



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MÉRIDA

DEPARTAMENTO DE METAL-MECÁNICA



ELABORACIÓN DE UN LIBRO DE TEXTO
“TRANSFERENCIA DE CALOR”

REPORTE FINAL DE AÑO SABÁTICO

PRESENTADO POR:
RAMÓN NOVELO CORAL

Mérida Yucatán, Enero de 2016

Índice.

	Pág.
Prólogo	<i>i</i>
Inducción a la unidad	1
Unidad 1. Mecanismos básicos de la transferencia de calor.	2
1.1 Conducción	3
1.2 Convección	11
1.3 Radiación	14
1.4 Analogía eléctrica	16
1.5 Mecanismos combinados de transferencia de calor	17
Unidad 2. Conducción unidimensional en estado estacionario.	24
2.1 Ecuación general de la conducción de calor	24
2.2 Conducción unidimensional en estado estacionario en paredes planas, cilindros y esferas	27
2.3 Conducción unidimensional en elementos con generación de calor (Placas, cilindros y esferas)	48
2.4 Superficies extendidas	65
Unidad 3. Conducción bidimensional en estado estacionario.	91
3.1 Solución analítica	92
3.2 Análisis gráfico (Factores de forma)	97
3.3 Métodos numéricos: Diferencias finitas	105
Unidad 4. Conducción en estado transitorio.	118
4.1 Análisis de parámetros concentrados	119
4.2 Métodos numéricos: Diferencias finitas	126
4.3 Gráficas de temperatura transitoria: Placa infinita, cilindros infinitos, esferas y sólidos semiinfinitos	130
Unidad 5. Análisis de la convección.	153
5.1 Convección forzada	153
5.1.1 Introducción	153
5.1.2 Capas límite hidrodinámica y térmica	156
5.1.3 Convección forzada en una placa plana en régimen laminar y turbulento	158
5.1.4 Analogía de la transferencia de calor y la fricción	198
5.1.5 Fórmulas empíricas: ductos, cilindros, esferas, bancos de tubos y en metales líquidos	205
5.2 Convección natural	239
5.2.1 Definiciones	239
5.2.2 Convección natural en: Placa plana vertical, tubos verticales, placas inclinadas, placa horizontal, cilindro horizontal y esferas.	241
5.2.3 Convección natural en espacios cerrados	258
5.2.4 Convección mixta	261
Unidad 6. Transferencia de calor con cambio de fase.	273
6.1 Definiciones	273
6.2 Condensación pelicular sobre placas verticales	275

6.3	Condensación pelicular en cilindros verticales y placas inclinadas	283
6.4	Condensación pelicular en cilindros horizontales	283
6.5	Ebullición: Ebullición en núcleo y punto de quemado	285
Unidad 7. Intercambiadores de calor.		297
7.1	Clasificación	298
7.2	El coeficiente global de transferencia de calor	303
7.3	Factores de suciedad	309
7.4	Método de diferencia media logarítmica de temperatura	312
7.5	Método de efectividad	325
7.6	Análisis y diseño de intercambiadores	335
Referencias bibliográficas		342
Índice de tablas		343
Índice de figuras		344
Apéndice		349

Prólogo.

El desarrollo tecnológico industrial relacionado con los procesos afines a la transferencia de calor, ha originado que cualquier profesional involucrado a este campo, se sienta comprometido con esta disciplina.

En este texto se presentan en forma breve y elemental los fundamentos básicos de la transferencia de calor, sin llegar a los tópicos selectos que contemplan un mayor grado de dificultad tanto en lo analítico, como en las técnicas empleadas para la solución de los problemas.

La obra está enfocada principalmente al estudio de la transferencia de calor unidimensional, como base para la comprensión en el estudio en dos y tres dimensiones. Sin embargo, se plantea la ecuación general de la transferencia de calor por conducción en tres dimensiones y en estado transitorio, de la cual emanan los distintos casos particulares de la conducción de calor.

El material se apega al programa de estudio de la materia de transferencia de calor, impartida en la carrera de ingeniería mecánica en los institutos tecnológicos del país, dependientes del Tecnológico Nacional de México (TNM) correspondiente al plan IMEC-2010-228.

Toda la obra está escrita en el sistema internacional de unidades y en cada capítulo se presenta el contenido teórico del programa de estudio, complementándose con ejercicios resueltos y propuestos, a través de los cuales el estudiante puede practicar y desarrollar las competencias que adquirió en el capítulo correspondiente.

En las últimas décadas se han publicado muchos libros de texto relacionados con el tema. Sin embargo, cada autor trata de ofrecer al estudiante algo novedoso e interesante.

Es indudable que la elaboración de un texto, no es tarea fácil, pues se tiene que conjuntar una serie de factores que van desde el aspecto teórico hasta el práctico, aunado a la organización del material y a la experiencia del profesor en el aula.

En las instituciones de educación superior, cada profesor elabora su plan de enseñanza y se organiza según sus necesidades en el aula, por tal motivo, este texto representa el condensado de las notas y apuntes implementados que se utilizan al estar impartiendo la asignatura del sexto semestre de la carrera de ingeniería mecánica en el Instituto Tecnológico de Mérida durante la última década.

En este texto no se pretende profundizar en los temas más avanzados, ni tratar con investigaciones recientes, más bien se presentan los aspectos básicos de la transferencia de calor, mediante expresiones matemáticas básicas, al igual que, algunos conocimientos fundamentales de termodinámica y mecánica de fluidos. Todo esto con el propósito de iniciar al estudiante en el conocimiento y comprensión de esta disciplina de manera fácil y motivacional, para que adquiera las competencias necesarias para su desarrollo en el campo de su profesión.

El texto inicia con una leve pero necesaria inducción al curso, en la cual se presenta la planeación del curso, por parte del profesor y las competencias específicas a desarrollar por el estudiante en cada unidad temática; aunado a un seguimiento del avance programado versus el real, indicando el porcentaje de

aprobación de los estudiantes y las evidencias presentadas por estos, finalizando con las observaciones hechas por el profesor en caso necesario.

Enseguida se presenta una evaluación diagnóstica, la cual sirve al profesor para saber si las competencias anteriores adquiridas por el estudiante son suficientes para la comprensión y entendimiento de las requeridas para su asignatura.

Posteriormente se presentan los siete capítulos que integran el programa de la asignatura: El capítulo I es un tratado de los mecanismos básicos de la transferencia de calor y la combinación de estos en los sistemas de procesos térmicos. En el capítulo II se plantea la ecuación general de la conducción de calor, misma que se utiliza para el estudio de geometrías planas, cilíndricas y esféricas en una dimensión sin y con generación de calor, en estado estacionario. Asimismo se deduce la ecuación general para una superficie extendida sin generación de calor, la cual contempla tanto la conducción como la convección de calor, en estado estacionario.

Los capítulos III y IV, presentan el estudio de la conducción bidimensional de calor en estado estacionario y transitorio, en sus soluciones analítica, gráfica y numérica. En el capítulo V se analiza el fenómeno de la convección forzada y natural en geometrías planas, cilíndricas y esféricas en una dimensión y se muestran las fórmulas correspondientes para el cálculo del coeficiente convectivo de transferencia de calor.

En el capítulo VI se presenta un tratado de la transferencia de calor con cambio de fase y las ecuaciones correspondientes para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor, para el caso del mecanismo de la condensación pelicular y por gotas, y de la ebullición nucleada.

Por último, en el capítulo VII, se presentan los principios básicos para el análisis, selección y diseño termohidráulico de los intercambiadores de calor, dispositivos aplicados ampliamente en los sistemas de procesos térmicos.

Inducción a la Unidad.

En esta unidad el estudiante desarrollará ciertas competencias específicas y genéricas, mediante una serie de actividades de enseñanza y de aprendizaje que le servirán de base para el desarrollo de las competencias en las unidades posteriores.

Competencias específicas a desarrollar:

1. Aplicar las leyes que gobiernan los mecanismos de la transferencia de calor a la solución de problemas de ingeniería.
2. Resolver problemas de aplicación de los mecanismos básicos de la transferencia de calor por conducción, convección y radiación.
3. Comprender y aplicar la analogía de los circuitos eléctricos a los circuitos térmicos para la solución de problemas de transferencia de calor.

Para que el estudiante desarrolle estas competencias, el profesor presentará en forma de ensayo los conceptos básicos y resolverá problemas relacionados con las competencias a desarrollar, y el estudiante reafirmará dichas competencias mediante una serie de actividades de aprendizaje en forma de ensayos, investigaciones, análisis de casos, elaboración de trabajos en forma de resúmenes y síntesis; y resolverá problemas que involucren los temas presentados por el profesor.

Las actividades de aprendizaje que realice el estudiante durante el desarrollo de la unidad serán acumuladas en un portafolio de evidencias el cual será controlado por el profesor y que valdrá un porcentaje de la calificación final del curso, según lo propuesto al inicio de éste.

Las actividades de enseñanza comprenden el contenido de la unidad, y se presentan en la forma más sencilla y precisa para que el estudiante pueda desarrollar con facilidad sus competencias.

Dichas actividades de enseñanza establecen las definiciones y conceptos básicos de la unidad, e incluyen la solución de ejercicios resueltos, para que el estudiante aprenda y desarrolle sus competencias.

En las demás unidades solo se presentan las competencias a desarrollar, sin embargo se sigue el mismo procedimiento descrito en esta sección, para el desarrollo de las competencias específicas. Asimismo las actividades de enseñanza de cada unidad son presentadas por el profesor en la forma establecida anteriormente, recurriendo a la técnica del ensayo.

Es importante mencionar que las competencias genéricas son las encargadas de aportar las herramientas intelectuales y procedimentales básicas que necesitan los sujetos para analizar, evaluar las estrategias, aplicar conocimientos a casos distintos y llegar a soluciones adecuadas. Entre ellas se pueden mencionar las instrumentales, las interpersonales y las sistémicas.

Todas ellas necesarias para que el estudiante alcance a desarrollar las competencias específicas correspondientes en cada unidad del curso.

Unidad 1**Mecanismos Básicos de la Transferencia de Calor.*****Introducción.***

El proceso de transferencia de calor o energía es familiar en nuestros días. Las cantidades brutas de calor que gana o pierde un sistema se pueden evaluar aplicando la primera ley de la termodinámica para un volumen de control.

El cálculo de las cantidades de calor transferidas de un fluido a otro, es un problema común en el diseño termohidráulico. El dispositivo utilizado para tal efecto recibe el nombre genérico de intercambiador de calor. Sin embargo, debido al uso o aplicación a que es destinado, suele nombrarse desde el cotidiano y pequeño radiador de automóvil; hasta el enorme pero necesario condensador utilizado en las centrales eléctricas, en el que el vapor se condensa a fin de reducir la sobrepresión en la turbina y recuperar el condensado.

El problema de la preparación y conservación de casi todos los alimentos, requiere del proceso de la transferencia de calor durante su curso. El diseño moderno de estructuras y edificios requiere de la disminución de la tasa de transferencia de calor mediante la utilización de aislantes térmicos.

Una refinería de petróleo posee una gran variedad de dispositivos y equipos relacionados con la transferencia de calor, con el fin de transportar el calor entre los diferentes estados del proceso, para reducir el consumo total de energía de la refinería.

Más aún, en nuestro hogar podemos apreciar el proceso de transferencia de calor a través de los diversos aparatos que utilizamos para nuestro servicio, como son el tostador, la cafetera, el calentador de agua, la plancha, la televisión, la secadora de cabello, por mencionar algunos.

De los ejemplos anteriores se observa que la transferencia de calor, está relacionada directamente con los sistemas de ingeniería y los diversos fenómenos físicos involucrados; y por consiguiente es necesario comprender y cuantificar estos fenómenos para luego desarrollar una metodología para el diseño térmico de los sistemas ingenieriles.

Es importante hacer hincapié, en la relación existente entre el estudio de la termodinámica y la transferencia de calor. Si bien, la termodinámica permite conocer a través de su primera ley, la cantidad de calor que entra o sale de un sistema al realizar éste un proceso; la transferencia de calor predice el tipo de mecanismo, mediante el cual esta energía es transportada.

Mejor aún, retomando el ejemplo del condensador de vapor, la termodinámica suministra información suficiente respecto al flujo de calor que debe ser transferido del vapor al agua de circulación o refrigeración, mediante la aplicación de la primera ley al volumen de control. Más sin embargo, la transferencia de calor proporciona la información suficiente y complementaria con respecto al material, diámetro, longitud y geometría de los tubos que deben emplearse en el diseño del condensador. En conclusión, debemos notar que la termodinámica y la transferencia de calor son dos ciencias que se complementan entre sí.

En este capítulo se describen en forma breve y sencilla los mecanismos básicos que rigen el transporte de calor o energía, así como las leyes fundamentales aplicadas para el cálculo de la rapidez con que esta energía se transfiere.

Existen tres mecanismos de transferencia de energía en forma de calor, la conducción, la convección y la radiación. Cualquier proceso de transferencia de energía térmica comprenderá uno o más de estos mecanismos.

1.1. Conducción.

La transferencia de calor por conducción se efectúa por interacción molecular directa, fenómeno en el cual el movimiento de una molécula o partícula, que se encuentra en un nivel energético muy alto, excita a las moléculas adyacentes que se encuentran en niveles de energía más bajos.

Este mecanismo de propagación de energía, está presente en cierto grado, en todo cuerpo o entre cuerpos donde exista una diferencia de temperaturas y el medio de transporte sea a través de un sólido, líquido o gas.

Es importante recalcar que en el caso de líquidos y gases, es necesario eliminar las corrientes naturales de flujo que se presentarían como consecuencia de la diferencia en densidades, ocasionada por el cambio de temperatura en el fluido.

Es por esta razón, que la transferencia de calor por conducción solo reviste importancia en el caso de los cuerpos sólidos sujetos a una diferencia de temperaturas.

Ley de Fourier.

La ecuación que gobierna al mecanismo de la conducción de calor, se debe en gran parte al matemático francés Joseph Fourier (1822). Dicha ley establece que al existir un gradiente de temperaturas dentro de un medio, el calor se transfiere de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura, tal como lo establece la primera ley de la termodinámica. Además la razón de calor transferido es proporcional al área de la superficie del medio, e inversamente proporcional al espesor del mismo; es decir, escrito matemáticamente:

$$q \propto -A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$
$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Donde k , es la constante de proporcionalidad y se le denomina conductividad térmica del medio. Dicha constante es una propiedad física del medio (material) en cuestión, que denota la facilidad que presenta el medio para conducir el calor.

Como ejemplo de lo descrito anteriormente, consideremos una pared plana cuya cara izquierda es calentada a temperatura constante; se sabe por experiencia que la temperatura decrece conforme la distancia o espesor aumenta y por consiguiente la diferencial de temperatura (∂T) es negativa, como se

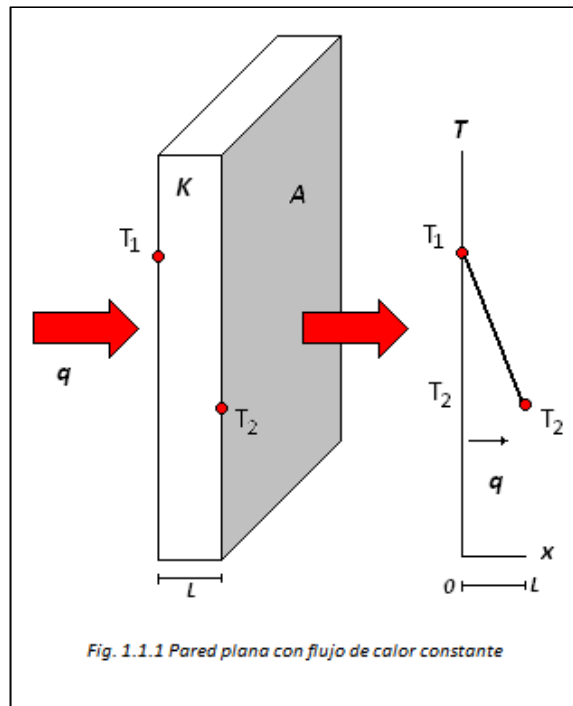
ilustra en la figura 1.1.1. Además el flujo de calor puede calcularse mediante la integración directa de la ecuación de Fourier para el caso unidimensional; así de la expresión:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Mediante separación de variables, se obtiene:

$$q \partial x = -kA \partial T$$

Integrando ambos lados de la igualdad, entre límites de temperatura y distancia, se tiene:



$$q \int_0^L \partial x = -kA \int_{T_1}^{T_2} \partial T$$

$$qL = -kA(T_2 - T_1)$$

$$q = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2) \dots \dots \dots \text{ ec. 1.1.1}$$

En la fórmula anterior, se indican los siguientes términos:

q = Flujo de calor constante a través del medio en Watts.

k = Conductividad térmica constante del medio en $W/m \cdot ^\circ C$.

L = Espesor del medio en metros.

$A =$ Area constante del medio, perpendicular al flujo de calor en m^2 .

$T_1 - T_2 =$ Diferencia de temperaturas en $^{\circ}C$.

Note que el signo negativo que se le antepone a la ley de Fourier, se debe a que el diferencial de temperaturas es negativo, es decir el calor fluye de mayor a menor temperatura, o bien $T_1 > T_2$.

La ecuación 1.1.1., calcula el flujo de calor para una pared plana con conductividad térmica, área de sección y temperaturas en ambas caras de la pared constantes.

En caso de que la conductividad térmica o el área de la sección perpendicular al flujo de calor varíen, la ecuación de Fourier debe integrarse nuevamente como se ilustra en la sección 1.1.2.

Ejemplo 1.1.1.

Calcule el calor por unidad de área en una pared plana de cobre puro, que tiene 20 cm de espesor y una conductividad térmica de $385 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}C$, si la diferencia de temperaturas entre sus caras es de $10^{\circ}C$.

Solución: Aplicando la Ley de Fourier, se tiene;

$$\frac{q}{A} = q'' = \frac{k}{L} (T_1 - T_2)$$

Sustituyendo valores;

$$\frac{q}{A} = q'' = \frac{385}{0.20} (10) = 19,250 \text{ W}$$

Conductividad térmica variable.

En muchas aplicaciones la conductividad térmica del medio varía con la temperatura de tal suerte que la ley de Fourier debe ser integrada nuevamente. Esta variación puede ser en forma ascendente o descendente según sea el medio; un líquido, un gas o un sólido. A continuación se ilustran algunas gráficas que muestran el comportamiento de ciertos materiales al variar la temperatura.

Dicha variación puede ser en forma lineal, exponencial, cuadrática y polinomial. Los materiales que poseen una alta conductividad térmica se denominan conductores, mientras los que tienen una baja conductividad se llaman aislantes, estos últimos no conducen el calor con facilidad. Cabe mencionar que la conductividad térmica y la conductividad eléctrica de los metales puros, están relacionadas entre sí. Sin embargo, a temperaturas criogénicas los metales se hacen superconductores de la electricidad, pero no así del calor. La tabla 1.1, muestra algunos valores del orden de magnitud de la conductividad térmica de algunos materiales.

TABLA 1.1. Conductividad térmica (k) en $\text{W/m} \cdot ^{\circ}C$ de algunos materiales a $0^{\circ}C$.

Metales	k	Sólidos no Metálicos	k	Líquidos	k	Gases	k
Plata pura	410	Diamante	2,300	Mercurio	8.21	Hidrógeno	0.175
Cobre puro	385	Cuarzo paralelo al eje	41.6	Agua	0.556	Helio	0.141
Aluminio Puro	202	Magnesita	4.15	Amoníaco	0.540	Aire	0.024
Níquel puro	93	Mármol	2.08-2.94	Aceite SAE 50	0.147	Vapor de agua saturado	0.0206

Hierro puro	73	Piedra arenisca	1.83	Freón 12	0.073	Dióxido de carbono	0.0146
Acero al carbono, 1% C	43	Vidrio, ventana	0.78				
Plomo puro	35	Arce o roble	0.17				
Acero cromo - níquel (18-8%)	16.3	Serrín	0.059				
		Lana de vidrio	0.038				
		Hielo	2.22				

* Tomado de *Transferencia de Calor*, J.P. Holman, 8ª Edición

La conductividad térmica en sólidos, líquidos y gases puede variar en algunos casos con respecto a la temperatura; es decir, en regiones de alta temperatura las moléculas poseen velocidades mayores que en regiones de menor temperatura. Así, las moléculas están en continuo movimiento aleatorio, chocando unas con otras e intercambiando energía y cantidad de movimiento.

Si una molécula se mueve desde una región de alta temperatura, transporta energía cinética hacia la zona de menor temperatura y cede esta energía mediante los choques con las moléculas de menor energía. Por consiguiente mientras más rápido se muevan las moléculas, más rápido transportarán la energía.

En el caso de los gases a presiones moderadas, la conductividad térmica varía con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, sin embargo a presiones críticas, la conductividad térmica presenta otro comportamiento, y se recomienda consultar otras fuentes para los datos de conductividad térmica.

En los líquidos el proceso de transporte de energía es similar al de los gases; no obstante debido a la mayor proximidad en las moléculas, el intercambio de energía depende del campo de fuerzas moleculares, el cuál actúa en el proceso de colisión.

Por último, en los sólidos la energía térmica se transfiere por conducción, debido a que las moléculas están compactadas, mediante dos mecanismos: por vibración de la red tridimensional y por transporte de electrones libres. Las figuras 1.1.2, 1.1.3 y 1.1.4 muestran la variación de la conductividad térmica respecto de la temperatura de algunos sólidos, líquidos y gases. Note que la variación de la conductividad térmica respecto de la temperatura no es lineal.

Ejemplo 1.1.2

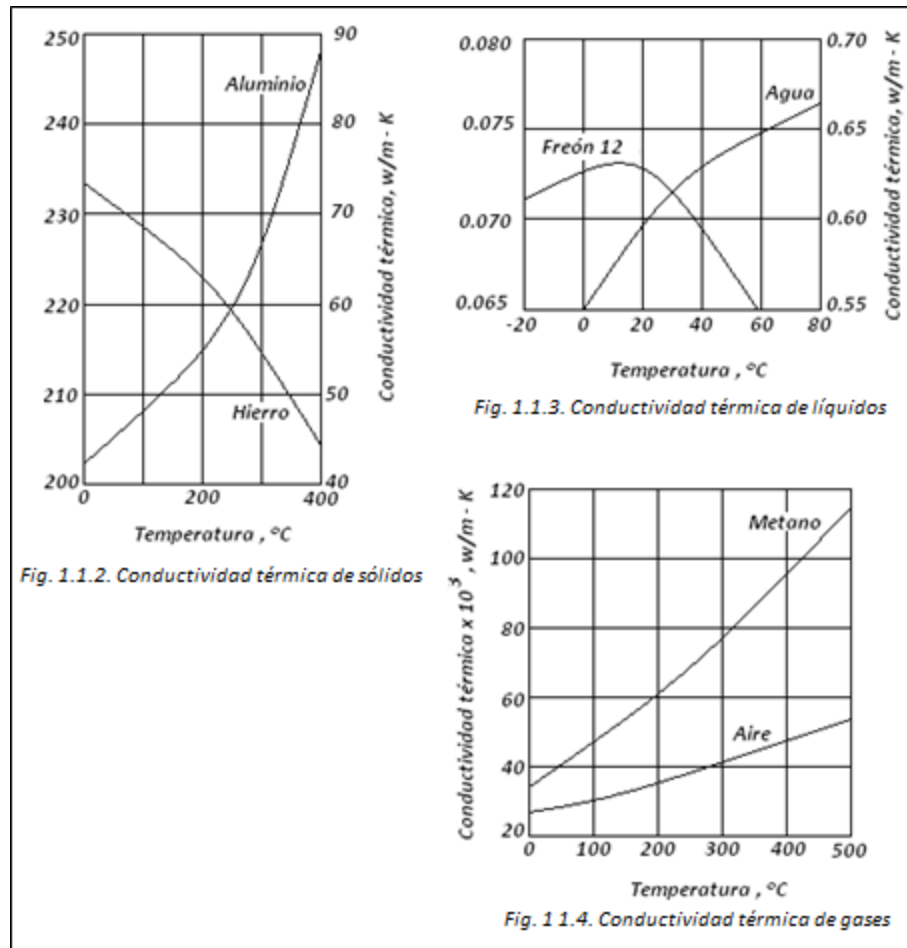
Considere una placa de cierto material de espesor L cuyas superficies están sujetas a temperaturas T_1 y T_2 respectivamente. Si la conductividad térmica del material varía con la temperatura de acuerdo a la relación $K = K_o(1 + \alpha T)$, donde K_o y α son constantes, determine el flujo de calor por unidad de área a través de la placa.

Solución: Aplicando la ecuación de Fourier, se tiene:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\frac{q}{A} = q'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo el valor de k en la ecuación,



$$q'' = -K_o(1 + aT) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Separando variables;

$$q'' \partial x = -K_o(1 + aT)(\partial T)$$

Multiplicando e integrando entre límites la igualdad:

$$q'' \int_0^L \partial x = -k_o \int_{T_1}^{T_2} \partial T - k_o a \int_{T_1}^{T_2} T \partial T$$

$$q'' L = -k_o(T_2 - T_1) - \frac{k_o a}{2}(T_2^2 - T_1^2)$$

$$q'' L = k_o(T_1 - T_2) - \frac{k_o a}{2}(T_2 - T_1)(T_2 + T_1)$$

$$q'' L = k_o(T_1 - T_2) + \frac{k_o a}{2}(T_1 - T_2)(T_2 + T_1)$$

$$q'' L = k_o \left[1 + a \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \right] (T_1 - T_2)$$

Así, el flujo de calor por unidad de área a través de la pared, es:

$$q'' = \bar{k} \left(\frac{T_1 + T_2}{L} \right)$$

donde:

$$\bar{k} = k_o \left[1 + a \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \right]$$

Área de sección variable.

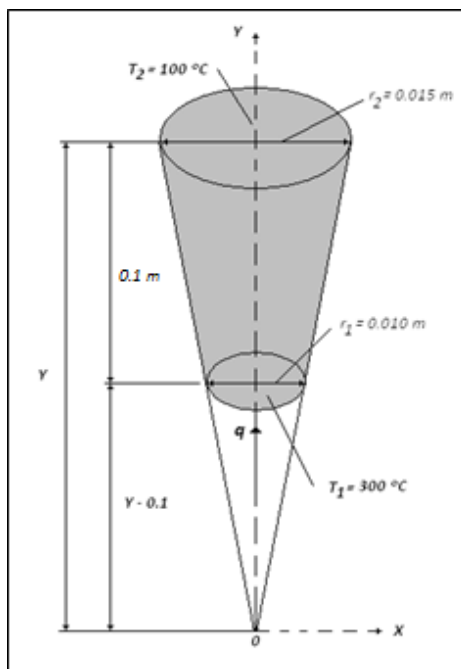
En algunos casos de conducción unidimensional de calor, el área de la sección del medio material perpendicular al flujo varía de acuerdo a la distancia. Por consiguiente la ley de Fourier debe ser nuevamente modificada.

Ejemplo 1.1.3.

Un cono truncado de aluminio mide 2 cm de diámetro en su parte más pequeña y 3 cm en su parte más grande; y tiene 10 cm de altura. Si su superficie lateral se encuentra aislada, para asegurar la transferencia de calor unidimensional, y las temperaturas en los diámetros menor y mayor son 300 y 100 °C; respectivamente. Calcule el calor transferido por conducción a través del cono. Suponga que la conductividad térmica del aluminio es 215 W/m-K.

Solución: Mediante la ley de Fourier, se tiene:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)$$



En este caso el área de la sección varía de acuerdo con la altura del cono, y el flujo de calor q ; se indica en la figura. Por triángulos semejantes:

$$\frac{0.015}{Y} = \frac{0.010}{Y - 0.1}$$

Por tanto:

$$Y - 0.1 = Y \left(\frac{0.010}{0.015} \right)$$

$$Y - 0.1 = 0.666Y$$

$$Y - 0.666Y = 0.1$$

$$Y(1 - 0.666) = 0.1$$

$$Y = 0.3 \text{ m}$$

Nuevamente por triángulos semejantes:

$$\frac{0.015}{0.3} = \frac{X}{Y}$$

Despejando la variable X, la cual representa la variación del radio respecto a la altura del cono Y; tenemos:

$$X = \left(\frac{0.015}{0.3} \right) Y$$

Puesto que:

$$A = \pi r^2 = \pi X^2, \text{ según la figura.}$$

Sustituyendo el valor de A en la ley de Fourier e integrando entre límites:

$$q = -k\pi \left(\frac{0.015}{0.3} \right)^2 Y^2 \frac{\partial T}{\partial Y}$$

$$q \int_{Y_1}^{Y_2} Y^{-2} \partial Y = -k\pi \left(\frac{0.015}{0.3} \right)^2 \int_{T_1}^{T_2} \partial T$$

$$\left. \frac{-qY^{-1}}{1} \right|_{0.2}^{0.3} = -215\pi \left(\frac{0.015}{0.3} \right)^2 T \Big|_{573}^{373}$$

$$-q \left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.2} \right) = -215\pi \left(\frac{0.015}{0.3} \right)^2 (373 - 573)$$

$$q = 202.63 \text{ W}$$

Resistencia térmica conductiva.

Comparando la ley de Ohm con la ley de Fourier, se puede comprobar que existe una analogía entre ellas; y por ende el concepto de resistencia eléctrica y el de resistencia térmica son similares.

A partir de la ley de Ohm se establece que el flujo de corriente que atraviesa un conductor eléctrico y que es perpendicular al área de la sección transversal del conductor; es directamente proporcional al voltaje aplicado en los extremos del conductor, e inversamente proporcional a la resistencia del conductor. Es decir:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

En esta expresión, la corriente I se da en amperes (A), el voltaje V en volts (V) y la resistencia eléctrica R en Ohm (Ω).

Reescribiendo la ley de Fourier y comparándola con la de Ohm, podemos observar la analogía existente entre ellas, así:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)$$

$$q = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2)$$

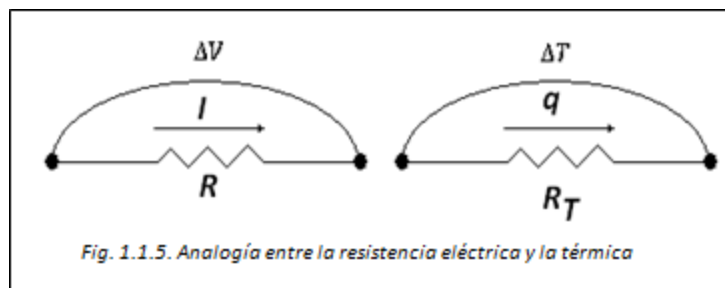
$$q = \frac{kA}{L} (\Delta T)$$

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{L}{KA}}$$

donde el término:

$$R_T = \frac{L}{KA}$$

Es equivalente a la resistencia eléctrica en la ley de Ohm y se le denomina resistencia térmica conductiva en la ley de Fourier. En la Ley de Fourier, el flujo de calor q se representa en Watt (W), la diferencia de temperaturas ΔT en grados Centígrados o Kelvin ($^{\circ}\text{C}$ o K) y la resistencia térmica en grados Kelvin sobre watt (K/w). En la figura 1.1.5, se ilustran ambos circuitos.



Ejemplo 1.1.4.

Una pared plana transfiere a través de sus caras un flujo de calor de 200 W, si la diferencia de temperaturas entre sus caras es de 100 °C. Calcule la resistencia térmica de la pared.

Solución: Aplicando la expresión de resistencia térmica se tiene;

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{L}{KA}}$$

Despejando la resistencia térmica,

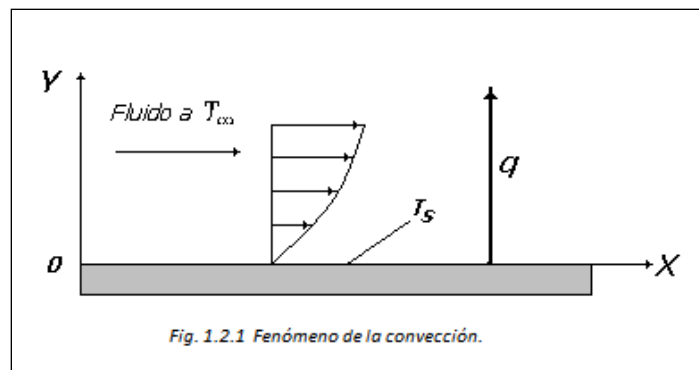
$$R_T = \frac{L}{KA} = \frac{\Delta T}{q} = \frac{100}{200} = 0.5 \text{ K/W}$$

1.2 Convección.

La convección es el fenómeno de propagación de la energía mediante el movimiento de un fluido, este puede ser un líquido o un gas. La ley que gobierna este mecanismo de transferencia de calor se denomina ley de Newton de enfriamiento y se representa con la expresión:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

Para una mejor comprensión de este mecanismo, consideremos una placa plana horizontal que se encuentra en contacto con un fluido, como se ilustra en la figura 1.2.1. La superficie de la placa se mantiene a una temperatura T_s , mientras el fluido se encuentra a una temperatura T_∞ . La experiencia indica que se disipa mayor energía, si se hace pasar aire mediante un ventilador; que cuando se expone solamente al aire circundante; por tanto la velocidad del fluido tendrá un efecto importante sobre la transferencia de calor.



De manera similar la experiencia demuestra que el flujo de energía es mayor si el cuerpo se sumergiera en agua, que si se hace en aceite. Por consiguiente las propiedades del fluido deben influir en el proceso de transporte de energía.

Se sabe que en el interior del cuerpo la transferencia de calor se efectúa por conducción, sin embargo al llegar este a la superficie del cuerpo; es el fluido el que se encarga del transporte de dicha energía.

Este flujo de calor puede calcularse mediante la ley de Newton de enfriamiento, por unidad de superficie; es decir:

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty)$$

En la expresión anterior, ***h*** es el coeficiente de transferencia de calor por convección o coeficiente de película dado en W/m²-K y depende de la velocidad y las propiedades del fluido, así como de la geometría del sistema, es decir:

$$h = f(\rho, k, \mu, T, \bar{V}, \nu, \dots)$$

Y q'' es el flujo de calor transferido por unidad de área en W/m², T_s y T_∞ son las temperaturas de la superficie de la placa y el fluido respectivamente.

El fenómeno de la convección se clasifica usualmente como convección forzada y convección libre o natural. En el primer caso, el fluido es impulsado a través del cuerpo mediante un agente externo (ventilador o bomba), o la acción de algún agente meteorológico. En el segundo caso el movimiento del fluido es producto de los cambios en densidades al estar este en contacto con una superficie a mayor temperatura y en presencia de un campo gravitacional o centrífugo.

Un ejemplo del primer caso es el sistema de enfriamiento de un automóvil (radiador), y un ejemplo típico de convección libre es el enfriamiento de un transformador o de un transistor.

Combinando la ley de Fourier con la de Newton de enfriamiento, es decir, considerando que el flujo de calor que llega a la superficie del cuerpo por conducción es el mismo que se disipa al fluido por convección, se tiene:

$$h = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Esta expresión permite el cálculo del coeficiente convectivo de transferencia de calor, a través del conocimiento del perfil de temperaturas en el fluido, y la aplicación de las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía. En el caso de geometrías más complejas, la conductancia de película puede evaluarse mediante el uso de correlaciones empíricas o recurriendo a la experimentación. La tabla 1.2.1, muestra algunos valores del orden de magnitud del coeficiente de transferencia de calor ***h***.

Tabla 1.2. Orden de magnitud del coeficiente de transferencia de calor *h*.

Modo	<i>h</i>, en w/m²-K	
<i>Convección libre, aire</i>	5 -	25
<i>Convección forzada, aire</i>	10 -	500
<i>Convección forzada, agua</i>	100 -	15000
<i>Agua en ebullición</i>	2500 -	25000
<i>Condensación de vapor de agua</i>	5000 -	100000

* Tomado de J.P. Holman, *Heat Transfer*, McGraw-Hill, 1972

Ejemplo 1.2.1

Una tubería desnuda que transporta vapor húmedo, tiene una temperatura de 180 °C en su superficie; y se localiza en una habitación cuya temperatura ambiente es de 20 °C. Si el coeficiente de transferencia de calor entre el tubo y el ambiente es de 10 W/m²-K, calcule las pérdidas de calor por metro de longitud; si el diámetro exterior del tubo es de 10 cm.

Solución: El área de la superficie del tubo es, $A = 2\pi rL$

Mediante la ley de enfriamiento de Newton, se tiene:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

Sustituyendo el valor del área,

$$q = h(2\pi rL)(T_s - T_\infty)$$

Así:

$$q' = \frac{q}{L} = h(2\pi r)(T_s - T_\infty)$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$q' = 10(2\pi)(0.05)(180 - 20) = 502.66 \text{ W/m}$$

Resistencia térmica convectiva.

Al igual que la resistencia conductiva, la convectiva es análoga también a la Ley de Ohm; así comparando ambas leyes se tiene:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

o bien:

$$q = \frac{(T_s - T_\infty)}{\frac{1}{hA}}$$

donde el término:

$$R_T = \frac{1}{hA}$$

Es equivalente a la resistencia eléctrica en la ley de Ohm y se le denomina resistencia térmica convectiva en la ley de Newton de enfriamiento. En la expresión anterior, el flujo de calor q se representa en Watt

(W), la diferencia de temperaturas ΔT en grados centígrados o Kelvin ($^{\circ}C$ o K) y la resistencia térmica en grados Kelvin sobre watt (K/W).

1.3 Radiación.

Es el proceso de propagación de la energía mediante ondas electromagnéticas en el vacío absoluto. Como hemos visto anteriormente los mecanismos de conducción y convección requieren de un medio para la propagación de la energía térmica. Sin embargo, a una temperatura dada, todos los cuerpos emiten radiación a través del vacío absoluto en forma de energía electromagnética, a diferentes longitudes de onda.

Por supuesto, solo la energía radiante que se encuentra en el rango de longitudes de onda entre 0.1 a 100 micrómetros, se considera energía térmica. Dentro de este intervalo del espectro electromagnético se localiza el rango ultravioleta, el visible y el infrarrojo.

El cuerpo que emite energía radiante desde su superficie, a una razón proporcional a su temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia, se denomina *cuerpo negro o radiador perfecto*. La energía radiante emitida puede ser calculada con la expresión:

$$q'' = \sigma T^4$$

En la expresión anterior., la constante de proporcionalidad σ , se le denomina constante de Stefan Boltzmann, y tiene un valor de $5.6697 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{-K}^4$, T es la temperatura absoluta del cuerpo y q'' es la energía radiada por unidad de área en (W/m^2). De esta expresión, también se deduce que todo cuerpo negro que se encuentre a una temperatura diferente del cero absoluto, emite energía independientemente de las condiciones de los alrededores.

Por otra parte, el cuerpo que emite una menor cantidad de radiación que el cuerpo negro a una temperatura dada, se les conoce como cuerpo gris; y la energía radiada por este puede ser calculada mediante la expresión:

$$q'' = \epsilon \sigma T^4$$

En esta expresión el símbolo aparece el término ϵ , el cuál se conoce como la emitancia del cuerpo gris, y se define como el cociente que resulta de dividir la emisión del cuerpo gris entre la emisión del cuerpo negro, es decir:

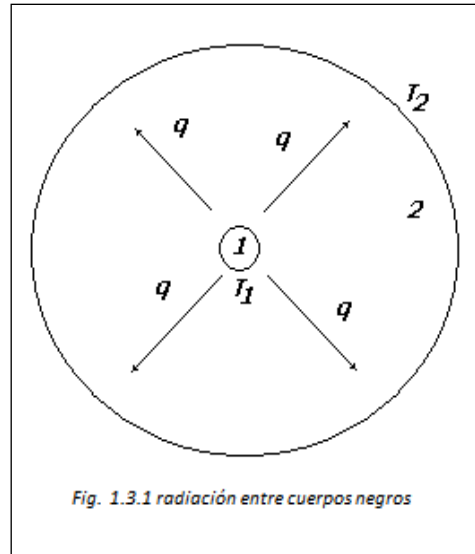
$$\epsilon = \frac{\text{Emitancia del cuerpo gris}}{\text{Emitancia del cuerpo negro}}$$

La radiación emitida por un cuerpo negro a una temperatura absoluta T_1 , hacia una envolvente a la temperatura T_2 , que lo rodea completamente y que tiene comportamiento de cuerpo negro, se calcula con la siguiente fórmula:

$$q = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

En esta fórmula A_1 , indica el área de la superficie del cuerpo 1, y q el calor radiado del cuerpo 1 al cuerpo 2.

La figura 1.3.1., ilustra el intercambio de calor radiante entre los cuerpos negros.



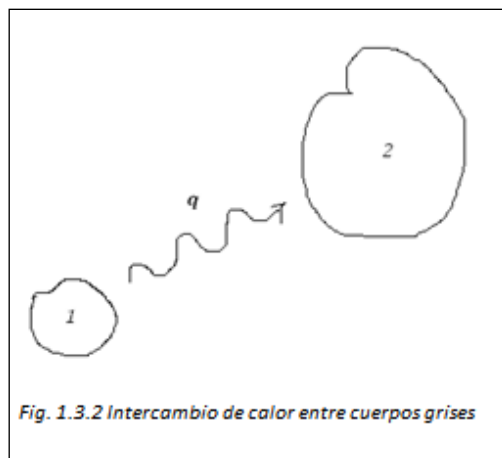
En el caso de que los cuerpos sean grises el intercambio de energía radiante puede ser calculado con la expresión anterior, salvo que considerando la emitancia del cuerpo gris.

$$q = \sigma \epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

La expresión anterior, se le conoce como la ley de *Prevost*.

Si, los cuerpos grises intercambiaran energía radiante como se ilustra en la figura 1.3.2, el flujo neto de energía entre ellos puede calcularse a través de la expresión siguiente.

$$q = \sigma F A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$



En esta las temperaturas T_1 y T_2 , son absolutas; y F es una función que depende de las características superficiales y del arreglo geométrico que ambos cuerpos guardan entre sí. Es decir, la función F , depende

de la emitancia de los cuerpos y de la fracción de energía radiante emitida por el cuerpo 1 y que es interceptada por el cuerpo 2 y se le conoce como factor de forma.

Ejemplo 1.3.1

Calcúlese la energía emitida por un cuerpo negro a 1000 °C.

Solución:

Aplicando la ley del cuerpo negro y considerando que su emitancia es igual a la unidad; y puesto que el área de su superficie es desconocida, entonces la energía emitida por unidad de área, es igual:

$$q'' = \sigma T^4$$

$$q'' = 5.6697 \times 10^{-8} (1273)^4 = 148,892.8 \text{ w/m}^2 = 148.8928 \text{ kW/m}^2$$

Ejemplo 1.3.2

Una esfera de 4 cm de diámetro se calienta hasta una temperatura de 150 °C y se coloca en una habitación muy grande cuya temperatura de sus paredes es de 20 °C. Calcúlese la pérdida de calor por radiación, si la emisividad de su superficie es de 0.65.

Solución:

Considerando los dos cuerpos como grises y aplicando la fórmula correspondiente se tiene:

$$q = \sigma \epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Puesto que el área de un cuerpo esférico es: $A = 4\pi r^2$

Sustituyendo valores;

$$q = 5.6697 \times 10^{-8} (0.65) 4\pi (0.02)^2 (423^4 - 293^4) = 4.56 \text{ W}.$$

1.4 Analogía eléctrica.

Anteriormente se estableció la analogía eléctrica entre la ley de Ohm, la de Fourier para la conducción en una pared plana y la ley de enfriamiento de Newton para la convección entre una superficie cualquiera y el medio que la rodea. Estas analogías se suman a la conducción en paredes cilíndricas y esféricas, las cuales se estudiarán más adelante y se resumen en la tabla 1.4.

Tabla 1.4. Analogía eléctrica entre la ley de Ohm, Fourier y la de enfriamiento de Newton.

Pared plana	$R_e = \frac{L}{kA}$	$R_e = \frac{L}{kA}$
Pared cilíndrica	$R_e = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi kL}$	$R_e = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi kL}$

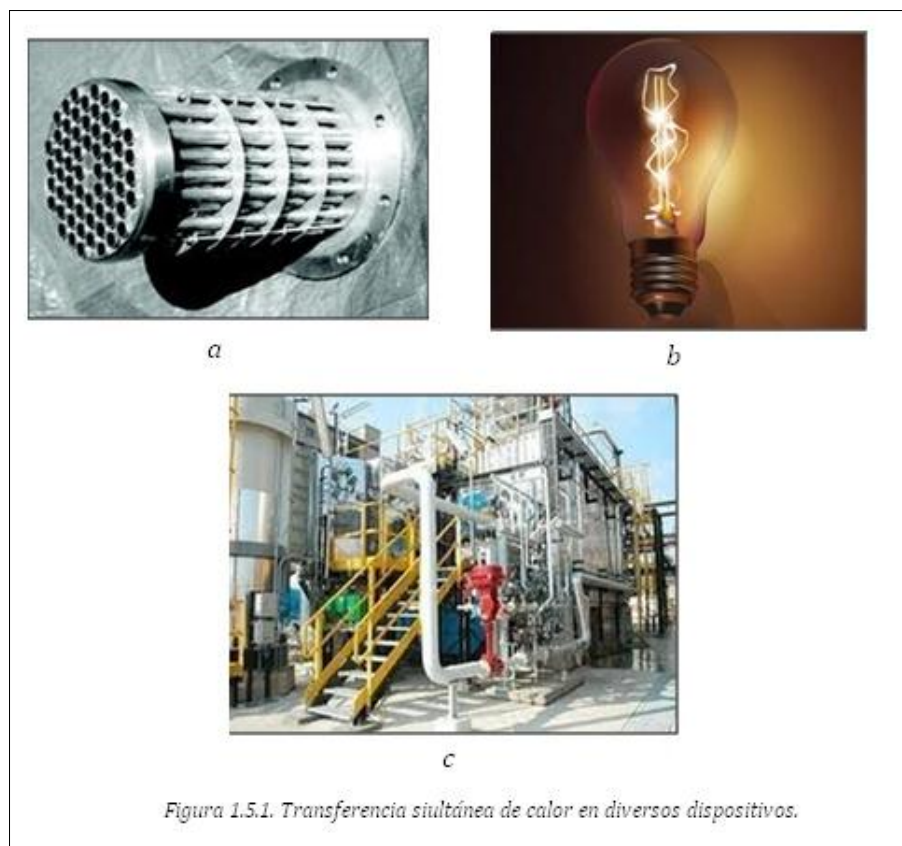
<i>Pared esférica.</i>	$R_e = \frac{V}{I}$	$R_e = \frac{R_2 - R_1}{4\pi k R_2 R_1}$
<i>Superficie-ambiente</i>	$R_e = \frac{V}{I}$	$R_e = \frac{1}{hA}$

1.5. Mecanismos combinados de transferencia de calor.

Aun cuando se han estudiado por separado los mecanismos y leyes de la transferencia de calor, es común para el ingeniero encontrarlos en la práctica en forma simultánea, además de que alguno de ellos puede ser muy insignificante respecto de los otros. Para explicar con más claridad esta cuestión, consideremos los siguientes ejemplos, ilustrados en la figura 1.5.1.

Considérese el ejemplo de los tubos de un intercambiador de calor, como se ilustra en la imagen 1.5.1.a. En este caso el calor se transfiere por convección del fluido caliente al tubo, pasa luego por conducción a través de la pared de éste y finalmente se transfiere por convección de la pared del tubo al fluido frío.

En un foco incandescente, *figura 1.5.1.b*; el calor se transfiere por radiación desde el filamento a la pared del foco, luego se transfiere por conducción a través de la pared de éste; por último se transfiere por convección de la pared del foco hacia el ambiente que lo rodea. En este ejemplo se considera un vacío absoluto en el interior del foco y el mecanismo de conducción muy insignificante comparado con los otros dos.



En una caldera de tubos de agua (acuotubular), el calor se transfiere por radiación desde el hogar donde se quema el combustible, fluido caliente o gases de combustión; hasta la pared del tubo, luego por conducción a través de la pared del mismo, y por último por convección de la pared hacia el fluido frío, como ilustra en la figura 1.5.1.c.

Además de estos ejemplos ilustrados con imágenes, se pueden mencionar otros como son los equipos de refrigeración y aire acondicionado, evaporadores, condensadores, precalentadores y recalentadores de agua, radiadores, y una gran gama de dispositivos que intercambian calor y que encuentran aplicación en el campo industrial hoy en día.

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. Se pretende evaporar agua lentamente a una temperatura de 50 °C, en un sistema de flujo estable. El agua se encuentra en un recipiente de baja presión que está rodeado por vapor. El vapor se condensa a 100 °C. El coeficiente de transferencia de calor total, entre el agua y el vapor es de 1.2 kW/m²-°C. Calcular el área de la superficie del recipiente que sería necesaria para evaporar el agua a una rapidez de 500 kg/h.

R: 5.5 m².

2. Para determinar la conductividad térmica de un material, se usa un dispositivo del tipo placa caliente, que tiene una sección transversal de 12 cm y contiene una muestra de 3 cm de espesor. Cuando la corriente del calentador es de 0.250 amperios y el voltaje de 60 voltios, la temperatura en el lado caliente es de 70 °C y en el lado frío de 30 °C. ¿Cuál es la conductividad térmica del material?

R: 1 W/m² – K.

3. Una tubería de 10 cm de diámetro exterior, se utiliza para transportar metales líquidos. Si su temperatura exterior en condiciones de operación es de 750 °C, y está cubierta con un aislante que tiene un grosor de 12 cm y con una conductividad térmica $k = 0.05$ (1-0.0002T) en W/m²-K. ¿Cuál será la rapidez de flujo de calor, si se desea tener una temperatura en la superficie del aislante de 150 °C?

R: 123.73 W/m.

4. Calcule el flujo de calor por unidad de área que atraviesa una pared de cobre de 3 cm de espesor y cuya conductividad térmica es de 386 W/m-°C, si la diferencia de temperaturas entre las caras es de 200 °C.

R: 2.57 MW/m²

5. Una esfera de 20 cm de diámetro se encuentra alojada en un recipiente muy grande al vacío, cuya temperatura interior es de 0 K. Si la temperatura de la superficie de la esfera es de 1000 K. Calcule el flujo de calor desde la esfera hacia el recipiente. Considere ambos como cuerpos negros.

R: 7.125 kW.

6. Una placa plana recibe 1000 W/m^2 de radiación solar. Sí absorbe el 40% de ésta energía, y tiene una emitancia de 0.05. Estime la temperatura de la placa. La temperatura del aire es de 20°C y el coeficiente convectivo de calor de $12 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$.

R: 51.67°C .

7. Si por conducción se transfieren 3 kW a través de un material aislante de 1 m^2 de sección transversal, 2.5 cm de espesor y cuya conductividad térmica puede tomarse igual a $0.2 \text{ W/m-}^\circ\text{C}$; calcúlese la resistencia térmica y la diferencia de temperaturas del material.

R: 0.125°C/w , 375°C .

8. Un oleoducto de 50 cm de diámetro transporta, en el ártico, petróleo a 30°C y está expuesto a una temperatura de ambiente de -20°C . Un aislante especial de polvo de 5 cm de espesor y conductividad térmica igual a $7 \text{ mW/m-}^\circ\text{C}$ cubre la superficie del oleoducto. El coeficiente convectivo en el exterior del oleoducto es de $12 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Estímese la pérdida de energía del oleoducto por unidad de longitud.

R: 11.9 W/m .

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD I

UNIDAD 1: Actividad 1

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Resumen.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca de los principios y conceptos relacionados con el mecanismo de la conducción de calor.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el mecanismo de la conducción, la ley de Fourier y los conceptos de conductividad térmica y resistencia térmica, Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de dos cuartillas.	

UNIDAD 1: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO LA LEY DE FOURIER.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con el mecanismo de la conducción de calor y la ley de Fourier.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Si por conducción se transfieren 1 kW a través de un material aislante de sección recta, de 1 cm de espesor y cuya conductividad térmica puede tomarse igual a 0.02 W/m · °C. Calcúlese la diferencia de temperaturas entre las caras del material, si el área de la sección recta es 1 m².

R: 500 °C

2. Un aislante tiene una conductividad térmica de 3×10^{-2} W/m · °C. ¿Qué espesor será necesario para que haya una caída de temperatura de 500 °C, para un flujo de calor de 400 W/m²?

R: 3.75 cm

3. Un material superaislante cuya conductividad térmica es de 2×10^{-4} W/m · °C, se utiliza para aislar un depósito de nitrógeno líquido que se mantiene a -196 °C. Para evaporar 1 Kg de nitrógeno a esa temperatura se necesitan 199 KJ. Suponiendo que el depósito tiene forma esférica, con un diámetro interior de 0.6 m, estílese la cantidad de nitrógeno evaporado por día, para un espesor de aislante de 2.5 cm y una temperatura ambiente de 20 °C. Tome la temperatura exterior del aislante igual a la del ambiente.

R: 0.92 kg/día

UNIDAD 1: Actividad 3**CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Resumen.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca de los principios y conceptos relacionados con el mecanismo de la convección.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el mecanismo de la convección, la ley de enfriamiento de Newton, y el concepto de conductancia de película. Además agregar los conceptos de capa límite térmica y capa límite hidrodinámica. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de dos cuartillas.	

UNIDAD 1: Actividad 4**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO LA LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con el mecanismo de la convección y la ley de enfriamiento de Newton.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Por un tubo de 2.5 cm de diámetro y 3 m de largo fluyen 0.5 kg/s de agua, con un calor específico igual a 4,180 kJ/Kg-°C. Se impone un flujo de calor constante en la pared del tubo, de modo que la temperatura en la pared es 40 °C mayor que la temperatura del agua. Calcúlese el flujo de calor y estílese el incremento de temperatura del agua. El agua esta presurizada de manera que no tenga lugar la ebullición y el coeficiente de transferencia de calor es igual a 890 W/m²-°C.

R: 4 °C

2. Cuando la superficie de una placa plana de 0.1 m x 0.5 m se mantiene a 30 °C, la tasa de transferencia de calor del aire caliente a 100 °C que fluye a su lado es de 140 W. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección entre la placa y el aire?

R: 40 W/m² – °C

UNIDAD 1: Actividad 5

CONCEPTOS BÁSICOS DE RADIACIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Resumen.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	El espectro electromagnético y la radiación térmica.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Elaborar un resumen que contenga el concepto del espectro electromagnético y los diferentes rangos de longitudes de onda, y señalar el rango donde está comprendida la radiación térmica.	

UNIDAD 1: Actividad 6

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO LAS LEYES DE RADIACIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN MÁXIMA:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con el mecanismo de la radiación y las leyes que la rigen.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Un pequeño calentador radiante tiene tiras de metal de 6 mm de anchura con una longitud total de 3 m. La emisividad de la superficie de las tiras es 0.85. ¿A qué temperatura se tendrá que calentar las tiras si tienen que disipar 1,600 W de calor a una habitación cuyas paredes se encuentran a 25 °C.

R: 893.71 °C

2. Si el flujo radiante del sol es de 1,350 W/m². ¿Cuál será su temperatura equivalente de cuerpo negro?

R: 389.16 °C

3. Considere un cuerpo de masa m, calor específico c y área A, a una temperatura T_0 ; el cuál se deja caer en un recipiente muy grande cuyas paredes se encuentran a una temperatura de 0 K. Si el recipiente se encuentra al vacío, determine la temperatura del cuerpo como función del tiempo. Establezca claramente las suposiciones necesarias.

$$R: \left(\frac{mcT_0^3}{3\sigma AtT_0^3 + mc} \right)^{1/3}$$

4. Un calentador solar simple consiste de una placa de vidrio, debajo de la cual está localizada una artesa poco profunda llena de agua, de tal manera que el agua está en contacto con la placa de vidrio colocada encima. La radiación solar atraviesa el vidrio a una rapidez de 500 W/m^2 . El agua está a 93°C y el aire que la rodea a 27°C . Si los coeficientes de transferencia de calor entre el agua y el vidrio, y entre el vidrio y el aire son de 30 y de $7 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$, respectivamente. Determine el tiempo necesario para transferir $1,200 \text{ kJ/m}^2$ a la superficie del agua de la artesa. Suponga que la superficie inferior de la artesa está aislada.

R: 2.66 h

5. Se calienta una pieza de aluminio en un recipiente al vacío. La energía radiante incidente del sol es 950 W/m^2 . El aluminio absorbe el 10 % de la energía solar que incide. Si en estado estacionario, el 50 % de la energía que se absorbe se conduce a los alrededores y el 50 % restante se radia al espacio, estime la temperatura del aluminio, si su emisividad es 0.05.

R: 86.81°C

Unidad 2

Competencias específicas a desarrollar:

1. Modelar el problema general de la conducción de calor y comprender que de él, emanan todos los casos particulares que se presentan en la práctica diaria.
2. Aplicar los principios de la conducción de calor unidimensional en la solución de problemas en estado estable, así como la obtención de los perfiles de temperatura y flujo de calor correspondiente; para diversas geometrías.
3. Aplicar los principios de conducción de calor unidimensional y convección, para la obtención de la ecuación general de las superficies extendidas o aletas de enfriamiento.

Conducción Unidimensional en Estado Estacionario.

Introducción.

En esta unidad se estudiarán algunos problemas de sistemas con y sin generación de calor, que suelen presentarse en la práctica.

Dichos sistemas son: la pared plana, el cilindro hueco, el cilindro sólido y la esfera hueca. Todos estos sistemas o geometrías se presentan en casos de techos y paredes de habitaciones, hornos de microondas, reactores nucleares, procesos de combustión, durante el “curado” o secado del concreto, tuberías que conducen fluidos, conductores eléctricos, depósitos de almacenamiento para fluidos, etc.

2.1 Ecuación general de la conducción de calor.

Antes de estudiar los casos particulares de la conducción de calor unidimensional, en diversas geometrías, tales como paredes planas, cilindros y esferas; sin generación o con generación de calor (Q); es necesario presentar la ecuación general de la conducción de calor en tres dimensiones y en estado transitorio o inestable. Sin embargo, aunque dicha ecuación puede ser desarrollada en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, por sencillez será presentada solo en coordenadas rectangulares.

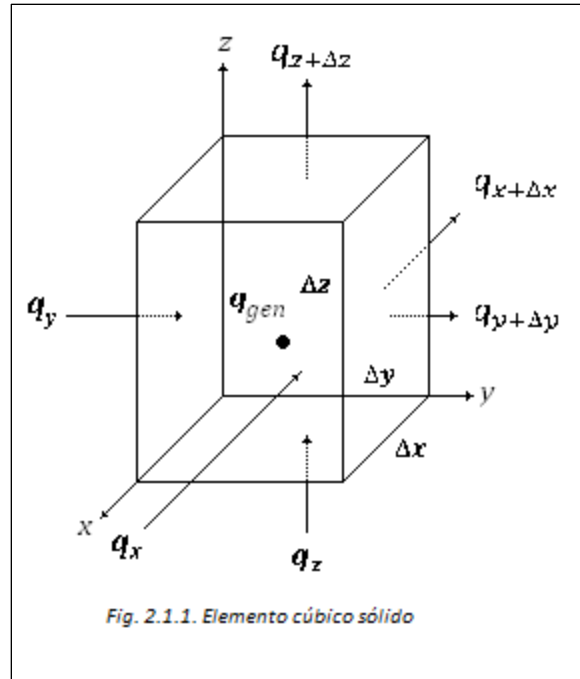
Con el fin de deducir la ecuación general de la conducción de calor, consideremos un cuerpo sólido amorfo y extraigamos de él un pequeño elemento cúbico diferencial con lados Δx , Δy y Δz paralelos a los ejes x , y y z , respectivamente, como se ilustra en la figura 2.1.1.

A partir de la primera ley de la termodinámica que trata respecto a la conservación de la energía, se puede escribir el siguiente balance de energía.

$$\text{Calor que entra por las caras} + \text{calor interno generado} = \text{calor que sale por las caras} + \text{cambio de la energía interna} + \text{trabajo}$$

En el balance de energía, el trabajo ($\dot{W}$) hecho por el volumen de control, puede eliminarse, puesto que la expansión de un sólido, es muy pequeña y por lo tanto despreciable.

Así, utilizando la ley de Fourier para expresar el calor que entra o sale de cada cara del elemento cúbico, se tiene:



q_x = Calor que entra en la cara $\Delta y \Delta z$.

q_y = Calor que entra en la cara $\Delta x \Delta z$.

q_z = Calor que entra en la cara $\Delta x \Delta y$.

$q_{x+\Delta x}$ = Calor que sale de la cara $\Delta y \Delta z$.

$q_{y+\Delta y}$ = Calor que sale de la cara $\Delta x \Delta z$.

$q_{z+\Delta z}$ = Calor que sale de la cara $\Delta x \Delta y$.

q_{gen} = Calor generado por el elemento cúbico.

Todos los calores que entran y salen del elemento cúbico, son por unidad de tiempo. Así, la primera ley de la termodinámica se puede reescribir como:

$$q_x + q_y + q_z + q_{gen} = q_{x+\Delta x} + q_{y+\Delta y} + q_{z+\Delta z} + \Delta U + W$$

Además, mediante la ley de Fourier se tienen los siguientes términos:

$$q_x = -k \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x$$

$$q_y = -k \Delta x \Delta z \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_y$$

$$q_z = -k\Delta_x\Delta_y \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z$$

$$q_{x+\Delta x} = -k\Delta_y\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

$$q_{y+\Delta y} = -k\Delta_x\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y+\Delta y}$$

$$q_{z+\Delta z} = -k\Delta_x\Delta_y \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+\Delta z}$$

Y el calor generado se representa por:

$$q_{gen} = q''' \Delta x \Delta y \Delta z$$

donde:

$q''' = \text{Calor generado por unidad de volumen y de tiempo.}$

El cambio de energía interna está dado por:

$$\Delta U = mc \frac{\partial T}{\partial t} = \rho(\Delta_x \Delta_y \Delta_z) c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aquí:

$\rho = \text{Densidad del elemento cúbico.}$

$\Delta_x \Delta_y \Delta_z = \text{Volumen del elemento.}$

$c = \text{calor específico del elemento.}$

$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{Variación de la temperatura con respecto al tiempo del elemento cúbico.}$

Agrupando y sustituyendo estos términos en la ecuación de la primera ley se obtiene:

$$k\Delta_y\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - k\Delta_y\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + k\Delta_x\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - k\Delta_x\Delta_z \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_y + k\Delta_x\Delta_y \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} - k\Delta_x\Delta_y \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z + q''' \Delta x \Delta y \Delta z = \rho(\Delta_x \Delta_y \Delta_z) c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z$, la Ec. Anterior, se tiene:

$$\frac{k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{\Delta_x} + \frac{k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_y}{\Delta_y} + \frac{k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} - k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z}{\Delta_z} + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Puesto que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$$

En el límite cuando $\Delta_x \rightarrow 0$, $\Delta_y \rightarrow 0$, $\Delta_z \rightarrow 0$; se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si la conductividad del elemento cúbico es constante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{\rho c}{k} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

La ecuación anterior se denomina, “Ecuación general de la conducción de calor en tres dimensiones, con generación de calor y en estado inestable. El término $\alpha = k/\rho c$, define la difusividad térmica del material, en (m^2/s) , e indica la rapidez con la que se propaga el calor.

Campo de temperaturas. La ecuación anterior ilustra el conjunto de temperaturas en cada punto del medio estudiado y en cada instante.

$$\text{Estable,} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T(x, y, z) \rightarrow \text{Tridimensional} \\ T = T(x, y) \rightarrow \text{Bidimensional} \\ T = T(x) \rightarrow \text{Unidimensional} \end{array} \right.$$

$$\text{Inestable,} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T(x, y, z, t) \rightarrow \text{Tridimensional} \\ T = T(x, y, t) \rightarrow \text{Bidimensional} \\ T = T(x, t) \rightarrow \text{Unidimensional} \end{array} \right.$$

Puesto que en estado estable $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, la ecuación general, se transforma en:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \dots \dots \dots \text{Ecuación de Poisson.}$$

En ausencia de fuente de calor, la ecuación de Poisson se convierte en:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots \text{Ecuación de Laplace} \rightarrow \nabla^2 T = 0$$

Para el caso unidimensional inestable la ecuación general de la conducción, toma la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

2.2 Conducción unidimensional en estado estacionario en paredes planas, cilindros y esferas.

A partir del caso general, se puede representar un punto de temperatura $T = T(x, y, z, t)$ como función de las tres coordenadas y del tiempo t .

Así, un diferencial de temperaturas entre dos puntos del elemento cúbico; puede ser escrito como:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Entonces para el caso unidimensional en estado estable, en el cual $dy = dz = 0$, $dt = 0$; se obtiene:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

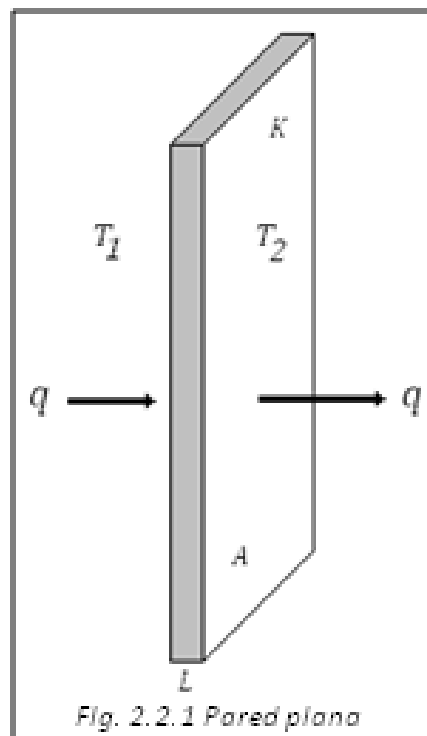
Y la ecuación de Fourier puede escribirse, para el caso unidimensional como:

$$q = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

En la cual la temperatura solo es función de la distancia x , es decir; $T = T(x)$.

La pared plana.

Consideremos el caso particular de la pared plana en estado estable y sin generación de calor, la cual mantiene sus caras a temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente; de espesor L y área A , indicada en la figura 2.2.1.



Si la conductividad térmica del material de la pared es constante, entonces la distribución de temperaturas y el flujo de calor a través de la pared, puede obtenerse a partir del caso general de la conducción.

De la ecuación general de la conducción, suprimiendo términos se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Separando variables e integrando:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

Separando variables e integrando nuevamente;

$$T = C_1 x + C_2$$

La ecuación anterior es la distribución o perfil de temperaturas a través de la pared en su solución general.

Utilizando las condiciones de frontera en las caras de la pared, se tiene:

$$T = T_1, \quad \text{en } x = 0$$

$$T = T_2, \quad \text{en } x = L$$

Sustituyendo estos valores en la solución general, se obtiene:

$$C_1 = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) \quad \text{y} \quad C_2 = T_1$$

Sustituyendo los valores de las constantes de integración en la solución general:

$$T = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x + T_1$$

$$T = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) x$$

La ecuación anterior grafica el perfil de temperaturas a través de la pared.

Utilizando la ley de Fourier, se puede evaluar el flujo de calor.

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q = -kAC_1$$

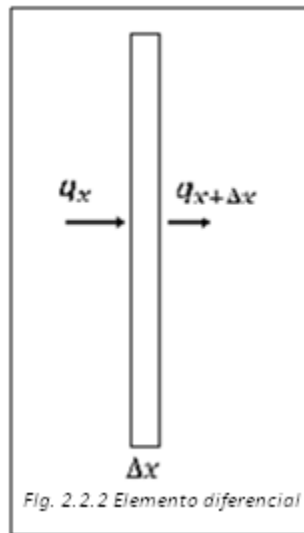
$$q = -kA \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)$$

$$q = kA \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right)$$

Note que esta ecuación coincide con la ecuación que se obtuvo en la unidad anterior. Comparando esta expresión con la ley de Ohm, se observa que la resistencia térmica para el caso de la pared plana es:

$$R_t = \frac{L}{kA}$$

Como única vez, se hará el análisis de la pared plana utilizando un elemento diferencial de espesor Δx , figura 2.2.2, extraído de la pared y se establecerá la primera ley de la termodinámica para el estado estable, considerando que el trabajo realizado por elemento es prácticamente cero por ser la expansión del elemento nula. Así;



Calor que entra por la cara izquierda = calor que sale por la cara derecha.

Es decir:

$$q_x = q_{x+\Delta x}$$

$$-kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

$$kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = 0$$

Dividiendo entre Δx , y aplicando el concepto de límite;

$$\frac{kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = 0$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Si la conductividad térmica del elemento es constante, dividiendo entre k .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Dividiendo entre A .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

En el caso de que el área de la sección transversal sea constante:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Y la ecuación anterior queda expresada como:

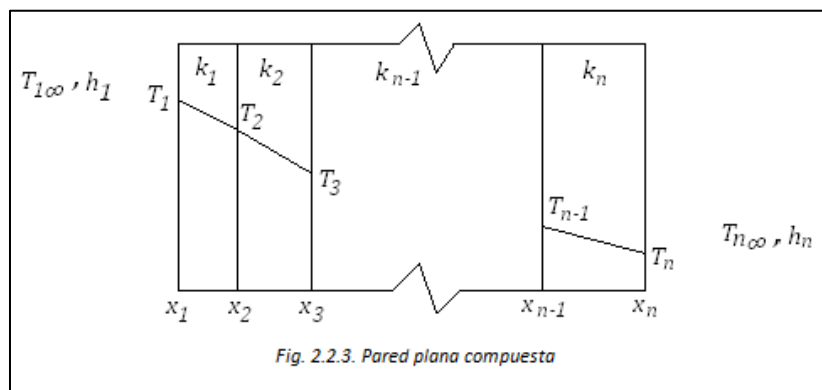
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Esta expresión puede obtenerse a partir de la ecuación general de la conducción al suprimir todos los términos que se requieran.

La pared plana compuesta.

En muchas aplicaciones una pared plana puede estar formada por varios materiales con distintos espesores y conductividades, dispuestas en forma vertical y/o horizontal. A estas disposiciones se les conoce como paredes en serie o en paralelo, puesto que las resistencias térmicas pueden sumarse para encontrar la resistencia total en la pared y con ello calcular el flujo de calor.

Además la pared puede estar expuesta en sus caras a fluidos con temperaturas, $T_{1\infty}$ y $T_{n\infty}$ y cuyos coeficientes de transferencia de calor por convección son h_1 y h_n respectivamente. La figura 2.2.3, representa una pared compuesta con resistencias en serie. Por tanto, el flujo de calor a través de este tipo de paredes, puede calcularse de acuerdo a la expresión:



$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{n\infty}}{\frac{1}{h_1 A} + \sum_{i=2}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{k_{i-1} A} + \frac{1}{h_n A}}$$

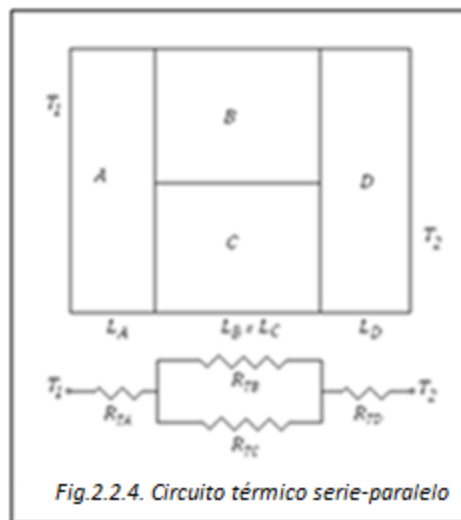
En esta pared compuesta se observa que todas las áreas perpendiculares al flujo de calor constante, son iguales por estar los materiales distribuidos en forma láminas apiladas verticalmente. Si los materiales estuviesen distribuidos en la forma en que se muestra en la figura 2.2.4, la resistencia térmica conductiva total sería calculada de acuerdo a la fórmula siguiente:

$$R_T = R_{TA} + \frac{R_{TB} R_{TC}}{R_{TB} + R_{TC}}$$

Y el flujo de calor de acuerdo a la expresión:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$$

Note que en este caso, las áreas de las secciones transversales perpendiculares al flujo de calor son diferentes. En el circuito se muestra que las resistencias R_{TB} y R_{TC} , están en paralelo, y por tanto su suma es independiente de R_{TA} y R_{TD} . Sin embargo, la resistencia total es la suma de las tres resistencias en serie, como se indica en la fórmula.



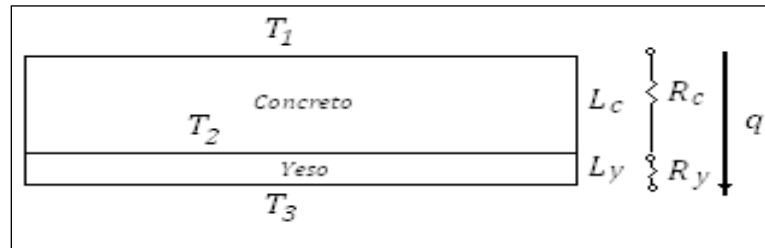
Ejemplo 2.2.1.

Considere un techo formado por una loza de concreto de 12 cm de espesor, cubierta con una capa de yeso de 1.25 cm de espesor. Las temperaturas superficiales son 50 °C y 15 °C en la superficie exterior e interior del techo respectivamente. Si la conductividad térmica del concreto es igual a 1.4 W/m-K, y la del yeso de 0.5 W/m-K. Calcule:

- El flujo de calor por unidad de área.
- La temperatura en la interface concreto-yeso.
- La disminución en % respecto al flujo de calor, cuando se coloca sobre el concreto una placa de poliestireno de 2.5 cm y con una conductividad de 0.05 W/m-K.

Solución:

Enseguida se muestra en forma esquemática la distribución de la losa de concreto y capa de yeso. También se indica el circuito térmico, en el cual las resistencias están conectadas en serie.



- El flujo de calor es:

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\left(\frac{L}{kA}\right)_c + \left(\frac{L}{kA}\right)_y}$$

Puesto que las áreas perpendiculares al flujo de calor son iguales, entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$q'' = \frac{q}{A} = \frac{50 - 15}{\frac{0.12}{1.4} + \frac{0.0125}{0.5}} = 316.13 \text{ W/m}^2.$$

- La temperatura en la interface concreto-yeso es;

$$q'' = 316.13 = \frac{50 - T_2}{\frac{0.12}{1.4}}$$

$$T_2 = 22.9^\circ\text{C}$$

- En este caso aumentaría el circuito en serie una resistencia más; así el flujo de calor que se transfiere a través del sistema poliestireno-concreto-yeso, es:

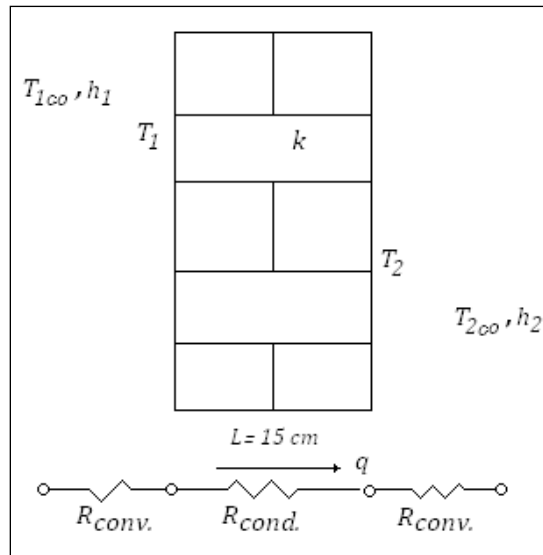
$$q'' = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{L}{kA}\right)_p + \left(\frac{L}{kA}\right)_c + \left(\frac{L}{kA}\right)_y} = \frac{50 - 15}{\frac{0.12}{1.4} + \frac{0.0125}{0.5} + \frac{0.025}{0.05}} = 57.31 \text{ W/m}^2.$$

Y la disminución en % del flujo de calor al colocar la placa de poliestireno es:

$$\% \text{ Red} = \frac{316.13 - 57.31}{316.13} \times 100 = 81.88$$

Ejemplo 2.2.2.

Considere una pared de ladrillo con una conductividad igual a 0.7 W/m-K , de 15 cm de espesor. La temperatura del aire en su cara izquierda es de 40°C y el coeficiente convectivo es $30 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Por la cara derecha la temperatura del aire es de 15°C , y el coeficiente de transferencia de calor es de $10 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Se va a agregar a la pared en su cara derecha un aislante con una conductividad térmica igual a $0.05 \text{ W/m-}^\circ\text{C}$, con el propósito de reducir el flujo de calor en un 60% . ¿Cuál será el espesor del aislante?



Solución:

Primero se calcula el calor transferido a través de la pared de ladrillos, considerando tres resistencias en serie, una conductiva en el ladrillo y dos convectivas en las caras de la pared, como se muestra en la figura. Obsérvese que la pared es de un solo material.

$$q'' = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}}$$

$$q'' = \frac{40 - 15}{\frac{1}{30} + \frac{0.15}{0.7} + \frac{1}{10}} = 71.92 \text{ W/m}^2.$$

Ahora como se quiere reducir este flujo de calor en un 60% , el calor que se transfiere a través de la pared será solo el 40% del valor calculado. Así:

$$q'' = 0.4(71.92) = 28.77 \text{ W/m}^2.$$

Luego entonces, se aumenta en la cara derecha el aislante y por consiguiente el circuito térmico se incrementa en una resistencia más a la conducción.

$$q'' = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}}$$

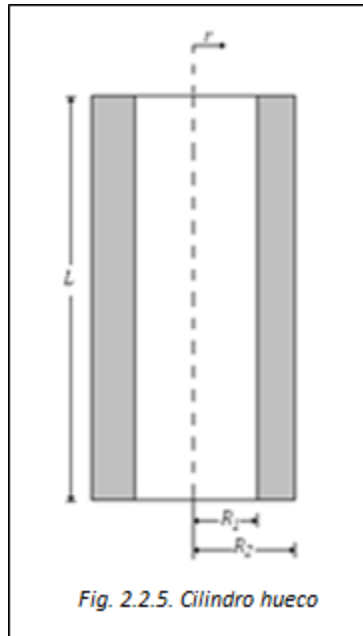
$$q'' = 28.77 = \frac{40 - 15}{\frac{1}{30} + \frac{L_A}{0.05} + \frac{0.15}{0.7} + \frac{1}{10}}$$

Despejando el espesor del aislante, se tiene:

$$L_A = 0.026 \text{ m} = 2.6 \text{ cm}.$$

El cilindro hueco.

Consideremos el caso particular del cilindro hueco, en estado estable y sin generación de calor, el cual mantiene sus paredes interior y exterior a temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente; con longitud igual a L , y radios R_1 y R_2 respectivamente, como se ilustra en la figura 2.2.5.



Si la conductividad térmica del material de la pared es constante, entonces la distribución de temperaturas y el flujo de calor a través de la pared, puede obtenerse a partir del caso general de la conducción. Note que para este caso el área del cilindro $A = 2\pi RL$ varía de acuerdo al los radios. Además, puesto que la longitud es mucho mayor que el radio, entonces la transferencia de calor se realizará en la dirección radial.

Así, de la ecuación general de la conducción, y después de eliminar los términos pertinentes se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Multiplicando la ecuación por kA .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

En el caso de que $k = cte$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Y puesto que el radio varía, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\pi r L \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Dividiendo nuevamente la ecuación entre $2\pi L$, se obtiene;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$T = C_1 \ln(r) + C_2$$

Esta expresión es el perfil de temperaturas en su solución general para el cilindro hueco sin generación de calor. Se le recuerda al estudiante que este mismo resultado se obtiene al extraer un elemento diferencial del sistema y aplicar la primera ley de la termodinámica para flujo estable.

Desde luego para encontrar los valores de las constantes, las condiciones de frontera son:

$$T = T_1, \quad \text{en } r = R_1$$

$$T = T_2, \quad \text{en } r = R_2$$

Sustituyendo estas condiciones en la solución general, se llega al sistema de ecuaciones lineales siguiente;

$$T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$T_2 = C_1 \ln R_2 + C_2$$

Resolviendo el sistema,

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}$$

$$C_2 = T_2 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} (\ln R_2)$$

Sustituyendo estos nuevos valores en la solución general:

$$T = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} (\ln r) + T_2 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} (\ln R_2)$$

Factorizando se obtiene:

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

Solución particular para el perfil de temperaturas del cilindro sin fuente de calor interna. Note que este perfil no es lineal.

El flujo de calor que pasa a través del cilindro en dirección radial, puede ser calculado utilizando la Ley de Fourier.

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q = -k(2\pi rL) \frac{\partial T}{\partial r}$$

Puesto que:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

Sustituyendo este valor;

$$q = -k(2\pi rL) \frac{C_1}{r} = -k(2\pi L) \left(\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right)$$

$$q = (2\pi kL) \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Resistencia térmica conductiva en cilindros huecos.

Si comparamos la ecuación para el cálculo del flujo de calor en el cilindro hueco, con la Ley de Ohm, se obtiene la siguiente expresión:

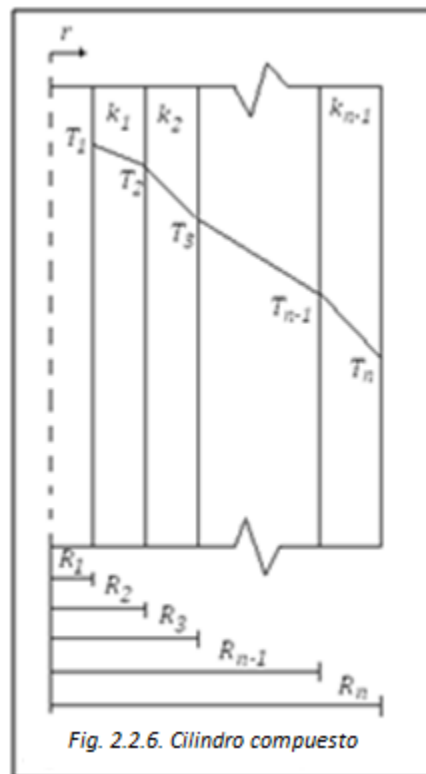
$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi kL}}$$

En esta, se observa que el denominador es la resistencia térmica conductiva.

$$R_T = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi kL}$$

El cilindro hueco compuesto.

Como en el caso de la pared compuesta, considere un cilindro hueco cubierto con varias capas de materiales distintos y con diferentes conductividades térmicas. Como se puede observar en la figura 2.2.6, al agregar las capas se va incrementando el radio de acuerdo al espesor de cada capa.



Puesto que todas las resistencias están conectadas en serie, el flujo de calor total a través del cilindro hueco compuesto puede calcularse como el cociente que resulta de dividir la diferencia de las temperaturas interior y exterior entre la resistencia total, así:

$$q = \frac{T_1 - T_n}{\frac{\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)}{2\pi k_{i-1}L}}$$

Si además consideramos que el cilindro está expuesto tanto en su interior como en su exterior a fluidos que tienen temperaturas $T_{1\infty}$ y $T_{n\infty}$, respectivamente, al igual que los coeficientes de transferencia de

calor h_1 y h_n , el flujo de calor a través del cilindro se calcula añadiendo las dos resistencias convectivas a la ecuación anterior.

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{n\infty}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)}{2\pi k_{i-1} L} + \frac{1}{h_n A_n}}$$

Donde:

$$A_1 = 2\pi R_1 L = \pi D_1 L$$

$$A_2 = 2\pi R_2 L = \pi D_2 L$$

Ejemplo 2.2.3.

Un tubo de cobre de 5 cm de diámetro exterior y 4.75 cm de diámetro interior, transporta vapor húmedo a 100 °C. La temperatura del aire ambiente es 25 °C. Con el propósito de reducir el flujo de calor en un 60 %, se desea aislar el tubo con fibra de vidrio. Tome las conductividades térmicas del cobre y la fibra de vidrio igual a 385 y 0.04 W/m-K y calcule el espesor del aislante necesario, si los coeficiente de película son 5,000 y 5 W/m²-K, en el interior y exterior respectivamente.

Solución:

Primero se calcula el flujo de calor para el tubo sin aislante, mediante la fórmula considerando solo una resistencia a la conducción y las convectivas.

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi k_c L} + \frac{1}{h_3 A_3}}$$

Puesto que no se conoce la longitud del tubo, el calor calculado debe ser por unidad de longitud, así:

$$\frac{q}{L} = q' = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{1}{h_1 \pi D_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi k_c} + \frac{1}{h_3 \pi D_2}}$$

$$q' = \frac{100 - 25}{\frac{1}{(5000)\pi(0.0475)} + \frac{\ln\left(\frac{5}{4.75}\right)}{2\pi(385)} + \frac{1}{(5)\pi(0.05)}}$$

Y puesto que la resistencia convectiva interior y la de conducción son muy pequeñas, entonces el flujo de calor depende solo de la resistencia convectiva exterior.

$$q' = \frac{100 - 25}{\frac{1}{(5)\pi(0.05)}} = 58.9 \text{ W/m.}$$

Como se pretende reducir el flujo de calor en un 60 %, entonces el calor transferido a través del tubo aislado es:

$$q'_A = (0.4)(58.9) = 23.56 \text{ W/m.}$$

Y el diámetro D_3 del aislante resulta ser;

$$q'_A = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{1}{h_1\pi D_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi k_c} + \frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi k_A} + \frac{1}{h_3\pi D_3}}$$

Nuevamente la resistencia convectiva en el interior y la conductiva del tubo de cobre son muy pequeñas, y el calor transferido depende de la resistencia del aislante y la del fluido.

$$q'_A = 23.56 = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi k_A} + \frac{1}{h_3\pi D_3}} = \frac{100 - 25}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{5}\right)}{2\pi(0.04)} + \frac{1}{(5)\pi D_3}}$$

$$23.56 = \frac{100 - 25}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{5}\right)}{2\pi(0.04)} + \frac{1}{(5)\pi D_3}}$$

$$23.56 = \frac{75}{3.979\ln\left(\frac{D_3}{5}\right) + \frac{0.064}{D_3}}$$

Luego, mediante aproximaciones sucesivas se obtiene D_3 .

$$D_3 = 11.1 \text{ cm.}$$

Y el espesor del aislante es:

$$e = \frac{D_3 - D_2}{2} = \frac{11.1 - 5}{2} = 3.05 \text{ cm.}$$

Radio crítico de aislamiento en un cilindro.

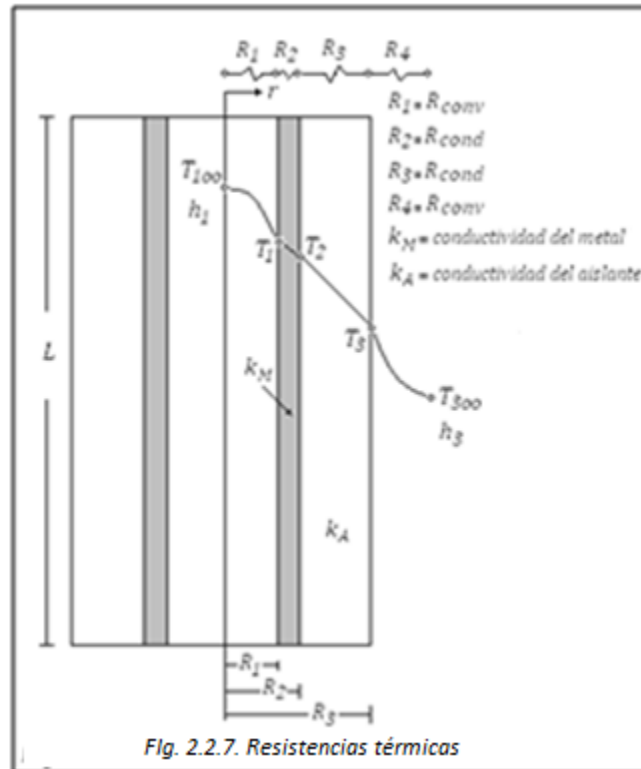
En la práctica, es necesario cubrir con aislante ciertas tuberías que conducen líquidos o gases calientes con el propósito de proteger a las personas de quemaduras; o en su caso cubrir ciertos conductores eléctricos con materiales que protejan contra toques eléctricos.

Sin embargo, el hecho de cubrir estas paredes cilíndricas tiene también como meta principal reducir el flujo de calor que pasa a través de la pared. Este flujo va de un mínimo a un máximo y después del máximo tiende a cero. Todo ello, sin lugar a duda depende de la resistencia que opone el aislante y la resistencia de convección del fluido circundante en la superficie exterior del cilindro.

La figura 2.2.7 se ilustran las resistencias térmicas que intervienen en el cálculo del flujo de calor de un cilindro hueco cubierto con un material aislante.

Las resistencias son:

$$R_1 = \frac{1}{h_1 A_1}, \quad R_2 = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi k_M L}, \quad R_3 = \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{2\pi k_A L}, \quad R_4 = \frac{1}{h_3 A_3}$$



De estas cuatro resistencias, la primera es muy pequeña debido a que el flujo de fluido que pasa a través de un ducto tiene una velocidad promedio muy alta y por ende un coeficiente de película grande, de tal suerte que $h_1 \gg h_3$. La segunda resistencia depende de la conductividad térmica (k_M) del metal y del $\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$; en los metales $k_M \gg k_A$ y el término $\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ muy pequeño; así, que esta resistencia también se desprecia.

Y por consiguiente el flujo de calor por unidad depende solo de las resistencias tres y cuatro.

$$q' = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi k_A} + \frac{1}{h_3 \pi D_3}} = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{2\pi k_A} + \frac{1}{h_3 2\pi R_3}}$$

Puesto que, la resistencia térmica total del circuito es la suma de estas dos resistencias; entonces:

$$R_T = \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{2\pi k_A} + \frac{1}{h_3 2\pi R_3}$$

Y como al variar el radio del aislante (R_3), el flujo de calor de aumentar o disminuir, quiere decir que existe un valor para (R_3) en el cuál el flujo de calor sea máximo. Este valor de (R_3), se denomina radio crítico de aislante y se denota por (r_c).

Por tanto para encontrar este valor es necesario derivar con respecto a (R_3) la resistencia total (R_T) del circuito e igualar a cero. Así:

$$\frac{dR_T}{dR_3} = \frac{1}{2\pi k_A} \left(\frac{1}{R_3} \right) - \frac{1}{2\pi h_3} \left(\frac{1}{R_3^2} \right) = 0$$

Resolviendo algebraicamente y despejando (R_3), se obtiene que:

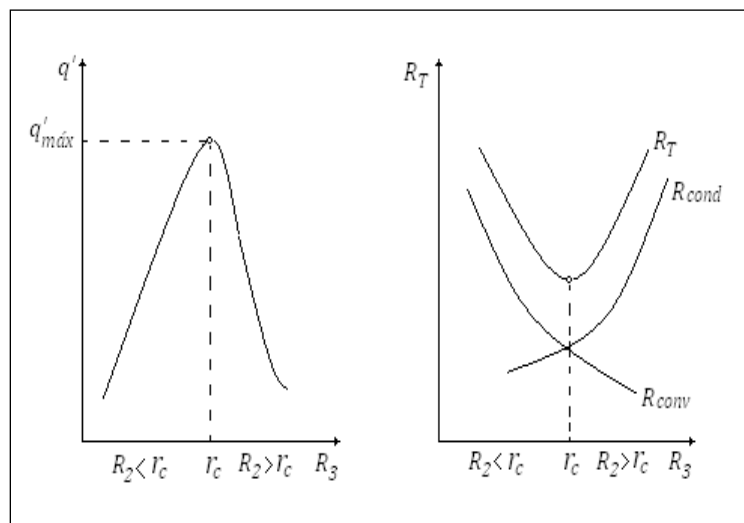
$$R_3 = r_c = \frac{k_A}{h_3}$$

Nota: Se deja al estudiante comprobar que este valor corresponde a un mínimo, aplicando la segunda derivada a la (R_T) y sustituir en esta nueva derivada el valor de:

$$R_3 = \frac{k_A}{h_3}$$

Esto quiere decir, que si $R_2 < r_c$, al agregar aislante el flujo de calor por unidad de longitud aumenta hasta hacerse máximo cuando $R_3 = r_c$. Asimismo, si $R_2 \geq r_c$, El flujo de calor disminuye al agregar aislante.

También es importante notar que al agregar aislante la resistencia conductiva aumenta, mientras la convectiva disminuye. Enseguida se presenta en forma de gráficas lo explicado anteriormente.



Ejemplo 2.2.4.

Se pretende aislar un conductor eléctrico de 1.25 cm de diámetro, con el propósito de lograr disipar el máximo flujo de calor. Si la temperatura superficial del conductor y la del aire circundante que lo rodea son 65 °C y 20 °C, respectivamente. Calcule el aumento de calor en %, que produce el aislante en el conductor y el espesor crítico de aislante requerido; si la conductividad del conductor y coeficiente de película del ambiente son 0.16 W/m-K y 8 W/m²-K.

Solución:

Primero calculamos el radio crítico de aislante.

$$r_c = \frac{k_A}{h_3} = \frac{0.16}{8} = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Puesto que $R_2 < r_c$, el flujo de calor debe aumentar al agregar aislante.

Entonces se calcula el flujo de calor para el conductor desnudo, para ello $D_3 = D_2 = 1.25 \text{ cm}$

$$q')_D = \frac{T_3 - T_{3\infty}}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi k_c} + \frac{1}{h_3 \pi D_3}} = \frac{65 - 20}{\frac{\ln\left(\frac{1.25}{1.25}\right)}{2\pi(0.16)} + \frac{1}{(8)\pi(0.0125)}} = 14.14 \text{ W/m}.$$

Luego para el conductor aislado; en este caso $D_3 = 4 \text{ cm}$.

$$q')_A = \frac{T_3 - T_{3\infty}}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi k_c} + \frac{1}{h_3 \pi D_2}} = \frac{65 - 20}{\frac{\ln\left(\frac{4}{1.25}\right)}{2\pi(0.16)} + \frac{1}{(8)\pi(0.04)}} = 18.6 \text{ W/m}.$$

Así, el aumento de calor en %, es:

$$\% = \frac{q')_A - q')_D}{q')_D} \times 100 = 31.5$$

Y el espesor crítico de aislante;

$$e_c = r_c - R_2 = 2 - 1.25 = 0.75 \text{ cm}.$$

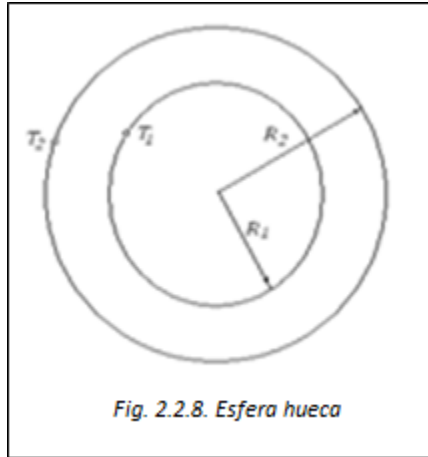
La esfera hueca.

Consideremos el caso particular de la esfera hueca, en estado estable y sin generación de calor, la cual mantiene sus paredes interior y exterior a temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente, y de radios R_1 y R_2 respectivamente, como se ilustra en la figura 2.2.7.

Si la conductividad térmica del material de la pared es constante, entonces la distribución de temperaturas y el flujo de calor a través de la pared, puede obtenerse a partir del caso general de la conducción. Note que para este caso el área de la esfera $A = 4\pi r^2$ varía de acuerdo al los radios. Además, la transferencia de calor se realizará en la dirección radial.

Así, de la ecuación general de la conducción, y después de eliminar los términos pertinentes se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$



Multiplicando la ecuación por kA .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

En el caso de que $k = cte$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Y puesto que el radio es variable, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Dividiendo nuevamente la ecuación entre 4π , se obtiene;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Integrando la primera vez

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = C_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

Integrando nuevamente,

$$T = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Nuevamente, esta expresión es el perfil de temperaturas en su solución general para la esfera hueca sin generación de calor. Se le recuerda al estudiante que este mismo resultado se obtiene al extraer un elemento diferencial del sistema y aplicar la primera ley de la termodinámica para flujo estable.

Desde luego para encontrar los valores de las constantes, las condiciones de frontera son:

$$T = T_1, \quad \text{en } r = R_1$$

$$T = T_2, \quad \text{en } r = R_2$$

Sustituyendo estas condiciones en la solución general, se llega al sistema de ecuaciones lineales siguiente;

$$T_1 = -\frac{C_1}{R_1} + C_2$$

$$T_2 = -\frac{C_1}{R_2} + C_2$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

$$C_2 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \left(\frac{1}{R_1} \right)$$

Sustituyendo estos valores en la solución general, se tiene:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Solución particular para el perfil de temperaturas de la esfera sin fuente de calor interna. Note que este perfil es de la forma exponencial.

El flujo de calor que pasa a través de la esfera en dirección radial, puede ser calculado utilizando la Ley de Fourier.

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q = -k(4\pi r^2) \frac{\partial T}{\partial r}$$

Puesto que:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

Sustituyendo este valor;

$$q = -k(4\pi r^2) \frac{C_1}{r^2} = -\frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

$$q = -\frac{4\pi k(T_1 - T_2)}{\frac{R_1 - R_2}{R_2 R_1}}$$

$$q = \frac{4\pi k R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1}$$

Ejemplo 2.2.5.

Una esfera hueca es fabricada de aluminio y tiene un diámetro interior de 4 cm y uno exterior de 8 cm. Las temperaturas interior y exterior son 100 °C y 50 °C respectivamente. Calcule la transferencia de calor desde el interior de la esfera. Tome $k = 206 \text{ W/m-K}$.

Solución:

Para una esfera hueca en estado estacionario sin generación de calor, se tiene:

$$q = \frac{4\pi k R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi(206)(0.02)(0.04)(100 - 50)}{(0.04 - 0.02)} = 5,177.5 \text{ W} = 5.1775 \text{ kW}$$

Resistencia térmica conductiva en esferas huecas.

Si comparamos la ecuación para el cálculo del flujo de calor en la esfera hueca, con la Ley de Ohm, se obtiene la siguiente expresión:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{R_2 - R_1}{4\pi k R_1 R_2}}$$

En esta, se observa que el denominador es la resistencia térmica conductiva.

$$R_T = \frac{R_2 - R_1}{4\pi k R_1 R_2}$$

La esfera hueca compuesta.

Como en los casos anteriores, considere una esfera hueca cubierta con varias capas de materiales distintos y con diferentes conductividades térmicas. Como se puede observar en la figura, al agregar las capas se va incrementando el radio de acuerdo al espesor de cada capa.

Puesto que todas las resistencias están conectadas en serie, el flujo de calor total a través de la esfera hueca compuesta puede calcularse como el cociente que resulta de dividir la diferencia de temperaturas interior y exterior entre la resistencia total, así:

$$q = \frac{T_1 - T_n}{\sum_{i=2}^n \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi k_{i-1} R_i R_{i-1}}}$$

Si además consideramos que la esfera está expuesta tanto en su interior como en su exterior a fluidos que tienen temperaturas $T_{1\infty}$ y $T_{n\infty}$, respectivamente, al igual que los coeficientes de transferencia de calor h_1 y h_n , el flujo de calor a través de ella se calcula añadiendo las dos resistencias convectivas a la ecuación anterior. Donde: $A_1 = 4\pi R_1^2$, $A_2 = 4\pi R_2^2$

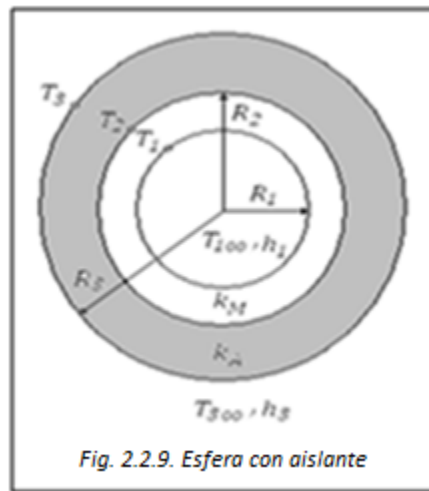
$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{n\infty}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \sum_{i=2}^n \frac{R_i - R_{i-1}}{4\pi k_{i-1} R_i R_{i-1}} + \frac{1}{h_n A_n}}$$

Radio crítico de aislamiento en una esfera hueca.

En la práctica, es necesario cubrir con aislante ciertos depósitos esféricos que almacenan líquidos o gases calientes con el propósito de proteger a las personas de quemaduras. Sin embargo, el hecho de cubrir estas paredes esféricas tiene también como meta principal reducir el flujo de calor que pasa a través de la pared, de adentro hacia fuera o viceversa. La figura 2.2.10 ilustra una geometría esférica cubierta con un material aislante y las resistencias térmicas que intervienen en el cálculo del flujo de calor. Las resistencias son:

$$R_1 = \frac{1}{h_1 A_1} = \frac{1}{h_1 (4\pi R_1^2)}, \quad R_2 = \frac{R_2 - R_1}{4\pi k_M R_2 R_1}$$

$$R_3 = \frac{R_3 - R_2}{4\pi k_A R_3 R_2}, \quad R_4 = \frac{1}{h_3 A_3} = \frac{1}{h_3 (4\pi R_3^2)}$$



De estas cuatro resistencias, la primera es muy pequeña debido a que la temperatura del fluido que se encuentra dentro de la esfera es igual a la de la pared interior de la esfera, y por ende la resistencia térmica convectiva en estas condiciones es muy pequeña y por tanto despreciable. La segunda resistencia depende de la conductividad térmica (k_M) del metal y de la diferencia entre los radios $R_2 - R_1$; puesto que esta diferencia es muy pequeña y la conductividad del metal muy grande, esta resistencia también se desprecia. Y por consiguiente el flujo de calor por unidad depende solo de las resistencias tres y cuatro.

$$q' = \frac{T_{1\infty} - T_{3\infty}}{\frac{R_3 - R_2}{4\pi k_A R_3 R_2} + \frac{1}{h_3(4\pi R_3^2)}}$$

Puesto que, la resistencia térmica total del circuito es la suma de estas dos resistencias; entonces:

$$R_T = \frac{R_3 - R_2}{4\pi k_A R_3 R_2} + \frac{1}{h_3(4\pi R_3^2)}$$

Y como al variar el radio del aislante (R_3), el flujo de calor debe aumentar o disminuir, quiere decir que existe un valor para (R_3) en el cuál el flujo de calor sea máximo. Este valor de (R_3), se denomina radio crítico de aislante y se denota por (r_c). Por tanto para encontrar este valor es necesario derivar con respecto a (R_3) la resistencia total (R_T) del circuito e igualar a cero. Así:

$$\frac{dR_T}{dR_3} = \frac{R_3 - R_2}{4\pi k_A R_3 R_2} + \frac{1}{h_3(4\pi R_3^2)} = \frac{1}{4\pi k_A R_2} + \frac{1}{4\pi k_A R_2} + \frac{1}{h_3(4\pi R_3^2)} = 0$$

Derivando, y resolviendo algebraicamente y despejando (R_3), se obtiene que:

$$R_3 = r_c = \frac{2k_A}{h_3}$$

Nota: Se deja al estudiante comprobar que este valor corresponde a un mínimo, aplicando la segunda derivada a la (R_T) y sustituir en esta nueva derivada el valor de:

$$R_3 = \frac{2k_A}{h_3}$$

2.3 Conducción unidimensional en elementos con generación de calor (Placas, cilindros y Esferas).

En la conducción unidimensional con generación de calor, la temperatura es función de la distancia y del calor que genera en su interior el sólido en cuestión. Así, $T = f(x, q''')$ y por tanto de la ecuación general de la conducción de calor;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{\rho c}{k} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

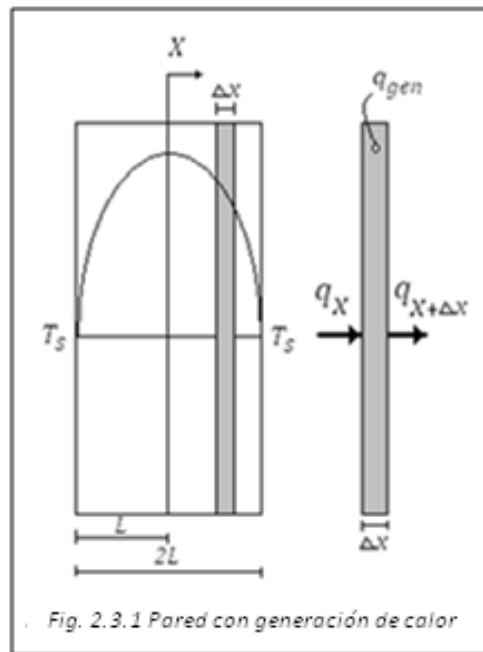
Eliminando los términos correspondientes se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0$$

Dicha ecuación gobierna todos los casos particulares como el de la pared plana, cilindros y esferas; los cuales se estudian a continuación.

La pared plana con generación interna de calor.

Consideremos el caso de la pared plana con generación interna de calor, de espesor $2L$ y con sus caras expuestas a fluidos que se encuentran a la misma temperatura, como se ilustra en la figura 2.3.1.



Tomando un elemento diferencial Δx , mediante la primera ley de la termodinámica para el caso del estado estable y aplicando el concepto de límite, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q''' = 0$$

Donde:

$$q''' = \frac{q_{gen}}{vol. del elemento}$$

En el caso de que $k = cte$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{q'''}{k} = 0$$

O bien;

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0}$$

Esta expresión se obtiene también de la ecuación general de la conducción, al eliminar los términos que convienen para el caso particular de la pared plana con generación interna de calor.

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden por el método de variables separables; se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{q'''}{k}$$

Integrando la primera vez;

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q'''}{k}x + C_1$$

Integrando por segunda vez;

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

La ecuación anterior se denomina el perfil o distribución de temperaturas para la pared plana con generación interna de calor en su solución particular.

Para determinar las constantes C_1 y C_2 , es necesario conocer dos condiciones de frontera, las cuales por simetría en la pared son:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = 0$$

$$T = T_s, \quad \text{en } x = L$$

Sustituyendo estas condiciones en la solución general, se obtiene:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = T_s + \frac{q'''L^2}{2k}$$

Y sustituyendo el valor de las constantes en la solución general se obtiene el perfil de temperaturas para el caso particular de la pared plana con generación de calor.

$$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + T_s + \frac{q'''L^2}{2k}$$

Agrupando y factorizando términos se obtiene finalmente:

$$T = T_s + \frac{q'''L^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Asimismo para calcular el flujo de calor a través de la pared se aplica la Ley de Fourier y se evalúa la diferencial de la temperatura respecto al límite $x = L$, así:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}$$

$$q = -kA \left(-\frac{q'''L}{k} \right)$$

$$q = q'''(AL) = q'''V = q_{gen}$$

Ejemplo 2.3.1

Considere una pared de acero al carbono con fuente de calor igual 50 kW/m^3 y con una conductividad térmica de $50 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Si la temperatura de la superficie de sus caras es igual 30°C y su espesor es de 10 cm . Calcule la temperatura en el centro de la pared.

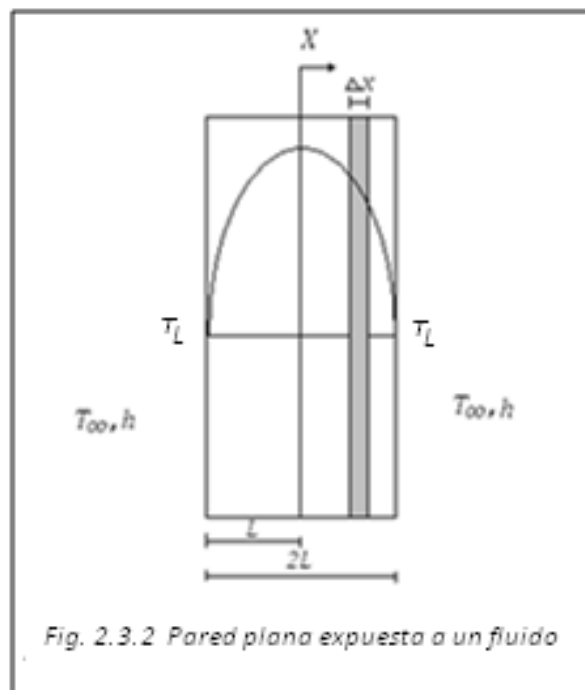
Solución: Del perfil de temperaturas se tiene que a una distancia $x = 0$,

$$T = T_s + \frac{q'''L^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$T = 30 + \frac{50000(0.1)^2}{2(50)} \left[1 - \left(\frac{0}{10} \right)^2 \right] = 35^\circ\text{C}$$

La pared plana con generación interna de calor expuesta en ambas caras a un fluido.

Considere el caso de la pared plana, con generación interna de calor, solo que ahora expuesta en ambas caras a un fluido con temperatura T_∞ , y con un coeficiente de transferencia de calor h , como se muestra en la figura 2.3.2. Obsérvese que la temperatura T_L en las caras es desconocida.



De la solución general para la pared se tiene:

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + C_1x + C_2$$

Las condiciones de frontera para el cálculo de las constantes, son:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = 0$$

$$q_{cond} = q_{conv} = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = hA(T_L - T_\infty)$$

De la primera condición se obtiene:

$$C_1 = 0$$

De la segunda, despejando T_L ;

$$T_L = T_\infty - \frac{k}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}$$

$$T_L = T_\infty - \frac{k}{h} \left[-\frac{q'''x}{k} + C_1 \right]_{x=L}$$

$$T_L = T_\infty + \frac{q'''L}{h}$$

Sustituyendo esta última expresión en la solución general, se obtiene:

$$T = T_L, \quad \text{en } x = L$$

$$T_\infty + \frac{q'''L}{h} = -\frac{q'''L^2}{2k} + C_1L + C_2$$

Como $C_1 = 0$, entonces:

$$C_2 = T_\infty + \frac{q'''L}{h} + \frac{q'''L^2}{2k}$$

Por último sustituyendo los valores de las constantes en la solución general de la ecuación diferencial,

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + C_1x + T_\infty + \frac{q'''L}{h} + \frac{q'''L^2}{2k}$$

Puesto que $C_1 = 0$, agrupando y factorizando términos y teniendo en cuenta que:

$$\frac{q'''L}{h} = \frac{q'''L}{h} \left(\frac{L}{L} \right) \left(\frac{2k}{2k} \right) = \frac{q'''L^2}{2k} \left(\frac{2k}{hL} \right)$$

Se obtiene:

$$T = T_\infty + \frac{q'''L^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{2k}{hL} \right]$$

Esta expresión se denomina el perfil de temperaturas para la pared plana con generación interna de calor, expuesta a un fluido en ambas caras y con temperatura y coeficiente de transferencia de calor; T_{∞} y h , respectivamente.

Sin duda alguna, dado el perfil, la temperatura máxima en la pared; se encuentra en $x = 0$, por tanto sustituyendo este valor en la expresión anterior, se tiene:

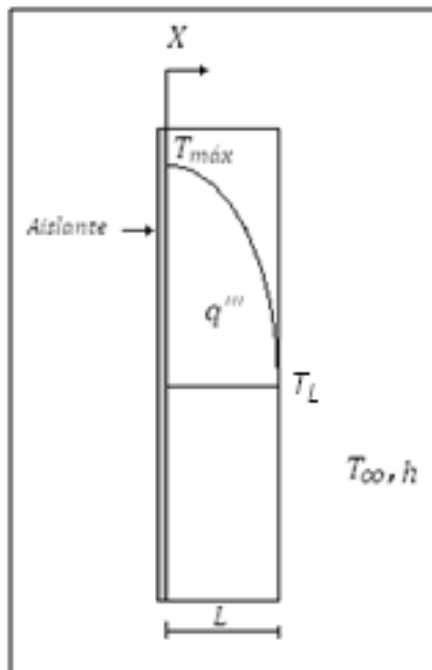
$$T_{m\acute{a}x} = T|_{x=0} = T_{\infty} + \frac{q'''L^2}{2k} \left[1 + \frac{2k}{hL} \right]$$

Además en $x = L$, se obtiene, nuevamente la temperatura T_L , al sustituir este valor en el perfil de temperatura.

$$T_L = T|_{x=L} = T_{\infty} + \frac{q'''L}{h}$$

Ejemplo 2.3.2.

Una placa de acero de 5 cm de espesor está perfectamente aislada por su lado izquierdo y en su interior se genera una cantidad de calor por unidad de volumen igual a $2,000 \text{ W/m}^3$. Calcule la temperatura máxima en la placa si por ambos lados está en contacto con un fluido a 30°C , siendo el coeficiente de transferencia de calor igual a $6 \text{ W/m}^2\text{-K}$ y la conductividad térmica del aislante de 0.17 W/m-K .



Solución:

En la figura se muestra en forma esquemática la pared, la cual por simetría es la mitad de la representada en la sección 2.6. En este caso particular, se observa que la temperatura máxima se obtiene en $x = 0$, así:

$$T_{m\acute{a}x} = T|_{x=0} = T_{\infty} + \frac{q'''L^2}{2k} \left[1 + \frac{2k}{hL} \right]$$

$$T_{m\acute{a}x} = 30 + \frac{2000(0.05)^2}{2(0.17)} \left[1 + \frac{2(0.17)}{(6)(0.05)} \right] = 61.37 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

También se puede calcular la temperatura en la cara derecha de la pared:

$$T_L = T|_{x=L} = T_{\infty} + \frac{q'''L}{h}$$

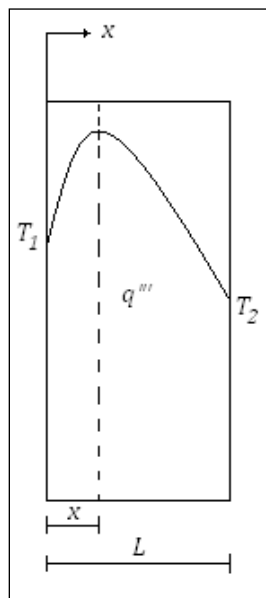
$$T_L = 30 + \frac{2,000(0.05)}{6} = 46.67 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

En caso de que la pared no tuviera aislante en su cara izquierda, la temperatura máxima se calcula considerando la pared como se indica en el esquema de la sección 2.3.2, solo que el espesor adopta el valor de $2L = 5 \text{ cm}$, es decir; $L = 2.5 \text{ cm}$.

$$T_{m\acute{a}x} = 30 + \frac{2000(0.025)^2}{2(0.17)} \left[1 + \frac{2(0.17)}{(6)(0.025)} \right] = 42 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Ejemplo 2.3.3.

Obtenga una expresión para la distribución de temperaturas de una pared plana con generación interna de calor uniformemente distribuido, donde sus caras izquierda y derecha; se mantienen a temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente. Encuentre también una expresión para calcular la temperatura máxima en la pared.



Solución:

En el esquema se observa que $T_1 > T_2$, de la ecuación general para la conducción de calor se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial,

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + C_1x + C_2$$

Las condiciones de frontera para este caso particular son:

$$T = T_1, \quad \text{en } x = 0$$

$$T = T_2, \quad \text{en } x = L$$

Sustituyendo estos valores en la solución general de la ecuación diferencial; por la primera condición se tiene:

$$T_1 = -\frac{q'''(0)^2}{2k} + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = T_1$$

De la segunda condición;

$$T_2 = -\frac{q'''(L)^2}{2k} + C_1(L) + T_1$$

Despejando C_1 ,

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q'''L}{2k}$$

Sustituyendo estos valores en la solución general,

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q'''L}{2k} \right] x + T_1$$

Esta expresión es el perfil de temperaturas de la pared con generación interna de calor.

Para encontrar la temperatura máxima en la pared, se observa el perfil supuesto y se deriva éste con respecto a la variable x , y se iguala a cero. El resultado indicará la distancia a partir del origen $x = 0$; donde se localizará la temperatura máxima.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 = -\frac{q'''x}{k} + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q'''L}{2k} \right]$$

Despejando x , se obtiene:

$$x = \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q'''L}{2k} \right] \frac{k}{q'''}$$

$$x = (T_2 - T_1) \frac{k}{q'''L} + \frac{L}{2}$$

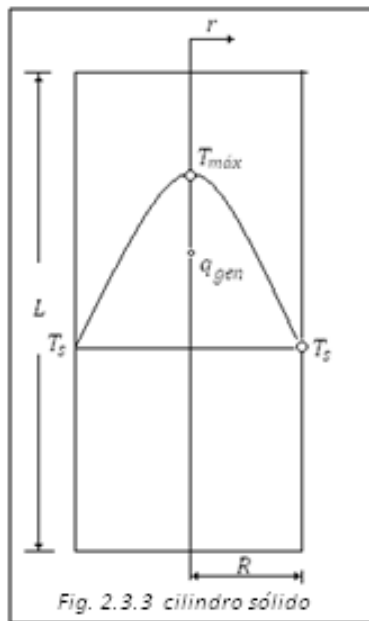
Finalmente se sustituye el valor de x , en el perfil de temperaturas y se obtiene la expresión para la temperatura máxima en la pared, la cual debe ser mayor a T_1 .

$$T_{m\acute{a}x} = -\frac{q'''}{2k} \left[(T_2 - T_1) \frac{k}{q'''L} + \frac{L}{2} \right]^2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q'''L}{2k} \right] \left[(T_2 - T_1) \frac{k}{q'''L} + \frac{L}{2} \right] + T_1$$

Nota: se sugiere al estudiante hacer el análisis dimensional de esta expresión para corroborar que las unidades correspondan a °C.

Cilindro sólido con generación de calor desnudo.

Considere un conductor desnudo, como el ilustrado en la figura 2.3.3, el cual genera calor en su interior debido al paso de una corriente eléctrica. Éste tiene longitud infinita, de tal suerte que $L \gg R$.



Un análisis mediante la ecuación general de la conducción de calor muestra que si conocemos la temperatura en la superficie del conductor, es posible determinar el perfil de temperaturas y el flujo de calor que transfiere hasta su superficie. Recordemos que el área de la superficie de un cilindro sólido es $A = 2\pi rL$ y su volumen $V = 2\pi r^2L$. Así, suprimiendo de la ecuación general de la conducción los términos que no corresponden para el caso unidimensional y en estado estable con fuente de calor, y observando que el calor fluye en dirección radial, se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{q'''}{k} = 0$$

Puesto que el área del cilindro no es constante, pues depende del radio, entonces multiplicando esta expresión por el área y dividiéndola a su vez entre $2\pi L$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{q''' r}{k} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{q''' r}{k}$$

Integrando por vez primera,

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q''' r^2}{2k} + C_1$$

Dividiendo entre r , toda la ecuación,

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q''' r}{2k} + \frac{C_1}{r}$$

Integrando nuevamente:

$$T = -\frac{q''' r^2}{4k} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Esta expresión es el perfil de temperaturas en su solución general. Y las condiciones de frontera para este caso son;

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = 0$$

$$T = T_s, \quad \text{en } r = R$$

Note que la primera condición se debe a que, en el centro del conductor esta la fuente de calor y la temperatura debe ser por ende máxima.

Sustituyendo estas condiciones de frontera en la solución general, se tiene:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = T_s + \frac{q''' R^2}{4k}$$

Sustituyendo nuevamente los valores de las constantes, en la misma ecuación:

$$T = -\frac{q''' r^2}{4k} + T_s + \frac{q''' R^2}{4k}$$

Factorizando,

$$T = T_s + \frac{q''' R^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Esta ecuación permite calcular la temperatura para cualquier radio r , del conductor y define en forma gráfica la curva mostrada en la figura. La temperatura máxima en el conductor se evalúa con esta expresión solo que en $r = 0$.

$$T_{m\acute{a}x} = T|_{r=0} = T_s + \frac{q'''R^2}{4k}$$

Asimismo para calcular el flujo de calor a través del cilindro se aplica la Ley de Fourier y se evalúa la diferencial de la temperatura respecto al límite $r = R$, así:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$$

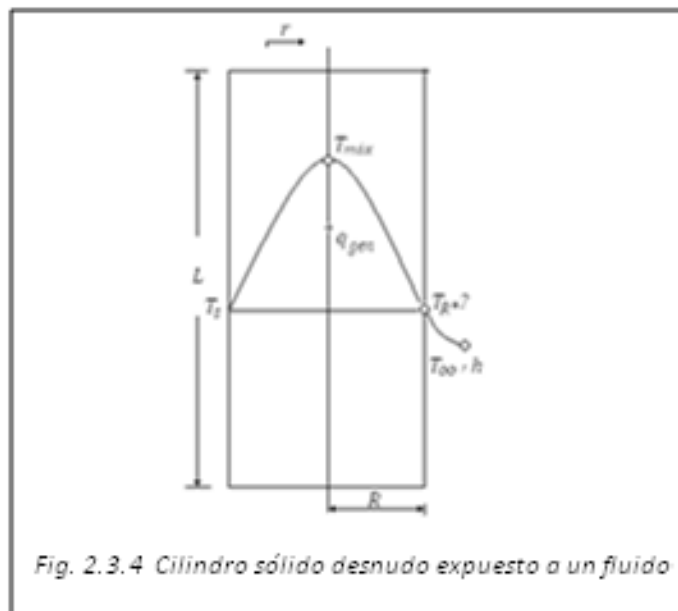
$$q = -2k\pi RL \left(-\frac{q'''R}{2k} \right)$$

$$q = q'''(AL) = q'''V = q_{gen}$$

No debe sorprender que el calor transferido en dirección radial, sea el que genera la corriente por su paso en dirección de su eje longitudinal.

Cilindro sólido con generación de calor desnudo, expuesto a un fluido.

Consideremos de nuevo el caso anterior solo que en lugar de conocer la temperatura superficial $T_s = T_R$ del conductor, se conoce la temperatura del fluido circundante T_∞ . En este caso, como se muestra en la figura 2.3.4; se agrega la resistencia convectiva y se modifica la segunda condición de frontera.



De la solución general se tiene:

$$T = -\frac{q'''r^2}{4k} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = 0$$

$$q_{cond} = q_{conv}, \quad \text{en } r = R$$

La segunda condición también se puede escribir como:

$$-kA \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = hA(T_R - T_\infty)$$

De la primera condición:

$$C_1 = 0$$

Despejando T_R de la segunda condición,

$$T_R = T_\infty - \frac{k}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = T_\infty - \frac{k}{h} \left[-\frac{q'''R}{2k} + \frac{C_1}{R} \right]$$

$$T_R = T_\infty + \frac{q'''R}{2h}$$

Esta expresión relaciona la temperatura superficial con la del fluido y el coeficiente de película.

Sustituyendo el valor de T_R , en la solución general, en el límite $r = R$, se tiene:

$$T_R = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} = -\frac{q'''R^2}{4k} + (0) \ln(R) + C_2$$

Y despejando C_2 .

$$C_2 = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} + \frac{q'''R^2}{4k}$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 , en la solución general, se obtiene:

$$T = -\frac{q'''r^2}{4k} + C_1 \ln(r) + T_\infty + \frac{q'''R}{2h} + \frac{q'''R^2}{4k}$$

Puesto que $C_1 = 0$, agrupando y factorizando términos y teniendo en cuenta que:

$$\frac{q'''R}{2h} = \frac{q'''R}{2h} \left(\frac{R}{R} \right) \left(\frac{2k}{2k} \right) = \frac{q'''R^2}{4k} \left(\frac{2k}{hR} \right)$$

Se obtiene:

$$T = T_{\infty} + \frac{q''' R^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2k}{hR} \right]$$

Expresión que define el perfil de temperaturas para el cilindro desnudo con fuente de calor y en contacto con un fluido.

Nota se deja al estudiante comprobar que el flujo de calor transferido por el cilindro hacia el fluido, es igual al calor generado en éste, debido al paso de la corriente eléctrica.

Ejemplo 2.3.4

Un cable de transmisión eléctrica hecho con alambre de cobre templado ($k = 150 \text{ W/m-K}$) de 2.5 cm de diámetro transporta una corriente de 200 A, y tiene una resistividad de $40 \mu\Omega\text{-cm}$ de longitud. La temperatura de la superficie es de 200°C y la temperatura del aire ambiente es de 10°C . Determine:

- El coeficiente de transferencia de calor entre la superficie del alambre y el aire ambiente.
- La temperatura máxima del alambre.

Solución:

- Primero se calcula el calor generado en el conductor mediante la relación de la potencia y combinándola con la ley de Ohm, se obtiene:

$$q''' = \frac{q_{gen}}{Vol.} = \frac{Vi}{Vol.} = \frac{i^2 R}{Vol.}$$

Puesto que solo se conoce la resistividad del conductor, se calcula la resistencia por unidad de longitud, así:

$$\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A}$$

Entonces:

$$q''' = \frac{i^2 R}{Vol.} = \frac{i^2 R}{AL} = \frac{i^2 \rho}{A^2} = \frac{i^2 \rho}{(\pi r^2)^2} = \frac{(200)^2 (4 \times 10^{-5})}{(\pi (1.25)^2)^2} = 0.066401 = \text{W/cm}^3 = 66,401.85 \text{ W/m}^3.$$

Utilizando la ecuación que relaciona la temperatura superficial y la del fluido con el coeficiente de película se tiene:

$$T_R = T_{\infty} + \frac{q''' R}{2h}$$

$$h = \frac{q''' R}{2(T_R - T_{\infty})} = \frac{(66,401.85)(0.0125)}{2(190)} = 2.184 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}.$$

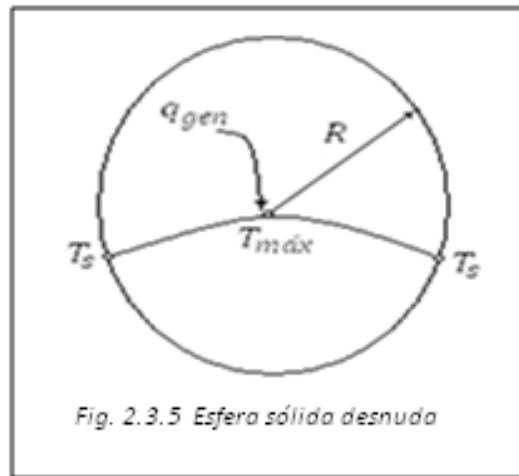
- La Temperatura máxima en el centro del conductor se calcula con la relación:

$$T_{m\acute{a}x} = T|_{r=0} = T_s + \frac{q''' R^2}{4k}$$

$$T_{m\acute{a}x} = T_s + \frac{q''' R^2}{4k} = 200 + \frac{(66,401.85)(0.0125)^2}{4(150)} = 200.017 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Esfera s3lida con generaci3n de calor desnuda.

Considere una esfera s3lida sin recubrimiento de radio R , con temperatura superficial T_s , y de conductividad constante como se indica en la figura 2.3.5, la cual posee una fuente de calor en su interior. Nuevamente podemos deducir el perfil de temperaturas y calcular el flujo de calor desde el centro de la misma hasta su superficie.



As3, utilizando la ecuaci3n general de la conducci3n.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{q'''}{k} = 0$$

Puesto que el 3rea superficial de la esfera var3a con el radio, entonces multiplicando esta expresi3n por el 3rea y dividi3ndola a su vez entre 4π , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{q''' r^2}{k} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) = - \frac{q''' r^2}{k}$$

Integrando por primera vez,

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{q''' r}{3k} - \frac{C_1}{r^2}$$

Integrando nuevamente:

$$T = -\frac{q'''r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Esta expresión es el perfil de temperaturas en su solución general. Y las condiciones de frontera para este caso son;

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = 0$$

$$T = T_s, \quad \text{en } r = R$$

Note que la primera condición se debe a que en el centro de la esfera, está la fuente de calor y la temperatura debe ser por consiguiente la máxima.

Sustituyendo estas condiciones de frontera en la solución general, se tiene:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = T_s + \frac{q'''R^2}{6k}$$

Sustituyendo nuevamente los valores de las constantes, en la misma ecuación:

$$T = -\frac{q'''r^2}{6k} + T_s + \frac{q'''R^2}{6k}$$

Factorizando,

$$T = T_s + \frac{q'''R^2}{6k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Esta ecuación permite calcular la temperatura para cualquier radio r , en la geometría esférica y define en forma gráfica la curva mostrada en la figura. La temperatura máxima en el conductor se evalúa con esta expresión solo que en $r = 0$.

$$T_{m\acute{a}x} = T|_{r=0} = T_s + \frac{q'''R^2}{6k}$$

Asimismo para calcular el flujo de calor a través de la esfera, se aplica la Ley de Fourier y se evalúa la diferencial de la temperatura respecto al límite $r = R$, así:

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{r=R}$$

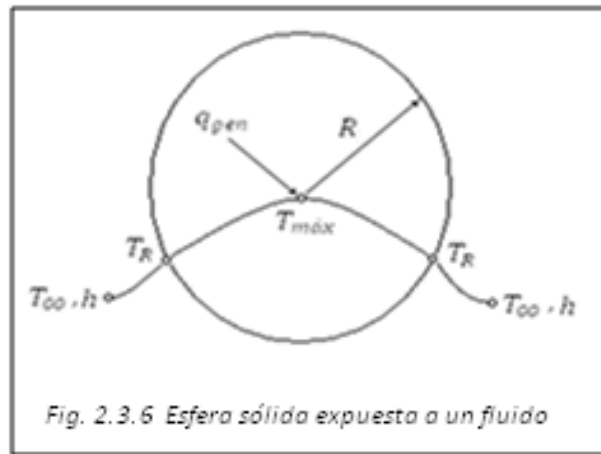
$$q = -4k\pi R^2 \left(-\frac{q'''R}{3k} \right)$$

$$q = q''' \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = q''' V = q_{gen}$$

No debe sorprender que el calor transferido en dirección radial, sea el que genera la fuente de calor en el interior de la esfera.

Esfera sólida desnuda con generación de calor, expuesta a un fluido.

Consideremos de nuevo el caso anterior solo que en lugar de conocer la temperatura superficial $T_s = T_R$ de la esfera, se conoce la temperatura del fluido circundante T_∞ . En este caso, como se muestra en la figura 2.3.6; se agrega la resistencia convectiva y se modifica la segunda condición de frontera.



De la solución general se tiene:

$$T = -\frac{q''' r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = 0$$

$$q_{cond} = q_{conv}, \quad \text{en } r = R$$

La segunda condición también se puede escribir como:

$$-kA \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = hA(T_R - T_\infty)$$

De la primera condición:

$$C_1 = 0$$

Despejando T_R de la segunda condición,

$$T_R = T_\infty - \frac{k}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = T_\infty - \frac{k}{h} \left[-\frac{q'''R}{3k} + \frac{C_1}{R} \right]$$

$$T_R = T_\infty + \frac{q'''R}{3h}$$

Esta expresión relaciona la temperatura superficial con la del fluido y el coeficiente de película.

Sustituyendo el valor de T_R , en la solución general, en el límite cuando $r = R$, se tiene:

$$T_R = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} = -\frac{q'''R^2}{6k} - \frac{0}{R} + C_2$$

Y despejando C_2 .

$$C_2 = T_\infty + \frac{q'''R}{3h} + \frac{q'''R^2}{6k}$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 , en la solución general, se obtiene:

$$T = -\frac{q'''r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + T_\infty + \frac{q'''R}{3h} + \frac{q'''R^2}{6k}$$

Puesto que $C_1 = 0$, agrupando y factorizando términos y teniendo en cuenta que:

$$\frac{q'''R}{3h} = \frac{q'''R}{3h} \left(\frac{R}{R} \right) \left(\frac{2k}{2k} \right) = \frac{q'''R^2}{6k} \left(\frac{2k}{hR} \right)$$

Se obtiene:

$$T = T_\infty + \frac{q'''R^2}{6k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2k}{hR} \right]$$

Expresión que define el perfil de temperaturas para la esfera desnuda con fuente de calor y en contacto con un fluido. La temperatura máxima en el conductor se evalúa sustituyendo el valor de $r = 0$, en el perfil de temperaturas, así:

$$T_{\text{máx}} = T|_{r=0} = T_\infty + \frac{q'''R^2}{6k} \left[1 + \frac{2k}{hR} \right]$$

Nota: Se invita al estudiante a comprobar que el flujo de calor transferido por la esfera hacia el fluido, es igual al calor generado en ésta, debido a la fuente de calor.

Ejemplo 2.3.5

Una esfera sólida con diámetro de 50 cm tiene una fuente de calor distribuida uniformemente. El coeficiente convectivo de transferencia de calor entre la esfera y el medio ambiente es $15 \text{ W/m}^2\text{-K}$, y la

conductividad térmica es de 8 W/m-K. ¿Cuál es la temperatura en la superficie de la esfera si la temperatura del ambiente circundante es de 25 °C y la del centro de la esfera es de 65 °C?

Solución:

La temperatura en la superficie de la esfera puede calcularse a partir de la ecuación,

$$T_R = T_{\infty} + \frac{q'''R}{3h}$$

Aunque se desconoce el valor del calor generado por unidad de volumen q''' , éste puede calcularse a través de la expresión;

$$T_{m\acute{a}x} = T_{\infty} + \frac{q'''R^2}{6k} \left[1 + \frac{2k}{hR} \right]$$

$$65 = 25 + \frac{q'''(0.25)^2}{6(8)} \left[1 + \frac{2(8)}{15(0.25)} \right]$$

Despejando el valor de q''' , se obtiene:

$$q''' = 5832.91 \text{ W/m}^3$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, se obtiene:

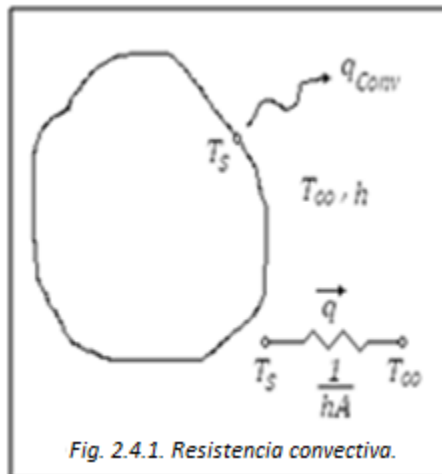
$$T_R = 25 + \frac{q'''(0.25)}{3(15)} = 57.4 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

2.4 Superficies extendidas.

En muchas aplicaciones es necesario aumentar la razón de transferencia de calor en una superficie, esto se puede lograr observando simplemente la ley de enfriamiento de Newton, la cual relaciona la transferencia de calor entre la superficie de un cuerpo con el fluido circundante a ella.

La figura 2.4.1, ilustra la transferencia de calor desde la superficie de un cuerpo hacia el fluido que lo rodea, la cual puede calcularse con la ley de enfriamiento de Newton; así:

$$q = hA(T_s - T_{\infty})$$



Existen tres posibilidades para aumentar la tasa de transferencia de calor según dicha ley. En la ecuación de enfriamiento de Newton, se observa, que si aumenta la diferencia de temperaturas entre la superficie y su entorno, aumenta la razón de transferencia. También cabe la posibilidad de aumentar el coeficiente de transferencia de calor, sin embargo esto representa mayor dificultad que la propuesta anterior, porque el coeficiente de película depende de las propiedades del fluido y eso equivale a modificarlas.

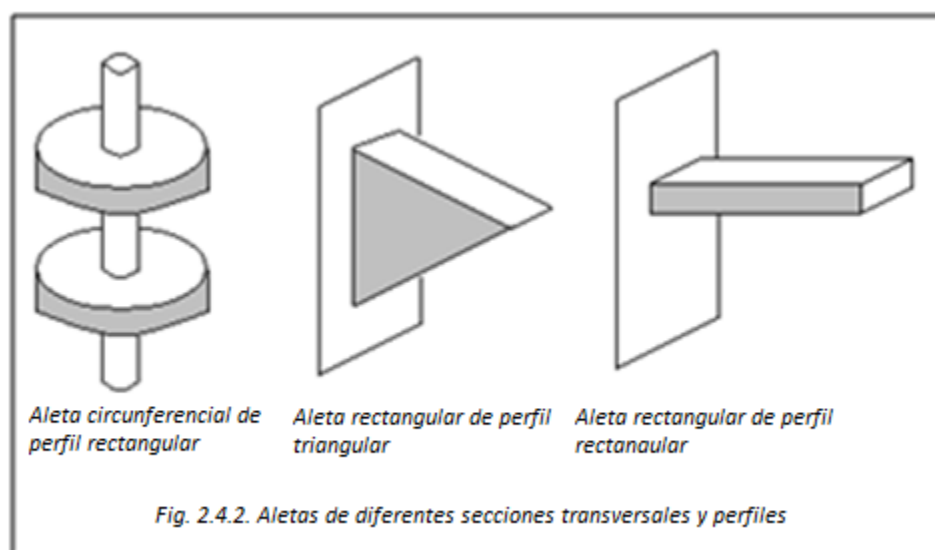
Por último es posible y factible en la práctica, aumentar el área de transferencia de calor de la superficie expuesta, esto se logra a través de la unión de superficies extendidas o aletas de enfriamiento de diversas geometrías a la superficie base, las cuales contribuyen en forma por demás eficaz, para llevar al cabo dicho efecto.

En el análisis y diseño de una superficie aletada, la cantidad de calor disipado por una sola aleta, se determina apoyándose en el gradiente de temperatura y el área transversal disponible para conducir el calor desde la base de la aleta. Así, el número total de aletas necesarias para disipar una cantidad de calor dada, se estimará en base a la acumulación de energía a transferir desde la superficie base.

El fluido puede ser un líquido o un gas, sin embargo es común el uso de superficies extendidas cuando el fluido es un gas, porque el coeficiente de película para un gas es menor que el de un fluido. Ejemplos típicos de superficies aletas expuestas a un fluido son: Algunos motores de combustión interna (motocicletas y Volkswagen), motores eléctricos, transformadores y algunos calentadores caseros, procesadores de equipo de cómputo o electrónicos.

Tipos de superficies extendidas.

Las aletas pueden ser de secciones transversales y perfiles diferentes, tales como tiras anexadas a lo largo de un tubo, llamadas longitudinales; o bien discos anulares concéntricos alrededor de un tubo, llamadas aletas circunferenciales; o adheridas a paredes verticales como las llamadas triangulares o rectangulares. En todos los casos el espesor de la aleta puede ser uniforme o variable según el perfil. La figura 2.4.2, ilustra algunos tipos de aletas como los mencionados.

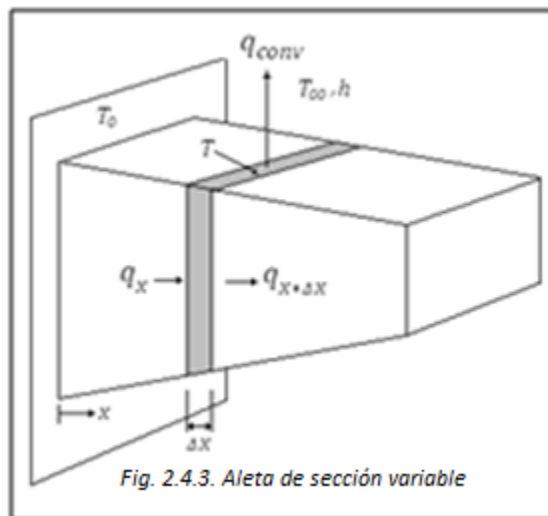


En el análisis de una superficie extendida se presenta tanto la conducción como la convección de calor, por tanto, un volumen de control cualquiera experimenta ambos tipos de transferencia.

Sin embargo debido a que el espesor es prácticamente muy pequeño comparado con su longitud o su radio, según sea el caso; el análisis puede efectuarse como un caso unidimensional.

Análisis general de una superficie extendida.

Considere una aleta de sección transversal variable como se muestra en la figura 2.4.3, estrictamente hablando el problema de conducción de una aleta hacia el fluido que la rodea, no es unidimensional, puesto que la conducción de calor es a lo largo del eje x , mientras que la pérdida por convección en las superficies implican un gradiente de temperatura diferente de cero en la dirección y, z . Pero como se menciono anteriormente, si la aleta es muy delgada, entonces para cualquier valor de x , la temperatura será constante sobre el área transversal A . Se supone que la temperatura en la base de la aleta es uniforme, por lo tanto la temperatura no dependerá de y o z . Además, no existen fuentes de calor y prevalecen las condiciones de estado estacionario.



Así que, la temperatura solo dependerá de la longitud x , las propiedades del material de la aleta y el coeficiente convectivo del fluido que la rodea. Así mediante un balance de energía por la primera ley, se tiene:

$$q_x - q_{conv} = q_{x+\Delta x}$$

$$q_x = q_{x+\Delta x} + q_{conv}$$

De la ley de Fourier:

$$q_x = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x$$

$$q_{x+\Delta x} = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

$$q_{conv} = hA(T - T_{\infty}) = hP\Delta x(T - T_{\infty})$$

donde:

P = *perímetro de la sección transversal.*

Δx = *Espesor del elemento diferencial.*

Así, sustituyendo estas expresiones en la ecuación del balance de energía se tiene:

$$kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = hP\Delta x(T - T_{\infty})$$

Dividiendo toda la ecuación entre Δx ,

$$\frac{kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{hP\Delta x(T - T_{\infty})}{\Delta x}$$

$$\frac{kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = hP(T - T_{\infty})$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) - hP(T - T_{\infty}) = 0$$

Si la conductividad del material de la aleta es constante, se divide entre k ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{hP}{k}(T - T_{\infty}) = 0$$

Puesto que el área de la sección transversal es variable, se tiene:

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{hP}{k}(T - T_{\infty}) = 0$$

Dividiendo la ecuación entre A , finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{hP}{kA}(T - T_{\infty}) = 0$$

La ecuación diferencial ordinaria anterior, de segundo orden, se denomina ecuación general de una superficie extendida o aleta de enfriamiento, de sección variable en estado estacionario.

Superficie extendida de sección transversal constante.

Si consideramos que la sección transversal de la aleta es constante en toda su longitud, la ecuación general se convierte en la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_{\infty}) = 0$$

Puesto que;

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Además como el término,

$$\frac{hP}{kA} = m^2$$

Con tal que;

$$\sqrt{\frac{hP}{kA}} = m$$

La ecuación adquiere la forma,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - m^2(T - T_\infty) = 0$$

Si realizamos un cambio de variable, tal que; $\theta = T - T_\infty$, la ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0$$

La cual tiene como solución general,

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Esta nueva ecuación, se denomina ecuación o solución general de una superficie extendida de sección transversal constante, sin fuente de calor y en estado estacionario.

Luego de obtener la solución general, se requiere de dos condiciones de frontera, para determinar las constantes C_1 y C_2 . Existen tres posibles conjuntos de condiciones de frontera, estos son:

Caso 1. La aleta es infinitamente larga comparada su espesor, de tal suerte que la temperatura en el extremo libre $x = L$, es igual a del fluido que la rodea. En la práctica una aleta de 3 mm de espesor y de varios cm de largo, satisface en forma aproximada esta condición, al igual que una barra de 3 mm de diámetro y varios cm de largo.

Para una mejor comprensión al problema, consideremos una aleta muy larga de sección transversal rectangular constante como se indica en la figura 2.4.4, expuesta un fluido y con temperatura T_o , en su base.

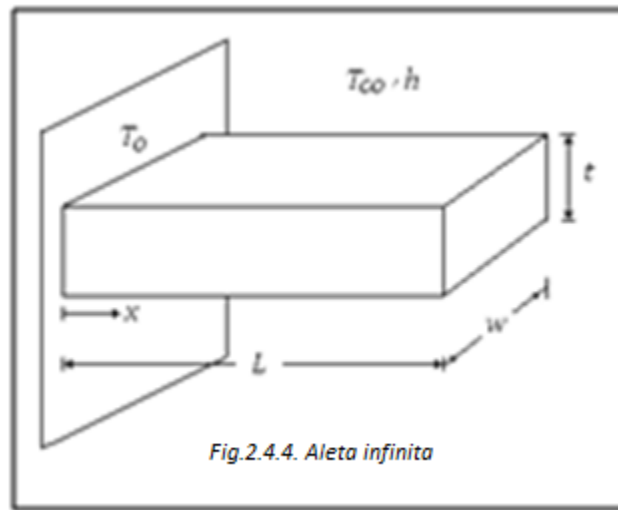
La solución general para esta aleta es:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Y las condiciones de frontera,

$$\theta = \theta_0, \text{ en } x = 0, \text{ donde } \theta_0 = T_0 - T_\infty.$$

$$\theta = 0, \text{ en } x = L \rightarrow \infty, \text{ donde } \theta = T_L - T_\infty$$



Note que la diferencia de temperaturas $\theta_0 = T_0 - T_\infty$, se tiene al principio en la base de la aleta conexas a la pared, y que la segunda condición se debe a que la diferencia de temperaturas en el extremo libre de la aleta $x = L$, respecto a la del fluido, es muy pequeña, es decir tiende a cero, por tanto la temperatura del extremo libre y la del fluido son prácticamente iguales.

Sustituyendo la primera condición en la solución general se tiene:

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$

Sustituyendo la segunda condición;

$$0 = C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}$$

$$0 = C_1 e^{m\infty} - C_2 e^{-m\infty}$$

Operando algebraicamente:

$$C_1 = 0 \quad \text{Y} \quad C_2 = \theta_0$$

Sustituyendo el valor de las constantes en la solución general, se tiene:

$$\theta = \theta_0 e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mx}$$

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx}}$$

La ecuación anterior define el perfil de temperaturas a través de toda la longitud de la aleta, tal como se indica en la figura 2.4.5. El flujo de calor disipado por la aleta puede calcularse a partir de la ley de Fourier por derivación o por la ley de enfriamiento de Newton por integración, del perfil de temperatura. Así;

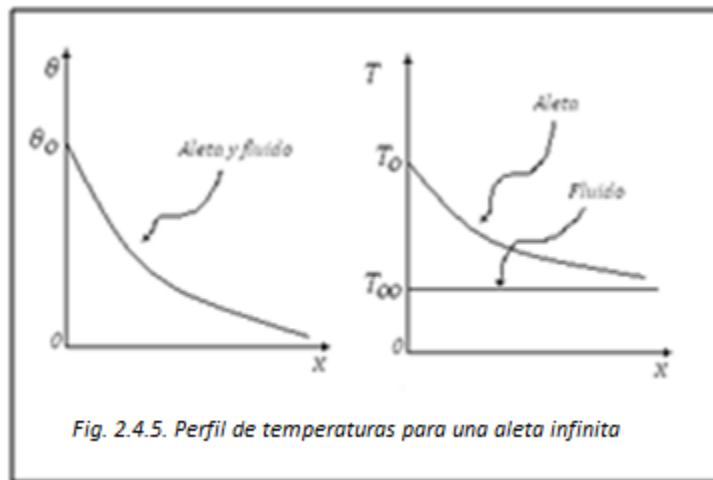


Fig. 2.4.5. Perfil de temperaturas para una aleta infinita

$$q = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \int_0^{x=L \rightarrow \infty} hP(T - T_{\infty}) dx$$

En este apartado se hará por integración, invitando al estudiante a comprobar este mismo resultado por derivación:

Integrando el segundo miembro de la igualdad, se tiene;

$$q = \int_0^{x=L \rightarrow \infty} hP(T - T_{\infty}) dx$$

Del perfil de temperatura se tiene que:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-mx}$$

$$T - T_{\infty} = (T_0 - T_{\infty})e^{-mx}$$

Sustituyendo este valor en la integral, e integrando entre límites, se obtiene;

$$q = \int_0^{x=L \rightarrow \infty} hP(T_0 - T_{\infty})e^{-mx} dx = \frac{hP(T_0 - T_{\infty})}{-m} \left(\frac{1}{e^{m\infty}} - \frac{1}{e^0} \right) = \frac{hP}{m} (T_0 - T_{\infty})$$

Puesto que:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

Operando algebraicamente, finalmente se tiene:

$$q = \sqrt{hPkA} (T_0 - T_{\infty})$$

Se exhorta al alumno a realizar el análisis dimensional de esta ecuación.

Ejemplo 2.4.1

Una aleta larga de acero tiene una sección transversal de 6.25 mm x 12.5 mm y mantiene uno de sus extremos a 200 °C, mientras que el resto de la barra está expuesta a un medio ambiente convectivo. El acero tiene una conductividad térmica igual a 35 W/m-K, y el coeficiente convectivo de transferencia de calor es 30 W/m²-K. Determine el calor perdido por la barra si la temperatura ambiente es de 25 °C.

Solución:

La barra es larga y de muy pequeño espesor, por tanto el problema puede resolverse a través del caso 1. Así, aplicando la ecuación que calcula el calor perdido por la barra, se tiene;

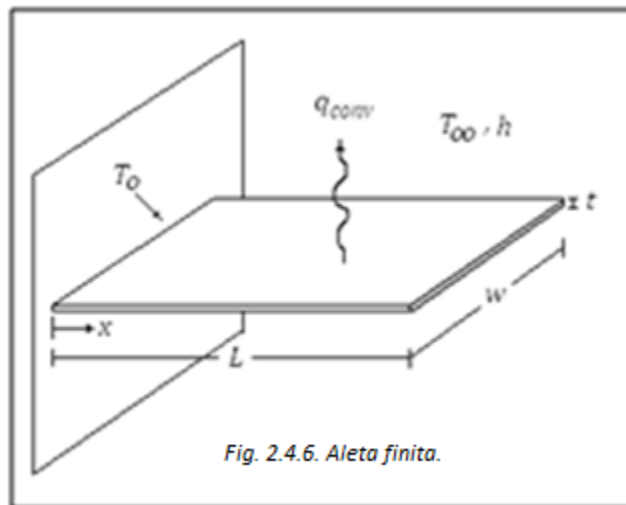
$$q = \sqrt{hPkA}(T_o - T_{\infty})$$

Tomando en cuenta que la barra es de sección rectangular, el perímetro y el área de la sección serán;

$$q = \sqrt{(30)[(2)(0.00625) + (2)(0.0125)](35)(0.00625)(0.0125)} (200 - 25) = 9.7 \text{ W}$$

Caso 2. Nos referimos a una aleta finita, donde el calor conducido desde su extremo adherido a la base; se pierde por convección desde su periferia hacia el fluido que la rodea. Es decir, la pérdida de calor en su extremo libre es mínima o casi nula. La solución a este caso es importante cuando se utilizan los diagramas para resolver problemas de aletas reales, como se presentará posteriormente.

En la figura 2.4.6, se observa que el ancho o amplitud de la aleta (w), es mucho muy grande comparado con su espesor (t), y por consiguiente el área de la sección transversal es pequeña.



Partiendo de la solución general para las aletas se tiene:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Con las condiciones de frontera,

$$\theta = \theta_0, \quad \text{en } x = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = L$$

Sustituyendo la primera condición en la solución general,

$$\theta_0 = C_1 e^{m(0)} + C_2 e^{-m(0)}$$

Por lo tanto:

$$\theta_0 = C_1 + C_2 \dots \dots (1)$$

Derivando la solución general y sustituyendo la segunda condición.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$$

$$0 = C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} \dots \dots (2)$$

Despejando C_1 , de la ecuación (1)

$$C_1 = \theta_0 - C_2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2)

$$0 = (\theta_0 - C_2)e^{mL} - C_2 e^{-mL}$$

Operando algebraicamente y despejando C_2 , se obtiene:

$$C_2 = \frac{\theta_0 e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Así,

$$C_1 = \theta_0 - \frac{\theta_0 e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Resolviendo el algebra,

$$C_1 = \frac{\theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la solución general;

$$\theta = \left(\frac{\theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{mx} + \left(\frac{\theta_0 e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \frac{e^{mL(1-\frac{x}{L})} + e^{-mL(1-\frac{x}{L})}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Puesto que:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh\left[mL\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]}{\cosh(mL)}$$

Se obtiene finalmente:

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh\left[mL\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]}{\cosh(mL)}}$$

Esta expresión define nuevamente el perfil de temperaturas de la aleta considerada en el caso 2. Se sugiere al estudiante graficar este perfil para observar la variación de la temperatura respecto a la longitud de la aleta.

Asimismo, el flujo de calor disipado por la aleta puede calcularse a partir de la ley de Fourier por derivación o por la ley de enfriamiento de Newton por integración, del perfil de temperatura. Así;

$$q = -kA \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \int_0^{x=L} hP(T - T_\infty) dx$$

En este apartado se hará por derivación, invitando al alumno a comprobar este mismo resultado por integración:

Derivando el primer miembro de la igualdad, se tiene;

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$$

Evaluando esta diferencial en $(x = 0)$, se tiene;

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = m(C_1 - C_2)$$

Mediante la ley de Fourier, se obtiene:

$$q = -kA \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = -kAm(C_1 - C_2) = kAm(C_2 - C_1)$$

Sustituyendo los valores de C_2 y C_1 , operando algebraicamente y tomando en cuenta que:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Finalmente se obtiene:

$$\boxed{q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T_\infty)\tanh(mL)}$$

Ejemplo 2.4.2

Una varilla de aluminio de 2.5 cm de diámetro y 15 cm de largo, sobresale de una pared que se mantiene a 260 °C. La varilla está expuesta a un ambiente a 16 °C. El coeficiente convectivo de transferencia de calor es de 15 W/m²·°C. Calcúlese el calor perdido por la varilla. Haga una lista de suposiciones básicas.

Solución.

- ✓ Prevalecen condiciones de estado estacionario.
- ✓ Todo el calor disipado por la varilla entra a través de su base
- ✓ Se considera finita a la varilla, puesto que el área en el extremo libre es mucho muy pequeña comparada con el área de su superficie, y por consiguiente la pérdida de calor se efectúa en su periferia. Caso del extremo aislado.
- ✓ La varilla es de aluminio con una conductividad térmica de 205 W/m·°C.

Aplicando la expresión para el cálculo del calor disipado por una aleta del tipo 2, se tiene:

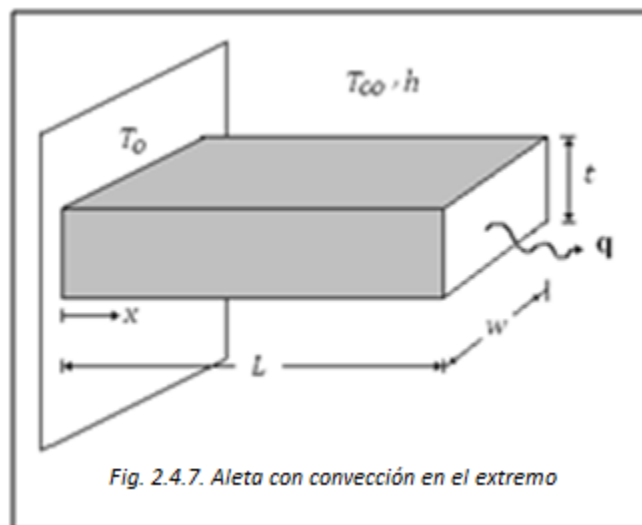
$$q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T_\infty)\tanh(mL)$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{(15)(\pi)(0.0125)}{(205)(\pi)(0.0125)^2}} = 2.419 \text{ m}^{-1}.$$

$$\sqrt{hPkA} = \sqrt{(15)(\pi)(0.0125)(205)(\pi)(0.0125)^2} = 0.2435 \text{ W/}^\circ\text{C}$$

$$q = (0.2435)(260 - 16)\tanh[2.419(0.15)] = 20.66 \text{ W}$$

Caso 3. La aleta es de longitud finita, y solo pierde calor por convección desde su extremo libre. Es decir, se considera aislada en toda su periferia, figura 2.4.7.



Nuevamente de la solución general se tiene:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Con las condiciones de frontera,

$$\theta = \theta_0, \quad \text{en } x = 0, \quad \text{donde } \theta_0 = T_0 - T_\infty.$$

$$-kA \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = hA(T_L - T_\infty), \quad \text{en } x = L$$

Esta última condición indica que todo el calor que se conduce desde la base de la aleta se pierde por convección en el extremo libre.

De la primera condición se tiene:

$$\theta_0 = C_1 e^{m(0)} + C_2 e^{-m(0)}$$

Por lo tanto:

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \theta_0 - C_2 \quad \dots \dots (1)$$

De la segunda condición;

$$-k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = h\theta_L \quad \dots \dots (2)$$

Puesto que:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}$$

$$\theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

$$\text{Donde: } \theta_L = (T_L - T_\infty)$$

Sustituyendo estos valores en (2);

$$-km(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}) = h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL})$$

$$-C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \frac{h}{km}(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) \quad \dots \dots (3)$$

Sustituyendo el valor de $C_1 = \theta_0 - C_2$, en (3) y operando algebraicamente; se obtiene:

$$C_2 = \frac{\frac{h}{km}(\theta_0 e^{mL}) + \theta_0 e^{mL}}{\frac{h}{km}(e^{mL} - e^{-mL}) + (e^{mL} + e^{-mL})} \quad \dots \dots (4)$$

Sustituyendo (4) en (1); se obtiene:

$$C_1 = \frac{-\frac{h}{km}(\theta_0 e^{-mL}) + \theta_0 e^{-mL}}{\frac{h}{km}(e^{mL} - e^{-mL}) + (e^{mL} + e^{-mL})}$$

Por último, sustituyendo los valores de C_1 y C_2 , en la solución general, y tomando en cuenta la definición del $\sinh$ y $\cosh$ se obtiene el perfil de temperaturas para la aleta considerada en el caso 3.

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\frac{h}{km} \{ \sinh[m(L-x)] \} + \cosh[m(L-x)]}{\frac{h}{km} [\sinh(mL)] + \cosh(mL)}$$

Al igual que en los casos anteriores, el flujo de calor disipado por la aleta puede calcularse a partir de la ley de Fourier por derivación o por la ley de enfriamiento de Newton por integración, del perfil de temperatura. Así;

$$q = -kA \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = \int_0^{x=L} hP(T - T_\infty) dx$$

En este apartado se hará por derivación, invitando al alumno a comprobar este mismo resultado por integración.

Sustituyendo el valor de;

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}$$

En el primer miembro de la igualdad, se tiene;

$$q = -kA \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = -kA(mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}) = -kAm(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL})$$

Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 , en esta expresión; se tiene:

$$q = -kAm \left[\left(\frac{-\frac{h}{km}(\theta_0 e^{-mL}) + \theta_0 e^{-mL}}{\frac{h}{km}(e^{mL} - e^{-mL}) + (e^{mL} + e^{-mL})} \right) e^{mL} + \left(\frac{\frac{h}{km}(\theta_0 e^{mL}) + \theta_0 e^{mL}}{\frac{h}{km}(e^{mL} - e^{-mL}) + (e^{mL} + e^{-mL})} \right) e^{-mL} \right]$$

Resolviendo algebraicamente y teniendo en cuenta la sustitución del $\sinh$ y $\cosh$, finalmente se obtiene:

$$q = \sqrt{hPkA} \theta_0 \left[\frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \right]$$

Ejemplo 2.4.3

Una barra de cobre de 13 mm de diámetro y de 15 cm de largo, se proyecta de una pared cuya temperatura es de 200 °C. La barra está expuesta a un fluido cuya temperatura es de 25 °C, y el coeficiente de transferencia de calor entre la barra y el fluido que la rodea es 150 W/m²-°C. Estime el calor disipado por la barra. Haga una lista de suposiciones básicas

Solución.

- ✓ Prevalecen condiciones de estado estacionario.
- ✓ Todo el calor disipado por la barra entra a través de su base
- ✓ Se considera finita a la barra, y con pérdida de calor solo en su extremo libre.
- ✓ La barra es de cobre con una conductividad térmica de 385 W/m-°C.

Aplicando la expresión para el cálculo del calor disipado por una aleta del tipo 3, se tiene:

$$q = \sqrt{hPkA} \theta_0 \left[\frac{\sinh(mL) + \frac{h}{km} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km} \sinh(mL)} \right]$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{(150)(\pi)(0.013)}{(385)(\pi)(0.013)^2}} = 29.97 \text{ m}^{-1}$$

$$mL = 29.97 (0.15) = 4.4955$$

$$\frac{h}{km} = \frac{150}{(385)(29.97)} = 0.013$$

$$q = \sqrt{(150)(\pi)(0.013)(385)(\pi)(0.0065)^2} (200 - 25) \left[\frac{\sinh(4.4955) + (0.013) \cosh(4.4955)}{\cosh(4.4955) + (0.013) \sinh(4.4955)} \right]$$

$$q = 97.89 \text{ W}$$

Transferencia de calor en aletas rectangulares, triangulares y circunferenciales.

En secciones anteriores, se presentaron varios tipos de aletas, de formas y secciones transversales diferentes; y se estudió el caso de la aleta longitudinal de sección transversal rectangular. Sin embargo, hay aletas longitudinales trapezoidales o longitudinales triangulares, cuyo espesor (t), depende de la distancia (x), en forma lineal.

Cuando las aletas están en forma de disco anular, encajadas en un tubo, se les conoce como aletas circunferenciales.

El procedimiento para analizar aletas triangulares y circulares es el mismo que usamos en el análisis de aletas rectangulares, sin embargo surge un cambio continuo en el área normal a la conducción de calor (sección transversal) respecto a su longitud (dirección x); es decir, para una aleta triangular o trapezoidal decrece el área de transferencia de calor, mientras que para una circunferencial crece dicha área. Las soluciones analíticas para estos casos incluyen funciones Bessel. Para estas situaciones, donde la

ecuación diferencial básica y las técnicas matemáticas se hacen más tediosas, la cantidad de calor transferido por la aleta se calcula a través de métodos gráficos, como se ilustrará en las siguientes secciones.

Efectividad de una aleta.

En la selección de superficies extendidas, es necesario considerar algunos aspectos prácticos como por ejemplo:

- ✓ Espacio disponible.
- ✓ Peso de la aleta.
- ✓ Propiedades térmicas del fluido que la rodea.
- ✓ Trabajo de bombeo del fluido hacia las aletas (convección forzada).
- ✓ Efectividad de la aleta.

De estos, el más importante es la efectividad de aleta; el cual indica que tan efectiva es para transferir una cantidad de calor dada. Dicha efectividad se define mediante un nuevo parámetro denominado rendimiento de la aleta y se representa como sigue:

$$\text{Rendimiento de la aleta} = \eta_a = \frac{\text{Calor real transferido}}{\text{Calor máximo transferido}}$$

Donde el calor máximo transferido, es la energía que la aleta debería transferir si toda ella estuviera a la temperatura de la base. Es decir;

$$Q_{\text{máx}} = hA(T_0 - T_{\infty}) = hPL(T_0 - T_{\infty})$$

Así, para los casos anteriores, se tiene:

Caso 1. Aleta infinita;

$$\eta_a = \frac{\sqrt{hPkA}(T_0 - T_{\infty})}{hPL(T_0 - T_{\infty})} = \frac{1}{mL}$$

Caso 2. Aleta finita;

$$\eta_a = \frac{\sqrt{hPkA}(T_0 - T_{\infty})\tanh(mL)}{hPL(T_0 - T_{\infty})} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Puesto que el caso 2, involucra a todas las aletas reales de sección rectangular, el rendimiento de la aleta puede calcularse a partir de esta ecuación, haciendo las consideraciones siguientes:

- ✓ La aleta es larga amplia y delgada.
- ✓ Se utiliza una longitud corregida $L_c = [L + (t/2)]$, en lugar de su longitud original (L); debido a que existen ciertas pérdidas en la extremidad de una aleta real.
- ✓ Se considera $P/A \cong 2/t$.

De este modo la ecuación anterior queda:

$$\eta_a = \frac{\sqrt{hPkA}(T_0 - T_\infty)\tanh(mL)}{hPL(T_0 - T_\infty)} = \frac{\tanh(mL)}{mL} = \frac{\tanh\{\sqrt{2h/kt}[L + (t/2)]\}}{\{\sqrt{2h/kt}[L + (t/2)]\}}$$

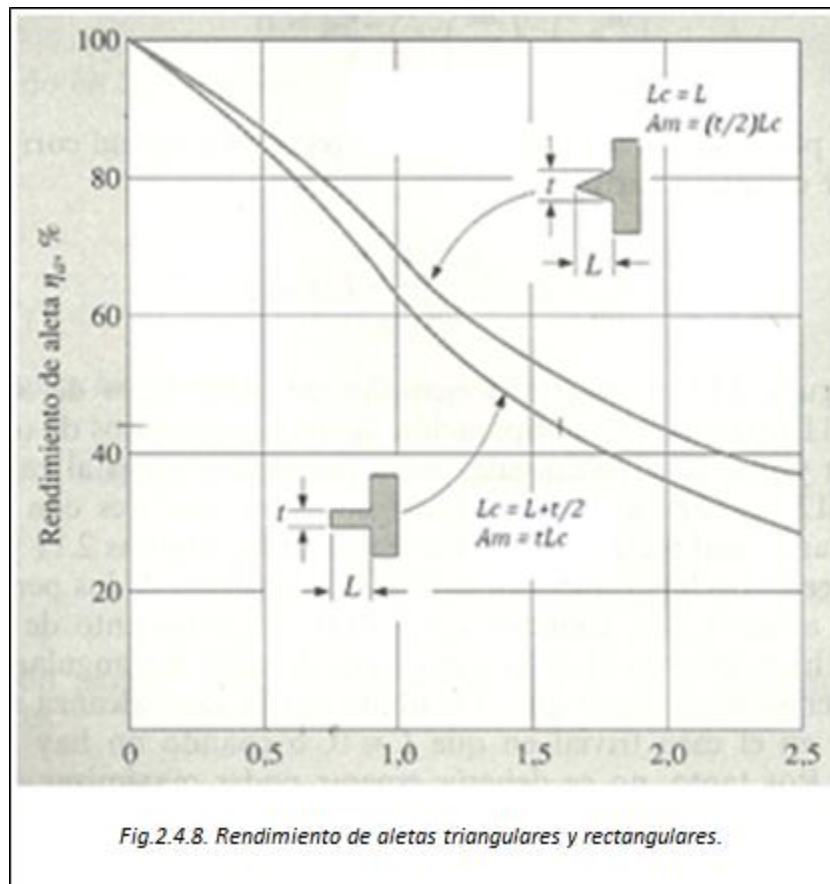
Y el flujo de calor disipado por la aleta, se calcula en base a su rendimiento (η_a).

$$Q = \eta_a h P L_c (T_0 - T_\infty)$$

Cálculo del flujo de calor disipado por aletas rectangulares, triangulares y circunferenciales.

Es posible calcular el flujo de calor real transferido por una aleta, a través del rendimiento de la misma empleando la ecuación anterior y recurriendo al uso de gráficas para obtener el rendimiento (η_a), para los diversos tipos de aletas antes mencionadas.

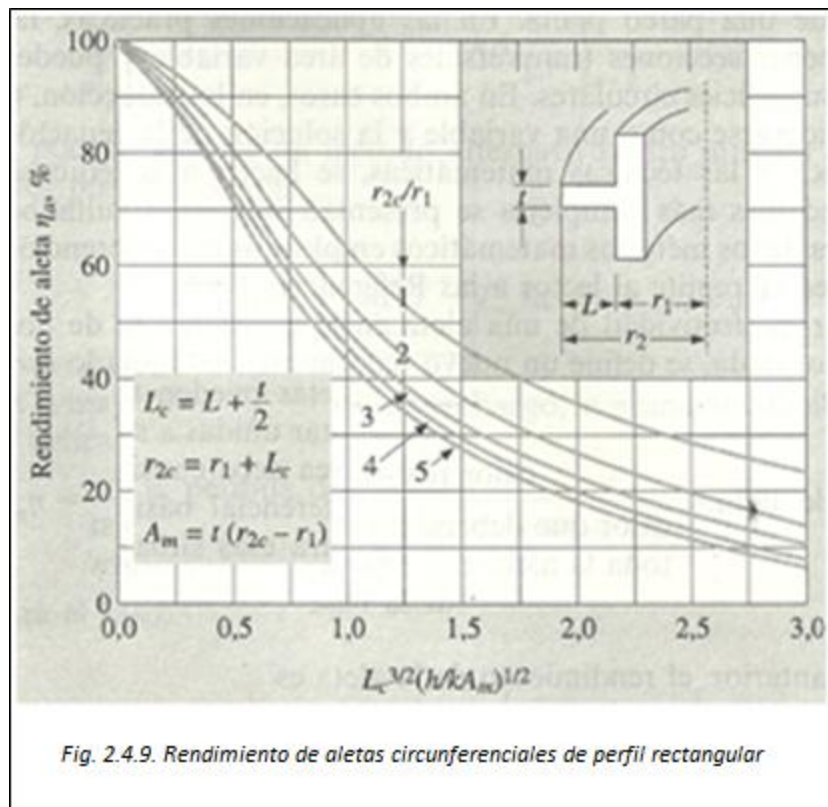
En las figuras 2.4.8 y 2.4.9, se muestran las gráficas para obtener los rendimientos de aletas rectangulares, triangulares y circunferenciales.



Note que en la figura 2.4.8, se comparan los rendimientos de una aleta triangular de perfil rectangular, con una rectangular del mismo perfil. Asimismo se usa en ambos casos una longitud corregida (L_c), y el área del perfil de la aleta (A_m), como se indica en la misma figura.

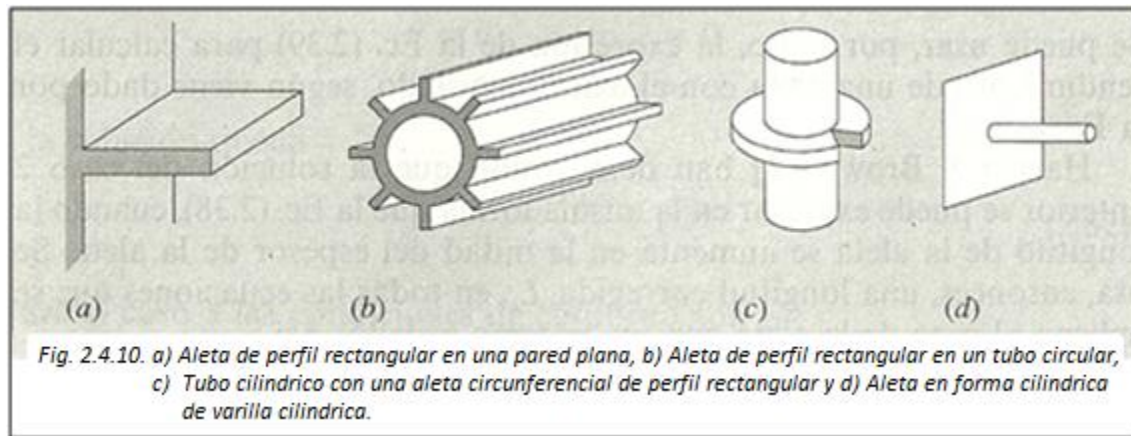
En la figura 2.4.9, se indica el rendimiento de una aleta circunferencial de perfil rectangular, basado también en una longitud corregida (L_c), y el área del perfil como se muestra en la misma figura.

También se usa un radio dos corregido (r_{2c}), el cual se relaciona con el (r_1); y que indican los diferentes valores $(r_{2c}/r_1) = 1, 2, 3, 4, 5$; correspondientes a las curvas mostradas en la figura.

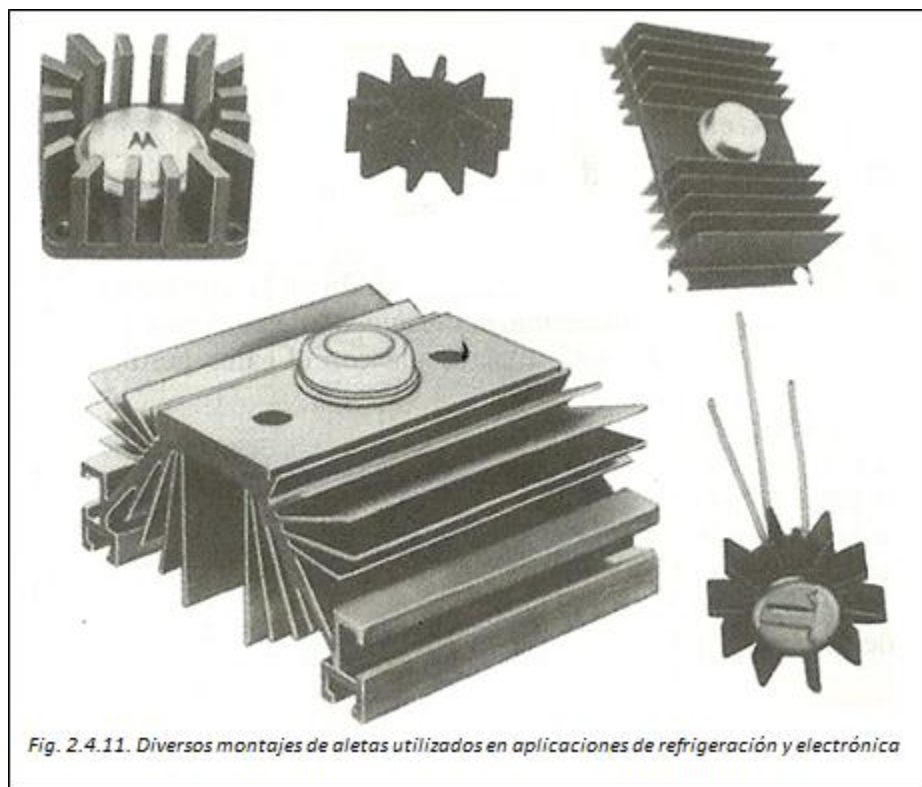


En la figura 2.4.10, se muestra estos tipos de aletas adheridas a superficies planas y cilíndricas. Además se ilustra una aleta cilíndrica en forma de barra circular adherida a una pared plana, cuya longitud corregida es:

$$L_c = L + \frac{\text{área de la sección}}{\text{perímetro}} = L + d/4$$

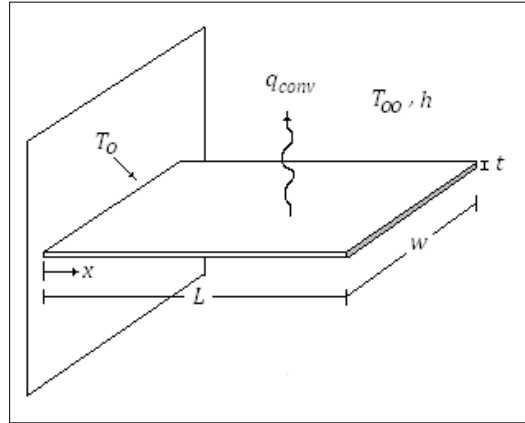


Por último la figura 2.4.11, ilustra algunos montajes de aletas empleados en aplicaciones de refrigeración y electrónica.



Ejemplo 2.4.4

Una aleta rectangular con longitud de 25 mm y 4 mm de espesor, hecha de acero al carbono con una conductividad térmica de $40 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; se une a una pared plana cuya temperatura se mantiene a 375°C . La temperatura del medio ambiente es de 65°C , y el coeficiente de transferencia de calor es de $85 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Calcule el calor disipado por la aleta por unidad de amplitud.



Solución:

En la figura se ilustra una aleta cuya amplitud es mucho muy grande comparada con su espesor, así el flujo de calor perdido puede calcularse hallando el rendimiento de la aleta y aplicando la ecuación correspondiente al flujo de calor real transferido.

$$Q = \eta_a h P L_c (T_0 - T_\infty)$$

Para calcular el rendimiento de la aleta (η_a), se evalúan los siguientes parámetros y se utiliza la figura 2.23.1.

$$P = 2w + 2t = 2w$$

Al evaluar el perímetro de la aleta no se considera el espesor puesto que es una cantidad muy pequeña comparada con la amplitud y la suma aritmética, no varía significativamente.

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 25 + 2 = 27 \text{ mm} = 0.027 \text{ m}$$

$$A_m = t L_c = (4)(27) = 108 \text{ mm}^2 = 1.08 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L_c^{3/2} \left(\frac{h}{k A_m} \right)^{1/2} = (0.027)^{3/2} \left[\frac{85}{(40)(1.08 \times 10^{-4})} \right]^{1/2} = 0.622$$

En la gráfica se obtiene:

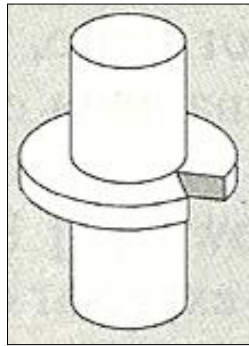
$$\eta_a = 82 \%$$

Sustituyendo este valor en la ecuación del flujo de calor real, se obtiene:

$$Q/w = (0.82)(85)(2)(0.027)(375 - 65) = 1166.8 \text{ W/m}$$

Ejemplo 2.4.5

Una aleta circular cuyo espesor es de 2 mm tiene un radio exterior de 10 cm y uno interior de 6 cm. El material de la aleta tiene una conductividad térmica de 45 W/m-°C. La temperatura en la base es igual a 200 °C, el fluido que la rodea se encuentra a 50 °C y el coeficiente promedio convectivo es igual a 50 W/m²-°C. Calcule el calor disipado por la aleta.



Solución:

Calculando los parámetros, se tiene:

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 40 + 1 = 41 \text{ mm} = 0.041 \text{ m}$$

$$A_m = tL_c = t(r_{2c} - r_1) = (2)(41) = 82 \text{ mm}^2 = 0.82 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$r_{2c} = r_1 + L_c = 60 + 41 = 101 \text{ mm} = 0.101 \text{ m}.$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{0.101}{0.06} = 1.683 \cong 1.7$$

$$L_c^{3/2} \left(\frac{h}{kA_m} \right)^{1/2} = (0.041)^{3/2} \left[\frac{50}{(45)(0.82 \times 10^{-4})} \right]^{1/2} = 0.97$$

Con los valores de 0.97 y 1.7 se obtiene en la gráfica 2.23.2, el rendimiento de la aleta,

$$\eta_a = 58 \%$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del flujo de calor real, se obtiene:

$$Q = \eta_a h P L_c (T_0 - T_\infty)$$

En esta expresión debe considerarse que el área expuesta al fluido $PL_c = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$, es el área superior más la inferior de la aleta, considerando por supuesto el área del borde de la misma. Así,

$$Q = (0.58)(50)[2\pi(0.101^2 - 0.060^2)](200 - 50) = 180.4 \text{ W}$$

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. Una pared está construida con 2 cm de cobre ($k= 385 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), 3 mm de lámina de asbesto ($k= 0.166 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) y 6 cm de fibra de vidrio ($k=0.038 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). Calcúlese el flujo de calor por unidad de área para una diferencia de temperaturas total de 500°C .

R: 313 W/m^2

2. Un depósito esférico de 1 m de diámetro, se mantiene a una temperatura de 120°C y está expuesto a un entorno convectivo ($h= 25 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$) y con una temperatura de 15°C . ¿Qué espesor de espuma de poliuretano ($k= 0.026 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) habría que añadir para asegurar que la temperatura externa del aislante no exceda los 40°C ? ¿Qué tanto por ciento de reducción de pérdida de calor se obtiene al instalar este aislante?

R: 0.79 mm , 43%

3. Una esfera hueca está fabricada de aluminio ($k= 205 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), con un diámetro interior de 4 cm y uno exterior de 8 cm. La temperatura interior y exterior son 100°C y 50°C respectivamente. Calcúlese la transferencia de calor.

R: 5.152 kW

4. Una tubería de acero de 5 cm de diámetro exterior está cubierta con un aislante de 6.4 mm de asbesto ($k= 0.166 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), seguido de una capa de 2.5 cm de fibra de vidrio ($k= 0.048 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). La temperatura de la pared del tubo es 315°C y la temperatura del exterior del aislante es de 38°C . Calcúlese la temperatura de la interfaz entre el asbesto y la fibra de vidrio.

R: 286.73°C

5. Un cable de 1.0 mm de diámetro se mantiene a 150°C y está expuesto a un entorno convectivo a 30°C , con $h= 100 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Calcúlese la conductividad térmica de un aislante cuyo espesor, de exactamente 0.2 mm, proporcione un radio crítico. ¿Qué cantidad de éste aislante hay que añadir para reducir la transferencia de calor en un 75 %, con respecto a la experimentada por el cable desnudo?

R: $0.07 \text{ W/m} - ^\circ\text{C}$, 13.45 cm

6. Una pared plana de 6.0 cm de espesor genera calor internamente a razón de 0.3 MW/m^3 . Una cara de la pared está aislada, y la otra cara está expuesta a un entorno convectivo de 93°C y con $h= 570 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Si la conductividad térmica de la pared es de $21 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Calcúlese la temperatura máxima de la pared.

R: 150.29°C

7. Un cable de 30 cm de largo de acero inoxidable ($\rho = 70 \mu\Omega\text{-cm}$) y 3.2 mm de diámetro, se somete a un voltaje de 10 V. La temperatura exterior del cable se mantiene a 93 °C. Calcúlese la temperatura en el centro del cable si la conductividad térmica es $k = 22.5 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$.

R: 138.15 °C

8. Obténgase una expresión para la distribución de temperaturas en una esfera de radio r con generación de calor uniforme q''' y temperatura en la superficie T_s .

$$R: T_s + \frac{q''' R^2}{6k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

9. Una varilla de cobre fina y larga de 6mm de diámetro está expuesta a un ambiente de 20 °C. La temperatura de la base de la varilla es 150 °C y $k = 385 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$. Calcúlese el calor liberado por la varilla.

R: 9.12 W

10. Una aleta de aluminio de 1.6 mm de espesor rodea un tubo de 2.5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es de 12.5 mm. La temperatura de la pared del tubo es de 200 °C, y la temperatura del ambiente es 20 °C. Si el coeficiente convectivo es $h = 60 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$. ¿Cuál es el calor perdido por la aleta?

R: 32.14 W

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 2

UNIDAD 2: Actividad 1

CONCEPTO DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL ESTACIONARIA.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del concepto de la transferencia de calor estacionaria.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto de la conducción de calor en estado estacionario, haciendo mención de los diversos sistemas unidimensionales y porqué se consideran así en la práctica. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 2: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍAS PLANAS SIN/CON GENERACIÓN DE CALOR APLICANDO LA ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de paredes planas aplicando los principios y conceptos relacionados con la ecuación general de la conducción de calor.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

- Una pared plana está construida de un material cuya conductividad térmica varía con el cuadrado de la temperatura, de acuerdo con la relación $K_o(1 + \beta T^2)$. Obténgase una expresión para la transferencia de calor en esa pared.

$$R: T + \frac{\beta T^3}{3} = (T_2 - T_1) \left[1 + \frac{\beta}{3} (T_2^2 + T_2 T_1 + T_1^2) \right] \frac{x}{L} + T_1 + \frac{\beta T_1^3}{3}$$

- En una varilla cuadrada de cobre de 2.5 cm se genera calor a razón de 35.3 MW/m³. La varilla está expuesta a un entorno convectivo a 20 °C, y el coeficiente de transferencia de calor es de 4,000 W/m²-°C. Calcúlese la temperatura superficial de la varilla.

$$R: T_s = 130.3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

3. Una pared plana cuyo espesor es L , tiene su cara izquierda ($x = 0$) perfectamente aislada. Su cara derecha ($x = L$) está a una temperatura T_w . Deduzca una ecuación para la distribución de temperaturas $T(x)$; cuando la generación de calor interna está dada por la expresión:

$$\dot{q} = \dot{q}_o \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right) \right], \text{ donde } \dot{q}_o \text{ es una constante.}$$

$$R: T = T_w + \frac{\dot{q}_o L^2}{3k} = \left[1 + \frac{x^3}{2L} \left(\frac{1}{L^2} \right) + \frac{3x^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} \right) \right]$$

UNIDAD 2: Actividad 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS SIN/CON GENERACIÓN DE CALOR APLICANDO LA ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con la ecuación general de la conducción de calor.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Muestre que el calor transferido a través de un tubo puede calcularse empleando la expresión correspondiente para una placa plana, si se usa el área media logarítmica dada por la expresión:

$$\bar{A} = \frac{A_2 - A_1}{\ln \left(\frac{A_2}{A_1} \right)}$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los radios interior y exterior respectivamente.

$$R: \frac{L}{kA} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi kL}$$

2. Una tubería ($k=45 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), que transporta vapor tiene una temperatura superficial interna de 250°C y su diámetro interior es de 8 cm, con un espesor de pared de 5.5 mm. Dicha tubería se recubre con una capa de 9 cm de un aislante ($k=0.5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), seguida de una capa de 4 cm de aislante ($k=0.25 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). La temperatura exterior del último aislamiento es 20°C . Calcúlese la pérdida de calor por metro de longitud.

$$R: q' = 451.3 \text{ W/m}$$

3. Un cable eléctrico de una aleación de aluminio ($k=190 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), tiene un diámetro de 30 mm, y transporta una corriente eléctrica de 230 A. La resistividad del cable es $2.9 \mu\Omega - \text{cm}$. Si la temperatura de la superficie exterior del cable es 180°C , calcule la temperatura máxima en el cable.

$$R: T_{\text{máx}} = 180.9^\circ\text{C}$$

4. El exterior de un hilo de cobre de 2 mm de diámetro está expuesto a un entorno convectivo con $h = 50 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ y $T_\infty = 100^\circ\text{C}$. ¿Qué corriente debe pasar a través del hilo para que la temperatura en el centro de él, sea de 150°C ? Tome $k = 376 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ y $\rho = 1.67 \mu\Omega \cdot \text{cm}$.

$$R: i = 54.37 \text{ A}$$

UNIDAD 2: Actividad 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍAS ESFÉRICAS SIN/CON GENERACIÓN DE CALOR APLICANDO LA ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con la ecuación general de la conducción de calor.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. ¿Cuál es la pérdida de calor desde la superficie de una esfera cuyo diámetro es de 15 cm; con generación interna de calor dada por la expresión $\dot{q} = \dot{q}_o \left(1 - \frac{r}{R_o}\right)$? Suponga $\dot{q}_o = 1,000 \text{ W/m}^3$.

$$R: q = 0.44 \text{ W}$$

2. Una esfera hueca con diámetro interior de 10 cm y diámetro exterior de 30 cm, tiene una temperatura interior de 300°C y una exterior de 100°C . Determine la temperatura en un punto que se encuentra a $\frac{1}{4}$ de distancia entre la superficie interior y la exterior. Tome $k = 50 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

$$R: T_x = 200^\circ\text{C}.$$

UNIDAD 2: Actividad 5

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SUPERFICIES EXTENDIDAS SIN/CON GENERACIÓN DE CALOR APLICANDO LA ECUACIÓN GENERAL DE LA CONDUCCIÓN Y CONVECCIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando los principios y conceptos relacionados con la ecuación general de la conducción y convección de calor, para superficies extendidas.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Una barra de cobre ($k = 350 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) de 2.5 cm de diámetro y de 30 cm de longitud, se anexa a dos paredes cuyas temperaturas se mantiene a 100°C . Dicha barra pierde calor por convección al aire ambiente cuya temperatura es de 35°C . El coeficiente convectivo de transferencia de calor es de $35 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Calcule:

- a) La temperatura en el punto medio de la barra.
b) El flujo de calor perdido desde la barra.

$$R: \quad a) T_x = 200^\circ\text{C}, \quad b) q = 16.7 \text{ W}$$

2. Considere el caso de una aleta aislada en un extremo, suponga que existe generación uniforme de calor por unidad de tiempo y volumen (q'''); distribuida a través de ella. Determine la distribución de temperaturas como función de (x) y el flujo de calor disipado por la aleta, a través de su longitud.

$$R: \quad \theta = \frac{(\theta_0 - q'''/km^2)\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} + \frac{q_0'''}{km^2}, \quad q = \sqrt{hPkA}((\theta_0 - q'''/km^2))\tanh(mL)$$

3. Deduzca la ecuación para el calor que disipa una aleta con una extremidad aislada, integrando las pérdidas de calor por convección a lo largo de su superficie.

$$R: \quad q = \sqrt{hPkA}(T_0 - T_\infty)\tanh(mL)$$

4. Una aleta rectangular con longitud de 25 mm y 6.25 mm de espesor, hecha de acero al carbono cuya conductividad térmica es de $40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, se une a una pared plana cuya temperatura es igual a 350°C . La temperatura del medio ambiente que la rodea es de 65°C , y el coeficiente convectivo de transferencia de calor es $85 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{C}$. Calcule el calor disipado por la aleta.

$$R: \quad \frac{q}{w} = 1158.3 \text{ W/m}.$$

5. Se anexa una barra a dos paredes cuyas temperaturas son T_1 y T_2 , respectivamente. Dicha barra pierde calor por convección al aire ambiente cuya temperatura es T_∞ . Determine la función para la distribución de temperaturas en la barra y el flujo de calor disipado a través de su longitud.

$$R: \quad \theta = \frac{\theta_1 \sinh[m(L-x)] + \theta_2 \sinh(mx)}{\sinh(mL)}, \quad q = \sqrt{hPkA} \left\{ \frac{\theta_2 [\cosh(mL) - 1] + \theta_1 [\cosh(mL) - 1]}{\sinh(mL)} \right\}$$

Unidad 3**Competencias específicas a desarrollar:**

1. Obtener el modelo matemático de la conducción bidimensional de calor y aplicar su solución en problemas con geometrías sencillas.
2. Explicar y aplicar el método gráfico en la solución de problemas de conducción bidimensional en estado estable, y obtener el perfil de temperatura y flujo de calor correspondiente; para diversas geometrías.
3. Explicar y aplicar el método numérico en la solución de problemas de conducción bidimensional en estado estable, y obtener el perfil de temperatura y flujo de calor correspondiente; para diversas geometrías.

Conducción Bidimensional en estado Estacionario.**Introducción.**

En la unidad anterior se analizó la conducción de calor unidimensional, bajo condiciones de estado estacionario, en paredes planas, cilíndricas y esféricas con y sin generación de calor. Sin embargo en muchas aplicaciones prácticas, la temperatura de un cuerpo puede ser función de dos o tres dimensiones y por esta razón es necesario estudiar la conducción de calor multidimensional, sin fuente de calor.

Dicho tipo de conducción se presenta en el monoblock de un motor de combustión interna, en el tratamiento térmico de piezas metálicas y en materiales compuestos, cuyas partes componentes poseen conductividades térmicas diferentes, en gasoductos u oleoductos, superficies extendidas de espesor considerable, en la intersección de paredes de hornos y chimeneas, etc. Para todos estos casos, la temperatura es función de las tres coordenadas (x, y, z) .

El siguiente cuadro ilustra los métodos o técnicas utilizadas para la solución de problemas multidimensionales.

Método o Técnica	Tipo de geometría	Herramienta utilizada
Analítico	Sencillas regulares, $T = f(x, y, z)$	Ecuación diferencial parcial con condiciones de frontera y distribución de temperaturas dentro del material.
Gráfico	Sencillas irregulares	Factor de forma, con condiciones de frontera isotérmica y adiabática.
Numérico	Complejas	Diferencias finitas.

En esta unidad solo se analizará el caso de la conducción bidimensional bajo condiciones de estado estacionario y sin fuente de calor, recordando que el principal objetivo es conocer el perfil de temperaturas y el flujo de calor dentro y en la frontera de un cuerpo dado.

Al resolver problemas de conducción bidimensional, es común usar técnicas analíticas, gráficas y numéricas. La técnica empleada depende de lo complejo del problema. Normalmente se usan los métodos analítico y gráfico en geometrías sencillas y el método numérico en geometrías más complejas.

En general la técnica más práctica y útil empleada en la solución de problemas multidimensionales es la de diferencias finitas.

3.1 Solución analítica.

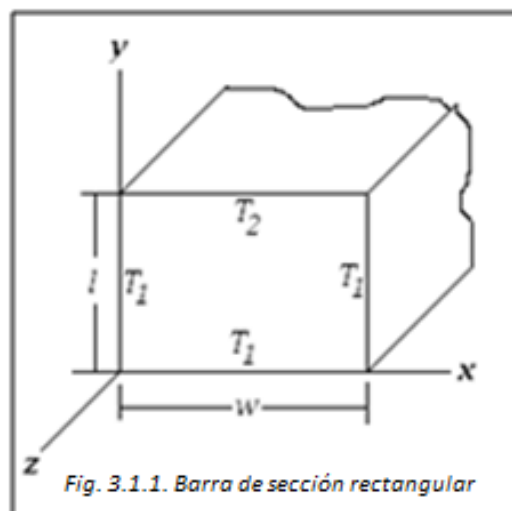
El método analítico, sugiere la solución general de la ecuación diferencial parcial que emana de la ecuación general de la conducción de calor, mencionada en la unidad 2; aplicada para el estado estacionario y sin generación de calor, es decir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Dicha ecuación con sus seis condiciones de frontera, constituye el modelo matemático para determinar la distribución de temperatura $T(x, y, z)$. Sin embargo, la ecuación anterior puede aplicarse a la conducción bidimensional, al considerar la distribución de temperatura $T(x, y)$. Dicha ecuación (Ec. de Laplace) con sus cuatro condiciones de frontera, constituye el modelo matemático. Por tanto la ecuación queda representada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Supongamos como aplicación del método analítico, un problema bidimensional de calor; el cual consiste en una barra de sección transversal rectangular, indicada en la figura 3.1.1, de la cual se desea obtener una solución para la distribución de temperaturas $T(x, y)$, suponiendo condiciones de frontera isotérmicas.



Para esta barra, en una sección transversal cualquiera ($z = cte$), y la temperatura depende solo de (x, y) . Así, definiendo una temperatura adimensional:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

La ecuación de Laplace puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

Y las condiciones de frontera son:

$$\theta(0, y) = 0$$

$$\theta(x, 0) = 0$$

$$\theta(w, y) = 0$$

$$\theta(x, l) = 1$$

Observamos que la definición de θ adimensional, dio como resultado que tres de las condiciones de frontera sean homogéneas. Uno de los métodos para la solución de esta ecuación diferencial parcial, con sus cuatro condiciones de frontera es el método de variables separables.

Esta separación se logra suponiendo que la solución de la ecuación diferencial puede expresarse como el producto de dos funciones, donde cada función depende solamente de una variable independiente; es decir:

$$\theta(x, y) = X(x) * Y(y)$$

Diferenciando esta expresión, se tiene:

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} = Y \frac{dX(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = X \frac{dY(y)}{dy}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Laplace tenemos:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Separando variables,

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} = -X \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

O bien;

$$-\frac{1}{X} * \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} * \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Puesto que cada lado de la igualdad puede variar independientemente, ésta será válida, solo si ambos miembros son iguales a la misma constante (λ); de tal suerte que se tiene dos ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden resolverse por separado. Así, igualando a λ , el lado izquierdo, se tiene:

$$-\frac{1}{X} * \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0$$

Con las condiciones de frontera:

$$X(0) = 0$$

$$X(w) = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial, se tiene:

$$D^2 X + \lambda X = 0$$

$$(D^2 + \lambda)X = 0$$

$$m^2 = -\lambda$$

$$m = \pm \sqrt{-\lambda}$$

O bien;

$$m = 0 \pm i\sqrt{\lambda}$$

Caso de raíces imaginarias, que puede escribirse como:

$$X = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

Por tanto la solución general queda;

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x$$

Sustituyendo la condición,

$$X(x) = X(0) = 0, \text{ en la solución general, se tiene:}$$

$$0 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}(0) + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}(0)$$

En ésta expresión se observa que si $C_1 = 0$; se tiene la solución trivial y la igualdad se cumple, entonces la solución particular es:

$$X(x) = C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x$$

Sustituyendo la condición,

$$X(x) = X(w) = 0, \text{ en esta expresión:}$$

$$0 = C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} w$$

Aquí se observa que si $C_2 = 0$; tenemos otra solución trivial, así que $C_2 \neq 0$; con tal que se cumpla la igualdad, entonces:

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}w = 0$$

Esto es cierto cuando

$$\sqrt{\lambda}w = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{etc.}$$

Por tanto;

$$\sqrt{\lambda}w = n\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{w}$$

O bien:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{w^2} ; \text{cuando } n = 1, 2, 3, \dots \dots \infty$$

Así, para este conjunto de valores de λ la ecuación diferencial tiene una solución no trivial; estos valores se denominan valores característicos del problema y las funciones:

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right)x$$

Se denominan funciones características.

Del mismo modo,

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda y = 0$$

Puede escribirse como,

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \left(\frac{n^2\pi^2}{w^2}\right)y = 0$$

Con la condición de frontera;

$$Y(y) = Y(0) = 0$$

Y al resolverse tiene como soluciones los múltiplos del:

$$Y_n(y) = \operatorname{senh}\sqrt{\lambda}y = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right)y$$

Sustituyendo estos valores en la solución propuesta en forma de producto, se tiene:

$$\theta(x, y) = X(x) * Y(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right)x * \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right)y$$

Puesto que la solución no satisface a la condición de frontera no homogénea, entonces por el principio de superposición la solución $\theta(x, y)$ puede ser representada como una serie infinita de las funciones θ_n ; y dado que la suma de soluciones es también una solución; así:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right) x * \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) y$$

Donde los coeficientes C_n pueden determinarse de tal manera que:

$$\theta(x, l) = 1$$

Es decir;

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right) x * \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) l$$

Redefiniendo el término:

$$C_n * \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) l = b_n$$

Entonces el problema se reduce a determinar los coeficientes $b_1, b_2, \dots$ etc., de tal manera que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right) x$$

Mediante la aplicación de las series de Fourier puede mostrarse que:

$$b_n = \frac{2}{w} \int_0^w (1) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right) dx = \frac{2}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right] ; \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \text{ etc.}$$

En consecuencia;

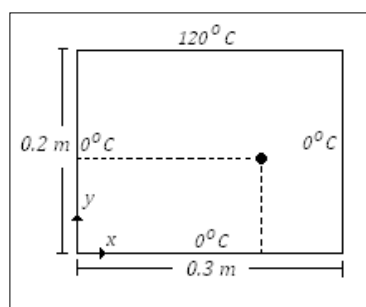
$$C_n = \left(\frac{2}{n\pi} \right) \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) l} \right]$$

Por último la distribución de temperatura bidimensional en la barra, estará representada por la expresión:

$$\boxed{\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \left(\frac{2}{\pi} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \right] * \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{w}\right) x * \left[\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) y}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{w}\right) l} \right]}$$

Ejemplo 3.1.1

Considere una barra de sección transversal rectangular, como la indicada en la figura. Determine la temperatura en el punto (0.2, 0.1).



Sustituyendo valores en la expresión de la distribución de temperatura bidimensional, se tiene:

$$\frac{T - 0}{120 - 0} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left[\left(\frac{2}{1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{0.2\pi}{0.3}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{0.1\pi}{0.3}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{0.2\pi}{0.3}\right)} + \left(\frac{2}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{0.6\pi}{0.3}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{0.3\pi}{0.3}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{0.6\pi}{0.3}\right)} + \left(\frac{2}{5}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{0.3}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{0.5\pi}{0.3}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{0.3}\right)} + \dots \right]$$

$$\frac{T - 0}{120 - 0} = \left(\frac{2}{\pi}\right) (0.54 + 0 - 1.843 \cdot 10^{-3} + \dots) = 0.344$$

Por tanto:

$$T = 41.25^\circ\text{C}$$

3.2 Análisis gráfico (Factores de forma).

En algunas ocasiones la forma geométrica del cuerpo es irregular, aunado a ciertas imposiciones de frontera y el método analítico resulta difícil o imposible de aplicar. Sin embargo se puede llegar a una solución aproximada a través de medios gráficos, si las condiciones de frontera impuestas son isotérmicas o adiabáticas.

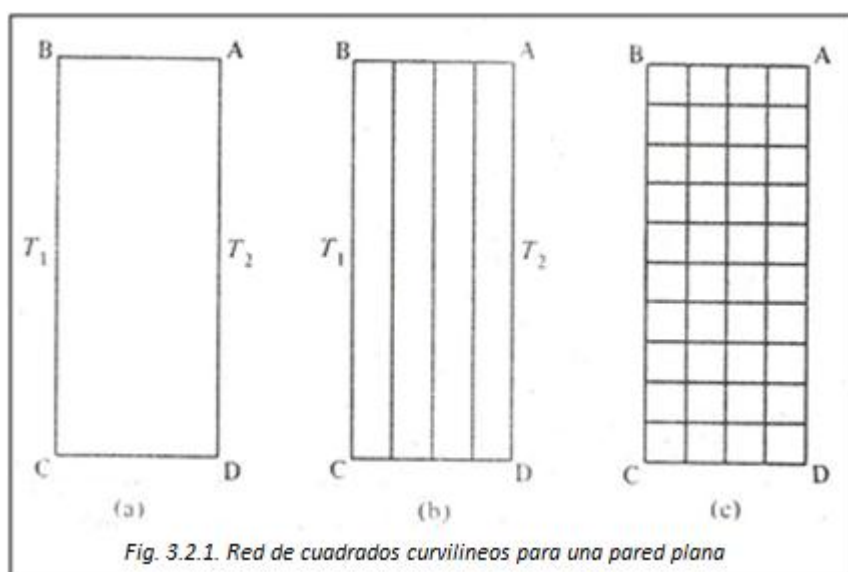
Cierto es, que la solución de un problema por este método, requiere de cierta visión y experiencia, lo cual solo se consigue a través del ejercicio diario aplicado a problemas de conducción de calor bidimensional.

Para generar una solución gráfica, se crea una red de cuadrados curvilíneos, dibujando líneas isotermas y de flujo de calor de acuerdo a los siguientes lineamientos:

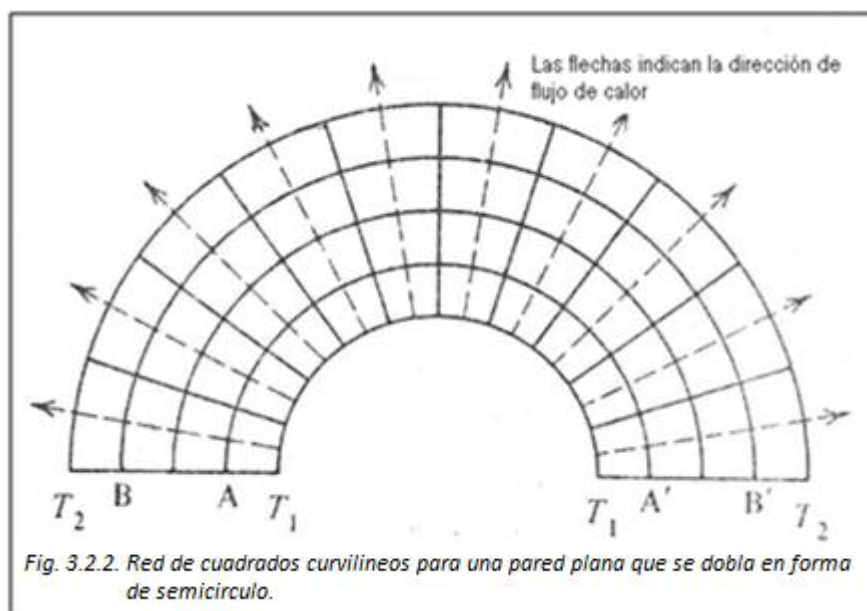
- ✓ Las líneas de flujo de calor siempre son perpendiculares a las isotermas y a las fronteras isotermas.
- ✓ Las isotermas corren perpendiculares a través de superficies aisladas.
- ✓ Las diagonales de un cuadrado curvilíneo se intersectan en ángulos rectos.
- ✓ Todos los lados de un cuadrado curvilíneo tiene aproximadamente la misma longitud, aún cuando un cuadrado puede ser mayor o menos que otro.

Enseguida se presentan algunos ejemplos de cómo construir la red de cuadrados curvilíneos en diferentes geometrías. Empecemos con la pared plana, como se ilustra en la figura 3.2.1. En la figura 3.2.1 (a) se muestra la pared con su cara BC a la temperatura T_1 , y su cara AD a la temperatura T_2 . Se observa que BC y AD son isotermas y que BA y CD son líneas de flujo de calor.

En la figura 3.2.1 (b) la línea de flujo de calor BA se divide en cuatro partes iguales y se trazan tres isothermas que conectan BA y CD. Luego se trazan las líneas de flujo de calor para completar el proceso como se muestra en la figura 3.2.1 (c). Note que al construir la red se utilizaron los lineamientos antes mencionados. En este caso los cuadrados son iguales y de lados rectos y ángulos rectos.

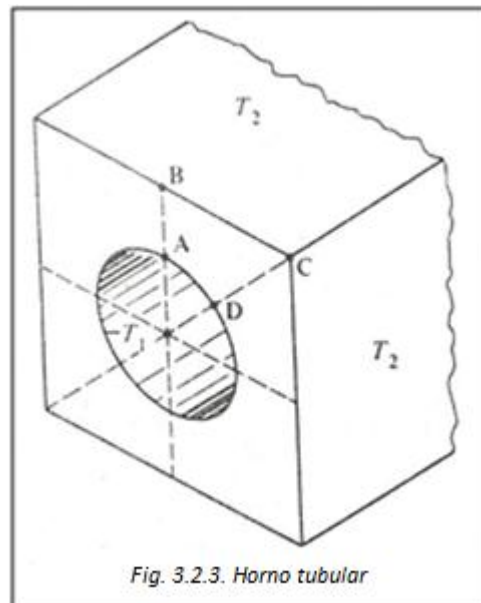


Sin embargo, al doblar la red en forma de semicírculo como se aprecia en la figura 3.2.2., los cuadrados se distorsionan y las isothermas más cercanas a T_1 tienen una separación más corta, y puesto que fluye el mismo calor a través del área A-A' que a través de B-B', siendo B-B' mayor; entonces el gradiente de temperatura a través de A-A' debe ser mayor, para conducir la misma cantidad de calor Q . Este razonamiento debe emplearse al bosquejar cualquier solución gráfica.



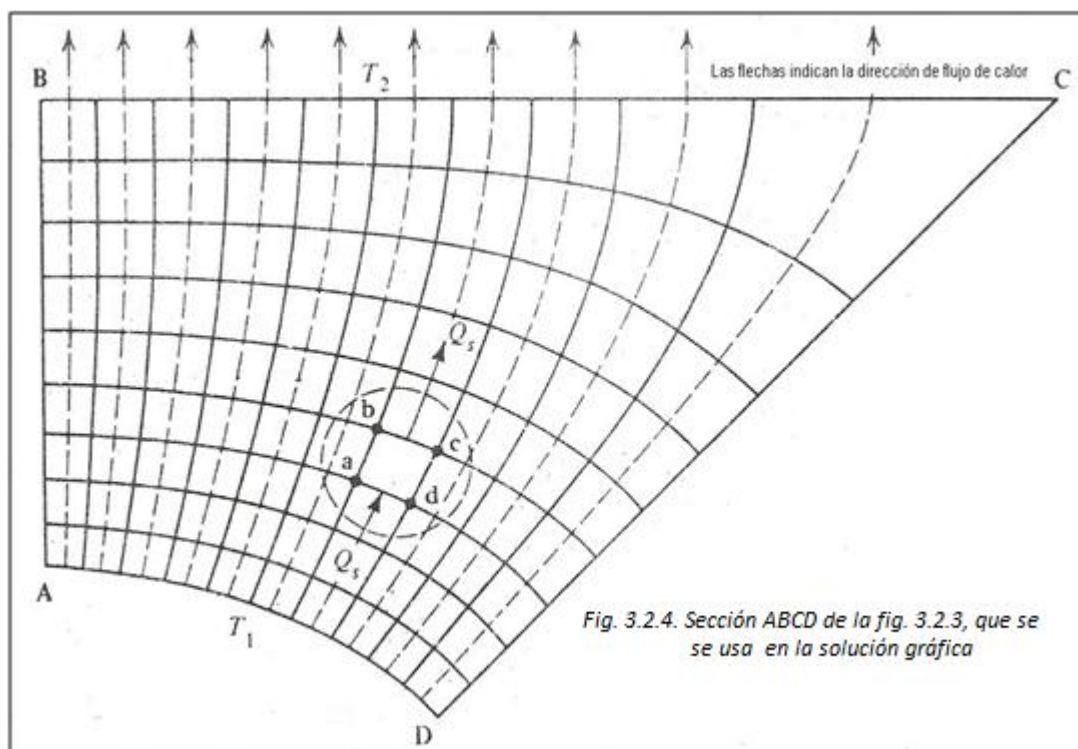
Como segundo ejemplo consideremos el caso de un horno tubular como se ilustra en la figura 3.2.3. Las paredes interior y exterior del horno están a temperaturas uniformes T_1 y T_2 respectivamente. Se quiere determinar la pérdida de calor a través de la pared del horno con el fin de seleccionar el tamaño

adecuado de los elementos calentadores. En el análisis no se contemplan las pérdidas de calor por el frente y la parte trasera del horno.



Notamos que debido a que el interior del horno es de sección transversal circular y las paredes de sección transversal cuadrada, el flujo de calor es simétrico. Por tanto la pérdida de calor total a través de las paredes del horno será ocho veces al que pierde en la sección ABCD, como se indica en la figura.

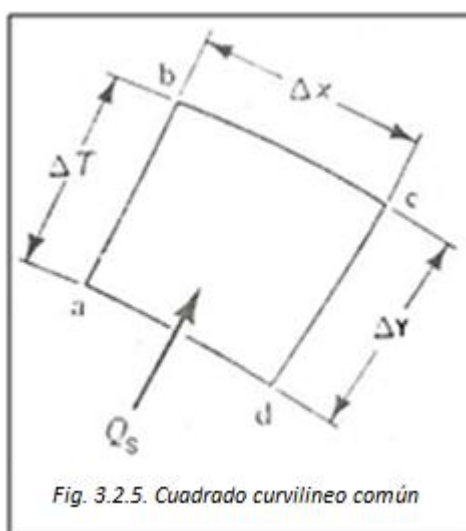
La solución gráfica sugiere que se inicie con la representación de la sección ABCD como se muestra en la figura 3.2.4.



Observando que las isothermas para las temperaturas T_1 y T_2 son las líneas AD y BC, correspondientes a las temperaturas interior y exterior del horno, y las líneas BA y CD son las líneas de flujo de calor. Iniciemos el proceso dividiendo la línea de flujo de calor en un número arbitrario de partes iguales, donde cada parte representa un valor igual ΔT .

Enseguida se trazan a partir de estas divisiones las isothermas desde BA hasta CD, cuidando que estas sean en su mayor parte paralelas a las isothermas fronteras. El proceso finaliza al trazar las líneas de flujo de calor perpendiculares a las isothermas, partiendo de AD hasta BC, de tal modo que se cree la red de cuadrados curvilíneos. Note que cerca de la esquina C, se dificulta seguir los lineamientos establecidos rigurosamente.

Ahora bien, para calcular el flujo de calor (Q_s) en la sección ABCD, centremos nuestra atención en uno de los cuadrados curvilíneos como el representado en la figura 3.2.4, dicho cuadrado abcd, se indica mediante el círculo de líneas punteadas, y se ilustra en la figura 3.2.5.



Dado que el número de isothermas que hay trazadas en la fig. 3.3.4., son 10, entonces el número de ΔT_s existentes en la red de cuadrados curvilíneos serán:

$N = \text{Número de } \Delta T_s \text{ que hay en la red} = \text{Número de isothermas} - 1 = 9.$

En la red se observa también, que el número de sendas de calor se determinan contando simplemente las que resultan de la formación de los cuadrados curvilíneos, en este caso son:

$M = \text{Número de sendas de calor} = 10.$

Como: $\Delta x \cong \Delta y$, para cualquier cuadrado curvilíneo.

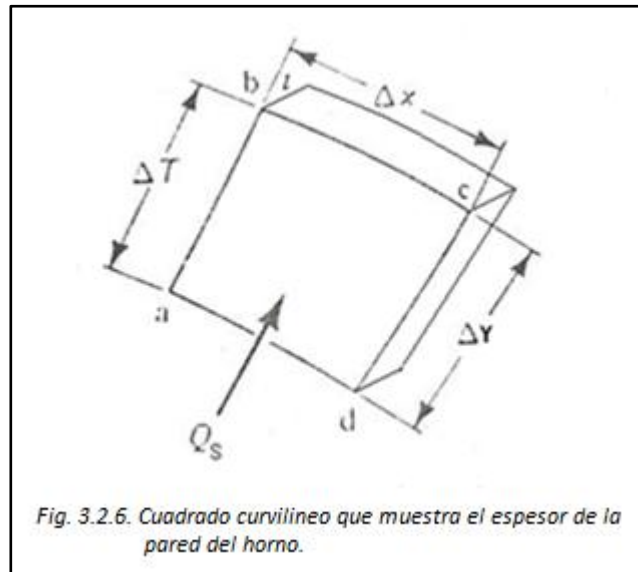
$k =$ Conductividad térmica del cuerpo.

Entonces:

$Q_s =$ Razón del flujo de calor a través de ad, debido al gradiente de temperatura ($\Delta T / \Delta Y$).

ΔT = Diferencia de temperatura entre dos isotermas adyacentes.

$(\Delta x)(l)$ = Área a través de la cuál fluye el calor; (l) es el espesor de pared del horno. Ver fig. 3.2.6.



Para el caso del espesor o profundidad del horno, se puede hacer $(l = 1)$.

Aplicando la ley de Fourier a este cuadrado curvilíneo, se tiene:

$$Q_s = k(\Delta x)(l) \left(\frac{\Delta T}{\Delta y} \right)$$

Puesto que $\Delta x \cong \Delta y$, y $l = 1$ entonces;

$$Q_s = k(\Delta T)$$

Pero en la red hay N incrementos de ΔT ; así:

$$\Delta T = \frac{T_1 - T_2}{N}$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior, tenemos;

$$Q_s = k \left(\frac{T_1 - T_2}{N} \right)$$

Este flujo de calor es para una senda, dado que hay M sendas; entonces el flujo de calor total en la sección ABCD, es:

$$Q = MQ_s = k \left(\frac{M}{N} \right) (T_1 - T_2)$$

Sustituyendo los valores de M y N en esta expresión:

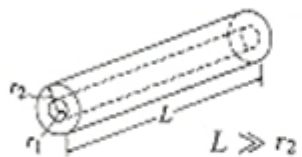
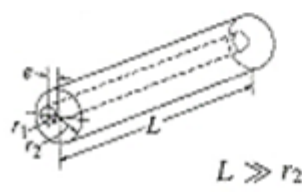
$$Q = k \left(\frac{10}{9} \right) (T_1 - T_2) = 1.1k(T_1 - T_2)$$

La razón (M/N) , será igual para cualquier valor de N que se escoja y frecuentemente se le conoce como factor de forma (S); por consiguiente el flujo de calor total para un octante de la pared del horno puede ser calculado por la expresión:

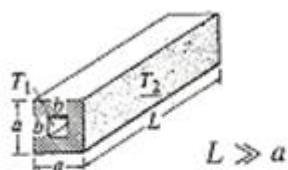
$$Q = kS\Delta T$$

Donde ΔT es la diferencia de temperatura total entre dos fronteras isotermas.

La tabla 3.2., ilustra el factor de forma (S), para algunas configuraciones geométricas utilizadas con mayor frecuencia.

Tabla 3.2. Factores de forma para ser usados en la Ec. $Q=KS\Delta T$	
Configuración	Factor de forma (S)
1. Pared plana 	$\frac{A}{L}$
2. Cilindros concéntricos  Nótese que no existe una solución en régimen estacionario para $r_2 \rightarrow \infty$, es decir, para un cilindro en un medio infinito.	$\frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}$
3. Esferas concéntricas 	(a) $\frac{4\pi}{1/r_1 - 1/r_2}$ (b) $4\pi r_1$ para $r_2 \rightarrow \infty$
4. Cilindros excéntricos 	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2 - e^2}{2r_1 r_2} \right)}$

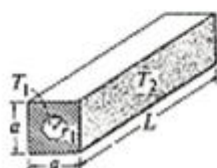
5. Prismas cuadrados concéntricos



$$\frac{2\pi L}{0.93 \ln(a/b) - 0.0502} \quad \text{para } \frac{a}{b} > 1.4$$

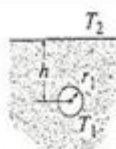
$$\frac{2\pi L}{0.785 \ln(a/b)} \quad \text{para } \frac{a}{b} < 1.4$$

6. Cilindro circular y prisma cuadrado concéntricos



$$\frac{2\pi L}{\ln(0.54a/r)} \quad a > 2r$$

7. Esfera enterrada

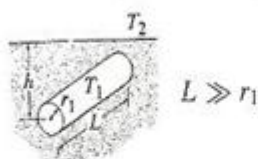


$$\frac{4\pi r_1}{1 - r_1/2L}$$

La temperatura del medio en el infinito también es T_2

Para $h \rightarrow \infty$ se obtiene de nuevo el resultado del apartado 3(b)

8. Cilindro enterrado



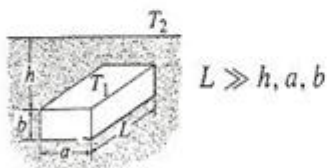
$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(h/r_1)}$$

$$\frac{2\pi L}{\ln(2h/r_1)} \quad \text{para } h > 3r_1$$

La temperatura del medio en el infinito también es T_2

Para $h/r_1 \rightarrow \infty$, $S \rightarrow 0$ puesto que es imposible el flujo estacionario.

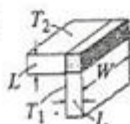
9. Viga rectangular enterrada



$$2.756L \left[\ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \right]^{-0.59} \left(\frac{h}{b} \right)^{-0.078}$$

La temperatura del medio en el infinito también es T_2

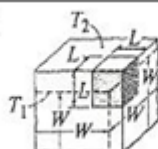
10. Arista de dos paredes adyacentes



$$0.54W \quad \text{para } W > L/5$$

(W es la arista interna de un cubo)

11. Esquina de tres paredes adyacentes



$$0.15L \quad \text{para } W > L/5$$

12. Región en forma de disco en la superficie de un sólido semiinfinito

4r



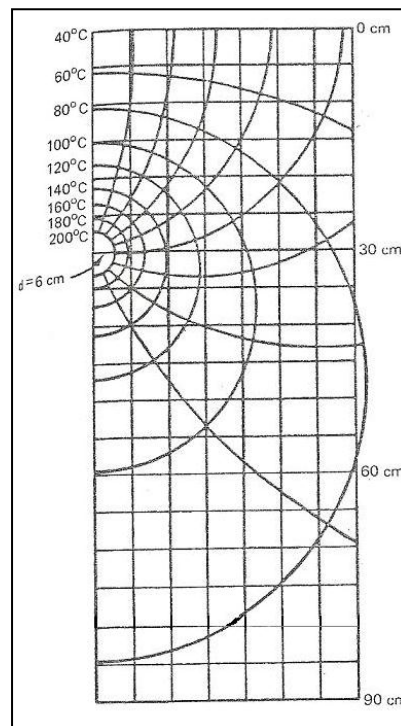
La temperatura del medio en el infinito también es T_2

Tomada del texto *Transferencia de Calor A. F. Mills* Página 313, Mc Graw Hill IRWING.

Ejemplo 3.2.1

Un tubo de 6 cm de diámetro exterior se encuentra bajo tierra a una profundidad de 30 cm, medida desde su centro hasta la superficie de la tierra. La conductividad térmica de la tierra puede suponerse como $0.35 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Si la temperatura superficial del tubo y de la tierra son 200°C y 40°C , respectivamente; determine el calor disipado por el tubo hacia la superficie de la tierra.

En la figura de cuadrados curvilíneos se ilustran las líneas isoterma y calor constante, así, $N=8$ y $M=2$ (9)= 18 . Calculando el factor de forma, se tiene:



$$S = \frac{M}{N} = \frac{18}{8} = 2.25$$

Por consiguiente:

$$Q' = kS(T_2 - T_1) = (0.35)(2.25)(200 - 40) = 126 \text{ W/m}.$$

También el calor disipado por el tubo puede calcularse aplicando el factor de forma dado por la expresión de la tabla 3.3.1, caso 8 propia de un cilindro enterrado en un medio semi-infinito, con superficie isotérmica. Es decir:

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{r_1}\right)} = \frac{2\pi(1)}{\cosh^{-1}\left(\frac{30}{3}\right)} = 2.099$$

En consecuencia:

$$Q' = kS(T_2 - T_1) = (0.35)(2.099)(200 - 40) = 117.55 \text{ W/m.}$$

Comparando ambas respuestas, encontramos que la diferencia entre ellas es de 8.45 W/m. Es decir, menos del 6.7 %. Lo que justifica la utilidad del método gráfico cuando se tiene cierta experiencia en su uso.

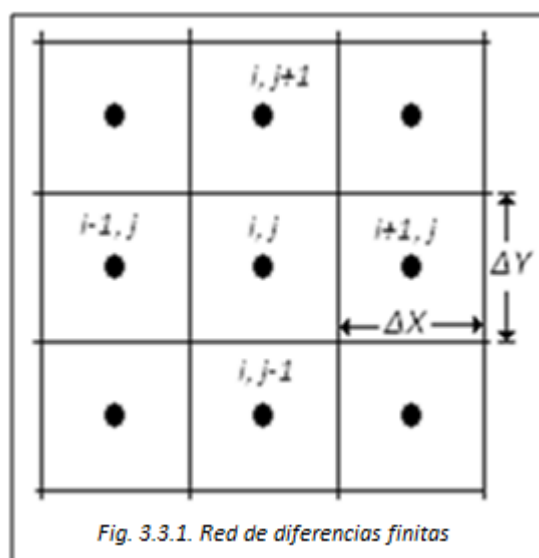
3.3 Métodos numéricos: Diferencias finitas.

Lo complejo de muchos problemas de conducción dificulta el uso del método analítico, pero sin lugar a duda el desarrollo tecnológico de la computadora digital permite hoy día la aplicación del método de diferencias finitas para la solución de este tipo de problemas.

La diferencia entre ambos métodos, es que el analítico utiliza elementos diferenciales en la formulación del modelo matemático; mientras el de las diferencias finitas utiliza elementos de volumen muy pequeños, pero finitos. Por consiguiente, al hacer el tamaño de estos elementos cada vez más pequeño, la diferencia en los resultados obtenidos en ambos métodos disminuye.

En el análisis de conducción bidimensional de calor por diferencias finitas, el principio de la conservación de la energía se aplica a un elemento de ancho Δx , altura Δy y de profundidad unitaria, denominado elemento o volumen finito.

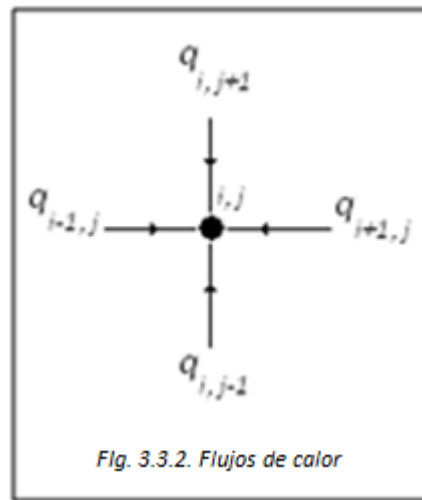
El conjunto de todos estos elementos constituye una red como la mostrada en la figura 3.3.1. El centro de cada volumen finito se conoce como nodo, y durante el análisis se supone que la temperatura de éste representa la temperatura de todo el volumen o elemento finito.



Para el estado estacionario y siguiendo la analogía con la primera ley de Kirchhoff; se tiene que para cualquier nodo la suma de los calores que entran a ese nodo es igual a la suma de los calores que salen: es decir:

$$\sum_{k=1}^n q_k = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = 0$$

Un balance de energía en cualquier nodo i, j de la red, indica en ausencia de fuente de calor, la suma de los flujos de calor en el nodo es igual a cero. Apoyándonos en el concepto de resistencia térmica y haciendo referencia a la figura 3.3.2, se tiene que:



$$q = \frac{\Delta T}{R_t} = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}}$$

Donde: $L = \Delta x$, y $A = \Delta y(1)$. Así, para el nodo i, j representado en la figura 3.3.2., se obtiene:

$$q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1} = 0$$

$$\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\frac{\Delta x}{k(\Delta y)(1)}} + \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\frac{\Delta x}{k(\Delta y)(1)}} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\frac{\Delta y}{k(\Delta x)(1)}} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\frac{\Delta y}{k(\Delta x)(1)}} = 0$$

Puesto que por construcción $\Delta x = \Delta y$, la ecuación anterior se reduce a;

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Esta es la ecuación en diferencias finitas para cualquier nodo interior de la red ilustrada en la figura 3.3.1.

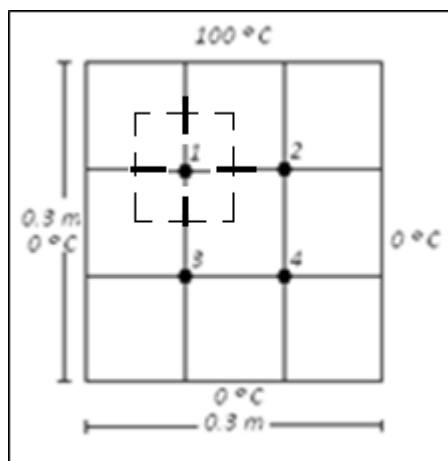
Un sistema con conducción de calor bidimensional en estado estacionario y sin generación de calor. Si el sistema está compuesto de n nodos interiores cuyas temperaturas son desconocidas, entonces n ecuaciones como la 3.3.1., especificaran la distribución de temperaturas del sistema en cuestión.

De lo anterior se concluye que el problema de conducción bidimensional se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, las cuales varían según el número de nodos que exista en la red o sistema, en vez de la ecuación diferencial.

Este sistema de ecuaciones puede resolverse mediante diversas técnicas aplicadas en la teoría del álgebra lineal y también por el método de relajación.

Ejemplo 3.3.1

Dada la barra cuadrada ilustrada en la figura, determine la temperatura en cada nodo del sistema.



En este caso como hay 4 nodos, se requieren cuatro ecuaciones para nodos interiores, para determinar las temperaturas desconocidas T_1, T_2, T_3 , y T_4 . Estas relaciones son:

$$\text{Nodo 1: } -4T_1 + T_2 + T_3 + 100 = 0$$

$$\text{Nodo 2: } T_1 - 4T_2 + T_4 + 100 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } T_1 - 4T_3 + T_4 = 0$$

$$\text{Nodo 4: } T_2 + T_3 - 4T_4 = 0$$

Mediante la técnica de matrices $AT = C$, el sistema de ecuaciones lineales puede representarse de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que $T = A^{-1}C$, es necesario encontrar la inversa de la matriz A ; determinando la inversa y efectuando el producto indicado, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.5 \\ 37.5 \\ 12.5 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

Así, del proceso anterior se obtiene que:

$$T_1 = 37.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_2 = 37.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_3 = 12.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_4 = 12.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Por supuesto, podría haberse deducido por simetría del problema que $T_1 = T_2$ y $T_3 = T_4$, y solo se necesitarían dos ecuaciones nodales.

$$\text{Nodo 1: } 100 + T_3 - 3T_1 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } T_1 - 3T_3 = 0$$

Y los resultados serían los mismos.

Se hace la observación que en éste ejemplo solo se consideraron cuatro nodos interiores, sin embargo es posible incrementar el número de estos y las respectivas ecuaciones, empleando divisiones más pequeñas; con el resultado que la solución sería cada vez más complicada y por ende la aplicación de la computadora digital.

Una vez determinadas las temperaturas, el flujo de calor en (W), puede calcularse a partir de la expresión:

$$q = \sum k \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

Donde ΔT , se toma respecto a los contornos. Así, el flujo de calor puede calcularse o en la cara de $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ o bien en las tres caras de $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Cara a $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$q = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} [(37.5 - 100) + (37.5 - 100)] = 125k \text{ en W.}$$

Caras a $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$q = -k \frac{\Delta y}{\Delta x} [(37.5 - 0) + (12.5 - 0) + (12.5 - 0) + (12.5 - 0) + (12.5 - 0) + (37.5 - 0)] = -125k \text{ en W.}$$

Note que por la cara de $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ entra calor, y por las caras de $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ sale calor. Se invita al lector a investigar respecto a los casos en que aparecen contornos curvos o formas complicadas.

En el caso de que la temperatura en alguna cara de la red sean desconocidas, los nodos correspondientes a esa cara reciben el nombre de nodos exteriores o condiciones de frontera, y deben obtenerse las ecuaciones en diferencias finitas para estos nodos.

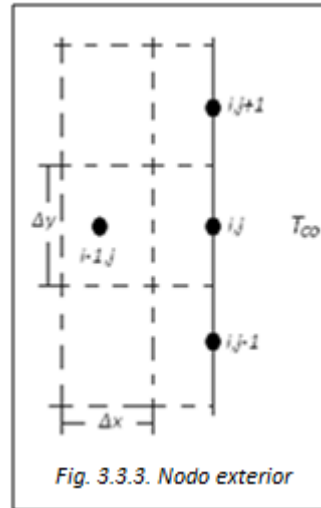
Como una ilustración de la metodología a seguir para obtener estas ecuaciones algebraicas, para nodos exteriores, considere el nodo i, j localizado sobre una superficie plana que intercambia calor por convección con un medio cuya temperatura es T_{∞} , la cual se muestra en la figura 3.3.3.

Haciendo un balance de calor en el nodo i, j se tiene que:

$$q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1} = q_{conv}$$

Recurriendo al concepto de resistencia térmica:

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\frac{\Delta x}{k(\Delta y)(1)}} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\frac{\Delta y}{k(\Delta x/2)(1)}} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\frac{\Delta y}{k(\Delta x/2)(1)}} = h(\Delta y)(1)(T_{i,j} - T_{\infty})$$



Puesto que por construcción $\Delta x = \Delta y$ la expresión anterior se reduce a;

$$\frac{h\Delta x}{k}(T_{\infty}) + \frac{1}{2}(2T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - \left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{i,j} = 0$$

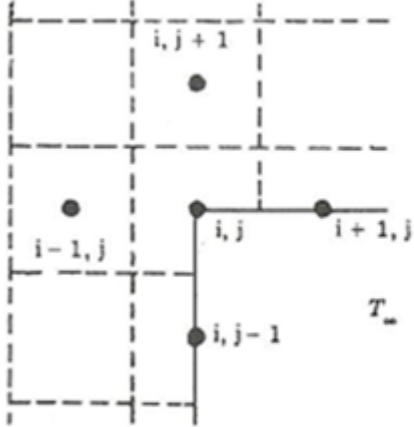
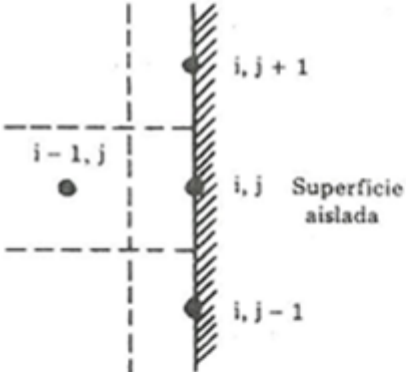
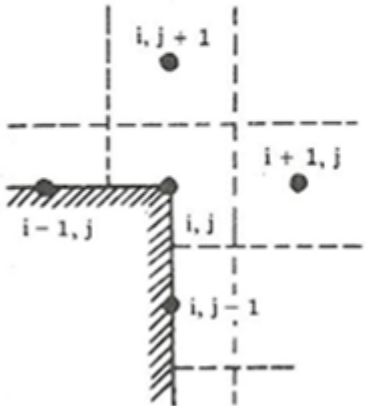
La ecuación anterior, permite determinar la temperatura de cualquier nodo i,j localizado sobre una superficie plana que intercambia calor por convección con un medio.

Las temperaturas en los nodos $i,j + 1$ e $i,j - 1$ se determinan mediante la aplicación simultánea de la misma ecuación; mientras que la temperatura del nodo $i - 1,j$ se determina con la ecuación, para nodos interiores.

La tabla 3.3, ilustra algunas ecuaciones empleadas para superficies planas con mayor frecuencia en diversas geometrías.

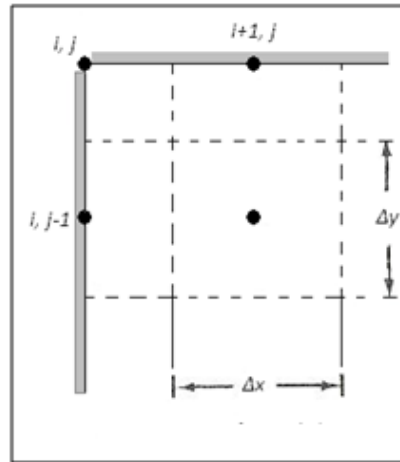
Se recomienda al lector consultar la bibliografía correspondiente a este capítulo para ampliar la información respecto a otros tipos de geometrías planas y curvas.

Tabla 3.3. Ecuaciones en diferencias finitas para distintas geometrías
 Tomada del texto Transferencia de Calor J. A. Manrique Página 55, Harla, 1a. Edición

Geometría	Ecuación en diferencias para el nodo i, j
	$2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + 2T_{i-1,j} + 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 2\left(3 + \frac{h \Delta x}{k}\right) T_{i,j} = 0$
(a) Esquina interior intercambiando calor por convección.	
	$T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + 2T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = 0$
(b) Superficie aislada.	
	$\frac{1}{2} (T_{i-1,j} + T_{i,j-1}) + (T_{i,j+1} + T_{i+1,j}) - 3T_{i,j} = 0$
(c) Esquina interior aislada.	

Ejemplo 3.3.2

Encuentre la ecuación en diferencias finitas para el nodo i, j mostrado en el esquema de la figura, empleando principios básicos.



Mediante un balance de energía en el nodo i, j se obtiene que:

$$q_{i,j-1} + q_{i+1,j} = 0$$

$$q_{i,j-1} = -q_{i+1,j}$$

Recurriendo al concepto de resistencia térmica.

$$\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\frac{\Delta y}{k(\Delta x/2)(1)}} = \frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\frac{\Delta x}{k(\Delta y/2)(1)}}$$

Como $\Delta x = \Delta y$, simplificando la igualdad se obtiene:

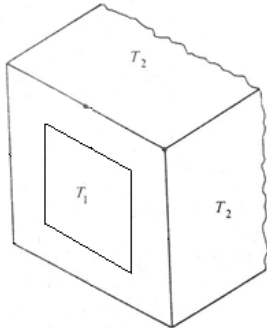
$$T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i+1,j}}{2}$$

Esta expresión calcula la temperatura en el nodo i, j localizado en una esquina exterior formada por dos superficies planas aisladas.

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

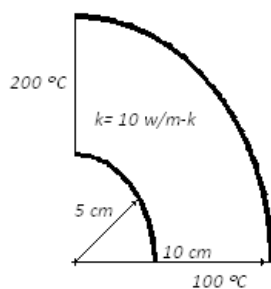
1. Un horno cubico con dimensiones interiores de 50 cm x 50 cm x 50 cm., y 10 cm de espesor está construido de ladrillo refractario ($k=0.85 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). El interior del horno se mantiene a 400°C y el exterior a 50°C . Calcúlese el flujo de calor perdido a través de las paredes.

R: 5.462 kW.

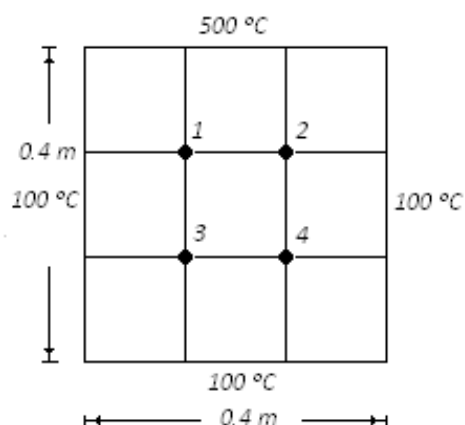


2. Determine el flujo de calor por unidad de profundidad en el sistema mostrado en la figura siguiente, haciendo uso del método gráfico.

R: 555.55 W/m.



3. Considere una barra de sección cuadrada con dimensiones de 0.4 m x 0.4 m, como se muestra en la figura. Aplique el método numérico y encuentre la temperatura en los cuatro nodos indicados y calcule además el flujo de calor en las cuatro caras.



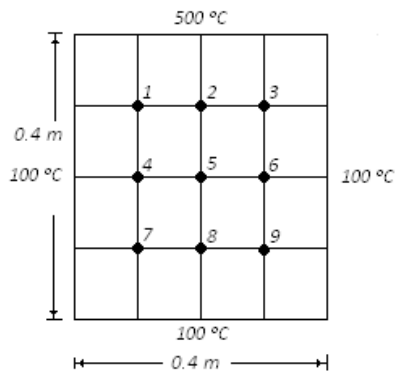
R: $T_1 = T_2 = 250^\circ\text{C}$.

$T_3 = T_4 = 150^\circ\text{C}$.

$q_{500} = 500 \text{ k}$

$q_{100} = -500 \text{ k}$

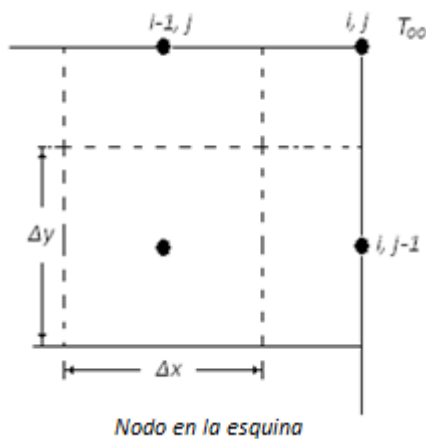
4. Repita el problema anterior, solo que aumente el número hasta 9 nodos. Utilice un programa de cómputo para resolver el sistema de ecuaciones lineales.



$$\begin{aligned}
 R: \quad T_1 &= 241.17^\circ\text{C} \\
 T_2 &= 221.17^\circ\text{C} \\
 T_3 &= 241.17^\circ\text{C} \\
 T_4 &= 143.51^\circ\text{C} \\
 T_5 &= 119.08^\circ\text{C} \\
 T_6 &= 143.51^\circ\text{C} \\
 T_7 &= 113.79^\circ\text{C} \\
 T_8 &= 111.67^\circ\text{C} \\
 T_9 &= 113.79^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

5. Encuentre la ecuación en diferencias finitas para el nodo i, j mostrado en el esquema de la figura siguiente empleando principios básicos. Note que el nodo está localizado en la esquina formada por dos superficies planas e intercambia calor por convección con el medio.

$$R: 2\left(\frac{h\Delta x}{k}\right)T_\infty + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{i,j} = 0$$



ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 3

UNIDAD 3: Actividad 1

CONCEPTO DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL ESTACIONARIA.

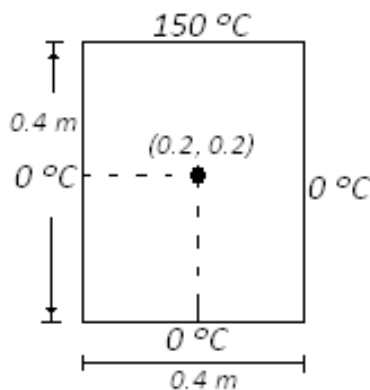
NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del concepto de la transferencia de calor estacionaria.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto de la conducción de calor bidimensional en estado estacionario, haciendo mención de las diversas técnicas utilizadas en la solución de los problemas. Formato de documento: Word, en calibre 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 3: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO EL MÉTODO ANALÍTICO.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas utilizando el método analítico.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Considere una barra de sección transversal cuadrada como se muestra en la figura siguiente. Determine la temperatura en el punto $x = 0.2, y = 0.2$.



R: 38.1°C

2. Haciendo uso de la ley de Fourier de la conducción, calcule el flujo de calor por unidad de profundidad que se transfiere a través de la cara derecha de la barra mostrada en el ejemplo 3.1.

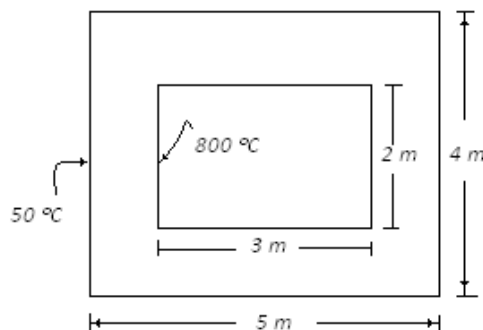
$$R: -\frac{2k}{\pi} (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n \sinh(n\pi l/w)} (-1)^n [\cosh(n\pi l/w) - 1]$$

UNIDAD 3: Actividad 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO EL MÉTODO GRÁFICO.

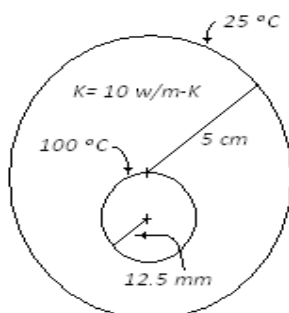
NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando método gráfico de la conducción bidimensional de calor.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. En la figura de abajo se muestra la sección transversal de la pared de un horno. Use el método gráfico para determinar el factor de forma (S) y el flujo de calor resultante para las condiciones que se indican en la figura. Tome $k = 1 \text{ W/m-K}$. Sugerencia: Utilice la simetría del horno.



$$R: 2.5, 7500 \text{ W/m.}$$

2. Una barra calentadora cuyo diámetro exterior es de 25 mm, se encuentra alojada excéntricamente, en un cilindro cuyo diámetro exterior es de 10 cm, según se ilustra en la figura de abajo. Utilice el método gráfico y calcule el factor de forma y el flujo de calor de la barra calentadora según las condiciones que se indican en la figura.



$$R: 5.5, 4125 \text{ W/m}$$

UNIDAD 3: Actividad 4**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO EL FACTOR DE FORMA DE LA TABLA 3.3.1.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando el factor de forma obtenido en la tabla 3..3.1.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Dos cilindros largos de 8 y 3 cm de diámetro están completamente rodeados por un medio ($k= 1.4 \text{ W/m-}^{\circ}\text{C}$). La distancia entre los centros es de 10 cm y los cilindros se mantienen con temperaturas en sus superficies de 200°C y 35°C , respectivamente. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud.

$$R: 556.85 \text{ W/m}$$

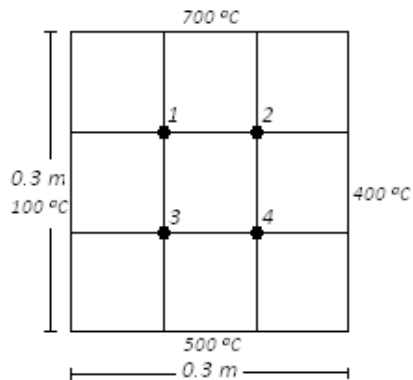
2. Una esfera caliente de 1.5 m de diámetro se mantiene a una temperatura superficial de 300°C , y se encuentra inmersa en un medio ($k= 1.2 \text{ W/m-}^{\circ}\text{C}$); cuya superficie exterior está a 30°C . La profundidad desde el centro de la esfera a la superficie es de 3.75 m. Calcúlese la pérdida de calor.

$$R: 3393 \text{ W}$$

UNIDAD 3: Actividad 5**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO EL MÉTODO NUMÉRICO.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando el método numérico.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

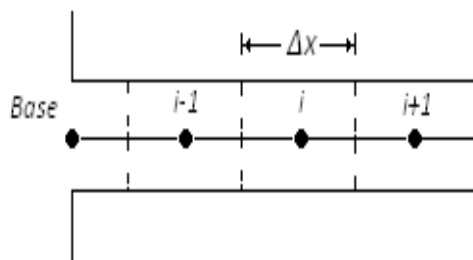
1. Calcúlese las temperaturas en los puntos nodales 1, 2, 3, y 4 utilizando el método numérico. Encuentre también el flujo de calor en las caras de la barra.



$$R: \begin{aligned} T_1 &= 800 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_2 &= 1100 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_3 &= 600 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_4 &= 900 \text{ }^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

2. Considere el caso de la aleta unidimensional de sección transversal constante, ilustrada en el capítulo 2; y encuentre la ecuación por diferencias finitas para el nodo i .

$$R: -(T_{i-1} + T_{i+1}) + \left(\frac{hP(\Delta x)^2}{kA} + 2 \right) T_i - \frac{hP(\Delta x)^2}{kA} (T_{\infty}) = 0$$



3. Demuestre que la expresión en diferencias finitas mostrada en la tabla 3.3.1., es correcta para el caso de la pared aislada.

$$R: T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + 2T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = 0$$

Unidad 4**Competencias específicas a desarrollar:**

1. Explicar y obtener la ecuación diferencial de la conducción de calor en estado transitorio, cuando la temperatura solo es función del tiempo y aplicarla en la solución de problemas con geometrías sencillas.
2. Explicar y aplicar el método numérico en la solución de problemas de conducción bidimensional en estado transitorio, y obtener el perfil de temperatura y flujo de calor correspondiente; para diversas geometrías.
3. Explicar y aplicar el método gráfico o cartas de Heisler en la solución de problemas de conducción unidimensional en estado transitorio, y obtener el perfil de temperatura y flujo de calor correspondiente; para diversas geometrías y sus fronteras.

Conducción en estado Transitorio.**Introducción.**

En la unidad dos se estudió la conducción de calor unidimensional, bajo condiciones de estado estacionario, en paredes planas, cilíndricas y esféricas sin generación de calor. Sin embargo en muchas aplicaciones prácticas, la temperatura de un cuerpo puede ser función de una o más dimensiones, como también del tiempo y por esta razón es necesario estudiar la conducción de calor multidimensional en estado transitorio sin fuente de calor.

Dicho tipo de conducción se presenta durante el calentamiento y enfriamiento de un motor de combustión interna, el calentamiento y enfriamiento del techo de una casa expuesto a la radiación solar, el congelamiento de cubos de hielo, el enfriamiento de alimentos, durante el temple o revenido de una pieza de acero, etc. Para todos estos casos, la temperatura puede ser función de las tres coordenadas espaciales y del tiempo $T = f(x, y, z, t)$, según el caso a tratar. Más aún, en muchas circunstancias, la temperatura de un sistema durante un proceso de enfriamiento o calentamiento; depende exclusivamente del tiempo y no de la distancia $T = f(t)$.

Sin embargo, en cualquier caso y a diferencia de los procesos de transferencia de calor en estado estacionario, en los de tipo transitorio existe un aumento o disminución de la energía interna del sistema, mientras ocurre el proceso. En el siguiente cuadro se ilustra los métodos o técnicas utilizadas para la solución de problemas multidimensionales.

Método o Técnica	Tipo de geometría	Herramienta utilizada
Parámetros concentrados	Sencillas regulares.	Ecuación diferencial parcial con condición de frontera y resistencia térmica nula en el interior del material.
Cartas o gráficas de Heisler	Sencillas muy grandes.	Cartas o gráficas obtenidas del modelo matemático de la geometría en cuestión.
Numérico	Complejas con condiciones de frontera.	Diferencias finitas.

Empecemos analizando el caso de la conducción cuando la temperatura del sistema depende solo del tiempo y sin fuente de calor, recordando que el principal objetivo es conocer el perfil de temperaturas y el flujo de calor dentro o en la frontera de un cuerpo dado.

Para resolver problemas de conducción de éste tipo, en estado transitorio; es común usar el método denominado **“Parámetros concentrados”**, también conocido como **“Capacidad global”** el cual se presenta a continuación.

4.1 Análisis de parámetros concentrados.

Éste método, se aplica a sistemas en los cuales durante su enfriamiento o calentamiento, la temperatura es función solo del tiempo y no de la distancia e impone ciertas suposiciones, las cuales se mencionan enseguida:

- ✓ La conductividad térmica del sistema (cuerpo) es muy grande, para que la caída de temperatura en su interior sea insignificante, es decir, su resistencia sea nula.
- ✓ Que las dimensiones físicas del cuerpo sean lo suficiente pequeñas, para que la diferencia de temperaturas en su interior no sea apreciable.
- ✓ Que el coeficiente de transferencia de calor por convección en la interfaz sólido-fluido, sea suficientemente pequeño, de tal suerte que la caída de temperatura significativa ocurra en la interfaz y no en el interior del sólido.

Número de Biot.

Es un parámetro sin dimensiones que se define como el cociente de una resistencia interna a la conducción de calor, entre una resistencia externa a la convección, es decir:

$$Bi = \frac{\left(\frac{L_c}{kA}\right)}{\left(\frac{1}{hA}\right)} = \frac{hL_c}{k}$$

Donde:

h = coeficiente de transferencia de calor por convección.

L_c = longitud característica del cuerpo o sistema.

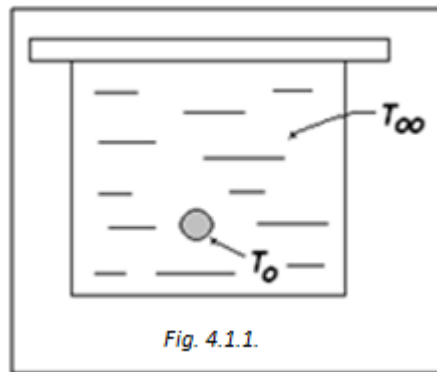
k = conductividad térmica del cuerpo.

En consecuencia, cuando ($h \ll k$), el número de Biot es pequeño ($Bi \rightarrow 0$). Es decir, este parámetro asegura que la temperatura del cuerpo sea uniforme y no exista caída de temperatura en su interior, y es válido para valores donde $Bi < 0.1$, con menos del 5 % de error.

Método de parámetros concentrados.

Considere un cuerpo de dimensiones pequeñas, como el ilustrado en la figura 4.1.1, el cual se encuentra a una temperatura inicial uniforme T_o . Suponga que repentinamente se sumerge el cuerpo en un fluido a menor temperatura T_∞ , cuyo valor permanece constante. Si la resistencia

interna del cuerpo a la conducción es insignificante respecto a la externa de convección del fluido, la temperatura del cuerpo depende exclusivamente del tiempo $T = f(t)$.



Un balance de energía de acuerdo con la primera ley de la termodinámica para un sistema cerrado, indica que:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \dots \dots (kW)$$

Puesto que $\dot{W} = 0$,

Entonces:

$$\dot{Q} = \frac{dE}{dt} \text{ ec. 4.1.2}$$

En ésta expresión, $\dot{Q}$ representa la tasa de transferencia de calor neta, $\dot{W}$ es la potencia y dE/dt es la tasa de cambio de la energía total. La ecuación 4.1.2, representa el calor disipado por convección desde el cuerpo hacia el fluido, en cualquier instante de tiempo, el cual se refleja en una disminución de la energía interna del mismo. Además, sugiere el planteamiento de la siguiente ecuación diferencial:

$$hA(T - T_{\infty}) = -\rho cV \frac{\partial T}{\partial t}$$

La cuál puede escribirse, como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{hA}{\rho cV} (T - T_{\infty}) = 0$$

Esta ecuación diferencial homogénea de primer orden, requiere para su solución particular de una condición inicial de frontera, es decir $T = T_0$, en $t = 0$. Definiendo $\theta = T - T_{\infty}$, y $\theta_0 = T_0 - T_{\infty}$, como las diferencias de potencial que sirven para transferir el calor por convección, la condición inicial de frontera puede escribirse como $\theta = \theta_0$ cuando $t = 0$, y la ecuación anterior puede reinscribirse como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{hA}{\rho cV} \theta = 0$$

Mediante operadores diferenciales, se tiene:

$$D\theta + \frac{hA}{\rho cV} \theta = 0$$

Factorizando:

$$\theta \left(D + \frac{hA}{\rho cV} \right) = 0$$

Puesto que solo existe una raíz que satisface la solución, entonces:

$$D = m = -\frac{hA}{\rho cV}$$

Así, la solución general es:

$$\theta = C_1 e^{-mt}$$

Sustituyendo la condición inicial de frontera, se tiene:

$$\theta_0 = C_1 e^{-m(0)}$$

Lo cual implica que,

$$C_1 = \theta_0$$

En consecuencia, la solución particular de la ecuación es;

$$\theta = \theta_0 e^{-\left(\frac{hA}{\rho cV}\right)t}$$

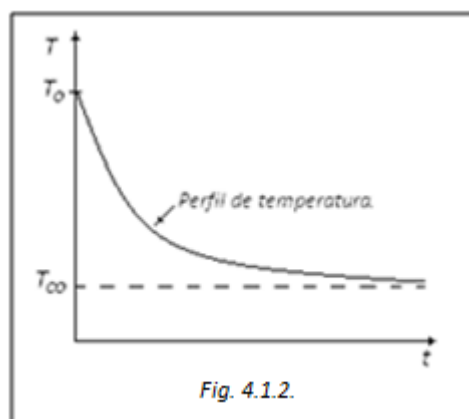
O bien,

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho cV}\right)t}$$

Despejando la temperatura,

$$T = (T_0 - T_\infty) e^{-\left(\frac{hA}{\rho cV}\right)t} + T_\infty$$

Esta ecuación, permite calcular la variación de la temperatura (T) del cuerpo en cualquier instante de tiempo (t); en función de la temperatura inicial y las propiedades del cuerpo como su densidad, calor específico, volumen y superficie; considerando también la temperatura del fluido y el coeficiente de transferencia de calor por convección. Dicha variación se ilustra esquemáticamente en la figura 4.1.2.



La ecuación también puede escribirse en forma adimensional, considerando que:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$t^* = \left(\frac{hA}{\rho c V} \right) t = \frac{\frac{t}{\frac{1}{\frac{\rho c V}{hA}}}}{\frac{1}{\frac{\rho c V}{hA}}} = \frac{t}{\tau}$$

Donde:

$$\tau = \frac{\rho c V}{hA}$$

Se denomina constante de tiempo del sistema. Observando que el término $(hA/\rho c V)$:

Se puede escribir como:

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{1}{\rho c V \left(\frac{1}{hA} \right)}$$

Se puede establecer la analogía entre un sistema eléctrico y un sistema térmico, escribiendo ésta expresión, como:

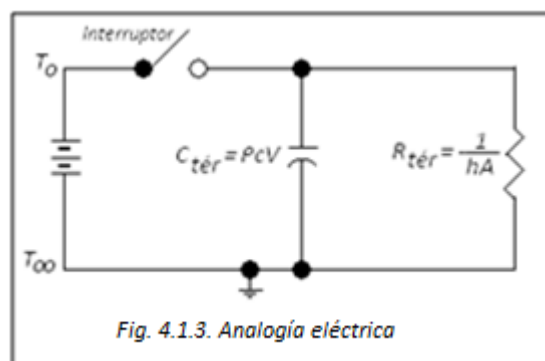
$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{1}{C_{tér} R_{tér}}$$

Donde:

$$C_{tér} = \rho c V$$

$$R_{tér} = \frac{1}{hA}$$

Estos términos son equivalentes a una capacitancia eléctrica y una resistencia eléctrica respectivamente, con la diferencia que en el sistema eléctrico se almacena carga eléctrica, mientras que en el sistema térmico se almacena energía. La figura 4.1.3, muestra el circuito térmico equivalente.



Por consiguiente, la ecuación en forma adimensional puede escribirse como:

$$\theta^* = e^{-t^*}$$

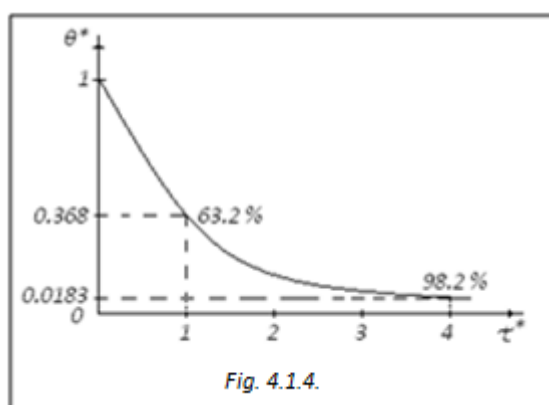
En ésta ecuación se puede observar, que cuando el tiempo (t^*) varía, la temperatura (θ^*) se aproxima al valor de cero; así para:

$$t^* = 0 \rightarrow \theta^* = 1$$

$$t^* = 1 \rightarrow \theta^* = 0.368$$

$$t^* = 4 \rightarrow \theta^* = 0.0183$$

Lo que implica, que cuando ($t^* = 1$) el tiempo es igual a la constante de tiempo ($t = \tau$), la variación de la temperatura ha alcanzado el 63.2 % de su valor total y cuando ($t = 4\tau$) la variación ha alcanzado el 98.2 % de su valor total, es decir ha logrado prácticamente el equilibrio, como se ilustra en la figura 4.1.4.



La tabla 4.1, muestra algunas de las longitudes características usadas con mayor frecuencia para el cálculo del número de Biot.

Tabla 4.1 Longitud característica utilizada para el cálculo del No. De Biot.	
Geometría	L_c – Longitud característica
Cubo-Lado (a)	$a/6$
Pared plana-Espesor (2L)	L
Cilindro largo-Radius r_o	$r_o/2$
Esfera- Radius r_o	$r_o/3$

Ejemplo 4.1.1

Considere un termómetro de mercurio instalado en una corriente de aire. El bulbo tiene un diámetro de 4 mm. Despreciando la resistencia térmica del bulbo y suponiendo un coeficiente de transferencia de calor igual a $50 \text{ W/m}^2\text{-K}$, calcule la constante de tiempo del termómetro. Suponga los siguientes valores para las propiedades del mercurio: $k = 9 \text{ W/m-K}$, $\alpha = 0.015 \text{ m}^2/\text{h}$.

Solución: La constante de tiempo del termómetro, está dada por la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{\rho c V}{h A}$$

Pero:

$$\frac{V}{A} = \left(\frac{r}{3}\right)$$

Entonces, la relación se convierte en:

$$\tau = \frac{\rho c r}{3 h}$$

Además la difusividad térmica se define como:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Por consiguiente:

$$\rho c = \frac{k}{\alpha} = \frac{(9)(3600)}{(0.015)} = 2.16 \times 10^6 \frac{J}{m^3 \cdot K}$$

Y como $r = 0.002 \text{ m}$.

Sustituyendo valores, se tiene:

$$\tau = \frac{(2.16 \times 10^6)(0.002)}{(3)(50)} = 28.8 \text{ s}$$

Ejemplo 4.1.2

Una esfera de cobre puro tiene un peso de 49 N y una temperatura inicial de 275 °C. Ésta se sumerge repentinamente en un fluido cuya temperatura inicial es de 25 °C. Suponiendo un coeficiente de transferencia de calor $h = 30 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Determine el tiempo que se requiere para enfriar el cobre hasta 75 °C.

Solución: El tiempo requerido está dado por la expresión:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho c V}\right)t}$$

En el apéndice según la tabla (2-c) los valores para las propiedades del cobre puros son:

$$\rho = 8954 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 383.1 \text{ J/kg-K}$$

$$k = 386 \text{ W/m-K}$$

Para asegurar que la temperatura sea función solo del tiempo, calculemos primero el número de Biot, así:

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

Según la tabla 4.1.2., la longitud corregida para una esfera es:

$$L_c = \frac{r_o}{3}$$

Pero el volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4\pi}{3}(r_o^3)$$

Además,

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Pero la masa por la ley de Newton, es:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{49}{9.8} = 5 \text{ kg}$$

Entonces, sustituyendo los valores de la masa y la densidad del cobre en la expresión del volumen, se tiene:

$$V = \frac{5}{8954} = 5.584 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Despejando el radio de la expresión que relaciona el volumen con el radio tenemos.

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{(3)(5.584 \times 10^{-4})}{(4\pi)}} = 0.051 \text{ m.}$$

Entonces la longitud corregida, es:

$$L_c = \frac{0.051}{3} = 0.017 \text{ m.}$$

Entonces el valor del número de Biot, se calcula como:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{(30)(0.017)}{(386)} = 1.323 \times 10^{-3} = 0.001323 < 0.1$$

Así, el método de parámetros concentrados puede utilizarse.

Pero;

$$\frac{A}{V} = \frac{3}{r_o}$$

Entonces, el tiempo requerido para alcanzar la temperatura de 40 °C; es:

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-\left(\frac{3h}{\rho c r_o}\right)t}$$

Sustituyendo valores se obtiene;

$$\frac{75 - 25}{275 - 25} = e^{-\left(\frac{3 \times 30}{8954 \times 383.1 \times 0.051}\right)t}$$

Por último, aplicando las leyes de los logaritmos se tiene:

$$t = 3,128,46 \text{ s} = 52.14 \text{ min.}$$

4.2 Métodos numéricos: Diferencias finitas.

En muchas aplicaciones prácticas de tipo transitorio, la resistencia interna a la conducción del cuerpo no puede ser despreciada, de tal forma que la temperatura depende tanto de la distancia como del tiempo. En el caso que no se genere calor, la ecuación general de la conducción de calor puede ser escrita de la forma siguiente.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

La ecuación anterior indica que la temperatura es función de (x, y, z, t) . El caso de tres dimensiones queda fuera del alcance de esta obra. Por tanto para facilidad en la exposición, el análisis se limita solo a sistemas bidimensionales; en los cuales la geometría del cuerpo es compleja y las condiciones de frontera dependen del tiempo, como se indica en la siguiente ecuación diferencial.

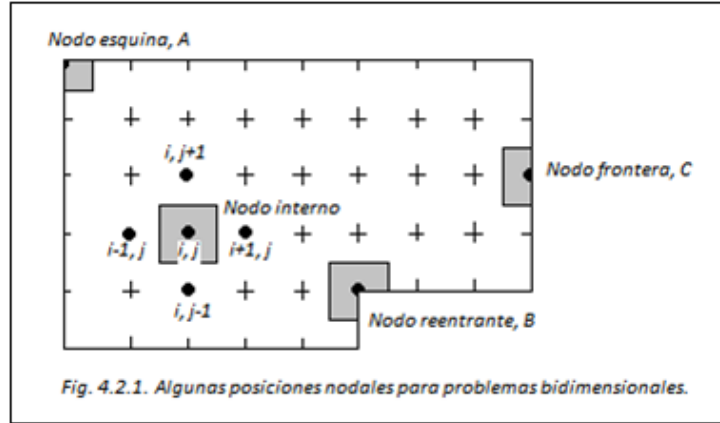
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

En este caso la solución analítica resulta tediosa al implicar ecuaciones diferenciales parciales, y los métodos numéricos en diferencias finitas con software computacional, implican facilidad en la solución de los problemas.

Método numérico para el régimen transitorio.

Una vez más, la base para la formulación de las ecuaciones nodales es el principio de la conservación de la energía. En la unidad tres, se estudió que la razón de energía neta que llega a un nodo interno, o frontera, se hizo igual a cero. En este caso, a dicha razón de energía neta la hacemos igual a la razón de cambio de energía interna del elemento finito. Así, la figura 4.2.1 ilustra algunas posiciones nodales que se pueden presentar en problemas de tipo bidimensional en estado transitorio, sin generación de calor.

A manera de ejemplo, formulemos la ecuación nodal para un nodo interno (i, j) como el indicado en la figura 4.2.1. En este caso la parte izquierda de la ecuación diferencial que corresponde al estado estacionario sin generación de calor; permanece sin variación alguna, para cualquier tiempo τ , y solo la parte derecha que corresponde a la razón de cambio de la energía interna del elemento finito, varía respecto al tiempo. Escribiendo la ecuación nodal de acuerdo con la ley de Fourier para el caso unidimensional, es decir:



$$q = \frac{kA}{L}(\Delta T)$$

Se tiene que para el nodo (i, j) , la parte izquierda de la ecuación se escribe como se hizo en la unidad tres;

$$k \left(\Delta y \cdot 1 \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta y \cdot 1 \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta x \cdot 1 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \Delta x \cdot 1 \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} \right)$$

En esta parte de la ecuación el superíndice n , indica la temperatura de los nodos que interactúan entre sí, en el tiempo τ .

Asimismo, la parte derecha de la ecuación se escribe como:

$$\rho c (\Delta x \Delta y \cdot 1) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

Donde ρc , son las propiedades del elemento finito y el término $(\Delta x \Delta y \cdot 1)$ es el volumen del mismo. El superíndice $(n + 1)$, indica la temperatura del nodo (i, j) en el tiempo $(\tau + \Delta \tau)$.

Entonces al igualar ambas partes de la ecuación para la conducción bidimensional transitoria para el nodo interno (i, j) , se obtiene la ecuación nodal para cualquier nodo interno.

$$k \left(\Delta y \cdot 1 \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta y \cdot 1 \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta x \cdot 1 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \Delta x \cdot 1 \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} \right) = \rho c (\Delta x \Delta y \cdot 1) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta z = 1$ y $\alpha = k/\rho c$, la ecuación anterior se puede escribir;

$$\Delta y \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta y \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta x \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \Delta x \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} = \frac{1}{\alpha} (\Delta x \Delta y) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

$$\alpha \Delta \tau \left(\Delta y \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta y \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \Delta x \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \Delta x \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} \right) = (\Delta x \Delta y) T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n$$

Dividiendo toda la ecuación entre $(\Delta x \cdot \Delta y)$, se tiene:

$$\alpha \Delta \tau \left(\frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2 T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta x)^2 T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} \right) = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n$$

Factorizando e introduciendo el término $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, se obtiene:

$$\frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + \frac{1}{\lambda^2} (T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n) \right] = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n$$

Despejando la temperatura del nodo (i, j) en el tiempo $(\tau + \Delta \tau)$, se tiene:

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + \frac{1}{\lambda^2} (T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n) \right] + T_{i,j}^n$$

Mediante operaciones;

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j+1}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j-1}^n - \frac{2}{\lambda^2} T_{i,j}^n \right] + T_{i,j}^n$$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j+1}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j-1}^n \right] + \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[-2T_{i,j}^n - \frac{2}{\lambda^2} T_{i,j}^n \right] + T_{i,j}^n$$

Factorizando $(T_{i,j}^n)$:

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j+1}^n + \frac{1}{\lambda^2} T_{i,j-1}^n \right] + T_{i,j}^n \left[1 - \frac{2\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]$$

Puesto que, $\Delta x = \Delta y$ por construcción del elemento finito, entonces $\lambda = 1$, así:

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} [T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n] + T_{i,j}^n \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \right]$$

La ecuación anterior es representativa para cualquier **nodo interno bidimensional**. En esta ecuación se puede observar, que si el coeficiente de $(T_{i,j}^n)$ es negativo, existe la posibilidad de que se violen las leyes de la termodinámica, dando por resultado inestabilidad en la solución. Sin embargo, si el término;

$$\frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \leq 1 \quad \text{o} \quad \Delta \tau \leq \frac{(\Delta x)^2}{4\alpha}$$

Se asegura la estabilidad en la solución y por ende no se violan las leyes de la termodinámica. Las desigualdades se logran tomando incrementos de tiempo muy pequeños.

Por último, se ilustran las razones de cambio de energía para los nodos indicados en la figura 4.2.1.1.

Nodo en esquina A.

$$\rho c \left(\frac{1}{4} \Delta x \Delta y \cdot 1 \right) \frac{T_A^{n+1} - T_A^n}{\Delta \tau}$$

Nodo esquina reentrante B.

$$\rho c \left(\frac{1}{2} \Delta x \Delta y \cdot 1 + \frac{1}{4} \Delta x \Delta y \cdot 1 \right) \frac{T_B^{n+1} - T_B^n}{\Delta \tau}$$

Nodo frontera C.

$$\rho c \left(\frac{1}{2} \Delta x \Delta y \cdot 1 \right) \frac{T_C^{n+1} - T_C^n}{\Delta \tau}$$

En estas expresiones los subíndices A, B y C; se sustituyen por las coordenadas (i, j) .

Ejemplo 4.2.1

Mediante principios básicos, encuentre la ecuación correspondiente a un nodo frontera.

De la figura 4.2.1.1., se tiene que para el nodo frontera **C**; la parte izquierda de la ecuación para el estado estacionario se escribe como se hizo en la unidad tres.

$$k \left(\Delta y \cdot 1 \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + h(\Delta y \cdot 1)(T_\infty - T_{i,j})$$

Asimismo, la parte derecha de la ecuación se escribe como:

$$\rho c \left(\frac{1}{2} \Delta x \Delta y \cdot 1 \right) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

Igualando ambas expresiones se tiene:

$$k \left(\Delta y \cdot 1 \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + h(\Delta y \cdot 1)(T_\infty - T_{i,j}^n) = \rho c \left(\frac{1}{2} \Delta x \Delta y \cdot 1 \right) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

$$\Delta y \cdot 1 \frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{h}{k} (\Delta y \cdot 1)(T_\infty - T_{i,j}^n) = \frac{1}{2\alpha} (\Delta x \Delta y \cdot 1) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

Dividiendo toda la ecuación entre $\Delta x \cdot \Delta y$, se obtiene:

$$\frac{T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{h\Delta y}{k\lambda} \frac{T_\infty - T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2\alpha} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta \tau}$$

$$\frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n + \frac{1}{2\lambda^2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) + \frac{1}{2\lambda^2} (T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n) + \frac{h\Delta y}{k\lambda} (T_\infty - T_{i,j}^n) \right] = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n$$

De nuevo, si $\lambda = 1$, se tiene:

$$\frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n + \frac{1}{2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) + \frac{1}{2} (T_{i,j-1}^n - T_{i,j}^n) + \frac{h\Delta y}{k} (T_\infty - T_{i,j}^n) \right] = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n$$

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i-1,j}^n - T_{i,j}^n + \frac{1}{2} T_{i,j+1}^n - \frac{1}{2} T_{i,j}^n + \frac{1}{2} T_{i,j-1}^n - \frac{1}{2} T_{i,j}^n + \frac{h\Delta y}{k} T_\infty - \frac{h\Delta y}{k} T_{i,j}^n \right] + T_{i,j}^n$$

Factorizando $(T_{i,j}^n)$ y haciendo $\Delta x = \Delta y$.

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[T_{i-1,j}^n + \frac{1}{2} T_{i,j+1}^n + \frac{1}{2} T_{i,j-1}^n + \frac{h\Delta x}{k} T_\infty \right] + T_{i,j}^n \left[1 - \frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left(2 + \frac{h\Delta x}{k} \right) \right]$$

Esta ecuación nodal corresponde a cualquier nodo frontera que intercambia calor con un fluido. Nuevamente, el coeficiente de $T_{i,j}^n$ no debe ser negativo para que no se violen las leyes de la termodinámica. Es decir el término:

$$\left[\frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left(2 + \frac{h\Delta x}{k} \right) \right] \leq 1 \quad \text{o} \quad \Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2}{4\alpha \left(1 + \frac{h\Delta x}{2k} \right)}$$

4.3 Gráficas de temperatura transitoria: Placa infinita, cilindros infinitos, esferas y sólidos semiinfinitos.

En ésta sección estudiaremos la distribución de temperaturas y el flujo de calor en paredes planas, cilindros y esferas, considerando el estado transitorio unidimensional. En estos tipos de geometrías, la temperatura depende tanto de la distancia como del tiempo; es decir, la resistencia interna a la conducción no es despreciable. Así, $[\theta(x, t)]$.

Para la solución de éste tipo de problemas en donde el número de Biot es mayor que 0.1, ($Bi > 0.1$), la técnica más utilizada son las denominadas cartas de Heisler.

Placa infinita.

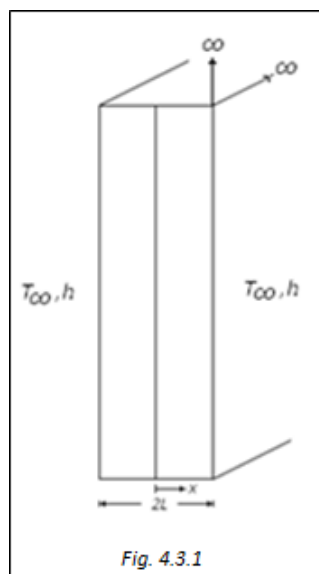
Iniciemos nuestra discusión considerando el problema de tipo transitorio, en el cual la resistencia interna a la conducción no puede ser despreciada, de tal modo que la temperatura del cuerpo, depende tanto de la distancia como del tiempo.

A diferencia del método de parámetros concentrados estudiado anteriormente, la solución analítica con conductividad térmica finita, implica la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Considere el caso de la placa plana de espesor $2L$, estudiado en la unidad 2. Una aplicación práctica de este caso se tiene en el congelamiento comercial de vegetales o carnes en forma de rebanadas.

Así, la predicción de la temperatura en el plano central y la temperatura para cualquier distancia desde la superficie hasta el centro; en cualquier tiempo t , puede ser evaluada a partir del uso de las cartas o gráficas de Heisler, las cuales se obtienen mediante las soluciones analíticas obtenidas a partir de la ecuación diferencial y las respectivas condiciones de frontera, para las diferentes geometrías a tratar.

La figura 4.3.1, ilustra una placa plana como la citada anteriormente, con condiciones en la frontera convectivas.



Dicha placa tiene inicialmente una temperatura uniforme T_i , y repentinamente se pone en contacto con un fluido que tiene una menor temperatura T_∞ , la cual es constante, y se desea conocer la variación de la temperatura con respecto a la distancia y al tiempo.

De la figura se observa que por simetría, el problema es equivalente al de una placa plana de espesor L , aislada térmicamente en una de sus superficies; como se ilustra en la figura 4.3.1.2.

De la ecuación general de la conducción de calor se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Puesto que la altura y el ancho de la placa tienden a infinito, entonces la temperatura de la placa depende solo del espesor L y del tiempo t ; así, el problema se convierte en unidimensional en estado transitorio, el cual se representa con la siguiente ecuación diferencial, parcial.

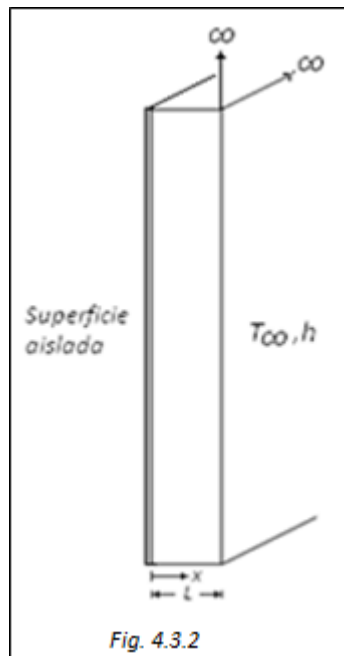


Fig. 4.3.2

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Definiendo la difusividad térmica (α), como $\alpha = k/\rho c$, la ecuación anterior puede escribirse en la forma siguiente:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Esta ecuación requiere de una condición inicial y dos condiciones de frontera, para especificar completamente la variación de la temperatura respecto de la distancia y del tiempo.

La condición inicial es planteada a partir de la uniformidad de la temperatura de la placa en el tiempo cero. Así, para cualquier distancia x , se tiene:

$$T(x, 0) = T_i$$

La primera condición se obtiene considerando la simetría de la placa de espesor $2L$. Puesto que ésta pierde calor por ambas superficies, la temperatura debe ser máxima para cualquier tiempo en el centro de la placa durante el enfriamiento, es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0$$

La segunda y última condición de frontera puede obtenerse fácilmente notando que el calor transportado por conducción desde el centro de la placa hasta la interface placa-fluido, es el mismo cedido por convección al fluido. Así:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h[T(L, t) - T_\infty]$$

Dado que éste problema no es del todo homogéneo, no puede ser resuelto por el método de separación de variables. Para ello es necesario normalizarlo definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$t^* = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Al tiempo adimensional (t^*), se le conoce como número de Fourier (Fo). Sustituyendo estas nuevas variables en las originales se obtiene:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

$$T^*(x^*, 0) = 1$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*}(0, t^*) = 0$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*}(1, t^*) = -Bi T^*(1, t^*)$$

Donde $Bi = hL/k$ es el número de Biot.

Ahora, podemos suponer una solución en forma de producto, así:

$$T^* = X(x^*)\theta(t^*)$$

Así, la ecuación diferencial normalizada se convierte en:

$$X\theta'' = \theta X''$$

Separando variables se tiene:

$$\frac{\theta''}{\theta} = \frac{X''}{X}$$

La solución particular de esta ecuación diferencial con sus condiciones de frontera se encuentra en la referencia José A. Manrique, al igual que el calor disipado por la placa entre $t = 0$ y cualquier instante de tiempo t . Enseguida se presentan ambas soluciones.

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 Fo} * \frac{2 \operatorname{sen} \lambda_n \cos \lambda_n x^*}{\lambda_n + \operatorname{sen} \lambda_n \cos \lambda_n}$$

$$\frac{Q}{Q_i} = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_n^2 Fo}) * \frac{2 \operatorname{sen}^2 \lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \cos \lambda_n}$$

Ambos resultados pueden presentarse en forma muy conveniente a través de gráficas como las desarrolladas por Heisler e ilustradas en las figuras siguientes.

La figura 4.3.3, muestra la variación de la temperatura adimensional en el centro de la placa de espesor $2L$, $(T_{x=0} - T_{\infty})/(T_i - T_{\infty})$ como función del número de Fourier, para diferentes valores del recíproco del número de Biot. Nótese además, que la longitud característica en estos números es el semiespesor de la placa L .

La figura 4.3.4, calcula la temperatura en cualquier plano de la placa respecto al centro de la misma, $(T - T_{\infty})/(T_{x=0} - T_{\infty})$ para diferentes valores del recíproco del número de Biot. La figura 4.3.5, calcula el calor disipado por la placa.

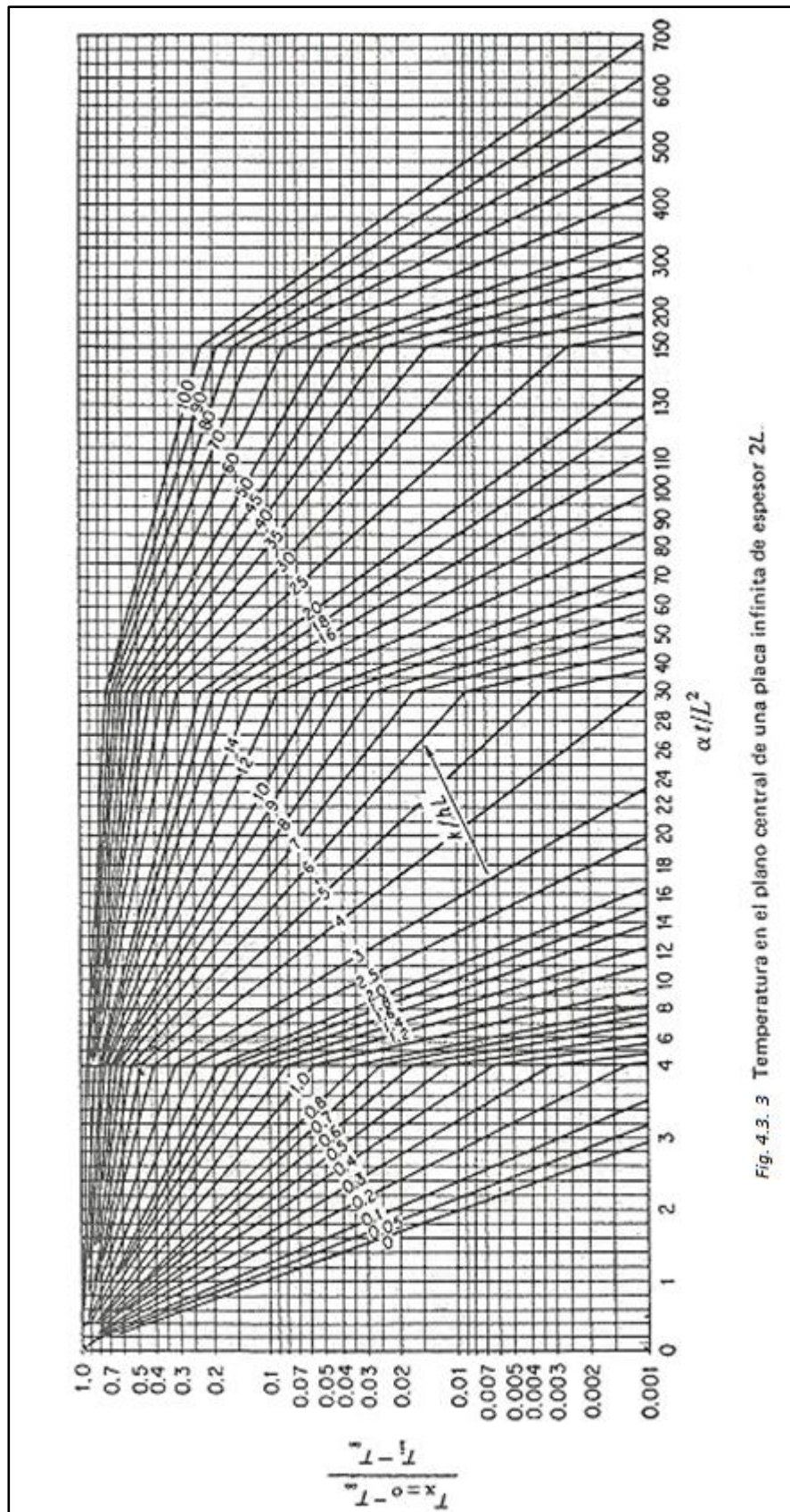


Fig. 4.3. 3 Temperatura en el plano central de una placa infinita de espesor $2L$.

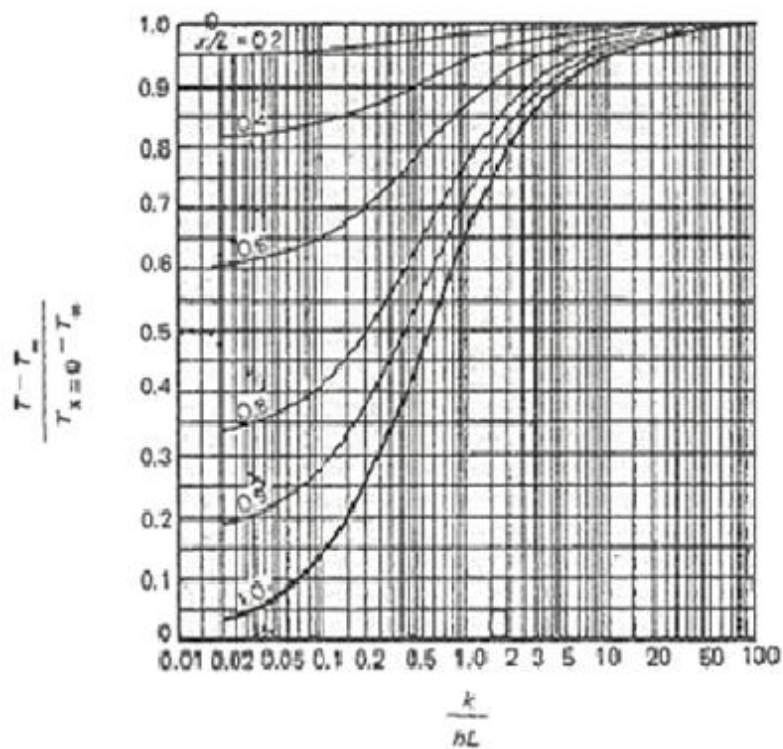


Fig. 4.3.4 Temperatura en cualquier plano de una placa infinita de espesor $2L$.

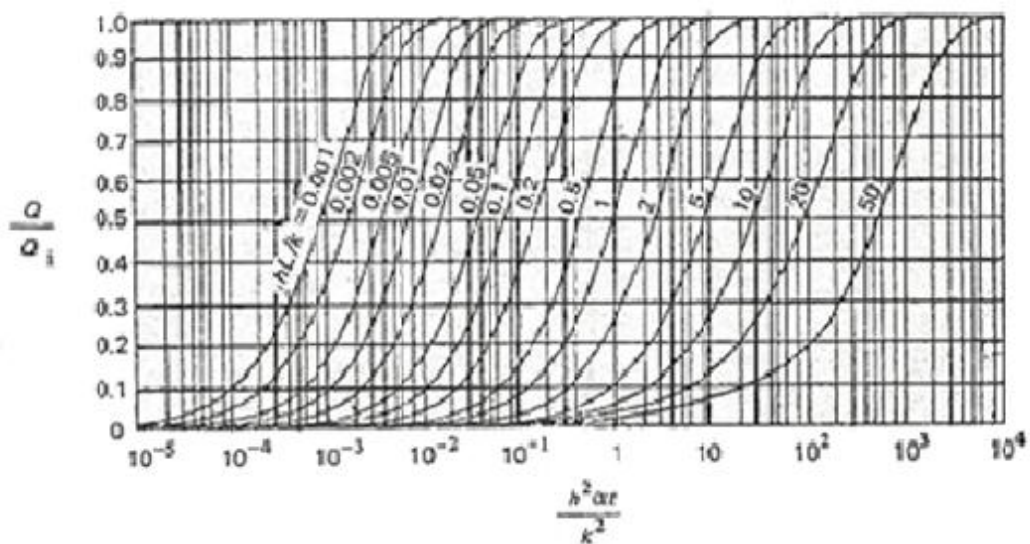


Fig. 4.3.5 Calor disipado por una placa infinita de espesor $2L$.

Ejemplo 4.3.1

Considere una placa de acero de 20 cm de espesor la cual tiene una temperatura inicial de 750 °C. La placa se expone repentinamente a un fluido cuya temperatura es de 50 °C. Si el coeficiente convectivo de calor por ambas caras de la placa es $h = 100 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$; calcule la temperatura en el centro de la placa y a una distancia de 6 cm desde la cara derecha, después de transcurrida una hora. Determine además el calor disipado por la placa en ese intervalo de tiempo. Tome $\alpha = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y $k = 54 \text{ W/m} - ^\circ\text{C}$.

Sol: Para saber si es un problema de resistencia interna despreciable o resistencia significativa, calculemos el número de Biot.

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{(100)(0.1)}{54} = 0.185 > 0.1$$

Por consiguiente es de resistencia interna significativa y será resuelto por las cartas o gráficas de Heisler.

Así:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{(1.5 \times 10^{-5})(3600)}{(0.1)^2} = 5.4$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{k}{hL} = \frac{54}{(100)(0.1)} = 5.4$$

De la figura 4.2.1.3 se obtiene:

$$\frac{T_{x=0} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.4$$

$$T_{x=0} = 0.4(750 - 50) + 50 = 330 \text{ } ^\circ\text{C}$$

De la figura 4.3.1.4, puesto que x es la distancia medida del centro de la placa hacia el lado derecho; se obtiene;

$$\frac{x}{L} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_{x=0} - T_\infty} = 0.95$$

Entonces:

$$\left(\frac{T_{x=0} - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) \left(\frac{T - T_\infty}{T_{x=0} - T_\infty} \right) = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = (0.4)(0.95) = 0.38$$

$$T = 0.38(750 - 50) + 50 = 316 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El calor disipado por la placa se calcula a partir de la energía interna por unidad de área que tiene inicialmente la placa respecto a la temperatura del fluido.

$$q_i = 2mc(T_i - T_\infty)$$

$$q_i = 2\rho cV(T_i - T_\infty)$$

$$q_i = 2\rho cAL(T_i - T_\infty)$$

$$Q_i = 2\rho cL(T_i - T_\infty)$$

Como:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \rightarrow \rho c = \frac{k}{\alpha}$$

$$Q_i = 2\left(\frac{k}{\alpha}\right)L(T_i - T_\infty) = 2\left(\frac{54}{1.5 \times 10^{-5}}\right)(0.1)(750 - 50) = 504 \times 10^6 \text{ J/m}^2 = 504 \text{ MJ/m}^2$$

De la figura 4.3.1.5 se obtiene:

$$\frac{h^2 \alpha t}{k^2} = \frac{(100)^2 (1.5 \times 10^{-5}) (3600)}{(54)^2} = 0.185$$

$$\frac{hL}{k} = 0.185$$

$$\frac{Q}{Q_i} = 0.6$$

$$Q = (0.6)(Q_i) = (0.6)(504) = 302.4 \text{ MJ/m}^2$$

Este es el calor cedido por la placa al fluido en el intervalo de tiempo de una hora.

Cilindro infinito.

Soluciones similares a la de una placa infinita como la analizada anteriormente, pueden ser también obtenidas para un cilindro de radio R infinitamente grande en su dirección axial, a partir del planteamiento de las respectivas ecuaciones diferenciales y sus condiciones inicial y de fronteras. Las figuras 4.3.6, 4.3.7 y 4.3.8; muestran los resultados a través de las cartas de Heisler.

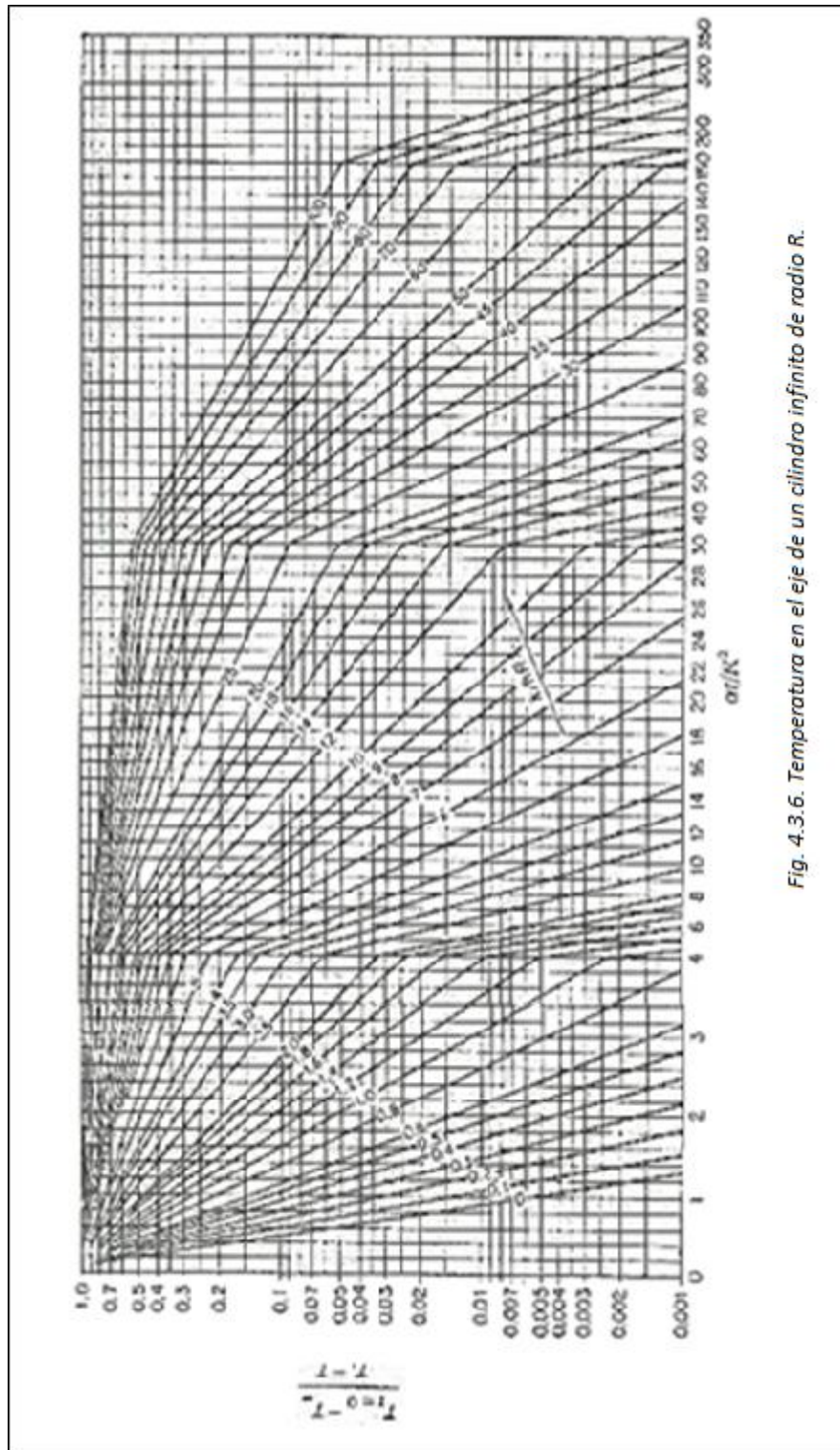


Fig. 4.3.6. Temperatura en el eje de un cilindro infinito de radio R .

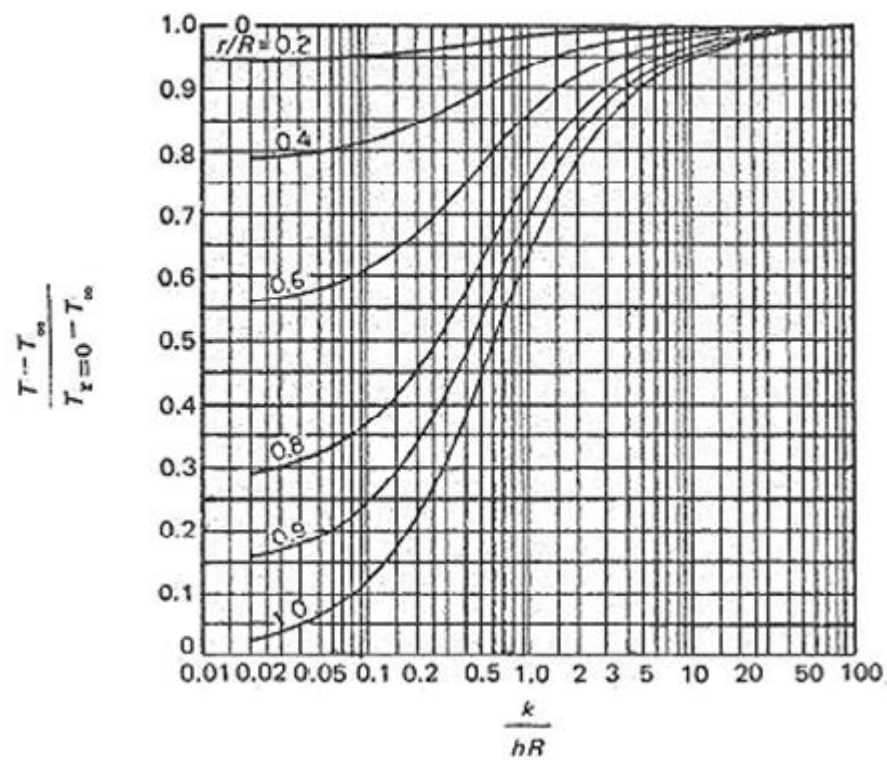


Fig. 4.3.7. Temperatura a cualquier radio en un cilindro infinito de radio R .

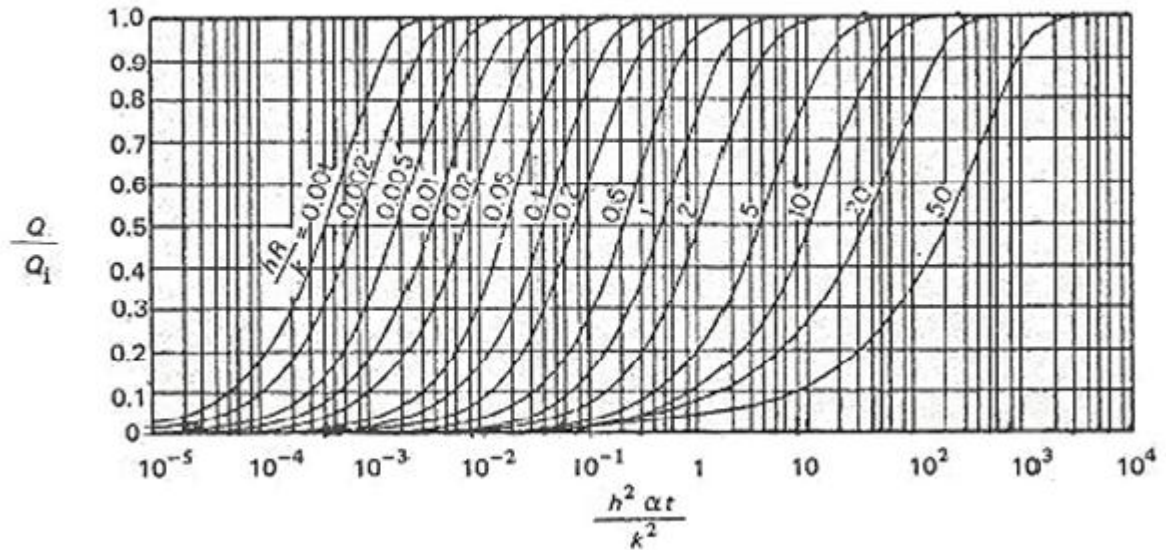


Fig. 4.3.8. Calor disipado por un cilindro infinito de radio R .

Ejemplo 4.3.2

Una varilla metálica, larga y cilíndrica, se prepara para un proceso de manufactura calentándola a 800 °C en un horno. Si la temperatura en el centro de la varilla es de 675 °C en el momento que se retira del horno, determine el tiempo que se mantuvo en el horno si $h = 100 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$, $\alpha = 0.014 \text{ m}^2/\text{h}$, $k = 20 \text{ W/m} - \text{K}$.

Sol: Para saber si es un problema de resistencia interna despreciable o resistencia significativa, calculemos el número de Biot.

$$Bi = \frac{hR}{2k} = \frac{(100)(0.075)}{(2)(20)} = 0.1875 > 0.1$$

Por consiguiente es de resistencia interna significativa y será resuelto por las cartas o gráficas de Heisler.

Así:

$$\frac{T_{r=0} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{675 - 800}{100 - 800} = 0.18$$

$$\frac{1}{2Bi} = \frac{k}{hR} = \frac{20}{(100)(0.075)} = 2.67$$

De la figura 4.3.1.6 se obtiene:

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2} = \frac{(0.014)(t)}{(0.075)^2} = 1.75$$

Despejando el tiempo, se tiene:

$$t = \frac{FoR^2}{\alpha} = \frac{(1.75)(0.075)^2}{(0.014)} = 1.04 \text{ h}$$

Esferas.

Las figuras 4.3.9, 4.3.10 y 4.3.11, muestran los resultados para una esfera de radio R .

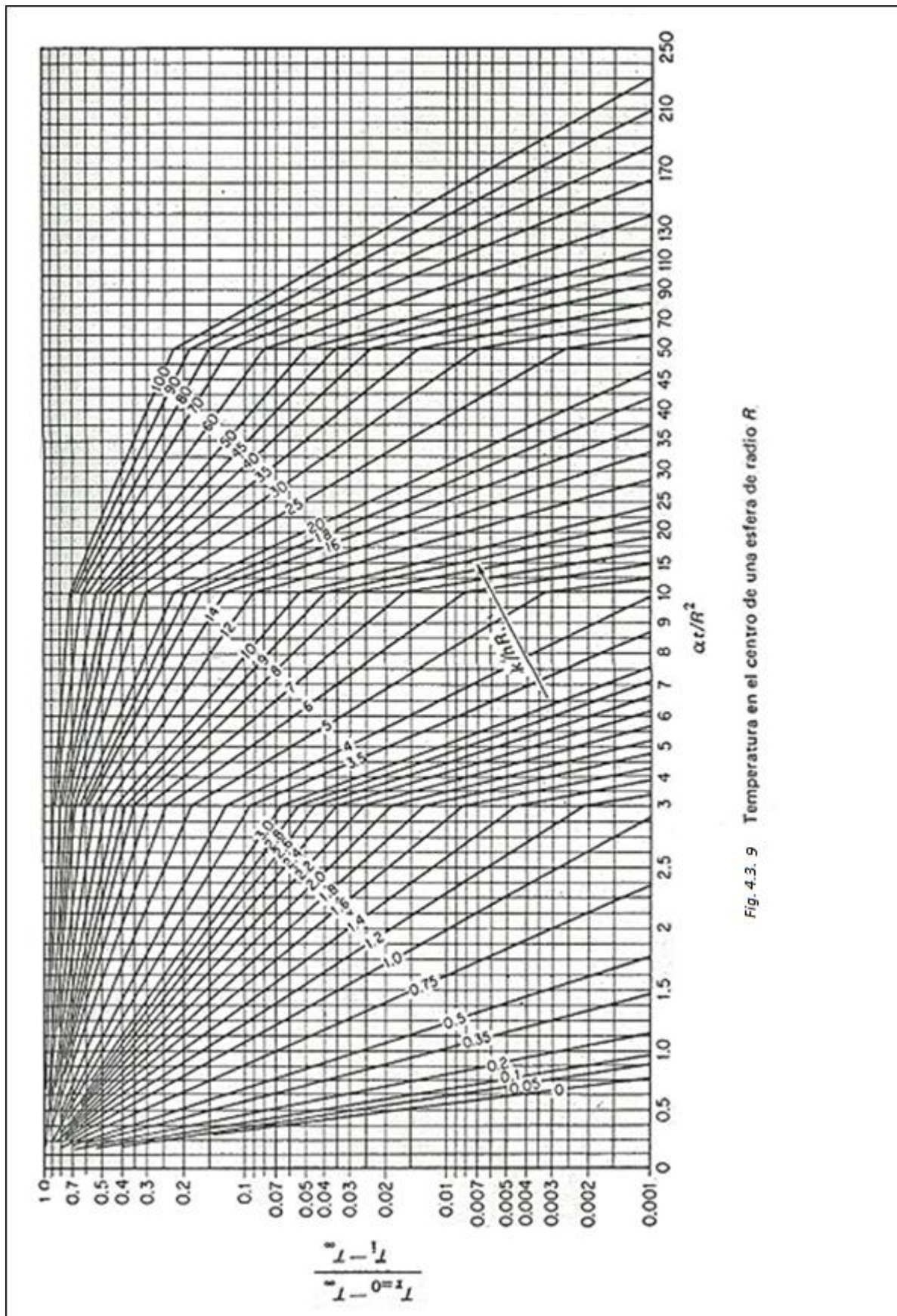


Fig. 4.3. 9 Temperatura en el centro de una esfera de radio R .

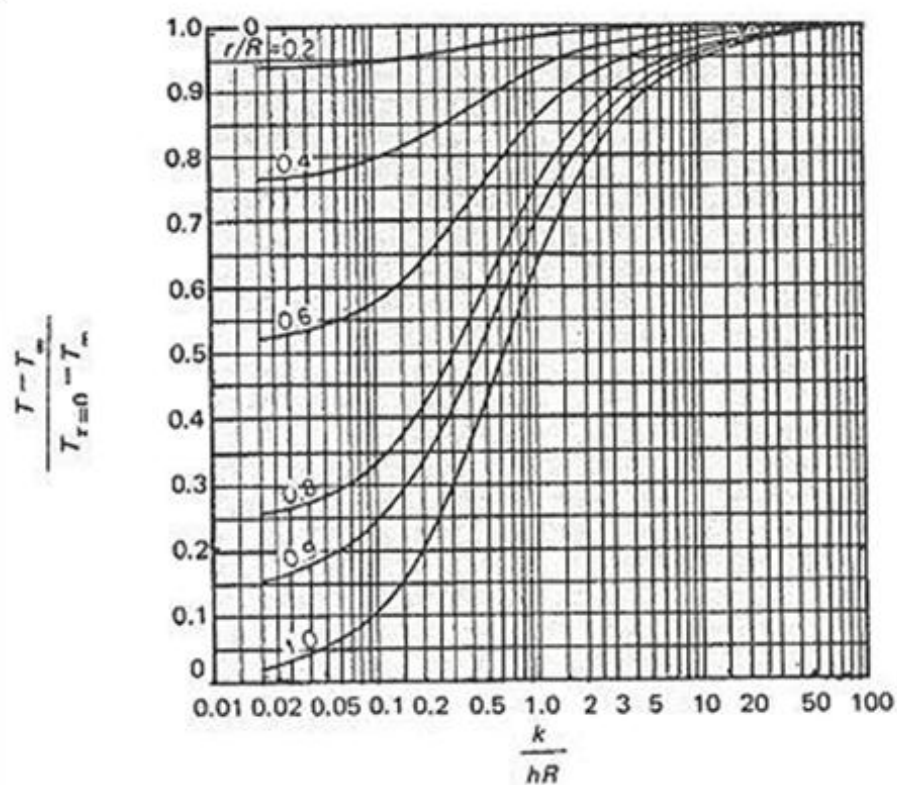


Fig. 4.3.10. Temperatura en cualquier radio de una esfera R .

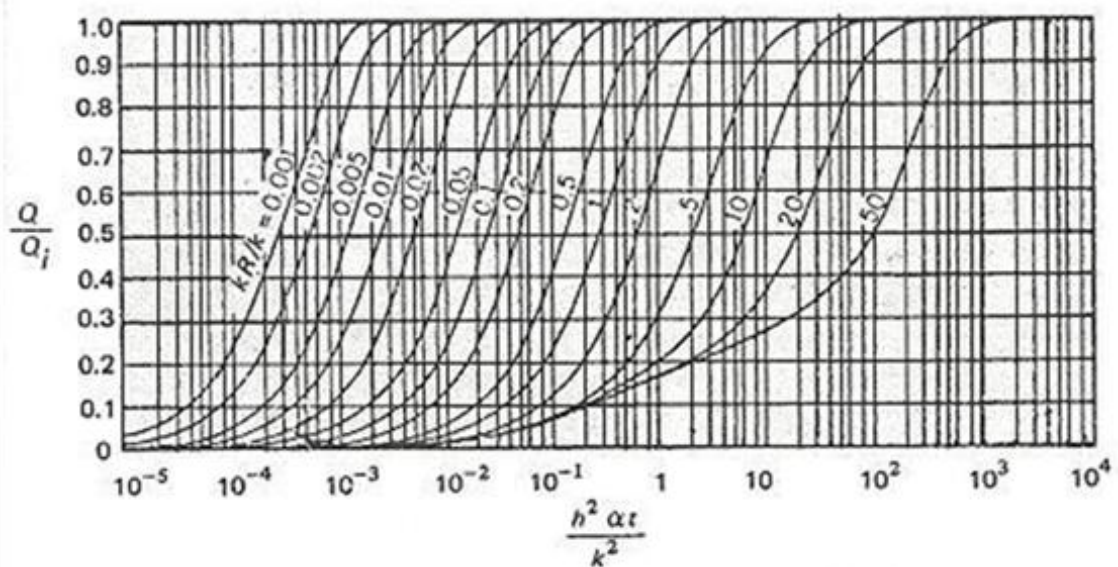


Fig. 4.3.11. Calor disipado por una esfera de radio R .

Ejemplo 4.3.3

Una esfera de cuarzo fundido tiene una difusividad térmica de $9.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, un diámetro de 5 cm y una conductividad térmica de $1.52 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. La esfera se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 25°C , y súbitamente se expone a un ambiente convectivo de 200°C , siendo el coeficiente convectivo de calor igual a $110 \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{K}$. Calcúlese las temperaturas en el centro y en un radio de 10 mm, al cabo de 4 min.

Sol: Para saber si es un problema de resistencia interna despreciable o resistencia significativa, calculemos el número de Biot.

$$Bi = \frac{hR}{3k} = \frac{(110)(0.025)}{(3)(1.52)} = 0.6 > 0.1$$

Por consiguiente es de resistencia interna significativa y será resuelto por las cartas o gráficas de Heisler.

Así:

$$\frac{1}{3Bi} = \frac{k}{hR} = \frac{1.52}{(110)(0.025)} = 0.55$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2} = \frac{(9.5 \times 10^{-7})(240)}{(0.025)^2} = 0.37$$

De la figura 4.3.1.9 se obtiene:

$$\frac{T_{r=0} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.85$$

Despejando la temperatura en $r = 0$, se tiene:

$$T_{r=0} = 0.85(T_i - T_\infty) + T_\infty$$

$$T_{r=0} = 0.85(25 - 200) + 200 = 51.25^\circ\text{C}$$

De la figura 4. 3.1.10 se obtiene:

$$\frac{r}{R} = \frac{10}{25} = 0.4$$

$$\frac{k}{hR} = 0.55$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.74$$

Así:

$$\left(\frac{T_{r=0} - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) \left(\frac{T - T_\infty}{T_{r=0} - T_\infty} \right) = (0.85)(0.74) = 0.629$$

$$T_r = 0.629(25 - 200) + 200 = 89.93^\circ\text{C}$$

Flujo de calor transitorio en cuerpos semiinfinitos.

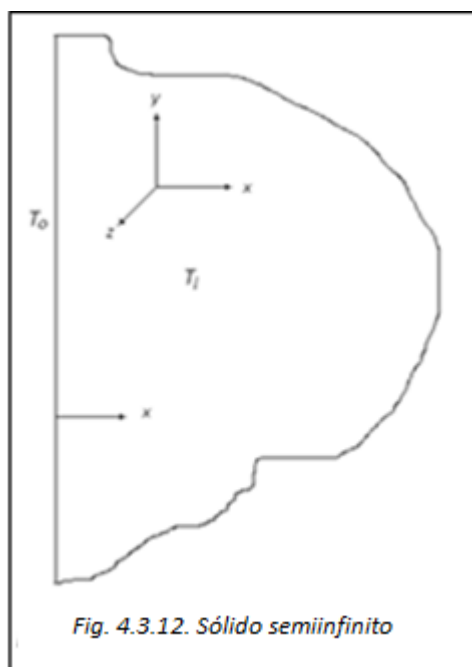
Un cuerpo semiinfinito es aquel en el cual, en un instante de tiempo dado, siempre existe una parte del cuerpo en que la temperatura permanece sin cambio alguno, aun cuando ocurra un cambio de temperatura en una de sus fronteras. Como por ejemplo, si la temperatura de la tierra cambia en su superficie, siempre existirá algún punto por debajo de ella; que no experimente el efecto del cambio.

Otro ejemplo consiste en la estimación de la temperatura de contacto, al tocar dos cuerpos de materiales diferentes como el aluminio y la madera, los cuales se encuentran a la misma temperatura. La experiencia indica que el aluminio se siente más caliente que la madera al ser tocados con la mano.

En los casos de cuerpos con dimensiones finitas en los cuales para tiempos relativamente pequeños, los efectos de calentamiento o enfriamiento no tienen oportunidad de penetrar profundamente debajo de la superficie del material, el análisis del cuerpo semiinfinito, encuentra aplicaciones de importancia.

Sólido semiinfinito.

Considere un sólido semiinfinito como el ilustrado en la figura 4.3.12, Supóngase que todo el sólido se encuentra a una temperatura constante T_i , en el tiempo $t = 0$, y repentinamente su superficie plana experimenta un cambio en su temperatura, de tal manera que adquiere un valor constante T_o . Observe que el cuerpo se extiende a infinito en la dirección $+x$, direcciones $\pm y$ y direcciones $\pm z$. Esto significa que el cuerpo es de un tamaño suficientemente grande, como para que tenga algún punto x , por debajo de su superficie en el cual se manifieste cualquier cambio de temperatura que ocurra en su superficie $x = 0$.



Para este sólido se requiere conocer la distribución de temperatura y el flujo de calor. Puesto que la temperatura depende de la distancia y del tiempo, mediante la ecuación general de la conducción de calor, se tiene:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Esta ecuación diferencial parcial requiere de una condición inicial y dos condiciones de frontera para determinar de una manera única la distribución de temperatura $T(x, t)$ en el sólido.

La condición inicial se debe a que la temperatura del cuerpo es constante para el tiempo $t = 0$. así:

$$T(x, 0) = T_i$$

La primera condición de frontera emana del supuesto, que la temperatura en la superficie se mantiene constante durante el proceso transitorio,

$$T(0, t) = T_o$$

Al ser el sólido infinitamente grande en la dirección del flujo de calor,

$$T(\infty, t) = T_i$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta proponiendo con anticipación una solución de la forma $T^* = T^*(\eta)$, por lo que es necesario definir las siguientes variables adimensionales, así:

$$T^* = \frac{T - T_i}{T_o - T_i}$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

En términos de estas variables, la ecuación diferencial original se representa como:

$$\frac{d^2 T^*}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dT^*}{d\eta} = 0$$

Con las nuevas condiciones de frontera:

$$T^*(0) = 1, \text{ se obtiene de la primera condición de frontera.}$$

$$T^*(\infty) = 0, \text{ de la condición inicial y de la segunda condición de frontera.}$$

La solución de esta ecuación con su condición inicial y de fronteras, aparece en el texto J.A. Manrique, y los resultados son:

$$T^* = \operatorname{erfc}(\eta)$$

$$\frac{T - T_i}{T_o - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

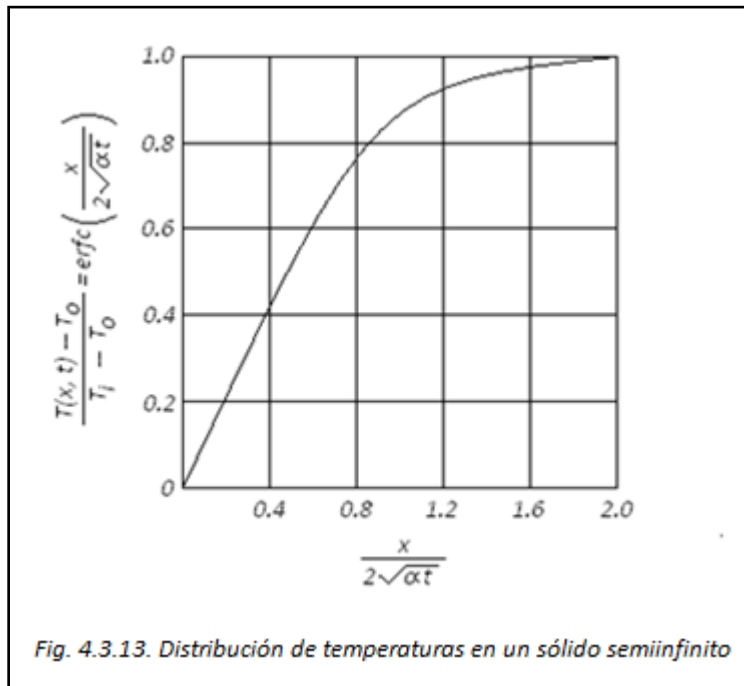
La tabla 4.3, muestra tabulada la función error complementaria y la figura 4.3.13, describe la distribución de temperatura del sólido semiinfinito.

Tabla 4.3. La Función Error Complementaria.

$$\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du$$

η	$\operatorname{erfc}(\eta)$	η	$\operatorname{erfc}(\eta)$
0.0	1.0000	1.1	0.11980
0.05	0.9436	1.2	0.08969
0.1	0.8875	1.3	0.06599
0.15	0.8320	1.4	0.04772
0.2	0.7773	1.5	0.03390
0.25	0.7237	1.6	0.02365
0.3	0.6714	1.7	0.01621
0.35	0.6206	1.8	0.01091
0.40	0.5716	1.9	0.00721
0.45	0.5245	2.0	0.00468
0.5	0.4795	2.1	0.00298
0.55	0.4367	2.2	0.00186
0.6	0.3961	2.3	0.001143
0.65	0.3580	2.4	0.000689
0.7	0.3222	2.5	0.000407
0.75	0.2889	2.6	0.000236
0.8	0.2579	2.7	0.000134
0.85	0.2293	2.8	0.000075
0.9	0.2031	2.9	0.000041
0.95	0.1791	3.0	0.000022
1.0	0.1573		

Tomada del texto *Transferencia de calor* J.A. Manrique página 84, Harla, 1ª. Edición



Como se observa en la figura 4.3.2.2., la función error complementaria $erfc(\eta)$, varía entre 1.00 y 0.0 y alcanza un valor de 0.00468 cuando η es igual 2.0. Con este valor arbitrario se puede definir la distancia de penetración δ como la distancia x , para la cual la temperatura en el sólido ha variado menos del 1% aproximadamente de la diferencia $(T_o - T_i)$, por tanto:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 2$$

Así;

$$x = \delta \cong 4\sqrt{\alpha t}$$

Por otra parte, el flujo de calor en cualquier posición x puede determinarse a través de la ley de Fourier. Es decir,

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} = k(T_o - T_i) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\alpha t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right)$$

$$q = \frac{k(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}$$

Y el flujo de calor en la superficie puede evaluarse con la expresión:

$$q''_{x=0} = \frac{k(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Ejemplo 4.3.4

Se desea enterrar una tubería que conduce agua en un lugar donde la temperatura media en el invierno es de 3°C , pero esta puede cambiar repentinamente a -10°C por un período máximo de 2 días. Estime

la profundidad mínima a que debe enterrarse la tubería para prevenir que el agua se congele. Suponga que la difusividad térmica de la tierra es igual a $0.014 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Puesto que;

$$T^* = \frac{0 - 3}{-10 - 5} = 0.2 = \text{erfc}(\eta)$$

La tabla 4.3.1 muestra que $\eta = 0.9064$. Por lo tanto;

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.9064$$

$$x = (0.9064)\sqrt{4\alpha t}$$

$$x = (0.9064)\sqrt{(4)(0.014 \times 10^{-5})(48)(3600)}$$

$$x = 0.28 \text{ m}$$

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. Un cubo metálico tiene una temperatura inicial de 300°C y se coloca en un cuarto cuya temperatura se mantiene a 25°C . ¿Cuál será la temperatura de estado estacionario del cubo?

R: 25°C .

2. Una esfera metálica cuya temperatura inicial es T_o , se sumerge en un fluido que se calienta a través de un calentador eléctrico de tal manera que $T_\infty = T_o + 10t$, donde la temperatura se mide en $^\circ\text{C}$ y el tiempo t , en horas. Deduzca una expresión para la temperatura de la esfera como función del tiempo y del coeficiente de transferencia de calor. Suponga que la esfera tiene una resistencia interna insignificante.

$$R: T - T_o = 10 \frac{\rho c V}{hA} \left(e^{-\left(\frac{hA}{\rho c V}\right)t} - 1 \right) + 10t.$$

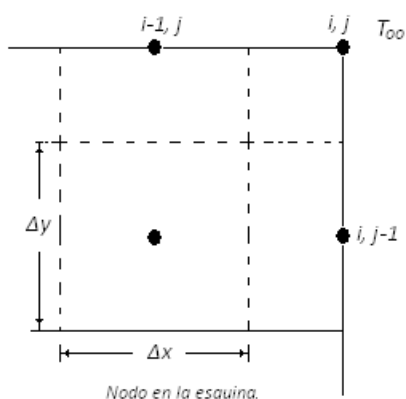
3. Una barra de acero limpio tiene un diámetro de 8 mm y una temperatura inicial de 300°C y súbitamente se sumerge en un líquido cuya temperatura es de 100°C , con un coeficiente convectivo de transferencia de calor de $100 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Determine el tiempo que se requiere para que la barra alcance una temperatura de 150°C . Tome $k=73 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $\rho=7897 \text{ kg/m}^3$ y $c=452 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$.

R: 1.65 min.

4. Una papa cuyo peso es de 0.25 kg se coloca en agua hirviendo a 100°C . Si se considera que la papa tiene forma esférica y posee las propiedades físicas y térmicas del agua, y su temperatura inicial es de 20°C . Determine el tiempo requerido para que la temperatura en el centro de la papa se eleve a 95°C . Tome $h=5,000 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$.

R: 14.57 min.

5. Escribese la ecuación del nodo i, j en la esquina, para el régimen transitorio. Determinése el criterio de estabilidad para el nodo.



$$R: T_{i,j}^{n+1} = 2(Fo)[T_{i-1,j}^n + T_{i,j-1}^n + 2(Bi)T_{\infty}^n] + [1 - 4(Fo) - 4(Fo)(Bi)]T_{i,j}^n; \quad Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{4}$$

6. Un cilindro largo de aluminio de 5 cm de diámetro e inicialmente a 200 °C, se somete de forma rápida, a un entorno convectivo a 70 °C y $h=525 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$. Calcule la temperatura en un radio de 1.25 cm y la pérdida de calor por unidad de longitud, 1 minuto después de que el cilindro se somete al entorno convectivo.

$$R: 118.4 \text{ °C}, 4.032 \times 10^5 \text{ J/m}.$$

7. Una placa de aluminio cuyo espesor es 5 cm, se encuentra inicialmente a 500 °C y se sumerge súbitamente en un líquido cuya temperatura es de 100 °C, para el cual se tiene un coeficiente convectivo de transferencia de calor de $1200 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$. determine el tiempo en el que la temperatura en la línea central caerá a 200 °C.

$$R: 1.24 \text{ min}.$$

8. Estime el tiempo necesario para calentar a 130 °C el centro de una carne asada en un horno cuya temperatura es de 225 °C. Suponga que la carne asada tiene las propiedades del agua y tiene aproximadamente forma esférica. El coeficiente convectivo de transferencia de calor entre la carne asada y el aire en el horno es de $15 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$. La carne tiene una masa de 5 kg.

$$R: 4.5 \text{ h}.$$

9. Una capa de hielo delgada, se encuentra a una temperatura de -20 °C en cada uno de sus puntos. Se eleva súbitamente la temperatura de su superficie a -2 °C. ¿Qué tiempo se requiere para que un punto localizado a 1 cm por debajo de su superficie alcance la temperatura de -10 °C?

$$R: 1.93 \text{ min}.$$

10. Calcule la distancia de penetración después de 1 hora en un sólido semiinfinito hecho de acero. Tome $\alpha_a = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

$$R: 0.93 \text{ min}.$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 4

UNIDAD 4: Actividad 1

CONCEPTO DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL EN ESTADO TRANSITORIO.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del concepto de la transferencia de calor en estado transitorio.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto de la conducción de calor bidimensional en estado transitorio, haciendo mención de las diversas técnicas utilizadas en la solución de los problemas. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 4: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA CAPACIDAD GLOBAL.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas utilizando el método de la capacidad global.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Un cubo de aluminio de 5 cm por lado, se encuentra a una temperatura inicial de 500 °C. Se sumerge súbitamente el cubo en un líquido cuya temperatura es de 100 °C. Si el coeficiente de transferencia de calor es igual a 120 W/m²-°C. determine el tiempo requerido para que el cubo alcance una temperatura de 200 °C.
R: 3.89 min.
2. Una esfera de cobre que tiene un diámetro de 3 cm, se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 50 °C. De forma rápida se coloca en una corriente de aire a 10 °C, siendo h= 15 W/m²-°C. ¿Cuánto tiempo tardará la esfera en bajar su temperatura hasta 25 °C?
R: 18.7 min.

3. Una plancha de cobre de 30 x 30 cm, y de 5 cm de espesor; tiene una temperatura uniforme de 260 °C. Ésta se sumerge en un entorno convectivo cuyo coeficiente de transferencia de calor es igual a 50 W/m²·°C. Calcule el tiempo para que la temperatura en el centro alcance el valor de 90 °C. Las propiedades del cobre son: $\rho = 8,900 \text{ kg/m}^3$, $c = 380 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, $k = 370 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$.

R: 29.78 min.

UNIDAD 4: Actividad 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL TRANSITORIA UTILIZANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de conducción bidimensional transitoria de calor aplicando el método de diferencias finitas.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Escriba la ecuación explícita para un nodo interno de la conducción de calor unidimensional transitoria para una pared plana con generación de calor.

$$R: T_i^{n+1} = Fo(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n) + (1 - 2Fo)T_i^n + Fo \frac{\dot{q}_i^n (\Delta x)^2}{k}$$

2. Escriba la ecuación explícita para un nodo de contorno aislado para la conducción de calor en régimen transitorio para una pared plana sin generación de calor y determine el criterio de estabilidad para el nodo.

$$R: T_{i,j}^{n+1} = Fo[T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n + 2T_{i-1,j}^n] + [1 - 4(Fo)]T_{i,j}^n; \quad Fo \leq \frac{1}{4}$$

UNIDAD 4: Actividad 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL UTILIZANDO LOS DIAGRAMAS O CARTAS DE HEISLER.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas aplicando las cartas de Heisler.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Una placa grande de aluminio de 5 cm de espesor, tiene una temperatura inicial de 200 °C y se expone súbitamente a un entorno convectivo cuya temperatura es de 70 °C y cuyo coeficiente de transferencia de calor por convección tiene un valor de 525 W/m²-°C. Calcule la temperatura a una profundidad de 1.25 cm desde una de las caras 1 minuto después de que la placa haya sido expuesta al ambiente. ¿Qué cantidad de energía por unidad de área ha de ser extraída de la placa en ese intervalo de tiempo?

R: 147.7 °C, 6.476x10⁶J/m².

2. Una placa horizontal de cobre de 10 cm de espesor está inicialmente a una temperatura uniforme de 250 °C. La superficie inferior de la placa está aislada. La cara superior se expone de forma rápida, a la corriente de un fluido a 100 °C. Después de 6 minutos la temperatura en el plano central de la placa ha descendido hasta 152.5 °C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor que ha causado ésta disminución.

R: 1,193.3 W/m² – °C.

3. Considere una bola de acero sólida (20 % *cromo*), cuyo diámetro exterior es de 25 mm y cuya temperatura es de 600 °C, la cual se temple en un recipiente que contiene aceite a 40 °C. El coeficiente de transferencia de calor entre la superficie de la esfera y el aceite es igual a 1500 W/m²-K. Determine la temperatura en el centro y la temperatura en un punto que se encuentra a 1.25 mm de la superficie, después de que la esfera ha estado en el aceite durante el primer medio minuto. Enseguida calcule el calor transferido por la bola al aceite.

R: 90 °C, 77 °C, 1.39 x 10⁶ J

Unidad 5**Competencias específicas a desarrollar:**

1. Comprender y explicar el concepto de capa límite hidrodinámica y capa límite térmica, los cuales son utilizados para la obtención del coeficiente convectivo de transferencia de calor.
2. Aplicar el método integral de Von Karman para obtener las ecuaciones empíricas para determinar el coeficiente de transferencia de calor y la razón de flujo de calor en una placa plana en régimen laminar.
3. Obtener mediante un análisis entre el coeficiente de fricción y la transferencia de calor la analogía de Reynolds y Colburn.
4. Aplicar las correlaciones empíricas para determinar el coeficiente de transferencia de calor y la razón de flujo de calor en una placa plana en régimen turbulento.
5. Aplicar las correlaciones empíricas para determinar el coeficiente de transferencia de calor y la razón de flujo de calor en el interior y exterior de ductos en régimen laminar y turbulento.
6. Obtener mediante un análisis de las capas frontera y térmica, las ecuaciones para la convección libre y forzada en placas cilindros y esferas.
7. Comprender y aplicar el concepto de convección mixta en la solución de problemas.

Análisis de la convección.**5.1 Convección forzada.**

En las unidades anteriores se estudio la transferencia de calor por conducción partiendo de la ecuación general de la conducción de calor. En esta unidad se presentará el caso de la convección, la cual fue definida en el capítulo 1, como el mecanismo mediante el cual, el calor se transfiere desde una superficie sólida, hasta un fluido en movimiento adyacente a ella.

En este mecanismo de transferencia de calor, tanto la velocidad del fluido como sus propiedades físicas y térmicas, aunado al régimen de movimiento o flujo del fluido, afectan de manera considerable el proceso de transferencia de calor. Por consiguiente es necesario recordar algunos conceptos de la dinámica de flujo de fluidos.

La convección reviste su mayor importancia en situaciones prácticas, como los tubos de un calentador de agua, el radiador de un automóvil, en los ductos de calefacción de una casa, en equipos de refrigeración y aire acondicionado, en la mayoría de los componentes de una central termoeléctrica, por citar algunos ejemplos.

5.1.1 Introducción.

La convección es el mecanismo en el cual el calor se transfiere a través de un fluido con movimiento masivo. Es de interés resaltar que en la convección el movimiento de éste se realiza a nivel macroscópico, mientras en la conducción se efectúa a nivel microscópico, atómico o molecular. Entendiendo por nivel macroscópico al movimiento de volúmenes relativamente grandes del fluido.

La convección se clasifica en natural (libre) y forzada. En la convección forzada se obliga al fluido a fluir mediante medios externos, como un ventilador (aire) o una bomba (agua); por ejemplo.

En la convección natural el movimiento del fluido se debe a causas naturales, como el efecto de flotación, el cual se manifiesta por el ascenso del fluido caliente y el descenso del fluido frío.

La convección forzada se clasifica a su vez en externa e interna. Si el fluido fluye por una superficie abierta como por ejemplo una placa, un alambre o por el exterior de un tubo, se dice que la convección es externa. Si por el contrario el fluido fluye por una superficie sólida confinada como es el caso de un tubo o ducto se dice que la convección es interna.

Es de importancia notar que la velocidad de transferencia de calor a través de un fluido es mucho mayor por convección que por conducción. Por otra parte cuanto mayor sea la velocidad del fluido en la convección forzada mayor será la velocidad de transferencia de calor.

La transferencia de calor por convección depende del coeficiente convectivo h , mencionado en las unidades anteriores, y éste a su vez es función de las propiedades físicas y térmicas del fluido en contacto con la superficie abierta o confinada.

Dichas propiedades son la viscosidad dinámica μ , la viscosidad cinemática ν , la conductividad térmica k , la densidad ρ , la difusividad α , etc. El coeficiente de transferencia de calor, también depende de la forma geométrica y la rugosidad de la superficie en contacto con el fluido.

Además, el régimen de flujo; laminar o turbulento influye en la determinación del coeficiente h . Ciertos números adimensionales que surgen al combinar las propiedades del fluido, como el número de Reynolds (Re), el de Prandtl (Pr), etc., también influyen en el proceso de la transferencia de calor por convección.

$$h = f(\mu, \nu, k, \rho, c_p, \alpha, P, T, Pr, L_c, \dots)$$

En cualquier caso, la transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido adyacente a ella, y puede representarse matemáticamente mediante la ley de enfriamiento de Newton; así:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

En esta expresión q , es la velocidad de transferencia de calor por convección en (W), h es el coeficiente de transferencia de calor o de película en ($W/m^2 - K$), A el área de la superficie en contacto con el fluido y $(T_s - T_\infty)$ la diferencia de temperaturas.

En el análisis de la convección, es práctica común agrupar las propiedades del fluido con la finalidad de quitar las dimensiones a las expresiones que modelan el mecanismo, lo cual conduce a los siguientes números adimensionales.

Número de Reynolds (Re), el cual representa la relación que existe entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de corte viscosas, actuando sobre un elemento de volumen del fluido. Es un indicativo del tipo de flujo del fluido; laminar o turbulento. Tanto el valor calculado para el número de Reynolds como la longitud característica L_c , dependen de la geometría de la superficie. El término u_∞ , se refiere a la velocidad del fluido más alejado de la superficie y se conoce como la velocidad de corriente libre. Posteriormente se definirá este parámetro para las diversas geometrías a estudiar. Solo se emplea para convección forzada.

$$R_e = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho u_{\infty} L_c}{\mu} = \frac{u_{\infty} L_c}{\nu}$$

Número de Nusselt (N_u), definido como la relación que existe entre el calor transferido por convección desde la superficie a través el fluido y el que se transferiría si solo existiera conducción. Cuanto mayor sea el número de (N_u) más eficaz es la convección. Se emplea en ambos tipos de convección. Un número de Nusselt igual a la unidad representa para una capa de fluido transferencia de calor por conducción pura.

$$N_u = \frac{\text{Calor por convección}}{\text{Calor por conducción}} = \frac{hA(\Delta T)}{kA\left(\frac{\Delta T}{L_c}\right)} = \frac{hL_c}{k}$$

Número de Prandtl (P_r), representa la relación que existe entre la difusividad molecular de la cantidad de movimiento y la difusividad molecular del calor, en otras palabras, la relación existente entre el espesor de la capa limite hidrodinámica y la capa limite térmica, como se estudiará en la sección 5.1.2. El número de Prandtl se emplea tanto en la convección forzada como en la natural.

$$P_r = \frac{\text{Difusividad molecular de la cantidad de movimiento}}{\text{Difusividad molecular del calor}} = \frac{\nu}{\alpha} = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \left(\frac{\rho c_p}{k}\right) = \frac{c_p \mu}{k}$$

Número de Grashof (G_r), se define como la relación que existe entre las fuerzas de empuje y las fuerzas viscosas o de corte. Es indicativo del régimen de flujo en convección natural, puesto que separa el flujo laminar del turbulento, y es equivalente al número de Reynolds en la convección forzada.

$$G_r = \frac{\text{Fuerzas de empuje}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{g\beta(T_s - T_{\infty})L_c^3}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2}$$

Donde g , es la aceleración gravitacional y β , es el coeficiente de expansión volumétrica del fluido en cuestión. Solo se utiliza en convección natural.

Número de Rayleigh (R_a), es función del número de Grashof (G_r) y del número de Prandtl (P_r); y se representa como el producto de ambos números. Se usa solo en convección natural.

$$R_a = G_r P_r$$

Básicamente el problema de la convección consiste en la determinación del coeficiente de película h , con el cual y a través de la ley de enfriamiento de Newton se calcula el calor transferido por convección.

El análisis de la convección se basa en datos experimentales que se presentan mediante las llamadas correlaciones. También es posible considerar los métodos analíticos, sin embargo no son prácticos desde el punto de vista ingenieril.

El coeficiente de película se calcula a través del número de Nusselt. En la convección forzada el número de Nusselt es función del número de Reynolds y del Prandtl, y en la convección natural del número de Rayleigh el cual es producto del número de Grashof y del Prandtl. Para el cálculo del calor transferido o potencia térmica se deben seguir los siguientes pasos:

- ✓ Analizar las condiciones en las que tiene lugar la convección considerando la geometría de la superficie, si la convección es natural o forzada o si el flujo es laminar o turbulento.

- ✓ Se selecciona la correlación adecuada y se calcula el número de Nusselt tomando en consideración las restricciones que limitan el uso de dicha correlación empírica.
- ✓ A través del número de Nusselt se calcula el coeficiente de transferencia de calor.
- ✓ Por último, se calcula la potencia térmica mediante la ley de enfriamiento de Newton.

5.1.2 Capas límite hidrodinámica y térmica.

En el análisis de la transferencia de calor por convección existen algunos casos de interés práctico, como las superficies planas, cilíndricas y esféricas. Dicho análisis tiene cierta relación con la dinámica de fluidos y conlleva a la obtención de soluciones analíticas que permiten resolver los problemas relacionados con el fenómeno de la convección.

Sin embargo no siempre es posible obtener dichas soluciones, y es necesario recurrir a métodos experimentales cuyos datos obtenidos suelen representarse en forma de correlaciones empíricas o mediante gráficos, de modo que puedan ser utilizados en la solución de problemas.

Cuando se mencionó la transferencia de calor por convección, la palabra **convección** se refiere al proceso o la acción de alejar la energía térmica, de una superficie sólida a un fluido adyacente que se encuentra en reposo o movimiento; en presencia de diferencias de temperatura o viceversa. El fenómeno de la convección puede explicarse mediante dos mecanismos:

- ✓ La conducción de calor, de una superficie sólida hacia una capa delgada de fluido adyacente.
- ✓ El movimiento de partículas calientes de fluido, alejándose de la superficie sólida, las cuales son remplazadas por partículas relativamente frías del mismo fluido. Dicho movimiento se debe por lo general a cambios de presión o de flotación (densidad); o a una combinación de ambos en dicha capa, ocasionados por una diferencia de temperatura.

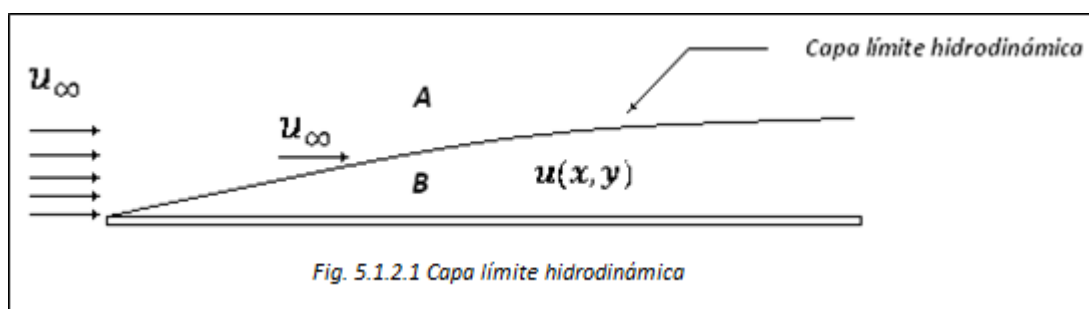
La convección puede ser de flujo interno o externo. En el caso de flujo interno se tiene, el de un fluido que pasa en el interior de una superficie cilíndrica (ducto). El caso de flujo externo ocurre cuando un fluido pasa encima de una superficie cilíndrica, esférica o plana (placa plana).

En este caso último, el conocimiento y comprensión de la capa delgada de fluido adyacente, reviste una gran importancia, puesto que interviene en la determinación del coeficiente de transferencia de calor o de película h .

Capa límite hidrodinámica.

Para conocer y comprender el concepto de capa límite térmica, considere una placa delgada alineada en paralelo a una corriente de flujo que se desliza sobre ella, como se ilustra en la figura 5.1.2.1. El efecto que la placa provoca sobre el fluido es la perturbación de la corriente de flujo, la cual de otro modo sería uniforme.

En la figura se observa que el flujo sobre la placa se divide en dos campos o regiones, una muy alejada de la superficie (**A**), y otra muy próxima a ella (**B**). En la región (**A**), el fluido puede considerarse como ideal (no viscoso), y se le denomina flujo de corriente libre. Sin embargo, en la región (**B**), deben considerarse los efectos viscosos sobre ella. La línea hipotética continua que separa ambas regiones se denomina capa límite hidrodinámica o capa frontera hidrodinámica.



La velocidad del fluido en la región (A), es igual a la de la corriente libre, pero en la región (B), la velocidad varía en un 99 %; desde la interfaz placa fluido hasta la capa frontera. Es decir, la velocidad del fluido u , aumenta a medida que nos alejamos de la superficie de la placa hasta igualarse con la velocidad de la corriente libre u_∞ , inmediatamente después de la capa frontera térmica.

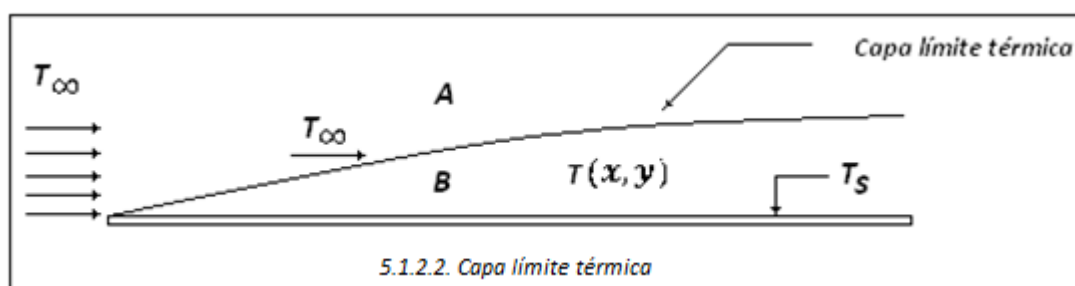
El concepto de capa frontera fue introducido por Prandtl con el propósito de simplificar el análisis. El flujo dentro de la capa frontera puede ser en régimen laminar, transicional o turbulento y depende del número de Reynolds, el cual se basa en la longitud de la placa.

Para asegurar flujo laminar en una superficie plana, el valor del número de Reynolds, debe ser ($Re < 5 \times 10^5$), el cual garantiza la transición entre el flujo laminar y el turbulento.

Dicha capa es necesaria para el análisis de transferencia de calor por convección en una placa plana, el cual se presentará posteriormente, del cual se requiere conocer, el perfil de velocidades dentro de la capa frontera, su espesor y el esfuerzo cortante o de arrastre contra la placa.

Capa límite térmica.

En el análisis de transferencia de calor entre una placa y un fluido adyacente a ella, que fluye sobre la misma, es necesario introducir el concepto de una nueva capa frontera denominada capa límite térmica o capa frontera térmica; debido a la diferencia de temperatura que existe entre la placa y el fluido. Como se muestra en la figura 5.1.2.2., la temperatura del fluido cambia de T_s (temperatura de la superficie de la placa) a la temperatura de la corriente libre T_∞ , al alejarnos de la superficie de la placa.



Podemos considerar una capa delgada, como la indicada en la figura 5.1.2.2., semejante a la capa frontera hidrodinámica, a través de la cual tiene lugar el 99 % del cambio o variación de temperatura. La temperatura del fluido T_s disminuye a medida que nos alejamos de la superficie de la placa hasta igualarse con la temperatura de la corriente libre inmediatamente después de la capa frontera térmica.

Entre las condiciones posibles en la frontera se puede mantener la temperatura de la superficie de la placa uniforme. Es decir a temperatura constante, o bien se puede suministrar un flujo de calor unitario uniforme al fluido que fluye sobre la placa. Para encontrar como es costumbre, una expresión para el

cálculo del coeficiente de película. Es importante resaltar que el espesor de estas dos capas no es necesariamente igual.

5.1.3 Convección forzada en una placa plana en régimen laminar y turbulento.

Como se mencionó anteriormente, en la convección forzada, el flujo del fluido que pasa por encima de la placa puede ser del tipo laminar o turbulento, pasando desde luego por el flujo transicional. En el análisis de la transferencia de calor existen dos métodos para el análisis del flujo en la capa frontera; a) el método integral y el diferencial. El primero es un método sencillo y proporciona resultados aproximados utilizando cálculo elemental. El segundo método nos conduce al planteamiento de una ecuación diferencial no lineal, que requiere el uso de técnicas numéricas para su solución. En esta sección se desarrollará el primer método cuyo crédito se asigna a **Von Karman**, y del segundo solo se hará el planteamiento correspondiente y se darán las soluciones.

El método integral de **Von Karman**, consta de los pasos siguientes

- ✓ Se selecciona un volumen de control que abarque por completo el espesor δ , de la capa frontera y cuya longitud se representa por un diferencial Δx , en sentido de la corriente. Se aplican los principios de conservación de masa (ecuación de continuidad), y de momento (cantidad de movimiento) con el fin de generar ecuaciones integrales.
- ✓ Se supone que la velocidad u , del fluido dentro de la capa frontera, se puede representar en forma de un polinomio en función de la variable y .
- ✓ Se determinan los coeficientes del polinomio de acuerdo a las condiciones que satisfacen al perfil de velocidades en la superficie de la placa y en el lado de la capa frontera.
- ✓ Se sustituye el perfil de velocidades polinomial en la ecuación integral de momento y se resuelve para encontrar el espesor de la capa frontera δ .
- ✓ Por último se calcula el esfuerzo cortante sobre la placa utilizando el perfil polinomial, junto con la expresión de Newton, para el cálculo del esfuerzo cortante τ .

Convección forzada en una placa plana en régimen laminar (Método de Von Karman).

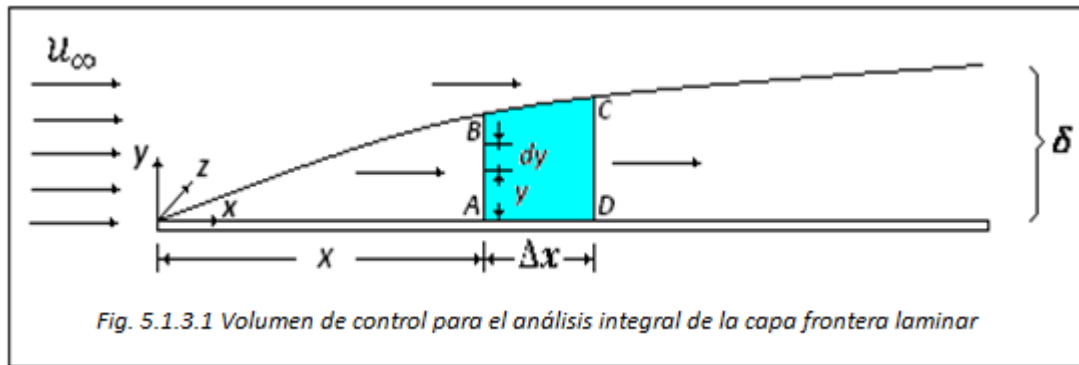
Considere una placa plana alineada en forma paralela a una corriente de fluido que tiene propiedades físicas y térmicas constantes y una velocidad de flujo de la corriente libre uniforme u_{∞} .

Suponga que la capa frontera sobre la placa tiene la forma ilustrada en la figura 5.1.3.1., seleccione un volumen de control **ABCD**, el cual tiene una profundidad unitaria en dirección z , y que recorre todo el espesor de la capa frontera a lo largo de la placa.

Aplicando el principio de la conservación de la masa, al volumen de control, se tiene que, por el método integral de **Von Karman**, el flujo másico que entra al volumen de control debe ser igual al que sale.

Entonces en la cara **AB**, se tiene un flujo hacia adentro del volumen de control, el cual se representa con la integral,

$$\int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_x$$



En la porción superior de la capa frontera **BC**, entra un flujo másico que corresponde a la corriente libre $\dot{m}_{\infty}$.

En la cara **CD**, se tiene un flujo másico hacia afuera del volumen de control, representado por la integral:

$$\int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_{x+\Delta x}$$

En la cara **DA**, no se tiene un flujo másico puesto que es una frontera sólida (superficie de la placa).

Note que las integrales tienen la forma del flujo másico $\dot{m} = \rho VA$, y las unidades son kg/s^2 y que la profundidad $\Delta z = 1$.

Mediante un balance de masa, se tiene:

$$\int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_x + \dot{m}_{\infty} = \int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_{x+\Delta x}$$

Así,

$$\dot{m}_{\infty} = \int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u dy \Delta z|_x \quad \dots \dots ec. 5.1.3.1$$

La ecuación 5.1.3.1., se denomina **ecuación integral de continuidad**.

De igual forma las fuerzas que actúan sobre el volumen de control deben ser igual a cero, para el estado estacionario.

Entonces en la cara **AB**, se tiene una fuerza hacia adentro del volumen de control, la cual se representa con la integral:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_x$$

En la porción superior de la capa frontera **BC**, se tiene una fuerza que corresponde a la corriente libre $\dot{m}_{\infty} u_{\infty}$.

En la cara **CD**, existe otra hacia afuera del volumen de control, representado por la integral:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_{x+\Delta x}$$

En la cara **DA**, se tiene la fuerza de fricción o cortante, al rozar el fluido con la superficie de la placa, o bien la fuerza que ejerce una capa de fluido sobre su capa vecina, la cual va en sentido contrario a las fuerzas correspondientes a los flujos que entran y salen del volumen de control.

$$F_c = \tau_s \Delta x \Delta z$$

Note que las integrales tienen la forma correspondiente a una fuerza $F = \dot{m}V$, y la unidad es el Newton, (**N**).

Mediante un balance de fuerzas, se tiene:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_x + \dot{m}_{\infty} u_{\infty} - \tau_s \Delta x \Delta z = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_{x+\Delta x}$$

O bien;

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_x - \dot{m}_{\infty} u_{\infty} = -\tau_s \Delta x \Delta z$$

Sustituyendo la ecuación 5.1.3.1 en la ecuación anterior se tiene:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_x - \int_0^{\delta} \rho u u_{\infty} dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u u_{\infty} dy \Delta z|_x = -\tau_s \Delta x \Delta z$$

Ordenando términos y dividiendo toda la expresión entre $\Delta x \Delta z$:

$$\frac{\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \Delta z|_x}{\Delta x} - \frac{\int_0^{\delta} \rho u u_{\infty} dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u u_{\infty} dy \Delta z|_x}{\Delta x} = -\tau_s$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u u_{\infty} dy = -\tau_s$$

Puesto que la densidad ρ , es constante dentro de la capa frontera, factorizando se tiene:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u^2 - u u_{\infty}) dy = -\tau_s$$

Multiplicando el lado izquierdo de la expresión anterior por:

$$\left(\frac{u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)^2$$

Obtenemos,

$$\left(\frac{u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)^2 \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (u^2 - u u_{\infty}) dy = -\tau_s$$

$$u_{\infty}^2 \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{u_{\infty}} \frac{u}{u_{\infty}} - \frac{u}{u_{\infty}} \frac{u_{\infty}}{u_{\infty}} \right) dy = -\tau_s$$

Pero como el esfuerzo de corte entre capas vecinas, se define por el postulado de Newton;

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

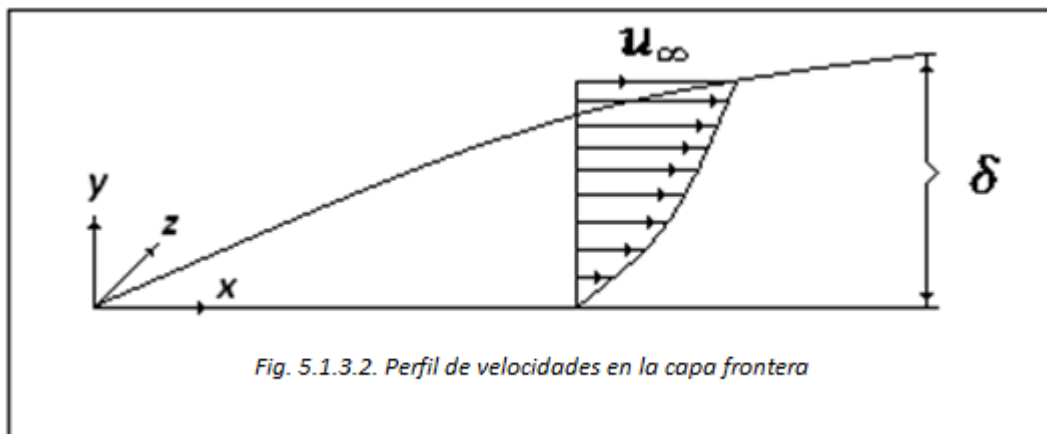
La expresión anterior, puede ser representada como:

$$u_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \dots \dots \dots \text{ec. 5.1.3.2}$$

La ecuación 5.1.3.2, se denomina ecuación **integral de la cantidad de momento**.

En la figura 5.1.3.2., se ilustra el perfil de velocidades supuesto, representado en forma del siguiente polinomio en función de y , siendo el valor de la capa límite δ , constante.

$$\frac{u}{u_{\infty}} = a + b \left(\frac{y}{\delta} \right) + c \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + d \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad \dots \dots \dots (\text{ec. 5.1.3.3})$$



Este polinomio debe resolverse con las siguientes condiciones en la superficie de la placa, y en el lado de la capa frontera:

$$u = 0, \quad \text{en } y = 0 \quad (1)$$

$$u = u_{\infty}, \quad \text{en } y = \delta \quad (2)$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \text{en } y = \delta \quad (3)$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \text{en } y = 0 \quad (4)$$

Enseguida se determinan los coeficientes del polinomio sustituyendo las condiciones de frontera. De la condición (1), se obtiene:

$$a = 0 \quad (A)$$

De la condición (2), se tiene:

$$a + b + c + d = 1 \quad (B)$$

Puesto que la velocidad dentro de la capa frontera es:

$$u = u_{\infty} \left[a + b \left(\frac{y}{\delta} \right) + c \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + d \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

Derivando u , respecto de y , se obtiene:

$$\frac{du}{dy} = u_{\infty} \left[0 + b \left(\frac{1}{\delta} \right) + 2c \left(\frac{y}{\delta^2} \right) + 3d \left(\frac{y^2}{\delta^3} \right) \right]$$

Por la condición (3);

$$b + 2c + 3d = 0 \quad (C)$$

Además la segunda derivada de u , respecto de y , es:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \left[0 + 0 + 2c \left(\frac{1}{\delta^2} \right) + 6d \left(\frac{y}{\delta^3} \right) \right]$$

Sustituyendo la condición (4); se tiene que:

$$C = 0 \quad (D)$$

Por consiguiente de (B), se obtiene;

$$b + d = 1$$

$$b = 1 - d \quad (E)$$

Sustituyendo este valor en (C), y dado que $c = 0$;

$$1 - d + 3d = 0$$

Así,

$$d = -\frac{1}{2}$$

Por tanto de (E), se tiene:

$$b = \frac{3}{2}$$

Así, los valores de las constantes son:

$$a = 0$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$c = 0$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 5.1.3.3., se obtiene.

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \dots \dots \dots ec. 5.1.3.4$$

Despejando u ;

$$u = u_{\infty} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

Derivando esta expresión, respecto de y ;

$$\frac{du}{dy} = u_{\infty} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\delta} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{y^2}{\delta^3} \right) \right]$$

Evaluando esta derivada en $y = 0$, se obtiene:

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{3 u_{\infty}}{2 \delta} \quad (ec. 5.1.3.5)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones 5.1.3.4., y 5.1.3.5., en la ec. 5.1.3.2., se tiene:

$$u_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \frac{3 \mu u_{\infty}}{2 \rho \delta}$$

Resolviendo el álgebra, tenemos que:

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{3}{4} \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right] dy = \frac{3 \mu}{2 \rho \delta}$$

Integrando esta expresión, con respecto a y ;

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{4} (\delta) - \frac{1}{8} (\delta) - \frac{9}{12} (\delta) + \frac{3}{20} (\delta) + \frac{3}{20} (\delta) - \frac{1}{28} (\delta) \right] = \frac{3 \mu}{2 \rho \delta}$$

Sumando los términos internos al paréntesis.

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} \delta \right) = \frac{3 \mu}{2 \rho \delta}$$

Separando variables:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}}$$

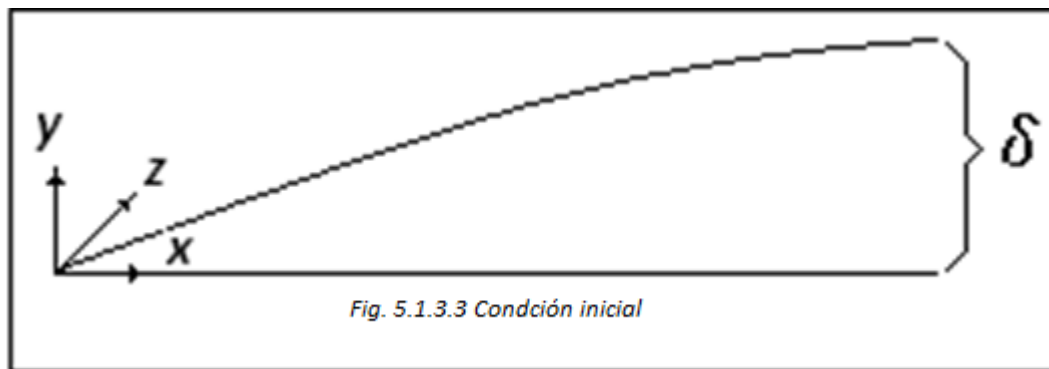
$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} dx$$

Integrando esta expresión, se tiene:

$$\int \delta d\delta = \frac{140}{13} \left(\frac{\mu}{\rho u_{\infty}} \right) \int dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} x + c_1$$

Para encontrar el valor de la constante de integración, se necesita una condición inicial de frontera para el espesor de la capa límite hidrodinámica, como se muestra en la figura 5.1.3.3.



$$\delta = 0, \quad \text{en } x = 0$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación anterior, se obtiene,

$$c_1 = 0$$

Sustituyendo este valor se tiene:

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} x$$

Multiplicando el segundo término de la igualdad por,

$$\left(\frac{x}{x} \right),$$

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho u_{\infty}} \left(\frac{x}{x} \right)$$

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{280}{13} \left(\frac{\mu}{\rho u_{\infty} x} \right)$$

Puesto que el número de Reynolds, se define como:

$$Re_x = \frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}$$

La expresión anterior se puede escribir;

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \left(\frac{1}{Re_x} \right) x^2$$

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13} \left(\frac{1}{Re_x} \right) x^2}$$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} \dots\dots \text{ec. 5.1.3.6}$$

La ecuación 5.1.3.6, calcula el espesor de la capa frontera para cualquier distancia x , a partir de su inicio. La misma ecuación puede expresarse sin dimensiones, de acuerdo a la expresión siguiente;

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}$$

Donde Re_x , es el número de Reynolds local, para cualquier distancia x , de la placa.

El esfuerzo cortante local en la interface placa fluido, está dado por la ecuación:

$$\tau_s = \left(\mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0}$$

Entonces, sustituyendo en esta ecuación el valor de la ec. 5.1.3.5., se tiene:

$$\frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{u_\infty}{\delta} \quad (\text{ec. 5.1.3.5})$$

Se tiene:

$$\tau_s = \frac{3}{2} (\mu u_\infty) \left(\frac{1}{\delta} \right)$$

Sustituyendo el valor de δ , obtenido en la ec. 5.1.3.6., en la ec. Anterior.

$$\tau_s = \frac{3}{2} (\mu u_\infty) \left(\frac{\sqrt{Re_x}}{4.64x} \right)$$

$$\tau_s = \frac{3}{2} (\mu u_\infty) \left(\frac{1}{4.64x} \sqrt{\frac{\rho u_\infty x}{\mu}} \right)$$

$$\tau_s = \frac{3}{2} (\mu u_\infty) \left(\frac{1}{4.64} \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu x^2}} \right)$$

$$\tau_s = \frac{3}{2} (\mu u_\infty) \left(\frac{1}{4.64} \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu x}} \right)$$

O bien,

$$\tau_s = 0.646 \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{Re_x}} \right) \dots \text{ec. 5.1.3.7.}$$

La ecuación 5.1.3.7., expresa el esfuerzo de corte local en términos de la velocidad de corriente libre y el número de Reynolds local.

Por definición el coeficiente local de arrastre (C_f), llamado también coeficiente de fricción superficial es:

$$C_f = \frac{\tau_s}{(1/2)\rho u_\infty^2} \dots \text{ec. 5.1.3.8.}$$

Combinando las ecuaciones (5.1.3.7.) y (5.1.3.8.), la expresión final que se obtiene para el coeficiente de fricción local es:

$$C_f = \frac{0.646}{\sqrt{Re_x}} \dots \dots \text{ec. 5.1.3.9}$$

Si la placa completa tiene una capa frontera laminar sobre ella, el esfuerzo cortante superficial promedio puede determinarse integrando todos los esfuerzos de corte locales dados en la ec. 5.1.3.7., a lo largo de toda su longitud, así:

$$\tau_{sp} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_s dx$$

Cuyo resultado es:

$$\tau_{sp} = 1.292 \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) \left(\frac{1}{Re_L} \right) \dots \dots \text{ec. 5.1.3.10.}$$

En esta ecuación el número de Reynolds Re_L , está basado en la longitud L , de la placa.

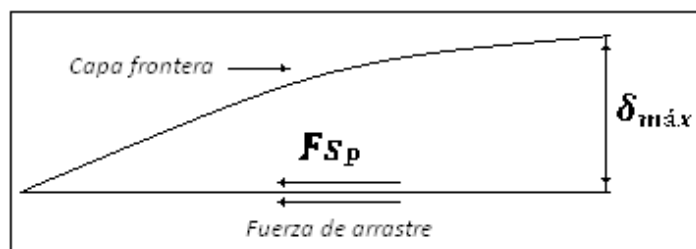
Y el coeficiente de arrastre promedio; se obtiene al sustituir el valor del esfuerzo cortante promedio τ_{sp} , en ec. 5.1.3.8.

$$C_{fp} = \frac{1.292}{\sqrt{Re_L}} \dots \text{ec. 5.1.3.11}$$

Ejemplo 5.1.3.1

Sobre una placa delgada fluye aire que está a una temperatura de 27 °C con una velocidad de 2 m/s. La placa tiene 3 m de largo y 1 m de ancho. a) Estime el máximo espesor de la capa frontera y b) La fuerza necesaria para mantener la placa en la corriente de aire.

Solución:



Primero se evalúan las propiedades del fluido a la temperatura de corriente libre, enseguida se calcula el número de Reynolds que asegura flujo laminar; por último se calcula el espesor máximo de la capa frontera y la fuerza necesaria para mantener la placa en la corriente de aire.

Las propiedades del aire a la presión atmosférica y a la temperatura, $T_{\infty} = 27 + 273 = 300 \text{ K}$ son:

$$\rho = 1.1774 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.983 \times 10^{-5} \text{ kg/m-s}$$

Comprobando si el flujo es laminar:

$$Re_L = \frac{\rho u_{\infty} L}{\mu} = \frac{(1.1774)(2)(3)}{1.983 \times 10^{-5}} = 3.57 \times 10^5 < 5 \times 10^5 \text{ Flujo laminar.}$$

a) Cálculo del espesor máximo de la capa frontera:

$$\delta_{máx} = \frac{4.64L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{(4.64)(3)}{\sqrt{3.57 \times 10^5}} = 0.023 \text{ m} = 2.3 \text{ cm}$$

b) Cálculo de la fuerza de arrastre promedio.

$$\tau_{sp} = 1.292 \left(\frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \right) \left(\frac{1}{Re_L} \right) = 1.292 \left[\frac{(1.1774)(2)^2}{2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{3.57 \times 10^5}} \right) = 5.09 \times 10^{-3} \text{ N/m}^2.$$

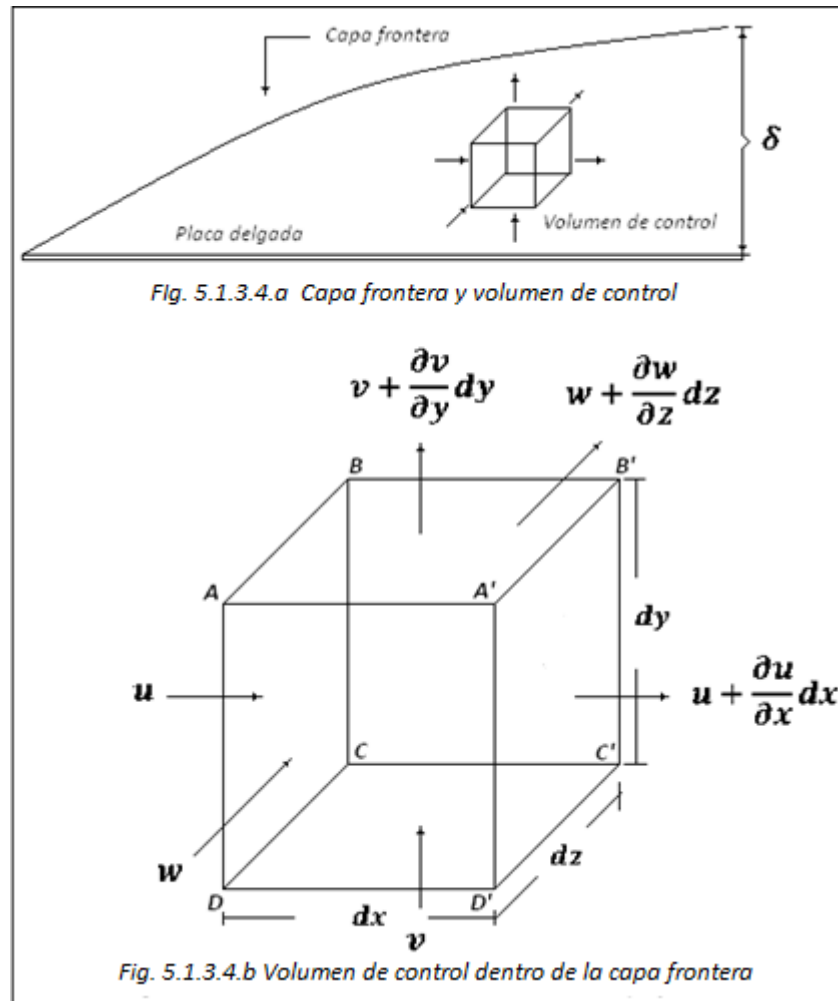
$$F_{Sp} = \tau_{sp} \times 2A = (5.09 \times 10^{-3}) (2)(3)(1) = 3.06 \times 10^{-2} \text{ N.}$$

Convección forzada en una placa plana en régimen laminar (Análisis diferencial).

En el análisis integral, consideramos que el volumen de control recorre todo el espesor de la capa frontera en toda su longitud. En el análisis diferencial se considera que el volumen de control elemental de dimensiones dx , dy y dz , está situado en el interior de la capa frontera; como se ilustra en la figuras 5.1.3.4.a y 5.1.3.4.b.

Además, como en el caso integral, el fluido tiene propiedades físicas y térmicas constantes y que la dirección principal de flujo ocurre a lo largo del eje x , con u_{∞} como la velocidad de corriente libre; y que el flujo es bidimensional. El objetivo del análisis, es el mismo que antes; es decir, determinar el espesor de la capa frontera, el perfil de velocidades dentro de ella y el esfuerzo cortante en la superficie de la placa.

Como se mencionó anteriormente solo se hará el planteamiento de las ecuaciones y se presentarán los resultados para compararlos con el método integral.



Observando el volumen de control de la figura 5.1.3.2.b. la razón de flujos que entran al elemento son:

Cara ABCD

$$\dot{m}_{ABCD} = \rho u dy dz$$

Cara DCC'D':

$$\dot{m}_{DCC'D'} = \rho v dx dz$$

Cara AA'DD':

$$\dot{m}_{AA'DD'} = \rho w dx dy = 0$$

Por ser la componente w , de la velocidad igual a cero, para flujo bidimensional.

Asimismo, la razón de flujos que salen del volumen elemental, son:

Cara A'B'C'D'

$$\dot{m}_{A'B'C'D'} = \dot{m}_{ABCD} + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_{ABCD})dx$$

$$\dot{m}_{A'B'C'D'} = \rho u dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx$$

Cara ABB'A':

$$\dot{m}_{ABB'A'} = \dot{m}_{DCC'D'} + \frac{\partial}{\partial y}(\dot{m}_{DCC'D'}) dy$$

$$\dot{m}_{ABB'A'} = \rho v dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy$$

Cara ABB'A':

$$\dot{m}_{ABB'A'} = \dot{m}_{DCC'D'} + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_{DCC'D'}) dz = 0$$

$$\dot{m}_{ABB'A'} = \rho w dx dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dx dy) dz = 0$$

Para el estado estacionario la razón de flujos de entrada debe ser igual a la razón de flujos de salida; así:

$$\dot{m}_{ABCD} + \dot{m}_{DCC'D'} + 0 = \dot{m}_{A'B'C'D'} + \dot{m}_{ABB'A'} + 0$$

$$\rho u dy dz + \rho v dx dz = \rho u dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx + \rho v dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy = 0$$

Dividiendo entre $dx dy dz$, la ecuación anterior; se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

Para un fluido incompresible ($\rho = Cte$), y la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \text{Ec. 5.1.3.12}$$

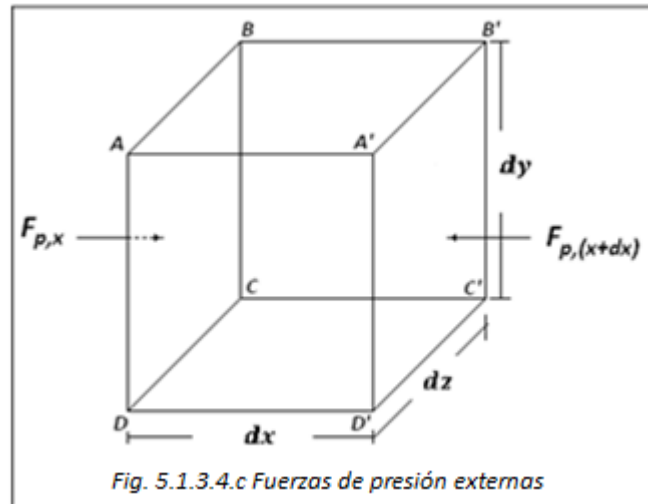
La ecuación 5.1.3.12, se denomina **ecuación diferencial de continuidad**, de la capa frontera laminar.

Analizando nuevamente el volumen de control elemental respecto a las fuerzas que actúan sobre él, se tiene que existen fuerzas de presión y cortantes en las caras.

Además estas deben ser igual a la cantidad de movimiento del volumen de control. Es decir;

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = (\dot{M}_{om})_{salida,x} - (\dot{M}_{om})_{entrada,x} = (\dot{m}v)_{salida,x} - (\dot{m}v)_{entrada,x} \dots \dots \text{ec. A}$$

La ecuación anterior, afirma que la dirección principal del flujo ocurre a lo largo del eje x . En la figura 5.1.3.4.c, se muestran las fuerzas externas de presión, que actúan en las caras del volumen de control.



Cara ABCD:

$$F_{p,x} = p dy dz \quad \dots \dots \text{ec. a}$$

Cara A'B'C'D':

$$F_{p,(x+dx)} = - \left[F_{p,x} + \frac{\partial}{\partial x} (F_{p,x}) dx \right]$$

$$F_{p,(x+dx)} = - \left[p dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (p dy dz) dx \right] \quad \dots \dots \text{ec. b}$$

Note que la fuerza de presión externa que actúa sobre la cara $A'B'C'D'$, es negativa, con el propósito de conservar el equilibrio.

En las demás caras no existen fuerzas de presión debido a que flujo solo ocurre en dirección x .

Las fuerzas cortantes que actúan sobre el volumen de control pueden calcularse a partir del esfuerzo cortante viscoso expresado por la ecuación:

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

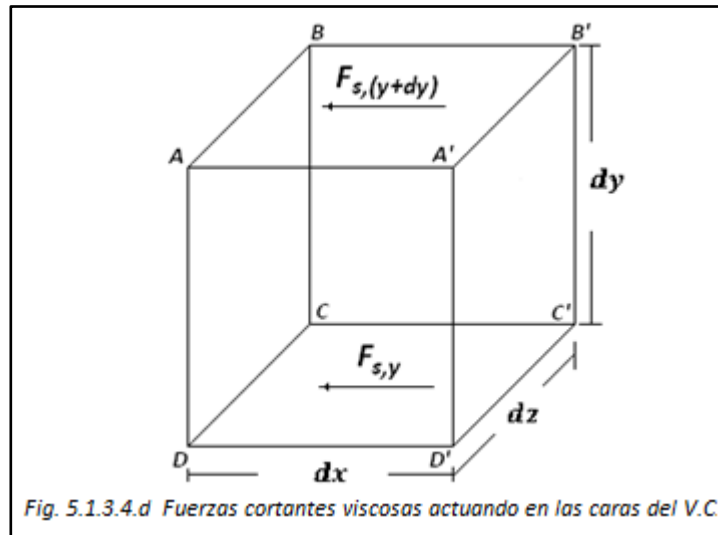
Ésta ecuación, es válida para el caso bidimensional, y el subíndice y , indica la dirección de la normal a la superficie sobre la cual actúa el esfuerzo cortante τ_{yx} , el subíndice x , especifica la dirección del esfuerzo cortante. Así que, τ_{yx} es el esfuerzo cortante en la dirección x , actuando sobre la superficie normal a la dirección y .

Puesto que el movimiento del fluido se efectúa principalmente en la dirección x , entonces la componente de la velocidad u , será más significativa que la componente de la velocidad v . Aún más, puesto que la capa frontera es muy delgada, las derivadas parciales con respecto a y , serán en general más grandes que las derivadas con respecto a x . Por lo tanto, ésta derivada puede despreciarse, de tal modo que la ecuación anterior puede escribirse:

$$\tau_{yx} \cong \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Nuevamente, y tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se desprecian las fuerzas cortantes viscosas en las caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Más aún, por la naturaleza bidimensional del problema las fuerzas cortantes en las caras $BB'C'C$ y $AA'D'D$, tampoco existen.

Entonces solo existen las fuerzas cortantes en las caras inferior $DCC'D'$, y superior $ABB'A'$, del volumen de control como se muestra en la figura 5.1.3.4.d.



Recordando que la fuerza cortante es igual al producto del esfuerzo cortante τ_{yx} por el área sobre la cual actúa la fuerza cortante; se tiene que:

Cara $DCC'D'$:

$$F_{s,y} = -\tau_{yx} dx dz$$

O bien,

$$F_{s,y} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz \quad \dots \dots ec. c$$

Cara $ABB'A'$:

$$F_{s,(y+dy)} = - \left[F_{s,y} + \frac{\partial}{\partial y} (F_{s,y}) \right] dy$$

$$F_{s,(y+dy)} = - \left\{ -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz \right] \right\} dy \quad \dots \dots ec. d$$

Puesto que las expresiones a, b, c, d ; corresponden a las fuerzas externas que actúan en la dirección x , sobre el volumen de control, el miembro izquierdo de la ecuación A, puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = p dy dz - \left[p dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (p dy dz) dx \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz - \left\{ -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz \right] \right\} dy$$

Así,

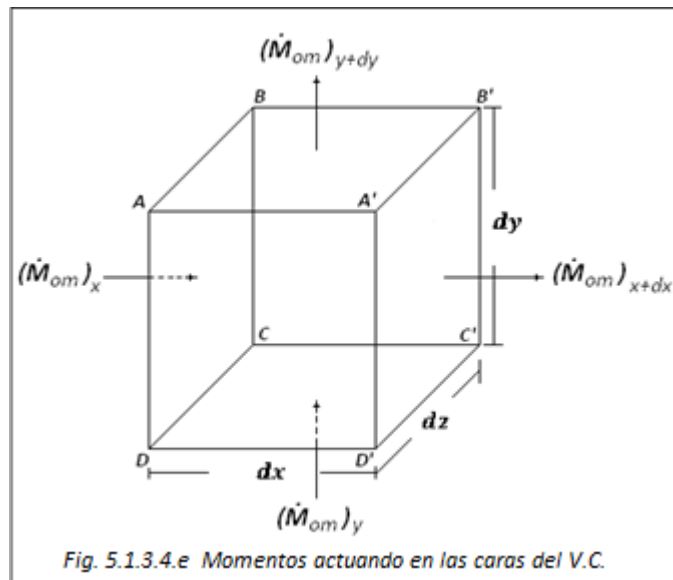
$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = -\frac{\partial}{\partial x}(p dy dz) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dz \right] dy$$

Arreglando la expresión:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy dz \quad \dots \dots \text{ec. B}$$

En seguida, discutiremos la razón neta de la cantidad de momento a través del volumen de control. De nuevo, solo estamos interesados en que el movimiento del flujo en dirección x , por lo tanto debemos considerar aquellas caras del volumen de control donde haya flujo; y donde la velocidad de las partículas del fluido tengan componentes.

En la figura 5.1.3.4.e, se ilustran las caras en las cuales existen flujos de partículas y la velocidad tiene componentes.



Cara ABCD:

$$(\dot{M}_{om})_x = (\rho u dy dz) u = \rho u^2 dy dz$$

Cara A'B'C'D':

$$(\dot{M}_{om})_{x+dx} = (\dot{M}_{om})_x + \frac{\partial}{\partial x} [(\dot{M}_{om})_x] dx = \rho u^2 dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 dy dz) dx$$

Cara DCC'D':

$$(\dot{M}_{om})_y = (\rho v dx dz) u = \rho u v dx dz$$

Note que en esta expresión el flujo entra en la cara inferior, pero se desplaza en dirección x , es decir, en la dirección de la componente de la velocidad u .

Cara ABB'A':

$$(\dot{M}_{om})_{y+dy} = (\dot{M}_{om})_y + \frac{\partial}{\partial y} [(\dot{M}_{om})_y] dy = \rho u v dx dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v dx dz) dy$$

Ahora el miembro derecho de la ecuación A, puede expresarse como:

$$(\dot{M}_{om})_{salida,x} - (\dot{M}_{om})_{entrada,x} = [(\dot{M}_{om})_{x+dx} + (\dot{M}_{om})_{y+dy}] - [(\dot{M}_{om})_x + (\dot{M}_{om})_y]$$

O bien;

$$(\dot{M}_{om})_{salida,x} - (\dot{M}_{om})_{entrada,x} = \left[\rho u^2 dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 dy dz) dx + \rho u v dx dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v dx dz) dy \right] - [\rho u^2 dy dz + \rho u v dx dz]$$

Eliminando términos y factorizando, la expresión queda:

$$(\dot{M}_{om})_{salida,x} - (\dot{M}_{om})_{entrada,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 dy dz) dx + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v dx dz) dy = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right] dx dy dz$$

Así, la ecuación diferencial de momentos para la capa frontera laminar, queda determinada por la siguiente expresión.

$$(\dot{M}_{om})_{salida,x} - (\dot{M}_{om})_{entrada,x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right] dx dy dz \dots \dots \dots ec. C$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones B, y C en la ecuación A, se obtiene:

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy dz = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right] dx dy dz$$

Dividiendo entre $dx dy dz$, toda la expresión anterior; se tiene:

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \right]$$

Para un fluido incompresible ($\rho = Cte$), y la ecuación anterior se transforma en;

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right]$$

$$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right]$$

Efectuando la diferenciación, se tiene:

$$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

Pero, la ecuación de continuidad (ec. 5.1.3.12), afirma que el término:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Así que la ecuación anterior se convierte en:

$$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

Si no existen gradientes de presión en el flujo fuera de la capa frontera, es de suponer que tampoco lo habrá dentro de ella, así que el término;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Y la ecuación se convierte en:

$$\left[u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots ec. 5.1.3.13.$$

La ecuación 5.1.3.13, se denomina **ecuación diferencial de momento o cantidad de movimiento**, de la capa frontera laminar.

Para encontrar la distribución de velocidades lograda en el método integral, las ecuaciones de continuidad y de momento (ecuaciones 5.1.3.1 y 5.1.3.2), deben resolverse simultáneamente. Sin embargo, estas son ecuaciones diferenciales parciales no lineales y requieren de las siguientes condiciones de frontera.

$$u = 0, \quad y \quad v = 0 \quad en \quad y = 0$$

$$u \rightarrow u_{\infty}, \quad y \quad v = 0 \quad en \quad y \rightarrow \infty$$

Blasius un estudiante de **Prandtl**, fue el primero que resolvió las dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales; empleando un ingenioso cambio de variables, transformando las dos ecuaciones en una sola ecuación diferencial ordinaria. El valor encontrado para el espesor de la capa frontera es:

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} \quad (ec. 5.1.3.14)$$

Además el esfuerzo cortante local de la superficie τ_s , se obtiene con la siguiente expresión:

$$\tau_s = .664 \left(\frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{Re_x}} \right) \quad (ec. 5.1.3.15)$$

El esfuerzo cortante promedio en la superficie está dado por:

$$\tau_{sp} = 1.328 \left(\frac{\rho u_{\infty}^2}{2} \right) \left(\frac{1}{Re_L} \right) \quad (ec. 5.1.3.16)$$

El coeficiente de arrastre local es:

$$C_f = \frac{0.646}{\sqrt{Re_x}} \quad (ec. 5.1.3.17)$$

El coeficiente de arrastre promedio está dado por:

$$C_{f_p} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \quad (\text{ec. 5.1.3.18})$$

Estos valores difieren muy poco de los obtenidos por el método integral de **Von Karman**.

Convección forzada en una placa plana en régimen laminar (Capa límite térmica).

Retomando de nuevo el método integral de **Von Karman**, en la discusión de flujo sobre una placa plana (sección 5.1.2) se mencionó el concepto de capa límite hidrodinámica. Ahora bien, si prestamos atención al análisis de transferencia de calor entre una placa y un fluido que fluye sobre la misma; es necesario introducir el concepto de una capa frontera térmica como la especificada en la misma sección.

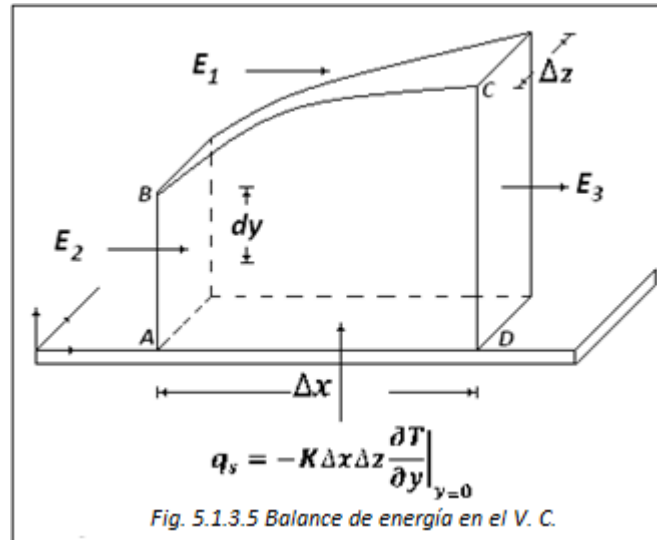
Consideremos que la temperatura del fluido cambia de T_s (temperatura de la superficie de la placa) a la temperatura de corriente libre T_∞ , al moverse el fluido alejándose de la superficie de la placa.

Así pues, podemos imaginar una capa delgada de espesor δ_t , llamada capa frontera térmica, como la mostrada en la figura 5.1.2. En forma semejante a la capa frontera hidrodinámica (Fig. 5.1.2.1), el espesor de la capa frontera térmica es igual a cero en el extremo donde entra el fluido y crece conforme avanza la corriente abajo sobre la placa.

El problema consiste en determinar el coeficiente de transferencia de calor h , mediante la aplicación del principio de la conservación de energía a un volumen de control. Para ello, se requiere tener en cuenta las siguientes consideraciones.

- ✓ Se selecciona un volumen de control que abarque por completo el espesor δ_t , de la capa frontera y cuya longitud se representa por un diferencial Δx , en sentido de la corriente. Se aplican los principios de conservación de energía con el fin de generar ecuaciones integrales.
- ✓ Se supone que la temperatura θ , del fluido dentro de la capa frontera, se puede representar en forma de un polinomio en función de la variable y .
- ✓ Se determinan los coeficientes del polinomio de acuerdo a las condiciones que satisfacen al perfil de temperaturas en la superficie de la placa y en el lado de la capa frontera.
- ✓ Se sustituye el perfil de temperatura polinomial en la ecuación integral de energía y se resuelve para encontrar el espesor de la capa frontera δ_T .
- ✓ En seguida, se encuentra la relación entre la capa frontera hidrodinámica y la capa frontera térmica sobre la placa utilizando el perfil polinomial.
- ✓ Por último se determina el número de Nusselt local y el promedio sobre la placa en función del coeficiente de película o coeficiente de transferencia de calor.

Solo por esta vez, considere el volumen de control mostrado en la figura 5.1.3.5, aplicando sobre este elemento el principio de conservación de la energía; se tiene que, para el estado estacionario, la energía que entra es igual a la energía que sale del volumen de control.



En la parte superior de la capa frontera entra cierta cantidad de energía, asociada con el flujo másico de corriente libre del fluido, así:

$$E_1 = \dot{m}_\infty H_\infty$$

En esta expresión H_∞ , representa la entalpía total del flujo; definida como la suma de la energía interna, cinética y potencial de las partículas.

En la cara **AB**, considerando $\Delta z = 1$, entra al volumen de control:

$$E_2 = \int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z \Big|_x$$

En la cara **CD**, considerando $\Delta z = 1$, sale del volumen de control:

$$E_3 = \int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z \Big|_{x+dx}$$

Por último, en la cara **AD**, existe una cierta transferencia de calor por conducción de la superficie de la placa, hacia las partículas del fluido adheridas a ella, es decir:

$$q_s = -K\Delta x\Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

El signo negativo lo impone la primera ley de la termodinámica, e implica que la placa cede calor al fluido.

Un balance de energía en el volumen de control muestra que:

$$E_1 + E_2 + q_s = E_3$$

$$E_3 - E_1 - E_2 = q_s$$

Sustituyendo estos valores, se tiene:

$$\int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z \Big|_{x+dx} - \int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z \Big|_x - \dot{m}_\infty H_\infty = -K\Delta x\Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Puesto que:

$$\dot{m}_{\infty} = \int_0^{\delta_t} \rho u dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u dy \Delta z|_x$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z|_x - \left[\int_0^{\delta_t} \rho u dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u dy \Delta z|_x \right] H_{\infty} = -K \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u H dy \Delta z|_x - \left[\int_0^{\delta_t} \rho u H_{\infty} dy \Delta z|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u H_{\infty} dy \Delta z|_x \right] = -K \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Dividiendo la ecuación entre $\Delta x \Delta z$,

$$\frac{\int_0^{\delta_t} \rho u H dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u H dy|_x}{\Delta x} - \frac{\int_0^{\delta_t} \rho u H_{\infty} dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta_t} \rho u H_{\infty} dy|_x}{\Delta x} = -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \rho u H dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \rho u H_{\infty} dy = -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Para un fluido incompresible ($\rho = Cte$), y la ecuación anterior queda:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (H - H_{\infty}) u dy = -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Pero,

$$H - H_{\infty} = C_p (T - T_{\infty})$$

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} C_p (T - T_{\infty}) u dy = -K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (T_{\infty} - T) u dy = \frac{K}{\rho C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Donde:

$$\frac{K}{\rho C_p} = \alpha = \text{difusividad del fluido.}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (T_{\infty} - T) u dy = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Mediante un cambio de variable:

$$\theta = T - T_s$$

$$\theta_{\infty} = T_{\infty} - T_s$$

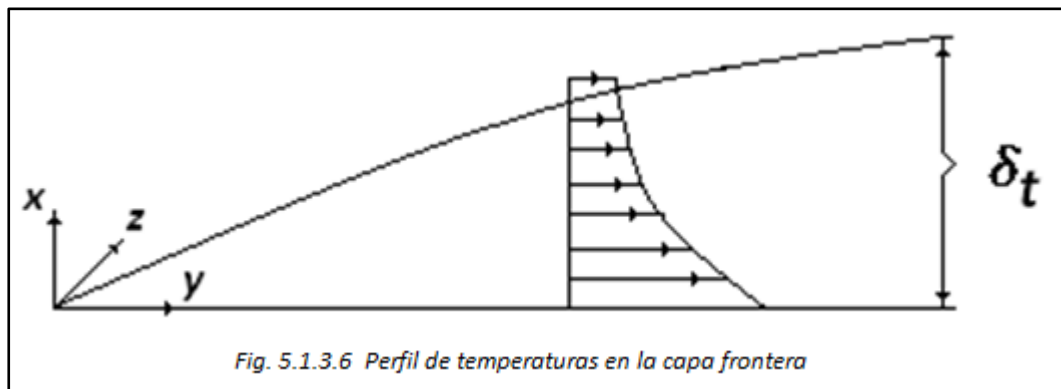
Y la ecuación anterior se convierte en;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (\theta_\infty - \theta) u dy = \alpha \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} \dots \dots \text{ec. 5.1.3.19}$$

La ecuación 5.1.3.3.1, se denomina ecuación integral de energía de la capa frontera.

En la figura 5.1.3.3.2, se ilustra el perfil de temperaturas supuesto, representado en forma de un polinomio en función de y , siendo el valor de la capa límite δ_t , constante.

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = A + B \left(\frac{y}{\delta} \right) + C \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + D \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \dots \dots \dots \text{ec. 5.1.3.20}$$



Este polinomio debe resolverse con las siguientes condiciones en la superficie de la placa, y en el lado de la capa frontera:

$$\theta = 0, \quad \text{en } y = 0 \quad (1)$$

$$\theta = \theta_\infty, \quad \text{en } y = \delta_t \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dy} = 0, \quad \text{en } y = \delta_t \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = 0, \quad \text{en } y = 0 \quad (4)$$

Un procedimiento igual al empleado en el perfil de velocidades de la capa frontera, permite encontrar el valor de las constantes **A, B, C y D**, de la ecuación 5.1.3.20.

$$A = 0$$

$$B = 3/2$$

$$C = 0$$

$$D = -1/2$$

Sustituyendo el valor de las constantes en la misma ecuación se obtiene:

$$\frac{\theta}{\theta_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \dots ec. 5.1.3.21$$

La ec. 5.1.3.21, se denomina perfil temperatura de la capa frontera térmica.

Despejando θ , y derivando con respecto a y , al evaluar la derivada en $y = 0$; se tiene:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t} \dots \dots ec. 5.1.3.23$$

Y recordando que el perfil de velocidades esta dado por:

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \dots \dots ec. 5.1.3.24$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.1.3.21, 5.1.3.22 y 5.1.3.23 en la ecuación 5.1.3.19, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \left\{ \theta_{\infty} - \theta_{\infty} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right] \right\} \left\{ u_{\infty} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \right\} dy = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t}$$

Factorizando;

$$\theta_{\infty} u_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \right] \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t}$$

Resolviendo el álgebra;

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{y^2}{\delta_t \delta} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{y^4}{\delta_t^3 \delta} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{y^4}{\delta_t^3 \delta} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{y^6}{\delta_t^3 \delta^3} \right) \right] dy = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t}$$

Integrando:

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{4} \frac{\delta_t^2}{\delta} - \frac{1}{8} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} - \frac{9}{12} \frac{\delta_t^2}{\delta} + \frac{3}{20} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} + \frac{3}{20} \frac{\delta_t^2}{\delta} - \frac{1}{28} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} \right] = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por (δ/δ) :

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{4} \frac{\delta_t^2}{\delta} - \frac{1}{8} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} - \frac{9}{12} \frac{\delta_t^2}{\delta} + \frac{3}{20} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} + \frac{3}{20} \frac{\delta_t^2}{\delta} - \frac{1}{28} \frac{\delta_t^4}{\delta^3} \right] \frac{\delta}{\delta} = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\delta_t} \left(\frac{\delta}{\delta} \right)$$

Haciendo,

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta}$$

Se tiene:

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{1}{8} \gamma^4 - \frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{3}{20} \gamma^4 + \frac{3}{20} \gamma^2 - \frac{1}{28} \gamma^4 \right] \delta = \frac{3}{2} \alpha \frac{\theta_{\infty}}{\gamma \delta}$$

Sumando los términos que están dentro del paréntesis, se tiene:

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{20} \gamma^2 + \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{8} - \frac{1}{28} \right) \gamma^4 \right] \delta = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\gamma \delta}$$

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{20} \gamma^2 + \frac{3}{280} \gamma^4 \right] \delta = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\gamma \delta}$$

Suponiendo que la capa frontera térmica es menor que la capa frontera hidrodinámica $\delta_t < \delta$, y definiendo γ , como el cociente que resulta de dividir ambas capas; se tiene.

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} < 1$$

Es evidente que:

$$\frac{3}{20} \gamma^2 \gg \gg \frac{3}{280} \gamma^4$$

Por lo tanto, la ecuación anterior se convierte en:

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} [\gamma^2 \delta] = 10 \frac{\alpha}{\gamma \delta}$$

Después de derivar el producto $(\gamma^2 \delta)$ respecto de x , se obtiene:

$$u_{\infty} \left[\gamma^2 \frac{d\delta}{dx} + \delta (2\gamma) \frac{d\gamma}{dx} \right] = 10 \frac{\alpha}{\gamma \delta}$$

$$\gamma^3 \left(\delta \frac{d\delta}{dx} \right) + 2(\delta^2) \gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} = 10 \frac{\alpha}{u_{\infty}}$$

Recordando que en el análisis para la capa límite hidrodinámica, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}}$$

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho u_{\infty}}$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación anterior, y se obtiene;

$$\left(\frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} \right) \gamma^3 + 2 \left(\frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho u_{\infty}} \right) \gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} = 10 \frac{\alpha}{u_{\infty}}$$

Factorizando:

$$\frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_{\infty}} \left[\gamma^3 + 4x\gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} \right] = 10 \frac{\alpha}{u_{\infty}}$$

$$\gamma^3 + 4x\gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{\left(\frac{\mu}{\rho} \right)} = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{(\nu)}$$

Donde ν , es la viscosidad cinemática del fluido incompresible.

$$\gamma^3 + 4x \left(\gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} \right) = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{(v)} \dots \text{ec. 5.1.3.24}$$

Notando que la derivada de;

$$\frac{d(\gamma^3)}{dx} = 3\gamma^2 \frac{d\gamma}{dx}$$

Despejando;

$$\gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{3} \frac{d(\gamma^3)}{dx}$$

Sustituyendo este valor en la ec. 5.1.3.24, se obtiene:

$$\gamma^3 + \frac{4x}{3} \frac{d(\gamma^3)}{dx} = \frac{13}{14} \frac{\alpha}{(v)}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria, lineal no homogénea en γ^3 , cuya solución, empleando el factor de integración $I = x^{3/4}$, es:

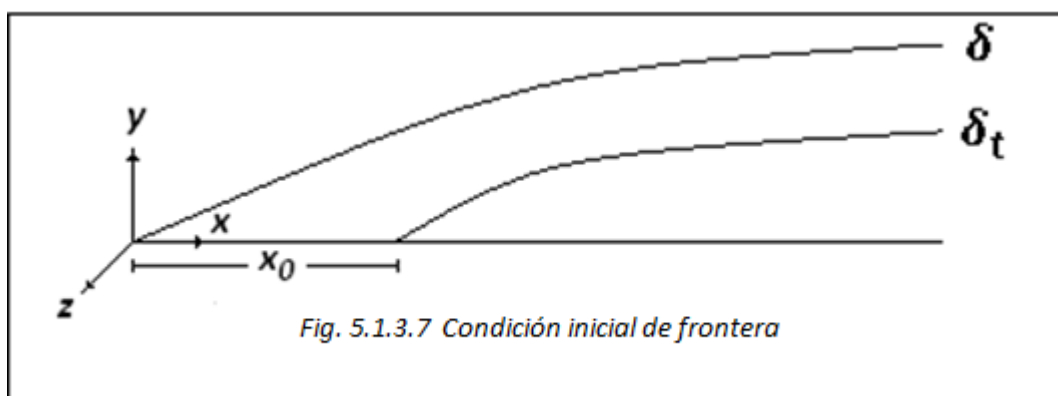
$$\gamma^3 = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14} \frac{\alpha}{(v)} \dots \text{ec. 5.1.3.25}$$

Donde C , es una constante de integración. La constante de integración puede determinarse a partir de la condición inicial de frontera:

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} \rightarrow \infty, \quad \text{en } x \rightarrow 0$$

Esta condición se ilustra en la figura 5.1.3.7, en la cual se supone que la capa frontera térmica inicia una distancia x_0 , después de la capa frontera hidrodinámica.

En la figura se observa que cuando $x = x_0$, entonces;



$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = 0$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación 5.1.3.25, se obtiene:

$$0 = Cx_0^{-3/4} + \frac{13\alpha}{14\nu}$$

$$C = -\frac{13\alpha}{14\nu}(x_0^{3/4})$$

Sustituyendo el valor de C , en la ecuación 5.1.3.3.7, la ecuación toma la forma;

$$\gamma^3 = -\frac{13\alpha}{14\nu}(x_0^{3/4})x^{-3/4} + \frac{13\alpha}{14\nu}$$

Entonces:

$$\gamma^3 = -\frac{13\alpha}{14\nu}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4} + \frac{13\alpha}{14\nu}$$

Factorizando;

$$\gamma^3 = \frac{13\alpha}{14\nu}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]$$

Pero:

$$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{k}{\rho c_p \mu} = \frac{k}{c_p \mu} = \frac{1}{\left(\frac{c_p \mu}{k}\right)} = \frac{1}{P_r}$$

Donde:

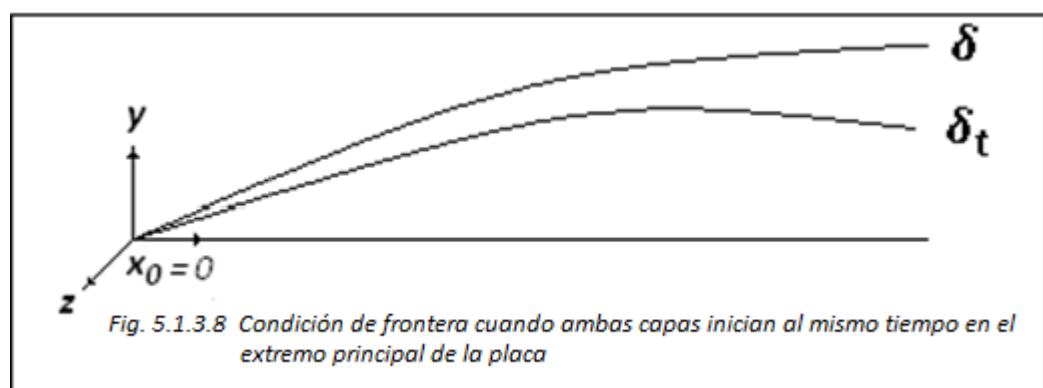
$$P_r = \text{Número de Prandtl} = \frac{c_p \mu}{k}$$

Así, la ecuación anterior se convierte:

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{13}{14} \frac{1}{P_r} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]}$$

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = 0.975 P_r^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}$$

Sin embargo, ambas capas inician al mismo tiempo en el extremo principal de la placa así, $x_0 = 0$ como se ilustra en la figura 5.1.3.8.



Y por lo tanto la ecuación anterior se convierte en:

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = 0.975 P_r^{-1/3} \dots \text{ ec. 5.1.3.26}$$

Ahora bien, sabemos que en la interface placa fluido, el calor por conducción es igual al calor por convección a cualquier distancia x , desde el extremo principal de la placa, entonces:

$$q_x = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=0} = h_x A (T_s - T_\infty)$$

Despejando h_x ;

$$h_x = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \dots \text{ ec. 5.1.3.27}$$

Donde, h_x es el coeficiente de transferencia de calor local para cualquier distancia x , de la placa.

Sustituyendo los valores de las ecuaciones 5.1.3.21 y 5.1.3.22 en la ecuación 5.1.3.27; se obtiene:

$$h_x = \frac{-k \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{T_\infty - T_s}{\delta_t} \right)}{T_s - T_\infty}$$

$$h_x = \frac{k \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{T_s - T_\infty}{\delta_t} \right)}{T_s - T_\infty}$$

$$h_x = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{k}{\delta_t} \text{ ec. 5.1.3.28}$$

Dado que:

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = 0.975 P_r^{-1/3}$$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} = 4.64x Re_x^{-1/2}$$

Entonces;

$$\delta_t = \gamma \delta = 0.975 P_r^{-1/3} \left(4.64x Re_x^{-1/2} \right)$$

Sustituyendo el valor de δ_t , en la ecuación 5.1.3.28, la ecuación se transforma en:

$$h_x = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{k}{0.975 P_r^{-1/3} \left(4.64x Re_x^{-1/2} \right)}$$

O bien;

$$h_x = 0.331 \frac{k}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \dots\dots ec. 5.1.3.29$$

La ecuación 5.1.3.3.11, calcula el coeficiente de transferencia de calor local a cualquier distancia x , a lo largo de la placa en régimen laminar.

Definiendo el Número de Nusselt local, como:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \dots\dots ec. 5.1.3.30$$

De la ecuación 5.1.3.3.11, se obtiene:

$$Nu_x = 0.331 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \dots\dots ec. 5.1.3.31$$

La ecuación 5.1.3.31, calcula el número de Nusselt local, a lo largo de la placa.

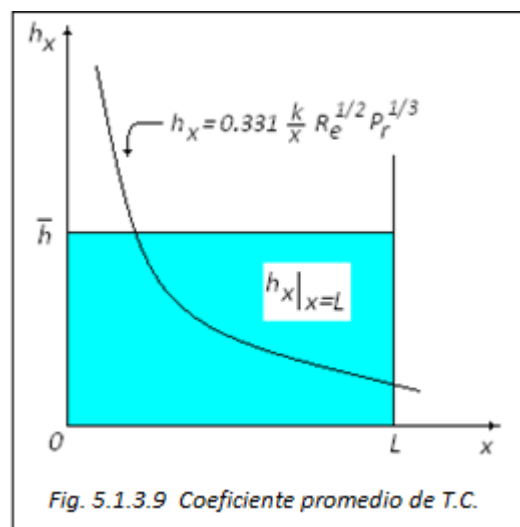
Sin embargo, en la práctica es mejor conocer un coeficiente de transferencia de calor promedio, a lo largo de toda la placa; para ello es necesario integrar todos los coeficientes locales de película, ec. 5.1.3.28, desde el inicio hasta el final de la placa.

La figura 5.1.3.9, muestra el comportamiento de la ecuación 5.1.3.28 y el valor del coeficiente de transferencia de calor promedio para la placa.

De la figura se tiene que el área del rectángulo, ilustra el valor del coeficiente promedio de transferencia de calor, es decir la integral evaluada desde cero hasta L , así:

$$\bar{h}L = \int_0^L h_x dx$$

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$



Sustituyendo el valor de h_x , se tiene:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L 0.331 \frac{k}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} dx$$

Integrando respecto de x , se tiene:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L 0.331 \frac{k}{x} \left(\frac{\rho u_\infty x}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} dx$$

$$\bar{h} = \frac{0.331 k Pr^{1/3}}{L} \left(\frac{\rho u_\infty}{\mu} \right)^{1/2} \int_0^L (x)^{-1/2} dx$$

$$\bar{h} = \frac{0.331 k Pr^{1/3}}{L} \left(\frac{\rho u_\infty}{\mu} \right)^{1/2} (2L^{1/2})$$

$$\bar{h} = 2 \left[0.331 \frac{k}{L} (Re_L)^{1/2} Pr^{1/3} \right] = 2h_x|_{x=L}$$

$$\bar{h} = 0.662 \left(\frac{k}{L} \right) Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.3.32}$$

La ecuación 5.1.3.3.14, calcula el coeficiente promedio de transferencia de calor a lo largo de la placa.

Entonces el número de Nusselt promedio, queda definido por la expresión:

$$\overline{Nu}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.662 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \dots \dots \dots \text{ec. 5.1.3.33}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película, dada por la expresión siguiente;

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}$$

Ejemplo 5.1.3.2

Aire a 20 °C y a la presión atmosférica, con una velocidad de 1.5 m/s; fluye sobre una placa plana que tiene 30 cm de largo por 30 cm de ancho, con una temperatura superficial de 50 °C.

- Para una distancia $x = 15 \text{ cm}$, calcule el valor de las capas frontera límite y térmica y el coeficiente local de transferencia de calor.
- Calcule el flujo de calor transferido al aire, en la primera mitad de la placa.
- Determine el flujo de calor total transferido de la placa al aire.

Datos:

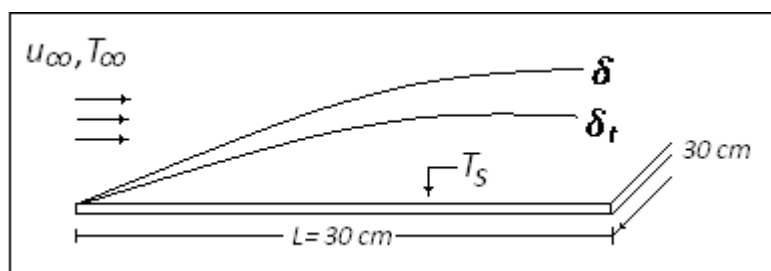
$$T_\infty = 20^\circ\text{C}$$

$$T_s = 50^\circ\text{C}$$

$$u_\infty = 1.5 \text{ m/s}$$

$$l = 0.3 \text{ m}$$

$$a = 0.3 \text{ m}$$



En las tablas para el aire a la presión de 1 atmósfera y a una temperatura de película T_f , se determinan las propiedades del fluido.

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{50 + 20}{2} = 35^\circ\text{C}$$

$$\nu = 1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.02625 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

$$Pr = 0.7268$$

Prevalecen condiciones de estado estacionario y se calcula el número de Reynolds para toda la longitud de la placa para comprobar si el flujo es laminar. Después se calcula el Reynolds para los 15 cm de longitud de la placa.

a).

$$Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{(1.5)(0.3)}{1.655 \times 10^{-5}} = 27,190.33$$

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(1.5)(0.15)}{1.655 \times 10^{-5}} = 13,595.16$$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{(4.64)(0.15)}{\sqrt{13,595.16}} = 5.97 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\gamma = \frac{\delta_t}{\delta} = 0.975 Pr^{-\frac{1}{3}} = 0.975 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{0.7268}} \right) = 1.085$$

$$\delta_t = \gamma \delta_x = (1.085)(5.97 \times 10^{-3}) = 6.48 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$h_x = \frac{3k}{2\delta_t} = \frac{3(0.02625)}{2(6.48 \times 10^{-3})} = 6.076 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

Note que el coeficiente local de transferencia de calor también se puede calcular con la expresión:

$$h_x = 0.331 \frac{k}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} = 0.331 \left(\frac{0.02625}{0.15} \right) (13,595.16)^{1/2} (0.7268)^{1/3} = 6.076 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

b).

$$\bar{h} = 2h_x|_{x=0.15} = 2(6.076) = 12.145 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 12.145(0.15)(0.30)(50 - 20) = 16.4 \text{ W}$$

c).

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.662Re_L^{1/2}Pr^{1/3} = 0.662(27,190.33)^{1/2}(0.7268)^{1/3} = 98.145$$

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_L k}{L} = \frac{(98.145)(0.02625)}{0.30} = 8.59 \text{ W/m}^2 - K$$

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 8.59(0.30)(0.30)(50 - 20) = 23.187 \text{ W}$$

Note que más de la mitad del calor se transfiere en la primera mitad de la placa, debido a que al principio del proceso existe una mayor diferencia de temperatura entre la superficie de la placa caliente y el fluido frío.

Convección forzada en una placa plana en régimen laminar (Capa frontera térmica).

Esta sección tratará el estudio de la capa frontera térmica por el método del análisis de diferencial, sin embargo, como se hizo con la capa frontera hidrodinámica, solo se hará el planteamiento de las ecuaciones diferenciales y se darán los resultados.

En la figura 5.1.3.10, se muestran las caras que transportan energía dentro y fuera del volumen de control, de tal modo que se pueda aplicar el principio de conservación de energía en el V.C.

Cara ABCD: Entra energía, por convección.

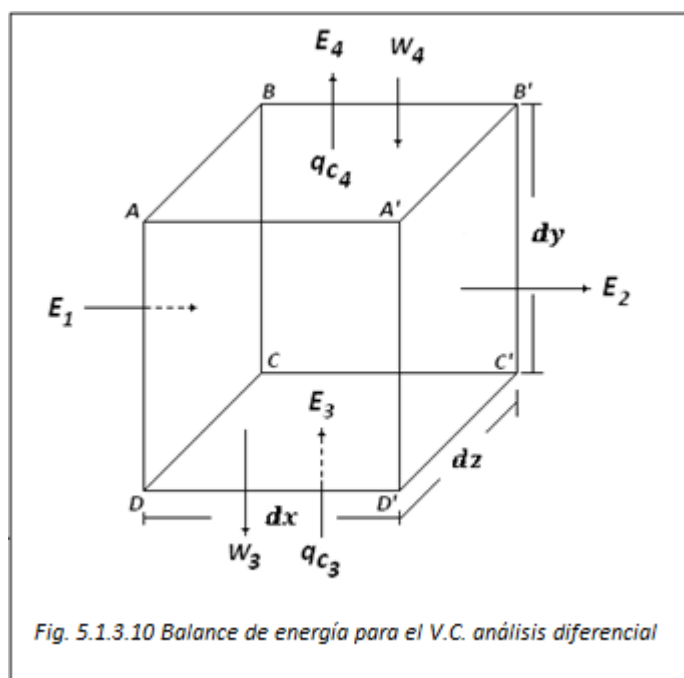
$$E_1 = \rho u H dy dz$$

Cara A'B'C'D': Sale energía por convección.

$$E_2 = \rho u H dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u H dy dz) dx$$

Cara DD'C'C: Entra energía, por convección.

$$E_3 = \rho v H dx dz$$



Cara AA'B'B: Sale energía, por convección.

$$E_4 = \rho v H dx dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v H dx dz) dy$$

Note que en la cara **DD'C'C** también entra calor por conducción; así:

Cara DD'C'C: : Entra energía, por conducción.

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz$$

Cara AA'B'B: Sale energía, por conducción.

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz \right] dy$$

Además, en el volumen de control existe trabajo que es realizado por el volumen de control sobre el fluido, como se ilustra en la cara **DD'C'C**, mientras que el fluido realiza trabajo sobre el volumen de control a través de la cara **AA'B'B**.

Este trabajo se debe a las fuerzas viscosas que actúan en las cuatro caras del volumen de control, sin embargo, el trabajo en las caras **ABCD**, y **A'B'C'D'**, es insignificante con respecto a las otras dos caras.

La razón de trabajo debido a las fuerzas viscosas sobre cualquier cara, es igual al producto de la viscosidad del fluido por el esfuerzo cortante, y por el área de la cara en cuestión y la componente de la velocidad que actúa en la dirección del esfuerzo cortante.

Entonces como se ilustra en la figura, el trabajo realizado por o sobre el volumen de control es:

Cara DD'C'C: : El volumen de control realiza trabajo sobre el fluido.

$$w_3 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (u) dx dz$$

Cara AA'B'B: : El fluido realiza trabajo volumen de control.

$$w_4 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (u) dx dz + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (u) dx dz \right] dy$$

Ahora, el principio de conservación de la energía para condiciones de estado estacionario, establece que:

Energía que entra al volumen de control = Energía que sale del volumen de control

Es decir:

$$E_1 + E_3 + q_{c3} + w_4 = E_2 + E_4 + q_{c4} + w_3$$

Sustituyendo los valores apropiados para las diferentes energías que entran y salen del volumen de control y simplificando términos, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H) + \frac{\partial}{\partial y} \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (u) \right] = 0$$

Para un fluido incompresible, con propiedades físicas y térmicas constantes la ecuación anterior se convierte en:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \rho \frac{\partial}{\partial y}(vH) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Observe que el último término, que aparece en el miembro derecho de la ecuación anterior, es el único que no contiene a la temperatura. Este término representa el trabajo neto por unidad de tiempo realizado por las fuerzas de fricción o de corte, que actúan sobre el volumen de control. Este término puede expandirse en la siguiente forma:

$$\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Al analizar esta expansión, los dos términos de la derecha pueden despreciarse, puesto que el primero corresponde a la disipación viscosa, que contribuye a la conversión de la energía cinética del fluido a energía térmica.

A velocidades transónicas y supersónicas la disipación viscosa contribuye fuertemente a la ecuación de energía, sin embargo a velocidades bajas resulta insignificante. El segundo término balancea los cambios de energía cinética y potencial, que no fueron incluidos en nuestro análisis, por consiguiente también puede despreciarse. Así, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Derivando esta expresión, tenemos:

$$u \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + H \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

O bien;

$$u \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Puesto que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{ec. de continuidad.})$$

Y además;

$$dH = c_p dT$$

La ecuación se convierte en:

$$u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \dots \dots \text{ec. 5.1.3.34}$$

Donde α , es la difusividad de fluido. La ecuación 5.1.3.34, se denomina ecuación de la energía para la capa frontera térmica de un fluido incompresible.

Esta ecuación para ser resuelta, necesita de las siguientes condiciones de frontera:

$$T = T_s, \quad \text{en } y = 0$$

$$T \rightarrow T_\infty, \quad \text{en } y \rightarrow \infty$$

Además como se ha visto con anterioridad;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{ec. de continuidad}).$$

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{ec. de momento}).$$

Ambas ecuaciones sujetas a las condiciones de frontera siguientes:

$$u = 0, \quad y \quad v = 0 \quad \text{en } y = 0$$

$$u \rightarrow u_\infty, \quad y \quad v = 0 \quad \text{en } y \rightarrow \infty$$

Al resolverse la ecuación de energía con sus condiciones de frontera, junto con las ecuaciones de continuidad y momento sujetas a sus respectivas condiciones de frontera, se obtiene el perfil de temperatura.

En este punto se recuerda que la solución de estas ecuaciones es muy complicada y laboriosa, para poder llegar a la determinación del coeficiente de transferencia de calor local y el promedio. Así que, solo se presentan los resultados.

$$h_x = 0.332 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \dots \text{ec. 5.1.3.35}$$

$$\bar{h} = 0.664 \left(\frac{k}{x} \right) Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \dots \text{ec. 5.1.3.36}$$

Y las expresiones del número de Nusselt local y promedio son:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.3.37}$$

$$\bar{Nu}_u = \frac{\bar{h} L}{k} = 0.332 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.3.38}$$

Si comparamos los resultados del método integral con los del método diferencial, la diferencia entre ellos, no es significativa; por lo tanto, el método integral (**Von Karman**) resulta ser más atractivo, por su sencillez en el desarrollo del proceso.

Ejemplo 5.1.3.3

En un túnel sopla aire a la presión atmosférica y a 15 °C, y pasa sobre una placa plana que se alinea paralela en dirección del flujo a 5 m/s. La temperatura de la placa es de 45 °C y su longitud es de 1 m en la dirección del flujo, y 1 m de ancho. ¿Cuál es la razón de transferencia de calor desde la placa hacia el aire?

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, la placa solo está expuesta al flujo en la parte superior; de tal suerte que pierde calor solo en la parte de arriba. Para calcular la razón de transferencia de calor, es necesario calcular el valor del coeficiente de película entre la superficie de la placa y el fluido y enseguida aplicar la ley de Newton de enfriamiento.

Los datos son:

$$P = 1 \text{ atm.}$$

$$T_{\infty} = 15 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$u_{\infty} = 5 \text{ m/s}$$

$$T_s = 45 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$L_c = L = 1 \text{ m}$$

$$a = 1 \text{ m}$$

En la tabla A-15 del apéndice 1, se tiene para una temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_s + T_{\infty}}{2} = \frac{45 + 15}{2} = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 1.164 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.872 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\nu = 1.608 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.02588 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$Pr = 0.7282$$

Calculo del número de Reynolds, para comprobar el flujo.

$$Re_L = \frac{\rho u_{\infty} L}{\mu} = \frac{u_{\infty} L}{\nu} = \frac{(5)(1)}{1.608 \times 10^{-5}} = 310,945 < 500,000 \text{ Flujo laminar.}$$

$$\bar{h} = 0.664 \left(\frac{k}{L} \right) Re_L^{1/2} Pr^{1/3} = 0.664 \left(\frac{0.02588}{1} \right) (310,945)^{1/2} (0.7282)^{1/3} = 8.62 \text{ W/m}^2 - K$$

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 8.62(1 \times 1)(45 - 15) = 258.6 \text{ W}$$

Ejemplo 5.1.3.4

Fluye agua a 15 °C sobre una placa plana a una velocidad de corriente libre de 0.4 m/s. La placa tiene 30 cm de largo y 60 cm de ancho, y se mantiene a 95 °C. Determine la cantidad de calor que aleja el agua por minuto.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, la placa solo está expuesta al flujo en la parte superior; de tal suerte que pierde calor solo en la parte de arriba. Para calcular la razón de transferencia de calor, es necesario calcular el valor del coeficiente de película entre la superficie de la placa y el fluido y enseguida aplicar la ley de Newton de enfriamiento.

Los datos son:

$$P_s = 1.7051 \text{ kPa.}$$

$$T_\infty = 15 \text{ °C}$$

$$u_\infty = 0.4 \text{ m/s}$$

$$T_s = 95 \text{ °C}$$

$$L_c = L = 0.3 \text{ m}$$

$$a = 0.60 \text{ m}$$

En la tabla A-9 del apéndice 1, se tiene para una temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{95 + 15}{2} = 110 \text{ °C}$$

$$\rho = 985.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.504 \times 10^{-3} \text{ kg/m} - s$$

$$\nu = 5.116 \times 10^{-7} \text{ m}^2/s$$

$$k = 0.649 \text{ W/m} - K$$

$$Pr = 3.25$$

Calculo del número de Reynolds, para comprobar el flujo.

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{(0.4)(0.30)}{5.116 \times 10^{-7}} = 234,558.3 < 500,000 \text{ Flujo laminar.}$$

$$\bar{h} = 0.664 \left(\frac{k}{L} \right) Re_L^{1/2} P_r^{1/3} = 0.664 \left(\frac{0.649}{0.30} \right) (234,558.3)^{1/2} (3.25)^{1/3} = 1030.5 \text{ W/m}^2 - K$$

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 1030.5(0.30 \times 0.60)(95 - 15) = 14,839 \text{ w} = 890.35 \text{ kJ/min.}$$

Convección forzada en una placa plana en régimen turbulento.

Los resultados obtenidos en una placa plana para las capas hidrodinámica y térmica, mediante el método de **Von Karman**, para los números de Nusselt local y promedio, en la capa frontera laminar; concuerdan muy bien con los datos experimentales obtenidos por otros investigadores, siendo estos muy fáciles de usar en la solución de problemas.

Sin embargo, en el caso de flujo turbulento en una placa plana, el procedimiento analítico resulta muy complicado para el cálculo del número de Nusselt, con la capa frontera turbulenta; puesto que surgen complicaciones, debido a que la parte frontal de la placa tiene una frontera laminar, seguida de una zona de transición, mientras que la porción restante tiene una frontera turbulenta. La figura 5.1.3.11, ilustra lo descrito anteriormente.

En la figura, se observa que la parte laminar termina cuando se inicia la zona de transición, y esta descrita a lo largo de la longitud de la placa por una distancia denominada distancia crítica x_c , y que para el caso de la placa plana está representada por la expresión:

$$Re_c = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} = 5 \times 10^5$$

Donde Re_c , es el número de Reynolds crítico que marca el inicio de la zona de transición, así:

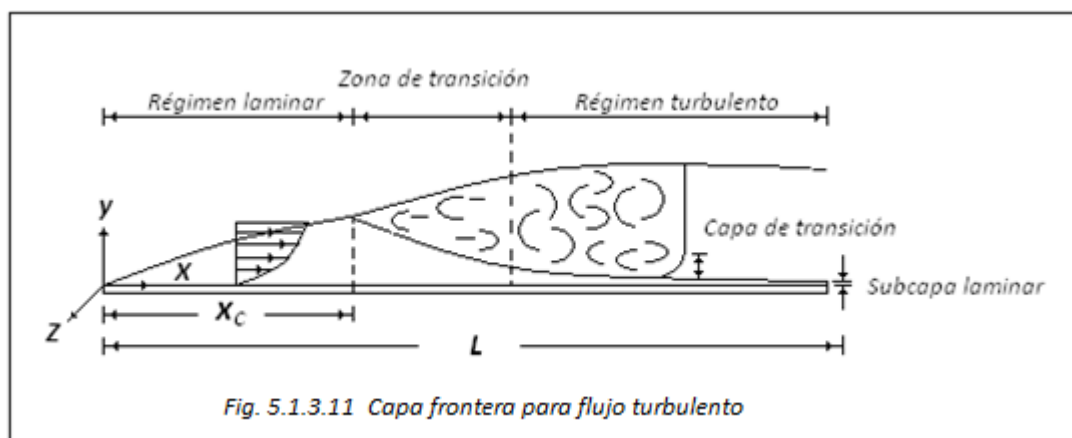
$$x_c = 5 \times 10^5 \frac{\mu}{\rho u_\infty}$$

Cuando, $0 < x < x_c \rightarrow$ Flujo laminar.

Y el coeficiente de transferencia de calor local, se representa por la expresión;

$$h_x = 0.331 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{1/2} P_r^{1/3}$$

Cuando, $x_c < x < L \rightarrow$ Flujo turbulento.



Enseguida, se presenta un método para calcular el coeficiente de transferencia de calor promedio y el número de Nusselt promedio, basado en la analogía de **Reynolds & Colburn**, para capa frontera turbulenta en una placa plana. El coeficiente de fricción local, se determina mediante medidas experimentales para flujo turbulento, el cual se representa mediante la relación empírica siguiente.

$$f_x = 0.576 Re_x^{-1/5} \quad (ec. 5.1.3.39)$$

Esta relación es válida para números de Reynolds comprendidos en el intervalo siguiente:

$$5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$$

Por la analogía de **Colburn**, la cual se estudiará en la sección siguiente, se tiene que:

$$\frac{f_x}{2} = St_x P_r^{2/3} \quad (ec. 5.1.3.40)$$

Sustituyendo el valor de la ec. 5.1.3.39 en la 5.1.3.40, se tiene.

$$\frac{0.576 Re_x^{-1/5}}{2} = St_x P_r^{2/3}$$

$$0.0288 Re_x^{-1/5} = \left(\frac{Nu_x}{Re_x P_r} \right) P_r^{2/3}$$

Despejando el número de Nusselt local Nu_x , se obtiene:

$$Nu_x = 0.0288 Re_x^{4/5} P_r^{1/3}$$

Recordando que el número de Nusselt local se define como;

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.0288 Re_x^{4/5} P_r^{1/3}$$

Entonces:

$$h_x = 0.0288 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{4/5} P_r^{1/3} \quad \dots \dots \quad ec. 5.1.3.41$$

La expresión 5.1.3.41, representa el coeficiente de transferencia de calor local en una placa plana en régimen turbulento.

Entonces el coeficiente promedio $\bar{h}$, de transferencia de calor para la placa plana, puede evaluarse integrando todos los coeficientes locales para flujo laminar, más los coeficientes locales para flujo turbulento a lo largo de toda la placa desde $x = 0$, hasta $x = L$. Así;

$$\bar{h}_L = \frac{\int_0^{x_c} (h_x|_{lam}) dx + \int_{x_c}^L (h_x|_{turb}) dx}{L}$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones 5.1.3.3.29 y 5.1.3.41 en la ecuación anterior, tenemos:

$$\bar{h}_L = \frac{\int_0^{x_c} \left[0.331 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{1/2} P_r^{1/3} \right] dx + \int_{x_c}^L \left(0.0288 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{4/5} P_r^{1/3} \right) dx}{L}$$

Integrando, la expresión;

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_c} 0.331 \left(\frac{k}{x} \right) \left(\frac{\rho u_\infty x}{\mu} \right)^{1/2} P_r^{1/3} dx + \int_{x_c}^L 0.0288 \left(\frac{k}{x} \right) \left(\frac{\rho u_\infty x}{\mu} \right)^{4/5} P_r^{1/3} dx \right]$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[0.331 (k) \left(\frac{\rho u_\infty}{\mu} \right)^{1/2} P_r^{1/3} \int_0^{x_c} (x)^{-1/2} dx + 0.0288 (k) \left(\frac{\rho u_\infty}{\mu} \right)^{4/5} P_r^{1/3} \int_{x_c}^L (x)^{-1/5} dx \right]$$

Pero;

$$\int_0^{x_c} (x)^{-1/2} dx = 2x_c^{1/2}$$

Y,

$$\int_{x_c}^L (x)^{-1/5} dx = \frac{5}{4} (x)^{4/5} \Big|_{x_c}^L = \frac{5}{4} L^{4/5} - \frac{5}{4} x_c^{4/5}$$

Entonces:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[\underbrace{0.662 (k) \left(\frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \right)^{1/2} P_r^{1/3}}_{\text{Flujo Laminar}} + \underbrace{0.036 (k) \left(\frac{\rho u_\infty L}{\mu} \right)^{4/5} P_r^{1/3} - 0.036 (k) \left(\frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \right)^{4/5} P_r^{1/3}}_{\text{Flujo turbulento}} \right]$$

Pero, por definición:

$$Re_c = 5 \times 10^5 = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \quad y \quad Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, esta se transforma en:

$$\bar{h}_L = \frac{k P_r^{1/3}}{L} \left[0.662 (5 \times 10^5)^{1/2} + 0.036 (Re_L)^{4/5} - 0.036 (5 \times 10^5)^{4/5} \right]$$

Realizando las operaciones correspondientes;

$$\bar{h}_L = \frac{k}{L} [0.036 (Re_L)^{4/5} - 836] P_r^{1/3} \quad \dots \dots \quad \text{ec. 5.1.3.42}$$

La ecuación 5.1.3.5.4, calcula el coeficiente promedio de transferencia de calor, en una placa plana en la cual se desarrollan ambos tipos de flujos **laminar –turbulento**.

En seguida, el número de Nusselt promedio, se obtiene por definición:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = [0.036 (Re_L)^{4/5} - 836] P_r^{1/3} \quad \dots \dots \dots \quad \text{ec. 5.1.3.43}$$

Las propiedades del fluido que intervienen en las ecuaciones de Nusselt, Reynolds y Prandtl, tienen dependencia con la temperatura de la superficie de la placa y la del fluido circundante; por lo tanto es costumbre determinar las propiedades a la temperatura de película T_f , definida anteriormente.

Ejemplo 5.1.3.5

Aire atmosférico a 20 °C con una velocidad de 40 m/s, fluye sobre una placa plana de 1 m de longitud y 0.30 m de ancho; con una temperatura superficial de 60 °C, calcule: a) El flujo de calor en la porción laminar de la capa límite, b) El flujo de calor en la porción turbulenta de la capa límite, c) El flujo de calor total cedido por la placa al aire.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, la placa solo está expuesta al flujo en la parte superior; de tal suerte que pierde calor solo en la parte de arriba. Para calcular la razón de transferencia de calor, es necesario calcular el valor del coeficiente de película entre la superficie de la placa y el fluido y enseguida aplicar la ley de Newton de enfriamiento, para ambas porciones de la placa.

Los datos son:

$$P_{atm} = 101 \text{ kPa.}$$

$$T_{\infty} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$u_{\infty} = 40 \text{ m/s}$$

$$T_s = 60 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$L_c = L = 1 \text{ m}$$

$$a = 0.30 \text{ m}$$

En la tabla A-15 del apéndice 1, se tiene para una temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_s + T_{\infty}}{2} = \frac{60 + 20}{2} = 40 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 1.127 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.918 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\nu = 1.702 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.02662 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$Pr = 0.7255$$

a) Cálculo del flujo de calor en la porción laminar, $0 < x < x_c$:

Para éste intervalo se calcula primeramente la distancia crítica, para saber hasta qué distancia de la placa, el flujo es laminar, así:

$$Re_c = 5 \times 10^5 = \frac{\rho u_{\infty} x_c}{\mu}$$

$$x_c = \frac{5 \times 10^5 \mu}{\rho u_\infty} = \frac{(5 \times 10^5)(1.918 \times 10^{-5})}{(1.127)(40)} = 0.2128 \text{ m}$$

Luego se calcula el número de Nusselt promedio con la ecuación correspondiente al flujo laminar;

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.662 \left(\frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3}$$

Note que, $L = x_c$ por ser la máxima distancia para el flujo laminar; entonces $Re_c = Re_L$

$$\overline{Nu}_L = 0.662 \left(\frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} = 0.662(5 \times 10^5)^{1/2}(0.7255)^{1/3} = 420.62$$

Pero,

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k}{x_c} = \frac{(420.62)(0.02662)}{(0.2128)} = 52.6 \text{ W/m}^2 - K$$

$$q_{lam} = \bar{h} A(T_s - T_\infty) = 52.6(0.2128 \times 0.30)(60 - 20) = 134.32 \text{ W}$$

b) Cálculo del flujo de calor en la porción turbulenta, $x_c < x < L$:

En este caso el coeficiente local de transferencia de calor para la porción turbulenta es:

$$h_x = 0.0288 \left(\frac{k}{x} \right) Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

Integrando esta expresión en la porción comprendida en el intervalo que define la porción turbulenta, se tiene:

$$\bar{h} = \frac{1}{L - x_c} \int_{x_c}^L h_x dx = \frac{1}{L - x_c} \int_{x_c}^L 0.0288 \left(\frac{k}{x} \right) \left(\frac{\rho u_\infty x}{\mu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} dx$$

$$\bar{h} = \frac{1}{L - x_c} \left[0.0288(k) \left(\frac{\rho u_\infty}{\mu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \int_{x_c}^L (x)^{-1/5} dx \right]$$

Donde:

$$\int_{x_c}^L (x)^{-1/5} dx = \frac{5}{4} (L^{4/5} - x_c^{4/5})$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior y haciendo operaciones, se tiene:

$$\bar{h} = 0.036 \left(\frac{k}{L - x_c} \right) Pr^{1/3} [Re_L^{4/5} - Re_c^{4/5}]$$

Pero, el número de Reynolds para toda la placa es;

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(1.127)(40)(1)}{1.918 \times 10^{-5}} = 2.35 \times 10^6 \quad y \quad Re_c = 5 \times 10^5$$

Sustituyendo estos valores, tenemos;

$$\bar{h} = 0.036 \left(\frac{0.02662}{1 - 0.2128} \right) (0.7255)^{1/3} [(2.35 \times 10^6)^{4/5} - (5 \times 10^5)^{4/5}]$$

$$\bar{h} = 97 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

$$q_{turb} = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 97(0.7872 \times 0.30)(60 - 20) = 916.3 \text{ W}$$

c) El flujo de calor total cedido por la placa al aire es la suma aritmética del laminar más el turbulento, así:

$$q_{total} = q_{lam} + q_{turb} = 134.32 + 916.3 = 1050.62 \text{ W}$$

c) Otra forma de calcular el calor total, es mediante la expresión que corresponde a los dos tipos de flujo;

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = [0.036(Re_L)^{4/5} - 836] Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_L = [0.036(2.35 \times 10^6)^{4/5} - 836] (0.7255)^{1/3} = 3,291.8$$

Entonces;

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k}{L} = \frac{(3,291.8)(0.02662)}{1} = 87.62 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

Y el calor total cedido por la placa al aire es:

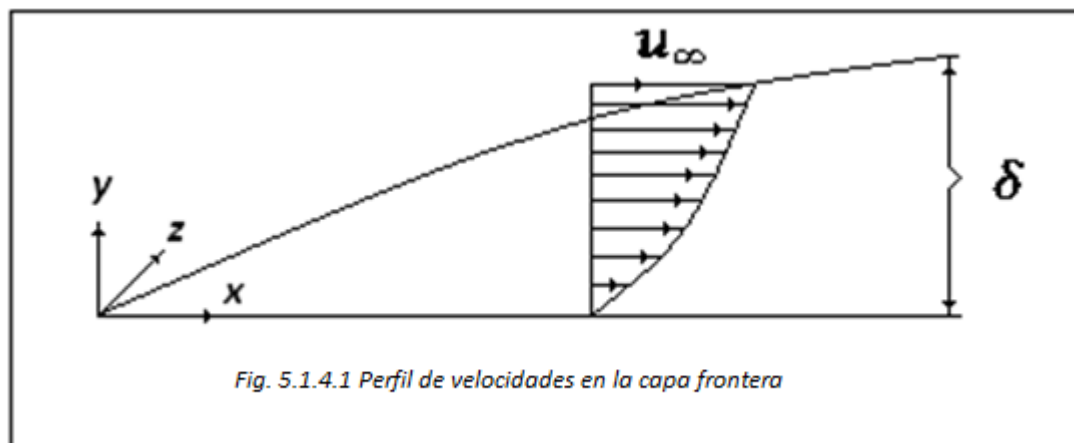
$$q_{total} = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = 87.62(1 \times 0.30)(60 - 20)$$

$$q_{total} = 1051.53 \text{ W}$$

Observe que existe solo un 0.087 % de error entre un cálculo y otro.

5.1.4 Analogía de la transferencia de calor y la fricción.

En la sección 5.1.3, cuando se consideró el caso de la placa plana con flujo laminar, figura 5.1.3.1, se dedujeron ecuaciones para el perfil de velocidades, la velocidad del fluido en la interface placa fluido, y el espesor de la capa hidrodinámica; según las expresiones 5.1.3.4, 5.1.3.5 y 5.1.3.6. En ésta sección, se representan nuevamente con la figura 5.1.4.1, y las ecuaciones siguientes:



$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (ec. 5.1.4.1)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{u_{\infty}}{\delta} \quad (ec. 5.1.4.2)$$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} \quad (ec. 5.1.4.3)$$

Además, por definición el esfuerzo local en la interfaz placa fluido, es:

$$\tau_s = \left(\mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} \quad (ec. 5.1.4.4)$$

Sustituyendo la ecuaciones 5.1.4.2 y 5.1.4.3, en la ecuación 5.1.4.4, ésta se convierte en:

$$\tau_s = \left(\mu \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu u_{\infty}}{\delta} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu u_{\infty}}{4.64x Re_x^{-1/2}} \right) \dots ec. 5.1.4.5$$

La expresión 5.1.4.5, define el esfuerzo cortante local en la superficie de la placa.

Ahora bien, definiendo el coeficiente local de fricción f_x , mediante la expresión:

$$f_x = \frac{2\tau_s}{\rho u_{\infty}^2}$$

Note que el coeficiente de fricción local f_x , es adimensional.

Entonces, despejando el esfuerzo cortante, se tiene:

$$\tau_s = \frac{f_x}{2} (\rho u_{\infty}^2) \dots \dots ec. 5.1.4.6$$

Igualando las ecuaciones 5.1.4.5 y 5.1.4.6, tenemos que:

$$\frac{f_x}{2} (\rho u_{\infty}^2) = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu u_{\infty}}{4.64x Re_x^{-1/2}} \right)$$

Despejando el coeficiente local de fricción f_x , y realizando operaciones;

$$\frac{f_x}{2} = 0.323 \left(\frac{\mu}{\rho u_{\infty} x} \right) \left(\frac{1}{Re_x^{-1/2}} \right) = \left(\frac{1}{Re_x} \right) \left(\frac{1}{Re_x^{-1/2}} \right)$$

$$\frac{f_x}{2} = 0.323 \left(Re_x^{-1/2} \right) \dots \dots ec. 5.1.4.7$$

Y el coeficiente de fricción promedio $\bar{f}_L$, se representa con la expresión:

$$\bar{f}_L = \frac{1}{L} \int_0^L f_x dx$$

Integrando respecto de x , se tiene:

$$\bar{f}_L = \frac{1.29}{Re_L^{1/2}} \dots \dots \dots ec. 5.14.8$$

La ecuación 5.1.4.8, calcula el coeficiente promedio de fricción a lo largo de toda la placa, desde $x = 0$, hasta $x = L$. Se invita al estudiante a efectuar la integración.

Por consiguiente la fuerza de arrastre que mantiene a la placa en la corriente del fluido, es:

$$F = \tau_{sp} A$$

Sustituyendo el valor del esfuerzo cortante promedio dado en la ecuación 5.1.3.10, en la ecuación anterior, se tiene:

$$F = 1.29 \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{Re_L}} \right) A$$

Entonces, al sustituir la ecuación 5.1.4.5, en la ecuación anterior, esta se convierte en:

$$F = \bar{f}_L \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) A \text{ ec. 5.1.4.9}$$

Ahora bien, el coeficiente de transferencia de calor local h_x , está relacionado con el número de Nusselt local, según la ecuación 5.1.3.30, así:

$$Nu_x = 0.331 Re_x^{1/2} P_r^{1/3}$$

Si dividimos esta ecuación entre el producto de $Re_x P_r$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{Nu_x}{Re_x P_r} = \frac{0.331 Re_x^{1/2} P_r^{1/3}}{Re_x P_r}$$

Entonces;

$$St_x = 0.331 Re_x^{-1/2} P_r^{-2/3}$$

Donde la relación:

$$\frac{Nu_x}{Re_x P_r} = St_x$$

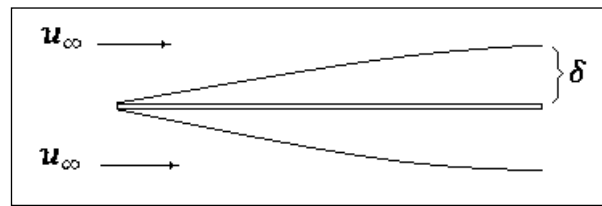
Se le denomina número de **Stanton** local.

Ejemplo 5.1.4.1

Fluye aire por ambas caras, sobre una placa delgada con una velocidad de 2.5 m/s. La placa tiene un metro de longitud y un metro de ancho. Estime: a) El espesor de la capa frontera en el lado de arrastre de la placa y b) La fuerza necesaria para mantenerla en la corriente de aire. Las propiedades del aire son; viscosidad dinámica $0.86 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ y una densidad de $1.12 \text{ Kg}/\text{m}^3$.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo debe ser laminar al ser verificado en el análisis, las propiedades del fluido son constantes y el número de Reynolds para la transición entre flujos es 5×10^5 .



Comprobando si el flujo es laminar a lo largo de toda la placa:

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(1.12)(2.5)(1)}{(0.86 \times 10^{-5})} = 3.26 \times 10^5 < 5 \times 10^5 \text{ flujo laminar.}$$

a) Cálculo de la capa frontera en $x = L$

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{(4.64)(1)}{(\sqrt{3.26 \times 10^5})} = 8.13 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.13 \text{ mm.}$$

b) Cálculo de la fuerza de arrastre;

$$F = 1.29 \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{Re_L}} \right) A$$

$$F = 1.29 \left(\frac{1.12 \times 2.5^2}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3.26 \times 10^5}} \right) (2)(1 \times 1) = 0.0158 \text{ N}$$

Flujo a través de cilindros y esferas.

Después de estudiar los conceptos de coeficiente de fricción total y fuerza de arrastre en superficies planas, por efecto de un flujo externo, consideremos nuevamente el flujo externo que pasa por algunas superficies curvas; como son los cilindros y las esferas.

De manera similar a la placa plana, se puede considerar la formación de una capa delgada sobre la superficie curva, en la cual están presentes los efectos viscosos, y otra más alejada de la superficie donde no lo están.

Cuando se introduce una superficie curva en una corriente de fluido, la fuerza resultante que actúa sobre el superficie se divide en dos componentes, una normal a la dirección principal de flujo y la otra paralela a la dirección de flujo.

La primera se llama fuerza de levante F_L , y la última fuerza de arrastre F_D . La fuerza de levante se debe al efecto ocasionado por el gradiente de presión que es diferente de cero en este tipo de superficies y por consiguiente ejerce su influencia en el desarrollo de la capa frontera. La fuerza de arrastre se debe al esfuerzo cortante viscoso.

Los coeficientes de levante C_L , y de arrastre C_D , se definen mediante las expresiones siguientes:

$$C_L = \frac{F_L}{\left(\frac{\rho u_\infty^2}{2}\right) A} \quad y \quad C_D = \frac{F_D}{\left(\frac{\rho u_\infty^2}{2}\right) A}$$

En estas expresiones, A es el área del cuerpo proyectado en un plano normal a la dirección principal de flujo. Para un cilindro con su eje normal a la dirección de flujo $A = DL$, donde D es el diámetro del cilindro y L su longitud. Para una esfera el área proyectada es $A = \pi D^2/4$.

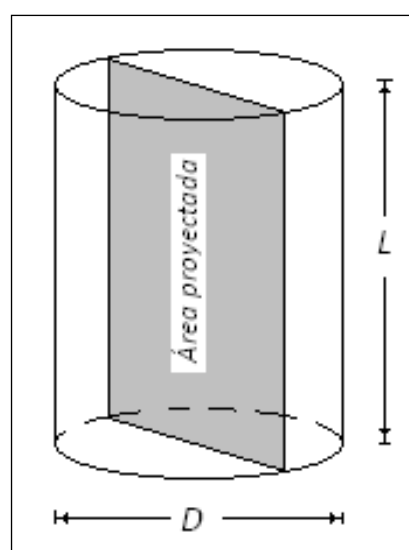
Las figuras 5.1.4.2 y 5.1.4.3, muestran la variación del coeficiente de arrastre total C_D , como función del número de Reynolds. Dicho número se basa en el diámetro exterior del cilindro o de la esfera.

Ejemplo 5.1.4.1.2

Estime la fuerza de arrastre que experimenta un cilindro con su eje normal al flujo de agua. El cilindro tiene un diámetro de 7 cm y una longitud de un metro. La velocidad de la corriente libre de agua es de 4 m/s y su temperatura de 10 °C.

Solución:

Las propiedades del agua a $T_\infty = 10^\circ\text{C}$.



$$\rho = 998 \text{ kg/m}^3.$$

$$\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

Para un cilindro circular el área proyectada es; $A = DL$

La fuerza de arrastre esta dada por la expresión:

$$F_D = C_D \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right) A$$

Puesto que el coeficiente de fricción total es función del número de Reynolds, y el número de Reynolds se basa en el diámetro exterior del cilindro; se tiene:

$$Re = \frac{u_\infty D}{\nu} = \frac{(4)(0.07)}{(1.004 \times 10^{-6})} = 278,885$$

En la figura 5.1.4.1.1, con el valor del número de Reynolds, se obtiene el valor del coeficiente de fricción total, así:

$$C_D = 1.002$$

Entonces la fuerza de arrastre que experimenta el cilindro es:

$$F_D = 1.002 \left[\frac{998 (4)^2}{2} \right] (0.07)(1) = 560 \text{ N}$$

Fig. 5.1.4.2 Coeficiente de fricción Total para cilindros circulares en función del número de Reynolds, tomado de la referencia J. P. Holman, octava edición, página 205.

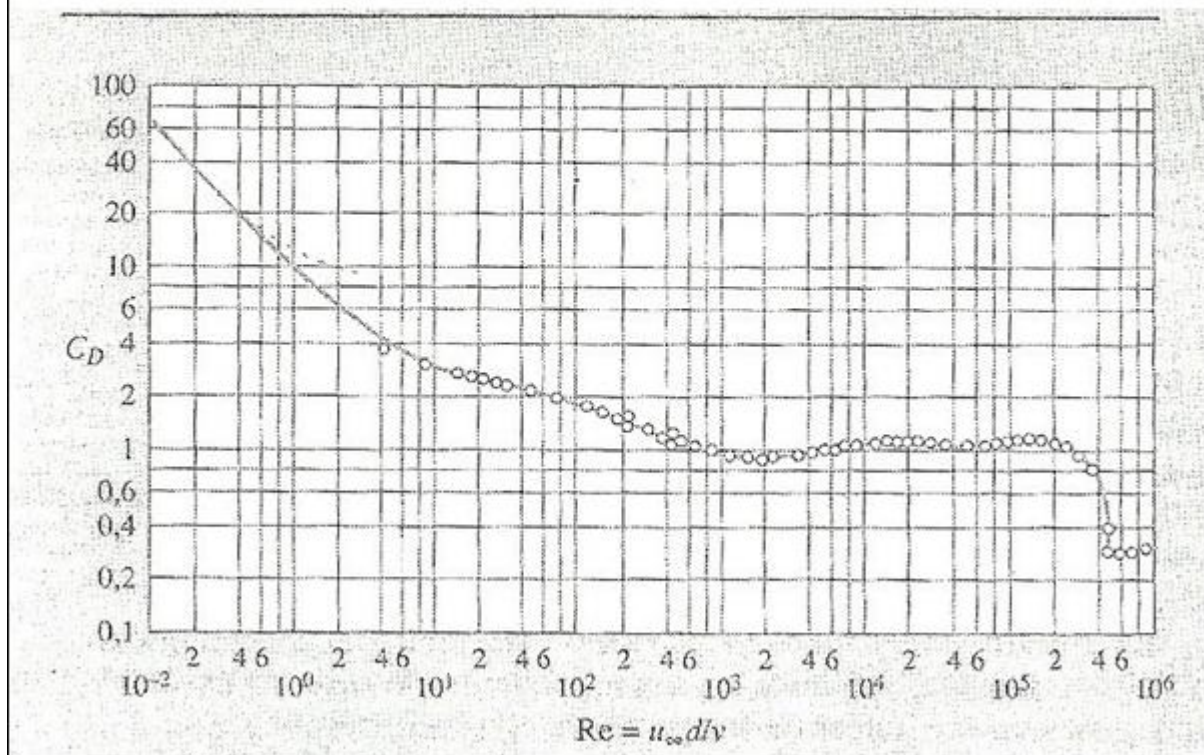
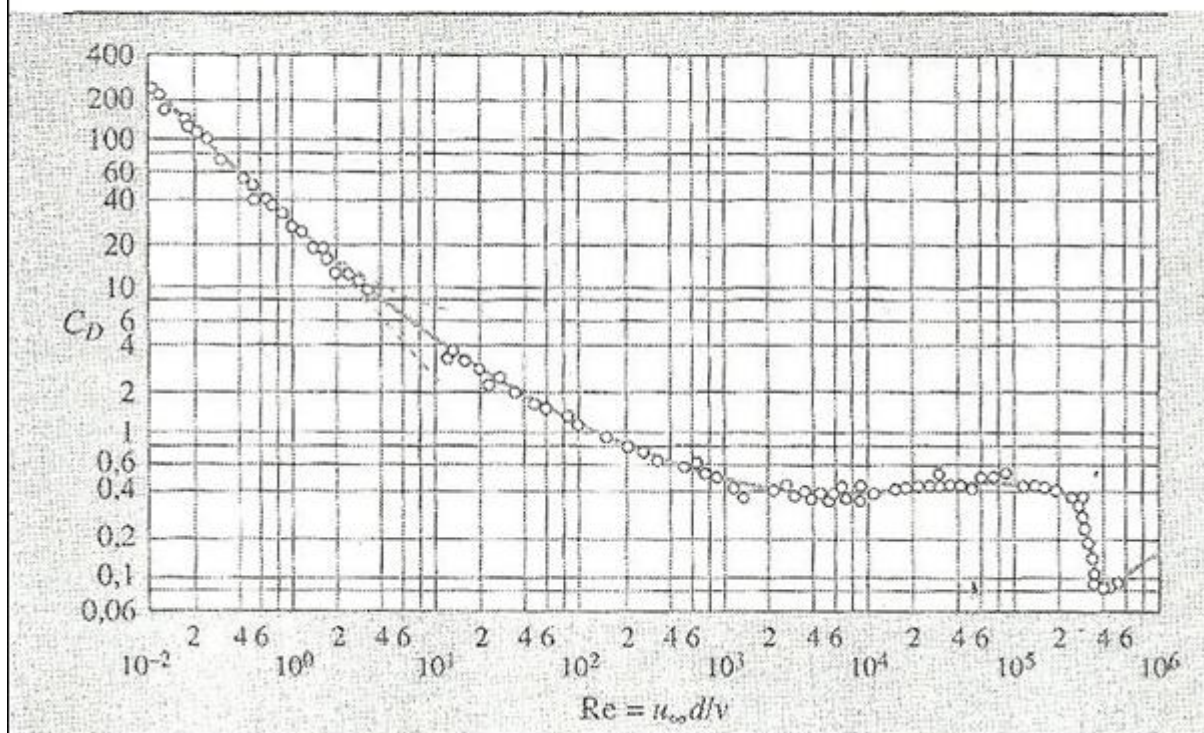


Fig. 5.1.4.3 Coeficiente de fricción total para esferas en función del número de Reynolds, tomado de la referencia J.P. Holman, página 205.



5.1.5 Fórmulas empíricas: Ductos, cilindros, esferas, bancos de tubos y en metales líquidos.

En las secciones anteriores estudiamos la transferencia de calor por convección, cuyo objetivo fue la determinación del coeficiente de transferencia de calor en superficies planas, tanto en flujos laminar como turbulento. Asimismo, se estableció el hecho de la determinación de este coeficiente mediante el método integral y el diferencial, notando que la diferencia entre los resultados obtenidos en ambos métodos, no es significativo. Por tanto se utilizaron los resultados del método integral en la solución de los problemas correspondientes a esas secciones. También se hizo hincapié, en las correlaciones empíricas utilizadas en algunos casos y obtenidas a partir de la experimentación y no en forma analítica.

Como en el caso de las superficies planas, en los ductos y cilindros se requiere determinar el número de Reynolds para saber si se trata de un flujo laminar o turbulento. Dicho número está en función de las propiedades del fluido, como son la densidad, la velocidad de corriente libre, la longitud característica y la viscosidad dinámica del fluido o la viscosidad cinemática.

Sabemos que el número de Reynolds, puede interpretarse como el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de corte viscosas. En flujos laminares las fuerzas inerciales dominan a las fuerzas viscosas. El flujo dentro de tubos circulares es siempre laminar para un número de Reynolds menor de 2300. Si es mayor entonces el flujo resulta turbulento. En general se toman valores comprendidos entre 2300 y 4000 para indicar la transición entre el flujo laminar y turbulento. Pero el número de Reynolds crítico en el que comienza la transición laminar a turbulenta igual a 2300.

En ésta sección corresponde estudiar el caso de los flujos internos en ductos circulares, así como el flujo externo en cilindros de sección circular; tanto en flujo laminar como turbulento. Aunado al caso de las esferas con flujo externo y bancos de tubos, como compete a los intercambiadores de calor tipo tubular.

En todos estos casos, el objetivo principal es la determinación del coeficiente convectivo de calor, el cual servirá posteriormente para calcular el flujo de calor transferido. Además, es importante recordar que las propiedades del fluido en el caso de la superficie plana, se evalúan a la temperatura de película, y en el caso de ductos es mejor utilizar la temperatura en bulto.

La temperatura en bulto (T_b), se define como la temperatura promedio del fluido, en una sección transversal dada del ducto. Dicho en otras palabras, si se pudiera capturar en una taza, durante una pequeña fracción de tiempo, todo el fluido que se encuentre almacenado en una sección transversal del ducto, y se mezclara completamente; la temperatura resultante sería la temperatura en bulto T_b .

Dicha temperatura varía de una sección transversal del tubo a otra, y se define como;

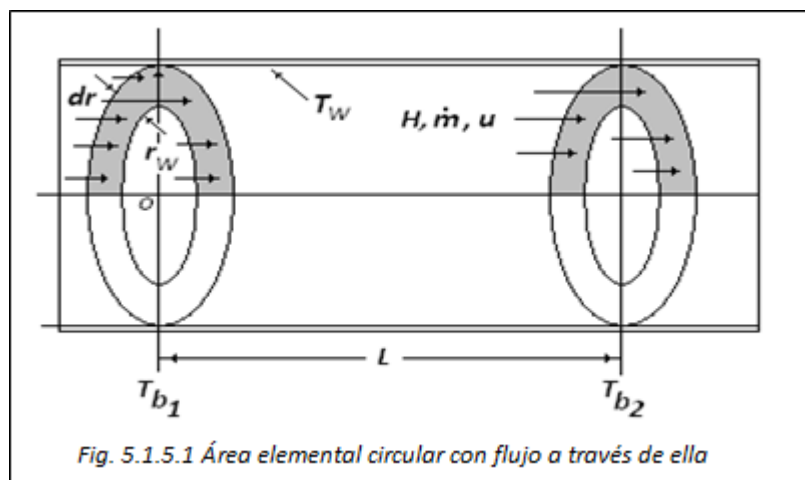
$$T_b = \frac{\text{Energía térmica total atravesando una sección del tubo en una unidad de tiempo}}{\text{Capacidad calorífica del fluido atravesando la misma sección en una unidad de tiempo.}}$$

Matemáticamente se expresa:

$$T_b = \frac{\int_0^{r_w} (c_p T)(\rho u)(2\pi r dr)}{\int_0^{r_w} (\rho u c_p)(2\pi r dr)}$$

En esta expresión el numerador tiene como unidades el W , y el denominador W/K , de tal modo que las unidades para la temperatura en bulto T_b , es el kelvin o centígrado. En otras palabras, el numerador indica la energía o entalpía asociada con la masa por unidad de tiempo que atraviesa la sección del tubo, y el denominador representa la capacidad calorífica del fluido que cruza a través de la sección transversal

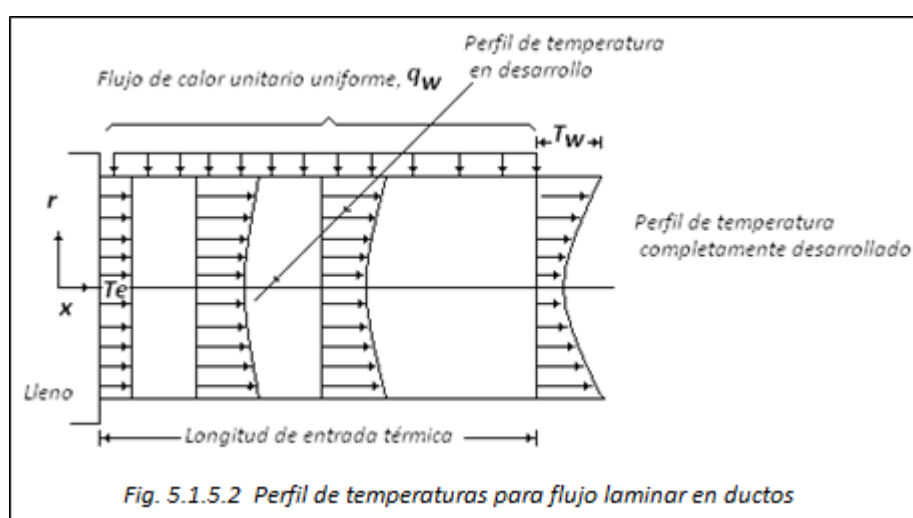
del tubo, como se indica en la figura 5.1.5.1. En la figura se observan dos secciones transversales, en las cuales la diferencia de temperaturas entre la de bulto y la de la pared del tubo, es constante. Obsérvese también, que las temperaturas en bulto T_{b1} , y T_{b2} , están separadas por una distancia L , que corresponde a una sección longitudinal del tubo. Es decir la temperatura en bulto varía según la distancia que exista entre dos secciones transversales del tubo.



Fórmulas empíricas en el interior de ductos circulares, en régimen laminar.

Consideremos el caso de un fluido que entra a un ducto a una temperatura uniforme T_e , y cuya pared, recibe un flujo de calor unitario constante uniformemente distribuido q_w , sobre ella. Es de esperar, que cuando el fluido avanza a través del ducto, su temperatura en bulto T_b aumenta y la distribución de temperatura sufre un cambio, como se ilustra en la figura 5.1.5.2.

Como se observa en la figura, al ir avanzando el fluido en el interior del ducto, la forma de la curva va cambiando hasta lograr un estado, en el cual no refleja cambio alguno, y por tanto se dice que se ha establecido un perfil de temperatura completamente desarrollado. La distancia recorrida por el fluido, desde la entrada hasta el nuevo estado alcanzado, se denomina **longitud de entrada térmica**.



Un perfil de temperatura completamente desarrollado, no significa que la temperatura del fluido no cambie, al movernos corriente abajo. De hecho, la temperatura crece, debido a que el fluido está recibiendo un flujo de calor unitario constante q_w . Para distancias mayores que la longitud de entrada

térmica la diferencia entre la temperatura de la pared del tubo T_w , y la temperatura en bulto del fluido T_b , se mantiene constante.

Siegel y colaboradores [3] resolvieron este problema directamente obteniendo los siguientes resultados;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{u}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

La ecuación diferencial anterior gobierna el proceso, y se obtiene del principio de conservación de la energía para flujo completamente desarrollado a través de un tubo o ducto de sección circular. La condición de frontera que satisface dicha ecuación, consiste en que el calor unitario q_w que pasa radialmente hacia el interior, es igual al calor transferido por conducción al fluido, es decir:

$$q_w = - \left(-k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \text{ en } r = r_w$$

El signo menos que aparece enfrente del término $\left(-k \frac{\partial T}{\partial r} \right)$, indica que el flujo de calor es dirigido radialmente hacia el interior y k , es la conductividad térmica del fluido.

Puesto que el fluido recibe un flujo de calor unitario uniforme, es de esperar que su temperatura en bulto crezca linealmente a lo largo de la dirección del flujo del fluido. Esto es;

$$\frac{dT_b}{dx} = \text{Constante}$$

Mediante el proceso matemático mostrado en la referencia [3] (Karlekar & Desmond), se obtiene que la temperatura en bulto para régimen laminar en una sección cualquiera de un tubo está dada por la expresión.

$$T_b = T_o + \frac{7}{24} \left(\frac{q_w r_w}{k} \right)$$

Donde T_o , es la temperatura en la línea central del tubo, es decir, en $r = 0$, y r_w , es el radio interior del tubo.

Además, el número de Nusselt para un tubo está dado por la expresión:

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

En esta expresión, D es el diámetro interior del tubo.

Se sabe que en la interfaz tubo fluido, el calor por conducción es igual al calor por convección, de tal suerte que:

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_w} = h(T_w - T_b)$$

O bien;

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{(T_w - T_b)} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_w}$$

Combinando las ecuaciones encontradas durante el proceso, finalmente se obtiene:

$$\frac{h}{k} = \frac{24}{11} \left(\frac{1}{r_w} \right)$$

Por lo tanto el número de Nusselt está dado por;

$$N_u = \frac{hD}{k} = \frac{2hr_w}{k} = \frac{48}{11} = 4.364 \dots \dots \text{ ec. 5.1.5.1}$$

La ecuación 5.1.5.1., calcula el número de Nusselt para **flujo de calor constante en la pared del tubo**, para **régimen laminar**.

El número de Nusselt para un ducto con **flujo laminar con la temperatura constante en la pared del tubo**, según **Kays** [3], es:

$$N_u = \frac{hD}{k} = 3.568 \dots \dots \text{ ec. 5.1.5.2.}$$

Ejemplo 5.1.5.1

Fluye agua a 25 °C en un tubo cuyo diámetro interior es de 2 cm, a una razón de $2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Si dicho tubo recibe un flujo de calor unitario uniforme de 1250 W/m en la pared, determine: a) La diferencia de temperatura entre la pared del tubo y la línea central, b) La temperatura en bulto, c) La razón con que cambia la temperatura de una sección a otra, d) El coeficiente de transferencia de calor.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, las propiedades del fluido son constantes en el rango de temperatura dado, el perfil de temperatura está completamente desarrollado y no se consideran los efectos de entrada del fluido.

Las propiedades del agua saturada a 25 °C, son:

$$\mu = 8.91 \times 10^{-4} \text{ kg/m.s}$$

$$k = 0.607 \text{ W/m} - \text{K}$$

$$c_p = 4180 \text{ J/kg} - \text{K}$$

$$\rho = 997 \text{ kg/m}^3$$

Comprobando si el flujo es laminar.

$$u_{promedio} = \frac{\text{Razón de flujo volumétrico}}{\text{Área de la sección}} = \frac{2.5 \times 10^{-5}}{\frac{\pi(0.02)^2}{4}} = 0.0796 \text{ m/s}$$

Entonces;

$$Re = \frac{\rho u_p D}{\mu} = \frac{(997)(0.0796)(0.02)}{(8.91 \times 10^{-4})} = 1781 < 2300 \text{ Laminar.}$$

a) La diferencia de temperaturas entre la pared del tubo y la línea central está dada por la expresión:

$$T - T_o = \left(\frac{q_w r_w}{k} \right) \left[\left(\frac{r}{r_w} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_w} \right)^4 \right]$$

$$\text{En } r = r_w, \quad T = T_w$$

Y la expresión anterior se convierte, en:

$$T_w - T_o = \left(\frac{q_w r_w}{k} \right) \left[\left(\frac{r_w}{r_w} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r_w}{r_w} \right)^4 \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{q_w r_w}{k} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{1250 \times 0.01}{0.607} \right) = 15.45 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) La temperatura en bulto en la sección del tubo, es:

$$T_b = T_o + \frac{7}{24} \left(\frac{q_w r_w}{k} \right) = T_o + \frac{7}{24} \left(\frac{1250 \times 0.01}{0.607} \right)$$

$$T_b = (T_o + 6) \text{ } ^\circ\text{C}$$

c) La razón con la que cambia la temperatura de una sección a otra:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{4q_w \alpha}{u_0 r_w k} = \frac{4q_w}{u_0 r_w k} \left(\frac{k}{\rho c_p} \right) = \frac{4q_w}{u_0 r_w (\rho c_p)}$$

$$u_0 = 2u_{promedio} = 2(0.0796) = 0.16 \text{ m/s}$$

Por tanto;

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{4q_w}{u_0 r_w (\rho c_p)} = \frac{(4)(1250)}{(0.16)(.01)(997 \times 4180)} = 0.75 \text{ } ^\circ\text{C/m}$$

d) El coeficiente convectivo de calor es:

$$h = 4.364 \frac{k}{D} = \frac{(4.364)(0.607)}{(0.02)} = 132.45 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}.$$

Ejemplo 5.1.5.2

El valor promedio del número de Nusselt es de 4.6, para flujo laminar a través de un tubo cuyo diámetro es de 25 mm. Determine el coeficiente de transferencia de calor si el fluido en el tubo es: a) Aire, b) Agua y c) Aceite para motor. La temperatura para la evaluación de las propiedades del fluido se toma como 40 °C.

Solución:

Se acepta flujo laminar y estado estacionario, las propiedades del fluido se evalúan a 40 °C.

Aire: $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$k = 0.02662\text{ W/m} - K$$

Agua: $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$k = 0.631\text{ W/m} - K$$

Aceite para motor: $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$k = 0.1444\text{ W/m} - K$$

Como:

$$Nu_p = \frac{\bar{h}D}{k} = 4.6$$

a) Aire:

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{(4.6)(0.02662)}{(0.025)} = 4.9\text{ W/m}^2 - K$$

b) Agua:

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{(4.6)(0.631)}{(0.025)} = 116\text{ W/m}^2 - K$$

c) Aceite para motor:

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{(4.6)(0.1444)}{(0.025)} = 26.5\text{ W/m}^2 - K$$

Otra correlación empírica para flujo laminar con **temperatura de pared constante**, se debe a **Hausen** [3], cuya expresión para el cálculo del número de Nusselt promedio está representada por:

$$Nu_p = 3.66 + \frac{0.0668(D/L)RePr}{1 + 0.04[(D/L)RePr]^{2/3}} \dots\dots\dots \text{ec. 5.1.5.3.}$$

La ecuación 5.1.5.3., calcula el valor promedio del número de Nusselt como función de la longitud **L**, del tubo. El producto del Reynolds por el Prandtl, se conoce como el número de **Peclet** ($P_e = RePr$).

Además el flujo debe estar completamente desarrollado y las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media o promedio entre dos secciones transversales del tubo separadas una distancia **L**. Y el calor transferido por la pared del tubo al fluido se calcula con la ley de enfriamiento de Newton.

$$q = \bar{h}(\pi DL)(T_w - T_m)$$

Donde:

T_w = temperatura de la pared en °C.

$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = \text{Temperatura media o promedio en } ^\circ\text{C}.$$

Seider y Tate [4], sugirieron la siguiente relación para flujo laminar a través de tubos, con **temperatura constante en la pared**, las condiciones para el empleo de esta relación son las mismas que se establecieron para ecuación 5.1.5.3, salvo μ_w que se evalúa a la temperatura de la pared del tubo.

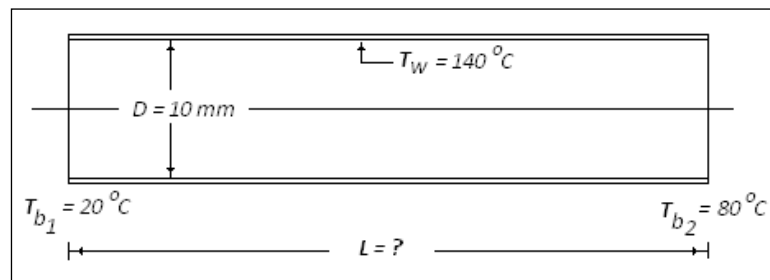
$$Nu_p = 1.86(R_e P_r)^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \dots \quad \text{ec. 5.1.5.4.}$$

Ejemplo 5.1.5.3

A través de un tubo cuyo diámetro interior es de 10 mm fluye aire a una velocidad promedio de 2 m/s. La temperatura en bulto del aire es de 20 °C en la sección de entrada del tubo. La pared del tubo se mantiene a 140 °C. Estime la longitud de tubo necesaria para calentar el aire a una temperatura en bulto de 80 °C.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo está completamente desarrollado, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto.



$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = \frac{80 + 20}{2} = 50^\circ\text{C}$$

$$\mu = 1.963 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$$

$$k = 0.02735 \text{ W/m} - \text{K}$$

$$c_p = 1007 \text{ J/kg} - \text{K}$$

$$\rho = 1.092 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 1.798 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$P_r = 0.7228$$

$$T_w = 140^\circ\text{C}$$

$$u_p = 2 \text{ m/s}$$

Calculo del número de Reynolds.

$$Re = \frac{u_p D}{\nu} = \frac{(2)(0.01)}{(1.798 \times 10^{-5})} = 1,112.35 < 2300 \text{ Laminar.}$$

Por simplicidad en la solución, se puede utilizar la ecuación de **Seider y Tate**:

$$Nu_p = 1.86(Re Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

Donde μ_w , se evalúa a la temperatura de la pared del tubo ($T_w = 140^\circ\text{C}$), $\mu_w = 2.345 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$

$$Nu_p = 1.86(Re Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} = \frac{1.86}{L^{1/3}} (Pr)^{1/3} (D)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

$$Nu_p = \frac{1}{L^{1/3}} (Pr)^{1/3} (D)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} = \frac{1.86}{L^{1/3}} (804)^{1/3} (0.01)^{1/3} \left(\frac{1.963 \times 10^{-5}}{2.345 \times 10^{-5}}\right)^{0.14} = \frac{3.64}{L^{1/3}}$$

$$Nu_p = \frac{\bar{h}D}{k} = \frac{3.64}{L^{1/3}}$$

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{3.64}{L^{1/3}} \left(\frac{0.02735}{0.01}\right) = \frac{9.94}{L^{1/3}} \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

Mediante un balance de energía, para un proceso adiabático, se tiene que el calor que disipa la pared del tubo por convección es igual al calor que absorbe el aire para elevar su temperatura en bulto desde 20°C hasta 40°C , así:

$$q = \bar{h}(\pi DL)(T_w - T_m) = \dot{m}c_p(T_{b2} - T_{b1})$$

Sustituyendo el valor de $\bar{h}$, en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{9.94}{L^{1/3}} (\pi DL)(T_w - T_m) = \dot{m}c_p(T_{b2} - T_{b1})$$

O bien

$$9.94(\pi D)L^{2/3}(T_w - T_m) = \dot{m}c_p(T_{b2} - T_{b1})$$

Donde el flujo másico se puede calcular a la entrada del tubo;

$$\dot{m} = \rho u_p A = (1.092)(2) \left[\frac{\pi}{4}(0.01)^2\right] = 1.715 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Entonces la longitud del tubo necesaria es:

$$L^{2/3} = \frac{\dot{m}c_p(T_{b2} - T_{b1})}{9.94(\pi D)(T_w - T_m)} = \frac{(1.715 \times 10^{-4})(1007)(80 - 20)}{9.94 \pi (0.01)(140 - 50)} = 0.369$$

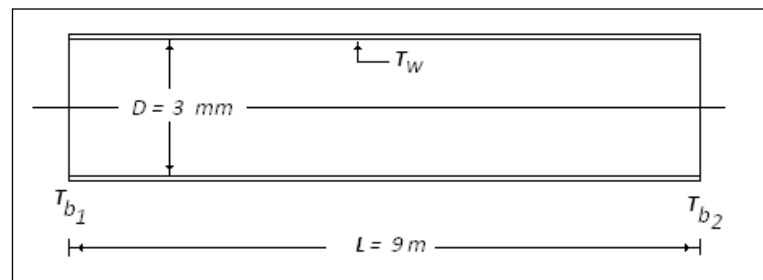
$$L = 0.225 \text{ m}$$

Ejemplo 5.1.5.4

Fluye agua en forma estacionaria con una temperatura media de 5 °C en un tubo horizontal de 3 mm de diámetro interior y 9 m de longitud, a una velocidad promedio de 1 m/s. Determine la caída de presión y potencia de bombeo que se requiere para vencer esta caída de presión.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo está completamente desarrollado, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto. El tubo no contiene componentes como codos, válvulas o conectores.



$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = 5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho = 999.9 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.519 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$u_p = 1 \text{ m/s}$$

Cálculo del número de Reynolds.

$$R_e = \frac{\rho u_p D}{\mu} = \frac{(999.9)(1)(0.003)}{1.519 \times 10^{-3}} = 1975 < 2300 \text{ Flujo laminar.}$$

Cálculo del factor de fricción:

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1975} = 0.0324$$

Cálculo de la caída de presión:

$$\Delta P = f \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{\rho u_p^2}{2} \right) = \frac{(0.0324)(9)(999.9)(1)^2}{(0.003)(2)} = 48,602.7 \text{ Pa} = 48.6 \text{ kPa}$$

Cálculo de la potencia de bombeo;

$$G = u_p A = (1) \left(\frac{\pi}{4} \right) (0.003)^2 = 7.069 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{W}_B = (G)(\Delta P) = (7.069 \times 10^{-6})(48,602.74) = 0.344 \text{ W}$$

Éste es el trabajo de bombeo requerido para vencer las pérdidas por fricción en el flujo debidas a la viscosidad.

Fórmulas empíricas en el interior de ductos circulares, en régimen turbulento.

Deissler y Sparrow han obtenido soluciones analíticas para el cálculo del **Número de Nusselt promedio** en un flujo completamente desarrollado, para números de Reynolds mayores de 2300, en un tubo circular con **flujo de calor unitario uniforme** en la pared.

Para estos investigadores, las propiedades del fluido son constantes y con el **número turbulento de Prandtl** igual a la unidad. **Webb** [3] ha demostrado que los resultados de **Deissler** [4], pueden expresarse en la siguiente forma:

$$Nu_p = \frac{(f/8)RePr}{1.07 + 9(\sqrt{f/8})(Pr - 1)Pr^{-1/4}} \dots \text{ ec. 5.1.5.5}$$

En esta expresión **f**, es el factor de fricción para flujo turbulento a través del tubo, así:

$$\sqrt{\frac{f}{8}} = 2.78 \ln \left(Re \sqrt{\frac{f}{8}} \right) - 0.39$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura en bulto media, entre la entrada y la salida.

Petukhov y Popov [4] obtuvieron una solución analítica para el cálculo del **número de Nusselt promedio** en flujo completamente desarrollado con **flujo de calor unitario uniforme**. La cual tiene preferencia sobre la ec. 5.1.5.5.

$$Nu_p = \frac{(f/8)RePr}{1.07 + 12.7(\sqrt{f/8})(Pr^{2/3} - 1)} \dots \text{ ec. 5.1.5.6}$$

Esta expresión es válida para cuando ($0.5 \leq Pr \leq 200$). Y el factor de fricción se calcula con la ecuación de **Filomenko** [3]. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura en bulto media, entre la entrada y la salida.

$$f = [1.82 \log_{10}(Re) - 1.64]^{-2}$$

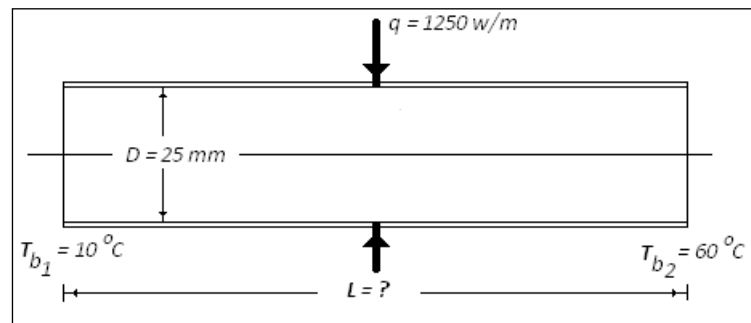
Las ecuaciones 5.1.5.5 y 5.1.5.6, no son muy sensibles a las condiciones térmicas en la superficie del tubo, y se pueden usar tanto para **flujo de calor unitario uniforme** como para **temperatura constante en la pared**.

Ejemplo 5.1.5.5

Fluye agua a través de un tubo de cobre cuyo diámetro interior es de 25 mm a razón de $9.5 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. La temperatura en bulto del agua a la entrada es de 10 °C, la pared del tubo recibe un flujo de calor unitario uniforme de 3845 W/m. Determine la longitud de tubo requerida para calentar el agua a una temperatura en bulto de 60 °C, y calcule el valor promedio de $(T_w - T_b)$.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, los perfiles de temperatura y de velocidad están completamente desarrollados, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto.



Cálculo de la velocidad promedio;

$$u_p = \frac{\text{Razón de flujo volumetrico}}{\text{Área de la sección}}$$

$$u_p = \frac{9.5 \times 10^{-5}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.025)^2} = 0.194 \text{ m/s}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura promedio en bulto, para el agua.

$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = \frac{60 + 10}{2} = 35 \text{ °C}$$

$$\mu = 0.720 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$k = 0.623 \text{ W/m - K}$$

$$c_p = 4178 \text{ J/kg - K}$$

$$\rho = 994 \text{ kg/m}^3$$

$$P_r = 4.83$$

$$q_w = 1250 \text{ W/m}$$

Calculo del número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho u_p D}{\mu} = \frac{(994)(0.194)(0.025)}{(0.720 \times 10^{-3})} = 6696 > 2300 \text{ Turbulento}$$

Utilizando la ecuación 5.1.5.2.2., se tiene:

$$Nu_p = \frac{(f/8)ReP_r}{1.07 + 12.7(\sqrt{f/8})(P_r^{2/3} - 1)}$$

Calculando f , mediante la ecuación de Filomenko.

$$f = \frac{1}{[1.82 \log_{10}(Re) - 1.64]^2} = 0.0353$$

Sustituyendo, en la ec. de Filomenko,

$$Nu_p = \frac{(0.0353/8)(32,342)}{1.07 + 12.7(\sqrt{0.0353/8})(4.83^{2/3} - 1)} = 54.12$$

Entonces:

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{(54.12)(0.623)}{(0.025)} = 1349 \text{ W/m}^2 - K$$

EL calor total absorbido por el agua desde la temperatura en bulto a la entrada y la de salida en bulto, es:

$$\dot{m} = (9.5 \times 10^{-5})(1000) = 0.095 \text{ kg/s}$$

$$q = \dot{m} c_p (T_{b2} - T_{b1}) = (T_{b2} - T_{b1}) = (0.095)(4178)(60 - 10) = 19,845.5 \text{ W}$$

$$L = \frac{q}{q_w} = \frac{19,485.5}{3845} = 5 \text{ m}$$

La diferencia promedio de temperatura entre la pared del tubo y la temperatura en bulto se puede calcular considerando el flujo de calor cedido por unidad de longitud del tubo.

$$q_w L = \bar{h}(T_w - T_b)_p (\pi D L)$$

$$(T_w - T_b)_p = \frac{q_w}{\bar{h}(\pi D)} = \frac{3845}{(1349)(\pi)(0.025)} = 36.3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Para **flujo turbulento** a través de ductos, se han aceptado ciertas correlaciones empíricas, **para temperatura constante en la pared** y flujo completamente desarrollado. Dichas correlaciones empíricas, se presentan a continuación.

Dittus y Boelter [4], recomendaron las siguientes expresiones para flujos completamente desarrollados en tubos lisos; para calentamiento y enfriamiento respectivamente. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media en bulto.

$$Nu_p = 0.023 Re^{0.8} Pr^n \dots \dots \text{ ec. 5.1.5.7}$$

El exponente ***n***, que aparece en la expresión anterior tiene un valor 0.4 para calentamiento y 0.3 para enfriamiento.

La ecuación 5.1.5.7, puede usarse con gran exactitud para cuando la diferencia de temperaturas entre la del tubo y la media en bulto no sean muy grande, y $0.6 < Pr < 120$.

Otra correlación que puede ser usada, por su popularidad es la de Colburn [4], la cual al igual que las anteriores, es para flujo completamente desarrollado y calentamiento y enfriamiento en tubos lisos. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media en bulto.

$$Nu_p = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3} \dots \dots \text{ ec. 5.1.5.8}$$

Otras correlaciones no menos utilizadas, aparecen en la **referencia Handbook of heat transfer, McGraw Hill Book Company 1973**.

$$Nu_p = 0.022Re^{0.8}Pr^{0.6} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.9}$$

$$Nu_p = 0.021Re^{0.8}Pr^{0.6} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.10}$$

La ec. 5.1.5.9, es para flujo de calor unitario uniforme y la 5.1.5.10, para temperatura de la pared constante. Las propiedades del fluido se evalúan para ambas correlaciones a la temperatura media en bulto.

Seider y Tate [4], consideraron la variación insignificante de la viscosidad en un líquido, cuando éste cambia su temperatura y recomendaron la siguiente correlación con el fin de tomar en cuenta dicho cambio en la viscosidad, en flujo turbulento completamente desarrollado.

$$Nu_p = 0.027Re^{0.8}Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.11}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media en bulto, excepto μ_w , que se evalúa a la temperatura de pared del tubo.

Una correlación más reciente para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor en función del número de Nusselt promedio para flujo turbulento completamente desarrollado, fue propuesta por **Petukhov y Popov** [4].

$$Nu_p = \frac{(f/8)RePr}{1.07 + 12.7(\sqrt{f}/8)(Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^n \dots \text{ec. 5.1.5.12}$$

Esta ecuación es similar a la ec. 5.1.5.6, la cual corresponde a flujo de calor unitario uniforme. Sin embargo puede ser aplicada para **temperatura de pared de tubo constante**, al agregarle el cociente de las viscosidades del fluido evaluadas tanto a la temperatura media en bulto, como a la temperatura de pared del tubo.

El exponente n , adquiere los valores de **0.11** para calentamiento y **0.25** para enfriamiento de líquidos. También puede ser utilizada para el caso de calentamiento y enfriamiento de gases, tan solo con hacer el valor de $n = 0$. El factor de fricción f , se calcula también con la ecuación de **Filomenko**, para el caso tubos lisos.

$$f = \frac{1}{[1.82 \log_{10}(Re) - 1.64]^2}$$

En el caso de tubos rugosos, el factor de fricción puede encontrarse a través del *diagrama de Moody* [1].

La ecuación 5.1.5.12, se utiliza dentro de las siguientes restricciones; y es recomendada para grandes diferencias de temperatura entre la de pared del tubo y la media en bulto.

$$0.08 \leq \frac{\mu}{\mu_w} \leq 40$$

$$5 \times 10^3 \leq Re \leq 1.25 \times 10^5$$

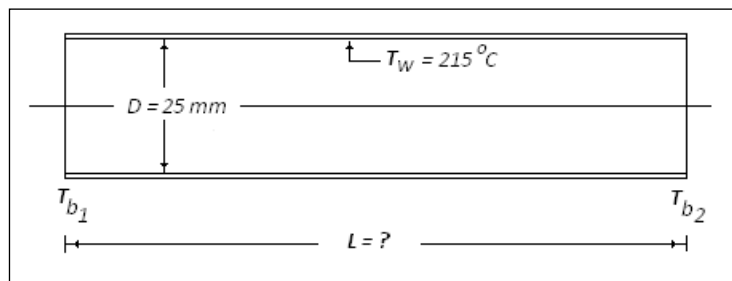
$$0.5 \leq Pr \leq 200$$

Ejemplo 5.1.5.7

Aire a 2 atmósferas y con una temperatura media en bulto de 200 °C, se calienta al pasar por un tubo de 25 mm de diámetro interior. La pared del tubo se mantiene constante en 215 °C. Si la velocidad promedio del aire es de 6 m/s. Calcule el flujo de calor por unidad de longitud, transferido desde la pared del tubo al aire.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo está completamente desarrollado, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto.



$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = 200 \text{ °C}$$

$$\mu = 2.577 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$$

$$k = 0.03779 \text{ W/m-K}$$

$$c_p = 1023 \text{ J/kg-K}$$

$$Pr = 0.6974$$

$$T_w = 215 \text{ °C}$$

$$u_p = 6 \text{ m/s}$$

Puesto que la densidad del aire se ve afectada por la presión, recurriendo a la ecuación del gas ideal, se tiene:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{(2)(1.0132 \times 10^5)}{(287)(473)} = 1.493 \text{ kg/m}^3$$

Y la viscosidad cinemática, es

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) = 1.727 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Calculo del número de Reynolds.

$$Re = \frac{u_p D}{\nu} = \frac{(6)(0.025)}{(1.727 \times 10^{-5})} = 8,685.5 > 2300 \text{ Turbulento.}$$

Dado que el flujo es turbulento, además de notar que el fluido es un gas y la temperatura de pared del tubo es constante, se recomienda utilizar la ecuación de **Dittus y Boelter** [4], observando también que la diferencia de temperaturas entre la media en bulto y la de la pared es solo de 15 °C. El exponente n , adopta el valor de 0.4 debido a que la temperatura de pared de tubo es mayor que la del aire (calentamiento).

$$Nu_p = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 0.023(8,685.5)^{0.8} (0.6974)^{0.4} = 28.2$$

Entonces;

$$\bar{h} = \frac{Nu_p k}{D} = \frac{(28.2)(0.03779)}{(0.025)} = 42.62 \text{ W/m}^2 - K$$

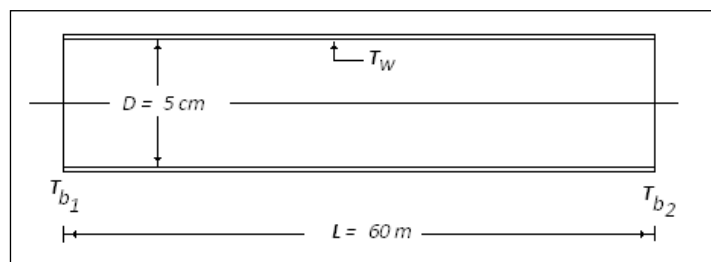
$$\frac{q}{L} = \bar{h}(\pi D)(T_w - T_m) = (42.62)(\pi)(0.025)(215 - 200) = 50.21 \text{ W/m}$$

Ejemplo 5.1.5.8

Fluye agua a una temperatura media de 15 °C en un tubo horizontal de 5 cm de diámetro interior, fabricado de acero inoxidable, a razón de $5.67 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Determine la caída de presión y la potencia de bombeo requerida para mantener el flujo en 60 m de tubería. Considere que la rugosidad del tubo es de 0.002 mm.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo está completamente desarrollado, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto.



$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.138 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$G = 5.67 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Cálculo de la velocidad promedio.

$$u_p = \frac{G}{A} = \frac{5.67 \times 10^{-3}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.05)^2} = 2.9 \text{ m/s}$$

Cálculo del número de Reynolds.

$$R_e = \frac{\rho u_p D}{\mu} = \frac{(999.1)(2.9)(0.05)}{1.138 \times 10^{-3}} = 127,302 > 2300 \text{ (Flujo turbulento)}.$$

El cálculo del factor de fricción considerando la aspereza del tubo, puede determinarse de acuerdo al diagrama de Moody utilizando el número de Reynolds; o bien para evitar error en la lectura puede determinarse de acuerdo a la ecuación de **Colebrook** [4].

Determinación de la rugosidad relativa del tubo.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.002}{50} = 4 \times 10^{-5} = 0.00004$$

Determinación del factor de fricción mediante la ecuación de **Colebrook**.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{0.00004}{3.7} + \frac{2.51}{(127,302)\sqrt{f}} \right)$$

Mediante un proceso iterativo se obtiene que:

$$f = 0.0174$$

Cálculo de la caída de presión:

$$\Delta P = f \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{\rho u_p^2}{2} \right) = \frac{(0.0174)(60)(999.1)(2.9)^2}{(0.05)(2)} = 87,721.4 \text{ Pa} = 87.72 \text{ kPa}$$

Cálculo de la potencia de bombeo;

$$\dot{W}_B = (G)(\Delta P) = (5.67 \times 10^{-3})(87,721.4) = 497.4 \text{ W}$$

Éste es el trabajo de bombeo requerido para vencer las pérdidas por fricción en el flujo debidas a la viscosidad.

Fórmulas empíricas en el interior de ductos circulares, para metales líquidos.

Cuando se trata de metales líquidos fluyendo en el interior de tubos o ductos las ecuaciones anteriores no aplican debido a que los números de **Prandtl** para los metales son muy bajos es decir; ($0.004 < P_r < 0.01$).

Lubarsky y Kaufman [4] recomiendan las siguientes correlaciones empíricas para números de Peclet comprendidos entre ($10^2 < P_e < 10^4$) y $L/D > 60$ con flujo completamente desarrollado en tubos lisos y con flujo de calor uniforme en la pared.

Para flujo de calor uniforme en la pared del tubo:

$$Nu = \frac{\bar{h}D}{k} = 0.625(RePr)^{0.4} \dots ec. 5.1.5.13$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media entre la entrada y la salida.

Seban y Shimasaky [4] propusieron la siguiente correlación empírica para metales líquidos con temperatura constante en la pared, para intervalos comprendidos entre ($Pe > 10^2$) y $L/D > 60$. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media entre la entrada y la salida.

Para temperatura constante en la pared del tubo:

$$Nu = 5.0 + 0.025(RePr)^{0.8} \dots ec. 5.1.5.14$$

Skupinshi, Tortel y Vautrey [4], propusieron una ecuación mejorada para mezclas de potasio y sodio en condiciones de flujo de calor constante, para intervalos definidos entre ($3.56 \times 10^4 < Re < 9.05 \times 10^5$) y ($10^2 < Pe < 10^4$). Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media entre la entrada y la salida.

Para flujo de calor uniforme en la pared del tubo:

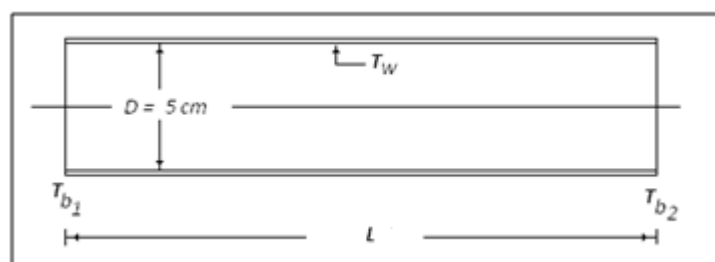
$$Nu = \frac{\bar{h}D}{k} = 4.82 + 0.0185(Pe)^{0.827} \dots ec. 5.1.5.15$$

Ejemplo 5.1.5.9

Por un tubo de acero inoxidable circulan 4.5 kg/s de bismuto líquido. El diámetro interior del tubo es de 5 cm. La temperatura de entrada es de 420 °C y la de salida es de 440 °C. A lo largo del tubo se mantiene un flujo de calor constante uniforme, el cual mantiene una temperatura en la pared del tubo de 20 °C mayor que la temperatura media del bismuto. Calcúlese la longitud de tubo necesaria para que se efectúe la transferencia de calor.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo está completamente desarrollado, las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura media, entre la de entrada y salida en bulto.



$$T_m = \frac{T_{b2} + T_{b1}}{2} = \frac{440 + 420}{2} = 430^\circ\text{C}$$

$$\mu = 1.352 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$c_p = 149.6 \text{ J/kg} - \text{K}$$

$$k = 16 \text{ W/m} - \text{K}$$

$$P_r = 0.01263$$

Cálculo del calor absorbido por el bismuto:

$$q = \dot{m}c_p(T_{b2} - T_{b1}) = (4.5)(149.6)(20) = 13,462.2 \text{ W}$$

Cálculo del número de Peclet:

$$\dot{m} = \rho u_p A$$

$$\rho u_p = \frac{\dot{m}}{A}$$

$$R_e = \frac{(\rho u_p)D}{\mu} = \frac{\dot{m}D}{A\mu} = \frac{(4)(4.5)(0.05)}{(\pi)(0.05)^2(1.352 \times 10^{-3})} = 84,757$$

$$P_e = R_e P_r = (84,757)(0.01263) = 1,070.65$$

Cálculo del coeficiente de transferencia de calor, usando la ecuación 5.1.5.15, se tiene:

$$N_u = \frac{\bar{h}D}{k} = 4.82 + 0.0185(P_e)^{0.827} = 4.82 + 0.0185(1,070.65)^{0.827} = 10.75$$

$$\bar{h} = \frac{N_u k}{D} = \frac{(10.75)(16)}{(0.05)} = 3,440 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

Cálculo del calor cedido por el tubo:

$$q = \bar{h}\pi DL(T_w - T_m) = (3,440)(\pi)(0.05)(450 - 430)(L) = 10,807L \text{ en W.m}$$

Igualando los calores, tenemos que la longitud del tubo es:

$$10,807L = 13,462.2$$

$$L = \frac{13,462.2}{10,807} = 1.25 \text{ m}$$

Fórmulas empíricas en el exterior de ductos circulares.

Debido a la compleja naturaleza de los procesos de separación de la corriente de flujo alrededor de cilindros o ductos circulares, no es posible calcular analíticamente el coeficiente promedio de transferencia de calor para flujo transversal (perpendicular al eje del cilindro); sin embargo existen algunas correlaciones empíricas de los datos experimentales de algunos investigadores en el caso de que el fluido sea un gas o un líquido, tanto para calentamiento como enfriamiento.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas se usa la correlación presentada por **Hilpert** [4], para gases, la cual indica que el coeficiente promedio de transferencia de calor alrededor de cilindros puede calcularse con la siguiente expresión.

$$\overline{N_u} = \frac{\bar{h}d}{k} = C \left(\frac{u_\infty d}{\nu} \right)^n P_r^{1/3} \dots \quad \text{ec. 5.1.5.16}$$

Las constantes **C** y **n** están tabuladas en la tabla 5.1.5.1, para diversos rangos del número de **Reynolds**.

Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película **T_f**, debido a que en el caso de gases el número de **Prandtl** puede disminuir.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

Donde **T_w** y **T_∞**, las temperaturas de la pared exterior del tubo y la temperatura de corriente libre del fluido respectivamente.

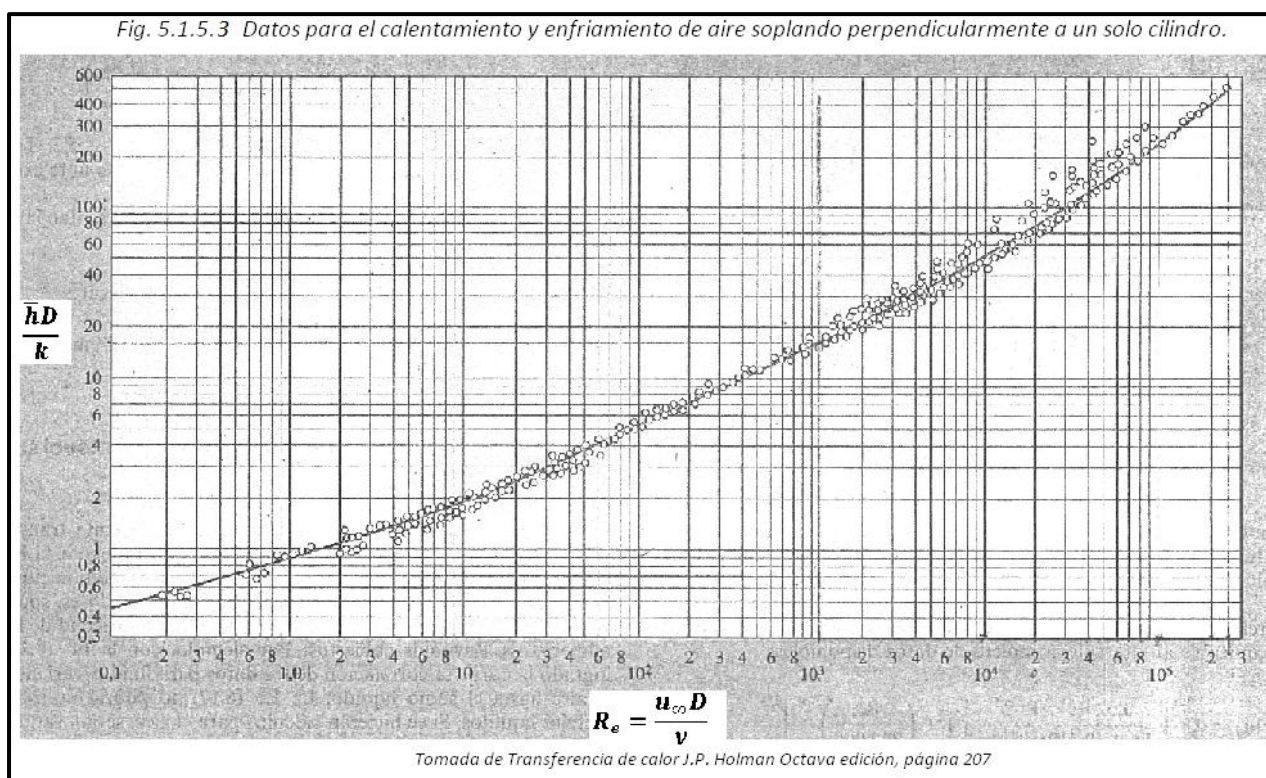
Los valores obtenidos para estas constantes están basados solo en los datos para el aire, ajustando con segmentos rectos una representación **log-log** como la ilustrada en la figura 5.1.5.3.

La misma correlación presenta **Knudsen y Katz** [3] para líquidos, solo que el resultado se multiplica por el factor de corrección (**F = 1.11**). El cual ha sido corroborado en la práctica.

Tabla 5.1.5.1 Constantes para utilizar en la correlación 5.1.5.16.

R_e	C	n
0.4-4.0	0.989	0.330
4.0-40	0.911	0.385
40-4,000	0.683	0.466
4,000-40,000	0.193	0.618
40,000-400,000	0.0266	0.805

Tomada de Transferencia de calor J.P.Holman, Octava edición, página 206.



Para el caso de gases, y números de Reynolds en intervalos más amplios que los ilustrados en la tabla 5.1.5.3, **Eckert y Drake** [4], recomiendan las siguientes correlaciones empíricas para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor en tubos con corriente transversal.

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = (0.43 + 0.50Re_e^{0.5})Pr_r^{0.38} \left(\frac{Pr_r}{Pr_w} \right)^{0.25} \dots \text{ec. 5.1.5.17}$$

Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película T_f , excepto Pr_w que se evalúa a la temperatura de la pared externa del tubo. Esta expresión puede usarse en intervalos comprendidos entre $(1 < Re < 10^3)$.

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.25Re_e^{0.6}Pr_r^{0.36} \left(\frac{Pr_r}{Pr_w} \right)^{0.25} \dots \text{ec. 5.1.5.18}$$

En la expresión anterior todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película T_f , excepto Pr_w que se evalúa a la temperatura de la pared externa del tubo. Esta expresión puede usarse en intervalos comprendidos entre $(10^3 < Re < 2 \times 10^5)$.

Churchill y Bernstein [4], presentaron para el caso de gases una correlación más amplia, aplicable al intervalo comprendido entre $(10^2 < Re < 10^7)$ y para $Pr_e > 0.2$.

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.3 + \frac{0.62 Re_e^{1/2} Pr_r^{1/3}}{[1 + (0.4/Pr_r)^{2/3}]} \left[1 + \left(\frac{Re_e}{282,000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \dots \text{ec. 5.1.5.19}$$

Para intervalos comprendidos entre ($20,000 < R_e < 400,000$) y para $P_e > 0.2$, **Churchill y Bernstein** [4], presentaron para el caso de gases la siguiente correlación mejorada.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.3 + \frac{0.62 R_e^{1/2} P_r^{1/3}}{[1 + (0.4/P_r)^{2/3}]} \left[1 + \left(\frac{R_e}{282,000} \right)^{1/2} \right] \dots \text{ec. 5.1.5.20}$$

En ambas expresiones las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película. Además, dichas ecuaciones incluyen fluidos como aire, agua y sodio líquido.

Withaker [3], proporciona otra ecuación de correlación para gases, en intervalos comprendidos entre ($40 < R_e < 10^5$), ($0.65 < P_r < 300$), y ($0.25 < \mu_\infty/\mu_w < 5.2$). Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de la corriente libre; excepto μ_w , que se evalúa a la temperatura de la pared del tubo.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = (0.4R_e^{0.5} + 0.06R_e^{2/3}) P_r^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w} \right)^{0.25} \dots \text{ec. 5.1.5.21}$$

Para números de **Peclet** por debajo de ($P_e = 0.2$), **Nakai y Okazaki** [3], presentan la siguiente relación para gases, en la cual todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = [0.8237 - (P_e^{1/2})]^{-1} \dots \text{ec. 5.1.5.22}$$

Otra correlación empírica no menos importante es la propuesta por **Fand** [3], válida para números de Reynolds en líquidos comprendidos en el rango ($10^{-1} < R_e < 10^5$), en los cuales no aparece turbulencia excesiva en la corriente libre, y flujo perpendicular al eje del cilindro. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de la corriente libre, debido a que el número de **Prandtl** se mantiene casi constante.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = (0.35 + 0.56R_e^{0.52}) P_r^{0.3} \dots \text{ec. 5.1.5.23}$$

Ejemplo 5.1.5.10

Alrededor de un cilindro de 25 mm de diámetro fluye aire a la presión atmosférica y con una temperatura de 15 °C, a una velocidad de 10 m/s. La temperatura en la superficie del cilindro es de 65 °C. Calcule el flujo de calor perdido por unidad de longitud.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo es perpendicular al eje del cilindro, el aire se calienta y las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura de película.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{65 + 15}{2} = 35 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1.145 \text{ kg/m}^3.$$

$$\mu = 1.895 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

$$\nu = 1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$k = 0.02625 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

$$P_r = 0.7268$$

Cálculo del número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho u_{\infty} d}{\mu} = \frac{(1.145)(10)(0.025)}{1.895 \times 10^{-5}} = 15,106$$

Puesto que el aire es un gas, de acuerdo a la ecuación de **Hilpert** y la tabla 5.1.5.1, **C = 0.193** y **n = 0.618**, así:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}d}{k} = C \left(\frac{u_{\infty} d}{\nu} \right)^n P_r^{1/3} = 0.193 \left(\frac{10 \times 0.025}{1.655 \times 10^{-5}} \right)^{0.618} (0.7268)^{1/3} = 66.4$$

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k}{d} = \frac{(66.4)(0.02625)}{(0.025)} = 69.7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Cálculo del flujo de calor por unidad de longitud.

$$\frac{q}{L} = \bar{h}(\pi x d)(T_w - T_{\infty}) = (69.7)(\pi)(0.025)(65 - 15) = 273.73 \text{ W/m}.$$

También se puede resolver el problema utilizando la figura 5.1.5.3, con el número de **Reynolds** igual a 15,106; se determina el número de **Nusselt**, cuyo valor es igual a 65. Así:

$$\frac{q}{L} = \bar{h}(\pi x d)(T_w - T_{\infty}) = (65)(\pi)(0.025)(65 - 15) = 255.3 \text{ W/m}.$$

El resultado obtenido en la figura difiere en un 7 % del obtenido mediante la ecuación de **Hilpert**, debido al error que se comete al leer un valor aproximado en la figura 5.1.5.3.

Ejemplo 5.1.5.11

Un alambre de $4 \times 10^{-5} \text{ m}$ de diámetro está situado en una corriente de aire a una atmósfera de presión y 20°C , siendo la velocidad de la corriente de 50 m/s , perpendicular al alambre. Por el alambre pasa una corriente eléctrica, elevando su temperatura hasta 50°C . Calcule el flujo de calor perdido por unidad de longitud.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo es perpendicular al eje del cilindro, el aire se calienta y las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura de película.

$$T_f = \frac{T_w + T_{\infty}}{2} = \frac{50 + 20}{2} = 35^\circ \text{C}$$

$$\rho = 1.145 \text{ kg/m}^3.$$

$$\mu = 1.895 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

$$\nu = 1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$k = 0.02625 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

$$P_r = 0.7268$$

Cálculo del número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho u_{\infty} d}{\mu} = \frac{(1.145)(50)(4 \times 10^{-5})}{1.895 \times 10^{-5}} = 120.85$$

Para seleccionar la ecuación correcta que puede aplicarse en la solución, se observa que:

$Re P_e = (120.85)(0.7268) = 87.83$, así que podemos usar las ecuaciones de Hilpert, Churchill [4] o la de Eckert y Drake [1]. Los cálculos se realizarán aplicando la ecuación más simple y la más compleja comparando los resultados.

Puesto que el aire es un gas, de acuerdo a la ecuación de **Hilpert** y la tabla 5.1.5.3, $C = 0.683$ y $n = 0.466$, así:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}d}{k} = C \left(\frac{u_{\infty} d}{\nu} \right)^n P_r^{1/3} = 0.683 \left[\frac{50(4 \times 10^{-5})}{1.655 \times 10^{-5}} \right]^{0.466} (0.7268)^{1/3} = 5.73$$

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k}{d} = \frac{(5.73)(0.02625)}{(4 \times 10^{-5})} = 3,763.7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Cálculo del flujo de calor por unidad de longitud.

$$\frac{q}{L} = \bar{h}(\pi x d)(T_w - T_{\infty}) = (3,763.7)(\pi)(4 \times 10^{-5})(50 - 20) = 14.19 \text{ W/m}.$$

Aplicando la ecuación de Churchill se obtiene:

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} P_r^{1/3}}{[1 + (0.4/P_r)^{2/3}]} \left[1 + \left(\frac{Re}{282,000} \right)^{1/2} \right]$$

$$Nu = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.3 + \frac{0.62(120.85)^{1/2}(0.7268)^{1/3}}{[1 + (0.4/0.7268)^{2/3}]} \left[1 + \left(\frac{120.85}{282,000} \right)^{1/2} \right] = 5.76$$

Cálculo del coeficiente de transferencia de calor:

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu} k}{d} = \frac{(5.76)(0.02625)}{(4 \times 10^{-5})} = 3,782.7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Cálculo del flujo de calor por unidad de longitud.

$$\frac{q}{L} = \bar{h}(\pi x d)(T_w - T_{\infty}) = (3,782.7)(\pi)(4 \times 10^{-5})(50 - 20) = 14.26 \text{ W/m}.$$

El resultado obtenido con ambas expresiones es prácticamente el mismo, por consiguiente cualquiera de las ecuaciones puede ser aplicada.

Fórmulas empíricas en el exterior de esferas.

Muchos investigadores han desarrollado correlaciones empíricas para determinar el coeficiente de transferencia de calor en fluidos como gases, aire, aceite y agua, alrededor de esferas.

McAdams [4], recomienda la siguiente relación para transferencia de calor de una esfera a un gas circulante en su alrededor, para el siguiente intervalo correspondiente al número de Reynolds ($17 < R_e < 70,000$).

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.37 \left(\frac{u_\infty d}{\nu} \right)^{0.6} P_r^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.24}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

Achenbach [4], ha obtenido para gases (aire), dos correlaciones aplicables en un intervalo todavía mayor de números de Reynolds con $P_r = 0.71$:

$$N_u = 2 + (0.25 + 3 \times 10^{-4} R_e^{0.6})^{1/2} \dots \text{ec. 5.1.5.25.}$$

La expresión anterior puede ser utilizada en el intervalo comprendido entre ($100 < R_e < 3 \times 10^5$)

$$N_u = 430 + aR_e + bR_e^2 + cR_e^3 \dots \dots \text{ec. 5.1.5.26}$$

Esta relación se usa en el intervalo ($3 \times 10^5 < R_e < 5 \times 10^6$), con valores para las constantes:

$$a = 5 \times 10^{-3}$$

$$b = 0.25 \times 10^{-9}$$

$$c = -3.1 \times 10^{-17}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

Kramers [4], recomienda para corrientes de líquidos alrededor de esferas, la siguiente correlación.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.97 + 0.68 \left(\frac{u_\infty d}{\nu} \right)^{0.5} P_r^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.27}$$

Aplicada en el intervalo ($1 < R_e < 2,000$), y donde las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

Vliet y Leppert [4], recomiendan la siguiente expresión, para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor alrededor de esferas para aceite y agua en intervalos del Reynolds entre ($1 < R_e < 200,000$).

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 1.2 + 0.53 \left(\frac{u_\infty d}{\nu} \right)^{0.54} \left(\frac{\mu_s}{\mu} \right)^{-0.25} P_r^{1/3} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.28}$$

Donde todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de corriente libre T_{∞} , excepto μ_s que se evalúa a la temperatura de la superficie de la esfera T_s .

Por último **Whitaker** [3], ha reunido todos los datos anteriores en una sola ecuación para gases y líquidos circulando alrededor de esferas, la cual es válida para los siguientes intervalos de Reynolds y Prandtl; $(3.5 < R_e < 8 \times 10^4)$ y $(0.7 < R_e < 380)$ respectivamente.

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 2 + \left(0.4R_e^{1/2} + 0.06R_e^{2/3}\right)P_r^{0.4} \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_s}\right)^{1/4} \dots \dots \text{ec. 5.1.5.29}$$

Donde todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de corriente libre T_{∞} , excepto μ_s que se evalúa a la temperatura de la superficie de la esfera.

Ejemplo 5.1.5.12

Alrededor de una esfera de 12 mm de diámetro circula una corriente de aire a una atmósfera de presión y 25 °C, siendo la velocidad de la corriente libre de 4 m/s. Un pequeño calentador situado dentro de la esfera mantiene la temperatura de la superficie 75 °C. Calcule el flujo de calor perdido por la esfera.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo es transversal, el aire se calienta y las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura de corriente libre.

$$T_{\infty} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3.$$

$$\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

$$\mu_s = 2.074 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

$$\nu = 1.562 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$k = 0.02551 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

$$P_r = 0.7296$$

Cálculo del número de Reynolds.

$$R_e = \frac{\rho u_{\infty} d}{\mu} = \frac{(1.184)(4)(0.012)}{1.849 \times 10^{-5}} = 3,073.66$$

Utilizando la relación de Whitaker, puesto que satisface las condiciones de Reynolds y Prandtl, se tiene:

$$N_u = \frac{\bar{h}d}{k} = 2 + \left(0.4R_e^{1/2} + 0.06R_e^{2/3}\right)P_r^{0.4} \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_s}\right)^{1/4}$$

$$N_u = 2 + [0.4(3,073.66)^{1/2} + 0.06(3,073.66)^{2/3}](0.7296)^{0.4} \left(\frac{1.849 \times 10^{-5}}{2.074 \times 10^{-5}}\right)^{1/4} = 29.46$$

Cálculo del coeficiente de transferencia de calor:

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}_u k}{d} = \frac{(29.46)(0.02551)}{(0.012)} = 62.63 \text{ W/m}^2 - K$$

Cálculo del flujo de calor por unidad de longitud.

$$q = \bar{h}(4\pi)(r)^2(T_s - T_\infty) = (62.63)(4\pi)(0.006)^2(75 - 25) = 1.416 \text{ W}$$

Fórmulas empíricas para convección en el exterior de bancos de tubos.

Hoy en día, los intercambiadores de calor del tipo tubular (haces de tubos) son muy utilizados en la industria en general, principalmente en la de generación de energía, por consiguiente es de interés determinar el coeficiente de transferencia de calor en estos dispositivos.

Grimson [4], estudio la transferencia de calor, en haces de tubos arreglados en línea (arreglo cuadrado) y tresbolillo (arreglo triangular), y basándose en el trabajo de otros investigadores, pudo representar los datos en la forma de la ecuación 5.1.5.4.1.

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}d}{k} = C \left(\frac{u_\infty d}{\nu} \right)^n P_r^{1/3} \dots \quad \text{ec. 5.1.5.30}$$

Esta relación se usa para el caso de gases con números de ($P_r \sim 0.7$) y se modificó con el factor (1.11) con el fin de ampliar su uso a líquidos. **Grimson**, calculó el número de Reynolds basándose en la velocidad máxima que experimenta el fluido al pasar transversalmente sobre el banco de tubos,

$$\bar{N}_{u_{10}} = \frac{\bar{h}d}{k} = C (Re_{m\acute{a}x})^n P_r^{1/3} \dots \quad \text{ec. 5.1.531}$$

Considerando 10 filas o más de tubos en la dirección de la corriente y expresó finalmente el número de Nusselt mediante la siguiente correlación empírica.

Donde:

$$Re_{m\acute{a}x} = \frac{\rho u_{m\acute{a}x} d}{\mu} = \frac{u_{m\acute{a}x} d}{\nu}$$

Para el caso en que el número de filas de tubos fuera menor de 10 en la dirección de la corriente, **Grimson** estableció un factor de corrección aplicado a la expresión 5.1.5.6.2; y definido como:

$$\frac{\bar{N}_{u_N}}{\bar{N}_{u_{10}}} = FC$$

Así, $\bar{N}_{u_N} = FC(\bar{N}_{u_{10}})$ y la ecuación 5.1.5.6.2, se convierte en:

$$\bar{N}_{u_N} = \frac{\bar{h}d}{k} = FC \left[C (Re_{m\acute{a}x})^n P_r^{1/3} \right] \dots \quad \text{ec. 5.1.5.32}$$

Donde las constantes C y n , y el factor de corrección (FC), se obtienen mediante las tablas 5.1.5.2 y 5.1.5.3 respectivamente.

Tabla 5.1.5.2

Correlación de Grimson modificada para transferencia de calor en haces de tubos de 10 hileras o más, para usar en la ec. 5.1.5.31

S_t/d								
S_L/d	1.25		1.5		2.0		3.0	
	C	n	C	n	C	n	C	n
	Arreglo en línea							
1.25	0.386	0.592	0.305	0.608	0.111	0.704	0.0703	0.752
1.50	0.407	0.586	0.278	0.620	0.112	0.702	0.0753	0.744
2.00	0.464	0.570	0.332	0.602	0.254	0.632	0.2200	0.648
3.00	0.322	0.601	0.396	0.584	0.415	0.581	0.3170	0.608
	Arreglo al tresbolillo							
	C	n	C	n	C	n	C	n
	Arreglo al tresbolillo							
0.600	----	----	----	----	----	----	0.236	0.636
0.900	----	----	----	----	0.495	0.571	0.455	0.581
1.000	----	----	0.552	0.558	----	----	----	----
1.125	----	----	----	----	0.531	0.565	0.575	0.560
1.250	0.575	0.556	0.561	0.554	0.576	0.556	0.579	0.562
1.500	0.501	0.568	0.511	0.562	0.502	0.568	0.542	0.568
2.000	0.448	0.572	0.462	0.568	0.535	0.556	0.498	0.570
3.000	0.344	0.592	0.395	0.580	0.488	0.562	0.467	0.574

S_t/d = Separación transversal/diámetro exterior. S_L/d = Separación transversal/diámetro exterior.

Tomada de J.P. Holman, página 211.

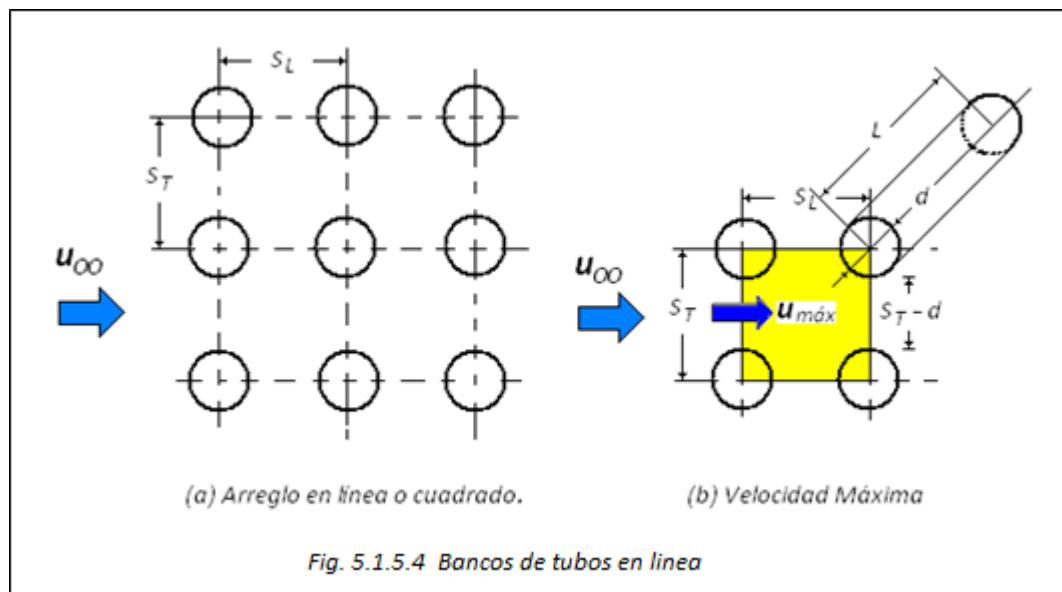
Tabla 5.1.5.3

Razón de $\left(\frac{N_{u,N}}{N_{u,10}} = FC\right)$ para usar en la ec. 5.1.5.32 para un número de hileras ≤ 8

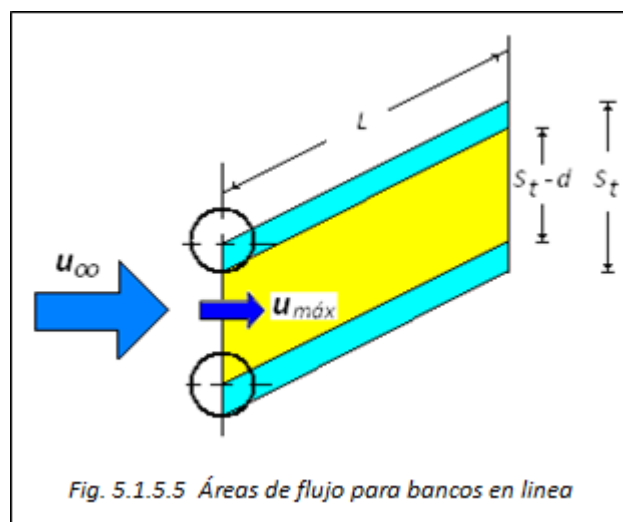
FC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Línea	0.64	0.80	0.87	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00
Tresbolillo	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00

Tomada de J.P. Holman, página 212.

Para determinar la velocidad máxima de la corriente ($u_{m\acute{a}x}$), cuando esta es perpendicular al haz de tubos en **línea**, el máximo de la velocidad se producirá para cuando el área sea mínima, como se muestra en la figura 5.1.5.4. Observando la figura 5.1.5.4.b, la velocidad máxima ocurre en la separación ($S_t - d$).



En la misma figura se observan dos áreas, como se indican en la figura 5.1.5.5. La mayor es el área del rectángulo $A_1 = (S_t \times L)$, y la menor del rectángulo $A_2 = (S_t - d) \times L$.



Puesto que el flujo másico que pasa por A_1 es el mismo que pasa por A_2 ; se tiene:

$$\dot{m}_1 A_1 = \dot{m}_2 A_2$$

Entonces;

$$\rho u_\infty (S_t \times L) = \rho u_{m\acute{a}x} [(S_t - d) \times L]$$

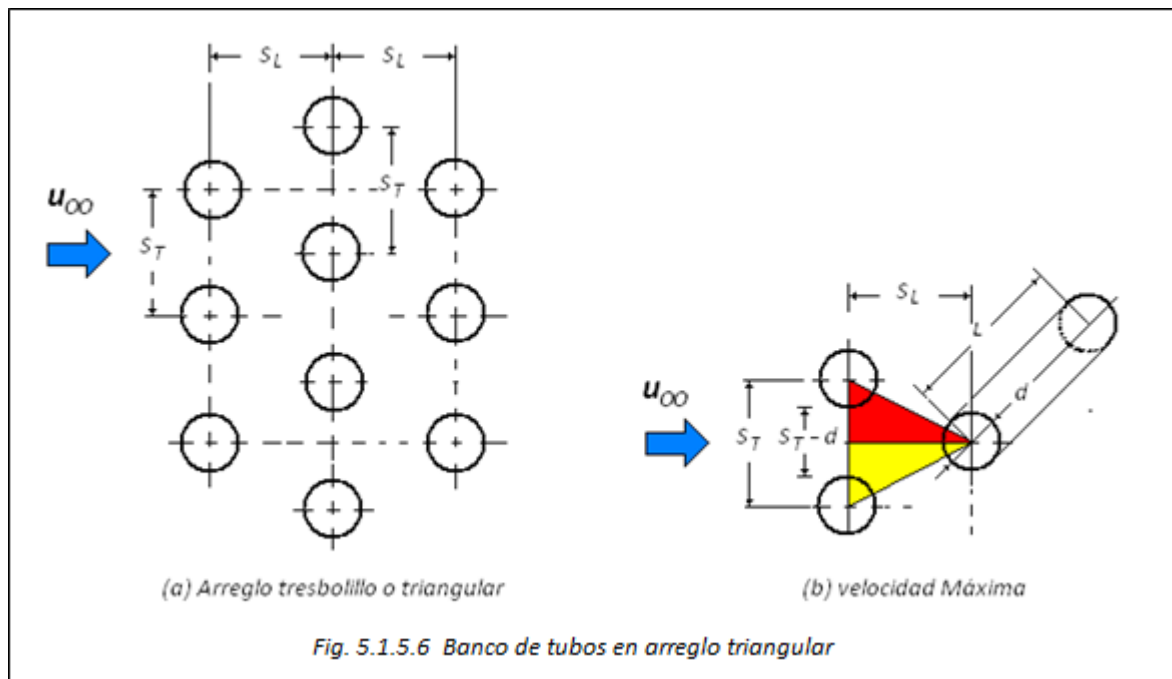
Despejando:

$$u_{m\acute{a}x} = u_\infty \left(\frac{S_t}{S_t - d} \right)$$

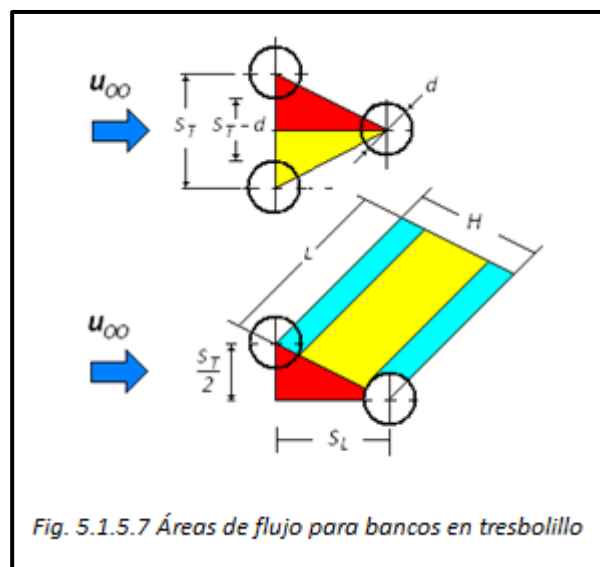
Cuando se tiene la configuración triangular como se indica en la figura 5.1.5.6, se puede observar que el flujo se bifurca al entrar por la separación $(S_t - d)$, formando dos separaciones en el triángulo bicolor $(H - d)$.

En el arreglo al tresbolillo, la velocidad máxima ($u_{m\acute{a}x}$) de la corriente será igual al arreglo en línea, si el área normal a la entrada del haz de tubos $[(S_t - d) \times L]$ es el área de paso mínima. Esto no ocurre cuando la separación (S_L) es pequeña en la dirección longitudinal, así como cuando (S_t) es pequeña.

Sin embargo al entrar el fluido a través del área $[(S_t - d) \times L]$, y luego dividirse en las dos áreas $\left\{[(S_t/2)^2 + S_L^2]^{1/2} - d\right\} \times L$. Si la suma de éstas resultará menor que el área $[(S_t - d) \times L]$, entonces representan el área de flujo mínima y la velocidad máxima en el haz de tubos se calcula según la figura 5.1.5.6.b.



Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 5.1.5.6.b, se tiene:



$$H^2 = \left(\frac{S_t}{2}\right)^2 + (S_L)^2$$

Despejando la hipotenusa;

$$H = \sqrt{\left(\frac{S_t}{2}\right)^2 + (S_L)^2}$$

Y la separación por donde pasa el flujo másico es:

$$H - d = \left(\sqrt{\left(\frac{S_t}{2}\right)^2 + (S_L)^2} \right) - d$$

Así, la velocidad máxima para el arreglo triangular o tresbolillo es:

$$\rho u_{\infty} \left(\frac{S_t}{2}\right) L = \rho u_{m\acute{a}x} \left[\left(\sqrt{\left(\frac{S_t}{2}\right)^2 + (S_L)^2} \right) - d \right] L$$

Despejando $u_{m\acute{a}x}$, se tiene que:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{u_{\infty} \left(\frac{S_t}{2}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{S_t}{2}\right)^2 + (S_L)^2} \right) - d}$$

Donde u_{∞} , es la velocidad de la corriente libre, S_t es la separación transversal o perpendicular al flujo y S_L es la separación longitudinal paralela al flujo.

La temperatura (T_p) de la pared exterior para cualquier tubo es la misma y las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película (T_m).

$$T_m = \frac{T_{\infty 2} + T_{\infty 1}}{2}$$

Es posible calcular la caída de presión en un haz de tubos, cuando se trata de gases mediante la siguiente relación:

$$\Delta P = N_L f_0 \chi \left(\frac{\rho u_{m\acute{a}x}^2}{2} \right) \dots \text{ec. 5.1.5.33}$$

Donde:

N_L = Número de filas en dirección de la corriente libre

f_0 = Factor de fricción.

χ = Factor de corrección

ρ = Densidad evaluada en las condiciones de la temperatura media .

$u_{m\acute{a}x}$ = Velocidad máxima en el área de sección mínima.

Jacob [3], proporciona las siguientes relaciones para determinar el factor de fricción para los arreglos en línea y tresbolillo respectivamente:

$$f_0 = 4 \left\{ 0.044 + \frac{0.08(S_L/d)}{[(S_t - d/d)]^{0.43+1.13(d/S_L)}} \right\} (Re_{m\acute{a}x})^{-0.15} \quad \dots \dots \dots \text{Arreglo en línea.}$$

$$f_0 = 4 \left\{ 0.25 + \frac{0.118}{[(S_t - d/d)]^{1.08}} \right\} (Re_{m\acute{a}x})^{-0.16} \quad \dots \dots \dots \text{Arreglo en tresbolillo.}$$

El factor de fricción puede evaluarse también, usando la figura 5.1.5.8.a para el arreglo cuadrado y 5.1.5.8.b para el arreglo en tresbolillo, como lo sugiere Zukauskus [4].

Ejemplo 5.1.5.6.1.

A través de un haz de tubos de 15 filas transversales y 5 filas en la dirección de la corriente, fluye aire a 1 atmósfera de presión y 10 °C a la velocidad de 7 m/s medida en un punto de la corriente antes de que el aire entre al haz de tubos. Las superficies de los tubos se mantienen a 70 °C. El diámetro de los tubos es de 2.54 cm y están dispuestos en línea, de modo que la separación en ambas direcciones normal y longitudinal es de 3.81 cm. Calcúlese el calor total transferido por el banco, si cada tubo tiene 2.5 m de largo. Calcule también la temperatura de salida del aire, así como la caída de presión en el haz de tubos.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, el flujo es perpendicular al haz de tubos, el aire se calienta y las propiedades del fluido son constantes y se evalúan a la temperatura de película. Además el número de filas en dirección del flujo de la corriente es menor de 10, por lo tanto es necesario encontrar el factor de corrección.

$$T_f = \frac{70 + 10}{2} = 40^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1.127 \text{ kg/m}^3.$$

$$\mu = 1.918 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}.$$

$$\nu = 1.702 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$k = 0.02662 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

$$Pr = 0.7255$$

$$c_p = 1,007 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

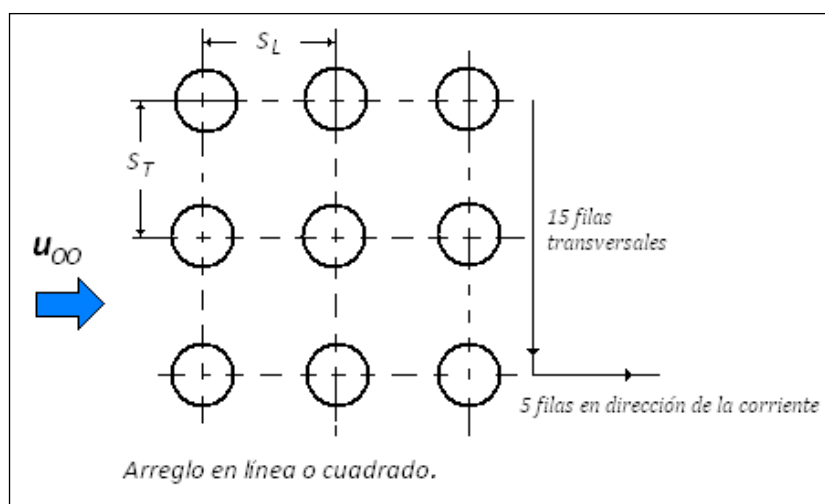
$$u_\infty = 7 \text{ m/s}$$

$$T_p = 70^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 10^\circ\text{C}$$

$$S_t = S_L = 3.81 \text{ cm}$$

$$L = 2.5 \text{ m}$$



Para el cálculo de la velocidad máxima se requiere el área de paso mínima, la cual para el arreglo cuadrado es:

Fig. 5.1.5.8.a Factor de fricción para bancos de tubos en arreglo cuadrado o en línea

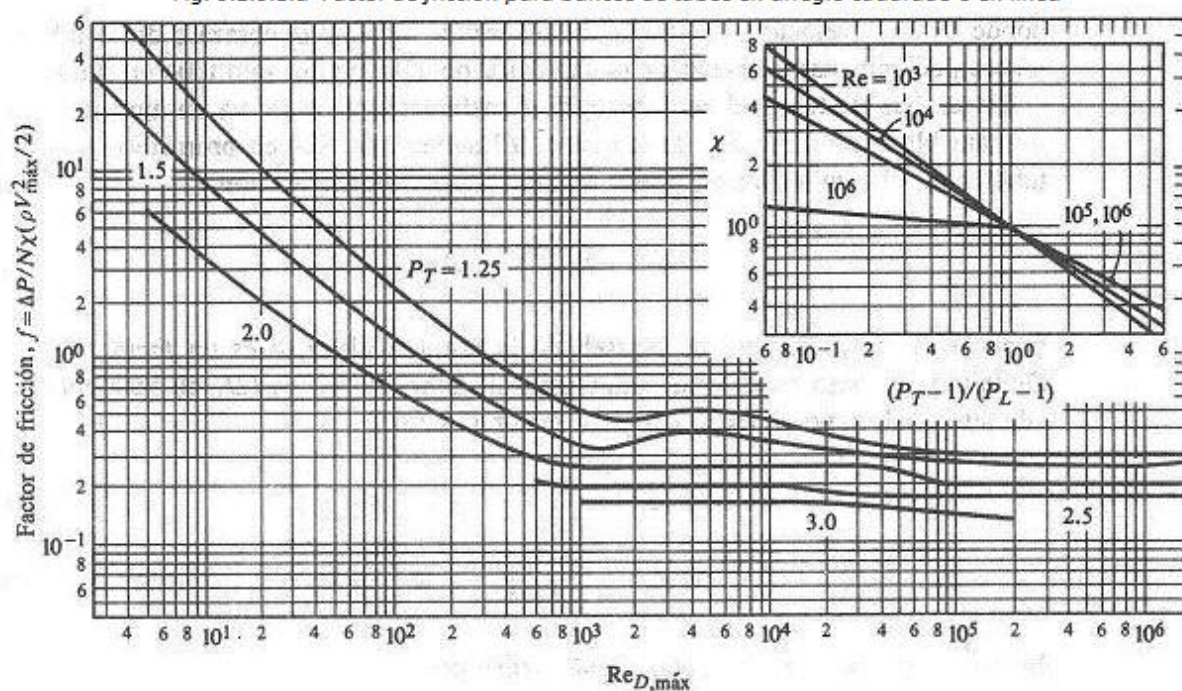
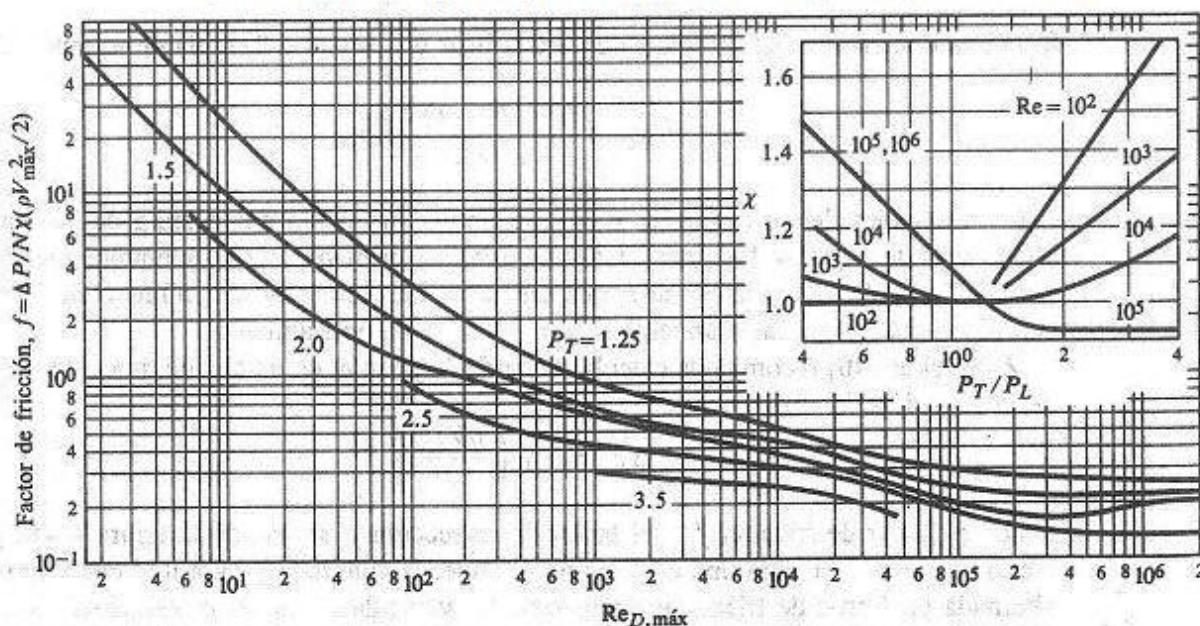


Fig. 5.1.5.8.b Factor de fricción para banco de tubos en arreglo triangular o tresbolillo



$$u_{\max} = u_{\infty} \left(\frac{S_t}{S_t - d} \right) = 7 \left(\frac{3.81}{3.81 - 2.54} \right) = 21 \text{ m/s}$$

Calculo del número de Reynolds máximo.

$$Re_{\max} = \frac{\rho u_{\max} d}{\mu} = \frac{(1.127)(21)(0.0254)}{(1.918 \times 10^{-5})} = 31,342$$

Según la tabla 5.1.5.4 el factor de corrección para un número de filas en dirección de la corriente igual a 5, es: $F.C = 0.92$

Aplicando la ecuación 5.1.5.32, se tiene que:

$$\overline{Nu}_N = \frac{\bar{h}d}{k} = FC \left[C(R_{e_{\max}})^n P_r^{1/3} \right]$$

Puesto que $S_t = S_L = 3.81 \text{ cm}$.

Entonces;

$$\frac{S_t}{d} = \frac{S_L}{d} = \frac{3.81}{2.54} = 1.5$$

Con estos valores se encuentran en la tabla 5.1.5.3, para el arreglo en línea los valores de $C = 0.278$ y $n = 0.62$

Sustituyendo valores en la ecuación 5.1.5.32, se obtiene:

$$\overline{Nu}_5 = \frac{\bar{h}d}{k} = 0.92 \left[0.278(31,342)^{0.62} (0.7255)^{1/3} \right] = 153.2$$

Así, el coeficiente de transferencia de calor para el haz de tubos es:

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_5 k}{d} = \frac{(153.2)(0.02662)}{0.0254} = 160.53 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

Entonces el área total de la superficie de transferencia de calor (banco de tubos) es:

$$A = N(\pi d L) = (15 \times 5)(\pi)(0.0254)(2.5) = 14.962 \text{ m}^2$$

Puesto que la temperatura del aire aumenta al atravesar el haz de tubos, es de suponer que la temperatura a la salida será mayor que la de la entrada, así que puede utilizarse una temperatura media aritmética de T_∞ , para el cálculo del calor total cedido por el haz de tubos. Así, igualando el calor transferido por convección desde el haz de tubos, con el absorbido por el aire se tiene:

$$q = \bar{h}A \left(T_p - \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{2} \right) = \dot{m}c_p(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})$$

Como el flujo másico a la entrada es igual al de la salida, entonces se puede evaluar a las condiciones de entrada.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho_\infty u_\infty A_1$$

$$\rho_\infty = \frac{P}{RT_\infty} = \frac{(1.0132 \times 10^5)}{(287)(283)} = 1.247 \text{ kg/m}^3$$

Y el área de entrada al haz de tubos es:

$$A_1 = (15)(0.0381)(2.5) = 1.42875 \text{ m}^2$$

Sustituyendo valores:

$$\dot{m} = \rho_\infty u_\infty A_1 = (1.247)(7)(1.42875) = 12.476 \text{ kg/s}$$

Sustituyendo se tiene que:

$$q = \bar{h}A \left(T_p - \frac{T_{\infty 1} + T_{\infty 2}}{2} \right) = \dot{m}c_p(T_{\infty 2} - T_{\infty 1})$$

$$(160.53)(14.962) \left(70 - \frac{T_{\infty 2} + 10}{2} \right) = (12.476)(1,007)(T_{\infty 2} - 10)$$

Resolviendo se obtiene;

$$T_{\infty 2} = 22.43 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El calor transferido por el banco de tubos al aire es:

$$q = \dot{m}c_p(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) = (12.476)(1,007)(22.43 - 10) = 156,162.2 \text{ w} = 156.162 \text{ kW}$$

Para el cálculo de la caída de presión en el banco de tubos en línea, se determina con la fórmula;

$$\Delta P = N_L f_o \mathcal{X} \left(\frac{\rho u_{m\acute{a}x}^2}{2} \right)$$

El número de filas en dirección del flujo es:

$$N = 5$$

El factor de fricción se determina con la fórmula para el arreglo en línea:

$$f_0 = 4 \left\{ 0.044 + \frac{0.08(S_L/d)}{[(S_t - d/d)]^{0.43+1.13(d/S_L)}} \right\} (Re_{m\acute{a}x})^{-0.15}$$

$$f_0 = 4 \left\{ 0.044 + \frac{0.08(3.81/2.54)}{[(3.81 - 2.54/2.54)]^{0.43+1.13(2.54/3.81)}} \right\} (31,342)^{-0.15} = 0.268$$

El factor de fricción puede evaluarse de acuerdo a la figura 5.1.5.8.a con $Re = 31,342$ y $P_L = S_L/d = 3.81/2.54 = 1.5$, así $f_0 = 0.29$

El término $\mathcal{X}$ (factor de corrección) es igual a la unidad tanto para el arreglo cuadrado como para el tresbolillo en equilátero. La densidad se evalúa a la temperatura media entre la entrada del aire y la salida del banco de tubos, es decir:

$$T_m = \frac{T_{\infty 2} + T_{\infty 1}}{2} = \frac{22.43 + 10}{2} = 16.215 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho_m = 1.223 \text{ kg/m}^3$$

La velocidad máxima para el arreglo en línea es:

$$u_{m\acute{a}x} = 21 \text{ m/s}$$

Por último, sustituyendo valores:

$$\Delta P = N_L f_o \mathcal{X} \left(\frac{\rho u_{m\acute{a}x}^2}{2} \right) = (5)(0.268)(1) \left[\frac{(1.223)(21)^2}{2} \right] = 361.36 \text{ Pa}$$

5.2. Convección natural.

En las secciones anteriores estudiamos la transferencia de calor por convección forzada, cuyo objetivo fue la determinación del coeficiente de transferencia de calor en superficies planas, tanto en flujos laminar como turbulento. Asimismo, se estableció el hecho de la determinación de este coeficiente mediante el método integral y el diferencial, notando que la diferencia entre los resultados obtenidos en ambos métodos, no difieren por mucho, así que se adoptaron los resultados del método integral en la solución de los problemas correspondientes a esas secciones. También se hizo hincapié, en las correlaciones empíricas utilizadas en algunos casos y obtenidas a partir de la experimentación y no en forma analítica.

En ésta sección y las siguientes estudiaremos el caso de la convección natural o libre, en la cual se observa que el fluido debe su movimiento a los cambios de densidad que son resultado del proceso de calentamiento del fluido que se encuentra próximo a la superficie calefactora.

El movimiento del fluido en la convección natural, trátase de un líquido o de un gas, son resultados de las fuerzas de flotabilidad impuestas sobre el fluido al disminuir su densidad y aumentar su volumen, al estar próximo a la superficie calefactora. Las fuerzas de flotabilidad o de empuje se hacen presentes debido a que sobre el fluido actúan ciertas fuerzas como es el caso de la gravedad, fuerzas de corte viscosas y fuerzas de inercia.

5.2.1. Definiciones.

Al igual que la transferencia de calor por convección forzada, la convección natural o libre depende del coeficiente convectivo h , y éste a su vez es función de las propiedades físicas y térmicas del fluido que está en contacto con la superficie de transferencia de calor.

Dichas propiedades son la viscosidad dinámica μ , la viscosidad cinemática ν , la conductividad térmica k , la densidad ρ , la difusividad α , etc. La superficie también es función del coeficiente de transferencia de calor, dada su forma geométrica y su aspereza. Además, el tipo de flujo; laminar o turbulento influye en la determinación del coeficiente h . Ciertos números adimensionales que surgen al combinar las propiedades del fluido, como el número de Grashof (G_r), el de Rayleigh (R_a), etc., también influyen en el proceso de la convección natural, así:

$$h = f(\rho, \mu, \nu, k, g, c_p, \alpha, \beta, P, T, R_a, L_c, \dots)$$

En la convección natural o libre, el movimiento del fluido es provocado por las fuerzas de empuje que se ejercen sobre este cuando disminuye su densidad al encontrarse en la proximidad de la superficie de transferencia de calor o superficie calefactora.

En cualquier caso, la transferencia de calor por convección natural es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido adyacente a ella, y puede representarse matemáticamente mediante la ley de enfriamiento de Newton; así:

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

En esta expresión q , es la velocidad de transferencia de calor por convección en (W), h es el coeficiente de transferencia de calor o de película en ($W/m^2 - K$), A el área de la superficie en contacto con el fluido y $(T_s - T_\infty)$ la diferencia de temperaturas.

En el análisis de la convección natural, es práctica común agrupar las propiedades del fluido con la finalidad de quitar las dimensiones a las expresiones que modelan el mecanismo, lo cual conduce a los siguientes números adimensionales.

Número de Grashof (G_r), el cual representa la relación que existe entre las fuerzas de empuje y la fuerza de corte viscosa, actuando sobre un elemento de volumen del fluido. Es un indicativo del tipo de flujo del fluido; laminar o turbulento.

$$G_r = \frac{\text{Fuerzas de empuje}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{(\mu/\rho)^2}$$

Donde;

g = Aceleración gravitacional en m/s.

β = Coeficiente de expansión volumétrica a presión constante en K^{-1} .

T_s = Temperatura de la superficie de transferencia de calor en $^{\circ}C$.

T_∞ = Temperatura del fluido muy alejada de la superficie calefactora en $^{\circ}C$.

L_c = Longitud característica de la superficie en cuestión en m.

ν = Viscosidad cinemática del fluido en m^2/s .

El papel que desempeña el número de Reynolds en la convección forzada es realizado por el número de Grashof en la convección natural o libre, es decir predice si el flujo del fluido es laminar o turbulento.

Número de Rayleigh (R_a), definido como el producto de los números de Grashof y de Prandtl como se indica enseguida, indica la transición entre el flujo laminar y turbulento, es decir; cuando $R_a < 10^9$, el flujo es laminar y por el contrario $R_a > 10^9$, turbulento.

$$R_a = G_r P_r = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} (P_r)$$

El número de Prandtl se define de la misma forma como se hizo en la sección 5.1.1.

Coeficiente de expansión volumétrica (β), definida como una propiedad del fluido que representa la diferencia de densidades en términos de diferencias de temperatura a presión constante, puesto que esta diferencia en densidades da lugar a la fuerza de empuje y sostiene desde luego el flujo del fluido.

$$\beta = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

En el caso de que el fluido sea un gas ideal como es el caso del aire y otros más a saber; puede demostrarse que el coeficiente de expansión volumétrica se define como el recíproco de la temperatura. Así, para un gas ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \frac{P}{R} \left(-\frac{1}{T^2} \right)$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior, se tiene;

$$\beta = -\frac{RT}{P} \left[\frac{P}{R} \left(-\frac{1}{T^2} \right) \right] = \frac{1}{T}$$

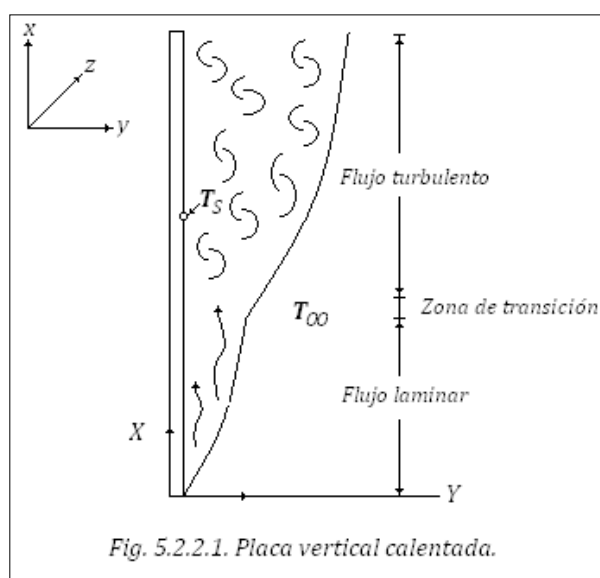
Donde T , es la temperatura absoluta del gas en Kelvin.

Si el fluido es un gas real, el coeficiente de expansión volumétrica β , puede determinarse con la ayuda de las tablas de propiedades para el fluido en cuestión.

5.2.2. Convección natural en una placa plana en: placa plana vertical, tubos verticales, placas inclinadas, placa horizontal, cilindro horizontal y esferas.

Considere la placa plana vertical mostrada en la figura 5.2.2.1. Cuando se calienta la placa se forma como se ilustra en la figura una capa límite de convección natural. Al inicio del borde de ataque el flujo es laminar; pero a una cierta distancia del mismo comienza la transición de laminar a turbulento, llegando a ser completamente turbulento en la parte superior de la placa.

Todo esto se debe a las propiedades del fluido y a la diferencia de temperaturas entre la superficie de transferencia de calor T_s , y la temperatura del fluido T_∞ , que se encuentra fuera de la capa límite de convección natural.



Para el régimen laminar, el perfil de velocidades en la capa límite de convección natural es completamente distinto al perfil de velocidades en la capa límite de la convección forzada. Justo por encima de la superficie de la placa la velocidad es nula por la condición de no deslizamiento, luego aumenta en dirección Y , hasta alcanzar un valor máximo; y después disminuir hasta el valor de cero justo en el borde de la capa límite hidrodinámica.

Fuera de la capa límite las condiciones de la corriente libre, están completamente en reposo para el caso de la convección natural. Ver figura 5.2.2.1.a

Asimismo, en la figura 5.2.2.1.b, se observa que para el régimen laminar el perfil de temperatura en la capa límite se desarrolla con la temperatura máxima justo por encima de la superficie de la placa calentada y disminuye en dirección Y , hasta alcanzar la temperatura de la corriente libre T_∞ , justo en el borde de la capa límite térmica.

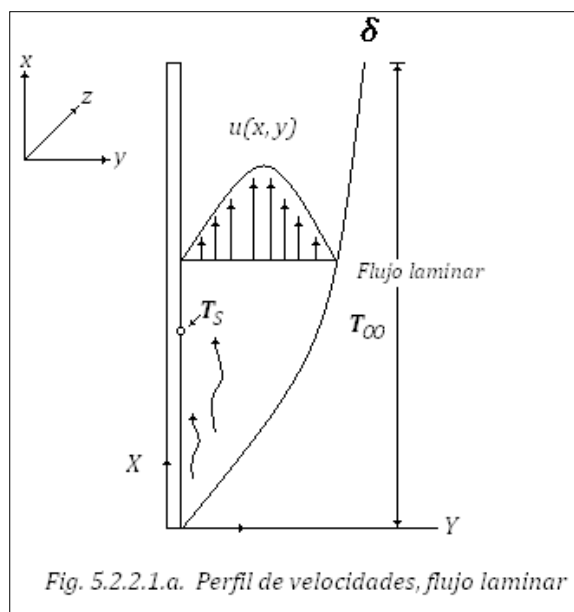


Fig. 5.2.2.1.a. Perfil de velocidades, flujo laminar

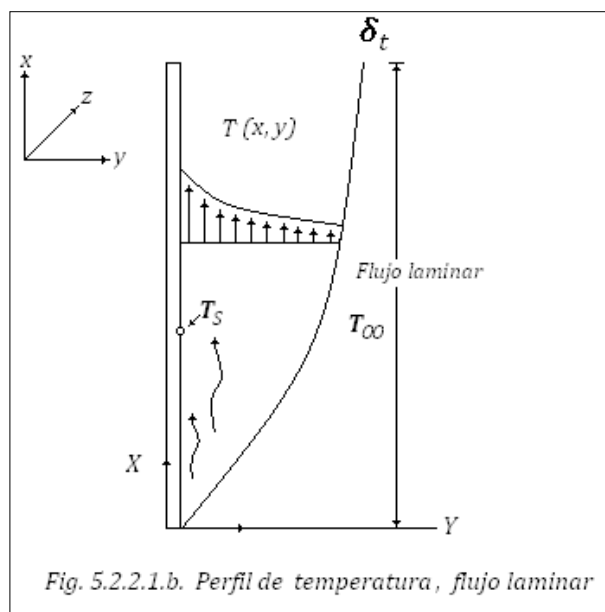


Fig. 5.2.2.1.b. Perfil de temperatura, flujo laminar

Es importante recalcar que el coeficiente de transferencia de calor en la convección natural es relativamente pequeño comparado con el de la convección forzada, sin embargo, muchos dispositivos utilizan este medio de transferencia de calor para funcionar correctamente, tal es el caso de los transformadores eléctricos, radiadores para calefacción en edificios residenciales, en disipadores de calor del tipo electrónico, etc.

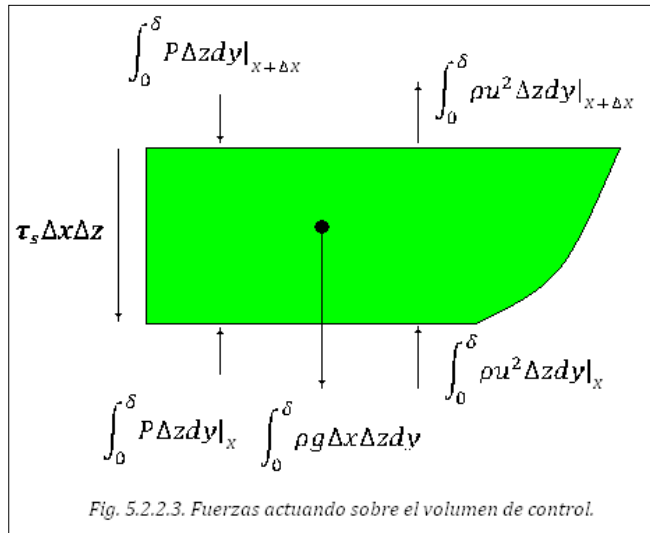
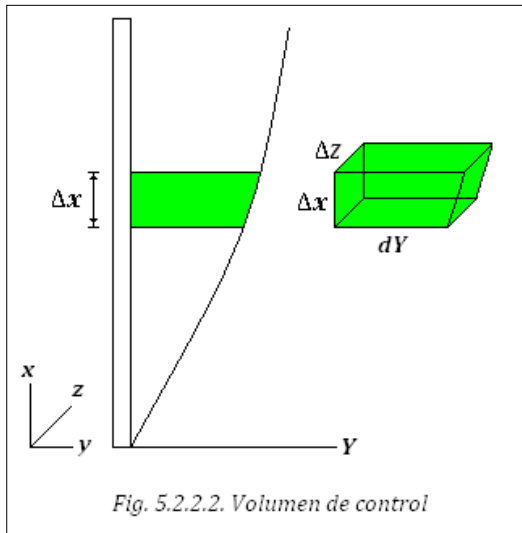
Para determinar el coeficiente de transferencia de calor en una placa plana vertical calentada y con una temperatura uniforme T_s , en su superficie; expuesta a un fluido de menor temperatura T_∞ , se puede partir analíticamente dando solución simultánea a las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, sin embargo la tarea es sumamente compleja debido a que el perfil de velocidad y de temperatura están íntimamente relacionados entre sí; y dependen el uno del otro.

Por consiguiente solo se empleará el método integral, el cual fue utilizado en la convección forzada para la determinación de los parámetros adimensionales más significativos que interviene en la convección natural y posteriormente se presentarán las correlaciones empíricas más comunes utilizadas en la práctica.

Considere el volumen de control $\Delta x \cdot \Delta z \cdot dy$, indicado en la figura 5.2.2.2., un análisis de la cantidad de movimiento sobre de él, muestra que las fuerzas que actúan son las de empuje, la de gravedad, la de fricción y las de presión causadas por la diferencia en altura a lo largo de la placa; como se indica en la figura 5.2.2.3.

Para simplicidad del análisis se hacen las siguientes suposiciones:

- ❖ Las fuerzas de inercia que actúan sobre el volumen de control, son despreciables comparadas con las fuerzas de corte y la de gravedad.
- ❖ No existe variación de presión en dirección Y , es decir: $\partial P / \partial Y = 0$
- ❖ Las propiedades del fluido, excepto la densidad dentro de la capa frontera son constantes; y la densidad es función lineal de la temperatura, dentro de la capa límite.



Igualando la suma de las fuerzas exteriores en dirección x , con la fuerza de empuje que actúan en el volumen $\Delta x \cdot \Delta z \cdot dy$, y considerando las fuerzas hacia abajo negativas, se obtiene:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_{x+\Delta x} = - \int_0^{\delta} \rho g \Delta x \Delta z dy - \tau_s \Delta x \Delta z + \int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_x - \int_0^{\delta} P \Delta z dy|_{x+\Delta x} + \int_0^{\delta} P \Delta z dy|_x$$

O bien;

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_x = - \int_0^{\delta} \rho g \Delta x \Delta z dy - \tau_s \Delta x \Delta z - \left[\int_0^{\delta} P \Delta z dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} P \Delta z dy|_x \right]$$

Agrupando términos y dividiendo la ecuación entre $\Delta x \Delta z$, se tiene:

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 \Delta z dy|_x = - \int_0^{\delta} \rho g \Delta x \Delta z dy - \tau_s \Delta x \Delta z - \left[\int_0^{\delta} P \Delta z dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} P \Delta z dy|_x \right]$$

$$\frac{\int_0^{\delta} \rho u^2 dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy|_x}{\Delta x} = - \int_0^{\delta} \rho g \Delta x \Delta z dy - \tau_s \Delta x \Delta z - \frac{\left[\int_0^{\delta} P dy|_{x+\Delta x} - \int_0^{\delta} P dy|_x \right]}{\Delta x}$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy = -\tau_s - \int_0^{\delta} \rho g dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} P dy$$

Puesto que la fuerza ejercida por unidad de volumen $P = \rho_{\infty} g$, es constante; se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy = -\tau_s - \int_0^{\delta} \rho g dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (\rho_{\infty} g) dy$$

Factorizando;

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy = -\tau_s - \int_0^\delta g(\rho - \rho_\infty) dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy = -\tau_s + \int_0^\delta g(\rho_\infty - \rho) dy$$

Así:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} + \int_0^\delta g(\rho_\infty - \rho) dy \quad (ec. 5.2.2.1)$$

Pero;

$$\beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

Entonces;

$$\rho_\infty - \rho = \rho\beta(T - T_\infty)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 5.2.2.1., se obtiene la ecuación integral de la cantidad de movimiento, ecuación 5.2.2.2.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} + \int_0^\delta \rho g \beta (T - T_\infty) dy \quad \dots \dots \dots ec. 5.2.2.2$$

Un análisis similar en el volumen de control respecto a la energía que entra y sale de él, nos lleva a la ecuación 5.2.2.3., conocida como la ecuación integral de energía.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (T_\infty - T) u dy = \alpha \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} \quad \dots \dots \dots ec. 5.2.2.3$$

Las ecuaciones 5.2.2.2., y 5.2.2.3., deben ser resueltas simultáneamente ya que las incógnitas, u y T , aparecen en ambas.

Para el perfil de velocidades ec. 5.2.2.2., se sugiere una solución aproximada por la expresión:

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (ec. 5.2.2.2. a)$$

En cuya expresión U y δ son funciones de x que se determinarán posteriormente y tienen dimensiones de velocidad y distancia, respectivamente. Dicha aproximación satisface los requisitos o condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} u &= 0, & en & y = 0 \\ u &= 0, & en & y = \delta \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \text{en } y = \delta$$

El perfil de temperatura dado por la ecuación 5.2.2.3., está aproximado por;

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (\text{ec. 5.2.2.3. b})$$

Que satisface las condiciones de frontera siguientes:

$$T = T_s \quad \text{en } y = 0$$

$$T = T_{\infty} \quad \text{en } y = \delta$$

$$\frac{dT}{dy} = 0, \quad \text{en } y = \delta$$

Sustituyendo los perfiles de velocidad y temperatura en las ecuaciones 5.2.2.2., y 5.2.2.3., se tiene respectivamente,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho U^2 \left(\frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4 dy = -\mu \left(\frac{U}{\delta}\right) + \int_0^{\delta} \rho g \beta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 (T_s - T_{\infty}) dy \quad (\text{ec. 5.2.2.4})$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[-U \left(\frac{y}{\delta}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4 (T_s - T_{\infty}) \right] dy = \alpha \left(-\frac{2}{\delta}\right) (T_s - T_{\infty}) \dots \dots \dots \text{ec. 5.2.2.5}$$

Ahora bien, aunque el movimiento del fluido es el resultado de las variaciones en su densidad, estas son realmente pequeñas, y una solución satisfactoria al problema puede obtenerse con la hipótesis de flujo incomprensible, esto es, $\rho = \text{constante}$. Así, la ecuación 5.2.2.4., puede escribirse como:

$$\rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left(\frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4 dy = -\mu \left(\frac{U}{\delta}\right) + \rho g \beta (T_s - T_{\infty}) \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 dy$$

Notando que la integral de,

$$\int_0^{\delta} \left(\frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^4 dy = \frac{\delta}{105}$$

Y que la integral de,

$$\int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 dy = \frac{\delta}{3}$$

La ecuación 5.2.2.4., puede ser reescrita como:

$$\rho \frac{d}{dx} \left[U^2 \left(\frac{\delta}{105}\right) \right] = -\mu \left(\frac{U}{\delta}\right) + \rho g \beta (T_s - T_{\infty}) \left(\frac{\delta}{3}\right) \quad (\text{ec. 5.2.2.6})$$

Del mismo modo la ecuación 5.2.2.5., puede escribirse,

$$-U(T_s - T_\infty) \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4 \right] dy = \alpha \left(-\frac{2}{\delta} \right) (T_s - T_\infty)$$

Notando que la integral de,

$$\int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta} \right) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4 \right] dy = \frac{\delta}{30}$$

La ecuación 5.2.2.5., puede ser reescrita como:

$$\frac{1}{30} (T_s - T_\infty) \frac{d}{dx} (U\delta) = 2\alpha (T_s - T_\infty) \left(\frac{1}{\delta} \right) \quad (\text{ec. 5.2.2.7})$$

Las ecuaciones 5.2.2.6, y 5.2.2.7 pueden rearrreglarse para dar;

$$\frac{d}{dx} \left[U^2 \left(\frac{\delta}{105} \right) \right] = - \left(\frac{\nu U}{\delta} \right) + g\beta (T_s - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} \right) \quad (\text{ec. 5.2.2.8})$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} (U\delta) = \left(\frac{2\alpha}{\delta} \right) \quad (\text{ec. 5.2.2.9})$$

Como se planteó anteriormente U y δ son funciones de x , y una forma de resolver las ecuaciones 5.2.2.8, y 5.2.2.9., consiste en suponer soluciones de prueba para U y δ . Se suponen funciones de potencia en x para las incógnitas, U y δ , como sigue:

$$U = Ax^m$$

$$\delta = Bx^n$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\left(\frac{2m+n}{105} \right) A^2 B x^{(2m+n-1)} = - \frac{A}{B} \nu x^{(m-n)} + g\beta (T_s - T_\infty) \left(\frac{Bx^n}{3} \right) \quad (\text{ec. 5.2.2.10})$$

y

$$\left(\frac{m+n}{30} \right) A B x^{(m+n-1)} = \frac{2\alpha}{B} x^{-n} \quad (\text{ec. 5.2.2.11})$$

En ambas ecuaciones la potencia de x que aparece en cada término de la igualdad, debe ser idéntico. Por tanto; igualando potencias se tiene:

$$2m + n - 1 = m - n \quad \dots \dots \dots \text{de la ec. 5.2.2.10}$$

$$m + n - 1 = -n \quad \dots \dots \dots \text{de la ec. 5.2.2.11}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene; $m = 1/2$, $n = 1/4$.

Así:

$$U = Ax^{1/2}$$

$$\delta = Bx^{1/4}$$

Al sustituir los valores de m y n , en las ecuaciones 5.2.2.10, y 5.2.2.11., se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{A^2 B}{84} = g\beta(T_s - T_\infty) \left(\frac{B}{3}\right) - \left(\frac{A}{B}\right) \nu$$

$$\frac{AB}{40} = \frac{2\alpha}{B}$$

Resolviendo el sistema se obtiene como resultado:

$$A = 5.17\nu \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_s - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/2}$$

$$B = 3.93 \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_s - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{-1/4} \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2}$$

Por lo tanto el espesor de la capa frontera está dado por;

$$\frac{\delta}{x} = 3.93 P_r^{-1/2} (0.952 + P_r)^{1/4} Gr_x^{-1/4}$$

Donde el número de Prandtl es:

$$P_r = \nu/\alpha$$

Y el número de Grashof local es:

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)x^3}{\nu^2}$$

Ahora bien, el coeficiente local de transferencia de calor h , puede ser evaluado con la expresión;

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = hA(T_s - T_\infty)$$

Usando el perfil de temperatura de la ecuación 5.2.2.3.b, se obtiene:

$$h = \frac{2k}{\delta}$$

O bien,

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 2 \left(\frac{x}{\delta} \right) = 0.508 P_r^{1/2} (0.952 + P_r)^{-1/4} Gr_x^{1/4} \dots \dots ec. 5.2.2.12$$

La ec. 5.2.2.12., expresa el número de Nusselt local para la placa plana vertical en convección natural o libre.

El coeficiente promedio de transferencia de calor $\bar{h}$, se obtiene integrando el coeficiente local de transferencia de calor sobre la altura L , de la placa, tomando en cuenta que la temperatura de la placa es uniforme, es decir:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dy = \left(\frac{4}{3} \right) h_x|_{x=L}$$

Y el número de Nusselt promedio, para la placa plana vertical en convección natural, está representado por la ecuación 5.2.2.13.

$$\bar{Nu}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.667 P_r^{1/2} (0.952 + P_r)^{-1/4} Gr_L^{1/4} \dots \dots ec. 5.2.2.13$$

En el caso de que el fluido sea aire con un número de Prandtl igual a 0.7, las ecuaciones anteriores se simplifican a la forma:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0.378 Gr_x^{1/4} \dots \dots ec. 5.2.2.14$$

$$\bar{Nu}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.504 Gr_L^{1/4} \dots \dots ec. 5.2.2.15$$

Las relaciones anteriores son válidas para el régimen laminar, cuando $R_a = Gr_L P_r < 10^9$ y las propiedades del fluido dentro de la capa frontera se evalúan a la temperatura de película.

Para el caso de flujo **turbulento**, cuando el $R_a = Gr_L P_r > 10^9$ el perfil de velocidades, temperatura y el espesor de la capa frontera está dado por las siguientes expresiones;

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

$$\frac{\delta}{x} = 0.565 Gr_x^{-0.1} P_r^{8/15} \left(1 + 0.494 P_r^{2/3} \right)^{0.1}$$

Y el número de Nusselt promedio está dado por la ecuación.

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.296P_r^{7/15} (1 + 0.494P_r^{2/3})^{-2/5} Gr_L^{2/5} \dots \dots ec. 5.2.2.16.$$

Las propiedades del fluido dentro de la capa frontera se evalúan a la temperatura de película.

Ejemplo 5.2.2.1

Determine el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección natural para una placa vertical de 30 cm de altura, cuya superficie se encuentra a 50 °C. El aire que la rodea está a una temperatura de 20 °C. Además, calcule el espesor de la capa frontera en $x = L$.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, las propiedades del fluido son constantes, incluso la densidad y se evalúan a la temperatura de película. La capa frontera debe ser laminar a comprobar.

$$L = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$T_s = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

Las propiedades del aire a la temperatura de película, son:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\mu = 1.895 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.02625 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$c_p = 1007 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\nu = 1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$P_r = 0.7268$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{35 + 273} = \frac{1}{308} = 3.25 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Calculo del número de Grashof para toda la longitud de la placa para comprobar si el flujo es laminar.

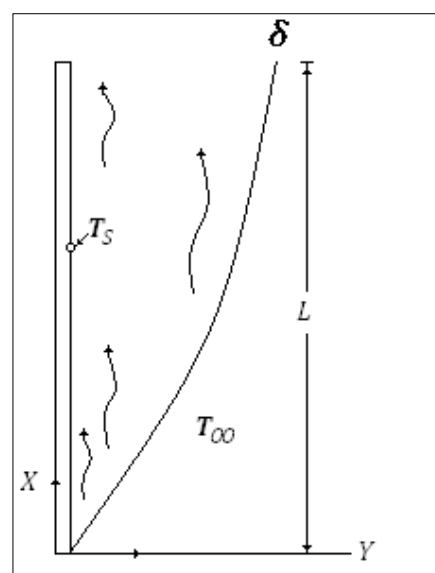
$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} = \frac{(9.8)(3.25 \times 10^{-3})(50 - 20)(0.3)^3}{(1.655 \times 10^{-5})^2} = 0.94189 \times 10^8$$

Entonces el número de Rayleigh es:

$$Ra = Gr_L P_r = (0.94189 \times 10^8)(0.7268) = 0.685 \times 10^8 < 10^9 \text{ Flujo laminar.}$$

Puesto que el flujo es laminar, puede utilizarse la ecuación 5.2.2.13, para calcular el número de Nusselt promedio:

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.667P_r^{1/2} (0.952 + P_r)^{-1/4} Gr_x^{1/4}$$



$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = 0.667(0.7268)^{1/2}(0.952 + 0.7268)^{-1/4}(0.94189 \times 10^8)^{1/4} = 49.21$$

Y el coeficiente de transferencia de calor promedio es;

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}_u k}{L} = \frac{(49.21)(0.02625)}{(0.3)} = 4.3 \text{ W/m}^2 - \text{K}$$

El espesor de la capa frontera en $x = L = 0.3$, esta dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{L} = 3.93P_r^{-1/2}(0.952 + P_r)^{1/4}Gr_L^{-1/4}$$

$$\delta = L \left[3.93P_r^{-1/2}(0.952 + P_r)^{1/4}Gr_x^{-1/4} \right]$$

$$\delta = 0.3[3.93(0.7268)^{-1/2}(0.952 + 0.7268)^{1/4}(0.94189 \times 10^8)^{-1/4}] = 0.016 \text{ m} = 1.6 \text{ cm}$$

Correlaciones empíricas para la convección natural.

Al igual que en la convección forzada gran parte de las fórmulas o correlaciones empíricas, utilizadas en la práctica y que involucran a la convección natural se basan en resultados experimentales. En esta sección se presentan las fórmulas para placas verticales, cilindros verticales, placas inclinadas, placas horizontales, cilindros horizontales y esferas.

Dichas correlaciones consisten en una relación funcional entre el número de Nusselt y el número de Rayleigh, el cual se define como el producto de los números Grashof y Prandtl. Como se estudió en el análisis de la placa pared o plana vertical en convección natural, estos grupos adimensionales son los de mayor importancia y la relación más usual es de la forma:

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L}{k} = C(G_r P_r)^n = C(R_a)^n$$

En esta relación, las propiedades del fluido dentro de la capa frontera se evalúan a la temperatura de película T_f .

❖ Correlaciones empíricas para la convección natural en placas verticales.

A continuación se presentan algunas de las correlaciones más utilizadas en la transferencia de calor en placas verticales isotérmicas, recomendadas por **McAdams** [4]. Dichas correlaciones se basan en la altura de la placa como longitud característica L_c . Las relaciones se usan para diferentes rangos del número de Rayleigh.

$$\bar{N}_u = 0.59(Ra_L)^{1/4} \quad \text{para } 10^4 < Ra_L < 10^9 \quad (5.2.2.17)$$

$$\bar{N}_u = 0.10(Ra_L)^{1/4} \quad \text{para } 10^9 < Ra_L < 10^{12} \quad (5.2.2.18)$$

Churchil y Chu[4], han demostrado que las correlaciones antes dadas se aproximan bastante a los datos experimentales.

$$\bar{N}_u = 0.68 + \frac{0.670 R_a^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad \text{para } R_a < 10^9 \quad (\text{ec. 5.2.2.19})$$

$$\bar{N}_u = 0.825 + \frac{0.387 R_a^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \quad \text{para } 10^{-1} < Ra_L < 10^{12} \quad (\text{ec. 5.2.2.20})$$

❖ **Correlaciones empíricas para la convección natural en cilindros verticales.**

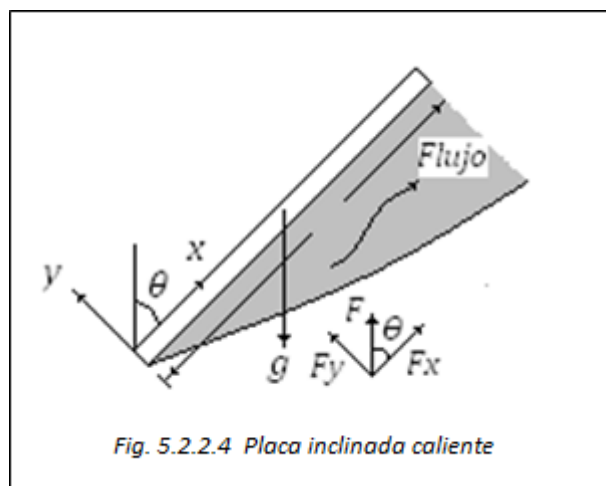
La longitud característica para cilindros verticales isotérmicos, es la altura L . La transferencia de calor en un cilindro vertical puede calcularse usando las mismas correlaciones para la placa plana vertical, siempre y cuando el espesor de la capa frontera sea pequeño comparado con el diámetro D , del cilindro. **Gebhart** [3], estableció un criterio para tratar un cilindro vertical del mismo modo que una placa vertical, utilizando la siguiente desigualdad. Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{(Gr_L)^{1/4}}$$

❖ **Correlaciones empíricas para la convección natural en placas inclinadas.**

La longitud característica para placas inclinadas isotérmicas, es su longitud L . La transferencia de calor en una placa inclinada puede calcularse usando las mismas correlaciones de la placa plana vertical, si se toma en cuenta lo siguiente.

Considere una placa inclinada caliente como se muestra en la figura 5.2.2.4, la cual forma un ángulo θ , con la vertical, como se indica en la figura.

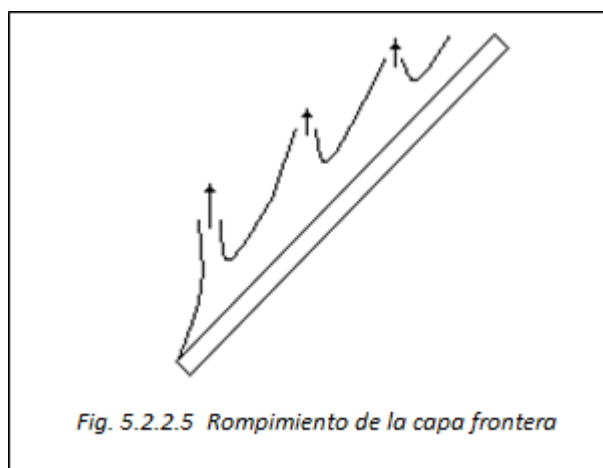


Si la placa estuviera en posición vertical, y está expuesta a un medio ambiente más frío, la fuerza neta $F = g(\rho_\infty - \rho)$, que impulsa al fluido es la diferencia entre la de empuje y la de la gravedad y actúan sobre un volumen unitario de fluido dentro de la capa frontera sería en dirección vertical.

Sin embargo como la placa está inclinada esta fuerza se descompone en sus componentes $F_x = F \cos \theta$ y $F_y = F \sin \theta$, como se indica en la figura. Dado que la componente que impulsa el movimiento del fluido

($F_x = F \cos \theta$) es la más pequeña, se espera que las fuerzas de convección sean más débiles y la velocidad de transferencia de calor sea menor con relación al caso de la placa vertical.

Mediante experimentación se ha demostrado que esto se cumple para la superficie inferior, sin embargo sucede lo contrario en la superficie superior. Esto se debe a que la componente ($F_y = F \sin \theta$) es la que inicia el movimiento del fluido hacia arriba en adición al movimiento paralelo de la placa x , ocasionando el rompimiento de la capa frontera formando columnas, como se muestra en la figura 5.2.2.5.



Este hecho, origina que la resistencia a la transferencia de calor disminuya y aumente la tasa de transferencia de calor, respecto a la dirección vertical.

En el caso de que el fluido estuviera a mayor temperatura que la placa, la capa frontera sobre la superficie superior permanece intacta con un flujo más débil en ella, y la capa frontera sobre la superficie inferior se divide, mejorándose la transferencia de calor.

Al permanecer la capa frontera intacta, ya sea la superficie inferior de una placa caliente o la superior de una placa fría, el número de Nusselt se puede determinar, utilizando las relaciones de una placa vertical; siempre y cuando se reemplace la gravedad g , por su componente, $g \cos \theta$, para cuando $\theta < 60^\circ$.

❖ **Correlaciones empíricas para la convección natural en placas horizontales.**

El valor del número de Nusselt para la transferencia de calor en superficies horizontales depende de que la placa este caliente o fría en relación con el fluido circundante, es decir:

Si la placa está más caliente que el fluido circundante se cumple que;

Si la superficie caliente de la placa está hacia arriba, en un medio ambiente más frío, la fuerza neta actúa hacia arriba, calentando al fluido y forzándolo a subir. Pero si la superficie caliente de la placa está hacia abajo, la placa bloquea al fluido caliente que tiende a subir (excepto el cercano a los bordes), impidiendo la transferencia de calor.

Si la placa es más fría que el fluido circundante, entonces se cumple lo contrario, puesto que la fuerza neta (peso del fluido menos fuerza de empuje) actúa hacia abajo y el fluido enfriado tiende a bajar.

Se puede determinar el número de Nusselt promedio para superficies horizontales tomando en consideración que la longitud característica tanto para placas cuadradas, rectangulares y circulares; puede representarse mediante la ecuación propuesta por **Goldstein, Sparrow y Jones** [4].

$$L_c = \frac{\text{Área de la superficie de la placa plana}}{\text{Perímetro de la placa plana.}}$$

Note que al aplicar esta fórmula se obtiene que para una placa plana cuadrada horizontal $L_c = L/4$, y para una placa circular $L_c = D/4$. Donde L y D , son el lado y el diámetro de las placas cuadrada y circular respectivamente.

A continuación se presentan las ecuaciones más utilizadas en la práctica para la transferencia de calor en placas horizontales. Todas las propiedades del fluido deben ser evaluadas a la temperatura de película T_f .

Placa horizontal caliente con cara hacia arriba. Las correlaciones para esta clase problemas se basan en el trabajo experimental de **Lloyd y Moran** [3], quienes emplearon técnicas electromecánicas, estas correlaciones son:

$$\bar{N}_u = 0.54(Ra_L)^{1/4} \quad \text{para } 2.6 \times 10^4 < Ra_L < 10^7 \quad (\text{ec. 5.2.2.21})$$

$$\bar{N}_u = 0.15(Ra_L)^{1/3} \quad \text{para } 10^7 < Ra_L < 3 \times 10^{10} \quad (\text{ec. 5.2.2.22})$$

La longitud característica que se utiliza en el número de Gr , se define según la ecuación de **Goldstein**.

Placa horizontal caliente con cara hacia abajo. Las correlaciones para esta clase problemas las recomienda **McAdams**. La longitud característica es la descrita por la ecuación de **Goldstein**.

$$\bar{N}_u = 0.27(Ra_L)^{1/4} \quad \text{para } 3 \times 10^5 < Ra_L < 3 \times 10^{10} \quad (\text{ec. 5.2.2.23})$$

Placa horizontal fría con cara hacia abajo. Se usarán las ecuaciones 5.2.2.21 y 5.2.2.22, para determinar el número de Nusselt.

Placa horizontal fría con cara hacia arriba. Se usará la ecuación 5.2.2.23, para el cálculo del número de Nusselt.

❖ **Correlaciones empíricas para la convección natural en cilindros horizontales.**

El valor del número de Nusselt para la transferencia de calor en cilindros horizontales para convección natural, fue presentado por **McAdams** [4], mediante las siguientes correlaciones empíricas; en las cuales la longitud característica del cilindro horizontal es su diámetro D . Todas las propiedades del fluido deben ser evaluadas a la temperatura de película T_f .

$$\bar{N}_u = 0.4 \quad \text{para } 0 < Ra_D < 10^{-5} \quad (\text{ec. 5.2.2.24})$$

$$\bar{N}_u = \text{Use la gráfica 5.2.2.6} \quad \text{para } 10^{-5} < Ra_D < 3 \times 10^4 \quad (\text{ec. 5.2.2.25})$$

$$\bar{N}_u = 0.53(Ra_D)^{1/4} \quad \text{para } 10^4 < Ra_D < 10^9 \quad (\text{ec. 5.2.2.26})$$

$$\bar{N}_u = 0.13(Ra_D)^{1/3} \quad \text{para } 10^9 < Ra_D < 10^{12} \quad (\text{ec. 5.2.2.27})$$

Churchill y Chu [4], dan una relación más compleja, pero que puede ser utilizada para un intervalo más amplio de valores para el número de Rayleigh.

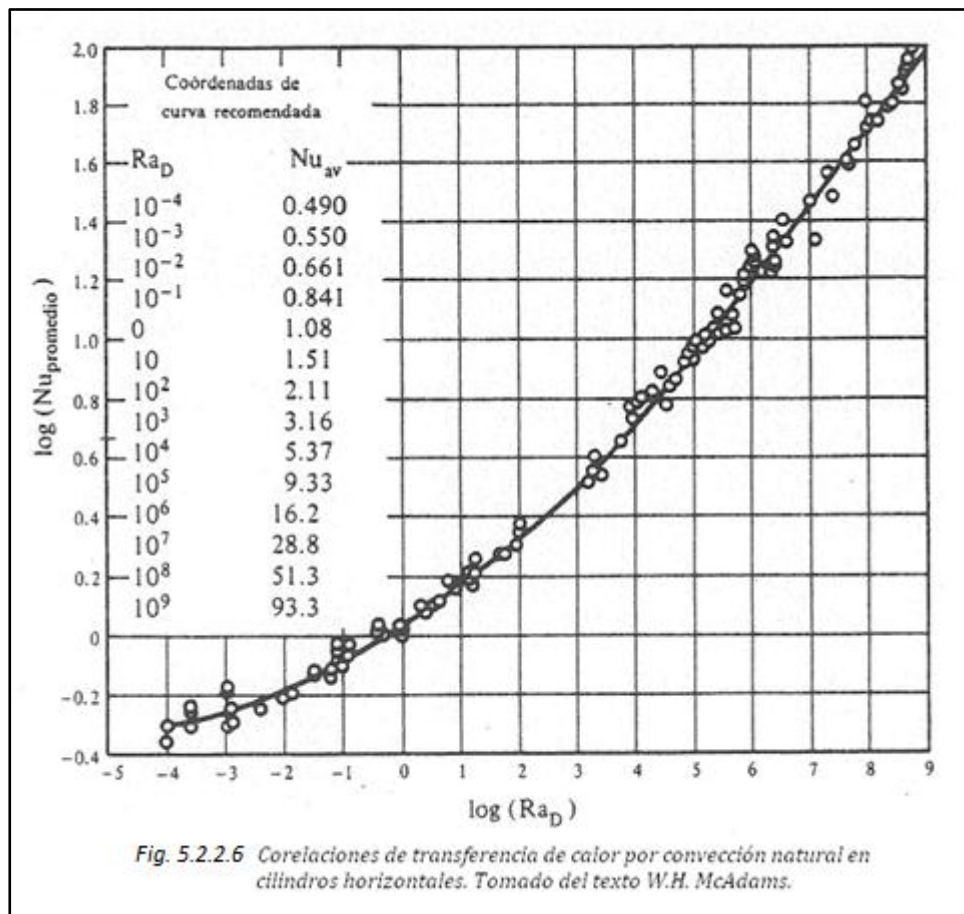
$$\bar{N}_u = \left\{ 0.6 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad \text{para } 10^{-5} < Ra_D < 10^{12} \quad (\text{ec. 5.2.2.28})$$

Otra relación más simple y a la vez restringida al intervalo laminar, fue presentada también por **Churchill y Chu**.

$$\bar{N}_u = 0.36 + \frac{0.518 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad \text{para } 10^{-6} < Ra_D < 10^9 \quad (\text{ec. 5.2.2.29})$$

Para el caso de metales líquidos, la transferencia de calor desde cilindros horizontales puede calcularse, según **Hyman, Bonilla y Ehrlich** [4], con la expresión.

$$\bar{N}_u = 0.53 (Gr_D Pr^2)^{1/4} \quad \text{para } Ra_D \leq 10^{12} \quad (\text{ec. 5.2.2.30})$$



❖ Correlaciones empíricas para la convección natural en esferas.

El valor del número de Nusselt para la transferencia de calor en esferas para convección natural, fue presentado por **Churchill**, mediante la siguiente correlación empírica; en la cual la longitud característica de la esfera es su diámetro D . Todas las propiedades del fluido deben ser evaluadas a la temperatura de película T_f .

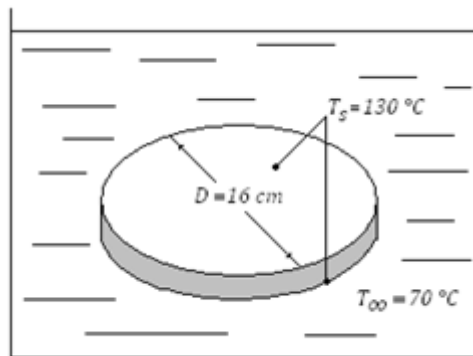
$$\bar{N}_u = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad \text{para } Ra_D \leq 10^{11} \text{ y } Pr \geq 0.7 \quad (\text{ec. 5.2.2.31})$$

Ejemplo 5.2.2.2

Una placa horizontal delgada de 16 cm de diámetro, se mantiene a 130 °C y se encuentra inmersa en un recipiente de agua cuya temperatura es de 70 °C. La placa transfiere calor por convección desde sus superficies superior e inferior. Determine la cantidad de calor que debe ser suministrado a la placa para mantener su temperatura a 130 °C.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, las propiedades del fluido son constantes, incluso la densidad y se evalúan a la temperatura de película. El calor necesario para mantener la placa a 130 °C, es igual al calor que pierde la placa por convección.



Puesto que la temperatura de la placa es uniforme, el calor suministrado a la placa es igual a la suma de calor perdido por convección natural en ambas superficies. El calor perdido por convección en el contorno de la placa se desprecia por ser ésta muy delgada.

Las propiedades del agua saturada a la temperatura de película son:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{130 + 70}{2} = 100 \text{ °C}$$

$$\rho = 957.9 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.282 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.282 \times 10^{-3}}{957.9} = 2.944 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.679 \text{ W/m-K}$$

$$c_p = 4217 \text{ J/kg-K}$$

$$Pr = 1.75$$

$$\beta = 0.75 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$L_c = \frac{D}{4} = \frac{0.16}{4} = 0.04 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{\pi}{4}(D)^2 = \frac{\pi}{4}(0.16)^2 = 0.02 \text{ m}^2$$

Calculo del número de Grashof para toda la placa.

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} = \frac{(9.8)(0.75 \times 10^{-3})(130 - 70)(0.04)^3}{(2.944 \times 10^{-7})^2} = 3.15 \times 10^8$$

Entonces el número de Rayleigh es:

$$Ra = Gr_L Pr = (3.15 \times 10^8)(1.75) = 5.51 \times 10^8$$

Para la superficie superior.

Con base al número de Rayleigh se selecciona la ecuación correspondiente para el cálculo del número de Nusselt, así:

$$\bar{N}_u = 0.15(Ra)^{1/3} \quad \text{para } 10^7 < Ra_L < 3 \times 10^{10} \dots \text{ec. 5.2.2.22}$$

Es la apropiada, sustituyendo valores, se tiene;

$$\bar{N}_u = 0.15(Ra)^{1/3} = 0.15(5.51 \times 10^8)^{1/3} = 123$$

Entonces el coeficiente de transferencia de calor promedio es:

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}_u k}{L_c} = \frac{(123)(0.679)}{0.04} = 2088 \text{ W/m}^2 - K$$

Y la cantidad de calor disipado por convección natural por la superficie superior es:

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = (2088)(0.02)(60) = 2505.6 \text{ W}$$

Para la superficie inferior.

Con base al número de Rayleigh se selecciona la ecuación correspondiente para el cálculo del número de Nusselt, así:

$$\bar{N}_u = 0.27(Ra)^{1/4} \quad \text{para } 3 \times 10^5 < Ra_L < 3 \times 10^{10} \dots \text{ec. 5.2.2.23}$$

Es la apropiada, sustituyendo valores, se tiene;

$$\bar{N}_u = 0.27(Ra)^{1/4} = 0.27(5.51 \times 10^8)^{1/4} = 41.37$$

Y el coeficiente de transferencia de calor promedio es:

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}_u k}{L_c} = \frac{(41.37)(0.679)}{0.04} = 702.25 \text{ W/m}^2 - K$$

Y la cantidad de calor disipado por convección natural por la superficie superior es:

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = (702.25)(0.02)(60) = 842.7 \text{ W}$$

Por último, para calcular el calor suministrado a la placa, el cual es igual al disipado por convección para poder mantener la temperatura de la placa constante; se suman las cantidades de calor disipadas por ambas superficies.

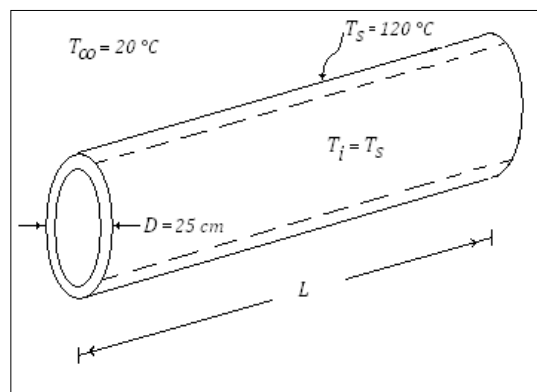
$$q = 2505.6 + 842.7 = 3,348.3 \text{ w} = 3.35 \text{ kW}$$

Ejemplo 5.2.2.3

Una tubería horizontal 25 cm de diámetro exterior, conduce aire a 120 °C. La temperatura del aire alrededor del tubo es de 20 °C. Calcule el flujo de calor por unidad de longitud disipado por el tubo.

Solución:

Prevalecen condiciones de estado estacionario, las propiedades del fluido son constantes, incluso la densidad y se evalúan a la temperatura de película. La temperatura del aire en el interior del tubo es igual a la de la superficie interior del tubo y se supone igual a la temperatura de la superficie exterior, considerando que el tubo es de pared delgada y la caída de temperatura es casi nula.



Así:

Las propiedades del aire a la temperatura de película son:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{120 + 20}{2} = 70 \text{ °C}$$

$$\rho = 1.028 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.282 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$$

$$\nu = 1.995 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.02881 \text{ W/m - K}$$

$$c_p = 1007 \text{ J/kg - K}$$

$$Pr = 0.7177$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{70 + 273} = 2.916 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$L_c = D = 0.25 \text{ m}$$

Calculo del número de Grashof para el cilindro.

$$Gr_D = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2} = \frac{(9.8)(2.916 \times 10^{-3})(120 - 20)(0.25)^3}{(1.995 \times 10^{-5})^2} = 1.122 \times 10^8$$

Entonces el número de Rayleigh es:

$$Ra_D = Gr_D Pr = (1.122 \times 10^8)(0.7177) = 8.052 \times 10^7$$

Enseguida se selecciona la correlación tomando en cuenta el número de Rayleigh.

$$\bar{N}_u = 0.53(Ra_D)^{1/4} \quad \text{para } 10^4 < Ra_D < 10^9 \quad (\text{ec. 5.2.2.26})$$

Sustituyendo valores:

$$\bar{N}_u = 0.53(Ra_D)^{1/4} = 0.53(8.052 \times 10^7)^{1/4} = 50.2$$

Entonces el coeficiente de transferencia de calor promedio es:

$$\bar{h} = \frac{\bar{N}_u k}{D} = \frac{(50.2)(0.02881)}{0.25} = 5.78 \text{ W/m}^2 - K$$

Y el flujo de calor disipado por unidad de longitud es:

$$q \boxminus = \frac{q}{L} = \bar{h}(\pi D)(T_s - T_\infty) = (5.78)\pi(0.25)(120 - 20) = 454.4 \text{ W/m}.$$

5.2.3 Convección natural en espacios cerrados.

En la práctica, es común encontrar cierto tipo de fluidos encerrados en el interior de espacios encerrados, ya sean verticales u horizontales. Dichos fluidos son fenómenos representativos de corrientes de convección natural, los cuales dan lugar a soluciones analíticas, empíricas y numéricas. En esta sección sólo se presentan las correlaciones empíricas para mayor simplicidad al problema.

Convección natural en espacios cerrados verticales.

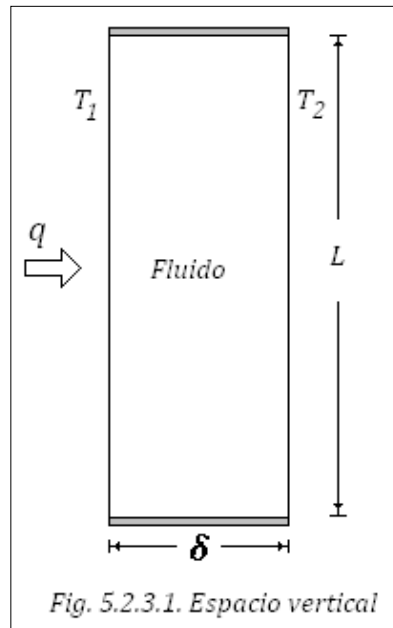
Según **McGregor y Emery** [4], al encontrarse un fluido encerrado entre dos placas verticales separadas una distancia δ , y aisladas en la parte superior e inferior como se muestra en la figura 5.2.3.1, al imponer una diferencia de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$, se origina una transferencia de calor en las corrientes de convección natural. En esa figura el número de Grashof se calcula mediante la expresión:

$$Gr_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2}$$

Para números de Grashof muy bajos $\delta < 2000$, la transferencia de calor tiene lugar principalmente por conducción, puesto que las corrientes de convección natural son insignificantes. Dado que sólo existe conducción en la capa frontera, mediante la ley de Fourier se puede escribir;

$$q = \frac{k_e A(T_1 - T_2)}{\delta}$$

En éste caso la conductividad térmica efectiva k_e , es esencialmente igual a la conductividad térmica real k .



Para números de Grashof mayores, las corrientes naturales hacen acto de presencia y la contribución de convección a la transferencia de calor a través del espacio encerrado, no es insignificante y k_e es mayor que k . Así, según Jacob se puede escribir,

$$q = \bar{h}A(T_1 - T_2) = \frac{k_e A(T_1 - T_2)}{\delta}$$

o bien

$$\bar{h} = \frac{k_e}{\delta}$$

De manera que

$$\bar{N}_u = \frac{\bar{h}L_c}{k} = \frac{\bar{h}\delta}{k} = \frac{k_e}{k}$$

Observe que en la definición del número de Nusselt, la longitud característica L_c es igual a la separación δ , entre las placas verticales.

Las correlaciones empíricas para el número de Nusselt fueron presentadas por **Jacob** para la conductividad térmica efectiva.

$$\bar{N}_u = 0.18(Gr_\delta)^{1/4} \left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/9} \quad \text{para } 20,000 < Gr_\delta < 200,000 \quad (\text{ec. 5.2.3.1})$$

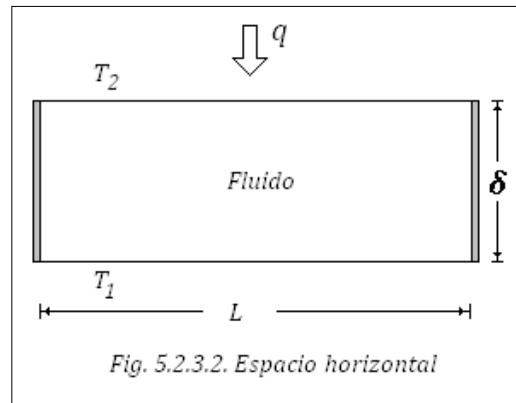
$$\bar{N}_u = 0.065(Gr_\delta)^{1/3} \left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/9} \quad \text{para } 200,000 < Gr_\delta < 10 \times 10^6 \quad (\text{ec. 5.2.3.2})$$

Las propiedades del fluido y la conductividad térmica se evalúan a la temperatura promedio de T_1 y T_2 .

Convección natural en espacios cerrados horizontales.

Considere un sitio cerrado en posición horizontal como el ilustrado en la figura 5.2.3.2, cuyas superficies están separadas una distancia δ muy pequeña, cuando la temperatura de la superficie superior es mayor que la de la inferior, las corrientes de convección natural son insignificantes, y la transferencia de calor se debe solo al mecanismo de conducción. En tal caso el número de Nusselt es igual a la unidad.

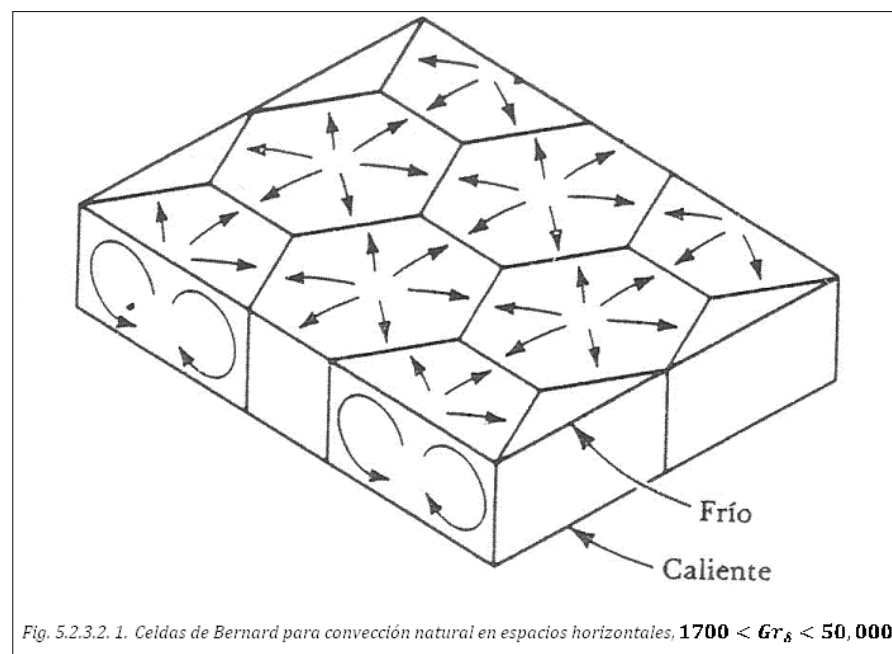
Pero, Cuando la superficie inferior es más caliente que la superior y el número de Grashof es menor que 1700, basado en la separación o longitud característica δ , entonces se tiene el caso de la conducción pura, como el único modo de transferencia de calor y el número de Nusselt sigue siendo igual a la unidad.



Sin embargo, para $Gr_\delta > 1700$, se establecen patrones de convección; creándose un sin número de celdas hexagonales en la superficie ver figura 5.2.3.2.1, conocidas como celdas de Bernard. Para $Gr_\delta > 50,000$ se establece la turbulencia y se destruye el patrón de celdas.

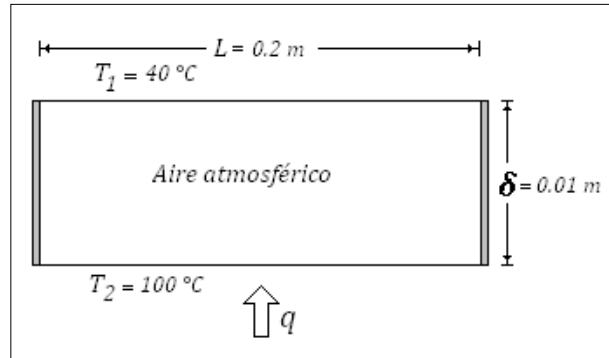
O'Toole y Silveston [4], proporcionan la siguiente correlación para la transferencia de calor en espacios cerrados horizontales.

$$\bar{N}_u = 0.104(Ra_\delta)^{0.305}(P_r)^{0.5} \quad \text{para } 6 \times 10^6 < Ra_\delta < 10^8 \quad (\text{ec. 5.2.3.3})$$



Ejemplo 5.2.3.1

Dos placas horizontales de 20 cm de lado están separadas 1 cm y en el espacio entre ellas hay aire a 1 atmósfera. Las temperaturas de las placas, son 100 °C para la inferior y 40 °C para la superior. Calcúlese la transferencia de calor a través del espacio entre placas.



$$T_p = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{100 + 40}{2} = 70 \text{ °C}$$

$$\rho = 1.028 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 2.052 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 1.995 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.2881 \text{ W/m-K}$$

$$Pr = 0.7177$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{343} = 2.916 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

La separación entre placas es muy pequeña y por lo tanto, la transferencia de calor es solo por conducción.

$$GrPr = \frac{g\beta(T_2 - T_1)\delta^3}{\nu^2} (Pr) = \frac{(9.8)(2.916 \times 10^{-3})(100 - 40)(0.01)^3}{(1.995 \times 10^{-5})^2} (0.7177) = 3092$$

$$\frac{k_e}{k} = C(GrPr)^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m = 0.059(3092)^{0.4} \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^0 = 1.47$$

$$q = \frac{k_e A (T_2 - T_1)}{\delta} = \frac{(1.47)(0.02881)(0.2)^2(100 - 40)}{(0.01)} = 10.15 \text{ W}$$

5.2.4 Convección mixta.

Cuando las velocidades, debidas al flujo forzado son comparables con las velocidades debidas a las corrientes de convección natural, como por ejemplo cuando la velocidad del aire es de 0.3 m/s, la convección adopta una especie de mezcla denominada **convección mixta**; es decir, la convección es una superposición de convección forzada y natural.

Dado que la transición para la convección forzada es el número de Reynolds y para la convección natural el número de Grashof respectivamente, es de esperar que la convección mixta involucre ambos números para definir el grupo adimensional.

Un análisis de las ecuaciones de la capa frontera nos señala que $(G_r/R_e^2) \gg 1$ es la condición para que la convección natural resulte de mayor significado que convección la forzada.

Las figuras 5.2.4.a y 5.2.4.b, fueron presentadas por **Metals y Eckert** [1] y delimitan las regiones de convección libre (natural), forzada y mixta (mezclada) para flujos a través de tubos horizontales y verticales.

La correlación para convección mixta en flujo laminar, según **Brown y Gauvin** [1], está representada por la siguiente ecuación.

$$\bar{N}_u = 1.75 \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \left[Gz + 0.012 (Gz G_{rD}^{1/3})^{4/3} \right]^{1/3} \quad (\text{ec 5.2.4.1})$$

Donde:

$$Gz = \text{Número de Graetz} = R_e P_r (D/L)$$

μ_b = viscosidad dinámica del fluido a la temperatura promedio.

μ_w = viscosidad dinámica del fluido a la temperatura de pared.

La correlación para convección mixta en flujo turbulento, según **Metals** [1], está expresada por la siguiente ecuación.

$$\bar{N}_u = 4.69 R_e^{0.27} P_r^{0.21} G_r^{0.07} \left(\frac{D}{L} \right)^{0.36} \quad (\text{ec 5.2.4.2})$$

El intervalo de aplicación de las figuras 5.2.4.a y 5.2.4.b es,

$$10^{-2} < P_r \left(\frac{D}{L} \right) < 1$$

Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película y la temperatura de la pared del tubo, permanece constante.

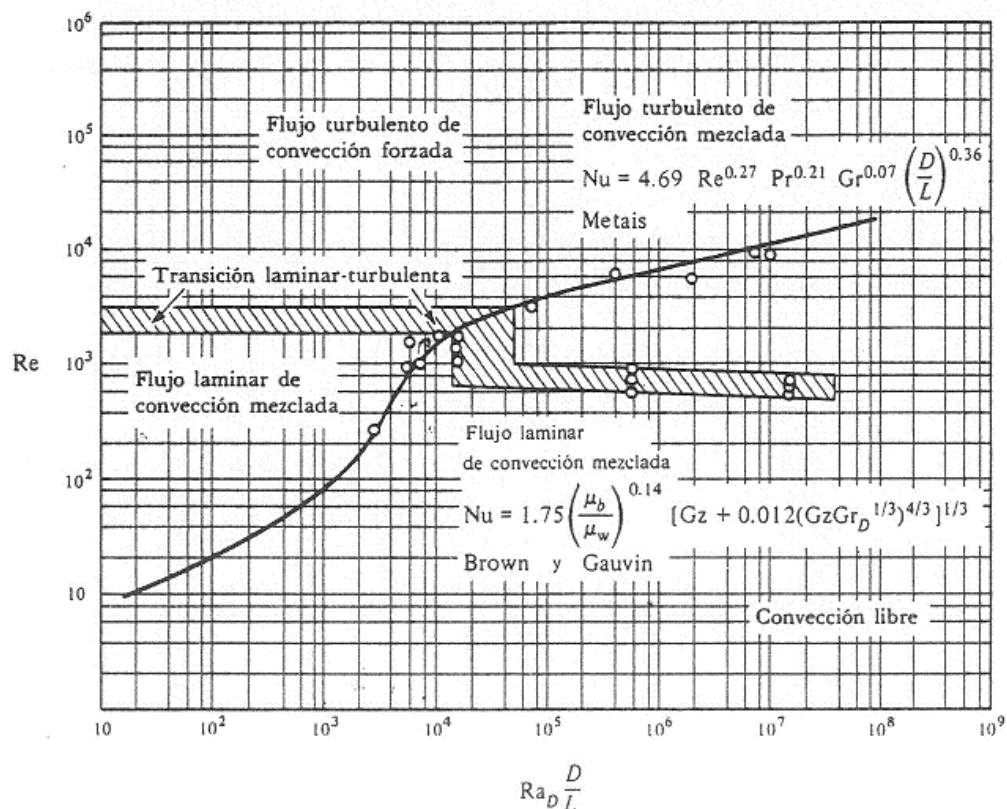


Fig. 5.2.4.a. Regímenes de convección natural, forzada y mezclada para flujo a través de tubos horizontales.

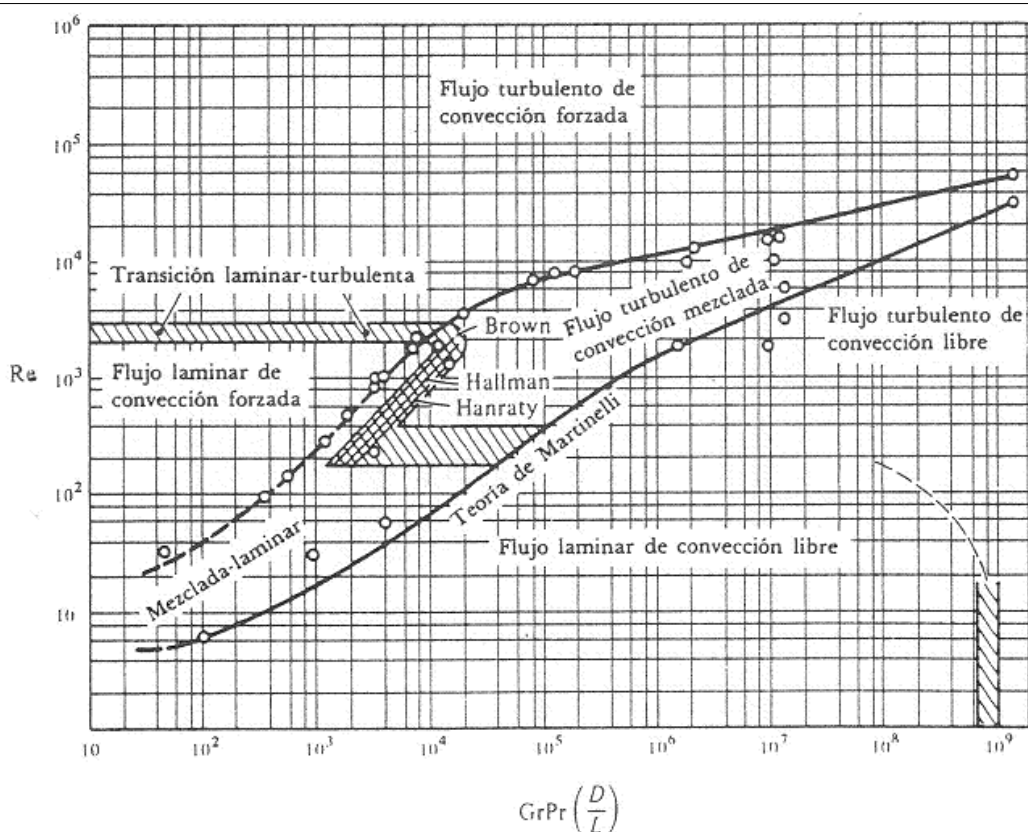
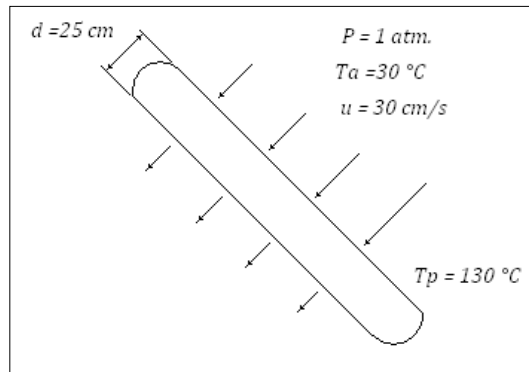


Fig. 5.2.4.b. Regímenes de convección natural, mezclada y forzada para flujo a través de tubos verticales.

Ejemplo 5.2.4.1

Se obliga a circular aire a 1 atmósfera y 30 °C transversalmente a un tubo horizontal de 25 cm de diámetro exterior a una velocidad de 30 cm/s. La pared del tubo se mantiene a la temperatura constante de 130 °C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor en esa situación si la longitud del tubo es de 40 cm.



Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_p + T_a}{2} = \frac{130 + 30}{2} = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 0.9994\text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 2.096 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 2.097 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0.02953\text{ W/m}\cdot\text{K}$$

$$Pr = 0.7154$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{353} = 2.833 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$$

La viscosidad del fluido evaluada a la temperatura de pared $T_p = 130\text{ }^{\circ}\text{C}$,

$$\mu_p = 2.3045 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

La viscosidad se evalúa a la temperatura en bulto, la cual se toma en éste caso como $T_b = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$, realmente la temperatura a la cual se evalúa dicha viscosidad es la temperatura media en bulto.

$$\mu_b = 1.872 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

Cálculo de número de Reynolds con las propiedades evaluadas a la temperatura de película.

$$Re = \left(\frac{\rho u d}{\mu} \right)_f = \frac{(0.9994)(0.3)(0.025)}{(2.096 \times 10^{-5})} = 357.6$$

Cálculo de número de Grashof con las propiedades evaluadas a la temperatura de película.

$$Gr_d = \frac{g\beta(T_2 - T_1)\delta^3}{\nu^2} = \frac{(9.8)(2.833 \times 10^{-3})(130 - 30)(0.025)^3}{(2.097 \times 10^{-5})^2} = 100,390.8 = 1.00390 \times 10^5$$

Cálculo de número de Rayleigh.

$$Ra_d = Gr_d Pr = (100,390.8)(0.7154) = 7.18195 \times 10^4$$

Así;

$$Ra_d \left(\frac{d}{L} \right) = 4,488.72 \approx 4.5 \times 10^3$$

Con base en la figura 5.4.2.a se selecciona el tipo de flujo y con ello la relación a utilizar en el cálculo de número de Nusselt.

Para ello se emplea el valor del número de Reynolds.

$$Re = 357.6$$

$$Ra_d \left(\frac{d}{L} \right) = 4,488.72 \approx 4.5 \times 10^3$$

Concluyendo que el flujo es laminar de convección mezclada, y la ecuación empleada para el cálculo del número de Nusselt es:

$$\bar{Nu} = 1.75 \left(\frac{\mu_b}{\mu_p} \right)^{0.14} \left[G_z + 0.012 (G_z Gr_d^{1/3})^{4/3} \right]^{1/3}$$

Calculo del número de Graetz.

$$G_z = Re Pr \left(\frac{d}{L} \right) = (357.6)(0.7154) \left(\frac{0.025}{0.4} \right) = 16$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$\bar{Nu} = 1.75 \left(\frac{1.872 \times 10^{-5}}{2.3045 \times 10^{-5}} \right)^{0.14} \left[16 + 0.012 (16 \times 100,390.8^{1/3})^{4/3} \right]^{1/3} = 7.8$$

Y el coeficiente de transferencia de calor es,

$$\bar{h} = \frac{\bar{Nu} k}{d} = \frac{(7.8)(0.02953)}{(0.025)} = 9.22 \text{ W/m}^2 - K$$

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. La distribución de velocidades para cierto flujo está dada por la expresión $u = 10 \sin(\pi/4)y$, donde y , es la distancia a la superficie del sólido en cm , y u es la velocidad en m/s . Determine el esfuerzo cortante viscoso en $y = 0$ y $y = 5mm$ para: a) Agua y b) Aceite para motor no usado. La temperatura del fluido es de $20^\circ C$ en todos los casos.

$$R: 7.87 \times 10^{-3} \text{ N/m}^2, 3.09 \times 10^3 \text{ N/m}^2.$$

2. Sobre una placa plana delgada fluye aceite nuevo para motor que está a una temperatura de 150°C , con una velocidad de corriente libre de 3 m/s . Trace el perfil de velocidades, dentro de la capa frontera para $x = 20\text{ cm}$ y $x = 1\text{ m}$. Además calcule la distancia crítica para asegurar flujo laminar.

R: 1.1 m .

3. Calcule la fuerza de arrastre en una esfera de radio igual a 10 cm , que se mantiene en una corriente de aire con $u_{\infty} = 40\text{ m/s}$ y $T_{\infty} = 10^{\circ}\text{C}$.

R: 15 N .

4. Sobre una placa plana circula aire a 30°C y una atmósfera, y con una velocidad de 2 m/s . Calcúlese el espesor de la capa límite a 20 y 40 cm del borde de ataque de la placa. Calcule también el flujo másico que entra en la capa límite entre los 20 y 40 cm .

R: $0.588\text{ cm}, 0.832\text{ cm}, 3.54 \times 10^{-3}\text{ kg/s}$.

5. Sobre una placa plana cuadrada de 1 m de lado, circula hidrógeno a 2 atm . y 15°C , a una velocidad de 6 m/s . La placa se mantiene a una temperatura constante de 135°C . Calcúlese la pérdida de calor desde la placa.

R: 48.7 kW .

6. Sobre una placa plana fluye aire con una velocidad de 20 m/s . La placa tiene 50 cm de largo y 50 cm de ancho. Un alambre colocado en $x = 4.5\text{ cm}$ provoca transición laminar a turbulenta. Calcúlese la razón de pérdida de calor de la placa entera, si la temperatura de la superficie es de 60°C y la temperatura del aire es de 20°C . La presión es una atmósfera.

R: 85.9 W .

7. Vapor saturado a la temperatura de 280°C fluye a través de una tubería cuyo diámetro interior es de 15 cm a una razón de flujo de masa de 100 kg/h . El coeficiente convectivo de transferencia de calor entre la superficie exterior de la tubería y el aire ambiente es de $10\text{ W/m}^2 - \text{K}$ y la temperatura del aire ambiente es de 30°C . Si el calor latente de vaporización del vapor es 1543.6 kJ/kg . Determine la cantidad de vapor condensado en 30 m de longitud. Pase por alto la caída de temperatura a través de la pared de la tubería.

R: 82.43 kg/h .

8. Vapor saturado a 200 kPa y 212.42°C será sobrecalentado en un supercalentador. El vapor fluye a través de un tubo cuyo diámetro interior es de 4 cm a una velocidad de 20 m/s . La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 500°C . Determine la longitud de tubo requerida.

R: 38.3 m .

9. Un kg/s de sodio líquido a $300\text{ }^{\circ}C$ entra a una tubería de acero puro de 20 cm de diámetro. La pared del tubo se mantiene constante a $375\text{ }^{\circ}C$. Calcule la temperatura de salida del sodio si el tubo tiene una longitud de 0.75 m .

R: $366.5\text{ }^{\circ}C$.

10. Se calientan 2.3 kg/s de sodio líquido desde 120 hasta $150\text{ }^{\circ}C$. Se dispone de un tubo de 2.5 cm de diámetro interior calentado eléctricamente (flujo de calor Constante). Si la temperatura de la pared del tubo no debe exceder de $200\text{ }^{\circ}C$. Calcúlese la longitud mínima requerida.

R: 38.5 m .

11. Aire a la presión atmosférica a $20\text{ }^{\circ}C$ fluye sobre un banco de tubos de 12 filas de alto y 6 filas de fondo a la velocidad de 10 m/s medida en el sentido de la corriente. La superficie de los tubos se mantiene a $100\text{ }^{\circ}C$. El diámetro de los tubos es de 26 mm , y los tubos están arreglados en forma escalonada. Los centros de los tubos forman las esquinas de un triángulo equilátero de 45 mm por lado. Calcule: a) La razón de transferencia de calor total si los tubos tienen 4 m de longitud. b) La caída de presión en el banco de tubos. c) La velocidad del aire a la salida del haz de tubos.

R: 258.7 kW , 585 Pa , 10.85 m/s .

12. Determine la razón de entrada de calor en una placa de acero vertical que pierde calor por convección natural al aire en los alrededores. La placa tiene 30 cm de altura y 50 cm de ancho y se mantiene a $150\text{ }^{\circ}C$. La temperatura del aire atmosférico es de $20\text{ }^{\circ}C$.

R: 126.77 W .

13. Considere una placa cuadrada vertical de $0.6 \times 0.6\text{ m}$ en un cuarto a $30\text{ }^{\circ}C$. uno de sus lados está aislado, mientras el otro se mantiene a $90\text{ }^{\circ}C$. Determine la razón de transferencia de calor por convección natural desde la placa hacia el aire.

R: 114.6 W .

14. Un gran tanque de acero de 3 m de alto y 1 m de diámetro, se usa como receptor para la salida de un compresor de aire. El aire en el tanque está a una temperatura de $100\text{ }^{\circ}C$ y 3 atmósferas . a) Si las paredes interiores del tanque se encuentran a una temperatura de $30\text{ }^{\circ}C$, ¿Cuál es la razón de transferencia de calor por convección natural a las paredes verticales en el interior del tanque? b) Si el espesor de la pared es de 1 cm , ¿Cuál es la caída de temperatura a través de la pared? Tome $k = 54\text{ W/m}^2 - K$.

R: $6,002\text{ W}$, $0.118\text{ }^{\circ}C$.

15. Considere un cilindro vertical cuya superficie exterior se encuentra a $100\text{ }^{\circ}C$. El cilindro tiene 1 m de largo y 10 cm de diámetro. Calcúlese la transferencia de calor hacia el aire que se encuentra a presión atmosférica y $20\text{ }^{\circ}C$.

R: 141 W .

16. Una placa horizontal de $20 \times 20 \text{ cm}$ de lado, se mantiene a una temperatura constante de 55°C en presencia de aire ambiente a 25°C . Calcúlese el calor perdido por la superficie superior de la placa.

R: 8 W.

17. Una placa horizontal a una temperatura uniforme de 400 K , tiene la forma de triángulo equilátero de 45 cm de lado y está expuesta al aire ambiente a 300 K . Calcúlese el calor disipado por la placa en la cara superior, considerando que la inferior está aislada.

R: 72 W.

18. Una placa de $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, inclinada 60° con respecto a la horizontal, se mantiene a 50°C . Calcúlese la pérdida de calor por ambas caras de la placa, hacia una masa de agua que está a 20°C .

R: 50.3 W.

19. Un alambre delgado que tiene un diámetro de 0.02 mm , se mantiene a una temperatura constante de 55°C por medio de una corriente eléctrica. El alambre se expone al aire a 1 atmósfera y 5°C . Calcúlese la potencia eléctrica necesaria para mantener la temperatura del alambre, si su longitud es de 50 cm .

R: 0.755 W.

20. Un tanque de 0.2 m^3 , lleno de aceite para motor, se calienta desde 10°C hasta 60°C , por medio de vapor que pasa a través de una bobina de cobre de 10 mm de diámetro exterior; que tiene 10 vueltas de 50 cm de diámetro. El vapor está a 110°C . Suponga que hay un mezclado perfecto de aceite y que la bobina se puede aproximar a un cilindro horizontal sumergido en aceite. Calcúlese el tiempo de calentamiento.

R: 0.94 h.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 5

UNIDAD 5: Actividad 1

CONCEPTO DEL MECANISMO DE LA CONVECCIÓN.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del mecanismo de la convección forzada y convección natural o libre.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto del mecanismo de la convección, haciendo mención de los diversos métodos utilizados en el análisis y obtención del coeficiente de transferencia de calor. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 5: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONVECCIÓN FORZADA.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección forzada en placas planas.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Sobre una placa plana delgada fluye aire a una temperatura de 25°C y con una velocidad de 2 m/s . La placa tiene 3 m de largo y 1 m de ancho. Estime el máximo espesor de la capa frontera y la fuerza necesaria para mantener la placa en la corriente de aire. La placa está expuesta a la corriente en ambas caras.

$$R: 2.25.\text{cm}, 2.96 \times 10^{-2}\text{ N}.$$

2. Utilizando el método integral, determine el espesor de la capa frontera para un flujo laminar sobre una placa, usando un perfil de velocidades de la forma:

$$\frac{u}{u_{\infty}} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta} \right)$$

$$R: 3.46 \times Re_x^{-1/2}.$$

3. Sobre una placa cuadrada de 20 cm de lado, circula aceite de motor nuevo a 20°C y 10 m/s . La superficie de la placa se mantiene a 40°C . Calcúlese el calor perdido por la placa y la fuerza de resistencia para una cara de la placa sin calefacción.

R: 6.84 W, 39 N.

UNIDAD 5: Actividad 3**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONVECCIÓN FORZADA.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección forzada en tuberías.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. En un tubo de 3 mm de diámetro, entra agua a 20 °C y sale a 30 °C. El flujo másico es tal que el número de Reynolds es 600. La longitud del tubo es de 10 cm y se mantiene a una temperatura constante de 60 °C. Calcúlese el flujo másico de agua.

R: 4.31 kg/h.

2. En una tubería de acero inoxidable de 2.5 cm de diámetro, entra 1 Kg/s de bismuto líquido a 400 °C. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante en 450 °C. Calcúlese la temperatura de salida del bismuto, si el tubo tiene una longitud de 60 cm.

R: 446 °C.

UNIDAD 5: Actividad 4**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONVECCIÓN FORZADA.**

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección forzada.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Fluye aire a una velocidad de 7.5 m/s y con una temperatura de 35 °C, a través de un banco de tubos en línea de 12 filas de altura y 8 filas de fondo. El diámetro exterior de los tubos es de 20 mm y la separación longitudinal es igual a la transversal e igual a 2d. La temperatura de la superficie de los tubos es de 100 °C. Calcule: a) El coeficiente promedio de transferencia de calor. b) La temperatura a la salida del haz de tubos. c) La caída de presión.

$R: 130 \text{ W/m}^2, 56^\circ\text{C}, 300 \text{ Pa}.$

UNIDAD 5: Actividad 5

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONVECCIÓN NATURAL.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección natural.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Una placa cuadrada vertical de 1 m de lado, se mantiene a 49°C en aire ambiente a 21°C . Calcule la pérdida de calor desde la placa.

$R: 18.65 \text{ W}.$

2. Un cilindro vertical de 1.5 m de alto y 19 cm de diámetro, se mantiene a una temperatura de 90°C en un ambiente a presión atmosférica y 30°C . Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de éste. Para el cálculo trate el cilindro como una placa vertical.

$R: 230 \text{ W}.$

3. Si una tubería vertical de 10 cm de diámetro exterior, a una temperatura de superficie de 100°C ; está en un cuarto donde el aire atmosférico a 20°C , la rodea. ¿Cuál es la razón de pérdida de calor por metro de longitud de tubería? Tome $L_c = 3 \text{ m}$.

$R: 134 \text{ W/m}.$

UNIDAD 5: Actividad 6

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONVECCIÓN NATURAL.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección natural.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Determine la razón de calor ganado por una placa horizontal delgada de 20 *cm* de diámetro con una temperatura superficial de 100 °C, si se sumerge en aceite para motor a 140 °C.

R: 245 W.

2. Una placa de 10 *cm* x 10 *cm* inclinada 45 ° respecto a la horizontal, se mantiene a 80 °C. Calcúlese la pérdida de calor de la placa hacia el aire ambiente que esta a 20 °C.

R: 3.6 W.

3. Un calentador de 2 *cm* de diámetro mantiene su superficie a 40 °C, y se encuentra sumergido en agua en posición horizontal a 20 °C. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud hacia el agua por convección natural.

R: 907.7 W/m.

4. Una esfera de 2.5 *cm* de diámetro se mantiene a 35 °C, sumergida en agua a 15 °C. Calcúlese el flujo de calor en estas condiciones.

R: 27 W.

Unidad 6

Competencias específicas a desarrollar:

1. Comprender y explicar el concepto de condensación pelicular sobre placas verticales y aplicar las correlaciones empíricas correspondientes en la solución de problemas.
2. Comprender y explicar el concepto de condensación pelicular en cilindros verticales y placas inclinadas y aplicar las correlaciones empíricas que correspondan en la solución de problemas.
3. Comprender y explicar el concepto de condensación pelicular en cilindros horizontales y aplicar las correlaciones empíricas correspondientes en la solución de problemas.
4. Comprender y explicar el concepto de ebullición, ebullición en núcleo y punto de quemado.

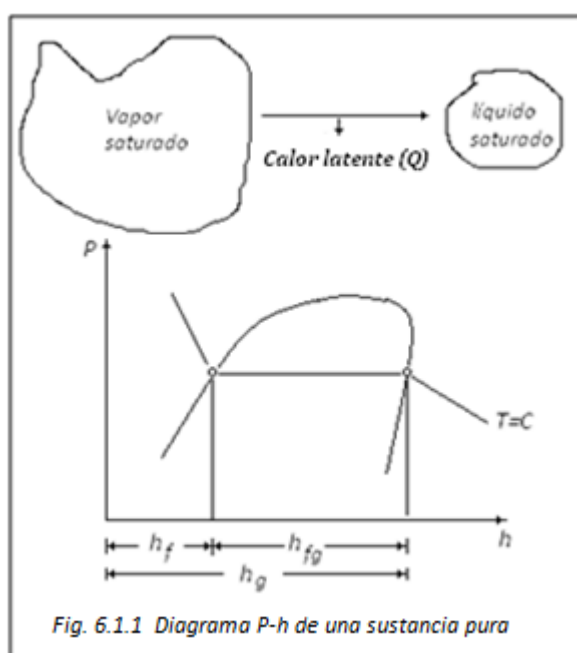
Transferencia de calor con cambio de fase.

6.1 Definiciones.

En la unidad anterior se estudió el intercambio de calor entre dos fluidos a través de una superficie, o de un fluido con una superficie, pero en ambos casos sin cambio de fase. Sin embargo, en la práctica se presenta el caso de la transferencia de calor con cambio de fase, como ocurre en los condensadores, evaporadores, generadores de vapor y muchos otros dispositivos utilizados en la industria. Por tal motivo es necesario comprender la transferencia de calor con cambio de fase en los procesos de condensación y ebullición, en el caso de una sustancia pura.

Condensación.

La condensación es el proceso en el cual un vapor saturado se transforma en líquido saturado al perder energía en forma de calor latente a temperatura constante. En la figura 6.1.1, se ilustra el diagrama P-h para el proceso descrito anteriormente.



En el calentamiento o en sistemas de generación de energía que utilizan vapor, para impulsar las turbinas; éste se debe condensar para ser usado nuevamente. La eficiencia de la unidad condensadora o condensador de vapor, se determina según el modo de condensación que prevalece:

Por **película**, en cuyo caso el vapor se condensa en una película continua que cubre completamente la superficie.

Por **goteo** en cuyo caso el vapor se condensa en pequeñas gotitas de líquido de diferentes tamaños.

Sin embargo, conviene mantener siempre la condensación por goteo, debido a que su coeficiente de transferencia de calor es 5 y hasta 10 veces mayor que el de película.

Esto se debe a:

- a) Un mayor flujo de calor a través de la superficie curvada de las gotas, que a través de una película de la misma masa.
- b) Una mayor transferencia de calor entre el vapor y la superficie lisa.
- c) Una remoción más rápida del vapor condensado debida al enlace y rodamiento de las gotas que el que ocurre en un flujo de película.

Condensación por película.

La teoría básica de la condensación por película fue propuesta por **Nusselt** [3], y se basa en un vapor puro a su temperatura de saturación, el cual se condensa en una superficie (placa vertical) cuya temperatura es menor que la temperatura de saturación del vapor. Nusselt propuso que el vapor condensado formaba una película sobre la superficie de transferencia de calor y determinó el espesor de dicha película líquida mediante un balance entre las fuerzas de gravedad, de flotación y de corte, como se estudiará posteriormente.

Condensación por goteo.

La primera teoría emitida por **Jakob** [4] sobre la condensación por goteo trata de una película condensada que se parte en gotas en lugares de nucleación y crecen hasta rodar o desprenderse de la superficie. Sin embargo, experimentos posteriores realizados por **Umur y Griffith** [4] indicaron que no se formó ninguna película y que las gotas se formaron en sitios de nucleación discretos. Más aún, el misterio de la condensación por goteo sigue sin resolver.

Ebullición.

Al igual que la condensación, la ebullición es de gran importancia en las centrales de generación de energía, pues en un generador de vapor se transforma agua en estado de líquido saturado, al estado de vapor saturado y hasta sobrecalentado con el propósito de impulsar la turbina, tan solo agregando calor procedente de la combustión de algún combustible.

Una condición necesaria para que ocurra la ebullición es que la temperatura de la superficie que se calienta exceda a la temperatura de saturación del líquido. Hay tres tipos de ebullición y son:

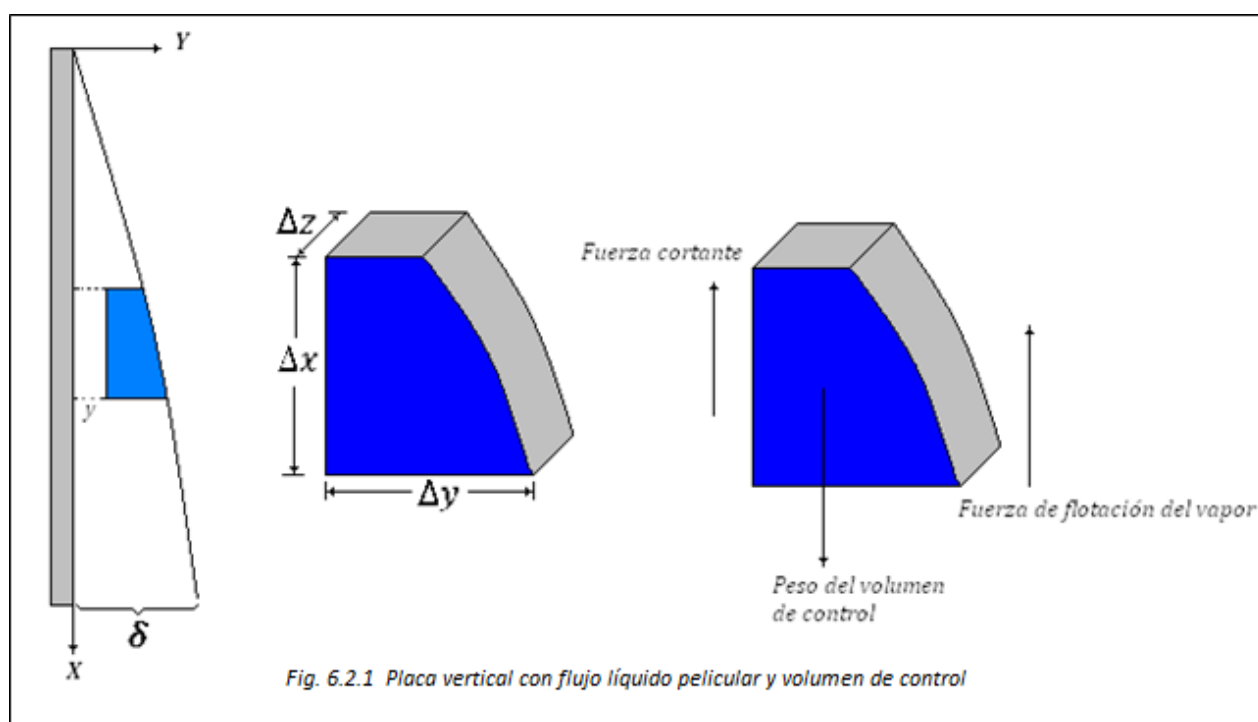
1. Convección natural de una sola fase.
2. Ebullición nucleada.
3. Ebullición pelicular.

6.2 Condensación pelicular sobre placas verticales.

Nusselt propuso que el vapor condensado formaba una película sobre la superficie de transferencia de calor y determinó el espesor de dicha película líquida mediante un balance entre las fuerzas de gravedad, de flotación y de corte.

Nusselt propuso que las fuerzas de inercia en la película, sean despreciables comparadas con las de gravedad y que no haya fricción en la interfaz líquido-vapor. Además, consideró que las propiedades del condensado no varían con la temperatura.

En el caso de la condensación en forma de película, el coeficiente de transferencia de calor puede determinarse en forma analítica según la metodología expuesta por Nusselt a principios del siglo XX (1916). En principio considérese la figura 6.2.1, en la cual se ilustra una placa plana vertical con **flujo laminar** en la película y un volumen de control tomado de la misma película.



En dicho volumen se ejercen tres fuerzas, las cuales son:

Fuerza cortante: Ésta se debe al esfuerzo de corte relacionado con el gradiente de velocidad de la película al deslizarse sobre la placa y que se representa a través de la *ley de Newton de viscosidad*, para fluidos Newtonianos.

$$\tau_x = \frac{F_x}{A} = \mu_l \frac{du}{dy}$$

$$F_x = \tau_x \Delta x \Delta z$$

$$F_x = \mu_{liq} \frac{du}{dy} \Delta x \Delta z$$

Peso del líquido: Es el peso del volumen de control, resultado del producto de la masa del líquido por la aceleración de la gravedad.

$$W_x = m_{liq} g$$

$$m_l = \rho_{liq} V = \rho_{liq} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$W_x = (\delta - y) \rho_{liq} \Delta x \Delta z g$$

Fuerza de flotación del líquido: Ésta fuerza se debe a que el vapor adyacente a la película de condensado, está en equilibrio hidrostático ($dp/dx = \rho_{vap} g$), por consiguiente el líquido está sujeto a una fuerza ascendente.

$$F_a = (\delta - y) \rho_{vap} \Delta x \Delta z g$$

En consecuencia, un balance de fuerzas en el volumen de control indica que:

$$F_a + F_x - W_x = 0$$

$$\rho_{vap} g (\delta - y) \Delta x \Delta z + \mu_{liq} \frac{du}{dy} \Delta x \Delta z - \rho_{liq} g (\delta - y) \Delta x \Delta z = 0$$

$$\rho_{liq} g (\delta - y) \Delta x \Delta z - \rho_{vap} g (\delta - y) \Delta x \Delta z = \mu_{liq} \frac{du}{dy} \Delta x \Delta z$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta z$ toda la ecuación:

$$\rho_{liq} g (\delta - y) - \rho_{vap} g (\delta - y) = \mu_{liq} \frac{du}{dy}$$

$$(\delta - y) (\rho_{liq} - \rho_{vap}) g = \mu_{liq} \frac{du}{dy}$$

Separando variables e integrando la expresión anterior:

$$du = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap}) g}{\mu_{liq}} (\delta - y) dy$$

$$u = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap}) g}{\mu_{liq}} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) + C_1$$

Para determinar la constante de integración, se tiene que, en $y = 0$; $u = 0 \rightarrow C_1 = 0$

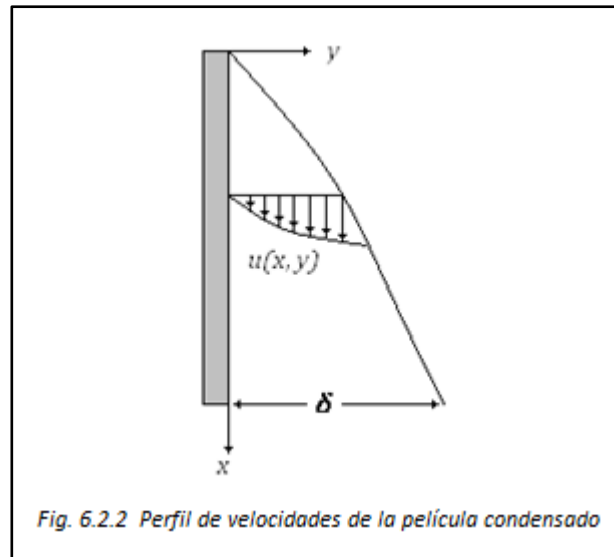
$$u = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g}{\mu_{liq}} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right)$$

Multiplicando por (δ^2/δ^2) el segundo término de la ecuación anterior, se tiene:

$$u = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g}{\mu_{liq}} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) \left(\frac{\delta^2}{\delta^2} \right)$$

$$u = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{\mu_{liq}} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (6.2.1)$$

La ecuación 6.2.1, representa la distribución de velocidades en la película de condensado. Esta se muestra en la figura 6.2.2.



Puesto que la distribución de velocidades es parabólica, su valor promedio ($\bar{u}$), para cualquier valor de x dado; se localiza a dos tercios de su valor máximo (U); así:

Para $y = \delta$, se obtiene el valor máximo de la velocidad de la película de condensado.

Entonces de la ecuación 6.2.1., se obtiene:

$$U = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{2\mu_{liq}}$$

Y la velocidad promedio de la película es:

$$\bar{u} = \frac{2}{3}(U) = \frac{2}{3} \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{2\mu_{liq}} = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{3\mu_{liq}}$$

$$\bar{u} = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{3\mu_{liq}} \quad (ec. 6.2.2)$$

En consecuencia, la razón de flujo de masa total de fluido fluyendo a través del área transversal en cualquier posición x , es:

$$\dot{m} = \rho \bar{V} A$$

$$\dot{m} = \rho_{liq} \bar{u} \delta \Delta z$$

Puesto que $\Delta z = 1$

El flujo de masa de condensado por unidad de profundidad de la placa es:

$$\dot{m} = \rho_{liq} \bar{u} \delta$$

Sustituyendo el valor de la velocidad promedio en la ecuación anterior se tiene:

$$\dot{m} = \rho_{liq} \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap}) g \delta^2}{3 \mu_{liq}} \delta$$

$$\dot{m} = \rho_{liq} \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap}) g \delta^3}{3 \mu_{liq}} \quad (ec. 6.2.3)$$

La ec. 6.2.3, calcula el flujo de masa de condensado por unidad de profundidad de la placa para cualquier posición x .

Dado que el calor latente disipado por el vapor durante el proceso de condensación se transfiere a través de la película solamente por conducción, puede suponerse que la distribución de temperaturas en el líquido tiene un comportamiento lineal. Así, el calor transferido por el vapor hacia la superficie fría, por unidad de área es:

$$-q'' = k_l \left(\frac{T_{vap} - T_{sup}}{\delta} \right) \quad (ec. 6.2.4)$$

El signo menos indica que el calor lo cede el vapor para condensarse.

Por otra parte, una cantidad adicional de condensado se agrega a la película a medida que ésta desciende sobre la placa en dirección x . Por tanto, el calor transferido por esta cantidad adicional de condensado es el producto de la entalpia de cambio de fase (calor latente de condensación = h_{fg}) y la diferencial de la masa con respecto a x .

$$-q'' = h_{fg} \frac{d(\dot{m})}{dx}$$

Sustituyendo el valor de $\dot{m}$ en ésta expresión se tiene:

$$-q'' = h_{fg} \frac{d}{dx} \left[\frac{\rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap}) \delta^3}{3 \mu_{liq}} \right]$$

Derivando δ con respecto a x , se tiene:

$$-q'' = h_{fg} \left[\frac{\rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq}} \right] \delta^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (ec. 6.2.5)$$

Igualando las ecuaciones. 6.2.4 y 6.2.5, se tiene:

$$h_{fg} \left[\frac{\rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq}} \right] \delta^2 \frac{d\delta}{dx} = k_l \left(\frac{T_{vap} - T_{sup}}{\delta} \right)$$

$$h_{fg} \left[\frac{\rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq}} \right] \delta^3 d\delta = k_l (T_{vap} - T_{sup}) dx$$

$$\delta^3 d\delta = \frac{k_{liq} \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup})}{h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})} dx$$

Integrando indefinidamente.

$$\frac{\delta^4}{4} = \frac{k_{liq} \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup}) x}{h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})} + C_2$$

Para determinar la constante de integración, se tiene que, en $x = 0$; $\delta = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Despejando δ ;

$$\delta = \left[\frac{4 k_{liq} \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup}) x}{h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.2.6)$$

La ecuación 6.2.6, evalúa el espesor de la película a cualquier distancia x , desde el extremo superior de la placa.

De la ecuación 6.2.4, se tiene:

$$-q'' = \frac{k_{liq}}{\delta} (T_{vap} - T_{sup}) = h_x (T_{vap} - T_{sup})$$

Donde h_x es el coeficiente local de transferencia de calor; así:

$$h_x = \frac{k_{liq}}{\delta}$$

Sustituyendo el valor de la ecuación 6.2.6, en ésta expresión se obtiene:

$$h_x = \frac{k_{liq}}{\delta} = \frac{k_{liq}}{\left[\frac{4 k_{liq} \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup}) x}{h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})} \right]^{1/4}} = \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{4 \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup}) x} \right]^{1/4}$$

$$h_x = \frac{k_{liq}}{\delta} = \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{4 \mu_{liq} (T_{vap} - T_{sup}) x} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.2.7)$$

La ecuación 6.2.7., calcula el coeficiente de transferencia de calor local para cualquier distancia x .

Integrando la ecuación 6.2.7, a través de toda la longitud de la placa, se obtiene el coeficiente promedio de transferencia de calor en el caso de que la temperatura de la placa sea constante. Así:

$$h_{prom} = \frac{\int_0^L h_x dx}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{4 \mu_{liq} (T_{vap} - T_s) x} \right]^{1/4} dx$$

$$h_{prom} = \frac{1}{L} \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{4 \mu_{liq} (T_{vap} - T_s)} \right]^{1/4} \int_0^L x^{-1/4} dx$$

$$h_{prom} = 0.943 \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) L} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.2.8)$$

A menos que la velocidad del vapor sea muy alta o el espesor de la película sea grande, *el flujo de condensado es laminar* y el calor se transfiere solo por conducción. A este fenómeno de transferencia de calor se le conoce como **condensación en forma de película**.

Definiendo el número de Nusselt promedio, para toda la placa mediante la expresión:

$$\bar{N}_u = \frac{h_{prom} L}{k_{liq}}$$

Se tiene;

$$\bar{N}_u = \frac{h_{prom} L}{k_{liq}} = \frac{0.943 \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) L} \right]^{1/4} L}{k_{liq}} = 0.943 \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) L} \right]^{1/4} \frac{L}{k_{liq}}$$

$$\bar{N}_u = 0.943 \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap}) L^4}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) L k_{liq}^4} \right]^{1/4}$$

$$\bar{N}_u = 0.943 \left[\frac{h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap}) L^3}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) k_{liq}} \right]^{1/4}$$

Es notable que la densidad del vapor es mucho muy pequeña comparada con la del líquido y por tanto, puede despreciarse en algunos casos; entonces el número de Nusselt promedio, puede ser expresado con la ecuación siguiente.

$$\bar{N}_u = 0.943 \left[\frac{\rho_{liq}^2 h_{fg} g}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) k_{liq}} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.2.9)$$

Si definimos el número de Reynolds como:

$$Re = \frac{\text{Flujo másico por unidad de profundidad}}{\mu_{liq}} = \frac{\rho_{liq} \bar{u} \delta}{\mu_{liq}}$$

Las ecuaciones 6.2.8 y 6.2.9, son válidas para cuando $Re < 350$, para números de Reynolds mayores de éste valor, **el flujo es turbulento**. En este caso, **Bird, Stewart & Lightfoot** [4], han propuesto la siguiente correlación empírica para el coeficiente de transferencia de calor promedio para flujo turbulento.

$$h_{prom} = 0.003 \left[\frac{k_{liq}^3 \rho_{liq}^2 g (T_v - T_{sup}) L}{\mu_{liq}^3 h_{fg}} \right]^{1/2} \quad (ec. 6.2.10)$$

Rohsenow [4], presentó un análisis más fino de la condensación pelicular, tomando en cuenta la existencia de un perfil de temperaturas no lineal y la adición de energía necesaria para enfriar la película por debajo de la temperatura de saturación.

Este análisis propone reemplazar la entalpia del cambio de fase h_{fg} , por h'_{fg} definida por:

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.68 C_{p_{liq}} (T_{vap} - T_{sup})$$

Donde $C_{p_{liq}}$, es el calor específico del líquido evaluado a la temperatura de película.

$$T_f = \frac{T_{vap} + T_{sup}}{2}$$

Con estas sustituciones la ecuación 6.2.9, puede utilizarse en placas verticales con mayor exactitud.

Cuando la placa sobre la cual tiene lugar la condensación es demasiada grande, o hay una cantidad suficiente de flujo condensado, la película se hace turbulenta para números de Reynolds mayores de 1800, y se define en este caso como:

$$Re = \frac{D_h \rho_{liq} \bar{u}}{\mu_{liq}} = \frac{4A \rho_{liq} \bar{u}}{P \mu_{liq}}$$

Donde:

A = Área de flujo.

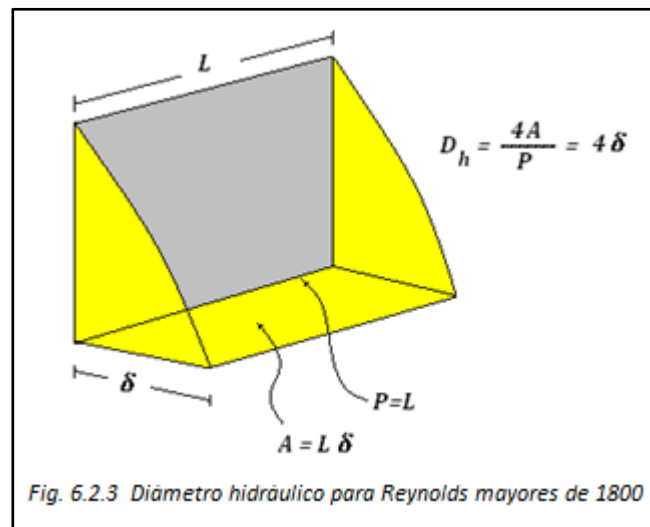
P = perímetro cortante o « mojado ».

$\bar{u}$ = Velocidad media de la corriente.

Así,

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4(1)\delta}{(1)} = 4\delta = \text{Diámetro hidráulico}$$

La fig. 6.2.3, ilustra lo descrito anteriormente para el caso de una placa demasiado grande o una cantidad suficiente de flujo condensado.



Ejemplo 6.2.1.

Vapor saturado seco a una presión de 101.33 kPa se condensa sobre una placa vertical de 0.5 m de altura. La placa tiene una temperatura uniforme en su superficie de 60 °C. Determine el coeficiente de transferencia de calor promedio. Según Nusselt.

Solución: Las tablas de vapor indican que para una presión de 101.33 kPa:

$$T_v = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$h_{fg} = 2257 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Las propiedades del condensado se evalúan a la temperatura de película $T_f = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$\rho_{liq} = 971.8 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{liq} = 0.670 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\mu_{liq} = 0.355 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

Las propiedades del vapor se evalúan a la temperatura de saturación.

$$T_v = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho_g = 0.5978 \text{ kg/m}^3$$

Para determinar si el régimen es laminar o turbulento es necesario calcular el espesor de la película de condensado y su velocidad media, así mediante las ecuaciones 6.2.6 y 6.2.2, se tiene:

$$\delta = \left[\frac{4k_{liq}\mu_{liq}(T_{vap} - T_{sup})x}{h_{fg}\rho_{liq}g(\rho_{liq} - \rho_{vap})} \right]^{1/4} = \left[\frac{(4)(0.670)(0.355 \times 10^{-3})(100 - 60)(0.5)}{(2257 \times 10^3)(971.8)(9.8)(971.8 - 0.5978)} \right]^{1/4} = 1.74 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

$$\delta = 1.74 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.174 \text{ mm}$$

$$\bar{u} = \frac{(\rho_{liq} - \rho_{vap})g\delta^2}{3\mu_{liq}} = \frac{(971.8 - 0.5978)(9.8)(1.74 \times 10^{-4})^2}{(3)(0.355 \times 10^{-3})} = 0.27 \text{ m/s}$$

Con estos datos se calcula el número de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho_{liq}\bar{u}\delta}{\mu_{liq}} = \frac{(971.8)(0.27)(1.74 \times 10^{-4})}{(0.355 \times 10^{-3})} = 128.6 < 1800 \rightarrow \text{Flujo laminar}$$

Mediante la ecuación 6.2.7., se tiene:

$$h_{prom} = 0.943 \left[\frac{k_{liq}^3 h_{fg} \rho_{liq} g (\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\mu_{liq} (T_{vap} - T_s) L} \right]^{1/4}$$

$$h_{prom} = 0.943 \left[\frac{(0.670)^3 (2257 \times 10^3) (971.8) (9.8) (971.8 - 0.5978)}{(0.355 \times 10^{-3}) (100 - 60) (0.5)} \right]^{1/4} = 5,142.5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

6.3 Condensación pelicular en cilindros verticales y placas inclinadas.

Para la condensación pelicular en cilindros verticales, las ecuaciones correspondientes a **placas verticales** pueden aplicarse, siempre y cuando la curvatura de estos no sea demasiado grande, o que el diámetro del cilindro sea mucho mayor que el espesor de la película ($d \gg \delta$).

Para un cilindro vertical con demasiada curvatura, el perímetro mojado es igual a $P = \pi d$, y el área de flujo es $A = \pi d \delta$. Sustituyendo estos valores en la fórmula, el diámetro hidráulico queda representado como el de la placa vertical, es decir ($D_h = 4\delta$).

En el caso de las placas inclinadas un ángulo θ respecto a un plano horizontal, las mismas expresiones son aplicadas siempre y cuando la aceleración de la gravedad g sea sustituida por su componente $g \sin \theta$. Es decir se sustituye la gravedad g , por su componente paralela a la superficie fría.

6.4 Condensación pelicular en cilindros horizontales.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, los tubos son de un diámetro tal que el espesor de la película de condensado nunca se hace lo suficientemente grande para que el régimen deje de ser laminar, por tal motivo, para la condensación en cilindros horizontales con flujo laminar, Nusselt presenta la siguiente expresión para evaluar el coeficiente de transferencia de calor promedio basado en el diámetro exterior del cilindro (d).

Al igual que las placas y cilindros verticales, el diámetro hidráulico en un cilindro horizontal es ($D_h = 4\delta$), debido a que el perímetro mojado es $P = 2L$ y el área de flujo es $A = \pi d \delta$.

$$h_{prom} = 0.725 \left[\frac{\rho_{liq} (\rho_{liq} - \rho_{vap}) g h_{fg} k_{liq}^3}{\mu_{liq} d (T_{vapor} - T_{sup})} \right]^{1/4} \quad (\text{ec. 6.4.1}).$$

Chapman [4], presenta la siguiente relación para evaluar el número de Nusselt promedio basado también en el diámetro exterior del cilindro, para flujo laminar.

$$Nu_{prom} = 0.725 \left[\frac{\rho_{liq}(\rho_{liq} - \rho_{vap})gh_{fg}d^3}{\mu_{liq}k_{liq}(T_{vapor} - T_{sup})} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.4.2).$$

En donde las propiedades del condensado se evalúan a la temperatura de película T_f , y el calor latente de vaporización o entalpia de cambio de fase se evalúa a la temperatura de saturación del vapor T_{vap} .

En el caso de los intercambiadores de calor del tipo tubular, en los cuales los tubos se arreglan en forma de columnas que contienen N tubos horizontales, el coeficiente promedio de transferencia de calor y el número de Nusselt promedio, se pueden calcular con las mismas ecuaciones. Sustituyendo en la 6.4.1, el valor de $d = Nd$; y en la 6.4.2, multiplicar el valor del denominador del paréntesis por N . Así:

$$h_{prom} = 0.725 \left[\frac{\rho_{liq}(\rho_{liq} - \rho_{vap})gh_{fg}k_{liq}^3}{\mu_{liq}Nd(T_{vapor} - T_{sup})} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.4.3)$$

$$Nu_{prom} = 0.725 \left[\frac{\rho_{liq}(\rho_{liq} - \rho_{vap})gh_{fg}d^3}{N\mu_{liq}k_{liq}(T_{vapor} - T_{sup})} \right]^{1/4} \quad (ec. 6.4.4)$$

Ejemplo 6.4.1.

Cien tubos de 1.27 cm de diámetro están dispuestos formando un cuadrado y en presencia de vapor de agua a presión atmosférica. Calcúlese la masa de vapor de agua condensado, por unidad de longitud de los tubos, para una temperatura de la pared del tubo de 90 °C.

Solución: Las tablas de vapor indican que para una presión de 101.33 kPa:

$$T_v = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$h_{fg} = 2257 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

$$T_f = \frac{T_{vap} + T_{sup}}{2} = \frac{100 + 90}{2} = 95 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Las propiedades del condensado se evalúan a la temperatura de película $T_f = 95 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$\rho_{liq} = 961.5 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{liq} = 0.677 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\mu_{liq} = 0.297 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

Las propiedades del vapor se evalúan a la temperatura de saturación.

$$T_v = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\rho_g = 0.5978 \text{ kg/m}^3$$

Como se trata de un arreglo cuadrado de tubos horizontales, se calcula el coeficiente promedio de transferencia de calor para flujo laminar con la expresión 6.4.3., tomando $N = 10$.

$$h_{prom} = 0.725 \left[\frac{\rho_{liq}(\rho_{liq} - \rho_{vap})gh_{fg}k_{liq}^3}{\mu_{liq}Nd(T_{vapor} - T_{sup})} \right]^{1/4}$$

$$h_{prom} = 0.725 \left[\frac{(961.5)(961.5 - 0.5978)(9.8)(2257 \times 10^3)(0.667)^3}{(0.297 \times 10^{-3})(10)(0.0127)(100 - 90)} \right]^{1/4} = 8,163.75 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}.$$

El área de transferencia de calor total es igual al área de la superficie de un tubo (πdL) multiplicada por el número de tubos (n), así:

$$A = n(\pi dL)$$

Puesto que no se conoce la longitud de los tubos, se calcula el área por unidad de longitud.

$$\frac{A}{L} = n\pi d = (100)(\pi)(0.0127) = 3.99 \text{ m}^2/\text{m}.$$

De modo que la transferencia de calor por unidad de longitud es:

$$q' = \frac{q}{L} = h_{prom} \left(\frac{A}{L} \right) (T_{vap} - T_{sup}) = (8163.75)(3.99)(100 - 95) = 162,867 \text{ W/m}.$$

Entonces el flujo másico de líquido condensado por unidad de longitud es:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{q/L}{h_{fg}} = \frac{162,867}{2257 \times 10^3} = 0.07216 \text{ Kg/s} = 259.8 \text{ kg/m} - \text{h}.$$

6.5 Ebullición, ebullición en núcleo y punto de quemado.

La **ebullición** al igual que la **evaporación** es un proceso de cambio de fase, solo que la evaporación ocurre en la superficie libre de un líquido al ser calentado por el aire atmosférico que se encuentra a mayor temperatura, es decir la evaporación ocurre en la **interfaz líquido-vapor**. Mientras que la ebullición ocurre en el interfaz solido-líquido, al ponerse en contacto el líquido con una superficie solida, la cual se mantiene a mayor temperatura que la de saturación del líquido.

Al igual que la condensación, la **ebullición** es de gran importancia en las centrales de generación de energía, pues en un generador de vapor se transforma agua en estado de líquido saturado en vapor saturado y hasta sobrecalentado con el propósito de mover la turbina, tan solo agregando calor procedente de la combustión de algún combustible, por citar algún ejemplo.

Una condición necesaria para que ocurra la ebullición es que la temperatura de la superficie que se calienta exceda a la temperatura de saturación del líquido. La ebullición se clasifica como **ebullición en**

estanque (alberca) y **ebullición en flujo**. En el caso de la ebullición en estanque, no existe flujo másico del fluido, mientras que el otro caso se mantiene un flujo forzado de fluido (convección forzada).

En este texto solo se discutirán los mecanismos físicos que intervienen en la ebullición en estanque, es decir la ebullición de fluidos estacionarios. Hoy día el fenómeno de la ebullición todavía presenta la incógnita, del cómo se forman las burbujas; proceso que predice la velocidad de transferencia de calor durante la ebullición.

En 1934 **S. Nukiyama** [4], inicio el camino al estudio de la ebullición, utilizando alambre de nicromo y platino calentados eléctricamente y sumergidos en líquidos. **Nukiyama** observó, que la ebullición toma diferentes niveles o regímenes, que dependen de la diferencia de temperaturas entre la superficie caliente y el fluido a calentar. Estos son: *ebullición en convección natural*, *ebullición nucleada*, *ebullición de transición* y *ebullición en película*.

La figura 6.5.1., ilustra estos niveles a través de la curva de ebullición del **agua**, la cual tiene como abscisa la diferencia de temperaturas ($T_{sup} - T_{liq}$) y como ordenada el flujo de calor necesario para la ebullición.

Cabe mencionar, que aún la curva de ebullición mostrada es para el agua, su forma general es la misma para diferentes fluidos.

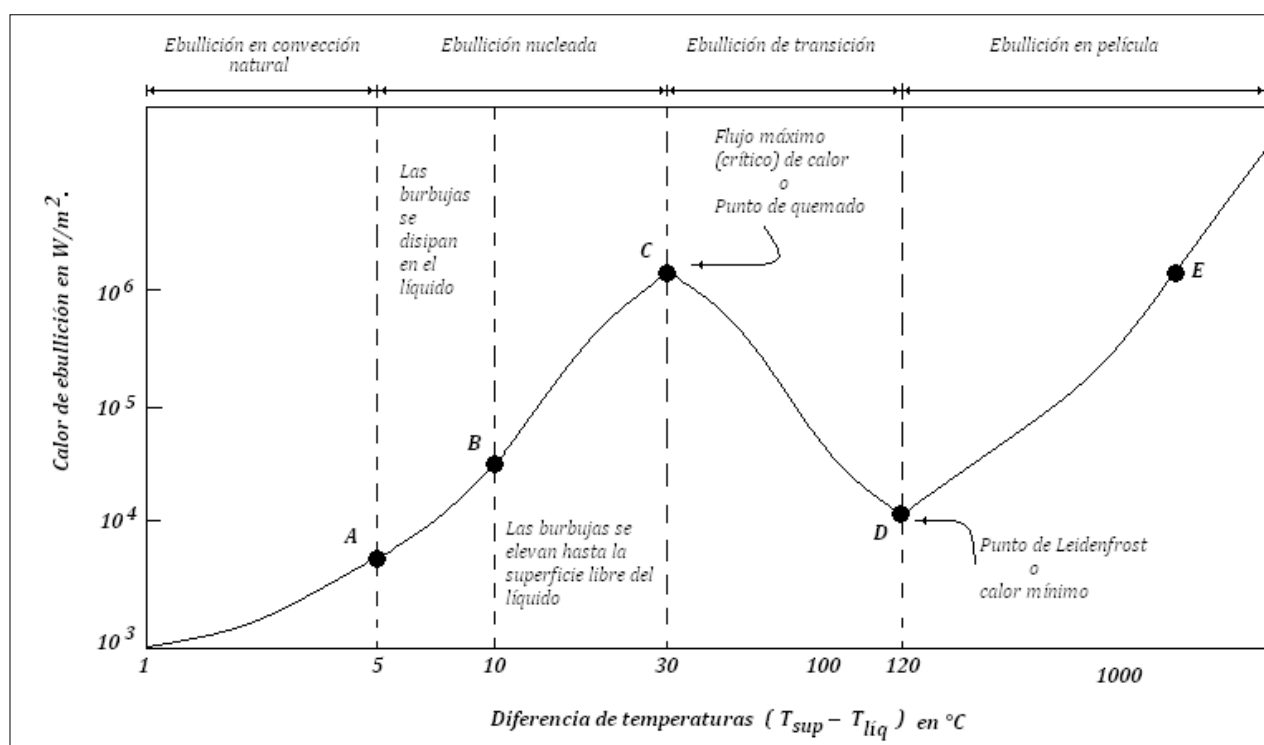


Fig. 6.5.1. Curva típica de ebullición para a la presión de 1 atmósfera.

Ebullición con convección natural (hasta el punto A sobre la curva de saturación).

Se sabe por termodinámica que cuando se calienta agua a la presión de 1 atmósfera, ésta empieza a hervir cuando alcanza la temperatura de saturación correspondiente a dicha presión ($100^{\circ}C$ aproximadamente). Sin embargo en la práctica esto no sucede hasta que el líquido se calienta unos

grados arriba de la temperatura de saturación (alrededor de 3 a 5 °C para el agua). Es decir el líquido está ligeramente sobrecalentado, evaporándose cuando sube a la superficie libre (*condición metaestable*). A éste fenómeno se le conoce como **ebullición en convección natural**, puesto que el fluido se desplaza por diferencia de densidades entre el vapor y el líquido.

Ebullición nucleada (entre los puntos A y C).

En este nivel, las burbujas se empiezan a formar en el punto A, justo encima de la superficie de calentamiento y migran en número creciente hacia el punto C. El régimen de ebullición nucleada se puede separar en dos regiones como se indica en la figura 6.5.1.

En la región A-B se forman **burbujas aisladas** que se disipan en el líquido poco después de separarse de la superficie de calentamiento. Los espacios vacíos que dejan al subir dichas burbujas, lo llena el líquido que se encuentra en la vecindad de la superficie de calentamiento y el proceso se repite. Para ello se requiere un aumento de calor.

En la región B-C, la temperatura de la superficie de calentamiento se incrementa aún más y las burbujas se forman con una mayor rapidez y en mayor número de sitios de nucleación, formando **columnas continuas de vapor** en el líquido. Estas se desplazan hasta la superficie libre, en donde se revientan y liberan su contenido de vapor.

Cuando la diferencia de temperaturas entre la superficie calentadora y el líquido, es demasiada grande, la rapidez de evaporación en la superficie calentadora alcanza valores tan altos, que una fracción de ella se cubre con burbujas dificultando que el líquido llegue hasta ella y la humedezca.

Por esta razón el flujo de calor se incrementa con menor rapidez al aumentar la diferencia de temperaturas y alcanza un máximo en el punto C. En este punto el flujo de calor recibe el nombre de flujo crítico o máximo de calor ($\dot{q}_{m\acute{a}x}$). Para el agua el flujo crítico de calor sobrepasa a 1 MW/m^2 .

En la práctica la **ebullición nucleada** es el régimen más deseable, puesto que, con valores menores de 30 °C, en la diferencia de temperaturas, se pueden lograr altas tasas de transferencia de calor.

Ebullición de transición (entre los puntos C y D sobre la curva de ebullición).

A medida que se incrementa la temperatura de la superficie de calentamiento y, por consiguiente la diferencia de temperaturas entre ésta y el líquido, más allá del punto C; el flujo de calor disminuye, debido a que se forma una película de vapor sobre la superficie caliente, la cual actúa como aislante por su baja conductividad térmica en relación con la del líquido.

En éste nivel de **ebullición de transición** se presentan en forma parcial, tanto la *ebullición en núcleo*, como en *película*. De tal forma que la ebullición nucleada que se tiene en el punto C, se reemplaza por la ebullición en película en el punto D. Éste régimen de ebullición se presenta para diferencias de temperatura que oscilan entre 30° y 120 °C. En la práctica no se recomienda operar en éste régimen por presentar una gran inestabilidad al combinar ambos tipos de ebullición. A la ebullición de transición se le conoce también como **régimen inestable de ebullición en película**.

Ebullición en película (más allá del punto D).

En ésta región de la curva de ebullición, la superficie de calentamiento se cubre por completo con una película continua estable de vapor. El punto D, en donde el flujo de calor alcanza su valor mínimo ($\dot{q}_{\min}$), se llama **punto de Leidenfrost**, en honor a **J. C. Leidenfrost** [3], quién en 1756 observó que las gotitas de líquido sobre una superficie muy caliente, saltan de un lado y se evaporan con lentitud. Como se mencionó la presencia de la película de vapor entre la superficie caliente y el líquido, es la responsable de las bajas razones de transferencia de calor en la región de ebullición en película.

Nukiyama [4], observó que si la potencia de la superficie calentada (*alambre de nicromo*), sobrepasa ($\dot{q}_{\max}$) punto C, incluso ligeramente, la temperatura de la superficie caliente se incrementa repentinamente hasta alcanzar su punto de fusión y se **extinguía** sin control alguno. Al repetir el experimento con *alambre de platino*, el cual tiene un punto de fusión mucho más alto pudo evitar que se *fundiera* y por consiguiente alcanzó flujos de calor más altos que ($\dot{q}_{\max}$). Al reducir paulatinamente la potencia, notó una súbita caída en la diferencia de temperaturas, cuando se alcanzaba nuevamente ($\dot{q}_{\max}$). Es decir, el proceso de ebullición no puede seguir la porción de la curva entre los puntos C y D (*ebullición de transición*) más allá del punto del punto C a menos que la potencia aplicada se reduzca en forma repentina.

Así, el **fenómeno de extinción** en la ebullición se puede explicar de la manera siguiente: para moverse más allá del punto C donde se presenta ($\dot{q}_{\max}$), se debe incrementar la temperatura del calentador, pero para lograrlo se debe incrementar el flujo de calor. Ahora bien, el fluido no puede absorber esta energía incrementada precisamente más allá del punto C, por lo tanto la superficie del calentador termina absorbiéndola, causando un aumento de temperatura en la superficie del mismo. Pero esto origina un aumento en la diferencia de temperaturas entre la superficie del calentador y el fluido, ocasionando que el fluido reciba incluso menos energía, lo que hace que la temperatura superficial del calentador se eleve aún más. Esto continúa hasta que la temperatura superficial del calentador alcanza un punto en el cual ya no se eleva y la energía se transfiere al fluido. Este es el punto E sobre la curva de ebullición, el cual corresponde a temperaturas muy elevadas.

Por lo tanto cualquier intento de incrementar el flujo de calor más allá de ($\dot{q}_{\max}$) hará un salto súbito del punto C al punto E. Sin embargo, la temperatura que corresponde al punto E se encuentra más allá del punto de fusión para la mayoría de los materiales utilizados en la fabricación de calentadores y se presenta por ende la fusión. Por lo tanto, el punto C sobre la curva de ebullición se conoce como **punto de fusión**, o crisis de ebullición y también como **punto de quemado**. En la práctica la mayor parte del equipo de transferencia para ebullición opera por debajo de ($\dot{q}_{\max}$) para evitar cualquier fusión de la superficie de calentamiento.

Los regímenes de ebullición discutidos con anterioridad son diferentes entre sí, y por consiguiente las correlaciones utilizadas para la transferencia de calor también los son. Sin embargo, en este texto solo se tratará el caso de la ebullición en núcleo, por ser esta la más común en los procesos en los cuales el fenómeno de la ebullición se hace presente.

En la ebullición nucleada se distinguen dos etapas, las cuales se describen a continuación:

- a) El inicio, que ocurre cuando el sobrecalentamiento se hace suficientemente grande para provocar nucleación de vapor en la superficie calentadora, formándose burbujas en la superficie calentada

las cuales se despegan y se elevan hacia la superficie libre, rompiéndose algunas de ellas antes de alcanzar la dicha superficie.

- b) La ebullición en núcleo, en la cual las burbujas forman sitios favorables provocados por la aspereza de la superficie calentada; las cuales se elevan hacia la superficie libre interaccionando unas con otras, ocasionando que una corriente continua de vapor parta de la superficie sólida.

Rohsenow [4], en 1952, recomendó la siguiente correlación para la **ebullición nucleada** la cual permite calcular el flujo de calor unitario de pared requerido para dicha ebullición en W/m^2 .

$$\frac{Q}{A} = \mu_{\text{liq}} h_{fg} \left[\frac{g(\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{vap}})}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{Cp_{\text{liq}}(T_{\text{sup}} - T_{\text{sat}})}{C_{sf} h_{fg} Pr_{\text{liq}}^n} \right]^3 \quad (\text{ec. 6.5.1})$$

Donde:

Cp_{liq} = calor específico del líquido a presión constante en $\text{J/kg} - ^\circ\text{C}$.

μ_{liq} = viscosidad dinámica del líquido en $\text{kg/m} - \text{s}$.

g = aceleración local debida a la gravedad en m/s^2 .

Pr = número de Prandtl del líquido

C_{sf} = constante experimental adimensional dependiente de la combinación superficie – líquido.

h_{fg} = calor de evaporación o entalpía de cambio de fase en J/kg .

ρ_{vap} = densidad del vapor en kg/m^3 .

ρ_{liq} = densidad del líquido en kg/m^3 .

σ = tensión superficial vapor – líquido en N/m .

n = constante experimental adimensional que depende del fluido.

Las propiedades del fluido que se encuentran en la ecuación 6.5.1, se deben evaluar a la temperatura de saturación (T_{sat}) y las constantes experimentales, junto con el valor de la tensión superficial en las tablas 6.5.1 y 6.5.2, correspondientes para varias combinaciones y para el agua.

Tabla 6.5.1 Valores de las constantes C_{fs} y de n , para varias combinaciones fluido-superficie.

Combinación fluido-superficie de calentamiento	C_{fs}	n
Agua-cobre (pulido)	0.0130	1.0
Agua-cobre (rayado)	0.0068	1.0
Agua-acero inoxidable (pulido mecánicamente)	0.0130	1.0
Agua-acero inoxidable (rectificado y pulido)	0.0060	1.0
Agua-acero inoxidable (recubierto de teflón picado)	0.0058	1.0
Agua-acero inoxidable (corroído químicamente)	0.0130	1.0
Agua-latón	0.0060	1.0
Agua-níquel	0.0060	1.0

Agua-platino	0.0130	1.0
n-pentano-cobre (pulido)	0.0154	1.7
n-pentano cromo	0.0150	1.7
Benceno-cromo	0.1010	1.7
Alcohol etílico-cromo	0.0027	1.7
Tetracloruro de carbono-cobre	0.0130	1.7
Isopropanol-cobre	0.0025	1.7

Tomada del texto, Transferencia de Calor Yunus A. Cengel página 570, McGraw-Hill, tercera edición.

Tabla 6.52 Tensión superficial de la interfase líquido-vapor para el agua.

Temperatura en °C.	Tensión superficial (σ) en N/m
0	0.0757
20	0.0727
40	0.0696
60	0.0662
80	0.0627
100	0.0589
120	0.0550
140	0.0509
160	0.0466
180	0.0422
200	0.0377
220	0.0331
240	0.0284
260	0.0237
280	0.0190
300	0.0144
320	0.0099

340	0.0056
360	0.0019
374	0.0

Tomada del texto, Transferencia de Calor Yunus A. Cengel página 568; McGraw-Hill, tercera edición.

Como se mencionó anteriormente el flujo de calor máximo ($\dot{q}_{m\acute{a}x}$), reviste una gran importancia en el diseño de equipo de transferencia de calor, por consiguiente es necesario considerarlo para tal fin; con el propósito de evitar el peligro de la extinción. En 1948 el ruso **S. S. Kutateladse** y el estadounidense **N. Zuber** [6], en 1958 aportaron la siguiente expresión para determinar teóricamente el flujo máximo de calor utilizando diferentes enfoques, para la **ebullición nucleada**.

$$\dot{q}_{m\acute{a}x} = C_{cr} h_{fg} [\sigma g \rho_{vap}^2 (\rho_{liq} - \rho_{vap})]^{1/4} \quad (ec. 6.5.2)$$

En donde C_{cr} es una constante cuyo valor depende de la configuración geométrica de la superficie de calentamiento. La tabla 6.5.3 muestra una lista de valores específicos para dicha constante, en diferentes configuraciones geométrica, para calentadores grandes y pequeños, según el parámetro L^* .

Tabla 6.5.3 Valores del coeficiente C_{cr} para obtener el flujo máximo de calor ($\dot{q}_{m\acute{a}x}$).
(parámetro adimensional $L^* = L[g(\rho_{liq} - \rho_{vap})/\sigma]^{1/2}$)

Configuración geométrica del calentador	C_{cr}	Dimensión característica del calentador (L).	Intervalo de L^* .
Calentador plano horizontal grande	0.149	Ancho o diámetro	$L^* > 27$
Calentador plano horizontal pequeño	$18.9 k_1$	Ancho o diámetro	$9 < L^* < 20$
Cilindro horizontal grande	0.12	Radio	$L^* > 1.2$
Cilindro horizontal pequeño	$0.12 L^{*-0.25}$	Radio	$0.15 < L^* < 1.2$
Esfera grande	0.11	Radio	$L^* > 4.26$
Esfera pequeña	$0.227 L^{*-0.5}$	Radio	$0.15 < L^* < 4.26$

$$k_1 = \sigma / [g(\rho_{liq} - \rho_{vapor}) A_{calentador}]$$

Tomada del texto, Transferencia de Calor Yunus A. Cengel página 570, McGraw-Hill, tercera edición.

Ejemplo 6.5.1

Se hierve agua a 120 °C en una olla de presión de acero inoxidable mecánicamente pulido, de 25 cm de diámetro, colocada sobre la parte superior de una unidad de calentamiento. Si la superficie interior del fondo de la olla, se mantiene a 130 °C. Determine el flujo de calor transferido.

Solución: Prevalecen condiciones de estado estacionario, las pérdidas de calor del calentador y cacerola son despreciables.

Se evalúan las propiedades a la temperatura de saturación, $T_{sat} = 120\text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$P_s = 198.3\text{ kPa}.$$

$$\rho_{liq} = 943.4\text{ kg/m}^3$$

$$Cp_{liq} = 4244\text{ J/kg} - K$$

$$\rho_{vap} = 1.121\text{ kg/m}^3$$

$$\mu_{liq} = 0.232 \times 10^{-3}\text{ kg/m} - s$$

$$h_{fg} = 2203 \times 10^3\text{ J/kg}$$

$$\Delta T = T_{sup} - T_{sat} = 130 - 120 = 10\text{ }^{\circ}\text{C} < 30\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow \text{ebullición en núcleo.}$$

$$P_r = 1.44$$

$$\sigma = 0.0550\text{ N/m}.$$

$$C_{fs} = 0.0130$$

$$n = 1.0$$

Aplicando la fórmula 6.5.1, se tiene:

$$\frac{Q}{A} = \mu_{liq} h_{fg} \left[\frac{g(\rho_{liq} - \rho_{vap})}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{Cp_{liq}(T_{sup} - T_{sat})}{C_{sf} h_{fg} Pr_{liq}^n} \right]^3$$

$$\frac{Q}{A} = (0.232 \times 10^{-3})(2203 \times 10^3) \left[\frac{(9.8)(943.4 - 1.121)}{0.0550} \right]^{1/2} \left[\frac{(4244)(130 - 120)}{(0.0130)(1.44)^{1.0}} \right]^3$$

$$\frac{Q}{A} = 228.24\text{ kW/m}^2$$

Calculando el área de transferencia de calor:

$$A = \left(\frac{\pi}{4} \right) d^2 = \left(\frac{\pi}{4} \right) (0.25)^2 = 0.0491\text{ m}^2.$$

Así, el flujo de calor transferido es;

$$Q = \frac{Q}{A} (A) = 228.24 \times 0.0491 = 11.2\text{ kW}.$$

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. Una placa vertical de 60 cm por 60 cm se expone a vapor a presión atmosférica. La temperatura de la placa es de 97 °C. Calcule la razón de transferencia de calor total, y la masa condensada por hora.

R: 4,726 W, 7.54 kg/h.

2. Vapor saturado de agua se condensa a una atmósfera sobre Una placa vertical de 3 metros de alto y 8 metros de ancho que se mantiene a 90 °C mediante la circulación de agua de enfriamiento por el otro lado. Determine a) La razón de la transferencia de calor por la condensación hacia la placa y b) La razón a la cual el condensado gotea de la placa por la parte de abajo.

R: 1,507 kW, 0.659 kg/s.

3. Repita el problema No. 3, para el caso de la placa inclinada 60 °C con respecto a la vertical.

R: 754 kW, 0.33 kg/s.

4. Se hierve agua a la presión atmosférica en una cacerola de 20 cm de diámetro interno de acero inoxidable recubierto con teflón picado, sobre una estufa eléctrica. Si se observa que el nivel de agua en la cacerola baja 10 cm en 15 min, determine la temperatura de la superficie interior de esa cacerola.

R: 105.3 °C.

5. Se va a usar un elemento de calentamiento de latón, de 65 cm de largo y 2 cm de diámetro para hervir agua a 120 °C. Si la temperatura superficial del elemento de calentamiento no debe ser mayor de 125 °C, determine la razón más alta de producción de vapor de agua en la caldera.

R: 19.45 kg/h.

6. Entra agua fría a 15 °C, a un generador de vapor y sale como vapor saturado seco a 200 °C. Determine la fracción de calor usada para precalentar el agua líquida desde 15 °C hasta la temperatura de saturación de 200 °C., en el generador de vapor.

R: 28.7 %

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 6

UNIDAD 6: Actividad 1

CONCEPTO DEL PROCESO DE CONDENSACIÓN PELICULAR.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del mecanismo de la convección forzada y convección natural o libre.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto del mecanismo de la convección, haciendo mención de los diversos métodos utilizados en el análisis y obtención del coeficiente de transferencia de calor. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 6: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR CON CAMBIO DE FASE.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de convección forzada en placas planas.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Vapor saturado de agua a 30 °C se condensa sobre el exterior de un tubo vertical de 4 cm de diámetro exterior y 2 m de largo. La temperatura del tubo se mantiene a 20 °C mediante el agua de enfriamiento. Determine a) La razón de la transferencia de calor del vapor al agua de enfriamiento, b) La razón de la condensación del vapor y c) El espesor aproximado de la película de líquido en la parte inferior del tubo.

R: 10,243 W, 15 kg/h, 0.201 mm.

2. El condensador de una planta generadora que funciona con vapor opera a una presión de 4.25 kPa. Este condensador consta de 100 tubos horizontales dispuestos en un arreglo cuadrado de 10 x 10. Los tubos tienen 8 m de largo y un diámetro exterior de 3 cm. Si la superficie de los tubos están a 20 °C, determine: a) La razón de transferencia de calor del vapor de agua al agua de enfriamiento y b) La razón de la condensación de ese vapor en el condensador.

R: 3,678 kW, 1.496 kg/s.

3. Vapor saturado de agua a 55 °C se condensa a razón de 10 kg/h sobre el exterior de un tubo horizontal de 3 cm de diámetro exterior, cuya superficie se mantiene a 45 °C por el agua de enfriamiento. Determine la longitud requerida de tubo.

R: 0.70 m.

4. Determine la temperatura de superficie de una placa vertical de 1.2 m de altura, sobre la cual se condensa vapor en forma pelicular, cubriendo la superficie completa. La presión parcial del vapor de agua es de una atmósfera y el coeficiente promedio de transferencia de calor es de 4,500 W/m²-°C. Suponga flujo laminar.

R: 70 °C.

UNIDAD 6: Actividad 3

CONCEPTO DEL PROCESO DE EBULLICIÓN NUCLEADA.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar acerca del mecanismo de la ebullición nucleada.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto de la ebullición en núcleo, haciendo mención de los diversos métodos utilizados en el análisis y obtención del coeficiente de transferencia de calor. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 6: Actividad 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE EBULLICIÓN NUCLEADA.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas de ebullición en núcleo.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Se hierve agua a 120 °C en una olla de presión de acero inoxidable mecánicamente pulido, colocada sobre la parte superior de una unidad de calentamiento. Si la superficie interior del fondo del recipiente se mantiene a 32 °C, determine el coeficiente de transferencia de calor en la ebullición.

R: 32.9 kW/m² – °C.

2. Se hierve agua a presión atmosférica en una cacerola de platino de 15 cm de diámetro. Calcule el calor máximo (valor crítico o punto de quemado) para evitar el peligro de la extinción.

R: 1.26 x 10⁶ W/m².

3. Se hierve agua a $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ en una olla de presión de acero inoxidable mecánicamente pulido, colocada sobre la parte superior de una unidad de calentamiento, la superficie interior del fondo de la olla se mantiene a $130\text{ }^{\circ}\text{C}$. La olla que tiene un diámetro de 20 cm, está llena de agua hasta la mitad. Determine el tiempo que tardará el recipiente en quedar vacío.

R: 22.8 min

4. Se usa un calentador de resistencia hecho de alambre de níquel de 2 mm de diámetro para calentar agua a la presión de una atmósfera. Determine la temperatura más alta a la cual puede operar este calentador con seguridad, sin el peligro de extinción.

R: $109.6\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Unidad 7**Competencias específicas a desarrollar:**

1. Definir y clasificar a los intercambiadores de calor de uso más frecuente en la industria de procesos termo-hidráulicos, tomando en cuenta sus características constructivas.
2. Analizar y obtener el concepto del coeficiente global de transferencia de calor, tomando en cuenta el factor de suciedad para su determinación.
3. Comprender y explicar los métodos utilizados en el análisis térmico de los intercambiadores de calor, como el de la diferencia media logarítmica de temperaturas (*DMLT*) y el de efectividad-número de unidades de transferencia ($\epsilon - N_{ut}$).
4. Comprender y manejar las gráficas respectivas para evaluar la efectividad de un intercambiador de calor.
5. Resolver problemas relacionados con los parámetros involucrados en el diseño y selección de un intercambiador de calor.
6. Elaborar un proyecto que resuelva un problema real en donde se seleccione o diseñe un intercambiador de calor.

Intercambiadores de Calor.**Introducción.**

Los intercambiadores de calor son de uso común en una gran variedad de aplicaciones, desde los sistemas domésticos de refrigeración, calefacción y acondicionamiento de aire, hasta los procesos en plantas químicas y en la producción de energía eléctrica. Hoy día, existen en una gran diversidad de presentaciones con el fin de mejorar la transferencia de calor y disponen de aletas de enfriamiento para tal propósito.

Un intercambiador de calor combina los **mecanismos de conducción y convección**, durante su operación, y puede haber o no cambio de fase en alguno de los fluidos que interactúan a través del intercambiador. En la forma más simple, un intercambiador puede definirse como un dispositivo que permite el intercambio de calor entre dos fluidos. Los hay, llamados de contacto, cuando el intercambio de calor entre los fluidos se hace a través de una superficie metálica y de mezclado cuando tal superficie no existe, es decir, el contacto entre los fluidos es directo.

En el análisis de un intercambiador, resulta conveniente trabajar con un coeficiente global de transferencia de calor que involucre los mecanismos antes mencionados, así como también tener en cuenta que tan limpio este el intercambiador, puesto que un intercambiador que acumula gran cantidad de suciedad durante su funcionamiento, aumenta en él, la resistencia al flujo de calor y por ende disminuye la transferencia de calor.

Al diseñar un intercambiador de calor pueden conocerse tres, y hasta dos de las cuatro temperaturas involucradas en los cálculos; por tal motivo es importante entrar en discusión de los métodos empleados para tal fin.

Por último, puesto que los intercambiadores se fabrican de diversos tipos, éste capítulo inicia con la clasificación de los intercambiadores de calor.

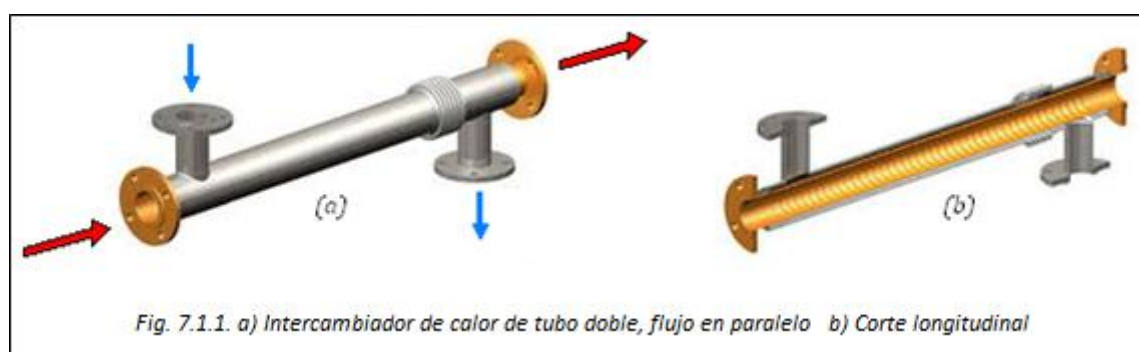
7.1 Clasificación.

Puesto que la gran variedad de aplicaciones de la transferencia de calor en la industria, requiere de diversos tipos de accesorios y configuraciones del equipo, para tal fin, se han diseñado numerosos tipos de intercambiadores de calor, para cada tipo de necesidades. En este texto se presenta en forma breve la clasificación general y se hace una descripción de su construcción y operación.

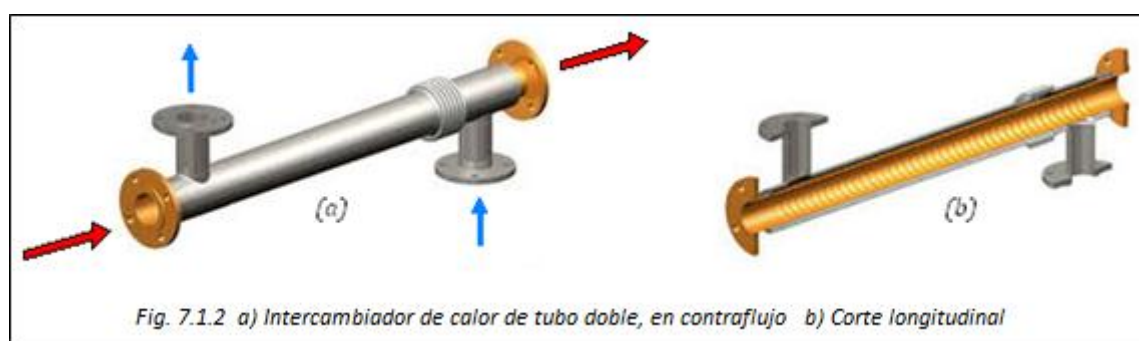
Los intercambiadores de calor se clasifican en su forma más simple en tres grupos, aunque en cada grupo existe una gran variedad de ellos, estos son: Intercambiadores tubulares, compactos de flujo cruzado, de placas y armazón e intercambiadores regenerativos.

Intercambiadores tubulares.

El tipo más simple del intercambiador tubular consiste en dos tubos concéntricos de diámetros diferentes, llamados de **tubo doble**. En este tipo de intercambiador uno de los fluidos pasa por el tubo de diámetro menor, mientras que el otro lo hace por el espacio anular entre los tubos. En un intercambiador de tubo doble, son posibles dos disposiciones del flujo, la de **flujo en paralelo**, en la cual ambos fluidos entran al intercambiador por el mismo extremo y se mueven en la misma dirección, como se indica en la figura 7.1.1.



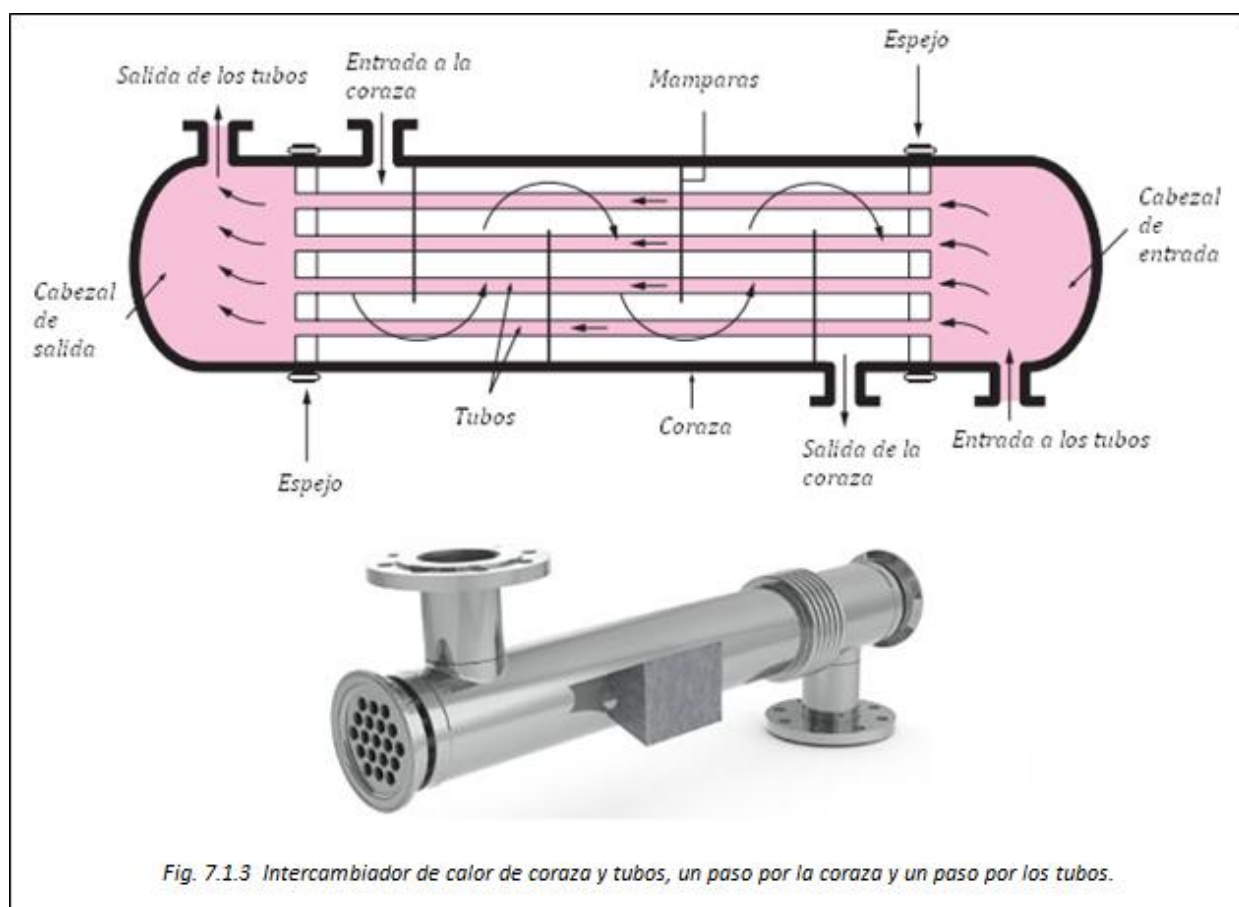
Y la disposición en contraflujo o flujos opuestos, en donde los fluidos entran al intercambiador por los extremos opuestos y fluyen en direcciones opuestas como se muestra en la figura 7.1.2.



Otro tipo de intercambiador tubular y quizás el más común por su aplicación en la industria es el denominado de **coraza y tubos**. Estos intercambiadores de gran peso y tamaño, contienen un gran número de tubos, (a veces varios cientos), empacados en un casco (coraza), con sus ejes paralelos a ella.

Uno de los fluidos se mueve dentro de los tubos, mientras el otro la hace por fuera de estos, pasando por la coraza. El fluido que pasa por la coraza es forzado a moverse transversalmente a ella, por medio de *desviadores o mamparas*, denominados también *deflectores*, con el propósito de mejorar la transferencia de calor entre los fluidos, y mantener un espaciamiento uniforme entre los tubos.

Además este tipo de intercambiadores cuenta en ambos extremos con unos elementos llamados cabezales, los cuales tienen como función acumular el fluido que circula por los tubos, tanto a la entrada como a la salida de ellos. En la figura 7.1.3., se muestra un intercambiador de calor de **un paso en la coraza y un paso por los tubos**.



En la práctica existe una gran variedad de este tipo de intercambiador de calor, los cuales se clasifican por el número de pasos en la coraza y el número de pasos en los tubos. Así, estos pueden ser de un paso en la coraza y dos pasos de tubos, dos pasos en la coraza y cuatro pasos en los tubos.

La figura 7.1.4., ilustra un intercambiador de calor de **un paso en la coraza y dos pasos por los tubos**. En este caso uno de los fluidos circula por el interior de los tubos, mientras que el otro circula por el espacio que dejan estos y la coraza. El fluido que circula por el interior de los tubos, recorre el intercambiador dos veces, entrando por un extremo y saliendo por el mismo. Algunas veces este arreglo de tubos forma una **U**. El fluido que circula por el exterior de los tubos es conducido transversalmente a la coraza a través de la mamparas o desviadores, siendo su recorrido por lo regular en dirección opuesta al fluido que circula por el interior de los tubos.

Dependiendo del arreglo geométrico que se tenga en los cabezales del intercambiador se puede tener uno o varios pasos de tubos, con el fin de incrementar el área de la superficie efectiva de transferencia de calor por unidad de volumen.

Por último en la figura 7.1.5., se muestra un intercambiador de calor de dos pasos en la coraza y cuatro pasos de tubos, como se observa en la figura un fluido recorre el intercambiador cuatro veces, entrando y saliendo por el mismo extremo; asimismo el otro fluido recorre la coraza dos veces, entrando y saliendo por el mismo extremo del otro fluido. El recorrido del fluido transversal a la coraza se efectúa de la misma

forma, utilizando mamparas o deflectores, para tal fin. Se utilizan cuando los fluidos son líquido-líquido o líquido- vapor.



Intercambiadores compactos.

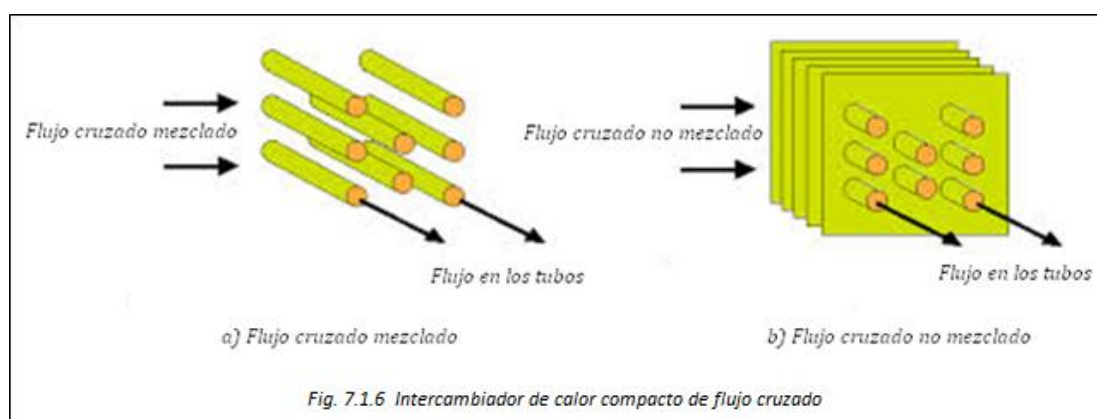
Un intercambiador de calor diseñado específicamente para lograr un área de transferencia de calor muy grande, por unidad de volumen (peso y tamaño pequeños), se le denomina compacto. La razón entre el área superficial de transferencia de calor de este intercambiador y su volumen se llama *densidad de área* β .

Un intercambiador de calor con $\beta > 700 \text{ m}^2/\text{m}^3$, se clasifica como compacto. Las grandes áreas de transferencia de calor, en los intercambiadores compactos se logran sujetando placas delgadas o aletas corrugadas con poco espacio entre sí a las paredes que separan a los dos fluidos. Estos intercambiadores son de uso común cuando los fluidos son gas hacia gas y gas hacia líquido o viceversa; con el propósito de contrarrestar el bajo coeficiente de transferencia de calor asociado con el flujo de gases, mediante una gran área superficial (añadiendo aletas de enfriamiento del lado del gas).

El movimiento de los fluidos en los intercambiadores compactos, es de manera perpendicular entre sí, y a esa configuración de flujo se le conoce como **flujo cruzado**. A su vez, esta configuración se subdivide en **flujo cruzado mezclado** y **flujo cruzado no mezclado**.

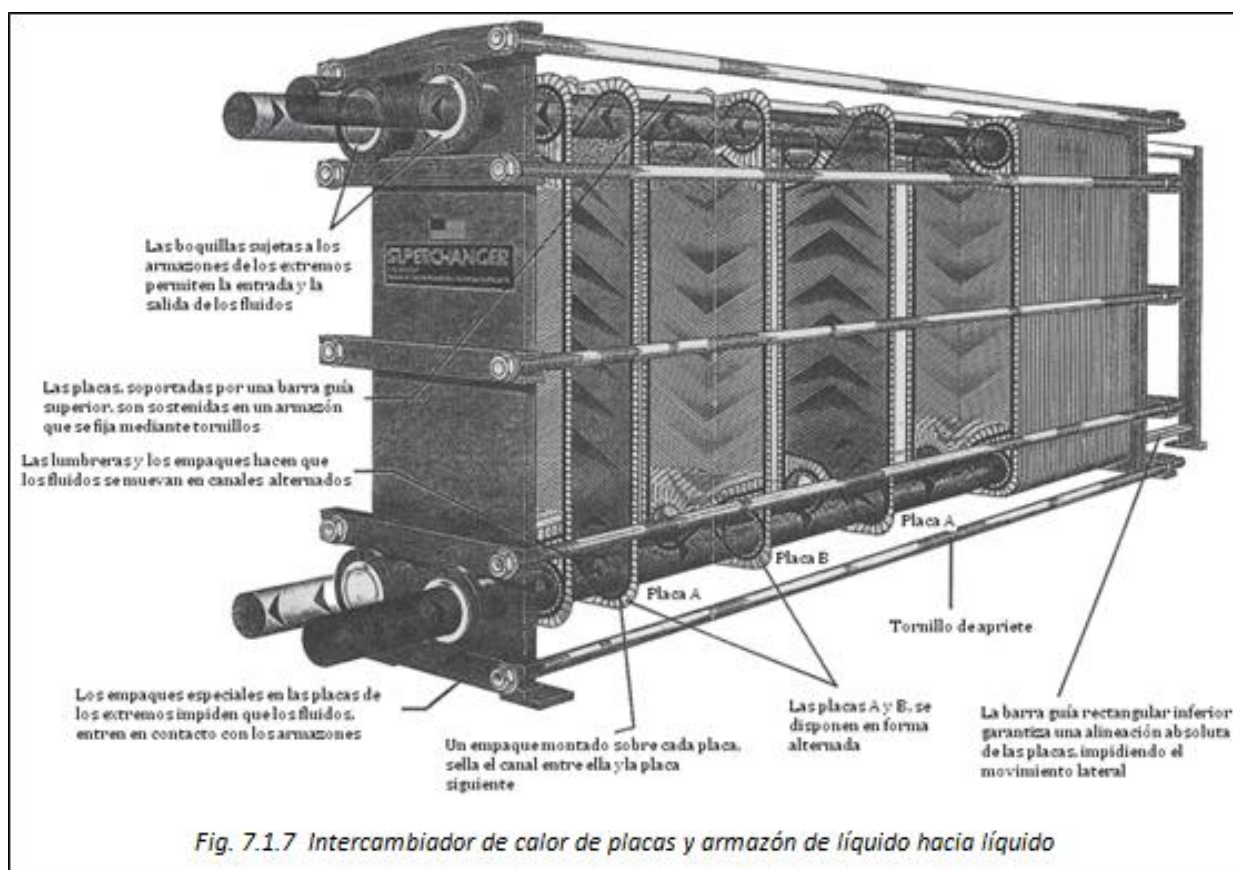
En la figura 7.1.6, se muestran estas configuraciones, en (a) el fluido que se conduce en la dirección transversal, tiene libertad de moverse y mezclarse entre los tubos. En (b) el fluido que se conduce en la dirección transversal, no tiene libertad de moverse y mezclarse entre los tubos, debido a que las placas

(aletas sujetas a la superficie exterior de los tubos); fuerzan al fluido a moverse por el espaciado particular entre ellas y no le permiten moverse en forma paralela a los tubos.

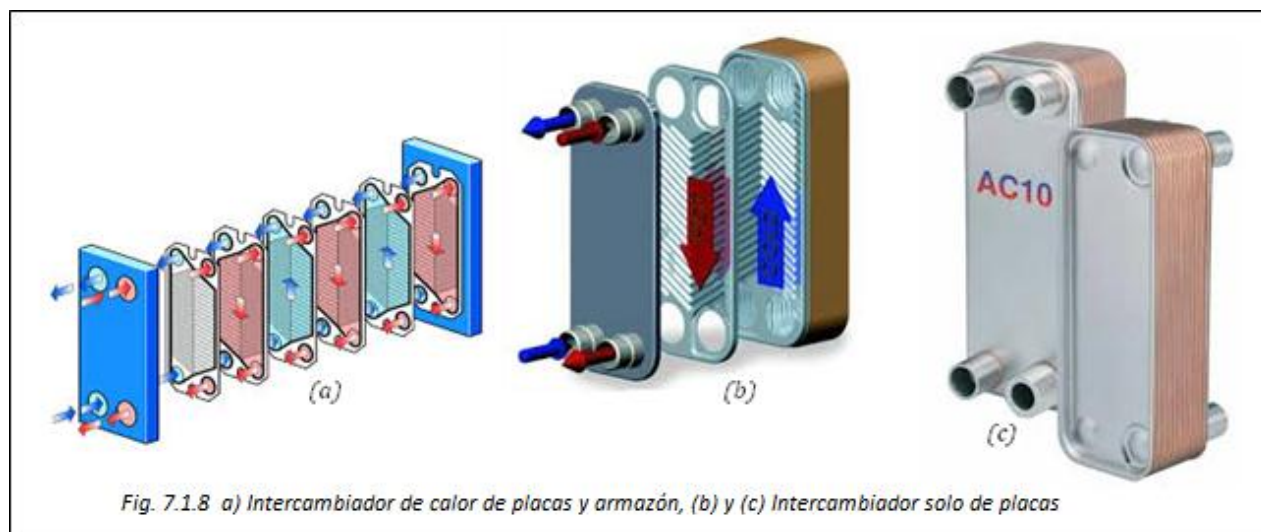


A nivel industrial, también se conocen los intercambiadores de calor **tipo de placas**. Estos están formados por un conjunto de placas de metal corrugadas (acero inoxidable, titanio, etc.), contenidas en un bastidor, el sellado de las placas se realiza mediante juntas o uniones soldadas y pueden clasificarse, en intercambiadores de calor de **tipo placa y armazón**, o solo **de placas**. Sin embargo, el tipo de intercambiador de placa no se utiliza con frecuencia debido a la confiabilidad de sellar las juntas entre cada una de las placas. Debido a este problema, solo se utiliza en aplicaciones donde la presión es pequeña o no muy alta, por ejemplo en los enfriadores de aceite para motores.

La figura 7.1.7, muestra un intercambiador de calor de placas y armazón de líquido hacia líquido, el cual consta de una serie de placas con pasos corrugados y aplastados para el flujo. Los fluidos, caliente y frío, fluyen en pasos alternados, de este modo cada corriente de fluido frío queda rodeada por dos corrientes de fluido caliente, lo que da por resultado una transferencia de calor muy eficaz.



En la figura 7.1.8 se muestra en forma esquemática un intercambiador de placas y armazón. En (a) se puede observar el paso del fluido frío y el caliente en forma alternada y como la corriente de fluido frío queda rodeada de dos corrientes del fluido caliente. En (b) y (c) se muestra un intercambiador solo de placas, en el cual se observa la forma alternada de las corrientes de ambos fluidos y el intercambiador en su conjunto. Se utilizan principalmente cuando los fluidos son líquido-gas o gas-gas.

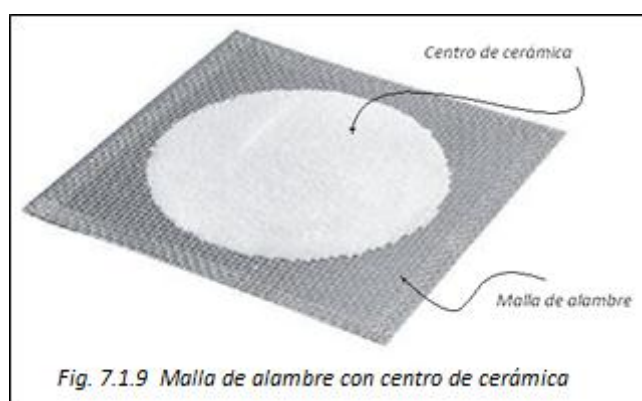


En general los intercambiadores de calor pueden clasificarse por el tipo de flujo, por su construcción y por su uso y aplicación.

Teniendo en cuenta el tipo de flujo los intercambiadores se dividen en flujos en paralelo y contra flujo, por su construcción en tubos concéntricos, de coraza y tubos, de placas y placas y armazón. Por último, dependiendo de su uso y aplicación reciben un nombre específico, como por ejemplo el caso de los condensadores, precalentadores de agua de alimentación, precalentadores de aire, radiadores, evaporadores, condensadores, etc.

Intercambiadores regenerativos.

En los intercambiadores de calor tipo regenerativo, las corrientes de los fluidos frío y caliente, son de forma alternada a través de la misma superficie o área de transferencia de calor. Los hay del tipo estático, el cual consisten en una masa porosa, como la malla de alambre de cerámica y que tiene una gran capacidad de almacenamiento de calor. Ver figura 7.1.9.

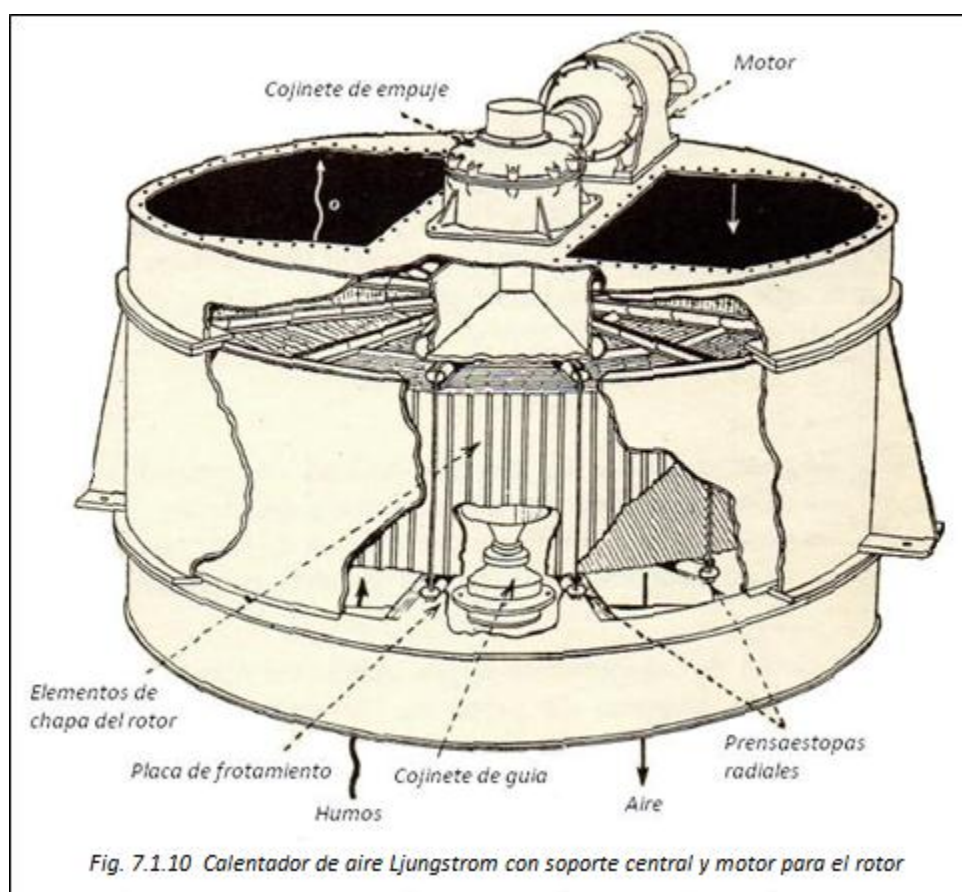


Los fluidos frío y caliente fluyen a través de esta masa porosa en forma alternada. El calor se transfiere del fluido caliente hacia la matriz del regenerador durante el flujo del mismo, y de la matriz hacia el fluido frío durante el paso de éste. Por lo tanto la matriz sirve como un medio de almacenamiento temporal de calor.

El intercambiador del tipo dinámico, consta de un tambor giratorio (rotor) y se establece un flujo continuo del fluido caliente y del frío a través de las secciones de éste. Los elementos del rotor son planchas con grandes ondulaciones con gran capacidad de almacenamiento de calor.

En funcionamiento normal, el humo del hogar asciende a través de la sección del rotor a él destinada y calienta las planchas.

Al girar el rotor, esta sección pasa a la zona del aire y entrega el calor almacenado al aire, que hace el papel de refrigerante. De este modo los elementos del rotor son calentados y enfriados en forma continua. En la figura 7.1.10, se ilustra un calentador de aire Ljungstrom regenerativo del tipo dinámico en el cual se puede observar la entrada y salida de los humos y la entrada y salida del aire, así como los elementos de chapa del rotor. Utilizados principalmente cuando ambos fluidos son gas.



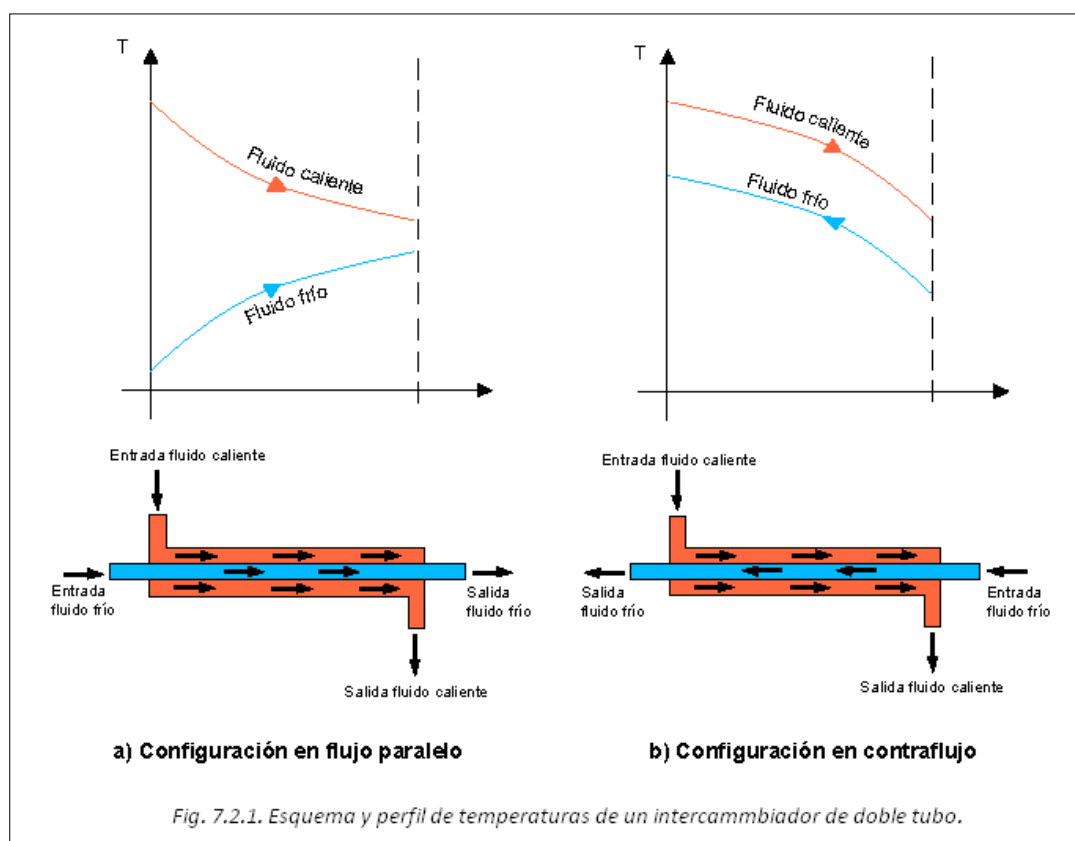
7.2 El coeficiente global de transferencia de calor.

Considere para propósitos de análisis un intercambiador de calor de doble tubo con flujos en paralelo o flujos encontrados, como los ilustrados en la figura 7.1.1, y cuya representación esquemática al igual que su correspondiente perfil de temperaturas se muestra en la figura 7.2.1.

Para efectuar el análisis térmico del intercambiador es necesario utilizar una expresión similar a la ley de Newton enfriamiento de la forma:

$$q = UA\overline{\Delta T} \quad (\text{ec. 7.2.1})$$

En donde q es el flujo total de calor transferido por el fluido caliente al fluido frío, U es el coeficiente global de transferencia de calor constante a lo largo de todo el intercambiador de calor, A es el área de transferencia de calor consistente con la definición de U , y $\overline{\Delta T}$ es una diferencia promedio de temperaturas a lo largo del intercambiador de calor.

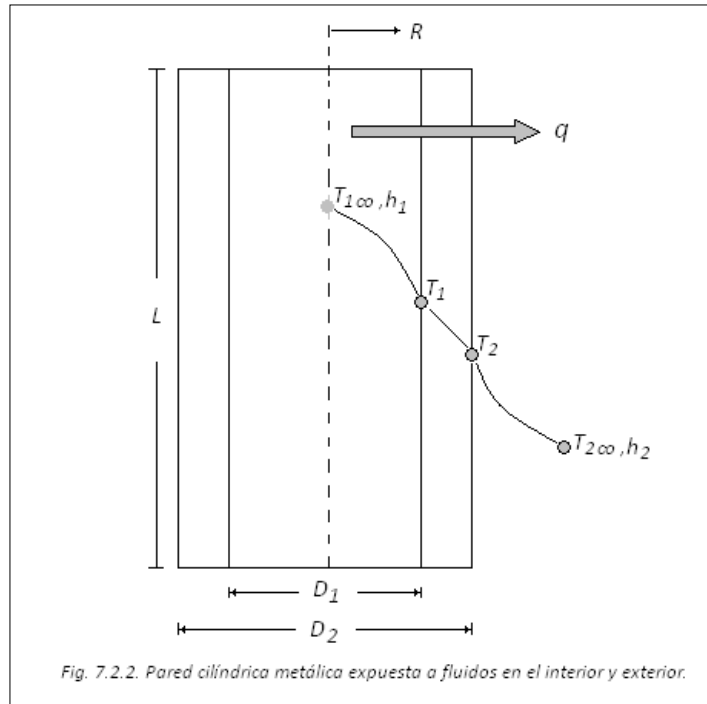


Comparando la ec. 7.2.1, con la del cilindro mostrado en la figura 7.2.2, expuesto tanto en su interior como en su exterior a fluidos que tienen temperaturas $T_{1\infty}$, T_1 y T_2 , $T_{2\infty}$, respectivamente, al igual que los coeficientes de transferencia de calor h_1 y h_2 , se observa que el coeficiente global de transferencia de calor queda definido mediante las expresiones siguientes, dependiendo del área exterior o interior que se seleccione.

Así, para la pared cilíndrica el flujo de calor que la atraviesa, está representado por la ecuación:

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_2 A_2}} \quad (\text{ec. 7.2.2})$$

Si se selecciona el área exterior $A_2 = \pi D_2 L$, se tiene que al multiplicar el denominador de la ecuación por la unidad, la ecuación 7.2.2, se convierte en:



$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\left[\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_2 A_2} \right] \left(\frac{A_2}{A_2} \right)}$$

$$q = \frac{A_2 (T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{A_2}{A_1} \frac{1}{h_1} + \frac{A_2 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{1}{h_2}} \quad (\text{ec. 7.2.3})$$

Observe que la ec. 7.2.3, tiene la forma de la ecuación 7.2.1, así se puede escribir:

$$q = \frac{A_2 (T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{h_1} + \frac{D_2 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{1}{h_2}} = U_2 A_2 \Delta T \quad (\text{ec. 7.2.4})$$

Es decir, si el coeficiente global se basa en el área exterior del tubo que transfiere el calor, entonces:

$$U_2 = \frac{1}{\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{h_1} + \frac{D_2 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{1}{h_2}} \quad (\text{ec. 7.2.5})$$

En función de los radios exterior e interior, la ecuación 7.2.5, se convierte en:

$$U_2 = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{h_1} + \frac{R_2 \ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{1}{h_2}} \quad (\text{ec. 7.2.6})$$

Por otra parte, si se emplea el área interior del tubo $A_1 = \pi D_1 L$, que transfiere el calor, se tiene:

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\left[\frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_2 A_2} \right] \left(\frac{A_1}{A_1} \right)}$$

$$q = \frac{A_1(T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{1}{h_1} + \frac{A_1 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{h_2}} \quad (ec. 7.2.7)$$

La cual tiene la forma de la ecuación 7.2.1. Entonces:

$$q = \frac{A_1(T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{1}{h_1} + \frac{A_1 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{h_2}} = U_1 A_1 \bar{\Delta T} \quad (ec. 7.2.8)$$

Es decir, si el coeficiente global se basa en el área interior del tubo que transfiere el calor, entonces:

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{D_1 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{D_1}{D_2} \frac{1}{h_2}} \quad (ec. 7.2.9)$$

En función de los radios exterior e interior, la ecuación 7.2.9, se convierte en:

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{R_1 \ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{h_2}} \quad (ec. 7.2.10)$$

De lo anterior se desprende que el producto UA es constante en cualquiera de las expresiones 7.2.4, y 7.2.8; es decir:

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = UA$$

Donde:

$$A_1 = 2\pi R_1 L = \pi D_1 L$$

$$A_2 = 2\pi R_2 L = \pi D_2 L$$

Note que en ambas definiciones aparecen dos resistencias, la conductiva del tubo y dos convectivas de los fluidos.

Así,

$$q = U_1 A_1 \bar{\Delta T} = U_2 A_2 \bar{\Delta T}$$

Donde,

$$A_2 > A_1, \quad y \quad U_2 < U_1$$

La tabla 7.2.1, muestra el número de Nusselt para flujo laminar completamente desarrollado en una corona circular o espacio anular con una superficie aislada y la otra isotérmica.

Tabla 7.2.1. Numero de Nusselt para una corona circular o espacio anular.		
D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0.00	-----	3.66
0.05	17.46	4.06
0.10	11.56	4.11
0.25	7.37	4.23
0.50	5.74	4.43
1.00	4.86	4.86
Tomado del Yunus A. Cengel, Tercera edición, Mc Graw-Hill, página 618		

Ejemplo 7.2.1.

Se quiere enfriar aceite caliente en un intercambiador de calor de tubo doble, a contraflujo. El tubo interior de cobre tiene un diámetro de 2 cm y un espesor despreciable. El diámetro interior del tubo exterior (el casco) es de 3 cm. Por el tubo fluye agua a razón de 0.5 kg/s y el aceite por el casco a razón de 0.8 kg/s. Tomando las temperaturas promedio del agua y del aceite como 45 °C y 80 °C, respectivamente, determine el coeficiente de transferencia de calor global de este intercambiador basándose en el área exterior del tubo que transfiere el calor.

Solución:

El aceite proporciona calor al agua, además la resistencia a la conducción es despreciable debido a que el cobre es altamente conductor y su espesor es despreciable. La ecuación 7.2.5, puede utilizarse.

$$U_2 = \frac{1}{\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{h_1} + \frac{D_2 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{1}{h_2}} \quad (\text{ec. 7.2.5})$$

Puesto que se tiene espesor despreciable y alta conductividad térmica, la resistencia a la conducción es nula y la ecuación 7.2.5, se convierte en:

$$U_2 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}}$$

Note que basándose en el área interior del tubo, se obtiene la misma expresión, así:

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}}$$

Para el cálculo de los coeficientes convectivos por el lado interior y el exterior, se requiere de las propiedades de ambos fluidos, por tanto:

Las propiedades del agua a la temperatura promedio de 45 °C, según tabla, son:

$$\rho = 990.1 \text{ kg/m}^3$$

$$k = 0.637 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$Pr = 3.91$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0.602 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Las propiedades del aceite a la temperatura promedio de 80 °C, según tabla, son:

$$\rho = 852 \text{ kg/m}^3$$

$$k = 0.138 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$Pr = 499.3$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 3.794 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Puesto que el diámetro interior del tubo interior es de 0.02 m. Se puede calcular la velocidad media del agua y el número de Reynolds, así:

$$V = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{\dot{m}}{\rho \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \right)} = \frac{0.5}{(990.1) \left(\frac{\pi (0.02)^2}{4} \right)} = 1.61 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{VD_1}{\nu} = \frac{(1.61)(0.02)}{0.602 \times 10^{-6}} = 53489$$

El cual es un flujo turbulento por ser mayor a 2300, entonces se puede determinar el número de Nusselt a partir de la ecuación;

$$Nu = \frac{h_1 D_1}{k} = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 0.023 (53489)^{0.8} (3.91)^{0.4} = 240.6$$

Entonces:

$$h_1 = \frac{Nu k}{D_1} = \frac{(240.6)(0.637)}{(0.02)} = 7663 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Ahora se repite el mismo análisis para el aceite, así, el diámetro del espacio anular es:

$$D_2 = D_o - D_i = 0.03 - 0.02 = 0.01 \text{ m.}$$

En este caso la velocidad media y el número de Reynolds son;

$$V = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{\dot{m}}{\rho \left[\frac{\pi}{4} (D_o^2 - D_i^2) \right]} = \frac{0.8}{(852) \left[\frac{\pi (0.03^2 - 0.02^2)}{4} \right]} = 2.39 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{VD_2}{\nu} = \frac{(2.39)(0.01)}{3.794 \times 10^{-5}} = 630$$

El cual es un flujo laminar por ser mayor a 2300, entonces se puede determinar el número de Nusselt a partir de la tabla para una corona circular con una superficie aislada y la otra isotérmica. Así, interpolando entre valores de la tabla 7.2.1, se tiene que:

$$\frac{D_i}{D_o} = \frac{0.02}{0.03} = 0.667$$

Por tanto el número de Nusselt Nu_i correspondiente es igual a 5.45

Entonces:

$$h_2 = \frac{Nu_i k}{D_2} = \frac{(5.45)(0.138)}{(0.01)} = 75.2 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$$

Por último;

$$U_2 = U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}} = \frac{1}{\frac{1}{7663} + \frac{1}{75.2}} = 74.5 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$$

7.3 Factores de suciedad.

Las ecuaciones 7.2.2 y 7.2.3, predicen con exactitud el coeficiente global de transferencia de calor, solo cuando los tubos estén libres de depósitos o libres de suciedad, en caso contrario, dichos depósitos hacen que la resistencia térmica entre los fluidos se incremente, provocando una disminución en la razón de transferencia de calor. Por tal motivo el rendimiento del intercambiador de calor se ve afectado con el paso del tiempo, como resultado de la acumulación de depósitos, sobre la superficie de transferencia de calor, es decir sobre las superficies interior y exterior del tubo.

Al seleccionar o diseñar un intercambiador de calor dado, se cae en la complejidad, ya que existen diferentes geometrías de intercambiadores que realizan la misma función térmica específica. Por consiguiente la decisión final depende de otros factores tales como el costo, espacio, caídas de presión, etc.

Una herramienta con la cual el ingeniero puede tener acceso a todas esas diferentes alternativas y factores es la computación digital, pues mediante la simulación puede predecirse un sin número muy grande de alternativas, sin recurrir a la experimentación, lográndose de esta forma la selección más apropiada.

Sin embargo, esto solo puede realizarse en un intercambiador libre de depósitos, en caso de existir dichos depósitos la resistencia térmica originada por ellos; solo puede ser estimada a través de la experimentación mediante pruebas específicas en el intercambiador.

Entre los tipos de suciedad se tiene como la más común a la precipitación de depósitos sólidos, como son los de calcio originado por el agua con demasiada dureza.

La corrosión y la incrustación química son otras formas de acumulación de suciedad sobre la superficie de transferencia de calor. Se deben a los productos de las reacciones químicas que se originan en la

industria de procesos químicos. Puede impedirse utilizando recubrimientos de vidrio sobre los tubos metálicos o tubos de plástico en lugar de metálicos.

Los intercambiadores también pueden incrustarse por el crecimiento de algas en el fluido caliente, este fenómeno se conoce como incrustación biológica y se impide a través de tratamiento químico.

Para evitar el problema de la suciedad en los intercambiadores de calor, es recomendable la suspensión de actividades y operación del equipo, con el propósito de la limpieza de la limpieza periódica, o en su caso seleccionar un intercambiador más grande y, por ende más caro, con el fin de garantizar la razón de transferencia de calor, aún después de que ocurra la incrustación.

Es obvio que el factor de suciedad o incrustación tiene el valor de cero para un intercambiador nuevo, pero va aumentando con el tiempo de operación a medida que se acumulan los depósitos sólidos sobre la superficie de transferencia de calor.

El factor de suciedad depende de la temperatura de operación y de la velocidad de flujo de los fluidos caliente y frío, así como del tiempo de operación del mismo. La incrustación aumenta al aumentar la temperatura de operación y disminuir la velocidad de flujo.

Por consiguiente es necesario modificar las ecuaciones 7.2.5, y 7.2.9, para tomar en cuenta los efectos de la incrustación sobre las superficies interior y exterior del tubo. Mediante un procedimiento similar al descrito para la pared cilíndrica metálica, se obtiene que:

$$U_2 = \frac{1}{\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{h_1} + \frac{D_2}{D_1} R_{f1} + \frac{D_2 \ln(D_2/D_1)}{2k} + R_{f2} + \frac{1}{h_2}} \quad (ec. 7.3.1)$$

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + R_{f1} + \frac{D_1 \ln(D_2/D_1)}{2k} + \frac{D_1}{D_2} R_{f2} + \frac{D_1}{D_2} \frac{1}{h_2}} \quad (ec. 7.3.2)$$

Donde R_{f1} y R_{f2} son los factores de incrustación en las superficies interior y exterior del tubo respectivamente. Ambos coeficientes globales de transferencia de calor se usan para intercambiadores de calor sin aletas. En el supuesto, que el tubo tuviese aletas, es necesario determinar el área superficial efectiva; a partir de la siguiente expresión:

$$A_{se} = A_{aletas} + A_{sin aletas} \quad (ec. 7.3.3)$$

$$A_{se} = \eta_{aleta} A_{aleta} + A_{sin aletas} \quad (ec. 7.3.4)$$

Donde η_{aleta} es la eficiencia de la aleta, tal como fue descrita en la unidad 2. El tubo puede tener aletas tanto en su superficie interior como en la exterior, con el fin de mejorar la transferencia de calor del lado que tenga las aletas. Cuando uno de los fluidos es un gas, y el otro un líquido, las aletas deben colocarse del lado del gas con el propósito de mejorar el producto UA y en consecuencia la razón de transferencia de calor en ese lado.

La tabla 7.3.1, muestra valores representativos del coeficiente global de transferencia de calor para diversos intercambiadores de calor.

Tabla 7.3.1. Valores representativos del coeficiente global de transferencia de calor, para algunos intercambiadores de calor.	
Tipo de intercambiador de calor	U en $W/m^2 - ^\circ C$
Agua-Agua	850-1700
Agua-Aceite	100-350
Agua-Gasolina o Queroseno	300-1000
Calentador de agua de alimentación (Agua-Vapor de agua)	1000-8500
Vapor de Agua-Combustóleo ligero	200-400
Vapor de agua-Combustóleo pesado	50-200
Condensador de vapor de agua (Agua-Vapor de agua)	1000-6000
Condensador de freón (Agua enfriada)	300-1000
Condensador de amoníaco (Agua enfriada)	800-1400
Condensador de alcohol (Agua enfriada)	250-700
Gas-Gas	10-40
Agua-Aire en tubos con aletas (agua en los tubos)	30-60* (400-850**)
Vapor de agua-Aire en tubos con aletas (vapor de agua en los tubos)	30-300* (400-4000**)
*Con base en el área superficial del lado del agua.	
**Con base en el área superficial del agua o del vapor de agua.	
Tomado del Yunus A. Cengel, Tercera edición, Mc Graw-Hill, página 615	

La tabla 7.3.2, muestra algunos valores representativos de la resistencia térmica debida a la incrustación para diversos fluidos, por unidad de área superficial.

Tabla 7.3.2. Valores representativos de la resistencia térmica debida a incrustación, para diversos fluidos.	
Fluido	R_f en $m^2 - ^\circ C/W$
Agua destilada, Agua de mar, Agua de río, Agua de alimentación para calderas.	
Por debajo de 50 °C	0.0001
Arriba de 50 °C	0.0002
Combustóleo	0.0009

Vapor de agua (Libre de aceite)	0.0001
Refrigerantes (Líquido)	0.0002
Refrigerantes (Vapor)	0.0004
Vapores de alcohol	0.0001
Aire	0.0004
<i>Tomado del Yunus A. Cengel, Tercera edición, Mc Graw-Hill, página 617</i>	

Ejemplo 7.3.1.

Considere un intercambiador de calor de tubo doble. El tubo interno tiene un diámetro interior de 10 cm y espesor despreciable. En el momento de su construcción, se calculó que la resistencia térmica total del intercambiador de calor era de 0.025 °C/W. Después de un uso prolongado, se presenta incrustación tanto en la superficie interior como en la exterior del tubo interno con los factores de incrustación de 0.00045 y 0.00015 m²·°C/W, respectivamente. Calcule el porcentaje de disminución de la razón de la transferencia de calor en este intercambiador, debido a la incrustación.

Solución:

Debido a que el tubo interno tiene espesor despreciable, las áreas interna y externa del tubo son iguales, al ser los diámetros interno y externo casi iguales, así; para un metro de longitud de tubo se tiene:

$$A_1 = A_2 = \pi D_1 L = \pi D_2 L = \pi (0.1)(1) = 0.1\pi \text{ m}^2.$$

Además, la resistencia total después del uso prolongado debido a la incrustación, se calcula sumando a la resistencia total en el momento de su construcción las resistencias debidas a la incrustación en ambas superficies. Entonces;

$$R_{Ti} = R_{Tc} + \frac{R_{f1}}{A_1} + \frac{R_{f2}}{A_2} = 0.025 + \left(\frac{1}{0.1\pi}\right)(0.00045 + 0.00015) = 0.027 \text{ °C/W}.$$

Note que si la resistencia total se incrementa, entonces la razón de flujo de calor disminuye. Por tanto, el porcentaje de disminución es:

$$\% \text{ de disminución} = \frac{R_{Tc} - R_{Ti}}{R_{Tc}} = \frac{0.025 - 0.027}{0.025} \times 100 = -8.0$$

El signo negativo indica la disminución de la razón de transferencia de calor.

7.4 Método de la diferencia media logarítmica de temperaturas.

En la industria los intercambiadores de calor son de uso común y el ingeniero tiene la tarea de saber seleccionar o diseñar el adecuado para cierta aplicación específica. En la práctica se requiere que un intercambiador de calor satisfaga las siguientes condiciones de operación.

1. Que logre un cambio de temperatura específica de una corriente de fluido de gasto másico conocido.
2. Predecir las temperaturas de salida de las corrientes de fluido frío y del caliente.

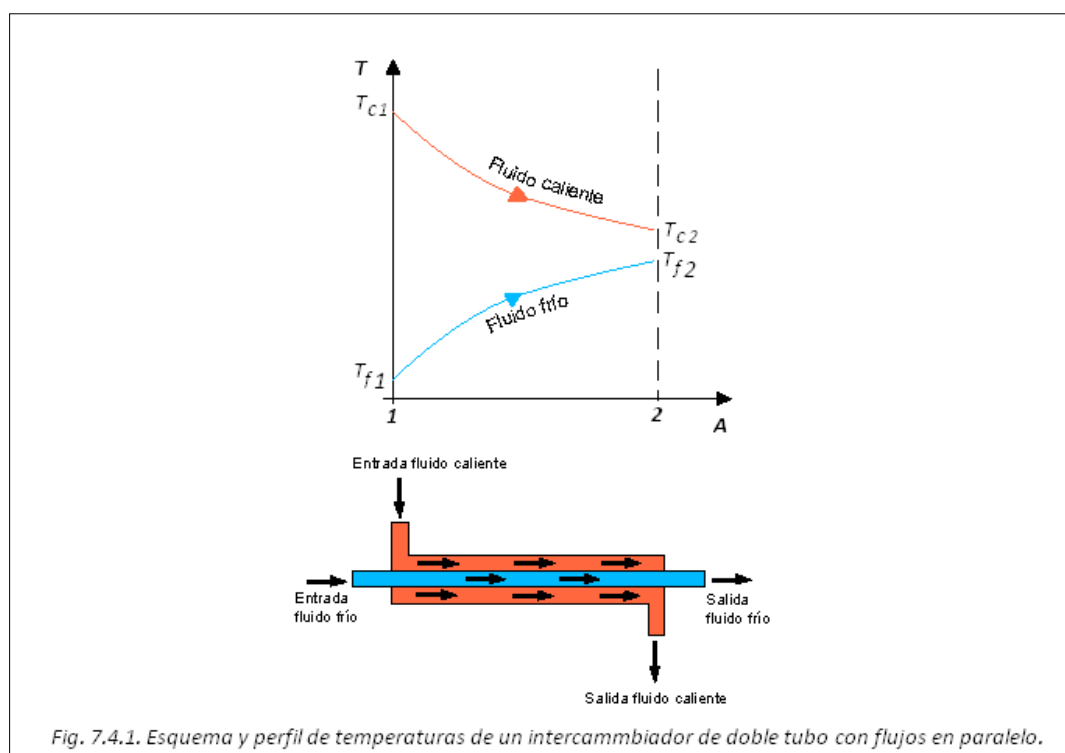
En esta sección se discutirá la condición 1, a partir del método de la diferencia media logarítmica de temperaturas (*DMLT*) y en la siguiente la condición 2 a través del método de la efectividad – número de unidades de transferencia ($\epsilon - Nut$).

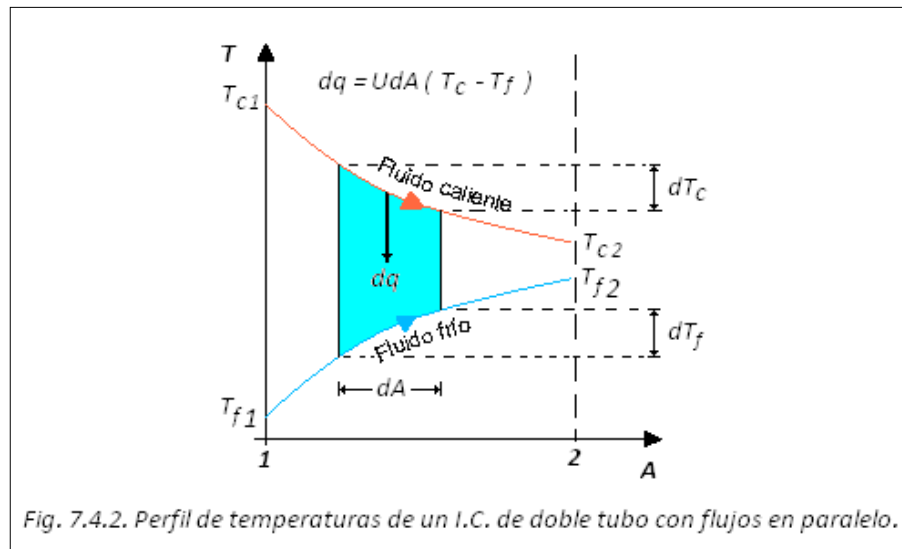
Un intercambiador de calor suele operar durante largos periodos de tiempo sin cambios en sus condiciones de operación, por lo que puede considerarse como un dispositivo de flujo estacionario. En otras palabras, no existen cambios en el gasto másico de ambos fluidos, y las propiedades de los mismos como la temperatura y la velocidad en cualquier entrada y salida, no varían con respecto al tiempo. Además los cambios de velocidad y elevación de las corrientes no experimentan cambio alguno, y por tanto los cambios en energía cinética y potencial son despreciables.

Como se mencionó anteriormente, la diferencia de temperatura entre los fluidos caliente y frío varía a lo largo del intercambiador de calor y por consiguiente resulta conveniente tener una diferencia media de temperatura ($\overline{\Delta T}$), representada en la ecuación 7.2.1.

Para propósito de análisis, considérese un intercambiador de calor de doble tubo y de flujos en paralelo como se muestra en la figura 7.4.1, en el cual se observa que la diferencia de temperatura (ΔT) entre los fluidos caliente y frío es grande a la entrada del intercambiador, pero va disminuyendo en forma exponencial hacia la salida. Sin embargo es de esperar, que la temperatura del fluido caliente decrezca y la del frío aumente a lo largo del intercambiador, pero la temperatura del fluido frío a la salida nunca puede sobrepasar la del caliente; sin importar cuan largo sea el intercambiador.

Para simplicidad del análisis, puede suponerse sin sacrificar exactitud en los cálculos, que la superficie exterior del intercambiador está bien aislada, de tal suerte que la transferencia de calor solo ocurre entre los fluidos y nunca se transfiere calor hacia los alrededores. Así, considerando las condiciones para flujo estacionario, y mediante la aplicación de la primera ley de la termodinámica para un sistema abierto en el cual no existe trabajo alguno; puede realizarse un balance de energía en cada fluido, en una sección diferencial como se indica en la figura 7.4.2.





Así, el flujo de calor dq transferido a través del elemento diferencial de área dA , está dado por la expresión:

$$dq = U dA (T_c - T_f) \quad (\text{ec. 7.4.1})$$

Mediante un balance de energía en los fluidos caliente y frío, a través de este diferencial de área, se tiene;

$$dq = -\dot{m}_c C_{pc} dT_c = -C_c dT_c \quad (\text{ec. 7.4.2})$$

y;

$$dq = \dot{m}_f C_{pf} dT_f = C_f dT_f \quad (\text{ec. 7.4.3})$$

En donde C_c y C_f se refiere a las capacidades caloríficas de los fluidos caliente y frío, definidas como el producto del gasto másico y el calor específico. El signo menos de la ecuación 7.4.2, se debe a que el fluido caliente cede calor al frío.

Despejando dT_c de la ecuación 7.4.2, se obtiene:

$$dT_c = -\frac{dq}{C_c}$$

y despejando dT_f de la ecuación 7.4.3, se tiene:

$$dT_f = \frac{dq}{C_f}$$

Pero como;

$$d(T_c - T_f) = dT_c - dT_f = -\frac{dq}{C_c} - \frac{dq}{C_f} = -dq \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$$

Despejando la diferencial de calor cedida por el fluido caliente, se tiene;

$$-dq = \frac{d(T_c - T_f)}{\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right)} \quad (\text{ec. 7.4.4})$$

O bien,

$$d(T_c - T_f) = -dq \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (\text{ec. 7.4.5})$$

Sustituyendo la ecuación 7.4.1 en la ecuación 7.4.5, se obtiene:

$$d(T_c - T_f) = -U(T_c - T_f) \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) dA$$

De lo que resulta,

$$\frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) dA \quad (\text{ec. 7.4.6})$$

Integrando indefinidamente la ecuación anterior:

$$\int \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \int dA$$

$$\ln(T_c - T_f) = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) A + C_1$$

Aplicando la ley de los logaritmos;

$$T_c - T_f = C_2 e^{-UA \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)}$$

Como a la entrada del intercambiador el área del mismo es igual a cero ($A = 0$), se tiene:

$$T_c - T_f = C_2 = T_{c1} - T_{f1}$$

Sustituyendo el valor de C_2 , en la ecuación anterior, se obtiene:

$$T_c - T_f = (T_{c1} - T_{f1}) e^{-UA \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)} \quad (\text{ec. 7.4.7})$$

La ecuación anterior permite conocer la diferencia de temperaturas entre el fluido caliente y el frío, en función del área, la diferencia de temperatura de los fluidos a la entrada y sus respectivos calores específicos.

Por otra parte integrando la ecuación la ecuación 7.4.6, definitivamente;

$$\int_{(T_{c1}-T_{f1})}^{(T_{c2}-T_{f2})} \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \int_0^A dA$$

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = -UA\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) \quad (\text{ec. 7.4.8})$$

Por otra parte un balance de energía a lo largo de todo el intercambiador de calor indica que, el calor cedido por el fluido caliente lo absorbe el fluido frío, así:

$$q = -C_c(T_{c2} - T_{c1}) = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = C_f(T_{f2} - T_{f1})$$

ó,

$$\frac{1}{C_c} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{q} \quad (\text{ec. 7.4.9})$$

$$\frac{1}{C_f} = \frac{T_{f2} - T_{f1}}{q} \quad (\text{ec. 7.4.10})$$

Sustituyendo las ecuaciones 7.4.9 y 7.4.10 en la ecuación 7.4.8, se obtiene;

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = -UA\left(\frac{T_{c1} - T_{c2}}{q} + \frac{T_{f2} - T_{f1}}{q}\right)$$

o bien,

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = \frac{UA}{q}[(T_{c2} - T_{f2}) - (T_{c1} - T_{f1})]$$

Despejando q , se tiene:

$$q = UA \frac{(T_{c2} - T_{f2}) - (T_{c1} - T_{f1})}{\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right)}$$

Esta ecuación tiene la forma de la ecuación,

$$q = UA\overline{\Delta T}$$

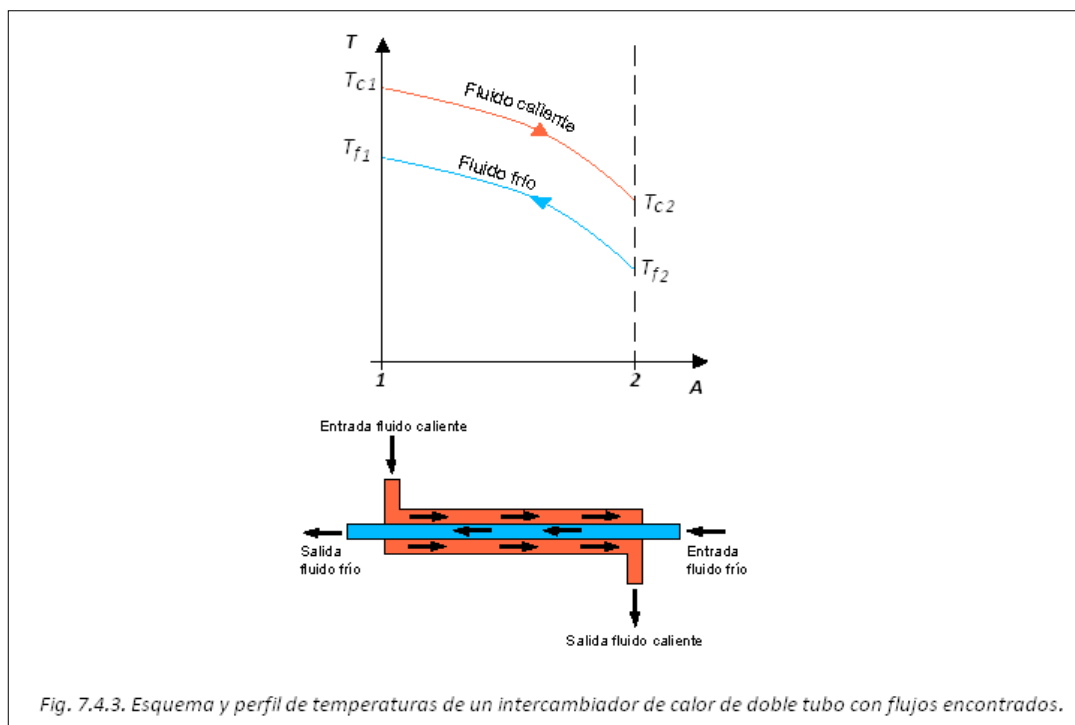
Comparando, ambas ecuaciones, se concluye que:

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_{c2} - T_{f2}) - (T_{c1} - T_{f1})}{\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right)} \quad (\text{ec. 7.4.11})$$

Esta ecuación calcula la **diferencia media logarítmica de temperaturas** ($DMLT = \overline{\Delta T}$) en función de las temperaturas de entrada y salida de ambos fluidos, para un intercambiador de calor de **doble tubo con flujos en paralelo**. Este método conocido como la diferencia media logarítmica de temperatura puede ser utilizado, solo si se conocen cuando menos tres de las cuatro temperaturas que hay en el intercambiador de calor. En el supuesto de que se desconociera una de ellas, esta puede evaluarse mediante un balance de energía por la primera ley de la termodinámica.

En la figura 7.4.3, se muestra la variación de temperaturas de ambos fluidos, caliente y frío de un intercambiador de calor de doble tubo y flujos encontrados o contraflujo.

Observe que los fluidos entran al intercambiador por los extremos opuestos, y en este caso existe la posibilidad que la temperatura de salida del fluido frío sobrepase a la temperatura de salida del caliente. Siendo el caso límite, cuando la temperatura del fluido frío a la salida, alcance la temperatura del fluido caliente a la entrada. Sin embargo, la temperatura de salida del fluido frío nunca puede ser mayor que la de entrada del fluido caliente, pues esto sería una violación a la segunda ley de la termodinámica.

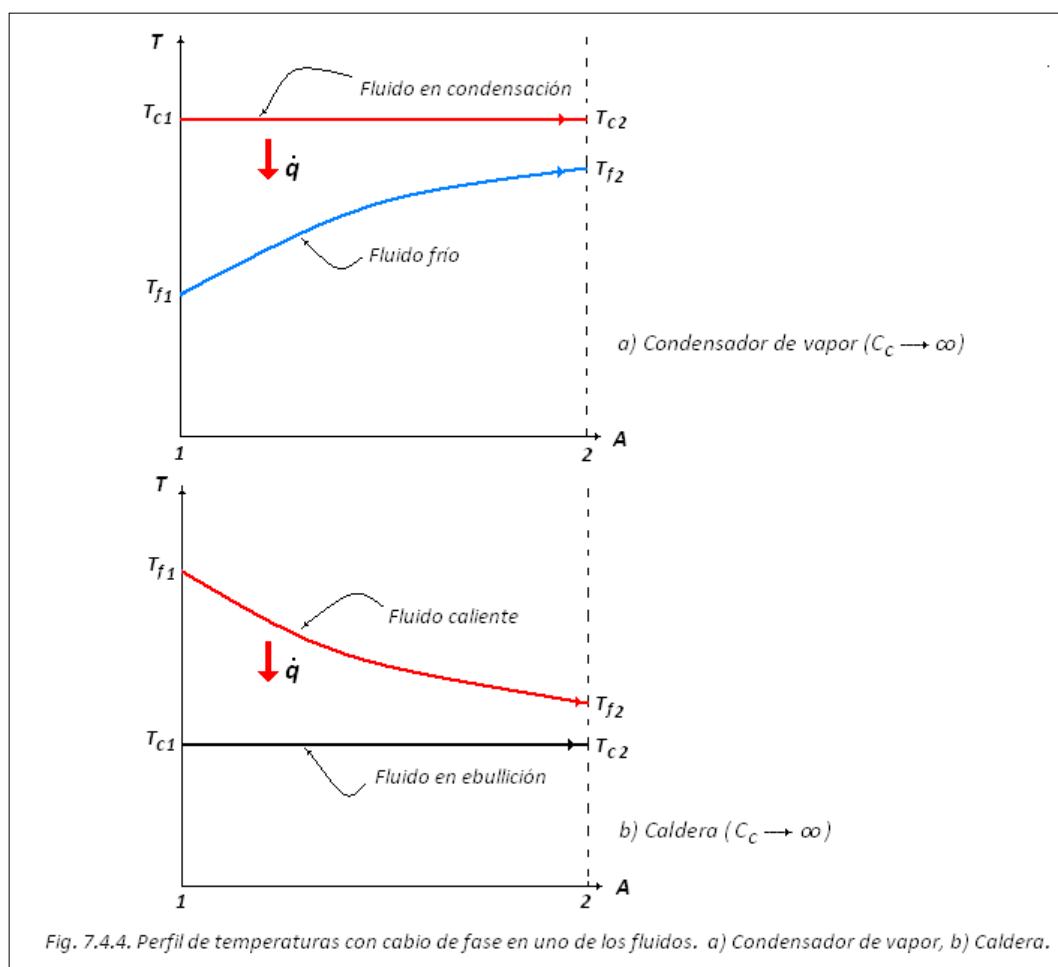


Al realizar un análisis similar al anterior en este tipo de intercambiador de calor, se llegará a la conclusión que la ecuación 7.4.11, para intercambiadores de doble tubo con flujos en paralelo, también puede aplicarse a los intercambiadores de doble tubo con flujos encontrados; aunque es necesario tomar en consideración, que; la temperatura del fluido frío a la entrada es T_{f2} y a la salida T_{f1} . Es decir, es necesario cambiar la entrada del fluido frío por la salida.

Para temperaturas de entrada y salida específicas, la $DMLT$ en un intercambiador de calor de flujos encontrados es mayor que en uno de flujos en paralelo, y por consiguiente se requiere de un área menor de transferencia de calor (intercambiador más pequeño), para lograr la misma razón específica que en el de flujos en paralelo.

Cuando las capacidades caloríficas de los fluidos son iguales ($C_c = C_f$), en un intercambiador a contraflujo, es decir, la diferencia de temperaturas entre los fluidos, caliente y frío permanece constante; la $DMLT$ toma la forma indeterminada.

La figura 7.4.4, ilustra el perfil de temperaturas de un condensador de vapor y de una caldera, los cuales son intercambiadores de calor de flujo en paralelo o contraflujo, puesto que un análisis en cada uno de ellos conduce al mismo resultado.



Si se desarrollaran, relaciones similares para intercambiadores de calor del **tipo coraza y tubos de pasos múltiples y flujo cruzado** y los de tipo **compacto con flujo transversal**; estas resultarían bastante complejas debido al comportamiento en las condiciones de flujo. Por esta razón resulta conveniente relacionar la **diferencia equivalente de temperatura**, con la diferencia media logarítmica de temperatura (*DMLT*), para el caso del intercambiador de doble tubo en contraflujo, mediante la expresión:

$$\overline{\Delta T} = F \overline{\Delta T} \quad (\text{ec. 7.4.12})$$

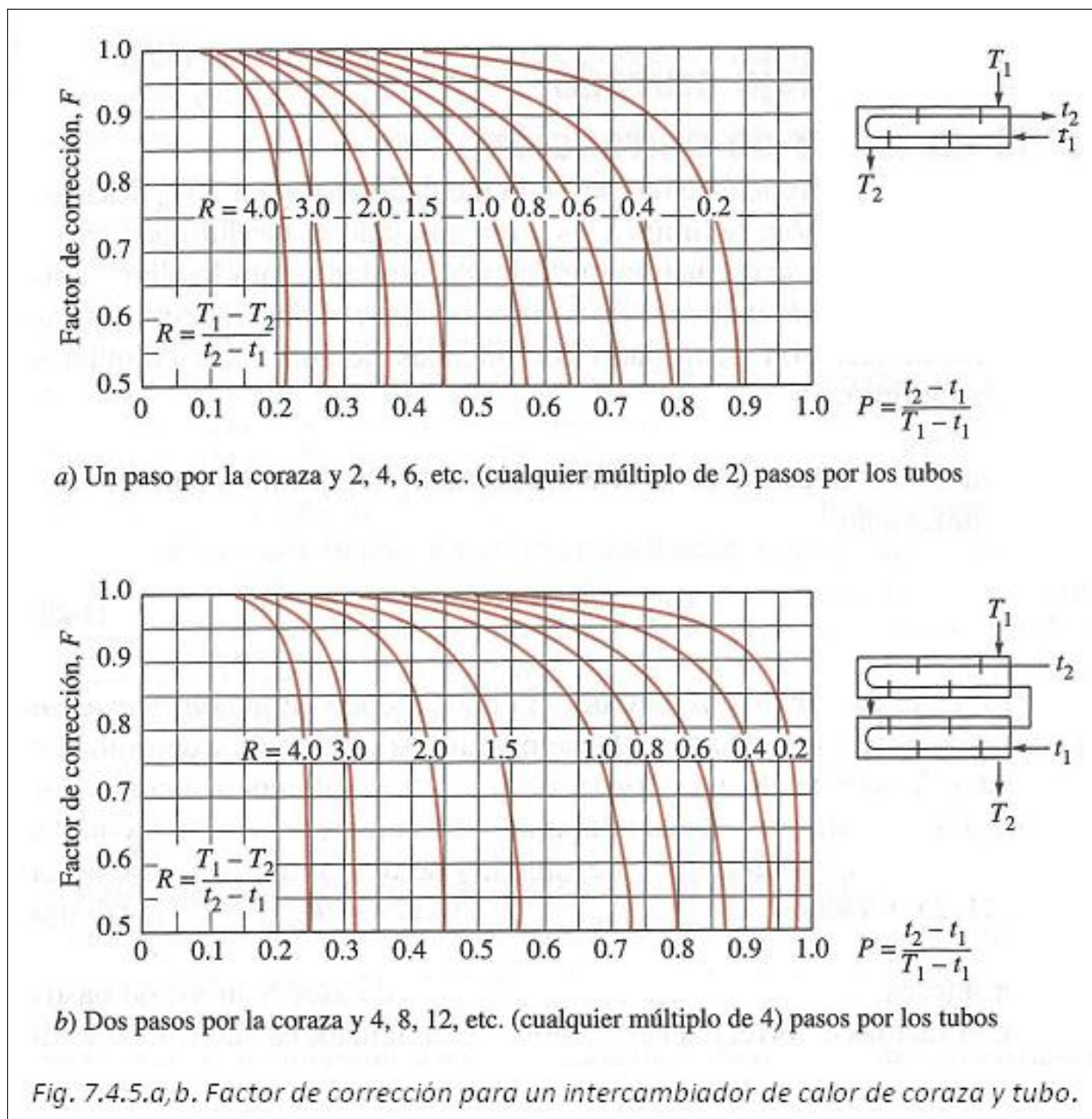
Donde F es un factor de corrección que depende de la configuración geométrica del intercambiador y de las temperaturas de entrada y salida de las corrientes de fluido caliente y frío.

Como se puede observar en la ecuación 7.4.12, el valor límite del factor de corrección corresponde a la unidad. Es decir, ($F = 1$) y corresponde al intercambiador de doble tubo en contraflujo. Para valores de ($F \leq 1$), corresponde a los intercambiadores de calor de coraza y tubo de pasos múltiples y a los de flujo transversal con ambos fluidos mezclados y sin mezclar. En la figura 7.4.5.a,b, se da el factor de corrección para los intercambiadores de calor de coraza y tubo con flujos cruzados, en función de los parámetros adimensionales P y R , definidos como el cociente de la diferencia de dos temperaturas, así:

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$$

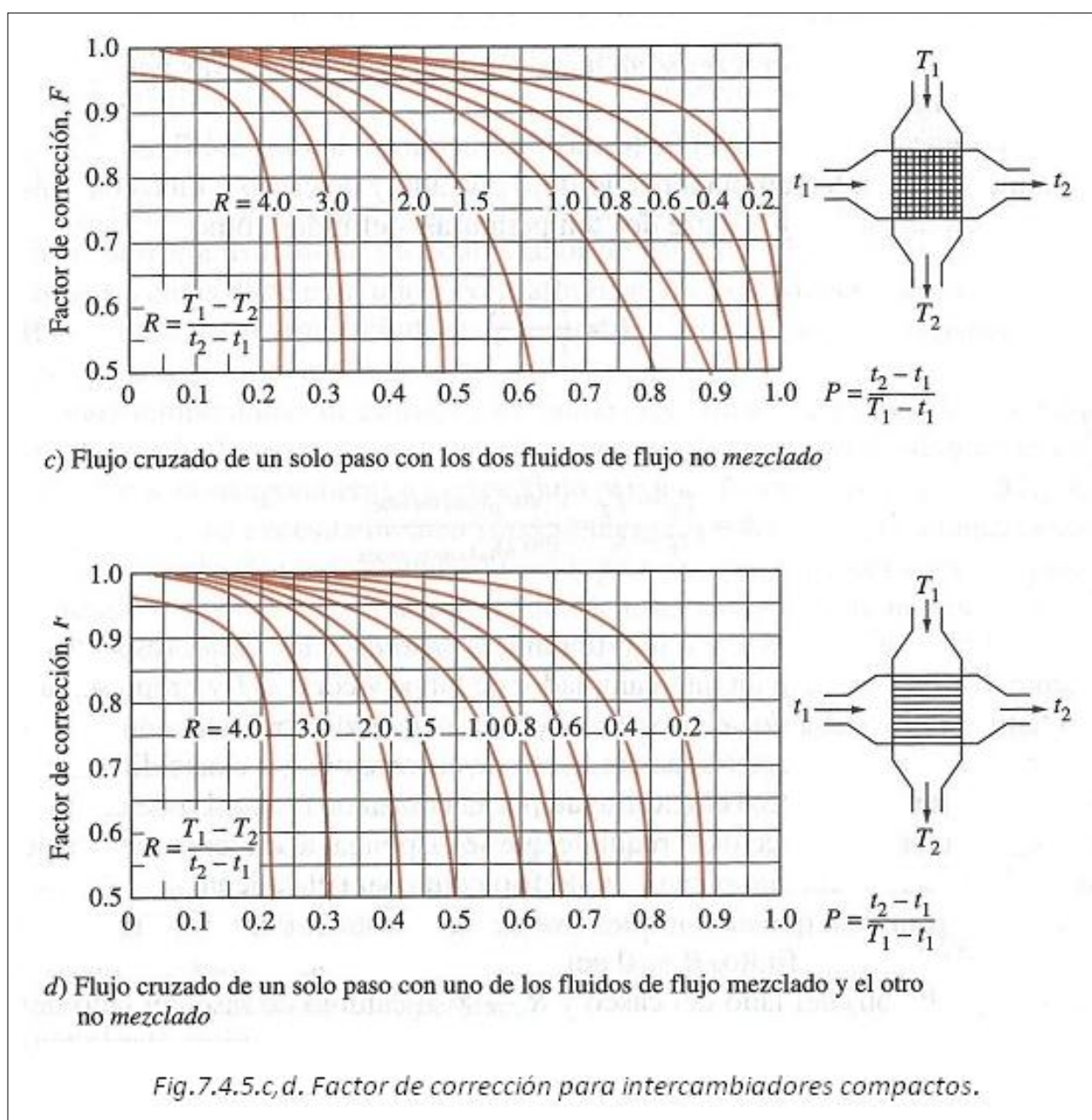
$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}$$

En la misma figura, se observa que T y t representan las temperaturas del lado de la coraza y del lado del tubo respectivamente, y los subíndices 1 y 2, se refieren a la entrada y salida respectivamente. Además, no tiene importancia si el fluido frío o caliente fluye por el lado de la coraza o el lado de los tubos. Es necesario que se disponga de las temperaturas de entrada y salida de ambos fluidos para determinar el factor de corrección.



Observe también, que para todos los casos el valor de P va desde 0 hasta 1. Por otra parte el valor de R va desde 0 hasta ∞ . El valor $R = 0$, corresponde al cambio de fase (condensación o ebullición) del lado de la coraza; el valor de $R \rightarrow \infty$ al cambio de fase del lado del tubo. Para ambos casos el factor de corrección es $F = 1$. Por lo tanto, para un condensador o caldera el factor de corrección es igual a la unidad sin importar la configuración geométrica del intercambiador.

En la figura 7.4.5.c,d, se da el factor de corrección para los intercambiadores de calor compactos con flujo cruzado o transversal, en función de los parámetros adimensionales P y R .



Ejemplo 7.4.1

Se desea enfriar 1800 kg/h de aceite ($C_p = 2 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$), desde 80 °C hasta 60 °C; utilizando un intercambiador de calor de doble tubo con flujos en paralelo. Para lograr el enfriamiento se dispone de 2000 kg/h de agua ($C_p = 4.18 \text{ KJ/kg} \cdot \text{K}$) a 25 °C. Suponga que el coeficiente global de transferencia de calor, basado en el área exterior es igual a 1000 W/m² ·K. Determine el área de transferencia de calor necesaria.

Solución:

Puesto que el calor transferido por el aceite lo absorbe el agua, mediante un balance de energía por la primera ley de la termodinámica, se tiene:

Para el aceite:

$$q = \dot{m}_c c_{pc} (T_{c1} - T_{c2}) = \left(\frac{1800}{3600} \right) (2000)(80 - 20) = 60,000 \text{ W}$$

Para el agua,

$$q = \dot{m}_f c_{pf} (T_{f2} - T_{f1})$$

En esta ecuación se desconoce la temperatura de salida del agua T_{f2} .

Igualando el calor cedido con el absorbido, por ser un intercambiador de flujo estacionario y aislado de los alrededores, se tiene:

$$60,000 = \dot{m}_f c_{pf} (T_{f2} - T_{f1})$$

Despejando;

$$T_{f2} = T_{f1} + \frac{60,000}{\dot{m}_f c_{pf}} = 25 + \frac{60,000}{(2000)(4.18)} = 32.18 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Calculando la *DMLT*:

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_{c2} - T_{f2}) - (T_{c1} - T_{f1})}{\ln \left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}} \right)} = \frac{(60 - 32.18) - (80 - 25)}{\ln \left(\frac{60 - 32.18}{80 - 25} \right)} = 39.88 \text{ } ^\circ\text{C}$$

De la ecuación,

$$q = UA \overline{\Delta T}$$

$$A = \frac{q}{U \overline{\Delta T}} = \frac{60,000}{(1000)(39.88)} = 1.5 \text{ m}^2$$

Ejemplo 7.4.2

Suponga que en vez de emplear el intercambiador de flujos en paralelo, del ejemplo 7.4.1, se emplee uno de flujos encontrados.

Solución:

El procedimiento es el mismo que se utilizó en el ejemplo 7.4.1, solo se calculará nuevamente la *DMLT*, cambiando la temperatura de entrada por la salida viceversa para el fluido frío, así:

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_{c2} - T_{f1}) - (T_{c1} - T_{f2})}{\ln \left(\frac{T_{c2} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f2}} \right)} = \frac{(60 - 25) - (80 - 32.18)}{\ln \left(\frac{60 - 25}{80 - 32.18} \right)} = 41 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{q}{U \overline{\Delta T}} = \frac{60,000}{(1000)(41)} = 1.46 \text{ m}^2$$

Ejemplo 7.4.3

Para el mismo ejemplo 7.4.1, calcule nuevamente el área suponiendo que se utiliza un intercambiador de calor de coraza y tubos con un paso en la coraza y dos pasos de tubos.

Solución:

Para resolver el problema solo se requiere calcular el factor de corrección que toma en cuenta la variación del coeficiente global de transferencia de calor U , con respecto al área de transferencia de calor A .

En la figura 7.4.5, para un intercambiador de flujo cruzado, de un paso en la coraza y dos pasos de tubos, se calculan los parámetros adimensionales, así:

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} = \frac{32.18 - 25}{80 - 25} = 0.13$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{80 - 60}{32.18 - 25} = 2.79$$

Enseguida se obtiene de la gráfica el valor del factor de corrección;

$$F = 0.98$$

Luego el área de transferencia de calor es:

$$q = UAF\Delta T$$

Despejando:

$$A = \frac{q}{UF\Delta T} = \frac{60,000}{(1000)(0.98)(41)} = 1.49 \text{ m}^2$$

Ejemplo 7.4.4

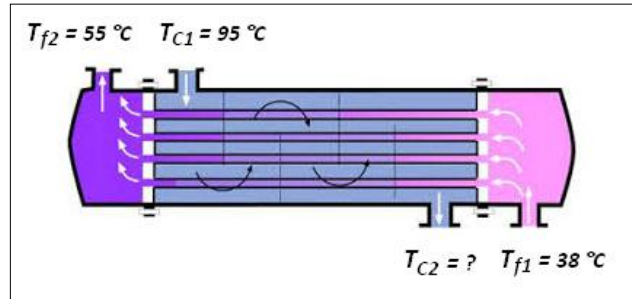
Un intercambiador de calor (1-1) de coraza y tubos, es utilizado para calentar 13500 Kg/h de agua desde 38 °C hasta 55 °C; mediante un flujo de 6750 kg/h de agua caliente a 95 °C. Los tubos del intercambiador de calor tienen un diámetros interior y exterior de 1.65 cm y 1.9 cm, respectivamente. La velocidad promedio del agua en el interior de los tubos es de 0.35 m/s. Si $U_1 = 1500 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$, y $C_p = 4180 \text{ J/kg} - \text{K}$ para ambos fluidos; calcule:

- El número de tubos y la longitud de los mismos.
- Si el intercambiador de calor es (1-2), ¿Cuál será la nueva longitud de los tubos?

Solución:

a) El intercambiador es de un paso en la coraza y un paso de tubos.

Observando la figura, se puede notar que la temperatura a la salida del fluido caliente se desconoce, por lo tanto mediante un balance de energía se tiene que el calor absorbido por el fluido frío, considerando el cambio de entrada por salida, es:



$$q = \dot{m}_f c_{pf} (T_{f2} - T_{f1})$$

$$q = \left(\frac{13500}{3600} \right) (4180) (55 - 38) = 266,475 \text{ W.}$$

De la misma forma el calor absorbido por el fluido caliente es:

$$q = \dot{m}_c c_{pc} (T_{c1} - T_{c2})$$

Despejando T_{c2} :

$$T_{c2} = T_{c1} - \frac{q}{\dot{m}_c c_{pc}} = 95 - \frac{266,475}{\left(\frac{6750}{3600} \right) (4180)} = 61 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Calculando la $DMLT$,

$$\Delta T = \frac{(T_{c2} - T_{f1}) - (T_{c1} - T_{f2})}{\ln \left(\frac{T_{c2} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f2}} \right)} = \frac{(61 - 38) - (95 - 55)}{\ln \left(\frac{61 - 38}{95 - 55} \right)} = 30.72 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El área de flujo o sección transversal total por donde fluye el agua, está dada por:

$$G = A_f \bar{V} = \dot{m}_f v_f$$

$$\dot{m}_f = \rho A_f \bar{V}$$

$$A_f = \frac{\dot{m}_f}{\rho \bar{V}} = \frac{\left(\frac{13500}{3600} \right)}{(989.5)(0.35)} = 0.0108 \text{ m}^2$$

Por tanto, esta área es equivalente al número total de tubos (N) multiplicado por el área de un tubo, así;

$$A_f = N_T \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \right)$$

Despejando el número de tubos, se tiene:

$$N_T = \frac{4A_f}{\pi D_1^2} = \frac{(4)(0.0108)}{\pi(0.0165)^2} = 50.5 \approx 51 \text{ tubos.}$$

Por otra parte, el área de transferencia de calor total requerida en función de U_1 , es:

$$A_1 = \frac{q}{U_1 \Delta T} = \frac{266,475}{(1500)(30.72)} = 5.78 \text{ m}^2$$

Esta área es equivalente al número total de tubos multiplicado por el área de un tubo, entonces:

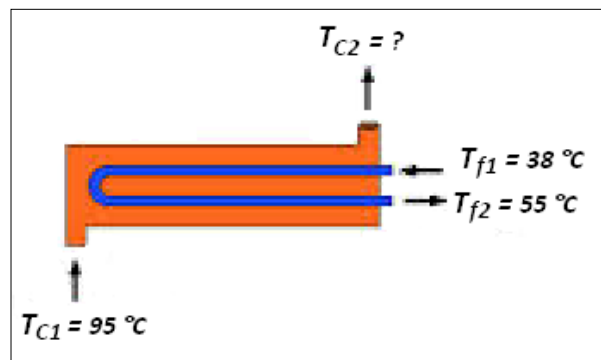
$$A_1 = N_T(\pi D_1 L)$$

Despejando L ,

$$L = \frac{A_1}{N_T(\pi D_1)} = \frac{5.78}{(51)(\pi \times 0.0165)} = 2.23 \text{ m.}$$

Donde L , es la longitud de los tubos de espejo a espejo.

b) El intercambiador es de un paso en la coraza y dos pasos de tubos.



En este caso el área total de transferencia de calor, está dada por;

$$A_1 = nN(\pi D_1 L)$$

Donde n es el número de pasos de tubos.

Puesto que el flujo de calor transferido es el mismo, entonces.

$$A_1 = \frac{q}{U_1 F \Delta T}$$

Calculando el factor de corrección mediante la gráfica correspondiente;

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} = \frac{55 - 38}{95 - 38} = 0.3$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{95 - 61}{55 - 38} = 2$$

Con estos valores se obtiene, $F = 0.88$

Sustituyendo valores:

$$A_1 = \frac{q}{U_1 F \Delta T} = \frac{266,475}{(1500)(0.88)(30.72)} = 6.57 \text{ m}^2$$

Despejando la nueva longitud de los tubos;

$$L = \frac{A_1}{n N_T (\pi D_1)} = \frac{6.57}{(2)(51)(\pi \times 0.0165)} = 1.24 \text{ m.}$$

7.5 Método de la efectividad.

El método de la *DMLT*, descrito anteriormente se utiliza ampliamente cuando las temperaturas de los fluidos en las entradas y salidas del intercambiador son conocidas, o cuando puede calcularse fácilmente mediante balances de energía, pudiéndose así determinar el área de transferencia de calor, o el flujo de calor requerido, o el coeficiente global de transferencia de calor.

Sin embargo, cuando las temperaturas de los fluidos en las salidas se desconocen, el método de la *DMLT*, se vuelve iterativo y requiere de tanteos. En este caso, es más conveniente utilizar un método de análisis térmico basado en la efectividad que tiene un intercambiador dado para transferir energía. Este método se conoce como el método **efectividad número de unidades de transferencia**, el cual se describirá a continuación.

Enseguida defínase la efectividad de un intercambiador de calor como el cociente que resulta de dividir el flujo real transferido entre el máximo flujo posible que el intercambiador podría transferir, y expresada matemáticamente como:

$$\epsilon = \frac{q}{q_{\max}} \quad (\text{ec. 7.5.1})$$

El flujo de calor real (q), puede calcularse fácilmente mediante balances de energía en los fluidos caliente y frío; así para un intercambiador de calor de flujos en paralelo se tiene:

$$q = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = C_f(T_{f2} - T_{f1}) \quad (\text{ec. 7.5.2})$$

Análogamente, para el de flujos opuestos,

$$q = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = C_f(T_{f1} - T_{f2}) \quad (\text{ec. 7.5.3})$$

Note el cambio de la entrada por la salida del fluido frío en este tipo de intercambiador de calor, respecto al de flujos en paralelo.

Con el propósito de determinar el máximo flujo de calor, considere el intercambiador de calor de doble tubo y de flujos encontrados como el descrito en la figura 7.4.3. Una inspección del perfil de temperaturas, revela que el máximo flujo de calor podría transferirse si uno de los fluidos, el caliente o el frío, sufriera un cambio de temperaturas igual a la máxima diferencia de temperaturas existente en el intercambiador de calor.

Esta diferencia máxima corresponde justamente a la diferencia de temperaturas con que entran ambos fluidos al intercambiador.

Por otra parte, el fluido que podría experimentar esta diferencia máxima de temperaturas sería aquel que tuviera la capacidad calorífica mínima ($C_{\min}$) entre los dos. Este valor debe ser el mínimo, puesto que un balance de energía requiere que el flujo de calor cedido por uno de los fluidos debe ser absorbido por el otro.

Por tanto, el máximo flujo de calor que podría transferirse en un intercambiador de calor, está dado por la expresión:

$$q_{\max} = C_{\min}(T_{c,ent} - T_{f,ent}) \quad (ec. 7.5.4)$$

Si el intercambiador de calor es de **flujos en paralelo** y el fluido caliente tiene la capacidad calorífica mínima, es decir: $C_c = C_{\min}$, la efectividad del intercambiador respecto al fluido caliente sería:

$$\epsilon_c = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_c(T_{c1} - T_{c2})}{C_c(T_{c1} - T_{f1})} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}} \quad (ec. 7.5.5)$$

Si el intercambiador de calor es de **flujos en paralelo** y el fluido frío tiene la capacidad calorífica mínima, es decir: $C_f = C_{\min}$, la efectividad del intercambiador respecto al fluido frío sería:

$$\epsilon_f = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_f(T_{f2} - T_{f1})}{C_f(T_{c1} - T_{f1})} = \frac{T_{f2} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} \quad (ec. 7.5.6)$$

En forma semejante, para un intercambiador de calor de **flujos opuestos** en que el fluido caliente tiene la capacidad calorífica mínima, es decir: $C_c = C_{\min}$, la efectividad del intercambiador respecto al fluido caliente sería:

$$\epsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_c(T_{c1} - T_{c2})}{C_c(T_{c1} - T_{f1})} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}} \quad (ec. 7.5.7)$$

Si el intercambiador de calor es de **flujos opuestos** y el fluido frío tiene la capacidad calorífica mínima, es decir: $C_f = C_{\min}$, la efectividad del intercambiador respecto al fluido frío sería:

$$\epsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_f(T_{f1} - T_{f2})}{C_f(T_{c1} - T_{f2})} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f2}} \quad (ec. 7.5.8)$$

En el presente análisis, también es conveniente definir una cantidad adimensional (C^*), como el cociente de las capacidades caloríficas mínima y máxima, es decir:

$$C^* = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (\text{ec. 7.5.9})$$

Así mismo se define el parámetro denominado número de unidades de transferencia, el cual se define como el cociente que resulta de multiplicar el coeficiente global por el área de transferencia y dividirlo entre la capacidad calorífica del fluido que experimenta la diferencia máxima de temperaturas ($C_{\min}$), así:

$$N_{ut} = \frac{UA}{C_{\min}} \quad (\text{ec. 7.5.10})$$

Este parámetro es una medida del área superficial de transferencia de calor e indica que tan grande puede ser el intercambiador de calor. Por ende, mientras mayor sea el N_{ut} , más grande será el intercambiador de calor.

A la luz de las definiciones anteriores es ahora conveniente establecer una relación entre la efectividad ϵ , el número de unidades de transferencia N_{ut} y el cociente de las capacidades caloríficas C^* .

Tomando como modelo a un intercambiador de flujos en paralelo, en el que arbitrariamente $C_c = c_{\min}$ (suposición que no tiene ninguna trascendencia en la generalización de los resultados); se puede reescribir la ecuación 7.4.8.

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = -UA\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) \quad (\text{ec. 7.4.8})$$

Y puesto que, $C_c = c_{\min}$ entonces:

$$N_{ut} = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{UA}{C_c} \quad (\text{ec. 7.5.11})$$

y el cociente de las capacidades caloríficas adimensional es;

$$C^* = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{C_c}{C_f} \quad (\text{ec. 7.5.12})$$

Multiplicando la ec. 7.4.8, por la unidad se tiene:

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = -UA\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right)\left(\frac{C_c}{C_c}\right) = -\frac{UA}{C_c}\left(\frac{C_c}{C_c} + \frac{C_c}{C_f}\right) \quad (\text{ec. 7.5.13})$$

Sustituyendo las ecuaciones 7.5.11, y 7.5.12., en la ec.7.5.13.

$$\ln\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = -\frac{UA}{c_c}\left(\frac{C_c}{C_c} + \frac{C_c}{C_f}\right) = -N_{ut}(1 + C^*) \quad (\text{ec. 7.5.14})$$

Aplicando logaritmos;

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = e^{-N_{ut}(1+C^*)}$$

Puesto que:

$$q = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = C_f(T_{f2} - T_{f1})$$

Entonces;

$$C^*(T_{c1} - T_{c2}) = (T_{f2} - T_{f1})$$

Despejando T_{f2} ,

$$T_{f2} = T_{f1} + C^*(T_{c1} - T_{c2}) \quad (\text{ec. 7.5.15})$$

Sustituyendo la ec. 7.5.15, en la ec. 7.5.14, se obtiene.

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = \left\{\frac{T_{c2} - [T_{f1} + C^*(T_{c1} - T_{c2})]}{T_{c1} - T_{f1}}\right\} = \frac{T_{c2} - T_{f1} - C^*(T_{c1} - T_{c2})}{T_{c1} - T_{f1}}$$

Sumando $T_{c1} - T_{c1} = 0$, al numerador del segundo término de la ecuación anterior y agrupando términos se tiene:

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = \frac{T_{c2} - T_{f1} - C^*(T_{c1} - T_{c2})}{T_{c1} - T_{f1}} = \frac{T_{c2} - T_{f1} - C^*(T_{c1} - T_{c2}) + T_{c1} - T_{c1}}{T_{c1} - T_{f1}}$$

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = \frac{T_{c2} - T_{f1} - C^*(T_{c1} - T_{c2}) + T_{c1} - T_{c1}}{T_{c1} - T_{f1}} = \frac{T_{c1} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} - C^*\left(\frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) - \frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}}$$

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) = \frac{T_{c1} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} - C^*\left(\frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}}\right) - \frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f1}} \quad (\text{ec. 7.5.16})$$

Sustituyendo la ecuación 7.5.7, en la 7.5.16;

$$\left(\frac{T_{c2} - T_{f2}}{T_{c1} - T_{f1}} \right) = 1 - \epsilon C^* - \epsilon = 1 - \epsilon(1 + C^*) \quad (\text{ec. 7.5.17})$$

Igualando las ecuaciones 7.5.14 y 7.5.17 se obtiene:

$$e^{-N_{ut}(1+C^*)} = 1 - \epsilon(1 + C^*)$$

Despejando la efectividad del intercambiador de calor ϵ ,

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-N_{ut}(1+C^*)}}{1 + C^*} \quad (\text{ec. 7.5.18})$$

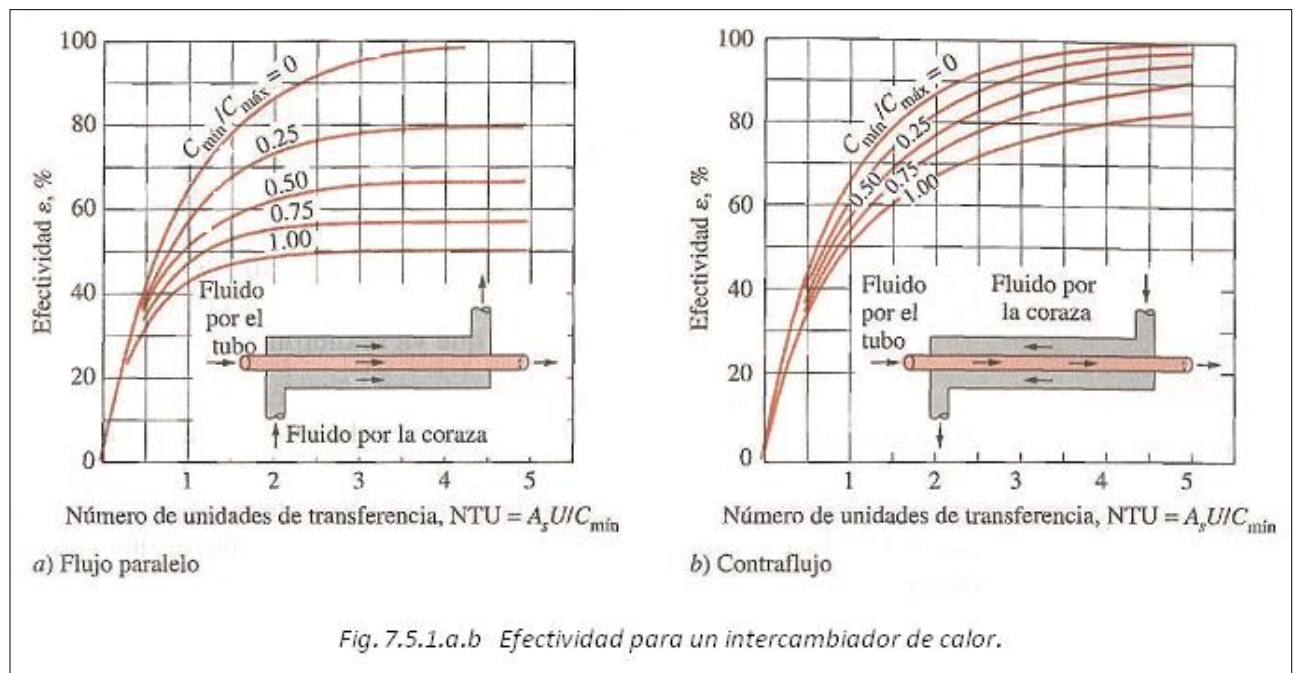
La ecuación 7.5.18, calcula la efectividad (ϵ) de un intercambiador de calor con **flujos en paralelo**, en función del número de unidades de transferencia (N_{ut}) y el cociente de las capacidades caloríficas (C^*).

La figura 7.5.1.a muestra la ecuación 7.5.18 en forma gráfica. Observando el comportamiento de la misma se tiene el caso, que cuando $c^* = 0$, el cual corresponde a un físicamente a un condensador o un evaporador, el valor asintótico de la efectividad máxima es igual a 100 %, y la ecuación se reduce a:

$$\epsilon = 1 - e^{-N_{ut}}, \quad c^* = 0 \quad (\text{ec. 7.5.19})$$

Por otra parte en el caso que ambos fluidos tengan la misma capacidad calorífica, es decir $c^* = 1$, la efectividad máxima del intercambiador de calor tiene como límite máximo un valor de 50%, y la ecuación 7.5.18 se reduce a:

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-2N_{ut}}}{2}, \quad c^* = 1 \quad (\text{ec. 7.5.20})$$



Mediante un análisis similar al descrito anteriormente puede mostrarse que, para un intercambiador de **flujos opuestos**, la efectividad queda expresada con la ecuación;

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-N_{ut}(1-C^*)}}{1 + C^*e^{-N_{ut}(1-C^*)}} \quad (\text{ec. 7.5.21})$$

La figura 7.5.1.b muestra en forma gráfica la ecuación 7.5.21. Nótese que para todos los valores de C^* la efectividad tiende a la unidad, es decir $\epsilon \rightarrow 100\%$; cuando el número de unidades de transferencia N_{ut} es grande.

En el caso, en que $c^* = 0$, la ecuación 7.5.21 se reduce a:

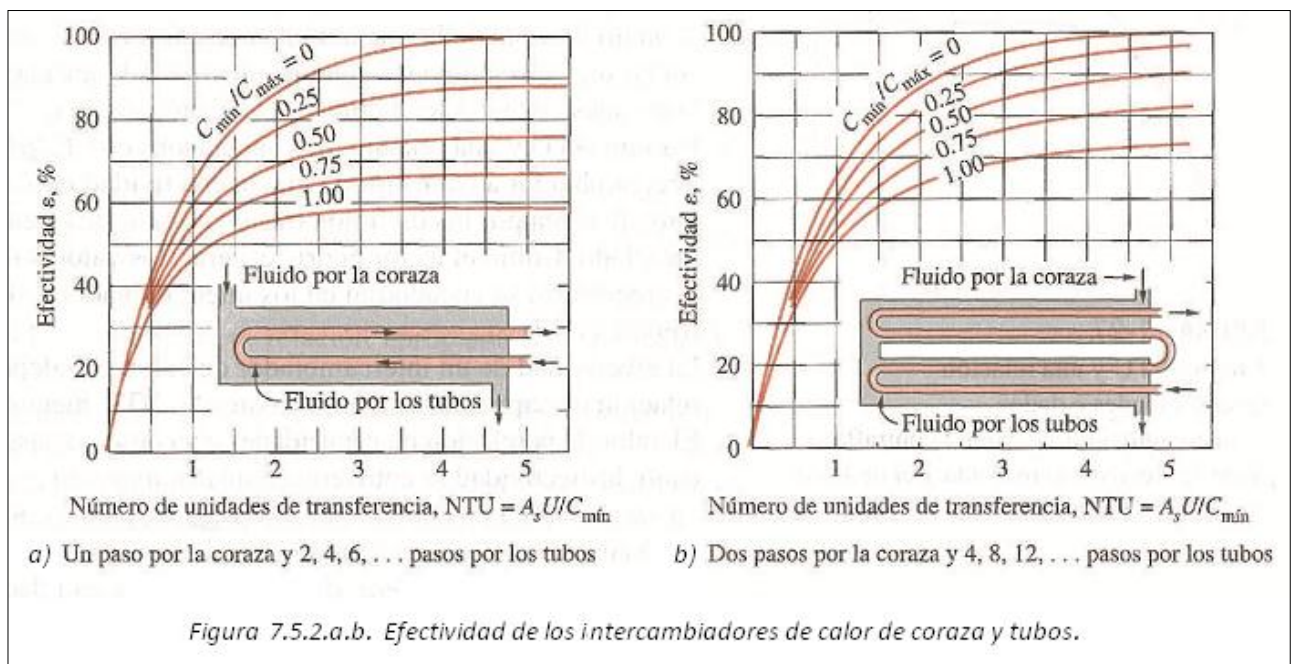
$$\epsilon = 1 - e^{-N_{ut}}, \quad c^* = 0 \quad (\text{ec. 7.5.22})$$

Análogamente, cuando $c^* = 1$, la ecuación 7.5.21 toma la forma,

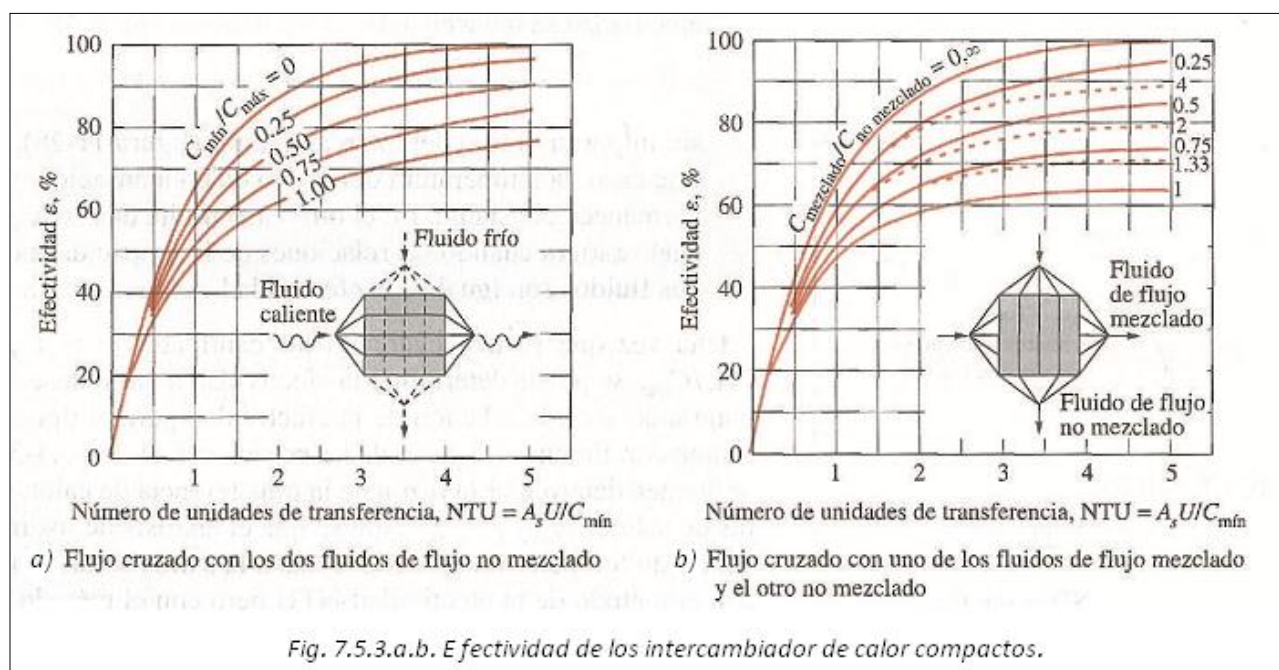
$$\epsilon = \frac{N_{ut}}{1 + N_{ut}}, \quad C^* = 1 \quad (\text{ec. 7.5.23})$$

Obsérvese que, como era de esperarse las ecuaciones 7.5.19 y 7.5.22, son idénticas.

Expresiones similares a las ecuaciones 7.5.18 y 7.5.21 pueden ser desarrolladas para otros tipos de intercambiadores de calor. La figura 7.5.2.a.b muestra las gráficas de la efectividad en función del número de unidades de transferencia y la capacidad calorífica adimensional, para intercambiadores de calor de coraza y tubo de pasos múltiples.



Análogamente la figura 7.5.3.a.b muestra las gráficas correspondientes para los intercambiadores de calor del tipo compacto con flujo transversal.



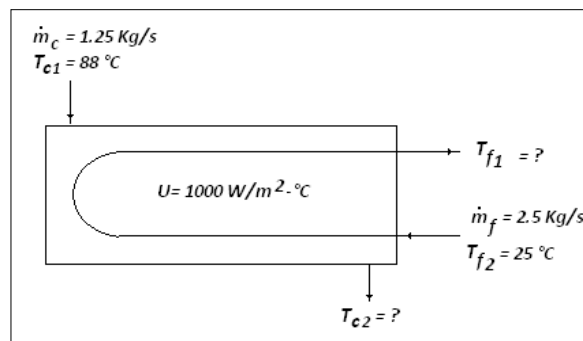
La tabla 7.5.1 muestra las relaciones (ecuaciones) para la efectividad de los intercambiadores de calor ilustrados en forma gráfica anteriormente, como son: los de tubo doble en paralelo y contraflujo, los de coraza y tubos múltiples y los compactos, así también de los condensadores y evaporadores.

Tabla 7.5.1. Relaciones de la efectividad para los intercambiadores de calor en función del N_{ut} y la C^* .	
Tipo de intercambiador	Ecuación de la efectividad
1. Tubo doble, flujo paralelo	$\epsilon = \frac{1 - e^{-N_{ut}(1+C^*)}}{1 + C^*}$
2. Tubo doble, contraflujo	$\epsilon = \frac{1 - e^{-N_{ut}(1-C^*)}}{1 - C^* e^{-N_{ut}(1-C^*)}}$
3. Coraza y tubos, un paso por la coraza y 2,4,.....pasos por los tubos.	$\epsilon = 2 \left\{ 1 + c^* + \sqrt{1 + c^*} \frac{1 + e^{-N_{ut}(1+c^*)}}{1 - e^{-N_{ut}(1+c^*)}} \right\}^{-1}$
Flujo cruzado (un solo paso) los dos fluidos en flujo no mezclado.	$\epsilon = 1 - e^{\left\{ \frac{N_{ut}^{0.22}}{C^*} \left[e^{(-C^* N_{ut}^{0.78})} - 1 \right] \right\}}$

$C_{m\acute{a}x,mezclado}$ $C_{m\acute{a}x,no\ mezclado}$	$\epsilon = \frac{1}{C^*} \left(1 - e^{\{1-C^*[1-e^{(-N_{ut})}]\}} \right)$
$C_{m\acute{a}x,mezclado}$ $C_{m\acute{a}x,no\ mezclado}$	$\epsilon = 1 - e^{\left\{-\frac{1}{C^*}[e^{(-C^*N_{ut})}]\right\}}$
4. Todos los intercambiadores con $C^* = 0$	$\epsilon = 1 - e^{-N_{ut}}$

Ejemplo 7.5.1

Considere un intercambiador de calor de coraza y tubos (1-2) con un área de transferencia de calor de 5 m². A los tubos entran 2.5 kg/s de agua a 25 °C y a la coraza entran 1.25 kg/s de agua a 88 °C. Determine la temperatura de las dos corrientes de agua a la salida del intercambiador de calor, considere un coeficiente global de transferencia de calor de 1000 W/m²·°C. Tome el calor específico del agua igual a 4180 J/kg·K.



Capacidad calorífica del fluido caliente es:

$$C_c = \dot{m}_c C_{pc} = (1.25)(4180) = 5225 \text{ W/K}$$

Capacidad calorífica del fluido frío es:

$$C_f = \dot{m}_f C_{pf} = (2.5)(4180) = 10450 \text{ W/K}$$

Y la capacidad calorífica adimensional es:

$$C^* = \frac{C_{min}}{C_{m\acute{a}x}} = \frac{C_c}{C_f} = \frac{5225}{10450} = 0.5$$

Calculando el número de unidades de transferencia, tenemos:

$$N_{ut} = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{(1000)(5)}{(5225)} = 0.96$$

En la gráfica correspondiente se encuentra la efectividad del intercambiador de calor, $\epsilon = 0.55$

Empleando la ecuación 7.5.7 para flujos encontrados, y cambiando la *entrada por la salida* del fluido frío, como se indica en la figura esquemática, se tiene:

$$\epsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_c(T_{c1} - T_{c2})}{C_c(T_{c1} - T_{f1})} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{T_{c1} - T_{f2}}$$

Luego despejando la salida del fluido caliente T_{c2} ,

$$T_{c2} = T_{c1} - \epsilon(T_{c1} - T_{f2}) = 88 - 0.55(88 - 25) = 53.35^\circ\text{C}$$

Por último mediante un balance de energía se obtiene la temperatura de salida del fluido frío.

$$q = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = C_f(T_{f1} - T_{f2})$$

Despejando la temperatura de salida del fluido frío T_{f1} , según la figura, se tiene:

$$C^*(T_{c1} - T_{c2}) = (T_{f1} - T_{f2})$$

$$T_{f1} = T_{f2} + C^*(T_{c1} - T_{c2}) = 25 + 0.5(88 - 53.35) = 42.3^\circ\text{C}$$

Ejemplo 7.5.2

Aire a 25°C fluye sobre un intercambiador de calor de flujo transversal y enfría agua de 100°C hasta 60°C . El agua fluye a razón de 4 kg/min a través de un número de pasajes separados dentro del intercambiador. La razón de flujo de masa de aire es 14 kg/min . Si el coeficiente global de transferencia de calor es de $80\text{ W/m}^2\text{-K}$. Determine la efectividad y el área de transferencia de calor del intercambiador.

Solución:

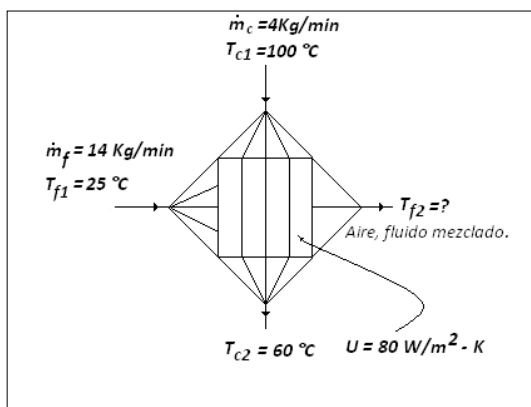
En la figura se observa que falta determinar la temperatura de salida del aire, que en este caso es el fluido mezclado, mediante un balance de energía entre los fluidos se tiene, que el calor que disipa el agua lo absorbe el agua, así:

$$\dot{m}_c C_{pc}(T_{c1} - T_{c2}) = \dot{m}_f C_{pf}(T_{f2} - T_{f1})$$

Para el cálculo de las capacidades caloríficas de los fluidos caliente y frío, los calores específicos pueden tomarse como aproximación a la temperatura de salida del agua y de entrada del aire, sin embargo para mayor exactitud, se deben evaluar a las temperaturas promedio de ambos fluidos, así:

Para el agua:

$$T_m = \frac{100 + 60}{2} = 80^\circ\text{C}$$



En la tabla de agua saturada; $C_{pc} = 4197 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

Y la capacidad calorífica del fluido caliente es:

$$C_c = \dot{m}_c C_{pc} = \left(\frac{4}{60}\right)(4197) = 279.8 \text{ W/K}.$$

Para evaluar la capacidad calorífica del fluido frío, es necesario conocer la temperatura de salida, con el fin de calcular la temperatura promedio y así encontrar en la tabla correspondiente el calor específico.

Un ligero vistazo a la tabla permite darnos cuenta que el calor específico del aire se mantiene constante en un amplio rango de temperaturas, así tomando el rango de 25 °C hasta 80 °C, podemos asumir que el calor específico del fluido frío es;

En la tabla del aire; $C_{pf} = 1007 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

Y la capacidad calorífica del fluido frío es:

$$C_f = \dot{m}_f C_{pf} = \left(\frac{14}{60}\right)(1007) = 235 \text{ W/K}.$$

Por lo tanto el fluido frío tiene la capacidad calorífica mínima.

Despejando T_{f2} del balance de energía, se tiene:

$$T_{f2} = T_{f1} + \frac{\dot{m}_c C_{pc}(T_{c1} - T_{c2})}{\dot{m}_f C_{pf}} = T_{f1} + \frac{C_c(T_{c1} - T_{c2})}{C_f} = 25 + \frac{(279.8)(100 - 60)}{(235)} = 72.6 \text{ °C}$$

Puesto que la capacidad calorífica del fluido frío, es la mínima, la efectividad del intercambiador puede calcularse de acuerdo a la ecuación:

$$\epsilon = \frac{T_{f2} - T_{f1}}{T_{c1} - T_{f1}} = \frac{72.6 - 25}{100 - 25} = 0.63$$

$$\epsilon = 63 \%$$

Ahora, se puede calcular la capacidad calorífica adimensional,

$$C^* = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{235}{279.8} = 0.84$$

En la gráfica correspondiente, con el valor de la efectividad y la capacidad calorífica adimensional se encuentra el valor del número de unidades de transferencia, $N_{ut} = 2.5$

Puesto que por definición,

$$N_{ut} = \frac{UA}{C_{mín}}$$

Se tiene que el área de transferencia de calor es;

$$A = \frac{N_{ut} C_{mín}}{U} = \frac{(2.5)(235)}{80} = 7.34 \text{ m}^2.$$

7.6 Análisis y diseño de intercambiadores.

En las secciones anteriores se presentaron los parámetros que intervienen en el análisis térmico de un intercambiador de calor, parámetros que son necesarios para la óptima selección del mismo. Se discutieron los métodos utilizados en el análisis del intercambiador como son el de la *DMLT* y el de $\epsilon - N_{ut}$.

El primero predice la razón de transferencia de calor en función del coeficiente global de transferencia de calor U , el área de la superficie y la *DMLT*. Para ello es necesario que se conozcan cuando menos tres temperaturas en el intercambiador, las dos de entrada de los fluidos caliente y frío y una cualquiera de salida, pues como se sabe la otra puede determinarse partiendo del balance de energía entre los fluidos.

Por otra parte el método $\epsilon - N_{ut}$ se aplica se desconocen las temperaturas de salida de los fluidos y se requiere del conocimiento previo de las capacidades caloríficas de cada uno, es decir del flujo másico y del calor específico de los fluidos caliente y frío.

Durante el análisis debe considerarse al intercambiador de calor como un aparato de flujo estacionario y cumplir con las siguientes suposiciones.

- ✓ Los flujos másicos de los fluidos permanecen constantes.
- ✓ Las propiedades de los fluidos como la temperatura y la velocidad en las entradas y salidas permanecen constantes.
- ✓ No existen cambios de energía cinética y potencial, puesto que los cambios en velocidad y elevación son insignificantes.
- ✓ Los calores específicos de los fluidos se consideran constantes en un rango específico de temperaturas.
- ✓ La conducción axial de calor a lo largo del intercambiador es insignificante y por tanto despreciable.
- ✓ La superficie exterior del intercambiador está perfectamente aislada para evitar pérdidas con los alrededores, de tal suerte que la transferencia de calor es únicamente entre los fluidos.

Con todo lo expuesto anteriormente, el análisis de un intercambiador se simplifica considerablemente, obteniendo resultados que concuerdan con la realidad sin sacrificar exactitud. La razón de la transferencia de calor en un intercambiador, también se puede expresar de manera análoga a la ley de newton de enfriamiento, mediante la expresión:

$$q = UA\overline{\Delta T}$$

Siendo U el coeficiente global de transferencia de calor, para intercambiadores recién construidos o con un tiempo de uso considerable, A es el área de la superficie de transferencia de calor y $\overline{\Delta T}$ es una apropiada diferencia promedio de temperaturas entre los fluidos. El área A puede determinarse en forma precisa aplicando las dimensiones reales del intercambiador, además en la práctica U y $\overline{\Delta T}$ suelen variar a lo largo del intercambiador de calor. El valor de U se determina a partir de los coeficientes de transferencia de calor por convección y de los diámetros del tubo recurriendo al procedimiento estudiado en la unidad cinco.

Para seleccionar un intercambiador de calor es propio revisar los catálogos del fabricante y darse cuenta que una selección apropiada depende de varios factores como los que se listan a continuación:

Razón de transferencia de calor. La cual se define como la cantidad de calor que el intercambiador debe ser capaz de transferir a una razón específica para lograr el cambio deseado de temperaturas del fluido con el gasto másico determinado.

Costo. En ocasiones un intercambiador que existe en catálogo y que tiene un costo definido, presenta cierta ventaja en el precio, respecto a uno que se mandara a fabricar sobrepedido.

Sin embargo, cuando el intercambiador en existencia no reúne los requisitos para realizar la encomienda deseada, puede ser necesario optar por diseñar y fabricar el intercambiador a partir de la nada, que se adecue a las necesidades. Esto ocurre cuando el intercambiador es parte integral de una línea de proceso en particular. También es de importancia considerar los costos de instalación, operación y mantenimiento del intercambiador en la valoración del costo total.

Potencia de bombeo. En un intercambiador de calor ambos fluidos requieren ser forzados para fluir mediante bombas o ventiladores que consumen energía eléctrica. La mejora en la razón de transferencia de calor en los intercambiadores suele venir acompañada de un aumento en la caída de presión y por ende se requiere de una potencia más alta de bombeo. Es decir, una mejora en la transferencia de calor se contrapone al costo ocasionado por la caída de presión.

El costo anual de la electricidad asociado con la operación de bombas y motores, se determina con la siguiente relación:

$$\text{Costo de operación} = (\text{Potencia de bombeo en Kw})(\text{Tiempo de operación en h})(\text{costo de la electricidad en pesos/kWh})$$

En donde la potencia de bombeo es la potencia eléctrica total consumida por los motores de las bombas y los ventiladores.

Si se minimiza la caída de presión y el gasto másico, se abatirá el costo de operación del intercambiador de calor, pero se maximiza su tamaño y por consiguiente el costo inicial. Como regla empírica, duplicar el gasto en masa reduce el costo inicial a la mitad, pero se incrementan las necesidades de potencia de bombeo en un valor cercano a ocho veces. Por lo general las velocidades de los fluidos que fluyen en un intercambiador de calor varían entre 0.7 y 7 m/s, cuando se trata de líquidos; y entre 3 y 30 m/s para los gases. Una baja velocidad ayuda a contrarrestar la erosión, las vibraciones y el ruido, así como la caída de presión.

Tamaño y peso. Tanto el tamaño como el peso del intercambiador dependen del espacio y aplicación al que es destinado. Por ejemplo un intercambiador pequeño (tipo compacto), es utilizado en el ramo

automotriz y aeroespacial por ser muy pequeño y ligero, y de poco costo. Asimismo, un intercambiador de gran tamaño y peso es utilizado en la industria de generación de potencia, aun con un precio más alto. En algunos casos el intercambiador de calor debe ajustarse al espacio disponible para su instalación, y por ende se limita la longitud de los tubos.

Tipo. Un intercambiador de calor debe seleccionarse de acuerdo al tipo de fluidos que intervienen, de los limitantes tamaño y peso y si existe o no cambio de fase en algún fluido.

Por ejemplo, un intercambiador de calor resultara apropiado para enfriar un líquido mediante un gas, si el área de transferencia de calor del lado del gas es mucho mayor al área superficial del lado del líquido. Por otra parte, para enfriar un líquido con otro líquido, un intercambiador de coraza y tubos de flujos cruzados, o de placas, resultará ser el apropiado.

Materiales. Cuando se construye un intercambiador de calor, los materiales empleados deben cumplir ciertos requisitos propios durante su operación. Como por ejemplo, los efectos de los esfuerzos térmicos y estructurales debidos a temperaturas y presiones muy altas, al que se somete el intercambiador de calor.

El ingeniero debe tener presente que por debajo de los 150 °C y 15 atmósferas no es necesario considerar dichos esfuerzos. Sin embargo, por arriba de 550 °C y 70 atmósferas dichos esfuerzos son significativos, por lo que los materiales empleados en su fabricación deben ser seleccionados de acuerdo a la tarea asignada al intercambiador.

También es importante considerar el fenómeno de la corrosión cuando ambos o algún fluido sea corrosivo, en este caso sería bueno utilizar materiales como el acero inoxidable y el titanio en su fabricación, aunque el costo se eleve.

Otras consideraciones. La hermeticidad del intercambiador suele ser importante cuando se trate de fluidos tóxicos o costosos. También es importante considerar la facilidad para darles mantenimiento, un bajo costo de mantenimiento, la seguridad y la confiabilidad.

Por último, el silencio es una consideración de mucha importancia, cuando se trata de intercambiadores que operan con líquidos y gases, como los utilizados en calefacción y acondicionamiento de aire.

Pruebe sus competencias. Ejercicios de autoevaluación para el alumno.

1. Fluye agua destilada a 70 °C a través de un tubo de acero puro cuyos diámetros interior y exterior son 2.5 cm y 2.7 cm, respectivamente. El coeficiente convectivo de transferencia de calor entre el agua y la superficie interior del tubo es 275 W/m²-K, mientras que entre la superficie exterior y el aire en los alrededores del tubo es 45 W/m²-K. Determine el coeficiente global de transferencia de calor, basado en el diámetro interior del tubo. Tome ($k = 73 \text{ W/M-K}$).

$$R: 41.28 \text{ W/m}^2 - K.$$

2. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total para el tubo del problema anterior, después de que el tubo se ha usado durante algunos años como parte de un intercambiador de calor.

$$R: 40.94 \text{ W/m}^2 - K.$$

3. En un intercambiador de calor, el fluido frío entra a 30 °C y sale a 200 °C; mientras que el fluido caliente entra a 360 °C y sale a 300 °C. Encuentre los valores para la diferencia media logarítmica de temperaturas, para el caso de: a) Flujos en paralelo, b) Flujos encontrados.

R: 192.64 °C, 210.22 °C

4. Si el fluido caliente del problema anterior tiene un razón de capacidad de 2,500 W/K, y si el coeficiente de global de transferencia de calor U es de 800 W/m²-K. determine el área de superficie del intercambiador requerida para: a) Flujos en paralelo, b) Flujos encontrados.

R: 0.97 m², 0.89 m².

5. Vapor saturado a 120 °C se condensa en la superficie exterior del tubo de un intercambiador de calor de paso único. El valor del coeficiente exterior de transferencia de calor es 1,800 W/m²-K. Determine el área de superficie capaz de calentar 2,000 kg/h de agua, desde 20 °C hasta 90 °C. Determine también la razón de condensación. Tome $h_{fg} = 2,202 \text{ kJ/kg}$.

R: 21 m², 265.75 kg/h.

6. Cierta aceite tiene un calor específico de 2,000 J/kg-K y entra a un enfriador de aceite a 80 °C a razón de 8,000 kg/h. El enfriador es una unidad de flujo encontrado, con agua como refrigerante. La superficie de transferencia de calor es de 7.5 m². El agua entra al intercambiador a 10 °C. El valor del coeficiente global de transferencia de calor por el interior es 600 W/m²-K. Determine la razón de flujo de masa del agua si el aceite sale del enfriador a 42 °C.

R: 9,697 kg/h.

7. Un intercambiador de calor de coraza y tubos consiste en 60 tubos de cobre de condensador estándar, con longitud de 4 metros y con diámetros interior y exterior de 23 mm y 25 mm respectivamente. Se deba condensar vapor a 100 °C usando agua a razón de 200,000 kg/h que fluye dentro de los tubos. La temperatura de entrada del agua es de 8 °C. Las conductancias de superficie unitaria basadas en el área real son: por el agua 35,000 W/m²-K, por el vapor 15,000 W/m²-K, por las escamas en el vapor 14,000 W/m²-K, y por las escamas en el agua 12,000 W/m²-K. Calcúlese la razón de condensación de vapor.

R: 8,890 kg/h.

8. Un intercambiador de calor de flujo cruzado con ambos fluidos no mezclados se usa para enfriar aire que está inicialmente a 40 °C y fluye a una razón de 4,000 kg/h. Se usa agua a 5 °C como refrigerante con una razón de flujo de 4,600 kg/h. Suponga que el valor de U es 150 W/m²-°C. El área de la superficie del intercambiador de calor es 25 m². Calcule las temperaturas de salida del aire y del agua.

R: 11.8 °C, 7.8 °C.

9. En un intercambiador de calor de un paso en la coraza y dos pasos de tubos, entra agua a 20 °C a una razón de 6 kg/s. Aceite para motor fluye en flujo encontrado a una razón de 4.3 kg/s ($C_p = 1,672 \text{ J/kg} - \text{K}$). Si $U_2 = 1,000 \text{ W/m}^2 - \text{°C}$, y las temperaturas de entrada y salida del aceite son 150 °C y 95 °C respectivamente. Determine el área de transferencia de calor del intercambiador de calor.

R: 4.3 m².

10. Agua a una razón de 15,000 kg/h se calienta desde 38 °C hasta 55 °C en un intercambiador de calor de coraza y tubos. El fluido caliente que circula por la coraza es agua, la cual entra al intercambiador a una temperatura de 94 °C y a una razón de flujo de 7,500 kg/h. El coeficiente de transferencia de calor basado en el diámetro interior de los tubos se estima en $1,400 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{K}$, y la velocidad promedio del agua que fluye por el interior de los tubos de diámetro de 1.91 cm, es igual a 0.37 m/s. Debido a limitaciones de espacio el intercambiador no debe tener una longitud mayor de 2.5 m. Calcúlese: a) El número de pasos de tubos, b) El número de tubos por paso y c) La longitud de los tubos.

R: 2, 40, 1.69 m.

11. Se usa un intercambiador de calor largo, de tubo doble y pared delgada, con diámetros del tubo y del casco de 1.0 cm y 2.5 cm respectivamente, para condensar refrigerante 134-a por medio de agua a 20 °C. El refrigerante fluye por el tubo con un coeficiente de transferencia de calor por convección $h_1 = 5,000 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$. Por el casco fluye agua a razón de 0.3 kg/s. Determine el coeficiente global de transferencia de calor para este intercambiador.

R: 2, 020 $\text{W/m}^2 - ^\circ\text{C}$.

12. Se va a condensar vapor de agua en una planta generadora en un condensador a una temperatura de 50 °C ($h_{fg} = 2,383 \text{ kJ/kg}$) con agua de enfriamiento ($C_p = 4,180 \text{ J/kg} - ^\circ\text{C}$) de un lago cercano, la cual entra en los tubos del condensador a 18 °C y sale a 27 °C. El agua superficial de los tubos es de 42 m^2 y el coeficiente de transferencia de calor total de $2400 \text{ W/m}^2 - \text{K}$. Determine el gasto en masa necesario de agua de enfriamiento y la razón de la condensación del vapor en el condensador.

R: 1.15 kg/s, 73.1 kg/s.

13. Agua fría ($C_p = 4,180 \text{ J/kg} - ^\circ\text{C}$) que se dirige a una regadera, entra a un intercambiador de calor de tubo doble de pared delgada y a contraflujo a 15 °C, a una razón de 0.25 kg/s, y se calienta hasta 45 °C por medio de agua caliente ($C_p = 4,190 \text{ J/kg} - ^\circ\text{C}$) que entra a 100 °C a razón de 3 kg/s. El coeficiente de transferencia de calor total es $950 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$. Determine la razón de la transferencia de calor y el área superficial de transferencia del intercambiador aplicando el método $\varepsilon - N_{ut}$.

R: 31.1 kW, 0.482 m^2 .

14. Se realiza una prueba para determinar el coeficiente de transferencia de calor global en un intercambiador de coraza y tubos de un paso en la coraza y un paso en los tubos, de agua hacia aceite que tiene 24 tubos con un diámetro interno de 1.2 cm y longitud de 2 m; de espejo a espejo. Agua fría entra a los tubos a 20 °C y sale a 55 °C ($C_p = 4,180 \text{ J/kg} - ^\circ\text{C}$). El aceite ($C_p = 2,150 \text{ J/kg} - ^\circ\text{C}$) fluye por la coraza y se enfría desde 120 °C hasta 45 °C. Determine U, en base al área superficial de los tubos.

R: 5.8 kW/ $\text{m}^2 - ^\circ\text{C}$.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD 7

UNIDAD 7: Actividad 1

CONCEPTO DE INTERCAMBIADOR DE CALOR

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Investigación.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Investigar respecto a la definición de intercambiador de calor, su clasificación y aplicación en la industria.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Hacer un resumen que contenga el concepto del intercambiador de calor, su clasificación y su aplicación general en la industria. Formato de documento: Word, en calibri 12 a 1.5 de espacio, con una extensión máxima de una cuartilla. Integrar al portafolio de evidencias.	

UNIDAD 7: Actividad 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas que involucren el cálculo del coeficiente de transferencia de calor global, así como el factor de suciedad.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Por el interior de una tubería de acero de 3.34 cm de diámetro exterior y 2.66 cm de diámetro interior, circula aire a 2 atmósferas y 200 °C; siendo el coeficiente interior de transferencia de calor por convección igual a $65 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$. Un gas caliente a 400 °C con un coeficiente convectivo de $180 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$, circula transversalmente a la tubería por el exterior. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor, basado en el área interior del tubo. Tome ($K = 54 \text{ W/m} - ^\circ\text{C}$).

$R: 50.34 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$.

2. Por una tubería horizontal de acero de 6.033 cm de diámetro exterior y 5.25 cm de diámetro interior, y una conductividad térmica de $54 \text{ W/m} - ^\circ\text{C}$, circula agua caliente a 100 °C. La tubería se encuentra rodeada por aire ambiente a 20 °C. La velocidad del agua es de 25 cm/s. Calcúlese el global de transferencia de calor en esta situación, basado en el área externa de la tubería.

$R: 7.82 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$.

UNIDAD 7: Actividad 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MÉTODO DE LA DIFERENCIA MEDIA LOGARÍTMICA DE TEMPERATURAS.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas con el método de la diferencia media logarítmica de temperaturas.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Se calienta un flujo másico de agua de 68 kg/min, desde 35 °C hasta 75 °C, mediante un aceite de calor específico igual a 1.9 kJ/Kg-°C. Los fluidos circulan en un intercambiador de calor de doble tubo a contracorriente, y el aceite entra al intercambiador de calor a 110 °C y sale del mismo a 75 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es de $320 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$. Calcúlese el área del intercambiador de calor.

R: 15.82 m^2 .

2. Resuelva el problema anterior utilizando un intercambiador de coraza y tubo, de un paso en la coraza y dos pasos de tubos. Suponga que el coeficiente global de transferencia de calor es el mismo.

R: 19.53 m^2 .

3. En un intercambiador de calor de coraza y tubos se calientan 3.8 kg/s de agua, desde 40 °C hasta 55 °C. Se utiliza agua como fluido caliente, con un flujo másico de 1.9 kg/s, con un paso en la parte de la coraza y entra al cambiador a 95 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es igual a $1420 \text{ W/m}^2 - ^\circ\text{C}$, y la velocidad media del agua en los tubos de 1.9 cm de diámetro es de 0.37 m/s. Debido a limitaciones de espacio, la longitud del tubo de espejo a espejo, no debe superar los 2.0 m. Calcúlese el número de pasos de tubo, el número de tubos por paso y la longitud de los tubos compatible con esta restricción.

R: 37, 2, 1.35 m.

UNIDAD 7: Actividad 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MÉTODO EFECTIVIDAD – NÚMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA.

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:	Problemas.	
FECHA DE ENTREGA:	Según lo programado.	
CALIFICACIÓN MÁXIMA:	Según lo acordado.	CALIFICACIÓN:
OBJETIVO DE APRENDIZAJE:	Resolver los siguientes problemas mediante el método de la efectividad – número de unidades de transferencia.	
INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS:	Con base a lo aprendido en las actividades de enseñanza resolver los problemas siguientes e integrarlos al portafolio de evidencias.	

1. Se utiliza un cambiador de calor de corrientes cruzadas, con un fluido mezclado y el otro sin mezclar; para calentar un aceite que circula por el interior de los tubos, cuyo calor específico es $1900 \text{ J/Kg} \cdot ^\circ\text{C}$. El aceite entra al intercambiador de calor a una temperatura de 15°C y con una razón de flujo másico igual a 0.725 Kg/s . Entre los tubos, por la parte exterior, se hace circular un flujo másico de vapor de agua a razón de 5.2 Kg/s , a la presión de una atmósfera, temperatura de 130°C , y con un calor específico de $1860 \text{ J/Kg} \cdot ^\circ\text{C}$. El coeficiente global de transferencia de calor es de $275 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ y el área del intercambiador de calor es igual a 10.2 m^2 . Calcúlese el flujo de calor transferido por el vapor de agua y la temperatura de salida del mismo.

R: 129.58 KW , 116.6°C .

2. Considere el diseño de un intercambiador de calor de flujo cruzado con aletas, con un coeficiente global de transferencia de calor del lado del gas de $100 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ y cuya área es de 40 m^2 . El flujo del agua y la temperatura de entrada permanecen en 1 Kg/s y 35°C , respectivamente. Sin embargo, un cambio en las condiciones de operación ocasionan que los gases entren al intercambiador de calor con un flujo de 1.5 Kg/s y con una temperatura de 250°C . ¿Cuál es la transferencia de calor para el intercambiador, y cuáles son las temperaturas de salida del gas y del agua? Tome el calor específico del gas igual a $1000 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$.

R: 129.58 KW , 116.6°C .

3. Se desean calentar 4500 Kg/h de benceno con un calor específico igual a $1780 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$, desde 27°C hasta 50°C ; empleando tolueno con un calor específico de $1840 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$, el cual se enfría desde 71°C hasta 38°C . Si se emplea un intercambiador de calor de tubo doble con flujos encontrados, determine: a) La diferencia media logarítmica de temperaturas, b) La efectividad del intercambiador de calor y c) ¿Es posible utilizar un intercambiador de calor con flujos en paralelo? Justifique su respuesta.

R: 15.47°C , 75% , *No*.

Referencias bibliográficas.

1. Yunus A. Cengel. Transferencia de Calor. Edit. McGraw Hill. 2011
2. José A. Manrique. Transferencia de Calor. Edit. Alfaomega, México 2002.
3. B.V. Karlekar&Desmond. Transferencia de Calor. Edit. Interamericana, México 1985.
4. J.P. Holman. Transferencia de Calor. Edit. CECSA, México 1989.
5. Frank Kreith. & Mark S. Bohn. Transferencia de Calor. Edit. Thomson, 2001.
6. A.F. Mills. Transferencia de Calor. Edit. McGraw Hill. IRWIN 1997.
7. Frank P. Incropera & David P. De Witt. Fundamentos de Transferencia de Calor Edit. Pearson. Prentice Hall 1996.
8. Donald Q. Kern. Procesos de Transferencia de calor. Edit. CECSA. 1999.
9. J.R. Welty. Fundamentos de Transferencia de Momento, calor y Masa. Edit. Limusa Wiley. 2000
10. R. Novelo. Apuntes de la clase de transferencia de Calor. 2014.

ÍNDICE DE TABLAS.

	Pág.
1.1 Conductividad térmica (k) en $\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ de algunos materiales a 0°C .	5
1.2 Orden de magnitud del coeficiente de transferencia de calor h .	12
1.4 Analogía eléctrica entre la ley de Ohm, Fourier y la de enfriamiento de Newton.	16
3.2 Factores de forma de forma para ser usados en la Ec. $Q = KS\Delta T$	102
3.3 Ecuaciones en diferencias finitas para distintas geometrías.	110
4.1 Longitud característica utilizada para el cálculo del número de Biot.	123
5.1.5.1 Constante para utilizar en la correlación 5.1.5.16	223
5.1.5.2 Correlación de Grimson modificada para transferencia de calor en haces de tubos de 10 hileras.	231
5.1.5.3 Razón del Factor de corrección para usar en la ec. 5.1.5.32	231
6.5.1 Valores de las constantes C_{fs} y de n , para varias combinaciones fluido-superficie.	289
6.5.2 Tensión superficial de la interfaz líquido-vapor para el agua	290
6.5.3 Valores del coeficiente (C_{cr}) para obtener el flujo máximo de calor ($q_{\text{máx}}$).	291
7.2.1 Número de Nusselt para una corona circular o espacio anular	307
7.3.1 Valores representativos del coeficiente global de transferencia de calor, para algunos I.C.	311
7.3.2 Valores representativos de la resistencia térmica debido a incrustaciones para diversos fluidos.	311
7.5.1 Relaciones de la efectividad para los intercambiadores de calor en función de N_{ut} y la C^* .	331

ÍNDICE DE FIGURAS.

	Pág.
1.1.1 Pared plana con flujo de calor constante	4
1.1.2 Conductividad térmica de sólidos	7
1.1.3 Conductividad térmica de líquidos	7
1.1.4 Conductividad térmica de gases	7
1.1.5 Analogía entre la resistencia eléctrica y la térmica	10
1.2.1 Fenómeno de la convección	11
1.3.1 Radiación entre cuerpos negros	15
1.3.2 Intercambio de calor entre cuerpos grises	15
1.5.1 Transferencia simultánea de calor en diversos dispositivos	17
2.1.1 Elemento cúbico sólido	25
2.2.1 Pared plana	28
2.2.2 Elemento diferencial	30
2.2.3 Pared plana compuesta	31
2.2.4 Circuito térmico serie-paralelo	32
2.2.5 Cilindro hueco	35
2.2.6 Cilindro compuesto	38
2.2.7 Resistencias térmicas	41
2.2.8 Esfera hueca	44
2.2.9 Esfera con aislante	47
2.3.1 Pared con generación de calor	49
2.3.2 Pared plana expuesta a un fluido	51
2.3.3 Cilindro sólido	56
2.3.4 Cilindro sólido desnudo expuesto a un fluido	58
2.3.5 Esfera sólida desnuda	61
2.3.6 Esfera sólida expuesta a un fluido	63
2.4.1 Resistencia convectiva	65
2.4.2 Aletas de diferentes secciones transversales y perfiles	66
2.4.3 Aleta de sección variable	67
2.4.4 Aleta infinita	70

2.4.5	<i>Perfil de temperaturas para una aleta infinita</i>	71
2.4.6	<i>Aleta finita</i>	72
2.4.7	<i>Aleta con convección en el extremo</i>	75
2.4.8	<i>Rendimiento de aletas triangulares y rectangulares</i>	80
2.4.9	<i>Rendimiento de aletas circunferenciales de perfil rectangular</i>	81
2.4.10	<i>Diversos tipos de aletas</i>	82
2.4.11	<i>Diversos montajes de aletas utilizados en aplicaciones de refrigeración y electrónica</i>	82
3.1.1	<i>Barra de sección rectangular</i>	92
3.2.1	<i>Red de cuadrados curvilíneos para una pared plana</i>	98
3.2.2	<i>Red de cuadrados curvilíneos para una pared plana doblada en forma de semicírculo</i>	98
3.2.3	<i>Horno tubular</i>	99
3.2.4	<i>Sección ABCD de la figura 3.2.3, que se usa en la solución gráfica</i>	99
3.2.5	<i>Cuadrado curvilíneo común</i>	100
3.2.6	<i>Cuadrado curvilíneo que muestra el espesor de la pared del horno</i>	101
3.3.1	<i>Red de diferencias finitas</i>	105
3.3.2	<i>Flujos de calor</i>	106
3.3.3	<i>Nodo exterior</i>	109
4.1.1	<i>Cuerpo de dimensiones pequeñas de temperatura T_o en un medio a temperatura T_{∞}</i>	120
4.1.2	<i>Perfil de temperaturas</i>	121
4.1.3	<i>Analogía eléctrica</i>	122
4.1.4	<i>Perfil de temperaturas mostrando el equilibrio del cuerpo</i>	123
4.2.1	<i>Algunas posiciones nodales para problemas bidimensionales</i>	127
4.3.1	<i>Placa plana infinita</i>	130
4.3.2	<i>Placa plana de espesor L aislada térmicamente</i>	131
4.3.3	<i>Temperatura en el plano central de una placa infinita de espesor $2L$</i>	134
4.3.4	<i>Temperatura en cualquier plano para una placa infinita de espesor $2L$</i>	135
4.3.5	<i>Calor disipado por una placa infinita de espesor $2L$</i>	135
4.3.6	<i>Temperatura en el eje de una cilindro infinita de radio R</i>	138
4.3.7	<i>Temperatura en cualquier radio de un cilindro infinito de radio R</i>	139
4.3.8	<i>Calor disipado por un cilindro infinito de radio R</i>	139
4.3.9	<i>Temperatura en el centro de una esfera de radio R</i>	141

4.3.10	Temperatura en cualquier radio de una esfera de radio R	142
4.3.11	Calor disipado por una esfera de radio R	142
4.3.12	Sólido semiinfinito	144
4.3.13	Distribución de temperatura en un sólido semiinfinito	147
5.1.2.1	Capa límite hidrodinámica	157
5.1.2.2	Capa límite térmica	157
5.1.3.1	Volumen de control para el análisis integral de la capa frontera laminar	159
5.1.3.2	Perfil de velocidades en la capa frontera	161
5.1.3.3	Condición inicial	164
5.1.3.4.a	Capa frontera y volumen de control	168
5.1.3.4.b	Volumen de control dentro de la capa frontera	168
5.1.3.4.c	Fuerzas de presión externas	170
5.1.3.4.d	Fuerzas cortantes viscosas actuando en las caras del volumen de control	171
5.1.3.4.e	Momento actuando en las caras del volumen de control	172
5.1.3.5	Balance de energía en el volumen de control	176
5.1.3.6	Perfil de temperaturas en la capa frontera	178
5.1.3.7	Condición inicial de frontera	181
5.1.3.8	Condición de frontera para cuando las capas inician el extremo principal de la placa	182
5.1.3.9	Coeficiente promedio de transferencia de calor	184
5.1.3.10	Balance de energía el volumen de control. Análisis diferencial	187
5.1.3.11	Capa frontera para flujo turbulento	193
5.1.4.1	Perfil de velocidades en la capa frontera	198
5.1.4.2	Coeficiente de fricción total para cilindros circulares	204
5.1.4.3	Coeficiente de fricción total para esferas	204
5.1.5.1	Área elemental circular con flujo a través de ella	206
5.1.5.2	Perfil de temperaturas para flujo laminar en ductos	206
5.1.5.3	Datos para el calentamiento y enfriamiento de aire	224
5.1.5.4	Bancos de tubos en línea	232
5.1.5.5	Áreas de flujo para bancos en línea	232
5.1.5.6	Banco de tubos en arreglo triangular	233
5.1.5.7	Áreas de flujo para bancos en tresbolillo	233

5.1.5.8.a	Factor de fricción para bancos de tubos en arreglo cuadrado o en línea	236
5.1.5.8.b	Factor de fricción para banco de tubos en arreglo triangular o tresbolillo	236
5.2.2.1	Placa vertical calentada	241
5.2.2.1.a	Perfil de velocidades flujo laminar	242
5.2.2.1.b	Perfil de temperatura flujo laminar	242
5.2.2.2	Volumen de control	243
5.2.2.3	Fuerzas actuando sobre el volumen de control	243
5.2.2.4	Placa inclinada caliente	251
5.2.2.5	Rompimiento de la capa frontera	252
5.2.2.6	Correlaciones de transferencia de calor en cilindros horizontales	254
5.2.3.1	Espacio vertical	259
5.2.3.2	Espacio horizontal	260
5.2.3.2.1	Celdas de Bernard para convección natural en espacios horizontales	260
5.2.4.a	Regímenes de convección natural forzada y mezclada para flujo en tubos horizontales	263
5.2.4.b	Regímenes de convección natural forzada y mezclada para flujo en tubos verticales	263
6.1.1	Diagrama p-H de una sustancia pura	273
6.2.1	Placa vertical con flujo líquido pelicular y volumen de control	275
6.2.2	Perfil de velocidades de la película condensada	277
6.2.3	Diámetro hidráulico para Reynolds mayores de 1800	282
6.5.1	Curva típica de ebullición para la presión de una atmósfera	286
7.1.1	Intercambiador de calor de tubo doble, flujo en paralelo con corte longitudinal	298
7.1.2	Intercambiador de calor de tubo doble, en contraflujo con corte longitudinal	298
7.1.3	Intercambiador de calor de coraza y tubos, uno-uno	299
7.1.4	Intercambiador de calor de coraza y tubos, uno-dos	300
7.1.5	Intercambiador de calor de coraza y tubos, dos-cuatro	300
7.1.6	Intercambiador de calor compacto de flujo cruzado	301
7.1.7	Intercambiador de calor de placas y armazón de líquido hacia líquido	301
7.1.8	Intercambiador de calor de placas y armazón, intercambiador solo de placas	302
7.1.9	Malla de alambre con centro de cerámica	302
7.1.10	Calentador de aire Ljungtrom con soporte central y motor para el rotor	303
7.2.1	Esquema y perfil de temperaturas de un intercambiador de doble tubo	304

7.2.2	<i>Pared cilíndrica metálica expuesta a fluido en el interior y exterior</i>	305
7.4.1	<i>Esquema y perfil de temperatura de un I.C de tubo doble con flujos en paralelo</i>	313
7.4.2	<i>Perfil de temperatura de un I.C. de tubo doble con flujos en paralelo</i>	314
7.4.3	<i>Esquema y perfil de temperatura de un I.C. de doble tubo con flujos encontrados</i>	317
7.44	<i>Perfil de temperatura con cambio de fase en uno de los fluidos (condensador, caldera)</i>	318
7.4.5.a	<i>Factor de corrección para un I.C de un paso en la coraza y 2, 4, 6, .pasos por los tubos</i>	319
7.4.5.b	<i>Factor de corrección para un I.C de dos pasos por la coraza y 4,8 12, .pasos por los tubos</i>	319
7.4.5.c	<i>Factor de corrección para un I.C de un solo paso con los fluidos no mezclados</i>	320
7.4.5.d	<i>Factor de corrección para un I.C de un solo paso con un fluido mezclado y el otro no</i>	320
7.5.1.a	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. de flujos en paralelo</i>	329
7.5.1.b	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. de flujos en contraflujo</i>	329
7.5.2.a	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. de un paso por la coraza y 2, 4, 6 pasos por los tubos</i>	330
7.5.2.b	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. de dos paso por la coraza y 4, 8, 12 pasos por los tubos</i>	330
7.5.3.a	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. flujo cruzado con los dos fluidos de flujo no mezclado.</i>	331
7.5.3.b	<i>Gráfica del NUT vs efectividad de un I.C. de flujo cruzado con un fluido mezclado y el otro no</i>	331

1. APÉNDICE (TABLA A-1) *Nota: Las Tablas de las propiedades de las diversas sustancias fueron tomadas del texto Yunus A. Cengel. Transferencia de Calor. Edit. McGraw Hill. 2011.*

Propiedades del agua saturada

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Presión de saturación ($P_{\text{sat}}, \text{kPa}$)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)		Entalpía de vaporización ($h_{fg}, \text{kJ/kg}$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$)		Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)		Viscosidad dinámica ($\mu, \text{kg/m} \cdot \text{s}$)		Número de Prandtl, P_r		Coeficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^{-3}, 1/\text{K}$)
		Líquido	Vapor		Líquido	vapor	Líquido	vapor	$\mu \times 10^3$	$\mu \times 10^5$	Líquido	vapor	
0.01	0.6113	999.8	0.0048	2501	4217	1854	0.561	0.0171	1.792	0.922	13.5	1.00	-0.068
5	0.8721	999.9	0.0068	2490	4205	1857	0.571	0.0173	1.519	0.934	11.2	1.00	0.015
10	1.2276	999.7	0.0094	2478	4194	1862	0.580	0.0176	1.307	0.946	9.45	1.00	0.733
15	1.7051	999.8	0.0128	2466	4186	1863	0.589	0.0179	1.138	0.959	8.09	1.00	0.138
20	2.339	998.0	0.0173	2454	4182	1867	0.598	0.0182	1.002	0.973	7.01	1.00	0.195
25	3.169	997.0	0.0231	2442	4180	1870	0.607	0.0186	0.891	0.987	6.14	1.00	0.247
30	4.246	996.0	0.0304	2431	4178	1875	0.615	0.0189	0.798	1.001	5.42	1.00	0.294
35	5.628	994.0	0.0397	2419	4178	1880	0.623	0.0192	0.720	1.016	4.83	1.00	0.337
40	7.384	992.1	0.0512	2407	4179	1885	0.631	0.0196	0.653	1.031	4.32	1.00	0.377
45	9.593	990.1	0.0655	2395	4180	1892	0.637	0.0200	0.596	1.046	3.91	1.00	0.415
50	12.35	988.1	0.0831	2383	4181	1900	0.644	0.0204	0.547	1.062	3.55	1.00	0.451
55	15.76	985.2	0.1045	2371	4183	1908	0.649	0.0208	0.504	1.077	3.25	1.00	0.484
60	19.94	983.3	0.1304	2359	4185	1916	0.654	0.0212	0.467	1.093	2.99	1.00	0.517
65	25.03	980.4	0.10614	2346	4187	1926	0.659	0.0216	0.433	1.110	2.75	1.00	0.548
70	31.19	977.5	0.1983	2334	4190	1936	0.663	0.0221	0.404	1.126	2.55	1.00	0.578
75	38.58	974.7	0.2421	2321	4193	1948	0.667	0.0225	0.378	1.142	2.38	1.00	0.607
80	47.39	971.8	0.2935	2309	4197	1962	0.670	0.0230	0.355	1.159	2.22	1.00	0.653
85	57.83	968.1	0.3536	2296	4201	1977	0.673	0.0235	0.333	1.176	2.08	1.00	0.670

90	70.14	965.3	0.4235	2283	4206	1993	0.675	0.0240	0.315	1.193	1.96	1.00	0.702
95	84.55	961.5	0.5045	2270	4212	2010	0.677	0.0246	0.297	1.210	1.85	1.00	0.716
100	101.33	957.9	0.5978	2257	4217	2029	0.679	0.0251	0.282	1.227	1.75	1.00	0.750
110	143.27	950.6	0.8263	2230	4229	2071	0.682	0.0262	0.255	1.261	1.58	1.00	0.798
120	198.53	943.4	1.121	2203	4244	2120	0.683	0.0275	0.232	1.296	1.44	1.00	0.858
130	270.10	934.6	1.496	2174	4263	2177	0.684	0.0288	0.213	1.330	1.33	1.01	0.913
140	361.30	921.7	1.965	2145	4286	2244	0.683	0.0301	0.197	1.365	1.24	1.02	0.970
150	475.80	916.6	2.546	2114	4311	2314	0.682	0.0316	0.183	1.399	1.16	1.02	1.025
160	617.80	907.4	3.256	2083	4340	2420	0.680	0.0331	0.170	1.434	1.09	1.05	1.145
170	791.70	897.7	4.119	2050	4370	2490	0.677	0.0347	0.160	1.468	1.03	1.05	1.178
180	1002.10	887.3	5.153	2015	4410	2590	0.673	0.0364	0.150	1.502	0.983	1.07	1.210
190	1254.40	876.4	6.388	1979	4460	2710	0.669	0.0382	0.142	1.537	0.947	1.09	1.280
200	1553.80	864.3	7.852	1941	4500	2840	0.663	0.0401	0.134	1.571	0.910	1.11	1.350
220	2318.00	840.3	11.60	1859	4610	3110	0.650	0.0442	0.122	1.641	0.865	1.15	1.520
240	3344.00	813.7	16.73	1767	4760	3520	0.632	0.0487	0.111	1.712	0.836	1.24	1.720
260	4688.00	783.7	23.69	1663	4970	4070	0.609	0.0540	0.102	1.788	0.832	1.35	2.000
280	6412.00	750.8	33.15	1544	5280	4035	0.581	0.0605	0.094	1.870	0.854	1.49	2.380
300	8581.00	713.8	46.15	1405	5750	5980	0.548	0.0695	0.086	1.965	0.902	1.69	2.950
320	11274.00	667.1	64.57	1239	6540	7900	0.509	0.0836	0.078	2.084	1.00	1.97	---
340	14586.00	610.5	92.62	1028	8240	11870	0.469	0.110	0.070	2.255	1.23	2.43	---
360	18651.00	528.3	144.00	720	14690	25800	0.427	0.178	0.060	2.571	2.06	3.73	---
374.14	22090.00	317.0	317.00	0	∞	∞	∞	∞	0.043	4.313	---	---	---

Nota. La viscosidad cinemática y la difusividad térmica, se pueden calcular a partir de sus definiciones. Las temperaturas de 0.01 °C, 100 °C y 374.14 °C, corresponden a los puntos triple, de ebullición y crítico del agua, respectivamente. Todas las propiedades (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor del punto crítico.

APÉNDICE (TABLA A-2)

Propiedades del refrigerante 134a saturado

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Presión de saturación (P_{sat}, kPa)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)		Entalpía de vaporización ($h_{fg}, \text{kJ/kg}$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} - \text{K}$)		Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)		Viscosidad dinámica ($\mu\text{g/m} \cdot \text{s}$)		Número de Prandtl, P_r		Coeficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)	Tensión superficial ($\tau_s, \text{N/m}$)
		Líquido	Vapor		Líquido	vapor	Líquido	vapor	$\mu \times 10^4$	$\mu \times 10^5$	Líquido	vapor		
-40	51.2	1418	2.773	225.9	1254	748.6	0.1101	0.00811	4.878	0.2550	5.558	0.235	0.00205	0.01760
-35	66.2	1403	3.524	222.7	1264	764.1	0.1084	0.00862	4.509	0.3003	5.257	0.266	0.00209	0.01682
-30	84.4	1389	4.429	219.5	1273	780.2	0.1066	0.00913	4.178	0.3504	4.992	0.299	0.00215	0.01604
-25	106.5	1374	5.509	216.3	1283	797.2	0.1047	0.00963	3.882	0.4054	4.757	0.335	0.00220	0.01527
-20	132.8	1359	6.787	213.0	1294	814.9	0.1028	0.01013	3.614	0.4651	4.548	0.374	0.00227	0.01451
-15	164.0	1343	8.288	209.5	1306	833.5	0.1009	0.01063	3.371	0.5295	4.363	0.415	0.00233	0.01376
-10	200.7	1327	10.04	206.0	1318	853.1	0.0989	0.01112	3.150	0.5982	4.198	0.459	0.00241	0.01302
-5	243.5	1311	12.07	202.4	1330	873.8	0.0968	0.01161	2.947	0.6709	4.051	0.505	0.00249	0.01229
0	293.0	1295	14.42	198.7	1344	895.6	0.0947	0.01210	2.761	0.7471	3.919	0.553	0.00258	0.01156
5	349.9	1278	17.12	194.8	1358	918.7	0.0925	0.01259	2.589	0.8264	3.802	0.603	0.00269	0.01084
10	414.9	1261	20.22	190.8	1374	943.2	0.0903	0.01308	2.430	0.9081	3.697	0.655	0.00280	0.01014
15	488.7	1244	23.75	186.6	1390	969.4	0.0880	0.01357	2.281	0.9915	3.604	0.708	0.00293	0.00944
20	572.1	1226	27.77	182.3	1408	997.6	0.0856	0.01406	2.142	1.075	3.521	0.763	0.00307	0.00876
25	665.8	1207	32.34	177.8	1427	1028	0.0833	0.01456	2.012	1.160	3.448	0.819	0.00324	0.00808
30	770.6	1188	37.53	173.1	1448	1061	0.0808	0.01507	1.888	1.244	3.383	0.877	0.00342	0.00742
35	887.5	1168	43.41	168.2	1471	1098	0.0783	0.01558	1.772	1.327	3.328	0.935	0.00364	0.00677
40	1017.1	1147	50.08	163.0	1498	1138	0.0757	0.01610	1.660	1.408	3.285	0.995	0.00390	0.00613
45	1160.5	1125	57.66	157.6	1529	1184	0.0731	0.01664	1.554	1.466	3.253	1.058	0.00420	0.00550

50	1318.6	1102	66.27	151.8	1566	1237	0.0704	0.01720	1.453	1.562	3.231	1.123	0.00456	0.00489
55	1492.3	1078	76.11	145.7	1608	1298	0.0676	0.01777	1.355	1.634	3.223	1.193	0.00500	0.00429
60	1682.8	1053	87.38	139.1	1659	1372	0.0647	0.01838	1.260	1.704	3.229	1.272	0.00554	0.00372
65	1891.0	1026	100.4	132.1	1722	1462	0.0618	0.01902	1.167	1.771	3.255	1.362	0.00624	0.00315
70	2118.2	996.2	115.6	124.4	1801	1577	0.0587	0.01972	1.077	1.839	3.307	1.471	0.00716	0.00261
75	2365.8	964.0	133.6	115.9	1907	1731	0.0555	0.02048	0.9891	1.908	3.400	1.612	0.00843	0.00209
80	2635.2	928.2	155.3	106.4	2056	1948	0.0521	0.02133	0.9011	1.982	3.558	1.810	0.01031	0.00160
85	2928.2	887.1	182.3	95.4	2287	2281	0.0484	0.02233	0.8124	2.071	3.837	2.116	0.01336	0.00114
90	3246.9	837.7	217.8	82.2	2701	2865	0.0444	0.02357	0.7203	2.187	4.385	2.658	0.01911	0.00071
95	3594.1	772.5	269.3	64.9	3675	4144	0.0396	0.02544	0.6190	2.370	5.746	3.862	0.03343	0.00033
100	3975.1	651.7	376.3	33.9	7959	8785	0.0322	0.02989	0.4765	2.833	11.77	8.326	0.10047	0.00004

Nota. La viscosidad cinemática y la difusividad térmica, se pueden calcular a partir de sus definiciones. Todas las propiedades (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor del punto crítico.

APÉNDICE (TABLA A-3)

Propiedades del amoníaco saturado

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Presión de saturación (P_{sat}, kPa)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)		Entalpía de vaporización ($h_{fg}, \text{kJ/kg}$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$)		Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)		Viscosidad dinámica ($\mu\text{g/m} \cdot \text{s}$)		Número de Prandtl, P_r		Coeficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)	Tensión superficial ($\tau_s, \text{N/m}$)
		Líquido	Vapor		Líquido	vapor	Líquido	vapor	$\mu \times 10^4$	$\mu \times 10^5$	Líquido	vapor		
-40	71.66	690.2	0.6435	1369	4414	2242	---	0.01792	2.926	0.7957	---	0.9955	0.00176	0.03565
-30	119.4	677.8	1.037	1360	4465	2322	---	0.01898	2.630	0.8311	---	1.017	0.00185	0.03341
-25	151.5	671.5	1.296	1345	4489	2369	0.5968	0.01957	2.492	0.8490	1.875	1.028	0.00190	0.03229
-20	190.1	665.1	1.603	1329	4514	2420	0.5853	0.02015	2.361	0.8669	1.821	1.041	0.00194	0.03118
-15	236.2	658.6	1.966	1313	4538	2476	0.5737	0.02075	2.236	0.8851	1.769	1.056	0.00199	0.03007
-10	290.8	652.1	2.391	1297	4564	2536	0.5621	0.02138	2.117	0.9034	1.718	1.072	0.00205	0.02896
-5	354.9	645.4	2.886	1280	4589	2601	0.5505	0.02203	2.003	0.9218	1.670	1.089	0.00210	0.02786
0	429.6	638.6	3.458	1262	4617	2672	0.5390	0.02270	1.896	0.9405	1.624	1.107	0.00216	0.02676
5	516.0	631.7	4.116	1244	4645	2749	0.5274	0.02341	1.784	0.9593	1.580	1.126	0.00223	0.02566
10	615.3	624.6	4.870	1226	4676	2831	0.5158	0.02415	1.697	0.9784	1.539	1.147	0.00230	0.02457
15	728.8	617.5	5.729	1206	4709	2920	0.5042	0.02492	1.606	0.9978	1.500	1.169	0.00237	0.02348
20	857.8	610.2	6.705	1186	4745	3016	0.4927	0.02573	1.519	1.017	1.463	1.193	0.00245	0.02240
25	1003	602.8	7.809	1166	4784	3120	0.4811	0.02658	1.438	1.037	1.430	1.218	0.00254	0.02132
30	1167	595.2	9.055	1144	4828	3232	0.4695	0.02748	1.361	1.057	1.399	1.244	0.00264	0.02024
35	1351	587.4	10.46	1122	4877	3354	0.4579	0.02843	1.288	1.078	1.372	1.272	0.00275	0.01917
40	1555	579.4	12.03	1099	4932	3486	0.4464	0.02943	1.219	1.099	1.347	1.303	0.00287	0.01810
45	1782	571.3	13.8	1075	4993	3631	0.4348	0.03049	1.155	1.121	1.327	1.335	0.00301	0.01704
50	2033	562.9	15.78	1051	5063	3790	0.4232	0.03162	1.094	1.143	1.310	1.371	0.00316	0.01598

55	2310	554.2	18.00	1025	5143	3969	0.4116	0.03283	1.037	1.116	1.297	1.409	0.00334	0.01493
60	2614	545.2	20.48	997.4	5234	4163	0.4001	0.03412	0.9846	1.189	1.288	1.452	0.00354	0.01389
65	2948	536.0	23.26	968.9	5340	4384	0.3885	0.03550	0.9347	1.213	1.285	1.499	0.00377	0.01285
70	3312	526.3	26.39	939.0	5463	4634	0.3769	0.03700	0.8879	1.238	1.287	1.551	0.00404	0.01181
75	3709	516.2	29.90	907.5	5608	4923	0.3653	0.03862	0.8440	1.264	1.296	1.612	0.00436	0.01079
80	4141	505.7	33.87	874.1	5780	5260	0.3538	0.04038	0.8030	1.292	1.312	1.683	0.00474	0.00977
85	4609	494.5	38.36	838.6	5988	5659	0.3422	0.04232	0.7645	1.322	1.338	1.768	0.00521	0.00876
90	5116	482.8	43.48	800.6	6242	6142	0.3306	0.04447	0.7284	1.354	1.375	1.871	0.00579	0.00776
95	5665	470.2	49.35	759.8	6561	6740	0.3190	0.04687	0.6946	1.389	1.429	1.999	0.00652	0.00677
100	6257	456.6	56.15	715.5	6972	7503	0.3075	0.04958	0.6628	1.429	1.503	2.163	0.00749	0.00579

Nota. La viscosidad cinemática y la difusividad térmica, se pueden calcular a partir de sus definiciones. Todas las propiedades (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor del punto crítico.

APÉNDICE (TABLA A-4)

Propiedades del propano saturado

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Presión de saturación (P_{sat}, kPa)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)		Entalpía de vaporización ($h_{fg}, \text{kJ/kg}$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$)		Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)		Viscosidad dinámica ($\mu\text{g/m} \cdot \text{s}$)		Número de Prandtl, P_r		Coeficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)	Tensión superficial ($\tau_s, \text{N/m}$)
		Líquido	Vapor		Líquido	vapor	Líquido	vapor	$\mu \times 10^4$	$\mu \times 10^5$	Líquido	vapor		
-120	0.4053	664.7	0.01408	498.3	2003	1115	0.1802	0.00589	6.136	0.4372	6.820	0.827	0.00153	0.02630
-110	1.157	654.5	0.03776	489.3	2021	1148	0.1738	0.00645	5.054	0.4625	5.878	0.822	0.00157	0.02486
-100	2.881	644.2	0.08872	480.4	2044	1183	0.1672	0.00705	4.252	0.4881	5.195	0.819	0.00161	0.02344
-90	6.406	633.8	0.1870	471.5	2070	1221	0.1606	0.00769	3.635	0.5143	4.686	0.817	0.00166	0.02202
-80	12.97	623.2	0.3602	462.4	2100	1263	0.1539	0.00836	3.149	0.5409	4.297	0.817	0.00171	0.02062
-70	24.26	612.5	0.6439	453.1	2134	1308	0.1472	0.00908	2.755	0.5680	3.994	0.818	0.00177	0.01923
-60	42.46	601.5	1.081	443.5	2173	1358	0.1407	0.00985	2.430	0.5956	3.755	0.821	0.00184	0.01785
-50	70.24	590.3	1.724	433.6	2217	1412	0.1343	0.01067	2.158	0.6239	3.563	0.825	0.00192	0.01649
-40	110.7	578.8	2.629	423.1	2258	1471	0.1281	0.01155	1.926	0.6529	3.395	0.831	0.00201	0.01515
-30	167.3	567.0	3.864	412.1	2310	1535	0.1221	0.01250	1.726	0.6827	3.266	0.839	0.00213	0.01382
-20	243.8	554.7	5.503	400.3	2368	1605	0.1163	0.01351	1.551	0.7136	3.158	0.848	0.00226	0.01251
-10	344.4	542.0	7.635	387.8	2433	1682	0.1107	0.01459	1.397	0.7457	3.069	0.860	0.00242	0.01122
0	473.3	528.7	10.36	374.2	2507	1768	0.1054	0.01576	1.259	0.7794	2.996	0.875	0.00262	0.00996
5	549.8	521.8	11.99	367.0	2547	1814	0.1028	0.01637	1.195	0.7970	2.964	0.883	0.00273	0.00934
10	635.1	514.7	13.81	359.5	2590	1864	0.1002	0.01701	1.135	0.8151	2.935	0.893	0.00286	0.00872
15	729.8	507.5	15.85	351.7	2637	1917	0.0977	0.01767	1.077	0.8339	2.909	0.905	0.00301	0.00811
20	834.4	500.0	18.13	343.4	2688	1974	0.0952	0.01836	1.022	0.8534	2.886	0.918	0.00318	0.00751
25	949.7	492.2	20.68	334.8	2742	2036	0.0928	0.01908	0.9702	0.8738	2.866	0.933	0.00337	0.00691

30	1076	484.2	23.53	325.8	2802	2104	0.0904	0.01982	0.9197	0.8952	2.850	0.950	0.00358	0.00633
35	1215	475.8	26.72	316.2	2869	2179	0.0881	0.02061	0.8710	0.9178	2.837	0.971	0.00384	0.00575
40	1366	467.1	30.29	306.1	2943	2264	0.0857	0.02142	0.8240	0.9417	2.828	0.995	0.00413	0.00518
45	1530	458.0	34.29	295.3	3026	2361	0.0834	0.02228	0.7785	0.9674	2.824	1.025	0.00448	0.00463
50	1708	448.5	38.79	283.9	3122	2473	0.0811	0.02319	0.7343	0.9950	2.826	1.061	0.00491	0.00408
60	2110	427.5	49.66	258.4	3283	2769	0.0765	0.02517	0.6487	1.058	2.784	1.164	0.00609	0.00303
70	2580	403.2	64.02	228.0	3595	3241	0.0717	0.02746	0.5649	1.138	2.834	1.343	0.00811	0.00204
80	3127	373.0	84.28	189.7	4501	4173	0.0663	0.03029	0.4790	1.249	3.251	1.722	0.01248	0.00114
90	3769	329.1	118.6	133.2	6977	7239	0.0595	0.03441	0.3807	1.448	4.465	3.047	0.02847	0.00037

Nota. La viscosidad cinemática y la difusividad térmica, se pueden calcular a partir de sus definiciones. Todas las propiedades (excepto la densidad del vapor) se pueden usar a cualquier presión con error despreciable, excepto a temperaturas cercanas al valor del punto crítico.

APÉNDICE (TABLA A-5)

Propiedades de líquidos**Metano (CH_4)**

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, Kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/Kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^7, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^4, Kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, Kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/K$)
-160	420.2	3492	0.1863	1.270	1.133	2.699	2.126	0.00352
-150	405.0	3580	0.1703	1.174	0.9169	2.264	1.927	0.00391
-140	388.8	3700	0.1550	1.077	0.7551	1.942	1.803	0.00444
-130	371.1	3875	0.1402	0.9749	0.6288	1.694	1.738	0.00520
-120	351.4	4146	0.1258	0.8634	0.5257	1.496	1.732	0.00637
-110	328.8	4611	0.1115	0.7356	0.4377	1.331	1.810	0.00841
-100	301.0	5578	0.0967	0.5761	0.3577	1.188	2.063	0.01282
-90	261.7	8902	0.0797	0.3423	0.2761	1.055	3.082	0.02922

Metanol [$C_3H_3(OH)$]

20	788.4	2515	0.1987	1.0020	5.857	7.429	7.414	0.00118
30	779.1	2577	0.1980	0.9862	5.08	6.531	6.622	0.00120
40	769.6	2644	0.1972	0.9690	4.460	5.795	5.980	0.00123
50	760.1	2718	0.1965	0.9509	3.942	5.185	5.453	0.00127
60	750.4	2798	0.1957	0.9320	3.510	4.677	5.018	0.00132
70	740.4	2885	0.1950	0.9128	3.146	4.250	4.655	0.00137

Isobutano (R600a)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, Kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/Kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^7, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^4, Kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, Kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/K$)
-100	633.8	1881	0.1383	1.075	9,305	13.60	12.65	0.00142
-75	659.3	1970	0.1357	1.044	5.624	8.531	8.167	0.00150
-50	634.3	2069	0.1283	0.9773	3.769	5.942	6.079	0.00161
-25	608.2	2180	0.1181	0.8906	2.688	4.420	4.963	0.00177
0	580.6	2306	0.1068	0.7974	1.993	3.432	4.304	0.00199
25	550.7	2455	0.0956	0.7069	1.510	2.743	3.880	0.00232
50	517.3	2640	0.0851	0.6233	1.155	2.233	3.582	0.00286
75	478.5	2896	0.0757	0.5460	0.8785	1.836	3.363	0.00385
100	429.6	3361	0.0669	0.4634	0.6483	1.509	3.256	0.00628

Glicerina

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{Kg}/\text{m}^3$)	Calor específico ($C_p, \text{J}/\text{Kg} - \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^8, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu, \text{Kg}/\text{m} \cdot \text{s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^3, \text{Kg}/\text{m} \cdot \text{s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)
0	1276	2262	0.2820	9.773	10-49	8.219	84101	---
5	1273	2288	0.2835	9.732	6.730	5.287	54327	---
10	1270	2320	0.2846	9.662	4.241	3.339	34561	---
15	1267	2354	0.2856	9.576	2.496	1.970	20570	---
20	1264	2386	0.2860	9.484	1.519	1.201	12671	---
25	1261	2416	0.2860	9.388	0.9934	0.7878	8392	---
30	1258	2447	0.2860	9.291	0.6582	0.5232	5631	---
35	1255	2478	0.2860	9.195	0.4347	0.3464	3767	---
40	1252	2513	0.2863	9.101	0.3073	0.2455	2697	---

Aceite para motor (no usado)

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{Kg}/\text{m}^3$)	Calor específico ($C_p, \text{J}/\text{Kg} - \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^8, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu, \text{Kg}/\text{m} \cdot \text{s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, \text{Kg}/\text{m} \cdot \text{s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)
0	899.0	1797	0.1469	9.097	3.814	424.2	46636	0.00070
20	888.1	1881	0.1450	8.680	0.8374	94.29	10863	0.00070
40	876.0	1964	0.1444	8.391	0.2177	24.85	2962	0.00070
60	863.9	2048	0.1404	7.934	0.07399	8.565	1080	0.00070
80	852.0	2132	0.1380	7.599	0.03232	3.794	499.3	0.00070

100	840.0	2220	0.1367	7.330	0.01718	2.046	279.1	0.00070
120	828.9	2308	0.1347	7.042	0.01029	1.241	176.3	0.00070
140	816.8	2395	0.1330	6.798	0.006558	0.8029	118.1	0.00070
150	810.3	2441	0.1327	6.708	0.005344	0.6595	98.31	0.00070

Nota. Los valores de estas tablas están basados en varias fuentes.

APÉNDICE (TABLA A-6)

Propiedades de metales líquidos**Mercurio (H_g); Punto de fusión: $-39\text{ }^{\circ}\text{C}$**

Temperatura ($T, ^{\circ}\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^6, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^3, \text{kg/m} \cdot \text{s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, \text{kg/m} \cdot \text{s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/\text{K}$)
0	13595	140.4	8.18200	4.287	1.687	1.241	0.0289	1.810
25	13534	139.4	8.51533	4.514	1.534	1.133	0.0252	1.810
50	13473	138.6	8.83632	4.734	1.423	1.056	0.0223	1.810
75	13412	137.8	9.15632	4.956	1.316	0.9819	0.0198	1.810
100	13351	137.1	9.46706	5.170	1.245	0.9326	0.0180	1.810
150	13231	136.1	10.07780	5.595	1.126	0.8514	0.0152	1.810
200	13112	135.5	10.65465	5.996	1.043	0.7959	0.0133	1.815
250	12993	135.3	11.18150	6.363	0.9820	0.7558	0.0108	1.829
300	12873	135.3	11.68150	6.705	0.9336	0.7252		1.854

Bismuto (Bi); Punto de fusión: $271\text{ }^{\circ}\text{C}$

350	9969	146.0	16.28	0.1118	1.540	1.545	0.01381	---
400	9908	148.2	16.10	0.1096	1.422	1.436	0.01310	---
500	9785	152.8	15.74	0.1052	1.188	1.215	0.01154	---
600	9663	157.3	15.60	0.1026	1.013	1.048	0.01022	---
700	9540	161.8	15.60	0.1010	0.8736	0.9157	0.00906	---

Plomo (Pb); Punto de fusión: 327 °C

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)	Calor específico ($c_p, \text{J/kg} - \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W/m. K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^6, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^3, \text{kg/m. s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, \text{kg/m. s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)
400	10506	158	15.97	9.623	2.277	2.167	0.02252	---
450	10449	156	15.74	9.649	2.065	1.976	0.02048	---
500	10390	155	15.54	9.651	1.884	1.814	0.01879	---
550	10329	155	15.39	9.610	1.758	1.702	0.01771	---
600	10267	155	15.23	9.568	1.632	1.589	0.01661	---
650	10206	155	15.07	9.526	1.505	1.475	0.01549	---
700	10145	155	14.91	9.483	1.379	1.360	0.01434	---

Sodio (Na); Punto de fusión: 98 °C

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)	Calor específico ($c_p, \text{J/kg} - \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W/m. K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^4, \text{kg/m. s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, \text{kg/m. s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/\text{K}$)
100	927.3	1378	85.84	6.718	6.892	7.432	0.01106	---
200	902.5	1349	80.84	6.639	5.385	5.967	0.008987	---
300	877.8	1320	75.84	6.554	3.878	4.418	0.006751	---
400	853.0	1296	71.20	6.437	2.720	3.188	0.004953	---
500	828.5	1284	67.41	6.335	2.411	2.909	0.004593	---
600	804.0	1272	63.63	6.220	2.101	2.614	0.004202	---

Potasio (K) ; Punto de fusión: 64 °C

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^4, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^7, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta, 1/K$)
200	795.2	790.8	43.99	6.995	3.350	4.213	0.006023	---
300	771.6	772.8	42.01	7.045	2.667	3.456	0.004906	---
400	748.0	754.8	40.03	7.090	1.984	2.652	0.003740	---
500	723.9	750.0	37.81	6.964	1.668	2.304	0.003309	---
600	699.6	750.0	35.50	6.765	1.487	2.126	0.003143	---

Sodio – Potasio (22 % Na – 78% K) ; Punto de fusión: -11 °C

100	847.3	944.4	25.64	3.205	5.707	6.736	0.02102	---
200	823.2	922.5	26.27	3.459	4.587	5.572	0.01611	---
300	799.1	900.6	26.89	3.736	3.467	4.339	0.01161	---
400	775.0	879.0	27.50	4.037	2.357	3.041	0.00753	---
500	751.5	880.1	27.89	4.217	2.108	2.805	0.00665	---
600	728.0	881.2	28.20	4.408	1.859	2.553	0.00579	---

Nota. Los valores de estas tablas están basados en varias fuentes.

APÉNDICE (TABLA A-7)

Propiedades del aire a la presión de 1 atm.

Temperatura ($T, ^\circ\text{C}$)	Densidad ($\rho, \text{kg/m}^3$)	Calor específico ($C_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$)	Conductividad térmica ($k, \text{W/m} \cdot \text{K}$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, \text{m}^2/\text{s}$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, \text{kg/m} \cdot \text{s}$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, \text{kg/m} \cdot \text{s}$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/\text{K}$)
-150	2.866	983	0.01171	0.4158	0.8636	0.3013	0.7246	---
-100	2.038	966	0.01582	0.8036	1.189	0.5837	0.7263	---
-50	1.582	999	0.01979	1.252	1.474	0.9319	0.7440	---
-40	1.514	1002	0.02057	1.356	1.527	1.008	0.7436	---
-30	1.451	1004	0.02134	1.465	1.579	1.087	0.7425	---
-20	1.394	1005	0.02211	1.578	1.630	1.169	0.7408	---
-10	1.341	1006	0.02288	1.696	1.680	1.252	0.7367	---
0	1.292	1006	0.02364	1.818	1.729	1.338	0.7362	---
5	1.269	1006	0.02401	1.880	1.754	1.382	0.7350	---
10	1.246	1006	0.02439	1.944	1.778	1.426	0.7336	---
15	1.225	1007	0.02476	2.009	1.802	1.470	0.7323	---
20	1.204	1007	0.02514	2.074	1.825	1.516	0.7309	---
25	1.184	1007	0.02551	2.141	1.849	1.562	0.7296	---
30	1.164	1007	0.02588	2.208	1.872	1.608	0.7282	---
35	1.145	1007	0.02625	2.277	1.895	1.655	0.7268	---
40	1.127	1007	0.02662	2.346	1.918	1.701	0.7255	---
45	1.109	1007	0.02699	2.416	1.941	1.750	0.7241	---
50	1.092	1007	0.02735	2.487	1.963	1.798	0.7228	---
60	1.059	1007	0.02808	2.632	2.008	1.896	0.7202	---

70	1.028	1007	0.02881	2.780	2.052	1.995	0.7177	---
80	0.9994	1008	0.02953	2.931	2.096	2.097	0.7154	---
90	0.9718	1008	0.03024	3.086	2.139	2.201	0.7132	---
100	0.9458	1009	0.03095	3.243	2.181	2.306	0.7111	---
120	0.8977	1011	0.03235	3.565	2.264	2.522	0.7073	---
140	0.8542	1013	0.03374	3.898	2.345	2.745	0.7041	---
160	0.8148	1016	0.03511	4.241	2.420	2.975	0.7014	---
180	0.7788	1019	0.03646	4.593	2.504	3.212	0.6992	---
200	0.7459	1023	0.03779	4.954	2.577	3.455	0.6974	---
250	0.6746	1033	0.04104	5.890	2.760	4.091	0.6946	---
300	0.6158	1044	0.04418	6.871	2.934	4.765	0.6935	---
350	0.5664	1056	0.04721	7.892	3.101	5.475	0.6937	---
400	0.5243	1069	0.05015	8.951	3.261	6.219	0.6948	---
450	0.4880	1081	0.05298	10.04	3.415	6.997	0.6965	---
500	0.4565	1093	0.05572	11.17	3.563	7.806	0.6986	---
600	0.4042	1115	0.06093	13.52	3.846	9.515	0.7037	---
700	0.3627	1135	0.06581	15.98	4.111	11.33	0.7092	---
800	0.3289	1153	0.07037	18.55	4.362	13.26	0.7149	---
900	0.3008	1169	0.07465	21.22	4.600	15.29	0.7206	---
1000	0.2772	1184	0.07868	23.98	4.826	17.41	0.7260	---
1500	0.1990	1234	0.09599	39.08	5.817	29.22	0.7478	---
2000	0.1553	1264	0.11113	56.64	6.630	42.70	0.7539	---

Nota: Para los gases ideales, el calor específico, la conductividad térmica y el número de Prandtl son independientes de la presión. La densidad, la difusividad térmica y la viscosidad cinemática (en atm) diferente de 1 atm se determinan al multiplicar los valores de la densidad a la temperatura dada por la presión y al dividir la viscosidad dinámica y la difusividad térmica entre la presión.

APÉNDICE (TABLA A-8)

Propiedades de algunos gases la presión de 1 atm.**Bióxido de carbono (CO_2)**

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m.s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m.s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	2.4035	746	0.01051	0.5860	1.129	0.4699	0.8019	---
0	1.9635	811	0.01456	0.9141	1.375	0.7003	0.7661	---
50	1.6597	866.6	0.01858	1.291	1.612	0.9714	0.7520	---
100	1.4373	914.8	0.02257	1.716	1.841	1.281	0.7464	---
150	1.2675	957.4	0.02652	2.186	2.063	1.627	0.7445	---
200	1.1336	995.2	0.03044	2.698	2.276	2.008	0.7442	---
300	0.9358	1060	0.03814	3.847	2.682	2.866	0.7450	---
400	0.7968	1112	0.04565	5.151	3.061	3.842	0.7458	---
500	0.6937	1156	0.05293	6.600	3.416	4.924	0.7460	---
1000	0.4213	1292	0.08491	15.60	4.898	11.62	0.7455	---
1500	0.3025	1356	0.10688	26.06	6.106	20.19	0.7745	---
2000	0.2359	1387	0.11522	35.21	7.322	31.03	0.8815	---

Monóxido de carbono (CO)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	1.5297	1081	0.01901	1.149	1.378	0.9012	0.7840	---
0	1.2497	1048	0.02278	1.739	1.629	1.303	0.7499	---
50	1.0563	1039	0.02641	2.407	1.863	1.764	0.7328	---
100	0.9148	1041	0.02992	3.142	2.080	2.274	0.7239	---
150	0.8067	1049	0.03330	3.936	2.283	2.830	0.7191	---
200	0.7214	1060	0.03656	4.782	2.472	3.426	0.7164	---
300	0.5956	1085	0.04277	6.619	2.812	4.722	0.7134	---
400	0.5071	1111	0.04860	8.628	3.111	6.136	0.7111	---
500	0.4415	1135	0.05412	10.79	3.379	7.653	0.7087	---
1000	0.2681	1226	0.07894	24.01	4.557	17.00	0.7080	---
1500	0.1925	1276	0.10458	42.46	6.321	32.84	0.7783	---
2000	0.1502	1309	0.13833	70.34	9.826	65.43	0.9302	---

Metano (CH_4)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	0.8761	2243	0.02367	1.204	0.8564	0.9774	0.8116	---
0	0.7158	2217	0.03042	1.917	1.028	1.436	0.7494	---
50	0.6050	2302	0.03766	2.704	1.191	1.969	0.7282	---
100	0.5240	2443	0.04534	2.543	1.345	2.567	0.7247	---
150	0.4620	2611	0.05344	4.431	1.491	3.227	0.7284	---
200	0.4132	2719	0.06194	5.370	1.630	3.944	0.7344	---
300	0.3411	3158	0.07996	7.422	1.886	5.529	0.7450	---
400	0.2904	3510	0.09918	9.727	2.119	7.297	0.7501	---
500	0.2529	3836	0.11933	12.30	2.334	9.228	0.7502	---
1000	0.1536	5042	0.22562	29.14	3.281	21.36	7331	---
1500	0.1103	5701	0.31857	50.68	4.434	40.22	0.7936	---
2000	0.0860	6001	0.36750	71.20	6.360	73.95	1.0386	---

Hidrógeno (H_2)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	0.11010	12635	0.1404	10.09	0.7293	6.624	0.6562	---
0	0.08995	13920	0.1652	13.19	0.8391	9.329	0.7071	---
50	0.07603	14349	0.1881	17.24	0.9427	12.40	0.7191	---
100	0.06584	14473	0.2095	21.99	1.041	15.82	0.7196	---
150	0.05806	14492	0.2296	27.29	1.136	19.57	0.7174	---
200	0.05193	14482	0.2486	33.06	1.228	23.65	0.7155	---
300	0.04287	14481	0.2843	45.80	1.403	32.74	0.7149	---
400	0.03650	14540	0.3180	59.92	1.570	43.02	0.7179	---
500	0.03178	14653	0.3509	75.35	1.730	54.43	0.7224	---
1000	0.01930	15577	0.5206	173.2	2.455	127.2	0.7345	---
1500	0.01386	16553	0.6581	286.9	3.099	223.7	0.7795	---
2000	0.01081	17400	0.5480	291.4	3.690	341.4	1.1717	---

Nitrógeno (N_2)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	1.5299	957.3	0.02001	1.366	1.390	0.9091	0.6655	---
0	1.2498	1035	0.02384	1.843	1.640	1.312	0.7121	---
50	1.0564	1042	0.02746	2.494	1.874	1.774	0.7114	---
100	0.9149	1041	0.03090	3.244	2.094	2.289	0.7056	---
150	0.8068	1043	0.03416	4.058	2.300	2.851	0.7025	---
200	0.7215	1050	0.03727	4.921	2.494	3.457	0.7025	---
300	0.5956	1070	0.04309	6.758	2.849	4.783	0.7078	---
400	0.5072	1095	0.04848	8.727	3.166	6.242	0.7153	---
500	0.4416	1120	0.05358	10.83	3.451	7.816	0.7215	---
1000	0.2681	1213	0.07938	24.40	4.594	17.13	0.7022	---
1500	0.1925	1266	0.11793	48.39	5.562	28.89	0.5969	---
2000	0.1502	1297	0.18590	95.43	6.426	42.78	0.4483	---

Oxígeno (O_2)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	1.7475	984.4	0.02067	1.201	1.616	0.9246	0.7694	---
0	1.4277	928.7	0.02472	1.865	1.916	1.342	0.7198	---
50	1.2068	921.7	0.02867	12.577	2.194	1.818	0.7053	---
100	1.0451	931.8	0.03254	3-342	2.451	2.346	0.7019	---
150	0.9216	947.6	0.03637	4.164	2.694	2.923	0.7019	---
200	0.8242	964.7	0.04014	5.048	2.923	3.546	0.7025	---
300	0.6804	997.1	0.04751	7.003	3.350	4.923	0.7030	---
400	0.5793	1025	0.05463	9.204	3.744	6.463	0.7023	---
500	0.5044	1048	0.06148	11.63	4.114	8.156	0.7010	---
1000	0.3063	1121	0.09198	26.78	5.732	18.71	0.6986	---
1500	0.2199	1165	0.11901	46.43	7.133	32.43	0.6985	---
2000	0.1716	1201	0.14705	71.39	8.417	49.07	0.6873	---

Vapor de agua (H_2O)

Temperatura ($T, ^\circ C$)	Densidad ($\rho, kg/m^3$)	Calor específico ($C_p, J/kg - K$)	Conductividad térmica ($k, W/m. K$)	Difusividad térmica ($\alpha \times 10^5, m^2/s$)	Viscosidad dinámica ($\mu \times 10^5, kg/m. s$)	Viscosidad cinemática ($\nu \times 10^5, kg/m. s$)	Número de Prandtl, P_r	Coefficiente de expansión volumétrica ($\beta \times 10^4, 1/K$)
-50	0.9839	1892	0.01353	0.7271	0.7187	0.7305	1.0047	---
0	0.8038	1874	0.01673	1.110	0.8956	1.114	1.0033	---
50	0.6794	1874	0.02032	1.596	1.078	1.587	0.9944	---
100	0.5884	1887	0.02429	2.187	1.265	2.150	0.9830	---
150	0.5189	1908	0.02861	2.890	1.456	2.806	0.9712	---
200	0.4640	1935	0.03326	3.705	1.650	3.556	0.9599	---
300	0.3821	1997	0.04345	5.680	2.045	5.340	0.9401	---
400	0.3262	2066	0.05467	8.114	2.446	7.498	0.9240	---
500	0.2840	2137	0.06677	11.00	2.847	10.02	0.9108	---
1000	0.1725	2471	0.13623	31.96	4.762	27.61	0.8639	---
1500	0.1238	2736	0.21301	62.88	6.411	51.77	0.8233	---
2000	0.0966	2928		103.2	7.808	80.84	0.7833	---

Nota: Para los gases ideales, el calor específico, la conductividad térmica y el número de Prandtl son independientes de la presión. La densidad, la difusividad térmica y la viscosidad cinemática (en atm) diferente de 1 atm se determinan al multiplicar los valores de la densidad a la temperatura dada por la presión y al dividir la viscosidad dinámica y la difusividad térmica entre la presión.