

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD MADERO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA



TESIS

Enfoque Algorítmico Avanzado para el Modelado Matemático de Señales con Patrón Repetitivo

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias de la Ingeniería

Presenta

Ing. Samuel Alejandro Torres de Anda

G15070982

CVU: 1277289

Director de Tesis

Dr. Luis Fortino Cisneros Sinencio

CVU: 102695

Co-director de Tesis

Dr. Rubén Salas Cabrera



Instituto Tecnológico de Ciudad Madero
Subdirección Académica
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Ciudad Madero, Tamaulipas, 04/Junio/2025

Oficio No. U11.034/2025
ASUNTO: Autorización de Impresión

C. SAMUEL ALEJANDRO TORRES DE ANDA
No. DE CONTROL G15070982
P R E S E N T E

Me es grato comunicarle que después de la revisión realizada por el Jurado designado para su Examen de Grado de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, el cual está integrado por los siguientes catedráticos:

PRESIDENTE :	DR. LUIS FORTINO CISNEROS SINENCIO
SECRETARIO:	DR. RUBÉN SALAS CABRERA
VOCAL :	DR. CARLOS EUSEBIO MAR OROZCO
SUPLENTE:	DR. ALFONSO BARBOSA MORENO

Se acordó autorizar la impresión de su tesis titulada:

**"ENFOQUE ALGORÍTMICO AVANZADO PARA EL MODELADO MATEMÁTICO
DE SEÑALES CON PATRÓN REPETITIVO"**

Es muy satisfactorio para esta División compartir con Usted el logro de esta meta. Espero que continúe con éxito su desarrollo profesional y dedique su experiencia e inteligencia en beneficio de México.

A T E N T A M E N T E

*Excelencia en Educación Tecnológica.
"Por Mi Patria y Por Mi Bien" ®*

RAFAEL CASTILLO GUTIÉRREZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



ccp. Archivo
RCG/NRV/jar



AGRADECIMIENTOS

En agradecimiento a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el programa de becas del que fui beneficiario durante la Maestría

Al Tecnológico Nacional de México (TecNM) - Instituto Tecnológico de Ciudad Madero (ITCM) por el apoyo otorgado para la realización de mis estudios de posgrado en Maestría en Ciencias de la Ingeniería.

A mi Director de tesis, el Dr. Luis Fortino Cisneros Sinencio, por su valioso apoyo, orientación y tiempo dedicados a lo largo de este trabajo. Su experiencia y compromiso fueron fundamentales para el desarrollo de este proyecto y para mi formación profesional.

A mis padres, Blanca Esthela y Cirilo Amaro, por su amor, apoyo incondicional y ejemplo de esfuerzo, que han sido el pilar fundamental en cada etapa de mi vida. A mi hermana, Zuri, por su compañía, comprensión y ánimo constante que siempre me motivaron a seguir adelante.

A mis amigos y compañeros de aventuras, Mario 015, Antonio Urbina y Oscar Alter, por brindarme su apoyo y compañía en momentos clave, ayudándome a despejar la mente y a encontrar espacios de descanso que me permitieron retomar el trabajo con renovada energía y claridad. A mi amiga y compañera de generación, Dany del Ángel, con quien compartí este proceso hombro a hombro, enfrentando juntos cada etapa. A mis amigas de toda la vida, Alee Hernández, Fabiola Lain y Lucy Viviana, por su apoyo incondicional y por ser una fuente constante de ánimo y motivación para no rendirme.

A Dios, por darme la fortaleza y la claridad necesarias para superar cada reto, así como por bendecir mi camino y permitirme alcanzar esta meta.

Enfoque Algorítmico Avanzado para el Modelado Matemático de Señales con Patrón Repetitivo

Ing. Samuel Alejandro Torres de Anda

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta un algoritmo para el modelado matemático de señales armónicas capaz de identificar fallas como componentes transitorios. Este algoritmo representa de una forma compacta la señal de interés en un formato que facilita su análisis sin necesidad de reconstruir la señal original. Para lograr lo anterior, el algoritmo analiza los máximos locales en busca de la unidad mínima recurrente de la señal de interés. Una vez encontrada, esta unidad mínima se modela mediante una serie de funciones de ajuste de tipo senoidal, exponencial, escalón e impulso; representando la señal por cuatro diferentes funciones, se reduce el número de coeficientes, facilitando su interpretación de manera intuitiva. Una vez generado el modelo, los nuevos datos que se ajusten al modelo pueden ser descartados para optimizar el almacenamiento, mientras que aquellos que no se ajusten se consideran ruido para ser descartados o almacenados para su análisis posterior.

De acuerdo con los experimentos de validación, el modelo fue capaz de representar una señal periódica con una similitud del área bajo la curva (RE-AUC) de 0.22%, un error cuadrático medio normalizado (NMSE) de 0.79%, un error porcentual medio (MPE) de 0.51% y un porcentaje de similitud basado en la correlación (CPS) de 99.82%. Además, se demostró que las variaciones en la señal producen cambios en los coeficientes del modelo, permitiendo identificar fácilmente patrones y fallas. Gracias a su capacidad de modelar información de forma representativa y compacta, detectando datos que caen fuera de la norma, este enfoque resulta un avance importante en la supervisión de sistemas tan variados como los eléctricos y electrónicos, así como biomédicos y de procesamiento de imágenes. La integración en un algoritmo de las funciones de modelado y detección de fallas abre nuevas posibilidades para la automatización y la toma de decisiones en tiempo real en sectores donde la estabilidad de las señales es crítica.

Advanced Algorithmic Approach for Mathematical Modeling of Signals with Repetitive Patterns

Eng. Samuel Alejandro Torres de Anda

Abstract

This thesis presents a novel algorithm for the mathematical modeling of harmonic signals, designed to identify faults such as transient components. The proposed method generates a compact representation of the signal without requiring reconstruction of the original waveform. By analyzing local maxima, the algorithm isolates the signal's minimum recurrent unit, which is then modeled using a combination of sinusoidal, exponential, step, and impulse functions. This multi-function approach reduces the number of coefficients required, enhancing interpretability and enabling intuitive analysis. Once the model is established, data that conform to it can be discarded to optimize storage, while deviations are flagged as noise for potential further examination.

Validation experiments demonstrated the model's high accuracy, achieving a relative error in the area under the curve (RE-AUC) of 0.22%, a normalized mean squared error (NMSE) of 0.79%, a mean percentage error (MPE) of 0.51%, and a correlation-based similarity (CPS) of 99.82%. Additionally, the model's sensitivity to variations in the signal enables the detection of anomalies through changes in its coefficients. This capability makes the algorithm a powerful tool for system monitoring across diverse fields such as electrical and electronic systems, biomedical applications, and image processing. By integrating modeling and fault detection into a single framework, the approach offers promising potential for automation and real-time decision-making in environments where signal stability is essential.

Índice General

Agradecimientos.....	IV
Resumen.....	V
Abstract	VI
Índice General.....	VII
Índice de Tablas	IX
Índice de Figuras.....	X
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del Problema	3
1.2 Objetivo General.....	3
1.3 Objetivos Específicos	3
1.4 Justificación	4
2 Marco Teórico	5
2.1 Señales Armónicas	5
2.2 Señales Transitorias	7
2.3 Determinación de la Periodicidad.....	8
2.4 Modelado Matemático de Señales.....	9
2.5 Detección de Fallas en Señales	10
2.6 Parámetros para la Evaluación de Modelos	11
2.6.1 Error Relativo del Área Bajo la Curva	11
2.6.2 Error Cuadrático Medio	12
2.6.3 Error Porcentual Medio	13
2.6.4 Coeficiente de Similitud de Patrones.....	14
2.6.5 Eficiencia Computacional.....	15
3 Estado del Arte	16
3.1. Determinación Adaptativa de Patrones Repetitivos.....	16
3.2. Modelado Matemático de Señales	19
3.3 Detección de Fallas.....	22
4 Metodología	26

4.1 Materiales y Herramientas	27
4.2 Unidad Mínima Recurrente.....	28
4.3 Determinación Adaptativa de Patrones Repetitivos.....	30
4.4 Doble Ventana Creciente	31
4.5 Método de Máximos Locales	33
4.6 Modelado Matemático.....	35
4.6.1 Identificación y Ajuste de Componentes Senoidales	37
4.6.2 Identificación y Ajuste de Funciones Exponenciales.....	38
4.6.3 Identificación y Ajuste de Funciones Escalón.....	40
4.6.4 Identificación y Ajuste de Impulsos.....	43
4.6.5 Tratamiento del Ruido Residual	44
4.6.6 Ecuación Final	45
4.7 Validación del Modelo.....	46
4.8 Detección de Fallas	47
4.9 Estructura y Funcionamiento del Algoritmo	49
4.10 Limitaciones Metodológicas	51
5 Resultados	52
5.1 Determinación Adaptativa de la Unidad Mínima Recurrente	52
5.2 Modelado Matemático.....	54
5.3 Resultados Estadísticos del Modelado Matemático.....	57
5.4 Aplicación del Modelo Matemático en Señales ECG	58
5.5 Optimización del Espacio de Almacenamiento.....	61
5.6 Detección de Fallas	62
5.7 Funcionamiento Global del Algoritmo	64
6 Conclusiones y Recomendaciones	68
6.1 Conclusiones	68
6.2 Recomendaciones	70
Bibliografía	72
Anexos	79

Índice Tablas

Tabla 4.1. Comparación entre los componentes senoidales generados por la FFT y los que resultan del modelo propuesto	37
Tabla 5.1. Comparación de los parámetros originales de la señal con los valores obtenidos mediante el algoritmo de modelado matemático.....	56
Tabla 5.2. Descomposición armónica de formas de onda del electrocardiograma a través de diferentes frecuencias cardíacas	59
Tabla 5.3. Comparación de los componentes armónicos extraídos de un ECG normal y uno con insuficiencia aórtica presente	61
Tabla 5.4. Comparación del tamaño de archivos entre los datos crudos y el modelo matemático en distintas duraciones de una señal ECG.....	62

Índice de Figuras

Figura 2.1. Representación gráfica de la ecuación de periodicidad $x(t+T) = x(t)$ en una señal senoidal	6
Figura 2.2. Representación gráfica de una señal con dos eventos transitorios.....	7
Figura 2.3. Representación del modelado de una señal ECG mediante componentes senoidales	9
Figura 2.4. Método de detección de fallas mediante el uso del umbral (Threshold)	10
Figura 2.5. Comparativa del área bajo la curva entre dos señales cuadradas.....	11
Figura 2.6. Representación gráfica del Error Cuadrático Medio (MSE) entre una señal original y una señal modelada	12
Figura 2.7. Representación gráfica del Error Porcentual Medio (MPE) entre una señal original y una señal modelada	13
Figura 2.8. Gráfica de dispersión entre señales normalizadas para el cálculo del Coeficiente de Similitud de Patrones (CSP).	14
Figura 3.1. Ilustración del método de cruces por cero para la estimación del periodo	17
Figura 3.2. Estimación del periodo mediante la concentración de máximos locales	18
Figura 3.3. Estimación del periodo mediante el uso de la ventana deslizante	19

Figura 3.4. Aplicación de la Transformada de Fourier al modelado de una señal armónica.	20
Figura 3.5. Modelado de una señal periódica mediante la transformada de wavelet.....	21
Figura 3.6. Comparación entre la señal original y su aproximación mediante polinomios de Bézier	22
Figura 3.7. Ilustración del método de umbral aplicado a una señal oscilatoria	23
Figura 3.8. Diagrama del proceso de análisis espectral	24
Figura 3.9. Esquema conceptual de una red neuronal artificial	25
Figura 4.1. Señal senoidal con desplazamiento descendente que ilustra la Unidad Mínima Recurrente	29
Figura 4.2. Esquema visual del avance progresivo de la doble ventana creciente (DVC) a lo largo de una secuencia de ciclos	32
Figura 4.3. Identificación de máximos y mínimos locales en una señal periódica compuesta	34
Figura 4.4. Señal compuesta por una suma de senoidales y una exponencial	36
Figura 4.5. Representación de una señal triangular con tendencia exponencial creciente .	40
Figura 4.6. Ejemplo de una señal con comportamiento escalonado	41

Figura 4.7. Señal senoidal con tres impulsos abruptos	44
Figura 4.8. Esquema visual del avance progresivo de la doble ventana deslizante (DSW) a lo largo de una secuencia de ciclos	48
Figura 5.1. Gráfica de la señal periódica compuesta por dos frecuencias portadoras (10 Hz y 20 Hz) con una envolvente senoidal de 1 Hz.....	53
Figura 5.2. Grafica de una señal ECG normal modificada mostrando el procedimiento de máximos y mínimos locales para estimar la unidad mínima recurrente	54
Figura 5.3. Grafica comparativa entre la señal original y la señal reconstruida mediante el modelado matemático	55
Figura 5.4. Grafica del ruido residual obtenido tras el proceso de modelado matemático... <td>57</td>	57
Figura 5.5. Visualización de diez ciclos de una señal ECG de un paciente con insuficiencia aórtica	60
Figura 5.6. Grafica de la señal eléctrica, en la que se indican visualmente los instantes exactos de detección de anomalías mediante líneas verticales punteadas	63
Figura 5.7. Captura de pantalla de la consola de MATLAB mostrando los tiempos de detección de las fallas	64
Figura 5.8. Señal de prueba compuesta por múltiples componentes, utilizada para validar el funcionamiento integral del algoritmo	65
Figura 5.9. Captura de pantalla de la ventana de salida de MATLAB, donde se muestran los resultados generados automáticamente por el algoritmo propuesto.....	66

1 Introducción

A lo largo de la historia, la humanidad ha intentado comprender y aprovechar los fenómenos eléctricos. Filósofos como Tales de Mileto observaron que ciertos materiales podían atraer objetos pequeños al ser frotados entre sí, un descubrimiento que, aunque rudimentario, marcó el inicio del estudio de la electricidad. Con el paso de los siglos, este conocimiento evolucionó significativamente: desde los experimentos de Benjamín Franklin con la electricidad atmosférica en el siglo XVIII hasta las revolucionarias contribuciones de Thomas Edison y Nikola Tesla en el siglo XIX, las cuales sentaron las bases de los sistemas eléctricos modernos. En la actualidad, la electricidad no solo es un recurso fundamental en la sociedad, sino que su estudio sigue siendo un área activa de investigación con aplicaciones en múltiples disciplinas.

A lo largo del siglo XX, la electricidad pasó de ser una curiosidad científica a convertirse en el pilar de la vida cotidiana, impulsando avances en ingeniería, telecomunicaciones, computación y automatización. En paralelo, surgió la necesidad de entender, modelar y controlar los fenómenos eléctricos, lo que llevó al desarrollo de la teoría de señales. Esta disciplina permitió no solo analizar la propagación y comportamiento de señales eléctricas, sino también aplicar sus principios en campos tan diversos como la electrónica, la acústica, la medicina y la comunicación satelital. Con el crecimiento exponencial de la tecnología, la

importancia del análisis de señales ha cobrado aún más relevancia, siendo un pilar esencial en el desarrollo de nuevos sistemas de procesamiento y control.

Dentro de la teoría de señales, las señales armónicas han sido de especial interés debido a su comportamiento repetitivo y predecible. Estas señales están presentes en diversos ámbitos tecnológicos y científicos, como la transmisión de energía utilizando corriente alterna, las señales de radio y los patrones eléctricos en el cuerpo humano. Su estructura permite representarlas mediante expresiones matemáticas que facilitan su análisis y aplicación en distintos sistemas tecnológicos. Sin embargo, en aplicaciones reales, el comportamiento de una señal armónica rara vez es estable y predecible, ya que es el resultado de variaciones en su entorno. Por ello, el estudio de señales armónicas se enfoca tanto en el análisis de su comportamiento típico, como en la forma en que éste puede desviarse y el efecto de dichas desviaciones en los sistemas que dependen de ellas.

Las alteraciones en una señal armónica pueden manifestarse de diversas maneras, desde pequeñas fluctuaciones inocuas para el medio, hasta desviaciones abruptas que comprometen el sistema donde se encuentran. En entornos industriales y tecnológicos, estas variaciones pueden deberse a factores como ruido, interferencias o fallos en los dispositivos de medición. En otros casos, las anomalías pueden reflejar cambios físicos o estructurales dentro del sistema monitoreado, como en el caso de señales biomédicas o redes eléctricas. La clave en el análisis de estas señales radica en diferenciar entre perturbaciones insignificantes y aquellas que representan un riesgo real, permitiendo así una interpretación precisa de la información contenida en la señal.

Para abordar esta problemática, es necesario contar con herramientas que permitan no solo modelar señales periódicas, sino también interpretar dinámicamente sus variaciones. En muchos sistemas actuales, el modelado y la detección de anomalías se abordan de manera separada, lo que puede dificultar la integración de ambos procesos en un mismo análisis. Un enfoque eficiente debería ser capaz de representar matemáticamente la señal mientras evalúa,

en tiempo real, posibles desviaciones significativas. Esto permitiría mejorar la precisión en la detección de fallas y optimizar el monitoreo en distintos ámbitos.

1.1 Planteamiento del Problema

El registro de señales armónicas enfrenta una problemática derivada de dos enfoques que han sido utilizados de manera excluyente. Por un lado, el modelado matemático representa señales de manera compacta, reduciendo costos de almacenamiento y procesamiento; sin embargo, este enfoque puede comprometer la precisión del modelo, así como su interpretabilidad. Por otra parte, el almacenamiento de datos brutos preserva toda la información capturada por el sistema de adquisición de datos, garantizando la disponibilidad de cada detalle de la curva, pero generando grandes volúmenes de datos que pudieran ser innecesarios y que aumentan el costo de almacenamiento y procesamiento. Este compromiso entre compresión, precisión e interpretabilidad no ha sido resuelto, limitando la capacidad de los sistemas para responder ante eventos críticos, afectando la detección oportuna de anomalías en entornos donde la estabilidad de las señales es esencial.

1.2 Objetivo General

Proponer un sistema que represente señales periódicas de manera precisa y fácil de analizar, con la capacidad de detectar, en tiempo real, eventos transitorios que resulten en una falla.

1.3 Objetivos Específicos

- Desarrollar un algoritmo para el modelado matemático de señales periódicas que elimine la redundancia de datos.
- Diseñar un sistema de clasificación automática que distinga entre eventos armónicos y transitorios.

- Desarrollar un mecanismo de detección de anomalías en tiempo real que identifique y registre eventos transitorios.
- Aplicar el sistema desarrollado en entornos simulados con presencia de variaciones y eventos únicos en señales periódicas para evaluar su precisión y eficacia.

1.4 Justificación

El desarrollo de una técnica que combine tanto el modelado matemático como la detección de fallas es fundamental para mejorar la eficiencia en el análisis y supervisión de sistemas basados en señales armónicas. Una combinación efectiva de ambos enfoques permitirá optimizar la gestión del almacenamiento, reducir costos operativos y mejorar la toma de decisiones en entornos donde la estabilidad de las señales es un factor crítico. Además, la capacidad de detectar fallas en tiempo real permitirá una respuesta inmediata ante anomalías, evitando daños en los sistemas y reduciendo tiempos de inactividad, lo que resulta esencial en aplicaciones como redes eléctricas, telecomunicaciones y monitoreo biomédico. Esta integración también tendrá un impacto positivo en la sostenibilidad ambiental, ya que, al reducir el almacenamiento masivo de datos y la demanda de infraestructura, disminuirá el consumo energético y, por ende, la huella de carbono asociada al procesamiento de información. Adicionalmente, al representar los datos de manera más compacta y organizada, se facilitará el desarrollo de herramientas y sistemas capaces de gestionar señales de forma más eficiente y adaptable a distintos escenarios.

2 Marco Teórico

Para establecer un contexto apropiado es necesario conocer conceptos fundamentales que establezcan una base teórica suficiente sobre señales periódicas, así como de los métodos utilizados para su análisis, modelado y evaluación. Dentro de estos conceptos, figuran definiciones clave relacionadas con funciones matemáticas recurrentes en el tratamiento de señales, así como criterios teóricos para la identificación de patrones, evaluación de precisión y análisis de variaciones en el tiempo. Un marco teórico apropiado permitirá sustentar las decisiones metodológicas en el desarrollo de este trabajo, facilitando la interpretación de los procedimientos implementados y de los resultados obtenidos en las etapas posteriores de la investigación.

2.1 Señales Armónicas

Las señales armónicas constituyen uno de los fenómenos más importantes en el estudio de señales eléctricas. Estas señales muestran patrones que se repiten de manera constante en el tiempo, siendo descritas matemáticamente por la ecuación $x(t + T) = x(t)$, válida para cualquier instante de tiempo t [1]. En la Figura 2.1 se muestra una representación gráfica de esta propiedad, donde se observa cómo el valor de la señal en un instante dado se repite de forma exacta tras un período T , conocido como período fundamental. Por lo tanto, al observar

una señal armónica en un punto determinado, es posible predecir con certeza que este valor se repetirá después de dicho intervalo.

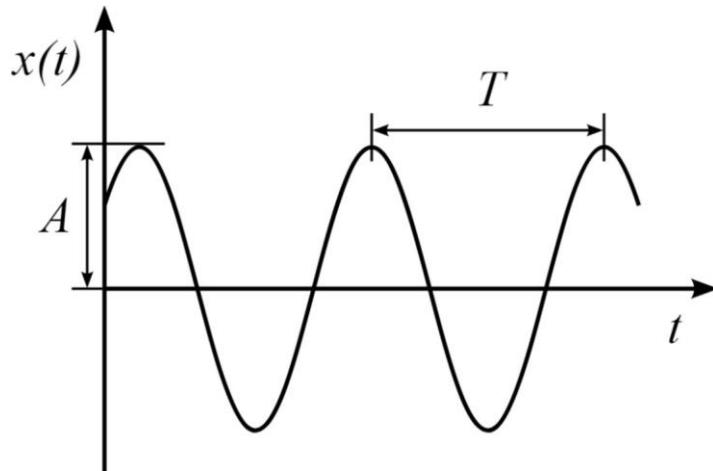


Figura 2.1: Representación gráfica de la ecuación de periodicidad $x(t + T) = x(t)$ en una señal senoidal.

Una ventaja significativa al trabajar con señales armónicas es la posibilidad de descomponerlas en combinaciones simples de funciones periódicas fundamentales mediante Series de Fourier [2]. Esta técnica matemática facilita la representación de señales complejas al identificar claramente cada una de sus componentes armónicas, es decir, frecuencias que son múltiplos enteros del valor de la fundamental. Gracias a esta descomposición, es factible estudiar detalladamente cómo cada uno de estos componentes contribuye al comportamiento global y a la forma específica de la señal observada [3].

Al analizar las señales armónicas, es fundamental considerar que cada componente cuenta con tres parámetros clave: amplitud, frecuencia y fase, los cuales determinan su comportamiento individual dentro de la señal general. La amplitud establece la magnitud de cada componente, la frecuencia indica cuántas veces se repite la oscilación en un intervalo de tiempo dado y la fase señala el desplazamiento temporal de cada componente, proporcionando información crucial para la reconstrucción precisa de la señal. Estos parámetros son fundamentales en el análisis y modelado de señales armónicas, pues afectan directamente la precisión y claridad de la representación final.

2.2 Señales Transitorias

Por otro lado, existe otra categoría de señales que tiene una naturaleza no periódica y singular: las señales transitorias. Los eventos transitorios ocurren debido a perturbaciones repentinas o cambios significativos en el sistema analizado, manifestándose como picos agudos, impulsos o variaciones abruptas en la señal [4]. En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo de un evento transitorio, donde se aprecia la interrupción del patrón regular de la señal. Debido a su comportamiento impredecible, estos eventos transitorios demandan técnicas específicas de análisis y modelado distintas a las utilizadas para señales armónicas. En contraste con las señales armónicas, los eventos transitorios no exhiben un patrón definido de amplitud, frecuencia o fase debido a su naturaleza no periódica. Para estudiar adecuadamente estos eventos, es necesario emplear técnicas especializadas como ventanas temporales o transformadas adaptadas que permitan capturar cambios repentinos y caracterizar con precisión estos fenómenos [5]. La selección adecuada de estas herramientas analíticas garantiza una mejor comprensión y manejo de las irregularidades presentes en la señal.

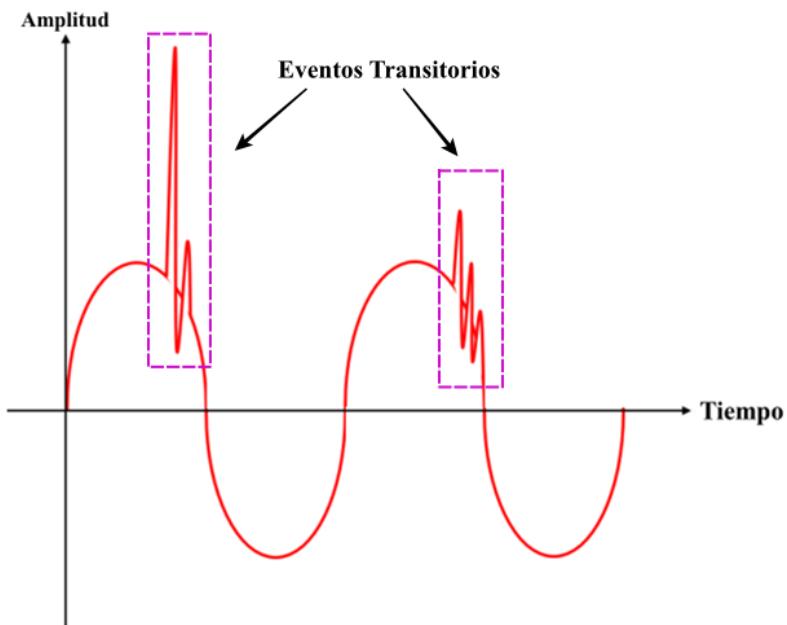


Figura 2.2: Representación gráfica de una señal con dos eventos transitorios.

El tratamiento adecuado de los eventos transitorios permite, además de identificar irregularidades puntuales en la señal, identificar de manera temprana la ocurrencia de fallas o anomalías que podrían ser catastróficas para sistemas eléctricos, biomédicos o industriales. Estos eventos, aunque de corta duración, pueden tener un impacto significativo en el comportamiento general del sistema [6], por lo que su correcta detección y modelado contribuyen directamente a mejorar la estabilidad, seguridad y eficiencia de los procesos monitoreados. En consecuencia, el desarrollo de algoritmos capaces de distinguir y representar con precisión, tanto las componentes periódicas como los eventos transitorios, representa un reto técnico relevante y una necesidad creciente en contextos donde el análisis de señales es fundamental.

2.3 Determinación de la Periodicidad

Una estrategia fundamental para identificar comportamientos periódicos en señales consiste en analizar la recurrencia de patrones en el dominio temporal. Métodos básicos como la detección de cruces por cero permiten estimar de manera sencilla la duración de ciclos y la frecuencia dominante, al identificar puntos donde la señal cambia de signo [7]. Esta técnica de detección de cruces por cero es particularmente útil en señales oscilatorias, donde facilita la medición de intervalos entre eventos repetitivos. Sin embargo, en entornos ruidosos o en señales que no cambian de signo, se requiere de métodos más complejos.

Para escenarios más complejos o ruidosos, se emplean métodos más robustos basados en la identificación de máximos y mínimos locales que analizan la estructura interna de la señal evaluando puntos específicos donde ocurren cambios significativos en su comportamiento. Esta técnica consiste en detectar picos y valles sucesivos dentro de la señal, midiendo la distancia temporal entre ellos para determinar patrones recurrentes, incluso en condiciones de ruido elevado o modulaciones internas [8]. Debido a su simplicidad y eficiencia, el análisis mediante máximos y mínimos locales es frecuentemente utilizado en el procesamiento de señales biomédicas, eléctricas y acústicas, proporcionando resultados precisos en contextos donde otras técnicas pueden verse afectadas por irregularidades en la forma de la señal.

2.4 Modelado Matemático de Señales

El modelado matemático de señales armónicas es una herramienta esencial para representar de manera precisa y efectiva el comportamiento repetitivo de señales mediante funciones matemáticas. Este procedimiento tiene como finalidad reducir la cantidad de datos necesarios para representar la señal original. De este modo, el modelado se convierte en un instrumento poderoso que capta las características fundamentales de las señales para su posterior interpretación.

Una de las técnicas más reconocidas para realizar este tipo de modelado es la expansión mediante Series de Fourier, un método que descompone la señal original en una suma de funciones periódicas fundamentales con distintas frecuencias, amplitudes y fases, comúnmente funciones seno y coseno [1]. Este método ofrece una visión de la composición espectral de la señal, facilitando su análisis y procesamiento en el dominio de la frecuencia. En la Figura 2.3, se ilustra este proceso aplicado a una señal de ECG, mostrando cómo puede representarse como la sumatoria de componentes senoidales elementales. Esta representación no solo simplifica el tratamiento digital de la señal, sino que también permite identificar con mayor precisión sus características armónicas individuales.

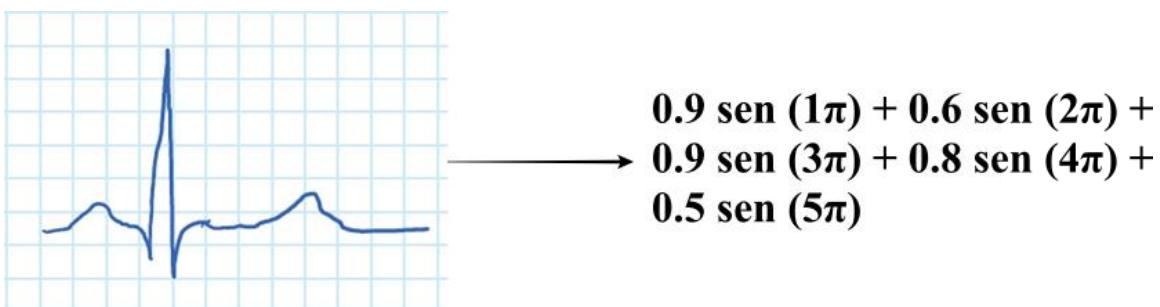


Figura 2.3: Representación del modelado de una señal ECG mediante componentes senoidales.

2.5 Detección de Fallas en Señales

La detección de fallas es un aspecto clave dentro del análisis de señales eléctricas, dado que permite identificar desviaciones significativas respecto al comportamiento esperado. Este proceso resulta fundamental en la prevención de daños en un sistema debido a eventos catastróficos; una detección temprana facilita intervenciones oportunas. Para lograr una detección oportuna de fallas se han desarrollado diversas estrategias analíticas destinadas a identificar con precisión las irregularidades presentes en señales armónicas y transitorias. Una técnica ampliamente empleada en la detección de fallas es el análisis espectral [2], que examina detalladamente la composición frecuencial de la señal. Este método permite detectar cambios repentinos en las frecuencias armónicas, los cuales suelen indicar la presencia de anomalías o fallas en el sistema observado. Al identificar estos cambios, el análisis espectral facilita la implementación de medidas correctivas oportunas.

Otra alternativa importante en la detección de fallas implica el uso de técnicas de umbral [9], las cuales definen límites específicos de tolerancia para distintos parámetros de la señal analizada. La presencia de valores que exceden estos límites indica una anomalía que debe investigarse a profundidad. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 2.4, en donde por un instante se sobrepasa el valor de umbral; un sistema de detección de fallas debería reportar oportunamente la ocurrencia este evento para su análisis.

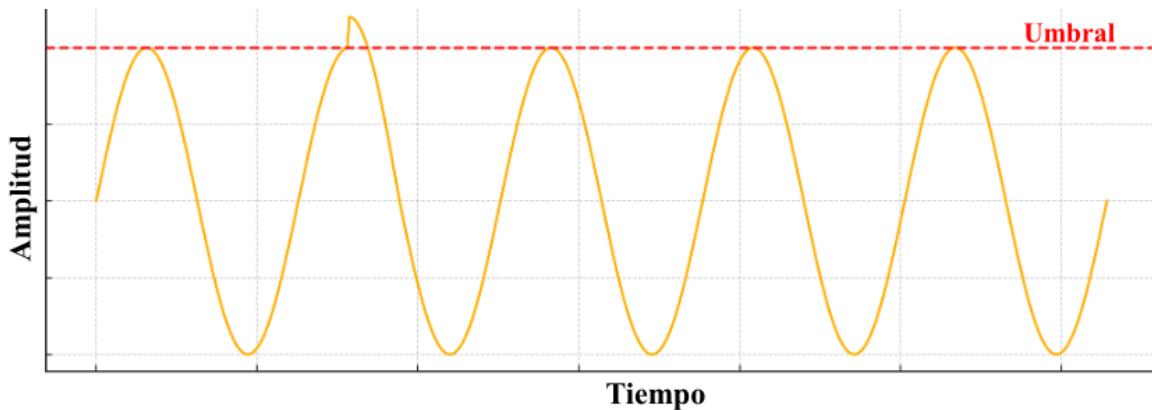


Figura 2.4: Método de detección de fallas mediante el uso del umbral (Threshold).

2.6 Parámetros para la Evaluación de Modelos

La evaluación de modelos constituye una fase indispensable en el análisis y modelado matemático de señales armónicas, validando su precisión y desempeño en diversas condiciones. Un modelo bien evaluado proporciona representaciones exactas que preservan fielmente las características esenciales de la señal original, facilitando la identificación de posibles anomalías. La selección cuidadosa de métricas para evaluar estos modelos se vuelve crucial para garantizar su utilidad práctica y la fiabilidad en la detección de fallas.

2.6.1 Error Relativo del Área Bajo la Curva

Una métrica importante en esta evaluación es el error relativo del área bajo la curva (RE-AUC), la cual cuantifica la diferencia integral entre la señal original y la señal modelada a lo largo del tiempo [10]. Esta medida refleja qué tan bien el modelo conserva la energía global y la forma estructural de la señal original. En la Figura 2.5 se presenta una representación conceptual de este criterio, donde se comparan tres curvas con diferentes alturas. Cada curva simboliza el área bajo la curva de una señal generada por un modelo matemático. Cuanto más baja y cercana al eje X es la curva, menor es el RE-AUC, lo cual indica una representación más fiel de la señal original. Por el contrario, curvas más altas reflejan una mayor desviación y, por lo tanto, un error más significativo en el modelado. Esta métrica resulta fundamental en sistemas donde la precisión energética y morfológica es crítica.

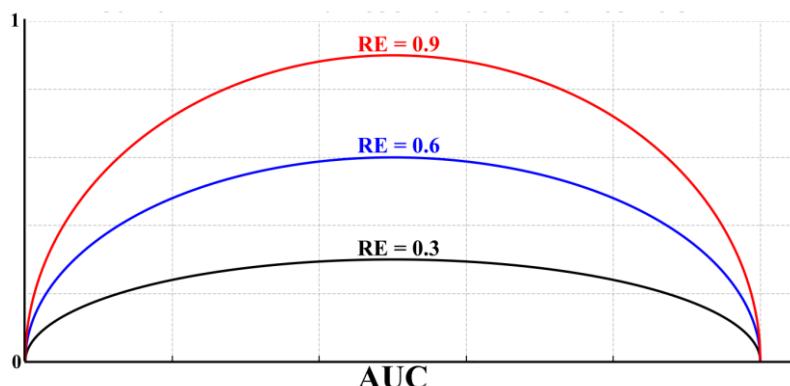


Figura 2.5: Comparativa del área bajo la curva entre dos señales cuadradas.

2.6.2 Error Cuadrático Medio

Otra herramienta fundamental en la evaluación del modelado es el error cuadrático medio (MSE). Esta métrica cuantifica la precisión del modelo calculando la media de las diferencias al cuadrado entre los valores observados (reales) y los generados por el modelo [11]. Su valor es particularmente útil debido a su alta sensibilidad ante desviaciones significativas, lo que permite identificar incluso pequeñas discrepancias a lo largo del tiempo. Un valor bajo de MSE indica que la señal modelada reproduce de forma fiel la forma y comportamiento de la señal original, con mínimas desviaciones estructurales.

En la Figura 2.6, se ilustra este concepto mediante la comparación directa entre una señal original y una señal modelada. Las líneas verticales rojas representan el error puntual entre ambas curvas en distintos momentos del tiempo, mostrando gráficamente cómo estas diferencias contribuyen al valor total del MSE. Esta visualización permite interpretar de forma intuitiva cómo se acumulan las discrepancias a lo largo de la señal, facilitando la evaluación de la calidad del modelo.

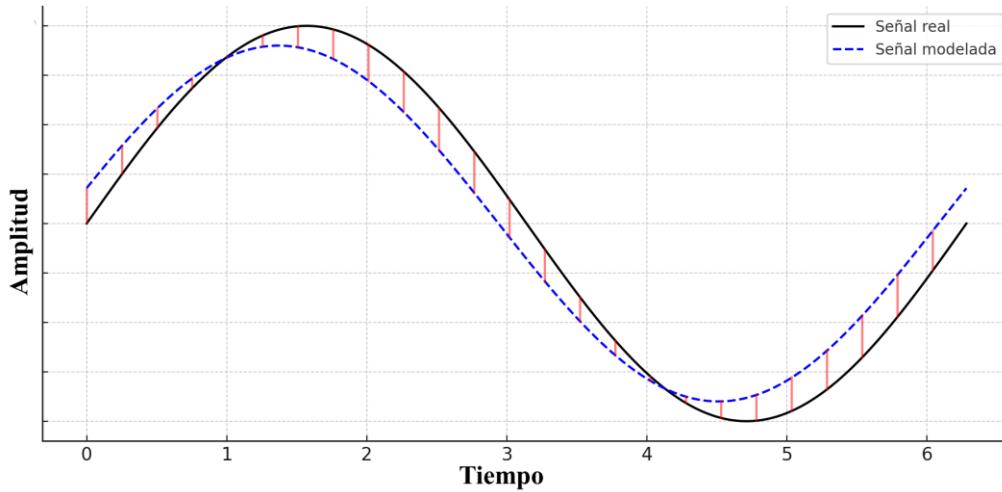


Figura 2.6: Representación gráfica del Error Cuadrático Medio (MSE) entre una señal original y una señal modelada.

2.6.3 Error Porcentual Medio

Adicionalmente, el error porcentual medio (MPE) es una métrica que evalúa la precisión del modelo en términos relativos con respecto a la señal original. A diferencia de métricas absolutas, el MPE es especialmente útil al comparar señales con amplitudes variables o escalas distintas, ya que permite valorar de forma consistente y normalizada el rendimiento del modelo bajo distintas condiciones [12]. Un valor bajo de MPE indica que la representación matemática del fenómeno conserva adecuadamente la forma y magnitud de la señal original, incluso frente a fluctuaciones o desviaciones locales.

En la Figura 2.7, se presenta una comparación entre una señal senoidal original (línea negra) y su correspondiente señal modelada (línea azul discontinua). El área sombreada en color naranja representa visualmente las diferencias de amplitud entre ambas señales a lo largo del tiempo, destacando los intervalos donde el modelo se aleja más o menos de la forma real. Esta representación gráfica permite identificar con los tramos de mayor error y brinda una evaluación completa sobre la fidelidad del modelo.

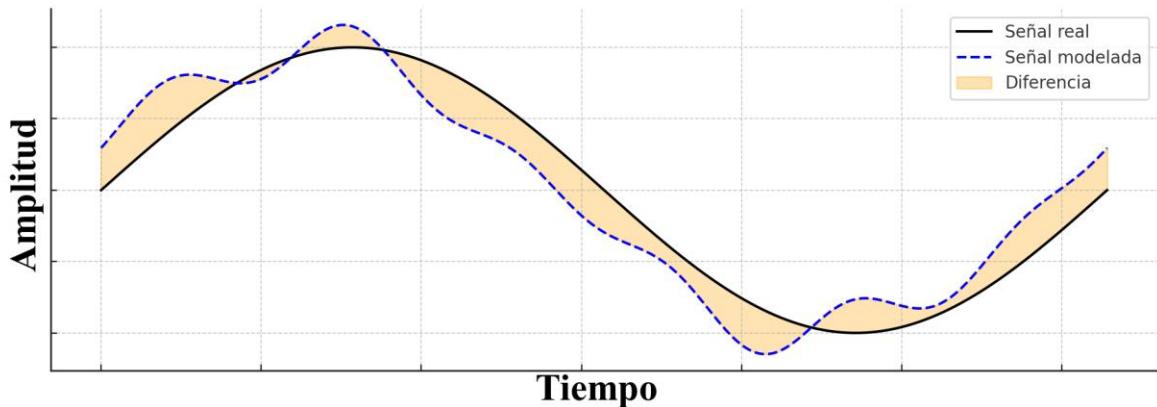


Figura 2.7: Representación gráfica del Error Porcentual Medio (MPE) entre una señal original y una señal modelada.

2.6.4 Coeficiente de Similitud de Patrones

Otra métrica relevante en la evaluación del modelado de señales es el Coeficiente de Similitud de Patrones (CSP), el cual permite medir la eficiencia con la que un modelo reproduce la estructura general de una señal original. Esta métrica cuantifica la correlación entre ambas señales una vez normalizadas. El CSP se interpreta como el coseno del ángulo entre los vectores que representan las señales normalizadas, y toma valores entre 0 (sin similitud) y 1 (similitud perfecta) [13]. Un valor elevado indica que el modelo mantiene la forma y secuencia estructural de la señal original, lo que demuestra una representación armónica precisa.

En la Figura 2.8, se ilustra este concepto mediante una gráfica de dispersión, donde cada punto representa un par de valores correspondientes de la señal real y la modelada, ambas normalizadas. La cercanía de los puntos a la diagonal $y = x$ refleja visualmente el grado de similitud: mientras más alineados estén, mayor será el CSP y, por tanto, mejor será la fidelidad estructural del modelo.

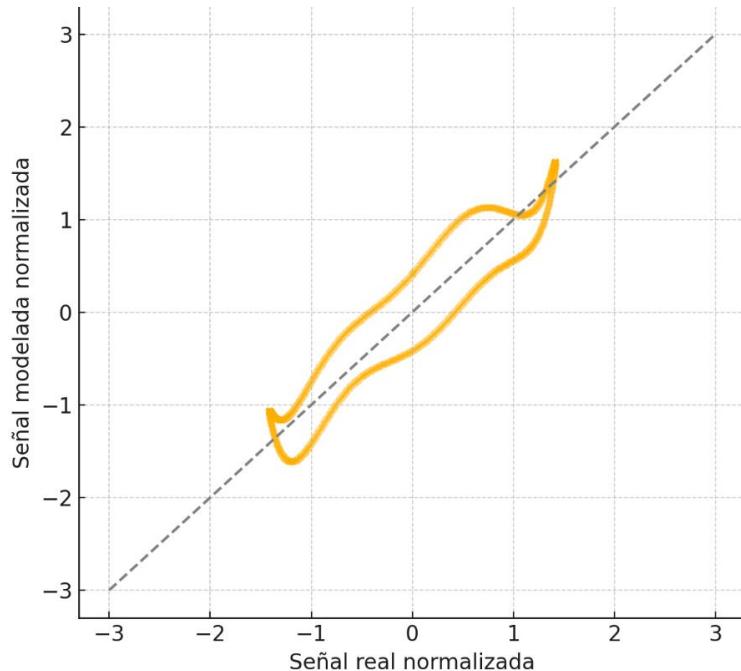


Figura 2.8: Gráfica de dispersión entre señales normalizadas para el cálculo del Coeficiente de Similitud de Patrones (CSP).

2.6.5 Eficiencia Computacional

La eficiencia computacional es un aspecto clave en la evaluación integral de un modelo matemático, especialmente cuando se considera su aplicación en entornos reales. Si bien no representa una medida directa de la precisión del modelado, permite valorar el costo computacional asociado al proceso, es decir, la cantidad de recursos y tiempo necesarios para generar la salida deseada [14]. Esta evaluación resulta particularmente relevante cuando se busca implementar el modelo en sistemas embebidos, dispositivos de bajo consumo o aplicaciones en tiempo real, donde el desempeño computacional puede ser tan determinante como la exactitud del resultado.

Un modelo matemático robusto no solo debe ser capaz de reproducir fielmente la señal original, sino también hacerlo de manera eficiente, sin requerir una carga de procesamiento excesiva. De este modo, la eficiencia computacional se convierte en un criterio complementario que permite balancear la calidad del modelado con la viabilidad operativa, asegurando que el sistema final sea funcional, estable y escalable. Incorporar esta perspectiva en la evaluación de modelos permite seleccionar soluciones no solo precisas, sino también prácticas y sostenibles para aplicaciones exigentes.

3 Estado del Arte

Previo a una propuesta de una solución, es esencial realizar una revisión exhaustiva del conocimiento actual relacionado con el modelado matemático de señales armónicas y transitorias, y la detección precisa de fallas en dichas señales. Para lo anterior, se analizarán técnicas, métodos y enfoques previamente desarrollados y documentados en la literatura científica, identificando conceptos fundamentales, enfoques exitosos y limitaciones significativas presentes en las investigaciones previas. Una revisión cuidadosa del estado del arte permite contrastar objetivamente diversas metodologías existentes, proporcionando claridad sobre los retos técnicos aún vigentes, así como las oportunidades específicas para innovar y mejorar las técnicas analíticas empleadas hasta el momento. Al hacerlo, se obtiene una base sólida para comprender y justificar la relevancia y originalidad del enfoque metodológico desarrollado posteriormente.

3.1 Determinación Adaptativa de Patrones Repetitivos

Uno de los métodos más utilizados para detectar el período en señales periódicas es el método de cruces por cero, el cual consiste en identificar los puntos donde la señal atraviesa el eje horizontal (amplitud cero) y medir los intervalos entre cruces consecutivos [15–21]. La

técnica se basa en la observación de la estructura oscilatoria de la señal y permite calcular el período de forma directa en el dominio temporal. Este enfoque resulta particularmente efectivo en condiciones ideales, cuando la señal es limpia, sin ruido y centrada alrededor de cero. Entre sus principales ventajas se encuentran su simplicidad computacional, la rapidez de ejecución y su aplicación directa en señales sinusoidales. Sin embargo, su desempeño se ve comprometido en escenarios más complejos, por ejemplo, cuando la señal contiene un componente constante (offset DC) o está afectada por ruido, lo que puede distorsionar la detección de los cruces y disminuir notablemente la precisión del cálculo del período.

La Figura 3.1 ilustra este procedimiento aplicado a una señal senoidal. Los puntos rojos representan los cruces por cero detectados, mientras que la flecha verde señala la distancia entre dos cruces positivos consecutivos, correspondiente a un período estimado. Esta visualización permite comprender cómo el método identifica la periodicidad a partir de una propiedad fundamental de las señales oscilantes.

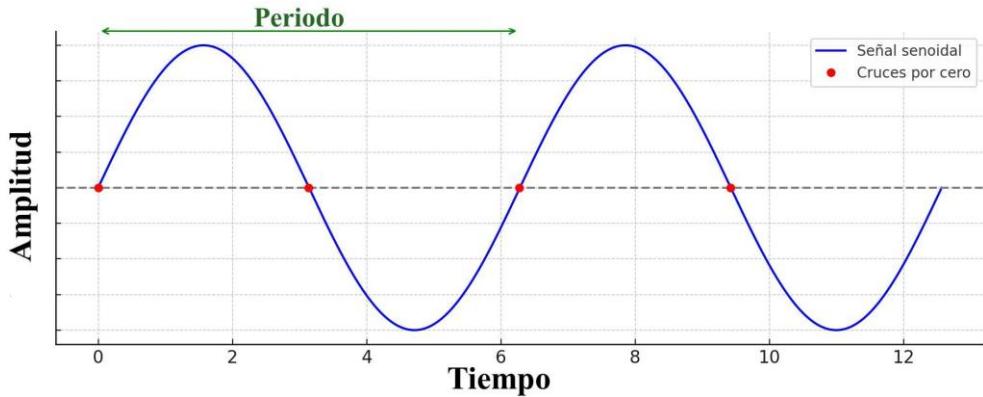


Figura 3.1: Ilustración del método de cruces por cero para la estimación del período.

Otra técnica ampliamente empleada para la detección del período en señales periódicas es el análisis basado en máximos locales, el cual estima la periodicidad mediante la identificación de picos sucesivos dentro de intervalos específicos [22–24]. Este método se basa en la observación de los máximos (y opcionalmente mínimos) que se repiten de manera regular a lo largo del tiempo, asumiendo que estos puntos representan ciclos completos de la señal.

Tome como ejemplo la señal de la Figura 3.2, los puntos rojos señalan los máximos locales, mientras que los puntos verdes marcan los mínimos locales. La estimación del período se obtiene a partir de la distancia entre la concentración de máximos consecutivos. Esta representación visual permite apreciar cómo la concentración de máximos locales puede utilizarse para calcular el período incluso en condiciones no ideales.

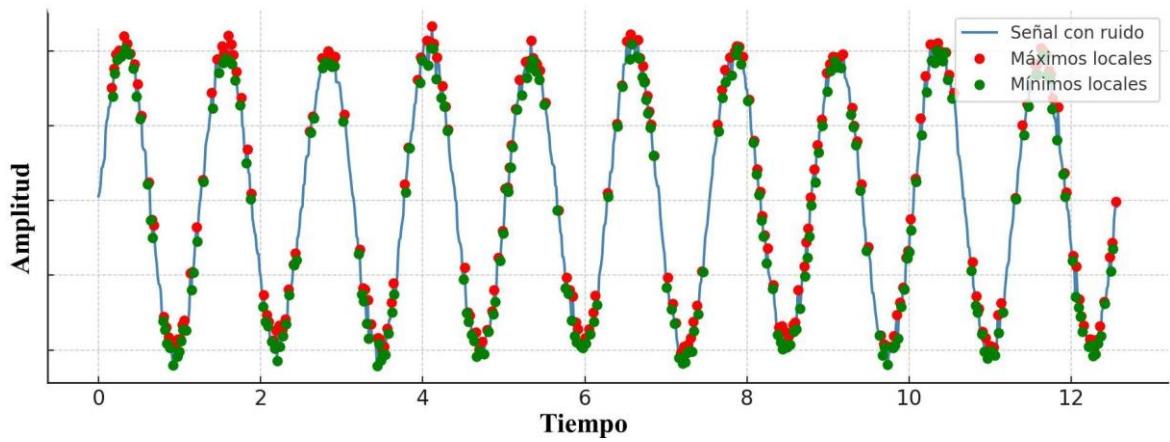


Figura 3.2: Estimación del período mediante la concentración de máximos locales.

Es importante tomar en cuenta que la presencia de componentes armónicos de alta frecuencia puede generar picos adicionales que induzcan errores en la estimación del período real. Por lo tanto, en señales complejas o ruidosas, es recomendable complementar esta técnica con técnicas de filtrado o de validación cruzada.

En aplicaciones donde se dispone de una estimación previa del período, es común recurrir a técnicas como la ventana deslizante [25-28] o la doble ventana deslizante [28-31], las cuales permiten analizar la repetitividad de patrones dentro de la señal [25-31]. Estas técnicas consisten en seleccionar un segmento de la señal como referencia y compararlo sucesivamente con otras secciones desplazadas en el tiempo con el objetivo de identificar cuándo vuelve a aparecer una forma similar. Este método es eficaz en señales con periodicidad estable, ya que permite identificar y confirmar visualmente la regularidad temporal de los ciclos. Sin embargo, su efectividad depende en gran medida de la estimación

inicial del período. En ausencia de esta información, la técnica puede requerir pruebas repetidas o el uso combinado con otros métodos para lograr una estimación precisa.

La Figura 3.3 ilustra este proceso mediante tres ventanas aplicadas sobre una misma señal periódica observada en distintos instantes de tiempo. La ventana naranja selecciona un segmento inicial, mientras que la ventana azul y verde representan el mismo patrón desplazado a lo largo del eje temporal. Cada ventana captura una porción de la señal en un momento diferente, permitiendo visualizar cómo se repite la estructura con regularidad. La distancia constante entre ventanas proporciona una estimación visual del período de la señal, resaltando la eficacia del método para detectar ciclos recurrentes mediante análisis local.

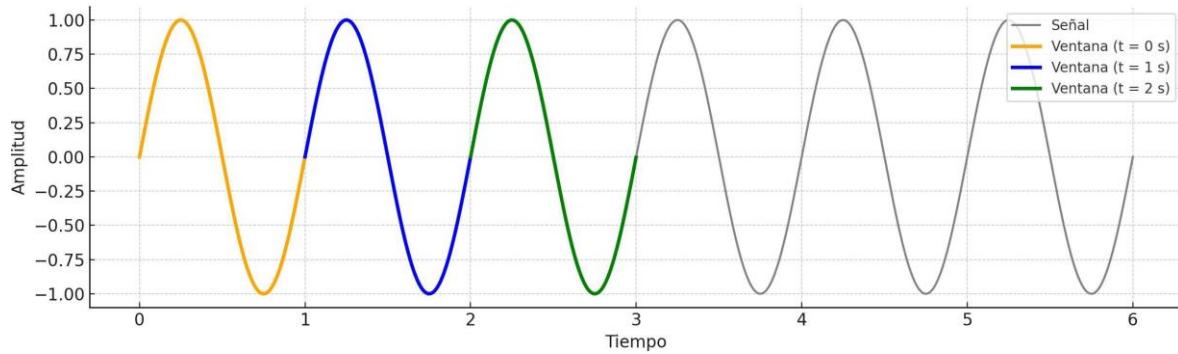


Figura 3.3: Estimación del período mediante el uso de la ventana deslizante.

3.2 Modelado Matemático de Señales

Entre los métodos analíticos más utilizados en el procesamiento de señales destaca la Transformada de Fourier, una herramienta matemática que permite descomponer señales periódicas en una suma de componentes espectrales definidos por funciones seno y coseno [32–37]. Esta transformación convierte una señal del dominio del tiempo en su equivalente en el dominio de la frecuencia, revelando con claridad las frecuencias presentes y la amplitud de cada componente armónica. Para ilustrar este proceso, en la gráfica de la izquierda en la Figura 3.4 se muestra una señal compuesta por varias senoidales superpuestas. A su derecha, se muestra una representación en el dominio del tiempo obtenida mediante la aplicación de

la Transformada de Fourier, en donde fácilmente se identifican picos bien definidos que representan las frecuencias fundamentales, sus armónicos y la amplitud de cada señal que compone a la señal modelada. Es importante tomar en cuenta que la implementación de este método presenta desafíos, principalmente relacionados con su costo computacional y la dependencia de condiciones de estacionariedad, lo que puede limitar su uso en aplicaciones que requieren procesamiento en tiempo real o en entornos altamente dinámicos.

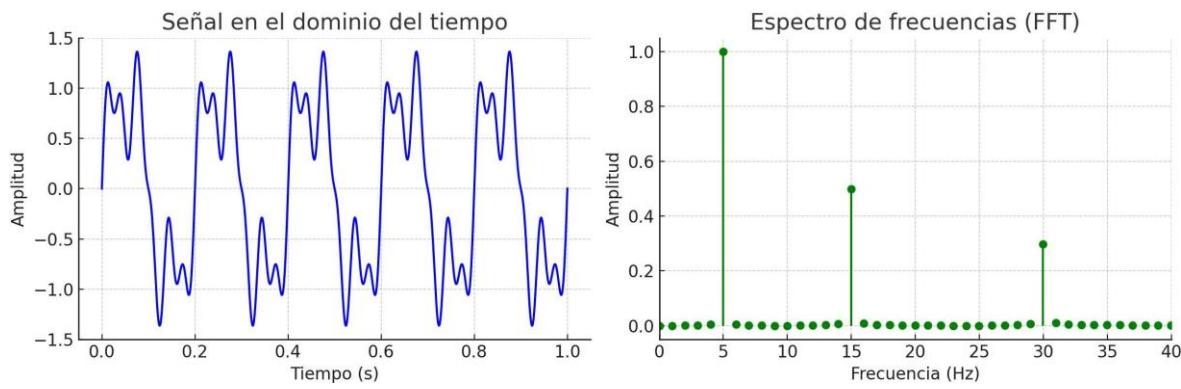


Figura 3.4: Aplicación de la Transformada de Fourier al modelado de una señal armónica.

Otra técnica importante en el modelado de señales es la Transformada Wavelet, la cual ofrece una mayor flexibilidad al permitir el análisis simultáneo de la información temporal y frecuencial contenida en la señal periódica [38–44]. Las wavelets permiten capturar variaciones locales en el tiempo, adaptándose a señales que presentan transiciones abruptas, eventos transitorios o múltiples escalas de comportamiento. La Figura 3.5 ilustra este enfoque aplicado a una señal compuesta con un cambio de frecuencia a lo largo del tiempo. La línea gris representa la señal original, mientras que la línea azul discontinua, generada a partir de la Transformada Wavelet, muestra una aproximación estructurada que sigue con precisión los cambios locales de la señal. Este modelado basado en wavelets permite reconstruir fielmente la señal original a partir de un número reducido de coeficientes. Sin embargo, a pesar de sus ventajas, la aplicación práctica de esta técnica presenta desafíos importantes. Su marco matemático es más complejo, lo cual puede dificultar su interpretación directa. Además, requiere seleccionar adecuadamente la familia de wavelets y el número de niveles

de descomposición según las características de cada señal. Por todo lo anterior, si bien esta técnica tiene un buen rendimiento, su implementación exige criterios de diseño más cuidadosos que otras herramientas.

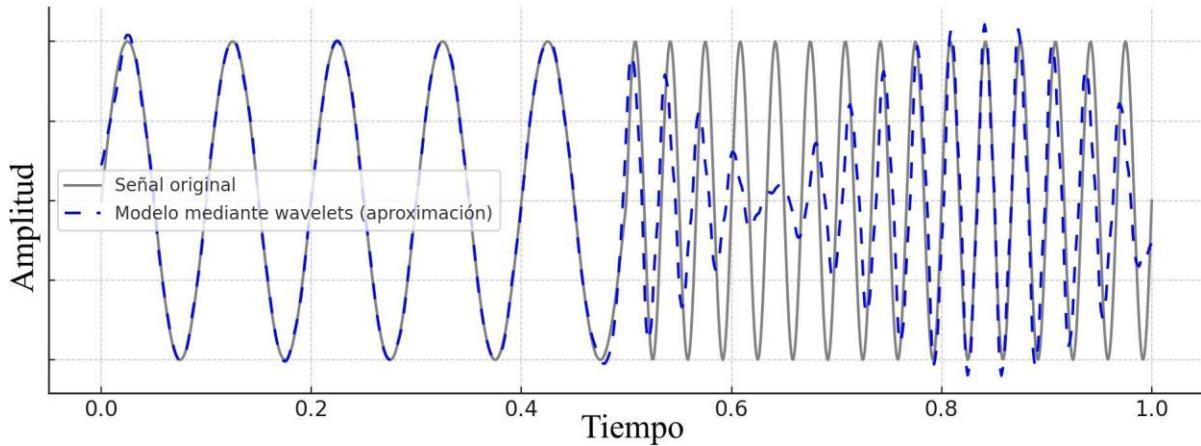


Figura 3.5: Modelado de una señal periódica mediante la transformada de wavelet.

Una alternativa que ha ganado interés en el modelado de señales periódicas debido a su capacidad para generar representaciones suaves y continuas a partir de un número limitado de puntos clave, es el uso de polinomios de Bézier [45–47]. Este método permite construir aproximaciones con una estética visual atractiva, lo que es ideal en contextos donde la presentación visual o el control manual de la forma son prioritarios. Sin embargo, una de las limitaciones fundamentales de este tipo de modelado es que sus parámetros no están directamente relacionados con las propiedades físicas o espectrales de la señal.

A diferencia de otros métodos basados en transformadas, las curvas de Bézier no conservan información de frecuencia, amplitud u oscilación, sino que simplemente trazan una forma controlada por geometría. Como consecuencia, ajustar dinámicamente estas representaciones frente a perturbaciones o variaciones rápidas en la señal puede ser complejo y poco robusto en aplicaciones analíticas o en tiempo real. Un ejemplo de la aplicación de esta técnica se muestra en la Figura 3.6. En la gráfica de la izquierda se muestra una señal; de esta señal se toman puntos de control (marcados en rojo) para construir una curva de Bézier (línea azul).

La cantidad de puntos de control será establecida por el usuario para capturar la tendencia general de la señal con una forma continua y diferenciable, sin necesidad de procesar cada punto individual del conjunto de datos.

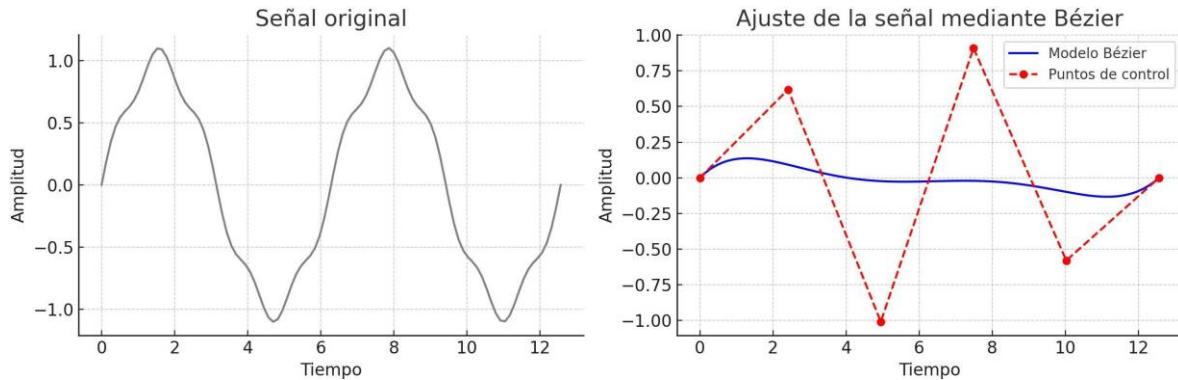


Figura 3.6: Comparación entre la señal original y su aproximación mediante polinomios de Bézier.

3.3 Detección de Fallas

Entre las técnicas más extendidas para la detección de eventos anómalos o fallas, se encuentran los métodos basados en umbrales. Estos métodos monitorean variaciones abruptas en parámetros específicos y generan alertas cuando dichos valores exceden límites previamente establecidos [48–53]. Este enfoque se fundamenta en establecer rangos de operación considerados normales para activar respuestas automáticas cuando la señal medida se sitúa por encima o por debajo de estos rangos. Si bien este tipo de método es altamente eficiente en sistemas donde las condiciones operativas están bien definidas y estables, su principal limitación radica en la rigidez del umbral fijo, que puede resultar inadecuado en entornos dinámicos o con variabilidad estructural. En estos escenarios, la detección basada en umbrales puede producir tanto falsos positivos como falsos negativos, reduciendo su fiabilidad sin un ajuste adaptativo adecuado.

La Figura 3.7 ilustra esta técnica aplicada a una señal oscillatoria. Se han definido dos límites de umbral: un umbral superior (línea verde punteada) y un umbral inferior (línea roja punteada). Las zonas donde la señal supera estos límites se destacan mediante sombreados en verde claro y púrpura, correspondientes a las violaciones del umbral positivo y negativo, respectivamente. Esta representación visual permite identificar con claridad los segmentos de la señal que serían considerados anómalos o críticos bajo este criterio.

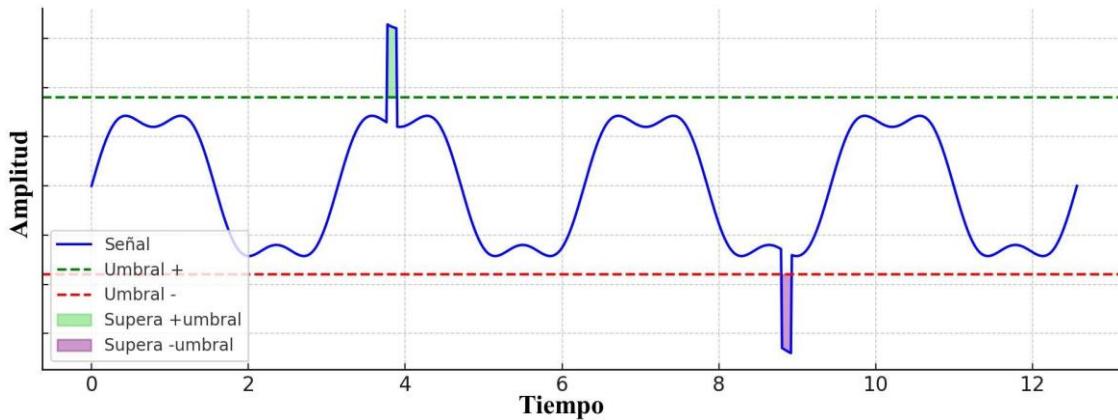


Figura 3.7: Ilustración del método de umbral aplicado a una señal oscillatoria.

Otra técnica ampliamente utilizada para el estudio de señales periódicas, es el análisis espectral, el cual utiliza herramientas matemáticas como la Transformada de Fourier para detectar alteraciones en la composición frecuencial de las señales [54–58]. Este enfoque permite observar con detalle la presencia de armónicos, distorsiones o componentes inesperadas, lo que resulta particularmente útil para la detección temprana de fallas asociadas a cambios estructurales en la señal original. El proceso típico de tres etapas del análisis espectral se esquematiza en la Figura 3.8. Primero se realiza la captura de datos del sistema. Estos datos son preprocesados por técnicas de filtrado para mitigar el efecto del ruido o interferencias para finalmente calcular la distribución de frecuencias presentes en la señal utilizando algoritmos como la FFT.

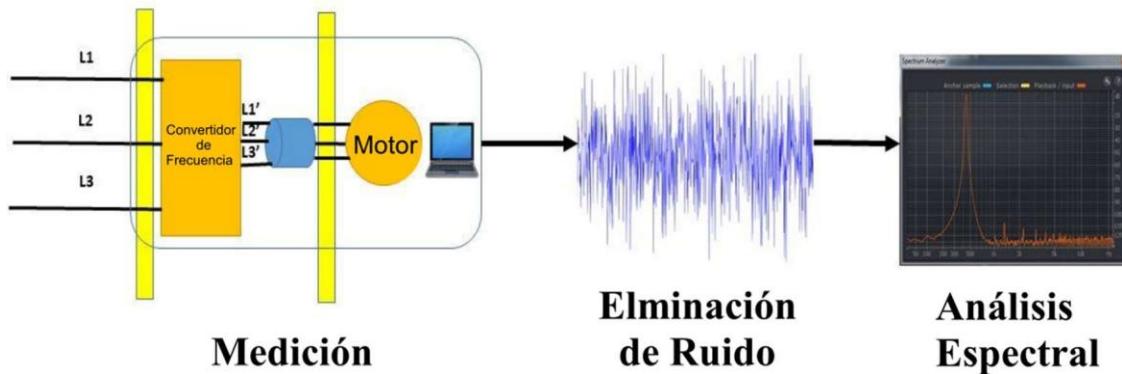


Figura 3.8: Diagrama del proceso de análisis espectral.

Este flujo de etapas permite garantizar que el análisis se realice sobre datos representativos y depurados, mejorando la precisión del diagnóstico. No obstante, la complejidad computacional inherente a este método puede limitar su implementación en sistemas de respuesta rápida o tiempo real, especialmente si no se optimiza el procesamiento o se dispone de hardware especializado.

En los últimos años, las técnicas basadas en inteligencia artificial y aprendizaje automático han adquirido un papel central en el análisis de señales debido a su capacidad para reconocer patrones complejos en grandes volúmenes de datos históricos [59–70]. Estos métodos han demostrado ser altamente efectivos en la detección temprana de anomalías, incluso en casos donde se presentan limitaciones como señales ruidosas, distorsionadas o con estructuras poco evidentes. A pesar de sus ventajas, estos modelos presentan desafíos importantes: requieren una gran cantidad de datos etiquetados para su entrenamiento, lo que puede no estar disponible en todas las aplicaciones; y su comportamiento interno es difícil de interpretar, lo que limita la explicabilidad del modelo ante decisiones críticas. Por ello, aunque las técnicas de IA representan una herramienta poderosa, es necesario considerar estrategias complementarias para garantizar su confiabilidad, interpretabilidad y aplicación práctica.

Para ejemplificar la complejidad para interpretar la información obtenida mediante técnicas de inteligencia artificial se muestra, en la Figura 3.9, un esquema de una red neuronal artificial, una de las arquitecturas más utilizadas en tareas de clasificación y detección. En

en este esquema se observa un conjunto de entradas que representan las características extraídas de la señal: Amplitud (A), energía (E) y frecuencia (f). Esta información se propaga a través de dos capas ocultas, donde se lleva a cabo el proceso de abstracción y reconocimiento de patrones para finalmente obtener una salida que indica la probabilidad de ocurrencia de una falla, estado operativo o tipo de anomalía detectada. Si bien la información de salida es fácilmente de interpretar, el proceso permanece oculto para el usuario y es difícil de interpretar.

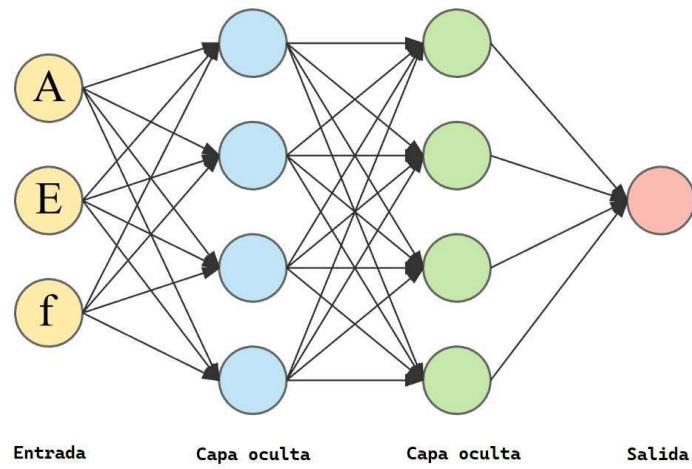


Figura 3.9: Esquema conceptual de una red neuronal artificial.

4 Metodología

El desarrollo adecuado de un algoritmo para el modelado matemático avanzado de señales repetitivas requiere definir claramente los procedimientos metodológicos que sustenten su implementación y validación. Integrar eficientemente el modelado de señales armónicas y transitorias con técnicas robustas para la detección de anomalías representa un desafío técnico significativo, especialmente al considerar la necesidad de identificar patrones complejos con alta precisión y reducir simultáneamente el consumo de recursos críticos como almacenamiento, energía y materiales. Este enfoque integral busca solucionar las limitaciones actuales relacionadas con la representación precisa de señales periódicas y transitorias, facilitando un análisis profundo y eficiente que permita detectar desviaciones o irregularidades en el comportamiento intrínseco de los sistemas analizados.

Desde una perspectiva metodológica, la evaluación cuantitativa del algoritmo implementado resulta fundamental para asegurar su validez y eficacia práctica. Para llevar a cabo dicha evaluación, se adoptó un enfoque claramente cuantitativo basado en la utilización de métricas estadísticas específicas capaces de evaluar de forma objetiva la precisión del modelo propuesto al comparar directamente la señal original frente a su reconstrucción matemática. Indicadores como el área bajo la curva del error relativo (RE-AUC), el error cuadrático medio (MSE), el error porcentual medio (MPE) y el coeficiente de precisión de señal (CPS)

proporcionarán una base sólida para medir el desempeño real del algoritmo, garantizando así la objetividad y reproducibilidad de los resultados obtenidos.

Durante la definición del procedimiento metodológico se analizaron diversas técnicas de modelado matemático previamente documentadas, destacando especialmente métodos tradicionales basados en la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Aunque inicialmente se planteó emplear exclusivamente sumas de componentes senoidales, la necesidad de simplificar y optimizar el modelo matemático para representar señales transitorias condujo al desarrollo de una metodología más robusta, incorporando también funciones exponenciales, impulsos y escalones. Esta evolución permitió generar modelos matemáticos más compactos y representativos, facilitando un análisis detallado y efectivo en la identificación de patrones o anomalías.

Mediante la metodología descrita en este capítulo, se espera obtener finalmente un modelo matemático eficiente, compacto y preciso, capaz de representar fielmente señales repetitivas complejas conservando su información esencial. Asimismo, se busca que esta propuesta metodológica contribuya significativamente a la identificación y caracterización rápida y precisa de anomalías, facilitando así su aplicación práctica en diversos contextos operativos donde la supervisión y análisis de señales armónicas resultan fundamentales.

4.1 Materiales y Herramientas

La herramienta principal en el desarrollo de este trabajo de investigación fue el software de cómputo numérico MATLAB, la cual fue fundamental para el desarrollo del algoritmo, así como para su evaluación estadística. La elección específica de MATLAB frente a otras herramientas similares, como GNU Octave y Rohde & Schwarz, se fundamentó principalmente en su robustez para realizar análisis numéricos avanzados, así como en su facilidad para la visualización gráfica inmediata de los resultados obtenidos. Si bien GNU Octave ofrecía una alternativa de código abierto y gratuita, su desempeño resultó inferior en términos de estabilidad y compatibilidad con funciones avanzadas; por otra parte, la solución

ofrecida por Rohde & Schwarz fue descartada debido a la dificultad de acceso y complejidad adicional en su integración. A lo anterior, se suma la disponibilidad en MATLAB de numerosas funciones, bibliotecas especializadas y documentación extensa, facilitando significativamente tanto el desarrollo algorítmico como la evaluación estadística requerida en esta investigación.

Adicionalmente, se utilizó Microsoft Excel para la manipulación y acondicionamiento de los conjuntos de datos antes de su procesamiento final en MATLAB. Excel permitió manipular datos reales introduciendo eventos aleatorios para emular señales atípicas o artificialmente alteradas, incluso introduciendo fallas específicas para evaluar de forma más exigente la capacidad del algoritmo. La facilidad de manipulación y flexibilidad ofrecida por Excel fue clave para crear escenarios extremos que pusieran a prueba los límites del algoritmo propuesto, asegurando así su robustez ante condiciones poco usuales o hipotéticas.

Para el desarrollo práctico y las pruebas del algoritmo, se utilizaron principalmente dos fuentes de señales o datos: en primer lugar, señales generadas mediante ecuaciones matemáticas desarrolladas directamente en MATLAB, lo que permitió tener un control absoluto sobre sus características y periodicidad. En segundo lugar, se consultaron bases de datos externas provenientes del sitio Kaggle, de donde se obtuvieron registros de señales electrocardiográficas reales, útiles por su carácter periódico natural y por su relevancia e impacto en diversas aplicaciones prácticas cotidianas. La elección de estas fuentes respondió a la necesidad de garantizar tanto la validez teórica del algoritmo como su aplicabilidad práctica en contextos reales.

4.2 Unidad Mínima Recurrente

En concordancia con el cronograma establecido, se inició con el desarrollo matemático y computacional del modelo, evitando alternativas complejas con la finalidad de maximizar el aprovechamiento del tiempo disponible, enfocándose en la implementación de un algoritmo sencillo pero que garantice fidelidad, rapidez y economía. En el desarrollo de esta etapa,

inicialmente se buscó una solución basada únicamente en la representación mediante series de Fourier para el ajuste mediante componentes senoidales. Sin embargo, a lo largo de desarrollo del algoritmo de modelado matemático, se encontró que los patrones repetitivos en señales muy ruidosas o que son fuertemente definidas por componentes transitorias, no cumplen de manera cabal con la definición de período. Al no cumplir con la definición de período, las señales tampoco pueden ser consideradas periódicas; sin embargo, al tener una naturaleza repetitiva regular, pueden ser consideradas cuasi-periódicas. Para estos casos fue necesario establecer el concepto de Unidad Mínima Recurrente (UMR), definida como un patrón repetitivo que no es necesariamente idéntico en cada ocurrencia. Este concepto va más allá del concepto clásico de período al considerar, además del intervalo temporal entre ciclos, aspectos críticos como la morfología, la amplitud relativa, la simetría interna y las variaciones sutiles dentro de cada ciclo individual. Al evaluar estos aspectos adicionales, la UMR permite capturar con mayor fidelidad la estructura subyacente de señales reales, incluso cuando éstas presentan modulaciones o distorsiones que imposibilitan la identificación estricta de un período constante.

Un ejemplo simplificado del concepto anterior se muestra en la Figura 4.1, donde se presenta una señal cuya estructura básica es armónica, pero que es modulada por una señal transitoria. La envolvente transitoria causa que la definición estricta del período sea insuficiente para una representación precisa. Para estos casos, el patrón repetitivo puede definirse como UMR.

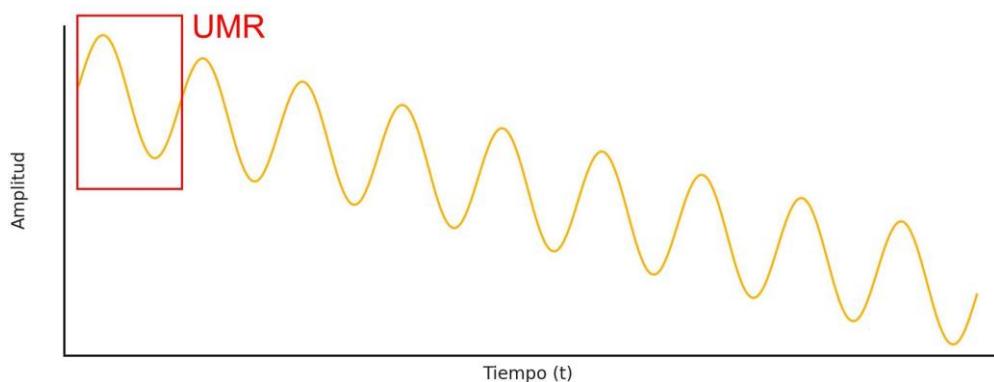


Figura 4.1: Señal senoidal con desplazamiento descendente que ilustra la Unidad Mínima Recurrente.

Bajo este nuevo paradigma, la determinación adaptativa de patrones repetitivos adquiere una relevancia clave, pues permite identificar estructuras recurrentes, aunque no exactamente iguales. Esta capacidad es especialmente útil en señales cuya frecuencia y amplitud locales pueden permanecer relativamente constantes, pero cuya posición o forma interna cambia gradualmente, rompiendo así con la periodicidad clásica, aunque manteniendo una recurrencia estructural identifiable.

4.3 Determinación Adaptativa de Patrones Repetitivos

Una vez definida la unidad mínima de recurrencia en una señal cuasi-periódica, es necesario desarrollar un método adecuado para encontrar dicha unidad. Inicialmente, se consideraron métodos tradicionales ampliamente conocidos, tales como la detección de cruces por cero, la identificación de máximos y mínimos locales, y técnicas basadas en la correlación. No obstante, estas técnicas poseen limitaciones inherentes derivadas de su fundamento metodológico; específicamente, dependen de la existencia de periodicidad estricta en la señal analizada. Debido a esta dependencia, dichos métodos resultaron insuficientes para identificar con precisión la UMR en señales que presentan cambios graduales o modulaciones internas, ya que dichas señales no cumplen con la definición estricta de periodo.

Ante esta situación, se exploraron técnicas que superaran estas limitantes. Entre estas técnicas destacó el método conocido como ventana deslizante, ampliamente utilizado en áreas relacionadas con la programación y el análisis de datos. A pesar de sus ventajas, este método también resultó inadecuado debido a que requiere conocer previamente el tamaño exacto o la longitud específica del patrón buscado, lo cual no es posible en situaciones reales donde dicha información es precisamente lo que se pretende descubrir. Profundizando más en la familia de técnicas basadas en ventanas, se analizaron variantes más avanzadas como la doble ventana deslizante y la ventana expansiva o creciente. La doble ventana deslizante presentó los mismos inconvenientes del método original, ya que mantiene la lógica basada en parámetros definidos previamente. Por otro lado, la técnica convencional de ventana expansiva también mostró limitaciones significativas, pues expande únicamente una ventana

para recopilar datos históricos, información que en el contexto particular del problema abordado resulta menos relevante. Estas observaciones indicaron claramente la necesidad de desarrollar una técnica innovadora capaz de identificar simultáneamente el patrón a buscar y el segmento exacto donde dicho patrón ocurre.

Con base en estas limitaciones y la necesidad específica detectada, se propone una variante, la técnica de Doble Ventana Creciente, la cual permitió identificar la UMR en las señales. Esta técnica opera en el dominio temporal mediante un esquema de ventanas progresivamente crecientes, comparando segmentos contiguos de la señal hasta encontrar recurrencias consistentes que definan su comportamiento periódico. Gracias a esta capacidad, la doble ventana creciente se consolidó como una etapa esencial previa al modelado matemático, habilitando las condiciones necesarias para los procesos de análisis y detección que se aplicarían posteriormente.

4.4 Doble Ventana Creciente

El algoritmo de la Doble Ventana Creciente (DVC) fue propuesto como una manera eficiente de identificar la UMR dentro de señales armónicas complejas. Esta identificación constituye un paso clave dentro del proceso de análisis, ya que permite delimitar con mayor exactitud los intervalos fundamentales de repetición. A partir de esta segmentación, se simplifica notablemente el modelado matemático, permitiendo una estimación más eficiente y exacta de los componentes armónicos que conforman la señal. Así, la DVC no solo mejora la detección estructural de la periodicidad, sino que también optimiza la calidad del modelado armónico en señales reales con variaciones internas severas entre ciclos.

El funcionamiento general de la DVC se muestra en la figura 4.2 en donde se tiene una tabla con 10 muestras (renglón 1). En el segundo renglón de dicha tabla de datos, se definen dos ventanas contiguas con una longitud mínima (una muestra); el área bajo la curva y el índice de correlación de estas ventanas se compara para evaluar su similitud. Si estas ventanas no muestran similitud suficiente, de acuerdo al criterio previamente establecido por el usuario,

ambas ventanas aumentarán progresivamente su tamaño por una muestra, extendiendo así la comparación a segmentos más amplios (renglones 3 y posteriores) hasta encontrar coincidencias claras en la periodicidad. La primera de las ventanas, identificada en color rojo, será la UMR de la señal analizada. La segunda señal, identificada en color verde, será el segundo cuasi-periodo que permitirá validar la UMR encontrada.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figura 4.2: Esquema visual del avance progresivo de la doble ventana creciente (DVC) a lo largo de una secuencia de ciclos.

Para el caso en que, utilizando el método de DVC se alcance un criterio de paro, también previamente establecido por el usuario, sin encontrar periodicidad, se declara que existe un evento transitorio en la primera ventana. En caso de haber un evento único en la primera ventana, nunca se encontrará un evento idéntico en la segunda ventana, por lo que resultaría imposible encontrar la UMR. El criterio de paro para este método es el número máximo de muestras que puede alcanzar una ventana. En caso de que se alcance este criterio, se almacenarán las muestras en donde no se encontró periodicidad y se aplicará nuevamente el método de DVC en las muestras siguientes a la porción almacenada. Los datos almacenados pueden ser analizados con posterioridad para identificar la naturaleza del evento transitorio.

En términos operativos, la técnica de la DVC no requiere ajustes significativos en sus parámetros; no obstante, se definieron arbitrariamente ciertos límites prácticos como un tamaño máximo de ventana equivalente a un segundo completo de señal, debido a consideraciones prácticas en señales eléctricas, en donde frecuencias inferiores a 1 Hertz serían inusuales o irrelevantes en la mayoría de aplicaciones reales. Asimismo, el incremento

en la ventana se estableció en una muestra por iteración, garantizando precisión en la búsqueda del patrón mínimo repetitivo, ya que incrementos mayores podrían comprometer la sensibilidad del método y generar errores en la detección. Por tanto, aunque estas elecciones puedan parecer arbitrarias, fueron tomadas considerando criterios de estabilidad numérica, eficiencia computacional y pertinencia práctica.

Al finalizar su ejecución, el método de DVC, entregará una ventana que contiene el número de muestras que representa la UMR de la señal y que determina la longitud exacta del ciclo base para los análisis posteriores. Esta información tiene una relevancia crítica para el modelado matemático, dado que, aunque un solo ciclo podría bastar teóricamente para representar la señal, diversas referencias bibliográficas recomiendan utilizar al menos cinco ciclos consecutivos para asegurar robustez frente al ruido y otras imperfecciones propias de señales reales. Adicionalmente, este valor obtenido es indispensable para la etapa final de detección de fallos, la cual utiliza precisamente cuatro ciclos fundamentales para sus análisis mediante la técnica de doble ventana deslizante, consolidando así una dependencia directa y crítica entre la etapa de determinación adaptativa y las etapas subsecuentes del algoritmo propuesto.

4.5 Método de Máximos Locales

En caso de que el algoritmo de DVC alcance el criterio de paro sin haber identificado una estructura periódica, se procede a almacenar la porción de la señal correspondiente a dicha ventana. Lejos de interrumpir el modelado principal, esta señal no identificada se conserva como una región de interés para ser analizada de manera paralela. Para este propósito, se propone el uso del Método de Máximos Locales (MML) como herramienta secundaria para estudiar qué ocurrió durante ese intervalo y, en caso de corresponder, determinar si allí se encuentra la UMR o si ocurrió algún un evento transitorio aislado.

Desde el punto de vista matemático, el Método de Máximos Locales (MML) se fundamenta en la detección de los puntos críticos de la señal, definidos como aquellos en los que la

derivada primera se anula. Para distinguir si dichos puntos corresponden a máximos o

mínimos locales, se evalúa la segunda derivada, lo que permite clasificar la naturaleza del cambio en la curvatura de la señal. Esta definición formal, cuya expresión matemática se presenta en la ecuación (1), permite establecer con rigor los criterios utilizados para localizar los extremos locales y, con ello, estimar el posible intervalo periódico subyacente.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_c} \begin{cases} < 0 & \text{máximo local} \\ > 0 & \text{mínimo local} \end{cases} \quad (1)$$

La Figura 4.3 ilustra el método de máximos locales sobre una señal periódica deformada por la presencia de múltiples armónicos y modulación de amplitud. Sobre la señal se identificaron los máximos locales en rojo y los mínimos locales en azul. Utilizando este método, se puede visualizar directamente la regularidad de los ciclos en medio de la complejidad de la señal. Así, se define la UMR como el intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos, identificado en la gráfica con una línea horizontal color verde.

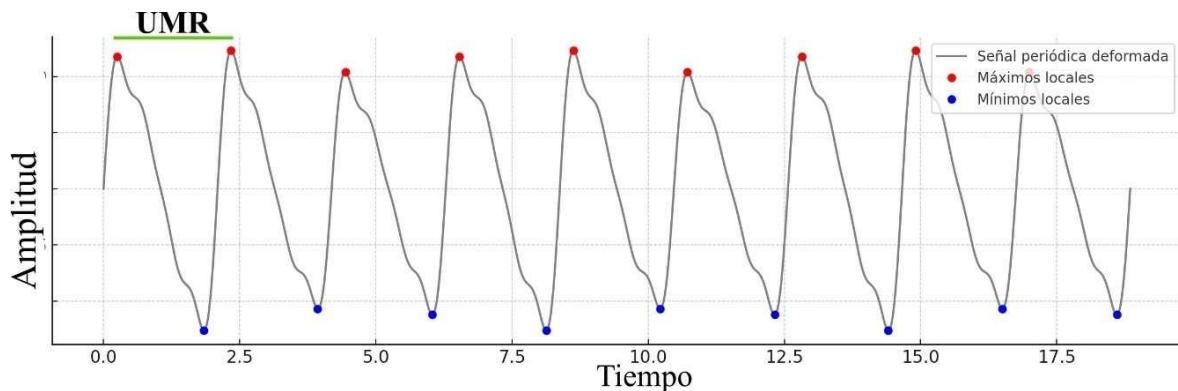


Figura 4.3: Identificación de máximos y mínimos locales en una señal periódica compuesta.

Una vez identificados los máximos o mínimos locales en la señal, se procede a analizar la distancia temporal entre los máximos consecutivos, con el objetivo de detectar patrones recurrentes que indiquen la presencia de una periodicidad subyacente. Al mismo tiempo, el conjunto de máximos y mínimos detectados puede utilizarse para estimar el tiempo de ocurrencia del evento transitorio, al observar en qué punto se interrumpe la regularidad en la secuencia de extremos y en qué momento dicha regularidad vuelve a establecerse. Esta ruptura y posterior reanudación del patrón periódico proporciona una indicación clara del

intervalo temporal afectado, permitiendo así delimitar con mayor precisión el inicio y el fin del fenómeno transitorio dentro de la señal.

4.6 Modelado Matemático

El objetivo principal del modelado matemático desarrollado en esta etapa es representar señales armónicas y transitorios de manera compacta, minimizando la pérdida de información esencial y facilitando la detección eficiente de cambios o patrones. De esta forma, al representar así estas señales, se simplificaría notablemente su análisis posterior. De esta forma, un modelo compacto y preciso como el que se propone, no solo garantiza claridad en la representación, sino que también mejora la capacidad del algoritmo para identificar variaciones críticas en las señales analizadas.

Dependiendo del tipo de señal que se recibe en esta etapa, el modelo matemático estará compuesto exclusivamente por funciones senoidales, exponenciales, impulsos, escalones o combinaciones adecuadas de estos elementos. Por ejemplo, señales puramente senoidales serán representadas únicamente por componentes senoidales, mientras que señales con componentes transitorios específicos podrían requerir funciones exponenciales o escalones. Esta flexibilidad asegura que cada señal sea representada mediante las funciones matemáticas más adecuadas, garantizando precisión y simplicidad en la interpretación del modelo.

La elección de los tipos específicos de funciones utilizadas en el modelado se basó principalmente en su amplia aceptación en la literatura y en su disponibilidad en estudios previos sobre señales periódicas. En un principio, el enfoque adoptado consistió en representar la señal como la suma de componentes senoidales obtenidas a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT); sin embargo, este método condujo a la generación de expresiones algebraicamente extensas, con múltiples términos cuya interpretación práctica resultaba limitada. En la búsqueda de una representación más compacta, eficiente y estructurada, se descartaron alternativas como el modelado de Prony y las funciones

cosenoidales derivadas de la Transformada de Laplace, ya que, a pesar de su valor teórico, generaban expresiones con componentes complejos e interpretaciones poco intuitivas.

Para ejemplificar la utilidad de modelar una señal con funciones matemáticas diferenciadas, se toma una señal compuesta por la suma de dos funciones senoidales y una exponencial decreciente como la ilustrada en la Figura 4.4. Esta señal muestra características comunes de señales reales, como la presencia de comportamientos transitorios superpuestos a patrones oscilatorios. Al aplicar la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para su análisis, se observó que se requerían al menos ocho componentes senoidales para alcanzar una reconstrucción aceptable de la señal original, lo que resultó en una expresión algebraicamente extensa. En contraste, mediante la metodología propuesta, fue posible lograr una representación mediante dos componentes senoidales y un exponencial, reduciendo drásticamente la complejidad sin comprometer la fidelidad del modelo.

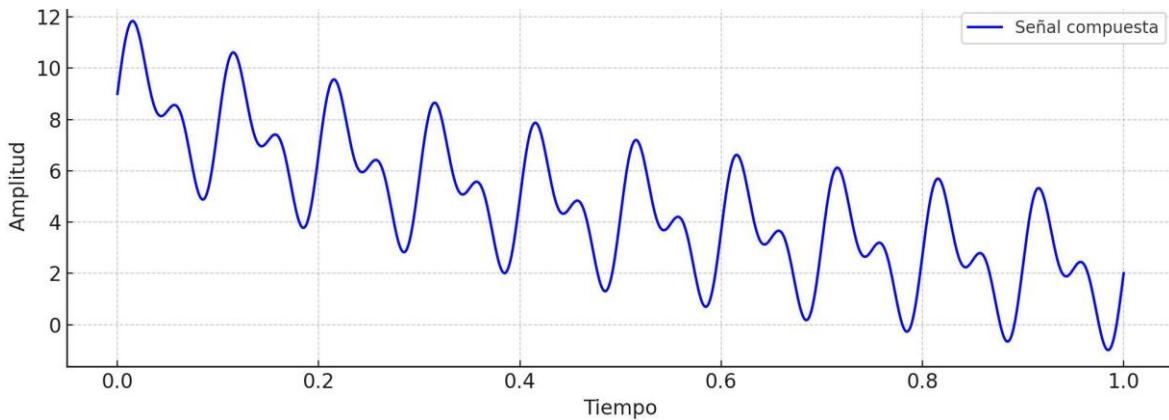


Figura 4.4: Señal compuesta por una suma de senoidales y una exponencial.

Esta diferencia estructural entre ambos enfoques puede observarse en la Tabla 4.1, donde se comparan los términos senoidales requeridos por la FFT con los componentes utilizados en el modelo propuesto. Mientras que el modelo tradicional emplea ocho componentes armónicas el modelo desarrollado sintetiza la misma señal mediante tres funciones matemáticamente diferenciadas: dos senoidales principales y una exponencial. Esta simplificación no solo mejora la compacidad algebraica, sino que también aporta una interpretación más clara de los fenómenos involucrados.

	Método FFT	Método Propuesto
1	4.6 (Offset)	2 sen ($2\pi 10t + \phi$)
2	2.1 sen ($2\pi 1t + \phi$)	1.5 sen ($2\pi 20t + \phi$)
3	1.1 sen ($2\pi 2t + \phi$)	9 e ^(-1.5t)
4	0.7 sen ($2\pi 3t + \phi$)	
5	0.5 sen ($2\pi 4t + \phi$)	
6	0.4 sen ($2\pi 5t + \phi$)	
7	0.3 sen ($2\pi 6t + \phi$)	
8	2.2 sen ($2\pi 10t + \phi$)	
9	1.6 sen ($2\pi 20t + \phi$)	

Tabla 4.1: Comparación entre los componentes senoidales generados por la FFT y los que resultan del modelo propuesto.

Para lograr una representación matemática compacta y precisa de las señales analizadas, se desarrollaron y aplicaron diversas técnicas específicas según la naturaleza y las características observadas en la señal de entrada. A continuación, se explican detalladamente los procedimientos metodológicos concretos empleados para identificar, ajustar y representar adecuadamente cada tipo particular de componente dentro del modelo propuesto, seleccionadas y desarrolladas específicamente por su efectividad en la representación matemática de señales periódicas y transitorias.

4.6.1 Identificación y Ajuste de Componentes Senoidales

El proceso para obtener las componentes senoidales en el modelado matemático se inicia mediante la aplicación de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), técnica matemática fundamental para analizar señales armónicas y descomponerlas en sus frecuencias constituyentes. Matemáticamente, la FFT calcula los coeficientes $X[k]$ mediante la siguiente expresión:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2)$$

Donde $x[n]$ representa la señal original en el dominio temporal, N es la cantidad total de muestras analizadas, y $X[k]$ es el resultado de la transformación en el dominio frecuencial.

Una vez calculados estos coeficientes complejos, el espectro obtenido incluye información sobre magnitud y fase de los componentes frecuenciales presentes en la señal original. Debido a que el interés del modelado radica específicamente en términos senoidales, se seleccionan únicamente aquellas componentes que representan funciones seno, obtenidas a partir de la parte imaginaria del espectro frecuencial calculado por la FFT. Por otro lado, cualquier componente cosenoidal o términos complejos que no sean necesarios para representar la señal se descartan, simplificando así significativamente la ecuación resultante.

Matemáticamente, el modelo senoidal final se expresa como una combinación lineal de funciones del tipo:

$$x(t) = \sum_{m=1}^M A_m \operatorname{sen}(2\pi f_m t + \Phi_m) \quad (3)$$

donde A_m representa la amplitud del armónico m , f_m es la frecuencia específica de dicho armónico, y ϕ_m es la fase asociada al mismo. Estos parámetros (A_m , f_m , ϕ_m) son extraídos directamente a partir de los coeficientes obtenidos por la FFT

Finalmente, para preservar la energía total original de la señal en la reconstrucción matemática, como se toma únicamente la mitad positiva del espectro frecuencial obtenido (debido a su simetría conjugada), la amplitud de las componentes seleccionadas se multiplica por dos. Esto garantiza que la representación matemática resultante mantenga fielmente la equivalencia energética con la señal original, asegurando precisión en el análisis posterior del modelo generado.

4.6.2 Identificación y Ajuste de Funciones Exponenciales

La identificación y el posterior ajuste de los componentes exponenciales en la señal analizada se realizan mediante un método basado en el cálculo numérico de derivadas consecutivas. Matemáticamente, el procedimiento se basa en la propiedad fundamental de las funciones

exponenciales, cuya derivada es directamente proporcional a la propia función. Para una función exponencial genérica, esto se expresa como:

$$y(t) = Ae^{kt} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = k \cdot Ae^{kt} = k \cdot y(t) \quad (4)$$

donde A representa la magnitud inicial y k es una constante que define la tasa de crecimiento (si $k > 0$) o decrecimiento (si $k < 0$).

A partir de esta propiedad, se evalúa numéricamente la señal $y(t)$ junto con su derivada primera $\frac{dy(t)}{dt}$. Al analizar la razón entre ambas magnitudes en intervalos específicos, se obtiene el parámetro k :

$$k = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} \quad (5)$$

En la práctica, esta relación se calcula numéricamente a partir de muestras discretas tomadas directamente de la señal analizada. El signo del parámetro k obtenido indica si la señal se encuentra en una fase de crecimiento exponencial o decrecimiento exponencial. Posteriormente, mediante el análisis de la segunda derivada, se detectan puntos críticos específicos (máximos o mínimos locales), los cuales señalan con precisión los momentos en que la señal cambia de tendencia, facilitando así la segmentación clara de cada componente exponencial dentro de la señal original. La Figura 4.5 ilustra este proceso mediante una señal triangular que presenta una envolvente creciente: al unir los máximos locales con una línea continua, se evidencia la tendencia exponencial subyacente que puede ser identificada y ajustada como parte del modelo. Esta representación visual permite entender con mayor claridad cómo es posible extraer patrones exponenciales a partir de datos complejos con estructura periódica variable.

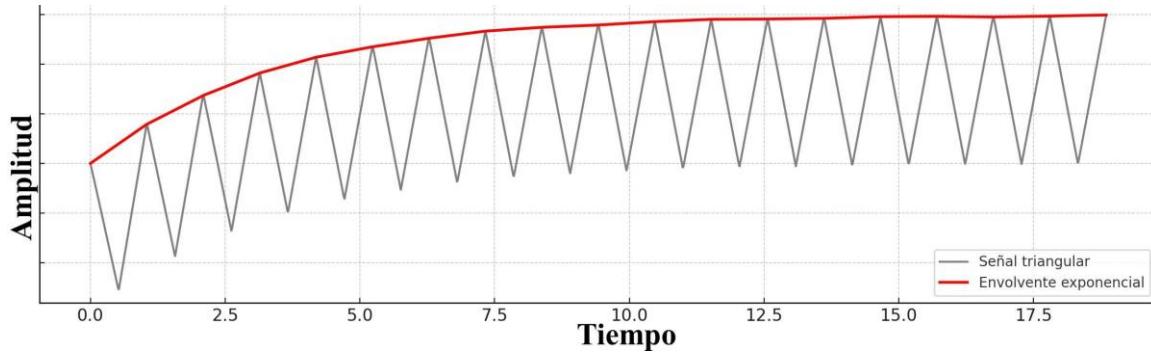


Figura 4.5: Representación de una señal triangular con tendencia exponencial creciente.

Una vez identificados los intervalos relevantes y los valores iniciales de magnitud A en cada punto crítico, se ajustan las funciones exponenciales a los datos observados mediante técnicas estándar de regresión no lineal. De este modo, se obtiene una representación matemática precisa y robusta de cada componente exponencial presente en la señal, contribuyendo a la compactación y precisión del modelo matemático global generado por el algoritmo.

Matemáticamente, el modelo exponencial final se expresa como una combinación lineal de funciones exponenciales del tipo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{k_i t} \quad (6)$$

donde A_i y k_i son los parámetros específicos obtenidos para cada componente exponencial ajustado, y N es el número total de funciones exponenciales identificadas en la señal analizada. Este modelo garantiza una representación clara y concisa del comportamiento exponencial presente en la señal estudiada.

4.6.3 Identificación y Ajuste de Funciones Escalón

Para el caso de componentes escalón, se implementó un método basado en la evaluación numérica del área bajo la curva (integral) en segmentos consecutivos de la señal. El fundamento matemático de este método reside en la propiedad distintiva de las funciones escalón, definidas matemáticamente de la siguiente manera:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (7)$$

donde $u(t - t_0)$ es la función escalón unitario que cambia abruptamente su valor de 0 a 1 en el instante $t = t_0$.

Para ilustrar gráficamente el comportamiento de este tipo de funciones, la Figura 4.6 presenta una señal artificialmente construida con varios escalones. En esta señal, cada nivel se mantiene constante durante un intervalo definido, seguido de un cambio abrupto hacia un nuevo valor. Esta estructura refleja el comportamiento típico de una función escalón unitario, la cual es especialmente útil para modelar transiciones súbitas en sistemas físicos, como activaciones instantáneas, cambios de estado o respuestas a perturbaciones. La representación visual permite identificar fácilmente la presencia y ubicación de los escalones en la señal, facilitando la comprensión del método de detección.

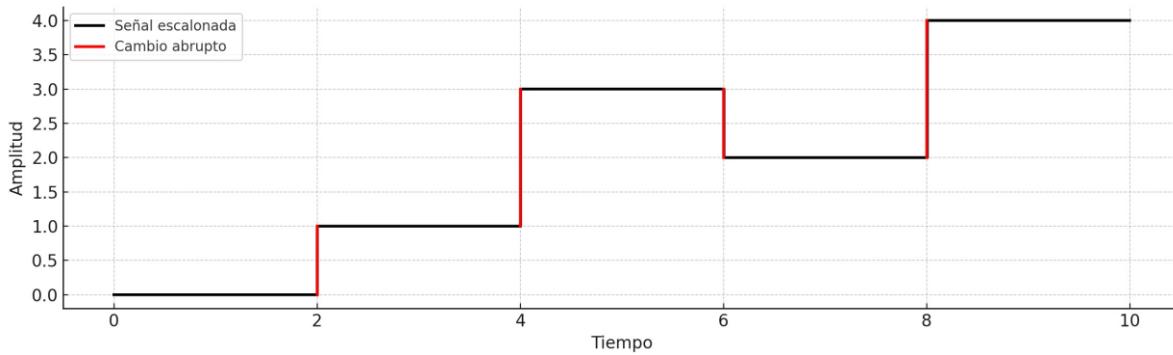


Figura 4.6: Ejemplo de una señal con comportamiento escalonado.

Para identificar estos cambios abruptos en la señal original, se divide la señal completa $x(t)$ en segmentos sucesivos discretos de pequeña duración, y en cada segmento se calcula numéricamente el área bajo la curva mediante:

$$A = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \quad (8)$$

Capítulo 4. Metodología

Posteriormente, se comparan estas áreas calculadas para segmentos consecutivos. La presencia de un escalón queda reflejada por una diferencia abrupta significativa entre áreas consecutivas, cumpliéndose que:

$$|A_{i+1} - A_i| \gg \epsilon \quad (9)$$

donde ϵ es un umbral predefinido por el usuario que indica cuando una diferencia entre áreas es suficientemente grande para ser considerada un cambio abrupto o escalón.

Los puntos específicos en los cuales se detectan estos incrementos o decrementos abruptos se definen como instantes críticos (t_0), alrededor de los cuales se ajustan funciones escalón utilizando técnicas estándar de ajuste de parámetros por regresión. Una vez localizados estos puntos clave, se determina la magnitud (C_j) del escalón mediante la diferencia clara entre los valores promedio antes y después del punto identificado, lo que se expresa como:

$$c_j = \bar{x}(t > t_0) - \bar{x}(t < t_0) \quad (10)$$

Matemáticamente, el modelo final se representa como una combinación lineal de funciones escalón del tipo:

$$z(t) = \sum_{j=1}^P C_j(t \geq t_j) \quad (11)$$

Esta representación asegura claridad en la interpretación y análisis posterior de los resultados obtenidos por el algoritmo.

4.6.4 Identificación y Ajuste de Impulsos

Para la identificación y el posterior ajuste de impulsos, eventos aislados y puntuales de muy corta duración, se implementó una técnica basada en la evaluación numérica del área bajo la curva (integral) sobre ventanas temporales extremadamente reducidas. Matemáticamente, un impulso puede ser representado idealmente por una función delta de Dirac ($\delta(t-t_0)$), cuya principal característica es concentrar toda su energía en un instante puntual $t = t_0$:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (12)$$

Debido a que en la práctica es imposible representar exactamente una función delta mediante datos discretos, se recurre a aproximaciones funcionales basadas en componentes gaussianos, las cuales capturan adecuadamente el carácter abrupto y localizado del evento. Por esta razón, los impulsos reales detectados en la señal se modelan como una suma de funciones gaussianas centradas en sus respectivos tiempos de ocurrencia. Cada uno de estos impulsos se expresa mediante una notación específica que incorpora su magnitud, su localización temporal y su desviación estándar asociada:

$$g(t) = \sum_{l=1}^Q A_l e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

donde A es la magnitud del impulso, t_0 indica el instante exacto en que el impulso tiene lugar, y σ define el ancho temporal del impulso (cuanto menor sea este parámetro, más puntual y abrupto es el evento representado).

La Figura 4.7 ilustra una señal senoidal con impulsos abruptos de corta duración superpuestos en puntos específicos. Estos impulsos, representados mediante funciones gaussianas estrechas, se integran sobre una señal periódica de fondo, simulando eventos transitorios que interrumpen momentáneamente el comportamiento armónico. Esta representación refleja de manera clara cómo se pueden detectar e interpretar eventos impulsivos dentro de una señal

continua, permitiendo su identificación, localización y posterior modelado a través de funciones matemáticamente definidas.

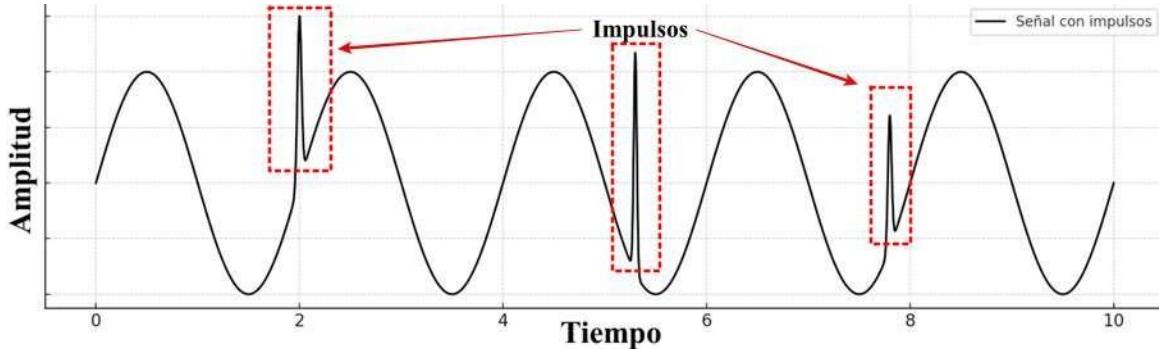


Figura 4.7: Señal senoidal con tres impulsos abruptos.

Para detectar los impulsos, se divide la señal en intervalos cortos y se calcula numéricamente la integral o energía contenida en cada intervalo mediante:

$$E_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \quad (14)$$

Si un intervalo específico presenta una energía significativamente superior al promedio, esto indica la presencia de un evento impulsivo en ese segmento temporal. Una vez identificados estos segmentos, se realiza un ajuste preciso utilizando técnicas de regresión no lineal para obtener los parámetros específicos (A , t_0 , σ) de la función gaussiana ajustada.

4.6.5 Tratamiento del Ruido Residual

Finalmente, todos aquellos fragmentos o componentes de la señal original que no son identificados como componentes senoidales, exponenciales, escalones o impulsos, se clasifican como ruido residual. Matemáticamente, este ruido residual se define como la diferencia directa entre la señal original $x(t)$ y la señal reconstruida o modelada $\hat{x}(t)$:

$$r(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (15)$$

El ruido residual generalmente consiste en pequeñas fluctuaciones no sistemáticas o eventos no periódicos inherentes a señales reales, y su correcta gestión es fundamental para evaluar la calidad global del modelo desarrollado. Este ruido residual será tratado de alguna de tres maneras de acuerdo a las necesidades específicas del análisis que se esté realizando:

- Almacenamiento: Guardar numéricamente los datos del ruido residual para estudios posteriores detallados o análisis estadísticos avanzados.
- Descarte: Eliminar directamente el ruido residual del análisis para simplificar la señal modelada y centrar el estudio exclusivamente en componentes relevantes identificados.
- Visualización: Representar gráficamente el ruido residual para evaluar visualmente la calidad global de los parámetros de modelado, permitiendo identificar áreas donde el modelo podría requerir ajustes adicionales.

Este tratamiento flexible del ruido residual permitirá adaptar eficazmente el análisis según los objetivos particulares del estudio, asegurando que el modelo matemático resultante mantenga siempre el mayor grado posible de precisión, claridad y eficiencia.

4.6.6 Ecuación Final

Para integrar todos los resultados obtenidos en los procedimientos anteriores (ajuste senoidal, exponencial, escalón, impulso y tratamiento del ruido residual), se presenta una ecuación final que combina cada uno de estos componentes, formando así una representación completa y compacta del modelo matemático generado. La ecuación final que describe completamente la señal analizada $x(t)$ es la suma directa de cada uno de estos elementos previamente descritos:

$$\begin{aligned}
x(t) = & \sum_{m=1}^M A_m \operatorname{sen}(2\pi f_m t + \Phi_m) + \sum_{i=1}^N A_i e^{k_i t} \\
& + \sum_{j=1}^p C_j(t \geq t_j) + \sum_{l=1}^Q A_l e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} + r(t)
\end{aligned} \tag{16}$$

Esta ecuación integral permite mostrar con claridad cómo se combinan todas las técnicas empleadas en la metodología en una sola representación matemática robusta y compacta, facilitando el análisis detallado y la interpretación de los resultados obtenidos en etapas posteriores del estudio.

4.7 Validación del Modelo

El modelo matemático será validado mediante un procedimiento estructurado en dos etapas complementarias, buscando garantizar la calidad y precisión del modelo obtenido. La primera etapa consiste en una comparación visual directa entre la señal original y la señal reconstruida, mediante la representación gráfica simultánea de ambas señales. Este método visual identificará rápidamente errores evidentes o desviaciones significativas, facilitando ajustes inmediatos en los parámetros del modelo hasta alcanzar una representación gráfica satisfactoria.

La segunda etapa consistirá en un análisis con métodos estadísticos rigurosos utilizando las métricas previamente definidas en el marco teórico: el área bajo la curva del error relativo (RE-AUC); el error cuadrático medio (MSE); el error porcentual medio (MPE); y el coeficiente de precisión de señal (CPS). Estas métricas proporcionarán información numérica objetiva y replicable que confirmen cuantitativamente la precisión y robustez del modelo matemático desarrollado.

4.8 Detección de Fallas

En la literatura especializada, la detección de fallos o detección de fallas consiste en la búsqueda de eventos indeseados. Si bien las metodologías son similares, en el contexto específico de esta investigación se entiende la detección de fallas como la detección de anomalías o desviaciones en las propiedades fundamentales de las señales, aun cuando no representen eventos catastróficos o indeseados. El propósito central de esta tarea consiste en identificar cualquier cambio significativo en características clave como la amplitud, frecuencia y el desplazamiento vertical, ya que tales variaciones representan información crítica sobre el comportamiento del sistema modelado. Por lo tanto, detectar estas desviaciones oportunamente es indispensable para garantizar una respuesta rápida y precisa frente a condiciones atípicas en la señal estudiada.

Para lograr una detección efectiva de anomalías, se empleó una técnica basada en un umbral adaptativo, el cual opera simultáneamente sobre dos parámetros clave: la correlación entre ventanas consecutivas y el área bajo la curva (AUC) de la señal. En particular, se implementó el algoritmo de la doble ventana deslizante (DSW), que utiliza ventanas desplazadas con base en la UMR determinado durante la etapa de análisis adaptativo. Cada ventana abarca cuatro veces la unidad mínima recurrente de la señal y se alinea estratégicamente con la siguiente para realizar comparaciones precisas entre ciclos sucesivos. Así, mientras una ventana analiza los ciclos 1 al 4, la siguiente abarca los ciclos 2 al 5, y el proceso continúa deslizándose de forma progresiva. Esta mecánica se representa de forma visual en la Figura 4.8, donde se muestra el avance iterativo de las ventanas a lo largo de una secuencia cíclica: cada fila representa una nueva iteración, y los colores rojo y azul indican los bloques de datos analizados por cada ventana, mientras que las regiones moradas representan su zona de superposición. Esta estrategia de solapamiento permite capturar con mayor sensibilidad los cambios sutiles entre ciclos, favoreciendo una detección más robusta y localizada de eventos anómalos.

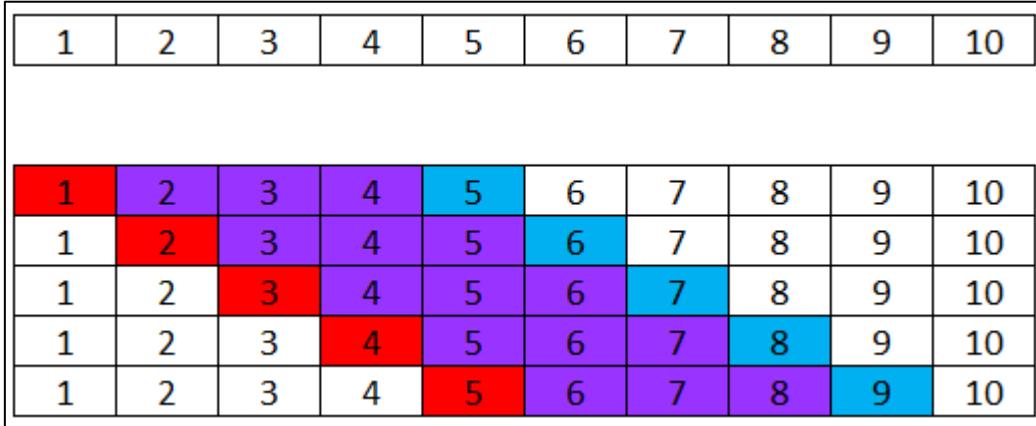


Figura 4.8: Esquema visual del avance progresivo de la doble ventana deslizante (DSW) a lo largo de una secuencia de ciclos.

La comparación entre ambas ventanas permite evaluar cuatro características clave: frecuencia, amplitud, desplazamiento vertical y área bajo la curva. Si alguna de estas propiedades presenta una diferencia mayor al umbral definido por el usuario, se identifica una posible desviación en la señal. Para confirmar dicha desviación, se realiza el mismo análisis tres veces más (el número de UMR traslapadas) conforme las ventanas avanzan de izquierda a derecha. Debido a este desplazamiento, si una desviación se marca inmediatamente al ser detectada, se señalaría erróneamente en el primer ciclo analizado por la segunda ventana, lo que no reflejaría con precisión el inicio real de la anomalía. Por tanto, solo tras cuatro iteraciones consecutivas de la misma desviación se logra ubicar correctamente la falla en el primer ciclo afectado por la anomalía, garantizando así precisión en la localización temporal del evento y minimizando posibles errores o falsas alarmas generadas por variaciones aisladas. Este enfoque fue diseñado considerando su futura evolución para distinguir claramente entre fallas mantenidas en el tiempo y eventos puntuales aislados, ofreciendo así mayores posibilidades de análisis detallado en estudios posteriores.

Una vez confirmada la presencia de una anomalía o desviación significativa, el algoritmo responde activando una alerta específica, imprimiendo y guardando automáticamente el tiempo exacto en el cual fue detectado el fallo. Inmediatamente después de registrar esta información, se ejecuta nuevamente el algoritmo de la DVC para recalcular la UMR, adaptándose así a la nueva condición de la señal, y procediendo nuevamente al modelado matemático correspondiente. Aunque la intención inicial es que el modelado y la detección

de anomalías operen simultáneamente en tiempo real, esta recalibración periódica garantiza que el algoritmo se mantenga siempre ajustado a las condiciones reales y actuales de la señal analizada.

La elección específica de esta técnica basada en umbrales adaptativos se fundamentó principalmente en sus ventajas ampliamente documentadas en la literatura técnica. Aunque existen otros métodos alternativos disponibles, la mayoría de estos operan con umbrales fijos y rígidos, los cuales no resultan adecuados para señales altamente variables como un electrocardiograma (ECG), caracterizados por ciclos con máximos y mínimos notablemente distintos entre sí.

4.9 Estructura y Funcionamiento del Algoritmo

En este apartado se describe claramente la estructura global y el funcionamiento detallado del algoritmo propuesto, haciendo énfasis en la secuencia específica de pasos e interacciones entre sus diferentes etapas. Para facilitar su comprensión visual, el diagrama de flujo general del algoritmo se encuentra en el Anexo A, mientras que el procedimiento específico utilizado para el modelado matemático se detalla en el Anexo B.

La ejecución del algoritmo inicia con la adquisición de datos, etapa fundamental donde se obtiene directamente la señal que será analizada. A continuación, se determina la UMR mediante la técnica DVC. Esta etapa consiste en inicializar dos ventanas consecutivas sobre la señal, comparando continuamente ambas ventanas para identificar similitudes que indiquen claramente una periodicidad. Si no se detecta dicha similitud, ambas ventanas incrementan su longitud progresivamente en una muestra hasta encontrar un patrón recurrente o alcanzar la longitud máxima de ventana establecida por el usuario. En caso de alcanzar este criterio de paro, las ventanas se desplazan simultáneamente hacia adelante una longitud igual a la longitud máxima de la ventana, continuando así la búsqueda en una nueva porción de la señal.

Capítulo 4. Metodología

Paralelamente, y de manera independiente al proceso principal en tiempo real, se ejecuta una técnica complementaria basada en la detección de máximos y mínimos locales. Esta técnica adicional se utiliza fuera de línea para analizar segmentos específicos de la señal en los cuales la DVC no identificó claramente una periodicidad. Este proceso paralelo permitirá identificar eventos transitorios puntuales estableciendo temporalmente su ocurrencia. De este modo, la técnica basada en máximos y mínimos actúa como un respaldo analítico que identifica y caracteriza patrones repetitivos y eventos aislados que podrían haber pasado inadvertidos durante el análisis en tiempo real.

Una vez identificada claramente la UMR, esta información se guarda para su posterior uso. A partir de ese momento, el algoritmo ejecuta simultáneamente y de forma paralela dos procesos clave: el modelado matemático de la señal y la detección automática de fallas o anomalías. Durante esta etapa combinada, si la detección de fallas no encuentra desviaciones significativas en la señal analizada, continúa monitoreando las nuevas muestras de la señal por tiempo indefinido. Sin embargo, si una anomalía es detectada, el algoritmo sale del modo de monitoreo y el proceso vuelve a iniciar desde la determinación de la UMR, ajustando dinámicamente el análisis a las nuevas condiciones presentadas por la señal entrante.

Por su parte, el proceso de modelado matemático detallado en el Anexo B inicia extrayendo la información sobre el patrón repetitivo (UMR). Inicialmente se ajustan los componentes armónicos (senoidales), seguidos posteriormente por los componentes transitorios (exponentiales, escalones e impulsos). Una vez identificados claramente estos componentes, se sustraen matemáticamente de la señal original para calcular la desviación residual. Si dicha desviación entre la señal original y el modelo generado resulta inferior a un umbral predefinido por el usuario, el proceso finaliza generando el modelo matemático definitivo; en caso contrario, se repite iterativamente el ajuste de componentes armónicos y transitorios hasta alcanzar la precisión requerida.

4.10 Limitaciones Metodológicas

Una limitación importante del modelo radica en la representación matemática de impulsos. La naturaleza de corta duración y difícil representación mediante técnicas convencionales fue abordada mediante técnicas específicas basadas en análisis de integrales sucesivas. Si bien dichas técnicas lograron identificar adecuadamente la ubicación y existencia de los impulsos, su magnitud presenta errores significativos con respecto a la señal modelada.

Para minimizar esta limitación, se recurrió principalmente a la exploración y aplicación de técnicas disponibles en la literatura especializada, particularmente aquellas destinadas al tratamiento específico de impulsos o eventos de corta duración. Asimismo, en términos computacionales, se plantean como futuras líneas de trabajo la implementación de métodos adicionales para optimizar el rendimiento del código, así como la consideración de hardware más potente para procesar muestras de mayor tamaño con mayor rapidez. A pesar de estas consideraciones, las limitaciones mencionadas no representan obstáculos importantes para futuras investigaciones, aunque sí constituyen aspectos que podrían mejorarse para incrementar aún más la eficiencia y exactitud de la metodología propuesta.

Capítulo



5

5 Resultados

Con el propósito de evaluar el desempeño y la versatilidad del algoritmo desarrollado, resulta esencial analizar en detalle los resultados derivados de su implementación práctica. En este capítulo se presentan los resultados relacionados con la determinación adaptativa de patrones repetitivos mediante la técnica de Doble Ventana Creciente en diversos contextos prácticos. Posteriormente, se evalúa el desempeño del algoritmo de modelado matemático mediante la comparación de diferentes señales contra su representación, tanto de manera gráfica como numérica. Por último, se evalúa la eficacia del algoritmo de detección de fallas, haciendo énfasis en los criterios estadísticos adoptados para dicha evaluación. Los resultados anteriores son finalmente analizados para establecer el grado en que los objetivos planteados originalmente fueron alcanzados, sentando las bases para las conclusiones presentadas en el capítulo 6.

5.1 Determinación Adaptativa de la Unidad Mínima Recurrente

El algoritmo de Doble Ventana Creciente (DVC) es aplicado a señales periódicas compuestas por características armónicas y transitorias. La Figura 5.1 muestra un ejemplo representativo compuesto por la suma de dos componentes senoidales, una de 10 Hz y otra de 20 Hz, sobre las cuales se superpone una modulación de 1 Hz que actúa como desplazamiento vertical. En este caso, el algoritmo identificó correctamente la UMR con duración de 0.1 segundos, valor

que corresponde al período de la frecuencia portadora principal (10 Hz). Este comportamiento es coherente con la lógica interna del algoritmo, el cual inicia su análisis con ventanas que capturan únicamente una muestra, incrementando progresivamente su tamaño hasta identificar la unidad mínima de recurrencia presente en la señal. En consecuencia, las componentes de mayor frecuencia como las de 10 Hz y 20 Hz se detectan primero, al ser las responsables de definir la UMR. Por el contrario, la modulación de 1 Hz representa una estructura periódica de mayor escala, que puede considerarse como otra unidad de recurrencia válida, pero no mínima.

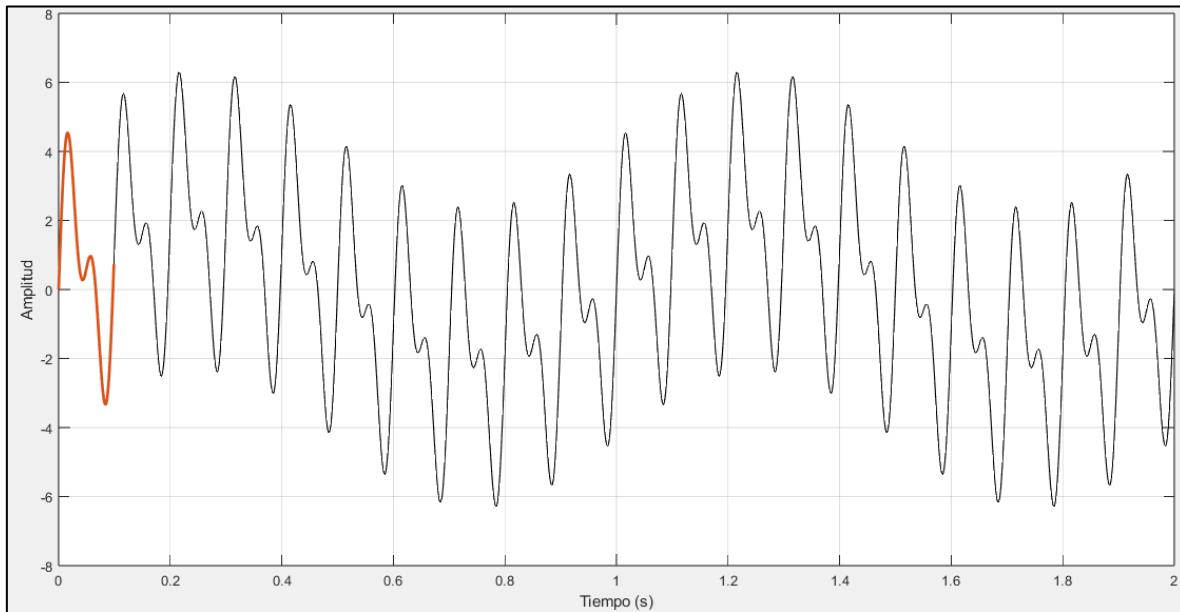


Figura 5.1: Gráfica de la señal periódica compuesta por dos frecuencias portadoras (10 Hz y 20 Hz) con una envolvente senoidal de 1 Hz.

Por su parte, la Figura 5.2 presenta un caso representativo en el que el algoritmo de DVC no es capaz de detectar la Unidad Mínima Recurrente (UMR). En este caso se presenta una ECG modificada de tal forma que el valor máximo del primer cuasi periodo (porción coloreada en azul) es menor que en los cuasi periodos subsecuentes. Debido a que el primer ciclo es único, es imposible para el algoritmo encontrar alguna recurrencia en el resto de la señal, por lo que se alcanza el criterio de paro preestablecido de un segundo sin que pueda encontrar la UMR. Ante la imposibilidad de encontrar la UMR, se activa la técnica auxiliar de detección de máximos y mínimos locales. Mediante la técnica auxiliar, es posible identificar

correctamente la estructura periódica subyacente (UMR) de la señal a pesar de que la desviación anteriormente detallada. Al identificar con precisión el intervalo temporal en el que ocurren los puntos R (valores más altos en los ciclos cardiacos), será posible para las etapas subsecuentes identificar apropiadamente la naturaleza de la desviación, proporcionando así una capacidad diagnóstica avanzada.

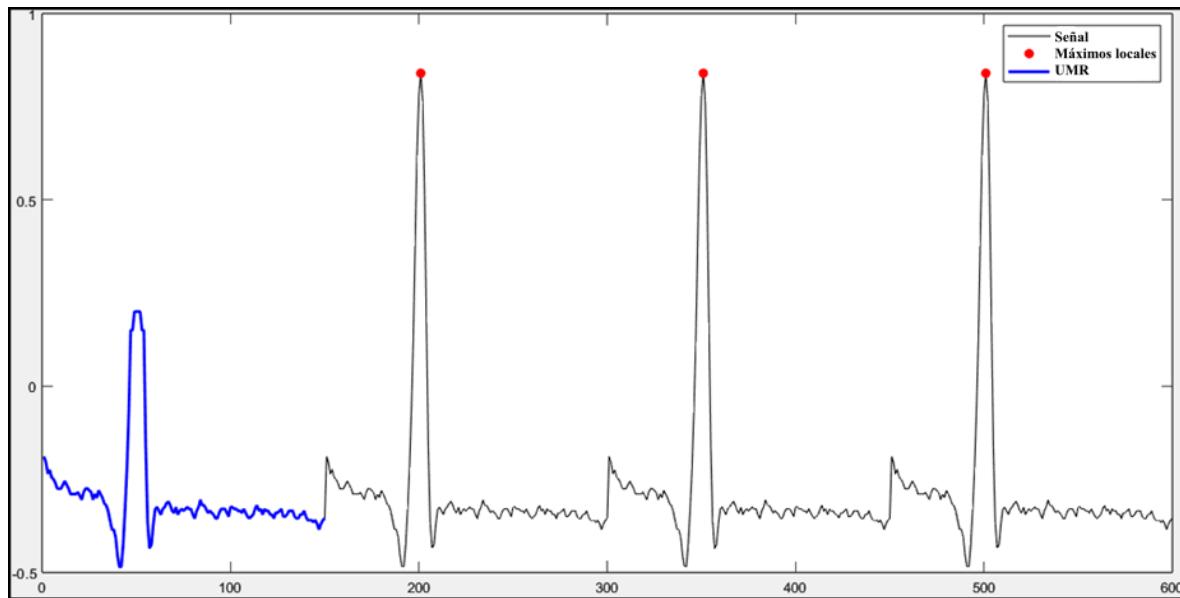


Figura 5.2: Gráfica de una señal ECG normal (60 Lpm) modificada mostrando el procedimiento auxiliar de máximos y mínimos locales para estimar la unidad mínima recurrente.

5.2 Modelado Matemático

Para validar el algoritmo de modelado matemático, se propone una señal que integra múltiples tipos de comportamientos característicos de señales reales. Esta señal incluye:

- Un primer componente senoidal con una amplitud de 2 unidades y una frecuencia fundamental de 5 Hz.
- Un segundo componente senoidal (segundo armónico) con una amplitud de 1.5 unidades y una frecuencia de 10 Hz.
- Una componente exponencial decreciente de amplitud inicial 0.5 unidades y constante de decaimiento 0.5, activa únicamente en el intervalo de 0 a 5 segundos.

- Un escalón de magnitud 3 ubicado en el instante de 5 segundos.
- Un escalón de magnitud -2 presente en el instante de 8 segundos.
- Un impulso de magnitud 13 localizado en 6.5 segundos.

Esta configuración fue diseñada con el propósito de que, mediante una misma señal, se pueda evaluar de manera integral la funcionalidad de cada uno de los procesos de ajuste descritos en la Sección 4.6 (Modelado matemático), permitiendo así una validación exhaustiva de la metodología propuesta.

A la señal descrita anteriormente, se agregó ruido de bajo nivel para simular condiciones más realistas y analizar la respuesta del algoritmo ante perturbaciones externas. Después de encontrar la UMR en la señal descrita previamente, se procedió con el proceso de modelado matemático conforme al procedimiento establecido en la Sección 4.6, aplicando los métodos específicos de ajuste para componentes senoidales, exponenciales, escalonados e impulsivos. La presencia de ruido fue también visualizada gráficamente para facilitar su análisis.

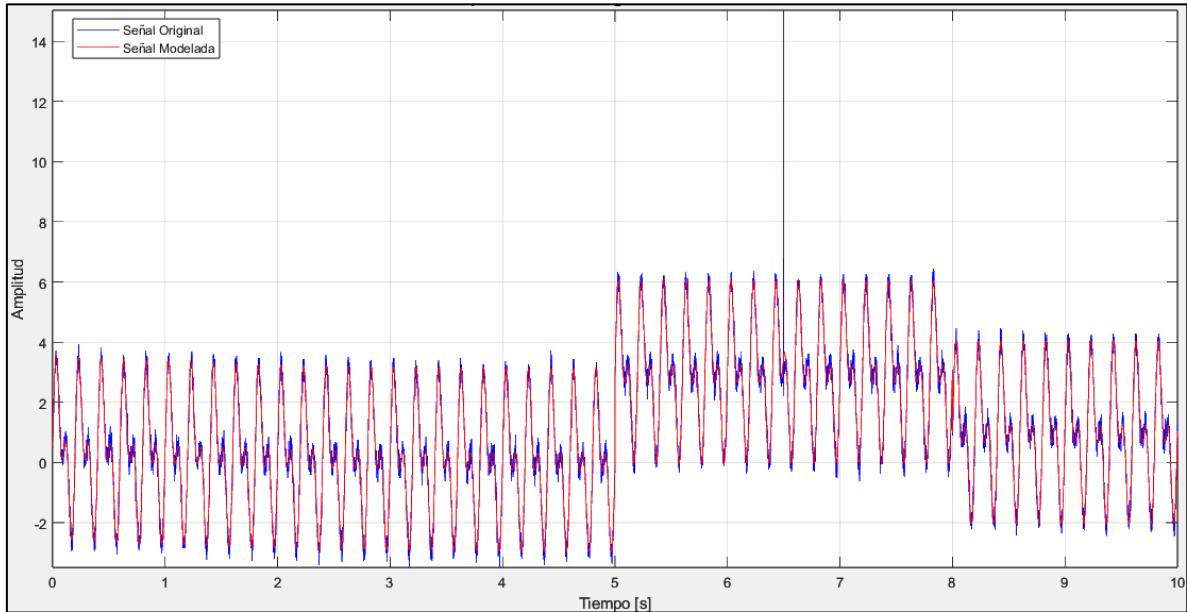


Figura 5.3: Grafica comparativa entre la señal original y la señal reconstruida mediante el modelado matemático.

La Figura 5.3 muestra la comparación entre la señal original compuesta y la señal reconstruida del modelo matemático obtenido. Se observa que tanto los componentes

armónicos (senoides) como los transitorios (exponencial, escalones e impulso) fueron modelados de manera precisa, conservando la estructura oscilatoria, los niveles de amplitud y las localizaciones temporales características de la señal original. Aunque se presentan ligeras diferencias en algunas magnitudes debido a los procesos internos de ajuste y discretización del programa, la reconstrucción obtenida reproduce de forma precisa los elementos fundamentales de la señal original.

Para complementar numéricamente estos resultados, la Tabla 5.1 presenta de manera estructurada los parámetros numéricos obtenidos mediante las técnicas de ajuste aplicadas durante el modelado. En ella se comparan directamente los valores reales utilizados para la construcción de la señal original utilizada, contra los valores obtenidos mediante el algoritmo de modelado, indicando el nivel de error para cada componente de la señal. Si bien se evidencian pequeñas desviaciones entre ambos conjuntos de datos, estas diferencias son mínimas y no comprometen la fidelidad ni la coherencia del modelo matemático.

Componente	Parámetros Originales	Parámetros del Modelo	Error Relativo
Senoidal 1	$2 \sin(2\pi \cdot 5t)$	$2.00 \sin(2\pi \cdot 5.00t + 0.02)$	1.00% (fase)
Senoidal 2	$1.5 \sin(2\pi \cdot 10t)$	$1.49 \sin(2\pi \cdot 10.00t + 0)$	0.67% (amplitud)
Exponencial	$0.5e^{-0.5t}, 0 \leq t \leq 5 \text{ seg}$	$0.49 e^{-0.48 \cdot t}$	2.04% (coeficiente)
Escalón 1	$3 \text{ en } t = 5 \text{ seg}$	$2.99 \cdot (t \geq 5.00)$	0.33% (magnitud)
Escalón 2	$-2 \text{ en } t = 8 \text{ seg}$	$-2.00 \cdot (t \geq 8.00)$	0.00%
Impulso	$13 \text{ en } t = 6.5 \text{ seg}$	$\frac{(t-6.50)^2}{0.64e^{2(0.01)^2}}$	95% (magnitud)
Impulso (AUC)	0.013	0.016	23.08%

Tabla 5.1: Comparación de los parámetros originales de la señal con los valores obtenidos mediante el algoritmo de modelado matemático.

El error entre la señal original y la modelada es considerado como ruido residual. Este ruido incluye, además de errores de modelado, cualquier componente que no se pueda representar como componentes senoidales, exponenciales, escalones o impulsos. Como ejemplo, en la Figura 5.4 se muestra gráficamente el ruido residual tras eliminar la información modelada.

Puede observarse que en el ruido resultante no se aprecia información relevante ni patrones que sugieran errores de modelado, en su lugar, se aprecia información aleatoria. Para ofrecer flexibilidad adicional al método propuesto, de acuerdo a las necesidades del usuario, este ruido puede ser almacenado para su análisis detallado, o bien, ser descartado.

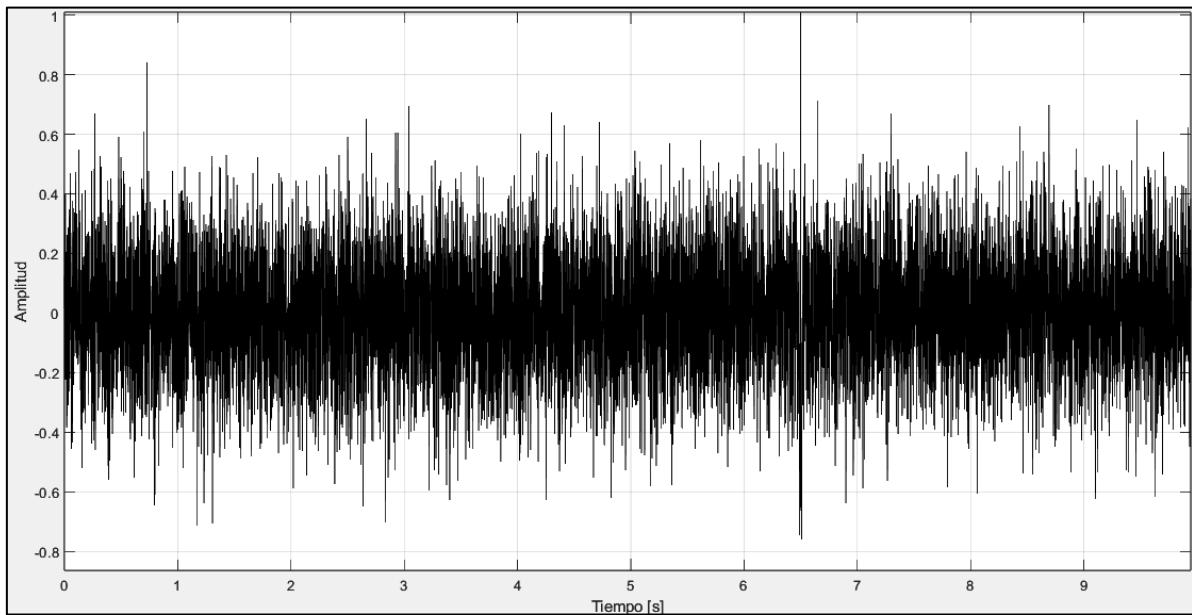


Figura 5.4: Gráfica del ruido residual obtenido tras el proceso de modelado matemático.

5.3 Resultados Estadísticos del Modelado Matemático

El primer parámetro estadístico evaluado fue el error relativo del área bajo la curva (RE-AUC), obtenido mediante la comparación directa entre la señal original y la señal reconstruida del modelo matemático obtenido. Esta métrica mide específicamente qué tan bien la señal modelada captura la forma global de la señal real, evaluando numéricamente la desviación acumulada en términos relativos. El resultado obtenido, con un valor de tan solo 0.22%, indica una muy buena coincidencia entre ambas señales, confirmando que el modelo representa de forma prácticamente idéntica las características esenciales de la señal original.

Adicionalmente, se evaluó el coeficiente de precisión de señal (CPS), el cual representa la correlación global entre la señal original y la señal reconstruida. Este parámetro se obtuvo al

comparar punto a punto ambas señales, determinando numéricamente qué tan cercanos son los valores reconstruidos respecto a los originales. Un resultado de CPS del 99.82% implica que el modelo logró reproducir la señal original con mucha fidelidad, reflejando una mínima pérdida de información durante el proceso de modelado.

El tercer parámetro analizado fue el error porcentual medio (MPE), que mide la desviación promedio en términos porcentuales de los valores estimados por el modelo respecto a los valores originales observados en la señal original. Para calcular esta métrica se consideró la diferencia entre cada valor estimado y el valor real correspondiente, promediando dichas diferencias en toda la señal. El valor obtenido de MPE, del 0.51%, muestra que, en promedio, los puntos reconstruidos por el modelo presentan una desviación muy baja en comparación con la señal real, garantizando precisión incluso en los detalles más específicos.

Finalmente, se calculó el error cuadrático medio (MSE), una métrica estándar que evalúa la magnitud promedio de las desviaciones entre los valores de la señal original y la reconstruida, elevadas al cuadrado. Esta métrica penaliza particularmente las desviaciones más grandes, proporcionando una evaluación robusta frente a errores puntuales significativos. El resultado del MSE obtenido fue de apenas 0.79%, confirmando que no solo las diferencias promedio, sino también las desviaciones más marcadas entre ambas señales, son mínimas.

5.4 Aplicación del Modelo Matemático en Señales ECG

Adicionalmente, se llevaron a cabo pruebas utilizando señales reales provenientes de electrocardiogramas (ECG) obtenidos de la base de datos del sitio en línea Kaggle. Para cada señal se realizó un análisis numérico detallado con el objetivo de examinar cómo las variaciones en el ritmo cardíaco y las condiciones patológicas se reflejan en los parámetros extraídos del modelo. Este análisis proporcionará información relevante sobre la capacidad del modelo para capturar dinámicamente cambios en las formas de onda del ECG, demostrando su potencial para la detección y caracterización de anomalías mediante análisis armónico.

En la primera prueba se observó cómo las variaciones en el ritmo cardíaco afectan los parámetros frecuenciales obtenidos del modelo. Se analizaron señales con ritmo cardíaco normal, frecuencia cardíaca elevada (taquicardia) y ritmo cardíaco bajo (bradicardia). Los resultados numéricos obtenidos, presentados en la Tabla 5.2, muestran cómo la frecuencia extraída varía proporcionalmente al ritmo cardíaco observado. Otros parámetros, como amplitud, fase y número de armónicos, permanecen sin cambio. Este comportamiento permite identificar condiciones específicas relacionadas con la frecuencia cardíaca, donde la diferencia en frecuencia es notable desde el primer componente armónico extraído.

		60 Lpm		120 Lpm		30 Lpm	
Comp.	Fase	Amp.	Hz	Amp.	Hz	Amp.	Hz
1	342.31°	0.095	1	0.095	2	0.095	0.5
2	211.01°	0.068	2	0.068	4	0.068	1
3	80.48°	0.091	3	0.091	6	0.091	1.5
4	334.13°	0.098	4	0.098	8	0.098	2
5	213.73°	0.084	5	0.084	10	0.084	2.5
6	90.73°	0.095	6	0.095	12	0.095	3
7	343.04°	0.095	7	0.095	14	0.094	3.5
8	226.71°	0.077	8	0.077	16	0.077	4
9	101.11°	0.080	9	0.080	18	0.079	4.5
10	348°	0.070	10	0.070	20	0.069	5
11	229.45°	0.053	11	0.053	22	0.052	5.5
12	100.3°	0.053	12	0.053	24	0.052	6
13	349.82°	0.045	13	0.045	26	0.044	6.5
14	216.46°	0.029	14	0.029	28	0.028	7
15	85.33°	0.029	15	0.029	30	0.028	7.5
16	342.73°	0.026	16	0.026	32	0.025	8
17	204.66°	0.017	17	0.017	34	0.017	8.5
18	66.22°	0.019	18	0.019	36	0.018	9
19	308.96°	0.015	19	0.015	38	0.014	9.5
20	159.42°	0.010	20	0.010	40	0.010	10
21	37.05°	0.013	21	0.013	42	0.012	10.5
22	297.97°	0.009	22	0.009	44	0.009	11
23	137.55°	0.006	23	0.006	46	0.006	11.5
24	48.58°	0.008	24	0.008	48	0.008	12

Tabla 5.2: Descomposición armónica de formas de onda del electrocardiograma a través de diferentes frecuencias cardíacas.

Para la segunda prueba se analizaron los cambios en el modelo debido a una insuficiencia aórtica, condición patológica que introduce irregularidades ciclo a ciclo en la señal ECG. Esta condición modifica directamente la morfología interna de cada ciclo individual, provocando la aparición de componentes adicionales de baja frecuencia en el espectro armónico. La Figura 5.5 muestra una señal ECG afectada por insuficiencia aórtica. En esta representación gráfica es posible observar visualmente cómo la presencia de esta condición modifica significativamente la morfología de los ciclos, afectando su periodicidad y estructura interna.

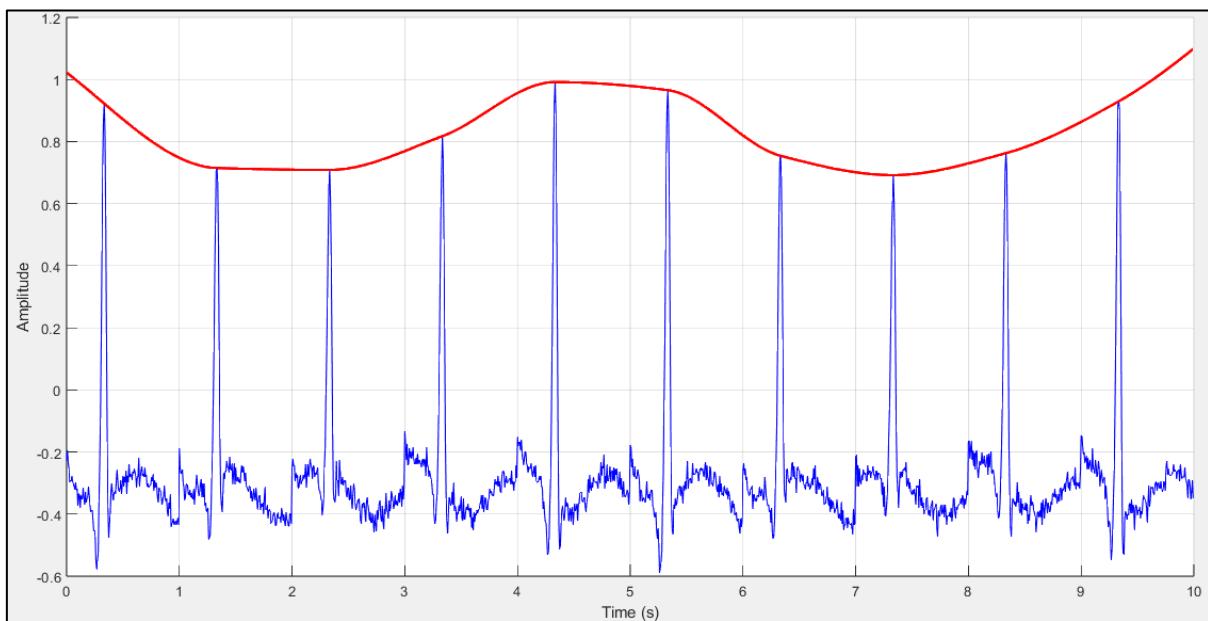


Figura 5.5: Visualización de diez ciclos de una señal de electrocardiograma de un paciente con insuficiencia aórtica.

Estos cambios visuales también se reflejan en el dominio de la frecuencia. De acuerdo con los resultados presentados en la Tabla 5.3, el modelo obtenido a partir de esta señal muestra dos armónicos adicionales en comparación con un modelo de señal normal. En particular, los armónicos 2 y 20 evidencian modificaciones estructurales importantes, destacando el hecho de que el segundo componente presenta una frecuencia que no corresponde a un múltiplo exacto de la frecuencia fundamental. Este comportamiento constituye un indicador matemático temprano de la presencia de insuficiencia aórtica, validando la utilidad del análisis armónico como herramienta de diagnóstico complementaria.

Comp	60 Lpm			Insuficiencia		
	Amp.	Hz	Fase	Amp	Hz	Fase
1	0.095	1	342.31°	0.096	1	342.45
2	0.068	2	211.01°	0.057	1.2	171.03
3	0.091	3	80.48°	0.069	2	210.95
4	0.098	4	334.13°	0.091	3	80.5
5	0.084	5	213.73°	0.097	4	333.83
6	0.095	6	90.73°	0.082	5	213.63
7	0.095	7	343.04°	0.095	6	91.36
8	0.077	8	226.71°	0.094	7	343.87
9	0.080	9	101.11°	0.076	8	227.02
10	0.070	10	348°	0.08	9	101.58
11	0.053	11	229.45°	0.069	10	347.42
12	0.053	12	100.3°	0.053	11	229.58
13	0.045	13	349.82°	0.052	12	99.85
14	0.029	14	216.46°	0.044	13	348.12
15	0.029	15	85.33°	0.03	14	216.55
16	0.026	16	342.73°	0.028	15	85.49
17	0.017	17	204.66°	0.025	16	346.3
18	0.019	18	66.22°	0.017	17	201.16
19				0.019	18	67.35
20				0.015	19	309.71

Tabla 5.3: Comparación de los componentes armónicos extraídos de un ECG normal y uno con insuficiencia aórtica presente.

5.6 Optimización del Espacio de Almacenamiento

De manera intuitiva puede inferirse que, el representar una señal con una expresión matemática en lugar de almacenar todos los puntos que la componen, resulta en reducciones significativas en el espacio de almacenamiento. Esta optimización es particularmente relevante en aplicaciones donde se requiere la grabación y análisis de señales durante largos períodos de tiempo. Para evaluar esta ventaja, se realizó una comparación detallada del tamaño de archivo generado por la señal original (datos crudos) frente al tamaño del archivo correspondiente generado por la representación matemática. Esta comparación se realizó considerando diferentes longitudes de tablas de datos. Los resultados obtenidos de esta comparación se muestran en la Tabla 5.4, la cual presenta una estimación precisa del tamaño de archivo requerido por señales ECG de distintas duraciones (desde 10 segundos hasta 1 día

completo). La tabla revela claramente que, mientras los datos crudos presentan un incremento proporcional a la duración de la señal, el tamaño del archivo resultante del modelo matemático permanece constante. Esta diferencia se debe a que, siempre y cuando no haya cambios en la señal representada, el modelo matemático será válido a lo largo de toda la longitud de muestreo.

	Datos Crudos	Modelo
	Tamaño del Archivo	Tamaño del Archivo
10 seg	18 kb	629 b
1 min	108 kb	629 b
1 hora	8.33 Mb	629 b
1 día	150 Mb	629 b

Tabla 5.4: Comparación del tamaño de archivos entre los datos crudos y el modelo matemático en distintas duraciones de una señal ECG.

Estos resultados demuestran que, utilizando el modelo matemático propuesto, se logra una reducción sustancial en los requerimientos de almacenamiento. Este comportamiento evidencia el enorme potencial práctico del método propuesto, facilitando considerablemente la gestión, almacenamiento y procesamiento de grandes volúmenes de información en aplicaciones médicas e industriales donde la eficiencia del almacenamiento es un factor crítico.

5.7 Detección de Fallas

El objetivo principal de esta prueba fue validar si el algoritmo identifica correctamente los cambios estructurales en la señal, esto sin requerir ajustes manuales ni intervención externa. En concordancia con el esquema general del algoritmo, después de obtener la UMR, el proceso de modelado matemático de la señal y el proceso de identificación de fallas ocurren de forma paralela. La señal considerada en esta prueba corresponde a la combinación de dos componentes senoidales de baja frecuencia, específicamente de 1 Hz y 2 Hz, con amplitudes de 2 y 1 unidades, respectivamente. Esta configuración inicial representa un comportamiento periódico y estable, característico de sistemas operativos en condiciones normales.

Para evaluar la efectividad del algoritmo propuesto, se introdujeron deliberadamente cinco fallas distribuidas en distintos momentos de la señal. Cada una de estas fallas consistió en alteraciones específicas de las frecuencias y amplitudes originales, simulando eventos transitorios o cambios bruscos en las condiciones de operación del sistema. Las fallas fueron introducidas en los tiempos de 3.2, 5.7, 7.5, 13.0 y 15.0 segundos, respectivamente, simulando eventos transitorios o cambios abruptos en las condiciones de operación del sistema. Estas alteraciones obligan al método a detectar oportunamente las desviaciones respecto al comportamiento esperado. La Figura 5.6 ilustra la señal resultante, en la que se indica, mediante líneas verticales punteadas, los instantes en que el algoritmo detecta de cada falla.

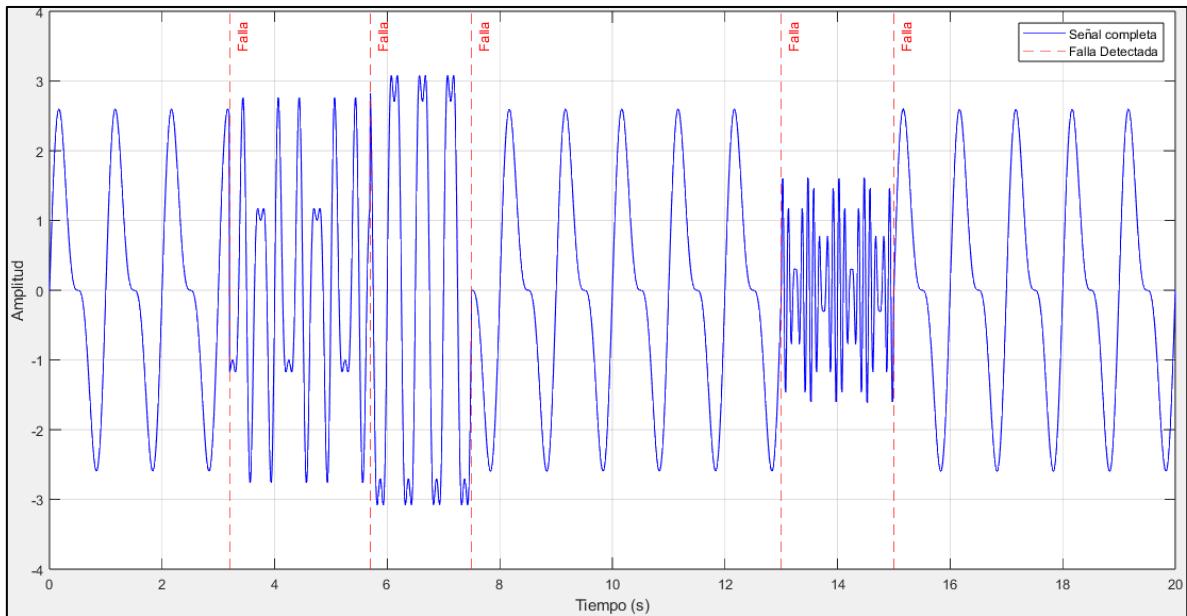


Figura 5.6: Grafica de la señal eléctrica en la que se indican visualmente los instantes exactos de detección de anomalías mediante líneas verticales punteadas.

La Figura 5.7 presenta una captura de pantalla de la consola de MATLAB donde se registran los tiempos de detección de cada falla tras cumplirse el criterio establecido. Los resultados obtenidos muestran que el algoritmo detectó correctamente cada uno de los cambios introducidos en la dinámica de la señal, identificando de manera oportuna eventos súbitos o alteraciones en las condiciones de operación.

```

>> Deteccion_de_Fallas
UMR Encontrada: 50 muestras (0.50 s)
Iniciando detección de fallas...
Falla detectada en 3.20 segundos
Falla detectada en 5.70 segundos
Falla detectada en 7.50 segundos
Falla detectada en 13.00 segundos
Falla detectada en 15.00 segundos
fx >>

```

Figura 5.7: Captura de pantalla de la consola de MATLAB mostrando los tiempos de detección de las fallas.

En este escenario se observaron múltiples eventos independientes, en donde no necesariamente se retorna a un estado base antes de la aparición de una nueva falla. Este comportamiento refleja que el algoritmo puede adaptarse dinámicamente a secuencias de eventos anómalos, actualizando automáticamente su análisis en función del periodo recurrente previamente determinado. Es importante señalar que, debido a la lógica adaptativa del método, la detección de fallas consecutivas cercanas en el tiempo no implica la recuperación a un estado original entre ellas, sino que puede representar la ocurrencia inmediata de eventos independientes. Esta característica podría considerarse una limitación en aplicaciones que requieran distinguir con precisión las transiciones de inicio y fin de cada evento. No obstante, para los fines de detección temprana de fallas en señales periódicas, el desempeño observado resulta consistente y adecuado para los objetivos planteados.

5.8 Funcionamiento Global del Algoritmo

En los apartados anteriores se presentaron de forma independiente los resultados específicos obtenidos en las tres etapas fundamentales que integran el algoritmo propuesto: la determinación adaptativa de la UMR mediante la técnica de DVC; el modelado matemático de señales periódicas y transitorias; y la detección automática de anomalías o desviaciones. Sin embargo, es fundamental destacar que estas etapas forman parte integral de un proceso continuo y dinámico, diseñado para operar de manera ininterrumpida mientras recibe señales

de entrada en tiempo real. Por consiguiente, aunque para fines expositivos en este capítulo se analizaron por separado, en un contexto operativo real estas etapas trabajan conjuntamente dentro de un ciclo permanente y cerrado.

Durante el funcionamiento integral del algoritmo, la DVC determina automáticamente la UMR de la señal entrante, permitiendo así establecer los parámetros necesarios para realizar un modelado matemático preciso. Posteriormente, este proceso de modelado se ejecuta simultáneamente con la etapa de detección automática de anomalías, garantizando que cualquier alteración significativa en la estructura interna de la señal sea identificada y registrada de inmediato. Cuando se detecta una anomalía específica, el algoritmo no solo registra el instante exacto en que ocurre dicho evento, sino que también reacciona recalculando automáticamente el periodo fundamental mediante una nueva ejecución del algoritmo de DVC. Este recálculo permite ajustar dinámicamente los parámetros del modelado matemático a la nueva condición detectada en la señal.

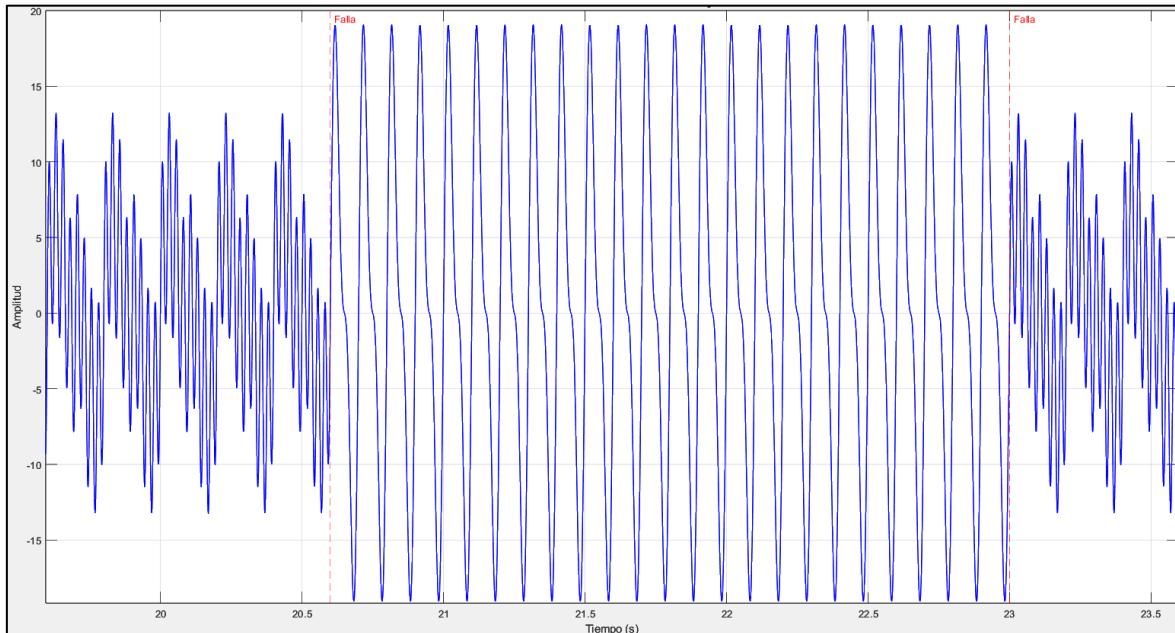


Figura 5.8: Señal de prueba compuesta por múltiples componentes, utilizada para validar el funcionamiento integral del algoritmo.

La Figura 5.8 muestra la señal de prueba empleada para evaluar el funcionamiento integral del algoritmo propuesto. Esta señal fue construida como una combinación de cuatro

componentes senoidales, con frecuencias de 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz y 40 Hz, y amplitudes respectivas de 5, 3, 1 y 7 unidades. Sobre esta configuración base se introdujo una falla deliberada en un intervalo de tiempo definido, mediante la sustitución de las componentes originales por una nueva combinación armónica compuesta por una senoidal de 10 Hz con amplitud 15 y otra de 20 Hz con amplitud 7. El inicio de esta alteración debía ser detectado automáticamente como una falla, mientras que el retorno a la configuración original debía ser identificado como una segunda falla.

En la Figura 5.9 se muestra una captura del panel de salida de Matlab, donde se observa detalladamente cómo interactúan en tiempo real las diferentes etapas del algoritmo ante la presencia de anomalías. Inicialmente, el algoritmo determinó un periodo fundamental de 0.20 segundos y realizó un modelado matemático preciso utilizando cuatro componentes senoidales claramente identificados. Al detectar la primera anomalía en a los 20.6 segundos, recalculó automáticamente el nuevo periodo a 0.099 segundos, generando de inmediato un modelo matemático actualizado y adaptado a las nuevas condiciones. Posteriormente, al detectar una segunda anomalía a los 23 segundos, el algoritmo reajustó el periodo fundamental al valor original de 0.20 segundos y volvió a generar un modelo adaptado, demostrando adaptación dinámica ante cambios sucesivos en la señal.

```
>> Algoritmo_Completo
Periodo inicial detectado: 0.200 segundos
Ejecutando modelado matemático...
El proceso ha convergido.
Modelo de la señal: 7.001 sen(2π[40.00]t + -0.01) + 5.012 sen(2π[4.98]t + 0.11) + 2.982 sen(2π[10.00]t + 0.02) + 0.992 sen(2π[20.00]t + -0.00)
Iniciando detección de anomalías...
Anomalía Detectada en 20.600 s
Se detectó un nuevo periodo tras anomalía en 20.600s de 0.099 segundos
Generando nuevo modelo matemático
El proceso ha convergido.
Modelo de la señal: 14.998 sen(2π[10.00]t + 0.64) + 6.990 sen(2π[20.00]t + -0.01)
Anomalía Detectada en 23.000 s
Se detectó un nuevo periodo tras anomalía en 23.000s de 0.200 segundos
Generando nuevo modelo matemático
El proceso ha convergido.
Modelo de la señal: 7.001 sen(2π[40.00]t + -0.17) + 5.012 sen(2π[4.98]t + 2.73) + 2.982 sen(2π[10.00]t + 0.48) + 0.992 sen(2π[20.00]t + -0.06)
```

Figura 5.9: Captura de pantalla de la ventana de salida de MATLAB, donde se muestran los resultados generados automáticamente por el algoritmo propuesto.

Estos resultados combinados, tanto gráficos como numéricos, confirman en la práctica que todas las etapas del algoritmo funcionan correctamente de forma conjunta, cumpliendo con

Capítulo 5. Resultados

la expectativa de operar continuamente y reaccionar automáticamente ante cualquier alteración significativa en las señales analizadas. La efectividad mostrada por la interacción dinámica y fluida entre las etapas de determinación adaptativa, modelado matemático y detección de anomalías valida el potencial del algoritmo para aplicaciones prácticas en escenarios reales.

6 Conclusiones y Recomendaciones

La evaluación rigurosa del desarrollo metodológico y la interpretación precisa de los resultados obtenidos permiten formular conclusiones claras acerca de la efectividad y las contribuciones específicas del algoritmo desarrollado. De manera particular, destacan las características de cada una de las etapas clave que integran el método propuesto, tales como la determinación adaptativa del patrón mínimo recurrente, la generación de un modelo matemático compacto y eficaz para señales periódicas y transitorias, y la detección dinámica y precisa de anomalías en tiempo real. A partir de estas conclusiones fundamentales, se establecen recomendaciones orientadas tanto a futuras investigaciones como a posibles implementaciones prácticas, buscando promover la evolución continua del conocimiento y facilitar la aplicación efectiva del método desarrollado en contextos relevantes.

6.1 Conclusiones

La Unidad Mínima Recurrente, como marco conceptual más robusto que el concepto clásico de período, se propone como una alternativa para superar las limitaciones del análisis de señales que no son estrictamente periódicas. Esta visión más amplia permite describir estructuras complejas que, aunque no sean periódicas en sentido estricto, conservan regularidades suficientes como para ser consideradas cuasi-periódicas. El planteamiento de

la Unidad Mínima Recurrente abre una vía para abordar señales con oscilaciones irregulares o eventos transitorios que quedarían fuera del alcance de los métodos convencionales en contextos donde la variabilidad de la señal es significativa pero no caótica.

La técnica de Doble Ventana Creciente es una modificación de los métodos de ventanas (windowing) desarrollados en el ámbito de la computación y la ciencia de datos para identificar patrones de interés. Al utilizar dos ventanas que crecen de manera paralela, la técnica posibilita la identificación de estructuras durante el propio proceso de exploración. Esta capacidad de descubrimiento en tiempo real la convierte en una herramienta sólida para enfrentar un flujo continuo de muestras, sin requerir conocimiento estructural del conjunto de datos. Además, el esquema propuesto posee una naturaleza transversal que lo hace independiente del dominio específico de aplicación, permitiendo su implementación en contextos tan diversos como el análisis de vibraciones mecánicas o el monitoreo de tráfico en redes informáticas.

Cuando las dos ventanas consecutivas comienzan a divergir, se evidencia inmediatamente un cambio en el régimen operativo, proporcionando alertas tempranas sin afectar negativamente el desempeño en tiempo real del sistema. Además, este mecanismo, al operar con parámetros derivados directamente de la propia señal, se convierte en un detector adaptable de fallas que no requiere ajustes adicionales al trasladarse a distintos entornos.

La representación matemática de señales utilizando exclusivamente componentes senoidales resulta en un número muy grande de armónicos. La incorporación de funciones exponenciales, escalones e impulsos para modelar la señal de interés permite reducir significativamente la cantidad de coeficientes requeridos, preservando la fidelidad de la información original y logrando un equilibrio óptimo entre precisión y simplicidad estructural. Como consecuencia, los coeficientes resultantes no solo sintetizan la señal de manera fiel, sino que también operan como descriptores representativos de su comportamiento dinámico. Esto permite detectar de manera intuitiva patrones significativos sin necesidad de recurrir a procesos de análisis adicionales de ingeniería de características,

por ejemplo, para inferir condiciones fisiológicas (en medicina) o identificar tipos de fallas en sistemas eléctricos.

El modelo propuesto también permite representar una señal con una expresión válida durante el periodo de tiempo en que la señal sea constante. Esto resulta en que, sin importar el tiempo de observación, una señal puede representarse con un tamaño de archivo pequeño, característica que resulta útil para reducir el tráfico de red, la latencia y el consumo energético. Esta eficiencia no solo se traduce en beneficios económicos tangibles y un impacto ambiental positivo, sino que también permite enfocar los recursos de análisis exclusivamente en los eventos únicos o transitorios, facilitando una evaluación más precisa de las fallas, sus causas y su impacto sobre la dinámica de la señal. De este modo, el modelo contribuye tanto a la sostenibilidad tecnológica como a una mayor eficacia diagnóstica.

La integración iterativa del ciclo UMR-modelo-detección, permite que el sistema se reajuste automáticamente tras la aparición de cada desviación significativa en la señal. Este mecanismo de autoajuste continuo garantiza una actualización constante de los parámetros de caracterización y detección de eventos sin importar los cambios en el sistema. Tal propiedad resulta especialmente valiosa en contextos donde el acceso físico es limitado, como en entornos remotos, sistemas embebidos o plataformas críticas que requieren alta disponibilidad. En conjunto, esta adaptabilidad incrementa la autonomía operativa del sistema y refuerza su confiabilidad en escenarios de larga duración o condiciones cambiantes.

6.2 Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos y las limitaciones identificadas durante este trabajo, se plantean varias recomendaciones orientadas a mejorar y ampliar la propuesta metodológica desarrollada. En primer lugar, se sugiere investigar estrategias que pudieran ser más eficaces para representar impulsos de muy corta duración, ya que estos eventos, por su naturaleza abrupta, resultan difíciles de capturar con precisión en esquemas de muestreo convencional.

Métodos como el muestreo no uniforme o técnicas de ajuste con funciones especializadas podrían mejorar su modelado sin comprometer la eficiencia del sistema.

La técnica de Doble Ventana Creciente presenta diferentes oportunidades de mejora. Variantes más flexibles permitirían detectar patrones repetitivos con mayor sensibilidad en señales altamente variables o contaminadas por ruido. También, mecanismos que ajusten automáticamente el tamaño de las ventanas al contenido de la señal, facilitarían su aplicación en un espectro más amplio de señales sin la necesidad de ajustes manuales.

Respecto al modelado matemático, es importante estudiar con mayor profundidad el comportamiento de los coeficientes, ya que éstos pueden reflejar cambios internos en los sistemas analizados. Además de su valor como representación de la señal, estos parámetros podrían ser útiles para tareas de análisis más avanzadas mediante técnicas estadísticas, clasificación supervisada, reglas heurísticas o incluso métodos híbridos. Incluir diferentes estrategias permitiría ampliar las capacidades del modelo sin limitarse únicamente a enfoques basados en inteligencia artificial.

Desde el punto de vista técnico, se sugiere trabajar en la implementación y optimización del algoritmo para que su ejecución sea aún más rápida y eficiente, especialmente en plataformas de bajo desempeño o sistemas embebidos. Adaptar su implementación a dispositivos como microcontroladores o procesadores compactos permitiría desplegarlo en tiempo real en contextos donde los recursos computacionales son limitados.

En cuanto al uso del modelo como herramienta de almacenamiento optimizado, se recomienda explorar la incorporación de nuevas funciones base, como rampas, segmentos polinomiales o funciones logarítmicas. Estas podrían ayudar a representar comportamientos de la señal que no se ajusten bien a las funciones actuales, permitiendo una reconstrucción más precisa y compacta. A futuro, el modelo podría ampliarse modularmente con estos nuevos componentes para ajustarse a una mayor variedad de señales.

Bibliografía

- [1] V. Oppenheim and R. W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2009.
- [2] R. N. Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2000.
- [3] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, 4th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2006.
- [4] S. Fich, Transient Analysis in Electrical Engineering, 1st ed. New York, NY, USA: Prentice-Hall, 1957.
- [5] L. Shenkman, Transient Analysis of Electric Power Circuits Handbook, 1st ed. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2005.
- [6] Peterson, Transient Signals on Transmission Lines: An Introduction to Non-Ideal Effects and Signal Integrity Issues in Electrical Systems, 1st ed. San Rafael, CA, USA: Morgan & Claypool Publishers, 2009.
- [7] S. W. Smith, The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, 2nd ed. San Diego, CA, USA: California Technical Publishing, 1999.
- [8] V. Oppenheim and R. W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2009.
- [9] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalvès, "On empirical mode decomposition and its algorithms," in Proc. IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP), Grado, Italy, Jun. 2003, pp. 8–11.
- [10] P. Bradley, "The use of the area under the ROC curve in the evaluation of machine learning algorithms," Pattern Recognition, vol. 30, no. 7, pp. 1145–1159, 1997.
- [11] T. O. Hodson, T. M. Over, and S. S. Foks, "Mean squared error, deconstructed," Journal of Advances in Modeling Earth Systems, vol. 13, no. 12, Dec. 2021.
- [12] S. Makridakis, S. C. Wheelwright, and R. J. Hyndman, Forecasting: Methods and Applications, 3rd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 1998.

- [13] J. Krebs, Ecological Methodology, 2nd ed. Menlo Park, CA, USA: Benjamin/Cummings, 1999.
- [14] Lu and D. M. Ricciuto, "Efficient surrogate modeling methods for large-scale Earth system models based on machine-learning techniques," *Geoscientific Model Development*, vol. 12, no. 5, pp. 1791–1807, May 2019.
- [15] Fogel and M. Gavish, "Performance evaluation of zero-crossing-based bit synchronizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 1107–1121, Oct. 1989.
- [16] M. Sadler and S. D. Casey, "Sinusoidal frequency estimation via sparse zero crossings," *J. Franklin Inst.*, vol. 337, no. 2, pp. 131–145, Mar. 2000.
- [17] Z. Yang and L. Xie, "Exact joint sparse frequency recovery via optimization methods," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 64, no. 19, pp. 5145–5157, Oct. 2016. doi: 10.1109/TSP.2016.2576422.
- [18] M. Sadler and A. Swami, "Sinusoidal frequency estimation via sparse zero crossings," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, May 1996, pp. 1315–1318. doi: 10.1109/ICASSP.1996.550183.
- [19] V. Friedman, "A zero crossing algorithm for the estimation of the frequency of a single sinusoid in white noise," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 6, pp. 1565–1569, Jun. 1994. doi: 10.1109/78.286978.
- [20] R. W. Schafer and L. R. Rabiner, "System for automatic formant analysis of voiced speech," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. 16, no. 2, pp. 209–217, Jun. 1968. doi: 10.1109/TAU.1968.1161984.
- [21] M. Mboup, "Parameter estimation for signals described by differential equations," *Applicable Analysis*, vol. 88, no. 9, pp. 1349–1365, 2009. doi: 10.1080/00036810802555441.
- [22] H. Xie and Z. Wang, "Mean frequency derived via Hilbert-Huang transform with application to fatigue EMG signal analysis," *Comput. Methods Programs Biomed.*, vol. 82, no. 2, pp. 114–120, May 2006. doi: 10.1016/j.cmpb.2006.02.009.
- [23] Farina and R. Merletti, "Comparison of algorithms for estimation of EMG variables during voluntary isometric contractions," *J. Electromyogr. Kinesiol.*, vol. 10, no. 5, pp. 337–349, Oct. 2000. doi: 10.1016/S1050-6411(00)00025-0.

- [24] H. Ye, W. Jiang, y Z. Liu, “Efficient maximum-likelihood period estimation from incomplete timing data,” en Proc. Int. Conf. Automatic Control and Artificial Intelligence (ACAI), Mar. 2012, doi: 10.1049/cp.2012.1135.
- [25] S. C. Sekhar and T. V. Sreenivas, “Adaptive window zero-crossing-based instantaneous frequency estimation,” EURASIP J. Adv. Signal Process., vol. 2004, no. 12, pp. 1791–1806, 2004. doi: 10.1155/S111086570440417X.
- [26] J. Cao, Y. Xiao, Q. Hao, and Y. Cheng, “Using adaptive window and non-uniform sampling model to improve autofocusing performances,” in Proc. Frontiers in Optics (FIO), Washington, DC, USA, Sep. 2018, paper JW4A.128. doi: 10.1364/FIO.2018.JW4A.128.
- [27] V. Braverman, R. Ostrovsky, and C. Zaniolo, “Optimal sampling from sliding windows,” in Proc. 28th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symp. Principles of Database Systems (PODS), Providence, RI, USA, Jun. 2009, pp. 147–156. doi: 10.1145/1559795.1559818.
- [28] A. Berényi, G. Benedek, and A. Nagy, “Double sliding-window technique: A new method to calculate the neuronal response onset latency,” Brain Res., vol. 1178, pp. 141–148, Oct. 2007. doi: 10.1016/j.brainres.2007.08.041.
- [29] C. K. Koç, “Analysis of sliding window techniques for exponentiation,” Comput. Math. Appl., vol. 30, no. 10, pp. 17–24, 1995. doi: 10.1016/0898-1221(95)00153-P.
- [30] Z. Yang and H. Arakawa, “A double sliding-window method for baseline correction and noise estimation for Raman spectra of microplastics,” Mar. Pollut. Bull., vol. 190, p. 114887, May 2023. doi: 10.1016/j.marpolbul.2023.114887.
- [31] Q. Lian, Q. Chen, L. Zhou, Y. He, and X. Xie, “Adaptive decoding algorithm with variable sliding window for double SC-LDPC coding system,” IEEE Commun. Lett., vol. 27, no. 2, pp. 404–408, Feb. 2023. doi: 10.1109/LCOMM.2022.3222560.
- [32] U. Oberst, “The fast Fourier transform,” SIAM J. Control Optim., vol. 46, no. 2, pp. 315–341, 2007. doi: 10.1137/060658242.
- [33] U. Leith, “Modeling a periodic signal using Fourier series,” J. Appl. Math. Phys., vol. 12, no. 3, pp. 841–860, Mar. 2024. doi: 10.4236/jamp.2024.123052.
- [34] I. Cohen, “Modeling and identification of nonlinear systems in the short-time Fourier transform domain,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 1, pp. 231–240, Jan. 2009. doi: 10.1109/TSP.2009.2028978.

- [35] M. A. Bernstein, K. F. King, and X. J. Zhou, “Constrained reconstruction: A superresolution, optimal signal-to-noise alternative to the Fourier transform in magnetic resonance imaging,” *Med. Phys.*, vol. 16, no. 3, pp. 388–397, May 1989. doi: 10.1118/1.596427.
- [36] H. A. M. Al-Nashash, “A dynamic Fourier series for the compression of ECG using FFT and adaptive coefficient estimation,” *Med. Eng. Phys.*, vol. 17, no. 3, pp. 197–203, Apr. 1995. doi: 10.1016/1350-4533(95)95710-R.
- [37] P. B. Kahn, “The Fourier Transform and Its Applications,” *Am. J. Phys.*, vol. 34, no. 8, pp. 712–713, Aug. 1966. doi: 10.1119/1.1973431.
- [38] I. H. Elshekhidris, M. B. MohamedAmien, y A. Fragoon, “Wavelet transforms for EEG signal denoising and decomposition,” *Int. J. Adv. Signal Image Sci.*, vol. 9, no. 2, pp. 11–28, Dec. 2023. doi: 10.29284/ijasis.9.2.2023.11-28.
- [39] A. Abur and M. Özgun, “A wavelet transform-based method for improved modeling of transmission lines,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 4, pp. 1432–1438, Nov. 2003. doi: 10.1109/TPWRS.2003.814846.
- [40] M. A. Martínez, “Wavelet transform for signal modeling,” in Proc. 2023 Int. Conf. Signal Process. (ICSP), 2023, pp. 123–130. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=nnYmYd4MKK8C>
- [41] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, 3rd ed. Amsterdam, Netherlands: Academic Press, 2009
- [42] E. Y. Hamid and Z. I. Kawasaki, "Wavelet-based data compression for power disturbances using minimum description length data", *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 17, no. 2, pp. 460-466, Apr. 2002. doi: doi.org/10.1109/61.997918
- [43] C. K. Chui, *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*, Philadelphia, PA:SIAM, 1997.
- [44] S. A. Saleh and M. A. Rahman, “Modeling and protection of a three-phase power transformer using wavelet packet transform,” in Proc. IEEE Ind. Appl. Soc. Annu. Meeting (IAS), 2005, pp. 2128–2135. doi: 10.1109/IAS.2005.1518437.
- [45] J. Sánchez-Reyes, “Periodic Bézier curves,” *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 26, no. 9, pp. 989–1005, Dec. 2009. doi: 10.1016/j.cagd.2009.08.002.

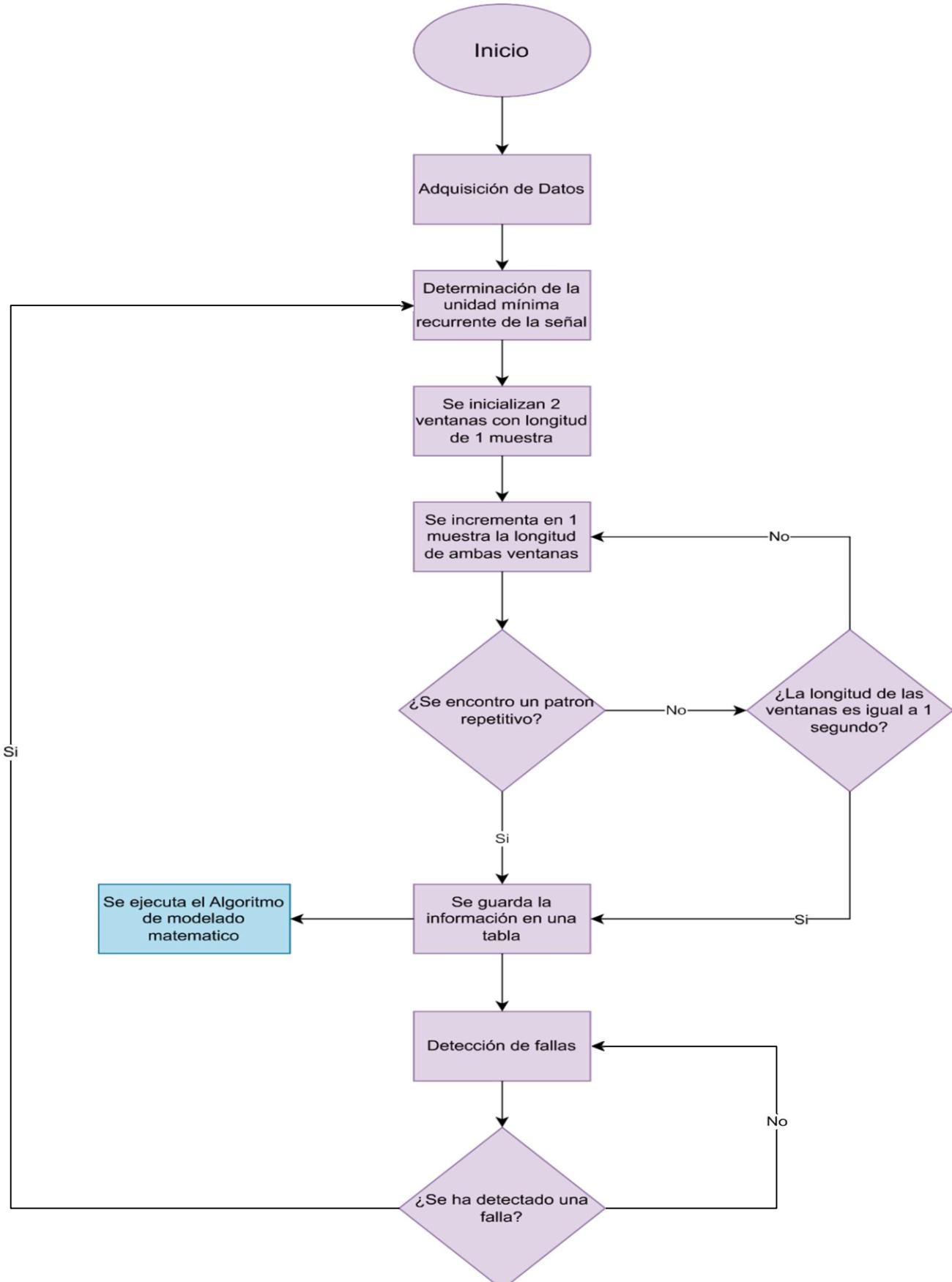
- [46] P. Rajagopal, P. Premnath, y C. Arumugam, “Bernstein polynomials and Bezier curves: a novel modeling approach to secure ECG data transmission,” *Int. J. Inf. Technol.*, vol. 16, pp. 1043–1053, 2024. doi: 10.1007/s41870-023-01629-5.
- [47] J. C. Pérez Merlos, M. Salgado Gallegos, S. E. Albarrán Trujillo y E. Rodríguez Ángeles, “Las curvas de Bézier: una aplicación con señales eléctricas,” *J. Law Sustain. Dev.*, vol. 12, no. 11, pp. 1–15, 2024. doi: 10.55908/sdgs.v12i11.4150.
- [48] S. Stubbs, J. Zhang y J. Morris, “Fault detection in dynamic processes using a simplified monitoring-specific CVA state space modelling approach,” *Comput. Chem. Eng.*, vol. 41, pp. 77–87, Jun. 2012. doi: 10.1016/j.compchemeng.2012.02.009.
- [49] H. F. Ng, “Automatic thresholding for defect detection,” *Pattern Recognit. Lett.*, vol. 27, no. 14, pp. 1644–1649, Oct. 2006. doi: 10.1016/j.patrec.2006.03.009.
- [50] M. Perhinschi y M. Napolitano, “An adaptive threshold approach for the design of an actuator failure detection and identification scheme,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 14, no. 3, pp. 519–529, May 2006. doi: 10.1109/TCST.2005.860522.
- [51] B. K. Walker and E. Gait, “Fault detection threshold determination technique using Markov theory,” *J. Guid. Control Dyn.*, vol. 2, no. 4, pp. 318–325, Jul.–Aug. 1979. doi: 10.2514/3.55881.
- [52] C. Hua, Q. Zhang, G. Xu, y Y. Shi, “Performance reliability estimation method based on adaptive failure threshold,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 36, no. 2, pp. 505–519, Jun. 2013. doi: 10.1016/j.ymssp.2012.10.019.
- [53] A. Emami-Naeini, M. M. Akhter y S. M. Rock, “Effect of model uncertainty on failure detection: the threshold selector,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 33, no. 12, pp. 1106–1115, Dec. 1988. doi: 10.1109/9.14432.
- [54] S. Tang, J. Wang, R. Zheng y D. Wang, “Detection and identification of power switch failures using discrete Fourier transform for DC–DC flying capacitor buck converters,” *IEEE J. Emerg. Sel. Top. Power Electron.*, vol. 9, no. 4, pp. 4062–4071, Aug. 2021. doi: 10.1109/JESTPE.2020.3012201.
- [55] A. Soheili, J. Sadeh, H. Lomei y K. M. Muttaqi, “A new high impedance fault detection scheme: Fourier based approach,” en *Proc. IEEE Int. Conf. Power Syst. Technol. (POWERCON)*, Wollongong, NSW, Australia, Sep.–Oct. 2016, pp. 1–6. doi: 10.1109/POWERCON.2016.7754052.

- [56] P. Singru, V. Krishnakumar, D. Natarajan y A. Raizada, “Bearing failure prediction using Wigner-Ville distribution, modified Poincare mapping and fast Fourier transform,” *J. Vibroeng.*, vol. 20, no. 1, pp. 127–139, Feb. 2018. doi: 10.21595/jve.2017.17768.
- [57] Z. Zhang, Y. Wang y K. Wang, “Fault diagnosis and prognosis using wavelet packet decomposition, Fourier transform and artificial neural network,” *J. Intell. Manuf.*, vol. 24, pp. 1213–1227, Dec. 2013. doi: 10.1007/s10845-012-0657-2.
- [58] S. Tang, J. Wang, C. Zhang, D. Wang, X. Yin, Z. Shuai y Z. J. Shen, “Detection and identification of power device failures using discrete Fourier transform for fault-tolerant operation of flying capacitor multilevel converters,” *IEEE J. Emerg. Sel. Top. Power Electron.*, vol. 10, no. 5, pp. 5081–5091, Oct. 2022. doi: 10.1109/JESTPE.2021.3101849.
- [59] A. Mukherjee, K. Chatterjee, P. K. Kundu y A. Das, “Probabilistic neural network-aided fast classification of transmission line faults using differencing of current signal,” *J. Inst. Eng. (India): Ser. B*, vol. 102, pp. 1019–1032, Mar. 2021. doi: 10.1007/s40031-021-00574-w.
- [60] S. Zhang, Y. Wang, M. Liu y Z. Bao, “Data-based line trip fault prediction in power systems using LSTM networks and SVM,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 7675–7686, 2018. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2785763.
- [61] A. Asadi Majd, H. Samet y T. Ghanbari, “k-NN based fault detection and classification methods for power transmission systems,” *Prot. Control Mod. Power Syst.*, vol. 2, art. 32, Aug. 2017. doi: 10.1186/s41601-017-0063-z.
- [62] A. Jamehbozorg y S. M. Shahrtash, “A decision-tree-based method for fault classification in single-circuit transmission lines,” *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 25, no. 4, pp. 2190–2196, Oct. 2010. doi: 10.1109/TPWRD.2010.2053222.
- [63] S. Ding, X. Xu y R. Nie, “Extreme learning machine and its applications,” *Neural Comput. Appl.*, vol. 25, no. 3–4, pp. 549–556, Sep. 2014. doi: 10.1007/s00521-013-1522-8.
- [64] T. Dalstein y B. Kulicke, “Neural network approach to fault classification for high speed protective relaying,” *IEEE Trans. Power Deliv.*, vol. 10, no. 2, pp. 1002–1011, Apr. 1995. doi: 10.1109/61.400828.
- [65] D. P. Mishra y P. Ray, “Fault detection, location and classification of a transmission line,” *Neural Comput. Appl.*, vol. 30, no. 5, pp. 1377–1424, Mar. 2018. doi: 10.1007/s00521-017-3295-y.

- [66] K. Seethalekshmi, S. N. Singh y S. C. Srivastava, “A classification approach using support vector machines to prevent distance relay maloperation under power swing and voltage instability,” IEEE Trans. Power Deliv., vol. 27, no. 3, pp. 1124–1133, Jul. 2012. doi: 10.1109/TPWRD.2011.2174808.
- [67] S. R. Samantaray, “Decision tree-based fault zone identification and classification in power transmission networks,” IET Gener. Transm. Distrib., vol. 2, no. 2, pp. 235–244, Mar. 2008. doi: 10.1049/iet-gtd:20070079.
- [68] B. Mahamedi y J. G. Zhu, “A novel approach to detect symmetrical faults occurring during power swings by using frequency components of instantaneous three-phase active power,” IEEE Trans. Power Deliv., vol. 27, no. 3, pp. 1368–1376, Jul. 2012. doi: 10.1109/TPWRD.2012.2200265
- [69] A. F. Abidin, A. Mohamed y H. Shareef, “Power swing detection for correct distance relay operation using S-transform and neural networks,” en Proc. IEEE 5th Int. Power Eng. Optim. Conf. (PEOCO), Shah Alam, Malaysia, Jun. 2011, pp. 1–6. doi: 10.1109/PEOCO.2011.5970431.
- [70] S. Belagoune, N. Bali, A. Bakdi, B. Baadji y K. Atif, “Deep learning through LSTM classification and regression for transmission line fault detection, diagnosis and location in large-scale multi-machine power systems,” Measurement, vol. 177, art. 109330, Oct. 2021. doi: 10.1016/j.measurement.2021.109330.

Anexos

Anexo A. Diagrama de Flujo del Algoritmo Completo



Anexo B. Diagrama de Flujo del Modelado Matemático

