde $TIP_0 = 0$

Los cálculos hacia atrás se dan por:

Δ TTT_i = Tiempo de terminación más tardío
Donde $TTT_n = TIP_n$
$TTT_i = \min_j \{TTT_j - D_{ij}\}$

Donde el numero en el □ y Δ sean iguales definen la ruta critica ver figura, junto con esto deben determinarse las holguras de las actividades no críticas, una actividad critica debe tener una holgura cero.

Es necesario definir nuevos elementos.

IT = Inicio más tardío
TT = Terminación más próximo

$IT_{ij} = TTT_j – D_{ij}$
$TT_{ij} = TIP_i + D_{ij}$

HT = Holgura total
HL = Holgura libre

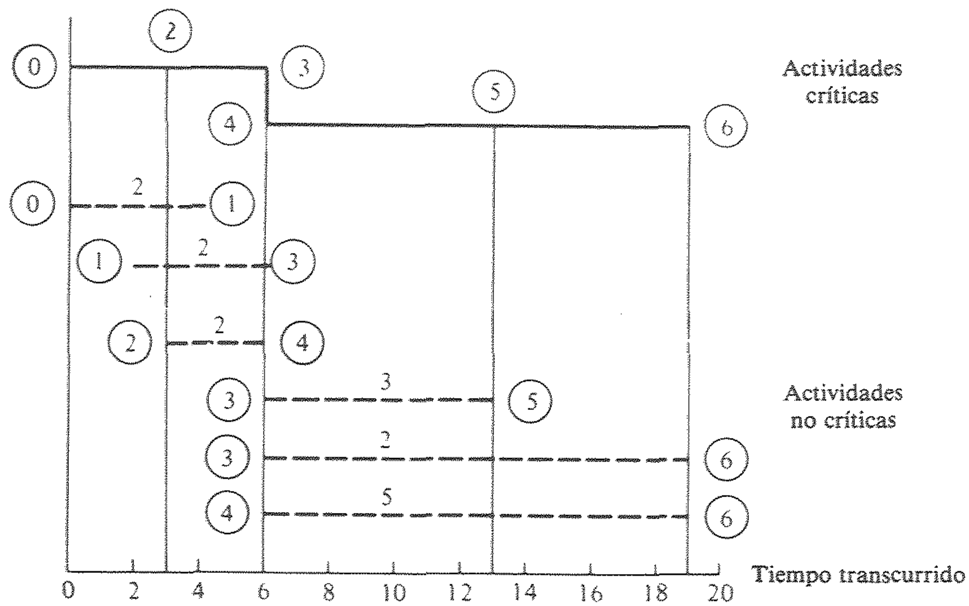
$HT_{ij} = TTT_j – TIP_i – D_{ij} = TTT_j – TT_{ij} = IT_{ij} – TIP_i$
$HL_{ij} = TIP_j – TIP_i - D_{ij}$

Resumen típico de los cálculos de la ruta crítica.

		Más próximo		Más tardío			
		Inicio	Terminación	Inicio	Terminación		
Actividad (i, j) (1)	Duración D_{ij} (2)	□ TIP_i (3)	TT_{ij} (4)	IT_{ij} (5)	△ TTT_j (6)	Holgura total HT_{ij} (7)	Holgura libre HL_{ij} (8)
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)	3	0	3	0	3	0[a]	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)	3	3	6	3	6	0[a]	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)	0	6	6	6	6	0[a]	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)	7	6	13	6	13	0[a]	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)	6	13	19	13	19	0[a]	0

[a]Actividad crítica.

Diagrama de tiempos para el proyecto



6.2.4 Compresión de redes.

En el punto anterior no se toma en cuenta el caso donde las estimaciones de tiempo son probabilísticas para las diferentes actividades.

También no se considera el costo de las actividades necesarios para la comprensión de redes, los cuales se retoman en los puntos siguientes.

6.2.5 Análisis de una red PERT.

Las consideraciones de probabilidad están incorporadas en la programación de proyectos. Suponiendo que la estimación de tiempo para cada actividad está basada en tres valores diferentes:

a = tiempo optimista, el cual se necesitará si la ejecución va extremadamente bien.
b = tiempo pesimista, que se requerirá si todo va muy mal.
m = tiempo más probable, el cual se necesitará si la ejecución es normal.

La amplitud "rango" especificado por las estimaciones optimista y pesimista (a y b, respectivamente) por supuesto debe encerrar toda estimación posible de la duración de la actividad. La estimación más probable *m* no necesita coincidir bien con el punto medio $(a + b) / 2$, y puede encontrarse a su izquierda o a su derecha. Debido a estas propiedades, es intuitivamente justificado que la duración para cada actividad puede seguir una distribución beta con su punto unimodal en *m* y sus puntos extremos en *a* y *b*.
Las expresiones para la media $\bar{D}$ y varianza *V* de la distribución beta se obtienen de la manera siguiente. El punto medio se supone que tiene una ponderación de la mitad de la del punto *m* más probable. Por consiguiente, $\bar{D}$ es la media aritmética de $(a + b) / 2$ y $2m$; esto es,

$$\bar{D} = \frac{(a+b)/2 + 2m}{3} = \frac{a+b+4m}{6}$$

La amplitud o rango (a, b) se supone que abarca alrededor de 6 desviaciones estándares de la distribución, ya que alrededor de 90% o más de cualquier función densidad de probabilidad está dentro de 3 desviaciones estándares de su media, por consiguiente

$$V = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Los cálculos de la red ahora pueden aplicarse directamente con $\bar{D}$ reemplazando la estimación D.
Para resumir, $E\{\mu_i\}$ y $\text{var}\{\mu_i\}$ están dadas por las rutas seleccionadas como

$$E\{\mu_i\} = ES_i$$
$$\text{var}\{\mu_i\} = \sum_k V_k$$

Donde *k* define las actividades a lo largo de la ruta mas larga que lleva a *i*.

La idea es que μ_i es la suma de variables aleatorias independientes y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema del límite central, μ_i es casi normalmente distribuida con media $E\{\mu_i\}$ y varianza $\text{var}\{\mu_i\}$. Ya que μ_i representa el tiempo de ocurrencia más próximo, el evento i va a satisfacer un cierto tiempo programado TP_i (especificado por el analista) con probabilidad

$$P\{\mu_i \leq TP_i\} = P\left\{\frac{\mu_i - E\{\mu_i\}}{\sqrt{\text{var}\{\mu_i\}}} \leq \frac{TP_i - E\{\mu_i\}}{\sqrt{\text{var}\{\mu_i\}}}\right\} = P\{z \leq K_i\}$$

dónde z es la distribución normal estándar con media 0 y varianza 1 y

$$K_i = \frac{TP_i - E\{\mu_i\}}{\sqrt{\text{var}\{\mu_i\}}}$$

es práctica común calcular la probabilidad de que el evento i ocurrirá no más tarde que su TTT_i. Tales probabilidades representarán, por consiguiente, la posibilidad de que los siguientes eventos ocurran dentro de la duración (TIP_i, TTT_i)

EJEMPLO:
Continuando con el ejemplo de la ruta crítica se tiene:

Actividad (i, j)	Tiempos estimados (a, b, m)	Actividad (i, j)	Tiempos estimados (a, b, m)
(0, 1)	(1, 3, 2)	(3, 5)	(1, 7, 2.5)
(0, 2)	(2, 8, 2)	(3, 6)	(1, 3, 2)
(1, 3)	(1, 3, 2)	(4, 5)	(6, 8, 7)
(2, 3)	(1, 11, 1.5)	(4, 6)	(3, 11, 4)
(2, 4)	(0.5, 7.5, 1)	(5, 6)	(4, 8, 6)

Los cálculos se muestran en la tabla:

Actividad	$\bar{D}_{ij}$	V_{ij}	Actividad	$\bar{D}_{ij}$	V_{ij}
(0, 1)	2	0.11	(3, 5)	3	1.00
(0, 2)	3	1.00	(3, 6)	2	0.11
(1, 3)	2	0.11	(4, 5)	7	0.11
(2, 3)	3	2.78	(4, 6)	5	1.78
(2, 4)	2	1.36	(5, 6)	6	0.44

Las probabilidades se ilustran en la siguiente tabla:

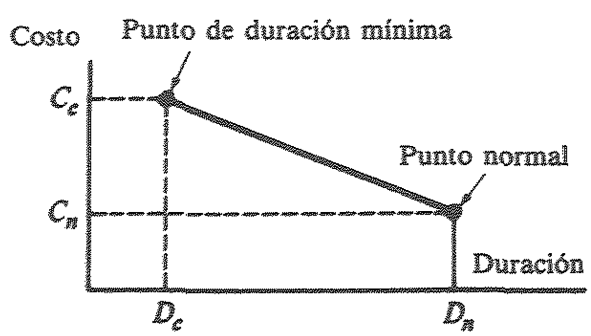
Evento	Ruta	$E\{\mu_i\}$	$\text{var}\{\mu_i\}$	TP_i	K_i	$P\{z \le K_i\}$
1	(0, 1)	2	0.11	4	6.03	1.000
2	(0, 2)	3	1.00	2	−1.000	0.159
3	(0, 2, 3)	6	3.78	5	−0.514	0.304
4	(0, 2, 3, 4)	6	3.78	6	0.000	0.500
5	(0, 2, 3, 4, 5)	13	3.89	17	2.028	0.987
6	(0, 2, 3, 4, 5, 6)	19	4.33	20	0.480	0.684

6.3 Programación y control de proyectos basados en costos.

El aspecto costo está incluido en la programación de proyectos al definir la relación duración costo para cada actividad.

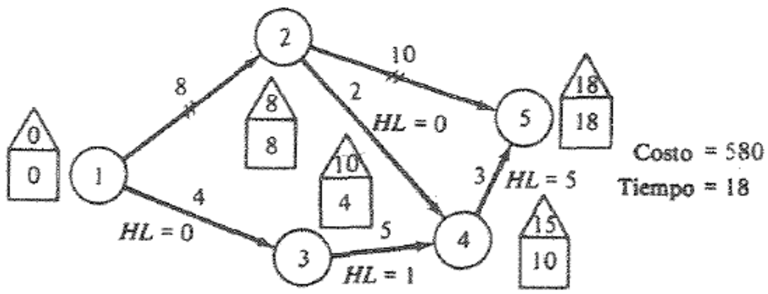
Después de definir las relaciones tiempo costo, se asignan sus duraciones normales a las actividades del proyecto. Se calcula luego la ruta crítica correspondiente y se registran los costos directos asociados. El paso siguiente es considerar la reducción del proyecto. Ya que tal reducción puede efectuarse únicamente si disminuye la duración de una actividad crítica, la atención debe centrarse en tales actividades.

A fin de lograr una duración en la duración al mínimo costo posible, se debe comprimir tanto como sea posible la actividad crítica que tenga el pendiente tiempo costo más pequeña. El grado en el cual una actividad puede reducirse, está limitada por su tiempo o duración mínima.



EJEMPLO:
Considere la red siguiente. Los puntos normales y de duración mínima para cada actividad están dados en la tabla. Se requiere calcular los diferentes programas de costo mínimo que pueden ocurrir entre los tiempos de duración normal y duración mínima.

$$\text{pendiente} = \frac{C_c - C_n}{D_n - D_c}$$



Actividad (i, j)	Normal		Mínima	
	Duración	Costo	Duración	Costo
(1, 2)	8	100	6	200
(1, 3)	4	150	2	350
(2, 4)	2	50	1	90
(2, 5)	10	100	5	400
(3, 4)	5	100	1	200
(4, 5)	3	80	1	100

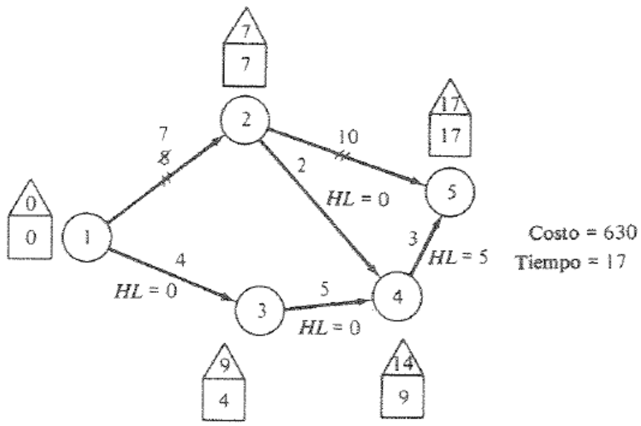
Pendiente para las actividades de la red.

Actividad	Pendiente
(1, 2)	50
(1, 3)	100
(2, 4)	40
(2, 5)	60
(3, 4)	25
(4, 5)	10

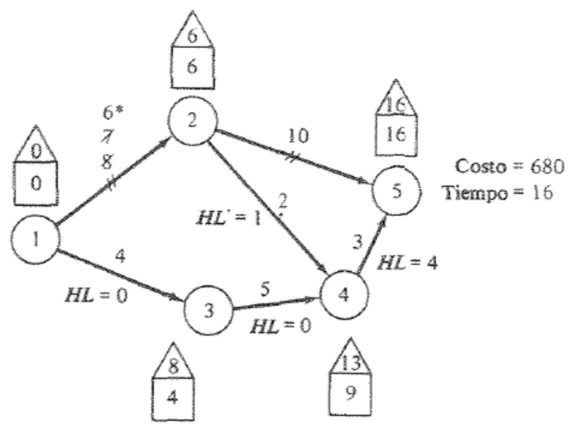
Una vez calculada la pendiente el segundo paso es reducir el tiempo del proyecto en las actividades críticas con la mínima pendiente.
Actividades criticas (1, 2) y (2, 5), menor pendiente = 50 la actividad (1, 2).

Reduciendo la red en una unidad de tiempo:

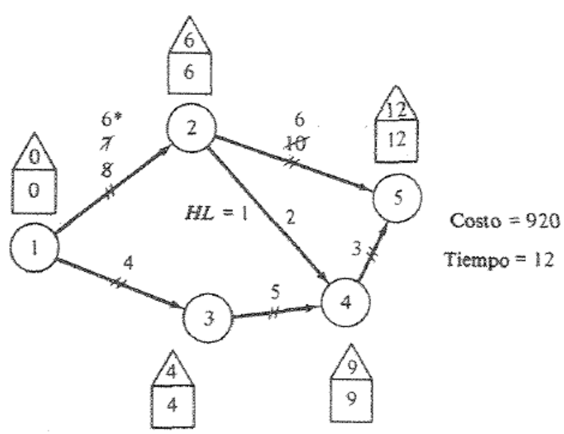
La HL = 0 de la actividad (3, 4), se reduce de 1 a cero por lo tanto es lo mas que se puede reducir la red en este caso.



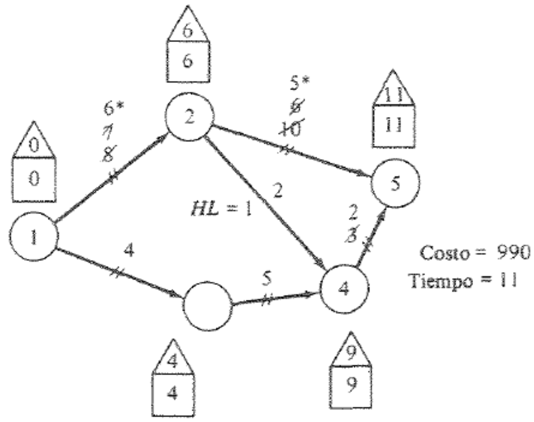
Como la ruta critica permanece sin cambio la actividad (1, 2) todavía se puede reducir una unidad de tiempo mas para llegar a su límite mínimo que es 6.



La ruta critica resultante permanece sin cambio. La actividad (1, 2) ya no puede reducirse mas por lo tanto se elige la actividad (2, 5), límite de duración mínima = 10 – 5 = 5 y limite HL = 4 de la actividad (4, 5), entonces el límite de reducción = min {5, 4} = 4.



Ahora se tienen dos rutas criticas:
Ruta (1, 2, 5), la actividad (2, 5) puede reducirse en una unidad.
Ruta (1, 3, 4, 5), la actividad (4, 5) tiene la mínima pendiente = 10 y su limite a duración mínima es 2
Por lo tanto, el límite de reducción = min {1, 2} = 1, se reducen las dos rutas.



Puesto que todas las actividades sobre la ruta critica (1, 2, 5) están en el tiempo de duración mínima, ya no es posible reducir el tiempo del proyecto.

Resumen de costos incluyendo el costo indirecto.

Duración	Costo directo	Costo indirecto	Costo total
18	$580	$810	$1390
17	630	765	1395
16	680	720	1400
12	920	540	1460
11	990	495	1485

Control del proyecto.

Existe la tendencia entre algunos usuarios PERT-CPM a pensar que el diagrama de flechas puede descartarse tan pronto se haya desarrollado el programa de tiempo. Esto no es así. En efecto, un uso importante del diagrama de flechas ocurre durante la fase de ejecución del proyecto. Raras veces sucede que la fase de planeación desarrollará un programa de tiempos que pueda seguirse exactamente durante la fase de ejecución. Muy a menudo algunos de los trabajos se demoran o se aceleran. Esto, naturalmente, depende de las condiciones reales de trabajo. Tan pronto como tales disturbios ocurren en el plan original, se hace necesario desarrollar un nuevo programa de tiempos para la parte restante del proyecto. Esta sección delinea un procedimiento para monitoreo y control del proyecto durante la fase de ejecución.

Es importante seguir el progreso del proyecto en el diagrama de flechas, más que en el programa de tiempos solamente. El programa de tiempos se utiliza principalmente para verificar si cada actividad está en tiempo. El efecto de una demora en cierta actividad sobre la parte restante del proyecto puede visualizarse mejor sobre el diagrama de flechas.

En cuanto el proyecto progresa en el tiempo, se descubriera que la demora de algunas actividades hace necesario desarrollar un programa totalmente nuevo. ¿Cómo puede efectuarse esto usando el presente diagrama de flechas? La necesidad inmediata es actualizar el diagrama de flechas asignando valores cero a las duraciones de las actividades que se han terminado. A las actividades parcialmente terminadas se les asignan tiempos equivalentes a sus partes no terminadas. También deben hacerse los cambios en el diagrama de flechas, tales como añadir o desechar cualquier actividad futura. Repitiendo los cálculos usuales sobre el diagrama de flechas con sus nuevos elementos de tiempo, se puede determinar el nuevo programa de tiempos y cambios posibles en la duración del proyecto. Tal información se utiliza hasta que es necesario actualizar el programa de tiempos nuevamente. En situaciones reales se requieren normalmente muchas revisiones del programa de tiempos en las primeras etapas de la fase de ejecución. Sigue luego un periodo estable, en el cual se requiere poca revisión del programa actual.

Software.

El software que sirve de apoyo incluye los programas Microsoft Excel y QM for Windows (by Howard J. Weiss). Como se puede observar en el caso de Excel, para el desarrollo del tema se llevaron a cabo los cálculos (las Tablas) para el desarrollo de los métodos planteados), se adjunta archivo.
De la misma manera se propone el uso de QM for Windows, software para uso estudiantil el cual maneja 30 módulos y de los cuales cuenta con los módulos de ruta crítica (Project Managment (PERT/CPM)) que cubre los subtemas desarrollados en este tema, pero que libera de la complejidad de los cálculos requeridos, así como la inferencia de resultados a mayor profundidad, se adjunta el archivo de instalación correspondiente, aclarar que es sencilla la instalación y uso del software.

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL UTILIZADA:

Hamdy A. Taha, Investigación de Operaciones, 5ª edición, Ed. AlfaOmega

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, introducción a la investigación de Operaciones, 6a. edición, Ed. McGraw Hill