Soluciones Numéricas Ingenieriles

LETICIA CORRAL BUSTAMANTE

Ni la totalidad ni parte de la publicación de esta obra literaria pueden ser reproducidas, registradas o transmitidas, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, electrónico, fotoquímico, magnético o electroóptico, mediante fotocopia, grabación o cualquier otro medio, sin permiso previo de la editorial en que el Titular de este libro decida publicar, ni sin el permiso previo de la autora.

Cualquier forma de cesión de uso de este ejemplar tales como préstamo, alquiler, etc. requiere la autorización del editor y/o de sus representantes.

Copyright © 2023 Leticia Corral Bustamante

Todos los derechos reservados.

ISBN:

A cargo de la editorial del Titular

DEDICATORIA

Dedico esta obra a mis Hijos: Alan, Evelyn Marabel, Aarón Raúl y Roberto
Mis cuatro Estaciones del Año:
Primavera, Verano, Otoño e Invierno,
respectivamente. TtFS&HS!

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTOR:	CORRAL BUSTAMANTE RAMONA LETICIA
TÍTULO:	SOLUCIONES NUMERICAS INGENIERILES
RAMA:	LITERARIA
TITULAR:	TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A. EN RELACION AL ARTICULO 46 DEL R.L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-052811091700-01

Ciudad de México, a 08 de julio de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DE REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

PREFACIO

Soluciones Numéricas Ingenieriles es una combinación de diversos problemas de matemática pura y aplicada en el ámbito ingenieril, ex profeso para las carreras de ingeniería del nivel superior. Se realizó con el afán de allegar recursos de solución de problemas para ingenieros que coadyuven al fortalecimiento de los programas educativos de Métodos Numéricos que permiten proporcionar un análisis numérico hasta agotar alternativas de solución, por medio de procedimientos completos mediante cálculos, visualización gráfica y programas de cómputo.

Con este libro se contribuye a enriquecer el repositorio de problemas de ingeniería que demandan los programas del nivel universitario, con el fin de proveer de soluciones originales a problemas difíciles de resolver analíticamente, brindando soluciones numéricas que posibilitan ahorrar esfuerzo y tiempo.

Asimismo, se contribuye con códigos de programación para una solución más eficiente y completa de problemas en Ingeniería, dado que, generalmente las soluciones numéricas requieren de varias iteraciones del algoritmo de los métodos numéricos.

También, se aporta con esta obra literaria al estado de arte de soluciones planeadas y organizadas en secuencias lógicas que propician al estudiante aprender métodos numéricos de manera sencilla, clara y precisa, toda vez que se suministra la redacción del problema, las ecuaciones pertinentes a través de algoritmos, aunque algunas veces es necesario deducir dichas ecuaciones de algún proceso industrial o de algún fenómeno físico de la naturaleza para luego escribirla en el formato del algoritmo, del mismo modo, se proporcionan o deben deducirse, las condiciones iniciales que dan el carácter de soluciones específicas al fenómeno físico que se aborda; esquemas e ilustraciones, gráficas, etc. si aplican, y se presentan las iteraciones pertinentes para la asimilación, comprensión o entendimiento del caso bajo estudio, conociendo de antemano el resultado esperado para saber cuándo hay que parar la iteración con el criterio de convergencia a tomar en consideración, dada la precisión que se requiera del problema a resolver.

Asimismo, se abordan los tipos de errores relativo, absoluto, truncamiento y redondeo en que se incurre al dar soluciones numéricas y se comparan los métodos con respecto a la eficiencia que aporta cada uno, es decir, con referencia al número de iteraciones en que tal o cual método converge más rápido al resultado que se espera.

Soluciones Numéricas Ingenieriles fue elaborado con la finalidad de beneficiar al estudiantado de las carreras de ingeniería química, ambiental, en gestión empresarial, eléctrica, electromecánica, electrónica, mecánica, mecatrónica, metalurgia, materiales y afines contribuyendo en el estado de arte/técnica de solucionario de problemas numéricos que impactan en el Sector Industrial, Centros de Investigación y Desarrollo Tecnológico en general, a nivel global.

El programa educativo al que hace alusión esta obra, a partir de la interrelación entre capítulos que aquí se presenta más adelante, aporta al estudiante la aplicación del modelado matemático con algoritmos usados para iterar durante el procedimiento de un problema con la finalidad de aproximar su respuesta a la solución esperada ya que, con ello, el ingeniero resuelve problemas que tienen que ver con procesos que le facultan analizar la situación particular que se plantea para determinar las decisiones que se deben tomar en cada caso. Se abordan ramas de las matemáticas tales como Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Probabilidad y Estadística para Análisis de Regresión y Método de Mínimos Cuadrados, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales y no lineales y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales en los campos mecánico, electrónico, químico, eléctrico, entre otros. En este tenor, este programa requiere de conocimientos de matemáticas, procesos industriales, uso de lenguaje(s) de programación y/o uso de software matemático como Geogebra, Matlab, Maple, etc. que propician en el estudiante una mayor capacidad de análisis del problema involucrado, que lo conducen a fomentar el desarrollo de proyectos ingenieriles de procesos industriales y empresariales en general. Es

por ello, que la obra que aquí se presenta mediante este libro de Soluciones Numéricas Ingenieriles, aporta estos ingredientes con la finalidad de beneficiar a los estudiantes y maestros que imparten la asignatura de Métodos Numéricos y Análisis Numérico de las ingenierías, con toda esta gama de materiales que se ofrecen por conducto de este producto académico y de investigación tecnológica desarrollada con matemáticas, software matemáticos y lenguaje(s) de programación.
Se tomaron bases de datos de libros de texto que se encuentran en las Referencias Bibliográficas al final del capítulo 6 de este libro, para resolver problemas relacionadas con los métodos numéricos de los capítulos que contiene la obra. Soluciones Numéricas Ingenieriles resuelve problemas de matemática pura y problemas de aplicación con soluciones únicas y originales. En muchos de los casos, se resuelven problemas con distintos modos de solución que incluyen análisis precisos del resultado esperado.

El objetivo general del libro, es poner a disposición las herramientas para resolver de forma numérica problemas que se presentan en el Área de Eléctrica – Electrónica – Mecatrónica – Mecánica – Hidrología – en las disciplinas: Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería en Metalurgia, Ingeniería en Materiales y afines, así como de otras disciplinas como Ingeniería en Gestión, Empresarial, entre otras, por conducto de este libro que es un Solucionador de Problemas Numéricos, con la finalidad de contribuir en el nivel de visión del estudiante para analizar casos desde una perspectiva pertinente que aporta soluciones a procesos industriales y a fenómenos físicos que ocurren en el universo en que estamos inmersos. Asimismo, se elabora esta obra con el propósito de dar soluciones opcionales y/o soluciones por conducto del uso de herramientas tecnológicas por intermedio de software matemático y códigos de lenguaje de programación que permiten resolver problemas que demandan de numerosas iteraciones para su solución numérica, ya que, algunas veces, resultan difíciles de resolver en forma analítica.

En el Capítulo 1 se introduce al usuario en el mundo de los componentes intrínsecos en los métodos numéricos, es decir, en algoritmos, iteraciones, criterios de convergencia y errores comunes.
El propósito medular del Capítulo 2, consiste en propiciar los algoritmos inherentes de métodos de intervalos y métodos abiertos para resolver problemas representados simbólicamente por modelos matemáticos. El objetivo es obtener las raíces que satisfagan el modelo en cuestión, las cuales significan la respuesta esperada por el usuario.
El solucionador numérico de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales del Capítulo 3 presenta un panorama que invita a resolver estos sistemas con software matemático o bien, por medio de programación. Esto, con la finalidad de ahorrar tiempo y esfuerzo en realización de operaciones aritméticas que implican cálculos tediosos con el uso de métodos tales como eliminación de Gauss, Gauss-Jordan y obtención de eigenvalores y eigenvectores.
El objetivo central del Capítulo 4 consiste en aproximar modelos matemáticos a bases de datos de problemas de aplicación en ciencias e ingeniería, con interpolación y regresión.
En el Capítulo 5 se privilegia el uso de herramientas computacionales en la solución de problemas que incluyen métodos numéricos de Newton-Cotes, integrales múltiples y diferenciación numérica. El motivo de estudio es presentar un panorama de solución con cálculos y gráficas que aproximan al resultado esperado de modelos matemáticos cuya representación simbólica significa un escenario físico de corte ingenieril.
Finalmente, el objetivo del Capítulo 6 es propiciar las herramientas para resolver Problemas de Valor Inicial que se presentan en muchas áreas de Ingeniería que implican soluciones numéricas.

Para instrumentar los métodos numéricos empleados en este libro como solucionario de problemas, se ha echado mano de recursos didácticos por medio de sistemas de representación gráfica (de importancia vital en la visualización de comportamientos), tabular y algebraica. Se provee al usuario de ejemplos de

problemas resueltos por cada método paso a paso con procedimientos completos con software matemático y lenguajes de programación C Sharp (C#) y Python.

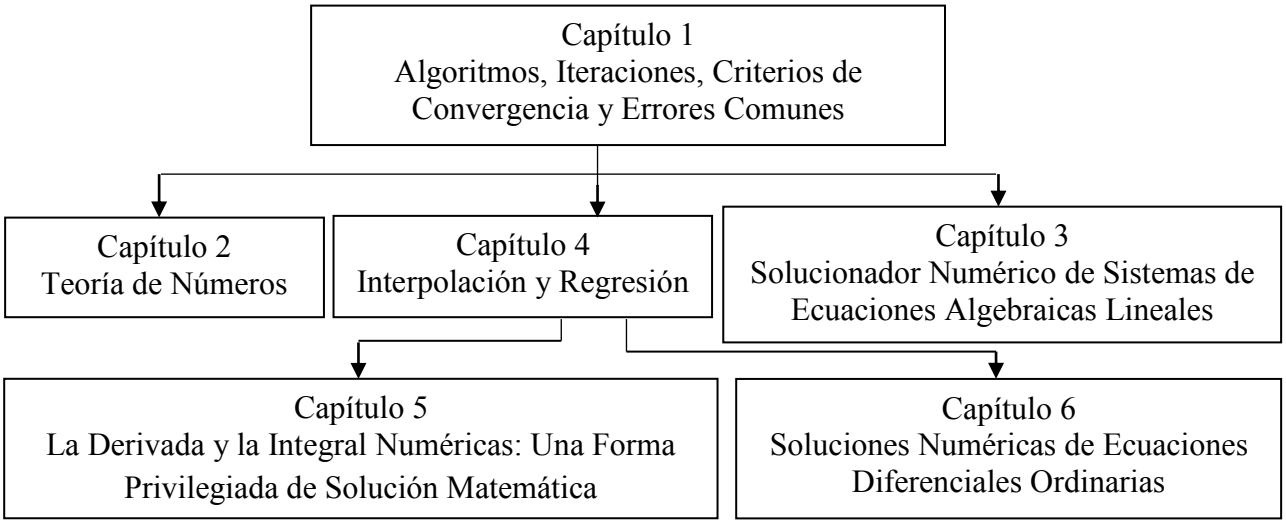
Las herramientas computacionales han venido a significar, a través del tiempo, un instrumento de fundamental valía en la resolución de problemas, maxime de problemas que involucran algoritmos que llevan intrínsecamente cuantiosas operaciones aritméticas y algebraicas que exigen, en numerosos de los casos, representaciones visuales por medio de gráficas de sus resultados. En este tenor, la computadora juega un papel preponderante en el estudio de los métodos numéricos. El dúo computadora-lenguaje de programación y los paquetes comerciales como Maple, Geogebra, Matlab, Mathematica, entre otros, han posibilitado al estudioso de las matemáticas analizar y agotar opciones de resolución de problemas de relevancia en el ejercicio profesional con ahorro de tiempo y esfuerzo, facultándole vislumbrar alternativas de solución que van más allá de las encontradas manualmente.
Así pues, el uso de librerías del software Maple en muchos de los problemas de esta obra, conceden al usuario manipular sistemas algebraicos computarizados que los conducen a realizar maniobras simbólicas y soluciones analíticas de problemas matemáticos, graficar en dos y tres dimensiones como recursos poderosos cada vez más al alcance de los usuarios.
La visualización de los comportamientos tendenciales de los fenómenos físicos incluidos en los problemas que presenta Soluciones Numéricas Ingenieriles para aprender conceptos matemáticos, clave en la solución de problemas de corte numérico, significan un esquema dinámico que facilita este libro. Por ejemplo, en el capítulo 6 se ilustran las leyes de Kirchhoff en un circuito eléctrico cuyo modelo matemático incluye un sistema de ecuaciones diferenciales de dos corrientes eléctricas. De la solución analítica, se conoce el resultado esperado para dichas corrientes y se ilustra la solución por medio del método de Runge-Kutta de 4º orden usando código de programación Excel con Visual Basic, arrojando tablas para distintos pasos de tiempo. Se da la secuencia de pasos a seguir para programar de este modo. Asimismo, en todos los casos de resolución con Maple, se dan las instrucciones de este software por medio del uso de distintas librerías para acceder a resolver por el método numérico que se desee. También se ponen a disposición los códigos en C# y Python en todos los casos en que se usaron para la solución de problemas. La herramienta computacional, es hoy por hoy un instrumento que nos concede simular fenómenos físicos que ocurren en el universo que conocemos, y está presente en todos los capítulos de este libro.

Prerrequisitos

Para una comprensión ideal de los métodos numéricos que contiene este libro, es menester que el usuario haya cursado las asignaturas de cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales ordinarias. También, se requiere del conocimiento de algún(os) lenguaje(s) de programación y software matemático, herramientas hoy en día imprescindibles en la solución y análisis de métodos numéricos que contienen algoritmos que demandan de numerosas operaciones aritmético-algebraicas y graficación de funciones o modelos matemáticos de escenarios físicos de problemas ingenieriles.

Los temas y subtemas de cada capítulo del libro están interrelacionados, como se muestra a continuación. Los capítulos 2 y 3 contienen la parte algebraica del libro, mientras que, la parte de aproximación de funciones que se presenta en el capítulo 4: interpolación y regresión, es el soporte del capítulo 5: la derivada y la integral numéricas: una forma privilegiada de solución matemática, sobre la que se sustenta a su vez el capítulo 6: soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Interrelación entre Capítulos



De este modo, el libro integra distintos elementos para allegar conocimiento de conceptos matemáticos y situaciones físicas ingenieriles. Esto conlleva a que estudiantes y profesores aprendan a distinguir el método numérico adecuado para cada escenario que se les presente.
Cada capítulo es ilustrado con situaciones propias de la vida cotidiana y del ámbito ingenieril, patentizando la exigencia de emplear métodos numéricos en el análisis de tales escenarios. El propósito es hacer hincapié en el usuario de la importancia que revisten los métodos numéricos en la solución de innumerables problemas reales en el espacio-tiempo que nos toca vivir en el contexto profesional. Una descripción por capítulo es la que a continuación se describe.

Capítulo 1. Introducción a los componentes en que todo análisis numérico está inmerso, tales son los algoritmos, iteraciones, criterios de convergencia y errores comunes.

Capítulo 2. Contempla los métodos: bisección, posición falsa, punto fijo, Newton-Raphson, secante, y raíces múltiples de los mismos; en todos ellos se hace uso del software Maple presentando códigos de programación por intermedio de librerías y uso de comandos inherentes a los métodos numéricos, visualización de gráficas y empleo de algoritmos para solucionar modelos matemáticos de matemáticas puras y aplicaciones.

Capítulo 3. Software matemático para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con métodos de primera importancia en problemas de aplicación ingenieril, tales como los métodos de eliminación Gaussiana, Gauss-Jordan y Eigenvalores y Eigenvectores. El método de Gauss-Seidel o método de desplazamientos sucesivos para resolver el sistema matricial lineal, el método de Krylov para obtener la ecuación característica de un sistema de ecuaciones o matriz y el método de descomposición LU para factorizar matrices en matrices triangulares. Especial mención es el solucionario de problemas de aplicación diversa resueltos con el método de mínimos cuadrados y regresión en áreas que abarcan fenómenos físicos ambientales, análisis de economía, mediciones en medicina, estadísticas de población, variables termodinámicas como temperatura, predicción de costos, etc.

Capítulo 4. Problemas de aplicación, uso de herramienta computacional Excel, software Maple y programación Python en la solución de problemas a partir de cálculos y graficación de modelos

matemáticos con funciones de dos variables; métodos de interpolación, polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton, polinomios de Lagrange, método de diferencias finitas y regresión.

Capítulo 5. Librerías, paquetes y comandos del software Maple para resolver problemas por medio de los métodos de Newton-Cotes: trapezoidal, Simpson 1/3, Simpson 3/8 y método de Boole por medio de la visualización de resultados que privilegian la graficación de modelos matemáticos puros y aplicados. Problemas de integrales múltiples de dos o más variables por intermedio del cálculo integral, la forma gráfica con métodos de Newton-Cotes y el cálculo multivariado; asimismo, solución a problemas de diferenciación numérica con funciones, bases de datos y aplicación ingenieril.

Capítulo 6. Uso de programación Python, programación Excel con Visual Basic y software Maple en la solución de problemas de modelos matemáticos puros y de problemas de aplicación resueltos por los métodos: Euler, Euler modificado y Runge-Kutta de tercero y cuarto orden. Con estos métodos se concede la facultad de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del Problema del Valor Inicial, PVI. Solucionador con cálculos y graficación de funciones que modelan escenarios. En la resolución de problemas con estos métodos el usuario puede corroborar que, el error absoluto y el error relativo son menores al resolver con Runge-Kutta de tercer y cuarto orden y en orden ascendente se incrementan los errores, al resolver con Euler modificado y Euler, respectivamente.

Otros materiales
Tutorial para revisión de códigos Python y liga al sitio donde el lector encontrará el tutorial para aprender a usarlo, en el Anexo 2. En todos los capítulos del libro donde se resuelven problemas con el software Maple, se proporcionan los guiones o instrucciones con el uso de librerías y comandos para facultar a dar sentido exploratorio a los métodos numéricos por parte del usuario.

CONTENIDO

PREFACIO v

CAPÍTULO 1 1

ALGORITMOS, ITERACIONES, CRITERIOS DE CONVERGENCIA Y ERRORES COMUNES

1.1 Objetivo particular 2
1.2 Algoritmos 2
1.3 Aproximaciones 4
1.4 Iteraciones 5
1.5 Criterio de Convergencia 6
1.6 Tipos de errores comunes 14

CAPÍTULO 2 19

TEORÍA DE NÚMEROS

2.1 Objetivo Particular del Capítulo 2 20
2.2 Método de Bisección 20
2.3 Método de Posición Falsa 28
2.4 Método de Punto Fijo 33
2.5 Método de Newton-Rahpson 39
2.6 Método de la Secante 48
2.7 Métodos para resolver raíces múltiples: bisección, Newton modificado, secante y posición falsa 51
2.8 Soluciones Numéricas Ingenieriles del Capítulo 2 56

CAPÍTULO 3 113

SOLUCIONADOR NUMÉRICO DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

3.1 Objetivo Particular del Capítulo 3 114
3.2 Eliminación Gaussiana 114
3.3 Método de Gauss-Jordan 117
3.4 Método de descomposición LU 145
3.5 Método de Gauss-Seidel 157
3.6 Método de Krylov 185
3.7 Eigenvalores y eigenvectores 191
3.8 Mínimos cuadrados 235

3.8.1 Problemas de mínimos cuadrados 235

CAPÍTULO 4 397

INTERPOLACIÓN Y REGRESIÓN

4.1 Objetivo Particular del Capítulo 4 398
4.2 Interpolación Lineal, cuadrática y de orden *n* 398
4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton 411
4.4 Polinomios de Lagrange 419
4.5 Método de diferencias finitas 431
4.6 Regresiones 435
4.6.1 Problemas de regresión 446
4.7 Miscelánea de Problemas 469

CAPÍTULO 5 501

LA DERIVADA Y LA INTEGRAL NUMÉRICAS: UNA FORMA PRIVILEGIADA DE SOLUCIÓN MATEMÁTICA

5.1 Objetivo Particular del Capítulo 5 502
5.2 Métodos de Newton-Cotes 502
5.2.1 Método del trapecio 504
5.2.2 Método Simpson 1/3 506
5.2.3 Método Simpson 3/8 510
5.2.4 Método de Boole 512
5.2.5 Problemas del Método de Newton-Cotes 513
5.3 Integrales múltiples 572
5.3.1 Problemas de integrales múltiples 573
5.4 Diferenciación numérica 607
5.4.1 Problemas de diferenciación numérica 608

CAPITULO 6 619

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

6.1 Objetivo Particular del Capítulo 6 620
6.2 Método de Euler 620
6.3 Método de Euler modificado 625
6.4 Métodos de Runge-Kutta 635
6.5 Problemas del Capítulo 6 646

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 817

ANEXO 1 DEL CAPÍTULO 4 819

CÓDIGOS FUENTE DE PROGRAMAS DE CÓMPUTO EN LENGUAJE PYTHON

ANEXO 1 DEL CAPÍTULO 6 869

CÓDIGO PYTHON, COMPILACIÓN Y TABLA DEL PROBEMA RESUELTO CON RK4

ANEXO 2 889

TUTORIAL PARA REVISIÓN DE CÓDIGOS PYTHON DE SOLUCIONES NUMÉRICAS INGENIERILES

AGRADECIMIENTOS

"Libro elaborado durante el ejercicio del periodo Sabático autorizado por el TecNM".

Agradezco al Director General del Tecnológico Nacional de México, Dr. Ramón Jiménez López, por la **Autorización de mi Año Sabático**. Asimismo, al Director del Instituto Tecnológico de Cd. Cuauhtémoc, M.C.-Arq. Armando Serrano Salomón, a la Jefa de Desarrollo Académico, M.C. Cristina Yolanda Delgado Rascón, a la Jefa del Departamento de Metal-Mecánica, M.A. Maramay Márquez Tena, al Presidente de la Academia de Ingeniería Mecatrónica, Dr. Francisco Irigoyen Olivas, así como a los miembros de la Comisión Dictaminadora nombrados por la Academia de Ingeniería Mecatrónica, por su contribución a través de las pertinentes gestiones realizadas de una u otra forma para que se me otorgara la **Autorización del Año Sabático** a partir del **01 de septiembre de 2023 hasta el 31 de agosto de 2024**, en el Programa para la Elaboración de Apuntes, Libros, Objetivos Educacionales y Reactivos de Evaluación: bajo la modalidad: **B.2 Elaboración de Libro: Soluciones Numéricas Ingenieriles**. Sirva mi libro como Solucionador de Problemas mediante Métodos Numéricos y Análisis Numéricos por su calidad con el uso de herramientas computacionales a través de software matemático y códigos de lenguajes de programación que permiten ahorrar tiempo y esfuerzo, redituando en beneficio a estudiantes y profesores del TecNM, de las Universidades y, en general, del nivel superior, ya que cada problema está desarrollado paso a paso y, en muchos de los casos, mediante distintas soluciones para obtener el resultado esperado. Además, este libro se elaboró con el afán de enriquecer el repositorio de soluciones numéricas para ingenierías del Área Eléctrica – Electrónica – Mecatrónica – Mecánica – Hidrología – en las disciplinas de: Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería en Metalurgia, Ingeniería en Materiales y afines, así como de otras disciplinas como Ingeniería en Gestión, Empresarial, entre otras. Con ello, se pretende dar cumplimiento a cabaidad al compromiso de entrega del reporte intermedio y final de las actividades desarrolladas durante el ejercicio de este periodo sabático a las autoridades correspondientes de mi centro de adscripción TecNM/ITCC, para su evaluación y su posterior liberación.

CAPÍTULO 1

ALGORITMOS, ITERACIONES, CRITERIOS DE CONVERGENCIA Y ERRORES COMUNES

1.1 Objetivo particular

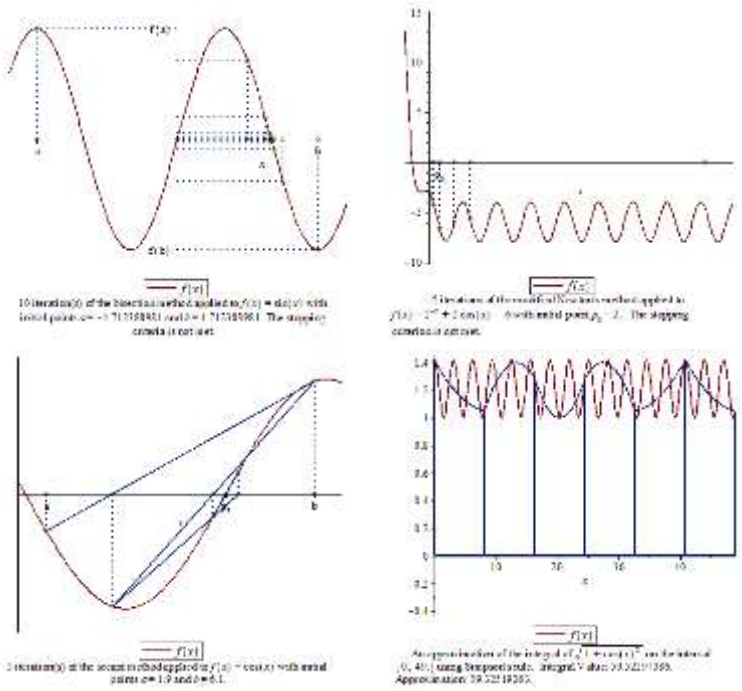
1.2 Algoritmos

1.3 Aproximaciones

1.4 Iteraciones

1.5 Criterio de Convergencia

1.6 Tipos de errores comunes



1.1 Objetivo particular

El objetivo particular del Capítulo 1 consiste en proporcionar un abanico de tipos de algoritmos que se usan en problemas que se resuelven numéricamente, con el propósito de ampliar la visión que de los Métodos Numéricos tiene el estudiante principiante, con la finalidad de que se vaya adaptando a los distintos modelos matemáticos implícitos en las diversas soluciones numéricas a través de las iteraciones que a cada caso atañen mediante los criterios de convergencia para finalizar su solución, así como el tipo de errores con que se pueden comparar los métodos que resuelven una determinada rama de las matemáticas: álgebra, cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales, etc.

En este capítulo se presentan conceptos de relaciones matemáticas claves en el desarrollo de soluciones numéricas a problemas de los subtemas.

Conoceremos en principio los conceptos principales de algoritmos y aproximaciones, presentaremos una serie de conceptos y definiciones propios del estudio de los algoritmos, su análisis y diseño. También veremos los diferentes tipos de formas y tamaños o medidas en que se pueden almacenar, representar los datos y estructuras en un algoritmo o programa.
De igual forma podremos ver las definiciones y algunas características, reglas, normas, tipos de algoritmo de búsqueda y ordenación, así como sus aplicaciones.
Así como también, conoceremos los errores como se dan dentro de la solución de un problema al obtener un valor aproximado de una cierta solución, es importante medir o estimar la aproximación y comparar con el valor exacto de la solución del problema.
Finalmente se estudiará, la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite es llamada orden de convergencia. Este concepto es, desde el punto de vista práctico, muy importante si necesitamos trabajar con secuencias de aproximaciones sucesivas.

1.2 Algoritmos

Un algoritmo es una representación simbólica de un problema que puede ser resuelta en forma numérica, como es el caso que nos ocupa. Así pues, la matemática es por naturaleza un lenguaje privilegiado para plasmar con símbolos matemáticos los escenarios de procesos y fenómenos físicos que luego, podemos comunicar mediante otro lenguaje a una computadora: la programación para resolverlo.
En los capítulos del 2 al 6 podemos observar los algoritmos contenidos en la presente obra, por ejemplo, los algoritmos de los métodos numéricos para obtener las raíces de ecuaciones mediante los métodos de Bisección y Falsa Posición del capítulo 2, asimismo, los algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales de los métodos de Euler, Euler Modificado y Runge-Kutta del Capítulo 6.
Así, diremos que un algoritmo está referido a operaciones finitas y numeradas con el propósito de obtener la solución de un problema. El caso que nos ocupa en esta obra está dirigido mediante una representación que privilegia una secuencia de símbolos matemáticos que sirven para dar respuesta a una problemática particular y/o general de situaciones que se presentan en el ámbito ingenieril.

Son un conjunto metódico de operaciones que se utilizan para resolver problemas específicos mediante cálculos. Son instrucciones indicativas de la secuencia de operaciones que se deben realizar partiendo de los datos de entada para obtener el resultado buscado. El algoritmo es utilizado en el mundo de la ciencia para la resolución sistematizada de problemas. Los algoritmos no siempre están escritos de una forma que conduce al programa más efectivo en términos de requisitos de tiempo o almacenamiento.

Las características que un algoritmo debe cumplir, son:
Ser definido: Cada paso del algoritmo debe indicar la acción a realizar sin criterios de interpretación.
Ser finito: Un número específico y numerable de pasos debe componer al algoritmo, el cual deberá finalizar al completarlos.
Tener cero o más entradas: los datos son proporcionados a un algoritmo como insumo para llevar a cabo las operaciones que comprende.
Tener una o más salidas: Debe siempre devolver un resultado; de nada sirve un algoritmo que hace algo y nunca sabemos que fue. El devolver un resultado no debe ser considerado como únicamente verlos en forma impresa o en pantalla, como ocurre con las computadoras. Por salida de resultados debe entenderse todo medio o canal por el cual es posible apreciar los efectos de las acciones del algoritmo.
Efectividad: El tiempo y esfuerzo por cada paso realizado debe ser preciso, no usando nada más ni nada menos que aquello que se requiera para y en su ejecución.

En resumen, en matemáticas y disciplinas relacionadas, un algoritmo es un conjunto de instrucciones ordenadas y finitas que permite dar solución a problemas, realizar cómputos, procesar datos y efectuar otras tareas o actividades.
Para representar algoritmos de manera gráfica, se suelen usar diagramas de flujo. El primer algoritmo informático publicado fue el diagrama de la "nota G" (siete notas etiquetadas alfabéticamente de la A a la G), de Ada Lovelace, Augusta Ada King, condesa de Lovelace (Lovelace, 1961).

Ejemplos de Algoritmos:

Algoritmo 1
Desarrollar un algoritmo que lea tres valores y calcule el 55.55% de cada uno.

Solución
INICIO
Leer Val1, Val2
Porc1=Val1*55.55/100
Porc2=Val2*55.55/100
IMPRIMIR Porc1, Porc2
FIN

Algoritmo 2
Calcular el número de pulsaciones que una persona debe tener por cada 20 segundos de ejercicio, si la fórmula es $No_pulsac = (220 - edad)/20$.

Solución
INICIO
LEER edad
$No_pulsac = (220 - edad)/20$
IMPRIMIR No_pulsac
FIN

Algoritmo 3
Algoritmo Sumar
Variables
Entero A, B, C

Inicio
Escribir (“Introduzca el primer número entero):”
Leer (A)
Escribir (“Introduzca el segundo número entero):”
Leer (B)
$A+B=C$
Escribir (“la sume es:”, C)
fin

Algoritmo 4
Algoritmo Restar
Variables
Entero D, E, F
Inicio
Escribir (“Introduzca el primer número (entero):”
Leer (D)
Escribir (“Introduzca el segundo número (entero):”
Leer (E)
$D-E=F$
Escribir (“la resta es:”, F)
fin

1.3 Aproximaciones

Aproximar un numero ciertas cifras decimales consiste en encontrar un numero con las cifras pedidas que este muy próximo al número dado.
En la aproximación por defecto se busca el número con un determinado número de cifras que es menor que el dado.
La aproximación por exceso es cuando el numero con las cifras decimales fijadas es inmediatamente mayor al número dado.

Por ejemplo, dado el número 1.3456 vamos a aproximarlo con dos cifras decimales
a) por defecto es 1.34
b) por exceso es 1.35

Al dar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior los errores (absolutos) que se cometen son:
a) | 1.3456 - 1.34 | = 0.0056
b) | 1.3456 - 1.35 | = 0.0044

Redondear un numero consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es aquella con la que se comete un error menor, en el caso anterior si se redondea 1.3456 a dos cifras decimales, el redondeo será 1.35.
En algunos conceptos básicos de los métodos numéricos se pueden encontrar las siguientes cifras: cifras significativas, precisión, exactitud, incertidumbre y sesgo. Ya que forman parte de las aproximaciones y predicciones numéricas más adecuadas.
Al estudiar la teoría de aproximación se comprenden dos tipos de problemas. El primero se presenta cuando una función se muestra de manera explícita, pero se quiere encontrar un tipo más simple de ella, El otro se refiere a la adaptación de funciones a ciertos datos y a la búsqueda de la función óptima en

una clase donde se puedan emplear los datos (Burden, Faires y Burden, 2016; Chapra y Canale, 2015).

1.4 Iteraciones

En este libro podemos observar **iteraciones** de los distintos métodos numéricos contenidos en esta obra, que son el procedimiento de solución y que sirven para resolver problemas en Ingenierías, las iteraciones son propiamente el procedimiento de la secuencia a seguir hasta llegar a la solución esperada de un problema que se resuelve mediante métodos numéricos tales como, por ejemplo, los métodos Bisección, Falsa Posición; Métodos de Euler, Euler Modificado y Runge-Kutta, desarrollados en los Capítulos 2 al 6, respectivamente. Una ilustración de iteraciones mediante un método numérico, se presenta a continuación. Se desea obtener la raíz del polinomio $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ en el intervalo [1,2] . En este caso, la única raíz real es 1.368808108, ya que las otras raíces del polinomio son imaginarias. Entonces, con el método numérico debemos obtener el valor de la raíz real. En la Tabla 2.1 del Capítulo 2 se muestran los resultados de las iteraciones realizadas. Asimismo, tanto en el capítulo 2 como en los capítulos del 3 al 6 podemos observar las iteraciones de los problemas resueltos con procedimiento completo para cada subtema del capítulo correspondiente. Así, las iteraciones para el polinomio de grado 3 mencionado, son

1ª Iteración

> $x_D := 1; x_I := 2;$

$x_D := 1$

$x_I := 2$

> $f(x_D) := x[D]^3 + 2x[D]^2 + 10x[D] - 20$

$f(1) := -7$

> $f(x_I) := x[I]^3 + 2x[I]^2 + 10x[I] - 20$

$f(2) := 16$

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.304347826$:

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.304347826) := -1.33475795$

2a Iteración

Como $f(x_M)$ y > $f(x_D)$ tienen el mismo signo, se reemplaza el valor de x_D con el de x_M, quedando el nuevo intervalo como (1.304347826,2), entonces,

> $x_D := 1.304347826 : x_I := 2$:

> $f(x_D) := -1.33475795$:

> $f(x_I) := 16$:

Con esto, calculamos la siguiente x_M

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.357912305$

$x_M := 1.357912305$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.357912305) := -0.22913572$

3a Iteración

.

.

.

7ª Iteración

x[D] = x[M], quedando el nuevo intervalo como (1.357912305,2), entonces,

> $x_D := 1.368799463 : x_I := 2$:

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.368799463) := -0.00018237$

> $f(x_D) := -0.00018237$:

> $f(x_I) := 16$:

> Con esto, calculamos la siguiente x[M]

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.368806657$

$x_M := 1.368806657$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.368806657) := -0.00003061$

Como

$f(x_M) \approx 0$

Fin. Aquí le paramos a la iteración porque los dos resultados anteriores de x[M] son cuasi iguales.

1.5 Criterio de Convergencia

En este caso, nos referimos a la **convergencia** de los resultados que arrojan las distintas soluciones numéricas, verbigracia, un mismo problema resuelto por varios métodos en que podemos verificar cuántas iteraciones deben realizarse por cada método empleado para llegar al resultado esperado.
Por ejemplo, al resolver por el método de posición falsa un problema que se resolvió por el método de bisección, con el criterio o condición $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ para parar las iteraciones porque el problema ya convergió, es decir, la diferencia entre el valor esperado es de 1×10^{-3}.
Notamos que el número de iteraciones varía entre métodos. Así, por ejemplo para un mismo problema, se requirieron 10 u 11 iteraciones con el método de bisección, mientras que por el método de posición falsa se necesitaron solo 6 iteraciones para llegar al criterio de convergencia estipulado previamente por $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$.
Se entiende por convergencia de un método numérico la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.
En la medida en la que un método numérico requiera de un menor número de iteraciones que otro, para acercarse al valor numérico deseado, se dice que tiene una mayor rapidez de convergencia.
Se entiende por estabilidad de un método numérico el nivel de garantía de convergencia, y es que algunos métodos numéricos no siempre convergen y, por el contrario, divergen; es decir, se alejan cada vez más y más del resultado deseado.
En la medida en la que un método numérico, ante una muy amplia gama de posibilidades de modelado matemático, es más seguro que converja que otro, entonces se dice que tiene una mayor estabilidad.
Normalmente se pueden encontrar métodos que convergen rápidamente, pero son demasiado inestables y, por el contario, modelos muy estables, pero de lenta convergencia.
En métodos numéricos la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite es llamada orden de convergencia. Este concepto es, desde el punto de vista práctico, muy importante si necesitamos trabajar con secuencias de sucesivas aproximaciones de un método iterativo. Incluso puede hacer la diferencia entre necesitar diez o un millón de iteraciones.

En particular, convergencia de orden 1 es llamada convergencia lineal, la de orden 2 convergencia cuadrática y de orden 3 convergencia cúbica.

En matemática computacional, un método iterativo trata de resolver un problema (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$ encontrando la inversa de la matriz A). Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

Dado que estos métodos forman una base, el método converge en N iteraciones, donde N es el tamaño del sistema. Sin embargo, en la presencia de errores de redondeo esta afirmación no se sostiene; además, en la práctica N puede ser muy grande, y el proceso iterativo alcanza una precisión suficiente mucho antes. El análisis de estos métodos es difícil, dependiendo de lo complicada que sea la función del espectro del operador.
Un ejemplo de convergencia es la solución de un problema que se resolvió mediante el *Algoritmo del Método del Punto Fijo* del Capítulo 2 en que se requiere obtener distintas formas $x = g(x)$ *de* $f(x) = 0$, y calcular $|g'(x)|$. Las formas que satisfagan el criterio $|g'(x_0)| < 1$ convergen. El criterio para obtener la

convergencia es $\varepsilon = 10^{-3}$ y $|x_{i-1} - x_i|$. El esquema iterativo es el dado en la Tabla 1.1 (Nieves y Domínguez, 1996).

Tabla 1.1 Esquema iterativo que asegura convergencia del resultado de un problema resuelto por el método de punto fijo.

Valor inicial/Iteraciones	x_0	$f(x_0)$
Primera iteración	$x_1 = g(x_0)$	$f(x_1)$
Segunda iteración	$x_2 = g(x_1)$	$f(x_2)$
Tercera iteración	$x_3 = g(x_2)$	$f(x_3)$
.	.	
.	.	
.	.	
i-ésima iteración	$x_i = g(x_{i-1})$	$f(x_i)$
1+ i-ésima iteración	$x_{i+1} = g(x_i)$	$f(x_{i+1})$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Ejemplo

Calcular la raíz real de la ecuación que resolvió Leonardo de Pisa en 1225 empleando el valor inicial de $x_0 = 1$, la cual es: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Solución

Las tres raíces del polinomio son dos raíces imaginarias y una raíz real. Con el comando *solve* de Maple obtenemos dichas raíces.

> $f(x) := x\text{^}3 + 2 \cdot x\text{^}2 + 10 \cdot x - 20$

$f(x) := x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

> $solve(x\text{^}3 + 2 \cdot x\text{^}2 + 10 \cdot x - 20 = 0, x)$ Evaluamos la única raíz real del resultado del que podemos observar las tres raíces siguientes, separadas por comas

$$\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}-\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\left(352\right.$$
$$\left.+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{13}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$
$$\cdot I\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}\right),$$
$$-\frac{1}{6}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{13}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}\right.$$
$$\left.+\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}\right)$$

$$evalf\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}-\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}\right)$$

1.368808108

ahora, utilizaremos el método de punto fijo para determinar este valor al que converge la función *f(x)*. La siguiente secuencia muestra el algoritmo del método, repetitivo a través de las 10 iteraciones realizadas, aunque, en la iteración 9 se puede parar el proceso porque ya cumple con el criterio $\varepsilon = 1\times 10^{-3}$. El algoritmo del método de punto fijo para resolver el polinomio se presenta a continuación.

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$$

Despejamos la variable x de modo que, alguno de los despejes sea una forma útil para tener éxito de convergencia. Así, despejamos de dos formas

Forma 1

> $x=g(x)$

> $x=\frac{20}{x\text{^}2+2\cdot x+10}$

$$x=\frac{20}{x^2+2x+10}$$

Forma 2

> $x=x^3+2x^2+11x-20$

las derivadas de estas dos formas de *x=g(x)* son, respectivamente:

> $diff\left(\frac{20}{x^2+2x+10},x\right)$

$$-\frac{20\,(2x+2)}{\left(x^2+2x+10\right)^2}$$

> $diff\left(x^3+2x^2+11x-20,x\right)$

$$3x^2+4x+11$$

sustituyendo condiciones iniciales, se obtiene

> $x[0]=1$

$$x_0=1$$

> $x:=1:$

> $\mathrm{abs}\left(-\frac{20\,(2x+2)}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\right)$

$$\frac{80}{169}$$

> $\mathrm{abs}(3x^2 + 4x + 11)$

18

1a iteración

Utilizando el despeje de x de la Forma 1, las iteraciones desde *i=0* hasta *i=9* (donde se asegura convergencia) son, para la primera derivada evaluada en 1, dado que el intervalo de convergencia es [1,2] porque la raíz real se encuentra entre estos números, entonces

> $gprimaxi - \dfrac{20\,(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}$

> $i := 0$:

> $x[\mathrm{i}] := 1$

$x_0 := 1$

> $\mathrm{abs}(x[\mathrm{i}+1] - x[\mathrm{i}])$

$|x_1 - 1|$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\dfrac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

gprimaxi := 0.4733727811

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\dfrac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1) = 1.538461538$

2a iteración

Se repite el algoritmo en todas las iteraciones hasta llegar a la convergencia. Lo único que cambia es la condición inicial, la cual se toma del resultado de la iteración interior correspondiente, como se verá en el Capítulo 2 para este método.

> $i := 1$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.538461538$

$x_1 := 1.538461538$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\dfrac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

gprimaxi := 0.4257189414

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\dfrac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.538461538) = 1.295019157$

3a iteración

> $i := 2$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.295019157$

$x_2 := 1.295019157$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\dfrac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

gprimaxi := 0.4509974730

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\dfrac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.295019157) = 1.401825310$

> $\mathrm{abs}(x[2]-x[1])$

0.243442381

4a iteración

> $i := 3$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.401825310$

$x_3 := 1.401825310$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\frac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4404666778$

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\frac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.401825310) = 1.354209390$

> abs(x[3]-x[2])

0.106806153

5a iteración

> $i := 4$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.354209390$

$x_4 := 1.354209390$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\frac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4452857212$

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\frac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.354209390) = 1.375298093$

> abs(x[4]-x[3])

0.047615920

6a iteración

> $i := 5$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.375298093$

$x_5 := 1.375298093$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\frac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4431746112$

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\frac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.375298093) = 1.365929788$

> abs(x[5]-x[4])

0.021088703

7a iteración

> $i := 6$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.365929788$

$x_6 := 1.365929788$

> $gprimaxi := evalf\left(\mathrm{abs}\left(-\frac{20\,(2x[\mathrm{i}]+2)}{(x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4441171168$

> $g(x[\mathrm{i}]) = evalf\left(\frac{20}{x[\mathrm{i}]^2+2x[\mathrm{i}]+10}\right)$

$g(1.365929788) = 1.370086004$

> abs(x[6]-x[5])

0.009368305

8a iteración

> $i := 7$:

> $x[\mathrm{i}] := 1.370086004$

$x_7 := 1.370086004$

> $gprimaxi := evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{20\,(2x[i]+2)}{(x[i]^2+2x[i]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4436998896$

> $g(x[i]) = evalf\left(\frac{20}{x[i]^2+2x[i]+10}\right)$

$g(1.370086004) = 1.368241023$

> abs(x[7]-x[6])

0.004156216

9a iteración

> $i := 8$:

> $x[i] := 1.368241023$

$x_8 := 1.368241023$

> $gprimaxi := evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{20\,(2x[i]+2)}{(x[i]^2+2x[i]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4438852812$

> $g(x[i]) = evalf\left(\frac{20}{x[i]^2+2x[i]+10}\right)$

$g(1.368241023) = 1.369059813$

> abs(x[8]-x[7])

0.001844981

10a iteración

> $i := 9$:

> $x[i] := 1.369059813$

$x_9 := 1.369059813$

> $gprimaxi := evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{20\,(2x[i]+2)}{(x[i]^2+2x[i]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4438030410$

> $g(x[i]) = evalf\left(\frac{20}{x[i]^2+2x[i]+10}\right)$

$g(1.369059813) = 1.368696397$

> abs(x[9]-x[8])

0.000818790

11a iteración

> $i := 10$:

> $x[i] := 1.368696397$

$x_{10} := 1.368696397$

> $gprimaxi := evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{20\,(2x[i]+2)}{(x[i]^2+2x[i]+10)^2}\right)\right)$

$gprimaxi := 0.4438395498$

> $g(x[i]) = evalf\left(\frac{20}{x[i]^2+2x[i]+10}\right)$

$g(1.368696397) = 1.368857689$

> abs(x[10]-x[9])

0.000363416

Todos estos cálculos podemos observarlos en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Resultados de iteraciones realizadas para obtener la

raíz de la ecuación que resolvió Leonardo de Pisa en 1225.

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$	$g(x)$	$\lvert g'(x)\rvert$
0	1		1.538461538	0.4733727811
1	1.538461538	0.538461538	1.295019157	0.4257189414
2	1.295019157	0.243442381	1.401825310	0.4509974730
3	1.401825310	0.106806153	1.354209390	0.4404666778
4	1.354209390	0.047615920	1.375298093	0.4452857212
5	1.375298093	0.021088703	1.365929788	0.4431746112
6	1.365929788	0.009368305	1.370086004	0.4441171168
7	1.370086004	0.004156216	1.368241023	0.4436998896
8	1.368241023	0.001844981	1.369059813	0.4438852812
9	1.369059813	0.000818790 $\varepsilon < 0.001$	1.368696397	0.4438030410
10	1.368696397	0.000363416	1.368857689	0.4438395498

Como el valor absoluto de la diferencia entre x_8 y x_9 es

```
> ε < 10^(-3)
```

$$\varepsilon < \frac{1}{1000}$$

```
> x8 := 1.368241023 :
> x9 := 1.369059813 :
> x9 - x8
```

0.000818790

Entonces, aquí podemos parar de realizar iteraciones, porque se cumple con el criterio, por tanto, la raíz de la función polinómica $f(x)$ dada es

```
> x9 := 1.369059813 :
```

y

```
> x10 := 1.368696397 :
> x10 - x9
```

-0.000363416

ya se pasa del criterio, porque la diferencia es el valor absoluto de cada dos iteraciones por este método, es decir $\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$ si tomamos la magnitud del valor absoluto (ver Tabla 1.2), además el criterio implica que

```
> ε = evalf(10^(-3))
```

ε = 0.001000000000

Y, el resultado esperado más aproximado para el polinomio $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ es el de la iteración 11, el cual es 1.369059813 ◁ *Respuesta.*

Nota: Cabe mencionar que la forma 2 del despeje hecho al principio de la solución de este problema, es decir

> $x = g(x) = 3x^2 + 4x + 11$

no converge, por eso no se realizaron las iteraciones.

En la Fig. 1.1 se grafica la función dada, la cual converge con 5 iteraciones mediante el método numérico de Newton. Las instrucciones con el software Maple son

```
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> f := x^3+2*x^2+10*x-20:
> Newton(f,x=2.0,tolerance=10^(-2));
1.368810222
> Newton(f,x=2.0, tolerance=10^(-2), output=sequence);
2.0, 1.466666667, 1.371512014, 1.368810222
> Newton(f, x=3.1*Pi/2, output=plot, stoppingcriterion=function_value);
```

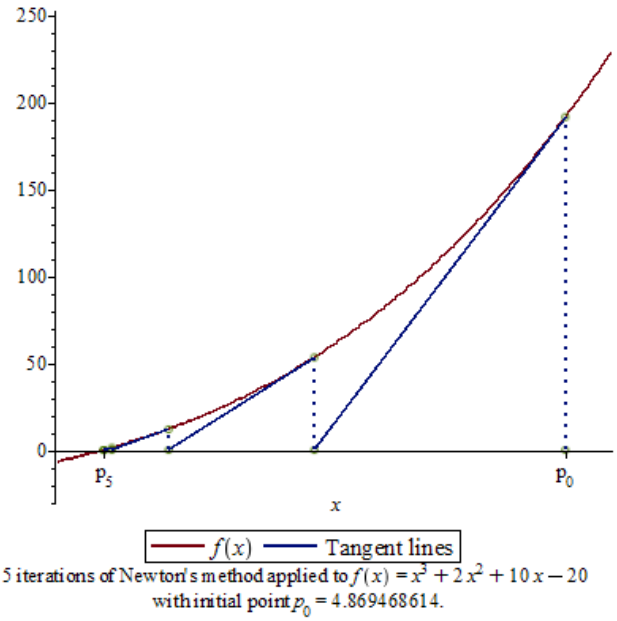


Fig. 1.1 Convergencia de la función $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$

1.6 Tipos de errores comunes

Igualmente, a manera de ilustración, se presentan los **tipos de errores comunes** de los métodos y se hace una comparación de ellos con la finalidad de conocer cuál de los métodos resulta ser más exacto. A modo de ejemplo, en el capítulo 6 observaremos los resultados que arroja el mismo problema resuelto por los métodos de Euler y Euler Modificado para ilustrar los tipos de errores absoluto y relativo.

Error absoluto, error relativo y error porcentual
El error absoluto se define como

$$EA = |p* - p| \tag{1.1}$$

Mientras que el error relativo está dado por

$$ER = \frac{|p* - p|}{p}, \quad p \neq 0 \tag{1.2}$$

Así, el error porcentual es

$$ERP = ER \times 100 \tag{1.3}$$

Donde $p*$ es una aproximación a p.

Ejemplo 1

El valor para un cálculo debería ser $p = 0.10 \times 10^2$, pero se obtuvo el resultado $p* = 0.09 \times 10^2$. Determine los errores relativo y absoluto y el porciento de error.

Solución
Los errores absoluto, relativo y porciento de error, EA, ER y ERP, son

> $EA = \text{abs}(0.09 \cdot 10\text{^}2 - 0.10 \cdot 10\text{^}2)$

$EA = 1.00$

> $ER := \frac{\text{abs}(0.09 \cdot 10\text{^}2 - 0.10 \cdot 10\text{^}2)}{0.10 \cdot 10\text{^}2}$

$ER := 0.1000000000$

> $ERP = ER \cdot 100$

$ERP = 10.00000000$

> $ERP = ER \cdot 100 = 10\,\%$

Ejemplo 2

El valor para un cálculo debería ser $p = 0.48 \times 10^{-4}$ pero se obtuvo el resultado $p* = 0.24 \times 10^{-4}$. Determinar el error relativo, el error absoluto, así como el porciento de error.

Solución
Error absoluto, error relativo y porciento de error:

> $EA = \text{abs}(-0.48 \cdot 10\text{^}(-4) + 0.24 \cdot 10\text{^}(-4))$

$EA = 0.00002400000000$

> $ER := \frac{\text{abs}(-0.48\cdot 10\text{^}(-4) + 0.24\cdot 10\text{^}(-4))}{.48\cdot 10\text{^}(-4)}$

$ER := 0.4999999999$

> $ERP = ER\cdot 100$

$ERP = 49.99999999$

> $ERP = ER\cdot 100 = 49.99999999\,\%$

Conclusión. Cuando los valores de $p*$ y p son muy pequeños o muy grandes, los errores relativos son más significativos que los errores absolutos.

Ejemplo 3

El valor para un cálculo debería ser $p = 0.4889765432\times 10^7$ pero se obtuvo el resultado $p* = 0.4889800000\times 10^7$. Determine los errores relativo y absoluto y el porciento de error.

Solución

Error absoluto, error relativo y porciento de error:

> $EA = \text{abs}(0.4889765432\cdot 10\text{^}(7) - 0.488980000\cdot 10\text{^}(7))$

$EA = 34.568$

> $ER := \frac{\text{abs}(0.4889765432\cdot 10\text{^}(7) - 0.488980000\cdot 10\text{^}(7))}{0.488980000\cdot 10\text{^}(7)}$

$ER := 0.000007069409791$

> $ERP = ER\cdot 100$

$ERP = 0.0007069409791$

$ERP = 0.0007069\%$

El error es muy pequeño, como en realidad ocurre. El error relativo es más significativo, ya que en casos de cantidades grandes o pequeñas el error absoluto es engañoso. Existen otros tipos de errores como los errores de redondeo y truncamiento.

Errores de redondeo y truncamiento

Truncamiento

En análisis numérico, truncamiento es el término usado para reducir el número de dígitos a la derecha del separador decimal, descartando los menos significativos.

Redondeo

Es el proceso mediante el cual se eliminan cifras significativas de un número a partir de su representación decimal, para obtener un valor aproximado.

Reglas de redondeo

Si tenemos con seguridad una cantidad de cifras exactas de un número decimal, podemos dar una aproximación de ese número de menos cifras de dos formas:

✓ Truncamiento: Cortamos el número a partir de cierta cifra. Por ejemplo, π = 3.141592…, truncado a las milésimas sería π = 3.141 y a las diezmilésimas π = 3.1415

✓ Redondeo: Cortamos el número a partir de cierta cifra, pero sumamos uno a la última cifra que aparezca, en el caso de que la primera que omitamos sea mayor o igual que 5. Por ejemplo, redondeando el número π = 3,141592 a las centésimas tenemos π = 3.14, a las milésimas π = 3.142 y a las diezmilésimas π = 3.1416. En general es preferible el redondeo al truncamiento, ya que cometemos un error menor.

Estimación

Algunas veces con el fin de facilitar los cálculos, se suelen redondear los números con los que se opera, y los resultados que se obtienen no son verdaderos, sino que se consideran estimaciones.

Método común

Las reglas del redondeo se aplican al decimal situado en la siguiente posición al número de decimales que se quiere transformar, es decir, si tenemos un número de 3 decimales y queremos redondear a 2, se aplicará las reglas de redondeo:

Dígito menor que 5: Si el siguiente decimal es menor que 5, el anterior no se modifica.

Ejemplo: 12.612. Redondeando a 2 decimales deberemos tener en cuenta el tercer decimal, 12.61.

Dígito mayor que 5: Si el siguiente decimal es mayor o igual que 5, el anterior se incrementa en una unidad.

Ejemplo: 12.618. Redondeando a 2 decimales deberemos tener en cuenta el tercer decimal, 12.62.

Ejemplo: 12.615. Redondeando a 2 decimales deberemos tener en cuenta el tercer decimal, 12.62.

Otros ejemplos:

```
> Sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000) = sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000)
```

$$\sum_{i=1}^{10000} 0.0001000000000 = 1.$$

```
> 1 + Sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000) = 1 + sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000)
```

$$1 + \sum_{i=1}^{10000} 0.0001000000000 = 2.$$

```
> 1000 + Sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000) = 1000 + sum(0.1·10^-3, i = 1
      ..10000)
```

$$1000 + \sum_{i=1}^{10000} 0.0001000000000 = 1001.$$

```
> 10000 + Sum(0.1·10^-3, i = 1 ..10000) = 10000 + sum(0.1·10^-3, i = 1
      ..10000)
```

$$10000 + \sum_{i=1}^{10000} 0.0001000000000 = 10001.$$

Usando el software Maple no hay error de truncamiento:

```
> Digits := 20;
Digits := 20
>
   f := proc( )
     print( "Entering f. Digits is", Digits );
     Digits := Digits + 17;
     print( "Adding 17 to Digits yields", Digits );
   end proc:
> f( );
"Entering f. Digits is", 20
"Adding 17 to Digits yields", 37
> Digits := 20;
Digits := 20
```

Al regresar de f en el procedimiento anterior, Maple restablece los dígitos a su valor al ingresar.

> 1.02^9;
1.19509257
> Digits := 9;
Digits := 9
> 1.02^10;
1.21899442
> interface(displayprecision=5);
-1
> Digits:=20;
Digits := 20
> a:=evalf(1/8);
a := 0.12500
> a*5;
0.62500

Por ejemplo, dados los números reales:
3.14159265358979...
32.438191288
6.3444444444444
Para truncar estos números a 4 dígitos decimales, sólo consideramos los 4 dígitos a la derecha del punto decimal. El resultado es:
3.1415
32.4381
6.3444
Nótese que, en algunos casos, el truncamiento dará el mismo resultado que el redondeo, pero el truncamiento no redondea hacia arriba ni hacia abajo los dígitos, meramente los corta en el dígito especificado. El error de truncamiento puede ser hasta el doble del error máximo que se puede tener usando redondeo.
Multiplicando los números reales dados, se tiene que
> A: =3.14159265358979;
> B:=32.438191288;
> C:=6.3444444444444;
> $A \cdot B \cdot C$
$A := 3.14159265358979$
$B := 32.438191288$
$C := 6.3444444444444$
646.54700164149729334
> $evalf(A \cdot B \cdot C)$
646.54700164149729334

Ahora, hacemos la multiplicación de los números truncados a 4 dígitos.
> A:=3.1415;
> B:=32.4381;
> C:=6.3444;
$A := 3.1415$
$B := 32.4381$
$C := 6.3444$
> $A \cdot B \cdot C$
646.521584772060

Redondeo
Ahora, redondeamos los números reales dados a 4 dígitos y los multiplicamos:

> A:=3.1416;
> B:=32.4382;
> C:=6.3444;
> $A \cdot B \cdot C$
$A := 3.1416$
$B := 32.4382$
$C := 6.3444$
646.544157956928
El error de truncamiento puede ser hasta el doble del error máximo que se puede tener usando redondeo:
Truncamiento: =1-646.521584772060/646.54700164149729334;
$Truncamiento := 0.00003931171186744857$
> $Redondeo := 1 - \frac{646.544157956928}{646.54700164149729334}$
$Redondeo := 0.00000439826425932469$
Diferencia de los Errores=0.3931171186744857e-4-0.439826425932469e-5;
$DiferenciaErrores = 0.00003491344760812388$
> $ErrorPorcentual := \frac{Redondeo}{Truncamiento} \cdot 100$
$ErrorPorcentual := 11.188177900150417763$
El error de redondeo significa el 11.2% del error cometido por truncamiento:
> $ExcesoErrorRedondeo = 100 - ErrorPorcentual$
$ExcesoErrorRedondeo = 88.81182209984958237$
por tanto, el error de truncamiento es en este caso hasta el 89% mayor que el error por redondeo.

En Maple, el comando RelativeError calcula el error relativo de xa con respecto al valor exacto xe.
Un número entero positivo; la variable de entorno Dígitos se establecerá en este número entero durante la ejecución de este procedimiento. De forma predeterminada, los dígitos son 10. Ejemplos:
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> appr := 2.59e8;
$appr := 2.59000\,10^{8}$
> exac := 2.59e8;
$exac := 2.59000\,10^{8}$
> RelativeError(exac, appr, digits=5);
0.00000
El comando AbsoluteError calcula el error absoluto de xa con respecto al valor exacto xe.
Al igual que para el error relativo, un número entero positivo; la variable de entorno Dígitos se establecerá en este número entero durante la ejecución de este procedimiento. De forma predeterminada, los dígitos son 10. Ejemplos
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> appr := 10.0;
$appr := 10.00000$
> exac := 9.8;
$exac := 9.80000$
> AbsoluteError(exac, appr, digits=5);
0.20000

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE NÚMEROS

2.1 Objetivo Particular del Capítulo 2

2.2 Método de Bisección

2.3 Método de Posición Falsa

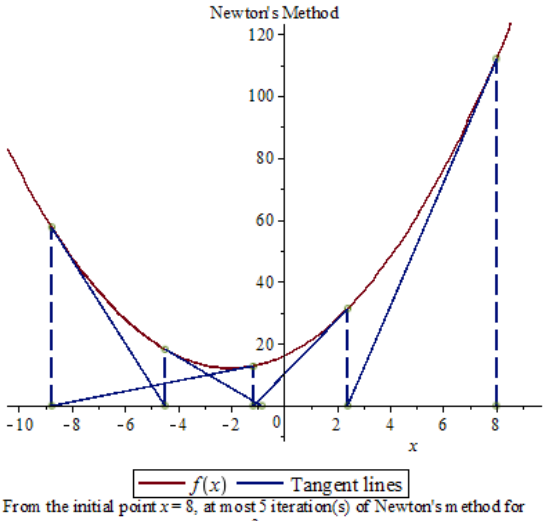
2.4 Método de Punto Fijo

2.5 Método de Newton-Rahpson

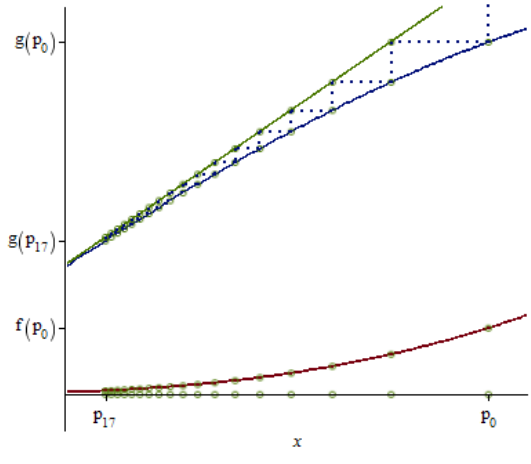
2.6 Método de la Secante

2.7 Métodos para resolver raíces múltiples: bisección, Newton modificado, secante y posición falsa

2.8 Soluciones Numéricas Ingenieriles del Capítulo 2



From the initial point $x = 8$, at most 5 iteration(s) of Newton's method for $f(x) = x^2 + 4x + 16$



17 iterations of the fixed-point iteration applied to $f(x) = x - \sin(x)$ with initial point $p_0 = 1.0$.

2.1 Objetivo Particular del Capítulo 2

Facilitar soluciones para resolver problemas a través de métodos de intervalos y métodos abiertos y sus aplicaciones, para encontrar las raíces de una determinada ecuación.

El objeto del cálculo de las raíces de una ecuación es determinar los valores de x para los que se cumple

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

La determinación de las raíces de una ecuación es uno de los problemas más antiguos en matemáticas. En este capítulo se presentan soluciones de métodos numéricos de bisección, punto fijo, posición falsa, Newton-Raphson y método de la secante.

2.2 Método de la Bisección

De igual forma que el método de la posición falsa, este método requiere de dos valores iniciales a cada lado de la raíz y que, al ser sustituidos dichos valores en la función dada, resulten ser de signos opuestos. El algoritmo para este método consiste en las expresiones siguientes

$$x_M = \frac{x_I + x_D}{2} \tag{2.2}$$

$$\frac{a}{2^n} \le \varepsilon \tag{2.3}$$

$$n = \frac{ln(a) - ln(\varepsilon)}{ln(2)}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \tag{2.4}$$

Donde,

a	Tamaño de intervalo original
n	Número de iteraciones
x_I	Valor inicial del intervalo $[x_I, x_D]$
x_D	Valor inicial del intervalo $[x_I, x_D]$

Además, $f(x_I)$ y $f(x_D)$ es la función dada evaluada en los valores iniciales del intervalo $[x_I, x_D]$.

Problema

Se desea determinar las raíces de la ecuación $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$ por el método de bisección.

Procedimiento: Para iterar se siguen 4 pasos:

Paso 1

Dados los valores iniciales (después de graficar la función, Fig. 2.1, y hallar una raíz real en el intervalo cerrado $[x_D, x_I]$) se sigue el procedimiento, a saber en este caso

```
> x_D := valorD; x_I := valorI;
x_D := 1.368652344
x_I := 1.368896484
```

> $f(x_D) := \#$

$f(1.368652344) := -0.00328587$

> $f(x_I) := \#$

$f(1.368896484) := 0.00186444$

> $x_M = evalf\left(\frac{x_I + x_D}{2}\right)$

$1.368896484 = 1.368774414$

> $x_M := \#$

$x_M := 1.368774414$

> $f(x_M) := \#$

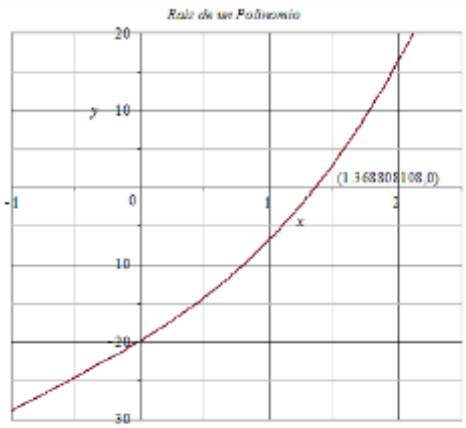


Fig. 2.1 Gráfica del polinomio mostrando su raíz real.

Paso 2

Si

> $f(x_M)$ ≠ signo que $f(x_D)$

Entonces se reemplaza el valor de x_I con el de x_M con lo cual se tiene el intervalo [valorD, valor reemplazado] o $[x_D, x_M]$, con lo que se tiene que seguir el procedimiento del Paso 1.

Paso 3

> $f(x_M)$ ≠ signo que $f(x_I)$

Entonces se reemplaza el valor de x_D con el de x_M con lo cual se tiene el intervalo $[x_M, x_I]$, con lo que se tiene que seguir el procedimiento del Paso 1.

Paso 4

Se para el proceso cuando

> abs$(f(x_M))$ < epsilon; epsilon = $evalf(10^{\wedge}(-3))$

$|f(x_M)| < \varepsilon$

$\varepsilon = 0.001000000000$

o cuando las x_{Ms} sean iguales.

Ejemplo para ilustrar el método de bisección

Obtener la raíz del polinomio dado en el intervalo [1,2] (Nieves y Domínguez, 2012)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Solución

Graficamos la función en un intervalo dado para observar las raíces. En este caso, hay una raíz entre [1,2] que es el intervalo dado (ver Fig. 2.1), las raíces de dicho polinomio son dos raíces imaginarias y una raíz real, dado que el polinomio es de tercer grado, las cuales vienen dadas por

$$\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}-\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{6}\left(352\right.$$
$$\left.+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{13}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$
$$\cdot I\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}\right),$$
$$-\frac{1}{6}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}+\frac{13}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}\right.$$
$$\left.+\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}\right)$$

la única raíz real es

> $evalf\left(\frac{1}{3}\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}-\frac{26}{3\left(352+6\sqrt{3930}\right)^{1/3}}-\frac{2}{3}\right)$

1.368808108

ya que las otras raíces son imaginarias. Entonces, con el método de bisección debemos obtener el valor de

$x_D = 1.368808108$

> $x_D = 1.368808108 \approx x_I$

Evaluamos los valores del intervalo dado en la función y encontramos que

> $x := 1:$

> $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

$f(1) = -7$

> $x := 2:$

> $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

$f(2) = 16$

entonces,

> $f(1) = -7$

y

> $f(2) = 16$

1a Iteración

Aplicando el algoritmo de este método y los valores de x_D y x_I se encuentran en lados opuestos de la raíz que se desea encontrar, en el intervalo $[x_D, x_I]$

> $x_D := 1; x_I := 2;$

$x_D := 1$

$x_I := 2$

intervalo $[1, 2]$

> $f(x_D) := x[D]^3 + 2x[D]^2 + 10x[D] - 20$

$f(1) := -7$

> $f(x_I) := x[I]^3 + 2x[I]^2 + 10x[I] - 20$

$f(2) := 16$

evaluamos el punto medio del intervalo inicial

> $x_M = evalf\left(\frac{x_I + x_D}{2}\right)$

$x_M = 1.500000000$

> $x_M := 1.5$:

> $f(x_M) := (x[M])^3 + 2\cdot(x[M])^2 + 10\cdot(x[M]) - 20$

$f(1.5) := 2.875$

En la 11ª iteración, la raíz del polinomio, finalmente resultó ser

> $x_D := 1.368652344; x_I := 1.368896484;$ *L.Q.Q.D.*

Aunque desde la 10a iteración, o *n = 10* como se calculó, el criterio de convergencia mediante

> $\varepsilon := 10\text{^}(-3)$

$\varepsilon := \frac{1}{1000}$

se observa con épsilon = 0.00098, el cual es aproximadamente igual al criterio de convergencia estipulado. El procedimiento completo, se presenta después de la siguiente introducción al método.

El Método de la bisección, es un método numérico utilizado para encontrar las raíces de una función de valor real. Es un tipo de método de intervalo, lo que significa que comienza con un intervalo X_D - X_I que contiene la raíz y reduce iterativamente el intervalo hasta que se encuentre la raíz con el grado de precisión deseado (según el criterio que se haya elegido para medir el error del método).

Para medir la precisión de la raíz obtenida, se pueden usar dos criterios, uno que mide la diferencia entre la última X_M obtenida (siendo X_M el promedio de X_D y X_I), dicho criterio está dado por $\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}|$, y otro criterio, que mide la altura en el eje *Y* de la raíz obtenida; entre menor sea, más precisa es la raíz, es decir, $|f(X_M)|$ debe acercarse lo más posible a cero.

Se evalúa $f(X_M)$ para luego comparar ese resultado con los intervalos evaluados en la función $f(X_D)$ y $f(X_I)$. Al hacer esto, es importante tomar en cuenta el signo de $f(X_D)$ y $f(X_I)$, al tiempo que $f(X_M)$ tendrá en común el signo con un extremo del intervalo, será entonces cuando un extremo del intervalo, X_D o X_I tomará el valor de X_M. El proceso se repite hasta que el intervalo es lo suficientemente pequeño. El algoritmo del método de la bisección es pues,

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right)$$

Si bien, el método de bisección es simple, converge lentamente, porque reduce el tamaño del intervalo a la mitad en cada iteración. Sin embargo, todavía se usa en algunos casos debido a su simplicidad y confiabilidad. Es un método simple y confiable para encontrar las raíces de una función de valor real.

Para calcular una de las raíces de una función, debemos definir el intervalo en el que se encuentra la raíz, para ello, debemos visualizar la gráfica de la función y observar dónde la función corta al eje *X*. Analizando el mismo polinomio, el intervalo es [1,2], siendo la raíz 1.368808108. Analicemos el polinomio $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ mediante el método de bisección.

Ahora, para iniciar con la primera iteración, debemos sustituir el intervalo que definimos anteriormente en el polinomio dado, luego, evaluar en la función los valores de X_D, X_I y X_M, y comparar los resultados para luego remplazar y obtener el nuevo intervalo, el cual, será el punto de partida de la nueva iteración.

En cada iteración, observaremos como el valor de $\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}|$ irá disminuyendo, en su lugar podemos usar $|f(X_M)|$ y detendremos las iteraciones cuando su valor sea aproximadamente igual a 1×10^{-3}.

Iteración 1

Intervalo: $[1,2]$. $X_D = 1$, $X_I = 2$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1+2)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) = 1.5$$

$$f(X_D) = f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20 = -7$$

$$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$$

$$f(X_M) = f(1.5) = (1.5)^3 + 2(1.5)^2 + 10(1.5) - 20 = 2.875$$

Como $f(X_M)$ tiene el mismo signo que $f(X_I)$, entonces $X_I = X_M$. También es válido $f(X_M) \cdot f(X_I) > 0, X_I = X_M$

Iteración 2

Intervalo $[1,1.5]$. $X_D = 1$, $X_I = 1.5$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1+1.5)}{2}\right) = \left(\frac{2.5}{2}\right) = 1.25$$

$$f(X_D) = f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20 = -7$$

$$f(X_I) = f(1.5) = (1.5)^3 + 2(1.5)^2 + 10(1.5) - 20 = 2.875$$

$$f(X_M) = f(1.25) = (1.25)^3 + 2(1.25)^2 + 10(1.25) - 20 = -2.421875$$

$$f(X_M) \cdot f(X_D) > 0, \quad X_D = X_M$$

Comprobemos el error en esta iteración: $\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.5 - 1.25| = 0.25$, tenemos un error de 0.25, mucho más grande que el error máximo admitido por el método. De igual forma, comprobando con el segundo criterio obtenemos que $|f(X_M)| = 2.42$ muy lejos de nuestro objetivo.

Iteración 3

Intervalo: $[1.25,1.5]$. $X_D = 1.25$, $X_I = 1.5$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.25+1.5)}{2}\right) = \left(\frac{2.5}{2}\right) = 1.375$$

$$f(X_D) = f(1.25) = (1.25)^3 + 2(1.25)^2 + 10(1.25) - 20 = -2.421875$$

$$f(X_I) = f(1.5) = (1.5)^3 + 2(1.5)^2 + 10(1.5) - 20 = 2.875$$

$$f(X_M) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$$

$$f(X_M) \cdot f(X_I) > 0, \quad X_I = X_M$$

$$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.375 - 1.25| = 0.125$$

Iteración 4

Intervalo: $[1.25,1.375]$. $X_D = 1.25$, $X_I = 1.375$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.25+1.375)}{2}\right) = 1.3125$$

$$f(X_D) = f(1.25) = (1.25)^3 + 2(1.25)^2 + 10(1.25) - 20 = -2.421875$$

$$f(X_I) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$$

$$f(X_M) = f(1.3125) = (1.3125)^3 + 2(1.3125)^2 + 10(1.3125) - 20 = -1.168701171875$$

$$f(X_M) \cdot f(X_D) > 0, X_D = X_M$$

$$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.375 - 1.3125| = 0.0625$$

Iteración 5

Intervalo: $[1.3125,1.375]$. $X_D = 1.3125 \quad X_I = 1.375$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.3125+1.375)}{2}\right) = 1.34375$$

$$f(X_D) = f(1.3125) = (1.3125)^3 + 2(1.3125)^2 + 10(1.3125) - 20 = -1.168701171875$$

$$f(X_I) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$$

$$f(X_M) = f(1.34375) = (1.34375)^3 + 2(1.34375)^2 + 10(1.34375) - 20 = -0.524810791015625$$

$f(X_M)\cdot f(X_D)>0,\ X_D = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.34375 - 1.3125| = 0.03125$

Iteración 6

Intervalo: $[1.34375,1.375]$. $X_D = 1.34375$, $X_I = 1.375$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.34375 + 1.375)}{2}\right) = 1.359375$

$f(X_D) = f(1.34375) = (1.34375)^3 + 2(1.34375)^2 + 10(1.34375) - 20 = -0.524810791015625$

$f(X_I) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$

$f(X_M) = f(1.359375) = (1.359375)^3 + 2(1.359375)^2 + 10(1.359375) - 20 = -0.198459625244141$

$f(X_M)\cdot f(X_D)>0,\ X_D = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.34375 - 1.359375| = 0.01563$

Iteración 7

Intervalo: $[1.359375,1.375]$. $X_D = 1.359375$, $X_I = 1.375$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.359375 + 1.375)}{2}\right) = 1.3671875$

$f(X_D) = f(1.359375) = (1.359375)^3 + 2(1.359375)^2 + 10(1.359375) - 20$

$= -0.198459625244141$

$f(X_I) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$

$f(X_M) = f(1.3671875) = (1.3671875)^3 + 2(1.3671875)^2 + 10(1.3671875) - 20$

$= -0.034172534942627$

$f(X_M)\cdot f(X_D)>0, X_D = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.359375 - 1.3671875| = 0.0078075$

Iteración 8

Intervalo: $[1.3671875,1.375]$. $X_D = 1.3671875$, $X_I = 1.375$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.3671875 + 1.375)}{2}\right) = 1.37109375$

$f(X_D) = f(1.3671875) = (1.3671875)^3 + 2(1.3671875)^2 + 10(1.3671875) - 20$

$= -0.034172534942627$

$f(X_I) = f(1.375) = (1.375)^3 + 2(1.375)^2 + 10(1.375) - 20 = 0.130859375$

$f(X_M) = f(1.37109375) = (1.37109375)^3 + 2(1.37109375)^2 + 10(1.37109375) - 20$

$= 0.048250138759613$

$f(X_M)\cdot f(X_I)>0,\ X_I = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.3671875 - 1.37109375| = 0.00390625$

Iteración 9

Intervalo: $[1.3671875,1.37109375]$. $X_D = 1.3671875$, $X_I = 1.37109375$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.3671875 + 1.37109375)}{2}\right) = 1.369140625$

$f(X_D) = f(1.3671875) = (1.3671875)^3 + 2(1.3671875)^2 + 10(1.3671875) - 20$

$= -0.034172534942627$

$f(X_I) = f(1.37109375) = (1.37109375)^3 + 2(1.37109375)^2 + 10(1.37109375) - 20$

$= 0.048250138759613$

$f(X_M) = f(1.369140625) = (1.369140625)^3 + 2(1.369140625)^2 + 10(1.369140625) - 20$

$= 0.00701550394296646$

$f(X_M)\cdot f(X_I)>0,\ X_I = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.37109375 - 1.369140625| = 0.001953125$

Iteración 10

Intervalo: $[1.3671875, 1.369140625]$, $X_D = 1.3671875$, $X_I = 1.369140625$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.3671875 + 1.369140625)}{2}\right) = 1.3681640625$

$f(X_D) = f(1.3671875) = (1.3671875)^3 + 2(1.3671875)^2 + 10(1.3671875) - 20$

$= -0.034172534942627$

$f(X_I) = f(1.369140625) = (1.369140625)^3 + 2(1.369140625)^2 + 10(1.369140625) - 20$

$= 0.00701550394296646$

$f(X_M) = f(1.3681640625) = (1.3681640625)^3 + 2(1.3681640625)^2 + 10(1.3681640625) - 20$

$= -0.0135843371972442$

$f(X_M)\cdot f(X_D)>0,\ X_D = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.369140625 - 1.3681640625| = 0.0009765625$

En esta iteración, ya podríamos detenernos, pues, ya hemos llegado al error máximo permitido por el método de $\varepsilon = 1\times 10^{-3}$, pero para más precisión, continuaremos hasta lograr que $|f(X_M)| \approx 0.001$.

Iteración 11

Intervalo: $[1.3681640625, 1.369140625]$, $X_D = 1.3681640625$, $X_I = 1.369140625$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.3681640625 + 1.369140625)}{2}\right) = 1.36865234375$

$f(X_D) = f(1.3681640625) = (1.3681640625)^3 + 2(1.3681640625)^2 + 10(1.3681640625) - 20$

$= -0.0135843371972442$

$f(X_I) = f(1.369140625) = (1.369140625)^3 + 2(1.369140625)^2 + 10(1.369140625) - 20 =$

0.00701550394296646

$f(X_M) = f(1.36865234375) = (1.36865234375)^3 + 2(1.36865234375)^2 + 10(1.36865234375)$

$- 20 = -0.0032858724007383$

$f(X_M)\cdot f(X_D)>0, X_D = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.3681640625 - 1.36865234375| = 0.00048828125$

Iteración 12

Intervalo: $[1.36865234375, 1.369140625]$. $X_D = 1.36865234375$, $X_D = 1.36865234375$

$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.36865234375 + 1.369140625)}{2}\right) = 1.368896484375$

$f(X_D) = f(1.36865234375) = (1.36865234375)^3 + 2(1.36865234375)^2 + 10(1.36865234375)$

$- 20 = -0.0032858724007383$

$f(X_I) = f(1.369140625) = (1.369140625)^3 + 2(1.369140625)^2 + 10(1.369140625) - 20 =$

0.00701550394296646

$f(X_M) = f(1.368896484375) = (1.368896484375)^3 + 2(1.368896484375)^2 + 10(1.368896484375)$

$- 20 = 0.00186445178405847$

$f(X_M)\cdot f(X_I)>0, X_I = X_M$

$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.36865234375 - 1.368896484375| = 0.00024414063$

Iteración 13

Intervalo: $[1.36865234375, 1.368896484375]$. $X_D = 1.36865234375$, $X_I = 1.368896484375$

$$X_M = \left(\frac{(X_D + X_I)}{2}\right) = \left(\frac{(1.36865234375 + 1.368896484375)}{2}\right) = 1.3687744140625$$

$$f(X_D) = f(1.36865234375) = (1.36865234375)^3 + 2(1.36865234375)^2$$
$$+ 10(1.36865234375) - 20 = -0.0032858724007383$$

$$f(X_I) = f(1.368896484375) = (1.368896484375)^3 + 2(1.368896484375)^2$$
$$+ 10(1.368896484375) - 20 = 0.00186445178405847$$

$$f(X_M) = f(1.3687744140625) = (1.3687744140625)^3 + 2(1.3687744140625)^2$$
$$+ 10(1.3687744140625) - 20 = -0.000710801299646846$$

$$\varepsilon = |X_M - X_{Mi+1}| = |1.368896484375 - 1.3687744140625| = 0.000122070313$$

Finalmente, hemos logrado que $|f(X_M)| \approx 0.001$, dándonos un valor muy aproximado de la raíz. El valor aproximado obtenido de la raíz es: 1.3687744140625. Siendo *1.368808108* el valor aproximado de la raíz real de cálculos analíticos. La diferencia entre ambos es de *0.0000336939375*, de tal forma que podríamos redondear la raíz obtenida a cuatro decimales y no habría diferencia con la raíz real.

Se puede concluir que el método de la bisección es una forma efectiva de calcular la raíz de una ecuación de teoría de números. En este caso, se requirieron 13 iteraciones para obtener un resultado con un error $\varepsilon \approx 0.0001$, lo que sugiere que el método es un tanto rápido y eficiente.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que el número de iteraciones necesarias para obtener un resultado preciso puede variar dependiendo de la función y de los valores iniciales que se utilicen, ya que, si se utilizan valores iniciales muy amplios, por ejemplo, el método tardará más en converger. Por lo tanto, esta conclusión solo es válida en el contexto de esta situación específica. En la Tabla 2.1 se muestran los resultados de las iteraciones.

Tabla 2.1 Resultados de las iteraciones realizadas al polinomio de grado 3 para obtener su raíz real.

i	X_D	X_I	X_M	$\varepsilon = \lvert X_M - X_{Mi+1} \rvert$	$\lvert f(X_M) \rvert$
0	1	2			
1	1	2	1.5		2.875
2	1	1.5	1.25	0.25	2.421875
3	1.25	1.5	1.325	0.125	0.130859375
4	1.25	1.375	1.3125	0.0625	1.168701171875
5	1.3125	1.375	1.34375	0.03125	0.524810791015625
6	1.34125	1.375	1.359375	0.01563	0.198459625244141
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.0078075	0.034172534942627
8	1.3671875	1.375	1.37109375	0.00390625	0.048250138759613
9	1.3671875	1.37109375	1.369140625	0.001953125	0.00701550394296646
10	1.3671875	1.369140625	1.3681640625	0.0009765625	0.0135843371972442
11	1.3681640625	1.369140625	1.36865234375	0.00048828125	0.0032858724007383
12	1.36865234375	1.369140625	1.368896484375	0.00024414063	0.00186445178405847
13	1.36865234375	1.368896484	1.368774414062	0.000122070313	0.00071080129964684

2.3 Método de la Posición Falsa

El método de la posición falsa, es un método numérico para encontrar una solución aproximada de una ecuación no lineal. Es una técnica iterativa que se utiliza para encontrar la solución de una ecuación en un intervalo determinado que contiene la solución real. La idea básica detrás del método es utilizar el Teorema de Bolzano en conjunto con el algoritmo propio del método para aproximar la solución en cada iteración.

Algoritmo del método de la posición falsa

$$X_M = X_M - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} \tag{2.5}$$

El método de la posición falsa, funciona de una manera muy similar al método de la bisección, ya que parte de un intervalo $[(X_D),(X_I)]$ donde se encuentra la raíz de la ecuación. La diferencia, está en el algoritmo. En el método de bisección, el algoritmo, básicamente consiste en promediar los intervalos y remplazar un extremo del intervalo por ese promedio.
En la posición falsa, este algoritmo no es un simple promedio, es el algoritmo del método de la secante (adaptado a este método), el cual, va reduciendo el intervalo en cada iteración, al calcular la intersección de la recta (generada por el intervalo $[(X_D),(X_I)]$ con el eje de las abscisas. Y para la reducción del intervalo, se usa el mismo procedimiento que en el método de la bisección, pues, se evalúa en la función cada extremo del intervalo ya definido $f(X_D), f(X_I)$, se obtienen valores con signos opuestos y se evalúa en la función el resultado de aplicar $f(X_M)$ al intervalo, para luego, remplazar uno de los extremos del intervalo con el valor de X_M, dependiendo con que función $f(X_D)$ o $f(X_I)$ tenga signo en común $f(X_M)$.
Ahora bien, en este método, tenemos dos criterios para obtener la raíz con la precisión deseada, los cuales son: $|f(X_M)| \le \varepsilon$ y $|X_D - X_M| \le \varepsilon$ donde $\varepsilon = \frac{1}{1000} = 1\times10^{-3} = 0.001$, el máximo error admitido, aunque se puede utilizar un valor menor para ε si se prefiere mayor precisión, en este caso, usaremos el valor de ε ya mencionado en $|f(X_M)| \le \varepsilon$.

Teorema de Bolzano
Si una función $f(X)$ está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ **y** $f(X)$ toma valores de distinto signo en los extremos a y b**,** entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a,b) en el que se anula la función.

Volveremos a calcular la raíz del mismo polinomio, $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$**,** pero ahora con el método de la posición falsa. El intervalo inicia entre el valor en que se encuentra la raíz, ya lo conocemos, $[1,2]$, y también, el valor aproximado de la raíz real de 1.368808108.
Partimos del intervalo $[1,2]$, sustituimos su valor en el polinomio, luego, evaluamos las funciones en X_D, X_I y X_M, observamos que extremo del intervalo es remplazado y finalmente calculamos el error en la iteración con los criterios ya mencionados anteriormente.
Iteración 1
Intervalo: $[1,2]$ $X_D = 1$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1 - \frac{(1-2)\cdot -7}{(-7)-(16)} = 1.30434782608696$$

$f(X_D) = f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20 = -7$
$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$
$f(X_M) = f(1.30434782608696) = (1.30434782608696)^3 + 2(1.30434782608696)^2$
$+ 10(1.30434782608696) - 20 = -1.33475795183693$

En esta parte, podemos apreciar que $f(X_M)$ tiene mismo signo que $f(X_D)$, por lo tanto X_D tomará el valor de X_M o lo que es lo mismo

$f(X_M) \cdot f(X_D) > 0 \therefore X_D = X_M$

De esta manera, se reduce el intervalo en la siguiente iteración. $|f(X_M)| \approx 1.335$

Como podemos ver, desde la primera iteración nos acercamos al valor real aproximado de la raíz, aún así, estamos demasiado lejos de valor de ε que queremos obtener, así que continuaremos iterando hasta llegar a $|f(X_M)| \approx 0.001$.

Iteración 2

Intervalo: $[1.30434782608696, 2]$ $X_D = 1.30434782608696$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I) \cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1.30434782608696$$
$$- \frac{(1.30434782608696 - 2) \cdot -1.33475795183693}{(-1.33475795183693) - (16)} = 1.35791230465787$$

$f(X_D) = f(1.30434782608696) = (1.30434782608696)^3 + 2(1.30434782608696)^2$
$+ 10(1.30434782608696) - 20 = -1.33475795183693$
$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$
$f(X_M) = f(1.35791230465787) = (1.35791230465787)^3 + 2(1.35791230465787)^2$
$+ 10(1.35791230465787) - 20 = -0.229135729587334$
$f(X_M) \cdot f(X_D) > 0 \therefore X_D = X_M$
$|f(X_M)| \approx 0.229$

Iteración 3

Intervalo: $[1.35791230465787, 2]$ $X_D = 1.35791230465787$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I) \cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1.35791230465787$$
$$- \frac{(1.35791230465787 - 2) \cdot -0.229135729587334}{(-0.229135729587334) - (16)} = 1.36697780481651$$

$f(X_D) = f(1.35791230465787) = (1.35791230465787)^3 + 2(1.35791230465787)^2$
$+ 10(1.35791230465787) - 20 = -0.229135729587334$
$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$
$f(X_M) = f(1.36697780481651) = (1.36697780481651)^3 + 2(1.36697780481651)^2$
$+ 10(1.36697780481651) - 20 = -0.0385918767783764$
$f(X_M) \cdot f(X_D) > 0 \therefore X_D = X_M$
$|f(X_M)| \approx 0.039$

Iteración 4

Intervalo: $[1.36697780481651, 2]$ $X_D = 1.36697780481651$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1.36697780481651$$

$$- \frac{(1.36697780481651 - 2)\cdot -0.0385918767783764}{(-0.0385918767783764) - (16)} = 1.36850097559997$$

$$f(X_D) = f(1.36697780481651) = (1.36697780481651)^3 + 2(1.36697780481651)^2$$
$$+ 10(1.36697780481651) - 20 =$$
$$-0.0385918767783764$$

$$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$$

$$f(X_M) = f(1.36850097559997) = (1.36850097559997)^3 + 2(1.36850097559997)^2$$
$$+ 10(1.36850097559997) - 20 =$$
$$-0.00647872814705863$$

$$f(X_M)\cdot f(X_D) > 0 \therefore X_D = X_M$$

$$|f(X_M)| \approx 0.006$$

Iteración 5

Intervalo: $[1.36850097559997, 2]$ $X_D = 1.36850097559997$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1.36850097559997$$

$$- \frac{(1.36850097559997 - 2)\cdot -0.00647872814705863}{(-0.00647872814705863) - (16)} = 1.36875657900742$$

$$f(X_D) = f(1.36850097559997) = (1.36850097559997)^3 + 2(1.36850097559997)^2$$
$$+ 10(1.36850097559997) - 20 = -0.00647872814705863$$

$$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$$

$$f(X_M) = f(1.36875657900742) = (1.36875657900742)^3 + 2(1.36875657900742)^2$$
$$+ 10(1.36875657900742) - 20 = -0.00108704282533978$$

$$f(X_M)\cdot f(X_D) > 0 \therefore X_D = X_M$$

$$|f(X_M)| \approx 0.001$$

Aquí, ya nos podríamos detener, pues, hemos cumplido con el criterio establecido anteriormente para detener las iteraciones, solo que, hay un pequeño matiz, y es que $|f(X_M)|$ está redondeado a tres decimales, con dicho redondeo, cumplimos con el criterio, pero, si redondeamos a cuatro decimales, entonces, tendríamos $|f(X_M)| \approx 0.0012$ lo cual, está ligeramente por encima de $|f(X_M)| \approx 0.001$, por ello, hemos realizado una iteración más.

Iteración 6

Intervalo: $[1.36875657900742, 2]$ $X_D = 1.36875657900742$, $X_I = 2$

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)} = 1.36875657900742$$

$$- \frac{(1.36875657900742 - 2)\cdot -0.00108704282533978}{(-0.00108704282533978) - (16)} = 1.36879946288337$$

$$f(X_D) = f(1.36875657900742) = (1.36875657900742)^3 + 2(1.36875657900742)^2$$
$$+ 10(1.36875657900742) - 20 = -0.00108704282533978$$

$$f(X_I) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$$

$$f(X_M) = f(1.36879946288337) = (1.36879946288337)^3 + 2(1.36879946288337)^2$$
$$+10(1.36879946288337) - 20 = -0.000182374360246484$$
$$|f(X_M)| \approx 0.0002$$

Hemos terminado. El valor aproximado de la raíz es: 1.36879946288337 .

Análisis. Obtuvimos un valor muy aproximado al valor analítico con solo seis iteraciones, siendo el valor obtenido 1.36879946288337 y el valor de la raíz real calculada con un método analítico fue 1.368808108, teniendo una diferencia de $8.64511663 \times 10^{-6}$. Para esta función en específico, el método de la posición falsa, es más eficiente que el método de la bisección, solo requirió seis iteraciones, en comparación con las trece que se necesitaron para llegar a un margen de error similar con el método de la bisección. En la Tabla 2.2 se muestran los resultados.

Tabla 2.2 Resultados de las iteraciones para determinar la raíz del polinomio de grado 3 con el método de posición falsa.

i	X_D	X_I	X_M	$\|f(X_M)\|$
0	1	2		
1	1	2	1.30434782608696	1.33475795183693
2	1.30434782608696	2	1.35791230465787	0.229135729587334
3	1.35791230465787	2	1.36697780481651	0.0385918767783764
4	1.36697780481651	2	1.36850097559997	0.00647872814705863
5	1.36850097559997	2	1.36875657900742	0.00108704282533978
6	1.36875657900742	2	1.36879946288337	0.000182374360246484

Solución alternativa

Volvemos a resolver por el método de posición falsa para la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ (Nieves y Domínguez 1996), mediante el software Maple. Criterio de convergencia:

> $f(x_M) \le 1 \cdot 10^{-3}$

Aplicando el algoritmo de este método (que es el mismo que el del método de la secante con la excepción de que los valores de x_i x_{i-1} se encuentran en lados opuestos de la raíz que se desea encontrar).

1ª Iteración

> $x_D := 1; x_I := 2;$

$x_D := 1$

$x_I := 2$

> $f(x_D) := x[D]^3 + 2x[D]^2 + 10x[D] - 20$

$f(1) := -7$

> $f(x_I) := x[I]^3 + 2x[I]^2 + 10x[I] - 20$

$f(2) := 16$

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.304347826:$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.304347826) := -1.33475795$

2a Iteración

Como

> $f(x_M)$

y

> $f(x_D)$

tienen el mismo signo, se reemplaza el valor de x[D] con el de x[M], quedando el nuevo intervalo como (1.304347826,2), entonces,

> $x_D := 1.304347826 : x_I := 2 :$

> $f(x_D) := -1.33475795 :$

> $f(x_I) := 16 :$

Con esto, calculamos la siguiente x[M]

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.357912305$

$x_M := 1.357912305$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.357912305) := -0.22913572$

3a Iteración

.

.

.

7ª Iteración

x[D] = x[M], quedando el nuevo intervalo como (1.357912305,2), entonces,

> $x_D := 1.368799463 : x_I := 2 :$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.368799463) := -0.00018237$

> $f(x_D) := -0.00018237 :$

> $f(x_I) := 16 :$

> Con esto, calculamos la siguiente x[M]

> $x_M = evalf\left(x_D - \frac{(x_D - x_I) f(x_D)}{f(x_D) - f(x_I)}\right)$

> $x_M := 1.368806657$

$x_M := 1.368806657$

> $f(x_M) := x[M]^3 + 2x[M]^2 + 10x[M] - 20$

$f(1.368806657) := -0.00003061$

Como

$f(x_M) \approx 0$

Fin. Aquí le paramos a la iteración porque los dos resultados anteriores de x_M son cuasi iguales. En la Tabla 2.3. podemos observar los cálculos hechos mediante 6 iteraciones, finiquitadas las cuales, se obtuvo la raíz esperada de la función dada

Tabla 2.3 Resultados de las iteraciones para obtener la raíz real de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ con el método de posición falsa.

i	$x_D = x_i$	$x_I = x_{i-1}$	x_M	$\lvert f(x_M)\rvert$
1	1	2	1.3043	-1.3347
2	1.3043	2	1.3579	-0.2291
3	1.3579	2	1.3669	-0.0386
4	1.3669	2	1.3685	-0.0065
5	1.3685	2	1.3687	-0.0011
6	1.3687	2	1.3688	-0.0002

Restricción para parar iteraciones:
$\varepsilon \le 10^{-3}$ en este caso *f(x_M) = 0.00018237*
y/o
$\left|x_{M_{final}} - x_{M_{penúltima}}\right| \le 10^{-3}$ en este caso la diferencia es 5.0078×10^{-5}

2.4 Método de Punto Fijo

Para encontrar las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ mediante este método, se tiene que, el método del punto fijo es un método numérico iterativo para encontrar raíces de una función real. Funciona al asumir una aproximación inicial (x_I) de la solución y luego iterativamente ir mejorando esa solución.
El proceso, consiste en aplicar una transformación a la aproximación inicial para obtener una nueva aproximación, y repetir este proceso hasta que se alcance una solución con un cierto grado de precisión. La transformación se basa en reemplazar la función original con otra función $g(x)$; producto de una factorización, que es más fácil de resolver y tiene la propiedad de que su raíz coincide con la raíz de la función original. Y para asegurarnos de que esta función $g(x)$ sea válida para aproximarnos a la raíz, tenemos el criterio: $|g'(x)| < 1$, el cual, si se cumple, nos asegura convergencia.
Ahora bien, el criterio para detenerse puede ser la cantidad de iteraciones, la diferencia entre las soluciones sucesivas:
El margen de error para punto fijo es
$\varepsilon = x_{I+1} - x_I$
o un valor de error predefinido.
Una alternativa al margen de error
$|f(x_{I+1})| = \varepsilon = 1\times10^{-3}$
el cual, será el criterio que usaremos para este método. Este método es más efectivo cuando la función $g(x)$ es una función continuamente diferenciable y tiene una solución única en el intervalo de búsqueda.
Para iniciar con las iteraciones, necesitamos: $g(x)$, $g'(x)$ y la aproximación inicial del valor de la raíz, que en este caso es 1, dicho valor es el número entero menor del intervalo donde se encuentra la raíz (véase **Error! Reference source not found.** 2.1 de la función polinómica a utilizar, $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$).
Para obtener $g(x)$ partiremos de la función polinómica de grado 3 igualándola a cero, luego, la factorizaremos por factor común, y despejaremos la x, para luego renombrarla como $g(x)$, quedando

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$
$$x(x^2 + 2x + 10) - 20 = 0$$
$$x(x^2 + 2x + 10) = 20$$

$$x = \frac{20}{(x^2 + 2x + 10)}$$

$$g(x) = \frac{20}{(x^2 + 2x + 10)}$$

para obtener $g'(x)$ solo debemos derivar $g(x)$, para ello, usaremos la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Procedimiento:

$$g(x) = 20(x^2 + 2x + 10)^{-1}$$

$$g'(x) = -1 \cdot 20(x^2 + 2x + 10)^{-1-1}(2x + 2)$$

$$g'(x) = -20(x^2 + 2x + 10)^{-2}(2x + 2)$$

$$g'(x) = -\frac{20(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 10)^2}$$

Así, tenemos los datos necesarios para comenzar a iterar

Iteración 1

$i = 0$

$x_0 = 1$

$$g(x_0) = \frac{20}{((x_0)^2 + 2(x_0) + 10)} = \frac{20}{((1)^2 + 2(1) + 10)}$$

$$= 1.53846153846154$$

$x_1 = g(x_0)$

$$|g'(x_0)| = -\frac{20(2(x_0) + 2)}{((x_0)^2 + 2(x_0) + 10)^2} = -\frac{20(2(1) + 2)}{((1)^2 + 2(1) + 10)^2}$$

$$= 0.425718941295636$$

Iteración 2

$i = 1$

$x_1 = 1.53846153846154$

$$g(x_1) = \frac{20}{((x_1)^2 + 2(x_1) + 10)}$$

$$= \frac{20}{((1.53846153846154)^2 + 2(1.53846153846154) + 10)}$$

$$= 1.29501915708812$$

$x_2 = g(x_1)$

$$|g'(x_1)| = \left| -\frac{20(2(x_1) + 2)}{((x_1)^2 + 2(x_1) + 10)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.53846153846154) + 2)}{((1.53846153846154)^2 + 2(1.53846153846154) + 10)^2} \right|$$

$$= 0.450997473075934$$

Iteración 3

$i = 2$

$x_2 = 1.29501915708812$

$$g(x_2)=\frac{20}{\left((x_2)^2+2(x_2)+10\right)}$$

$$=\frac{20}{\left((1.29501915708812)^2+2(1.29501915708812)+10\right)}=1.4018253094486$$

$$x_3=g(x_2)$$

$$|g'(x_2)|=\left|-\frac{20(2(x_2)+2)}{\left((x_2)^2+2(x_2)+10\right)^2}\right|$$

$$=\left|-\frac{20(2(1.29501915708812)+2)}{\left((1.29501915708812)^2+2(1.29501915708812)+10\right)^2}\right|=0.440466677944288$$

Iteración 4

$$i=3$$

$$x_3=1.4018253094486$$

$$g(x_3)=\frac{20}{\left((x_3)^2+2(x_3)+10\right)}=$$

$$\frac{20}{\left((1.4018253094486)^2+2(1.4018253094486)+10\right)}=1.35420939040429$$

$$x_4=g(x_3)$$

$$|g'(x_3)|=\left|-\frac{20(2(x_3)+2)}{\left((x_3)^2+2(x_3)+10\right)^2}\right|$$

$$=\left|-\frac{20(2(1.4018253094486)+2)}{\left((1.4018253094486)^2+2(1.4018253094486)+10\right)^2}\right|=0.445285721129186$$

Iteración 5

$$i=4$$

$$x_4=1.35420939040429$$

$$g(x_4)=\frac{20}{\left((x_4)^2+2(x_4)+10\right)}$$

$$=\frac{20}{\left((1.35420939040429)^2+2(1.35420939040429)+10\right)}=1.37529809248738$$

$$x_5=g(x_4)$$

$$V_I=2.814320759$$

$$V_D=3.477114900$$

$$V_m=3.477114900-\frac{(3.477114900-2.814320759)(77.2673905)}{(77.2673905)-(-0.000177636)}$$

$$V_m=2.814322283$$

$f(V_I) = 10(2.814320759)^3 - 29.4026575(2.814320759)^2 + 3.599(2.814320759) - 0.1535693$

$f(V_I) = -0.000177636$

$f(V_D) = 10(3.477114900)^3 - 29.4026575(3.477114900)^2 + 3.599(3.477114900) - 0.1535693$

$f(V_D) = 77.2673905$

$f(V_m) = 10(2.814322283)^3 - 29.4026575(2.814322283)^2 + 3.599(2.814322283) - 0.1535693$

$f(V_m) = -0.000062267$

Iteración 6

$i = 5$

$x_5 = 1.37529809248738$

$$g(x_5) = \frac{20}{\left((x_5)^2 + 2(x_5) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.37529809248738)^2 + 2(1.37529809248738) + 10\right)} = 1.36592978817065$$

$x_6 = g(x_5)$

$$|g'(x_5)| = \left| -\frac{20(2(x_5) + 2)}{\left((x_5)^2 + 2(x_5) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.37529809248738) + 2)}{\left((1.37529809248738)^2 + 2(1.37529809248738) + 10\right)^2} \right| = 0.444117116666538$$

Iteración 7

$i = 6$

$x_6 = 1.36592978817065$

$$g(x_6) = \frac{20}{\left((x_6)^2 + 2(x_6) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.36592978817065)^2 + 2(1.36592978817065) + 10\right)} = 1.37008600340182$$

$x_7 = g(x_6)$

$$|g'(x_6)| = \left| -\frac{20(2(x_6) + 2)}{\left((x_6)^2 + 2(x_6) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.36592978817065) + 2)}{\left((1.36592978817065)^2 + 2(1.36592978817065) + 10\right)^2} \right| = 0.44369988974615$$

Iteración 8

$i = 7$

$x_7 = 1.37008600340182$

$$g(x_7) = \frac{20}{\left((x_7)^2 + 2(x_7) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.37008600340182)^2 + 2(1.37008600340182) + 10\right)} = 1.36824102361284$$

$x_8 = g(x_7)$

$$|g'(x_7)| = \left| -\frac{20(2(x_7)+2)}{\left((x_7)^2 + 2(x_7) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.37008600340182)+2)}{\left((1.37008600340182)^2 + 2(1.37008600340182) + 10\right)^2} \right| = 0.443885280917 36$$

Iteración 9

$i = 8$

$x_8 = 1.36824102361284$

$$g(x_8) = \frac{20}{\left((x_8)^2 + 2(x_8) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.36824102361284)^2 + 2(1.36824102361284) + 10\right)} = 1.36905981200748$$

$x_9 = g(x_8)$

$$|g'(x_8)| = \left| -\frac{20(2(x_8)+2)}{\left((x_8)^2 + 2(x_8) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.36824102361284)+2)}{\left((1.36824102361284)^2 + 2(1.36824102361284) + 10\right)^2} \right| = 0.443803041176408$$

Iteración 10

$i = 9$

$x_9 = 1.36905981200748$

$$g(x_9) = \frac{20}{\left((x_9)^2 + 2(x_9) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.36905981200748)^2 + 2(1.36905981200748) + 10\right)} = 1.36869639755552$$

$x_{10} = g(x_9)$

$$|g'(x_9)| = \left| -\frac{20(2(x_9)+2)}{\left((x_9)^2 + 2(x_9) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.36905981200748)+2)}{\left((1.36905981200748)^2 + 2(1.36905981200748) + 10\right)^2} \right| = 0.443839549803103$$

Iteración 11

$i = 10$

$x_{10} = 1.36869639755552$

$$g(x_{10}) = \frac{20}{\left((x_{10})^2 + 2(x_{10}) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.36869639755552)^2 + 2(1.36869639755552) + 10\right)} = 1.36885768862873$$

$x_{11} = g(x_{10})$

$$|g'(x_{10})| = \left| -\frac{20(2(x_{10})+2)}{\left((x_{10})^2 + 2(x_{10}) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.36869639755552)+2)}{\left((1.36869639755552)^2 + 2(1.36869639755552) + 10\right)^2} \right| = 0.443823347874901$$

Iteración 12

$i = 11$

$x_{11} = 1.36885768862873$

$$g(x_{11}) = \frac{20}{\left((x_{11})^2 + 2(x_{11}) + 10\right)}$$

$$= \frac{20}{\left((1.36885768862873)^2 + 2(1.36885768862873) + 10\right)} = 1.36878610257799$$

$$|g'(x_{11})| = \left| -\frac{20(2(x_{11})+2)}{\left((x_{11})^2 + 2(x_{11}) + 10\right)^2} \right|$$

$$= \left| -\frac{20(2(1.36885768862873)+2)}{\left((1.36885768862873)^2 + 2(1.36885768862873) + 10\right)^2} \right| = 0.443830539071631$$

$x = g(x_{11}) \approx 1.36878610257799$

La raíz obtenida es 1.36878610257799 y la raíz real aproximada es 1.368808108 habiendo una diferencia de $2.200542201 \times 10^{-5}$, de tal forma que podríamos redondear el valor obtenido a cuatro decimales y no habría diferencia con la raíz real.

El método del punto fijo es un método sencillo y fácil de implementar, pero requiere la selección adecuada de la función *g(x)* y la estimación inicial x_0. Además, no siempre converge a la solución y puede requerir la identificación de un intervalo de convergencia. En general, el método del punto fijo es una herramienta útil para la resolución de problemas matemáticos, especialmente cuando se combina con otros métodos numéricos.

La Tabla 2.4 muestra los resultados de las iteraciones del método de punto fijo para el polinomio dado.

Tabla 2.4 Resultados de la iteraciones para la obtención de la raíz del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

iteración	i	x_i	$g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert f(g(x_i)) \rvert$
1	0	1	1.53846153846154	0.5384615	3.75967228038234
2	1	1.53846153846154	1.29501915708812	0.24344238	1.52381543749541
3	2	1.29501915708812	1.4018253094486	0.1068062	0.703228309915829
4	3	1.4018253094486	1.35420939040429	0.04761592	0.306678271398546
5	4	1.35420939040429	1.37529809248738	0.0210887	0.137171096169908
6	5	1.37529809248738	1.36592978817065	0.0093683	0.0606708662207325
7	6	1.36592978817065	1.37008600340182	0.0041562	0.0269686372085616
8	7	1.37008600340182	1.36824102361284	0.00184498	0.0119613239314376
9	8	1.36824102361284	1.36905981200748	0.0008188	0.00531037347091257
10	9	1.36905981200748	1.36869639755552	0.00036341	0.00235657913235343
11	10	1.36869639755552	1.36885768862873	0.0001613	0.00104597863175115
12	11	1.36885768862873	1.36878610257799	0.000071586	0.000464222723717711

Para llegar al punto de convergencia se necesitaron 12 iteraciones por el método de punto fijo, cuya raíz de 1.36885768862873 da un valor aproximado a la raíz real.

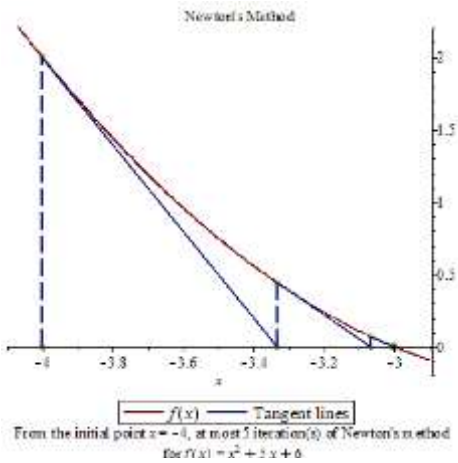


Fig. 2.2 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para el polinomio de grado 2, x^2+5x+6.

2.5 Método de Newton Raphson

Este método también se llama **Método de la Tangente**. Es un método de segundo orden de convergencia para *raíces reales no repetidas*. El algoritmo de este método se describe como sigue.

Llevar la ecuación $f(x)=0$ a la forma $x=g(x)$, de tal suerte que $g'(x)=0$. El eje de las abscisas es el eje x. Se supone un valor inicial x_0. Una vez graficada la curva de $f(x)$, se traza una tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$, a partir del cual se sigue por la tangente hasta interceptar el eje de las x en x_1 que es una nueva aproximación a $\bar{x}$. De x_1 se traza una línea vertical que debe interceptar a la curva de $f(x)$. En este nuevo punto de intercepción se traza otra tangente que interceptará nuevamente el eje de las x en x_2, y así sucesivamente, hasta que un valor x_i satisfaga $|f(x_i)|\le\varepsilon_1$, $|x_{i+1}-x_i|<\varepsilon$ o ambos. Si este proceso no satisface la obtención de la raíz de la función dada, debe reiniciarse el proceso con un valor nuevo de x_0. Ver la Fig. 2.2 para ilustrar el método de Newton-Rahpson para el polinomio de grado 2, x^2+5x+6.

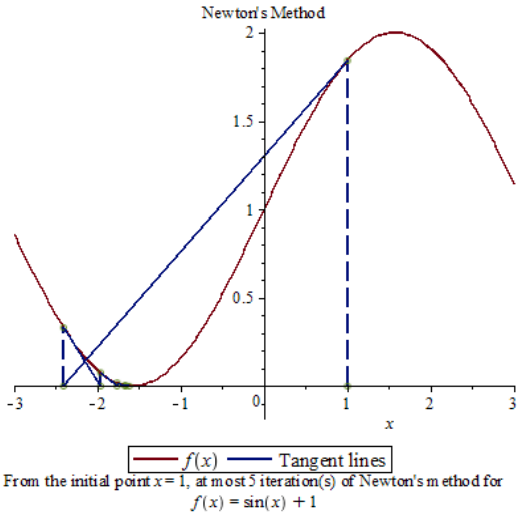


Fig. 2.3 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para la función $f(x)=sen(x)+1$.

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(x^2+5*x+6, x = -4);
                          -3.000000000
>
> NewtonsMethod(x^2+5*x+6, x = -4, output = sequence);
   -4, -3.333333333, -3.066666663, -3.003921573, -3.000015254,
                          -3.000000000
```

Ejemplo 1

Para la función

$f(x)=sen(x)+1$

hacer uso del método de Newton-Raphson para determinar la raíz de dicha ecuación, la cual es

```
> solve(sin(x) + 1 = 0, x)
                          -1/2 π
> evalf(-1/2 π)
                          -1.570796327
```

tomar

```
> x0 = 1.
```

Solución

Las instrucciones de Maple para el cálculo y gráficas usando el método de Newton se describen enseguida. La Fig. 2.3 muestra la raíz de la función dada, es decir, -1.619017361.

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = 1);
                          -1.619017361
```

> La anterior respuesta corresponde a la raíz que se busca después de *n* iteraciones

```
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = 1, output = sequence);
   1, -2.408223442, -1.963193004, -1.764437817, -1.667313392,
                          -1.619017361
```

> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = 1, view = [-3..3, DEFAULT], output = plot);

El procedimiento para encontrar las raíces de la función dada, mediante el método de Newton, se presenta a continuación mediante el software Maple, en todos los casos, se obtienen soluciones numéricas mediante las gráficas respectivas (ver Figs. 2.4-2.10)

Tomando

$> x_0 = -2$

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -2);
                          -1.583933923
```

que es una raíz cercana a la real de -1.570796327.

```
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -2, output = sequence);
   -2, -1.782041902, -1.676024572, -1.623361846, -1.597073033,
                          -1.583933923
```

> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -2, view = [-3..3, DEFAULT], output = plot);

La Fig. 2.4 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.

```
> 1.583933923 - 1.570796327
                          0.013137596
```

Con esto, no cumple todavía con el criterio de

$> \varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6);
                          -1.571708846
```

que es una raíz cercana a la real de -1.570796327.

```
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6, output = sequence);
   -1.6, -1.585397124, -1.578096599, -1.574446442, -1.572621372,
                          -1.571708846
```

> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6, view = [-3..3, DEFAULT], output = plot);

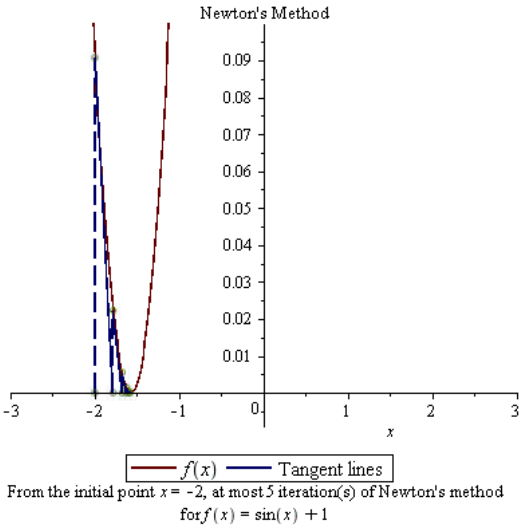


Fig. 2.4 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para la función $sen(x)+1$, desde el punto inicial $x=-2$.

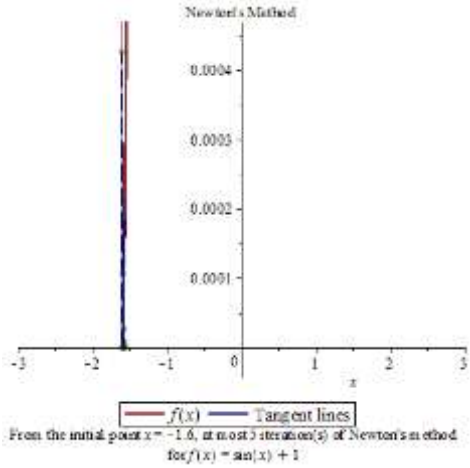


Fig. 2.5 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para la función $sen(x)+1$, desde el punto inicial $x=-1.6$.

> 1.571708846 – 1.570796327
0.000912519
Ya cumple con el criterio, entonces, usar
> $x=-1.6$
muy cercana a la raíz real.
La Fig. 2.5 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.

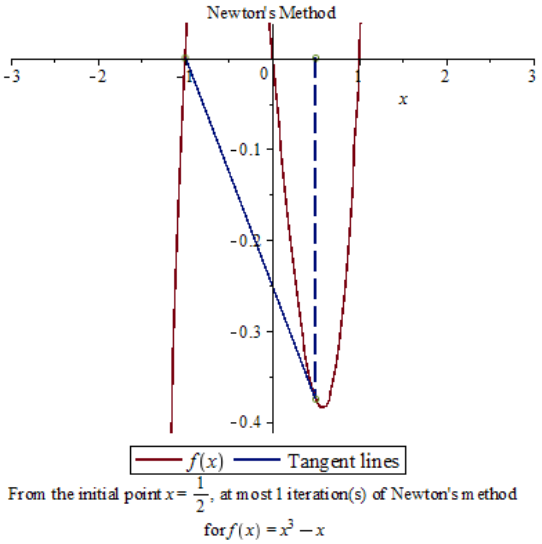


Fig. 2.6 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para la función $f(x)=x^3-x$.

Ejemplo 2
Para la función
> $f(x)=x\text{^}3-x$
$f(x)=x^3-x$
hacer uso del método de Newton-Raphson para determinar la raíz de dicha ecuación, la cual es
> $solve(x\text{^}3-x=0,x)$
0, 1, -1
tomar
> $x_0=\frac{1}{2}$.

Solución Maple 16
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(x^3-x, x = 1/2);
-1.000000000
La anterior respuesta corresponde a la raíz que se busca después de *n* iteraciones.
> NewtonsMethod(x^3-x, x = 1/2, output = sequence);
$\frac{1}{2}$, -1.000000000
> NewtonsMethod(x^3-x, x = 1/2, view = [-3..3, DEFAULT], output = plot);
La Fig. 2.6 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.
> NewtonsMethod(x^3-x, x = -0.432, output = sequence);
-0.432, 0.3663550967, -0.1646290648, 0.0097135881, -0.000001833547, 0.

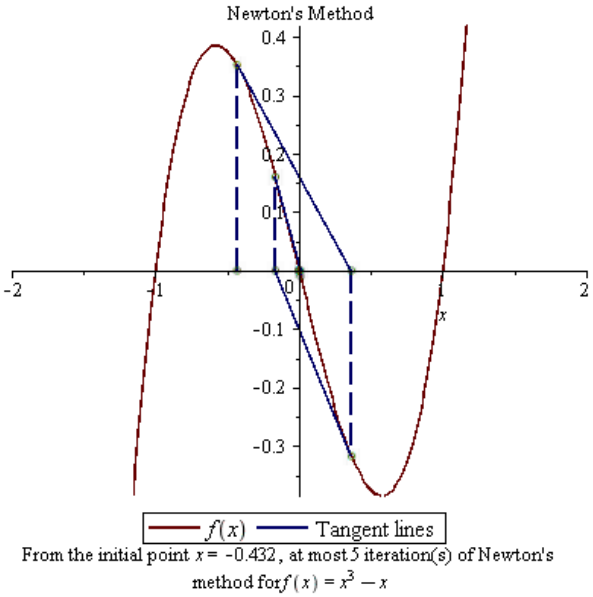


Fig. 2.7 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para $f(x)=x^3-x$, desde el punto inicial $x=-0.432$.

> NewtonsMethod(x^3 - x, x = -0.432, view = [-2..2, DEFAULT], output = plot);
La Fig. 2.7 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.
> NewtonsMethod(x^3-x, x = 2, output = sequence);
2, 1.454545454, 1.151046789, 1.025325929, 1.000908452, 1.00000123

> NewtonsMethod(x^3 - x, x = 2, view = [-2..2, DEFAULT], output = plot);
La Fig. 2.8 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.

Ejemplo 3
Encontrar la raíz real de la ecuación de f(x) mediante el método de Newton-Rapson para

> $f(x) = x^3 + 2*x^2 + 10*x - 20; x[0] = 1$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

$x_0 = 1$

con

> $\varepsilon = 10^{(-3)}$

aplicado a

> $\text{abs}(x[i+1] - x[i])$

$|-x_{i+1} + x_i|$

Solución Maple

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(x^3+2*x^2+10*x-20, x = 3);
```

1.368808108

La anterior respuesta corresponde a la raíz que se busca después de n iteraciones (ver Nieves y Dguez. p. 48)

```
> NewtonsMethod(x^3+2*x^2+10*x-20, x = 3, output = sequence);
```

3, 1.877551020, 1.434457153, 1.370035050, 1.368808543, 1.36880810

```
> NewtonsMethod(x^3+2*x^2+10*x-20, x = 3, view = [1..3, DEFAULT], output = plot);
```

NewtonsMethod(x DEFAULT], c

La Fig. 2.9 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.

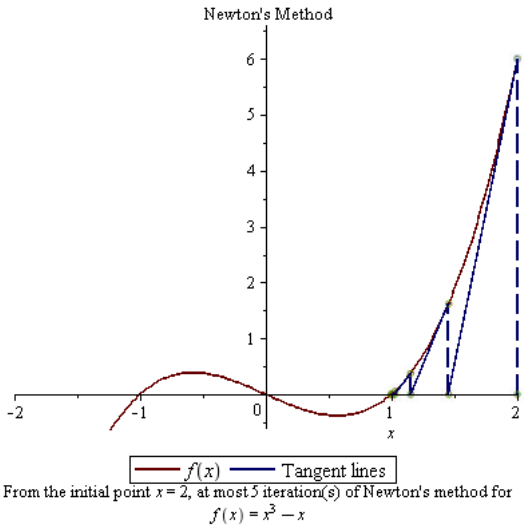


Fig. 2.8 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para $f(x) = x^3 - x$, desde el punto inicial $x = 2$.

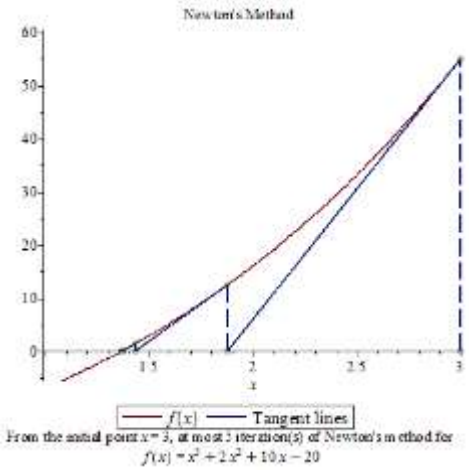


Fig. 2.9 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para el polinomio de grado 3, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, desde el punto inicial $x = 3$.

NewtonsMethod$(x\text{^}3 + 2*x\text{^}2 + 10*x - 20, x = 2, view = [1..2.1,$ *DEFAULT*$], output = plot)$;

La Fig. 2.10 muestra la solución con el método de Newton o método de la tangente para la función dada.

en todas las gráficas podemos observar que la raíz de la ecuación es

> $x = 1.368808108$

Si no se dispusiese de software, el método de Newton-Raphson se debe realizar con el algoritmo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = g(x_i) \tag{2.6}$$

El número de iteraciones necesarias para obtener la raíz o raíces de una función dada. Ver Nieves y Domínguez 1996, pp. 47-49 para aprender a hacer las iteraciones correspondientes de acuerdo al método descrito aquí.

Nos encontraremos algunas veces con el **inconveniente** de que el Método Newton-Raphson no converge, sino que oscila. Esto se puede encontrar cuando **las raíces no son reales**, si **la raíz es un punto de inflexión** o si **el valor inicial que damos para los cálculos está muy alejado de la raíz que se busca** y alguna otra parte de la función "atrapa" la iteración, (Nieves y Domínguez, 1996, p. 50). Por eso se hizo la aclaración al inicio de la exposición de este método, en el sentido de que es **exclusivo de soluciones** que conllevan a **raíces reales no repetidas**.

Ejemplo 4

Usando el algoritmo del Método Newton-Raphson, encontrar la raíz real $x = 1.368808108$ para la función

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Solución

El algoritmo es

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{d}{dx_i} f(x_i)}$$

$$> g(x[i]) := x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{d}{dx_i} f(x_i)}$$

$$g(x_i) := x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}$$

Condiciones iniciales

$> i := 0:$

$> x[i] := 1:$

$$> g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\right)$$

$g(1) := 1.411764706$

La derivada de $g(x_i)$

$$> diff(g(x[i]), x_i)$$

$$\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}$$

$$> derivada = evalf\left(\text{abs}\left(\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}\right)\right)$$

$derivada = 0.2422145329$

$> x[1] - x[0] = 1.411764706 - 1$

$x_1 - x_0 = 0.411764706$

Con esto, no cumple con el criterio, está muy alejada.

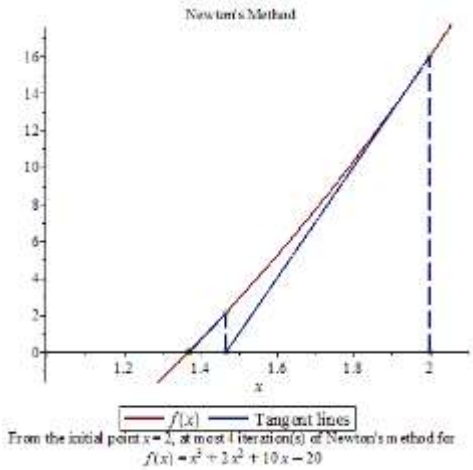


Fig. 2.10 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para el polinomio de grado 3, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, desde el punto inicial $x = 2$.

Primera iteración

> $i := 1$:

> $x[i] := 1.411764706$:

> $g(1) := 1.411764706;$

$g(1) := 1.411764706$

> $g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\right)$

$g(1.411764706) := 1.369336471$

> $diff(g(x[i]), x_i)$

$$\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}$$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.02446581755$

> $x[1] - x[0] = 1.411764706 - 1$

$x_1 - x_0 = 0.411764706$

Segunda iteración

> $i := 2$:

> $x[i] := 1.369336471$:

> $g(1.411764706) := 1.369336471$

$g(1.411764706) := 1.369336471$

> $g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\right)$

$g(1.369336471) := 1.368808189$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.0003058159075$

> $\text{abs}(x[i+1] - x[i]) = \text{abs}(g(1.411764706) - g(1))$

$|x_2 - 1.411764706| = 0.042428235$

Tercera iteración

> $i := 3$:

> $x[i] := 1.368808189$

$x_3 := 1.368808189$

> $g(1.369336471) := 1.368808189$

$g(1.369336471) := 1.368808189$

> $g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\right)$

$g(1.368808189) := 1.368808108$

$$> derivada = evalf\left(\text{abs}\left(\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}\right)\right)$$

$derivada = 0.$

$> \text{abs}(x[i+1] - x[i]) = \text{abs}(g(1.369336471) - g(1.411764706))$

$|x_3 - 1.369336471| = 0.000528282$

Aquí ya podemos parar porque se cumple el criterio.

Cuarta iteración

$> i := 4:$

$> x[i] := 1.368808108$

$x_4 := 1.368808108$

$> g(1.368808189) := 1.368808108$

$g(1.368808189) := 1.368808108$

$$> g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\right)$$

$g(1.368808108) := 1.368808108$

$$> derivada = evalf\left(\text{abs}\left(\frac{\left(x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20\right)\left(6x_i + 4\right)}{\left(3x_i^2 + 4x_i + 10\right)^2}\right)\right)$$

$derivada = 0.$

$> \text{abs}(g(1.368808108) - g(1.368808189))$

$0.$

Como se puede observar, se requiere de solo 3 iteraciones para obtener la raíz buscada. La Tabla 2.5 muestra los valores de los cálculos aquí presentados

Tabla 2.5 Resultados de las iteraciones del Ejemplo 4

i	x_i	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$g(1) := 1.411764706$	$\lvert g'(x_i) \rvert$
0	1			0.2422145329
1	$g(1) := 1.411764706$	$x_1 - x_0 = 0.411764706$	1.369336471	0.02446581755
2	1.369336471	0.042428235	1.368808189	0.0003058159075
3	1.368808189	0.000528282	1.368808108	0.
4	1.368808108	0.	1.368808108	0.

Ejemplo 5

Para la función

$f(x) = sen(x) + 1$

hacer uso del método de Newton-Raphson para determinar la raíz de la ecuación dada.

Escribir el algoritmo del Método Newton-Raphson, el algoritmo de $g(x_i)$. Las Condiciones iniciales son

$> i := 0:$

$> x[i] := -1.6:$

Parar de iterar cuando

$> \varepsilon < 10^{-3}$

Solución Maple

```
> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6);
```

-1.571708846

```
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6, output = sequence);
```

$-1.6, -1.585397124, -1.578096599, -1.574446442, -1.572621372,$
-1.571708846

```
> NewtonsMethod(sin(x) + 1, x = -1.6, view = [-3..3, DEFAULT], output = plot):
```

Condiciones iniciales

```
> f(x[i]) := sin(x[i]) + 1
```

$f(x_i) := \sin(x_i) + 1$

```
> g(x[i]) := x_i - f(x_i) / (d/dx_i f(x_i))
```

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

```
> i := 0 :
> x[i] := -1.6 :
> g(x_i) := evalf(x_i - (sin(x_i) + 1)/cos(x_i))
```

$g(-1.6) := -1.585397124$

```
> g(x_i) := x_i - (sin(x_i) + 1)/cos(x_i)
```

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

```
> diff(g(x[i]), x_i)
```

$-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}$

```
> i := 0 :
> x[i] := -1.585397124
```

$x_0 := -1.585397124$

```
> derivada = evalf(abs(-(sin(x_i) + 1) sin(x_i) / cos(x_i)^2))
```

$derivada = 0.4999731357$

Primera iteración

```
> i := 1 :
> x[i] := -1.585397124 :
> g(1) := -1.585397124;
```

$g(1) := -1.585397124$

$x_1 - x_0 = 0.411764706$

```
> g(x_i) := evalf(x_i - (sin(x_i) + 1)/cos(x_i))
```

$g(-1.585397124) := -1.578096599$

Segunda iteración

```
> i := 2 :
> x[i] := -1.578096599
```

$x_2 := -1.578096599$

```
> g(-1.585397124) := -1.578096599
```

$g(-1.585397124) := -1.578096599$

```
> g(x_i) := evalf(x_i - (sin(x_i) + 1)/cos(x_i))
```

> $g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

> $diff(g(x[i]), x_i)$

$-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}$

> $i := 1:$

> $x[i] := -1.578096599$

$x_1 := -1.578096599$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.4999939238$

> $i := 0:$

> $x[i] := -1.585397124$

$x_0 := -1.585397124$

> $x[1] - x[0] = -1.578096599 - (-1.585397124)$

$-1.578096599 - x_0 = 0.007300525$

$g(-1.578096599) := -1.574446442$

> $g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

> $diff(g(x[i]), x_i)$

$-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}$

> $i := 2:$

> $x[i] := -1.574446442$

$x_2 := -1.574446442$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.5000011034$

> $i := 1:$

> $x[i] := -1.578096599$

> $x[2] - x[1] = -1.574446442 - (-1.5780965994)$

$-1.574446442 - x_1 = 0.003650157$

Tercera iteración

> $i := 3:$

> $x[i] := -1.574446442$

$x_3 := -1.574446442$

> $g(-1.578096599) := -1.574446442$

$g(-1.578096599) := -1.574446442$

$x_1 - x_0 = 0.411764706$

> $g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}\right)$

$g(-1.574446442) := -1.572621372$

> $g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

> $diff(g(x[i]), x_i)$

$-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}$

> $i := 3:$

> $x[i] := -1.572621372$

$x_3 := -1.572621372$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.5000012233$

> $i := 2:$

> $x[i] := -1.574446442$

$x_2 := -1.574446442$

Cuarta iteración

> $i := 4:$

> $x[i] := -1.572621372$

$x_4 := -1.572621372$

> $g(-1.574446442) := -1.572621372$

$g(-1.574446442) := -1.572621372$

> $g(x_i) := evalf\left(x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}\right)$

$g(-1.572621372) := -1.571708846$

> $g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

$g(x_i) := x_i - \frac{\sin(x_i) + 1}{\cos(x_i)}$

> $diff(g(x[i]), x_i)$

$-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}$

> $i := 4:$

> $x[i] := -1.571708846$

$x_4 := -1.571708846$

> $derivada = evalf\left(\text{abs}\left(-\frac{(\sin(x_i) + 1)\sin(x_i)}{\cos(x_i)^2}\right)\right)$

$derivada = 0.4999451086$

> $i := 3:$

> $x[i] := -1.572621372$

$x_3 := -1.572621372$

> $x[3]-x[2]=-1.574446442-(-1.572621372)$
$-1.572621372-x_2=-0.001825070$

> $x[4]-x[3]=-1.571708846-(-1.572621372)$
$0.000912526=0.000912526$
Fin, ya se cumple
$\varepsilon < 10^{-3}$
$x_4 := -1.571708846$ ◁ *Respuesta.*

2.6 Método de la Secante

El método de la secante se ilustra mediante la obtención de la raíz real de un polinomio de grado 3. Primero, se resuelve mediante el método de Newton-Raphson porque al dar solución mediante el método de la secante hacemos uso de las 2 primeras intersecciones que nos da el método de la tangente.

Ejemplo para ilustrar el método de la secante

Para obtener las raíces del polinomio de grado 3 dado por la función $f(x)=x^3+5x^2+11x+15$, con puntos iniciales $a=2.7\ y\ b=3.2.$ por el método de la secante, primero hallamos las intersecciones mediante el método de la tangente o método de Newton-Raphson.

Solución por el método de la tangente

Para la función

$$f(x)=x^3+5x^2+11x+15$$

hacer uso del método de Newton-Raphson para determinar la raíz de dicha ecuación, la cual es

> *solve*(x^3 + 5*x^2 + 11*x + 15 = 0, x)
$-3, -1-2I, -1+2I$

tomar

> $x_0 = 1.$

Instrucciones Maple para la obtención de raíces con el método de la tangente:

> with(Student[Calculus1]):
> NewtonsMethod(x^3+5*x^2+11*x+15, x = 1);
-3.024964358

La anterior respuesta corresponde a la raíz que se busca después de n iteraciones (ver Fig. 2.11)

> NewtonsMethod(x^3+5*x^2+11*x+15, x = 1, output = sequence);
$1, -0.333333333, -1.814814815, -3.837721255, -3.236976890, -3.024964358$

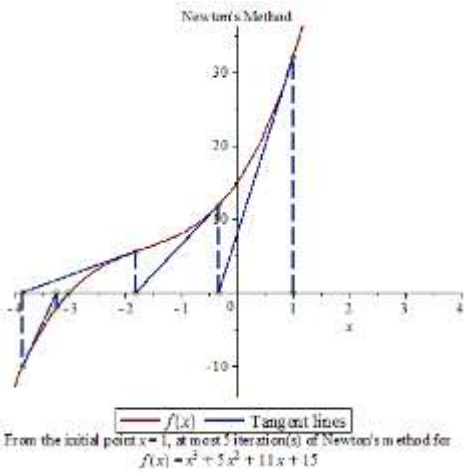


Fig. 2.11 Ilustración del método de Newton-Raphson o método de la tangente para el polinomio de grado 3, $f(x)=x^3+2x^2+11x-15$, desde el punto inicial $x=1.$

Los anteriores son los puntos de tangencia en el eje de las *x*, trazados en la función por los que va pasando de acuerdo al método de la tangente o Newton-Raphson, hasta encontrar la raíz determinada anteriormente. Las instrucciones Maple para trazar la gráfica del polinomio de grado 3 dado son (ver Fig.)

> NewtonsMethod(x^3+5*x^2+11*x+15, x = 1, view = [-4..4, DEFAULT], output = plot);

Solución por el método de la secante

Ahora se utilizará el método de la secante haciendo uso de su algoritmo para el número de iteraciones en que

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1}) f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

con

> $x_1 := 1; x_2 := -0.333333333$

$x_1 := 1$

$x_2 := -0.333333333$

Estos valores se tomaron de las 2 primeras intersecciones de la tangente con el eje de las abscisas del método de Newton-Rapson, como puede verse arriba.

Primera iteración

> $i := 2:$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(1) := 32$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-0.333333333) := 11.85185186$

Usando el algoritmo del método de la secante

> $x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1}) f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

tenemos

$x_3 = -1.117647059$

Segunda iteración

> $i := 3:$

> $x[3] := -1.117647059$

$x_3 := -1.117647059$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-0.333333333) := 11.85185186$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-1.117647059) := 7.555465089$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_4 = -2.496911844$

Tercera iteración

> $i := 4:$

> $x_4 := -2.496911844$

$x_4 := -2.496911844$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-1.117647059) := 7.555465089$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-2.496911844) := 3.13964493$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_5 = -3.477568106$

Cuarta iteración

> $i := 5:$

> $x_5 := -3.477568106$

$x_5 := -3.477568106$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-2.496911844) := 3.13964493$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-3.477568106) := -4.84174962$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_6 = -2.882673059$

Quinta iteración

> $i := 6:$

Sexta iteración

> $i := 7:$

> $x_6 := -2.882673059$

$x_6 := -2.882673059$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-3.477568106) := -4.84174962$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-2.882673059) := 0.88516815$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_7 = -2.974621672$

> $x_7 := -2.974621672$

$x_7 := -2.974621672$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-2.882673059) := 0.88516815$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-2.974621672) := 0.20046674$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_8 = -3.001542368$

Séptima iteración

> $i := 8 : x_8 := -3.001542368$

$x_8 := -3.001542368$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-2.974621672) := 0.20046674$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-3.001542368) := -0.01234846$

> x[i+1] = x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$-3.001542368 = -2.999980313$

> $x_8 := -3.001542368 :$

Octava iteración

> $i := 9 : x_9 := -2.999980313$

$x_9 := -2.999980313$

> $f(x[i-1]) := x_{i-1}^3 + 5x_{i-1}^2 + 11x_{i-1} + 15$

$f(-3.001542368) := -0.01234846$

> $f(x_i) := x_i^3 + 5x_i^2 + 11x_i + 15$

$f(-2.999980313) := 0.00015750$

> x[i+1] := x[i]-(x[i]-x[i-1])*f(x[i])/(f(x[i])-f(x[i-1]));

$x_{10} := -2.999999986$

Como podemos ver, con 8 iteraciones se logra obtener el resultado deseado, ya que

> $x_{10} := -2.999999986 : x_9 := -2.999980313 :$

> $\text{abs}(x_{10} - x_9) < \varepsilon$

$0.000019673 < \varepsilon$

> donde $\varepsilon = 10\text{^}(-3)$.

> aquí paramos el proceso porque se cumple que

$|-x_{i+1} + x_i| < \varepsilon$

y se cumpla que

$|f(-2.999999986)| < \varepsilon$

> $f(-2.999980313) := 0.00015750$

Cualesquiera de los dos que se cumpla, o ambos, es la solución.

Para la función que se iteró, usamos instrucciones Maple 16 para el método de la secante y graficamos Fig. 2.12)

> $f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$

> with(Student[NumericalAnalysis]):

> f := x^3+5*x^2+11*x+15:

> Secant(f, x=[2.7,3.2], tolerance=10^(-2));

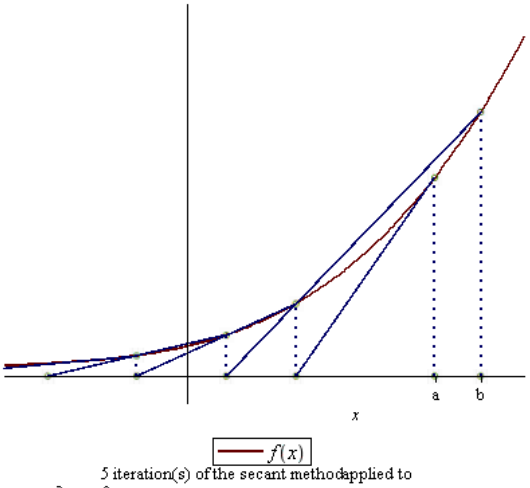


Fig. 2.12 Ilustración del método de la secante para el polinomio de grado 3, $f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$, con puntos iniciales $a = 2.7$ y $b = 3.2$. (ver

-3.000040748

> Secant(f, x=[2.7,3.2], tolerance=10^(-2), output=sequence);

2.7, 3.2, 1.187580621, 0.4272755814, -0.5498782663, -1.517908394,
-3.060006196, -2.948164106, -2.998448540, -3.000040748

> Secant(f, x=[2.7,3.2], tolerance=10^(-2), stoppingcriterion=absolute);

-3.000040748

> Secant(f, x=[2.7,3.2], output=animation, stoppingcriterion=function_value);

> Secant(f, x=[2.7,3.2], tolerance=10^(-3), output=plot);

Intersecciones con el eje de las *x*:

> 2.7, 3.2, 1.187580621, 0.4272755814, -0.5498782663, -1.517908394,
-3.060006196, -2.948164106, -2.998448540, -3.000040748

Fin

2.7 Métodos para resolver raíces múltiples: bisección, Newton modificado, secante y posición falsa

Una ***raíz múltiple*** corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje *x*. Por ejemplo, una raíz triple resulta de $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$. Ver la gráfica de la Fig. 2.13 para visualizar los puntos donde la curva de la función toda el eje x, sabiendo que las raíces que satisfacen la función son

$3, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$

En que las últimas dos raíces en forma decimal, son

> $evalf(2-\sqrt{2})$

0.585786438

> $evalf(2+\sqrt{2})$

3.414213562

La ecuación tiene una ***raíz triple*** porque un valor de *x* hace que tres términos de la ecuación sean iguales a cero.

Entonces, para la función $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$, que tiene 3 raíces reales, se usan aquí los métodos de bisección, Newton Modificado y de Secante del software Maple, para mostrar sus raíces.

Por el método de bisección, se tiene que

> with(Student[NumericalAnalysis]):

> f := x^3-7*x^2+14*x-6;

$f := x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

> Roots(f,x=3.2,tolerance=10^(-2));

3.416190763

> Roots(f,x=[2.7,3.2],method=bisection,tolerance=10^(-2),output=information);

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	*relative*
1	2.7	3.2	2.950000000	0.05487500	0.084745
2	2.950000000	3.2	3.075000000	-0.06332812	0.040650
3	2.950000000	3.075000000	3.012500000	-0.01218555	0.020746
4	2.950000000	3.012500000	2.981250000	0.01944654	0.010482
5	2.981250000	3.012500000	2.996875000	0.00314450	0.0052137

Por el método de Newton modificado, se tiene que

> Roots(f,x=0.6,method=modifiednewton,tolerance=10^(-2),output=information);

n	p_n	*relative error*
0	0.6	-
1	0.5859432540	0.02398994425
2	0.5857864564	0.0002676702377

Por el método de la secante, se tiene que

> Roots(f, x = [0.58, 3.5], method = secant, tolerance=10^(-2),output=information);

n	p_n	*relative error*
0	0.58	-
1	3.5	-
2	1.283687943	1.726519338
3	3.614149719	0.6448160583
4	4.011647122	0.09908583455
5	3.527135699	0.1373668224
6	3.482381542	0.01285159494
7	3.428987366	0.01557141229
8	3.416529138	0.003646457412

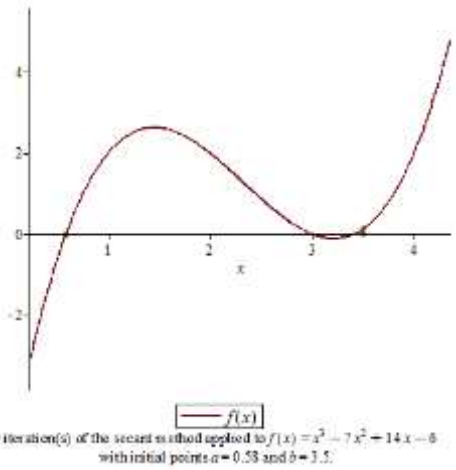


Fig. 2.13 Gráfica de la función $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$ mostrando las tres raíces que cruzan el eje de las x.

Como podemos observar, el método de bisección es el menos exacto en este caso.

Para la función $f(x)=x^2-3x-2$, la ecuación tiene una ***raíz doble*** porque un valor de *x* hace que dos términos de la ecuación sean iguales a cero. Gráficamente, esto significa que la curva toca en forma tangencial al eje *x* en la raíz doble. Enseguida se muestran los resultados de las raíces de la función obtenidas mediante los métodos de bisección, Newton modificado, secante y falsa posición, con sus respectivas gráficas, Figs. 2.14-2.18, para visualizar dichas raíces.

Las instrucciones Maple y resultados de las raíces de la función $f(x)=x^2-3x-2$ por los métodos numéricos que se mencionan, son las descritas a continuación.

$f(x)=x^2-3x-2$

```
> solve(xx^2 - 3*x - 2, x)
```

$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$

```
> evalf(3/2 + 1/2*sqrt(17))
```

3.561552813

```
> evalf(3/2 - 1/2*sqrt(17))
```

-0.561552813

Por el método de bisección, se tiene que

```
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> f:=x^2-3*x-2:
> Roots(f,x=[0.6,3.6],method=bisection,tolerance=10^(-2),output=information);
```

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	*relative error*
1	0.6	3.6	2.100000000	-3.890000000	0.7142857143
2	2.100000000	3.6	2.850000000	-2.427500000	0.2631578947
3	2.850000000	3.6	3.225000000	-1.274375000	0.1162790698
4	3.225000000	3.6	3.412500000	-0.59234375	0.05494505494
5	3.412500000	3.6	3.506250000	-0.22496094	0.02673796791
6	3.506250000	3.6	3.553125000	-0.03467773	0.01319261214
7	3.553125000	3.6	3.576562500	0.06211182	0.006553079948

Por el método de Newton modificado, se tiene que (ver Figs. 2.14-2.16)

```
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> f:=x^2-3*x-2:
> Roots(f,x=1,output=sequence);
```

1., -3.000000000, -1.222222222, -0.6417233560, -0.5630533137,
-0.5615533585, -0.5615528128

```
> Roots(f,x=-0.56,method=modifiednewton,output=plot,stoppingcriterion=absolute);
> Roots(f,x=3.561552813,method=modifiednewton,output=plot,stoppingcriterion=absolute);
> Roots(f,x=-
0.56,method=modifiednewton,output=plot,stoppingcriterion=absolute,verticallineoptions=[color=gold,li
```

nestyle=dash]);

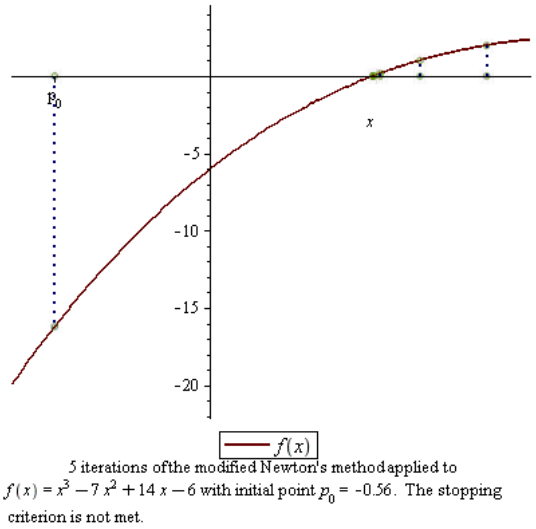


Fig. 2.14 Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x - 2$ mostrando la raíz −0.5615528128 calculada con el método de Newton modificado.

Por el método de la secante (ver Fig. 2.17), se tiene que

> Roots(f, x = [0.58, 3.5], method = secant, tolerance=10^(-2),output=information);

n	p_n	*relative error*
0	0.58	-
1	3.5	-
2	3.731481482	0.06203473958
3	3.559080963	0.04843961708
4	3.561454915	0.0006665680338

> Roots(f, x = [0.5, 3.5], method = secant, output = animation, stoppingcriterion = function_value, tickmarks = [5, 5]);

Por el método de la posición falsa, se tiene que

> with(Student[NumericalAnalysis]):

> f := x^2-3*x-2;

$$f(x) = x^2 - 3x - 2$$

> FalsePosition(f, x=[-0.5,3.6], tolerance=10^(-2));

3.561552813

> FalsePosition(f, x=[-0.5,3.6], tolerance=10^(-2), output=sequence);

[−0.5, 3.6], [2.000000000, 3.6], [3.538461538, 3.6], [3.561338289, 3.6], [3.561550831, 3.6], [3.561552794, 3.6], [3.561552794, 3.561552813], 3.561552813

> FalsePosition(f, x=[-0.5,3.6], tolerance=10^(-2), stoppingcriterion=absolute);

3.561552813

> FalsePosition(f, x=[-0.5,3.6], output=animation, tolerance=10^(-2), stoppingcriterion=function_value);

La gráfica de la función $f(x)=x^2-3x-2$ obtenida por el método de la secante, se muestra en la Fig. 2.18.

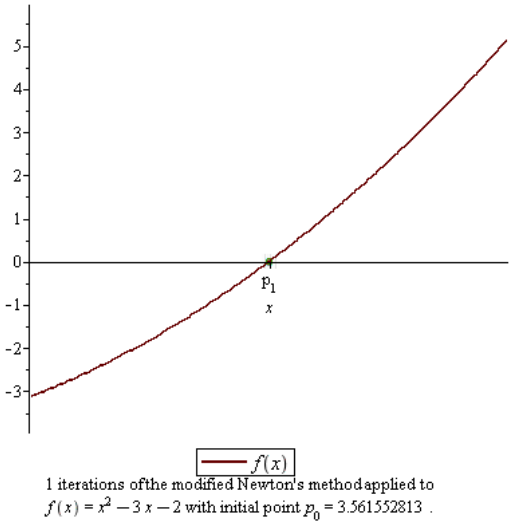


Fig. 2.15 Gráfica de la función $f(x)=x^2-3x-2$ mostrando la raíz 3.561552813 calculada con el método de Newton modificado.

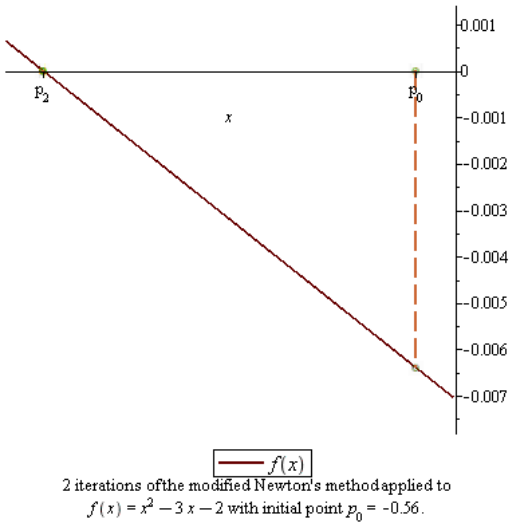


Fig. 2.16 Gráfica de la función $f(x)=x^2-3x-2$ mostrando la raíz -0.5615528128 calculada con el método de Newton modificado.

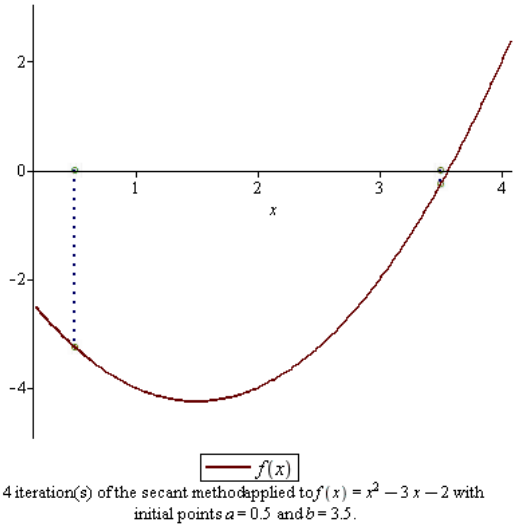


Fig. 2.17 Gráfica de la función $f(x)=x^2-3x-2$ mostrando la raíz 3.561552813 calculada con el método de la secante.

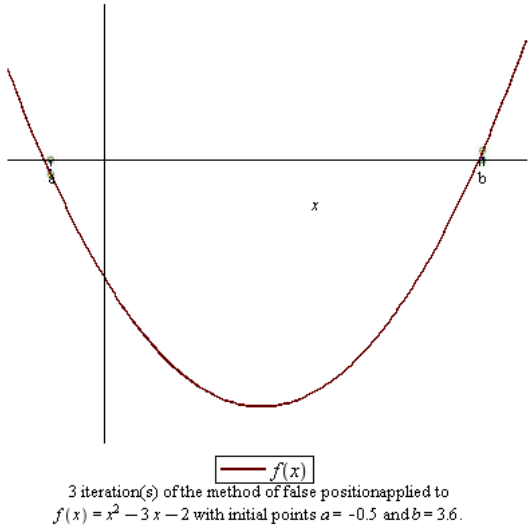


Fig. 2.18 Gráfica de la función $f(x)=x^2-3x-2$ mostrando ambas raíces, calculadas con el método de la secante.

2.8 Soluciones Numéricas Ingenieriles del Capítulo 2

En esta sección se resuelven problemas con métodos numéricos del capítulo 2, incluyendo los procedimientos completos.

Problema 1
Obtener por el método de bisección la raíz de la variable independiente de la función $f(x) = sen(x) + \ln(x)$

Solución
1ª Iteración
$[x_D, x_I] = [0.5,1]$
$x_m = \frac{x_D + x_I}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$
$f(x_D) = f(0.5) = -0.2137216419557$

$f(x_I) = f(1) = 0.8414709848079$
$f(x_m) = f(0.75) = 0.3939566875716$
$\varepsilon = |x_m - x_{mi+1}| = \frac{1}{1000}$
2ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.5,0.75]$
$x_m = 0.625$
$f(x_D) = -0.2137216419557$
$f(x_I) = 0.3939566875716$
$f(x_m) = 0.1150936436947$
$\varepsilon = |0.75 - 0.625| = 0.125$
3ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.5,0.625]$
$x_m = 0.5625$
$f(x_D) = -0.2137216419557$
$f(x_I) = 0.1150936436947$
$f(x_m) = -0.0420614713675$
$\varepsilon = 0.0625$
4ª Iteración $f(x_m) = f(x_D)$
$[x_D, x_I] = [0.5625,0.625]$
$x_m = 0.59375$
$f(x_D) = -0.0420614713675$
$f(x_I) = 0.1150936436947$
$f(x_m) = 0.038176207614$
$\varepsilon = 0.03125$
5ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.5625,0.59375]$
$x_m = 0.5859375$
$f(x_D) = -0.0420614713675$
$f(x_I) = 0.0381762076141$
$f(x_m) = -0.0015105637962$
$\varepsilon = 0.015625$
6ª Iteración $f(x_m) = f(x_D)$
$[x_D, x_I] = [0.578125,0.59375]$
$x_m = 0.5859375$
$f(x_D) = -0.0015105637962$
$f(x_I) = 0.0381762076141$
$f(x_m) = 0.0184385942472$
$\varepsilon = 0.0078125$
7ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.578125,0.5859375]$
$x_m = 0.58203125$
$f(x_D) = -0.0015105637962$
$f(x_I) = 0.0184385942472$
$f(x_m) = 0.0084907312805$
$\varepsilon = 0.00390625$
8ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.578125,0.58203125]$
$x_m = 0.580078125$
$f(x_D) = -0.0015105637962$
$f(x_I) = 0.0184385942472$
$f(x_m) = 0.0084907312805$
$\varepsilon = 0.001953125$
9ª Iteración $f(x_m) = f(x_I)$
$[x_D, x_I] = [0.578125,0.58078125]$
$x_m = 0.579101562$
$f(x_D) = -0.0015105637962$
$f(x_I) = 0.0034406811924$
$f(x_m) = 0.0009947984176$
$\varepsilon = 0.000976563$

En la Tabla 2.6, se muestran los resultados de las iteraciones realizadas.

Tabla 2.6 Resultados de las iteraciones para obtener la raíz de la función $f(x) = sen(x) + \ln(x)$.

i	x_D	x_I	x_m	$\lvert x_m - x_{mi+1} \rvert$	$f(x_m)$
0	1	2			
1	0.5	1	0.75	0.75	0.3939566875716
2	0.5	0.75	0.625	0.125	0.115096436947
3	0.5	0.625	0.5625	0.625	-0.0420614713675
4	0.5625	0.625	0.59375	0.0381762076141	0.0381762076141
5	0.5625	0.59375	0.578125	0.015625	-0.0015105537962
6	0.578125	0.59375	0.5859375	0.0078125	0.018385942472
7	0.578125	0.5859375	0.58203125	0.00390625	0.0084907312805
8	0.578125	0.58203125	0.580078125	0.001953125	0.0034406871924
9	0.578125	0.580078125	0.579101562	0.00097663	0.0009947984176

En la Fig. 2.19 se muestra la gráfica de la función $f(x) = sen(x) + \ln(x)$ y su raíz.

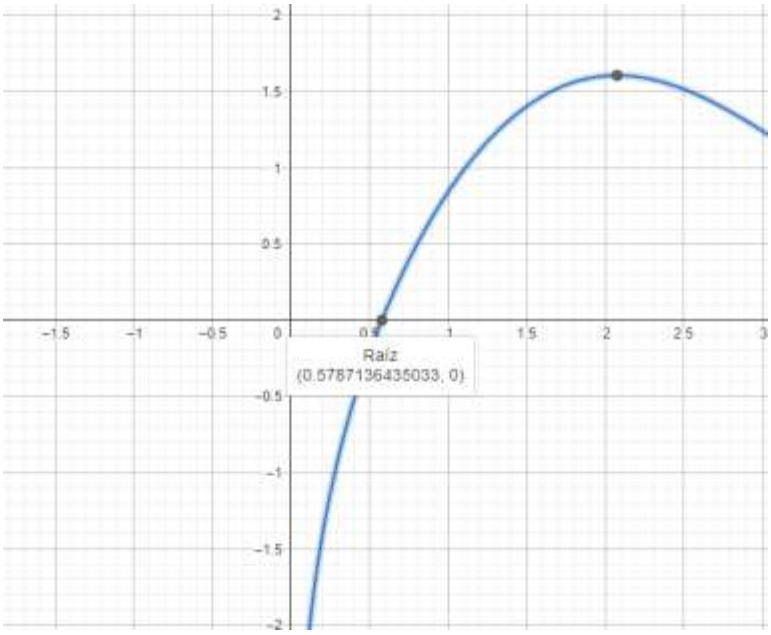


Fig. 2.19 Gráfica de la función $f(x) = sen(x) + \ln(x)$, mostrando su raíz.

Por el método de bisección, fueron necesarios 9 iteraciones para llegar al valor $\varepsilon = 0.000976563$, para la raíz de $x_m = 0.579101562$.

Problema 2

La siguiente formula es atribuida a Francis (Lipka, 1975) y se aplica a un vertedor con contracciones

$$Q = 3.33(B - 0.2H)\left(H^3\right)^{1/2}$$

Donde,

Q = cantidad de agua que pasa por el vertedor en pies^3/s

B = ancho del vertedor en pies

H = carga sobre la cresta del vertedor en pies

Si se sabe que B varia de 0 a 5 y Q de 0 a 33, calcule los valores de H correspondientes a las siguientes parejas de valores de B y Q (las unidades son consistentes), con método de Newton-Raphson.

B	3	2	4	3.6
Q	12	20	13	30

Solución

La fórmula de $Q = 3.33(B - 0.2H)\left(H^3\right)^{1/2}$ se iguala a 0 quedando

$$F(H) = 3.33(B - 0.2H)\left(H^3\right)^{1/2} - Q = 0$$

Después se deriva la función usando la siguiente formula de derivación

$$F'(x) = AB' + A'B = 3.33(B - 0.2H)(1.5)H^{1/2} + \left(H^3\right)^{1/2}(3.33)(-0.2)$$

$$F'(H) = 4.995(B - 0.2H)H^{1/2} - 0.666\left(H^3\right)^{1/2}$$

Una vez obtenido la derivada se sustituye en la fórmula de Newton-Raphson

$$H_{i+1} = H_1 - \frac{f(H_i)}{\frac{d}{dH}f(H_i)} = H_1 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}}\right)$$

Por otra parte, también es necesario obtener $|g'(x_i)|$ por lo cual, hay que derivar H_{i+1}

```
> diff(h - (3.33*(B - 0.2*h)*sqrt(h^3) - Q)/(4.995*(B - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3)), h);
```

$$1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3 - 0.2h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3 - 0.2h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3 - 0.2h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3 - 0.2h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3 - 0.2h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)$$

Para poder elegir el valor inicial de H en cada caso debe de ser menor que B por lo que el valor de $H_0 = B/2$

Primera pareja

Iteración 1

En la primera pareja de datos contamos con los siguientes valores obtenidos de la tabla

$B=3 \quad Q=12$

Y para obtener el valor de H_0 simplemente se divide 3/2

$H_i = 3/2 = 1.5$

Los valores se sustituyen en la formula

$H_1 = 1.204621339$

$$H_1 = H_1 - \left(\frac{3.33(B-0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B-0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}} \right)$$

$$= 1.5 - \left(\frac{3.33(3-0.2(1.5))\left(1.5^3\right)^{1/2} - 12}{4.995(3-0.2(1.5))(1.5)^{1/2} - 0.666\left(1.5^3\right)^{1/2}} \right)$$

para obtener $|g'(x)|$ se tiene que

$h := 1.5:$

$B := 3:$

$Q := 12:$

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3-0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3-0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3-0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)\right)$$

$F := 0.05907573138$

$|g'(x)| = 0.05907573138$

Iteración 2

$B=3 \quad Q=12 \quad H_i = 1.204621339$

Se sustituyen los valores en la fórmula para obtener H_2

$$H_2 = H_2 - \left(\frac{3.33(B-0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B-0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}} \right) = 1.204621339$$

$$- \left(\frac{3.33(3-0.2(1.204621339))\left(1.204621339^3\right)^{1/2} - 12}{4.995(3-0.2(1.204621339))(1.204621339)^{1/2} - 0.666\left(1.204621339^3\right)^{1/2}} \right) =$$

$H_2 = 1.194273501$

Se obtiene $|g'(x)|$

$h := 1.204621339:$

$B := 3:$

$Q := 12:$

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3-0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3-0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3-0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)\right)$$

$F := 0.002967626068$

$$\left|g'(x)\right| = 0.002967626068$$

Se revisa el error con $\left|x_{i+1} - x_i\right| = 1\times10^{-3}$ para saber qué tan cerca estamos del criterio

$$\varepsilon = \left|1.194273501 - 1.204621339\right| = 0.010347838$$

Iteración 3

$B = 3 \quad Q = 12 \quad H_i = 1.194273501$

Se sustituyen en la fórmula para obtener H_3

$$H_3 = H_3 - \left(\frac{3.33(B-0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B-0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}}\right) = 1.194273501$$

$$-\left(\frac{3.33(3-0.2(1.194273501))\left(1.194273501^3\right)^{1/2} - 12}{4.995(3-0.2(1.194273501))(1.194273501)^{1/2} - 0.666\left(1.194273501^3\right)^{1/2}}\right) =$$

$H_3 = 1.194258049$

Se obtiene $\left|g'(x)\right|$

$h := 1.194273501$:

$B := 3$:

$Q := 12$:

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3-0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3-0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3-0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3-0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)\right)$$

$F := 0.000004490446306$

$$\left|g'(x)\right| = 0.000004490446306$$

Se revisa el error.

$$\varepsilon = \left|1.194258049 - 1.194273501\right| = 0.000015452$$

Las iteraciones de la primera pareja se presentan en la Tabla 2.7.

Tabla 2.7 Resultados de las iteraciones de la primera pareja de datos $B=3 \quad Q=12$.

H_i	H	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$	$\lvert g'(x)\rvert$
1.5	1.204621339		0.05907573138
1.204621339	1.194273501	0.010347838	0.002967626068
1.194273501	1.194258049	0.000015452	0.000004490446306

$H = 1.194258049 \triangleleft Respuesta$

Segunda pareja

Se realizan los mismos pasos que en la primera pareja, pero aplicando el nuevo grupo de datos

Iteración 1

$B=2 \quad Q=20 \quad H_i = 2/2 = 1$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_1 = H_1 - \left(\frac{3.33(B-0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B-0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) = 1 - \left(\frac{3.33(2-0.2(1))(1^3)^{1/2} - 20}{4.995(2-0.2(1))(1)^{1/2} - 0.666(1^3)^{1/2}} \right) =$$

$H_1 = 2.682402402$

Se obtiene $\lvert g'(x)\rvert$ con ayuda de maple

```
> h := 1 :
> B := 2 :
> Q := 20 :
> F := evalf( 1 - (-0.666*sqrt(h^3) + 4.995000000*(3 - 0.2*h)*h^2/sqrt(h^3))/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3)) + 1/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))^2 * ((3.33*(3 - 0.2*h)*sqrt(h^3) - 12)*(-0.9990*sqrt(h) + 2.497500000*(3 - 0.2*h)/sqrt(h) - 0.9990000000*h^2/sqrt(h^3))) )
```

$F := -0.07533783784$

$$\lvert g'(x)\rvert = 0.7533783784$$

Iteración 2

$B=2 \quad Q=20 \quad H_i = 2.682402402$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_2 = H_2 - \left(\frac{3.33(B-0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B-0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(2-0.2(2.682402402))(2.682402402^3)^{1/2} - 20}{4.995(2-0.2(2.682402402))(2.682402402)^{1/2} - 0.666(2.682402402^3)^{1/2}} \right) =$$

$H_2 = 2.526482674$

Se obtiene $\lvert g'(x)\rvert$

$h := 2.682402402$:
$B := 2$:
$Q := 20$:

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3 - 0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3 - 0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)\right)$$

$F := 0.03922842835$

$$\left|g'(x)\right| = 0.03922842835$$

Se revisa el error

$$\varepsilon = \left|2.526482674 - 2.682402402\right| = 0.155919728$$

Iteración 3

$B = 2 \quad Q = 20 \quad H_i = 2.526482674$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_3 = H_3 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}}\right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(2 - 0.2(2.526482674))\left(2.526482674^3\right)^{1/2} - 20}{4.995(2 - 0.2(2.526482674))(2.526482674)^{1/2} - 0.666\left(2.526482674^3\right)^{1/2}}\right) =$$

$H_3 = 2.527765930$

Se obtiene $\left|g'(x)\right|$

$$\left|g'(x)\right| = 0.05414734417$$

$h := 2.526482674$:
$B := 2$:
$Q := 20$:

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3 - 0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2}\left(\left(3.33\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right)\left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3 - 0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}}\right)\right)\right)$$

$F := 0.05414734417$

Se revisa el error

$$\varepsilon = \left|2.527765930 - 2.526482674\right| = 0.001283256$$

En la Tabla 2.8 se presentan las iteraciones de la segunda pareja

Tabla 2.8 Resultados de las iteraciones de la segunda pareja de datos $B = 2 \quad Q = 20.$

H_i	H	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert g'(x) \rvert$
1	2.682402402		0.7533783784
2.682402402	2.526482674	0.155919728	0.03922842835
2.526482674	2.527765930	0.001283256	0.05414734417

$H = 2.527765930 \triangleleft$ *Respuesta.*

Tercera pareja

Iteración 1

$B = 4 \quad Q = 13 \quad H_i = 4/2 = 2$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_1 = H_1 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{3.33(4 - 0.2(2))\left(2^3\right)^{1/2} - 13}{4.995(4 - 0.2(2))(2)^{1/2} - 0.666\left(2^3\right)^{1/2}} \right) = 1.112095385$$

Se obtiene $\lvert g'(x) \rvert$ con ayuda de maple

$h := 2:$
$B := 4:$
$Q := 13:$

$$F := evalf\left(1 - \frac{-0.666\sqrt{h^3} + \frac{4.995000000\,(3 - 0.2\,h)\,h^2}{\sqrt{h^3}}}{4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}} + \frac{1}{\left(4.995\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h} - 0.666\sqrt{h^3}\right)^2} \left(\left(3.33\,(3 - 0.2\,h)\sqrt{h^3} - 12\right) \left(-0.9990\sqrt{h} + \frac{2.497500000\,(3 - 0.2\,h)}{\sqrt{h}} - \frac{0.9990000000\,h^2}{\sqrt{h^3}} \right) \right) \right)$$

$F := 0.08117961592$

$\lvert g'(x) \rvert = 0.08117961592$

Iteración 2

$B = 4 \quad Q = 13 \quad H_i = 1.112095385$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_2 = H_2 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}} \right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(4 - 0.2(1.112095385))\left(1.112095385^3\right)^{1/2} - 13}{4.995(4 - 0.2(1.112095385))(1.112095385)^{1/2} - 0.666\left(1.112095385^3\right)^{1/2}} \right) =$$

$H_2 = 1.020415451$

Se obtiene $|g'(x)|$ con ayuda de maple

$h := 1.112095385:$
$B := 4:$
$Q := 13:$

```
> F := evalf(1 - (-0.666*sqrt(h^3) + 4.995000000*(3 - 0.2*h)*h^2/sqrt(h^3))/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3)) + 1/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))^2*((3.33*(3 - 0.2*h)*sqrt(h^3) - 12)*(-0.9990*sqrt(h) + 2.497500000*(3 - 0.2*h)/sqrt(h) - 0.9990000000*h^2/sqrt(h^3))))
```

$F := -0.02686672800$

$|g'(x)| = 0.02686672800$

Se revisa el error

$\varepsilon = |1.020415451 - 1.112095385| = 0.091679935$

Iteración 3

$B = 4 \quad Q = 13 \quad H_i = 1.020415451$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_3 = H_3 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)\left(H_i^3\right)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666\left(H_i^3\right)^{1/2}} \right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(4 - 0.2(1.020415451))\left(1.020415451^3\right)^{1/2} - 13}{4.995(4 - 0.2(1.020415451))(1.020415451)^{1/2} - 0.666\left(1.020415451^3\right)^{1/2}} \right) =$$

$H_3 = 1.018820059$

Se obtiene $|g'(x)|$ con ayuda de maple

$h := 1.020415451:$
$B := 4:$
$Q := 13:$

```
> F := evalf(1 - (-0.666*sqrt(h^3) + 4.995000000*(3 - 0.2*h)*h^2/sqrt(h^3))/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3)) + 1/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))^2*((3.33*(3 - 0.2*h)*sqrt(h^3) - 12)*(-0.9990*sqrt(h) + 2.497500000*(3 - 0.2*h)/sqrt(h) - 0.9990000000*h^2/sqrt(h^3))))
```

$F := -0.06529570130$

$|g'(x)| = 0.06529570130$

Se calcula el error

$$\varepsilon = |1.018820059 - 1.020415451| = 0.001595391$$

Iteración 4

$B = 4 \quad Q = 13 \quad H_i = 1.018820059$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_4 = H_4 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(4 - 0.2(1.018820059))(1.018820059^3)^{1/2} - 13}{4.995(4 - 0.2(1.018820059))(1.018820059)^{1/2} - 0.666(1.018820059^3)^{1/2}} \right) =$$

$H_4 = 1.018819550$

Se obtiene $|g'(x)|$

$$|g'(x)| = 0.06605893110$$

Se calcula el error

$$\varepsilon = |1.018819550 - 1.018820059| = 0.000000509$$

Las iteraciones de la tercera pareja se muestran en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9 Resultados de las iteraciones de la tercera pareja de datos $B = 4 \quad Q = 13$.

H_i	H	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert g'(x) \rvert$
2	1.112095385		0.08117961592
1.112095385	1.020415451	0.091679935	0.02686672800
1.020415451	1.018820059	0.001595391	0.06529570130
1.018820059	1.018819550	0.000000509	0.06605893110

$H = 1.018819550 \triangleleft$ *Respuesta.*

Cuarta pareja

Iteración 1

$B = 3.6 \quad Q = 30 \quad H_i = 3.6/2 = 1.8$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_1 = H_1 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) = 1 - \left(\frac{3.33(3.6 - 0.2(1.8))(1.8)^{1/2} - 30}{4.995(3.6 - 0.2(1.8))(1.8)^{1/2} - 0.666(1.8)^{1/2}} \right) =$$

$H_1 = 1.996204189$

Se obtiene $|g'(x)|$

$h := 1.8$:
$B := 3.6$:
$Q := 30$:

```
> F := evalf( 1 - (-0.666*sqrt(h^3) + 4.995000000*(3 - 0.2*h)*h^2/sqrt(h^3)) / (4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))
    + 1/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))^2 * ((3.33*(3 - 0.2*h)*sqrt(h^3) - 12)*(
    -0.9990*sqrt(h) + 2.497500000*(3 - 0.2*h)/sqrt(h) - 0.9990000000*h^2/sqrt(h^3))))
```

$F := 0.07970804264$

$$|g'(x)| = 0.07970804264$$

Iteración 2

$B = 3.6 \quad Q = 30 \quad H_i = 1.996204189$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_2 = H_2 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) =$$

$$1 - \left(\frac{3.33(3.6 - 0.2(1.996204189))(1.996204189)^{1/2} - 30}{4.995(3.6 - 0.2(1.996204189))(1.996204189)^{1/2} - 0.666(1.996204189)^{1/2}} \right) =$$

$$H_2 = 1.993254615$$

Se obtiene $|g'(x)|$

```
h := 1.996204189:
B := 3.6:
Q := 30:
F := evalf( 1 - (-0.666*sqrt(h^3) + 4.995000000*(3 - 0.2*h)*h^2/sqrt(h^3)) / (4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))
    + 1/(4.995*(3 - 0.2*h)*sqrt(h) - 0.666*sqrt(h^3))^2 * ((3.33*(3 - 0.2*h)*sqrt(h^3) - 12)*(
    -0.9990*sqrt(h) + 2.497500000*(3 - 0.2*h)/sqrt(h) - 0.9990000000*h^2/sqrt(h^3))))
```

$F := 0.08122286325$

$$|g'(x)| = 0.08122286325$$

Se calcula el error

$$\varepsilon = |1.993254615 - 1.996204189| = 0.002949574$$

Iteración 3

$B = 3.6 \quad Q = 30 \quad H_i = 1.993254615$

Se sustituyen los valores en la formula

$$H_3 = H_3 - \left(\frac{3.33(B - 0.2H_i)(H_i^3)^{1/2} - Q}{4.995(B - 0.2H_i)H^{1/2} - 0.666(H_i^3)^{1/2}} \right) =$$

$$1-\left(\frac{3.33(3.6-0.2(1.993254615))(1.993254615)^{1/2}-30}{4.995(3.6-0.2(1.993254615))(1.993254615)^{1/2}-0.666(1.993254615)^{1/2}}\right)=$$

$H_3 = 1.993254019$

Se obtiene $|g'(x)|$ con ayuda de maple

$$|g'(x)| = 0.08125471383$$

Se calcula el error

$$\varepsilon = |1.993254019 - 1.993254615| = 0.000000595$$

Las iteraciones de la cuarta pareja se muestran en la Tabla 2.10.

Tabla 2.10 Resultados de las iteraciones de la cuarta pareja de datos $B = 3.6 \quad Q = 30.$

H_i	H	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	$\lvert g'(x) \rvert$
1.8	1.996204189		0.07970804264
1.996204189	1.993254615	0.002949574	0.08122286325
1.993254615	1.993254019	0.000000595	0.08125471383

Resultado $\triangleright$ $H = 1.993254019$

Resultado final:

Los resultados de las diferentes parejas de B y Q son los mostrados en la Tabla 2.11.

Tabla 2.11 Resultados de las iteraciones de las cuatro parejas de datos $B \; y \; Q$.

B	3	2	4	3.6
Q	12	20	13	30
H	1.194258049	2.527765930	1.018819550	1.993254019

Problema 3 – Método de Newton-Raphson

Para determinar la constante de nacimientos de una población se necesita calcular λ en la siguiente ecuación:

$$1.564\times10^6 = 10^6 e^{\lambda} + \frac{0.435\times10^6}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$$

Con aproximación de 10^{-3}

Solución

Analizando la ecuación, cada termino tiene un 10^6 por lo que se puede dividir en ambos lados de la igualdad quedando

$$\frac{\left(1.564\times10^6 = 10^6 e^{\lambda} + \frac{0.435\times10^6}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)\right)}{10^6} \rightarrow 1.564 = e^{\lambda} + \frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$$

Para poder utilizar el método de Newton-Raphson se iguala a cero la ecuación

$$e^{\lambda}+\frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)-1.564=0$$

Antes de poder aplicar la fórmula de **Newton-Raphson** es necesario definir el inicio más cercano a la raíz, para ello, se muestran las gráficas de la Fig. 2.20.

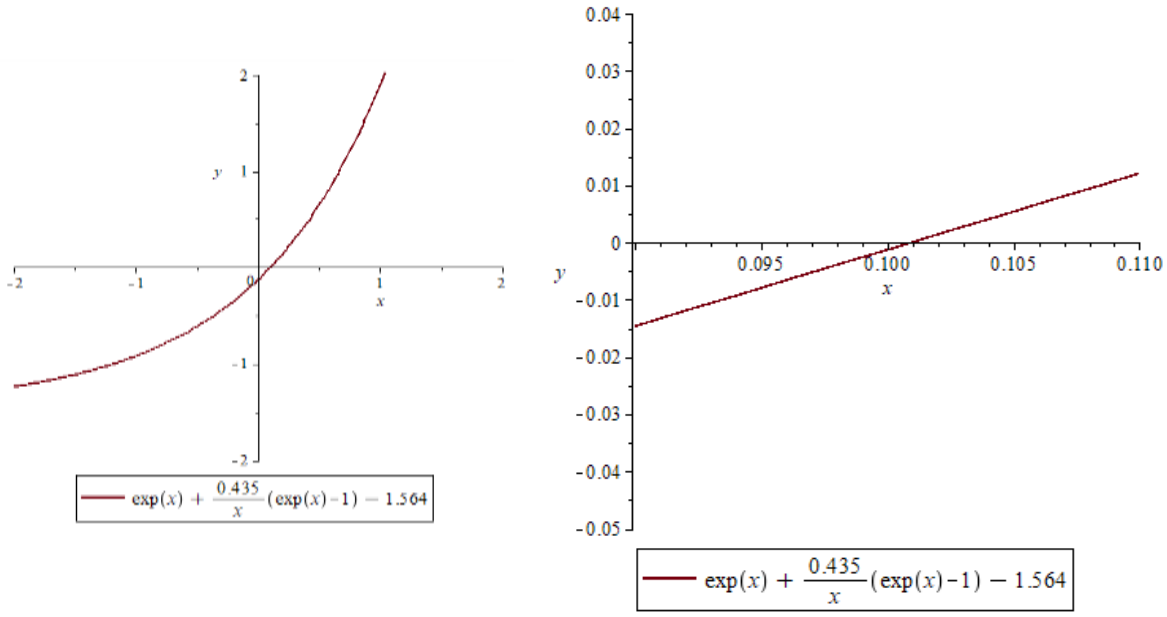


Fig. 2.20 Gráfica de la función mostrando la raíz: izquierda en un amplio intervalo y derecha con un zoom de la izquierda para obtener un valor más visible de la raíz.

Observando la gráfica de la Fig. 2.20 derecha se puede ver que el valor inicial más cercano a la raíz es 0.1. Para usar la fórmula de Newton-Raphson es necesario derivar la función obtenida así

$$F'(\lambda)=e^{\lambda}+\frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)-1.564=0$$

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda}=e^{\lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\left(0.435\lambda^{-1}\left(e^{\lambda}\right)\right)-\left(\left(0.435\lambda^{-2}\right)\left(e^{\lambda}-1\right)\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{0.435\left(e^{\lambda}\right)}{\lambda}-\frac{0.435\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda^2}$$

$$F'(\lambda)=e^{\lambda}+\frac{0.435\left(e^{\lambda}\right)}{\lambda}-\frac{0.435\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda^2}$$

Una vez que se cuenta con todos los datos necesarios para poder realizar la operación se sustituyen en la formula iniciando con la secuencia de iteraciones.

Iteración 1

$$\lambda_{i+1}=\lambda_1-\frac{f\left(\lambda_i\right)}{\frac{d}{dH}f\left(\lambda_i\right)}=\lambda-\left(\frac{e^{\lambda}+\frac{0.435}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)-1.564}{e^{\lambda}+\frac{0.435\left(e^{\lambda}\right)}{\lambda}-\frac{0.435\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda^2}}\right)$$

Tomando $\lambda = x$ se llega al siguiente resultado

$i=0:$

$x := .1:$

$$F := \left(x - \left(\frac{e^x + \frac{0.435}{x}\left(e^x - 1\right) - 1.564}{e^x + \frac{0.435\left(e^x\right)}{x} - \frac{0.435\left(e^x - 1\right)}{x^2}} \right) \right);$$

$F := 0.1009983999$

$\lambda = 0.1009983999$

Iteración 2

$i = 1$:

$x := .1009983999$:

>

$$F := \left(x - \left(\frac{e^x + \frac{0.435}{x}\left(e^x - 1\right) - 1.564}{e^x + \frac{0.435\left(e^x\right)}{x} - \frac{0.435\left(e^x - 1\right)}{x^2}} \right) \right);$$

$F := 0.1009979279$

$\lambda = 0.1009979279$

En esta iteración se calcula el error para ver qué tan cerca estamos de la raíz que mayormente se aproxime a la raíz esperada

$\varepsilon = |0.1009983999 - 0.1009979279| = 4.72 \times 10^{-7}$

El resultado se espera con una aproximación de 10^{-3} dado por

$\lambda = 0.1009979279 \triangleleft Respuesta.$

Otra iteración nos da un error aún menor:

Iteración 3

$i = 2$:

$x := 0.1009979279$:

$$F := \left(x - \left(\frac{\exp(x) + \frac{0.435}{x}(\exp(x) - 1) - 1.564}{e^x + \frac{0.435\left(e^x\right)}{x} - \frac{0.435\left(e^x - 1\right)}{x^2}} \right) \right);$$

$F := 0.1009979316$

$\lambda = 0.1009979316$

Se calcula el error

$\varepsilon = |0.1009979279 - 0.1009979316| = 3.7 \times 10^{-9}$

El concentrado de iteraciones se presenta en la Tabla 2.12.

Tabla 2.12 Resultados del Problema 3.

i	λ_i	λ	ε
0	0.1	0.1009983999	
1	0.1009983999	0.1009979279	4.7×10^{-7}
2	0.1009979279	0.1009979316	3.7×10^{-9}

Las raíces de la función son:

$$1.564 \cdot 10^6 = 10^6 \cdot e^{\lambda} + \frac{0.435 \cdot 10^6}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right)$$

$$1.564000000\,10^6 = 1000000\,e^{\lambda} + \frac{4.35000000\,10^5\left(e^{\lambda} - 1\right)}{\lambda}$$

$$> \ solve\left(-1.564000000\,10^{6} + 1000000\,e^{\lambda} + \frac{4.35000000\,10^{5}\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda} = 0, \lambda \right)$$

$$\lambda := 0.1009979279$$

$$> \ -1.564000000\,10^{6} + 1000000\,e^{\lambda} + \frac{4.35000000\,10^{5}\left(e^{\lambda}-1\right)}{\lambda} = 0$$

$$-5.871019055\,10^{6} + 5.307019055\,10^{6}\,e^{0.1009979279} = 0$$

L.Q.Q.D. que es la raíz de la ecuación muy aproximadamente:

$-5.871019055\,10^{6} + 5.307019055\,10^{6}\,e^{0.1009979279} = 0 \triangleleft$ *Respuesta.*

Solución alternativa

Para determinar la constante de nacimientos de una población se necesita la siguiente ecuación:

$$1.564\times 10^{6} = 10^{6}\,e^{\lambda} + \frac{0.435\times 10^{6}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$$

Con una aproximación de 10^{-3}

Las fórmulas a utilizar, son

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\varepsilon = \left| x_{i+1} - x_i \right|$$

Primeramente, ordenaremos la ecuación y multiplicaremos para eliminar los cocientes y el término de potencia 10^{6}

$$1.564\times 10^{6} = 10^{6}\,e^{\lambda} + \frac{0.435\times 10^{6}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)$$

$$\left[e^{\lambda}\times 10^{6} + \frac{0.435e^{\lambda}\times 10^{6}}{\lambda} - \frac{0.435\times 10^{6}}{\lambda} - 1.564\times 10^{6} = 0 \right] \cdot \frac{\lambda}{10^{6}}$$

$$\lambda e^{\lambda} + 0.435e^{\lambda} - 1.564\lambda - 0.435 = 0$$

$$f(\lambda) = \lambda e^{\lambda} + 0.435e^{\lambda} - 1.564\lambda - 0.435 = 0$$

Una vez obtenemos la función, la derivaremos.

$$f'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda e^{\lambda} + 0.435e^{\lambda} - 1.564\lambda - 0.435\right]$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda e^{\lambda} + 0.435e^{\lambda} - 1.564\lambda - 0.435\right] =$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda e^{\lambda}\right] + \frac{d}{d\lambda}\left[0.435e^{\lambda}\right] - \frac{d}{d\lambda}\left[1.564\lambda\right] - \frac{d}{d\lambda}\left[0.435\right]$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda e^{\lambda}\right] = \left[\frac{d}{d\lambda}(\lambda)\right]\cdot e^{\lambda} + \left[\frac{d}{d\lambda}\left(e^{\lambda}\right)\right]\cdot \lambda$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda e^{\lambda}\right] = \left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) \qquad \frac{d}{d\lambda}\left[0.435e^{\lambda}\right] = 0.435\,\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[0.435e^{\lambda}\right] = 0.435e^{\lambda} \qquad \frac{d}{d\lambda}\left[1.564\lambda\right] = 1.564\,\frac{d}{d\lambda}\lambda$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[1.564\lambda\right] = 1.564 \qquad f'(\lambda) = \left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) + 0.435e^{\lambda} - 1.564$$

$f'(\lambda) = \lambda e^{\lambda} + 1.435e^{\lambda} - 1.564$

Sabiendo que $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Tenemos que $\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{f(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} = \lambda_i - \frac{\lambda e^{\lambda} + 0.435e^{\lambda} - 1.564\lambda - 0.435}{\lambda e^{\lambda} + 1.435e^{\lambda} - 1.564}$

Procedemos entonces con las iteraciones, partiendo de $\lambda_0 = 1$

Primera iteración

$\lambda_1 = 1 - \frac{e + 0.435e - 1.564 - 0.435}{e + 1.435e - 1.564}$, $\lambda_1 = 0.6237926193$

$f(0.6237926193) = 0.6237926193e^{0.6237926193} + 0.435e^{0.6237926193} - 1.564(0.6237926193) - 0.435$

$f(\lambda_1) = 0.5660865137$

Segunda iteración

$\lambda_2 = (0.6237926193) -$

$$\left(\frac{0.6237926193e^{0.6237926193} + 0.435e^{0.6237926193} - 1.564(0.6237926193) - 0.435}{0.6237926193e^{0.6237926193} + 1.435e^{0.6237926193} - 1.564} \right)$$

$\lambda_2 = 0.3756962751$

$f(0.3756962751) = 0.3756962751e^{0.3756962751} + 0.435e^{0.3756962751} - 1.564(0.3756962751) - 0.435$

$f(\lambda_2) = 0.1577887274$

Tercera iteración

$\lambda_3 = (0.3756962751) -$

$$\left(\frac{0.3756962751e^{0.3756962751} + 0.435e^{0.3756962751} - 1.564(0.3756962751) - 0.435}{0.3756962751e^{0.3756962751} + 1.435e^{0.3756962751} - 1.564} \right)$$

$\lambda_3 = 0.2285578044$

$f(0.2285578044) = 0.2285578044e^{0.2285578044} + 0.435e^{0.2285578044} - 1.564(0.2285578044) - 0.435$

$f(\lambda_3) = 0.04148586602$

Cuarta iteración

$\lambda_4 = (0.2285578044) -$

$$\left(\frac{0.2285578044e^{0.2285578044} + 0.435e^{0.2285578044} - 1.564(0.2285578044) - 0.435}{0.2285578044e^{0.2285578044} + 1.435e^{0.2285578044} - 1.564} \right)$$

$\lambda_4 = 0.1497976074$

$f(0.1497976074) = 0.1497976074e^{0.1497976074} + 0.435e^{0.1497976074} - 1.564(0.1497976074) - 0.435$

$f(\lambda_4) = 0.01001682808$

Quinta iteración

$\lambda_5 = (0.1497976074) -$

$$\left(\frac{0.1497976074e^{0.1497976074} + 0.435e^{0.1497976074} - 1.564(0.1497976074) - 0.435}{0.1497976074e^{0.2285578044} + 1.435e^{0.1497976074} - 1.564} \right)$$

$\lambda_5 = 0.1336222879$

$f(0.1336222879) = 0.1336222879e^{0.1336222879} + 0.435e^{0.1336222879} - 1.564(0.1336222879) - 0.435$

$f(\lambda_5) = 0.00592785638$

Sexta iteración

$$\lambda_6 = (0.1336222879) -$$
$$\left(\frac{0.1336222879e^{0.1336222879} + 0.435e^{0.1336222879} - 1.564(0.1336222879) - 0.435}{0.1336222879e^{0.1336222879} + 1.435e^{0.1336222879} - 1.564} \right)$$
$$\lambda_6 = 0.1023210136$$
$$f(0.1023210136) = 0.1023210136e^{0.1023210136} + 0.435e^{0.1023210136}$$
$$-1.564(0.1023210136) - 0.435$$
$$f(\lambda_6) = 0.0001813845$$

Séptima iteración

$$\lambda_7 = (0.1023210136) -$$
$$\left(\frac{0.1023210136e^{0.1023210136} + 0.435e^{0.1023210136} - 1.564(0.1023210136) - 0.435}{0.1023210136e^{0.1023210136} + 1.435e^{0.1023210136} - 1.564} \right)$$
$$\lambda_7 = 0.10101566239$$
$$f(0.10101566239) = 0.10101566239e^{0.10101566239} + 0.435e^{0.10101566239} - 1.564(0.10101566239) - 0.435$$
$$f(\lambda_7) = 0.00000239852$$

Octava iteración

$$\lambda_8 = (0.10101566239) -$$
$$\left(\frac{0.10101566239e^{0.10101566239} + 0.435e^{0.10101566239} - 1.564(0.10101566239) - 0.435}{0.10101566239e^{0.10101566239} + 1.435e^{0.10101566239} - 1.564} \right)$$
$$\lambda_8 = 0.1009979329$$
$$f(0.1009979329) = 0.1009979329e^{0.1009979329} + 0.435e^{0.1009979329} - 1.564(0.1009979329) - 0.435$$
$$f(\lambda_8) = 4.34689 \times 10^{-10}$$

Comprobamos el error

$$\varepsilon = |x_{i+1} - x_i|$$
$$\varepsilon = |0.1009979329 - 0.10101566239|$$
$$\varepsilon = 0.000016691 \times 100\% = 0.0016691\%$$

Los resultados de las iteraciones se resumen en la Tabla 2.13.

Tabla 2.13 Resultados de las iteraciones del Problema 3.

Iteración	λ_i	λ_{i+1}	$f(\lambda_{i+1})$	$\lvert\lambda_{i+1} - \lambda_i\rvert$
1	1	0.6237926193	0.5660865137	0.3762073807
2	0.6237926193	0.3756962751	0.1577887274	0.2480963442
3	0.3756962751	0.2285578044	0.0414845502	0.1471384707
4	0.2285578044	0.1498976074	0.0100168280	0.078660197
5	0.1498976074	0.1336222879	0.0059278563	0.0162753195
6	0.1336222879	0.1023210136	0.0001813845	0.0313012743
7	0.1023210136	0.1010156623	2.039852x10^-6	0.0013053513
8	0.1010156623	0.1009979329	4.34659x10^-10	1.6691x10^10-5

Respuesta esperada $\lambda \approx 0.101$
Respuesta obtenida $\lambda = 0.1009979329$

Problema 4
Usar el metodo de Newton-Raphson par hallar las raíces la la función
$f(x) = \ln x - x + 2$

Solución
Las raíces de la función dada las podemos observar en la Fig. 2.21 en el punto A y el punto B.

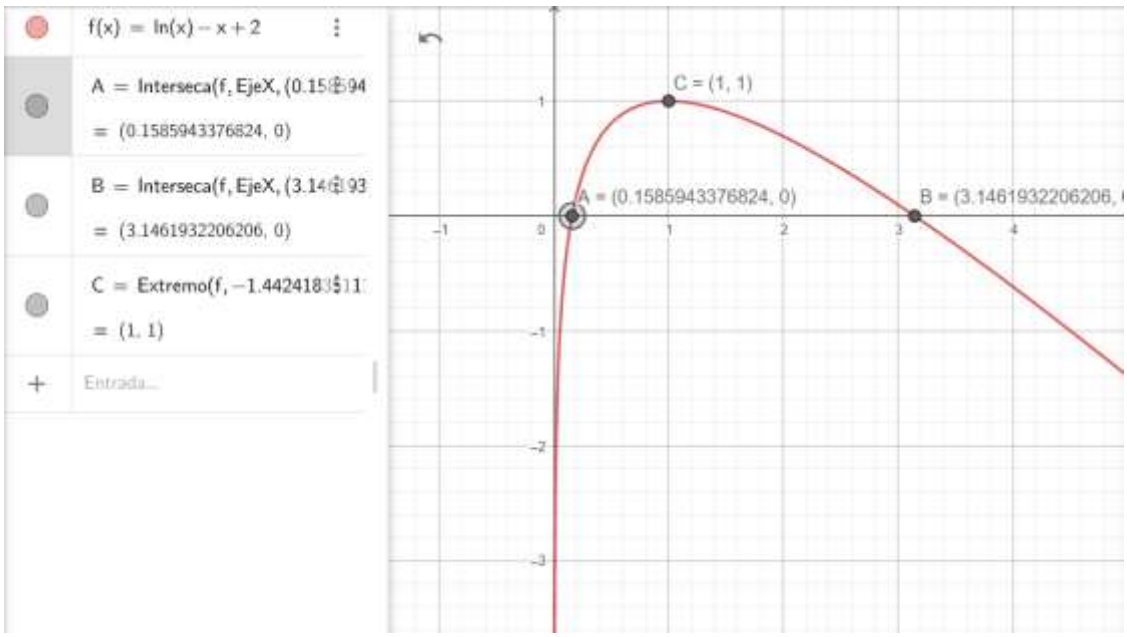


Fig. 2.21 Raíces de la función a calcular.

Utilizamos la raiz B y realizamos los cálculos en Excel, como se muestra en la Tabla 2.14.

Tabla 2.14 Resultados del Problema 4

f(x)= lnx-x+2
f´(x)=1/x-1

iteraciones	xi	f(x)	f´(x)	f(x)/f´(x)	error
0	3	0.09861229	-0.6666667	-0.1479184	4.69892839
1	3.14791843	-0.001177	-0.6823298	0.00172499	0.05482791
2	3.14619344	-1.502E-07	-0.6821556	2.2018E-07	6.9982E-06
3	3.14619322	0	-0.6821556	0	0
4	3.14619322	0	-0.6821556	0	0
5	3.14619322	0	-0.6821556	0	0
6	3.14619322	0	-0.6821556	0	

Podemos

observar que apartir de la iteracion numero 3, el valor de *xi* es igual, por lo que el metodo termina ahí.
Las raíces de la función son

> $f(x) = \ln(x) - x + 2$

$f(x) = \ln(x) - x + 2$

> $solve(\ln(x) - x + 2, x)$

$e^{-\text{LambertW}\left(-\frac{1}{e^2}\right)-2}, e^{-\text{LambertW}\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)-2}$

> $evalf\left(e^{-\text{LambertW}\left(-\frac{1}{e^2}\right)-2}\right)$

0.1585943396

> $evalf\left(e^{-\text{LambertW}\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)-2}\right)$

3.146193222

Problema 5 a)
La ecuación de estado de Van der Walls para un gas real es

$$p + \frac{a}{V^2}(V - b) = RT \quad \text{o} \quad f(V) = V^3 P - (Pb + RT)V^2 + aV - ab = 0$$

Dónde:
$P =$ presión (atm)
$T =$ temperatura (K)
R = constante universal de los gases, $0.08205 \left[\frac{atm\ \ lt}{gmol \cdot K}\right]$
V = volumen molar del gas $lt/gmol$
a, b= constantes particulares para cada gas

Para los gases de la Tabla 2.15, calcule V a 80°C para presiones de 10, 20, 30 y 100 atm.

Tabla 2.15 Datos experimentales de gases.

Gas	a	b
CO_2	3.599	0.04267
Dimetilamina	37.49	0.19700
He	0.03412	0.02370
Óxido nítrico	1.34	0.02789

Para
Valores iniciales $V_I = 0.8\nu$, $V_D = 1.2\nu$, donde $\nu = \frac{RT}{P}$.
Usar como criterio de exactitud: $|f(V_M)| = 10^{-4}$.
Presión de 20 atm y 80°C.
Resolver para CO_2

Solución

En la redacción anterior se plantea la instrucción de resolver 16 casos para completar el ejercicio de aplicación (tomando en cuenta que para cada gas corresponde usar cada presión especificada), dicha acción resulta en un extenso trabajo.

La forma polinómica de Van der Walls se obtiene mediante los siguientes pasos algebraicos

$$p+\frac{a}{V^2}(V-b)=RT$$

$$\frac{V^2P+a}{V^2}(V-b)=RT$$

$$\frac{V^2P+a}{V^2}(V-b)v^2=RTV^2$$

$$\left(V^2P+a\right)(V-b)=RTV^2$$

$$\left(V^3P-V^2Pb+aV-ab\right)=RTV^2$$

$$V^3P-(Pb+RT)V^2+aV-ab=0$$

Finalmente, la forma polinómica es

$$f(V)=V^3P-(Pb+RT)V^2+aV-ab=0$$

Los valores numéricos dados son

P= 20 atm

$T=80°C$ o $353.15k$

$$R=0.08205\frac{atm\cdot lt}{gmol\cdot K}$$

V = Volumen molar del gas $\left[\frac{lt}{gmol}\right]$?

a, b= 3.599, 0.04267 respectivamente

Sustituimos los valores en la forma polinómica, obteniendo la ecuación cúbica que resolveremos $f(V)=20V^3-((20)(0.04267)+(0.08205)(353.15))V^2+(3.599)V-(3.599)(0.04267)$

$$f(V)=20V^3-(0.8534+28.9759575)V^2+3.599V-0.15356933$$

$$f(V)=20V^3-29.8293575V^2+3.599V-0.15356933$$

Calculamos

Dónde: $v=\frac{RT}{P}$, para introducirlo en las condiciones iniciales de volumen molar dadas, es decir, $V_I=0.8v$, $V_D=1.2v$

$$RT=\left(0.08205\frac{atm\cdot lt}{gmol\cdot K}\right)(353.15K)=28.9759575\frac{atm\cdot lt}{gmol}$$

$$v=\frac{RT}{P}=\frac{28.9759575\frac{atm\cdot lt}{gmol}}{20atm}=1.448797875\frac{lt}{gmol}$$

Entonces,

$$V_I = 0.8v = 0.8\left(1.448797875\frac{lt}{gmol}\right) = 1.1590383\frac{lt}{gmol}$$

$$V_D = 1.2(v) = 1.2\left(1.448797875\frac{lt}{gmol}\right) = 1.73855745\frac{lt}{gmol}$$

Usaremos el algoritmo propio del método de la posición falsa

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)(f(X_D))}{f(X_D) - f(X_I)}$$

para aproximar el valor de la raíz deseada, dicho algoritmo está en función de la variable independiente *X*, pero en este caso de aplicación, la variable independiente es *V*, por ello, escribimos el algoritmo como

$$V_M = V_D - \frac{(V_D - V_I)(f(V_D))}{f(V_D) - f(V_I)}$$

Sustituimos los valores de

$V_I = 1.1590383$

$V_D = 1.73855745$

en la función y en el algoritmo

$$f(V) = 20V^3 - 29.8293575V^2 + 3.599V - 0.15356933$$

$$V_m = V_D \frac{(V_D - V_I)f(V_m)}{f(V_D) - f(V_I)}$$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.1590383)(21.040469)}{(21.040469) - (-4.913707395)}$$

Realizamos unas operaciones aritméticas para llegar al resultado final

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(0.57951915)(21.040469)}{(21.040469 + 4.913707395)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(12.193354710)}{(25.954176395)}$$

$$= 1.73855745 - 0.469803184$$

$V_m = 1.268754266$

En la Fig. 2.22 se representa el valor de la raíz obtenida.

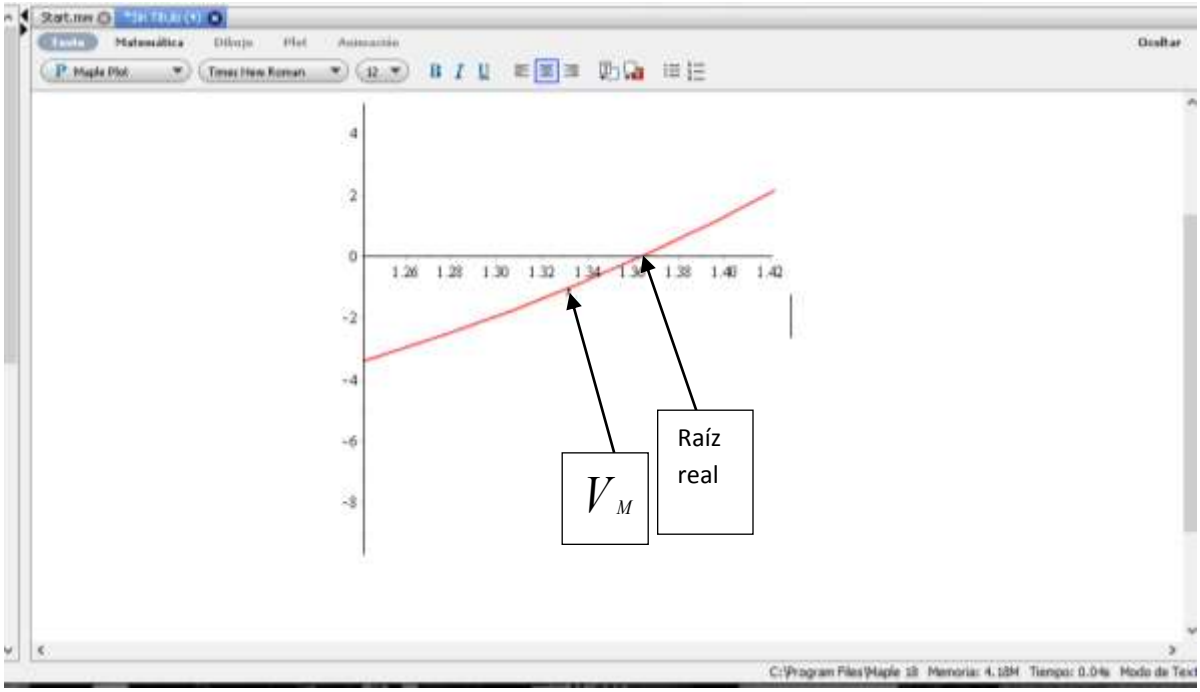


Fig. 2.22 Representación grafica de Maple© donde se observa la proximidad de la primer raiz obtenida con el método, en comparación con la raiz real.

Observando la representación gráfica, podemos corroborar que aún nos falta camino por recorrer, puesto que la raíz para satisfacer la ecuación es 1.3636335995701.
Aunque, es necesario para algunas aplicaciones llegar a la raíz exacta, en este ejercicio tendremos una pauta o criterio que nos permitirá detenernos en las iteraciones.

Ese criterio de exactitud, mejor dicho, nos permitirá parar cuando $|f(V_m)|<10^{-4}$ que se interpreta como: *El valor absoluto de la raíz sustituida en la función original, cuyo resultado es precisamente menor a 0.0001 (cercano a 0).*
A continuación, evaluamos a V_I, V_D y V_M en la función original, de modo que los resultados nos muestren donde el signo es igual a V_M para cambiarlo en el intervalo.

$$f(x)=20x^3-29.8293575x^2+3.599x-0.15356933$$
$$f(V_I)=20(V_I)^3-29.8293575(V_I)^2+3.599(V_I)-0.15356933$$
$$=20(1.1590383)^3-29.8293575(1.1590383)^2+3.599(1.1590383)-0.15356933$$
$$=-4.913707395$$
$$f(V_D)=20(V_D)^3-29.8293575(V_D)^2+3.599(V_D)-0.15356933$$
$$=20(1.73855745)^3-29.8293575(1.73855745)^2+3.599(1.73855745)-0.15356933$$
$$=21.040469$$
$$f(V_M)=20(V_M)^3-29.8293575(V_M)^2+3.599(V_M)-0.15356933$$
$$=20(1.268754266)^3-29.8293575(1.268754266)^2+3.599(1.268754266)-0.15356933$$
$$=-2.757531191$$

$f(V_I)$tiene el mismo signo $f(V_M)$, ambas tienen signo negativo, lo cual es indicativo de que este necesita ser intercambiado por la raíz recién obtenida en aras de *aproximarse* cada vez al valor esperado. Así, $f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$
Iniciamos con la iteración cero en el intervalo [1.1590383,1.73855745]. Obtuvimos V_M cuyo resultado

podrá intercambiarse en el lugar de V_I.

El intervalo con el que iniciamos la iteración 1, es: [1.268754266,1.73855745].

Iteración 1

[1.268754266,1.73855745]

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.268754266)(21.040469)}{(21.040469) - (-2.757531191)}$$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(0.469803184)(21.040469)}{(21.040469 + 2.757531191)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(9.884879329)}{(23.79800019)}$$

$$= 1.73855745 - 0.415365965$$

$$V_m = 1.35769854$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.268754266)^3 - 29.8293575(1.268754266)^2 + 3.599(1.268754266) - 0.15356933$$

$$= -2.757531191$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.323191484)^3 - 29.8293575(1.323191484)^2 + 3.599(1.323191484) - 0.15356933$$

$$= -1.283889438$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 2

[1.323191484,1.73855745]

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.323191484)(21.040469\ )}{(21.040469\ -(-1.283889438))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.415365966)(21.040469\ )}{(21.040469\ + 1.283889438)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(8.739494731\ )}{(22.32435844)}$$

$$= 1.73855745 - 0.9147701$$

$$= 1.347079471$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.323191484)^3 - 29.8293575(1.323191484)^2 + 3.599(1.323191484) - 0.15356933$$

$$= -1.283889438$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.347079471)^3 - 29.8293575(1.347079471)^2 + 3.599(1.347079471) - 0.15356933$$

$$= -0.545640984$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 3

[1.347079471,1.73855745]

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.347079471)(21.040469\ )}{(21.040469\ -(-0.545640984))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.391477979)(21.040469\ )}{(21.040469\ + 0.545640984)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(8.236880281\ )}{(21.58610998)}$$

$$= 1.73855745 - 0.381582429$$

$$= 1.356975021$$

$$f(V_I) = \ 20(V_I)^3 - \ 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.347079471)^3 - \ 29.8293575(1.347079471)^2 + 3.599(1.347079471) - 0.15356933$$

$$= \text{-}0.545640984$$

$$f(V_D) = \ 20(V_D)^3 - \ 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - \ 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= \ 21.040469$$

$$f(V_M) = \ 20(V_M)^3 - \ 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.356975021)^3 - \ 29.8293575(1.356975021)^2 + 3.599(1.356975021) - 0.15356933$$

$$= \text{-}0.22286851$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)\ \therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 4

$[1.356975021, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.356975021)(21.040469\ )}{(21.040469\ - (\text{-}0.22286851))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.381582429)(21.040469)}{(21.040469\ + 0.22286851)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(8.028673268\ )}{(21.26333751)}$$

$$= 1.73855745 - 0.377582929$$

$$= 1.36097452$$

$$f(V_I) = \ 20(V_I)^3 - \ 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.356975021)^3 - \ 29.8293575(1.356975021)^2 + 3.599(1.356975021) - 0.15356933$$

$$= \text{-}0.22286851$$

$$f(V_D) = \ 20(V_D)^3 - \ 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - \ 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= \ 21.040469$$

$$f(V_M) = \ 20(V_M)^3 - \ 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.36097452)^3 - \ 29.8293575(1.36097452)^2 + 3.599(1.36097452) - 0.15356933$$

$$= \text{-}0.089552645$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)\ \therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 5

$[1.36097452, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.36097452)(21.040469\ )}{(21.040469\ - (\text{-}0.089552645))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.37758293)(21.040469)}{(21.040469\ + 0.089552645)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(7.944521934\ )}{(21.13002165)}$$

$$= 1.73855745 - 0.375982669$$

$$= 1.362574781$$

$$f(V_I) = \ 20(V_I)^3 - \ 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.36097452)^3 - 29.8293575(1.36097452)^2 + 3.599(1.36097452) - 0.15356933$$
$$= -0.089552645$$
$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$
$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.362574781)^3 - 29.8293575(1.362574781)^2 + 3.599(1.362574781) - 0.15356933$$
$$= -0.03574691$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \to V_M$

Iteración 6

$[1.362574781, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.362574781)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.03574691))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.375982669)(21.040469)}{(21.040469 + 0.03574691)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.910851692)}{(21.07621591)}$$
$$= 1.73855745 - 0.375344973$$
$$= 1.363212477$$
$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.362574781)^3 - 29.8293575(1.362574781)^2 + 3.599(1.362574781) - 0.15356933$$
$$= -0.03574691$$
$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$
$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363212477)^3 - 29.8293575(1.363212477)^2 + 3.599(1.363212477) - 0.15356933$$
$$= -0.014231517$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \to V_M$

Iteración 7

$[1.363212477, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363212477)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.014231517))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.375344973)(21.040469)}{(21.040469 + 0.014231517)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.897434269)}{(21.07621591)}$$
$$= 1.73855745 - 0.375091265$$
$$= 1.363466185$$
$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363212477)^3 - 29.8293575(1.363212477)^2 + 3.599(1.363212477) - 0.15356933$$
$$= -0.014231517$$
$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$
$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363466185)^3 - 29.8293575(1.363466185)^2 + 3.599(1.363466185) - 0.15356933$$

$= -0.005659874678$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 8

$[1.363466185, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363466185)(21.040469\ )}{(21.040469\ -(-0.005659874678))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.375091265)(21.040469)}{(21.040469\ + 0.005659874678)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(7.892096133)}{(21.07621591)}$$

$$= 1.73855745 - 0.3754990392$$

$$= 1.363567057$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.363466185)^3 - 29.8293575(1.363466185)^2 + 3.599(1.363466185) - 0.15356933$$

$$= -0.005659874678$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.363567057)^3 - 29.8293575(1.363567057)^2 + 3.599(1.363567057) - 0.15356933$$

$$= -0.002249989942$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 9

$[1.363567057, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363567057)(21.040469)}{(21.040469\ -(-0.002249989942))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.374990393)(21.040469)}{(21.040469\ + 0.002249989942)}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(7.889973739)}{(21.04271899)}$$

$$= 1.73855745 - 0.374950297$$

$$= 1.363607153$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.363567057)^3 - 29.8293575(1.363567057)^2 + 3.599(1.363567057) - 0.15356933$$

$$= -0.002249989942$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$

$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$

$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$

$$= 20(1.363607153)^3 - 29.8293575(1.363607153)^2 + 3.599(1.363607153) - 0.15356933$$

$$= -0.0008942975561$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 10

$[1.363607153, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363607153)(21.040469)}{(21.040469\ -(-0.0008942975561))}$$

$$= 1.73855745 - \frac{(0.374950297)(21.040469)}{(21.040469 + 0.0008942975561)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.889130101)}{(21.0413633)}$$
$$= 1.73855745 - 0.37493436$$
$$= 1.363623089$$
$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363607153)^3 - 29.8293575(1.363607153)^2 + 3.599(1.363607153) - 0.15356933$$
$$= -0.0008942975561$$
$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$
$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363623089)^3 - 29.8293575(1.363623089)^2 + 3.599(1.363623089) - 0.15356933$$
$$= -0.0003554305677$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \to V_M$

Iteración 11

$[1.363623089, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363623089)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.0003554305677))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.37493436)(21.040469)}{(21.040469 + 0.0003554305677)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.888794798)}{(21.04082443)}$$
$$= 1.73855745 - 0.374928027$$
$$= 1.363629422$$
$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363623089)^3 - 29.8293575(1.363623089)^2 + 3.599(1.363623089) - 0.15356933$$
$$= -0.0003554305677$$
$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$
$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363629422)^3 - 29.8293575(1.363629422)^2 + 3.599(1.363629422) - 0.15356933$$
$$= -0.0001412589867$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \to V_M$

Iteración 12

$[1.363629422, 1.73855745]$

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363629422)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.0001412589867))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.374928028)(21.040469)}{(21.040469 + 0.0001412589867)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.888661558)}{(21.04061026)}$$
$$= 1.73855745 - 0.374925511$$
$$= 1.363631939$$
$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$

$$= 20(1.363629422)^3 - 29.8293575(1.363629422)^2 + 3.599(1.363629422) - 0.15356933$$
$$= -0.0001412589867$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363631939)^3 - 29.8293575(1.363631939)^2 + 3.599(1.363631939) - 0.15356933$$
$$= -0.0000561400582$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 13

[1.363631939, 1.73855745]

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.363631939)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.0000561400582))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.374928028)(21.040469)}{(21.040469 + 0.0000561400582)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.888608596)}{(21.04052514)}$$
$$= 1.73855745 - 0.37492451$$
$$= 1.36363294$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363631939)^3 - 29.8293575(1.363631939)^2 + 3.599(1.363631939) - 0.15356933$$
$$= -0.0000561400582$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$20(1.36363294)^3 - 29.8293575(1.36363294)^2 + 3.599(1.36363294) - 0.15356933$$
$$= -0.00002231145156$$

$f(V_I)$ tiene el mismo signo que $f(V_M)$ $\therefore V_I \rightarrow V_M$

Iteración 14

[1.36363294, 1.73855745]

$$V_m = 1.73855745 - \frac{(1.73855745 - 1.36363294)(21.040469)}{(21.040469 - (-0.00002231145156))}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(0.374924509)(21.040469)}{(21.040469 + 0.00002231145156)}$$
$$= 1.73855745 - \frac{(7.888587527)}{(21.04049131)}$$
$$= 1.73855745 - 0.374924112$$
$$= 1.363633338$$

$$f(V_I) = 20(V_I)^3 - 29.8293575(V_I)^2 + 3.599(V_I) - 0.15356933$$
$$= 20(1.36363294)^3 - 29.8293575(1.36363294)^2 + 3.599(1.36363294) - 0.15356933$$
$$= -0.00002231145156$$

$$f(V_D) = 20(V_D)^3 - 29.8293575(V_D)^2 + 3.599(V_D) - 0.15356933$$
$$= 20(1.73855745)^3 - 29.8293575(1.73855745)^2 + 3.599(1.73855745) - 0.15356933$$
$$= 21.040469$$

$$f(V_M) = 20(V_M)^3 - 29.8293575(V_M)^2 + 3.599(V_M) - 0.15356933$$
$$= 20(1.363633338)^3 - 29.8293575(1.363633338)^2 + 3.599(1.363633338) - 0.15356933$$
$$= -0.00000885976711$$

Ahora podemos ver que al introducir el valor de V_M en la función, esta nos arroja un valor bastante cercano a cero, de hecho, podríamos seguir aproximándonos más, pero para efectos prácticos y permisibles tenemos el criterio de exactitud $|f(V_m)|<10^{-4}$; usando el ultimo valor de V_M que obtuvimos nos da un resultado de 0.00000885976711, el cual cumple con la condición relacional, porque 0.00000885976711 es menor que 10^{-4}, de hecho escrito en notación científica: $8.85976711\times10^{-6}<10^{-4}$. La Tabla 2.16 muestra los resultados de las iteraciones realizadas.

Tabla 2.16 Resultados del Problema 5.

Iteración	V_D	V_I	V_M	$\|f(V_M)\|$
1	1.73855745	1.268754266	1.35769854	1.283889438
2	1.73855745	1.323191484	1.347079471	0.545640984
3	1.73855745	1.347079471	1.356975021	0.22286851
4	1.73855745	1.356975021	1.36097452	0.089552645
5	1.73855745	1.36097452	1.362574781	0.03574691
6	1.73855745	1.362574781	1.363212477	0.014231517
7	1.73855745	1.363212477	1.363466185	0.005659874678
8	1.73855745	1.363466185	1.363567057	0.002249989942
9	1.73855745	1.363567057	1.363607153	0.0008942975561
10	1.73855745	1.363607153	1.363623089	0.0003554305677
11	1.73855745	1.363623089	1.363629422	0.0001412589867
12	1.73855745	1.363629422	1.363631939	0.0000561400582
13	1.73855745	1.363631939	1.36363294	0.00002231145156
14	1.73855745	1.36363294	1.363633338	0.00000885976711

Comprobación:

$f(V) = P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b$

> $f(V) = P\cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

Para CO2

> $a := 3.599 : b := 0.04267 :$

> $R := 0.08205$

$R := 0.08205$

> $T := 80 + 273.15$

$T := 353.15$

> $P := 20 :$

> $P\cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$20\,V^3 - 29.8293575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0$

> $solve(20\,V^3 - 29.8293575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0, V)$

Método de posición falsa o regula falsi

El método de la posición falsa, también conocido como regla de la falsa posición, es un método numérico para encontrar soluciones de ecuaciones no lineales. Es un método iterativo que utiliza la interpolación lineal para aproximar la raíz de la función.

Este método se asemeja al método de la secante, pero en lugar de tomar una aproximación por la secante, utiliza una aproximación por una línea recta que conecta la función en los extremos del

intervalo inicial.
El método Regula Falsi, también conocido como método de posición falsa, es un método numérico utilizado para encontrar las raíces de una función de valor real. Es un tipo de método de paréntesis, lo que significa que comienza con un intervalo (a, b) que contiene la raíz y reduce iterativamente el intervalo hasta que se encuentra la raíz con el grado de precisión deseado.
El método Regula Falsi, funciona calculando una nueva estimación de la raíz en cada iteración, en función de los valores de la función en los dos extremos del intervalo. La estimación se calcula como la intersección de la función y una línea recta que pasa por los extremos. Si la función cambia de signo en la nueva estimación, esta estimación se convierte en uno de los nuevos extremos del intervalo y el proceso se repite.
El método tiene algunas desventajas en comparación con otros métodos de búsqueda de raíces, tal como el método de Newton-Raphson. Por ejemplo, puede converger lentamente o no converger en absoluto si la función no cambia de signo en el intervalo, o si la función no se comporta bien verbigracia si la función no es continua o tiene una pendiente plana. Sin embargo, todavía se utiliza en algunos casos por su sencillez y robustez.
En resumen, el método de posición falsa es un método simple y robusto para encontrar las raíces de una función de valor real, aunque puede converger lentamente o no converger en algunos casos.

Método de posición falsa aplicado a la ecuación de Van Der Waals

La ecuación de Van der Waals de un gas ideal, $P+\frac{a}{V^2}(V-b)=RT$, es una versión modificada de la ley de los gases ideales que tiene en cuenta el comportamiento no ideal de los gases reales. La ley de los gases ideales supone que los gases están compuestos por un gran número de partículas puntuales sin interacciones intermoleculares, mientras que los gases reales tienen fuerzas intermoleculares y volúmenes finitos.
La ecuación de Van der Waals se utiliza para predecir la presión, el volumen y la temperatura de un gas en diferentes condiciones y para describir el comportamiento de los gases reales de una manera más precisa que la ley de los gases ideales. Se utiliza en una variedad de aplicaciones, tales como: almacenamiento y transporte de gases para diseñar y optimizar el almacenamiento y transporte de gases, teniendo en cuenta los efectos de las fuerzas intermoleculares y los volúmenes finitos; termodinámica, para estudiar el comportamiento de los gases reales y para predecir el comportamiento de los gases en diferentes condiciones; transiciones de fase para predecir el comportamiento de los gases durante las transiciones de fase, como la transición de gas a líquido, y para calcular el punto crítico de un gas; ingeniería química para diseñar y optimizar procesos que involucran gases, como la destilación y la absorción; ingeniería petrolera para el estudio del comportamiento de los gases en los yacimientos de petróleo y para predecir el rendimiento de los pozos de gas. La ecuación de Van der Waals se usa para describir el comportamiento de los gases reales de una manera más precisa que la ley de los gases ideales.
El método de la posición falsa se utiliza comúnmente en problemas de ingeniería y física, así como en otros campos de la ciencia y la matemática. Una de sus ventajas es que converge más rápidamente que el método de bisección, aunque en algunas situaciones puede ser menos estable.

Problema 5 b)

Ahora resolvemos el problema para el CO_2 a 100 atm y a 80°C. Los siguientes datos los introducimos en la formula anterior:

$P = 100 \quad atm$

$a = 3.599$

$b = .04267$

$T = 353.15 \quad K$

$R = .08205 \frac{atm \quad lt}{gmol \quad K}$

Sustituyendo los datos en la ecuación de Van der Walls, se tiene

$f(V) = PV^3 - (Pb + RT)V^2 + aV - ab$

$f(V) = 100V^3 - [100(.04267) + (.08205)(353.15)]V^2 + 3.599V - (3.599)(.04267)$

$f(V) = 100V^3 - 33.2429575V^2 + 3.599V - .1535693$

A continuación resolvemos sustituyendo datos, función y derivada $V_{i+1} = g(v) = V_i - \frac{f(v)}{f'(v)} = V_i - \frac{100V^3 - 33.2429575V^2 + 3.599V - .1535693}{300v^2 - 66.4859150v + 3.599}$

$f(V) = 100V^3 - 33.2429575V^2 + 3.599V - .1535693$

$f'(V) = 300V^2 - 66.4859150V + 3.599$

$g'(V) = \frac{(100V^3 - 33.2429575V^2 + 3.599V - .1535693)(600V - 66.4485915)}{(300V^2 - 66.4859150V + 3.599)^2}$

Iteración 1

$i = 0$

$V_i = (0)$

$V_{i+1} = (0) - \frac{100(0)^3 - 33.2429575(0)^2 + 3.599(0) - .1535693}{300(0)^2 - 66.4859150(0) + 3.599}$

$V_{i+1} = .04267$

$g'(V_i) = \frac{(100(0)^3 - 33.2429575(0)^2 + 3.599(0) - .1535693)(600(0) - 66.485915)}{300(0)^2 - 66.4859150(0) + 3.599}$

$g'(V_i) = .7882617374$

Iteración 2

$i = 1$

$V_i = (.04267)$

$V_{i+1} = (.04267) - \frac{100(.04267)^3 - 33.2429575(.04267)^2 + 3.599(.04267) - .1535693}{300(.04267)^2 - 66.4859150(.04267) + 3.599}$

$V_{i+1} = .08299621543$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.04267)^3 - 33.2429575(.04267)^2 + 3.599(.04267) - .1535693)(600(.04267) - 66.485915)}{300(.04267)^2 - 66.4859150(.04267) + 3.599}$$

$g'(V_i) = 1.260214078$

$V_{i+1} - V_i = -.04032621543$

Iteración 3

$i = 2$

$V_{i+1} = (.08299621543)$

$$- \frac{100(.08299621543)^3 - 33.2429575(.08299621543)^2 + 3.599(.08299621543) - .1535693}{300(.08299621543)^2 - 66.4859150(.08299621543) + 3.599}$$

$V_{i+1} = .2639941281$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.08299621543)^3 - 33.2429575(.08299621543)^2 + 3.599(.08299621543) - .1535693)(600(.08299621543) - 66.485915)}{300(.08299621543)^2 - 66.4859150(.08299621543) + 3.599}$$

$g'(V_i) = 20.48756379$

$V_{i+1} - V_i = -.1809979127$

Iteración 4

$i = 3$

$V_i = (.2639941281)$

$V_{i+1} = (.2639941281)$

$$- \frac{100(.2639941281)^3 - 33.2429575(.2639941281)^2 + 3.599(.2639941281) - .1535693}{300(.2639941281)^2 - 66.4859150(.2639941281) + 3.599}$$

$V_{i+1} = .2180415702$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.2639941281)^3 - 33.2429575(.2639941281)^2 + 3.599(.2639941281) - .1535693)(600(.2639941281) - 66.485915)}{300(.2639941281)^2 - 66.4859150(.2639941281) + 3.599}$$

$g'(V_i) = .6072664738$

$V_{i+1} - V_i = .0459525579$

Iteración 5

$i = 4$

$V_i = (.2180415702)$

$V_{i+1} = (.2180415702)$

$$- \frac{100(.2180415702)^3 - 33.2429575(.2180415702)^2 + 3.599(.2180415702) - .1535693}{300(.2180415702)^2 - 66.4859150(.2180415702) + 3.599}$$

$V_{i+1} = .1920864968$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.2180415702)^3 - 33.2429575(.2180415702)^2 + 3.599(.2180415702) - .1535693)(600(.2180415702) - 66.485915)}{300(.2180415702)^2 - 66.4859150(.2180415702) + 3.599}$$

$g'(V_i) = .4962709257$

$V_{i+1} - V_i = .0259550734$

Iteración 6

$i = 5$

$v_i = (.1920864968)$

$v_{i+1} = (.1920864968)$

$$-\frac{100(.1920864968)^3 - 33.2429575(.1920864968)^2 + 3.599(.1920864968) - .1535693}{300(.1920864968)^2 - 66.4859150(.1920864968) + 3.599}$$

$v_{i+1} = .1815847913$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.1920864968)^3 - 33.2429575(.1920864968)^2 + 3.599(.1920864968) - .1535693)(600(.1920864968) - 66.485915)}{300(.1920864968)^2 - 66.4859150(.1920864968) + 3.599}$$

$g'(V_i) = .2699491564$

$V_{i+1} - V_i = .0105017055$

Iteración 7

$i = 6$

$v_i = (.1815847913)$

$v_{i+1} = (.1815847913)$

$$-\frac{100(.1815847913)^3 - 33.2429575(.1815847913)^2 + 3.599(.1815847913) - .1535693}{300(.1815847913)^2 - 66.4859150(.1815847913) + 3.599}$$

$v_{i+1} = .1797701695$

$$g'(V_i) = \frac{(100(.1815847913)^3 - 33.2429575(.1815847913)^2 + 3.599(.1815847913) - .1535693)(600(.1815847913) - 66.485915)}{300(.1815847913)^2 - 66.4859150(.1815847913) + 3.599}$$

$g'(V_i) = .05433956267$

$v_{i+1} - v_i = .0018146218$

Iteración 8

$i = 7$

$v_i = (.1797701695)$

$v_{i+1} = (.1797701695)$

$$-\frac{100(.1797701695)^3 - 33.2429575(.1797701695)^2 + 3.599(.1797701695) - .1535693}{300(.1797701695)^2 - 66.4859150(.1797701695) + 3.599}$$

$v_{i+1} = .1797185166$

$g'(V_i) =$

$$\frac{(100(.1797701695)^3 - 33.2429575(.1797701695)^2 + 3.599(.1797701695) - .1535693)(600(.1797701695) - 66.485915)}{300(.1797701695)^2 - 66.4859150(.1797701695) + 3.599}$$

$g'(V_i) = .00159253654$

$V_{i+1} - V_i = .0000516529$

En la Tabla 2.17 Se presentan los resultados de las iteraciones.

Tabla 2.17 Resultados del Problema 5 b).

i	V_i	$g(V_i)$	$g'(V_i)$	$V_{i+1}-V_i$
0	0	.04267	.7882617374	
1	.04267	.08299621543	1.260214078	-.04032621543
2	.08299621543	.2639941281	20.48756379	-.1809979127
3	.2639941281	.2180415702	.6072664738	.0459525579
4	.2180415702	.1920864968	.4962709257	.0259550734
5	.1920864968	.1815847913	.2699491564	.0105017055
6	.1815847913	.1797701695	.05433956267	.0018146218
7	.1797701695	.1797185166	.001592536540	.0000516529

Conclusión. El CO_2 a 100 atm y a 80°C presenta un volumen molar de 0.1797185166 lts/mol.
Comprobación:

> $f(V) = P \cdot V\text{^}3 - (P \cdot b + R \cdot T) \cdot V\text{^}2 + a \cdot V - a \cdot b$

$$f(V) = P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b$$

> $f(V) = P \cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

Para CO_2

> $a := 3.599 : b := 0.04267 :$

> $R := 0.08205$

$$R := 0.08205$$

> $T := 80 + 273.15$

$$T := 353.15$$

> $P := 100$

$$P := 100$$

> $P \cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$$100\,V^3 - 33.2429575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0$$

Las raíces de la función son

> $solve(100\,V^3 - 33.2429575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0, V)$

$$0.1797184758,\ 0.07635554960 + 0.05210397355\,I,\ 0.07635554960 - 0.05210397355\,I$$

Problema 5 c)

Resolvemos el mismo problema para 80°C y 20 atm para el gas cuyas constantes se indican

Gas	a	b
Dimetilamina	37.49	0.19700

1ª Iteración

$$f(V_i) = 20(1.1590383)^3 - (20 \cdot 0.19700 + 0.08205 \cdot 353.15)(1.1590383)^2 + 37.49 \cdot 1.1590383 - 37.49 + 0.19700 = 22.98885379$$

$$f(V_d) = 20(1.73856745)^3 - (20 \cdot 0.19700 + 0.08205 \cdot 353.15)(1.73855745)^2 + 37.49(1.73855745) - 37.49 \cdot 0.19700 = 63.40045722$$

Sustituimos en V_m

$$V_m = (1.73856745) - \frac{(1.73855745 - 1.1590853)(63.40045722)}{(63.40045722) - (22.48885379)} = 0.8293686042$$

La Tabla 2.18 muestra las iteraciones realizadas hasta obtener la raíz esperada.

Tabla 2.18 Resultados del Problema.

Iteración	$V_m = \left(\frac{lt}{gmol}\right)$	$\lvert f(V_m)\rvert$
1	0.8293686042	34.89071938
2	0.601729852	7.612623903
3	0.44662006	4.574268595
4	0.346160235	2.477386004
5	0.289539561	1.9531986
6	0.261686439	0.5294213231
7	0.249250076	0.22362793945
8	0.243977136	0.09230964379
9	0.241797888	0.03725089
10	0.240917951	0.0179654171
11	0.240502195	0.005214548
12	0.2403122407	0.0004407544
13	0.24719783398	0.24719783398

Comprobación

> $f(V) = P \cdot V\text{^}3 - (P \cdot b + R \cdot T) \cdot V\text{^}2 + a \cdot V - a \cdot b$

$f(V) = P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b$

> $f(V) = P \cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

Para dimetilamina

> $a := 37.49 : b := 0.197 :$

> $R := 0.08205$

$R := 0.08205$

> $T := 80 + 273.15$

$T := 353.15$

> $P := 20 :$

> $P \cdot V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$20\,V^3 - 32.9159575\,V^2 + 37.49\,V - 7.38553 = 0$

> $solve(20\,V^3 - 32.9159575\,V^2 + 37.49\,V - 7.38553 = 0, V)$

$0.2402947053, 0.7027515849 + 1.021227320\,I, 0.7027515849 - 1.021227320\,I$

Problema 5 d)

Se resuelve el mismo problema para 30 atm para el gas y constantes descritas.

Gas	*a*	*b*
He	0.03412	0.02370

$$f(V) = PV^3 - (Pb + RT)V^2 + aV - ab$$

El algoritmo:

$$X_m = V_D - \frac{(X_D - X_I)(f(X_D))}{f(X_D) - f(X_I)} \quad = \quad V_m = V_D - \frac{(V_D - V_I)(f(V_D))}{f(V_D) - f(V_I)}$$

$$R = 0.08205\left(\frac{atm \cdot lt}{gmol}\right)$$

T = 353.15K

P =30 atm

$V_I = 0.7726922 \qquad V_D = 1.1590383$

1ª Iteración

$$f(V) = 30V^3 - (30(0.02370) + (0.08205 \times 353.15))V^2 + 0.03412V - (0.03412)(0.02370)$$

$$f(V) = 30V^3 - 29.6869575V^2 + 0.03412V - 0.000808644$$

$$f(V_I) = 30(0.7726922)^3 - 29.6869575(0.7726922)^2$$

$$+ 0.03412(0.7726922) - 0.000808644 = -3.858987075$$

$$f(V_D) = 30(1.1590383)^3 - 29.6869575(1.1590383)^2$$

$$+ 0.03412(1.1590383) - 0.000808644 = 6.868686964$$

$$V_m = 1.1590383 - \frac{(1.1590383 - 0.7726922)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-3.858987075)} = 0.9116696336$$

$$f(V_m) = 30(0.9116696336)^3 - 29.6869575(0.9116696336)^2$$

$$+ 0.03412(0.9116696336) - 0.000808644 = -1.911970909$$

2ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I) \qquad V_I \rightarrow V_m$

$V_I = 0.9116696336$

$V_D = 1.1590383$

$$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$$

$$f(V_I) = 30(0.9116696336)^3 - 29.6869575(0.9116696336)^2 + 0.03412(0.9116696336)$$

$$- 0.000808644 = -1.911970909$$

$$V_m = 1.1590383 - \frac{(1.1590383 - 0.9116696336)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-1.911970909)} = 0.9655336721$$

$$f(V_m) = 30(0.9655336721)^3 - 29.6869575(0.9655336721)^2 + 0.03412(0.9655336721)$$

$$- 0.000808644 = -0.6399715908$$

$$|0.6399715908| \neq 10^{-4}$$

3ª Iteración $f(V_m)$ igual signo $f(V_I) \qquad V_I \rightarrow V_m$

$V_I = 0.9655336721$

$V_D = 1.1590383$

$$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$$

$$f(V_I) = 30(0.9655336721)^3 - 29.6869575(0.9655336721)^2 + 0.03412(0.9655336721)$$

$$- 0.000808644 = -0.6399715908$$

$$V_m = 1.1590383 - \frac{(1.1590383 - 0.9655336721)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.6399715908)} = 0.9820262937$$

$f(V_m) = 30(0.9820262937)^3 - 29.6869575(0.9820262937)^2 + 0.03412(0.9820262937)$
$- 0.000808644 = -0.1854134814$
$|0.1854134814| \neq 10^{-4}$

4ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I)$ $\quad V_I \rightarrow V_m$
$V_I = 0.9820262937$
$V_D = 1.1590383$
$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$
$f(V_I) = 30(0.9820262937)^3 - 29.6869575(0.9820262937)^2 + 0.03412(0.9820262937)$
$- 0.000808644 = -0.1854134814$
$V_m = 1.1590383 - \dfrac{(1.1590383 - 0.9820262937)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.1854134814)} = 0.9866789652$
$f(V_m) = 30(0.9866789652)^3 - 29.6869575(0.9866789652)^2 + 0.03412(0.9866789652)$
$- 0.000808644 = -0.05144016883$
$|0.05144016883| \neq 10^{-4}$

5ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I)$ $\quad V_I \rightarrow V_m$
$V_I = 0.9866789652$
$V_D = 1.1590383$
$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$
$f(V_I) = 30(0.9866789652)^3 - 29.6869575(0.9866789652)^2 + 0.03412(0.9866789652)$
$- 0.000808644 = -0.05144016883$
$V_m = 1.1590383 - \dfrac{(1.1590383 - 0.9866789652)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.05144016883)} = 0.9879601835$
$f(V_m) = 30(0.9879601835)^3 - 29.6869575(0.9879601835)^2 + 0.03412(0.9879601835)$
$- 0.000808644 = -0.01409893515$
$|0.01409893515| \neq 10^{-4}$

6ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I)$ $\quad V_I \rightarrow V_m$
$V_I = 0.9879601835$
$V_D = 1.1590383$
$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$
$f(V_I) = 30(0.9879601835)^3 - 29.6869575(0.9879601835)^2 + 0.03412(0.9879601835)$
$- 0.000808644 = -0.01409893515$
$V_m = 1.1590383 - \dfrac{(1.1590383 - 0.9879601835)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.01409893515)} = 0.9883106258$
$f(V_m) = 30(0.9883106258)^3 - 29.6869575(0.9883106258)^2 + 0.03412(0.9883106258)$
$- 0.000808644 = -0.003851408153$
$|0.003851408153| \neq 10^{-4}$

7ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I)$ $\quad V_I \rightarrow V_m$

$V_I = 0.9883106258$

$V_D = 1.1590383$

$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$

$f(V_I) = 30(0.9883106258)^3 - 29.6869575(0.9883106258)^2 + 0.03412(0.9883106258)$
$- 0.000808644 = -0.003851408153$

$$V_m = 1.1590383 - \frac{(1.1590383 - 0.9883106258)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.003851408153)} = 0.9884063025$$

$f(V_m) = 30(0.9884063025)^3 - 29.6869575(0.9884063025)^2 + 0.03412(0.9884063025)$
$- 0.000808644 = -0.001051130112$

$|0.001051130112| \neq 10^{-4}$

8ª Iteración

$f(V_m)$ igual signo $f(V_I)$ $\quad V_I \rightarrow V_m$

$V_I = 0.9884063025$

$V_D = 1.1590383$

$f(V_D) = (1.1590383) = 6.868686964$

$f(V_I) = 30(0.9884063025)^3 - 29.6869575(0.9884063025)^2 + 0.03412(0.9884063025)$
$- 0.000808644 = -0.001051130112$

$$V_m = 1.1590383 - \frac{(1.1590383 - 0.9884063025)(6.868686964)}{(6.868686964) - (-0.001051130112)} = 0.9884324107$$

$f(V_m) = 30(0.9884324107)^3 - 29.6869575(0.9884324107)^2 + 0.03412(0.9884324107)$
$- 0.000808644 = - 0.000286803488$

$|0.000286803488| \leq 10^{-4}$

En la Tabla 2.19 Se presentan los resultados de las iteraciones.

Tabla 2.19 Resultados de iteraciones.

Iteración	$V_m\left(lt/gmol\right)$	$\lvert f(X_m)\rvert$
1	0.9116696336	1.911970909
2	0.9655336721	0.6399715908
3	0.9820262937	0.1854134814
4	0.9866789652	0.05144016883
5	0.9879601835	0.01409893515
6	0.9883106258	0.003851408153
7	0.9884063025	0.001051130112
8	0.9884324107	0.000286803488

El He a 30 atm y 80°C Presenta un volumen molar de 0.9884324107 lt/gmol.

Comprobación:

$> f(V) = P \cdot V^3 - (P \cdot b + R \cdot T) \cdot V^2 + a \cdot V - a \cdot b$

$f(V) = P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b$

$> P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$> T := 80 + 273.15$

$T := 353.15$

$> P := 30$

$P := 30$

$> R := 0.08205$

$R := 0.08205$

$> a := 0.03412$

$a := 0.03412$

$> b := 0.02370$

$b := 0.02370$

$> V[I] := 0.7726922$

$V_{\mathrm{I}} := 0.7726922$

$> V[\mathrm{D}] := 1.1590383$

$V_{\mathrm{D}} := 1.1590383$

$> P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$30\,V^3 - 29.6869575\,V^2 + 0.03412\,V - 0.0008086440 = 0$

$> solve(30\,V^3 - 29.6869575\,V^2 + 0.03412\,V - 0.0008086440 = 0,\ V)$

$0.9884422067,\ 0.0005615216271 + 0.005191789120\,\mathrm{I},$

$0.0005615216271 - 0.005191789120\,\mathrm{I}$

$> V_M = 0.9884422067 \lhd$ Respuesta. L.Q.Q.D.

Problema 5 e)

Para el siguiente caso, presentamos el código en lenguaje de programación C# para el gas CO2 con los siguientes datos:

$> V[I] := \frac{1.2 \cdot 0.08205 \cdot 353.15}{10}$

$V_{\mathrm{I}} := 3.477114900$

$> T := 80 + 273.15$

$T := 353.15$

$> P := 10$

$P := 10$

$> R := 0.08205$

$R := 0.08205$

$> a := 3.599$

$a := 3.599$

$> b := 0.04267$

$b := 0.04267$

$> V[I] := 3.477114900$

$V_{\mathrm{I}} := 3.477114900$

$> V[\mathrm{D}] := 0.8$

$V_{\mathrm{D}} := 0.8$

$> P\,V^3 - (P\,b + R\,T)\,V^2 + a\,V - a\,b = 0$

$10\,V^3 - 29.4026575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0$

$> solve(10\,V^3 - 29.4026575\,V^2 + 3.599\,V - 0.15356933 = 0,\ V)$

2.814323106, 0.06297132223 + 0.03861759056 I, 0.06297132223
− 0.03861759056 I

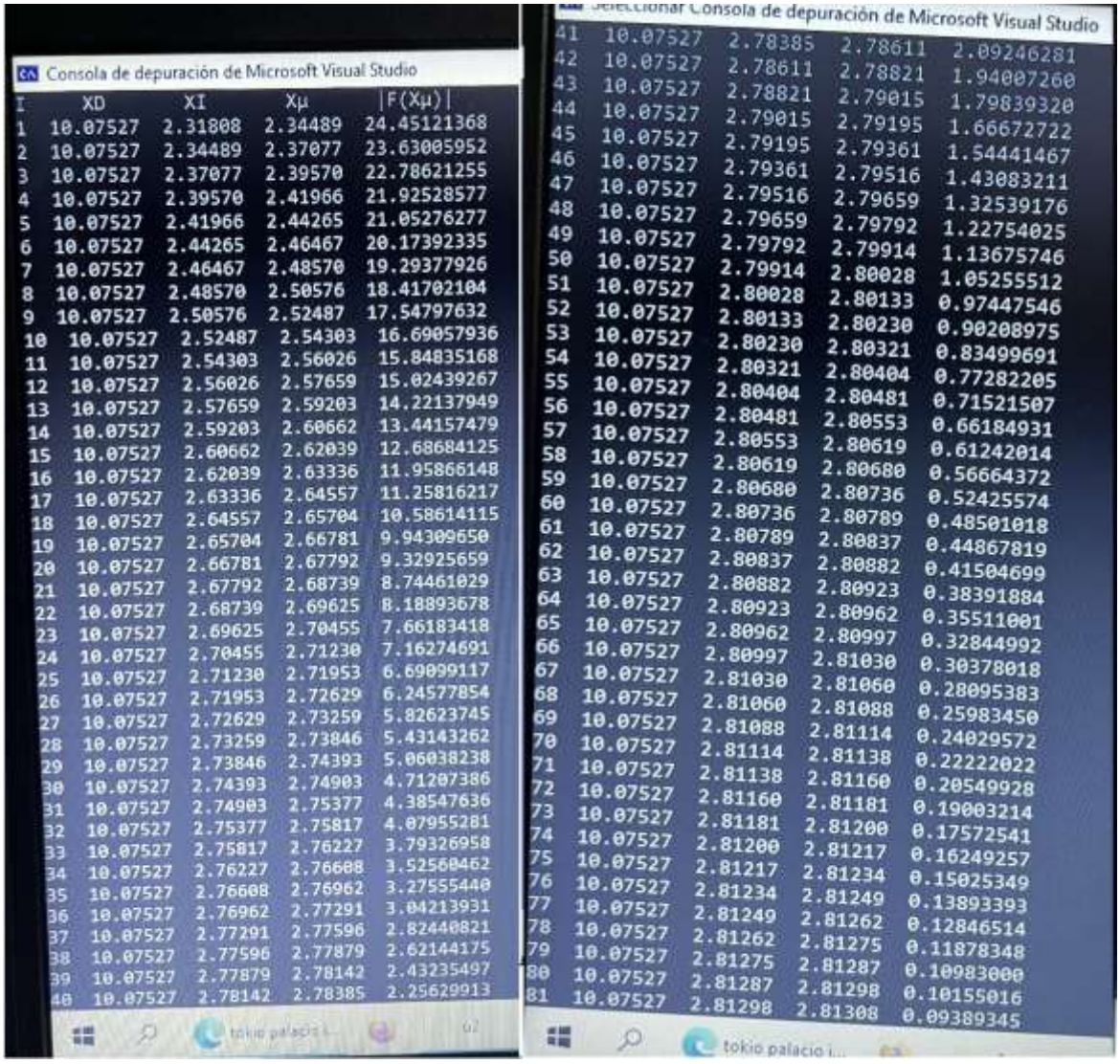
Código C#

```
/*Se solicitan todas las variables: Presion, temperatura, las constantes a y b, Vd y Vi*/
Console.WriteLine("Inserta la presion del gas en ATM'S");
double P = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta la temperatura del gas en grados KELVIN");
double T = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta el valor 'a' del gas");
double A = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta el valor 'b' del gas");
double B = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta el valor 'VI'");
double VD = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta el valor 'VD'");
double VI = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
/*Declaramos las constantes ya conocidas, tal como R*/
double R = 0.08205;

/*
Sabemos F(V) = (PV^3) - (PB+RT)V^2 + AV - AB
Por lo cual, calcularemos los coeficientes que acompañan a V^3, V^2, V y el coeficiente independiente a partir de los datos ya otorgados por el usuario
 */
double coef_cubo = P;
double coef_cuadrado = -((P * B) + (R * T));
double coef_lineal = A;
double coef_indep = -(A * B);
double V = (R * T) / P;

/*Calculamos nuestros intervalos iniciales*/
double inter1 = VD * V;
double inter2 = VI * V;

Console.Clear();

/*Declaramos nuestras variables que vamos a utilizar en las iteraciones*/
double Vm = 0, Fvi = 0, Fvd = 0, Fvm = 0, ε = 0, i = 1;
/*Imprimimos el encabezado de la tabla*/
Console.WriteLine("I" + "     XD" + "       XI" + "       Xμ" + "      |F(Xμ)|");

do
{
   /*Los coeficientes que se calcularon al inicio son utilizados en la ecuacion F(V) = (PV^3) - (PB+RT)V^2 + AV - AB en funcion del primer y segundo intervalo, resultado en F(VD) y F(VI) respectivamente */
   Fvd = (coef_cubo * (Math.Pow(inter1, 3))) + (coef_cuadrado * (Math.Pow(inter1, 2))) + (coef_lineal * inter1) + coef_indep;
```

```
   Fvi = (coef_cubo * (Math.Pow(inter2, 3))) + (coef_cuadrado * (Math.Pow(inter2, 2))) + (coef_lineal
* inter2) + coef_indep;
   /*Se calcula Vm a partir de los intervalos y de las funciones F(VD) y F(VI) obtenidas en el paso
anterior*/
   Vm = inter1 - (((inter1 - inter2) * (Fvd)) / (Fvd - Fvi));
   /*Se sustituye Vm: F(Vm) = (PVm^3) - (PB+RT)Vm^2 + AVm - AB*/
   Fvm = (coef_cubo * (Math.Pow(Vm, 3))) + (coef_cuadrado * (Math.Pow(Vm, 2))) + (coef_lineal *
Vm) + coef_indep;
   /*Se crea una variable de control, la cual tendra el mismo valor que F(Vm)*/
   ε = Fvm;
   /*Con la unica excepcion que sera el valor absoluto*/
   if (ε < 0) ε = ε * (-1);

   /*Imprimimos todas las variables calculadas*/
   Console.WriteLine((i) + "   " + inter1.ToString("N5") + "   " + inter2.ToString("N5") + "   " +
Vm.ToString("N5") + "  " + ε.ToString("N8"));

   /*Creamos condiciones, en las cuales se compararán los signos de Fvm con Fvd y el de Fvm con Fvi.
Si coinciden, el intervalo correspondiente a Vd/Vi adquirirá el valor de Vm, alterando la siguiente
iteración*/
   if (((Fvd > 0) && (Fvm > 0)) || ((Fvd < 0) && (Fvm < 0)))
   {
      inter1 = Vm;
   }
   if (((Fvi > 0) && (Fvm > 0)) || ((Fvi < 0) && (Fvm < 0)))
   {
      inter2 = Vm;
   }

   i++;
} while (ε > .0001);
/*El bucle se repitira hasta que ε (|F(Vm)|) sea menor a 0.0001*/
```

En la Fig. 2.23 se muestran fotografías de la compilación exitosa de solución a este problema 5 e).
El programa pide los siguientes datos del problema:

```
P := 10
> T := 80 + 273.15
T := 353.15
a := 3.599
b := 0.04267
V_I := 3.477114900
V_D := 0.8
```



I	XD	XI	Xμ	|F(Xμ)|
1	10.07527	2.31808	2.34489	24.45121368
2	10.07527	2.34489	2.37077	23.63005952
3	10.07527	2.37077	2.39570	22.78621255
4	10.07527	2.39570	2.41966	21.92528577
5	10.07527	2.41966	2.44265	21.05276277
6	10.07527	2.44265	2.46467	20.17392335
7	10.07527	2.46467	2.48570	19.29377926
8	10.07527	2.48570	2.50576	18.41702104
9	10.07527	2.50576	2.52487	17.54797632
10	10.07527	2.52487	2.54303	16.69057936
11	10.07527	2.54303	2.56026	15.84835168
12	10.07527	2.56026	2.57659	15.02439267
13	10.07527	2.57659	2.59203	14.22137949
14	10.07527	2.59203	2.60662	13.44157479
15	10.07527	2.60662	2.62039	12.68684125
16	10.07527	2.62039	2.63336	11.95866148
17	10.07527	2.63336	2.64557	11.25816217
18	10.07527	2.64557	2.65704	10.58614115
19	10.07527	2.65704	2.66781	9.94309650
20	10.07527	2.66781	2.67792	9.32925659
21	10.07527	2.67792	2.68739	8.74461029
22	10.07527	2.68739	2.69625	8.18893678
23	10.07527	2.69625	2.70455	7.66183418
24	10.07527	2.70455	2.71230	7.16274691
25	10.07527	2.71230	2.71953	6.69099117
26	10.07527	2.71953	2.72629	6.24577854
27	10.07527	2.72629	2.73259	5.82623745
28	10.07527	2.73259	2.73846	5.43143262
29	10.07527	2.73846	2.74393	5.06038238
30	10.07527	2.74393	2.74903	4.71207386
31	10.07527	2.74903	2.75377	4.38547636
32	10.07527	2.75377	2.75817	4.07955281
33	10.07527	2.75817	2.76227	3.79326958
34	10.07527	2.76227	2.76608	3.52560462
35	10.07527	2.76608	2.76962	3.27555440
36	10.07527	2.76962	2.77291	3.04213931
37	10.07527	2.77291	2.77596	2.82440821
38	10.07527	2.77596	2.77879	2.62144175
39	10.07527	2.77879	2.78142	2.43235497
40	10.07527	2.78142	2.78385	2.25629913
41	10.07527	2.78385	2.78611	2.09246281
42	10.07527	2.78611	2.78821	1.94007260
43	10.07527	2.78821	2.79015	1.79839320
44	10.07527	2.79015	2.79195	1.66672722
45	10.07527	2.79195	2.79361	1.54441467
46	10.07527	2.79361	2.79516	1.43083211
47	10.07527	2.79516	2.79659	1.32539176
48	10.07527	2.79659	2.79792	1.22754025
49	10.07527	2.79792	2.79914	1.13675746
50	10.07527	2.79914	2.80028	1.05255512
51	10.07527	2.80028	2.80133	0.97447546
52	10.07527	2.80133	2.80230	0.90208975
53	10.07527	2.80230	2.80321	0.83499691
54	10.07527	2.80321	2.80404	0.77282205
55	10.07527	2.80404	2.80481	0.71521507
56	10.07527	2.80481	2.80553	0.66184931
57	10.07527	2.80553	2.80619	0.61242014
58	10.07527	2.80619	2.80680	0.56664372
59	10.07527	2.80680	2.80736	0.52425574
60	10.07527	2.80736	2.80789	0.48501018
61	10.07527	2.80789	2.80837	0.44867819
62	10.07527	2.80837	2.80882	0.41504699
63	10.07527	2.80882	2.80923	0.38391884
64	10.07527	2.80923	2.80962	0.35511001
65	10.07527	2.80962	2.80997	0.32844992
66	10.07527	2.80997	2.81030	0.30378018
67	10.07527	2.81030	2.81060	0.28095383
68	10.07527	2.81060	2.81088	0.25983450
69	10.07527	2.81088	2.81114	0.24029572
70	10.07527	2.81114	2.81138	0.22222022
71	10.07527	2.81138	2.81160	0.20549928
72	10.07527	2.81160	2.81181	0.19003214
73	10.07527	2.81181	2.81200	0.17572541
74	10.07527	2.81200	2.81217	0.16249257
75	10.07527	2.81217	2.81234	0.15025349
76	10.07527	2.81234	2.81249	0.13893393
77	10.07527	2.81249	2.81262	0.12846514
78	10.07527	2.81262	2.81275	0.11878348
79	10.07527	2.81275	2.81287	0.10983000
80	10.07527	2.81287	2.81298	0.10155016
81	10.07527	2.81298	2.81308	0.09389345

Fig. 2.23 Primeros resultados del Problema 5 e) compilado con éxito usando el método de posición falsa.

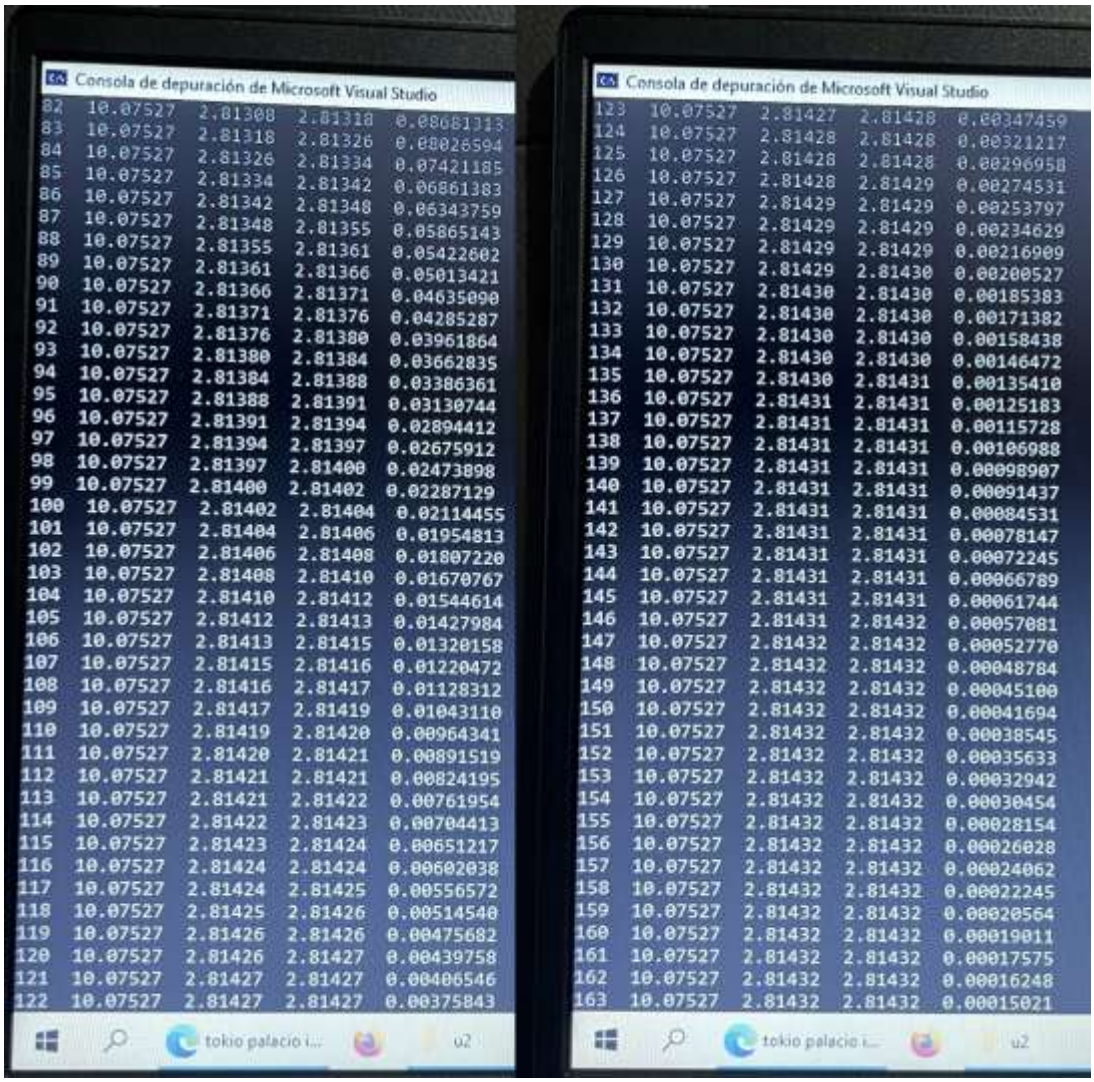


Fig. 2.23 Continuación de la compilación. Segundos resultados del Problema 5 e) compilado con éxito usando el método de posición falsa.

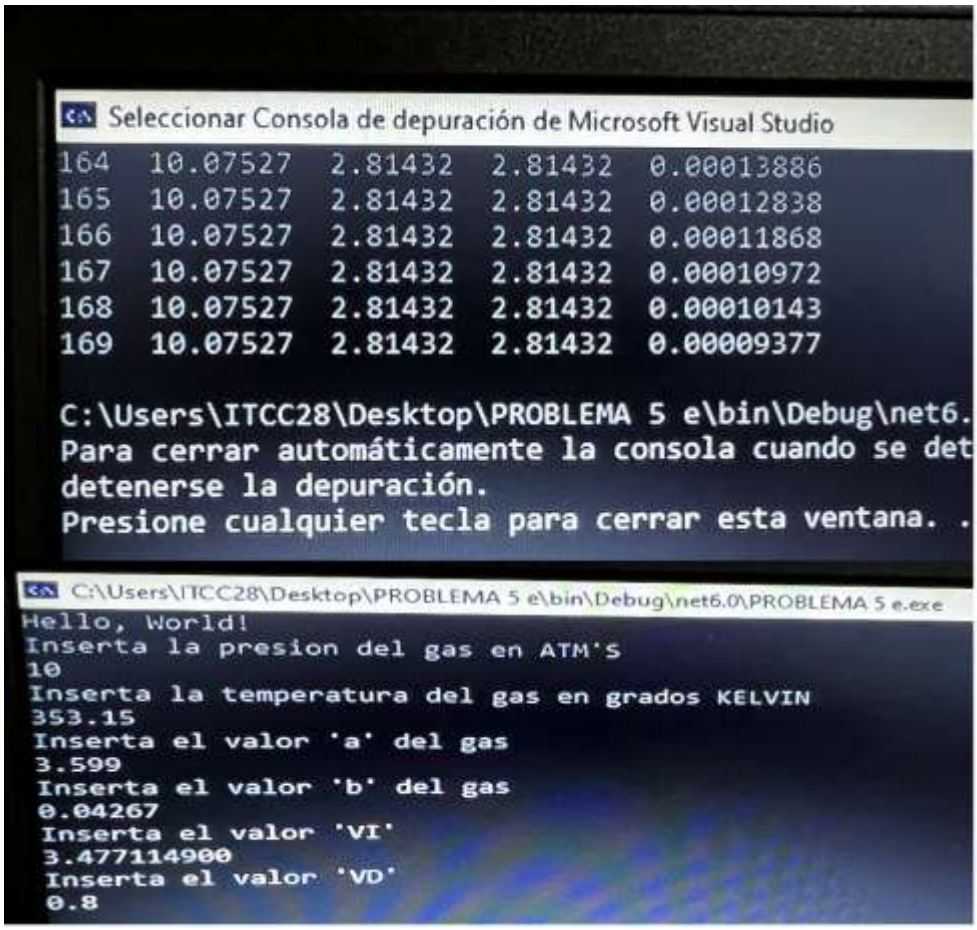


Fig. 2.23 Continuación. Arriba: terceros resultados del Problema 5 e) compilado con éxito usando el método de posición falsa. Abajo: información que pide el código C# para dar solución al problema.

Problema 6

Resolver por el método de posición falsa la ecuación $x\log(x)-10$.

Solución

Recordemos que el método de posición falsa es un método de interpolación lineal inversa para encontrar las raíces de una función continua dentro de un intervalo específico. Divide el intervalo en dos partes iguales, utiliza una línea recta para conectar los puntos extremos del intervalo y determinar el punto en el que la línea recta cruza el eje *x*.

Durante la iteración del método, se actualiza el intervalo de búsqueda en cada paso. Se evalúa la función en los extremos del intervalo y se calcula el punto de intersección de la línea recta que conecta estos puntos con el eje *x*. Después, se reemplaza la mitad del intervalo que contiene la raíz de la función con el nuevo intervalo.

Puede ser menos estable en algunas situaciones que el método de bisección, lo que puede llevar a divergencias o ciclos infinitos en la iteración.

Pasos del método.

Sustituimos el intervalo $[a,b]$ en la función original para obtener $f(X_D), f(X_I)$ respectivamente.

Se hace uso del Teorema de Bolzano para obtener X_M :

$$X_M = X_D - \frac{(X_D - X_I)\cdot f(X_D)}{f(X_D) - f(X_I)}$$

Donde el intervalo $[X_D, X_i]$ equivalen al intervalo inicial $[a,b]$.
Se sustituye X_M en la función original para obtener $f(X_M)$.
Se compararan los signos de $f(X_D), f(X_I)$ con $f(X_M)$ para sustituir el intervalo que tenga signo igual por X_M. Se repetirá este proceso en una nueva iteración con los nuevos intervalos hasta que se cumpla la condición:

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} = 1\times10^{-3} = 0.001$$

Resolvemos numéricamente. El primer es paso es determinar el intervalo en el cual se encuentra la raíz de la ecuación. En la Fig. 2.24 se muestra una gráfica de la función. El intervalo es [10,11].
Después se sustituyen en la función $x\log 10(x) - 10$ para obtener $f(X_D), f(X_I)$.
Se obtiene X_M mediante el teorema de Bolzano para también sustituir en la función original y obtener $f(X_M)$
Se comparan los signos, se actualizan los intervalos y se repite el proceso hasta que se cumpla la condición.
Usando lenguaje de programación C#, se obtienen los resultados de la Tabla 2.20 (ver Fig. 2.25).

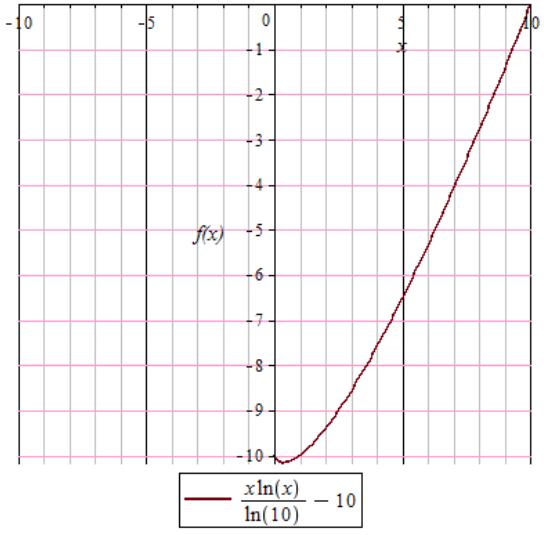


Fig. 2.24 Gráfica de la ecuación $x\cdot\log[10](x) - 10$ mostrando su raíz.

Tabla 2.20 Resultados de la compilación del programa en C#.

I	X_D	X_I	ε
0	9.00000	0.00000	0.00000
1	9.00000	0.00000	0.02176
2	9.99978	1.00022	0.00031

```
I     XD       XI       Xμ       e       F(Xμ)
0  9.00000  11.00000  0.00000  0.00000  0.00000
1  9.00000  11.00000  9.98483  0.00000  0.02176
2  9.98483  11.00000  9.99978  1.00022  0.00031

El valor de la raiz es: 9.999780642599902
```

Fig. 2.25 Resultados de la compilación del código de programación C# para obtener la raíz de la función $f(x) = x\log 10(x) - 10$.

La raíz de la función es:
> $f(x) := x\cdot\log10(x) - 10$

$f(x) := \frac{x \ln(x)}{\ln(10)} - 10$

> $solve(f(x), x)$

10

Código C#

```
Console.WriteLine("metodo posición falsa para la funcion 'x log10(x) - 10'");
/*Se solicitan los intervalos de la raiz de la funcion*/
Console.WriteLine("Inserta el primer intervalo");
double inter1 = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.WriteLine("Inserta el segundo intervalo");
double inter2 = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.Clear();
Console.WriteLine("METODO FALSA POSICION");

/*Se declaran las variables que se van a utilizar*/
double Xm = 0, Fxi = 0, Fxd = 0, Fxm = 0, Fxm2 = 0, ε = 0, i = 0;

/*Se imprime el encabezado de la tabla*/
Console.WriteLine("I" + "     XD" + "       XI" + "       Xμ" + "       ε" + "      F(Xμ)");

/*Se imprimen las variables que se tienen en la primera iteracion. Hay que recordar que estoy limitando
la impresion a 5 decimales. Pero en realidad, los calculos consideran
 todos los decimales, solo no se estan mostrando todos por estetica. */
Console.WriteLine((i) + "    " + inter1.ToString("N5") + "    " + inter2.ToString("N5") + "    " +
Xm.ToString("N5") + "  " + ε.ToString("N5") + "  " + Fxm2.ToString("N5"));

/*Se calculan Fxd, Fxi, Xm y Fxm*/
Fxd = (inter1 * (Math.Log10(inter1))) - 10;
Fxi = (inter2 * (Math.Log10(inter2))) - 10;
Xm = inter1 - (((inter1 - inter2) * (Fxd)) / (Fxd - Fxi));
Fxm = (Xm * (Math.Log10(Xm))) - 10;
Fxm2 = Fxm;
if (Fxm2 < 0) Fxm2 = Fxm2 * (-1);

/*Se crea un ciclo, el cual parara de hacer iteraciones cuando la condicion se cumpla*/
do
{
   /*Se imprimen los resultados*/
   if (i == 0) Console.WriteLine((i + 1) + "  " + inter1.ToString("N5") + "  " + inter2.ToString("N5") + "
" + Xm.ToString("N5") + "  " + ε.ToString("N5") + "  " + Fxm2.ToString("N5"));

   /*Se comparan Fxd y Fxi con Fxm para determinar cual tiene signo igual a Fxm*/
   if (((Fxd > 0) && (Fxm > 0)) || ((Fxd < 0) && (Fxm < 0)))
   {
      inter1 = Xm;
   }
   if (((Fxi > 0) && (Fxm > 0)) || ((Fxi < 0) && (Fxm < 0)))
   {
```

```
        inter2 = Xm;
    }

    /*Se calculan Fxd y Fxi con los nuevos intervalos*/
    Fxd = (inter1 * (Math.Log10(inter1))) - 10;
    Fxi = (inter2 * (Math.Log10(inter2))) - 10;

    /*Se calcula Xm y Fxm de acuerdo a los nuevos intervalos*/
    Xm = inter1 - (((inter1 - inter2) * (Fxd)) / (Fxd - Fxi));
    Fxm = (Xm * (Math.Log10(Xm))) - 10;
    Fxm2 = Fxm;
    ε = inter2 - Xm;

    /*Se obtiene el valor absoluto de epsilon*/
    if (ε < 0) ε = ε * (-1);
    if (Fxm2 < 0) Fxm2 = Fxm2 * (-1);

    /*Se imprimen los valores*/
    Console.WriteLine((i + 2) + "   " + inter1.ToString("N5") + "   " + inter2.ToString("N5") + "   " +
Xm.ToString("N5") + "  " + ε.ToString("N5") + "  " + Fxm2.ToString("N5"));
    i++;
} while (Fxm2 > .001);
```

En la Fig. 2.26 se muestra el código compilado con éxito.

Fig. 2.26 Programa del Problema 6 compilado con éxito.

Problema 7
El problema de valor inicial (Nieves y Domínguez, 1996, pp. 100-102)

$$F(t) := 1.21\cdot e^{-6.6\cdot t}\cdot \sin(11.4\cdot t - 111.7\,^{o}) + 0.28\cdot e^{-55.9\cdot t}\cdot \sin(18\cdot t + 26.1\,^{o})$$

Es el resultado de descomponer en fracciones parciales $F(s)=C(s)/R(s)$, a las cuales se les aplica el proceso de "transformación" inversa de Laplace de otro problema. Se plantea que esta solución se analice matemáticamente y se interprete físicamente, siempre y cuando proceda.

Análisis 1
El tiempo es t y el intervalo de interés es $t>0$. En el primer y segundo término de $F(t)$ aparece la función seno (siendo esta oscilatoria) acompañada de la función exponencial. Esta tiende a cero aproximadamente cuando t tiene valores superiores a 1, se lleva tanto sus factores como la función $F(t)$ a dicho valor, con lo cual la gráfica $F(t)$ se confunde con el eje t para $t\geq 1$. Estas funciones son conocidas como oscilatorias amortiguadas.
Si por el contrario, el exponente del exponencial es positivo, al tender t a infinito, la función es creciente y tiende rápidamente a infinito, esto se conoce como función oscilatoria no amortiguada.
Por otro lado, la contribución numérica del segundo término de $F(t)$ es despreciable y por ello la gráfica y el análisis pueden obtenerse con el primer término.
Si se dan algunos valores particulares a *t* se obtiene

t	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$F(t)$	-1.001	0.105	0.044	-0.023	0.005	-4.22×10^{-5}

Solución 1
Para obtener la solución de la función dado *t*, lo único que se realiza en esta primera parte es sustituir $F(t)$, con los valores de t antes presentados, entonces tenemos que:

$F(t) := 1.21\cdot e^{-6.6\cdot t}\cdot \sin(11.4\cdot t - 111.7\,^{o}) + 0.28\cdot e^{-55.9\cdot t}\cdot \sin(18\cdot t + 26.1\,^{o})$

Donde

$t1 := 0.0$:
$t2 := 0.2$:
$t3 := 0.4$:
$t4 := 0.6$:
$t5 := 0.8$:
$t6 := 1.0$:

Para poder realizar la sustitución de $F(t)$ se deben de convertir los grados a radianes, es por ello que, se emplea el siguiente código en el software Maple

```
> G1 := convert(111.7,'units','degrees','radians')
```
$G1 := 1.949532775$
```
> G2 := convert(26.1,'units','degrees','radians')
```
$G2 := 0.4555309348$

Una vez obtenido esto, se sustituyen los valores en la función

```
> F1(t1) := 1.21*e^(-6.6*t1)*sin(11.4*t1 - G1) + 0.28*e^(-55.9*t1)*sin(18*t1
      + G2)
```
$F1(0.) := -1.001067443$ ◁ *Respuesta*

> $F2(t2) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot t2} \cdot \sin(11.4 \cdot t2 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot t2} \cdot \sin(18 \cdot t2 + G2)$

$F2(0.2) := 0.1048814013$ ◁ *Respuesta*

> $F3(t3) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot t3} \cdot \sin(11.4 \cdot t3 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot t3} \cdot \sin(18 \cdot t3 + G2)$

$F3(0.4) := 0.04373517411$ ◁ *Respuesta*

> $F4(t4) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot t4} \cdot \sin(11.4 \cdot t4 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot t4} \cdot \sin(18 \cdot t4 + G2)$

$F4(0.6) := -0.02270159506$ ◁ *Respuesta*

> $F5(t5) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot t5} \cdot \sin(11.4 \cdot t5 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot t5} \cdot \sin(18 \cdot t5 + G2)$

$F5(0.8) := 0.004777633442$ ◁ *Respuesta*

> $F6(t6) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot t6} \cdot \sin(11.4 \cdot t6 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot t6} \cdot \sin(18 \cdot t6 + G2)$

$F6(1.0) := -0.00004228104248$ ◁ *Respuesta*

Verificando así que los valores de la tabla antes presentada son correctos.

Análisis 2

Estos valores señalan la presencia de raíces reales en los intervalos (0,0.2), (0.4,0.6), (0.6,0.8), (0.8,1.0). Utilizando como valores iniciales 0.1, 0.5, 0.7, 0.9 y el método de Newton-Raphson se obtiene, respectivamente:

$\bar{t}_1 = 0.171013 \quad \bar{t}_2 = 0.44659 \quad \bar{t}_3 = 0.72217 \quad \bar{t}_4 = 0.99775$

Solución 2

Ahora es cuando se emplea el **Método de Newton Raphson**, para determinar los valores de x_{1+i} de los valores antes mencionados:

$x1 := 0.1$:
$x2 := 0.5$:
$x3 := 0.7$:
$x4 := 0.9$:
$x5 := 0.3$:

Para esto se deben de encontrar los valores de $F'(t)$ para poder resolver x_{i+1}

Fórmula

> $F(x) := 1.21\, e^{-6.6\, x} \sin(11.4\, x - 1.949532775) + 0.28\, e^{-55.9\, x} \sin(18\, x + 0.4555309348)$:

> $F_p(x) := \mathrm{diff}(F(x), x)$

$$F_p(x) := -7.986\, e^{-6.6\, x} \sin(11.4\, x - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\, x} \cos(11.4\, x - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\, x} \sin(18\, x + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\, x} \cos(18\, x + 0.4555309348)$$

> $x_{1+i} := x - \left(\frac{(F(x))}{(F_p(x))} \right)$

$$x_{1+i} := x - \left(1.21\, e^{-6.6\,x} \sin(11.4\,x - 1.949532775) + 0.28\, e^{-55.9\,x} \sin(18\,x + 0.4555309348)\right) \Big/ \left(-7.986\, e^{-6.6\,x} \sin(11.4\,x - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\,x} \cos(11.4\,x - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\,x} \sin(18\,x + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\,x} \cos(18\,x + 0.4555309348)\right)$$

Una vez obtenido esto, se sustituyen los valores de las *x*

> $x1 := 0.1$:

> $F1(x1) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot x1} \cdot \sin(11.4 \cdot x1 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot x1} \cdot \sin(18 \cdot x1 + G2)$

$F1(0.1) := -0.4519504505$

> $F_{p1}(x1) := -7.986\, e^{-6.6\,x1} \sin(11.4\,x1 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\,x1} \cos(11.4\,x1 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\,x1} \sin(18\,x1 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\,x1} \cos(18\,x1 + 0.4555309348)$

$F_{p1}(0.1) := 7.849185511$

> $x_{1+i} := x1 - \left(\frac{(F1(x1))}{(F_{p1}(x1))} \right)$

$x_{1+i} := 0.1575792800$ ◁ *Respuesta*

x_2=0.5

> $F2(x2) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot x2} \cdot \sin(11.4 \cdot x2 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot x2} \cdot \sin(18 \cdot x2 + G2)$

$F2(0.5) := -0.02552510728$

> $F_{p2}(x2) := -7.986\, e^{-6.6\,x2} \sin(11.4\,x2 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\,x2} \cos(11.4\,x2 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\,x2} \sin(18\,x2 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\,x2} \cos(18\,x2 + 0.4555309348)$

$F_{p2}(0.5) := -0.2488714209$

> $x_{2+i} := x2 - \left(\frac{(F2(x2))}{(F_{p2}(x2))} \right)$

$x_{2+i} := 0.3974365671$

x_3=0.7

> $F3(x3) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot x3} \cdot \sin(11.4 \cdot x3 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot x3} \cdot \sin(18 \cdot x3 + G2)$

$F3(0.7) := -0.002980907456$

> $F_{p3}(x3) := -7.986\, e^{-6.6\,x3} \sin(11.4\,x3 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\,x3} \cos(11.4\,x3 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\,x3} \sin(18\,x3 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\,x3} \cos(18\,x3 + 0.4555309348)$

$F_{p3}(0.7) := 0.1512664812$

> $x_{3+i} := x3 - \left(\frac{(F3(x3))}{(F_{p3}(x3))} \right)$

$x_{3+i} := 0.7197063317$

$x_4 = 0.9$

> $F4(x4) := 1.21 \cdot e^{-6.6 \cdot x4} \cdot \sin(11.4 \cdot x4 - G1) + 0.28 \cdot e^{-55.9 \cdot x4} \cdot \sin(18 \cdot x4 + G2)$

$F4(0.9) := 0.002858659729$

> $F_{p4}(x4) := -7.986\, e^{-6.6\, x4} \sin(11.4\, x4 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\, x4} \cos(11.4\, x4 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\, x4} \sin(18\, x4 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\, x4} \cos(18\, x4 + 0.4555309348)$

$F_{p4}(0.9) := -0.03487079950$

> $x_{4+i} := x4 - \left(\frac{(F4(x4))}{(F_{p4}(x4))} \right)$

$x_{4+i} := 0.9819786116$

> $x_{1+i} := x5 - \left(\frac{(F5(x5))}{(F_{p5}(x5))} \right)$

$x_{1+i} := 0.4834057483$ ◁ *Respuesta*

Como podemos observar los valores son muy aproximados a los valores esperados.

Análisis 3

Los posibles máximos y mínimos de esta función se consiguen resolviendo la ecuación que resulta de igualar con cero la primera derivada de $F(t)$:

> $F_p(x) := -7.986\, e^{-6.6\, t6} \sin(11.4\, t6 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\, t6} \cos(11.4\, t6 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\, t6} \sin(18\, t6 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\, t6} \cos(18\, t6 + 0.4555309348)$:

> $F_p(x) := diff(F(x), x)$

Utilizando las funciones que se hicieron de $F'(t)$ en el método de Newton-Raphson, se tiene

t	0.0	0.1	0.3	0.6	0.9	1.0
$F(t)$	-0.040	7.849	-0.900	0.196	-0.035	-0.00184

Solución 3 empleando el Método de Newton-Raphson

únicamente sustituimos el valor de la t en $F'(t)$

$t_1 = 0.0$

> $F_p(t1) := -7.986\, e^{-6.6\, t1} \sin(11.4\, t1 - 1.949532775) + 13.794\, e^{-6.6\, t1} \cos(11.4\, t1 - 1.949532775) - 15.652\, e^{-55.9\, t1} \sin(18\, t1 + 0.4555309348) + 5.04\, e^{-55.9\, t1} \cos(18\, t1 + 0.4555309348)$

$F_p(0.) := -0.040102968$ ◁ *Respuesta*

$x_1 = 0.1$

> $F_p(x1) := -7.986\,e^{-6.6\,x1}\sin(11.4\,x1 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x1}\cos(11.4\,x1 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x1}\sin(18\,x1 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x1}\cos(18\,x1 + 0.4555309348)$

$F_p(0.1) := 7.849185511$ ◁ *Respuesta*

x_5=0.3

> $x5 := 0.3$:

> $F_p(x5) := -7.986\,e^{-6.6\,x5}\sin(11.4\,x5 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x5}\cos(11.4\,x5 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x5}\sin(18\,x5 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x5}\cos(18\,x5 + 0.4555309348)$

> $F_p(0.3) := -0.9063164686$ ◁ *Respuesta*

t_4=0.6

> $F_p(t4) := -7.986\,e^{-6.6\,t4}\sin(11.4\,t4 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t4}\cos(11.4\,t4 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,t4}\sin(18\,t4 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t4}\cos(18\,t4 + 0.4555309348)$

$F_p(0.6) := 0.1964102746$ ◁ *Respuesta*

x_4=0.9

> $F_p(x4) := -7.986\,e^{-6.6\,x4}\sin(11.4\,x4 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x4}\cos(11.4\,x4 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x4}\sin(18\,x4 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x4}\cos(18\,x4 + 0.4555309348)$

$F_p(0.9) := -0.03487079950$ ◁ *Respuesta*

t_6=1.0

> $F_p(t6) := -7.986\,e^{-6.6\,t6}\sin(11.4\,t6 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t6}\cos(11.4\,t6 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,t6}\sin(18\,t6 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t6}\cos(18\,t6 + 0.4555309348)$

$F_p(1.0) := -0.01847967033$ ◁ *Respuesta*

Los resultados son casi idénticos a los esperados, a excepción de $t = 1.0$, difiriendo por décimas, más no por magnitud.

En la Fig. 2.27 podemos observar la gráfica de la función

$F(t) := 1.21\cdot e^{-6.6\cdot t}\cdot\sin(11.4\cdot t - 111.7\,°) + 0.28\cdot e^{-55.9\cdot t}\cdot\sin(18\cdot t + 26.1\,°)$

en sus puntos en $(t, F(t))$: $(0.0,-1.001067443)$, $(0.1,-0.4519504505)$, $(0.2,0.0148814013)$, $(0.3,0.1662236501)$, $(0.7,-0.002980907456)$, $(0.8,0.004777633442)$, $(0.9,0.002858659729)$ y $(1.0,-0.00004228104248)$.

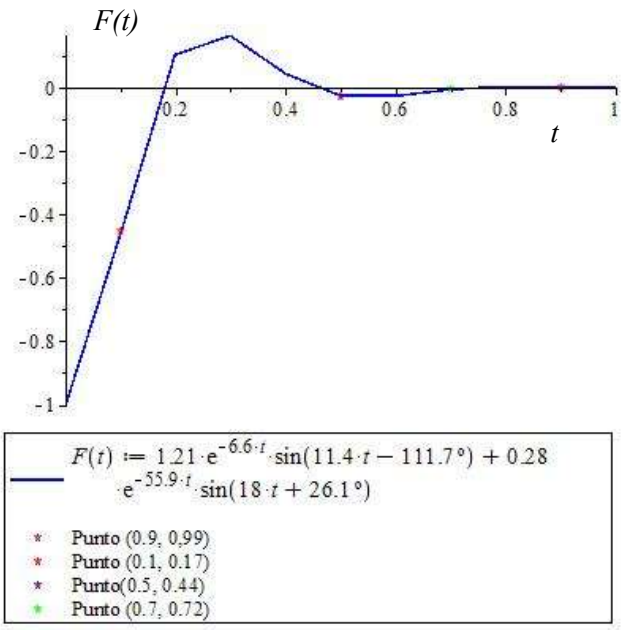


Fig. 2.27 Gráfica de la función solución del problema de valor inicial.

Asimismo, en la Fig. 2.28 se muestra la gráfica de la función $F'(t)$, la derivada de la función original

$$F_p(x) := -7.986\,e^{-6.6\,x}\sin(11.4\,x - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x}\cos(11.4\,x - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x}\sin(18\,x + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x}\cos(18\,x + 0.4555309348)$$

En los puntos

$$-15.652\,e^{-55.9\,x}\sin(18\,x + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x}\cos(18\,x + 0.4555309348)$$

$(0.3, -0.9063164686), (0.4, -1.137402056), (0.5, -0.2488714209),$
$(0.6, 0.1964102746), (0.7, 0.1512664812), (0.8, 0.01282886511),$
$(0.9, -0.03487079950), (1.0, -0.01847967033)$

```
> G1 := convert(111.7,'units','degrees','radians')
```

$G1 := 1.949532775$

```
> G2 := convert(26.1,'units','degrees','radians')
```

$G2 := 0.4555309348$

```
> t1 := 0.0 :
> t2 := 0.2 :
> t3 := 0.4 :
> t4 := 0.6 :
> t5 := 0.8 :
> t6 := 1.0 :
```

$$F1(t1) := -7.986\,e^{-6.6\,t1}\sin(11.4\,t1 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t1}\cos(11.4\,t1 - 1.949532775)$$

$$- 15.652\,e^{-55.9\,t1}\sin(18\,t1 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t1}\cos(18\,t1 + 0.4555309348)$$

$$F1(0.) := -0.040102968$$

$$F2(t2) := -7.986\,e^{-6.6\,t2}\sin(11.4\,t2 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t2}\cos(11.4\,t2 - 1.949532775)$$

$$- 15.652\,e^{-55.9\,t2}\sin(18\,t2 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t2}\cos(18\,t2 + 0.4555309348)$$

$$F2(0.2) := 2.793371756$$

$$F3(t3) := -7.986\,e^{-6.6\,t3}\sin(11.4\,t3 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t3}\cos(11.4\,t3 - 1.949532775)$$

$$- 15.652\,e^{-55.9\,t3}\sin(18\,t3 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t3}\cos(18\,t3 + 0.4555309348)$$

$$F3(0.4) := -1.137402056$$

$$F4(t4) := -7.986\,e^{-6.6\,t4}\sin(11.4\,t4 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t4}\cos(11.4\,t4 - 1.949532775)$$

$$- 15.652\,e^{-55.9\,t4}\sin(18\,t4 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t4}\cos(18\,t4 + 0.4555309348)$$

$$F4(0.6) := 0.1964102746$$

$$F5(t5) := -7.986\,e^{-6.6\,t5}\sin(11.4\,t5 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t5}\cos(11.4\,t5 - 1.949532775)$$

$$- 15.652\,e^{-55.9\,t5}\sin(18\,t5 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t5}\cos(18\,t5 + 0.4555309348)$$

$$F5(0.8) := 0.01282886511$$

$$F6(t6) := -7.986\,e^{-6.6\,t6}\sin(11.4\,t6 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,t6}\cos(11.4\,t6 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,t6}\sin(18\,t6 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,t6}\cos(18\,t6 + 0.4555309348)$$

$$F6(1.0) := -0.01847967033$$

```
> x1 := 0.1 :
> x2 := 0.5 :
> x3 := 0.7 :
> x4 := 0.9 :
> x5 := 0.3 :
```

x1

```
> F1(x1) := -7.986*exp(-6.6*x1)*sin(11.4*x1 - 1.949532775)
        + 13.794*exp(-6.6*x1)*cos(11.4*x1 - 1.949532775)
        - 15.652*exp(-55.9*x1)*sin(18*x1 + 0.4555309348)
        + 5.04*exp(-55.9*x1)*cos(18*x1 + 0.4555309348)
```

$$F1(0.1) := 7.849185511$$

x_2

> $F2(x2) := -7.986\,e^{-6.6\,x2}\sin(11.4\,x2 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x2}\cos(11.4\,x2 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x2}\sin(18\,x2 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x2}\cos(18\,x2 + 0.4555309348)$

$F2(0.5) := -0.2488714209$

x_3

> $F3(x3) := -7.986\,e^{-6.6\,x3}\sin(11.4\,x3 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x3}\cos(11.4\,x3 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x3}\sin(18\,x3 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x3}\cos(18\,x3 + 0.4555309348)$

$F3(0.7) := 0.1512664812$

x_4

> $F4(x4) := -7.986\,e^{-6.6\,x4}\sin(11.4\,x4 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x4}\cos(11.4\,x4 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x4}\sin(18\,x4 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x4}\cos(18\,x4 + 0.4555309348)$

$F4(0.9) := -0.03487079950$

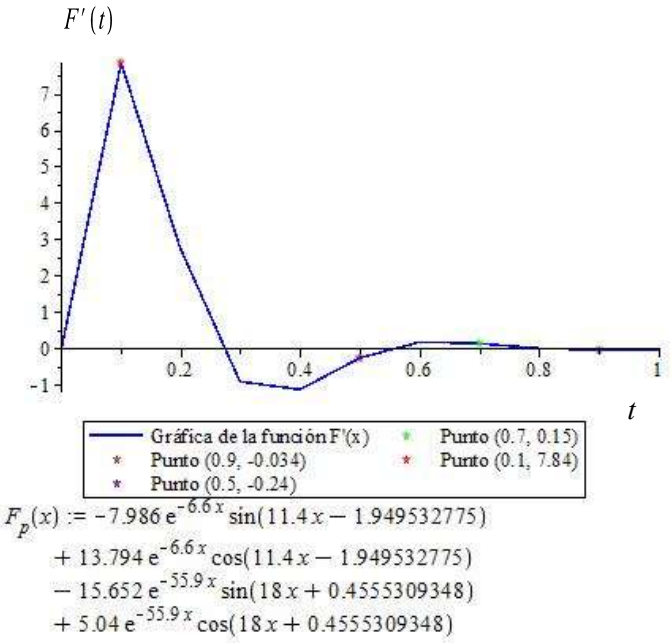
x_5

> $F5(x5) := -7.986\,e^{-6.6\,x5}\sin(11.4\,x5 - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6\,x5}\cos(11.4\,x5 - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9\,x5}\sin(18\,x5 + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9\,x5}\cos(18\,x5 + 0.4555309348)$

$F5(0.3) := -0.9063164686$

```
> with(plots) :
> F := plot(Vector([t1, x1, t2, x5, t3, x2, t4, x3, t5, x4, t6]),
      Vector([F1(t1), F1(x1), F2(t2), F5(x5), F3(t3), F2(x2), F4(t4),
      F3(x3), F5(t5), F4(x4), F6(t6)]), style = line, color = blue) :

> G := plot(Vector([x1]), Vector([F1(x1)]), style = point, symbol
      = asterisk, color = red) :

> H := plot(Vector([x2]), Vector([F2(x2)]), style = point, symbol
      = asterisk, color = purple) :

> J := plot(Vector([x3]), Vector([F3(x3)]), style = point, symbol
      = asterisk, color = green) :

> K := plot(Vector([x4]), Vector([F4(x4)]), style = point, symbol
      = asterisk, color = brown) :

> display({F, G, H, J, K})
```

Y sus puntos $(0.0,-0.040102968)$, $(0.1,7.849185511)$, $(0.2,2.793371756)$, $(0.3,-0.9063164686)$, $(0.4,-1.137402056)$, $(0.5,-0.2488714209)$, $(0.6,0.1964102746)$, $(0.7,0.1512664812)$, $(0.8,0.01282886511)$, $(0.9,-0.03487079950)$ y $(1.0,-0.01847967033)$



$$F_p(x) := -7.986\,e^{-6.6x}\sin(11.4x - 1.949532775) + 13.794\,e^{-6.6x}\cos(11.4x - 1.949532775) - 15.652\,e^{-55.9x}\sin(18x + 0.4555309348) + 5.04\,e^{-55.9x}\cos(18x + 0.4555309348)$$

Fig. 2.28 Gráfica de la derivada de la función solución del problema de valor inicial.

CAPÍTULO 3

SOLUCIONADOR NUMÉRICO DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

3.1 Objetivo Particular del Capítulo 3

3.2 Eliminación Gaussiana

3.3 Método de Gauss-Jordan

3.4 Método de descomposición LU

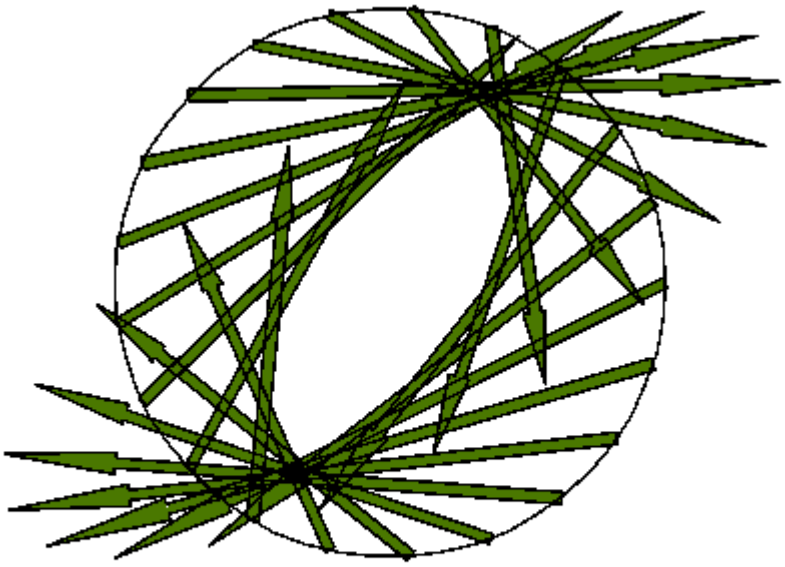
3.5 Método de Gauss-Seidel

3.6 Método de Krylov

3.7 Eigenvalores y eigenvectores

3.8 Mínimos cuadrados

3.8.1 Problemas de mínimos cuadrados



x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix A. Thus, x satisfies the equation $Ax = \lambda x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leaf green), eigenvectors (burgundy and navy).

3.1 Objetivo Particular del Capítulo 3

Proveer al estudiante comandos de software matemático de acceso a la solución de problemas que involucran métodos numéricos que resultan ser tediosos de resolver manualmente y/o proporcionar herramientas tecnológicas mediante lenguaje de programación que resuelva situaciones o escenarios de sistemas de ecuaciones que incluyen el álgebra como ingrediente fundamental intrínseco.

En este capítulo se da solución a problemas mediante métodos numéricos que involucran los siguientes: eliminación Gaussiana, Gauss-Jordan, Método de descomposición LU, Método de Gauss-Seidel, Método de Krylov, Valores y vectores propios, diferencias finitas y mínimos cuadrados.
El método de descomposición LU es utilizado en análisis numérico para dar solución a sistemas de ecuaciones o para obtener matrices inversas, e implica la factorización de una matriz a través del producto de una matriz triangular inferior y una matriz diagonal superior, de ahí su nombre en inglés *LU = Lower-Upper*. Si en la diagonal principal de la matriz a factorizar existen elementos cuyo valor es cero, se debe pre-multiplicar la matriz por matrices elementales de permutación. Ejemplo de este método se da a continuación con librería y comandos de Maple. Accesamos a la librería de Algebra Lineal de Maple y usamos su lenguaje declarando la matriz a factorizar en matriz diagonal superior y matriz diagonal inferior.
Otros de los métodos de gran alcance por la cantidad de problemas que resuelven para sistemas de ecuaciones algebráicas mediante estrategias de pivoteo, resultan ser los métodos de eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan.

3.2 Eliminación Gaussiana

Presentamos aquí la secuencia de pasos a seguir para el uso del método numérico de eliminación Gaussiana mediante el software Maple, para ello, se hace uso de la librería de algebra lineal e incluimos en una matriz el sistema de ecuaciones a resolver.

Instrucciones Maple:

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> B := <<0.6941748242,0.5735964366,0.1209212947>|<-.1529125879,-.2352047512,-
.5441458263>|<0.1529125879,0.1911988122,0.3349328791>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 0.6941748242 & -0.1529125879 & 0.1529125879 \\ 0.5735964366 & -0.2352047512 & 0.1911988122 \\ 0.1209212947 & -0.5441458263 & 0.3349328791 \end{bmatrix}$$

Con el comando GaussianEliminationTutor(B), Maple resuelve hasta dejar una matriz diagonal, como sigue

```
> GaussianEliminationTutor( B );
```

$$> \begin{bmatrix} \frac{3470874121}{5000000000} & \frac{-1529125879}{10000000000} & \frac{1529125879}{10000000000} \\ \frac{2867982183}{5000000000} & \frac{-294005939}{1250000000} & \frac{955994061}{5000000000} \\ \frac{1209212947}{10000000000} & \frac{-5441458263}{10000000000} & \frac{3349328791}{10000000000} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3470874121}{5000000000} & \frac{-1529125879}{10000000000} & \frac{1529125879}{10000000000} \\ 0 & \frac{-68693728440491329}{631068022000000000} & \frac{40922987559508671}{631068022000000000} \\ \frac{1209212947}{10000000000} & \frac{-5441458263}{10000000000} & \frac{3349328791}{10000000000} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\left[\left[\frac{3470874121}{5000000000}, \frac{-1529125879}{10000000000}, \frac{1529125879}{10000000000}\right], \left[0, \frac{-68693728440491329}{631068022000000000}, \frac{40922987559508671}{631068022000000000}\right], \left[0, \frac{-35924194520617068233}{69417482420000000000}, \frac{21401158436324680009}{69417482420000000000}\right]\right] \rightarrow$$

$$\left[\left[\frac{3470874121}{5000000000}, \frac{-1529125879}{10000000000}, \frac{1529125879}{10000000000}\right], \left[0, \frac{-68693728440491329}{631068022000000000}, \frac{40922987559508671}{631068022000000000}\right], \left[0, 0, \frac{767327363845404619}{755631012845404619000000000}\right]\right]$$

Evaluamos los valores de los componentes de la matriz para darles forma decimal

$$> evalf\left(\frac{3470874121}{5000000000}\right)$$

$$0.6941748242$$

$$> evalf\left(\frac{-1529125879}{10000000000}\right)$$

$$-0.1529125879$$

$$> evalf\left(\frac{1529125879}{10000000000}\right)$$

$$0.1529125879$$

$$> evalf\left(\frac{-68693728440491329}{631068022000000000}\right)$$

$$-0.1088531284$$

$$> evalf\left(\frac{40922987559508671}{631068022000000000}\right)$$

$$0.06484718942$$

$$> evalf\left(\frac{767327363845404619}{755631012845404619000000000}\right)$$

$$1.015478919\,10^{-10}$$

$$> solve(-0.1088531284 \cdot x = -0.51751, x)$$

$$4.754204198$$

$$> 0.06484718942 \cdot 4.754204198$$

$$0.3082967802$$

la solución de eliminación gaussiana es

> $B[elim] = \begin{bmatrix} 0.6941748242 & -0.1529125879 & 0.1529125879 \\ 0 & -0.51751 & 0.3082967802 \\ 0 & 0 & 1.015478919\,10^{-10} \end{bmatrix}$

$$B_{elim} = \begin{bmatrix} 0.6941748242 & -0.1529125879 & 0.1529125879 \\ 0 & -0.51751 & 0.3082967802 \\ 0 & 0 & 1.015478919\,10^{-10} \end{bmatrix}$$

Con ello, formamos un sistema de dos ecuaciones con 3 incógnitas, como sigue

> $0.6941748242 \cdot x[3] - 0.1529125879 \cdot x[2] + 0.1529125879 \cdot x[1] = 0$

$$0.6941748242\,x_3 - 0.1529125879\,x_2 + 0.1529125879\,x_1 = 0$$

> $0 \cdot x^3 - 0.51751 \cdot x[2] + 0.3082967802 \cdot x[1] = 0$

$$-0.51751\,x_2 + 0.3082967802\,x_1 = 0$$

> Ponemos x_2 y x_3 en función de x_1

> $solve(-0.51751\,x_2 + 0.3082967802\,x_1 = 0, x[2])$

$$0.5957310587\,x_1$$

> $x[2] := 0.5957310587\,x_1$

$$x_2 := 0.5957310587\,x_1$$

> $solve(0.6941748242\,x_3 - 0.1529125879\,x_2 + 0.1529125879\,x_1 = 0, x[3])$

$$-0.08905222123\,x_1$$

> $x[3] := -0.08905222123\,x_1$

Si (cualquier suposición numérica es válida)

> $x[1] := 1$

$$x_1 := 1$$

Entonces,

> $x_2 := 0.5957310587\,x_1$

$$x_2 := 0.5957310587$$

> $x[3] := -0.08905222123\,x_1$

$$x_3 := -0.08905222123$$

Por tanto, hemos terminado de determinar los valores de x_1 , x_2 y x_3 como uno de los posibles valores del infinito universo de ellos, que en este caso existen.

3.3 Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es una técnica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y de inversión de matrices. Este método se utiliza para transformar una matriz en su forma escalonada reducida por filas o forma canónica reducida, que es una forma simplificada de la matriz que es fácil de resolver.

El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar una serie de operaciones elementales a las filas de una matriz con el fin de obtener una forma escalonada reducida por filas. Las operaciones elementales incluyen el intercambio de filas, la multiplicación de una fila por una constante no nula y la adición de una fila multiplicada por una constante a otra fila.

Una vez que se ha obtenido la forma escalonada reducida por filas, se utiliza el método de sustitución para obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales o para encontrar la inversa de la matriz.
En resumen, el método de Gauss-Jordan es una técnica muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar la inversa de una matriz

Este método permite dar solución a sistemas de ecuaciones algebraicas. Presentamos su teoría y ejemplos, mediante el software Maple.

El comando GaussJordanEliminationTutor(M) le permite reducir interactivamente la Matriz M a una forma escalonada reducida mediante la eliminación de Gauss-Jordan. Luego puede consultar el rango, la nulidad y las bases de las filas, columnas y espacios nulos. Devuelve la Matriz reducida.
El comando GaussJordanEliminationTutor(M , v) le permite resolver interactivamente el sistema

$$M \cdot x = v \tag{3.1}$$

reduciendo la Matriz aumentada $< M \mid v >$ a forma escalonada reducida mediante eliminación de Gauss-Jordan. Devuelve la solución como una columna Vector.
Los números de coma flotante en M o v se convierten a racionales antes de que comience el cálculo.
Las dimensiones de la Matriz no deben ser mayores a 5×5.

Ejemplo 1
Resolver el sistema de ecuaciones algebraicas dado a través de la matriz M y el vector v. Las variables de las ecuaciones son $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$.

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> M := <<1,-1,0,41.1,0>|<1,0,-1,-0.2,0.2>|<-1,0,0,0,44.5>|<0,-1,1,-20,0>|<0,0,1,0,9>>;
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> v := <0,0,0,-36,34>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -36 \\ 34 \end{bmatrix}$$

> GaussJordanEliminationTutor(M);

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{411}{10} & \frac{-1}{5} & 0 & -20 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{411}{10} & \frac{-1}{5} & 0 & -20 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-613}{10} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-613}{10} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{613} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-611}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-611}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{329177}{6130} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-611}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-611}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

GaussJordanEliminationTutor(M, v);

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{411}{10} & \frac{-1}{5} & 0 & -20 & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{411}{10} & \frac{-1}{5} & 0 & -20 & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-413}{10} & \frac{411}{10} & -20 & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 & -36 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{89}{2} & 0 & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 & -36 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 & -36 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-613}{10} & 0 & -36 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-613}{10} & \frac{-1}{5} & -36 \\ 0 & 0 & \frac{447}{10} & \frac{1}{5} & 9 & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-613}{10} & \frac{-1}{5} & -36 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} & 34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{537}{10} & 34 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&\frac{-2}{613}&\frac{-360}{613}\\ 0&1&0&-1&-1&0\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&\frac{1}{5}&\frac{537}{10}&34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&\frac{-2}{613}&\frac{-360}{613}\\ 0&1&0&0&\frac{-611}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&\frac{1}{5}&\frac{537}{10}&34 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&\frac{-2}{613}&\frac{-360}{613}\\ 0&1&0&0&\frac{-611}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&0&\frac{329177}{6130}&\frac{20770}{613} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&\frac{-2}{613}&\frac{-360}{613}\\ 0&1&0&0&\frac{-611}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&0&1&\frac{207700}{329177} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&\frac{-192640}{329177}\\ 0&1&0&0&\frac{-611}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&0&1&\frac{207700}{329177} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&\frac{-192640}{329177}\\ 0&1&0&0&0&\frac{400340}{329177}\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&0&1&\frac{207700}{329177} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&\frac{-192640}{329177}\\ 0&1&0&0&0&\frac{400340}{329177}\\ 0&0&1&0&0&\frac{207700}{329177}\\ 0&0&0&1&\frac{2}{613}&\frac{360}{613}\\ 0&0&0&0&1&\frac{207700}{329177} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&\frac{-192640}{329177}\\ 0&1&0&0&0&0&\frac{400340}{329177}\\ 0&0&1&0&0&0&\frac{207700}{329177}\\ 0&0&0&1&0&\frac{192640}{329177}\\ 0&0&0&0&0&1&\frac{207700}{329177} \end{array}\right]$$

Resultado

> $x[1] := evalf\left(\frac{-192640}{329177}\right)$

$$x_1 := -0.5852170717$$

> $x[2] := evalf\left(\frac{400340}{329177}\right)$

$$x_2 := 1.216184606$$

> $x[3] := evalf\left(\frac{207700}{329177}\right)$

$$x_3 := 0.6309675342$$

> $x[4] := evalf\left(\frac{192640}{329177}\right)$

$$x_4 := 0.5852170717$$

> $x[5] := evalf\left(\frac{207700}{329177}\right)$

$$x_5 := 0.6309675342$$

> $\triangleleft Respuesta.$

LinearAlgebra[Eliminación Gaussiana] - realiza eliminación Gaussiana en una Matriz Álgebra Lineal[ReducedRowEchelonForm] - realiza eliminación Gauss-Jordan en una Matriz

Descripción

El comando GaussianElimination(A) realiza la eliminación gaussiana en la Matriz A y devuelve el factor triangular superior U con las mismas dimensiones que A.

Esta función equivale a llamar a LinearAlgebra[LUDecomposition] con la opción salida=['U'].

El comando ReducedRowEchelonForm(A) realiza la eliminación de Gauss-Jordan en la Matriz A y devuelve la única forma escalonada reducida R de A.

Esta función equivale a llamar a LinearAlgebra[LUDecomposition] con la opción salida=['R'].

Las opciones del constructor proporcionan información adicional (solo lectura, forma, almacenamiento, orden, tipo de datos y atributos) al constructor Matrix que genera el resultado. Estas opciones también se pueden proporcionar en el formato opciones de salida=[...], donde [...] representa una lista de Maple. Si se proporciona una opción de constructor tanto en la secuencia de llamada directamente como en una opción de opciones de salida, esta última tiene prioridad (independientemente del orden).

Estas funciones son parte del paquete LinearAlgebra y, por lo tanto, se pueden usar en la forma GaussianElimination(..) o ReducedRowEchelonForm(..) solo después de ejecutar el comando con(LinearAlgebra). Sin embargo, siempre se puede acceder a él a través de la forma larga del comando usando LinearAlgebra[GaussianElimination](..) o LinearAlgebra[ReducedRowEchelonForm](..).

Ejemplo 2

Dada la descripción de eliminación Gaussiana y la forma escalonada de fila reducida, escribir las instrucciones para practicar dichos métodos para el sistema de ecuaciones dado por la matriz A y el vector b.

Solución

Las instrucciones de Maple para eliminación Gaussiana y la forma escalonada de fila reducida, respectivamente, están dadas usando la librería de Algebra Lineal, como sigue

```
> with(LinearAlgebra):
> A := <<-8,-3,1,5>|<-4,5,0,2>|<5,-8,-3,1>|<5,-5,4,9>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 & 5 \\ -3 & 5 & -8 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> b := <-4,0,8,5>;
```

$$b := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(A);
```

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{79}{8} & -\frac{55}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{163}{52} & \frac{213}{52} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2607}{163} \end{bmatrix}$$

> GaussianElimination(A,'method'='FractionFree');

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 & 5 \\ 0 & -52 & 79 & 55 \\ 0 & 0 & 163 & -213 \\ 0 & 0 & 0 & 2607 \end{bmatrix}$$

> ReducedRowEchelonForm(<A|b>);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1715}{2607} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3668}{2607} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1345}{869} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1759}{2607} \end{bmatrix}$$

> $x[1] := evalf\left(\frac{1715}{2607}\right)$

$$x_1 := 0.6578442654$$

> $x[2] := evalf\left(-\frac{3668}{2607}\right)$

$$x_2 := -1.406981204$$

> $x[3] := evalf\left(-\frac{1345}{869}\right)$

$$x_3 := -1.547756041$$

> $x[4] := evalf(1759/2607)$

$$x_4 := 0.6747219026$$

◁*Respuesta.*

Ejercicio para practicar eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan - Estrategias de pivoteo

Para el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{bmatrix} 80 & 15 & 35 & 60 \\ 28 & 72 & 57 & 25 \\ 20 & 20 & 12 & 20 \\ 50 & 10 & 20 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 180 \\ 80 \\ 160 \end{bmatrix}$$

obtener el resultado por el Método Gauss-Jordan aplicando las siguientes operaciones:

Multiply row 1 by 1/80	Multiplica la fila 1 por 1/80
Add -28 times row 1 to row 2	Suma -28 veces la fila 1 a la fila 2
Add -20 times row 1 to row 3	Suma -20 veces la fila 1 a la fila 3
Add -50 times row 1 to row 4	Suma -50 veces la fila 1 a la fila 4
Multiply row 2 by 4/267	Multiplica la fila 2 por 4/267
Add -3/16 times row 2 to row 1	Suma -3/16 veces la fila 2 a la fila 1
Add -65/4 times row 2 to row 3	Suma -65/4 veces la fila 2 a la fila 3
Add -5/8 times row 2 to row 4	Suma -5/8 veces la fila 2 a la fila 4

Multiply row 3 by -267/2041	Multiplica la fila 3 por -267/2041
Add -111/356 times row 3 to row 1	Suma -111/356 veces la fila 3 a la fila 1
Add -179/267 times row 3 to row 2	Suma -179/267 veces la fila 3 a la fila 2
Add 1225/534 times row 3 to row 4	Suma 1225/534 veces la fila 3 a la fila 4
Multiply row 4 by 2041/43380	Multiplica la fila 4 por 2041/43380
Add -1843/2041 times row 4 to row 1	Suma -1843/2041 veces la fila 4 a la fila 1
Add -843/2041 times row 4 to row 2	Suma -843/2041 veces la fila 4 a la fila 2
Add 1075/2041 times row 4 to row 3	Suma 1075/2041 veces la fila 4 a la fila 3

Respuestas que debes obtener:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 80 & 15 & 35 & 60 & 230 \\ 28 & 72 & 57 & 25 & 180 \\ 20 & 20 & 12 & 20 & 80 \\ 50 & 10 & 20 & 60 & 160 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{23}{8} \\ 28 & 72 & 57 & 25 & 180 \\ 20 & 20 & 12 & 20 & 80 \\ 50 & 10 & 20 & 60 & 160 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{23}{8} \\ 0 & \frac{267}{4} & \frac{179}{4} & 4 & \frac{199}{2} \\ 20 & 20 & 12 & 20 & 80 \\ 50 & 10 & 20 & 60 & 160 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{23}{8} \\ 0 & \frac{267}{4} & \frac{179}{4} & 4 & \frac{199}{2} \\ 0 & \frac{65}{4} & \frac{13}{4} & 5 & \frac{45}{2} \\ 50 & 10 & 20 & 60 & 160 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{23}{8} \\ 0 & \frac{267}{4} & \frac{179}{4} & 4 & \frac{199}{2} \\ 0 & \frac{65}{4} & \frac{13}{4} & 5 & \frac{45}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{-15}{8} & \frac{45}{2} & \frac{65}{4} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{23}{8} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & \frac{65}{4} & \frac{13}{4} & 5 & \frac{45}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{-15}{8} & \frac{45}{2} & \frac{65}{4} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{356} & \frac{263}{356} & \frac{231}{89} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & \frac{65}{4} & \frac{13}{4} & 5 & \frac{45}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{-15}{8} & \frac{45}{2} & \frac{65}{4} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{356} & \frac{263}{356} & \frac{231}{89} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & 0 & \frac{-2041}{267} & \frac{1075}{267} & \frac{-460}{267} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{-15}{8} & \frac{45}{2} & \frac{65}{4} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{356} & \frac{263}{356} & \frac{231}{89} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & 0 & \frac{-2041}{267} & \frac{1075}{267} & \frac{-460}{267} \\ 0 & 0 & \frac{-1225}{534} & \frac{11995}{534} & \frac{4090}{267} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{356} & \frac{263}{356} & \frac{231}{89} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & \frac{-1225}{534} & \frac{11995}{534} & \frac{4090}{267} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1843}{2041} & \frac{5154}{2041} \\ 0 & 1 & \frac{179}{267} & \frac{16}{267} & \frac{398}{267} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & \frac{-1225}{534} & \frac{11995}{534} & \frac{4090}{267} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1843}{2041} & \frac{5154}{2041} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{843}{2041} & \frac{2734}{2041} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & \frac{-1225}{534} & \frac{11995}{534} & \frac{4090}{267} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1843}{2041} & \frac{5154}{2041} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{843}{2041} & \frac{2734}{2041} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43380}{2041} & \frac{32320}{2041} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1843}{2041} & \frac{5154}{2041} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{843}{2041} & \frac{2734}{2041} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1616}{2169} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4018}{2169} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{843}{2041} & \frac{2734}{2041} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1616}{2169} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4018}{2169} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{746}{723} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1075}{2041} & \frac{460}{2041} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1616}{2169} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4018}{2169} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{746}{723} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1340}{2169} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1616}{2169} \end{array}\right]$$

◁ *Respuesta.*

$x := 1.852466574$
$y := 1.031811895$
$z := 0.6177962195$
$w := 0.7450437990$
◁ *Respuesta.*

Ejercicio para practicar eliminación Gaussiana - Estrategias de pivoteo

Aplicar el método de eliminación Gaussiana con las operaciones siguientes:

Add -125/128 times row 1 to row 2 Add 16000/16009 times row 2 to row 3 Add 2001125/2001152 times row 3 to row 4 Add -250144000/250144081 times row 4 to row 5	Suma -125/128 veces la fila 1 a la fila 2 Suma 16000/16009 veces la fila 2 a la fila 3 Suma 2001125/2001152 veces la fila 3 a la fila 4 Agregue -250144000/250144081 veces la fila 4 a la fila 5

Para el sistema de ecuaciones dado por un circuito eléctrico, se tiene que

$$\left[\begin{array}{ccccc} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 500 & -512 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -512 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & -512 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 512 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{array}\right]$$

Las respuestas que debes obtener son las siguientes

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 500 & -512 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -512 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & -512 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 512 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16009}{32} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & -512 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & -512 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 512 & 9 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16009}{32} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8004608}{16009} & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & -512 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 512 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16009}{32} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8004608}{16009} & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-250144081}{500288} & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 512 & 9 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 512 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16009}{32} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-8004608}{16009} & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-250144081}{500288} & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{125072041472}{250144081} & 9 \end{array}\right]$$

◁ *Respuesta.*

Problema 1

Determinar la intensidad de corriente en cada rama del circuito que se muestra en la Fig. 3.1. Asignar los valores de los componentes dados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Valores de voltaje o fuerza electromotriz y resistencias del circuito eléctrico de la Fig. 3.1.

k	$\mathrm{E}_k\,(volts)$	$r_k\,(\Omega)$	$\mathrm{R}_k\,(\Omega)$
1	12	0.1	25
2	10	0.5	40
3	-	-	16
4	12	0.5	20
5	24	0.2	9
6	-	-	4
7	-	-	20

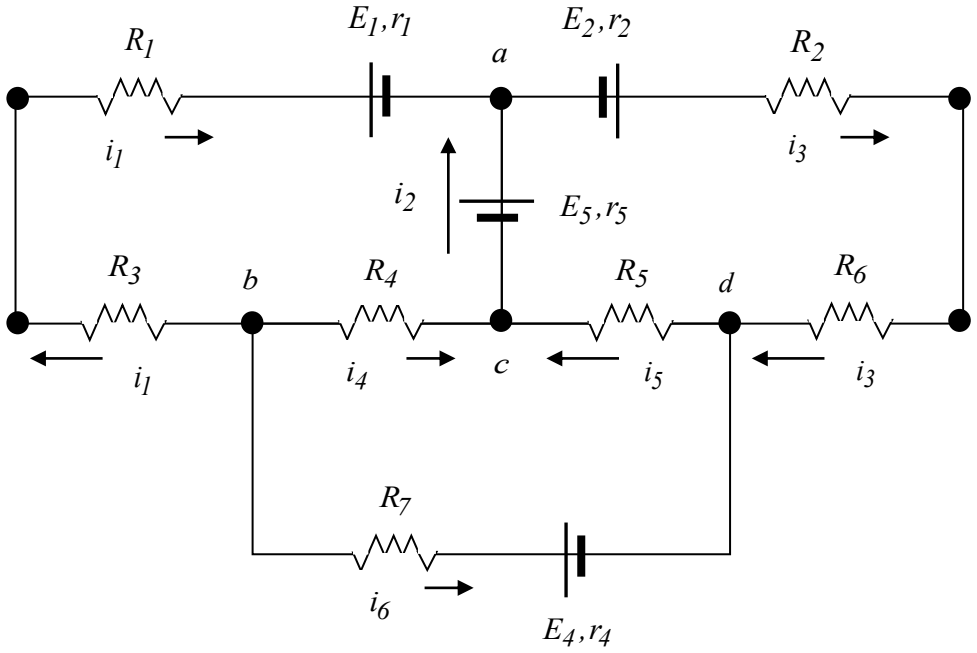


Fig. 3.1 Circuito eléctrico con resistencias y suministro de electricidad o fuentes de poder.

Solución

Para este problema de aplicación haremos uso del **método numérico de Gauss-Jordan** para determinar la intensidad de corriente en un circuito eléctrico. Esta técnica nos permite aproximar el comportamiento de la corriente eléctrica a medida que cambian las resistencias en un circuito. Establecemos relaciones entre las variables involucradas en un circuito eléctrico para obtener resultados precisos.

Se hace uso del álgebra lineal para encuadrar el sistema de ecuaciones lineales de las enseñanzas de Gauss y Jordan cuyo método algebraico nos permite dar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Está basado en la eliminación de variables de un sistema de ecuaciones mediante el uso de operaciones de reemplazo. El Método de Gauss-Jordan sigue un proceso iterativo para convertir un sistema de ecuaciones en una matriz escalonada. Esta matriz escalonada se utiliza para determinar las soluciones del sistema.

Hacemos uso de la ley de kirchhoff que aplica en algunas estructuras del circuito. Un nodo es un punto en un circuito eléctrico en el que dos o más conductores se conectan. Puede referirse tanto a un punto de conexión entre dos o más componentes del circuito, como a un punto de separación entre dos o más conductores. Los nodos son esenciales para el funcionamiento de los circuitos eléctricos, ya que permiten conectar varios componentes de un circuito.

Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al circuito dado, tenemos que, la sumatoria de cada intensidad de corriente en un nodo dado es igual a 0

$$\sum i = 0$$

Establecemos así, la primera tercia de ecuaciones del sistema ecuaciones, un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son las diferentes intensidades de corriente a lo largo del circuito. Entonces

Nodo	
a	$i_1 + i_2 - i_3 = 0$
b	$-i_1 - i_4 - i_6 = 0$
c	$i_4 + i_5 - i_2 = 0$

intensidades cuyos signos o sentidos son totalmente arbitrarios (ya que nos interesa el valor absoluto de la corriente). De este modo, debemos determinar otras 3 ecuaciones, las cuales se definen bajo otra ley de Kirchhoff, la ley de mallas, es decir

$$\sum E_k = \sum i_k R_k$$

La sumatoria de fuente de voltaje es igual a la sumatoria de la intensidad de corriente por la resistencia. Bajo esa encomienda se definen las ecuaciones siguientes.

Malla	
I	$-\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_5 = i_1\mathrm{R}_1 + i_1\mathrm{r}_1 - i_2\mathrm{r}_5 - i_4\mathrm{R}_4 + i_1\mathrm{R}_3$
II	$\mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_5 = i_3\mathrm{r}_2 + i_3\mathrm{R}_2 + i_3\mathrm{R}_6 + i_5\mathrm{R}_5 + i_2\mathrm{r}_5$
III	$\mathrm{E}_4 = i_4\mathrm{R}_4 - i_5\mathrm{R}_5 - i_6\mathrm{r}_4 - i_6\mathrm{R}_7$

Intercambiamos dichos valores según corresponde

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$
$$-i_1 - i_4 - i_6 = 0$$
$$i_4 + i_5 - i_2 = 0$$

Giramos el sentido de la igualdad

$$-\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_5 = i_1\mathrm{R}_1 + i_1\mathrm{r}_1 - i_2\mathrm{r}_5 - i_4\mathrm{R}_4 + i_1\mathrm{R}_3 \qquad i_1 + i_2 - i_3 = 0$$
$$\mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_5 = i_3\mathrm{r}_2 + i_3\mathrm{R}_2 + i_3\mathrm{R}_6 + i_5\mathrm{R}_5 + i_2\mathrm{r}_5 \quad -i_1 - i_4 - i_6 = 0$$
$$\mathrm{E}_4 = i_4\mathrm{R}_4 - i_5\mathrm{R}_5 - i_6\mathrm{r}_4 - i_6\mathrm{R}_7 \qquad i_4 + i_5 - i_2 = 0$$
$$i_1\mathrm{R}_1 + i_1\mathrm{r}_1 - i_2\mathrm{r}_5 - i_4\mathrm{R}_4 + i_1\mathrm{R}_3 = -\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_5$$
$$i_3\mathrm{r}_2 + i_3\mathrm{R}_2 + i_3\mathrm{R}_6 + i_5\mathrm{R}_5 + i_2\mathrm{r}_5 = \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}$$
$$i_4\mathrm{R}_4 - i_5\mathrm{R}_5 - i_6\mathrm{r}_4 - i_6\mathrm{R}_7 = \mathrm{E}_4$$

Asignamos los valores de los componentes del circuito dados en la Tabla 3.1

$$(25)i_1 + (0.1)i_1 - (0.2)i_2 - (20)i_4 + (16)i_1 = -12 - 24$$
$$(0.5)i_3 + (40)i_3 + (4)i_3 + (9)i_5 + (0.2)i_2 = 10 + 24$$
$$(20)i_4 - (9)i_5 - (0.5)i_6 - (20)i_6 = 12$$
$$41.1i_1 - 0.2i_2 - 20i_4 + = = -36$$
$$0.2i_2 + 44.5i_3 + 9i_5 = 34$$
$$20i_4 - 9i_5 - 20.5i_6 = 12$$

o,

$$41.1i_1 - 0.2i_2 - 20i_4 + = = -36$$
$$0.2i_2 + 44.5i_3 + 9i_5 = 34$$
$$20i_4 - 9i_5 - 20.5i_6 = 12$$

Este sistema de ecuaciones junto con el sistema

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$
$$-i_1 - i_4 - i_6 = 0$$
$$i_4 + i_5 - i_2 = 0$$

Nos da por resultado la matriz *A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz que construimos, el siguiente paso es resolverla por el método de Gauss – Jordan con pivoteo. Realizaremos un proceso para lograr una matriz escalonada. Finalmente, se obtendrá una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & i_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i_6 \end{pmatrix}$$

En la que la 7ª columna contendrá los valores de las incógnitas que corresponden a las intensidades buscadas desde un inicio. A continuación, se detalla paso a paso, el proceso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Encontrar el pivote en la columna # 1, fila #1

$$\begin{pmatrix} [1] & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila #1 por (-1)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 1 por (-1) y lo sumamos a la fila # 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 1 por (41.1)

$$\begin{pmatrix} 41.1 & 41.1 & -41.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 41.1 & -0.2 & 0 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 1 de la fila #4 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Encontramos el pivote en la columna # 2 en la fila # 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila # 2 por la fila #1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 2 por -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 2 de la fila #3 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 2 por (-41.3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.3 & 41.3 & 0 & 41.3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -41.3 & 41.1 & -20 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 2 de la fila # 4 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 2 por 0.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0.2 & 44.5 & 0 & 9 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 2 de la fila # 5 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Encontramos el pivote en la columna # 3, fila # 3 (Invirtiendo el signo en toda la fila)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 3 por (-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 3 de la fila #2 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 3 por (-0.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -61.3 & 0 & -41.3 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 3 de la fila # 4 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -61.3 & -0.2 & -41.1 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 3 por 44.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0 & -44.7 & 44.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -61.3 & -0.2 & -41.1 & -36 \\ 0 & 0 & 44.7 & 0.2 & 9 & 0.2 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 3 de la fila # 5 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -61.3 & -0.2 & -41.1 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Encontramos el pivote de la columna # 4 dividiendo la fila # 4 entre (-61.3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila # 4 por la fila # 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 4 por (-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{613} & -\frac{411}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 4 de la fila # 2 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 4 por 0.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & \frac{2}{3065} & \frac{411}{3065} & \frac{72}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 53.7 & -44.5 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 4 de la fila # 5 restaurándola

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53.69933474714518760 19 & -44.63409462 & 33.88254486 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 4 por 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & \frac{40}{613} & \frac{8220}{613} & \frac{7200}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53.69933474714518760 19 & -44.63409462 & 33.88254486 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -9 & -20.5 & 12 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 4 de la fila # 6 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53.69933474714518760 19 & -44.63409462 & 33.88254486 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Encontramos el pivote en la columna # 5 dividiendo la fila # 5 entre $53.69933474714518760 19$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634284898398 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 5 por - $\frac{2}{613}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & \frac{202}{613} & -\frac{360}{613} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{613} & 0.00271185985756231316 14 & -0.00205862164497140951 66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 5 de la fila # 1 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.58521707166661097 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634284898398 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 5 por -0.99673735725938009787

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.58521707166661097 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{611}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.99673735725938009787 & 0.82847318648528667081 & -0.62890891255387656 0732 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$ Sustraemos

la fila # 5 de la fila # 2 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.831185046 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 5 por -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.831185046 & -0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 5 de la fila # 3 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.831185046 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 5 por 0.003262642740

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{613} & \frac{411}{613} & \frac{360}{613} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003262642740 & -0.002711859857 & 0.0020586216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 5 de la fila # 4 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.831185046 & 0.630967534 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 5 por -9.06525285481

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.06525285481 & 7.534902614 & -5.719880240 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5557}{613} & -33.90946166 & 0.254486133 \end{pmatrix}$$ Sustraemos

la fila # 5 de la fila # 6 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -0.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -41.444364 & 5.97436637 \end{pmatrix}$$

Encontramos el pivote en la columna # 6 dividiendo la fila # 6 entre -41.444364

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -0.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 6 por 0.32681505694

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694504780103 & -0.5852170716666109722 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.32681505694 & -0.047111662 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 6 de la fila # 1 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 6 por -0.15800010328789678501

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 1.2161846058 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.15800010328789678501 & 0.0227632968 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 6 de la fila # 2 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 6 por 0.16881495365

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.16881495365 & 0.63096753418373701685 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.16881495365 & -0.02433533244 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila #6 de la fila # 3 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.655302866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 6 por 0.67318494305

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.655302866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.67318494305 & 0.5852170716666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67318494305 & -0.097042228962 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 6 de la fila # 4 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.655302866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6822593 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la fila # 6 por -0.83118504634

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.655302866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6822593 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.83118504634 & 0.630967534183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.83118504634 & 0.119818558643 \end{pmatrix}$$

Sustraemos la fila # 6 de la fila # 5 y la restauramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.538105409542 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.193408276 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.655302866 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6822593 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.511148975 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.144153891 \end{pmatrix}$$

Estas son las intensidades de corriente que satisfacen a las ecuaciones, por tanto, las intensidades que recorren el circuito.

Se concluye que la respuesta es

$i_1 = -0.538105409542$
$i_2 = 1.193408276$
$i_3 = 0.655302866$
$i_4 = 0.6822593$
$i_5 = 0.511148975$
$i_6 = -0.144153891$

$\lhd$ *Respuesta.*

Para cada intensidad (incógnita).

La metodología de pivoteo de Gauss-Jordan es una herramienta útil para hallar las resistencias de un circuito. Esta herramienta es una herramienta importante para el análisis de circuitos eléctricos, ya que permite determinar los valores de resistencias de forma eficiente. Por lo tanto, podemos concluir que el método de pivoteo de Gauss-Jordan es una técnica útil y eficaz para encontrar las resistencias de los circuitos.

Problema 2

Se tiene un sistema de tres rectores continuos tipo tanque perfectamente agitado trabajando en serie, en donde se lleva a cabo la reacción $A \rightarrow$ productos y se opera isométricamente (ver la Fig. 3.2). Los volúmenes se mantienen constantes y son de 100, 50 y 50 litros respectivamente.

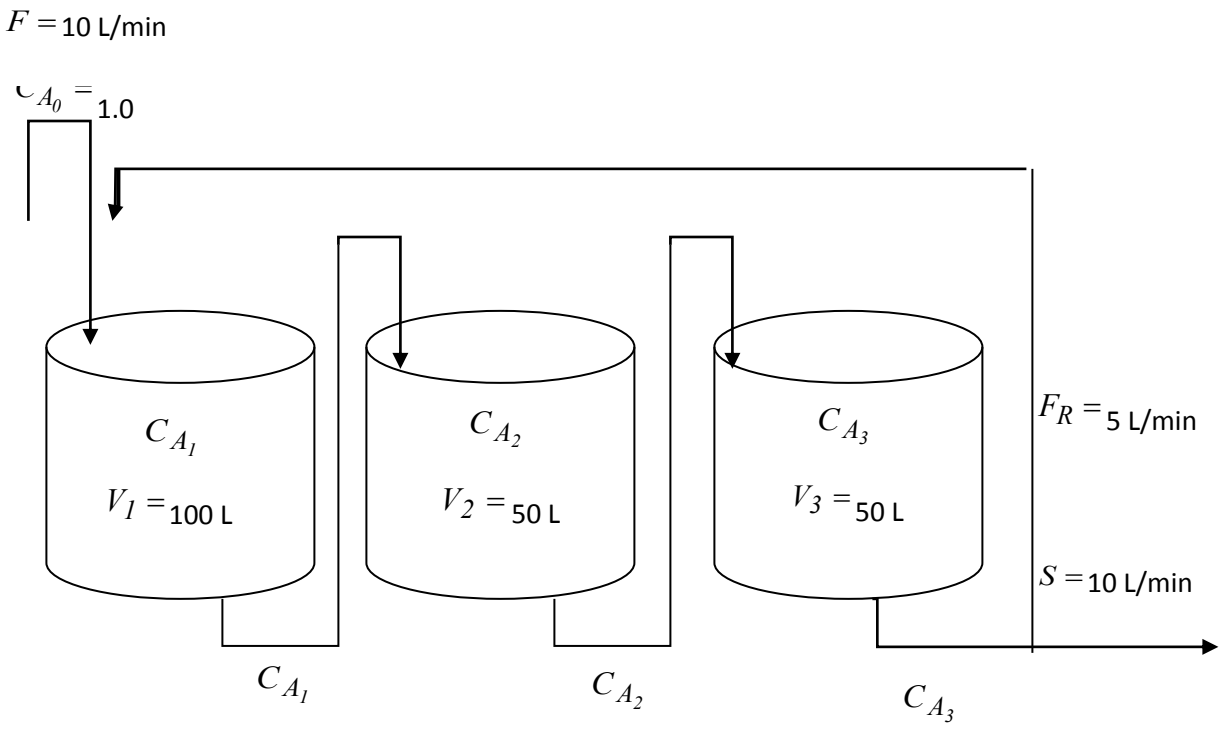


Fig. 3.2 Sistema de tres reactores continuos tipo tanque agitado en los cuales se efectúa la reacción Reactivos $A \rightarrow$ Productos.

Un balance de material en cada reactor, de acuerdo con la ecuación de continuidad, conduce al siguiente sistema de ecuaciones

Acumulación = entrada - salida – reacción

$$FC_{A0} + F_R C_{A3} - (F + F_R) C_{A1} - k_1 V_1 C_{A1}^n = \frac{dC_{A1}}{dt}$$

$$(F + F_R) C_{A1} - (F + F_R) C_{A2} - k_1 V_2 C_{A2}^n = \frac{dC_{A2}}{dt}$$

$$(F + F_R) C_{A2} - (F + F_R) C_{A3} - k_1 V_3 C_{A3}^n = \frac{dC_{A3}}{dt}$$

Calcule la concentración de "A" a régimen permanente en cada rector si la reacción es de primer orden con respecto a "A" y la constante de velocidad de reacción es k_1 es 0.1 min^{-1}. Las composiciones están dadas en mol/L.

Solución

Un reactor continúo agitado es un tipo de reactor químico que se basa en la alimentación de reactivos, la mezcla y la eliminación del producto que sucede continuamente, teniendo una ecuación de continuidad expresada de la siguiente forma:

Acumulación = entrada - salida - reacción

Debido a esto se formaron las 3 ecuaciones dadas en el problema, basándose en lo que entra, sale y lo que reacciona en cada uno de los tanques.

Acumulación = entrada - salida - reacción

$$FC_{A0} + F_R C_{A3} - (F + F_R) C_{A1} - k_1 V_1 C_{A1}^n = \frac{dC_{A1}}{dt}$$

$$(F + F_R) C_{A1} - (F + F_R) C_{A2} - k_1 V_2 C_{A2}^n = \frac{dC_{A2}}{dt}$$

$$(F + F_R) C_{A2} - (F + F_R) C_{A3} - k_1 V_3 C_{A3}^n = \frac{dC_{A3}}{dt}$$

Definición de las variables

V = Volumen del reactor.
T = Tiempo.
F = Fluido que entra.
F_R = Fluido que se recicla.
C_{A1}, C_{A2}, C_{A3} = concentraciones de las especies químicas
C_{A0} = Concentración inicial.
k_1 = Constante de velocidad de la reacción.
$\frac{dC}{dt}$ = Tasa de cambio de la concentración en el reactor.
S = Fluido que sale

Valores de las variables

El problema nos proporciona los diferentes valores de las variables que son:
V_1 =100 L
V_2 =50 L
V_3 =50 L
F=10 L/min
F_R=5 L/min
C_{A0}=1 mol/L
k_1 =0.1 min
S=10 L/min
Si se sustituyen los valores en las ecuaciones quedan de la siguiente forma:
Ecuación 1:

$$(10 \cdot 1) + (5) C_{A3} - (10 + 5) C_{A1} - (0.1 \cdot 100) C_{A1}^n = \frac{dC_{A1}}{dt}$$

Debido a que es un problema de primer orden n = 1 y debido a que todo el sistema se opera isométricamente con un estado estable significa que no hay cambio de concentración en el reactor por lo que $\frac{dC}{dt}$=0

$$10 + 5C_{A3} - 15C_{A1} - 10C_{A1} = 0$$

$5C_{A3} - 25C_{A1} = -10$

Ecuación 2:

$$(10+5)C_{A1} - (10+5)C_{A2} - (0.1\cdot 50)C_{A2}^{n} = \frac{dC_{A2}}{dt}$$

$15C_{A1} - 15C_{A2} - 5C_{A2} = 0$

$15C_{A1} - 20C_{A2} = 0$

Ecuación 3:

$$(10+5)C_{A2} - (10+5)C_{A3} - (0.1\cdot 50)C_{A3}^{n} = \frac{dC_{A3}}{dt}$$

$15C_{A2} - 15C_{A3} - 5C_{A3} = 0$

$15C_{A2} - 20C_{A3} = 0$

Sustitución hecha en maple

```
> F[1] := 10
```

$$F_1 := 10$$

```
> C[1] := 1
```

$$C_1 := 1$$

```
>
```

```
> F[R] := 5
```

$$F_R := 5$$

```
> V[1] := 100
```

$$V_1 := 100$$

```
> V[2] := 50
```

$$V_2 := 50$$

```
> V[3] := 50
```

$$V_3 := 50$$

```
> K[1] := .1
```

$$K_1 := 0.1$$

```
>
> (F[1]C[1] + F[R]C[A3]) - ((F[1] + F[R])C[A1]) - (K[1]V[1]C[A1]) = 0;
```

$$10 + 5\,C_{A3} - 25.0\,C_{A1} = 0$$

```
> (F[1] + F[R])C[A1] - ((F[1] + F[R])C[A2]) - K[1]V[2]C[A2] = 0
```

$$15\,C_{A1} - 20.0\,C_{A2} = 0$$

```
> (F[1] + F[R])C[A2] - ((F[1] + F[R])C[A3]) - K[1]V[3]C[A3] = 0
```

$$15\,C_{A2} - 20.0\,C_{A3} = 0$$

Finalmente se forma una matriz a partir de los resultados obtenidos

$$\begin{array}{c} C_{A1} \quad C_{A2} \quad C_{A3} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -25 & 0 & 5 & -10 \\ 15 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -20 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Para resolver la matriz utilice el **método de Gaus-Jordán** ayudándome con el software maple

> $M := \begin{bmatrix} -25 & 0 & 5 \\ 15 & -20 & 0 \\ 0 & 15 & -20 \end{bmatrix}$

$$M := \begin{bmatrix} -25 & 0 & 5 \\ 15 & -20 & 0 \\ 0 & 15 & -20 \end{bmatrix}$$

> $T := \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T := \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $ReducedRowEchelonForm(\langle M|T\rangle)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{32}{71} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{24}{71} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{71} \end{bmatrix}$$

Resultado

$C_{A1} = \frac{32}{71} = 0.450704225 \triangleleft Respuesta$

$C_{A2} = \frac{24}{71} = 0.338028169 \triangleleft Respuesta$

$C_{A3} = \frac{18}{71} = 0.253521126 \triangleleft Respuesta$

Nomenclatura

$A_3, 2\left(\frac{2}{7}\right)$ la Fila 3 (A_3) será multiplicada por $\left(\frac{2}{7}\right)$ y se le suma a la fila 2.

Problema 3

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan (Nieves y Domínguez, 1996, pp. 194-195).

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución

A partir de la nomenclatura descrita, el procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones dado, se presenta a continuación.

$$M1\left[\frac{1}{4}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A_1,2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A_1,3(-2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$M_2\left[\frac{4}{7}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \qquad A_2,3\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{27}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad M_3\left[\frac{7}{27}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{28}{27} \end{bmatrix}$$

$$A_3,2\left(\frac{2}{7}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{35}{27} \\ \frac{28}{27} \end{bmatrix} \qquad A_3,1\left(\frac{-1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-29}{108} \\ \frac{35}{27} \\ \frac{28}{27} \end{bmatrix} \qquad A_2,1\left(\frac{-1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-16}{27} \\ \frac{35}{27} \\ \frac{28}{27} \end{bmatrix}$$

El resultado obtenido es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{27} \\ \frac{35}{27} \\ \frac{28}{27} \end{bmatrix}$$ ◂ Respuesta.

3.4 Método de descomposición LU

Debe su nombre a las siglas en inglés de matriz inferior, *L* = Lower Matrix, y matriz superior, *U* = Upper Matrix.

El método LU es un método de factorización de matrices en matrices triangulares (Nieves y Dominguez, 1996, p. 181).

Ejemplo 1
Escribir las instrucciones de Maple para resolver la matriz de 3 × 3 dada por *A*.

Solución
Instrucciones Maple:

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> A := <<4,2,1>|<-9,-4,-1>|<2,6,3>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> (p, l, u) := LUDecomposition(A);
```

$$p, l, u := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> U:=LUDecomposition(A, output='U');
```

$$U := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> L:=LUDecomposition(A, output='L');
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Multiply(L,U);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, al multiplicar la matriz L por la matriz U, se obtiene la matriz original.

Para una matriz cuadrada A una factorización A = LU donde L y U son triangulares inferior y superior respectivamente. Aunque no todas las matrices cuadradas tienen una descomposición LU, siempre se puede escribir A = PLU, donde P es una matriz de permutación, L es no singular y triangular inferior, y

U es triangular superior. Una matriz cuadrada no singular tiene una descomposición LU si y sólo si todos sus principales menores principales son distintos de cero. Si A es no singular y tiene una descomposición LU, entonces A = L'DU', donde todas las entradas de la diagonal principal de la matriz triangular inferior L' son iguales a 1, U' es triangular superior y cada una de las entradas de la diagonal principal de la matriz diagonal D es igual al correspondiente menor principal de A; los factores L', D y U' son únicos.

El comando LUDecomposition calcula una descomposición de PLU o una descomposición de PLU1R modificada de la Matriz A. Dependiendo de lo que se incluya en la opción de salida (out), se puede devolver una secuencia de expresión que contenga uno o más de los factores P, L, U, U1 y R. Los objetos se devuelven en el mismo orden especificado en la lista de salida.
Nota: Se puede devolver U o el par U1 y R, pero no ambos.

La secuencia de llamada de LUDecomposition(A) es equivalente a LUDecomposition (A, salida=['P','L','U']). Esta descomposición LU genera un factor triangular inferior unitario cuadrado L y un factor triangular superior U con las mismas dimensiones que A, de modo que $A = P.L.U$. La Matriz P es una Matriz de permutación.

La descomposición de PLU1R se logra utilizando LUDecomposition(A, salida=['P','L','U1','R']). Esto factoriza aún más U en $U1.R$, donde U1 es el factor triangular superior cuadrado y R es la única forma escalonada reducida de la Matriz A. En este caso, $A = P.L.U1.R$.

La opción de salida (out) determina el contenido de la secuencia de expresión devuelta.

Ejemplo 2
Escribir las instrucciones de Maple para resolver la matriz de 4 × 4 dada por A.

Solución
Las instrucciones de Maple, son

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> A := <<0,-2,0,3>|<1,3,0,1>|<1,1,0,0>|<-3,4,1,0>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> (p, l, u) := LUDecomposition(A);
```

$$p, l, u := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{45}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> p . l . u;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B := <<1,0,2>|<3,1,4>|<6,1,4>|<1,1,2>>:
To reduce a Matrix using Gaussian elimination, specify the 'U' object:
> LUDecomposition(A, output='U');
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{45}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
To reduce a Matrix using Gauss-Jordan elimination, specify the 'R' object:
> LUDecomposition( B, output='R' );
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Calcular la descomposición de PLU in situ de una matriz mod m en Maple

LinearAlgebra[Modular][LUDecomposition] - compute in-place PLU Decomposition of a mod m Matrix.

Descripción

La función LUDecomposition calcula una descomposición PLU in situ de una matriz A mod m cuadrada colocando la información de permutación en pvec. Opcionalmente, también se puede calcular el determinante.

El cálculo de una descomposición LU requiere que m sea primo, pero en algunos casos se puede calcular cuando m es compuesto. Si no se puede calcular para m compuesto, aparece un mensaje de error.

El parámetro pvec debe ser un Vector de tipo entero[4]/entero[8], entero o cualquier cosa, que tenga al menos $n-1$ entradas, donde la Matriz A es $n \times n$

Si se requiere el determinante de la matriz que se está descomponiendo, especifique det como nombre. De lo contrario, especifique como valor 0. En la salida, al nombre especificado para det se le asigna el valor del determinante.

Nota: Si no se requiere el determinante, establezca det en cero para evitar cálculos innecesarios.

Dado que el cálculo se realiza in situ, la descomposición LU se almacena en forma compacta. Al completarse con éxito, la Matriz triangular superior se almacena en la parte triangular superior de A, y la Matriz triangular inferior se almacena en la parte triangular inferior de A, reemplazando las entradas diagonales con 1.

La permutación también se almacena de forma compacta en pvec. Este vector se puede interpretar como una lista ordenada de instrucciones sobre cómo aplicar una permutación, donde la primera entrada describe el intercambio de filas requerido para la primera fila, la segunda describe el intercambio de filas requerido para la segunda fila, etcétera.

Por ejemplo, para un a matriz 4x4 el vector de permutación debe tener 3 elementos. Si son [1, 4, 4], esto corresponde a los siguientes intercambios en el orden indicado: 1<=>1, 2<=>4, 3<=>4.

A diferencia de una matriz de permutación, este formato no da como resultado una representación única de una permutación. Por ejemplo, para una matriz 4x4, la permutación de identidad viene dada por [1,2,3], [3,2,1], [2,1,3], etcétera. El uso de este formato hace que la aplicación de la permutación (o su

inversa) a una Matriz o Vector sea bastante sencilla. Si se requiere la Matriz de permutación, se puede obtener mediante la aplicación de la función Permute en una Matriz de identidad.
Después de obtener el vector de permutación y descomposición de LU, se puede aplicar al lado derecho del sistema original (una matriz o vector mod m) para obtener la solución usando la función LUApply, o explícitamente usando Permute, ForwardSubstitute y luego Sustituto hacia atrás (BackwardSubstitute).
Este comando es parte del paquete LinearAlgebra[Modular], por lo que se puede usar en el formato LUDecomposition(..) solo después de ejecutar el comando with(LinearAlgebra[Modular]). Sin embargo, siempre se puede utilizar en la forma LinearAlgebra[Modular][LUDecomposition](..).

Ejemplo 1
Calcule la descomposición LU de una matriz aleatoria de 5 x 5.

Solución Maple

```
> with(LinearAlgebra[Modular]):
> p := 97;
```

$$p := 97$$

```
> A := Mod(p,Matrix(5,5,(i,j)->rand()),integer[]):
> A;
```

$$\begin{bmatrix} 77 & 96 & 10 & 86 & 58 \\ 36 & 80 & 22 & 44 & 39 \\ 60 & 39 & 43 & 12 & 55 \\ 2 & 24 & 71 & 45 & 29 \\ 21 & 48 & 7 & 33 & 57 \end{bmatrix}$$

```
> A2 := Copy(p,A):
> pv := Vector(4):
> LUDecomposition(p,A2,pv,'det'):
> A2,pv,det;
```

$$\begin{bmatrix} 77 & 96 & 10 & 86 & 58 \\ 37 & 20 & 40 & 63 & 27 \\ 94 & 60 & 1 & 79 & 64 \\ 29 & 56 & 63 & 7 & 78 \\ 62 & 54 & 40 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, 65$$

Check the determinant.

```
> modp(LinearAlgebra:-Determinant(Matrix(5,5,(i,j)->A[i,j])),p);
```

$$65$$

Construct a 'B' in A X = B, and compute X.

```
> B := Mod(p,Matrix(5,2,(i,j)->rand()),integer[]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 65 & 16 \\ 93 & 96 \\ 71 & 44 \\ 70 & 58 \\ 25 & 29 \end{bmatrix}$$

```
> X := Copy(p,B):
> LUApply(p,A2,pv,X):
> X;
```

$$\begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 12 & 20 \\ 57 & 11 \\ 83 & 68 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Check it.

```
> Multiply(p,A,X),B;
```

$$\begin{bmatrix} 65 & 16 \\ 93 & 96 \\ 71 & 44 \\ 70 & 58 \\ 25 & 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 65 & 16 \\ 93 & 96 \\ 71 & 44 \\ 70 & 58 \\ 25 & 29 \end{bmatrix}$$

Using float[8] with a nontrivial permutation

```
> p := 13:
> A := Mod(13,[[0,0,12],[12,0,3],[1,1,1]],float[8]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 12. \\ 12. & 0. & 3. \\ 1. & 1. & 1. \end{bmatrix}$$

```
> A2 := Copy(p,A):
> pv := Vector(2):
> LUDecomposition(p,A2,pv,0):
> A2,pv;
```

$$\begin{bmatrix} 12. & 0. & 3. \\ 12. & 1. & 4. \\ 0. & 0. & 12. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Now apply it to a random Vector and check.

```
> B := Mod(p,Vector(3,(i)->rand()),float[8]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5. \\ 3. \\ 5. \end{bmatrix}$$

```
> X := Copy(p,B):
```

Apply it manually.

```
> Permute(p,pv,X,true,false):
> ForwardSubstitute(p,A2,X,true):
> BackwardSubstitute(p,A2,X):
> X;
```

$$\begin{bmatrix} 8. \\ 2. \\ 8. \end{bmatrix}$$

```
> Multiply(p,A,X),B;
```

$$\begin{bmatrix} 5. \\ 3. \\ 5. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5. \\ 3. \\ 5. \end{bmatrix}$$

Fin.

Problema 1_LU
Elaborar un programa que factorice matrices en la forma LU.

Solución
Se presenta la solución mediante el algoritmo LU, el código del programa y los resultados obtenidos en la pantalla del software C# en las Figs. 3.3-3.7.

Algoritmo
Ingrese el número de filas de la matriz:
Ingrese el número de columnas de la matriz:
Ingrese los elementos de la matriz:
#Teclear todos los elementos de una matriz Low, L, de 3×3 y al finalizar dar enter para obtener la matriz L
Elemento [m,n]
.
.
.
Ingrese el número de filas de la matriz:
Ingrese el número de columnas de la matriz:
Ingrese los elementos de la matriz:
#Teclear todos los elementos de una matriz Up, U, de 3×3 y al finalizar dar enter para obtener la matriz U:
Elemento [m,n]
.
.
.
Fin

Código C#

```
using System;

class LU
{
   static void Main()
   {
      bool continuar = true;

      while (continuar)
      {
         Console.Write("Ingrese el número de filas de la matriz: ");
         int n = int.Parse(Console.ReadLine());

         Console.Write("Ingrese el número de columnas de la matriz: ");
         int m = int.Parse(Console.ReadLine());

         Console.WriteLine("Ingrese los elementos de la matriz:");
```

```
double[,] matriz = new double[n, m];

for (int i = 0; i < n; i++)
{
   for (int j = 0; j < m; j++)
   {
      Console.Write("Elemento [{0},{1}]: ", i, j);
      matriz[i, j] = double.Parse(Console.ReadLine());
   }
}

double[,] L = new double[n, n];
double[,] U = new double[n, n];

for (int i = 0; i < n; i++)
{
   // Llenar la diagonal de U con 1
   U[i, i] = 1;

   for (int j = i; j < n; j++)
   {
      double sum = 0;

      for (int k = 0; k < i; k++)
      {
         sum += L[i, k] * U[k, j];
      }

      U[i, j] = matriz[i, j] - sum;
   }

   for (int j = i + 1; j < n; j++)
   {
      double sum = 0;

      for (int k = 0; k < i; k++)
      {
         sum += L[j, k] * U[k, i];
      }

      L[j, i] = (matriz[j, i] - sum) / U[i, i];
   }
}

// Imprimir las matrices L y U
Console.WriteLine("Matriz L:");
for (int i = 0; i < n; i++)
{
   for (int j = 0; j < n; j++)
```

```
            {
                if (j <= i)
                {
                    Console.Write("{0} ", L[i, j]);
                }
                else
                {
                    Console.Write("0 ");
                }
            }
            Console.WriteLine();
        }

        Console.WriteLine("Matriz U:");
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            for (int j = 0; j < n; j++)
            {
                if (j >= i)
                {
                    Console.Write("{0} ", U[i, j]);
                }
                else
                {
                    Console.Write("0 ");
                }
            }
            Console.WriteLine();
        }

        Console.Write("¿Desea ingresar otra matriz? (S/N): ");
        string respuesta = Console.ReadLine();

        if (respuesta.ToUpper() != "S")
        {
            continuar = false;
            Console.WriteLine("Gracias :D");
        }
    }

    Console.ReadLine();
  }
}
```

Los resultados obtenidos en la pantalla del programa C# se muestran en las Figs. 3.3 a 3.7.

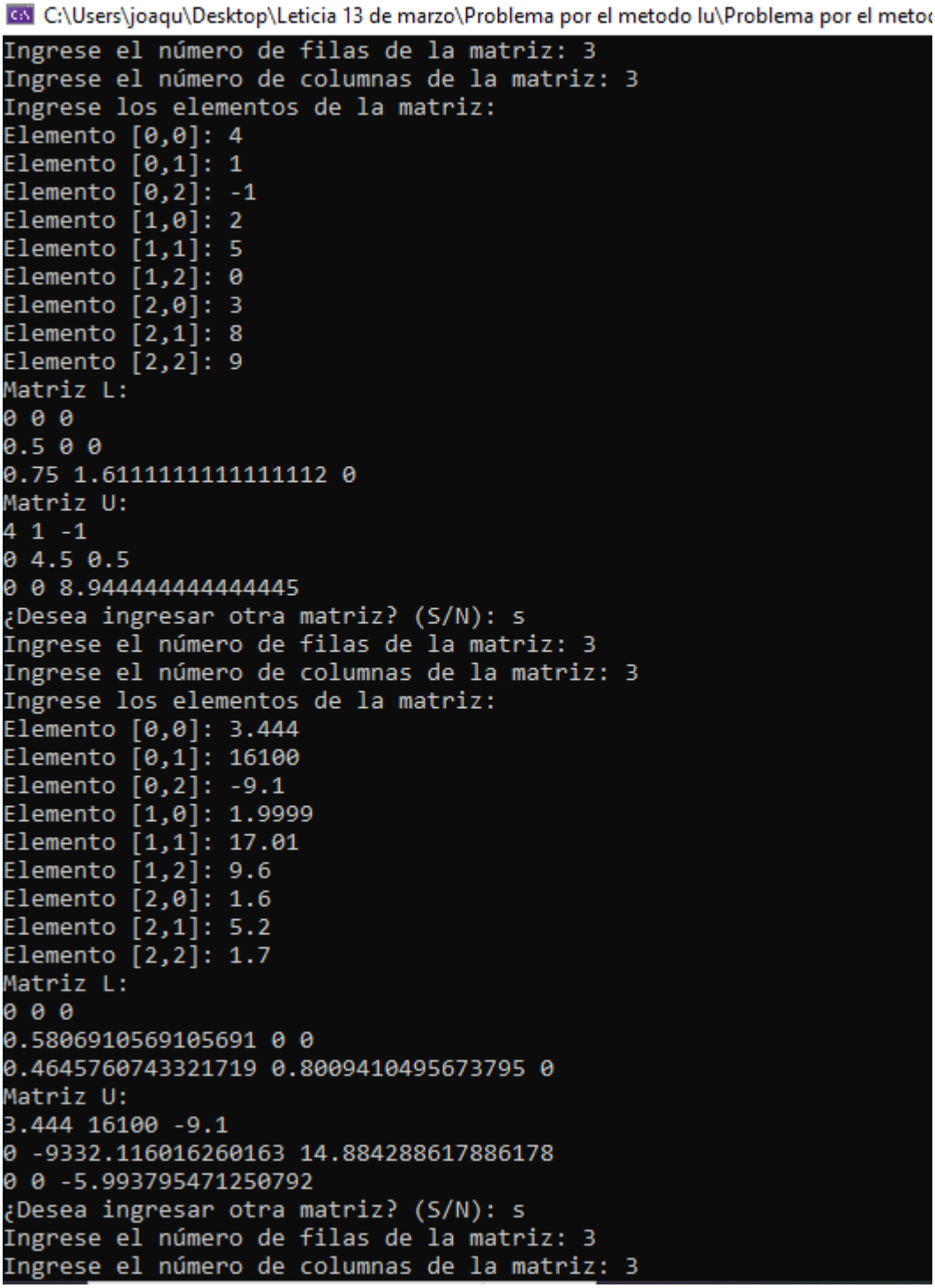


Fig. 3.3 Pantalla de inicio del programa en código C#. Una vez ingresado el número de filas y número de columnas de una matriz, así como sus elementos, el programa devuelve la matriz inferior L y la matriz superior U.

```
Ingrese los elementos de la matriz:
Elemento [0,0]: 5.8
Elemento [0,1]: 3.2
Elemento [0,2]: 11.25
Elemento [1,0]: 4.3
Elemento [1,1]: 3.4
Elemento [1,2]: 9.625
Elemento [2,0]: 2.5
Elemento [2,1]: 5.2
Elemento [2,2]: 9.625
Matriz L:
0 0 0
0.7413793103448276 0 0
0.4310344827586207 3.718120805369129 0
Matriz U:
5.8 3.2 11.25
0 1.0275862068965513 1.2844827586206886
0 0 1.7763568394002505E-15
```

Fig. 3.4 Otro ejemplo de pantalla de inicio del programa en código C# para ingresar valores numéricos de una matriz que conforma un sistema de ecuaciones, devolviendo como resultados la matriz L y la matriz U para el sistema de ecuaciones ingresado.

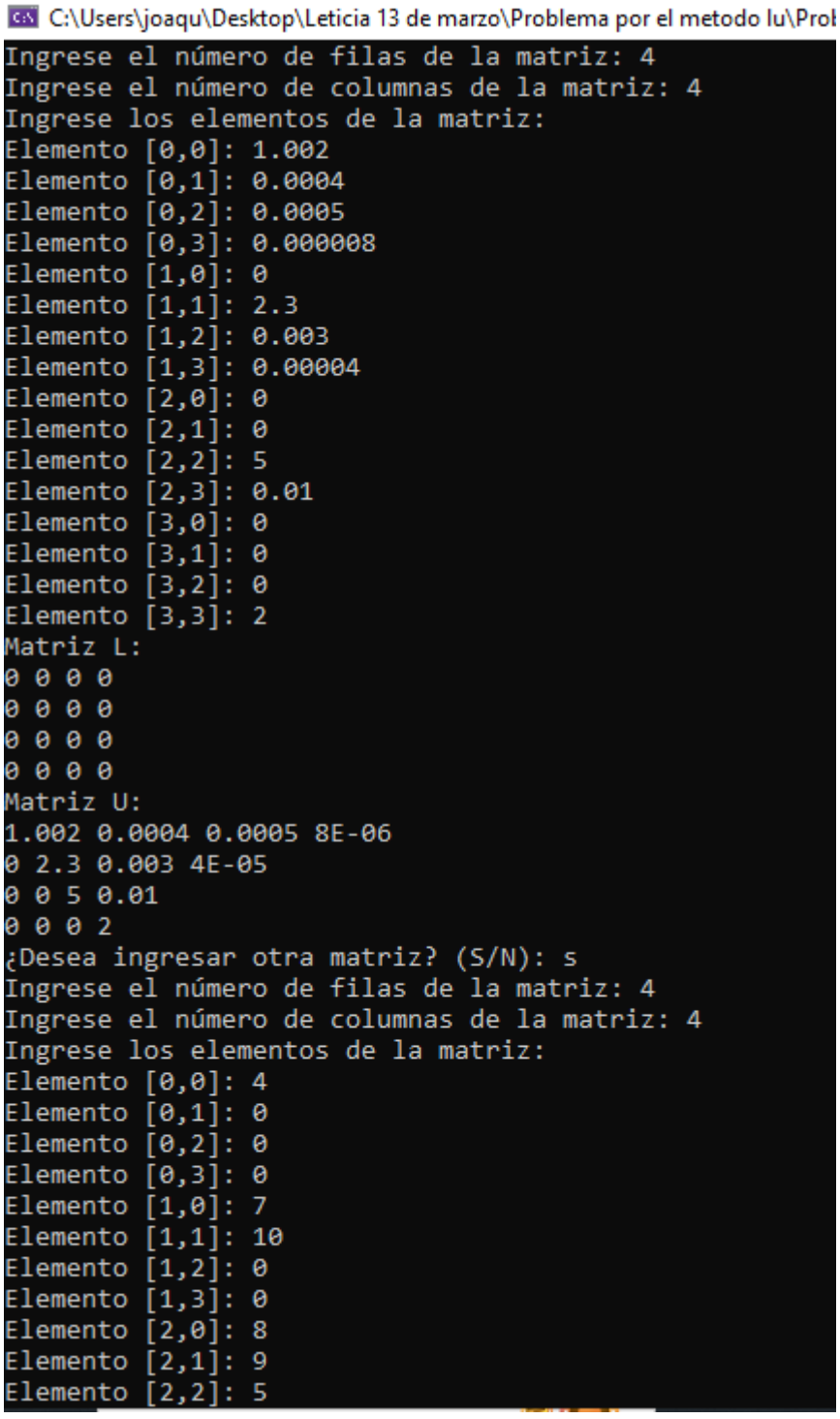


Fig. 3.5 Otros ejemplos de pantalla de inicio del programa en código C# para ingresar valores numéricos de una matriz que conforma un sistema de ecuaciones, devolviendo como resultados la matriz L y la matriz U para el sistema de ecuaciones ingresado.

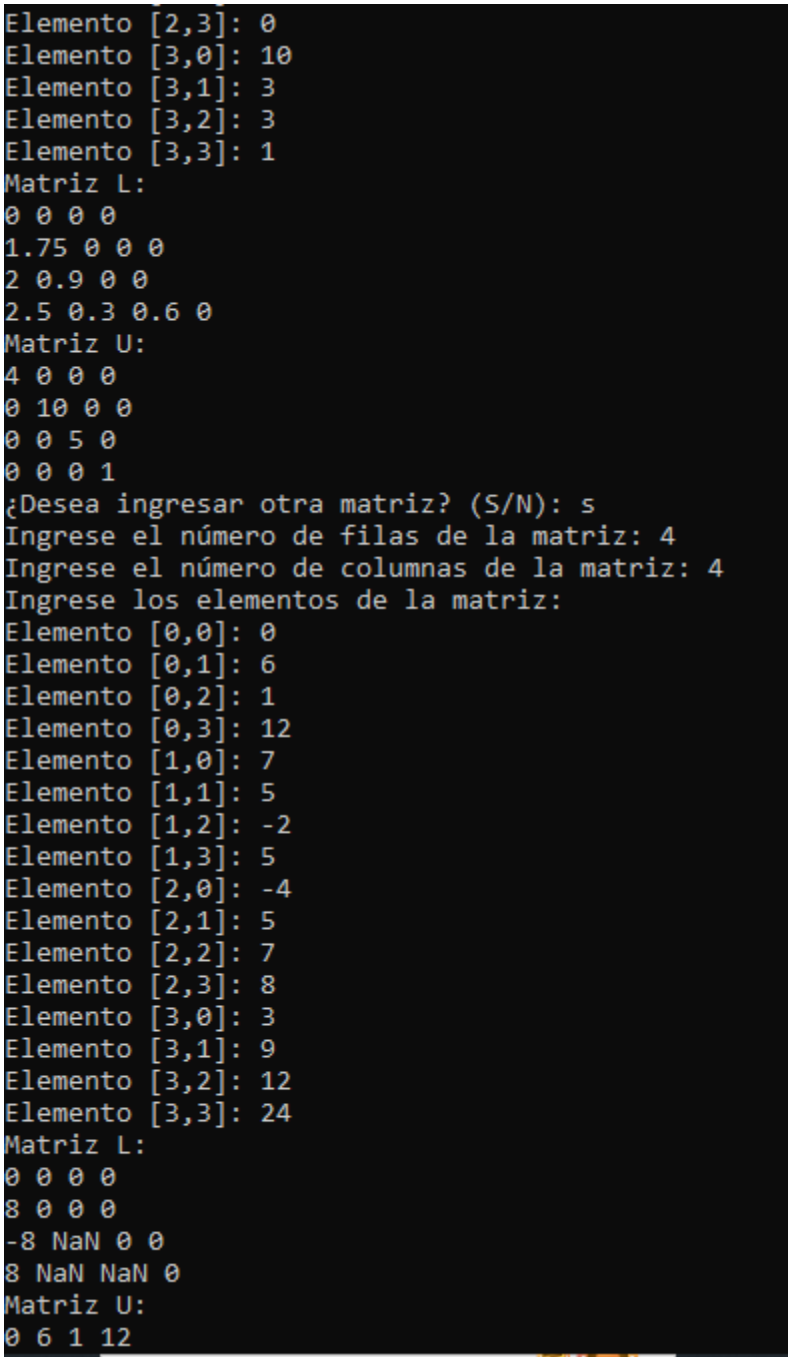


Fig. 3.6 Continuación del ejemplo de la Fig. anterior y otro ejemplo de ingreso de valores numéricos de una matriz que conforma un sistema de ecuaciones, devolviendo como resultados la matriz L y la matriz U para el sistema de ecuaciones ingresado.

3.5 Método de Gauss-Seidel

La iteración de Gauss-Seidel es otro término para el método de desplazamientos sucesivos.
En el método de desplazamientos sucesivos o iteración de Gauss-Seidel, la variante de la iteración de Jacobi, en la que se utiliza inmediatamente la nueva información. Esto suele superar al método Jacobi. Explícitamente, esto produce el método iterativo de resolver un sistema matricial lineal $A \cdot x = b$ resolviendo repetidamente x_{NEW} a partir de

$$\boldsymbol{x}_{NEW(i)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\boldsymbol{b}_i - \sum_{j>i} a_{ij}\boldsymbol{x}_{OLD(j)} - \sum_{j<i} a_{ij}\boldsymbol{x}_{NEW(j)}\right] \tag{3.2}$$

Esto assume que $a_{ii} \neq 0$, y no siempre converge.

En este método los valores que están siendo calculados en la $(k+1)$*ésima* iteración se usan para el cálculo de los valores que faltan de esa misma iteración, esto es, con x^k se calcular x^{k+1} de acuerdo con

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 + a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k\right) \\ \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 + a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k\right) \\ \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 + a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}\right) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

O, para un sistema de n ecuaciones, tal como

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right], \ para \ 1 \le i \le n \tag{3.4}$$

Ejemplo 1
Resolver el sistema de ecuaciones dado por el método de Gauss-Seidel (Nieves y Domínguez, pp. 210-212). Las Ecs. (1) a (4) son, respectivamente

```
> 4*x[1]-x[2] = 1;
```

$$4x_1 - x_2 = 1$$

```
> -x[1] + 4·x[2]- x[3] = 1
```

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 1$$

```
> -x[2] + 4· x[3] - x[4] = 1
```

$$-x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$

```
> -x[3] + 4·x[4] = 1
```

$$-x_3 + 4x_4 = 1$$

Solución
despejando x[1] de la Ec. (1), x[2] de la Ec. (2), x[3] de la Ec. (3) y x[4] de la Ec. (4)

> $x[1] = solve(4*x[1]-x[2] = 1, x[1])$

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2$$

> $x[2] = solve(-x[1] + 4\cdot x[2] - x[3] = 1, x[2])$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3$$

> $x[3] = solve(-x[2] + 4\cdot x[3] - x[4] = 1, x_3)$

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4$$

> $x[4] = solve(-x[3] + 4\cdot x[4] = 1, x[4])$

$$x_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3$$

Primera iteración

Cuando no se dispone de una aproximación al vector solución, se emplea por lo general el vector inicial como el vector cero

> $x^{(0)} = [0000]^T$

Calculamos x[1], x[2], x[3] y x[4] introduciendo el vector inicial en la primera ecuación donde despejamos x[1], y así sucesivamente con x[2], x[3] y x[4]

> $x[2] := 0 : x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

> $x[1] := \frac{1}{4} : x[3] := 0 : x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3$

$$x_2 = \frac{5}{16}$$

> $evalf\left(\frac{5}{16}\right)$

$$0.3125000000$$

> $x[2] := 0.3125000000 : x[4] := 0 : x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4$

$$x_3 = 0.3281250000$$

> $x[3] := 0.3281250000 : x_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3$

$$x_4 = 0.3320312500$$

Entonces, el vector x^((1)) es

> $x^{(1)} = [0.25 \;\; 0.3125000000 \;\; 0.3281250000 \;\; 0.3320312500\;]^T$

Segunda iteración

Se procede de igual manera para el cálculo del vector

> $x^{(2)} = [\,x[1] \;\; x[2] \;\; x[3] \;\; x[4]]^T$

> $x[2] := 0.3125000000 : x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2$

$$x_1 = 0.3281250000$$

> $x_1 := 0.3281250000 : x_3 := 0.3281250000 : x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3$

$$x_2 = 0.4140625000$$

> $x_2 := 0.4140625000 : x_4 := 0.3320312500 : x_3 := \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4$

$$x_3 := 0.4365234375$$

$> x_3 := 0.4365234375 : x_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_3$

$$x_4 = 0.3591308594$$

Así,

$> x^{(2)} = [\ 0.3281250000$
$0.4140625000 \quad 0.4365234375 \quad 0.3591308594]^T$

Tercera iteración

Se procede de igual manera para el cálculo del vector y así sucesivamente hasta completar hasta la 6a iteración que proporciona la solución, ya que la 5a iteración y la 6a iteración dan los mismos resultados para x[1], x[2], x[3] y x[4]. La Tabla 3.2 muestra los resultados de las iteraciones. TtHE!

Tabla 3.2 Resultados de las iteraciones realizadas con el método Gauss-Seidel para el sistema de ecuaciones dado.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k
0	0	0	0	0
1	.25	.3125	.3281	.3320
2	.3281	.4141	.4365	.3591
3	.3535	.4475	.4517	.3629
4	.3619	.4534	.4541	.3635
5	.3633	.4544	.4545	.3636
6	.3636	.4545	.4545	.3636

Ejemplo 2

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Seidel.

a)

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

c)

$$> A := \begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2.88 & 0 & 0 & 0 & -4.5 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 1.2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

d)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & 6^4 \\ 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 & 20^4 \\ 1 & 30 & 30^2 & 30^3 & 30^4 \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 13.4 \\ 30.4 \\ 41.8 \\ 57.9 \\ 66.5 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 10 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 15 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 25 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se trata de una matriz 11x11, sin embargo, el software no es capaz de mostrarlo, por lo que se escribirán directamente las fórmulas y se procederá de igual manera. Usaremos en este caso las letras del abecedario empezando por la *A, B, C* y así sucesivamente.

> $Eq[1] := 8 \cdot x[1] + 6 \cdot x[3] + x[4] = 1$

$$Eq_1 := 8\,x_1 + 6\,x_3 + x_4 = 1$$

> $Eq[2] := 9 \cdot x[2] + 5 \cdot x[7] + 2 \cdot x[9] + x[10] = 5$

$$Eq_2 := 9\,x_2 + 5\,x_7 + 2\,x_9 + x_{10} = 5$$

> $Eq[3] := x[2] + 7 \cdot x[3] + x[6] + 2 \cdot x[7] + x[10] = 8$

$$Eq_3 := x_2 + 7\,x_3 + x_6 + 2\,x_7 + x_{10} = 8$$

> $Eq[4] := 1 \cdot x[2] + 6 \cdot x[4] + x[7] + x[11] = 0$

$$Eq_4 := x_2 + 6\,x_4 + x_7 + x_{11} = 0$$

> $Eq[5] := 9 \cdot x[5] + x[9] + x[10] + x[11] = 8$

$$Eq_5 := 9\,x_5 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 8$$

> $Eq[6] := 1 \cdot x[2] + 2 \cdot x[4] + 10 \cdot x[6] + 1 \cdot x[7] + 3 \cdot x[9] = 1$

$$Eq_6 := x_2 + 2\,x_4 + 10\,x_6 + x_7 + 3\,x_9 = 1$$

> $Eq[7] := 5 \cdot x[3] + 2 \cdot x[5] + 2 \cdot x[6] + 10 \cdot x[7] = 0$

$$Eq_7 := 5\,x_3 + 2\,x_5 + 2\,x_6 + 10\,x_7 = 0$$

> $Eq[8] := 6 \cdot x[4] + 1 \cdot x[5] + 15 \cdot x[8] + 2 \cdot x[10] = 3$

$$Eq_8 := 6\,x_4 + x_5 + 15\,x_8 + 2\,x_{10} = 3$$

> $Eq[9] := 2 \cdot x[2] + 4 \cdot x[5] + x[7] + x[8] + 20 \cdot x[9] + x[10] = 0$

$$Eq_9 := 2\,x_2 + 4\,x_5 + x_7 + x_8 + 20\,x_9 + x_{10} = 0$$

> $Eq[10] := 3 \cdot x[6] + 6 \cdot x[8] + 5 \cdot x[9] + 25 \cdot x[10] + x[11] = 1$

$$Eq_{10} := 3\,x_6 + 6\,x_8 + 5\,x_9 + 25\,x_{10} + x_{11} = 1$$

> $Eq[11] := x[1] + 3\cdot x[3] + x[4] + 5\cdot x[5] + 7\cdot x[7] + x[10] + 12 \cdot x[11] = 2$

$$Eq_{11} := x_1 + 3\,x_3 + x_4 + 5\,x_5 + 7\,x_7 + x_{10} + 12\,x_{11} = 2$$

> $valores_objetivos := solve(\{Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7], Eq[8], Eq[9], Eq[10], Eq[11]\}, \{x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8], x[9], x[10], x[11]\})$

$$valores_objetivos := \left\{x_1 = -\frac{146604165464}{191409637365}, x_2 = \frac{13526945354}{12760642491}, x_3 = \frac{5085219206}{4253547497}, x_4 = -\frac{8766224543}{191409637365}, x_5 = \frac{174305598886}{191409637365}, x_6 = \frac{10300285013}{63803212455}, x_7 = -\frac{31091744584}{38281927473}, x_8 = \frac{1953021073}{12760642491}, x_9 = -\frac{16390213481}{63803212455}, x_{10} = \frac{6545459521}{191409637365}, x_{11} = \frac{5151889868}{191409637365}\right\}$$

Solución

a)

Escribiremos las matrices en forma de ecuación y las despejamos, para posteriormente introducirlas al código que las iterará automáticamente.

Nota: En el código pasamos de x y sus subíndices a x, y, z, por temas de código, pero se sobre entiende que el resultado es el mismo.

Nota: Solo se describe el procedimiento en uno de los problemas puesto que es el mismo para todos.

Por cuestiones de espacio, solo se muestran los resultados de las últimas dos iteraciones que arroja el código de este problema (iteración 37 e itetación 38).

> $Eq[1] := 5\,x[1] - x[2] - x[3] = 3$ *#definimos las ecuaciones.*

$$Eq_1 := 5\,x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

> $Eq[2] := x[1] - x[2] + 2\,x[3] = 0$

$$Eq_2 := x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0$$

> $Eq[3] := 3\,x[1] - x[2] + 2\,x[3] = 4$

$$Eq_3 := 3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 4$$

> $valores_objetivos := solve(\{Eq[1], Eq[2], Eq[3]\}, \{x[1], x[2], x[3]\})$

$$valores_objetivos := \left\{x_1 = 2, x_2 = \frac{16}{3}, x_3 = \frac{5}{3}\right\}$$

> $solve(5\,x[1] - x[2] - x[3] = 3, x[1])$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,x_2 + \frac{1}{5}\,x_3$$

> $E[1] := x[1]$

$$E_1 := x_1$$

> $x[2] := solve(Eq[2], x[2])$ *#Despejamos las ecuaciones en funcion de cada una de las variables.*

$$x_2 := x_1 + 2\,x_3$$

```
> E[2] := x[2 ]
```

$$E_2 := x_1 + 2\,x_3$$

```
> unassign('x[1]','x[2]','x[3]')
> x[3] := solve(Eq[3], x[3])
```

$$x_3 := 2 - \frac{3}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2$$

```
> E[3] := x[3]
```

$$E_3 := 2 - \frac{3}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2$$

```
> unassign('x[1]','x[2]','x[3]')
> restart :
> x := (y, z) → 3/5 + 1/5*y + 1/5*z; #Definimos las ecuaciones
  y := (x, z) → x + 2*z;
  z := (x, y) → 2 - 3/2*x + 1/2*y;
```

$$x := (y, z) \to \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,y + \frac{1}{5}\,z$$

$$y := (x, z) \to x + 2\,z$$

$$z := (x, y) \to 2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y$$

```
> x0 := 0; #definimos el vector[000]y0 := 0; z0 := 0;
```

$$x0 := 0$$

$$y0 := 0$$

$$z0 := 0$$

```
>
> x_obj := 2;  #Definimos los valores objetivos obtenidos previamente
  y_obj := 16/3;
  z_obj := 5/3;
```

$$x_obj := 2$$

$$y_obj := \frac{16}{3}$$

$$z_obj := \frac{5}{3}$$

```
> tolerancia := 0.0001; #definimos la taza de error
```

$$tolerancia := 0.0001$$

```
>  max_iteraciones := 100; # número máximo de iteraciones del metodo
```

$$max_iteraciones := 100$$

```
> x_ant := x0; #actualización de valores para inicializar
  y_ant := y0;
  z_ant := z0;
```

$$x_ant := 0$$

$$y_ant := 0$$

$$z_ant := 0$$

```
i := 0;while i < max_iteraciones do
    #definimos variables para iterar sobre el numero de iteraciones
    escogido
  # Calculamos los nuevos valores de x, y, z
  x_act := x(y_ant,z_ant);
  y_act := y(x_act,z_ant);
  z_act := z(x_act,y_act);
```

```
    # Calculamos el error absoluto para cada variable, su valor
    objetivo menos el actual
  error_x := abs(x_obj - x_act);
  error_y := abs(y_obj - y_act);
  error_z := abs(z_obj - z_act);

# verificamos si los valores alcanzaron la tolerancia deseada, solo se
    detienen las iteraciones si todas alcanzan su tolerancia
  if error_x < tolerancia and error_y < tolerancia and error_z
    < tolerancia then
    break;
  end if;

 # Actualizamos los valores anteriores con los nuevos valores
  x_ant := x_act;
  y_ant := y_act;
  z_ant := z_act;


    # Incrementamos el contador de iteraciones #NOTA: i será el
    número de iteración.
  i := i + 1;
end do;
```

$i := 0$ $x_act := \frac{3}{5}$ $y_act := \frac{3}{5}$ $z_act := \frac{7}{5}$ $error_x := \frac{7}{5}$ $error_y := \frac{71}{15}$ $error_z := \frac{4}{15}$ $x_ant := \frac{3}{5}$ $y_ant := \frac{3}{5}$ $z_ant := \frac{7}{5}$	$i := 1$ $x_act := 1$ $y_act := \frac{19}{5}$ $z_act := \frac{12}{5}$ $error_x := 1$ $error_y := \frac{23}{15}$ $error_z := \frac{11}{15}$ $x_ant := 1$ $y_ant := \frac{19}{5}$ $z_ant := \frac{12}{5}$	$i := 2$ $x_act := \frac{46}{25}$ $y_act := \frac{166}{25}$ $z_act := \frac{64}{25}$ $error_x := \frac{4}{25}$ $error_y := \frac{98}{75}$ $error_z := \frac{67}{75}$ $x_ant := \frac{46}{25}$ $y_ant := \frac{166}{25}$ $z_ant := \frac{64}{25}$
. . . $i := 36$ $x_act := \frac{38144407664867}{19073486328125}$ $y_act := \frac{101715818895987}{19073486328125}$	. . . $i := 37$ $x_act := \frac{38144909697461}{19073486328125}$ $y_act := \frac{101721450911347}{19073486328125}$	. . . $i := 38$ $x_act := \frac{190732243461454}{95367431640625}$ $y_act := \frac{508635579118774}{95367431640625}$

$z_act := \frac{31788270606943}{19073486328125}$
$error_x := \frac{2564991383}{19073486328125}$
$error_y := \frac{28324562039}{57220458984375}$
$error_z := \frac{2619819796}{57220458984375}$
$x_ant := \frac{38144407664867}{19073486328125}$
$y_ant := \frac{101715818895987}{19073486328125}$
$z_ant := \frac{31788270606943}{19073486328125}$

$z_act := \frac{31790333565732}{19073486328125}$
$error_x := \frac{2062958789}{19073486328125}$
$error_y := \frac{11428515959}{57220458984375}$
$error_z := \frac{3569056571}{57220458984375}$
$x_ant := \frac{38144909697461}{19073486328125}$
$y_ant := \frac{101721450911347}{19073486328125}$
$z_ant := \frac{31790333565732}{19073486328125}$

$z_act := \frac{158954287648456}{95367431640625}$
$error_x := \frac{2619819796}{95367431640625}$
$error_y := \frac{27831106322}{286102294921875}$
$error_z := \frac{25704742243}{286102294921875}$

if $i < max_iteraciones$ **then**

$print("x = ", evalf(x_act), ", y = ", evalf(y_act), ", z = ", evalf(z_act))$; $print("La convergencia se alcanzó en ", i, " iteraciones.")$;
else

$print("No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en ", max_iteraciones, " iteraciones.")$;
end if;

"x = ", 1.999972529, ", y = ", 5.333430610, ", z = ", 1.666756511
"La convergencia se alcanzÃ³ en ", 38, " iteraciones."

Solución

b)

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

> $Eq[1] := 2\,x[1] + x[2] + 1\,x[3] = 4$

$$Eq_1 := 2\,x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

> $Eq[2] := x[1] + 2 \cdot x[2] + x[3] = 4$

$$Eq_2 := x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 4$$

> $Eq[3] := x[1] + x[2] + 2\,x[3] = 4$

$$Eq_3 := x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 4$$

> $valores_objetivos := solve(\{Eq[1], Eq[2], Eq[3]\}, \{x[1], x[2], x[3]\})$

$$valores_objetivos := \{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1\}$$

>

> $E[1] := solve(2\,x_1 + x_2 + x_3 = 4, x[1])$

$$E_1 := 2 - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3$$

> $x[2] := solve(Eq[2], x[2])$

$$x_2 := 2 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_3$$

> $E[2] := x[2]$

$$E_2 := 2 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_3$$

> $unassign('x[1]','x[2]','x[3]')$
> $x[3] := solve(Eq[3], x[3])$

$$x_3 := 2 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2$$

> $E[3] := x[3]$

$$E_3 := 2 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2$$

> $unassign('x[1]','x[2]','x[3]')$
>

$x := (y, z) \to 2 - \frac{1}{2} * y - \frac{1}{2} * z$; #Definimos las ecuaciones

$y := (x, z) \to 2 - \frac{1}{2} * x - \frac{1}{2} * z;$

$z := (x, y) \to 2 - \frac{1}{2} * x - \frac{1}{2} * y;$

$$x := (y, z) \to 2 - \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z$$
$$y := (x, z) \to 2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} z$$
$$z := (x, y) \to 2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y$$

> $x0 := 0$; #definimos el vector[000]$y0 := 0; z0 := 0;$

$$x0 := 0$$
$$y0 := 0$$
$$z0 := 0$$

> $x_obj := 1$; #Definimos los valores objetivos obtenidos previamente
$y_obj := 1;$
$z_obj := 1;$

$$x_obj := 1$$
$$y_obj := 1$$
$$z_obj := 1$$

> $tolerancia := 0.0001$; #definimos la taza de error

$$tolerancia := 0.0001$$

> $max_iteraciones := 100$; # número máximo de iteraciones del metodo

$$max_iteraciones := 100$$

> $x_ant := x0$; #actualización de valores para inicializar
$y_ant := y0;$
$z_ant := z0;$

$$x_ant := 0$$
$$y_ant := 0$$
$$z_ant := 0$$

```
i := 0;while i < max_iteraciones do
    #definimos variables para iterar sobre el numero de iteraciones
    escogido
  # Calculamos los nuevos valores de x, y, z
   x_act := x(y_ant,z_ant);
   y_act := y(x_act,z_ant);
   z_act := z(x_act,y_act);


    # Calculamos el error absoluto para cada variable, su valor
    objetivo menos el actual
  error_x := abs(x_obj - x_act);
  error_y := abs(y_obj - y_act);
  error_z := abs(z_obj - z_act);

# verificamos si los valores alcanzaron la tolerancia deseada, solo se
    detienen las iteraciones si todas alcanzan su tolerancia
  if error_x < tolerancia and error_y < tolerancia and error_z
     < tolerancia then
    break;
  end if;

# Actualizamos los valores anteriores con los nuevos valores
  x_ant := x_act;
  y_ant := y_act;
  z_ant := z_act;


    # Incrementamos el contador de iteraciones #NOTA: i será el
    número de iteración.
  i := i + 1;
end do;
```

$i := 0$	$i := 1$	$i := 2$	$i := 3$
$x_act := 2$	$x_act := \frac{5}{4}$	$x_act := \frac{33}{32}$	$x_act := \frac{253}{256}$
$y_act := 1$	$y_act := \frac{9}{8}$	$y_act := \frac{69}{64}$	$y_act := \frac{529}{512}$
$z_act := \frac{1}{2}$	$z_act := \frac{13}{16}$	$z_act := \frac{121}{128}$	$z_act := \frac{1013}{1024}$
$error_x := 1$	$error_x := \frac{1}{4}$	$error_x := \frac{1}{32}$	$error_x := \frac{3}{256}$
$error_y := 0$	$error_y := \frac{1}{8}$	$error_y := \frac{5}{64}$	$error_y := \frac{17}{512}$
$error_z := \frac{1}{2}$	$error_z := \frac{3}{16}$	$error_z := \frac{7}{128}$	$error_z := \frac{11}{1024}$
$x_ant := 2$	$x_ant := \frac{5}{4}$	$x_ant := \frac{33}{32}$	$x_ant := \frac{253}{256}$
$y_ant := 1$	$y_ant := \frac{9}{8}$	$y_ant := \frac{69}{64}$	$y_ant := \frac{529}{512}$
$z_ant := \frac{1}{2}$	$z_ant := \frac{13}{16}$	$z_ant := \frac{121}{128}$	$z_ant := \frac{1013}{1024}$

$i := 4$	$i := 5$	$i := 6$	$i := 7$
$x_act := \frac{2025}{2048}$	$x_act := \frac{16293}{16384}$	$x_act := \frac{130801}{131072}$	$x_act := \frac{1047949}{1048576}$

$y_act := \frac{4141}{4096}$ $z_act := \frac{8193}{8192}$ $error_x := \frac{23}{2048}$ $error_y := \frac{45}{4096}$ $error_z := \frac{1}{8192}$ $x_ant := \frac{2025}{2048}$ $y_ant := \frac{4141}{4096}$ $z_ant := \frac{8193}{8192}$	$y_act := \frac{32857}{32768}$ $z_act := \frac{65629}{65536}$ $error_x := \frac{91}{16384}$ $error_z := \frac{93}{65536}$ $x_ant := \frac{16293}{16384}$ $y_ant := \frac{32857}{32768}$ $z_ant := \frac{65629}{65536}$	$y_act := \frac{262229}{262144}$ $z_act := \frac{524745}{524288}$ $error_x := \frac{271}{131072}$ $error_y := \frac{85}{262144}$ $error_z := \frac{457}{524288}$ $x_ant := \frac{130801}{131072}$ $y_ant := \frac{262229}{262144}$ $z_ant := \frac{524745}{524288}$	$y_act := \frac{2096865}{2097152}$ $z_act := \frac{4195845}{4194304}$ $error_x := \frac{627}{1048576}$ $error_y := \frac{287}{2097152}$ $error_z := \frac{1541}{4194304}$ $x_ant := \frac{1047949}{1048576}$ $y_ant := \frac{2096865}{2097152}$ $z_ant := \frac{4195845}{4194304}$
$i := 8$ $x_act := \frac{8387641}{8388608}$ $y_act := \frac{16775101}{16777216}$ $z_act := \frac{33558481}{33554432}$ $error_x := \frac{967}{8388608}$ $error_y := \frac{2115}{16777216}$ $error_z := \frac{4049}{33554432}$ $x_ant := \frac{8387641}{8388608}$ $y_ant := \frac{16775101}{16777216}$ $z_ant := \frac{33558481}{33554432}$	$i := 9$ $x_act := \frac{67109045}{67108864}$ $y_act := \frac{134209449}{134217728}$ $z_act := \frac{268443373}{268435456}$ $error_x := \frac{181}{67108864}$ $error_y := \frac{8279}{134217728}$ $error_z := \frac{7917}{268435456}$		

>

```
if i < max_iteraciones then

   print("x = ", evalf(x_act), ", y = ", evalf(y_act), ", z = ",
      evalf(z_act)); print("La convergencia se alcanzó en ", i,
      " iteraciones.");
else

   print("No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en ",
      max_iteraciones, " iteraciones.");
end if;
```

"x = ", 1.000002697, ", y = ", 0.9999383166, ", z = ", 1.000029493

"La convergencia se alcanzó en ", 9, " iteraciones."

Solución

c)

$$> A := \begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2.88 & 0 & 0 & 0 & -4.5 \\ 0 & 0 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 1.2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

> $Eq[1] := 72 \cdot x[1] + 9 \cdot x[4] = 2$

$$Eq_1 := 72\, x_1 + 9\, x_4 = 2$$

> $Eq[2] := 2.88 \cdot x[2] - 4.5 \cdot x[6] = 0.5$

$$Eq_2 := 2.88\, x_2 - 4.5\, x_6 = 0.5$$

> $Eq[3] := 18 \cdot x[3] + 9 \cdot x[4] = 1$

$$Eq_3 := 18\, x_3 + 9\, x_4 = 1$$

> $Eq[4] := 9 \cdot x[3] + 12 \cdot x[4] = 0$

$$Eq_4 := 9\, x_3 + 12\, x_4 = 0$$

> $Eq[5] := 33 \cdot x[5] = 1.2$

$$Eq_5 := 33\, x_5 = 1.2$$

> $Eq[6] := -4.5 \cdot x[2] + 33 \cdot x[6] = 5$

$$Eq_6 := -4.5\, x_2 + 33\, x_6 = 5$$

> $valores_objetivos := solve(\{Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6]\}, \{x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6]\})$

$$valores_objetivos := \{x_1 = 0.03611111111, x_2 = 0.5214600882, x_3 = 0.08888888889, x_4 = -0.06666666667, x_5 = 0.03636363636, x_6 = 0.2226233454\}$$

> $solve(Eq[1], x[1])$

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{8}\, x_4$$

> $solve(Eq[2], x[2])$

$$0.1736111111 + 1.562500000\, x_6$$

> $solve(Eq[3], x[3])$

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{2}\, x_4$$

> $solve(Eq[4], x[4])$

$$-\frac{3}{4}\, x_3$$

> $solve(Eq[5], x[5])$

$$0.03636363636$$

> $solve(Eq[6], x[6])$

$$0.1515151515 + 0.1363636364\, x_2$$

```
u := proc (v, w, x, y, z) options operator, arrow;
  1/36-(1/8)*x
end proc;
```

```
v := proc (u, w, x, y, z) options operator, arrow;
 .1736111111 + 1.562500000*z
end proc;

w := proc (u, v, x, y, z) options operator, arrow;
 1/18-(1/2)*x
end proc;

x := proc (u, v, w, y, z) options operator, arrow;   -(3/4)*wend proc;
y := proc (u, v, w, x, z) options operator, arrow;
  0.03636363636
end proc;

z := proc (u, v, w, x, y) options operator, arrow;
 .1515151515 + .1363636364*v
end proc;
```

$$u := (v, w, x, y, z) \rightarrow \frac{1}{36} - \frac{1}{8} x$$

$$v := (u, w, x, y, z) \rightarrow 0.1736111111 + 1.562500000 z$$

$$w := (u, v, x, y, z) \rightarrow \frac{1}{18} - \frac{1}{2} x$$

$$x := (u, v, w, y, z) \rightarrow -\frac{3}{4} w$$

$$y := (u, v, w, x, z) \rightarrow 0.03636363636$$

$$z := (u, v, w, x, y) \rightarrow 0.1515151515 + 0.1363636364 v$$

```
> x0 := 0; y0 := 0; z0 := 0; u0 := 0; v0 := 0; w0 := 0;

    x_obj := -0.6666666667e-1; y_obj := 0.03636363636; z_obj
        := .2226233454; w_obj := 0.8888888889e-1; u_obj
        := 0.3611111111e-1; v_obj := .5214600882;
```

$$x0 := 0$$
$$y0 := 0$$
$$z0 := 0$$
$$u0 := 0$$
$$v0 := 0$$
$$w0 := 0$$
$$x_obj := -0.06666666667$$
$$y_obj := 0.03636363636$$
$$z_obj := 0.2226233454$$
$$w_obj := 0.08888888889$$
$$u_obj := 0.03611111111$$
$$v_obj := 0.5214600882$$

```
> tolerancia := 0.001; #definimos la taza de error
```

$$tolerancia := 0.001$$

```
> max_iteraciones := 5; # número máximo de iteraciones del metodo
```

$$max_iteraciones := 5$$

```
>
   x_ant := x0;
    #actualización de valores para inicializar
   y_ant := y0;
    z_ant := z0;
    u_ant := u0;
    v_ant := v0;
    w_ant := w0;
```

$$x_ant := 0$$
$$y_ant := 0$$
$$z_ant := 0$$
$$u_ant := 0$$
$$v_ant := 0$$
$$w_ant := 0$$

```
i := 0;while i < max_iteraciones do
      #definimos variables para iterar sobre el numero de iteraciones
      escogido
   # Calculamos los nuevos valores de x, y, z
  u_act := u(v_act, w_ant, x_ant, y_ant, z_ant);
   v_act := v(u_act, w_ant, x_ant, y_ant, z_ant);
   w_act := w(u_act, v_act, x_ant, y_ant, z_ant);
   x_act := x(u_act, v_act, w_act, y_ant, z_ant);
   y_act := y(u_act, v_act, w_act, x_act, z_ant);
   z_act := z(u_act, v_act, w_act, x_act, y_act);

# verificamos si los valores alcanzaron la tolerancia deseada, solo se
      detienen las iteraciones si todas alcanzan su tolerancia
    if error_x < tolerancia and error_y < tolerancia and error_z
       < tolerancia and error_u < tolerancia and error_v < tolerancia
       and error_w < tolerancia then
      break;
   end if;

  # Actualizamos los valores anteriores con los nuevos valores
   x_ant := x_act;
   y_ant := y_act;
    z_ant := z_act;
 u_ant := u_act;
    v_ant := v_act;
    w_ant := w_act;


      # Incrementamos el contador de iteraciones #NOTA: i será el
      número de iteración.
   i := i + 1;
 end do;
```

$i := 0$	$i := 1$	$i := 2$
$u_act := \frac{1}{36}$	$u_act := \frac{19}{576}$	$u_act := \frac{161}{4608}$
$v_act := 0.1736111111$	$v_act := 0.4473445391$	$v_act := 0.5056684230$
$w_act := \frac{1}{18}$	$w_act := \frac{11}{144}$	$w_act := \frac{97}{1152}$

$x_act := -\frac{1}{24}$ $y_act := 0.03636363636$ $z_act := 0.1751893939$ $error_x := 0.02500000000$ $error_y := 0.$ $error_z := 0.0474339515$ $error_u := 0.00833333333$ $error_v := 0.3478489771$ $error_w := 0.03333333333$ $x_ant := -\frac{1}{24}$ $y_ant := 0.03636363636$ $z_ant := 0.1751893939$ $u_ant := \frac{1}{36}$ $v_ant := 0.1736111111$ $w_ant := \frac{1}{18}$	$x_act := -\frac{11}{192}$ $y_act := 0.03636363636$ $z_act := 0.2125166796$ $error_x := 0.00937500000$ $error_y := 0.$ $error_z := 0.0101066658$ $error_u := 0.00312500000$ $error_v := 0.0741155491$ $error_w := 0.01250000000$ $x_ant := -\frac{11}{192}$ $y_ant := 0.03636363636$ $z_ant := 0.2125166796$ $u_ant := \frac{19}{576}$ $v_ant := 0.4473445391$ $w_ant := \frac{11}{144}$	$x_act := -\frac{97}{1536}$ $y_act := 0.03636363636$ $z_act := 0.2204699365$ $error_x := 0.00351562500$ $error_y := 0.$ $error_z := 0.0021534089$ $error_u := 0.00117187500$ $error_v := 0.0157916652$ $error_w := 0.00468750000$ $x_ant := -\frac{97}{1536}$ $y_ant := 0.03636363636$ $z_ant := 0.2204699365$ $u_ant := \frac{161}{4608}$ $v_ant := 0.5056684230$ $w_ant := \frac{97}{1152}$
$i := 3$ $u_act := \frac{1315}{36864}$ $v_act := 0.5180953869$ $w_act := \frac{803}{9216}$ $x_act := -\frac{803}{12288}$ $y_act := 0.03636363636$ $z_act := 0.2221645225$ $error_x := 0.00131835938$ $error_y := 0.$ $error_z := 0.0004588229$ $error_u := 0.00043945312$ $error_v := 0.0033647013$ $error_w := 0.00175781250$	$i := 3$ continua $x_ant := -\frac{803}{12288}$ $y_ant := 0.03636363636$ $z_ant := 0.2221645225$ $u_ant := \frac{1315}{36864}$ $v_ant := 0.5180953869$ $w_ant := \frac{803}{9216}$	$i := 4$ $u_act := \frac{10601}{294912}$ $v_act := 0.5207431775$ $w_act := \frac{6505}{73728}$ $x_act := -\frac{6505}{98304}$ $y_act := 0.03636363636$ $z_act := 0.2225255848$ $error_x := 0.00049438477$ $error_y := 0.$ $error_z := 0.0000977606$ $error_u := 0.00016479492$ $error_v := 0.0007169107$ $error_w := 0.00065917969$

if $i < max_iteraciones$ **then**

$print(\text{"x = "}, evalf(x_act), \text{", y = "}, evalf(y_act), \text{", z = "}, evalf(z_act),$
$\text{"u = "}, evalf(u_act), \text{", v = "}, evalf(v_act), \text{", w = "}, evalf(w_act));$
$print(\text{"La convergencia se alcanzó en "}, i, \text{" iteraciones."});$

else

$print(\text{"No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en "}, max_iteraciones$
$\text{" iteraciones."});$

end if;

x = ", −0.06617228190, ", y = ", 0.03636363636, ", z = ",
0.2225255848, "u = ", 0.03594631619, ", v = ", 0.5207431775,
", w = ", 0.08822970920

La convergencia se alcanzÃ³ en ", 4, " iteraciones."

Solución

d)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & 6^4 \\ 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 & 20^4 \\ 1 & 30 & 30^2 & 30^3 & 30^4 \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 13.4 \\ 30.4 \\ 41.8 \\ 57.9 \\ 66.5 \end{bmatrix}$$

> $Eq[1] := x[1] + 2 \cdot x[2] + 2^2 \cdot x[3] + 2^3 \cdot x[4] + 2^4 \cdot x[5] = 13.4$

$$Eq_1 := x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 8\,x_4 + 16\,x_5 = 13.4$$

> $Eq[2] := x[1] + 6 \cdot x[2] + 6^2 \cdot x[3] + 6^3 \cdot x[4] + 6^4 \cdot x[5] = 30.4$

$$Eq_2 := x_1 + 6\,x_2 + 36\,x_3 + 216\,x_4 + 1296\,x_5 = 30.4$$

> $Eq[3] := x[1] + 10 \cdot x[2] + 10^2 \cdot x[3] + 10^3 \cdot x[4] + 10^4 \cdot x[5] = 41.8$

$$Eq_3 := x_1 + 10\,x_2 + 100\,x_3 + 1000\,x_4 + 10000\,x_5 = 41.8$$

> $Eq[4] := x[1] + 20 \cdot x[2] + 20^2 \cdot x[3] + 20^3 \cdot x[4] + 20^4 \cdot x[5] = 57.9$

$$Eq_4 := x_1 + 20\,x_2 + 400\,x_3 + 8000\,x_4 + 160000\,x_5 = 57.9$$

> $Eq[5] := x[1] + 30 \cdot x[2] + 30^2 \cdot x[3] + 30^3 \cdot x[4] + 30^4 \cdot x[5] = 66.5$

$$Eq_5 := x_1 + 30\,x_2 + 900\,x_3 + 27000\,x_4 + 810000\,x_5 = 66.5$$

> $valores_objetivos := solve(\{Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5]\}, \{x[1], x[2], x[3], x[4], x[5]\})$

$$valores_objetivos := \{x_1 = 1.994642857,\ x_2 = 6.278898810,\ x_3 = -0.3045882937,\ x_4 = 0.008430059524,\ x_5 = -0.00009548611111\}$$

> $solve(Eq[1], x[1])$

$$13.40000000 - 2.\,x_2 - 4.\,x_3 - 8.\,x_4 - 16.\,x_5$$

> $solve(Eq[2], x[2])$

$$5.066666667 - 0.1666666667\,x_1 - 6.\,x_3 - 36.\,x_4 - 216.\,x_5$$

> $solve(Eq[3], x[3])$

$$0.4180000000 - 0.01000000000\,x_1 - 0.1000000000\,x_2 - 10.\,x_4 - 100.\,x_5$$

> $solve(Eq[4], x[4])$

$$0.007237500000 - 0.0001250000000\,x_1 - 0.002500000000\,x_2 - 0.05000000000\,x_3 - 20.\,x_5$$

> $solve(Eq[5], x[5])$

$$0.00008209876543 - 0.000001234567901\,x_1 - 0.00003703703704\,x_2 - 0.001111111111\,x_3 - 0.03333333333\,x_4$$

```
v := proc ( w, x, y, z) options operator, arrow;
  13.40000000 − 2·w − 4·x − 16·y
end proc;

 w := proc (v, x, y, z) options operator, arrow;
 5.066666667 − 0.1666666667·v − 6·x − 36·y − 216·z
end proc;

x := proc (w, v, y, z) options operator, arrow;
 0.4180000000 − 0.01000000000·v − 0.1000000000·w − 10·y − 100
      ·z
end proc;

 y := proc (x, v, w, z) options operator, arrow;
 0.007237500000 − 0.0001250000000·v − 0.002500000000·w
      − 0.05000000000 ·x − 20·z
end proc;

z := proc (y, v, w, x) options operator, arrow;
 0.00008209876543 − 0.000001234567901·v − 0.00003703703704·w
      − 0.001111111111·x − 0.03333333333·y
end proc;
```

$$v := (w, x, y, z) \to 13.40000000 - 2\,w - 4\,x - 16\,y$$

$$w := (v, x, y, z) \to 5.066666667 + (-1)\cdot 0.1666666667\,v - 6\,x - 36\,y - 216\,z$$

$$x := (w, v, y, z) \to 0.4180000000 + (-1)\cdot 0.01000000000\,v + (-1)\cdot 0.1000000000\,w - 10\,y - 100\,z$$

$$y := (x, v, w, z) \to 0.007237500000 + (-1)\cdot 0.0001250000000\,v + (-1)\cdot 0.002500000000\,w + (-1)\cdot 0.05000000000\,x - 20\,z$$

$$z := (y, v, w, x) \to 0.00008209876543 + (-1)\cdot 0.000001234567901\,v + (-1)\cdot 0.00003703703704\,w + (-1)\cdot 0.001111111111\,x + (-1)\cdot 0.03333333333\,y$$

```
> valores_objetivos := {x[1] = 1.668479581, x[2] = 6.393055956, x[3] =
      -0.3178160265, x[4] = 0.009028025530, x[5] = -0.0001045462021}
```

$$valores_objetivos := \{x_1 = 1.668479581,\ x_2 = 6.393055956,\ x_3 = -0.3178160265,\ x_4 = 0.009028025530,\ x_5 = -0.0001045462021\}$$

```
> x0 := 0; y0 := 0; z0 := 0;  v0 := 0; w0 := 0;
   v_obj := 1.668479581;  w_obj := 6.393055956;  x_obj :=
      -0.3178160265; y_obj := 0.009028025530; z_obj :=
      -0.0001045462021;
```

$$x0 := 0$$
$$y0 := 0$$
$$z0 := 0$$
$$v0 := 0$$

$$w0 := 0$$
$$v_obj := 1.668479581$$
$$w_obj := 6.393055956$$
$$x_obj := -0.3178160265$$
$$y_obj := 0.009028025530$$
$$z_obj := -0.0001045462021$$

```
> tolerancia := 0.001; #definimos la taza de error
```

$$tolerancia := 0.001$$

```
> max_iteraciones := 20; # número máximo de iteraciones del metodo
```

$$max_iteraciones := 20$$

```
>
    x_ant := x0;
      y_ant := y0;
      z_ant := z0;
      v_ant := v0;
      w_ant := w0;
```

$$x_ant := 0$$
$$y_ant := 0$$
$$z_ant := 0$$
$$v_ant := 0$$
$$w_ant := 0$$

```
i := 0;while i < max_iteraciones do
     #definimos variables para iterar sobre el numero de iteraciones
     escogido
   # Calculamos los nuevos valores

 v_act := v(w_ant, x_ant, y_ant, z_ant);
   w_act := w(v_act, x_ant, y_ant, z_ant);
   x_act := x(v_act, w_act, y_ant, z_ant);
   y_act := y(v_act, w_act, x_act, z_ant);
   z_act := z(v_act, w_act, x_act, y_act);

# Calculamos el error absoluto para cada variable, su valor objetivo
     menos el actual
   error_x := abs(x_obj - x_act);
   error_y := abs(y_obj - y_act);
   error_z := abs(z_obj - z_act);
    error_v := abs(v_obj - v_act);
    error_w := abs(w_obj - w_act);

# verificamos si los valores alcanzaron la tolerancia deseada, solo se
     detienen las iteraciones si todas alcanzan su tolerancia
    if error_x < tolerancia and error_y < tolerancia and error_z
      < tolerancia and error_v < tolerancia and error_w < tolerancia
      then
     break;
   end if;
```

```
# Actualizamos los valores anteriores con los nuevos valores
 x_ant := x_act;
 y_ant := y_act;
 z_ant := z_act;
 v_ant := v_act;
 w_ant := w_act;


    # Incrementamos el contador de iteraciones #NOTA: i será el
    número de iteración.
 i := i + 1;
end do;
```

$i := 0$	$i := 1$	$i := 2$
$v_act := 13.40000000$	$v_act := 22.10652000$	$v_act := -556.3485548$
$w_act := 2.833333333$	$w_act := 127.1677584$	$w_act := -306.1012397$
$x_act := -0.9503333333$	$x_act := 48.12494993$	$x_act := 57.02078852$
$y_act := -0.6607408333$	$y_act := 7.682077391$	$y_act := 42.66591483$
$z_act := -0.4458187118$	$z_act := -0.7472769455$	$z_act := 18.49589337$
$error_x := 0.6325173068$	$error_x := 48.44276596$	$error_x := 57.33860455$
$error_y := 0.6697688588$	$error_y := 7.673049365$	$error_y := 42.65688680$
$error_z := 0.4457141656$	$error_z := 0.7471723993$	$error_z := 18.49599792$
$error_v := 11.73152042$	$error_v := 20.43804042$	$error_v := 558.0170344$
$error_w := 3.559722623$	$error_w := 120.7747024$	$error_w := 312.4942957$
$x_ant := -0.9503333333$	$x_ant := 48.12494993$	$x_ant := 57.02078852$
$y_ant := -0.6607408333$	$y_ant := 7.682077391$	$y_ant := 42.66591483$
$z_ant := -0.4458187118$	$z_ant := -0.7472769455$	$z_ant := 18.49589337$
$v_ant := 13.40000000$	$v_ant := 22.10652000$	$v_ant := -556.3485548$
$w_ant := 2.833333333$	$w_ant := 127.1677584$	$w_ant := -306.1012397$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.		
$i := 17$	$i := 18$	$i := 19$
$v_act := -1.340190265\ 10^{15}$	$v_act := -5.248621460\ 10^{15}$	$v_act := 6.666609049\ 10^{16}$
$w_act := 2.857417245\ 10^{14}$	$w_act := -1.769858138\ 10^{16}$	$w_act := 5.14446395\ 10^{15}$
$x_act := 5.187739288\ 10^{14}$	$x_act := -5.371702958\ 10^{15}$	$x_act := -1.818964768\ 10^{16}$
$y_act := 1.626276435\ 10^{14}$	$y_act := -6.113822435\ 10^{14}$	$y_act := -6.805556749\ 10^{15}$
$z_act := 4.447274483\ 10^{13}$	$z_act := 1.758541643\ 10^{14}$	$z_act := -2.213973947\ 10^{15}$
$error_x := 5.187739288\ 10^{14}$	$error_x := 5.371702958\ 10^{15}$	$error_x := 1.818964768\ 10^{16}$
$error_y := 1.626276435\ 10^{14}$	$error_y := 6.113822435\ 10^{14}$	$error_y := 6.805556749\ 10^{15}$
$error_z := 4.447274483\ 10^{13}$	$error_z := 1.758541643\ 10^{14}$	$error_z := 2.213973947\ 10^{15}$
$error_v := 1.340190265\ 10^{15}$	$error_v := 5.248621460\ 10^{15}$	$error_v := 6.666609049\ 10^{16}$
$error_w := 2.857417245\ 10^{14}$	$error_w := 1.769858138\ 10^{16}$	$error_w := 5.14446395\ 10^{15}$
$x_ant := 5.187739288\ 10^{14}$	$x_ant := -5.371702958\ 10^{15}$	$x_ant := -1.818964768\ 10^{16}$
$y_ant := 1.626276435\ 10^{14}$	$y_ant := -6.113822435\ 10^{14}$	$y_ant := -6.805556749\ 10^{15}$
$z_ant := 4.447274483\ 10^{13}$	$z_ant := 1.758541643\ 10^{14}$	$z_ant := -2.213973947\ 10^{15}$
$v_ant := -1.340190265\ 10^{15}$	$v_ant := -5.248621460\ 10^{15}$	$v_ant := 6.666609049\ 10^{16}$
$w_ant := 2.857417245\ 10^{14}$	$w_ant := -1.769858138\ 10^{16}$	$w_ant := 5.14446395\ 10^{15}$

```
>
  if i < max_iteraciones then

    print("x = ", evalf(x_act), ", y = ", evalf(y_act), ", z = ",
      evalf(z_act) ); print("La convergencia se alcanzó en ", i,
      " iteraciones.");
  else

    print("No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en ",
      max_iteraciones, " iteraciones.");
  end if;
```

"No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en ", 20, " iteraciones."

Puede verse si se analiza, que el error va a aumentando, sin embargo, se desconoce si es por causa de que el método no asegure convergencia en este caso o si se trate de una mala ejecución del código.

Solución

d)

Se trata de una matriz 11×11, sin embargo, el software no es capaz de mostrarlo, por lo que se escribirán directamente las fórmulas y se procederá de igual manera. Usaremos en este caso las letras del abecedario empezando por la A,B,C y así sucesivamente. Se muestran solo los resultados de las iteraciones 0, 1, 99 y 100, por motivos de ahorro de espacio.

```
> restart :
> Eq[1] := 8·x[1] + 6·x[3] + x[4] = 1
```

$$Eq_1 := 8x_1 + 6x_3 + x_4 = 1$$

```
> Eq[2] := 9·x[2] + 5·x[7] + 2·x[9] + x[10] = 5
```

$$Eq_2 := 9x_2 + 5x_7 + 2x_9 + x_{10} = 5$$

```
> Eq[3] := x[2] + 7·x[3] + x[6] + 2·x[7] + x[10] = 8
```

$$Eq_3 := x_2 + 7x_3 + x_6 + 2x_7 + x_{10} = 8$$

```
> Eq[4] := 1·x[2] + 6·x[4] + x[7] + x[11] = 0
```

$$Eq_4 := x_2 + 6x_4 + x_7 + x_{11} = 0$$

```
> Eq[5] := 9·x[5] + x[9] + x[10] + x[11] = 8
```

$$Eq_5 := 9x_5 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 8$$

```
> Eq[6] := 1·x[2] + 2·x[4] + 10·x[6] + 1·x[7] + 3·x[9] = 1
```

$$Eq_6 := x_2 + 2x_4 + 10x_6 + x_7 + 3x_9 = 1$$

```
> Eq[7] := 5·x[3] + 2·x[5] + 2·x[6] + 10·x[7] = 0
```

$$Eq_7 := 5x_3 + 2x_5 + 2x_6 + 10x_7 = 0$$

```
> Eq[8] := 6·x[4] + 1·x[5] + 15· x[8] + 2·x[10] = 3
```

$$Eq_8 := 6x_4 + x_5 + 15x_8 + 2x_{10} = 3$$

```
> Eq[9] := 2·x[2] + 4·x[5] + x[7] + x[8] + 20·x[9] + x[10] = 0
```

$$Eq_9 := 2x_2 + 4x_5 + x_7 + x_8 + 20x_9 + x_{10} = 0$$

```
> Eq[10] := 3·x[6] + 6·x[8] + 5·x[9] + 25·x[10] + x[11] = 1
```

$$Eq_{10} := 3x_6 + 6x_8 + 5x_9 + 25x_{10} + x_{11} = 1$$

```
> Eq[11] := x[1] + 3·x[3] + x[4] + 5·x[5] + 7·x[7] + x[10] + 12
    ·x[11] = 2
```

$$Eq_{11} := x_1 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 + 7x_7 + x_{10} + 12x_{11} = 2$$

```
> valores_objetivos := solve({Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5],
    Eq[6], Eq[7], Eq[8], Eq[9], Eq[10], Eq[11]}, {x[1], x[2],
    x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8], x[9], x[10], x[11]})
```

$$valores_objetivos := \left\{x_1 = -\frac{146604165464}{191409637365}, x_2 = \frac{13526945354}{12760642491}, x_3 = \frac{5085219206}{4253547497}, x_4 = -\frac{8766224543}{191409637365}, x_5 = \frac{174305598886}{191409637365}, x_6 = \frac{10300285013}{63803212455}, x_7 = -\frac{31091744584}{38281927473}, x_8 = \frac{1953021073}{12760642491}, x_9 = -\frac{16390213481}{63803212455}, x_{10} = \frac{6545459521}{191409637365}, x_{11} = \frac{5151889868}{191409637365}\right\}$$

> $solve(Eq[1], x[1])$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_4$$

> $solve(Eq[2], x[2])$

$$\frac{5}{9} - \frac{5}{9}x_7 - \frac{2}{9}x_9 - \frac{1}{9}x_{10}$$

> $solve(Eq[3], x[3])$

$$\frac{8}{7} - \frac{1}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_6 - \frac{2}{7}x_7 - \frac{1}{7}x_{10}$$

> $solve(Eq[4], x[4])$

$$-\frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_7 - \frac{1}{6}x_{11}$$

> $solve(Eq[5], x[5])$

$$\frac{8}{9} - \frac{1}{9}x_9 - \frac{1}{9}x_{10} - \frac{1}{9}x_{11}$$

> $solve(Eq[6], x[6])$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{10}x_7 - \frac{3}{10}x_9$$

> $solve(Eq[7], x[7])$

$$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6$$

> $solve(Eq[8], x[8])$

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{15}x_5 - \frac{2}{15}x_{10}$$

> $solve(Eq[9], x[9])$

$$-\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{1}{20}x_7 - \frac{1}{20}x_8 - \frac{1}{20}x_{10}$$

> $solve(Eq[10], x[10])$

$$\frac{1}{25} - \frac{3}{25}x_6 - \frac{6}{25}x_8 - \frac{1}{5}x_9 - \frac{1}{25}x_{11}$$

> $solve(Eq[11], x[11])$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{12}x_4 - \frac{5}{12}x_5 - \frac{7}{12}x_7 - \frac{1}{12}x_{10}$$

$x1 :=$ **proc** (x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11) **options** operator, arrow;

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\cdot x3 - \frac{1}{8}\cdot x4$$

end proc;

$x2 := \mathbf{proc}\,(x1, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{5}{9} - \frac{5}{9}\cdot x7 - \frac{2}{9}\cdot x9 - \frac{1}{9}\cdot x10$
end proc;

$x3 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{8}{7} - \frac{1}{7}\,x2 - \frac{1}{7}\cdot x6 - \frac{2}{7}\cdot x7 - \frac{1}{7}\cdot x10$
end proc;

$x4 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$-\frac{1}{6}\cdot x2 - \frac{1}{6}\cdot x7 - \frac{1}{6}\cdot x11$
end proc;

$x5 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x6, x7, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\cdot x9 - \frac{1}{9}\cdot x10 - \frac{1}{9}\cdot x11$

end proc;

$x6 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x6, x7, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cdot x2 - \frac{1}{5}\cdot x4 - \frac{1}{10}\cdot x7 - \frac{3}{10}\cdot x9$
end proc;

$x7 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x8, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$-\frac{1}{2}\cdot x3 - \frac{1}{5}\cdot x5 - \frac{1}{5}\cdot x6$
end proc;

$x8 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x9, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\cdot x4 - \frac{1}{15}\cdot x5 - \frac{2}{15}\cdot x10$
end proc;

$x9 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x10, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$-\frac{1}{10}\cdot x2 - \frac{1}{5}\cdot x5 - \frac{1}{20}\cdot x7 - \frac{1}{20}\cdot x8 - \frac{1}{20}\cdot x10$
end proc;

$x10 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x11)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{1}{25} - \frac{3}{25}\cdot x6 - \frac{6}{25}\cdot x8 - \frac{1}{5}\cdot x9 - \frac{1}{25}\cdot x11$
end proc;

$x11 := \mathbf{proc}\,(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10)\ \mathbf{options}\ \text{operator, arrow;}$
$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot x1 - \frac{1}{4}\cdot x3 - \frac{1}{12}\cdot x4 - \frac{5}{12}\cdot x5 - \frac{7}{12}\cdot x7 - \frac{1}{12}\cdot x10$
end proc;

$$x1 := (x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\, x3 - \frac{1}{8}\, x4$$

$$x2 := (x1, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\, x7 - \frac{2}{9}\, x9 - \frac{1}{9}\, x10$$

$$x3 := (x1, x2, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{8}{7} - \frac{1}{7}\, x2 - \frac{1}{7}\, x6 - \frac{2}{7}\, x7 - \frac{1}{7}\, x10$$

$$x4 := (x1, x2, x3, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow -\frac{1}{6}\, x2 - \frac{1}{6}\, x7 - \frac{1}{6}\, x11$$

$$x5 := (x1, x2, x3, x4, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{8}{9} - \frac{1}{9}\, x9 - \frac{1}{9}\, x10 - \frac{1}{9}\, x11$$

$$x6 := (x1, x2, x3, x4, x6, x7, x8, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\, x2 - \frac{1}{5}\, x4 - \frac{1}{10}\, x7 - \frac{3}{10}\, x9$$

$$x7 := (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x8, x9, x10, x11) \rightarrow -\frac{1}{2}\, x3 - \frac{1}{5}\, x5 - \frac{1}{5}\, x6$$

$$x8 := (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x9, x10, x11) \rightarrow \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\, x4 - \frac{1}{15}\, x5 - \frac{2}{15}\, x10$$

$$x9 := (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x10, x11) \rightarrow -\frac{1}{10}\, x2 - \frac{1}{5}\, x5 - \frac{1}{20}\, x7 - \frac{1}{20}\, x8 - \frac{1}{20}\, x10$$

$$x10 := (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x11) \rightarrow \frac{1}{25} - \frac{3}{25}\, x6 - \frac{6}{25}\, x8 - \frac{1}{5}\, x9 - \frac{1}{25}\, x11$$

$$x11 := (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10) \rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\, x1 - \frac{1}{4}\, x3 - \frac{1}{12}\, x4 - \frac{5}{12}\, x5 - \frac{7}{12}\, x7 - \frac{1}{12}\, x10$$

> x1_0 := 0; x2_0 := 0; x3_0 := 0; x4_0 := 0; x5_0 := 0; x6_0 := 0; x7_0 := 0; x8_0 := 0; x9_0 := 0; x10_0 := 0; x11_0 := 0;

$$x1_0 := 0$$
$$x2_0 := 0$$
$$x3_0 := 0$$
$$x4_0 := 0$$
$$x5_0 := 0$$
$$x6_0 := 0$$
$$x7_0 := 0$$
$$x8_0 := 0$$
$$x9_0 := 0$$
$$x10_0 := 0$$
$$x11_0 := 0$$

>

$$x1obj := -\frac{146604165464}{191409637365}; x2obj := \frac{13526945354}{12760642491}; x3obj := \frac{5085219206}{4253547497}; x4obj := -\frac{8766224543}{191409637365}; x5obj := \frac{174305598886}{191409637365}; x6obj := \frac{10300285013}{63803212455}; x7obj := -\frac{31091744584}{38281927473}; x8obj := \frac{1953021073}{12760642491}; x9obj := -\frac{16390213481}{63803212455}; x10obj := \frac{6545459521}{191409637365}; x11obj := \frac{5151889868}{191409637365};$$

$$x1obj := -\frac{146604165464}{191409637365}$$
$$x2obj := \frac{13526945354}{12760642491}$$
$$x3obj := \frac{5085219206}{4253547497}$$
$$x4obj := -\frac{8766224543}{191409637365}$$
$$x5obj := \frac{174305598886}{191409637365}$$
$$x6obj := \frac{10300285013}{63803212455}$$
$$x7obj := -\frac{31091744584}{38281927473}$$
$$x8obj := \frac{1953021073}{12760642491}$$
$$x9obj := -\frac{16390213481}{63803212455}$$

$$x10obj := \frac{6545459521}{191409637365}$$

$$x11obj := \frac{5151889868}{191409637365}$$

```
> tolerancia := 0.0001; #definimos la taza de error
```

$$tolerancia := 0.0001$$

```
> max_iteraciones := 100; # número máximo de iteraciones del metodo
```

$$max_iteraciones := 100$$

```
x1ant := x1_0; #actualización de valores para inicializar
 x2ant := x2_0;
 x3ant := x3_0;
  x4ant := x4_0;
  x5ant := x5_0;
  x6ant := x6_0;
 x7ant := x7_0;
  x8ant := x8_0;
 x9ant := x9_0;
 x10ant := x10_0;
 x11ant := x11_0;
```

$$x1ant := 0$$
$$x2ant := 0$$
$$x3ant := 0$$
$$x4ant := 0$$
$$x5ant := 0$$
$$x6ant := 0$$
$$x7ant := 0$$
$$x8ant := 0$$
$$x9ant := 0$$
$$x10ant := 0$$
$$x11ant := 0$$

```
i := 0;while i < max_iteraciones do
      #definimos variables para iterar sobre el numero de iteraciones
      escogido


x1act := x1(x2ant, x3ant, x4ant, x5ant, x6ant, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
  x2act := x2(x1act, x3ant, x4ant, x5ant, x6ant, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x3act := x3(x1act, x2act, x4ant, x5ant, x6ant, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x4act := x4(x1act, x2act, x3act, x5ant, x6ant, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x5act := x5(x1act, x2act, x3act, x4act, x6ant, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x6act := x6(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x7ant, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x7act := x7(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x6act, x8ant, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x8act := x8(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x6act, x7act, x9ant,
      x10ant, x11ant);
 x9act := x9(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x6act, x7act, x8act,
      x10ant, x11ant);
 x10act := x10(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x6act, x7act, x8act,
      x9ant, x11ant);
 x11act := x11(x1act, x2act, x3act, x4act, x5act, x6act, x7act, x8act,
      x9ant, x10act);

# Calculamos el error absoluto para cada variable, su valor objetivo
      menos el actual
```

```
 errorx1 := evalf(abs(x1obj - x1act));
   errorx2 := evalf(abs(x2obj - x2act));
  errorx3 := evalf(abs(x3obj - x3act));
 errorx4 := evalf(abs(x4obj - x4act));
 errorx5 := evalf(abs(x5obj - x5act));
 errorx6 := evalf(abs(x6obj - x6act));
 errorx7 := evalf(abs(x7obj - x7act));
errorx8 := evalf(abs(x8obj - x8act));
errorx9 := evalf(abs(x9obj - x9act));
errorx10 := evalf(abs(x10obj - x10act));
errorx11 := evalf(abs(x11obj - x11act));

# verificamos si los valores alcanzaron la tolerancia deseada, solo se
      detienen las iteraciones si todas alcanzan su tolerancia

 if errorx1 < tolerancia and errorx2 < tolerancia and errorx3
       < tolerancia and errorx4 < tolerancia and errorx5 < tolerancia
      and errorx6 < tolerancia and errorx7 < tolerancia and errorx8
      < tolerancia and errorx9 < tolerancia and errorx10 < tolerancia
      and errorx11 then
     break;
  end if;

# Actualizamos los valores anteriores con los nuevos valores
x1ant := evalf(x1act);
   x2ant := evalf(x2act);
   x3ant := evalf(x3act);
   x4ant := evalf(x4act);
  x5ant := evalf(x5act);
   x6ant := evalf(x6act);
  x7ant := evalf(x7act);
   x8ant := evalf(x8act);
    x9ant := evalf(x9act);
  x10ant := evalf(x10act);
   x11ant := evalf(x11act);

# Incrementamos el contador de iteraciones #NOTA: i será el número
      de iteración.
   i := i + 1;
end do;
```

$i := 0$	$i := 1$	$i := 2$
$x1act := \frac{1}{8}$	$x1act := -0.6610449731$	$x1act := -0.7690920790$
$x2act := \frac{5}{9}$	$x2act := 1.003670781$	$x2act := 1.058745362$
$x3act := \frac{67}{63}$	$x3act := 1.198260183$	$x3act := 1.199025414$
$x4act := -\frac{5}{54}$	$x4act := -0.03682446584$	$x4act := -0.05256728695$
$x5act := \frac{8}{9}$	$x5act := 0.9196606899$	$x5act := 0.9059399575$
$x6act := \frac{17}{270}$	$x6act := 0.1410443759$	$x6act := 0.1610551271$
$x7act := -\frac{3412}{4725}$	$x7act := -0.8112711047$	$x7act := -0.8129117239$
$x8act := \frac{8}{45}$	$x8act := 0.1547820366$	$x8act := 0.1566876416$
$x9act := -\frac{9739}{47250}$	$x9act := -0.2509636516$	$x9act := -0.2557300521$
$x10act := -\frac{23}{2250}$	$x10act := 0.02957456988$	$x10act := 0.03054390250$
$x11act := -\frac{68729}{1134000}$	$x11act := 0.06792946471$	$x11act := 0.09365113169$
$errorx1 := 0.8909184119$	$errorx1 := 0.1048734388$	$errorx1 := 0.0031736671$
$errorx2 := 0.5044965040$	$errorx2 := 0.056381279$	$errorx2 := 0.001306698$
$errorx3 := 0.1320321923$	$errorx3 := 0.002735927$	$errorx3 := 0.003501158$
$errorx4 := 0.04679435242$	$errorx4 := 0.00897377433$	$errorx4 := 0.00676904678$
$errorx5 := 0.02175281800$	$errorx5 := 0.0090189830$	$errorx5 := 0.0047017494$
$errorx6 := 0.09847538186$	$errorx6 := 0.0203939689$	$errorx6 := 0.0003832177$
$errorx7 := 0.09006173614$	$errorx7 := 0.0009070336$	$errorx7 := 0.0007335856$
$errorx8 := 0.02472740634$	$errorx8 := 0.0017316652$	$errorx8 := 0.0036372702$
$errorx9 := 0.05077056094$	$errorx9 := 0.0059233115$	$errorx9 := 0.0011569110$
$errorx10 := 0.04441830352$	$errorx10 := 0.00462151142$	$errorx10 := 0.00365217880$
$errorx11 := 0.08752310349$	$errorx11 := 0.04101394500$	$errorx11 := 0.06673561198$
$x1ant := 0.1250000000$	$x1ant := -0.6610449731$	$x1ant := -0.7690920790$
$x2ant := 0.5555555556$	$x2ant := 1.003670781$	$x2ant := 1.058745362$
$x3ant := 1.063492063$	$x3ant := 1.198260183$	$x3ant := 1.199025414$
$x4ant := -0.09259259259$	$x4ant := -0.03682446584$	$x4ant := -0.05256728695$
$x5ant := 0.8888888889$	$x5ant := 0.9196606899$	$x5ant := 0.9059399575$
$x6ant := 0.06296296296$	$x6ant := 0.1410443759$	$x6ant := 0.1610551271$
$x7ant := -0.7221164021$	$x7ant := -0.8112711047$	$x7ant := -0.8129117239$
$x8ant := 0.1777777778$	$x8ant := 0.1547820366$	$x8ant := 0.1566876416$
$x9ant := -0.2061164021$	$x9ant := -0.2509636516$	$x9ant := -0.2557300521$
$x10ant := -0.01022222222$	$x10ant := 0.02957456988$	$x10ant := 0.03054390250$
$x11ant := -0.06060758377$	$x11ant := 0.06792946471$	$x11ant := 0.09365113169$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

$i := 97$	$i := 98$	$i := 99$
$x1act := -0.7646214529$	$x1act := -0.7646214529$	$x1act := -0.7646214529$
$x2act := 1.059704750$	$x2act := 1.059704750$	$x2act := 1.059704750$
$x3act := 1.195681749$	$x3act := 1.195681749$	$x3act := 1.195681749$
$x4act := -0.05711887133$	$x4act := -0.05711887133$	$x4act := -0.05711887133$
$x5act := 0.9035176562$	$x5act := 0.9035176562$	$x5act := 0.9035176562$
$x6act := 0.1632316560$	$x6act := 0.1632316560$	$x6act := 0.1632316560$
$x7act := -0.8111907369$	$x7act := -0.8111907369$	$x7act := -0.8111907369$
$x8act := 0.1586566618$	$x8act := 0.1586566618$	$x8act := 0.1586566618$
$x9act := -0.2555309436$	$x9act := -0.2555309436$	$x9act := -0.2555309436$
$x10act := 0.02967282255$	$x10act := 0.02967282255$	$x10act := 0.02967282255$
$x11act := 0.09419921539$	$x11act := 0.09419921539$	$x11act := 0.09419921539$
$errorx1 := 0.0012969590$	$errorx1 := 0.0012969590$	$errorx1 := 0.0012969590$
$errorx2 := 0.000347310$	$errorx2 := 0.000347310$	$errorx2 := 0.000347310$
$errorx3 := 0.000157493$	$errorx3 := 0.000157493$	$errorx3 := 0.000157493$
$errorx4 := 0.01132063116$	$errorx4 := 0.01132063116$	$errorx4 := 0.01132063116$
$errorx5 := 0.0071240507$	$errorx5 := 0.0071240507$	$errorx5 := 0.0071240507$
$errorx6 := 0.0017933112$	$errorx6 := 0.0017933112$	$errorx6 := 0.0017933112$
$errorx7 := 0.0009874014$	$errorx7 := 0.0009874014$	$errorx7 := 0.0009874014$
$errorx8 := 0.0056062904$	$errorx8 := 0.0056062904$	$errorx8 := 0.0056062904$
$errorx9 := 0.0013560195$	$errorx9 := 0.0013560195$	$errorx9 := 0.0013560195$
$errorx10 := 0.00452325875$	$errorx10 := 0.00452325875$	$errorx10 := 0.00452325875$
$errorx11 := 0.06728369568$	$errorx11 := 0.06728369568$	$errorx11 := 0.06728369568$
$x1ant := -0.7646214529$	$x1ant := -0.7646214529$	$x1ant := -0.7646214529$
$x2ant := 1.059704750$	$x2ant := 1.059704750$	$x2ant := 1.059704750$
$x3ant := 1.195681749$	$x3ant := 1.195681749$	$x3ant := 1.195681749$
$x4ant := -0.05711887133$	$x4ant := -0.05711887133$	$x4ant := -0.05711887133$
$x5ant := 0.9035176562$	$x5ant := 0.9035176562$	$x5ant := 0.9035176562$
$x6ant := 0.1632316560$	$x6ant := 0.1632316560$	$x6ant := 0.1632316560$
$x7ant := -0.8111907369$	$x7ant := -0.8111907369$	$x7ant := -0.8111907369$
$x8ant := 0.1586566618$	$x8ant := 0.1586566618$	$x8ant := 0.1586566618$
$x9ant := -0.2555309436$	$x9ant := -0.2555309436$	$x9ant := -0.2555309436$
$x10ant := 0.02967282255$	$x10ant := 0.02967282255$	$x10ant := 0.02967282255$
$x11ant := 0.09419921539$	$x11ant := 0.09419921539$	$x11ant := 0.09419921539$

if $i < max_iteraciones$ **then**

$print(\text{"x1= "}, evalf(x1act), \text{", x2 = "}, evalf(x2act), \text{", x3 = "},$
$evalf(x3act), \text{", x4 = "}, evalf(x4act), \text{", x5 = "}, evalf(x5act),$
$\text{", x6 = "}, evalf(x6act), \text{", x2 = "}, evalf(x7act), \text{", x8 = "},$
$evalf(x8act), \text{", x9 = "}, evalf(x9act), \text{", x10 = "}, evalf(x10act),$
$\text{", x11 = "}, evalf(x11act),);$
$print(\text{"La convergencia se alcanzó en "}, i, \text{" iteraciones."});$

Else

$print(\text{"No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en "}, max_iteraciones$
$\text{" iteraciones."});$

end if;

"No se pudo alcanzar la tolerancia deseada en ", 100, " iteraciones."

Debido al alto número de iteraciones, podríamos decir que no es convergente, o bien, que converge en la

iteración número 100.

3.6 Método de Krylov

Sirve para obtener la ecuación característica de una matriz, dado un sistema de ecuaciones de la forma

$$A^n \bar{y} + b_1 A^{n-1} \bar{y} + b_2 A^{n-2} \bar{y} + \ldots + + b_{n-1} A \bar{y} + b_n \bar{y} I = 0 \tag{3.5}$$

Donde,

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

El método Krylov debe utilizarse en conjunto con un método de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Esta unión arroja una alternativa muy apropiada cuando se trata de evitar resolver determinantes de orden mayor considerando su solución en forma analítica. La solución mediante este método en Maple, implica el uso del método de Gauss-Jordan a través de la siguiente secuencia de pasos del ejemplo.

Ejemplo
Usar el método de Krylov para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas dadas mediante la matriz y el vector.

$$M := \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad v := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución
Usando el método Krylov y el método de Gauss-Jordan, **s**e hace uso de la librería de algebra lineal de Maple. Se escribe la matriz y el vector que representa el sistema de ecuaciones algebraicas

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> M := <<-b[1],0,6>|<b[2],2,-2>|<b[3],0,0>|<-1,4,-4>>;
```

$$M := \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> v := <0,0,0>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Con la misma librería de algebra lineal de Maple se procede a dar las instrucciones para que el software use la matriz y el vector resolviéndolos mediante Gauss-Jordan

> with(Student[LinearAlgebra]):

> GaussJordanEliminationTutor(M,v);

$$\begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2\frac{b_1 - 3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2\frac{b_1 - 3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2\frac{b_1 - 3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6\frac{b_3}{b_1} & -6\frac{1+2b_2}{b_1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1+2b_2}{b_3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1+2b_2}{b_3} \end{bmatrix}$$

sustituyendo los resultados de las b[n] en el polinomio característico, tenemos que dicho polinomio es

> $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$

> $b[3] = \frac{1 + 2\cdot b[2]}{b[3]}$

$$b_3 = \frac{1+2b_2}{b_3}$$

> $solve\left(b[3] = \frac{1 + 2\cdot b[2]}{b[3]}, b[3]\right)$

$$\sqrt{1+2b_2}, -\sqrt{1+2b_2}$$

> $b[2] := -2; \sqrt{1+2b_2}, -\sqrt{1+2b_2}$

$$b_2 := -2$$

$$I\sqrt{3}, -I\sqrt{3}$$

> $b[3] := \pm\sqrt{3}$:

> $b[1] := 0$:

Por tanto, la ecuación o polinomio característico con los parámetros b[n] incluidos queda

> $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda \pm b_3 = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda \pm \sqrt{3} = 0 \lhd Respuesta$

L.Q.Q.D.

El sistema de ecuaciones a resolver tiene la forma (aquí todas las y deben ser testadas).

> $A\text{^}3\cdot y + b_1 A^2\cdot y + b_2 A\cdot y + b_3\cdot y\cdot I = 0$

$$A^3 y + b_1 A^2 y + b_2 A y + \mathrm{I} b_3 y = 0$$

para la cual, el vector y es libremente elegido como

> $y := Vector([1, 0, 0])$;

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

realizando las multiplicaciones con operaciones de matrices, se tiene que

> Ay :

> with(LinearAlgebra[Generic]):

> (Z[`0`],Z[`1`],Z[`+`],Z[`-`],Z[`*`],Z[`=`]) := (0,1,`+`,`-`,`*`,`=`);

$$Z_0, Z_1, Z_{`+`}, Z_{`-`}, Z_{`*`}, Z_{`=`} := 0, 1, `+`, `-`, `*`, `=`$$

> A := Matrix([[1,-1,0],[2,0,1],[-2,3,-1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

> y := Vector([1,0,0]);

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> MatrixVectorMultiply[Z](A,y);

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

> $Ay = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Talot FS&HS

> $A^3 y + b_1 A^2 y + b_2 A y + \mathrm{I} b_3 y = 0$

> $A\cdot \boldsymbol{A y}$ **:**

> A := Matrix([[1,-1,0],[2,0,1],[-2,3,-1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

> y := Vector([1,2,-2]);

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

> MatrixVectorMultiply[Z](A,y);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

> $A^2 \cdot y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

> $A^3 y = \boldsymbol{A^2 y} \cdot A$

> A := Matrix([[1,-1,0],[2,0,1],[-2,3,-1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

> y := Vector([-1,0,6]);

$$y := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

> MatrixVectorMultiply[Z](A,y);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

> $A^3 y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

> Sustituyendo los resultados de estas operaciones en la ecuación

> $A^3 y + b_1 A^2 y + b_2 A y + \mathrm{I} b_3 y = 0$

> $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + b_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + b_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 - b_1 + b_2 + b_3 \\ 4 + 2 b_2 \\ -4 + 6 b_1 - 2 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solución de este sistema de ecuaciones lineales es

> with(Student[LinearAlgebra]):

> M := <<-b[1],0,6>|<b[2],2,-2>|<b[3],0,0>|<-1,4,-4>>;

$$M := \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

> v := <0,0,0>;

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>GaussJordanEliminationTutor(M,v);

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -b_1 & b_2 & b_3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2\frac{b_1-3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{b_2}{b_1} & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\frac{b_1-3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\frac{b_1-3b_2}{b_1} & 6\frac{b_3}{b_1} & -2\frac{2b_1+3}{b_1} & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6\frac{b_3}{b_1} & -6\frac{1+2b_2}{b_1} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{b_3}{b_1} & \frac{1+2b_2}{b_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1+2b_2}{b_3} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1+2b_2}{b_3} & 0 \end{array}\right]$$

> $b[1] := 0$

$$b_1 := 0$$

> $b[2] := -2$

$$b_2 := -2$$

> $solve\left(b[3] - \left(\frac{1+2b_2}{b_3}\right) = 0, b[3]\right)$

$$\sqrt{1+2b_2}, -\sqrt{1+2b_2}$$

> $b[3] = \sqrt{1+2b_2}, -\sqrt{1+2b_2}$

$$b_3 = I\sqrt{3}, -I\sqrt{3}$$

Por lo cual, el polinomio característico para este sistema de ecuaciones es

> $\lambda^3 - 2\lambda \pm I\sqrt{3} = 0$

ya que

> $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$ ◁*Respuesta*

Fin

Para multiplicar una matriz por un vector en Maple, seguir las instrucciones siguientes.

```
> with(LinearAlgebra[Generic]):
> (Z[`0`],Z[`1`],Z[`+`],Z[`-`],Z[`*`],Z[`=`]) := (0,1,`+`,`-`,`*`,`=`);
```

$$Z_0, Z_1, Z_{+}, Z_{-}, Z_{*}, Z_{=} := 0, 1, `+`, `-`, `*`, `=`$$

```
> A := Matrix([[2,1,4],[3,2,1],[0,0,5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> B := Matrix([[1,2,3],[2,1,2],[3,2,1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> MatrixMatrixMultiply[Z](A,B);

$$\begin{bmatrix} 16 & 13 & 12 \\ 10 & 10 & 14 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

> v := Vector([1,2,3]);

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> MatrixVectorMultiply[Z](A,v);

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Método Krylov-Bogoliubov

La aproximación de Krylov-Bogoliubov a la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + a f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$ para a pequeña, es de la forma $x(t) = A(t)\sin(\omega t + \phi(t))$ donde las funciones $A(t)$ y $\phi(t)$ están determinadas por las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{a}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(A\sin(\theta), A\omega\cos(\theta))\, d\theta \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2\pi A\omega}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(A\sin(\theta), A\omega\cos(\theta))\, d\theta$$

Cada A en las integrales de los lados derechos de estas dos ecuaciones diferenciales se trata como una constante.
Una extensión de este método a términos de orden superior en a se conoce como el método de Krylov, Bogoliubov y Mitropolsky.

3.7 Eigenvalores y eigenvectores

Valores Propios, valores característicos o eigenvalores. Vectores propios, vectores característicos o eigenvectores

Ejemplo
Dada la matriz A, encontrar sus valores propios y sus vectores propios (Nieves y Domínguez, 1996, pp.234-238)

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución
Usando Maple para conocer los valores de eigenvalores y eigenvectores que debemos obtener como resultado:

```
> with(linalg):
> A := matrix(3,3, [4,-9,2,2,-4,6,1,-1,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> e := eigenvalues(A);
```

$$e := -\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3} + \frac{1}{\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}} + 1, \frac{1}{2}\left(12 + \sqrt{145}\right)^{1/3} - \frac{1}{2\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}} + 1 + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{3}\left(-\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}}\right), \frac{1}{2}\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3} - \frac{1}{2\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}} + 1 - \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{3}\left(-\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}}\right)$$

```
> evalf( -(12+sqrt(145))^(1/3) + 1/(12+sqrt(145))^(1/3) + 1 )
```

$$-1.539683971$$

```
> λ[1] = -1.539683971
```

$$\lambda_1 = -1.539683971$$

```
> evalf( 1/2*(12+sqrt(145))^(1/3) - 1/(2*(12+sqrt(145))^(1/3)) + 1 + 1/2
      *I*sqrt(3)*(-(12+sqrt(145))^(1/3) - 1/(12+sqrt(145))^(1/3)) )
```

$$2.269841985 - 2.799552823\,I$$

$$> \; evalf\left(\frac{1}{2}\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}-\frac{1}{2\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}}+1-\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{3}\left(-\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}-\frac{1}{\left(12+\sqrt{145}\right)^{1/3}}\right)\right)$$

$2.269841985 + 2.799552823\,I$

Entonces,

$\lambda_2 = 2.269841985 - 2.799552823\,I$

$\lambda_3 = 2.269841985 + 2.799552823\,I$

Secuencia de pasos a seguir:

Tenemos la matriz A

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

la forma $A - \lambda \cdot I$

$A - I\lambda$

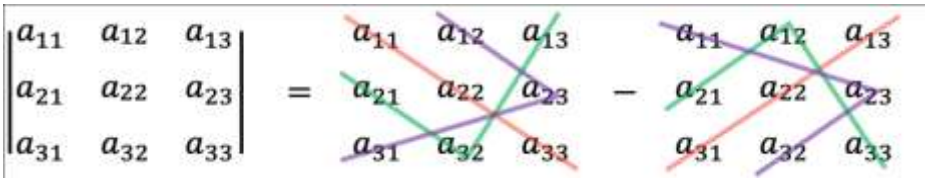
$$> \; A - I\lambda = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4. - 1.\lambda & -9. & 2. \\ 2. & -4. - 1.\lambda & 6. \\ 1. & -1. & 3. - 1.\lambda \end{bmatrix}$$

La escribimos como la matriz M

$$M := \begin{bmatrix} 4. - 1.\lambda & -9. & 2. \\ 2. & -4. - 1.\lambda & 6. \\ 1. & -1. & 3. - 1.\lambda \end{bmatrix}$$

Obtenemos el Determinante de M con el determinante de la matriz de 3 × 3. Así escrito puede resultar un poco difícil de entender, pero fíjate cómo se hace el cálculo de determinantes 3×3 con la Regla de Sarrus (matricesydeterminantes.com de Academia Balderix):



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}$$

Así, el determinante de la matriz M da como resultado la ecuación cubica

$$-20. - 6.\lambda + 3.\lambda^2 - 1.\lambda^3$$

llamado polinomio característico de la matriz A. Debemos ser capaces de determinarlo realizando el determinante en forma manual o mediante software, las operaciones a realizar son

$$(4.-1.\lambda)\cdot(-4.-1.\lambda)\cdot(3.-1.\lambda)-(2)\cdot(-4.-1.\lambda)\cdot(1)+(-9)\cdot(6)\cdot(1)-(4.-1.\lambda)\cdot(6)\cdot(-1)+(2)\cdot(-1)\cdot(2)-(2)\cdot(-9)\cdot(3.-1.\lambda)$$

$$(4.-1.\lambda)\,(-4.-1.\lambda)\,(3.-1.\lambda)+28.-22.\lambda$$

Obteniendo

$$-20.-6.\lambda+3.\lambda^2-1.\lambda^3$$

Encontrar las 3 raíces de este polinomio de grado 3 o polinomio característico de A. Las raíces son

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Resolverlo por Newton-Rhapson con un valor inicial de -2 o con el método de su elección. El resultado es

$\lambda_1 = -1.539683971$

Y dos raíces imaginarias

$\lambda_2 = 2.269841985 - 2.799552823\,I$

$\lambda_3 = 2.269841985 + 2.799552823\,I$

Para obtener estas dos raíces imaginarias usamos la división sintética, como sigue, usando la raíz real encontrada

-1.5396839711	-1	3 (-1)(-1.53968) =1.53968	-6 (4.53968)(-1.53968) =-6.98965	-20 (-12.98965) (-1.53968)=20
	-1	4.53968	-12.98965	0

El polinomio degradado es

$$-\lambda^2+4.53968\cdot\lambda-12.98965=0$$

usamos la fórmula cuadrática

$$\lambda=\frac{1}{2}\,\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{a}$$

$a := -1$:

$b := 4.53968$:

$c := -12.98965$:

Sustituidos los valores de *a, b* y *c* en la fórmula general, da

$$2.269840000-\frac{1}{2}\,\pm 5.599098633\,I=0$$

o

$2.269840000-2.799549316\,I$ y $2.269840000+2.799549316\,I$

Una vez obtenidos los valores propios de una matriz *A* de orden *n*, los vectores

$x \neq 0$

que resuelven el sistema, son

$A\,x=\lambda_i\,x$

$i=1,2,...n$

$(A-\lambda[i]\cdot I\,)\cdot x=0$

$(A-I\lambda_i)\,x=0$

Se denominan vectores propios de A correspondientes a λ_i
como el determinante $det(A - I\lambda_i)\,x = 0$ y el sistema es homogéneo, se tiene un número infinito de soluciones para cada λ_i . Encontrar los vectores propios de la matriz A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = -1.539683971$

Entonces,

$\lambda := -1.539683971$

$(A - I(-1.539683971)_i)\,x$

$$= \begin{bmatrix} 5.539683971 & -9. & 2. \\ 2. & -2.460316029 & 6. \\ 1. & -1. & 4.539683971 \end{bmatrix}$$

$$> \quad (A - I\lambda_i)\,x = \begin{bmatrix} 5.539683971 & -9. & 2. \\ 2. & -2.460316029 & 6. \\ 1. & -1. & 4.539683971 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolverla, se usa pivoteo total (intercambio de filas y columnas) y escalamiento. Como el vector de términos independientes es cero, no lo usamos, entonces usamos la norma definida para un vector cualquiera, como

$y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$ o $y = [|y_1| + |y_2| + ... + |y_n|]$

entonces, para la primera, segunda y tercera fila de $(A - I\lambda_i)\,x$ se suman los números de cada fila, todos con el signo positivo aunque tengan negativo, aquí hacemos el escalamiento

$$(A - I\lambda_i)\,x = \begin{bmatrix} 5.539683971 & -9. & 2. \\ 2. & -2.460316029 & 6. \\ 1. & -1. & 4.539683971 \end{bmatrix} = B$$

$5.539683971 + 9 + 2 = 16.53968397$

$2 + 2.460316029 + 6 = 10.46031603$

$1 + 1 + 4.539683971 = 6.539683971$

con ellos formamos un vector

$$\begin{bmatrix} 16.53968397 \\ 10.46031603 \\ 6.539683971 \end{bmatrix}$$

Cada fila de la matriz que llamamos B, se divide entre su factor de escalamiento, es decir

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{5.539683971}{16.53968397} & -\frac{9.}{16.53968397} & \frac{2.}{16.53968397} \\ \frac{2.}{10.46031603} & -\frac{2.460316029}{10.46031603} & \frac{6.}{10.46031603} \\ \frac{1.}{6.539683971} & -\frac{1.}{6.539683971} & \frac{4.539683971}{6.539683971} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3349328791 & -0.5441458263 & 0.1209212947 \\ 0.1911988122 & -0.2352047512 & 0.5735964366 \\ 0.1529125879 & -0.1529125879 & 0.6941748242 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0.3349328791 & -0.5441458263 & 0.1209212947 \\ 0.1911988122 & -0.2352047512 & 0.5735964366 \\ 0.1529125879 & -0.1529125879 & 0.6941748242 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Intercambio los renglones 1 y 3}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0.1529125879 & -0.1529125879 & 0.6941748242 \\ 0.1911988122 & -0.2352047512 & 0.5735964366 \\ 0.3349328791 & -0.5441458263 & 0.1209212947 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Intercambio de columnas 1 y 3}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0.6941748242 & -0.1529125879 & 0.1529125879 \\ 0.5735964366 & -0.2352047512 & 0.1911988122 \\ 0.1209212947 & -0.5441458263 & 0.3349328791 \end{bmatrix} \text{ estos son los resultados}$$

A continuación, usamos eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} \frac{3470874121}{5000000000} & \frac{-1529125879}{10000000000} & \frac{1529125879}{10000000000} \\ \frac{2867982183}{5000000000} & \frac{-294005939}{1250000000} & \frac{955994061}{5000000000} \\ \frac{1209212947}{10000000000} & \frac{-5441458263}{10000000000} & \frac{3349328791}{10000000000} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3470874121}{5000000000} & \frac{-1529125879}{10000000000} & \frac{1529125879}{10000000000} \\ 0 & \frac{-68693728440491329}{631068022000000000} & \frac{40922987559508671}{631068022000000000} \\ \frac{1209212947}{10000000000} & \frac{-5441458263}{10000000000} & \frac{3349328791}{10000000000} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\left[\left[\frac{3470874121}{5000000000}, \frac{-1529125879}{10000000000}, \frac{1529125879}{10000000000}\right], \left[0, \frac{-68693728440491329}{631068022000000000}, \frac{40922987559508671}{631068022000000000}\right], \left[0, \frac{-35924194520617068233}{69417482420000000000}, \frac{21401158436324680009}{69417482420000000000}\right]\right] \rightarrow$$

$$\left[\left[\frac{3470874121}{5000000000}, \frac{-1529125879}{10000000000}, \frac{1529125879}{10000000000}\right], \left[0, \frac{-68693728440491329}{631068022000000000}, \frac{40922987559508671}{631068022000000000}\right], \left[0, 0, \frac{767327363845404619}{755631012845404619000000000}\right]\right]$$

Realizamos las operaciones de división en los términos obtenidos por eliminación gaussiana y, quedando

$$B^V = \begin{bmatrix} 0.6941748242 & -0.1529125879 & 0.1529125879 \\ 0 & -0.1088531284 & 0.06484718942 \\ 0 & 0 & 1.0154789110^{-10} \end{bmatrix}$$

Con ello, formamos un sistema de dos ecuaciones con 3 incógnitas, como sigue

$$0.6941748242\,x_3 - 0.1529125879\,x_2 + 0.1529125879\,x_1 = 0$$

$$-0.1088531284\,x_2 + 0.06484718942\,x_1 = 0$$

Y obtenemos

$x_2 := 0.5957310587\, x_1$

$x[3] := -0.08905222123\, x_1$

Si (se puede suponer cualquier valor)

$x_1 := 1$

obtenemos

$x_2 := 0.5957310587$

$x_3 := -0.08905222123$

Entonces, uno de los infinitos eigenvectores que hay en este sistema de ecuaciones, es

$$q := \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5957310587 \\ -0.08905222123 \end{bmatrix}$$

$$> \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5957310587 \\ -0.08905222123 \end{bmatrix}$$

Comprobación: Se tiene por definición que

$A\,x = \lambda_1\, x$

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0.59573 \\ -0.08905 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de A por *x* es:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} -1.53967000000000 \\ -0.917220000000000 \\ 0.137120000000000 \end{bmatrix}$$

y

$$\lambda_1\, x = -1.53968 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.59573 \\ -0.08905 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1\, x = \begin{bmatrix} -1.53968000000000 \\ -0.917233566400000 \\ 0.137108504000000 \end{bmatrix}$$

L.Q.Q.D. Ya que por definición $A\,x = \lambda_1\, x$

Fin

Determinación de eigenvalores y eigenvectores en el software Maple

Valor Propio en Maple

o raíz característica de una matriz u operador lineal A es un escalar λ tal que existe algún vector x distinto de cero con $Ax = \lambda x$. Si A es una matriz real o compleja, entonces un número complejo l es un valor propio de A si y sólo si l es una raíz de la ecuación característica de A. Véase también raíz

latente, polinomio característico, Student[LinearAlgebra][EigenvaluesTutor], Student [Álgebra lineal][Valores propios], Álgebra lineal[Valores propios], Estudiante[Álgebra lineal][Gráfico propio].

Descripción
Student[LinearAlgebra][Eigenvalues] - calcula los valores propios de una matriz cuadrada
Descripción
El comando Valores propios(A), Eigenvalues(A) devuelve los valores propios , eigenvalues, de la Matriz A cuadrada, es decir, los valores t tales que Determinante(A - t . Id(Dimensión(A))) = 0, Determinant(A - t . Id(Dimension(A))) = 0. Los valores propios se devuelven en un Vector columna.
Tenga en cuenta que los valores propios son en general números complejos.

Ejemplo
```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> A := <<-1,-3>|<-3,2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

```
> B := <<1,4,-2>|<-1,0,1>|<-1,2,1>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(B);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ I \\ -I \end{bmatrix}$$

LinearAlgebra[Eigenvalues] - calcula los valores propios de una matriz

Descripción
La función Valores propios(..), Eigenvalues(..) , resuelve el problema de valores propios simple, eigenvalue , $Ax = \lambda x$ y el problema de valores propios generalizado $Ax = (\lambda C)x$. La solución contiene los valores escalares de lambda para los cuales existen soluciones vectoriales (Vector) no triviales x. (Una solución trivial es el vector cero).

El comando Valores propios (A), Eigenvalues(A), resuelve el problema de valores propios simple al devolver los valores propios de la Matriz A en una columna Vector.
En el problema simple de valores propios de punto flotante, si A tiene la función de indexación simétrica o hermitiana, entonces el objeto devuelto tiene un tipo de datos $float_8$ o $sfloat$. De lo contrario, el objeto devuelto tiene $complex_8$ o $complex(sfloat)$ tipo de datos.

El comando Valores propios (A, C), Eigenvalues(A, C, resuelve el problema de valores propios generalizado al devolver los valores propios de la Matriz A en una columna Vector.

En el problema generalizado de valores propios de punto flotante, si A y C tienen funciones de indexación simétricas o hermitianas y C también tiene el atributo positivo_definido, positive_definite, entonces el objeto devuelto tiene un tipo de datos $float_8$ o $sfloat$. De lo contrario, el objeto devuelto tiene $complex_8$ o $complex(sfloat)$ tipo de datos.

Si la opción implícita (imp), implicit (imp) , se incluye en la secuencia de llamada solo como el símbolo implícito o en la forma implícito=verdadero, entonces los valores propios se expresan usando la notación RootOf de Maple para extensiones algebraicas o expresando los valores propios en términos de radicales exactos. (si es posible).

El formato en el que se devuelven los valores propios de A está determinado por el parámetro out. Si se omite out en la secuencia de llamada, se devuelve una columna Vector. En su lugar, se puede especificar un vector de fila o una lista.

Las opciones del constructor proporcionan información adicional (solo lectura, forma, almacenamiento, orden, tipo de datos y atributos) al constructor de vectores, Vector constructor que genera el resultado. Estas opciones también se pueden proporcionar en el formato opciones de salida=[...], outputoptions=[...], donde [...] representa una lista de Maple. Si se proporciona una opción de constructor tanto en la secuencia de llamada directamente como en una opción de opciones de salida, outputoptions , esta última tiene prioridad (independientemente del orden).

Esta función es parte del paquete LinearAlgebra y, por lo tanto, se puede usar en la forma Valores propios(..) solo después de ejecutar el comando with(LinearAlgebra). Sin embargo, siempre se puede acceder a él a través de la forma larga del comando usando LinearAlgebra[Eigenvalues](..).

Ejemplos

```
> with(LinearAlgebra):
> R := Matrix([[711,-96,-191,507,-7,-82,-39,19], [999,123,-162,-77,-63,-80,-4],
        [799,156,61,79,8,92], [111,88,33,59,-32], [711,-509,298,108],
        [611,207,708], [89,-991], [999]], shape=symmetric,
        scan=triangular[upper]);
```

$$R := \begin{bmatrix} 711 & -96 & -191 & 507 & -7 & -82 & -39 & 19 \\ -96 & 999 & 123 & -162 & -77 & -63 & -80 & -4 \\ -191 & 123 & 799 & 156 & 61 & 79 & 8 & 92 \\ 507 & -162 & 156 & 111 & 88 & 33 & 59 & -32 \\ -7 & -77 & 61 & 88 & 711 & -509 & 298 & 108 \\ -82 & -63 & 79 & 33 & -509 & 611 & 207 & 708 \\ -39 & -80 & 8 & 59 & 298 & 207 & 89 & -991 \\ 19 & -4 & 92 & -32 & 108 & 708 & -991 & 999 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(R);
```

$$\begin{bmatrix} 386.948571509204 \\ 808.034890137514 \\ 885.402411933563 \\ 1003.53310746561 \\ 1218.23585493181 \\ 1911.28206459731 \\ -252.621773087639 \\ -930.815127487376 \end{bmatrix}$$

> M := <<1,8,-9>|<7,-2,2>|<-3,-2,-1>>;

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 8 & -2 & -2 \\ -9 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

> Eigenvalues(M, implicit, output='list');

$$[RootOf(-194 + _Z^3 + 2_Z^2 - 80_Z, index = 1), RootOf(-194 + _Z^3 + 2_Z^2 - 80_Z, index = 2), RootOf(-194 + _Z^3 + 2_Z^2 - 80_Z, index = 3)]$$

> evalf(RootOf(-194 + _Z^3 + 2 _Z^2 - 80 _Z, index = 1))

$$9.11368700165668$$

> evalf(RootOf(-194 + _Z^3 + 2 _Z^2 - 80 _Z, index = 2))

$$-2.45977312300047$$

> evalf(RootOf(-194 + _Z^3 + 2 _Z^2 - 80 _Z, index = 3))

$$-8.65391387865621$$

> A := RandomMatrix(4,datatype=float,shape=symmetric,storage=rectangular);

$$A := \begin{bmatrix} 27. & -2. & 27. & 33. \\ -2. & -72. & 57. & 87. \\ 27. & 57. & -77. & -18. \\ 33. & 87. & -18. & -38. \end{bmatrix}$$

> B := RandomMatrix(4,datatype=float);

$$B := \begin{bmatrix} 50. & 29. & -80. & 89. \\ -43. & -12. & -92. & -55. \\ -67. & 96. & -29. & -67. \\ 19. & 93. & 96. & 77. \end{bmatrix}$$

> Eigenvalues(A, B, output='Vector[row]');

$$[3.18218049658557 + 0.\,I, 0.0572105599284846 + 0.278576039016333\,I, 0.0572105599284847 - 0.278576039016333\,I, 0.503155583606882 + 0.\,I]$$

> N := <<-1.0,-4.0>|<-4.0,-1.0>>;

$$N := \begin{bmatrix} -1.0 & -4.0 \\ -4.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

> evalsN := Eigenvalues(N);

$$evalsN := \begin{bmatrix} 3. + 0.\,I \\ -5. + 0.\,I \end{bmatrix}$$

> VectorOptions(evalsN,datatype);

$$complex_8$$

> evalsN := Eigenvalues(Matrix(N,shape=symmetric));

$$evalsN := \begin{bmatrix} -5. \\ 3. \end{bmatrix}$$

> VectorOptions(evalsN,datatype);

$$float_8$$

> *Fin*

Vector Propio

vector latente, o vector característico (para una matriz o un operador lineal, A) un vector $\boldsymbol{X}$ distinto de cero, tal que $\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}$ para algún escalar λ; λ es un valor propio, eigenvalue, de A. Véase también LinearAlgebra[Eigenvectors], Student[LinearAlgebra][EigenPlotTutor], Student[LinearAlgebra][Eigenvectors], Student[LinearAlgebra][EigenvectorsTutor].

Student[LinearAlgebra][Eigenvectors] – Calcular los eigenvectores de una Matriz cuadrada

Descripción

El comando Eigenvectors(A), Eigenvectors(A), devuelve una secuencia de expresión de dos elementos. El primer elemento es el vector de valores propios, eigenvalues (es decir, exactamente lo que devuelve el comando Valores propios(A), Eigenvalues(A)) El segundo es la matriz de los vectores propios, eigenvectors, correspondientes.

Por ejemplo, después (ev, EV) := Vectores propios(A); ((ev, EV) := Eigenvectors(A);) para cada índice de columna i, $A.EV_{1..-1,\,i} = ev_i.EV_{1..-1,\,i}$

Nota: Si la Matriz A de entrada es defectuosa (no tiene un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes), entonces algunas de las columnas de la Matriz de vectores propios son 0 (y por lo tanto no son vectores propios). Consulte JordanForm.

Ejemplo

> with(Student[LinearAlgebra]):

> A := <<1,3,6>|<-3,-5,-6>|<-9,-7,-3 >> ;

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 3 & -5 & -7 \\ 6 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

> (ev, EV) := Eigenvectors(A);

$$ev, EV := \left[\begin{matrix} -2 \\ -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47} \\ -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47} \end{matrix}\right], \left[\left[\left[1, -\frac{24\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}, -\frac{24\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2} - \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)} \right], \left[1, \frac{-\frac{49}{2} + \frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}}{\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}}, \frac{-\frac{49}{2} - \frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}}{\frac{19}{2} - \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}} \right], \left[0, 1, 1 \right] \right]\right]$$

> A . EV[1..-1,2] = ev[2] . EV[1..-1,2];

$$\left[\left[-\frac{24\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)} - \frac{3\left(-\frac{49}{2} + \frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}} - 9 \right], \left[-\frac{72\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)} - \frac{5\left(-\frac{49}{2} + \frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}} - 7 \right], \left[-\frac{144\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)} - \frac{6\left(-\frac{49}{2} + \frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\frac{19}{2} + \frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}} - 3 \right] \right]$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{24\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\left(\frac{19}{2}+\frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)} \\ \dfrac{\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)\left(-\frac{49}{2}+\frac{9}{2}\cdot I\sqrt{47}\right)}{\frac{19}{2}+\frac{5}{2}\cdot I\sqrt{47}} \\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot I\sqrt{47} \end{bmatrix}$$

Evaluamos las cantidades de las dos matrices anteriores de 3×1 para verificar si son iguales, lo cual es afirmativo.

```
> evalf( -24*(-5/2+1/2*I*sqrt(47))*(1/2+3/2*I*sqrt(47))/((19/2+5/2*I*sqrt(47))*(-7/2+1/2*I*sqrt(47)))
  -3*(-49/2+9/2*I*sqrt(47))/(19/2+5/2*I*sqrt(47))-9 ) = evalf( -24*(-5/2+1/2*I*sqrt(47))*(1/2+3/2*I*sqrt(47))/((19/2+5/2*I*sqrt(47))*(-7/2+1/2*I*sqrt(47))) )
```

$$-10.45833333 - 3.142175026\,I = -10.45833333 - 3.142175026\,I$$

```
>
> evalf( -72*(1/2+3/2*I*sqrt(47))/((19/2+5/2*I*sqrt(47))*(-7/2+1/2*I*sqrt(47)))
  -5*(-49/2+9/2*I*sqrt(47))/(19/2+5/2*I*sqrt(47))-7 )
  = evalf( (-5/2+1/2*I*sqrt(47))*(-49/2+9/2*I*sqrt(47))/(19/2+5/2*I*sqrt(47)) )
```

$$-8.291666666 - 1.999565925\,I = -8.291666666 - 1.999565926\,I$$

```
> evalf( -144*(1/2+3/2*I*sqrt(47))/((19/2+5/2*I*sqrt(47))*(-7/2+1/2*I*sqrt(47)))
  -6*(-49/2+9/2*I*sqrt(47))/(19/2+5/2*I*sqrt(47))-3 ) = evalf( -5/2+1/2*I*sqrt(47) )
```

$$-2.499999999 + 3.42782730\,I = -2.500000000 + 3.427827300\,I$$

L.Q.Q.D.

LinearAlgebra[Eigenvectors] - calcula los vectores propios de una matriz

Descripción

El comando Vectores propios(A), Eigenvectors(A), resuelve el problema de vectores propios simple devolviendo una secuencia de expresión cuyo primer miembro es un Vector V de los valores propios de A, y cuyo segundo miembro es una Matriz E cuyas columnas son los vectores propios de A. La iésima columna de E es un vector propio, eigenvector, asociado con el i-ésimo valor propio del Vector V devuelto.

En el problema simple de vectores propios de punto flotante, si A tiene la función de indexación simétrica o hermitiana, entonces el objeto de valor propio devuelto tiene un tipo de datos $float_8$ o $sfloat$. De lo contrario, el objeto de valor propio devuelto tiene tipo de datos $complex_8$ o $complex(sfloat)$.

La función Eigenvectors(..) resuelve el problema de vectores propios simple y el problema de valores propios generalizado $Ax = (\lambda C)x$. Los valores propios V[i] y los vectores propios distintos de cero E[1 .. -1, i] son tales que para el problema de valores propios simple $A.E_{1..-1,\,i} = V_i.E_{1..-1,\,i}$ y para el problema generalizado $A.E_{1..-1,\,i} = V_i.C.E_{1..-1,\,i}$.

El comando Eigenvectors(A, C) resuelve el problema de vectores propios generalizado.

En el problema generalizado de vectores propios de punto flotante, si A y C tienen funciones de indexación simétricas o hermitianas y C también tiene el atributo positivo_definido (positive_definite), entonces el objeto de valor propio devuelto tiene un tipo de datos $float_8$ o $sfloat$. De lo contrario, el objeto de valor propio devuelto tiene tipo de datos $complex_8$ o $complex(sfloat)$.

Con un valor propio de multiplicidad $1 < k$, puede haber menos vectores propios que k linealmente independientes. En este caso, la matriz se llama defectuosa. Por diseño, la matriz devuelta siempre tiene la dimensión de columna completa. Por lo tanto, en el caso defectuoso, algunas de las columnas que se devuelven son cero. Por tanto, no son vectores propios. Con la opción salida=lista, output=list, solo se devuelven vectores propios. Para obtener más información, consulte LinearAlgebra[JordanForm] y LinearAlgebra[SchurForm].

El formato en el que se devuelven los vectores propios de A está determinado por el parámetro out. De forma predeterminada, se devuelve una secuencia de expresión como se describe anteriormente. En el caso de que la salida se especifique como lista, list, se devuelve una lista de listas. El primer elemento de cada sublista es un valor propio, el segundo elemento es su multiplicidad y el tercer elemento es un conjunto de vectores propios linealmente independientes correspondientes a ese valor propio.

La opción de opciones, options, proporciona información adicional (solo lectura, forma, almacenamiento, orden, tipo de datos y atributos) al constructor Matrix o Vector que genera los resultados. Estas opciones también se pueden proporcionar en el formato opciones de salida[o]=[...], outputoptions[o]=[...], donde [...] representa una lista de Maple. Si se proporciona una opción de constructor tanto en la secuencia de llamada directamente como en una opción de opciones de salida [o], outputoptions[o], esta última tiene prioridad (independientemente del orden).

Esta función es parte del paquete LinearAlgebra y, por lo tanto, se puede usar en la forma Eigenvectors(..) solo después de ejecutar el comando with(LinearAlgebra). Sin embargo, siempre se puede acceder a él a través de la forma larga del comando usando LinearAlgebra[Eigenvectors](..).

Ejemplos

```
> with(LinearAlgebra):
```

Find the eigenvalues and eigenvectors of the Matrix A .

```
> A := <<-1,-1,-1/2>|<3/2,1/5,1/6>|<-3/8,-3/6,-4/7>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \\ -1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

```
> (v, e) := evalf(Eigenvectors(A));
```

$$v, e := \begin{bmatrix} -0.3245385080 \\ -0.5234450315 + 1.019424029\,I \\ -0.5234450315 - 1.019424029\,I \end{bmatrix}, [[-0.4829368472,$$
$$0.5296401333 - 2.146142992\,I, 0.5296401333 + 2.146142992\,I],$$
$$[0.03252983768, 1.876821582 - 0.3218848173\,I, 1.876821582$$
$$+ 0.3218848173\,I],$$
$$[1., 1., 1.]]$$

Verify $A.x = \text{lambda}\,x$ for the eigenvalue 2 and eigenvector $\langle -1, 0, 1 \rangle$.

```
> A . e[1..-1,2] = v[2] . e[1..-1,2];
```

$$\begin{bmatrix} 1.910592240 + 1.663315766\,I \\ -0.6542758166 + 2.081766029\,I \\ -0.5234450409 + 1.019424026\,I \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.910592240 + 1.663315765\,I \\ -0.6542758148 + 2.081766027\,I \\ -0.5234450315 + 1.019424029\,I \end{bmatrix}$$

Find the eigenvectors of the Matrix B using the option output=list.

```
> B := <<-1,0,1>|<0,-1,-1>|<-2,-1,0>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> evalf(Eigenvectors(B, output='list'));
```

$$\left[\left[-1., 1., \left\{\begin{bmatrix} 1. \\ 1. \\ 0. \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-0.5000000000 + 0.8660254040\,I, 1.,\right.$$
$$\left.\left\{\begin{bmatrix} -0.9999999996 + 1.732050807\,I \\ -0.4999999998 + 0.8660254037\,I \\ 1. \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-0.5000000000\right.$$
$$\left.- 0.8660254040\,I, 1., \left\{\begin{bmatrix} -0.9999999996 - 1.732050807\,I \\ -0.4999999998 - 0.8660254037\,I \\ 1. \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

Find the generalized eigenvectors of M and N.

```
> M := Matrix([[3.,4.,10/2.],[4.,4.,9.],[16.,9.,1.]], datatype = float):
> N := Matrix([[3.,6.,6.],[6.,4.,4.],[9.,8.,3.]], datatype = float):
> (v, e) := Eigenvectors(M,N,output=['vectors', 'values']);
```

$$v, e := \left[\begin{array}{l} [\,-0.394705728407413 + 0.185955744590836\,I, \\ \quad -0.394705728407413 - 0.185955744590836\,I, \\ \quad -0.406212384670518 + 0.\,I], \\ [0.681636633253174 + 0.\,I, 0.681636633253174 + 0.\,I, \\ \quad 0.891919140886452 + 0.\,I], \\ [\,-0.587326214290158 - 0.00687511679256053\,I, \\ \quad -0.587326214290158 + 0.00687511679256053\,I, \\ \quad -0.198674972406353 + 0.\,I]\,], \\ \begin{bmatrix} 1.74450970721799 + 0.610995637227684\,I \\ 1.74450970721799 - 0.610995637227684\,I \\ 0.460980585564025 + 0.\,I \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

A simple floating-point eigenvector problem.

```
> N := <<2.0,8.0*I>|<-8.0*I,2.0>>
```

Warning, inserted missing semicolon at end of statement

$$N := \begin{bmatrix} 2.0 & -8.0\,I \\ 8.0\,I & 2.0 \end{bmatrix}$$

```
> (evalsN, evecsN) := Eigenvectors(N);
```

$$evalsN, evecsN := \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10. + 0.\,I \\ -6.00000000000000 + 0.\,I \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0.707106781186548 + 0.\,I & 0.707106781186548 + 0.\,I \\ -0. + 0.707106781186547\,I & 0. - 0.707106781186547\,I \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

By default, the resulting eigenvalues are given as complex numbers.

```
> VectorOptions(evalsN,datatype),MatrixOptions(evecsN,datatype);
```

$$complex_8, complex_8$$

However, if N has the *hermitian* indexing function, then the resulting eigenvalues are given as real floating-point numbers.

```
> (evalsN, evecsN) := Eigenvectors(Matrix(N,shape=hermitian));
```

$$evalsN, evecsN := \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -6. \\ 10. \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0. - 0.707106781186547\,I & 0. - 0.707106781186547\,I \\ -0.707106781186547 - 0.\,I & 0.707106781186547 + 0.\,I \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

```
> VectorOptions(evalsN,datatype),MatrixOptions(evecsN,datatype);
```

$$float_8, complex_8$$

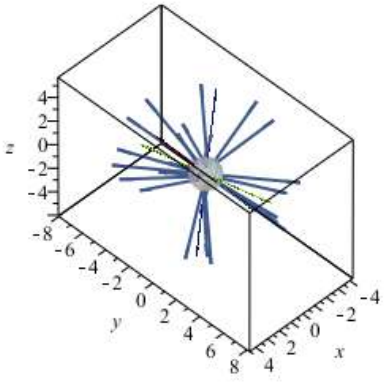
EigenPlot(M) produce un gráfico que muestra los vectores propios (reales) de Matrix M (ver Figs. 3.7 y 3.8). Este gráfico tiene los siguientes componentes.

* Las imágenes de una selección de vectores unitarios que emanan del origen; estas imágenes se dibujan con sus bases ubicadas en las puntas de los vectores unitarios correspondientes.

* El círculo unitario (2-D) o la esfera unitaria (3-D).
* Los vectores propios (reales); en el caso 2-D, estos vectores se dibujan con sus bases ubicadas en el círculo unitario. En el caso 3-D, se dibujan con sus bases en la esfera unitaria si apuntan hacia afuera, y en caso contrario, se dibujan con sus cabezas en la esfera unitaria. Tenga en cuenta que los vectores propios se dibujan en pares que apuntan en direcciones opuestas. Debido a que estos vectores propios son imágenes de vectores unitarios, sus longitudes están determinadas por los valores propios eigenvalues correspondientes. Las líneas finas se dibujan como diámetros del círculo unitario o esfera, que son extensiones de los vectores propios. Estas líneas de diámetro proporcionan información adicional sobre los espacios propios correspondientes, lo cual es particularmente útil en el caso de valores propios que son 0.

El argumento opts puede incluir cualquiera de las opciones de trazado de Student Student plot options o cualquiera de las siguientes ecuaciones que establecen opciones de trazado.

showcircle = *true* or *false*
circleoptions = *list*
showeigenvectors = *true* or *false*
eigenoptions = *list*
Una lista de opciones que controlan la visualización de los vectores propios. Debido a que los vectores propios se trazan usando el comando plots[arrow], solo se permiten las opciones correspondientes.
showimagevectors = *true* or *false*
Seleccione si desea mostrar las imágenes de los vectores unitarios bajo la acción de la Matriz M. [Default: *true*]
imageoptions = *list*
Nota: De forma predeterminada, los vectores de imagen para un gráfico 2D se dibujan usando el estilo double_arrow y los vectores de imagen para un gráfico 3D se dibujan usando el estilo arpón para permitir que se distingan visualmente de los vectores propios.
showsphere = *true* or *false*
sphereoptions = *list*
showunitvectors = *true* or *false*
unitoptions = *list*
eigencolors = *list*
numvectors = *posint*
Nota: En el caso 3-D, si se incluye la opción de region y especifica una región distinta de la esfera, el número real de vectores de imagen dibujados puede ser menor que el valor especificado en esta opción numvectors. [Predeterminado: 21 (2-D), 25 (3-D), 15 (3-D, región octante)]
region = *sphere*, *octant*, *righthalf*, *lefthalf*, *fronthalf*, *backhalf*, *tophalf*, *bottomhalf*
Para un problema 3-D (es decir, una Matriz M de 3 x 3), seleccione qué parte de la esfera unitaria desea mostrar. [Predeterminado: esfera]
spheregrid = *list of 2 positive integers*
caption = *anything*



x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix *A*. Thus, *x* satisfies the equation $Ax = \lambda x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (azure), eigenvectors (burgundy, navy, leafgreen).

Fig. 3.7 Gráfico que muestra los vectores propios (reales) de la Matriz M.

Ejemplo 1

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
```

```
> infolevel[Student[LinearAlgebra]] := 1:
> M := <<4,1,-0.3>|<1,7,2>|<0.3,2,5>>:
> EigenPlot( M );
Eigenvalue: 3.348
Multiplicity: 1
Eigenvector: < .4686, -.5196, .7144 >

Eigenvalue: 4.255
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -.5299, -.3647, .7656 >

Eigenvalue: 8.397
Multiplicity: 1
Eigenvector: < .2256, .8481, .4794 >
```

Ejemplo 2

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> infolevel[Student[LinearAlgebra]] := 1:
> M := <<-1,3>|<-1,2>>:
> EigenPlot( M );
Eigenvalue: 1/2+1/2*I*3^(1/2)
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -.5000+.2887*I, 1. >
Eigenvalue: 1/2-1/2*I*3^(1/2)
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -.5000-.2887*I, 1. >
```

x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix A. Thus, x satisfies the equation $Ax = \lambda x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leaf green), eigenvectors (burgundy and navy).

Fig. 3.8 Gráfica que muestra los eigenvectores (reales) de Matrix M

Problema 1

a) Encontrar los valores característicos (eigenvalores) del matriz coeficiente del siguiente sistema (Nieves y Domínguez 1966, p. 253).

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Encontrar los vectores característicos (eigenvectores) correspondientes al valor característico dominante (el de máximo valor absoluto) del ejemplo anterior.

c) Encontrar el valor característico dominante y los vectores característicos correspondientes del sistema de ecuaciones de a).

Solución

Un eigenvalor es como su nombre en alemán sugiere, un valor propio, usualmente caracterizado por la letra griega λ *lambda* que satisface la siguiente expresión:

$$Ax = \lambda x$$

Donde A es la matriz coeficiente

x es el eigenvector

λ es el eigenvalor

Si logramos encontrar un valor de λ (el que sea) que satisface la expresión anterior, habremos encontrado el valor propio o eigenvalor. De ahí mismo se desprende el concepto de eigenvector. Si tenemos una matriz que se multiplica por un vector *x* y su resultado es igual al eigenvalor multiplicado por el mismo vector *x,* tendremos al eigenvector con su correspondiente eigenvalor.

Paso 1:

Para el cálculo de $A - \lambda I$ donde A es la matriz, λ es el eigenvalor e I es la matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la operación paso a paso obtenemos

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$A\text{-}\lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7-\lambda & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de esta matriz por el método de eliminación de Gauss

Multiplicamos la fila 1 $\left(\frac{-1}{\lambda-4}\right)$ y la restamos a la fila 2

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \frac{-1}{\lambda-4} \\ -0.3 & 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 1 $\left(\frac{3}{10\lambda-40}\right)$ y la restamos a la fila 3

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \frac{-1}{\lambda-4} \\ 0 & \frac{20\lambda-83}{10\lambda-40} & \frac{-100\lambda^2+900\lambda-2009}{100\lambda-400} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} \\ -1 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 1 $\left(\frac{1}{\lambda-4}\right)$ y la restamos a la fila 4

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \frac{-1}{\lambda-4} \\ 0 & \frac{20\lambda-83}{10\lambda-40} & \frac{-100\lambda^2+900\lambda-2009}{100\lambda-400} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} \\ 0 & \frac{-1}{\lambda-4} & \frac{-20\lambda+77}{10\lambda-40} & \frac{-\lambda^2+8\lambda-15}{\lambda-4} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 2 $\left(\frac{-20\lambda+83}{10\lambda^2-110\lambda+270}\right)$ y la restamos a la fila 3

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \frac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \frac{-1}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & \frac{-100\lambda^3+1600\lambda^2-7809\lambda+11963}{100\lambda^2-1100\lambda+2700} & \frac{20\lambda^2-217\lambda+499}{10\lambda^2-110\lambda+270} \\ 0 & \frac{-1}{\lambda-4} & \frac{-20\lambda+77}{10\lambda-40} & \frac{-\lambda^2+8\lambda-15}{\lambda-4} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 2 $\left(\frac{1}{\lambda^2-11\lambda+27}\right)$ y la restamos a la fila 4

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \dfrac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \dfrac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \dfrac{-1}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & \dfrac{-100\lambda^3+1600\lambda^2-7809\lambda+11963}{100\lambda^2-1100\lambda+2700} & \dfrac{20\lambda^2-217\lambda+499}{10\lambda^2-110\lambda+270} \\ 0 & 0 & \dfrac{-20\lambda^2+217\lambda-539}{10\lambda^2-110\lambda+270} & \dfrac{-\lambda^2+15\lambda^2-70\lambda+101}{\lambda^2-11\lambda+27} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 3 $\left(\dfrac{200\lambda^2-2170\lambda+5390}{100\lambda^3-1600\lambda^2+7809\lambda-11963}\right)$ y la restamos a la fila 4

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 0 & \dfrac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4} & \dfrac{20\lambda-77}{10\lambda-40} & \dfrac{-1}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & \dfrac{-100\lambda^3+1600\lambda^2-7809\lambda+11963}{100\lambda^2-1100\lambda+2700} & \dfrac{20\lambda^2-217\lambda+499}{10\lambda^2-110\lambda+270} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-100\lambda^4+2000\lambda^3-14509\lambda^2+46279\lambda-54712}{100\lambda^3-1600\lambda^2+7809\lambda-11963} \end{bmatrix}$$

Y finalmente, multiplicamos siguiendo el escalón que se forma desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha

$$(4-\lambda)\cdot\left(\frac{-\lambda^2+11\lambda-27}{\lambda-4}\right)\left(\frac{-100\lambda^3+1600\lambda^2-7809\lambda+11963}{100\lambda^2-1100\lambda+2700}\right)\cdot\left(\frac{-100\lambda^4+2000\lambda^3-14509\lambda^2-54712}{100\lambda^3-1600\lambda^2+7809\lambda-11963}\right)$$

$$=\frac{100\lambda^4-2000\lambda^3+14509\lambda^2-46279\lambda+54712}{100}$$

Simplificando, se obtiene

$$\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12$$

Que es el polinomio característico. Calculamos las raíces de dicho polinomio para determinar los valores propios.

Paso 2:

Encontrar raíces:

Como es un polinomio de grado 4, tendremos 4 raíces (un polinomio de grado *n* tendrá *n* raíces) y con ello, habremos encontrado sus eigenvalores.

Usando el método **Newton-Raphson** podremos obtener la primera raíz

Entonces, la función cuyas raíces vamos a calcular, viene dada por

$$f(x)=\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12$$

Para ello, usamos las siguientes expresiones matemáticas

$$\lambda_{i+1}=g(\lambda_i)=\lambda_i-\frac{f(\lambda_i)}{\dfrac{d}{d\lambda}(\lambda_i)}$$

Criterio para parar

$$\left|\lambda_{i+1}-\lambda_i\right|$$

Así tenemos que la derivada del polinomio característico es

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12\right)=$$

$$=(4)\lambda^3-20(3)\lambda^2+145.09(2)\lambda-462.79$$

$$4\lambda^3-60\lambda^2+290.18\lambda-462.79$$

Aplicando el algoritmo del método de Newton-Raphson, se tiene

$$\lambda_{i+1}=\lambda_i-\frac{\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12}{4\lambda^3-60\lambda^2+290.18\lambda-462.79}$$

Si tenemos el tiempo de graficar el comportamiento de la función o usar un software matemático que pueda ayudarnos podremos ver que el intervalo por el cual la función transita es el [3,4] lo cual nos conduce a la idea de que el valor 3 es una muy buena condición inicial para poder hacer las iteraciones, ver Fig. 3.9. En las iteraciones siguientes $x=\lambda$.

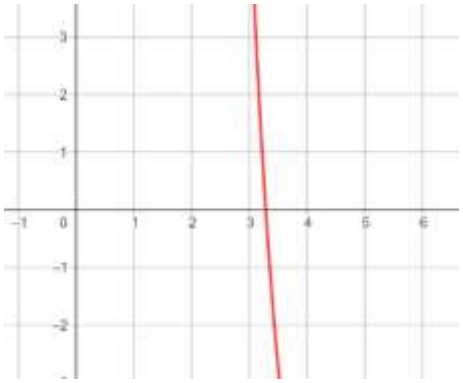


Fig. 3.9 Gráfica para conocer el valor inicial de lambda, λ_0, para el arranque de las iteraciones.

Las iteraciones para obtener el primer eigenvalor se realizan enseguida.

1era iteración:

$i=0$

$x_0=3$

$x_{i+1}=x_{0+1}=x_1$

$$x_1=3-\frac{\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12}{4\lambda^3-60\lambda^2+290.18\lambda-462.79}$$

$$x_1=3-\frac{(3)^4-20(3)^3+145.09(3)^2-462.79(3)+547.12}{4(3)^3-60(3)^2+290.18(3)-462.79}$$

$$x_1=3-\frac{5.56}{-24.25}$$

$$x_1=3.229278351$$

2da iteración:

$i=1$

$x_1=3.229278351$

$x_{i+1}=x_{1+1}=x_2$

$$x_2=3.229278351-\frac{\lambda^4-20\lambda^3+145.09\lambda^2-462.79\lambda+547.12}{4\lambda^3-60\lambda^2+290.18\lambda-462.79}$$

$x_2=3.229278351$

$$-\frac{(3.229278351)^4-20(3.229278351)^3+145.09(3.229278351)^2-462.79(3.229278351)+547.12}{4(3.229278351)^3-60(3.229278351)^2+290.18(3.229278351)-462.79}$$

$$x_2=3.229278351-\frac{0.909874637}{-16.70958673}$$

$$x_2=3.283730603$$

3era iteración:

$i=3$

$x_3=3.286357935$

$x_{i+1}=x_{3+1}=x_4$

$$x_4 = 3.286357935 - \frac{\lambda^4 - 20\lambda^3 + 145.09\lambda^2 - 462.79\lambda + 547.12}{4\lambda^3 - 60\lambda^2 + 290.18\lambda - 462.79}$$

$$x_4 = 3.283730603$$

$$- \frac{(3.286357935)^4 - 20(3.286357935)^3 + 145.09(3.286357935)^2 - 462.79(3.286357935) + 547.12}{4(3.286357935)^3 - 60(3.286357935)^2 + 290.18(3.286357935) - 462.79}$$

$$x_4 = 3.283730603 - \frac{8.7976857 \times 10^{-5}}{-15.19094845}$$

$$x_4 = 3.286363726$$

Y con esa iteración acabamos la búsqueda del primer eigenvalor, $x_4 = \lambda_4$.

Primer eigenvalor $\lambda = 3.286363726$

Ahora es momento de agregar otro intervalo $[8,8.5]$ para conseguir la segunda raíz o segundo eigenvalor mediante Newton-Raphson.

Las iteraciones para obtener el segundo eigenvalor se realizan enseguida.

1a iteración:

$i = 0$

$x_0 = 8$

$x_{i+1} = x_{0+1} = x_1$

$$x_1 = 8 - \frac{\lambda^4 - 20\lambda^3 + 145.09\lambda^2 - 462.79\lambda + 547.12}{4\lambda^3 - 60\lambda^2 + 290.18\lambda - 462.79}$$

$$x_1 = 8 - \frac{(8)^4 - 20(8)^3 + 145.09(8)^2 - 462.79(8) + 547.12}{4(8)^3 - 60(8)^2 + 290.18(8) - 462.79}$$

$$x_1 = 8 - \frac{-13.44}{66.65}$$

$$x_1 = 8.201650413$$

2a iteración:

$i = 1$

$x_1 = 8.201650413$

$x_{i+1} = x_{1+1} = x_2$

$$x_2 = 8.201650413 - \frac{\lambda^4 - 20\lambda^3 + 145.09\lambda^2 - 462.79\lambda + 547.12}{4\lambda^3 - 60\lambda^2 + 290.18\lambda - 462.79}$$

$$x_2 = 8.201650413$$

$$- \frac{(8.201650413)^4 - 20(8.201650413)^3 + 145.09(8.201650413)^2 - 462.79(8.201650413) + 547.12}{4(8.201650413)^3 - 60(8.201650413)^2 + 290.18(8.201650413) - 462.79}$$

$$x_2 = 8.201650413 - \frac{2.096190947}{87.94470026}$$

$$x_2 = 8.177815083$$

3a iteración:

$i = 2$

$x_2 = 8.177815083$

$x_{i+1} = x_{2+1} = x_3$

$$x_3 = 8.177815083 - \frac{\lambda^4 - 20\lambda^3 + 145.09\lambda^2 - 462.79\lambda + 547.12}{4\lambda^3 - 60\lambda^2 + 290.18\lambda - 462.79}$$

$x_3 = 8.177815083$

$$-\frac{(8.177815083)^4 - 20(8.177815083)^3 + 145.09(8.177815083)^2 - 462.79(8.177815083) + 547.12}{4(8.177815083)^3 - 60(8.177815083)^2 + 290.18(8.177815083) - 462.79}$$

$$x_3 = 8.177815083 - \frac{0.031978936}{85.26862896}$$

$$x_3 = 8.177440045$$

4a iteración:

$i = 3$

$x_3 = 8.177440045$

$x_{i+1} = x_{3+1} = x_4$

$$x_4 = 8.177440045 - \frac{\lambda^4 - 20\lambda^3 + 145.09\lambda^2 - 462.79\lambda + 547.12}{4\lambda^3 - 60\lambda^2 + 290.18\lambda - 462.79}$$

$x_4 = 8.177440045$

$$-\frac{(8.177440045)^4 - 20(8.177440045)^3 + 145.09(8.177440045)^2 - 462.79(8.177440045) + 547.12}{4(8.177440045)^3 - 60(8.177440045)^2 + 290.18(8.177440045) - 462.79}$$

$$x_4 = 8.177440045 - \frac{7.83113 \times 10^{-6}}{85.26862896}$$

$$x_4 = 8.177439954$$

Ahora ya tenemos otro valor propio que es

$\lambda_2 = 8.177439954$

Ya por último solo nos queda encontrar a las raíces imaginarias, puesto que la función no posee solo valores reales. Para ello, nos haremos del método de división sintética o la regla de Ruffini. Para los dos primeros valores haremos *trampa* y daremos esos valores directamente para cancelar y degradar al polinomio a un grado más alcanzable para la fórmula cuadrática.

1	−20	145.09	−462.79	574.12	$\lvert_{\lambda_1 = 3.286363726}$
1	3.286363726	−54.927087	296.3081235	−574.12	
1	-16.71363627	90.16291202	-166.4818765	0	$\lvert$
1	8.177815083	-69.80436725	166.4818765		$\lvert \lambda_2 = 8.177815083$

1	-8.535821187	20.35854477	0

Luego:

$\lambda^2 - 8.535821187\lambda + 20.35854477$

Queda listo para usarse en:

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(-8.535821187) \pm \sqrt{(8.535821187)^2 - 4(20.35854477)}}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{8.535821187 \pm \sqrt{-8.573935744}}{2}$$

$$= \frac{8.535821187 \pm \sqrt{-8.573935744}}{2} = \frac{8.535821187 \pm \sqrt{8.573935744}\sqrt{-1}}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{8.535821187 \pm \sqrt{8.573935744}i}{2} \lambda_{3,4} = \frac{8.535821187 \pm 2.928128369i}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{8.535821187 + 2.928128369i}{2} = 4.2679105 + 1.464064185i$$

$$\lambda_4 = \frac{8.535821187 - 2.928128369i}{2} = 4.2679105 - 1.464064185i$$

Los valores propios de la matriz coeficiente son
$\lambda_1 = 3.286363726$
$\lambda_2 = 8.177815083$
$\lambda_3 = 4.2679105 + 1.464064185i$
$\lambda_4 = 4.2679105 + 1.464064185i$

b)
Tomamos el arreglo matricial que teníamos anteriormente

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7-\lambda & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

En el cual sustituimos el valor propio dominante, esto es, el eigenvalor de mayor valor absoluto que en este caso resultas ser 8.177439954.

$$A-(8.177439954)I = \begin{bmatrix} 4-(8.177439954) & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7-(8.177439954) & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5-(8.177439954) & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4-(8.177439954) \end{bmatrix}$$

$$A-(8.177439954)I = \begin{bmatrix} -4.177439954 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & -1.177439954 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & -3.177439954 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -4.177439954 \end{bmatrix}$$

Una vez que tenemos esta matriz con los datos sustituidos, deberemos resolver el sistema por algún método de eliminación que resulte en una matriz triangular superior, por lo menos con una fila de ceros. Para asegurarnos de ello usaremos el pivoteo total (intercambio de filas y columnas) y escalamiento.

$$B = \begin{bmatrix} -4.177439954 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & -1.177439954 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & -3.177439954 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -4.177439954 \end{bmatrix}$$

En lugar de emplear la norma euclideana para el escalamiento, se usará ahora la siguiente norma, definida para un vector cualquiera $y = [y_1, y_{2,....} y_n]^T$ como $y = |y_1| + |y_2| + ... + |y_n|$
Ya que resulta más sencilla de calcular que la antigua manera.
Para ello haremos lo siguiente:
Sumamos el valor absoluto del cada elemento por filas;
$[4.1177439954 + 1 + 0.3 + 1]$
$[1 + 1.177439954 + 2 + 0]$
$[0.3 + 2 + 3.177439954 + 2]$
$[1 + 0 + 2 + 4.177439954]$
Teniendo como resultado:
$[6.4177439954]$

$$\begin{bmatrix}4.177439954\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}7.477439954\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}7.177439954\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}6.4177439954\\4.177439954\\7.477439954\\7.177439954\end{bmatrix}$$

Ese vector contiene los factores de escalamiento, con lo cual podremos dividir a cada elemento de la matriz *B* según la fila que le corresponde:

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{-4.177439954}{6.4177439954} & \frac{1}{6.4177439954} & \frac{0.3}{6.4177439954} & \frac{-1}{6.4177439954} \\ \frac{1}{4.177439954} & \frac{-1.177439954}{4.177439954} & \frac{2}{4.177439954} & \frac{0}{4.177439954} \\ \frac{-0.3}{7.477439954} & \frac{2}{7.477439954} & \frac{-3.177439954}{7.477439954} & \frac{2}{7.477439954} \\ \frac{-1}{7.177439954} & \frac{0}{7.177439954} & \frac{-2}{7.177439954} & \frac{-4.177439954}{7.177439954} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -0.644921447945 & 0.154381979161763 & 0.046314593748 & -0.154381979161 \\ 0.239381058976 & -0.28185682306997 & 0.478762117953 & 0 \\ -0.040120683261 & 0.2674712217421 & -0.424936873254 & 0.267471221 \\ -0.139325442833 & 0 & -0.2786508856664 & -0.582023671 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso será armar un pequeño sistema para determinar los elementos *incógnita* de los eigenvectores, con base a los eigenvalores.
Haremos intercambio de filas y/o columnas para posteriormente usar el método *L U*.

Intercambiar la columna 1 por la 4

$$B' = \begin{bmatrix} -0.154381979161 & 0.154381979161763 & 0.04631459374 & -0.644921447945 \\ 0 & -0.28185682306997 & 0.478762117953 & 0.2393810589760 \\ 0.267471221 & 0.2674712217421 & -0.424936873254 & -0.040120683261 \\ -0.582023671 & 0 & -0.2786508856664 & -0.139325442833 \end{bmatrix}$$

Intercambiar la columna 2 por la 3

$$B' = \begin{bmatrix} -0.154381979161 & 0.04631459374 & 0.154381979161763 & -0.644921447945 \\ 0 & 0.478762117953 & -0.28185682306997 & 0.2393810589760 \\ 0.267471221 & -0.424936873254 & 0.2674712217421 & -0.040120683261 \\ -0.582023671 & -0.2786508856664 & 0 & -0.139325442833 \end{bmatrix}$$

Intercambiar la fila 1 por la 4

$$B' = \begin{bmatrix} -0.582023671 & -0.2786508856664 & 0 & -0.139325442833 \\ 0 & 0.478762117953 & -0.28185682306997 & 0.2393810589760 \\ 0.267471221 & -0.424936873254 & 0.2674712217421 & -0.040120683261 \\ -0.154381979161 & 0.04631459374 & 0.154381979161763 & -0.644921447945 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -0.582023671 & -0.2786508856664 & 0 & -0.139325442833 \\ 0.267471221 & -0.424936873254 & 0.2674712217421 & -0.040120683261 \\ 0 & 0.478762117953 & -0.28185682306997 & 0.2393810589760 \\ -0.154381979161 & 0.04631459374 & 0.154381979161763 & -0.644921447945 \end{bmatrix}$$

Cuando terminemos ese proceso deberemos aplicar la factorización *L U*

$$B' = \begin{bmatrix} -0.582023671 & -0.2786508856664 & 0 & -0.139325442833 \\ 0 & -0.552991961867208 & 0.2674712217421 & -1.04148227567747 \\ 0 & 0 & 0.212533310851316 & -0.630608353383489 \\ 0 & 0 & 0 & -3.633\times10^{-10} \end{bmatrix}$$

Dada la factorización LU, procedemos a establecer un sistema de ecuaciones con los valores de la matriz coeficiente.

Ecuación 1:

$-0.582023671x_4 - 0.2786508856664x_3 + 0x_2 = 0.139325442833234x_1$

Ecuación 2:

$0x_4 - 0.552991961867208x_3 + 0.2674712217421x_2 = 1.04148227567747x_1$

Ecuación 3:

$0x_4 + 0x_3 + 0.212533310851316x_2 = 0.630608353383489x_1$

Ahora es momento de construir una matriz que relacione al sistema de ecuaciones anterior para poder encontrar la solución a las incógnitas mediante el método de la matriz escalonada reducida:

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|c} -0.582023671 & -0.2786508856664 & 0 & 0.139325442833 \\ 0 & -0.552991961867208 & 0.2674712217421 & 1.04148227567747 \\ 0 & 0 & 0.212533310851316 & 0.630608353383489 \end{array}\right]$$

Cuyo resultado se muestra así

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.836298396222574 \\ 0 & 1 & 0 & 1.24679316692315 \\ 0 & 0 & 1 & 2.96710360770049 \end{array}\right]$$

De esta manera establecemos que cada incógnita:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.836298396222574 \\ 1.24679316692315 \\ 2.96710360770049 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

La última incógnita aún se encuentra oculta, lo cual nos lleva al razonamiento de que podremos establecer una condición para dar un valor especifico a x_1, escogemos el valor 1. Entonces si $x_1 = 1$, las otras variables quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.96710360770049 \\ 1.24679316692315 \\ -0.836298396222574 \end{bmatrix} \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

Este es uno de los infinitos eigenvectores que tiene el sistema.

A continuación, realizamos la comprobación

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2.96710360770049 \\ 1.24679316692315 \\ -0.836298396222574 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ((1)(4)+(1)(2.96710360770049)+(0.3)(1.24679316692315)+(-1)(-0.836298396222574)) \\ ((1)(1)+(7)(2.96710360770049)+(2)(1.24679316692315)+(0)(-0.836298396222574)) \\ ((1)(-0.3)+(2)(2.96710360770049)+(5)(1.24679316692315)+(2)(-0.836298396222574)) \\ ((1)(-1)+(0)(2.96710360770049)+(-2)(1.24679316692315)+(4)(-0.836298396222574)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8.177439954 \\ 24.26331158 \\ 10.195576257 \\ -6.83877991873660 \end{bmatrix}$$

$$\lambda x =$$

$$8.177439954 \begin{bmatrix} 1 \\ 2.96710360770049 \\ 1.24679316692315 \\ -0.836298396222574 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.177439954 \\ 24.26331158 \\ 10.195576257 \\ -6.83877991873660 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, hemos encontrado satisfactoriamente un eigenvector asociado a el eigenvalor seleccionado. L.Q.Q.D.

c)

Encontrar el valor característico dominante y los vectores característicos correspondientes del sistema de ecuaciones de a).

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

El cual se resolverá por el método de las potencias, ya que este método nos da iterativamente el valor propio dominante del sistema de ecuaciones, así como sus eigenvalores.

El valor propio dominante lo obtendremos mediante la siguiente fórmula

$$\frac{\lambda_I^{k+1} \cdot A_I \cdot v_{I,j}}{\lambda_I^{k} \cdot A_I \cdot v_{I,j}} \approx \lambda_I$$

Iniciamos con las iteraciones.

1a iteración

Primero tomamos la matriz coeficiente y la multiplicamos por el vector $v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ esto debido a que no conocemos los eigenvectores.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -0.3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ahora, tomamos la misma matriz coeficiente, pero esta vez elevada al cuadrado y la multiplicaremos por el mismo vector v.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.91 \\ 10.4 \\ -2.7 \\ -7.4 \end{bmatrix}$$

Con esto, podemos hacer nuestro primer cálculo del eigenvalor dominante:

$$\frac{\lambda_1^{k+1} \cdot A_1 \cdot v_{1,j}}{\lambda_1^{k} \cdot A_1 \cdot v_{1,j}} \approx \lambda_1, \frac{17.91 \cdot 17.91 \cdot 1}{4 \cdot 17.91 \cdot 1} \approx 4.4775$$

Como es nuestra primera iteración, el eigenvalor tiene un gran margen de error, así que continuaremos iterando.

2a iteración

En esta iteración, haremos el mismo procedimiento que en la anterior, solo que ahora la matriz se eleva al cubo, se multiplica por el vector y la siguiente matriz se eleva a la cuarta potencia y también se multiplica por el vector v, y así se harán de forma sucesiva en las siguientes iteraciones.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.63 \\ 85.31 \\ -12.873 \\ -42.11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 478.0781 \\ 660.054 \\ -4.554 \\ -231.324 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\lambda_1^{k+1} \cdot A_1 \cdot v_{1,j}}{\lambda_1^{k} \cdot A_1 \cdot v_{1,j}} \approx \lambda_1, \frac{478.0781 \cdot 478.0781 \cdot 1}{88.63 \cdot 478.0781 \cdot 1} \approx 5.394088909$$

3a iteración

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2802.3242 \\ 5089.3481 \\ 691.26657 \\ -1394.2661 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17900.290971 \\ 39810.29404 \\ 10005.79959 \\ -9761.92174 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\lambda_1^{k+1}\cdot A_1\cdot v_{1,j}}{\lambda_1^{k}\cdot A_1\cdot v_{1,j}}\approx\lambda_1,\frac{17900.290971\cdot 17900.290971\cdot 1}{2802.3242\cdot 17900.290971\cdot 1}\approx 6.387658848$$

¿4a iteración?

haremos un salto en la sucesión que le correspondería a esta iteración, de tal manera que, en lugar de elevar a séptima y octava potencia y multiplicar a cada matriz por el vector v, elevaremos a la vigésima quinta y vigésima cuarta potencia cada matriz, y multiplicaremos a cada una por el vector v.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{24}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.40415378604037\cdot 10^{20} \\ 1.01004242585964\cdot 10^{21} \\ 4.24421745108272\cdot 10^{20} \\ -2.84687813259311\cdot 10^{20}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{25}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.78371827706758\cdot 10^{21} \\ 8.25955584983808\cdot 10^{21} \\ 3.47069333716081\cdot 10^{21} \\ -2.32801012185782\cdot 10^{21}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\lambda_1^{k+1}\cdot A_1\cdot v_{1,j}}{\lambda_1^{k}\cdot A_1\cdot v_{1,j}}\approx\lambda_1,\frac{2.78371827706758\cdot 10^{21}\cdot 2.78371827706758\cdot 10^{21}\cdot 1}{3.40415378604037\cdot 10^{20}\cdot 2.78371827706758\cdot 10^{21}\cdot 1}\approx 8.177416333$$

Listo, el eigenvalor o valor propio dominante es: $\lambda_1 = 8.177416333$ ◁ *Respuesta.*

Ahora, para obtener los eigenvectores del eigenvalor dominante de la matriz, tomaremos el resultado del producto "$A^{25}\cdot v$" y le aplicaremos la normalización, la cual consiste en dividir cada renglón del vector entre el eigenvalor de mayor valor absoluto. Esto es

$$\begin{bmatrix} \frac{2.78371827706758\cdot 10^{21}}{2.78371827706758\cdot 10^{21}} \\ \frac{8.25955584983808\cdot 10^{21}}{2.78371827706758\cdot 10^{21}} \\ \frac{3.47069333716081\cdot 10^{21}}{2.78371827706758\cdot 10^{21}} \\ \frac{-2.32801012185782\cdot 10^{21}}{2.78371827706758\cdot 10^{21}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2.96709473723715 \\ 1.24678325596112 \\ -0.836295159979404\end{bmatrix}$$

Resultado

$\lambda_{dominante} = 8.177416333$, eigenvector: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2.96709473723715 \\ 1.24678325596112 \\ -0.836295159979404\end{bmatrix}$

Conclusiones

Los valores propios y vectores propios son herramientas matemáticas que se utilizan para analizar y comprender cómo se transforman los datos. Los valores propios son números que indican cuánto se estira o se comprime un conjunto de datos cuando se aplica una transformación lineal, mientras que los vectores propios son los vectores que no cambian de dirección durante esta transformación.

Estos conceptos son especialmente útiles en el análisis de datos y en la resolución de problemas de

optimización. Por ejemplo, en la ingeniería mecánica, los valores propios y vectores propios se utilizan para analizar cómo se deforman las estructuras bajo diferentes cargas y condiciones de carga, lo que es crucial para diseñar estructuras seguras y eficientes.
En el campo del reconocimiento facial, los valores propios y vectores propios se utilizan para analizar imágenes y extraer características importantes para la identificación de personas. Esta técnica se conoce como análisis de componentes principales y ha demostrado ser muy efectiva en la identificación de rostros y en la detección de fraudes.
En resumen, los valores propios y vectores propios son herramientas matemáticas muy poderosas que se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones en la ingeniería y en muchos otros campos. Si bien pueden parecer abstractos a primera vista, su capacidad para ayudarnos a comprender y optimizar los datos los hace una herramienta invaluable en el mundo de la ciencia y la tecnología.

Problema 1 –Solución alternativa con valores propios y vectores propios reales e imaginarios
Encontrar los valores característicos, valores propios o eigenvalores de la matriz coeficiente del sistema de 4 × 4 dado. Asimismo, obtener los vectores característicos, vectores propios o eigenvectores de los dos valores propios reales e imaginarios de este sistema. Realizar los cálculos en software.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución con Software – Obtención eigenvalores y eigenvectores reales e imaginarios

1. Si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

Entonces:

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I) \cdot v = 0$$

Como v es no nulo, de determinante de la matriz

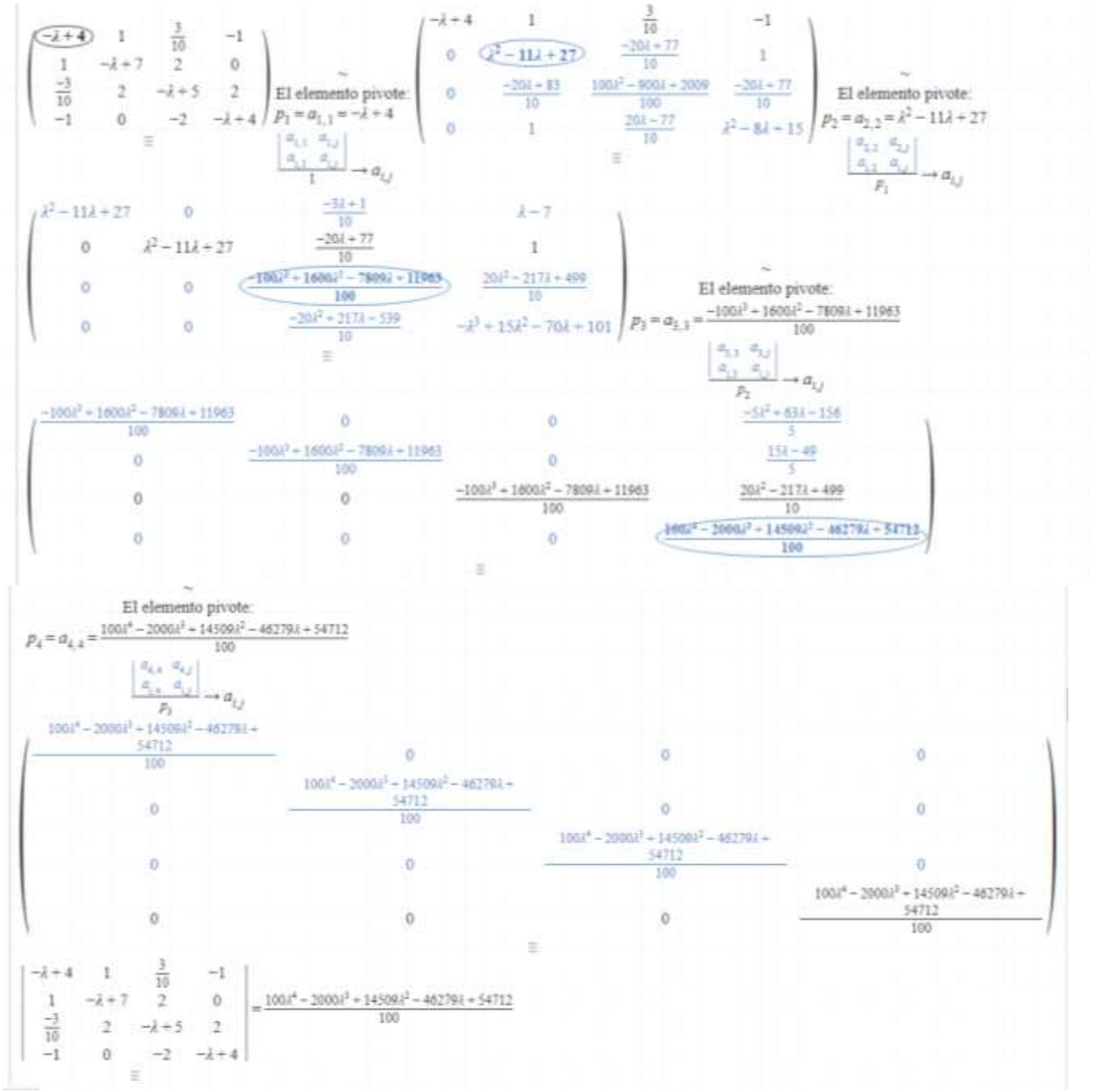
$$A - \lambda I$$

es 0

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & \frac{3}{10} & -1 \\ 1 & 7-\lambda & 2 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 20\lambda^3 + \frac{14509}{100} \cdot \lambda^2 - \frac{46279}{100} \cdot \lambda + \frac{13678}{25} = \frac{1}{100} \cdot (100\lambda^4 - 2000\lambda^3 + 14509\lambda^2 - 46279\lambda + 54712) \approx$$

Aislamiento de raíces reales y el método de Newton

$$(\lambda - 3{,}286) \cdot (\lambda - 8{,}177) \cdot (\lambda - (4{,}268 + 1{,}464 \cdot i)) \cdot (\lambda - (4{,}268 - 1{,}464 \cdot i)) = 0$$



Los cuatro eigenvalores son

1. $\lambda_1 \approx 3{,}286$
2. $\lambda_2 \approx 8{,}177$
3. $\lambda_3 \approx 4{,}268 + 1{,}464 \cdot i$
4. $\lambda_4 \approx 4{,}268 - 1{,}464 \cdot i$

2. Cálculo de los vectores propios para cada de los valores propios:

1. $\lambda_1 \approx 3{,}286$

$$A - \lambda_1 I \approx \begin{pmatrix} 0{,}714 & 1 & \frac{3}{10} & -1 \\ 1 & 3{,}714 & 2 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 1{,}714 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0{,}714 \end{pmatrix}$$

$Av = \lambda v$

$(A - \lambda I) \cdot v = 0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{0{,}714} & 1 & \frac{3}{10} & -1 & 0 \\ 1 & 3{,}714 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 1{,}714 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0{,}714 & 0 \end{array}\right) \times(1{,}401) \sim F_1/(0{,}714) \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 1 & 3{,}714 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 1{,}714 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0{,}714 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \sim F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 2{,}312 & 1{,}580 & 1{,}401 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 1{,}714 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0{,}714 & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{3}{10}\right) \sim F_3 - \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 2{,}312 & 1{,}580 & 1{,}401 & 0 \\ 0 & 2{,}420 & 1{,}840 & 1{,}580 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0{,}714 & 0 \end{array}\right) \times(1) \sim F_4 - (-1) \cdot F_1 \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & \mathbf{2{,}312} & 1{,}580 & 1{,}401 & 0 \\ 0 & 2{,}420 & 1{,}840 & 1{,}580 & 0 \\ 0 & 1{,}401 & -1{,}580 & -0{,}688 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}432) \sim F_2/(2{,}312) \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0{,}683 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 2{,}420 & 1{,}840 & 1{,}580 & 0 \\ 0 & 1{,}401 & -1{,}580 & -0{,}688 & 0 \end{array}\right) \times(-2{,}420) \sim F_3 - 2{,}420 \cdot F_2 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0{,}683 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}186 & 0{,}113 & 0 \\ 0 & 1{,}401 & -1{,}580 & -0{,}688 & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}401) \sim F_4 - 1{,}401 \cdot F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}683 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0{,}186} & 0{,}113 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}537 & -1{,}537 & 0 \end{array}\right) \times(5{,}366) \sim F_3/(0{,}186) \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}683 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}537 & -1{,}537 & 0 \end{array}\right) \times(2{,}537) \sim F_4 - -2{,}537 \cdot F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}683 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}683) \sim F_2 - 0{,}683 \cdot F_3 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0{,}420 & -1{,}401 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}192 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}420) \sim F_1 - 0{,}420 \cdot F_3 \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}401 & 0 & -1{,}656 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0{,}192 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}401) \sim F_1 - 1{,}401 \cdot F_2 \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1{,}925 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}192 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}925 \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + 0{,}192 \cdot x_4 = 0 \\ x_3 + 0{,}606 \cdot x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 3 del sistema (1) encontramos con la variable x_3:

  $x_3 = -0{,}606x_4$
- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:

  $x_2 = -0{,}192x_4$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1 = 1{,}925x_4$

La respuesta:

$x_1 = 1{,}925x_4$

$x_2 = -0{,}192x_4$

$x_3 = -0{,}606x_4$

$x_4 = x_4$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} 1{,}925x_4 \\ -0{,}192x_4 \\ -0{,}606x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}925 \\ -0{,}192 \\ -0{,}606 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Deje $x_4 = 1$, $\boldsymbol{v}_1 \approx \begin{pmatrix} \mathbf{1{,}925} \\ \mathbf{-0{,}192} \\ \mathbf{-0{,}606} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Comprobación de que el eigenvector obtenido es correcto

```
> lambda[1]=3.286;
```

$\lambda_1 = 3.286$

```
> with(LinearAlgebra) :
> A := <<4,1,-0.3,-1>|<1,7,2,0>|<0.3,2,5,-2>|<-1,0,2,4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1.925,-0.192,-0.606,1>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1.925 \\ -0.192 \\ -0.606 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(A, v);
```

$$\begin{bmatrix} 6.32620000000000 \\ -0.631000000000000 \\ -1.99150000000000 \\ 3.28700000000000 \end{bmatrix}$$

$$> A \cdot x = \begin{bmatrix} 6.32620000000000 \\ -0.631000000000000 \\ -1.99150000000000 \\ 3.28700000000000 \end{bmatrix}$$

$$> v = 3.286 \cdot \begin{bmatrix} 1.925 \\ -0.192 \\ -0.606 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.925 \\ -0.192 \\ -0.606 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.32555000000000 \\ -0.630912000000000 \\ -1.99131600000000 \\ 3.28600000000000 \end{bmatrix}$$

$$> \lambda_1 x = \begin{bmatrix} 6.32555000000000 \\ -0.630912000000000 \\ -1.99131600000000 \\ 3.28600000000000 \end{bmatrix}$$

L.Q.Q.D. Ya que por definición

$$> A \cdot x = \lambda[1] \cdot x$$

$$A x = \lambda_1 x$$

¡Es correcto!

2. $\lambda_2 \approx 8{,}177$

$$A - \lambda_2 I \approx \begin{pmatrix} -4{,}177 & 1 & \frac{3}{10} & -1 \\ 1 & -1{,}177 & 2 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & -3{,}177 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -4{,}177 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

$$(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-4{,}177} & 1 & \frac{3}{10} & -1 & 0 \\ 1 & -1{,}177 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & -3{,}177 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4{,}177 & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}239) \sim F_1/(-4{,}177) \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 1 & -1{,}177 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & -3{,}177 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4{,}177 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \sim F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & -0{,}938 & 2{,}072 & -0{,}239 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & -3{,}177 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4{,}177 & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{3}{10}\right) \sim F_3 - \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & -0{,}938 & 2{,}072 & -0{,}239 & 0 \\ 0 & 1{,}928 & -3{,}199 & 2{,}072 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -4{,}177 & 0 \end{array}\right) \times(1) \sim F_4 - (-1) \cdot F_1 \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & \mathbf{-0{,}938} & 2{,}072 & -0{,}239 & 0 \\ 0 & 1{,}928 & -3{,}199 & 2{,}072 & 0 \\ 0 & -0{,}239 & -2{,}072 & -3{,}938 & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}066) \sim F_2/(-0{,}938) \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}209 & 0{,}255 & 0 \\ 0 & 1{,}928 & -3{,}199 & 2{,}072 & 0 \\ 0 & -0{,}239 & -2{,}072 & -3{,}938 & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}928) \sim F_3 - 1{,}928 \cdot F_2 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}209 & 0{,}255 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}060 & 1{,}580 & 0 \\ 0 & -0{,}239 & -2{,}072 & -3{,}938 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}239) \sim F_4 - -0{,}239 \cdot F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}209 & 0{,}255 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1{,}060} & 1{,}580 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}601 & -3{,}877 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}944) \sim F_3/(1{,}060) \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}209 & 0{,}255 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}491 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}601 & -3{,}877 & 0 \end{array}\right) \times(2{,}601) \sim F_4 - -2{,}601 \cdot F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & -2{,}209 & 0{,}255 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(2{,}209) \sim F_2 - -2{,}209 \cdot F_3 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & -0{,}072 & 0{,}239 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}548 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}072) \sim F_1 - -0{,}072 \cdot F_3 \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}239 & 0 & 0{,}346 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}548 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}239) \sim F_1 - -0{,}239 \cdot F_2 \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1{,}196 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3{,}548 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}196 \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + 3{,}548 \cdot x_4 = 0 \\ x_3 + 1{,}491 \cdot x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 3 del sistema (1) encontramos con la variable x_3:

  $x_3 = -1{,}491x_4$
- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:

  $x_2 = -3{,}548x_4$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1 = -1{,}196x_4$

La respuesta:

$x_1 = -1{,}196x_4$

$x_2 = -3{,}548x_4$

$x_3 = -1{,}491x_4$

$x_4 = x_4$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} -1{,}196x_4 \\ -3{,}548x_4 \\ -1{,}491x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1{,}196 \\ -3{,}548 \\ -1{,}491 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Deje $x_4 = 1$, $\boldsymbol{v_2} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{-1{,}196} \\ \mathbf{-3{,}548} \\ \mathbf{-1{,}491} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Comprobación de que el eigenvector es correcto

> lambda[2] = 8.17743995357651;

$\lambda_2 = 8.17743995357651$

> *with*(*LinearAlgebra*) :

> A := <<4,1,-0.3,-1>|<1,7,2,0>|<0.3,2,5,-2>|<-1,0,2,4>>;

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

> v:=<-1.196,-3.548,-1.491,1>;

$$v := \begin{bmatrix} -1.196 \\ -3.548 \\ -1.491 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> *MatrixMatrixMultiply*(*A*, *v*);

$$\begin{bmatrix} -9.77930000000000 \\ -29.0140000000000 \\ -12.1922000000000 \\ 8.17800000000000 \end{bmatrix}$$

$$> A \cdot x = \begin{bmatrix} -9.77930000000000 \\ -29.0140000000000 \\ -12.1922000000000 \\ 8.17800000000000 \end{bmatrix}$$

$$> v = 8.17743995357651 \cdot \begin{bmatrix} -1.196 \\ -3.548 \\ -1.491 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.196 \\ -3.548 \\ -1.491 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.78021818447750 \\ -29.0135569552895 \\ -12.1925629707826 \\ 8.17743995357651 \end{bmatrix}$$

$$> \lambda_1 x = \begin{bmatrix} -9.78021818447750 \\ -29.0135569552895 \\ -12.1925629707826 \\ 8.17743995357651 \end{bmatrix}$$

L.Q.Q.D. Ya que por definición

$> A \cdot x = \lambda[1] \cdot x$

$A x = \lambda_1 x$

¡Es correcto!

3. $\lambda_3 \approx 4{,}268 + 1{,}464 \cdot i$

$$A - \lambda_3 I \approx \begin{pmatrix} -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i & 1 & \frac{3}{10} & -1 \\ 1 & 2{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ *

$(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{v} = 0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-0{,}268 - 1{,}464 \cdot i} & 1 & \frac{3}{10} & -1 & 0 \\ 1 & 2{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}121 + 0{,}661 \cdot i) \sim F_1 / (-0{,}268 - 1{,}464 \cdot i) \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 1 & 2{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-1) \sim F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 2{,}853 - 2{,}125 \cdot i & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 - 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{3}{10}\right) \sim F_3 - \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot F_1 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 2{,}853 - 2{,}125 \cdot i & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 1{,}964 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}721 - 1{,}404 \cdot i & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 - 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(1) \sim F_4 - (-1) \cdot F_1 \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & \mathbf{2{,}853 - 2{,}125 \cdot i} & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 1{,}964 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}721 - 1{,}404 \cdot i & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0 \\ 0 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & -0{,}147 - 2{,}125 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(0{,}225 + 0{,}168 \cdot i) \sim F_2 / (2{,}853 - 2{,}125 \cdot i) \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0{,}492 + 0{,}297 \cdot i & -0{,}138 + 0{,}129 \cdot i & 0 \\ 0 & 1{,}964 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}721 - 1{,}404 \cdot i & 2{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0 \\ 0 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & -0{,}147 - 2{,}125 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-1{,}964 - 0{,}198 \cdot i) \sim F_3 - (1{,}964 + 0{,}198 \cdot i) \cdot F_2 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0{,}492 + 0{,}297 \cdot i & -0{,}138 + 0{,}129 \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}187 - 2{,}085 \cdot i & 2{,}333 - 0{,}424 \cdot i & 0 \\ 0 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & -0{,}147 - 2{,}125 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(0{,}121 - 0{,}661 \cdot i) \sim F_4 - (-0{,}121 + 0{,}661 \cdot i) \cdot F_2 \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}492 + 0{,}297 \cdot i & -0{,}138 + 0{,}129 \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-0{,}187 - 2{,}085 \cdot i} & 2{,}333 - 0{,}424 \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}780 - 0{,}091 \cdot i & -0{,}079 - 2{,}018 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}043 + 0{,}476 \cdot i) \sim F_3 / (-0{,}187 - 2{,}085 \cdot i) \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}492 + 0{,}297 \cdot i & -0{,}138 + 0{,}129 \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}102 + 1{,}128 \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}780 - 0{,}091 \cdot i & -0{,}079 - 2{,}018 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(1{,}780 + 0{,}091 \cdot i) \sim F_4 - (-1{,}780 - 0{,}091 \cdot i) \cdot F_3 \to F_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121+0{,}661\cdot i & -0{,}036+0{,}198\cdot i & 0{,}121-0{,}661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}492+0{,}297\cdot i & -0{,}138+0{,}129\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}102+1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}492-0{,}297\cdot i) \overset{?}{\sim} F_2-(0{,}492+0{,}297\cdot i)\cdot F_3 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121+0{,}661\cdot i & -0{,}036+0{,}198\cdot i & 0{,}121-0{,}661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}147-0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}102+1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}036-0{,}198\cdot i) \overset{?}{\sim} F_1-(-0{,}036+0{,}198\cdot i)\cdot F_3 \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121+0{,}661\cdot i & 0 & 0{,}349-0{,}640\cdot i & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0{,}147-0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}102+1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}121-0{,}661\cdot i) \overset{?}{\sim} F_1-(-0{,}121+0{,}661\cdot i)\cdot F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}064-0{,}793\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}147-0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}102+1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - (-0{,}064+0{,}793\cdot i)\cdot x_4 = 0 \\ x_2 - (-0{,}147+0{,}457\cdot i)\cdot x_4 = 0 \quad (1) \\ x_3 + (0{,}102+1{,}128\cdot i)\cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

- De la ecuación 3 del sistema (1) encontramos con la variable x_3:
  $x_3 = (-0{,}102-1{,}128\cdot i)\cdot x_4$
- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $x_2 = (-0{,}147+0{,}457\cdot i)\cdot x_4$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1 = (-0{,}064+0{,}793\cdot i)\cdot x_4$

Si $x_4=1+i$:

Comprobación de que el eigenvector complejo obtenido es correcto

> lambda[3]=4.268+1.464*i;

$\lambda_3 = 4.268 + 1.464\,i$

> *with*(*LinearAlgebra*) :

> A := <<4,1,-0.3,-1>|<1,7,2,0>|<0.3,2,5,-2>|<-1,0,2,4>>;

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.3 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ -0.3 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Suponiendo

> $x[4] = 1 + i$; $x[1]$; $x[2]$; $x[3]$;

$x_4 = 1 + i$

x_1

x_2

x_3

son los que vemos en el vector v multiplicados por x[4]:

> v:=<(-0.064+0.793*i)*x[4],(-0.147+0.457*i)*x[4],(-0.102-1.128*i)*x[4],1+i>;

$$v := \begin{bmatrix} (-0.064+0.793\,i)\,x_4 \\ (-0.147+0.457\,i)\,x_4 \\ (-0.102-1.128\,i)\,x_4 \\ 2\,i \end{bmatrix}$$

> v:=<evalc((-0.064+0.793*i)*(1+i)),evalc((-0.147+0.457*i)*(1+i)),evalc((-0.102-1.128*i)*(1+i)),1+i>;

$$v := \begin{bmatrix} -0.064 + 0.729\,i + 0.793\,i^2 \\ -0.147 + 0.310\,i + 0.457\,i^2 \\ -0.102 - 1.230\,i - 1.128\,i^2 \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

> *MatrixMatrixMultiply*(*A*, *v*);

$$\begin{bmatrix} -1.4336 + 1.8570\,i + 3.2906\,i^2 \\ -1.297 + 0.439\,i + 1.736\,i^2 \\ 1.2152 - 3.7487\,i - 4.9639\,i^2 \\ 4.268 + 5.731\,i + 1.463\,i^2 \end{bmatrix}$$

$$> A \cdot x = \begin{bmatrix} -1.4336 + 1.8570\,i + 3.2906\,i^2 \\ -1.297 + 0.439\,i + 1.736\,i^2 \\ 1.2152 - 3.7487\,i - 4.9639\,i^2 \\ 4.268 + 5.731\,i + 1.463\,i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.7242 + 1.8570\,i \\ -3.033 + 0.439\,i \\ 6.1791 - 3.7487\,i \\ 2.805 + 5.731\,i \end{bmatrix}$$

$$> v \cdot x = evalc\left((4.268 + 1.464\,i) \cdot \begin{bmatrix} -0.064 + 0.729\,i + 0.793\,i^2 \\ -0.147 + 0.310\,i + 0.457\,i^2 \\ -0.102 - 1.230\,i - 1.128\,i^2 \\ 1 + i \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -4.724932 + 1.856724\,i \\ -3.031712 + 0.438824\,i \\ 6.179688 - 3.747576\,i \\ 2.804 + 5.732\,i \end{bmatrix}$$

> $\lambda_1\, x =$

L.Q.Q.D. Ya que por definición

> $A \cdot x = \lambda[1] \cdot x$

$A\,x = \lambda_1\, x$

¡Es correctísssimo!

Cálculos:

$$> \begin{bmatrix} -0.064 + 0.729\,i + 0.793\,i^2 \\ -0.147 + 0.310\,i + 0.457\,i^2 \\ -0.102 - 1.230\,i - 1.128\,i^2 \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

> *evalc*((-0.064 + 0.793 * *i*) * (1 + *i*))

$-0.064 + 0.729\,i + 0.793\,i^2$

> *evalc*((4.268 + 1.464 *i*) · (-0.064 + 0.729 *i* + 0.793 i^2))

$-0.273152 + 3.017676\,i + 4.451780\,i^2 + 1.160952\,i^3$

> $i^2 := (\mathrm{sqrt}(-1))^2$

$i^2 = -1$

> $i^3 = (\mathrm{sqrt}(-1))^3$

$i^3 = -1$

> $-0.273152 + 3.017676\,i + 4.451780\cdot(-1) + 1.160952\cdot(-i)$

$-4.724932 + 1.856724\,i$

> $evalc\left((4.268 + 1.464\,i)\cdot\left(-0.147 + 0.310\,i + 0.457\,i^2\right)\right)$

$-0.627396 + 1.107872\,i + 2.404316\,i^2 + 0.669048\,i^3$

> $-0.627396 + 1.107872\,i + 2.404316\cdot(-1) + 0.669048\cdot(-i)$

$-3.031712 + 0.438824\,i$

> $evalc\left((4.268 + 1.464\,i)\cdot\left(-0.102 - 1.230\,i - 1.128\,i^2\right)\right)$

$-0.435336 - 5.398968\,i - 6.615024\,i^2 - 1.651392\,i^3$

> $-0.435336 - 5.398968\,i - 6.615024\cdot(-1) - 1.651392\cdot(-i)$

$6.179688 - 3.747576\,i$

> $evalc((4.268 + 1.464\,i)\cdot(1 + i))$

$4.268 + 5.732\,i + 1.464\,i^2$

> $4.268 + 5.732\,i + 1.464\cdot(-1)$

$2.804 + 5.732\,i$

> $\langle -4.724932 + 1.856724\,i,\ -3.031712 + 0.438824\,i,\ 6.179688 - 3.747576\,i,\ 2.804 + 5.732\,i\rangle$

$$\begin{bmatrix} -4.724932 + 1.856724\,i \\ -3.031712 + 0.438824\,i \\ 6.179688 - 3.747576\,i \\ 2.804 + 5.732\,i \end{bmatrix}$$

> $$A\cdot x = \begin{bmatrix} -1.4336 + 1.8570\,i + 3.2906\,i^2 \\ -1.297 + 0.439\,i + 1.736\,i^2 \\ 1.2152 - 3.7487\,i - 4.9639\,i^2 \\ 4.268 + 5.731\,i + 1.463\,i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.7242 + 1.8570\,i \\ -3.033 + 0.439\,i \\ 6.1791 - 3.7487\,i \\ 2.805 + 5.731\,i \end{bmatrix}$$

> $-1.4336 + 1.8570\,i + 3.2906\cdot(-1)$

$-4.7242 + 1.8570\,i$

Es correcto también

> $-1.297 + 0.439\,i + 1.736\cdot(-1)$

$-3.033 + 0.439\,i$

> $1.2152 - 3.7487\,i - 4.9639\cdot(-1)$

$6.1791 - 3.7487\,i$

> $4.268 + 5.731\,i + 1.463\cdot(-1)$

$2.805 + 5.731\,i$

¡Es correctísimo!!! TaLFS&HS!

> $\langle -4.7242 + 1.8570\,i, -3.033 + 0.439\,i, 6.1791 - 3.7487\,i, 2.805 + 5.731\,i\rangle$

$$\begin{bmatrix} -4.7242 + 1.8570\,i \\ -3.033 + 0.439\,i \\ 6.1791 - 3.7487\,i \\ 2.805 + 5.731\,i \end{bmatrix}$$

Fin

La respuesta:

$$x_1 = (-0{,}064 + 0{,}793 \cdot i) \cdot x_4$$
$$x_2 = (-0{,}147 + 0{,}457 \cdot i) \cdot x_4$$
$$x_3 = (-0{,}102 - 1{,}128 \cdot i) \cdot x_4$$
$$x_4 = x_4$$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} (-0{,}064 + 0{,}793 \cdot i) \cdot x_4 \\ (-0{,}147 + 0{,}457 \cdot i) \cdot x_4 \\ (-0{,}102 - 1{,}128 \cdot i) \cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\left\{x_4 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}064 + 0{,}793 \cdot i \\ -0{,}147 + 0{,}457 \cdot i \\ -0{,}102 - 1{,}128 \cdot i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Deje $x_4 = 1$, $\boldsymbol{v_3} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{-0{,}064 + 0{,}793 \cdot i} \\ \mathbf{-0{,}147 + 0{,}457 \cdot i} \\ \mathbf{-0{,}102 - 1{,}128 \cdot i} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4. $\lambda_4 \approx 4{,}268 - 1{,}464 \cdot i$

$$A - \lambda_4 I \approx \begin{pmatrix} -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i & 1 & \frac{3}{10} & -1 \\ 1 & 2{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ *

$(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{v} = 0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-0{,}268 + 1{,}464 \cdot i} & 1 & \frac{3}{10} & -1 & 0 \\ 1 & 2{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-0{,}121 - 0{,}661 \cdot i)$$

$$\sim$$

$$F_1 / (-0{,}268 + 1{,}464 \cdot i) \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 1 & 2{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(-1)$$

$$\sim$$

$$F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 2{,}853 + 2{,}125 \cdot i & 2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & -0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ \frac{-3}{10} & 2 & 0{,}732 + 1{,}464 \cdot i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$\sim$$

$$F_3 - \left(\frac{-3}{10}\right) \cdot F_1 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & -0{,}036 - 0{,}198 \cdot i & 0{,}121 + 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 2{,}853 + 2{,}125 \cdot i & 2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & -0{,}121 - 0{,}661 \cdot i & 0 \\ 0 & 1{,}964 - 0{,}198 \cdot i & 0{,}721 + 1{,}404 \cdot i & 2{,}036 + 0{,}198 \cdot i & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -0{,}268 + 1{,}464 \cdot i & 0 \end{array}\right) \times(1)$$

$$\sim$$

$$F_4 - (-1) \cdot F_1 \to F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & \mathbf{2,853+2,125\cdot i} & 2,036+0,198\cdot i & -0,121-0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1,964-0,198\cdot i & 0,721+1,404\cdot i & 2,036+0,198\cdot i & 0 \\ 0 & -0,121-0,661\cdot i & -2,036-0,198\cdot i & -0,147+2,125\cdot i & 0 \end{pmatrix} \times(0,225-0,168\cdot i) \overset{?}{\sim} F_2/(2,853+2,125\cdot i)\to F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0,492-0,297\cdot i & -0,138-0,129\cdot i & 0 \\ 0 & 1,964-0,198\cdot i & 0,721+1,404\cdot i & 2,036+0,198\cdot i & 0 \\ 0 & -0,121-0,661\cdot i & -2,036-0,198\cdot i & -0,147+2,125\cdot i & 0 \end{pmatrix} \times(-1,964+0,198\cdot i) \overset{?}{\sim} F_3-(1,964-0,198\cdot i)\cdot F_2\to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0,492-0,297\cdot i & -0,138-0,129\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -0,187+2,085\cdot i & 2,333+0,424\cdot i & 0 \\ 0 & -0,121-0,661\cdot i & -2,036-0,198\cdot i & -0,147+2,125\cdot i & 0 \end{pmatrix} \times(0,121+0,661\cdot i) \overset{?}{\sim} F_4-(-0,121-0,661\cdot i)\cdot F_2\to F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0,492-0,297\cdot i & -0,138-0,129\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-0,187+2,085\cdot i} & 2,333+0,424\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -1,780+0,091\cdot i & -0,079+2,018\cdot i & 0 \end{pmatrix} \times(-0,043-0,476\cdot i) \overset{?}{\sim} F_3/(-0,187+2,085\cdot i)\to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0,492-0,297\cdot i & -0,138-0,129\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,102-1,128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & -1,780+0,091\cdot i & -0,079+2,018\cdot i & 0 \end{pmatrix} \times(1,780-0,091\cdot i) \overset{?}{\sim} F_4-(-1,780+0,091\cdot i)\cdot F_3\to F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,121-0,661\cdot i & -0,036-0,198\cdot i & 0,121+0,661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0,492-0,297\cdot i & -0,138-0,129\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,102-1,128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-0,492+0,297\cdot i) \overset{?}{\sim} F_2-(0,492-0,297\cdot i)\cdot F_3\to F_2$$

La respuesta:

$$x_1=(-0,064-0,793\cdot i)\cdot x_4$$
$$x_2=(-0,147-0,457\cdot i)\cdot x_4$$
$$x_3=(-0,102+1,128\cdot i)\cdot x_4$$
$$x_4=x_4$$

La solución general: $X=\begin{pmatrix}(-0,064-0,793\cdot i)\cdot x_4\\(-0,147-0,457\cdot i)\cdot x_4\\(-0,102+1,128\cdot i)\cdot x_4\\x_4\end{pmatrix}$

El sistema fundamental de soluciones: $\{x_4\cdot\begin{pmatrix}-0,064-0,793\cdot i\\-0,147-0,457\cdot i\\-0,102+1,128\cdot i\\1\end{pmatrix}\}$

Deje $x_4=1$, $\boldsymbol{v}_4\approx\begin{pmatrix}\mathbf{-0,064-0,793\cdot i}\\\mathbf{-0,147-0,457\cdot i}\\\mathbf{-0,102+1,128\cdot i}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

Que es lo mismo de arriba.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121-0{,}661\cdot i & -0{,}036-0{,}198\cdot i & 0{,}121+0{,}661\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}147+0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0{,}102-1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}036+0{,}198\cdot i) \quad \overset{?}{\sim} \quad F_1-(-0{,}036-0{,}198\cdot i)\cdot F_3 \to F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}121-0{,}661\cdot i & 0 & 0{,}349+0{,}640\cdot i & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0{,}147+0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}102-1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(0{,}121+0{,}661\cdot i) \quad \overset{?}{\sim} \quad F_1-(-0{,}121-0{,}661\cdot i)\cdot F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}064+0{,}793\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}147+0{,}457\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}102-1{,}128\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 & & +(0{,}064+0{,}793\cdot i)\cdot x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +(0{,}147+0{,}457\cdot i)\cdot x_4 & = & 0 \\ & & x_3 \; -(-0{,}102+1{,}128\cdot i)\cdot x_4 & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 3 del sistema (1) encontramos con la variable x_3:
  $x_3=(-0{,}102+1{,}128\cdot i)\cdot x_4$
- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $x_2=(-0{,}147-0{,}457\cdot i)\cdot x_4$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1=(-0{,}064-0{,}793\cdot i)\cdot x_4$

3.8 Mínimos cuadrados

Este método es una técnica matemática utilizada para encontrar la mejor línea o curva que se ajuste a un conjunto de datos en este caso x y y.
El objetivo principal de método de mínimos cuadrados es minimizar la suma de los errores al cuadrado entre los puntos de datos reales y la línea o curva de regresión. En otras palabras, se trata de encontrar la línea o curva que mejor se ajuste a los datos x y y que se asignaron.
Y para encontrar la línea o curva que más se adapte con los datos se utilizan las siguientes formulas

$$
\begin{aligned}
&ma_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + \ldots + a_n\sum x^n = \sum y \\
&a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 + \ldots + a_n\sum x^{n+1} = \sum xy \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_0\sum x^n + a_1\sum x^{n+1} + a_2\sum x^{n+2} + \ldots + a_n\sum x^{n+n} = \sum x^n y
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Estas son las fórmulas utilizadas para encontrar el polinomio de cualquier grado y después graficarlo para ver cuál de estas se ajustan mejor a los datos, dependiendo del grado, estas ecuaciones aumentan y se pueden ir formando matrices para posteriormente resolverlas por cualquier método y determinar los valores de a_n.

Importancia del método de mínimos cuadrados
Este método se utiliza ampliamente en una variedad de áreas, incluyendo la física, ingeniería, economía, medicina y la investigación de mercado.
Una de sus principales funciones es la reducción de errores, este método permite reducir los errores de medición y los errores de aproximación en los datos experimentales. Por lo tanto, es un método importante para la reducción de errores y para obtener una mejor precisión en las mediciones al igual que es de suma importancia para analizar datos de manera más detallada, y puede ser utilizado para identificar tendencias o patrones en los datos que podrían ser importantes para la toma de decisiones. Por ejemplo, puede utilizarse para identificar patrones en las ventas de una empresa y predecir las ventas futuras.

Varias de las bases de datos de los problemas resueltos con mínimos cuadrados, fueron tomadas de Triola (2009).

3.8.1 Problemas de mínimos cuadrados

Problema 1
Estaturas y pesos de supermodelos. Abajo se presentan las estaturas (en pulgadas) y los pesos (en libras) de las supermodelos Michelle Alves, Nadia Avermann, Paris Hilton, Kelly Dyer, Christy Turlington, Bridget Hall, Naomi Campbell, Valerie Mazza y Kristy Hume. ¿Existe una correlación entre la estatura y el peso? Si existe una correlación, ¿eso significa que hay una correlación entre la estatura y el peso de todas las mujeres adultas? La base de datos está dada por la Tabla 3.3

Tabla 3.3 Estaturas y pesos de supermodelos.

Supermodelo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Estatura X_i	70	70.5	68	65	70	70	70	70	71
Peso Y_i	117	119	105	115	119	127	113	123	115

Solución
Con la información proporcionada obtenemos los polinomios de cualquier grado, para este problema se calcularon los polinomios del primer al quinto grado y para llegar a algunos polinomios se utilizó un programa en C# para hacer las operaciones de matrices con el método de Gauss-Jordan.

Método Gauss-Jordan
El método de Gauss-Jordan es un algoritmo numérico que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar la solución a un sistema de ecuaciones en forma matricial.
El proceso del método de Gauss-Jordan consiste en convertir una matriz aumentada de coeficientes y términos independientes en una matriz diagonal. Para ello, se realizan operaciones elementales de fila (intercambio, multiplicación y suma) hasta que la matriz se convierta en una matriz escalonada reducida por filas, también conocida como forma escalonada reducida.

Explicación del código
Para entender un poco sobre el funcionamiento del código daremos un breve resumen, primero pedimos al usuario de que ingrese la cantidad de puntos (i) que desea para el problema, después con ayuda de unos fors y vectores solicitamos al usuario que ingrese los valores de x_i y y_i.

Después hay un espacio destinado para la elaboración de todas las operaciones de x_i y y_i con el objetivo de guardar dichos valores en otras variables para posteriormente acomodarlas en las fórmulas que se encuentran en la explicación de "mínimos cuadrados". A mediados del código se le pide al usuario que ingrese el grado que desea obtener y dependiendo de esta muestra el resultado solicitado.
Ya por último se le pregunta al usuario si desea consultar otro polinomio, si el usuario ingresa "si" volveremos al principio de lo contrario el código finalizara. A continuación, los resultados obtenidos del código:

Polinomio de primer grado

```
1.2273X    + 31.8409
```

Tabla de datos:

```
P       Xi          Yi          X^2              XY
1   70.00000   117.00000   4,900.00000   8,190.00000
2   70.50000   119.00000   4,970.25000   8,389.50000
3   68.00000   105.00000   4,624.00000   7,140.00000
4   65.00000   115.00000   4,225.00000   7,475.00000
5   70.00000   119.00000   4,900.00000   8,330.00000
6   70.00000   127.00000   4,900.00000   8,890.00000
7   70.00000   113.00000   4,900.00000   7,910.00000
8   70.00000   123.00000   4,900.00000   8,610.00000
9   71.00000   115.00000   5,041.00000   8,165.00000
```

Polinomio de segundo grado

```
0.6488X^2    + -86.8506X   + 3,017.7002
```

Tabla de datos

P	Xi	Yi	X^2	X^3	X^4	XY	YX^2
1	70.00000	117.00000	4,900.00000	343,000.00000	24,010,000.00000	8,190.00000	573,300.00000
2	70.40000	119.00000	4,956.16000	348,913.66400	24,563,521.94560	8,377.60000	589,783.04000
3	68.00000	105.00000	4,624.00000	314,432.00000	21,381,376.00000	7,140.00000	485,520.00000
4	65.00000	115.00000	4,225.00000	274,625.00000	17,850,625.00000	7,475.00000	485,875.00000
5	70.00000	119.00000	4,900.00000	343,000.00000	24,010,000.00000	8,330.00000	583,100.00000
6	70.00000	127.00000	4,900.00000	343,000.00000	24,010,000.00000	8,890.00000	622,300.00000
7	70.00000	113.00000	4,900.00000	343,000.00000	24,010,000.00000	7,910.00000	553,700.00000
8	70.00000	123.00000	4,900.00000	343,000.00000	24,010,000.00000	8,610.00000	602,700.00000
9	71.00000	115.00000	5,041.00000	357,911.00000	25,411,681.00000	8,165.00000	579,715.00000

La Fig. 3.10 muestra la gráfica del ajuste de datos a un polinomio de segundo grado.

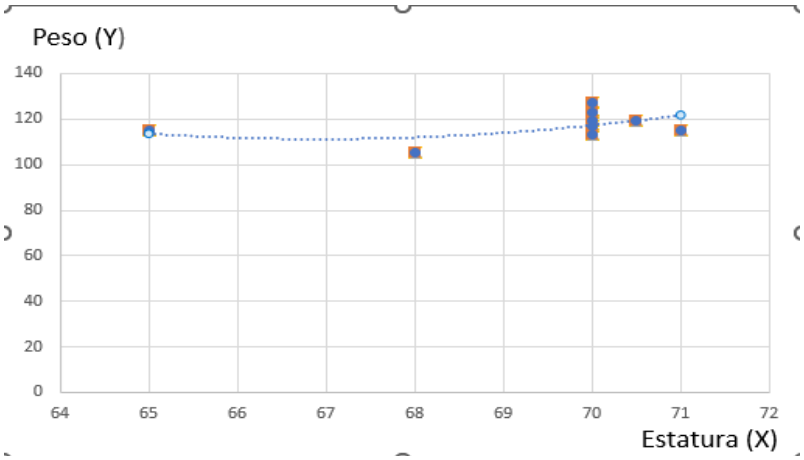


Fig. 3.10 Ajuste de datos de estaturas y pesos a un polinomio de segundo grado mediante programación C Sharp.

Como podemos ver en este polinomio la línea de tendencia aún no se adapta bien a los puntos.

Polinomio de tercer grado

```
-1.0357X^3    + 212.3955X^2   + -14,509.0268X   + 330,264.0647
```

Tabla de datos

P	Xi	Yi	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	XY	YX^2	YX^3
1	70.00	117.00	4,900.00	343,000.00	24,010,000.00	1,680,700,000.00	117,649,000,000.00	8,190.00	573,300.00	40,131,000.00
2	70.50	119.00	4,970.25	350,402.62	24,703,385.06	1,741,588,646.91	122,781,999,606.89	8,389.50	591,459.75	41,697,912.38
3	68.00	105.00	4,624.00	314,432.00	21,381,376.00	1,453,933,568.00	98,867,482,624.00	7,140.00	485,520.00	33,015,360.00
4	65.00	115.00	4,225.00	274,625.00	17,850,625.00	1,160,290,625.00	75,418,890,625.00	7,475.00	485,875.00	31,581,875.00
5	70.00	119.00	4,900.00	343,000.00	24,010,000.00	1,680,700,000.00	117,649,000,000.00	8,330.00	583,100.00	40,817,000.00
6	70.00	127.00	4,900.00	343,000.00	24,010,000.00	1,680,700,000.00	117,649,000,000.00	8,890.00	622,300.00	43,561,000.00
7	70.00	113.00	4,900.00	343,000.00	24,010,000.00	1,680,700,000.00	117,649,000,000.00	7,910.00	553,700.00	38,759,000.00
8	70.00	123.00	4,900.00	343,000.00	24,010,000.00	1,680,700,000.00	117,649,000,000.00	8,610.00	602,700.00	42,189,000.00
9	71.00	115.00	5,041.00	357,911.00	25,411,681.00	1,804,229,351.00	128,100,283,921.00	8,165.00	579,715.00	41,159,765.00

Deseas consultar otro grado de polinomio? (si) (no)

La Fig. 3.11 muestra la gráfica del ajuste de datos a un polinomio de tercer grado.

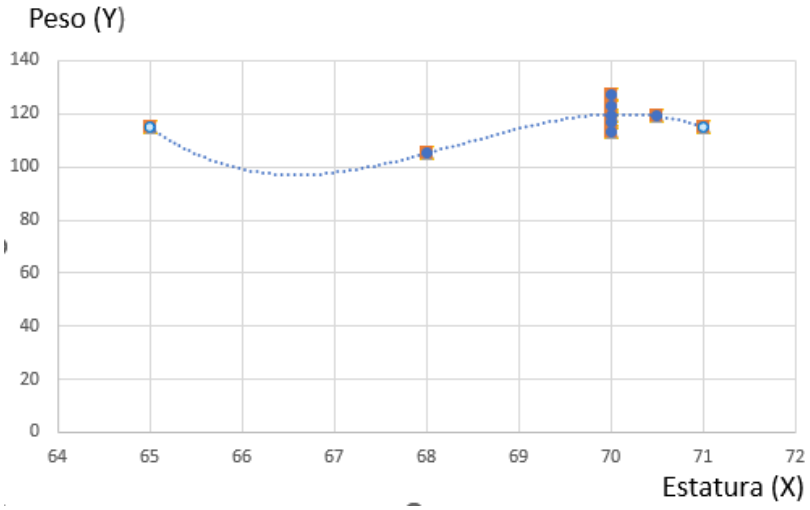


Fig. 3.11 Ajuste de datos de estaturas y pesos a un polinomio de tercer grado mediante programación C Sharp.

Como podemos ver la línea de tendencia ya se adapta más a los puntos, a partir de este polinomio la gráfica no cambia casi nada.

La Fig. 3.12 muestra la gráfica del ajuste de datos a un polinomio de cuarto grado, el cual es muy similar al ajuste del polinomio de tercer grado.

```
0.0156X^4    + -5.3126X^3    + 651.6719X^2   + -34,553.7058X   + 673,130.6143
```

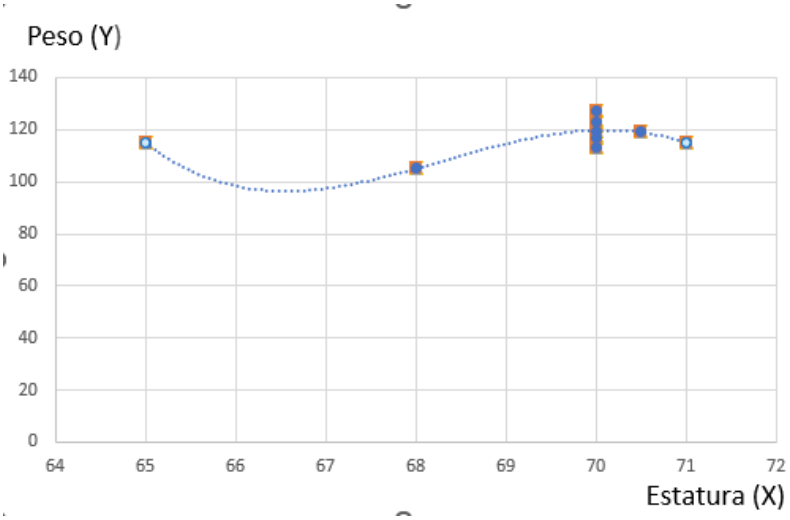


Fig. 3.12 Ajuste de datos de estaturas y peso a un polinomio de cuarto grado mediante programación C Sharp.

La Fig. 3.13 muestra la gráfica del ajuste de datos a un polinomio de quinto grado.

```
0.0001X^5 + -0.0077X^4    + -3.3006 X^3    + 594.5316X^2   + -35,356.0186X   + 721,827.0053
```

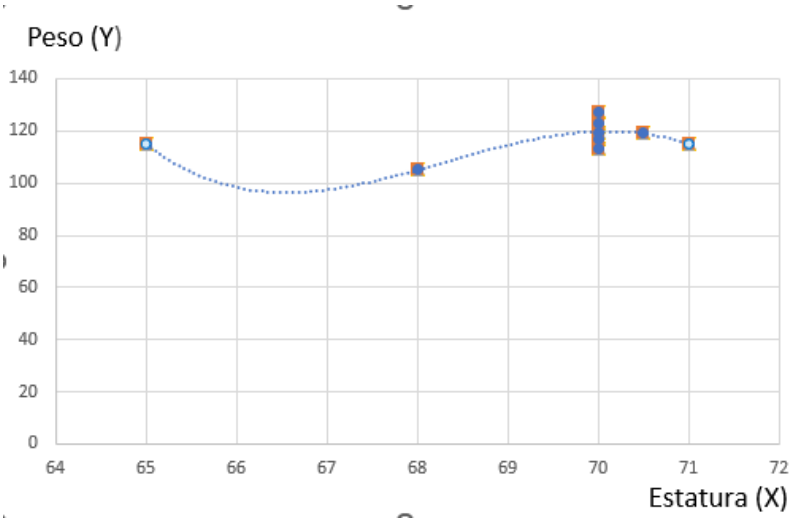


Fig. 3.13 Ajuste de datos de estaturas y peso a un polinomio de quinto grado mediante programación C Sharp.

Conclusión

Con los polinomios calculados y graficas obtenidas se puede ver que a partir de la gráfica que ajusta a los datos de estaturas y pesos mediante un polinomio de tercer grado, las gráficas de ajuste a polinomios de cuarto y quinto grado, prácticamente son idénticas.

Código en C#

```
Console.WriteLine("Benvenida al Ejercicio 18 de Estaturas y pesos de supermodelos.");
Console.WriteLine("A continuacion debemos desifrar si ¿Existe una correlación entre la estatura y el peso? y resolver el ejercico por el metodo de minimos cuadrados");
Console.WriteLine("Ingresa la cantidad de supermodelos que se les medira el peso y estatura");//Aqui pido la cantidad de puntos que tendremos
int shadow = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
Console.Clear();
double[] estatura = new double[shadow];//declaro los xi
double[] peso = new double[shadow];//declaro los yi
for (int i = 0; i < shadow; i++)//este for sirve para guardar los valores de xi
{
   Console.WriteLine("Ingresa la estatura del modelo #" + (i + 1));
   estatura[i] = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
   Console.Clear();
}
for (int j = 0; j < shadow; j++)//este for sirve para guardar los valores de yi
{
   Console.WriteLine("Ingresa el peso del modelo #" + (j + 1));
   peso[j] = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
   Console.Clear();
}
double Xi = 0, Xi2 = 0, Xi3 = 0, Xi4 = 0, XY = 0, YX2 = 0, yi = 0, Xi5 = 0, Xi6 = 0, Xi7 = 0, YX3 = 0, YX4 = 0, YX5 = 0,Xi8=0,Xi9=0,Xi10=0;
for (int i = 0; i < shadow; i++)//dentro de este for se hacen todas las operaciones
{
   Xi = Xi + estatura[i];
   yi = yi + peso[i];
   Xi2 = Xi2 + Math.Pow(estatura[i], 2);
   Xi3 = Xi3 + Math.Pow(estatura[i], 3);
   Xi4 = Xi4 + Math.Pow(estatura[i], 4);
   Xi5 = Xi5 + Math.Pow(estatura[i], 5);
   Xi6 = Xi6 + Math.Pow(estatura[i], 6);
   Xi7 = Xi7 + Math.Pow(estatura[i], 7);
   Xi8 = Xi8 + Math.Pow(estatura[i], 8);
   Xi9 = Xi9 + Math.Pow(estatura[i], 9);
   Xi10 = Xi10 + Math.Pow(estatura[i], 10);
   XY = XY + (estatura[i] * peso[i]);
   YX2 = YX2 + (Math.Pow(estatura[i], 2) * peso[i]);
   YX3 = YX3 + (Math.Pow(estatura[i], 3) * peso[i]);
   YX4 = YX4 + (Math.Pow(estatura[i], 4) * peso[i]);
   YX5 = YX5 + (Math.Pow(estatura[i], 5) * peso[i]);
}
string nino = "yes";
string nino2 = "siuuu";
do
{
Console.WriteLine("Ingresa el grado que deseas obtener del polinomio (Maximo 5To grado)");//se pide al usuario que ingrese el grado del polinomio
```

```
int gojo = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
   if (gojo < 6)
   {
      double[] miku = new double[6];
      double[] ValoresA = new double[6];
      double[,] makima = new double[6, 6];//declaramos nuestra matriz
      //formamos nuestra matriz con las variables que contienen todas las sumatorias de xi y yi
      makima[0, 0] = shadow; makima[0, 1] = Xi; makima[0, 2] = Xi2; makima[0, 3] = Xi3; makima[0,
4] = Xi4; makima[0, 5] = Xi5; miku[0] = yi;
      makima[1, 0] = Xi; makima[1, 1] = Xi2; makima[1, 2] = Xi3; makima[1, 3] = Xi4; makima[1, 4] =
Xi5; makima[1, 5] = Xi6; miku[1] = XY;
      makima[2, 0] = Xi2; makima[2, 1] = Xi3; makima[2, 2] = Xi4; makima[2, 3] = Xi5; makima[2, 4]
= Xi6; makima[2, 5] = Xi7; miku[2] = YX2; //2do grado
      makima[3, 0] = Xi3; makima[3, 1] = Xi4; makima[3, 2] = Xi5; makima[3, 3] = Xi6; makima[3, 4]
= Xi7; makima[3, 5] = Xi8; miku[3] = YX3; //3er grado
      makima[4, 0] = Xi4; makima[4, 1] = Xi5; makima[4, 2] = Xi6; makima[4, 3] = Xi7; makima[4, 4]
= Xi8; makima[4, 5] = Xi9; miku[4] = YX4; //4to grado
      makima[5, 0] = Xi5; makima[5, 1] = Xi6; makima[5, 2] = Xi7; makima[5, 3] = Xi8; makima[5, 4]
= Xi9; makima[5, 5] = Xi10; miku[5] = YX5; //5to grado

      //Pasos para resolver la matriz
      for (int columna = 0; columna < gojo; columna++) //Dentro de este For se encuentran las
operaciones necesarias para que se forme la hilera de unos e ir llenando de 0 los espacios sobrantes.
      {
         for (int fila = columna + 1; fila < (gojo + 1); fila++)//Se utilizan 2 Fors porque es una condición
cuando estás trabajando con matrices, así puedes ir cambiando valores por coordenadas.
         {
            double factor = makima[fila, columna] / makima[columna, columna];
            miku[fila] = miku[fila] - factor * miku[columna];
            for (int j = columna; j < (gojo + 1); j++)
            {
               makima[fila, j] = makima[fila, j] - factor * makima[columna, j];
            }
         }
      }

      //Este For se encarga de calcular las a1,a2,etc"
      for (int i = gojo; i >= 0; i--)
      //Este for es diferente, porque al terminar con el método el primer resultado es el de la última fila
así que con este for vamos de abajo hacia arriba.
      {
         double hola = 0;
         for (int j = i + 1; j < (gojo + 1); j++)
         {
            hola = hola + makima[i, j] * ValoresA[j];
         }
         ValoresA[i] = (miku[i] - hola) / makima[i, i];
      }
      if (gojo == 1)//aqui mostramos el polinomio de 1er grado
```

```
      {
         double a0 = (((yi) * (Xi2)) - ((Xi) * (XY))) / ((shadow * Xi2) - (Math.Pow(Xi, 2)));
         double a1 = (((shadow) * (XY)) - ((yi) * (Xi))) / ((shadow * Xi2) - (Math.Pow(Xi, 2)));
         Console.WriteLine("El polinomio de primer grado de la funcion es:" + " " + a1.ToString("N4") +
"X   " + " " + "+" + " " + a0.ToString("N4"));
         Console.WriteLine(" ");
         Console.WriteLine("P" + "       Xi" + "         Yi" + "         X^2" + "            XY");
         for (int j = 0; j < shadow; j++)
         {
            Console.WriteLine((j + 1) + "  " + estatura[j].ToString("N5") + "  " + peso[j].ToString("N5")
+ "  " + Math.Pow(estatura[j], 2).ToString("N5") + "  " + (estatura[j] * peso[j]).ToString("N5") );

         }

      }
      if (gojo == 2)//aqui mostramos el polinomio de 2do grado
      {
         Console.WriteLine("El polinomio de segundo grado de la funcion es:" + " " +
ValoresA[2].ToString("N4") + "X^2   " + " " + "+" + " " + ValoresA[1].ToString("N4") + "X  " + " " +
"+" + " " + ValoresA[0].ToString("N4"));
         Console.WriteLine(" ");
         Console.WriteLine("P" + "       Xi" + "         Yi" + "         X^2" + "         X^3" + "           X^4" + "
XY" + "           YX^2");
         for (int j = 0; j < shadow; j++)
         {
            Console.WriteLine((j + 1) + "  " + estatura[j].ToString("N5") + "  " + peso[j].ToString("N5")
+ "  " + Math.Pow(estatura[j], 2).ToString("N5") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 3).ToString("N5") + "  "
+ Math.Pow(estatura[j], 4).ToString("N5") + "  " + (estatura[j] * peso[j]).ToString("N5") + " " +
(Math.Pow(estatura[j], 2) * peso[j]).ToString("N5"));

         }
      }
      if (gojo == 3)//aqui mostramos el polinomio de 3er grado
      {
         Console.WriteLine("El polinomio de tercer grado de la funcion es:" + " " +
ValoresA[3].ToString("N4") + "X^3   " + " " + "+" + " " + ValoresA[2].ToString("N4") + "X^2  " + " "
+ "+" + " " + ValoresA[1].ToString("N4") + "X  " + " " + "+" + " " + ValoresA[0].ToString("N4"));
         Console.WriteLine(" ");

         Console.WriteLine("P" + "   Xi" + "     Yi" + "    X^2" + "      X^3" + "        X^4" + "          X^5"
+ "            X^6" + "           XY" + "           YX^2" + "              YX^3");
         Console.WriteLine(" ");
         for (int j = 0; j < shadow; j++)
         {
            Console.WriteLine((j + 1) + "  " + estatura[j].ToString("N2") + "  " + peso[j].ToString("N2")
+ "  " + Math.Pow(estatura[j], 2).ToString("N2") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 3).ToString("N2") + "  "
+ Math.Pow(estatura[j], 4).ToString("N2") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 5).ToString("N2") + "  " +
Math.Pow(estatura[j], 6).ToString("N2") + "  " + (estatura[j] * peso[j]).ToString("N2") + "  " +
(Math.Pow(estatura[j], 2) * peso[j]).ToString("N2") + "  " + (Math.Pow(estatura[j], 3) *
```

```
peso[j]).ToString("N2"));
            }
        }
        if (gojo == 4)//aqui mostramos el polinomio de 4to grado
        {
            Console.WriteLine("El polinomio de cuarto grado de la funcion es:" + " " +
ValoresA[4].ToString("N4") + "X^4   " + " " + "+" + " " + ValoresA[3].ToString("N4") + "X^3   " + " "
+ "+" + " " + ValoresA[2].ToString("N4") + "X^2  " + " " + "+" + " " + ValoresA[1].ToString("N4") +
"X  " + " " + "+" + " " + ValoresA[0].ToString("N4"));
            Console.WriteLine(" ");
            Console.WriteLine("P" + "    Xi" + "      Yi" + "          X^2" + "          X^3" + "              X^4" +
"              X^5" + "              X^6" + "              X^7" + "              X^8" + "          XY" + "
YX^2" + "        YX^3" + "          YX^4");
            for (int j = 0; j < shadow; j++)
            {
                Console.WriteLine((j + 1) + "  " + estatura[j].ToString("N2") + "  " + peso[j].ToString("N2")
+ "  " + Math.Pow(estatura[j], 2).ToString("N2") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 3).ToString("N2") + "  "
+ Math.Pow(estatura[j], 4).ToString("N2") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 5).ToString("N2") + "  " +
Math.Pow(estatura[j], 6).ToString("N2") + "  " + Math.Pow(estatura[j], 7).ToString("N2") + "  " +
Math.Pow(estatura[j], 8).ToString("N2") + "  " + (estatura[j] * peso[j]).ToString("N2") + "  " +
(Math.Pow(estatura[j], 2) * peso[j]).ToString("N2") + "  " + (Math.Pow(estatura[j], 3) *
peso[j]).ToString("N2") + "  " + (Math.Pow(estatura[j], 4) * peso[j]).ToString("N2"));
            }
        }
        if (gojo == 5)//aqui mostramos el polinomio de 5to grado
        {
            Console.WriteLine("El polinomio de quinto grado de la funcion es:" + " " +
ValoresA[5].ToString("N4") + "X^5" + " " + "+" + " " + ValoresA[4].ToString("N4") + "X^4   " + " " +
"+" + " " + ValoresA[3].ToString("N4") + " " + "X^3   " + " " + "+" + " " + ValoresA[2].ToString("N4")
+ "X^2  " + " " + "+" + " " + ValoresA[1].ToString("N4") + "X  " + " " + "+" + " " +
ValoresA[0].ToString("N4"));
            Console.WriteLine("Aqui no mostre la tabla porque los valores son demasiados grande y no cabe
=( ");

        }
    }
    else Console.WriteLine("Potencia no valida");

    Console.WriteLine("Deseas consultar otro grado de polinomio?  (si) (no) ");//Le preguntamos al
usuario si desea consultar otro polinomio
  nino = Convert.ToString(Console.ReadLine());
    string ConvertirMayusculas(string texto)
    {
        return texto.ToUpper();
    }
    nino2 = ConvertirMayusculas(nino);
    Console.Clear();
} while (nino2 == "SI");//si elige que si quiere consultar otro polinomio este while nos devolvera al
inicio de lo contrario terminara el programa
```

```
Console.WriteLine("Terminamos =)");
```

Problema 2

Homicidios y tamaño de la población. En la siguiente tabla se listan los números de homicidios y los tamaños poblacionales (en cientos de miles) de ciudades grandes de Estados Unidos durante un año reciente (según datos del *New York Times*). ¿Qué concluye usted?

Homicidios	258	264	402	253	111	648	288	654	256	60	590
Población	4	6	9	6	3	29	15	38	20	6	81

Solución

Se presenta el procedimiento del cálculo por el **método de mínimos cuadrados** para ajustar los datos dados a una curva, en este caso, se pudo encajar todos los puntos en un polinomio de grado 12. También se presenta una gráfica que permite demostrar que un polinomio de grado 6 ajusta muy bien con un coeficiente R^2 mayor de 0.9. Por lo anterior, se concluye que el número de homicidios no tiene una correlación lineal favorable con respecto a la población, lo que significa que el aumento de homicidios es independiente del número de población. Sin embargo, el número de homicidios se ajusta a través de la curva de un polinomio de grado 6 al número de población.

Un polinomio de segundo grado que probablemente ajuste a los datos es

$$\sum_{i=1}^{m}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - f(x_i)\right]^2$$

El método de mínimos cuadrados para realizar los cálculos, viene dado por las Ecs. (3.7)

$$ma_0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^4 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^2$$

Realizamos los cálculos en Excel en la Tabla 3.4, llamando x = homicidios a las distintas potencias de acuerdo a las fórmulas del método de mínimos cuadrados, así como y $f(x)$ = población.

Tabla 3.4 Cálculos de las variables *x* y *f(x)* requeridas por el método de mínimos cuadrados.

Puntos	x	$f(x)$	x^2	x^3	x^4	$x \times f(x)$	$x^2 \times f(x)$
1	258	4	66564	17173512	4430766096	1032	266256
2	264	6	69696	18399744	4857532416	1584	418176
3	402	9	161604	64964808	2.6116E+10	3618	1454436
4	253	6	64009	16194277	4097152081	1518	384054
5	111	3	12321	1367631	151807041	333	36963
6	648	29	419904	272097792	1.7632E+11	18792	12177216
7	288	15	82944	23887872	6879707136	4320	1244160
8	654	38	427716	279726264	1.8294E+11	24852	16253208
9	256	20	65536	16777216	4294967296	5120	1310720
10	60	6	3600	216000	12960000	360	21600
11	590	81	348100	205379000	1.2117E+11	47790	28196100
Σ	3784	217	1721994	916184116	5.3127E+11	109319	61762889

Sustituyendo los resultados obtenidos en la Tabla 3.4, obtenemos el sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas a resolver

$$11a_0 + 3784a_1 + 1721994a_2 = 217$$

$$3784a_0 + 1721994a_1 + 916184116a_2 = 109319$$

$1721994a_0 + 916184116a_1 + 5.3127x10^{11}a_2 = 61762889$, o

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 3784 & 1721994 & 217 \\ 3784 & 1721994 & 916184116 & 109319 \\ 1721994 & 916184116 & 5.3127\text{x}10^{11} & 61762889 \end{array}\right)$$

Resolveremos la matriz por el **método de Gauss-Jordan**, mediante el software Maple

```
> P := pointplot(a, b) :
> with(LinearAlgebra) :
```

$$> M := \begin{bmatrix} 11 & 3784 & 1721994 \\ 3784 & 1721994 & 916184116 \\ 1721994 & 916184116 & 5.3127\,x10^{11} \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 11 & 3784 & 1721994 \\ 3784 & 1721994 & 916184116 \\ 1721994 & 916184116 & 5.3127\,x10^{11} \end{bmatrix}$$

$$> T := \begin{bmatrix} 217 \\ 109319 \\ 61762889 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} 217 \\ 109319 \\ 61762889 \end{bmatrix}$$

> *ReducedRowEchelonForm*($\langle M|T \rangle$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{11}\,\frac{-5.067622220\,10^{13} + 505.4913120\,x10^{11}}{5.312700000\,x10^{11} - 5.190547919\,10^{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{420298}\,\frac{-1.834600377\,10^{16} + 1.841966217\,10^{5}\,x10^{11}}{5.312700000\,x10^{11} - 5.190547919\,10^{11}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2497508499779}{2311639\left(5.3127\,x10^{11} - \frac{1199867300146447564}{2311639}\right)} \end{bmatrix}$$

Los valores de $a_0,\ a_1\ y\ a_2$, son

$$a_0 = -\frac{1}{11} \times \frac{(-5.067622220x10^{13} + 505.4913120x10^{11})}{(5.312700000x10^{11} - 5.190547919x10^{11})}$$
$$= 0.9458477644$$

$$a_1 = \frac{1}{420298} \times \frac{(-1.834600377x10^{16} + 1.841966217x10^{16})}{(5.312700000x10^{11} - 5.190547919x10^{11})}$$
$$= 0.01434709875$$

$$a_2 = \frac{(2497508499779)}{(2311639\left(5.3127x10^{11} - \frac{1199867300146447564}{2311639}\right)}$$
$$= 8.844760812x10^{-5}$$

Sustituimos los valores de $a_0,\ a_1\ y\ a_2$ en

$$ma_0+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^2=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)$$

obteniendo

$$\frac{(2497508499779)}{2311639\left(5.3127x10^{11}-\frac{1199867300146447564}{2311639}\right)}x^2$$
$$-\frac{1}{420298}\frac{(-1.834600377x10^{16}+1.841966217x10^{16})}{(5.312700000x10^{11}-5.190547919x10^{11})}x$$
$$-\frac{1}{11}\frac{(-5.067622220x10^{13}+505.4913120x10^{11})}{(5.312700000x10^{11}-5.190547919x10^{11})}$$

En la Fig. 3.14 podemos observar que un polinomio de grado 2 se aproxima a la base de datos experimentales dados. Las instrucciones de Maple son

```
> R := plot( 8.844760812·10^-5 x^2 + 0.01434709875 x + 0.9458477644, x = 1000 ...600, y = -20
  ..25, color = "Red") :

> display(P, R);
```

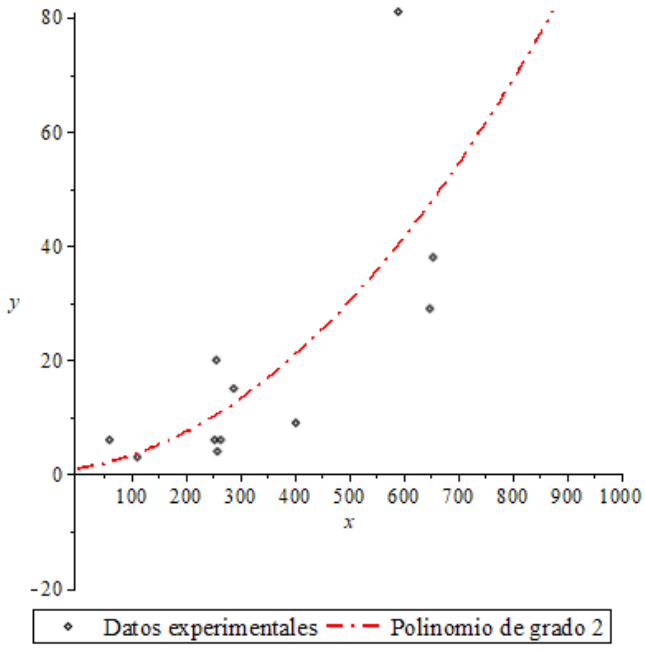


Fig. 3.14 Gráfica de ajuste de datos experimentales de homicidios (x) y tamaño de población (y) a un polinomio de grado 2.

Como se puede observar, los datos experimentales aún están dispersos con respecto al polinomio de grado 2, es por esto que debemos seguir aumentando el grado del polinomio. Para este caso hacemos uso del software Maple, para este problema calculamos hasta obtener un polinomio de grado 12. Las instrucciones Maple por el método de mínimos cuadrados son:

```
> with(CurveFitting) :

A := LeastSquares([[258, 4], [264, 6], [402, 9], [253, 6], [111, 3], [648, 29], [288, 15], [654,
  38], [256, 20], [60, 6], [590, 81]], x, curve = a·x^12 + b·x^11 + c·x^10 + d·x^9 + e·x^8 + f·x^7
  + g·x^6 + h·x^5 + i·x^4 + j·x^3 + k·x^2 + l)

> A := subs(_t[12] = 1, A);
```

Con los resultados obtenidos de Maple graficamos datos experimentales y polinomio de grado 12 que se presenta en la Fig. 3.15.

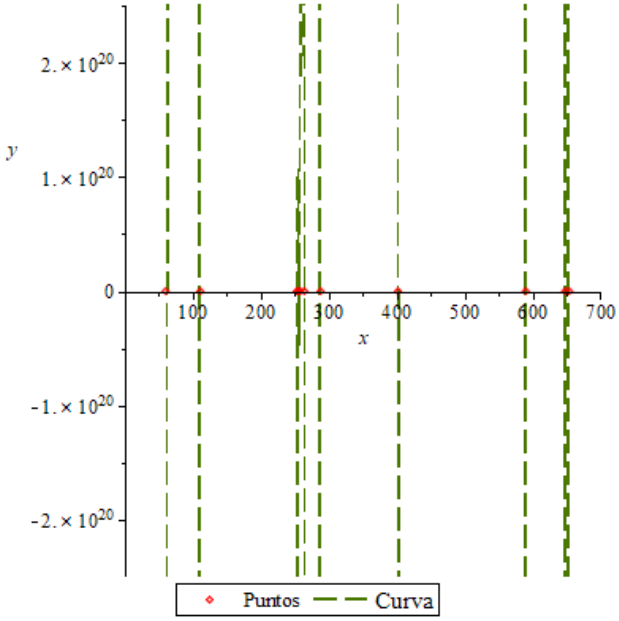


Fig. 3.15 Gráfica de ajuste de datos experimentales de homicidios (x) y tamaño de población (y) a un polinomio de grado 12.

Asimismo, en la Fig. 3.16 se muestra que los datos experimentales se relacionan favorablemente con un polinomio de grado 6 con un coeficiente R^2 de 0.9269.

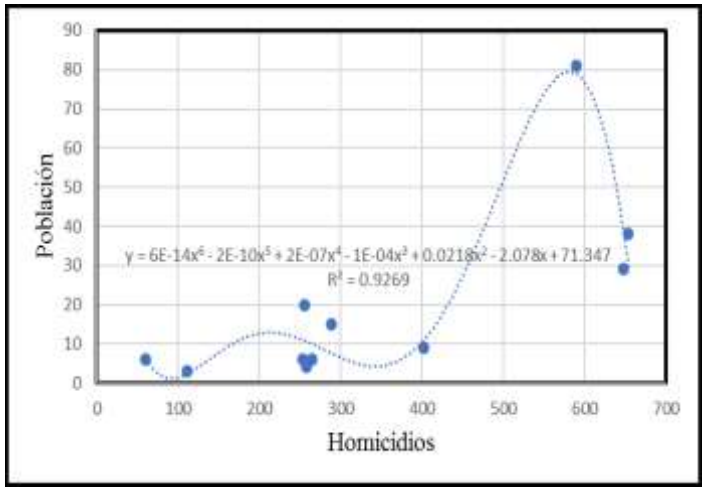


Fig. 3.16 Gráfica de ajuste de datos experimentales de homicidios (x) y tamaño de población (y) a un polinomio de grado 6.

Problema 3

Un estudio efectuado por VPI&SU para determinar si las mediciones estáticas de la fuerza de un brazo tienen influencia sobre las características de ‘’levantamiento dinámico’’ de cierto individuo. Veinticinco individuos se sometieron a pruebas de fortaleza y luego se les pidió que hicieran una prueba de levantamiento de peso, en el que este se elevaba de forma dinámica por encima de la cabeza. A continuación, se presentan los datos:

a) Estime la recta de regresión.

b) Estime la resistencia al corte para una tensión normal de 24.5 kilogramos por centímetro cuadrado.

Tensión normal, x	26.8	25.4	28.9	23.6	27.7	23.9	24.7	28.1	26.9	27.4	22.6	25.6
Resistencia al corte, y	26.5	27.3	24.2	27.1	23.6	25.9	26.3	22.5	21.7	21.4	25.8	24.9

Solución

En la Fig. 3.17 se presentan los datos dados y la curva que ajusta a ellos mediante un polinomio de grado 6, aunque con un coeficiente $R^2 = 0.6486$.

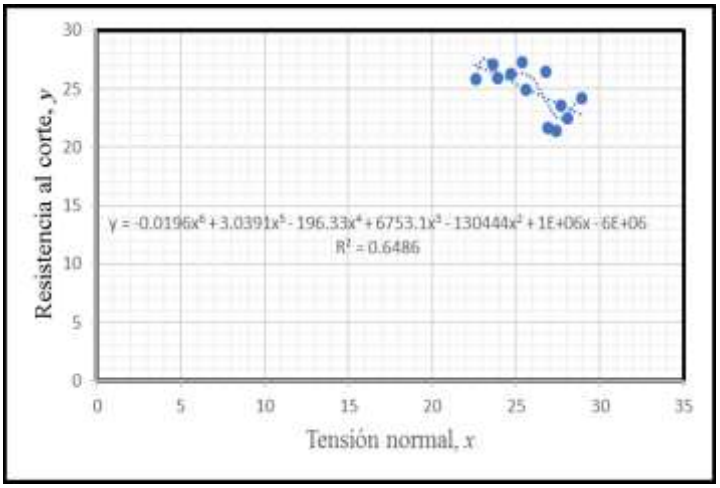


Fig. 3.17 Gráfica de ajuste de datos experimentales de resistencia al corte y tensión normal a un polinomio de grado 6 con un coeficiente de determinación de 0.6486.

La solución mediante el **método de mínimos cuadrados** se presenta a través del procedimiento de enseguida. Las fórmulas a usar son

$$\sum_{i=1}^{m}\left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - f(x_i)\right]^2$$

la es

$$ma_0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^3+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^4=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)x_i^2$$

Hacemos uso de Excel para realizar los cálculos de las ecuaciones de los mínimos cuadrados que se presentan en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5 Cálculo de las variables requeridas por el método de mínimos cuadrados.

P	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	26.8	26.5	718.24	19248.832	515868.698	710.2	19033.36
2	25.4	27.3	645.16	16387.064	416231.426	693.42	17612.868
3	28.9	24.2	835.21	24137.569	697575.744	699.38	20212.082
4	23.6	27.1	556.96	13144.256	310204.442	639.56	15093.616
5	27.7	23.6	767.29	21253.933	588733.944	653.72	18108.044
6	23.9	25.9	571.21	13651.919	326280.864	619.01	14794.339
7	24.7	26.3	610.09	15069.223	372209.808	649.61	16045.367
8	28.1	22.5	789.61	22188.041	623483.952	632.25	17766.225
9	26.9	21.7	723.61	19465.109	523611.432	583.73	15702.337
10	27.4	21.4	750.76	20570.824	563640.578	586.36	16066.264
11	22.6	25.8	510.76	11543.176	260875.778	583.08	13177.608
12	25.6	24.9	655.36	16777.216	429496.73	637.44	16318.464
Σ	311.6	297.2	8134.26	213437.162	5628213.39	7687.76	199930.574

Sustituimos los resultados arrojados por la Tabla 3.5. En las ecuaciones del método de mínimos cuadrados, obteniendo un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y su forma matricial, respectivamente

$$12a_0+311.6a_1+8134.26a_2=297.2$$
$$311.6a_0+8134.26a_1+213437.162a_2=7687.76$$
$$8134.26a_0+213437.162a_1+5628213.39a_2=199930.574$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 311.6 & 8134.26 & 297.2 \\ 311.6 & 8134.26 & 213437.162 & 7687.76 \\ 8134.26 & 213437 & 5628213.39 & 19930.574 \end{array}\right)$$

Resolveremos por el método de Gauss-Jordan en Maple.

```
> P := pointplot(a, b) :
> with(LinearAlgebra) :
> M := [ 12        311.6      8134.26
         311.6     8134.26    213437.162
         8134.26   213437.162 5628213.39 ]
```

$$M := \begin{bmatrix} 12 & 311.6 & 8134.26 \\ 311.6 & 8134.26 & 2.13437162\,10^{5} \\ 8134.26 & 2.13437162\,10^{5} & 5.62821339\,10^{6} \end{bmatrix}$$

> $T := \begin{bmatrix} 297.2 \\ 7687.76 \\ 19930.574 \end{bmatrix}$

$$T := \begin{bmatrix} 297.2 \\ 7687.76 \\ 19930.574 \end{bmatrix}$$

> $ReducedRowEchelonForm(\langle M|T\rangle)$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & -9.274365721709\,80\,10^{5} \\ -0. & 1. & -0. & 72412.0278811726 \\ 0. & 0. & 1. & -1405.66588991766 \end{bmatrix}$$

Obtenemos así, $a_0,\ a_1\ y\ a_2$:

$a_0 = -9.27436572170980 \text{x} 10^5$

$a_1 = 72412.0278811726$

$a_2 = -1405.66588991766$

Sustituimos los valores de $a_0,\ a_1\ y\ a_2$ en la primera fórmula dada, para formar una ecuación de grado 2:

$$-1405.66588991766x^2 - 72412.0278811726x + \left(-9.27436572170980x10^5\right)$$

La Fig. 3.18 nos muestra la gráfica de los datos experimentales y la curva de un polinomio de grado 12, la cual, como se observa, se ajusta muy favorablemente a los datos dados. Las instrucciones Maple son

> $with(CurveFitting)$:

> $A := LeastSquares([[26.8, 26.5], [25.4, 27.3], [28.9, 24.2], [23.6, 27.1], [27.7, 23.6], [23.9, 25.9\ ], [24.7, 26.3], [28.1, 22.5], [26.9, 21.7], [27.4, 21.4], [22.6, 25.8], [25.6, 24.9]], x, curve = a \cdot x^{12} + b \cdot x^{11} + c \cdot x^{10} + d \cdot x^9 + e \cdot x^8 + f \cdot x^7 + g \cdot x^6 + h \cdot x^5 + i \cdot x^4 + j \cdot x^3 + k \cdot x^2 + l \cdot x^1 + m)$

$$\begin{aligned} A := {} & 8.52275215294877\,10^{-9} + 2.57786143230058\,10^{-11}x \\ & + 2.88425320297828\,10^{-10}x^2 + 3.69028399492422\,10^{-9}x^3 \\ & + 4.19889929280291\,10^{-8}x^4 + 4.030688187648\,14\,10^{-7}x^5 \\ & + 0.00000294209388927068\,x^6 + 0.0000123833127204561\,x^7 \\ & - 0.00000240913580893294\,x^8 + 1.84456752487899\,10^{-7}x^9 \\ & - 7.03027750106963\,10^{-9}x^{10} + 1.33582099512179\,10^{-10}x^{11} \\ & - 1.012408037700\,11\,10^{-12}x^{12} \end{aligned}$$

> $with(plots)$:

> $EjeX := [26.8, 25.4, 28.9, 23.6, 27.7, 23.9, 24.7, 28.1, 26.9, 27.4, 22.6, 25.6];$

$EjeX := [26.8, 25.4, 28.9, 23.6, 27.7, 23.9, 24.7, 28.1, 26.9, 27.4, 22.6, 25.6]$

> $EjeY := [26.5, 27.3, 24.2, 27.1, 23.6, 25.9, 26.3, 22.5, 21.7, 21.4, 25.8, 24.9];$

$EjeY := [26.5, 27.3, 24.2, 27.1, 23.6, 25.9, 26.3, 22.5, 21.7, 21.4, 25.8, 24.9]$

> $P := pointplot(EjeX, EjeY, color = \text{"red"})$:
> $F := plot(A, x = 15..30, y = 20..40,)$:
> $display(F, P)$

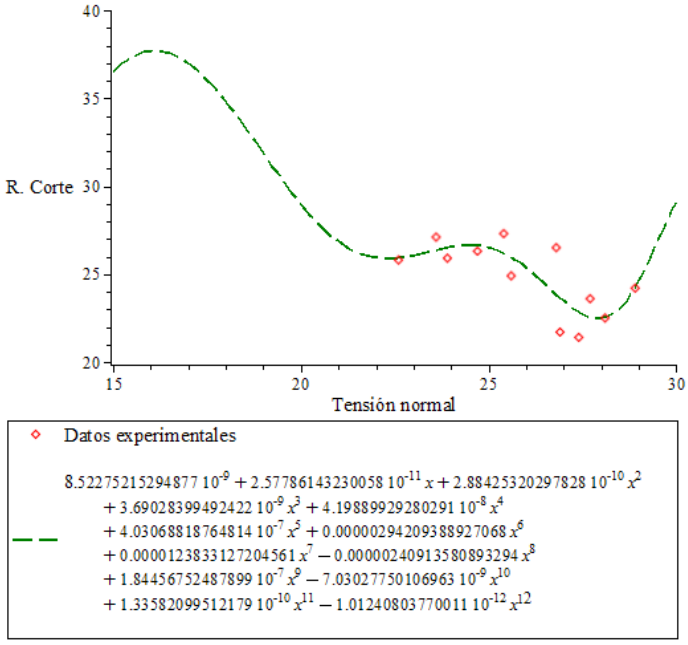


Fig. 3.18 Gráfica de ajuste de datos experimentales de resistencia al corte y tensión normal a un polinomio de grado 12.

Problema 4

Un estudio efectuado por VPI&Su para determinar si las mediciones estáticas de la fuerza de un brazo tienen influencia sobre las características de "levantamiento dinámico" de cierto individuo. Veinticinco individuos se sometieron a pruebas de fortaleza y luego se les pidió que hicieran una prueba de levantamiento de peso, en el que este se elevaba en forma dinámica por encima de la cabeza. A continuación, se presentan los datos en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6 Base de datos del Problema 4.

Individuo	Fuerza del brazo, x	Levantamiento dinámico, y
1	17.3	71.7
2	19.3	48.3
3	19.5	88.3
4	19.7	75.0
5	22.9	91.7
6	23.1	100.0
7	26.4	73.3
8	26.8	65.0
9	27.6	75.0
10	28.1	88.3
11	28.2	68.3
12	28.7	96.7
13	29.0	76.7
14	29.6	78.3
15	29.9	60.0
16	29.9	71.7
17	30.3	85.0
18	31.3	85.0
19	36.0	88.3
20	39.5	100.0
21	40.4	100.0
22	44.3	100.0
23	44.6	91.7
24	50.4	100.0
25	55.9	71.7

a) Estime los valores de $\beta_0 + \beta_1$ para la curva de regresión lineal $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1$

b) Encuentre una estimación puntual de $\mu_{Y|30}$

c) Grafique los residuos contra las *x* (fuerza del brazo). Comente los resultados.

Solución por el método de mínimos cuadrados

Para solucionar este problema se utilizó el método de mínimos cuadrados (Walpole, Myers y Myers 2007) y el software Maple. Obeniendo b_0 y b_1 de la fórmula de $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1$, como sigue.

$$b_1 = \frac{m \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot x_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} (x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \bar{x}\right) \cdot \left(f(x_i) - f(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{3.8}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} f(x_i) - b_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]}{m} = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x} \tag{3.9}$$

Primero calculamos los valores de las sumatorias de x_i, $(x_i)^2$, $f(x_i)$ y de $f(x_i) \cdot x_i$, para ello se colocaron los valores asignados en la Tabla 3.6 como vectores en Maple.
Valor de Fuerza del brazo *x*

Levantamiento dinámico y

$xv := \langle 17.3, 19.3, 19.5, 19.7, 22.9, 23.1, 26.4, 26.8, 27.6, 28.1, 28.2, 28.7, 29.0, 29.6, 29.9, 29.9, 30.3, 31.3, 36.0, 39.5, 40.4, 44.3, 44.6, 50.4, 55.9\rangle$

$f := \langle 71.7, 48.3, 88.3, 75.0, 91.7, 100.0, 73.3, 65.0, 75.0, 88.3, 68.3, 96.7, 76.7, 78.3, 60.0, 71.7, 85.0, 85.0, 88.3, 100.0, 100.0, 100.0, 91.7, 100.0, 71.7\rangle$:

Sumatorias
Los valores de las sumatorias se encontraron utilizando una de las soluciones que nos proporciona Maple para obtener el resultado de forma directa, siendo $sum('V[i]', i = n..n)$ donde *sum* significa sumatoria, *V* es el vector, *i* es la posición del vector, es por ello que después se le indica de que posición (i) a que cantidad (*n*) se va a sumar.

$\sum_{i=1}^{m} x_i$:> $sx := sum('xv[i]', i = 1..25)$

$sx := 778.7$

$\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2$:> $sxc := sum('(xv[i])^2', i = 1..25)$

$sxc := 26591.63$

$\sum_{i=1}^{m} f(x_i)$:> $sf := sum('f[i]', i = 1..25)$

$sf := 2050.0$

$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot x_i$:> $sxf := sum('(xv[i]) \cdot (f[i])', i = 1..25)$

$sxf := 65164.04$

a) valores de b_0 y de b_1
Después del cálculo de las sumatorias se procede a sustituir las Ecs. (3.8) y (3.9)

> $m := 25$:

> $b_1 := evalf\left(\frac{((m \cdot sxf) - (sx \cdot sf))}{((m \cdot sxc) - (sx)^2)}\right)$;

$b_1 := 0.5608977925$ ◁ *Respuesta* a)

> $b_0 := evalf\left(\frac{((sf) - (b_1 \cdot sx))}{(m)}\right)$;

$b_0 := 64.52915556$ ◁ *Respuesta* a)

Encontrando que los valores de $b_1 = 0.5608977925$ y $a_0 = 64.52915556$, una vez que sabemos los

valores de b_0 y b_1 podemos sustituir la fórmula de $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1$:

> $\widehat{y} := b_0 + b_1 \cdot x;$

$$\widehat{y} := 0.5608977925\, x + 64.52915556$$

Con ello, podemos graficas la recta de regresión lineal, como se muestra en la Fig. #.

b) cuando $x = 30$

> $x := 30:$

> $\widehat{y1} := b_0 + b_1 \cdot x$

$$\widehat{y1} := 81.35608934 \quad \triangleleft \textit{Respuesta} \quad \text{b)}$$

c) Graficas

En las Figs. 3.19 y 3.20 se pueden observar los datos experimentales y la recta de regresión lineal, así como los residuales, respectivamente. Las instrucciones Maple son

```
> with(plots):
> F := plot(ŷ, x = 16..56, y = 40..105, style = line, color
      = "MediumPurple"):

>
  G := plot(Vector([xv[1], xv[2], xv[3], xv[4], xv[5], xv[6], xv[7], xv[8], xv[9], xv[10], xv[11],
    xv[12], xv[13], xv[14], xv[15], xv[16], xv[17], xv[18], xv[19], xv[20], xv[21], xv[22], xv[23],
    xv[24], xv[25]]), Vector([f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7], f[8], f[9], f[10], f[11], f[12], f[13], f[14],
    f[15], f[16], f[17], f[18], f[19], f[20], f[21], f[22], f[23], f[24], f[25]]), style = point, color
     = "DarkCyan"):

display({F, G})
```

y

> $x := 30:$

> $\widehat{y1} := b_0 + b_1 \cdot x$

$$\widehat{y1} := 81.35608934$$

>

```
  y1 := b[0] + b[1]·xv[1]; y2 := b[0] + b[1]·xv[2]; y3 := b[0] + b[1]·xv[3]; y4
      := b[0] + b[1]·xv[4]; y5 := b[0] + b[1]·xv[5]; y6 := b[0] + b[1]·xv[6]; y7
      := b[0] + b[1]·xv[7]; y8 := b[0] + b[1]·xv[8]; y9 := b[0] + b[1]·xv[9]; y1(
      := b[0] + b[1]·xv[10]; y11 := b[0] + b[1]·xv[11]; y12 := b[0] + b[1]
     ·xv[12]; y13 := b[0] + b[1]·xv[13]; y14 := b[0] + b[1]·xv[14]; y15
      := b[0] + b[1]·xv[15]; y16 := b[0] + b[1]·xv[16]; y17 := b[0] + b[1]
     ·xv[17]; y18 := b[0] + b[1]·xv[18]; y19 := b[0] + b[1]·xv[19]; y20
      := b[0] + b[1]·xv[20]; y21 := b[0] + b[1]·xv[21]; y22 := b[0] + b[1]
     ·xv[22]; y23 := b[0] + b[1]·xv[23]; y24 := b[0] + b[1]·xv[24]; y25
      := b[0] + b[1]·xv[25];
```

$y1 := 74.23268737$	$y14 := 81.13173022$
$y2 := 75.35448296$	$y15 := 81.29999956$
$y3 := 75.46666251$	$y16 := 81.29999956$
$y4 := 75.57884207$	$y17 := 81.52435867$
$y5 := 77.37371501$	$y18 := 82.08525647$
$y6 := 77.48589457$	$y19 := 84.72147609$
$y7 := 79.33685728$	$y20 := 86.68461836$
$y8 := 79.56121640$	$y21 := 87.18942638$
$y9 := 80.00993463$	$y22 := 89.37692777$

$y10 := 80.29038353$	$y23 := 89.54519711$
$y11 := 80.34647331$	$y24 := 92.79840430$
$y12 := 80.62692220$	$y25 := 95.88334216$
$y13 := 80.79519154$	

```
> H1 := plot(Vector([xv[1], xv[1]]), Vector([f[1], y1]), style = line,
      color = "Maroon") :

> H2 := plot(Vector([xv[2], xv[2]]), Vector([f[2], y2]), style = line,
      color = "LightCoral") :

> H3 := plot(Vector([xv[3], xv[3]]), Vector([f[3], y3]), style = line,
      color = "Tomato") :

> H4 := plot(Vector([xv[4], xv[4]]), Vector([f[4], y4]), style = line,
      color = "Feldspar") :

> H5 := plot(Vector([xv[5], xv[5]]), Vector([f[5], y5]), style = line,
      color = "Chocolate") :

> H6 := plot(Vector([xv[6], xv[6]]), Vector([f[6], y6]), style = line,
      color = "SandyBrown") :

> H7 := plot(Vector([xv[7], xv[7]]), Vector([f[7], y7]), style = line,
      color = "DarkOrange") :

> H8 := plot(Vector([xv[8], xv[8]]), Vector([f[8], y8]), style = line,
      color = "DarkGoldenrod") :

> H9 := plot(Vector([xv[9], xv[9]]), Vector([f[9], y9]), style = line,
      color = "Goldenrod") :

> H10 := plot(Vector([xv[10], xv[10]]), Vector([f[10], y10]), style
      = line, color = "DarkKhaki") :

> H11 := plot(Vector([xv[11], xv[11]]), Vector([f[11], y11]), style
      = line, color = "Olive") :

> H12 := plot(Vector([xv[12], xv[12]]), Vector([f[12], y12]), style
      = line, color = "OliveDrab") :

> H13 := plot(Vector([xv[13], xv[13]]), Vector([f[13], y13]), style
      = line, color = "YellowGreen") :

> H14 := plot(Vector([xv[14], xv[14]]), Vector([f[14], y14]), style
      = line, color = "Lime") :

> H15 := plot(Vector([xv[15], xv[15]]), Vector([f[15], y15]), style
      = line, color = "PaleGreen") :

> H16 := plot(Vector([xv[16], xv[16]]), Vector([f[16], y16]), style
      = line, color = "MediumSpringGreen") :

> H17 := plot(Vector([xv[17], xv[17]]), Vector([f[17], y17]), style
      = line, color = "Aquamarine") :

> H18 := plot(Vector([xv[18], xv[18]]), Vector([f[18], y18]), style
      = line, color = "LightSeaGreen") :
```

```
> H19 := plot(Vector([xv[19], xv[19]]), Vector([f[19], y19]), style
      = line, color = "DarkSlateGray") :

> H20 := plot(Vector([xv[20], xv[20]]), Vector([f[20], y20]), style
      = line, color = "CadetBlue") :

> H21 := plot(Vector([xv[21], xv[21]]), Vector([f[21], y21]), style
      = line, color = "RoyalBlue") :

> H22 := plot(Vector([xv[22], xv[22]]), Vector([f[22], y22]), style
      = line, color = "Navy") :

> H23 := plot(Vector([xv[23], xv[23]]), Vector([f[23], y23]), style
      = line, color = "SlateBlue") :

> H24 := plot(Vector([xv[24], xv[24]]), Vector([f[24], y24]), style
      = line, color = "Fuchsia") :

> H25 := plot(Vector([xv[25], xv[25]]), Vector([f[25], y25]), style
      = line, color = "DeepPink") :

> display({F, G, H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, H9, H10, H11, H12,
      H13, H14, H15, H16, H17, H18, H19, H20, H21, H22, H23, H24,
      H25})
```

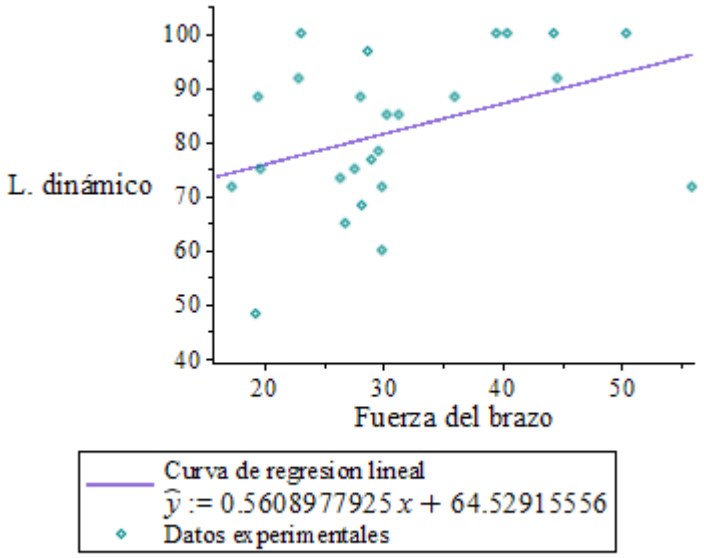


Fig. 3.19 Recta de regresión lineal de la fuerza del brazo versus levantamiento dinámico.

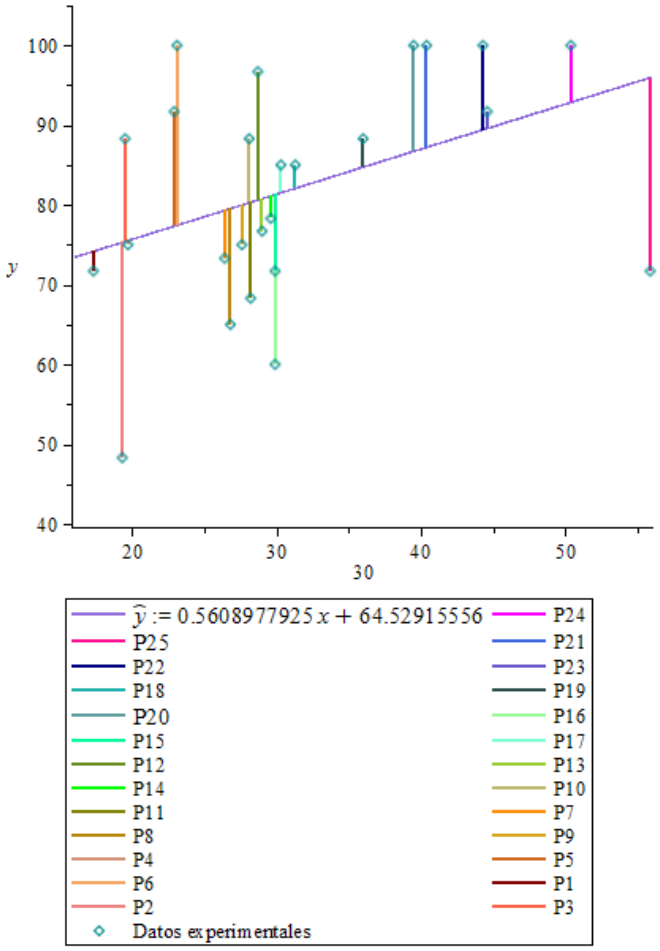


Fig. 3.20 Residuales.

Valores residuales de los puntos

Finalmente la forma para saber cuál es la cantidad de residuos en el análisis de regresión es sustituir la función de la curva de regresión línea $\hat{y} = 0.5608977925x + 64.52915556$ con los valores de x de la Tabla # y restando el resultado que salga de cada x a la y.

>

$$r1 := f_1 - y1;\ r2 := f_2 - y2;\ r3 := f_3 - y3;\ r4 := f_4 - y4;\ r5 := f_5 - y5;\ r6 := f_6 - y6;\ r7 := f_7 - y7;\ r8 := f_8 - y8;\ r9 := f_9 - y9;\ r10 := f_{10} - y10;\ r11 := f_{11} - y11;\ r12 := f_{12} - y12;\ r13 := f_{13} - y13;\ r14 := f_{14} - y14;\ r15 := f_{15} - y15;\ r16 := f_{16} - y16;\ r17 := f_{17} - y17;\ r18 := f_{18} - y18;\ r19 := f_{19} - y19;\ r20 := f_{20} - y20;\ r21 := f_{21} - y21;\ r22 := f_{22} - y22;\ r23 := f_{23} - y23;\ r24 := f_{24} - y24;\ r25 := f_{25} - y25;$$

$r1 := -2.53268737$	$r14 := -2.83173022$
$r2 := -27.05448296$	$r15 := -21.29999956$
$r3 := 12.83333749$	$r16 := -9.59999956$
$r4 := -0.57884207$	$r17 := 3.47564133$
$r5 := 14.32628499$	$r18 := 2.91474353$

$r6 := 22.51410543$	$r19 := 3.57852391$
$r7 := -6.03685728$	$r20 := 13.31538164$
$r8 := -14.56121640$	$r21 := 12.81057362$
$r9 := -5.00993463$	$r22 := 10.62307223$
$r10 := 8.00961647$	$r23 := 2.15480289$
$r11 := -12.04647331$	$r24 := 7.20159570$
$r12 := 16.07307780$	$r25 := -24.18334216$
$r13 := -4.09519154$	

Un polinomio de grado 6 ajusta con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.4092$, que no es un buen ajuste, como podemos observar en la Fig. 3.21

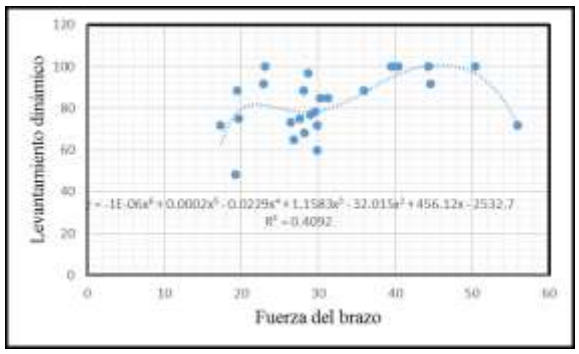


Fig. 3.21 Gráfica de ajuste de datos experimentales de resistencia al corte y tensión normal a un polinomio de grado 6 con un coeficiente de determinación de 0.4092.

Problema 5

Pesos de automóvil y consumo de combustible. A continuación, se presentan los pesos (en libras) y las cantidades de combustible consumidas en carretera (en mi/gal) de automóviles elegidos al azar (Chrysler, Sebring, Ford Mustang, BMW Series 3, Ford Crown Victoria, Honda Civic, Mazda Protégé, Hyundai Accent). ¿Existe una **correlación lineal** entre el peso y el consumo de combustible en carretera? ¿Qué sugiere el resultado sobre un programa nacional para reducir el consumo de petróleo importado?

Peso	3175	3450	3225	3985	2440	2500	2290
Consumo de combustible	27	29	27	24	37	34	37

Método de solución de aproximación polinomial con mínimos cuadrados

Se hizo uso de este método y del software Maple, las fórmulas del método son

$$a_0 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot x_i\right]}{m\cdot\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2} \qquad (3.10)$$

$$a_1 = \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot x_i - \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} (x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2} \qquad (3.11)$$

El sistema resultante se resolvió con la regla de Cramer para encontrar los valores de a_0 y de a_1.

El cálculo de los valores de las sumatorias respectivas, x_i, $(x_i)^2$, $f(x_i)$ y $f(x_i) \cdot x_i$, se presenta a continuación. Para ello se colocaron los valores asignados en la base de datos dada como vectores en Maple.

> $xv := \langle 3175, 3450, 3225, 3985, 2440, 2500, 2290 \rangle$: Valor de los pesos

> $f := \langle 27, 29, 27, 24, 37, 34, 37 \rangle$: Valor del consumo de combustible

Sumatorias

Ahora encontramos los valores de las sumatorias utilizando una de las soluciones que nos proporciona el software Maple. $sum('V[i]', i = n..n)$ es ña sumatoria, V es el vector, i es la posición del vector, es por ello que después se le indica de que posición (i) a que cantidad (n) se va a sumar.

$\sum_{i=1}^{m} x_i$: > $sx := sum('xv[i]', i = 1..7)$

$sx := 21065$

$\sum_{i=1}^{m} (x_i)^2$: > $sxc := sum('(xv[i])^2', i = 1..7)$

$sxc := 65711675$

$\sum_{i=1}^{m} f(x_i)$: > $sf := sum('f[i]', i = 1..7)$

$sf := 215$

$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot x_i$: > $sxf := sum('(xv[i]) \cdot (f[i])', i = 1..7)$

$sxf := 628500$

Valores de a_0 y de a_1

Con el uso de la regla de Cramer se obtiene

> $m := 7$

> $a_0 := evalf\left(\frac{((sf \cdot sxc) - (sx \cdot sxf))}{((m \cdot sxc) - (sx)^2)}\right);$

$a_0 := 54.69503770$ ◁ *Respuesta*

> $a_1 := evalf\left(\frac{((m \cdot sxf) - (sf \cdot sx))}{((m \cdot sxc) - (sx)^2)}\right);$

$a_1 := -0.007968918295$ ◁ *Respuesta*

Obteniendo que los valores de a_0 y de a_1, los sustituimos en la ecuación de la aproximación polinomial $p(x) = a_0 + a_1$:

> $p := a_0 + a_1 \cdot x;$

$p := -0.007968918295\, x + 54.69503770$ ◁ *Respuesta*

Encontrando la función $p = -0.007968x + 54.695037$ que representa el pronóstico de la cantidad de

combustible,
Las gráficas de la base de datos y el polinomio de grado 1 se presentan en la Fig. 3.22.

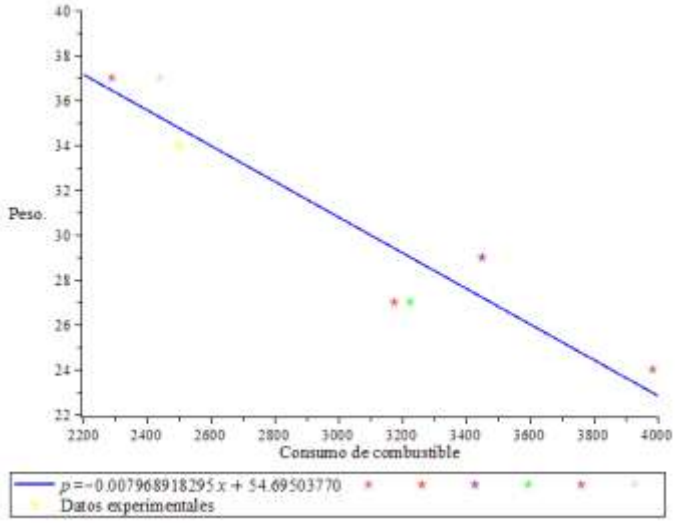


Fig. 3.22 Gráfica de ajuste de datos experimentales de peso y consumo de combustible a un polinomio de grado 1.

Los datos experimentales ajustan desde un polinomio de grado 2 con $R^2 = 0.9276$, grado 3 con $R^2 = 0.9367$, grado 4 con $R^2 = 0.9871$, grado 5 con $R^2 = 0.9957$ y grado 6 con el óptimo ajuste de $R^2 = 1$. Este último ajuste se puede observan en la gráfica de la Fig. 3.23

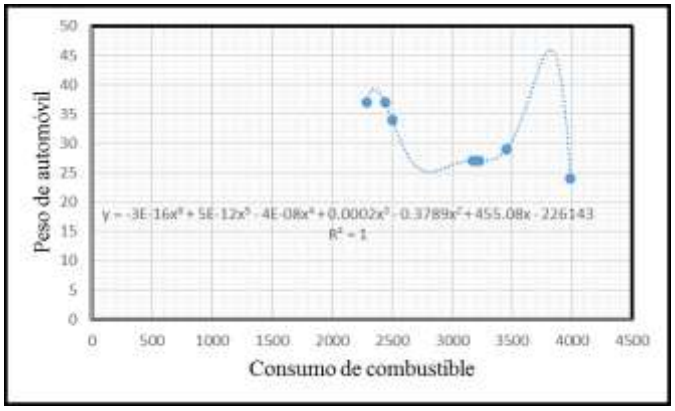


Fig. 3.23 Gráfica de ajuste de datos experimentales de peso de automóvil y consumo de combustible a un polinomio de grado 6. Existe un ajuste exacto.

Coeficiente de correlación lineal

Finalmente, para poder responder a las dos preguntas planteadas del problema se debe de obtener el coeficiente de correlación lineal, el cual tiene como propósito determinar cuál es el grado de intensidad que existe entre dos datos o variables, sirviendo para comprobar cuando la relación entre dos variables

es lineal.
El concepto de coeficiente de correlación lineal también es conocido como **el coeficiente de Pearson** y forma parte de una estadística cuyo objetivo es el de comprobar la intensidad que se da entre las dos variables que pretende definir. Siendo su fórmula

$$r = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum (y_i)^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}, \quad -1 \le r \le 1 \tag{3.12}$$

Propiedades del coeficiente de Pearson
A la hora de definir el coeficiente de Pearson se debe tomar en cuenta que el dato no puede variar a lo largo de su escala de medición. El coeficiente de correlación lineal nunca podrá dar como resultado números entre el -1 y el 1. Los tipos o resultados del coeficiente de Pearson, son los siguientes:
La covarianza positiva: se dará siempre y cuando los resultados indiquen una correlación directa. Esta covarianza será considerada como fuerte en la medida que se vaya acercando al 1.
La covarianza negativa: se dará cuando el resultado arroje una correlación inversa. Esta covarianza será considerada más fuerte en la medida que se vaya acercando a -1.
Covarianza nula: se da en todos aquellos casos cuyo resultado no permite la correlación.
En todos los casos en los que el resultado de *r* sea igual a 0, se referirán a cuando no se produzca la correlación entre variables. Para este tipo de casos podría darse otro tipo de correlación, como por ejemplo una exponencial.

Solución
Los valores requeridos para obtener *r* ya se tienen a excepción de la sumatoria de $(f(x_i))^2$, obteniendo:

$\sum_{i=1}^{m} (f(x_i))^2$: > *sfc* := *sum*('(*f*[*i*])^2', *i* = 1 ..7)

sfc := 6769
Haciendo las sustituciones de valores pertinentes en la fórmula de correlación lineal, se tiene

> $r := evalf\left(\frac{(m \cdot sxf - sx \cdot sf)}{\left(\text{sqrt}\left((m \cdot sxc - (sx)^2) \cdot (m \cdot sfc - (sf)^2)\right)\right)}\right)$;

r := −0.9439269093 ◁ *Respuesta*
> *rc* := $(r)^2$;
rc := 0.8909980101
Obteniendo una correlación de $r = -0.9439269093$

Respuestas a las preguntas
¿Existe una correlación lineal entre el peso y el consumo de combustible en carretera?
Si, ya que, si el peso aumenta al menos 1 libra más, la cantidad de combustible disminuiría debido a que la covarianza es negativa y por ende la correlación es inversa.
¿Qué sugiere el resultado sobre un programa nacional para reducir el consumo de petróleo importado?
Que el peso es 89.90998% de la cantidad de combustible y se tiene que un 10.09002% de variables no existen en el programa.

Método de solución de Gauss-Jordan para obtener a_0 y a_1
Otra de las formas para poder obtener a_0 y de a_1 es por medio del método de Gauss-Jordán, para ello se desarrollan las sumatorias y se simplifican, quedando

> $b := [a_0 + a_1 \cdot xv_1 - f_1] + [a_0 + a_1 \cdot xv_2 - f_2] + [a_0 + a_1 \cdot xv_3 - f_3] + [a_0 + a_1 \cdot xv_4 - f_4] + [a_0 + a_1 \cdot xv_5 - f_5] + [a_0 + a_1 \cdot xv_6 - f_6] + [a_0 + a_1 \cdot xv_7 - f_7] = 0$

$b := [7\,a_0 + 21065\,a_1 - 215] = 0$

> $c := [a_0 \cdot xv_1 + a_1 \cdot (xv_1)^2 - f_1 \cdot xv_1] + [a_0 \cdot xv_2 + a_1 \cdot (xv_2)^2 - f_2 \cdot xv_2] + [a_0 \cdot xv_3 + a_1 \cdot (xv_3)^2 - f_3 \cdot xv_3] + [a_0 \cdot xv_4 + a_1 \cdot (xv_4)^2 - f_4 \cdot xv_4] + [a_0 \cdot xv_5 + a_1 \cdot (xv_5)^2 - f_5 \cdot xv_5] + [a_0 \cdot xv_6 + a_1 \cdot (xv_6)^2 - f_6 \cdot xv_6] + [a_0 \cdot xv_7 + a_1 \cdot (xv_7)^2 - f_7 \cdot xv_7] = 0$

$c := [21065\,a_0 + 65711675\,a_1 - 628500] = 0$

> $m \cdot a_0 + a_1 \cdot sx = sf;$

$7\,a_0 + 21065\,a_1 = 215$

> $a_0 \cdot sx + a_1 \cdot sxc = sxf;$

$21065\,a_0 + 65711675\,a_1 = 628500$

Generación de la matriz:

> $v1 := m : v2 := sx : v3 := sx : v4 := sxc : r1 := sf : r2 := sxf :$

> $with(Student[LinearAlgebra]) :$

> $M := \langle \langle v1, v3 \rangle | \langle v2, v4 \rangle \rangle;$

$$M := \begin{bmatrix} 7 & 21065 \\ 21065 & 65711675 \end{bmatrix}$$

> $v := \langle \langle r1, r2 \rangle \rangle;$

$$v := \begin{bmatrix} 215 \\ 628500 \end{bmatrix}$$

> $ReducedRowEchelonForm(\langle M | v \rangle)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7109261}{129980} \\ 0 & 1 & -\frac{5179}{649900} \end{bmatrix}$$

Resultados

> $a_0 := evalf\left(\frac{7109261}{129980}\right); a_1 := evalf\left(-\frac{5179}{649900}\right)$

$a_0 := 54.69503770$

$a_1 := -0.007968918295$

L.Q.Q.D.

Problema 6

Incendios y acres quemados. Se presenta la lista del número de incendios (en miles) y los acres que fueron quemados (en millones) en 11 estados occidentales de Estados Unidos, cada año de la década pasada (según datos de *USA Today*). ¿Existe una correlación? Los datos se listaron bajo el siguiente encabezado: "Leñadores se valen de los incendios para argumentar a favor de incrementar la tala". ¿Los datos sustentan el argumento de que, a mayor número de árboles talados por los leñadores, menor es el

riesgo de incendios por que los bosques son menos densos?

Incendios.	73	69	58	48	84	62	57	45	70	63	48
Acres.	6.2	4.2	1.9	2.7	5.0	1.6	3.0	1.6	1.5	2.0	3.7

Solución

Graficamos en el software Maple los datos experimentales y un polinomio de grado 14 que ajusta a dichos datos. Las instrucciones son:

```
> X := [73, 69, 58, 48, 84, 62, 57, 45, 70, 63, 48];
X := [73, 69, 58, 48, 84, 62, 57, 45, 70, 63, 48]
> Y := [6.2, 4.2, 1.9, 2.7, 5.0, 1.6, 3.0, 1.6, 1.5, 2.0, 3.7];
Y := [6.2, 4.2, 1.9, 2.7, 5.0, 1.6, 3.0, 1.6, 1.5, 2.0, 3.7]
```

Con lo que obtenemos la siguiente parte del codigo

```
> P := pointplot(X, Y, color = "Blue") :
> F := plot(A, x = 40 ..84, y = 1 ..6.5, ) :
> with(CurveFitting) :
A := LeastSquares([[73, 6.2], [69, 4.2], [58, 1.9], [48, 2.7], [84, 5.0],
     [62, 1.6], [57, 3.0], [45, 1.6], [70, 1.5], [63, 2.0], [48, 3.7]], x,
     curve = a·x^15 + b·x^14 + c·x^13 + d·x^12 + e·x^11 + f·x^10 + g·x^9 + h
     ·x^8 + i·x^7 + j·x^6 + k·x^5 + l·x^4 + m·x^3 + n·x^2 + o·x + p)

A := -1.34090420316069 10^5 + 5208.91605397110 x
     + 209.751662680875 x^2 - 13.2583906083616 x^3
     + 0.140621777386472 x^4 + 0.00258205511383961 x^5
     - 0.0000405991922807932 x^6 - 3.31963636482111 10^-7 x^7
     + 4.21150626359185 10^-9 x^8 + 1.00765190077684 10^-12 x^9
     + 1.38101548580075 10^-12 x^10 - 1.60427252883286 10^-14 x^11
     - 6.37219062015377 10^-17 x^12 - 5.46591421867091 10^-19 x^13
     + 3.08118535593857 10^-20 x^14 - 1.66796615223551 10^-22 x^15
```

El polinomio que mejor ajusta a los datos experimentales podemos observarlo en la Fig. 3.24.

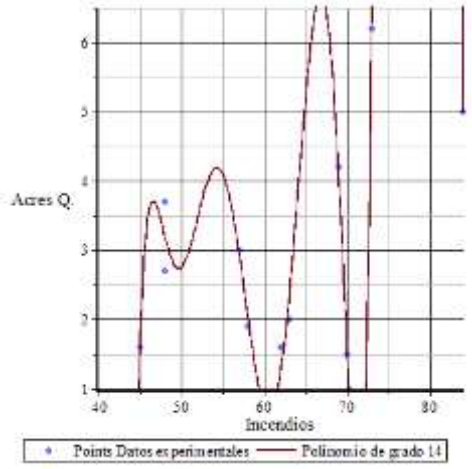


Fig. 3.24 Gráfica de ajuste de datos experimentales de incendios y acres quemados a un polinomio de grado 14.

Para responder a las preguntas

¿Los datos sustentan el argumento de que, a mayor número de árboles talados por los leñadores, menor es el riesgo de incendios por que los bosques son menos densos?

Podemos observar en la Fig. 3.25 que no existe una correlación lineal entre los acres quemados y los incendios, por tanto, vamos a incluir los puntos que mayormente se aproximan a la recta para contestar esta pregunta. Se puede decir que a medida que los incendios aumentan, también lo hacen los acres quemados, lo cual es de esperarse. En este tenor, podemos concluir que, a mayor número de árboles talados por los leñadores, menor es el riesgo de incendios por que los bosques son menos densos, lo cual no significa que sea una buena condición para la humanidad.

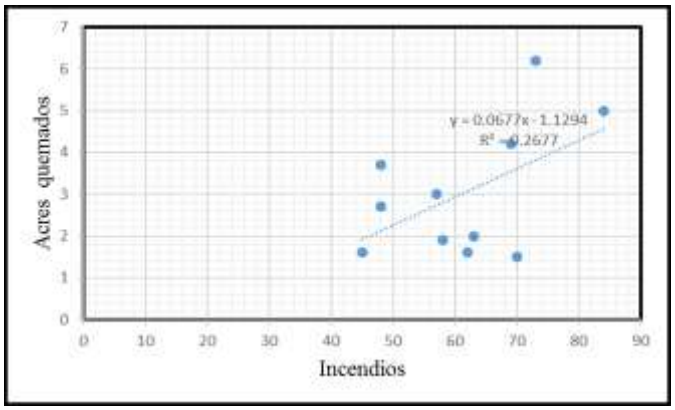


Fig. 3.25 Gráfica de ajuste de datos experimentales de incendios y acres quemados a un polinomio de grado 1.

Problema 7

En la Tabla 3.7 se dan las medidas de sólidos y la demanda de oxígeno químico de una población. Determinar la recta de regresión lineal que mayormente ajuste a los datos mediante el **método de mínimos cuadrados.**

Tabla 3.7 Medidas de los sólidos y la demanda de oxígeno químico.

Reducción de sólidos x (%)	Demanda de oxigeno químico y (%)	Reducción de sólidos x (%)	Demanda de oxigeno químico y (%)
3	5	36	34
7	11	37	36
11	21	38	38
15	16	39	37
18	16	39	36
27	28	39	45
29	27	40	39
30	25	41	41
30	35	42	40
31	30	42	44
31	40	43	37
32	32	44	44
33	34	45	46
33	32	46	46
34	34	47	49
36	37	50	51
36	38	-	-

Para aproximar a un polinomio los datos dados en la Tabla 3.7 según el método de mínimos cuadrados, el primer paso es calcular las sumatorias que implica dicho método Ecs. (3.10) y (3.11), a saber

$$a_0 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right]}{m\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2}$$

$$a_1 = \frac{m\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]}{m\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2}$$

Donde

$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$ Representa la sumatoria de los datos de salida

$\left[\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i\right]$ Es la sumatoria de cada dato de entrada elevado al cuadrado

$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$ Es nada más que la sumatoria de los datos de entrada

$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right]$ Es la sumatoria que viene después de multiplicar a cada dato de entrada por su dato de salida

m Es la cantidad de datos usados en los registros.

El polinomio de grado 1, viene dado por

$$P(x) = a_0 + a_1 x \tag{3.13}$$

En la Tabla 3.8 se presentan las sumatorias de los cálculos efectuados.

Tabla 3.8 Resultados de las sumatorias requeridas por el método de mínimos cuadrados.

Puntos i	Reducción de sólidos x_i	Demanda de oxigeno químico y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	3	5	9	15
2	7	11	49	77
3	11	21	121	231
4	15	16	225	240
5	18	16	324	288
6	27	28	729	756
7	29	27	841	783
8	30	25	900	750
9	30	35	900	1050
10	31	30	961	930
11	31	40	961	1240

Tabla 3.8 Resultados de las sumatorias requeridas por el método de mínimos cuadrados.

Puntos i	Reducción de sólidos x_i	Demanda de oxigeno químico y_i	x_i^2	$x_i y_i$
12	32	32	1024	1024
13	33	34	1089	1122
14	33	32	1089	1056
15	34	34	1156	1156
16	36	37	1296	1332
17	36	38	1296	1368
18	36	34	1296	1224
19	37	36	1369	1332
20	38	38	1444	1444
21	39	37	1521	1443
22	39	36	1521	1404
23	39	45	1521	1755
24	40	39	1600	1560
25	41	41	1681	1681
26	42	40	1764	1680
27	42	44	1764	1848
28	43	37	1849	1591
29	44	44	1936	1936
30	45	46	2025	2070
31	46	46	2116	2116
32	47	49	2209	2303
33	50	51	2500	2550

Así mismo encontramos las sumatorias de las sumatorias de la Tabla 3.8.

$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$	$\left[\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i\right]$	$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$	$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right]$	$[\sum_{i=1}^{n} x_i]^2$
1124	41086	1104	41355	1218816

Sustituyendo los valores de las sumatorias en las fórmulas del método de mínimos cuadrados, obtenemos

$$a_0 = \frac{[1124][41086]-[1104][41355]}{33[41086]-[1218816]}$$

$$a_0 = \frac{[46057406]-[45655920]}{[1355838]-[1218816]}$$

$$a_0 = \frac{524744}{137022}$$

$$a_0 = 3.829633198$$

$$a_1 = \frac{33[41355]-[1124][1104]}{33[41086]-[1218816]}$$

$$a_1 = \frac{123819}{137022}$$

$$a_1 = 0.90364321$$

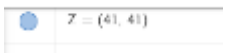
Sustituimos los valores y obtenemos el polinomio de grado 1, que es el polinomio que ajusta a los puntos dados

$$P(x) = 3.829633198 + 0.90364321x \triangleleft \textit{Respuesta}$$

Se hace uso del software Geogebra para realizar la gráfica de datos experimentales y polinomio de grado 1.

Con Geogebra podemos graficar los puntos mediante coordenadas, para después hacer uso de herramienta llamada ajuste lineal. Los pasos a continuación:

1.- Escribir coordenadas



Basta con dar un click sobre la mesa de operaciones y *teclear* un entre– parentesis () para agregar los datos de entrada y salida (x,y), podremos asignar un nombre a ese punto con una letra mayúscula o bien dejar que el programa asigne automaticamente un nombre.

2.- Seleccionar puntos con "ajuste lineal"

Una vez que ya tenemos todos los puntos en el plano cartesiano podremos seleccionarlos a todos con una herramienta llamada *ajuste lineal* (Fig. 3.26).

Fig. 3.26 Ajuste lineal en Geogebra.

3.- Arrastramos un recuadro de color púrpura sobre los puntos y soltamos obteniendo la gráfica de la Fig. 3.27. Dicha gráfica corresponde al ajuste de datos al polinomio de grado 1 que hemos calculado con el método de mínimos cuadrados, como podemos observar en la Fig. 3.27.

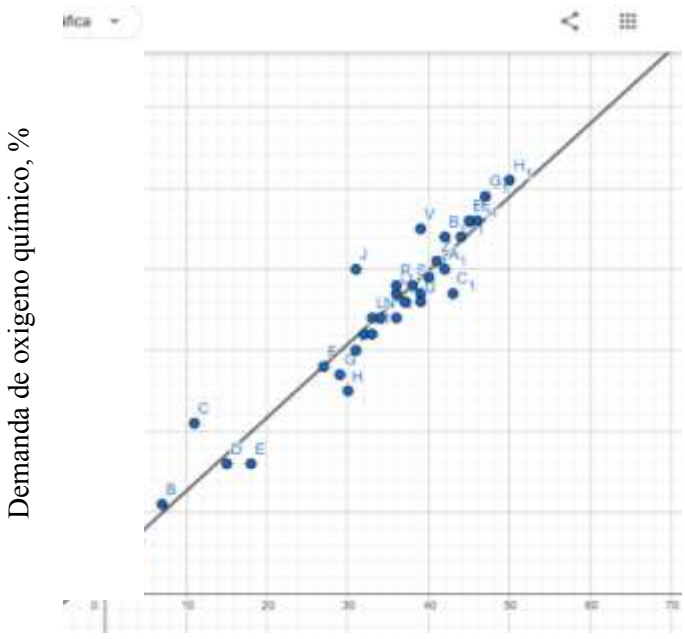


Fig. 3.27 Diagrama de dispersión con la recta de regresión dada por el polinomio de grado 1 calculado con el método de mínimos cuadrados.

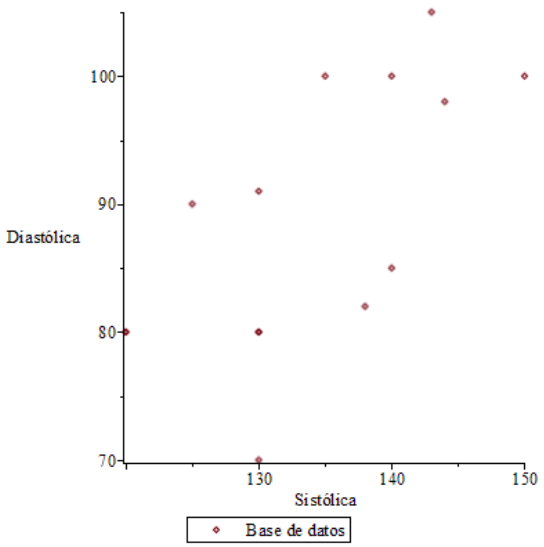


Fig. 3.28 Gráfica de datos experimentales de presión sanguínea diastólica y sistólica.

Problema 8

Mediciones de presión sanguínea. Catorce estudiantes de medicina del segundo año midieron la presión sanguínea del mismo paciente; los resultados se presentan a continuación (según datos del doctor Marc Triola). ¿Existe una correlación entre los valores sistólicos y diastólicos? Además de la correlación, ¿hay algún otro método que se podría utilizar para estudiar un aspecto importante que sugieren los datos?

Sistólica	138	130	135	140	120	125	120	130	130	144	143	140	130	150
Diastólica	82	91	100	100	80	90	80	80	80	98	105	85	70	100

Solución

Para dar solución a este problema se usará el método de polinomio por el **método de mínimos cuadrados.**

Primero graficamos los puntos para poder observar la dispersión que presentan (ver la Fig. 3.28)

Para este problema usamos un polinomio de segundo grado ya que los puntos no forman una recta, la formula a utilizar es

$$\sum_{i=1}^{m}\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-f(x_i)\right]^2$$

Dicha fórmula se descompone en 3 formando un sistema de ecuaciones (Ecs. (3.7))

$$ma_0+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^2=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^3=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)x_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^3+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^4=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)x_i^2$$

Calculamos las sumatorias de los mínimos cuadrados y los colocamos en la Tabla 3.9 tomando sistólica como *x* y diastólica como *y*.

Tabla 3.9 Cálculo de variables de las sumatorias del método de mínimos cuadrados.

p	*x*	*y*	x^2	x^3	x^4	*xy*	x^2y
1	138	82	19044	2628072	362673936	11316	1561608
2	130	91	16900	2197000	285610000	11830	1537900
3	135	100	18225	2460375	332150625	13500	1822500
4	140	100	19600	2744000	384160000	14000	1960000
5	120	80	14400	1728000	207360000	9600	1152000
6	125	90	15625	1953125	244140625	11250	1406250
7	120	80	14400	1728000	207360000	9600	1152000
8	130	80	16900	2197000	285610000	10400	1352000
9	130	80	16900	2197000	285610000	10400	1352000
10	144	98	20736	2985984	429981696	14112	2032128
11	143	105	20449	2924207	418161601	15015	2147145
12	140	85	19600	2744000	384160000	11900	1666000
13	130	70	16900	2197000	285610000	9100	1183000
14	150	100	22500	3375000	506250000	15000	2250000
Sumatoria	1875	1241	252179	34058763	4618838483	167023	22574531

Los resultados de las sumatorias se sustituyen en el sistema de ecuaciones como

$$14a_0+1875a_1+252179a_2=1241$$
$$1875a_0+252179a_1+34058763a_2=167023$$
$$252179a_0+34058763a_1+4618838483a_2=22574531$$

Una vez sustituidos los valores en las fórmulas se forma una matriz de 3×3 para resolverlas por el método de Gaus-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 1875 & 252179 & 1241 \\ 1875 & 252179 & 34058763 & 167023 \\ 252179 & 34058763 & 4618838483 & 22574531 \end{array}\right)$$

La solución con el software Maple es

$$> M := \begin{bmatrix} 14 & 1875 & 252179 \\ 1875 & 252179 & 34058763 \\ 252179 & 34058763 & 4618838483 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 14 & 1875 & 252179 \\ 1875 & 252179 & 34058763 \\ 252179 & 34058763 & 4618838483 \end{bmatrix}$$

$$> T := \begin{bmatrix} 1241 \\ 167023 \\ 22574531 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} 1241 \\ 167023 \\ 22574531 \end{bmatrix}$$

> *ReducedRowEchelonForm*(⟨*M*|*T*⟩)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8432615196}{27481991} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{444851021}{109927964} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1975937}{109927964} \end{bmatrix}$$

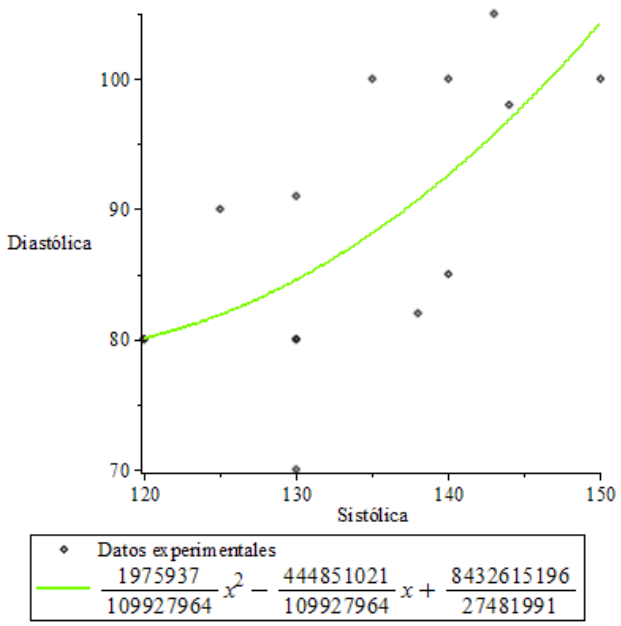


Fig. 3.29 Gráfica de ajuste de datos experimentales de presiones diastólica y sistólica a un polinomio de grado 2.

Resultado

$$a_0 = \frac{8432615196}{27481991} = 306.8414947 \quad \triangleleft \textit{Respuesta}$$

$$a_1 = -\frac{444851021}{109927964} = -4.046750297 \quad \triangleleft \textit{Respuesta}$$

$$a_2 = \frac{1975937}{109927964} = 0.01797483487 \quad \triangleleft \textit{Respuesta}$$

Tomando los resultados obtenidos podemos conformar una ecuación de segundo grado para poder observar la curva entre los puntos

$$\frac{1975937}{109927964}x^2 - \frac{444851021}{109927964}x + \frac{8432615196}{27481991}$$

La gráfica de los datos experimentales y el polinomio de grado 2 obtenido se presentan en la Fig. 3.29.
Código de la grafica

> $a := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150];$

$a := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150]$

> $b := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100];$

$b := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100]$

$P := pointplot(a, b)$:

> $R := plot\left(\frac{1975937}{109927964}x^2 - \frac{444851021}{109927964}x + \frac{8432615196}{27481991}, x = 120..150, y = 70..100\right)$:

> $display(P, R);$

Resolviendo con Maple para un polinomio de grado 3 con mínimos cuadrados, se tiene que

```
> A := LeastSquares([[138, 82], [130, 91], [135, 100], [140, 100], [120, 80], [125, 90], [120, 80]
  [130, 80], [130, 80], [144, 98], [143, 106], [140, 85], [130, 70], [150, 100]], x, curve = a
  ·x^3 + b·x^2 + c·x^1 + d)
```

$$A := \frac{3566298416749682}{631672805477} - \frac{1565658151447161}{12633456109540}\,x + \frac{2882124418409}{3158364027385}\,x^2 - \frac{28025350923}{12633456109540}\,x^3$$

Al introducir los valores obtenidos con la función LeastSquares la gráfica obtenida es la que muestra la Fig. 3.30.

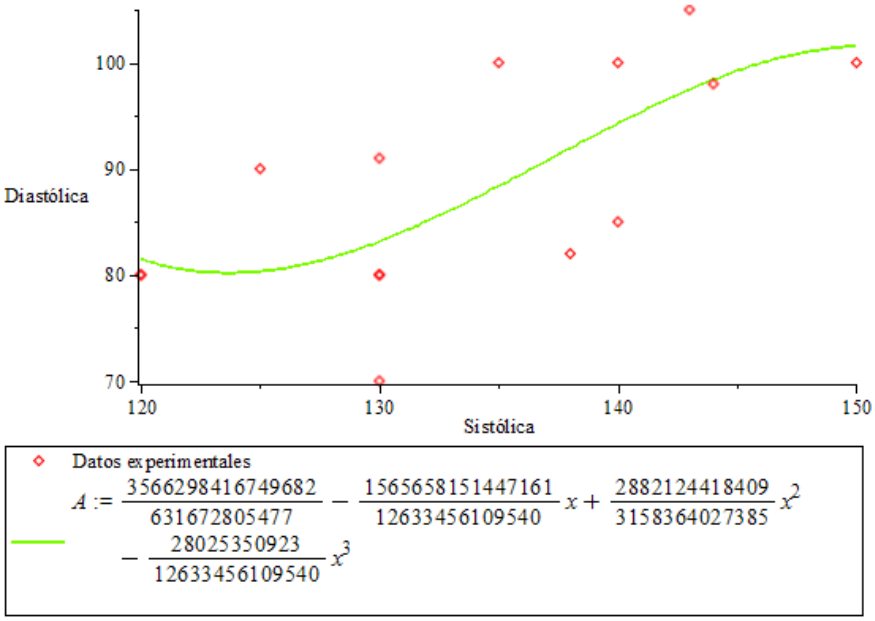


Fig. 3.30 Gráfica de ajuste de datos experimentales de presiones sanguíneas diastólica y sistólica a un polinomio de grado 3.

Código de la grafica

```
> XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150];
XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150]
> YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100];
YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100]
> P := pointplot(XT, YT, color = "red") :
> F := plot(A, x = 120 ..150, y = 70 ..100, labels = [Sistólica, Diastólica ], color
    = "LawnGreen") :
> display(F, P)
```

Polinomio de grado 8. Mientras aumentamos el grado del polinomio el resultado se acerca más, por lo que se siguió probando hasta acercarse al resultado esperado usando un polinomio de grado 8 como el de la Fig. 3.31.

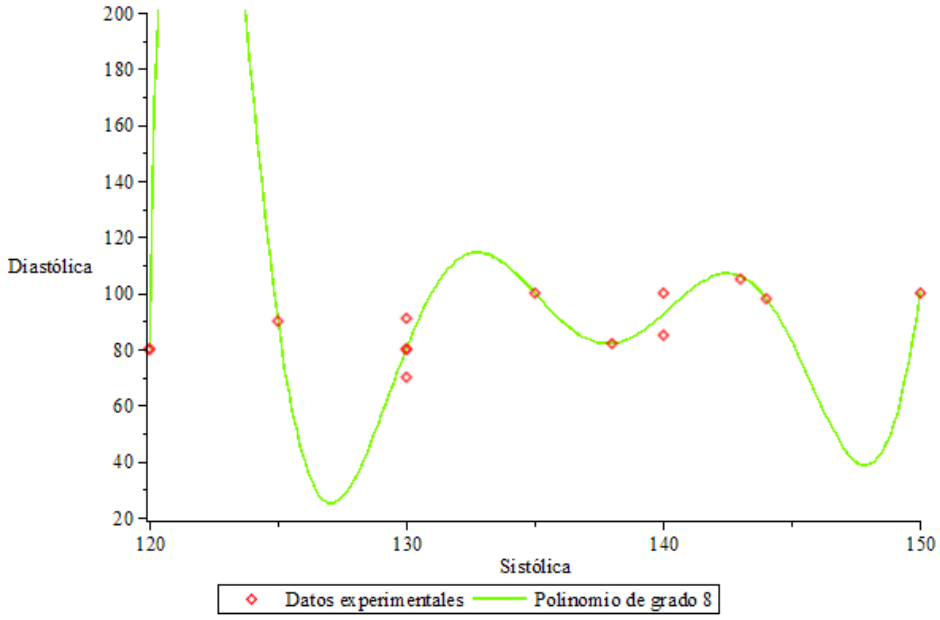


Fig. 3.31 Gráfica de ajuste de datos experimentales de presiones sanguíneas diastólica y sistólica a un polinomio de grado 8.

Código de la grafica

```
> with(CurveFitting) :
> A := LeastSquares([[138, 82], [130, 91], [135, 100], [140, 100], [120,
      80], [125, 90], [120, 80], [130, 80], [130, 80], [144, 98], [143,
      106], [140, 85], [130, 70], [150, 100]], x, curve = a·x^8 + b·x^7 + c
      ·x^6 + d·x^5 + e·x^4 + f·x^3 + g·x^2 + h·x^1 + i)
```

$$A := -\frac{2492133483740}{19} + \frac{109951462508872703}{14316120}\,x - \frac{5359806895983203}{27268800}\,x^2 + \frac{42284884776991151}{14725152000}\,x^3 - \frac{120540166076789}{4601610000}\,x^4 + \frac{11840787844559}{77500800000}\,x^5 - \frac{819302020903}{1472515200000}\,x^6 + \frac{2384639557}{2061521280000}\,x^7 - \frac{1547761}{1472515200000}\,x^8$$

```
> with(plots) :
> XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130,
      150];
```

$$XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150]$$

```
> YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100];
```

$$YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100]$$

```
> P := pointplot(XT, YT, color = "red") :
```

```
> F := plot(A, x = 120 ..150, y = 20 ..200, labels = [Sistólica,
      Diastólica ], color = "LawnGreen") :

> display(F, P)
```

Polinomio de grado 9. Finalmente se ajustaron los datos a un polinomio de grado 9, a saber

```
> A := LeastSquares([[138, 82], [130, 91], [135, 100], [140, 100], [120, 80], [125, 90], [120, 80]
      [130, 80], [130, 80], [144, 98], [143, 106], [140, 85], [130, 70], [150, 100]], x, curve = a
      ·x^9 + b·x^8 + c·x^7 + d·x^6 + e·x^5 + f·x^4 + g·x^3 + h·x^2 + i·x^1 + j)
```

$$A := -\frac{2492133483740}{19} - 15709605912000000000_t9_{10} + \left(\frac{109951462508872703}{14316120} + 1043532573876000000_t9_{10}\right) x + \left(-\frac{5359806895983203}{27268800} - 30789874570140000_t9_{10}\right) x^2 + \left(\frac{42284884776991151}{14725152000} + 529629907185000_t9_{10}\right) x^3 + \left(-\frac{120540166076789}{4601610000} - 5853283579500_t9_{10}\right) x^4 + \left(\frac{11840787844559}{77500800000} + 43100814050_t9_{10}\right) x^5 + \left(-\frac{819302020903}{1472515200000} - 211461971_t9_{10}\right) x^6 + \left(\frac{2384639557}{2061521280000} + 666573_t9_{10}\right) x^7 + \left(-\frac{1547761}{1472515200000} - 1225_t9_{10}\right) x^8 + _t9_{10} x^9$$

En este punto se generó un pequeño problema ya que Maple impuso una variable $_t9_{10}$. Para graficar, sustituimos la variable $_t9_{10}$ por la unidad, entonces A queda de la forma

```
> A := subs(_t9[10] = 1, A);
```

$$A := -\frac{298482514820133483740}{19} + \frac{1493933766146914362887 2703}{14316120} x - \frac{8396029370380405279832 03}{27268800} x^2 + \frac{7798880929329901896991151}{14725152000} x^3 - \frac{2693452837280316107678 9}{4601610000} x^4 + \frac{3340347581367027844559}{77500800000} x^5 - \frac{311380967338761220903}{1472515200000} x^6 + \frac{1374154426558079557}{2061521280000} x^7 - \frac{1803831121547761}{1472515200000} x^8 + x^9$$

La gráfica para el polinomio de grado 9 se muestra en la Fig. 3.32.

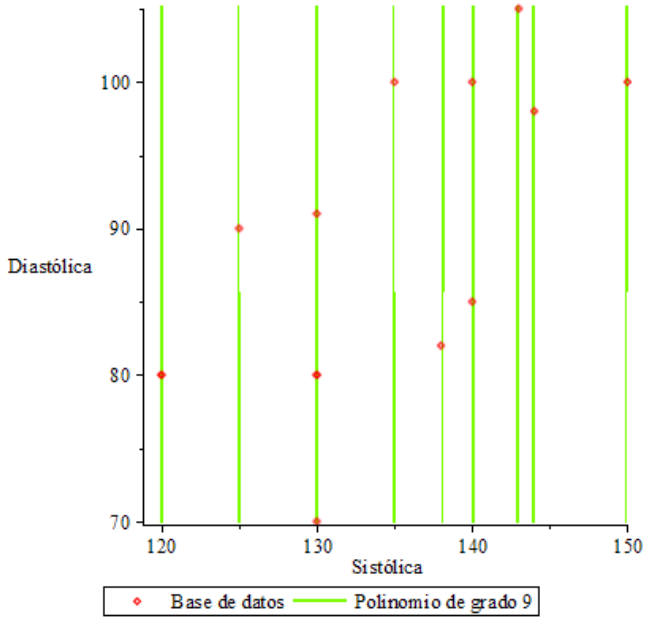


Fig. 3.32 Gráfica de ajuste de datos experimentales de presiones sanguíneas diastólica y sistólica a un polinomio de grado 9.

El código de la gráfica de la Fig.3.32 es

Ecuación =

$$-\frac{29848251482013348374 0}{19}+\frac{14939337661469143628872703}{14316120}x$$
$$-\frac{83960293703804052798320 3}{27268800}x^2+\frac{77988809293299018969911 51}{14725152000}x^3$$
$$-\frac{26934528372803161076789}{4601610000}x^4+\frac{3340347581367027844559}{77500800000}x^5$$
$$-\frac{311380967338761220903}{1472515200000}x^6+\frac{1374154426558079557}{2061521280000}x^7$$
$$-\frac{1803831121547761}{1472515200000}x^8+x^9$$

```
> XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150];
XT := [138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130, 150]
> YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100];
YT := [82, 91, 100, 100, 80, 90, 80, 80, 80, 98, 105, 85, 70, 100]
> P := pointplot(XT, YT, color = "red") :
> F := plot(A, x = 119 ..150, y = 70 ..100, labels = [Sistólica, Diastólica ], color
       = "LawnGreen") :
> P := pointplot(XT,YT,color = "red") :
```

En la gráfica se puede observar que finalmente la línea toca todos los puntos de la base de datos, pero para poder observar la forma de la línea para poder obtener una mejor visualización, se graficó con las siguientes instrucciones (ver Fig. 3.33).

```
> F := plot(A, x = 119 ..150, y = -8000000000 ..2800000000, labels
      = [Sistólica, Diastólica ], color = "LawnGreen") :
P := pointplot(XT, YT, color = "red") :
> display(F, P)
```

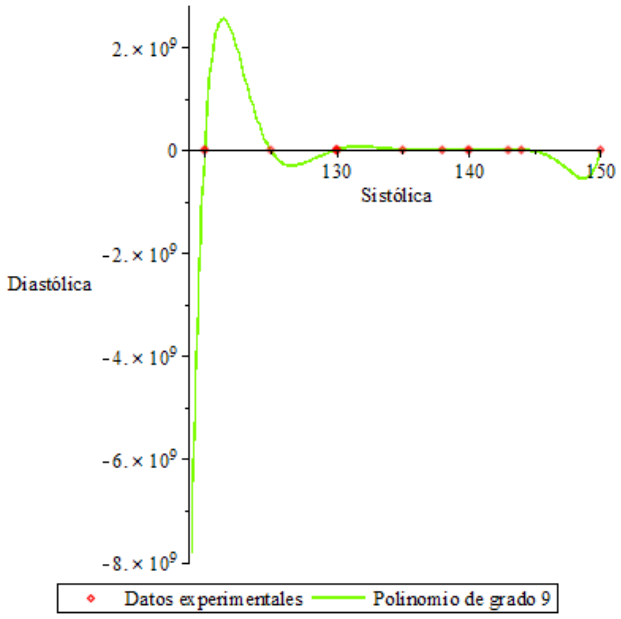


Fig. 3.33 Gráfica de ajuste de datos experimentales de presiones sanguíneas diastólica y sistólica a un polinomio de grado 9.

Los parámetros para esta grafica fueron los mismos que los de la gráfica de la Fig. 3.32 y el único código que cambio fue el siguiente

```
> F := plot(A, x = 119 ..150, y = -8000000000 ..2800000000, labels = [Sistólica, Diastólica ],
      color = "LawnGreen") :
> P := pointplot(XT, YT, color = "red") :
```

Preguntas

1. ¿Existe una correlación entre los valores sistólicos y diastólicos?

Respuesta:

Si, esa relación está dada por el polinomio de grado 9.

2. ¿hay algún otro método que se podría utilizar para estudiar un aspecto importante que sugieren los datos?

Respuesta:

Sí. Modelos de regresión, tales como

✓ Encontrar los valores de a y b que minimizan el error de mínimos cuadrados cuando se usa la función modelo $ax + be^x$.

✓ Ajuste la función del modelo $ax + e^{bx}$, que no es lineal en los parámetros.

Además, de Excel, se tienen los coeficientes de determinación R^2 que ajustan a los datos experimentales mediante polinomios, tales como los polinomios de grado 2 a grado 6, siendo este último el que mejor ajusta de estos modelos mostrados enseguida, con un $R^2 = 0.6012$

$y = 0.0009x^2 + 0.5428x$
$R^2 = 0.4346$
$y = -0.0021x^3 + 0.8708x^2 - 118.34x + 5397$
$R^2 = 0.4737$
$y = -0.0005x^4 + 0.2689x^3 - 53.904x^2 + 4790.8x - 159226$
$R^2 = 0.5102$
$y = 4E\text{-}05x^5 - 0.0267x^4 + 7.342x^3 - 1005.5x^2 + 68705x - 2E+06$
$R^2 = 0.5206$
$y = -3E\text{-}05x^6 + 0.0221x^5 - 7.4525x^4 + 1337.2x^3 - 134803x^2 + 7E+06x - 2E+08$
$R^2 = 0.6012$

Asimismo, se tiene que, las siguientes funciones ajustan con un coeficiente de determinación de poco más del 40%, se tiene

Función exponencial
$y = 27.883e^{0.0086x}$
$R^2 = 0.4161$
Función logarítmica
$y = 101.85\ln(x) - 409.93$
$R^2 = 0.4258$
Potencia
$y = 0.3377x^{1.1365}$
$R^2 = 0.4091$

Problema 9
Aproximar esta información con un polinomio por el método de mínimos cuadrados. Graficar en una sola gráfica las rectas o curvas correspondientes a los datos dados graficados como puntos y el polinomio como línea para que se verifique si el polinomio al que aproximó por mínimos cuadrados los datos es el polinomio que mayormente aproxima con dichos datos. La Tabla 3.10 contiene los datos a aproximar.

Tabla 3.10 Datos experimentales a ajustar a polinomio

P	%Red.Solid	%Deman.Oxi
1	3	5
2	7	11
3	11	21
4	15	16
5	18	16
6	27	28
7	29	27
8	30	25

9	30	35
10	31	30
11	31	40
12	32	32
13	33	34
14	33	32
15	34	34
16	36	37
17	36	38
18	36	34
19	37	36
20	38	38
21	39	37
22	39	36
23	39	45
24	40	39
25	41	41
26	42	40
27	42	44
28	43	37
29	44	44
30	45	46
31	46	46
32	47	49
33	50	51

Procedimiento en Excel

Lo primero que se hizo fue plasmar todos los datos en una hoja de Excel.

Enseguida se pasaron estos mismos datos a una nueva tabla la cual vamos a utilizar para obtener los datos necesarios para aplicar la siguiente formula

$$\sum_{i=0}^{m}[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} - f(x_i)]^2$$

Para poder obtener los valores de a_0, a_1 y a_2 se utilizará el sistema de Ecs. (3.7)

$$ma_0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} + a_2 \sum x_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,2} + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,3} + a_2 \sum x_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^{\,2}$$

Enseguida se procede a llenar la Tabla 3.11. Para la columna x^2 se tomara el valor de x o %Red.Solid de la fila correspondiente y se multiplicara por si misma, por lo cual se aplicaria la siguiente función de Excel:

=(G3*G3)

Para la columna x^3 se tomara el valor de x^2 de la fila correspondiente y se multiplicara por el valor de x o %Red.Solid de esa misma fila, por lo cual se aplicaria la siguiente función de Excel:

=I3*G3

Para la columna x^4 se tomara el valor de x^3 de la fila correspondiente y se multiplicara por el valor de x o %Red.Solid de esa misma fila, por lo cual se aplicaria la siguiente función de Excel:

=J3*G3

Para la columna xy se tomara el valor de x o %Red.Solid de la fila correspondiente y se multiplicara por el valor de la columna %Deman.Oxi o y, por lo cual se aplicaria la siguiente función de Excel:

=G3*H3

Para la columna xy^2 se tomara el valor de x o %Red.Solid de la fila correspondiente y se multiplicara por el cuadrado del valor de la columna %Deman.Oxi o y, por lo cual se aplicaria la siguiente función de Excel:

=H3*I3

Se calcula la sumatoria de cada una de las columnas con la fórmula de Excel:

=SUMAR("Area a sumar")

La cual podemos observar en la columna x:

=SUMA(G3:G35)

Esto nos lleva a la siguiente pantalla

Al realizar estas operaciones obtenemos la Tabla 3.11.

Tabla 3.11 Cálculos realizados para el uso del método de minimos cuadrados y las respectivas sumatorias.

P	%Red.Solid	%Deman.Oxi	x^2	x^3	x^4	xy	yx^2
1	3	5	9	27	81	15	45
2	7	11	49	343	2401	77	539
3	11	21	121	1331	14641	231	2541
4	15	16	225	3375	50625	240	3600
5	18	16	324	5832	104976	288	5184
6	27	28	729	19683	531441	756	20412
7	29	27	841	24389	707281	783	22707
8	30	25	900	27000	810000	750	22500
9	30	35	900	27000	810000	1050	31500
10	31	30	961	29791	923521	930	28830
11	31	40	961	29791	923521	1240	38440
12	32	32	1024	32768	1048576	1024	32768
13	33	34	1089	35937	1185921	1122	37026
14	33	32	1089	35937	1185921	1056	34848
15	34	34	1156	39304	1336336	1156	39304
16	36	37	1296	46656	1679616	1332	47952
17	36	38	1296	46656	1679616	1368	49248
18	36	34	1296	46656	1679616	1224	44064

Tabla 3.11 Cálculos realizados para el uso del método de minimos cuadrados y las respectivas sumatorias.

P	%Red.Solid	%Deman.Oxi	x^2	x^3	x^4	xy	yx^2
19	37	36	1369	50653	1874161	1332	49284
20	38	38	1444	54872	2085136	1444	54872
21	39	37	1521	59319	2313441	1443	56277
22	39	36	1521	59319	2313441	1404	54756
23	39	45	1521	59319	2313441	1755	68445
24	40	39	1600	64000	2560000	1560	62400
25	41	41	1681	68921	2825761	1681	68921
26	42	40	1764	74088	3111696	1680	70560
27	42	44	1764	74088	3111696	1848	77616
28	43	37	1849	79507	3418801	1591	68413
29	44	44	1936	85184	3748096	1936	85184
30	45	46	2025	91125	4100625	2070	93150
31	46	46	2116	97336	4477456	2116	97336
32	47	49	2209	103823	4879681	2303	108241
33	50	51	2500	125000	6250000	2550	127500
Sumatorias	1104	1124	41086	1599030	64057522	41355	1604463

Obtenidas las sumatorias se sustituyen sus valores en las Ecs. (3.7) del **método de mínimos cuadrados**

$$33\,a_0 + 1104\,a_1 + 41086\,a_2 = 1124$$

$$1104\,a_0 + 41086\,a_1 + 1599030\,a_2 = 41355$$

$$41086\;\; a_0 + 1599030\,a_1 + 64057522\,a_2 = 1604463$$

Ahora obtenemos los valores de a_0, a_1 y a_2, para lograr esto se colocan como en una matriz para aplicar en el **metodo de Gauss-Jordan** como se muestra en la Tabla 3.12.

Tabla 3.12 Cálculos para obtener los valores de los coeficientes a_0, a_1 y a_2, mediante el método de Gauss-Jordan.

	33	a0	+	a1	1104	+	a2	41086	=	1124
	1104	a0	+	a1	41086	+	a2	1599030	=	41355
	41086	a0	+	a1	1599030	+	a2	64057522	=	1604463

Procedimiento de matriaz	a0	a1	a2	valores
	33	1104	41086	1124
	0	137022	7409046	123819
	0	7409046	425838830	6766615
	-4521726	0	2549900892	-17316552
	0	137022	7409046	123819
	0	0	3.45533E+12	9794453856
	-			-
	1.5624E+19	0	0	8.48092E+19
	0	4.73456E+17	0	3.55267E+17
	0	0	3.45533E+12	9794453856
	1	0	0	5.428124633
	0	1	0	0.750371063
	0	0	1	0.002834597

Al resolver la matriz, los resultajos que arroja para a_0, a_1 y a_2, son

a_0	5.42812463
a_1	0.75037106
a_2	0.0028346

Sustituimos a_0, a_1 y a_2 en la ecuación del polinomio de grado 2 obteniendo un coeficiente de determinación muy aceptable, es decir

$$y = 0.0028x^2 + 0.7504x + 5.4281$$

$$R^2 = 0.9146$$

La Fig. 3.34 muestra el ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2 con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9146$, que consideramos es un buen ajuste.

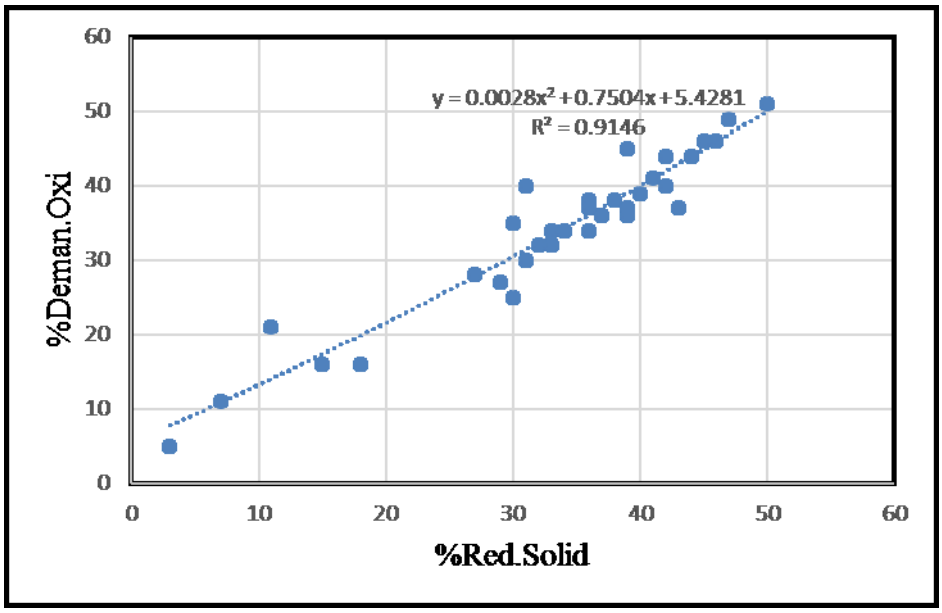


Fig. 3.34 Gráfica de ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2 con un coeficiente de determinación de 0.9146.

Problema 10

Tamaño del pecho y peso de osos. A continuación, se presenta el tamaño del pecho (en pulgadas) y el peso (en libras) de osos elegidos al azar, que fueron anestesiados y medidos (según datos de Gary Alt y Minitab, Inc.). Como es mucho más difícil pesar un oso que medir el tamaño de su pecho, la presencia de una correlación podría conducir a un método para estimar el peso a partir del tamaño del pecho. ¿Existe una correlación lineal entre el tamaño del pecho y el peso?

Tamaño del pecho. x_i	26	45	54	49	35	41	41	49	38	31
Peso. $f(x_i)$	80	344	416	348	166	220	262	360	204	144

Solución

Resolvemos por el método de mínimos cuadrados para un polinomio de grado 1

$p(x) = a_0 + a_1(x)$

Para ello, determinamos a_0 y a_1 con las fórmulas del método, para lo cual, calculamos primero las sumatorias e introducimos los valores en la Tabla 3.13, como sigue

Tabla 3.13 Datos experimentales y cálculos de las variables requeridas por el método de mínimos cuadrados para ajustar dichos datos a un polinomio de grado 1.

$p(i)$	Tamaño de pecho, x_i	Peso, $f(x_i)$	x_i^2	$f(x_i)\cdot x_i$
1	26	80	676	2080
2	45	344	2025	15480
3	54	416	2916	22464
4	49	348	2401	17052
5	35	166	1225	5810
6	41	220	1681	9020
7	41	262	1681	10742
8	49	360	2401	17640
9	38	204	1444	7752
10	31	144	961	4464
$\sum_{i=1}^{10}$	409	2544	17411	112504

Los valores de los coeficientes del polinomio de grado 1, son

$$a_0 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot x_i\right]}{m\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2} = \frac{[2544]\cdot[17411] - [409]\cdot[112504]}{10\cdot 17411 - [409]^2} = -251.9478694$$

$$a_1 = \frac{\left[m\cdot\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot x_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]}{m\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2} = \frac{[10\cdot 112504] - [2544]\cdot[409]}{10\cdot 17411 - [409]^2} = 12.38014351$$

Ya tenemos los valores de los coeficientes de la función lineal. Sólo falta sustituirlos en el polinomio de grado uno, obteniendo

$$p(x) = a_0 + a_1(x),\ p(x) = -251.9478694 + 12.38014351\cdot x$$

En la Fig. 3.35 se muestran dos vistas de la gráfica de datos experimentales y el polinomio. Como se puede observar, el coeficiente de determinación $R^2 = 0.9669$ es indicativo de un muy buen ajuste.

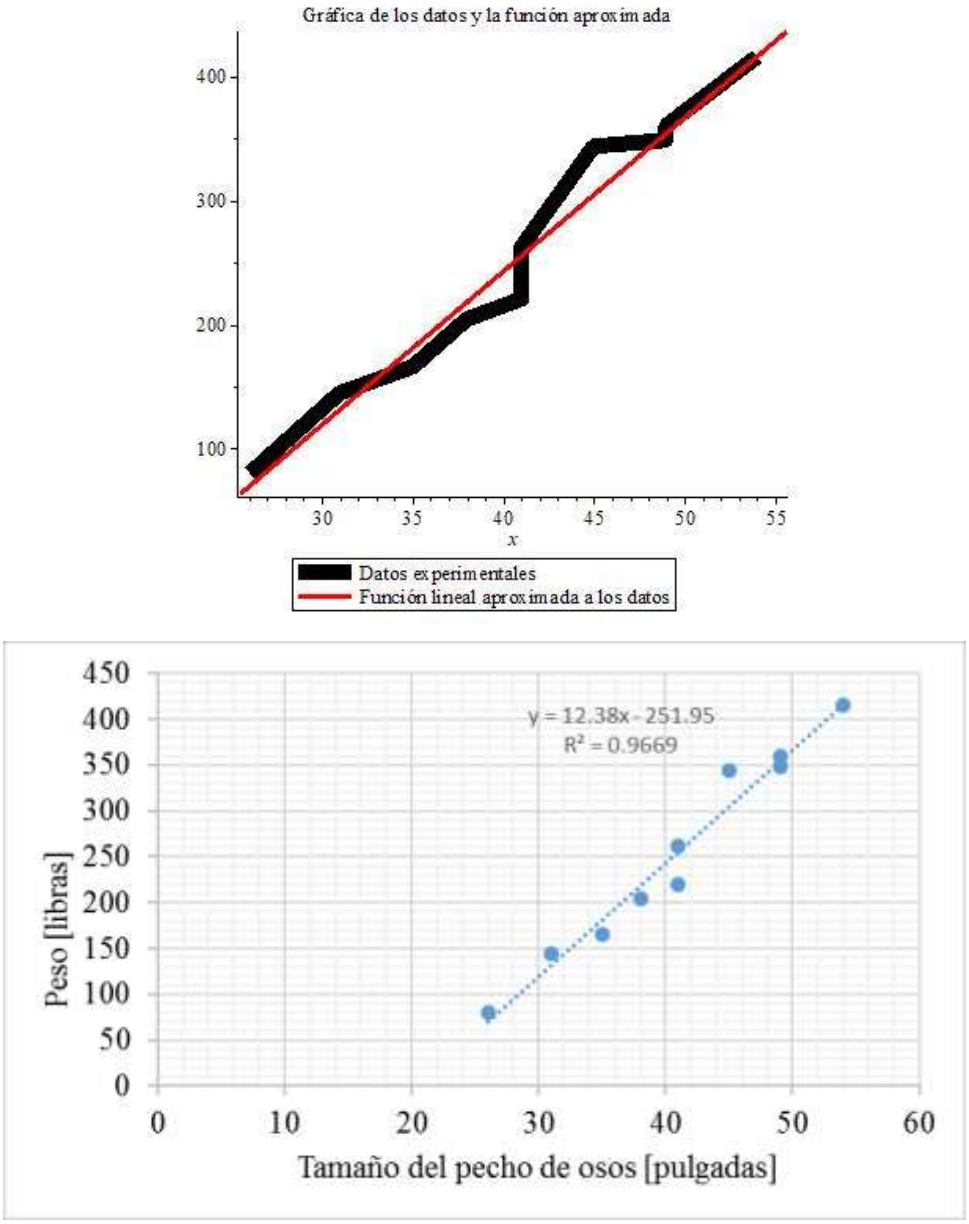


Fig. 3.35 Dos vistas de la gráfica de los datos experimentales del tamaño del pecho y peso de osos y el polinomio de grado 1 al que se ajusta con un coeficiente de determinación de 0.9669.

Ahora, si queremos una función que se ajuste aún mejor a los datos, podemos usar el método de los mínimos cuadrados para obtener una función polinómica de grado *n*, pero primero, es necesario deducir las fórmulas que nos darán un sistema de ecuaciones, con el cual, obtendremos los coeficientes de la función polinómica, luego, graficaremos dicha función para ver que tanto se ajusta a los datos. Realizar dicha tarea de forma manual implicaría un trabajo extenuante, por ello, podemos hacer uso de un software como Maple y obtener no solo un polinomio lineal, sino cuadrático, cúbico, de grado cuatro, de grado cinco, etc., así como sus respectivas gráficas.

Respecto al método de los mínimos cuadrados, es muy útil para modelar relaciones entre variables y hacer predicciones precisas. Además, permite calcular los parámetros del modelo de regresión, como la pendiente y la intersección de la línea de regresión.

Aunque el método de los mínimos cuadrados es una técnica poderosa, no está exenta de limitaciones. Es importante tener en cuenta que el modelo de regresión que se ajusta a los datos puede no ser necesariamente el mejor modelo para hacer predicciones futuras, ya que los datos pueden cambiar con el tiempo. Por lo tanto, se deben tomar medidas para validar y verificar la precisión del modelo antes de hacer cualquier predicción.

En conclusión, el método de los mínimos cuadrados es una técnica valiosa para modelar relaciones y hacer predicciones precisas en un conjunto de datos, pero es importante utilizarlo con precaución y validar el modelo para asegurarse de que es adecuado para las necesidades de análisis de los datos.

Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados, es una técnica estadística que se utiliza para encontrar la mejor curva o línea que se ajusta a un conjunto de datos. La idea básica es encontrar una función matemática que minimice la suma de los errores cuadráticos entre los valores observados y los valores predichos por la función. Esto significa que se busca encontrar la curva o línea que se ajusta mejor a los datos.

La función que se utiliza para ajustar los datos puede ser lineal o no lineal, dependiendo de la naturaleza de los datos y la relación que se espera encontrar entre ellos. En el caso de una función lineal, la curva se representa como una línea recta. En el caso de una función no lineal, la curva puede tomar diversas formas, como una curva exponencial, una curva logarítmica o una curva polinómica, entre otras.

Una vez que se ha seleccionado la función, se calculan los valores predichos por la función para cada par de datos. A continuación, se calculan las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por la función. Estas diferencias se elevan al cuadrado y se suman para obtener la suma de los errores cuadráticos.

El objetivo es encontrar los valores de los parámetros de la función que minimicen la suma de los errores cuadráticos. En el caso de una función lineal; de la forma $p(x)=a_0+a_1(x)$, esto se puede hacer utilizando las ecuaciones del método dadas por las expresiones matemáticas, Ecs. (3.10) y (3.11)

Ec. (3.10) para el coeficiente a_0 de la función p(x)

$$a_0=\frac{\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right]-\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot x_i\right]}{m\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2-\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2}$$

Ec. (3.11) para el coeficiente a_1 de la función p(x)

$$a_1=\frac{\left[m\cdot\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot x_i\right]-\left[\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]}{m\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2-\left[\sum_{i=1}^{m} x_i\right]^2}$$

En el caso de una función no lineal; como una función cuadrática o polinomio de grado 2, se puede utilizar un sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de dicha función

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{3.13}$$

como el método de Newton-Raphson o el método de gradiente descendente.
Una vez que se han ajustado los parámetros de la función, se verifica si la función ajustada se ajusta adecuadamente a los datos mediante la comparación de los valores observados y los valores predichos. Esto se puede hacer utilizando una variedad de técnicas, como el coeficiente de determinación (R^2), el análisis de residuos y las pruebas de hipótesis.
En resumen, el método de los mínimos cuadrados es una técnica estadística útil para encontrar la mejor función que se ajusta a un conjunto de datos. Se utiliza ampliamente en la investigación y el análisis de datos en una variedad de campos.
Calculamos en Maple los mínimos cuadrados para polinomios de grado 2 y 5, y presentamos las gráficas respectivas en la Fig. 3.36

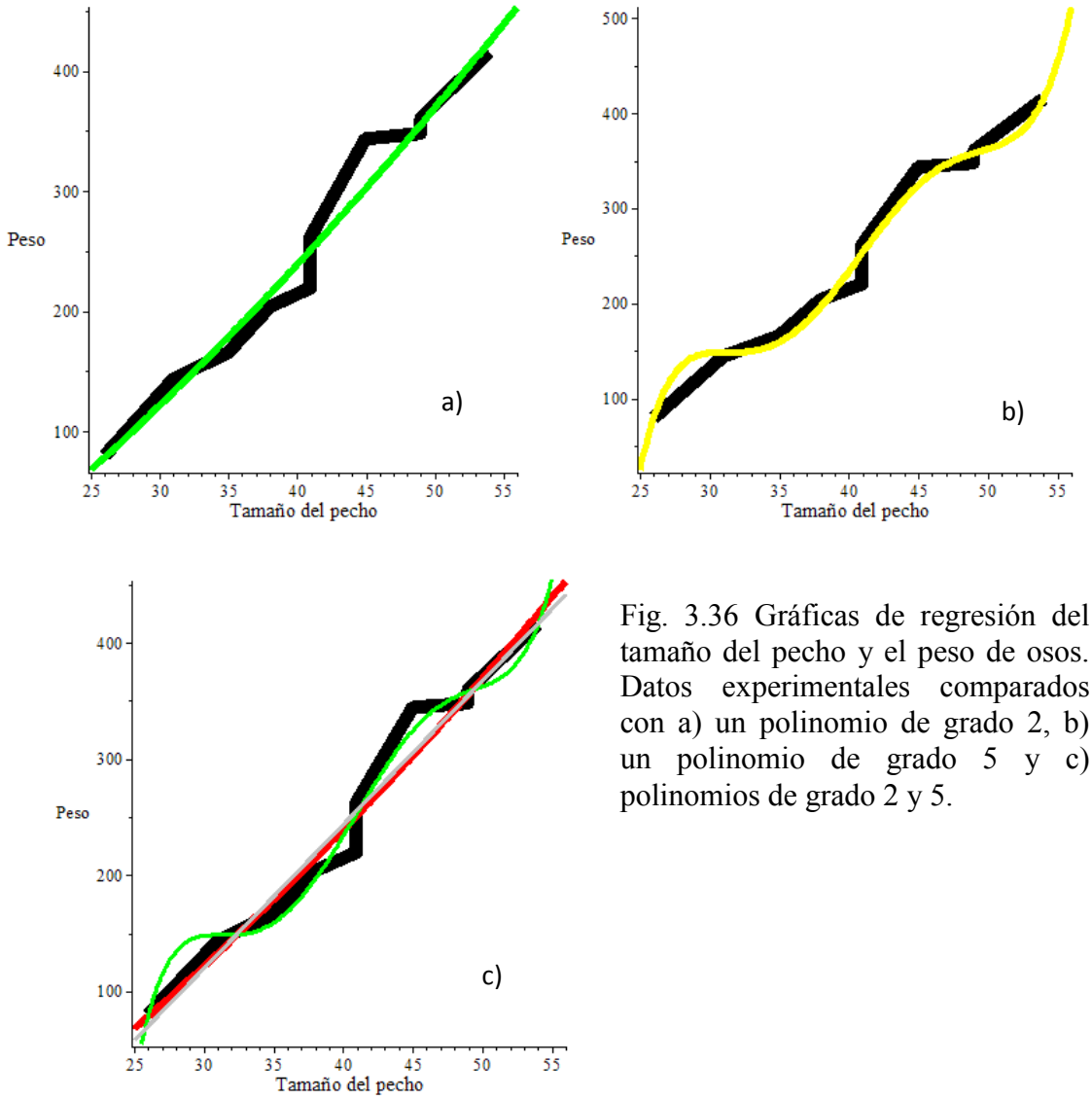


Fig. 3.36 Gráficas de regresión del tamaño del pecho y el peso de osos. Datos experimentales comparados con a) un polinomio de grado 2, b) un polinomio de grado 5 y c) polinomios de grado 2 y 5.

Los cálculos de los polinomios de grados 1, 2 y 5, así como las instrucciones Maple para realizar las

gráficas de la Fig. 3.36, son

```
> with(CurveFitting) :
> A := LeastSquares([[26, 80], [45, 344], [54, 416], [49, 348], [35,
      166], [41, 220], [41, 262], [49, 360], [38, 204], [31, 144]], x,
      curve = a·x^2 + b·x + c)
```

$$A := -\frac{2171608571}{14232755} + \frac{204902877}{28465510}\,x + \frac{1840397}{28465510}\,x^2$$

```
> B := LeastSquares([[26, 80], [45, 344], [54, 416], [49, 348], [35,
      166], [41, 220], [41, 262], [49, 360], [38, 204], [31, 144]], x, curve
      = a·x^5 + b·x^4 + c·x^3 + d·x^2 + e·x + f)
```

$$B := -\frac{39787082794623208383}{810162865164968} + \frac{1657527750607318746293}{255201302526964920}\,x - \frac{114734476357523449481}{340268403369286560}\,x^2 + \frac{1254527213856596363}{145829315729694240}\,x^3 - \frac{36674180020662979}{340268403369286560}\,x^4 + \frac{5421891384203 27}{1020805210107859680}\,x^5$$

```
> puntos := {[26, 80], [45, 344], [54, 416], [49, 348], [35, 166], [41,
      220], [41, 262], [49, 360], [38, 204], [31, 144]};
```

$$puntos := \{[26, 80], [31, 144], [35, 166], [38, 204], [41, 220], [41, 262], [45, 344], [49, 348], [49, 360], [54, 416]\}$$

```
> with(plots) :
> C := LeastSquares([[26, 80], [45, 344], [54, 416], [49, 348], [35,
      166], [41, 220], [41, 262], [49, 360], [38, 204], [31, 144]], x)
```

$$C := -\frac{1720552}{6829} + \frac{84544}{6829}\,x$$

```
> B
```

$$-\frac{39787082794623208383}{810162865164968} + \frac{1657527750607318746293}{255201302526964920}\,x - \frac{114734476357523449481}{340268403369286560}\,x^2 + \frac{1254527213856596363}{145829315729694240}\,x^3 - \frac{36674180020662979}{340268403369286560}\,x^4 + \frac{5421891384203 27}{1020805210107859680}\,x^5$$

```
> #Pero una recta no es la única función que se aproxima a dichos datos,
      una función alternativa es una cuadrática, dicha función es la
      ecuación A
> A
```

$$-\frac{2171608571}{14232755} + \frac{204902877}{28465510}\,x + \frac{1840397}{28465510}\,x^2$$

```
> #Ahora, a continuación, se muestran los datos de la tabla mostrada al
      inicio del documento (los punto color vino), la función lineal que
      más se

      #aproxima (la recta, en color verde) y la función cuadrática (en
      color negro), alternativa a la recta.
```

```
> display(plot(puntos, color = black, thickness = 10), plot(C, x = 25 ..56,
      color = red, thickness = 5) )
```

Por otra parte, en Excel, calculamos el coeficiente de determinación para el ajuste de datos a polinomios de grado 3, 5 y 6, siendo este último, el que mejor ajusta a los datos, con un coeficiente de determinación de 0.9889, aunque, los tres presenta un buen ajuste, como se puede observar de los resultados obtenidos, a saber

$y = -0.0113x^3 + 1.421x^2 - 45.396x + 504.58$
$R^2 = 0.9721$

$y = 0.0005x^5 - 0.1078x^4 + 8.6027x^3 - 337.19x^2 + 6495x - 49110$
$R^2 = 0.9833$

$y = 9E\text{-}05x^6 - 0.0218x^5 + 2.1017x^4 - 106.48x^3 + 2992.8x^2 - 44241x + 268746$
$R^2 = 0.9889$

Problema 11

Tabaquismo y Nicotina. Cuando la nicotina es absorbida por el cuerpo, se produce cotinina. Por consiguiente, la medición de cotinina es un buen indicador de cuánto fuma una persona. A continuación, se incluye el reporte del número de cigarrillos fumados por día y las cantidades medidas de nicotina (en mg/mL). (Los valores provienen de sujetos seleccionados al azar de la National Healt Examination Survey). ¿Existe una correlación lineal? Explique el resultado.

x (cigarrillos por día)	60	10	4	15	10	1	20	8	7	10	10	20
y (cotinina)	179	283	75.6	174	209	9.51	350	1.85	43.4	25.1	408	344

Todos los intentos se resuelven mediante pivoteo.
Se procede partiendo de la definición mediante las siguientes dos ecuaciones (Nieves, Domínguez, 1996, p. 365).

$$m\,a_0 + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n+1)}\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n+2)}\right) + a_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n+j)}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) \qquad (3.7)$$

.

La instrucción "unassign" nos permite borrar el valor previo asignado a la variable o las variables sobre las que se utiliza, permite seguir el proceso iterativo sin necesidad de usar "restart", que comprometería los valores iniciales de *x* e *y*.
Para no comprometer demasiado el polinomio, se ha tomado la libertad de promediar valores de la variable dependiente cuyos valores independientes son iguales, dando una gráfica uniforme y más fácil de trabajar. Tómese esto en cuenta para la consideración final acerca de la correlación lineal entre abscisas y ordenadas, aunque dicho lo anterior, podemos concluir muy prematuramente que no existe correlación lineal, sin embargo, se demostrará con las gráficas.

Inicialmente se procedía aumentando en 1 el grado del polinomio y mostrado el resultado, sin embargo, el proceso se alarga sobremanera, por lo que, en cierto punto, se hará un salto en los grados del polinomio.

Solución

Acomodando los datos experimentales en el orden de x (cigarrillos por día) para enseguida graficarlos, se tiene que

```
> x[1] := 1
```

$$x_1 := 1$$

```
> x[2] := 4
```

$$x_2 := 4$$

```
> x[3] := 7
```

$$x_3 := 7$$

```
> x[4] := 8
```

$$x_4 := 8$$

```
> x[5] := 10
```

$$x_5 := 10$$

```
> x[6] := 15
```

$$x_6 := 15$$

```
> x[7] := 20
```

$$x_7 := 20$$

```
> x[8] := 60
```

$$x_8 := 60$$

```
> y[1] := 9.51
```

$$y_1 := 9.51$$

```
> y[2] := 75.6
```

$$y_2 := 75.6$$

```
> y[3] := 43.4
```

$$y_3 := 43.4$$

```
> y[4] := 1.85
```

$$y_4 := 1.85$$

```
> y[5] := 231.275
```

$$y_5 := 231.275$$

```
> y[6] := 174
```

$$y_6 := 174$$

```
> y[7] := 347
```

$$y_7 := 347$$

```
> y[8] := 179
```

$$y_8 := 179$$

Las instrucciones de Maple para graficar los datos experimentales, son (ver Fig. 3.37)

```
> with(plots) :
> P[1] := pointplot({[1, 9.51]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :
```

```
> P[2] := pointplot({[4, 75.6]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[3] := pointplot({[7, 43.4]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[4] := pointplot({[8, 1.85]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[5] := pointplot({[10, 231.275]}, color = "red", symbolsize = 20,
      symbol = solidcircle) :

> P[6] := pointplot({[15, 174]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[7] := pointplot({[20, 347]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[8] := pointplot({[60, 179]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], P[8])
```

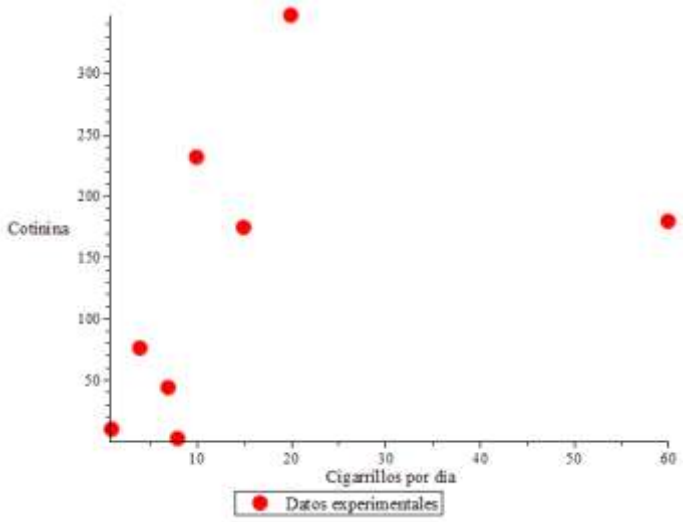


Fig. 3.37 Gráfica de los datos experimentales del Problema 3.18.

A continuación, se da el procedimiento del software Maple para el ajuste de los datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a polinomios de grado 1-7, y las correspondientes gráficas (ver Figs. 3.38-3.43). Se da la solución polinomio por polinomio, haciendo uso de las Ecs. (3.7) de mínimos cuadrados dadas arriba. Finalmente se obtiene la gráfica con el ajuste de datos a un polinomio de grado 7 usando la librería de Maple para la solución por mínimos cuadrados en la Fig. 3.44, así como una conclusión importante.

Polinomio grado 1. 2 ecuaciones, 2 incógnitas.

```
> Eq[1] := 8·a[0] + a[1]·sum(x[i], i = 1 .. 8) = sum(y[i], i = 1 .. 8)
```

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 = 1061.635$$

> $Eq[2] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 = \sum_{i=1}^{8} x[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 = 1.327043750\,10^5$$

> $\langle Eq[1], Eq[2]\rangle$

$$\begin{bmatrix} 8\,a_0 + 125\,a_1 = 1061.635 \\ 125\,a_0 + 4455\,a_1 = 1.327043750\,10^5 \end{bmatrix}$$

> $Eq[1] := \frac{Eq[1]}{8}$:

> $Eq[2] := Eq[2] - 125\,Eq[1]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2]\rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 = 132.7043750 \\ \frac{20015}{8}\,a_1 = 1.161163281\,10^5 \end{bmatrix}$$

> $a[1] := \frac{1.161163281\,10^5}{\frac{20015}{8}}$

$$a_1 := 46.41172245$$

> $a_0 := 132.7043750 - \frac{125}{8}\,a_1$

$$a_0 := -592.4787883$$

> $fx := a[0]\cdot x^0 + a[1]\cdot x^1$

$$fx := 46.41172245\,x - 592.4787883$$

> $Polinomio_Grado1 := plot(fx, x = 1..60)$:

>

```
display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], P[8],
    Polinomio_Grado1)
```

La Fig. 3.38 muestra el ajuste del polinomio de grado 1 a los datos experimentales.

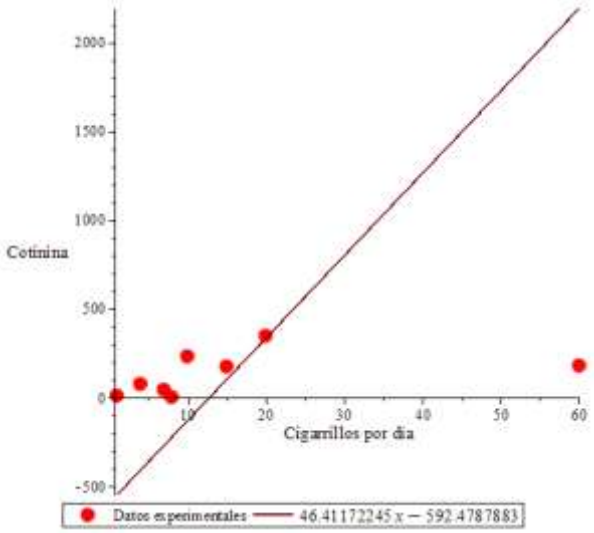


Fig. 3.38 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 1. Observe que no ajustan los datos a una línea recta.

Polinomio grado 2. 3 ecuaciones, 3 incógnitas.

> $unassign('Eq[1]','Eq[2]','a[0]','a[1]')$

> $Eq[1] := 8\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 = \sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 = 1061.635$$

> $Eq[2] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 = \sum_{i=1}^{8} x[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 = 1.327043750\,10^5$$

> $Eq[3] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 = \sum_{i=1}^{8} x[i]^2\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_3 := 4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 = 4.729583925\,10^6$$

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3]\rangle$

$$\begin{bmatrix} 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 = 1061.635 \\ 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 = 1.327043750\,10^5 \\ 4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 = 4.729583925\,10^6 \end{bmatrix}$$

> $Eq[1] := \frac{Eq[1]}{8}$:

> $Eq[2] := Eq[2] - 125\,Eq[1]$:

> $Eq[3] := Eq[3] - 4455\,Eq[1]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3]\rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 + \frac{4455}{8}\,a_2 = 132.7043750 \\ \frac{20015}{8}\,a_1 + \frac{1277485}{8}\,a_2 = 1.161163281\,10^5 \\ \frac{1277485}{8}\,a_1 + \frac{85652007}{8}\,a_2 = 4.138385934\,10^6 \end{bmatrix}$$

> $Eq[2] := \frac{Eq[2]}{\frac{20015}{8}}$:

> $Eq[3] := Eq[3] - \frac{1277485}{8}Eq[2]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3]\rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 + \frac{4455}{8}\,a_2 = 132.7043750 \\ a_1 + \frac{255497}{4003}\,a_2 = 46.41172245 \\ \frac{2058924872}{4003}\,a_2 = -3.272898973\,10^6 \end{bmatrix}$$

> $Eq[3] := \dfrac{Eq[3]}{\dfrac{2058924872}{4003}}$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3] \rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \dfrac{125}{8} a_1 + \dfrac{4455}{8} a_2 = 132.7043750 \\ a_1 + \dfrac{255497}{4003} a_2 = 46.41172245 \\ a_2 = -6.363231008 \end{bmatrix}$$

> $a[2] := 43.71746699$

$$a_2 := 43.71746699$$

> $a[1] := 46.41172245 - \dfrac{255497}{4003} a_2$

$$a_1 := -2743.915948$$

> $a[0] := 132.7043750 - \dfrac{125}{8} a_1 - \dfrac{4455}{8} a_2$

$$a_0 := 18661.22663$$

> $fx1 := a[2] \cdot x^2 + a[1] \cdot x^1 + a[0] \cdot x^0$

$$fx1 := 43.71746699\, x^2 - 2743.915948\, x + 18661.22663$$

La Fig. 3.39 muestra el ajuste del polinomio de grado 2 a los datos experimentales.

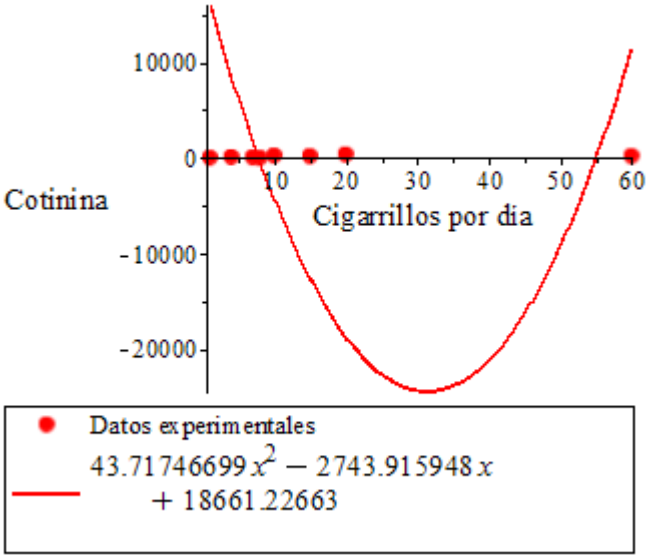


Fig. 3.39 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 2. Observe que no ajustan los datos a una curva cuadrática.

Polinomio grado 3. 4 ecuaciones, 4 incógnitas.

> *unassign*('*Eq*[1]','*Eq*[2]','*Eq*[3]','*a*[0]','*a*[1]','*a*[2]')

> $Eq[1] := 8\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 = \sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 + 229295\,a_3 = 1061.635$$

> $Eq[2] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 = \sum_{i=1}^{8} x[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 + 13187379\,a_3 = 1.327043750\,10^5$$

> $Eq[3] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 = \sum_{i=1}^{8} x[i]^2\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_3 := 4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 + 781709975\,a_3 = 4.729583925\,10^6$$

> $Eq[4] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 = \sum_{i=1}^{8} x[i]^3\cdot\sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_4 := 229295\,a_0 + 13187379\,a_1 + 781709975\,a_2 + 46732774515\,a_3 = 2.434275973\,10^8$$

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4]\rangle$

$$\left[\left[8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 + 229295\,a_3 = 1061.635\right],\left[125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 + 13187379\,a_3 = 1.327043750\,10^{5}\right],\left[4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 + 781709975\,a_3 = 4.729583925\,10^6\right],\left[229295\,a_0 + 13187379\,a_1 + 781709975\,a_2 + 46732774515\,a_3 = 2.434275973\,10^8\right]\right]$$

> $Eq[1] := \frac{Eq[1]}{8}$:

> $Eq[2] := Eq[2] - 125\,Eq[1]$:

> $Eq[3] := Eq[3] - 4455\, Eq[1]$:

> $Eq[4] := Eq[4] - 229295\, Eq[1]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4] \rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[\frac{20015}{8} a_1 + \frac{1277485}{8} a_2 + \frac{76837157}{8} a_3 = 1.161163281\, 10^5\right],$$
$$\left[\frac{1277485}{8} a_1 + \frac{85652007}{8} a_2 + \frac{5232170575}{8} a_3 = 4.138385934\, 10^6\right],$$
$$\left.\left[\frac{76837157}{8} a_1 + \frac{5232170575}{8} a_2 + \frac{321285999095}{8} a_3 = 2.129991476\, 10^8\right]\right]$$

> $Eq[2] := \dfrac{Eq[2]}{\frac{20015}{8}}$:

> $Eq[3] := Eq[3] - \dfrac{1277485}{8} Eq[2]$:

> $Eq[4] := Eq[4] - \dfrac{76837157}{8} Eq[2]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4] \rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 = 132.7043750 \\ a_1 + \frac{255497}{4003} a_2 + \frac{76837157}{20015} a_3 = 46.41172245 \\ \frac{2058924872}{4003} a_2 + \frac{164089463712}{4003} a_3 = -3.272898973\, 10^6 \\ \frac{164089463712}{4003} a_2 + \frac{65823822005472}{20015} a_3 = -2.327689530\, 10^8 \end{bmatrix}$$

> $Eq[3] := \dfrac{Eq[3]}{\frac{2058924872}{4003}}$:

> $Eq[4] := Eq[4] - \dfrac{164089463712}{4003} Eq[3]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4] \rangle$

$$\begin{bmatrix} a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 = 132.7043750 \\ a_1 + \frac{255497}{4003} a_2 + \frac{76837157}{20015} a_3 = 46.41172245 \\ a_2 + \frac{20511182964}{257365609} a_3 = -6.363231008 \\ \frac{28089676202485536}{1286828045} a_3 = 2.80702085\, 10^7 \end{bmatrix}$$

> $Eq[4] := \dfrac{Eq[4]}{\frac{28089676202485536}{1286828045}}$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4] \rangle$

$$\left[\begin{array}{c} a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 = 132.7043750 \\ a_1 + \frac{255497}{4003} a_2 + \frac{76837157}{20015} a_3 = 46.41172245 \\ a_2 + \frac{20511182964}{257365609} a_3 = -6.363231008 \\ a_3 = 1.285936202 \end{array}\right]$$

> $a_3 := 272.1454789$

$$a_3 := 272.1454789$$

> $a[2] := 43.71746699 - \frac{20511182964}{257365609} a_3$

$$a_2 := -21645.37196$$

> $a[1] := 46.41172245 - \frac{255497}{4003} a_2 - \frac{76837157}{20015} a_3$

$$a_1 := 3.36831479\,10^5$$

> $a[0] := 132.7043750 - \frac{125}{8} a_1 - \frac{4455}{8} a_2 - \frac{229295}{8} a_3$

$$a_0 := -1.009292343\,10^6$$

> $fx2 := a[3]\cdot x^3 + a[2]\cdot x^2 + a[1]\cdot x^1 + a[0]\cdot x^0$

$$fx2 := 272.1454789\,x^3 - 21645.37196\,x^2 + 3.36831479\,10^5\,x - 1.009292343\,10^6$$

> $Polinomio_Grado3 := plot(fx2, x = 1..60, color = \text{"purple"})$:
> $Polinomio_Grado2 := plot(fx1, x = 1..60, color = \text{"red"})$:
> $Polinomio_Grado1 := plot(fx, x = 1..60, color = \text{"blue"})$:
>

$display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], Polinomio_Grado3)$

La Fig. 3.40 muestra el ajuste del polinomio de grado 3 a los datos experimentales.

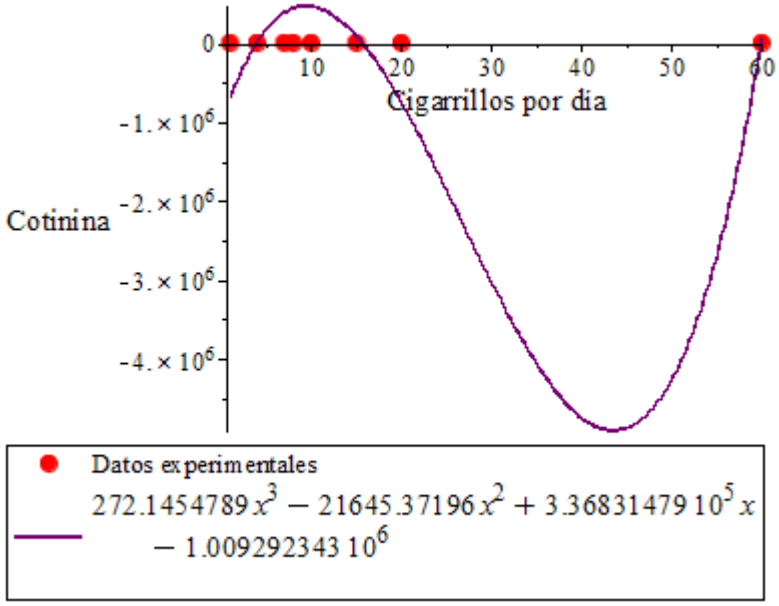


Fig. 3.40 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 3. Observe que no ajustan los datos a una ecuación cúbica.

Polinomio grado 5. 6 ecuaciones, 6 incógnitas.

```
> unassign('Eq[1]','Eq[2]','Eq[3]','Eq[4]','Eq[5]','a[0]','a[1]','a[2]','a[3]',
      'a[4]')
```

$$> Eq[1] := 8\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 = \sum_{i=1}^{8} y[i]$$

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 + 229295\,a_3 + 13187379\,a_4 + 781709975\,a_5 = 1061.635$$

$$> Eq[2] := \sum_{i=1}^{8} x[i]\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]$$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 + 13187379\,a_3 + 781709975\,a_4 + 46732774515\,a_5 = 1.32704375\,10^5$$

$$> Eq[3] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^2\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2$$

$$Eq_3 := 4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 + 781709975\,a_3 + 46732774515\,a_4 + 2800823796455\,a_5 = 4.729583925\,10^6$$

$$> Eq[4] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^3\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3$$

$$Eq_4 := 229295\,a_0 + 13187379\,a_1 + 781709975\,a_2 + 46732774515\,a_3 + 2800823796455\,a_4 + 167989885498179\,a_5 = 2.434275973\,10^8$$

$$> Eq[5] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^4\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4$$

$$Eq_5 := 13187379\,a_0 + 781709975\,a_1 + 46732774515\,a_2 + 2800823796455\,a_3 + 167989885498179\,a_4 + 10078247618192855\,a_5 = 1.400018310\,10^{10}$$

> $Eq[6] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^5 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^5$

$$Eq_6 := 781709975\, a_0 + 46732774515\, a_1 + 2800823796455\, a_2 + 167989885498179\, a_3 + 10078247618192855\, a_4 + 604672588007656275\, a_5 = 8.298906693\, 10^{11}$$

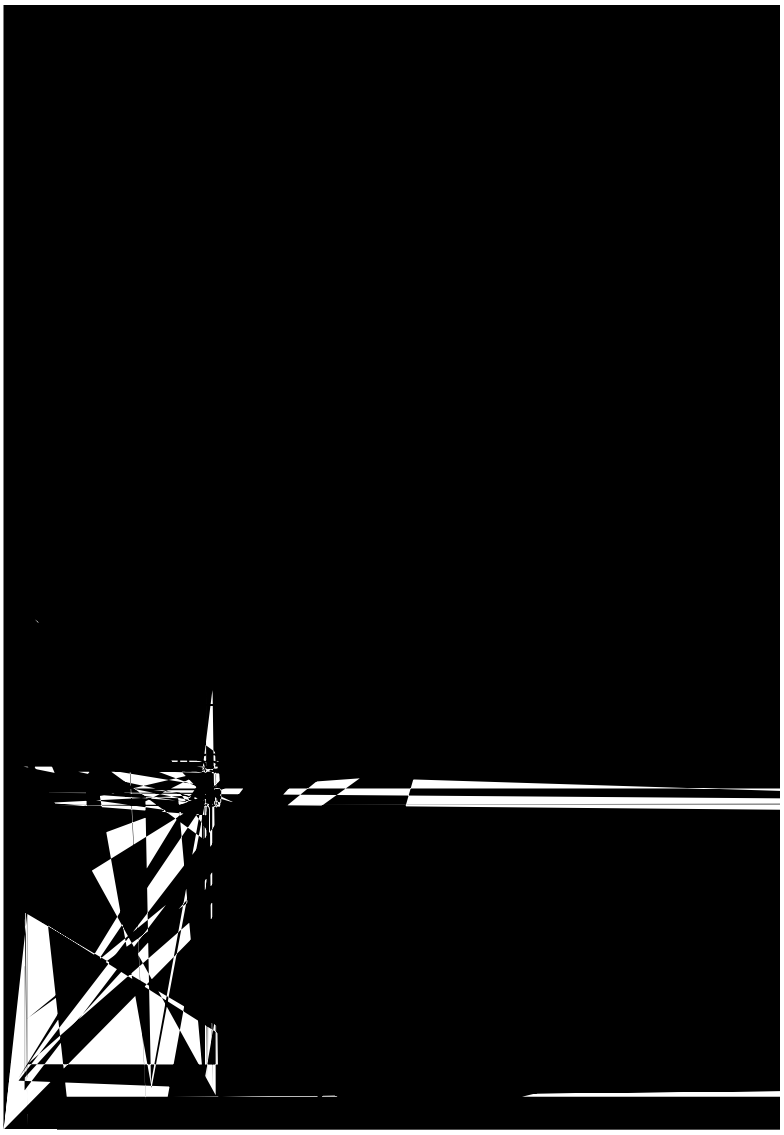
> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6] \rangle$

$$\left[\left[8\, a_0 + 125\, a_1 + 4455\, a_2 + 229295\, a_3 + 13187379\, a_4 + 781709975\, a_5 = 1061.635\right],\right.$$
$$\left[125\, a_0 + 4455\, a_1 + 229295\, a_2 + 13187379\, a_3 + 781709975\, a_4 + 46732774515\, a_5 = 1.32704375\, 10^5\right],$$
$$\left[4455\, a_0 + 229295\, a_1 + 13187379\, a_2 + 781709975\, a_3 + 46732774515\, a_4 + 2800823796455\, a_5 = 4.729583925\, 10^6\right],$$
$$\left[229295\, a_0 + 13187379\, a_1 + 781709975\, a_2 + 46732774515\, a_3 + 2800823796455\, a_4 + 167989885498179\, a_5 = 2.434275973\, 10^8\right],$$
$$\left[13187379\, a_0 + 781709975\, a_1 + 46732774515\, a_2 + 2800823796455\, a_3 + 167989885498179\, a_4 + 10078247618192855\, a_5 = 1.400018310\, 10^{10}\right],$$
$$\left.\left[781709975\, a_0 + 46732774515\, a_1 + 2800823796455\, a_2 + 167989885498179\, a_3 + 10078247618192855\, a_4 + 604672588007656275\, a_5 = 8.298906693\, 10^{11}\right]\right]$$

> $Eq[1] := \frac{Eq[1]}{8}$:
> $Eq[2] := Eq[2] - 125\, Eq[1]$:
> $Eq[3] := Eq[3] - 4455\, Eq[1]$:
> $Eq[4] := Eq[4] - 229295\, Eq[1]$:
> $Eq[5] := Eq[5] - 13187379\, Eq[1]$:
> $Eq[6] := Eq[6] - 781709975\, Eq[1]$:
> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6] \rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}a_1 + \frac{4455}{8}a_2 + \frac{229295}{8}a_3 + \frac{13187379}{8}a_4 + \frac{781709975}{8}a_5 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[\frac{20015}{8}a_1 + \frac{1277485}{8}a_2 + \frac{76837157}{8}a_3 + \frac{4605257425}{8}a_4 + \frac{276148449245}{8}a_5 = 1.161163281\,10^5\right],$$
$$\left[\frac{1277485}{8}a_1 + \frac{85652007}{8}a_2 + \frac{5232170575}{8}a_3 + \frac{315112422675}{8}a_4 + \frac{18924072433015}{8}a_5 = 4.138385934\,10^{\epsilon}\right],$$
$$\left[\frac{76837157}{8}a_1 + \frac{5232170575}{8}a_2 + \frac{321285999095}{8}a_3 + \frac{19382790303835}{8}a_4 + \frac{1164676895267807}{8}a_5 = 2.129991476\,10^8\right],$$
$$\left[\frac{4605257425}{8}a_1 + \frac{315112422675}{8}a_2 + \frac{19382790303835}{8}a_3 + \frac{1170012119095791}{8}a_4 + \frac{70317275237137315}{8}a_5 = 1.225016021\,10^{10}\right],$$
$$\left.\left[\frac{276148449245}{8}a_1 + \frac{18924072433015}{8}a_2 + \frac{1164676895267807}{8}a_3 + \frac{70317275237137315}{8}a_4 + \frac{4226310219046749575}{8}a_5 = 7.261543356\,10^{11}\right]\right]$$

```
> Eq[2] := Eq[2] / (20015/8) :
> Eq[3] := Eq[3] - (1277485/8)*Eq[2] :
> Eq[4] := Eq[4] - (76837157/8)*Eq[2] :
> Eq[5] := Eq[5] - (4605257425/8)*Eq[2] :
> Eq[6] := Eq[6] - (276148449245/8)*Eq[2] :
> <Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6]>
```



$$> Eq[3] := \frac{Eq[3]}{\frac{2058924872}{4003}} :$$

$$> Eq[4] := Eq[4] - \frac{164089463712}{4003} Eq[3] :$$

$$> Eq[5] := Eq[5] - \frac{10595696456600}{4003} Eq[3] :$$

$$> Eq[6] := Eq[6] - \frac{649745201576160}{4003} Eq[3] :$$

$$> \langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6] \rangle$$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}a_1 + \frac{4455}{8}a_2 + \frac{229295}{8}a_3 + \frac{13187379}{8}a_4 + \frac{781709975}{8}a_5 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003}a_2 + \frac{76837157}{20015}a_3 + \frac{921051485}{4003}a_4 + \frac{55229689849}{4003}a_5 = 46.41172245\right],$$
$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}a_5 = -6.363231008\right],$$
$$\left[\frac{28089676202485536}{1286828045}a_3 + \frac{504684786075366960}{257365609}a_4 + \frac{34147806364388055168}{257365609}a_5 = 2.80702085\,10^7\right],$$
$$\left[\frac{504684786075366960}{257365609}a_3 + \frac{4545833045696841916 8}{257365609}a_4 + \frac{3079794974390318383920}{257365609}a_5 = 2.37600278\,10^9\right],$$
$$\left.\left[\frac{34147806364388055168}{257365609}a_3 + \frac{3079794974390318383920}{257365609}a_4 + \frac{208791342152908364769120}{257365609}a_5 = 1.569337576\,10^{11}\right]\right]$$

> $Eq[4] := \dfrac{Eq[4]}{\dfrac{28089676202485536}{1286828045}}$:

> $Eq[5] := Eq[5] - \dfrac{504684786075366960}{257365609}Eq[4]$:

> $Eq[6] := Eq[6] - \dfrac{34147806364388055168}{257365609}Eq[4]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6]\rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 + \frac{4455}{8}\,a_2 + \frac{229295}{8}\,a_3 + \frac{13187379}{8}\,a_4 + \frac{781709975}{8}\,a_5 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003}\,a_2 + \frac{76837157}{20015}\,a_3 + \frac{921051485}{4003}\,a_4 + \frac{55229689849}{4003}\,a_5 = 46.41172245\right],$$
$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}\,a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}\,a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}\,a_5 = -6.363231008\right],$$
$$\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594}\,a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297}\,a_5 = 1.285936202\right],$$
$$\left[\frac{4554853965084739201 3944}{97533597925297}\,a_4 + \frac{4601266735711788918866160}{97533597925297}\,a_5 = -1.45672278\,10^8\right],$$
$$\left.\left[\frac{460126673571178891886 6160}{97533597925297}\,a_4 + \frac{4656933918424740502483 41600}{97533597925297}\,a_5 = -1.36869426\,10^{10}\right]\right]$$

> $Eq[5] := \dfrac{Eq[5]}{\dfrac{4554853965084739201 3944}{97533597925297}}$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6]\rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}a_1 + \frac{4455}{8}a_2 + \frac{229295}{8}a_3 + \frac{13187379}{8}a_4 + \frac{781709975}{8}a_5 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003}a_2 + \frac{76837157}{20015}a_3 + \frac{921051485}{4003}a_4 + \frac{55229689849}{4003}a_5 = 46.41172245\right],$$
$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}a_5 = -6.363231008\right],$$
$$\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594}a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297}a_5 = 1.285936202\right],$$
$$\left[a_4 + \frac{63906482440441512762030}{632618606261769333527}a_5 = -0.3119296799\right],$$
$$\left.\left[\frac{46012667357117889188661 60}{97533597925297}a_4 + \frac{46569339184247405024834 1600}{97533597925297}a_5 = -1.36869426\,10^{10}\right]\right]$$

> $Eq[6] := Eq[6] - \frac{46012667357117889188661 60}{97533597925297} \cdot Eq[5]$

$$Eq_6 := \frac{56958079571141278086028517 47200}{632618606261769333527}a_5 = 1.02872144\,10^9$$

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6] \rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 + \frac{4455}{8}\,a_2 + \frac{229295}{8}\,a_3 + \frac{13187379}{8}\,a_4 + \frac{781709975}{8}\,a_5 = 132.7043750\right],\left[a_1 + \frac{255497}{4003}\,a_2 + \frac{76837157}{20015}\,a_3 + \frac{921051485}{4003}\,a_4 + \frac{55229689849}{4003}\,a_5 = 46.41172245\right],\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}\,a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}\,a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}\,a_5 = -6.363231008\right],\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594}\,a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297}\,a_5 = 1.285936202\right],\left[a_4 + \frac{6390648244044151276 2030}{632618606261769333527}\,a_5 = -0.3119296799\right],\left[\frac{569580795711412780860285174 7200}{632618606261769333527}\,a_5 = 1.02872144\,10^{9}\right]\right]$$

> $Eq[6] := \dfrac{Eq[6]}{\frac{569580795711412780860285174 7200}{632618606261769333527}}$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6]\rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}\,a_1 + \frac{4455}{8}\,a_2 + \frac{229295}{8}\,a_3 + \frac{13187379}{8}\,a_4 + \frac{781709975}{8}\,a_5 = 132.7043750\right],\left[a_1 + \frac{255497}{4003}\,a_2 + \frac{76837157}{20015}\,a_3 + \frac{921051485}{4003}\,a_4 + \frac{55229689849}{4003}\,a_5 = 46.41172245\right],\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}\,a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}\,a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}\,a_5 = -6.363231008\right],\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594}\,a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297}\,a_5 = 1.285936202\right],\left[a_4 + \frac{6390648244044151276 2030}{632618606261769333527}\,a_5 = -0.3119296799\right],\left[a_5 = 0.1142574203\right]\right]$$

> $a_5 := 0.1142574203$

$$a_5 := 0.1142574203$$

```
> a4 := -0.3119296799 - 6390648244044151276203 0/63261860626176933352 7 a5
                                                  a4 := -11.85409703
> a3 := 1.285936202 - 17523777294283575/195067195850594 a4
       - 592843860492848180/97533597925297 a5
                                                  a3 := 371.6964284
> a2 := -6.363231008 - 20511182964/257365609 a3 - 1324462057075/257365609 a4
       - 81218150197020/257365609 a5
                                                  a2 := -4682.23286
> a1 := 46.41172245 - 255497/4003 a2 - 76837157/20015 a3 - 921051485/4003 a4
       - 55229689849/4003 a5
                                                  a1 := 23056.372
> a0 := 132.7043750 - 125/8 a1 - 4455/8 a2 - 229295/8 a3 - 13187379/8 a4
       - 781709975/8 a5
                                                  a0 := -30183.12
> fx4 := a[5]·x^5 + a[4]·x^4 + a[3]·x^3 + a[2]·x^2 + a[1]·x^1 + a[0]·x^0
                  fx4 := 0.1142574203 x^5 - 11.85409703 x^4 + 371.6964284 x^3
                         - 4682.23286 x^2 + 23056.372 x - 30183.12
> Polinomio_Grado5 := plot(fx4, x = 1 ..60, color = "black") :
> display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], P[8],
      Polinomio_Grado5)
```

La Fig. 3.41 muestra el ajuste del polinomio de grado 5 a los datos experimentales.

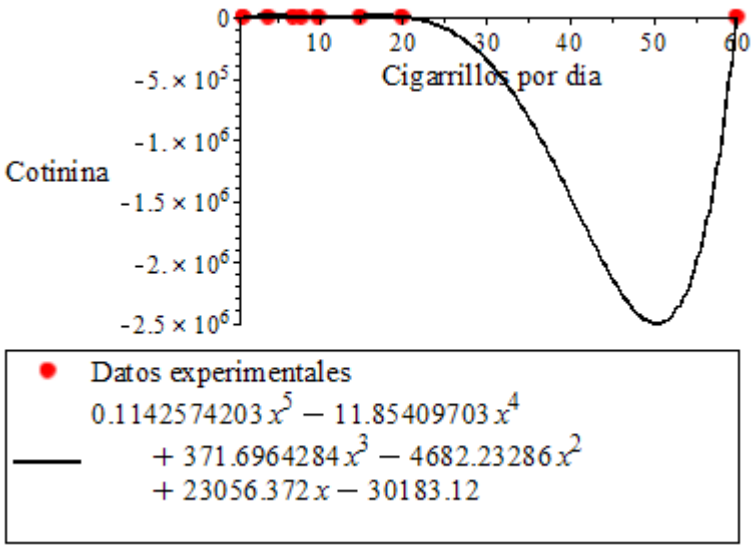


Fig. 3.41 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 5. Observe que ajustan los datos a una parte del polinomio.

Polinomio grado 6. 7 ecuaciones, 7 incógnitas.

> *unassign*('*Eq*[1]','*Eq*[2]','*Eq*[3]','*Eq*[4]','*Eq*[5]','*Eq*[6]','*a*[0]','*a*[1]','*a*[2]','*a*[3]','*a*[4]','*a*[5]')

> $Eq[1] := 8\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 = \sum_{i=1}^{8} y[i]$

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 + 229295\,a_3 + 13187379\,a_4 + 781709975\,a_5 + 46732774515\,a_6 = 1061.635$$

> $Eq[2] := \sum_{i=1}^{8} x[i]\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 + 13187379\,a_3 + 781709975\,a_4 + 46732774515\,a_5 + 2800823796455\,a_6 = 1.32704375\,10^5$$

> $$Eq[3] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^2 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[6] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^2$$

$$Eq_3 := 4455\, a_0 + 229295\, a_1 + 13187379\, a_2 + 781709975\, a_3 + 46732774515\, a_4 + 2800823796455\, a_5 + 167989885498179\, a_6 = 4.729583925\, 10^6$$

> $$Eq[4] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^3 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[6] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^9 = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^3$$

$$Eq_4 := 229295\, a_0 + 13187379\, a_1 + 781709975\, a_2 + 46732774515\, a_3 + 2800823796455\, a_4 + 167989885498179\, a_5 + 10078247618192855\, a_6 = 2.434275973\, 10^8$$

> $$Eq[5] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^4 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[6] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^4$$

$$Eq_5 := 13187379\, a_0 + 781709975\, a_1 + 46732774515\, a_2 + 2800823796455\, a_3 + 167989885498179\, a_4 + 10078247618192855\, a_5 + 604672588007656275\, a_6 = 1.400018310\, 10^{10}$$

> $$Eq[6] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^5 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} + a[6] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{11} = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^5$$

$$Eq_6 := 781709975\,a_0 + 46732774515\,a_1 + 2800823796455\,a_2 + 167989885498179\,a_3 + 10078247618192855\,a_4 + 604672588007656275\,a_5 + 36279919160327315015\,a_6 = 8.298906693\,10^{11}$$

> $$Eq[7] := \sum_{i=1}^{8} x[i]^6 \cdot a[0] + a[1] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[2] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[3] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[4] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} + a[5] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{11} + a[6] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^{12} = \sum_{i=1}^{8} y[i] \cdot \sum_{i=1}^{8} x[i]^6$$

$$Eq_7 := 46732774515\,a_0 + 2800823796455\,a_1 + 167989885498179\,a_2 + 10078247618192855\,a_3 + 604672588007656275\,a_4 + 36279919160327315015\,a_5 + 2176786562828915431779\,a_6 = 4.961314909\,10^{13}$$

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$

$$\left[\left[8\,a_0+125\,a_1+4455\,a_2+229295\,a_3+13187379\,a_4+781709975\,a_5+46732774515\,a_6=1061.635\right],\right.$$
$$\left[125\,a_0+4455\,a_1+229295\,a_2+13187379\,a_3+781709975\,a_4+46732774515\,a_5+2800823796455\,a_6=1.32704375\,10^5\right],$$
$$\left[4455\,a_0+229295\,a_1+13187379\,a_2+781709975\,a_3+46732774515\,a_4+2800823796455\,a_5+167989885498179\,a_6=4.729583925\,10^6\right],$$
$$\left[229295\,a_0+13187379\,a_1+781709975\,a_2+46732774515\,a_3+2800823796455\,a_4+167989885498179\,a_5+10078247618192855\,a_6=2.434275973\,10^8\right],$$
$$\left[13187379\,a_0+781709975\,a_1+46732774515\,a_2+2800823796455\,a_3+167989885498179\,a_4+10078247618192855\,a_5+604672588007656275\,a_6=1.400018310\,10^{10}\right],$$
$$\left[781709975\,a_0+46732774515\,a_1+2800823796455\,a_2+167989885498179\,a_3+10078247618192855\,a_4+604672588007656275\,a_5+36279919160327315015\,a_6=8.298906693\,10^{11}\right],$$
$$\left[46732774515\,a_0+2800823796455\,a_1+167989885498179\,a_2+10078247618192855\,a_3+604672588007656275\,a_4+36279919160327315015\,a_5+2176786562828915431779\,a_6=4.961314909\,10^{13}\right]\Big]$$

> $Eq[2] := \dfrac{Eq[2]}{\frac{20015}{8}}$:

> $Eq[3] := Eq[3] - \dfrac{1277485}{8} Eq[2]$:

> $Eq[4] := Eq[4] - \dfrac{76837157}{8} Eq[2]$:

> $Eq[5] := Eq[5] - \dfrac{4605257425}{8} Eq[2]$:

> $Eq[6] := Eq[6] - \dfrac{276148449245}{8} Eq[2]$:

> $Eq[7] := Eq[7] - \dfrac{16564993557265}{8} Eq[2]$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$

$$\left[\left[a_0+\frac{125}{8}a_1+\frac{4455}{8}a_2+\frac{229295}{8}a_3+\frac{13187379}{8}a_4+\frac{781709975}{8}a_5+\frac{46732774515}{8}a_6=132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1+\frac{255497}{4003}a_2+\frac{76837157}{20015}a_3+\frac{921051485}{4003}a_4+\frac{55229689849}{4003}a_5+\frac{3312998711453}{4003}a_6=46.41172245\right],$$
$$\left[\frac{2058924872}{4003}a_2+\frac{164089463712}{4003}a_3+\frac{10595696456600}{4003}a_4+\frac{649745201576160}{4003}a_5+\frac{39249913613056952}{4003}a_6=\right.$$
$$\left.-3.272898973\,10^6\right],$$
$$\left[\frac{164089463712}{4003}a_2+\frac{65823822005472}{20015}a_3+\frac{852291503527920}{4003}a_4+\frac{52313657721014016}{4003}a_5+\frac{3161235836003897328}{4003}a_6=-2.327689530\,10^8\right],$$
$$\left[\frac{10595696456600}{4003}a_2+\frac{852291503527920}{4003}a_3+\frac{55234915329615656}{4003}a_4+\frac{3391639189588286640}{4003}a_5+\frac{204980369748960810440}{4003}a_6=-1.446708097\,10^{10}\right],$$
$$\left[\frac{649745201576160}{4003}a_2+\frac{52313657721014016}{4003}a_3+\frac{3391639189588286640}{4003}a_4+\frac{208290825345058791840}{4003}a_5+\frac{12589147031586776622000}{4003}a_6=-8.759113124\,10^{11}\right],$$
$$\left[\frac{39249913613056952}{4003}a_2+\frac{3161235836003897328}{4003}a_3+\frac{204980369748960810440}{4003}a_4+\frac{12589147031586776622000}{4003}a_5+\frac{760906233183256572384872}{4003}a_6=-5.268972996\,10^{13}\right]\Bigg]$$

```
> Eq[3] := Eq[3] / (2058924872/4003) :
> Eq[4] := Eq[4] - (164089463712/4003) Eq[3] :
```

$$> Eq[5] := Eq[5] - \frac{10595696456600}{4003} Eq[3] :$$

$$> Eq[6] := Eq[6] - \frac{649745201576160}{4003} Eq[3] :$$

$$> Eq[7] := Eq[7] - \frac{39249913613056952}{4003} Eq[3] :$$

$$> \langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$$

$$\left[\left[a_0+\frac{125}{8}a_1+\frac{4455}{8}a_2+\frac{229295}{8}a_3+\frac{13187379}{8}a_4+\frac{781709975}{8}a_5+\frac{46732774515}{8}a_6=132.7043750\right],\left[a_1+\frac{255497}{4003}a_2+\frac{76837157}{20015}a_3+\frac{921051485}{4003}a_4+\frac{55229689849}{4003}a_5+\frac{3312998711453}{4003}a_6=46.41172245\right],\left[a_2+\frac{20511182964}{257365609}a_3+\frac{1324462057075}{257365609}a_4+\frac{81218150197020}{257365609}a_5+\frac{4906239201632119}{257365609}a_6=-6.363231008\right],\left[\frac{28089676202485536}{1286828045}a_3+\frac{504684786075366960}{257365609}a_4+\frac{34147806364388055168}{257365609}a_5+\frac{2131208265591236665008}{257365609}a_6=2.80702085\,10^7\right],\left[\frac{504684786075366960}{257365609}a_3+\frac{45458330456968419168}{257365609}a_4+\frac{3079794974390318383920}{257365609}a_5+\frac{19232484874369719484752 0}{257365609}a_6=2.37600278\,10^9\right],\left[\frac{34147806364388055168}{257365609}a_3+\frac{3079794974390318383920}{257365609}a_4+\frac{20879134215290836476912 0}{257365609}a_5+\frac{13042246697365359866278320}{257365609}a_6=1.569337576\,10^{11}\right],\left[\frac{2131208265591236665008}{257365609}a_3+\frac{19232484874369719484752 0}{257365609}a_4+\frac{13042246697365359866278320}{257365609}a_5+\frac{81479671897343414037918 1920}{257365609}a_6=9.70254268\,10^{12}\right]\right]$$

> $Eq[4] := \frac{Eq[4]}{\frac{28089676202485536}{1286828045}}$:

> $Eq[5] := Eq[5] - \frac{504684786075366960}{257365609} Eq[4]$:

$$> Eq[6] := Eq[6] - \frac{34147806364388055168}{257365609} Eq[4] :$$

$$> Eq[7] := Eq[7] - \frac{2131208265591236665008}{257365609} Eq[4] :$$

$$> \langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 + \frac{13187379}{8} a_4 + \frac{781709975}{8} a_5 + \frac{46732774515}{8} a_6 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003} a_2 + \frac{76837157}{20015} a_3 + \frac{921051485}{4003} a_4 + \frac{55229689849}{4003} a_5 + \frac{3312998711453}{4003} a_6 = 46.41172245\right],$$
$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609} a_3 + \frac{1324462057075}{257365609} a_4 + \frac{81218150197020}{257365609} a_5 + \frac{4906239201632119}{257365609} a_6 = -6.363231008\right],$$
$$\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594} a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297} a_5 + \frac{74000286999695717535}{195067195850594} a_6 = 1.285936202\right],$$
$$\left[\frac{4554853965084739201 3944}{97533597925297} a_4 + \frac{460126673571178891886 6160}{97533597925297} a_5 + \frac{329200788566618823201123960}{97533597925297} a_6 = -1.45672278\, 10^8\right],$$
$$\left[\frac{460126673571178891886 6160}{97533597925297} a_4 + \frac{465693391842474050248341600}{97533597925297} a_5 + \frac{333514247274183076075703 48400}{97533597925297} a_6 = -1.36869426\, 10^{10}\right],$$
$$\left[\frac{329200788566618823201123960}{97533597925297} a_4 + \frac{333514247274183076075703 48400}{97533597925297} a_5 + \frac{238976733005735251220008 8881400}{97533597925297} a_6 = -9.4611342\, 10^{11}\right]\left.\right]$$

$$> Eq[5] := \frac{Eq[5]}{\frac{4554853965084739201 3944}{97533597925297}} :$$

$$> Eq[6] := Eq[6] - \frac{460126673571178891886616 0}{97533597925297} Eq[5] :$$

$$> Eq[7] := Eq[7] - \frac{32920078856661882320112396 0}{97533597925297} Eq[5] :$$

$$> \langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8} a_1 + \frac{4455}{8} a_2 + \frac{229295}{8} a_3 + \frac{13187379}{8} a_4 + \frac{781709975}{8} a_5 + \frac{46732774515}{8} a_6 = 132.7043750\right],\right.$$

$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003} a_2 + \frac{76837157}{20015} a_3 + \frac{921051485}{4003} a_4 + \frac{55229689849}{4003} a_5 + \frac{3312998711453}{4003} a_6 = 46.41172245\right],$$

$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609} a_3 + \frac{1324462057075}{257365609} a_4 + \frac{81218150197020}{257365609} a_5 + \frac{4906239201632119}{257365609} a_6 = -6.363231008\right],$$

$$\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594} a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297} a_5 + \frac{74000286999695717535}{195067195850594} a_6 = 1.285936202\right],$$

$$\left[a_4 + \frac{63906482440441512762030}{632618606261769333527} a_5 + \frac{45722331745363725444600 55}{632618606261769333527} a_6 = -0.3119296799\right],$$

$$\left[\frac{56958079571141278086028517472 00}{632618606261769333527} a_5 + \frac{62201554420274173985183479454 4000}{632618606261769333527} a_6 = 1.02872144\, 10^9\right],$$

$$\left[\frac{62201554420274173985183479454 4000}{632618606261769333527} a_5 + \frac{67961309784144375176037244416240000}{632618606261769333527} a_6 = 1.06728870\, 10^{11}\right]\Bigg]$$

$$> Eq[6] := \frac{Eq[6]}{\frac{56958079571141278086028517472 00}{632618606261769333527}} :$$

$$> Eq[7] := Eq[7] - \frac{62201554420274173985183479454 4000}{632618606261769333527} Eq[6] :$$

$$> \langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7] \rangle$$

$$\left[\left[a_0+\frac{125}{8}a_1+\frac{4455}{8}a_2+\frac{229295}{8}a_3+\frac{13187379}{8}a_4+\frac{781709975}{8}a_5+\frac{46732774515}{8}a_6=132.7043750\right],\left[a_1+\frac{255497}{4003}a_2+\frac{76837157}{20015}a_3+\frac{921051485}{4003}a_4+\frac{55229689849}{4003}a_5+\frac{3312998711453}{4003}a_6=46.41172245\right],\left[a_2+\frac{20511182964}{257365609}a_3+\frac{1324462057075}{257365609}a_4+\frac{81218150197020}{257365609}a_5+\frac{4906239201632119}{257365609}a_6=-6.363231008\right],\left[a_3+\frac{17523777294283575}{195067195850594}a_4+\frac{592843860492848180}{97533597925297}a_5+\frac{74000286999695717535}{195067195850594}a_6=1.285936202\right],\left[a_4+\frac{63906482440441512762030}{632618606261769333527}a_5+\frac{457223317453637254446005 5}{632618606261769333527}a_6=-0.3119296799\right],\left[a_5+\frac{48974516896789315621995055}{448460566036322736253059}a_6=0.1142574203\right],\left[\frac{264450625375132651354636359168000 0}{49828951781813637361451}a_6=-5.6135283\,10^9\right]\right]$$

> $Eq[7] := \dfrac{Eq[7]}{\dfrac{264450625375132651354636359168000 0}{49828951781813637361451}}$:

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7]\rangle$

$$\left[\left[a_0 + \frac{125}{8}a_1 + \frac{4455}{8}a_2 + \frac{229295}{8}a_3 + \frac{13187379}{8}a_4 + \frac{781709975}{8}a_5 + \frac{46732774515}{8}a_6 = 132.7043750\right],\right.$$
$$\left[a_1 + \frac{255497}{4003}a_2 + \frac{76837157}{20015}a_3 + \frac{921051485}{4003}a_4 + \frac{55229689849}{4003}a_5 + \frac{3312998711453}{4003}a_6 = 46.41172245\right],$$
$$\left[a_2 + \frac{20511182964}{257365609}a_3 + \frac{1324462057075}{257365609}a_4 + \frac{81218150197020}{257365609}a_5 + \frac{4906239201632119}{257365609}a_6 = -6.363231008\right],$$
$$\left[a_3 + \frac{17523777294283575}{195067195850594}a_4 + \frac{592843860492848180}{97533597925297}a_5 + \frac{74000286999695717535}{195067195850594}a_6 = 1.285936202\right],$$
$$\left[a_4 + \frac{63906482440441512762030}{632618606261769333527}a_5 + \frac{45722331745363725444600 55}{632618606261769333527}a_6 = -0.3119296799\right],$$
$$\left[a_5 + \frac{48974516896789315621995055}{448460566036322736253059}a_6 = 0.1142574203\right],$$
$$\left.\left[a_6 = -0.1057725731\right]\right]$$

> $a_6 := -0.1057725731$

$$a_6 := -0.1057725731$$

> $a_5 := 0.1142574203 - \frac{48974516896789315621995055}{448460566036322736253059}a_6$

$$a_5 := 11.66524108$$

> $a_4 := -0.3119296799 - \frac{63906482440441512762030}{632618606261769333527}a_5 + \frac{45722331745363725444600 55}{632618606261769333527}a_6$

$$a_4 := -1943.190910$$

> $a_3 := 1.285936202 - \frac{17523777294283575}{195067195850594}a_4 - \frac{592843860492848180}{97533597925297}a_5 - \frac{74000286999695717535}{195067195850594}a_6$

$$a_3 := 1.437871863\,10^5$$

> $a_2 := -6.363231008 - \frac{20511182964}{257365609}a_3 - \frac{1324462057075}{257365609}a_4 - \frac{81218150197020}{257365609}a_5 - \frac{4906239201632119}{257365609}a_6$

$$a_2 := -3.12414721 6\,10^6$$

$$> a_1 := 46.41172245 - \frac{255497}{4003} a_2 - \frac{76837157}{20015} a_3 - \frac{921051485}{4003} a_4 - \frac{55229689849}{4003} a_5 - \frac{3312998711453}{4003} a_6$$

$$a_1 := 2.111074946\,10^7$$

$$> a_0 := 132.7043750 - \frac{125}{8} a_1 - \frac{4455}{8} a_2 - \frac{229295}{8} a_3 - \frac{13187379}{8} a_4 - \frac{781709975}{8} a_5 - \frac{46732774515}{8} a_6$$

$$a_0 := -3.00805199\,10^7$$

$$> fx5 := a[6]\cdot x^6 + a[5]\cdot x^5 + a[4]\cdot x^4 + a[3]\cdot x^3 + a[2]\cdot x^2 + a[1]\cdot x^1 + a[0]\cdot x^0$$

$$fx5 := -0.1057725731\,x^6 + 11.66524108\,x^5 - 1943.190910\,x^4 + 1.437871863\,10^5\,x^3 - 3.124147216\,10^6\,x^2 + 2.111074946\,10^7\,x - 3.00805199\,10^7$$

La Fig. 3.42 muestra el ajuste del polinomio de grado 6 a los datos experimentales.

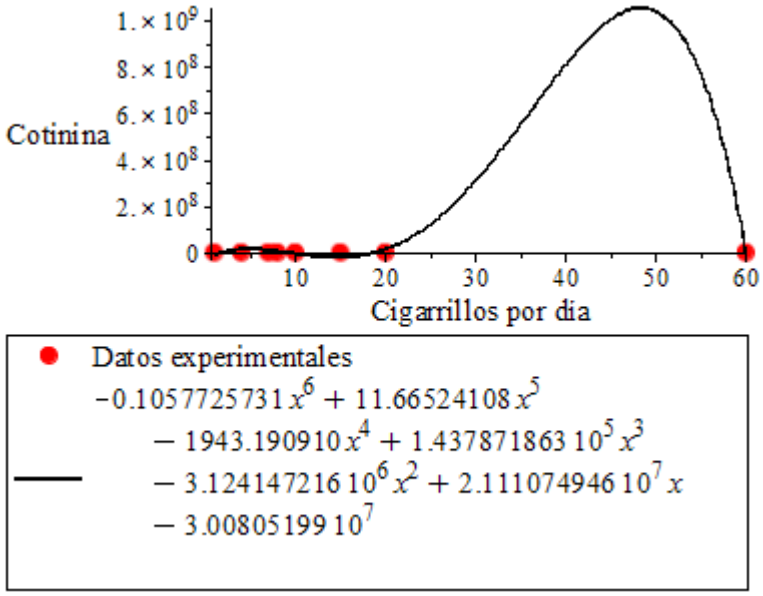


Fig. 3.42 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 6. Observe que ajustan los datos a una parte del polinomio.

Polinomio grado 7. 8 ecuaciones, 8 incógnitas.

```
> unassign('Eq[1]','Eq[2]','Eq[3]','Eq[4]','Eq[5]','Eq[6]','Eq[7]','a[0]',
      'a[1]','a[2]','a[3]','a[4]','a[5]','a[6]')
```

>
$$Eq[1] := 8\cdot a[0] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 = \sum_{i=1}^{8} y[i]$$

$$Eq_1 := 8\,a_0 + 125\,a_1 + 4455\,a_2 + 229295\,a_3 + 13187379\,a_4 + 781709975\,a_5 + 46732774515\,a_6 + 2800823796455\,a_7 = 1061.635$$

>
$$Eq[2] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i] + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]$$

$$Eq_2 := 125\,a_0 + 4455\,a_1 + 229295\,a_2 + 13187379\,a_3 + 781709975\,a_4 + 46732774515\,a_5 + 2800823796455\,a_6 + 167989885498179\,a_7 = 1.32704375\,10^5$$

>
$$Eq[3] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[3]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^2$$

$$Eq_3 := 4455\,a_0 + 229295\,a_1 + 13187379\,a_2 + 781709975\,a_3 + 46732774515\,a_4 + 2800823796455\,a_5 + 167989885498179\,a_6 + 10078247618192855\,a_7 = 4.729583925\,10^6$$

> $Eq[4] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[3]$
> $\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9$
> $+ a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^3$

$$Eq_4 := 229295\,a_0 + 13187379\,a_1 + 781709975\,a_2 + 46732774515\,a_3 + 2800823796455\,a_4 + 167989885498179\,a_5 + 10078247618192855\,a_6 + 604672588007656275\,a_7 = 2.434275973\,10^8$$

> $Eq[5] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[3]$
> $\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{10}$
> $+ a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{11} = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^4$

$$Eq_5 := 13187379\,a_0 + 781709975\,a_1 + 46732774515\,a_2 + 2800823796455\,a_3 + 167989885498179\,a_4 + 10078247618192855\,a_5 + 604672588007656275\,a_6 + 36279191603273150 15\,a_7 = 1.400018310\,10^{10}$$

> $Eq[6] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[3]$
> $\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{11}$
> $+ a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{12} = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^5$

$$Eq_6 := 781709975\,a_0 + 46732774515\,a_1 + 2800823796455\,a_2 + 167989885498179\,a_3 + 10078247618192855\,a_4 + 604672588007656275\,a_5 + 36279191603273150 15\,a_6 + 217678656282891543 1779\,a_7 = 8.298906693\,10^{11}$$

> $Eq[7] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[3]$
$\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{11} + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{12}$
$+ a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{13} = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^6$

$$Eq_7 := 46732774515\,a_0 + 2800823796455\,a_1 + 167989885498179\,a_2 + 10078247618192855\,a_3 + 604672588007656275\,a_4 + 36279919160327315015\,a_5 + 2176786562828915431779\,a_6 + 1306070240368417802925 35\,a_7 = 4.961314909\,10^{13}$$

> $Eq[8] := a[0]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7 + a[1]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^8 + a[2]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^9 + a[3]$
$\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{10} + a[4]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{11} + a[5]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{12} + a[6]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{13}$
$+ a[7]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^{14} = \sum_{i=1}^{8} y[i]\cdot\sum_{i=1}^{8} x[i]^7$

$$Eq_8 := 2800823796455\,a_0 + 167989885498179\,a_1 + 10078247618192855\,a_2 + 604672588007656275\,a_3 + 36279919160327315015\,a_4 + 2176786562828915431779\,a_5 + 1306070240368417802925 35\,a_6 + 7836418077298002563410035\,a_7 = 2.973452571\,10^{15}$$

> $\langle Eq[1], Eq[2], Eq[3], Eq[4], Eq[5], Eq[6], Eq[7], Eq[8]\rangle$

$$fx6 := 1.172396136\,x^7 - 137.6333660\,x^6 + 5501.925819\,x^5 - 1.030547036\,10^5\,x^4 + 9.8758967\,10^5\,x^3 - 4.769302\,10^6\,x^2 + 1.018936\,10^7\,x - 6.3249\,10^6$$

La solución de las 8 ecuaciones con 8 incógnitas del polinomio de grado 7, dan por resultado la expresión anterior. En la Fig. 3.43 se presenta el polinomio de grado 7 en forma gráfica. Las instrucciones Maple son

> $Polinomio_Grado7 := plot(fx6, x = 1..60, color = \text{"yellow"})$:

> $display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], P[8],$
$Polinomio_Grado7)$

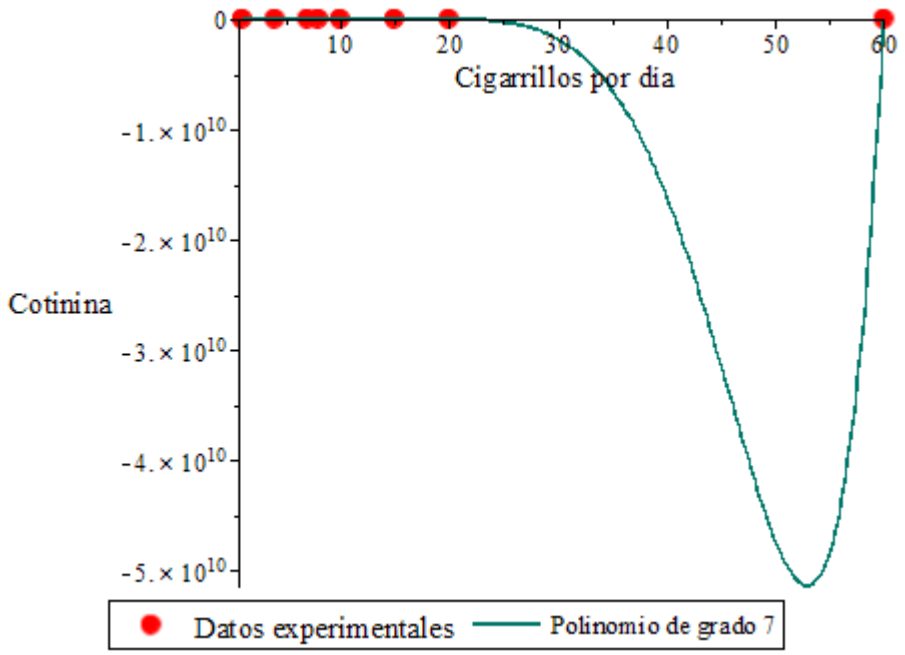


Fig. 3.43 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 7. Similar al ajuste de los datos al polinomio de grado 5, Fig. 3.41, excepto la escala en el eje de las ordenadas.

La solución de Maple para el ajuste de datos usando el método de mínimos cuadrados se muestra en la Fig. 3.44 Las instrucciones de Maple para el ajuste a un polinomio de grado 7, son

```
> with(CurveFitting) :
> A := LeastSquares([[1, 9.51], [4, 75.6], [7, 43.4], [8, 1.85], [10,
    231.275], [15, 174], [20, 347], [60, 179]], x, curve = a·x^7 + b·x^6
    + c·x^5 + d·x^4 + e·x^3 + f·x^2 + g·x^1 + h·x^0)
```

$$A := 1611.88523435281 - 2658.33833302222\,x + 1312.17402342065\,x^2 - 285.663993738149\,x^3 + 31.1422107332023\,x^4 - 1.72096505046825\,x^5 + 0.0441375087201120\,x^6 - 0.000381345225739407\,x^7$$

```
> with(plots) :
> F := plot(A, x = 1 ..60) :
> P[1] := pointplot({[1, 9.51]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
    = solidcircle) :
> P[2] := pointplot({[4, 75.6]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
    = solidcircle) :
> P[3] := pointplot({[7, 43.4]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
    = solidcircle) :
```

```
> P[4] := pointplot({[8, 1.85]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[5] := pointplot({[10, 231.275]}, color = "red", symbolsize = 20,
      symbol = solidcircle) :

> P[6] := pointplot({[15, 174]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[7] := pointplot({[20, 347]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> P[8] := pointplot({[60, 179]}, color = "red", symbolsize = 20, symbol
      = solidcircle) :

> display(P[1], P[2], P[3], P[4], P[5], P[6], P[7], P[8], F)
```

La Fig. 3.44 muestra el ajuste del polinomio de grado 7 a los datos experimentales.

Conclusión

El haber acomodado los datos experimentales de menor a mayor respecto al eje de las abscisas x (cigarrillos por día), así como haber resuelto mediante las Ecs. (3.6) de mínimos cuadrados dadas al inicio de la solución de este problema, trajo como consecuencia el giro del polinomio de grado 7, al que ajustan los datos, del cuadrante I al IV. También se puede observar que, la gráfica de la Fig. 3.44 con respecto a la Fig. 3.42 del ajuste al polinomio de grado 6, presentan el mismo comportamiento tendencial, difiriendo en la escala de las ordenadas (cotinina).

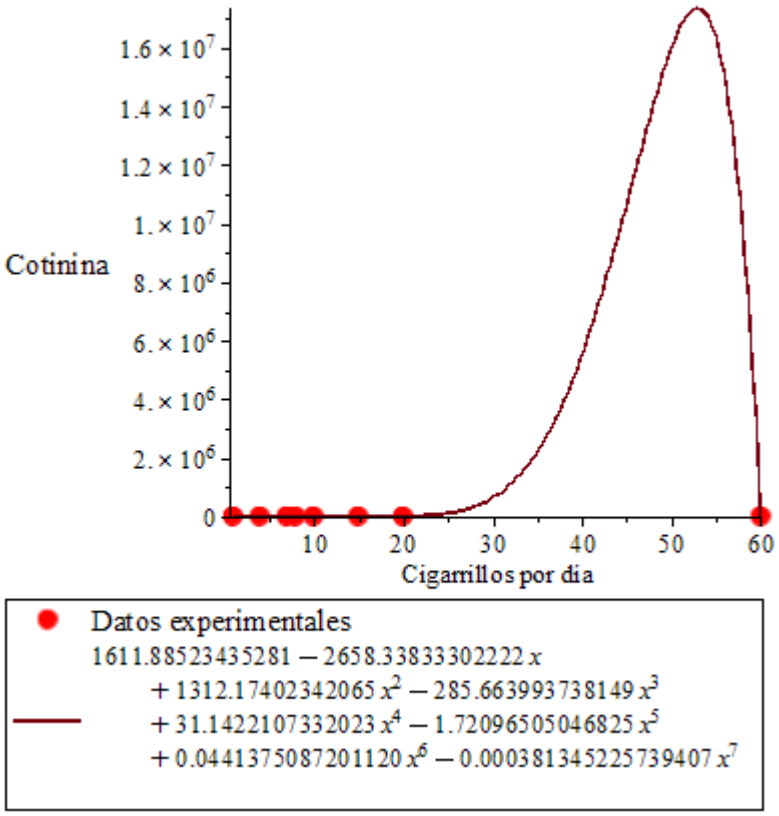


Fig. 3.44 Gráfica ajuste de datos experimentales de cigarrillos por día y cotinina a un polinomio de grado 7 obtenida del código Maple para mínimos cuadrados. Observe el ajuste de los datos al polinomio de grado 7, similar al comportamiento del polinomio de grado 6 de la Fig. 3.42, pero con diferente escala en el eje de las ordenadas.

Problema 12

Compra de una audiencia televisiva. El New York Post publico los salarios anuales (en millones de dólares) y el número de televidentes (en millones) correspondientes a Oprah Windfrey, David Letterman, Jay Leno, Kelsey Grammer, Barbara Walters, Dan Rather, James Gandolfini y Susan Lucci, respectivamente. Los datos se presentan a continuación. ¿Existe una correlación entre el salario y el número de televidentes? ¿Cuál de las estrellas listadas tiene el menor costo por televidente? ¿Y el mayor costo por televidente?

A continuación, se presenta la tabla de datos:

Puntos (P)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Salario (S)	*100*	*14*	*14*	*35.2*	*12*	*7*	*5*	*1*
Televidentes (T)	*7*	*4.4*	*5.9*	*1.6*	*10.4*	*9.6*	*8.9*	*4.2*

Solución

Es importante saber qué grado de polinomio se aproxima más a la recta, por lo que se muestra la gráfica de la Fig. 3.45.

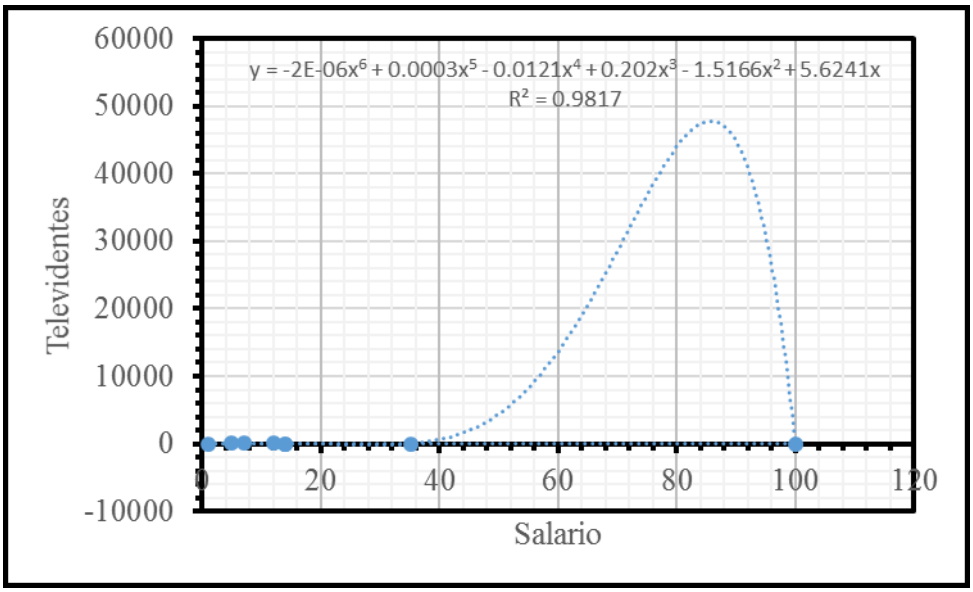


Fig. 3.45 Gráfica de ajuste de datos experimentales de salario y televidentes a un polinomio de grado 6 con un coeficiente de correlación de 0.9817.

En la Fig. 3.45 podemos observar que la curva de datos experimentales de la gráfica se aproxima a un polinomio de grado 6, teniendo un coeficiente de correlación de 0.9817.

Resolvemos este problema por el **método de mínimos cuadrados**. El procedimiento se muestra a través de las Tablas 3.14 y 3.15.

Tabla 3.14 Cálculo de los términos de las sumatorias del método de mínimos cuadrados a partir de los datos experimentales.

P	S	T	X_i^2	X_i^3	X_i^4	X_i^5	X_i^6	X_i^7
1	100	7	10000	1000000	100000000	$1x10^{10}$	$1x10^{12}$	$1x10^{14}$
2	14	4.4	196	2744	38416	537824	7529536	105413504
3	14	5.9	196	2744	38416	537824	7529536	105413504
4	35.2	1.6	1239.04	43614.20	1535220.12	54039748.28	1902199139	66957409709
5	12	10.4	144	1728	20736	248832	2985984	35831808
6	7	9.6	49	343	2401	16807	117649	823543
7	5	8.9	25	125	625	3125	15625	78125
8	1	4.2	1	1	1	1	1	1

Tabla 3.14 Continuación del cálculo de los términos de las sumatorias del método de mínimos cuadrados a partir de los datos experimentales.

P	S	T	X_i^8	X_i^9	X_i^{10}	X_i^{11}	X_i^{12}	X_i^{13}
1	100	7	$1x10^{16}$	$1x10^{18}$	$1x10^{20}$	$1x10^{22}$	$1x10^{24}$	$1x10^{26}$
2	14	4.4	1475789056	$2.066x10^{10}$	$2.892x10^{11}$	$4.049x10^{12}$	$5.669x10^{13}$	$7.937x10^{14}$
3	14	5.9	1475789056	$2.066x10^{10}$	$2.892x10^{11}$	$4.049x10^{12}$	$5.669x10^{13}$	$7.937x10^{14}$
4	35.2	1.6	$2.35x10^{12}$	$8.296X10^{13}$	$2.920x10^{15}$	$1.027x10^{17}$	$3.618x10^{18}$	$1.273x10^{20}$
5	12	10.4	429981696	5159780352	$6.191x10^{10}$	$7.430x10^{11}$	$8.9161x10^{12}$	$1.069x10^{14}$
6	7	9.6	5764801	40353607	282475249	1977326743	$1.384x10^{10}$	$9.6889x10^{10}$
7	5	8.9	390625	1953125	9765625	48828125	244140625	1220703125
8	1	4.2	1	1	1	1	1	1

A continuación, se muestran la sumatorias

$\sum X_i$	188.2	$\sum X_i^8$	$1.000235339x10^{16}$
$\sum X_i^2$	2850.04	$\sum X_i^9$	$1.000083006x10^{18}$
$\sum X_i^3$	1051299.2	$\sum X_i^{10}$	$1.000029206x10^{20}$
$\sum X_i^4$	101635815.1	$\sum X_i^{11}$	$1.00001027x10^{22}$
$\sum X_i^5$	$1.005538416x10^{10}$	$\sum X_i^{12}$	$1.000003618x10^{24}$
$\sum X_i^6$	$1.001920377x10^{12}$	$\sum X_i^{13}$	$1.000001273x10^{26}$
$\sum X_i^7$	$1.00067205x10^{14}$		

Tabla 3.15 Sumatorias de mínimos cuadrados.

$S(x_i)$	$T(y_i)$	$(x_i)(y_i)$	$(y_1)(x_i^2)$	$(y_1)(x_i^3)$
100	7	700	70000	7000000
14	4.4	61.6	862.4	12073.6
14	5.9	82.6	1156.4	16189.6
35.2	1.6	56.32	1982.464	69782.72
12	10.4	124.8	1497.6	17971.2
7	9.6	67.2	470.4	3292.8
5	8.9	49	222.5	1112.5
1	4.2	4.2	4.2	4.2
$\sum = 188.2$		$\sum = 1145.72$	$\sum = 76195.964$	$\sum = 7120426.62$

$S(x_i)$	$T(y_i)$	$(y_1)(x_i^4)$	$(y_1)(x_i^5)$	$(y_1)(x_i^6)$
100	7	700000000	70000000000	7000000000000
14	4.4	169030.4	2366425.6	33129958.4
14	5.9	226654.4	3173161.6	44424262.4

35.2	1.6	2456352.192	86463597.25	3043518622
12	10.4	215654.4	2587852.8	31054233.6
7	9.6	23049.6	161347.2	1129430.4
5	8.9	5562.5	27812.5	139062.5
1	4.2	4.2	4.2	4.2
$\sum = 188.2$		$\sum = 703096307.7$	$\sum = 7.009478x10^{10}$	$\sum = 7.003153396 \times 10^{12}$

Las fórmulas para obtener el sistema de ecuaciones a resolver (Ecs. (3.7) desarrolladas), son las siguientes

$$ma_0 + a_1\sum X + a_2\sum X^2 + a_3\sum X^3 + a_4\sum X^4 + a_5\sum X^5 + a_6\sum X^6 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)$$

$$a_0\sum X + a_1\sum X^2 + a_2\sum X^3 + a_3\sum X^4 + a_4\sum X^5 + a_5\sum X^6 + a_6\sum X^7 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i$$

$$a_0\sum X^2 + a_1\sum X^3 + a_2\sum X^4 + a_3\sum X^5 + a_4\sum X^6 + a_5\sum X^7 + a_6\sum X^8 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^2$$

$$a_0\sum X^3 + a_1\sum X^4 + a_2\sum X^5 + a_3\sum X^6 + a_4\sum X^7 + a_5\sum X^8 + a_6\sum X^9 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^3 \qquad (3.14)$$

$$a_0\sum X^4 + a_1\sum X^5 + a_2\sum X^6 + a_3\sum X^7 + a_4\sum X^8 + a_5\sum X^9 + a_6\sum X^{10} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^4$$

$$a_0\sum X^5 + a_1\sum X^6 + a_2\sum X^7 + a_3\sum X^8 + a_4\sum X^9 + a_5\sum X^{10} + a_6\sum X^{11} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^5$$

$$a_0\sum X^6 + a_1\sum X^7 + a_2\sum X^8 + a_3\sum X^9 + a_4\sum X^{10} + a_5\sum X^{11} + a_6\sum X^{12} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^6$$

Sustituyendo los valores el sistema de ecuaciones a resolver queda de la siguiente manera

$$8 + a_1(182.5) + a_2(2850.04) + a_3(1051299.2) + a_4(101635815.1)$$
$$+ a_5(1.00553841\times 10^{10}) + a_6(1.001920377\times 10^{12}) = 188.2$$

$$a_0(188.2)+a_1(2850.04)+a_2(1051299.2)+a_3(101635815.1)+a_4(1.005538416\times10^{10})$$
$$+a_5(1.001920377\times10^{12})+a_6(1.00067205\times10^{14})=1145.72$$

$$a_0(2850.04)+a_1(1051299.2)+a_2(101635815.1)+a_3(1.005538416\times10^{10})+a_4(1.001920377\times10^{12})$$
$$+a_5(1.00067205\times10^{14})+a_6(1.000235339\times10^{16})=76195.964$$

$$a_0(1051299.2)+a_1(101635815.1)+a_2(1.005538416x10^{10})+a_3(1.001920377\times10^{12})$$
$$+a_4(1.00067205\times10^{14})+a_5(1.000235339\times10^{16})+a_6(1.000083006\times10^{18}=7120426.62$$

$$a_0(101635815.1)+a_1(1.005538416\times10^{10})+a_2(1.001920377\times10^{12})+a_3(1.00067205\times10^{14})$$
$$+a_4(1.000235339\times10^{16})+a_5(1.000083006\times10^{18})+a_6(1.000029206\times10^{20})=703096307.7$$

$$a_0(1.005538416\times10^{10})+a_1(1.001920377\times10^{12})+a_2(1.00067205\times10^{14})+a_3(1.000235339\times10^{16})$$
$$+a_4(1.000083006\times10^{18})+a_5(1.000029206\times10^{20})+a_6(1.00001027\times10^{22})=7.009478\times10^{10}$$

$$a_0(1.001920377\times10^{12})+a_1(1.00067205\times10^{14})+a_2(1.000235339\times10^{16})+a_3(1.000083006\times10^{18})$$
$$+a_4(1.000029206\times10^{20})+a_5(1.00001028\times10^{22})+a_6(1.000003618\times10^{24})=7.003153396x\times10^{12}$$

A continuación, se muestra la resolución de la matriz, por el método de Gauss-Jordan. La nomenclatura que aparece al inicio o arriba de cada matriz significa:

$A_{1,2\left(\frac{941}{5}\right)}$ Por ejemplo, la fila 1 se multiplicará por $\left(\frac{941}{5}\right)$ y se le sumará a la segunda fila.

$$A_{1,2\left(\frac{941}{5}\right)}\begin{bmatrix}
1 & \frac{365}{16} & \frac{71251}{200} & \frac{657062}{5} & \frac{1016358151}{80} & \frac{2513846025}{2} & 125240047125\\
\frac{941}{5} & \frac{71251}{25} & \frac{5256496}{5} & \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000\\
\frac{71251}{25} & \frac{5256496}{5} & \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000\\
\frac{5256496}{5} & \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 1000083006000000000\\
\frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 100002920600000000000\\
10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 1000029206000000000000 & 1000010270000000000000000\\
1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 1000029206000000000000 & 1000010270000000000000000 & 1000003618000000000000000
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{941}{40}\\
\frac{28643}{25}\\
\frac{19048991}{250}\\
\frac{356021331}{50}\\
\frac{7030963007}{10}\\
70094780000\\
7003153396000
\end{bmatrix}$$

$$A_{1,3}\left(\frac{71251}{25}\right)\begin{bmatrix} 1 & \frac{365}{16} & \frac{71251}{200} & \frac{657062}{5} & \frac{1016358151}{80} & \frac{2513846025}{2} & 125240047125 \\ 0 & \frac{-577309}{400} & \frac{984252009}{1000} & \frac{3845200071}{50} & \frac{3065760619909}{400} & \frac{1530734932095}{2} & 76497028131075 \\ \frac{71251}{25} & \frac{5256496}{5} & \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 \\ \frac{5256496}{5} & \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 100083006000000000 \\ \frac{1016358151}{10} & 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 1000029206000000000 \\ 10055384100 & 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 1000029206000000000 & 10000102700000000000000 \\ 1001920377000 & 100067205000000 & 10002353390000000 & 10002353390000000 & 1000029206000000000 & 10000102700000000000000 & 100000361800000000000000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{941}{40} \\ \frac{-656337}{200} \\ \frac{19048991}{250} \\ \frac{356021331}{50} \\ \frac{7030963007}{10} \\ 70094780000 \\ 7003153396000 \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$A_{3,2,}\left(\frac{1968504018}{2886545}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{365}{16} & \frac{71251}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-142267102841581407838400654618653652618562835684534685475072778075961603042 64} \\ \frac{64000304244708703340188388467650323257504949386116006827529484467610374026250000}{-8814893441763011080228068941806631042505504115730997248977028071354579759794057558} \\ \frac{18285801219425369376715070512354473384255868363656031436555723199277741980366029640075}{-1334959503832981243148466502193227831601808229232926809027995997277160935650797 37} \\ \frac{64000302918227423060620143778557742505036981734138387814601221969142467610374026 25}{3661166780893279652609530481394070334088770462699777659927970797438579259140001 9} \\ \frac{365716022554577879836515085463210006896664596024896235765256442396841510036000000 0}{-5707751581798302484816501855918228491006843329513636287939553301 69} \\ \frac{731432048510879183773548558456290407188811867326450085344118560300000000}{539845299057539710033144933339811147113908021992037187632291} \\ \frac{256001216978807714320741995459701642515841535642575298704414961050000000 00}{111562675648174566654294945237962997431505322478477307536067} \\ \frac{731432048510879183773548558456290407188811867326450085344118560300000000}{} \end{bmatrix}$$

$$A_{3,1,}\left(\frac{71251}{200}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{365}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-299144121415814078384006546186536526185628356845346854750727780874205774 9} \\ \frac{204800970870334018838846765032325750494938611600682752948446761036353196888 40}{-8814893441763011080228068941806631042505504115730997248977028071354579759794057558} \\ \frac{18285801219425369376715070512354473384255868363656031436555723199277741980366029640075}{-1334959503832981243148466502193227831601808229232926809027995997277160935650797 37} \\ \frac{64000302918227423060620143778557742505036981734138387814601221969142467610374026 25}{3661166780893279652609530481394070334088770462699777659927970797438579259140001 9} \\ \frac{365716022554577879836515085463210006896664596024896235765256442396841510036000000 0}{-5707751581798302484816501855918228491006843329513636287939553301 69} \\ \frac{731432048510879183773548558456290407188811867326450085344118560300000000}{539845299057539710033144933339811147113908021992037187632291} \\ \frac{256001216978807714320741995459701642515841535642575298704414961050000000 00}{111562675648174566654294945237962997431505322478477307536067} \\ \frac{731432048510879183773548558456290407188811867326450085344118560300000000}{} \end{bmatrix}$$

$$A_{1,2,}\left(-\frac{365}{16}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-184808988566059821439027290300816817850557733178409299132471508792}{5120024339576154286414839909194032850316830712851505974088 29} \\ \frac{-8814893441763011080228068941806631042505504115730997248977028071354579759794057558}{1828580121942536937671507051235447338425586836365603143655572319927774198036602964007 5} \\ \frac{-1334959503832981243148466502193227831601808229232926809027995997277160935650797 37}{6400030291822742306062014377855774250503698173413838781460122196914246761037402625} \\ \frac{366116678089327965260953048139407033408877046269977765992797079743857925914000 19}{3657160225545778798365150854632100068966645960248962357652564423968415100360000000} \\ \frac{-5707751581798302484816501855918228491006843329513636287939553301 69}{7314320485108791837735485584562904071881186732645008534411856030000000 0} \\ \frac{5398452990575397100331449333398111471139080219920371876322 91}{2560012169788077143207419954597016425158415356425752987044149610500000000 0} \\ \frac{1115626756481745666542949452379629974315053224784773075360 67}{7314320485108791837735485584562904071888118673264500853441185603000000 00} \end{bmatrix}$$

La solución final es

$$a_0 = \text{-}0.3609533342$$

$$a_1 = \text{-}0.04820621939$$

$$a_2 = \text{-}0.02085863762$$

$$a_3 = 0.001001095532$$

$$a_4 = 0.001001095532$$

$$a_5 = \text{-}0.0000780352952$$

$$a_6 = .000000000000210876067$$

$$a_7 = 0.000000000000000152526371$$

Sustituyendo en la ecuación de grado 6 se tiene

$$= 0.3896130289 - 0.3354429776x + 0.03989840204x^2 + 2.487722397 \times 10^{-4} x^3$$
$$- 0.441577566 \times 10^{-5} x^4 - 2.34105886 \times 10^{-8} x^5 + 2.10876067 \times 10^{-16} x^6$$

$$2 \times 10^{-6} x^6 + 0.0003x^5 - 0.0144x^4 + 0.2485x^3 - 1.9128x^2 + 6.9585x - 1.0794 \triangleleft \textit{Respuesta}$$

Que concuerda con el polinomio esperado de la gráfica de la Fig. 3.45.

Problema 13

Temperaturas y maratones. En “The Effects of Temperature on Marathon Runner´s Performance”, de David Martin y John Buoncristiani (*Chance*, vol. 12, núm. 4), se incluyen las altas temperaturas registradas junto con los tiempos (en minutos) de mujeres que ganaron la maratón de cuidad de Nueva York en años recientes. Los resultados se listan abajo. ¿Existe una correlación entre la temperatura y el tiempo de las triunfadoras? ¿Parece que los tiempos de las ganancias se van afectados por la temperatura?

Temperatura x	55	61	49	62	70	73	51	57
Tiempo y	145.283	148.717	148.3	148.1	147.617	146.4	144.667	147.533

Solución

De antemano, sabemos que la temperatura y el tiempo de las triunfadoras se correlaciona mediante un polinomio de grado 6, ya que al graficar los datos dados en la Fig. 3.46 podemos observar dicho comportamiento con un coeficiente de correlación del 0.9999.

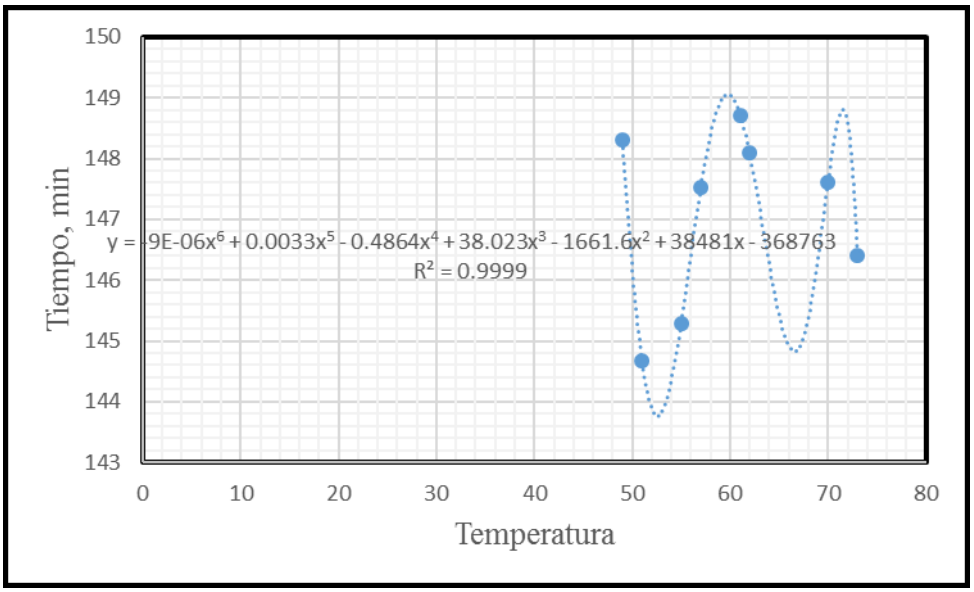


Fig. 3.46 Gráfica de ajuste de datos experimentales de temperatura y tiempo a un polinomio de grado 6 con un coeficiente de correlación de 0.9999.

En este caso se resolverá un sistema de ecuaciones lineales, Ecs. (3.7) desarrolladas

$$
\begin{aligned}
&ma_0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^5 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\\
&a_0\sum_{i=1}^{m} x_i + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^6 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i\\
&a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^6 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^7 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^2\\
&a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^6 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^7 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^8 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^3 \qquad (3.15)\\
&a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^6 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^7 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^8 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^9 = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^4\\
&a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^6 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^7 + a_3\sum_{i=1}^{m} x_i^8 + a_4\sum_{i=1}^{m} x_i^9 + a_5\sum_{i=1}^{m} x_i^{10} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)x_i^5
\end{aligned}
$$

En la Tabla 3.16, se muestran los cálculos de los términos para incluir en las sumatorias de las Ecs. (3.15)

Tabla 3.16 Cálculos de los términos de las sumatorias del método de mínimos cuadrados.

P	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5
1	55	3025	166375	9150625	503284375
2	61	3721	226981	13845841	844596301
3	49	2401	117649	5764801	282475249
4	62	3844	238328	14776336	916132832
5	70	4900	343000	24010000	1680700000
6	73	5329	389017	28398241	2073071593
7	51	2601	132651	6765201	345025251
8	57	3249	185193	10556001	601692057

P	x_i	x_i^6	x_i^7	x_i^8	x_i^9	x_i^{10}
1	55	2.768064063*e*10	1.522435234*e*12	8.373393789*e*13	4.605366584*e*15	2.532951621*e*17
2	61	5.152037436*e*10	3.142742836*e*12	1.91707313*e*14	1.169414609*e*16	7.133429117*e*17
3	49	1.38412872*e*10	6.782230728*e*11	3.323293057*e*13	1.628413598*e*15	7.97922663*e*16
4	62	5.680023558*e*10	3.521614606*e*12	2.183401056*e*14	1.353708655*e*16	8.392993659*e*17
5	70	1.17649*e*11	8.23543*e*12	5.764801*e*14	4.0353607*e*16	2.82475249*e*18
6	73	1.513342263*e*11	1.104739852*e*13	8.064600919*e*14	5.887158671*e*16	4.29762583*e*18
7	51	1.75962878*e*10	8.974106779*e*11	4.576794457*e*13	2.334165173*e*15	1.190424238*e*17
8	57	3.429644725*e*10	1.954897493*e*12	1.114291571*e*14	6.351461955*e*15	3.620333315*e*17

y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i^3 y_i$	$x_i^4 y_i$	$x_i^5 y_i$
145.283	7990.565	439481.075	24171459.13	1329430252	7.311866385*e*10
148.717	9071.737	553375.957	33755933.38	2059111936	1.256058281*e*11
148.3	7266.7	356068.3	17447346.7	854919988.3	4.189107943*e*10
148.1	9182.2	569296.4	35296376.8	2188375362	1.356792724*e*11
147.617	10333.19	723323.3	50632631	3544284170	2.480998919*e*11
146.4	10687.2	780165.6	56952088.8	4157502482	3.034976812*e*11
144.667	7378.017	376278.867	19190222.22	978701333.1	4.991376799*e*10
147.533	8409.381	479334.717	27322078.87	1557358496	8.876943425*e*10

Las sumatorias son

$\sum x_i = 478$ $\quad\quad$ $\sum x_i^9 = 1.393758337e17$

$\sum x_i^2 = 29070$ $\quad\quad$ $\sum x_i^{10} = 9.489183781e18$

$\sum x_i^3 = 1799194$ $\quad\quad$ $\sum y_i = 1176.617$

$\sum x_i^4 = 113267046$ $\quad\quad$ $\sum x_i y_i = 70318.99$

$\sum x_i^5 = 7246977658$ $\quad\quad$ $\sum x_i^2 y_i = 4277324.216$

$\sum x_i^6 = 4.707094991e11$ $\quad\quad$ $\sum x_i^3 y_i = 264768136.9$

$\sum x_i^7 = 3.100012244e13$ $\quad\quad$ $\sum x_i^4 y_i = 1.666968402e10$

$\sum x_i^8 = 2.067151481e15$ $\quad\quad$ $\sum x_i^5 y_i = 1.066575619e12$

A continuación, se muestra como queda el sistema de ecuaciones y el procedimiento para resolverlo.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 8 & 478 & 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 1176.617 \\ 478 & 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 70318.99 \\ 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 4277324.216 \\ 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 264768136.9 \\ 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 & 1.666968402e10 \\ 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 & 9.489183781e18 & 1.066575619e12 \end{array}\right]$$

Enseguida presentamos el principio, pasos intermedios y fin de la resolución de la matriz por el **método de Gauss-Jordan**, ya que las matrices son demasiado voluminosas para mostrarlas todas aquí. La nomenclatura que aparece arriba de cada matriz significa lo siguiente

$A_{1,2\left(\frac{-239}{4}\right)}$ La fila 1 se multiplicará por $\left(\frac{-239}{4}\right)$ y se le sumará a la fila 2.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 8 & 478 & 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 1176.617 \\ 0 & \frac{1019}{2} & \frac{124523}{2} & \frac{11530409}{2} & \frac{958543319}{2} & \frac{75405168069}{2} & \frac{64497}{4000} \\ 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 4277324.216 \\ 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 264768136.9 \\ 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 & 1.666968402e10 \\ 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 & 9.489183781e18 & 1.066575619e12 \end{array}\right]$$

$$A_{1,3}\left(\frac{-14535}{4}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 478 & 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 \\ 0 & \frac{1019}{2} & \frac{124523}{2} & \frac{11530409}{2} & \frac{958543319}{2} & \frac{75405168069}{2} \\ 0 & \frac{124523}{2} & \frac{15267867}{2} & \frac{1418312921}{2} & \frac{118250741395}{2} & \frac{9332834750485}{2} \\ 1799194 & 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 \\ 113267046 & 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 \\ 7246977658 & 4.707094991e11 & 3.100012244e13 & 2.067151481e15 & 1.393758337e17 & 9.489183781e18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1176.617 \\ \frac{64497}{4000} \\ \frac{7168769}{4000} \\ 264768136.9 \\ 1.666968402e10 \\ 1.066575619e12 \end{bmatrix}$$

De la misma forma, se realizaron las operaciones que se describen

$$A_{1,4}\left(\frac{-899597}{4}\right)$$

$$A_{1,5}\left(\frac{-56633523}{4}\right)$$

$$A_{1,6}\,\frac{-3623488829}{4}$$

$$A_{2,3}\left(\frac{-124523}{1019}\right)$$

$$A_{2,4}\left(\frac{-11530409}{1019}\right)$$

$$A_{2,5}\left(\frac{-958543319}{1019}\right)$$

$$A_{2,6}\left(\frac{-75405168069}{1019}\right)$$

$$A_{3,4}\left(\frac{-295617081}{1624342}\right)$$

$$A_{3,5}\left(\frac{-284203942417}{12994736}\right)$$

$$A_{3,6}\left(\frac{-1882513551377}{812171}\right)$$

$$A_{4.5}\left(\frac{1440536303356247}{6755867163686}\right)$$

Continuando con los últimos cálculos, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 8 & 478 & 29070 & 1799194 & 113267046 & 7246977658 \\ 0 & \frac{1019}{2} & \frac{124523}{2} & \frac{11530409}{2} & \frac{958543319}{2} & \frac{75405168069}{2} \\ 0 & 0 & \frac{25989472}{1019} & \frac{4729873296}{1019} & \frac{568407884834}{1019} & \frac{60240433644064}{1019} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-6755867163686}{812171} & \frac{1440536303356247}{812171} & \frac{-54933450802960824}{812171} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{22031797192401213439283937}{27023468654744} & \frac{-913249241672057565676466 34}{3377933581843} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-54933450802960824}{812171} & \frac{9517555273845408450}{812171} & \frac{-214315281942700187 3142}{812171} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1176.617 \\ \frac{64497}{4000} \\ \frac{-4539902}{25475} \\ \frac{-439515123081}{203042750} \\ \frac{-701970325822803474737}{675586716368600} \\ \frac{-11229387139421819}{162434200} \end{bmatrix}$$

$$A_{4.6}\left(\frac{-2746672540480412}{3377933581843}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & \frac{478}{1019} & \frac{29070}{124523} & \frac{1799194}{11530409} & \frac{113267046}{958543319} & \frac{7246977658}{75405168069} \\ 0 & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} \\ 0 & 0 & \frac{25989472}{1019} & \frac{4729873296}{1019} & \frac{568407884834}{1019} & \frac{60240433644064}{1019} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-6755867163686}{812171} & \frac{1440536303356247}{812171} & \frac{-54933450802960824}{812171} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2203179719240121343928 3937}{27023468654744} & \frac{-913249241672057565676 46634}{3377933581843} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-913249241672057565676 4634}{3377933581843} & \frac{-705588585556898489687 1944358}{3377933581843} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1176.617 \\ \frac{64497}{4000} \\ \frac{-4539902}{25475} \\ \frac{-439515123081}{203042750} \\ \frac{-701970325822803474737}{675586716368600} \\ \frac{-174067351366879085481407}{3377933581843000} \end{bmatrix}$$

$$A_{5.6}(\frac{24353313111254868418039024}{73439323974670711464279 79})$$

$$\begin{bmatrix} 8 & \frac{478}{1019} & \frac{29070}{124523} & \frac{1799194}{11530409} & \frac{113267046}{958543319} & \frac{7246977658}{7540516806 6} \\ 0 & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} & \frac{2}{} \\ 0 & 0 & \frac{25989472}{1019} & \frac{4729873296}{1019} & \frac{5684078843 4}{1019} & \frac{6024043364 4064}{1019} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-675586716 6686}{812171} & \frac{1440536303 56247}{812171} & \frac{-549334508 2960824}{812171} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2203179719 2401213432 83937}{2702346865 4744} & \frac{-913249241 7205756567 46634}{337793358 843} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-154059734 8750307305 8114081758 794865848}{7343932394 7670711462 47979} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1176617 \\ \frac{64497}{4000} \\ \frac{-4539902}{25475} \\ \frac{-439515123 81}{203042750} \\ \frac{-701970325 2280347473}{6755867166 8600} \\ \frac{-403742508 6331077844 2179131839 401351}{7343932394 7670711462 47979000} \end{bmatrix}$$

.

.

.

Respuesta

$$A_1 = \frac{607010967407391994461731814581283883389500}{770298673937515365259057040892897432924 3}$$

$$A_2 = \frac{529220396504202979332659300462638306506 0}{256766224645838455086352346964299144308 1}$$

$$A_3 = \frac{-150262701225111076939455361938147665 9}{353348015567667598742686716005916253635}$$

$$A_4 = \frac{-396872679748662194617757498327439107641}{192574668484378841314764260223224358231075 0}$$

$$A_5 = \frac{-114347243845699380379752927581569612 4}{962873342421894206573821301116121791155375}$$

$$A_6 = \frac{134580836054436926141393043944967117}{513532449291676910172704693928598288616200 0}$$

El polinomio de grado 5 a que se llegó mediante el procedimiento previo descrito, es

$$\frac{607010967407391994461731814581283883389500}{770298673937515365259057040892897432924 3}x^5+\frac{529220396504202979332659300462638306506 0}{256766224645838455086352346964299144308 1}x^4+$$
$$\frac{-150262701225111076939455361938147665 9}{353348015567667598742686716005916253635}x^3+\frac{-396872679748662194617757498327439107641}{192574668484378841314764260223224358231075 0}x^2+$$
$$\frac{-114347243845699380379752927581569612 4}{962873342421894206573821301116121791155375}x+\frac{134580836054436926141393043944967117}{513532449291676910172704693928598288616200 0}$$

La Fig. 3.47 muestra la gráfica donde podemos observar los datos experimentales aproximados a un polinomio de grado 5, con un coeficiente R^2 de 0.9685.

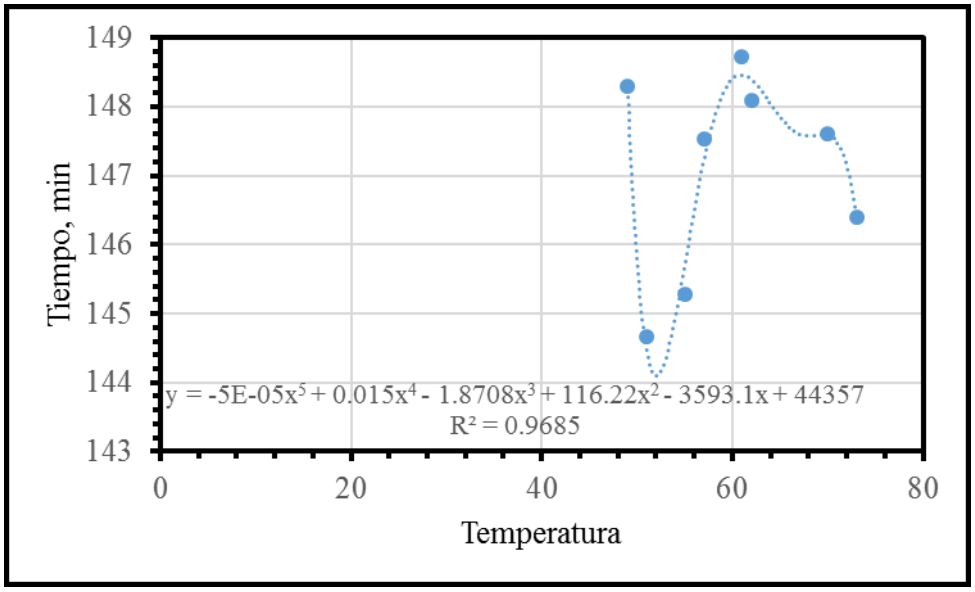


Fig. 3.47 Gráfica de ajuste de datos experimentales de temperatura y tiempo a un polinomio de grado 5 con un coeficiente de correlación de 0.9685, el cual, es un buen ajuste.

Problema 14

Predicción del costo de la electricidad. A continuación, se muestran algunas mediciones de la casa del autor, tomadas del conjunto de datos 9 en el apéndice B de (Triola, 2009, p. 797).

KWh	3375	2661	2073	2579	2858	2296	2812	2433	2266	3128
Grado día para calentar	2421	1841	438	15	152	1028	1967	1627	537	26
Temperatura diaria promedio	26	34	58	72	67	48	33	39	66	71
Costo (en dólares)	321.94	221.11	205.16	251.07	279.8	183.84	244.93	218.59	213.09	333.49

Antes de iniciar con la solución, se dan las siguientes definiciones

1.-Un KWh (kilovatio-hora) es una unidad de energía equivalente a la energía producida por una fuente de 1kW durante un periodo de 1hora. Se utiliza para medir la cantidad de energía consumida por los equipos eléctricos. Es el equivalente a 3.6 mega julios.
2.- Un grado día es una unidad de medida utilizada para medir la cantidad de calor suministrada durante un periodo de tiempo. Se calcula multiplicando la temperatura media diaria por el número de días en el período de tiempo. Esta unidad se utiliza a menudo para medir la cantidad de calor necesaria para calentar una construcción, y se usa para determinar cuánto aislamiento es necesario.
3.- Costo en dólares:
Como podemos corroborar los datos de atrás, representan una relación entre el consumo y el costo, el grado día y la temperatura promedio.
Primero encontraremos una función que se aproxime al renglón 1 y 4 (KWh y costo):
Renglón 1 y 4

Mínimos cuadrados
Para empezar a desarrollar la solución empezaremos con el método de mínimos cuadrados:
1.- Elaborar tabla de sumatorias:
A partir de los datos, el algoritmo requiere que hagamos una serie de sumas especificas, Ecs. (3.10) y (3.11)

$$a_0 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right]}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right]^2} \tag{3.10}$$

$$a_1 = \frac{n\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right]^2} \tag{3.11}$$

Donde

$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$ Representa la sumatoria de los datos de salida

$\left[\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i\right]$ Es la sumatoria de cada dato de entrada elevado al cuadrado

$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$ Es nada más que la sumatoria de los datos de entrada

$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i\right]$ Es la sumatoria que viene después de multiplicar a cada dato de entrada por su dato de salida

m Es la cantidad de datos usados en los registros.

Todos los datos de momento no parecen decirnos nada, pero si podemos graficar los puntos en un plano cartesiano podríamos saber a qué nos enfrentamos.

En la Tabla 3.17 se presentan los cálculos para incluir en las sumatorias del método de mínimos cuadrados.

Tabla 3.17 Cálculos de términos para incluir en las sumatorias del método de mínimos cuadrados.

KWh	Costo (en dólares)	x_i^2	$x_i y_i$
3375	321.94	11390625	1086547.5
2661	221.11	7080921	588373.71
2073	205.16	4297329	425296.68
2579	251.07	6651241	647509.53
2858	279.8	8168164	799668.4
2296	183.84	5271616	422096.64
2812	244.93	7907344	688743.16
2433	218.59	5919489	531829.47
2266	213.09	5134756	482861.94
3128	333.49	9784384	1043156.72
Total KWh: 26481	Total costo: 2473.02	Total: 71605869	Total: 6716083.75

Sustituimos en la fórmula original y obtenemos

$$a_0 = \frac{(2473.02)(71605869) - (26481)(6716083.75)}{10(71605869) - (701243361)}$$

$$a_0 = \frac{-765867629.4}{14815329}$$

$$a_0 = -51.6942708$$

$$a_1 = \frac{10(6716083.75) - (2473.02)(26481)}{10(71605869) - (701243361)}$$

$$a_1 = \frac{1672794.88}{14815329}$$

$$a_1 = 0.112909735$$

Ahora que ya tenemos los coeficientes a_0 y a_1 podemos sustituirlos en un polinomio de grado 1, Ec. (3.13)

$$P(x) = a_0 + a_1 x$$

obteniendo

$$P(x) = -51.6942708 + 0.112909735x$$

Reorganizando los términos:

$$P(x) = 0.112909735x - 51.6942708$$

Geogebra

Hacemos uso del software Geogebra para corroborar el ajuste de datos experimentales con un polinomio de grado 1. Lo primero que debemos hacer es agregar las coordenadas (puntos) en la entrada algebraica de Geogebra. Las Figs. 3.48-3.53 muestran la secuencia del procedimiento.
Es importante que abramos un paréntesis ( ) y separemos con una coma (ver Fig. 3.48).

Fig. 3.48 Entrada de Geogebra

Fig. 3.49 Icono de herramientas

Después de realizar este acto, solo basta escoger desde el botón “Herramientas” (ver Fig. 3.49). Escogemos la opción “Ajuste lineal” (ver Fig. 3.50).

Fig. 3.50. Herramientas de Geogebra.

Cuando demos clic, aparecerá un recuadro púrpura, con el seleccionaremos todos los puntos y soltamos (ver Fig. 3.51).

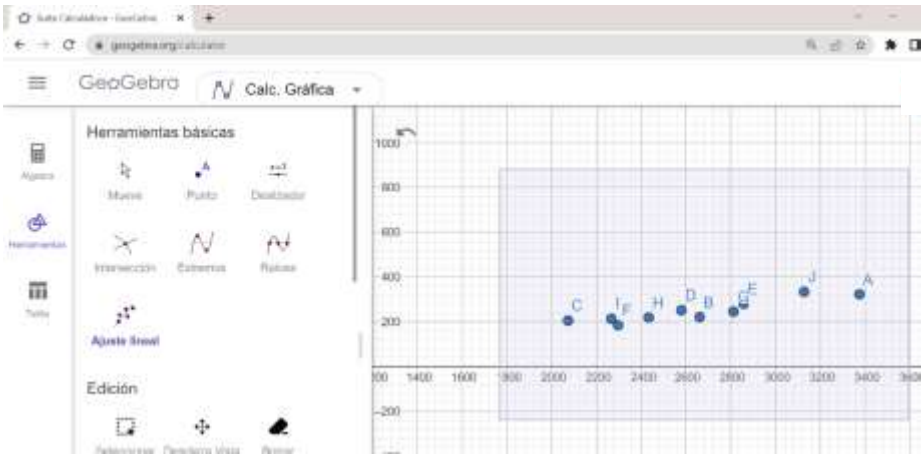


Fig. 3.51. Usando el ajuste lineal.

En Geogebra se traza el polinomio que mejor ajusta (ver Fig. 3.52).

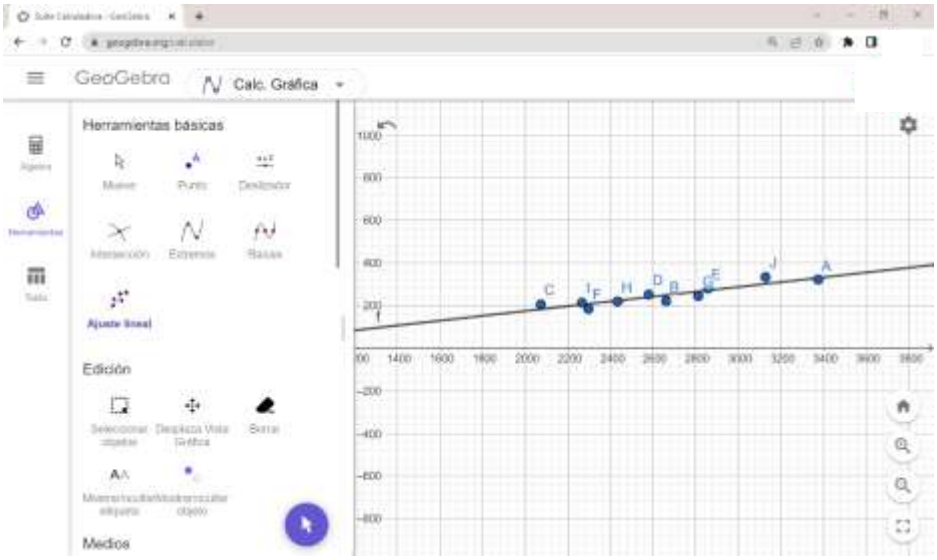


Fig. 3.52 Recta que se aproxima.

También tendremos a nuestra disposición el polinomio en el cuadro de configuraciones (ver Fig. 3.53).

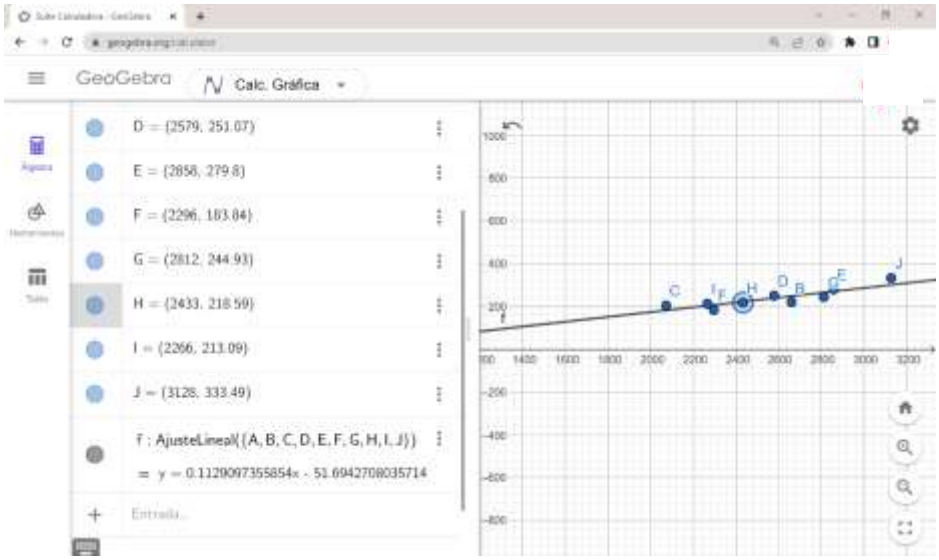


Fig. 3.53 Derecha: gráfica, izquierda: polinomio, en Geogebra.

Corroborando satisfactoriamente que el ajuste manual coincide perfectamente con el que proporciona Geogebra.

Excel

En Excel es bien sabido que podemos crear una gráfica de dispersión, para poder observar el ajuste que hace, así como escoger diferentes tipos de modelos matemáticos para obtener una aproximación mejor (según la naturaleza y acomodo de los datos) tenemos la certeza del ajuste dados los coeficientes de ajuste R y R^2. En las Figs. 3.54 a 3.68 se muestra la secuencia de pasos para graficar la línea o curva de regresión, gráfica de residuales y gráfica de probabilidad normal en Excel.

3375	321.94
2661	221.11
2073	205.16
2579	251.07
2858	279.8
2296	183.84
2812	244.93
2433	218.59
2266	213.09
3128	333.49

Fig. 3.54 Columnas en Excel.

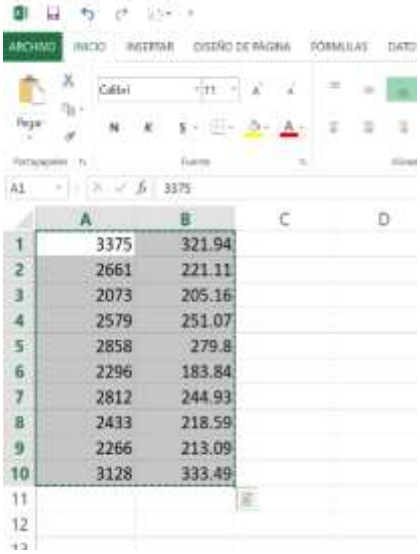


Fig. 3.55 Selección de las columnas.

Paso 1: En las columnas de Excel, tecleamos los datos, los de la izquierda representan a los datos de entrada x y los de salida y, estarán a la derecha.

Paso 2:
Seleccionamos todos los datos, rodeándolos de un rectángulo de líneas punteadas parpadeantes.

Paso 3: Damos clic en la Barra de opciones y escogemos “gráficos de dispersión” (ver Figs. 3.56 y 3.57).

Fig. 3.56 Barra de herramientas de Excel.

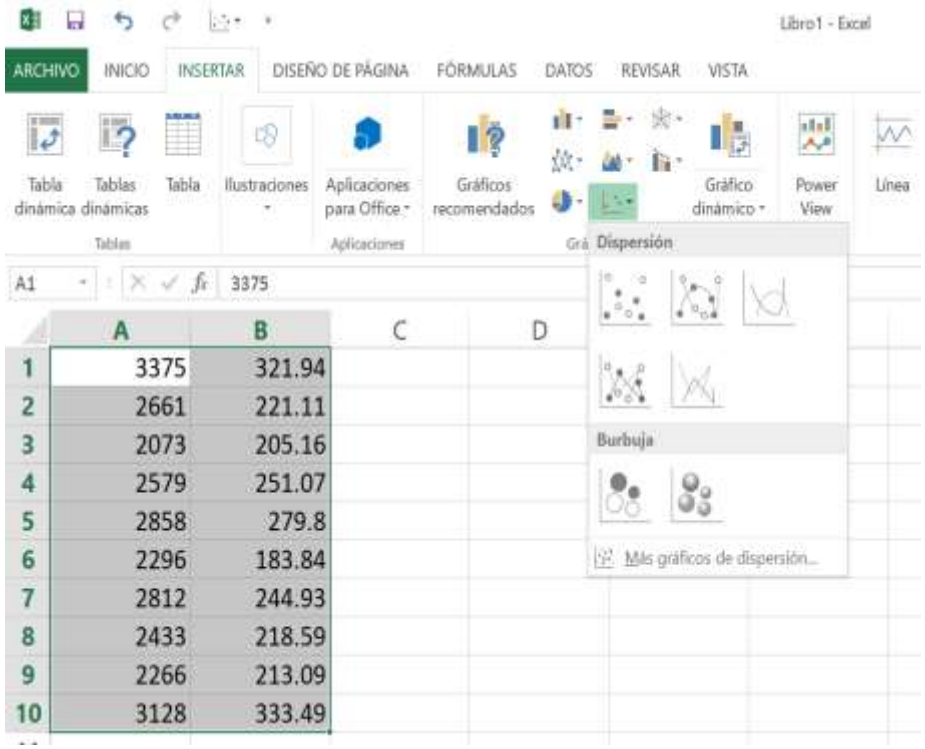


Fig. 3.57 Gráficos de dispersión.

El tipo de gráfico podemos observarlo en la Fig. 3.58.

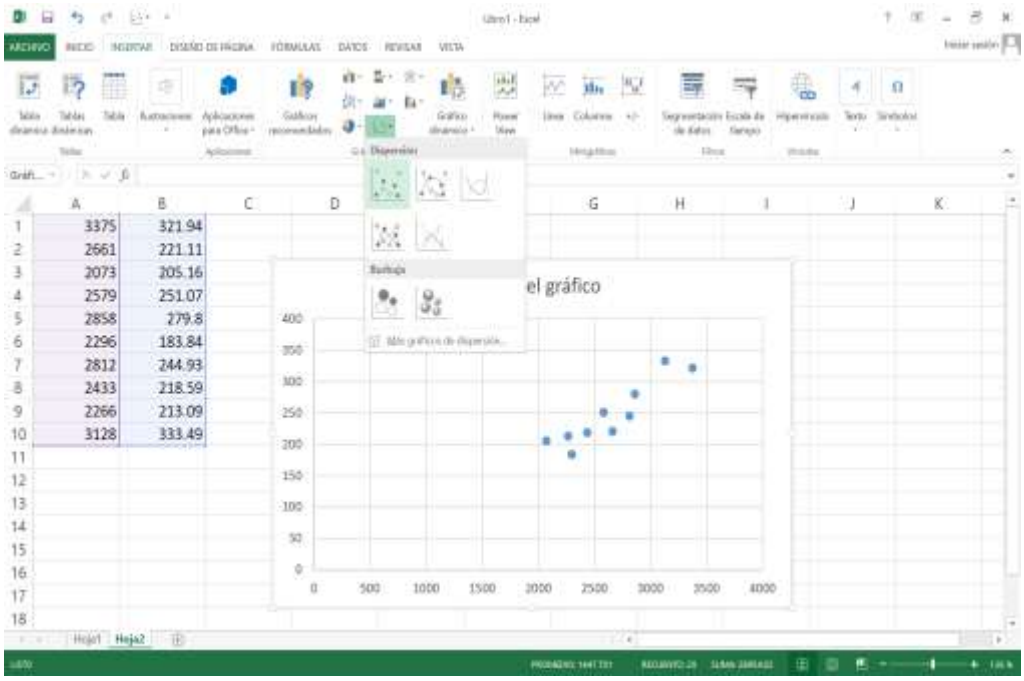


Fig. 3.58 Tipo de tabla.

Paso 4: Damos clic sobre la gráfica recién desplegada justamente en una cruz de color verde en la parte derecha: ahí aparecerá un menú de opciones, seleccionamos la última opción que dice "línea de tendencia" (ver Fig. 3.59).

Paso 5: Cuando la línea de tendencia aparezca, será necesario dar clic derecho sobre ella, para escoger la opción "formato de línea de tendencia", donde podremos dar formato y escoger otras opciones según sea nuestro caso.

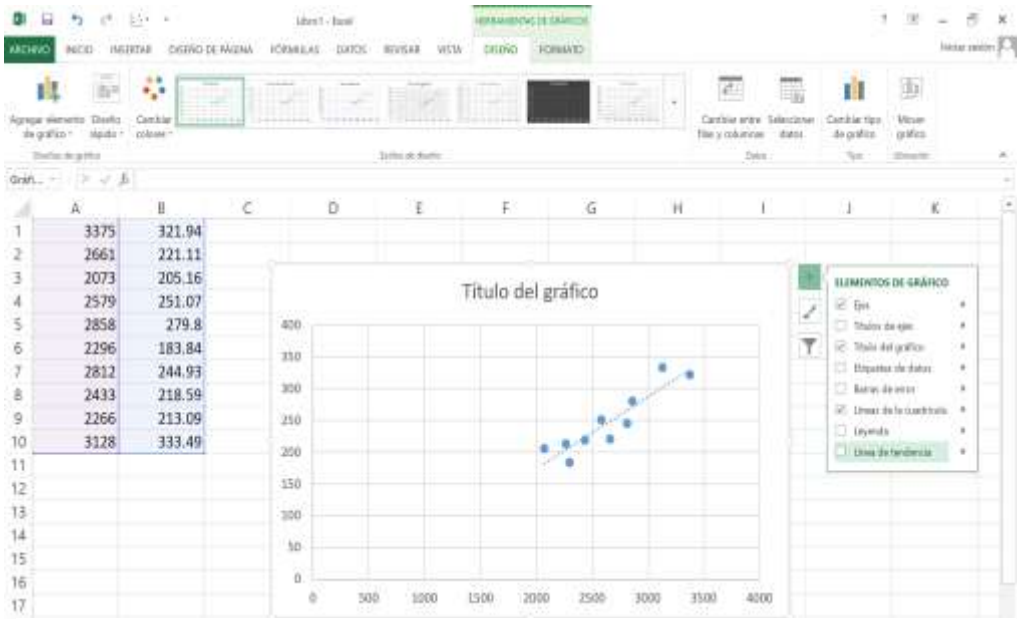


Fig. 3.59 Línea de tendencia.

Paso 6: Hasta abajo en la lista de opciones aparece unos cuadros de opción que son importantes marcar, “agregar ecuación” y “Valor de R” (ver Figs. 3.60 y 3.61).

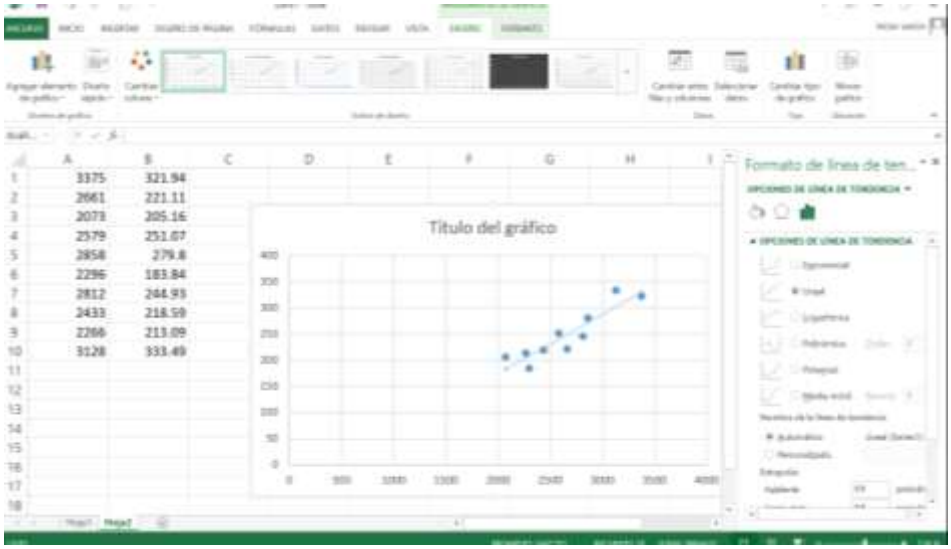


Fig. 3.60 Esquina inferior derecha: agregar ecuación y valor del coeficiente de determinación R.

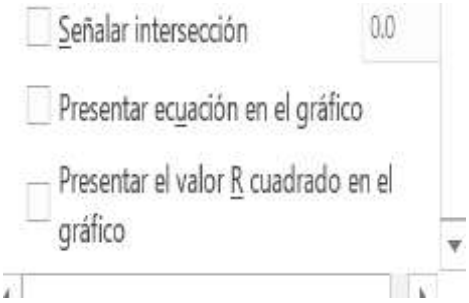


Fig. 3.61 Opciones para presentar en la gráfica

Así podemos reiterar nuevamente que el ajuste manual coincide con la aproximación de un software, en este caso Excel. Ahí observamos un dato que nos interesa, la R al cuadrado, la cual significa o nos dice, el grado o porcentaje de aproximación de los datos, estamos hablando de un 84% de confianza.
En la Fig. 3.62 se presenta la gráfica del polinomio de grado 1 al que ajustan los datos experimentales con un coeficiente de determinación de 0.8372.

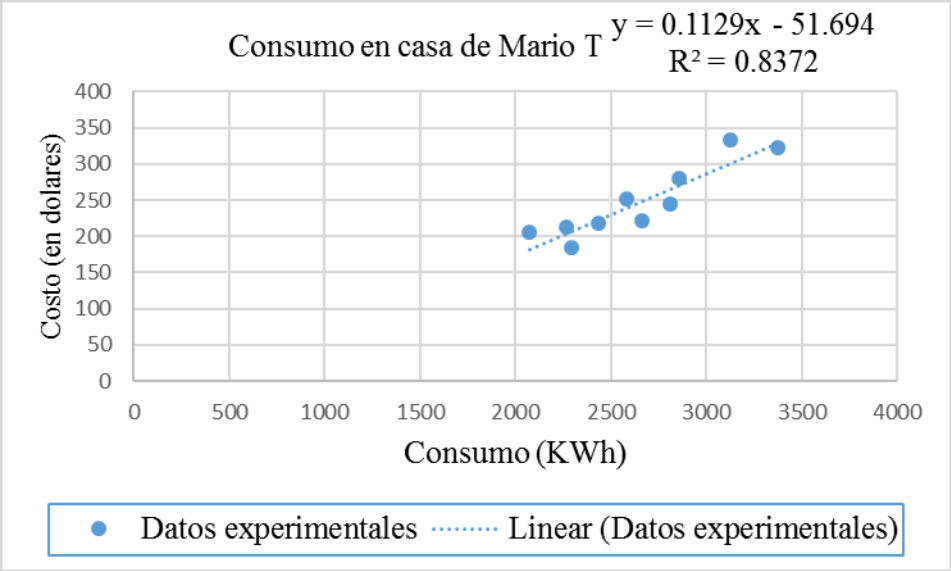


Fig. 3.62 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 1 con un coeficiente de determinación de 0.8372.

Como dato extra: en Excel tenemos una opción más en el menú que nos permite obtener más datos para examinar la recta, para ello, las siguientes instrucciones.
Paso 1: De igual modo que como lo hicimos en la gráfica de arriba, deberemos seleccionar los datos. Y después, en el menú la opción datos (ver Fig. 3.63).

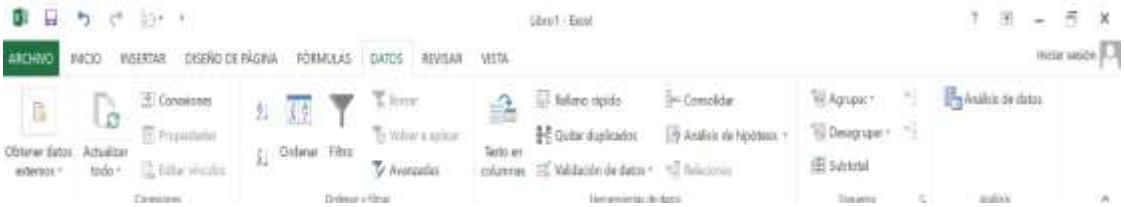


Fig. 3.63 Datos de Excel.

Donde escogeremos la opción, análisis de datos y subsecuentemente “regresión” (ver Fig. 3.64).

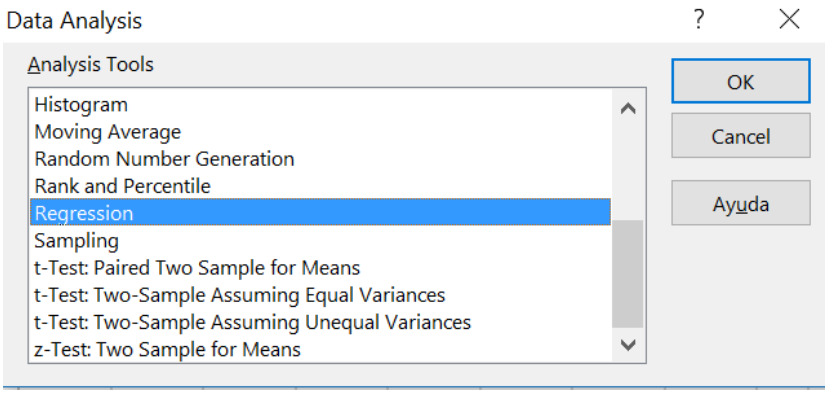


Fig. 3.64 Análisis de datos → Regresión.

Una vez que demos clic, aparecerá un recuadro como el de la Fig. 3.65

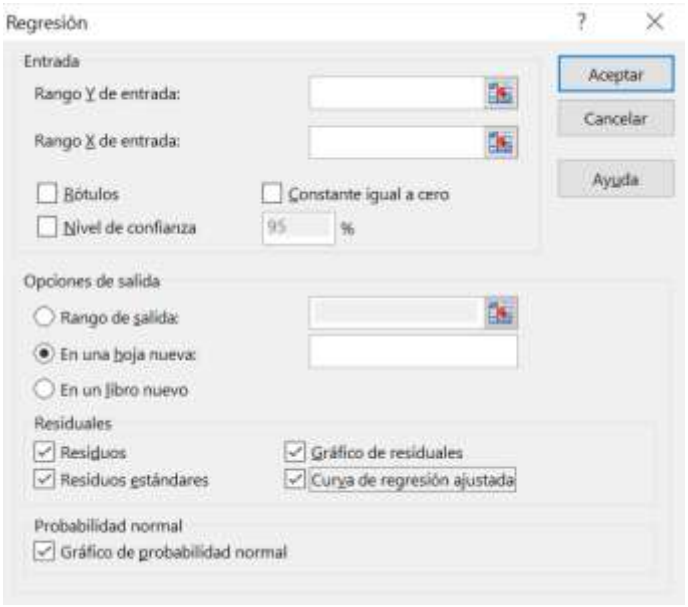


Fig. 3.65 Cuadro de opciones.

En el rango de entrada *Y* y *X*, respectivamente, ingresaremos las columnas de datos, también será necesario habilitar todas las opciones de abajo (palomitas) para tener un grado de información mayor, que queda fuera de contexto para los propósitos de solución de este problema. De donde obtenemos la información encuadrada de la siguiente forma

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.91500497
Coeficiente de determinación R^2	0.83723409
R^2 ajustado	**0.81688835**
Error típico	21.42398831
Observaciones	10

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*
Regresión	1	18887.48276	18887.48276	41.1503407	0.00020585
Residuos	8	3671.898201	458.9872751		
Total	9	22559.38096			

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*	*Inferior 95%*	*Superior 95%*	*Inferior 95.0%*	*Superior 95.0%*
Intercepción	-51.69427113	47.09979	-1.097547	0.3043353	-160.30658	56.9180426	-160.30658	56.9180426
Variable x	0.11290974	0.017601	6.414853	0.0002058	0.0723207	0.1534984	0.0723207	0.1534984

Análisis de los residuales

Observación	*Pronóstico para Y*	*Residuos*	*Residuos estándares*
1	329.37609	-7.436087	-0.368146
2	248.75854	-27.64854	-1.368825
3	182.36761	22.792389	1.128407
4	239.49994	11.570063	0.5728114
5	271.00175	8.7982465	0.4355841
6	207.54648	-23.70648	-1.173662
7	265.80791	-20.87791	-1.033625
8	223.01512	-4.425116	-0.219079
9	204.15919	8.93081	0.4421471
10	301.48738	32.002618	1.5843876

Percentil	*Y*
5	183.84
15	205.16
25	213.09
35	218.59
45	221.11
55	244.93
65	251.07
75	279.8
85	321.94
95	333.49

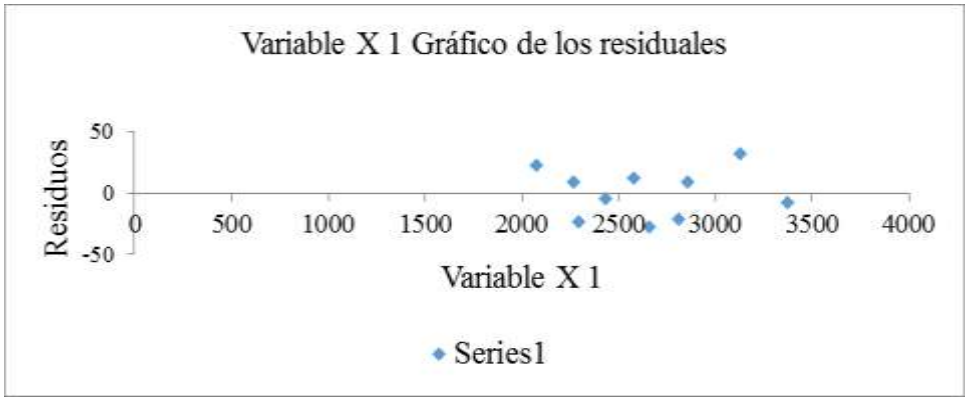


Fig. 3.66 Gráfico de residuales.

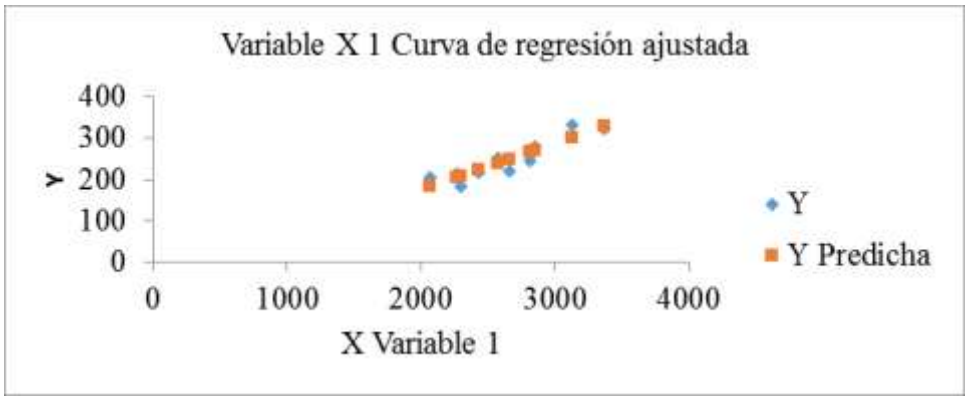


Fig. 3.67 Curva de regresión ajustada.

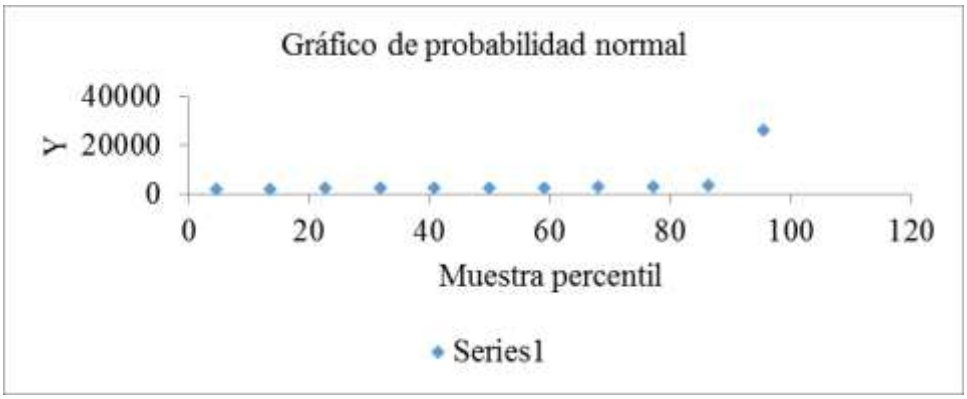


Fig. 3.68 Gráfico de probabilidad normal.

Maple

A continuación, se muestra la secuencia de pasos del procedimiento para obtener la curva de regresión usando el software Maple.

El lector podrá darse cuenta que este software en particular hace honor a su nombre, si revisamos y hojeamos un poco de la historia, nos daremos cuenta que su nombre en una composición de palabras que en unión significa *"placer por las matemáticas"* del inglés MathPleasure, acortado y estilizado a Maple.

Lo primero que haremos en esta ocasión, es replicar la resolución manual por pasos, pero usando Maple para ello en las Figs. 3.69 y 3.70.
Paso 1: Escoger una nueva hoja de trabajo (ver Fig. 3.69).

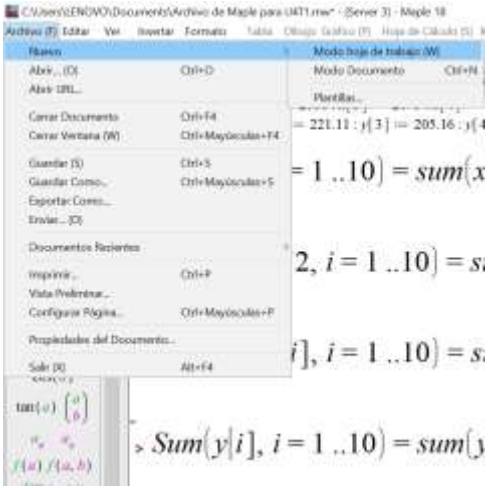


Fig. 3.69 Seleccionar nueva hoja de trabajo.

Paso 2: Ya en la hoja de trabajo, dar clic en la sección de "prompts" (ver Fig. 3.70).
En ese paso, será necesario no ser "tacaños" y proveer de suficientes para evitar contratiempos futuros.

Fig. 3.70 Ícono prompt de Maple.

Paso 4: Comenzar con las instrucciones:
Para ello es preciso conocer el lenguaje de Maple, ya que contiene un lenguaje de programación de instrucciones único.
Escribimos un Prompt > y justo al costado esta sentencia:
Para el eje de las *x*.

$$x[1] := 3375 : x[2] := 2661 : x[3] := 2073 : x[4] := 2579 : x[5] := 2858 : x[6] := 2296 : x[7] := 2812 : x[8] := 2433 : x[9] := 2266 : x[10] := 3128 :$$

Lo mismo con los valores de *y*.

$$y[1] := 321.94 : y[2] := 221.11 : y[3] := 205.16 : y[4] := 251.07 : y[5] := 279.8 : y[6] := 183.84 : y[7] := 244.93 : y[8] := 218.59 : y[9] := 213.09 : y[10] := 333.49 :$$

Introducimos el comando de sumatorias

```
> Sum(x[i], i = 1 ..10) = sum(x[i], i = 1 ..10)
```

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 26481$$

Al final nos percatamos que la suma es correcta, de acuerdo a los procedimientos manuales vistos con anterioridad.

Continuemos con las demás sumatorias:

```
> Sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10) = sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10)
```

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71605869$$

```
> Sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10) = sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10)
```

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 6.71608375\ 10^6$$

```
> Sum(y[i], i = 1 ..10) = sum(y[i], i = 1 ..10)
```

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 2473.02$$

La siguiente sumatoria fue necesario someterla a una potencia cuadrada, renombrándola a la letra griega *xi*.

```
> xi := Sum(x[i], i = 1 ..10) = sum(x[i], i = 1 ..10) ^2
```

$$\xi := \sum_{i=1}^{10} x_i = 701243361$$

Introduciendo todas las sumatorias en las fórmulas de Gauss

```
> a[0] = (Sum(y[i], i = 1 ..10)·Sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10)
      - Sum(x[i], i = 1 ..10)·Sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10)) /
     (10·Sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10) - Sum(x[i], i = 1
     ..10) ^2)
```

$$\left(\sum_{i=1}^{10} x_i = 701243361\right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i y_i\right)}{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}$$

```
> a[0] = (Sum(y[i], i = 1 ..10)·Sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10)
      - Sum(x[i], i = 1 ..10)·Sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10)) /
     (10·Sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10) - Sum(x[i], i = 1
     ..10) ^2) = (sum(y[i], i = 1 ..10)·sum( (x[i])
     ^2, i = 1 ..10) - sum(x[i], i = 1 ..10)·sum(x[i]·y[i],
     i = 1 ..10)) / (10·sum( (x[i]) ^2, i = 1 ..10)
     - sum(x[i], i = 1 ..10) ^2)
```

$$\left(\sum_{i=1}^{10} x_i = 701243361\right) = -51.69426882$$

Obteniendo

```
> a[1] = (10 ·Sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10) − Sum(y[i], i = 1
      ..10)·Sum(x[i], i = 1 ..10)) / (10·Sum((x[i])^2, i
      = 1 ..10) − Sum(x[i], i = 1 ..10)^2)
```

$$a_1 = \frac{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)}{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}$$

```
> a[1] = (10 ·sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10) − sum(y[i], i = 1
      ..10)·sum(x[i], i = 1 ..10)) / (10·sum((x[i])^2, i
      = 1 ..10) − sum(x[i], i = 1 ..10)^2)
```

$$a_1 = 0.1129097356$$

Para graficar, incluimos los datos de entrada y salida

```
> H := [2073, 2266, 2296, 2433, 2579, 2661, 2812, 2858,
      3128, 3375]
```

$$H := [2073, 2266, 2296, 2433, 2579, 2661, 2812, 2858, 3128, 3375]$$

```
> C := [205.16, 213.09, 183.84, 218.59, 251.07, 221.11,
      244.93, 279.8, 333.49, 321.94]
```

$$C := [205.16, 213.09, 183.84, 218.59, 251.07, 221.11, 244.93, 279.8, 333.49, 321.94]$$

Enseguida hacemos uso de la librería de estadística de Maple para obtener la gráfica de datos experimentales y línea recta que los aproxima.

```
>with(Statistics):
>
DT := pointplot(Matrix([[2073, 205.16], [2266,
      213.09], [2296, 183.84], [2433, 218.59], [2579,
      251.07], [2661, 221.11], [2812, 244.93], [2858,
      279.8], [3128, 333.49], [3375, 321.94]]), datatype
      = float), axes = boxed, style = line, color = "Black",
      thickness = 10, legend = "Datos experimentales")
>
display({DT}, axes = boxed, title
      = Consumo en la casa de Mario T, labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], titlefont
      = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels
      = ["Consumo(KWh)", "Costo(en dolares)"], size
      = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman",
      20]);
```

El polinomio de grado 1 es

```
> LinearFit([x, 1], H, C, x)
```
$0.112909735585352\,x - 51.6942708035713$

Y con el siguiente comando reducimos los decimales de los coeficientes.

```
> evalf(%, 4)
```
$0.1129\,x - 51.69$

Con este otro polinomio

```
> c := x→0.1129 x − 51.69
```
$c := x \to 0.1129\,x - 51.69$

Finalmente, usando la librería de plot (gráficas)

```
> GRP := LinearFit([x, 1], H, C, x)
```
$GRP := 0.112909735585352\,x - 51.6942708035713$

```
> RW := plot(GRP, x = 2050 ..3500, y = 205.16 ..321.94,
      color = "red", thickness = 14, legend
      = "Ecuación lineal", style = "point", symbol
      = "diamond");
```
$RW := PLOT(\ldots)$

```
> display({DT, RW}, axes = boxed, title
      = Consumo en la casa de Mario T, labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], titlefont
      = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels
      = ["Consumo(KWh)", "Costo(en dolares)"], size
      = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman",
      20]);
```

En la Fig. 3.71 se presenta la gráfica de datos experimentales y el polinomio de grado 1 en la cual podemos observar el ajuste logrado.

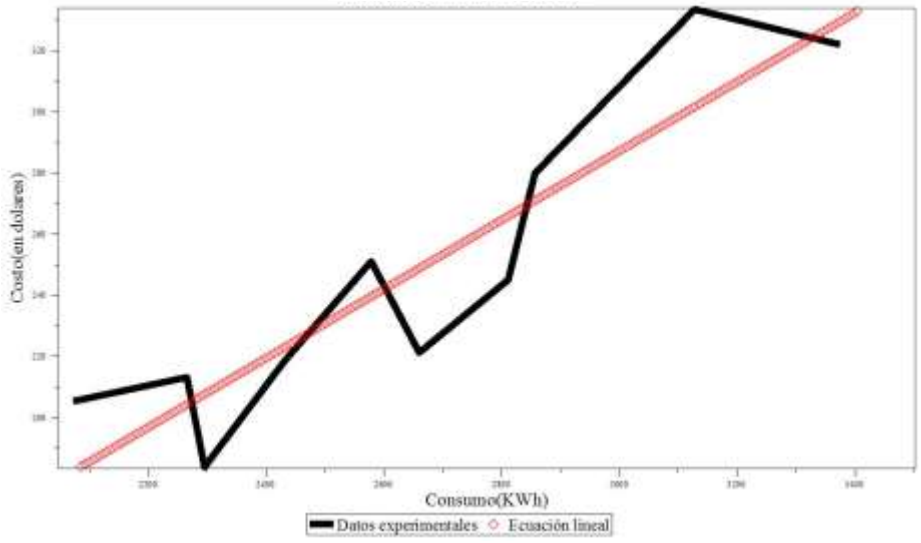


Fig. 3.71. Polinomio de grado 1 que aproxima los datos.

El polinomio de grado 1 al que se aproximaron los datos experimentales es
$P(x) = 0.112909735x - 51.6942708$

Continuamos para encontrar la función que mejor ajuste el grado día para calentar y la temperatura promedio, y para ello, en esta ocasión ya no se dará instrucción por instrucción, solo se verá el progreso.

Renglón 2 y 3
En la Tabla 3.18 se observan los cálculos para hacer el ajuste con mínimos cuadrados

Tabla 3.18 Cálculos de términos contenidos en el método de mínimos cuadrados a partir de los datos.

Grado día para calentar	Temperatura promedio	x_i^2	$x_i y_i$
2421	26	5861241	62946
1841	34	3389281	62594
438	58	191844	25404
15	72	225	1080
152	67	23104	10184
1028	48	1056784	49344
1967	33	3869089	64911
1627	39	2647129	63453
537	66	288369	35442
26	71	676	1846
Total, grado día: 10052	Total, temperatura: 514	Total: 17327742	Total: 377204

Ahora las formulas

$$a_0 = \frac{(514)(17327742) - (10052)(377204)}{10(17327742) - (101042704)}$$

$$a_0 = \frac{5114804780}{72234716}$$

$$a_0 = 70.80812472$$

$$a_1 = \frac{10(377204) - (514)(10052)}{10(17327742) - (101042704)}$$

$$a_1 = \frac{-1394688}{14815329}$$
$$a_1 = -0.019307724$$

$$P(x) = 70.80812472 - 0.019307724x$$
$$P(x) = -0.019307724x + 70.80812472$$

Las Figs. 3.72 y 3.73 muestran el ajuste de regresión lineal en Geogebra y Excel de los datos experimentales dados.

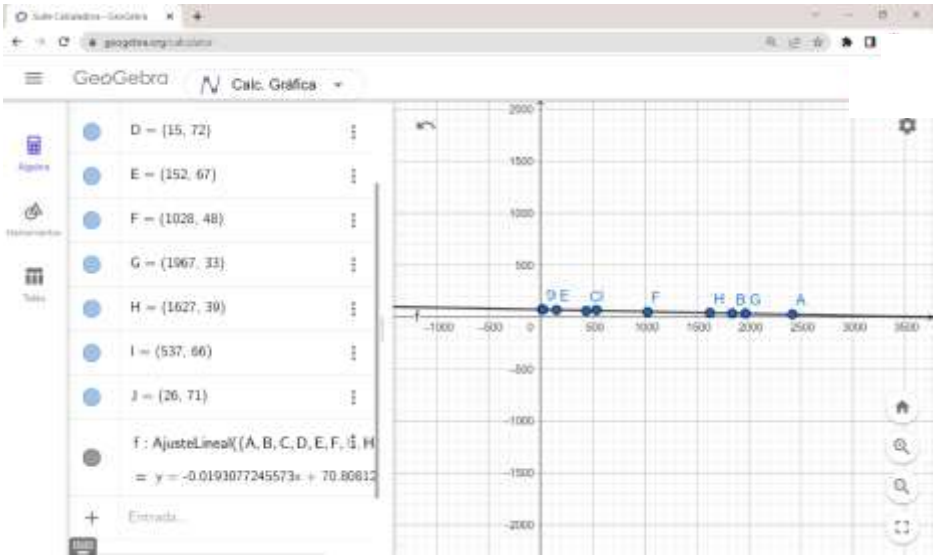


Fig. 3.72 Aproximación lineal de datos experimentales a una recta en Geogebra.

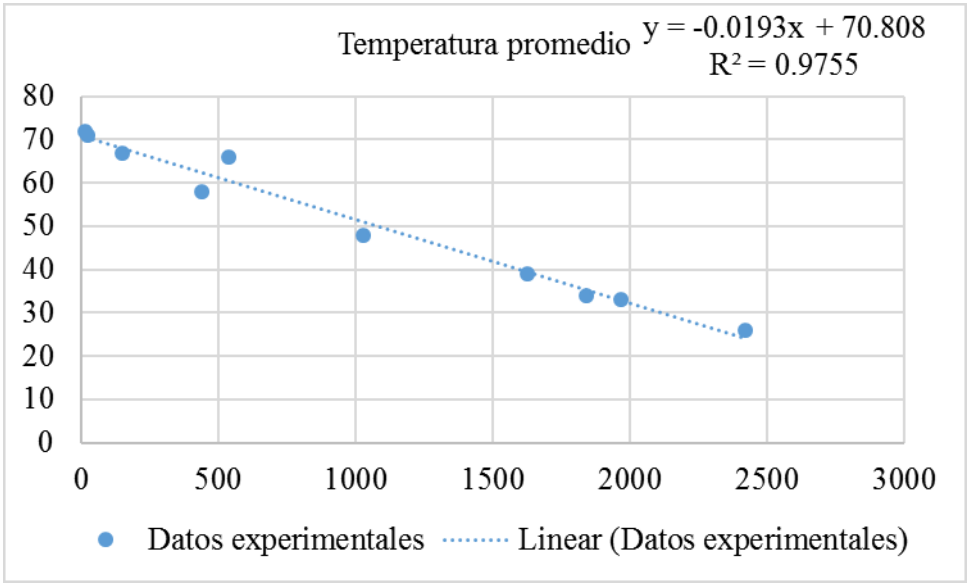


Fig. 3.73 Aproximación lineal de datos experimentales en Excel.

Resumen

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.98768412
Coeficiente de determinación R^2	0.97551992
R^2 ajustado	0.9724599
Error típico	2.906347047
Observaciones	10

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*
Regresión	1	2692.825175	2692.825175	318.7962575	9.91761496061273E-08
Residuos	8	67.57482527	8.446853159		
Total	9	2760.4			

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico T*	*Probabilidad*	*Inferior 95%*	*Superior 95%*	*Inferior 95.0%*	*Superior 95.0%*
Intercepción	70.8081247	1.42346068	49.7436466	2.953E-11	67.5256185	74.0906309	67.5256185	74.0906309
Variable X 1	-0.0193077	0.00108137	-17.854866	9.9176E-08	-0.0218014	-0.0168141	-0.0218014	-0.0168141

Observación	*Predicción para Y*	*Residuos*	*Residuos estándares*	Percentil	Y
1	24.0641236	1.93587643	0.70649065	5	26
2	35.2626038	-1.2626038	-0.4607824	15	33
3	62.3513414	-4.3513414	-1.5880053	25	34
4	70.5185089	1.48149114	0.54066449	35	39
5	67.8733506	-0.8733506	-0.3187259	45	48
6	50.9597839	-2.9597839	-1.0801617	55	58
7	32.8298305	0.17016948	0.0621027	65	66
8	39.3944569	-0.3944569	-0.1439555	75	67
9	60.4398766	5.56012336	2.02914563	85	71
10	70.3061239	0.69387611	0.25322742	95	72

Las gráficas de las Figs. 3.74-3.76 muestran los residuales, regresión ajustada y probabilidad normal.

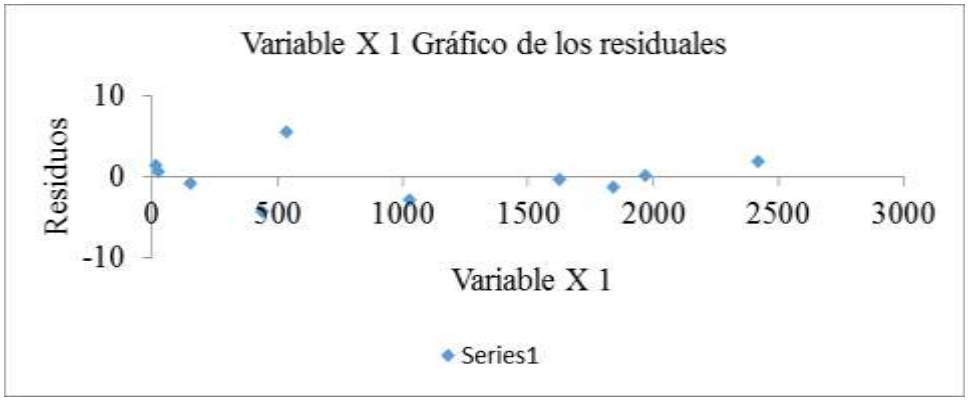


Fig. 3.74 Gráfica de los residuales

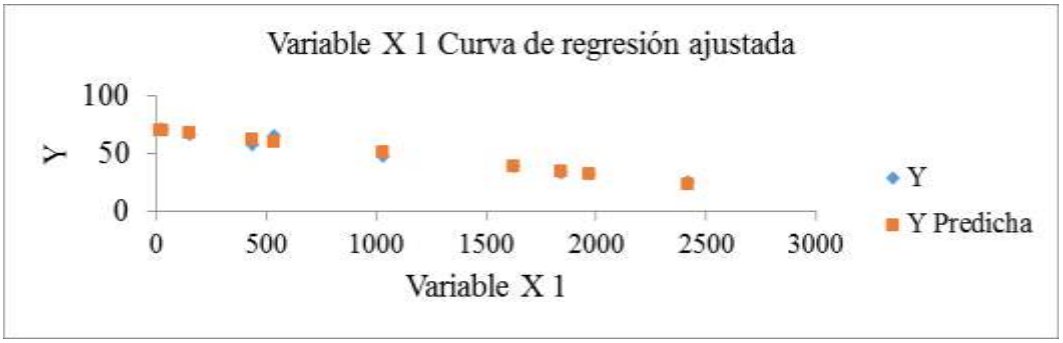


Fig. 3.75 Curva de regresión ajustada.

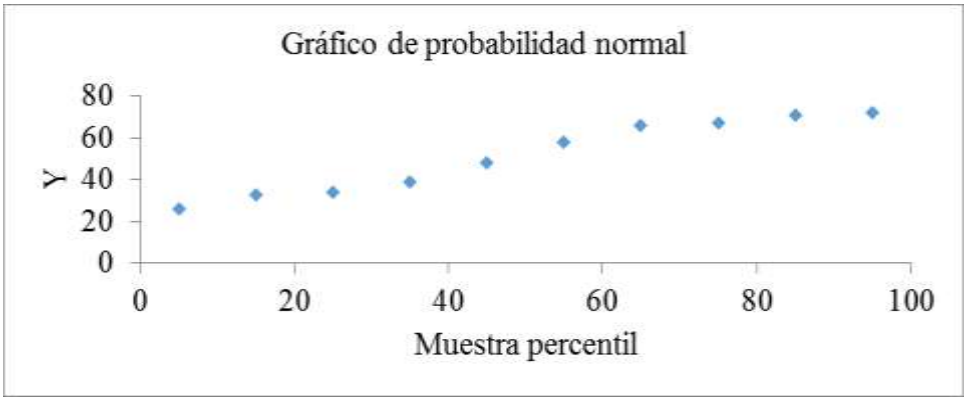


Fig. 3.76 Curva de probabilidad normal.

Maple

```
> x[1] := 2421 : x[2] := 1841 : x[3] := 438 : x[4]
      := 15 : x[5] := 152 : x[6] := 1028 : x[7] := 1967 :
    x[8] := 1627 : x[9] := 537 : x[10] := 26 :

> y[1] := 26 : y[2] := 34 : y[3] := 58 : y[4] := 72 : y[5]
      := 67 : y[6] := 48 : y[7] := 33 : y[8] := 39 : y[9]
      := 66 : y[10] := 71 :

> Sum(x[i], i = 1 ..10) = sum(x[i], i = 1 ..10)
```

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10052$$

> $Sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) = sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10)$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17327742$$

> $Sum(x[i]\cdot y[i], i = 1..10) = sum(x[i]\cdot y[i], i = 1..10)$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 377204$$

> $Sum(y[i], i = 1..10) = sum(y[i], i = 1..10)$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 514$$

> xi := $Sum(x[i], i = 1..10) = sum(x[i], i = 1..10)\text{^}2$

$$\xi := \sum_{i=1}^{10} x_i = 101042704$$

> $a_0 = (Sum(y[i], i = 1..10)\cdot Sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) - Sum(x[i], i = 1..10)\cdot Sum(x[i]\cdot y[i], i = 1..10))/(10\cdot Sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) - Sum(x[i], i = 1..10)\text{^}2)$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i y_i\right)}{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}$$

> $a_0 = (sum(y[i], i = 1..10)\cdot sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) - sum(x[i], i = 1..10)\cdot sum(x[i]\cdot y[i], i = 1..10))/(10\cdot sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) - sum(x[i], i = 1..10)\text{^}2)$

$$a_0 = \frac{1278701195}{18058679}$$

> $a_{00} := evalf\left(\frac{1278701195}{18058679}\right)$

$a_{00} := 70.80812472$

> $a_1 = (10\cdot Sum(x[i]\cdot y[i], i = 1..10) - Sum(y[i], i = 1..10)\cdot Sum(x[i], i = 1..10))/(10\cdot Sum((x[i])\text{^}2, i = 1..10) - Sum(x[i], i = 1..10)\text{^}2)$

$$a_1 = \frac{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)}{10\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}$$

```
> a_1 = (10 ·sum(x[i]·y[i], i = 1 ..10) − sum(y[i], i = 1
      ..10)·sum(x[i], i = 1 ..10)) / (10·sum((x[i])^2, i
      = 1 ..10) − sum(x[i], i = 1 ..10)^2)
```

$$a_1 = -\frac{348672}{18058679}$$

```
> a_11 := evalf(-348672/18058679)
```

$$a_{11} := -0.01930772456$$

```
> P := -0.01930772456 x + 70.80812472
```

$$P := -0.01930772456\,x + 70.80812472$$

Polinomio=

$$P := -0.01930772456\,x + 70.80812472$$

Graficación

```
> H := [15, 26, 152, 438, 537, 1028, 1627, 1841, 1967,
      2421]
```

$$H := [15, 26, 152, 438, 537, 1028, 1627, 1841, 1967, 2421]$$

```
> C := [72, 71, 67, 58, 66, 48, 39, 34, 33, 26]
```

$$C := [72, 71, 67, 58, 66, 48, 39, 34, 33, 26]$$

```
> with(Statistics) : with(plots) : with(linalg) :
    with(Student[LinearAlgebra]) :
>
  DT := pointplot(Matrix([[15, 72], [26, 71], [152, 67],
      [438, 58], [537, 66], [1028, 48], [1627, 39],
      [1841, 34], [1967, 33], [2421, 26]]), datatype
      = float), axes = boxed, style = line, color = "Black",
      thickness = 10, legend = "Datos experimentales");
```

$$DT := PLOT(\ldots)$$

```
>     display({DT}, axes = boxed, title
        = Observaciones para la temperatura y el grado día,
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont
        = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels
        = ["Grado Día", "Temperatura"], size = [1300, 800],
      labelfont = ["TimesNewRoman", 20])
```

```
> GRP := LinearFit([x, 1], H, C, x)
```

$$GRP := -0.0193077245572614\,x + 70.8081247249591$$

```
> RW := plot(GRP, x = 10 ..2500, y = 20 ..80, color = "red",
        thickness = 14, legend = "Ecuación lineal", style
        = "point", symbol = "diamond");
RW := PLOT(...)
>
  display({DT, RW}, axes = boxed, title
        = Temperatura en función del grado día,
       labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont
        = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels
        = ["Grado Día", "Temperatura"], size = [1300, 800],
       labelfont = ["TimesNewRoman", 20]);
```

En la Fig. 3.77 se muestra el polinomio de grado 1 que aproxima a las variables de los renglones 2 y 3 del problema.

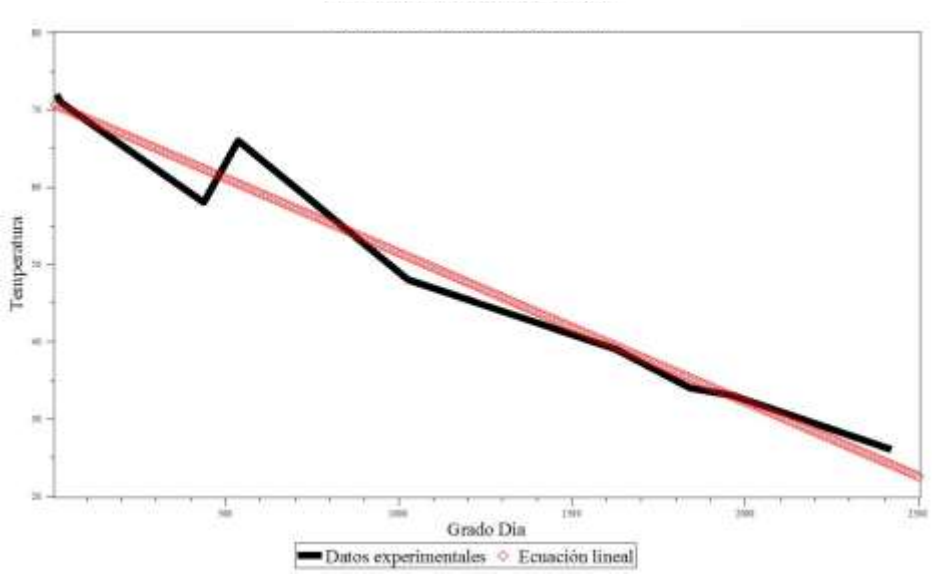


Fig. 377. Polinomio de grado 1 que aproxima a los datos.

El polinomio (en base al método de mínimos cuadrados) que mejor aproxima es:

$$P(x) = -0.019307724x + 70.80812472$$

Pudiéndose comprobar con todos y cada uno de los softwares involucrados. El coeficiente de determinación R^2 =0.9755 calculado en Excel para este polinomio de grado 1 es bastante satisfactorio para concluir que, los datos experimentales de las variables de grado día para calentar y temperatura diaria promedio del problema, se relacionan linealmente con un 97.55% de confianza.

Problema 15

Al medir la velocidad con un tubo de Pitot en una tubería circular de diámetro interior de 20 cm, se encontró la siguiente información.

v (cm/s)	600	550	450	312	240
r (cm)	0	3	5	7	8

Donde r es la distancia en cm medida a partir del centro del tubo.

a) Obtener la curva $v = f(r)$ que aproxima estos datos experimentales.

b) Calcular la velocidad en el punto $r = 4$ cm.

Solución a) y b)

Usando el **método de mínimos cuadrados** con el software Maple obtenemos la solución como sigue.

> $with(CurveFitting)$:

> $A := LeastSquares([0, 3, 5, 7, 8], [600, 550, 450, 312, 240], r, curve = a r^2 + b r + c)$

$$A := \frac{1744370}{2899} - \frac{17781}{5798} r - \frac{31003}{5798} r^2$$

> $evalf(A)$

$$601.7143843 - 3.066747154 r - 5.347188686 r^2$$

> $v(r) = 601.7143843 - 3.066747154 r - 5.347188686 r^2$

> $r := 4$:

$$601.7143843 - 3.066747154 r - 5.347188686 r^2$$

> $v(r) = 601.7143843 - 3.066747154 r - 5.347188686 r^2$

$$v(4) = 503.8923767$$

> $v(r) = 601.7143843 - 3.066747154 r - 5.347188686 r^2 \lhd$ Respuesta a).

> $v(4) = 503.8923767 \lhd$ Respuesta b).

La distribución de velocidades solo se presenta del centro a la pared del tubo, dado que es simétrica. Las instrucciones Maple para obtener la gráfica de ajuste de datos experimentales al polinomio de grado 2 obtenido con el método de mínimos cuadrados (ver Fig. 3.78).

```
> with(plots):
> F:=plot(b, a, style = point, axes = boxed, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels = ["r (cm)", "v (cm/s)"], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]):
> G:=plot(601.7143843-3.066747154*r-5.347188686*r^2, r=-0..10, v=0..600, style=line,color="Navy"):
> display({F, G}, axes=boxed);
```

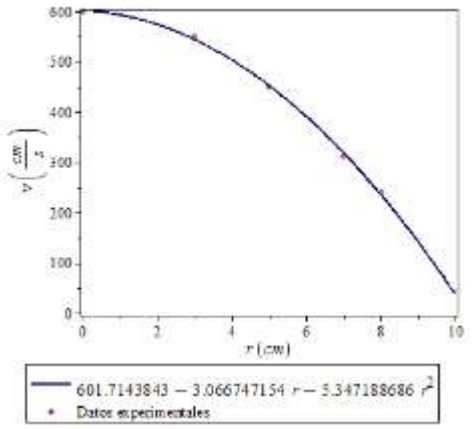


Fig. 3.78 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2.

Problema 16

Dada la base de datos

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	26.43	22.40	19.08	16.32	14.04	12.12	10.51	9.15	8.00
P	14.70	17.53	20.80	24.54	28.83	33.71	39.25	45.49	52.52

v es el volumen en pie^3 de una lb de vapor y P es la presión en psia. Encuentre los parámetros a y b de la ecuación $P = av^b$

Aplicando el **método de mínimos cuadrados**.

Solución

Usando la librería de estadística de Maple, definimos los vectores V y P, que contienen valores de una variable independiente v y una variable dependiente P.

```
> with(Statistics):
> V := Vector([26.43,22.40,19.08,16.32,14.04,12.12,10.51,9.15,8]):
> P := Vector([14.7,17.53,20.80,24.54,28.83,33.71,39.25,45.49,52.52]):
```

Encontrar los valores de a y b que minimizan el error de mínimos cuadrados cuando se usa la función modelo $P = av^b$

```
> Fit(a*v^b, V,P,v );
```

$$\frac{481.684664900677}{v^{1.06586294583976}}$$

Por tanto,

```
> a := 481.684664900677
```

$a := 481.684664900677$

```
> b := 1.06586294583976
```

$b := 1.06586294583976$

```
> P = a v^b
```

$P = 481.684664900677\, v^{1.06586294583976}$

```
> P = 481.684664900677 v^1.06586294583976
```

$P = 481.684664900677\, v^{1.06586294583976}$ ◁ Respuesta.

Con mínimos cuadrados, la curva a ajustar $P = a\, v^b$ es no lineal en los parámetros, como podemos observar en la respuesta de Maple:

```
> with(CurveFitting):
>
LeastSquares([[26.43,14.70],[22.40,17.53],[19.08,20.80],[16.32,24.54],[14.04,28.83],[12.12,33.71],[10.
51,39.25],[9.15,45.49],[8,52.52]], v);
```

$60.6713046156754 - 1.94619153597304\, v$

```
> LeastSquares([26.43,22.40,19.08,16.32,14.04,12.12,10.51,9.15,8],
[14.7,17.53,20.80,24.54,28.83,33.71,39.25,45.49,52.52],v);
```

$60.6713046156754 - 1.94619153597304\, v$

```
> LeastSquares([26.43,22.40,19.08,16.32,14.04,12.12,10.51,9.15,8],
[14.7,17.53,20.80,24.54,28.83,33.71,39.25,45.49,52.52],v, curve=a*v^b);
Error, (in CurveFitting:-LeastSquares) curve to fit is not linear in the parameters
> LeastSquares([26.43,22.40,19.08,16.32,14.04,12.12,10.51,9.15,8],
[14.7,17.53,20.80,24.54,28.83,33.71,39.25,45.49,52.52],v, curve=a*v^2+b*v+c);
```

$91.7769243661715 - 6.18130762603718\, v + 0.125244836558893\, v^2$

La Fig. 3.79 muestra el comportamiento de las funciones graficadas mediante estadística (respuesta solicitada) y mínimos cuadrados (respuesta obtenida con el método solicitado).

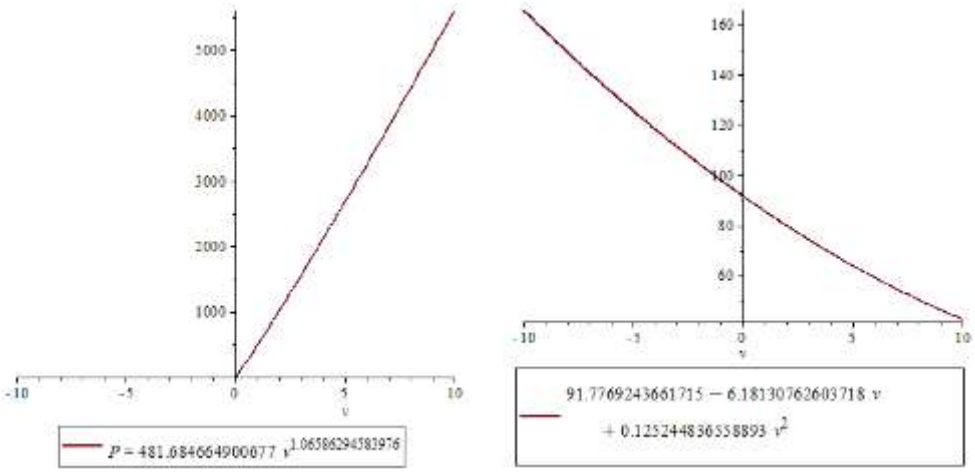


Fig. 3.79 Parámetros a, b ajustados mediante: gráfica izquierda a línea recta, $P = av^b$, y gráfica derecha a la curva con el parámetro c adicional $P = v^2 + bv + c$.

Problema 17

La aparición de una corriente inducida en un circuito eléctrico con una constante de tiempo τ es $I = I - exp(-t/\tau)$, en la cual t es el tiempo que se mide desde el instante en que el interruptor se cierra, I es la razón de la corriente en el tiempo t al valor total de la corriente dado por la ley de Ohm. Con las mediciones siguientes, estime la constante del tiempo τ de este circuito.

Elabore un programa para leer una tabla de valores t dados con los datos siguientes, el método a utilizar deberá ser el de mínimos cuadrados.

I	0.073	0.220	0.301	0.370	0.418	0.467	0.517
t (seg)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7

Solución

este problema se solucionó mediante programación Python por medio del método de mínimos cuadrados.

Código Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# datos del problema
t = np.array([0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7])
i = np.array([0.073, 0.220, 0.301, 0.370, 0.418, 0.467, 0.517])


# función que se ajustará a los datos
def f(t, t):
  return 1 - np.exp(-t / t)
```

```
# implementación del método de ajuste de mínimos cuadrados
def ajuste_min_cuad(x, y, f):
  n = len(x)
  a = np.zeros((n, 1))
  for i in range(n):
    a[i] = f(x[i], 0.831)
  b = y.reshape(n, 1)
  coeficientes = np.linalg.inv(a.t @ a) @ a.t @ b
  return coeficientes[0, 0]


# ajuste de la función a los datos
t_estimado = ajuste_min_cuad(t, i, f)

# impresión del resultado
print("el valor estimado de la constante de tiempo t es:", t_estimado)

# gráfica de los datos y la función ajustada
plt.plot(t, i, 'ro', label='datos')
t_graf = np.linspace(t[0], t[-1], 100)
plt.plot(t_graf, f(t_graf, t_estimado), label='ajuste')
plt.xlabel('t (seg)')
plt.ylabel('i')
plt.legend()
plt.show()
```

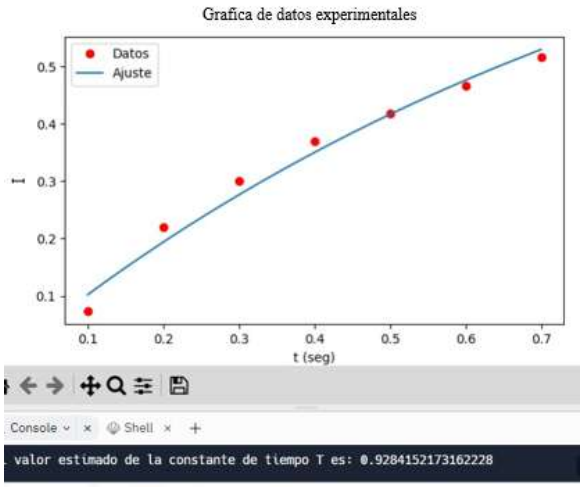


Fig. 3.80 Gráfica de datos experimentales y polinomio al que aproximan las variables del problema.

en la Fig. 3.80 se muestra la gráfica que resulta de compilar el código anterior. El resultado de τ es de,
$\tau = 0.9284152173162228$ ◁ *Respuesta*

De Excel obtuvimos el ajuste de datos a un prolinomio de grado 2 con un coeficiente de determinación de 0.9917, lo cual significa muy buen ajuste, a saber

$y = -0.8179x^2 + 1.3482x - 0.0377$

$R^2 = 0.9917$

Código en Python con el grado del polinomio aproximado
En este caso el polinomio de grado 5

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos del problema
t = np.array([0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7])
I = np.array([0.073, 0.220, 0.301, 0.370, 0.418, 0.467, 0.517])

# Función que se ajustará a los datos (polinomio de grado 5)
def f(t, a0, a1, a2, a3, a4, a5):
    return a0 + a1*t + a2*t**2 + a3*t**3 + a4*t**4 + a5*t**5
```

```
# Implementación del método de ajuste de mínimos cuadrados (polinomio de grado 5)
def ajuste_min_cuad(x, y, f):
    n = len(x)
    A = np.zeros((n, 6))
    for i in range(n):
        A[i] = [1, x[i], x[i]**2, x[i]**3, x[i]**4, x[i]**5]
    B = y.reshape(n, 1)
    coeficientes = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T @ B
    return coeficientes[:, 0]

# Ajuste de la función a los datos
coeficientes_estimados = ajuste_min_cuad(t, I, f)
T_estimado = -1/coeficientes_estimados[3] # tiempo característico es el inverso del coeficiente del término cúbico

# Impresión del resultado
print("Los coeficientes estimados del polinomio de grado 5 son:", coeficientes_estimados)
print("El valor estimado de la constante de tiempo T es:", T_estimado)

# Gráfica de los datos y la función ajustada
plt.plot(t, I, 'ro', label='Datos')
t_graf = np.linspace(t[0], t[-1], 100)
plt.plot(t_graf, f(t_graf, *coeficientes_es
plt.xlabel('t (seg)')
plt.ylabel('I')
plt.legend()
plt.show()
```

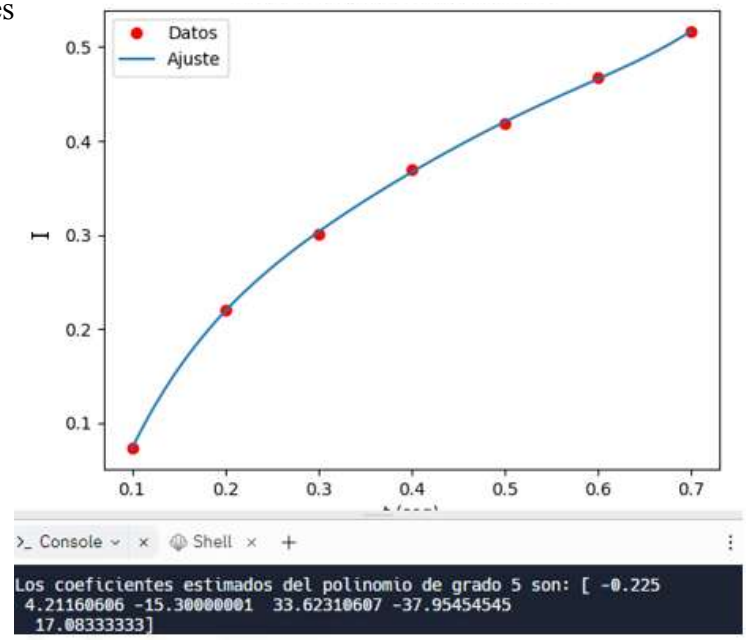


Fig. 3.81 Gráfica del segundo código Python con los datos experimentales y polinomio de grado 5 al que ajustan.

La Fig. 3.81 muestra los resultados gráficos del segundo código de Python con el polinomio que mayormente ajusta a los datos experimentales, el de grado 5. Sin embargo, en Excel se encontró que es el polinomio de grado 6 el que ajusta exactamente a los datos dados. De Excel, encontramos que el polinomio de grado 5 ajusta con un buenísimo 0.9998, así

$y = 17.083x^5 - 37.955x^4 + 33.623x^3 - 15.3x^2 + 4.2116x - 0.225$
$R^2 = 0.9998$

Para el código del cálculo del polinomio grado 5, de este problema, el estudiante puede revisar el código siguiente de ser necesario.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos del problema
t = np.array([0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7])
I = np.array([0.073, 0.220, 0.301, 0.370, 0.418, 0.467, 0.517])

# Función que se ajustará a los datos (polinomio de grado 5)
def f(t, a0, a1, a2, a3, a4, a5):
    return a0 + a1*t + a2*t**2 + a3*t**3 + a4*t**4 + a5*t**5

# Implementación del método de ajuste de mínimos cuadrados (polinomio de grado 5)
def ajuste_min_cuad(x, y, f):
    n = len(x)
    A = np.zeros((n, 6))
    for i in range(n):
        A[i] = [1, x[i], x[i]**2, x[i]**3, x[i]**4, x[i]**5]
    B = y.reshape(n, 1)
    coeficientes = np.linalg.inv(A.T @ A) @ A.T @ B
    return coeficientes[:, 0]

# Ajuste de la función a los datos
coeficientes_estimados = ajuste_min_cuad(t, I, f)
```

```
    return coeficientes[:, 0]

# Ajuste de la función a los datos
coeficientes_estimados = ajuste_min_cuad(t, I, f)
T_estimado = -1/coeficientes_estimados[3] # tiempo característico es el inverso del coeficiente del término cúbico

# Impresión del resultado
print("Los coeficientes estimados del polinomio de grado 5 son:", coeficientes_estimados)
print("El valor estimado de la constante de tiempo T es:", T_estimado)

# Gráfica de los datos y la función ajustada
plt.plot(t, I, 'ro', label='Datos')
t_graf = np.linspace(t[0], t[-1], 100)
plt.plot(t_graf, f(t_graf, *coeficientes_estimados), label='Ajuste')
plt.xlabel('t (seg)')
plt.ylabel('I')
plt.legend()
plt.show()
```

Un polinomio de grado 6 ajusta exactamente a los datos dados.

$y = -204.17x^6 + 507.08x^5 - 501.04x^4 + 251.9x^3 - 68.669x^2 + 10.51x - 0.498$
$R^2 = 1.$

Solución con el Software Maple
Usando el método de mínimos cuadrados en Maple, el procedimiento y resultados se presentan a continuación. El modelo es

```
> C = 1-exp(-t/tau)
```
$$C = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$
```
> C := I
```
$$C := I$$
```
> C = 1 - e^(-t/tau)
```
$$I = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$
Usamos el paquete de estadística de Maple[1]
```
> with(Statistics):
```
Define Vectors T and C, containing values of an independent variable *t* and a dependent variable *c*.
```
> T:= Vector([0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7]):
> C := Vector([0.073, 0.220, 0.301, 0.370, 0.418, 0.467, 0.517]) :
```
Find the values of a and b that minimize the least-squares error when the model function $I = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ is used.
```
> Fit(1-exp(-t/tau), T,C,t);
```
$$1 - e^{-1.09019827906109\,t}$$
Por tanto,
```
> τ = 1/1.09019827906109
```
$$\tau = 0.9172643355$$
```
> solve(1 - exp(-t/tau) = 1 - e^(-1.09019827906109 t), τ)
```
$$0.9172643355$$
```
> τ = 0.9172643355 ◁  Respuesta
```

Problema 18
Dureza en Función del Contenido del Cobre y Temperatura de Templado. Veinte tipos de hojas de acero templado en frío tienen diferentes composiciones de cobre y temperaturas de templado. Al medir su dureza resultante, se obtuvieron los valores de la Tabla 3.19.

[1] Comandos de regresión. El paquete Estadísticas proporciona varios comandos para ajustar modelos lineales y no lineales a puntos de datos y realizar análisis de regresión. Los algoritmos de ajuste se basan en métodos de mínimos cuadrados, que minimizan la suma de los residuos al cuadrado.

Tabla 3.19 Base de datos del Problema 18.

y Dureza Rockwell 30-T	u Contenido de cobre %	v Temperatura de templado °F
78.9	0.02	1000
65.1	0.02	1100
55.2	0.02	1200
56.4	0.02	1300
80.9	0.10	1000
69.7	0.10	1100
57.4	0.10	1200
55.4	0.10	1300
85.3	0.18	1000
71.8	0.18	1100
60.7	0.18	1200
58.9	0.18	1300

Se sabe que la dureza depende en forma lineal del contenido u de cobre en % y de la temperatura de templado v

$y = a_0 + a_1 u + a_2 v$

Determine los parámetros a_0, a_1 y a_2, siguiendo el criterio de los mínimos cuadrados

Solución

Para resolver este problema se utilizará una versión modificada del sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de una ecuación cuadrática del método de los mínimos cuadrados, en este caso para una ecuación del tipo $y = a_0 + a_1 u + a_2 v$, a saber

$$\begin{aligned} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum u + a_2 \cdot \sum v &= \sum y \\ a \cdot \sum u + a_1 \cdot \sum u^2 + a_2 \sum u \cdot v &= \sum u \cdot y \\ a_0 \cdot \sum v + a_1 \cdot \sum u \cdot v + a_2 \cdot \sum v^2 &= \sum v \cdot y \end{aligned} \tag{3.16}$$

La Tabla 3.20 contiene todos los datos y cálculos de sumatorias requeridos por este sistema de ecuaciones, para luego sustituirlos en dicho sistema y con ello, obtener los coeficientes a_0, a_1 y a_2,

Tabla 3.20 Cálculo de términos para resolver por el método de mínimos cuadrados.

i	u	v	y	u^2	$u \cdot v$	v^2	$u \cdot y$	$v \cdot y$
1	0.02	1000	78.9	0.0004	20	1000000	1.578	78900
2	0.02	1100	65.1	0.0004	22	1210000	1.302	71610
3	0.02	1200	55.2	0.0004	24	1440000	1.104	66240
4	0.02	1300	56.4	0.0004	26	1690000	1.128	73320
5	0.1	1000	80.9	0.01	100	1000000	8.09	80900
6	0.1	1100	69.7	0.01	110	1210000	6.97	76670
7	0.1	1200	57.4	0.01	120	1440000	5.74	68880
8	0.1	1300	55.4	0.01	130	1690000	5.54	72020
9	0.18	1000	85.3	0.0324	180	1000000	15.354	85300
10	0.18	1100	71.8	0.0324	198	1210000	12.924	78980
11	0.18	1200	60.7	0.0324	216	1440000	10.926	72840
12	0.18	1300	58.9	0.0324	234	1690000	10.602	76570
Σ	1.2	13800	795.7	0.1712	1380	16020000	81.258	902230

Una vez sustituidos los valores de las sumatorias en el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$12 \cdot a_0 + a_1 \cdot 1.2 + a_2 \cdot 13800 = 795.7$$
$$a_0 \cdot 1.2 + a_1 \cdot 0.1712 + a_2 1380 = 81.258$$
$$a_0 \cdot 13800 + a_1 \cdot 1380 + a_2 \cdot 16020000 = 902230$$

La solución del sistema nos arroja los resultados de los coeficientes que, al incluirlos en la ecuación dada, obtenemos la ecuación con los parámetros según el método de mínimos cuadrados utilizado.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_0 & 0 & 0 & 161.3364583 \\ 0 & a_1 & 0 & 32.96875 \\ 0 & 0 & a_2 & -0.0855 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} a_0 = 161.3364583 \\ \mid \quad a_1 = 32.96875 \\ \quad a_2 = -0.0855 \end{array}$$

Resultado

$y = a_0 + a_1 u + a_2 v \rightarrow y = 161.3364583 + 32.96875u - 0.0855v \quad \triangleleft$ *Respuesta*

Problema 19

Muertes de manatíes por cusas naturales. La siguiente tabla lista el número de muertes de manatíes en Florida por causas naturales (según datos de Florida Fish and Wildlife Conservation). ¿El mejor modelo parece ser un modelo razonablemente bueno?

Años	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Muertes	6	24	19	1	10	15	18	21	22

Años	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Muertes	20	22	33	35	101	42	12	37	37

Años	2001	2002	2003	2004
Muertes	34	59	102	25

Solución

Este problema se resolvió mediante el software Maple. Los datos experimentales se escriben como vectores y se usa la librería de Estadística para graficar, obteniendo polinomios del grado que se desee, en este caso del grado 2 al grado 8.

Resolvemos mediante el **método de mínimos cuadrados** en combinación con el **método de Gauss-Jordan**. Las sumatorias para formar la matriz se realizan mediante los cálculos de Maple como sigue.

```
> x[1] := 1 : x[2] := 2 : x[3] := 3 : x[4] := 4 : x[5] := 5 : x[6] := 6 : x[7] := 7 : x[8] := 8 :
    x[9] := 9 : x[10] := 10 : x[11] := 11 : x[12] := 12 : x[13] := 13 : x[14] := 14 : x[15]
    := 15 : x[16] := 16 : x[17] := 17 : x[18] := 18 : x[19] := 19 : x[20] := 20 : x[21]
    := 21 : x[22] := 22 :

> y[1] := 6 : y[2] := 24 : y[3] := 19 : y[4] := 1 : y[5] := 10 : y[6] := 15 : y[7] := 18 : y[8]
    := 21 : y[9] := 13 : y[10] := 20 : y[11] := 22 : y[12] := 33 : y[13] := 35 : y[14]
    := 101 : y[15] := 42 : y[16] := 12 : y[17] := 37 : y[18] := 37 : y[19] := 34 : y[20]
    := 59 : y[21] := 102 : y[22] := 25 :
```

> $Sum(x[i], i = 1..22) = sum(x[i], i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i = 253$$

> $Sum(x[i]^2, i = 1..22) = sum(x[i]^2, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^2 = 3795$$

> $Sum(x[i]^3, i = 1..22) = sum(x[i]^3, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^3 = 64009$$

> $Sum(x[i]^4, i = 1..22) = sum(x[i]^4, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^4 = 1151403$$

> $Sum(x[i]^5, i = 1..22) = sum(x[i]^5, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^5 = 21571033$$

> $Sum(x[i]^6, i = 1..22) = sum(x[i]^6, i = 1..22)$

> $Sum(x[i]^14, i = 1..22) = sum(x[i]^14, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{14} = 12564430695249356715$$

> $Sum(x[i]^15, i = 1..22) = sum(x[i]^15, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{15} = 264378977274385797769$$

> $Sum(x[i]^16, i = 1..22) = sum(x[i]^16, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{16} = 5583933850192238371083$$

> $Sum(y[i], i = 1..22) = sum(y[i], i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i = 686$$

> $Sum(y[i] \cdot x[i], i = 1..22) = sum(y[i] \cdot x[i], i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i = 10008$$

>

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^6 = 415601835$$

> $Sum(x[i]\text{^}7, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}7, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^7 = 8172733129$$

> $Sum(x[i]\text{^}8, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}8, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^8 = 163239463563$$

> $Sum(x[i]\text{^}9, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}9, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^9 = 3300704544313$$

> $Sum(x[i]\text{^}10, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}10, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{10} = 67403375450475$$

> $Sum(x[i]\text{^}11, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}11, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{11} = 1387680719067049$$

> $Sum(x[i]\text{^}12, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}12, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{12} = 28764233949618123$$

> $Sum(x[i]\text{^}13, i = 1..22) = sum(x[i]\text{^}13, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^{13} = 599684065336896793$$

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}2, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}2, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^2 = 167642$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}3, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}3, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^3 = 2996508$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}4, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}4, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^4 = 55779890$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}5, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}5, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^5 = 1068314508$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}6, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}6, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^6 = 20891817362$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}7, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}7, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^7 = 414993822108$$

>

$Sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}8, i = 1..22) = sum(y[i]\cdot x[i]\text{^}8, i = 1..22)$

$$\sum_{i=1}^{22} y_i x_i^8 = 8342247770450$$

> $$A := \begin{bmatrix} 22 & \sum_{i=1}^{22} x_i & \sum_{i=1}^{22} x_i^2 & \sum_{i=1}^{22} x_i^3 & \sum_{i=1}^{22} x_i^4 & \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} y_i \\ \sum_{i=1}^{22} x_i & \sum_{i=1}^{22} x_i^2 & \sum_{i=1}^{22} x_i^3 & \sum_{i=1}^{22} x_i^4 & \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^2 & \sum_{i=1}^{22} x_i^3 & \sum_{i=1}^{22} x_i^4 & \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^3 & \sum_{i=1}^{22} x_i^4 & \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^4 & \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{12} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^5 & \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{12} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{13} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^6 & \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{12} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{13} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{14} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^6 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^7 & \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{12} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{13} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{14} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{15} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^7 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^8 & \sum_{i=1}^{22} x_i^9 & \sum_{i=1}^{22} x_i^{10} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{11} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{12} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{13} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{14} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{15} & \sum_{i=1}^{22} x_i^{16} & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^8 \end{bmatrix}$$

La matriz resuelta está dada por la expresión

$$A := [[22, 253, 3795, 64009, 1151403, 21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 686], [253, 3795, 64009, 1151403, 21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 10008], [3795, 64009, 1151403, 21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 167642], [64009, 1151403, 21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 2996508], [1151403, 21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 28764233949618123, 55779890], [21571033, 415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 28764233949618123, 599684065336896793, 1068314508], [415601835, 8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 28764233949618123, 599684065336896793, 12564430695249356715, 20891817362], [8172733129, 163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 28764233949618123, 599684065336896793, 12564430695249356715, 264378977274385797769, 414993822108], [163239463563, 3300704544313, 67403375450475, 1387680719067049, 28764233949618123, 599684065336896793, 12564430695249356715, 264378977274385797769, 5583933850192238371083, 8342247770450]]$$

La cual se resuelve por el **método de Gauss-Jordan** para obtener el polinomio de grado 8.

> $R := gaussjord(A);$

$$R := \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 & -\frac{1781291}{14212} \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 & \frac{3583123194923}{14930061300} \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 & -\frac{9380506471019}{65149358400} \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 & \frac{194674513861}{4653525600} \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 & -\frac{249371686627}{37228204800} \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 & \frac{5771068103}{9307051200} \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 & -\frac{612591161}{18614102400} \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 & \frac{2624887}{2832580800} \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 & -\frac{164113}{15329260800} \end{bmatrix}$$

```
> EC := R[1,10] + R[2,10]·x + R[3,10]·x^2 + R[4,10]·x^3 + R[5,10]·x^4 + R[6,10]·x^5
       + R[7,10]·x^6 + R[8,10]·x^7 + R[9,10]·x^8
```

$$EC := -\frac{164113}{15329260800}x^8 + \frac{2624887}{2832580800}x^7 - \frac{612591161}{18614102400}x^6 + \frac{5771068103}{9307051200}x^5 - \frac{249371686627}{37228204800}x^4 + \frac{194674513861}{4653525600}x^3 - \frac{9380506471019}{65149358400}x^2 + \frac{3583123194923}{14930061300}x - \frac{1781291}{14212}$$

Las instrucciones de Maple para obtener los modelos matemáticos de la Fig (3.82), son los que se describen enseguida.

```
> with(Statistics) :
> X := Vector([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]) :
> Y := Vector([6, 24, 19, 1, 10, 15, 18, 21, 13, 20, 22, 33, 35, 101, 42, 12, 37, 37, 34, 59, 102,
       25]) :
> PolynomialFit(2, X, Y, x);
```

$$5.51298701298699 + 1.93033596837945\,x + 0.0201157538114058\,x^2$$

```
> PolynomialFit(3, X, Y, x);
```

$$15.7881066302118 - 2.90194854725744\,x + 0.533871734672648\,x^2 - 0.0148914777061230\,x^3$$

```
> PolynomialFit(4, X, Y, x);
```

$$20.8609022556385 - 6.58297716775942\,x + 1.21745498018375\,x^2 - 0.0604165666522607\,x^3 + 0.000989675846655169\,x^4$$

```
> PolynomialFit(5, X, Y, x);
```

$$19.4984520123825 - 5.22711893571368\,x + 0.840452188513508\,x^2 - 0.0182418712738733\,x^3 - 0.00104817708129213\,x^4 + 0.0000354409204860402\,x^5$$

```
> PolynomialFit(6, X, Y, x);
```

$$-62.5711370672332 + 98.3839836536218\,x - 38.4586106977112\,x^2 + 6.40878898293283\,x^3 - 0.510488568850577\,x^4 + 0.0193253016015980\,x^5 - 0.000279563198276986\,x^6$$

```
> PolynomialFit(7, X, Y, x);
```

$$70.9703067831544 - 104.194829542062\,x + 59.8467313035685\,x^2 - 15.2299949632644\,x^3 + 1.95544950362536\,x^4 - 0.131434094184575\,x^5 + 0.00441058968280342\,x^6 - 0.0000582627687090713\,x^7$$

```
> PolynomialFit(8, X, Y, x);
```

$$-125.337109485972 + 239.993870282346\,x - 143.984633178723\,x^2 + 41.8337687583690\,x^3 - 6.69846123301528\,x^4 + 0.620074820584458\,x^5 - 0.0329100564634761\,x^6 + 0.000926676831249958\,x^7 - 0.0000107058652169449\,x^8$$

```
> PG2 := 5.51298701298699 + 1.93033596837945 x + 0.0201157538114058 x^2 :
> PG3 := 15.7881066302118 - 2.90194854725744 x + 0.533871734672648 x^2
    - 0.0148914777061230 x^3 :

> PG4 := 20.8609022556385 - 6.58297716775942 x + 1.21745498018375 x^2
    - 0.0604165666522607 x^3 + 0.000989675846655169 x^4 :

> PG5 := 19.4984520123825 - 5.22711893571368 x + 0.840452188513508 x^2
    - 0.0182418712738733 x^3 - 0.00104817708129213 x^4 + 0.0000354409204860402 x^5 :

> PG6 := -62.5711370672332 + 98.3839836536218 x - 38.4586106977112 x^2
    + 6.40878898293283 x^3 - 0.510488568850577 x^4 + 0.0193253016015980 x^5
    - 0.000279563198276986 x^6 :

> PG7 := 70.9703067831544 - 104.194829542062 x + 59.8467313035685 x^2
    - 15.2299949632644 x^3 + 1.95544950362536 x^4 - 0.131434094184575 x^5
    + 0.00441058968280342 x^6 - 0.0000582627687090713 x^7 :

> PG8 := -125.337109485972 + 239.993870282346 x - 143.984633178723 x^2
    + 41.8337687583690 x^3 - 6.69846123301528 x^4 + 0.620074820584458 x^5
    - 0.0329100564634761 x^6 + 0.000926676831249958 x^7 - 0.0000107058652169449 x^8 :
```

La gráfica de datos experimentales y polinomios de grado 2 a grado 8 se muestran en la Fig. 3.82. Las instrucciones Maple son

```
> with(plots) :
```

G2:=pointplot(Matrix([[1,6],[2,24],[3,19],[4,1],[5,10],[6,15],[7,18],[8,21],[9,13],[10,20],[11,22],[12,33],[13,35],[14,101],[15,42],[16,12],[17,37],[18,37],[19,34],[20,59],[21,102],[22,25]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black");

```
> PG8 := plot(PG8, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Fuchsia");

> PG7 := plot(PG7, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Gold");
```

```
> PG6 := plot(PG6, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Tomato");

> PG5 := plot(PG5, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Lime");

> PG4 := plot(PG4, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Cyan");

> PG3 := plot(PG3, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Red");

> PG2 := plot(PG2, x = 1 ..22, y = 1 ..102, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Olive");

> display({G2, PG8, PG7, PG6, PG5, PG4, PG3, PG2}, axes = boxed, title
       = Muertes de manaties por causas naturales, labeldirections = ["horizontal", "vertical"],
      titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["Años", "Muertes"], size = [1300,
      800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);
```

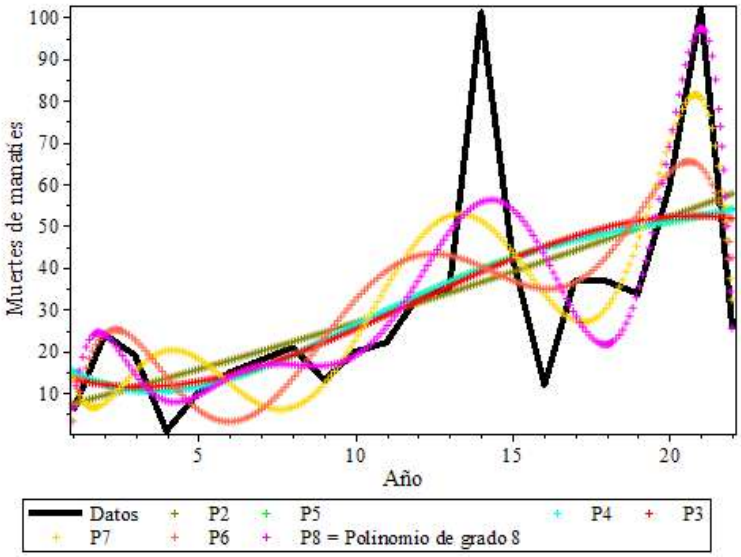


Fig. 3.82 Polinomios de grados 2-8 para ajuste de datos experimentales. El polinomio de grado 8 es el que mayormente ajusta.

Como se puede ver en la Fig. 3.82, el polinomio de grado 8 es el que mejor ajusta a la curva de los datos, por esto es que la matriz para este polinomio es de 9 renglones por 10 columnas. La gráfica de los datos experimentales y el polinomio de grado 8 se presenta en la Fig. 3.83.

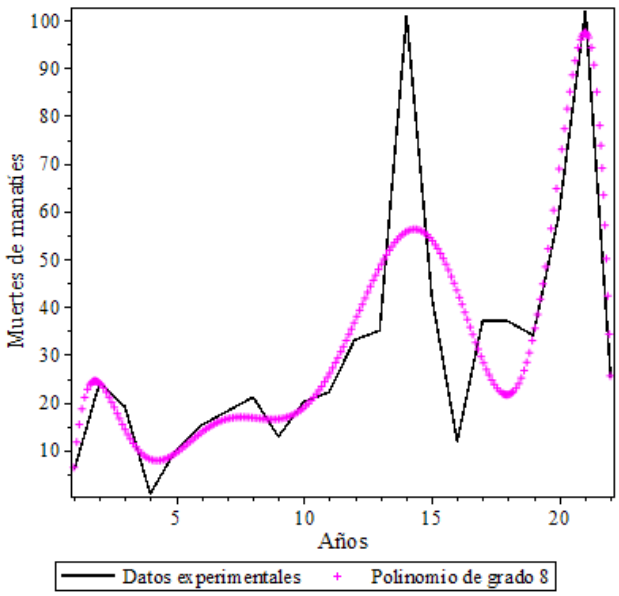


Fig. 3.83 Polinomio de grado 8 de mayor ajuste a los datos experimentales.

Problema 20

1)

Experimento de Física (base de datos de Triola, 2009, p. 580). Un experimento para una clase de física implica dejar caer una pelota de golf y registrar la distancia (en metros) que cae en diferentes tiempos (en segundos) después de ser soltada. Los datos se incluyen en la siguiente tabla. Proyecte la distancia para un tiempo de 12 segundos, dado que la pelota se dejó caer de un edificio con una altura de 50 m.

Tiempo	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Distancia	0	1.2	4.9	11	19.5	30.5	44

Problema 20

2)

Enseguida se presentan las presiones de vapor del cloruro de magnesio, se desea calcular la presión de vapor cuando el cloruro de magnesio se encuentre a una temperatura de 1000°C. Ajustar los datos al polinomio que mayormente aproximen mediante el método de mínimos cuadrados y mostrar la gráfica correspondiente a evaluar el polinomio en cualquier punto dado.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7
P (mmHg)	10	20	40	60	100	200	400	760
T (°C)	930	988	1050	1088	1142	1316	1223	1418

Para resolver estos problemas, se eligió el método de **mínimos cuadrados**, luego se creó un algoritmo en el **lenguaje Python**, en el cual el usuario puede usar dos bases de datos para resolver, siendo una de ellas el de cualquiera de los problemas 1) o 2), según el que se elija resolver, o también puede ingresar una nueva. La primera pantalla que aparece se muestra en la Fig. 3.84.

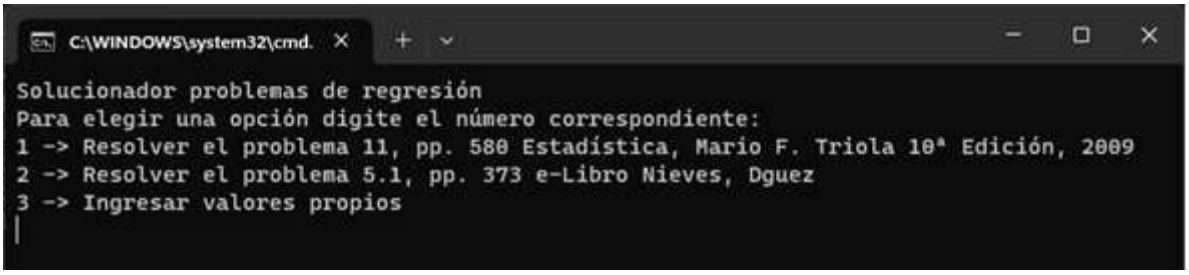


Fig. 3.84 Pantalla de inicio del programa de cómputo.

En un inicio veremos cómo se nos da a elegir, escogeremos la base de datos correspondiente a este problema, que vendría siendo la opción 1 (ver Fig. 3.85). Luego se nos pregunta qué grado buscamos que sea la ecuación resultante, primero la evaluaremos con grado 1 (ver Fig. 3.85).

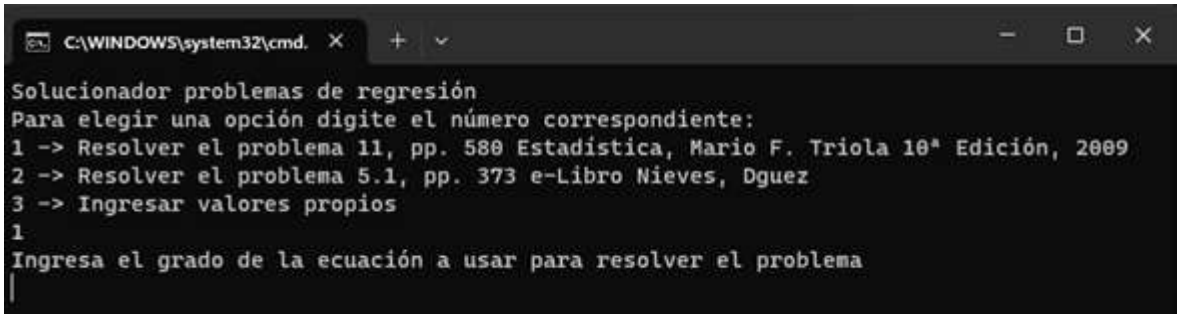


Fig. 3.85 Ingresar opciones 1 o 2, según el problema que se desee resolver, y grado del polinomio.

Ahora el algoritmo nos habrá hecho los cálculos, lo primero que veremos son los valores de X_i sus valores elevados a la n potencia y la sumatoria de ambas listas de valores (ver Fig. 3.86).

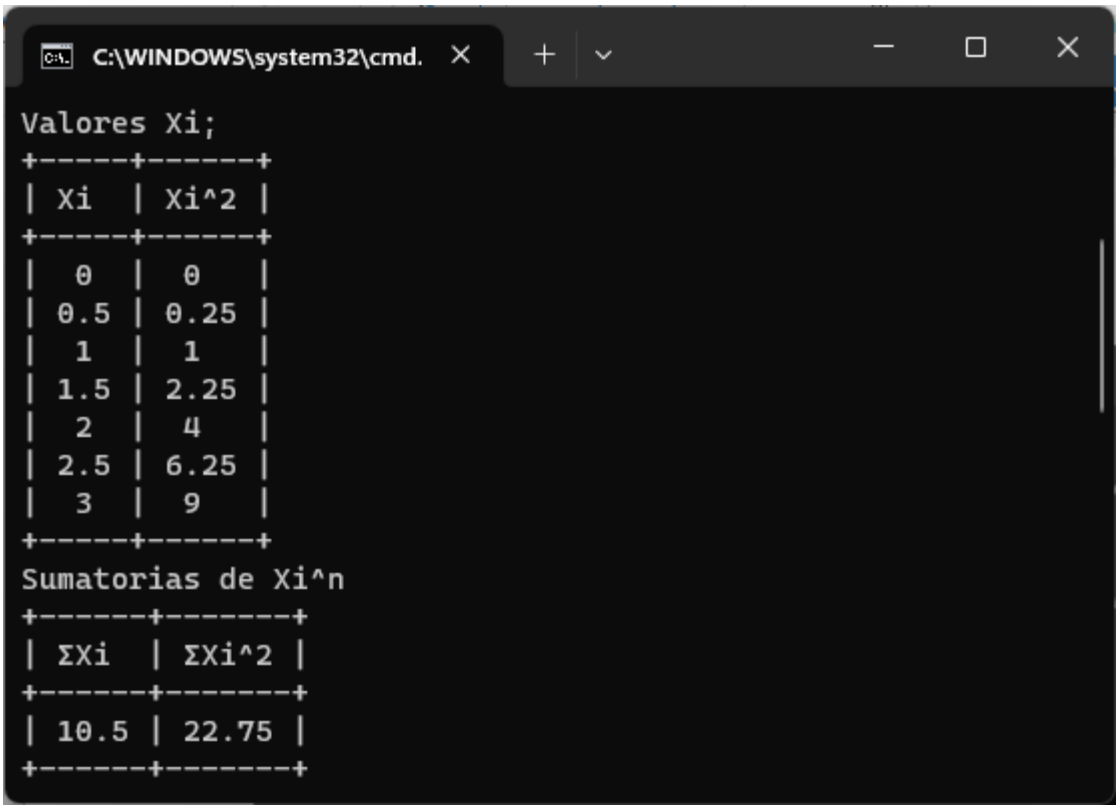


Fig. 3.86 Cálculos con el método de mínimos cuadrados en lenguaje Python.

Luego veremos las tablas para los valores *Yi* incluyendo sus sumatorias (ver Fig. 3.87).

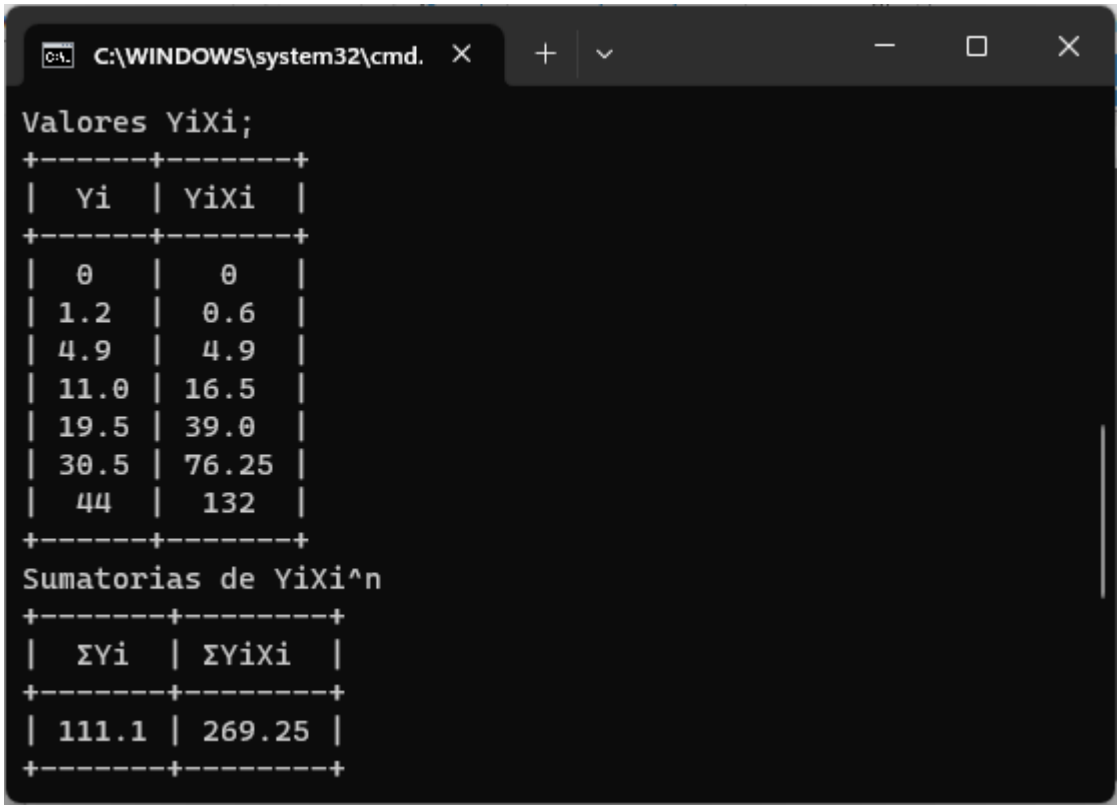


Fig. 3.87 Cálculos usando mínimos cuadrados en Python.Fig. 3.53 Polinomio en la entrada

Enseguida observamos el sistema de ecuaciones que se obtiene con todos los valores que obtuvimos de las tablas anteriores (ver Fig. 3.88).

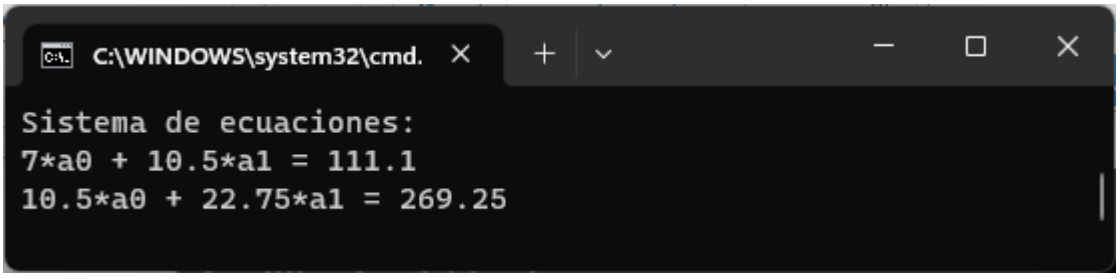


Fig. 3.88 Sistema de ecuaciones obtenido de Python.

Luego se resuelve dicho sistema de ecuaciones, que en esta ocasión cuenta con únicamente 2 incógnitas, luego se sustituyen los valores para obtener la función final, así que finalmente se nos dará la opción de observar la gráfica o evaluar un punto y graficar dicho punto, ahora únicamente graficaremos el polinomio de grado 1 obtenido para compararlo con los datos experimentales (ver Fig. 3.89).

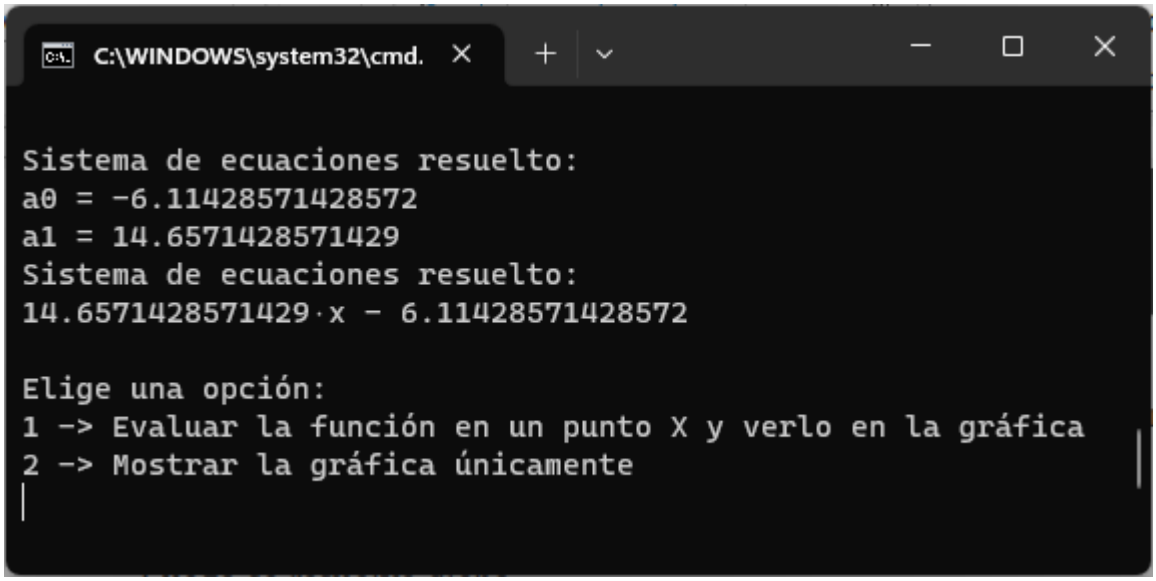


Fig. 3.89 Solución del sistema de ecuaciones. Esta pantalla muestra dos opciones a seguir, según se desee obtener la función evaluada en un punto y visualizarlo gráficamente, o solo mostrar la gráfica.

La gráfica que arroja el programa, se muestra en la Fig. 3.90.

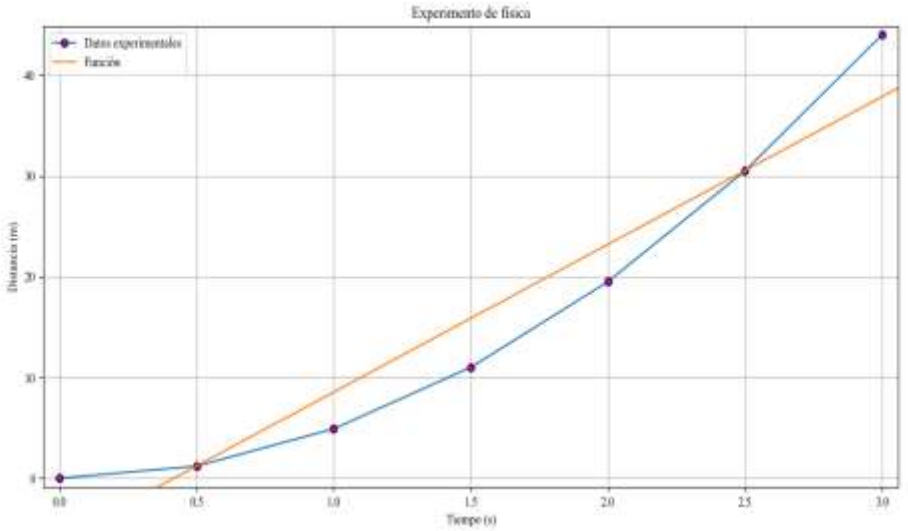


Figura 3.90. Gráfica de comparación datos experimentales y la función
$f(x) = 14.6571428571429\mathbf{x} - 6.11428571428572$

Enseguida realizamos los cálculos para obtener una gráfica de segundo grado, que muy seguramente es la que ajusta mejor, debido a que la gravedad es una aceleración y está en forma cuadrática (ver Fig. 3.91).

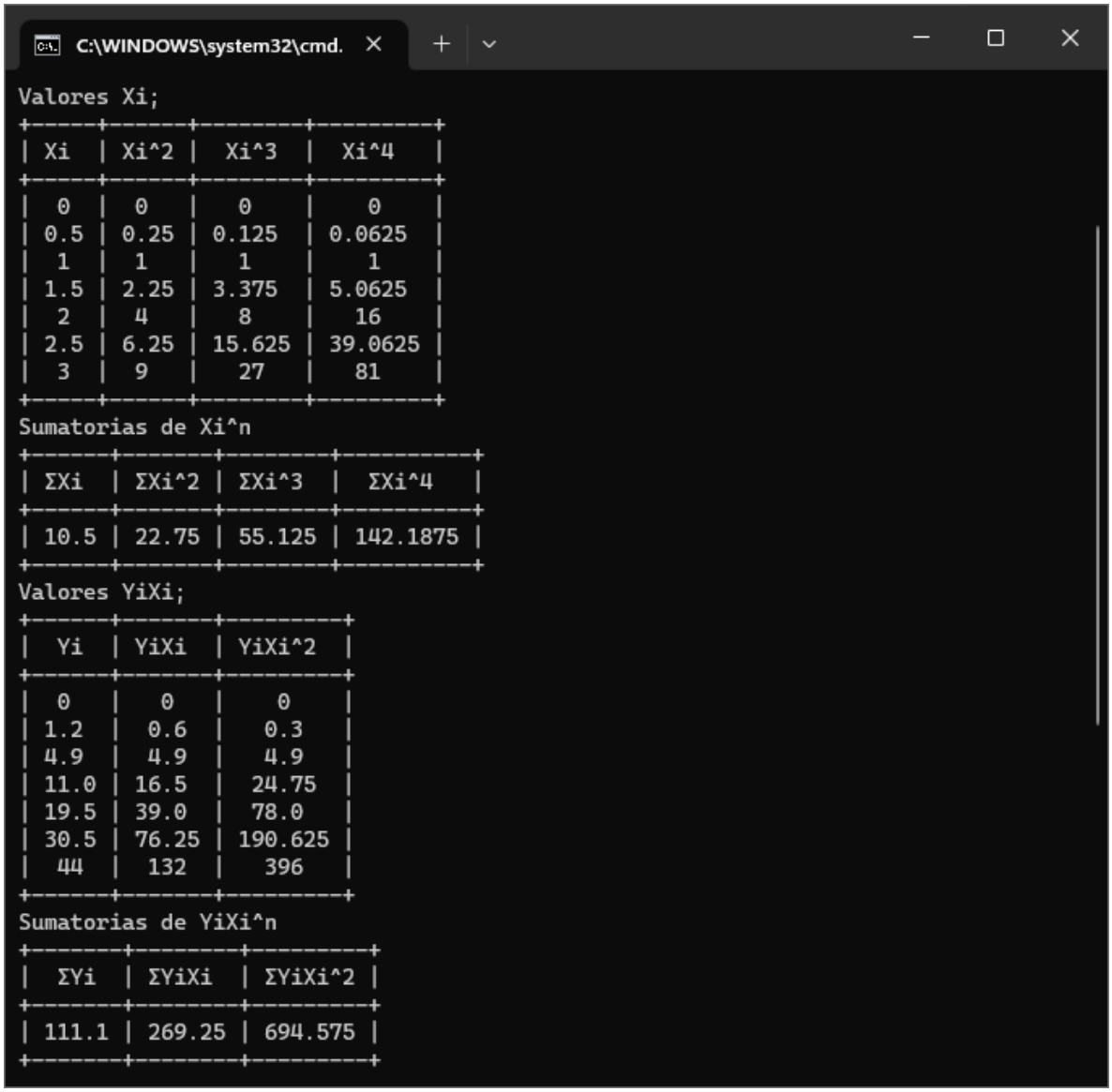


Fig. 3.91 Cálculos de sumatorias de mínimos cuadrados para un polinomio de grado 2.

Con esto, obtenemos la ecuación final (ver Fig. 3.92).

$f(x) = 4.89523809523807x^2 - 0.0285714285713397\mathrm{x} + 0.00476190476186034$

Y su gráfica es la de la Fig. 3.93.

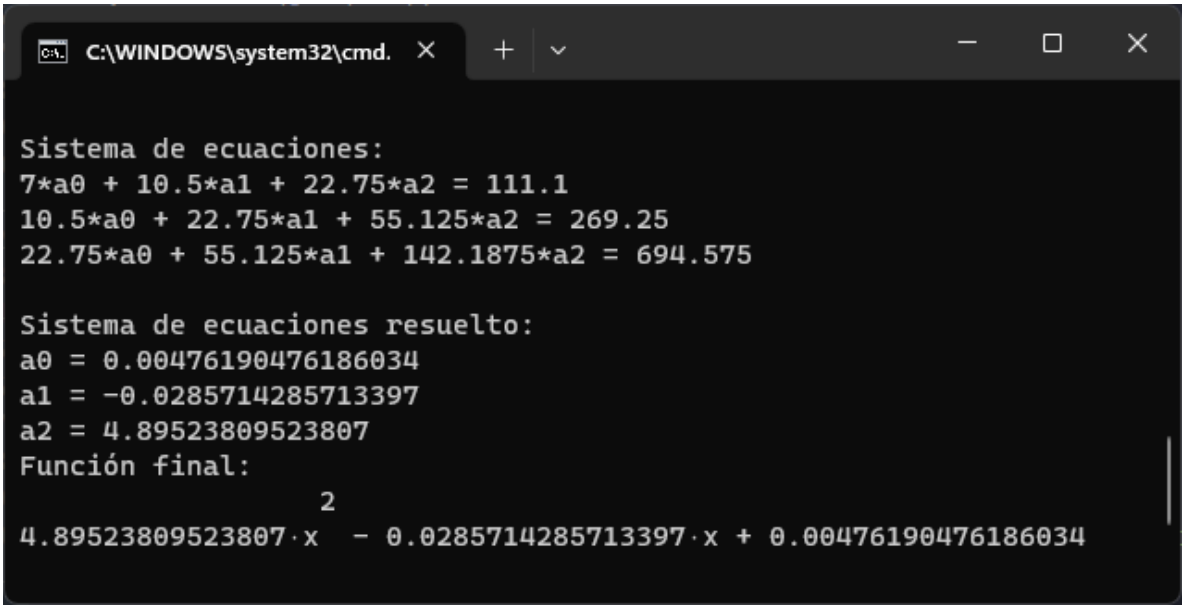


Fig. 3.92 Solución al sistema de ecuaciones y polinomio de grado 2 obtenido.

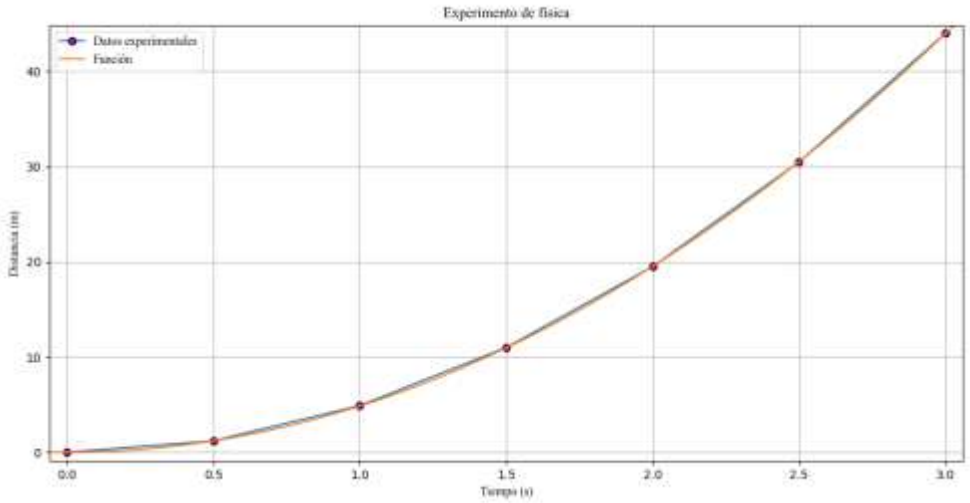


Fig. 3.93 Gráfica de comparación datos experimentales y el polinomio de grado 2 dado por: $f(x) = 4.89523809523807x^2 - 0.0285714285713397\mathrm{x} + 0.00476190476186034$

En esta ocasión se observa como la gráfica logra conectar casi perfectamente con todos los puntos experimentales, por lo tanto, se concluye que esa es la ecuación correcta.
Ahora por último se usará la función de graficar un punto del programa para calcular la distancia con 12 segundos (ver Fig. 3.94).

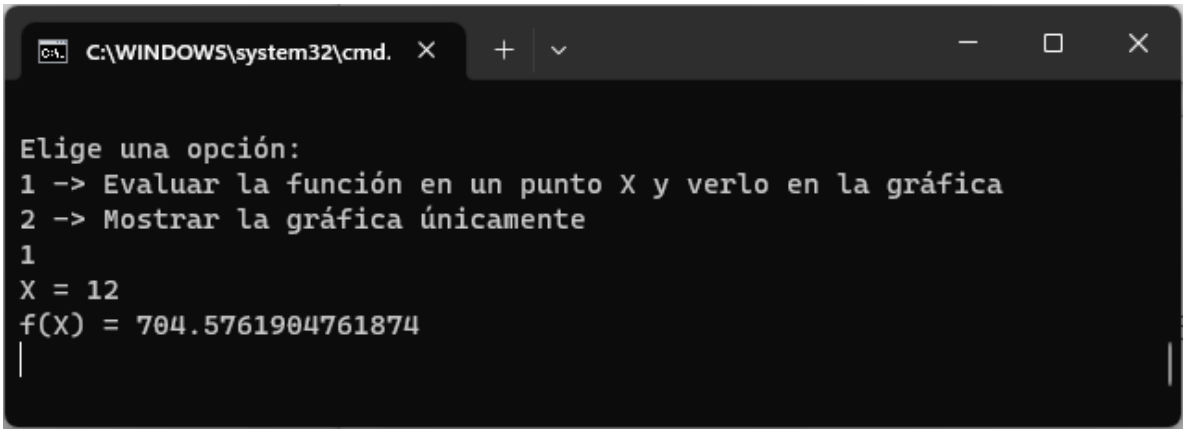


Fig. 3.94 Opciones de presentación de la gráfica con los resultados obtenidos de evaluar la funcion en un punto dado

Como podemos observar, el programa arroja como solución una distancia de 704.57 metros (ver Fig. 3.95).

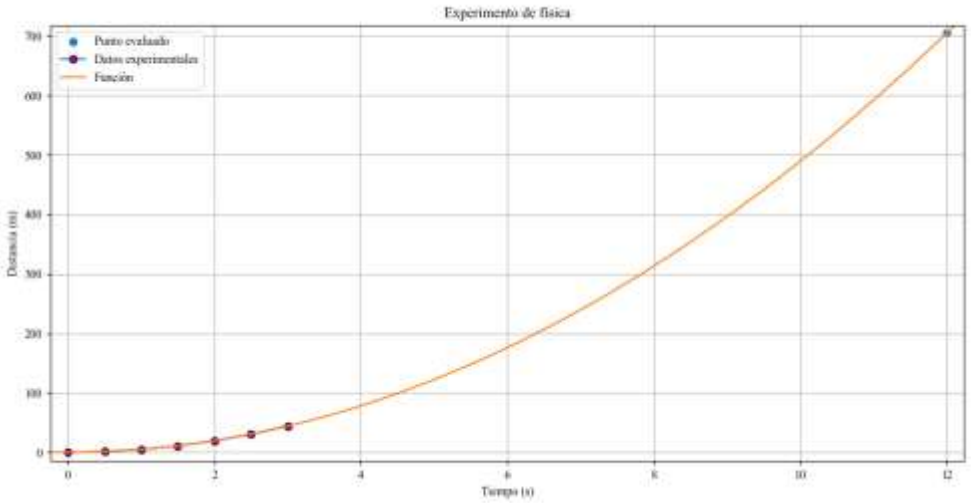


Figura 3.95 Gráfica de comparación datos experimentales, la función y el punto

$$f(x) = 4.89523809523807x^2 - 0.0285714285713397x + 0.00476190476186034$$

$$f(12) = 704.57$$

Conclusión

En conclusión, el resultado es un valor irreal para el problema que se nos plantea, ya que el edificio que se nos plantea tiene una altura de únicamente 50 metros, una altura mucho menor a los 704.57 metros del resultado. Adicionalmente, podemos usar la fórmula de la caída libre de un cuerpo para comprobar el resultado, siendo dicha fórmula

$$h = \frac{g}{2}t^2$$

Donde:
$h = \text{Altura}(m)$
$g = \text{Graverdad}\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)$
$t = \text{Tiempo}(s)$
Ahora, si calculamos el valor de la gravedad dividido entre 2 obtendremos la siguiente ecuación:
$h = 4.905\ t^2$
Si lo comparamos con la función que obtuvimos del programa, que es la siguiente
$f(x) = 4.89523809523807x^2 - 0.0285714285713397\mathrm{x} + 0.00476190476186034$
Podremos notar que está muy aproximada a la ecuación real de la caída libre de un objeto, con el término cuadrático siendo muy parecido y los otros 2 términos tendiendo a 0. Así que finalmente tomamos un tiempo de 12 segundos en la ecuación real:
$h = 4.905\ (12)^2 = 706.32$
Y así, obteniendo un resultado muy aproximado al programa hemos comprobado que el resultado es correcto.

Código Python para el cálculo de Mínimos Cuadrados y graficación de funciones

```
#Importación de librerias
from sympy import *
from sympy.solvers.solveset import linsolve
from tabulate import tabulate as tab
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Declaración de variables generales
grad = 0 #Grado de la ecuación
xis = list() #Guarda los valores de las Xi de todas las potencias
yixis = list() #Guarda los valores de las Yi de todas las potencias
xisums = list() #Guarda los valores de las sumatorias de las Xi^n
yixisums = list() #Guarda los valores de las sumatorias de las YiXi^n
matriz = Matrix() #Variable de la matriz resultante
x = symbols('x') #Variable de variable x para ecuaciones
labelX = "" #Etiqueta eje X
labelY = "" #Etiqueta eje Y
titleP = "" #Titulo gráfica

#Declaracion de base de datos (Triola, 2009, p. 580)
tiempos = [0 , 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]
distancias = [0, 1.2, 4.9, 11, 19.5, 30.5, 44]
#Declaración de la base de datos del problema (Nieves y Domínguez, 1996, p. 370)
Presiones = [10, 20, 40, 60, 100, 200, 400, 760]
Temperaturas = [930, 988, 1050, 1088, 1142, 1316, 1223, 1418]

#Inicio del programa
print("Solucionador problemas de regresión")
#Elección sobre usar los datos o ingresar unos nuevos
print("Para elegir una opción digite el número correspondiente: ")
print("1 -> Resolver el problema 11, pp. 580 Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009")
print("2 -> Resolver el problema 5.1, pp. 373 e-Libro Nieves, Dguez")
```

```
print("3 -> Ingresar valores propios")
sell1 = input()
#if else para elegir cualquiera de los 3
if sell1 == "1":
    ejeX = tiempos
    ejeY = distancias
    labelX = "Tiempo (s)"
    labelY = "Distancia (m)"
    titleP = "Experimento de física"
elif sell1 == "2":
    ejeX = Presiones
    ejeY = Temperaturas
    labelX = "Presión (mmHg)"
    labelY = "Temperatura (°C)"
    titleP = "Presiones de vapor del cloruro de magnesio"
elif sell1 == "3":
    print("Ingrese la cantidad de datos")
    pa = int(input())
    ejeX = list()
    ejeY = list()
    for i in range(pa):
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de X")
        ejeX.append(float(input()))
    for i in range(pa):
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de Y")
        ejeY.append(float(input()))
    labelX = "X"
    labelY = "Y"
    titleP = "Gráfica"
else:
    pass
n = len(ejeX) #Numero de datos

#Elije el grado de ecuación usado para resolver el probema
print("Ingresa el grado de la ecuación a usar para resolver el problema")
grad = int(input())

#Calcula los valores de las sumatorias
#Xi
for i in range((grad * 2)):
    #Variables temporales
    TempList = list()
    TemSum = 0
    #Ciclo donde hace la operacion para cada valor de la lista y lo agrega a las variables temporales
    for j in range(n):
        val = pow(ejeX[j], i + 1)
        TempList.append(val)
        TemSum += val
    #Añade las variables temporales a su lista respectiva
```

```
    xis.append(TempList)
    xisums.append(TemSum)
#YiXi
for i in range(grad + 1):
    #Variables temporales
    TempList = list()
    TemSum = 0
    #Ciclo donde hace la operacion para cada valor de la lista y lo agrega a las variables temporales
    for j in range(n):
        val = ejeY[j] * pow(ejeX[j], i)
        TempList.append(val)
        TemSum += val
    #Añade las variables temporales a su lista respectiva
    yixis.append(TempList)
    yixisums.append(TemSum)

#Prepara un array con los titlos para las tablas
TitulosXi = list()
TitulosSumatoriaXi = list()
TitulosYiXi = ["Yi"]
TitulosSumatoriaYiXi = ["ΣYi"]
for i in range(len(xis)):
    if i > 0:
        TitulosXi.append("Xi^" + str(i + 1))
        TitulosSumatoriaXi.append("ΣXi^" + str(i + 1))
    else:
        TitulosXi.append("Xi")
        TitulosSumatoriaXi.append("ΣXi")
for i in range(len(yixis)):
    if i > 0:
        TitulosYiXi.append("YiXi^" + str(i + 1))
        TitulosSumatoriaYiXi.append("ΣYiXi^" + str(i + 1))
    else:
        TitulosYiXi.append("YiXi")
        TitulosSumatoriaYiXi.append("ΣYiXi")

#Imprime las tablas
print("Valores Xi;")
print(tab(list(zip(*xis)), headers=TitulosXi, tablefmt="pretty"))
print("Sumatorias de Xi^n")
print(tab([TitulosSumatoriaXi, xisums], headers="firstrow", tablefmt="pretty"))
print("Valores YiXi;")
print(tab(list(zip(*yixis)), headers=TitulosYiXi, tablefmt="pretty"))
print("Sumatorias de YiXi^n")
print(tab([TitulosSumatoriaYiXi, yixisums], headers="firstrow", tablefmt="pretty"))

print()
#print("Presiona cualquier telca para continuar")
#input()
```

```
#Calcula las ecuaciones de los valores de a y almacenandolos en una matriz
TempMatriz = list() #Variable temporal para almacenar valores de la matriz
eqs = list() #Lista donde almacenar las ecuaciones para mostrarlas
for i in range(grad + 1): #For que se repite el grado de elegido más uno EJE Y de la matriz
    eqTemp = "" #Texto temporal
    for j in range(i, grad + i + 1): #For que se repite el grado elegido más 2 EJE X de la matriz
        if i == 0 and j == 0:
            TempMatriz.append(n) #CASO ESPECIAL Si está calculando la primera fila el factor de a0 es n
            eqTemp += str(n) + "*a0"
        else: #el resto de casos normales
            TempMatriz.append(xisums[j - 1])
            if j == i:
                eqTemp += str(xisums[j - 1]) + "*a0"
            else:
                eqTemp += " + " + str(xisums[j - 1]) + "*a" + str(j - i)
    TempMatriz.append(yixisums[i])
    eqTemp += " = " + str(yixisums[i])
    eqs.append(eqTemp)
matriz = Matrix(grad + 1, grad + 2, TempMatriz)
#Genera una lista de nombres de variables para el resultado
aVars = list()
for i in range(grad + 1):
    aVars.append("a" + str(i))
variables = symbols(' '.join(aVars))

#Resuleve el sistema de ecuaciones con la funcion linsolve
res = linsolve(matriz, variables).args[0]

#Imprime los resultados
print("Sistema de ecuaciones:")
for i in eqs:
    print(i)
print()
print("Sistema de ecuaciones resuelto:")
for i in range(len(res)):
    print("a" + str(i) + " = " + str(res[i]))
print("Función final:")
eqFin = S(0)
for i in range(len(res)):
    eqFin += res[i]*x**(i)
pprint(eqFin)
print()

RDA = 0.02 #Razon de aumento para margen de grafica
while True:
    plt.close("all")
    #Elección para gráficar o evaluar la función
    print("Elige una opción: ")
```

```
    print("1 -> Evaluar la función en un punto X y verlo en la gráfica")
    print("2 -> Mostrar la gráfica únicamente")
    sel = input()
    if sel == "1":
        print("X =", end =" "),
        evalX = float(input())
        print("f(X) =", end =" "),
        evalY = float(eqFin.evalf(subs={x:evalX}))
        print(str(evalY))
        #Gráfica el punto
        plt.scatter(evalX, evalY, label = "Punto evaluado")

        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes y añade el punto para tomarlo en cuenta
        ax = plt.gca()
        TempEjeX = ejeX.copy()
        TempEjeX.append(evalX)
        TempEjeY = ejeY.copy()
        TempEjeY.append(evalY)
        ax.set_xlim([min(TempEjeX) - (RDA * max(TempEjeX)), max(TempEjeX) + (RDA * max(TempEjeX))])
        ax.set_ylim([min(TempEjeY) - (RDA * max(TempEjeY)), max(TempEjeY) + (RDA * max(TempEjeY))])
        x_vals = np.linspace(min(TempEjeX) - max(TempEjeX), max(TempEjeX) * 2, 1000)

    elif sel == "2":
        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes
        ax = plt.gca()
        ax.set_xlim([min(ejeX) - (RDA * max(ejeX)), max(ejeX) + (RDA * max(ejeX))])
        ax.set_ylim([min(ejeY) - (RDA * max(ejeY)), max(ejeY) + (RDA * max(ejeY))])
        x_vals = np.linspace(min(ejeX) - max(ejeX), max(ejeX) * 2, 1000)

    # Crear una gráfica de puntos
    plt.plot(ejeX, ejeY, label="Datos experimentales", marker = 'o', mec = 'k', mfc = 'm')
    # Convertir la ecuación en una función numérica
    f = lambdify(x, eqFin)
    # Generar valores para trazar la ecuación
    y_vals = f(x_vals)
    # Trazar la ecuación
    plt.plot(x_vals, y_vals, label="Función")
    #Perzonalización de la gráfica
    plt.grid()
    ax.legend()
    ax.set_xlabel(labelX)
    ax.set_ylabel(labelY)
    ax.set_title(titleP)
    # Mostrar la gráfica
    plt.show()
    print()
```

Problema 21

Tamaño del pecho y peso de osos. Calcule el mejor peso predicho (en libras) de un oso cuyo pecho mide 50 pulgadas. La tabla de datos experimentales es

Tamaño del pecho	26	45	54	49	35	41	41	49	38	31
Peso	80	344	416	348	166	220	262	300	204	144

¿existe relación entre las variables?

Solución

Presentamos la solución mediante regresión lineal y polinomio de grado 5 así como con el método de mínimos cuadrados, usando Excel y Maple.

Excel

En la gráfica Excel se presentan los datos experimentales y la línea recta que ajusta con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9669$ muy significativo, lo cual es indicativo que las variables sí se relacionan (ver Fig. 3.96).

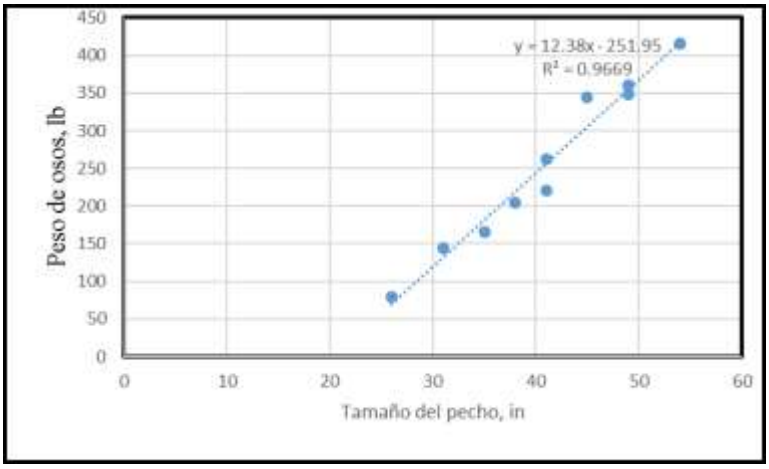


Fig. 3.96 Gráfica de datos experimentales y polinomio de grado 1 al que ajustan favorablemente.

Mientras que, el polinomio de grado 5 arroja un coeficiente de determinación que ajusta con el 98.33% a los datos, es decir

$y = 0.0005x^5 - 0.1078x^4 + 8.6027x^3 - 337.19x^2 + 6495x - 49110$

$R^2 = 0.9833$

Maple

Las instrucciones del software Maple para la obtención del modelo que mayor ajuste a los datos, están dadas por

> *with*(*Statistics*) : *with*(*plots*) : *with*(*linalg*) : *with*(*Student*[*LinearAlgebra*]) :

```
Ft := pointplot(Matrix([[26, 80], [31, 144], [35, 166], [38, 204], [41, 220], [41, 262], [45,
    344], [49, 348], [49, 360], [54, 416]]), datatype = float), axes = boxed, style = line, color
    = "Black") :

> display({Ft}, axes = boxed, title = Datos Experimentales, titlefont = ["TimeNewRoman", 18,
      bold], thickness = 12, size = [800, 400], labels = ["Peso", "Tamaño del pecho"],
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["TimeNewRoman", 12]);
```

A continuación, se calculan polinomios de varios grados a partir de la base de datos que, escrita en forma de vectores, es

```
> X := Vector([26, 31, 35, 38, 41, 41, 45, 49, 49, 54]) :
> Y := Vector([80, 144, 166, 204, 220, 262, 344, 348, 360, 416]) :
```

Cálculo de un modelo exponencial

```
> Fit(a*x + b*exp(x), X, Y, x);
```

$$= 1.48644468447340\,10^{-21}\,e^{x}$$

Cálculo de los polinomios de grado 1 al 5 y 7

```
> Gr1 := PolynomialFit(1, X, Y, x);
```

$$= -251.947869380583 + 12.3801435056377\,x$$

```
> Gr2 := PolynomialFit(2, X, Y, x);
```

$$= -152.578230356666 + 7.19828582027862\,x + 0.0646535755024241\,x^2$$

```
> Gr3 := PolynomialFit(3, X, Y, x);
```

$$= 504.583615851725 - 45.3964634105951\,x + 1.42095600550352\,x^2 - 0.0113125472038027\,x^3$$

```
> Gr4 := PolynomialFit(4, X, Y, x);
```

$$= -1965.55308941305 + 217.193046635881\,x - 8.79501469981122\,x^2 + 0.161403667722579\,x^3 - 0.00107259156385856\,x^4$$

```
> Gr5 := PolynomialFit(5, X, Y, x);
```

$$= -49109.9808511418 + 6494.98154669347\,x - 337.188158586797\,x^2 + 8.60270932204251\,x^3 - 0.107780151367200\,x^4 + 0.000531138686451653\,x^5$$

```
> Gr6 := PolynomialFit(6, X, Y, x);
> Gr7 := PolynomialFit(7, X, Y, x);
```

$$0.0000312895745368515 + 0.000499754074515450\,x + 0.00628795633134549\,x^2 + 0.0479630353804574\,x^3 - 0.00414330378786376\,x^4 + 0.000145495358289410\,x^5 - 0.0000022549659113123 8\,x^6 + 1.28305378589896\,10^{-8}\,x^7$$

Después de calcular los diferentes polinomios de grado 1 al 7, obtenemos la gráfica de datos experimentales y polinomios, con ello, determinamos cuál polinomio ajusta mejor (ver Fig. 3.97).

```
> ra1 := plots(Gr1) :
> Gr1 := plot(Gr1, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = diamond, color
      = navy) :
> ra2 := plots(Gr2) :
> Gr2 := plot(Gr2, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = box, color
      = coral) :
```

```
>ra3 := plots(Gr3) :
> Gr3 := plot(Gr3, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = green) :
>ra4 := plots(Gr4) :
> Gr4 := plot(Gr4, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = point, color
      = orange) :
>ra6 := plots(Gr6) :
> Gr6 := plot(Gr6, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = circle, color
      = blue) :
>ra7 := plots(Gr7) :
> Gr7 := plot(Gr7, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = asterisk, color
      = violet) :
>ra5 := plots(Gr5) :
> Gr5 := plot(Gr5, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = box, color
      = brown) :
> display({Ft, Gr1, Gr2, Gr3, Gr4, Gr5, Gr6, Gr7}, title = Grafica de distintos polinomios)
```

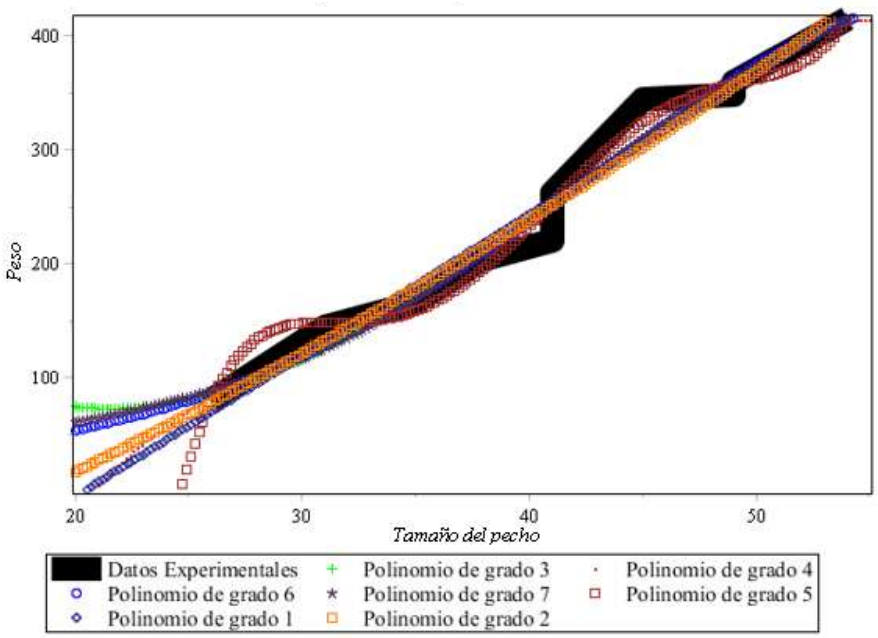


Fig. 3.97 Gráfica de datos experimentales de peso y tamaño de pechos de osos y polinomios de grado 1 al 7 para observar el polinomio que mejor ajuste a los datos.

Uno de los polinomios que mayormente ajusta a los datos experimentales es el polinomio de grado 5, a saber

$y = 0.0005x^5 - 0.1078x^4 + 8.6027x^3 - 337.19x^2 + 6495x - 49110$

$R^2 = 0.9833$

La gráfica de datos experimentales y el polinomio de grado 5 podemos observarlo en las curvas de la

Fig. 3.98, que se trazó con las instrucciones de Maple siguientes

```
> ra5 := plots(Gr5) :
Gr5 := plot(Gr5, x = 20 ..55, y = 1 ..400, axes = boxed, style = point, symbol = box, color
       = red) :

> display({Ft, Gr5}, title = Aproximacion de grad5)
```

Aunque, el polinomio de grado 6 ajusta aún más a los datos, con un $R^2 = 0.9889$.

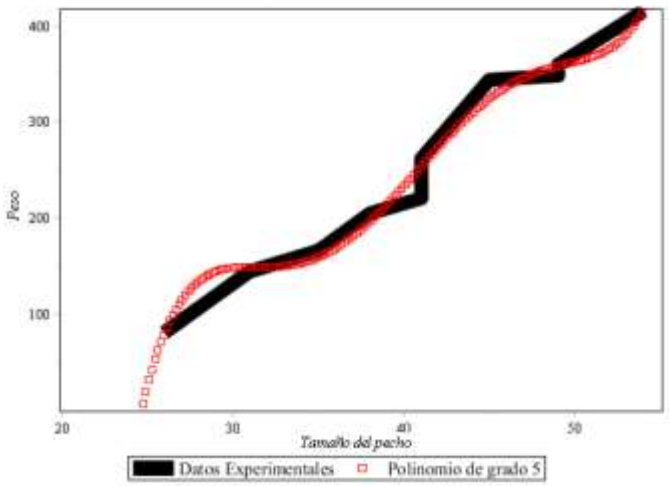


Fig. 3.98 Polinomio de grado 5 se ajusta a los datos experimentales con $R^2 = 0.9833$ de coeficiente de determinación.

Método de Mínimos Cuadrados. El cual se divide en 3 pasos a seguir.

Paso 1. Declaramos los vectores con su respectiva variable

```
> Pecho := Vector([26, 31, 35, 38, 41, 41, 45, 49, 49, 54], datatype = float) :
Peso := Vector([80, 144, 166, 204, 220, 262, 344, 348, 360, 416], datatype = float) :
> T := seq(Pecho[i], i = 1 ..10);
T := 26., 31., 35., 38., 41., 41., 45., 49., 49., 54.
> Cp := seq(Peso[i], i = 1 ..10);
Cp := 80., 144., 166., 204., 220., 262., 344., 348., 360., 416.
```

Paso 2. Una vez ya declarados los vectores y que el sistema los reconoce, procedemos a aplicar el método de Mínimos Cuadrados dado por

$$ma_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + \ldots + a_n\sum x^n = \sum y$$
$$a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 + \ldots + a_n\sum x^{n+1} = \sum xy$$
$$a_0\sum x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4 + \ldots + a_n\sum x^{n+2} = \sum x^2 y$$
$$a_0\sum x^n + a_1\sum x^{n+1} + a_2\sum x^{n+2} + \ldots + a_n\sum x^{n+n} = \sum x^n y$$

Las sumatorias con respecto a x son

$$> X_1 := \sum_{i=1}^{10} T[i];\ X_2 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^2;\ X_3 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^3;\ X_4 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^4;\ X_5 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^5;\ X_6 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^6;\ X_7 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^7;\ X_8 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^8;\ X_9 := \sum_{i=1}^{10} T[i]^9;\ X_{10} := \sum_{i=1}^{10} T[i]^{10};$$

$X_1 := 409.$

$X_2 := 17411.$

$X_3 := 7.66843\,10^5$

$X_4 := 3.4751063\,10^7$

$X_5 := 1.612623619\,10^9$

$X_6 := 7.6327081271\,10^{10}$

$X_7 := 3.672848660323\,10^{12}$

$X_8 := 1.79214183958343\,10^{14}$

$X_9 := 8.84847848527466\,10^{15}$

$X_{10} := 4.41310553980603\,10^{17}$

Paso 3. Realizamos las sumatorias con respecto a x y y

$$> Y1 := \sum_{i=1}^{10} (Cp[i]);\ Yx1 := \sum_{i=1}^{10} (Cp[i]\cdot T[i]);\ Yx2 := \sum_{i=1}^{10} \left(Cp[i]\cdot T[i]^2\right);\ Yx3 := \sum_{i=1}^{10} \left(Cp[i]\cdot T[i]^3\right);\ Yx4 := \sum_{i=1}^{10} \left(Cp[i]\cdot T[i]^4\right);\ Yx5 := \sum_{i=1}^{10} \left(Cp[i]\cdot T[i]^5\right);$$

$Y1 := 2544.$

$Yx1 := 1.12504\,10^5$

$Yx2 := 5.110196\,10^6$

$Yx3 := 2.37374560\,10^8$

$Yx4 := 1.1235398804\,10^{10}$

$Yx5 := 5.402812035\,04\,10^{11}$

Haremos uso del **método de Gauss-Jordan** para resolver la matriz

$$Mat := \begin{bmatrix} 10 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & Y1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & Yx1 \\ X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & Yx2 \\ X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & Yx3 \\ X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & Yx4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & Yx5 \end{bmatrix}$$

Introduciendo los valores numéricos, esta matriz queda como

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}10, 409., 17411., 7.66843\,10^{5}, 3.4751063\,10^{7}, 1.612623619\,10^{9}, 2544.\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}409., 17411., 7.66843\,10^{5}, 3.4751063\,10^{7}, 1.612623619\,10^{9}, 7.6327081271\,10^{10},\\ 1.12504\,10^{5}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}17411., 7.66843\,10^{5}, 3.4751063\,10^{7}, 1.612623619\,10^{9}, 7.6327081271\,10^{10},\\ 3.672848660323\,10^{12}, 5.110196\,10^{6}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}7.66843\,10^{5}, 3.4751063\,10^{7}, 1.612623619\,10^{9}, 7.6327081271\,10^{10}, 3.672848660323\,10^{12},\\ 1.79214183958343\,10^{14}, 2.37374560\,10^{8}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}3.4751063\,10^{7}, 1.612623619\,10^{9}, 7.6327081271\,10^{10}, 3.672848660323\,10^{12},\\ 1.79214183958343\,10^{14}, 8.84847848527466\,10^{15}, 1.1235398804\,10^{10}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}1.612623619\,10^{9}, 7.6327081271\,10^{10}, 3.672848660323\,10^{12}, 1.79214183958343\,10^{14},\\ 8.84847848527466\,10^{15}, 4.41310553980603\,10^{17}, 5.402812035\,04\,10^{11}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix}10 & 409. & 17411. & 7.66843\,10^{5} & 3.4751063\,10^{7} & 1.612623619\,10^{9} & 2544.\\ 409. & 17411. & 7.66843\,10^{5} & 3.4751063\,10^{7} & 1.612623619\,10^{9} & 7.6327081271\,10^{10} & 1.12504\,10^{5}\\ 17411. & 7.66843\,10^{5} & 3.4751063\,10^{7} & 1.612623619\,10^{9} & 7.6327081271\,10^{10} & 3.672848660323\,10^{12} & 5.110196\,10^{6}\\ 7.66843\,10^{5} & 3.4751063\,10^{7} & 1.612623619\,10^{9} & 7.6327081271\,10^{10} & 3.672848660323\,10^{12} & 1.79214183958343\,10^{14} & 2.37374560\,10^{8}\\ 3.4751063\,10^{7} & 1.612623619\,10^{9} & 7.6327081271\,10^{10} & 3.672848660323\,10^{12} & 1.79214183958343\,10^{14} & 8.84847848527466\,10^{15} & 1.1235398804\,10^{10}\\ 1.612623619\,10^{9} & 7.6327081271\,10^{10} & 3.672848660323\,10^{12} & 1.79214183958343\,10^{14} & 8.84847848527466\,10^{15} & 4.41310553980603\,10^{17} & 5.402812035\,04\,10^{11}\end{bmatrix}$$

Al resolver mediante el **método de Gauss-Jordan**, se obtiene

> $GRADO5 := gaussjord(Mat)$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49109.9757733642\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6494.98087016943\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -337.188123179093\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8.60270841143829\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.107780139850764\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.000531138629103560\end{bmatrix}$$

Esta solución corresponde al polinomio de grado 5, a saber

> $Resultadodematriz := -49109.9757733642 + 6494.98087016943\,x - 337.188123179093\,x^2 + 8.60270841143829\,x^3 - 0.107780139850764\,x^4 + 0.000531138629103560\,x^5$

$$-49109.9757733642 + 6494.98087016943\,x - 337.188123179093\,x^2 + 8.60270841143829\,x^3 - 0.107780139850764\,x^4 + 0.000531138629103560\,x^5$$

El cuál es el mismo polinomio de grado 5 que se ajusta a los datos experimentales ya antes calculado. La comparación es

> $Resultadodematriz := -49109.9757733642 + 6494.98087016943\,x - 337.188123179093\,x^2 + 8.60270841143829\,x^3 - 0.107780139850764\,x^4 + 0.000531138629103560\,x^5$

$$-49109.9757733642 + 6494.98087016943\,x - 337.188123179093\,x^2 + 8.60270841143829\,x^3 - 0.107780139850764\,x^4 + 0.000531138629103560\,x^5$$

$$> \ Gr5Anter := -49109.9808511418 + 6494.98154669347\,x - 337.188158586797\,x^2 + 8.60270932204251\,x^3 - 0.107780151367200\,x^4 + 0.000531138686451653\,x^5$$

$$-49109.9808511418 + 6494.98154669347\,x - 337.188158586797\,x^2 + 8.60270932204251\,x^3 - 0.107780151367200\,x^4 + 0.000531138686451653\,x^5$$

Con la ecuación ya obtenida del método de Mínimos Cuadrados, el problema nos pide calcular el peso de un oso para un pecho de 50 pulgadas, entonces

$x := 50$

50

$$Resultadodematriz := -49109.9757733642 + 6494.98087016943\,x - 337.188123179093\,x^2 + 8.60270841143829\,x^3 - 0.107780139850764\,x^4 + 0.000531138629103560\,x^5$$

362.2579 > ◁ Respuesta

Usando el polinomio de grado 1, se obtiene

$x := 50$

$Gr1 := -251.947869380583 + 12.3801435056377\,x$

367.0593061 > ◁ Respuesta

El polinomio de grado 5 obtenido mediante mínimos cuadrados con Maple, es similar al obtenido con Excel, a saber

$y = 0.0005x^5 - 0.1078x^4 + 8.6027x^3 - 337.19x^2 + 6495x - 49110$

$R^2 = 0.9833$

Fin del Capítulo 3

CAPÍTULO 4

INTERPOLACIÓN Y REGRESIÓN

4.1 Objetivo Particular del Capítulo 4

4.2 Interpolación Lineal, cuadrática y de orden *n*

4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton

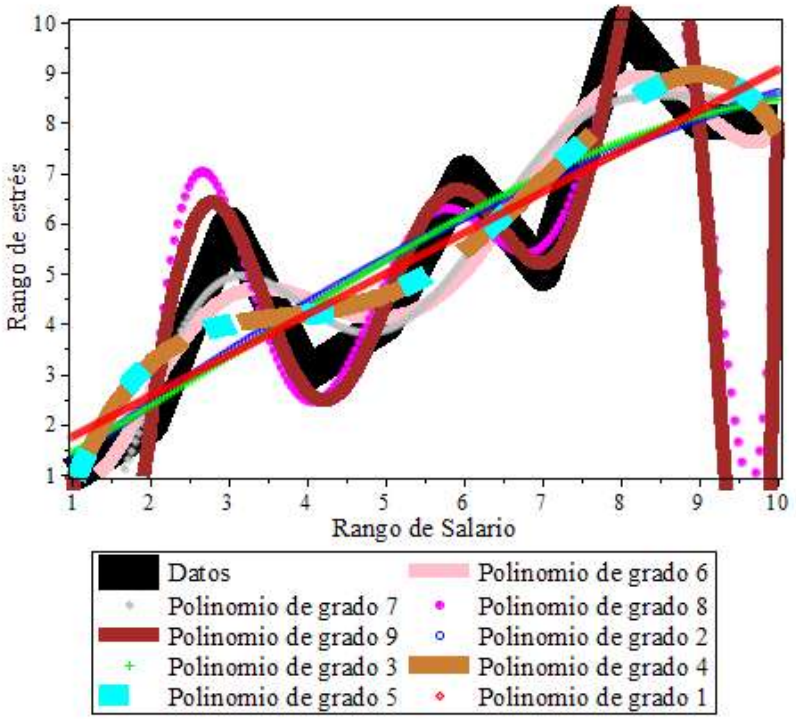
4.4 Polinomios de Lagrange

4.5 Método de diferencias finitas

4.6 Regresiones

4.6.1 Problemas de regresión

4.7 Miscelánea de Problemas



4.1 Objetivo Particular del Capítulo 4

Suministrar al estudiante procedimientos para aproximar puntos entre intervalos de bases de datos a través de modelos matemáticos, así como los escenarios pertinentes para elaborar gráficas que ajusten a puntos intermedios de puntos extremos de bases de datos mediante el uso de tecnología computacional: software matemático y/o lenguajes de programación para regresión estadística.

4.2 Interpolación Lineal, cuadrática y de orden *n*

La interpolación es importante en las ciencias y, específicamente en ingeniería sirve para obtener un valor de un conjunto de datos tabulados, el cual queda entre dos valores, es decir, específicamente no está contenido en la tabla, sino entre dos valores dados en la tabla.
Podemos interpolar mediante dos tipos de polinomios:

a) Aproximación polinomial de primer grado para interpolaciones lineales mediante un sistema de ecuaciones de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x \tag{4.1}$$

b) Polinomio de segundo grado (parábola) mediante un sistema de ecuaciones de la forma

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{4.2}$$

Problema 1
Temperaturas y maratones. Calcule el mejor tiempo ganador predicho para la maratón de 1990, cuando la temperatura era de 73°F. ¿Qué diferencia hay entre el tiempo ganador predicho y el tiempo ganador real de 150.750 minutos? La base de datos (Triola, 2009, p. 555), es dada por la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Tabla de datos para calcular y graficar la relación entre las variables.

x (Temperatura)	55	61	49	62	70	73	51	57
y (tiempo)	145.283	148.717	148.300	148.100	147.617	146.400	144.667	147.533

Solución
Problema resuelto en Maple por **mínimos cuadrados**. Comenzamos definiendo nuestros datos con la tabla proporcionada utilizando el método de mínimos cuadrados

```
> x[1] := 55 : x[2] := 61 : x[3] := 49 : x[4] := 62 : x[5] := 70 : x[6]
      := 73 : x[7] := 51 : x[8] := 57 :
```

> $y[1] := 145.283 : y[2] := 148.717 : y[3] := 148.300 : y[4] := 148.100 : y[5] := 147.617 : y[6] := 146.400 : y[7] := 144.667 : y[8] := 147.533 :$

Definimos el valor de n que es el número de datos proporcionados en la tabla

> $n := 8$

$n := 8$

Realizamos las sumatorias en x

> $sx := sum(x[i], i = 1..8)$

$sx := 478$

> $sxc := sum(x[i]^2, i = 1..8)$

$sxc := 29070$

Realizamos las sumatorias en y

> $sxy := sum(x[i] \cdot y[i], i = 1..8)$

$sxy := 70318.990$

> $sy := sum(y[i], i = 1..8)$

$sy := 1176.617$

Sustituimos en la formula $b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$ (Triola, 2009, p. 543).

> $evalf\left(\frac{(n \cdot (sxy) - sx \cdot (sy))}{(n \cdot (sxc) - (sx)^2)}\right)$

0.03164720314

> $b := 0.03164720314$

$b := 0.03164720314$

Luego calculamos b_1 (Triola, 2009)

> $y := \frac{sy}{n}$

$y := 147.0771250$

> $x := \frac{sx}{n}$

$x := \frac{239}{4}$

> $evalf(x)$

59.75000000

Definimos los valores obtenidos anteriormente para utilizarlos en una nueva fórmula

> y

147.0771250

> x

$\frac{239}{4}$

> b

0.03164720314

Sustituimos valores en la fórmula $b_0 = y - b \cdot x$ (Triola, 2009) en este caso fb es la variable utilizada en lugar de b_0

> $fb = y - b \cdot (x)$

$fb = 145.1862046$

> $fb := 145.1862046$

$fb := 145.1862046$

> fb

145.1862046

Conociendo b y b_0 o fb (el intercepto y), ahora podemos expresar la ecuación estimada de la recta de regresión, estimada de la verdadera ecuación de regresión.

$\bar{y} = fb + bx$

Por lo que obtenemos que la ecuación es la siguiente

$\bar{y} = 145.1862046 + 0.03164720314x$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación obtenemos el resultado final

> $ec = fb + (b \cdot (x))$

$ec = 147.0771250$

> $Resultado := 147.0771250$

$Resultado := 147.0771250$

Como resultado final tenemos

$\bar{y} = 145.1862046 + 0.03164720314x$ y sustituyendo el valor de x obtenemos el resultado faltante que es: $\bar{y} = 147.0771250 \triangleleft Respuesta$

¿Qué diferencia hay entre el tiempo ganador predicho y el tiempo ganador real de 150.750 minutos?

> $y = 0.03164720314x + 145.1862046$

> $x := 73$

$x := 73$

> $y = 0.03164720314x + 145.1862046$

$y = 147.4964504$

> $y = tiempo$

> $x = Temperatura$

> $t[predicho] := 147.4964504$

$t_{predicho} := 147.4964504$

> $t[real] := 150.750$

$t_{real} := 150.750$

La diferencia es

> $Diferencia = t_{real} - t_{predicho}$

$Diferencia = 3.2535496$

> $Diferencia = 3.2535496 \min \triangleleft$ Respuesta.

Sin embargo, el polinomio de grado 1 es indicativo que no hay relación lineal entre las variables temperatura y tiempo, dado que el coeficiente de determinación para la recta de ajuste es de solo 0.0335, como se puede ver en la Fig. 4.1 a). Por tanto, la predicción de la diferencia de tiempos que se solicita no se considera que sea una buena respuesta, habría que encontrar el polinomio que ajuste mejor a los datos para expresar con mayor certeza esa diferencia.

Un polinomio de grado 6 ajusta con un coeficiente de determinación de 0.9999, excelente ajuste para la base de datos de temperatura versus tiempo proporcionada (ver Fig. 4.1 b)).

¿Qué diferencia hay entre el tiempo ganador predicho y el tiempo ganador real de 150.750 minutos?
Respuesta: Los datos que más se acercan al tiempo ganador real, son

x (Temperatura)	61	49
y (tiempo)	148.717	148.300

Una interpolación nos dará un tiempo que oscila entre 148.717 y 148.3 minutos, del cual queda fuera el tiempo ganador real de 150.750 minutos, de lo que se concluye que, dar una predicción de una temperatura que fluctúa entre 49 y 61 queda fuera de contexto para un buen pronóstico, debido a la dispersión de datos entre las variables.

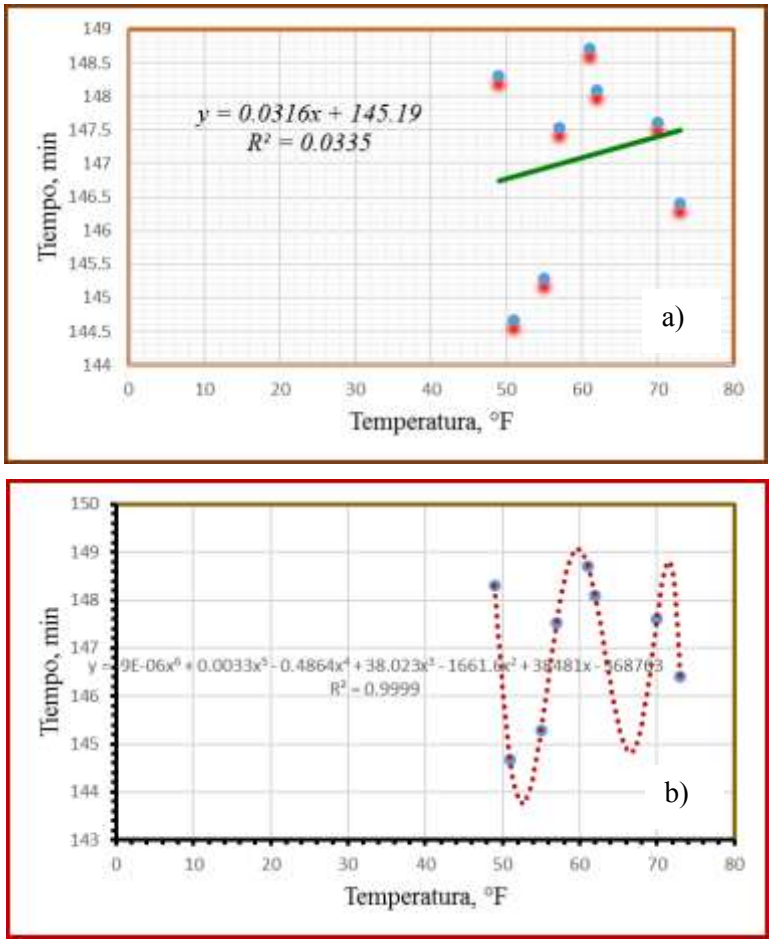


Fig. 4.1 Gráfica de ajuste de datos experimentales a: a) un polinomio de grado 1 y b) un polinomio de grado 6 con ajustes del 3.35% y excelente ajuste del 99.99%, respectivamente.

Problema 2

La densidad del carbonato neutro de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración de acuerdo con la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Densidad del carbonato neutro de potasio.

C%	T°C	T°C	T°C	T°C
	0	40	80	100
4	1.0381	1.0276	1.0063	.9931
12	1.116	1.1013	1.0786	1.0663
20	1.1977	1.1801	1.157	1.1451
28	1.2846	1.2652	1.2418	1.2301

a) Calcular la densidad a $40\,°C$ y 15% de concentración.
b) Calcular la densidad a $50\,°C$ y 28% de concentración.
c) Calcular la densidad a $90\,°C$ y 25% de concentración.
d) Calcular la concentración que tiene una solución de densidad 1.129 a una temperatura de $60\,°C$.
Utilice **interpolación cuadrática** en todos los incisos (Nieves y Domínguez, 1996, p. 381).

Solución

a)

A continuación, se muestra el procedimiento en Maple del inciso a). La gráfica de la Fig. 4.2 presenta los datos experimentales dados en la Tabla.

```
> with(plots) :
G1:=pointplot(Matrix([[4,1.0276],[12,1.1013],[20,1.1801],[28,1.2652]],datatype=float),axes=boxed,styl
e=point,color="Fuchsia");
G1 := PLOT(...)
>
   display({G1}, axes = boxed, title = Densidad del carbonato neutro de potacio a 40°c,
       labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD],
       labels = ["Concentracion %", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont
        = ["TimesNewRoman", 12]);
```

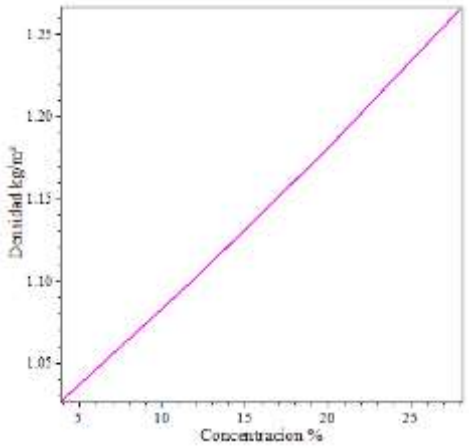


Fig. 4.2 Densidad del carbonato de potasio neutro a 40°C.

Lo que se hizo hasta aquí es graficar los puntos que necesitamos para resolver este inciso como se muestra en la Fig. 4.2, los datos necesarios fueron los siguientes.

C%	T°C
	40
4	1.0276
12	1.1013
20	1.1801

Después acomodamos los datos en la matriz para sacar la ecuación en la cual se va a evaluar en 15% que vendría siendo la respuesta del inciso a) y también se evaluara en 25% ya que este dato es necesario

en el inciso c).

```
> with(linalg) :
> A := ⟨⟨1, 1, 1⟩|⟨4, 12, 20⟩|⟨16, 144, 400⟩|⟨1.0276, 1.1013, 1.1801⟩⟩
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 & 1.0276 \\ 1 & 12 & 144 & 1.1013 \\ 1 & 20 & 400 & 1.1801 \end{bmatrix}$$

```
> R := gaussjord(A);
```

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.9926625000 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008575000000 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00003984375000 \end{bmatrix}$$

```
> EC := R[1, 4] + R[2, 4]·x + R[3, 4]·x^2
```

$$EC := 0.00003984375000\,x^2 + 0.008575000000\,x + 0.9926625000$$

```
> EC := 0.00003984375000 x^2 + 0.008575000000 x + 0.9926625000 :
```

Las instrucciones de Maple para obtener la gráfica de datos experimentales y polinomio de grado 2 de la Fig. 4.3 son

```
> with(plots) :
>
G1:=pointplot(Matrix([[4,1.0276],[12,1.1013],[20,1.1801],[28,1.2652]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black");
```

$G1 := PLOT(...)$

```
> EC := plot(EC, x = 3 ..28, y = 1 ..2, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "SeaGreen") :

>
  display({G1, EC}, axes = boxed, title = Densidad del carbonato neutro de potacio a 40°c,
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD],
      labels = ["Concentracion %", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont
       = ["TimesNewRoman", 12]);

>
f := x→0.00003984375000 x^2 + 0.008575000000 x + 0.9
f := x→0.00003984375000 x^2 + 0.008575000000 x + 0.99
> x = f(15)
x = 1.130252344
> x = f(25)
x = 1.231939844
> x = f(15) = 1.130252344◁ Respuesta a).
```

b)

Para b) se necesitan estos datos.

40	80	100	C%
1.2652	1.2418	1.2301	28

```
> with(linalg) :
>
B := ⟨⟨1, 1, 1⟩|⟨40, 80, 100⟩|⟨1600, 6400, 10000⟩|⟨1.2652,
```

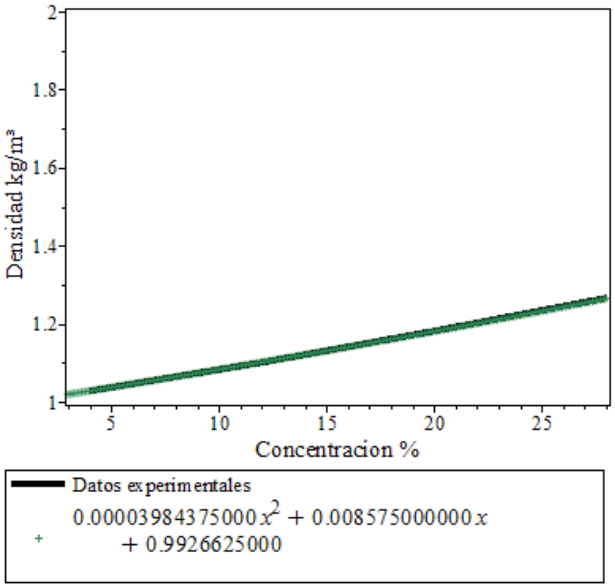


Fig. 4.3 Gráfica de datos experimentales y polinomio de grado 2 al que ajustan.

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 40 & 1600 & 1.2652 \\ 1 & 80 & 6400 & 1.2418 \\ 1 & 100 & 10000 & 1.2301 \end{bmatrix}$$

> $R2 := gaussjord(B);$

$$R2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.288600000 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0005850000000 \\ 0 & 0 & 1 & -0. \end{bmatrix}$$

> $EC2 := R2[1,4] + R2[2,4] \cdot x + R2[3,4] \cdot x^2$

$EC2 := 1.288600000 - 0.0005850000000\,x$

> $EC2 := 1.288600000 - 0.0005850000000\,x :$

Las instrucciones para graficar son:

> $with(plots) :$

>

G2:=pointplot(Matrix([[40,1.2652],[80,1.2418],[100,1.2301]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black");

$G2 := PLOT(...)$

> $EC2 := plot\ EC2, x = 40..100, y = 1..2, axes = boxed, style = point, symbol =$

>

$display(\{G2, EC2\}, axes = boxed, title = Densidades\ a\ una\ concentracion\ fija\ y\ distintas\ temperaturas, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["Temperatura en °C", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);$

La grafica de la Fig. 4.4 presenta la función evaluada con un valor de temperatura y como resultado da un valor de densidad a una concentración del 28%.

$f := x \rightarrow 1.288600000 - 0.0005850000000\,x$

$f := x \rightarrow 1.288600000 + (-1) \cdot 0.0005850000000\,x$

> $x = f(50)$

$x = 1.259350000$

La respuesta del inciso b) es el resultado de evaluar la función en 50 °C.

> $x = f(50) = 1.259350000$ ◁ Respuesta b).

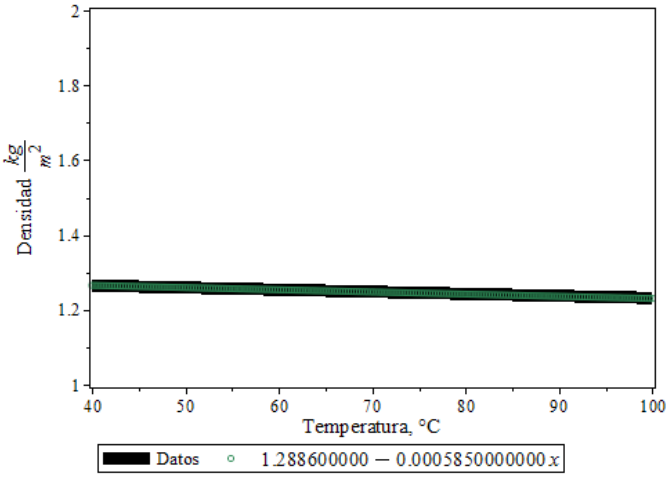


Fig. 4.4 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 1. Densidades a una concentración fija y a distintas temperaturas.

c)

Para este inciso tenemos solo 4 datos de 6 que necesitamos, así que para obtener esos dos datos hay que hacer dos interpolaciones que son las siguientes. La primera es con 80 °C.

C%	T°C
	80
12	1.0786
20	1.157
28	1.2418

```
> with(linalg) :
> C := <<1, 1, 1>|<12, 20, 28>|<144, 400, 784>|<1.0786, 1.1570, 1.2418>>
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 12 & 144 & 1.0786 \\ 1 & 20 & 400 & 1.1570 \\ 1 & 28 & 784 & 1.2418 \end{bmatrix}$$

```
> R3 := gaussjord(C);
```

$$R3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.9730000000 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008200000000 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00005000000000 \end{bmatrix}$$

```
> EC3 := R3[1, 4] + R3[2, 4]·x + R3[3, 4]·x^2
```

$$EC3 := 0.00005000000000\,x^2 + 0.008200000000\,x + 0.9730000000$$

```
> EC3 := 0.00005000000000x^2 + 0.008200000000x + 0.9730000000 :
```

La Fig. 4.5 muestra los datos experimentales ajustados a un polinomio de grado 2. Las instrucciones de Maple para trazar las curvas, son

```
> with(plots) :
>
G3:=pointplot(Matrix([[12,1.0786],[20,1.157],[28,1.2418]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color
="Black");
```

$$G3 := PLOT(\ldots)$$

```
> EC3 := plot(EC3, x = 12 ..28, y = 1 ..2, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Crimson") :

>
  display({G3, EC3}, axes = boxed, title = Densidades del carbonato neutro de potasio a 80°c,
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD],
      labels = ["Concentracion %", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont
       = ["TimesNewRoman", 12]);

> f := x→0.00005000000000x^2 + 0.008200000000x + 0.9730000000
```

$$f := x \rightarrow 0.00005000000000\,x^2 + 0.008200000000\,x + 0.9730000000$$

```
> x = f(25)
```

$$x = 1.209250000$$

```
> x = f(25) = 1.209250000◁ Respuesta c).
```

El resultado de esta interpolación es uno de los dos datos que faltaban.
La segunda interpolación es con 100 °C.

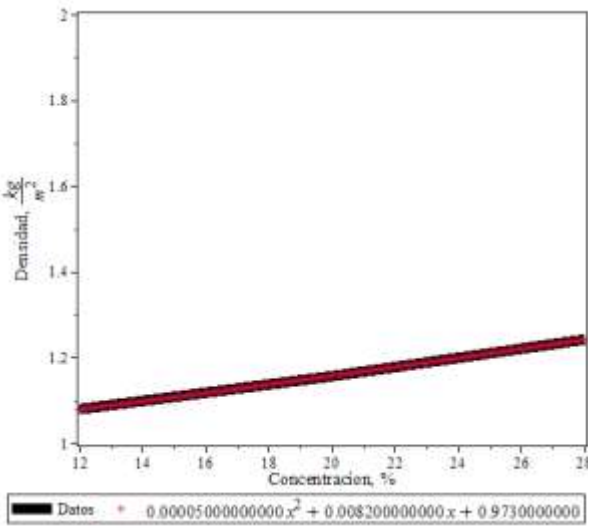


Fig. 4.5 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2. La función se evalúa con el valor de concentración del 25% a 80°C de temperatura.

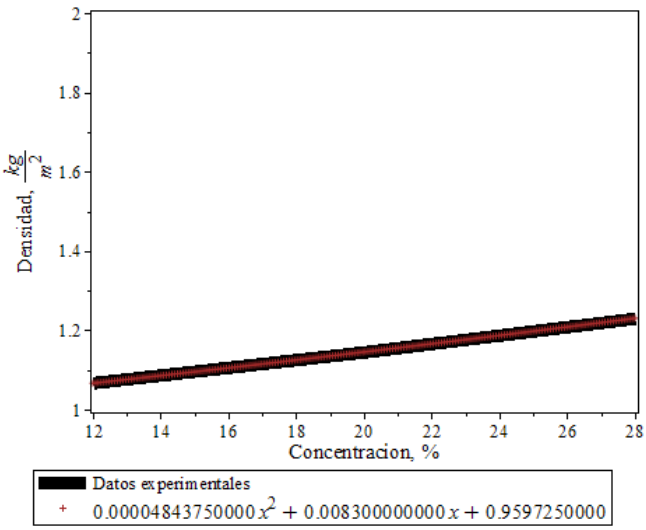


Fig. 4.6 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2. La función se evalúa con el valor de concentración de 25% a una temperatura de 100°C.

C%	T°C
	100
12	1.0663
20	1.1451
28	1.2301

```
> with(linalg) :
> E := ⟨⟨1, 1, 1⟩|⟨12, 20, 28⟩|⟨144, 400, 784⟩|⟨1.0663, 1.1451, 1.2301⟩⟩
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 12 & 144 & 1.0663 \\ 1 & 20 & 400 & 1.1451 \\ 1 & 28 & 784 & 1.2301 \end{bmatrix}$$

```
> R4 := gaussjord(E);
```

$$R4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.9597250000 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008300000000 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00004843750000 \end{bmatrix}$$

```
> EC4 := R4[1, 4] + R4[2, 4]·x + R4[3, 4]·x^2
```

$$EC4 := 0.00004843750000\,x^2 + 0.008300000000\,x + 0.9597250000$$

```
> EC4 := 0.00004843750000x^2 + 0.008300000000x + 0.9597250000 :
```

La Fig. 4.6 muestra los datos experimentales ajustados a un polinomio de grado 2. Las instrucciones de Maple para trazar las curvas, son

```
> with(plots) :
>
G4:=pointplot(Matrix([[12,1.0663],[20,1.1451],[28,1.2301]],datatype=float),axes=boxed,style=line,colo
r="Black");
```

$G4 := PLOT(...)$

```
> EC4 := plot(EC4, x = 12 ..28, y = 1 ..2, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Brown") :

> display( {G4, EC4}, axes = boxed, title = Densidades del carbonato neutro de potasio a 100°c,
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD],
      labels = ["Concentracion %", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont
       = ["TimesNewRoman", 12]);
```

$> f := x \rightarrow 0.00004843750000\,x^2 + 0.008300000000\,x + 0.9597250000$

$f := x \rightarrow 0.00004843750000\,x^2 + 0.008300000000\,x + 0.9597250000$

$> x = f(25)$

$x = 1.197498438$

$> x = f(25) = 1.209250000$ ◁ **Respuesta c).**

Y por último este dato era el faltante, así que ya tenemos todos los datos para hacer la interpolación que nos dará el resultado del inciso c)

40	80	100	C%
1.231939844	1.20925	1.1974498438	25

Las instrucciones de Maple vienen dadas por

```
> with(linalg) :
> F := <<1, 1, 1>|<40, 80, 100>|<1600, 6400, 10000>|<1.231939844, 1.20925, 1.197498438>>
```

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 40 & 1600 & 1.231939844 \\ 1 & 80 & 6400 & 1.20925 \\ 1 & 100 & 10000 & 1.197498438 \end{bmatrix}$$

```
> R5 := gaussjord(F);
```

$$R5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.253545314 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0005265821006 \\ 0 & 0 & 1 & -3.388666625\,10^{-7} \end{bmatrix}$$

```
> EC5 := R5[1, 4] + R5[2, 4]·x + R5[3, 4]·x^2
```

$EC5 := -3.388666625\,10^{-7}\,x^2 - 0.0005265821006\,x + 1.253545314$

```
> EC5 := -3.388666625 10^-7 x^2 - 0.0005265821006 x + 1.253545314 :
```

La Fig. 4.7 muestra los datos experimentales ajustados a un polinomio de grado 2. Las instrucciones de Maple para trazar las curvas, son

```
> with(plots) :
>
G5:=pointplot(Matrix([[40,1.231939844],[80,1.20925],[100,1.197498438]],datatype=float),axes=boxed,
style=line,color="Black");
```

$G5 := PLOT(...)$

```
> EC5 := plot(EC5, x = 40 ..100, y = 1 ..2, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
      = "Crimson") :

> display( {G5, EC5}, axes = boxed, title = Densidades a concentracion fija, labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels
      = ["Temperatura en °C", "Densidad kg/m³"], size = [1300, 800], labelfont
      = ["TimesNewRoman", 12]);
```

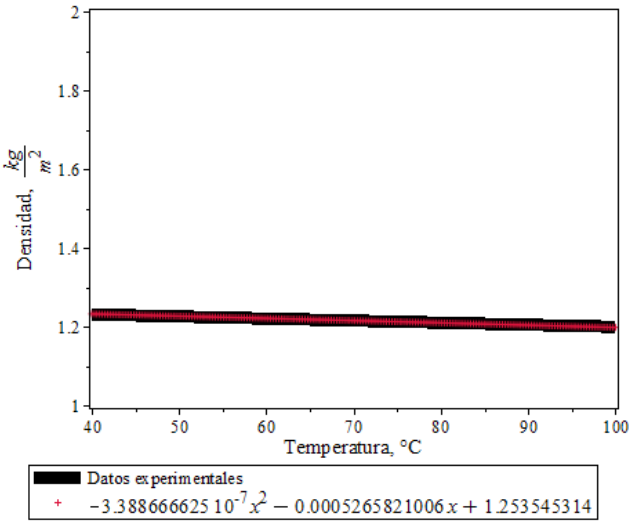


Fig. 4.7 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2. Densidades a concentración fija. La función se evaluó con temperatura de 90°C y el valor obtenido es de una densidad a 25% de concentración.

$> f := x \to -3.388666625\,10^{-7}x^2 - 0.0005265821006x + 1.253545314$

$f := x \to \frac{(-1)\cdot 3.388666625x^2}{10000000} + (-1)\cdot 0.0005265821006x + 1.253545314$

$> x = f(90)$

$x = 1.203408105$

$> x = f(60)$

$x = 1.220730468$

$> f := x \to 1.288600000 - 0.0005850000000x$

$f := x \to 1.288600000 + (-1)\cdot 0.0005850000000x$

$> x = f(60)$

$x = 1.253500000$

La respuesta del inciso c) es cuando esta evaluada la función en $90\,°C$, el valor que se muestra cuando se evalúa esa misma función en $60\,°C$ es un dato necesario para el ultimo inciso y también la función que se muestra después de esas evaluaciones, la función corresponde al inciso b) en la cual también es necesario el valor de la función cuando se evalúa en $60\,°C$.

d)

Por último, el inciso d) para poder hacer la interpolación cuadrática nos hace falta un dato el cual se obtiene con la siguiente interpolación.

C%	T°C	T°C	T°C
	40	80	100
12	1.1013	1.0786	1.0663

$> with(linalg) :$

$> G := \langle\langle 1, 1, 1\rangle|\langle 40, 80, 100\rangle|\langle 1600, 6400, 10000\rangle|\langle 1.1013, 1.0786, 1.0663\rangle\rangle$

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 40 & 1600 & 1.1013 \\ 1 & 80 & 6400 & 1.0786 \\ 1 & 100 & 10000 & 1.0663 \end{bmatrix}$$

> $R6 := gaussjord(G);$

$$R6 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.121466666 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0004725000005 \\ 0 & 0 & 1 & -7.916666625\,10^{-7} \end{bmatrix}$$

> $EC6 := R6[1,4] + R6[2,4]\cdot x + R6[3,4]\cdot x\text{^}2$

$$EC6 := -7.916666625\,10^{-7}x^2 - 0.0004725000005\,x + 1.121466666$$

> $EC6 := -7.916666625\,10^{-7}x^2 - 0.0004725000005\,x + 1.121466666:$

La Fig. 4.8 muestra los datos experimentales ajustados a un polinomio de grado 2. Las instrucciones de Maple para trazar las curvas, son

> $with(plots):$

>

G6:=pointplot(Matrix([[40,1.1013],[80,1.0786],[100,1.0663]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black");

$G6 := PLOT(...)$

> $EC6 := plot(EC6, x = 40..100, y = 1..2, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color = "Gold"):$

> $display(\{G6, EC6\}, axes = boxed, title = Densidades\ a\ concentracion\ fija, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["Temperatura\ en\ °C", "Densidad\ kg/m^3"], size = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);$

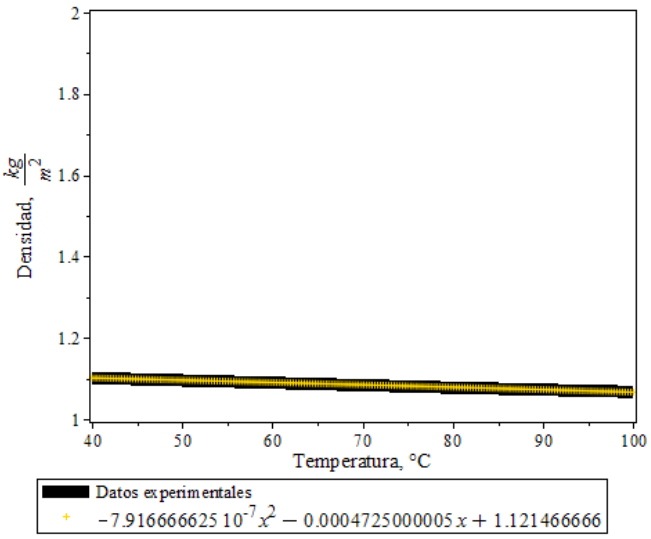


Fig. 4.8 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2. Densidades a concentración fija. La función se evaluó con temperatura de 60°C y el valor obtenido es de una densidad a 12% de concentración.

> $f := x \rightarrow -7.916666625\,10^{-7}x^2 - 0.0004725000005\,x + 1.121466666$

$$f := x \rightarrow \frac{(-1)\cdot 7.916666625\,x^2}{10000000} + (-1)\cdot 0.0004725000005\,x + 1.121466666$$

> $x = f(60)$

$x = 1.090266666$

Ya teniendo este resultado solo falta hacer la última interpolación con estos datos obtenidos.

C%	T°C
	60
12	1.090266666
25	1.220730468
28	1.2535

> $with(linalg)$:

> $H := \langle\langle 1, 1, 1\rangle|\langle 1.090266666, 1.220730468, 1.2535\rangle|\langle 1.188681403, 1.490182876, 1.57126225\rangle|\langle 12, 25, 28\rangle\rangle$

$$H := \begin{bmatrix} 1 & 1.090266666 & 1.188681403 & 12 \\ 1 & 1.220730468 & 1.490182876 & 25 \\ 1 & 1.2535 & 1.57126225 & 28 \end{bmatrix}$$

> $R7 := gaussjord(H)$

$$R7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -162.6501106 \\ 0 & 1 & 0 & 214.2652987 \\ 0 & 0 & 1 & -49.59798488 \end{bmatrix}$$

> $EC7 := R7[1,4] + R7[2,4]\cdot x + R7[3,4]\cdot x\text{^}2$

$EC7 := -49.59798488\,x^2 + 214.2652987\,x - 162.6501106$

> $EC7 := -49.59798488\,x^2 + 214.2652987\,x - 162.6501106$:

La Fig. 4.9 muestra los datos experimentales ajustados a un polinomio de grado 2. Las instrucciones de Maple para trazar las curvas, son

> $with(plots)$:

>

G7:=pointplot(Matrix([[1.090266666,12],[1.220730468,25],[1.2535,28]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black");

$G7 := PLOT(...)$

> $EC7 := plot(EC7, x = 1..2, y = 12..28, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color = "White")$:

>

$display(\{G7, EC7\}, axes = boxed, title = Concentraciones\ a\ 60°c, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["Densidad kg/m", "Concentracion %"], size = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);$

$f := x \rightarrow -49.59798488\,x^2 + 214.2652987\,x - 162.6501106$

$f := x \rightarrow (-1)\cdot 49.59798488\,x^2 + 214.2652987\,x - 162.6501106$

> $x = f(1.129)$

$x = 16.0357866$

La respuesta es cuando ahora la función es evaluada respecto a la densidad de 1.129

> $f(?) = 1.129, ?=16.0357866 \triangleleft$ Respuesta d).

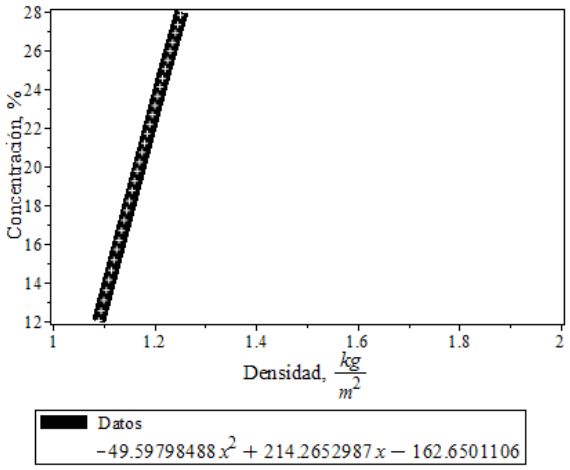


Fig. 4.9 Ajuste de datos experimentales a un polinomio de grado 2. Temperatura a 60°C.

4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton

En esta sección presentaremos el cálculo de los coeficientes del Polinomio de Newton a partir de la tabulación de diferencias divididas. Dicho polinomio viene dado por

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots + a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n). \tag{4.3}$$

Y elaboramos la tabla de las diferencias divididas con interpolación polinomial.

Problemas de Diferencias Divididas

Problema 1
Los datos siguientes

i	1	2	3	4
v	120	94	75	62

Donde i es la corriente y v el voltaje consumido por un arco magnético, aproxime el valor de v para $i = 3.5$ por un polinomio de **Newton en diferencias divididas** y compare con el valor dado por la formula empírica.
$v = 30.4 + 90.4i^{-0.507}$

Solución
Lo primero que se realizó fue el encontrar los valores de las **diferencias divididas**, siendo en este caso tres, para ello se emplearon las siguientes formulas:

Primera diferencia dividida $f[x_0, x_1]$

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{(x_1 - x_0)} \tag{4.4}$$

Segunda diferencia dividida $f[x_0, x_1, x_2]$

$$a_2 = \frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.5}$$

Tercera diferencia dividida $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{\frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} - \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}\right) - \left(\frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}\right)}{x_3 - x_0} \tag{4.6}$$

En este problema él $f[x]$ es el valor de las v y la x es el valor de las i que se muestran en la tabla proporcionada por el problema, por lo que las fórmulas quedarían como:

- **Primera diferencia dividida**, en este caso se realizó tres veces esto debido a que existes cuatro puntos:

```
> a1[1] := evalf((v[2] - v[1])/(i[2] - i[1]))
```

$a1_1 := -26.$

```
> a1[2] := evalf((v[3] - v[2])/(i[3] - i[2]))
```

$a1_2 := -19.$

```
> a1[3] := evalf((v[4] - v[3])/(i[4] - i[3]))
```

$a1_3 := -13.$

- **Segunda diferencia dividida**, en este caso se realizó dos veces debido a que existen tres puntos:

```
> a2[1] := evalf(((v[3] - v[2])/(i[3] - i[2]) - (v[2] - v[1])/(i[2] - i[1]))/(i[3] - i[1]))
```

$a2_1 := 3.500000000$

```
> a2[2] := evalf(((v[4] - v[3])/(i[4] - i[3]) - (v[3] - v[2])/(i[3] - i[2]))/(i[4] - i[2]))
```

$a2_2 := 3.$

- **Tercera diferencia dividida**, en este caso se realizó una vez debido a que existen dos puntos:

```
> a3[1] := evalf((a2[2] - a2[1])/(i[4] - i[1]))
```

$a3_1 := -0.1666666667$

Creando la Tabla 4.3 de las diferencias divididas.

Tabla 4.3 Diferencias divididas del Problema 1.

Puntos	i	v	Diferencias divididas		
			Primera	Segunda	Tercera
0	1	120	-26		
1	2	94		3.5	
			-19		-0.166
2	3	75		3	
			-13		
3	4	62			

Polinomios en términos de diferencias divididas

Una vez que se conocen los valores de las diferencias divididas se emplean polinomios con los cuales se pueden aproximar preliminarmente, para ello se emplean tres polinomios siendo estos:

- **Polinomio de primer grado** para los puntos (0) y (1)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0) \tag{4.7}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de primer grado en términos de diferencias divididas**

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1] \tag{4.8}$$

- **Polinomio de segundo grado** para los puntos (0), (1) y (2)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1) \tag{4.9}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de segundo grado en términos de diferencias divididas**

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \tag{4.10}$$

- **Polinomio de tercer grado** para los puntos (0), (1), (2) y (3)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{4.11}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de**

tercer grado en términos de diferencias divididas

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \tag{4.12}$$

Una vez sustituidas estas fórmulas se obtienen los siguientes resultados:

- **Polinomio de primer grado** en términos de diferencias divididas:

```
> p[1](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1])
```

$p_1(x) := 146. - 26.\,x$

- **Polinomio de segundo grado** en términos de diferencias divididas:

```
> p[2](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1] + (x - i[1])·(x - i[2])·a2[1])
```

$p_2(x) := 146. - 26.\,x + 3.500000000\,(x - 1.)\,(x - 2.)$

- **Polinomio de tercer grado** en términos de diferencias divididas:

```
> p[2](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1] + (x - i[1])·(x - i[2])·a2[1] + (x - i[1])·(x - i[2])·(x
      - i[3])·a3[1])
```

$p_2(x) := 146. - 26.\,x + 3.500000000\,(x - 1.)\,(x - 2.) - 0.1666666667\,(x - 1.)\,(x - 2.)\,(x - 3.)$

Graficas de las funciones y los puntos:

- Graficas de los puntos i y *v* de la tabla proporcionada por el problema y las tres funciones obtenidas anteriormente de los polinomios de primero, segundo y tercer grado se presentan en la Fig. 4.10.

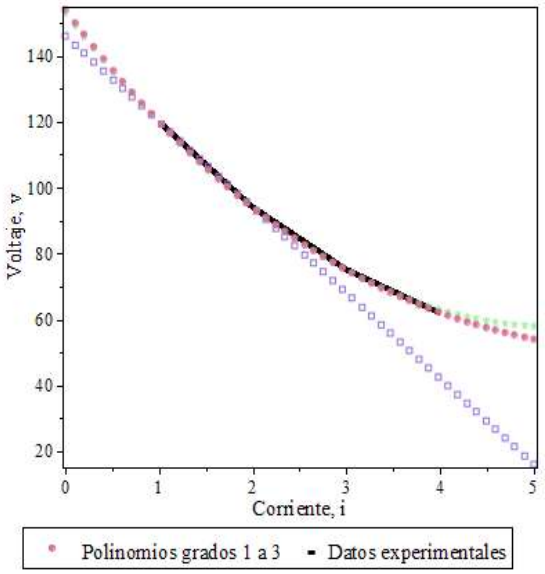


Fig. 4.10 Gráfica de datos experimentales de corriente y voltaje.

Instrucciones Maple de la Gráfica de la Fig. 4.10

```
> with(plots) :
> F1 := plot(p[1](x), x = 0..5, style = line, numpoints = 50, color = "MediumPurple") :
> F2 := plot(p[2](x), x = 0..5, style = line, numpoints = 50, color = "LightGreen") :
> F3 := plot(p[3](x), x = 0..5, style = line, numpoints = 50, color = "PaleVioletRed") :
```

```
> G1 := plot(Vector([i1]), Vector([v1]), style = point, symbolsize = 20, color = "Tomato") :
> G2 := plot(Vector([i2]), Vector([v2]), style = point, symbolsize = 20, color = "DarkOrange") :
> G3 := plot(Vector([i3]), Vector([v3]), style = point, symbolsize = 20, color = "OliveDrab") :
> G4 := plot(Vector([i4]), Vector([v4]), style = point, symbolsize = 20, color = "DarkCyan") :
> display({F1, F2, F3, G1, G2, G3, G4})
```

En la Fig. 4.11 se graficó el polinomio que mayormente ajusta a los datos experimentales.

Sustitución del valor de *i* para encontrar el valor de *v* en los polinomios:

Continuando con el problema principal se sustituyó el valor de la *x* con el que nos solicita el problema siendo este $i = 3.5$ para aproximar el valor de *v*, quedando:

- **Polinomio de primer grado:**

```
> p[1](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1])
```

$p_1(3.5) := 55.0$

- **Polinomio de segundo grado:**

```
> p[2](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1] + (x - i[1])·(x - i[2])·a2[1])
```

$p_2(3.5) := 68.12500000$

- **Polinomio de tercer grado:**

```
> p[3](x) := evalf(v[1] + (x - i[1])·a1[1] + (x - i[1])·(x - i[2])·a2[1] + (x - i[1])·(x
      - i[2])·(x - i[3])·a3[1])
>
```

$p_3(3.5) := 67.81250000$ ▷ *Respuesta*

Obteniendo de resultado con respecto a la sustitución del polinomio de aproximación que *v* para $i = 3.5$ es $v = 67.81250$. En la Fig. 4.11 se compara la formula empírica y el resultado obtenido.

Finalmente comparando el valor dado por la formula empírica del problema siendo $v = 30.4 + 90.4i^{-0.507}$ y el obtenido anteriormente se puede encontrar una diferencia de 10.48644324, esto debido a que la formula empírica sustituida en $i = 3.5$ es igual a $v = 78.29894324$, como se muestra a continuación

```
> vp := 30.4 + 90.4 ·x^-0.507
```

$vp := 78.29894324$

```
> 78.29894324 - 67.81250000
```

10.48644324

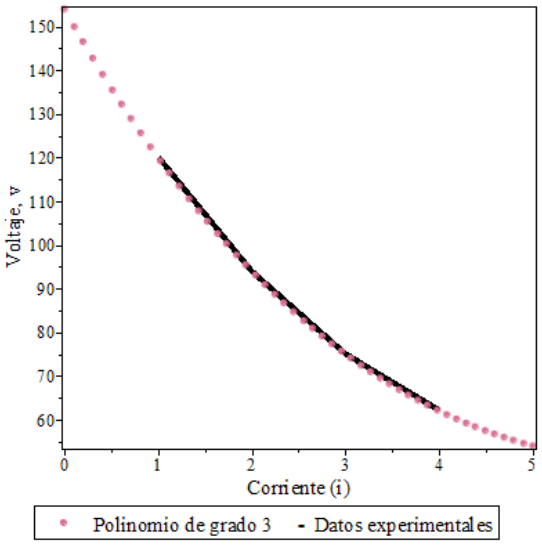


Fig. 4.11 Gráfica del polinomio de grado 3 a que ajustan los datos experimentales.

Problema 2

Interpolar un conjunto de datos a través del **método de diferencias divididas de Newton** para la Tabla 4.4.

Tabla 4.4 Valores de variables independiente y dependiente para construir una tabla de diferencias divididas.

Puntos	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.35	1.70	1.90	3.00
$f(x_i)$	0.00000	0.30010	0.53063	0.64185	1.09861

Construir una **tabla de diferencias divididas** para aproximar $f(x)$ en x = 1.50; utilice un **polinomio de Newton de segundo grado**.

Solución

La interpolación es una técnica matemática que se utiliza para estimar un valor desconocido de una función en un punto entre dos valores conocidos. El objetivo de la interpolación es construir una función que pase exactamente por los puntos conocidos, de tal manera que la estimación en el punto desconocido sea lo más precisa posible.

Existen diferentes métodos de interpolación, entre los más comunes se encuentran el método de Lagrange y el método de Newton. En ambos métodos, se utiliza una fórmula que permite construir una función polinómica que pase exactamente por los puntos conocidos.
La interpolación se utiliza en diversas áreas, como en la física, la ingeniería, la computación gráfica y la estadística, entre otras. Por ejemplo, en la física, la interpolación se utiliza para estimar el valor de una variable en un punto intermedio en una serie de mediciones experimentales, mientras que en la computación gráfica se utiliza para construir curvas y superficies suaves a partir de un conjunto discreto de puntos de control.

Método de diferencias divididas de Newton
El método de diferencias divididas es un método utilizado para encontrar una aproximación a una función matemática desconocida. El método se basa en la idea de que, dadas las coordenadas de algunos puntos, se puede construir un polinomio que pase por esos puntos.
Para construir ese polinomio, el método de diferencias divididas toma los puntos conocidos y calcula las diferencias entre ellos. Esas diferencias se utilizan para calcular los coeficientes del polinomio.

Una vez que se han calculado los coeficientes del polinomio, se puede utilizar el polinomio para encontrar aproximaciones a la función desconocida en cualquier punto dentro del rango de los puntos conocidos.
Una ventaja del método de diferencias divididas es que es fácil de implementar y no requiere resolver un sistema de ecuaciones como otros métodos de interpolación. Además, el polinomio interpolante de Newton es fácil de evaluar en cualquier punto *x*. Sin embargo, una desventaja es que puede ser difícil determinar el error de interpolación o la calidad de la aproximación. Además, si los puntos de interpolación están muy juntos o muy dispersos, la interpolación puede ser inestable o inexacta.
En resumen, el método de diferencias divididas es un método para aproximar una función desconocida a partir de un conjunto de puntos conocidos utilizando un polinomio que pasa por esos puntos.

Explicacion del código
El código es un programa en Python que realiza la aproximación de una función mediante el **método de**

diferencias divididas de Newton, el cual es una técnica para encontrar polinomios interpolantes de una función dada. En este caso, el programa permite al usuario seleccionar una base de datos con valores, o bien ingresar una manualmente, y después elegir hasta qué grado se desea aproximar la función. A continuación, se explican las partes principales del código:

Importación de módulos: los módulos "os", "platform", "numpy" y "matplotlib.pyplot" se importan para usar funciones que permitan limpiar la pantalla, obtener información del sistema operativo, trabajar con matrices y graficar resultados.

Definición de funciones: se define la función "limpiar_pantalla()", la cual se encarga de borrar la pantalla según el sistema operativo del usuario.

Variables: se inicializan las variables "k", "l", "m", "grad_max", "p1", "ecuacion", "matriz", "gx" y "gy" con valores iniciales.

Menú de opciones: se muestra un menú con distintas opciones para el usuario, quien debe seleccionar una de ellas.

Base de datos: dependiendo de la opción seleccionada, se inicializa la variable "valores" con una lista de listas que contiene los valores de la función.

Ingreso de datos automático: se realiza un ciclo "for" para ingresar los valores de la matriz de diferencias divididas, la cual es una matriz triangular que contiene las diferencias divididas de la función. Si el usuario seleccionó la opción 1, el programa solicita al usuario que ingrese los valores de la matriz manualmente.

Convergencia: se verifica si se ha alcanzado la convergencia, es decir, si se han calculado todos los valores de la matriz de diferencias divididas.

Cálculo de la ecuación: se calcula la ecuación de la función aproximada, utilizando los valores de la matriz de diferencias divididas y la técnica de diferencias divididas de Newton. La ecuación resultante se almacena en la variable "ecuación".

Impresión de resultados: se imprime la ecuación resultante.

Resultados arrojados por el programa

La matriz impresa en consola tal y como la arroja el programa se puede observar en la Fig. 4.12

```
A continuacion se muestra la matriz generada
[[ 1.         0.         0.85742857 -0.28395918  0.10832406 -0.03049206]
 [ 1.35       0.3001     0.65865714 -0.18646753  0.04733993  0.        ]
 [ 1.7        0.53063    0.5561     -0.10835664  0.          0.        ]
 [ 1.9        0.64185    0.41523636  0.          0.          0.        ]
 [ 3.         1.09861    0.          0.          0.          0.        ]]
```

Fig. 4.12 Matriz generada e impresa en la consola del programa Python. La matriz permite calcular los coeficientes del polinomio o función esperada.

Ecuación obtenida (redondeada):

$-0.1865\,x^2 + 1.227\,x - 1.017$

Valor de la ecuación interpolada en el punto 1.5:

0.4044925974025977

La grafica que genera el programa se puede observar en la Fig. 4.13.

Resultados y grafica finales

A continuación, se presentan los resultados no como los arroja el programa, sino de una manera más clara para el estudiante.

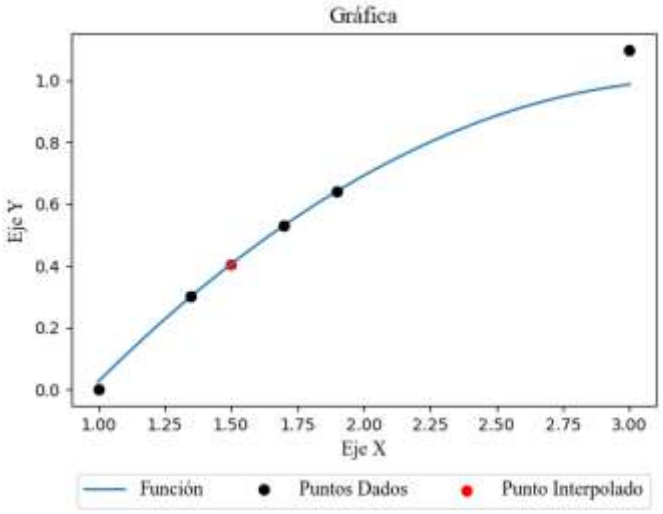


Fig. 4.13 Grafica generada por el programa hecho en Python, proyectando los puntos dados (puntos negros), el ajuste que se logró mediante un polinomio de grado 2 (línea azul) y la función interpolada en 1.5 (punto rojo).

La Tabla de diferencias divididas es

Puntos	x_i	$f(x_i)$	Diferencias divididas			
			Primeras	Segundas	Terceras	Cuartas
0	1.00	0.00000	0.85742857			
1	1.35	0.30010	0.65865714	-0.28395918	0.10832406	
2	1.70	0.53063	0.5561000	-0.18646753	0.04733993	-0.03049206
3	1.90	0.64185	0.41523636	-0.10835664		
4	3.00	1.09861				

Ecuación obtenida (sin redondear):

$-0.18646753246753323\,x^2 + 1.2273831168831197\,x - 1.017030129870132$

Valor de la ecuación interpolada en el punto 1.5 mediante el programa:

0.4044925974025977

El código Python para este Problema 2 del punto 4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton se encuentra en el **Anexo 1 del Capítulo 4.**

4.4 Polinomios de Lagrange

En esta sección se presenta el Formulario de Polinomios de Lagrange a usar en la solución de problemas.
Desarrollar

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{4.13}$$

donde
$> j \neq i$

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{4.14}$$

Paso 1
Para una aproximación polinomial de Lagrange mediante dos puntos $(n = 1)$ iniciar con
$> i := 0$
$> n := 1$
seguir con
$> i := 1$
n es igual a uno en todo momento, encontrar los productos
$> L_0(x) := \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$
$> L_1(x) := \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
y sustituirlos en el polinomio de grado uno

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) \tag{4.15}$$

Encontrando

$$p(x) = \frac{(x - x_1) f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0) f(x_1)}{x_1 - x_0} \tag{4.16}$$

Esta ecuación se emplea para una tabla que contenga dos puntos.
Paso 2
Aproximación polinomial de Lagrange con tres puntos $(n = 2)$
$> i := 0$
$> n := 2$
seguir con
$> i := 1$
n es igual a dos en todo momento. Encontrar los productos

$$> L_0(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}; L_1(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)};$$
$$L_2(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

e incluir dichos productos en el polinomio de grado dos

$$p_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) \tag{4.17a}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2) f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1) f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{4.17b}$$

Esta ecuación se emplea para una Tabla que contenga 3 puntos.
Paso 3
Aproximación polinomial de Lagrange con cuatro puntos $(n=3)$

$> i := 0$

$> n := 3$

seguir con

$> i := 1$

$> i := 2$

n en todo momento es 3. Encontrar los productos

$$L_0 := x \to \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$L_1 := x \to \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$L_2 := x \to \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$L_3 := x \to \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

y sustituir dichos productos en el polinomio de grado 3

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3) \tag{4.18}$$

Para obtener

$$p_3(x)=\sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (4.19)$$

Esta ecuación se emplea para una Tabla que contenga 4 puntos.
Fin de desarrollo de formulario de Polinomios de Lagrange.

Problema 1
En la Tabla 4.5 se presentan las presiones de vapor del $MgCl_2$.

Tabla 4.5 Datos experimentales del cloruro de magnesio de presiones de vapor a su correspondiente temperatura.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7
P (mmHg)	10	20	40	60	100	200	400	760
T(°C)	930	988	1050	1088	1142	1316	1223	1418

Calcule la presión de vapor correspondiente a T = 1000°C (Nieves y Domínguez, 1996, p. 370).
Solución
Este problema se solucionó por 2 métodos, el de **Diferencias Divididas de Newton y Polinomios de Lagrange** y ambos se resolvieron con un programa en Python.

Diferencias Divididas de Newton
En un inició nos dará la opción de resolver dos problemas o ingresar nuestros datos, seleccionaremos la opción 1 que es la que usa la base de datos de este problema.
Y el programa nos irá calculando las diferencias, desde las primeras diferencias. Ver pantallas de Figs. 4.14-4.18 y 4.21 y 4.22. Asimismo, las gráficas de ajuste de datos a polinomio se muestran en las Figs. 4.19, 4.20, 4.23 y 4.24.

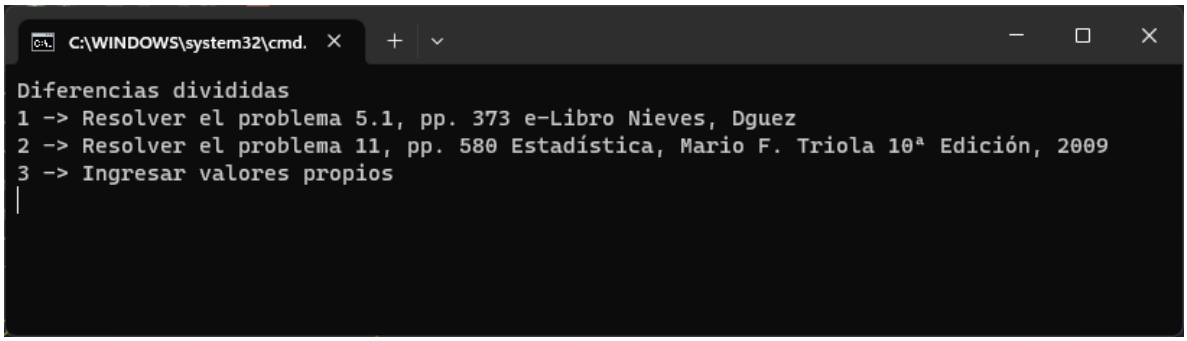


Fig. 4.14 Pantalla 1 para resolver dos problemas por Diferencias Divididas de Newton mediante el programa Python.

Fig. 4.15 Pantalla 2 para resolver dos problemas por Diferencias Divididas de Newton mediante el programa Python.

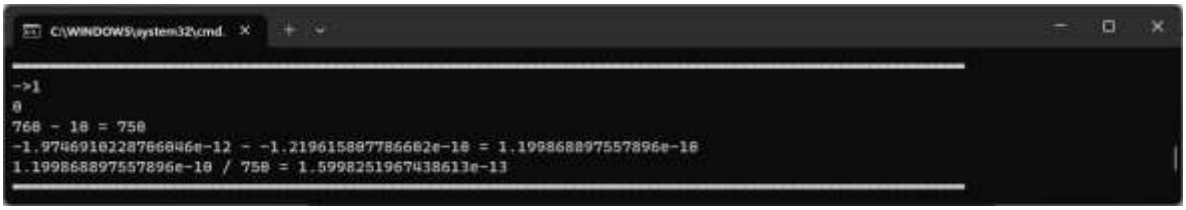


Fig. 4.16 Pantalla 3 para resolver dos problemas por Diferencias Divididas de Newton mediante el programa Python.

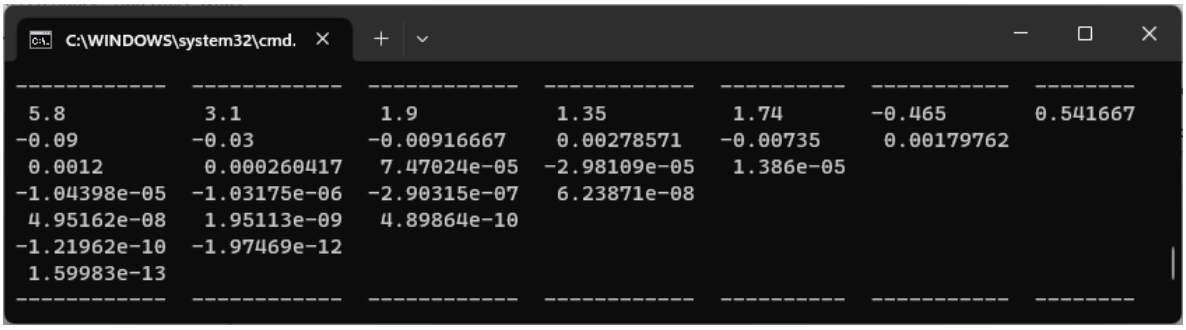


Fig. 4.17 Pantalla 4 para resolver dos problemas por Diferencias Divididas de Newton mediante el programa Python.

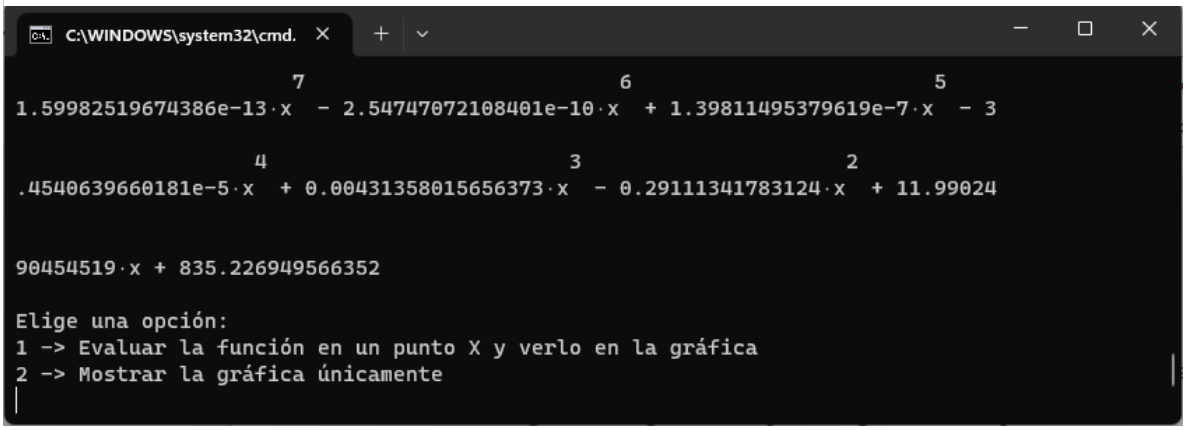


Fig. 4.18 Pantalla 5 para resolver dos problemas por Diferencias Divididas de Newton mediante el programa Python.

Hasta la *n* diferencia, Luego, nos imprime una tabla con únicamente los resultados de dichas diferencias

Note que las diferencias se imprimen de arriba a abajo

En las Figs. 4.19 y 4.20 el programa Python nos muestra la gráfica de ajuste de datos experimentales y el polinomio de grado 7 de los cálculos realizados.

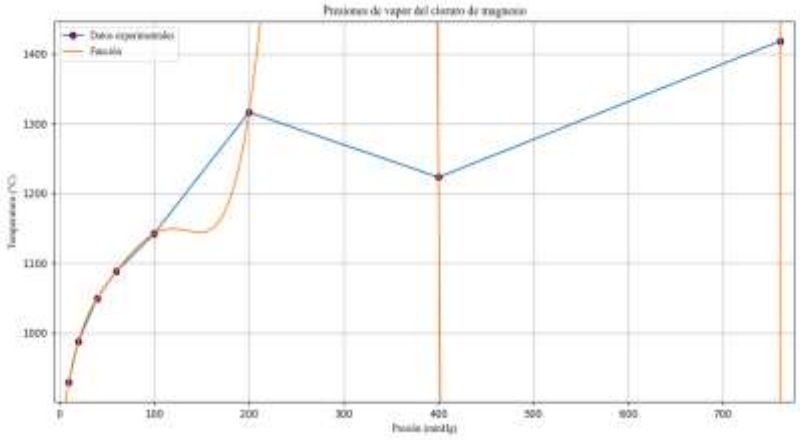


Fig. 4.19 Gráfica de comparación datos experimentales y la función

$$f(x) = 1.59982519674386 \times 10^{-13}x^7 - 2.54747072108401 \times 10^{-10}x^6 + 1.39811495379619 \times 10^{-7}x^5 - 3.4540639660181 \times 10^{-5}x^4 + 0.00431358015656373x^3 - 0.29111341783124x^2 + 11.9902490454519x + 835.226949566352$$

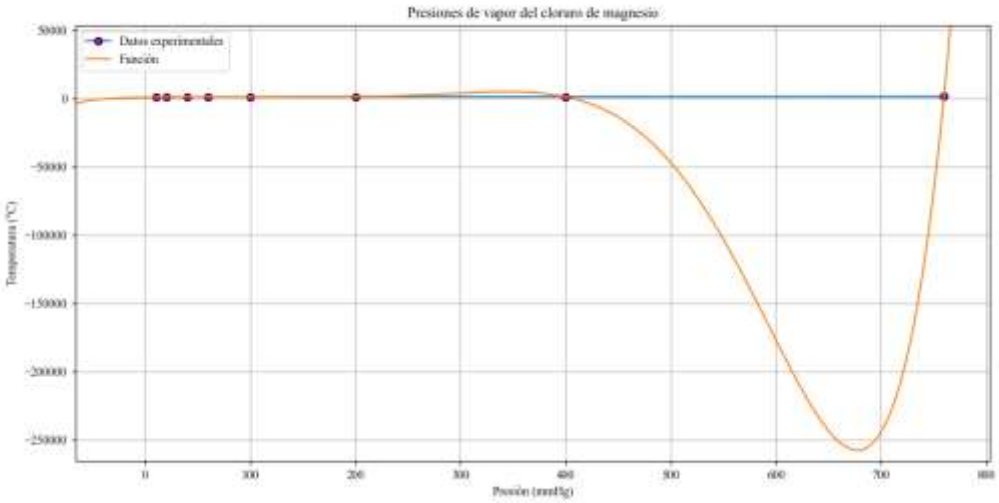


Fig. 4.20 Gráfica hecha zoom hacía atrás y comparación de datos experimentales y la función

$$f(x) = 1.59982519674386 \times 10^{-13}x^7 - 2.54747072108401 \times 10^{-10}x^6 + 1.39811495379619 \times 10^{-7}x^5 - 3.4540639660181 \times 10^{-5}x^4 + 0.00431358015656373x^3 - 0.29111341783124x^2 + 11.9902490454519x + 835.226949566352$$

Y finalmente nos mostrará la ecuación resultante junto a la opción de graficar un punto o únicamente graficar, antes de graficar hay que obtener $xf(x) = 1000$ cuando

Por lo que lo sustituimos en la ecuación resultante

$$f(x) = 1.59982519674386 \times 10^{-13}x^7 - 2.54747072108401 \times 10^{-10}x^6 + 1.39811495379619 \times 10^{-7}x^5 - 3.4540639660181 \times 10^{-5}x^4 + 0.00431358015656373x^3 - 0.29111341783124x^2 11.9902490454519x + 835.226949566352 = 1000$$

Por lo que igualamos a 0

$$f(x) = 1.59982519674386 \times 10^{-13}x^7 - 2.54747072108401 \times 10^{-10}x^6 + 1.39811495379619 \times 10^{-7}x^5 - 3.4540639660181 \times 10^{-5}x^4 + 0.00431358015656373x^3 - 0.29111341783124x^2 11.9902490454519x - 164.7730504 = 0$$

Ahora resolvemos el polinomio por el método de nuestra preferencia y obtendremos los siguientes resultados (ver Fig 4.21 con pantallas en lenguaje Python).

$x_1 = 22.82752026$
$x_2 = 401.3550074$
$x_3 = 759.9468198$

Obviaremos el resto de resultados obtenidos ya que son números imaginarios y no nos interesan para este problema. Así que por último evaluaremos la función en los 3 puntos obtenidos.

Conclusión

En conclusión, aparentemente el resultado más real es el de

$x_1 = 22.82752026$

Ya que es el que menos diverge de los datos experimentales.

$P(1000) = 23\ mmHg \triangleleft Respuesta.$

Polinomios de Lagrange

De igual forma con este programa nos dará la opción de solucionar dos problemas o ingresar uno nuevo, volveremos a elegir la opción 1

Ahora nos arrojará directamente la función resultante y podremos evaluar en un punto o graficar directamente

En vez de volver a calcular todas las raíces de nuevo, se usará el resultado ya obtenido con el método anterior, siendo este

$x = 22.82752026$

La Fig. 4.22 muestra las pantallas del programa Python para la solución del problema por el método de Lagrange.

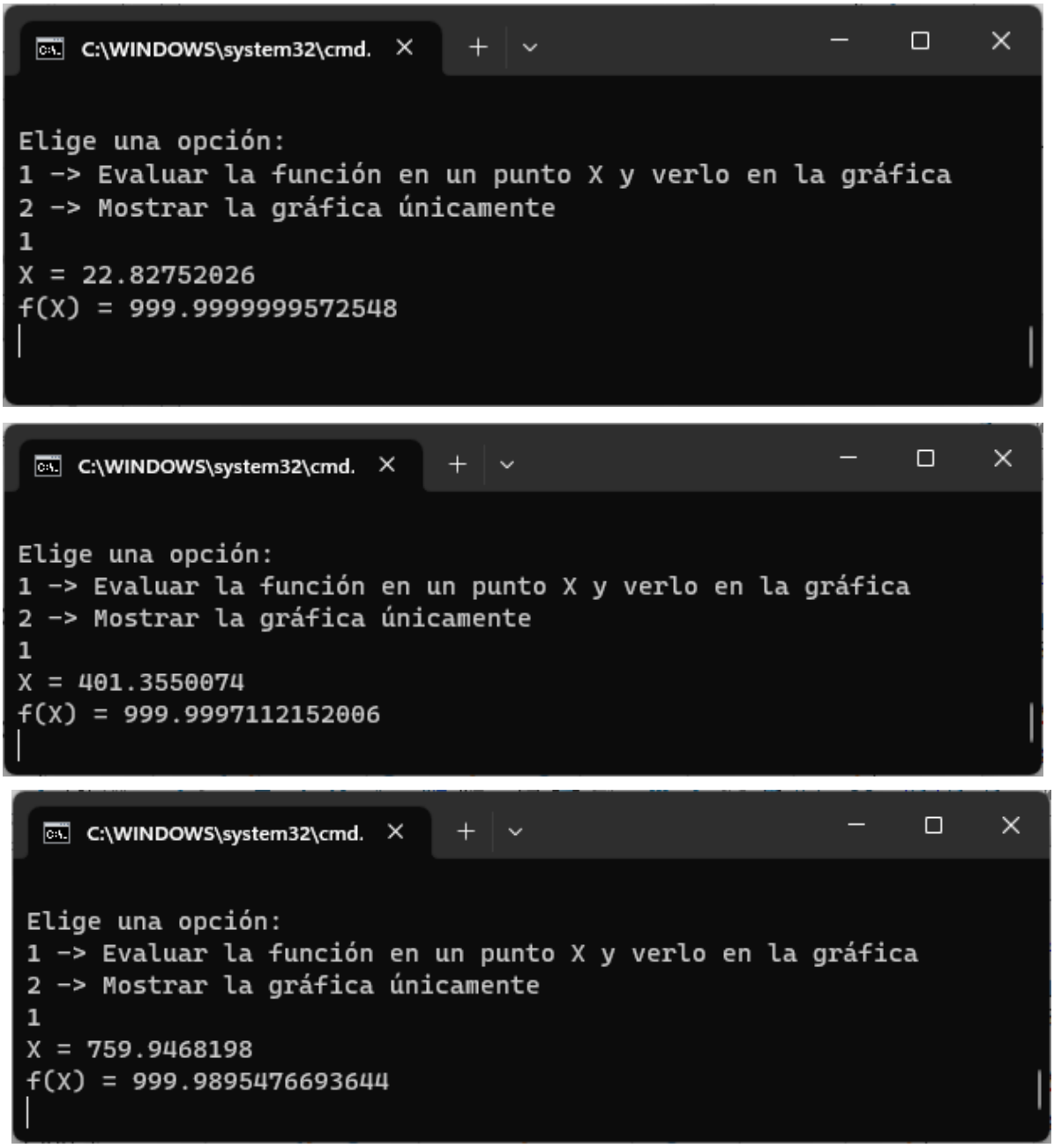


Fig. 4.21 Pantallas del programa Python para evaluar la función en un punto y observarlo gráficamente.

Fig. 4.22 Pantalla para resolver s problemas por el método de polinomios de Lagrange mediante el programa Python.

Las Figs. 23 y 24 son las gráficas obtenidas por el programa Python para este problema.

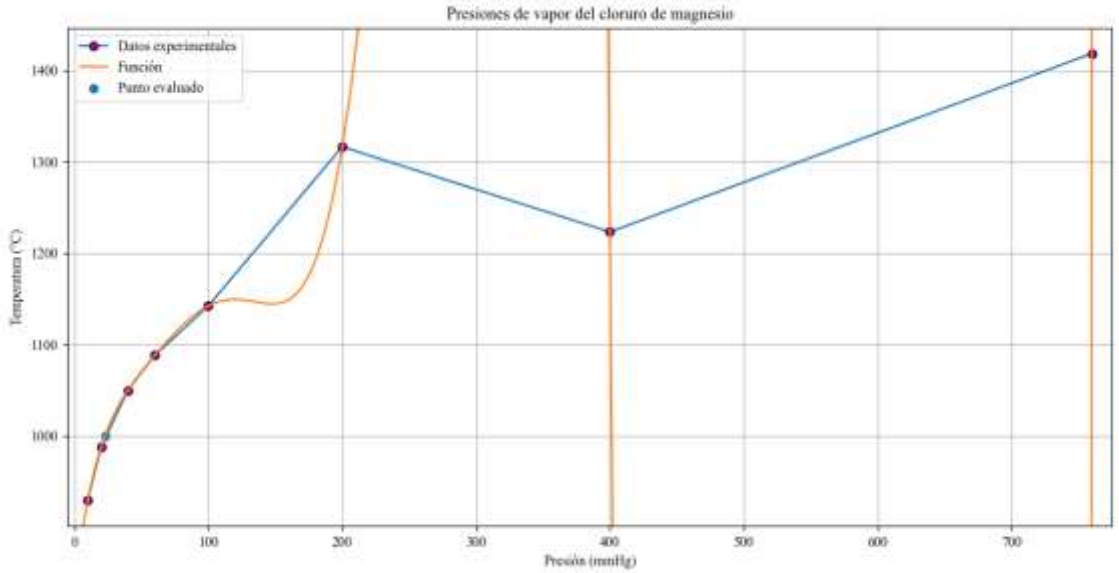


Fig. 4.23 Gráfica de datos experimentales, la función resultante y el punto evaluado.

$$f(x) = \frac{25002094367}{15628016371968000000000}x^7 - \frac{234187730213}{919295080704000000000}x^6 + \frac{15606973848443}{111628688371200000000}x^5 - \frac{192786315038413}{5581434418560000000}x^4 + \frac{1203798237653111}{279071720928000000}x^3 - \frac{78418458011}{269374248000}x^2 + \frac{+23422976048287}{1953502046496}x + \frac{1789054336915}{2141997858}$$

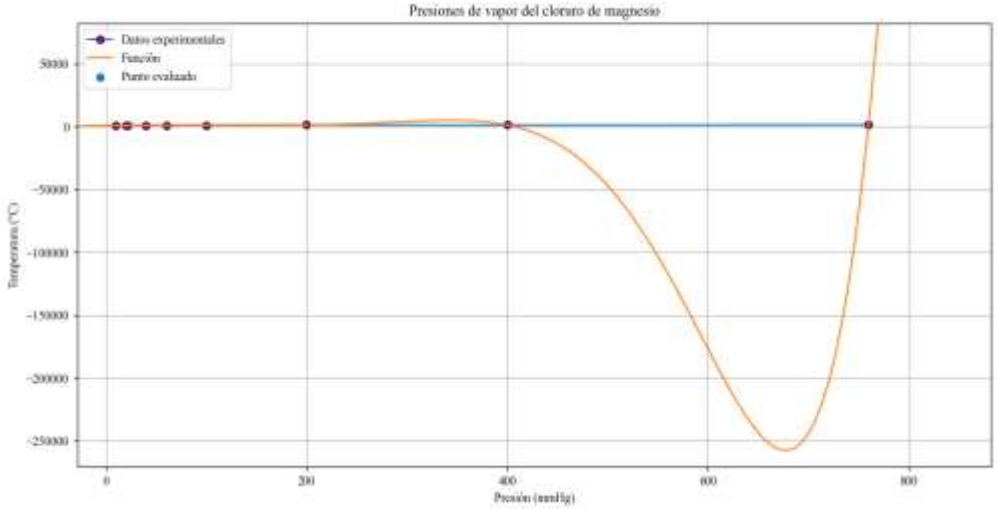


Fig. 4.24 Gráfica de datos experimentales, función resultante y el punto evaluado en código Python.

$$f(x) = \frac{25002094367}{15628016371968000000000}x^7 - \frac{234187730213}{919295080704000000000}x^6 + \frac{15606973848443}{111628688371200000000}x^5 - \frac{192786315038413}{5581434418560000000}x^4 + \frac{1203798237653111}{279071720928000000}x^3 - \frac{78418458011}{269374248000}x^2 + \frac{+23422976048287}{1953502046496}x + \frac{1789054336915}{2141997858}$$

En conclusión, podemos observar la similitud con la gráfica obtenida en el método anterior, con la diferencia de la función en que con el método de Lagrange obtenemos cocientes, así que por lo tanto sería lógico pensar que el mismo resultado obtenido también funcionaría y efectivamente al evaluar la nueva función en el punto de igual forma se obtiene un resultado muy similar.

Los códigos Python de diferencias divididas de Newton y polinomios de Lagrange se encuentran en el Anexo 1 del Capítulo 4.

Problema 2

Elaborar un programa para leer una tabla de m pares de valores e interpolar o extrapolar, utilizando **polinomios de Lagrange** usando los datos de las presiones de vapor del cloruro de magnesio la Tabla 4.6. Calcular la presión de vapor a T = 1000°C (base de datos tomada de Nieves y Domínguez, 1996, pp. 375).

Tabla 4.6 Presiones de vapor del $MgCl_2$ y correspondientes temperaturas.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7
Presión (mmHg)	10	20	40	60	100	200	400	760
Temperatura (°C)	930	988	1050	1088	1142	1316	1223	1418

Solución

El programa en código Python realizado se elaboró mediante el **método de polinomio de Lagrange**, arroja el resultado de P = 23 mmHg para 1000 °C. Asimismo, podemos observar en la Fig. 4.25 que grafica Python, los valores de la presión a otras temperaturas. El programa predice la presión para cualquiera temperatura dada. En el Anexo 1 del Capítulo 4 se describe el código Python elaborado ▹ *Respuesta* .

La Fig. 4.25 muestra la gráfica de los datos experimentales de presión y temperatura, la línea de interpolación de **polinomios de Lagrange** de que hace uso el programa y muestra los valores interpolados de presión para distintas temperaturas. En el Anexo 1 del Capítulo 4 se presenta el codigo Python para distintos grados de polinomios de Lagrange ▹ *Respuesta*

En la Fig. 4.26 se muestra la curva del polinomio de grado 8 que arroja el código Python para el mejor ajuste de datos experimentales (ver Codigo Python para distintos grados de polinomios de Lagrange del Problema 2 del punto 4.4 Polinomios de Lagrange en el Anexo 1 del Capítulo 4).

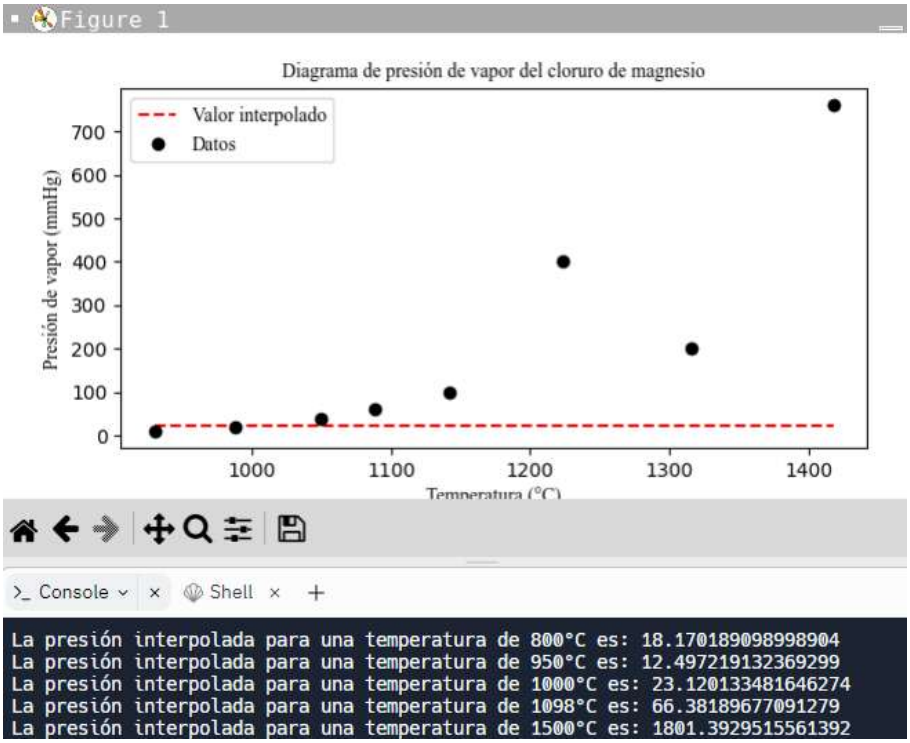


Fig. 4.25 Resultados del código Python de las presiones de valor del cloruro de magnesio para cualesquiera temperaturas. Gráfica de datos experimentales y valores de la interpolación del polinomio de Lagrange.

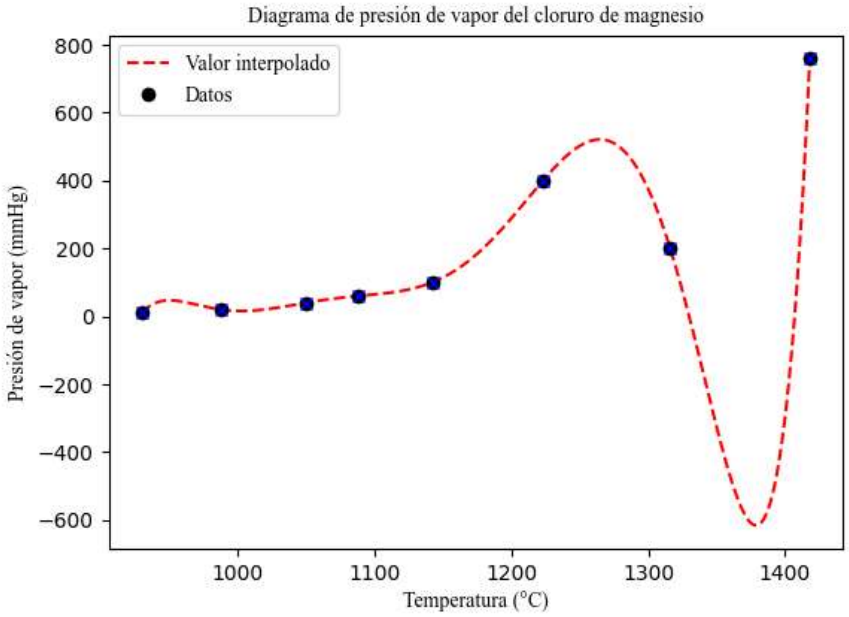


Fig. 4.26 Polinomio de grado 8 que se ajusta a los datos experimentales de la presión de vapor y temperatura del cloruro de magnesio.

4.5 Método de diferencias finitas

La Ecuación (el Polinomio) de Newton en Diferencias Hacia Delante
En esta sección se explica el método de diferencias finitas mediante el polinomio de Newton. Así, obtenemos el polinomio para diferencias finitas como

$$p_n(x)=p_n(x_0+sh)=f[x_0]+s\Delta f[x_0]+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\ldots+\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0) \quad (4.20)$$

$$p_n(x)=f(x_1+sh)=f[x_1]+s\Delta f[x_1]+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_1)$$
$$+\ldots+\frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_1) \quad (4.21)$$

La Ecuación (el Polinomio) de Newton en Diferencias Hacia Atrás
De la misma forma, el polinomio para usar diferencias hacia atrás para aproximar el valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente que obviamente se encuentra entre los valores de la variable independiente dados, es

$$p_n(x_n+sh)=f[x_n]+s\Delta f[x_n]+\frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 f(x_n) \quad (4.22)$$
$$+\ldots+\frac{s(s+1)\ldots(s+(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_n)$$

Problema 1
La Tabla 4.7 proporciona las presiones de vapor en lb pulg^{-2} a diferentes temperaturas para el 1-3 butadieno

Tabla 4.7 Presiones de vapor a diferentes temperaturas.

Puntos	0	1	2	3	4	5
$T\ ^\circ F$	50	60	70	80	90	100
P lb pulg^{-2}	24.94	30.11	36.05	42.84	50.57	59.30

Aproximar la función tabulada por el **polinomio de Newton en diferencias hacia delante e interpolar** la presión a la temperatura de 64 $^\circ F$ (Nieves y Domínguez, 1996, p. 340).

Solución.
Primero se construye la tabla de **diferencias hacia delante** (quedando lista también la tabla de diferencias hacia atrás, es decir, contiene ambas diferencias).

Punto	x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$	$\Delta^3 f[x_i]$	$\Delta^4 f[x_i]$
0	50	24.94				
			$\Delta f[x_0]=5.17$		Diferencias finitas hacia delante	
1	60	30.11		$\Delta^2 f[x_0]=0.77$		
			$\Delta f[x_1]=5.94$		$\Delta^3 f[x_0]=0.08$	
2	70	36.05		$\Delta^2 f[x_1]=0.85$		$\Delta^4 f[x_0]=0.01$
			$\Delta f[x_2]=6.79$		$\Delta^3 f[x_1]=0.09$	
3	80	42.84		$\Delta^2 f[x_2]=0.94$		$\Delta^4 f[x_1]=-0.03$
			$\Delta f[x_3]=7.73$		$\Delta^3 f[x_2]=0.06$	
4	90	50.57		$\Delta^2 f[x_3]=1.00$		
			$\Delta f[x_4]=8.73$			
5	100	59.30				

Procedimiento

Después de haber hecho la tabla de diferencias hacia adelante, se declaran todos los valores del polinomio de Newton en diferencias finitas hacia adelante, para con ello, aproximar a polinomios de grado n. En este caso, vamos a **aproximar a polinomios de primer, segundo y tercer grado**. El polinomio de Newton de tercer grado es

$$p_n(x) := f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + \frac{1}{2}s(s-1)\,\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\,\Delta^3 f(x_0)$$

```
> h := 10 :
> x := 64 :
> x0 := 50 :
> s := (x - x0)/h
> s := (x - x0)/h = (64 - 50)/10 = 1.4
> s := 1.4 :
```

```
> f(x0) := 24.94 :
> f(x1) := 30.11 :
> f(x2) := 36.05 :
> f(x3) := 42.84 :
> f(x4) := 50.57 :
> f(x5) := 59.30 :
> Δf(x0) = 30.11 - 24.94
> Δf(x0) = 5.17 :
> Δ^2 f(x0) = 36.05 - 30.11
> Δ^2 f(x0) = 0.77 :
```

De la tabla de diferencias finitas hacia adelante, la diferencia $\Delta^3 f(x_0)$ se obtiene de $\Delta^3 f(x_0)=\Delta^2 f(x_1)-\Delta^2 f(x_0)=0.85-0.77=0.08$

> $\Delta^3 f(x_0) = 0.08$:

Usando como pivote x_0

Aproximación a un polinomio de primer grado

> $p_n(x) := f(x_0) + s \cdot \Delta f(x_0)$:

> $p_1(x) := f(x_0) + s \cdot 5.17$

$p_1(x) := 32.178$

De la tabla de diferencias finitas hacia adelante se tiene que

$\Delta f(x_0) = 5.17$

Aproximación a un polinomio de segundo grado

> $p_n(x) := f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\Delta^2 f(x_0)$

> $p_2(x) := f(x_0) + s \cdot 5.17 + \frac{1}{2} s\,(s-1) \cdot 0.77$

$p_2(x) := 32.39360000$

> $p_2(64) := 32.39360000$

De la tabla de diferencias finitas hacia adelante se tiene que

$\Delta^2 f(x_0) = 0.77$

$\triangleleft$ *Respuesta* . Podemos continuar, con lo cual se obtienen valores similares a este.

Aproximación a un polinomio de tercer grado

> $p_3(x) := f(x_0) + s \cdot 5.17 + \frac{1}{2} s\,(s-1) \cdot 0.77 + \frac{1}{6} s\,(s-1)\,(s-2)$
$\cdot 0.08$

$p_3(x) := 32.38912000$

Usando los puntos 1 y 2, habrá que modificar el polinomio por

> $p_3(x) := f(x_1) + s\,\Delta f(x_1) + \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\Delta^2 f(x_1) + \frac{1}{6} s\,(s-1)\,(s$
$- 2)\,\Delta^3 f(x_1)$

> $s := \frac{x - x_1}{h} = \frac{64 - 60}{10} = 0.4$

> $s := 0.4$:

> $f(x_1) := 30.11$:

Aproximación a un polinomio de primer grado

> $p_n(x) := f(x_1) + s\,\Delta f(x_1)$

> $p_n(x) := f(x_1) + s \cdot 5.94$

$p_n(x) := 32.486$ $\Delta f(x_1) = 5.94$

Aproximación a un polinomio de segundo grado

> $p_n(x) := f(x_1) + s\,\Delta f(x_1) + \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\Delta^2 f(x_1)$

> $p_n(x) := f(x_1) + s \cdot 5.94 + \frac{1}{2} s\,(s-1) \cdot 0.85$

$p_n(x) := 32.38400000$ $\Delta^2 f(x_1) = 0.85$

Aproximación a un polinomio de tercer grado

$$> p_n(x) := f(x_1) + s\,\Delta f(x_1) + \frac{1}{2}s(s-1)\,\Delta^2 f(x_1) + \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\,\Delta^3 f(x_1)$$

$$> p_n(x) := f(x_1) + s\cdot 5.94 + \frac{1}{2}s(s-1)\cdot 0.85 + \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\cdot 0.09$$

$p_n(x) := 32.38976000$

Donde,

$\Delta^3 f(x_1) = 0.09$

Enseguida se muestra la table de diferencias finitas hacia atrás con los datos y valores calculados

Punto	x_i	$f[x_i]$	$\nabla f[x_i]$	$\nabla^2 f[x_i]$	$\nabla^3 f[x_i]$	$\nabla^4 f[x_i]$
0	50	24.94				
			$\nabla f[x_1] = 5.17$			
1	60	30.11		$\nabla^2 f[x_2] = 0.77$		
			$\nabla f[x_2] = 5.94$		$\Delta^3 f[x_3] = 0.08$	
2	70	36.05		$\nabla^2 f[x_3] = 0.85$		$\Delta^4 f[x_4] = 0.01$
			$\nabla f[x_3] = 6.79$		$\Delta^3 f[x_4] = 0.09$	
3	80	42.84		$\nabla^2 f[x_4] = 0.94$		$\Delta^4 f[x_5] = -0.03$
			$\nabla f[x_4] = 7.73$		$\Delta^3 f[x_5] = 0.06$	
4	90	50.57		$\nabla^2 f[x_5] = 1.00$		
			$\nabla f[x_5] = 8.73$			
5	100	59.30				

Diferencias finitas hacia atrás

Problema 2

Interpole el valor de la presión a una temperatura de 98 ºF, utilizando la tabla de presiones de vapor del Problema 1 y el **polinomio de Newton en diferencias finitas hacia** atrás (base de datos tomada de Nieves y Domínguez, 1996, p. 344), es decir, Ec. (4.22)

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f(x_n) + s\,\Delta f(x_n) + \frac{1}{2!}s(s+1)\,\Delta^2 f(x_n) + \frac{1}{6}s(s+1)(s+2)\,\Delta^3 f(x_n) + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_n) \qquad (4.22)$$

Solución

La tabla de diferencias hacia atrás ya fue construida en el Problema 1.

Procedimiento.

```
> h := 10 :
> x := 98 :
> xn := 100 :
```

> $f(xn) := 59.30$:

> $s := \frac{x - xn}{h}$

$s := -\frac{1}{5}$

> $f(x_5) := 59.30$:

> $\nabla f(x_5) = 8.73$:

> $\nabla^2 f(x_5) = 1$

Aproximación a un polinomio de primer grado

> $p_n(x) := f(x_5) + s\,\Delta f(x_5)$

> $p_n(x) := f(x_5) + s \cdot 8.73$

$p_n(98) := 57.55400000$

Aproximación a un polinomio de segundo grado

> $p_n(x) := f(x_5) + s\,\nabla f(x_5) + \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\nabla^2 f(x_5)$

> $p_n(x) := f(x_5) + s \cdot 8.73 + \frac{1}{2} s\,(s-1) \cdot 1$

$p_n(98) := 57.67400000$

de la tabla de diferencias finitas hacia atrás se tiene que

> $\nabla^2 f(x_5) = 1$

Aproximación a un polinomio de tercer grado

> $p_n(x) := f(x_5) + s\,\nabla f(x_5) + \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\nabla^2 f(x_5) + \frac{1}{6} s\,(s-1)\,(s-2)\,\nabla^3 f(x_5)$

> $p_n(x) := f(x_5) + s \cdot 8.73 + \frac{1}{2} s\,(s-1) \cdot 1 + \frac{1}{6} s\,(s-1)\,(s-2) \cdot 0.06$

$p_n(98) := 57.66872000$

de la tabla de diferencias finitas hacia atrás se tiene que

> $\nabla^3 f(x_5) = 0.06$

Fin.

4.6 Regresiones

El avance que de este capítulo se presenta en este documento, se refiere a la elaboración de gráficas para ajustar datos a modelos matemáticos mediante regresión estadística. Hacemos uso de Excel para obtener gráficas mediante regresión estadística y determinamos el coeficiente múltiple de determinación R^2 que nos brinda información del ajuste de datos en el intervalo de 0 a 1, siendo 1 la mejor respuesta de ajuste. Asimismo, presentamos un ejemplo de ajuste de modelos matemáticos a una base de datos tomada de Triola (2009), usando el software Maple en su solución. En este capítulo, también recurrimos a problemas de Walpole, *et al.* (2007) y se consultó el libro de Montgomery *et al.* (2006).

Ajuste de datos observados y graficados en gráficas de dispersión

Los datos dados en un problema y graficados en gráficas denominadas de dispersión, los cuales pueden ser observados con tendencia a formar una recta, una curva o ser totalmente amorfos, son candidatos a

ser ajustados mediante modelos matemáticos que mejor ajusten a dichos datos. Estos modelos matemáticos han sido clasificados como lineales ($y = a + bx$), logarítmicos ($y = a + b\,ln(x)$), potencia ($y = ax^b$), cuadráticos ($y = ax^2 + bx + c$), exponenciales ($y = ab^x$), polinomios de grado n, regresión lineal simple, regresión lineal múltiple, etc.

Uso de Excel en Cálculos de Modelos Matemáticos de Regresión Múltiple

1. Ingresar los datos muestrales por columnas x y y.
2. Seleccionar del menú principal: Datos → Análisis de datos → Regresión.
3. En el cuadro de diálogo posicionarse en columna de datos de la variable dependiente y y enseguida pasarse a la hoja de trabajo de Excel donde se tecleó la columna de y y seleccionar todos los datos, los cuales se pasan automáticamente al cuadro de diálogo como por ejemplo así: $A$1:$A$11. Lo mismo para la variable independiente x con $B$1:$B$11. Un ejemplo en Excel es el de la Fig. 4.27.

Los resultados incluirán el coeficiente múltiple de determinación R^2 y la R^2 ajustada, el gráfico de dispersión (gráfico de probabilidad normal), gráfica de la curva de regresión ajustada (valores del intercepto y el coeficiente utilizados para la ecuación de regresión múltiple), entre otros. Ver ejemplo a continuación. Para el conjunto de datos tecleados en Excel como los de la Tabla 4.8.

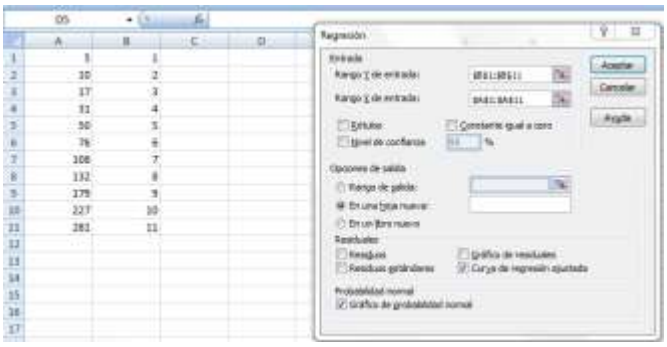


Fig. 4.27 Tabla de datos introducidos en Excel para ajustarlos a algún modelo matemático.

Tabla 4.8 Datos a ajustar

x	y
5	1
10	2
17	3
31	4
50	5
76	6
106	7
132	8
179	9
227	10
281	11

Los resultados de Excel se dan mediante el resumen de estadísticas de la regresión, los gráficos de la probabilidad normal y la curva de regresión ajustada de las Figs. 4.28 y 4.29.

Resumen

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.96153312
Coeficiente de determinación R^2	0.92454594
R^2 ajustado	0.91616216
Error típico	0.96032092
Observaciones	11

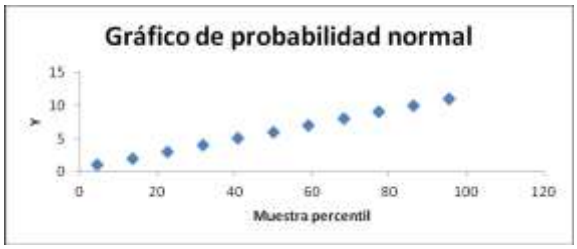


Fig. 4.28 Gráfica de datos experimentales de la Tabla 4.1.Fig. 2.1 Gráfica del polinomio del Ejemplo por el Método de Bisección.

Fig. 4.29 Gráfica de datos ajustados a una curva de regresión.

Coeficiente múltiple de determinación R^2

Este coeficiente nos permite conocer con qué precisión se ajustan las funciones a los puntos observados (datos del problema, gráfica de dispersión de los datos).

Es una medida de lo bien que se ajusta la ecuación de regresión múltiple a los datos muestrales. Los ajustes significan

$R^2 = 1$	Ajuste perfecto
$R^2 \approx 1$	Ajuste muy bueno
$R^2 \approx 0$	Ajuste muy deficiente

R^2 ajustada

R^2 ajustada es el coeficiente múltiple de determinación R^2 modificado que justifica el número de variables y el tamaño de la muestra, ya que el coeficiente múltiple de determinación R^2 tiene la desventaja de que se incrementa a mayor número de variables incluidas. Por esto, es mejor usar el valor de R^2 ajustada como el mejor ajuste a los datos observados. La ecuación que representa a R^2 ajustada es

$$R^2\ ajustada = 1 - \frac{n-1}{(n-(k+1))}\left(1-R^2\right) \tag{4.23}$$

Donde,

n	Tamaño muestral
k	Número de variables de predicción (x)

Uso de Tecnología Computacional

¿Qué nos evita el hacer uso de la herramienta tecnológica computacional o la calculadora Texas instruments TI89/voyage200?

Realizar cálculos manuales tediosos poco prácticos que constituyen una amenaza para la salud mental. Por ejemplo, nos evita tener que calcular los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ de la ecuación de regresión múltiple

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k \tag{4.24}$$

n = Tamaño de la muestra.
k = Número de variables de predicción (variables independientes o variables x.
$\hat{y}$ = Valor predicho de y donde las variables de predicción son $x_1, x_{2,} \ldots, x_k$.
β_0 = Intercepto y, valor de y cuando todas las variables son 0. Parámetro poblacional.
b_0 = Estadístico muestral. Estimado de β_0 basado en los datos muestrales.
$\beta_1, \beta_{2,} \ldots, \beta_k$ = Coeficientes de las variables de predicción $x_1, x_{2,} \ldots, x_k$.
$b_1, b_2, \ldots b_k$ = Estimados muestrales de los coeficientes $\beta_1, \beta_{2,} \ldots, \beta_k$

Donde

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2} \tag{4.25}$$

Como ejemplo, tenemos el conjunto de datos de la Tabla 4.1
Cálculo de b

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 66$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 506$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 9676$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2}$$

$$b = \frac{4838}{253}$$

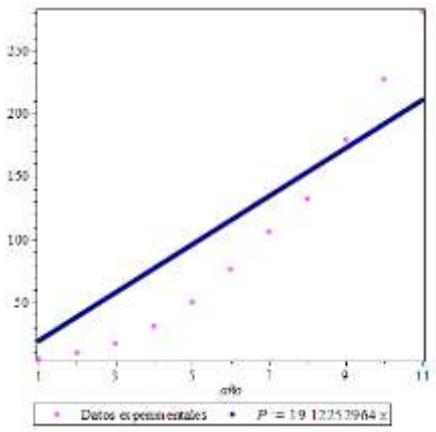


Fig. 4.30 Ajuste de datos experimentales a una recta. Se observa que los datos ajustan a una curva.

$b := 19.12252964$
La línea recta se representa por el modelo $y = bx$, por tanto, el modelo matemático viene dado por la Fig. 4.30 como
$y = 19.12252964x$
Gráfica de la línea recta que mejor ajusta a los datos dados. La gráfica de los datos experimentales y la recta $y = 19.12252964x$ a la que se esperaba ajustaran, se muestra en la Fig. 4.30. Como se observa en la Fig. 4.30, los datos no ajustan a una recta.

Podemos hacer uso de Excel en Cálculos de Coeficientes de Modelos Matemáticos Lineales y Logarítmicos. Ajuste de una Recta y Ajuste de una Curva: Uso de Excel para Estimación Lineal y Estimación Logarítmica, entre otros.
En este capítulo resolvemos problemas a través de ajuste de Curvas mediante Funciones Matemáticas Lineales, Exponenciales, Exponencial No Lineal en Parámetros, Cuadráticas, Cúbicas y Polinomiales de Grado n como la que se presenta en la Fig. 4.31, cuya base de datos fue tomada de Triola (2009).
También, se hace uso de Maple para el cálculo de modelos lineales, polinómicos y exponenciales para ilustrar la importancia del ajuste de una línea recta, una curva y una función a un conjunto de datos dados de los cuales necesitamos analizar su comportamiento en una determinada aplicación.

Para calcular y graficar modelos matemáticos en Maple, se siguen instrucciones precisas que permiten realizar gráficas de ajuste de datos experimentales como el de la Fig. 4.31.

Función ESTIMACION.LOGARITMICA en Excel
Calcula, en análisis de regresión, una curva exponencial que se ajusta a los datos y devuelve la matriz de valores que describe dicha curva. Debido a que esta función devuelve una matriz de valores, debe ser especificada como una fórmula de matrices.
La ecuación de la curva es:

$$y = bm^x$$

o

$$y = b \cdot \left(m_1^{x^1} \right) \cdot \left(m_2^{x^2} \right) \cdot \quad ...(si\ hay\ varios\ valores\ de\ x)$$

y donde el valor dependiente y es una función de los valores independientes x. Los valores m son bases que corresponden a cada valor exponencial de x; b es un valor constante. Observe que y, x y m pueden ser vectores. La matriz que ESTIMACION.LOGARITMICA devuelve es $\{mn, mn-1, ..., m1, b\}$.
Así ESTIMACION.LOGARITMICA ajusta una curva exponencial.

Cuando se especifica como una matriz, se devuelven los coeficientes m y la constante b.
$y = b \cdot \left(m_1^{x^1} \right)$ o si se usan los valores de la matriz, por ejemplo: $y = (495.3) \cdot (1.4633x)$.

$$ln(y) = x_1\, ln(m_1) + ... + x_n\, ln(mn) + ln(b)$$

Ajuste de Curvas mediante Funciones Matemáticas Lineales, Exponenciales, Exponencial No Lineal en Parámetros, Cuadráticas, Cúbicas y Polinomiales de Grado n usando el software Maple
El ajuste de curvas mediante funciones matemáticas representativas de modelos lineales, cuadráticos, cúbicos, polinomiales de cualquier grado, exponenciales, logarítmicos, potencia, etc. se realiza mediante cálculos manuales y/o computacionales para determinar los parámetros del modelo. Una vez obtenido el modelo, se elaboran dos tipos de gráficas: de dispersión de los datos dados en un problema de aplicación, y la gráfica representada por una función o modelo matemático que mejor ajusta a los datos observados. Actualmente existe software matemático ingenieril y estadístico que nos permite ahorrar tiempo y esfuerzo y nos proporciona mayor cantidad de tiempo para analizar los comportamientos tendenciales de las gráficas. A este respecto, Maple es una poderosa herramienta tanto para los cálculos tediosos y complejos que implican los modelos estadísticos de regresión (lineal y simple), como para la graficación de los modelos matemáticos resultantes de los cálculos. Aprovechando las características excepcionales de este software, hacemos uso de Maple para el cálculo de modelos lineales, polinómicos y exponenciales para ilustrar la importancia del ajuste de una línea recta, una curva y una función a un

conjunto de datos dados de los cuales necesitamos analizar su comportamiento en una determinada aplicación.
Para calcular y graficar modelos matemáticos en Maple, se siguen las instrucciones que se describen.

a) Teclear los datos del problema en forma de vectores:

```
> with(Statistics):
```

Definir los vectores X e Y, que contienen valores de una variable independiente x y una variable dependiente y

```
> X := Vector([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]):
> Y := Vector([5,10,17,31,50,76,106,132,179,227,281]):
```

Dar **ENTER** en los renglones donde haya prompt (>)

b) Teclear las siguientes instrucciones para graficar modelos exponenciales, cuadráticos (**polynomial of degree 2**), cúbicos (**polynomial of degree 3**) y funciones no lineales en los parámetros, respectivamente (siempre dar **ENTER** en los renglones donde haya prompt (>)). Los resultados que se muestran son los resultados que devuelve Maple al dar ENTER en la instrucción con prompt (>), que es la que se va a graficar.

Encontrar los valores de $a\ y\ b$ que minimicen el error de mínimos cuadrados cuando se utiliza la función modelo $at + be^x$, la instrucción es

```
> Fit(a*x+b*exp(x), X, Y, x);
```

$$14.7728125765395\,x + 0.00223041876711980\,e^{x}$$

Los modelos matemáticos para el cálculo de polinomios de cualquier grado, son
Fit a polynomial of degree 2 through this data.

```
> PolynomialFit(2, X, Y, x);
```

$$10.0121212121212 - 6.00279720279720\,x + 2.76689976689977\,x^2$$

Fit a polynomial of degree 3 through this data.

```
> PolynomialFit(3, X, Y, x);
```

$$3.50000000000004 - 0.623737373737397\,x + 1.69347319347320\,x^2 + 0.0596348096348093\,x^3$$

El ajuste de la función del modelo $ax + e^{bx}$, que no es lineal en los parámetros, se escribe como

```
> NonlinearFit(a*x+exp(b*x), X, Y, x);
```

$$10.2148716632282\,x + e^{0.472858365990166\,x}$$

Gráficas en Maple

Todas las gráficas en una sola

i. Línea recta:

```
> b := evalf(4838/253)
```

$$b := 19.12252964$$

```
> Población := b·x
```

$$Población := 19.12252964\,x$$

ii. least-squares error:

```
> LSE:=14.7728125765395*x+0.223041876711980e-2*exp(x):
```

iii. polynomial of degree 3

```
> PD3:=3.50000000000004-.623737373737397*x+1.69347319347320*x^2+0.596348096348093e-1*x^3:
```

iv. Model function $ax + e^{bx}$, which is nonlinear in the parameters

```
> MFNP := 10.2148716632282*x + e^(0.472858365990166*x):
```

Etc.

Teclear:

```
> with(plots) :
G1:=pointplot(Matrix([[1,5],[2,10],[3,17],[4,31],[5,50],[6,76],[7,106],[8,132],[9,179],[10,227],[11,281]]
,datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black"):
> G2 := plot(Población, x = 1 ..11, P = 0 ..300, color = "Navy", style
      = point, symbol = diamond) :
> LSE:=plot(LSE,x=1..11,P=0..300,axes = boxed, style = point, symbol = box, color = "Crimson"):
> PD3:=plot(PD3,x=1..11,P=0..300,axes = boxed, style = point, symbol = cross, color = "SeaGreen"):
> MFNP := plot(MFNP, x = 1 ..11, P = 0 ..300, axes = boxed, style
      = point, symbol = point, color = "DodgerBlue") :
> display({G1, G2, LSE, PD3, MFNP}, axes = boxed, title
      = Población 1800-2000 (en millones) de Estados Unidos);
```

Se obtendrá una gráfica como la de la Fig. 4.31

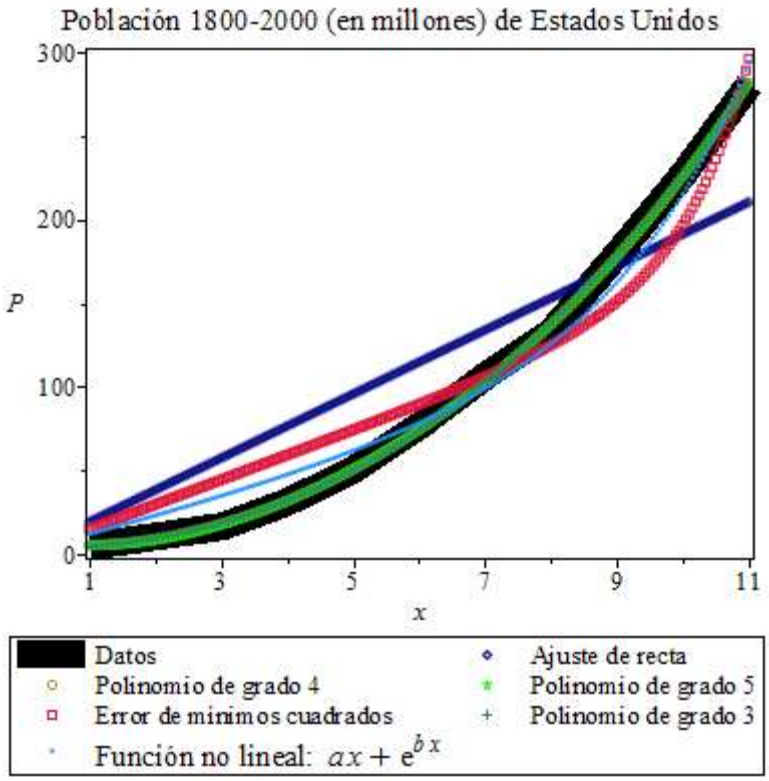


Fig. 4.31 Distintos modelos para ajustar los datos experimentales de la población de Estados unidos en los años 1800 a 2000. El mejor ajuste en este caso, está dado por el polinomio de grado 5 (visible) y el polinomio de grado 4 (oculto).

Ejemplo de Graficación de Ajuste de Datos

Construir un diagrama de dispersión e identificar el modelo matemático que se ajusta mejor a los datos indicados.

Muertes de manatíes por barcos. Los datos de la Tabla 4.9 que se dan muestra el número de muertes de manatíes en Florida, relacionadas con encuentros con embarcaciones (según datos recabados de Florida Fish and Wildlife Conservation).

Tabla 4.9 Muerte de manatíes por barcos en distintos años.

Año	Muertes	Año	Muertes	Año	Muertes
1983	15	1990	47	1997	54
1984	34	1991	53	1998	67
1985	33	1992	38	1999	82
1986	33	1993	35	2000	78
1987	39	1994	49	2001	81
1988	43	1995	42	2002	95
1089	50	1996	60	2003	73
				2004	69

Información sobre manatíes tomado de la fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Trichechus. Los triquéquidos (Trichechidae) son una familia de mamíferos placentarios del orden Sirenia conocidos vulgarmente como manatíes o vacas marinas. Sólo sobrevive un género, Trichechus, con cuatro especies.

Son apacibles herbívoros que pasan la mayor parte de su tiempo buscando e ingiriendo las plantas ribereñas y del lecho marino de aguas poco profundas. Los manatíes viven en aguas tanto dulces como saladas, cerca de las costas de América y África. Su único depredador es el hombre; y aunque no existen registros, se presume que con poca frecuencia las orcas podrían atacar a los triquéquidos, puesto que estos, por ser grandes, lentos y gordos, parecen una presa ideal para estos depredadores; sin embargo, debido a la distribución de los triquéquidos, que principalmente se da en aguas costeras y de relativa baja profundidad (y frecuentemente en aguas dulces) de los trópicos, en donde las orcas aparecen en raras ocasiones, se cree que los triquéquidos escapan de su depredación frecuente[1].

Solución

En la gráfica de Maple se observa tanto la gráfica de dispersión de los datos dados, como los modelos matemáticos de ajuste. Se observa que los modelos que mejor ajustan a los datos dados en este problema son los Polinomios de Grados 4 y 5. Además en Excel se obtuvo la gráfica de dispersión de los datos y también se hizo el cálculo del coeficiente múltiple de determinación R^2 como se muestra. Al parecer con R^2 ajustado = 0.76515163 el modelo es adecuado.

[1] Jefferson, T. A., Stacey, P. J. & baird, R. W. (1991). A review of Killer Whale interactions with other marine mammals: predation to co-existence. Mammal Rev., vol.21, n.4, pp. 151-180.

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.88109868
Coeficiente de determinación R^2	0.77633489
R^2 ajustado	0.76515163
Error típico	9.77682645
Observaciones	22

Modelos Matemáticos de Ajuste de los Datos

Forma en que se teclean los datos del problema y los modelos de ajuste

Tecleando los años como 1,2,3,4,5,....

```
> with(Statistics):
```

Definir los vectores X e Y, que contienen valores de una variable independiente x y una variable dependiente y

```
> X := Vector([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22]):
> Y := Vector([15,34,33,33,39,43,50,47,53,38,35,49,42,60,54,67,82,78,81,95,73,69]):
```

Find the values of a and b that minimize the least-squares error when the model function $a\,t + b\,e^{x}$ is used.

```
> Fit(a*x+b*exp(x), X, Y, x);
```

$$4.46439813979912\,x - 8.75457127891296\,10^{-9}\,e^{x}$$

Fit a polynomial of degree 3 through this data.

```
> PolynomialFit(3, X, Y, x);
```

$$25.3964456596035 + 1.51747055385503\,x + 0.0927754168028731\,x^2 - 0.00194854725747165\,x^3$$

Fit the model function $a\,x + e^{b\,x}$, which is nonlinear in the parameters.

```
> NonlinearFit(a*x+exp(b*x), X, Y, x);
```

$$4.11754086230977\,x + e^{1.78428194340103\ 10^{-7}\,x}$$

Fit a polynomial of degree 4 through this data.

```
> PolynomialFit(4, X, Y, x);
```

$$-7.34654818865302 + 25.2771301924619\,x - 4.31949814106563\,x^2 + 0.291898833432013\,x^3 - 0.00638798653672794\,x^4$$

Fit a polynomial of degree 5 through this data.

```
> PolynomialFit(5, X, Y, x);
```

$$8.87503518153502 + 9.13403252107639\,x + 0.169166488078578\,x^2 - 0.210240852460504\,x^3 + 0.0178750655127006\,x^4 - 0.000421966122598759\,x^5$$

Fit a polynomial of degree 2 through this data.

```
> PolynomialFit(2, X, Y, x);
```

$$24.0519480519480 + 2.14977413890458\,x + 0.0255505364201014\,x^2$$

Resumen de los modelos matemáticos para graficarlos en una sola gráfica

```
> LSE := 4.46439813979912*x - 8.75457127891296*10^(-9)*exp(x):
```

```
> PD3 := 25.3964456596035 + 1.51747055385503 x
       + 0.0927754168028731 x^2 - 0.00194854725747165 x^3 :

> MFNP := 4.11754086230977 x + e^(1.78428194340103 10^-7 x) :

> PD4 := -7.34654818865302 + 25.2771301924619 x
       - 4.31949814106563 x^2 + 0.291898833432013 x^3
       - 0.00638798653672794 x^4 :

> PD5 := 8.87503518153502 + 9.13403252107639 x
       + 0.169166488078578 x^2 - 0.210240852460504 x^3
       + 0.0178750655127006 x^4 - 0.000421966122598759 x^5 :

> PD2 := 24.0519480519480 + 2.14977413890458 x
       + 0.0255505364201014 x^2 :
```

Gráfica de los datos dados y de los Modelos Matemáticos de Ajuste

La Fig. 4.32 muestra los datos experimentales y modelos matemáticos que ajustan a ellos.

```
> with(plots) :
> G1:=pointplot(Matrix([[1, 15], [2, 34], [3, 33], [4, 33], [5, 39], [6, 43], [7, 50], [8, 47], [9, 53], [10, 38], [11, 35], [12, 49], [13, 42], [14, 60], [15, 54], [16, 67], [17, 82], [18, 78], [19, 81], [20, 95], [21, 73], [22, 69]],datatype=float),axes=boxed,style=line,color="Black"):
> LSE:=plot(LSE,x = 1 .. 22, y= 0 .. 100,axes = boxed, style = point, symbol = box, color = "Crimson"):
> PD3:=plot(PD3,x = 1 .. 22, y = 0 .. 100,axes = boxed, style = point, symbol = cross, color = "SeaGreen"):
> MFNP := plot(MFNP, x = 1 ..22, y = 0 ..100, axes = boxed, style
       = point, symbol = point, color = "DodgerBlue") :

> PD4 := plot(PD4, x = 1 ..22, y = 0 ..100, axes = boxed, style = point,
       symbol = circle, color = "DarkGoldenrod") :

> PD5:=plot(PD5,x = 1 .. 22, y = 0 .. 100,axes=boxed,style=point,symbol=asterisk,color="Lime"):
> PD2 := plot(PD2, x = 1 .. 22, y = 0 .. 100, color = "Navy", style = point,
       symbol = diamond) :

> display({G1, LSE, PD3, MFNP, PD4, PD5, PD2}, axes = boxed, title
       = Muertes de manatíes por barcos);
```

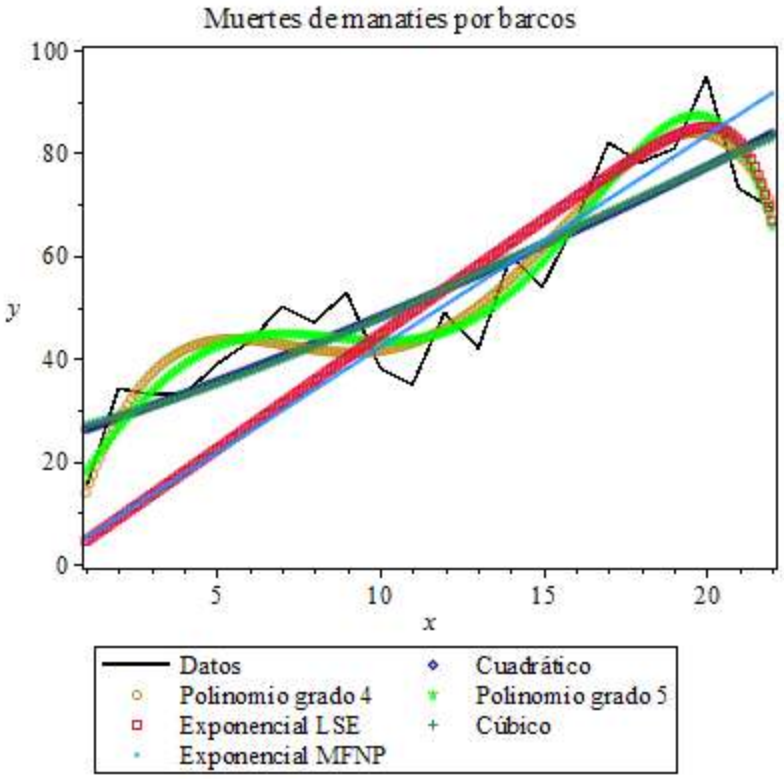


Fig. 4.32 Ajuste de datos experimentales de muertes de manatíes por barcos a un polinomio de grado 4 y a un polinomio de grado 5.

Los modelos que mejor ajustan a los datos son los polinomios de grado 4 y 5

```
> PD4 := -7.34654818865302 + 25.2771301924619*x
      - 4.31949814106563*x^2 + 0.291898833432013*x^3
      - 0.00638798653672794*x^4 :
```

```
> PD5 := 8.87503518153502 + 9.13403252107639*x
      + 0.169166488078578*x^2 - 0.210240852460504*x^3
      + 0.0178750655127006*x^4 - 0.000421966122598759*x^5 :
```

como se puede observar a través de los símbolos: PD4: circulo y color = "DarkGoldenrod" Y PD5: asterisco y color="Lime".

```
> PD4 := plot(PD4, x = 1 ..22, y = 0 ..100, axes = boxed, style = point,
      symbol = circle, color = "DarkGoldenrod") :
```

```
> PD5:=plot(PD5,x = 1 .. 22, y = 0 .. 100,axes=boxed,style=point,symbol=asterisk,color="Lime"):
```

4.6.1 Problemas de Regresión

Problema 1

Correlación entre salario y estrés (base de datos tomada de Triola, 2009, p. 715). La Tabla 4.10 lista rangos de salario y rangos de estrés de empleos seleccionados al azar (según datos de *The Jobs Rated Almanac*). ¿Parece que el salario se incrementa a medida que se incrementa el estrés?

Tabla 4.10 Base de datos de *The Jobs Rated Almanac.*

Empleo	Rango de Salario, x	Rango de Estrés, y
Corredor de bolsa	2	2
Zoólogo	6	7
Ingeniero eléctrico	3	6
Director de escuela	5	4
Gerente de hotel	7	5
Funcionario bancario	10	8
Inspector de seguridad laboral	9	9
Economista doméstico	8	10
Psicólogo	4	3
Piloto de aerolínea	1	1

Solución

Se graficaron en Excel los datos experimentales y los polinomios de grados 1 al 6 para encontrar el mejor ajuste, y se obtuvo el coeficiente de determinación que se describe. En la Fig. 4.33 se muestra el ajuste de los datos experimentales a un polinomio de grado 6 con el 82.49% de nivel de confianza.

Grado del polinomio	Coeficiente de determinación R^2
1	0.7302
2	0.7361
3	0.7386
4	0.8102
5	0.8125
6	0.8249

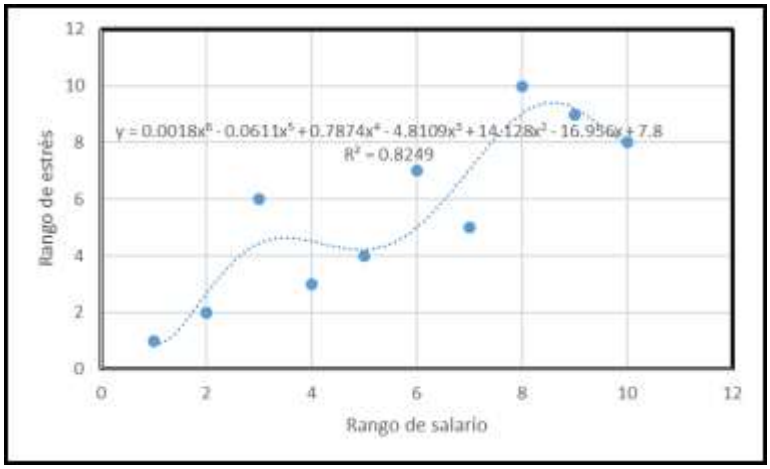


Fig. 4.33 Polinomio de grado 6 que se ajusta a los datos experimentales con $R^2 = 0.8249$ de coeficiente de determinación.

El procedimiento de los cálculos de polinomios de grados 1 al 9 y la gráfica de datos experimentales y polinomios con el software Maple, se describen como sigue.

El proceso incluye las siguientes bibliotecas de Maple:
> with(Stadistics): with(plots): with(linalg): with(Student[LinearAlgebra]):

Introducimos los vectores de datos

```
> RdS := Vector( [2, 6, 3, 5, 7, 10, 9, 8, 4, 1], datatype
      =float);
```

```
> RdE := Vector( [2, 7, 6, 4, 5, 8, 8, 10, 3, 1], datatype
      =float);
```

$$RdS := \begin{bmatrix} 2. \\ 6. \\ 3. \\ 5. \\ 7. \\ 10. \\ 9. \\ 8. \\ 4. \\ 1. \end{bmatrix} \qquad RdE := \begin{bmatrix} 2. \\ 7. \\ 6. \\ 4. \\ 5. \\ 8. \\ 8. \\ 10. \\ 3. \\ 1. \end{bmatrix}$$

El cálculo de los grados 1 al 8 de los polinomios que genera esta base de datos en Maple, se describe enseguida.

```
> S_E := LinearFit(a + b·x, RdS, RdE, x);
```

$$S_E := 0.933333333333332 + 0.812121212121212\,x$$

```
> S_E2 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2), RdS, RdE, x);
```

$$S_E := 0.0999999999999986 + 1.22878787878788\,x - 0.0378787878787879\,x^2$$

```
> S_E3 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3), RdS,
      RdE, x);
```

$$S_E := 0.566666666666681 + 0.814879564879552\,x + 0.0518648018648047\,x^2 - 0.00543900543900561\,x^3$$

```
> S_E4 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x
      ^4), RdS, RdE, x);
```

$$S_E := -4.83333333333331 + 7.73795648795647\,x - 2.48135198135198\,x^2 + 0.340714840714841\,x^3 - 0.0157342657342658\,x^4$$

```
> S_E5 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x
      ^4) + f·(x^5), RdS, RdE, x);
```

$$S_E := -5.20000000000017 + 8.34240093240117\,x - 2.79865967365980\,x^2 + 0.411655011655040\,x^3 - 0.0227855477855506\,x^4 + 0.000256410256410357\,x^5$$

```
> S_E6 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x
      ^4) + f·(x^5) + g·(x^6), RdS, RdE, x);
```

$$S_E6 := 10.8333333333138 - 23.2925990675627\,x + 18.7879438616688\,x^2 - 6.41021998833695\,x^3 + 1.06455662393033\,x^4 - 0.0845352564101547\,x^5 + 0.00256944444444135\,x^6$$

```
> S_E7 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x
      ^4) + f·(x^5) + g·(x^6) + h·(x^7), RdS, RdE, x);
```

$$S_E7 := 31.9999999996006 - 71.0663640272241\,x + 58.4638708342892\,x^2 - 22.6330819504173\,x^3 + 4.67514140264539\,x^4 - 0.529697712409723\,x^5 + 0.0311029411759213\,x^6 - 0.000741129785233189\,x^7$$

```
> S_E8 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x
      ^4) + f·(x^5) + g·(x^6) + h·(x^7) + i·(x^8),
      RdS, RdE, x);
```

$$S_E8 := 353.300000022314 - 876.491941004516\,x + 836.550099029271\,x^2 - 410.335485818374\,x^3 + 115.600321696770\,x^4 - 19.4428227132884\,x^5 + 1.92766544125640\,x^6 - 0.103866129789248\,x^7 + 0.00234375000008413\,x^8$$

```
> S_E9 := LinearFit(a + b·x + c·(x^2) + d·(x^3) + e·(x^4) + f·(x
    ^5) + g·(x^6) + h·(x^7) + i·(x^8) + j·(x^9), RdS, RdE, x);
```

$$S_E9 := LinearFit\left(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + f\,x^5 + g\,x^6 + h\,x^7 + i\,x^8 + j\,x^9, RdS, RdE, x\right)$$

Las instrucciones de Maple para graficar

```
Se := plot(S_E, x = 1 ..10, y = 1 ..10, color = "red", thickness = 14,
    legend = "Ecuación lineal", style = "point", symbol = "diamond");

Se2 := plot(S_E2, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "blue", thickness = 6,
    legend = "Polinomio de Segundo grado", style = "point", symbol
    = "circle");

Se3 := plot(S_E3, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "green", thickness = 8,
    legend = "Polinomio de Tercer grado", style = "point", symbol
    = "cross")

Se4 := plot(S_E4, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "gold", thickness = 10,
    legend = "Polinomio de Cuarto grado", style = "line", linestyle
    = "dash")

Se5 := plot(S_E5, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "cyan", thickness = 12,
    legend = "Polinomio de Quinto grado", style = "line", linestyle
    = "dot");

Se6 := plot(S_E6, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "pink", thickness = 8,
    legend = "Polinomio de Sexto grado", style = "line", symbol
    = "box")

Se7 := plot(S_E7, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "gray", thickness = 14,
    legend = "Polinomio de Septimo gradd", style = "point", symbol
    = "soliddiamond")

Se8 := plot(S_E8, x = 1 ..10, y = 1 ..10 , color = "Fuchsia", thickness
    = 6, legend = "Polinomio de Octavo grado", style = "point", symbol
    = "solidcircle")

Se9 := plot(S_E9, x = 1 ..10, y = 1 ..10, color = "brown", thickness = 8,
    legend = "Polinomio de Noveno grado", style = "line", symbol
    = "solidbox")

display( {DT, Se, Se2, Se3, Se4, Se5, Se6, Se7, Se8, Se9}, axes = boxed,
    title = Grafica de Puntos, labeldirections = ["horizontal",
    "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 20, BOLD], labels
    = ["Rango de Salario", "Rango de Estres"], size = [1300, 800],
    labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);
```

En la Fig. 4.34 se aprecia que los polinomios de grados 8 y 9 son los que mejor ajustan a los datos experimentales.

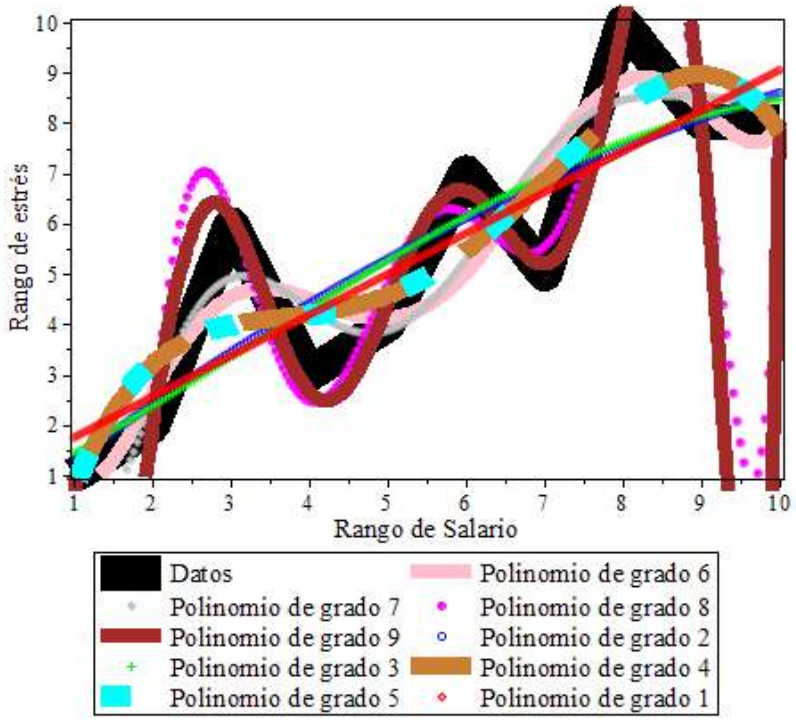


Fig. 4.34 Polinomios de grados 1 al 9 y datos experimentales. Los polinomios que mayormente ajustan a los datos son los de grado 8 y 9.

Problema 2

Predicción del costo de la electricidad. En la Tabla 4.11, se muestran algunas mediciones *de la casa del autor, tomadas del conjunto de datos 9 en el apéndice B* (base de datos tomada de Triola, 2009, P. 583).

Tabla 4.11 de costo de electricidad en base a mediciones de tres factores.

kWh	3375	2661	2073	2579	2858	2296	2812	2433	2266	3128
Grado día para calentar	2421	1841	438	15	152	1028	1967	1627	537	26
Temperatura diaria promedio	26	34	58	72	67	48	33	39	66	71
Costo (en dólares)	321.94	221.11	205.16	251.07	279.8	183.84	244.93	218.59	213.09	333.49

a) Expresar si hay una **correlación lineal** entre el grado día para calentar y los kWh de electricidad consumidos.

b) Idem a) para la temperatura diaria promedio y el costo en dólares.

Solución

Para resolver este problema, se dividirá en dos la tabla de la página anterior, de dicha división se tomarán los renglones 1 y 2 como primera base de datos, y los renglones 3 y 4 como segunda base de datos, a las cuales se les aproximará varias funciones y se elegirá la que mejor se aproxime a cada base de datos.

Resolviendo para Renglones 1 y 2

kWh	3375	2661	2073	2579	2858	2296	2812	2433	2266	3128
Grado día para calentar	2421	1841	438	15	152	1028	1967	1627	537	26

a) Expresar si hay una correlación lineal entre el grado día para calentar y los kWh de electricidad consumidos.

Respuestas a): Solución Excel y Solución Maple (solución alternativa)

Solución Excel

En la Fig. 4.35 se muestra que el polinomio de grado 6 ajusta con un 86.75% de nivel de confianza a los datos experimentales, por lo que se concluye, que no existe correlación lineal significativa entre las variables grado día para calentar y los kWh de electricidad consumidos, ya que se tiene información del coeficiente de determinación de los polinomios de grados 1 al 6 que se describen

Grado el polinomio	Coeficiente de determinación R^2
1	0.0898
2	0.7766
3	0.8026
4	0.8096
5	0.8111
6	0.8675

El polinomio de grado 6 y el coeficiente de determinación respectivo son

$y = -2E\text{-}15x^6 + 1E\text{-}11x^5 - 3E\text{-}08x^4 + 4E\text{-}05x^3 - 0.0221x^2 + 2.7552x + 2800.3$

$R^2 = 0.8675$

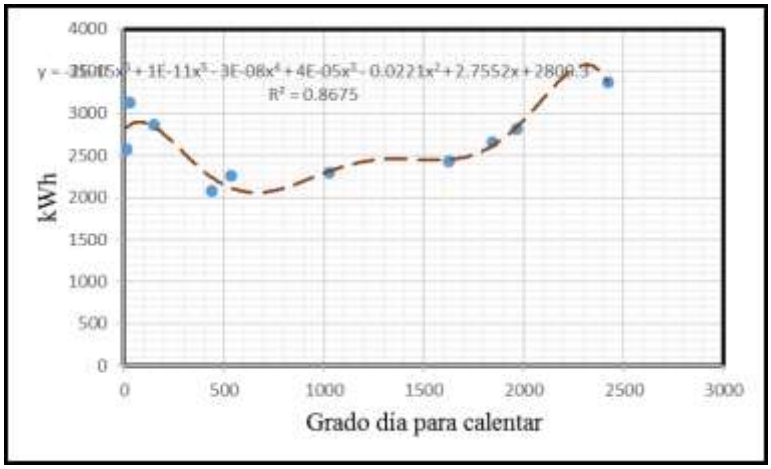


Fig. 4.35 Polinomio de grado 6 que se ajusta a los datos experimentales con R^2 = 0.8675 de coeficiente de determinación.

Solución Maple (solución alternativa)

Usamos la herramienta *Spline*, de la librería *with(CurveFitting)* especificando grado 1, podemos obtener un conjunto de polinomios que se ajustan la perfección a los datos, así que aquí usaremos esa herramienta para aproximar a los datos experimentales, representados en la Fig. 4.36. En dicha figura, podemos apreciar el conjunto de polinomios suaves de grado 1 (círculos color cyan) justo sobre los datos experimentales. Y el conjunto de polinomios suaves de grado 1, se encuentra en la ecuación ec1 o *f3*

$$ec1 = \begin{cases} 1830.363636 + 49.90909091x, x < 26 \\ 3183.714286 - 2.142857143x, x < 152 \\ 3275.202797 - 2.744755245x, x < 438 \\ 1219.121212 + 1.949494949x, x < 537 \\ 2233.189409 + 0.06109979633x, x < 1028 \\ 2060.881469 + 0.2287145242x, x < 1627 \\ 699.5607477 + 1.065420561x, x < 1841 \\ 454.7222222 + 1.198412698x, x < 1967 \\ 372.7466960 + 1.240088106x, x \le 2421 \end{cases}$$

Las instrucciones de Maple para trazar la gráfica de la Fig. 4.36 son

Renglones 1 y 2

```
> f3 := evalf(Spline(TGC, x, degree = 1));
```

$$f3 := \begin{cases} 1830.363636 + 49.90909091\,x & x < 26. \\ 3183.714286 - 2.142857143\,x & x < 152. \\ 3275.202797 - 2.744755245\,x & x < 438. \\ 1219.121212 + 1.949494949\,x & x < 537. \\ 2233.189409 + 0.06109979633\,x & x < 1028. \\ 2060.881469 + 0.2287145242\,x & x < 1627. \\ 699.5607477 + 1.065420561\,x & x < 1841. \\ 454.7222222 + 1.198412698\,x & x < 1967. \\ 372.7466960 + 1.240088106\,x & otherwise \end{cases}$$

```
> G3 := plot(f3, x = 15 ..2421, style = point, symbol = circle, color
       = cyan, thickness = 6, legend
       = "Conjunto de polinomios suaves de grado 1"), labels
       = ["Grado día para calentar", "Consumo kWh"] :

> GD := plot(TGC, style = line, color = black, thickness = 12, legend
       = "Datos experimentales") :

> CG := view = [0 ..2422, 2070 ..3400], labels
       = ["Grado día para calentar", "Consumo kWh"], axes = boxed,
      labeldirections = ["horizontal", "vertical"], size = [1300, 800],
      labelfont = ["TimesNewRoman", 12], titlefont
       = ["TimesNewRoman", 18, BOLD], legendstyle = [font
       = ["TimesNewRoman", 12], location = bottom] :

> display(GD, G3, CG, title
       = "Aproximación a los datos experimentales mediante
      interpolación Spline, conjunto de polinomios de grado 1");
```

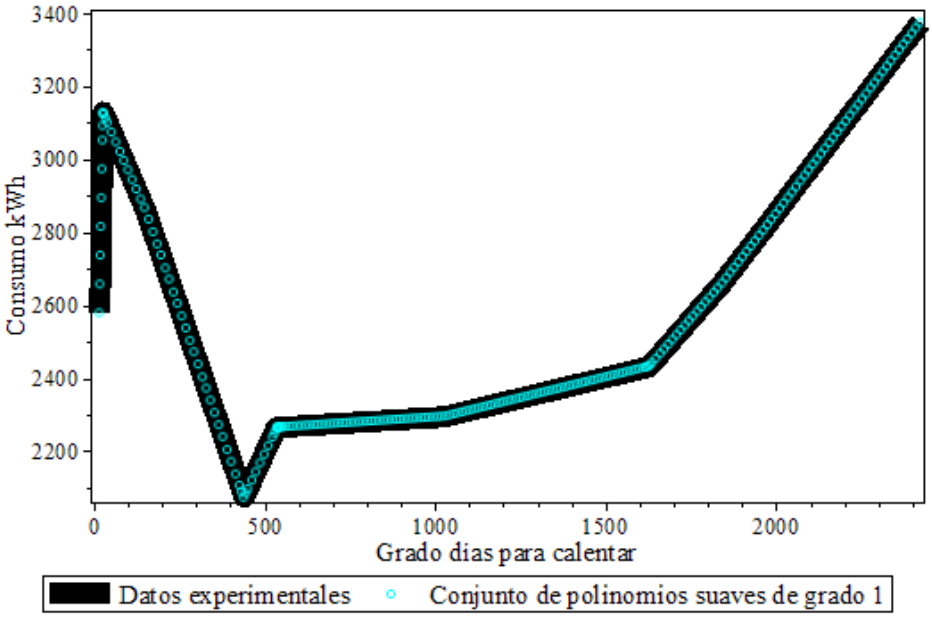


Fig. 4.36 Gráfica de los datos experimentales mediante interpolación Spline, conjunto de polinomios suaves de grado 1.

a)

Aproximaciones exóticas, con un conjunto de polinomios suaves de grado 3 y un polinomio de fracción continua

Los splines, son una técnica de interpolación que se utiliza para aproximar a una función con una serie de curvas suaves que se unen en los puntos de datos. Los splines pueden ser cúbicos, cuadráticos o de mayor orden y se utilizan para aproximar a funciones que presentan muchas curvas. En este caso, el conjunto de polinomios suaves son de grado 3.

Un polinomio de fracción continua, es una expresión matemática que se utiliza para aproximar una función mediante una fracción continua. La idea de utilizar una fracción continua para aproximar una función es que esta fracción puede ser evaluada recursivamente, es decir, se pueden calcular los términos de la fracción uno por uno, lo cual es útil para la computación. Además, los polinomios de fracción continua son útiles para aproximar funciones que tienen singularidades o discontinuidades, ya que pueden manejar estas situaciones de manera más eficiente que otros métodos de aproximación.

Para obtener el conjunto de polinomios de grado 3, se usaron las herramientas *Spline* y *ThieleIterpolation* de la librería *with(CurveFitting)*, los comandos son

```
> f2 := evalf(Spline(TGC, x));
> f7 := evalf(ThieleInterpolation(TGC, x));
```

> f2 := evalf(Spline(TGC, x));

$$f2 := \begin{cases} -0.01863518313\,x^3 + 0.8385832410\,x^2 + 39.58519945\,x - \\ 0.001886045461\,x^3 - 0.7620725893\,x^2 + 81.20225104\,x - \\ -0.0001347286708\,x^3 + 0.1594004146\,x^2 - 58.86164556\,x \\ 0.00004721063915\,x^3 - 0.07966783864\,x^2 + 45.85024937\,x \\ 0.000002924746094\,x^3 - 0.008323264926\,x^2 + 7.538213289 \\ 3.159543364\,10^{-7}\,x^3 - 0.0002777511470\,x^2 - 0.7325748758 \\ -0.000001701115655\,x^3 + 0.009567567479\,x^2 - 16.75090828 \\ -2.202128548\,10^{-7}\,x^3 + 0.001388541316\,x^2 - 1.693321114 \\ -6.539299544\,10^{-8}\,x^3 + 0.0004749493259\,x^2 + 0.1037143304 \end{cases}$$

```
> G2 := plot(f2, x = 0 ..2421, style = point, symbol = box, color = gold,
     thickness = 6, legend
      = "Conjunto de polinomios suaves función Spline") :
```

```
> f7 := evalf(ThieleInterpolation(TGC, x));
```

$f7 :=$

$$2579 + \frac{(x-15)}{0.02003642987 + \frac{(x-26)}{267.5142216 + \frac{(x-152)}{-0.03819342796 + \frac{(x-438)}{-337.686220 + \frac{x-537}{-3.390628786 + \frac{x-1028}{-21.1334073 + \frac{x-1627}{2.216534146 + \frac{x-1841}{-242.9620018 + 0.3819480158x}}}}}}}}$$

```
> G7 := plot(f7, x = 15 ..2421, y = 2000 ..3500, style = point, symbol
     = solidbox, symbolsize = 7, color = olive, thickness = 6, legend
     = "Fracción continua de polinomios") :
```

```
> GD := plot(TGC, style = line, color = black, thickness = 12, legend
     = "Datos experimentales") :
```

```
> CG := view = [0..2422, 2070..3400], labels
     = ["Grado día para calentar", "Consumo kWh"], axes = boxed,
    labeldirections = ["horizontal", "vertical"], size = [1300, 800],
    labelfont = ["TimesNewRoman", 12], titlefont
     = ["TimesNewRoman", 18, BOLD], legendstyle = [font
     = ["TimesNewRoman", 12], location = bottom] :


> display(GD, G7, G2, CG, title
     = "Aproximación a los datos experimantales mediante
    interpolación de thiele");
```

Se usó la herramienta de regresión de Excel para calcular el coeficiente de determinación, el cual, dio como resultado un $R^2 = 1$, pero no nos dejemos engañar, pues este polinomio presenta un serio problema, el sobreajuste, por un lado, pasa por cada uno de los datos experimentales, pero por otro, se pasa por alto la tendencia general de los datos, ya que, como podemos ver en las Figs. 4.36 y 4.37, cuando $x < 500$ los valores en y se disparan tanto hacia arriba como hacia abajo, por lo tanto no es viable usar el polinomio de fracción continua como solución del problema.

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	1
Coeficiente de determinación R^2	1
R^2 ajustado	1
Error típico	2.60613E-07
Observaciones	10

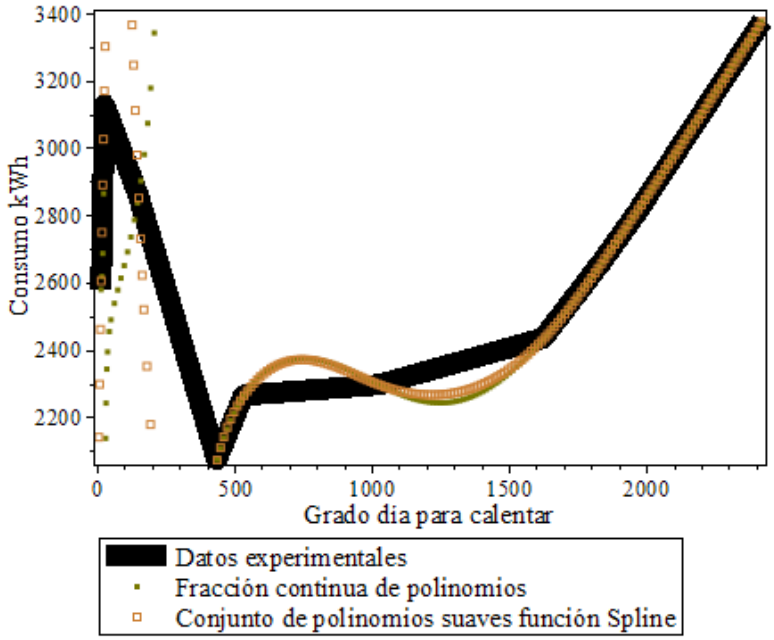


Fig. 4.37 Gráfica de aproximación de datos experimentales mediante interpolación thiele.

b) Idem a a) para la temperatura diaria promedio y el costo en dólares. Renglones 3 y 4. Respuestas a b) en Excel y en Maple

Solución Excel

En la Fig. 4.38 se muestra que el polinomio de grado 6 ajusta a los datos experimentales con un 75.69% de nivel de confianza, por lo que se concluye, que no existe correlación lineal significativa entre las variables temperatura diaria promedio y costo en dólares, ya que se tiene información del coeficiente de determinación de los polinomios de grados 1 al 6 que se describen

Grado el polinomio	Coeficiente de determinación R^2
1	0.0072
2	0.7080
3	0.7171
4	0.7172
5	0.7414
6	0.7569

El polinomio de grado 6 y el coeficiente de determinación respectivo son

$y = -2E\text{-}06x^6 + 0.0007x^5 - 0.0797x^4 + 4.8167x^3 - 158.83x^2 + 2696.9x - 18051$

$R^2 = 0.7569$

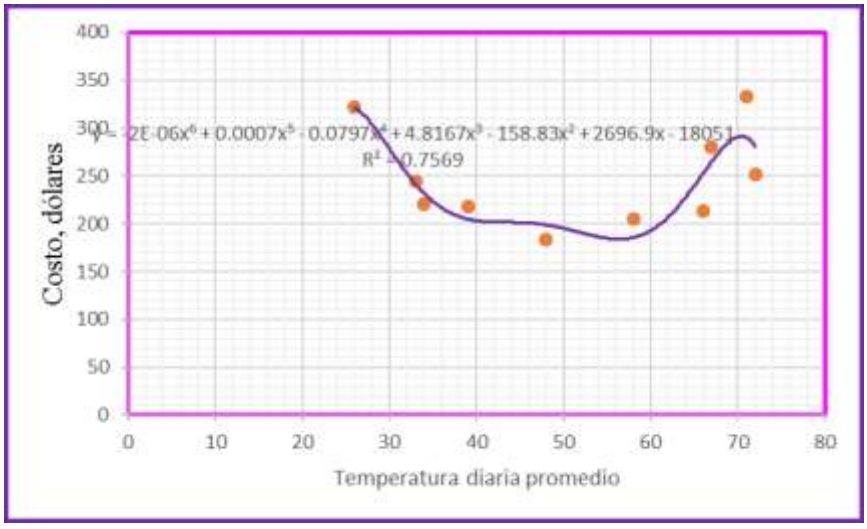


Fig. 4.38 Gráfica de los datos experimentales y polinomio de grado 6 con coeficiente de determinación de 0.7569 de ajuste.

b)

Solución Maple

Renglones 3 y 4

Las instrucciones Maple para graficar los polinomios suaves de grado 1 y los datos experimentales, son

```
> with(plots) :; with(Statistics) :; with(CurveFitting) :;
      with(Student[NumericalAnalysis]) :;

> ColorTools[GetPalette]("HTML") :;
> Xexp := 26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72
Xexp := 26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72
> Yexp := 321.94, 244.93, 221.11, 218.59, 183.84, 205.16, 213.09, 279.8,
      333.49, 251.07

Yexp := 321.94, 244.93, 221.11, 218.59, 183.84, 205.16, 213.09, 279.8,
    333.49, 251.07

> TGC := [[26, 321.94], [33, 244.93], [34, 221.11], [39, 218.59], [48,
      183.84], [58, 205.16], [66, 213.09], [67, 279.8], [71, 333.49],
      [72, 251.07]];

TGC := [[26, 321.94], [33, 244.93], [34, 221.11], [39, 218.59], [48,
    183.84], [58, 205.16], [66, 213.09], [67, 279.8], [71, 333.49],
    [72, 251.07]]

> G2 := plot(f2, x = 26 ..72, style = point, symbol = box, color = gold,
      thickness = 6, legend
       = "Conjunto de polinomios suaves de grado 3") :

> f3 := evalf(Spline(TGC, x, degree = 1));

                  { 607.9771429 - 11.00142857 x      x < 33.
                  {       1030.99 - 23.82 x          x < 34.
                  { 238.2460000 - 0.5040000000 x     x < 39.
                  {  369.1733333 - 3.861111111 x     x < 48.
f3 := piecewise   {  81.50400000 + 2.132000000 x     x < 58.
                  { 147.6675000 + 0.9912500000 x     x < 66.
                  {       -4189.77 + 66.71 x         x < 67.
                  { -619.5075000 + 13.42250000 x     x < 71.
                  {       6185.31 - 82.42 x          otherwise

> G3 := plot(f3, x = 26 ..72, style = point, symbol = circle, color = cyan,
      thickness = 6, legend
       = "Conjunto de polinomios suaves de grado 1") :

> GD := plot(TGC, style = line, color = black, thickness = 12, legend
       = "Datos experimentales") :

>
  CG := view = [26 ..72, 180 ..340], labels
       = ["Temperatura diaria promedio", "Costo (en dólares)"], axes
       = boxed, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], size = [1300,
      800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12], titlefont
       = ["TimesNewRoman", 18, BOLD], legendstyle = [font
       = ["TimesNewRoman", 12], location = bottom] :
```

```
> display(GD, G3, CG, title
      = "Aproximación a los datos experimentales mediante
      interpolación Spline, conjunto de polinomios de grado 1");
```

La Fig. 4.39 muestra el ajuste de datos experimentales con polinomios suaves de grado 1.

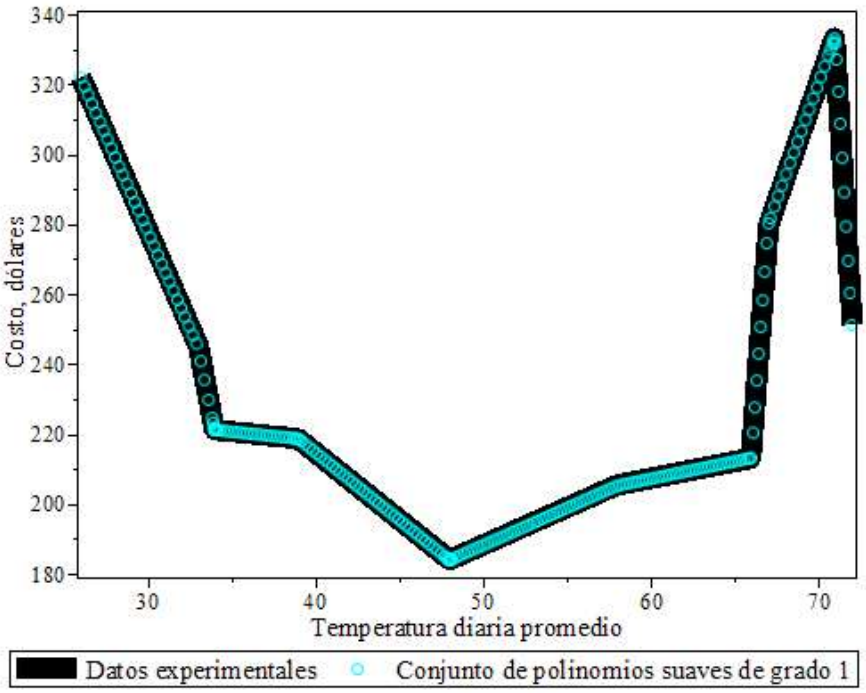


Fig. 4.39 Gráfica de los datos experimentales mediante interpolación Spline, conjunto de polinomios suaves de grado 1

Instrucciones Maple renglones 3 y 4 aproximación de distintos modelos a los datos experimentales

```
> Xexp := 26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72
Xexp := 26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72
> Yexp := 321.94, 244.93, 221.11, 218.59, 183.84, 205.16, 213.09, 279.8,
      333.49, 251.07

Yexp := 321.94, 244.93, 221.11, 218.59, 183.84, 205.16, 213.09, 279.8,
    333.49, 251.07

> TGC := [[26, 321.94], [33, 244.93], [34, 221.11], [39, 218.59], [48,
      183.84], [58, 205.16], [66, 213.09], [67, 279.8], [71, 333.49],
      [72, 251.07]];

TGC := [[26, 321.94], [33, 244.93], [34, 221.11], [39, 218.59], [48,
    183.84], [58, 205.16], [66, 213.09], [67, 279.8], [71, 333.49],
    [72, 251.07]]

> with(CurveFitting) :;
> f1 := evalf(LeastSquares(TGC, x, curve = a·x^6 + b·x^5 + c·x^4 + d·x^3
      + e·x^2 + f·x + g));
```

$$f1 := -18050.9158093428 + 2696.92266465807\,x - 158.830933114456\,x^2 + 4.81674073143690\,x^3 - 0.0797429722287363\,x^4 + 0.000685345183336450\,x^5 - 0.00000239308644501040\,x^6$$

```
> GD := plot(TGC, style = line, color = black, thickness = 12, legend
       = "Datos experimentales") :

> G1 := plot(f1, x = 26 ..72, style = point, symbol = asterisk, color
       = gray, thickness = 8, legend = "Polinomio de grado 6") :

>
  CG := view = [26 ..72, 180 ..340], labels
       = ["Temperatura diaria promedio", "Costo (en dólares)"], axes
       = boxed, labeldirections = ["horizontal", "vertical"], size = [1300,
      800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12], titlefont
       = ["TimesNewRoman", 18, BOLD], legendstyle = [font
       = ["TimesNewRoman", 12], location = bottom] :

> f2 := evalf(Spline(TGC, x));
```

$$f2 := \begin{cases} 435.651103070956 - 4.37350396426753\,x - \\ 1045.42016692977 - 24.2572777857507\,x - 2.84053911735^{4} \\ 904.676780578894 - 20.1049053111439\,x + 6.992911591961 \\ 72.9931461632543 + 3.73325266248066\,x - 2.225279997236 \\ 136.911296791963 + 0.977681316834095\,x + 1.91910540327^{5} \\ 1060.68416665272 - 14.7504166664262\,x - 3.491915201601 \\ -3773.96372641402 + 60.4099049456670\,x + 12.8869554031 \\ -4170.55672527203 + 66.4232347055526\,x - 6.87362564322 \\ 4954.48714551178 - 65.0844668381941\,x - 26.0032997427^{0} \end{cases}$$

```
> G2 := plot(f2, x = 26 ..72, style = point, symbol = box, color = gold,
       thickness = 6, legend
       = "Conjunto de polinomios suaves de grado 3") :

> f3 := evalf(Spline(TGC, x, degree = 1));
```

$$f3 := \begin{cases} 607.9771429 - 11.00142857\,x & x < 33. \\ 1030.99 - 23.82\,x & x < 34. \\ 238.2460000 - 0.5040000000\,x & x < 39. \\ 369.1733333 - 3.861111111\,x & x < 48. \\ 81.50400000 + 2.132000000\,x & x < 58. \\ 147.6675000 + 0.9912500000\,x & x < 66. \\ -4189.77 + 66.71\,x & x < 67. \\ -619.5075000 + 13.42250000\,x & x < 71. \\ 6185.31 - 82.42\,x & otherwise \end{cases}$$

```
> G3 := plot(f3, x = 26 ..72, style = point, symbol = circle, color = cyan,
       thickness = 6, legend
       = "Conjunto de polinomios suaves de grado 1") :
```

```
> f4 := Fit(a + b^x, TGC, x);
```

$$f4 := 226.448640548160 + 1.05396927878340^{x}$$

```
> G4 := plot(f4, x = 26 ..72, style = point, symbol = cross, color = blue,
      thickness = 6, legend = "Función exponencial") :
```

```
> f5 := evalf(PolynomialInterpolation(TGC, x));
```

$$f5 := 7.935448639\,10^{-9}\,x^{9} - 0.000003612536482\,x^{8} + 0.0007206159243\,x^{7} - 0.08263094562\,x^{6} + 5.999904962\,x^{5} - 285.9855662\,x^{4} + 8945.522375\,x^{3} - 1.770176425\,10^{5}\,x^{2} + 2.010334982\,10^{6}\,x - 9.980087002\,10^{6}$$

```
> G5 := plot(f5, x = 26 ..72, style = point, symbol = diamond, color
      = purple, thickness = 6, legend = "Polinomio de grado 9") :
```

```
> f6 := evalf(RationalInterpolation(TGC, x));
```

Error, (in CurveFitting:-RationalInterpolation) floating-point data is not allowed

```
> G6 := plot(f6, x = 26 ..72, style = point, symbol = circle, symbolsize
      = 10, color = red, legend = "Polinomio racional") :
```

Warning, expecting only range variable x in expression f6 to be plotted but found name f6

```
f7 := evalf(ThieleInterpolation(TGC, x))
```

$$f7 := 321.94 + \cfrac{x-26.}{-0.09089728607 + \cfrac{x-33.}{86.5364794 + \cfrac{x-34.}{-0.01934153233 + \cfrac{x-39.}{-340.4132037 + \cfrac{x-48.}{0.0799195438 + \cfrac{x-58.}{170.9394364 + \cfrac{x-66.}{0.0005062956 + \cfrac{x-67.}{1.799120728\,10^{5} - 2497.098683\,x}}}}}}}$$

```
> G7 := plot(f7, x = 26 ..72, y = 2000 ..3500, style = point, symbol
      = solidbox, symbolsize = 7, color = olive, thickness = 6, legend
      = "Fracción continua de polinomios") :
```

```
> display(GD, G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, CG, title
      = "Diferentes modelos matemáticos aproximandose a los datos
      experiementales");
```

```
> f1 := x → -18050.9158093428 + 2696.92266465807 x
      - 158.830933114456 x^2 + 4.81674073143690 x^3
      - 0.0797429722287363 x^4 + 0.000685345183336450 x^5
      - 0.00000239308644501040 x^6 :
```

```
> map(f1, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
```

$$[321.3549468, 241.650829, 231.767782, 204.863102, 198.83536, 185.50850, 252.3340, 264.9648, 290.2220, 281.5177]$$

```
> f2 := x → piecewise(
      435.651103070956 − 4.3735039642675
      1045.42016692977 − 24.2572777857507 x − 2.8405391
      904.676780578894 − 20.1049053111439 x + 6.99291159
      72.9931461632543 + 3.73325266248066 x − 2.22527999
      136.911296791963 + 0.977681316834095 x + 1.9191054
      1060.68416665272 − 14.7504166664262 x − 3.49191520
      −3773.96372641402 + 60.4099049456670 x + 12.886955
      −4170.55672527203 + 66.4232347055526 x − 6.873625
      4954.48714551178 − 65.0844668381941 x − 26.003299
  ):
> map(f2, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
[321.9400000, 244.9299999, 221.1100001, 218.5900000, 183.8400000,
    205.1600001, 213.090001, 279.800001, 333.490000, 251.0700009]

> f3 := x → piecewise(
      607.9771429 − 11.00142857 x      x < 33.
      1030.99 − 23.82 x                x < 34.
      238.2460000 − 0.5040000000 x     x < 39.
      369.1733333 − 3.861111111 x      x < 48.
      81.50400000 + 2.132000000 x      x < 58.
      147.6675000 + 0.9912500000 x     x < 66.
      −4189.77 + 66.71 x               x < 67.
      −619.5075000 + 13.42250000 x     x < 71.
      6185.31 − 82.42 x                otherwise
  ):
> map(f3, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
[321.9400001, 244.93, 221.1100000, 218.5900000, 183.8400000,
    205.1600000, 213.09, 279.8000000, 333.49, 251.07]

> f4 := x → 226.448640548160 + 1.05396927878340^x :
> map(f4, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
[230.3708136, 232.1152388, 232.4210610, 234.2162993, 238.9150592,
    247.5359529, 258.5589766, 260.2919482, 268.2109601,
    270.4648423]

> f5 := x → 7.935448639 10^-9 x^9 − 0.000003612536482 x^8
      + 0.0007206159243 x^7 − 0.08263094562 x^6 + 5.999904962 x^5
      − 285.9855662 x^4 + 8945.522375 x^3 − 1.770176425 10^5 x^2
      + 2.010334982 10^6 x − 9.980087002 10^6 :
> map(f5, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
[322.028, 245.008, 221.188, 218.698, 185.038, 206.598, 215.098,
    279.598, 342.898, 247.998]

f7 := x → 321.94 +
```

$$-0.09089728607 + \cfrac{x-26.}{86.5364794 + \cfrac{x-33.}{-0.01934153233 + \cfrac{x-34.}{-340.4132037 + \cfrac{x-39.}{0.0799195438 + \cfrac{x-48.}{170.9394364 + \cfrac{x-58.}{0.0005062956 + \cfrac{x-66.}{1.799120728\,10^{5} - 2497.098683\,x}}}}}}}$$

```
> map(f7, [26, 33, 34, 39, 48, 58, 66, 67, 71, 72])
 [321.94, 244.9300000, 221.1100000, 218.5899999, 183.8400016,
      205.1600000, 213.0899999, 279.8000151, 333.4900042,
      251.0699854]
```

La Fig. 4.40 muestra las gráficas de diferentes modelos matemáticos para el ajuste de los datos experimentales.

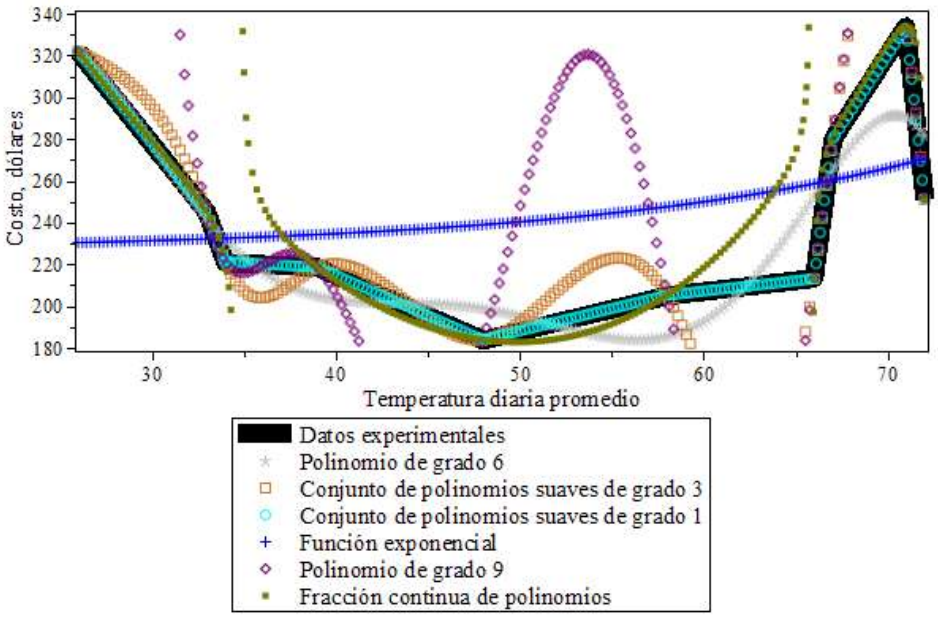


Fig. 4.40 Gráfica de varios modelos matemáticos para ajustar los datos experimentales. El modelo que mejor ajusta es el conjunto de polinomios suaves de grado 1.

Problema 3

Audiencia y ventas de canciones. En la Tabla 4.12 se lista el número de impresiones de audiencia (en cientos de millones) de canciones y los números de álbumes vendidos correspondientes (en cientos de miles). El número de impresiones de audiencia es un conteo del número de veces que la gente ha escuchado la canción. La tabla se basa en datos de *USA Today*. ¿Parece que las ventas del álbum se ven muy afectadas por el número de impresiones de la audiencia? (base de datos tomada de Triola, 2009, pp.715-716).

Tabla 4.12 Datos basados en *USA Today*.

Impresiones de oyentes	28	13	14	24	20	18	14	24	17
Álbumes vendidos	19	7	7	20	6	4	5	25	12

Solución

A la base de datos dada se le aplica un **método de regresión (mínimos cuadrados)** para obtener una ecuación que se ajuste adecuadamente. Este problema se resolvió mediante **programación Python.** El código es un programa en Python que implementa el método de mínimos cuadrados para encontrar una línea que mejor se ajuste a un conjunto de datos. Primero, importa las librerías necesarias para ejecutar el programa incluyendo **'os'**, **'platform'**, **'math'**, **'matplotlib.pyplot'** y **'numpy'**. Luego, el programa muestra un menú con opciones para seleccionar el conjunto de datos que se utilizará para el cálculo. El usuario debe seleccionar una opción y, en función de la opción seleccionada, el programa establece los valores de los parámetros puntos y grado. **'puntos'** representa el número de puntos de datos, mientras que grado es el grado del polinomio que se ajustará a los datos.

Después de establecer los valores de puntos y grado, el programa crea una serie de matrices y vectores que se utilizarán en el cálculo de la línea de ajuste. La matriz de Gauss se utiliza para almacenar los coeficientes del sistema de ecuaciones que se resuelve para encontrar los coeficientes del polinomio de ajuste. La matriz **'matriz'** almacena los datos de entrada, mientras que exponentes y sumatoria se utilizan para calcular los términos del sistema de ecuaciones. **'vector'** y **'vector2'** son vectores auxiliares utilizados en el proceso de eliminación gaussiana. **'matriz_final'** es la matriz final que se utiliza para resolver el sistema de ecuaciones.

El programa luego solicita al usuario que ingrese los datos de entrada, si se selecciona la opción 1. En caso contrario, inicializa la matriz con los datos de ejemplo proporcionados en las opciones del menú. Una vez que los datos se han ingresado o inicializado, el programa realiza cálculos utilizando el método de mínimos cuadrados para encontrar la línea que mejor se ajusta a los datos. Finalmente, el programa genera un gráfico de los datos de entrada y la línea de ajuste utilizando la librería **'matplotlib.pyplot'**.

Resultados arrojados por el programa

Es importante mencionar que la Fig. 4.41 fue arrojada por el programa creado en Python y por lo tanto, no es una gráfica con un formato del todo profesional, sin embargo, si es importante mostrar los resultados y gráficas tal y como los arroja el programa.

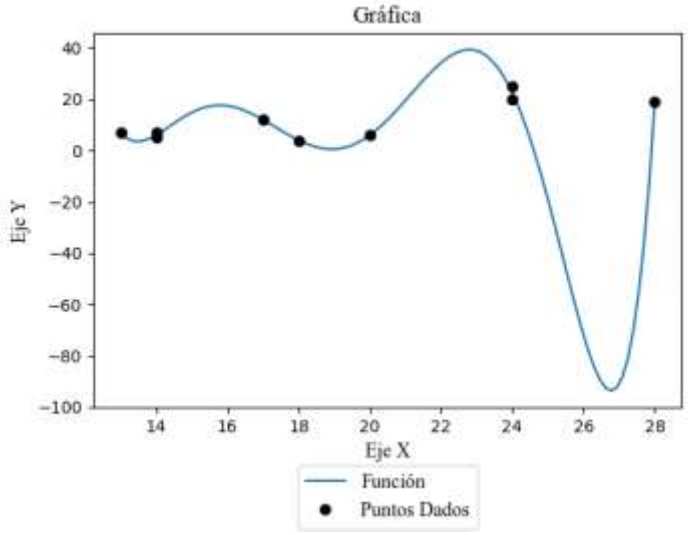


Fig. 4.41 Ajuste de datos de álbumes vendidos en cientos de miles mediante un polinomio de grado 8 (línea azul) a un conjunto de datos (puntos negros) generada automáticamente en el programa creado en Python.

La ecuación obtenida (redondeada), es

$$2.421e-07\,x^8+2.274e-05\,x^7-2.717e-03\,x^6+0.02996\,x^5+3.963\,x^4-173.6\,x^3+3069\,x^2$$
$$-2.575e+04\,x+8.465e+04$$

La consola del programa creado, imprime la ecuación redondeando los decimales, esto para poder visualizarla de una manera práctica. A pesar de que aparentemente la ecuación esta redondeada, en el programa si se consideran todos los decimales para la generación de la gráfica y los cálculos que se realizan, además, después de imprimir la ecuación en consola, también se imprimen los coeficientes individualmente para mostrar todos los decimales y que el usuario pueda usarlos o copiarlos.

Resultados finales

Ecuación obtenida (sin redondeos)

$$2.4207282109661645e-07\,x^8+2.2741268641926e-05\,x^7-2.7168526553244597e-03\,x^6$$
$$+0.029963057509706882\,x^5+3.9625087378336072\,x^4-173.55181966108321\,x^3$$
$$+3068.757030372668\,x^2-25752.02299371742\,x+84647.70468886854$$

La gráfica generada en Maple se muestra en la Fig. 4.42.

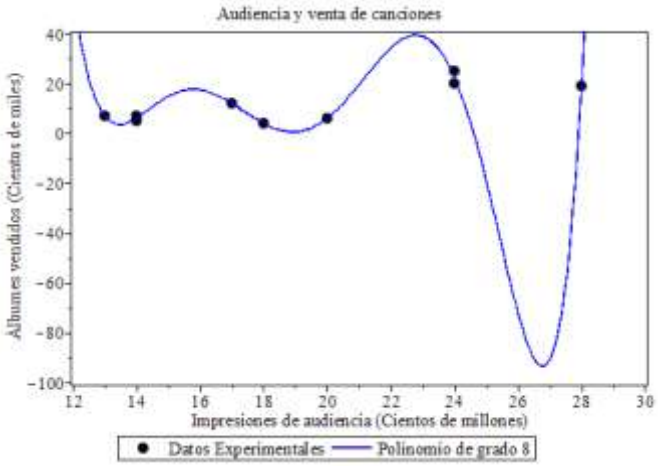


Fig. 4.42 Ajuste de datos de álbumes vendidos en cientos de miles mediante un polinomio de grado 8 (línea azul) a un conjunto de datos (puntos negros) generada en el software matemático Maple.

Pregunta
¿Parece que las ventas del álbum se ven muy afectadas por el número de impresiones de la audiencia? La relación lineal de las variables dadas es del 0.6335 en base al coeficiente de determinación especificado
$y = 1.168x - 10.655$
$R^2 = 0.6335$
Mientras que la relación entre variables mediante un polinomio de grado 6 es del 0.9698
$y = 0.0028x^6 - 0.3325x^5 + 15.999x^4 - 404.45x^3 +$
$5664.9x^2 - 41687x + 125962$
$R^2 = 0.9698$

El código en programación Python del Problema 3 de 4.6 Regresiones se presenta en el Anexo 1 del Capítulo 4.

Regresión
La regresión es una técnica estadística que se utiliza para modelar la relación entre dos o más variables. En particular, la regresión lineal es un método numérico que se utiliza para encontrar una ecuación lineal que mejor se ajuste a un conjunto de datos.

En la regresión lineal, se parte de un conjunto de datos de la forma $(x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n)$, donde x es la variable independiente y y es la variable dependiente. La idea es encontrar una recta que pase lo más cerca posible de estos puntos, de tal manera que se pueda utilizar esta recta para predecir los valores de y para valores de x que no se hayan medido.

Para encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos, se utiliza un método llamado mínimos cuadrados. En este método, se busca la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y observados y los valores de y predichos por la recta. Esta recta se puede expresar en la

forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

El método de regresión lineal también se puede utilizar para ajustar otros tipos de curvas, como polinomios de grado mayor a uno, exponenciales, logarítmicas, entre otras. En estos casos, se utiliza una técnica similar al método de mínimos cuadrados para encontrar los coeficientes de la ecuación que mejor se ajuste a los datos.

En resumen, la regresión es un método numérico que se utiliza para encontrar una ecuación que mejor se ajuste a un conjunto de datos. La regresión lineal es uno de los métodos más utilizados y se basa en encontrar la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y observados y los valores de y predichos por la recta.

Minimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados es una técnica matemática utilizada para encontrar la mejor línea o curva que se ajusta a un conjunto de datos, es decir, para obtener una función que represente la relación entre dos variables. Este método se utiliza ampliamente en la estadística y en la ciencia de datos.

El objetivo del método de mínimos cuadrados es minimizar la suma de los errores al cuadrado entre los valores observados y los valores que se predicen con la función ajustada. La línea o curva ajustada se elige de tal manera que los errores entre los valores observados y los valores predichos sean los más pequeños posibles.

El método de mínimos cuadrados puede aplicarse a diferentes tipos de datos, como datos lineales, cuadráticos, polinómicos y exponenciales. También se puede utilizar para ajustar una curva a un conjunto de datos multidimensionales.

En resumen, el método de mínimos cuadrados es una herramienta matemática esencial para la estadística y la ciencia de datos, que se utiliza para ajustar una curva a un conjunto de datos y predecir los valores futuros.

Razones para resolución de métodos numéricos mediante Python

Algunas de las razones por las cuales Python es una buena opción para resolver métodos numéricos son:

Sintaxis clara y legible: Python tiene una sintaxis clara y legible que permite a los programadores escribir y leer código de manera más fácil, lo que reduce la posibilidad de errores y facilita la colaboración en proyectos.

Amplia variedad de bibliotecas: Python cuenta con una amplia variedad de bibliotecas especializadas en matemáticas y métodos numéricos, como NumPy, SciPy y Pandas, que proporcionan funciones y herramientas para realizar cálculos de manera más eficiente.

Integración con otros lenguajes y herramientas: Python se puede integrar fácilmente con otros lenguajes de programación y herramientas, lo que lo hace muy útil para trabajar en proyectos multidisciplinarios o que requieran la interacción con diferentes plataformas.

Comunidad activa: Python cuenta con una comunidad de desarrolladores muy activa que constantemente están creando nuevas bibliotecas y herramientas para mejorar el lenguaje y hacerlo más útil para la resolución de problemas complejos.

En resumen, Python es una excelente opción para resolver métodos numéricos debido a su sintaxis clara, amplia variedad de bibliotecas, capacidad de integración y una comunidad activa de desarrolladores.

Problema 4
Old Faithful. Utilizar la base de datos de la Tabla 4.13 de las duraciones en segundos y las alturas en pies del geiser en erupción (base de datos de Triola, 2009, pp.582-583).

Tabla 4.13 Base de datos para estudio de regresión.

y = Altura, ft	240	120	178	234	235	269	255	220
x = Duración, s	140	110	125	120	140	120	125	150

a) ¿Existe **correlación lineal** significativa entre la duración de una erupción del geiser Old Faithful y la altura de la erupción?
b) Calcule la ecuación de la recta de regresión, donde la altura representa la variable de respuesta (y).
c) ¿Cuál es la mejor altura predicha de una erupción que tiene una duración de 180 segundos?

Solución
a) ¿Existe correlación lineal significativa entre la duración de una erupción del geiser Old Faithful y la altura de la erupción?
Al parecer la relación entre las variables es pequeña, de acuerdo al coeficiente de determinación calculado, el cual es del orden de 0.1517
$y = 1.4091x + 37.455$
$R^2 = 0.1517$ ▹ *Respuesta*
b) Calcule la ecuación de la recta de regresión, donde la altura representa la variable de respuesta (y).
$y = 1.4091x + 37.455$ ◂ Respuesta

c) ¿Cuál es la mejor altura predicha de una erupción que tiene una duración de 180 segundos?
Sabemos que no existe un ajuste lineal de los datos, también conocemos que un polinomio de grado 6 ajusta los datos con un coeficiente de determinación R^2=0.7784, que consideramos un buen ajuste, aunque, con este método que usamos nos resulta impredecible el siguiente valor de altura para 180 segundos de erupción (ver Fig. 4.43). ◂ Respuesta

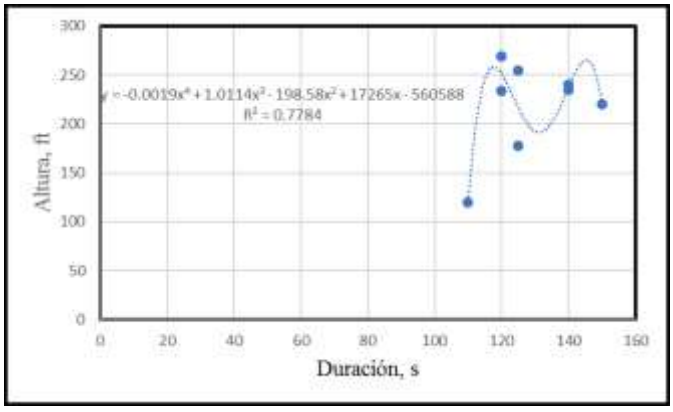


Fig. 4.43 Ajuste de datos a un polinomio de grado 6 con un coeficiente de determinación de 0.7784.

4.7 Miscelánea de Problemas

Problema 1
En la Tabla 4.14 se muestran algunas mediciones de la casa del autor, tomadas del conjunto de datos 9 en el Apéndice B del libro de (Triola, 2009, p. 583). Utilizar estos datos para resolver lo que se le pide en cada inciso.

Tabla 4.14 Base de datos para resolver el Problema 1.

kWh	3375	2661	2073	2579	2858	2296	2812	2433	2266	3128
Grado día para calentar	2421	1841	438	15	152	1028	1967	1627	537	26
Temperatura diaria promedio	26	34	58	72	67	48	33	39	66	71
Costo (en dólares)	321.94	221.11	205.16	251.07	279.8	183.84	244.93	218.59	213.09	333.49

a. Utilice un nivel de significancia de 0.05 para probar una correlación lineal entre el renglón 1 (kWh) y el renglón 4 (Costo) y el renglón 2 (Grado día para calentar) y el renglón 3 (Temperatura diaria promedio).
b. ¿Qué porcentaje de la variación en el costo se puede explicar por medio de la relación lineal entre el renglón 4 (costo) y el renglón 1 (kWh), y el renglón 3 (Temperatura diaria promedio) y el renglón 2 (Grado día para calentar)?
c. Calcule la ecuación de la recta de regresión que exprese el renglón 4 (costo) en términos del renglón 1 (kWh) y la ecuación e la recta de regresión del renglón 3 (Temperatura diaria promedio) en términos del renglón 2 (Grado día para calentar).
d. ¿Cuál es el mejor costo predicho para un tiempo en el que la temperatura diaria promedio es de $40°$?
e. Graficas de aproximaciones de los renglones 1 (kWh) y 4 (costo), y de los renglones 2 (Grado día para calentar) y 3 (Temperatura diaria promedio).

Solución
Este problema se resolvió por los métodos de los puntos de 4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton y 4.6 Regresiones. Específicamente, resuelto por el método de polinomio de Newton en diferencias divididas y por los métodos de las secciones 10-2 Correlación y 10-3 Regresión: cálculo de la pendiente b_1 y de b_0 en la ecuación de regresión $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ de Triola (2009). El procedimiento fue elaborado en el software Maple.

Solución a)
Para la solución de este inciso se requirió encontrar el valor del coeficiente de correlación para ello se empleó la Ec. (3.12), $r = \dfrac{n\left(\sum xy\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\left(\sum y^2\right) - \left(\sum y\right)^2}}$, o,

$$r = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum (y_i)^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}, \quad -1 \le r \le 1 \tag{3.12}$$

Por lo que se tuvieron que encontrar las sumatorias de las variables x y y de la Tabla 4.14, siendo en este caso a y d respectivamente de los renglones 1 y 4, y b y c de los renglones 2 y 3.

> $a := \langle 3375, 2661, 2073, 2579, 2858, 2296, 2812, 2433, 2266, 3128 \rangle$:

> $b := \langle 2421, 1841, 438, 15, 152, 1028, 1967, 1627, 537, 26 \rangle$:

> $c := \langle 26, 34, 58, 72, 67, 48, 33, 39, 66, 71 \rangle$:

> $d := \langle 321.94, 221.11, 205.16, 251.07, 279.8, 183.84, 244.93, 218.59, 213.09, 333.49 \rangle$:

> $n := 10$:

> $sa := sum('a[i]', i = 1..n)$

$sa := 26481$

> $sac := sum('(a[i])^2', i = 1..n)$

$sac := 71605869$

> $sd := sum('d[i]', i = 1..n)$

$sd := 2473.02$

> $sdc := sum('(d[i])^2', i = 1..n)$

$sdc := 6.341421730\ 10^5$

> $sad := sum('a[i] \cdot d[i]', i = 1..n)$

$sad := 6.71608375\ 10^6$

> $sb := sum('b[i]', i = 1..n)$

$sb := 10052$

> $sbc := sum('(b[i])^2', i = 1..n)$

$sbc := 17327742$

> $sc := sum('c[i]', i = 1..n)$

$sc := 514$

> $scc := sum('(c[i])^2', i = 1..n)$

$scc := 29180$

> $sbcc := sum('b[i] \cdot c[i]', i = 1..n)$

$sbcc := 377204$

- Valor de r del renglón 1 (kWh) y el renglón 4 (Costo):

> $r[1] := evalf\left(\frac{n \cdot (sad) - (sa \cdot sd)}{(\mathrm{sqrt}((n \cdot sac) - (sa)^2)) \cdot (\mathrm{sqrt}((n \cdot sdc) - (sd)^2))} \right)$

$r_1 := 0.9150049660$

Tabla 4.15 Valores críticos del coeficiente de correlación r de Pearson

n	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
4	0.950	0.999
5	0.878	0.959
6	0.811	0.917
7	0.754	0.875
8	0.707	0.834
9	0.666	0.798
10	0.632	0.765
11	0.602	0.735

Como podemos observar $r = 0.915$, por lo que ahora podemos encontrar los valores críticos de acuerdo a la Tabla 4.15 de valores críticos del coeficiente de Triola (2009).

En donde podemos ubicar:

- Un nivel de significancia de 0.05 → $\alpha = 0.05$
- En total 10 puntos de acuerdo a la tabla → $n = 10$
- Una hipótesis nula → $H_0 = 0$

Por lo que podemos determinar que los valores críticos del coeficiente de correlación de r son $r = \pm 0.632$, por ello de acuerdo al libro si $|r| >$ el valor crítico de la Tabla 4.15, rechace H_0 y se concluye que existe una correlación lineal.

> $r[1] > vc[1]$

$0.632 < 0.9150049660$

- Valor de *r* del renglón 2 (Grado día para calentar) y el renglón 3 (Temperatura diaria promedio):

$$> r[2] := evalf\left(\frac{n\cdot(sbcc)-(sb\cdot sc)}{\left(\text{sqrt}\left((n\cdot sbc)-(sb)^2\right)\right)\cdot\left(\text{sqrt}\left((n\cdot scc)-(sc)^2\right)\right)}\right)$$

$r_2 := -0.9876841172$

Como podemos observar $r = -0.987$, por lo que ahora podemos encontrar los valores críticos de acuerdo a la Tabla 4.15 de valores críticos del coeficiente en donde podemos ubicar:

- Un nivel de significancia de 0.05 → $\alpha = 0.05$
- En total 10 puntos de acuerdo a la tabla → $n = 10$
- Una hipótesis nula → $H_0 = 0$

Por lo que podemos determinar que los valores críticos del coeficiente de correlación de r son $r = \pm 0.632$, por ello de acuerdo al libro si $|r| \leq$ el valor crítico, no rechace H_0; no hay evidencia suficiente para concluir que existe una correlación lineal.

$> r[2] < vc[2]$

$-0.9876841172 < 0.632$

Respuestas de a)

- Renglón 1 y 4: $r = 0.915$, valor critico de $r = \pm 0.632$. Si existe una correlación lineal.

De acuerdo al coeficiente de determinación $R^2 = 0.8372$ obtenido para las variables de los renglones 1 y 4, se tiene que, sí existe relación entre los kWh y el costo en dólares de electricidad, como era de esperarse, ver Fig. 4.44.

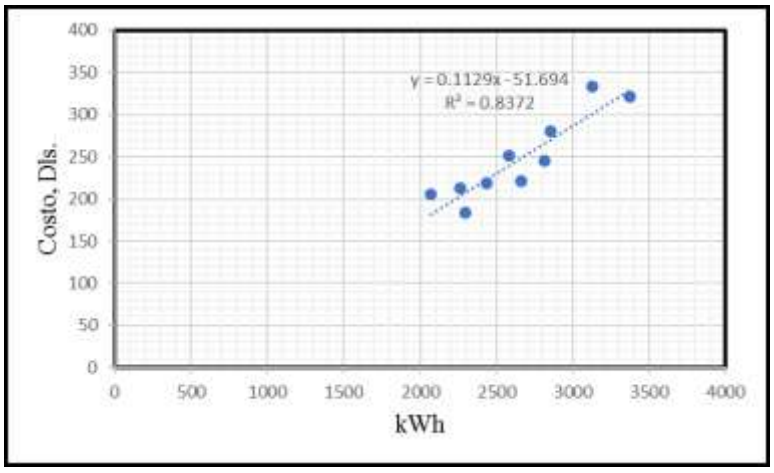


Fig. 4.44 Ajuste de datos experimentales a una línea recta o polinomio de grado 1, con un coeficiente de determinación de 0.8372.

- Renglón 2 y 3: $r = -0.987$, valor critico de $r = \pm 0.632$. No existe evidencia suficiente para determinar si existe una correlación lineal.

Solución b)

¿Qué porcentaje de la variación en el costo se puede explicar por medio de la relación lineal entre el renglón 4 (costo) y el renglón 1 (kWh), y el renglón 3 (Temperatura diaria promedio) y el renglón 2

(Grado día para calentar)?

Para este inciso se buscó el porcentaje de variancia total el cual consiste en elevar r^2 y después multiplicar por 100 para obtener un porcentaje. De la Tabla 4.14 tomamos los renglones

- Renglón 1 y 4:

$> cd[1] := (r[1])^2$

$cd_1 := 0.8372340878$

$> cd[1] \cdot 100$

83.72340878

- Renglón 2 y 3:

$> cd[2] := (r[2])^2$

$cd_2 := 0.9755199154$

$> cd[2] \cdot 100$

97.55199154

Respuestas de b)

- Renglón 1 y 4: Existe un porcentaje de variación de 83.72%
- Renglón 2 y 3: Existe un porcentaje de variación de 97.55%

$R^2 = 0.8372$ y $R^2 = 0.9755$ son los coeficientes de determinación para el ajuste de datos de las variables entre los renglones 1 y 4 y los renglones 2 y 3 de la Tabla 4.14, respectivamente.

Solución c)

c) Calcule la ecuación de la recta de regresión que exprese el renglón 4 (costo) en términos del renglón 1 (kWh) y la ecuación e la recta de regresión del renglón 3 (Temperatura diaria promedio) en términos del renglón 2 (Grado día para calentar) de la Tabla 4.14.

Para este inciso se usaron las Ecs. (3.8) y (3.9) en la forma

$$b_1 = \frac{n\left(\sum xy\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2}$$

$$b_0 = y - b_1 x$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

- Renglón 1 y 4:

$> bp[1] := evalf\left(\frac{(n \cdot (sad) - (sa \cdot sd))}{(n \cdot (sac) - (sa)^2)}\right)$

$bp_1 := 0.1129097356$

$> yb[1] := evalf\left(\frac{sa}{n}\right); xb[1] := evalf\left(\frac{sd}{n}\right);$

$yb_1 := 2648.100000$

$xb_1 := 247.3020000$

$> bi[1] := evalf(yb[1] - ((bp[1]) \cdot xb[1]))$

$bi_1 := 2620.177197$

$> \hat{y}[1] := bi[1] + bp[1] \cdot x$

$\hat{y}_1 := 0.1129097356\, x + 2620.177197$

Usando Excel, la ecuación de la recta de regresión del renglón el renglón 4 (Costo) en términos del renglón 1 (kWh) es

y = 0.1129x - 51.694

como se puede observar en la Fig. 4.45.

- Renglón 2 y 3:

> $bp[2] := evalf\left(\frac{(n\cdot(sbcc) - (sb\cdot sc))}{(n\cdot(sbc) - (sb)^2)}\right)$

$bp_2 := -0.01930772456$

> $yb[2] := evalf\left(\frac{sc}{n}\right); xb[2] := evalf\left(\frac{sb}{n}\right);$

$yb_2 := 51.40000000$

$xb_2 := 1005.200000$

> $bi[2] := evalf(yb[2] - ((bp[2])\cdot xb[2]))$

$bi_2 := 70.80812473$

> $\widehat{y}[2] := bi[2] + bp[2]\cdot x$

$\widehat{y}_2 := -0.01930772456\,x + 70.80812473$

Usando Excel, la ecuación de la recta de regresión del renglón el renglón 2 (Grado día para calentar) en términos del renglón 4 (Costo en dólares) de la Tabla 4.14, es

y = -0.0193x + 70.808

como se puede observar en la Fig. 4.45.

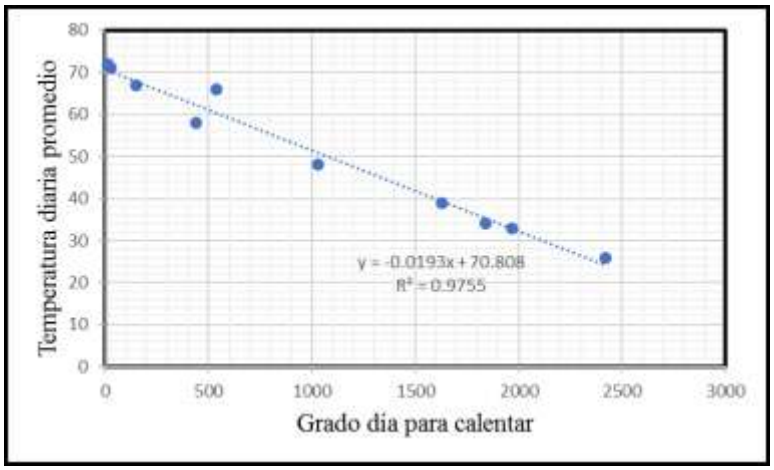


Fig. 4.45 Ajuste de datos experimentales a una línea recta o polinomio de grado 1, con un coeficiente de determinación de 0.9755.

Respuestas de c)

- Renglón 1 y 4 de Tabla 4.14: Ecuación de regresión de $\hat{y} = 0.1129x + 2620.1771$
- Renglón 2 y 3 de Tabla 4.14: Ecuación de regresión de $\hat{y} = -0.0193x + 70.8081$

Solución d)

Finalmente para este inciso solo se sustituyeron los valores de x siendo en este caso $x = 40$ en las ecuaciones de regresión obtenidas anteriormente para los datos de los renglones de la Fig. 4.14

- Renglón 1 y 4:

> $xp := 40:$

$> \hat{y}[1] := bi[1] + bp[1] \cdot xp$

$\hat{y}_1 := 2624.693586$

- Renglón 2 y 3:

$> \hat{y}[2] := bi[2] + bp[2] \cdot xp$

$\hat{y}_2 := 70.03581575$

Respuestas de d)

¿Cuál es el mejor costo predicho para un tiempo en el que la temperatura diaria promedio es de $40°$?

- Renglón 1 y 4 de Tabla 4.14: El mejor costo con respecto a los 40° es $\$2625$.
- Renglón 2 y 3 de Tabla 4.14: El mejor costo con respecto a los 40° debe andar entre 183.84 y 244.93, por lo que se requiere interpolar de acuerdo con los siguientes datos

Temperatura diaria promedio	48	33
Costo (en dólares)	183.84	244.93

Inciso e) graficas de los renglones 1 y 4, 2 y 3

Las gráficas de Excel para un polinomio de grado 1 para los renglones 1 y 4, y los renglones 2 y 3 de Tabla 4.14, se pueden observar en las Figs. Las cuales presentan un coeficiente de determinación significativo de $R^2 = 0.8372$ y $R^2 = 0.9755$, respectivamente.

Alternativamente, las gráficas fueron realizadas con el **Método de Polinomio de Newton**, y con sus respectivos polinomios en términos de **diferencias divididas**, por ello se emplearon las siguientes formulas:

- **Diferencias Divididas:**

Primera diferencia dividida $f[x_0, x_1]$

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{(x_1 - x_0)} \tag{4.4}$$

Segunda diferencia dividida $f[x_0, x_1, x_2]$

$$a_2 = \frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.5}$$

Tercera diferencia dividida $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{\frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} - \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} \right) - \left(\frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \right)}{x_3 - x_0} \tag{4.6}$$

Y así sucesivamente hasta alcanzar la novena diferencia dividida, esto debido a que en este problema existen 10 puntos.

- **Polinomios en términos de diferencias divididas:**
  - **Polinomio de primer grado** para los puntos (0) y (1)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0) \tag{4.7}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de primer grado en términos de diferencias divididas**

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1] \tag{4.8}$$

  - **Polinomio de segundo grado** para los puntos (0), (1) y (2)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1) \tag{4.9}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de segundo grado en términos de diferencias divididas**

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \tag{4.10}$$

Polinomio de tercer grado para los puntos (0), (1), (2) y (3)

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{4.11}$$

Al sustituir los valores de las constantes en base de las diferencias divididas se obtiene un **polinomio de tercer grado en términos de diferencias divididas**

$$p(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \tag{4.12}$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

Y así sucesivamente hasta alcanzar el noveno polinomio, esto debido a que en este problema existen 10 puntos.

Grafica de los renglones 1 y 4:

Diferencias Divididas:

- **Primera diferencia dividida:**

```
> a1[1] := evalf((d[2] - d[1])/(a[2] - a[1]))
```
$a1_1 := 0.1412184874$

```
> a1[2] := evalf((d[3] - d[2])/(a[3] - a[2]))
```
$a1_2 := 0.02712585034$

```
> a1[3] := evalf((d[4] - d[3])/(a[4] - a[3]))
```
$a1_3 := 0.09073122530$

```
> a1[6] := evalf((d[7] - d[6])/(a[7] - a[6]))
```
$a1_6 := 0.1183914729$

```
> a1[7] := evalf((d[8] - d[7])/(a[8] - a[7]))
```
$a1_7 := 0.06949868074$

```
> a1[8] := evalf((d[9]-d[8])/(a[9] - a[8]))
```
$a1_8 := 0.03293413174$

$$> a1[4] := evalf\left(\frac{(d[5]-d[4])}{(a[5]-a[4])}\right)$$

$$a1_4 := 0.1029749104$$

$$> a1[5] := evalf\left(\frac{(d[6]-d[5])}{(a[6]-a[5])}\right)$$

$$a1_5 := 0.1707473310$$

$$> a1[9] := evalf\left(\frac{(d[10]-d[9])}{(a[10]-a[9])}\right)$$

$$a1_9 := 0.1396751740$$

- **Segunda diferencia dividida:**

$$> a2[1] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[3]-d[2])}{(a[3]-a[2])} - \frac{(d[2]-d[1])}{(a[2]-a[1])}\right)}{(a[3]-a[1])}\right)$$

$$a2_1 := 0.00008762875353$$

$$> a2[2] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[4]-d[3])}{(a[4]-a[3])} - \frac{(d[3]-d[2])}{(a[3]-a[2])}\right)}{(a[4]-a[2])}\right)$$

$$a2_2 := -0.0007756753044$$

$$> a2[3] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[5]-d[4])}{(a[5]-a[4])} - \frac{(d[4]-d[3])}{(a[4]-a[3])}\right)}{(a[5]-a[3])}\right)$$

$$a2_3 := 0.00001559705108$$

$$> a2[4] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[6]-d[5])}{(a[6]-a[5])} - \frac{(d[5]-d[4])}{(a[5]-a[4])}\right)}{(a[6]-a[4])}\right)$$

$$a2_4 := -0.0002394785180$$

$$> a2[5] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[7]-d[6])}{(a[7]-a[6])} - \frac{(d[6]-d[5])}{(a[6]-a[5])}\right)}{(a[7]-a[5])}\right)$$

$$a2_5 := 0.001138170828$$

$$> a2[6] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[8]-d[7])}{(a[8]-a[7])} - \frac{(d[7]-d[6])}{(a[7]-a[6])}\right)}{(a[8]-a[6])}\right)$$

$$a2_6 := -0.0003568816946$$

$$> a2[7] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[9]-d[8])}{(a[9]-a[8])} - \frac{(d[8]-d[7])}{(a[8]-a[7])}\right)}{(a[9]-a[7])}\right)$$

$$a2_7 := 0.00006696803846$$

$$> a2[8] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(d[10]-d[9])}{(a[10]-a[9])} - \frac{(d[9]-d[8])}{(a[9]-a[8])}\right)}{(a[10]-a[8])}\right)$$

$$a2_8 := 0.0001535842335$$

- **Tercera diferencia dividida**:

$$> a3[1] := evalf\left(\frac{a2[2]-a2[1]}{(a[4]-a[1])}\right)$$

$$a3_1 := 0.000001084552837$$

$$> a3[2] := evalf\left(\frac{a2[3]-a2[2]}{(a[5]-a[2])}\right)$$

$$a3_2 := 0.000004016610942$$

$$> a3[5] := evalf\left(\frac{a2[6]-a2[5]}{(a[8]-a[5])}\right)$$

$$a3_5 := 0.000003517770642$$

$$> a3[6] := evalf\left(\frac{a2[7]-a2[6]}{(a[9]-a[6])}\right)$$

$$a3_6 := -0.00001412832444$$

$$> a3[3] := evalf\left(\frac{a2[4]-a2[3]}{(a[6]-a[3])}\right)$$

$$a3_3 := -0.000001143836633$$

$$> a3[4] := evalf\left(\frac{a2[5]-a2[4]}{(a[7]-a[4])}\right)$$

$$a3_4 := 0.000005912658137$$

$$> a3[7] := evalf\left(\frac{a2[8]-a2[7]}{(a[10]-a[7])}\right)$$

$$a3_7 := 2.741018830\ 10^{-7}$$

- **Cuarta diferencia dividida:**

$$> a4[1] := evalf\left(\frac{a3[2]-a3[1]}{(a[5]-a[1])}\right)$$

$$a4_1 := -5.671292273\ 10^{-9}$$

$$> a4[2] := evalf\left(\frac{a3[3]-a3[2]}{(a[6]-a[2])}\right)$$

$$a4_2 := 1.413821253\ 10^{-8}$$

$$> a4[3] := evalf\left(\frac{a3[4]-a3[3]}{(a[7]-a[3])}\right)$$

$$a4_3 := 9.548707402\ 10^{-9}$$

$$> a4[4] := evalf\left(\frac{a3[5]-a3[4]}{(a[8]-a[4])}\right)$$

$$a4_4 := 1.640333901\ 10^{-8}$$

$$> a4[5] := evalf\left(\frac{a3[6]-a3[5]}{(a[9]-a[5])}\right)$$

$$a4_5 := 2.980759304\ 10^{-8}$$

$$> a4[6] := evalf\left(\frac{a3[7]-a3[6]}{(a[10]-a[6])}\right)$$

$$a4_6 := 1.731060856\ 10^{-8}$$

- **Quinta diferencia dividida:**

$$> a5[1] := evalf\left(\frac{a4[2]-a4[1]}{(a[6]-a[1])}\right)$$

$$a5_1 := -1.835913327\ 10^{-11}$$

$$> a5[2] := evalf\left(\frac{a4[3]-a4[2]}{(a[7]-a[2])}\right)$$

$$a5_2 := -3.039407370\ 10^{-11}$$

$$> a5[3] := evalf\left(\frac{a4[4]-a4[3]}{(a[8]-a[3])}\right)$$

$$a5_3 := 1.904064336\ 10^{-11}$$

$$> a5[4] := evalf\left(\frac{a4[5]-a4[4]}{(a[9]-a[4])}\right)$$

$$a5_4 := -4.282509275\ 10^{-11}$$

$$> a5[5] := evalf\left(\frac{a4[6]-a4[5]}{(a[10]-a[5])}\right)$$

$$a5_5 := -4.628512770\ 10^{-11}$$

- **Sexta diferencia dividida:**

$$> a6[1] := evalf\left(\frac{a5[2]-a5[1]}{(a[7]-a[1])}\right)$$

$$a6_1 := 2.137644837\ 10^{-14}$$

$$> a6[2] := evalf\left(\frac{a5[3]-a5[2]}{(a[8]-a[2])}\right)$$

$$a6_2 := -2.168189345\ 10^{-13}$$

$$> a6[3] := evalf\left(\frac{a5[4]-a5[3]}{(a[9]-a[3])}\right)$$

$$a6_3 := -3.205478555\ 10^{-13}$$

$$> a6[4] := evalf\left(\frac{a5[5]-a5[4]}{(a[10]-a[4])}\right)$$

$$a6_4 := -6.302431603\ 10^{-15}$$

- **Séptima diferencia dividida:**

$$> a7[1] := evalf\left(\frac{a6[2]-a6[1]}{(a[8]-a[1])}\right)$$

$$a7_1 := 2.528613407\ 10^{-16}$$

$$> a7[2] := evalf\left(\frac{a6[3]-a6[2]}{(a[9]-a[2])}\right)$$

$$a7_2 := 2.626048633\ 10^{-16}$$

$$> a7[3] := evalf\left(\frac{a6[4]-a6[3]}{(a[10]-a[3])}\right)$$

$$a7_3 := 2.978629610\ 10^{-16}$$

- **Octava diferencia dividida:**

$$> a8[1] := evalf\left(\frac{a7[2]-a7[1]}{(a[9]-a[1])}\right)$$

$$a8_1 := -8.785863481\ 10^{-21}$$

$$> a8[2] := evalf\left(\frac{a7[3]-a7[2]}{(a[10]-a[2])}\right)$$

$$a8_2 := 7.549913854\ 10^{-20}$$

- **Novena diferencia dividida:**

$$> a9[1] := evalf\left(\frac{a8[2]-a8[1]}{(a[10]-a[1])}\right)$$

$$a9_1 := -3.412348260\ 10^{-22}$$

Polinomios en términos de diferencias divididas:

- **Polinomio de primer grado:**

$$> p1[1] := evalf(d[1] + (x-a[1])\cdot a1[1])$$

$$p1_1 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x$$

- **Polinomio de segundo grado:**

$$> p1[2] := evalf(d[1] + (x-a[1])\cdot a1[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot a2[1])$$

$$p1_2 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\ (x-3375.)\ (x-2661.)$$

- **Polinomio de tercer grado:**

$$> p1[3] := evalf(d[1] + (x-a[1])\cdot a1[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot a2[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot a3[1])$$

$$p1_3 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\ (x-3375.)\ (x-2661.) + 0.000001084552837\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.)$$

- **Polinomio de cuarto grado:**

$$> p1[4] := evalf(d[1] + (x-a[1])\cdot a1[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot a2[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot a3[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot(x-a[4])\cdot a4[1])$$

$$p1_4 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\ (x-3375.)\ (x-2661.) + 0.000001084552837\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.) - 5.671292273\ 10^{-9}\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.)\ (x-2579.)$$

- **Polinomio de quinto grado:**

$$> p1[5] := evalf(d[1] + (x-a[1])\cdot a1[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot a2[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot a3[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot(x-a[4])\cdot a4[1] + (x-a[1])\cdot(x-a[2])\cdot(x-a[3])\cdot(x-a[4])\cdot(x-a[5])\cdot a5[1])$$

$$p1_5 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\ (x-3375.)\ (x-2661.) + 0.000001084552837\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.) - 5.671292273\ 10^{-9}\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.)\ (x-2579.) - 1.835913327\ 10^{-11}\ (x-3375.)\ (x-2661.)\ (x-2073.)\ (x-2579.)\ (x-2858.)$$

- **Polinomio de sexto grado:**

```
> p1[6] := evalf(d[1] + (x - a[1])·a1[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·a2[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·a3[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·a4[1]
      + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·a5[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·a6[1])
```

$$p1_6 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)$$
$$+ 0.000001084552837\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.) - 5.671292273\,10^{-9}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.) - 1.835913327\,10^{-11}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.) + 2.137644837\,10^{-14}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.)$$

- **Polinomio de séptimo grado:**

```
> p1[7] := evalf(d[1] + (x - a[1])·a1[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·a2[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·a3[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·a4[1]
      + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·a5[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·a6[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·(x - a[7])·a7[1])
```

$$p1_7 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)$$
$$+ 0.000001084552837\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.) - 5.671292273\,10^{-9}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.) - 1.835913327\,10^{-11}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.) + 2.137644837\,10^{-14}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.) + 2.528613407\,10^{-16}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.)\,(x - 2812.)$$

- **Polinomio de octavo grado:**

```
> p1[8] := evalf(d[1] + (x - a[1])·a1[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·a2[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·a3[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·a4[1]
      + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·a5[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·a6[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·(x - a[7])·a7[1] + (x
      - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·(x - a[7])·(x
      - a[8])·a8[1])
```

$$p1_8 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)$$
$$+ 0.000001084552837\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.) - 5.671292273\,10^{-9}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.) - 1.835913327\,10^{-11}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.) + 2.137644837\,10^{-14}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.) + 2.528613407\,10^{-16}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.)\,(x - 2812.)$$
$$- 8.785863481\,10^{-21}\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x$$
$$- 2296.)\,(x - 2812.)\,(x - 2433.)$$

- **Polinomio de noveno grado:**

```
> p1[9] := evalf(d[1] + (x - a[1])·a1[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·a2[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·a3[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·a4[1]
      + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·a5[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·a6[1] + (x - a[1])·(x
      - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·(x - a[7])·a7[1] + (x
      - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x - a[6])·(x - a[7])·(x
      - a[8])·a8[1] + (x - a[1])·(x - a[2])·(x - a[3])·(x - a[4])·(x - a[5])·(x
      - a[6])·(x - a[7])·(x - a[8])·(x - a[9])·a9[1])
```

$$p1_9 := -154.6723950 + 0.1412184874\,x + 0.00008762875353\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)$$
$$+ 0.000001084552837\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.) - 5.671292273\,10^{-9}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.) - 1.835913327\,10^{-11}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.) + 2.137644837\,10^{-14}\,(x - 3375.)\,(x$$
$$- 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.) + 2.528613407\,10^{-16}\,(x$$
$$- 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.)\,(x - 2812.)$$
$$- 8.785863481\,10^{-21}\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x - 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x$$
$$- 2296.)\,(x - 2812.)\,(x - 2433.) - 3.412348260\,10^{-22}\,(x - 3375.)\,(x - 2661.)\,(x$$
$$- 2073.)\,(x - 2579.)\,(x - 2858.)\,(x - 2296.)\,(x - 2812.)\,(x - 2433.)\,(x - 2266.)$$

Una vez que obtuvimos los valores de las nueve diferencias divididas y de los nueve polinomios de grado pudimos graficar los puntos (datos experimentales) proporcionados por la Tabla y los polinomios, para poder encontrar la curva que más se aproximara.
Instrucciones de código de las gráficas:

```
> with(plots) :
> F1[1] := plot(p1[1], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = box, numpoints = 50, color
      = "MediumPurple") :
> F2[1] := plot(p1[2], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = asterisk, numpoints = 50, color
      = "LightGreen") :
> F3[1] := plot(p1[3], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = circle, numpoints = 50, color
      = "PaleVioletRed") :
> F4[1] := plot(p1[4], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = cross, numpoints = 50, color = "Cyan") :
> F5[1] := plot(p1[5], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = diagonalcross, numpoints = 50, color
      = "Goldenrod") :
> F6[1] := plot(p1[6], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = diamond, numpoints = 50, color
      = "PaleVioletRed") :
> F7[1] := plot(p1[7], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = point, numpoints = 50, color = "Coral") :
> F8[1] := plot(p1[8], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = solidbox, numpoints = 50, color
      = "DeepSkyBlue") :
> F9[1] := plot(p1[9], x = 2070 ..3400, style = point, symbol = solidcircle, numpoints = 50, color = "Navy",
      legend = ["Polinomio 9"]) :
> G1[1] := plot(Vector([a[3], a[9], a[6], a[8], a[4], a[2], a[7], a[5], a[10], a[1]]), Vector([d[3],
      d[9], d[6], d[8], d[4], d[2], d[7], d[5], d[10], d[1]]), style = line, symbolsize = 20, color = "Black")
      :
```

```
>
  display( {F1[1], F2[1], F3[1], F4[1], F5[1], F6[1], F7[1], F8[1], F9[1], G1[1]}, axes = boxed, title
      = "Relacion entre kWh y el costo: Polinomios y datos experimentales", titlefont = ["ROMAN", 12], labels
      = ["Eje x: kWh", "Eje y: Costo en dolares"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
      = ["ROMAN", 12] )
>
display( {F9[1], G1[1]}, axes = boxed, title
    = "Relacion entre kWh y el costo: Polinomio que mejor aproxima", titlefont = ["ROMAN", 12], labels
    = ["Eje x: kWh", "Eje y: Costo en dolares"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
    = ["ROMAN", 12])
```

las gráficas de los datos experimentales y los polinomios de las variables de los renglones 1 y 4 se muestran en la Fig. 4.46. El modelo que mejor ajusta a los datos es el del polinomio de grado 9.

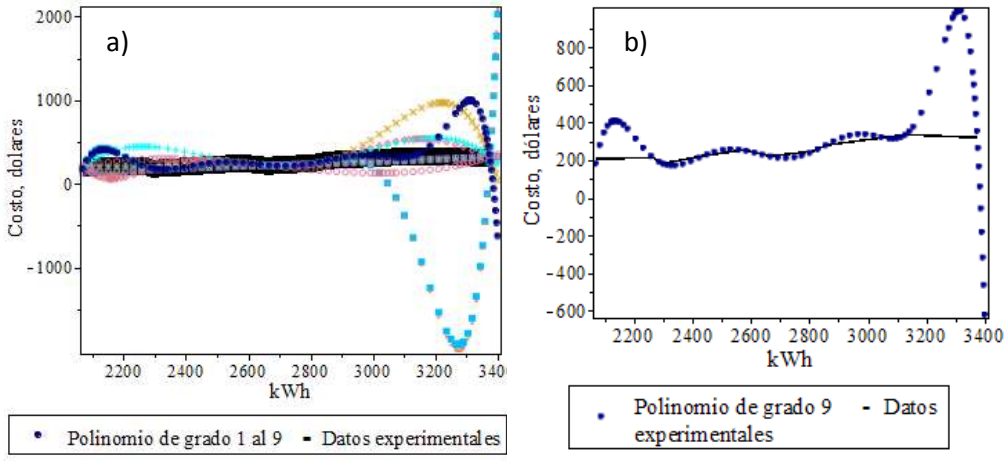


Fig. 4.46 Gráfica de regresión de los datos experimentales y polinomios de kWh y el costo de la electricidad a) polinomios de grados del 1 al 9, b) polinomio de grado 9.

Grafica de los renglones 2 y 3
Diferencias Divididas

- **Primera diferencia dividida:**

$> b1[1] := evalf\left(\frac{(c[2]-c[1])}{(b[2]-b[1])}\right)$

$b1_1 := -0.01379310345$

$> b1[2] := evalf\left(\frac{(c[3]-c[2])}{(b[3]-b[2])}\right)$

$b1_2 := -0.01710620100$

$> b1[3] := evalf\left(\frac{(c[4]-c[3])}{(b[4]-b[3])}\right)$

$b1_3 := -0.03309692671$

$> b1[4] := evalf\left(\frac{(c[5]-c[4])}{(b[5]-b[4])}\right)$

$> b1[6] := evalf\left(\frac{(c[7]-c[6])}{(b[7]-b[6])}\right)$

$b1_6 := -0.01597444089$

$> b1[7] := evalf\left(\frac{(c[8]-c[7])}{(b[8]-b[7])}\right)$

$b1_7 := -0.01764705882$

$> b1[8] := evalf\left(\frac{(c[9]-c[8])}{(b[9]-b[8])}\right)$

$b1_8 := -0.02477064220$

$> b1[9] := evalf\left(\frac{(c[10]-c[9])}{(b[10]-b[9])}\right)$

$b1_4 := -0.03649635036$

> $b1[5] := evalf\left(\frac{(c[6]-c[5])}{(b[6]-b[5])}\right)$

$b1_5 := -0.02168949772$

$b1_9 := -0.009784735812$

- **Segunda diferencia dividida:**

> $b2[1] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[3]-c[2])}{(b[3]-b[2])} - \frac{(c[2]-c[1])}{(b[2]-b[1])}\right)}{(b[3]-b[1])}\right)$

$b2_1 := 0.000001670750151$

> $b2[2] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[4]-c[3])}{(b[4]-b[3])} - \frac{(c[3]-c[2])}{(b[3]-b[2])}\right)}{(b[4]-b[2])}\right)$

$b2_2 := 0.000008757242999$

> $b2[3] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[5]-c[4])}{(b[5]-b[4])} - \frac{(c[4]-c[3])}{(b[4]-b[3])}\right)}{(b[5]-b[3])}\right)$

$b2_3 := 0.00001188609668$

> $b2[4] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[6]-c[5])}{(b[6]-b[5])} - \frac{(c[5]-c[4])}{(b[5]-b[4])}\right)}{(b[6]-b[4])}\right)$

$b2_4 := 0.00001461683381$

> $b2[5] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[7]-c[6])}{(b[7]-b[6])} - \frac{(c[6]-c[5])}{(b[6]-b[5])}\right)}{(b[7]-b[5])}\right)$

$b2_5 := 0.000003148791638$

> $b2[6] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[8]-c[7])}{(b[8]-b[7])} - \frac{(c[7]-c[6])}{(b[7]-b[6])}\right)}{(b[8]-b[6])}\right)$

$b2_6 := -0.000002792350466$

> $b2[7] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[9]-c[8])}{(b[9]-b[8])} - \frac{(c[8]-c[7])}{(b[8]-b[7])}\right)}{(b[9]-b[7])}\right)$

$b2_7 := 0.000004981526838$

> $b2[8] := evalf\left(\frac{\left(\frac{(c[10]-c[9])}{(b[10]-b[9])} - \frac{(c[9]-c[8])}{(b[9]-b[8])}\right)}{(b[10]-b[8])}\right)$

$b2_8 := -0.000009360341280$

- **Tercera diferencia dividida:**

> $b3[1] := evalf\left(\frac{b2[2]-b2[1]}{(b[4]-b[1])}\right)$

$b3_1 := -2.945341998\ 10^{-9}$

> $b3[2] := evalf\left(\frac{b2[3]-b2[2]}{(b[5]-b[2])}\right)$

$b3_2 := -1.852488858\ 10^{-9}$

> $b3[5] := evalf\left(\frac{b2[6]-b2[5]}{(b[8]-b[5])}\right)$

$b3_5 := -4.027892952\ 10^{-9}$

> $b3[6] := evalf\left(\frac{b2[7]-b2[6]}{(b[9]-b[6])}\right)$

$b3_6 := -1.583274400\ 10^{-8}$

$$> b3[3] := evalf\left(\frac{b2[4]-b2[3]}{(b[6]-b[3])}\right)$$

$$b3_3 := 4.628368017\ 10^{-9}$$

$$> b3[4] := evalf\left(\frac{b2[5]-b2[4]}{(b[7]-b[4])}\right)$$

$$b3_4 := -5.875021603\ 10^{-9}$$

$$> b3[7] := evalf\left(\frac{b2[8]-b2[7]}{(b[10]-b[7])}\right)$$

$$b3_7 := 7.388906811\ 10^{-9}$$

- **Cuarta diferencia dividida:**

$$> b4[1] := evalf\left(\frac{b3[2]-b3[1]}{(b[5]-b[1])}\right)$$

$$b4_1 := -4.816452799\ 10^{-13}$$

$$> b4[2] := evalf\left(\frac{b3[3]-b3[2]}{(b[6]-b[2])}\right)$$

$$b4_2 := -7.971533671\ 10^{-12}$$

$$> b4[3] := evalf\left(\frac{b3[4]-b3[3]}{(b[7]-b[3])}\right)$$

$$b4_3 := -6.869450373\ 10^{-12}$$

$$> b4[4] := evalf\left(\frac{b3[5]-b3[4]}{(b[8]-b[4])}\right)$$

$$b4_4 := 1.145861446\ 10^{-12}$$

$$> b4[5] := evalf\left(\frac{b3[6]-b3[5]}{(b[9]-b[5])}\right)$$

$$b4_5 := -3.066195078\ 10^{-11}$$

$$> b4[6] := evalf\left(\frac{b3[7]-b3[6]}{(b[10]-b[6])}\right)$$

$$b4_6 := -2.317530021\ 10^{-11}$$

- **Quinta diferencia dividida:**

$$> b5[1] := evalf\left(\frac{b4[2]-b4[1]}{(b[6]-b[1])}\right)$$

$$b5_1 := 5.376804301\ 10^{-15}$$

$$> b5[2] := evalf\left(\frac{b4[3]-b4[2]}{(b[7]-b[2])}\right)$$

$$b5_2 := 8.746692841\ 10^{-15}$$

$$> b5[3] := evalf\left(\frac{b4[4]-b4[3]}{(b[8]-b[3])}\right)$$

$$b5_3 := 6.741221042\ 10^{-15}$$

$$> b5[4] := evalf\left(\frac{b4[5]-b4[4]}{(b[9]-b[4])}\right)$$

$$b5_4 := -6.093450619\ 10^{-14}$$

$$> b5[5] := evalf\left(\frac{b4[6]-b4[5]}{(b[10]-b[5])}\right)$$

$$b5_5 := -5.941786167\ 10^{-14}$$

- **Sexta diferencia dividida:**

$$> b6[1] := evalf\left(\frac{b5[2]-b5[1]}{(b[7]-b[1])}\right)$$

$$b6_1 := -7.422661982\ 10^{-18}$$

$$> b6[2] := evalf\left(\frac{b5[3]-b5[2]}{(b[8]-b[2])}\right)$$

$$b6_2 := 9.371363547\ 10^{-18}$$

$$> b6[3] := evalf\left(\frac{b5[4]-b5[3]}{(b[9]-b[3])}\right)$$

$$b6_3 := -6.835932043\ 10^{-16}$$

- **Octava diferencia dividida:**

$$> b8[1] := evalf\left(\frac{b7[2]-b7[1]}{(b[9]-b[1])}\right)$$

$$b8_1 := -2.932939021\ 10^{-22}$$

$$> b8[2] := evalf\left(\frac{b7[3]-b7[2]}{(b[10]-b[2])}\right)$$

$$b8_2 := 1.391335382\ 10^{-21}$$

- **Novena diferencia dividida:**

$$> b9[1] := evalf\left(\frac{b8[2]-b8[1]}{(b[10]-b[1])}\right)$$

$$b9_1 := -7.033942731\ 10^{-25}$$

> $b6[4] := evalf\left(\frac{b5[5]-b5[4]}{(b[10]-b[4])}\right)$

$b6_4 := 1.378767745\ 10^{-16}$

- **Séptima diferencia dividida:**

> $b7[1] := evalf\left(\frac{b6[2]-b6[1]}{(b[8]-b[1])}\right)$

$b7_1 := -2.115116565\ 10^{-20}$

> $b7[2] := evalf\left(\frac{b6[3]-b6[2]}{(b[9]-b[2])}\right)$

$b7_2 := 5.314145459\ 10^{-19}$

> $b7[3] := evalf\left(\frac{b6[4]-b6[3]}{(b[10]-b[3])}\right)$

$b7_3 := -1.993859172\ 10^{-18}$

Polinomios en términos de diferencias divididas

- **Polinomio de primer grado:**

> $p2[1] := evalf(c[1] + (x - b[1]) \cdot b1[1])$

$p2_1 := 59.39310345 - 0.01379310345\ x$

- **Polinomio de segundo grado:**

> $p2[2] := evalf(c[1] + (x - b[1]) \cdot b1[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot b2[1])$

$p2_2 := 59.39310345 - 0.01379310345\ x + 0.000001670750151\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)$

- **Polinomio de tercer grado:**

> $p2[3] := evalf(c[1] + (x - b[1]) \cdot b1[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot b2[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot b3[1])$

$p2_3 := 59.39310345 - 0.01379310345\ x + 0.000001670750151\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)$

$- 2.945341998\ 10^{-9}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.)$

- **Polinomio de cuarto grado:**

> $p2[4] := evalf(c[1] + (x - b[1]) \cdot b1[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot b2[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot b3[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot (x - b[4]) \cdot b4[1])$

$p2_4 := 59.39310345 - 0.01379310345\ x + 0.000001670750151\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)$

$- 2.945341998\ 10^{-9}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.) - 4.816452799\ 10^{-13}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.)\ (x - 15.)$

- **Polinomio de quinto grado:**

> $p2[5] := evalf(c[1] + (x - b[1]) \cdot b1[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot b2[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot b3[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot (x - b[4]) \cdot b4[1] + (x - b[1]) \cdot (x - b[2]) \cdot (x - b[3]) \cdot (x - b[4]) \cdot (x - b[5]) \cdot b5[1])$

$p2_5 := 59.39310345 - 0.01379310345\ x + 0.000001670750151\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)$

$- 2.945341998\ 10^{-9}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.) - 4.816452799\ 10^{-13}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.)\ (x - 15.) + 5.376804301\ 10^{-15}\ (x - 2421.)\ (x - 1841.)\ (x - 438.)\ (x - 15.)\ (x - 152.)$

- **Polinomio de sexto grado:**

```
> p2[6] := evalf(c[1] + (x - b[1])·b1[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·b2[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·b3[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·b4[1]
      + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·b5[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·b6[1])
```

$$p2_6 := 59.39310345 - 0.01379310345\,x + 0.000001670750151\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)$$
$$- 2.945341998\,10^{-9}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.) - 4.816452799\,10^{-13}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.) + 5.376804301\,10^{-15}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.) - 7.422661982\,10^{-18}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.)$$

- **Polinomio de séptimo grado:**

```
> p2[7] := evalf(c[1] + (x - b[1])·b1[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·b2[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·b3[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·b4[1]
      + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·b5[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·b6[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·(x - b[7])·b7[1])
```

$$p2_7 := 59.39310345 - 0.01379310345\,x + 0.000001670750151\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)$$
$$- 2.945341998\,10^{-9}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.) - 4.816452799\,10^{-13}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.) + 5.376804301\,10^{-15}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.) - 7.422661982\,10^{-18}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.) - 2.115116565\,10^{-20}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.)\,(x - 1967.)$$

- **Polinomio de octavo grado:**

```
> p2[8] := evalf(c[1] + (x - b[1])·b1[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·b2[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·b3[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·b4[1]
      + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·b5[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·b6[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·(x - b[7])·b7[1] + (x
      - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·(x - b[7])·(x
      - b[8])·b8[1])
```

$$p2_8 := 59.39310345 - 0.01379310345\,x + 0.000001670750151\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)$$
$$- 2.945341998\,10^{-9}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.) - 4.816452799\,10^{-13}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.) + 5.376804301\,10^{-15}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.) - 7.422661982\,10^{-18}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.) - 2.115116565\,10^{-20}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.)\,(x - 1967.)$$
$$- 2.932939021\,10^{-22}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x$$
$$- 1028.)\,(x - 1967.)\,(x - 1627.)$$

- **Polinomio de noveno grado:**

```
> p2[9] := evalf(c[1] + (x - b[1])·b1[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·b2[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·b3[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·b4[1]
      + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·b5[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·b6[1] + (x - b[1])·(x
      - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·(x - b[7])·b7[1] + (x
      - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x - b[6])·(x - b[7])·(x
      - b[8])·b8[1] + (x - b[1])·(x - b[2])·(x - b[3])·(x - b[4])·(x - b[5])·(x
      - b[6])·(x - b[7])·(x - b[8])·(x - b[9])·b9[1])
```

$$p2_9 := 59.39310345 - 0.01379310345\,x + 0.000001670750151\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)$$
$$- 2.945341998\,10^{-9}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.) - 4.816452799\,10^{-13}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.) + 5.376804301\,10^{-15}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.) - 7.422661982\,10^{-18}\,(x - 2421.)\,(x$$
$$- 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.) - 2.115116565\,10^{-20}\,(x$$
$$- 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.)\,(x - 1967.)$$
$$- 2.932939021\,10^{-22}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x - 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x$$
$$- 1028.)\,(x - 1967.)\,(x - 1627.) - 7.033942731\,10^{-25}\,(x - 2421.)\,(x - 1841.)\,(x$$
$$- 438.)\,(x - 15.)\,(x - 152.)\,(x - 1028.)\,(x - 1967.)\,(x - 1627.)\,(x - 537.)$$

Una vez que obtuvimos los valores de las nueve diferencias divididas y de los nueve polinomios de grado pudimos graficar los datos experimentales proporcionados por la Tabla y los polinomios, para con ello, encontrar la gráfica que más se aproximara a los datos.

Instrucciones de código de las gráficas:

```
> with(plots) :
> F1[2] := plot(p2[1], x = 10 ..2430, style = point, symbol = box, numpoints = 50, color = "MediumPurple") :
> F2[2] := plot(p2[2], x = 10 ..2430, style = point, symbol = asterisk, numpoints = 50, color = "LightGreen") :
> F3[2] := plot(p2[3], x = 10 ..2430, style = point, symbol = circle, numpoints = 50, color
      = "PaleVioletRed") :
> F4[2] := plot(p2[4], x = 10 ..2430, style = point, symbol = cross, numpoints = 50, color = "Cyan") :
> F5[2] := plot(p2[5], x = 10 ..2430, style = point, symbol = diagonalcross, numpoints = 50, color
      = "Goldenrod") :
> F6[2] := plot(p2[6], x = 10 ..2430, style = point, symbol = diamond, numpoints = 50, color
      = "PaleVioletRed") :


> F7[2] := plot(p2[7], x = 10 ..2430, style = point, symbol = point, numpoints = 50, color = "Coral") :
> F8[2] := plot(p2[8], x = 10 ..2430, style = point, symbol = solidbox, numpoints = 50, color
      = "DeepSkyBlue") :
> F9[2] := plot(p2[9], x = 10 ..2430, style = point, symbol = solidcircle, numpoints = 50, color = "Navy",
      legend = ["Polinomio 9"]) :
> G1[2] := plot(Vector([b[4], b[10], b[5], b[3], b[9], b[6], b[8], b[2], b[7], b[1]]), Vector([c[4],
      c[10], c[5], c[3], c[9], c[6], c[8], c[2], c[7], c[1]]), style = line, symbolsize = 20, color = "Black") :
```

```
>
display({F1[2], F2[2], F3[2], F4[2], F5[2], F6[2], F7[2], F8[2], F9[2], G1[2]}, axes = boxed, title
    = "Relacion entre Gradio dia para calentar y temperatura diaria promedio: Polinomios y datos
    experimentales", titlefont = ["ROMAN", 12], labels = ["Eje x: Gradio dia para calentar",
    "Eje y: Temperatura diaria promedio"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
    = ["ROMAN", 12])
```

Las gráficas de los datos experimentales y los polinomios de las variables de los renglones 2 y 3 de los datos de la Tabla 4.14 se muestran en la Fig. 4.47. El modelo que mejor ajusta a los datos es el del polinomio de grado 8. Finalmente se sustituyeron las ecuaciones de los polinomios con respecto a $x = 40$

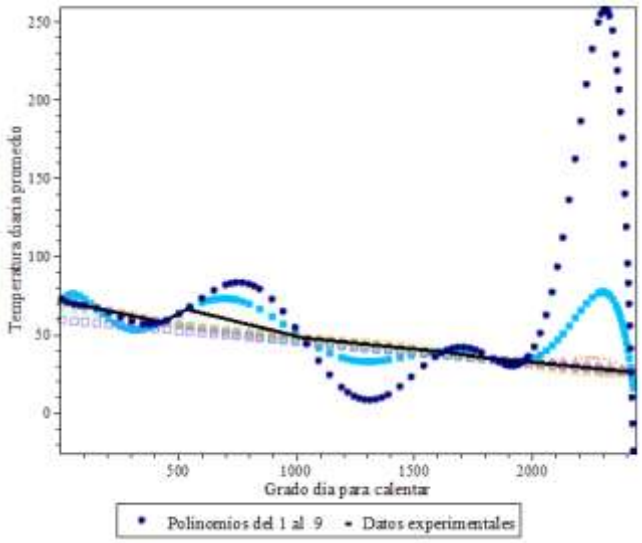


Fig. 4.47 Gráfica de regresión de los datos experimentales de grado día para calentar y temperatura, así como los polinomios de grados 1 al 9. El polinomio que mejor ajusta es el de grado 8.

- Renglón 1 y 4:

```
> p1[1]; p1[2]; p1[3]; p1[4]; p1[5]; p1[6]; p1[7]; p1[8]; p1[9];
```

-149.0236555

616.9423461

-18656.13004

$-2.745412125\ 10^{5}$

$2.059755734\ 10^{6}$

$8.191422903\ 10^{6}$

$-1.928653396\ 10^{8}$

$-2.095825342\ 10^{8}$

$1.235715646\ 10^{9}$

- Renglón 2 y 3:

```
> p2[1]; p2[2]; p2[3]; p2[4]; p2[5]; p2[6]; p2[7]; p2[8]; p2[9];

58.84137931
66.00585836
71.03266188
71.05321243
71.07890683
71.11395222
70.92151584
75.15631512
70.10871416
```

Problema 2

Grillos y temperatura (base de datos de Triola (2009)). Se estudió la relación entre la temperatura y el número de veces que un grillo chirría en un minuto. En la Tabla 4.16 se listan los números de chirridos por minuto y las temperaturas correspondientes en grados Fahrenheit (según datos de *The Song of Insects,* de George W. Pierce, Harvard University Press). ¿Existe evidencia suficiente para concluir que existe una relación entre el número de chirridos por minuto y la temperatura?

Tabla 4.16 Base de datos para determinar la relación que existe entre las variables.

Chirridos por minutos	882	1188	1104	864	1200	1032	960	900
Temperatura	69.7	93.3	84.3	76.3	88.6	82.6	71.6	79.6

Resultados

En las Figs. 4.48-4.57 se presentan los polinomios de grados 1 al 10 en las cuales podemos observar como la gráfica va cambiando mientras se aumenta de grado obteniendo con ello, el resultado que mejor ajusta a los datos.

Para los cálculos realizados para obtener los polinomios se usó el método de mínimos cuadrados para regresión y se programó en lenguaje Python.

$$ma_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + \ldots + a_n\sum x^n = \sum y$$

$$a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 + \ldots + a_n\sum x^{n+1} = \sum xy$$

.

.

.

$$a_0\sum x^n + a_1\sum x^{n+1} + a_2\sum x^{n+2} + \ldots + a_n\sum x^{n+n} = x^n y$$

Una vez calculadas las sumatorias obtenemos los a_n y los sustituimos en el polinomio correspondiente.

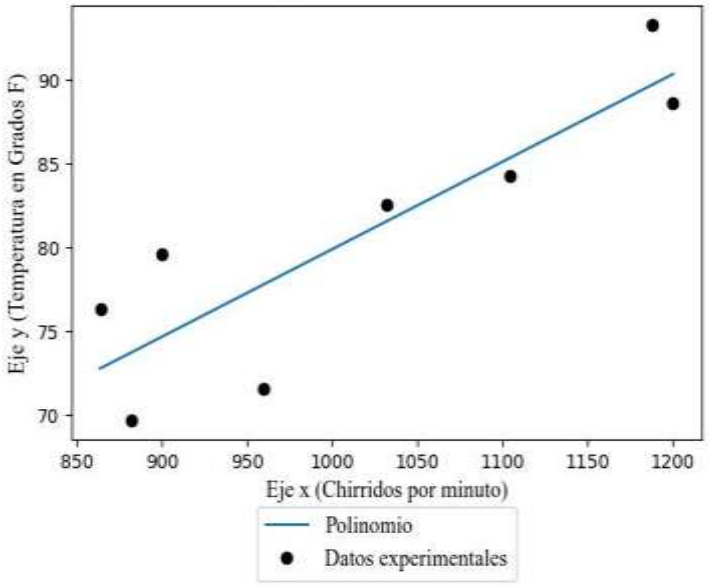


Fig. 4.48 Gráfica del polinomio de grado 1, la ecuación es $0.05227x + 27.63$. La línea de tendencia no es un buen ajuste a los datos.

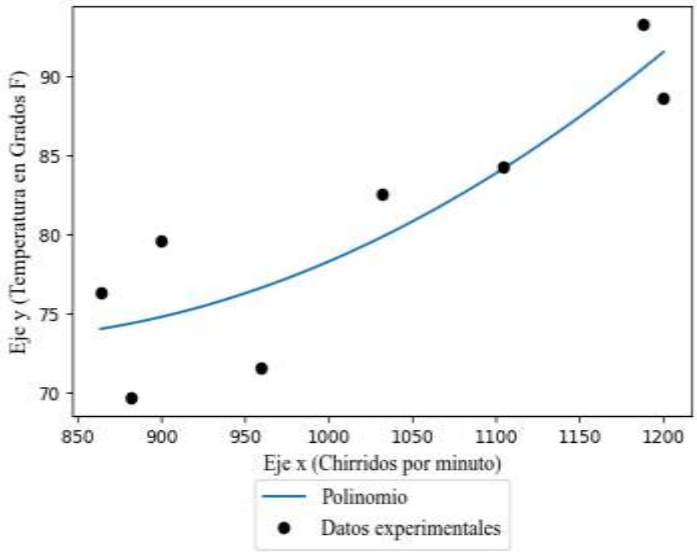


Fig. 4.49 Ajuste de datos a un polinomio de grado 2: $0.0001043x^2 - 0.1631x + 137.1$

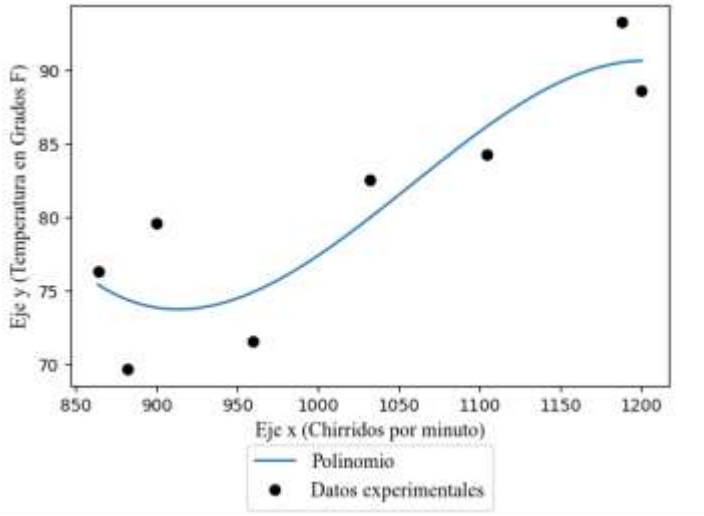


Fig. 4.50 Ajuste de datos a polinomio de grado 3,

$-1.421\times10^{-6}\,x^3 + 4.508\times10^{-3}\,x^2$

$-4.679x + 1669$

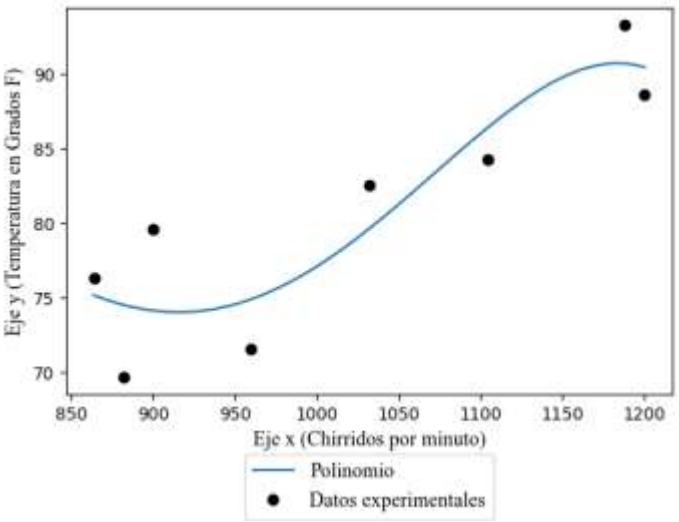


Fig. 4.51 Ajuste de datos a un polinomio de grado 4:

$-3.562\times10^{-9}\,x^4 + 1.322\times10^{-5}\,x^3$

$-0.01795x^2 + 10.56x - 2191.$.

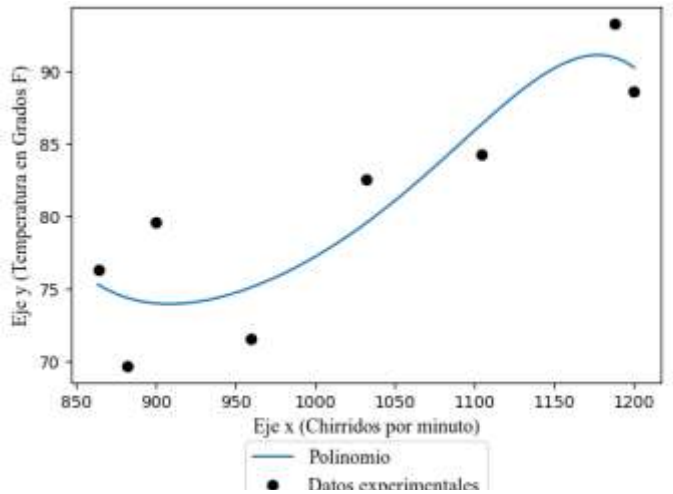


Fig. 4.52 Ajuste de datos a un polinomio de grado 5:

$$-2.894\times10^{-11}x^5+1.445\times10^{-7}x^4-0.0002889x^3+0.2891x^2-145x+29210.$$

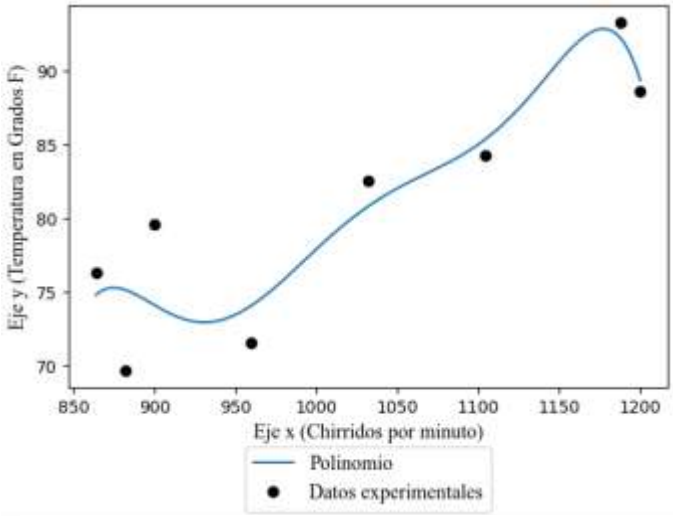


Fig. 4.53 Ajuste de datos a un polinomio de grado 6:

$$-1.597\times10^{-12}x^6+9.823\times10^{-9}x^5-2.511\times10^{-5}x^4+0.03413x^3-26.03x^2+10560x-1779000$$

.

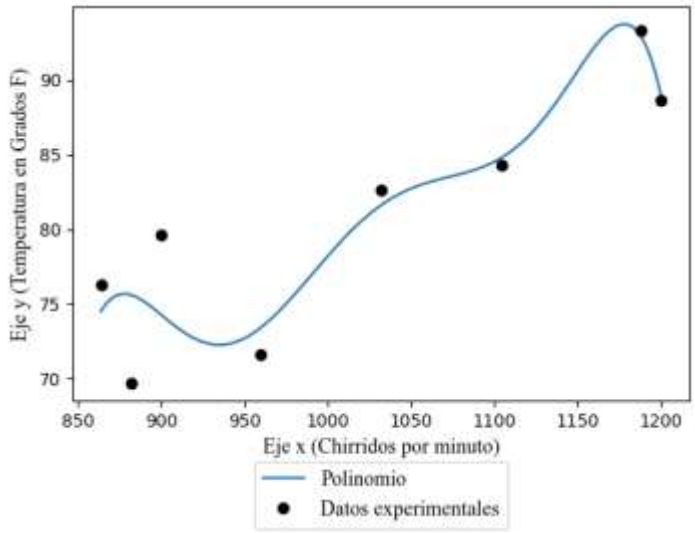


Fig. 4.54 Ajuste de datos a un polinomio de grado 7:

$$-1.221*10^{-15}x^7 + 6.287*10^{-12}x^6$$
$$-1.163*10^{-8}x^5 + 6.654*10^{-6}x^4$$
$$+0.006662x^3 - 12.28x^2 + 6935x - 1404000.$$

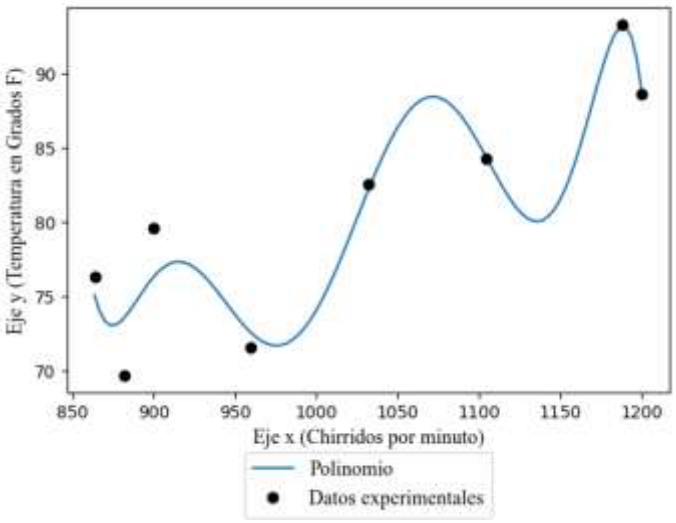


Fig. 4.55 Ajuste de datos a un polinomio de grado 8:

$$-2.627\times10^{-17}x^8 + 1.575\times10^{-13}x^7 - 3.553\times10^{-10}x^6$$
$$+2.971\times10^{-7}x^5 + 0.0001693x^4 - 0.5845x^3 + 523.5x^2$$
$$-2.171*10^5x + 3.571*10^7.$$

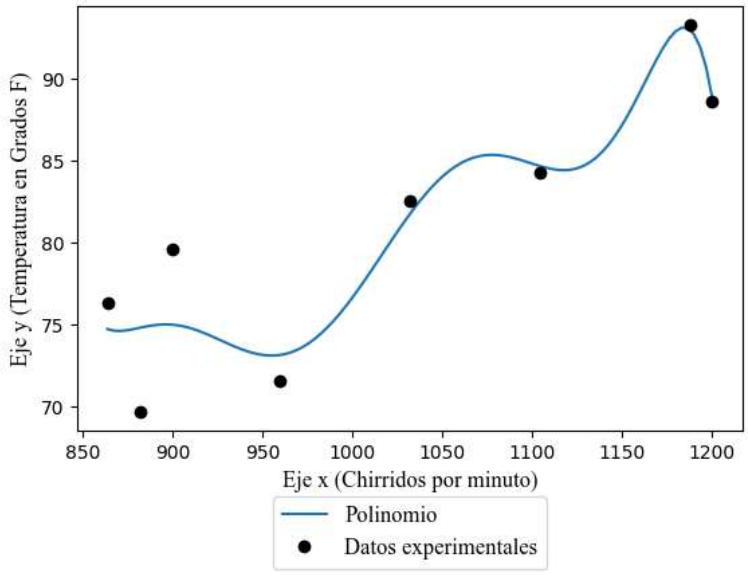


Fig. 4.56 Ajuste de datos a un polinomio de grado 9:

$$-1.415\times10^{-21}x^{9}+2.442\times10^{-19}x^{8}+2.957\times10^{-14}x^{7}$$
$$-9.196\times10^{-11}x^{6}+9.625\times10^{-8}x^{5}+2.403\times10^{-5}x^{4}$$
$$-0.1495x^{3}+144.1x^{2}-61660x+1.031\times10^{7}$$

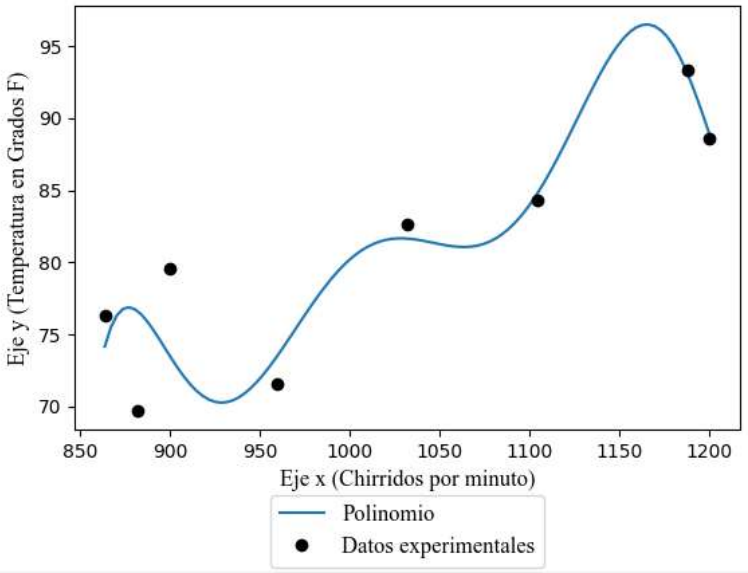


Fig. 4.57 Ajuste de datos a un polinomio de grado 10:

$$2.808\times10^{-24}x^{10}-1.3\times10^{-20}x^{9}+1.993\times10^{-17}x^{8}$$
$$-1.221\times10^{-14}x^{7}+2.002\times10^{-11}x^{6}-4.988\times10^{-8}x^{5}$$
$$+2.955\times10^{-5}x^{4}+0.04623x^{3}-77.61x^{2}+4.252\times10^{4}x$$
$$-8.363\times10^{6}\ .$$

Conclusión
Al parecer, la gráfica que más se ajusta a los datos es la gráfica de la Fig. 4.55, el polinomio de grado 8.

¿Existe evidencia suficiente para concluir que existe una relación entre el número de chirridos por minuto y la temperatura?
Se puede observar una relación polinomial de grado 8 entre las variables de acuerdo a las gráficas de las Figs. 4.48-4.57. También, se tiene la siguiente información

$y = 0.0001x^2 - 0.1631x + 137.13$
$R^2 = 0.7845$

$y = -1E\text{-}06x^3 + 0.0045x^2 - 4.6789x + 1669.4$
$R^2 = 0.8075$

$y = -3E\text{-}11x^5 + 1E\text{-}07x^4 - 0.0003x^3 + 0.2894x^2 - 145.12x + 29242$
$R^2 = 0.8088$

$y = -2E\text{-}12x^6 + 2E\text{-}08x^5 - 4E\text{-}05x^4 + 0.0528x^3 - 40.303x^2 + 16369x - 3E+06$

$R^2 = 0.8438$

De esta información podemos responder a la pregunta que ya desde el polinomio de grado 2 se tiene un ajuste que permite concluir que existe una relación cuadrática entre el número de chirridos por minuto y la temperatura en base a un coeficiente de determinación $R^2 = 0.7845$. En este caso, la mejor relación entre las variables está dada por el polinomio de grado 6 con un $R^2 = 0.8434$. Al parecer, el coeficiente de determinación aumenta muy lentamente con respecto al incremento del grado de polinomio.
En el Anexo 1 del Capítulo 4 se presenta el código en programación Python para la solución de este problema, tanto cálculos para obtener los polinomios, como para las gráficas de ajuste de polinomios 1-10 a los datos experimentales dados.

Problema 3
Con los valores de la Tabla 4.17 resolver el inciso a) y el inciso b):

Tabla 4.17 Base de datos para resolver el Problema 3.

Puntos	0	1	2	3
l/r	140	180	220	240
p/a	12,800	7,500	5,000	3,800

donde p/a es la carga en $Ib/pu\lg^2$ que causa la ruptura de una columna de hierro dulce con extremos redondeados y $1/r$ es la razón de la longitud de la columna al mínimo radio de giro de su sección transversal (Nieves y Domínguez, 1996, p. 385).
Encuentre el **polinomio de tercer grado** que pasa por estos puntos en sus distintas formas:

a) $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (aproximación polinomial simple).
b) Aproximación de Lagrange.
c) Aproximación de Newton (en diferencias divididas).

d) Aproximación de Newton en diferencias finitas (hacia delante y hacia atrás).

Solución

a)

El polinomio de grado 3 ajusta exactamente a los datos experimentales, como se puede ver en la gráfica de Excel de la Fig. 4.58.

$y = -0.0083x^3 + 5.375x^2 - 1209.2x + 99600$

$R^2 = 1$

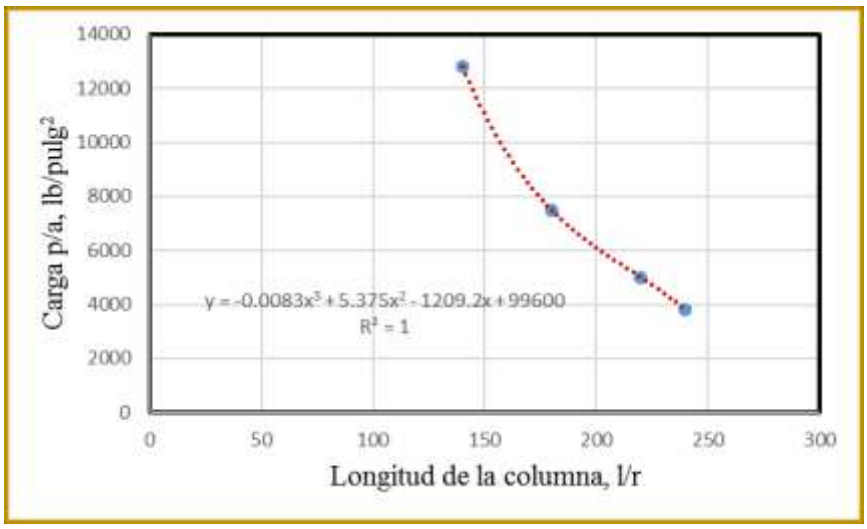


Fig. 4.58 Polinomio de grado 3 se ajusta a los datos experimentales con $R^2 = 1$ de coeficiente de determinación.

b)

Problema resuelto en Maple por el **método de Lagrange**:

```
> Lagrange Model :
> with(CurveFitting) :
```

Comenzamos con la interpolación colocando los datos de la tabla:

```
> PolynomialInterpolation([140, 180, 220, 240], [12800, 7500, 5000,
      3800], x, form = Lagrange );
```

$$-\frac{1}{25}(x-180)(x-220)(x-240)+\frac{5}{64}(x-140)(x$$

$$-220)(x-240)-\frac{5}{64}(x-140)(x-180)(x-240)$$

$$+\frac{19}{600}(x-140)(x-180)(x-220)$$

Expandimos el resultado anterior para solo obtener los resultados de x

```
> expand( -1/25 (x - 180) (x - 220) (x - 240) + 5/64 (x - 140) (x
      - 220) (x - 240) - 5/64 (x - 140) (x - 180) (x - 240)
      + 19/600 (x - 140) (x - 180) (x - 220) );
```

$$-\frac{1}{120}x^3+\frac{43}{8}x^2-\frac{7255}{6}x+99600$$

Usamos el comando "*evalf* " para reducir un poco más el resultado anterior:

```
> evalf( -1/120 x^3 + 43/8 x^2 - 7255/6 x + 99600 )
```

$$-0.008333333333\,x^3+5.375000000\,x^2-1209.166667\,x+99600.$$

Como resultado final tenemos:

```
> resultado := -0.008333333333 x^3 + 5.375000000 x^2 - 1209.166667 x
      + 99600
```

$$resultado := -0.008333333333\,x^3+5.375000000\,x^2-1209.166667\,x+99600$$

Resultado final:

$$-0.008333333333x^3+5.375000000x^2-1209.166667x+99600$$

Problema 4

Dada una función $y=f(x)$ en forma tabular, a menudo se desea encontrar un valor x correspondiente a un valor dado de y; este proceso, llamado **interpolación inversa**, se lleva a cabo intercambiando los papeles de x y y. Dada la Tabla 4.18.

Tabla 4.18 de tiempo y amplitud de oscilación de un péndulo.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
x (min)	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0
y (cm)	10.00	4.97	2.47	1.22	0.61	0.30	0.14

Donde y es la amplitud de la oscilación de un péndulo largo, en cm y x es el tiempo medido en min desde que empezó la oscilación.
Encuentre el polinomio de **aproximación de Lagrange de segundo grado** que pasa por los puntos (1), (2), (3) y el valor de x correspondiente a $y=2$ cm.

Solución

Por el método de Lagrange. Interpolación inversa.
Primero asignamos los valores de x de la Tabla a y

```
> y[0] := 0; y[1] := 2.5; y[2] := 5; y[3] := 7.5
```

$y_0 := 0$

$y_1 := 2.5$

$y_2 := 5$

$y_3 := 7.5$

Con dichos valores asignados a y, evaluamos la función de x

$> f(y[0]) := 10; f(y[1]) := 4.97; f(y[2]) := 2.47;$

$f(0) := 10$

$f(2.5) := 4.97$

$f(5) := 2.47$

Sustituimos los valores asignados a y

$$> L_0(y) := \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}$$

$$> L_1(y) := \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}$$

$$> L_2(y) := \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

$$L_0(y) := \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}$$

$$L_1(y) := \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}$$

$$L_2(y) := \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

Sustituimos los valores asignados a y y a *f(y)* en el polinomio de Lagrange de grado dos para los tres puntos dados

$$> p_2(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)f(y_0)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + \frac{(y-y_0)(y-y_2)f(y_1)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + \frac{(y-y_0)(y-y_1)f(y_2)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

Y con ello, obtenemos el polinomio requerido

$$> p_2(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)f(y_0)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + \frac{(y-y_0)(y-y_2)f(y_1)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + \frac{(y-y_0)(y-y_1)f(y_2)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

$$p_2(y) = 0.8000000000\,(y-2.5)\,(y-5) - 0.7952000000\,y\,(y-5) + 0.1976000000\,y\,(y-2.5)$$

Asignamos los 2 cm a y al polinomio para obtener x, y con ello concluimos la solución a este problema

$> y := 2$

$y := 2$

$$> p_2(y) = 0.8000000000\,(y-2.5)\,(y-5) - 0.7952000000\,y\,(y-5) + 0.1976000000\,y\,(y-2.5)$$

$p_2(2) = 5.773600000$

$> x = p_2(2) = 5.773600000 \lhd$ Respuesta

Solución alternativa

Este problema se resolvió también mediante programación Python y el resultado se grafica en la Fig. 4.59 donde podemos observar que para $y = 2$, $x = 5.8$. $\triangleleft$ *Respuesta*

El código Python para la solución de este problema, se encuentra en el Anexo 1 del Capítulo 4.

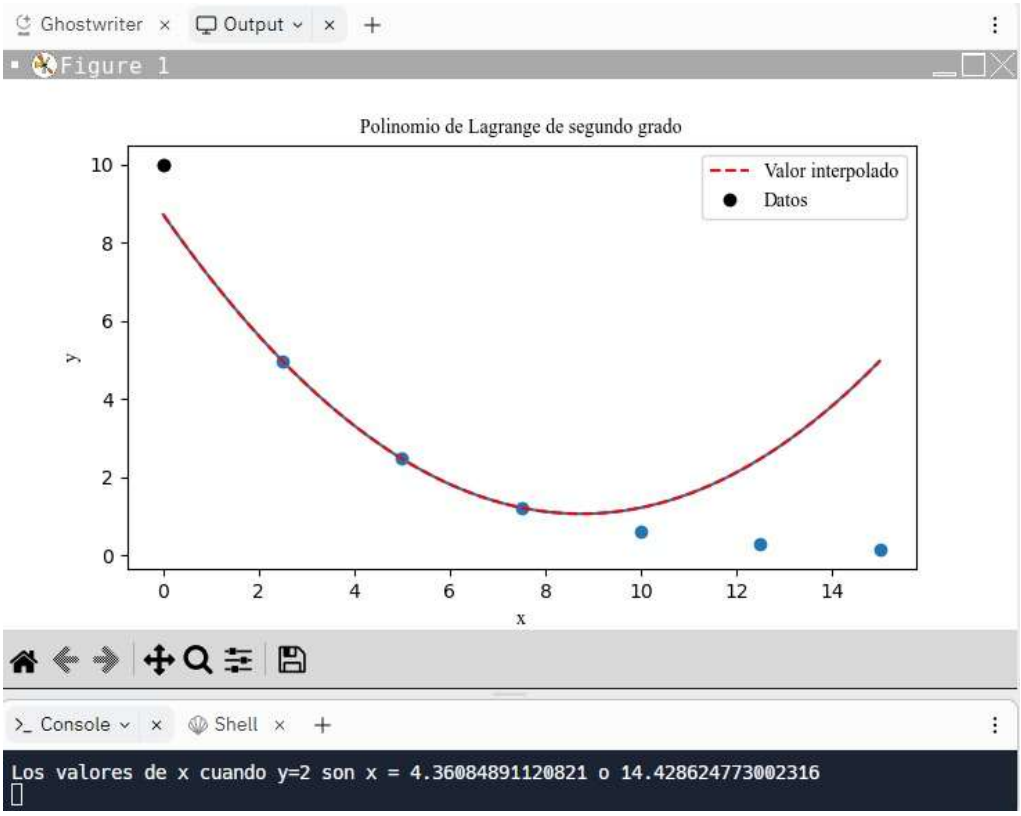


Fig. 4.59 Polinomio de aproximación de Lagrange de segundo grado que pasa por los puntos (1), (2), (3) de datos experimentales, en la cual se puede ver el valor de x correspondiente a $y = 2$ cm.

Problema 5

Presupuesto e ingresos brutos de películas. Calcule la mejor cantidad predicha de los ingresos brutos de una película con un presupuesto de $40 millones. En la Tabla 4.19 todas las cantidades están en millones de dólares. La base de datos se tomó de Triola (2009, p. 554).

Tabla 4.19 Datos del Problema 5.

Presupuesto	62	90	50	35	200	100	90
Ingresos brutos	65	64	48	57	601	146	47

Solución

Por el método de regresión lineal en Excel, obtenemos la gráfica de los datos experimentales y el polinomio de grado 1 que ajusta a los datos con un $R^2 = 0.8572$, que se considera una buena aproximación. La predicción de los ingresos brutos para un presupuesto de 40 millones de dólares es de 25.3 millones de dólares, como se puede verificar en la gráfica de la Fig. 4.60.

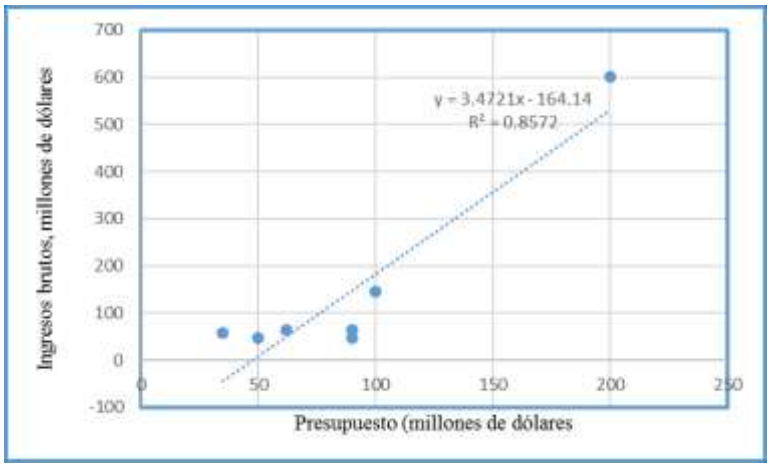


Fig. 4.60 Gráfica de Excel de datos experimentales y polinomio de grado 1 para las variables del problema.

Alternativamente, se resolvió este problema con programación Python, obteniendo una gráfica similar a la obtenida con Excel en la Fig. 4.61.
En el Anexo 1 del Capítulo 4 se presentan lps Códigos Python 1 y 2 para la solución de este problema.

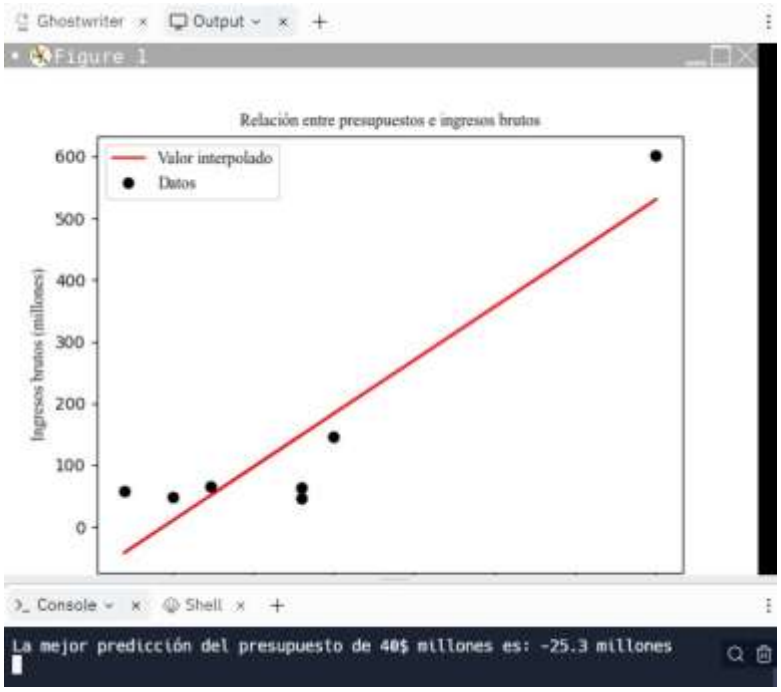


Fig. 4.61 Gráfica de código Python de relación entre presupuestos e ingresos brutos. Predicción del presupuesto de 40 millones de dólares para ingresos brutos de 25.3 millones de dólares.

En la Fig. 4.62 se puede observar la gráfica del código Python 2.

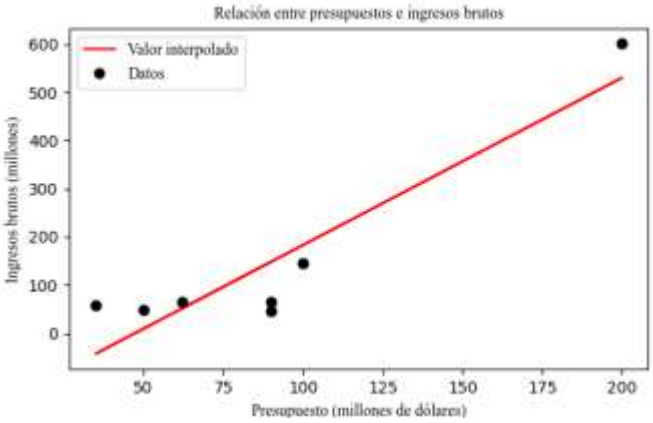


Fig. 4.62 Grafica de comparación de datos experimentales y el polinomio de grado 1: $f(x) = 3.472x - 164.1$

CAPÍTULO 5

LA DERIVADA Y LA INTEGRAL NUMÉRICAS: UNA FORMA PRIVILEGIADA DE SOLUCIÓN MATEMÁTICA.

5.1 Objetivo Particular del Capítulo 5

5.2 Métodos de Newton-Cotes

5.2.1 Método del trapecio

5.2.2 Método Simpson 1/3

5.2.3 Método Simpson 3/8

5.2.4 Método de Boole

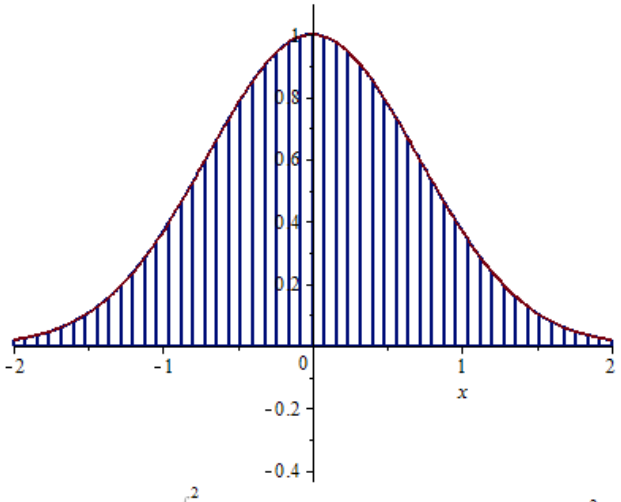
5.2.5 Problemas del Método de Newton-Cotes

5.3 Integrales múltiples

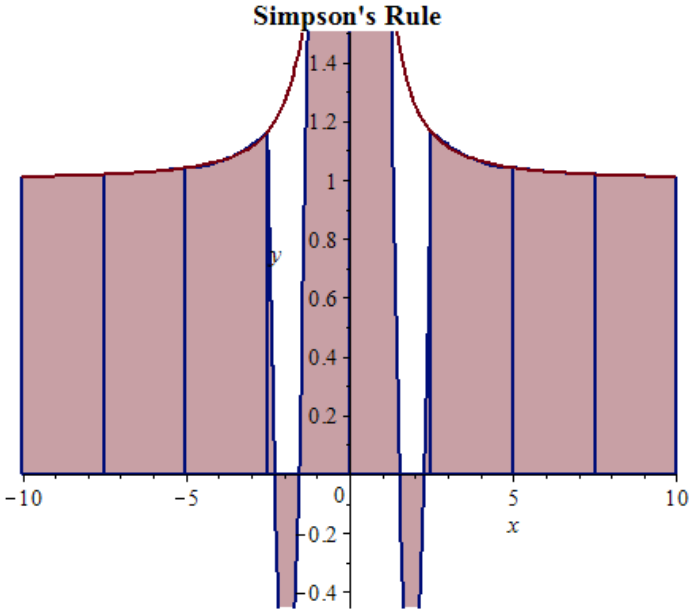
5.3.1 Problemas de integrales múltiples

5.4 Diferenciación numérica

5.4.1 Problemas de diferenciación numérica



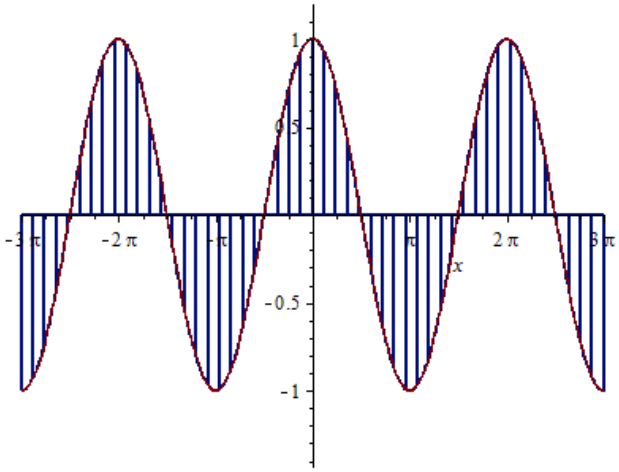
An approximation of $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ using Simpson's rule, where $f(x) = e^{-x^2}$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 1.764162761. Number of subintervals used: 50.



Total Area Under Parabolas = 34.6679120

Actual Area = 36.0183985

Size of Partition = 16



An approximation of $\int_{-3\pi}^{3\pi} f(x)\,dx$ using Simpson's rule, where $f(x) = \cos(x)$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is $-2.465000000\,10^{-9}$. Number of subintervals used: 50.

5.1 Objetivo Particular del Capítulo 5

Facilitar al estudiante el uso de las librerías del software Maple como una de las soluciones idóneas de los algoritmos de métodos numéricos que incluyen derivación e integración numérica, así como sus soluciones gráficas con el número de particiones o subintervalos adecuados para una mayor aproximación al resultado esperado. De la misma forma, proveer de ejemplos de problemas resueltos con algún lenguaje de programación, todo lo cual, permitirá al estudiante una mayor capacidad de análisis de los casos que se presentan a través de procesos en aplicaciones ingenieriles.

Para la derivación numérica, nos basaremos en la interpretación geométrica de la primera aproximación lineal de la derivada en la solución de problemas, y, para la integración numérica, desarrollaremos problemas que resolveremos por los métodos del trapecio, Simpson 1/3 y 3/8.

En diferenciación numérica, si se aproxima por mínimos cuadrados, se diferencia el polinomio que mejor ajuste a los datos.
El uso del software Maple en problemas involucrados con el método trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 permite obtener gráficas de calidad como las que se muestran en las figuras incluidas en el punto 5.4 de este capítulo.

5.2 Métodos de Newton-Cotes

Para la integración numérica se desarrollan problemas que se resuelven por los métodos del trapecio, Simpson 1/3 y 3/8. El Formulario incluye:

Algoritmo del método trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right];\quad h=b-a=x_1-x_0 \tag{5.1}$$

Método Simpson 1/3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right];\quad h=\frac{b-a}{2},\quad x_0=a,\quad x_1=x_0+h,\quad x_2=b \tag{5.2}$$

Método Simpson 3/8

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] \tag{5.3}$$

Método Simpson 1/3 compuesto

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i)+f(x_n) \right] \tag{5.4}$$

Donde Δi significa el incremento de i.

Las fórmulas de Newton-Cotes son generalizaciones de las rutinas de interpolación de polinomios más simples. La siguiente Tabla 5.1 da la correspondencia entre los otros métodos y el orden.

Tabla 5.1 Métodos Newton-Cotes.

Método equivalente	Orden
trapezoide	1
Regla de Simpson	2
Regla 3/8 de Simpson	3
Regla de Boole	4

Para resolver problemas mediante Maple, debemos tener en cuenta lo descrito enseguida por el software. El comando ApproximateInt (*f(x), x = a..b*, method = newtoncotes[*N*], opts) aproxima la integral de *f(x)* de *a* a *b* usando la fórmula Newton-Cotes de orden *N*. Los dos primeros argumentos (expresión de función y rango) se pueden reemplazar por una integral definida.

Si la variable independiente se puede determinar de forma única a partir de la expresión, no es necesario incluir el parámetro *x* en la secuencia de llamada.

Dada una partición $P = (a = x_0, x_1, ..., x_N = b)$ del intervalo a, b, la fórmula Newton-Cotes de orden *N* aproxima la integral en cada subintervalo x_{i-1}, x_i integrando el polinomio de orden *N* que interpola $N - 1$ puntos equidistantes entre los puntos finales del intervalo.

De forma predeterminada, el intervalo se divide en 10 subintervalos del mismo tamaño.

Esta regla se puede aplicar de forma interactiva, a través de *ApproximateInt Tutor*.

La librería y comando para hacer uso del formulario de Newton-Cotes en Maple, incluye (usando el ejemplo de la función trigonométrica de seno)

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0.0..5.0, method = newtoncotes[1]);
0.7013515555
> ApproximateInt(sin(x), x=0.0..5.0, method = newtoncotes[2]);
0.7163534765
> ApproximateInt(sin(x), x=0.0..5.0, method = newtoncotes[3]);
0.7163447696
> ApproximateInt(sin(x), x=0.0..5.0, method = newtoncotes[4]);
0.7163378087
> ApproximateInt(sin(x), x=0.0..5.0, method = newtoncotes[6]);
0.7163378145
```

```
> ApproximateInt(x*(x - 2)*(x - 3), 0..5, method = simpson, output = plot);
> ApproximateInt(tan(x) - 2*x, x=-1..1, method = simpson, output = plot, partition = 50);
```

Podemos comprobar los resultados versus resolver directamente la integral de la función

```
> int(sin(x), x=0.0..5.0);
```

0.7163378145

5.2.1 Método del trapecio

La aproximación polinomial de $f(x)$ es una línea recta, un polinomio de primer grado $p_1(x)$ y la aproximación a la integral es el área del trapezoide bajo la línea recta, como se ve en la Fig. 5.1.

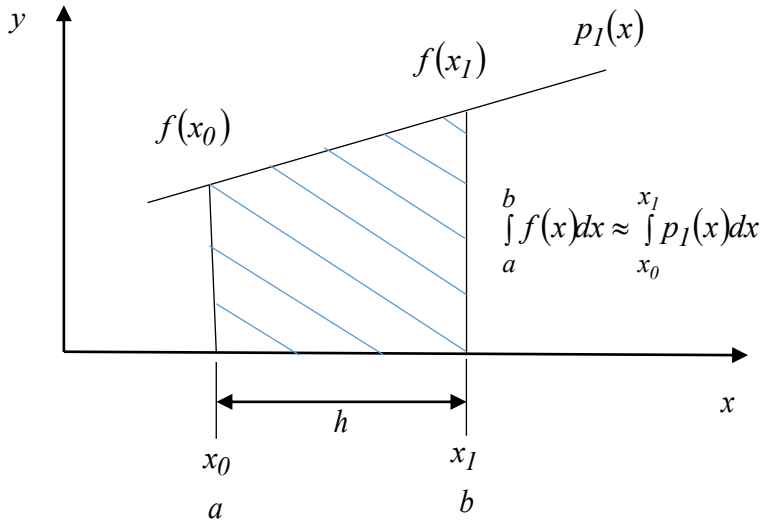


Fig. 5.1 Interpretación geométrica de integración numérica mediante la regla trapezoidal. Área del trapecio con vértices x_0, x_1, $f(x_0)$ y $f(x_1)$.

Se desarrolla la integral $\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx$ usando las fórmulas de diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás o centrales. Si elegimos diferencias finitas hacia adelante, el algoritmo del método trapezoidal está dado por la Ec. (5.1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] \tag{5.1}$$

Podemos observar que el lado derecho de la Ec. (5.1) es el área de un trapezoide de altura h y lados paralelos de longitud $f(x_0)$ y $f(x_1)$, como en la Fig. 5.1.

La Regla Trapezoidal mediante Maple, incluye lo que se describe a continuación.
El comando ApproximateInt (*f(x), x = a..b*, method = trapezoid) aproxima la integral de *f(x)* de *a* a *b* usando la regla trapezoidal. Los dos primeros argumentos (expresión de función y rango) se pueden reemplazar por una integral definida.

Si la variable independiente se puede determinar de forma única a partir de la expresión, no es necesario incluir el parámetro *x* en la secuencia de llamada.

Dada una partición $P = (a = x_0, x_1, ..., x_N = b)$ del intervalo a, b, la regla trapezoidal aproxima la integral en cada subintervalo x_{i-1}, x_i integrando la función lineal que interpola los extremos $x_{i-1}, f(x_{i-1})$ y $x_i, f(x_i)$. Este valor es

$$\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

En el caso de que los anchos de los subintervalos sean iguales, la aproximación se puede escribir como

$$\frac{1}{2}\frac{1}{N}((b-a)(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)))$$

De forma predeterminada, el intervalo se divide en 10 subintervalos del mismo tamaño.

Esta regla se puede aplicar de forma interactiva, a través de *ApproximateInt Tutor*.

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], x[1]], [f(0), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{2}(-x_1 + x_0)(f(0) + f(1))$$

Las instrucciones de Maple para resolver una función por esta regla trapezoidal, son

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = trapezoid);
> ApproximateInt(tan(x) - 2*x, x=-1..1, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);
```

Ejemplo

La Fig. 5.2 ilustra la regla trapezoidal que se grafica a través de las instrucciones de Maple siguientes

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], x[1]], [f(0), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{2}(-x_1 + x_0)(f(0) + f(1))$$

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(cos(x)*sin(x), x=0..5, method = trapezoid);
```

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(1)\cos(1) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(2)\cos(2) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(3)\cos(3) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7}{2}\right)\cos\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(4)\cos(4) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{9}{2}\right)\cos\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(5)\cos(5)$$

```
> ApproximateInt(cos(x)*sin(x), x=0..5, method = trapezoid, output = plot);
> ApproximateInt(cos(x)*sin(x), x=0..5, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);
```

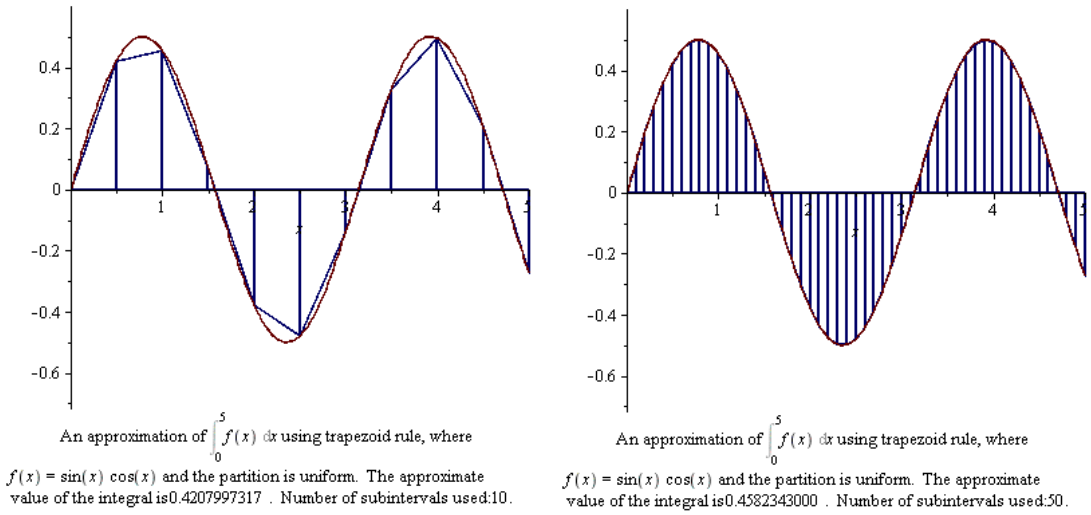


Fig. 5.2 Ilustración de la regla trapezoidal con distinto número de particiones para aproximar al resultado esperado.

5.2.2 Método Simpson 1/3

El algoritmo de Simpson 1/3 está dado por la Ec. (5.2)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \tag{5.2}$$

Que es el área bajo la curva de una parábola comprendida entre $f(x_0)$ y $f(x_2)$ (ver Fig. 5.3) o polinomio de segundo grado

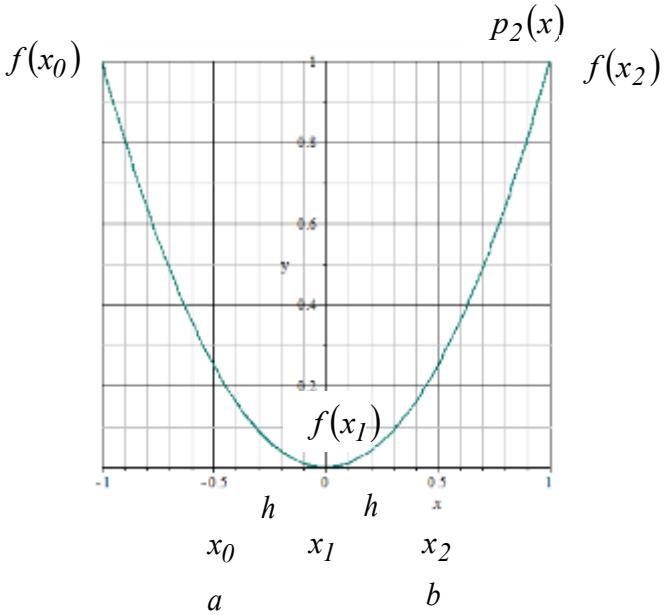


Fig. 5.3 Interpretación geométrica de integración numérica mediante Simpson 1/3. Área de una parábola bajo la curva.

Regla de Simpson

Un método para aproximar una integral como suma de términos cuadráticos; De dónde

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

~ d/3[*f(a)* + 4*f(a*+d) +2*f(a*+2d)+4*f(a*+3d)+2*f(a*+4d)+...+*f(b)*]
donde d = (*b* - *a*)/2*n*. Es más exacta que la regla trapezoidal, con un error de

$$\frac{nM\delta^5}{90}$$

donde *M* es el valor absoluto máximo de la cuarta derivada en el intervalo.
En Maple, las MathApps de la Regla de Simpson consisten en el procedimiento que se describe.
La integral de la función $f(x)$ entre los puntos a y b se denota por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y puede describirse aproximadamente como el área debajo la curva $y = f(x)$ y por encima del eje x, menos cualquier área por encima de la curva y debajo del eje x, y todo tomado entre los puntos a y b.
La integral es importante porque es una antiderivada de la función original, es decir, si

$$g(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Entonces,

$$g'(x) = f(x)\ .$$

La regla de Simpson es la aproximación más precisa utilizando parábolas.
Calculamos el área bajo una parábola de la ecuación $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ pasando a través de tres puntos $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^{h} a\cdot x^2 + b\cdot x + c\,dx \\ &= \left(\frac{a\cdot x^3}{3} + \frac{b\cdot x^2}{2} + c\cdot x\right)\Big| x = -h\,..h \\ &= \frac{2\cdot a\cdot h^3}{3} + 2\cdot c\cdot h \\ &= \frac{h}{3}\left(2\cdot a\cdot h^2 + 6\cdot c\right) \end{aligned}$$

Debido a que los puntos $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$ están en la parábola, se tiene que

$$\begin{aligned} y_0 &= a\cdot h^2 - b\cdot h + c \\ y_2 &= a\cdot h^2 + b\cdot h + c \end{aligned}$$

Por eso,

$$\begin{aligned} y_0 + 4\cdot y_1 + y_2 &= \left(a\cdot h^2 - b\cdot h + c\right) + 4\cdot c + \left(a\cdot h^2 \right. \\ &\quad \left. + b\cdot h + c\right) \\ &= 2\cdot a\cdot h^2 + 6\,c \end{aligned}$$

De este modo, el área bajo la parábola viene dada por

$$\mathrm{A} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right)$$

Por lo tanto, sumando todas las áreas bajo cada arco parabólico usando tres puntos podemos derivar

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right) + \frac{\Delta x}{3}\left(y_2 + 4\cdot y_3 + y_4\right) + \ldots + \frac{\Delta x}{3}\left(y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

Que queda simplificada a la regla de Simpson propiamente dicha

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + 2\cdot y_4 + 4\cdot y_5 + .. + 4\cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

Para hacer uso de la Regla de Simpson en Maple, considerar los puntos siguientes que describe el software.
El comando ApproximateInt (*f(x), x = a..b*, method = simpson, opts) aproxima la integral de *f(x)* de *a* a *b* usando la regla de Simpson. Los dos primeros argumentos (expresión de función y rango) se pueden reemplazar por una integral definida.

Si la variable independiente se puede determinar de forma única a partir de la expresión, no es necesario incluir el parámetro *x* en la secuencia de llamada.

Dada una partición $P = \left(a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b\right)$ del intervalo a, b , la regla de Simpson aproxima la integral en cada subintervalo x_{i-1}, x_i integrando la función cuadrática que interpola los tres puntos $x_{i-1}, f\left(x_{i-1}\right)$, $\frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_i, f\left(\frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_i\right)$ y $x_i, f\left(x_i\right)$. Este valor es

$$\frac{1}{6}\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(f\left(x_{i-1}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_i\right) + f\left(x_i\right)\right)$$

En el caso de que los anchos de los subintervalos sean iguales, la aproximación se puede escribir como

$$\frac{1}{6}\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f\left(x_0\right) + 4f\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right) + 2f\left(x_1\right) + 4f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) + 2f\left(x_2\right) + \ldots + f\left(x_N\right)\right)\right)$$

Tradicionalmente, la regla de Simpson se escribe como: dado N donde N es un número entero par y dados puntos equidistantes $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N = b$, una aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\frac{1}{3}\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f\left(x_0\right) + 4f\left(x_1\right) + 2f\left(x_2\right) + 4f\left(x_3\right) + 2f\left(x_4\right) + \ldots + f\left(x_N\right)\right)\right)$$

De forma predeterminada, el intervalo se divide en 10 subintervalos del mismo tamaño.
Esta regla se puede aplicar de forma interactiva, a través de *ApproximateInt Tutor*.

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], (x[0]+x[1])/2, x[1]], [f(0), f(1/2), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{6}\left(x_0 - x_1\right)\left(f(1) + f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Las instrucciones de Maple para resolver una función o modelo matemático vienen dadas por

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = simpson);
> ApproximateInt(tan(x) - 2*x, x=-1..1, method = simpson, output = plot, partition = 50);
```

Ejemplo 1

La Fig. 5.4 ilustra la solución gráfica de Maple para la función dada. Las instrucciones son

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], (x[0]+x[1])/2, x[1]], [f(0), f(1/2), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated):
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^3,x=-2..4, method = simpson);
```

198

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^3,x=-2..4, method = simpson, output = plot);
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^3,x=-2..4, method = simpson, output = plot, partition = 50);
```

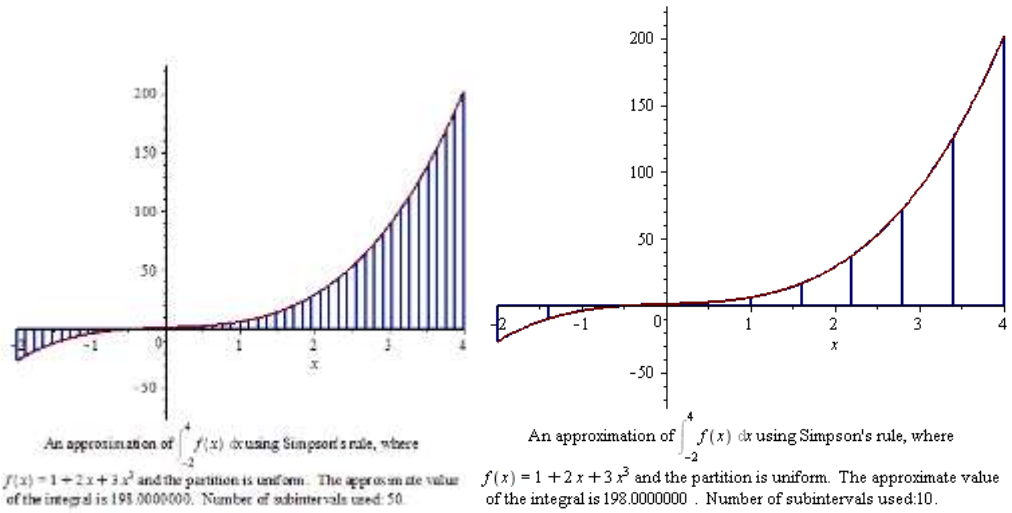


Fig. 5.4 Ejemplo de la solución de Maple mediante la regla de Simpson con distintas particiones para la función dada. Observe que no se requieren 50 particiones (gráfica izquierda) para aproximarse al resultado esperado, basta con 10 como en la gráfica derecha.

Ejemplo 2

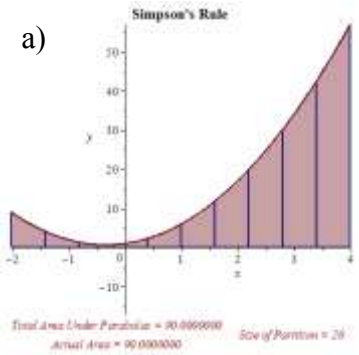
Ajustar el número de trapezoides usados para aproximar el área bajo la curva de a) y b) (Nieves y Domínguez, 1996).

a) $A_1 = \int_{-2}^{4} \left(1 + 2x + 3x^2\right) dx$, b) $A_2 = \int_{0}^{\pi/2} sen(x)\,dx$

Solución

La Fig. 5.5 a) y b) muestran la solución gráfica de Maple. Basta con teclear la función y los límites de la integral, así como el rango, para obtener la respuesta gráfica del área bajo el trapecio en este caso.
Existen otras librerías de Cálculo en Maple mediante las cuales podemos obtener respuestas gráficas de la regla de Simpson, que para este Ejemplo presentamos aquí a través de la gráfica de la Fig. 5.6.

a)



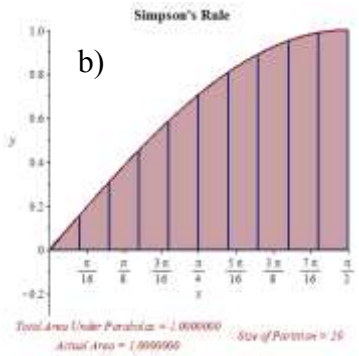
$y(x) = 1 + 2x + 3x^2$

$domain = -2 \quad 4$

$range = \quad 0 \quad 57$

$n = 20$

b)



$y(x) = sin(x)$

$domain = 0 \quad \pi/2$

$range = \quad 0 \quad 1$

$n = 20$

Fig. 5.5 Soluciones gráficas de a) A_1 y b) A_2.

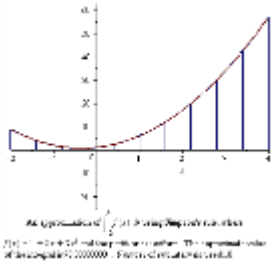


Fig. 5.6 Solución gráfica alternativa de Maple para la Fig. 5.6 a).

5.2.3 Método Simpson 3/8

Para resolver problemas mediante Maple mediante la Regla 3/8 de Simpson, se requiere conocer el procedimiento que se describe en el software y se reproduce enseguida.
El comando ApproximateInt (*f(x), x = a..b*, method = simpson[3/8], opts) aproxima la integral de *f(x)* de *a* a *b* usando la regla 3/8 de Simpson. Esta regla también se conoce como la regla de los 3/8 de Newton. Los dos primeros argumentos (expresión de función y rango) se pueden reemplazar por una integral definida.

Si la variable independiente se puede determinar de forma única a partir de la expresión, no es necesario incluir el parámetro *x* en la secuencia de llamada.
Dada una partición $P = (a = x_0, x_1, ..., x_N = b)$ del intervalo a, b, la regla 3/8 de Simpson aproxima la integral en cada subintervalo x_{i-1}, x_i integrando la función cúbica que interpola los cuatro puntos $x_{i-1}, f(x_{i-1})$, $\frac{2}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i, f\left(\frac{2}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i\right)$, $\frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{2}{3}x_i, f\left(\frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{2}{3}x_i\right)$, $x_i, f(x_i)$. Este valor es

$$\frac{1}{8}(x_i - x_{i-1})\left(f(x_{i-1}) + 3f\left(\frac{2}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_i\right) + 3f\left(\frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{2}{3}x_i\right) + f(x_i)\right)$$

En el caso de que los anchos de los subintervalos sean iguales, la aproximación se puede escribir como

$$\frac{1}{8}\,\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f(x_0)+3f\left(\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{3}x_1\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}x_1\right)\right.\right.$$
$$+2f(x_1)+3f\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\right)+2f(x_2)$$
$$\left.\left.+\ldots+f\left(\frac{1}{3}x_{N-1}+\frac{2}{3}x_N\right)+f(x_N)\right)\right)$$

La regla de los 3/8 de Simpson se describe así: dado N, donde N es un múltiplo positivo de 3, y dados puntos igualmente espaciados $a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_N=b$, una aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\frac{3}{8}\,\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)\right.\right.$$
$$\left.\left.+3f(x_5)+2f(x_6)+3f(x_7)+\ldots+3f(x_{N-1})+f(x_N)\right)\right)$$

De forma predeterminada, el intervalo se divide en 10 subintervalos del mismo tamaño.
Esta regla se puede aplicar de forma interactiva, a través de *ApproximateInt Tutor*.

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], (2*x[0]+x[1])/3, (x[0]+2*x[1])/3, x[1]],
[f(0), f(1/3), f(2/3), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{8}\left(x_0-x_1\right)\left(f(1)+3f\left(\frac{2}{3}\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)\right)$$

Las instrucciones de Maple para resolver mediante Simpson 3/8 una función o expresión matemática, son

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = simpson[3/8]);
> ApproximateInt(tan(x) - 2*x, x=-1..1, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);
```

Ejemplo

La Fig. 5.7 ilustra la regla de los 3/8 de Simpson, que se graficó con las siguientes instrucciones.

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], (2*x[0]+x[1])/3, (x[0]+2*x[1])/3, x[1]],
[f(0), f(1/3), f(2/3), f(1)], z):
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]):
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{8}\left(x_0-x_1\right)\left(f(1)+3f\left(\frac{2}{3}\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)\right)$$

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x)*cos(x), x=0..Pi/2, method = simpson[3/8]):
> ApproximateInt(sin(x)*cos(x), x=0..Pi/2, method = simpson[3/8], output = plot);
> ApproximateInt(sin(x)*cos(x), x=0..Pi/2, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);
```

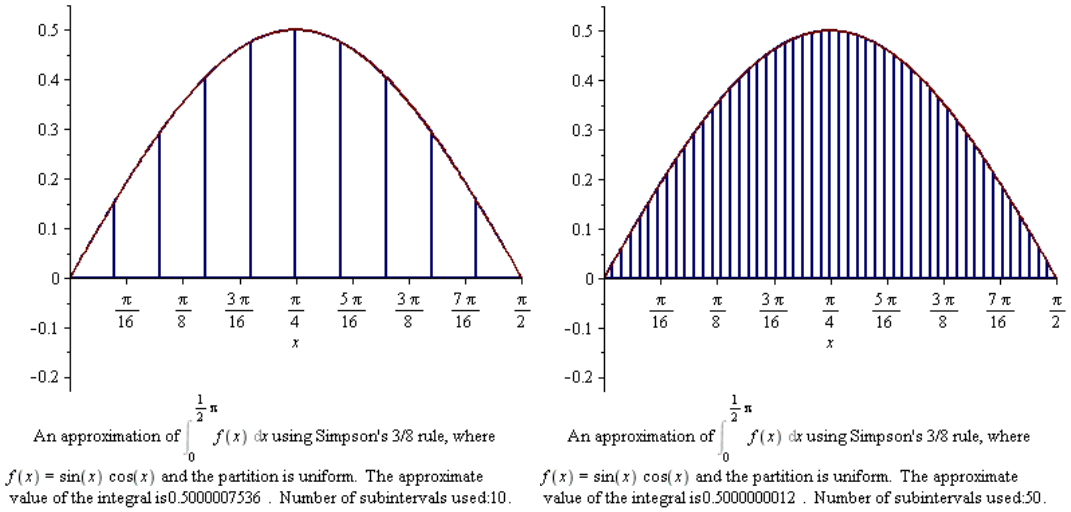


Fig. 5.7 Ejemplo de la solución de Maple mediante la regla de Simpson de 3/8 con distintas particiones para la función dada. Observe que no se requieren 50 particiones para aproximarse al resultado esperado, basta con 10.

5.2.4 Método de Boole

Otro de los métodos de Newton-Cotes es la Regla de Boole. En este libro, usaremos esta regla mediante las instrucciones del software Maple, a saber

El comando ApproximateInt (*f(x), x = a..b*, method = boole, opts) aproxima la integral de *f(x)* de *a* a *b* usando la regla de Boole. Los dos primeros argumentos (expresión de función y rango) se pueden reemplazar por una integral definida.
Si la variable independiente se puede determinar de forma única a partir de la expresión, no es necesario incluir el parámetro *x* en la secuencia de llamada.
Dada una partición del intervalo, la regla de Boole aproxima la integral en cada subintervalo integrando la función cuartica[1] que interpola cinco puntos equidistantes en ese subintervalo.
En el caso de que los anchos de los subintervalos sean iguales, la aproximación se puede escribir como

$$\frac{1}{8}\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f(x)+3f\left(\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{3}x_1\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}x_1\right)\right.\right. \\ +2f(x_1)+3f\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_w\right) \\ \left.\left.+2f(x_2)+\ldots+3f\left(\frac{1}{3}x_{N-1}+\frac{2}{3}x_N\right)+f(x_N)\right)\right) \tag{5.5}$$

De forma predeterminada, el intervalo se divide en 10 subintervalos del mismo tamaño.
Esta regla se puede aplicar de forma interactiva, a través de *ApproximateInt Tutor*.
Esta regla también se conoce a veces como **Regla de Bode**, debido a una atribución errónea en la literatura. El comando *ApptoximateInt* aceptará cualquiera, *método-boole* o *método=bode*.
Las instrucciones de Maple son

[1] En álgebra, la función de cuarto grado de la forma $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, donde *a* es diferente de cero, está definida por un polinomio de grado cuatro, llamado polinomio cuartico.

Boole's Rule
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = boole);
> ApproximateInt(tan(x) - 2*x, -1.1, method = boole, output = plot, partition = 50);

5.2.5 Problemas del Método de Newton-Cotes

Problema 1
Hacer uso de los métodos numéricos: Analítico, Simpson simple, Simpson 3/8, Trapezoidal, Método Boole, Integración aproximada y Fórmula Newton-Cotes para las integrales que se escriben
Integral A
> $Int(2+3\cdot x, x=0..5)$

$$\int_0^5 (2+3x)\,dx$$

Integral B
> $Int(1+2\cdot x+3\cdot x^2, x=-2..4)$

$$\int_{-2}^4 \left(1+2x+3x^2\right) dx$$

Integral C
> $Int\left(\sin(x), x=0..\frac{Pi}{2}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)\,dx$$

Solución
Se presenta la solución de cada integral mediante los métodos solicitados a continuación. En todos los casos se usan las instrucciones de Maple para dar solución a cada integral. Las gráficas de las Figs. 5.9-5.27 son las soluciones gráficas respectivas de cada integral resueltas por los métodos solicitados en el problema, además del método analítico.
Integral A
> $Int(2+3\cdot x, x=0..5)$

$$\int_0^5 (2+3x)\,dx$$

Método analítico
> $Int(2+3\cdot x, x=0..5) = int(2+3\cdot x, x=0..5)$

$$\int_0^5 (2+3x)\,dx = \frac{95}{2}$$

Métodos Numéricos de Maple
Integración Aproximada
> Student[Calculus1][ApproximateInt] - return or plot an approximation to an integral
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(2+3*x, x = 0 .. 5);

$$R := \int_0^5 (2+3x)\,dx$$

> ApproximateInt(R);

$$\frac{95}{2}$$

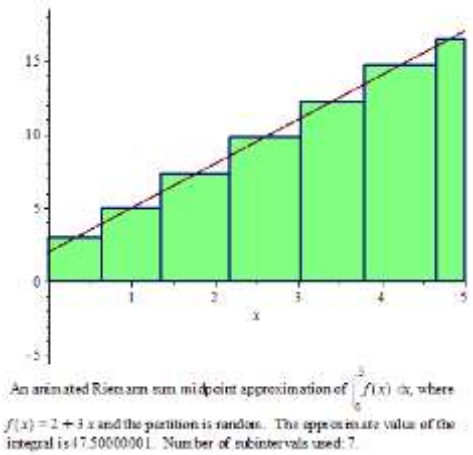
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5);

$$\frac{95}{2}$$

> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, output=sum);

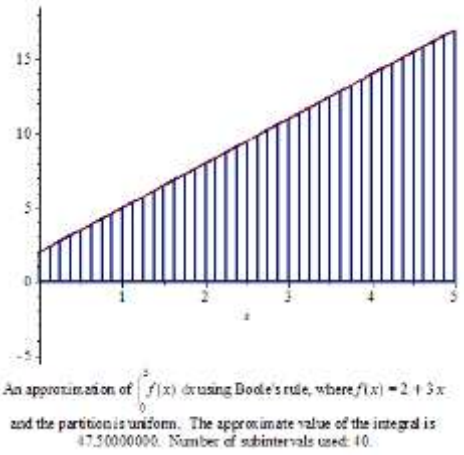
$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{11}{4}+\frac{3}{2}\,i\right)$$

La Fig. 5.8 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico de aproximación de medio punto de suma de Riemann, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción de Maple es:
ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, output=animation, partition=random[1.0], refinement=random, subpartition=width, iterations=50, showpoints=false, boxoptions=[filled=[color=green,transparency=.5]]);



An animated Riemann sum midpoint approximation of $\int_0^5 f(x)\,dx$, where $f(x) = 2 + 3x$ and the partition is random. The approximate value of the integral is 47.50000001. Number of subintervals used: 7.

Fig. 5.8 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=2+3x$ mediante 7 subintervalos.



An approximation of $\int_0^5 f(x)\,dx$ using Boole's rule, where $f(x) = 2 + 3x$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 47.50000000. Number of subintervals used: 40.

Fig. 5.9 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=2+3x$ con la regla de Boole con 40 subintervalos.

Regla de Boole

> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = boole);

$$\frac{95}{2}$$

La Fig. 5.9 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = boole, output = plot, partition = 40);
> int(2+3*x, x = 0 .. 5);

$$\frac{95}{2}$$

> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = newtoncotes[1]);

$$\frac{95}{2}$$

La Fig. 5.10 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(2+3*x,  0 .. 5, method = simpson, output = plot);
```

Regla de Simpson de 3/8

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = simpson[3/8]);
```

$$\frac{95}{2}$$

La Fig. 5.11 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);
```

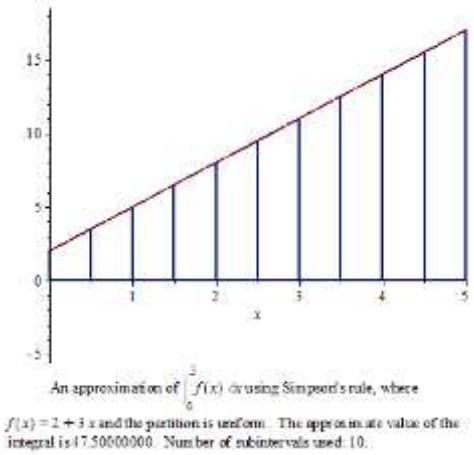


Fig. 5.10 Aproximación al área bajo la curva de $f(x) = 2 + 3x$ mediante el método de Newton-Cotes con 10 subintervalos, partición uniforme.

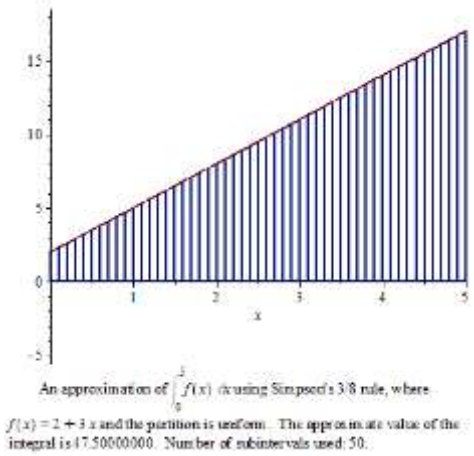


Fig. 5.11 Aproximación al área bajo la curva de $f(x) = 2 + 3x$ mediante Simpson 3/8 con 7 subintervalos.

Regla de Simpson

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = simpson);
```

$$\frac{95}{2}$$

La Fig. 5.12 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = simpson, output = plot, partition = 50);
```

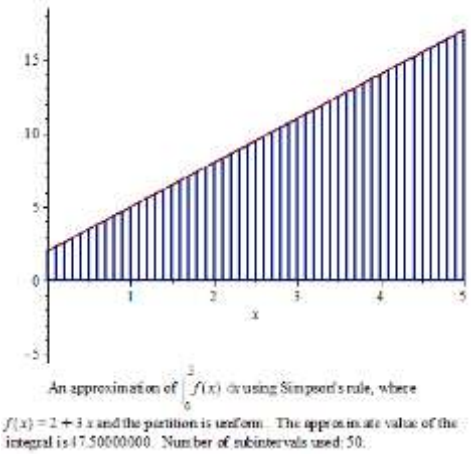


Fig. 5.12 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=2+3x$ mediante la Regla de Simpson con 50 subintervalos. Partición uniforme.

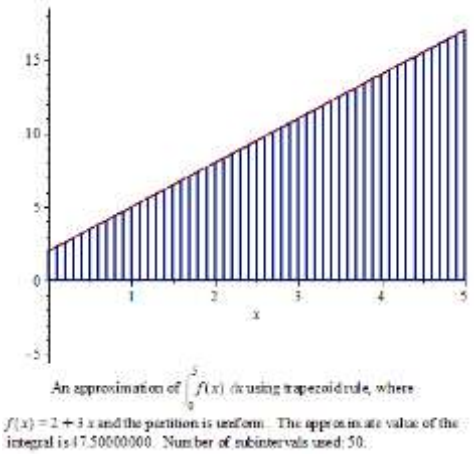


Fig. 5.13 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=2+3x$ mediante la regla del trapezoide con 50 subintervalos. Partición uniforme.

Regla Trapezoidal

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = trapezoid);
```

$$\frac{95}{2}$$

La Fig. 5.13 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(2+3*x, x = 0 .. 5, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);
```

Integral B

```
> Int(1 + 2·x + 3·x^2, x = -2 ..4)
```

$$\int_{-2}^{4} \left(1 + 2x + 3x^2\right) dx$$

Método analítico

```
> Int(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4)=int(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4);
```

$$\int_{-2}^{4} \left(1 + 2x + 3x^2\right) dx = 90$$

Métodos Numéricos de Maple

Integración Aproximada

> Student[Calculus1][ApproximateInt] - return or plot an approximation to an integral

```
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4);
```

$$R := \int_{-2}^{4} \left(1 + 2x + 3x^2\right) dx$$

```
> ApproximateInt(R);
```

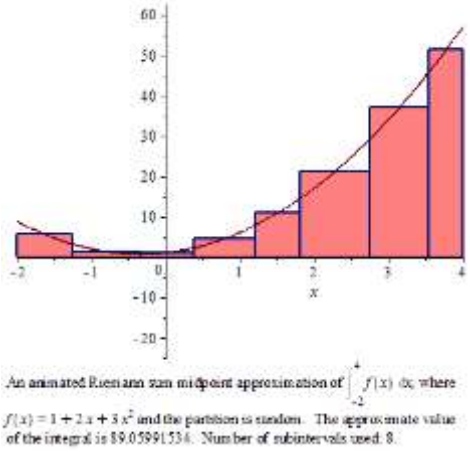


Fig. 5.14 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=1+2x+3x^2$ mediante el punto medio de la suma de Riemann usando 8 subintervalos. Partición random.

$$\frac{4473}{50}$$

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4);
```

$$\frac{4473}{50}$$

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, output=sum);
```

$$\frac{3}{5}\sum_{i=0}^{9}\left(-\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i+3\left(-\frac{17}{10}+\frac{3}{5}i\right)^2\right)$$

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, output=sum);
```

$$\frac{3}{5}\sum_{i=0}^{9}\left(-\frac{12}{5}+\frac{6}{5}i+3\left(-\frac{17}{10}+\frac{3}{5}i\right)^2\right)$$

La Fig. 5.14 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, output=animation,
partition=random[1.0], refinement=random, subpartition=width,
iterations=30, showpoints=false,
boxoptions=[filled=[color=red,transparency=.5]]);
```

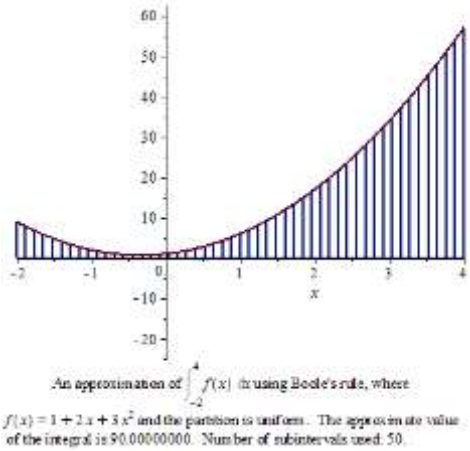


Fig. 5.15 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=1+2x+3x^2$ con partición uniforme mediante la regla de Boole usando 50 subintervalos.

Regla de Boole

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = boole);
```

90

La Fig. 5.15 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = boole,
output = plot, partition = 50);
```

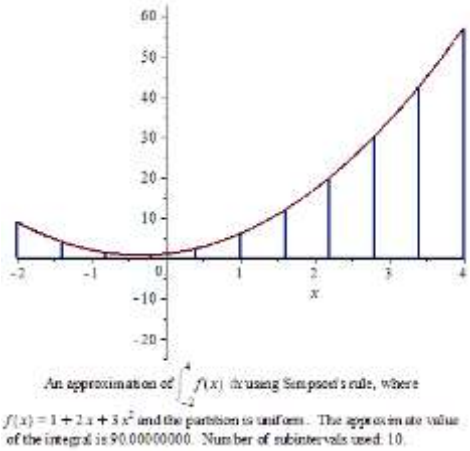


Fig. 5.16 Aproximación exacta al área bajo la curva de $f(x)=1+2x+3x^2$ con partición uniforme mediante la regla de Simpson usando 10 subintervalos.

Fórmulas de Newton-Cotes

```
> int(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4);
```

90

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method =
newtoncotes[1]);
```

$$\frac{2277}{25}$$

La Fig. 5.16 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method =
newtoncotes[2]);
```

90

Regla de Simpson 3/8

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = simpson[3/8]);
```

$$90$$

La Fig. 5.17 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 5);
```

Regla de Simpson

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = simpson);
```

$$90$$

La Fig. 5.18 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = simpson, output = plot, partition = 3);
```

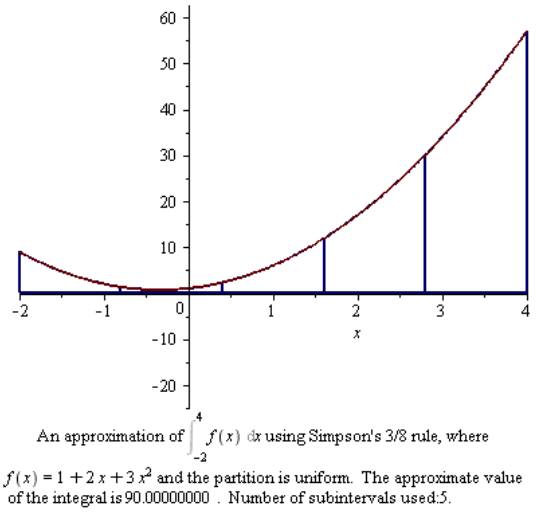


Fig. 5.17 Aproximación exacta al área bajo la curva de $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ con partición uniforme mediante Simpson 3/8 usando 5 subintervalos.

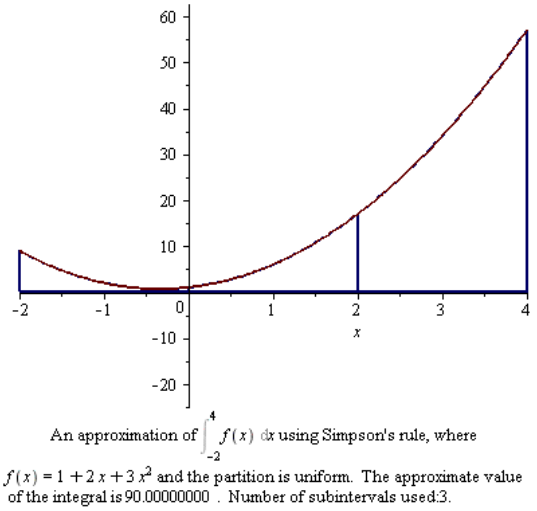


Fig. 5.18 Aproximación exacta al área bajo la curva de $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ con partición uniforme mediante la regla de Simpson usando 3 subintervalos.

Regla Trapezoidal

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = trapezoid);
```

$$\frac{2277}{25}$$

La Fig. 5.19 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando

particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = trapezoid, output = plot, partition = 5);

La Fig. 5.20 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:
> ApproximateInt(1+2*x+3*x^2, x = -2 .. 4, method = trapezoid, output = plot, partition = 10);

Integral C

> $Int\left(\sin(x), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)\, dx$$

Método Analítico

> $Int\left(\sin(x), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right) = int\left(\sin(x), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)\, dx = 1$$

Métodos Numéricos de Maple

Integración Aproximada

> Student[Calculus1][ApproximateInt] - return or plot an approximation to an integral
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi);

$$R := \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)\, dx$$

> ApproximateInt(R);

$$\frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{32}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{32}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{5} + \frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2} + \frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{80}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi);

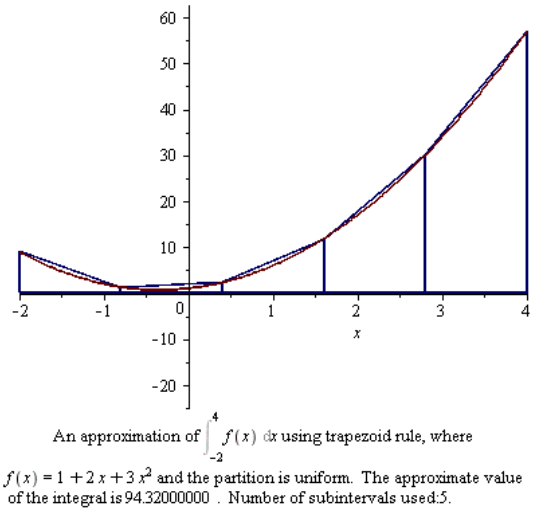


Fig. 5.19 Aproximación no tan buena al área bajo la curva de $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ con partición uniforme mediante la regla del Trapezoide usando 5 subintervalos.

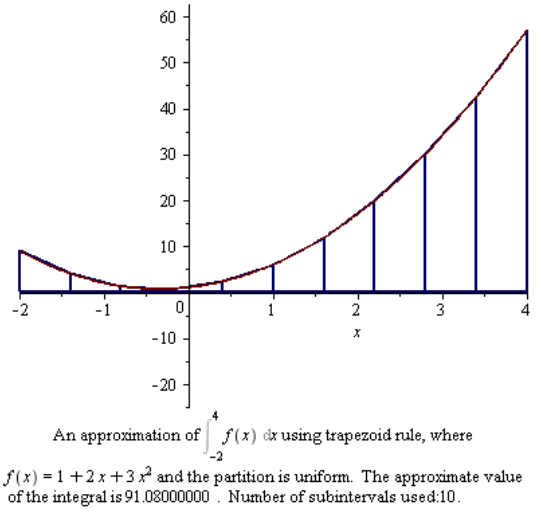


Fig. 5.20 Aproximación al área bajo la curva de $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ con partición uniforme mediante la regla Trapezoidal usando 10 subintervalos. Se observa, que mejora al uso de 5 subintervalos, como era de esperarse.

$$\frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5}$$
$$+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{5-\sqrt{5}}+\frac{1}{32}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$+\frac{1}{32}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5}$$
$$+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{5}+\frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+\frac{1}{160}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2}+\frac{1}{80}\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\frac{1}{80}\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, output=sum);

$$\frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=0}^{9}\sin\left(\frac{1}{20}\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right)$$

> ApproximateInt(cosh(x), 1..4, output=sum);

$$\frac{3}{10}\sum_{i=0}^{9}\cosh\left(\frac{23}{20}+\frac{3}{10}\,i\right)$$

La Fig. 5.21 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, output=animation, partition=random[1.0], refinement=random, subpartition=width, iterations=30, showpoints=false, boxoptions=[filled=[color="DodgerBlue",transparency=.5]]);

Regla de Boole

> with(Student[Calculus1]):

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = boole);

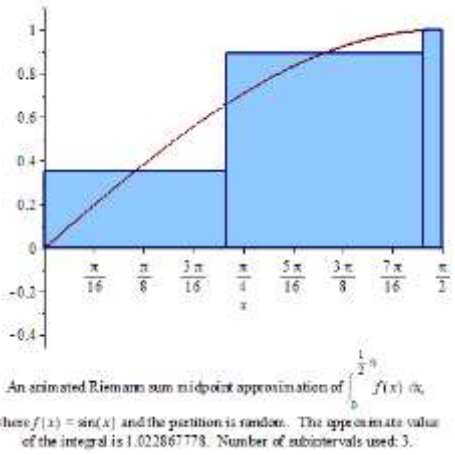


Fig. 5.21 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición random mediante la suma de Riemann de medio punto usando 3 subintervalos, que no permiten un ajuste exacto.

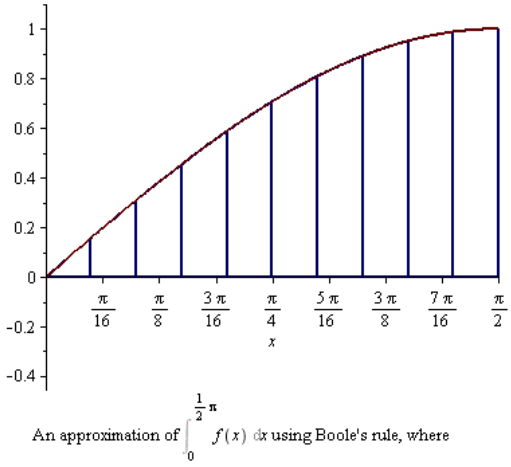
$$\frac{1}{3600}\pi\left(14+64\sin\left(\frac{7}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{37}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{39}{80}\pi\right)\right.$$
$$+64\sin\left(\frac{29}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{31}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{33}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{23}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{5}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{27}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{17}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{19}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{21}{80}\pi\right)$$
$$+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+64\sin\left(\frac{13}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{3}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{1}{16}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{7}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{9}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{11}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{1}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{3}{80}\pi\right)+6\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5}+3\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5}$$
$$+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+15\sqrt{2-\sqrt{2}}+14\sqrt{5+\sqrt{5}}+15\sqrt{2+\sqrt{2}}+14\sqrt{5}$$
$$+21\sqrt{2}+3\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+7\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+7\sqrt{2}\sqrt{5}$$
$$\left.+7\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

La Fig. 5.22 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = boole,
output = plot, partition = 10);
> int(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi);
                                  1
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method =
newtoncotes[1]);
```

$$\frac{1}{80}\pi\left(\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2}+2+2\sqrt{5}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$$

```
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method =
newtoncotes[2]);
```



An approximation of $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,dx$ using Boole's rule, where $f(x) = \sin(x)$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 1.000000000 . Number of subintervals used:10.

Fig. 5.22 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición uniforme mediante la regla de Boole usando 10 subintervalos, que permiten un ajuste exacto.

$$\frac{1}{240}\pi\left(2+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right.$$
$$+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+5\sqrt{2-\sqrt{2}}+5\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$\left.+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}\right)$$

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = newtoncotes[3]);

$$\frac{1}{640}\pi\left(4\sqrt{5}+6\sqrt{2}+7\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{5-\sqrt{5}}\right.$$
$$+3\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{3}+3\sqrt{5}\sqrt{3}+3\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+2\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+5\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+5\sqrt{2}\sqrt{5}+9\sqrt{3}$$
$$+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}+6\sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$\left.+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}+10\right)$$

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = newtoncotes[4]);

$$\frac{1}{3600}\pi\left(14+64\sin\left(\frac{7}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{37}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{39}{80}\pi\right)\right.$$
$$+64\sin\left(\frac{29}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{31}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{33}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{23}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{5}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{27}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{17}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{19}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{21}{80}\pi\right)$$
$$+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+64\sin\left(\frac{13}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{3}{16}\pi\right)+64\sin\left(\frac{1}{16}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{7}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{9}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{11}{80}\pi\right)$$
$$+64\sin\left(\frac{1}{80}\pi\right)+64\sin\left(\frac{3}{80}\pi\right)+6\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+3\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5}+3\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5}$$
$$+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}+6\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+15\sqrt{2-\sqrt{2}}+14\sqrt{5+\sqrt{5}}+15\sqrt{2+\sqrt{2}}+14\sqrt{5}$$
$$+21\sqrt{2}+3\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+7\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+7\sqrt{2}\sqrt{5}$$
$$\left.+7\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

```
ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = newtoncotes[6]);
```

$$\frac{1}{67200}\pi\left(218+27\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}+27\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right.$$
$$+27\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{3}+27\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+190\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}+190\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+326\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+82\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+272\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+244\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5}+136\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5}$$
$$+272\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}+380\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+680\sqrt{2-\sqrt{2}}+191\sqrt{5+\sqrt{5}}+27\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+788\sqrt{2+\sqrt{2}}+164\sqrt{5}+81\sqrt{3}+246\sqrt{2}$$
$$+190\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+109\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$-54\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+109\sqrt{2}\sqrt{5}+27\sqrt{5}\sqrt{3}$$
$$+82\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+54\sqrt{2}\sqrt{3}+216\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{3}\sqrt{5}$$
$$+108\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{3}+54\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}+108\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3}\sqrt{5}$$
$$+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+216\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+108\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}$$
$$+216\sqrt{8-2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$
$$+216\sqrt{8+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$
$$+216\sqrt{8+2\sqrt{2}\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$
$$+216\sqrt{8-2\sqrt{2}\sqrt{3}-2\sqrt{2}}+27\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$$
$$+162\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$$
$$+162\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+54\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+54\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$\left.+108\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}+108\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{3}\right)$$

La Fig. 5.23 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = simpson, output = plot);
```

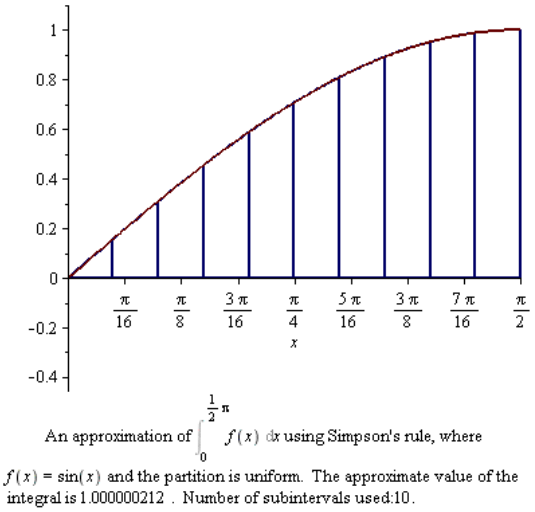


Fig. 5.23 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición uniforme mediante la regla de Simpson usando 10 subintervalos, que permiten un ajuste cuasi exacto.

Regla de Simpson 3/8

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = simpson[3/8]);
```

$$\frac{1}{640}\pi\left(4\sqrt{5}+6\sqrt{2}+7\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{5-\sqrt{5}}\right.$$
$$+3\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{3}+3\sqrt{5}\sqrt{3}+3\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+2\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+5\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+5\sqrt{2}\sqrt{5}+9\sqrt{3}$$
$$+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}+6\sqrt{2}\sqrt{3}$$
$$\left.+3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}+10\right)$$

La Fig. 5.24 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);
```

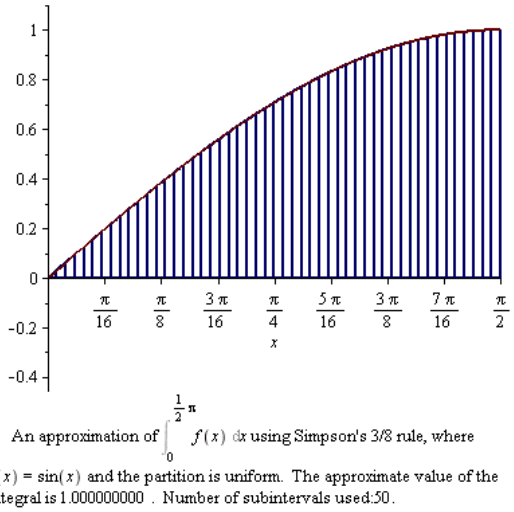


Fig. 5.24 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición uniforme mediante Simpson 3/8 usando 50 subintervalos, que permiten un ajuste exacto.

Regla de Simpson

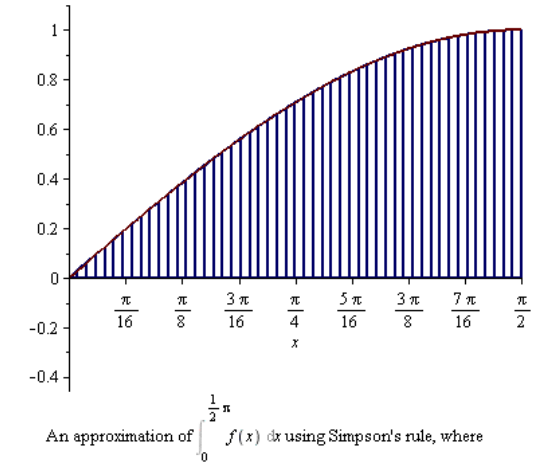
> with(Student[Calculus1]):

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = simpson);

$$\frac{1}{240}\pi\left(2+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right.$$
$$+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{5}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$+5\sqrt{2-\sqrt{2}}+5\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$\left.+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2}\sqrt{5}\right)$$

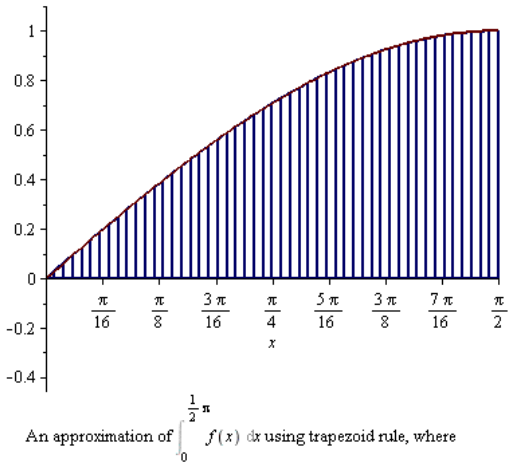
La Fig. 5.25 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = simpson, output = plot, partition = 50);



An approximation of $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,dx$ using Simpson's rule, where $f(x) = \sin(x)$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 1.000000001 . Number of subintervals used:50.

Fig. 5.25 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición uniforme mediante la regla de Simpson usando 50 subintervalos, que permiten un ajuste cuasi exacto.



An approximation of $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,dx$ using trapezoid rule, where $f(x) = \sin(x)$ and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 0.9999177522 . Number of subintervals used:50.

Fig. 5.26 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=sin(x)$ con partición uniforme mediante la regla del Trapezoide usando 50 subintervalos, que permiten un ajuste con menor exactitud que los casos previos.

Regla Trapezoidal

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = trapezoid);
```

$$\frac{1}{80}\pi\left(\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2}+2+2\sqrt{5}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)$$

La Fig. 5.26 muestra la gráfica de la función integrada por el método numérico indicado, usando particiones random o uniformes y número de subintervalos según se describe en el encabezado. La instrucción Maple es:

```
> ApproximateInt(sin(x), x = 0 .. (1/2)*Pi, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);
```

Este problema también se resuelve mediante cálculos por el método de Simpson 3/8, es decir, se aproximan las integrales

a) $A_2 = \int_0^5 (2+3x)dx$

b) $A_3 = \int_{-2}^4 (1+2x+3x^2)dx$

c) $A_4 = \int_0^{\pi/2} (senx)dx$

Solución

La fórmula de Simpson 3/8 es una técnica de integración numérica para aproximar la integral de una función en un intervalo dado. La fórmula es la Ec. (5.3)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

Donde h representa la longitud del subintervalo utilizado para aproximar la integral de la función. Para obtener h se tiene la siguiente formula.

$$h=\frac{b-a}{3}$$

Tomando en cuenta que

$b=x_3 \quad a=x_0$

Además,

$x_1=x_0+h$

$x_2=x_0+2h$

a)

Una vez conocida la información anterior procedemos a aproximar la primera integral

$A_2=\int_0^5(2+3x)dx$

el valor de h es

$$h=\frac{b-a}{3}$$

$$h=\frac{5-0}{3}$$

$$h=\frac{5}{3}$$

Ahora los siguientes valores:

$x_0=0$

$$x_1=\frac{5}{3}+0$$

$$x_1=\frac{5}{3}$$

$$x_2=2\left(\frac{5}{3}\right)+0$$

$$x_2=\frac{10}{3}$$

A continuación, se sustituyen los datos en la fórmula de Simpson 3/8

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3\left(\frac{5}{3}\right)}{8}\left[f(0)+3f\left(\frac{5}{3}\right)+3f\left(\frac{10}{3}\right)+f(5)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{5}{8}\left[f(0)+3f\left(\frac{5}{3}\right)+3f\left(\frac{10}{3}\right)+f(5)\right]$$

Se procede a evaluar la función con los datos anteriores.

$f(x)=2+3x$

$f(0)=2+3(0)$

$f(0)=2$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=2+3\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=7$$

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=2+3\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=12$$

$$f(5)=2+3(5)$$

$$f(5)=17$$

Finalmente se sustituyen los datos obtenidos de evaluar las funciones

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{5}{8}\left[2+3(7)+3(12)+17\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{5}{8}\left[76\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{380}{8}$$

Dando como resultado a la integral

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=47.5 \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

De la misma forma, la solución para los dos incisos restantes, es

b)

$$A_3=\int_{-2}^{4}(1+2x+3x^2)dx$$

$$h=\frac{b-a}{3}$$

$$h=\frac{4+2}{3}$$

$$h=2$$

Ahora se obtendrán los siguientes valores

$$x_0=-2$$

$$x_1=-2+2$$

$$x_1=0$$

$$x_2=-2+2(2)$$

$$x_2=-2+2(2)$$

$$x_2=2$$

$$x_3=4$$

Se procede a sustituir en la fórmula del método numérico solicitado, teniendo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3(2)}{8}\left[f(-2)+3f(0)+3f(2)+f(4)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{6}{8}\left[f(-2)+3f(0)+3f(2)+f(4)\right]$$

Se evalúan en la función los valores de x

$f(x)=(1+2x+3x^2)$

$f(-2)=(1+2(-2)+3(-2)^2)$

$f(-2)=(1-4+12)$

$f(-2)=9$

$f(0)=(1+2(0)+3(0)^2)$

$f(0)=1$

$f(2)=(1+2(2)+3(2)^2)$

$f(2)=(1+2(2+3(2)^2)$

$f(2)=1+4+12$

$f(2)=17$

$f(4)=(1+2(4)+3(4)^2)$

$f(4)=(1+8+48)$

$f(4)=57$

Sustituimos los valores obtenidos y simplificamos

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{6}{8}\left[9+3(1)+3(17)+57\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{6}{8}\left[120\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{720}{8}$$

Finalmente se tiene

$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=90 \triangleleft Respuesta.$

c)

$A_4=\int_0^{\pi/2}(senx)dx$

$h=\frac{b-a}{3}$

$h=\frac{\pi/2-0}{3}$

$h=\frac{\pi}{6}$

En este caso,

$x_0=0$

$x_1=\frac{\pi}{6}+0$

$x_1=\frac{\pi}{6}$

$x_2=2\left(\frac{\pi}{6}\right)+0$

$x_2=\frac{4\pi}{6}$

$x_3=\frac{\pi}{2}$

Se sustituyen los valores obtenidos para la variable independiente en la fórmula de Simpson 3/8

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3\left(\frac{\pi}{6}\right)}{8}\left[f(0)+3f\left(\frac{\pi}{6}\right)+3f\left(\frac{4\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{\left(\frac{3\pi}{6}\right)}{8}\left[f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3f\left(\frac{4\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3\pi}{48}\left[f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3f\left(\frac{4\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Y se procede a evaluar las funciones respectivamente:

$$f(x) = (senx)$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{4\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3\pi}{48}\left[\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + (1)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3\pi}{48}\left[5.09808\right]$$

Obteniendo finalmente:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = 1.00101 \triangleleft Respuesta$$

Los resultados obtenidos de las tres integrales son

Resultados/Integrales	$\int_0^5 (2+3x)dx$	$\int_{-2}^4 (1+2x+3x^2)dx$	$\int_0^{\pi/2} (senx)dx$
Método Simpson 3/8	*47.5*	*90*	*1.00101*

$\triangleleft$ *Respuesta*

Problema 2

En un cambiador de calor de tubos concéntricos como el de la Fig. 5.27, se calienta nitrobenceno con un gasto $w = 3000 lb/hr$ en el tubo interior con diámetro $Di = 3$ pulgadas. Entre los tubos se circula vapor saturado que mantiene la temperatura de los tubos a temperatura constante $Ts = 100^{\circ} C$ ¿Cuál será la longitud necesaria de los tubos para calentar el nitrobenceno desde 10 hasta $80^{\circ} C$?

Resolver este problema con unidades de los sistemas internacional (SI) e inglés, y con los métodos numéricos trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

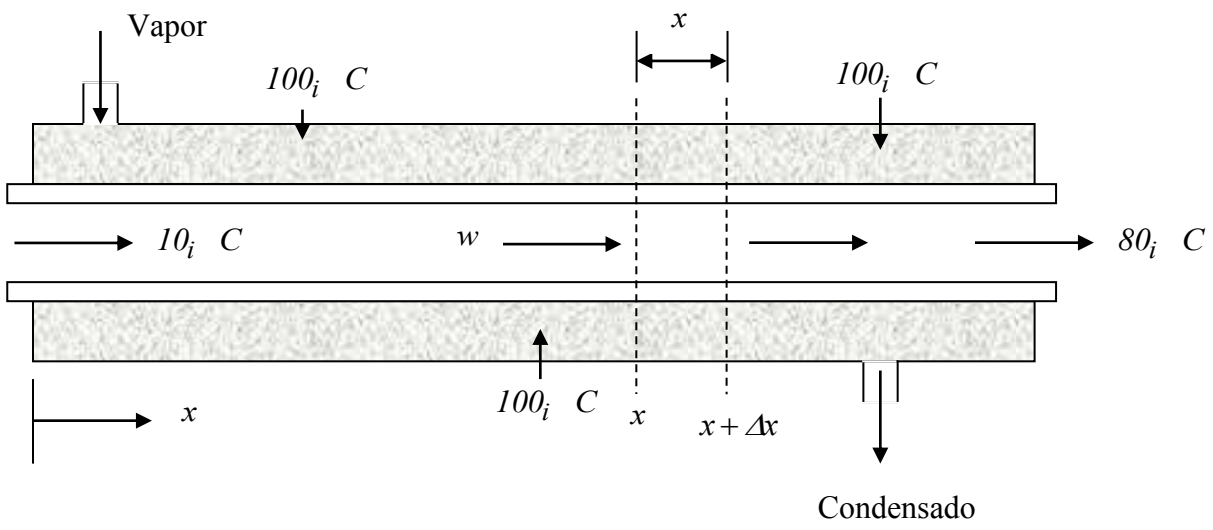


Fig. 5.27 Intercambiador de tubos concéntricos para calentar nitrobenceno con vapor saturado.

Solución

Se resuelve este problema usando unidades en el SI y en el sistema inglés, así como a través de los métodos trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

El modelo del proceso se obtiene mediante un balance de calor a régimen permanente en un elemento diferencial de longitud Δx

Acumulación = entrada – salida + transmisión

$$0 = w \cdot Cp \cdot Tl_x - w \cdot Cp \cdot Tl_{x+\Delta x} + Di \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot h(Ts - T)$$

Al dividir entre Δx y hacer $\Delta x \to 0$, se obtiene el límite

$$x \cdot Cp \frac{dT}{dx} = Di \cdot \pi \cdot h(Ts - T)$$

Y al separar variables queda

$$\frac{w}{Di \cdot \pi} \int_{10}^{80} \frac{Cp dT}{h(Ts - T)} = \int_0^L dx = L - 0 = L$$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor en $Btu/(hr \cdot ft \cdot ^\circ F)$ y se calcula con la expresión

$$h = 0.023 \,\mathrm{Re}^{0.8} \,\mathrm{Pr}^{0.33}$$

Hay que observar que Re, Cp y Pr son funciones de T.

Las propiedades termo físicas del nitrobenceno (Hernández, 2023), se muestran en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Propiedades termofísicas del nitrobenceno

Propiedades del fluido	Simbolo	Sistema internacional (SI)	Sistema inglés
Densidad del fluido	δ	$1175 \frac{kg}{m^3}$	$73.352848825509 \frac{lb}{ft^3}$

Tabla 5.2 Propiedades termofísicas del nitrobenceno

Propiedades del fluido	Simbolo	Sistema internacional (SI)	Sistema inglés
Viscosidad dinámica	μ	$2.03\times10^{-3}\,\frac{N\cdot s}{m^2}$	$1.3640969293\times10^{-3}\,\frac{lb}{sft}$
Viscosidad cinemática	υ	$1.72765957446809x10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$	$4.9107489455291\frac{lb}{h}$
Calor especifico	Cp	$1400\,\frac{J}{kg\cdot°K}$	$0.333438425528\,\frac{BTU}{lb\cdot°F}$
Conductividad térmica	K	$0.16\,\frac{w}{m\ °K}$	$0.092446290647\,\frac{BTU}{hr\cdot ft\cdot°F}$

Datos dados en el problema

Flujo volumétrico o gasto	$w=3000\,\frac{lb}{hr}$
Diámetro	$Di=3in$
Temperatura constante	$Ts=100°C=212°F$
Variación de temperaturas	$10°C=50°F$ hasta $80°C=176°F$

La mecánica de fluidos, así como todos los nombres que llega poseer comprenden un tratado de estudios muy importantes para el desarrollo matemático y en la ingeniería en general, representa un muy buen sustento.
Consideramos que el análisis de fluidos es una rama de la física que engloba temas relacionado al agua, gases, y estados de la materia a los cuales puede someterse un estímulo correspondiente a generar un efecto propicio para la ingeniería, si estudiamos el agua, nos interesa saber que comportamiento pudiese llegar a tener dentro de algunas turbinas. Si realizamos un robot, cuyos brazos son de índole hidráulica, podremos calcular los parámetros necesarios para que el aceite involucrado cumpla con los requerimientos establecidos,
Este es un caso en el cual se involucran muchos criterios a poner en perspectiva, como diría Rene Descartes “divide el problema en tantas partes para su resolución local”, y es justamente lo que haremos.

Solución del problema usando el sistema internacional de unidades
Se toma como Q el valor del flujo volumétrico

$$Q=3000\,\frac{lb}{hr}$$

Dado que nuestra Q está dada en el sistema inglés se hará la siguiente conversión

$$\left(3000\,\frac{lb}{hr}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right)\left(\frac{1kg}{2.2046lb}\right)=0.378\,\frac{kg}{s}$$

Usando la aproximación de
$1kg\approx 1litro$

Se convierte a $0.378\frac{l}{s}$

Para completar la conversión, se procede a convertir los litros a metros cúbicos

$$\left(\frac{0.378l}{s}\right)\left(\frac{1m^3}{1000l}\right)=378x10^{-6}\frac{m^3}{s}$$

Para obtener el área que está dada en pulgadas, se convierte a metros

$$(3pul)\left(\frac{1m}{39.37pul}\right)=0.0762m$$

Obtenemos el área, $A=\frac{\pi\cdot D^2}{4}=\frac{\pi(0.0762m)^2}{4}=4.56x10^{-3}m^2$

Para obtener la velocidad del fluido se utiliza la siguiente formula:

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{378x10^{-6}\frac{m^3}{s}}{\pi(0.0762)^2m^2}=82.895x10^{-3}\frac{m}{s}$$

Para obtener el número de Reynolds se sustituyen los valores

$$\mathrm{Re}=\frac{Di\cdot V\cdot\delta}{\mu}=\frac{(7.62x10^{-2}m)\left(82.895x10^{-3}\frac{m}{s}\right)\left(1175\frac{kg}{m^3}\right)}{2.03x10^{-3}\frac{Ns}{m^2}}=3656.16$$

Para comprobar que es adimensional el número de Reynolds se muestra la eliminación de unidades

$$\frac{\frac{m\cdot m\cdot kg}{s\cdot m^3}}{\frac{N\cdot s}{m^2}}=\frac{m^4\cdot kg}{N\cdot s^2\cdot m^3}=\frac{m\cdot kg}{N\cdot s^2}=\frac{m\cdot kg}{\frac{kg\cdot m}{s^2}s^2}=\frac{\cancel{m\cdot kg\cdot s^2}}{\cancel{m\cdot kg\cdot s^2}}$$

Para calcular el número de Prandt, se sustituye la siguiente fórmula

$$\mathrm{Pr}=\frac{Cp\cdot\mu}{K}=\frac{\left(1400\frac{J}{kg\cdot K}\right)\left(2.03x10^{-3}\frac{N\cdot s}{m^2}\right)}{0.16\frac{w}{m\cdot K}}=17.7625$$

Para comprobar que es adimensional, se realiza la eliminación de unidades

$$\frac{\frac{J\cdot N\cdot s}{kg\cdot K\cdot m^2}}{\frac{w}{m\cdot K}}=\frac{J\cdot N\cdot s\cdot m\cdot K}{w\cdot kg\cdot K\cdot m^2}=\frac{\frac{J\cdot kg\cdot m\cdot s}{s^2}}{\frac{J\cdot kg\cdot m}{s}}=\frac{\cancel{J\cdot kg\cdot m\cdot s^2}}{\cancel{J\cdot kg\cdot m\cdot s^2}}$$

Solo para comprobar, se puede obtener el número de Prandt con la siguiente fórmula:

$$\Pr = \frac{\delta \cdot Cp \cdot V}{K} = \frac{\left(1175\frac{kg}{m^3}\right)\left(1400\frac{J}{kg \cdot K}\right)\left(1.7276x10^{-6}\ \frac{m^2}{s}\right)}{0.16\frac{w}{m \cdot K}} = 17.762$$

Ahora se sustituyen los resultados en la fórmula para obtener el coeficiente de transmisión de calor dado en $Btu/(hr \cdot pie \cdot ^{o}F)$

$$h = 0.023(3656.16)^{0.8}(17.7625)^{0.33} = 42.12\frac{Btu}{hr \cdot ft \cdot F}$$

Convirtiendo h a sistema internacional tenemos que,

$$h = 42.12\frac{Btu}{hr \cdot ft \cdot F} = 3.324950438\frac{J}{sKg\,^{\circ}C}$$

$$\frac{w}{Di \cdot \pi}\int_{10}^{80}\frac{Cp \cdot dT}{h(Ts-T)} = \frac{w}{Di \cdot \pi}\int_{10}^{80}\frac{Cp \cdot dT}{h(Ts-T)} = -\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h}\int_{10}^{80}\frac{-dT}{(Ts-T)} = \frac{-w \cdot Cp}{Di \cdot h \cdot \pi}\ln(Ts-T)\Big|_{10}^{80}$$

Sustituyendo en la constante de la integral definida, queda

$$-\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot h \cdot \pi} = \left(\frac{\left(378\times10^{-6}\ \frac{m^3}{s}\right)\left(1400\ \frac{J}{KgC}\right)}{\left(7.62\times10^{-2}\,m\right)\left(0.7515497646\ \frac{J}{sKg\,^{\circ}C}\right)\pi}\right) = 9.240747874$$

Sustituyendo en el resultado de la integral

$$-(9.240747874)[\ln(100-80)-\ln(100-10)] =$$
$$-(9.240747874)[2.995732274-4.49980967] = 13.8988m$$

La longitud necesaria de los tubos para calentar el nitrobenceno desde 10 hasta $80^{o}C$ es $45.6\,ft$ o $13.8988m$

Solución del problema con las unidades del sistema inglés

Conversión de unidades

$Di = 3'' = 0.025\,ft$

$1litro = 2.2046lb$

$1litro = 0.0353565553215\,ft^3$

Conversiones

$$\delta = \left(1175\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{2.2046lb}{1kg}\right)\left(\frac{1m^3}{35.3147\,ft^3}\right) = 73.352848825509\frac{lb}{ft^3}$$

$$Q = \left(3000\frac{lb}{hr}\right)\left(\frac{hr}{3600s}\right) = \left(0.08333\frac{lb}{s}\right)\left(\frac{0.0353565553215\,ft^3}{2.2046lb}\right) = 0.01334923\frac{ft^3}{s}$$

Obtención del área

$$A = \frac{\pi(0.25\,ft)^2}{4} = 0.049087385\,ft^2$$

Obtención de la velocidad

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.01334923\frac{ft^3}{s}}{0.049087385\,ft^2}=0.271918286\frac{ft}{s}$$

Sustitución para obtener el número de Reynolds

$$\mathrm{Re}=\frac{Di\cdot V\cdot\delta}{\mu}=\frac{(0.25\,ft)\left(0.271918286\frac{ft}{s}\right)\left(73.352848825509\frac{lb}{ft^3}\right)}{0.0013640969294\frac{lb}{ft\cdot s}}=3655.931826$$

Comprobación de unidades

$$\mathrm{Re}=\frac{Di\cdot V\cdot\delta}{\mu}=\frac{ft\cdot\frac{ft}{s}\cdot\frac{lb}{ft^3}}{\frac{lb}{ft\cdot s}}=\frac{\frac{lb}{ft\cdot s}}{\frac{lb}{ft\cdot s}}=\frac{\cancel{lb\cdot ft\cdot s}}{\cancel{lb\cdot ft\cdot s}}$$

Sustitución para obtener el número de Prandt

$$\mathrm{Pr}=\frac{Cp\cdot\mu}{K}=\frac{\left(.33438425528\frac{Btu}{lb\cdot{}^\circ F}\right)\left(4.9107489455291\frac{lb}{hr\cdot ft}\right)}{0.09244290647\frac{Btu}{hr\cdot ft\cdot{}^\circ F}}=17.76249883$$ Comprobaci

ón de unidades

$$\mathrm{Pr}=\frac{\left(\frac{Btu}{lb\cdot{}^\circ F}\right)\left(\frac{lb}{hr\cdot ft}\right)}{\frac{Btu}{hr\cdot ft\cdot{}^\circ F}}=\frac{\frac{Btu\cdot lb}{lb\cdot{}^\circ F\cdot hr\cdot ft}}{\frac{Btu}{hr\cdot ft\cdot{}^\circ F}}=\frac{\cancel{Btu\cdot lb\cdot hr\cdot{}^\circ F\cdot ft}}{\cancel{Btu\cdot lb\cdot hr\cdot{}^\circ F\cdot ft}}$$

Ahora se sustituyen los resultados en la fórmula para obtener el coeficiente de transmisión de calor dado en $Btu/(hr\cdot pie\cdot{}^\circ F)$

$$h=0.023(3656.16)^{0.8}(17.7625)^{0.33}=42.12\frac{Btu}{hr\cdot ft\cdot F}$$

Se realiza la integral definida, cambiándose los límites a grados Fahrenheit

$$\frac{w}{Di\cdot\pi}\int_{10}^{80}\frac{Cp\cdot dT}{h(Ts-T)}$$

Aquí se cambia los $80^\circ C$ que equivalen a $176^\circ F$, así mismo, $10^\circ C$ es igual a $50^\circ F$

$$\frac{w}{Di\cdot\pi}\int_{50}^{176}\frac{Cp\cdot dT}{h(Ts-T)}=$$

Sacamos las constantes

$\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h} \int_{50}^{176} \frac{dT}{(Ts - T)}$, resolvemos la integral que es de la forma $\int \frac{du}{u} = \ln(u)$

$u = Ts - T$

$du = -dT$

Completamos la integral, agregando un menos $-\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h} \int_{50}^{176} \frac{-dT}{(Ts - T)}$,

Nos da como resultado:

$$= \frac{-w \cdot Cp}{Di \cdot h \cdot \pi} \ln(Ts - T) \Big|_{50}^{176}$$

Sustituyendo en la constante de la integral definida, obtenemos

$$-\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot h \cdot \pi} = \left(\frac{\left(3000 \frac{lb}{hr}\right)\left(0.334 \frac{Btu}{lb \cdot ^\circ F}\right)}{(0.25 ft)\left(42.12 \frac{Btu}{hr \cdot ft \cdot ^\circ F}\right)} \right) = -30.3256$$

Comprobación de unidades

$$\frac{\frac{lbBtu}{hr \cdot lb \cdot ^\circ F}}{\frac{ft \cdot Btu}{hr \cdot ft \cdot ^\circ F}} = \frac{\cancel{lbBtu \cdot hr \cdot ft \cdot ^\circ F}}{\cancel{hr \cdot lb \cdot ^\circ F \cdot ft \cdot Btu}}$$

Sustituyendo en el resultado de la integral

$-(30.3256)[\ln(212 - 176) - \ln(212 - 50)] =$

$-(30.3256)[3.5835 - 5.087] = 45.6 ft$

La longitud necesaria de los tubos para calentar el nitrobenceno desde 10 hasta $80^\circ C$ es $45.6 ft$ o $13.8988 m$

Solución al problema por Métodos Numéricos
Método trapezoidal

Dada la integral $\frac{w}{Di \cdot \pi} \int_{50}^{176} \frac{Cp \cdot dT}{h(Ts - T)}$ se obtiene:

La función $f(x) = \frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h(Ts - T)}$

$x_0 = 50^\circ F$

$x_1 = 176^\circ F$

$h = 176 - 50 = 126$

Valor de la función constante $\frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h} = 30.3256$

$$f(x_0)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-50)}\right)=.1872$$

$$f(x_1)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-176)}\right)=.8424$$

Dado el algoritmo

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

Al sustituir, resulta

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{126}{2}[.1872+.8424]=64.8648\,ft$$

Por el método trapezoidal el resultado no se aproxima al valor real

Método de Simpson de $1/3$

Dada la integral $\frac{w}{Di\cdot\pi}\int_{50}^{176}\frac{Cp\cdot dT}{h(Ts-T)}$ se obtiene:

La función $f(x)=\frac{w\cdot Cp}{Di\cdot\pi\cdot h(Ts-T)}$

$x_0=50^{\circ}F$

$x_2=176^{\circ}F$

$h=\frac{176-50}{2}=63$

$x_1=x_0+h=50+63=113^{\circ}F$

Valor de la función constante $\frac{w\cdot Cp}{Di\cdot\pi\cdot h}=30.3256$

$$f(x_0)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-50)}\right)=.1872$$

$$f(x_1)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-113)}\right)=.30632$$

$$f(x_2)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-176)}\right)=.8424$$

Dado el algoritmo

$$\int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_0)+4\cdot f(x_1)+f(x_2)]$$

Al sustituir, resulta

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{63}{3}[.1872+4(.30632)+.8424]=47.35248\,ft$$

La función casi se aproxima a un polinomio de segundo grado

Método de Simpson de $3/8$

Dada la integral $\frac{w}{Di\cdot\pi}\int_{50}^{176}\frac{Cp\cdot dT}{h(Ts-T)}$ se obtiene:

La función $f(x)=\frac{w\cdot Cp}{Di\cdot\pi\cdot h(Ts-T)}$

$x_0=50^{\circ}F$

$x_3=176^{\circ}F$

$h=\frac{176-50}{3}=42$

$x_1=x_0+h=50+42=92^{\circ}F$

$x_2=x_1+h=92+42=134^{\circ}F$

Valor de la función constante $\frac{w\cdot Cp}{Di\cdot\pi\cdot h}=30.3256$

$$f(x_0)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-50)}\right)=.187195061$$

$$f(x_1)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-92)}\right)=.252713333$$

$$f(x_2)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-134)}\right)=.388789743$$

$$f(x_3)=(30.3256)\left(\frac{1}{(212-176)}\right)=.842377777$$

Dado el algoritmo

$$\int_{x_0=a}^{x_3=b}f(x)dx=\frac{3\cdot h}{8}\left[f(x_0)+3\cdot f(x_1)+3\cdot f(x_2)+f(x_3)\right]$$

Al sustituir, resulta

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{3(42)}{8}\left[.187195061+3(.252713333)+3(.388789743)+.842377777\right]$$

$$=46.52679259\,ft$$

La función se aproxima más para un polinomio de tercer grado, por lo que es un polinomio de un orden mayor, aproximándose cada vez más.

Solución Alternativa

A continuación, se describe una solución adicional al problema con un desglose de términos que se usan en mecánica de fluidos mayormente detallados. Iniciamos con el número adimensional de Reynolds

$$Reynolds:=\frac{D\upsilon\rho}{\mu}$$

Donde,

ρ es la densidad en kg/m^3
μ es la viscosidad dinámica en kg/m·s
D es el diámetro en Metros
υ es la velocidad en Metros/segundo
Obtenemos información de las propiedades fisicoquímicas del nitrobenceno y sabemos que el diámetro de los tubos es 3 pulgadas (0.0762 m), con ello, se calcula la velocidad del fluido

$$v = \frac{Q}{A}$$

Donde Q es el caudal y A el área por donde pasa dicho caudal, para encontrar dicho resultado hace falta realizar algunos ajuste para poder trabajar con ella, porque nosotros no contamos con un caudal, sino con un flujo másico $\dot{m}$ el cual debemos *arreglar* para poder llegar a los metros/segundo. Tomamos el flujo másico $\dot{m}$ y lo convertimos a Q

$$\frac{3000lb}{h}\cdot\frac{1lb}{3600s}\cdot\frac{1lt}{2.20462lb}\cdot\frac{0.001m^3}{1lt} = 378\cdot10^{-6}\ \frac{m^3}{s}$$

```
> (3000*lb/h)*(h/3600/s)*(lt/2.20462/lb)*(0.001*m^3/lt);
```

$$\frac{0.0003779940912\ m^3}{s}$$

$$W = \frac{3000lb}{hr} = 378\cdot10^{-6}\ \frac{m^3}{s} = Q$$

Para encontrar la velocidad sustituimos los datos en

$$v = \frac{Q}{A}$$

Los datos en la velocidad nos dan

$$v = \frac{378\cdot10^{-6}\ \frac{m^3}{s}}{\frac{\pi\cdot(0.0762m)^2}{4}}$$

Cuyas unidades son

$$= \frac{\frac{m^3}{s}}{\frac{m^2}{1}} = \frac{m}{s}$$

$$v = 0.08288806012\ \frac{m}{s}$$

Con ello, ya podemos calcular el número de Reynolds

$$Re = \frac{Di\cdot V\cdot\delta}{\mu} = \frac{\left(7.62\times10^{-2}m\right)\left(82.88806012\times10^{-3}\ \frac{m}{s}\right)\left(1175\ \frac{kg}{m^3}\right)}{2.03x10^{-3}\ \frac{kg}{m\cdot s}} = 3655.853430$$

En base a las unidades, podemos corroborar, que efectivamente se trata de un número adimensional:

$$\frac{M\frac{M}{S}\frac{Kg}{M^3}}{\frac{Kg}{S\cdot M}} = \frac{M\cdot M\cdot Kg\cdot S\cdot M}{S\cdot M^3\cdot Kg}$$ =Adimensional

Ahora pasaremos a encontrar el valor del número de Prandtl, Pr

$$Pr = \frac{\mu Cp}{k}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica en kg/m·s (permanece igual)

Cp es la capacidad calorífica especifica en J/kg·K (1400 J/kg·K)

Y k es la conductividad térmica en J/m·s·K (0.16 J/m·s·K)

$$Prandtl := \frac{(2.03\cdot 10^{-3})(1400)}{(0.16)} = 17.76250000$$

En base a las unidades, podemos corroborar, que efectivamente se trata de un número adimensional

$$\frac{\frac{Kg}{M\cdot S}\cdot\frac{J}{Kg\cdot K}}{\frac{J}{M\cdot S\cdot K}} \qquad \frac{\frac{J}{M\cdot S\cdot K}}{\frac{J}{M\cdot S\cdot K}}$$ =Adimensional

Sustituimos los valores en el coeficiente de transferencia de calor h

$h := 0.023\ Reynolds^{0.8} Prandtl^{0.33}$

$h := 42.11678451$

Ese valor de h está en Btu/(hr ft °F)

$w := (3000)$

$Di := (0.25)$ ft

$Cp := 0.3344$ Btu/lb·°F

$$\frac{w}{Di\cdot\pi}\int_{10}^{80}\frac{Cp}{h\cdot(Ts-t)}dt$$

= 45.61551896 ft; Resultado usando una integral bajo metodología analítica.

Ahora que ya tenemos el resultado analítico, podremos corroborarlo versus los métodos de aproximación numérica.

Método Trapezoidal

Procedimiento en base a los datos que se tienen. Determinamos h en base a los valores de la temperatura

> $h := \frac{80-10}{1}$

$h := 70$

> $x0 := 10$

$x0 := 10$

> $x1 := 80$

$x1 := 80$

> $\frac{h}{2}\cdot\left[\frac{1}{(100-x0)}+\frac{1}{(100-x1)}\right]$

$\left[\frac{77}{36}\right]$

> $evalf\left(\frac{77}{36}\right)$

2.138888889

Error absoluto:

> $ea := |1.504077397 - 2.138888889|$

$ea := 0.634811492$

Error relativo:

> $er := \frac{|1.504077397 - 2.138888889|}{2.138888889} \cdot 100$

$er := 29.67949833$

Propiedades del Nitrobenceno

> $NbA := \frac{w \cdot Cp}{Di \cdot \pi \cdot h}$

$NbA := \frac{95.27792890}{\pi}$

> $evalf(NbA)$

30.32790670

Este es el valor sin el factor resultante de la integral

> $2.138888889 \cdot 30.32790670$

64.86802267 ft *◁Respuesta*

Este es el valor que arroja el Método trapezoidal, cuyos errores son:

Error absoluto

> $|45.61551896 - 64.86802267|$

19.25250371

Error relativo

> $\frac{|45.61551896 - 64.86802267|}{64.86802267}(100)$

29.67949834 %

Método de Simpson de 3/8

> $h2 := \frac{80 - 10}{3}$

$h2 := \frac{70}{3}$

> $x0 := 10$

$x0 := 10$

> $x1 := x0 + h2$

$x1 := \frac{100}{3}$

> $x2 := x1 + h2$

$x2 := \frac{170}{3}$

> $x3 := 80$

$x3 := 80$

> $\frac{3 \cdot h2}{8} \cdot \left[\frac{1}{(100 - x0)} + 3 \cdot \frac{1}{(100 - x1)} + 3 \cdot \frac{1}{(100 - x2)} + \frac{1}{(100 - x3)} \right]$

> $evalf\left(\left[\frac{28721}{18720} \right] \right)$

[1.534241453]

> $ea := |1.504077397 - 1.534241453|$

$ea := 0.030164056$

> $er := \frac{|1.504077397 - 1.534241453|}{1.534241453} \cdot 100$

$er := 1.966056643$

Finalmente, se tiene que la longitud necesaria de los tubos para calentar el nitrobenceno desde 10 hasta 80°C es, en metros

> $1.534241453 \cdot 30.32790670$

46.53033164 ◁*Respuesta*

Cuyos errores son:

> $|45.61551896 - 46.53033164|$

0.91481268

> $\frac{|45.61551896 - 46.53033164|}{46.53033164}(100)$

1.966056651 %

Problema 3

Ensayar varios métodos de integración numérica para aproximar:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución analítica

> $Int\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, x=-1..1\right) = int\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, x=-1..1\right)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\pi$$

> $evalf\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

1.570796327 ◀ Respuesta esperada

Solución mediante aproximaciones de Maple. En la Fig. 5.28 podemos observar una respuesta que difiere en centésimas, la mejor obtenida por método numérico de aproximación de Riemann.

```
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(x^2/sqrt(1-x^2), x=-1..1);
```

$$R := \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

```
> ApproximateInt(R);
```

$$\frac{81}{475}\sqrt{19}+\frac{49}{1275}\sqrt{3}\sqrt{17}+\frac{1}{15}\sqrt{3}+\frac{9}{2275}\sqrt{91}+\frac{1}{825}\sqrt{11}$$

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-1..1);

$$\frac{81}{475}\sqrt{19}+\frac{49}{1275}\sqrt{3}\sqrt{17}+\frac{1}{15}\sqrt{3}+\frac{9}{2275}\sqrt{91}+\frac{1}{825}\sqrt{11}$$

> $$evalf\left(\frac{81}{475}\sqrt{19}+\frac{49}{1275}\sqrt{3}\sqrt{17}+\frac{1}{15}\sqrt{3}+\frac{9}{2275}\sqrt{91}+\frac{1}{825}\sqrt{11}\right)$$

1.174990333

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-1..1, output=sum);

$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\frac{\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2}{\sqrt{1-\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2}}$$

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), -1..1, output=sum);

$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\frac{\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2}{\sqrt{1-\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2}}$$

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), -1..1, output=animation, partition=1000, refinement=random, subpartition=width, iterations=50, showpoints=false, boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]]);

De los métodos numéricos que tiene en sus librerías Maple, los métodos numéricos que medianamente se aproximan son

Integración Aproximada

> Student[Calculus1][ApproximateInt] - return or plot an approximation to an integral
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999);

$$R := \int_{-0.999999999}^{0.999999999}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

> ApproximateInt(R);

1.174990326

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999);

1.174990326

> Boole's Rule
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = boole);

696.8513132

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), -0.99..0.99, method = boole, output = plot, partition = 50); La Fig. 5.29 muestra el área bajo la curva que aproxima al valor esperado. El valor al que aproxima es 1.29,

siendo el valor esperado de 1.57.

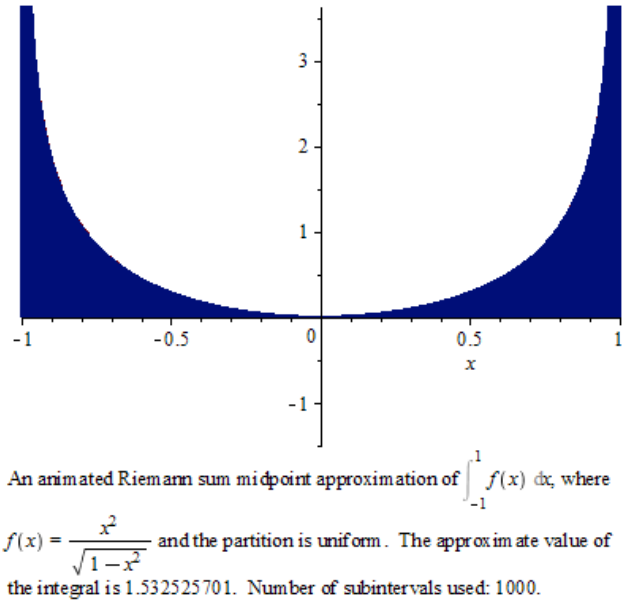


Fig. 5.28 Solución numérica de la integral del Problema que mayormente se aproxima al valor analítico esperado de 1.570796327

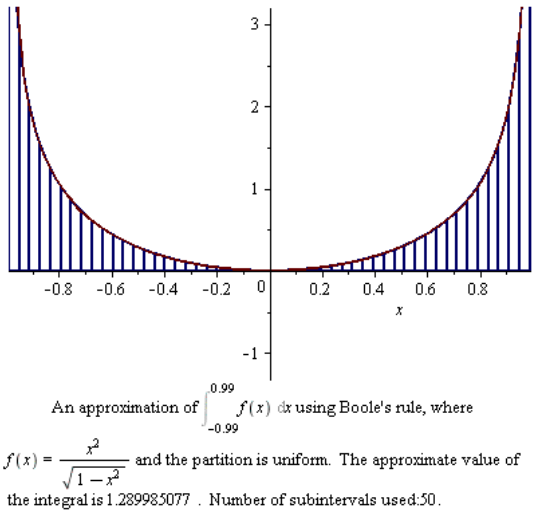


Fig. 5.29 Solución numérica de la integral mediante la regla de Boole de Maple.

Integral Aproximada Multivariada

> Student[MultivariateCalculus][ApproximateInt] - return the approximate integral of a bivariate function

```
> with(Student[MultivariateCalculus]):
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999,y=0..4);
                                  3.971971119
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999,y=0..4, output = animation, partition = [6,6], frames=2..7);
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999,y=0..4,z=0..20000, output = plot, partition = [2,2]); La Fig. 5.30 Muestra el resultado gráfico de este comando.
```

Los siguientes métodos numéricos aplicados en Maple para esta función no se aproximan al resultado esperado

Newton-Cotes 1-6 no se aproximan al resultado esperado

```
> Newton-Cotes Formulae
> int(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999);
                                  1.570796327
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = newtoncotes[1]);
                                  4472.828768
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = newtoncotes[2]);
                                  1491.726250
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = newtoncotes[3]);
                                  1119.124562
> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = newtoncotes[4]);
```

696.8513132

> ApproximateInt(x^2/sqrt(1-x^2), x=-0.999999999..0.999999999, method = newtoncotes[6]);

437.8296258

Los métodos del trapecio, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 no se aproximan

Regla Trapezoidal

> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = trapezoid);

4472.828768

Regla de Simpson

> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = simpson);

1491.726250

Regla de Simpson 3/8

> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = simpson[3/8]);

1119.124562

No obstante, estos tres métodos se aproximan mayormente utilizando la misma librería con los siguientes comandos, respectivamente, aunque siguen distando mucho del resultado esperado.

> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);

Respuesta = 895.59

> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = simpson, output = plot, partition = 50);

Respuesta = 299.46

> ApproximateInt(f,x=-0.999999999..0.999999999, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);

Respuesta = 224.96.

Para el nitrobenceno, bajo las condiciones en que se encuentra en los tubos concéntricos, aunados al vapor y a las propiedades que este posee, podemos concluir que la distancia necesaria para pasar de 10°C a 80°C es 45.61551896 ft. Usando los diferentes métodos de aproximación veremos que resulta más acertada la aproximación cuya veracidad la refleja el valor obtenido a la luz del resultado analítico.

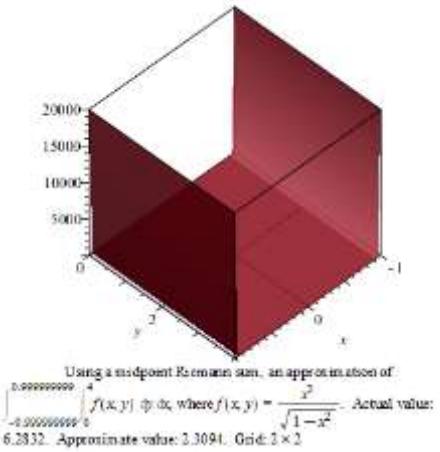


Fig. 5.30 Solución numérica de la integral mediante la suma de Riemann de medio punto de Maple que aproxima a 6.2832.

Problema 4

Resolver la integral

$$\int_1^2 \frac{h^3}{(1+h^{.5})}\,dh$$

Por el método Newton-Cotes con $n=6$, dado por

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{140}\left[41f(x_0)+216f(x_1)+27f(x_2)+272f(x_3)+27f(x_4)+216f(x_5)+41f(x_6)\right]$$

Con

$$h=\frac{x_6-x_0}{6}$$

con

$$x_0 = x_0$$
$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$
$$x_3 = x_0 + 3h$$
$$x_4 = x_0 + 4h$$
$$x_5 = x_0 + 5h$$
$$x_6 = x_6$$

Solución

Haciendo uso de las formulas proporcionadas

> $f := \frac{h^3}{(1+h^{0.5})}$:

> $x0 := 1$

$x0 := 1$

> $x1 := 1 + \frac{1}{6}$

$x1 := \frac{7}{6}$

> $x2 := 1 + 2\left(\frac{1}{6}\right)$

$x2 := \frac{4}{3}$

> $x3 := 1 + 3\left(\frac{1}{6}\right)$

$x3 := \frac{3}{2}$

> $x4 := 1 + 4\left(\frac{1}{6}\right)$

$x4 := \frac{5}{3}$

> $x5 := 1 + 5\left(\frac{1}{6}\right)$

$x5 := \frac{11}{6}$

> $x6 := 1 + 6\left(\frac{1}{6}\right)$

$x6 := 2$

> $h := \frac{2-1}{6}$

$h := \frac{1}{6}$

> $\frac{h}{140}\left[41\frac{x0^3}{(1+x0^{0.5})} + 216\frac{x1^3}{(1+x1^{0.5})} + 27\frac{x2^3}{(1+x2^{0.5})} + 272\frac{x3^3}{(1+x3^{0.5})} + 27\frac{x4^3}{(1+x4^{0.5})} + 216\frac{x5^3}{(1+x5^{0.5})} + 41\frac{x6^3}{(1+x6^{0.5})}\right]$

$\left(\frac{1}{840}\right)_{1383.570678}$

$\frac{1}{840}(1383.570678) = 1.64710795 \triangleleft \textit{Respuesta}$

Para verificar el resultado hacemos la integral por el método analítico.

> $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^{0.5})}\,dx;$

1.647107952 L.Q.Q.D.

Resolviendo por el Método de Newton-Cotes con el software Maple, se tiene el siguiente procedimiento.

Problema 5

Obtener

$\int_1^2 \frac{h^3}{1+\sqrt{h}}\,dh$

Solución

Método Analítico

> $Int\left(\frac{h^3}{1+h^{\frac{1}{2}}}, h = 1..2\right) = int\left(\frac{h^3}{1+h^{\frac{1}{2}}}, h = 1..2\right)$

$\int_1^2 \frac{h^3}{1+\sqrt{h}}\,dh = -\frac{573}{70} + \frac{758}{105}\sqrt{2} - 2\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

> $evalf\left(-\frac{573}{70} + \frac{758}{105}\sqrt{2} - 2\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)$

1.647107951

> $\int_1^2 \frac{h^3}{1+\sqrt{h}}\,dh = -\frac{573}{70} + \frac{758}{105}\sqrt{2} - 2\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1.647107951 \triangleleft \textit{Respuesta}$

Fórmula de Newton-Cotes

> int(h^3/(1+h^(1/2)), h = 1 .. 2);

$-\frac{573}{70} + \frac{758}{105}\sqrt{2} - 2\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

> with(Student[Calculus1]):

> ApproximateInt(h^3/(1+h^(1/2)), h = 1 .. 2, method = newtoncotes[1]): (se omite la expresión matemática demasiado voluminosa que arroja Maple)

> ApproximateInt(h^3/(1+h^(1/2)), 1 .. 2, method = simpson, output = plot);

La gráfica de este problema se puede observar en la Fig. 5.31. La solución es con 10 subintervalos, ya que con 50 subintervalos los valores que arroja el método de Newton-Cotes de resultado de la integral es similar como el orden de las diezmilésimas $1.647107937, 1.647107952$, respectivamente. La solución numérica mediante el método de Simpson de la Fig. 5.31 aproxima hasta el orden de las diezmilésimas al valor esperado del método analítico 1.647107951.

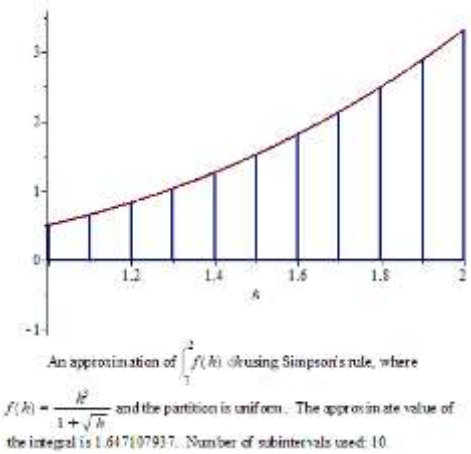


Fig. 5.31 Solución numérica de la integral mediante la Regla de Simpson de Maple que aproxima a 1.6471.

Problema 6
En el interior de un cilindro de aluminio se tiene una resistencia eléctrica que genera una temperatura T1 = 1200°F. En la superficie exterior del cilindro circula un fluido que mantiene su temperatura a T2 = 300°F. Calcule la cantidad de calor transferido al fluido por unidad de tiempo.

Datos adicionales:
R1 = 2 pulg, R2 = 12 pulg L = 12 pulg

La conductividad térmica del aluminio varía con la temperatura según la Tabla 5.3

Tabla 5.3 Conductividades térmicas del Al para distintas temperaturas.

k BTU/(hr pie^2 (ºF/pie))	165	150	130	108
T ºF	1200	900	600	300

Solución
En la Fig. 5.32 se representa el cilindro de aluminio.

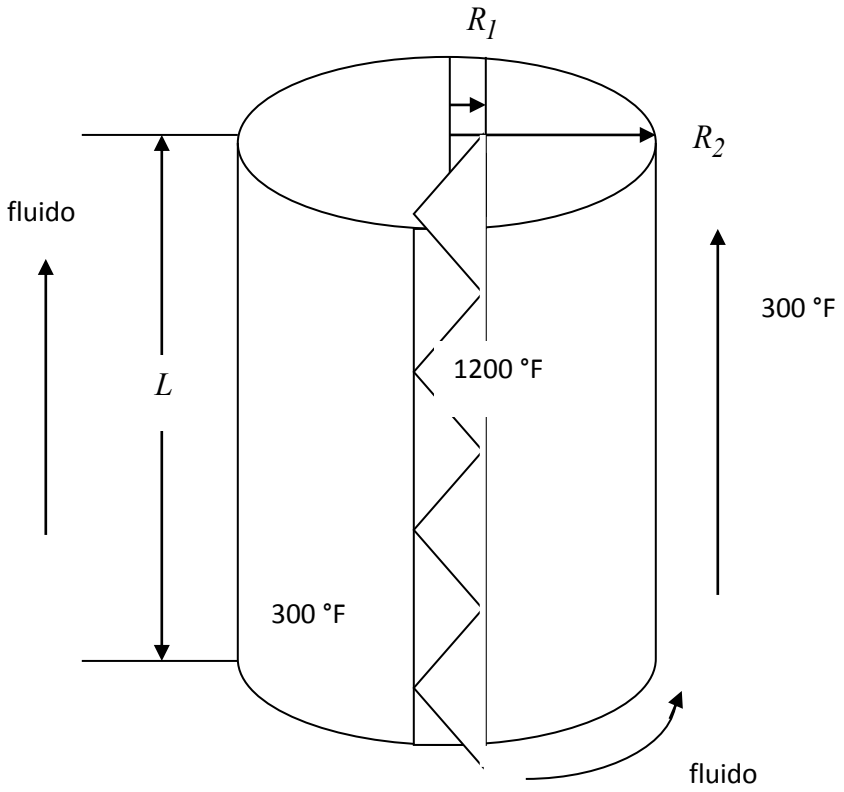


Fig. 5.32 Esquema representativo del Problema de transferencia de calor por conducción al fluido.

Suponemos régimen permanente y modelamos mediante la ecuación para conducir calor de Fourier, la cual, fue desarrollada por el matemático y físico francés Joseph Fourier en el siglo XIX. La fórmula de conducción de calor de Fourier es

$$q = -kA\frac{dT}{dr}$$

Donde,
$q\left[Btu/hr\right]$ es el calor transferido al fluido
$k\left[\frac{Btu}{hr\ ft^2(°F/ft)}\right]$ es la conductividad térmica del aluminio
$A\left[ft^2\right]$ es el área de transferencia de calor
$T\left[°F\right]$ es la temperatura
$r\left[ft\right]$ es la distancia radial del centro del cilindro al contorno del mismo.
Separamos variables y asignamos límites, obteniendo

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{A} = -\frac{1}{q}\int_{T_1}^{T_2}k\,dT$$

El área de transferencia de calor es $A = 2\pi rL$, por tanto

$$\frac{1}{2\pi L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)=-\frac{1}{q}\int_{T_1}^{T_2}k\,dT$$

La otra parte de la integral, se tendrá que integrar numéricamente, debido a que $k=f(T)$ tiene valores tabulados. Utilizaremos la regla trapezoidal, dada por la formula siguiente

$$\int_a^b f(t)dt=(b-a)\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}\right)$$

Y los datos de la Tabla 5.2 dada. Para el primer intervalo se tomará $a=1200$ y $b=900$, sustituyendo en la formula se tiene que

$$\int_a^b f(t)dt=(900-1200)\left(\frac{150+165}{2}\right)=-47250$$

Siendo este el resultado de la primera área con los intervalos anteriormente definidos.
En el segundo intervalo se tomará $a=900$ y $b=600$, sustituyendo en la formula queda

$$\int_a^b f(t)dt=(600-900)\left(\frac{150+130}{2}\right)=-42000$$

En el tercer intervalo se tomará $a=600$ y $b=300$, sustituyendo en la formula nos da

$$\int_a^b f(t)dt=(600-300)\left(\frac{130+108}{2}\right)=-35700$$

Un resumen de los cálculos para resolver la integral la encontramos en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4 Resumen de los cálculos de la integral dada en el Problema 6.

t	$f(t)$	Áreas calculadas
1200	165	0
900	150	-47250
600	130	-42000
300	108	-35700
	Suma de áreas	-124950

Finalmente, el resultado de esa integral es la suma de cada una de las áreas dando -124950.
Despejando q se tiene que

$$q=-\frac{\int_{T_1}^{T_2}k\,dt}{\frac{1}{2\pi L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Considerando que ya tenemos el resultado de la integral se procede a sustituir el dato

$$q=-\frac{-124950}{\frac{1}{2\pi L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Finalmente se sustituirán los datos restantes y realizamos operaciones, obtenemos la transferencia de calor al fluido por unidad de tiempo

$$q = -\frac{-124950}{\frac{1}{\left(\frac{(2\pi)12}{12}\right)}\ln\left(\frac{12}{2}\right)}$$

$$q = -\frac{-124950}{\left(\frac{12}{2\pi(12)}\right)\ln(6)}$$

$$q = -\frac{-124950}{(0.1591549431)(1.7917599469)}$$

$$q = -\frac{-124950}{0.2851674524}$$

$$q = 438163.6086 \triangleleft \textit{Respuesta}$$

Se concluye que la cantidad de calor transferido al fluido es de $438163.6086\ \ Btu/hr$.

Problema 7

Con el criterio de convergencia siguiente

$\left|I_k^{(m)} - I_{k-1}^{(m+1)}\right| \le 10^{-3}$.

Aproxime las integrales que se dan a continuación

a) $\int_0^1 e^{\cos 2\pi x} dx$

b) $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int_0^2 e^{\frac{x}{\pi}} \cos kx dx \qquad \text{con } k = 1, 2$

En el inciso c) compare con la solución analítica.

Solución

Este problema fue resuelto con ayuda el software Maple.

a)

Para este inciso se empleo la formula de Newton-Cotes para integrar cuando $n = 6$, esto debido a que es con la que mejor se aproxima:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{140}\left[41f(x_0) + 216f(x_1) + 27f(x_2) + 272f(x_3) + 27f(x_4) + 216f(x_5) + 41f(x_6)\right]$$

i. Primero se definieron los valores de los limites tanto superior como inferior y *n*

```
> a1 := 0
a1 := 0
> b1 := 1
b1 := 1
> n1 := 6
n1 := 6
```

ii. Una vez definido esto, se busco el valor de la h empleando la fórmula de: $h = \frac{b-a}{n}$

> $h1 := \frac{b1 - a1}{n1}$

$h1 := \frac{1}{6}$

iii. Después se buscaron los valores de x, siendo en este caso en la formula $f(x)$

> $f10 := a1 + 0 \cdot h1$

$f10 := 0$

> $f1 := \langle a1 + 1 \cdot h1, a1 + 2 \cdot h1, a1 + 3 \cdot h1, a1 + 4 \cdot h1, a1 + 5 \cdot h1, a1 + 6 \cdot h1 \rangle$

$$f1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv. Luego se sustituyeron en la integral $e^{\cos 2\pi x}$:

> $t10 := evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f10)}\right)$

$t10 := 2.718281828$

> $t1 := \langle evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[1])}\right), evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[2])}\right), evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[3])}\right), evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[4])}\right),$
> $evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[5])}\right), evalf\left(e^{\cos(2 \cdot \pi \cdot f1[6])}\right) \rangle$

$$t1 := \begin{bmatrix} 1.648721271 \\ 0.6065306597 \\ 0.3678794412 \\ 0.6065306597 \\ 1.648721271 \\ 2.718281828 \end{bmatrix}$$

v. Para finalmente sustituirse todos los valores encontrados en la formula presentada en el inicio de la solución del inciso a)

> $Ra := evalf\left(\frac{h1}{140}(41(t10) + 216(t1[1]) + 27(t1[2]) + 272(t1[3]) + 27(t1[4])\right.$
> $\left. + 216(t1[5]) + 41(t1[6]))\right)$

$Ra := 1.271384002$

Obteniendo como resultado del inciso a) 1.271384002 ◁ *Respuesta*

b)

Para este inciso se empleó el Método de Simpson compuesto, cuya expresión es

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Utilizando en este caso $n = 8$ debido a que es con la que mejor se aproxima, quedando finalmente como

$$I \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)) + 2(f(x_2) + 27f(x_4) + f(x_6)) + f(x_8)]$$

i. Primero se definieron los valores de los limites tanto superior como inferior y *n*

> $a2 := 1$

$a2 := 1$

> $b2 := 2$

$b2 := 2$

> $n2 := 8$

$n2 := 8$

ii. Una vez definido esto se buscó el valor de la *h* empleando la fórmula de: $h = \frac{b-a}{n}$

> $h2 := \frac{b2 - a2}{n2}$

$h2 := \frac{1}{8}$

iii. Después se buscaron los valores de x, siendo en este caso en la formula $f(x)$

> $f20 := a2 + 0 \cdot h2$

$f20 := 1$

> $f2 := \langle a2 + 1 \cdot h2, a2 + 2 \cdot h2, a2 + 3 \cdot h2, a2 + 4 \cdot h2, a2 + 5 \cdot h2, a2 + 6 \cdot h2, a2 + 7 \cdot h2, a2 + 8 \cdot h2 \rangle$

$$f2 := \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{13}{8} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{15}{8} \\ 2 \end{bmatrix}$$

iv. Luego se sustituyeron en la integral $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$:

> $t20 := evalf\left(\frac{\cos(f20)}{\sqrt{f20}}\right)$

$t20 := 0.5403023059$

> $t2 := \left\langle evalf\left(\frac{\cos(f2[1])}{\sqrt{f2[1]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[2])}{\sqrt{f2[2]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[3])}{\sqrt{f2[3]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[4])}{\sqrt{f2[4]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[5])}{\sqrt{f2[5]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[6])}{\sqrt{f2[6]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[7])}{\sqrt{f2[7]}}\right), evalf\left(\frac{\cos(f2[8])}{\sqrt{f2[8]}}\right)\right\rangle$

$$t2 := \begin{bmatrix} 0.4065171185 \\ 0.2820328948 \\ 0.1659108428 \\ 0.05775668329 \\ -0.04250004133 \\ -0.1347413529 \\ -0.2187483441 \\ -0.2942602500 \end{bmatrix}$$

v. Para finalmente sustituirse todos los valores encontrados en la formula presentada en el inicio de la solución del inciso b):

> $Rb := evalf\left(\frac{h2}{3}(t20 + 4(t2[1] + t2[3] + t2[5] + t2[7]) + 2(t2[2] + t2[4] + t2[6]) + t2[8])\right)$

$Rb := 0.07920236713$

Obteniendo como resultado del inciso b) 0.07920236713 ◁ *Respuesta*

c)

Para este inciso se empleó la fórmula de Newton-Cotes para integrar cuando $n = 5$, esto debido a que es con la que mejor se aproxima:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{5h}{288}[19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)]$$

i. Primero se definieron los valores de los limites tanto superior como inferior y *n*, al igual que los valores de *k* esto debido a que se presenta con dos valores diferentes siendo estos 1 y 2

> $k1 := 1 : k2 := 2 :$

> $a3 := 0$

$a3 := 0$

> $b3 := 2$

$b3 := 2$

> $n3 := 5$

$n3 := 5$

ii. Una vez definido esto se buscó el valor de la h empleando la fórmula de: $h = \frac{b-a}{n}$

> $h3 := \frac{b3 - a3}{n3}$

$h3 := \frac{2}{5}$

iii. Después se buscaron los valores de x, siendo en este caso en la formula $f(x)$

> $f30 := a3 + 0 \cdot h3$

$f30 := 0$

> $f3 := \langle a3 + 1 \cdot h3,\ a3 + 2 \cdot h3,\ a3 + 3 \cdot h3,\ a3 + 4 \cdot h3,\ a3 + 5 \cdot h3 \rangle$

$$f3 := \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

iv. Luego se sustituyeron en la integral $e^{\frac{x}{\pi}} \cos kx$:

Cuando $k = 1$, entonces $e^{\frac{x}{\pi}} \cos x$:

> $t3k10 := e^{\frac{f30}{\pi}} \cos(k1 \cdot f30)$

$t3k10 := 1$

> $t3k1 := \langle evalf\left(\left(e^{\frac{f3[1]}{\pi}}\right)\cos(k1 \cdot f3[1])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[2]}{\pi}}\right)\cos(k1 \cdot f3[2])\right),$
$evalf\left(\left(e^{\frac{f3[3]}{\pi}}\right)\cos(k1 \cdot f3[3])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[4]}{\pi}}\right)\cos(k1 \cdot f3[4])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[5]}{\pi}}\right)\cos(k1 \cdot f3[5])\right)\rangle$

$$t3k1 := \begin{bmatrix} 1.046127170 \\ 0.8987567695 \\ 0.5309160224 \\ -0.04859147807 \\ -0.7865512971 \end{bmatrix}$$

Cuando $k = 2$, entonces $e^{\frac{x}{\pi}} \cos 2x$:

> $t3k20 := e^{\frac{f30}{\pi}} \cos(k2 \cdot f30)$

$t3k20 := 1$

> $t3k2 := \langle evalf\left(\left(e^{\frac{f3[1]}{\pi}}\right)\cos(k2 \cdot f3[1])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[2]}{\pi}}\right)\cos(k2 \cdot f3[2])\right),$
$evalf\left(\left(e^{\frac{f3[3]}{\pi}}\right)\cos(k2 \cdot f3[3])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[4]}{\pi}}\right)\cos(k2 \cdot f3[4])\right),\ evalf\left(\left(e^{\frac{f3[5]}{\pi}}\right)\cos(k2 \cdot f3[5])\right)\rangle$

$$t3k2 := \begin{bmatrix} 0.7913089608 \\ -0.03766759812 \\ -1.080407784 \\ -1.661281243 \\ -1.235439496 \end{bmatrix}$$

v. Para finalmente sustituirse todos los valores encontrados en la formula presentada en el inicio de la solución del inciso c):

Resultado cuando $k=1$:

> $Rck1 := evalf\left(\frac{5\,h3}{288}(19(t3k10) + 75(t3k1[1]) + 50(t3k1[2]) + 50(t3k1[3]) + 75(t3k1[4]) + 19(t3k1[5]))\right)$

$Rck1 := 1.044127374$

Resultado cuando $k=2$:

> $Rck2 := evalf\left(\frac{5\,h3}{288}(19(t3k20) + 75(t3k2[1]) + 50(t3k2[2]) + 50(t3k2[3]) + 75(t3k2[4]) + 19(t3k2[5]))\right)$

$Rck2 := -0.8723961153$

Obteniendo como resultado del inciso c) cuando:

$k=1,\ 1.044127374 \lhd Respuesta$

$,k=2\ \ 0.8723961153 \lhd Respuesta$

Las respuestas para todos los incisos mediante el método analítico se describen a continuación

a)

> $Int(\exp(\cos(2\cdot Pi\cdot x)), x=0..1) = int(\exp(\cos(2\cdot Pi\cdot x)), x=0..1)$

$$\int_0^1 e^{\cos(2\pi x)}\,dx = BesselI(0,1)$$

> $evalf(BesselI(0,1))$

1.266065878

> $\int_0^1 e^{\cos(2\pi x)}\,dx = BesselI(0,1) = 1.266065878 \lhd Respuesta$ **a)**

b)

> $Int\left(\frac{\cos(x)}{sqrt(x)}, x=1..2\right) = int\left(\frac{\cos(x)}{sqrt(x)}, x=1..2\right)$

$$\int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -FresnelC\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi} + FresnelC\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

> $evalf\left(-FresnelC\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi} + FresnelC\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi}\right)$

0.079200558

> $$\int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -FresnelC\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi} + FresnelC\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi} = 0.079200558$$

> $\lhd$Respuesta b)

c)

> $Int\left(\exp\left(\frac{x}{\pi}\right)\cdot\cos(k\cdot x), x=0..2\right) = int\left(\exp\left(\frac{x}{\pi}\right)\cdot\cos(k\cdot x), x=0..2\right)$

$$\int_0^2 e^{\frac{x}{\pi}}\cos(k\,x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\left(-1+2e^{\frac{2}{\pi}}\cos(k)^2 - e^{\frac{2}{\pi}} + 2e^{\frac{2}{\pi}}\pi k\sin(k)\cos(k)\right)}{1+k^2\pi^2}$$

> $k := 1$:

> $evalf\left(\frac{\pi\left(-1+2e^{\frac{2}{\pi}}\cos(k)^2 - e^{\frac{2}{\pi}} + 2e^{\frac{2}{\pi}}\pi k\sin(k)\cos(k)\right)}{1+k^2\pi^2}\right)$

1.044172232

> $k := 2$:

> $evalf\left(\frac{\pi\left(-1+2e^{\frac{2}{\pi}}\cos(k)^2 - e^{\frac{2}{\pi}} + 2e^{\frac{2}{\pi}}\pi k\sin(k)\cos(k)\right)}{1+k^2\pi^2}\right)$

-0.8710360909

> $$\int_0^2 e^{\frac{x}{\pi}}\cos(k\,x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\left(-1+2e^{\frac{2}{\pi}}\cos(k)^2 - e^{\frac{2}{\pi}} + 2e^{\frac{2}{\pi}}\pi k\sin(k)\cos(k)\right)}{1+k^2\pi^2}$$

$= 1.044172232,\ k=1$

> $k=1,\ 1.044172232, \lhd Respuesta$ **c)**

> $$\int_0^2 e^{\frac{x}{\pi}}\cos(k\,x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\left(-1+2e^{\frac{2}{\pi}}\cos(k)^2 - e^{\frac{2}{\pi}} + 2e^{\frac{2}{\pi}}\pi k\sin(k)\cos(k)\right)}{1+k^2\pi^2} =$$

$-0.8710360909,\ k=2$

> $k=2,\ -0.8710360909 \lhd Respuesta$ **c)**

Problema 8

Siguiendo las ideas que llevaron a las ecuaciones trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 para resolver integrales adaptadas para resolver métodos compuestos de integración, a saber

Trapezoidal

La fórmula base es la Ec. (5.1)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

Al desarrollarse forma la ecuación

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right] \tag{5.6}$$

Simpson 1/3

La fórmula base es la Ec. (5.2)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

Al desarrollarse forma la Ec. (5.4)

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)\right] \tag{5.4}$$

Simpson 3/8

La fórmula base es la Ec. (5.3)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

Solución

Las ecuaciones del método trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 se resuelven mediante el procedimiento que se muestra enseguida partiendo de la fórmula de Simpson 3/8 cuya ecuación es la Ec. (5.3)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

Para un óptimo entendimiento de este problema elaboramos una gráfica de la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ mediante el software Maple.

Procedimiento

La integral, límite superior, límite inferior y *h* son

> $Funcion := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$:

> $LS := 1$

$LS := 1$

> $LI := -1$

$LI := -1$

> $n := 3$

$n := 3$

Subdivisiones de -1 a 1

> $fx[0] := -1$

$fx_0 := -1$

> $fx[1] := -1 + \frac{2}{3}$

$fx_1 := -\frac{1}{3}$

$> h := \frac{LS - LI}{n}$

$h := \frac{2}{3}$

$> fx[2] := -1 + \frac{4}{3}$

$fx_2 := \frac{1}{3}$

$> fx[3] := -1 + \frac{6}{3}$

$fx_3 := 1$

Se incluyen los valores de x sustituidos en la función de la integral para obtener los puntos que graficaremos

$> r[0] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[0])^2}{2}}\right)$

$r_0 := 0.2419707244$

$> r[1] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(fx[1])^2}{2}}\right)$

$r_1 := 0.3773832276$

$> r[2] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(fx[2])^2}{2}}\right)$

$r_2 := 0.3773832276$

$> r[3] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(fx[3])^2}{2}}\right)$

$r_3 := 0.2419707244$

Las instrucciones en Maple para obtener la Fig. 5.33 son

```
> with(plots) :
> P1 := pointplot([-1, 0.2419707244]) :
> P2 := pointplot([[-1/3, 0.3773832276]]) :
> P3 := pointplot([[1/3, 0.3773832276]]) :
> P4 := pointplot([1, 0.2419707244]) :
> L1 := plot([[-1,-1], [-1, 0.2419707244]], x=-1..1, y=0...5, style=line, linestyle=dash, colo
      r="DarkTurquoise", ) :
> L2 := plot([[-1/3, -1/3], [-1/3, 0.3773832276]], x=-1..1, y=0...5, style=line, linestyle
      =dash, color="DarkTurquoise") :
> L3 := plot([[1/3, 1/3], [-1/3, 0.3773832276]], x=-1..1, y=0...5, style=line, linestyle=dash,
      color="DarkTurquoise") :
> L4 := plot([1, 1], [-1, 0.2419707244], x=-1..1, y=0...5, style=line, linestyle=dash, color
      ="DarkTurquoise") :
> A := plot(1/sqrt(2*Pi)*exp(-x^2/2), x=-1..1, y=0...5, color="DarkBlue") :
```

> *display*(*A*, *P1*, *P2*, *P3*, *P4*, *L1*, *L2*, *L3*, *L4*)

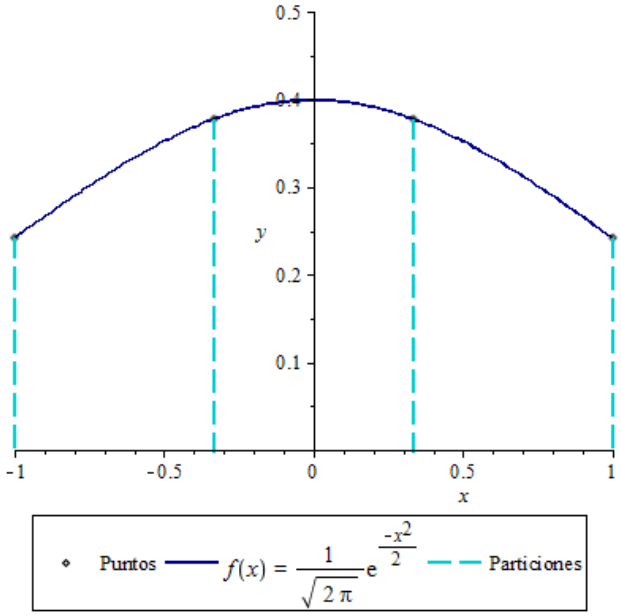


Fig. 5.33 Gráfica de la función de la integral, puntos sobre su curva y particiones correspondientes con el método Simpson 3/8.

> $Rresultado := evalf\left(\frac{3 \cdot h}{8}(r[0] + 3\,r[1] + 3\,r[2] + r[3])\right)$

> $\frac{3 \cdot h}{8}(r[0] + 3\,r[1] + 3\,r[2] + r[3]) = 0.6870602036 \triangleleft$ *Respuesta*

Al realizar los cálculos sobre la función y observar la gráfica de la Fig. 5.33 se puede observar que en Simpson 3/8 la curva de la función queda dividida en tres, esto es debido a que este método utiliza polinomios de interpolación de tercer grado y requiere cuatro puntos equidistantes en cada intervalo para poder calcular la aproximación, concluyendo que *n* debe de ser múltiplo de 3 para poder obtener los resultados esperados.

La formula $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$ es aplicable solamente en casos donde *n* es igual a 3, por lo que podemos desarrollarla para más intervalos, digamos *n* = 9.

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]+\frac{3h}{8}[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]+$$

$$\frac{3h}{8}[f(x_6)+3f(x_7)+3f(x_8)+f(x_9)]$$

Los valores tomados dentro de los corchetes indican desde donde inicia y donde termina una parte del área y se repite 3 veces hasta llegar al final. La ecuación obtenida se simplifica tomando los factores comunes.

$$i = \frac{3h}{8}[[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]+[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]+$$

$$[f(x_6)+3f(x_7)+3f(x_8)+f(x_9)]]$$

Al observar la ecuación se puede simplificar aún más mediante sumatorias ya que hay datos que se repiten en cada corchete. La primera sumatoria se obtiene agrupando los valores $f(x_1)$, $f(x_4)$ y $f(x_7)$ ya que se repite la misma multiplicación por 3 en cada corchete por lo que la sumatoria comienza en *i* =

1 teniendo un incremento de 3 en 3 ya que los datos muestran dicha sucesión independientemente del valor de *n*, además la sumatoria llegará hasta *n*-2 ya que es el último número de la sucesión como en este ejemplo que es $f(x_7)$

$$3\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=3}}^{n-2} f(x_i)$$

En la siguiente sumatoria se sigue la misma lógica, pero iniciando con *i* = 2 cambiando la sucesión: $f(x_2)$, $f(x_5), f(x_8), f(x_{11})$….. y en este caso la sumatoria llega hasta *n*-1

$$3\sum_{\substack{i=2\\ \Delta i=3}}^{n-1} f(x_i)$$

La última sumatoria se forma a partir de los números que coinciden entre los corchetes como es el caso de $f(x_3)$, esto se repite en los siguientes corchetes, pero ahora con $f(x_6)$ por lo que tiene una sucesión que incrementa de 3 en 3 como los anteriores, pero donde *i*=3, además la sumatoria debe de multiplicarse por 2, por último, esta sumatoria es igual a *n*-3 debido a que el ultimo valor no entra en la misma categoría que los anteriores.

$$2\sum_{\substack{i=3\\ \Delta i=3}}^{n-3} f(x_i)$$

Una vez conformadas las sumatorias se puede reducir la ecuación a

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=3}}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{\substack{i=2\\ \Delta i=3}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=3\\ \Delta i=3}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right] \tag{5.7a}$$

◁ *Respuesta*

Esta fórmula se aplica a cualquier subdivisión múltiplo de 3 en Simpson 3/8

$$i = \frac{3h}{8}[[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + [f(x_6) + 3f(x_7) + 3f(x_8) + f(x_9)]] \tag{5.7b}$$

◁ *Respuesta*

Problema 9

Con el algoritmo obtenido en el problema anterior, integre la función

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

Entre los límites *a* = -1 y *b* = 1. Compare el resultado con los valores obtenidos por los métodos trapezoidal y Simpson 1/3.

Solución

Para resolver este problema se utilizará la ecuación obtenida en el problema anterior para *n* = 9, Ec. (5.7a)

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=3}}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=3}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=3 \\ \Delta i=3}}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Primero definimos los límites superior e inferior y calculamos el valor de *h*

> $Funcion := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$:

> $LS := 1$

$LS := 1$

> $LI := -1$

$LI := -1$

> $n := 9$

$n := 9$

> $h := \frac{LS - LI}{n}$

$h := \frac{2}{9}$

Una vez conocido el valor de *h* se calculan los valores que se sustituirán en *x* de la función de la integral desde -1 a 1con un incremento de 2/9

> $fx[0] := -1$

$fx_0 := -1$

> $fx[1] := -1 + \frac{2}{9}$

$fx_1 := -\frac{7}{9}$

> $fx[2] := -1 + \frac{4}{9}$

$fx_2 := -\frac{5}{9}$

> $fx[3] := -1 + \frac{6}{9}$

$fx_3 := -\frac{1}{3}$

> $fx[4] := -1 + \frac{8}{9}$

$fx_4 := -\frac{1}{9}$

> $fx[5] := -1 + \frac{10}{9}$

$fx_5 := \frac{1}{9}$

> $fx[6] := -1 + \frac{12}{9}$

$fx_6 := \frac{1}{3}$

> $fx[7] := -1 + \frac{14}{9}$

$fx_7 := \frac{5}{9}$

> $fx[8] := -1 + \frac{16}{9}$

$fx_8 := \frac{7}{9}$

> $fx[9] := -1 + \frac{18}{9}$

$fx_9 := 1$

Una vez obtenido cada valor de *x*, lo sustituimos en la función de la integral

> $r[0] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[0])^2}{2}} \right)$

$r_0 := 0.2419707244$

> $r[1] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[1])^2}{2}} \right)$

> $r[6] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[6])^2}{2}} \right)$

$r_6 := 0.3773832276$

> $r[7] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[7])^2}{2}} \right)$

$r_1 := 0.2948148727$

> $r[2] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[2])^2}{2}}\right)$

$r_2 := 0.3418922939$

> $r[3] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[3])^2}{2}}\right)$

$r_3 := 0.3773832276$

> $r[4] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[4])^2}{2}}\right)$

$r_4 := 0.3964872586$

> $r[5] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[5])^2}{2}}\right)$

$r_5 := 0.3964872586$

$r_7 := 0.3418922939$

> $r[8] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[8])^2}{2}}\right)$

$r_8 := 0.2948148727$

> $r[9] := evalf\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(fx[9])^2}{2}}\right)$

$r_9 := 0.2419707244$

Finalmente, lo sustituimos en la ecuación de Simpson 3/8

> $Resultado := \frac{3 \cdot h}{8}(r[0] + 3(r[1] + r[4] + r[7]) + 3(r[2] + r[5] + r[8]) + 2(r[3] + r[6]) + r[9])$

$Resultado := 0.6827200759$

$\frac{3 \cdot h}{8}(r[0] + 3(r[1] + r[4] + r[7]) + 3(r[2] + r[5] + r[8]) + 2(r[3] + r[6]) + r[9]) = 0.6827200759 \triangleleft Respuesta.$

Este problema también se puede resolver acomodando todos los valores en orden y multiplicar a partir del segundo 3,3,2,3,3,2 sucesivamente y parar en el penúltimo

> $Resultado2 := evalf\left(\frac{3 \cdot h}{8}(r[0] + 3r[1] + 3r[2] + 2r[3] + 3r[4] + 3r[5] + 2r[6] + 3r[7] + 3r[8] + r[9])\right)$

El resultado obtenido fue de 0.6827200759 con 9 iteraciones.
Comparación el resultado con los valores obtenidos por los métodos trapezoidal y Simpson 1/3:
Con el método trapezoidal con $n = 4$ llegaron al resultado de 0.672 con 1.47% de error.
Con el método Simpson 1/3 con $n = 4$ llegaron al resultado 0.683 con 0.15% de error.
Los cuales presentan un error mayor que el resultado obtenido con el procedimiento que se resolvió aquí este problema, comprobamos esto comparando dicho resultado versus el resultado que se obtiene del método analítico y, como se puede observar, el error relativo es del 0.0045%.

Método analítico

> $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx :$

> $\frac{1}{sqrt(2 \cdot Pi)} \cdot Int\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x = -1..1\right) = \frac{1}{sqrt(2 \cdot Pi)} \cdot int\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x = -1..1\right)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\left(\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)}{\sqrt{\pi}} = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

> $evalf\left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)$

0.6826894920

> $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0.6826894920$

> $E[rel] = \frac{0.6827200759 - 0.6826894920}{0.6827200759}$

$E_{rel} = 0.00004479713001$

> $E_{rel} = 0.00004479713001 \cdot 100$

$E_{rel} = 0.004479713001$

> $E_{rel} = 0.004479713001\ \%$ ◁*Respuesta.*

¿Simpson 1/3 o 3/8?

El método Simpson 3/8 es más preciso que el método de 1/3, pero el método 3/8 requiere más evaluaciones de la función causando que sea más costoso computacionalmente en el caso de las empresas. Si se quiere precisión y no importa tanto el costo computacional es mejor el método de Simpson 3/8, pero si se busca un punto medio con una precisión aceptable y menor costo computacional Simpson 1/3 es mejor.

Problema 10

Estimación de Integrales por Método de Simpson Compuesto. Estimar las siguientes integrales

$$a)\int_0^1 sen(101\cdot\pi\cdot x)dx$$

$$b)\int_0^1 f(x)dx,\ \text{con}\ f(x)=\begin{cases}\frac{sen(x)}{x} & en \quad x\neq 0\\ 1 & en \quad x=0\end{cases}$$

Con una aproximación de 10^{-5}.

Solución

a)

Para resolver este ejercicio, en primera se usará el método analítico y posteriormente el numérico, esto para efectos de comparación.

Método analítico

$$\int_0^1 sen(101\cdot\pi\cdot x)dx,\ \frac{d}{dx}(101\cdot\pi\cdot x)=101\cdot\pi$$

$$\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot\int_0^1 sen(101\cdot\pi\cdot x)101\cdot\pi\cdot dx$$

$$\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot -cos(101\cdot\pi\cdot x)\Big|_0^1=\left[-\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot cos(101\cdot\pi\cdot(1))\right]-\left[-\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot cos(101\cdot\pi\cdot(0))\right]$$

$$\left[-\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot -1\right]-\left[-\frac{1}{101\cdot\pi}\cdot 1\right]=\frac{1}{101\cdot\pi}+\frac{1}{101\cdot\pi}=\frac{2}{101\cdot\pi}\approx 6.303\times 10^{-3}$$

Método de Simpson Compuesto

La expresión matemática de este método es la Ec. (5.4)

$$I\approx\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=2}}^{n-1}f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ \Delta i=2}}^{n-2}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Donde $h=\frac{b-a}{n}$, siendo *b* y *a* los límites de integración y *n* el número de sub intervalos, que, para este caso, serán 8.

$$h=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\int_0^1 sen(101\cdot\pi\cdot x)dx\approx$$

$$\frac{\frac{1}{8}}{3}\left[sen(101\cdot\pi\cdot 0)+4\left(sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{1}{8}\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{3}{8}\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{5}{8}\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{7}{8}\right)\right)\right.$$

$$\left.+2\left(sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{2}{8}\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{4}{8}\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{6}{8}\right)\right)+sen\left(101\cdot\pi\cdot\frac{8}{8}\right)\right]$$

$$\frac{1}{24}\left[0+4(1.0823922)+2\left(1-1\sqrt{2}\right)+0\right]$$

$$\frac{1}{24}\left[4.329568801+2-2\sqrt{2}\right]$$

$$\int_0^1 sen(101\cdot\pi\cdot x)dx\approx 0.1458809032$$

Calculando el error relativo

$$Error\ relativo=\frac{\left|6.303\times 10^{-3}-0.1458809032\right|}{0.1458809032}(100)\approx 95.68\%$$

En definitiva, 8 subintervalos son completamente insuficientes, para obtener un valor preciso, se usó el mismo método en el software Maple, y como podemos apreciar en la Fig. 5.34, se necesitaron 150 subintervalos para un valor con decente precisión.

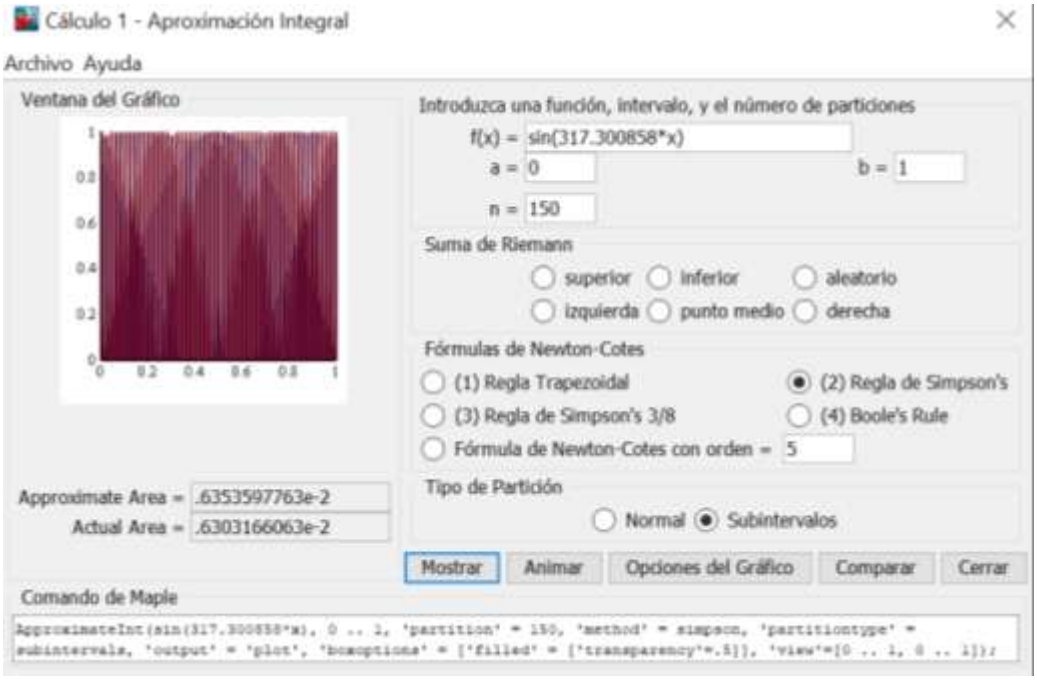


Fig. 5.34 Solución del Problema 9 a) en Maple con el método de Simpson

Resultado de Maple con 150 particiones

$6.354 \cdot 10^{-3}$ ◂ Respuesta a)

Solución

b)

Para la resolución de este ejercicio, se usó el mismo método que en b), y se comparará el resultado de dicho método con el obtenido con el software Maple.

Método de Simpson Compuesto Ec. (5.11)

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Donde $h = \dfrac{b-a}{n}$, siendo b y a los límites de integración y n el número de sub intervalos.

Método de Simpson Compuesto desarrollado y con valores de la variable independiente incluidos

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx \approx \frac{1}{\frac{6}{3}}\left[\frac{sen(0)}{0} + 4 \cdot \left(\frac{sen\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{6}} + \frac{sen\left(\frac{3}{6}\right)}{\frac{1}{6}} + \frac{sen\left(\frac{5}{6}\right)}{\frac{1}{6}} \right) + 2\left(\frac{sen\left(\frac{2}{6}\right)}{\frac{2}{6}} + \frac{sen\left(\frac{4}{6}\right)}{\frac{4}{6}} \right) + \frac{sen\left(\frac{6}{6}\right)}{\frac{6}{6}} \right]$$

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx \approx \frac{1}{18}\left[1 + 4 \cdot (2.842440097) + 2(1.909138795) + 0.8414709848\right]$$

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}dx \approx \frac{1}{18}[1+11.36976039+3.81827759+0.8414709848]$$

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}dx \approx \frac{1}{18}[17.02945913]$$

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}dx \approx 0.9460810628 \triangleleft Respuesta.$$

En la Fig. 5.35 se puede observar el mismo resultado que el obtenido por el Método de Simpson Compuesto.

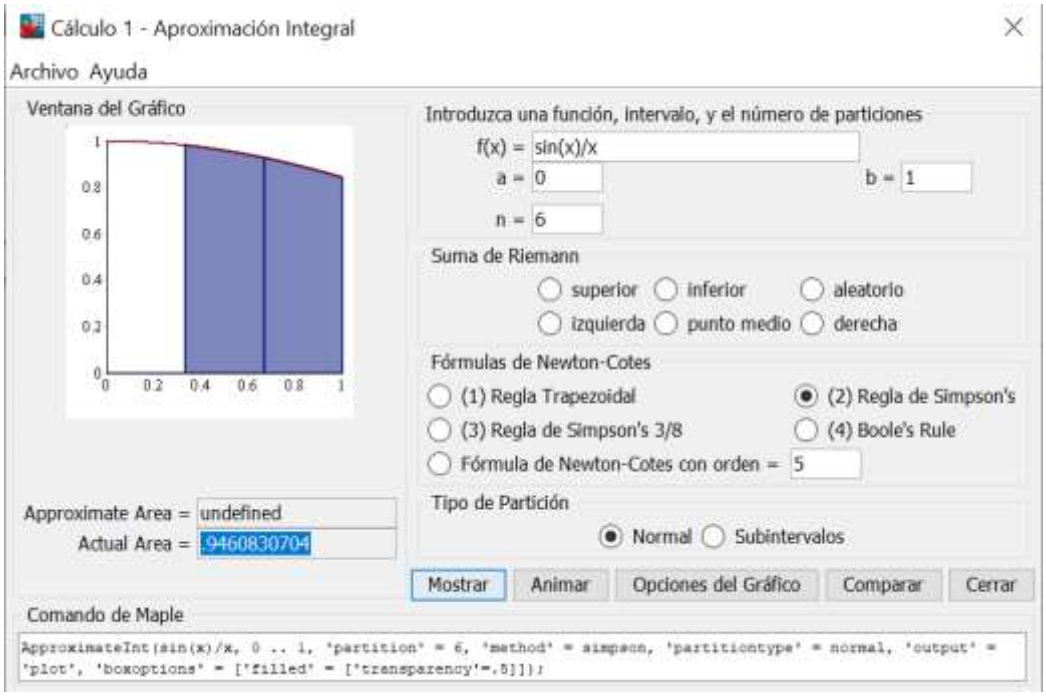


Fig. 5.35 Área bajo la curva, solución de la integral de b) calculada en Maple.

Como vemos en la Fig. 5.35, el área de la integral es de 0.9460830704 unidades cuadradas, y el área que aproximamos con el método de Simpson es de 0.9460810628 unidades cuadradas, cantidades muy similares a simple vista, el error relativo es

$$Error\ relativo = \frac{|0.9460830704 - 0.9460810628|}{0.9460830704}(100) = 2.122 \cdot 10^{-4}\%$$

La aproximación a la integral por el método de Simpson compuesto y por el método de aproximación de Maple son prácticamente los mismos.

$0.9460810628 \triangleleft Respuesta.$

Problema 11

Obtención de la expresión matemática del método de Simpson 3/8.

Dada la partición $P = (a = x_0, x_1, ..., x_N = b)$ del intervalo a, b, el método de Simpson 3/8 aproximar la integral en cada subintervalo x_{i-1}, x_i integrando la función cúbica que interpola los cuatro puntos

$x_{i-1}, f(x_{i-1})$, $\frac{2}{3}x_{i-1}+\frac{1}{3}x_i, f\left(\frac{2}{3}x_{i-1}+\frac{1}{3}x_i\right)$, $\frac{1}{3}x_{i-1}+\frac{2}{3}x_i, f\left(\frac{1}{3}x_{i-1}+\frac{2}{3}x_i\right)$, y $x_i, f(x_i)$. Este valor es

$$\frac{1}{8}(x_i-x_{i-1})\left(f(x_{i-1})+3f\left(\frac{2}{3}x_{i-1}+\frac{1}{3}x_i\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_{i-1}+\frac{2}{3}x_i\right)+f(x_i)\right)$$

En el caso que las anchuras de los subintervalos sean iguales, la aproximación puede ser escrita como

$$\frac{1}{8}\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f(x_0)+3f\left(\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{3}x_1\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}x_1\right)+2f(x_1)+3f\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)+3f\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\right)+2f(x_2)+\ldots+f\left(\frac{1}{3}x_{N-1}+\frac{2}{3}x_N\right)+f(x_N)\right)\right)$$

A menudo, el método de Simpson 3/8 es escrito con N como un múltiplo positivo de 3, y dados puntos igualmente espaciados $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N=b$, una aproximación a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\frac{3}{8}\frac{1}{N}\left((b-a)\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+2f(x_6)+3f(x_7)+\ldots+3f(x_{N-1})+f(x_N)\right)\right)$$

En Maple, por default, el intervalo es dividido en 10 subintervalos de tamaño iguales. Las instrucciones de este software para el cálculo de cálculo de la expresión matemática del método de Simpson 3/8, $-\frac{1}{8}(x_0-x_1)\left(f(1)+3f\left(\frac{2}{3}\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)\right)$, son las descritas enseguida.

```
> polynomial := CurveFitting[PolynomialInterpolation]([x[0], (2*x[0]+x[1])/3, (x[0]+2*x[1])/3, x[1]],
[f(0), f(1/3), f(2/3), f(1)], z);
```

$$\begin{aligned}
polynomial :=\ & -\frac{1}{2}\frac{\left(9f(1)-27f\left(\frac{2}{3}\right)+27f\left(\frac{1}{3}\right)-9f(0)\right)z^3}{(x_0-x_1)^3} \\
& -\frac{1}{2}\frac{1}{(x_0-x_1)^3}\left(\left(-9f(1)x_1-18f(1)x_0+36f\left(\frac{2}{3}\right)x_1\right.\right. \\
& \left.+9f(0)x_0+45f\left(\frac{2}{3}\right)x_0-45f\left(\frac{1}{3}\right)x_1-36f\left(\frac{1}{3}\right)x_0\right. \\
& \left.\left.+18f(0)x_1\right)z^2\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{(x_0-x_1)^3}\left(\left(11f(1)x_0^2\right.\right. \\
& -18f\left(\frac{2}{3}\right)x_0^2+14f(1)x_0x_1+9f\left(\frac{1}{3}\right)x_0^2-54f\left(\frac{2}{3}\right)x_1x_0 \\
& +54f\left(\frac{1}{3}\right)x_0x_1-2f(0)x_0^2-9f\left(\frac{2}{3}\right)x_1^2+2f(1)x_1^2 \\
& \left.\left.-14f(0)x_0x_1+18f\left(\frac{1}{3}\right)x_1^2-11f(0)x_1^2\right)z\right) \\
& -\frac{1}{2}\frac{1}{(x_0-x_1)^3}\left(2f(0)x_0^2x_1+5f(0)x_1^2x_0-9f\left(\frac{1}{3}\right)x_0^2x_1\right. \\
& -2f(1)x_0^3+9f\left(\frac{2}{3}\right)x_1^2x_0-2f(1)x_1^2x_0-5f(1)x_0^2x_1 \\
& \left.+2f(0)x_1^3-18f\left(\frac{1}{3}\right)x_1^2x_0+18f\left(\frac{2}{3}\right)x_1x_0^2\right)
\end{aligned}$$

```
> integrated := int(polynomial, z=x[0]..x[1]);
```

$$integrated :=$$

$$-\frac{1}{8}\frac{\left(9f(1)-27f\left(\frac{2}{3}\right)+27f\left(\frac{1}{3}\right)-9f(0)\right)\left(x_1^4-x_0^4\right)}{\left(x_0-x_1\right)^3}$$

$$-\frac{1}{6}\frac{1}{\left(x_0-x_1\right)^3}\left(\left(-9f(1)x_1-18f(1)x_0+36f\left(\frac{2}{3}\right)x_1\right.\right.$$

$$\left.+9f(0)x_0+45f\left(\frac{2}{3}\right)x_0-45f\left(\frac{1}{3}\right)x_1-36f\left(\frac{1}{3}\right)x_0\right.$$

$$\left.\left.+18f(0)x_1\right)\left(x_1^3-x_0^3\right)\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(x_0-x_1\right)^3}\left(\left(11f(1)x_0^2\right.\right.$$

$$-18f\left(\frac{2}{3}\right)x_0^2+14f(1)x_0x_1+9f\left(\frac{1}{3}\right)x_0^2-54f\left(\frac{2}{3}\right)x_1x_0$$

$$+54f\left(\frac{1}{3}\right)x_0x_1-2f(0)x_0^2-9f\left(\frac{2}{3}\right)x_1^2+2f(1)x_1^2$$

$$\left.\left.-14f(0)x_0x_1+18f\left(\frac{1}{3}\right)x_1^2-11f(0)x_1^2\right)\left(x_1^2-x_0^2\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x_0-x_1\right)^3}\left(\left(2f(0)x_0^2x_1+5f(0)x_1^2x_0-9f\left(\frac{1}{3}\right)x_0^2x_1\right.\right.$$

$$-2f(1)x_0^3+9f\left(\frac{2}{3}\right)x_1^2x_0-2f(1)x_1^2x_0-5f(1)x_0^2x_1$$

$$\left.\left.+2f(0)x_1^3-18f\left(\frac{1}{3}\right)x_1^2x_0+18f\left(\frac{2}{3}\right)x_1x_0^2\right)\left(x_1-x_0\right)\right)$$

```
> factor(integrated);
```

$$-\frac{1}{8}\left(x_0-x_1\right)\left(f(1)+3f\left(\frac{2}{3}\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)\right)$$

L.Q.Q.D.

Solución

Se elaboró un programa en lenguaje Python para obtener la fórmula de Simpson 3/8, cuyo código se escribe enseguida y en la Fig. 5.36 se muestra la pantalla de la compilación de dicho código.

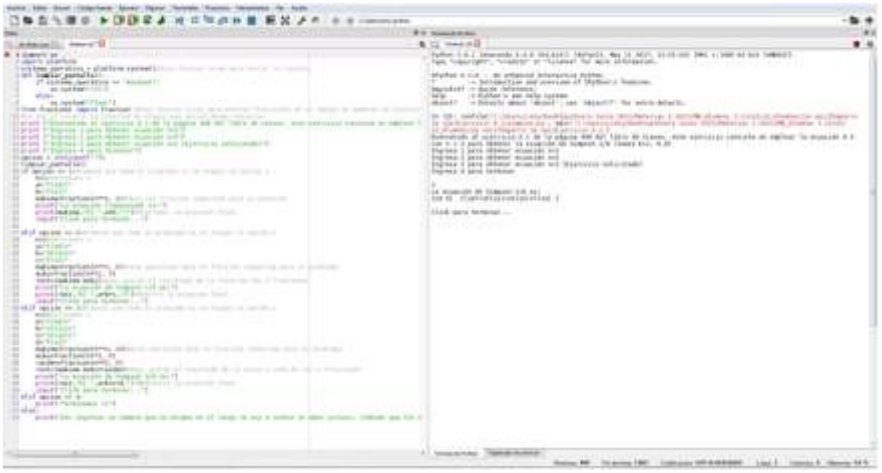


Fig. 5.36 Compilación del código Python para obtener la fórmula de Simpson 3/8.

Código Python para obtener la fórmula de Simpson 3/8

```
3import os
import platform
sistema_operativo = platform.system()#Esta función sirve para borrar la consola
def limpiar_pantalla():
    if sistema_operativo == "Windows":
        os.system("cls")
    else:
        os.system("Clear")
from fractions import Fraction #Esta función sirve para mostrar fracciones en el código al momento de ejecutarse
#Le doy al usuario la libertad de elegir que opción desea consultar
print ("Bienvenido al ejercicio 6.1 de la página 448 del libro de nieves, este ejercicio consiste en emplear la ecuación 6.5 con n = 3 para obtener la ecuación de Simpson 3/8 (véase Ecs. 6.6)")
print ("Ingresa 1 para obtener ecuación n=1")
print ("Ingresa 2 para obtener ecuación n=2")
print ("Ingresa 3 para obtener ecuación n=3 (Ejercicio solicitado)")
print ("Ingresa 4 para terminar")
opcion = int(input(""))
limpiar_pantalla()
if opcion == 1:#Camino que toma el programa si se elegio la opción 1
    n=1#Definimos n
    a="F(x0)+"
    b="F(x1)"
    makima=Fraction(n**2, 2)#Hace las fracción requerida para la ecuación
    print("La ecuación trapezoidal es:")
    print(makima,"h[ ",a+b,"]")#Moatramos la ecuación final
    input("Click para terminar...")

elif opcion == 2:#Camino que toma el programa si se eligió la opción 2
    n=2#Definimos n
    a="F(x0)+"
    b="4F(x1)+"
    c="F(x2)"
    makima=Fraction(n**3, 6)#Esta operación hace la fracción requerida para el problema
    miku=Fraction(n**2, 4)
    rest=(makima-miku)#Aqui guardo el resultado de la resta de las 2 fracciones
    print("La ecuación de Simpson 1/3 es:")
    print(rest,"h[ ",a+b+c,"]")#Muestro la ecuación final
    input("Click para terminar...")
elif opcion == 3:#Camino que toma el programa si se eligió la opción 2
    n=3#Definimos n
    a="F(x0)+"
    b="3F(x1)+"
    c="3F(x2)+"
    d="F(x3)"
    makima=Fraction(n**4, 24)#Esta operación hace la fracción requerida para el problema
    miku=Fraction(n**3, 6)
    raiden=Fraction(n**2, 6)
```

```
    rest=(makima-miku+raiden)#Aqui guardo el resultado de la resta y suma de las 3 fracciones
    print("La ecuación de Simpson 3/8 es:")
    print(rest,"h[ ",a+b+c+d,"]")#Muestro la ecuación final
    input("Click para terminar...")
elif opcion == 4:
    print("Terminamos =)")
else:
    print("Por ingresar un número que no estaba en el rango te voy a contar un dato curioso, ¿Sabías que los elefantes pueden comunicarse a través de frecuencias infrarrojas que son inaudibles para los humanos? Los elefantes utilizan estas frecuencias para comunicarse a largas distancias y para mantenerse en contacto con otros miembros de su manada.")
```

Respuesta de Python:

```
Python 3.6.1 |Anaconda 4.4.0 (64-bit)| (default, May 11 2017, 13:25:24) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)]
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.

IPython 5.3.0 -- An enhanced Interactive Python.
?         -> Introduction and overview of IPython's features.
%quickref -> Quick reference.
help      -> Python's own help system.
object?   -> Details about 'object', use 'object??' for extra details.

runfile('C:/Users/Lety/Desktop/Enero-Junio 2023/Materias I-2023/MN_Alumnos I-23/u5/u5_Alumnos/2a vez/Chaparro 3a vez/Ejercicio 6.1/simpson.py', wdir='C:/Users/Lety/Desktop/Enero-Junio 2023/Materias I-2023/MN_Alumnos I-23/u5/u5_Alumnos/2a vez/Chaparro 3a vez/Ejercicio 6.1')
Bienvenido al ejercicio 6.1 de la página 448 del libro de nieves, este ejercicio consiste en emplear la ecuación 6.5 con n = 3 para obtener la ecuación de Simpson 3/8 (véase Ecs. 6.6)
Ingresa 1 para obtener ecuación n=1
Ingresa 2 para obtener ecuación n=2
Ingresa 3 para obtener ecuación n=3 (Ejercicio solicitado)
Ingresa 4 para terminar

3
La ecuación de Simpson 3/8 es:
3/8 h[ F(x0)+3F(x1)+3F(x2)+F(x3) ]

Click para terminar...
```

5.3 Integrales múltiples

La integración múltiple o integración repetida es la integración de una función de dos o más variables

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} f\left(x_1, \ldots, x_k\right) \mathrm{d}x_k \ldots \mathrm{d}x_1 \tag{5.8}$$

es una integral múltiple definida sobre la región del espacio k definida por a_i £ x_i £ b_i para cada i ; sin los

límites de integración es una integral múltiple indefinida. Comparar integral iterada.

Una integral repetida de la forma que surge al evaluar una integral múltiple según el teorema de Fubini,

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \tag{5.9}$$

en el que se integra en el siguiente orden: $z,\ y,\ x$ tratando las variables restantes como parámetros.

5.3.1 Problemas de integrales múltiples

En esta sección se presentan problemas de integrales múltiples resueltas mediante el método de Simpson, haciendo uso del algoritmo de Simpson 1/3 compuesto y el método analítico en el software Maple.

Problema 1
Mediante el método de Simpson 1/3 aproximar las siguientes integrales dobles.

a) $\int_0^{\pi} \int_0^{y} y \sin x dx dy$

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 dy dx$

c) $\int_0^2 \int_1^{e^y} dx dy$

d) $\int_1^2 \int_x^{x^2} dy dx$

Solución
a)
Hacemos uso del método Simpson 1/3 compuesto, Ec. (5.4)

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \tag{5.4}$$

Definimos la función
$f(x) := y \cdot \sin(x)$:
Asignamos el número de sub intervalos que en este caso vamos a representar como n:
$n := 10$:
Como paso siguiente asignamos los límites de la primera integración, en este caso comenzaremos integrando en x, para luego integrar en y
> $liminf[x] := 0$:
> $limsup[x] := y$:
Para saber el tamaño del intervalo de posición a integrar usamos la siguiente formula
$h[x] := \frac{limsup[x] - liminf[x]}{n}$:

Haciendo uso del intervalo de posición anterior y agregándole la constante, que en este caso sería h[y] nos queda

```
> x[0] := liminf[x]:
> x[1] := x[0] + h[x]:
> x[2] := x[1] + h[x]:
> x[3] := x[2] + h[x]:
> x[4] := x[3] + h[x]:
> x[5] := x[4] + h[x]:
> x[6] := x[5] + h[x]:
> x[7] := x[6] + h[x]:
> x[8] := x[7] + h[x]:
> x[9] := x[8] + h[x]:
> x[10] := limsup[x]:
```

Para el paso siguiente debemos obtener el resultado de la primera integración, como sigue.
Nota: Los números impares se multiplican por 4 y los pares por 2, el ultimo y primer término de *f(y[n])* deben ser multiplicados por 1.

$$IntegralInterna := \frac{h[y]}{3}\cdot(f(y[0]) + 4\cdot(f(y[1]) + f(y[3]) + f(y[5]) + f(y[7]) + f(y[9])) + 2\cdot(f(y[2]) + f(y[4]) + f(y[6]) + f(y[8])) + f(y[10]))$$

Usando la *y* como constante tenemos

$$IntegralInterna := \frac{1}{30}y\left(4y\sin\left(\frac{1}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{3}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{1}{2}y\right) + 4y\sin\left(\frac{7}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{9}{10}y\right) + 2y\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{2}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{3}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{4}{5}y\right) + y\sin(y)\right)$$

Este último paso nos define la función de *y*, ahora debemos integrar, pero con respecto a *x*

$$f(y) := \frac{1}{30}y\left(4y\sin\left(\frac{1}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{3}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{1}{2}y\right) + 4y\sin\left(\frac{7}{10}y\right) + 4y\sin\left(\frac{9}{10}y\right) + 2y\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{2}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{3}{5}y\right) + 2y\sin\left(\frac{4}{5}y\right) + y\sin(y)\right)$$

Repetimos los pasos anteriores

```
> liminf[y] := 0:
> limsup[y] := evalf(π):
> y[0] := liminf[y]:
> y[1] := y[0] + h[y]:
> y[2] := y[1] + h[y]:
> y[3] := y[2] + h[y]:
> y[4] := y[3] + h[y]:
> y[5] := y[4] + h[y]:
> y[6] := y[5] + h[y]:
> y[7] := y[6] + h[y]:
> y[8] := y[7] + h[y]:
> y[9] := y[8] + h[y]:
> y[10] := limsup[y]:
```

Con los resultados de la integral anterior calculamos la integral externa pero ahora en términos de *x*

$$IntegralExterna := \frac{h[y]}{3}\cdot(f(y[0]) + 4\cdot(f(y[1]) + f(y[3]) + f(y[5]) + f(y[7]) + f(y[9])) + 2\cdot(f(y[2]) + f(y[4]) + f(y[6]) + f(y[8])) + f(y[10])):$$

Graficando la integral interna $f(y)$ (ver Fig. 5.37), se obtiene la respuesta de 6.8364 como máximo en la cresta del cuadrante I ◁ *Respuesta*

> $$f(y) := \frac{1}{30} y \left(4 y \sin\left(\frac{1}{10} y\right) + 4 y \sin\left(\frac{3}{10} y\right) + 4 y \sin\left(\frac{1}{2} y\right) + 4 y \sin\left(\frac{7}{10} y\right) + 4 y \sin\left(\frac{9}{10} y\right) + 2 y \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + 2 y \sin\left(\frac{2}{5} y\right) + 2 y \sin\left(\frac{3}{5} y\right) + 2 y \sin\left(\frac{4}{5} y\right) + y \sin(y)\right)$$

```
# 2D Plot 1/30*y*(4*y*sin(1/10*y)+4*y*sin(3/10*y)+4*y*sin(1/2*y)
    +4*y*sin(7/10*y)+4*y*sin(9/10*y)+2*y*sin(1/5*y)+2*y*sin
    (2/5*y)+2*y*sin(3/5*y)+2*y*sin(4/5*y)+y*sin(y))
plot(1/30*y*(4*y*sin(1/10*y)+4*y*sin(3/10*y)+4*y*sin(1
    /2*y)+4*y*sin(7/10*y)+4*y*sin(9/10*y)+2*y*sin(1/5
    *y)+2*y*sin(2/5*y)+2*y*sin(3/5*y)+2*y*sin(4/5*y)
    +y*sin(y)))
```

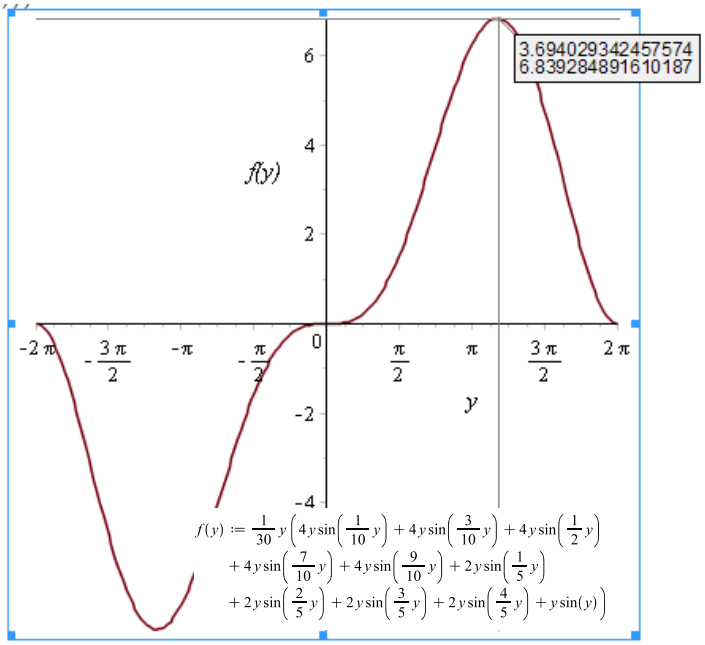


Fig. 5.37 gráfica de $f(y)$ mostrando la respuesta a la integral $\int_0^{3.1416} \int_1^y y\,sen\,x\,dy\,dx$ en el máximo de la cresta del cuadrante I.

En los casos b), c) y d) se usa el método de la Regla de Simpson con la librería del Software Maple.

b)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 dydx$$

Regla de Simpson

```
> with(Student[Calculus1]):
> b:=ApproximateInt(1, y=sqrt(x)..1, method = simpson);
```

$b := 1 - \sqrt{x}$

> ApproximateInt(b,x=0..1, method = simpson, output = plot, partition = 20);

La Fig. 5.38 muestra el resultado de la doble integral mediante el uso de 20 subintervalos. La respuesta es de 0.3336542429.

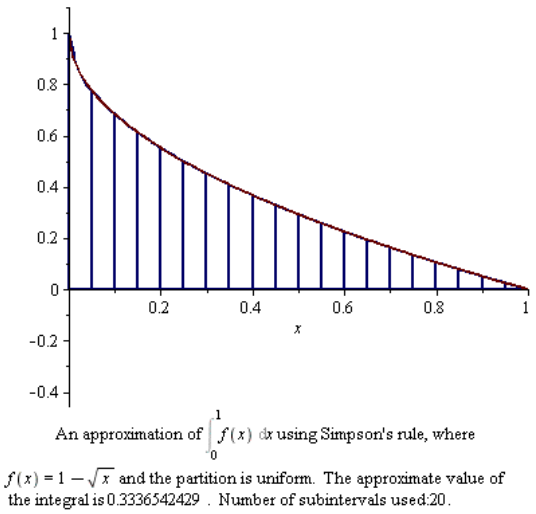


Fig. 5.38 Resultado gráfico de la integral doble $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 dydx$.

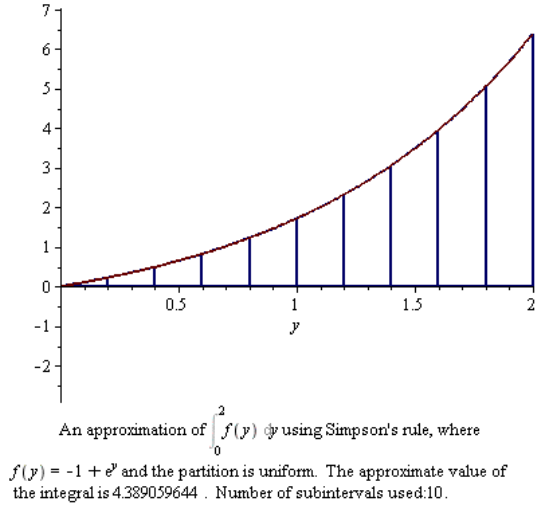


Fig. 5.39 Resultado gráfico de la integral doble $\int_0^2 \int_1^{e^y} dxdy$.

c)

$$\int_0^2 \int_1^{e^y} dxdy$$

Regla de Simpson

> with(Student[Calculus1]):

> c:=ApproximateInt(1,x=1..exp(y), method = simpson);

$c := -1 + e^y$

> ApproximateInt(c,y=0..2, method = simpson, output = plot, partition = 10);

La Fig. 5.39 muestra el resultado de la doble integral mediante el uso de 10 subintervalos. La respuesta es de 4.389059644.

d)

$$\int_1^2 \int_x^{x^2} dydx$$

Regla de Simpson

> with(Student[Calculus1]):

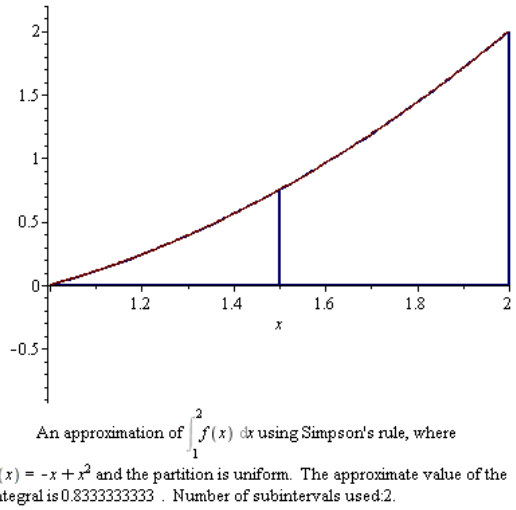


Fig. 5.40 Resultado gráfico de la integral doble: $\int_1^2 \int_x^{x^2} dydx$.

```
> d:=ApproximateInt(1,y=x..x^2, method = simpson);
```

$$d := -x + x^2$$

```
> ApproximateInt(d,x=1..2, method = simpson, output = plot, partition = 2);
```

La Fig. 5.40 muestra el resultado de la doble integral mediante el uso de 10 subintervalos. La respuesta es de 0.83333333333.

Comprobación de resultados de los incisos del problema mediante el Método Analítico:

a) $\int_0^{3.1416}\int_1^{y} y\,sen\,x\,dy\,dx$

b) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 dy\,dx$

c) $\int_1^2\int_x^{x^2} dy\,dx$

d) $\int_0^2\int_1^{e^y} dx\,dy$

a)

```
> Int(Int(y·sin(x), y = 1 ..y), x = 0 ..π) = int(int(y·sin(x), y = 1 ..y), x = 0
      ..π)
```

$$\int_0^{\pi}\int_1^{y} y\sin(x)\,dy\,dx = y^2 - 1$$

b)

```
> Int(Int(1, y = sqrt(x) ..1), x = 0 ..1) = int(int(1, y = sqrt(x) ..1), x = 0 ..1)
```

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 1\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

c)

```
> Int(Int(1, x = 1 ..exp(y)), y = 0 ..2) = int(int(1, x = 1 ..exp(y)), y = 0 ..2)
```

$$\int_0^2\int_1^{e^y} 1\,dx\,dy = -3 + e^2$$

```
> evalf(-3 + e^2)
```

4.389056099

d)

```
> Int(Int(1, y = x ..x^2), x = 1 ..2) = int(int(1, y = x ..x^2), x = 1 ..2)
```

$$\int_1^2\int_x^{x^2} 1\,dy\,dx = \frac{5}{6}$$

```
> evalf(5/6)
```

0.8333333333

L.Q.Q.D.

Problema 2

En el estudio de las integrales dobles, un problema típico es demostrar que

$\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2}\,dx$

demostrarlo numéricamente con R=1.

Solución

Realizamos integrales mediante el método analítico para comprobar la aproximación de los métodos numéricos.

Iniciamos con la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?$$

Aplicamos linealidad

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}dx$$

Esta es una integral especial (función error de Gauss)

Sustituimos los límites:

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(erf(x)\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(erf(1)\right) - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(erf(0)\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(0.8427007929\right) - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(0)\right]$$

$$= \frac{1.772453851}{2}\left(0.8427007929\right) - [0]$$

$$= \left(0.886226925\right)\left(0.8427007929\right)$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0.746824132 \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

Ahora, resolvemos la integral doble

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}}{2}\int \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(x)}{2}\Bigg]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(1)}{2} - \left[\frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(0)}{2}\right]dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(1)}{2}dy$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4}\int \frac{2e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}}dy$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(y)$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(y) \Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(1) - \left[\frac{\pi erf(1)}{4} * erf(0) \right]$$

$$= \frac{\pi erf^2(1)}{4}$$

$$= \frac{\pi(0.7101446264)}{4}$$

$$= \frac{2.230985142}{4}$$

$\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\, dxdy = 0.5577462855 \triangleleft$ *Respuesta.*

Ya que el resultado de las integrales no es el mismo podemos demostrar que:

$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \neq \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\, dxdy$

$0.746824132 \neq 0.5577462855$

Las siguientes serán demostraciones usando métodos numéricos para aproximaciones a los resultados obtenidos por el método analítico.

Método trapezoidal

Integral 1

$\int_0^R e^{-x^2}\, dx$

Formula:

Para $n = 1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Donde:

x_1 =límite superior

x_0 = límite inferior

$$h = \frac{x_1 - x_0}{n}$$

$f(x_0)$=La función evaluada en el límite inferior

$f(x_1)$= La función evaluada en el límite superior

Desarrollo

i. Obtener *h:*

$$h = \frac{1-0}{1} = 1$$

ii. Incluir x_0 y x_1 en la función de la integral

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$f(x_0) = e^{-(0)^2} = 1$

$f(x_1) = e^{-(1)^2} = 0.367879441$

iii. Sustituir en la fórmula:

$$\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[1+0.367879441\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[1.367879441\right]$$

$\int_0^R e^{-x^2}\,dx \approx 0.68393972 \triangleleft$ *Respuesta.*

Cuyos errores son

Error absoluto:

$$= \left|0.746824132 - 0.68393972\right| = 0.062884412 = 6.29\%$$

Error relativo:

$$= \frac{\left|0.746824132 - 0.68393972\right|}{0.746824132} = 0.08420243710 = 8.420243710\%$$

Integral 2

$\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

Secuencia de pasos. Haremos el desarrollo para la integral de en medio y posteriormente la de la parte externa

$\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dx$

i. Obtener *h:*

$$h = \frac{1-0}{1} = 1$$

ii. Sustituir los valores de x_0 y x_1 en la función de la integral

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$$f(x_0) = e^{-(0)^2-y^2} = e^{-y^2}(1)$$

$$f(x_1) = e^{-(1)^2-y^2} = e^{-y^2}(0.367879441)$$

iii. Sustituir en la fórmula:

$$\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[e^{-y^2}(1+0.367879441)\right]$$

$$\approx e^{-y^2}\,0.68393972$$

Ahora tomamos ese resultado y lo integramos con la integral externa:

$\int_0^1 e^{-y^2}\,0.68393972dy$

i. Obtenemos *h:*

$$h = \frac{1-0}{1} = 1$$

ii. Introducir los valores de y_0 y y_1 a en la función de la integral

$y_0 = 0$

$y_1 = 1$

$f(y_0) = e^{-(0)^2}\ 0.68393972 = 0.6839397$

$f(y_1) = e^{-(1)^2}\ 0.68393972 = 0.251607361$

iii. Sustituir en la fórmula:

$$\approx \frac{h}{2}[f(y_0) + f(y_1)]$$

$$\approx \frac{1}{2}[0.935547081]$$

$$\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dx \approx 0.46777354$$

Cuyos errores son:

Error absoluto:

$$= |0.5577462855 - 0.46777354| = 0.0899727455$$

Error relativo:

$$= \frac{|0.5577462855 - 0.46777354|}{0.5577462855} = 0.1613148269 = 16.13148269\%$$

La solución analítica es

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}}{2} \int \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(x)}{2}\Bigg]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(1)}{2} - \left[\frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(0)}{2}\right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\pi}e^{-y^2}\,erf(1)}{2}\,dy$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} \int \frac{2e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}}\,dy$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(y)$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(y)\Bigg]_0^1$$

$$= \frac{\pi erf(1)}{4} * erf(1) - \left[\frac{\pi erf(1)}{4} * erf(0)\right]$$

$$= \frac{\pi erf^2(1)}{4}$$

$$= \frac{\pi(0.7101446264)}{4}$$

$$= \frac{2.230985142}{4}$$

$\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\, dxdy = 0.5577462855 \quad \triangleleft Respuesta$

Método de Simpson 3/8

Para $n=3$, se tiene que, la fórmula de este método es

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

Donde,

$x_3 =$ límite superior

$x_2 = x_1 + h$

$x_1 = x_0 + h$

$x_0 =$ límite inferior

$$h = \frac{x_3 - x_0}{3}$$

$f(x_0)$=La función evaluada en el límite inferior

$f(x_1)$= La función evaluada en $x_0 + h$

$f(x_2)$= La función evaluada en $x_1 + h$

$f(x_3)$=La función evaluada en el límite superior

Integral 1

$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

Pasos

i. Obtener h

$$h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$$

ii. Definir los subintervalos para x_0, x_1, x_2, x_3:

$x_0 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$x_3 = 1$

iii. Sustituir los valores de la variable independiente en la función

$$f(x_0) = e^{-(0)^2} = 1$$

$$f(x_1) = e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0.8948393168$$

$$f(x_2) = e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 0.6411803885$$

$f(x_3)=e^{-(1)^2}=0.3678794412$

iv. Sustituir en la fórmula

$$\approx \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{8}\left[1+3(0.8948393168)+3(0.6411803885)+0.3678794412\right]$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[5.975938557\right]$$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0.746992319 \triangleleft$ *Respuesta.*

Cuyo error es:

Error absoluto:

$$=\left|0.7468241330 - 0.746992319\right| = 0.0001681860 = 0.017\%$$

Error relativo:

$$=\frac{\left|0.7468241330 - 0.746992319\right|}{0.746992319} = 0.0002251509095 = 0.02251509095\%$$

Como podemos observar, tuvimos un error más pequeño, esto se debe a que el método de Simpson 3/8 se ajusta mejor a la función que en el método del trapezoide.

Ahora continuemos con la integral dobles por el método de Simpson 3/8

$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

Pasos:

Obtener h

i. $h=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3}$

ii. Definir los subintervalos para x_0, x_1, x_2, x_3:

$x_0=0$

$x_1=\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{2}{3}$

$x_3=1$

iii. Sustituir los valores de la variable independiente en la función de la integral

$f(x_0)=e^{-(0)^2}=1$

$f(x_1)=e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=0.8948393168$

$f(x_2)=e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=0.6411803885$

$f(x_3)=e^{-(1)^2}=0.3678794412$

iv. Sustituir en la ecuación de Simpson 3/8

$$\approx \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{8}\left[1+3(0.8948393168)+3(0.6411803885)+0.3678794412\right]$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[1+3(0.8948393168)+3(0.6411803885)+0.3678794412\right]$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[5.975938557\right]$$

$$\approx 0.746992319$$

v. Donde agregamos a e^{-y^2} como una constante

$$\approx e^{-y^2}\,0.746992319$$

vi. Para seguir integrando, ahora con el otro intervalo

$$\int_0^1 e^{-y^2}\,0.746992319dx$$

vii. Obtener h

$$h=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3}$$

viii. Definir los subintervalos para $y_0, y_1,\ y_2$ y y_3

$$y_0=0$$

$$y_1=\frac{1}{3}$$

$$y_2=\frac{2}{3}$$

$$y_3=1$$

ix. Sustituir los valores en la función

$$f(y_0)=e^{-(0)^2}=1$$

$$f(y_1)=e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=0.8948393168$$

$$f(y_2)=e^{-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=0.6411803885$$

$$f(y_3)=e^{-(1)^2}=0.3678794412$$

x. Sustituir en la fórmula de Simpson 3/8

$$\approx \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{8}\left[1+3(0.8948393168)+3(0.6411803885)+0.3678794412\right]$$

$$\approx \frac{1}{8}\left[5.975938557\right]$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy \approx 0.746992319$$

$$\approx 0.746992319\left[0.746992319\right]$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dxdy \approx 0.5579975246 \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

Medimos los tipos de error cometidos comparando este resultado obtenido con el resultado que arroja el método analítico, a saber

Error absoluto:

$$\left|0.5577462855 - 0.5579975246\right| = 0.000251239 = 0.0251239\%$$

Error relativo:

$$\frac{|0.5577462855 - 0.5579975246|}{0.5579975246} = 0.0004502510 = 0.04502510\%$$

Para

$R = 1$

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \neq \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$evalf\left(\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\right) = 0.5577462854 \triangleleft \text{Respuesta}$$

Como podemos observar el método de Simpson 3/8 tiene una mejor aproximación, saltando el *hueco* que si origina el método del trapezoide.

La Fig. 5.41 muestra la gráfica de la función multivariable $e^{-x^2-y^2}$

En Maple, la secuencia de llamada ApproximateIntTutor(f(x,y)) inicia una interfaz de tutor que calcula, traza y anima integrales definidas aproximadas de f(x,y) en el intervalo x=a..b y y=c..d. Las instrucciones son (como en la Fig. 5.42**):**

```
> with(Student[MultivariateCalculus]):
> ApproximateIntTutor();
> ApproximateIntTutor(exp(-x^2-y^2), x=-2..2, y=-2..2, z=0..1);
```

En la Fig 5.42 a) Como podemos corroborar el que el *valor verdadero* corresponde al valor que obtuvimos de manera analítica.

En la Fig. 5.42 a) a c), se presentan tres vistas de la gráfica realizada con ApproximateIntTutor del software Maple para trazar o animar la aproximación de una integral.

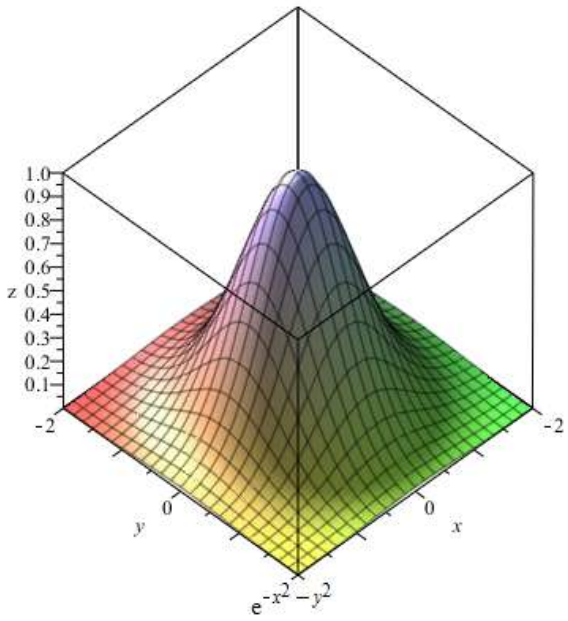


Fig. 5.41 Gráfica de la función multivariada $e^{-x^2-y^2}$.

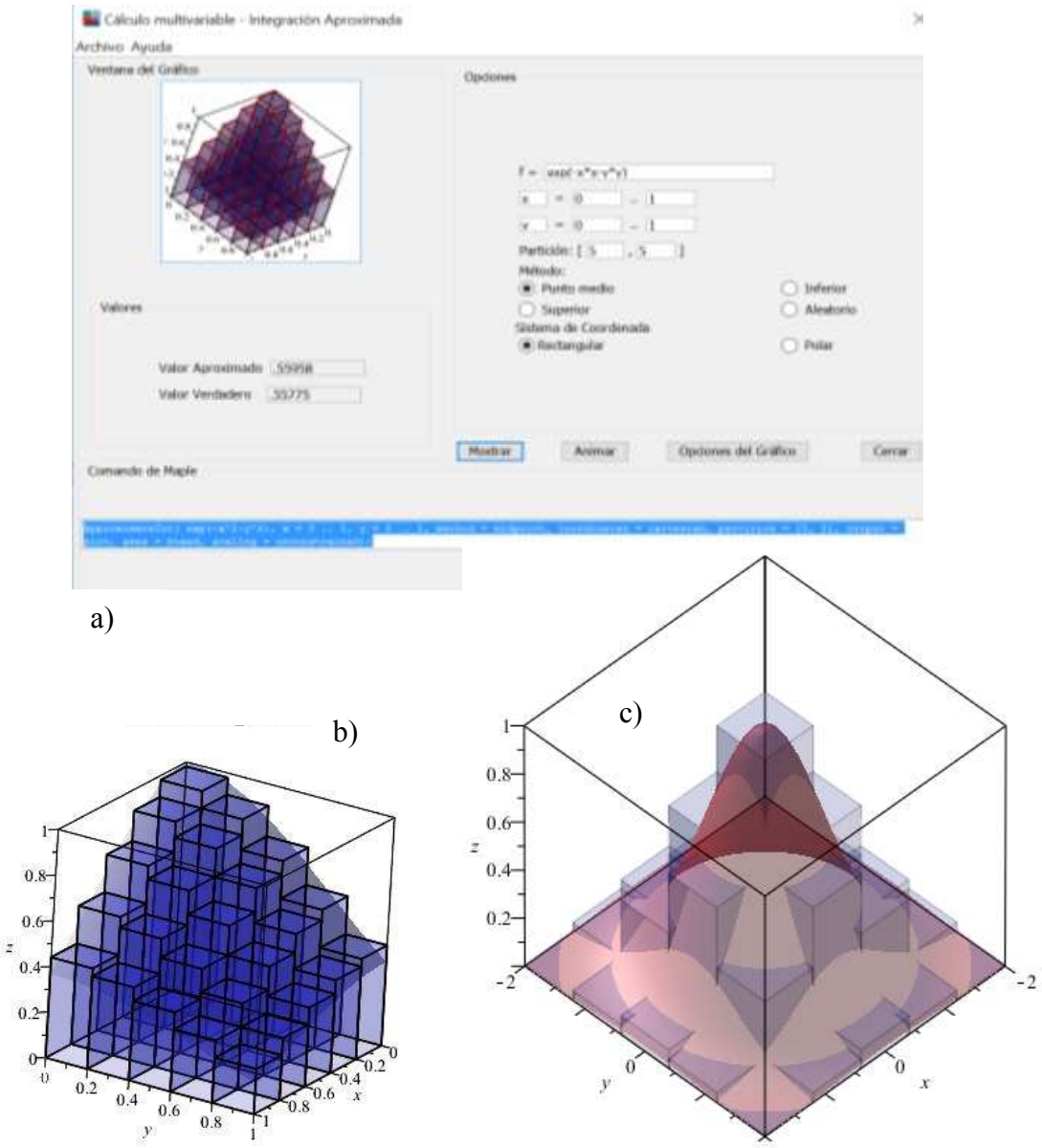


Fig. 5.42 Cálculo multivariado ApproximateIntTutor del software Maple para trazar o animar la aproximación de una integral. a) ApproximateIntTutor(*f(x,y)*) inicia una interfaz de tutor que calcula, traza y anima integrales definidas aproximadas de *f(x,y)* en el intervalo *x=a..b* y *y=c..d,*. b) ApproximateIntTutor(*exp(-x^2-y^2), x=0..1, y=0..1, z=0..1*) y c) ApproximateIntTutor(*exp(-x^2-y^2), x=-2..2, y=-2..2, z=0..1*).

Conclusión. Se nos pide demostrar que las dos integrales dadas son iguales, lo cual, tanto numérica como analíticamente queda desmentido. El procedimiento analítico para demostrarlo es el que se describe enseguida.

> $Int(Int(\exp(-x^2-y^2), y=0..R), x=0..R)$

$$\int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx$$

> $Int(\exp(-x^2-y^2), x=0..R)$

$$\int_0^R e^{-x^2-y^2}\,dx$$

```
> R := 1
```

$R := 1$

```
> Int(Int(exp(-x^2-y^2), y=0..R), x=0..R) = int(int(exp(-x^2-y^2), y
      =0..R), x=0..R)
```

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{erf}(1)^2\,\pi$$

```
> Int(exp(-x^2), x=0..R) = int(exp(-x^2), x=0..R)
```

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(1)\,\sqrt{\pi}$$

```
> evalf(1/4*erf(1)^2*Pi)
```

0.5577462855

```
> evalf(1/2*erf(1)*sqrt(Pi))
```

0.7468241330

Este último resultado se logra con la ayuda de Maple por el método Simpson y el Simpson de 3/8, como sigue. Las instrucciones de Maple son:

```
> with(Student[Calculus1]):
> R := Int(exp(-x^2), x=0..1);
```

$$R := \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

```
> ApproximateInt(R);
```

$$\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{9}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{16}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{49}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{81}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{121}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{169}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{9}{16}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{289}{400}} + \frac{1}{10}e^{-\frac{361}{400}}$$

```
> ApproximateInt(ln(x), x=1..4);
```

$$\frac{3}{10}\ln\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{29}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{41}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{47}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{53}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{59}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{13}{4}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{71}{20}\right) + \frac{3}{10}\ln\left(\frac{77}{20}\right)$$

```
> ApproximateInt(exp(-x^2), x=0..1, output=sum);
```

$$\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} e^{-\left(\frac{1}{10}i+\frac{1}{20}\right)^2}$$

```
ApproximateInt(exp(-x^2), 0..1, output=animation, partition=random[1.0], refinement=random,
subpartition=width, iterations=30, showpoints=false,
boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]]);
```

En la Fig. 5.43 se muestra la aproximación de la función $f(x)=e^{-x^2}$ mediante sumas de Riemann con 2 subintervalors, ídem en la Fig. 5.44 pero con 50 subintervalos, nótese la diferencia de aproximación con dos y con cincuenta subintervalos.

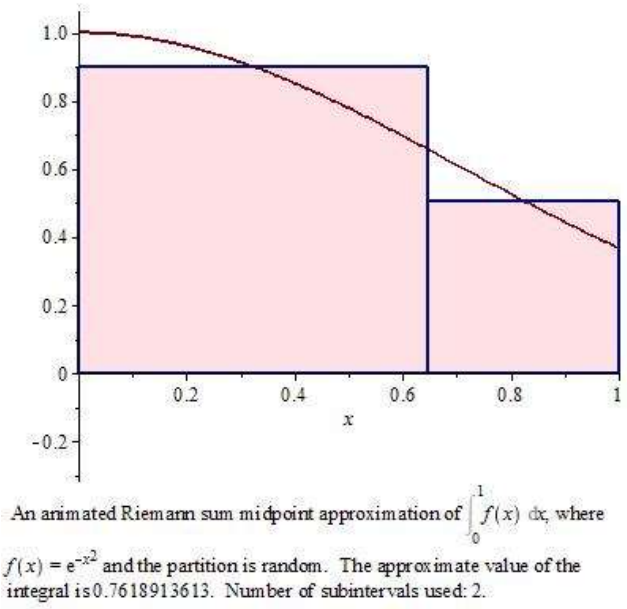


Fig. 5.43 Aproximación al área bajo la curva de e^{-x^2} mediante dos subintervalos.

> Approximate(int(exp(-x^2), x=0..1, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);

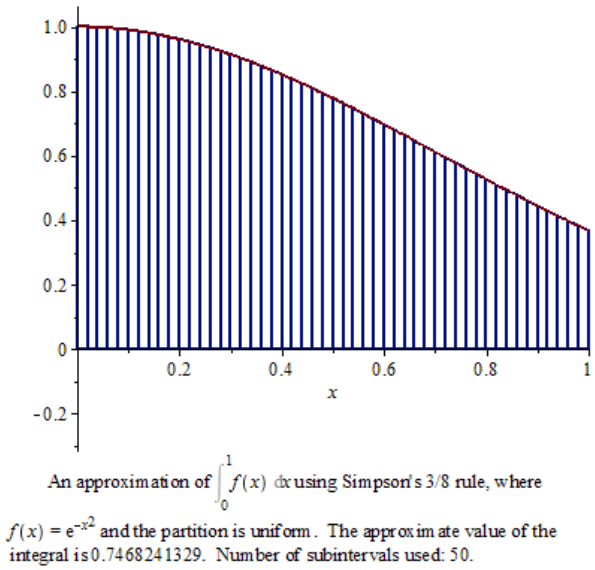


Fig. 5.44 Aproximación al área bajo la curva de e^{-x^2} mediante 50 subintervalos.

```
> Int(Int(exp(-x^2-y^2),y=0..1),x=0..1)
```

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

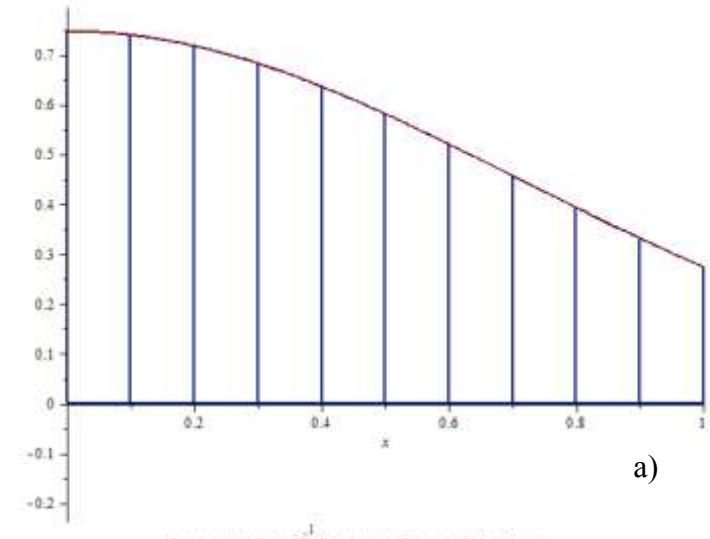
Regla de Simpson

```
> with(Student[Calculus1]):
> e:=ApproximateInt(exp(-x^2-y^2), y = 0 .. 1, method = simpson);
```

$$e := \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{361}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2-1} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{16}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{16}{25}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{289}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{81}{100}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{25}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{169}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{49}{100}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{4}{25}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{81}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{121}{400}}$$
$$+ \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{16}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{100}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{49}{400}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{100}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2}$$

```
> ApproximateInt(e,x=0..1, method = simpson, output = plot, partition = 10);
```

En la Fig. 5.45 se presenta la gráfica de la aproximación de la doble integral $\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}$ mediante el método de Simpson, que representa el área bajo la curva de la función $f(x)=e^{-x^2-y^2}$.

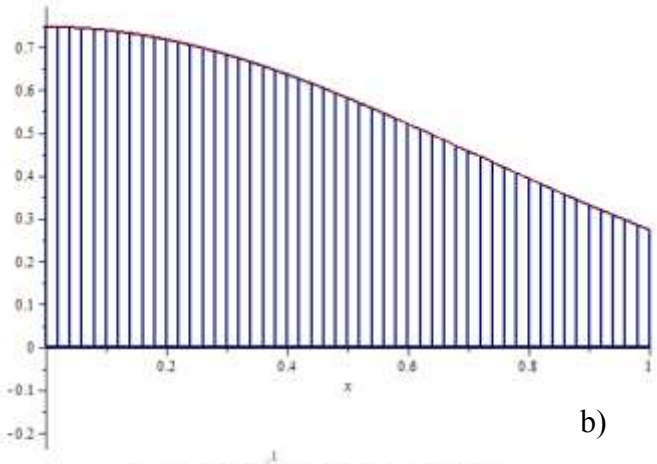


a)

An approximation of $\int_0^1 f(x)\,dx$ using Simpson's rule, where

$$f(x) = \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{361}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2-1} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{16}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{16}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{289}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{81}{100}}$$
$$+ \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{169}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{49}{100}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{4}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{81}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{4}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{121}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{16}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{100}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{49}{400}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{400}}$$
$$+ \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{100}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 0.5577463616. Number of subintervals used: 10.



b)

An approximation of $\int_0^1 f(x)\,dx$ using Simpson's rule, where

$$f(x) = \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{361}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2-1} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{16}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{16}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{289}{400}}$$
$$+ \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{81}{100}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{169}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{49}{100}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{4}{25}}$$
$$+ \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{81}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{121}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{25}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{16}}$$
$$+ \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{9}{100}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{49}{400}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{1}{400}} + \frac{1}{30}e^{-x^2-\frac{1}{100}} + \frac{1}{15}e^{-x^2-\frac{9}{400}} + \frac{1}{60}e^{-x^2}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 0.5577463235. Number of subintervals used: 50.

Fig. 5.45 Aproximación al área bajo la curva de $f(x)=e^{-x^2-y^2}$ mediante subintervalos: a) 2 y b) 50.

Problema 3

Resolver la integral doble por seis métodos numéricos de integración numérica.

$$\int_1^3 \int_0^4 e^{x+y}\,dx dy$$

Solución

Se presenta la solución de la integral doble por varios métodos mediante el software Maple: Analítico, Simpson simple, Simpson 3/8, Trapezoidal, Método Boole, Cálculo multivariado -devuelve la integral aproximada de una función bivariada y Fórmula Newton-Cotes.

Solución Analítica de Integrales Dobles

```
> Int(Int(exp(x + y), x = 0 ..4), y = 1 ..3) = int(int(exp(x + y), x = 0 ..4),
      y = 1 ..3)
```

$$\int_1^3 \int_0^4 e^{x+y}\,dx\,dy = e - e^5 - e^3 + e^7$$

```
> evalf(e - e^5 - e^3 + e^7)
```

930.8527438

$$> \int_1^3 \int_0^4 e^{x+y}\,dx\,dy = e - e^5 - e^3 + e^7 = 930.8527438 \triangleleft Respuesta$$

Solución Numérica de Integrales Dobles

Simpson 3/8

Las instrucciones de Maple para resolver la integral doble mediante el método de Simpson 3/8 se describen enseguida.

```
> with(Student[Calculus1]):
> xAxis:=ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = simpson[3/8]);
```

$$xAxis := \frac{3}{20} e^{\frac{58}{15}+y} + \frac{1}{20} e^{4+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{10}{3}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{52}{15}+y} + \frac{1}{10} e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{56}{15}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{8}{3}+y} + \frac{1}{10} e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{44}{15}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{46}{15}+y} + \frac{1}{10} e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{32}{15}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{34}{15}+y} + \frac{1}{10} e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{38}{15}+y} + \frac{1}{10} e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{26}{15}+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{28}{15}+y} + \frac{1}{10} e^{2+y} + \frac{3}{20} e^{\frac{16}{15}+y}$$

$$+\frac{1}{10}e^{\frac{6}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{22}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{8}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{3}+y}$$

$$+\frac{1}{10}e^{\frac{4}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{14}{15}+y}+\frac{1}{20}e^{y}+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{2}{5}+y}$$

> yAxis:=ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = simpson[3/8]);

$$yAxis := \frac{11}{80}e^{\frac{23}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{71}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{11}{3}}+\frac{11}{80}e^{\frac{19}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{59}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{61}{15}}+\frac{11}{80}e^{\frac{21}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{47}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{49}{15}}+\frac{11}{80}e^{\frac{17}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{53}{15}}+\frac{11}{100}e^{\frac{13}{5}}$$

$$+\frac{9}{80}e^{\frac{41}{15}}+\frac{99}{800}e^{\frac{43}{15}}+\frac{109}{800}e^{3}+\frac{57}{800}e^{\frac{31}{15}}+\frac{33}{400}e^{\frac{11}{5}}+\frac{69}{800}e^{\frac{7}{3}}+\frac{39}{400}e^{\frac{37}{15}}+\frac{27}{800}e^{\frac{23}{15}}+\frac{9}{200}e^{\frac{5}{3}}+\frac{11}{200}e^{\frac{9}{5}}+\frac{3}{50}e^{\frac{29}{15}}+\frac{1}{800}e$$

$$+\frac{21}{160}e^{\frac{73}{15}}+\frac{109}{800}e^{5}+\frac{21}{160}e^{\frac{13}{3}}+\frac{21}{160}e^{\frac{67}{15}}+\frac{1}{800}e^{7}+\frac{3}{800}e^{\frac{104}{15}}+\frac{3}{400}e^{\frac{103}{15}}+\frac{11}{800}e^{\frac{34}{5}}+\frac{3}{160}e^{\frac{101}{15}}+\frac{9}{400}e^{\frac{20}{3}}+\frac{11}{400}e^{\frac{33}{5}}+\frac{3}{100}e^{\frac{98}{15}}$$

$$+\frac{27}{800}e^{\frac{97}{15}}+\frac{33}{800}e^{\frac{32}{5}}+\frac{9}{200}e^{\frac{19}{3}}+\frac{39}{800}e^{\frac{94}{15}}+\frac{11}{200}e^{\frac{31}{5}}+\frac{9}{160}e^{\frac{92}{15}}+\frac{3}{50}e^{\frac{91}{15}}+\frac{11}{160}e^{6}+\frac{57}{800}e^{\frac{89}{15}}+\frac{3}{40}e^{\frac{88}{15}}+\frac{33}{400}e^{\frac{29}{5}}+\frac{33}{400}e^{\frac{86}{15}}$$

$$+\frac{69}{800}e^{\frac{17}{3}}+\frac{77}{800}e^{\frac{28}{5}}+\frac{39}{400}e^{\frac{83}{15}}+\frac{81}{800}e^{\frac{82}{15}}+\frac{11}{100}e^{\frac{27}{5}}+\frac{87}{800}e^{\frac{16}{3}}+\frac{9}{80}e^{\frac{79}{15}}+\frac{99}{800}e^{\frac{26}{5}}+\frac{77}{800}e^{\frac{12}{5}}+\frac{81}{800}e^{\frac{38}{15}}+\frac{33}{800}e^{\frac{8}{5}}+\frac{39}{800}e^{\frac{26}{15}}$$

$$+\frac{9}{160}e^{\frac{28}{15}}+\frac{11}{160}e^{2}+\frac{3}{800}e^{\frac{16}{15}}+\frac{11}{800}e^{\frac{6}{5}}+\frac{9}{400}e^{\frac{4}{3}}$$
$$+\frac{3}{100}e^{\frac{22}{15}}+\frac{99}{800}e^{\frac{77}{15}}+\frac{3}{400}e^{\frac{17}{15}}+\frac{3}{160}e^{\frac{19}{15}}+\frac{11}{400}e^{\frac{7}{5}}$$
$$+\frac{21}{160}e^{\frac{74}{15}}+\frac{51}{400}e^{\frac{76}{15}}$$

$$+\frac{11}{80}e^{\frac{22}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{68}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{14}{3}}+\frac{11}{80}e^{\frac{24}{5}}+\frac{21}{160}e^{\frac{56}{15}}$$
$$+\frac{21}{160}e^{\frac{58}{15}}+\frac{11}{80}e^{4}+\frac{21}{160}e^{\frac{62}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{64}{15}}+\frac{11}{80}e^{\frac{16}{5}}$$
$$+\frac{21}{160}e^{\frac{10}{3}}+\frac{21}{160}e^{\frac{52}{15}}$$

$$+\frac{11}{80}e^{\frac{18}{5}}+\frac{87}{800}e^{\frac{8}{3}}+\frac{99}{800}e^{\frac{14}{5}}+\frac{51}{400}e^{\frac{44}{15}}+\frac{21}{160}e^{\frac{46}{15}}$$
$$+\frac{3}{40}e^{\frac{32}{15}}+\frac{33}{400}e^{\frac{34}{15}}$$

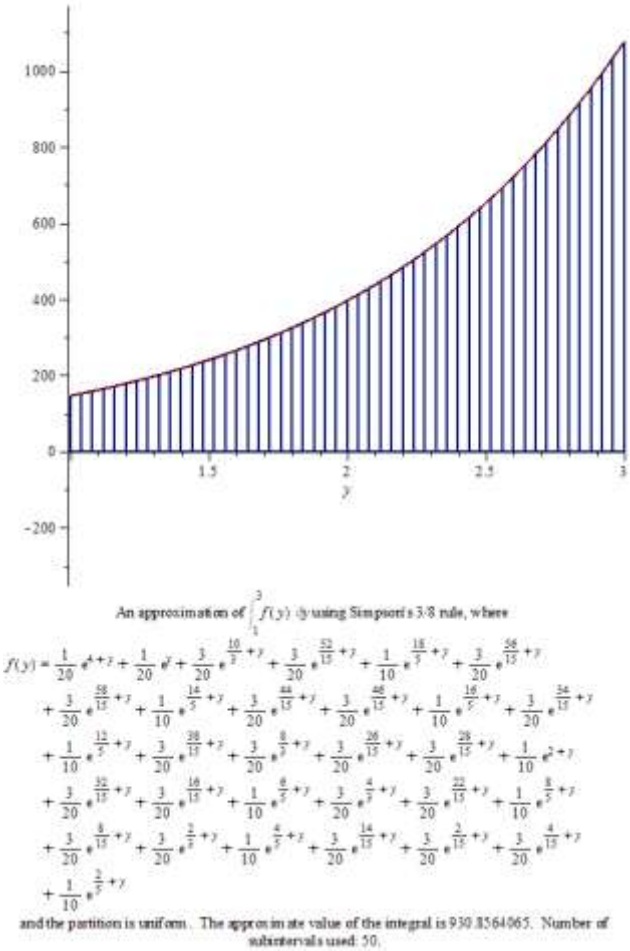
> *evalf*(*yAxis*)

930.8566356

> 930.8566356◁*Respuesta.*

La Fig. 5.46 muestra la solución del método de Simpson de 3/8 gráficamente usando 50 subintervalos. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 930.8564065.

> ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = simpson[3/8], output = plot, partition = 50);



An approximation of $\int_1^3 f(y)\,dy$ using Simpson's 3/8 rule, where

$$f(y)=\frac{1}{20}e^{4+y}+\frac{1}{20}e^{y}+\frac{3}{20}e^{\frac{10}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{32}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{18}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{56}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{58}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{14}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{44}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{46}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{16}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{34}{15}+y}$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{12}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{38}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{8}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{26}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{28}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{2+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{32}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{16}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{8}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{22}{15}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{8}{5}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{8}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{3}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{4}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{14}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{15}+y}$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{2}{5}+y}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 930.8564065. Number of subintervals used: 50.

Fig. 5.46 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_1^3\int_0^4 e^{x+y}\,dxdy$ con el método de Simpson 3/8.

Regla de Simpson

```
> with(Student[Calculus1]):
> xAxis:=ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = simpson);
```

$$xAxis := \frac{1}{15}e^{4+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{2+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{2}{15}e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{1}{15}e^{y} + \frac{2}{15}e^{\frac{2}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{19}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{13}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{3+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{17}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{7}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{9}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{11}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{1}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{\frac{3}{5}+y} + \frac{4}{15}e^{1+y}$$

```
> yAxis:=ApproximateInt(xAxis,y=1..3, method = simpson);
```

$$Axis := \frac{2}{15}e^{\frac{23}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{19}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{21}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{17}{5}} + \frac{8}{75}e^{\frac{13}{5}} + \frac{59}{450}e^{3} + \frac{2}{25}e^{\frac{11}{5}} + \frac{4}{75}e^{\frac{9}{5}} + \frac{1}{450}e + \frac{59}{450}e^{5} + \frac{1}{450}e^{7} + \frac{1}{75}e^{\frac{34}{5}} + \frac{2}{75}e^{\frac{33}{5}} + \frac{1}{25}e^{\frac{32}{5}} + \frac{4}{75}e^{\frac{31}{5}} + \frac{1}{15}e^{6} + \frac{2}{25}e^{\frac{29}{5}} + \frac{7}{75}e^{\frac{28}{5}} + \frac{8}{75}e^{\frac{27}{5}} + \frac{3}{25}e^{\frac{26}{5}} + \frac{7}{75}e^{\frac{12}{5}} + \frac{1}{25}e^{\frac{8}{5}} + \frac{1}{15}e^{2} + \frac{1}{75}e^{\frac{6}{5}} + \frac{2}{75}e^{\frac{7}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{22}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{24}{5}} + \frac{2}{15}e^{4} + \frac{2}{15}e^{\frac{16}{5}} + \frac{2}{15}e^{\frac{18}{5}} + \frac{3}{25}e^{\frac{14}{5}} + \frac{2}{225}e^{\frac{69}{10}} + \frac{2}{45}e^{\frac{67}{10}} + \frac{14}{225}e^{\frac{13}{2}} + \frac{22}{225}e^{\frac{63}{10}} + \frac{26}{225}e^{\frac{61}{10}} + \frac{34}{225}e^{\frac{59}{10}} + \frac{38}{225}e^{\frac{57}{10}} + \frac{46}{225}e^{\frac{11}{2}} + \frac{2}{9}e^{\frac{53}{10}} + \frac{38}{225}e^{\frac{23}{10}} + \frac{26}{225}e^{\frac{19}{10}} + \frac{2}{225}e^{\frac{11}{10}} + \frac{14}{225}e^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}e^{\frac{49}{10}} + \frac{4}{15}e^{\frac{37}{10}} + \frac{4}{15}e^{\frac{41}{10}}$$

$$+\frac{4}{15}e^{\frac{9}{2}}+\frac{46}{225}e^{\frac{5}{2}}+\frac{58}{225}e^{\frac{29}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{33}{10}}+\frac{2}{45}e^{\frac{13}{10}}$$
$$+\frac{22}{225}e^{\frac{17}{10}}+\frac{34}{225}e^{\frac{21}{10}}+\frac{58}{225}e^{\frac{51}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{47}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{39}{10}}$$
$$+\frac{4}{15}e^{\frac{43}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{9}e^{\frac{27}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{31}{10}}$$

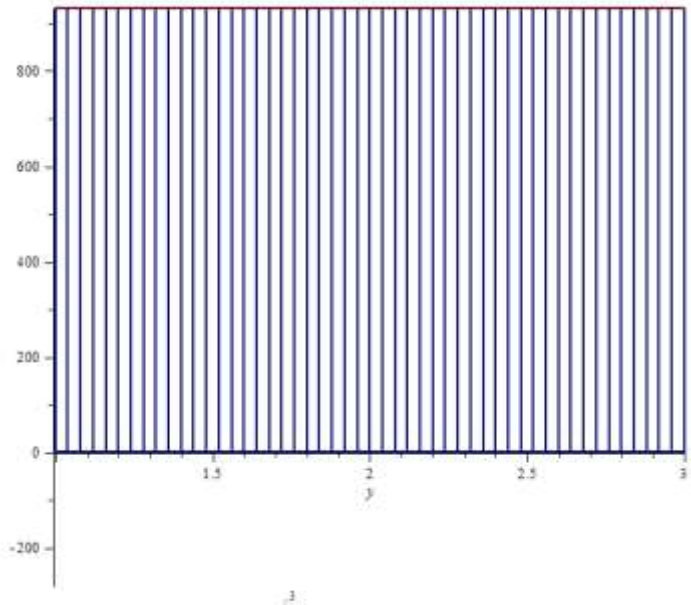
> evalf(yAxis);

930.8614957

> 930.8614957◁*Respuesta*

La Fig. 5.47 muestra la solución de la Regla de Simpson gráficamente usando 50 subintervalos, cuyas instrucciones Maple se dan enseguida. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 1861.722992, resultado no esperado.

> ApproximateInt(yAxis,y=1..3, method = simpson, output = plot, partition = 50);



An approximation of $\int_1^3 f(y)\,dy$ using Simpson's rule, where

$$f(y)=\frac{2}{15}e^{\frac{23}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{19}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{21}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{17}{5}}+\frac{8}{75}e^{\frac{13}{5}}+\frac{59}{450}e^{3}+\frac{2}{25}e^{\frac{11}{5}}+\frac{4}{75}e^{\frac{9}{5}}+\frac{1}{450}e$$
$$+\frac{59}{450}e^{5}+\frac{1}{450}e^{7}+\frac{1}{75}e^{\frac{34}{5}}+\frac{2}{75}e^{\frac{33}{5}}+\frac{1}{25}e^{\frac{32}{5}}+\frac{4}{75}e^{\frac{31}{5}}+\frac{1}{15}e^{6}+\frac{2}{25}e^{\frac{29}{5}}+\frac{2}{75}e^{\frac{28}{5}}$$
$$+\frac{8}{75}e^{\frac{27}{5}}+\frac{3}{25}e^{\frac{26}{5}}+\frac{7}{75}e^{\frac{12}{5}}+\frac{1}{25}e^{\frac{8}{5}}+\frac{1}{15}e^{2}+\frac{1}{75}e^{\frac{6}{5}}+\frac{2}{75}e^{\frac{7}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{22}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{24}{5}}$$
$$+\frac{2}{15}e^{4}+\frac{2}{15}e^{\frac{16}{5}}+\frac{2}{15}e^{\frac{18}{5}}+\frac{3}{25}e^{\frac{14}{5}}+\frac{2}{225}e^{\frac{69}{10}}+\frac{2}{45}e^{\frac{67}{10}}+\frac{14}{225}e^{\frac{13}{2}}+\frac{22}{225}e^{\frac{63}{10}}+\frac{26}{225}e^{\frac{61}{10}}$$
$$+\frac{34}{225}e^{\frac{59}{10}}+\frac{38}{225}e^{\frac{57}{10}}+\frac{46}{225}e^{\frac{11}{2}}+\frac{2}{9}e^{\frac{53}{10}}+\frac{38}{225}e^{\frac{23}{10}}+\frac{26}{225}e^{\frac{10}{10}}+\frac{2}{225}e^{\frac{11}{10}}+\frac{34}{225}e^{\frac{3}{2}}$$
$$+\frac{4}{15}e^{\frac{49}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{37}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{41}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{9}{2}}+\frac{46}{225}e^{\frac{5}{2}}+\frac{58}{225}e^{\frac{29}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{33}{10}}+\frac{2}{45}e^{\frac{13}{10}}+\frac{22}{225}e^{\frac{17}{10}}$$
$$+\frac{34}{225}e^{\frac{21}{10}}+\frac{58}{225}e^{\frac{51}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{47}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{39}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{43}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{9}e^{\frac{27}{10}}+\frac{4}{15}e^{\frac{31}{10}}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 1861.722992. Number of subintervals used: 50.

Fig. 5.47 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_1^3\int_0^4 e^{x+y}\,dxdy$ con la Regla de Simpson.

Regla Trapezoidal

> with(Student[Calculus1]):

> xAxis:=ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = trapezoid);

$$xAxis := \frac{1}{5}e^{y} + \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{2+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{1}{5}e^{4+y}$$

> yAxis:=ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = trapezoid);

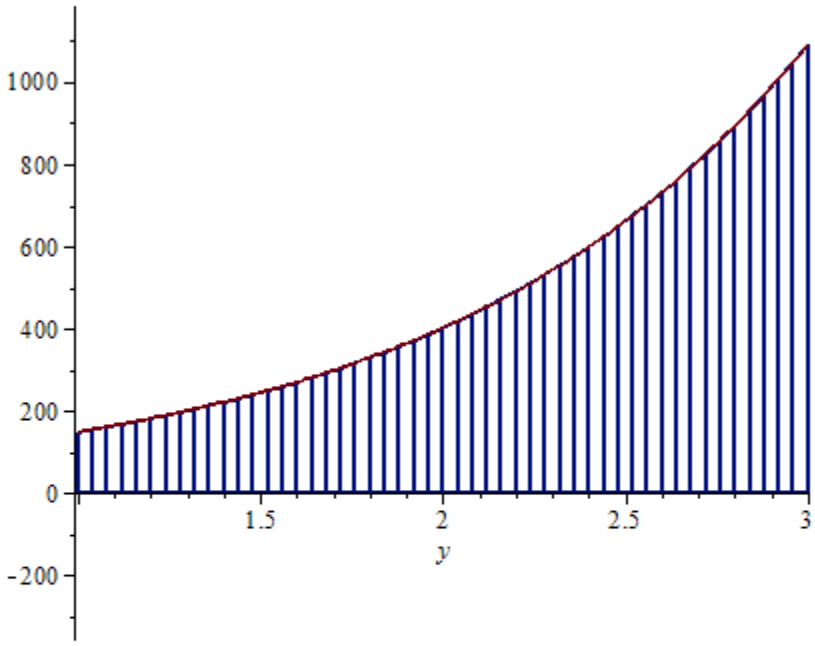
$$yAxis := \frac{1}{5}e^{6} + \frac{4}{25}e^{\frac{31}{5}} + \frac{7}{25}e^{\frac{28}{5}} + \frac{6}{25}e^{\frac{29}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{18}{5}} + \frac{2}{5}e^{4} + \frac{2}{5}e^{\frac{22}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{24}{5}} + \frac{9}{25}e^{\frac{26}{5}} + \frac{8}{25}e^{\frac{27}{5}} + \frac{1}{50}e + \frac{2}{25}e^{\frac{7}{5}} + \frac{4}{25}e^{\frac{9}{5}} + \frac{6}{25}e^{\frac{11}{5}} + \frac{8}{25}e^{\frac{13}{5}} + \frac{19}{50}e^{3} + \frac{2}{5}e^{\frac{17}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{19}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{21}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{23}{5}} + \frac{19}{50}e^{5} + \frac{1}{25}e^{\frac{6}{5}} + \frac{3}{25}e^{\frac{8}{5}} + \frac{1}{5}e^{2} + \frac{7}{25}e^{\frac{12}{5}} + \frac{9}{25}e^{\frac{14}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{16}{5}} + \frac{2}{25}e^{\frac{33}{5}} + \frac{1}{25}e^{\frac{34}{5}} + \frac{3}{25}e^{\frac{32}{5}} + \frac{1}{50}e^{7}$$

La Fig. 5.48 muestra la solución de la Regla Trapezoidal gráficamente usando 50 subintervalos, cuyas instrucciones Maple se dan enseguida. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 943.3569036 resultado un tanto cercano al esperado.

> gráfica:=ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = trapezoid, output = plot);

gráfica := *PLOT*(...)

> ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);



An approximation of $\int_1^3 f(y)\,dy$ using trapezoid rule, where

$$f(y) = \frac{1}{5}e^{y} + \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{2+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{1}{5}e^{4+y}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 943.3569036. Number of subintervals used: 50.

Fig. 5.48 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_1^3\int_0^4 e^{x+y}\,dxdy$ con la Regla Trapezoidal.

Regla de Boole

```
> with(Student[Calculus1]):
> xAxis:=ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = boole);
```

$$xAxis := \frac{4}{75} e^{\frac{19}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{39}{10}+y} + \frac{7}{225} e^{4+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{17}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{7}{2}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{37}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{3+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{31}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{33}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{13}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{27}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{29}{10}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{21}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{11}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{23}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{5}{2}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{17}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{9}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{19}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{2+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{13}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{7}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{3}{2}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{9}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{1+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{11}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{1}{2}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{3}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{7}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{7}{225} e^{y} + \frac{32}{225} e^{\frac{1}{10}+y} + \frac{4}{75} e^{\frac{1}{5}+y} + \frac{32}{225} e^{\frac{3}{10}+y} + \frac{14}{225} e^{\frac{2}{5}+y}$$

> yAxis:=ApproximateInt(xAxis,y=1..3, method = boole);

$$Axis := \frac{49}{101250} e^{7} + \frac{112}{50625} e^{\frac{139}{20}} + \frac{154}{50625} e^{\frac{69}{10}} + \frac{208}{16875} e^{\frac{137}{20}} + \frac{283}{50625} e^{\frac{34}{5}} + \frac{272}{16875} e^{\frac{27}{4}} + \frac{2}{225} e^{\frac{67}{10}} + \frac{1328}{50625} e^{\frac{133}{20}} + \frac{566}{50625} e^{\frac{33}{5}} + \frac{1552}{50625} e^{\frac{131}{20}} + \frac{758}{50625} e^{\frac{13}{2}} + \frac{688}{16875} e^{\frac{129}{20}} + \frac{283}{16875} e^{\frac{32}{5}} + \frac{752}{16875} e^{\frac{127}{20}}$$

$$+\frac{1054}{50625}e^{\frac{63}{10}}+\frac{2768}{50625}e^{\frac{25}{4}}+\frac{1132}{50625}e^{\frac{31}{5}}+\frac{2992}{50625}e^{\frac{123}{20}}$$
$$+\frac{454}{16875}e^{\frac{61}{10}}+\frac{1168}{16875}e^{\frac{121}{20}}+\frac{283}{10125}e^{6}+\frac{1232}{16875}e^{\frac{119}{20}}$$
$$+\frac{1658}{50625}e^{\frac{59}{10}}+\frac{4208}{50625}e^{\frac{117}{20}}+\frac{566}{16875}e^{\frac{29}{5}}+\frac{4432}{50625}e^{\frac{23}{4}}$$
$$+\frac{1966}{50625}e^{\frac{57}{10}}+\frac{1648}{16875}e^{\frac{113}{20}}$$

$$+\frac{1981}{50625}e^{\frac{28}{5}}+\frac{1712}{16875}e^{\frac{111}{20}}+\frac{754}{16875}e^{\frac{11}{2}}+\frac{5648}{50625}e^{\frac{109}{20}}$$
$$+\frac{2264}{50625}e^{\frac{27}{5}}+\frac{5872}{50625}e^{\frac{107}{20}}+\frac{514}{10125}e^{\frac{53}{10}}+\frac{2128}{16875}e^{\frac{21}{4}}$$
$$+\frac{283}{5625}e^{\frac{26}{5}}+\frac{2192}{16875}e^{\frac{103}{20}}+\frac{752}{16875}e^{\frac{33}{20}}+\frac{2768}{50625}e^{\frac{7}{4}}$$
$$+\frac{2992}{50625}e^{\frac{37}{20}}+\frac{112}{50625}e^{\frac{21}{20}}$$

$$+\frac{208}{16875}e^{\frac{23}{20}}+\frac{272}{16875}e^{\frac{5}{4}}+\frac{1328}{50625}e^{\frac{27}{20}}+\frac{1552}{50625}e^{\frac{29}{20}}$$
$$+\frac{2866}{50625}e^{\frac{51}{10}}+\frac{32}{225}e^{\frac{17}{4}}+\frac{32}{225}e^{\frac{87}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{73}{20}}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{15}{4}}+\frac{32}{225}e^{\frac{77}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{79}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{63}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{13}{4}}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{67}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{69}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{71}{20}}$$

$$+\frac{2128}{16875}e^{\frac{11}{4}}+\frac{2192}{16875}e^{\frac{57}{20}}+\frac{7088}{50625}e^{\frac{59}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{61}{20}}$$
$$+\frac{1648}{16875}e^{\frac{47}{20}}+\frac{1712}{16875}e^{\frac{49}{20}}+\frac{5648}{50625}e^{\frac{51}{20}}+\frac{5872}{50625}e^{\frac{53}{20}}$$
$$+\frac{1168}{16875}e^{\frac{39}{20}}+\frac{1232}{16875}e^{\frac{41}{20}}+\frac{4208}{50625}e^{\frac{43}{20}}+\frac{4432}{50625}e^{\frac{9}{4}}$$
$$+\frac{688}{16875}e^{\frac{31}{20}}+\frac{283}{16875}e^{\frac{8}{5}}$$

$$+\frac{1054}{50625}e^{\frac{17}{10}}+\frac{1132}{50625}e^{\frac{9}{5}}+\frac{49}{101250}e+\frac{154}{50625}e^{\frac{11}{10}}$$
$$+\frac{283}{50625}e^{\frac{6}{5}}+\frac{2}{225}e^{\frac{13}{10}}+\frac{566}{50625}e^{\frac{7}{5}}+\frac{32}{225}e^{\frac{97}{20}}$$

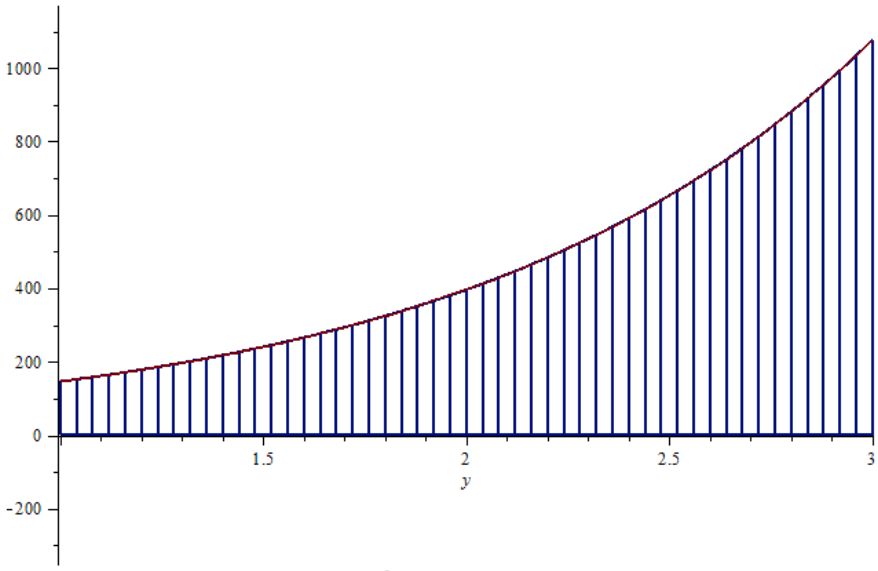
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{99}{20}}+\frac{7088}{50625}e^{\frac{101}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{89}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{91}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{93}{20}}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{19}{4}}+\frac{32}{225}e^{\frac{81}{20}}+\frac{32}{225}e^{\frac{83}{20}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{41}{10}}$$
$$+\frac{566}{10125}e^{\frac{21}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{43}{10}}+\frac{566}{10125}e^{\frac{18}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{37}{10}}$$
$$+\frac{566}{10125}e^{\frac{19}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{39}{10}}$$

$$+\frac{604}{10125}e^{\frac{31}{10}}+\frac{566}{10125}e^{\frac{16}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{33}{10}}+\frac{566}{10125}e^{\frac{17}{5}}$$
$$+\frac{604}{10125}e^{\frac{7}{2}}+\frac{514}{10125}e^{\frac{27}{10}}+\frac{283}{5625}e^{\frac{14}{5}}+\frac{2866}{50625}e^{\frac{29}{10}}$$
$$+\frac{5611}{101250}e^{3}+\frac{1966}{50625}e^{\frac{23}{10}}+\frac{1981}{50625}e^{\frac{12}{5}}+\frac{754}{16875}e^{\frac{5}{2}}$$
$$+\frac{2264}{50625}e^{\frac{13}{5}}+\frac{454}{16875}e^{\frac{19}{10}}+\frac{283}{10125}e^{2}$$

$$+\frac{1658}{50625}e^{\frac{21}{10}}+\frac{566}{16875}e^{\frac{11}{5}}+\frac{758}{50625}e^{\frac{3}{2}}+\frac{566}{10125}e^{\frac{24}{5}}$$
$$+\frac{604}{10125}e^{\frac{49}{10}}+\frac{5611}{101250}e^{5}+\frac{566}{10125}e^{\frac{22}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{9}{2}}$$
$$+\frac{566}{10125}e^{\frac{23}{5}}+\frac{604}{10125}e^{\frac{47}{10}}+\frac{566}{10125}e^{4}$$

La Fig. 5.49 muestra la solución de la Regla de Boole gráficamente usando 50 subintervalos, cuyas instrucciones Maple se dan enseguida. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 930.8527462 muy cercano al resultado esperado.

```
> ApproximateInt(xAxis,y=1..3, method = boole, output = plot, partition = 50);
```



An approximation of $\int_1^3 f(y)\,dy$ using Boole's rule, where

$$f(y) = \frac{4}{75}e^{\frac{19}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{39}{10}+y} + \frac{7}{225}e^{4+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{17}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{7}{2}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{37}{10}+y}$$
$$+ \frac{4}{75}e^{3+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{31}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{33}{10}+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{13}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{27}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{14}{5}+y}$$
$$+ \frac{32}{225}e^{\frac{29}{10}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{21}{10}+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{11}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{23}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{5}{2}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{17}{10}+y}$$
$$+ \frac{4}{75}e^{\frac{9}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{19}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{2+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{13}{10}+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{7}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{3}{2}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{8}{5}+y}$$
$$+ \frac{32}{225}e^{\frac{9}{10}+y} + \frac{4}{75}e^{1+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{11}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{1}{2}+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{3}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{7}{10}+y}$$
$$+ \frac{14}{225}e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{7}{225}e^{y} + \frac{32}{225}e^{\frac{1}{10}+y} + \frac{4}{75}e^{\frac{1}{5}+y} + \frac{32}{225}e^{\frac{3}{10}+y} + \frac{14}{225}e^{\frac{2}{5}+y}$$

and the partition is uniform. The approximate value of the integral is 930.8527462. Number of subintervals used: 50.

Fig. 5.49 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_1^3\int_0^4 e^{x+y}dxdy$ con la Regla de Boole.

Cálculo Multivariado

> Student[MultivariateCalculus][ApproximateInt] - return the approximate integral of a bivariate function

```
> MultivariateCalculus
> with(Student[MultivariateCalculus]):
> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4,y=1..3);
```

900.4705167

La Fig. 5.50 muestra la solución de la Regla de Boole gráficamente usando 50 subintervalos, cuyas instrucciones Maple se dan enseguida. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 930.85, cercano al resultado esperado.

```
> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4,y=1..3, output = animation, partition = [6,6], frames=2..7);
```

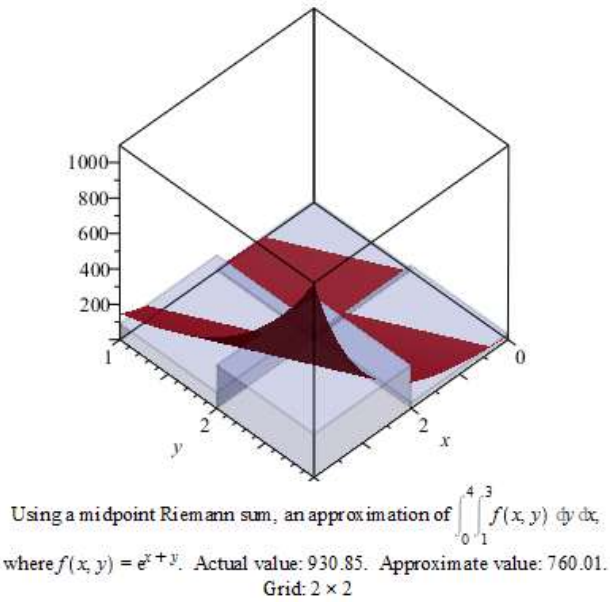


Fig. 5.50 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_1^0 \int_4^3 e^{x+y}\, dxdy$ con cálculo multivariado que devuelve la integral aproximada de una función bivariada.

Formula de Newton-Cotes

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = newtoncotes[1]);
```

$$\frac{1}{5}e^{y} + \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{4}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{6}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{8}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{2+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{12}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{14}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{16}{5}+y} + \frac{2}{5}e^{\frac{18}{5}+y} + \frac{1}{5}e^{4+y}$$

```
> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = newtoncotes[2]);
```

$$\frac{4}{15}e^{\frac{1}{5}+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{16}{5}+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{18}{5}+y}+\frac{1}{15}e^{4+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{8}{5}+y}$$
$$+\frac{2}{15}e^{2+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{12}{5}+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{14}{5}+y}+\frac{1}{15}e^{y}$$
$$+\frac{2}{15}e^{\frac{2}{5}+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{4}{5}+y}+\frac{2}{15}e^{\frac{6}{5}+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{17}{5}+y}$$
$$+\frac{4}{15}e^{\frac{19}{5}+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{9}{5}+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{11}{5}+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{13}{5}+y}$$
$$+\frac{4}{15}e^{3+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{3}{5}+y}+\frac{4}{15}e^{1+y}+\frac{4}{15}e^{\frac{7}{5}+y}$$

> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = newtoncotes[3]);

$$\frac{1}{10}e^{\frac{16}{5}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{18}{5}+y}+\frac{1}{20}e^{4+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{8}{5}+y}+\frac{1}{10}e^{2+y}$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{12}{5}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{14}{5}+y}+\frac{1}{20}e^{y}+\frac{1}{10}e^{\frac{2}{5}+y}$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{4}{5}+y}+\frac{1}{10}e^{\frac{6}{5}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{58}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{46}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{10}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{52}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{56}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{38}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{8}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{44}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{26}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{28}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{32}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{34}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{14}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{16}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{22}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{4}{15}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{8}{15}+y}$$
$$+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{3}+y}+\frac{3}{20}e^{\frac{2}{15}+y}$$

> ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = newtoncotes[4]);

$$\frac{4}{75}e^{\frac{1}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{16}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{18}{5}+y}+\frac{7}{225}e^{4+y}$$
$$+\frac{14}{225}e^{\frac{8}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{2+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{12}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{14}{5}+y}$$
$$+\frac{7}{225}e^{y}+\frac{14}{225}e^{\frac{2}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{4}{5}+y}+\frac{14}{225}e^{\frac{6}{5}+y}$$

$$+\frac{32}{225}e^{\frac{39}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{33}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{7}{2}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{37}{10}+y}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{5}{2}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{27}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{29}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{31}{10}+y}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{19}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{21}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{23}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{13}{10}+y}$$

$$+\frac{32}{225}e^{\frac{3}{2}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{17}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{7}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{9}{10}+y}$$
$$+\frac{32}{225}e^{\frac{11}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{1}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{3}{10}+y}+\frac{32}{225}e^{\frac{1}{2}+y}$$
$$+\frac{4}{75}e^{\frac{17}{5}+y}+\frac{4}{75}e^{\frac{19}{5}+y}+\frac{4}{75}e^{\frac{9}{5}+y}+\frac{4}{75}e^{\frac{11}{5}+y}$$

$$+\frac{4}{75}e^{\frac{13}{5}+y}+\frac{4}{75}e^{3+y}+\frac{4}{75}e^{\frac{3}{5}+y}+\frac{4}{75}e^{1+y}+\frac{4}{75}e^{\frac{7}{5}+y}$$

> xAxis:=ApproximateInt(exp(x+y), x = 0 .. 4, method = newtoncotes[6]);

$$xAxis := \frac{68}{525}e^{\frac{1}{5}+y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{16}{5}+y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{18}{5}+y}$$
$$+\frac{41}{2100}e^{4+y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{8}{5}+y}+\frac{41}{1050}e^{2+y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{12}{5}+y}$$

$$+\frac{41}{1050}e^{\frac{14}{5}+y}+\frac{41}{2100}e^{y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{2}{5}+y}+\frac{41}{1050}e^{\frac{4}{5}+y}$$
$$+\frac{41}{1050}e^{\frac{6}{5}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{59}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{53}{15}+y}$$

$$+\frac{18}{175}e^{\frac{11}{3}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{47}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{49}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{37}{15}+y}$$
$$+\frac{18}{175}e^{\frac{41}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{43}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{29}{15}+y}$$

$$+\frac{18}{175}e^{\frac{31}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{7}{3}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{23}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{5}{3}+y}$$
$$+\frac{18}{175}e^{\frac{17}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{19}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{7}{15}+y}$$

$$+\frac{18}{175}e^{\frac{11}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{13}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{1}{15}+y}+\frac{18}{175}e^{\frac{1}{3}+y}$$
$$+\frac{9}{700}e^{\frac{58}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{46}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{10}{3}+y}$$

$$+\frac{9}{700}e^{\frac{52}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{56}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{38}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{8}{3}+y}$$
$$+\frac{9}{700}e^{\frac{44}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{26}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{28}{15}+y}$$

$$+\frac{9}{700}e^{\frac{32}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{34}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{14}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{16}{15}+y}$$
$$+\frac{9}{700}e^{\frac{4}{3}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{22}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{4}{15}+y}$$
$$+\frac{9}{700}e^{\frac{8}{15}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{2}{3}+y}+\frac{9}{700}e^{\frac{2}{15}+y}+\frac{68}{525}e^{\frac{17}{5}+y}$$
$$+\frac{68}{525}e^{\frac{19}{5}+y}+\frac{68}{525}e^{\frac{9}{5}+y}+\frac{68}{525}e^{\frac{11}{5}+y}$$
$$+\frac{68}{525}e^{\frac{13}{5}+y}+\frac{68}{525}e^{3+y}+\frac{68}{525}e^{\frac{3}{5}+y}+\frac{68}{525}e^{1+y}$$
$$+\frac{68}{525}e^{\frac{7}{5}+y}$$

La Fig. 5.51 muestra la solución de la fórmula de Newton-Cotes gráficamente (método Simpson) usando 50 subintervalos, cuyas instrucciones Maple se dan enseguida. Como se puede observar, el resultado gráfico es de 930.8527451 muy cercano al resultado esperado.

```
ApproximateInt(xAxis, y=1..3, method = simpson, output
= plot, partition = 50);
```

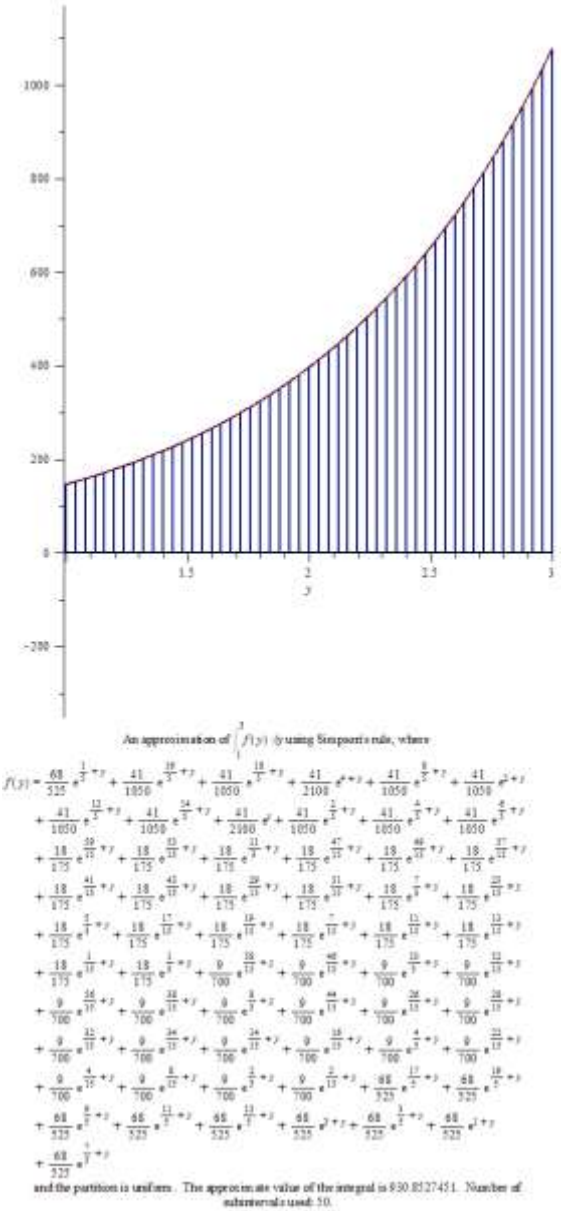


Fig. 5.51 Gráfica de la solución del área bajo la curva de la doble integral $\int_{1}^{3}\int_{0}^{4} e^{x+y}\,dxdy$ con la fórmula Newton-Cotes.

En la Tabla 5.5 Se presenta un resumen de los resultados obtenidos con los distintos métodos y el error relativo con respecto al método analítico, el cual, se calculó de la siguiente manera, en todos los casos

$$Error[relativo] = \frac{\text{abs}(930.8527438 - 930.8564065)}{930.8527438} \cdot 100$$

$$Error_{relativo} = 0.0003934779183$$

Tabla 5.5 Resultados de la doble integral por distintos métodos.

Método	Resultado de $\int_{1}^{0}\int_{4}^{3} e^{x+y}\,dxdy$	Error relativo en % de método numérico con respecto al resultado del método analítico.
Analítico	930.8527438	
Simpson 3/8	930.8527438	0.0003934779183
Simpson simple	1861.722992	100.0018804
Trapezoidal	943.3569036	1.343301599
Boole	930.8527462	$2.578281060\,10^{-7}$
Cálculo multivariado	930.85	0.0002947619822
Fórmula Newton-Cotes	930.8527451	$1.396568908\,10^{-7}$

De lo que podemos concluir que, los métodos más exactos en este caso, de acuerdo a los valores del error relativo son, por orden ascendente, del menor error al mayor error:

1. Fórmula Newton-Cotes
2. Boole
3. Cálculo multivariado
4. Simpson 3/8
5. Trapezoidal
6. Regla de Simpson

Siendo este último el que presenta un error relativo del 100%, muy distante con respecto a los demás métodos.

5.4 Diferenciación numérica

Para la derivación numérica, nos basaremos en la interpretación geométrica de la primera aproximación lineal de la derivada de la Fig. 5.6 en la solución de problemas. En diferenciación numérica la primera derivada de $f(x)$ es

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dp_1(x)}{dx} = \frac{\Delta f[x_0]}{h} = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \tag{5.10}$$

En la Fig. 5.52 se muestra la interpretación geométrica de la aproximación lineal de la primera derivada.

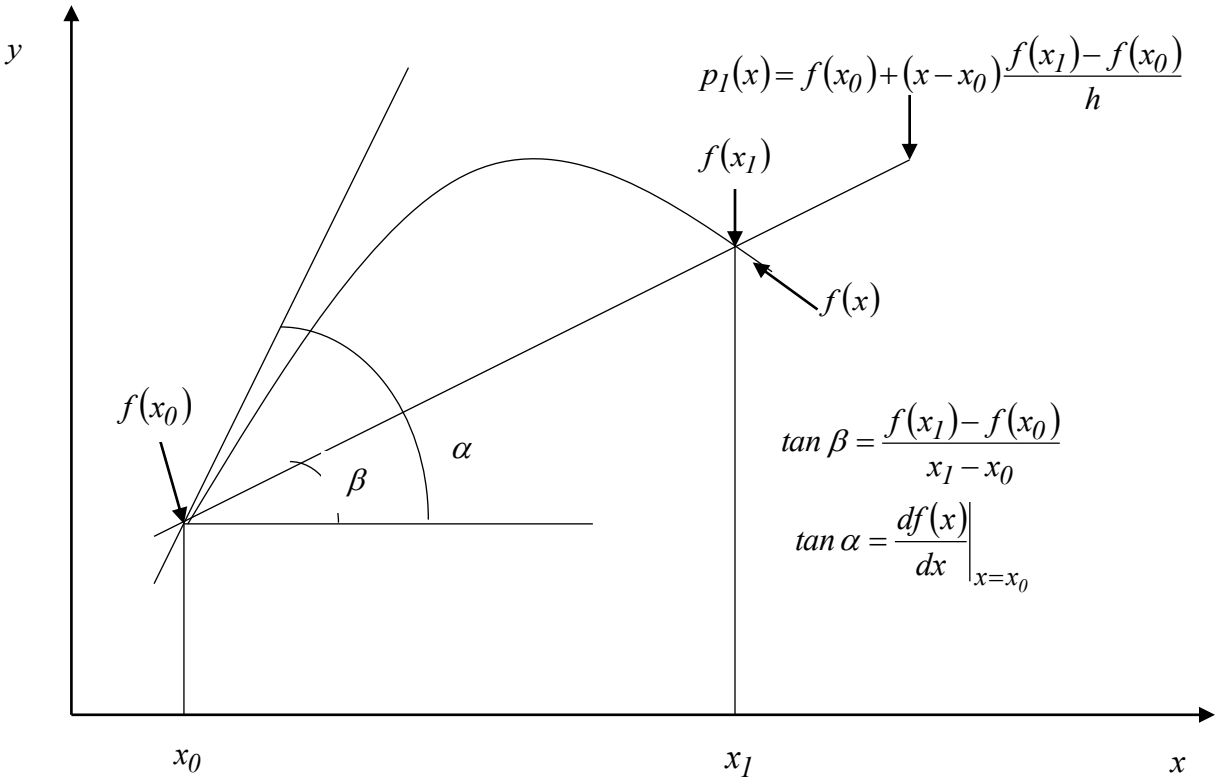


Fig. 5.52 Interpretación geométrica de aproximación lineal numérica de la primera derivada

Entonces, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{dp_1(x)}{dx} = 0$. En este contexto, cualquier derivada de orden superior de $f(x)$ quedará aproximada por cero, es decir,

$$p_n(x) \approx p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\frac{\Delta f[x_0]}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f[x_0]}{2! h^2} \tag{5.11}$$

Quedando la primera derivada de $f(x)$ como

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{dp_2(x)}{dx} = \frac{\Delta f[x_0]}{h} + (2x - x_0 - x_1)\frac{\Delta^2 f[x_0]}{2!\,h^2} \tag{5.12}$$

Si se desarrollan las diferencias hacia adelante se tiene que

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \left(\frac{2x - x_0 - x_1 - 2h}{2h^2}\right) f(x_0) + \left(\frac{2x_0 - 4x + 2x_1 + 2h}{2h^2}\right) f(x_1) + \left(\frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2}\right) f(x_2) \tag{5.13}$$

Si derivamos una vez más con respecto a x, obtenemos la segunda derivada

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2} f(x_0) - \frac{2}{h^2} f(x_1) + \frac{1}{h^2} f(x_2) \tag{5.14}$$

En diferenciación numérica, si se aproxima por mínimos cuadrados, se diferencia el polinomio que mejor ajuste a los datos.
El uso del software Maple en problemas involucrados con el método trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8 permite obtener gráficas de calidad como las que se muestran en las Figs. 5.7 y 5.8.

5.4.1 Problemas de Diferenciación numérica

En esta sección se presentan tres problemas para resolver mediante diferenciación numérica.

Problema 1
La ecuación de estado de Redlich-Kwong es

$$\left(P + \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V + b)}\right)(V - b) = RT$$

donde $a = 17.19344$ y $b = 0.02211413$ para el oxígeno molecular.
Si T = 373.15 K, se obtiene la Tabla 5.6 de valores

Tabla 5.6 Datos de presión y volumen para una temperatura de T = 373.15 K del oxígeno molecular.

Puntos	0	1	2	3
Presión (atm)	30.43853	27.68355	25.38623	23.44122
Volumen (L/gmol)	1.0	1.1	1.2	1.3

a) Calcule la dP/dV cuando V = 1.05 L utilizando las ecuaciones

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{P(V_1) - P(V_0)}{h}$$

$$h = V_1 - V_0$$

y

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{2V - V_0 - V_1 - 2h}{2h^2} \cdot P(V_0) + \frac{2V_0 - 4V + 2V_1 - 2h}{2h^2} \cdot P(V_1) + \frac{2V - V_0 - V_1}{2h^2} \cdot P(V_2)$$

y compárelo con el valor de la derivada analítica.

b) Proceda como en el inciso anterior, pero ahora aplique la ecuación 6.51 con $n = 1$ y $n = 2$.

Solución

a)

Método analítico

Partiendo de la ecuación de Redlich-Kwong, se despejará P, para, posteriormente, derivar con respecto a V, sustituir los valores de las variables y obtener el valor de la derivada analítica.

$$\left(P + \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)}\right)(V-b) = RT$$

$$\left(P + \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)}\right)\frac{(V-b)}{(V-b)} = \frac{RT}{(V-b)}$$

$$P + \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)} - \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)} = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)}$$

$$P = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)}$$

Ahora que tenemos P en función de V, realizaremos la derivada con respecto a V

$$\frac{\partial P}{\partial V} = RT \cdot -1(V-b)^{-1-1}(1) - a \cdot -1\left(T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)\right)^{-1-1}\left(T^{0.5} \cdot V(1) + (V+b) \cdot T^{0.5}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -RT \cdot (V-b)^{-2} + a \cdot \left(T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)\right)^{-2}\left(T^{0.5} \cdot V(1) + (V+b) \cdot T^{0.5}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} \cdot + \frac{a \cdot \left(T^{0.5} \cdot V + (V+b) \cdot T^{0.5}\right)}{\left(T^{0.5} \cdot V \cdot (V+b)\right)^2}$$

Ahora que ya tenemos la derivada parcial de P con respecto V sustituiremos valores y obtendremos el valor de la derivada.

$a = 17.19344$

$b = 0.02211413$

$T = 373.15\,\text{K}$

$R = 0.08205$

$V = 1.05$

$$\frac{\partial P}{\partial V}(1.05) = -\frac{0.08205 \cdot 373.15}{(1.05 - 0.02211413)^2} \cdot + \frac{17.19344 \cdot \left(373.15^{0.5} \cdot 1.05 + (1.05 + 0.02211413) \cdot 373.15^{0.5}\right)}{\left(373.15^{0.5} \cdot 1.05 \cdot (1.05 + 0.02211413)\right)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}(1.05) = -44.5657306 \cdot + \frac{704.8119153}{472.8725278}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}(1.05) = -28.97825564 \cdot +1.490490299$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}(1.05) = -27.48776534$$

Método numérico de diferenciación

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

La ecuación dada $\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{P(V_1) - P(V_0)}{h}$, con $h = V_1 - V_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$P(V_1) = 27.68355$$

$$P(V_0) = 30.43853$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{27.68355 - 30.43853}{0.1}$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx -27.5498 \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

Comparando con el valor analítico

$$Error\ \ relativo = \frac{\left|-27.48776534 - (-27.5498)\right|}{-27.48776534}(100) \approx -0.226\%$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{2x - x_0 - x_1 - 2h}{2h^2} \cdot f(x_0) + \frac{2x_0 - 4x + 2x_1 - 2h}{2h^2} \cdot f(x_1) + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} \cdot f(x_2)$$

La ecuación dada

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{2V - V_0 - V_1 - 2h}{2h^2} \cdot P(V_0) + \frac{2V_0 - 4V + 2V_1 - 2h}{2h^2} \cdot P(V_1) + \frac{2V - V_0 - V_1}{2h^2} \cdot P(V_2)$$

Los valores los sustituimos en esta ecuación

$$V = 1.05$$

$$V_0 = 1.0$$

$$V_1 = 1.1$$

$$V_2 = 1.2$$

$$h = 0.1$$

$$P(V_0) = 30.43853$$

$$P(V_1) = 27.68355$$

$$P(V_2) = 25.38623$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx \frac{2(1.05) - 1.0 - 1.1 - 2(0.1)}{2(0.1)^2} \cdot 30.43853 + \frac{2(1.0) - 4(1.05) + 2(1.1) + 2(0.1)}{2(0.1)^2} \cdot 27.68355$$

$$+ \frac{2(1.05) - 1.0 - 1.1}{2(0.1)^2} \cdot 25.38623$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx -10 \cdot 30.43853 + 10 \cdot 27.68355 + 0 \cdot 25.38623$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx -304.3853 + 276.8355$$

$$\frac{dP(V)}{dV} \approx -27.5498$$

Comparando con el valor analítico

$$Error\ relativo = \frac{\left|-27.48776534 - (-27.5498)\right|}{-27.48776534}(100) \approx -0.226\%$$

$-27.5498 \triangleleft Respuesta.$

Resolviendo con Maple, se tiene que

```
> (P + a/(T^0.5*V*(V+b)))*(V-b) = R*T
```

$$\left(P + \frac{a}{T^{0.5} V (V+b)}\right)(V-b) = R\,T$$

```
> solve((P + a/(T^0.5*V*(V+b)))*(V-b) = R*T, P)
```

$$\frac{R\,T^{3/2} V^2 + R\,T^{3/2} V b - 1.\,a\,V + a\,b}{\sqrt{T}\,V (V+b)\,(V-1.\,b)}$$

```
> P := (R*T^(3/2)*V^2 + R*T^(3/2)*V*b - 1.*a*V + a*b)/(sqrt(T)*V*(V+b)*(V-1.*b))
```

$$P := \frac{R\,T^{3/2} V^2 + R\,T^{3/2} V b - 1.\,a\,V + a\,b}{\sqrt{T}\,V (V+b)\,(V-1.\,b)}$$

```
> Diff(P, V) = diff(P, V)
```

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)}\right)$$
$$=\frac{2\,R\,T^{3/2}\,V+R\,T^{3/2}\,b-1.a}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V^2\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)^2\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)^2}$$

> $$\frac{dP}{dV}=\frac{2\,R\,T^{3/2}\,V+R\,T^{3/2}\,b-1.a}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V^2\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)^2\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)^2}$$

> $a := 17.19344$:

> $b := 0.02211413$:

> $T := 373.15$:

> $R := 0.08205$:

> $V := 1.05$:

> $$\frac{dP}{dV}=\frac{2\,R\,T^{3/2}\,V+R\,T^{3/2}\,b-1.a}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V^2\,(V+b)\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)^2\,(V-1.b)}$$
$$-\frac{R\,T^{3/2}\,V^2+R\,T^{3/2}\,V\,b-1.a\,V+a\,b}{\sqrt{T}\,V\,(V+b)\,(V-1.b)^2}$$

$\frac{dP}{dV} = -27.48776534$ ◁ *Respuesta.* l.q.q.d.

Problema 2

Encuentre la primera derivada numérica de xe^x en el punto $x = 1$, usando un polinomio de aproximación de segundo grado. Estime el error cometido.

Solución

La derivada de la función dada es

```
> d/dx (x·e^x)
e^x + x e^x
> DEC := e^x + x e^x
DEC := e^x + x e^x
> EC := xe^x
EC := x e^x
```

Las instrucciones de Maple para obtener las curvas de la función dada y su derivada de la Fig. 5.53 son:

```
> with(plots) :
> EC := plot(EC, x = 0 ..2, y = 0 ..10, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Fuchsia");

> DEC := plot(DEC, x = 0 ..2, y = 0 ..10, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Black");

> display( {EC, DEC}, axes = boxed, title = Funcion y Derivada, labeldirections = ["horizontal",
    "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["x", "y"], size = [1300,
    800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);
```

Para aproximar a un polinomio de segundo grado, evaluamos la derivada en 5 puntos con ello aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener la ecuación del polinomio de aproximación.

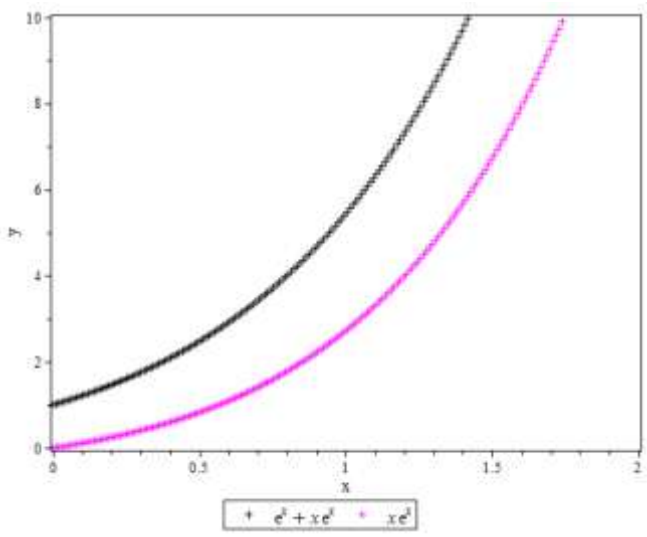


Fig. 5.53 Gráfica de la función y su derivada.

```
> f := x→e^x + x e^x
f := x→e^x + x e^x
> x = f(0)
x = 1
> x = f(.5)
x = 2.473081906
> x = f(1)
x = 2 e
> x = f(1.5)
x = 11.20422268
> x = f(2)
x = 3 e^2
```

Vaciamos estos valores a la Tabla 5.7

Tabla 5.7 Valores de la evaluación de la derivada en cinco puntos.

y	1	2.473081906	5.43656	11.20422268	22.1671683
x	0	0.5	1	1.5	2
Punto	1	2	3	4	5

Realizamos las sumatorias para introducirlos en la matriz para obtener el polinomio de aproximación.

> $x[1] := 0 : x[2] := .5 : x[3] := 1 : x[4] := 1.5 : x[5] := 2 :$

> $y[1] := 1 : y[2] := 2.473081906 : y[3] := 5.43656 : y[4] := 11.20422268 : y[5] := 22.1671683 :$

> $Sum(x[i], i = 1..5) = sum(x[i], i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 5.0$$

> $Sum(x[i]^2, i = 1..5) = sum(x[i]^2, i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 7.50$$

> $Sum(x[i]^3, i = 1..5) = sum(x[i]^3, i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 12.500$$

> $Sum(x[i]^4, i = 1..5) = sum(x[i]^4, i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 22.1250$$

> $Sum(y[i], i = 1..5) = sum(y[i], i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 42.28103289$$

> $Sum(y[i] \cdot x[i], i = 1..5) = sum(y[i] \cdot x[i], i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i = 67.81377157$$

> $Sum(y[i] \cdot x[i]^2, i = 1..5) = sum(y[i] \cdot x[i]^2, i = 1..5)$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 = 119.9330047$$

Incluimos los valores de las sumatorias realizadas en el orden en que se representa la siguiente matriz

$$A := \begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} x_i^4 & \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

Incluyendo los valores de las sumatorias, tenemos que

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 5.0 & 7.50 & 42.28103289 \\ 5.0 & 7.50 & 12.500 & 67.81377157 \\ 7.50 & 12.500 & 22.1250 & 119.9330047 \end{bmatrix}$$

Resolvemos la matriz A por el método de Gauss-Jordan y obtenemos el polinomio de grado 2

> $R := gaussjord(A);$

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.355098538 \\ 0 & 1 & 0 & -2.23485423 \\ 0 & 0 & 1 & 6.223974850 \end{bmatrix}$$

Polinomio de grado 2 obtenido

```
> PG2 := R[1, 4] + R[2, 4]·x + R[3, 4]·x^2
```

$$PG2 := x^2 R_{3,4} + x R_{2,4} + R_{1,4}$$

```
> PG2 := 6.223974850*x^2 - 2.23485423*x + 1.355098538
```

$$PG2 := 6.223974850 x^2 - 2.23485423 x + 1.355098538$$

El cuál es el polinomio de aproximación a la derivada $DEC := e^x + x e^x$

En la Fig. 5.54 Se muestran las curvas de la derivada de xe^x y el polinomio de grado 2 al que se le aproxima muy cercanamente. Las instrucciones para obtener la gráfica mediante el software Maple, son:

```
> with(plots) :
> PG2 := plot(PG2, x = 0 ..2, y = 0 ..10, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Gold");

> DEC := plot(DEC, x = 0 ..2, y = 0 ..10, axes = boxed, style = point, symbol = cross, color
    = "Black");

> display({PG2, DEC}, axes = boxed, title = Aproximacion a la derivada, labeldirections
    = ["horizontal", "vertical"], titlefont = ["TimesNewRoman", 12, BOLD], labels = ["x",
    "y"], size = [1300, 800], labelfont = ["TimesNewRoman", 12]);
```

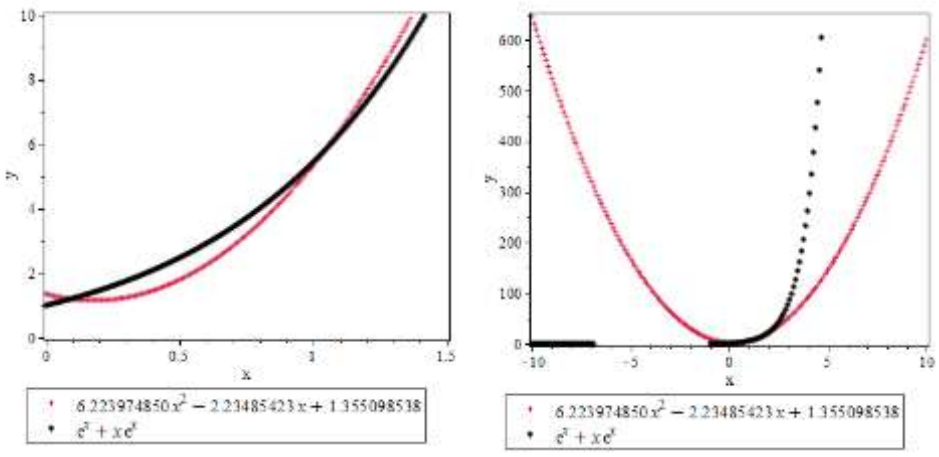


Fig. 5.54 Gráfica de la curva de la derivada de xe^x y el polinomio de grado 2 al que aproxima: a) puntos en los que mayormente aproxima y b) visión global del comportamiento de aproximación.

Obtención del polinomio de grado 2 a la derivada de xe^x, mediante el software Maple

```
> with(Statistics) :
> X := Vector([0, .5, 1, 1.5, 2]) :
> Y := Vector([1, 2.473081906, 5.43656, 11.20422268, 22.1671683]) :
> PolynomialFit(2, X, Y, x);
```

$$1.35509853297143 - 2.23485424748571 x + 6.22397486114285 x^2$$

Se obtiene el mismo polinomio que el que se obtuvo con el procedimiento de mínimos cuadrados, es una forma de comprobar de que esta correcto.

Para estimar el error cometido se usa la siguiente formula

$$\frac{df(x)}{dx}|\,x_{1=1} = \frac{1}{2h}[f(x_2)-f(x_0)]-\frac{h^2}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3}|_{\xi}\,;\xi E(x_0,x_2) \qquad (5.15)$$

En este caso $h=.5$, lo que se hace a continuación es evaluar la función original con tres valores, aunque para la formula solo son necesarios dos.

```
> f := x→x*exp(x)
f := x→x e^x
> f(.5)
0.8243606355
> f(1)
e
> f(1.5)
6.722533605
```

La tercera derivada de la función, es

```
> (d/dx)(x*exp(x))
e^x + x e^x
> (d/dx)(e^x + x*exp(x))
2 e^x + x e^x
> (d/dx)(2*exp(x) + x*exp(x))
3 e^x + x e^x
```

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación mencionada, tenemos $\frac{df(x)}{dx}|\,x_{1=1} = \frac{1}{2(.5)}[6.722533605-.8243606355]-\frac{(.5)^2}{6}(xe^x+3e^x)|_{\xi}$

$$\frac{df(x)}{dx}|\,x_{1=1} = \frac{1}{2(.5)}[5.87817297]-\frac{.25}{6}(xe^x+3e^x)|_{\xi}$$

$$\frac{df(x)}{dx}|\,x_{1=1} = 5.87817297-.041666666(xe^x+3e^x)|_{\xi}$$

5.87817297 es la aproximación a la primer derivada y xe^x+3e^x es la derivada de tercer orden de la función dada xe^x, como se desconoce ξ y xe^x+3e^x es una función creciente, podemos evaluar en $x=1.5$ obteniendo el valor máximo posible y por tanto, el valor máximo para el término del error, entonces

$$.041666666(1.5e^{1.5}+3e^{1.5})$$

$$.041666666(6.722533605+13.44506721)$$

$$.041666666(20.16760082)$$

$$.041666666(20.16760082)=0.840316687.$$

Problema 3
Dada la Tabla 5.8

Tabla 5.8 Base de datos del Problema 3.

	0	1	2	3	4
x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	0.24428	0.40496	0.59673	0.82436	1.09327
$f'(x)$		1.75482	2.08855	2.47308	

Calcular la derivada $f'(x)$ para $x = 0.3$, 0.4 y 0.5 con $n = 2$ y comparar con los valores analíticos dados en la tabla. Usar la fórmula de diferenciación numérica dada por la Ec. (5.8)

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{2x - x_0 - x_1 - 2h}{2h^2}\right) f(x_0) + \left(\frac{2x_0 + 4x + 2x + 2h}{2h^2}\right) f(x_1) + \left(\frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2}\right) f(x_2)$$

Solución
Iniciamos con los datos de la Tabla 5.6 dada

```
> x := 0.3 :
> x0 := 0.2 :
> x1 := 0.3 :
> h := 0.1 :
> f0 := 0.24428 :
> f1 := 0.40496 :
> f2 := 0.59673 :
```

Se sustituyen estos valores en la fórmula de diferenciación numérica dando como resultado: 1.762250000, para $x = 0.3$

```
> res := (2·x − x0 − x1 − 2·h)/(2·h^2) f0
      + (2·x0 − 4·x + 2·x1 + 2·h)/(2·h^2) f1 + (2·x − x0 − x1)/(2·h^2) f2 :
  evalf(res);
```

1.762250000

Para $x = 0.4$

```
> x := 0.4 :
> x0 := 0.3 :
> x1 := 0.4 :
> h := 0.1 :
> f0 := 0.40496 :
> f1 := 0.59673 :
> f2 := 0.82436 :
```

Dando como resultado 2.097000000 para $x = 0.4$

```
> res := ((2·x − x0 − x1 − 2·h)/(2·h^2)) f0
      + ((2·x0 − 4·x + 2·x1 + 2·h)/(2·h^2)) f1 + ((2·x − x0 − x1)/(2·h^2)) f2 :
  evalf(res);
```

2.097000000

Para $x = 0.5$ se tienen

```
> x := 0.5 :
> x0 := 0.4 :
> x1 := 0.5 :
> h := 0.1 :
> f0 := 0.59673 :
> f1 := 0.82436 :
> f2 := 1.09327 :
> res := ((2·x − x0 − x1 − 2·h)/(2·h^2)) f0
      + ((2·x0 − 4·x + 2·x1 + 2·h)/(2·h^2)) f1 + ((2·x − x0 − x1)/(2·h^2)) f2 :
  evalf(res);
```

2.482700000

Y sustituyendo en la función da el resultado de *2.482700000*

Comparamos los valores obtenidos con respecto a los valores analíticos dados en la Tabla 5.6. Los resultados obtenidos con este método numérico fueron que para x = 0.3 la primera derivada es 1.762250000, para x = 0.4 la primera derivada fue 2.097000000, para x = 0.5 la primera derivada fue 2.482700000. En cambio, en el problema se dan los datos obtenidos analíticamente, para x = 0.3 se tiene que la primera derivada es 1.75482, para x = 0.4 es 2.08855 y para x = 0.5 es 2.482700000, que se resumen en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9 Resultados de diferenciación numérica del Problema 3.

x	*0.3*	*0.4*	*0.5*
Resultados analíticos de Tabla 5.6	*1.75482*	*2.08855*	*2.47308*
Resultados con la Ec. (5.8)	*1.762250000*	*2.097000000*	*2.482700000*

CAPÍTULO 6

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

6.1 Objetivo Particular del Capítulo 6

6.2 Método de Euler

6.3 Método de Euler Modificado

6.4 Métodos de Runge-Kutta

6.5 Problemas del Capítulo 6

6.1 Objetivo Particular del Capítulo 6

Facilitar aplicaciones de Problemas de Valor Inicial que se presentan en el Área de Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Electrónica y afines, que se resuelven numéricamente mediante la forma privilegiada de métodos numéricos de un paso a través de algoritmos que elevan la capacidad para realizar cálculos complejos diseñados por matemáticos prolíficos que contribuyeron a soluciones numéricas de beneficio a la Humanidad, tales como Leonard Euler, Carle David Tolmé Runge y Martin Wilhelm Kutta.

En este capítulo se presenta una introducción de la solución de los métodos numéricos de Euler, Euler Modificado y Runge-Kutta a través de los algoritmos particulares de cada uno y su interpretación geométrica cuando aplica.

6.2 Método de Euler

Euler, Leonard
(1707-83), (pronunciado Oi-ler) matemático y físico nacido en Suiza, que trabajó principalmente en San Petersburgo, donde siguió a los Bernoulli, y en Berlín, por invitación de Federico el Grande. Era conocido por su capacidad para realizar cálculos mentales complejos y continuó con su trabajo incluso después de perder la vista. Fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, publicando más de 500 artículos y libros de texto sobre prácticamente todas las ramas de las matemáticas (otros 350 han aparecido póstumamente). Sus contribuciones más significativas fueron a la geometría analítica, el cálculo y la trigonometría y, por lo tanto, a la unificación y sistematización de todas las matemáticas.

El Método de Euler para resolver Ecuaciones Diferenciales del Problema del Valor Inicial, PVI

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\\ y(x_f)=?\end{cases}\quad\text{donde,}\quad\begin{aligned}x_1&=x_0+h\\ x_2&=x_1+h\\ x_3&=x_2+h\\ x_4&=x_3+h\\ x_5&=x_4+h\\ &\vdots\end{aligned}\tag{6.1}$$

se basa en dividir el intervalo que va de x_0 a x_f en n subintervalos de ancho h, es decir

$$h=\frac{x_f-x_0}{n}\tag{6.2}$$

El método se fundamenta en la interpretación geométrica que implica que la condición

inicial $y(x_0)=y_0$ representa el punto $P_0=(x_0,y_0)$ por donde pasa la curva solución de la Ec. (6.1). Con ese punto P_0 se evalúa la primera derivada de $F(x)$ en ese punto, como $F'(x)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_0}=f(x_0,y_0)$. Con esta información trazamos una recta que pasa por P_0 con pendiente $f(x_0,y_0)$, recta que aproxima $F(x)$ en la vecindad de x_0, como en la Fig. 6.1.

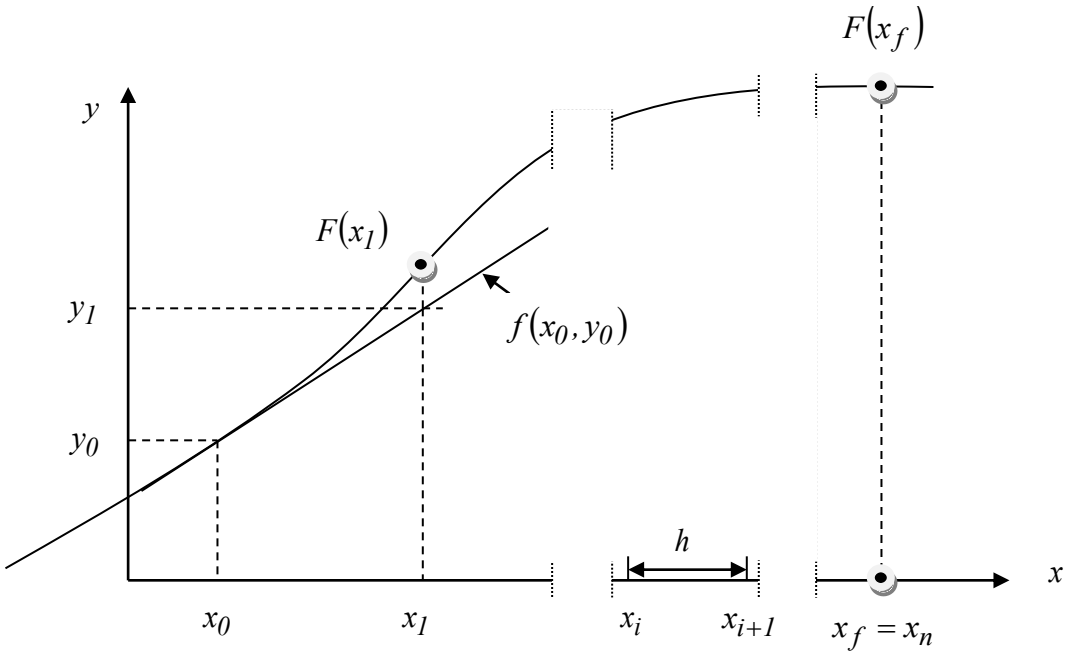


Fig. 6.1 Interpretación geométrica del método de Euler.

El valor de y_1 sirve para aproximar $F'(x)$ en el punto $P(x_1,y_1)$. El procedimiento de la sucesión es

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0,y_0)\\
y_2 &= y_1 + hf(x_1,y_1)\\
y_3 &= y_2 + hf(x_2,y_2)\\
y_4 &= y_3 + hf(x_3,y_3)\\
y_5 &= y_4 + hf(x_4,y_4)\\
&\vdots\\
y_{i+1} &= y_i + hf(x_i,y_i)\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1},y_{n-1})
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Con este algoritmo somos capaces de aproximar la curva $y=F(x)$ mediante una serie de

segmentos de línea recta, como se muestra en la Fig. 6.2.

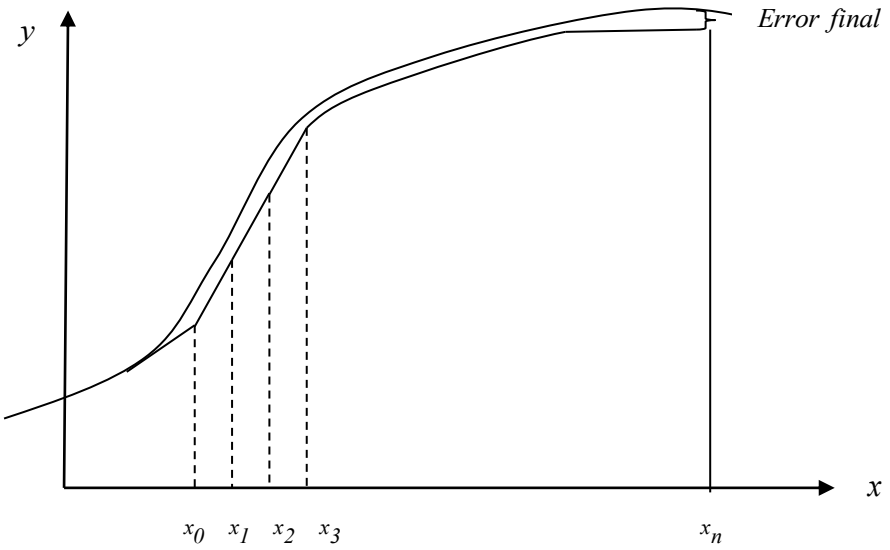


Fig. 6.2 Ilustración geométrica de iteraciones del método de Euler.

Ejemplo 1

Un tanque cilíndrico de fondo plano con un diámetro de 1.5 m (Fig. 6.3), contiene un líquido de densidad $\rho = 1.5\, kg/l$ a una altura a de 3 m. Determinar la altura del líquido dentro del tanque 3 minutos después de que se abre completamente la válvula de salida, la cual da un gasto de $0.6A\sqrt{2ga}\ m^3/s$, donde A es el área seccional del tubo de salida y es $78.5\times10^{-4}\ m^2$ y $g = 9.81\, m/s^2$.

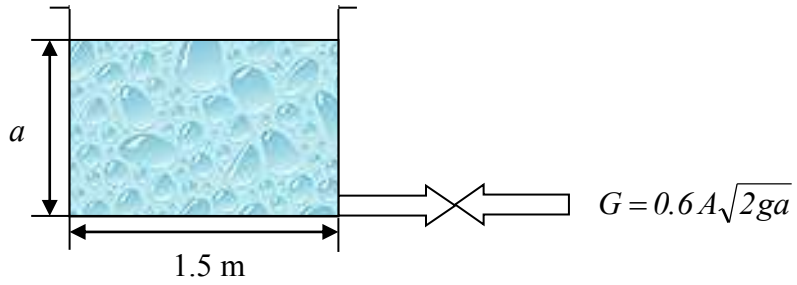


Fig. 6.3 Vaciado del tanque cilíndrico de fondo plano del Ejemplo 1

Solución

Hacemos un balance de materia:

$$\begin{array}{cccc} Acumulación & = & Entrada & - & Salida \\ \dfrac{dV_\rho}{dt} & = & 0 & - & 0.6A\sqrt{2ga} \end{array}$$

Donde,

$$V_\rho = \frac{\pi}{4}d^2 a = \frac{\pi}{4}(1.5\,m)^2 a$$

$$\therefore \frac{dV_\rho}{dt} = \frac{\pi}{4}(1.5\,m)^2 \frac{da}{dt} = -0.6A\sqrt{2ga}$$

Despejando la derivada, se tiene que

$$\frac{da}{dt} = \frac{-4(0.6A)\sqrt{2ga}}{\pi(1.5\,m)^2} = -0.0026653\sqrt{2ga}$$

Iniciamos en el tiempo cero al abrir la válvula y se desea conocer la altura a un tiempo de 180 s, por lo que el Problema del Valor Inicial es:

$$PVI\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -0.0026653\sqrt{2ga} \\ a(0) = 3\,m \\ a(180) = ? \end{cases}$$

Usando el método de Euler con $h = 30\,s$, el cual es menos exacto que el método de Euler Modificado y este a su vez, es menos exacto que el método de Runge-Kutta, se realiza el siguiente procedimiento, cuyo resultado podemos observarlo en la Tabla 6.1 al final. Observe que se comparan los valores de las iteraciones con el método de Runge-Kutta que veremos más adelante.

$$f(t_i, a_i) = -0.0026653\sqrt{2ga}$$

1ª Iteración

$f(t_i, a_i) = -0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g\,a_i}$

$i := 0, \quad t_0 = 0, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_0 := 3$ > $t[i+1] := t[i] + h$

$t_1 := 30$

> $f(t[i], a[i]) := evalf(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]})$

$f(0, 3) := -0.02044825386$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_1 := 2.386552384$

2ª Iteración

$i := 1, \quad t_1 = 30, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_1 := 2.386552384$

> $t[i+1] := t[i] + h$

$t_2 := 60$

> $f(t[i], a[i]) := evalf(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]})$

$f(30, 2.386552384) := -0.01823816274$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_2 := 1.839407502$

3ª Iteración

$i := 2, \quad t_2 = 60, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_2 := 1.839407502$

> $t[i+1] := t[i] + h$

$t_3 := 90$

> $f(t[i], a[i]) := evalf\left(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]}\right)$

$f(60, 1.839407502) := -0.01601159430$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_3 := 1.359059673$

4ª Iteración

$i := 3, \quad t_3 = 90, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_3 := 1.359059673$

> $t[i+1] := t[i] + h$

$t_4 := 120$

> $f(t[i], a[i]) := evalf\left(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]}\right)$

$f(90, 1.359059673) := -0.01376305558$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_4 := 0.9461680056$

5ª Iteración

$i := 4, \quad t_4 = 120, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_4 := 0.9461680056$

> $t[i+1] := t[i] + h$

$t_5 := 150$

> $f(t[i], a[i]) := evalf\left(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]}\right)$

$f(120, 0.9461680056) := -0.01148364424$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_5 := 0.6016586784$

6ª Iteración

$i := 5, \quad t_5 = 150, \quad h := 30, \quad g := 9.81, \quad a_5 := 0.6016586784$

> $t[i+1] := t[i] + h$

$t_6 := 180$

> $f(t[i], a[i]) := evalf\left(-0.0026653\sqrt{2}\sqrt{g \cdot a[i]}\right)$

$f(150, 0.6016586784) := -0.009157368552$

> $a[i+1] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$a_6 := 0.3269376218$

$a_6 := 0.3269376218$

Tabla 6.1 Resultados del Problema 6.1 del vaciado de un tanque cilíndrico

Tiempo, s	0	30	60	90	120	150	180
a, m	3	2.3866	1.8394	1.3591	0.9462	0.6117	0.3269
rkf45	3	2.4179	1.8985	1.4419	1.0480	0.7168	0.4483

6.3 Método de Euler Modificado

Algoritmo de Euler Modificado
n =Número de subintervalos:
1ª Iteración

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}$$

Paso de predicción

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{6.4}$$

Segunda etapa
Yo obtenida $\bar{y}_{i+1}$ se calcula $f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$, la derivada en el punto $(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$, y se promedia con la derivada previa $f(x_i, y_i)$ para encontrar la derivada promedio

$$\frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \tag{6.5}$$

Debemos sustituir $f(x_i, y_i)$ con ese valor promedio en la ecuación de iteración de Euler, obteniendo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \tag{6.6}$$

Ejemplo
Se desea conocer el tiempo en el que el nivel del líquido adentro de un tanque esférico de 5 metros de radio que se muestra en la Fig. 6.4 pase de 4 metros a 3 metros. Se proporciona la velocidad de salida y el diámetro del orificio de 10 centímetros.

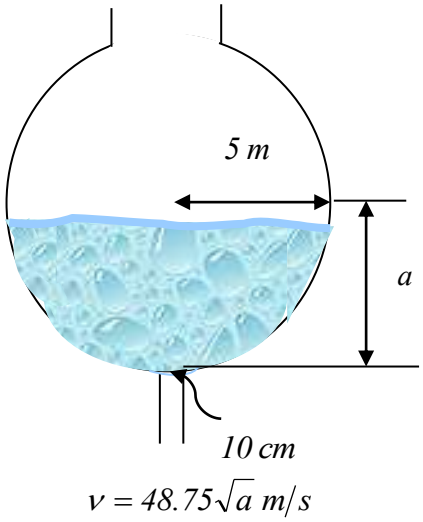


Fig. 6.4 Desaguado de un tanque esférico.

Solución

Se hace un balance de materia en el tanque de acumulación = entrada – salida; se determinan el volumen del líquido en el tanque y el área de orificio de salida y se introducen en el balance de materia

acumulación = entrada – salida

$$\rho\frac{dV}{dt}=0-Av\rho$$

Donde V es el volumen del líquido en el tanque, que en función de la altura está dado por

$$V=\pi\left(5a^2-\frac{a^3}{3}\right)m^3$$

A es el área del orificio de salida

$$A=\frac{\pi}{4}(0.1\,m)^2\ m^2$$

$$v=4.875\sqrt{a}\ m/s$$

Sustituimos volumen, área y velocidad en la ecuación de acumulación, obteniendo

$$\frac{d\left(\pi\left(5a^2-\frac{a^3}{3}\right)\right)}{dt}=\frac{\pi}{4}(0.1\,m)^2\times 48.95\sqrt{a}\ \left[m^3/s\right]$$

Derivando el primer término, se obtiene

$$10a\frac{da}{dt}-\frac{3a^2}{3}\frac{da}{dt}=\frac{(0.1)^2}{4}\times 48.95\sqrt{a}$$

Despejamos la derivada de la altura del fluido con respecto al tiempo, dada por

$$\frac{da}{dt}=\frac{-48.95(0.1)^2\sqrt{a}}{4\left(10a-a^2\right)}$$

Y con esto, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{da}{dt}=-\frac{0.122375\sqrt{a}}{\left(10a-a^2\right)}$$

El problema del valor inicial, PVI, es

$$\frac{da}{dt}=-\frac{0.122375\sqrt{a}}{\left(10a-a^2\right)}$$
$$a(0)=4\ m$$
$$a(?)=3\ m$$
$$h=10\ s$$

Lo resolvemos con el método de Euler modificado, con su algoritmo, y también mediante Maple.

Algoritmo del Método de Euler Modificado

> $x[f] := EndValue;\ x[0] := InitialValueX;\ y[0] :=$ InitialValueY;

$$x_f := EndValue$$

$$x_0 := InitialValueX$$

$$y_0 := InitialValueY$$

n: =número de subintervalos

Adaptamos el algoritmo de Euler modificado a la nomenclatura del problema

> x = t; y = a

$$x = t$$

$$y = a$$

> $i := 0$

$$i := 0$$

> $t_{i+1} = t_i + h$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

> $f(t[i], a[i]) = -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(t_i, a_i) = -\frac{0.122375\sqrt{a_i}}{10\,a_i - a_i^2}$$

> $a[(i+1)testada] = a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{(i+1)\ testada} = a_i + hf(t_i, a_i)$$

> $f(t[i+1], a[(i+1)testada]) = -\frac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - (a[(i+1)testada])^2}$

$$f(t_{i+1}, a_{(i+1)\ testada}) = -\frac{0.122375\sqrt{a_{(i+1)\ testada}}}{10\,a_{(i+1)\ testada} - a_{(i+1)\ testada}^2}$$

> $SecondStep = \frac{1}{2}(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada]))$

$$SecondStep = \frac{1}{2}f(t_i, a_i) + \frac{1}{2}f(t_{i+1}, a_{(i+1)\ testada})$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}h \cdot (f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada]))$

$$a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}h\left(f(t_i, a_i) + f(t_{i+1}, a_{(i+1)\ testada})\right)$$

1ª Iteración

> $i := 0; h := 10; t[i] := 0; a[0] := 4$

$$i := 0$$

$$h := 10$$

$$t_0 := 0$$

$$a_0 := 4$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_1 := 10$$

> $f(t[i], a[i]) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(0, 4) := -0.01019791667$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{testada} := 3.898020833$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(10, 3.898020833) := -0.01015780581$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01017786124$$

> $a_{i+1} = a_i + \dfrac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_1 = 3.898221388$$

2ª Iteración

> $i := 1; h := 10; t[i] := 10; a[i] := 3.898221388$

$$i := 1$$

$$h := 10$$

$$t_1 := 10$$

$$a_1 := 3.898221388$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_2 := 20$$

> $f(t[i], a[i]) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(10, 3.898221388) := -0.01015787838$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{2\ testada} := 3.796642604$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(20, 3.796642604) := -0.01012432419$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01014110128$$

> $a_{i+1} = a_i + \dfrac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_2 = 3.796810375$$

3ª Iteración

> $i := 2; h := 10; t[i] := 20; a[i] := 3.796810375$

$$i := 2$$

$$h := 10$$

$$t_2 := 20$$

$$a_2 := 3.796810375$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_3 := 30$$

> $f(t[i], a[i]) := -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(20, 3.796810375) := -0.01012437432$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{3\ testada} := 3.695566632$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\frac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10\cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(30, 3.695566632) := -0.01009732017$$

> $SecondStep = \frac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01011084724$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_3 = 3.695701903$$

4ª Iteración

> $i := 3; h := 10; t[i] := 30; a[i] := 3.695701903$

$$i := 3$$

$$h := 10$$

$$t_3 := 30$$

$$a_3 := 3.695701903$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_4 := 40$$

> $f(t[i], a[i]) := -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(30, 3.695701903) := -0.01009735203$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{4\ testada} := 3.594728383$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) :=$

$$-\frac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10\cdot a[(i+1)testada]-\left(a[(i+1)testada]\right)^2}$$

$$f(40, 3.594728383) := -0.01007678781$$

> $SecondStep = \frac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01008706992$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}h\cdot\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_4 = 3.594831204$$

5ª Iteración

> $i := 4; h := 10; t[i] := 40; a[i] := 3.594831204$

$$i := 4$$

$$h := 10$$

$$t_4 := 40$$

$$a_4 := 3.594831204$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_5 := 50$$

> $f(t[i], a[i]) := -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(40, 3.594831204) := -0.01007680546$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h\cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{5\ testada} := 3.494063149$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) :=$

$$-\frac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10\cdot a[(i+1)testada]-\left(a[(i+1)testada]\right)^2}$$

$$f(50, 3.494063149) := -0.01006276861$$

> $SecondStep = \frac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01006978704$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}h\cdot\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_5 = 3.494133334$$

6ª Iteración

> $i := 5; h := 10; t[i] := 50; a[i] := 3.494133334$

$$i := 5$$

$$h := 10$$

$$t_5 := 50$$

$$a_5 := 3.494133334$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_6 := 60$$

> $f(t[i], a[i]) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(50, 3.494133334) := -0.01006277610$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{6\ testada} := 3.393505573$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10\cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(60, 3.393505573) := -0.01005535363$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01005906486$$

> $a_{i+1} = a_i + \dfrac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_6 = 3.393542685$$

7ª Iteración

> $i := 6; h := 10; t[i] := 60; a[i] := 3.393542685$

$$i := 6$$

$$h := 10$$

$$t_6 := 60$$

$$a_6 := 3.393542685$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_7 := 70$$

> $f(t[i], a[i]) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(60, 3.393542685) := -0.01005535513$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{7\ testada} := 3.292989134$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10\cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(70, 3.292989134) := -0.01005468678$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01005502096$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}\, h \cdot (f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada]))$

$$a_7 = 3.292992475$$

8ª Iteración

> $i := 7; h := 10; t[i] := 70; a[i] := 3.292992475$

$$i := 7$$

$$h := 10$$

$$t_7 := 70$$

$$a_7 := 3.292992475$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_8 := 80$$

> $f(t[i], a[i]) := -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(70, 3.292992475) := -0.01005468669$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{8\ testada} := 3.192445608$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\frac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(80, 3.192445608) := -0.01006096948$$

> $SecondStep = \frac{1}{2}\,(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada]))$

$$SecondStep = -0.01005782808$$

> $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}\, h \cdot (f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada]))$

$$a_8 = 3.192414194$$

9ª Iteración

> $i := 8; h := 10; t[i] := 80; a[i] := 3.192414194$

$$i := 8$$

$$h := 10$$

$$t_8 := 80$$

$$a_8 := 3.192414194$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_9 := 90$$

> $f(t[i], a[i]) := -\frac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(80, 3.192414194) := -0.01006097256$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{9\ testada} := 3.091804468$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(90, 3.091804468) := -0.01007446687$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01006771972$$

> $a_{i+1} = a_i + \dfrac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_9 = 3.091736997$$

10ª Iteración

> $i := 9; h := 10; t[i] := 90; a[i] := 3.091736997$

$$i := 9$$

$$h := 10$$

$$t_9 := 90$$

$$a_9 := 3.091736997$$

> $t_{i+1} := t_i + h$

$$t_{10} := 100$$

> $f(t[i], a[i]) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[i]}}{10\,a[i] - (a[i])^2}$

$$f(90, 3.091736997) := -0.01007447840$$

> $a[(i+1)testada] := a[i] + h \cdot f(t[i], a[i])$

$$a_{10\ testada} := 2.990992213$$

> $f\left(t[i+1], a[(i+1)testada]\right) := -\dfrac{0.122375\sqrt{a[(i+1)testada]}}{10 \cdot a[(i+1)testada] - \left(a[(i+1)testada]\right)^2}$

$$f(100, 2.990992213) := -0.01009551600$$

> $SecondStep = \dfrac{1}{2}\left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$SecondStep = -0.01008499720$$

> $a_{i+1} = a_i + \dfrac{1}{2} h \cdot \left(f(t[i], a[i]) + f(t[i+1], a[(i+1)testada])\right)$

$$a_{10} = 2.990887025$$

En la Tabla 6.2 se muestran los resultados de las iteraciones.

Tabla 6.2 Resultados del vaciado de un tanque esférico

Tiempo, t (s)	Altura, a (m)
0	4
10	$a_1 := 3.898221388$
20	$a_2 = 3.796810375$
30	$a_3 = 3.695701903$
40	$a_4 = 3.594831204$
50	$a_5 = 3.494133334$
60	$a_6 = 3.393542685$
70	$a_7 = 3.292992475$
80	$a_8 = 3.192414194$
90	$a_9 = 3.091736997$
100	$a_{10} = 2.990887025$

A continuación, obtenernos el resultado de la solución del problema con los cálculos y la gráfica (Fig. 6.5) del software Maple

```
> diff(a(t),t) =-0.122375*sqrt(a(t))/(10*a(t)-a(t)^2)
```

$$\frac{d}{dt}a(t) = -\frac{0.122375\sqrt{a(t)}}{10\,a(t) - a(t)^2}$$

```
> deqn1 := { diff(a(t),t)=-0.122375*sqrt(a(t))/(10*a(t)-a(t)^2) };
```

$$deqn1 := \left\{\frac{d}{dt}a(t) = -\frac{0.122375\sqrt{a(t)}}{10\,a(t) - a(t)^2}\right\}$$

```
> init1 := { a(0)=4};
```

$$init1 := \{a(0) = 4\}$$

```
> dsol1 := dsolve(deqn1 union init1, numeric, method=rkf45,
            relerr=Float(1,-8), abserr=Float(1,-8),
            maxfun=0, output=procedurelist);
```

$$dsol1 := \text{proc}(x_rkf45) \ \ldots \ \text{end proc}$$

```
> dsol1(100);
```

$$[t = 100., a(t) = 2.99094286208625]$$

Problema de valor inicial de primer orden

```
> with(Student[NumericalAnalysis]):
> RungeKutta(diff(a(t),t)=-0.122375*sqrt(a(t))/(10*a(t)-a(t)^2), a(0)=4, t=100,
submethod=rk4);
2.991
> RungeKutta(diff(a(t),t)=-0.122375*sqrt(a(t))/(10*a(t)-a(t)^2), a(0)=4, t=100,
output=plot);
```

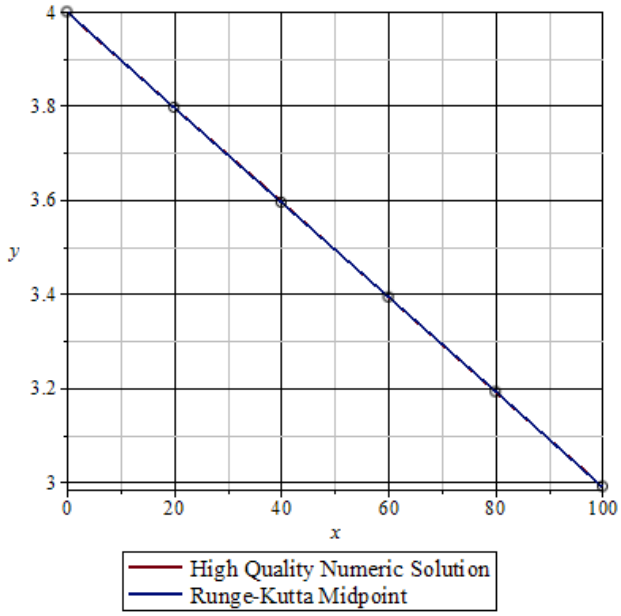


Fig. 6.5 Gráfica del vaciado de líquido de un tanque esférico del nivel de 4 m a 3 m.

6.4 Métodos de Runge-Kutta

Estos métodos se usan para dar solución a problemas numéricos de los matemáticos Runge (1885) y Kutta (1901) como lo son los Problemas del Valor Inicial, PVI, del tipo del de la Ec. (6.1) para resolver Ecuaciones Diferenciales.

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\\ y(x_f)=?\end{cases} \tag{6.1}$$

Estos métodos están ligados a la serie de Taylor para un número finito de términos para la obtención de su resultado. Veremos el caso más simple y desarrollaremos el procedimiento del caso general.

El **algoritmo de Runge-Kutta de segundo orden**, que coincide con los **primeros tres términos de la serie de Taylor** y que equivale a la expresión matemática del **método de Euler modificado con dos pasos compactados en uno**, se expresa matemáticamente como

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(k_0+k_1),\ k_0=f(x_i,y_i)\ \text{y}\ k_1=f(x_i+h,y_i+hk_0) \tag{6.7}$$

Este método de orden superior, presenta mayor exactitud en sus cálculos con respecto al

método de Euler. Se evalúa $f(x,y)$ dos veces en cada subintervalo mientras que en el método de Euler se evalúa solamente una vez.
El **método de Runge-Kutta de cuarto orden**, uno de los más usados de esta familia, se expresa como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned} \qquad (6.8)$$

El **método de Runge-Kutta de tercer orden** tiene como algoritmo

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_2 &= f(x_i, y_i) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i + hk_2 - hk_1) \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Ejemplo
Un problema típico es la solución de problemas que también se resuelven de manera analítica como es el caso de un tanque perfectamente agitado que contiene 400 litros de una salmuera en la cual están disueltos 25 kg de sal común (NaCl). El caudal de entrada al tanque es de 80 litros por minuto de una salmuera con 0.5 kg de sal por litro. El caudal de salida es igual que el caudal de entrada. Se pide calcular

a) La cantidad de sal que existe en el tanque al paso de 10 minutos.
b) La cantidad de sal en el tanque en un tiempo infinito.

Solución
a) Si se llaman x los kg de sal en el tanque después de t minutos, la acumulación de sal en el tanque está dada por dx/dt y por la expresión

$$\frac{dx}{dt} = \textit{masa de sal que entra - masa de sal que sale}$$

Los valores conocidos se sustituyen y se llega a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 80(0.5) - 80\left(\frac{x}{400}\right)$$

Y con la condición inicial de que hay 25 kg de sal al tiempo cero, da el siguiente problema del valor inicial

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=40-0.2x\\ x(0)=25\\ x(10)=?\\ x(\infty)=?\\ h=1\,min\end{cases}$$

Utilizamos el método de **Runge-Kutta de tercer orden** cuyo algoritmo está dado por la Ec. (6.9).

Solución Maple

a)

> deqn1 := { diff(x(t), t) = 40-.2*x(t) };

$$deqn1 := \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = 40 - 0.2x(t)\right\}$$

> 1a iteración

> $i := 0; h := 1$

$$i := 0$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 0; x[i] := 25$

$$t_0 := 0$$

$$x_0 := 25$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(0, 25)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2\cdot x[i]$

$$f(0, 25) := 35.0$$

>

$$k_1 := 35.0$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2\cdot\left(x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}, 42.50000000\right) := 31.50000000$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 31.50000000$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1]) := 40 - 0.2\cdot(x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1])$

$$f(1, 53.00000000) := 29.40000000$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1])$

$$k_3 := 29.40000000$$

> $x[i + 1] := x[i] + \frac{h}{6}\cdot(k[1] + 4\cdot k[2] + k[3])$

$$x_1 := 56.73333333$$

2a iteración

> $i := 1; h := 1$

$$i := 1$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 2; x[i] := 56.73333333$

$$t_1 := 2$$

$$x_1 := 56.73333333$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(2, 56.73333333)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(2, 56.73333333) := 28.65333333$$

> $x[i+1] = x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6} h \left(k_1 + 4 k_2 + k_3\right)$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 28.65333333$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{5}{2}, 71.05999999\right) := 25.78800000$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 25.78800000$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(3, 79.65599997) := 24.06880000$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 24.06880000$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_2 = 82.71235555$$

3a Iteración

> $i := 2; h := 1$

$$i := 2$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 3; x[i] := 82.71235555$

$$t_2 := 3$$

$$x_2 := 82.71235555$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(3, 82.71235555)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(3, 82.71235555) := 23.45752889$$

> $x[i+1] = x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_3 = 82.71235555 + \frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 23.45752889$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{7}{2}, 94.44111999\right) := 21.11177600$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 21.11177600$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(4, 101.4783787) := 19.70432427$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 19.70432427$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_3 := 103.9805151$$

4a Iteración

> $i := 3; h := 1$

$$i := 3$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 4; x[i] := 103.9805151$

$$t_3 := 4$$

$$x_3 := 103.9805151$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(4, 103.9805151)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(4, 103.9805151) := 19.20389698$$

> $x[i+1] = x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_4 = 103.9805151 + \frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 19.20389698$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{9}{2}, 113.5824636\right) := 17.28350728$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 17.28350728$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(5, 119.3436327) := 16.13127347$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 16.13127347$$

>

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_4 := 121.3920484$$

5a Iteración

> $i := 4; h := 1$

$$i := 4$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 5; x[i] := 121.3920484$

$$t_4 := 5$$

$$x_4 := 121.3920484$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(5, 121.3920484)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(5, 121.3920484) := 15.72159032$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 15.72159032$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{11}{2}, 129.2528436\right) := 14.14943129$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 14.14943129$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(6, 133.9693207) := 13.20613586$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 13.20613586$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_5 := 135.6462903$$

6a Iteración

> $i := 5; h := 1$

$$i := 5$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 6; x[i] := 135.6462903$

$$t_5 := 6$$

$$x_5 := 135.6462903$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(6, 135.6462903)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(6, 135.6462903) := 12.87074194$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 12.87074194$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{13}{2}, 142.0816613\right) := 11.58366775$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 11.58366775$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(7, 145.9428839) := 10.81142323$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 10.81142323$$

> $x[i + 1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_6 := 147.3157630$$

7a Iteración

> $i := 6; h := 1$

$$i := 6$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 7; x[i] := 147.3157630$

$$t_6 := 7$$

$$x_6 := 147.3157630$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(7, 147.3157630)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(7, 147.3157630) := 10.53684740$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 10.53684740$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{15}{2}, 152.5841867\right) := 9.483162660$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 9.483162660$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(8, 155.7452409) := 8.850951816$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 8.850951816$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_7 := 156.8691713$$

8a Iteración

> $i := 7; h := 1$

$$i := 7$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 8; x[i] := 156.8691713$

$$t_7 := 8$$

$$x_7 := 156.8691713$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(8, 156.8691713)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(8, 156.8691713) := 8.62616574$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 8.62616574$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{17}{2}, 161.1822542\right) := 7.763549166$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 7.763549166$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(9, 163.7701039) := 7.245979222$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 7.245979222$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6}\cdot(k[1] + 4\cdot k[2] + k[3])$

$$x_8 := 164.6902282$$

9 a Iteración

> $i := 8; h := 1$

$$i := 8$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 9; x[i] := 164.69022823$

$$t_8 := 9$$

$$x_8 := 164.69022823$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(9, 164.69022823)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2\cdot x[i]$

$$f(9, 164.69022823) := 7.06195436$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 7.06195436$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2\cdot\left(x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{19}{2}, 168.2212054\right) := 6.355758924$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 6.355758924$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1]) := 40 - 0.2\cdot(x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1])$

$$f(10, 170.3397916) := 5.932041662$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2\cdot h\cdot k[2] - h\cdot k[1])$

$$k_3 := 5.932041662$$

> $x[i+1] := x[i] + \frac{h}{6}\cdot(k[1] + 4\cdot k[2] + k[3])$

$$x_9 := 171.0930668$$

10a Iteración

> $i := 9; h := 1$

$$i := 9$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 10; x[i] := 171.0930668$

$$t_9 := 10$$

$$x_9 := 171.0930668$$

> $f(t[i], x[i])$

$$f(10, 171.0930668)$$

> $f(t[i], x[i]) := 40 - 0.2 \cdot x[i]$

$$f(10, 171.0930668) := 5.78138664$$

> $k[1] := f(t[i], x[i])$

$$k_1 := 5.78138664$$

> $f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right) := 40 - 0.2 \cdot \left(x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$f\left(\frac{21}{2}, 173.9837601\right) := 5.203247976$$

> $k[2] := f\left(t[i] + \frac{h}{2}, x[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$$k_2 := 5.203247976$$

> $f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1]) := 40 - 0.2 \cdot (x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$f(11, 175.7181762) := 4.856364778$$

> $k[3] := f(t[i] + h, x[i] + 2 \cdot h \cdot k[2] - h \cdot k[1])$

$$k_3 := 4.856364778$$

> $x[i + 1] := x[i] + \frac{h}{6} \cdot (k[1] + 4 \cdot k[2] + k[3])$

$$x_{10} := 176.3348574$$

> $x_{10} := 176.3348574$

> $x(10) = 176.3348574 \lhd Respuesta\ a)$

b)

Se realizaron 50 iteraciones incluidas las 10 anteriores para a), para obtener el resultado esperado hasta que la cantidad de sal en el tanque no cambia con el tiempo, o bien, hasta que alcance el régimen permanente. Las iteraciones son las mismas que las 10 primeras variando únicamente lo siguiente en cada iteración realizada

11a Iteración

> $i := 10; h := 1$

$$i := 10$$

$$h := 1$$

> $t[i] := 11; x[i] := 176.3348574$

El resumen se muestra en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3 Resultados de las últimas iteraciones del Ejemplo resuelto por el método de Runge-Kutta de tercer orden.

i	t_i	x_i	i	t_i	x_i
10	11	$x_{11} := 180.6261366$	31	32	$x_{32} := 199.7099550$
11	12	$x_{12} := 184.1392638$	32	33	$x_{33} := 199.7625498$
12	13	$x_{13} := 187.0153440$	33	34	$x_{34} := 199.8056074$
13	14	$x_{14} := 189.3698950$	34	35	$x_{35} := 199.8408573$
14	15	$x_{15} := 191.2974874$	35	36	$x_{36} := 199.8697152$
15	16	$x_{16} := 192.8755430$	36	37	$x_{37} := 199.8697152$
16	17	$x_{17} := 194.1674445$	37	38	$x_{38} := 199.8933402$
17	18	$x_{18} := 195.2250812$	38	39	$x_{39} := 199.9126812$
18	19	$x_{19} := 196.0909331$	39	40	$x_{40} := 199.9285150$
19	20	$x_{20} := 196.7997772$	40	41	$x_{41} := 199.9414776$
20	21	$x_{21} := 197.3800843$	41	42	$x_{42} := 199.9520897$
21	22	$x_{22} := 197.8551623$	42	43	$x_{43} := 199.9607774$
22	23	$x_{23} := 198.2440929$	43	44	$x_{44} := 199.9678898$
23	24	$x_{24} := 198.5624974$	44	45	$x_{45} := 199.9737124$
24	25	$x_{25} := 198.8231645$	45	46	$x_{46} := 199.9784792$
25	26	$x_{26} := 199.0365640$	46	47	$x_{47} := 199.9823816$
26 27 28	27 28 29	$x_{27} := 199.3542907$ . .	47	48	$x_{48} := 199.9855764$
29	30	$x_{30} := 199.5672359$	48	49	$x_{49} := 199.9881919$
30	31	$x_{31} := 199.6457105$	49	50	$x_{50} := 199.9903331$

6.5 Problemas del Capítulo 6

Problema 1
La aplicación de las leyes de Kirchhoff en un circuito cerrado da lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dI_1}{dt} = -4I_1 + 3I_2 + 6$$
$$\frac{dI_2}{dt} = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6$$

Si se tienen las condiciones iniciales
$I_1(0) = 0, \;\; I_2(0) = 0$

Calcule $I_1(3)$ e $I_2(3)$ con pasos de tiempo 0.05, 0.1, 0.5 y 1.0

Solución analítica
Se hizo uso de la nomenclatura $I_1 = x, \;\; I_2 = y$

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 3y + 6$$
$$\frac{dy}{dt} = -2.4x + 1.6y + 3.6$$
$$t_0 = 0, \;\; x(0) = 0, \;\; y(0) = 0$$

La solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es

$$I_1 = x = \frac{15}{8e^{\frac{2t}{5}}} - \frac{27}{8e^{2t}} + \frac{3}{2}$$
$$I_2 = y = \frac{9}{4e^{\frac{2t}{5}}} - \frac{9}{4e^{2t}}$$

Para el paso de tiempo de 0.05, al sustituir $t = 0$ y $t = 3$ en ambas intensidades de corriente, se tiene que
Para $t = 0$

$$I_1 = x = \frac{15}{8e^{\frac{2\times 0}{5}}} - \frac{27}{8e^{2\times 0}} + \frac{3}{2} = 0$$
$$I_2 = y = \frac{9}{4e^{\frac{2\times 0}{5}}} - \frac{9}{4e^{2\times 0}} = 0$$

Para $t = 3$

$$I_1 = x = \frac{15}{8e^{\frac{2\times3}{5}}} - \frac{27}{8e^{2\times3}} + \frac{3}{2} = 2.056373359$$

$$I_2 = y = \frac{9}{4e^{\frac{2\times3}{5}}} - \frac{9}{4e^{2\times3}} = 0.6721097844$$

Estos son los valores que esperamos obtener con el método de Runge-Kutta 4.

Resolución numérica

Algoritmo Runge-Kutta de 4to orden

$$y_{1+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f_1(x_i + h, y_i + hk_3)$$

En Excel se programó este algoritmo de **Runge-Kutta de 4to orden** –Sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas. El código Excel se presenta a continuación.

Código de Excel

Se escriben los comentarios desde Word, ya que no se encuentran en la programación en Excel.

```
Function fx1 (x as Double, y1 As Double, y2 As Double) As Double
fx1 = -4*y1+3*y2+6  /*Función la primera ecuación diferencial*/
End Function

/*Se declara la función 1, la primera ecuación diferencial*/

Function fx2 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double) As Double
fx2 = -2.4*y1+1.6*y2+3.6 /*Función la segunda ecuación diferencial*/

End Function
/*Se declara la función 2, la segunda ecuación diferencial*/

Function y_1 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double, h As Double) As Double
/* Se declaran los valores de k conforme al algoritmo, dado que son dos funciones, los
valores de k se plantean con dos subíndices, el primero indica que pertenece a la primera
función, el segundo indica que corresponde al número de k, luego, la fórmula se plantea
```

tres veces más (4 en total, como se puede ver enseguida), conforme a la k a calcular */
Dim k11, k12, k13, k14 As Double /*Dim para variables y As Double*/
Dim k21, k22, k23, k24 As Double
k11 = fx1 (x, y1, y2)
k21 = fx2 (x, y1, y2)
*/ Eso es $k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i)$ */
k12 = fx1 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k22 = fx2 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
/* Eso es $k_2 = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$ */
k13 = fx1 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k23 = fx2 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
/* Eso es $k_3 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$ */
k14 = fx1 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
k24 = fx2 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
/*Eso es $k_4 = f_1(x_i + h, y_i + hk_3)$*/
y_1 = y1 + (h / 6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14)
/* Eso es $\frac{dI_1}{dt} = -4I_1 + 3I_2 + 6$ I1 = y1*/
End Function

/*Lo anterior fue para calcular el valor de I1 con y1*/

Function y_2 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double, h As Double) As Double
Dim k11, k12, k13, k14 As Double
Dim k21, k22, k23, k24 As Double
k11 = fx1 (x, y1, y2)
k21 = fx2 (x, y1, y2)
k12 = fx1 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k22 = fx2 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k13 = fx1 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k23 = fx2 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k14 = fx1 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
k24 = fx2 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
y_2 = y2 + (h / 6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24)
/* Eso es $\frac{dI_2}{dt} = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6$ I2=y2*/
End Function
/*Lo anterior fue para calcular el valor de I2 con y2*/

El código anterior se programa en Excel (adaptado para macros) en Programador, Visual Basic, se verá un código.

A continuación, se presentan los resultados dados por Excel, con cada uno de los pasos de

tiempo en las Tablas 6.4-6.7.

Tabla 6.4 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 0.05$.

Iteración	x	y1	y2	h
0	0	0	0	0.05
1	0.05	0.28404595	0.16956264	
2	0.1	0.538263406	0.31963171	
3	0.15	0.765546326	0.452128751	
4	0.2	0.968512175	0.56879113	
5	0.25	1.149528255	0.671189588	
6	0.3	1.310735541	0.760744131	
7	0.35	1.454070229	0.838738388	
8	0.4	1.581283252	0.906332624	
9	0.45	1.693957926	0.964575496	
10	0.5	1.793525924	1.014414702	
11	0.55	1.88128172	1.056706611	
12	0.6	1.95839567	1.092224975	
13	0.65	2.025925839	1.121668812	
14	0.7	2.084828707	1.145669546	
15	0.75	2.135968851	1.164797455	
16	0.8	2.180127709	1.17956751	
17	0.85	2.218011513	1.190444665	
18	0.9	2.250258455	1.19784863	
19	0.95	2.277445184	1.202158199	
20	1	2.300092679	1.203715165	
21	1.05	2.318671556	1.202827858	
22	1.1	2.333606886	1.199774345	
23	1.15	2.345282534	1.194805335	
24	1.2	2.354045102	1.188146794	
25	1.25	2.36020749	1.18000232	
26	1.3	2.364052111	1.170555289	
27	1.35	2.365833814	1.159970795	
28	1.4	2.365782514	1.148397407	
29	1.45	2.364105583	1.135968755	
30	1.5	2.360990006	1.122804974	
31	1.55	2.356604336	1.109013996	
32	1.6	2.351100459	1.09469273	
33	1.65	2.344615191	1.079928129	
34	1.7	2.337271729	1.064798145	
35	1.75	2.329180953	1.049372606	

Tabla 6.4 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 0.05$.

Iteración	x	y1	y2	h
36	1.8	2.320442617	1.033714001	
37	1.85	2.311146411	1.01787819	
38	1.9	2.301372937	1.001915052	
39	1.95	2.29119458	0.985869065	
40	2	2.280676303	0.969779834	
41	2.05	2.269876366	0.953682566	
42	2.1	2.258846968	0.937608503	
43	2.15	2.24763484	0.92158531	
44	2.2	2.236281773	0.905637428	
45	2.25	2.224825097	0.889786391	
46	2.3	2.213298116	0.874051119	
47	2.35	2.201730501	0.85844817	
48	2.4	2.190148645	0.842991983	
49	2.45	2.178575982	0.827695087	
50	2.5	2.167033279	0.812568294	
51	2.55	2.155538899	0.797620873	
52	2.6	2.144109037	0.782860707	
53	2.65	2.132757935	0.768294434	
54	2.7	2.121498076	0.753927577	
55	2.75	2.110340361	0.739764658	
56	2.8	2.099294262	0.725809303	
57	2.85	2.088367975	0.712064339	
58	2.9	2.077568539	0.698531874	
59	2.95	2.06690196	0.685213379	
60	3	2.056373314	0.672109755	

Tabla 6.5 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 0.1$.

Iteración	x	y1	y2	h
0	0	0	0	0.1
1	0.1	0.5382552	0.3196262	
2	0.2	0.9684987	0.5687822	
3	0.3	1.310719	0.7607331	
4	0.4	1.5812652	0.9063206	
5	0.5	1.7935075	1.0144024	

Tabla 6.5 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 0.1$.

Iteración	x	y1	y2	h
6	0.6	1.9583776	1.0922129	
7	0.7	2.0848114	1.145658	
8	0.8	2.1801115	1.1795567	
9	0.9	2.2502436	1.1978387	
10	1	2.3000791	1.2037061	
11	1.1	2.3335947	1.1997662	
12	1.2	2.3540342	1.1881395	
13	1.3	2.3640424	1.1705489	
14	1.4	2.365774	1.1483917	
15	1.5	2.3609825	1.1228	
16	1.6	2.3510939	1.0946884	
17	1.7	2.3372661	1.0647944	
18	1.8	2.3204377	1.0337107	
19	1.9	2.3013687	1.0019122	
20	2	2.2806726	0.9697774	
21	2.1	2.2588438	0.9376064	
22	2.2	2.2362791	0.9056356	
23	2.3	2.2132958	0.8740496	
24	2.4	2.1901467	0.8429907	
25	2.5	2.1670316	0.8125672	
26	2.6	2.1441076	0.7828598	
27	2.7	2.1214969	0.7539268	
28	2.8	2.0992932	0.7258086	
29	2.9	2.0775677	0.6985313	
30	3	2.0563726	0.6721093	

Tabla 6.6 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 0.5$

Iteración	x	y1	y2	h
0	0	0	0	0.5
1	0.5	1.7695	0.9984	
2	1	2.282248633	1.19182336	
3	1.5	2.351053031	1.116185512	
4	2	2.275760485	0.966508285	
5	2.5	2.164756593	0.8110563	
6	3	2.05536424	0.671442734	

Tabla 6.7 Resultados de las iteraciones hechas con Excel para el paso de tiempo de $h = 1$.

Iteración	x	y1	y2	h
0	0	0	0	1
1	1	1.632	0.7584	
2	2	1.9676928	0.76123136	
3	3	1.939941253	0.59459617	

La Tabla 6.8 a) muestra los resultados obtenidos mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, RK4, con programación Excel-Visual Basic, así como los resultados del método analítico.

Tabla 6.8 a) Tabla de resultados de los métodos analítico y numérico RK4 en Excel.

$I_i(3),\ i = 1,2 / h$	0.05	0.1	0.5	1
$I_1(3)$ Resultado analítico	2.056373359	2.056373359	2.056373359	2.056373359
$I_1(3)$ Resultado numérico	2.056373314	2.0563726	2.05536424	1.939941253
$I_2(3)$ Resultado analítico	0.06721097844	0.06721097844	0.06721097844	0.06721097844
$I_2(3)$ Resultado numérico	0.672109755	0.6721093	0.671442734	0.59459617

Conclusiones

Se puede observar la gran convergencia del método de Runge Kutta 4 para pasos de tiempo pequeños, tales como $h = 0.05,\ h = 0.1\ y\ h = 0.5.$

En cada una de las Tabla 6.4-6.7 está la resolución con un valor de h, con las iteraciones hechas con el código de programación Excel. Para ver el código se debe ir en Excel en opciones a programador, Visual Basic y se visualizará el código, de otro modo, señalar la hoja 1 con clic derecho→ Insertar →Insertar código sin comentarios, regresar a la hoja de cálculo. Es importante que el documento esté habilitado para Macros, para que el código esté presente siempre.

Notas:

1. Si no se tiene activada la opción en el menú de programador o desarrollador, se debe ir a Archivo→Opciones→Personalizar cinta de opciones y el menú derecho seleccionar Programador.

A continuación, se replantea el código sin comentarios.

Código de Excel

```
Function fx1 (x as Double, y1 As Double, y2 As Double) As Double
fx1 = -4*y1+3*y2+6
End Function

Function fx2 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double) As Double
fx2 = -2.4*y1+1.6*y2+3.6
End Function

Function y_1 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double, h As Double) As Double
Dim k11, k12, k13, k14 As Double
Dim k21, k22, k23, k24 As Double
k11 = fx1 (x, y1, y2)
k21 = fx2 (x, y1, y2)
k12 = fx1 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k22 = fx2 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k13 = fx1 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k23 = fx2 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k14 = fx1 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
k24 = fx2 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
y_1 = y1 + (h / 6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14)
End Function

Function y_2 (x As Double, y1 As Double, y2 As Double, h As Double) As Double
Dim k11, k12, k13, k14 As Double
Dim k21, k22, k23, k24 As Double
k11 = fx1 (x, y1, y2)
k21 = fx2 (x, y1, y2)
k12 = fx1 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k22 = fx2 (x+ h / 2, y1 + k11 * h / 2, y2 + k21 * h/2)
k13 = fx1 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k23 = fx2 (x+h/2, y1 + k12 * h/2, y2+k22*h/2)
k14 = fx1 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
k24 = fx2 (x+h, y1 + k13 * h, y2 + k23*h)
y_2 = y2 + (h / 6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24)
End Function
```

En las Tablas 6.8 b) y 6.9, se presenta la revisión de resultados de la solución para distintos pasos de tiempo, h, y la solución esperada, respectivamente.

Tabla 6.8 b) Tabla de resultados de los métodos analítico y numérico RK4 en Excel.

h	0.05	**0.1**	0.5	1
I1(3) Resultado analítico	2.056373359	2.056373359	2.056373359	2.056373359
I1(3) Resultado numérico	2.056373314	**2.0563726**	**2.05536424**	1.939941253
I2(3) Resultado analítico	0.06721097844	0.06721097844	0.06721097844	0.06721097844
I2(3) Resultado numérico	0.672109755 Ok Excel Bien, resultado esperado	**0.6721093** Ok Excel Aproximado al resultado esperado	**0.671442734** Ok Excel Aproximado al resultado esperado	0.59459617 Ok Excel Diferente al resultado esperado

Tabla 6.9 Tabla de resultados esperados para las corrientes 1 y 2 del circuito eléctrico.

h	**0.1**	0.5	1.0	0.05
$I_1(3)$	**2.047**	1.992	5.280	2.052
$I_2(3)$	**0.658**	0.590	2.736	0.665

Los mejores resultados son los obtenidos con h más pequeña, en este caso, el mejor de los resultados obtenidos con RK4 en Excel, fue para el paso de tiempo de $h = 0.05$.

Problema 2

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante los métodos numéricos de **Runge-Kutta de tercer orden** y **Euler Modificado** y comparar los resultados con las soluciones analíticas.

$a)\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad y(0) = 0,\ y(1) = ? \quad con \quad h = 0.1$

$b)\quad \frac{dy}{dx} = ln(x) \quad y(1) = 3,\ y(2) = ? \quad con \quad h = 0.2$

$c)\quad \frac{dy}{dx} = 2xy \quad y(1) = 0.5,\ y(2) = ? \quad con \quad h = 0.25$

$d)\quad \frac{dy}{dx} = y^2 \quad y(0) = 1,\ y(0.5) = ? \quad con \quad h = 0.1$

Solución

Método analítico

a)

> $diff(y(x), x) = 3 \cdot x^2$

$\frac{d}{dx} y(x) = 3x^2$

> ode := diff(y(x), x) = 3*x^2;

$ode := \frac{d}{dx} y(x) = 3x^2$

> ans4[1] := dsolve({ode, y(0)=0}, y(x));

$ans4_1 := y(x) = x^3$

> $x := 1$:

> $ans4_1 := y(x) = x^3$

$ans4_1 := y(1) = 1$

> $ans4_1 := y(1) = 1 \triangleleft Respuesta.$

b)

> ode := diff(y(x), x) = ln(x);

$ode := \frac{d}{dx} y(x) = \ln(x)$

> ans4[2] := dsolve({ode, y(1)=3}, y(x));

$ans4_2 := y(x) = x\ln(x) - x + 4$

> $x := 2$:

> $ans4_2 := y(x) = x\ln(x) - x + 4$

$ans4_2 := y(2) = 2\ln(2) + 2$

> $evalf(2\ln(2) + 2)$

3.386294361

> $ans4_2 := y(2) = 2\ln(2) + 2 = 3.386294361 \triangleleft Respuesta.$

c)

> ode := diff(y(x), x) = 2*x*y(x);

$ode := \frac{d}{dx} y(x) = 2xy(x)$

> ans4[1] := dsolve({ode, y(1)=0.5}, y(x));

$ans4_1 := y(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{x^2}}{e}$

> $x := 2$:

> $ans4_1 := y(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{x^2}}{e}$

$ans4_1 := y(2) = \frac{1}{2}\frac{e^4}{e}$

> $evalf\left(\frac{1}{2}\frac{e^4}{e}\right)$

10.04276846

> $ans4_1 := y(2) = \frac{1}{2}\frac{e^4}{e} = 10.04276846 \triangleleft Respuesta.$

d)

> ode := diff(y(x), x) = (y(x))^2;

$ode := \frac{d}{dx} y(x) = y(x)^2$

> ans4[2] := dsolve({ode, y(0)=1}, y(x));

$ans4_2 := y(x) = -\frac{1}{x-1}$

> $x := 0.5$:

$> ans4_2 := y(x) = -\frac{1}{x-1}$

$ans4_2 := y(0.5) = 2.000000000$

$> ans4_2 := y(0.5) = 2.0 \triangleleft Respuesta.$

Solución

Método Numérico: Runge-Kutta de tercer orden, RK3

Resolvemos los cuatro incisos por el método de Runge-Kutta de tercer orden a través de programación Python y, en todos los casos, se presenta el código del programa, la solución gráfica que arroja el programa al compilarlo, y la pantalla de compilación respectiva.

a)

Código del programa en lenguaje Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return 3 * x**2
def rk3(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0)/h)
    x = np.zeros(n+1)
    y = np.zeros(n+1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        k1 = h * f(x[i], y[i])
        k2 = h * f(x[i] + 0.5*h, y[i] + 0.5*k1)
        k3 = h * f(x[i] + h, y[i] - k1 + 2*k2)
        y[i+1] = y[i] + (1/6)*(k1 + 4*k2 + k3)
        x[i+1] = x[i] + h
    return x, y
# Definimos los parámetros del problema
x0 = 0 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 0 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 1 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.1 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución
# Resolvemos el problema utilizando RK3
x, y = rk3(x0, y0, xn, h)
# Imprimimos la solución
print("La solución y(1) es:", y[-1])
# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')
```

```
# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución RK3", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = 3x^2 con RK3")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Para el funcionamiento de este programa usamos las librerías de matplotlib y la librería numpy las cuales tienen que estar instaladas para su correcto funcionamiento.

Esté código da la gráfica de la Fig. 6.6 con el resultado esperado: y(1) = 1.0 y, en la Fig. 6.7 se muestra la compilación del programa para la verificación del resultado.

$y(1) = 1 \triangleleft Respuesta.$

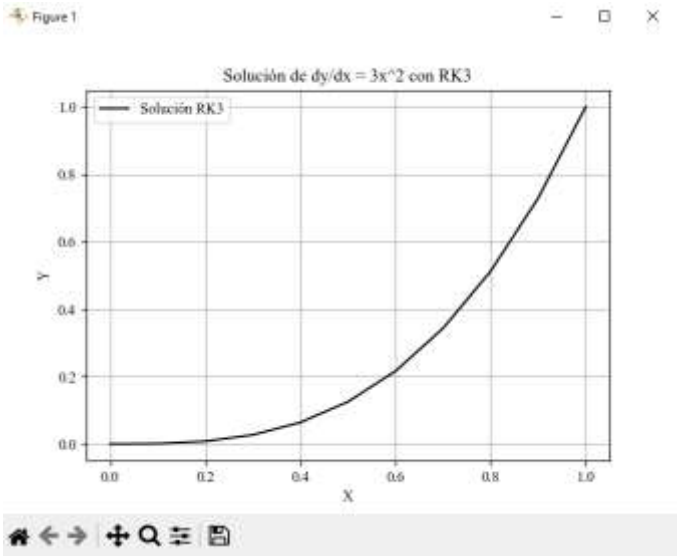


Fig. 6.6 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0,\ y(1)$ con $h = 0.1$ resuelta con el método de RK3 .

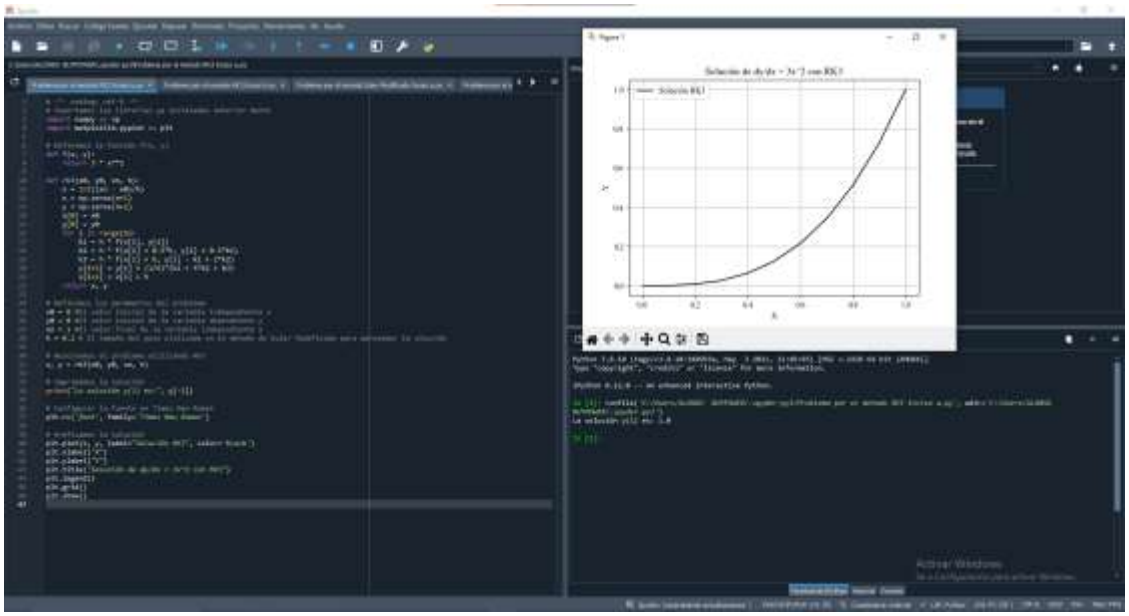


Fig. 6.7 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método RK3 la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, sujeta a las condiciones $y(0) = 0,\ y(1)$.

b)
El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Runge-Kutta de tercer orden, RK3, se muestra a continuación. La Fig. 6.8 muestra el resultado esperado del RK3, mientras que la Fig. 6.9 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
   return np.log(x)

def rk3(x0, y0, xn, h):
   n = int((xn - x0)/h)
   x = np.zeros(n+1)
   y = np.zeros(n+1)
   x[0] = x0
   y[0] = y0
   for i in range(n):
      k1 = h * f(x[i], y[i])
      k2 = h * f(x[i] + 0.5*h, y[i] + 0.5*k1)
      k3 = h * f(x[i] + h, y[i] - k1 + 2*k2)
      y[i+1] = y[i] + (1/6)*(k1 + 4*k2 + k3)
      x[i+1] = x[i] + h
   return x, y

# Definimos los parámetros del problema
x0 = 1 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 3 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 2 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.01 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución

# Resolvemos el problema utilizando RK3
x, y = rk3(x0, y0, xn, h)
# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')
# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es:","y({:.1f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]) )
# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución RK3", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
```

```
plt.title("Solución de dy/dx = ln(x) con RK3")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

El resultado que arroja el programa mediante la gráfica de la Fig. 6.8 es

$y(2) = 3.38629 \triangleleft Respuesta.$

La Fig. 6.9 muestra la compilación del programa en código Python con la gráfica de la Fig. 6.8 obtenida.

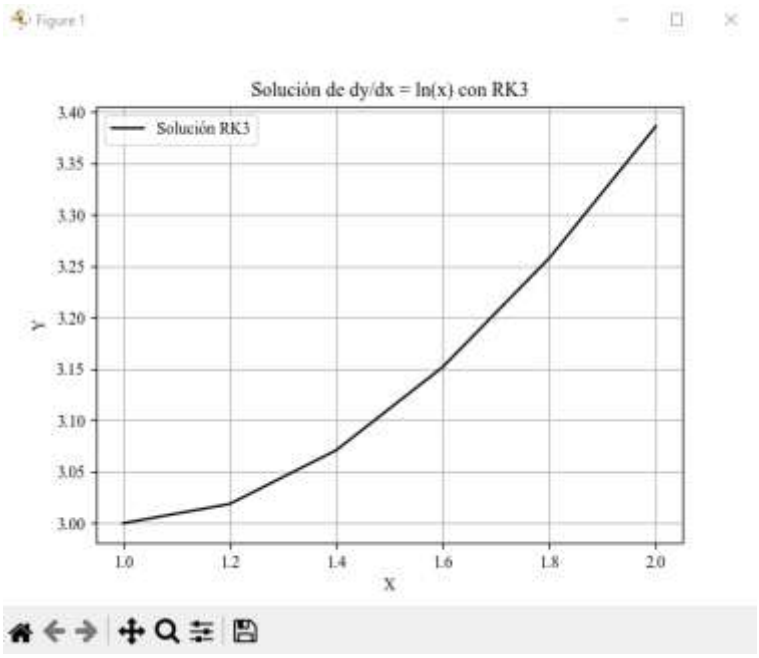


Fig. 6.8 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ln(x)$ sujeta a las condiciones $y(1) = 3,\ y(2) = ?$ con $h = 0.2$ resuelta con el método de RK3 .

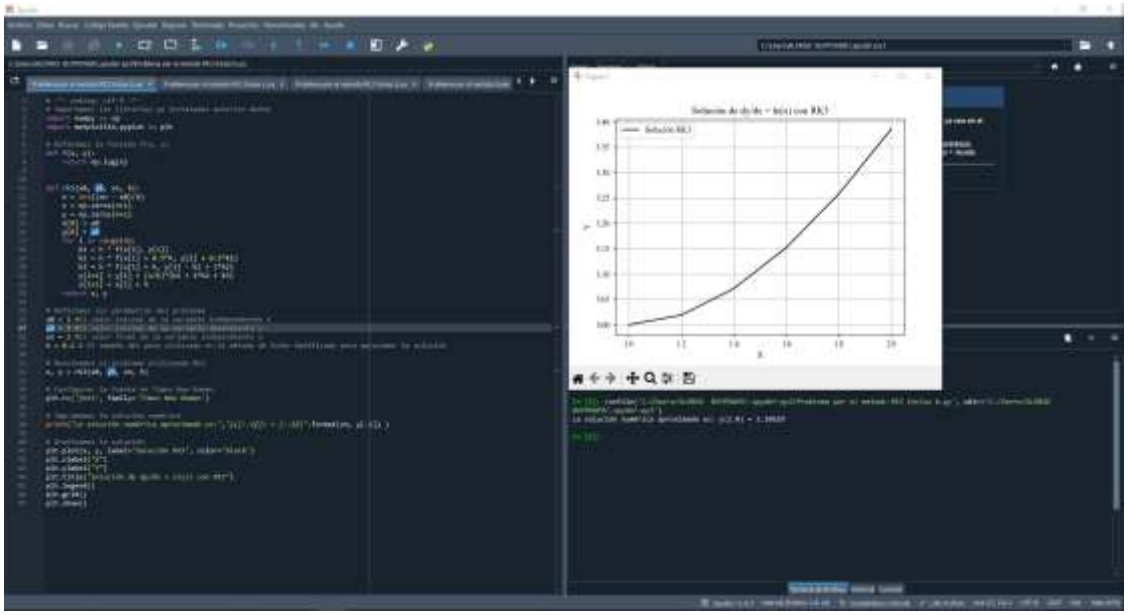


Fig. 6.9 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método RK3 la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ln(x),$ sujeta a las condiciones $y(1) = 3,\ y(2) = ?$ con $h = 0.2$.

c)

El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Runge-Kutta de tercer orden, RK3, se muestra a continuación. La Fig. 6.10 muestra el resultado esperado del RK3, mientras que la Fig. 6.11 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

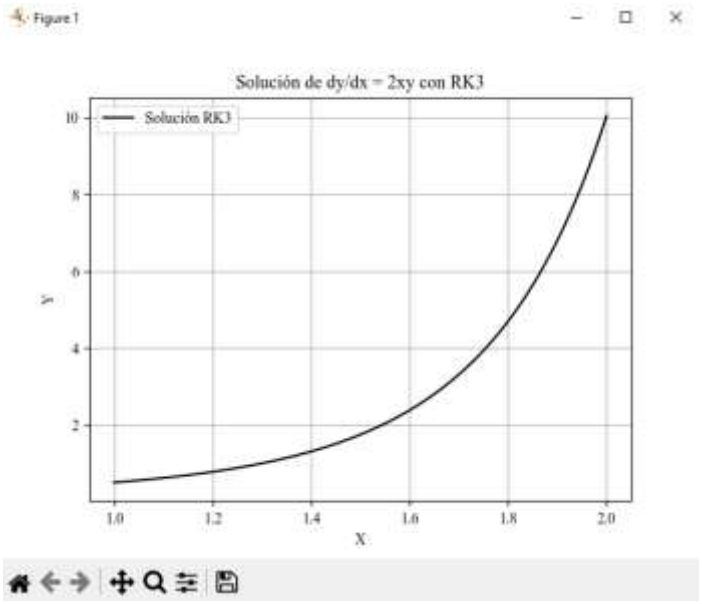


Fig. 6.10 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$ sujeta a las condiciones $y(1) = 0.5,\ y(2) = ?$ con $h = 0.25$ resuelta con el método de RK3 .

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return 2 * x * y
# Definimos el método RK3
def rk3(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0) / h)
    x = np.zeros(n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        k1 = h * f(x[i], y[i])
        k2 = h * f(x[i] + h/2, y[i] + k1/2)
        k3 = h * f(x[i] + h, y[i] - k1 + 2*k2)
        y[i + 1] = y[i] + (1/6) * (k1 + 4*k2 + k3)
        x[i + 1] = x[i] + h
    return x, y

# Definimos los parámetros del problema
x0 = 1 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 0.5 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 2 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.001 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución

# Resolvemos el problema utilizando RK3
x, y = rk3(x0, y0, xn, h)

# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')
```

```
# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es: y({:.1f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]))

# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución RK3", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = 2xy con RK3")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

El resultado que arroja el programa mediante la gráfica de las Figs. 6.10 y 611 es $y(2) = 10.04277 \triangleleft Respuesta.$

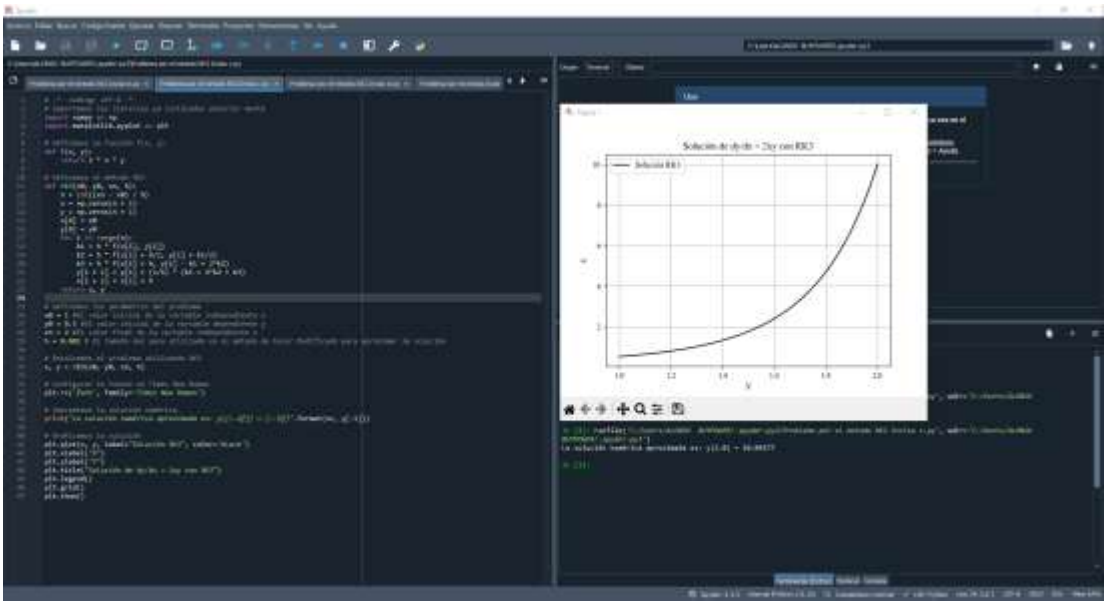


Fig. 6.11 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método RK3 la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$, sujeta a las condiciones $y(1) = 0.5,\ y(2) = ?$ con $h = 0.25$.

d)

El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Runge-Kutta de tercer orden, RK3, se muestra a continuación. La Fig. 6.12 muestra el resultado esperado del RK3, mientras que la Fig. 6.13 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return y**2

# Definimos el método RK3
def rk3(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0) / h)
    x = np.zeros(n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        k1 = h * f(x[i], y[i])
        k2 = h * f(x[i] + h/2, y[i] + k1/2)
        k3 = h * f(x[i] + h, y[i] - k1 + 2*k2)
        y[i + 1] = y[i] + (1/6) * (k1 + 4*k2 + k3)
        x[i + 1] = x[i] + h
    return x, y

# Definimos los parámetros del problema
x0 = 0 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 1 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 0.5 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.01 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución

# Resolvemos el problema utilizando RK3
x, y = rk3(x0, y0, xn, h)
# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')

# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es: y({:.1f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]))
# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución RK3", color='black')
```

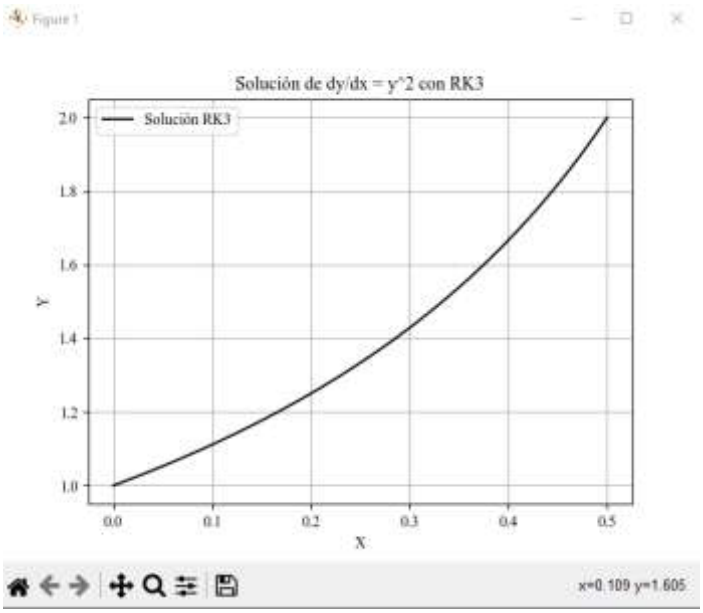


Fig. 6.12 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1,\ y(0.5)$ con $h = 0.1$ resuelta con el método de RK3 .

```
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = y^2 con RK3")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

El resultado que arroja el programa mediante la gráfica de la Fig. 6.12 es $y(0.5) = 2 \triangleleft Respuesta.$

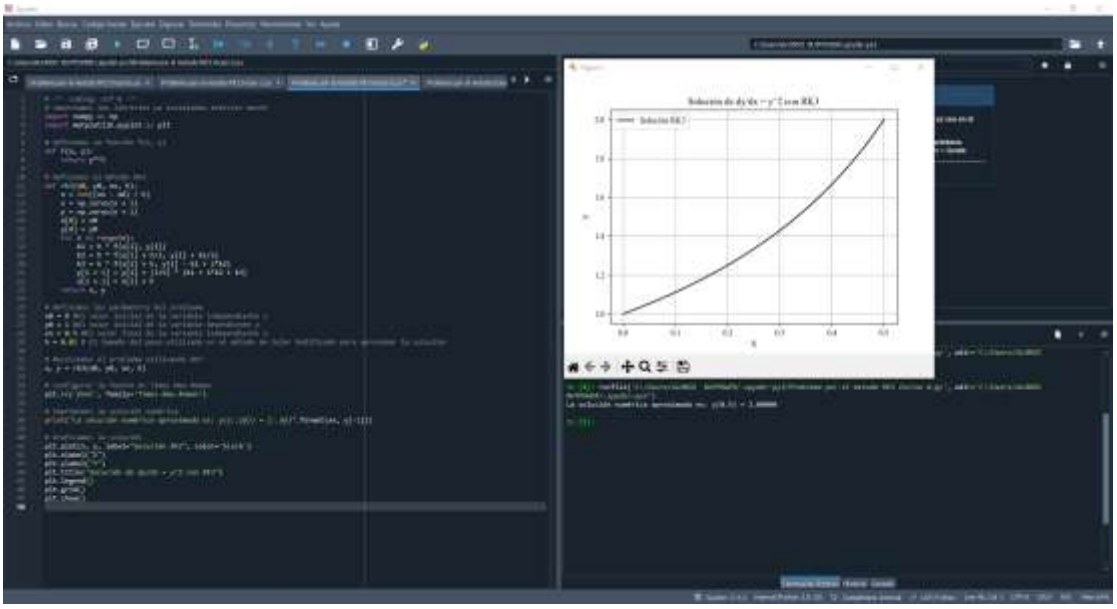


Fig. 6.13 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método RK3 la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2$, sujeta a las condiciones $y(0) = 1,\ y(0.5)$ con $h = 0.1$.

Solución

Método Numérico: Euler modificado

Resolvemos los cuatro incisos por el método de Euler modificado a través de programación Python y, en todos los casos, se presenta el código del programa, la solución gráfica que arroja el programa al compilarlo, y la pantalla de compilación respectiva.

a)

El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Euler modificado, EM, se muestra a continuación. La Fig. 6.14 muestra el resultado esperado del EM, mientras que la Fig. 6.15 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return 3 * x**2

# Definimos el método de Euler Modificado
def euler_modificado(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0)/h)
    x = np.zeros(n+1)
    y = np.zeros(n+1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        k1 = h * f(x[i], y[i])
        k2 = h * f(x[i] + h, y[i] + k1)
        y[i+1] = y[i] + 0.5*(k1 + k2)
        x[i+1] = x[i] + h
    return x, y
```

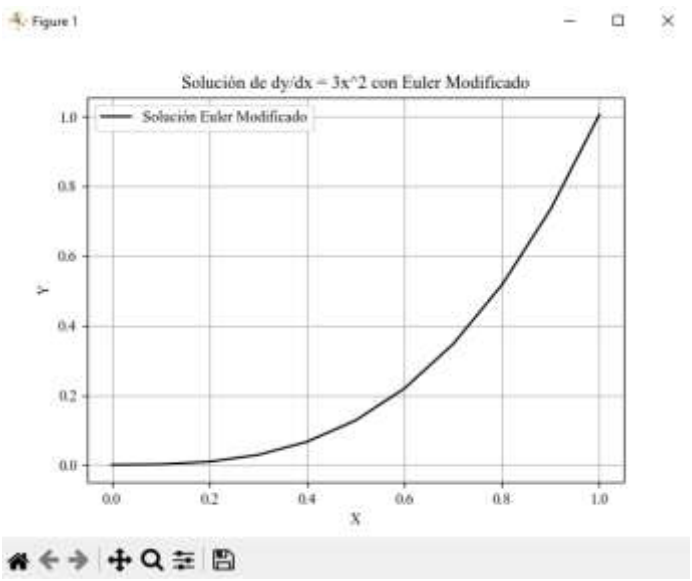


Fig. 6.14 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0,\ y(1)$ con $h = 0.1$ resuelta con el método de Euler modificado.

```
# Definimos los parámetros del problema
x0 = 0 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 0 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 1 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.1 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución
# Resolvemos el problema utilizando el método de Euler modificado
x, y = euler_modificado(x0, y0, xn, h)

# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')

# Imprimimos la solución
print("La solución y(1) es:", y[-1])

# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución Euler Modificado", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = 3x^2 con Euler Modificado")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

El resultado que arroja Python mediante la gráfica de la Fig. 6.14, es
$y(1) = 1.005 \triangleleft Respuesta.$
La Fig. 6.15 muestra la compilación del programa en Python para obtener la gráfica de la Fig. 6.14.

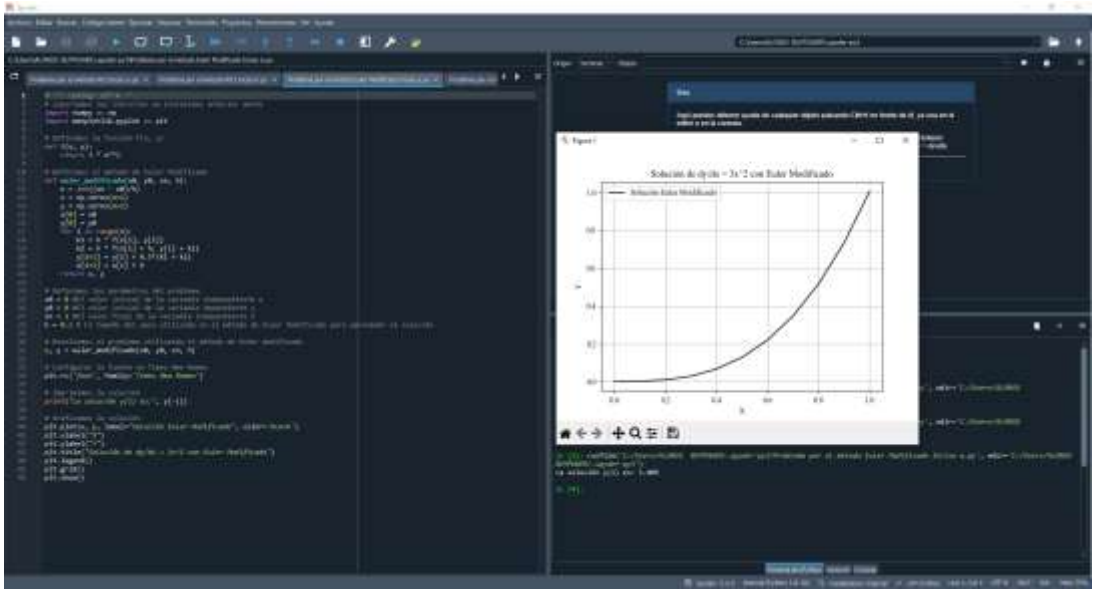


Fig. 6.15 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método Euler modificado la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, sujeta a las condiciones $y(0) = 0,\ y(1)$ con $h = 0.1$.

b)
El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Euler modificado, EM, se muestra a continuación. La Fig. 6.16 muestra el resultado esperado del EM, mientras que la Fig. 6.17 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return np.log(x)
# Definimos el método de Euler Modificado
def euler_modificado(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0)/h)
```

```
    x = np.zeros(n+1)
    y = np.zeros(n+1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        # Estimamos el valor de y en el siguiente punto con Euler
        y_est = y[i] + h*f(x[i], y[i])
        # Calculamos la pendiente en el punto intermedio
        m = f(x[i] + h, y_est)
        # Calculamos el valor de y en el siguiente punto con Euler Modificado
        y[i+1] = y[i] + (h/2)*(f(x[i], y[i]) + m)
        x[i+1] = x[i] + h
    return x, y
# Definimos los parámetros del problema
x0 = 1 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 3 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 2 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.01 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución

# Resolvemos el problema utilizando Euler Modificado
x, y = euler_modificado(x0, y0, xn, h)

# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')

# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es:","y({:.1f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]))
# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución Euler Modificado", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = ln(x) con Euler Modificado")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

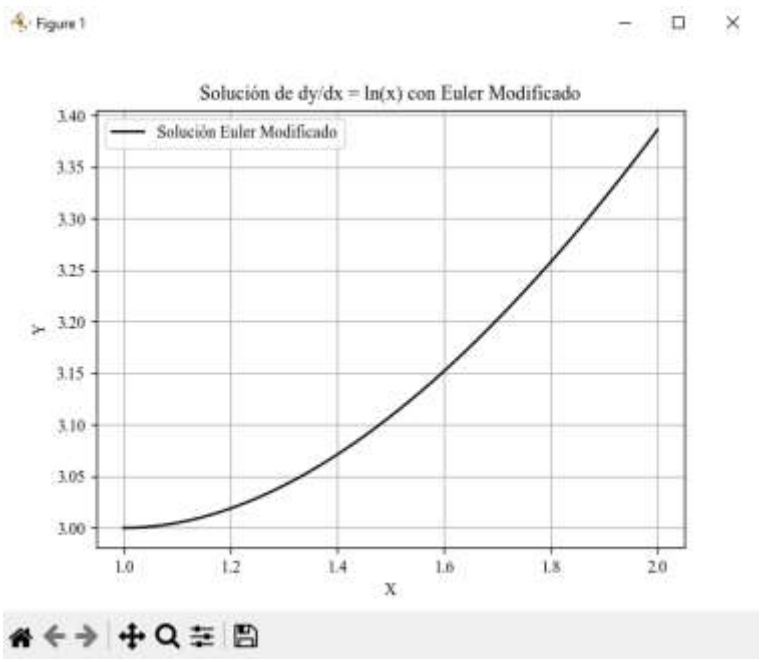


Fig. 6.16 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ln(x)$ sujeta a las condiciones $y(1) = 3,\ y(2) = ?$ con $h = 0.2$ resuelta con el método de Euler modificado .

El resultado que arroja Python mediante la gráfica de la Fig. 6.16, es

$y(2) = 3.38629 \triangleleft Respuesta.$

La Fig. 6.17 muestra la compilación del programa en Python para obtener la gráfica de la Fig. 6.16.

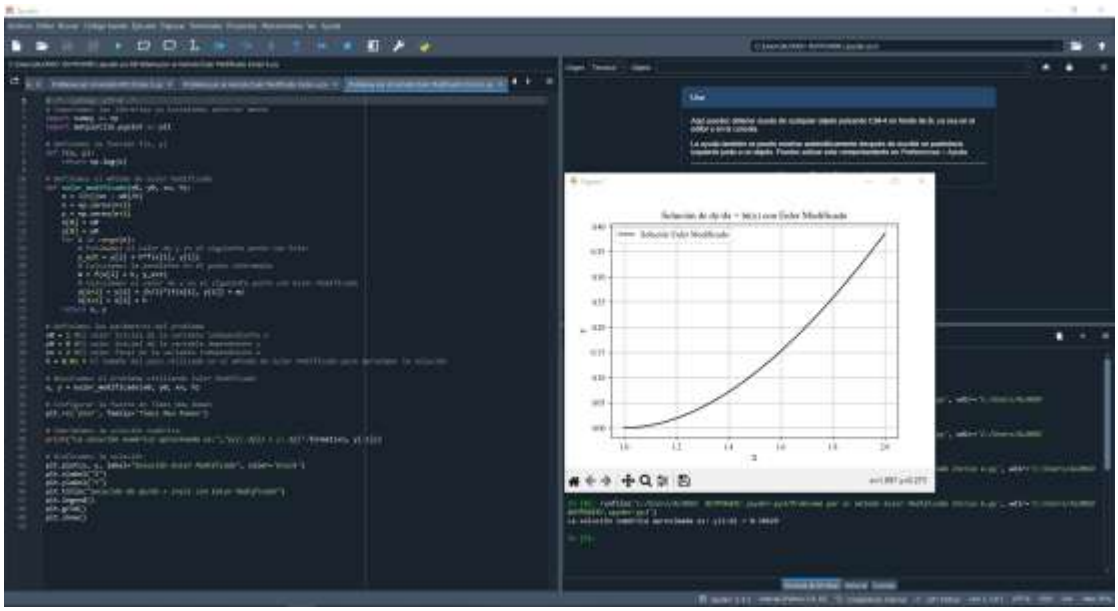


Fig. 6.17 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método Euler modificado la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = ln(x)$, sujeta a las condiciones $y(1) = 3,\ y(2) = ?$ con $h = 0.2$.

c)

El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Euler modificado, EM, se muestra a continuación. La Fig. 6.18 muestra el resultado esperado del EM, mientras que la Fig. 6.19 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return 2 * x * y
# Definimos el método de Euler Modificado
def euler_modificado(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0) / h)
    x = np.zeros(n + 1)
```

```
    y = np.zeros(n + 1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        # Estimamos el valor de y en el punto intermedio con Euler
        y_intermedio = y[i] + h * f(x[i], y[i])
        # Calculamos la pendiente en el punto intermedio
        m = f(x[i] + h, y_intermedio)
        # Calculamos el valor de y en el siguiente punto con Euler Modificado
        y[i + 1] = y[i] + (h / 2) * (f(x[i], y[i]) + m)
        x[i + 1] = x[i] + h
    return x, y
# Definimos los parámetros del problema
x0 = 1 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 0.5 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 2 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.0001 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución
#si ponemos el h = 0.25 da un resultado bastante aleajado de la respuesta dandote 8.39677 en vez de 10.04277

# Resolvemos el problema utilizando Euler Modificado
x, y = euler_modificado(x0, y0, xn, h)
# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')
# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es: y({:.2f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]))
# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución Euler Modificado", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = 2xy con Euler Modificado")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

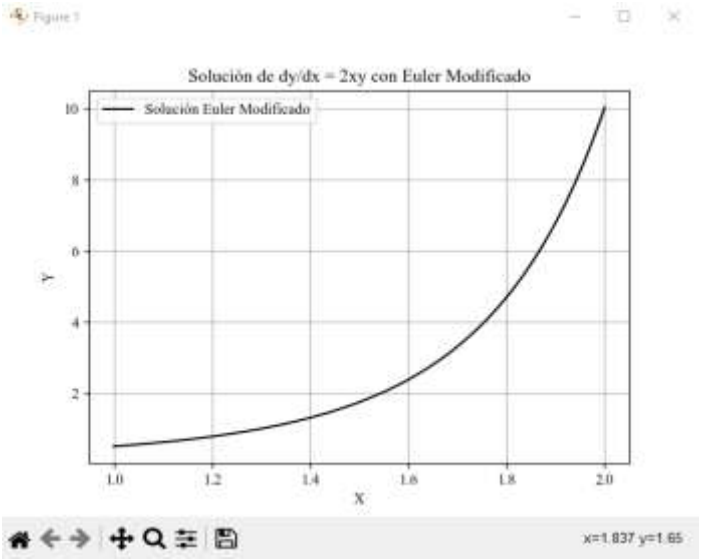


Fig. 6.18 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$ sujeta a las condiciones $y(1) = 0.5,\ y(2) = ?$ con $h = 0.25$ resuelta con el método de Euler modificado.

El resultado que arroja Python mediante la gráfica de la Fig. 6.18, es
$y(2) = 10.04277 \triangleleft Respuesta.$

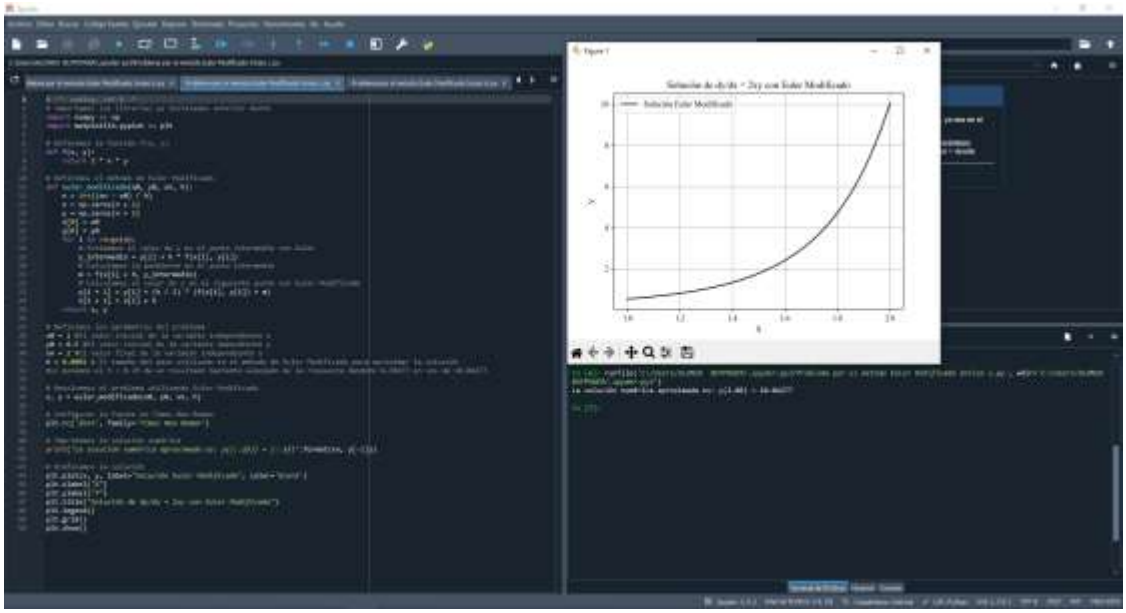


Fig. 6.19 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método Euler modificado la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$, sujeta a las condiciones $y(1) = 0.5,\ y(2) = ?$ con $h = 0.25$

d)

El código del programa para obtener la solución de la ecuación diferencial con el método numérico de Euler modificado, EM, se muestra a continuación. La Fig. 6.20 muestra el resultado esperado del EM, mientras que la Fig. 6.21 presenta la compilación del programa en lenguaje Python.

Código Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
# importamos las librerías ya instaladas anterior mente
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la función f(x, y)
def f(x, y):
    return y**2
# Definimos el método de Euler Modificado
def euler_modificado(x0, y0, xn, h):
    n = int((xn - x0) / h)
    x = np.zeros(n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    x[0] = x0
    y[0] = y0
    for i in range(n):
        # Estimamos el valor de y en el punto intermedio con Euler
        y_intermedio = y[i] + h * f(x[i], y[i])
```

```
        # Calculamos el valor de y en el siguiente punto con Euler Modificado
        y[i + 1] = y[i] + (h / 2) * (f(x[i], y[i]) + f(x[i + 1], y_intermedio))
        x[i + 1] = x[i] + h
    return x, y
# Definimos los parámetros del problema
x0 = 0 #El valor inicial de la variable independiente x
y0 = 1 #El valor inicial de la variable dependiente y
xn = 0.5 #El valor final de la variable independiente x
h = 0.001 # El tamaño del paso utilizado en el método de Euler Modificado para aproximar la solución
#si ponemos el h = 0.1 da un resultado bastante aleajado de la respuesta dandote 1.98330 en vez de 2
# Resolvemos el problema utilizando Euler Modificado
x, y = euler_modificado(x0, y0, xn, h)

# Configurar la fuente en Times New Roman
plt.rc('font', family='Times New Roman')

# Imprimimos la solución numérica
print("La solución numérica aproximada es: y({:.1f}) = {:.5f}".format(xn, y[-1]))

# Graficamos la solución
plt.plot(x, y, label="Solución Euler Modificado", color='black')
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.title("Solución de dy/dx = y^2 con Euler Modificado")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

El resultado que arroja Python mediante la gráfica de la Fig. 6.39, es

$y(0.5) = 2 \triangleleft Respuesta.$

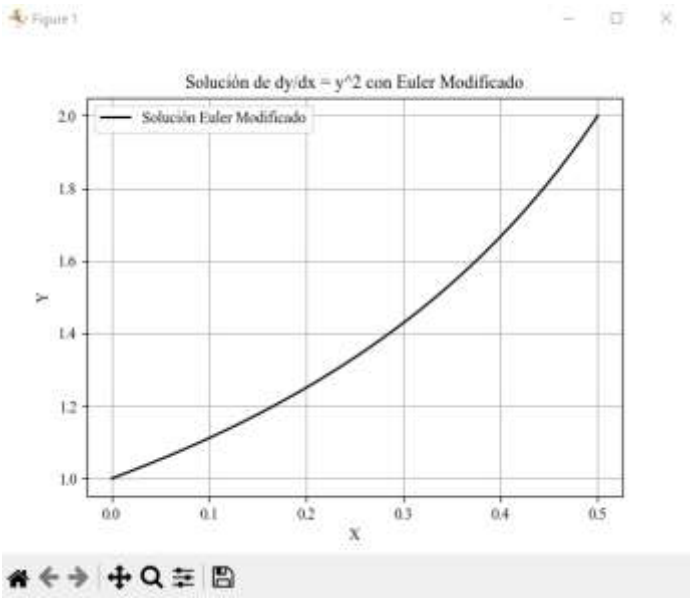


Fig. 6.20 Solución gráfica de Python de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1,\ y(0.5) = ?$ con $h = 0.1$ resuelta con el método de Euler modificado .

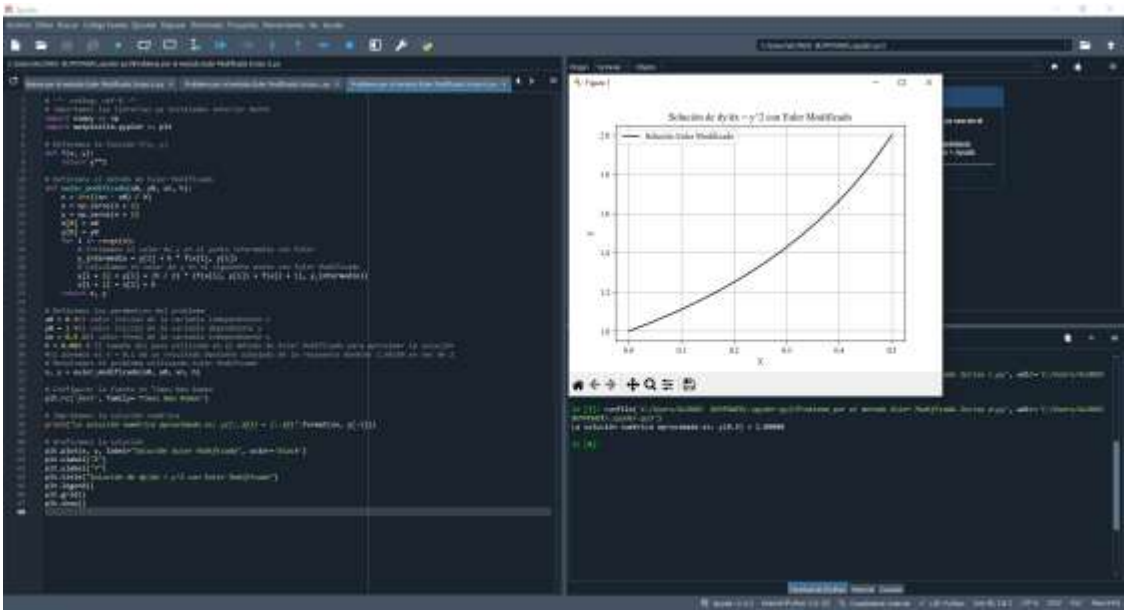


Fig. 6.21 Código del programa en Spyder 5 que resuelve, mediante el método Euler modificado la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2$, sujeta a las condiciones $y(0) = 1,\ y(0.5)$ con $h = 0.1$.

Conclusiones

Al comparar los resultados de las soluciones a las ecuaciones diferenciales de los incisos a) a d), podemos concluir que el método de **Runge-Kutta de tercer orden** da una respuesta mayormente aproximada al resultado esperado de forma más veloz, converge más rápidamente con respecto al método de **Euler Modificado**. Este último método, requiere que el tamaño del paso sea más pequeño para dar un resultado igual al RK3, por ejemplo, el inciso b) por el método RK3 da el resultado esperado cuando $h = 2$ y en cambio, Euler modificado lo da cuando el tamaño del paso utilizado es de $h = 0.01$, para obtener el mismo resultado de $y(2) = 3.38629$.

Problema 3

Se conecta un inductor (inductancia) de 0.4 henrios en serie con una resistencia de 8 ohms, un capacitor de 0.015 faradios y un generador de corriente alterna dada por la función $30\sin(5t)$ volts para $t \geq 0$ (véase Fig. 6.22). Adaptado de Nieves y Domínguez (1996), pero con diferente método de solución.

a) Establezca una ecuación diferencial para la carga instantánea en el capacitor.

b) Encuentre la carga a distintos tiempos.

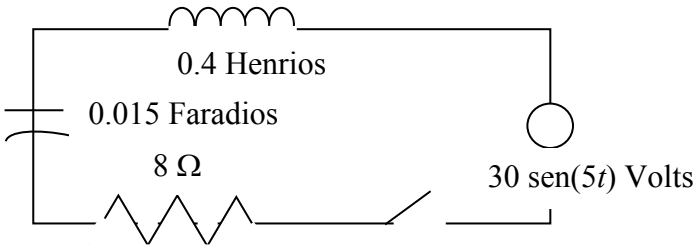


Fig. 6.22 Circuito LRC para determinar su intensidad de corriente o rapidez de cambio de su carga conforme pasa el tiempo al aplicarle un voltaje de 30 sen(5t).

Solución

Primero, necesitamos obtener una ecuación diferencial para poder resolver el problema, para ello debemos de usar las leyes de Kirchoff.

Resistencia $=8I$

$$\text{Inductancia} = 0.4\frac{dI}{dt}$$

$$\text{Capacitancia} = \frac{Q}{0.015}$$

Ahora sustituyéndolo en la ecuación diferencial, nos queda

$$8I + 0.4\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{0.015} = 30\sin(5t)$$

Si hacemos la sustitución de la rapidez de cambio de la carga con respecto al tiempo en el circuito igual a la intensidad de corriente, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

$$0.4\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{0.015}Q + = 30\sin(5t)$$

Las condiciones iniciales son

$$Q(0) = 0; \frac{dQ}{dt}(0) = 0$$

Ahora, para poder resolverlo, se debe de adaptar la ecuación diferencial al algoritmo del método de **Runge-Kutta de 4to orden para segundas derivadas** que es el método que usaremos. Por lo tanto, hay que despejar de la ecuación el término $\frac{d^2Q}{dt^2}$, por lo tanto

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{30\sin(5t) - \frac{1}{0.015}Q - 8\frac{dQ}{dt}}{0.4}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = 75\sin(5t) - 166.66Q - 20\frac{dQ}{dt}$$

Ahora, haciendo cambio de variable, se tiene

$$\frac{dQ}{dt} = z$$

Entonces

$$\frac{dz}{dt} = 75\sin(5t) - 166.66Q - 20z$$

Y ahora contamos con un sistema de ecuaciones diferenciales lineales como Problema del Valor Inicial, PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = z = f(t_i, Q_i, z_i) \\ \dfrac{dz}{dt} = 75\sin(5t) - 166.66Q - 20z = g(t_i, Q_i, z_i) \\ Q(0) = 0 \\ Q'(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Ahora, hacemos uso de las fórmulas de RF4 con las cuales se elaboró un programa general para resolver este tipo de ecuaciones, a saber

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i, z_i)$$
$$l_1 = h \cdot g(x_i, y_i, z_i)$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$l_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$
$$l_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$l_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Entonces, lo primero que nos solicita ingresar el programa, es la segunda ecuación del sistema, ya que la primera no es necesario ingresarla, y hacemos un cambio de variables para que el programa logre reconocer la ecuación correctamente

$$t = x; Q = y$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z = f(x_i, y_i, z_i) \\ \dfrac{dz}{dx} = 75\sin(5x) - 166.66y - 20z = g(x_i, y_i, z_i) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Las pantallas que resultan al compilar el código del programa se muestran en las Figs. 6.23-6.26.

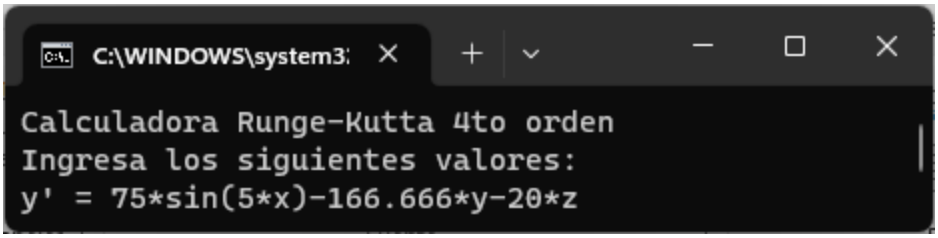


Fig. 6.23 Información a teclear para compilar el programa del circuito LRC: la ecuación diferencial de segundo orden reducida a primer orden por el cambio de variable realizado.

Ahora deberemos de ingresar los valores iniciales

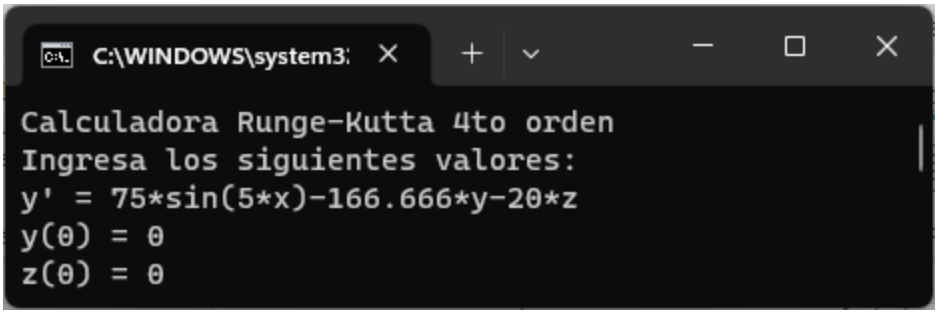


Fig. 6.24 Información a teclear para compilar el programa del circuito LRC: las condiciones iniciales.

Y enseguida, ingresar hasta que punto aproximar y el tamaño del paso

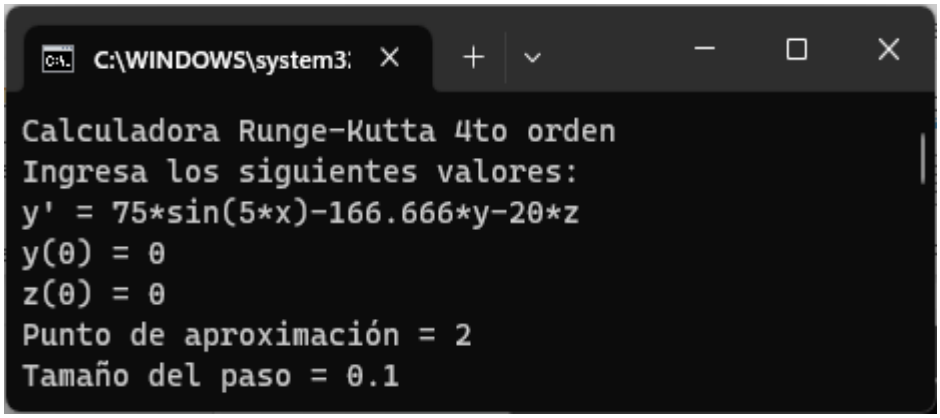


Fig. 6.25 Información a teclear para compilar el programa del circuito LRC: tiempo ≥ 0, $t = 0.1$ hasta $t = 2$ y tamaño de paso $h = 0.1$.

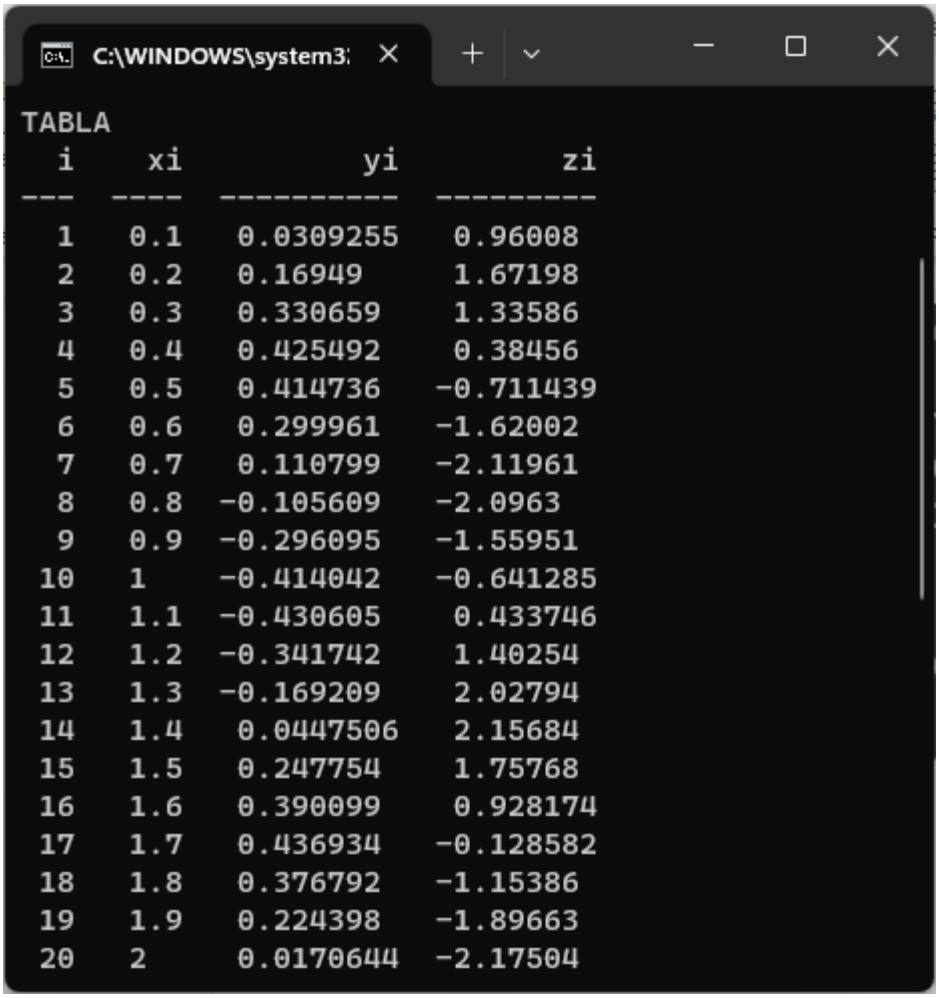


Fig. 6.26 Resultados de la compilación del programa del circuito LRC para tiempo ≥ 0, $t = 0.1$ hasta $t = 2$ y tamaño de paso = 0.1 .

Finalmente, nos mostrará una tabla con todos los datos obtenidos a lo largo de las iteraciones realizadas
Hacer una comparación de los resultados de este problema con respecto al mismo problema resuelto en el capítulo 3 mediante el método de Gauss-Jordan ¿Cuál método es más eficiente en la resolución de la carga en distintos tiempos en el circuito LRC?

El método **Runge-Kutta de 4to orden** para segundas derivadas es usado para resolver ecuaciones diferenciales es especialmente útil en problemas complejos o que directamente no se pueden resolver analíticamente. E incluso existe una modificación de dicha fórmula para usarse en derivadas de segundo orden como la usada en la solución de este problema.

Codigo en Python

```
print("Calculadora Runge-Kutta 4to orden")
from sympy import *
from sympy import pi
from sympy import E
from sympy.solvers.solveset import linsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from IPython import *
from tabulate import tabulate as tab
#Declaracion de la variable X para las ecuaciones
x = symbols("x")
y = symbols("y")
z = symbols("z")

x0 = 0

#Lista para la tabla
tabla = list()

print("Ingresa los siguientes valores: ")
#Variable donde guarda la ecuación
equF = sympify("z")
equG = sympify(input("y' = "))

#Variables donde se almacenan las condiciones iniciales
y0 = float(input("y(0) = "))
z0 = float(input("z(0) = "))

#Variable donde almacena el punto de aproximación
pa = sympify(input("Punto de aproximación = "))

#Variable del tamaño de paso
h = float(input("Tamaño del paso = "))

#Variable de la cantidad de iteraciones
```

```
hn = int(pa / h)

#Asigna los valores iniciales
xi = x0
yi = y0
zi = z0

#Ciclo for para calcular el valor n
for i in Range(hn):
   #Variable temporal para la tabla
   temptab = list()
   temptab.append(i + 1)

   #Calcula los valores de k y l
   k1 = h * equF.evalf(subs={x:xi, y:yi, z:zi})
   l1 = h * equG.evalf(subs={x:xi, y:yi, z:zi})
   k2 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k1/2), z:(zi + l1/2)})
   l2 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k1/2), z:(zi + l1/2)})
   k3 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k2/2), z:(zi + l2/2)})
   l3 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k2/2), z:(zi + l2/2)})
   k4 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h), y:(yi + k3), z:(zi + l3)})
   l4 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h), y:(yi + k3), z:(zi + l3)})

   #Calclula los valores de xi y yi
   yi = simplify(yi + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4))
   xi = simplify(xi + h)
   zi = simplify(zi + (1/6)*(l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4))

   #Añade el resultado obtenido a la lista temporal
   temptab.append(xi)
   temptab.append(yi)
   temptab.append(zi)

   #Añade la lista temporar a la lista de la tabla
   tabla.append(temptab)

print(f"y({pa}) ≈ {float(yi)}\n")
print("TABLA")
print(tab(tabla, headers=["i", "xi", "yi", "zi"]))
```

En la Fig. 6.27 se muestra la pantalla del código compilado.

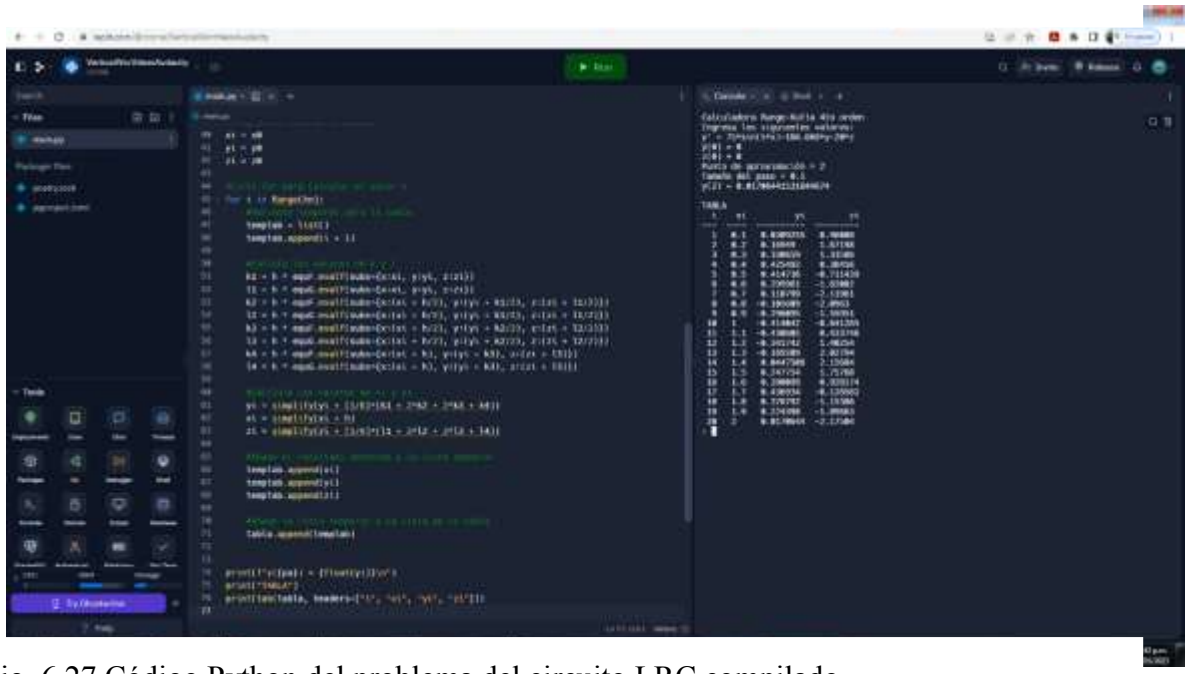


Fig. 6.27 Código Python del problema del circuito LRC compilado.

Problema 4

Se tienen tres tanques de 1000 litros de capacidad cada uno, perfectamente agitados (véase Fig. 6.28). Los tres recipientes están completamente llenos con una solución cuya concentración es 30 g/L. A partir de cierto momento se alimenta al primer tanque una solución que contiene 50 g/L con un gasto de 300 L/min (hay un arreglo entre los tres recipientes tal que al haber un gasto al primero, la misma cantidad fluye de éste al segundo, del segundo al tercero y de éste afuera del sistema, con lo cual se mantiene constante el volumen en todos ellos).

Calcular la concentración en cada tanque después de 10 minutos de haber empezado a agregar solución al primero

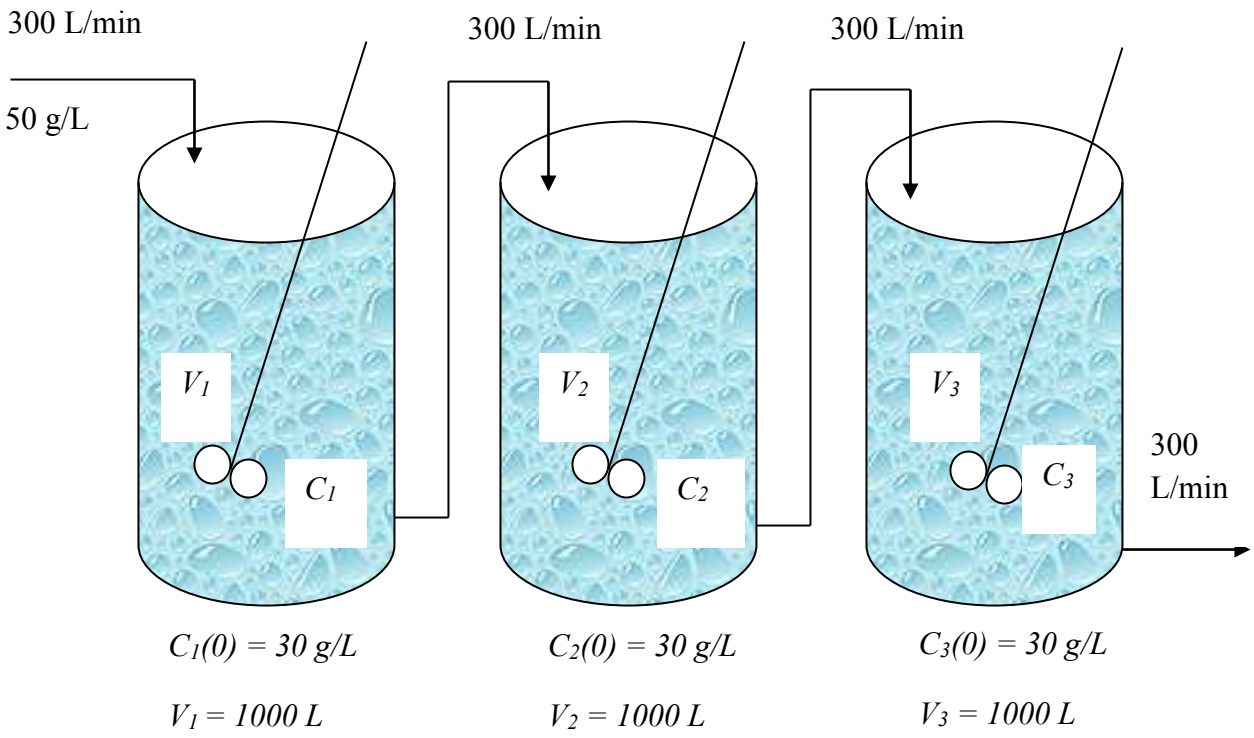


Fig. 6.28 Arreglo de tanques interconectados completamente llenos de un fluido, cada uno con capacidad de 1000 L con una solución cuya concentración es de 30 g/L.

Solución

Realizamos un balance del soluto en el primer tanque, sabiendo que

Acumulación = Entrada – Salida

$$\frac{dC_1V_1}{dt} = (300)(50) - 300C_1$$

Al observar el primer tanque se puede ver que entran 300 L/min y 50 g/L, salen 300 L/min y el tanque ya estaba anteriormente lleno con una acumulación de 1000 L, sustituyendo queda

$$1000 \cdot \frac{dC_1}{dt} = 300(50) - 300C_1$$

Se simplifica la formula

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{15000 - 300C_1}{1000}$$

$$\frac{dC_1}{dt} = 15 - .3C_1$$

Para la segunda ecuación la entrada es igual a 300 L/min multiplicado por la concentración

de C_1 y la salida es de 300 L/min, pero esta vez por la concentración de C_2 que se consiguió en el segundo tanque además también cuenta con una acumulación inicial de 1000 L.

$$1000 \cdot \frac{dC_2}{dt} = 300(C_1) - 300C_2$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{300(C_1) - 300C_2}{1000}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = .3C_1 - .3C_2$$

$$\frac{dC_2}{dt} = .3(C_1 - C_2)$$

Para el ultimo tanque aplica lo mismo pero la entrada está dada por la concentración C_2 y la salida por C_3

$$1000 \cdot \frac{dC_3}{dt} = 300(C_2) - 300C_3$$

$$\frac{dC_3}{dt} = \frac{300(C_2) - 300C_3}{1000}$$

$$\frac{dC_3}{dt} = .3C_2 - .3C_3$$

$$\frac{dC_3}{dt} = .3(C_2 - C_3)$$

Observando los contenedores se puede ver que C_1, C_2 y C_3 cuando el tiempo es igual a 0 la constante es igual a 30 y el problema pide que calculemos cuando pasen 10 minutos, al agrupar la información obtenida queda el Problema del Valor Inicial, PVI

$$PVI \begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = 15 - .3C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} = .3(C_1 - C_2) \\ \frac{dC_3}{dt} = .3(C_2 - C_3) \\ C_1(0) = 30 \\ C_2(0) = 30 \\ C_3(0) = 30 \\ C_1(10) = ? \\ C_2(10) = ? \\ C_3(10) = ? \end{cases}$$

Utilizando un paso de integración $h = 1min$ en el algoritmo de Runge-Kutta de orden cuatro, RK4, se tiene que

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 \cdot h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 \cdot h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 \cdot h\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + k_2 + k_3 + k_4\right)$$

Donde x_i es la variable independiente y y_i es la variable dependiente, de la misma forma, t es la variable independiente y C_i la variable dependiente.

Al observar las diferentes ecuaciones en los diferentes tanques se puede ver que no hay una variable t por lo que al desarrollar las iteraciones solamente se toma en cuenta C_i . La iteraciones (note que se usaron minúsculas para las concentraciones, en lugar de C_i se utilizó ci , i no subíndice) son

1ª iteración

> $i := 0$

$i := 0$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c1$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c1$

> $t[i] := i$

$t_0 := 0$

> $c1[i] := 30$

$c1_0 := 30$

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 6.0$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 5.100000000$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 5.235000000$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 4.42950000$

>

$$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c1_1 := 35.18325000$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_0 := 0$

2ª iteración

> $i := 1$

$i := 1$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_1 := 1$

> $c1[i]$

35.18325000

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 4.44502500$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 3.778271250$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 3.878284312$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.28153971$

>

$$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c1_2 := 39.02319597$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_1 := 1$

> $c2[i] := 30$

$c2_0 := 30$

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c2_1 := 30.$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_0 := 0$

> $c3[i] := 30$

$c3_0 := 30$

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_1 := 30.$

> $c2[i]$

30.

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.55497500$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 2.02146750$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 2.16141525$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.85182415$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c2_2 := 32.12876078$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_1 := 1$

> $c3[i]$

30.

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_2 := 30.$

Al restarse c_1 y c_2 en la primera iteración dan cero y sucede lo mismo con cuando restamos c_2 y c_3.

3ª Iteración

> $i := 2$

$i := 2$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_2 := 2$

> $c1[i]$

39.02319597

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 3.29304121$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.799085028$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.873178456$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.43108767$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_3 := 41.86797194$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_2 := 2$

> $c2[i]$

32.12876078

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 2.068330556$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.688829726$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.874979476$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.793318246$

4ª Iteración

> $i := 3$

$i := 3$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_3 := 3$

> $c1[i]$

41.86797194

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 2.43960842$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.073667157$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.128558346$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.80104092$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_4 := 43.97548866$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_3 := 3$

> $c2[i]$

34.96030532

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 2.07229998$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.69398997$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.88049697$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.80059816$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c2_3 := 34.96030532$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_2 := 2$

> $c3[i]$

30.

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.638628234$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.830216704$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.887693245$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.17124418$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c3_3 := 30.87428205$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c2_4 := 37.79728399$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_3 := 3$

> $c3[i]$

30.87428205

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.225806985$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.593549085$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.703871715$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.248130015$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c3_4 := 32.55241182$

Se repiten las iteraciones hasta llegar a $t = 10$.

5ª Iteración

> $i := 4$

$i := 4$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_4 := 4$

> $c1[i]$

43.97548866

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 1.80735340$

6ª Iteración

> $i := 5$

$i := 5$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_5 := 5$

> $c1[i]$

45.53681608

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 1.33895518$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.536250390$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.576915842$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.33427865$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_5 := 45.53681608$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_4 := 4$

> $c2[i]$

37.79728399

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.85346140$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.40949982$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.57631135$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.39924821$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_5 := 40.33467265$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_4 := 4$

> $c3[i]$

32.55241182

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.573461654$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.138111903$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.168238395$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.98848366$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_6 := 46.69350599$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_5 := 5$

> $c2[i]$

40.33467265

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.56064302$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.02883593$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.16929380$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.86221930$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_6 := 42.47119295$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_5 := 5$

> $c3[i]$

34.70648083

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.68845755$

> $k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.045500154$

> $k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.187111704$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 2.885728674$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_5 := 34.70648083$

> $k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.19499481$

> $k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.34695599$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 3.09663114$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_6 := 37.01797921$

7ª Iteración

> $i := 6$

$i := 6$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_6 := 6$

> $c1[i]$

46.69350599

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.99194820$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.8431559700$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.8654748045$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.73230576$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_7 := 47.55042524$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

8ª Iteración

> $i := 7$

$i := 7$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_7 := 7$

> $c1[i]$

47.55042524

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.73487243$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.6246415655$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.6411761952$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.54251957$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_8 := 48.18526316$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$$

> $t2[i] := i$

$t2_6 := 6$

> $c2[i]$

42.47119295

> $k[1] := .3\cdot(c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.26669392$

> $k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.64670210$

> $k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.76070455$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 2.32311665$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c2_7 := 44.20529693$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_6 := 6$

> $c3[i]$

37.01797921

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.63596412$

> $k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.12675336$

> $k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.27399013$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 3.00035820$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_7 := 39.25761409$

$$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$$

> $t2[i] := i$

$t2_7 := 7$

> $c2[i]$

44.20529693

> $k[1] := .3\cdot(c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.00353849$

> $k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.30460004$

> $k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.39491850$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 1.84048959$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c2_8 := 45.57914112$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_7 := 7$

> $c3[i]$

39.25761409

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.48430485$

> $k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.92959631$

> $k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.06318374$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 2.72221509$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_8 := 41.28962743$

9ª Iteración

> $i := 8$

$i := 8$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_8 := 8$

> $c1[i]$

48.18526316

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.54442105$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.4627578925$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.4750073661$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.40191884$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_9 := 48.65557489$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_8 := 8$

> $c2[i]$

45.57914112

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.78183661$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.01638759$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.08675289$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.43388834$

10ª Iteración

> $i := 9$

$i := 9$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_9 := 9$

> $c1[i]$

48.65557489

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.40332753$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.3428284005$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.3519032699$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.29775655$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{10} := 49.00399946$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_9 := 9$

> $c2[i]$

46.64947544

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.60182984$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.78237879$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.83654348$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.10375593$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c2_9 := 46.64947544$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_8 := 8$

> $c3[i]$

41.28962743

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.28685411$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 1.67291034$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 1.78872721$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.36009044$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c3_9 := 43.05133070$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c2_{10} := 47.47338049$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_9 := 9$

> $c3[i]$

43.05133070

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.07944342$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 1.40327645$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 1.50042635$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.97969923$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$$

$c3_{10} := 44.52908874$

11ª Iteración

> $i := 10$

$i := 10$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_{10} := 10$

> $c1[i]$

49.00399946

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.29880016$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.2539801360$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.2607031396$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.22058922$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{11} := 49.26212545$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{10} := 10$

> $c2[i]$

47.47338049

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.45918569$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.59694140$

> $k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.63826811$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.84214656$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{11} := 48.10200570$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{10} := 10$

> $c3[i]$

44.52908874

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.88328753$

> $k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.14827379$

$> k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 1.22776967$

$> k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.61994933$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{11} := 45.73830937$

El resultado de la 10ª iteración para las concentraciones en los tanques es
$c_1 = 49.00399946$ $c_2 = 47.47338049$ $c_3 = 44.52908874$

En la Tabla 6.10 se recopilaron los resultados de las iteraciones para la obtención de las concentraciones de la solución en los tres tanques.

Tabla 6.10 Resultados de las concentraciones en el arreglo de los tres tanques conforme avanza el tiempo hasta los 10 minutos.

Tiempo (min)	c_1	c_2	c_3
0	30	30	30
1	35.18325000	30	30
2	39.02319597	32.12876078	30
3	41.86797194	34.96030532	30.87428205
4	43.97548866	37.79728399	32.55241182
5	45.53681608	40.33467265	34.70648083
6	46.69350599	42.47119295	37.01797921
7	47.55042524	44.20529693	39.25761409
8	48.18526316	45.57914112	41.28962743
9	48.65557489	46.64947544	43.05133070
10	49.00399946	47.47338049	44.52908874

El resultado analítico de C_1 cuando $t = 10$ min, es

$C_1 = \frac{dc_1}{dt} = 15 - .3c_1 = 49.00426$ g/L.

¿Porque cuando el tiempo es 0 en c_1, c_2 y c_3 es el mismo que el valor inicial?
Al realizar la primera iteración los valores que se incluyen en c_1, c_2 y c_3 son de una concentración de 30 g/L cuando $t = 0$ y el resultado que se obtiene al aplicar la fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden en la primera iteración realmente son los valores de c_1, c_2 y c_3 cuando $t = 1$ y es el motivo por el cual en la Tabla 6.10 cuando $t = 0$ se comienza introduciendo los valores iniciales dados en el problema.
Esto se puede comprobar al obtener los resultados analíticamente, si se comienza a introducir los valores obtenidos en la primera iteración en la Tabla 6.10 cuando $t = 0$, las

concentraciones c_1, c_2 y c_3 al llegar a $t = 10$ realmente se estaban obteniendo los valores cuando $t = 11$ (ver Tabla 6.11).

Tabla 6.11 Resultado final de iteraciones de las concentraciones del fluido en el sistema de tanques de la Fig. 6.28.

Tiempo (min)	c_1	c_2	c_3
0	35.18325000	30	30
10	49.26212545	48.10200570	45.73830937

El resultado analítico de C_1 cuando $t = 11$, es

$C_1 = \frac{dc_1}{dt} = 15 - .3c_1 = 49.26234$

Como se observa el resultado obtenido analíticamente se acerca más a cuando $t = 11$ que cunado $t = 10$.

Problema 5

a) Encontrar la curva elástica de una viga uniforme con un extremo libre, de longitud $L = 5$ m y peso constante de $w = 300$ kg. Determinar también la deflexión del extremo libre. Tomar EI = 150 000. La Fig. 6.29 muestra el esquema.

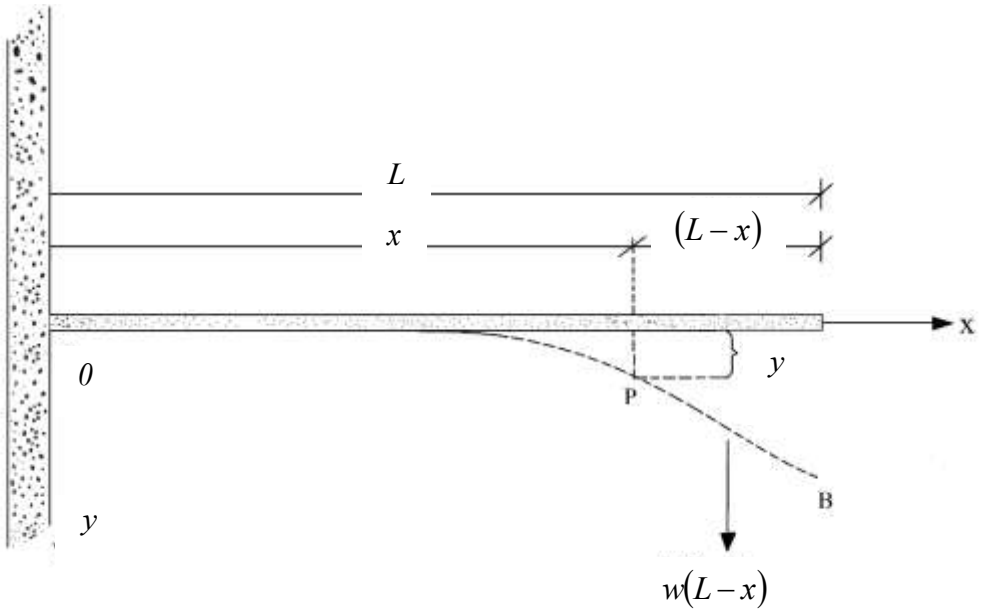


Fig. 6.29 Diagrama de una viga empotrada con un extremo libre y su curva elástica mediante línea punteada. Se toma el origen 0 en el extremo empotrado de la viga y la dirección positiva del eje y hacia abajo.

b) El término El del inciso a) depende del material de que está construida la viga. Repetir el ejercicio para otros materiales, en los que
i. El = 117187
ii. El = 100000
las demás condiciones se conservan.
c) Si en la viga del inciso a) se aplica además una carga concentrada de 500 kg en el extremo libre, determinar el perfil de flexión a lo largo de la viga.

Solución
a)
Resolvemos por el método de Runge-Kutta de cuarto orden, rk4, a saber

Algoritmo del método de Runge-Kutta 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}h(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)$$

Donde,
i es un subíndice que denota el número de iteración
Cada k_i y c_i esta definidas por las ecuaciones

$$k_1 = f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$c_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hc_1\right)$$

$$c_2 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hc_1\right)$$

$$k_3 = f_1\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hc_2\right)$$

$$c_3 = f_2\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hc_2\right)$$

$$k_4 = f_1(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hc_3)$$

$$c_4 = f_2(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hc_3)$$

Sea *x* un punto cualquiera de la viga. Para calcular el momento de flexión en el punto *x*, $M(x)$, considere la parte de la viga a la derecha de P y que sólo una fuerza hacia abajo actúa en esa porción, $w(L-x)$, produciendo el momento positivo

$$M(x) = w(L-x)[(L-x)/2] = w(L-x)^2/2$$

En la teoría de vigas, se demuestra que $M(x)$ está relacionado con el radio de curvatura de la curva elástica calculado en *x* así

$$EI\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{1/2}} = M(x)$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young y depende del material con el que se construyó la viga e *I* es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en *x*. Si

se asume que la viga se flexiona muy poco, que es el caso general, la pendiente y' de la curva elástica es tan pequeña que

$$1+(y')^2 \approx 1$$

Entonces,

$$EI\ y'' = M(x) = \frac{w(L-x)^2}{2}$$

Al cambiar de variable en la forma $y' = dy/dx = z$, se obtiene el siguiente Problema del Valor Inicial, PVI

$$PVI\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{w(L-x)^2}{2EI} \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ y(5) = ? \end{cases}$$

Resolución analítica

Se describe mediante el procedimiento que se describe enseguida.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{300(5-x)^2}{2(150000)} \end{cases}$$

Simplificando a

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{(5-x)^2}{1000} \end{cases}$$

Resolver

$$z' = \frac{(5-x)^2}{1000}$$

O,

$$1000z' = (5-x)^2$$

Convertir la expresión *derivada de z* en *dz/dx*

$$\frac{1000dz}{dx} = (5-x)^2$$

Separamos variables

$$1000dz = (5-x)^2\,dx$$

Desarrollarmos el binomio

$$1000dz = x^2 - 10x + 25dx$$

Regresamos el factor 1000 al otro lado de la ecuación

$$dz = \frac{x^2}{1000} - \frac{10x}{1000} + \frac{25}{1000}$$

Resolvemos la integral

$$\int dz = \int \frac{x^2}{1000}dx - \int \frac{10x}{1000}dx + \int \frac{25}{1000}dx$$

$$\int dz = \int \frac{x^2}{1000}dx - \int \frac{x}{100}dx + \int \frac{1}{40}dx$$

$$z = \frac{x^{2+1}}{2+1(1000)} - \frac{x^{1+1}}{1+1(100)} + \frac{1}{40}x$$

Agregamos la constante de integración

$$z = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{1}{40}x + C_1$$

Sustituimos el resultado en la ecuación original, así

$$y' = z = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{1}{40}x + C_1$$

Resolvemos la nueva ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{1}{40}x + C_1$$

Convertimos la expresión derivada de *y* en *dy/dx*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{1}{40}x + C_1$$

Reorganizamos los términos de *x* con su diferencial

$$dy = \left(\frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{1}{40}x + C_1 \right)dx$$

Resolvemos la segunda integral

$$\int dy = \int \frac{x^3}{3000}dx - \int \frac{x^2}{200}dx + \int \frac{1}{40}xdx + \int C_1 dx$$

$$y = \frac{x^{3+1}}{3+1(3000)} - \frac{x^{2+1}}{2+1(200)} + \frac{1}{1+1(40)}x^{1+1} + C_1 x$$

$$y = \frac{x^4}{4(3000)} - \frac{x^3}{3(200)} + \frac{1}{2(40)}x^2 + C_1 x$$

$$y = \frac{x^4}{12000} - \frac{x^3}{600} + \frac{x^2}{80} + C_1 x + C_2$$

Sustituimos las condiciones iniciales a la solución de la ecuación

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^4}{12000} - \dfrac{x^3}{600} + \dfrac{x^2}{80} + C_1 x + C_2 \\ z = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^3}{200} + \dfrac{x}{80} + C_1 \end{cases}$$

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^4}{12000} - \dfrac{x^3}{600} + \dfrac{x^2}{80} \\ z = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^3}{200} + \dfrac{x}{40} \end{cases}$$
$$x = 0, y_0(0) = 0, z_0(0) = 0$$

Finalizada la resolución analítica podemos sustituir el valor de *x* con lo cual averiguaremos la deflexión de la viga en su extremo libre, para fines prácticos hemos probado con un incremento de 0.5 hasta llegar a $x = 5$.

$$y = \frac{(0)^4}{12000} - \frac{(0)^3}{600} + \frac{(0)^2}{80} = 0$$
$$y = \frac{(0.5)^4}{12000} - \frac{(0.5)^3}{600} + \frac{(0.5)^2}{80} = 0.002921875000$$
$$y = \frac{(1)^4}{12000} - \frac{(1)^3}{600} + \frac{(1)^2}{80} = 0.01091666667$$
$$y = \frac{(1.5)^4}{12000} - \frac{(1.5)^3}{600} + \frac{(1.5)^2}{80} = 0.02292187500$$
$$y = \frac{(2)^4}{12000} - \frac{(2)^3}{600} + \frac{(2)^2}{80} = 0.03800000000$$
$$y = \frac{(2.5)^4}{12000} - \frac{(2.5)^3}{600} + \frac{(2.5)^2}{80} = 0.05533854166$$
$$y = \frac{(3)^4}{12000} - \frac{(3)^3}{600} + \frac{(3)^2}{80} = 0.07425000000$$
$$y = \frac{(3.5)^4}{12000} - \frac{(3.5)^3}{600} + \frac{(3.5)^2}{80} = 0.09417187500$$
$$y = \frac{(4)^4}{12000} - \frac{(4)^3}{600} + \frac{(4)^2}{80} = 0.1146666667$$
$$y = \frac{(4.5)^4}{12000} - \frac{(4.5)^3}{600} + \frac{(4.5)^2}{80} = 0.1354218750$$
$$y = \frac{(5)^4}{12000} - \frac{(5)^3}{600} + \frac{(5)^2}{80} = 0.1562500000$$ ◂ Respuesta analítica de a)

a)

Método Numérico RK4

Utilizamos el método de Runge Kutta de 4º orden, RK4.

Iteración inicial

> $i := 0;$

$i := 0$

>$x[i] := 0; y[i] := 0; z[i] := 0; h := 0.5;$

$x_0 := 0$

$y_0 := 0$

$z_0 := 0$

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{1}{40}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.006250000000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.02256250000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.005640625000$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.02256250000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.01128125000$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.02025000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_1 := 0.002921875001$

>

1era iteración

> $i := 1;$

$i := 1$

>$x[i] := 0.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_1 := 0.5$

0.002921875001

0.01129166667

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.01129166667$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.01635416667$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.01806250000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.01580729167$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.01806250000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.02032291667$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_2 := 0.01091666667$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4)$

$z_2 := 0.02033333334$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_1 := 0.01129166667$

2da iteración

> $i := 2;$

$i := 2$

> $x[i] := 1; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_2 := 1$

0.01091666667

0.02033333334

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.02033333334$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{2}{125}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.02433333334$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.01406250000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.02384895834$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.01406250000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.02736458334$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.01225000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_3 := 0.02292187502$

>

3era iteración

> $i := 3;$

$i := 3$

> $x[i] := 1.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_3 := 1.5$

0.02292187502

0.02737500000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.02737500000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.01225000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.03043750000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.01056250000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.03001562500$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.01056250000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.03265625000$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.009000000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_4 := 0.03800000003$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_3 := 0.02737500000$

$z_4 := 0.03266666667$

4ta iteración

> $i := 4;$

$i := 4$

> $x[i] := 2.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_4 := 2.0$

0.03800000003

0.03266666667

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03266666667$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.009000000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.03491666667$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.007562500000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.03455729167$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.007562500000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.03644791667$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.006250000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_5 := 0.05533854170$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

5ta iteración

> $i := 5;$

$i := 5$

> $x[i] := 2.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_5 := 2.5$

0.05533854170

0.03645833334

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03645833334$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.006250000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.03802083334$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.005062500000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.03772395834$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.005062500000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.03898958334$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.004000000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_6 := 0.07425000004$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_5 := 0.03645833334$

$z_6 := 0.03900000000$

6ta iteración

> $i := 6;$

$i := 6$

> $x[i] := 3; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_6 := 3$

0.07425000004

0.03900000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03900000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{1}{250}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04000000000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.003062500000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.03976562500$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.003062500000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04053125000$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.002250000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_7 := 0.09417187505$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4)$

$z_7 := 0.04054166667$

7ma iteración

> $i := 7;$

$i := 7$

> $x[i] := 3.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_7 := 3.5$

0.09417187505

0.04054166667

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04054166667$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.002250000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04110416667$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.001562500000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04093229167$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.001562500000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04132291667$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.001000000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_8 := 0.1146666667$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4)$

$z_8 := 0.04133333334$

8va iteración

> $i := 8;$

$i := 8$

> $x[i] := 4.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_8 := 4.0$

0.1146666667

0.04133333334

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04133333334$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.001000000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04158333334$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.0005625000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04147395834$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.0005625000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04161458334$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.0002500000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_9 := 0.1354218750$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4)$

$z_9 := 0.04162500000$

9na iteración

> $i := 9;$

$i := 9$

> $x[i] := 4.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_9 := 4.5$

0.1354218750

0.04162500000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04162500000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.0002500000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04168750000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.00006250000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04164062500$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.00006250000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04165625000$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$

$y_{10} := 0.1562500001$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4)$

$z_{10} := 0.04166666667$

10ma iteración
(después de obtener el resultado correcto)

> $i := 10;$

$i := 10$

> $x[i] := 5.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_{10} := 5.0$

0.1562500001

0.04166666667

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04166666667$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04166666667$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.00006250000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04168229167$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.00006250000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04169791667$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.0002500000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{11} := 0.1770885417$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_{11} := 0.04170833334$

Recolectamos los resultados de las iteraciones y los agregamos a la Tabla 6.12.

Tabla 6.12 Resultados de la curva elástica de una viga uniforme con un extremo libre.

x	$\frac{dz}{dx}(y_i)$ en metros	$z(z_i)$ en metros
0	$y_0 := 0$	$z_0 := 0$
0.5	$y_1 := 0.002921875001$	$z_1 := 0.01129166667$
1	$y_2 := 0.01091666667$	$z_2 := 0.02033333334$
1.5	$y_3 := 0.02292187502$	$z_3 := 0.02737500000$
2	$y_4 := 0.03800000003$	$z_4 := 0.03266666667$
2.5	$y_5 := 0.05533854170$	$z_5 := 0.03645833334$
3	$y_6 := 0.07425000004$	$z_6 := 0.03900000000$
3.5	$y_7 := 0.09417187505$	$z_7 := 0.04054166667$
4	$y_8 := 0.1146666667$	$z_8 := 0.04133333334$
4.5	$y_9 := 0.1354218750$	$z_9 := 0.04162500000$
5	$y_{10} := 0.1562500001$	$z_{10} := 0.04166666667$

La respuesta a la pregunta ¿Cuánta deflexión tiene la viga en x = 5m? es:
0.1562500001 metros ◂ Respuesta numérica **a)**

Cuyos errores , tomando como base al resultado analítico son:

> $error_absoluto := |0.15625 - 0.1562500001|$

$$error_absoluto := 1.\ 10^{-10}$$

> $error_relativo := \frac{|0.15625 - 0.1562500001|}{0.1562500001}(100)$

$$error_relativo := 6.399999996\ 10^{-8}\ \%$$

El problema solicita encontrar la curva de elástica, es decir, todos los puntos de flexión hasta llegar a la longitud total de la viga, en este caso 5 m. Esa respuesta se contesta con la Tabla 6.12 que contiene los resultados de las iteraciones, ya que cada punto representa un

grado de deflexión progresiva hasta llegar al extremo libre. Usando el software Geogebra© podemos observar la curva elástica que produce la viga a través de la Fig. 6.30.

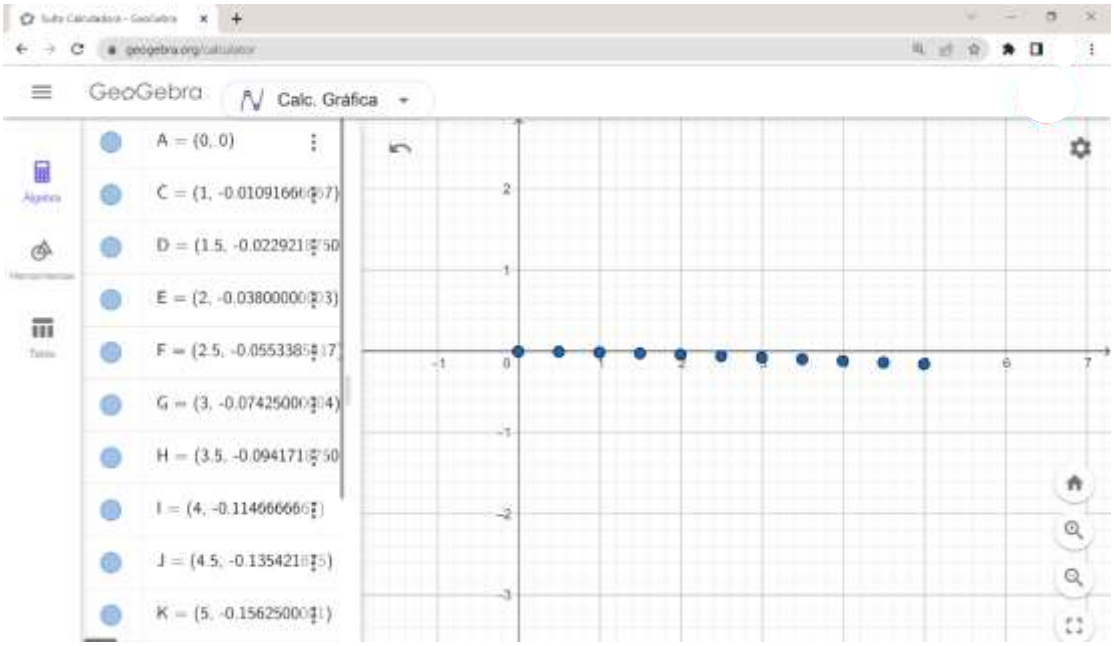


Fig. 6.30 Gráfica de la curva elástica de la viga empotrada con un extremo libre.

En la representación de la Fig. 6.30 se toman las coordenadas tal cual resultan de las iteraciones, y como único cambio importante, destaca la necesidad de colocar los valores de *y* con signo negativo, para poder visualizarlos por debajo del eje *x*.

b) i.

Este inciso contiene las mismas condiciones que el inciso a), el único cambio es que ahora E.I = 117187. Así, elaboramos de la misma manera la resolución analítica y RK4.

Resolución analítica

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{150(5-x)^2}{117187} \end{cases}$$

$$z' = \frac{150(5-x)^2}{117187}$$

$$117187z' = 150(5-x)^2$$

$$117187\frac{dz}{dx} = 150(5-x)^2$$

$$117187dz = 150(5-x)^2\,dx$$

$$117187dz = 150x^2 - 1500x + 3750dx$$

$$\int 117187dz = \int 150x^2 - 1500x + 3750dx$$

$$\int 1dz = \int \frac{150}{117187}x^2 - \frac{1500}{117187}x + \frac{3750}{117187}dx$$

$$z = \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x + C_1$$

$$y' = z$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x + C_1$$

$$117187\,y' = 50x^3 - 750x^2 + 3750x + C_1 117187$$

$$117187\frac{dy}{dx} = 50x^3 - 750x^2 + 3750x + C_1 117187$$

$$dy = \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x + C_1 dx$$

$$\int dy = \int \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x + C_1 dx$$

$$y = \frac{25}{234374}x^4 - \frac{250}{117187}x^3 + \frac{1875}{117187}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} y = \frac{25}{234374}x^4 - \frac{250}{117187}x^3 + \frac{1875}{117187}x^2 + C_1 x + C_2 \\ z = \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x + C_1 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{25}{234374}x^4 - \frac{250}{117187}x^3 + \frac{1875}{117187}x^2 \\ z = \frac{50}{117187}x^3 - \frac{750}{117187}x^2 + \frac{3750}{117187}x \end{cases}$$

$$x = 0, y_0(0) = 0, z_0(0) = 0$$

Sustituimos el valor de *x* con el cual averiguaremos la deflexión de la viga en su extremo libre, para fines prácticos hemos probado con un *incremento* de 0.5 hasta llegar a $x = 5$.

$$y = \frac{25}{234374}(0.5)^4 - \frac{250}{117187}(0.5)^3 + \frac{1875}{117187}(0.5)^2 = 0.003740015958$$

$$y = \frac{25}{234374}(1)^4 - \frac{250}{117187}(1)^3 + \frac{1875}{117187}(1)^2 = 0.01397339295$$

$$y=\frac{25}{234374}(1.5)^4-\frac{250}{117187}(1.5)^3+\frac{1875}{117187}(1.5)^2=0.02934012518$$

$$y=\frac{25}{234374}(2)^4-\frac{250}{117187}(2)^3+\frac{1875}{117187}(2)^2=0.04864020753$$

$$y=\frac{25}{234374}(2.5)^4-\frac{250}{117187}(2.5)^3+\frac{1875}{117187}(2.5)^2=0.07083363558$$

$$y=\frac{25}{234374}(3)^4-\frac{250}{117187}(3)^3+\frac{1875}{117187}(3)^2=0.09504040551$$

$$y=\frac{25}{234374}(3.5)^4-\frac{250}{117187}(3.5)^3+\frac{1875}{117187}(3.5)^2=0.1205405143$$

$$y=\frac{25}{234374}(4)^4-\frac{250}{117187}(4)^3+\frac{1875}{117187}(4)^2=0.1467739596$$

$$y=\frac{25}{234374}(4.5)^4-\frac{250}{117187}(4.5)^3+\frac{1875}{117187}(4.5)^2=0.1733407396$$

$$y=\frac{25}{234374}(5)^4-\frac{250}{117187}(5)^3+\frac{1875}{117187}(5)^2=0.2000008533$$ ◂ Respuesta b) con el método analítico. Ahora, resolvemos por el método numérico RK4

Método numérico RK4

Iteración inicial

> $i := 0;$

$i := 0$

> $x[i] := 0; y[i] := 0; z[i] := 0; h := 0.5;$

$x_0 := 0$

$y_0 := 0$

$z_0 := 0$

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := \frac{3750}{117187}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.008000034135$

> $c[2] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.02888012322$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

1era iteración

> $i := 1;$

$i := 1$

> $x[i] := 0.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_1 := 0.5$

0.003740015958

0.01445339501

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.01445339501$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.02592011059$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.02093342266$

> $c[2] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.02312009865$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.02023341967$

$k_3 := 0.007220030805$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.02888012322$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.01444006161$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.02592011059$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_1 := 0.003740015958$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_1 := 0.01445339501$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.02312009865$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.02601344433$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_2 := 0.01397339296$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_2 := 0.02602677774$

2da iteración

> $i := 2;$

$i := 2$

> $x[i] := 1; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_2 := 1$

0.01397339296

0.02602677774

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.02602677774$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := \dfrac{2400}{117187}$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.03114679958$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.01800007680$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

3era iteración

> $i := 3;$

$i := 3$

> $x[i] := 1.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_3 := 1.5$

0.02934012520

0.03504014953

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03504014953$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.01568006690$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.03896016626$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.01352005769$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.03842016395$

$k_3 := 0.03052679694$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.01800007680$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.03502681614$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.01568006690$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_3 := 0.02934012520$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_3 := 0.03504014953$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.01352005769$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04180017838$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.01152004915$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_4 := 0.04864020756$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_4 := 0.04181351177$

4ta iteración

> $i := 4;$

$i := 4$

> $x[i] := 2.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_4 := 2.0$

0.04864020756

0.04181351177

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04181351177$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.01152004915$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04469352406$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.009680041302$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04423352210$

5ta iteración

> $i := 5;$

$i := 5$

> $x[i] := 2.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_5 := 2.5$

0.07083363561

0.04666686582

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04666686582$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.008000034134$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.04866687435$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.006480027648$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.04828687273$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.009680041302$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04665353242$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.008000034134$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_5 := 0.07083363561$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_5 := 0.04666686582$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.006480027648$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.04990687964$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.005120021846$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_6 := 0.09504040559$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_6 := 0.04992021304$

6ta iteración

> $i := 6;$

$i := 6$

> $x[i] := 3; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_6 := 3$

0.09504040559

0.04992021304

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04992021304$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := \dfrac{600}{117187}$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.05120021850$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.003920016726$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05090021722$

7ma iteración

> $i := 7;$

$i := 7$

> $x[i] := 3.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_7 := 3.5$

0.1205405144

0.05189355479

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05189355479$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.002880012288$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.05261355786$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.002000008533$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05239355692$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.003920016726$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05188022140$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.002880012288$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_7 := 0.1205405144$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_7 := 0.05189355479$

> $c[3] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_3 := 0.002000008533$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05289355906$

> $c[4] := \dfrac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$

$c_4 := 0.001280005461$

>

$y[i+1] := y[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_8 := 0.1467739597$

>

$z[i+1] := z[i] + \dfrac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_8 := 0.05290689245$

8va iteración

> $i := 8;$

$i := 8$

> $x[i] := 4.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_8 := 4.0$

0.1467739597

0.05290689245

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05290689245$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.001280005461$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.05322689382$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.0007200030720$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05308689322$

9na iteración

> $i := 9;$

$i := 9$

> $x[i] := 4.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_9 := 4.5$

0.1733407397

0.05328022737

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05328022737$

> $c[1] := \dfrac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$

$c_1 := 0.0003200013654$

> $k[2] := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.05336022771$

> $c[2] := \dfrac{300\left(5 - \left(x[i] + \dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$

$c_2 := 0.00008000034134$

> $k_3 := z_i + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05330022746$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$$

$c_3 := 0.0007200030720$

$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05326689399$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$$

$c_4 := 0.0003200013654$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_9 := 0.1733407397$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_9 := 0.05328022737$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$$

$c_3 := 0.00008000034134$

$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05332022754$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$$

$c_4 := 0.$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{10} := 0.2000008534$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_{10} := 0.05333356093$

10ma iteración

(después de obtener el resultado correcto)

$> i := 10$

$i := 10$

$> x[i] := 5.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_{10} := 5.0$

0.2000008534

0.05333356093

$h := 0.5$

$> k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05333356093$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(117187)}$$

$c_1 := 0.$

$$> k[2] := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_1$$

$k_2 := 0.05333356093$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$$

$c_2 := 0.00008000034134$

$$> k_3 := z_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c_2$$

$k_3 := 0.05335356102$

Errores

$> error_absoluto := |0.2000008533 - 0.2000008534|$

$error_absoluto := 1.\ 10^{-10}$

>

$$error_relativo := \frac{|0.2000008533 - 0.2000008534|}{0.2000008534}(100)$$

$error_relativo := 4.999978665\ 10^{-8}$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(117187)}$$

$c_3 := 0.00008000034134$

$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05337356110$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(117187)}$$

$c_4 := 0.0003200013654$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{11} := 0.2266743006$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_{11} := 0.05338689449$

Recolectamos los datos y los agregamos a la Tabla 6.13.

Tabla 6.13 Resultados de la viga empotrada en un extremo para EI del inciso b) i..

x	$\frac{dz}{dx}(y_i)$ en metros	$z(z_i)$ en metros
0	$y_0 := 0$	$z_0 := 0$
0.5	$y_1 := 0.003740015958$	$z_1 := 0.01445339501$
1	$y_2 := 0.01397339296$	$z_2 := 0.02602677774$
1.5	$y_3 := 0.02934012520$	$z_3 := 0.03504014953$
2	$y_4 := 0.04864020756$	$z_4 := 0.04181351177$
2.5	$y_5 := 0.07083363561$	$z_5 := 0.04666686582$
3	$y_6 := 0.09504040559$	$z_6 := 0.04992021304$
3.5	$y_7 := 0.1205405144$	$z_7 := 0.05189355479$
4	$y_8 := 0.1467739597$	$z_8 := 0.05290689245$
4.5	$y_9 := 0.1733407397$	$z_9 := 0.05328022737$
5	$y_{10} := 0.2000008534$	$z_{10} := 0.05333356093$

La respuesta a la pregunta ¿Cuánta deflexión tiene la viga en x = 5 m? cuando EI = 117187es:
0.2000008534 metros ◂ Respuesta **a)** con el método numérico RK4.
La curva elástica de los resultados de las iteraciones de b) de la Tabla 6.13 se muestra en la

Fig. 6.31.

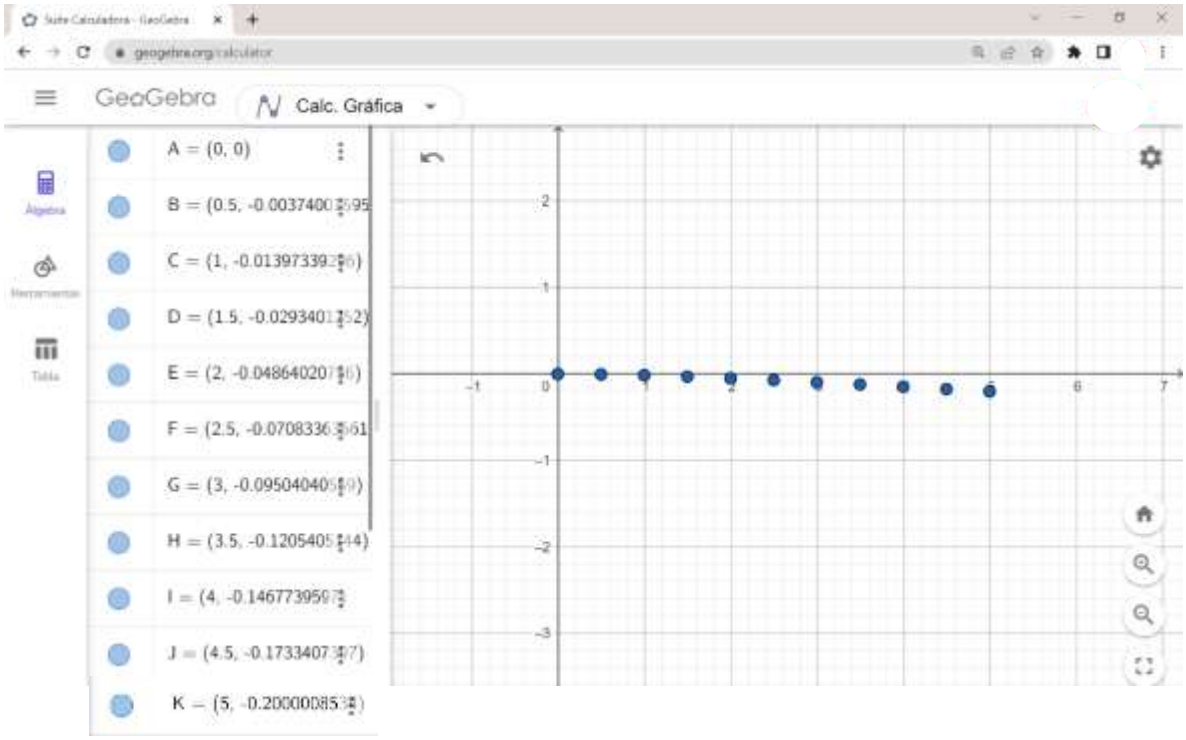


Fig. 6.31 Gráfica de la curva elástica de la viga empotrada con un extremo libre para EI = 117187.

En la Fig. 6.31 los valores de y fueron asignados con signo negativo, para poder visualizarlos por debajo del eje x.

b) ii.

Este inciso contiene las mismas condiciones que el inciso a), el único cambio es que ahora E.I = 100000. Entonces, el procedimiento de la resolución analítica y la solución numérica con RK4 la presentamos con el procedimiento que se describe enseguida.

Método Analítico

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{3(5-x)^2}{2000} \end{cases}$$

$$z' = \frac{3(5-x)^2}{2000}$$

$$2000z' = 3(5-x)^2$$

$$2000\frac{dz}{dx} = 3(5-x)^2$$

$$2000dz = 3(5-x)^2\,dx$$

$$2000dz = 3\left(x^2 - 10x + 25\right)dx$$

$$2000dz = 3x^2 - 30x + 75dx$$

$$dz = \frac{3}{2000}x^2 - \frac{30}{2000}x + \frac{75}{2000}$$

$$\int dz = \int \frac{3}{2000}x^2 - \frac{30}{2000}x + \frac{75}{2000}$$

$$z = \frac{x^3}{2000} - \frac{3}{400}x^2 + \frac{3}{80}x + C_1$$

$$y' = z$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{x^3}{2000} - \frac{3}{400}x^2 + \frac{3}{80}x + C_1$$

$$2000y' = x^3 - 15x^2 + 75x + 2000C_1$$

$$2000\frac{dy}{dx} = x^3 - 15x^2 + 75x + 2000C_1$$

$$2000dy = x^3 - 15x^2 + 75x + 2000C_1dx$$

$$y = \frac{x^3}{2000} - \frac{3}{400}x^2 + \frac{3}{80}x + C_1$$

$$\int dy = \int \frac{x^3}{2000} - \frac{3}{400}x^2 + \frac{3}{80}x + C_1$$

$$y = \frac{x^4}{8000} - \frac{x^3}{400} + \frac{3x^2}{160} + C_1x + C_2$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^4}{8000} - \dfrac{x^3}{400} + \dfrac{3x^2}{160} + C_1x + C_2 \\ z = \dfrac{x^3}{2000} - \dfrac{3}{400}x^2 + \dfrac{3}{80}x + C_1 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^4}{8000} - \dfrac{x^3}{400} + \dfrac{3x^2}{160} \\ z = \dfrac{x^3}{2000} - \dfrac{3}{400}x^2 + \dfrac{3}{80}x \end{cases}$$

$$x=0, y_0(0)=0, z_0(0)=0$$

Ahora, sustituimos el valor de x para obtener la deflexión de la viga en su extremo libre, para fines prácticos hemos probado con un incremento de 0.5 hasta llegar a $x=5$.

$$y=\frac{(0.5)^4}{8000}-\frac{(0.5)^3}{400}+\frac{3(0.5)^2}{160}=0.004382812500$$

$$y=\frac{(1)^4}{8000}-\frac{(1)^3}{400}+\frac{3(1)^2}{160}=0.01637500000$$

$$y=\frac{(1.5)^4}{8000}-\frac{(1.5)^3}{400}+\frac{3(1.5)^2}{160}=0.03438281250$$

$$y=\frac{(2)^4}{8000}-\frac{(2)^3}{400}+\frac{3(2)^2}{160}=0.05700000000$$

$$y=\frac{(2.5)^4}{8000}-\frac{(2.5)^3}{400}+\frac{3(2.5)^2}{160}=0.08300781250$$

$$y=\frac{(3)^4}{8000}-\frac{(3)^3}{400}+\frac{3(3)^2}{160}=0.1113750000$$

$$y=\frac{(3.5)^4}{8000}-\frac{(3.5)^3}{400}+\frac{3(3.5)^2}{160}=0.1412578125$$

$$y=\frac{(4)^4}{8000}-\frac{(4)^3}{400}+\frac{3(4)^2}{160}=0.1720000000$$

$$y=\frac{(4.5)^4}{8000}-\frac{(4.5)^3}{400}+\frac{3(4.5)^2}{160}=0.2031328125$$

$$y=\frac{(5)^4}{8000}-\frac{(5)^3}{400}+\frac{3(5)^2}{160}=0.2343750000$$ ◂ Respuesta **b)** con método analítico.

Método RK4

Iteración inicial

> $i := 0;$

$i := 0$

> $x[i] := 0; y[i] := 0; z[i] := 0; h := 0.5;$

$x_0 := 0$

$y_0 := 0$

$z_0 := 0$

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := \frac{3}{80}$

1era iteración

> $i := 1;$

$i := 1$

> $x[i] := 0.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_1 := 0.5$

0.004382812500

0.01693750000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.01693750000$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.009375000000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.03384375000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.008460937500$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.03384375000$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.01692187500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.03037500000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_1 := 0.004382812500$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_1 := 0.01693750000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.02453125000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.02371093750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.03048437500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_2 := 0.01637500000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_2 := 0.03050000000$

2da iteración

> $i := 2;$

$i := 2$

> $x[i] := 1; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_2 := 1$

0.01637500000

0.03050000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03050000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := \frac{3}{125}$

3era iteración

> $i := 3;$

$i := 3$

> $x[i] := 1.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_3 := 1.5$

0.03438281250

0.04106250000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04106250000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.01837500000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.03650000000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.02109375000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.03577343750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.02109375000$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.04104687500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.01837500000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_3 := 0.03438281250$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_3 := 0.04106250000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.04565625000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.01584375000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.04502343750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.01584375000$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.04898437500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.01350000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_4 := 0.05700000000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_4 := 0.04900000000$

4ta iteración

> $i := 4;$

$i := 4$

> $x[i] := 2.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_4 := 2.0$

0.05700000000

0.04900000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.04900000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.01350000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

5ta iteración

> $i := 5;$

$i := 5$

> $x[i] := 2.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_5 := 2.5$

0.08300781250

0.05468750000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05468750000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.009375000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.05237500000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.01134375000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05183593750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.01134375000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05467187500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.009375000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_5 := 0.08300781250$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_5 := 0.05468750000$

$k_2 := 0.05703125000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.007593750000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.05658593750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.007593750000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.05848437500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.006000000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_6 := 0.1113750000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_6 := 0.05850000000$

6ta iteración

> $i := 6;$

$i := 6$

> $x[i] := 3; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_6 := 3$

0.1113750000

0.05850000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05850000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := \frac{3}{500}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.06000000000$

7ma iteración

> $i := 7;$

$i := 7$

> $x[i] := 3.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_7 := 3.5$

0.1412578126

0.06081250000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.06081250000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.003375000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.06165625000$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_2 := 0.004593750000$

$$> k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$$

$k_3 := 0.05964843750$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_3 := 0.004593750000$

$$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$$

$k_4 := 0.06079687500$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$$

$c_4 := 0.003375000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_7 := 0.1412578126$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_7 := 0.06081250000$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_2 := 0.002343750000$

$$> k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$$

$k_3 := 0.06139843750$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_3 := 0.002343750000$

$$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$$

$k_4 := 0.06198437500$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$$

$c_4 := 0.001500000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_8 := 0.1720000001$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_8 := 0.06200000000$

8va iteración

$> i := 8;$

$i := 8$

$> x[i] := 4.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_8 := 4.0$

0.1720000001

0.06200000000

$h := 0.5$

$$> k[1] := z_i$$

$k_1 := 0.06200000000$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$$

$c_1 := 0.001500000000$

$$> k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$$

$k_2 := 0.06237500000$

9na iteración

$> i := 9;$

$i := 9$

$> x[i] := 4.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_9 := 4.5$

0.2031328126

0.06243750000

$h := 0.5$

$$> k[1] := z_i$$

$k_1 := 0.06243750000$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$$

$c_1 := 0.0003750000000$

$$> k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$$

$k_2 := 0.06253125000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.0008437500000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.06221093750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.0008437500000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.06242187500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.0003750000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_9 := 0.2031328126$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_9 := 0.06243750000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_2 := 0.00009375000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.06246093750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$

$c_3 := 0.00009375000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.06248437500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$

$c_4 := 0.$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$

$y_{10} := 0.2343750000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$

$z_{10} := 0.06250000000$

10ma iteración

(después de obtener el resultado correcto)

> $i := 10;$

$i := 10$

> $x[i] := 5.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_{10} := 5.0$

0.2343750000

0.06250000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.06250000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2(100000)}$

$c_1 := 0.$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.06250000000$

Cuyos errores son

> $error_absoluto := |0.2343750000 - 0.2343750000|$

$error_absoluto := 0.$

>

$error_relativo := \frac{|0.2343750000 - 0.2343750000|}{0.2343750000}(100)$

$error_relativo := 0.$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_2 := 0.00009375000000$

$$> k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$$

$k_3 := 0.06252343750$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(100000)}$$

$c_3 := 0.00009375000000$

$$> k[4] := z_i + h \cdot c_3$$

$k_4 := 0.06254687500$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2(100000)}$$

$c_4 := 0.0003750000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{11} := 0.2656328125$ ◂ Respuesta **b)** con RK4.

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_{11} := 0.06256250000$

En la Tabla 6.14 se incluyen los resultados de las iteraciones para dar solución al **b)**.

Tabla 6.14 Resultados de la curva elástica de la viga empotrada en un extremo con EI = 100000.

x	$\frac{dz}{dx}(y_i)$ en metros	$z(z_i)$ en metros
0	$y_0 := 0$	$z_0 := 0$
0.5	$y_1 := 0.004382812500$	$z_1 := 0.01693750000$
1	$y_2 := 0.01637500000$	$z_2 := 0.03050000000$
1.5	$y_3 := 0.03438281250$	$z_3 := 0.04106250000$
2	$y_4 := 0.05700000000$	$z_4 := 0.04900000000$
2.5	$y_5 := 0.08300781250$	$z_5 := 0.05468750000$
3	$y_6 := 0.1113750000$	$z_6 := 0.05850000000$
3.5	$y_7 := 0.1412578126$	$z_7 := 0.06081250000$
4	$y_8 := 0.1720000001$	$z_8 := 0.06200000000$

Tabla 6.14 Resultados de la curva elástica de la viga empotrada en un extremo con EI = 100000.

x	$\frac{dz}{dx}(y_i)$ en metros	$z(z_i)$ en metros
4.5	$y_9 := 0.2031328126$	$z_9 := 0.06243750000$
5	$y_{10} := 0.2343750000$	$z_{10} := 0.06250000000$

La respuesta a la pregunta ¿Cuánta deflexión tiene la viga en x = 5 m? cuando EI = 100000 es:

0.2343750000 metros ◂ Respuesta **b) ii.** con RK4.

En la Fig. 6.32 se muestran gráficamente los resultados de la Tabla 6.14. En esta figura, destaca la necesidad de colocar los valores de y con signo negativo, para poder visualizarlos por debajo del eje x.

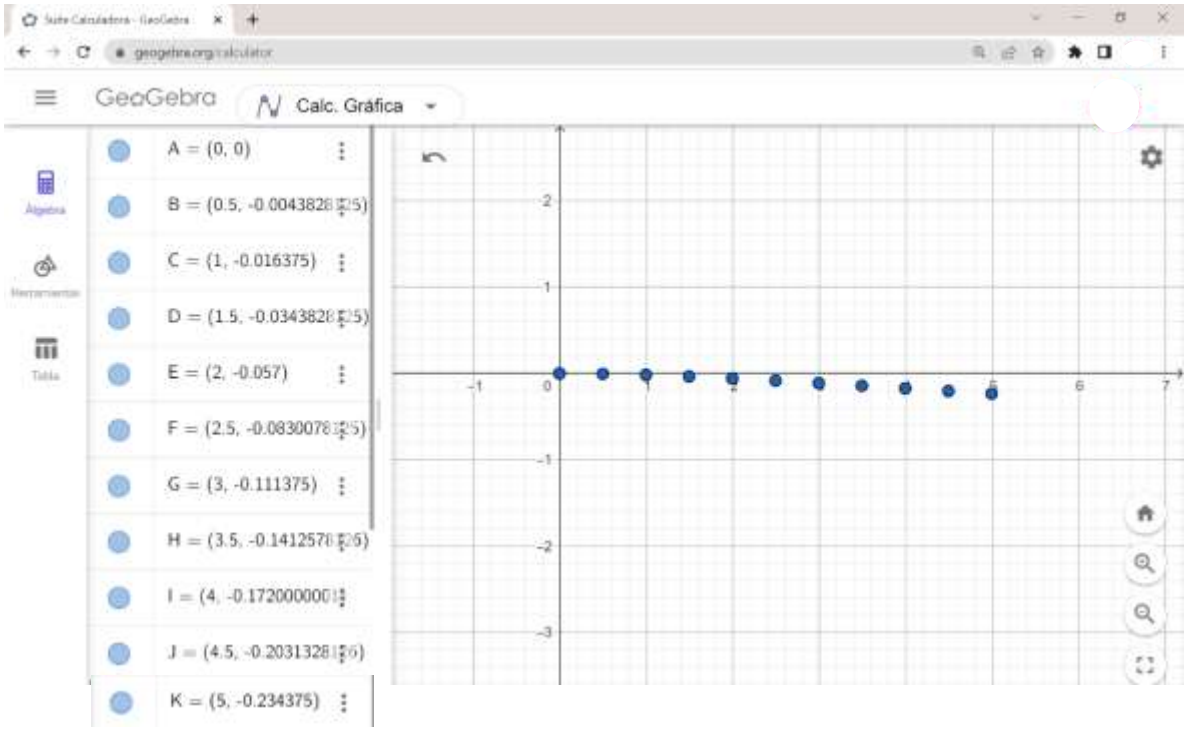


Fig. 6.32 Gráfica de la curva elástica de la viga empotrada con un extremo libre para EI = 100000.

c)

Si en la viga del inciso a) se aplica además una carga concentrada de 500 kg en el extremo libre, determinar el perfil de flexión a lo largo de la viga. Para ello conservamos todos los datos, lo único que cambiaremos es aumentar la carga de 300 kg en un 166.666%.

$$\frac{w(5-x)^2}{2(150000)}$$

Lo cambiamos por:

$$\frac{800(5-x)^2}{2(150000)}$$

Simplificando:

$$\frac{(5-x)^2}{375}$$

Resolución analítica

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{(5-x)^2}{375} \end{cases}$$

$$z' = \frac{(5-x)^2}{375}$$

$$375z' = (5-x)^2$$

$$375\frac{dz}{dx} = (5-x)^2$$

$$375dz = (5-x)^2 dx$$

$$375dz = \left(x^2 - 10x + 25\right)dx$$

$$375dz = x^2 - 10x + 25dx$$

$$dz = \frac{1}{375}x^2 - \frac{2}{75}x + \frac{1}{15}$$

$$\int dz = \int \frac{1}{375}x^2 - \frac{2}{75}x + \frac{1}{15}$$

$$z = \frac{x^3}{1125} - \frac{1}{75}x^2 + \frac{1}{15}x + C_1$$

$$y' = z$$

$$y' = \frac{x^3}{1125} - \frac{1}{75}x^2 + \frac{1}{15}x + C_1$$

$$1125y' = x^3 - 15x^2 + 75x + 1125C_1$$

$$1125\frac{dy}{dx} = x^3 - 15x^2 + 75x + 1125C_1$$

$$1125dy = x^3 - 15x^2 + 75x + 1125C_1 dx$$

$$dy = \frac{x^3}{1125} - \frac{1}{75}x^2 + \frac{1}{15}x + C_1$$

$$\int dy = \int \frac{x^3}{1125} - \frac{1}{75}x^2 + \frac{1}{15}x + C_1$$

$$y=\frac{x^4}{4500}-\frac{x^3}{225}+\frac{x^2}{30}+C_1x+C_2$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^4}{4500}-\dfrac{x^3}{225}+\dfrac{x^2}{30}+C_1x+C_2 \\ z=\dfrac{x^3}{1125}-\dfrac{1}{75}x^2+\dfrac{1}{15}x+C_1 \end{cases}$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0=C_2 \\ 0=C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^4}{4500}-\dfrac{x^3}{225}+\dfrac{x^2}{30} \\ z=\dfrac{x^3}{1125}-\dfrac{1}{75}x^2+\dfrac{1}{15}x \end{cases}$$

$$x=0, y_0(0)=0, z_0(0)=0$$

A continuación, sustituimos el valor de x con el cual obtendremos la deflexión de la viga en su extremo libre, para fines prácticos hemos probado con un incremento de 0.5 hasta llegar a x = 5.

$$y=\frac{(0.5)^4}{4500}-\frac{(0.5)^3}{225}+\frac{(0.5)^2}{30}=0.007791666666$$

$$y=\frac{(1)^4}{4500}-\frac{(1)^3}{225}+\frac{(1)^2}{30}=0.02911111111$$

$$y=\frac{(1.5)^4}{4500}-\frac{(1.5)^3}{225}+\frac{(1.5)^2}{30}=0.06112500000$$

$$y=\frac{(2)^4}{4500}-\frac{(2)^3}{225}+\frac{(2)^2}{30}=0.1013333333$$

$$y=\frac{(2.5)^4}{4500}-\frac{(2.5)^3}{225}+\frac{(2.5)^2}{30}=0.1475694444$$

$$y=\frac{(3)^4}{4500}-\frac{(3)^3}{225}+\frac{(3)^2}{30}=0.1980000000$$

$$y=\frac{(3.5)^4}{4500}-\frac{(3.5)^3}{225}+\frac{(3.5)^2}{30}=0.2511249999$$

$$y=\frac{(4)^4}{4500}-\frac{(4)^3}{225}+\frac{(4)^2}{30}=0.3057777778$$

$$y=\frac{(4.5)^4}{4500}-\frac{(4.5)^3}{225}+\frac{(4.5)^2}{30}=0.3611250000$$

$$y=\frac{(5)^4}{4500}-\frac{(5)^3}{225}+\frac{(5)^2}{30}=0.4166666667$$ ◂ Respuesta **c)** con método analítico.

Método Numérico RK4

Iteración inicial

> $i := 0;$

$i := 0$

> $x[i] := 0; y[i] := 0; z[i] := 0; h := 0.5;$

$x_0 := 0$

$y_0 := 0$

$z_0 := 0$

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0$

> $c[1] := \frac{800(5-x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{1}{15}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.01666666666$

> $c[2] := \frac{800\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.06016666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.01504166667$

> $c[3] := \frac{800\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.06016666667$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.03008333334$

> $c[4] := \frac{800(5-(x[i]+h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.05400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_1 := 0.007791666668$

1era iteración

> $i := 1;$

$i := 1$

> $x[i] := 0.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_1 := 0.5$

0.007791666668

0.03011111112

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.03011111112$

> $c[1] := \frac{800(5-x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_1$

$k_2 := 0.04361111112$

> $c[2] := \frac{800\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c_2$

$k_3 := 0.04215277779$

> $c[3] := \frac{800\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z_i + h\cdot c_3$

$k_4 := 0.05419444446$

> $c[4] := \frac{800(5-(x[i]+h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_2 := 0.02911111112$

>

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_1 := 0.03011111112$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_2 := 0.05422222224$

2da iteración

> $i := 2;$

$i := 2$

> $x[i] := 1; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_2 := 1$

0.02911111112

0.05422222224

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.05422222224$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{16}{375}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.06488888890$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.03750000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.06359722224$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.03750000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.07297222224$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.03266666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_3 := 0.06112500002$

3era iteración

> $i := 3;$

$i := 3$

> $x[i] := 1.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_3 := 1.5$

0.06112500002

0.07300000002

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.07300000002$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.03266666667$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.08116666669$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.02816666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.08004166669$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.02816666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.08708333336$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_4 := 0.1013333334$

>

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_3 := 0.07300000002$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_4 := 0.08711111114$

4ta iteración

> $i := 4;$

$i := 4$

> $x[i] := 2.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_4 := 2.0$

0.1013333334

0.08711111114

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.08711111114$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.02400000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.09311111114$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.02016666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.09215277781$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.02016666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.09719444448$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.01666666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_5 := 0.1475694445$

>

5ta iteración

> $i := 5;$

$i := 5$

> $x[i] := 2.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_5 := 2.5$

0.1475694445

0.09722222225

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.09722222225$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.01666666667$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1013888889$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.01350000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1005972222$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.01350000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1039722222$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.01066666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_6 := 0.1980000002$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_5 := 0.09722222225$

6ta iteración

> $i := 6;$

$i := 6$

> $x[i] := 3; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_6 := 3$

0.1980000002

0.1040000000

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.1040000000$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := \frac{4}{375}$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1066666667$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.008166666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1060416667$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.008166666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1080833333$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.006000000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_7 := 0.2511250002$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_6 := 0.1040000000$

7ma iteración

> $i := 7;$

$i := 7$

> $x[i] := 3.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_7 := 3.5$

0.2511250002

0.1081111111

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.1081111111$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.006000000000$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1096111111$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.004166666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1091527778$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.004166666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1101944444$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.002666666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_8 := 0.3057777780$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_7 := 0.1081111111$

$z_8 := 0.1102222221$

8va iteración

> $i := 8;$

$i := 8$

> $x[i] := 4.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_8 := 4.0$

0.3057777780

0.1102222221

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.1102222221$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.002666666667$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1108888888$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.001500000000$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1105972221$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.001500000000$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1109722221$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.0006666666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_9 := 0.3611250002$ ◂ Respuesta **c)** Método Numérico RK4.

>

9na iteración

> $i := 9;$

$i := 9$

> $x[i] := 4.5; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_9 := 4.5$

0.3611250002

0.1109999999

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.1109999999$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.0006666666667$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1111666666$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.0001666666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1110416666$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.0001666666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1110833332$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{10} := 0.4166666668$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_9 := 0.1109999999$

$z_{10} := 0.1111111111$

10ma iteración
(después de obtener el resultado correcto)

> $i := 10$

$i := 10$

> $x[i] := 5.0; y[i]; z[i]; h := 0.5;$

$x_{10} := 5.0$

0.4166666668

0.1111111111

$h := 0.5$

> $k[1] := z_i$

$k_1 := 0.1111111111$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2(150000)}$

$c_1 := 0.$

> $k[2] := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_1$

$k_2 := 0.1111111111$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_2 := 0.0001666666667$

> $k_3 := z_i + \frac{1}{2}\cdot h \cdot c_2$

$k_3 := 0.1111527778$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2(150000)}$

$c_3 := 0.0001666666667$

> $k[4] := z_i + h \cdot c_3$

$k_4 := 0.1111944444$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2(150000)}$

$c_4 := 0.0006666666667$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{0.5}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right)$$

$y_{11} := 0.4722361113$

>

Errores

> $error_absoluto := |0.4166666667 - 0.4166666668|$

$error_absoluto := 1.\ 10^{-10}$

>

$$error_relativo := \frac{|0.4166666667 - 0.4166666668|}{0.4166666668}(100)$$

$error_relativo := 2.399999999\ 10^{-8}$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{0.5}{6}\left(c_1 + 2\,c_2 + 2c_3 + c_4\right)$$

$z_{11} := 0.1112222223$

En la Tabla 6.15 recolectamos los resultados de las iteraciones realizadas, note que la respuesta esperada se obtuvo desde la iteración 9.

Tabla 6.15 Resultados de las iteraciones para la deflexión de la viga cuando se añade en el extremo libre una masa de 500 kg.

x	$\frac{dz}{dx}(y_i)$ en metros	$z(z_i)$ en metros
0	$y_0 := 0$	$z_0 := 0$
0.5	$y_1 := 0.007791666668$	$z_1 := 0.03011111112$
1	$y_2 := 0.02911111112$	$z_2 := 0.05422222224$
1.5	$y_3 := 0.06112500002$	$z_3 := 0.07300000002$
2	$y_4 := 0.1013333334$	$z_4 := 0.08711111114$
2.5	$y_5 := 0.1475694445$	$z_5 := 0.09722222225$
3	$y_6 := 0.1980000002$	$z_6 := 0.1040000000$
3.5	$y_7 := 0.2511250002$	$z_7 := 0.1081111111$
4	$y_8 := 0.3057777780$	$z_8 := 0.1102222221$
4.5	$y_9 := 0.3611250002$	$z_9 := 0.1109999999$
5	$y_{10} := 0.4166666668$	$z_{10} := 0.1111111111$

La respuesta a la pregunta ¿Cuánta deflexión tiene la viga en $x = 5$ m? cuando la masa concentrada en el extremo libre es 500 kg (conservando las propiedades del inciso a)): es $y_9 := 0.3611250002$ ◂ Respuesta **c)** Método Numérico RK4.

En la Fig. 6.33 se presenta la gráfica de la curva elástica sujeta a las condiciones de c), graficada con los resultados de la Tabla 6.15.

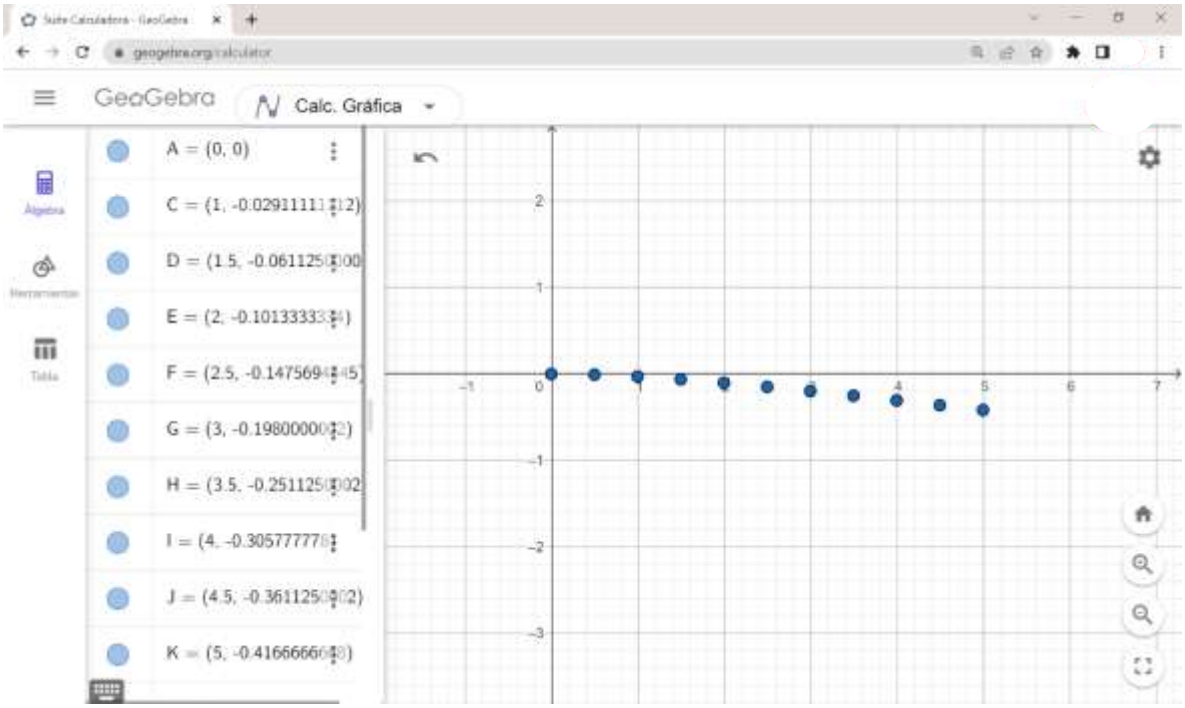


Fig. 6.33 Gráfica de la curva elástica de la viga empotrada con una masa de 500 kg en el extremo libre.

Problema 6

Solución alternativa al Problema 5

a) Encontrar la curva elástica de una viga uniforme con un extremo libre, de longitud L = 5 m y peso constante de w = 300 kg. Determinar también la deflexión del extremo libre. Tomar EI = 150 000. La Fig. 6.34 muestra el esquema.

b) El término El del inciso a) depende del material de que está construida la viga. Repetir el ejercicio para otros materiales, en los que

i. El = 117187

ii. El = 100000

las demás condiciones se conservan.

c) Si en la viga del inciso a) se aplica además una carga concentrada de 500 kg en el extremo libre, determinar el perfil de flexión a lo largo de la viga.

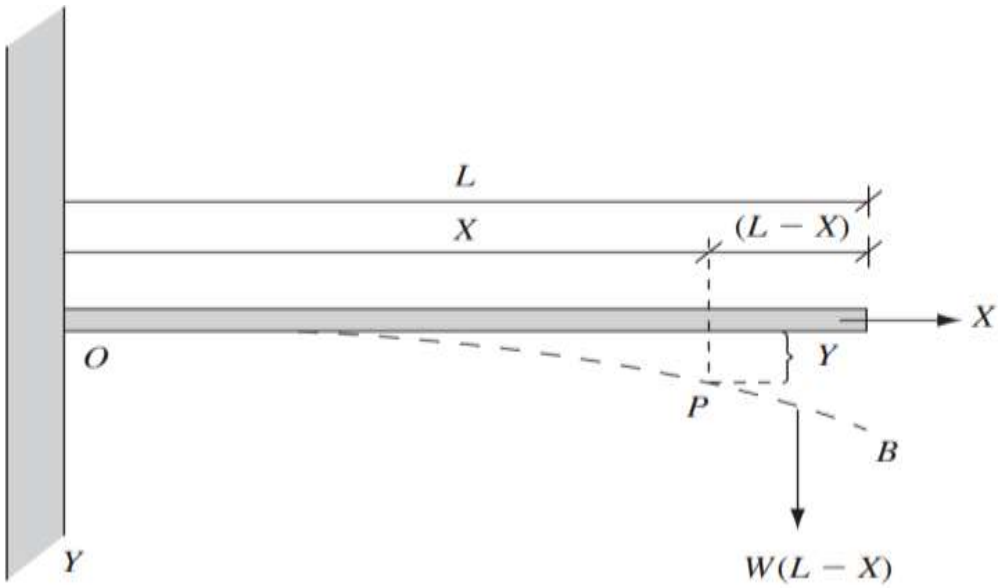


Fig. 6.34 Viga empotrada con un extremo libre

Solución

Otra solución similar al Problema 5 se presenta a continuación.

Se resuelven los incisos mediante **Método Analítico y Método Numérico:** a), b) i. e ii., c).

a)

La Fig. 6.34 muestra la viga y su curva elástica (línea punteada). Se toma el origen O del sistema coordenado en el extremo empotrado de la viga y la dirección positiva del eje y hacia abajo.

Sea x un punto cualquiera de la viga. Para calcular el momento de flexión en el punto x, $M(x)$, considere la parte de la viga a la derecha de P y que sólo una fuerza hacia abajo actúa en esa porción, $w(L-x)$, produciendo el momento positivo.

1. $$M(x)=\frac{w(L-x)^2}{2}$$

En la teoría de vigas, se demuestra que $M(x)$ está relacionado con el radio de curvatura de la curva elástica calculado en x así:

2. $$EI\,\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}=M(x)$$

Donde E es el módulo de elasticidad de Young y depende del material con el que se construyó la viga e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x. Si se asume que la viga se flexiona muy poco, que es el caso general, la pendiente y' de la curva elástica es tan pequeña que

3. $$1+(y')^2\approx 1$$

y la ecuación 2 puede aproximarse por

4. $EI \cdot y'' = \frac{w(L-x)^2}{2}$

En dónde al despejar y'' obtenemos

$$y'' = \frac{w(L-x)^2}{2 \cdot EI}$$

Al cambiar de variable en la forma $y' = \frac{dy}{dx} = z$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = \frac{w(L-x)^2}{2 \cdot EI} \end{cases}$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ y(5) = ? \end{cases}$$

En donde

$w = 300$

$L = 5$

$EI = 150000$

Quedando el sistema de ecuaciones de la siguiente forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = \frac{300(5-x)^2}{2 \cdot 150000} \end{cases}$$

Solución método analítico

Se resuelve por variables separables la segunda ecuación del sistema de ecuaciones

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(5-x)^2}{1000}$$

$$dx \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{(5-x)^2}{1000} \cdot dx$$

$$dz = \frac{(5-x)^2}{1000} dx$$

$$\int dz = \int \frac{(5-x)^2}{1000} dx$$

$$\int dz = \frac{1}{1000} \int (5-x)^2 \, dx \begin{cases} u = 5-x \\ x = 5-u \\ dx = -du \end{cases}$$

$$\int dz = -\frac{1}{1000}\int u^2 du$$

$$z = -\frac{1}{1000}\cdot\frac{u^3}{3} + c_1 \{u = 5 - x$$

$$z = -\frac{(5-x)^3}{3000} + c_1$$

$$z = -\frac{-x^3 + 15\cdot x^2 - 75\cdot x + 125}{3000} + c_1$$

$$z = -\left(-\frac{x^3}{3000} + \frac{x^2}{200} - \frac{x}{40}\right) + c_1$$

$$z = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{x}{40} + c_1$$

Ahora se sustituye el resultado en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^2}{200} + \dfrac{x}{40} + c_1 \\ z = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^2}{200} + \dfrac{x}{40} + c_1 \end{cases}$$

Solo queda resolver la primera ecuación diferencial del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{x}{40} + c_1$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{x}{40} + c_1\right)\cdot dx$$

$$dy = \left(\frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{x}{40} + c_1\right)\cdot dx$$

$$\int dy = \int\left(\frac{x^3}{3000} - \frac{x^2}{200} + \frac{x}{40} + c_1\right)\cdot dx$$

$$y = \frac{x^4}{12000} - \frac{x^3}{600} + \frac{x^2}{80} + c_1\cdot x + c_2$$

Al sustituir el resultado anterior en el sistema de EDO obtenemos

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^4}{12000} - \dfrac{x^3}{600} + \dfrac{x^2}{80} + c_1\cdot x + c_2 \\ z = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^2}{200} + \dfrac{x}{40} + c_1 \end{cases}$$

Lo único que nos queda es aplicar las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ z(0)=0 \\ y(5)=? \end{cases}$$

Aplicando "$z(0)=0$" en la segunda ecuación del sistema de EDO

$$0=\frac{0}{3000}-\frac{0}{200}+\frac{0}{40}+c_1$$

$$c_1=0$$

Sustituyendo "c_1" y aplicando "$y(0)=0$" en la primera ecuación del sistema de EDO

$$0=\frac{0}{12000}-\frac{0}{600}+\frac{0}{80}+0\cdot x+c_2$$

$$c_2=0$$

Sustituyendo los valores de las constantes en el sistema de EDO y aplicando la condición "$y(5)=?$"

$$\begin{cases} y=\frac{5^4}{12000}-\frac{5^3}{600}+\frac{5^2}{80}+0\cdot x+0 \\ z=\frac{x^3}{3000}-\frac{x^2}{200}+\frac{x}{40}+0 \end{cases}$$

$$y(5)=\frac{(5)^4}{12000}-\frac{(5)^3}{600}+\frac{(5)^2}{80}$$

$$y(5)=0.15625 \triangleleft \textit{Respuesta.}$$

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg es igual a 0.15625 metros

Método numérico

$$PVI\begin{cases} \frac{dy}{dx}=z \\ \frac{dz}{dx}=\left(\frac{300\cdot(5-x)^2}{2\cdot 150000}\right) \\ y(0)=0,\quad x_0=0 \\ z(0)=0,\quad h=0.1 \end{cases}$$

Primera iteración

> $i := 0; n := 0$

$i := 0$

$n := 0$

> $x[i] := 0; z[i] := 0; y[i] := 0; h := 0.5;$

$x_0 := 0$

$z_0 := 0$

$y_0 := 0$

$h := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0$

Segunda iteración

> $i := 1; n := 0$

$i := 1$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_1 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.01129166667$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := \frac{1}{40}$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.006250000000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.02256250000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.005640625000$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.02256250000$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.01128125000$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.02025000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_1 := 0.002921875000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_1 := 0.01129166667$

Tercera iteración

> $i := 2; n := 0$

$i := 2$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_2 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.02033333334$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.01635416667$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.01806250000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.01580729167$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.01806250000$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.02032291667$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_2 := 0.01091666667$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_2 := 0.02033333334$

Cuarta iteración

> $i := 3; n := 0$

$i := 3$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_3 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.02937500001$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.02539583334$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.01806250000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.02484895834$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.01806250000$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.02936458334$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_3 := 0.02343229167$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_3 := 0.02937500001$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.03443750001$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.01806250000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.03389062501$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.01806250000$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.03840625001$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_4 := 0.04046875000$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_4 := 0.03841666668$

Quinta iteración

> $i := 4; n := 0$

$i := 4$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_4 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.03841666668$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

Sexta iteración

> $i := 5; n := 0$

$i := 5$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_5 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.04745833335$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.04347916668$

$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.01806250000$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.04293229168$

$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.01806250000$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.04744791668$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_5 := 0.06202604167$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_5 := 0.04745833335$

$k_2 := 0.05252083335$

$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.01806250000$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.05197395835$

$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.01806250000$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.05648958335$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_6 := 0.08810416667$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_6 := 0.05650000002$

Séptima iteración

$> i := 6; n := 0$

$i := 6$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_6 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.05650000002$

$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.06156250002$

Octava iteración

$> i := 7; n := 0$

$i := 7$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.5$

$x_7 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.06554166669$

$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.02025000000$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.07060416669$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_2 := 0.01806250000$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.06101562502$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_3 := 0.01806250000$

$$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$$

$k_4 := 0.06553125002$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_7 := 0.1187031250$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_7 := 0.06554166669$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_2 := 0.01806250000$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.07005729169$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_3 := 0.01806250000$

$$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$$

$k_4 := 0.07457291669$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$$

$c_4 := 0.01600000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_8 := 0.1538229167$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_8 := 0.07458333336$

En la Tabla 6.16 se muestran los resultados de las iteraciones.

Tabla 6.16 Resultados de las iteraciones para a).

i	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0.002921875000	0.01129166667
1	0.01091666667	0.02033333334
2	0.02343229167	0.02937500001
3	0.04046875000	0.03841666668
4	0.06202604167	0.04745833335
5	0.08810416667	0.05650000002
6	0.1187031250	0.06554166669
7	0.1538229167	0.07458333336

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg es aproximadamente igual a

0.1538229167 metros $\triangleleft$ *Respuesta.*

El error relativo es

$$ER = \frac{|0.15625 - 0.1538229167|}{0.15625}(100) \approx 1.553\%$$

b)

El término de a) depende del material de que está construida la viga. Repetir el ejercicio para otros materiales, en los que

i. El = 117187

ii. El = 100000

Para b) i. El = 117187

Método analítico

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{300(5-x)^2}{2 \cdot 117187} \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{150(5-x)^2}{117187}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot dx = \frac{150(5-x)^2}{117187} \cdot dx$$

$$\int dz = \int \frac{150(5-x)^2}{117187} \cdot dx$$

$$z = \frac{150}{117187} \int (5-x)^2 \cdot dx$$

$$z = \frac{150}{117187} \cdot -\frac{(5-x)^3}{3}$$

$$z = \frac{50}{117187} \cdot \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x\right) + c_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{50}{117187} \cdot \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x\right) + c_1 \\ z = \dfrac{50}{117187} \cdot \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x\right) + c_1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot dx = \left(\frac{50}{117187} \cdot \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x\right) + c_1 \right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{50}{117187} \cdot \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x\right) + c_1 \right) dx$$

$$y = \frac{50}{117187} \cdot \int \left(x^3 - 15 \cdot x^2 + 75 \cdot x + c_1\right) \cdot dx$$

$$y=\frac{50}{117187}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-5\cdot x^3+\frac{75}{2}\cdot x^2+c_1\cdot x+c_2\right)$$

Al aplicar las condiciones iniciales queda

$$\begin{cases} y=\dfrac{150}{117187}\cdot\left(\dfrac{x^4}{4}-5\cdot x^3+\dfrac{75}{2}\cdot x^2\right) \\ z=\dfrac{150}{117187}\cdot\left(x^3-15\cdot x^2+75\cdot x\right) \end{cases}$$

Aplicando la condición $y(5)=?$

$$y(5)=\frac{150}{117187}\cdot\left(\frac{(5)^4}{4}-5\cdot(5)^3+\frac{75}{2}\cdot(5)^2\right)$$

$y(5)=0.2000008533 \triangleleft Respuesta.$

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg y $EI=117187$ es aproximadamente igual a 0.200 metros.

Método numérico

$$PVI\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z \\ \dfrac{dz}{dx}=\left(\dfrac{300\cdot(5-x)^2}{2\cdot 117187}\right) \\ y(0)=0,\quad x_0=0 \\ z(0)=0,\quad h=0.1 \end{cases}$$

Primera iteración

> $i:=0; n:=0;$

$i := 0$

$n := 0$

> $x[i]:=h+n\cdot 0.1$

$x_0 := 0.5$

> $k[1]:=z[i]$

$k_1 := 0$

> $c[1]:=\dfrac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 117187}$

$c_1 := 0.02592011059$

> $k[2]:=z[i]+\dfrac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.006480027650$

Segunda iteración

> $i:=1; n:=0;$

$i := 1$

$n := 0$

> $x[i]:=h+n\cdot 0.1$

$x_1 := 0.5$

> $k[1]:=z[i]$

$k_1 := 0.01157338272$

> $c[1]:=\dfrac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 117187}$

$c_1 := 0.02592011059$

> $k[2]:=z[i]+\dfrac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.01805341037$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_2 := 0.02312009865$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.005780024660$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.01156004932$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_1 := 0.003006679495$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_1 := 0.01157338272$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_2 := 0.02312009865$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.01735340738$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.02313343204$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_2 := 0.01180005035$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_2 := 0.02314676544$

Tercera iteración

$> i := 2; n := 0;$

$i := 2$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_2 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.02314676544$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_1 := 0.02592011059$

$$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$$

$k_2 := 0.02962679309$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

Cuarta iteración

$> i := 3; n := 0;$

$i := 3$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_3 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.03472014816$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_1 := 0.02592011059$

$$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$$

$k_2 := 0.04120017581$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_2 := 0.02312009865$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.02892679010$

$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 117187}$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.03470681476$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 117187}$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$

$y_3 := 0.02638011257$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$

$z_3 := 0.03472014816$

$c_2 := 0.02312009865$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.04050017282$

$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 117187}$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.04628019748$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 117187}$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$

$y_4 := 0.04674686614$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$

$z_4 := 0.04629353088$

Quinta iteración

$> i := 4; n := 0;$

$i := 4$

$n := 0$

$> x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_4 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.04629353088$

$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 117187}$

$c_1 := 0.02592011059$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.05277355853$

$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 117187}$

$c_2 := 0.02312009865$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.05207355554$

Sexta iteración

$> i := 5; n := 0;$

$i := 5$

$n := 0$

$> x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_5 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.05786691360$

$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 117187}$

$c_1 := 0.02592011059$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.06434694125$

$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 117187}$

$c_2 := 0.02312009865$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.06364693826$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.05785358020$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_5 := 0.07290031107$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_5 := 0.05786691360$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.06942696292$

$$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_4 := 0.02048008738$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_6 := 0.1048404474$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_6 := 0.06944029632$

Séptima iteración

$> i := 6; n := 0;$

$i := 6$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_6 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.06944029632$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_1 := 0.02592011059$

$$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$$

$k_2 := 0.07592032397$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_2 := 0.02312009865$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.07522032098$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

Octava iteración

$> i := 7; n := 0;$

$i := 7$

$n := 0$

$> x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_7 := 0.5$

$> k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.08101367904$

$$> c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_1 := 0.02592011059$

$$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$$

$k_2 := 0.08749370669$

$$> c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_2 := 0.02312009865$

$$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$$

$k_3 := 0.08679370370$

$$> c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 117187}$$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.08100034564$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$

$c_4 := 0.02048008738$

$>$

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_7 := 0.1425672750$

$>$

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_7 := 0.08101367904$

$c_3 := 0.02312009865$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.09257372836$

$> c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 117187}$

$c_4 := 0.02048008738$

$>$

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_8 := 0.1860807940$

$>$

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_8 := 0.09258706176$

En la Tabla 6.17 se presentan los resultados de las iteraciones.

Tabla 6.17 Resultados de iteraciones de la curva elástica de la viga uniforme con extremo libre con masa constante de 300 kg y $EI = 117187$.

i	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0.003006679495	0.01157338272
1	0.01180005035	0.02314676544
2	0.02638011257	0.03472014816
3	0.04674686614	0.04629353088
4	0.07290031107	0.05786691360
5	0.1048404474	0.06944029632
6	0.1425672750	0.08101367904
7	0.1860807940	0.09258706176

Resultado

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg y "$EI = 117187$" es aproximadamente igual a 0.186080794 metros.

$$ER = \frac{\left|0.2000008533 - 0.186080794\right|}{0.2000008533}(100) \approx 6.96\%$$

Solución b)

El = 100000

Método analítico

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{300(5-x)^2}{2 \cdot 100000} \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot dx = \frac{300(5-x)^2}{2 \cdot 100000} \cdot dx$$

$$\int dz = \frac{3}{2000} \int (5-x)^2 \cdot dx$$

$$z = \frac{3}{2000} \cdot -\frac{(5-x)^3}{3} + c_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2000} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \\ z = \dfrac{1}{2000} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot dx = \left(\frac{1}{2000} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \right) \cdot dx$$

$$\int dy = -\frac{1}{2000} \cdot \int (5-x)^3 + c_1 \cdot dx$$

$$y = -\frac{1}{2000} \cdot -\frac{(5-x)^4}{4} + c_1 \cdot x + c_2$$

$$y = \frac{1}{2000} \cdot \frac{(5-x)^4}{4} + c_1 \cdot x + c_2$$

$$y = \frac{1}{2000} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - 5 \cdot x^3 + \frac{75}{2} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \right)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2000} \cdot \left(\dfrac{x^4}{4} - 5 \cdot x^3 + \dfrac{75}{2} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \right) \\ z = \dfrac{1}{2000} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \end{cases}$$

Al aplicar las condiciones iniciales nos queda

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2000} \cdot \left(\dfrac{x^4}{4} - 5 \cdot x^3 + \dfrac{75}{2} \cdot x^2 \right) \\ z = \dfrac{1}{2000} \cdot -(5-x)^3 \end{cases}$$

$$y(5)=\frac{1}{2000}\cdot\left(\frac{(5)^4}{4}-5\cdot(5)^3+\frac{75}{2}\cdot(5)^2+c_1\cdot x+c_2\right)$$

$y(5)=0.234375$ ◁ *Respuesta.*

Resultado

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg y "$EI=100000$" es aproximadamente igual a 0.234375 metros.

Método numérico

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\ \dfrac{dz}{dx}=\left(\dfrac{300\cdot(5-x)^2}{2\cdot 117187}\right)\\ y(0)=0,\quad x_0=0\\ z(0)=0,\quad h=0.1\end{cases}$$

Primera iteración

> $i:=0;n:=0;$

$i := 0$

$n := 0$

> $x[i]:=h+n\cdot 0.1$

$x_0 := 0.5$

> $k[1]:=z[i]$

$k_1 := 0$

> $c[1]:=\dfrac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2]:=z[i]+\dfrac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.007593750000$

> $c[2]:=\dfrac{300\left(5-\left(x[i]+\dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3]:=z[i]+\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.006773437500$

> $c[3]:=\dfrac{300\left(5-\left(x[i]+\dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4]:=z[i]+h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.01354687500$

Segunda iteración

> $i:=1;n:=0;$

$i := 1$

$n := 0$

> $x[i]:=h+n\cdot 0.1$

$x_1 := 0.5$

> $k[1]:=z[i]$

$k_1 := 0.01356250000$

> $c[1]:=\dfrac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2]:=z[i]+\dfrac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.02115625000$

> $c[2]:=\dfrac{300\left(5-\left(x[i]+\dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3]:=z[i]+\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.02033593750$

> $c[3]:=\dfrac{300\left(5-\left(x[i]+\dfrac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4]:=z[i]+h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.02710937500$

> $c[4] := \frac{300(5-(x[i]+h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)$

$y_1 := 0.003523437500$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4)$

$z_1 := 0.01356250000$

> $c[4] := \frac{300(5-(x[i]+h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)$

$y_2 := 0.01382812500$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4)$

$z_2 := 0.02712500000$

Tercera iteración

> $i := 2; n := 0;$

$i := 2$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_2 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.02712500000$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.03471875000$

> $c[2] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.03389843750$

> $c[3] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.04067187500$

> $c[4] := \frac{300(5-(x[i]+h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

Cuarta iteración

> $i := 3; n := 0;$

$i := 3$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_3 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.04068750000$

> $c[1] := \frac{300(5-x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.04828125000$

> $c[2] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.04746093750$

> $c[3] := \frac{300\left(5-\left(x[i]+\frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.05423437500$

> $c[4] := \frac{300(5-(x[i]+h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_3 := 0.03091406250$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_3 := 0.04068750000$

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_4 := 0.05478125000$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_4 := 0.05425000000$

Quinta iteración

> $i := 4; n := 0;$

$i := 4$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_4 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.05425000000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.06184375000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.06102343750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.06779687500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_5 := 0.08542968750$

>

Sexta iteración

> $i := 5; n := 0;$

$i := 5$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_5 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.06781250000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.07540625000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.07458593750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.08135937500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_6 := 0.1228593750$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_5 := 0.06781250000$

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_6 := 0.08137500000$

Séptima iteración

> $i := 6; n := 0;$

$i := 6$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_6 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.08137500000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.08896875000$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.08814843750$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.09492187500$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_7 := 0.1670703125$

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_7 := 0.09493750000$

Octava iteración

> $i := 7; n := 0;$

$i := 7$

$n := 0$

> $x[i] := h + n\cdot 0.1$

$x_7 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.09493750000$

> $c[1] := \frac{300(5 - x[i])^2}{2\cdot 100000}$

$c_1 := 0.03037500000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h\cdot c[1]$

$k_2 := 0.1025312500$

> $c[2] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_2 := 0.02709375000$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2}\cdot h\cdot c[2]$

$k_3 := 0.1017109375$

> $c[3] := \frac{300\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2\cdot 100000}$

$c_3 := 0.02709375000$

> $k[4] := z[i] + h\cdot c[3]$

$k_4 := 0.1084843750$

> $c[4] := \frac{300(5 - (x[i] + h))^2}{2\cdot 100000}$

$c_4 := 0.02400000000$

>

$$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$$

$y_8 := 0.2180625000$ ◁ *Respuesta.*

>

$$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4\right)$$

$z_8 := 0.1928888888$

La Tabla 6.18 muestra los resultados de las iteraciones de b) ii.

Tabla 6.18 Resultados de las iteraciones de b) ii.

i	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0.003523437500	0.01356250000
1	0.01382812500	0.02712500000
2	0.03091406250	0.04068750000
3	0.05478125000	0.05425000000
4	0.08542968750	0.06781250000
5	0.1228593750	0.08137500000
6	0.1670703125	0.09493750000
7	0.2180625000	0.1928888888

La curva elástica de la viga con una masa constante de 300 kg y $EI = 100000$ es aproximadamente igual a 0.2180625 metros $\triangleleft$ *Respuesta.*

El error relativo es

$$ER = \frac{|0.234375 - 0.2180625|}{0.234375}(100) = 6.96\%$$

c)

Si en la viga de a) se aplica además una carga concentrada de 500 kg en el extremo libre, determine el perfil de flexión a lo largo de la viga.

$w = 300 + 500$

$w = 800$

Método analítico

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{800(5-x)^2}{2 \cdot 150000} \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot dx = \frac{1}{375} \cdot (5-x)^2 \cdot dx$$

$$\int dz = \frac{1}{375} \int (5-x)^2 \cdot dx$$

$$z = \frac{1}{375} \cdot -\frac{(5-x)^3}{3} + c_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1125} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \\ z = \dfrac{1}{1125} \cdot -(5-x)^3 + c_1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot dx=\left(\frac{1}{1125}\cdot -(5-x)^3+c_1\right)\cdot dx$$

$$\int dy=-\frac{1}{1125}\cdot\int(5-x)^3+c_1\cdot dx$$

$$y=-\frac{1}{1125}\cdot -\frac{(5-x)^4}{4}+c_1\cdot x+c_2$$

$$y=\frac{1}{1125}\cdot\frac{(5-x)^4}{4}+c_1\cdot x+c_2$$

$$y=\frac{1}{1125}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-5\cdot x^3+\frac{75}{2}\cdot x^2+c_1\cdot x+c_2\right)$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{1125}\cdot\left(\dfrac{x^4}{4}-5\cdot x^3+\dfrac{75}{2}\cdot x^2+c_1\cdot x+c_2\right) \\ z=\dfrac{1}{1125}\cdot -(5-x)^3+c_1 \end{cases}$$

Al aplicar las condiciones iniciales nos queda

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{1125}\cdot\left(\dfrac{x^4}{4}-5\cdot x^3+\dfrac{75}{2}\cdot x^2\right) \\ z=\dfrac{1}{1125}\cdot -(5-x)^3 \end{cases}$$

$$y(5)=\frac{1}{1125}\cdot\left(\frac{(5)^4}{4}-5\cdot(5)^3+\frac{75}{2}\cdot(5)^2+c_1\cdot x+c_2\right)$$

$y(5)\approx 0.4166666667 \lhd \textit{Respuesta.}$

La curva elástica de la viga con una masa constante de 800 kg y $EI=150000$ es aproximadamente igual a 0.4166666667 metros.

Método numérico

$$PVI\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z \\ \dfrac{dz}{dx}=\left(\dfrac{300\cdot(5-x)^2}{2\cdot 117187}\right) \\ y(0)=0,\ \ x_0=0 \\ z(0)=0,\ \ h=0.1 \end{cases}$$

Primera iteración

> $i := 0; n := 0;$

$i := 0$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_0 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.01350000000$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.01204166667$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.02408333334$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_1 := 0.006263888890$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_1 := 0.02411111110$

Segunda iteración

> $i := 1; n := 0;$

$i := 1$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_1 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.02411111110$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.03761111110$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.03615277777$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.04819444444$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_2 := 0.02458333332$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_2 := 0.04822222220$

Tercera iteración

> $i := 2; n := 0;$

$i := 2$

$n := 0$

Cuarta iteración

> $i := 3; n := 0;$

$i := 3$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_2 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.04822222220$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.06172222220$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.06026388887$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.07230555554$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_3 := 0.05495833330$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_3 := 0.07233333330$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_3 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.07233333330$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.08583333330$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.08437499997$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.09641666664$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_4 := 0.09738888883$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_4 := 0.09644444440$

Quinta iteración

> $i := 4; n := 0;$

$i := 4$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_4 := 0.5$

Sexta iteración

> $i := 5; n := 0;$

$i := 5$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_5 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.09644444440$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.1099444444$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.1084861111$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.1205277777$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_5 := 0.1518749999$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_5 := 0.1205555555$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.1205555555$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

> $k[2] := z[i] + \frac{1}{2} h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.1340555555$

> $c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

> $k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.1325972222$

> $c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

> $k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.1446388888$

> $c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

>

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$y_6 := 0.2184166665$

>

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4)$

$z_6 := 0.1446666666$

Séptima iteración

> $i := 6; n := 0;$

$i := 6$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_6 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.1446666666$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

Octava iteración

> $i := 7; n := 0;$

$i := 7$

$n := 0$

> $x[i] := h + n \cdot 0.1$

$x_7 := 0.5$

> $k[1] := z[i]$

$k_1 := 0.1687777777$

> $c[1] := \frac{800(5 - x[i])^2}{2 \cdot 150000}$

$c_1 := 0.05400000000$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.1581666666$

$> c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.1567083333$

$> c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.1687499999$

$> c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

$>$

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_7 := 0.2970138887$

$>$

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_7 := 0.1687777777$

$c_1 := 0.05400000000$

$> k[2] := z[i] + \frac{1}{2}h \cdot c[1]$

$k_2 := 0.1822777777$

$> c[2] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_2 := 0.04816666667$

$> k[3] := z[i] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot c[2]$

$k_3 := 0.1808194444$

$> c[3] := \frac{800\left(5 - \left(x[i] + \frac{h}{2}\right)\right)^2}{2 \cdot 150000}$

$c_3 := 0.04816666667$

$> k[4] := z[i] + h \cdot c[3]$

$k_4 := 0.1928611110$

$> c[4] := \frac{800(5 - (x[i] + h))^2}{2 \cdot 150000}$

$c_4 := 0.04266666667$

$>$

$y[i+1] := y[i] + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$

$y_8 := 0.3876666664$ ◁ *Respuesta.*

$>$

$z[i+1] := z[i] + \frac{h}{6}\left(c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 + c_4\right)$

$z_8 := 0.1928888888$

La Tabla 6.19 presenta los resultados de las iteraciones hechas para resolver c).

Tabla 6.19 de resultados de las iteraciones para el inciso c).

i	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0.006263888890	0.02411111110
1	0.02458333332	0.04822222220
2	0.05495833330	0.07233333330
3	0.09738888883	0.09644444440
4	0.1518749999	0.1205555555
5	0.2184166665	0.1446666666
6	0.2970138887	0.1687777777
7	0.3876666664	0.1928888888

La curva elástica de la viga con una masa constante de 800 kg y $EI = 150000$ es aproximadamente igual a 0.3876666664 metros $\triangleleft$ *Respuesta.*

El error relativo es

$$ER = \frac{|0.4166666667 - 0.3876666664|}{0.4166666667}(100) \approx 6.96\%$$

Problema 7

En la industria del transporte terrestre y aéreo surgen problemas de choque y vibración a partir de muy diferentes tipos de fuentes de excitación. La eliminación del choque y de la vibración es de importancia vital para aislar instrumentos y controles, y en la protección de los ocupantes de los vehículos. La solución usual a los problemas que involucran transmisión de vibraciones excesivas incluye el uso de soportes flexibles levemente amortiguados. Estos soportes suaves causan que la frecuencia natural de un sistema de suspensión quede por debajo de la frecuencia de disturbio. Esta solución es efectiva para aislar la vibración en estado estacionario; sin embargo, cuando estas suspensiones encuentran situaciones de choque, su suavidad a menudo lleva a deflexiones grandes dañinas. Se ha señalado que estas características no deseables están ausentes en los sistemas de suspensión que utilizan resortes simétricamente no lineales que se rigidizan. Estos resortes son progresivamente más rígidos al sujetarse a deflexiones grandes a partir del "punto de operación". El dispositivo mostrado en la Fig. 6.35 consiste de un objeto de masa *m* conectado a una pared por medio de un resorte lineal con coeficiente *k*, un amortiguador con coeficiente *c,* y un resorte no lineal que ejerce una fuerza de recuperación proporcional a una constante k' veces la tercera potencia del desplazamiento. Este resorte "cúbico" provee un comportamiento no lineal simétrico que satisface la necesidad de aislar el choque y la vibración. Debido a que la ecuación diferencial que describe el movimiento de este sistema es no lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx + k'x^3 = 0$$

el desplazamiento de x en función del tiempo no puede encontrarse con los métodos analíticos tradicionales. Por esta razón se usa una solución numérica a esta ecuación diferencial. Si los parámetros físicos del sistema de suspensión son:

$$k = 2.0 \ \frac{N}{cm}; \ \ k' = 0.2 \ \frac{N}{cm^3}; \ \ c = 0.15 \ \frac{N \cdot s}{cm}; \ \ m = 0.01 \ \ kg$$

Y las condiciones iniciales son:

$x(0) = 10 \ \ cm$ desplazamiento del objeto en la dirección positiva del eje x,

$x'(0) = 0 \ \ \frac{cm}{s}$ velocidad inicial que se imprime al objeto,

elabore y ejecute un programa que simule el movimiento de este sistema desde un tiempo cero hasta un segundo.

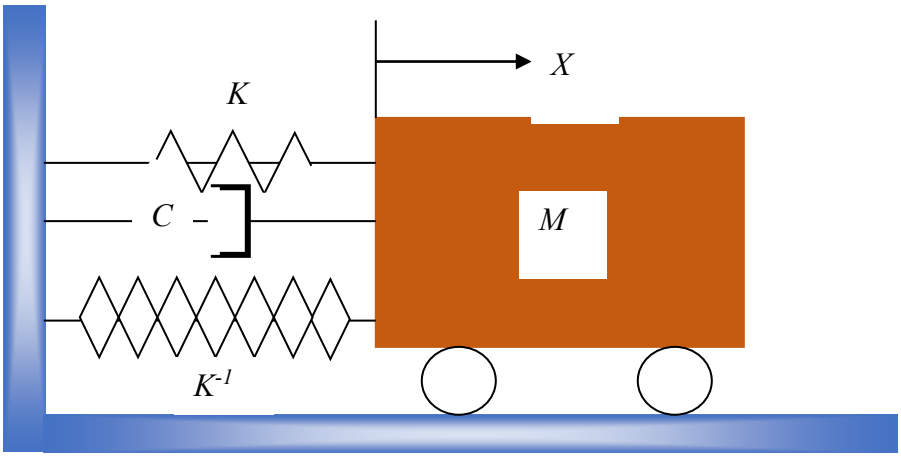


Fig. 6.35 Un objeto amortiguado conectado a una pared.

Solución

Teniendo en cuenta la ecuación diferencial dada

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+k'x^3=0$$

Podemos despejarla en relación a la derivada segunda

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-c\dfrac{dx}{dt}-kx-k'x^3}{m}$$

Ahora, para deshacernos de la derivada segunda, se hace la siguiente sustitución:

$$\frac{dx}{dt}=z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{-c\dfrac{dx}{dt}-kx-k'x^3}{m}$$

$$\frac{d}{dt}(z)=\frac{-cz-kx-k'x^3}{m}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{-cz-kx-k'x^3}{m}$$

Ahora sustituimos las variables físicas en la ecuación

$$k=2.0\ \ \frac{N}{cm};\ \ k'=0.2\ \ \frac{N}{cm^3};\ \ c=0.15\ \ \frac{N\cdot s}{cm};\ \ m=0.01\ \ kg$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{-(0.15)z-(2)x-(0.2)x^3}{0.01}$$

$$\frac{dz}{dt}=-15z-200x-20x^3$$

Y añadiendo las condiciones iniciales dadas obtenemos dos ecuaciones diferenciales lineales, que se vuelven un sistema de ecuaciones, a saber

$$\begin{cases} f(x_i, y_i, z_i) = \dfrac{dx}{dt} = z \\ g(x_i, y_i, z_i) = \dfrac{dz}{dt} = -15z - 200x - 20x^3 \\ x(0) = 10 \\ x'(0) = z(0) = 0 \\ x(t) = ? \quad para \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

Ahora teniendo esto, es posible aplicar el método de Runge-Kutta de 4to orden para derivadas segundas.

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i, z_i)$$
$$l_1 = h \cdot g(x_i, y_i, z_i)$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$l_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$
$$l_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$l_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Se realizó un programa teniendo en cuenta todos los factores mencionados anteriormente. El programa permite usar los valores de este problema o unos personalizados, mientras tanto y sean del mismo sistema mecánico usado aquí. Para los cálculos se hizo uso del paso $h = 0.0025$.

Compilando el Programa con Código Python

Lo primero que ocurre es que se nos da la opción de escoger los valores de este problema u otro, seleccionamos el 0. La pantalla de compilación inicia como en la Fig. 6.36.

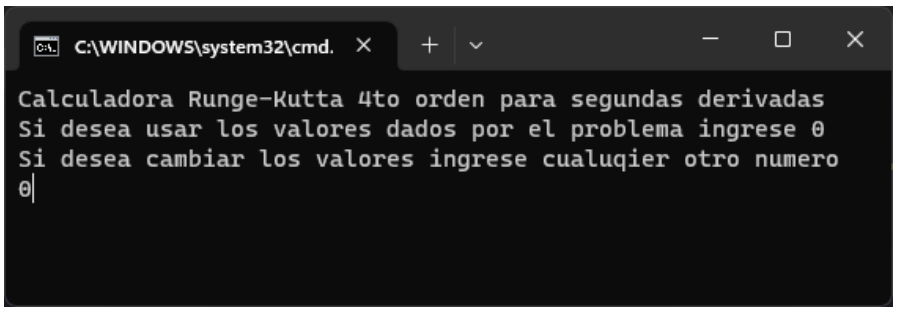
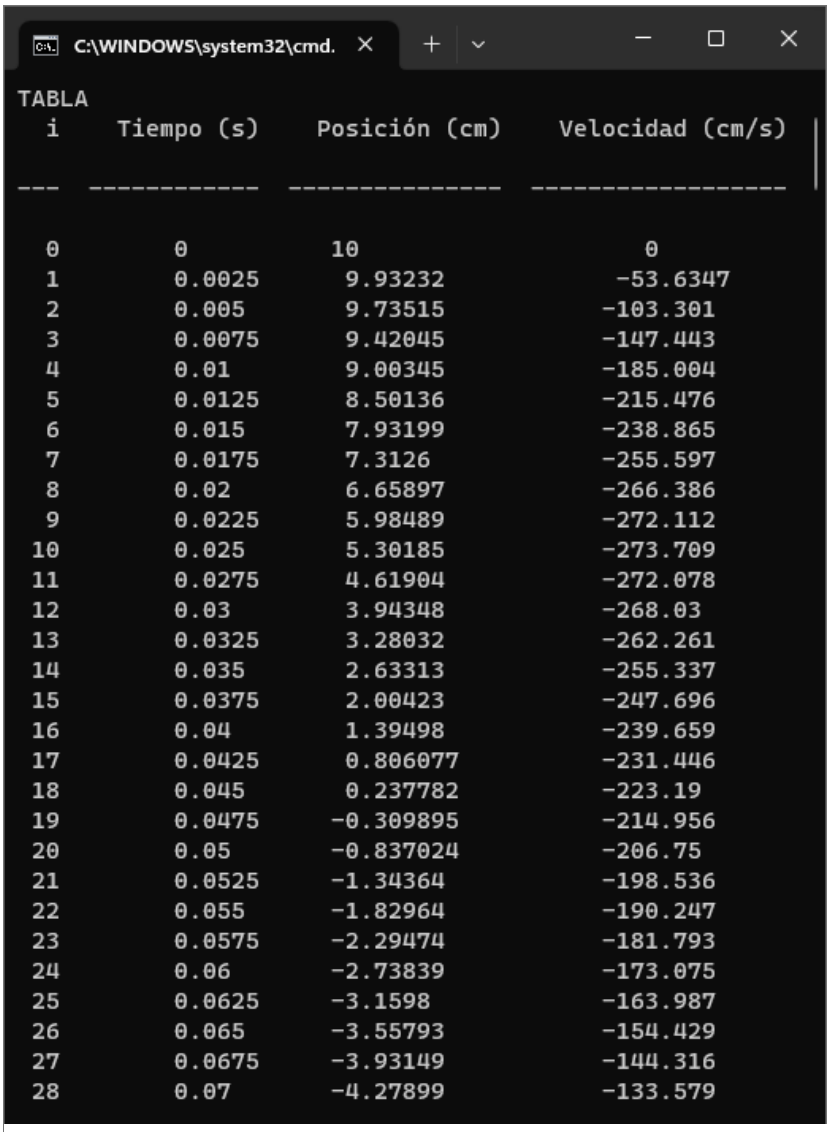


Fig. 6.36 Compilación del programa en código Python.

Enseguida, automáticamente nos imprime una tabla con todos los valores calculados, que para $h = 0.0025$ son 400 valores (ver Fig. 6.37).



TABLA

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
0	0	10	0
1	0.0025	9.93232	-53.6347
2	0.005	9.73515	-103.301
3	0.0075	9.42045	-147.443
4	0.01	9.00345	-185.004
5	0.0125	8.50136	-215.476
6	0.015	7.93199	-238.865
7	0.0175	7.3126	-255.597
8	0.02	6.65897	-266.386
9	0.0225	5.98489	-272.112
10	0.025	5.30185	-273.709
11	0.0275	4.61904	-272.078
12	0.03	3.94348	-268.03
13	0.0325	3.28032	-262.261
14	0.035	2.63313	-255.337
15	0.0375	2.00423	-247.696
16	0.04	1.39498	-239.659
17	0.0425	0.806077	-231.446
18	0.045	0.237782	-223.19
19	0.0475	-0.309895	-214.956
20	0.05	-0.837024	-206.75
21	0.0525	-1.34364	-198.536
22	0.055	-1.82964	-190.247
23	0.0575	-2.29474	-181.793
24	0.06	-2.73839	-173.075
25	0.0625	-3.1598	-163.987
26	0.065	-3.55793	-154.429
27	0.0675	-3.93149	-144.316
28	0.07	-4.27899	-133.579

Fig. 6.37 Tabla con 28 de 400 valores de distancia (cm) versus tiempo (s) del sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales de la posición y velocidad del carrito a diferentes tiempos, compilados del programa en código Python.

Y al mismo tiempo se nos abrirá una gráfica con todos los valores de la distancia a lo largo de un segundo (ver Fig. 6.38).

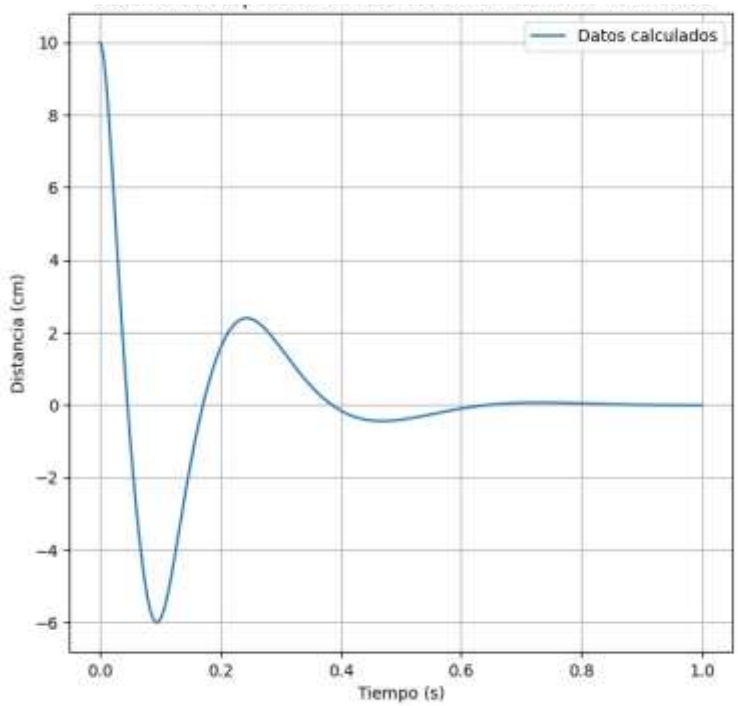


Fig. 6.38 Gráfica de la solución del sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales obtenida del programa en código Python.

El signo negativo de la velocidad en la Fig. 6.37 podemos interpretarlo como que el carrito avanza en direccion opuesta al eje *X*. En la gráfica de la Fig. 6.38 podemos observar como la posición del carrito rápidamente decrece hasta x = -6 cm del origen a aproximadamente 0.1 segundos, para entonces regresarse a 2 cm a los aproximadamente 0.25 segundos y entonces estabilizarse con una variación muy baja. Antes de los 0.7 segundos, el carrito prácticamente se ha detenido

Adicionalmente, con objetivo de experimentación se volvió a calcular la misma gráfica, pero ahora aumentando el coeficiente del resorte lineal a 200 para ver el efecto que tendría. En la Fig. 6.39 se observa en la gráfica como la posición del auto oscila mucho más, ya que con un mayor coeficiente del resorte lineal se encuentra menos tenso y provoca este resultado.

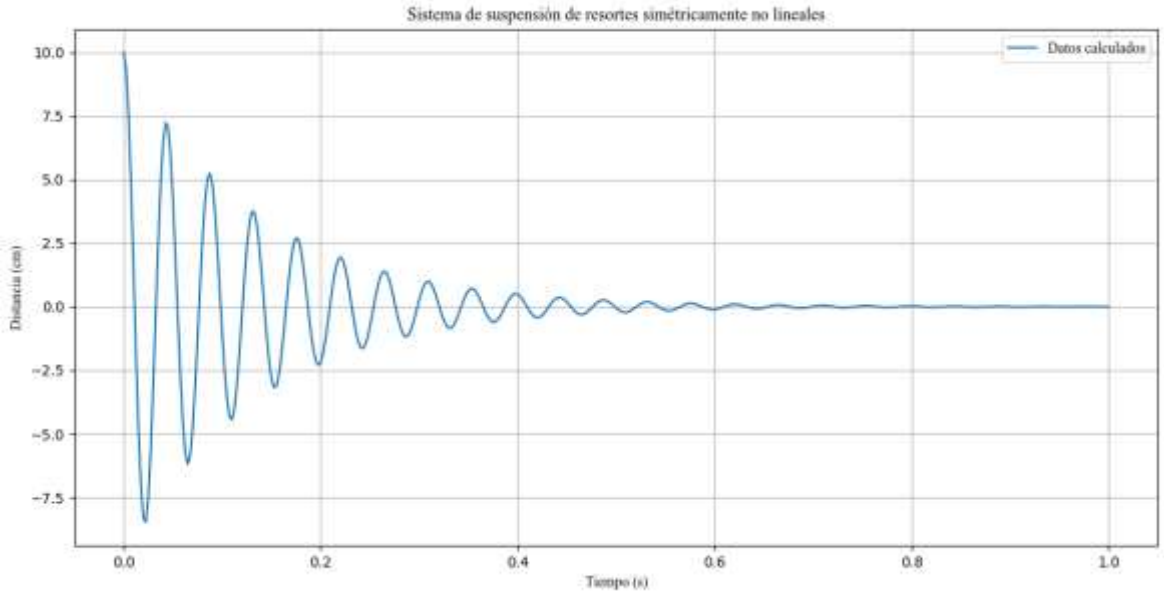


Fig. 6.39 Gráfica de la solución del sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales obtenida del programa en código Python para la posición del carrito con respecto al tiempo al incrementar a 200 el coeficiente del resorte lineal.

En el Anexo 1 del Capítulo 6, se presenta el código Python, las pantallas de compilación del programa en lenguaje Python para la obtención de la posición y la velocidad con respecto al tiempo del carrito embebido en el sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales. También se presenta la Tabla 6.20 de este Problema 7 con los 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa.

Problema 8

Si al Problema 4 le cambiamos las condiciones de concentración en los tanques a $c_1(0)=c_2(0)=c_3(0)=0$ ¿Cuál es el tiempo necesario para alcanzar el régimen permanente?

Solución

Hacemos el cambio de condiciones iniciales del problema, a saber

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dc_1}{dt}=15-.3c_1\\ \dfrac{dc_2}{dt}=.3(c_1-c_2)\\ \dfrac{dc_3}{dt}=.3(c_2-c_3)\\ c_1(0)=30\\ c_2(0)=30\\ c_3(0)=30\\ c_1(10)=?\\ c_2(10)=?\\ c_3(10)=?\end{cases}$$

Por el Problema del Valor Inicial, PVI, dado por las condiciones iniciales nuevas

$$PVI\begin{cases}\dfrac{dc_1}{dt}=15-.3c_1\\ \dfrac{dc_2}{dt}=.3(c_1-c_2)\\ \dfrac{dc_3}{dt}=.3(c_2-c_3)\\ c_1(0)=0\\ c_2(0)=0\\ c_3(0)=0\end{cases}$$

Para cada tanque en particular, se utilizó el método **Runge-Kutta de cuarto orden** completo, **RK4**, pero ahora cambiando las condiciones iniciales dadas.
Para llegar al régimen permanente se requirieron 30 iteraciones, las cuales se presentan a continuación.

1ª Iteración

> $i := 0$

$i := 0$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c1$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c1$

> $t[i] := i$

2ª Iteración

> $i := 1$

$i := 1$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_0 := 0$

> $c1[i] := 0$

$c1_0 := 0$

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 15.$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 12.75000000$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 13.08750000$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 11.07375000$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c1_1 := 12.95812500$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_0 := 0$

> $c2[i] := 0$

$c2_0 := 0$

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.$

>

$t_1 := 1$

> $c1[i]$

12.95812500

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 11.11256250$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 9.445678125$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 9.695710781$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 8.203849270$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_2 := 22.55798993$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_1 := 1$

> $c2[i]$

0.

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 3.887437500$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_1 := 0.$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_0 := 0$

> $c3[i] := 0$

$c3_0 := 0$

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 5.053668750$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 5.403538125$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 7.129560375$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_2 := 5.321901937$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_1 := 1$

> $c3[i]$

0.

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.$

$k_3 := 0.$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_1 := 0.$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_2 := 0.$

3ª Iteración

> $i := 2$

$i := 2$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_2 := 2$

> $c1[i]$

22.55798993

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 8.232603021$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 6.997712568$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

4ª Iteración

> $i := 3$

$i := 3$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_3 := 3$

> $c1[i]$

29.66992986

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 6.099021042$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 5.184167886$

$k_3 := 7.182946136$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 6.077719181$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_3 := 29.66992986$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_2 := 2$

> $c2[i]$

5.321901937

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 5.170826398$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 6.722074317$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 7.187448693$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 9.483295619$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 5.321395859$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 4.502602282$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_4 := 34.93872166$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_3 := 3$

> $c2[i]$

12.40076328

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 5.180749974$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 6.734974966$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 7.201242466$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 9.501495456$

>

$c2_3 := 12.40076328$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_2 := 2$

> $c3[i]$

0.

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.596570581$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 2.075541755$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 2.219233108$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.928110446$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_3 := 2.185705127$

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_4 := 19.49321000$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_3 := 3$

> $c3[i]$

2.185705127

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 3.064517446$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 3.983872680$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 4.259679250$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 5.620324996$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_4 := 6.381029512$

5ª Iteración

> $i := 4$

$i := 4$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_4 := 4$

> $c1[i]$

34.93872166

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 4.51838350$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 3.840625975$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 3.942289604$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.33569662$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[$

$c1_5 := 38.84204021$

Tanque 2

6ª Iteración

> $i := 5$

$i := 5$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_5 := 5$

> $c1[i]$

38.84204021

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 3.34738794$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.845279749$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.920595978$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.47120915$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c1_6 := 41.73376497$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_4 := 4$

> $c2[i]$

19.49321000

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 4.633653500$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 6.023749550$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 6.440778360$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 8.498120520$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_5 := 25.83668164$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_4 := 4$

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_5 := 5$

> $c2[i]$

25.83668164

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 3.901607568$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 5.072089838$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 5.423234518$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 7.155548278$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_6 := 31.17798240$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_5 := 5$

> $c3[i]$

6.381029512

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 3.933654146$

>

$$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$$

$k_2 := 5.113750390$

>

$$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$$

$k_3 := 5.467779263$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 7.214321704$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_5 := 11.76620204$

> $c3[i]$

11.76620204

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 4.221143880$

>

$$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$$

$k_2 := 5.487487044$

>

$$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$$

$k_3 := 5.867389993$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 7.741577878$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_6 := 17.54494801$

7ª Iteración

> $i := 6$

$i := 6$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

8ª Iteración

> $i := 7$

$i := 7$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_6 := 6$

> $c1[i]$

41.73376497

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 2.47987051$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.107889934$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.163687020$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.83076440$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c1_7 := 43.87606311$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_6 := 6$

> $c2[i]$

31.17798240

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 3.166734770$

>

$t_7 := 7$

> $c1[i]$

43.87606311

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 1.83718107$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.561603910$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.602940484$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.35629892$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_8 := 45.46315791$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_7 := 7$

> $c2[i]$

35.51324230

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 2.50884624$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 4.116755200$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 4.401761330$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 5.807791570$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_7 := 35.51324230$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_6 := 6$

> $c3[i]$

17.54494801

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 4.089910317$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 5.316883417$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 5.684975337$

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 3.26150011$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 3.48729627$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 4.60122400$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_8 := 38.94785280$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_7 := 7$

> $c3[i]$

23.14403523

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 3.710762121$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 4.823990761$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 5.157959351$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 7.500895517$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_7 := 23.14403523$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 6.805537731$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_8 := 28.22406858$

9ª Iteración

> $i := 8$

$i := 8$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_8 := 8$

> $c1[i]$

45.46315791

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 1.36105263$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.156894736$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

10ª Iteración

> $i := 9$

$i := 9$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_9 := 9$

> $c1[i]$

46.63893725

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 1.00831882$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.8570709970$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 1.187518420$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.00479710$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c1_9 := 46.63893725$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_8 := 8$

> $c2[i]$

38.94785280

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.95459153$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 2.54096899$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.71688223$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 3.58472087$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$k_3 := 0.8797581704$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.74439137$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{10} := 47.50999867$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_9 := 9$

> $c2[i]$

41.62368861

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.50457460$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.95594698$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 2.09135869$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.75938981$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_9 := 41.62368861$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_8 := 8$

> $c3[i]$

28.22406858

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 3.217135266$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 4.182275846$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 4.471818016$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 5.900226076$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_9 := 32.62832676$

$c2_{10} := 43.68345124$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_9 := 9$

> $c3[i]$

32.62832676

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 2.698608552$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 3.508191122$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 3.751065892$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 4.949248092$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{10} := 36.32272187$

11ª Iteración

> $i := 10$

$i := 10$

12ª iteración

> $i := 11$

$i := 11$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{10} := 10$

> $c1[i]$

47.50999867

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.74700040$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.6349503400$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.6517578490$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.55147305$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[$

$c1_{11} := 48.15531364$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{11} := 11$

> $c1[i]$

48.15531364

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.55340591$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.4703950235$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.4828466565$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.40855191$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c1_{12} := 48.63338717$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{10} := 10$

> $c2[i]$

43.68345124

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 1.14796423$

>

$$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$$

$k_2 := 1.49235350$

>

$$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$$

$k_3 := 1.59567028$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 2.10536640$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$$

$c2_{11} := 45.25501427$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{10} := 10$

> $c3[i]$

36.32272187

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

> $t2[i] := i$

$t2_{11} := 11$

> $c2[i]$

45.25501427

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.87008981$

>

$$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$$

$k_2 := 1.13111675$

>

$$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$$

$k_3 := 1.20942484$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.59574471$

>

$$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c2_{12} := 46.44616722$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{11} := 11$

> $c3[i]$

39.34577342

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 2.20821881$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 2.87068445$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 3.06942414$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 4.04987329$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{11} := 39.34577342$

$k_1 := 1.77277225$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 2.30460393$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 2.46415343$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 3.25126431$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{12} := 41.77269863$

13ª iteración

> $i := 12$

$i := 12$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{12} := 12$

> $c1[i]$

48.63338717

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.40998385$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

14ª iteración

> $i := 13$

$i := 13$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{13} := 13$

> $c1[i]$

48.98756197

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.30373141$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.2581716985$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.2650056552$

$k_2 := 0.3484862725$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.3577109091$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.30267058$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{13} := 48.98756197$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{12} := 12$

> $c2[i]$

46.44616722

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.65616598$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.85301577$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.91207071$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 1.20340841$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_{13} := 47.34445844$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{12} := 12$

> $c3[i]$

41.77269863

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.40204058$

>

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.22422971$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{14} := 49.24994794$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{13} := 13$

> $c2[i]$

47.34445844

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.49293106$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.64081038$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.68517417$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.90403556$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_{14} := 48.01928106$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{13} := 13$

> $c3[i]$

43.69209218

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 1.09570988$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 1.42442284$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 1.82265275$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 1.94883641$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 2.57134243$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_{13} := 43.69209218$

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 1.52303673$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 2.00953192$

>

$$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c3_{14} := 45.19211900$

15ª iteración

> $i := 14$

$i := 14$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_{14} := 14$

> $c1[i]$

49.24994794

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.22501562$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.1912632770$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.1963261284$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.16611778$

>

$$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$$

$c1_{15} := 49.44433331$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

16ª iteración

> $i := 15$

$i := 15$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_{15} := 15$

> $c1[i]$

49.44433331

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.16670001$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.1416950085$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.1454457587$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.12306628$

>

$$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$$

$c1_{16} := 49.58834128$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$$

> $t2[i] := i$

$t2_{14} := 14$

> $c2[i]$

48.01928106

> $k[1] := .3\cdot(c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.36920006$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.47996008$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.51318808$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.67711291$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_{15} := 48.52471594$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_{14} := 14$

> $c3[i]$

45.19211900

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.84814862$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 1.10259321$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 1.17892658$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 1.55550457$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{15} := 46.35323446$

$$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$$

> $t2[i] := i$

$t2_{15} := 15$

> $c2[i]$

48.52471594

> $k[1] := .3\cdot(c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.27588521$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.35865077$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.38348044$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.50597347$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{16} := 48.90240279$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$$

> $t3[i] := i$

$t3_{15} := 15$

> $c3[i]$

46.35323446

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.65144444$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.84687777$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.90550777$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 1.19474910$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{16} := 47.24506190$

17ª iteración

> $i := 16$

$i := 16$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{16} := 16$

> $c1[i]$

49.58834128

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.12349762$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.1049729770$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.1077516734$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.09117212$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[$

$c1_{17} := 49.69502779$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{16} := 16$

> $c2[i]$

48.90240279

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.20578154$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

18ª iteración

> $i := 17$

$i := 17$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{17} := 17$

> $c1[i]$

49.69502779

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.09149166$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.07776791100$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.07982647335$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.06754372$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{18} := 49.77406515$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{17} := 17$

> $c2[i]$

49.18411772

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.15327302$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.26751600$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.28603634$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.37740334$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_{17} := 49.18411772$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{16} := 16$

> $c3[i]$

47.24506190

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.49720227$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.64636295$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.69111115$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.91186896$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{17} := 47.92573180$

$k_2 := 0.19925493$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.21304950$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.28110272$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{18} := 49.39394849$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{17} := 17$

> $c3[i]$

47.92573180

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.37751578$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.49077051$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.52474693$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.69236394$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{18} := 48.44255090$

19ª iteración

> $i := 18$

$i := 18$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

20ª iteración

> $i := 19$

$i := 19$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{18} := 18$

> $c1[i]$

49.77406515

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.06778046$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.05761339100$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.05913845135$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.05003892$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c1_{19} := 49.83261899$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{18} := 18$

> $c2[i]$

49.39394849

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.11403499$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.14824549$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.15850864$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.20914017$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_{19} := 49.55006239$

Tanque 3

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{19} := 19$

> $c1[i]$

49.83261899

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.05021430$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.04268215500$

> $k[3] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.04381197675$

> $k[4] := 15 - .3(\mathrm{c1}[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.03707071$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{20} := 49.87599787$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{19} := 19$

> $c2[i]$

49.55006239

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.08476698$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.11019707$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.11782610$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.15546264$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{20} := 49.66610838$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{18} := 18$

> $c3[i]$

48.44255090

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.28541928$

>

$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.37104506$

>

$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.39673280$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.52345896$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[$

$c3_{19} := 48.83328989$

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{19} := 19$

> $c3[i]$

48.83328989

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.21503175$

>

$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.27954127$

>

$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.29889413$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.39436823$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{20} := 49.12766835$

En este punto, cuando t = 20 min se puede parar ya que las 3 concentraciones de los 3 tanques coinciden en 49 y el cambio es pequeño al incrementar el tiempo, como veremos hasta llegar al minuto 30 min en la 30ª iteración, donde observaremos que el régimen permanente se alcanza exitosamente, ya que la concentración a que convergen los tres tanques, es prácticamente la misma. Continuamos con las iteraciones.

21ª iteración

> $i := 20$

$i := 20$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{20} := 20$

> $c1[i]$

49.87599787

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

22ª iteración

> $i := 21$

$i := 21$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{21} := 21$

> $c1[i]$

49.90813457

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.03720064$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.03162054400$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.03245755840$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.02746337$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c1_{21} := 49.90813457$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{20} := 20$

> $c2[i]$

49.66610838

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.06296685$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.08185691$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.08752392$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.11548120$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c2_{21} := 49.75231000$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{20} := 20$

> $c3[i]$

49.12766835

$k_1 := 0.02755963$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.02342568550$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.02404577718$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.02034590$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{22} := 49.93194265$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{21} := 21$

> $c2[i]$

49.75231000

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.04674737$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.06077158$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.06497884$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.08573467$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_{22} := 49.81630715$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{21} := 21$

> $c3[i]$

49.34880567

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.16153201$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.20999161$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.22452949$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.29624970$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{21} := 49.34880567$

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.12105130$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.15736669$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.16826131$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.22200809$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{22} := 49.51452490$

23ª iteración

> $i := 22$

$i := 22$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{22} := 22$

> $c1[i]$

49.93194265

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.02041720$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.01735462000$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.01781400700$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.01507300$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c1_{23} := 49.94958056$

24ª iteración

> $i := 23$

$i := 23$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{23} := 23$

> $c1[i]$

49.94958056

> $k[1] := (15 - .3\cdot c1[i])$

$k_1 := 0.01512583$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.01285695550$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.01319728668$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.01116664$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{24} := 49.96264739$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{22} := 22$

> $c2[i]$

49.81630715

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.03469066$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.04509786$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.04822002$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.06362267$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_{23} := 49.86379866$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{22} := 22$

> $c3[i]$

49.51452490

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.09053467$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.11769507$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.12584319$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.16604058$

>

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{23} := 23$

> $c2[i]$

49.86379866

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.02573457$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.03345494$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.03577105$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.04719720$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{24} := 49.89902928$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{23} := 23$

> $c3[i]$

49.63846686

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.06759954$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.08787940$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.09396336$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.12397756$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c3_{23} := 49.63846686$

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c3_{24} := 49.73101063$

25ª iteración

> $i := 24$

$i := 24$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3c$

> $t[i] := i$

$t_{24} := 24$

> $c1[i]$

49.96264739

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.01120578$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.009524913000$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.009777043050$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00827267$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c1_{25} := 49.97232778$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{24} := 24$

> $c2[i]$

49.89902928

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.01908544$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

26ª iteración

> $i := 25$

$i := 25$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3c$

> $t[i] := i$

$t_{25} := 25$

> $c1[i]$

49.97232778

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.00830167$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.007056419500$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.007243207075$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00612871$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{26} := 49.97949939$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{25} := 25$

> $c2[i]$

49.92515725

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.01415115$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.02481107$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.02652876$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.03500270$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c2_{25} := 49.92515725$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{24} := 24$

> $c3[i]$

49.73101063

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.05040559$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.06552727$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.07006377$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.09244385$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[$

$c3_{25} := 49.80001588$

$k_2 := 0.01839650$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c1[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.01967010$

> $k[4] := .3\cdot(c1[i] + h\cdot k[3] - c2[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.02595321$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_{26} := 49.94453018$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{25} := 25$

> $c3[i]$

49.80001588

> $k[1] := .3\cdot(c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.03754242$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.04880515$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.05218396$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.06885280$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c3_{26} := 49.85141145$

27ª Iteración

> $i := 26$

$i := 26$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

28ª iteración

> $i := 27$

$i := 27$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_{26} := 26$

> $c1[i]$

49.97949939

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.00615018$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.005227653000$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.005366032050$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00454037$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c1_{27} := 49.98481238$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{26} := 26$

> $c2[i]$

49.94453018

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.01049077$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.01363800$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.01458217$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.01924007$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c2_{27} := 49.95889204$

Tanque 3

$$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$$

> $t[i] := i$

$t_{27} := 27$

> $c1[i]$

49.98481238

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.00455629$

> $k[2] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.003872846500$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.003975363025$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00336368$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c1_{28} := 49.98874844$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{27} := 27$

> $c2[i]$

49.95889204

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.00777610$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.01010893$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.01080878$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.01426137$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c2_{28} := 49.96953752$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{26} := 26$

> $c3[i]$

49.85141145

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.02793561$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.03631629$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.03883050$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.05123391$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4]$

$c3_{27} := 49.88965530$

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{27} := 27$

> $c3[i]$

49.88965530

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.02077102$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.02700233$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} \right)$

$k_3 := 0.02887172$

> $k[4] := .3 \cdot (c2[i] + h \cdot k[3] - c3[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.03809405$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2\,k[2] + 2\,k[3] + k[4])$

$c3_{28} := 49.91809083$

29ª iteración

> $i := 28$

$i := 28$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{28} := 28$

> $c1[i]$

49.98874844

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.00337547$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.002869149500$

30ª iteración

> $i := 29$

$i := 29$

> $h := 1$

$h := 1$

Tanque 1

> $\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

$\frac{dc1}{dt} = 15 - 3\,c$

> $t[i] := i$

$t_{29} := 29$

> $c1[i]$

49.99166442

> $k[1] := (15 - .3 \cdot c1[i])$

$k_1 := 0.00250067$

> $k[2] := 15 - .3\left(\mathrm{c1}[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} \right)$

$k_2 := 0.002125569500$

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.002945097575$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00249194$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c1_{29} := 49.99166442$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{28} := 28$

> $c2[i]$

49.96953752

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.00576327$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.00749225$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.00801094$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.01056983$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c2_{29} := 49.97742743$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{28} := 28$

> $c3[i]$

49.91809083

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.01543401$

>

> $k[3] := 15 - .3\left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.002181834575$

> $k[4] := 15 - .3(c1[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00184612$

>

$c1[i+1] := c1[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c1_{30} := 49.99382469$

Tanque 2

> $\frac{dc2}{dt} = .3(c1 - c2)$

$\frac{dc2}{dt} = 0.3\,c1 - 0.3\,c2$

> $t2[i] := i$

$t2_{29} := 29$

> $c2[i]$

49.97742743

> $k[1] := .3 \cdot (c1[i] - c2[i])$

$k_1 := 0.00427110$

>

$k[2] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[1]}{2}\right)$

$k_2 := 0.00555243$

>

$k[3] := .3 \cdot \left(c1[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2} - c2[i] + \frac{h \cdot k[2]}{2}\right)$

$k_3 := 0.00593683$

> $k[4] := .3 \cdot (c1[i] + h \cdot k[3] - c2[i] + h \cdot k[3])$

$k_4 := 0.00783320$

>

$c2[i+1] := c2[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c2_{30} := 49.98327457$

Tanque 3

> $\frac{dc3}{dt} = .3(c2 - c3)$

$\frac{dc3}{dt} = 0.3\,c2 - 0.3\,c3$

> $t3[i] := i$

$t3_{29} := 29$

> $c3[i]$

49.93921999

> $k[1] := .3 \cdot (c2[i] - c3[i])$

$k_1 := 0.01146223$

>

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.02006421$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.02145327$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.02830597$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4]$

$c3_{29} := 49.93921999$

$$k[2] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[1]}{2}\right)$$

$k_2 := 0.01490090$

>

$$k[3] := .3\cdot\left(c2[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2} - c3[i] + \frac{h\cdot k[2]}{2}\right)$$

$k_3 := 0.01593250$

> $k[4] := .3\cdot(c2[i] + h\cdot k[3] - c3[i] + h\cdot k[3])$

$k_4 := 0.02102173$

>

$c3[i+1] := c3[i] + \frac{h}{6}(k[1] + 2k[2] + 2k[3] + k[4])$

$c3_{30} := 49.95491178$

Resultado

Cuando el tiempo llega a 30 min alcanzamos el régimen permanente donde

$c_1 = 49.99382469$

$c_2 = 49.98327457$

$c_3 = 49.95491178$

Al resolver analíticamente cuando el tiempo es igual a 30 min se obtiene

$$C_1 = \frac{dc_1}{dt} = 15 - .3c_1 = 49.99753$$

Resultado que podemos observar, está muy cerca del resultado numérico.

En la Tabla 6.21 se concentran los resultados obtenidos de las 30 iteraciones en un tiempo de 30 minutos.

$t = 30$ min ◂ Respuesta con el método RK4.

Tabla 6.21 Resultados de cambiar las condiciones iniciales de las concentraciones de los tres tanques del Problema 4 del arreglo al que ingresan al primer tanque 50 g/L de solución.

Tiempo (min)	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0
1	12.95812500	0	0
2	22.55798993	5.321901937	0
3	29.66992986	12.40076328	2.185705127
4	34.93872166	19.49321000	6.381029512

Tabla 6.21 Resultados de cambiar las condiciones iniciales de las concentraciones de los tres tanques del Problema 4 del arreglo al que ingresan al primer tanque 50 g/L de solución.

Tiempo (min)	c_1	c_2	c_3
5	38.84204021	25.83668164	11.76620204
6	41.73376497	31.17798240	17.54494801
7	43.87606311	35.51324230	23.14403523
8	45.46315791	38.94785280	28.22406858
9	46.63893725	41.62368861	32.62832676
10	47.50999867	43.68345124	36.32272187
11	48.15531364	45.25501427	39.34577342
12	48.63338717	46.44616722	41.77269863
13	48.98756197	47.34445844	43.69209218
14	49.24994794	48.01928106	45.19211900
15	49.44433331	48.52471594	46.35323446
16	49.58834128	48.90240279	47.24506190
17	49.69502779	49.18411772	47.92573180
18	49.77406515	49.39394849	48.44255090
19	49.83261899	49.55006239	48.83328989
20	49.87599787	49.66610838	49.12766835
21	49.90813457	49.75231000	49.34880567
22	49.93194265	49.81630715	49.51452490
23	49.94958056	49.86379866	49.63846686
24	49.96264739	49.89902928	49.73101063
25	49.97232778	49.92515725	49.80001588
26	49.97949939	49.94453018	49.85141145
27	49.98481238	49.95889204	49.88965530

Tabla 6.21 Resultados de cambiar las condiciones iniciales de las concentraciones de los tres tanques del Problema 4 del arreglo al que ingresan al primer tanque 50 g/L de solución.

Tiempo (min)	c_1	c_2	c_3
28	49.98874844	49.96953752	49.91809083
29	49.99166442	49.97742743	49.93921999
30	49.99382469	49.98327457	49.95491178

¿Por qué en todos los tanques las concentraciones convergen "casi" donde mismo?
Esto se debe a que cuando se llega al régimen permanente, la concentración de cada tanque se estabiliza y el flujo del tanque se equilibra ocasionando que las concentraciones sean muy similares en un tiempo de 30 minutos.

Problema 9
Se resuelve este problema con el uso de tecnología mediante el software Maple, a diferencia de las fuentes en que fue tomado (Nieves y Dominguez 2006 pp. 515-518 y Lomen y Lovelock 2000 pp. 106-109).
El empleo de los métodos numéricos proporciona solamente soluciones aproximadas; no obstante, debemos diferenciar estas de soluciones incorrectas. Una forma práctica y rápida de probar si los resultados son aproximados a la solución sería correr el programa reduciendo el tamaño de paso a la mitad y comprobar resultados en los mismos puntos. Se resuelve enseguida un problema donde el tamaño de paso es clave para obtener la solución correcta, pero donde las soluciones incorrectas pueden resultar de mayor interés aun, por el aparente caos que presenta. El problema de valor inicial, PVI, al que nos referimos es

$$\text{PVI}\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=10y(1-y)\\ y(0)=0.1\\ y(x)=?\end{cases}$$

Cuya ecuación diferencial es conocida como Ecuación Logística. La solución analítica, obtenida por variables separables, es $y=\dfrac{e^{10x}}{(9+e^{10x})}$, donde al tender x hacia valores grandes, y tiende hacia 1.

Solución
Para solucionar este problema se utilizaron las fórmulas de Runge-Kutta de cuarto orden, rk4, siendo estas

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$
$$k_1=f(x_i,y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right)$$

Aclaramos el hecho de que a pesar de que el problema nos otorga el valor de y cuando $x = 0$, también nos ofrece la ecuación logística para encontrar la solución analítica, es por ello que se comprobó con esta fórmula si realmente $y = 0.1$ cuando $x = 0$.

> $x[i] := 0$:

> $y[i] := evalf\left(\frac{e^{10 \cdot x[i]}}{\left(9 + e^{10 \cdot x[i]}\right)}\right)$

$$y_0 := 0.1000$$

Comprobando que efectivamente está correcto.

Tomando la solución analítica como y_0, y sustituimos i y h_0 en las ecuaciones de Runge-Kutta de cuarto orden, realizamos 20 iteraciones para obtener el resultado esperado. A continuación, las iteraciones son

1er iteración

> $i := 0; h[i] := 0.25;$

$$i := 0$$
$$h_0 := 0.2500$$

> $x[i] := 0$:

> $y[i] := evalf\left(\frac{e^{10 \cdot x[i]}}{\left(9 + e^{10 \cdot x[i]}\right)}\right)$

$$y_0 := 0.1000$$

> $k[1] := 10 \cdot y[i] \cdot (1 - y[i])$

$$k_1 := 0.9000$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[i] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[i] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := 1.6734$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[i] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[i] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 2.1359$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[i] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[i] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := 2.3205$$

> $y[i+1] := y[i] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_1 := 0.5516$$

2da iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[1] \cdot (1 - y[1])$

$$k_1 := 2.4733$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[1] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[1] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := 1.1982$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[1] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \cdot \left(1 - \left(y[1] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \right)$

$$k_3 := 2.0943$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[1] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[1] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.8087$$

> $y[1+1] := y[1] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_2 := 0.8954$$

3er iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[2] \cdot (1 - y[2])$

$$k_1 := 0.9368$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[2] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \cdot \left(1 - \left(y[2] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \right)$

$$k_2 := -0.1263$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[2] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \cdot \left(1 - \left(y[2] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \right)$

$$k_3 := 1.0591$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[2] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[2] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -1.8581$$

> $y[2+1] := y[2] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_3 := 0.9347$$

4ta iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[3] \cdot (1 - y[3])$

$$k_1 := 0.6102$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[3] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \cdot \left(1 - \left(y[3] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \right)$

$$k_2 := -0.1111$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[3] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \cdot \left(1 - \left(y[3] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2] \right) \right)$

$$k_3 := 0.7290$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[3] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[3] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -1.3066$$

> $y[3+1] := y[3] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_4 := 0.9572$$

5ta iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[4] \cdot (1 - y[4])$

$$k_1 := 0.4097$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[4] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \cdot \left(1 - \left(y[4] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1] \right) \right)$

$$k_2 := -0.0848$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[4] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[4] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$k_3 := 0.5056$

> $k[4] := (10 \cdot (y[4] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[4] + h[i] \cdot k[3])))$

$k_4 := -0.9057$

> $y[4+1] := y[4] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$y_5 := 0.9716$

6ta iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[5] \cdot (1 - y[5])$

$k_1 := 0.2760$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[5] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[5] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$k_2 := -0.0613$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[5] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[5] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$k_3 := 0.3477$

> $k[4] := (10 \cdot (y[5] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[5] + h[i] \cdot k[3])))$

$k_4 := -0.6194$

> $y[5+1] := y[5] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$y_6 := 0.9811$

7ta iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[6] \cdot (1 - y[6])$

$k_1 := 0.1850$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[6] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[6] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$k_2 := -0.0429$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[6] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[6] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$k_3 := 0.2362$

> $k[4] := (10 \cdot (y[6] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[6] + h[i] \cdot k[3])))$

$k_4 := -0.4182$

> $y[6+1] := y[6] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$y_7 := 0.9875$

8a iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[7] \cdot (1 - y[7])$

$k_1 := 0.1230$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[7] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[7] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$k_2 := -0.0293$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[7] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[7] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.1586$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[7] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[7] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.2793$$

> $y[7+1] := y[7] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_8 := 0.9918$$

9a iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[8] \cdot (1 - y[8])$

$$k_1 := 0.0813$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[8] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[8] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0197$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[8] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[8] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.1054$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[8] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[8] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.1849$$

> $y[8+1] := y[8] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_9 := 0.9946$$

10a iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[9] \cdot (1 - y[9])$

$$k_1 := 0.0534$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[9] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[9] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0131$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[9] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[9] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0695$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[9] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[9] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.1216$$

> $y[9+1] := y[9] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$

$$y_{10} := 0.9965$$

11a iteración

> $k[1] := 10 \cdot y[10] \cdot (1 - y[10])$

$$k_1 := 0.0349$$

> $k[2] := 10 \cdot \left(y[10] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[10] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0086$$

> $k[3] := 10 \cdot \left(y[10] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[10] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0456$$

> $k[4] := (10 \cdot (y[10] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[10] + h[i] \cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0796$$

> $y[10+1] := y[10] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1] + 2\cdot k[2] + 2\cdot k[3] + k[4])$

$$y_{11} := 0.9977$$

12a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[11]\cdot(1 - y[11])$

$$k_1 := 0.0228$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[11] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1 - \left(y[11] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0056$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[11] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1 - \left(y[11] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0298$$

> $k[4] := (10\cdot(y[11] + h[i]\cdot k[3])\cdot(1 - (y[11] + h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0519$$

> $y[11+1] := y[11] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1] + 2\cdot k[2] + 2\cdot k[3] + k[4])$

$$y_{12} := 0.9985$$

13a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[12]\cdot(1 - y[12])$

$$k_1 := 0.0148$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[12] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1 - \left(y[12] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0037$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[12] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1 - \left(y[12] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0194$$

> $k[4] := (10\cdot(y[12] + h[i]\cdot k[3])\cdot(1 - (y[12] + h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0338$$

> $y[12+1] := y[12] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1] + 2\cdot k[2] + 2\cdot k[3] + k[4])$

$$y_{13} := 0.9990$$

14a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[13]\cdot(1 - y[13])$

$$k_1 := 0.0096$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[13] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1 - \left(y[13] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0024$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[13] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1 - \left(y[13] + \frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0126$$

> $k[4] := (10\cdot(y[13] + h[i]\cdot k[3])\cdot(1 - (y[13] + h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0220$$

> $y[13+1] := y[13] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1]+2\cdot k[2]+2\cdot k[3]+k[4])$

$$y_{14} := 0.9994$$

15a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[14]\cdot(1-y[14])$

$$k_1 := 0.0063$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[14]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1-\left(y[14]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0016$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[14]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1-\left(y[14]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0082$$

> $k[4] := (10\cdot(y[14]+h[i]\cdot k[3])\cdot(1-(y[14]+h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0143$$

> $y[14+1] := y[14] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1]+2\cdot k[2]+2\cdot k[3]+k[4])$

$$y_{15} := 0.9996$$

16a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[15]\cdot(1-y[15])$

$$k_1 := 0.0041$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[15]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1-\left(y[15]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0010$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[15]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1-\left(y[15]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0053$$

> $k[4] := (10\cdot(y[15]+h[i]\cdot k[3])\cdot(1-(y[15]+h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0093$$

> $y[15+1] := y[15] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1]+2\cdot k[2]+2\cdot k[3]+k[4])$

$$y_{16} := 0.9997$$

17a iteración

> $k[1] := 10\cdot y[16]\cdot(1-y[16])$

$$k_1 := 0.0026$$

> $k[2] := 10\cdot\left(y[16]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\cdot\left(1-\left(y[16]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[1]\right)\right)$

$$k_2 := -0.0007$$

> $k[3] := 10\cdot\left(y[16]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\cdot\left(1-\left(y[16]+\frac{1}{2}\cdot h[i]\cdot k[2]\right)\right)$

$$k_3 := 0.0035$$

> $k[4] := (10\cdot(y[16]+h[i]\cdot k[3])\cdot(1-(y[16]+h[i]\cdot k[3])))$

$$k_4 := -0.0060$$

> $y[16+1] := y[16] + \frac{h[i]}{6}\cdot(k[1]+2\cdot k[2]+2\cdot k[3]+k[4])$

$$y_{17} := 0.9998$$

18a iteración

$$> k[1] := 10 \cdot y[17] \cdot (1 - y[17])$$

$$k_1 := 0.0017$$

$$> k[2] := 10 \cdot \left(y[17] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[17] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$$

$$k_2 := -0.0004$$

$$> k[3] := 10 \cdot \left(y[17] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[17] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$$

$$k_3 := 0.0022$$

$$> k[4] := (10 \cdot (y[17] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[17] + h[i] \cdot k[3])))$$

$$k_4 := -0.0039$$

$$> y[17 + 1] := y[17] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$$

$$y_{18} := 0.9999$$

19a iteración

$$> k[1] := 10 \cdot y[18] \cdot (1 - y[18])$$

$$k_1 := 0.0011$$

$$> k[2] := 10 \cdot \left(y[18] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[18] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$$

$$k_2 := -0.0003$$

$$> k[3] := 10 \cdot \left(y[18] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[18] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$$

$$k_3 := 0.0015$$

$$> k[4] := (10 \cdot (y[18] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[18] + h[i] \cdot k[3])))$$

$$k_4 := -0.0025$$

$$> y[18 + 1] := y[18] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$$

$$y_{19} := 0.9999$$

20a iteración

$$> k[1] := 10 \cdot y[19] \cdot (1 - y[19])$$

$$k_1 := 0.0007$$

$$> k[2] := 10 \cdot \left(y[19] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right) \cdot \left(1 - \left(y[19] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[1]\right)\right)$$

$$k_2 := -0.0002$$

$$> k[3] := 10 \cdot \left(y[19] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right) \cdot \left(1 - \left(y[19] + \frac{1}{2} \cdot h[i] \cdot k[2]\right)\right)$$

$$k_3 := 0.0009$$

$$> k[4] := (10 \cdot (y[19] + h[i] \cdot k[3]) \cdot (1 - (y[19] + h[i] \cdot k[3])))$$

$$k_4 := -0.0016$$

$$> y[19 + 1] := y[19] + \frac{h[i]}{6} \cdot (k[1] + 2 \cdot k[2] + 2 \cdot k[3] + k[4])$$

$$y_{20} := 1.0000 \triangleleft \text{RESPUESTA}$$

Obteniendo así, el valor deseado de $y = 1$ cuando $h = 0.25$.

Así pues, cuando $h = 0.25$, $y = 1$, y, para algunos valores de h, se tiene

h	y_{i+1}
0.25	*1*
0.26	*0.9991*
0.28	*0.8707*
0.29	*0.8075*
0.30	*0.7608*
0.32	*0.6881*

como se observa en la Tabla 6.22.
Excepto para el caso de $h = 0.25$, $y = 1$, en el resto de iteraciones realizadas con otros valores del paso h, cuando se llega a la iteración 20 no se llega a obtener el valor esperado de 1, sino más bien, comienza a disminuir, es por ello que, tomando en consideración la peculiaridad de las soluciones que no son correctas, se obtuvieron las 20 iteraciones de 12 h en total, 6 de las cuales se muestran en la Tabla 6.22, y las otras 6 en la Tabla 6.23. Por tanto, en ambas tablas se presentan de los resultados de $x\, y\, y$ (obtenidos por medio de la ecuación logística) al igual que los valores de y_{i+1} empleando la fórmula de rk4 en todas las iteraciones.

Tabla 6.22 de valores de las *x, y,* y_{i+1} encontradas a partir de la fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden, rk4, y la de ecuación logística, en sus respectivos pasos h.

h			$h=0.25$	$h=0.26$	$h=0.28$	$h=0.29$	$h=0.30$	$h=0.32$
i	x	y	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}
0	0	0.1000	0.5516	0.574	0.6076	0.6236	0.6381	0.6621
1	1	0.9995	0.8954	0.8874	0.8520	0.8241	0.7896	0.7015
2	2	0.9999	0.9347	0.9179	0.8583	0.8147	0.7658	0.6824
3	3	1.0000	0.9572	0.9372	0.8623	0.8104	0.7613	0.6908
4	4	1.0000	0.9716	0.9512	0.8649	0.8086	0.7609	0.6869
5	5	1.0000	0.9811	0.9618	0.8666	0.8079	0.7608	0.6886
6	6	1.0000	0.9875	0.9701	0.8678	0.8077	0.7608	0.6878
7	7	1.0000	0.9918	0.9767	0.8687	0.8076	0.7608	0.6882
8	8	1.0000	0.9946	0.9819	0.8693	0.8075	0.7608	0.6880
9	9	1.0000	0.9965	0.9859	0.8697	0.8075	0.7608	0.6881
10	10	1.0000	0.9977	0.9892	0.8700	0.8075	0.7608	0.6881
11	11	1.0000	0.9985	0.9917	0.8702	0.8075	0.7608	0.6881
12	12	1.0000	0.9990	0.9936	0.8704	0.8075	0.7608	0.6881
13	13	1.0000	0.9994	0.9951	0.8705	0.8075	0.7608	0.6881
14	14	1.0000	0.9996	0.9963	0.8706	0.8075	0.7608	0.6881
15	15	1.0000	0.9997	0.9972	0.8706	0.8075	0.7608	0.6881
16	16	1.0000	0.9998	0.9979	0.8707	0.8075	0.7608	0.6881
17	17	1.0000	0.9999	0.9984	0.8707	0.8075	0.7608	0.6881
18	18	1.0000	0.9999	0.9988	0.8707	0.8075	0.7608	0.6881
19	**19**	**1.0000**	**1.0000**	**0.9991**	**0.8707**	**0.8075**	**0.7608**	**0.6881**

Tabla 6.23 de valores de las *x, y*, y_{i+1} encontradas a partir de la fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden, rk4, y la de ecuación logística, en sus respectivos pasos h.

h			$h=0.34$	$h=0.36$	$h=0.37$	$h=0.38$	$h=0.39$	$h=0.40$
i	***x***	***y***	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}	y_{i+1}
0	0	0.1000	0.6789	0.6886	0.6908	0.6915	0.6908	0.6888
1	1	0.9995	05915	0.4670	0.4034	0.3423	0.2870	0.2414
2	2	0.9999	0.6673	0.7386	0.7969	0.8586	0.9018	0.9155
3	3	1.0000	0.5998	0.4334	0.3521	0.3466	0.4177	0.4157
4	4	1.0000	0.6591	0.831	0.8618	0.8534	0.7054	0.6671
5	5	1.0000	0.6062	0.4245	0.4349	0.3346	0.2681	0.2732
6	6	1.0000	0.6529	0.7949	0.7493	0.8675	0.9101	0.9080
7	7	1.0000	0.6111	0.4277	0.3578	0.3695	0.4598	0.3704
8	8	1.0000	0.6482	0.7906	0.8558	0.8220	0.6226	0.7664
9	9	1.0000	0.6150	0.4262	0.4214	0.2862	0.3759	0.1309
10	10	1.0000	0.6445	0.7926	0.7701	0.9041	0.7860	0.7641
11	11	1.0000	0.6181	0.4269	0.3504	0.5016	0.1916	0.1335
12	12	1.0000	0.6416	0.7918	0.8636	0.5970	0.8724	0.7704
13	13	1.0000	0.6205	0.4266	0.4391	0.4583	0.2985	0.1266
14	14	1.0000	0.6393	0.7921	0.7426	0.6709	0.8935	0.7536
15	15	1.0000	0.6225	0.4267	0.3414	0.3662	0.3794	0.1463
16	16	1.0000	0.6375	0.7920	0.8517	0.8269	0.7796	0.8004
17	17	1.0000	0.6241	0.4266	0.4131	0.2912	0.1942	0.1061
18	18	1.0000	0.6361	0.7920	0.7826	0.9019	0.8756	0.7032
19	**19**	**1.0000**	**0.6253**	**0.4267**	**0.3494**	**0.4922**	**0.3092**	**0.2197**

En las Figs. 6.40 a 6.45, se presentan algunas de las gráficas, creadas a partir de los valores obtenidos de las iteraciones usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con distintos tamaños de paso h.
En la Fig. 6.40 se muestra la solución numérica del PVI para un tamaño de paso. La solución numérica se aproxima a $y=1$, como se esperaba. El código de programación de la gráfica de la Fig. 6.40 en Maple, es

```
> with(plots) :
>
G1 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]), Vector([0.5516,
    0.8954, 0.9347, 0.9572, 0.9716, 0.9811, 0.9875, 0.9918, 0.9946, 0.9965, 0.9977, 0.9985, 0.9990, 0.9994,
    0.9996, 0.9997, 0.9998, 0.9999, 0.9999, 1.0000]), style = line, color = "DeepPink", legend
     = ["h = 0.25"]) :
```

```
> display({G1}, axes = boxed, title = "Respuesta del PVI cunado y=1 en h=0.25", titlefont = ["ROMAN", 12],
    labels = ["x", "y"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["ROMAN", 12])
```

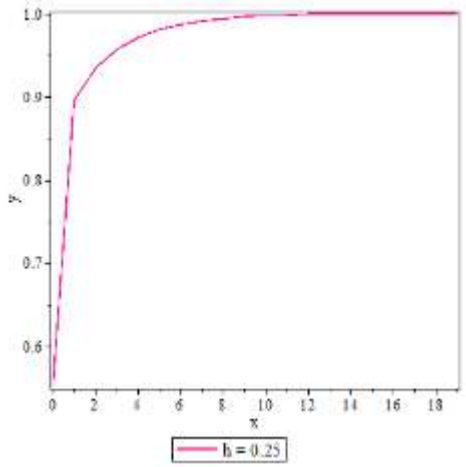


Fig. 6.40 Gráfica la representación de la respuesta del PVI en sus 20 puntos de x con respecto al valor de y_{i+1} cuándo $h = 0.25$. En la iteración 20 se obtuvo el valor esperado de $y = 1$. Solución numérica del PVI con tamaño de paso $h = 0.25$.

En la Fig. 6.41 se muestran tres soluciones numericas del PVI para distintos tamaños de paso. El código de programación de la gráfica de la figura en Maple, es

```
> G1 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]), Vector([0.5516,
    0.8954, 0.9347, 0.9572, 0.9716, 0.9811, 0.9875, 0.9918, 0.9946, 0.9965, 0.9977, 0.9985, 0.9990, 0.9994,
    0.9996, 0.9997, 0.9998, 0.9999, 0.9999, 1.0000]), style = line, color = "DeepPink", legend
    = ["h = 0.25"]) :

> G2 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]), Vector([0.6236,
    0.8241, 0.8147, 0.8104, 0.8086, 0.8079, 0.8077, 0.8076, 0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075,
    0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075, 0.8075]), style = line, color = "LightSlateBlue", legend
    = ["h = 0.29"]) :

> G3 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]), Vector([0.6789,
    0.5915, 0.6673, 0.5998, 0.6591, 0.6062, 0.6529, 0.6111, 0.6482, 0.6150, 0.6445, 0.6181, 0.6416, 0.6205,
    0.6393, 0.6225, 0.6375, 0.6241, 0.6361, 0.6253]), style = line, color = "OliveDrab", legend
    = ["h = 0.34"]) :

> display({G1, G2, G3}, axes = boxed, title = "Soluciones numericas del PVI con diferentes medida", titlefont
    = ["ROMAN", 12], labels = ["x", "y"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont
    = ["ROMAN", 12])
```

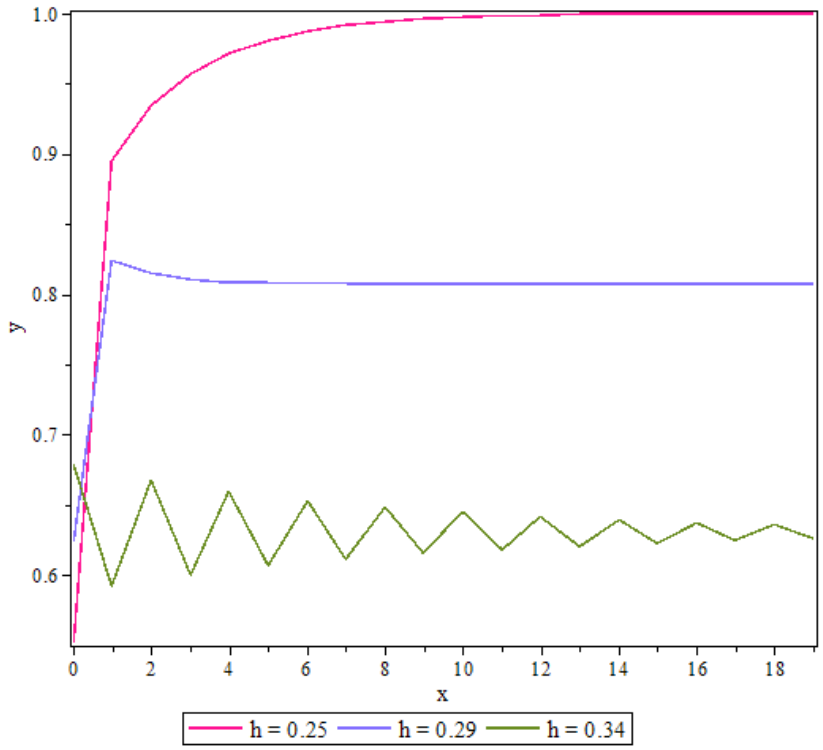


Fig. 6.41 Comparación de las soluciones numéricas del PVI para los pasos $h = 0.25$, $h = 0.29$ y $h = 0.34$ de las 20 iteraciones realizadas con resultados para los puntos x y y_{i+1}. Soluciones numéricas del PVI con diferentes tamaños de paso.

Con $h = 0.29$ y $h = 0.34$, las soluciones numéricas se aproximan, respectivamente a 0.8075 y 0.6361
En la Fig. 6.42 se muestran tres soluciones numéricas del PVI para un tamaño de paso. El código de programación de la gráfica de la figura en Maple, es

```
>
G1 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]), Vector([0.6886,
    0.4670, 0.7368, 0.4334, 0.7831, 0.4245, 0.7949, 0.4277, 0.7906, 0.4262, 0.7926, 0.4269, 0.7918, 0.4266,
    0.7921, 0.4267, 0.7920, 0.4266, 0.7920, 0.4267]), style = line, color = "OrangeRed", legend
     = ["h = 0.36"]) :

>
display({G1}, axes = boxed, title = "Soluciones numericas del PVI cunado h=0.36", titlefont = ["ROMAN",
    12], labels = ["x", "y"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["ROMAN", 12])
```

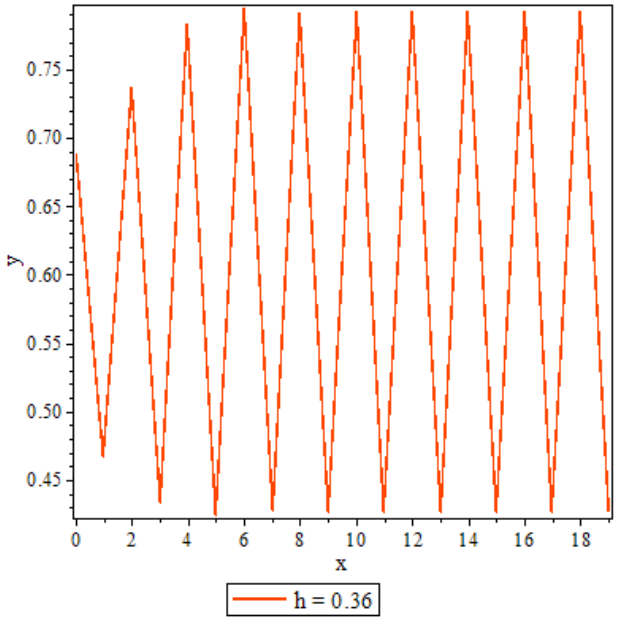


Fig. 6.42 Solución numérica del PVI con tamaño de paso $h = 0.36$ de las 20 iteraciones, resultados en los puntos x y y_{i+1}.

La solución numérica en la Fig. 6.42 con $h = 0.36$ no se aproxima a un solo valor, oscila entre cuatro valores 0.425 y 0.775, 0.40 y 0.80. Por oscilar entre cuatro valores, podemos decir que esta solución numérica tiene periodo 4. Lo mismo podemos decir de las soluciones numéricas en que $y = 1$, 0.8075 y 0.6361 tienen período 1.

En la Fig. 6.43 se muestran tres soluciones numéricas del PVI para un tamaño de paso de paso. El código de programación de la gráfica de la figura en Maple, es

```
with(plots) :

> G1 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
      17, 18, 19]), Vector([0.6908, 0.2870, 0.9018, 0.4177, 0.7054,
      0.2681, 0.9101, 0.4598, 0.6226, 0.3759, 0.7860, 0.1916, 0.8724,
      0.2985, 0.8935, 0.3794, 0.7796, 0.1942, 0.8756, 0.3092]), style
      = line, color = "MediumBlue", legend = ["h = 0.39"]) :

> display({G1}, axes = boxed, title
      = "Soluciones numericas del PVI cunado h=0.39", titlefont
      = ["ROMAN", 12], labels = ["x", "y"], labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["ROMAN", 12])
```

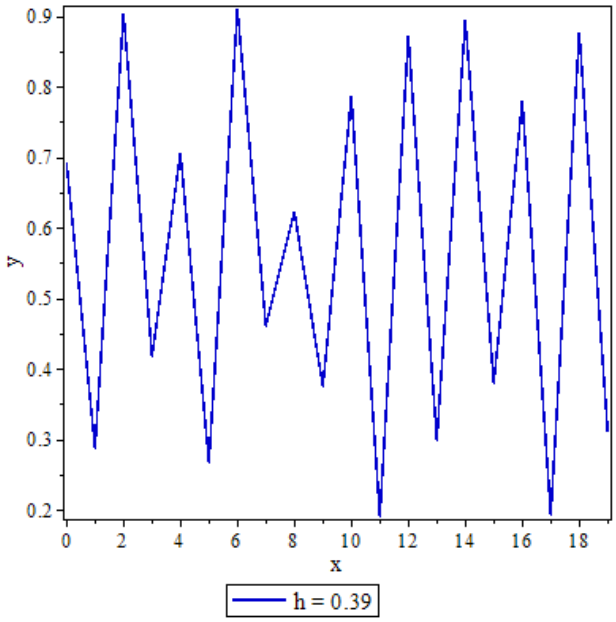


Fig. 6.43 Solución numérica del PVI con tamaño de paso $h = 0.39$ de las 20 iteraciones, resultados en los puntos x y y_{i+1}.

La solución numérica de la Fig. 6.43 para $h = 0.39$ se presenta de una forma caótica, ya que no presenta un comportamiento periódico. A excepción de la solución con tamaño de paso de $h = 0.25$, todas las demás soluciones numéricas están equivocadas, pues no predicen el comportamiento correcto de la solución.

En la Fig. 6.44 se muestran tres soluciones numéricas del PVI para un tamaño de paso de paso. El código de programación de la gráfica de la figura en Maple, es

```
with(plots) :

> G1 := plot(Vector([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
      17, 18, 19]), Vector([0.6888, 0.2414, 0.9155, 0.4157, 0.6671,
      0.2732, 0.9080, 0.3704, 0.7664, 0.1309, 0.7641, 0.1335, 0.7704,
      0.1266, 0.7536, 0.1463, 0.8004, 0.1061, 0.7032, 0.2197]), style
      = line, color = "Peru", legend = ["h = 0.40"]) :

> display({G1}, axes = boxed, title
      = "Soluciones numericas del PVI cuando h=40", titlefont
      = ["ROMAN", 12], labels = ["x", "y"], labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["ROMAN", 12])
```

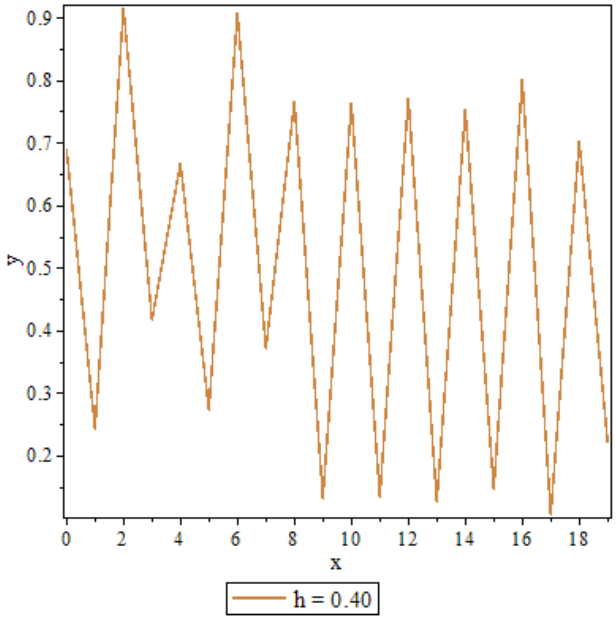


Fig. 6.44 Solución numérica del PVI con tamaño de paso $h = 0.40$ de las 20 iteraciones, resultados en los puntos x y y_{i+1}.

Necesitamos resolver la ecuación diferencial de forma numérica para valores específicos del tamaño de paso h para posteriormente analizar los últimos valores generados por el método numérico para percatarnos de si siguen un determinado patrón. Una forma de observar este proceso gráficamente, es empezar con un tamaño de paso especifico y calcular la solución numérica para, por ejemplo, los primeros 120 pasos, y después graficar los siguientes 120 valores de y que corresponden a ese valor de h, enseguida incrementar h y repetir el proceso. La Fig. 6.45 muestra una gráfica de este tipo. Es un diagrama de orbita, en la cual se emplean escalas distintas en el eje h, con el propósito de tener una mayor resolución en dicho diagrama para valores de h mayores de 0.37.
El punto correspondiente a un tamaño de paso de 0.25, hasta $h = 0.26$ los valores de y son aproximadamente el mismo número, como sabemos, $y = 1$ y $y \approx 1$. $y = 1$ concuerda con la Fig. 6.40. De la misma forma, con $h = 0.29$, en la Fig. 6.41 podemos observar prácticamente el mismo número para el eje de las ordenadas de 0.8075. De la Fig. 6.42 con $h = 0.36$ podemos observar con los valores numéricos de y caen aproximadamente en dos números distintos, tales como 0.425 y 0.775. Entonces, cuando el tamaño de paso se encuentra aproximadamente entre 0.34 y 0.36 podemos esperar soluciones de periodo 2. También aquí se ilustraron las soluciones de período 4 en la Fig. 6.42, así como soluciones caóticas como las de la Fig. 6.43 con $h = 0.39$. Hasta aquí, podemos plantearnos preguntas para predecir soluciones de períodos mayores que 4 ¿Cuál sería el diagrama de órbita si resolviésemos por otros métodos el problema de PVI visto aquí?

En la Fig. 6.45 se muestra el diagrama de órbita para la solución numérica del PVI.
El código de programación de la gráfica de la figura en Maple, es
$with(plots)$:

```
> G1 := plot(Vector([0.25, 0.26, 0.28, 0.29, 0.30, 0.32, 0.34, 0.36, 0.37,
      0.38, 0.39, 0.40]), Vector([1.0000, 0.9991, 0.8707, 0.8075, 0.7608,
      0.6881, 0.6253, 0.4267, 0.3494, 0.4922, 0.3092, 0.2197]), style
       = line, color = "DarkCyan") :

> display({G1}, axes = boxed, title
      = "Diagrama de orbita para la solucion numerica del PVI", titlefon
      = ["ROMAN", 12], labels = ["h", "y"], labeldirections
      = ["horizontal", "vertical"], labelfont = ["ROMAN", 12])
```

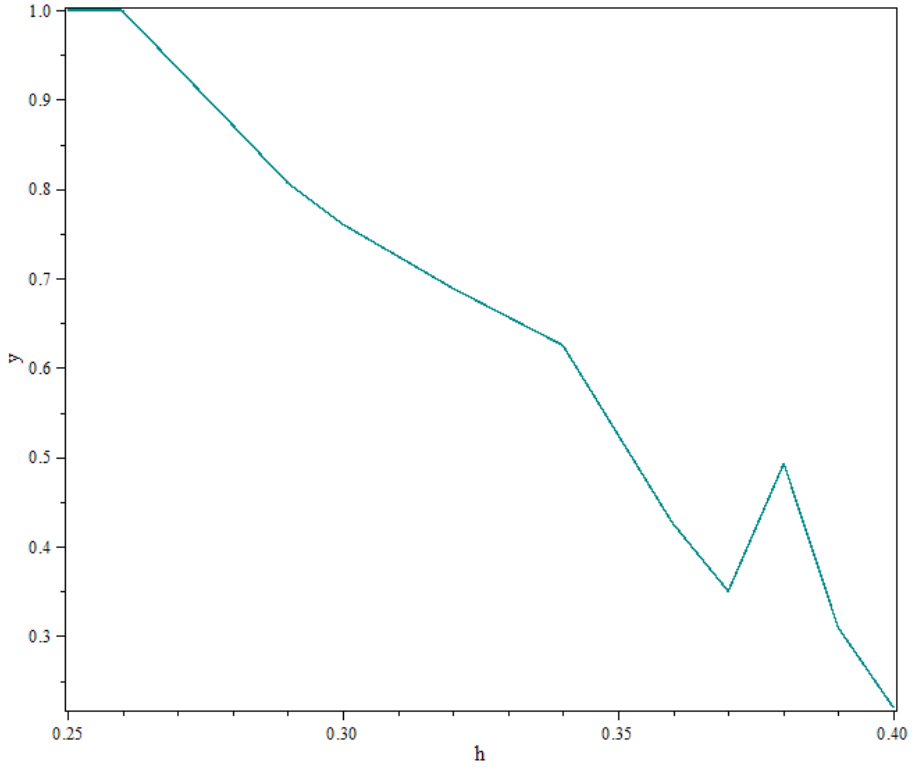


Fig. 6.45 Diagrama de orbita para la solución numérica del PVI en todos los puntos con respecto h y y_{i+1} de la iteración 20.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burden, D.J., Faires, R.L., Burden, A.M. (2016). *Análisis Numérico*. México: Cengage Learning.

Chapra, S., Canale, R.P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros.* México: McGraw-Hill.

Hernández, E.: Ficha Nitrobenceno. SCRIBID. https://es.scribd.com/doc/127501612/Ficha-Nitrobenceno (2023). Accedido el 7 de octubre de 2023

Jefferson, T. A., Stacey, P. J. & Baird, R. W. (1991). A review of Killer Whale interactions with other marine mammals: predation to co-existence. Mammal Rev., vol.21, n.4, pp. 151-180.

Lipka, J. (1975). *Computaciones gráficas y mecánicas*. México: CECSA.

Lovelace, A. (1961). On Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage. En Morrison, P., & Morrison, E. (1961). Charles Babbage and his Calculating Engines. New York: Dover. pp. 225-297.

Montgomery, D.C., Peck, E.A. y Vining, G.G. (2006). *Introducción al Análisis de Regresión Lineal*. México: Grupo Patria Cultural/CECSA.

Nieves, A., Domínguez, F.C. (2017*). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. México: Grupo Editorial Patria.

Nieves, A. y Domínguez, F.C. (2012). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. México: Grupo Editorial Patria.

Nieves, A., Domínguez, F.C. (1996*). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. México: Compañía Editorial Continental.

Triola, M.F. (2013). *Estadística*. México: Pearson Educación de México.

Triola, M.F. (2009). *Estadística*. México: Pearson Educación de México.

Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L., Ye, K. (2012). *Probabilidad & Estadística para ingeniería & ciencias*. México: Pearson Educación de México.

Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L. (2007). *Probabilidad & Estadística para ingeniería &*

ciencias. México: Pearson Educación de México.

ANEXO 1 DEL CAPÍTULO 4

CÓDIGOS FUENTE DE PROGRAMAS DE CÓMPUTO EN LENGUAJE PYTHON

Código Python de diferencias divididas de Newton

Problema 1 de las presiones de vapor del $MgCl_2$ de 4.4 Polinomios de Lagrange

```
from sympy import *

from sympy.solvers.solveset import linsolve

from tabulate import tabulate as tab

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

from decimal import Decimal

print("Diferencias divididas")


#Declaracion de la variable X para las ecuaciones

x = symbols("x")


#Delcaración de variables

labelX = "" #Etiqueta eje X

labelY = "" #Etiqueta eje Y

titleP = "" #Titulo gráfica


#Declaración de la base de datos del problema 5.1, pp. 373 e-Libro Nieves, Dguez

Presiones = [10, 20, 40, 60, 100, 200, 400, 760]

Temperaturas = [930, 988, 1050, 1088, 1142, 1316, 1223, 1418]

#Declaracion de base de datos usada por el problema 11, pp. 580 Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009

tiempos = [0 , 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]

distancias = [0, 1.2, 4.9, 11, 19.5, 30.5, 44]
```

```
#Selección para resolver el problema o uno propio
print("1 -> Resolver el problema 5.1, pp. 373 e-Libro Nieves, Dguez")
print("2 -> Resolver el problema 11, pp. 580 Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009")
print("3 -> Ingresar valores propios")
sell1 = input()
if sell1 == "1":
    ejeX = Presiones
    ejeY = Temperaturas
    labelX = "Presión (mmHg)"
    labelY = "Temperatura (°C)"
    titleP = "Presiones de vapor del cloruro de magnesio"
elif sell1 == "2":
    ejeX = tiempos
    ejeY = distancias
    labelX = "Tiempo (s)"
    labelY = "Distancia (m)"
    titleP = "Experimento de física"
elif sell1 == "3":
    print("Ingrese la cantidad de datos")
    pa = int(input())
    ejeX = list()
    ejeY = list()
    for i in range(pa):
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de X")
        ejeX.append(float(input()))
    for i in range(pa):
```

```
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de Y")
        ejeY.append(float(input()))
    labelX = "X"
    labelY = "Y"
    titleP = "Gráfica"
else:
    pass
n = len(ejeX) #Numero de datos
print('▬' * 100)

difsXi = list() #lista donde se guardan las listas de las diferencias
Xi = ejeX.copy()
Yi = ejeY.copy()
cont = 0
ciclo = True

#Ciclo que se repite hasta que ya no se puedan realizar mas diferencias
while ciclo:
    difsTemp = list()
    difXTemp = list()
    difYTemp = list()
    diffTemp = 0
    print("->" + str(n - len(difsXi) - 1))
    for i in range(n - len(difsXi) - 1):
        difXTemp = Xi[i + cont + 1] - Xi[i] #Variable temporal de la resta de los valores de X
        difYTemp = Yi[i + 1] - Yi[i] #Variable temporal de la resta de los valores de Y
```

```
        print(i)
        print(str(Xi[i + cont + 1]) + " - " + str(Xi[i]) + " = " + str(difXTemp))
        print(str(Yi[i + 1]) + " - " + str(Yi[i]) + " = " + str(difYTemp))
        diffTemp = difYTemp / difXTemp #Calcula la división

        difsTemp.append(diffTemp)
        print(str(difYTemp) + " / " + str(difXTemp) + " = " + str(diffTemp))

    Yi = difsTemp.copy()
    difsXi.append(difsTemp)
    if len(difsXi) == n - 1:
        ciclo = False
    cont = cont + 1
    print('▬' * 100)

#Imprime la tabla de diferencias
print(tab(difsXi))

eqFin = ejeY[0]
for i in Range(len(difsXi)):
    TempEq = difsXi[i][0]
    for j in Range(i + 1):
        TempEq = TempEq * (x - ejeX[j])
    eqFin = expand(eqFin + TempEq)

pprint(eqFin)
```

```
print()


RDA = 0.02 #Razon de aumento para margen de grafica
while True:
    plt.close("all")
    #Elección para gráficar o evaluar la función
    print("Elige una opción: ")
    print("1 -> Evaluar la función en un punto X y verlo en la gráfica")
    print("2 -> Mostrar la gráfica únicamente")
    sel = input()
    ax = plt.gca()

    # Crear una gráfica de puntos
    plt.plot(ejeX, ejeY, label="Datos experimentales", marker = 'o', mec = 'k', mfc = 'm')
    # Convertir la ecuación en una función numérica
    f = lambdify(x, eqFin)
    # Generar valores para trazar la ecuación
    x_vals = np.linspace(min(ejeX) - max(ejeX), max(ejeX) * 2, 1000)
    y_vals = f(x_vals)
    # Trazar la ecuación
    plt.plot(x_vals, y_vals, label="Función")

    if sel == "1":
        print("X =", end =" "),
        evalX = float(input())
```

```
        print("f(X) =", end =" "),
        evalY = float(eqFin.evalf(subs={x:evalX}))
        print(str(evalY))
        #Gráfica el punto
        plt.scatter(evalX, evalY, label = "Punto evaluado")

        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes y añade el punto para tomarlo en cuenta
        TempEjeX = ejeX.copy()
        TempEjeX.append(evalX)
        TempEjeY = ejeY.copy()
        TempEjeY.append(evalY)
        ax.set_xlim([min(TempEjeX) - (RDA * max(TempEjeX)), max(TempEjeX) + (RDA * max(TempEjeX))])
        ax.set_ylim([min(TempEjeY) - (RDA * max(TempEjeY)), max(TempEjeY) + (RDA * max(TempEjeY))])

    elif sel == "2":
        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes
        ax.set_xlim([min(ejeX) - (RDA * max(ejeX)), max(ejeX) + (RDA * max(ejeX))])
        ax.set_ylim([min(ejeY) - (RDA * max(ejeY)), max(ejeY) + (RDA * max(ejeY))])


    #PERZONALIZACIÓN DE LA GRÁFICA
    plt.grid()
    ax.legend()
    ax.set_xlabel(labelX)
    ax.set_ylabel(labelY)
```

```
ax.set_title(titleP)

# Mostrar la gráfica

plt.show()


print()
```

Código Python de Polinomios de Lagrange

Problema 1 de las presiones de vapor del $MgCl_2$ de 4.4 Polinomios de Lagrange

```
print("Polinomios de Lagrange")

from sympy import *

from sympy.solvers.solveset import linsolve

from tabulate import tabulate as tab

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np


#Declaracion de la variable X para las ecuaciones

x = symbols("x")


#Delcaración de variables

labelX = "" #Etiqueta eje X

labelY = "" #Etiqueta eje Y

titleP = "" #Titulo gráfica


#Declaración de la base de datos del problema 5.1, pp. 373 e-Libro Nieves, Dguez

Presiones = [10, 20, 40, 60, 100, 200, 400, 760]

Temperaturas = [930, 988, 1050, 1088, 1142, 1316, 1223, 1418]

#Declaracion de base de datos usada por el problema 11, pp. 580 Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009

tiempos = [0 , 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]

distancias = [0, 1.2, 4.9, 11, 19.5, 30.5, 44]


#Selección para resolver el problema o uno propio
```

```
print("1 -> Resolver el problema 5.1, pp. 373 e-Libro Nieves, Dguez")
print("2 -> Resolver el problema 11, pp. 580 Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009")
print("3 -> Ingresar valores propios")
sell1 = input()
if sell1 == "1":
    ejeX = Presiones
    ejeY = Temperaturas
    labelX = "Presión (mmHg)"
    labelY = "Temperatura (°C)"
    titleP = "Presiones de vapor del cloruro de magnesio"
elif sell1 == "2":
    ejeX = tiempos
    ejeY = distancias
    labelX = "Tiempo (s)"
    labelY = "Distancia (m)"
    titleP = "Experimento de física"
elif sell1 == "3":
    print("Ingrese la cantidad de datos")
    pa = int(input())
    ejeX = list()
    ejeY = list()
    for i in range(pa):
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de X")
        ejeX.append(float(input()))
    for i in range(pa):
        print("Ingrese el dato " + str(i + 1) + " de Y")
```

```
        ejeY.append(float(input()))
    labelX = "X"
    labelY = "Y"
    titleP = "Gráfica"
else:
    pass
n = len(ejeX) #Numero de datos
print('▬' * 100)


#Ciclo for donde calcula los producots
LiX = list()
for i in range(n):
    esTemp = S(1)
    for j in range(n):
        if i != j:
            esTemp *= ((x - ejeX[j]) / (ejeX[i] - ejeX[j]))
    LiX.append(esTemp)


#Ciclo for odnde calcula la sumatoria
PnX = 0
for i in range(len(LiX)):
    PnX += LiX[i] * ejeY[i]
Pnx = expand(PnX)


pprint(Pnx)
```

```
RDA = 0.02 #Razon de aumento para margen de grafica
while True:
    plt.close("all")
    #Elección para gráficar o evaluar la función
    print("Elige una opción: ")
    print("1 -> Evaluar la función en un punto X y verlo en la gráfica")
    print("2 -> Mostrar la gráfica únicamente")
    sel = input()
    ax = plt.gca()

    # Crear una gráfica de puntos
    plt.plot(ejeX, ejeY, label="Datos experimentales", marker = 'o', mec = 'k', mfc = 'm')
    # Convertir la ecuación en una función numérica
    f = lambdify(x, Pnx)
    # Generar valores para trazar la ecuación
    x_vals = np.linspace(min(ejeX) - max(ejeX), max(ejeX) * 2, 1000)
    y_vals = f(x_vals)
    # Trazar la ecuación
    plt.plot(x_vals, y_vals, label="Función")

    if sel == "1":
        print("X =", end =" "),
        evalX = float(input())
        print("f(X) =", end =" "),
        evalY = float(Pnx.evalf(subs={x:evalX}))
        print(str(evalY))
```

```
        #Gráfica el punto
        plt.scatter(evalX, evalY, label = "Punto evaluado")


        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes y añade el punto para tomarlo en cuenta
        TempEjeX = ejeX.copy()
        TempEjeX.append(evalX)
        TempEjeY = ejeY.copy()
        TempEjeY.append(evalY)
        ax.set_xlim([min(TempEjeX) - (RDA * max(TempEjeX)), max(TempEjeX) + (RDA * max(TempEjeX))])
        ax.set_ylim([min(TempEjeY) - (RDA * max(TempEjeY)), max(TempEjeY) + (RDA * max(TempEjeY))])


    elif sel == "2":
        # Obtiene el objeto de ejes actual establece el rango de los ejes
        ax.set_xlim([min(ejeX) - (RDA * max(ejeX)), max(ejeX) + (RDA * max(ejeX))])
        ax.set_ylim([min(ejeY) - (RDA * max(ejeY)), max(ejeY) + (RDA * max(ejeY))])


    #PERZONALIZACIÓN DE LA GRÁFICA
    plt.grid()
    ax.legend()
    ax.set_xlabel(labelX)
    ax.set_ylabel(labelY)
    ax.set_title(titleP)
    # Mostrar la gráfica
    plt.show()
        print()
```

Codigo Python

Problema 2 de 4.3 Polinomios de interpolación de diferencias divididas de Newton

```
import os
import platform
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

sistema_operativo = platform.system()
def limpiar_pantalla():
    if sistema_operativo == "Windows":
        os.system("cls")
    else:
        os.system("Clear")

k=0
l=1
m=0
grad_max = 0
p1=0
ecuacion = 0
vector = []
matriz = []
gx = []
gy = []
```

```
print("Menú: Diferencias divididas")

print("Libro: Libro Nieves, Dguez.")

print("1) Introducir base de datos manualmente para su resolución.")

print("2) Problema 5.1. Página 373")

print("3) Problema 5.2. Páginas 374-375")

print("4) Problema 5.8. Páginas 378-379")

print("5) Problema 5.9. Páginas 379-380")

#print("6) Problema 5.2. Con mejor ajuste general\n")


print("El problema asignado al alumno corresponde a la opción (3)")

opcion = int(input("Digite el número correspondiente a la opción deseada\n"))

limpiar_pantalla()


# Bases de datos

if (opcion == 2):

    # Si el usuario selecciona otra tecla, se inicializara la matriz con los datos del problema

    valores = [[10, 930], [20, 988], [40, 1050], [60, 1088], [100, 1142], [200, 1316], [400, 1223], [760,
1418]]

elif(opcion == 3):

    valores = [[1, 0], [1.35, .30010], [1.7, 0.53063], [1.9, .64185], [3, 1.09861]]

elif(opcion == 4):

    valores = [[3.83, 30], [4.17, 35.5], [4.97, 50.5], [6.06, 75], [6.71, 92], [7.17, 105], [7.51, 115], [7.98,
130], [8.67, 153.5], [9.39, 180], [9.89, 199.5]]

elif(opcion == 5):

    valores = [[600, 0], [550, 3], [450, 5], [312, 7], [240, 8]]

elif(opcion == 6):

    valores = [[1, 0], [1.35, .30010], [1.7, 0.53063], [1.9, .64185], [3, 1.09861]]
```

```
if(opcion <=6 and opcion >=2):
    num_filas, num_columnas = (np.array(valores)).shape


# Menu de opciones y seleccion de ruta
if(opcion == 1):
    puntos = int(input("Inserta el numero de puntos o variables\n"))
elif (opcion <= 2 or opcion <= 10):
    puntos = num_filas


limpiar_pantalla()


#Ingreso de datos automatico
for i in range (puntos+1):
    if(i == 0 and opcion == 1):
        print("Valores de \033[3mx\u1D62\033[0m")
    if(i == 1 and opcion == 1):
        print("Valores de \033[3mf(x\u1D62)\033[0m")
    fila = []
    for j in range (puntos):
        if(i<2):
            if(opcion == 1):
                fila.append(float(input("Valor #{}\n".format(j+1))))
            else:
                fila.append(valores[j][i])
        else:
            if(j <= (puntos-2-k)):
```

```
            fila.append( (matriz[i-1][j+1] - matriz[i-1][j]) / (matriz[0][j+l] - matriz[0][j]))
        else:
            fila.append(0)
    matriz.append(fila)

    #A continuacion, un ciclo for en el cual se verifica si se ha alcanzado convergencia.
    if(i>=2):
        for j in reversed(range(0,puntos-1-k)):
            if(j-1 >= 0):
                if(fila[j] == fila[j-1]):
                    m+=1
        if((m+1) == (puntos-1-k)):
            break
        m=0
        k+=1
        l+=1
    limpiar_pantalla()
    grad_max = i

print("A continuacion se muestra la matriz generada")
arr_transposed = (np.array(matriz)).transpose()
np.set_printoptions(threshold=np.inf)#Imprimir matriz ordenadamente.
print(arr_transposed)
input("\nPresiona enter para continuar")
limpiar_pantalla()
```

```
if(opcion != 3):
    #Imprimir el grado maximo que se puede calcular.
    print("El grado máximo al que se puede aproximar la función es: {}".format(grad_max))
    print("Se recomienda aproximar al grado máximo")
    #Preguntar al usuario hasta que grado desea aproximar la función
    grad = int(input("¿Hasta que grado deseas aproximar la función?\n"))
    limpiar_pantalla()


if (opcion == 3):
    print("Para interpolar la función en el punto 1.5 con un polinomio de grado 2")
    grad = 2


cjt = 0
if (opcion==3):
    cjt =1


#Cálculo de la ecuación
for j in range (grad):
    #print(matriz[j+2][0]) #Valor dif
    #print(matriz[0][j]) #Valor x
    x = float(matriz[0][j+cjt])


    if(j == 0):
        p1 = np.poly1d([1,-x])
        ecuacion = (p1*matriz[j+2][cjt])
    else:
```

```
        p1 *= np.poly1d([1,-x])
        ecuacion += (p1*matriz[j+2][cjt])
ecuacion += matriz[1][cjt]

print("La ecuación resultante es: \n{}".format(ecuacion))
##punto = float(input("Inserta el punto en el cual deseas evaluar la función\n"))
##print("La función evaluada el punto {} es: {}\n".format(punto,(np.polyval(ecuacion,punto))))

coeficientes = ecuacion.coef#Se guardan los coeficientes de la ecuacion en un vector
input("\nPresione Enter para mostrar los coeficientes sin redondear")
limpiar_pantalla()
for i in range (len(coeficientes)):
    print("x^" + str(len(coeficientes)-(i+1)) + ": " + str(coeficientes[i]))

#GRAFICA

input("\nPresione Enter para mostrar la gráfica...")

# Puntos gráfica original
for i in range (puntos):
    gx.append(matriz[0][i])
    gy.append(matriz[1][i])

# Determinacion de los limites del eje x
col = 0
```

```
lim_inf = np.min(matriz[:][col])
lim_sup = np.max(matriz[:][col])
rango = ((lim_sup) - (lim_inf))/(puntos)

# Define la función que crea la gráfica
def plot_function(ecuacion, coeffs):
    # Crea la gráfica
    x = np.linspace(lim_inf, lim_sup, 100)
    y = ecuacion(x, coeffs)
    plt.plot(x, y, label='Función')
    plt.plot(gx,gy,'ok', label='Puntos Dados')
    if(opcion==3):
        plt.scatter(1.5, 0.4044925974025977, color='red', label='Punto Interpolado')

    # Obtiene los exponentes de la ecuación
    degree = grad
    exponents = list(range(degree, -1, -1))

    # Crea la cadena de caracteres para la ecuación en el título
    eq_str = ''
    for i, c in enumerate(coeffs):
        if c != 0:
            eq_str += r'{}x^{{{}}}'.format(round(c,3), exponents[i])
            if i < degree:
                if(c < 0):
                    eq_str += r' + '
```

```
            else:
                eq_str += r' + '

    # Agrega la ecuación en el encabezado
    plt.title('Gráfica',fontname='Times New Roman',fontsize=14)
    plt.xlabel('Eje X',fontname='Times New Roman',fontsize=12)
    plt.ylabel('Eje Y',fontname='Times New Roman',fontsize=12)
    plt.legend(prop={'family': 'Times New Roman', 'size': 12},bbox_to_anchor=(0.5, -0.3), loc='lower center', ncol=3)
    plt.subplots_adjust(bottom=0.22)
    # Muestra la gráfica
    plt.show()

# Define la función que quieres graficar
def my_function(x, coeffs):
    return np.polyval(coeffs, x)

# Define los coeficientes de la ecuación
coeffs = (ecuacion.coef)

# Crea la gráfica
plot_function(my_function, coeffs)

limpiar_pantalla()
if(opcion != 3):
    print("¿Deseas evaluar la ecuación en un punto?")
    print("1) Sí")
```

```
    print("2) No")
    opcion2= int(input("Digite el número correspondiente a la opción deseada\n"))
    if(opcion2==1):
        limpiar_pantalla()
        val= float(input("Digite el número en el que desea evaluar la ecuación\n"))
        limpiar_pantalla()
        print("La función evaluada en el punto " + str(val) + " = " + str(ecuacion(val))+ "\n")


if(opcion == 3):
    input("Presione enter para evaluar la función en el punto 1.5")
    limpiar_pantalla()
    val = 1.5
    print("La función evaluada en el punto " + str(val) + " = " + str(ecuacion(val))+ "\n")
input("Presiona Enter para salir")
#print(matriz)
```

Código Python del Problema 2 del punto 4.4 Polinomios de Lagrange

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Ingresar los datos
temp = input("Ingrese los valores de temperatura separados por comas: ")
presion = input("Ingrese los valores de presión de vapor separados por comas: ")


# Convertir los datos a arrays de numpy
T = np.array([temp.split(",")], dtype=np.float64)
P = np.array([presion.split(",")], dtype=np.float64)
```

```
# Interpolación de 800 grados
L0 = ((800 - T[0][1]) * (800 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                    (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((800 - T[0][0]) * (800 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                    (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((800 - T[0][0]) * (800 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                    (T[0][2] - T[0][1]))

# Presión interpolada
P_interp = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
print("La presión interpolada para una temperatura de 800°C es:", P_interp)

# Interpolación de 950 grados
L0 = ((950 - T[0][1]) * (950 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                    (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((950 - T[0][0]) * (950 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                    (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((950 - T[0][0]) * (950 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                    (T[0][2] - T[0][1]))

# Presión interpolada
P_interp1 = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
print("La presión interpolada para una temperatura de 950°C es:", P_interp1)
```

```
# Interpolación de 1000 grados
L0 = ((1000 - T[0][1]) * (1000 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                    (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((1000 - T[0][0]) * (1000 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                    (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((1000 - T[0][0]) * (1000 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                    (T[0][2] - T[0][1]))

# Presión interpolada
P_interp2 = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
print("La presión interpolada para una temperatura de 1000°C es:", P_interp2)

# Interpolación de 1098 grados
L0 = ((1098 - T[0][3]) * (1098 - T[0][4])) / ((T[0][2] - T[0][3]) *(T[0][2] - T[0][4]))
L1 = ((1098 - T[0][2]) * (1098 - T[0][4])) / ((T[0][3] - T[0][2]) *(T[0][3] - T[0][4]))
L2 = ((1098 - T[0][2]) * (1098 - T[0][3])) / ((T[0][4] - T[0][2]) *(T[0][4] - T[0][3]))

# Presión interpolada
P_interp3 = L0 * P[0][2] + L1 * P[0][3] + L2 * P[0][4]
print("La presión interpolada para una temperatura de 1098°C es:", P_interp3)

# Interpolación de 1500 grados
L5 = ((1500 - T[0][6]) * (1500 - T[0][7])) / ((T[0][5] - T[0][6]) * (T[0][5] - T[0][7]))
L6 = ((1500 - T[0][5]) * (1500 - T[0][7])) / ((T[0][6] - T[0][5]) * (T[0][6] - T[0][7]))
L7 = ((1500 - T[0][5]) * (1500 - T[0][6])) / ((T[0][7] - T[0][5]) * (T[0][7] - T[0][6]))
```

```
# Presión interpolada
P_interp = L5 * P[0][5] + L6 * P[0][6] + L7 * P[0][7]
print("La presión interpolada para una temperatura de 1500°C es:", P_interp)


# Gráfica
T_interp = np.linspace(930, 1418, num=1000)
P_plot = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
plt.plot(T_interp,
        P_plot * np.ones_like(T_interp),
        "r--",
        label="Valor interpolado")
plt.plot(T[0], P[0], "ko", label="Datos")
plt.legend()
plt.xlabel("Temperatura (°C)")
plt.ylabel("Presión de vapor (mmHg)")
plt.title("Diagrama de presión de vapor del cloruro de magnesio")
plt.show()
```

Codigo Python para distintos grados de polinomios de Lagrange del Problema 2 del punto 4.4 Polinomios de Lagrange

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Ingresar los datos
temp = input("Ingrese los valores de temperatura separados por comas: ")
presion = input("Ingrese los valores de presión de vapor separados por comas: ")

# Convertir los datos a arrays de numpy
T = np.array([temp.split(",")], dtype=np.float64)
P = np.array([presion.split(",")], dtype=np.float64)

# Ajuste del polinomio de grado 8
p = np.polyfit(T[0], P[0], 8) <= En esta parte, el 8 es con la que se cambia de grado el polinomio

print("Coeficientes del polinomio:", p)

# Interpolación de 800 grados
L0 = ((800 - T[0][1]) * (800 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                    (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((800 - T[0][0]) * (800 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                    (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((800 - T[0][0]) * (800 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                    (T[0][2] - T[0][1]))
```

```
# Presión interpolada
P_interp = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
print("La presión interpolada para una temperatura de 800°C es:", P_interp)

# Interpolación de 950 grados
L0 = ((950 - T[0][1]) * (950 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                            (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((950 - T[0][0]) * (950 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                            (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((950 - T[0][0]) * (950 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                            (T[0][2] - T[0][1]))

# Presión interpolada
P_interp1 = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
print("La presión interpolada para una temperatura de 950°C es:", P_interp1)

# Interpolación de 1000 grados
L0 = ((1000 - T[0][1]) * (1000 - T[0][2])) / ((T[0][0] - T[0][1]) *
                                              (T[0][0] - T[0][2]))
L1 = ((1000 - T[0][0]) * (1000 - T[0][2])) / ((T[0][1] - T[0][0]) *
                                              (T[0][1] - T[0][2]))
L2 = ((1000 - T[0][0]) * (1000 - T[0][1])) / ((T[0][2] - T[0][0]) *
                                              (T[0][2] - T[0][1]))

# Presión interpolada
P_interp2 = L0 * P[0][0] + L1 * P[0][1] + L2 * P[0][2]
```

```
print("La presión interpolada para una temperatura de 1000°C es:", P_interp2)


# Interpolación de 1098 grados
L0 = ((1098 - T[0][3]) * (1098 - T[0][4])) / ((T[0][2] - T[0][3]) *(T[0][2] - T[0][4]))
L1 = ((1098 - T[0][2]) * (1098 - T[0][4])) / ((T[0][3] - T[0][2]) *(T[0][3] - T[0][4]))
L2 = ((1098 - T[0][2]) * (1098 - T[0][3])) / ((T[0][4] - T[0][2]) *(T[0][4] - T[0][3]))

# Presión interpolada
P_interp3 = L0 * P[0][2] + L1 * P[0][3] + L2 * P[0][4]
print("La presión interpolada para una temperatura de 1098°C es:", P_interp3)



# Interpolación de 1500 grados
L5 = ((1500 - T[0][6]) * (1500 - T[0][7])) / ((T[0][5] - T[0][6]) * (T[0][5] - T[0][7]))
L6 = ((1500 - T[0][5]) * (1500 - T[0][7])) / ((T[0][6] - T[0][5]) * (T[0][6] - T[0][7]))
L7 = ((1500 - T[0][5]) * (1500 - T[0][6])) / ((T[0][7] - T[0][5]) * (T[0][7] - T[0][6]))

# Presión interpolada
P_interp = L5 * P[0][5] + L6 * P[0][6] + L7 * P[0][7]
print("La presión interpolada para una temperatura de 1500°C es:", P_interp)



# Graficar los datos y el ajuste
plt.plot(T[0], P[0], 'ro', label='Datos experimentales')
plt.plot(T[0], np.polyval(p, T[0]), 'b-', label='Ajuste polinomial')
plt.xlabel('Temperatura (°C)')
```

```
plt.ylabel('Presión de vapor (kPa)')

plt.legend()

plt.show()
```

Código Python del Problema 3 de 4.6 Regresiones

```
import os
import platform
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import poly1d

sistema_operativo = platform.system()
def limpiar_pantalla():
    if sistema_operativo == "Windows":
        os.system("cls")
    else:
        os.system("Clear")

print("Menu: Minimos Cuadrados")
print("Libro: Estadística, Mario F. Triola 10ª Edición, 2009.")
print("1) Introducir base de datos manualmente para su resolución.")
print("2) Problema 9. Bolsa de Valores y ventas de automoviles. Página: 714")
print("3) Problema 10. Manchas solares y puntos del Súper Bowl. Página: 715")
print("4) Problema 11. Correlación entre salario y estrés. Página: 715")
print("5) Problema 12. Correlación entre salario y demanda física. Página: 715")
print("6) Problema 13. Grillos y temperatura. Página: 715")
print("7) Problema 14. Muertes por vehículos automotores y asesinatos. NO HAY UN AJUSTE ADECUADO. Página: 715")##Indeterminacion
```

```
print("8) Problema 15. Audiencia y ventas de canciones. Página: 715-716")
print("9) Problema 16. Presupuestos y ganancias netas de películas. Página:716")
print("10) Problema 19. Curva de aprendizaje.  Página: 716-717\n")

print("El problema asignado al alumno corresponde a la opción (8)")
opcion = int(input("Digite el número correspondiente a la opción deseada\n"))
limpiar_pantalla()

# Menu de opciones y seleccion de ruta
if(opcion == 1):
    puntos = int(input("Inserta el numero de puntos o variables\n"))
    grado = int(input("Inserta el grado que quieres obtener\n"))
elif (opcion == 2):
    puntos = 10
    grado = 9
elif (opcion == 3):
    puntos = 10
    grado = 9
elif (opcion == 4):
    puntos = 10
    grado = 9
elif (opcion == 5):
    puntos = 10
    grado = 9
elif (opcion == 6):
    puntos = 8
```

```
    grado = 7
elif (opcion == 7):
    puntos = 10
    grado = 9
elif (opcion == 8):
    puntos = 9
    grado = 8
elif (opcion == 9):
    puntos = 7
    grado = 6
elif (opcion == 10):
    puntos = 11
    grado = 10

limpiar_pantalla()

gauss = [[0 for x in range(grado+2)] for y in range(grado+1)]
matriz = [[0 for x in range(2)] for y in range(puntos)]
exponentes = [[0 for x in range(grado+grado)] for y in range(puntos)]
sumatoria = [[0 for x in range(grado+grado)] for y in range(puntos)]
vector = [0 for x in range(grado+grado+1)]
vector2 = [0 for x in range(grado+grado+1)]
matriz_final = [[0 for x in range(grado+grado)] for y in range(puntos+1)]
suma = 0
suma2 = 0
m = puntos
```

```
ValoresA = [0 for x in range(grado+1)]

gx = []

gy = []


# Ingreso de datos

if(opcion == 1):

    for i in range (2):

        for j in range (puntos):

            limpiar_pantalla()

            if(i== 0):

                print("Puntos correspondientes a la variable independiente (X)")

            if(i==1):

                print("Puntos correspondientes a la variable dependiente (Y)")

            matriz[j][i] = float(input("Introduce el punto " + str(j+1) + "\n"))

elif (opcion == 2):

    # Si el usuario selecciona otra tecla, se inicializara la matriz con los datos del problema

    matriz = [[1, 2], [2, 3], [3, 5], [4, 10], [5, 7], [6, 6], [7, 4], [8, 1], [10, 8], [9, 9]]

elif(opcion == 3):

    matriz = [[10, 8], [8, 9], [5, 3], [4, 10], [2, 4], [1, 7], [3, 6], [6, 5], [7, 1], [9, 2]]

elif(opcion == 4):

    matriz = [[2, 2], [6, 7], [3, 6], [5, 4], [7, 5], [10, 8], [9, 9], [8, 10], [4, 3], [1, 1]]

elif(opcion == 5):

    matriz = [[2, 5], [6, 2], [3, 3], [5, 8], [7, 10], [10, 9], [9, 1], [8, 7], [4, 6], [1, 4]]

elif(opcion == 6):

    matriz = [[882, 69.7], [1188, 93.3], [1104, 84.3], [864, 76.3], [1200, 88.6], [1032, 82.6], [960, 71.6],
[900, 79.6]]

elif(opcion == 7):
```

```
    matriz = [[435, 247], [410, 238], [418, 245], [425, 233], [434, 216], [436, 197], [434, 182], [435, 170], [413, 155], [430, 156]]

elif(opcion == 8):

    matriz = [[28, 19], [13, 7], [14, 7], [24, 20], [20, 6], [18, 4], [14, 5], [24, 25], [17, 12], [9, 2]]

elif(opcion == 9):

    matriz = [[62, 65], [90, 64], [50, 48], [35, 57], [200, 601], [100, 146], [90, 47]]

elif(opcion == 10):

    matriz = [[1, 1], [25, 2], [31, 20], [33, 36], [36, 51], [38, 72], [48, 74], [55, 75], [95, 77], [165, 78], [300, 79]]


# Ciclos anidados

for i in range (1,grado+grado+1):

    for j in range(puntos):

        exponentes[j][0] = math.pow((matriz[j][0]), i)

        suma += exponentes[j][0]

    if(i<=(grado+grado)):

        vector[i] = suma

    suma = 0


for i in range (0,grado+grado+1):

    if(i==0):

        vector[i] = m


# Nuevas matrices

for i in range(grado + 1):

    for j in range(puntos):

        if i == 0:
```

```
            suma2 += matriz[j][1]
        else:
            suma2 = matriz[j][1] * math.pow(matriz[j][0], i)
            vector2[i] += suma2
    if i == 0:
        vector2[i] = suma2
    suma2 = 0

# Obtencion final de la matriz
for i in range(grado+1):
    for j in range(grado+grado-(grado-1)):
        if i == 0 and j == 0:
            matriz_final[i][j] = vector[0]
        else:
            matriz_final[i][j] = vector[j+i]

for i in range(grado+1):
    for j in range(grado+2):
        if j == (grado+1):
            gauss[i][j] = vector2[i]
        else:
            gauss[i][j] = matriz_final[i][j]

print("Ecuación resultante (Redondeada):")

# Se resuelve la matriz con eliminacion Gauss-Jordan
```

```
for columna in range(grado):
    for fila in range(columna + 1, grado + 1):
        factor = matriz_final[fila][columna] / matriz_final[columna][columna]
        vector2[fila] = vector2[fila] - factor * vector2[columna]
        for j in range(columna, grado + 1):
            matriz_final[fila][j] = matriz_final[fila][j] - factor * matriz_final[columna][j]


# Y los resultados se almacenan en un vector, el cual es impreso en pantalla.
for i in range(grado, -1, -1):
    hola = 0
    for j in range(i + 1, grado + 1):
        hola = hola + matriz_final[i][j] * ValoresA[grado-j]
    ValoresA[grado-i] = (vector2[i] - hola) / matriz_final[i][i]
    #print(ValoresA[i], "X^" + str(i))
ecuacion = np.poly1d(ValoresA)
print(ecuacion)

input("\nPresione Enter para mostrar los coeficientes sin redondear")
limpiar_pantalla()
for i in range (len(ValoresA)):
    print("x^" + str(len(ValoresA)-(i+1)) + ": " + str(ValoresA[i]))

#GRAFICA

input("\nPresione Enter para mostrar la gráfica...")
```

```
# Puntos gráfica original
for i in range (puntos):
    gx.append(matriz[i][0])
    gy.append(matriz[i][1])

# Determinacion de los limites del eje x
lim_inf = np.min(gx)
lim_sup = np.max(gx)
rango = ((lim_sup) - (lim_inf))/(puntos)

# Define la función que crea la gráfica
def plot_function(ecuacion, coeffs):
    # Crea la gráfica
    x = np.linspace(lim_inf, lim_sup, 100)
    y = ecuacion(x, coeffs)
    plt.plot(x, y, label='Función')
    plt.plot(gx,gy,'ok', label='Puntos Dados')

    # Obtiene los exponentes de la ecuación
    degree = grado
    exponents = list(range(degree, -1, -1))

    # Crea la cadena de caracteres para la ecuación en el título
    eq_str = ''
    for i, c in enumerate(coeffs):
        if c != 0:
```

```
        eq_str += r'{}x^{{{}}}'.format(round(c,3), exponents[i])
        if i < degree:
            if(c < 0):
                eq_str += r' + '
            else:
                eq_str += r' + '

    # Agrega la ecuación en el encabezado
    #plt.title(r'$f(x) = {}$'.format(eq_str))
    plt.title('Gráfica',fontname='Times New Roman',fontsize=14)
    plt.xlabel('Eje X',fontname='Times New Roman',fontsize=12)
    plt.ylabel('Eje Y',fontname='Times New Roman',fontsize=12)
    plt.legend(prop={'family': 'Times New Roman', 'size': 12},bbox_to_anchor=(0.5, -0.35), loc='lower
center')
    plt.subplots_adjust(bottom=0.22)
    # Muestra la gráfica
    plt.show()

# Define la función que quieres graficar
def my_function(x, coeffs):
    return np.polyval(coeffs, x)

# Define los coeficientes de la ecuación
coeffs = (ecuacion.coef)

# Crea la gráfica
plot_function(my_function, coeffs)
```

```
limpiar_pantalla()
print("¿Deseas evaluar la ecuación en un punto?")
print("1) Sí")
print("2) No")
opcion2= int(input("Digite el número correspondiente a la opción deseada\n"))
if(opcion2==1):
    limpiar_pantalla()
    val= float(input("Digite el número en el que desea evaluar la ecuación\n"))
    limpiar_pantalla()
    print("La función evaluada en el punto " + str(val) + " = " + str(ecuacion(val))+ "\n")

input("Presiona Enter para salir")
```

Código en Python del Problema 2 de 4.7 Miscelánea de Problemas

```
import os
import platform
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
#Este if sirve para limpiar la pantalla, cuando se llama la funcion limpia la pantalla
sistema_operativo = platform.system()
def limpiar_pantalla():
   if sistema_operativo == "Windows":
      os.system("cls")
   else:
      os.system("Clear")


print ("Bienvenido al ejercicio 13 de Grillos y temperatura")
print ("Ingresa el 1 para resolver el problema automaticamente")#La primera opcion es para hacer el ejercicio solicitado de forma automatica
print ("Ingresa el 2 para resolver el cualquier problema")#La segunda opcion es para que el usuario pueda resolver cualquier problema
jhg  = int (input(""))
if jhg == 1:#Este if es si elige la primera opcion, aqui declaramos los datos del problema
    grillos = [882,1188,1104,864,1200,1032,960,900]#x
    temperatura = [69.7,93.3,84.3,76.3,88.6,82.6,71.6,79.6]#y
    limpiar_pantalla()
else:#si se escogio la opcion 2, pedimos al usuario que ingrese los datos del problema
    print ("Cuantos datos desea ingresar")
```

```
    puntos = int (input(""))
    limpiar_pantalla()
    cont=0
    grillos=[] #xi
    while cont < puntos:
        print("Ingrese la cantidad de chirridos en el intervalo de tiempo #", cont+1 )
        z1= float(input(""))
        grillos.append(z1)
        cont=cont+1
        limpiar_pantalla()
    cont2=0
    temperatura=[] #yi
    while cont2 < puntos:
      print("Ingrese la temperatura en el momento #", cont2+1 )
      z2= float(input(""))
      temperatura.append(z2)
      cont2=cont2+1
      limpiar_pantalla()



print ("Perfecto, ahora ingrese el grado del polinomio que desea obtener")# se le pide al usuario que ingrese al grado que desea obtener
grado=int(input(""))
makimaa=[]#Declaramos nuestra matriz
miku=[0] * (grado+1)
ValoresA=[0] * (grado+1)
red=grado+1
```

```
for lia in range(red):#este for se encarga de resolver las operaciones de y,yx,yx2,etc
    if lia==0:
        miku[lia]=sum(temperatura)
    else:
        miku[lia]=sum([x**(lia) * y for x, y in zip(grillos, temperatura)])


makimaa = [[sum([x**(i+j) for x in grillos]) for j in range(grado+1)] for i in range(grado+1)]#Esta operacion crea y resuleve la matriz


#Empezamos a resolver la matriz con el metodo de Gauss Jordan
for columna in range(grado):
   for fila in range(columna + 1, grado + 1):
      factor = makimaa[fila][columna] / makimaa[columna][columna]
      miku[fila] = miku[fila] - factor * miku[columna]
      for j in range(columna, grado + 1):
         makimaa[fila][j] = makimaa[fila][j] - factor * makimaa[columna][j]


# Y los resultados se almacenan en un vector, el cual es impreso en pantalla.
for i in range(grado, -1, -1):
   hola = 0
   for j in range(i + 1, grado + 1):
      hola = hola + makimaa[i][j] * ValoresA[grado-j]
   ValoresA[grado-i] = (miku[i] - hola) / makimaa[i][i]


ecuacion = np.poly1d(ValoresA)#La funcion de np.poly1d se utiliza para crear polinomios unidimensionales
print(ecuacion)
```

```
#Graficas
input("Enter para ver grafica =)")


s=min(grillos)
s2=max(grillos)
# Definir los valores de x
# Define la función que crea la gráfica
def plot_function(ecuacion, coeffs):
    # Crea la gráfica
    x = np.linspace(s, s2, 100)
    y = ecuacion(x, coeffs)
    plt.plot(x, y,label='Polinomio')
    plt.plot(grillos,temperatura,'ok',marker='o', linestyle='None', label='Datos experimentales')


    # Obtiene los exponentes de la ecuación
    degree = grado
    exponents = list(range(degree, -1, -1))


    # Crea la cadena de caracteres para la ecuación en el título
    eq_str = ''
    for i, c in enumerate(coeffs):
        if c != 0:
            eq_str += r'{}x^{{{}}}'.format(round(c,3), exponents[i])
            if i < degree:
                if(c < 0):
```

```
                eq_str += r' + '
            else:
                eq_str += r' '

    # Agrega la ecuación en el encabezado
    plt.title(r'$f(x) = {}$'.format(eq_str))
    plt.xlabel('Eje x (Chirridos por minuto)',fontname='Times New Roman',fontsize=12)
    plt.ylabel('Eje y (Temperatura en Grados F)',fontname='Times New Roman',fontsize=12)

    # Agregar leyenda
    plt.legend(prop={'family': 'Times New Roman', 'size': 12},bbox_to_anchor=(0.5, -0.35), loc='lower center')
    plt.subplots_adjust(bottom=0.22)

    # Muestra la gráfica
    plt.show()

# Define la función que quieres graficar
def my_function(x, coeffs):
    return np.polyval(coeffs, x)

# Define los coeficientes de la ecuación
coeffs = (ecuacion.coef)
# Crea la gráfica
plot_function(my_function, coeffs)

print("Terminamos =)")
```

Código Python del Problema 4 de 4.7 Miscelánea de Problemas

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib.font_manager as fm

# Datos de entrada
x = np.array([0, 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, 15])
y = np.array([10, 4.97, 2.47, 1.22, 0.61, 0.30, 0.14])

# Polinomio de Lagrange de segundo grado
def lagrange2(x0, x1, x2, y0, y1, y2, x):
    l0 = ((x - x1)*(x - x2))/((x0 - x1)*(x0 - x2))
    l1 = ((x - x0)*(x - x2))/((x1 - x0)*(x1 - x2))
    l2 = ((x - x0)*(x - x1))/((x2 - x0)*(x2 - x1))
    return y0*l0 + y1*l1 + y2*l2

# Coeficientes del polinomio de Lagrange de segundo grado
a = -0.76
b = 14.28
c = -45.82

# Raíces de la ecuación P(x) = 2
x1 = (-b + np.sqrt(b**2 - 4*a*(c - 2)))/(2*a)
x2 = (-b - np.sqrt(b**2 - 4*a*(c - 2)))/(2*a)
```

```
# Imprime los valores de x correspondientes a y = 2
print("Los valores de x cuando y=2 son x =", x1, "o", x2)


# Especificar la fuente Times New Roman
prop = fm.FontProperties(fname='font/times.ttf')


# Grafica el polinomio de Lagrange
x_vals = np.linspace(0, 15, 1000)
y_vals = lagrange2(2.5, 5, 7.5, 4.97, 2.47, 1.22, x_vals)
plt.plot(x_vals, y_vals)
plt.scatter(x, y)
plt.plot(x_vals,
        y_vals * np.ones_like(x_vals),
        "r--",
        label="Valor interpolado")
plt.plot(x[0], y[0], "ko", label="Datos")
plt.legend(prop=prop)
plt.xlabel("x", fontproperties=prop)
plt.ylabel("y", fontproperties=prop)
plt.title("Polinomio de Lagrange de segundo grado", fontproperties=prop)
plt.show()
```

Código Python 1 del Problema 5 de 4.7 Miscelánea de Problemas

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib.font_manager as fm

PRES = [62, 90, 50, 35, 200, 100, 90]
IB = [65, 64, 48, 57, 601, 146, 47]

coeficientes = np.polyfit(PRES, IB, 1)

recta = np.poly1d(coeficientes)

coeficientes_rounded = np.round(coeficientes, decimals=10)
recta_rounded = np.poly1d(coeficientes_rounded)

print("Recta de regresión:", recta_rounded)

presupuesto_prediccion = 40
prediccion = recta(presupuesto_prediccion)
prediccion_tot = np.round(prediccion, decimals=1)
print("La mejor predicción del presupuesto de 40$ millones es:",
    prediccion_tot, "millones")

# Especificar la fuente Times New Roman
prop = fm.FontProperties(fname='font/times.ttf')
```

```
plt.scatter(PRES, IB)
plt.plot(PRES, recta(PRES), 'r-',label="Valor interpolado")
plt.plot(PRES, IB, "ko", label="Datos")
plt.legend(prop=prop)
plt.xlabel("Presupuesto (millones de dólares)", fontproperties=prop)
plt.ylabel("Ingresos brutos (millones)", fontproperties=prop)
plt.title("Relación entre presupuestos e ingresos brutos", fontproperties=prop)
plt.show()
```

Código Python 2 del Problema 5 de 4.7 Miscelánea de Problemas

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib.font_manager as fm

# Datos
PRES = [62, 90, 50, 35, 200, 100, 90]
IB = [65, 64, 48, 57, 601, 146, 47]

# Recta de regresión
coeficientes = np.polyfit(PRES, IB, 7)
recta = np.poly1d(coeficientes)
coeficientes_rounded = np.round(coeficientes, decimals=10)
recta_rounded = np.poly1d(coeficientes_rounded)
print("Recta de regresión:", recta_rounded)

# Predicción para salario de 40 millones
presupuesto_prediccion = 40
prediccion = recta(presupuesto_prediccion)
prediccion_tot = np.round(prediccion, decimals=1)
print("La mejor predicción del presupuesto de 40$ millones es:",
      prediccion_tot, "millones")

# Especificar la fuente Times New Roman
prop = fm.FontProperties(fname='font/times.ttf')
```

```
# Gráfico
plt.scatter(PRES, IB)
plt.plot(PRES, recta(PRES), 'r-',label="Valor interpolado")
plt.plot(PRES, IB, "ko", label="Datos")
plt.legend(prop=prop)
plt.xlabel("Presupuesto (millones de dólares)", fontproperties=prop)
plt.ylabel("Ingresos brutos (millones)", fontproperties=prop)
plt.title("Relación entre presupuestos e ingresos brutos", fontproperties=prop)
plt.legend(prop=prop)
plt.show()
```

ANEXO 1 DEL CAPÍTULO 6

CÓDIGO PYTHON, COMPILACIÓN Y TABLA DE PROBLEMA RESUELTO CON RK4

Del **Problema 7** de **6.5 Problemas del Capítulo 6** en este anexo se presenta:

- Código Python

- Pantallas de compilación para la obtención de la posición y la velocidad con respecto al tiempo del carrito embebido en el sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales.

- Tabla 6.20 con los 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa.

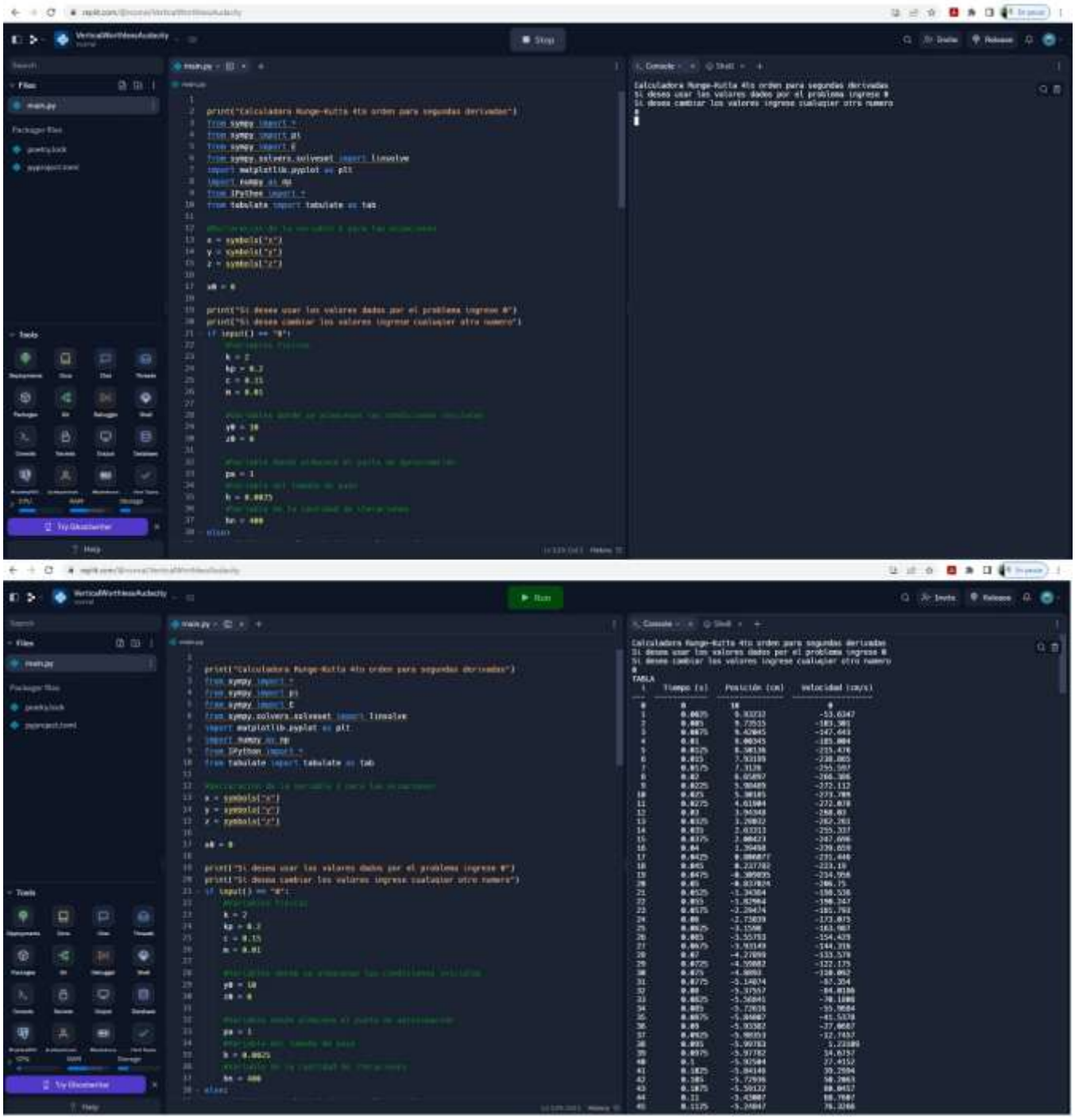
Código Python del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6

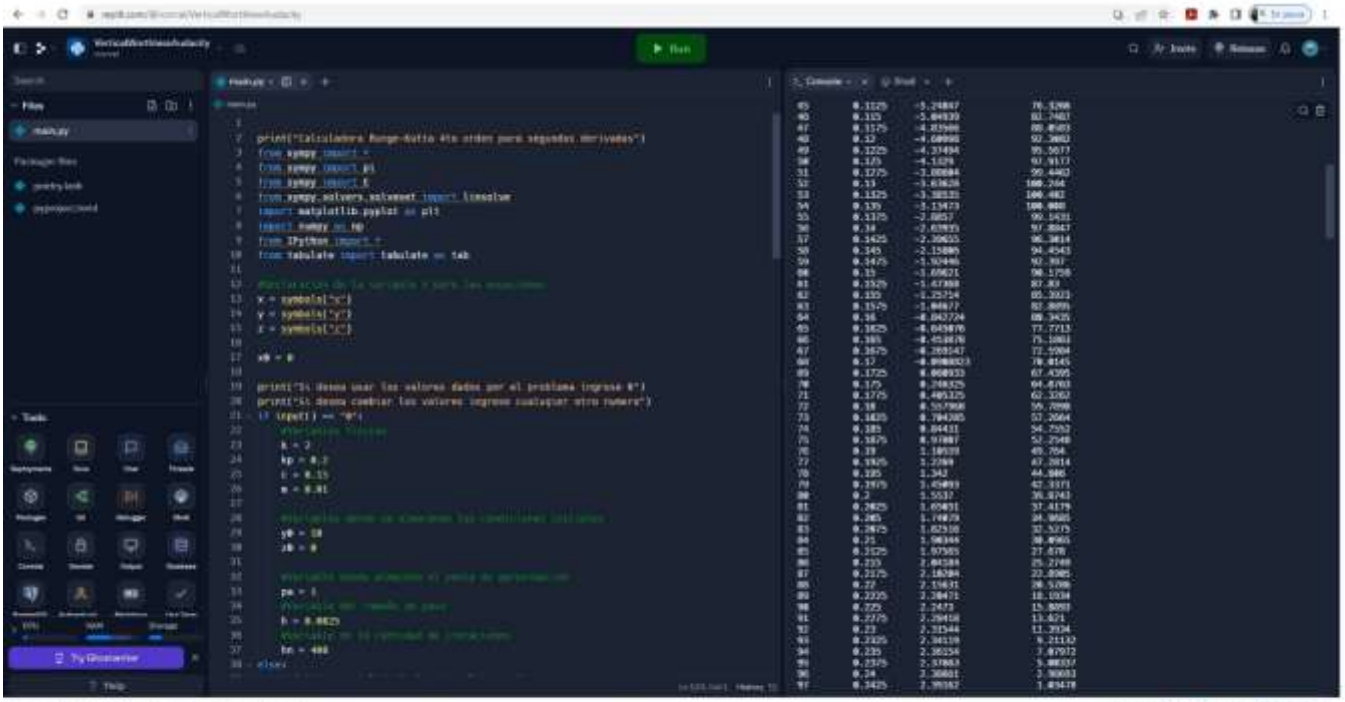
```
print("Calculadora Runge-Kutta 4to orden para segundas derivadas")
from sympy import *
from sympy import pi
from sympy import E
from sympy.solvers.solveset import linsolve
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from IPython import *
from tabulate import tabulate as tab

#Declaracion de la variable X para las ecuaciones
x = symbols("x")
y = symbols("y")
z = symbols("z")

x0 = 0

print("Si desea usar los valores dados por el problema ingrese 0")
print("Si desea cambiar los valores ingrese cualuqier otro numero")
if input() == "0":
    #Variables fisicas
    k = 2
    kp = 0.2
    c = 0.15
    m = 0.01

    #Variables donde se almacenan las condiciones iniciales
    y0 = 10
    z0 = 0

    #Variable donde almacena el punto de aproximación
    pa = 1
    #Variable del tamaño de paso
    h = 0.0025
    #Variable de la cantidad de iteraciones
    hn = 400
else:
    print("Ingresa los siguientes valores: ")

    #Variables fisicas
    print("Coeficiente del resorte lineal: (N/cm)")
    k = float(input("k = "))
    print("Fuerza de recuperacion del resorte no lineal: (N/cm^3)")
    kp = float(input("k' = "))
    print("Coeficiente del amortiguador: (Ns/cm)")
    c = float(input("c = "))
    print("Masa del objeto: (kg)")
```

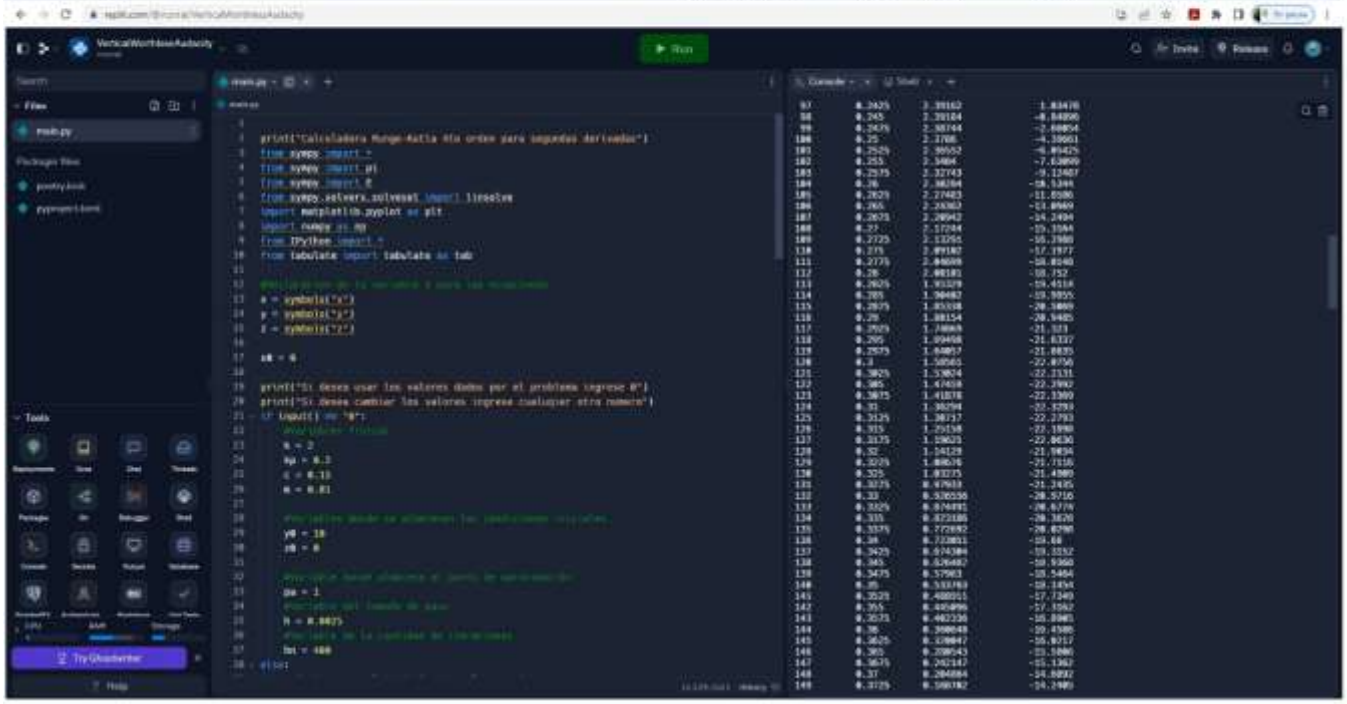
```
    m = float(input("m = "))

    #Variables donde se almacenan las condiciones iniciales
    print("Posición inicial (cm):")
    y0 = float(input("x(0) = "))
    print("Velocidad inicial (cm/s):")
    z0 = float(input("x'(0) = "))

    #Variable donde almacena el punto de aproximación
    pa = float(input("Tiempo Final = "))
    #Variable del tamaño de paso
    h = float(input("Tamaño del paso = "))
    #Variable de la cantidad de iteraciones
    hn = int(pa / h)

#Variable donde se guardan la ecuaciones del PVI
equF = sympify("z")
equG = sympify(f"(-({c}*z)-({k}*y)-({kp*(y**3)}))/{m}")

#Lista para la tabla
tabla = list()
tabla.append([0, x0, y0, z0])

#Liastas para la gráfica
datos = list()
datos.append(y0)
ejeX = list()
ejeX.append(x0)

#Asigna los valores iniciales
xi = x0
yi = y0
zi = z0

#Ciclo for para calcular el valor n
for i in Range(hn):
    #Variable temporal para la tabla
    temptab = list()
    temptab.append(i + 1)

    #Calcula los valores de k y l
    k1 = h * equF.evalf(subs={x:xi, y:yi, z:zi})
    l1 = h * equG.evalf(subs={x:xi, y:yi, z:zi})
    k2 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k1/2), z:(zi + l1/2)})
    l2 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k1/2), z:(zi + l1/2)})
    k3 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k2/2), z:(zi + l2/2)})
    l3 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h/2), y:(yi + k2/2), z:(zi + l2/2)})
    k4 = h * equF.evalf(subs={x:(xi + h), y:(yi + k3), z:(zi + l3)})
    l4 = h * equG.evalf(subs={x:(xi + h), y:(yi + k3), z:(zi + l3)})
```

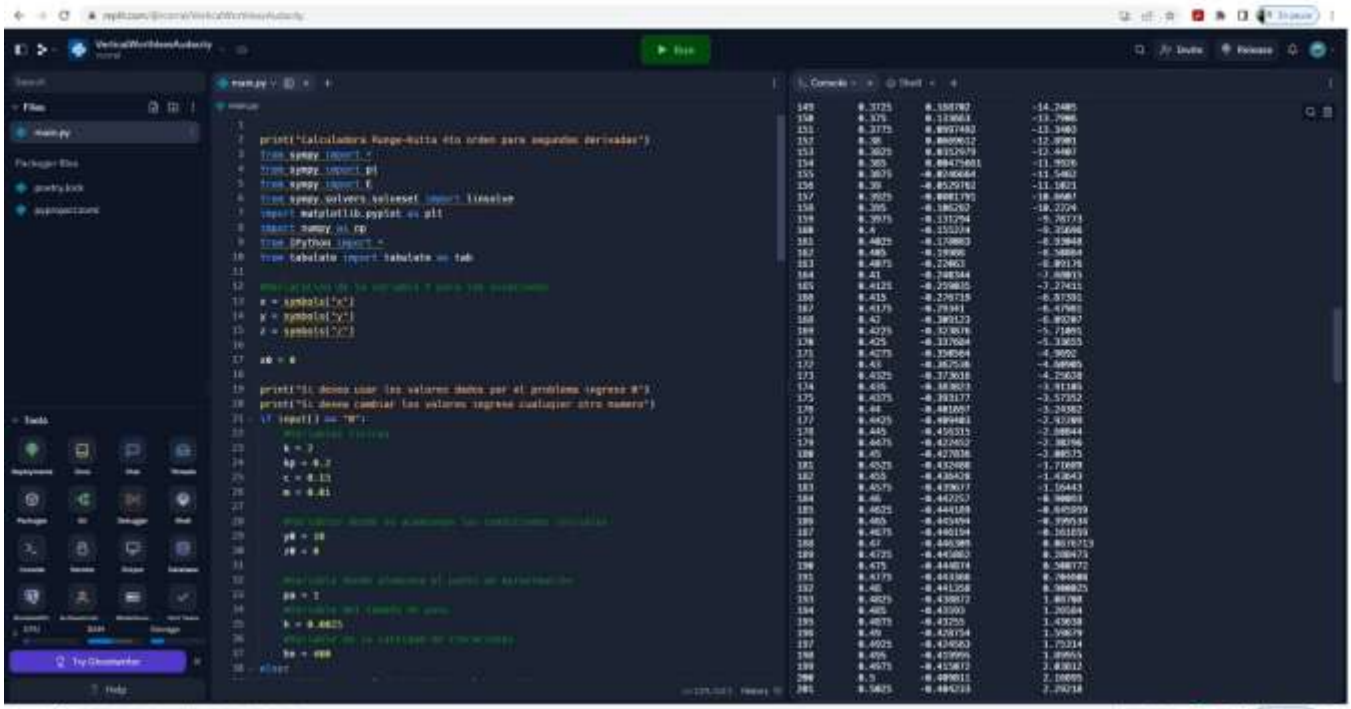
```
    #Calclula los valores de xi y yi
    yi = simplify(yi + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4))
    xi = simplify(xi + h)
    zi = simplify(zi + (1/6)*(l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4))

    #Añade el resultado obtenido a la lista para la grafica y la lista temporal
    datos.append(yi)
    ejeX.append(xi)
    temptab.append(xi)
    temptab.append(yi)
    temptab.append(zi)

    #Añade la lista temporar a la lista de la tabla
    tabla.append(temptab)

#Imprime la tabla
print("TABLA")
print(tab(tabla, headers=["i", "Tiempo (s)", "Posición (cm)", "Velocidad (cm/s)"]))

#Imprime la gráfica
plt.plot(ejeX, datos, label="Datos calculados")
plt.grid()
plt.rc('font',family='Times New Roman')
ax = plt.gca()
ax.legend()
ax.set_xlabel("Tiempo (s)", **{'fontname':'Times New Roman'})
ax.set_ylabel("Distancia (cm)", **{'fontname':'Times New Roman'})
ax.set_title("Sistema de suspensión de resortes simétricamente no lineales", **{'fontname':'Times New
Roman'})
plt.show()
```

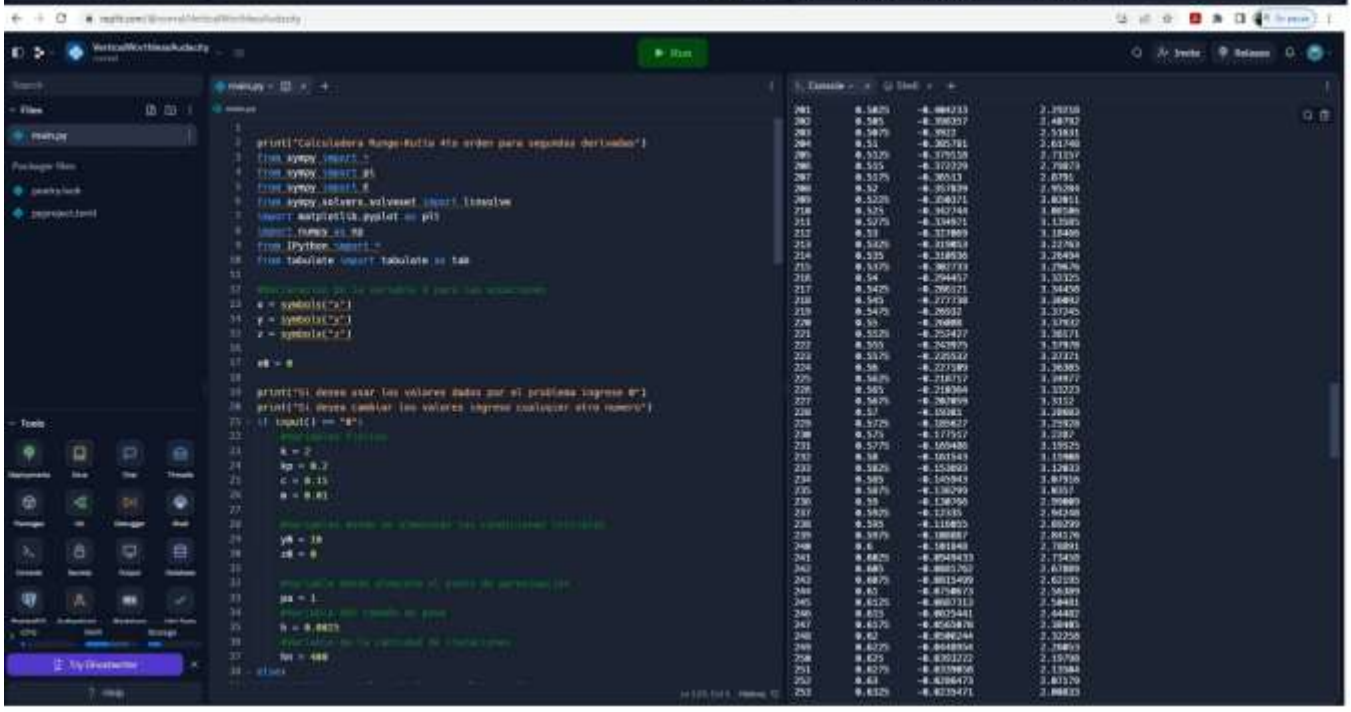
Pantallas de compilación del Código Python del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6

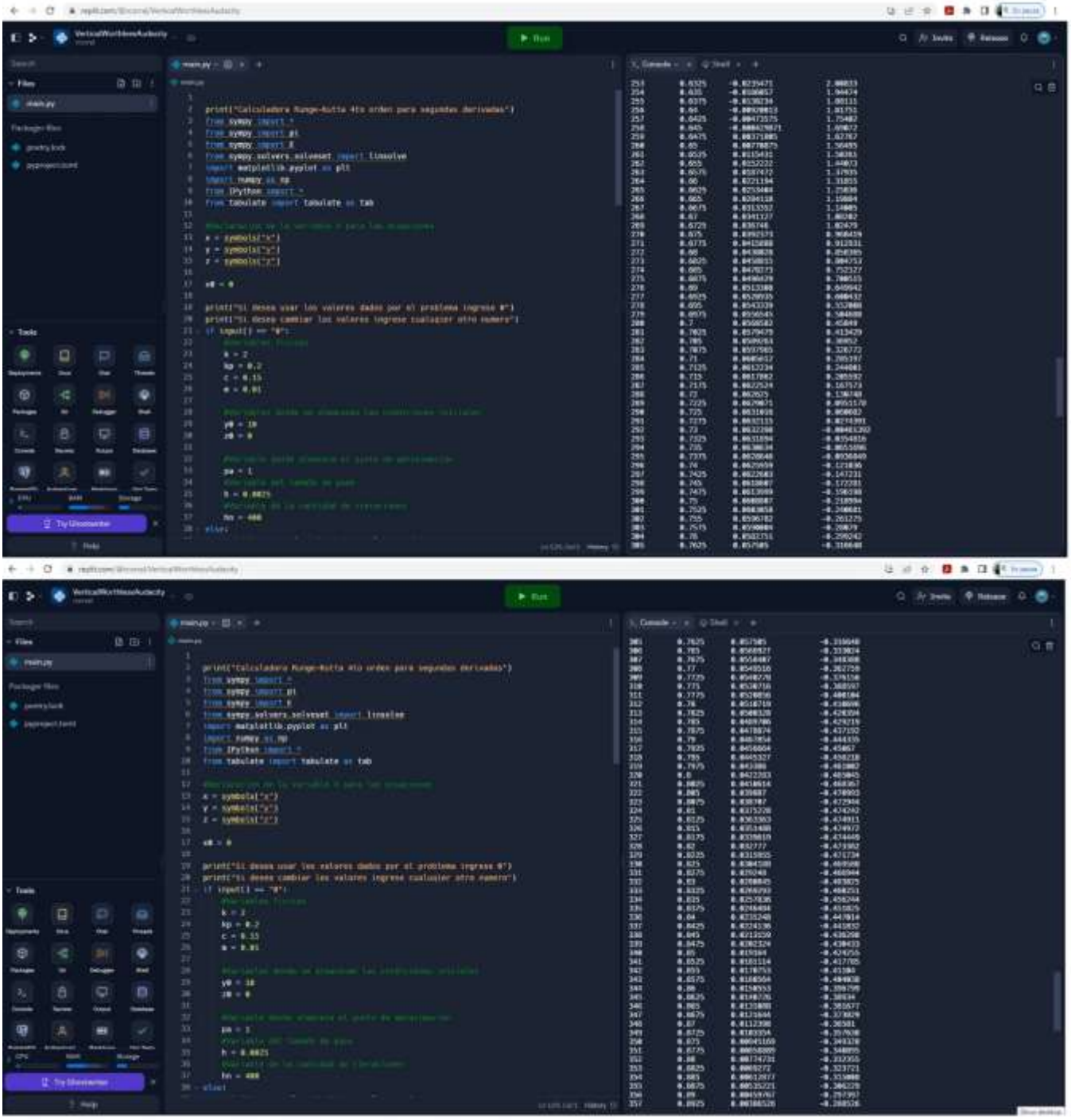


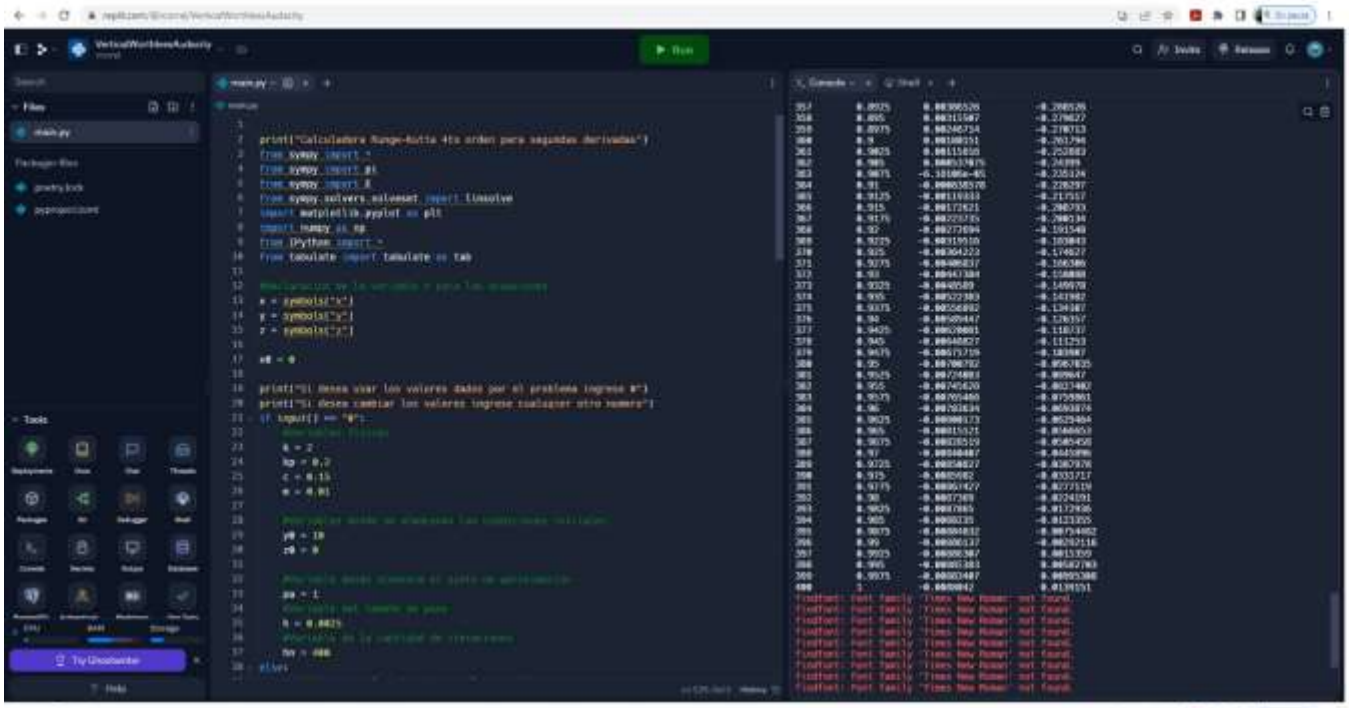


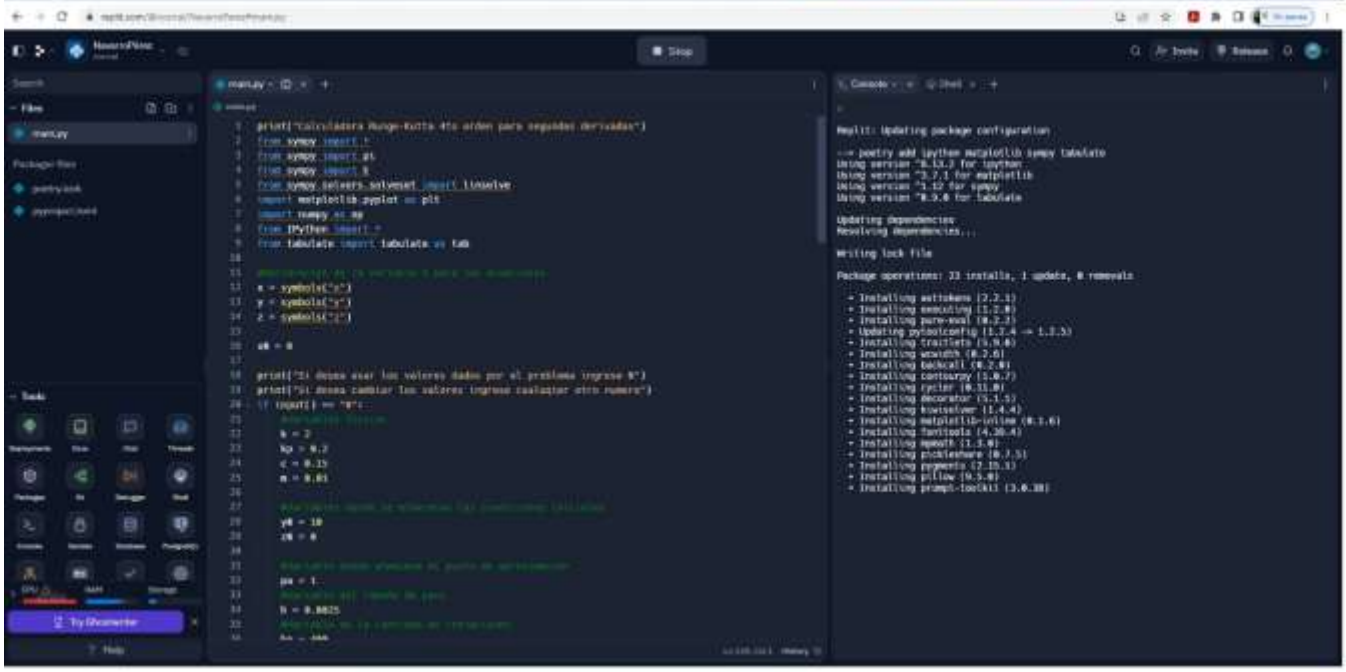


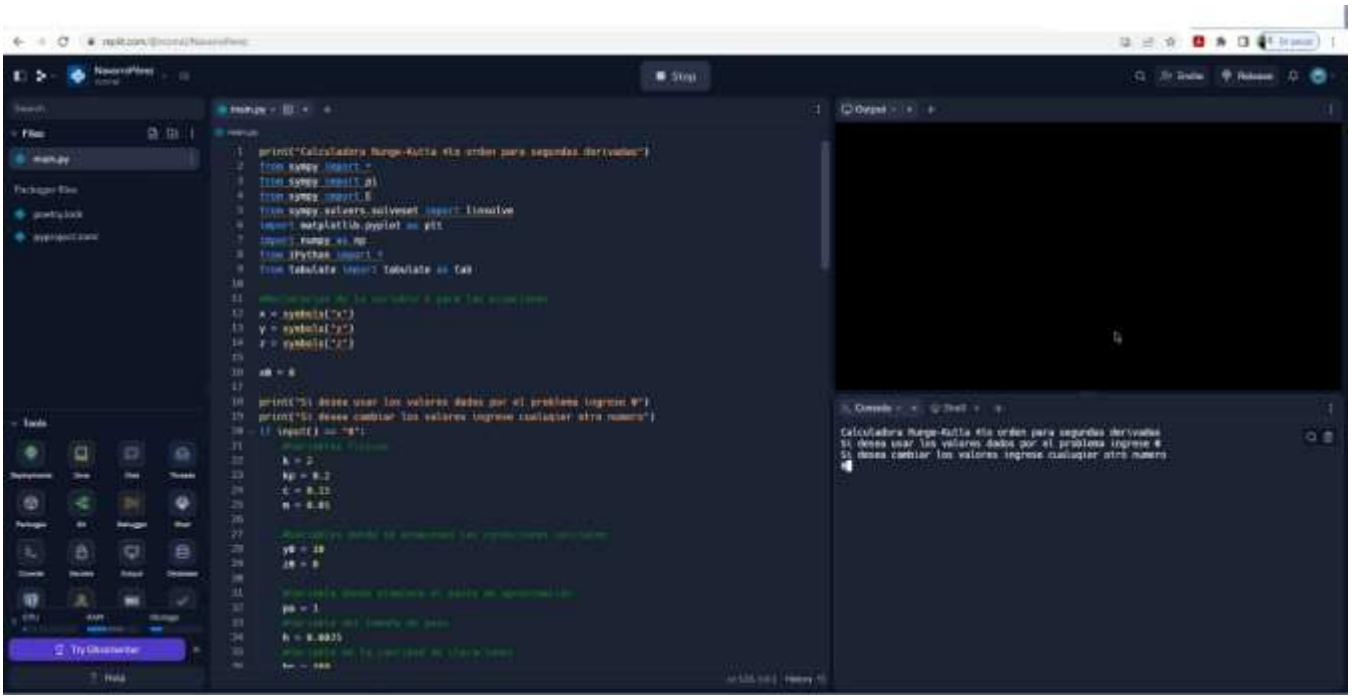












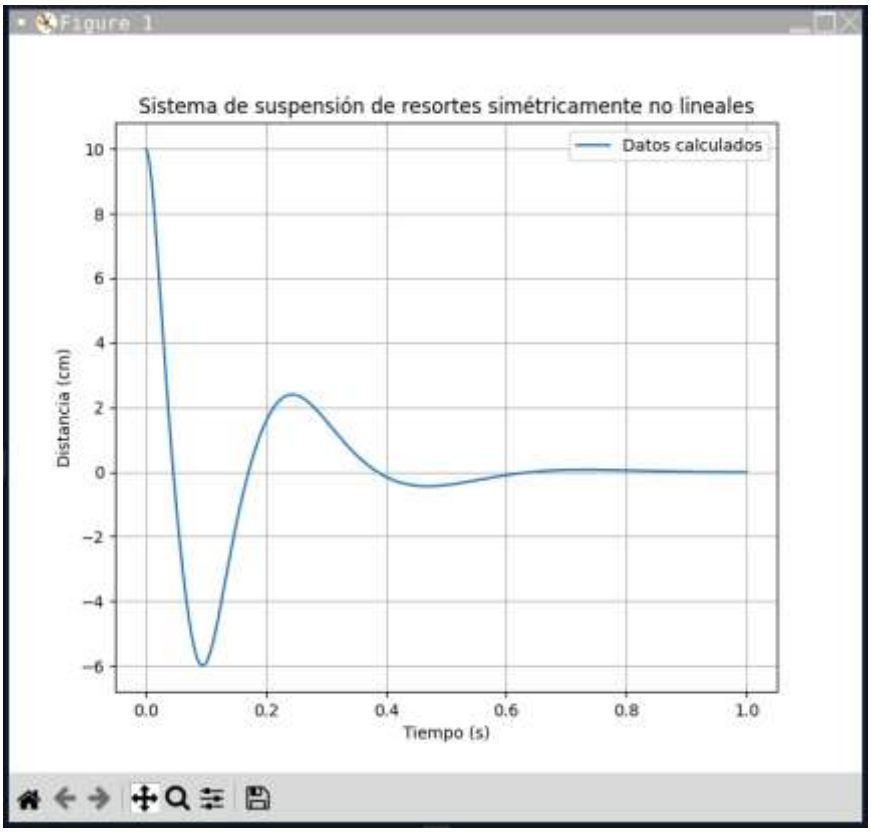


Fig. 6.38 Gráfica que arroja la compilación del código en lenguaje Python del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6

En la Tabla 6.20 se presentan los resultados que arroja el código Python al compilarlo. Las instrucciones del código durante la compilación, son: Si desea usar los valores dados por el problema ingrese 0. Si desea cambiar los valores ingrese cualquier otro numero → teclear 0 para obtener los resultados específicos del Problema 7 → teclear otro número para resolver el problema con otros parámetros físicos del sistema de suspensión y otras condiciones iniciales.

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
0	0	10	0	201	0.5025	-0.404233	2.29218
1	0.0025	9.93232	-53.6347	202	0.505	-0.398357	2.40792
2	0.005	9.73515	-103.301	203	0.5075	-0.3922	2.51631
3	0.0075	9.42045	-147.443	204	0.51	-0.385781	2.61748
4	0.01	9.00345	-185.004	205	0.5125	-0.379118	2.71157
5	0.0125	8.50136	-215.476	206	0.515	-0.372229	2.79873
6	0.015	7.93199	-238.865	207	0.5175	-0.36513	2.8791
7	0.0175	7.3126	-255.597	208	0.52	-0.357839	2.95284
8	0.02	6.65897	-266.386	209	0.5225	-0.350371	3.02011
9	0.0225	5.98489	-272.112	210	0.525	-0.342744	3.08106
10	0.025	5.30185	-273.709	211	0.5275	-0.334971	3.13585
11	0.0275	4.61904	-272.078	212	0.53	-0.327069	3.18466
12	0.03	3.94348	-268.03	213	0.5325	-0.319053	3.22763
13	0.0325	3.28032	-262.261	214	0.535	-0.310936	3.26494
14	0.035	2.63313	-255.337	215	0.5375	-0.302733	3.29676
15	0.0375	2.00423	-247.696	216	0.54	-0.294457	3.32325
16	0.04	1.39498	-239.659	217	0.5425	-0.286121	3.34458
17	0.0425	0.806077	-231.446	218	0.545	-0.277738	3.36092

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
18	0.045	0.237782	-223.19	219	0.5475	-0.26932	3.37245
19	0.0475	-0.309895	-214.956	220	0.55	-0.26088	3.37932
20	0.05	-0.837024	-206.75	221	0.5525	-0.252427	3.38171
21	0.0525	-1.34364	-198.536	222	0.555	-0.243975	3.37978
22	0.055	-1.82964	-190.247	223	0.5575	-0.235532	3.37371
23	0.0575	-2.29474	-181.793	224	0.56	-0.227109	3.36365
24	0.06	-2.73839	-173.075	225	0.5625	-0.218717	3.34977
25	0.0625	-3.1598	-163.987	226	0.565	-0.210364	3.33223
26	0.065	-3.55793	-154.429	227	0.5675	-0.202059	3.3112
27	0.0675	-3.93149	-144.316	228	0.57	-0.19381	3.28683
28	0.07	-4.27899	-133.579	229	0.5725	-0.185627	3.25928
29	0.0725	-4.59882	-122.175	230	0.575	-0.177517	3.2287
30	0.075	-4.8893	-110.092	231	0.5775	-0.169486	3.19525
31	0.0775	-5.14874	-97.354	232	0.58	-0.161543	3.15908
32	0.08	-5.37557	-84.0186	233	0.5825	-0.153693	3.12033
33	0.0825	-5.56841	-70.1808	234	0.585	-0.145943	3.07916
34	0.085	-5.72616	-55.9684	235	0.5875	-0.138299	3.0357
35	0.0875	-5.84807	-41.5378	236	0.59	-0.130766	2.99009
36	0.09	-5.93382	-27.0667	237	0.5925	-0.12335	2.94248
37	0.0925	-5.98353	-12.7457	238	0.595	-0.116055	2.89299
38	0.095	-5.99783	1.23109	239	0.5975	-0.108887	2.84176
39	0.0975	-5.97782	14.6757	240	0.6	-0.101848	2.78891

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
40	0.1	-5.92504	27.4152	241	0.6025	-0.0949433	2.73458
41	0.1025	-5.84146	39.2994	242	0.605	-0.0881762	2.67889
42	0.105	-5.72936	50.2063	243	0.6075	-0.0815499	2.62195
43	0.1075	-5.59132	60.0457	244	0.61	-0.0750673	2.56389
44	0.11	-5.43007	68.7607	245	0.6125	-0.0687313	2.50481
45	0.1125	-5.24847	76.3266	246	0.615	-0.0625441	2.44482
46	0.115	-5.04939	82.7487	247	0.6175	-0.0565078	2.38405
47	0.1175	-4.83566	88.0583	248	0.62	-0.0506244	2.32258
48	0.12	-4.60998	92.3082	249	0.6225	-0.0448954	2.26053
49	0.1225	-4.37494	95.5677	250	0.625	-0.0393222	2.19798
50	0.125	-4.1329	97.9177	251	0.6275	-0.0339058	2.13504
51	0.1275	-3.88604	99.4462	252	0.63	-0.0286473	2.07179
52	0.13	-3.63628	100.244	253	0.6325	-0.0235471	2.00833
53	0.1325	-3.38535	100.402	254	0.635	-0.0186057	1.94474
54	0.135	-3.13473	100.008	255	0.6375	-0.0138234	1.88111
55	0.1375	-2.8857	99.1431	256	0.64	-0.00920013	1.81751
56	0.14	-2.63935	97.8847	257	0.6425	-0.00473575	1.75402
57	0.1425	-2.39655	96.3014	258	0.645	-0.000429871	1.69072
58	0.145	-2.15806	94.4543	259	0.6475	0.00371805	1.62767
59	0.1475	-1.92446	92.397	260	0.65	0.00770875	1.56495
60	0.15	-1.69621	90.1759	261	0.6525	0.0115431	1.50261
61	0.1525	-1.47368	87.83	262	0.655	0.0152222	1.44073

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
62	0.155	-1.25714	85.3923	263	0.6575	0.0187472	1.37935
63	0.1575	-1.04677	82.8895	264	0.66	0.0221194	1.31855
64	0.16	-0.842724	80.3435	265	0.6625	0.0253404	1.25836
65	0.1625	-0.645076	77.7713	266	0.665	0.0284118	1.19884
66	0.165	-0.453878	75.1863	267	0.6675	0.0313352	1.14005
67	0.1675	-0.269147	72.5984	268	0.67	0.0341127	1.08202
68	0.17	-0.0908823	70.0145	269	0.6725	0.036746	1.02479
69	0.1725	0.080933	67.4395	270	0.675	0.0392373	0.968419
70	0.175	0.246325	64.8763	271	0.6775	0.0415888	0.912931
71	0.1775	0.405325	62.3262	272	0.68	0.0438028	0.858365
72	0.18	0.557968	59.7898	273	0.6825	0.0458815	0.804753
73	0.1825	0.704285	57.2664	274	0.685	0.0478273	0.752127
74	0.185	0.84431	54.7552	275	0.6875	0.0496429	0.700515
75	0.1875	0.97807	52.2548	276	0.69	0.0513308	0.649942
76	0.19	1.10559	49.764	277	0.6925	0.0528935	0.600432
77	0.1925	1.2269	47.2814	278	0.695	0.0543339	0.552008
78	0.195	1.342	44.806	279	0.6975	0.0556545	0.504688
79	0.1975	1.45093	42.3371	280	0.7	0.0568582	0.45849
80	0.2	1.5537	39.8743	281	0.7025	0.0579479	0.413429
81	0.2025	1.65031	37.4179	282	0.705	0.0589263	0.36952
82	0.205	1.74079	34.9685	283	0.7075	0.0597965	0.326772
83	0.2075	1.82516	32.5275	284	0.71	0.0605612	0.285197

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
84	0.21	1.90344	30.0965	285	0.7125	0.0612234	0.244801
85	0.2125	1.97565	27.678	286	0.715	0.0617862	0.205592
86	0.215	2.04184	25.2749	287	0.7175	0.0622524	0.167573
87	0.2175	2.10204	22.8905	288	0.72	0.062625	0.130748
88	0.22	2.15631	20.5286	289	0.7225	0.0629071	0.0951178
89	0.2225	2.20471	18.1934	290	0.725	0.0631016	0.060682
90	0.225	2.2473	15.8893	291	0.7275	0.0632115	0.0274391
91	0.2275	2.28418	13.621	292	0.73	0.0632398	-0.00461392
92	0.23	2.31544	11.3934	293	0.7325	0.0631894	-0.0354816
93	0.2325	2.34119	9.21132	294	0.735	0.0630634	-0.0651696
94	0.235	2.36154	7.07972	295	0.7375	0.0628646	-0.0936849
95	0.2375	2.37663	5.00337	296	0.74	0.0625959	-0.121036
96	0.24	2.38661	2.98693	297	0.7425	0.0622603	-0.147231
97	0.2425	2.39162	1.03478	298	0.745	0.0618607	-0.172281
98	0.245	2.39184	-0.84896	299	0.7475	0.0613999	-0.196198
99	0.2475	2.38744	-2.66054	300	0.75	0.0608807	-0.218994
100	0.25	2.3786	-4.39661	301	0.7525	0.0603058	-0.240681
101	0.2525	2.36552	-6.05425	302	0.755	0.0596782	-0.261275
102	0.255	2.3484	-7.63099	303	0.7575	0.0590004	-0.28079
103	0.2575	2.32743	-9.12487	304	0.76	0.0582751	-0.299242
104	0.26	2.30284	-10.5344	305	0.7625	0.057505	-0.316648
105	0.2625	2.27483	-11.8586	306	0.765	0.0566927	-0.333024

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
106	0.265	2.24362	-13.0969	307	0.7675	0.0558407	-0.348388
107	0.2675	2.20942	-14.2494	308	0.77	0.0549516	-0.362759
108	0.27	2.17244	-15.3164	309	0.7725	0.0540278	-0.376156
109	0.2725	2.13291	-16.2988	310	0.775	0.0530716	-0.388597
110	0.275	2.09102	-17.1977	311	0.7775	0.0520856	-0.400104
111	0.2775	2.04699	-18.0148	312	0.78	0.0510719	-0.410696
112	0.28	2.00101	-18.752	313	0.7825	0.0500328	-0.420394
113	0.2825	1.95329	-19.4114	314	0.785	0.0489706	-0.429219
114	0.285	1.90402	-19.9955	315	0.7875	0.0478874	-0.437192
115	0.2875	1.85338	-20.5069	316	0.79	0.0467854	-0.444335
116	0.29	1.80154	-20.9485	317	0.7925	0.0456664	-0.45067
117	0.2925	1.74869	-21.323	318	0.795	0.0445327	-0.456218
118	0.295	1.69498	-21.6337	319	0.7975	0.043386	-0.461002
119	0.2975	1.64057	-21.8835	320	0.8	0.0422283	-0.465045
120	0.3	1.58561	-22.0756	321	0.8025	0.0410614	-0.468367
121	0.3025	1.53024	-22.2131	322	0.805	0.039887	-0.470993
122	0.305	1.47459	-22.2992	323	0.8075	0.038707	-0.472944
123	0.3075	1.41878	-22.3369	324	0.81	0.0375228	-0.474242
124	0.31	1.36294	-22.3293	325	0.8125	0.0363363	-0.474911
125	0.3125	1.30717	-22.2793	326	0.815	0.0351488	-0.474972
126	0.315	1.25158	-22.1898	327	0.8175	0.0339619	-0.474449
127	0.3175	1.19625	-22.0636	328	0.82	0.032777	-0.473362

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
128	0.32	1.14129	-21.9034	329	0.8225	0.0315955	-0.471734
129	0.3225	1.08676	-21.7116	330	0.825	0.0304188	-0.469588
130	0.325	1.03275	-21.4909	331	0.8275	0.029248	-0.466944
131	0.3275	0.97933	-21.2435	332	0.83	0.0280845	-0.463825
132	0.33	0.926556	-20.9716	333	0.8325	0.0269293	-0.460251
133	0.3325	0.874491	-20.6774	334	0.835	0.0257836	-0.456244
134	0.335	0.823186	-20.3628	335	0.8375	0.0246484	-0.451825
135	0.3375	0.772692	-20.0298	336	0.84	0.0235248	-0.447014
136	0.34	0.723051	-19.68	337	0.8425	0.0224136	-0.441832
137	0.3425	0.674304	-19.3152	338	0.845	0.0213159	-0.436298
138	0.345	0.626487	-18.9368	339	0.8475	0.0202324	-0.430433
139	0.3475	0.57963	-18.5464	340	0.85	0.019164	-0.424255
140	0.35	0.533763	-18.1454	341	0.8525	0.0181114	-0.417785
141	0.3525	0.488911	-17.7349	342	0.855	0.0170753	-0.41104
142	0.355	0.445096	-17.3162	343	0.8575	0.0160564	-0.404038
143	0.3575	0.402336	-16.8905	344	0.86	0.0150553	-0.396799
144	0.36	0.360648	-16.4586	345	0.8625	0.0140726	-0.38934
145	0.3625	0.320047	-16.0217	346	0.865	0.0131088	-0.381677
146	0.365	0.280543	-15.5806	347	0.8675	0.0121644	-0.373829
147	0.3675	0.242147	-15.1362	348	0.87	0.0112398	-0.36581
148	0.37	0.204864	-14.6892	349	0.8725	0.0103354	-0.357638
149	0.3725	0.168702	-14.2405	350	0.875	0.00945169	-0.349328

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
150	0.375	0.133663	-13.7906	351	0.8775	0.00858889	-0.340895
151	0.3775	0.0997492	-13.3403	352	0.88	0.00774731	-0.332355
152	0.38	0.0669612	-12.8901	353	0.8825	0.0069272	-0.323721
153	0.3825	0.0352979	-12.4407	354	0.885	0.00612877	-0.315008
154	0.385	0.00475661	-11.9926	355	0.8875	0.00535221	-0.306229
155	0.3875	-0.0246664	-11.5462	356	0.89	0.00459767	-0.297397
156	0.39	-0.0529762	-11.1021	357	0.8925	0.00386526	-0.288526
157	0.3925	-0.0801791	-10.6607	358	0.895	0.00315507	-0.279627
158	0.395	-0.106282	-10.2224	359	0.8975	0.00246714	-0.270713
159	0.3975	-0.131294	-9.78773	360	0.9	0.00180151	-0.261794
160	0.4	-0.155224	-9.35696	361	0.9025	0.00115816	-0.252883
161	0.4025	-0.178083	-8.93048	362	0.905	0.000537075	-0.24399
162	0.405	-0.19988	-8.50864	363	0.9075	-6.18E-05	-0.235124
163	0.4075	-0.22063	-8.09176	364	0.91	-0.000638578	-0.226297
164	0.41	-0.240344	-7.68015	365	0.9125	-0.00119333	-0.217517
165	0.4125	-0.259035	-7.27411	366	0.915	-0.00172621	-0.208793
166	0.415	-0.276719	-6.87391	367	0.9175	-0.00223735	-0.200134
167	0.4175	-0.29341	-6.47981	368	0.92	-0.00272694	-0.191548
168	0.42	-0.309123	-6.09207	369	0.9225	-0.00319516	-0.183043
169	0.4225	-0.323876	-5.71091	370	0.925	-0.00364223	-0.174627
170	0.425	-0.337684	-5.33655	371	0.9275	-0.00406837	-0.166306
171	0.4275	-0.350564	-4.9692	372	0.93	-0.00447384	-0.158088

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
172	0.43	-0.362536	-4.60905	373	0.9325	-0.0048589	-0.149978
173	0.4325	-0.373616	-4.25628	374	0.935	-0.00522383	-0.141982
174	0.435	-0.383823	-3.91105	375	0.9375	-0.00556892	-0.134107
175	0.4375	-0.393177	-3.57352	376	0.94	-0.00589447	-0.126357
176	0.44	-0.401697	-3.24382	377	0.9425	-0.00620081	-0.118737
177	0.4425	-0.409403	-2.92209	378	0.945	-0.00648827	-0.111253
178	0.445	-0.416315	-2.60844	379	0.9475	-0.00675719	-0.103907
179	0.4475	-0.422452	-2.30296	380	0.95	-0.00700792	-0.0967035
180	0.45	-0.427836	-2.00575	381	0.9525	-0.00724083	-0.089647
181	0.4525	-0.432488	-1.71689	382	0.955	-0.00745628	-0.0827402
182	0.455	-0.436428	-1.43643	383	0.9575	-0.00765466	-0.0759861
183	0.4575	-0.439677	-1.16443	384	0.96	-0.00783634	-0.0693874
184	0.46	-0.442257	-0.90093	385	0.9625	-0.00800173	-0.0629464
185	0.4625	-0.444189	-0.645959	386	0.965	-0.00815121	-0.0566653
186	0.465	-0.445494	-0.399534	387	0.9675	-0.00828519	-0.0505458
187	0.4675	-0.446194	-0.161659	388	0.97	-0.00840407	-0.0445896
188	0.47	-0.446309	0.0676713	389	0.9725	-0.00850827	-0.0387978
189	0.4725	-0.445862	0.288473	390	0.975	-0.0085982	-0.0331717
190	0.475	-0.444874	0.500772	391	0.9775	-0.00867427	-0.0277119
191	0.4775	-0.443366	0.704608	392	0.98	-0.0087369	-0.0224191
192	0.48	-0.441358	0.900025	393	0.9825	-0.0087865	-0.0172936
193	0.4825	-0.438872	1.08708	394	0.985	-0.0088235	-0.0123355

Tabla 6.20 del Problema 7 de 6.5 Problemas del Capítulo 6 con 400 valores de tiempo, posición y velocidad del carrito que arroja el programa en código Python. Calculadora Runge-Kutta 4o orden para segundas derivadas.

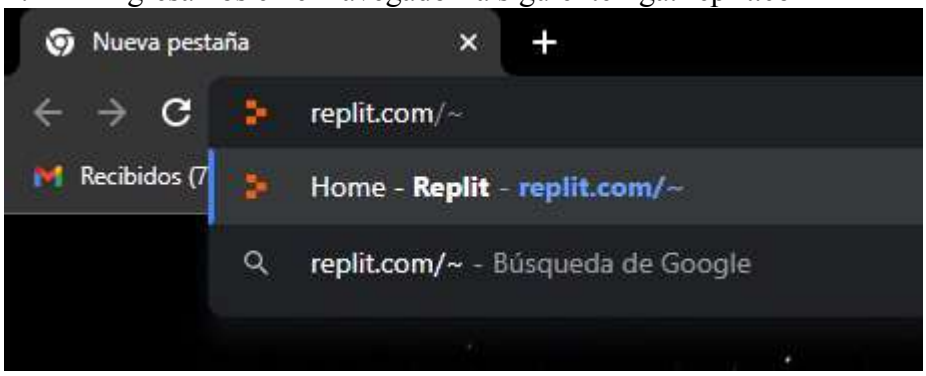
i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	i	Tiempo (s)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)
194	0.485	-0.43593	1.26584	395	0.9875	-0.00884832	-0.00754482
195	0.4875	-0.43255	1.43638	396	0.99	-0.00886137	-0.00292116
196	0.49	-0.428754	1.59879	397	0.9925	-0.00886307	0.0015359
197	0.4925	-0.424563	1.75314	398	0.995	-0.00885383	0.00582703
198	0.495	-0.419995	1.89955	399	0.9975	-0.00883407	0.00995308
199	0.4975	-0.415072	2.03812	400	1	-0.0088042	0.0139151
200	0.5	-0.409811	2.16895				

ANEXO 2

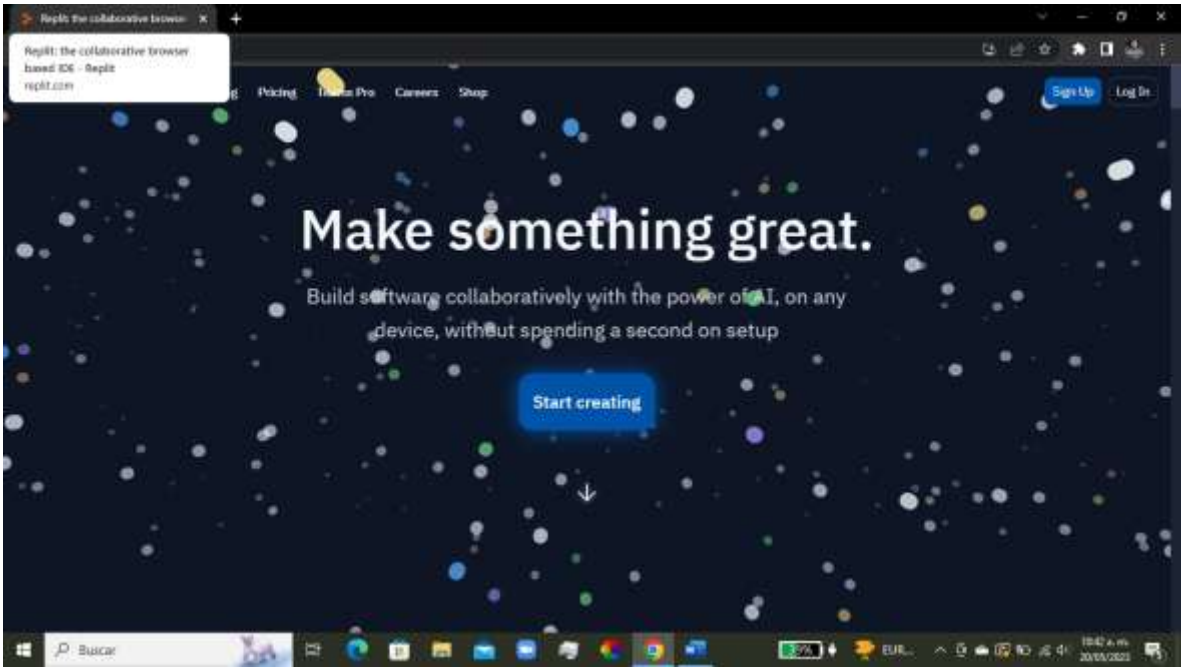
TUTORIAL PARA REVISIÓN DE CÓDIGOS PYTHON DE SOLUCIONES NUMÉRICAS INGENIERILES

Se sugiere el uso de este tutorial para revisión de códigos Python de problemas del libro: **Soluciones Numéricas Ingenieriles**, así como para su modificación o bien, para la elaboración de programas que permitan resolver cualquier problema por medio de cálculos y graficación de modelos matemáticos, entre otros usos intrínsecos en este lenguaje de programación universal.

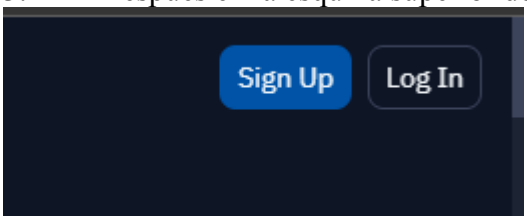
1. Ingresamos en el navegador la siguiente liga: replit.com



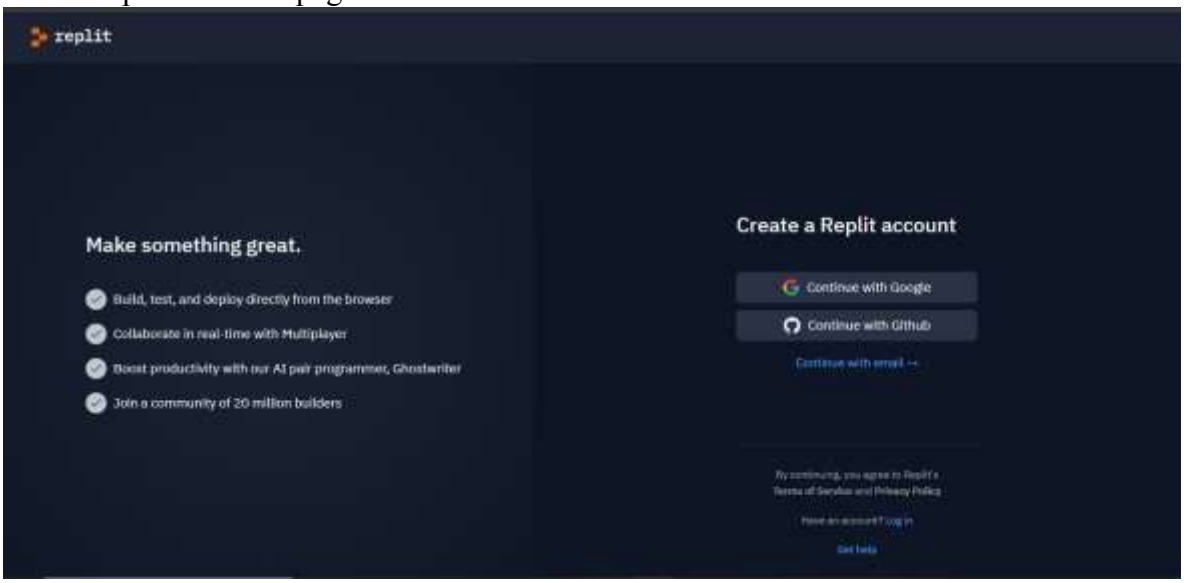
2. Una vez ingresada la página aparecerá esta pantalla



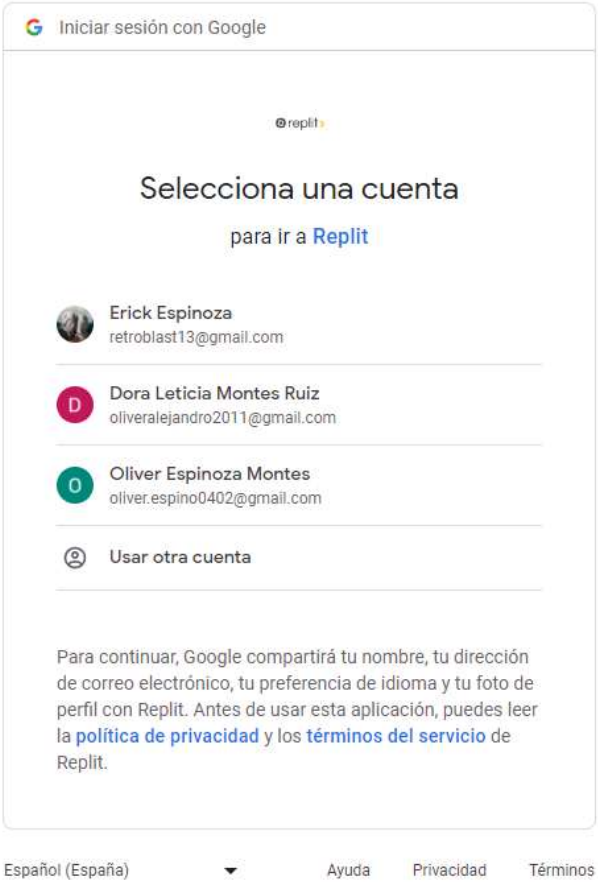
3. Después en la esquina superior derecha daremos clic en el botón de “Sign up”



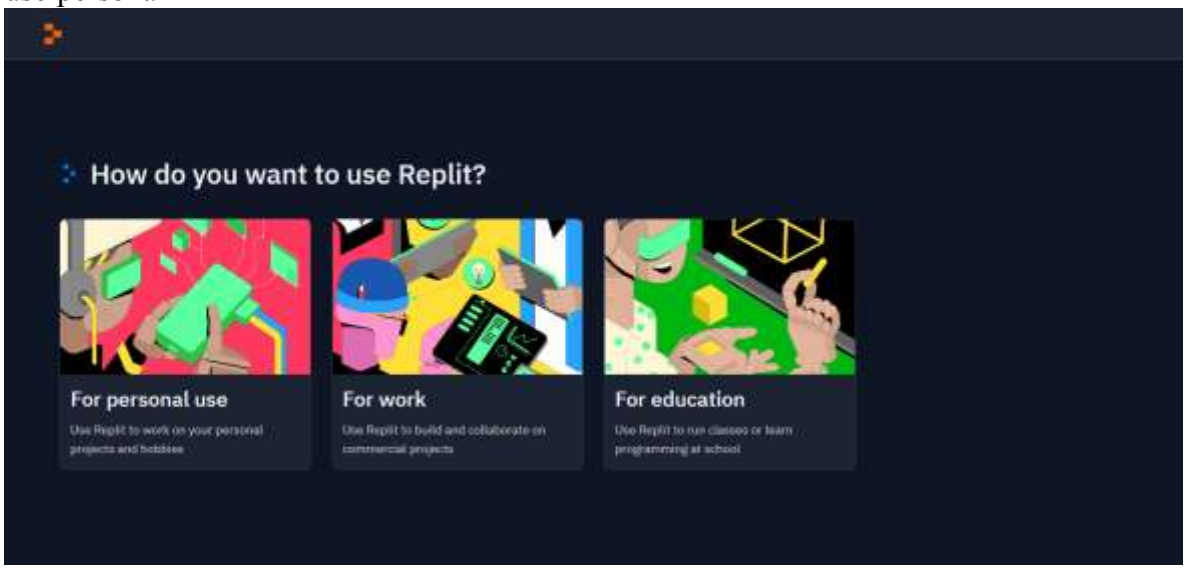
4. Aparecerá está pagina

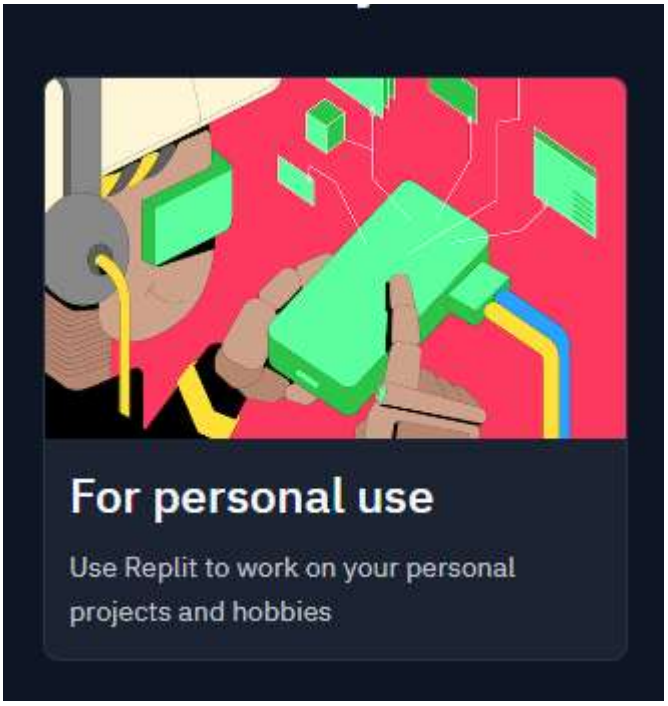


5. Seleccionamos una cuenta.

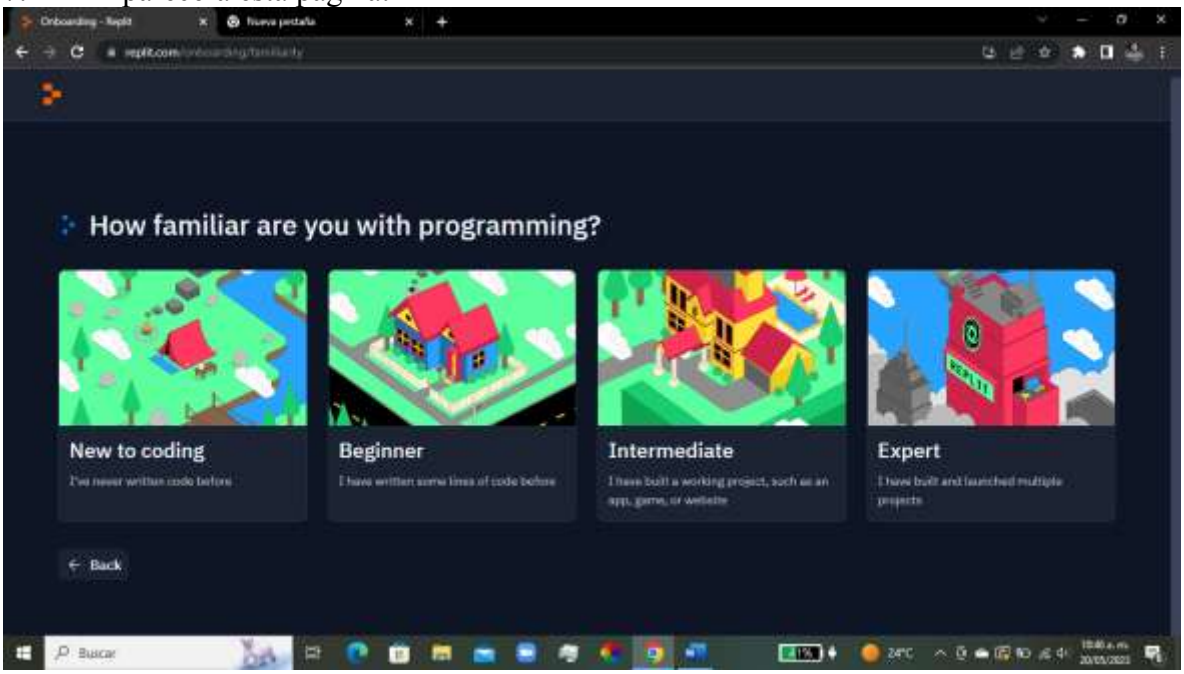


6. Continuamos con Google para que sea más rápido, una vez iniciada la cuenta selecciona el de uso personal





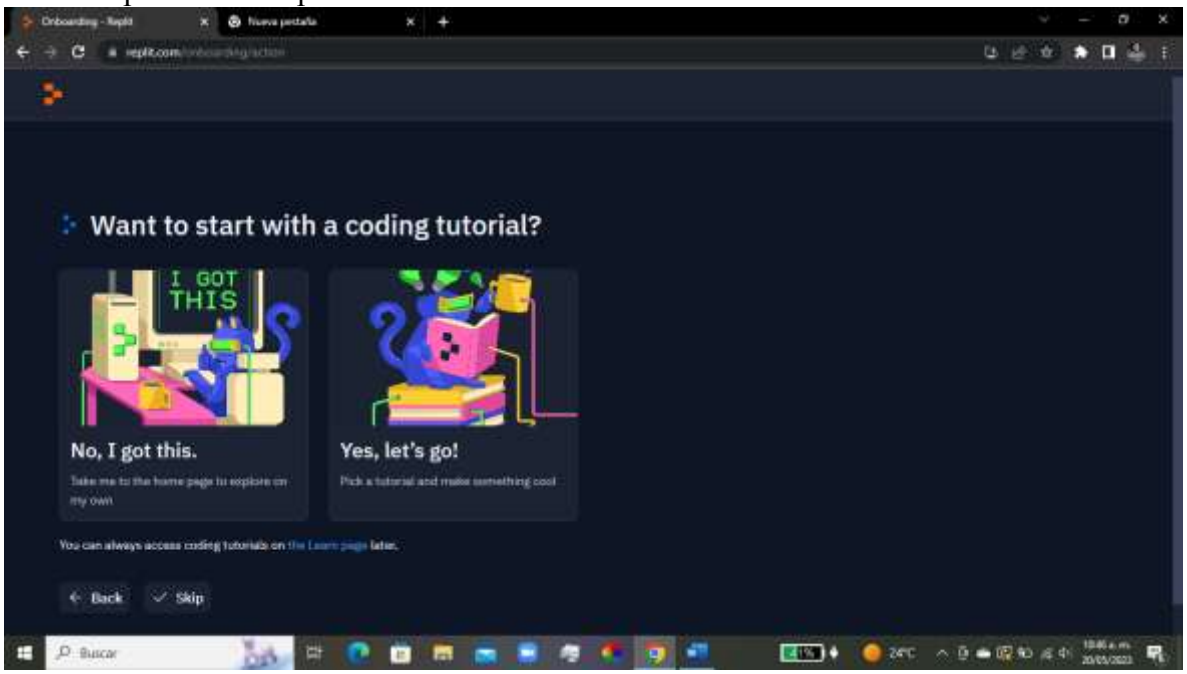
7. Aparecerá esta página:



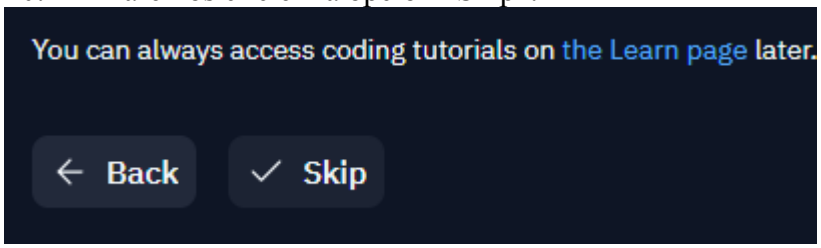
8. Seleccionaremos la opción “New to coding”:

Aparecerá esta pestaña

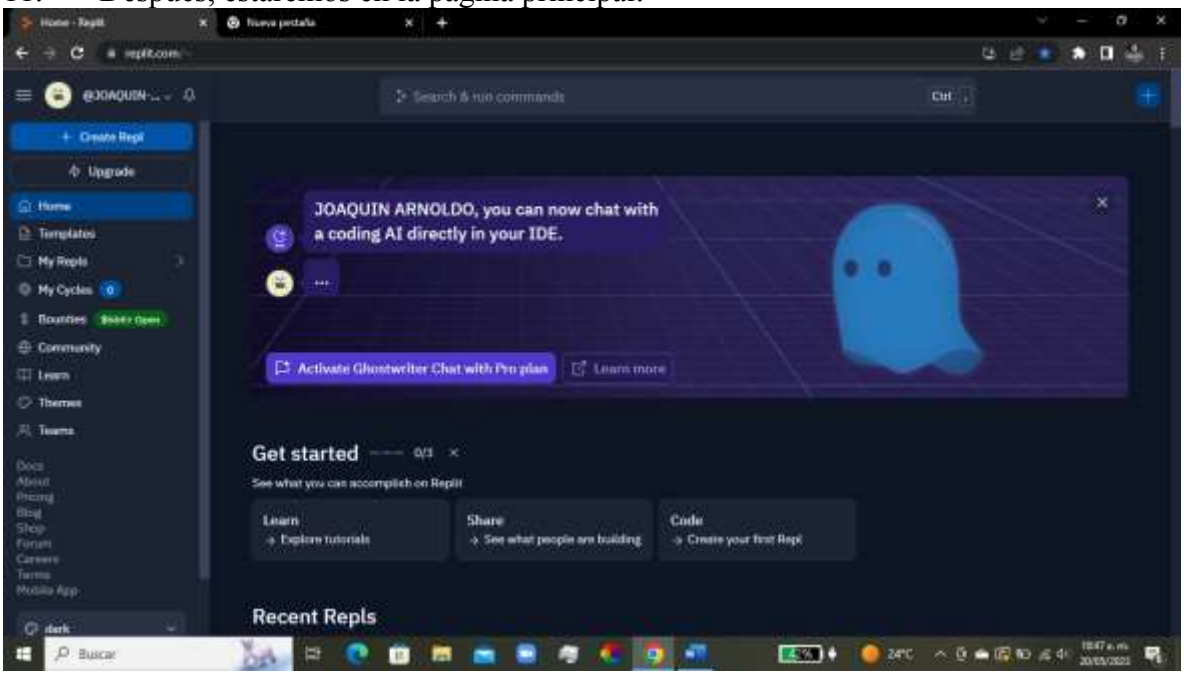
9. Aparecerá esta pestaña:



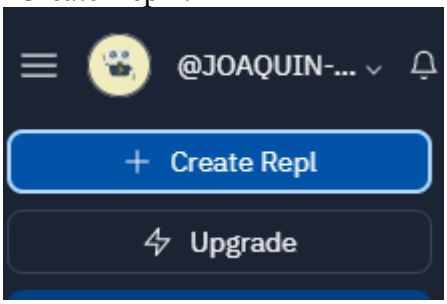
10. Daremos clic en la opción “Skip”:



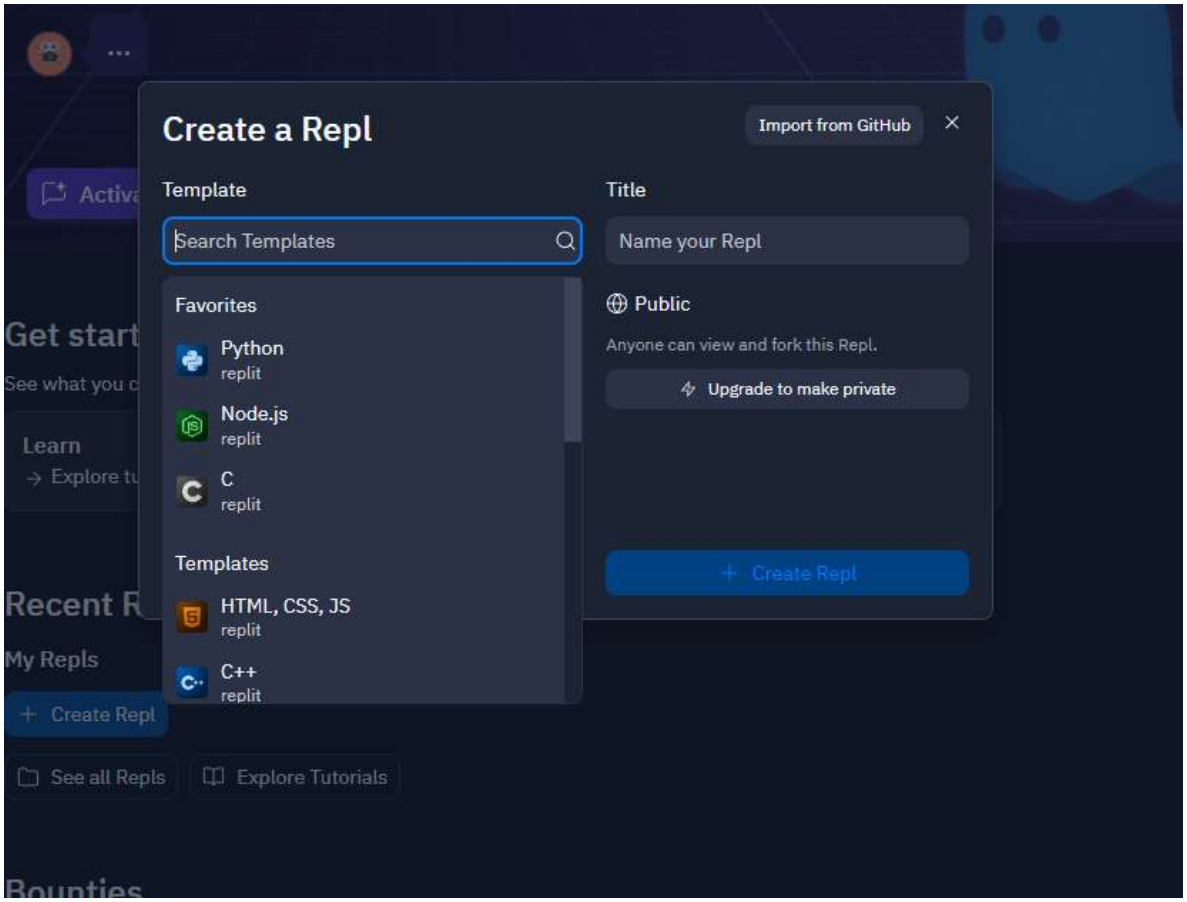
11. Después, estaremos en la página principal:



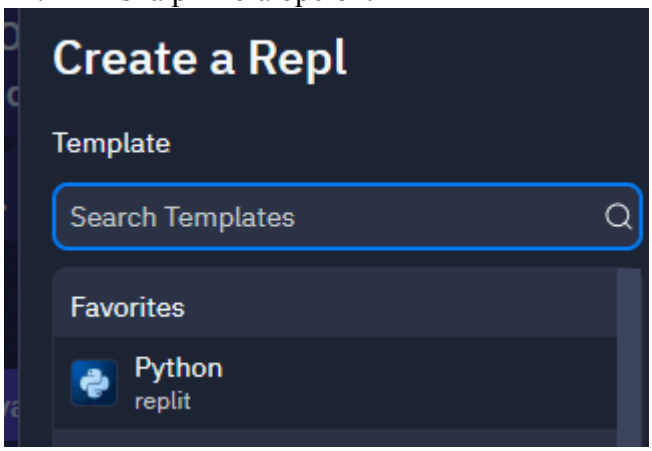
12. En la parte superior izquierda, veremos las siguientes opciones, daremos click en el botón azul "Create Repl":



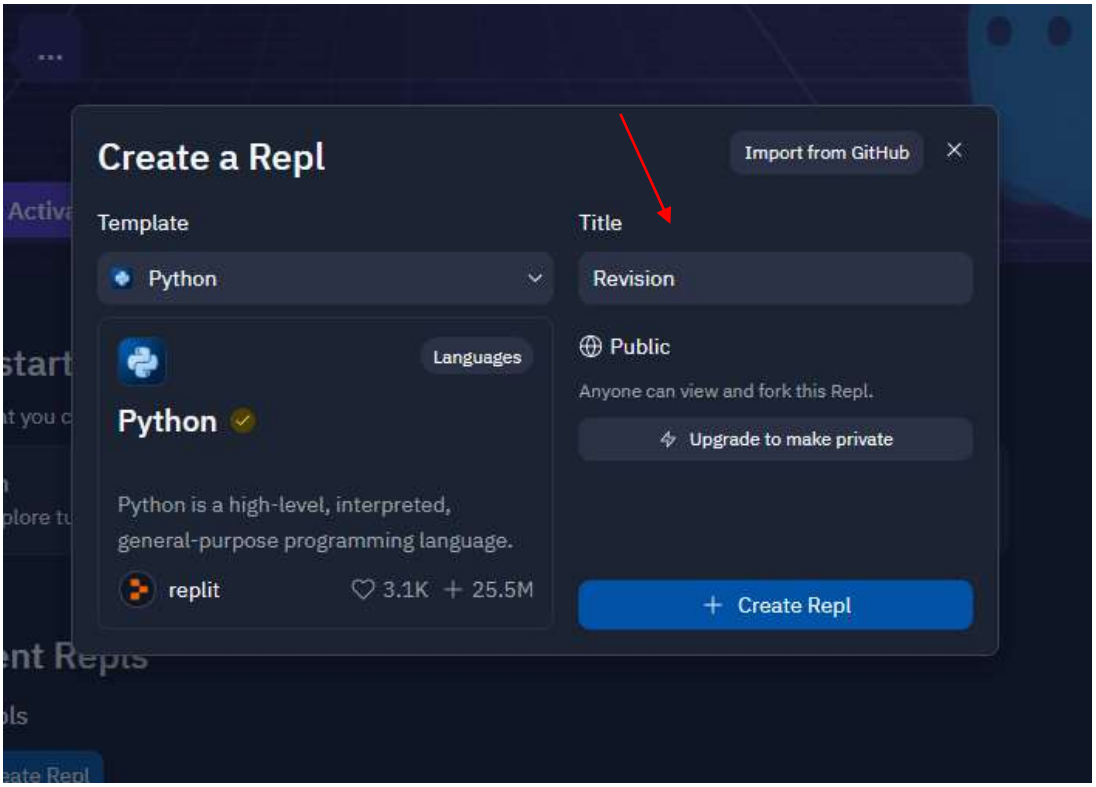
13. Emergerá un menú, en el cual seleccionaremos "Python"



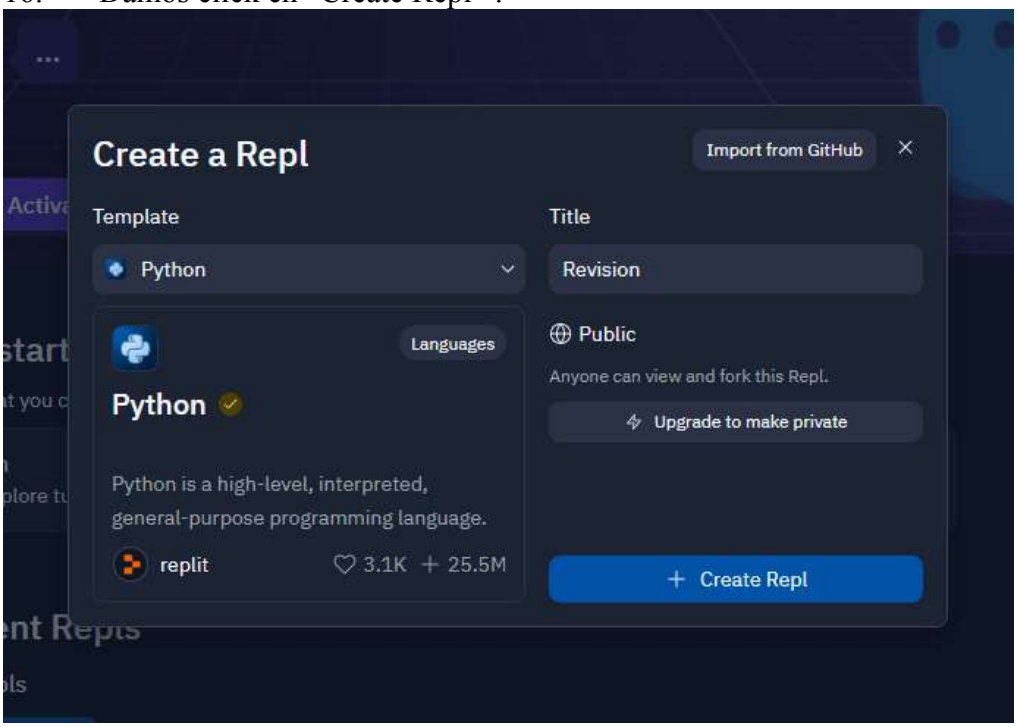
14. Es la primera opción.



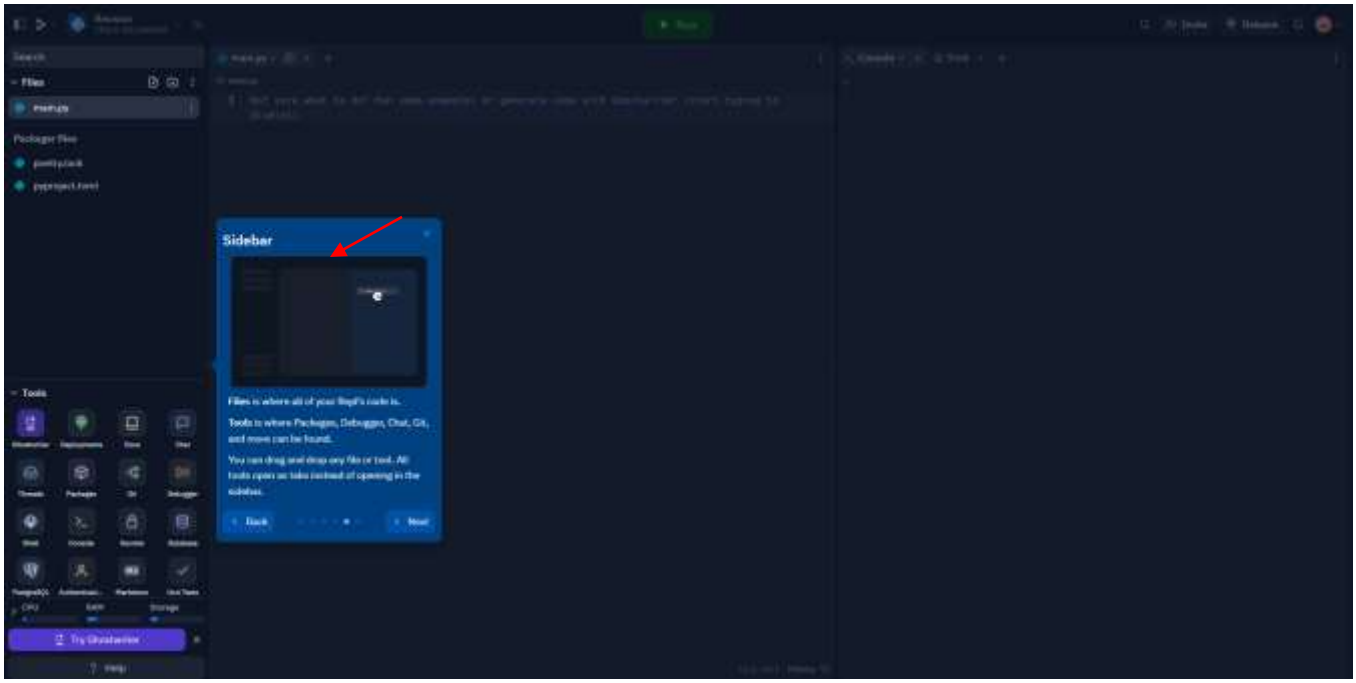
15. Le asignamos un nombre:



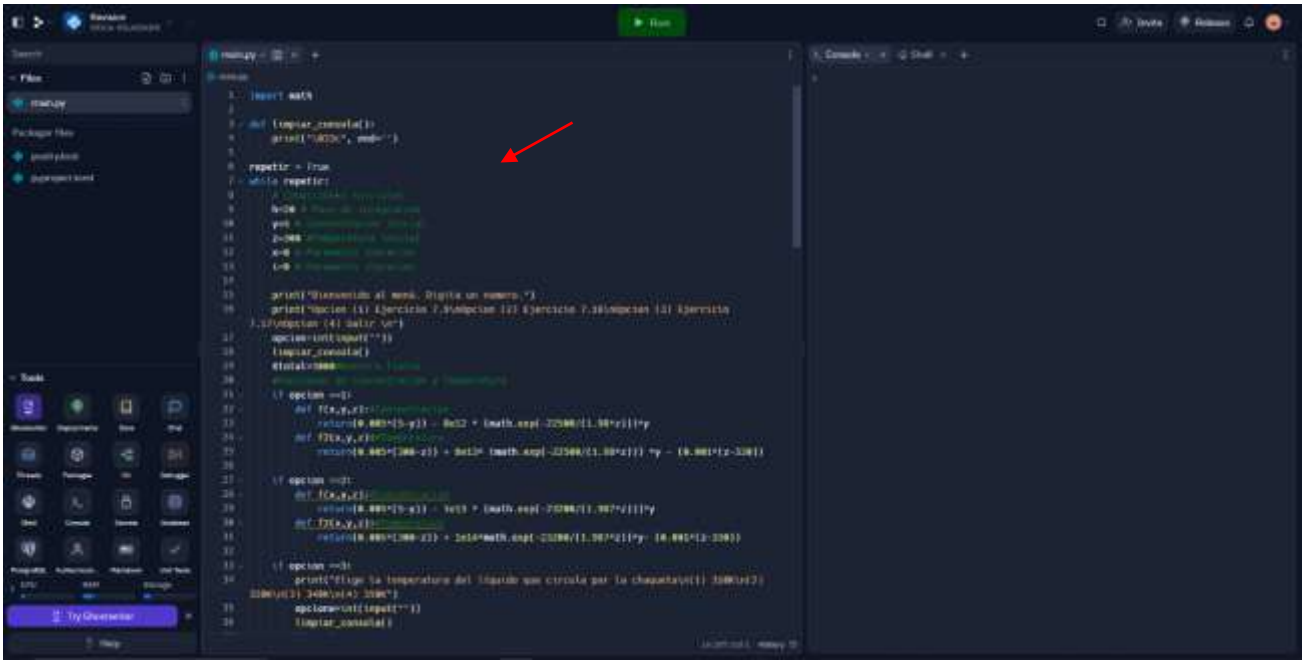
16. Damos click en “Create Repl” :



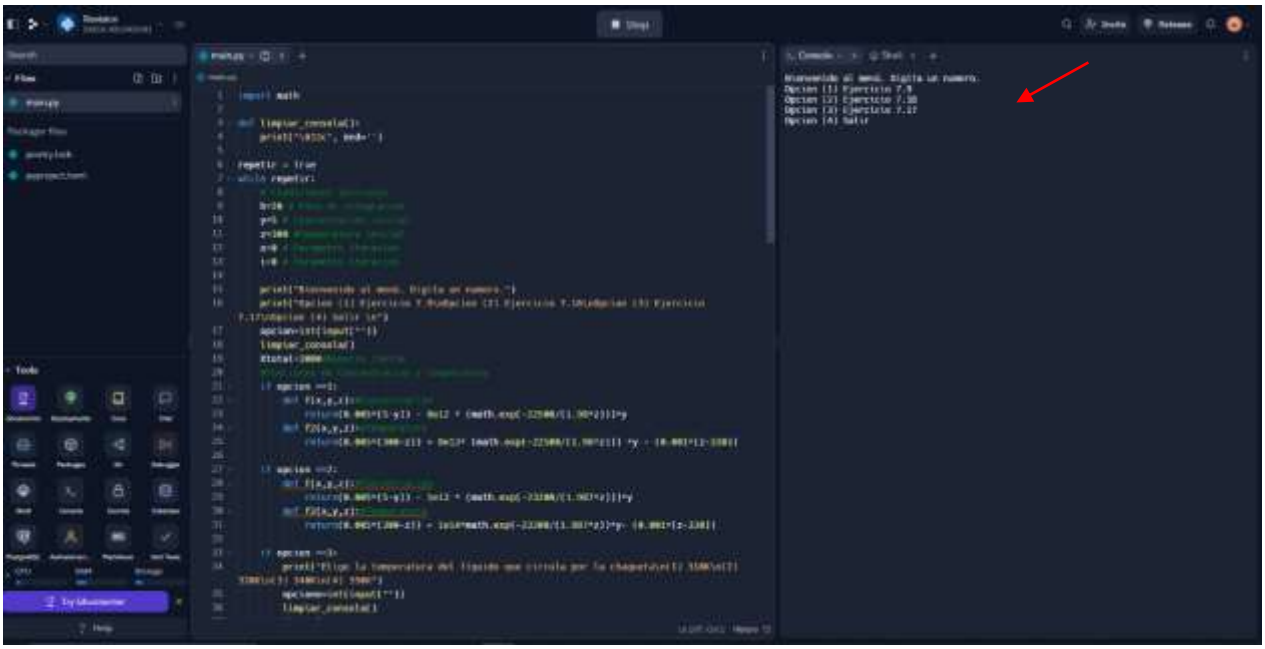
17. Finalmente nos encontraremos en el entorno de programación y la pagina nos dará una pequeña guía mediante recuadros azules:



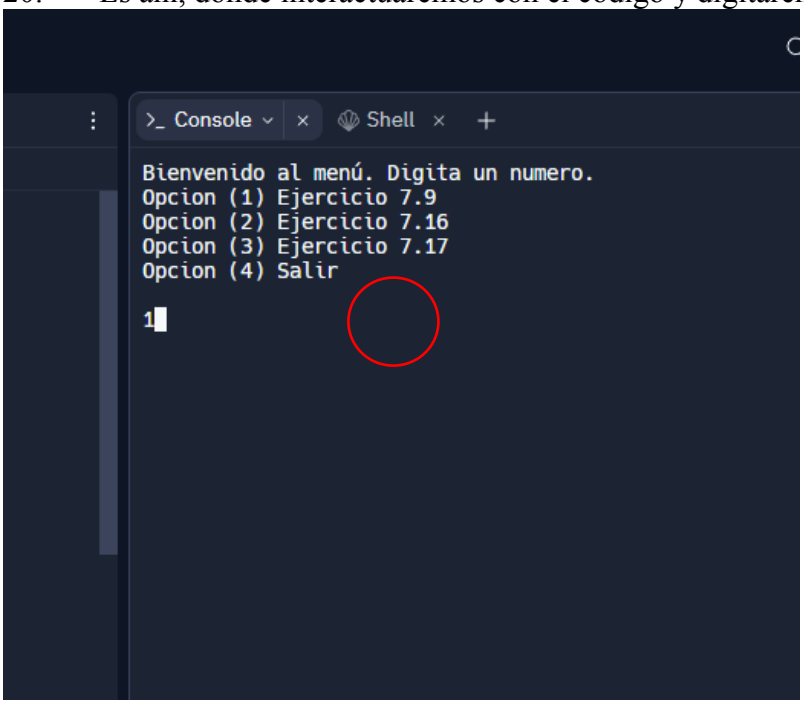
18. En esta sección, introduciremos el código, como se muestra, asegurándonos de poner todo el código:



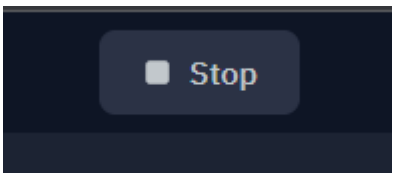
19. Daremos clic en el botón verde “Run” ubicado en la parte superior central y nos aparecerá del lado derecho la consola. Puede que el primer código que introduzca se tarde un poco.



20. Es ahí, donde interactuaremos con el código y digitaremos el texto y daremos enter:



21. Finalmente, cuando deseemos parar el código, presionaremos el botón “Stop” de la parte superior central:



22. Finalmente, si deseamos ejecutar otro código, podemos volver a la página principal y crear otro documento o podemos borrar el código completo e introducir uno nuevo. Hay que tener cuidado de verificar que hayamos borrado todo el código o texto, antes de introducir uno nuevo.

ACERCA DE LA AUTORA

La **Dra. Leticia Corral Bustamante** es Ingeniera Industrial Química, Máster en Matemáticas, Máster en Astronomía y Astrofísica y Doctora en Ciencia de Materiales. Tiene una Estancia Postdoctoral en el Centro de Investigación en Materiales Avanzados, CIMAV, Unidad Monterrey. Es Profesora Investigadora del Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Cd. Cuauhtémoc.

Autora de libros de texto de Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Ciencias e Ingenierías; Termofluidos: Fundamentos de Termodinámica; Termofluidos: Transferencia de Calor; Análisis de Fluidos. Solucionador de Problemas Selectos de Mecánica de Fluidos; Un Presente para un Pretérito de Relatividad General. Un Quantum de Astrofísica; Poesía al Universo. Relatividad General, Teoría de Cuerdas y Teoría Cuántica. Escritora de la Novela Viajes en el Tiempo y del Ensayo: Hafnia, La Visita. Certidumbre de la Incertidumbre de Titanes de la Física: Niels Bohr & Werner Heisenberg. Autora de varios capítulos de libro y artículos en revistas internacionales indexadas. Es conferencista internacional. México; Las Vegas, Nevada, Estados Unidos; Londres, Inglaterra; Dublín, Irlanda; Colombia; República Dominicana; Creta, Grecia; Florencia, Génova y Roma, Italia; París, Francia; Vilamoura y Porto, Portugal; Estambul, Turquía; Florencia, Madrid y Valencia, España; Dubai, Emiratos Árabes Unidos, Singapore y Malta, entre otros. Revisora de articulos cientificos en revistas internacionales, evaluadora acreditada RCEA de CONACyT, Miembro de más de 12 Comités Científicos de Evaluación de Proyectos de Investigación Científica y Tecnológica y Tesis de Posgrado (CONACYT-TecNM), Directora de tesis de licenciatura y maestría, investigadora responsable de proyectos de investigación financiados, posee dos títulos de patentes en el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial, IMPI de México, entre otros productos académicos y de investigación.

Algunos Premios y distinciones: BestSeller Top 100, entre los 25 libros científicos más citados en 2021 por el artículo: ¡Cosmic Censorship! Thermal Transport in a 'Naked' Black Hole por Scientific.net, Suitzerland; FORBES México Mujeres Poderosas 2019 Leticia Corral Científica; The Best Presentation Award en Singapore 2018; Session Chair en Singapore 2018, Londres 2015, Dubai 2014 y Portugal 2011; Premio Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación 2015 a la Trayectoria Científica por el Gobernador de Estado de Chihuahua, Lic. Javier Corral Jurado; Modelo Matematico: Model to Predict the "Lowness" of Entropy at the Big Bang with Relativistic Equations, evaluado con la más alta calificación en originalidad técnica por ICAEM2015-WCE2015 en el Imperial College of London; Premio Chihuahua 2013, Categoría Ciencias Tecnológicas por Gobierno de Chihuahua y el Instituto Chihuahuense de la Cultura, las Ciencias y las Artes; Chihuahuense Destacada 2009. Galardón a la Trayectoria Científica: "Dra. María Esther Orozco Orozco" otorgado por la Sexagésima Segunda Legislatura Constitucional del Honorable Congreso del Estado de Chihuahua; Cuauhtemense Destacada 2023 por el H. Ayuntamiento de Cuauhtémoc a través de la comisión de Familia, Mujer e igualdad de género y el Instituto Municipal de las Mujeres; Medalla Rafael Ramírez 2023 al mérito docente TecNM; Mujer del Año 2009 por COPARMEX Cuauhtémoc; Joseph Fourier Award en Roma, Italia en DSL-2009; Primer lugar al mejor trabajo de investigación científica: Black Holes: ¡Enormous Intensity of Gravitational Field! Por el CIMAV en 2008; Investigador Nacional Nivel I; Primer lugar sesión posters Ingeniería 2007 Centro de Investigaciones en Óptica y CIATEC, León, Guanajuato, México y Mención Honorífica en Matemática Educativa 1997 por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa CLAME, México, entre otros.