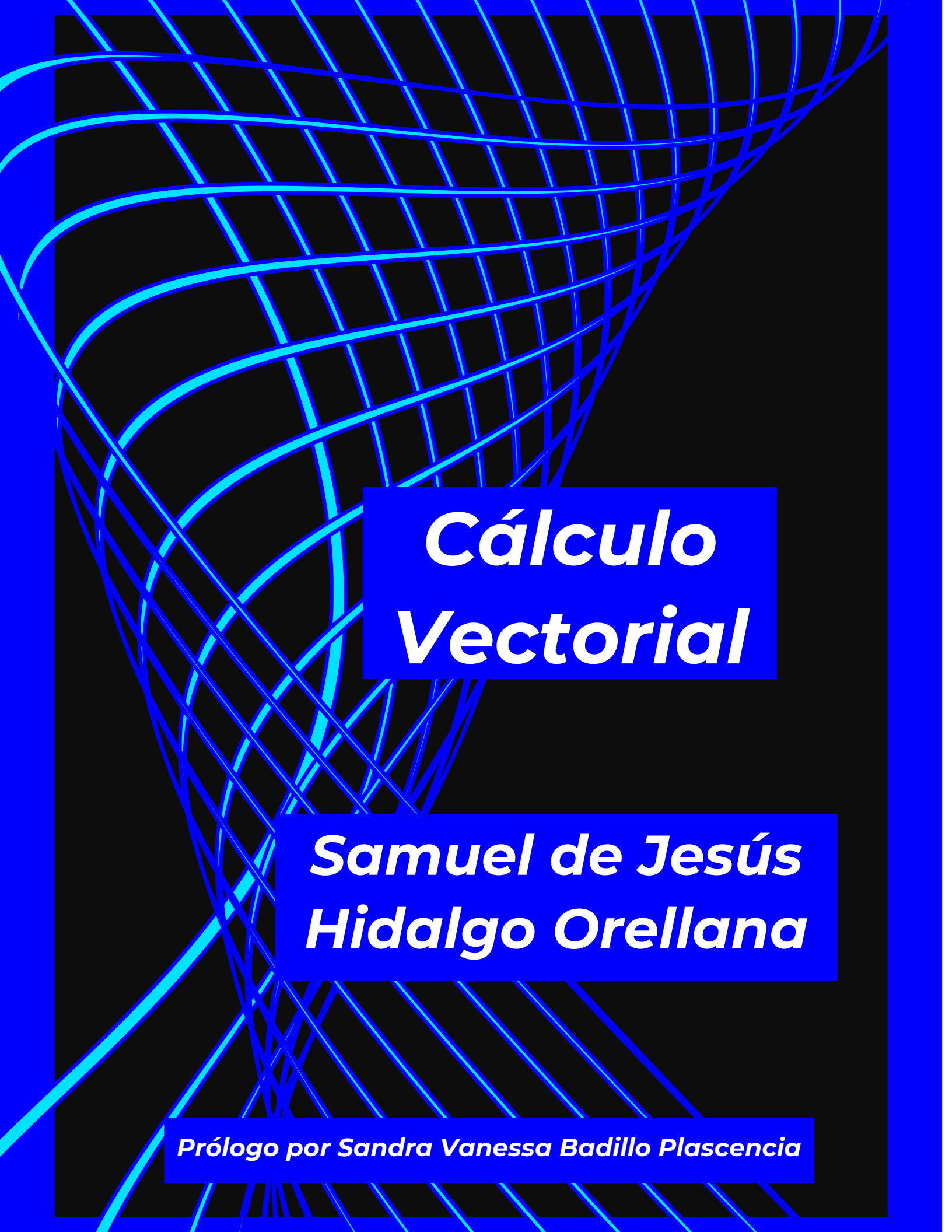


The background of the cover is a solid black field. Overlaid on this are numerous thin, bright blue lines that curve and intersect to form a complex, web-like pattern. The lines are more densely packed on the left side and become more sparse towards the right, creating a sense of depth and movement.

Cálculo Vectorial

***Samuel de Jesús
Hidalgo Orellana***

Prólogo por Sandra Vanessa Badillo Plascencia

Contenido

Introducción

Página

7

1. Vectores en el espacio

Introducción.....	8
1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica.....	9
1.2 Álgebra vectorial y su geometría.....	9
1.3 Producto escalar y vectorial.....	14
1.4 Ecuación de la recta.....	22
1.5 Ecuación del plano y serie de ejercicios de la unidad	26
1.6 Aplicaciones.....	55
Conclusiones.....	56
Bibliografía.....	57

2. Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Introducción	
2.1 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica.....	59
2.2. Derivada de una curva en forma paramétrica.....	68
2.3 Tangentes a una curva.....	68
2.4 Área y longitud de arco.....	71
2.5 Curvas planas y graficas en coordenadas polares.....	74
2.6 Área y longitud de arco en coordenadas polares.....	87
2.7 Problemas resueltos de la unidad II.....	105
Conclusiones.....	116
Bibliografía.....	118

3. Funciones vectoriales de una variable real

Introducción.....	121
3.1 Definición de función vectorial de una variable real.....	122
3.2 Límites y continuidad de una función vectorial.....	128
3.3 Derivada de una función vectorial.....	134
3.4 Integración de funciones vectoriales.....	142
3.5 Longitud de arco.....	151
3.6 Vectores tangente, normal y binormal.....	155
3.7 Curvatura.....	155

3.8 Aplicaciones.....	177
Conclusiones.....	179
Bibliografía.....	180

4. Funciones reales de varias variables

4.1 Introducción y definición de una función de varias variables.....	183
4.2 Gráfica de una función de varias variables.....	183
4.3 Curvas y superficies de nivel.....	190
4.4 Límite y continuidad de una función de varias variables.....	196
4.5 Derivadas parciales.....	205
4.6 Derivadas parciales de orden superior.....	207
4.7 Incrementos y diferenciales	216
4.8 Regla de la cadena y derivada implícita.....	218
4.9 Derivada direccional y gradiente.....	231
4.10 Valores extremos de funciones de varias variables.....	239
Conclusiones.....	246
Bibliografía.....	247

5. Integración múltiple

Introducción.....	250
5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles.....	251
5.2 Integral doble en coordenadas rectangulares.....	253
5.3 Integrales iteradas.....	253
5.4 Integral doble en coordenadas polares.....	266
5.5 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen.....	275
5.6 Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas.....	285
5.7 Campos vectoriales.....	300
5.8 La Integral de línea.....	308
5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.....	318
5.10 Teoremas de integrales. Aplicaciones	321
Conclusiones.....	322
Bibliografía.....	323

© 2025 Tecnológico Nacional de México

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin autorización previa por escrito del Tecnológico Nacional de México.

ISBN: En trámite

Primera edición, 2025.

Instituto Tecnológico de Ensenada. Tecnológico Nacional de México

Ensenada, Baja California, México

A mis hijas, Nadia, Enya y Kendra,
a mi hijos, Ian y Jorge,
y a mi esposa Lupita, mi constante inspiración:
gracias por su amor y paciencia,
que hicieron posible este libro,
a pesar del tiempo que consumió.
Como diría Han Kang,
en la quietud de los días que se desvanecen,
ustedes fueron mi luz y mi refugio.

Prólogo

Este libro es el resultado de la extensa trayectoria del profesor Samuel de Jesús Hidalgo Orellana, compañero docente de nuestra institución con más de tres décadas dedicadas a la enseñanza y la transmisión del conocimiento en el ámbito de las matemáticas aplicadas, el cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales. Constituye los primeros apuntes de cálculo vectorial elaborados específicamente para los estudiantes del Instituto Tecnológico de Ensenada, con el propósito de satisfacer la necesidad de desarrollar problemas de manera detallada y accesible, fomentando una comprensión profunda tanto para alumnos como para docentes del Tecnológico Nacional de México. El profesor Hidalgo Orellana, al constatar que las fuentes de información disponibles a menudo carecían de claridad en los pasos necesarios para resolver ejercicios, optó por resolver paso a paso una serie de problemas ejemplificados. Esta obra, diseñada con un enfoque didáctico, incorpora representaciones gráficas de los resultados, elaboradas mediante software especializado como Maple, Matlab, Wolfram Mathematica, entre otros, que enriquecen la comprensión y proporcionan a los docentes del Tecnológico Nacional de México herramientas valiosas para la enseñanza de la asignatura. Con un enfoque que armoniza la fundamentación teórica con la aplicación práctica, este libro busca ofrecer claridad y precisión, convirtiéndose en un recurso esencial para los estudiantes y profesionales del Tecnológico Nacional de México. Su estructura y contenido están pensados para promover una comprensión rigurosa y profunda de los conceptos y técnicas del cálculo vectorial, facilitando el aprendizaje y la enseñanza en esta institución.

Maestra Sandra Vanessa Badillo Plascencia

Tema I

1. Vectores en el espacio

Introducción

1.1 Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica

1.2 Álgebra vectorial y su geometría

1.3 Producto escalar y vectorial

1.4 Ecuación de la recta

1.5 Ecuación del plano y serie de ejercicios de la unidad

1.6 Aplicaciones

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

El libro de apuntes de Cálculo Vectorial es un material didáctico exhaustivo desarrollado como resultado de un proyecto de año sabático en el Instituto Tecnológico de Ensenada, diseñado para cubrir al 100% los temas de la asignatura de Cálculo Vectorial impartida en los planes de estudio de las carreras de Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Eléctrica y Electrónica, e Ingeniería en Sistemas. Este trabajo, fruto de muchas horas de dedicación, ofrece un enfoque integral que combina una sólida base teórica con aplicaciones prácticas, incluyendo más de 250 problemas resueltos que facilitan la comprensión de los conceptos clave por parte de los estudiantes. Además, se emplearon herramientas computacionales como Mathematica, Maple, Matlab y Octave para generar gráficas que enriquecen la visualización y solución de problemas, haciendo el contenido más accesible y comprensible para el nivel superior.

El contenido del libro se organiza en cinco grandes temas, cada uno abordado con una estructura que incluye definiciones, teoremas, demostraciones y aplicaciones prácticas:

Vectores en el espacio: Se introduce la definición de vectores en el plano y el espacio, junto con su interpretación geométrica. Se exploran operaciones de álgebra vectorial, el producto escalar y vectorial, así como las ecuaciones de la recta y el plano. Este tema concluye con aplicaciones prácticas que conectan los conceptos con problemas reales.

Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares: Se estudian las ecuaciones paramétricas de curvas planas, su representación gráfica, derivadas, tangentes, cálculo de áreas y longitud de arco. También se abordan las curvas en coordenadas polares y el cálculo en este sistema, destacando su utilidad en problemas geométricos.

Funciones vectoriales de una variable real: Este apartado define las funciones vectoriales, analizando sus límites, continuidad, derivadas e integrales. Se exploran conceptos como longitud de arco, vectores tangentes, normal y binormal, así como la curvatura, finalizando con aplicaciones prácticas.

Funciones reales de varias variables: Se presenta la definición de funciones de varias variables, sus gráficas, curvas y superficies de nivel. Se estudian límites, continuidad, derivadas parciales, incrementos, diferenciales, la regla de la cadena, derivadas de orden superior, derivada direccional, gradiente y valores extremos, proporcionando una base sólida para el análisis multivariable.

Integración múltiple: Este tema cubre el cálculo de áreas mediante integrales dobles, integrales iteradas, integrales dobles en coordenadas rectangulares y polares, así como integrales triples en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas para el cálculo de volúmenes. También se exploran campos vectoriales, integrales de línea, divergencia, rotacional y su interpretación geométrica y física, junto con teoremas de integración y aplicaciones prácticas.

El libro destaca por su enfoque pedagógico, integrando teoría y práctica de manera equilibrada, lo que lo convierte en un recurso valioso tanto para estudiantes como para docentes del área de ciencias básicas. Su diseño permite utilizarlo como material de apoyo adicional en la enseñanza, reforzando el aprendizaje mediante ejemplos resueltos y visualizaciones generadas por software especializado. Este esfuerzo refleja un compromiso con la calidad educativa en el ámbito del cálculo vectorial, ofreciendo un recurso completo y bien estructurado para la formación de ingenieros.

1

Vectores en el espacio

En esta sección se presenta el concepto esencial de vector, una magnitud definida por su longitud y dirección, explorado en profundidad tanto en dos como en tres dimensiones. A continuación, se desarrolla rigurosamente el álgebra vectorial, abarcando operaciones clave como la suma, resta y diversas formas de combinación vectorial. Se destacan dos operaciones fundamentales: el producto escalar, que genera un valor numérico, y el producto vectorial, que produce un nuevo vector. El estudio culmina con un análisis detallado de los elementos fundamentales de la geometría tridimensional, incluyendo rectas, planos y superficies elementales, sentando las bases para aplicaciones avanzadas.

1.1. Definición de un vector en el plano y en el espacio y su interpretación geométrica

Definición en el plano ($\mathbb{R}^2$):

Un vector en el plano es una entidad matemática con magnitud y dirección, representada como una pareja ordenada $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, donde v_1 y v_2 son las componentes en los ejes (x) e (y). Geométricamente, un vector se visualiza como una flecha en el plano (xy), con su origen en un punto (a menudo $(0, 0)$) y su extremo en (v_1, v_2) . La magnitud del vector es $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, y su dirección está dada por el ángulo que forma con el eje (x).

Definición en el espacio ($\mathbb{R}^3$):

En el espacio tridimensional, un vector es una terna ordenada $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, donde v_1 , v_2 , y v_3 son las componentes en los ejes (x), (y), y (z). Geométricamente, se representa como una flecha en $\mathbb{R}^3$, con origen en $((0, 0, 0))$ y extremo en (v_1, v_2, v_3) . La magnitud es $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, y su dirección está determinada por los ángulos que forma con los ejes coordenados.

Interpretación geométrica:

En ambos casos, un vector representa un desplazamiento o una cantidad dirigida. En el plano, describe movimientos en dos dimensiones (por ejemplo, velocidad en un mapa). En el espacio, modela fenómenos tridimensionales (por ejemplo, fuerza o trayectoria en el espacio). La flecha del vector indica su dirección, y su longitud refleja su magnitud. Los vectores son fundamentales para describir relaciones geométricas, como paralelismo, perpendicularidad, o transformaciones lineales, y son herramientas clave en física, ingeniería y matemáticas.

1.2 Álgebra vectorial y su geometría

El álgebra vectorial es una rama de las matemáticas que estudia los vectores, que son cantidades caracterizadas por tener magnitud y dirección. En contraste con los escalares, que solo tienen magnitud, los vectores permiten modelar fenómenos físicos como fuerzas, velocidades y desplazamientos en espacios bidimensionales ($\mathbb{R}^2$) o tridimensionales ($\mathbb{R}^3$). Su estudio combina operaciones algebraicas con interpretaciones geométricas, proporcionando herramientas esenciales en ingeniería, física y ciencias computacionales.

Los vectores surgen de forma natural en muchas situaciones. Por ejemplo, los campos eléctricos y magnéticos, el flujo de aire sobre el ala de un avión y la velocidad y aceleración de partículas elementales se describen mediante vectores. En esta sección, examinamos los vectores en el plano xy ; luego, ampliamos el concepto a tres dimensiones.

No todas las cantidades se representan mediante vectores. Por ejemplo, la masa, la temperatura y el precio tienen magnitud, pero no dirección. Estas cantidades se describen mediante números reales y se denominan escalares.

Vectores, vectores iguales, escalares y vector cero

Vectores:

Un vector es una cantidad que tiene magnitud (o longitud) y dirección. En un espacio euclidiano (R^n), un vector ($\mathbf{v}$) se representa como: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, donde $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ son las componentes del vector. La magnitud o norma de ($\mathbf{v}$) se calcula como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Vectores iguales:

Dos vectores ($\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$) y ($\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$) son iguales si tienen la misma magnitud y dirección, lo que implica que sus componentes son idénticas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{si y solo si} \quad u_i = v_i \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Escalares: Un escalar es una cantidad que tiene magnitud, pero no dirección. En términos matemáticos, un escalar es un número real, es decir, ($c \in R$). Ejemplos incluyen la temperatura, la masa o un número real cualquiera.

Vector cero: El vector cero, denotado como ($\mathbf{0}$), es un vector cuya magnitud es cero y no tiene dirección definida. En (R^n), se representa como: $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Su magnitud es:

$$|\mathbf{0}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 0.$$

Definición

Multiplicación por un escalar y vectores paralelos

Multiplicación por un escalar: Dado un escalar $c \in R$ y un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, el múltiplo escalar $c\mathbf{v}$ es un vector definido por $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n)$.

La longitud (o norma) de $c\mathbf{v}$ es $|c| \cdot |\mathbf{v}|$, donde $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Si ($c > 0$), el vector ($c\mathbf{v}$) tiene la misma dirección que ($\mathbf{v}$).

Si ($c < 0$), el vector ($c\mathbf{v}$) tiene la dirección opuesta a ($\mathbf{v}$).

Si ($c = 0$), entonces ($c\mathbf{v} = \mathbf{0}$), es el vector nulo

Vectores paralelos:

Dos vectores ($\mathbf{u}$) y ($\mathbf{v}$) son paralelos si existe un escalar ($c \neq 0$) tal que: $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ o equivalentemente, $\mathbf{v} = \frac{1}{c}\mathbf{u}$. Esto implica que ($\mathbf{u}$) y ($\mathbf{v}$) tienen la misma dirección si ($c > 0$) o dirección opuesta si ($c < 0$).

Suma y resta de vectores

La suma vectorial de dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ puede representarse geoméricamente de dos maneras equivalentes:

Regla del Triángulo:

Para sumar $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, se posiciona el origen de $\mathbf{v}$ en la punta de $\mathbf{u}$. El vector resultante $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es aquel que se extiende desde el origen de $\mathbf{u}$ hasta la punta de $\mathbf{v}$.

Regla del Paralelogramo:

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, se colocan sus orígenes en un punto común, formando los lados adyacentes de un paralelogramo. Completando los lados opuestos, el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ corresponde a la diagonal del paralelogramo que parte desde el origen común de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Ambas reglas generan el mismo vector suma.

La resta vectorial $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se define como $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, donde $-\mathbf{v}$ es el vector opuesto de $\mathbf{v}$.

Geoméricamente: Usando la regla del triángulo, se coloca el origen de $-\mathbf{v}$ en la punta de $\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se extiende desde el origen de $\mathbf{u}$ hasta la punta de $-\mathbf{v}$.

Alternativamente, si los orígenes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ coinciden, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que va desde la punta de $\mathbf{v}$ hasta la punta de $\mathbf{u}$.

Definición

Vectores de Posición y Componentes Vectoriales

Un vector $\mathbf{v}$ que tiene su origen en el punto (0,0) y su extremo en el punto (v_1, v_2) en el plano cartesiano se conoce como vector de posición o se dice que está en posición estándar. Este vector se representa como:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Los valores v_1 y v_2 son las componentes del vector en los ejes (x) e (y), respectivamente. Dos vectores de posición $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$

son iguales si y solo si sus componentes son idénticas, es decir: $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Magnitud

La magnitud (o norma) de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$ es la longitud del vector, que representa su tamaño sin considerar su dirección. Matemáticamente, se calcula como:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Interpretación geométrica: La magnitud corresponde a la distancia euclidiana desde el origen $(0,0, \dots, 0)$ hasta el punto definido por las componentes del vector $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Definición

Magnitud de un Vector

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en el plano, el vector $\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ tiene una magnitud (o norma), denotada $\| \overrightarrow{PQ} \|$ que corresponde a la distancia euclidiana entre (P) y (Q) :

$$\| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Para un vector de posición $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ (con origen $(0,0)$ y extremo en (v_1, v_2)), su magnitud es:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Operaciones entre Vectores en $\mathbb{R}^2$

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, y (c) un escalar en $\mathbb{R}$. Las operaciones entre vectores se definen como sigue:

Suma de vectores:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle.$$

La suma combina las componentes correspondientes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Resta de vectores:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle.$$

La resta, resta las componentes de $\mathbf{v}$ de las de $\mathbf{u}$.

Multiplicación por un escalar:

$$c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle.$$

El escalar (c) multiplica cada componente de $\mathbf{u}$, escalando su magnitud y, si $c < 0$, invirtiendo su dirección.

Vectores Unitarios

Un vector unitario es un vector cuya norma es igual a 1, es decir, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ en $\mathbb{R}^2$. Dos vectores unitarios fundamentales son los vectores unitarios de coordenadas $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, alineados con los ejes (x) e (y) , respectivamente. Estos vectores forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$, permitiendo expresar cualquier vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ como una combinación lineal $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$.

Los vectores unitarios son esenciales en aplicaciones como física, ingeniería y gráficos computacionales, donde normalizar vectores facilita cálculos de dirección y magnitud.

Propiedades de las operaciones vectoriales

Sean $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ vectores en $(\mathbb{R}^n)$ y $(a, c \in \mathbb{R})$ escalares. Las operaciones de suma vectorial y multiplicación por escalar satisfacen las siguientes propiedades.

Conmutatividad de la suma:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Asociatividad de la suma:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Elemento neutro de la suma:

Existe un vector cero ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$) tal que: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.

Elemento opuesto:

Para cada $(\mathbf{u})$, existe un vector $(-\mathbf{u})$ tal que: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Distributividad del escalar sobre la suma vectorial:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}.$$

Distributividad del vector sobre la suma de escalares:

$$(a + c)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + c\mathbf{u}.$$

Asociatividad de la multiplicación por escalar:

$$(ac)\mathbf{u} = a(c\mathbf{u}).$$

Elemento neutro del escalar:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Estas propiedades son válidas para vectores en cualquier número de dimensiones y son fundamentales en álgebra vectorial, con aplicaciones en física, ingeniería y geometría.

Vectores en $\mathbb{R}^3$

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ son una extensión natural de los vectores en $\mathbb{R}^2$, incorporando una tercera componente para describir fenómenos en el espacio tridimensional. Un vector de posición $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ tiene su origen en $(0,0,0)$ y su extremo en el punto (v_1, v_2, v_3) . La magnitud de $\mathbf{v}$ es:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son iguales si tienen las mismas componentes, lo que implica idéntica magnitud y dirección. Así, el vector $\overrightarrow{PQ}$ desde el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ hasta $Q(x_2, y_2, z_2)$ se define como:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle,$$

y tiene la misma magnitud y dirección que cualquier otro vector con las mismas componentes, como $\overrightarrow{RS}$ con (R) y (S) definidos de manera equivalente. Las operaciones vectoriales en $\mathbb{R}^2$ se extienden directamente a $\mathbb{R}^3$:

Suma de vectores: Dados $(\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle)$ y $(\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$, la suma es:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle.$$

Geométricamente, se obtiene mediante la regla del triángulo (colocar el origen de $(\mathbf{v})$ en la punta de $(\mathbf{u})$) o la regla del paralelogramo (formar un paralelogramo con $(\mathbf{u})$ y $(\mathbf{v})$ desde un origen común, donde la diagonal es la suma).

Multiplicación por escalar: Para un escalar $(c \in \mathbb{R})$, se define:

$$c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2, cu_3 \rangle.$$

Esta operación estira (si $(|c| > 1)$), comprime (si $(0 < |c| < 1)$) o invierte la dirección (si $(c < 0)$) del vector.

Magnitud y Vectores Unitarios en $\mathbb{R}^3$

La magnitud del vector $\overrightarrow{PQ}$, definido desde el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ hasta el punto $Q(x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$, se denota $\|\overrightarrow{PQ}\|$ y representa la distancia euclidiana entre (P) y (Q) . El vector $\overrightarrow{PQ}$ se expresa como:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle,$$

y su magnitud se calcula mediante la fórmula:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Esta magnitud es fundamental en aplicaciones como el cálculo de distancias en geometría tridimensional, el análisis de fuerzas en mecánica y el diseño de sistemas en ingeniería.

Los vectores unitarios de coordenadas en $(\mathbb{R}^2)$, $(i = \langle 1, 0 \rangle)$ y $(j = \langle 0, 1 \rangle)$, se extienden naturalmente a tres dimensiones. En $(\mathbb{R}^3)$, los tres vectores unitarios de coordenadas son:

$$i = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad j = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad k = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Estos vectores, alineados con los ejes (x) , (y) y (z) , respectivamente, tienen magnitud 1 y forman una base ortonormal para $(\mathbb{R}^3)$. Cualquier vector $(\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$ en $(\mathbb{R}^3)$ puede expresarse como una combinación lineal: $(\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k)$.

1.3 Producto escalar y vectorial

El producto escalar (o producto punto) es una operación fundamental en álgebra vectorial que asocia a dos vectores un valor escalar, definida para vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ en $\mathbb{R}^3$ como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Definición

Producto Escalar (o Producto Punto)

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ en $\mathbb{R}^3$ (o análogamente en $\mathbb{R}^2$), el producto escalar es una operación que produce un escalar, definida algebraicamente como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (\text{en } \mathbb{R}^3), \text{ o } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (\text{en } \mathbb{R}^2).$$

Geométricamente, para vectores no nulos, el producto escalar se expresa en términos de sus magnitudes y el ángulo θ (con $0 \leq \theta \leq \pi$) entre ellos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Propiedades clave:

Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y ambos vectores son no nulos, entonces $(\mathbf{u})$ y $(\mathbf{v})$ ortogonales ($(\theta = 90^\circ)$).

Si $(\mathbf{u} = \mathbf{0})$ o $(\mathbf{v} = \mathbf{0})$, entonces $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0)$, y el ángulo (θ) no está definido.

El producto escalar es conmutativo: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$.

Es distributivo respecto a la suma: $(\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$.

El producto escalar tiene aplicaciones fundamentales en física, como el cálculo del trabajo ($W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$), y en ingeniería, para determinar proyecciones escalares $(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|})$, analizar componentes de fuerzas o diseñar sistemas.

En geometría computacional, se usa para calcular ángulos en gráficos 3D.

El ángulo entre vectores

Si $(\theta = 0)$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$. (máximo positivo).

Esto indica que el producto escalar es máximo y positivo, ya que los vectores están alineados.

Si $(\theta < 90^\circ)$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ ($\cos \theta > 0$). (positivo). El valor es positivo, y su magnitud depende de $\cos \theta$. Se calcula usando las magnitudes y el coseno del ángulo conocido, o alternativamente, con las componentes:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Si $(\theta = \pi/2)$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. (ortogonalidad). Esto implica que los vectores son ortogonales, y el producto escalar siempre es cero, independientemente de sus magnitudes.

Si $(\theta > 90^\circ)$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ ($\cos \theta < 0$). (negativo). El valor es negativo, indicando que los vectores están orientados en direcciones opuestas. Se calcula con las magnitudes y $\cos \theta$, o con las componentes algebraicas.

Si $(\theta = \pi)$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$. (máximo negativo). El valor es negativo y de magnitud máxima, reflejando que los vectores están completamente opuestos.

Destacan dos casos especiales para vectores no nulos:

Vectores paralelos ($\theta = 0$) o ($\theta = \pi$)

Los vectores ($\mathbf{u}$) y ($\mathbf{v}$) son paralelos si y solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \pm |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$.

Si $\theta = 0$ (misma dirección), $\cos 0 = 1$, y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ (direcciones opuestas), $\cos \pi = -1$, y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$

Los vectores son perpendiculares ($\theta = \pi/2$) si y solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ya que $\cos \pi/2 = 0$.

El segundo caso da lugar a la importante propiedad de ortogonalidad

Definición

Vectores Ortogonales

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ para $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

se define como: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Geoméricamente, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son no nulos y ortogonales, forman un ángulo de 90° (perpendiculares), ya que: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta = 0$, $\cos \theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo No. 1

Cálculo del producto escalar

Dados los vectores, calculamos sus productos escalares.

Caso 1: $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 12\mathbf{k}$

Representamos los vectores en $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} = (6, -12, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 12)$

El producto escalar se calcula como: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (6)(0) + (-12)(0) + (0)(12) = 0 + 0 + 0 = 0$

Por lo tanto, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Caso 2: $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 1)$

Los vectores están en $\mathbb{R}^2$. El producto escalar es: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(0) + (1)(1) = 0 + 1 = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$

Caso 1: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$	Caso 2: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$
El resultado (0) indica que los vectores son ortogonales, lo cual es consistente con el hecho de que $\mathbf{u}$ está en el plano (xy) y $\mathbf{v}$ está en el eje (z).	El resultado (1) es directo, ya que los vectores están correctamente definidos en $\mathbb{R}^2$

Teorema

Producto escalar (producto punto)

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en (R^3) , el producto escalar se define como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

En general, para dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en (R^n) , el producto escalar se define como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Teorema

Propiedades del producto escalar

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores en R^n y (c) un escalar. El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

Conmutativa:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Homogeneidad:

$$c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}).$$

Distributiva:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

Positividad:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ si y solo si } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Propiedad del vector nulo:

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Proyecciones ortogonales

Dado dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en R^n , la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, es el vector que representa la componente de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Este vector se encuentra sobre la línea generada por $\mathbf{v}$ y se interpreta como la "sombra" de $\mathbf{u}$ proyectada ortogonalmente sobre dicha línea. La proyección se define como:

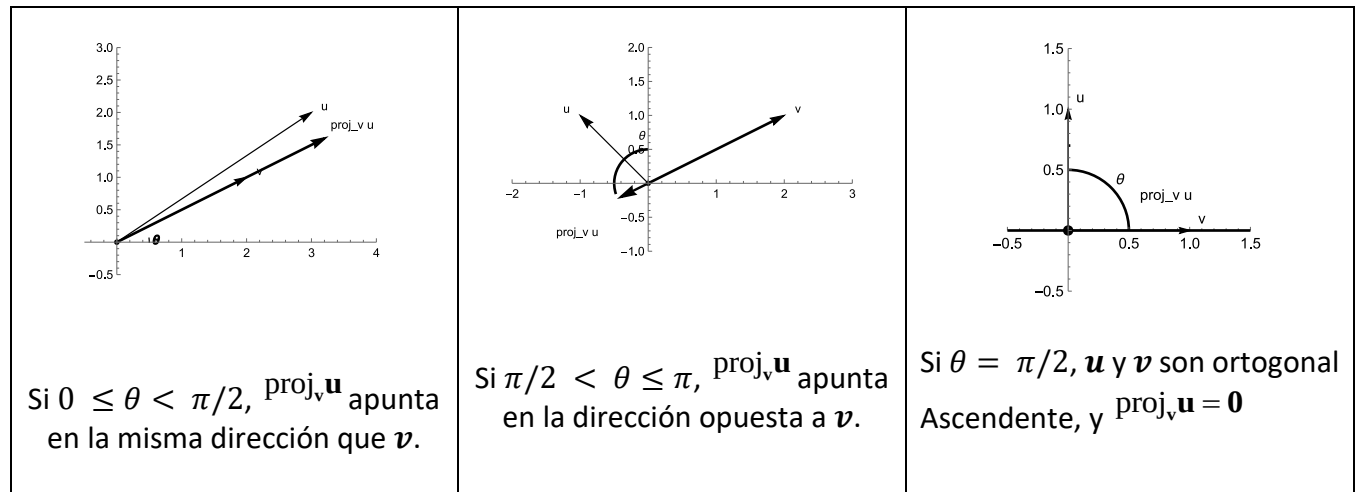
$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v}$$

El vector $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ tiene las siguientes propiedades, dependiendo del ángulo θ (con $0 \leq \theta \leq \pi$) entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

Si $0 \leq \theta < \pi/2$, $\text{proj}_v \mathbf{u}$ apunta en la misma dirección que $\mathbf{v}$.

Si $\pi/2 < \theta \leq \pi$, $\text{proj}_v \mathbf{u}$ apunta en la dirección opuesta a $\mathbf{v}$.

Si $\theta = \pi/2$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, y $\text{proj}_v \mathbf{u} = \mathbf{0}$



Definición

Proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. La proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada $\text{proj}_v \mathbf{u}$, es el vector que representa la componente de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Este vector yace en la línea generada por $\mathbf{v}$ y se define como:

$$\text{proj}_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v}$$

Geométricamente, $\text{proj}_v \mathbf{u}$ puede interpretarse como la "sombra" de $\mathbf{u}$ proyectada ortogonalmente sobre la línea que pasa por $\mathbf{v}$

Definición

Proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. La proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada $\text{proj}_v \mathbf{u}$, es el vector que representa la componente de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Este vector yace en la línea generada por $\mathbf{v}$ y se define como:

$$\text{proj}_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v}$$

Equivalentemente, si θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, la proyección puede expresarse como: $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

El componente escalar de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$, denotado $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, es: $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}| \cos \theta$

Geométricamente, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es la "sombra" de $\mathbf{u}$ proyectada ortogonalmente sobre la línea generada por $\mathbf{v}$

Producto vectorial (producto cruz)

El producto vectorial es una operación fundamental en el álgebra vectorial que permite combinar dos vectores en un espacio tridimensional para generar un nuevo vector con propiedades únicas. A diferencia del producto escalar, que produce un escalar, el producto vectorial resulta en un vector que es perpendicular al plano formado por los vectores originales. Esta característica lo convierte en una herramienta esencial en diversas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería, donde la orientación y la perpendicularidad son cruciales.

El producto vectorial surge de manera natural en aplicaciones físicas y geométricas. Por ejemplo, en mecánica, se utiliza para calcular el torque generado al aplicar una fuerza a un objeto en rotación, como cuando se usa una llave para girar un tornillo. La magnitud del torque depende de la fuerza aplicada, la distancia desde el punto de rotación y el ángulo entre ellos, mientras que su dirección indica el eje de rotación. En electromagnetismo, el producto vectorial describe la fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula cargada en movimiento dentro de un campo magnético, determinando la trayectoria curva de la partícula. En geometría, el producto vectorial permite encontrar un vector normal a un plano definido por dos vectores, lo que es útil en gráficos por computadora para calcular la orientación de superficies o en el diseño de estructuras. Además, en dinámica de fluidos, se emplea para analizar el momento angular o la vorticidad de un fluido en rotación.

Definición

Producto vectorial

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ cuya magnitud es: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$ donde θ (con $0 \leq \theta \leq \pi$) es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular al plano formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, determinada por la regla de la mano derecha: si los vectores se alinean desde un origen común, los dedos de la mano derecha se curvan de $\mathbf{u}$ hacia $\mathbf{v}$, y el pulgar indica la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. En términos de componentes, el producto vectorial se calcula como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos (o al menos uno es el vector nulo), y la dirección no está definida.

Teorema

Geometría del producto vectorial

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Paralelismo: Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos (es decir, $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, o al menos uno es el vector nulo) si y solo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Área del paralelogramo: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son lados adyacentes de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$, el área del paralelogramo está dada por: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$ donde θ (con $0 \leq \theta \leq \pi$) es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular al plano del paralelogramo, y su magnitud representa el área de dicho paralelogramo.

Nota: La perpendicularidad de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ al plano formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ permite interpretar geoméricamente el producto vectorial como un vector normal al paralelogramo.

Teorema

Propiedades del producto vectorial

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, y sean (a) y (b) escalares. El producto vectorial satisface las siguientes propiedades:

Anti conmutatividad:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

Compatibilidad con escalares:

$$(a\mathbf{u}) \times (b\mathbf{v}) = ab(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Distributividad respecto a la suma:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}). \quad \text{y} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Ortogonalidad:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \text{ es perpendicular a } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v}, \text{ es decir, } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ y } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Nota: El producto vectorial no es asociativo, es decir, en general, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Teorema

Productos vectoriales de los vectores unitarios

Sean $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, y $\mathbf{k} = (0,0,1)$ los vectores unitarios estándar en $\mathbb{R}^3$. Los productos vectoriales entre estos vectores satisfacen las siguientes relaciones:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$.
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Estas relaciones son consistentes con la regla de la mano derecha y reflejan la anti conmutatividad del producto vectorial ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$). Nota:

Estas propiedades son fundamentales para calcular el producto vectorial de vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^3$ expresados en la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

Teorema

Cálculo del producto vectorial mediante determinante

Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$,

$\mathbf{k} = (0,0,1)$ son los vectores unitarios estándar. El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ puede calcularse mediante el siguiente determinante formal:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Expandiendo el determinante a lo largo de la primera fila, se obtiene:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Es decir:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

El vector resultante es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y su dirección sigue la regla de la mano derecha.

Nota: El determinante es una notación mnemónica que simplifica el cálculo del producto vectorial en términos de las componentes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

1.4 Ecuación de la recta

El Sistema de Coordenadas xyz

Sistema de coordenadas tridimensional

Hasta ahora, el estudio del cálculo se ha centrado en funciones y vectores en el plano bidimensional (xy). Sin embargo, muchos fenómenos físicos, como la trayectoria de un avión que varía en altitud, requieren un sistema de coordenadas tridimensional. En este sistema, las posiciones se describen mediante tripletas ordenadas (x, y, z) , donde (x) y (y) representan las distancias horizontal y vertical en el plano, y (z) denota la altitud. El conjunto de todas las tripletas (x, y, z) forma el espacio tridimensional, denotado $\mathbb{R}^3$.

El sistema de coordenadas tridimensional cartesiano se define mediante tres ejes rectangulares mutuamente perpendiculares: el eje (x) , el eje (y) , y el eje (z) , que se intersectan en el origen $(0, 0, 0)$. El eje (z) es perpendicular al plano (xy) , extendiendo el sistema bidimensional. Los tres planos coordenados principales son:

- El plano (xy) , que contiene los ejes (x) y (y) (definido por $z = 0$).
- El plano (xz) , que contiene los ejes (x) y (z) (definido por $y = 0$).
- El plano (yz) , que contiene los ejes (y) y (z) (definido por $x = 0$).

Estos planos dividen $\mathbb{R}^3$ en ocho regiones llamadas octantes. El primer octante es la región donde $x, y, z \geq 0$, mientras que los otros octantes no tienen una nomenclatura estándar. Muchas propiedades de $\mathbb{R}^3$, como distancias y ángulos, son extensiones naturales de conceptos del plano (xy) , y son fundamentales en matemáticas, física e ingeniería.

Planos coordenados y octantes en $\mathbb{R}^3$

En el sistema de coordenadas cartesiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, tres planos coordenados principales, perpendiculares entre sí y que pasan por el origen $((0, 0, 0))$, dividen el espacio en regiones llamadas octantes. Estos planos son:

- Plano (xy) : Definido por $z = 0$, contiene los ejes (x) e (y) .
- Plano (xz) : Definido por $y = 0$, contiene los ejes (x) y (z) .
- Plano (yz) : Definido por $x = 0$, contiene los ejes (y) y (z) .

Los tres planos dividen $\mathbb{R}^3$ en ocho octantes, cada uno determinado por los signos de las coordenadas $((x, y, z))$. Los octantes se identifican como sigue:

Primer octante: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Segundo octante: $x < 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Tercer octante: $x < 0, y < 0, z \geq 0$.

Cuarto octante: $x \geq 0, y < 0, z \geq 0$.

Quinto octante: $x \geq 0, y \geq 0, z < 0$.

Sexto octante: $x < 0, y \geq 0, z < 0$.

Séptimo octante: $x < 0, y < 0, z < 0$.

Octavo octante: $x \geq 0, y < 0, z < 0$.

Nota: El primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) es el único con una convención de nomenclatura estándar, análogo a los cuadrantes en $\mathbb{R}^2$. Los octantes son útiles en aplicaciones geométricas y físicas para localizar puntos en el espacio tridimensional.

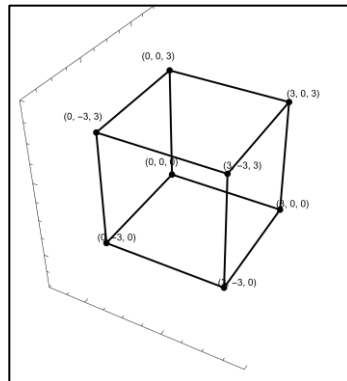
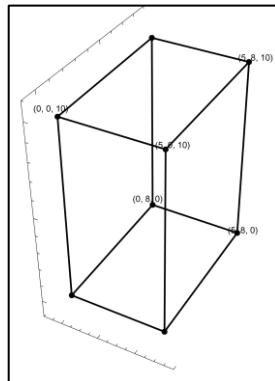
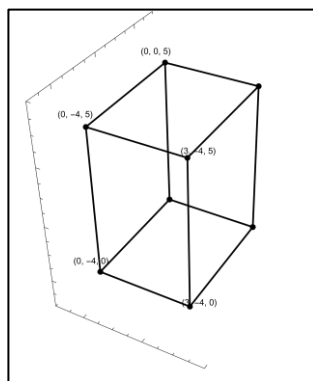
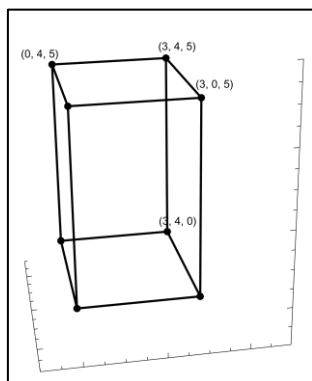
Puntos en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$

En el sistema de coordenadas cartesiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, los ejes (x), (y), y (z), mutuamente perpendiculares, se intersectan en el origen, denotado por $(0,0,0)$. Un punto en $\mathbb{R}^3$ se representa mediante una tripleta ordenada (a, b, c) , que describe la posición alcanzada al desplazarse desde el origen (a) unidades a lo largo del eje (x), (b) unidades a lo largo del eje (y), y (c) unidades a lo largo del eje (z). Si alguna coordenada es negativa, el desplazamiento ocurre en la dirección opuesta del eje correspondiente.

Para visualizar un punto (a, b, c) , se puede construir un paralelepípedo rectangular con un vértice en el origen $(0,0,0)$ y el vértice opuesto en (a, b, c) . Los otros vértices del paralelepípedo son $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(a, b, 0)$, $(a, 0, c)$, y $(0, b, c)$, definidos por los desplazamientos a lo largo de los ejes.

Nota: La tripleta (a, b, c) corresponde al vector de posición desde el origen al punto, y cada punto en $\mathbb{R}^3$ tiene una representación única en este sistema cartesiano.

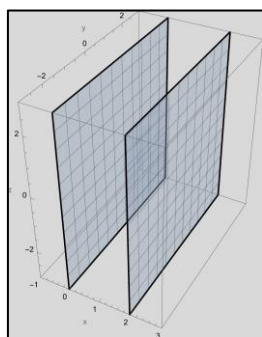
Ejemplo No. 2. Grafica las coordenadas de los vértices de las siguientes cajas rectangulares: $(3,0,5), B(3,4,0), C(0,4,5), D(3,4,5)$, y $A(3, -4,5), B(0, -4,0), C(0, -4,5), D(0,0,5)$, $E(3,-4,0)$, y $A(5, 0, 10), B(0, 8, 0), C(5, 8, 10), D(0, 0, 10), E(5, 8, 0)$, y un cubo con todos sus vértices a partir del punto $(0,-3,0)$.



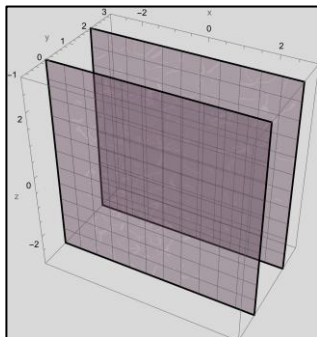
Ecuaciones de planos simples en $\mathbb{R}^3$

El plano (xy) está formado por todos los puntos en el espacio tridimensional (x, y, z) cuya coordenada (z) es igual a 0. Por lo tanto, se define como el conjunto $x, y, z) : z = 0\}$ y su ecuación es $z = 0$. De manera análoga, el plano (xz) se representa por la ecuación $y = 0$, y el plano (yz) por la ecuación $x = 0$.

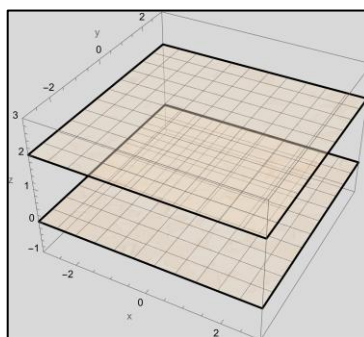
Los planos paralelos a los planos coordenados son sencillos de describir. Por ejemplo, la ecuación $x = 2$ representa el conjunto de puntos con coordenada $x = 2$, mientras que las coordenadas (y) y (z) son arbitrarias. Este plano es paralelo al plano (yz) y se encuentra a una distancia de 2 unidades de él. De forma similar, la ecuación $y = a$ describe un plano paralelo al plano (xz) , situado a $|a|$ unidades de distancia, y la ecuación $z = a$ corresponde a un plano horizontal paralelo al plano (xy) , a una distancia de $|a|$ unidades.



$$x = 2, x = 0$$



$$y = 2, y = 0$$



$$z = 2, z = 0$$

Ecuación de la recta

En el cálculo diferencial, la gráfica de una ecuación lineal con dos variables, $y = mx + b$, representa una recta, mientras que la gráfica de una ecuación cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, describe una parábola. Ambas se ubican en el plano (xy) (espacio bidimensional). Nuestro propósito ahora es extender este análisis al espacio tridimensional, explorando qué objetos geométricos básicos lo definen y cómo se describen mediante ecuaciones.

Entre los elementos más fundamentales en tres dimensiones destacan la recta y el plano. En esta sección de los apuntes, desarrollaremos las ecuaciones que los caracterizan y examinaremos sus propiedades y aplicaciones.

Rectas en el espacio

Dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$ determinan una recta única. Alternativamente, un punto y una dirección también definen una recta única. Aprovechamos estas propiedades para desarrollar dos descripciones distintas de rectas en el espacio: una basada en ecuaciones paramétricas y otra en ecuaciones vectoriales.

Ecuación de una recta

La ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ se expresa como $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, o equivalentemente, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle$, donde $-\infty < t < \infty$.

De manera equivalente, la ecuación paramétrica correspondiente de la recta se escribe como:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad \text{para } -\infty < t < \infty.$$

Donde:

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ es la ecuación vectorial de la recta,

$\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector en la dirección de la recta,

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo en el espacio.

Ejemplo No. 3.

Dada la ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, se expresa como $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición del punto P_0 , $\mathbf{v}$ es el vector director, y (t) es un parámetro real con $-\infty < t < \infty$.

Ecuación vectorial:

Punto dado: $P_0(1, 2, 4)$, por lo que $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, 4 \rangle$.

Vector director: $\mathbf{v} = \langle 5, -3, 1 \rangle$.

La ecuación vectorial de la recta (l) es:

Ecuación paramétrica:

Descomponiendo la ecuación vectorial en componentes, se obtiene:

$$x = 1 + 5t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = 4 + t, \quad \text{para } -\infty < t < \infty$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la recta (l) son:

Vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1, 2, 4 \rangle + t\langle 5, -3, 1 \rangle$$

Paramétrica:

$$x = 1 + 5t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = 4 + t, \quad -\infty < t < \infty.$$

1.5 Ecuación del plano y serie de ejercicios de la unidad

Intuitivamente, un plano se concibe como una superficie plana que se extiende infinitamente en todas las direcciones. En $\mathbb{R}^3$, tres puntos no colineales (que no se alineen en una misma recta) determinan un único plano. Alternativamente, un plano en $\mathbb{R}^3$ puede definirse de manera única por un punto sobre el plano y un vector no nulo ortogonal (perpendicular) a él. Este vector, conocido como vector normal, determina la orientación del plano.

Definición de un Plano en $\mathbb{R}^3$

Dado un punto fijo P_0 y un vector normal $\mathbf{n}$ distinto de cero, el conjunto de puntos (P) en $\mathbb{R}^3$ para los cuales el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$ se denomina plano.

Ecuación general del plano en $\mathbb{R}^3$

El plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con un vector normal no nulo $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ se describe mediante la ecuación general $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, o equivalente, $ax + by + cz = d$, donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Análisis de la ecuación del plano

Los coeficientes (a) , (b) y (c) en la ecuación general de un plano $ax + by + cz = d$ determinan la orientación del plano, ya que definen la dirección del vector normal $\langle a, b, c \rangle$. Por otro lado, el término constante (d) establece la ubicación del plano en el espacio. Si (a) , (b) y (c) se mantienen fijos mientras (d) varía, se genera una familia de planos paralelos, todos compartiendo la misma orientación.

Ejemplo No. 4

Encuentra una ecuación del plano que pasa por $P_0(2, -3, 4)$ con un vector normal $\mathbf{n} = \langle -1, 2, 3 \rangle$.

La ecuación de un plano que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ se deriva de la condición de que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ (donde $P(x, y, z)$ es cualquier punto del plano) sea ortogonal a $\mathbf{n}$. Esto se expresa como $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Paso 1: Identificar los datos

Punto dado: $P_0(2, -3, 4)$, por lo que $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 4)$.

Vector normal: $\mathbf{n} = \langle -1, 2, 3 \rangle$, donde $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$.

Paso 2: Formular la ecuación punto-normal

El vector $\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle x - 2, y - (-3), z - 4 \rangle = \langle x - 2, y + 3, z - 4 \rangle$.

La ortogonalidad implica: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Sustituyendo:

$$\langle -1, 2, 3 \rangle \cdot \langle x - 2, y + 3, z - 4 \rangle = 0$$

Desarrollando el producto escalar:

Paso 3: Simplificar la ecuación Distribuimos y resolvemos:

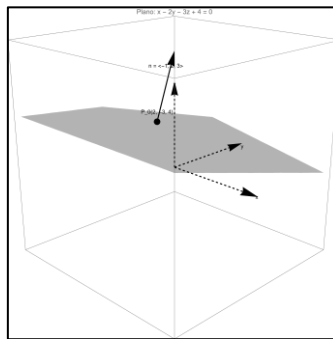
$$-(x - 2) + 2(y + 3) + 3(z - 4) = 0$$

$$-x + 2 + 2y + 6 + 3z - 12 = 0$$

$$-x + 2y + 3z + (2 + 6 - 12) = 0$$

$$-x + 2y + 3z - 4 = 0$$

La ecuación del plano es: $x - 2y - 3z + 4 = 0$



Ecuación del plano, el punto y el vector normal

Definición

Planos Paralelos y Ortogonales

Dos planos distintos en $\mathbb{R}^3$ se consideran paralelos si sus vectores normales respectivos, denotados como $\mathbf{n}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$, son paralelos, es decir, si existe un escalar $k \neq 0$ tal que $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1$. Por otro lado, dos planos se dicen ortogonales si sus vectores normales respectivos son perpendiculares, lo que se cumple cuando el producto escalar de $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ es cero, es decir, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Ejemplo No. 5

Encuentra la ecuación del plano (Q) que pasa por el punto $(-2,4,1)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + z = 4$.

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, es decir, si son múltiplos escalares uno del otro. La ecuación de un plano se puede expresar como $ax + by + cz = d$, donde $\langle a, b, c \rangle$ es el vector normal.

Paso 1: Identificar el vector normal del plano dado.

El plano dado es $3x - 2y + z = 4$. El vector normal de este plano es $\mathbf{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle$, determinado por los coeficientes de (x), (y) y (z).

Paso 2: Vector normal del plano (Q)

Dado que el plano (Q) es paralelo al plano dado, su vector normal $\mathbf{n}_2$ debe ser paralelo a $\mathbf{n}_1$. Por lo tanto, $\mathbf{n}_2 = \langle 3, -2, 1 \rangle$ (o un múltiplo escalar de este vector, pero la dirección es la misma).

Paso 3: Usar el punto para determinar la ecuación

La ecuación del plano que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ se deriva de la condición $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Punto dado: $P_0(-2,4,1)$, por lo que $(x_0, y_0, z_0) = (-2,4,1)$.

Vector normal: $\mathbf{n} = \langle 3, -2, 1 \rangle$.

El vector

$$\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle x - (-2), y - 4, z - 1 \rangle = \langle x + 2, y - 4, z - 1 \rangle.$$

La ecuación se obtiene como: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$\langle 3, -2, 1 \rangle \cdot \langle x + 2, y - 4, z - 1 \rangle = 0$$

Desarrollando el producto escalar:

$$3(x + 2) + (-2)(y - 4) + 1(z - 1) = 0$$

$$3x - 2y + z + (6 + 8 - 1) = 0$$

$$3x - 2y + z + 13 = 0$$

Paso 4: Forma general

La ecuación del plano (Q) en forma general es: $3x - 2y + z + 13 = 0$

Esta ecuación tiene el mismo vector normal $\langle 3, -2, 1 \rangle$ que el plano dado, confirmando que es paralelo, y pasa por el punto $(-2, 4, 1)$

Ejemplo No. 6

Componentes y magnitudes de vectores

Sean los puntos $(O(0,0))$, $(P(3,2))$, $(Q(4,2))$ y $R(-6, -1)$ en el plano cartesiano. Para cada uno de los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{PQ}$, realiza lo siguiente: Determina las componentes del vector. Calcula la magnitud del vector.

Solución: Componentes y magnitudes de vectores

Dados los puntos $(O(0,0))$, $(P(3,2))$, $(Q(4,2))$ y $(R(-6, -1))$ en el plano cartesiano, determinamos las componentes y calculamos la magnitud de los vectores $(\overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{OQ})$, $(\overrightarrow{OR})$ y $(\overrightarrow{PQ})$.

1. Vector $(\overrightarrow{OP})$

Las componentes del vector $(\overrightarrow{OP})$ son: $\overrightarrow{OP} = (3 - 0, 2 - 0) = (3, 2)$.

La magnitud es: $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

2. Vector $(\overrightarrow{OQ})$

Las componentes del vector $(\overrightarrow{OQ})$ son: $\overrightarrow{OQ} = (4 - 0, 2 - 0) = (4, 2)$.

La magnitud es: $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3. Vector $(\overrightarrow{OR})$

Las componentes del vector $(\overrightarrow{OR})$ son: $\overrightarrow{OR} = (-6 - 0, -1 - 0) = (-6, -1)$.

La magnitud es: $|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$.

4. Vector $(\overrightarrow{PQ})$

Las componentes del vector $(\overrightarrow{PQ})$ son: $\overrightarrow{PQ} = (4 - 3, 2 - 2) = (1, 0)$.

La magnitud es: $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

Ejemplo No. 7

Cálculo de vectores de posición

Dados los puntos $A(-2,0)$, $(B(6,16))$, $(C(1,4))$, $(D(5,4))$, $E(\sqrt{2},\sqrt{2})$, y $F(3,2)$ en el plano cartesiano, determina las componentes de los siguientes vectores de posición: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ Vector $\overrightarrow{AB}$: Desde $A(-2,0)$ a $(B(6,16))$, las componentes son $(6 - (-2), 16 - 0) = (8,16)$.

Vector $\overrightarrow{AC}$: Desde $A(-2,0)$ a $(C(1,4))$, las componentes son $(1 - (-2), 4 - 0) = (3,4)$.

Vector $\overrightarrow{EF}$: Desde $E(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(F(3,2))$, las componentes son $(3 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

Vector $\overrightarrow{CD}$: Desde $(C(1,4))$ a $(D(5,4))$, las componentes son $(5 - 1, 4 - 4) = (4,0)$.

Ejemplo No. 8

Operaciones vectoriales

Dados los vectores $\mathbf{u} = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (-4, 6)$ y $\mathbf{w} = (0, 8)$ en el plano cartesiano, realiza las siguientes operaciones vectoriales y expresa los resultados en la forma $((a, b))$: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{w} - \mathbf{u}$, $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, $(10\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w})$

$\mathbf{u} + \mathbf{v}$: Componentes: $(4 + (-4), -2 + 6) = (0, 4)$.

$\mathbf{w} - \mathbf{u}$: Componentes: $(0 - 4, 8 - (-2)) = (-4, 10)$.

$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$: Multiplicación escalar: $2\mathbf{u} = (8, -4)$, $3\mathbf{v} = (-12, 18)$. Suma: $(8 + (-12), -4 + 18) = (-4, 14)$.

$10\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$: Multiplicación escalar: $10\mathbf{u} = (40, -20)$, $3\mathbf{v} = (-12, 18)$. Resta: $(40 - (-12), -20 - 18) = (52, -38)$. Suma con $\mathbf{w}$: $(52 + 0, -38 + 8) = (52, -30)$

Ejemplo No. 9

Dados los vectores $\mathbf{u} = (3, -4)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$ y $\mathbf{w} = (-1, 0)$ en el plano cartesiano, realiza las siguientes operaciones:

a. Calcula la magnitud del vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

b. Calcula la magnitud del vector $-2\mathbf{v}$.

c. Determina dos vectores paralelos a $\mathbf{u}$ cuya magnitud sea cuatro veces la de $\mathbf{u}$.

Magnitud de $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$: Suma de componentes: $(3 + 1 - 1, -4 + 1 + 0) = (3, -3)$.

Magnitud: $\sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Magnitud de $-2\mathbf{v}$: Producto escalar: $-2 \cdot (1, 1) = (-2, -2)$. Magnitud: $\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Dos vectores paralelos a $\mathbf{u}$ con magnitud $4 \cdot |\mathbf{u}|$: Magnitud de $\mathbf{u}$: $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Magnitud deseada: $4 \cdot 5 = 20$.

Vectores paralelos: $k\mathbf{u} = (3k, -4k)$, con $5|k| = 20$, $|k| = 4$. Para $k = 4$: $4\mathbf{u} = (12, -16)$. Para $k = -4$: $-4\mathbf{u} = (-12, 16)$. Ambos tienen magnitud $\sqrt{(3k)^2 + (-4k)^2} = 5 \cdot 4 = 20$.

¿Cuál tiene mayor longitud $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ o $\mathbf{w} - \mathbf{u}$?

Cálculo de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$: Componentes: $(3 - 1, -4 - 1) = (2, -5)$. Magnitud: $\sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$.

Cálculo de $\mathbf{w} - \mathbf{u}$: Componentes: $(-1 - 3, 0 - (-4)) = (-4, 4)$. Magnitud: $\sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5.656$. Comparación: Como $4\sqrt{2} \approx 5.656 > \sqrt{29} \approx 5.385$, el vector $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ tiene mayor magnitud.

Ejemplo No. 10

Dado el vector $\mathbf{v} = (-5, 12)$ en el plano cartesiano, exprésalo como el producto de su magnitud y un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Magnitud de $\mathbf{v}$:

Para $\mathbf{v} = (-5, 12)$, la magnitud es $\sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(-5, 12)}{13} = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Producto final:

$$\mathbf{v} = 13 \cdot \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Ejemplo No. 11

Dados los puntos $P(-4, 1)$, $Q(3, -4)$, y $R(2, 6)$ en el plano cartesiano, realiza las siguientes tareas:

a. Expresa el vector $\overrightarrow{QR}$ en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

b. Determina dos vectores unitarios paralelos al vector $\overrightarrow{PR}$.

a. Vector $\overrightarrow{QR}$: Componentes:

b. $(2 - 3, 6 - (-4)) = (-1, 10)$.

Forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$:

$$-1\mathbf{i} + 10\mathbf{j}.$$

c. Vectores unitarios paralelos a $\overrightarrow{PR}$:

Vector $\overrightarrow{PR}$:

$$(2 - (-4), 6 - 1) = (6, 5).$$

Magnitud

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}.$$

Vector unitario:

$$\frac{(6,5)}{\sqrt{61}} = \left(\frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{5}{\sqrt{61}} \right).$$

Vector unitario opuesto: $\left(-\frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{5}{\sqrt{61}} \right).$

$$|-\hat{u}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{\sqrt{61}} \right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{61}} \right)^2} = \sqrt{\frac{36 + 25}{61}} = 1.$$

$$|\hat{u}| = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{61}} \right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{61}} \right)^2} = \sqrt{\frac{36 + 25}{61}} = \sqrt{\frac{61}{61}} = 1,$$

Ambos tienen magnitud 1 y son paralelos a $\overrightarrow{PR}$.

Ejemplo No. 12

Operaciones con vectores a partir de puntos

Dados los puntos $(Q(3, -4))$ y $(R(2, 6))$ en el plano cartesiano, encontramos el vector unitario en la misma dirección del vector $(\overrightarrow{QR})$. El vector unitario $(\hat{u})$ en la dirección de un vector $(\mathbf{v})$ se calcula como $(\hat{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|})$, donde $(|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2})$.

Solución: Vector unitario en la dirección de $(\overrightarrow{QR})$

Paso 1: Calcular el vector $(\overrightarrow{QR})$

El vector $(\overrightarrow{QR})$ se obtiene restando las coordenadas de (Q) de las de (R) :

$$\overrightarrow{QR} = (2 - 3, 6 - (-4)) = (2 - 3, 6 + 4) = (-1, 10).$$

Paso 2: Calcular la magnitud de $(\overrightarrow{QR})$

La magnitud de $(\overrightarrow{QR} = (-1, 10))$ es:

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-1)^2 + 10^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101}.$$

Paso 3: Calcular el vector unitario

El vector unitario en la dirección de $(\overrightarrow{QR})$ es:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{(-1,10)}{\sqrt{101}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{101}}, \frac{10}{\sqrt{101}} \right).$$

Verificación

La magnitud del vector unitario debe ser 1:

$$|\hat{\mathbf{u}}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{101}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{101}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{101} + \frac{100}{101}} = \sqrt{\frac{101}{101}} = 1.$$

Respuesta final

El vector unitario en la dirección de $(\overrightarrow{QR})$ es:

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{101}}, \frac{10}{\sqrt{101}} \right).$$

En función de los vectores unitarios:

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{101}} \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}} \mathbf{j} \right)$$

Ejemplo No. 13

Expresión de un vector como producto de su magnitud y un vector unitario

Dado el vector $\mathbf{v} = (2, -4, 4)$ en el espacio tridimensional, exprésalo como el producto de su magnitud y un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Paso 1: Calcular la magnitud de $(\mathbf{v})$

La magnitud de $\mathbf{v} = (x, y, z)$ se calcula como $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Para $\mathbf{v} = (2, -4, 4)$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

Paso 2: Calcular el vector unitario $(\hat{\mathbf{v}})$. El vector unitario en la dirección de $(\mathbf{v})$ es $(\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|})$. Usando $|\mathbf{v}| = 6$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{(2, -4, 4)}{6} = \left(\frac{2}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Paso 3: Expresar $(\mathbf{v})$ como producto. El vector $(\mathbf{v})$ se escribe como:

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Verificación

Multiplicamos para confirmar:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(6 \cdot \frac{1}{3}, 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right), 6 \cdot \frac{2}{3}\right) = (2, -4, 4).$$

Además, la magnitud de $(\hat{\mathbf{v}})$ debe ser 1:

$$|\hat{\mathbf{v}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

Respuesta final

$$\mathbf{v} = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ejemplo No. 14

Determinación de un vector con longitud específica

Dado el vector $\mathbf{w} = (2,2,3)$ en el espacio tridimensional, encuentra un vector que tenga una longitud (magnitud) de 10 y la misma dirección que $\mathbf{w}$.

Un vector en la misma dirección que ($\mathbf{w}$) es un múltiplo escalar ($k\mathbf{w}$), y su magnitud debe satisfacer ($|k\mathbf{w}| = 10$).

La magnitud de un vector ($\mathbf{v} = (x, y, z)$) se calcula como ($|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Paso 1: Calcular la magnitud de ($\mathbf{w}$)

Para ($\mathbf{w} = (2,2,3)$): $|\mathbf{w}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$.

Paso 2: Encontrar el vector unitario en la dirección de ($\mathbf{w}$)

El vector unitario ($\hat{\mathbf{w}}$) en la dirección de ($\mathbf{w}$) es:

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{(2,2,3)}{\sqrt{17}} = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}} \right).$$

Paso 3: Escalar el vector unitario para obtener magnitud 10

Un vector con magnitud 10 en la dirección de ($\mathbf{w}$) se obtiene multiplicando ($\hat{\mathbf{w}}$) por 10:

$$\mathbf{u} = 10 \cdot \hat{\mathbf{w}} = 10 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}} \right) = \left(\frac{20}{\sqrt{17}}, \frac{20}{\sqrt{17}}, \frac{30}{\sqrt{17}} \right).$$

Alternativamente, racionalizamos los denominadores multiplicando numerador y denominador por ($\sqrt{17}$):

$$\mathbf{u} = \left(\frac{20\sqrt{17}}{17}, \frac{20\sqrt{17}}{17}, \frac{30\sqrt{17}}{17} \right).$$

Paso 4: Verificación

La magnitud de ($\mathbf{u}$) es:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{17}} \right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{17}} \right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{17}} \right)^2} = \sqrt{\frac{400}{17} + \frac{400}{17} + \frac{900}{17}} = \sqrt{\frac{1700}{17}} = \sqrt{100} = 10.$$

El vector tiene magnitud 10. Además, $(\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{w})$ con $(k = \frac{10}{\sqrt{17}})$, lo que confirma que tiene la misma dirección que $(\mathbf{w})$.

Respuesta final

El vector de longitud 10 en la misma dirección que $(\mathbf{w})$ es:

$$\left(\frac{20\sqrt{17}}{17}, \frac{20\sqrt{17}}{17}, \frac{30\sqrt{17}}{17} \right).$$

Ejemplo No. 15

Expresión de un vector como producto de su magnitud y un vector unitario

Dado el vector $\mathbf{v} = (2, -4, 4)$ en el espacio tridimensional, exprésalo como el producto de su magnitud y un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Paso 1: Calcular la magnitud de $(\mathbf{v})$

La magnitud de $(\mathbf{v} = (x, y, z))$ se calcula como $(|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Para $(\mathbf{v} = (2, -4, 4))$:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

Paso 2: Calcular el vector unitario $(\hat{\mathbf{v}})$

El vector unitario en la dirección de $(\mathbf{v})$ es $(\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|})$. Usando $(|\mathbf{v}| = 6)$:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{(2, -4, 4)}{6} = \left(\frac{2}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{4}{6} \right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Paso 3: Expresar $(\mathbf{v})$ como producto

El vector $(\mathbf{v})$ se escribe como:

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot \hat{\mathbf{v}} = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Verificación

Multiplicamos para confirmar:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(6 \cdot \frac{1}{3}, 6 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right), 6 \cdot \frac{2}{3} \right) = (2, -4, 4).$$

La magnitud de $(\hat{\mathbf{v}})$ debe ser 1:

$$|\hat{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

Respuesta final

$$v = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ejemplo No. 16

Determinación de un vector con longitud específica

Dado el vector $w = (2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ en el espacio tridimensional, encuentra un vector que tenga una longitud (magnitud) de 10 y la misma dirección que w

Un vector en la misma dirección que (w) es un múltiplo escalar (kw), donde ($k > 0$), y su magnitud debe satisfacer ($|kw| = 10$). La magnitud de un vector ($v = (x, y, z)$) se calcula como ($|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Paso 1: Calcular la magnitud de (w)

Para ($w = (2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$):

Paso 2: Encontrar el vector unitario en la dirección de (w)

El vector unitario ($\hat{w}$) en la dirección de (w) es:

$$\hat{w} = \frac{w}{|w|} = \frac{(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Paso 3: Escalar el vector unitario para obtener magnitud 10

Un vector con magnitud 10 en la dirección de (w) se obtiene multiplicando ($\hat{w}$) por 10:

$$u = 10 \cdot \hat{w} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{20}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{3}}{3}\right).$$

Paso 4: Verificación

La magnitud de (u) es:

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{100 \cdot 2}{9} + \frac{100 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{400 + 200 + 300}{9}} = \sqrt{\frac{900}{9}} = \sqrt{100} = 10.$$

El vector tiene magnitud 10. Además, ($u = \frac{10}{3} \cdot w$), lo que confirma que tiene la misma dirección que (w).

Respuesta final

El vector de longitud 10 en la misma dirección que (w) es: $\left(\frac{20}{3}, \frac{10\sqrt{2}}{3}, \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ejemplo No. 17

Determinación de un vector con longitud específica en dirección opuesta

Dado el vector $\mathbf{w} = (3, -2, \sqrt{3})$ en el espacio tridimensional, encuentra un vector con magnitud 5 en la dirección opuesta a $\mathbf{w}$.

Solución: Vector de longitud 5 en la dirección opuesta a $(\mathbf{w} = (3, -2, \sqrt{3}))$

Dado $(\mathbf{w} = (3, -2, \sqrt{3}))$, encontramos un vector $(\mathbf{u})$ con magnitud 5 en la dirección opuesta.

Paso 1: Magnitud de $(\mathbf{w})$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4.$$

Paso 2: Vector unitario en la dirección opuesta

El vector unitario opuesto es:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{-\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{(-3, 2, -\sqrt{3})}{4} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Paso 3: Vector con magnitud 5

$$\mathbf{u} = 5 \cdot \hat{\mathbf{u}} = 5 \cdot \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(-\frac{15}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right).$$

Respuesta final

$$\left(-\frac{15}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ejemplo No. 18

Fuerzas en cables que soportan una carga

Una carga de 500 lb cuelga de tres cables de igual longitud que están anclados en los puntos $(-2,0,0)$, $(1,\sqrt{3},0)$ y $(1,-\sqrt{3},0)$. La carga está ubicada en $(0,0,-2\sqrt{3})$. Encuentra los vectores que describen las fuerzas en los cables debido a la carga.

Solución: Fuerzas en los cables

Puntos de anclaje de los cables:

$$A = (-2,0,0)$$

$$B = (1,\sqrt{3},0)$$

$$C = (1,-\sqrt{3},0)$$

Posición de la carga: $P = (0,0,-2\sqrt{3})$. Peso de la carga: $W = 500\text{lb}$ (vector: $W = (0,0,-500)$)

Longitudes iguales de los cables

Paso 1: Verificar que los cables tienen igual longitud

Calculamos las distancias AP, BP y CP:

$$AP = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-0)^2 + (0-(-2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{4+0+12} = 4$$

$$BP = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 + (0-(-2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{1+3+12} = 4$$

$$CP = \sqrt{(1-0)^2 + (-\sqrt{3}-0)^2 + (0-(-2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{1+3+12} = 4$$

Todos los cables miden 4 unidades de longitud.

Paso 2: Determinar los vectores unitarios

Vectores desde cada punto de anclaje hasta la carga:

$$\mathbf{u}_1 = P - A = (0 - (-2), 0 - 0, -2\sqrt{3} - 0) = (2, 0, -2\sqrt{3})$$

$$\mathbf{u}_2 = P - B = (0 - 1, 0 - \sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 0) = (-1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

$$\mathbf{u}_3 = P - C = (0 - 1, 0 - (-\sqrt{3}), -2\sqrt{3} - 0) = (-1, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

Vectores unitarios correspondientes:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{(2, 0, -2\sqrt{3})}{4} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{(-1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{3})}{4} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\widehat{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{(-1, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})}{4} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Paso 3: Plantear ecuaciones de equilibrio

Las fuerzas en los cables son de tensión (T_1, T_2, T_3) en dirección de los vectores unitarios: $T_1\widehat{e}_1 + T_2\widehat{e}_2 + T_3\widehat{e}_3 + \mathbf{W} = \mathbf{0}$

En componentes:

$$\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{4}T_2 - \frac{1}{4}T_3 = 0 \quad (x)$$

$$0T_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}T_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}T_3 = 0 \quad (y)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}T_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 - 500 = 0 \quad (z)$$

Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones

De la ecuación en y: $-\frac{\sqrt{3}}{4}T_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}T_3 = 0$, $T_2 = T_3$

De la ecuación en x: $\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{4}T_2 - \frac{1}{4}T_3 = 0$, $\frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2}T_2$, $T_1 = T_2$

Por lo tanto, $T_1 = T_2 = T_3 = T$.

De la ecuación en z: $-\frac{\sqrt{3}}{2}T - \frac{\sqrt{3}}{2}T - \frac{\sqrt{3}}{2}T = 500$, $-\frac{3\sqrt{3}}{2}T = 500$

$$T = -\frac{500 \times 2}{3\sqrt{3}} = -\frac{1000}{3\sqrt{3}} \approx -192.45 \text{ lb}$$

El signo negativo indica que las tensiones actúan en dirección opuesta a los vectores unitarios (es decir, hacia arriba).

Paso 5: Vectores de fuerza en cada cable

$$\mathbf{F}_1 = T\widehat{e}_1 = -\frac{1000}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{500}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{500}{3}\right)$$

$$\mathbf{F}_2 = T\widehat{e}_2 = -\frac{1000}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{250}{3\sqrt{3}}, \frac{250}{3}, \frac{500}{3}\right)$$

$$\mathbf{F}_3 = T\widehat{e}_3 = -\frac{1000}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{250}{3\sqrt{3}}, -\frac{250}{3}, \frac{500}{3}\right)$$

Resultado final:

Los vectores de fuerza en los cables son:

$$\mathbf{F}_1 = \left(-\frac{500}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{500}{3}\right) \approx (-96.23, 0, 166.67) \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_2 = \left(\frac{250}{3\sqrt{3}}, \frac{250}{3}, \frac{500}{3}\right) \approx (48.11, 83.33, 166.67) \text{ lb}$$

$$\mathbf{F}_3 = \left(\frac{250}{3\sqrt{3}}, -\frac{250}{3}, \frac{500}{3}\right) \approx (48.11, -83.33, 166.67) \text{ lb}$$

Ejemplo No. 19

Dado un par de vectores u y v, calcula su producto punto y determina el ángulo que forman entre sí. 1. $u = i + j$ y $v = i - j$ 2. $u = \langle 10, 0 \rangle$ y $v = \langle -5, 5 \rangle$ 3. $u = i$ y $v = i + \sqrt{3}j$ 4. $u = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j$ y $v = -\sqrt{2}i - \sqrt{2}j$ 5. $u = 4i + 3j$ y $v = 4i - 6j$ 6. $u = (3, 4, 0)$ y $v = (0, 4, 5)$ 7. $u = (-10, 0, 4)$ y $v = (1, 2, 3)$ 8. $u = (3, -5, 2)$ y $v = (-9, 5, 1)$ 9. $u = 2i - 3k$ y $v = i + 4j + 2k$ 10. $u = i - 4j - 6k$ y $v = 2i - 4j + 2k$ Producto punto o escalar $u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$ Ángulo entre vectores $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\ u\ \ v\ }$ $\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\ u\ \ v\ }\right)$	Solución: $u \cdot v = (1)(1) + (1)(-1) = 0$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right) = 90^\circ$ $u \cdot v = (10)(-5) + (0)(5) = -50$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-50}{10 \cdot 5\sqrt{2}}\right) \approx 135^\circ$ $u \cdot v = (1)(1) + (0)(\sqrt{3}) = 1$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right) = 60^\circ$ $u \cdot v = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = -4$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{2 \cdot 2}\right) = 180^\circ$ $u \cdot v = (4)(4) + (3)(-6) = -2$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{5 \cdot 2\sqrt{13}}\right) \approx 94.76^\circ$ $u \cdot v = (3)(0) + (4)(4) + (0)(5) = 16$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{5 \cdot \sqrt{41}}\right) \approx 58.66^\circ$ $u \cdot v = (-10)(1) + (0)(2) + (4)(3) = 2$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 85.46^\circ$ $u \cdot v = (3)(-9) + (-5)(5) + (2)(1) = -50$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-50}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{107}}\right) \approx 138.59^\circ$ $u \cdot v = (2)(1) + (0)(4) + (-3)(2) = -4$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{21}}\right) \approx 105.26^\circ$ $u \cdot v = (1)(2) + (-4)(-4) + (-6)(2) = 6$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{24}}\right) \approx 71.57^\circ$
--	--

Ejemplo No. 20

Dado un par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, calcula la proyección vectorial de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$, denotada como $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, y el componente escalar de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\mathbf{u}$, denotado como $\text{scal}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle 10, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle -8, 0, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 3, -3 \rangle$

4. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, 15 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle$

5. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Solución:

1. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

$$\text{Comp. escalar} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(-1)(-4) + (4)(2)}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Proyección} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} = \frac{12}{20} \langle -4, 2 \rangle = \left\langle -\frac{12}{5}, \frac{6}{5} \right\rangle$$

2. $\mathbf{u} = \langle 10, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$

$$\text{Comp. escalar} = \frac{(10)(2) + (5)(6)}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{50}{\sqrt{40}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Proyección} = \frac{50}{40} \langle 2, 6 \rangle = \left\langle \frac{5}{2}, \frac{15}{2} \right\rangle$$

3. $\mathbf{u} = \langle -8, 0, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 3, -3 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Comp. escalar} &= \frac{(-8)(1) + (0)(3) + (2)(-3)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{-14}{\sqrt{19}} = -\frac{14\sqrt{19}}{19} \end{aligned}$$

$$\text{Proyección} = \frac{-14}{19} \langle 1, 3, -3 \rangle = \left\langle -\frac{14}{19}, -\frac{42}{19}, \frac{42}{19} \right\rangle$$

4. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, 15 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -2 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Comp. escalar} &= \frac{(5)(0) + (0)(4) + (15)(-2)}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{-30}{\sqrt{20}} = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Proyección} = \frac{-30}{20} \langle 0, 4, -2 \rangle = \langle 0, -6, 3 \rangle$$

5. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \text{Comp. escalar} &= \frac{(5)(-1) + (1)(1) + (-5)(-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Proyección} = \frac{6}{6} \langle -1, 1, -2 \rangle = \langle -1, 1, -2 \rangle$$

6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \text{Comp. escalar} &= \frac{(1)(2) + (4)(-4) + (7)(2)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{24}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Proyección} = \frac{0}{24} \langle 2, -4, 2 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \quad (\text{ortogonales})$$

Ejemplo No. 21

Producto Cruz de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Dados los vectores:

$$\mathbf{u} = (3,0,0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0,5,0)$$

El producto cruz se calcula como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 \cdot 0 - 0 \cdot 5) - \mathbf{j}(3 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(3 \cdot 5 - 0 \cdot 0)$$

Simplificando:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 15\mathbf{k} = (0,0,15)$$
$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,0,15)}$$

Dados los vectores:

$$\mathbf{u} = (-4, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 0, 2)$$

El producto vectorial se calcula como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - \mathbf{j}(-4 \cdot 2 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(-4 \cdot 0 - 0 \cdot 0)$$

Simplificando:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0, 8, 0)$$

Resultado final:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 8, 0)}$$

Dados los vectores:

$$\mathbf{u} = (0, -2, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0)$$

Cálculo del producto vectorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-2) \cdot 0 - 0 \cdot 1) - \mathbf{j}(0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(0 \cdot 1 - (-2) \cdot 0)$$
$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0,0,0)$$

Magnitud del producto vectorial

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$$

Interpretación geométrica

El producto vectorial nulo indica que:

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, el ángulo entre ellos es 0° o 180° , no generan un área paralelogramo (área = 0)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,0,0) \parallel \mathbf{u} \times \mathbf{v} \parallel = 0$$

Ejemplo No. 22

Resultados de algunas operaciones con vectores unitarios coordenados

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad -\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}, \quad 3\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -3\mathbf{k}, \quad 3\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -3\mathbf{k}, \quad -2\mathbf{i} \times 3\mathbf{k} = 6\mathbf{j}, \quad 2\mathbf{j} \times -5\mathbf{i} = 10\mathbf{k}.$$

Ejemplo No. 23

Obtén los productos vectoriales dados los vectores

$$\mathbf{u} = (3, 5, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 3, -6).$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(5 \cdot (-6) - \mathbf{j}(3 \cdot (-6))) + \mathbf{k}(3 \cdot 3) = (-30, 18, 9)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3 \cdot 0 - (-6) \cdot 5) - \mathbf{j}(0 \cdot 0 - (-6) \cdot 3) + \mathbf{k}(0 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = (30, -18, -9)$$

$$\text{Resultados: } \boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-30, 18, 9)} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (30, -18, -9)}$$

Ejemplo No. 24

Dados los vectores: obtener

$$\mathbf{u} = (-4, 1, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 1, -1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) - \mathbf{j}(-4 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) + \mathbf{k}(-4 \cdot 1 - 1 \cdot 0) \\ = \mathbf{i}(-1 - 1) - \mathbf{j}(4 - 0) + \mathbf{k}(-4 - 0) = (-2, -4, -4)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) - \mathbf{j}(0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-4)) + \mathbf{k}(0 \cdot 1 - 1 \cdot (-4)) \\ = \mathbf{i}(1 + 1) - \mathbf{j}(0 - 4) + \mathbf{k}(0 + 4) = (2, 4, 4)$$

$$\text{Resultados: } \boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-2, -4, -4)} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, 4, 4)}$$

Ejemplo No. 25

Dados los vectores: obtener

$$\mathbf{u} = (2, 3, -9) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (-1, 1, -1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -9 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3 \cdot (-1) - (-9) \cdot 1) - \mathbf{j}(2 \cdot (-1) - (-9) \cdot (-1)) + \mathbf{k}(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1))$$

$$= \mathbf{i}(-3 + 9) - \mathbf{j}(-2 - 9) + \mathbf{k}(2 + 3) = (6, 11, 5)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot (-9) - (-1) \cdot 3) - \mathbf{j}(-1 \cdot (-9) - (-1) \cdot 2) + \mathbf{k}(-1 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$$

$$= \mathbf{i}(-9 + 3) - \mathbf{j}(9 + 2) + \mathbf{k}(-3 - 2) = (-6, -11, -5)$$

Resultados:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (6, 11, 5)} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (-6, -11, -5)}$$

Ejemplo No. 26

Dados los vectores: Obtener

$$\mathbf{u} = (3, -4, 6) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (1, 2, -1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-4) \cdot (-1) - 6 \cdot 2) - \mathbf{j}(3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1) + \mathbf{k}(3 \cdot 2 - (-4) \cdot 1)$$

$$= \mathbf{i}(4 - 12) - \mathbf{j}(-3 - 6) + \mathbf{k}(6 + 4) = (-8, 9, 10)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2 \cdot 6 - (-1) \cdot (-4)) - \mathbf{j}(1 \cdot 6 - (-1) \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3)$$

$$= \mathbf{i}(12 - 4) - \mathbf{j}(6 + 3) + \mathbf{k}(-4 - 6) = (8, -9, -10)$$

Resultados: $\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-8, 9, 10)}$ y $\boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (8, -9, -10)}$

Ejemplo No. 27

Dados los vectores: obtener

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-1)(-2) - (-2)(3)) - \mathbf{j}(3(-2) - (-2)(1)) + \mathbf{k}(3(3) - (-1)(1))$$

$$= \mathbf{i}(2 + 6) - \mathbf{j}(-6 + 2) + \mathbf{k}(9 + 1) = (8, 4, 10)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3(-2) - (-2)(-1)) - \mathbf{j}(1(-2) - (-2)(3)) + \mathbf{k}(1(-1) - 3(3))$$

$$= \mathbf{i}(-6 - 2) - \mathbf{j}(-2 + 6) + \mathbf{k}(-1 - 9) = (-8, -4, -10)$$

Resultados:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}}$$

Verificación de anti conmutatividad

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Ejemplo No. 28

Dados los vectores: obtener

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-1)(-2) - (-2)(3)) - \mathbf{j}(3(-2) - (-2)(1)) + \mathbf{k}(3(3) - (-1)(1))$$

$$= \mathbf{i}(2 + 6) - \mathbf{j}(-6 + 2) + \mathbf{k}(9 + 1) = (8, 4, 10)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3(-2) - (-2)(-1)) - \mathbf{j}(1(-2) - (-2)(3)) + \mathbf{k}(1(-1) - 3(3))$$

$$= \mathbf{i}(-6 - 2) - \mathbf{j}(-2 + 6) + \mathbf{k}(-1 - 9) = (-8, -4, -10)$$

Resultados:

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}}$$

Verificación de anti conmutatividad

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Ejemplo No. 29

Dados los vectores: obtener

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 0.5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$$

Conversión a forma matricial

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -10 & 15 \\ 0.5 & 1 & -0.6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-10)(-0.6) - (15)(1)) - \mathbf{j}((2)(-0.6) - (15)(0.5)) + \mathbf{k}((2)(1) - (-10)(0.5))$$

$$= \mathbf{i}(6 - 15) - \mathbf{j}(-1.2 - 7.5) + \mathbf{k}(2 + 5) = (-9\mathbf{i} + 8.7\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.5 & 1 & -0.6 \\ 2 & -10 & 15 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((1)(15) - (-0.6)(-10)) - \mathbf{j}((0.5)(15) - (-0.6)(2)) + \mathbf{k}((0.5)(-10) - (1)(2))$$

$$= \mathbf{i}(15 - 6) - \mathbf{j}(7.5 + 1.2) + \mathbf{k}(-5 - 2) = (9\mathbf{i} - 8.7\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$$

Resultados finales

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 8.7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 8.7\mathbf{j} - 7\mathbf{k}}$$

Verificación de propiedad anti conmutativa

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -(-9\mathbf{i} + 8.7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 9\mathbf{i} - 8.7\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

Ejemplo No. 30

Ecuaciones de rectas	Solución:
Determina tanto las ecuaciones paramétricas como las ecuaciones vectoriales de las siguientes rectas. 1. La recta que pasa por $(0,0,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (4,7,0)$. 2. La recta que pasa por $(-3,2,-1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (1,-2,0)$. 3. La recta que pasa por $(0,0,1)$ paralela al eje y. 4. La recta que pasa por $(-2,4,3)$ paralela al eje x. 5. La recta que pasa por $(0,0,0)$ y $(1,2,3)$. 6. La recta que pasa por $(-3,4,6)$ y $(5,-1,0)$. 7. La recta que pasa por $(0,0,0)$ que es paralela a la recta $\mathbf{r} = (3 - 2t, 5 + 8t, 7 - 4t)$.	1. La recta es $\mathbf{r}(t) = \langle 0,0,1 \rangle + t\langle 4,7,0 \rangle$ Las ecuaciones paramétricas son $x = 4t, y = 7t, z = 1$ 2. La recta es $\mathbf{r}(t) = \langle -3,2,-1 \rangle + t\langle 1,-2,0 \rangle$ Las ecuaciones paramétricas son $x = -3 + t, y = 2 - 2t, z = -1$ 3. La dirección es $\langle 0,1,0 \rangle$ y la recta es $\mathbf{r}(t) = \langle 0,0,1 \rangle + t\langle 0,1,0 \rangle$ 4. Las ecuaciones paramétricas son $x = 0, y = t, z = 1$ 5. La dirección es $\langle 1,0,0 \rangle$ y la recta es $\mathbf{r}(t) = \langle -2,4,3 \rangle + t\langle 1,0,0 \rangle$. Las ecuaciones paramétricas son $x = -2 + t, y = 4, z = 3$ 6. La dirección es $\langle 1,2,3 \rangle$ y la recta es $\mathbf{r}(t) = t\langle 1,2,3 \rangle$ Las ecuaciones paramétricas son $x = t, y = 2t, z = 3t$ 7. La dirección es $\langle 8,-5,-6 \rangle$ y la recta es $\mathbf{r}(t) = \langle -3,4,6 \rangle + t\langle 8,-5,-6 \rangle$. Las ecuaciones paramétricas son $x = -3 + 8t, y = 4 - 5t, z = 6 - 6t$

Ejemplo No. 31

Encuentra una ecuación de los siguientes planos.

1. El plano que pasa por el punto $P_0(0,2,-2)$ con un vector normal $n = (1,1,-1)$

Solución:

La ecuación de un plano con vector normal $n = (a, b, c)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) se expresa como:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Dado $n = (1,1,-1)$, tenemos $(a = 1), (b = 1), (c = -1)$, y el punto $P_0(0,2,-2)$, con $(x_0 = 0), (y_0 = 2), (z_0 = -2)$.
Sustituyendo:

$$1(x - 0) + 1(y - 2) + (-1)(z - (-2)) = 0$$

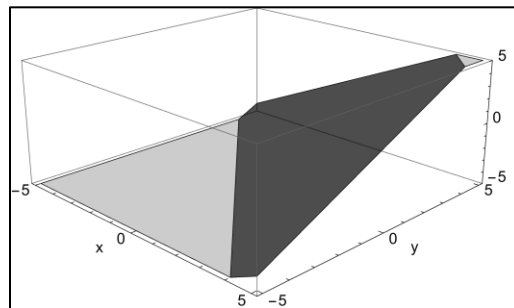
Simplificando:

$$x + (y - 2) - (z + 2) = 0$$

$$x + y - 2 - z - 2 = 0$$

$$x + y - z - 4 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es: $x + y - z - 4 = 0$



Gráfica de la ecuación del plano

2. El plano que pasa por el punto $P_0(2,3,0)$ con un vector normal $n = (-1,2,-3)$.

Solución:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$-1(x - 2) + 2(y - 3) + (-3)(z - 0) = 0$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$-1(x - 2) + 2(y - 3) - 3z = 0$$

$$-x + 2 + 2y - 6 - 3z = 0$$

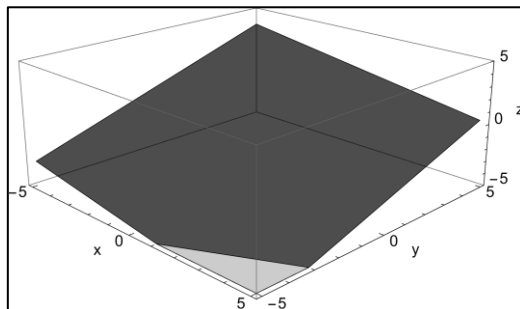
$$-x + 2y - 3z + 2 - 6 = 0$$

$$-x + 2y - 3z - 4 = 0$$

Multiplicamos por (-1) para obtener una forma más estándar:

$$x - 2y + 3z + 4 = 0$$

La ecuación del plano es: $x - 2y + 3z + 4 = 0$



Gráfica de la ecuación del plano

3. El plano que es paralelo a los vectores $(1,0,1)$ y $(0,2,1)$, y pasa por el punto $(1,2,3)$.

Solución:

Para encontrar la ecuación del plano, calculamos primero el vector normal mediante el producto vectorial de los vectores dados $\mathbf{u} = (1,0,1)$ y $\mathbf{v} = (0,2,1)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante:

$$= i(0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) - j(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + k(1 \cdot 2 - 0 \cdot 0)$$

$$= i(0 - 2) - j(1 - 0) + k(2 - 0) = -2i - 1j + 2k$$

Así, el vector normal es $\mathbf{n} = (-2, -1, 2)$.

La ecuación del plano con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Dado $\mathbf{n} = (-2, -1, 2)$, con $(a = -2)$, $(b = -1)$, $(c = 2)$, con el punto $(1, 2, 3)$, con $(x_0 = 1)$, $(y_0 = 2)$, $(z_0 = 3)$, sustituimos

$$-2(x - 1) + (-1)(y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$-2(x - 1) - (y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

$$-2x + 2 - y + 2 + 2z - 6 = 0$$

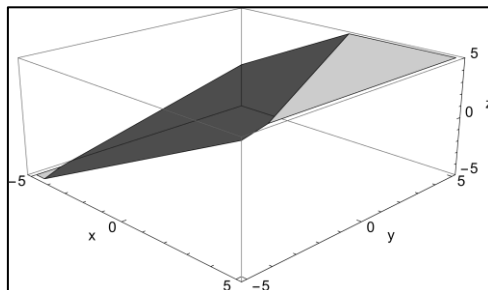
$$-2x - y + 2z + 2 - 6 = 0$$

$$-2x - y + 2z - 4 = 0$$

Multiplicamos por (-1) para obtener una forma estándar:

$$2x + y - 2z + 4 = 0$$

La ecuación del plano es: $2x + y - 2z + 4 = 0$



Gráfica de la ecuación del plano

4. El plano que es paralelo a los vectores $(1, -3, 1)$ y $(4, 2, 0)$, y pasa por el punto $(3, 0, -2)$.

Solución:

Para encontrar la ecuación del plano, calculamos primero el vector normal mediante el producto vectorial de los vectores dados $u = (1, -3, 1)$ y $v = (4, 2, 0)$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante:

$$\begin{aligned} &= i[(-3) \cdot 0 - 1 \cdot 2] - j[1 \cdot 0 - 1 \cdot 4] + k[1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4] \\ &= i[0 - 2] - j[0 - 4] + k[2 - (-12)] \\ &= -2i - (-4)j + 14k \\ &= -2i + 4j + 14k \end{aligned}$$

Así, el vector normal es $n = (-2, 4, 14)$.

La ecuación del plano con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Dado $\mathbf{n} = (-2, 4, 14)$, con $(a = -2), (b = 4), (c = 14)$, con el punto $((3, 0, -2)$, con $(x_0 = 3), (y_0 = 0), (z_0 = -2)$, sustituimos

$$-2(x - 3) + 4(y - 0) + 14(z - (-2)) = 0$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$-2(x - 3) + 4y + 14(z + 2) = 0$$

$$-2x + 6 + 4y + 14z + 28 = 0$$

$$-2x + 4y + 14z + 6 + 28 = 0$$

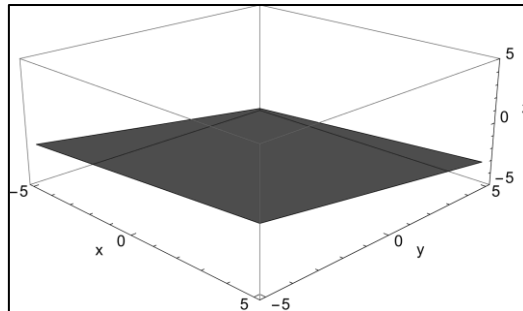
$$-2x + 4y + 14z + 34 = 0$$

Multiplicamos por (-1) y simplificamos dividiendo entre 2:

$$2x - 4y - 14z - 34 = 0$$

$$x - 2y - 7z - 17 = 0$$

La ecuación del plano es: $x - 2y - 7z - 17 = 0$



Gráfica de la ecuación del plano

5. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a la línea $x = t$, $y = 1 + 4t$, $z = 7t$.

Solución:

Para encontrar la ecuación del plano, seguimos estos pasos:

1. Determinar el vector director de la línea:

La línea paramétrica $(x = t)$, $(y = 1 + 4t)$, $(z = 7t)$ tiene un vector director dada por los coeficientes de (t) en cada ecuación. Comparando con la forma $(x = x_0 + at)$, $(y = y_0 + bt)$, $(z = z_0 + ct)$, obtenemos:

$$(x = 0 + 1 \cdot t) \rightarrow (a = 1)$$

$$(y = 1 + 4t) \rightarrow (b = 4)$$

$$(z = 0 + 7t) \rightarrow (c = 7)$$

Así, el vector director es $\mathbf{v} = (1, 4, 7)$

2. Vector normal al plano:

Dado que el plano es perpendicular a la línea, el vector normal al plano es el mismo que el vector director de la línea, es decir, es $\mathbf{v} = (1, 4, 7)$

3. Ecuación del plano:

La ecuación del plano con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

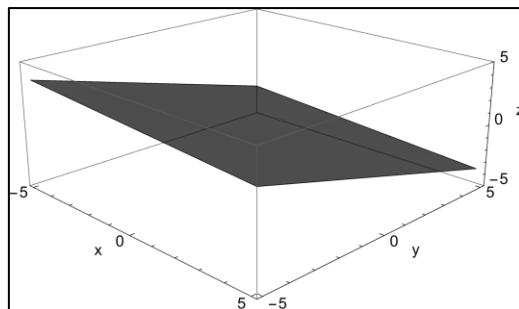
Dado que el plano pasa por el origen $(0,0,0)$, con $(x_0 = 0)$, $(y_0 = 0)$, $(z_0 = 0)$, con el vector normal $\mathbf{n} = (1,4,7)$, sustituimos:

$$1(x - 0) + 4(y - 0) + 7(z - 0) = 0$$

Simplificando:

$$x + 4y + 7z = 0$$

La ecuación del plano es: $x + 4y + 7z = 0$



Gráfica de la ecuación del plano

Verificar si el plano $x = 0$ y la recta $(x = 0)$, $(y = 1 + t)$, $(z = 1 + t)$ son perpendiculares. Calcula el punto de intersección y el ángulo entre ellos

Solución:

1. Vector normal del plano:

El vector normal al plano $(x = 0)$ es: $\mathbf{n} = (1,0,0)$

2. Vector director de la recta:

La recta paramétrica $(x = 0)$, $(y = 1 + t)$, $(z = 1 + t)$ tiene un vector director dado por los coeficientes $de(t)$:

$$(x = 0 + 0 \cdot t) \rightarrow (a = 0)$$

$$(y = 1 + 1 \cdot t) \rightarrow (b = 1)$$

$$(z = 1 + 1 \cdot t) \rightarrow (c = 1)$$

Así, el vector director es: $\mathbf{v} = (0,1,1)$

3. Verificar perpendicularidad:

Calculamos el producto escalar: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (1)(0) + (0)(1) + (0)(1) = 0$

Dado que el producto escalar es 0, el plano y la recta son perpendiculares.

4. Punto de intersección:

Sustituimos $(x = 0), (y = 1 + t), (z = 1 + t)$ en el plano $(x = 0)$, que se cumple para todo (t) . Tomamos $(t = 0)$ como punto específico: $(x = 0), (y = 1 + 0 = 1), (z = 1 + 0 = 1)$

El punto de intersección es $(0, 1, 1)$.

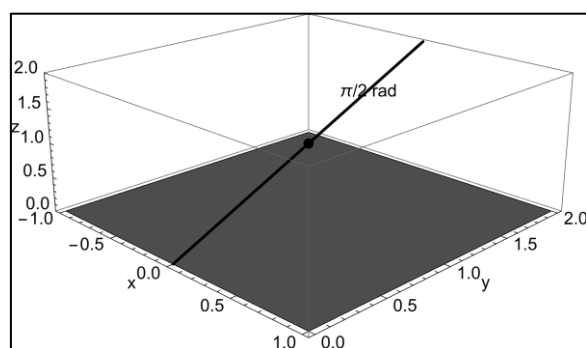
5. Ángulo entre el plano y la recta:

Dado que son perpendiculares, el ángulo θ entre el plano y la recta es: $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianes

Respuesta final:

- Punto de intersección: $((0,1,1))$

- Ángulo: $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianes



Gráfica de la ecuación del plano

1.6 Aplicaciones

Los vectores, junto con las ecuaciones de la recta y del plano, constituyen fundamentos esenciales en el estudio de la geometría y el cálculo vectorial, con aplicaciones amplias y diversas en múltiples disciplinas, especialmente en la ingeniería. Los vectores permiten representar magnitudes con dirección y sentido, como fuerzas, velocidades o desplazamientos, siendo herramientas clave para analizar sistemas físicos en equilibrio o en movimiento. Las ecuaciones paramétricas y vectoriales de la recta facilitan la descripción de trayectorias en el espacio, mientras que las ecuaciones del plano son fundamentales para modelar superficies y resolver problemas de intersección o alineación en tres dimensiones.

En el ámbito de la ingeniería, estas nociones tienen un impacto significativo. Por ejemplo, en ingeniería civil, se utilizan para diseñar estructuras como puentes o edificios, calculando las fuerzas ejercidas por cables y soportes mediante vectores, y determinando la alineación de elementos estructurales con ecuaciones de rectas y planos. En ingeniería mecánica, las trayectorias de robots o máquinas se describen con ecuaciones paramétricas, optimizando su movimiento. Asimismo, en ingeniería aeronáutica, el análisis de trayectorias de vuelo y la estabilidad de alas dependen de la comprensión de planos y vectores.

Conocer estos conceptos es crucial para abordar temas avanzados del cálculo vectorial, como el producto cruz y el producto punto, que extienden su utilidad a campos como la dinámica de fluidos, el electromagnetismo y la robótica. Estas herramientas permiten derivar ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos complejos, como el flujo de aire alrededor de un ala o las interacciones electromagnéticas en circuitos. En ingeniería, esta base facilita la resolución de problemas prácticos, desde el diseño de sistemas de navegación hasta la simulación de tensiones en materiales, destacando la importancia de dominar estos principios para innovaciones tecnológicas y soluciones eficientes en el mundo real.

A continuación, se presenta un listado numerado de aplicaciones relacionadas con el tema de vectores, ecuaciones de la recta y ecuaciones del plano, considerando su relevancia en diversas áreas, especialmente en ingeniería y ciencias aplicadas:

- **Diseño estructural en ingeniería civil:** Se utilizan vectores para calcular fuerzas en puentes y edificios, y ecuaciones de rectas y planos para alinear vigas y determinar la estabilidad de estructuras.
- **Análisis de trayectorias en ingeniería mecánica:** Las ecuaciones paramétricas de rectas modelan el movimiento de robots y maquinaria, optimizando sus rutas y movimientos en sistemas automatizados.
- **Aerodinámica en ingeniería aeronáutica:** Vectores y ecuaciones de planos describen el flujo de aire alrededor de alas y fuselajes, esenciales para el diseño de aeronaves y su estabilidad en vuelo.
- **Navegación y sistemas GPS:** Las ecuaciones de rectas y planos se emplean para calcular trayectorias y posiciones en sistemas de navegación global, utilizando vectores para representar desplazamientos y velocidades.
- **Diseño de circuitos en ingeniería eléctrica:** Vectores modelan campos electromagnéticos, y las ecuaciones de planos ayudan a analizar la distribución de cargas en placas conductoras.
- **Robótica y control de movimiento:** Las ecuaciones paramétricas permiten programar trayectorias precisas de brazos robóticos, mientras que vectores determinan fuerzas y torques aplicados.
- **Análisis de tensiones en materiales:** Vectores y planos se aplican para estudiar las distribuciones de esfuerzo en materiales compuestos, crucial en la industria aeroespacial y automotriz.
- **Geometría computacional en gráficos por computadora:** Las ecuaciones de rectas y planos son fundamentales para renderizar objetos 3D, colisiones y animaciones en videojuegos y simulaciones.
- **Topografía y cartografía:** Vectores representan desplazamientos y pendientes, mientras que las ecuaciones de planos modelan superficies terrestres en mapas y estudios geográficos.

Conclusiones

El Tema I de los apuntes de cálculo vectorial, que abarca la definición de un vector en el plano y en el espacio junto con su interpretación geométrica, ha proporcionado una base sólida para comprender las propiedades y aplicaciones de los vectores en contextos tridimensionales. La sección 1.2 sobre álgebra vectorial y su geometría ha permitido explorar operaciones como la suma, resta y multiplicación por escalares, revelando su representación gráfica como segmentos dirigidos y sus implicaciones en la construcción de figuras geométricas. El producto escalar y vectorial, tratado en la sección 1.3, ha demostrado su utilidad para calcular ángulos, proyecciones y áreas, siendo herramientas esenciales para análisis más avanzados. Las secciones 1.4 y 1.5, dedicadas a las ecuaciones de la recta y del plano, han facilitado la modelización de trayectorias y superficies en el espacio, ofreciendo métodos paramétricos y vectoriales que son fundamentales para resolver problemas prácticos. Finalmente, la sección 1.6 sobre aplicaciones ha destacado la relevancia de estos conceptos en campos como la ingeniería, la física y la informática, mostrando su impacto en el diseño estructural, la navegación y la simulación gráfica.

Este material se enriquece con la resolución de más de 50 problemas resueltos, que abordan ejemplos numéricos y contextualizados, permitiendo a los estudiantes practicar y profundizar en cada subtema. Este esfuerzo refleja la importancia de conocer estos fundamentos para comprender temas futuros del cálculo vectorial, como campos vectoriales, integrales de línea y superficies, que dependen directamente de estas bases. El trabajo ha sido el fruto de muchas horas de dedicación, pero ha valido la pena, ya que se espera que estos apuntes sean utilizados por docentes, alumnos y alumnas del Tecnológico Nacional de México, así como por la comunidad del Instituto Tecnológico de Ensenada, como un complemento valioso para sus clases de la materia, fomentando un aprendizaje más interactivo y aplicado.

Bibliografía

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2018). *Calculus: Early transcendentals* (11th ed.). Wiley.

Este libro aborda cálculo de variable simple y multivariable, incluyendo límites, derivadas, integrales, cálculo vectorial y aplicaciones en física e ingeniería, con énfasis en funciones trascendentales desde el inicio.

Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide* (7th ed.). Academic Press.

Se centra en técnicas matemáticas avanzadas para físicos, incluyendo análisis vectorial, variables complejas, ecuaciones diferenciales y análisis tensorial, dirigido a físicos e ingenieros.

Briggs, W. L., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E. (2019). *Calculus: Early transcendentals* (3rd ed.). Pearson.

Cubre cálculo de variable simple y multivariable, incluyendo derivadas, integrales, funciones vectoriales, derivadas parciales e integrales múltiples, con un enfoque visual y aplicaciones prácticas.

Colley, S. J. (2019). *Vector calculus* (4th ed.). Pearson.

Explora temas de cálculo vectorial como campos vectoriales, integrales de línea y superficie, divergencia, rotacional y aplicaciones en física, con un enfoque claro y accesible.

Hubbard, J. H., & Hubbard, B. B. (2015). *Vector calculus, linear algebra, and differential forms: A unified approach* (5th ed.). Matrix Editions.

Integra cálculo vectorial, álgebra lineal y formas diferenciales, ofreciendo un enfoque unificado con aplicaciones en geometría, física e ingeniería.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.

Abarca temas como ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, cálculo vectorial, análisis de Fourier y métodos numéricos, diseñado para estudiantes de ingeniería.

Lang, S. (2012). *Calculus of several variables* (3rd ed.). Springer.

Se enfoca en cálculo multivariable, incluyendo derivadas parciales, integrales múltiples, campos vectoriales y el teorema de Stokes, con un enfoque matemático riguroso.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2019). *Calculus* (11th ed.). Brooks/Cole.

Este texto completo aborda cálculo de variable simple y multivariable, incluyendo derivadas, integrales, cálculo vectorial y aplicaciones, con énfasis en la comprensión conceptual.

Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2020). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.

Se concentra en álgebra lineal, cubriendo matrices, espacios vectoriales, valores propios y aplicaciones en ingeniería y ciencia de datos, con poca cobertura de cálculo vectorial.

Marsden, J. E., & Tromba, A. (2012). *Vector calculus* (6th ed.). W.H. Freeman.

Explora cálculo vectorial, incluyendo campos vectoriales, integrales de línea y superficie, y los teoremas de Green, Stokes y Gauss, con aplicaciones en física y geometría.

O'Neil, P. V. (2018). Advanced engineering mathematics (8th ed.). Cengage Learning.

Cubre temas avanzados como ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial, análisis complejo y métodos numéricos, dirigido a estudiantes de ingeniería y matemáticas aplicadas.

Schey, H. M. (2005). Div, grad, curl, and all that: An informal text on vector calculus (4th ed.). W.W. Norton & Company.

Ofrece una introducción informal al cálculo vectorial, enfocándose en divergencia, gradiente, rotacional y sus interpretaciones físicas, ideal para estudiantes de física e ingeniería.

Stewart, J. (2020). Calculus: Concepts and contexts (5th ed.). Cengage Learning.

Abarca cálculo de variable simple y multivariable, destacando la comprensión conceptual, aplicaciones y visualización, incluyendo cálculo vectorial y derivadas parciales.

Strang, G. (2016). Introduction to linear algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Se enfoca en álgebra lineal, incluyendo matrices, determinantes y espacios vectoriales, con aplicaciones en ingeniería y ciencias computacionales, pero con cobertura limitada de cálculo vectorial.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). Thomas' calculus (14th ed.). Pearson.

Un texto completo de cálculo que cubre temas de variable simple y multivariable, incluyendo cálculo vectorial, derivadas parciales, integrales múltiples y aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Zill, D. G. (2018). Advanced engineering mathematics (6th ed.). Jones & Bartlett Learning.

Trata métodos matemáticos avanzados para ingenieros, incluyendo ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial, álgebra lineal y análisis complejo, con aplicaciones prácticas.

Tema II

2. Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Introducción

2.1 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica

2.2. Derivada de una curva en forma paramétrica

2.3 Tangentes a una curva.

2.4 Área y longitud de arco

2.5 Curvas planas y graficas en coordenadas polares

2.6 Área y longitud de arco en coordenadas polares

2.7 Problemas resueltos de la unidad II

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

Hasta ahora, hemos estudiado funciones de la forma $y = f(x)$ y su comportamiento en el sistema de coordenadas cartesianas. Sin embargo, existen otras herramientas para representar curvas y funciones. En este tema, introduciremos las ecuaciones paramétricas, que son fundamentales para describir curvas y trayectorias, especialmente en el espacio tridimensional. Además, cuando trabajamos con formas circulares, cilíndricas o esféricas, el sistema de coordenadas polares resulta más conveniente que el cartesiano.

Una vez que dominemos las ecuaciones paramétricas y las coordenadas polares, exploraremos el cálculo en estos contextos. Nos preguntaremos: ¿cómo calculamos pendientes de rectas tangentes, tasas de cambio, áreas de regiones o longitudes de arco cuando las curvas se definen mediante ecuaciones paramétricas o en coordenadas polares? Este tema sentará las bases para responder estas preguntas.

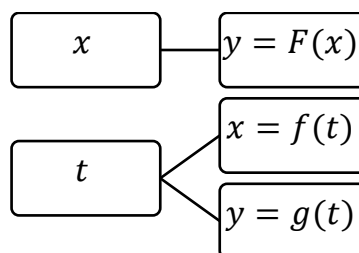
2.1 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica

2.1.1. Ecuaciones paramétricas

Hasta ahora, hemos representado curvas en el plano (xy) mediante funciones de la forma $y = f(x)$. En esta sección, exploraremos una alternativa: las ecuaciones paramétricas. Estas permiten describir una amplia variedad de curvas, desde las más comunes hasta las más complejas, y son esenciales para modelar trayectorias de objetos en movimiento.

Las ecuaciones paramétricas se expresan como: $x = f(t)$, $y = g(t)$ donde (f) y (g) son funciones continuas, y el parámetro (t) varía en un intervalo definido, típicamente $a \leq t \leq b$ (véase la figura 1). La curva paramétrica resultante está formada por los puntos (x, y) en el plano (xy) generados al evaluar estas funciones para cada valor de (t) en el intervalo dado.

$$(x, y) = (f(t), g(t)), t \in [a, b]$$



Descripción estándar para dos variable y descripción paramétrica

Dadas un conjunto de ecuaciones paramétricas, la curva resultante se genera siguiendo una dirección específica a medida que el parámetro (t) aumenta. La siguiente definición formaliza este comportamiento, que será fundamental para los ejemplos posteriores.

Definición:

Orientación positiva

La dirección en la que se traza una curva paramétrica a medida que el parámetro (t) aumenta se denomina orientación positiva de la curva. Esta orientación suele representarse mediante flechas sobre la curva.

Ecuaciones paramétricas de una recta

Las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano (xy) se expresan como:

$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad -\infty < t < \infty$, donde $x_0, y_0, (a)$ y (b) son constantes. Si $a \neq 0$, la recta tiene pendiente $\frac{b}{a}$ y pasa por el punto (x_0, y_0) . Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la recta es vertical.

Ejemplo No. 1

Considera las ecuaciones paramétricas $x = -2 + 3t, y = 4 - 6t$, para $-\infty < t < \infty$, que describen una recta. Encuentra la forma pendiente-intersección de la recta.

Solución:

Despejamos el parámetro t :

De la ecuación para x :

$$x = -2 + 3t \Rightarrow 3t = x + 2 \Rightarrow t = \frac{x+2}{3}$$

Sustituir t en la ecuación para y :

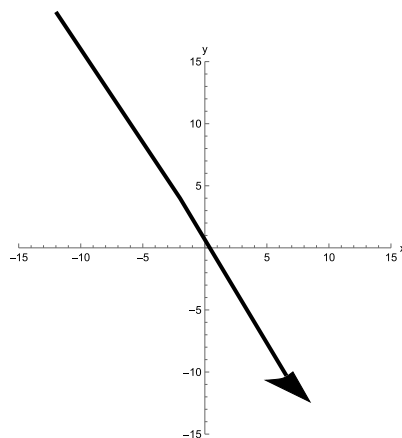
$$y = 4 - 6t = 4 - 6\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

Simplificando:

$$y = -2x$$

La curva descrita por $x = -2 + 3t$ y $y = 4 - 6t$ para $-\infty < t < \infty$ es una recta con ecuación $y = -2x$, que se extiende infinitamente a lo largo de todos los puntos reales. La orientación positiva va de $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \infty$ hacia $x \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$, siguiendo el aumento de (t) de $-\infty$ a ∞ , de arriba a abajo y de izquierda a derecha.

La grafica de la recta paramétrica es:



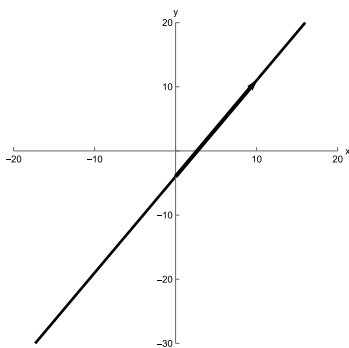
Ejemplo No. 2

Elimine el parámetro t y describa la curva

$x = 2t, y = 3t - 4; -10 \leq t \leq 10, t = \frac{x}{2}$, Resolviendo:

$$y = 3\frac{x}{2} - 4, y = \frac{3x}{2} - 4$$

La curva descrita por $x = 2t$ y $y = 3t - 4$ para $-10 \leq t \leq 10$ es una recta con ecuación $y = \frac{3}{2}x - 4$, que se extiende desde el punto $(-20, -34)$ hasta $(20, 26)$.



Ejemplo No. 3

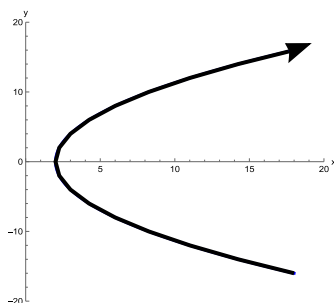
Elimine el parámetro t y describa la curva

$x = t^2 + 2, y = 4t; -4 \leq t \leq 4,$

Resolviendo: $y = 4t, t = \frac{y}{4}, y,$

$$x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2, x = \frac{y^2}{16} + 2$$

La curva descrita por $x = t^2 + 2$ y $y = 4t$ para $-4 \leq t \leq 4$ es una parábola que se abre hacia la derecha, con vértice en $(2, 0)$, extendiéndose desde el punto $(18, -16)$ hasta $(18, 16)$, y su ecuación implícita es $x = \frac{y^2}{16} + 2$.



Ejemplo No.4

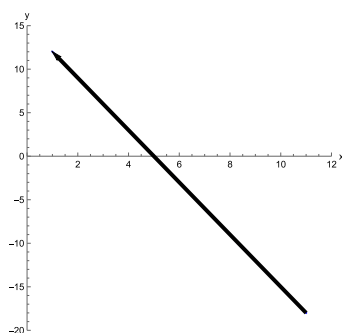
Elimine el parámetro t y describa la curva

$$x = -t + 6, y = 3t - 3; -5 \leq t \leq 5,$$

$$\text{Resolviendo: } x = -t + 6, t = 6 - x, y = 3(6 - x) - 3$$

$$y = 15 - 3x$$

La curva descrita por $x = -t + 6$ y $y = 3t - 3$ para $-5 \leq t \leq 5$ es una recta con ecuación $y = -3x + 15$, que se extiende desde el punto $(11, -18)$ hasta $(1, 12)$. La orientación positiva va desde $(11, -18)$ a $(1, 12)$, siguiendo el aumento de (t) de -5 a 5 , de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba.



Problema No. 5

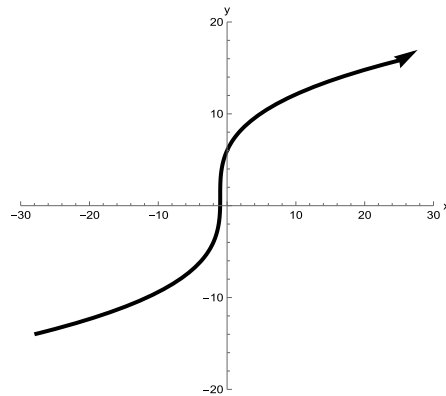
Elimine el parámetro t y describa la curva $x = t^3 - 1, y = 5t + 1; -3 \leq t \leq 3$

Resolviendo para y :

$$t = \frac{y-1}{5}, x = \left(\frac{y-1}{5}\right)^3 - 1. \text{ También: } y = \sqrt[3]{125x + 125} + 1$$

La curva descrita por $x = t^3 - 1$ y $y = 5t + 1$ para $-3 \leq t \leq 3$ es una función cúbica que se extiende desde el punto $(-28, -14)$ hasta $(26, 16)$, pasando por $(-1, 1)$ en $t = 0$, con una

pendiente que varía (vertical en $t = 0$). La orientación positiva va desde $(-28, -14)$ a $(26, 16)$, siguiendo el aumento de (t) de -3 a (3) , de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.



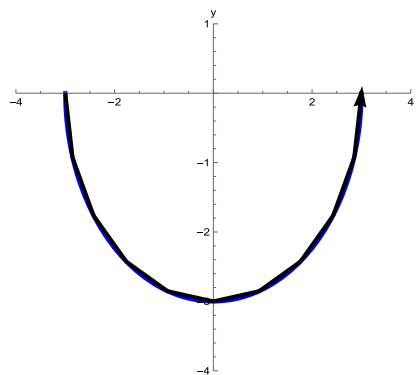
Problema No. 6

$$x = 3 \cos(t), y = 3 \sin(t); \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t, \quad x^2 + y^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

La curva descrita por $x = 3 \cos(t)$ y $y = 3 \sin(t)$ para $\pi \leq t \leq 2\pi$ es la mitad inferior de un círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 9$ (radio 3), que se extiende desde $(-3, 0)$ hasta $(3, 0)$, pasando por $(0, -3)$. La orientación positiva va desde $(-3, 0)$ a $(3, 0)$, siguiendo el aumento de (t) de π a 2π , de izquierda a derecha a lo largo de la mitad inferior del círculo.

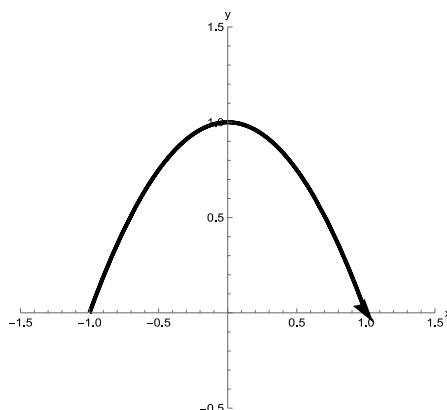


Problema No. 7

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t); 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad x^2 + y = 1, \quad y = 1 - x^2$$

La curva descrita por $x = \cos(t)$ y $y = \sin^2(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ es una parábola con ecuación $y = 1 - x^2$, que forma un bucle cerrado desde $(1, 0)$ hasta $(1, 0)$ a través del vértice $(0, 1)$ y el punto $(-1, 0)$. La orientación positiva va desde $(1, 0)$ a $(0, 1)$, luego a $(-1, 0)$, y regresa a $(1, 0)$ siguiendo el aumento de (t) de (0) a 2π , trazando el bucle en un movimiento continuo. El código de Mathematica proporciona una visualización de esta curva con una flecha que indica la orientación positiva contenida dentro de la trayectoria de la curva misma.



Problema No. 8

$$x = r - 1, y = r^3; -4 \leq r \leq 4$$

Eliminando el parámetro r :

$$x = r - 1 \Rightarrow r = x + 1$$

Sustituyendo r en la ecuación para y :

$$y = r^3 = (x + 1)^3$$

$$y = (x + 1)^3$$

La ecuación $y = (x + 1)^3$ representa una función cúbica desplazada horizontalmente. Esta curva tiene un punto de inflexión en $x = -1$ (donde $y = 0$) y es creciente en todo su dominio.

La curva es una parte de la curva cúbica estándar, desplazada una unidad hacia la izquierda, que va desde $(-5, -64)$ hasta $(3, 64)$.



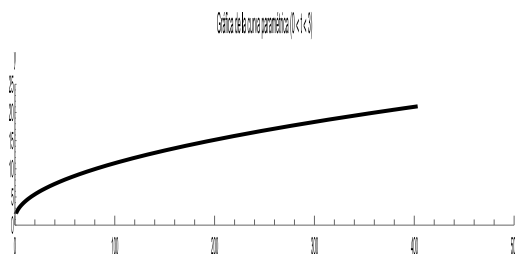
Problema No. 9

$$x = e^{2t}, y = e^t + 1; 0 \leq t \leq 25$$

Eliminar el parámetro t :

$$y = e^t + 1, \quad y = e^t + 1, \quad t = \ln(y - 1)$$

La curva definida por $x = e^{2t}$, $y = e^t + 1$ para $0 \leq t \leq 25$ tiene la ecuación cartesiana $x = (y - 1)^2$ (donde $y > 1, x \geq 0$), describiendo una parábola que se abre hacia la derecha. Comienza en $(1, 2)$ cuando $t = 0$ y se extiende hacia valores extremadamente grandes de (x) y (y) (hasta $(e^{50}, e^{25} + 1)$ cuando $t = 25$). El vértice teórico de la parábola está en $((0, 1))$, pero no se alcanza en el rango parametrizado $t \geq 0$. La orientación positiva va de $((1, 2))$ a $(e^{50}, e^{25} + 1)$ a medida que (t) aumenta.



Problema No. 10

$$x = -7\cos 2t, y = -7\sin 2t; 0 \leq t \leq \pi$$

Usando la identidad trigonométrica fundamental:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

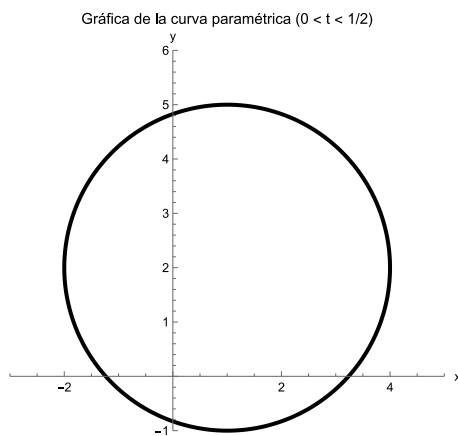
Aplicando a las ecuaciones paramétricas:

$$\left(\frac{x}{-7}\right)^2 + \left(\frac{y}{-7}\right)^2 = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$$

Simplificando:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1, x^2 + y^2 = 49$$

La ecuación representa una **circunferencia** de radio 7 centrada en el origen (0,0).



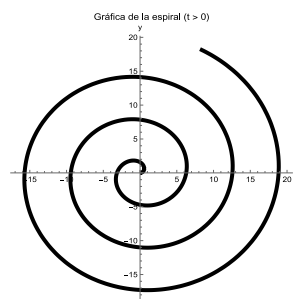
Problema No. 11

Graficando curvas paramétricas

Usa una herramienta gráfica para graficar las siguientes curvas. Asegúrate de elegir un intervalo para el parámetro que genere todas las características de interés.

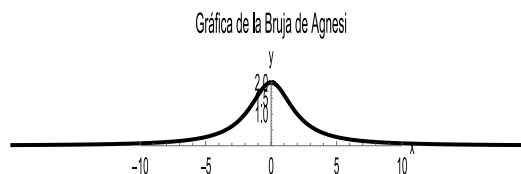
Espiral:

$$x = t \cos t, y = t \sin t; t \geq 0$$



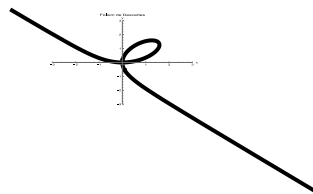
Bruja de Agnesi:

$$x = 2 \cot t, y = 1 - \cos 2t$$



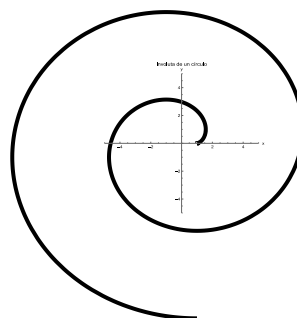
Folium de Descartes:

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$



Involuta de un círculo:

$$x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$$

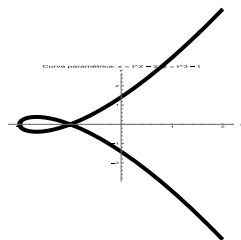


Problema No. 12

Graficando curvas paramétricas elegantes.

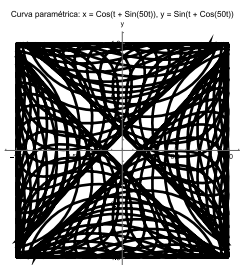
Curva de lemniscata

$$x = t^2 - 2, y = t^3 - t$$



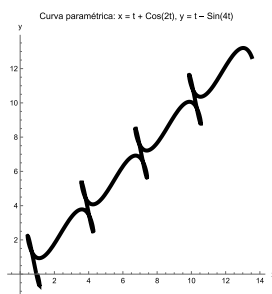
Circunferencia modulada por oscilaciones de alta frecuencia

$$x = \cos(t + \sin 50t), y = \sin(t + \cos 50t)$$



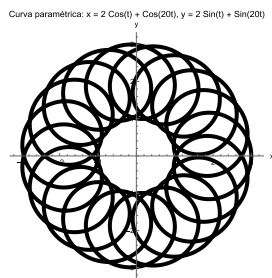
Curva paramétrica oscilatoria

$$x = t + \cos 2t, y = t - \sin 4t$$



Curva paramétrica caótica.

$$x = 2\cos t + \cos 20t, y = 2\sin t + \sin 20t$$



2.2. Derivada de una curva en forma paramétrica

"Las ecuaciones paramétricas expresan una relación entre las variables (x) e (y) . Por lo tanto, tiene sentido preguntarse por $\frac{dy}{dx}$, la tasa de cambio de (y) con respecto a (x) en un punto de una curva paramétrica. Una vez que sabemos cómo calcular $\frac{dy}{dx}$, este puede usarse para determinar las pendientes de las rectas tangentes a las curvas paramétricas.

Consideremos las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ en un intervalo en el que tanto (f) como (g) son diferenciables. La regla de la cadena relaciona las derivadas $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, y $\frac{dy}{dx}$ mediante la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Siempre que $\frac{dx}{dt} \neq 0$, dividimos ambos lados de la ecuación por $\frac{dx}{dt}$ y resolvemos para $\frac{dy}{dx}$ para obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Este resultado representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a (t) . Si $\frac{dx}{dt} = 0$ pero $\frac{dy}{dt} \neq 0$, la tangente es vertical, y la pendiente es indefinida."

Teorema

Derivada de curvas paramétricas

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$ donde (f) y (g) son diferenciables en el intervalo $([a, b])$.

Entonces, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a (t) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

siempre que $f'(t) \neq 0$. Si $f'(t) = 0$ pero $g'(t) \neq 0$, la tangente es vertical, y la pendiente es

indefinida; en este caso, la derivada inversa puede calcularse como $\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$, siempre que $g'(t) \neq 0$.

2.3 Tangentes a una curva.

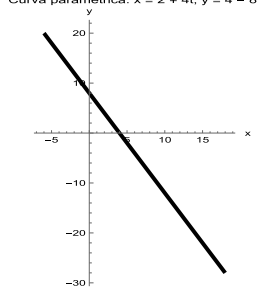
El tema "Tangentes a una curva con ecuaciones paramétricas" se centra en determinar la ecuación de la recta tangente a una curva definida por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde (t) es el parámetro. La pendiente de la tangente en un punto dado se calcula como la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, siempre que $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Si $\frac{dx}{dt} = 0$ pero $\frac{dy}{dt} \neq 0$, la tangente puede ser vertical. Para

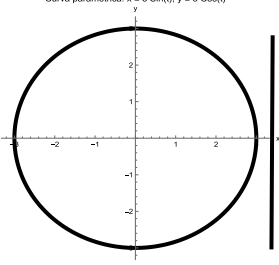
encontrar la ecuación, se usa el punto $(x(t_0), y(t_0))$ y la pendiente en $t = t_0$. Este enfoque es útil en física y geometría para analizar trayectorias y curvas complejas, como las descritas por movimiento o funciones polares convertidas a parámetros.

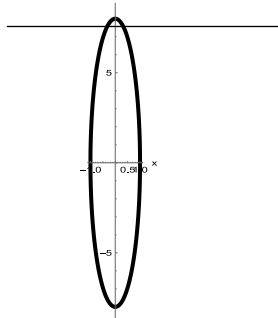
Problema No. 13

Derivadas: considere las siguientes curvas paramétricas

- Determina $\frac{dy}{dx}$ en términos de t y evalúalo en el valor dado de t .
- Haz un bosquejo de la curva mostrando la recta tangente en el punto correspondiente al valor dado de t .

$x = 2 + 4t, y = 4 - 8t; t = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = -\frac{8}{4} = -2$ Debido a que la curva es una línea recta, la recta tangente a la curva en el punto dado es la línea misma.	Curva paramétrica: $x = 2 + 4t, y = 4 - 8t$ 
---	--

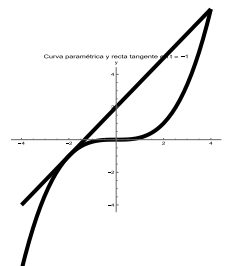
$x = 3\sin t, y = 3\cos t; t = \frac{\pi}{2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = -\frac{3\sin t}{3\cos t} = -\tan t$ En el valor dado de t, el valor de $\frac{dy}{dx}$ no existe, y la recta tangente es la línea vertical $x = 3$.	Curva paramétrica: $x = 3\sin(t), y = 3\cos(t)$ 
--	--

$x = \cos t, y = 8\sin t; t = \frac{\pi}{2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = -\frac{8\cos t}{\sin t} = -8\cot t$ En el valor dado de t, el valor de $\frac{dy}{dx}$ es $-8\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Por lo tanto, la recta tangente en el punto $(0,8)$ es la línea horizontal $y = 8$.	Curva paramétrica: $x = \cos(t), y = 8\sin(t)$ 
---	--

$$x = 2t, y = t^3; t = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{3t^2}{2}$$

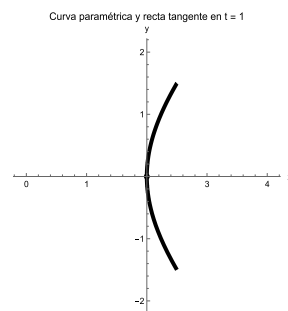
En el valor dado de t , el valor de $\frac{dy}{dx}$ es $\frac{3}{2}$, y la recta tangente es $y = \frac{3}{2}x + 2$, tangente en el punto $(-2, -1)$.



$$x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t}; t = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$$

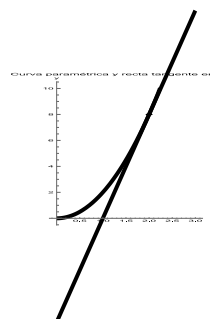
En el valor dado de t , la derivada no existe, y la recta tangente es la línea vertical $x = 2$, tangente en el punto $(2, 0)$.



$$x = \sqrt{t}, y = 2t; t = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 4\sqrt{t}$$

En el valor dado de t , el valor de $\frac{dy}{dx}$ es 8. La ecuación de la recta tangente es $y = 8x - 8$, tangente en el punto $(2, 8)$.



2.4 Área y longitud de arco

Supongamos que una curva (C) está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, para $a \leq t \leq b$, donde (f) y (g) son diferenciables y (f') y (g') son continuas en ($[a, b]$). Para encontrar la longitud de la curva entre los puntos ($(f(a), g(a))$) y ($(f(b), g(b))$), primero subdividimos el intervalo ($[a, b]$) en (n) subintervalos utilizando puntos de división

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

El siguiente paso es conectar los puntos consecutivos

$$(f(t_0), g(t_0)), (f(t_1), g(t_1)), \dots, (f(t_n), g(t_n))$$

en la curva con segmentos de línea recta y aproximar la longitud de la curva como la suma de las longitudes de estos segmentos. La longitud exacta se obtiene tomando el límite cuando el número de subintervalos (n) tiende a infinito, resultando en la integral

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Definición

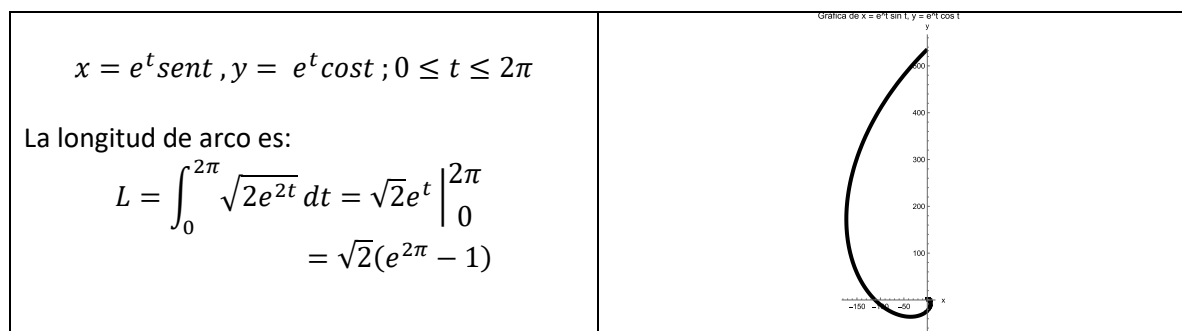
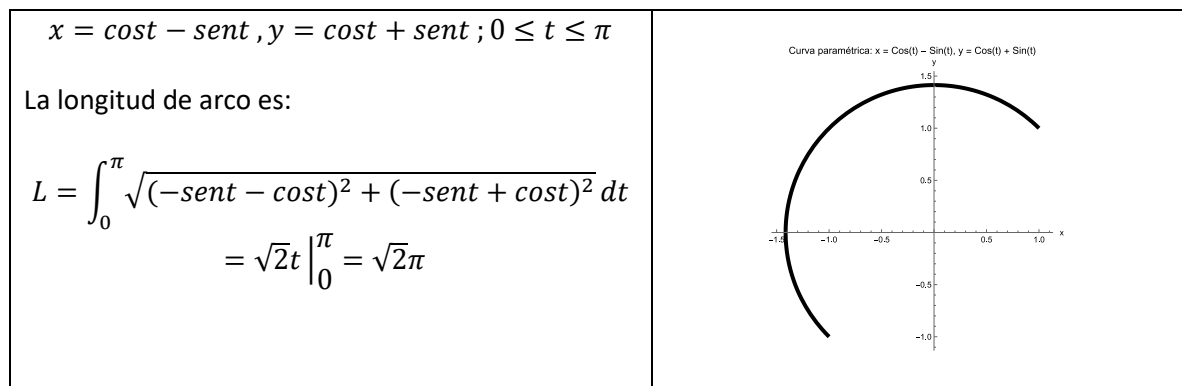
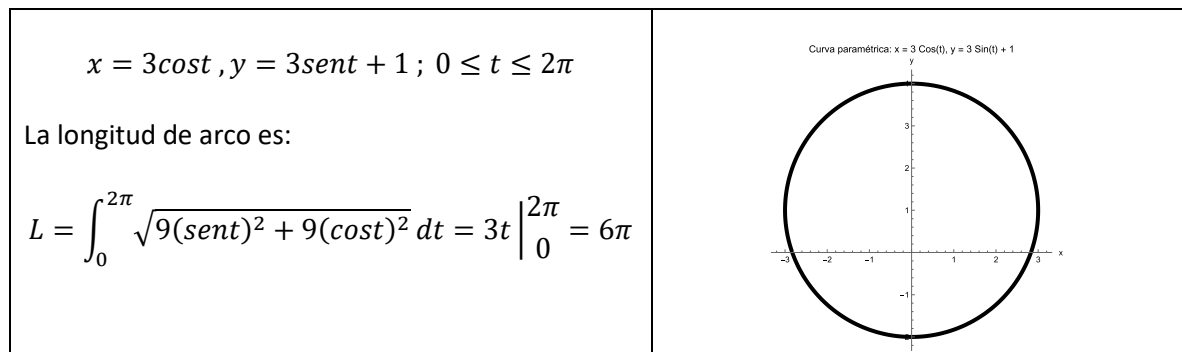
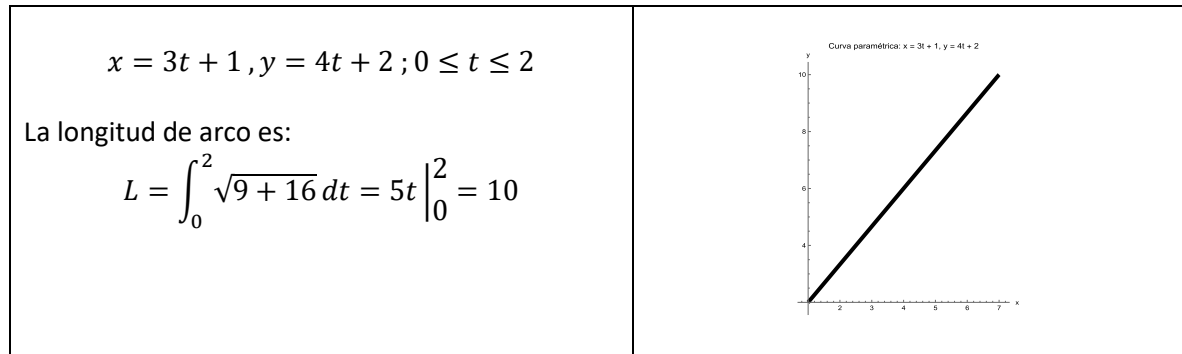
Longitud de Arco para Curvas Definidas por Ecuaciones Paramétricas

Considera la curva descrita por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde f y g son diferenciables y (f') y (g') son continuas en ($[a, b]$), y la curva se traza una vez a lo largo de este intervalo. La longitud de arco de la curva entre los puntos ($(f(a), g(a))$) y ($(f(b), g(b))$) es:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Problema No. 14

Encuentra la longitud de arco de las siguientes curvas en el intervalo dado.

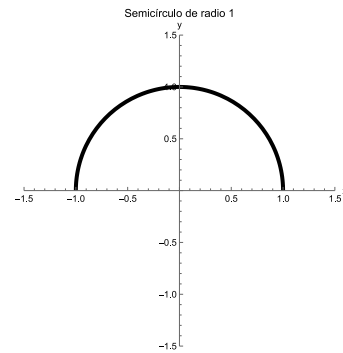


Usa las ecuaciones paramétricas de un semicírculo de radio 1, $x = \cos t$, $y = \sin t$, para $0 < t < \pi$, para verificar que el área de la superficie de una esfera unitaria es 4π .

$$A = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

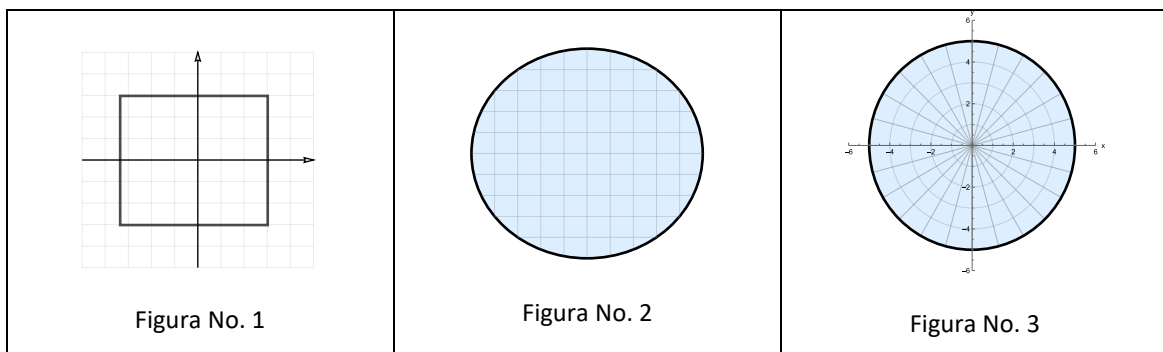
$$A = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = 2\pi \int_0^\pi \sin t dt$$

$$A = 2\pi(-\cos t) \Big|_0^\pi = 4\pi$$



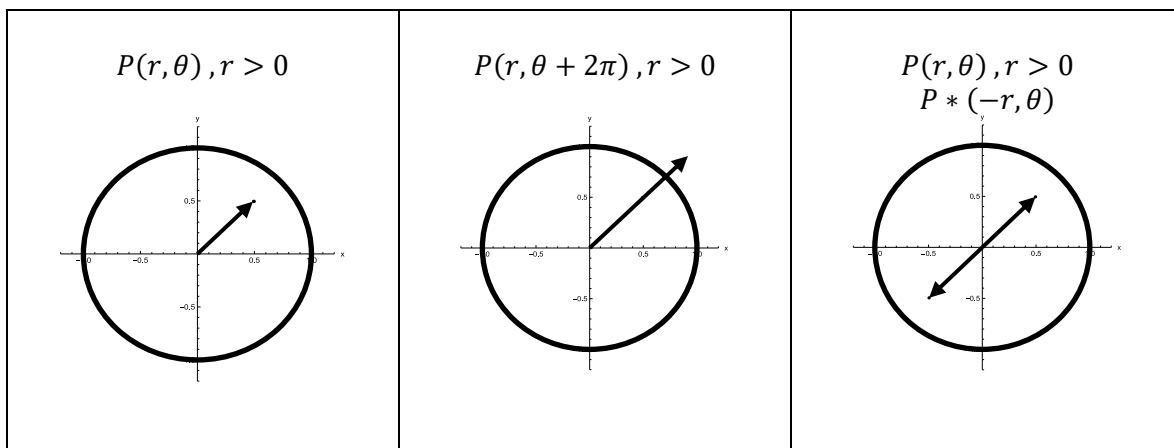
2.5 Curvas planas y graficas en coordenadas polares

Supongamos que trabajas en una empresa dedicada al diseño de escudos térmicos para vehículos espaciales, los cuales son placas delgadas con geometrías rectangular o circular. Para resolver las ecuaciones de transferencia de calor que modelan la distribución de temperatura en estos escudos, es esencial elegir un sistema de coordenadas que se alinee con su forma. Las coordenadas cartesianas $((x, y))$ son ideales para escudos rectangulares (Figura 1), ya que sus líneas rectas constantes coinciden con los bordes, simplificando la aplicación de condiciones de contorno. Sin embargo, este sistema es poco eficiente para escudos circulares (Figura 2), pues los bordes curvos $(x^2 + y^2 = R^2)$ complican las ecuaciones. En cambio, las coordenadas polares (r, θ) , donde las líneas constantes forman círculos y rayos, se adaptan perfectamente a la simetría radial de los escudos circulares (Figura 3), facilitando la formulación de la ecuación de calor y la definición de condiciones en el perímetro $(r = R)$.



Definición

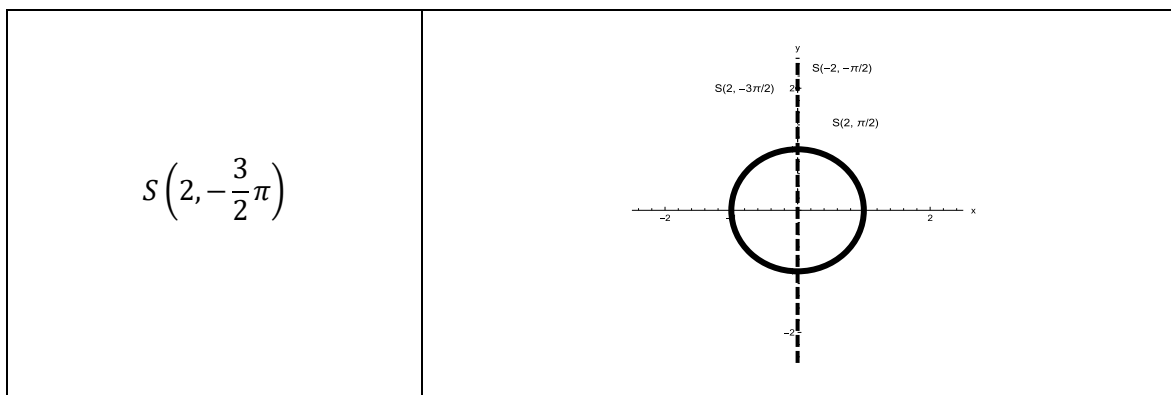
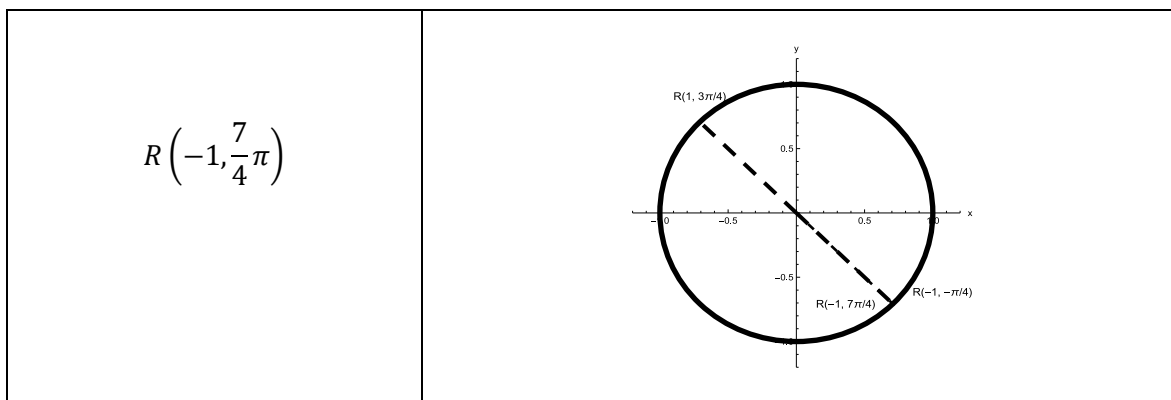
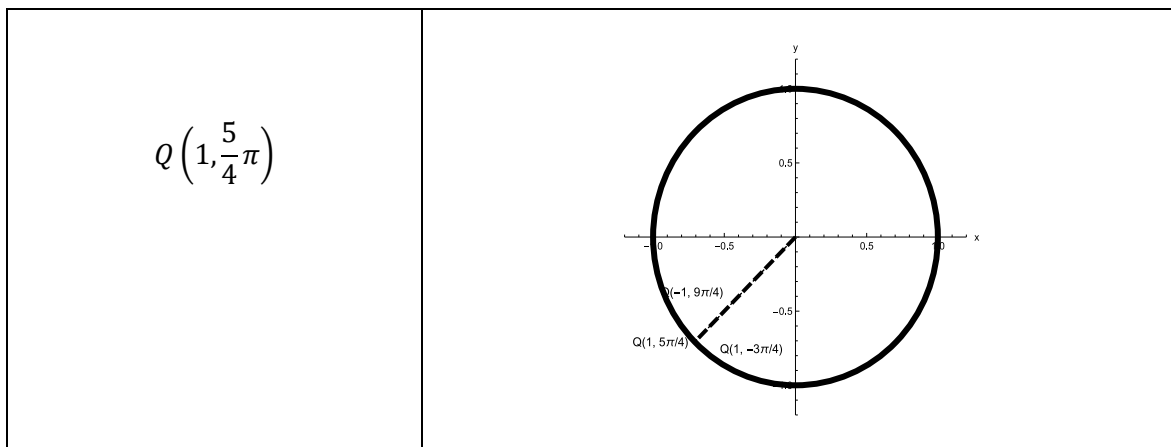
Las coordenadas polares se emplean para localizar puntos en el plano. En este sistema, el origen se denomina polo, y el eje x positivo se conoce como eje polar. Las coordenadas de un punto P se representan como (r, θ) , donde r es la coordenada radial, que indica la distancia dirigida (positiva si el punto esta fuera del origen o negativa si se extiende más allá en la dirección opuesta) desde el polo hasta P , y θ es la coordenada angular, que mide el ángulo formado por el eje polar como lado inicial y la recta que pasa por el origen y P como lado terminal. Los ángulos positivos se miden en sentido antihorario a partir del eje x positivo.



Problema No. 15.

Puntos en coordenadas polares

Graficar los puntos en coordenadas polares $Q\left(1, \frac{5}{4}\pi\right)$, $R\left(-1, \frac{7}{4}\pi\right)$, y $S\left(2, -\frac{3}{2}\pi\right)$, y proporcionar dos representaciones alternativas



Conversión entre coordenadas cartesianas y polares

En diversas aplicaciones matemáticas y físicas, es común la necesidad de transformar coordenadas entre los sistemas cartesianos $((x, y))$ y polares (r, θ) . Estas conversiones se derivan al considerar un triángulo rectángulo formado por el origen, un punto $(P(x, y))$ y su proyección en los ejes, donde (r) representa la hipotenusa (distancia al origen) y θ el ángulo con el eje (x) positivo. Las relaciones trigonométricas clave son:

$$\cos \theta = \frac{x}{r},$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \text{ asumiendo } r > 0.$$

Inversamente, a partir de las coordenadas cartesianas, se obtiene $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, con ajustes según el cuadrante.

Procedimiento

Conversión de coordenadas

Un punto con coordenadas polares (r, θ) se convierte a coordenadas cartesianas $((x, y))$ mediante las siguientes relaciones: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Un punto con coordenadas cartesianas $((x, y))$ se transforma a coordenadas polares (r, θ) usando:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, donde $r \geq 0$ y θ se ajusta según el cuadrante usando el signo de (x) y (y) .

Problema No.16

Un avión está a 100 millas de una estación de radar en un ángulo de 135° en sentido horario desde el norte. Para encontrar sus coordenadas polares:

Distancia: $r = 100$ millas.

Ángulo: Un ángulo de 135° en sentido horario desde el norte equivale a $360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$ en sentido antihorario desde el norte. En radianes, $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$.

Coordenadas polares: $\left(100, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Verificación

En un sistema polar estándar (*este* = 0°), el norte está a 90° ($\frac{\pi}{2}$), y 135° horario desde el norte ajusta a 225° total, confirmando $\frac{5\pi}{4}$.

Respuesta final: Las coordenadas polares del avión son $\left(100, \frac{5\pi}{4}\right)$

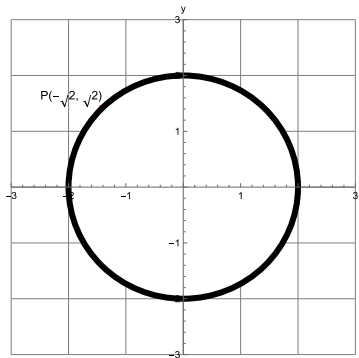
Problema No. 17

Expresa el punto con coordenadas polares $P\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ en coordenadas cartesianas.

Para convertir de coordenadas polares a cartesianas, usamos las fórmulas:

$$x = r \cos \theta \text{ y } y = r \sin \theta, r = 2, \theta = \frac{3}{4}\pi, x = 2 \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}, y = 2 \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, el punto $P\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ en coordenada cartesianas es: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$



Expresa el punto con coordenadas cartesianas $Q(1, -1)$ en coordenadas polares

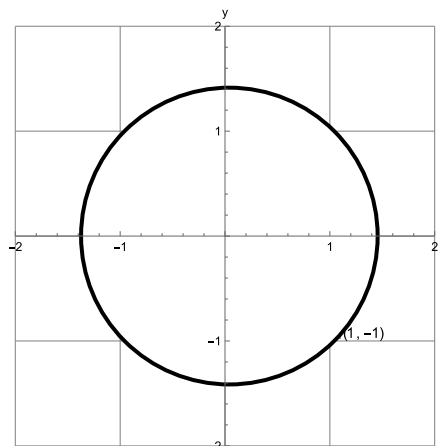
Para convertir de coordenadas cartesianas a polares, usamos las fórmulas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Alternativamente, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ también es válido, pero $\frac{7}{4}\pi$ es la forma positiva estándar entre $[0, 2\pi)$.

Por lo tanto, el punto $Q(1, -1)$ en coordenadas polares es $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$



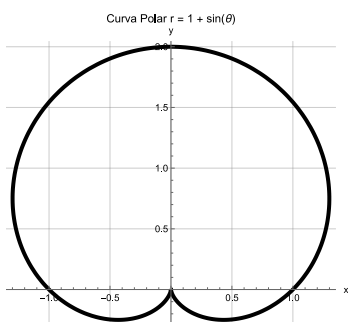
Graficando en Coordenadas Polares

Las ecuaciones en coordenadas polares a menudo describen curvas que son difíciles de representar en coordenadas cartesianas. En parte por esta razón, los métodos de trazado de curvas para coordenadas polares difieren de los utilizados para curvas en coordenadas cartesianas.

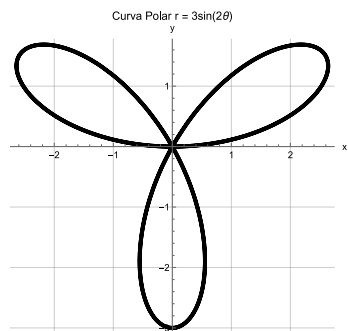
Problema No. 18

Representar gráficamente ecuaciones o curvas utilizando el sistema de coordenadas polares

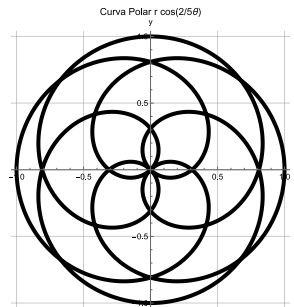
La ecuación $r = 1 + \sin(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa un cardioide que se abre hacia arriba, alcanzando su máximo $r = 2$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$, pasando por el origen en $\theta = \frac{3\pi}{2}$, y siendo simétrica respecto al eje vertical



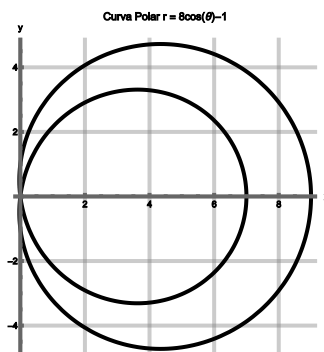
La ecuación $r = 3 \sin(2\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa una rosa polar con 4 pétalos, cada uno extendiéndose hasta $r = 3$ en las direcciones $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, y pasando por el origen en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$. La simetría y la estructura lobulada se confirmarán con el gráfico.



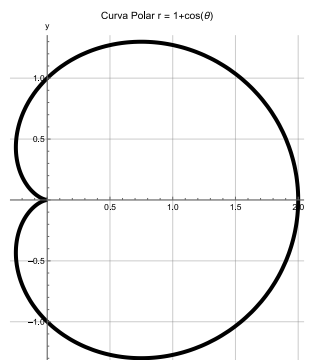
La ecuación $r = \cos\left(\frac{2}{5}\theta\right)$ con $0 \leq \theta \leq 10\pi$ representa una rosa polar con 5 pétalos, cada uno extendiéndose hasta $r = 1$, distribuidos simétricamente en los ángulos donde $\cos\left(\frac{2}{5}\theta\right) = \pm 1$. El gráfico en confirmará esta estructura.



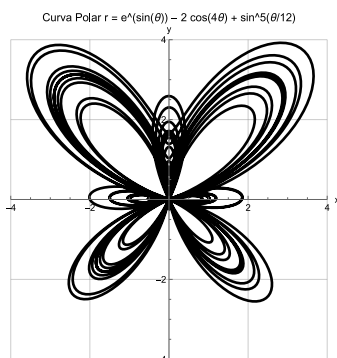
La ecuación $r = 8 \cos(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa un círculo de radio 4 centrado en el punto $(4, 0)$ en coordenadas cartesianas. Los valores negativos de (r) se reflejan adecuadamente, y el gráfico confirmará esta forma circular desplazada.



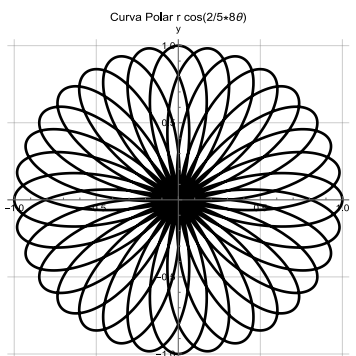
La ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa un cardiode que se abre hacia la derecha, alcanzando su máximo $r = 2$ en $\theta = 0$, tocando el origen en $\theta = \pi$, y siendo simétrica respecto al eje horizontal. El gráfico confirmará esta forma característica.



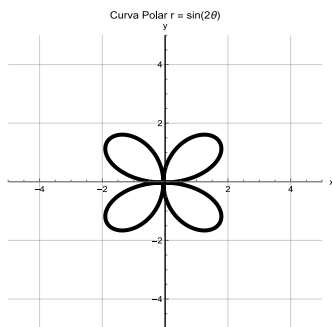
Butterfly Curve (Curva Mariposa): $r = e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right), 0 \leq \theta \leq 24\pi$. Similar en complejidad, pero esta ecuación es más exótica debido a la combinación de exponenciales y potencias.



La ecuación $r = \cos\left(\frac{2}{5}\theta\right)$, con $0 \leq \theta \leq 10\pi$, representa una rosa polar con 4 pétalos, cada uno extendiéndose hasta $r = 1$ en las direcciones determinadas por los máximos de $\cos\left(\frac{2}{5}\theta\right)$, distribuidos simétricamente a lo largo de los 2 ciclos completos. El gráfico confirmará esta estructura con 4 lóbulos distintivos.



La ecuación $r = \sin(2\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa una rosa polar con 4 pétalos, cada uno extendiéndose hasta $r = 1$ en las direcciones $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, y pasando por el origen en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$. La simetría y la estructura lobulada se confirmarán con el gráfico.



Pendientes de las rectas tangentes en coordenadas polares

Para una función $y = f(x)$, la pendiente de la recta tangente en un punto dado es $\frac{dy}{dx}$ o $(f'(x))$. Sin embargo, determinar la pendiente de una curva en coordenadas polares no es tan directo. Consideremos el caso.

La pendiente de una recta tangente, en cualquier sistema de coordenadas, es la tasa de cambio de la coordenada vertical (y) con respecto a la horizontal (x), es decir, $\frac{dy}{dx}$. Para una ecuación polar $r = f(\theta)$, expresamos las coordenadas cartesianas usando θ como parámetro: $x = f(\theta) \cos(\theta)$, $y = f(\theta) \sin(\theta)$.

Cuando (x) e (y) son funciones diferenciables de θ , la derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula como:

$$\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta), \text{ luego:}$$

$$\text{siempre que } \frac{dx}{d\theta} \neq 0.$$

Caso especial en el origen:

Si la curva pasa por el origen para algún θ_0 (es decir, $f(\theta_0) = 0$), la pendiente se simplifica. Sustituyendo $f(\theta_0) = 0$ en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta_0) \sin(\theta_0)}{f'(\theta_0) \cos(\theta_0)} = \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} = \tan(\theta_0), \text{ siempre que } f'(\theta_0) \neq 0 \text{ y } \cos(\theta_0) \neq 0.$$

Esto indica que la tangente en el origen tiene pendiente $\tan(\theta_0)$, y la recta tangente puede expresarse como $\theta = \theta_0$ en coordenadas polares, que pasa por el origen. Si $f(\theta_0) = 0$, $f'(\theta_0) \neq 0$ y $\cos(\theta_0) = 0$ (por ejemplo, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), la tangente es vertical.

Teorema

Sea (f) una función diferenciable en θ_0 . La pendiente de la recta tangente a la curva $r = f(\theta)$ en el punto $(f(\theta_0), \theta_0)$ se calcula como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta_0) \sin(\theta_0) + f(\theta_0) \cos(\theta_0)}{f'(\theta_0) \cos(\theta_0) - f(\theta_0) \sin(\theta_0)}, \text{ siempre que}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta_0) \cos(\theta_0) - f(\theta_0) \sin(\theta_0) \neq 0 \text{ en } \theta_0.$$

Caso especial en el origen:

Si la curva pasa por el origen, es decir, $f(\theta_0) = 0$, y $f'(\theta_0) \neq 0$, la pendiente se simplifica. Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta_0) \sin(\theta_0)}{f'(\theta_0) \cos(\theta_0)} = \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} = \tan(\theta_0),$$

siempre que $\cos(\theta_0) \neq 0$. Esto indica que la tangente tiene pendiente $\tan(\theta_0)$, y en coordenadas polares, la recta tangente puede expresarse como $\theta = \theta_0$, que pasa por el origen. Si además $\cos(\theta_0) = 0$ (por ejemplo, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), la tangente es vertical, siempre que $f'(\theta_0) \neq 0$.

Problema No. 19

Encuentra las pendientes de las rectas tangentes al círculo $r = f(\theta) = 10$

$$x = r \cos(\theta) = 10 \cos(\theta),$$

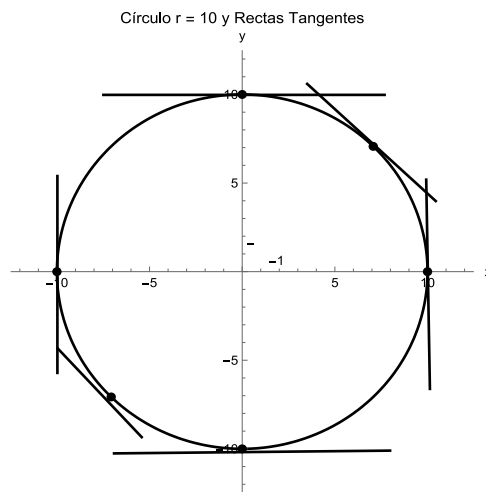
$$y = r \sin(\theta) = 10 \sin(\theta),$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -10 \sin(\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 10 \cos(\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10 \cos(\theta)}{10 \sin(\theta)} = -\cot(\theta)$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente al círculo $r = 10$ en cualquier ángulo θ es $-\cot(\theta)$



Ángulo θ	Pendiente
0	indefinida
$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	indefinida
$\frac{5\pi}{4}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0

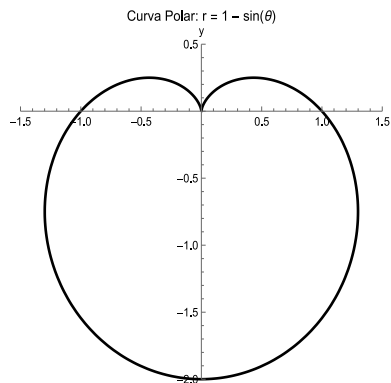
Problema No. 20

Encuentra la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas polares en los puntos dados.

$$r = 1 - \sin(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(\theta)\sin(\theta) + (1 - \sin(\theta))\cos(\theta)}{-\cos^2(\theta) - (1 - \sin(\theta))\sin(\theta)},$$

$$\text{En } \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \text{ tenemos } \frac{dy}{dx} = \frac{0}{-1} = 0$$



En $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ la pendiente es cero. Ver figura

Problema No. 21

$$r = 4 \cos(\theta) \text{ en } P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$r = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta}$$

$$r = 4 \cos(\theta), \quad \frac{dr}{d\theta} = 4 \cdot (-\sin(\theta)) = -4 \sin(\theta)$$

$$r = 2, \quad \frac{dr}{d\theta} = -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

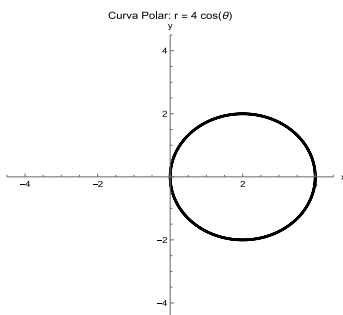
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta = (-2\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -3 + 1 = -2$$

$$\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta = (-2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La pendiente de la recta tangente en $(P(2, \frac{\pi}{3}))$ es: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$, 30 grados



Problema No. 22

$$r = 4 + \sin \theta ; \text{ en } (4,0) \text{ y } \left(3, \frac{3}{2}\pi\right)$$

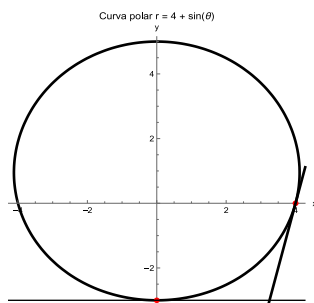
$$x = (4 + \sin \theta) \cos \theta, \quad y = (4 + \sin \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 4 \cos \theta + \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos \theta + \sin 2\theta}{\cos 2\theta - 4 \sin \theta}$$

$$\text{Punto } ((4,0)): \theta = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 \cdot 1 + 0}{1 - 0} = 4, \text{ Punto } \left(3, \frac{3}{2}\pi\right): \theta = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{0 + 0}{-1 - (-4)} = 0$$



Respuestas Finales: $(4,0): \boxed{4}, \left(3, \frac{3}{2}\pi\right): \boxed{0}$

Problema No. 23

$$r = 2\theta; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\theta \cos \theta, \quad y = 2\theta \sin \theta$$

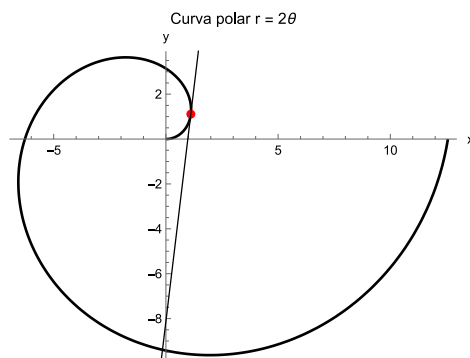
$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta - 2\theta \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \sin \theta + 2\theta \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \theta + 2\theta \cos \theta}{2 \cos \theta - 2\theta \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4 + \pi}{4 - \pi}$$



La pendiente de la recta tangente a la curva polar $r = 2\theta$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ es $m = \frac{4+\pi}{4-\pi}$

2.6 Área y longitud de arco en coordenadas polares

Área de regiones delimitadas por curvas polares

Para determinar el área de una región delimitada por una curva polar $r = f(\theta)$ entre los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, utilizamos la estrategia de "dividir y sumar" propia del cálculo integral. Suponemos que (f) es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Dividimos la región (R) en sectores radiales en forma de cuña, particionando el intervalo $[\alpha, \beta]$

en (n) subintervalos. El área aproximada de cada sector se calcula como una suma de Riemann, que mejora al aumentar el número de sectores $(n \rightarrow \infty)$ y hacer que $\Delta\theta_k \rightarrow 0$. El área exacta de R está dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} f(\theta_k)^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

De forma más general, para encontrar el área de una región (R) delimitada por dos curvas polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, suponemos que (f) y (g) son continuas y que $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ en $[\alpha, \beta]$. El área se calcula restando el área delimitada por $r = g(\theta)$ del área delimitada por $r = f(\theta)$:

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)^2 - g(\theta)^2] d\theta$$

Definición

Área de regiones en coordenadas polares

Sea (R) la región delimitada por las curvas polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, entre los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, donde (f) y (g) son funciones continuas y $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. El área de (R) está dada por:

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)^2 - g(\theta)^2] d\theta$$

Problema No. 24

Encontrar el área de un pétalo de la rosa de cuatro hojas dada por la ecuación polar $r = f(\theta) = 2\cos(2\theta)$ el intervalo $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

Fórmula del área en polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Aplicar a $r = 2\cos(2\theta)$:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^2(2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta$$

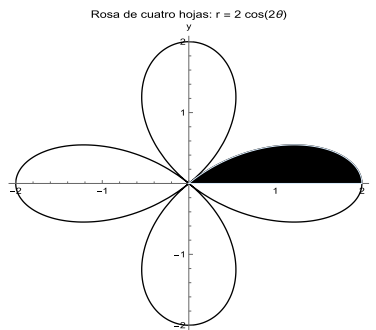
Usar identidad trigonométrica:

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(4\theta)) d\theta$$

Resolver la integral:

$$A = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$



Problema No. 25

Encuentra el área de la región. La región dentro de la curva $r = \sqrt{\cos \theta}$

Para calcular el área en coordenadas polares usando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

donde ($r = f(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$), determinamos los límites (α) y (β). Configuración de la integral

Sustituimos ($f(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sqrt{\cos \theta}]^2 d\theta$$

Dado que ($[\sqrt{\cos \theta}]^2 = \cos \theta$):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

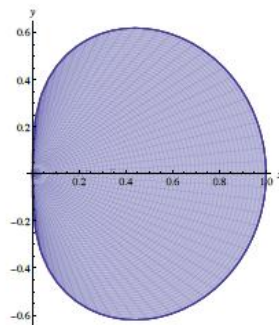
Calculamos la integral:

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta$$

Evalúamos de ($\theta = 0$) a ($\theta = \pi/2$):

$$\sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Entonces: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, $A' = 2 \cdot 12 = 1$



Problema No. 26

La región dentro del lóbulo derecho de $r = \sqrt{\cos 2\theta}$

Usamos la sustitución

$$u = 2\theta, du = 2 d\theta, d\theta = \frac{du}{2}.$$

Cuando

$$\theta = 0, u = 0.$$

Cuando

$$\theta = \pi/4, u = \pi/2.$$

La integral se transforma:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos u du$$

Calculamos:

$$\int \cos u du = \sin u$$

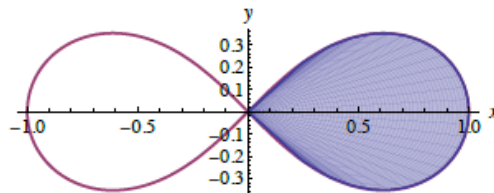
Evaluamos de

$$u = 0 \text{ a } u = \pi/2:$$

$$\sin u \Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

Entonces:

$$A' = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Problema No. 27

La región dentro del círculo $r = 8\sin\theta$

Usamos la identidad trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2};$$

$$\int \sin^2 \theta \, d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$\int 1 \, d\theta = \int \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

Entonces:

Evaluamos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$:

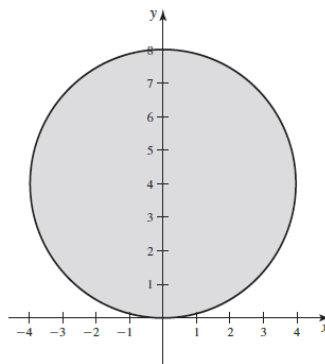
$$\left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left[\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right]$$

$$\sin 2\pi = 0, \sin 0 = 0 \quad \pi - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\text{Entonces: } = \frac{1}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

El área de la región definida por $r = 8 \sin \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ es: $A = 16\pi$



Problema No. 28

La región dentro del cardioide $r = 4 + 4\sin\theta$, Sustituimos $f(\theta) = 4 + 4\sin\theta$:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4 + 4\sin\theta]^2 d\theta$$

Expandimos el cuadrado:

$$[4 + 4\sin\theta]^2 = (4 + 4\sin\theta)(4 + 4\sin\theta) = 16 + 32\sin\theta + 16\sin^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (16 + 32\sin\theta + 16\sin^2\theta) d\theta$$

Factorizamos la constante:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16 d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 32\sin\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16\sin^2\theta d\theta$$

Evaluación de la integral

Primera integral:

$$8 \int_0^{2\pi} d\theta = 8[\theta]_0^{2\pi} = 8(2\pi - 0) = 16\pi$$

Segunda integral:

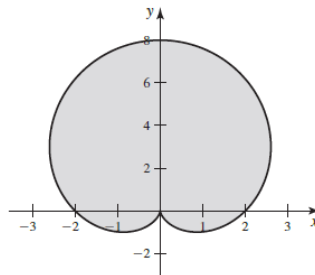
$$16 \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 16[\cos\theta]_0^{2\pi} = 16(\cos 2\pi - \cos 0) = 16(1 - 1) = 0$$

Tercera integral: Usamos la identidad: $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$:

$$8 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = 8 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$\text{Evaluamos: } \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \left(2\pi - \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = 2\pi - 0 - 0 = 2\pi$$

$$4 \cdot 2\pi = 8\pi, \quad A = 16\pi + 0 + 8\pi = 24\pi$$



Problema No. 29

La región dentro de todas las hojas de la rosa $r = 3\sin 2\theta$

Sustituimos $f(\theta) = 3\sin 2\theta$:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi [3\sin 2\theta]^2 d\theta$$

Dado que $[3\sin 2\theta]^2 = 9\sin^2 2\theta$:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi 9\sin^2 2\theta d\theta = \frac{9}{2} \int_0^\pi \sin^2 2\theta d\theta$$

Evaluación de la integral. Usamos la identidad: $\sin^2 \phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$, con $\phi = 2\theta$: $\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$

Entonces:

$$\int \sin^2 2\theta d\theta = \int \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) + C$$

Evaluamos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$:

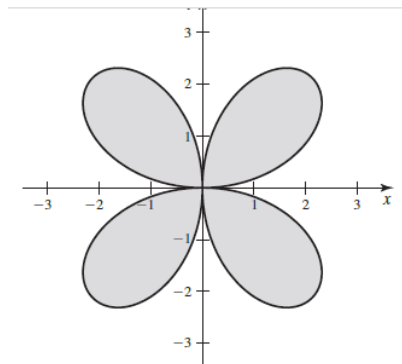
$$\left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \sin 0 \right) \right]$$

Dado que $(4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi)$, $(\sin \pi = 0)$ y $(\sin 0 = 0)$:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Entonces: El área de la región dentro de todas las hojas de la rosa es

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{8}, \quad A = \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{16}, \quad A' = 8 \cdot \frac{9\pi}{16} = \frac{72\pi}{16} = \frac{9\pi}{2}$$



Problema No. 30

La región dentro de una hoja de $r = \cos 3\theta$

Sustituimos ($f(\theta) = \cos 3\theta$):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} [\cos 3\theta]^2 d\theta$$

Dado que ($[\cos 3\theta]^2 = \cos^2 3\theta$):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta$$

Evaluación de la integral

Usamos la identidad ($\cos^2 \phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2}$), con ($\phi = 3\theta$): $\cos^2 3\theta = \frac{1+\cos 6\theta}{2}$

Entonces:

$$\int \cos^2 3\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta \right) + C$$

Evaluamos de ($\theta = 0$) a ($\theta = \pi/6$):

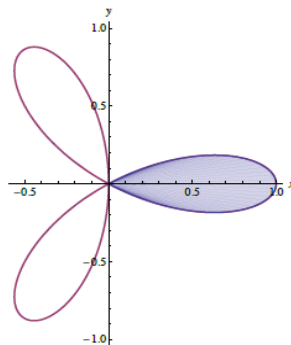
$$\left[\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta \right) \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \sin 6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \left(0 + \frac{1}{6} \sin 0 \right) \right]$$

Dado que ($6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$), ($\sin \pi = 0$) y ($\sin 0 = 0$):

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}, \quad A' = 2 \cdot \frac{\pi}{24} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$



Problema No. 31

La región dentro del bucle interior de $r = \cos \theta - \frac{1}{2}$

Determinar los límites y validez. La función $r = \cos \theta - \frac{1}{2} \geq 0$ implica $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$. Esto es válido de $\theta = 0$ (donde $r = \frac{1}{2}$) a $\theta = \pi/3$ donde $r = 0$

Configuración de la integral

Sustituimos ($f(\theta) = \cos \theta - \frac{1}{2}$):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left[\cos \theta - \frac{1}{2} \right]^2 d\theta$$

Expandimos el cuadrado:

$$\left[\cos \theta - \frac{1}{2} \right]^2 = \cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{1}{4}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta$$

Evaluación de la integral

Separamos la integral:

$$A = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{\pi/3} \cos \theta d\theta + \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4} d\theta \right]$$

- Primera integral: Usamos ($\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$):

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi/3} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin \frac{2\pi}{3} \right) - 0$$

Dado que ($\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

- Segunda integral:

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta$$

$$[\sin \theta]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Tercera integral:

$$\int \frac{1}{4} d\theta = \frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{1}{4} \theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}$$

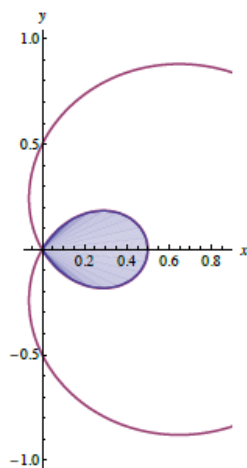
Combinamos:

$$A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right]$$

Ajustamos: $\left(\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{12} \right)$, $\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{8} \right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{4\sqrt{3}}{8} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$A' = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) = \frac{2\pi}{8} - \frac{6\sqrt{3}}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$



Problema No. 32

Área entre regiones.

Encuentre el área entre las regiones $r = \frac{1}{2}$ y dentro del círculo $r = \cos(\theta)$

Identificar las curvas

($r_{\text{outer}} = \cos \theta$) (curva exterior), ($r_{\text{inner}} = \frac{1}{2}$) (curva interior), Límites ($\theta = 0$) a ($\theta = \pi/3$).

Verificar la región. Comprobamos que ($\cos \theta \geq \frac{1}{2}$) en $([0, \pi/3])$:

$A(\theta = 0)$: ($\cos 0 = 1 > \frac{1}{2}$). $A(\theta = \pi/3)$: ($\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$).

Como $\cos \theta$ disminuye de 1 a $\frac{1}{2}$, la región es válida

Configuración de la integral

El área es:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left[(\cos \theta)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] d\theta$$

Simplificamos:

$$(\cos \theta)^2 = \cos^2 \theta, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4} \right) d\theta$$

Evaluación de la integral

$$\text{Usamos } (\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}):$$

$$\cos^2 \theta - \frac{1}{4} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2} + \cos 2\theta}{2}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{1}{2} + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \cos 2\theta \right) d\theta$$

Separamos:

$$A = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} d\theta + \int_0^{\pi/3} \cos 2\theta d\theta \right]$$

Primera integral:

$$\int \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}$$

Segunda integral:

$$\int \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

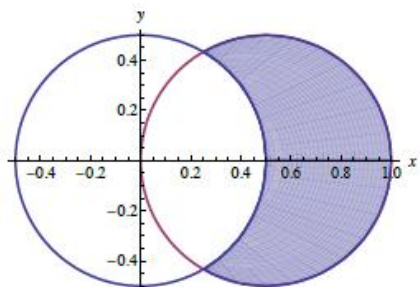
$$\left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - 0$$

$$\text{Dado que } \left(\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right):$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Combinamos:

$$A = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}$$



Longitud de arco de una curva polar

Para determinar la longitud de arco de una curva polar definida por la ecuación $r = f(\theta)$ en el intervalo $\alpha < \theta < \beta$ (suponiendo que la curva no se solapa en este intervalo), convertimos la ecuación polar en ecuaciones paramétricas en coordenadas cartesianas y aplicamos la fórmula de longitud de arco para curvas paramétricas.

Usando θ como parámetro y $r = f(\theta)$, las ecuaciones paramétricas de la curva polar son:

$$x = r \cos(\theta) = f(\theta) \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) = f(\theta) \sin(\theta),$$

donde θ está en el intervalo $\alpha < \theta < \beta$. La fórmula para la longitud de arco (L) de una curva paramétrica es:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Calculamos las derivadas de (x) y (y) con respecto a θ :

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta).$$

Sustituyendo estas derivadas en la fórmula de longitud de arco, se obtiene:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)]^2 + [f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)]^2.$$

Desarrollando y simplificando:

$$= [f'(\theta)]^2 \cos^2(\theta) - 2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) + [f(\theta)]^2 \sin^2(\theta) + [f'(\theta)]^2 \sin^2(\theta) + 2f'(\theta)f(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) + [f(\theta)]^2 \cos^2(\theta).$$

Agrupando términos:

$$= [f'(\theta)]^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + [f(\theta)]^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2.$$

Por lo tanto, la longitud de arco se expresa como:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

Esta fórmula simplificada es más práctica para calcular la longitud de arco en coordenadas polares.

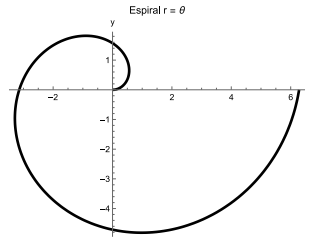
Longitud de arco de una curva polar

Sea (f) una función con derivada continua en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. La longitud de arco (L) de la curva polar definida por $r = f(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ está dada por:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

Problema No. 33

Encuentra la longitud de arco de la espiral $r = \theta$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ver figura siguiente



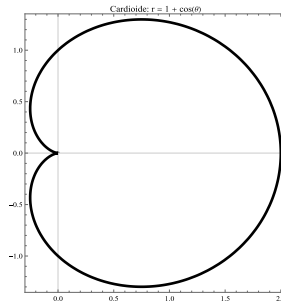
$$r = \theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = 1$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$\pi(\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})) \approx 21.26$$

Problema No. 34

Encuentra la longitud de arco del cardiode $r = 1 + \cos\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$



El cardiode es simétrico respecto al eje x, y su mitad superior se genera para $0 < \theta < \pi$. La longitud de la curva completa es el doble de la longitud de su mitad superior.

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = 8$$

Problema No. 35

Encuentra la longitud de las siguientes curvas polares.

La curva polar $r = a \sin \theta$

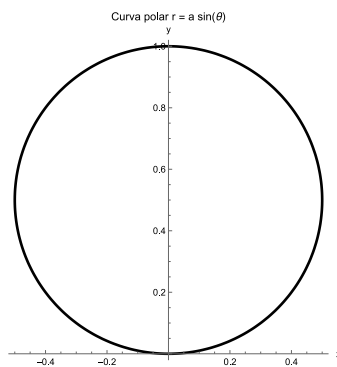
Es un círculo completo. Para encontrar su longitud de arco, usamos la fórmula de la longitud de arco en coordenadas polares:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta, \quad r = a \sin \theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = a \cos \theta,$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2 = a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2$$

Longitud de arco es

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2} d\theta = \int_0^{\pi} a d\theta = a\pi$$



Problema No. 36

$$r = 2 - 2\sin\theta, \frac{dr}{d\theta} = -2\cos\theta, r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (2 - 2\sin\theta)^2 + (-2\cos\theta)^2$$

$$= 4 - 8\sin\theta + 4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta$$

$$= 4 - 8\sin\theta + 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= 4 - 8\sin\theta + 4 \quad (\text{ya que } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) = 8 - 8\sin\theta, = 8(1 - \sin\theta)$$

$$\text{Longitud de arco: } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{8(1 - \sin\theta)} d\theta, = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin\theta} d\theta$$

Para resolver la integral $(\int \sqrt{1 - \sin\theta} d\theta)$, usamos identidades trigonométricas:

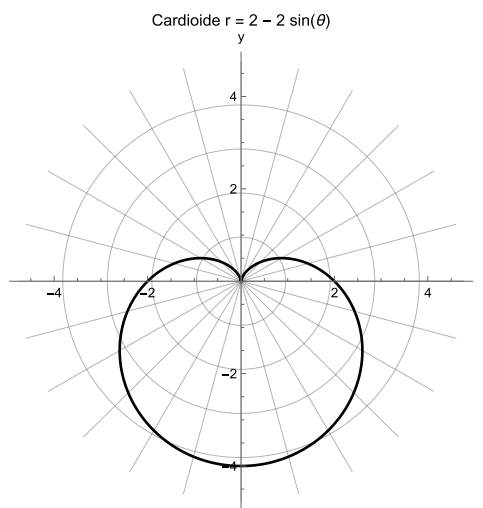
$$1 - \sin\theta = \left(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2, \text{ Por lo tanto:}$$

$$\sqrt{1 - \sin\theta} = \left|\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right|, \text{ La integral se convierte en:}$$

$$L = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta.:$$

$$L = 16$$

La longitud de arco del cardioide ($r = 2 - 2\sin\theta$) es: $L = 16$



Problema No. 37.

La espiral: $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\theta, \quad r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (\theta^2)^2 + (2\theta)^2,$$

$$= \theta^4 + 4\theta^2 = \theta^2(\theta^2 + 4)$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta$$

$u = \theta^2 + 4 \Rightarrow du = 2\theta d\theta \Rightarrow \theta d\theta = \frac{1}{2} du$, cambiando los límites de integración: cuando $(\theta = 0)$, $(u = 4)$. Cuando $(\theta = 2\pi)$, $(u = (2\pi)^2 + 4 = 4\pi^2 + 4)$. La integral se convierte en:

$$L = \int_4^{4\pi^2+4} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du$$

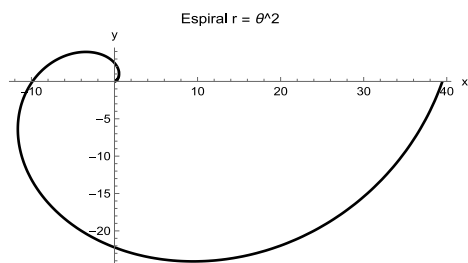
$$= \frac{1}{2} \int_4^{4\pi^2+4} u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{4\pi^2+4}$$

$$= \frac{1}{3} [(4\pi^2 + 4)^{3/2} - 4^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{3} [(4\pi^2 + 4)^{3/2} - 8]$$

$$L = \frac{1}{3} [(4\pi^2 + 4)^{3/2} - 8]$$



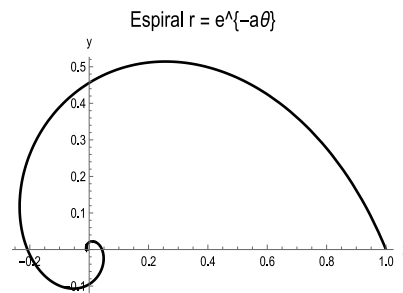
Problema No. 38.

La espiral dada por la ecuación polar: $r = e^{-a\theta}$, para $\theta \geq 0$ y $a > 0$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{e^{-2a\theta} + a^2 e^{-2a\theta}} d\theta$$

$$= \sqrt{1 + a^2} \int_0^{\infty} e^{-a\theta} d\theta = \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{1 + a^2} \int_0^b e^{-a\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{-a} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-a\theta} \Big|_0^b = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{-a} (0 - 1) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$$



2.7 Problemas resueltos de la unidad II

Eliminando el parámetro

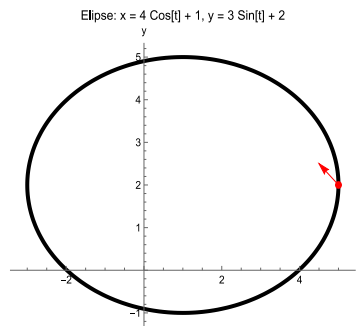
Elimina el parámetro para encontrar una descripción de las siguientes curvas en términos de x e y . Proporciona una descripción geométrica y la orientación positiva de la curva.

Problema No. 39

$$x = 4 \cos t + 1, y = 3 \sin t + 2, \text{ para } 0 < t < 2\pi; t = \frac{\pi(x-1)}{3} = \cos t, \frac{(y-2)}{3} = \sin t$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = \cos^2 t + \sin^2 t, \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Por lo tanto, la curva es una elipse centrada en $(1, 2)$ con semiejes de longitud 4 (horizontal) y 3 (vertical), recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj

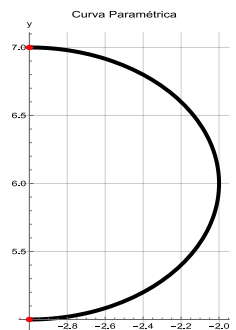


Problema No. 40

$$x = \sin t - 3, y = \cos t + 6; 0 \leq t \leq \pi$$

$$(x + 3) = \sin t, (y - 6) = \cos t, (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t,$$

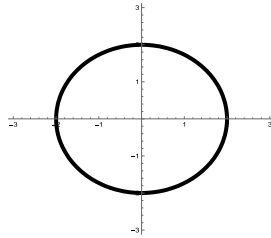
$$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 1$$



El gráfico mostrará un semicírculo superior centrado en $(-3, 6)$ con radio 1, trazado en sentido horario desde $(-3, 7)$ hasta $(-3, 5)$

Problema No. 41

$$x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}, \quad y^2 = 4 - t^2, \quad 4 - y^2 = t^2, \quad 4 - y^2 = x^2, \quad x^2 + y^2 = 4$$

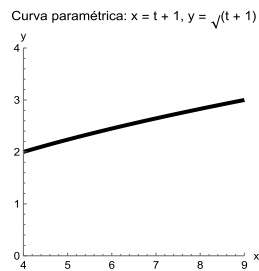


El gráfico muestra un círculo de radio 2, centrado en el origen

Problema No. 42

$$x = t + 1, \quad y = \sqrt{t + 1}, \quad 3 \leq t \leq 8$$

$$x - 1 = t, \quad y^2 = t + 1, \quad y^2 - 1 = t, \quad x - 1 = y^2 - 1, \quad x - y^2 = 0, \quad y = \sqrt{x}$$



Geoméricamente, es la mitad superior de una parábola que abre hacia la derecha. La orientación positiva es de izquierda a derecha, comenzando en (4,2) y terminado en (9,3)

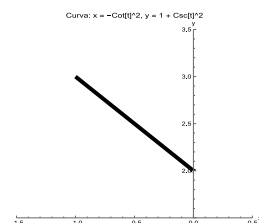
Problema No. 43

$$x = -\cot^2 t, \quad y = 1 + \csc^2 t, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\csc^2 t = 1 + \cot^2 t, \quad y = 1 + \csc^2 t = 1 + (1 + \cot^2 t) = 2 + \cot^2 t$$

$$x = -\cot^2 t, \quad \cot^2 t = -x, \quad y = 2 + (-x) = 2 - x, \quad y = 2 - x, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

La curva es un segmento de recta desde $(-1,3)$ hasta $(0,2)$



Curvas paramétricas y rectas tangentes

Eliminar el parámetro para obtener una ecuación en x e y . Encontrar la pendiente de la curva en el valor dado de t . Hacer un bosquejo de la curva mostrando la orientación positiva de la curva y la recta tangente en el punto correspondiente al valor dado de t .

Problema No. 44

$$x = 8\cos t + 1, y = 8\sin t + 2,$$

$$\text{para } 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ en } t = \frac{\pi}{3}$$

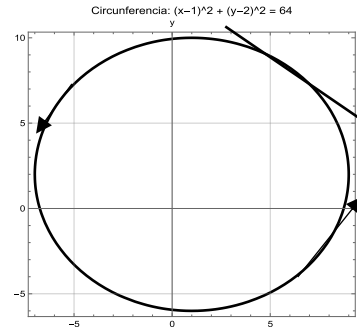
$$(x - 1) = 8\cos t, (y - 2) = 8\sin t$$

$$(x - 1)^2 = 64\cos^2 t, (y - 2)^2 = 64\sin^2 t$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 64(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 64$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = \frac{\pi}{3}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1/\sqrt{3}$$



Una circunferencia centrada en $(1, 2)$ con radio 8

Nota que el punto en la curva correspondiente a $t = \frac{\pi}{3}$ tiene coordenadas $(5, 2 + 4\sqrt{3}) \approx (5, 8.9)$

Problema No. 45

$$x = 4\sin 2t, y = 3\cos 2t, 0 \leq t \leq \pi, \text{ recta tangente en } t = \frac{\pi}{6}$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

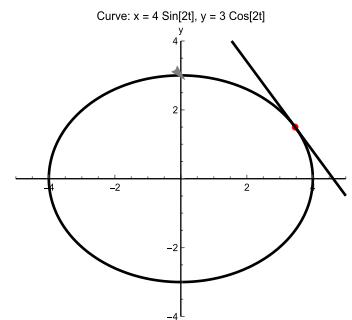
$$y(t) = 3\cos 2t$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

punto $(2\sqrt{3}, 3/2)$

Pendiente:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{6\sin 2t}{8\cos 2t} = -\frac{3}{4}\tan 2t$$

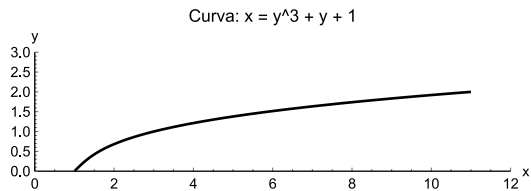


El punto en la curva correspondiente a $t = \frac{\pi}{6}$ tiene coordenadas $(2\sqrt{3}, 3/2)$

En $t = \frac{\pi}{6}, 2t = \frac{\pi}{3}, \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ Pendiente $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3})$ $y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x + 6$	
---	--

Problema No. 46

Encuentre el área de las siguientes regiones. Escribe ecuaciones paramétricas para las siguientes curvas. Las soluciones no son únicas.

El segmento de la curva $x = y^3 + y + 1$ que comienza en $(1,0)$ y termina en $(11,2)$. Identificar el rango de y En el punto inicial $(1,0)$, $y = 0$. En el punto final $(11,2)$, $y = 2$. Por lo tanto, y varía desde 0 hasta 2. Expresar x en términos de y La ecuación de la curva ya está dada como: $x = y^3 + y + 1$ Escribir las ecuaciones paramétricas Usamos y como parámetro t, donde t varía desde 0 hasta 2. Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x(t) = t^3 + t + 1 \\ y(t) = t \end{cases} \text{ con } 0 \leq t \leq 2$	 Curva: $x = y^3 + y + 1$ La gráfica muestra la curva $x = y^3 + y + 1$ desde $(1,0)$ hasta $(11,2)$.
--	--

Ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ generada en sentido horario

Usamos las siguientes ecuaciones paramétricas:

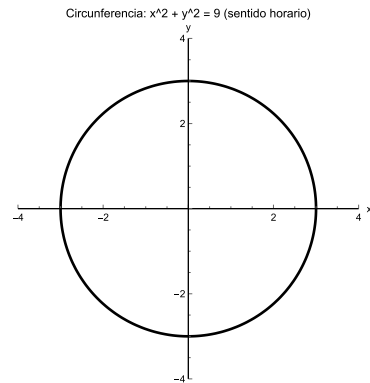
$$x(t) = 3 \cos(t)$$

$$y(t) = -3 \sin(t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

El radio de la circunferencia es 3.

El signo negativo en $y(t) = -3 \sin(t)$ asegura que la curva se genere en sentido horario.



Problema No. 47

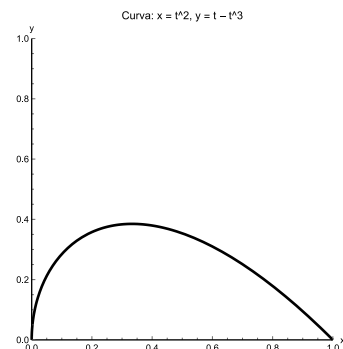
Área limitada por curvas paramétricas

La región limitada por el eje y y la curva paramétrica

$$x = t^2, \quad y = t - t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$A = \int_0^1 (t - t^3) (2t) dt$$

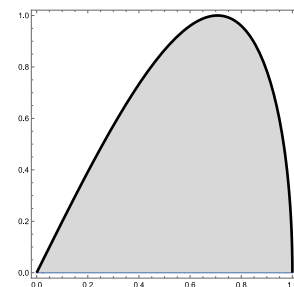
$$= \int_0^1 (2t^2 - 2t^4) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}$$



Problema No. 48

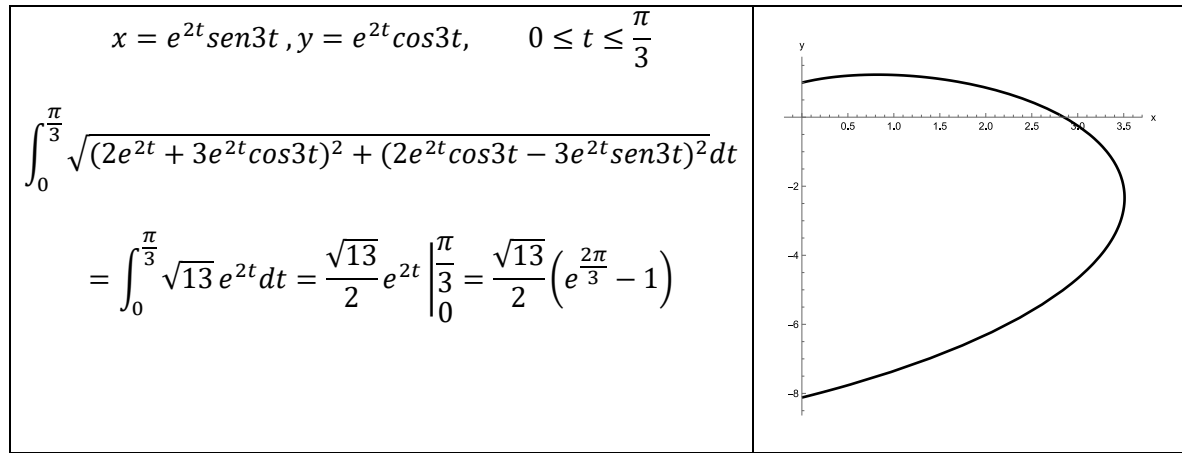
La región limitada por el eje x y la curva paramétrica $x = \cos t, y = \sin 2t$, para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. El área es:

$$A = - \int_0^{2\pi} \sin 2t (-\sin t) dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin t^2 \cos t dt = 2 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

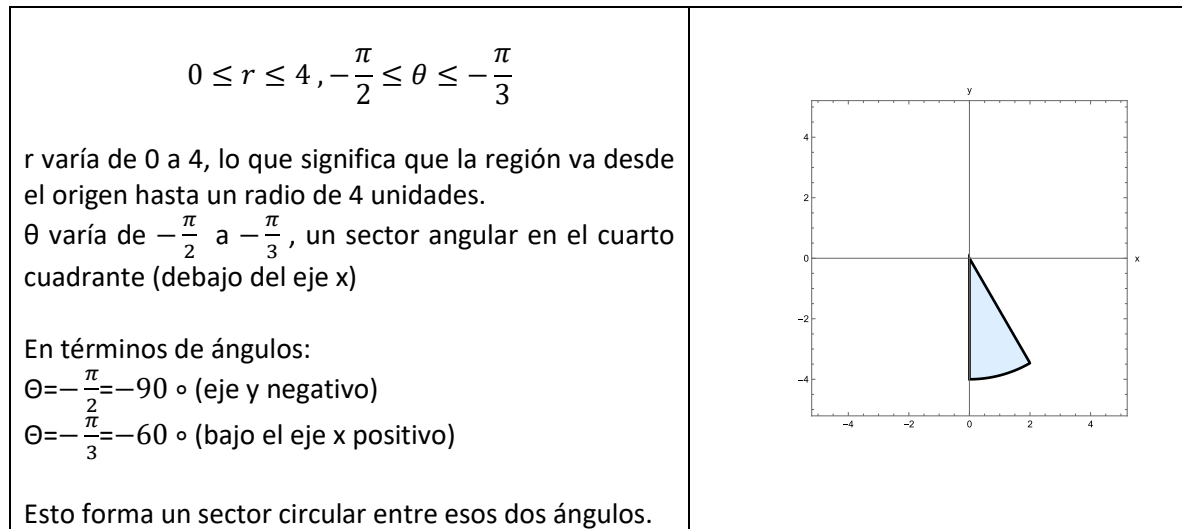


Problema No. 49

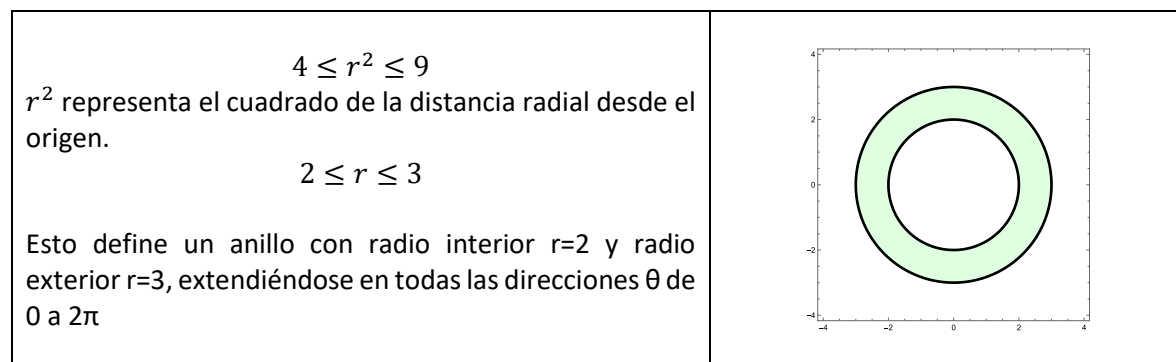
Longitud de arco: Encuentra la longitud de las siguientes curvas.

**Problema No. 50**

Conjuntos en coordenadas polares: Dibuja los siguientes conjuntos de puntos

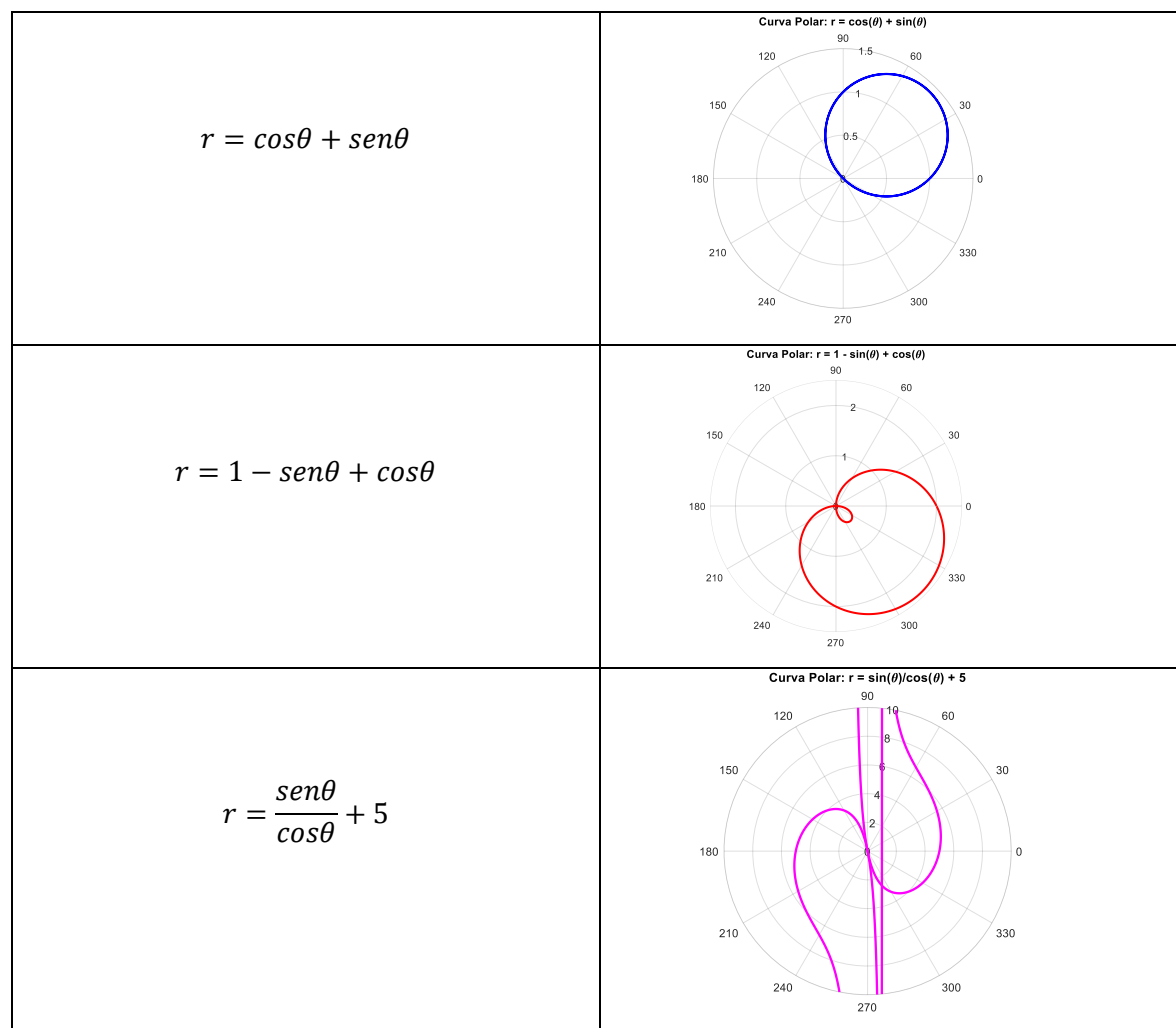


Problema No. 51



Problema No. 52

Curvas polares: Grafica las siguientes ecuaciones.



Problema No. 53

Encuentra la intersección de las siguientes curvas

$$r = \sqrt{3} \text{ y } r = 2\cos 2\theta$$

$$\sqrt{3} = 2\cos 2\theta, \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

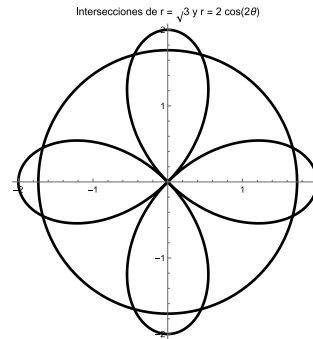
$$2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{11\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{13\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{23\pi}{12}\right)$$

Usando la simetría, vemos que también hay puntos de intersección en

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{7\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{17\pi}{12}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{19\pi}{12}\right)$$



Problema No. 54

$$r = \sqrt{\cos 3t}, r = \sqrt{\sin 3t}$$

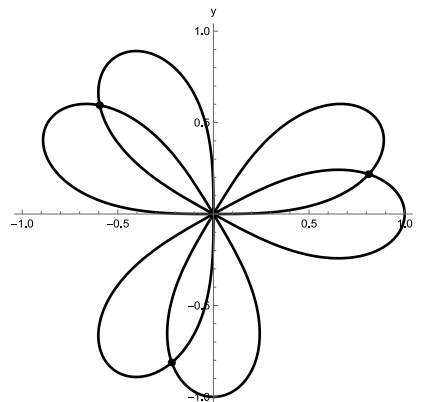
$$\sqrt{\cos 3t} = \sqrt{\sin 3t}, t \neq 0$$

$$\cos 3t = \sin 3t, \frac{\sin 3t}{\cos 3t} = 1, \tan 3t = 1$$

$$3t = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, t = \frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

Las curvas se intersecan en $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(\frac{17\pi}{12}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), (0,0)$$



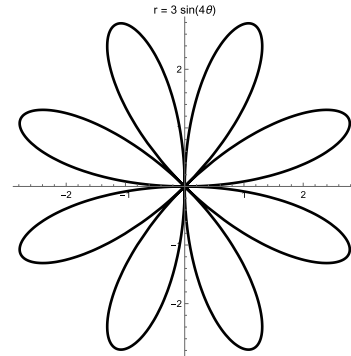
Problema No. 55

Encuentre el área de las siguientes regiones

La región dentro de un pétalo de rosa

$$r = 3\sin 4\theta$$

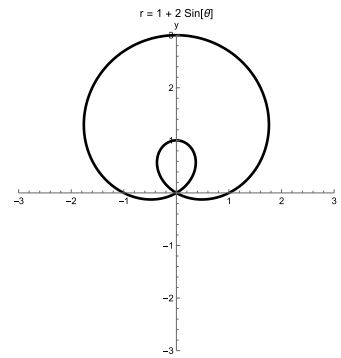
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (9\sin^2 4\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 8\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{4} \left(\theta - \frac{\sin 8\theta}{8} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9\pi}{16} \end{aligned}$$

**Problema No. 56**

La región dentro del limaçon

$$r = 1 + 2\sin \theta$$

$$\begin{aligned} 2 \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + 2\sin t)^2 dt \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + 4\sin t + 4\sin^2 t) dt \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + 4\sin t + 2 - 2\cos 2t) dt \\ &= (3t - 4\cos t - \sin 2t) \bigg|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{9\pi}{2} - 0 - 0 \right) - \left(\frac{7\pi}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Problema No. 57

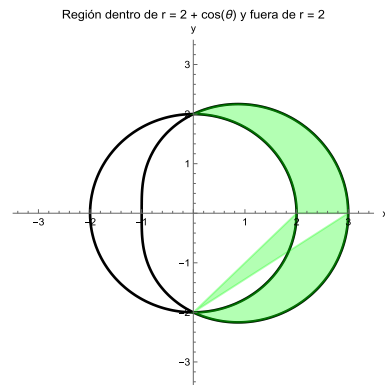
la región que está dentro del limaçon

$r = 2 + \cos\theta$ fuera del círculo

$$r = 2$$

Las curvas se intersecan en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Por simetría, el área es el doble del área fuera del círculo y dentro del limaçon entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2 + \cos\theta)^2 - 2^2) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= (4\sin\theta + \frac{1}{2}(\cos\theta\sin\theta + \theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



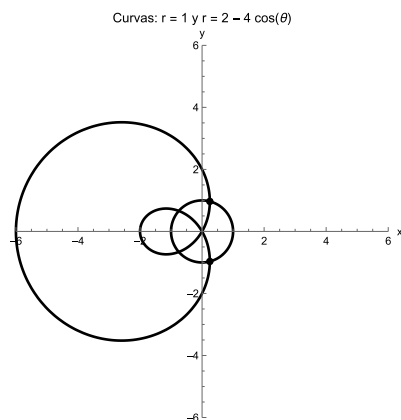
Problema No. 58

Puntos de intersección

Considera las ecuaciones polares $r = 1$ y $r = 2 - 4\cos\theta$. Grafica las curvas. ¿Cuántos puntos de intersección observas?
b) Proporciona las coordenadas polares aproximadas de los puntos de intersección.

a) Hay 2 puntos de intersección.

b) $(r, \theta) \approx (1, 1.318)$ $(r, \theta) \approx (1, 4.965)$

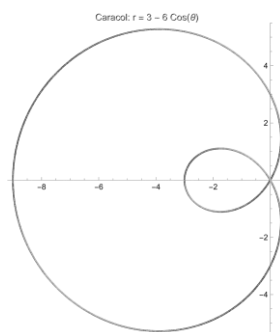


Problema No. 59

Longitud de arco de curvas polares

Encuentra la longitud aproximada de las siguientes curvas.

$$\begin{aligned} r &= 3 - 6\cos\theta \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(3 - 6\cos\theta)^2 + (6\sin\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sqrt{5 - 4\cos\theta} d\theta \\ &\approx 40.09 \end{aligned}$$



Conclusiones

El Capítulo II de los apuntes de la asignatura Cálculo Vectorial, correspondiente a la Unidad II del plan de estudios de las carreras de Ingeniería Electromecánica, Mecatrónica y Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Ensenada y del Tecnológico Nacional de México, aborda de manera integral los conceptos fundamentales relacionados con curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares. Este capítulo, estructurado en seis temas clave, proporciona una base teórica sólida y un enfoque práctico que beneficia tanto a la comunidad docente como estudiantil, al facilitar la comprensión y la aplicación de estos conceptos en problemas de ingeniería.

Los temas desarrollados en el capítulo son:

Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica: Se introduce la representación de curvas mediante ecuaciones paramétricas, destacando su flexibilidad para describir trayectorias complejas y su utilidad en modelado gráfico.

Derivada de una curva en forma paramétrica: Se presenta la metodología para calcular derivadas en curvas paramétricas, esencial para analizar propiedades como velocidad y aceleración en sistemas dinámicos.

Tangentes a una curva: Se exploran las ecuaciones de líneas rectas tangentes y su aplicación en el análisis del comportamiento local de las curvas.

Área y longitud de arco: Se desarrollan fórmulas para calcular el área bajo una curva y la longitud de arco, herramientas clave en aplicaciones geométricas y físicas, como el diseño mecánico y la optimización de trayectorias.

Curvas planas y gráficas en coordenadas polares: Se estudian las curvas definidas en coordenadas polares, resaltando su utilidad para representar simetrías radiales y su representación gráfica.

Cálculo en coordenadas polares: Se abordan derivadas, integrales y otras operaciones en coordenadas polares, con énfasis en su aplicación a problemas de longitud de arco y área.

Este capítulo no solo cubre todos los temas de la Unidad II de Cálculo Vectorial, sino que también presenta una exposición teórica clara y concisa, complementada con la resolución de más de 50 problemas prácticos. Esta combinación de teoría y práctica permite a los estudiantes del Instituto Tecnológico de Ensenada y de otras instituciones del Tecnológico Nacional de México desarrollar habilidades analíticas y técnicas necesarias para resolver problemas reales en sus respectivas carreras. Los ejemplos resueltos ilustran la aplicación de los conceptos en contextos de ingeniería, como el diseño de componentes electromecánicos, la programación de sistemas computacionales y el control en sistemas mecatrónicos.

Para la comunidad docente, estos apuntes representan un recurso valioso que apoya la enseñanza estructurada y fomenta el aprendizaje activo, al proporcionar una guía clara para la explicación de conceptos y la evaluación de competencias. Asimismo, el enfoque práctico del capítulo fortalece la formación integral de los estudiantes, alineándose con los objetivos del plan de estudios del Tecnológico Nacional de México, que busca formar ingenieros competentes y capaces de enfrentar desafíos tecnológicos.

En resumen, el Capítulo II de Curvas Planas, Ecuaciones Paramétricas y Coordenadas Polares es un pilar fundamental en el estudio del Cálculo Vectorial, ya que dota a los estudiantes de herramientas matemáticas esenciales para el análisis y diseño en ingeniería, promoviendo un aprendizaje significativo y aplicable tanto en el ámbito académico como profesional.

Bibliografía

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2016). Calculus: Early transcendentals (10th ed.). Wiley. (Cubre ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y longitud de arco en los capítulos de cálculo multivariable).

Apostol, T. M. (1969). Calculus, Volume II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability (2nd ed.). Wiley. (Incluye una explicación detallada de curvas paramétricas y cálculo en coordenadas polares).

Ayres, F., & Mendelson, E. (2012). Schaum's outline of calculus (6th ed.). McGraw-Hill Education. (Proporciona ejemplos prácticos y problemas resueltos sobre curvas planas y coordenadas polares).

Brannan, J. R., Esplen, M. F., & Gray, J. J. (2002). Geometry (2nd ed.). Cambridge University Press. (Explora curvas planas y su representación en coordenadas polares desde un enfoque geométrico).

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2002). Calculus with analytic geometry (6th ed.). Prentice Hall. (Incluye secciones sobre derivadas de curvas paramétricas y cálculo de áreas en coordenadas polares).

Granville, W. A., Smith, P. F., & Longley, W. R. (2011). Elements of the differential and integral calculus (Revised ed.). Nabu Press. (Clásico que cubre longitud de arco y tangentes a curvas paramétricas).

Larson, R., & Edwards, B. H. (2021). Calculus (11th ed.). Cengage Learning. (Ofrece una cobertura completa de ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y aplicaciones en ingeniería).

Leithold, L. (2002). El cálculo con geometría analítica (7ª ed.). Oxford University Press. (Texto en español con un enfoque claro en curvas paramétricas y coordenadas polares, ampliamente usado en México).

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). Cálculo (9ª ed.). Pearson Educación. (Libro en español que incluye ejemplos prácticos de longitud de arco y áreas en coordenadas polares).

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2012). Calculus: One and several variables (10th ed.). Wiley. (Aborda curvas planas y cálculo en coordenadas polares con aplicaciones en física e ingeniería).

Spivak, M. (2008). Calculus (4th ed.). Publish or Perish. (Proporciona un enfoque riguroso sobre derivadas de curvas paramétricas y coordenadas polares).

Stewart, J. (2015). Calculus: Early transcendentals (8th ed.). Cengage Learning. (Texto ampliamente utilizado que cubre ecuaciones paramétricas, tangentes y cálculo en coordenadas polares).

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2012). Calculus (6th ed.). Brooks/Cole. (Incluye secciones detalladas sobre longitud de arco y curvas en coordenadas polares).

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de una y varias variables (4ª ed.). McGraw-Hill Interamericana.

(Texto en español con ejemplos prácticos y problemas resueltos sobre curvas planas y coordenadas polares).

Kline, M. (1998). Calculus: An intuitive and physical approach (2nd ed.). Dover Publications. (Ofrece un enfoque intuitivo para entender curvas paramétricas y sus aplicaciones en ingeniería).

Tema III

3. Funciones vectoriales de una variable real

Introducción

3.1 Definición de función vectorial de una variable real

3.2 Límites y continuidad de una función vectorial

3.3 Derivada de una función vectorial

3.4 Integración de funciones vectoriales

3.5 Longitud de arco

3.6 Vectores tangente, normal y binormal

3.7 Curvatura

3.8 Aplicaciones

Conclusiones

Bibliografía

Introducción

Las funciones vectoriales de una variable real son una herramienta fundamental en el cálculo vectorial, ya que permiten describir fenómenos dinámicos en el espacio tridimensional, como trayectorias de partículas, movimiento de cuerpos celestes o curvas en ingeniería. Estas funciones asignan a cada valor real (t) un vector en $\mathcal{R}^n$, típicamente representado como $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, donde $(x(t), y(t), z(t))$ son funciones reales que describen las coordenadas en función del parámetro (t) , usualmente el tiempo.

Definición de función vectorial de una variable real: Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está definida en un intervalo $I \subset \mathcal{R}$ y toma valores en $\mathcal{R}^n$. Por ejemplo, una curva en el espacio 3D puede representarse como $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, donde cada componente es una función escalar.

Límites y continuidad: El límite de una función vectorial se evalúa componente por componente, es decir, siempre que cada límite exista. Una función vectorial es continua en $t = a$ si $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$, lo que implica que la curva no presenta saltos o interrupciones.

Derivada de una función vectorial:

La derivada $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ representa el vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{r}(t)$, indicando la dirección y velocidad del movimiento. Se calcula derivando cada componente:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle.$$

Integración de funciones vectoriales: La integral de una función vectorial se realiza componente por componente, es decir,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left\langle \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right\rangle.$$

Representa el desplazamiento neto o la acumulación de una magnitud vectorial a lo largo de un intervalo.

Longitud de arco: La longitud de una curva desde $t = a$ hasta $t = b$ se calcula como: $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$, $|\mathbf{r}'(t)|$ es la magnitud del vector tangente, que mide la rapidez del movimiento a lo largo de la curva.

Vectores tangentes, normal y binormal: El vector tangente unitario $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ a la curva. El vector normal unitario $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$ que la curva se dobla. El vector binormal $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ completa un sistema ortogonal que describe el comportamiento local de la curva.

Curvatura: La curvatura $k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$ mide qué tan rápido la curva se desvía de una línea recta. Una curvatura alta indica un giro pronunciado, mientras que una curvatura baja sugiere una trayectoria casi rectilínea.

El estudio de funciones vectoriales de una variable real es crucial para comprender conceptos más avanzados en cálculo vectorial, como campos vectoriales, integrales de línea, teoremas de Green,

Stokes y la divergencia. Estos conceptos dependen de una sólida comprensión de las propiedades geométricas y dinámicas de las curvas en el espacio, que se construyen sobre los fundamentos de derivadas, integrales y curvatura. Además, son la base para el análisis de superficies parametrizadas y ecuaciones diferenciales en contextos físicos y geométricos, permitiendo aplicaciones en relatividad, electromagnetismo y optimización de sistemas complejos.

3.1 Definición de función vectorial de una variable real

En el **tema 1**, utilizamos vectores para representar cantidades estáticas, como una fuerza constante aplicada al extremo de una llave o la velocidad constante de un bote en una corriente. En este tema, **ponemos los vectores en movimiento** introduciendo las **funciones vectoriales** (o simplemente, *funciones vectoriales*).

Aspectos clave

1. Gráficas de funciones vectoriales:
2. Cálculo con funciones vectoriales:
3. Aplicaciones prácticas
4. Conceptos avanzados: Longitud de arco, Curvatura, Vectores tangente y normal

Definición de función vectorial de una variable real

Una función de la forma $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) \rangle$ puede interpretarse de dos maneras:

1. Como ecuaciones paramétricas

Representa un conjunto de tres ecuaciones paramétricas que describen una curva en el espacio (una trayectoria).

2. Como función vectorial:

Las tres variables dependientes (x, y, z) son las componentes del vector $\mathbf{r}$, y cada una varía con respecto a una única variable independiente t (que frecuentemente representa el tiempo)

A medida que t varía: El punto $(x(t), y(t), h(t))$ describe una curva paramétrica en el espacio. Al mismo tiempo, este punto es la punta del vector de posición $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) \rangle$

Es decir, una función vectorial es un conjunto de ecuaciones paramétricas escritas en forma vectorial.

Funciones vectoriales en dos dimensiones ($\mathbb{R}^2$) $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle$

Funciones vectoriales en tres dimensiones ($\mathbb{R}^3$) $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) \rangle$

Cuando Se estudiaron en el tema anterior las ecuaciones paramétricas: $x = acost$, $y = bsent$, para $0 \leq t \leq 2\pi$ describe una circunferencia de radio a centrada en el origen. La función vectorial correspondiente es $\mathbf{r}(t) = \langle acost, bsent \rangle$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Todas las **curvas planas** descritas por ecuaciones paramétricas en la unidad II pueden convertirse fácilmente en funciones vectoriales de la misma manera

Problema No. 1

Una circunferencia parametrizada $\mathbf{r}(t) = \langle cost, sent \rangle$ para $0 \leq t \leq 2\pi$

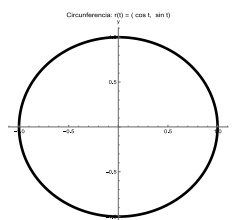


Figura No. 1. Una circunferencia parametrizada con radio igual a 1

Problema No. 2

$\mathbf{r}(t) = \langle 2cost, 2sent \rangle$ para $0 \leq t \leq 2\pi$

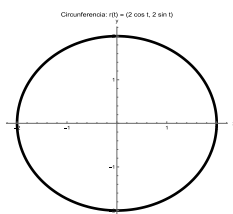


Figura No. 2. Curva parametrizada con radio igual a 2

Problema No. 3

$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + cost, 2 + sent \rangle$ para $0 \leq t \leq 2\pi$

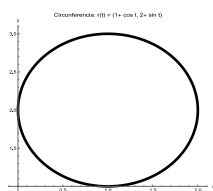


Figura No. 3. Curva parametrizada con centro en (1,2) y radio igual a 1

Problema No. 4

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t \rangle \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

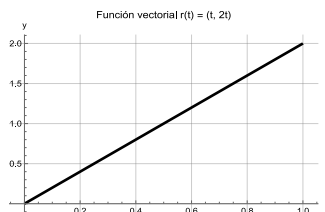


Figura No. 4. Función vectorial que representa una línea recta en el espacio $\mathbb{R}^2$ que va desde el origen $(0,0)$ hasta el punto $(1,2)$.

Problema No. 5

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 2\sin t \rangle \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

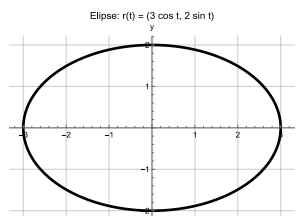


Figura No. 5. La función describe una **elipse** centrada en el origen $(0,0)$. Semi eje mayor igual a 3. Semi eje menor igual a 2.

Curvas en el espacio

Una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) \rangle$ también puede expresarse de la forma $\mathbf{f}(t)\mathbf{i} + \mathbf{g}(t)\mathbf{j} + \mathbf{h}(t)\mathbf{k}$ donde f, g y h están definidas en un intervalo $a \leq t \leq b$. El dominio de $\mathbf{r}$ es el conjunto más grande de valores de t para los cuales todas las funciones f, g y h están definidas.

A medida que el parámetro t varía en el intervalo $a \leq t \leq b$, cada valor de t produce un vector posición que corresponde a un punto sobre la curva, comenzando en el vector inicial $\mathbf{r}(a)$ y terminando en el vector final $\mathbf{r}(b)$. La curva parametrizada resultante puede tener una longitud finita o extenderse indefinidamente. La curva también puede cruzarse a sí misma o cerrarse y repetir su trayectoria. Figura No. 6

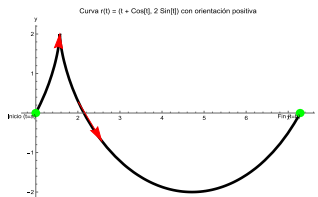


Figura No. 6. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t) \rangle$ para $a \leq t \leq b$

Orientación de las curvas

Si una curva suave C se considera **únicamente como un conjunto de puntos**, en cualquier punto de C es posible dibujar **vectores tangentes en dos direcciones opuestas**. Figura No. 7

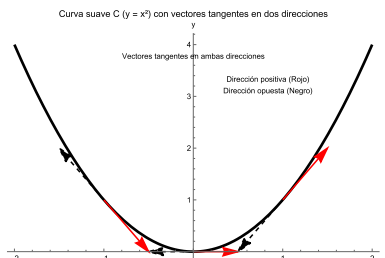


Figura No. 7. Curva no parametrizada, los vectores tangentes en direcciones opuestas

Una **curva parametrizada**, descrita por una función $\mathbf{r}(t)$ donde $a \leq t \leq b$, tiene una **dirección natural u orientación**. La **orientación positiva** es la dirección en la que la curva se genera a medida que el parámetro t aumenta desde a hasta b . Figura No. 8

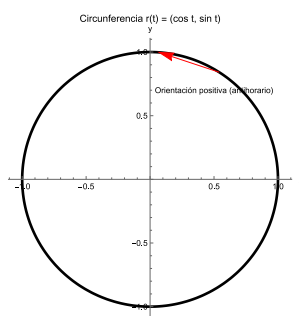


Figura No. 8. Curva parametrizada, los vectores tangentes indican la orientación positiva

Problema No. 6

Grafique la curva descrita por la siguiente función, indicando la orientación positiva. Figura No. 9

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, 0, \sin t \rangle \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

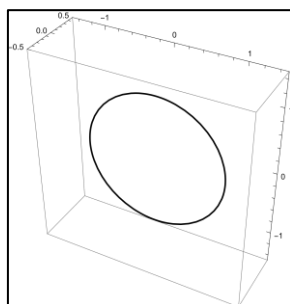


Figura No. 9. Círculo unitario en el plano xz centrado en el origen

Problema No. 7

Grafique la curva descrita por la siguiente función, indicando la orientación positiva. Figura No. 10

$$\mathbf{r}(t) = \langle 0, 4\cos t, 16\sin t \rangle \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

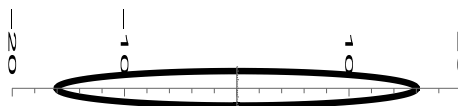


Figura No. 10. Describe una elipse en el plano yz centrada en el origen, con ejes paralelos a los ejes coordenados

Problema No. 8

Grafique la curva descrita por la siguiente función vectorial, indicando la orientación positiva. Figura No 11

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sin(t)\mathbf{k} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

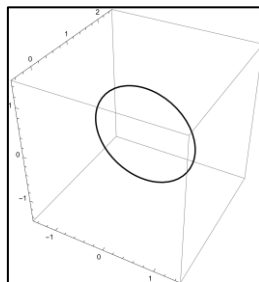


Figura No. 11. Representa un círculo de radio 1 en un plano paralelo al plano xz , desplazado 1 unidad en el eje y

Problema No. 9

Grafique la curva descrita por la siguiente función vectorial, indicando la orientación positiva. Figura No 12

$$\mathbf{r}(t) = 4\sin(t)\mathbf{i} + 4\cos(t)\mathbf{j} + e^{-t/10}\mathbf{k} \text{ para } 0 \leq t \leq \infty$$

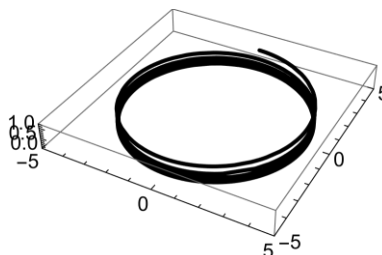


Figura No. 12. Describe una espiral que decae exponencialmente en el eje z mientras gira circularmente en el plano xy

Problema No. 10

Grafique la curva descrita por la siguiente función vectorial, indicando la orientación positiva. Figura No 13

$$\mathbf{r}(t) = e^{\frac{-t}{20}} \text{sen}(t) \mathbf{i} + e^{\frac{-t}{20}} \cos(t) \mathbf{j} + t \mathbf{k} \text{ para } 0 \leq t \leq \infty$$

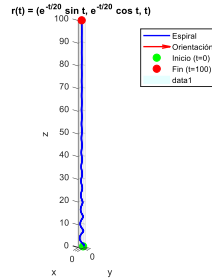


Figura No. 13. Describe una espiral logarítmica ascendente

Problema No. 11

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, \text{sen} \pi t, e^{-t} \rangle \text{ para } t \geq 0. \text{ Figura No. 14}$$

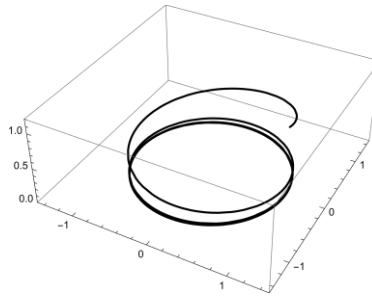


Figura No. 14. Cilindro espiral definido por la función vectorial, junto con la circunferencia base $x^2 + y^2 = 1$

Problema No. 12

8 bucles de la espiral. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos(t) \mathbf{i} + \text{sen}(t) \mathbf{j} + \frac{t}{2\pi} \mathbf{k}$, para $-\infty < t < \infty$, sobre el cilindro elíptico $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$

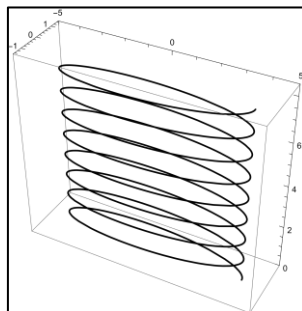


Figura No. 15. La espiral yace sobre el cilindro elíptico

3.2 Límites y continuidad de una función vectorial

Los conceptos de límites, derivadas e integrales de funciones con valores vectoriales son extensiones directas de lo que ya has aprendido en el cálculo diferencial.

El límite de una función con valores vectoriales $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ se define de manera muy similar a como se hace para las funciones con valores escalares. Si existe un vector L tal que la función escalar $|r(t) - L|$ puede hacerse arbitrariamente pequeña al tomar t suficientemente cerca de a , entonces escribimos $\lim r(t) = L$ y decimos que el límite de r cuando t se acerca a a es L .

Definición Límite de una Función con Valores Vectoriales

Una función con valores vectoriales r se acerca al límite L cuando t se acerca a a , escrito como $\lim r(t) = L$, siempre que $\lim |r(t) - L| = 0$.

Observa que mientras r tiene valores vectoriales, $|r(t) - L|$ es una función de la única variable t , a la cual se aplican los conocidos teoremas de límites. Por lo tanto, esta definición y un cálculo breve conducen a un método directo para calcular los límites de la función con valores vectoriales $r = (f, g, h)$. Supongamos

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = L_1, \lim_{t \rightarrow a} g(t) = L_2, \lim_{t \rightarrow a} h(t) = L_3$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = \langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \rangle = \langle L_1, L_2, L_3 \rangle$$

En otras palabras, el límite de $r(t)$ se determina calculando los límites de sus componentes.

Por ejemplo, si $\lim_{t \rightarrow a} r(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} s(t)$ existen y c es un escalar, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} (r(t) + s(t)) = \lim_{t \rightarrow a} r(t) + \lim_{t \rightarrow a} s(t) \text{ y si } \lim_{t \rightarrow a} cr(t) = c \lim_{t \rightarrow a} r(t)$$

La idea de continuidad también se extiende directamente a las funciones con valores vectoriales. Una función $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es continua en a siempre que $\lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(a)$

Si las funciones componentes f , g y h son continuas en a , entonces r también es continua en a , y viceversa. La función r es continua en un intervalo I si es continua para todo t en I .

Si r es continua en un intervalo, la curva que describe no tiene interrupciones ni huecos, lo cual es una propiedad importante cuando r describe la trayectoria de un objeto.

Problema No. 13

Evalúe los siguientes límites

$$a) \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos 2t \mathbf{i} - 4 \sin t \mathbf{j} + \frac{2t}{\pi} \mathbf{k} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2t \mathbf{i} - 4 \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin t \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2t}{\pi} \mathbf{k} = \cos \pi \mathbf{i} - 4 \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{j} + \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} \mathbf{k} = \langle -1, -4, 1 \rangle$$

$$b) \lim_{t \rightarrow \ln 2} (2e^t \mathbf{i} + 6e^{-t} \mathbf{j} - 4e^{-2t} \mathbf{k})$$

$$= \langle 2e^t, 6e^{-t}, -4e^{-2t} \rangle = \langle 2e^{\ln 2}, 6e^{-\ln 2}, -4e^{-2\ln 2} \rangle = \langle 4, 3, -1 \rangle$$

$$c) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t} \mathbf{i} - \frac{2t}{t+1} \mathbf{j} + \tan^{-1} t \mathbf{k} \right) = \langle 0, -2, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$d) \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t}{t^2+1} \mathbf{i} - 4e^{-t} \sin \pi t \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \mathbf{k} \right) = \langle \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{3} \rangle$$

$$e) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \mathbf{i} - \frac{e^t - t - 1}{t} \mathbf{j} + \frac{\cos t + \frac{t^2}{2} - 1}{t^2} \mathbf{k} \right)$$

Usando la regla de l'Hôpital (una vez en las dos primeras componentes, dos veces en la tercera componente)

$$= \left(\cos t, 1 - e^t, \frac{-\cos t + 1}{2} \right) = \langle 1, 0, 0 \rangle = \mathbf{i}$$

Problema No. 14

Encuentra el dominio de las siguientes funciones con valores vectoriales

$$a) \mathbf{r}(t) = \frac{2}{t-1} \mathbf{i} + \frac{3}{t+2} \mathbf{j}$$

La primera función componente tiene dominio $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, y la segunda tiene dominio $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, por lo que el dominio de $\mathbf{r}(t)$ es $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

$$b) \mathbf{r}(t) = \sqrt{t+2} \mathbf{i} + \sqrt{2-t} \mathbf{j}$$

La primera función componente tiene dominio $[-2, \infty)$ y la segunda tiene dominio $(-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $\mathbf{r}(t)$ es $[-2, 2]$.

$$c) \mathbf{r}(t) = \cos 2t \mathbf{i} + e^{\sqrt{t}} \mathbf{j} + \frac{12}{t} \mathbf{k}$$

La primera función componente está definida para todo t , la segunda tiene dominio $[0, \infty)$, y la tercera tiene dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, por lo que el dominio de $\mathbf{r}(t)$ es $(0, \infty)$

$$d) \mathbf{r}(t) = \sqrt{4-t^2} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{1+t}} \mathbf{k}$$

La primera función componente tiene dominio $[-2, 2]$, la segunda tiene dominio $[0, \infty)$, y la tercera tiene dominio $(-1, \infty)$, por lo que el dominio de $\mathbf{r}(t)$ es $[0, 2]$.

Problema No. 15

Encuentra los puntos (si existen) en los que los siguientes planos y curvas se intersecan

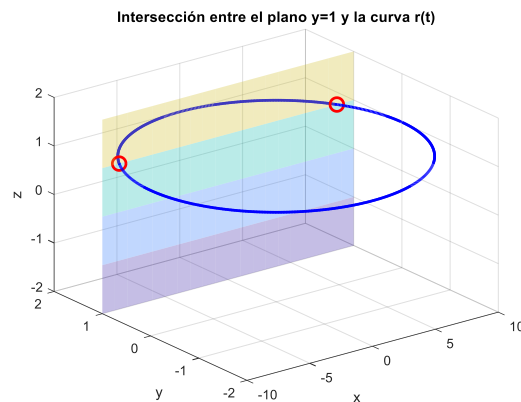
$$y = 1; \mathbf{r}(t) = \langle 10 \cos t, 2 \sin t, 1 \rangle$$

Punto 1: $(5\sqrt{3}, 1, 1)$, Punto 2: $(-5\sqrt{3}, 1, 1)$. Ecuación del plano $y = 1$.

Componente (y) de la curva $y = 2 \sin t$, $2 \sin t = 1$, $\sin t = \frac{1}{2}$

Sabemos que: $\sin t = \frac{1}{2}$ ocurre en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{\pi}\right]$ (un ciclo completo típico para curvas paramétricas) en: $\sin \frac{\pi}{6} = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{6}$, $x = 10 \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $z = 1$

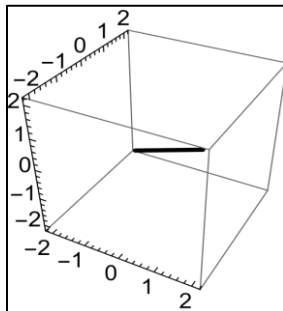
Punto 1 $(5\sqrt{3}, 1, 1)$, $t = \frac{\pi}{6}$, $(-5\sqrt{3}, 1, 1)$ punto 2 (negativo 2º. Cuadrante)



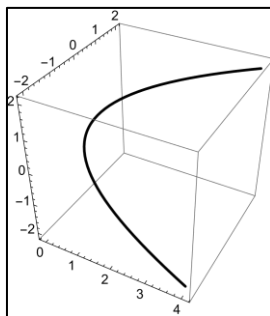
Problema No. 16

Funciones vectoriales y sus correspondientes gráficas

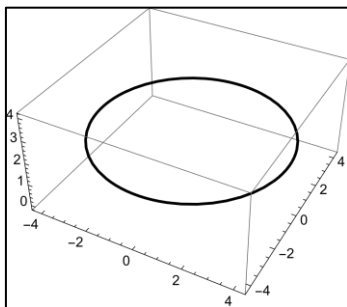
a) $\mathbf{r}(t) = \langle t, -t, t \rangle$



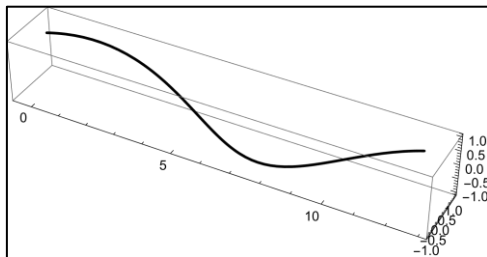
b) $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t, t \rangle$



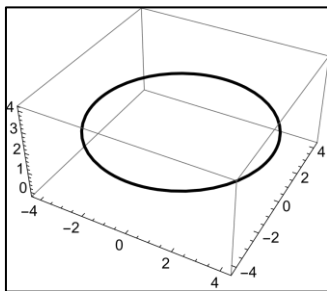
c) $\mathbf{r}(t) = \langle 4 \cos t, 4 \sin t, 2 \rangle$



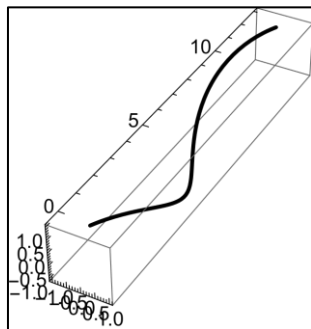
d) $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, \sin t, \cos t \rangle$



e) $\mathbf{r}(t) = \langle 4 \cos t, 4 \sin t, 2 \rangle$



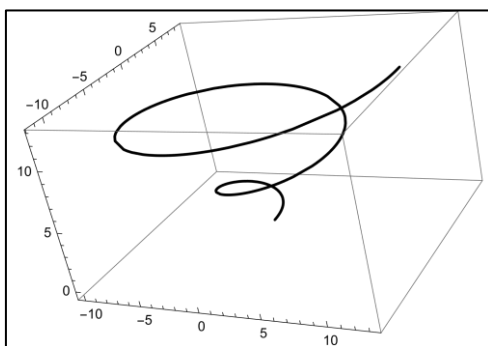
$\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, 2t, \cos t \rangle$



Problema No. 17

Verifica que la curva $\mathbf{r}(t)$ yace en la superficie dada. Proporciona el nombre de la superficie.

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad x^2 + y^2 = z^2$$

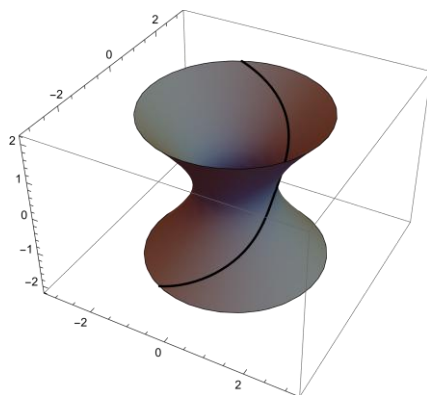


Este es un cono elíptico.

Note que $x^2 + y^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2 = z^2$

Problema No. 18

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \cos t) \mathbf{i} + (\sqrt{t^2 + 1} \sin t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}; \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Esto es un hiperboloide de una hoja. Observe que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (t^2 + 1)\cos^2 t + (t^2 + 1)\sin^2 t - t^2 = (t^2 + 1)(\cos^2 t + \sin^2 t) - t^2 \\ &= t^2 + 1 - t^2 = 1 \end{aligned}$$

3.3 Derivada de una función vectorial

El cálculo de funciones con valores vectoriales. La diferenciación e integración de funciones de la forma $y = f(x)$ se traslada a las funciones con valores vectoriales $r(t)$; simplemente se aplican las reglas de diferenciación e integración a los componentes individuales de $r(t)$.

La Derivada y el Vector Tangente

Consideremos la función $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, donde (f) , (g) y (h) son funciones diferenciables en un intervalo $a < t < b$

El primer objetivo es explicar el significado de la derivada de una función con valores vectoriales y mostrar cómo calcularla. Comenzamos con la definición de la derivada, ahora desde una perspectiva vectorial:

La derivada de una función vectorial $r(t)$ representa la tasa de cambio instantánea del vector posición respecto al parámetro (t) . Geométricamente, la derivada $r'(t)$ es el vector tangente a la curva descrita por $r(t)$ en un punto dado, indicando la dirección y la rapidez con la que la curva cambia a medida que (t) varía. Si (t) representa el tiempo, $r'(t)$ puede interpretarse como la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de la curva.

Definición

La derivada se define como el límite:

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Sea

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

$$r(t + \Delta t) = \langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle, \quad r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

$$r(t + \Delta t) - r(t) = \langle f(t + \Delta t) - f(t), g(t + \Delta t) - g(t), h(t + \Delta t) - h(t) \rangle$$

$$\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \left\langle \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = r'(t) = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k$$

Dado que f , g y h son funciones escalares diferenciables de la variable t , los tres límites en el último paso se identifican como las derivadas de f , g y h , respectivamente

En resumen, para diferenciar la función con valores vectoriales $r(t)$, simplemente diferenciamos cada una de sus componentes con respecto a (t) .

Definición

Derivada y vector tangente

Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde $(f), (g)$ y (h) son funciones diferenciables en (a, b) . Entonces, $\mathbf{r}$ tiene una derivada (o es diferenciable) en (a, b) y

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

Siempre que $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente en el punto correspondiente a $\mathbf{r}(t)$

Problema No. 19

Derive las siguientes funciones de valor vectorial

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, t^2, \sin t \rangle$	$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, 2t, \cos t \rangle$
$\mathbf{r}(t) = 4e^t \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}$	$\mathbf{r}'(t) = 4e^t \mathbf{i} + \frac{1}{t} \mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = \langle 2t^3, 6\sqrt{t}, \frac{3}{t} \rangle$	$\mathbf{r}'(t) = \langle 6t^2, \frac{3}{\sqrt{t}}, -\frac{3}{t^2} \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle 4, 3 \cos 2t, 2 \sin 3t \rangle$	$\mathbf{r}'(t) = \langle 0, -6 \sin 2t, 6 \cos 3t \rangle$
$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + 2e^{-t} \mathbf{j} - 4e^{2t} \mathbf{k}$	$\mathbf{r}'(t) = \langle e^t, -2e^{-t}, -8e^{2t} \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \tan t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \cos^2 t \mathbf{k}$	$\mathbf{r}'(t) = \sec^2 t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - 2 \sin t \cos t \mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, t \ln(t), t \cos t \rangle$	$\mathbf{r}'(t) = \langle e^{-t}(1-t), 1 + \ln(t), \cos t - t \sin t \rangle$

Vector Tangente Unitario

En situaciones en las que solo nos interesa la dirección (pero no la longitud) del vector tangente, trabajamos con el vector tangente unitario. Es el vector con magnitud 1, formado al dividir $r'(t)$ entre su longitud.

Definición

Vector tangente unitario

Sea $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ una curva parametrizada suave, para $a < t < b$. El vector tangente unitario para un valor particular de t es

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Problema No. 20

Encuentra un vector tangente en el valor dado de t para las siguientes curvas parametrizadas.

$r(t) = \langle t, 3t^2, t^3 \rangle, t = 1$	$r'(1) = \langle 1, 6t, 3t^2 \rangle = \langle 1, 6, 3 \rangle$
$r(t) = \langle e^t, e^{3t}, e^{5t} \rangle, t = 0$	$r'(0) = \langle e^t, 3e^{3t}, 5e^{5t} \rangle = \langle 1, 3, 5 \rangle$
$r(t) = \langle t, \cos 2t, 2\sin t \rangle, t = \frac{\pi}{2}$	$r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, -2\sin 2t, 2\cos t \rangle = \langle 1, 0, 0 \rangle$
$r(t) = \langle 2 \sin t, 3 \cos t, \sin \frac{t}{2} \rangle, t = \pi$	$r'(\pi) = \langle 2\cos t, -3\sin t, \frac{1}{2}\cos \frac{t}{2} \rangle = \langle -2, 0, 0 \rangle$
$r(t) = 2t^4 i + 6t^{\frac{3}{2}} j + \frac{10}{t} k, t = 1$	$r'(t) = 8t^3 i + 9t^{\frac{1}{2}} j - 10\ln t k = \langle 8, 9, -10 \rangle$

Problema No. 21

Encuentre el vector tangente unitario para las siguientes curvas parametrizadas

a) $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 2t, t \rangle$, para $0 \leq t \leq 1$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle 2, 2, 1 \rangle}{\sqrt{9}} = \frac{\langle 2, 2, 1 \rangle}{3} = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

b) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2 \rangle$, para $0 \leq t \leq 2\pi$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 0}} = \frac{\langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle}{1} = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$$

c) $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \cos 2t, 2 \sin 2t \rangle$, para $0 \leq t \leq 2\pi$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle 0, -2\sin 2t, 4 \cos 2t \rangle}{\sqrt{4\sin^2 2t + 16\cos^2 2t}} = \frac{\langle 0, -2\sin 2t, 4 \cos 2t \rangle}{2\sqrt{\sin^2 2t + 4\cos^2 2t}} =$$

$$T(t) = \left\langle 0, \frac{-\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 2t + 4\cos^2 2t}}, \frac{2 \cos 2t}{\sqrt{\sin^2 2t + 4\cos^2 2t}} \right\rangle$$

Problema No. 22

Encuentra el vector tangente unitario en el valor dado de (t) para las siguientes curvas parametrizadas.

a) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, 4, 3\sin 2t \rangle$; $t = \frac{\pi}{2}$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\langle -2\sin 2t, 0, 6 \cos 2t \rangle}{\sqrt{4\sin^2 2t + 0 + 36\cos^2 2t}} = \frac{\langle -2\sin 2t, 0, 6 \cos 2t \rangle}{2\sqrt{\sin^2 2t + 9\cos^2 2t}} = \frac{\langle -\sin 2t, 0, 3\cos 2t \rangle}{\sqrt{\sin^2 2t + 9\cos^2 2t}} = \frac{\langle 0, 0, -6 \rangle}{6} = \langle 0, 0, -1 \rangle$$

b) $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^{-t} \rangle$; $t = 0$, $\mathbf{r}'(t) = \langle \cos t, -\sin t, -e^{-t} \rangle$, $\mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0, -1 \rangle$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\langle 1, 0, -1 \rangle}{\sqrt{2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{0}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

c) $\mathbf{r}(t) = \langle 6t, 6, \frac{3}{t} \rangle$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 6, 0, -\frac{3}{t^2} \rangle, \mathbf{r}'(1) = \langle 6, 0, -3 \rangle, |\mathbf{r}'(1)| = 3\sqrt{5}$$

$$\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{r}'(1)}{|\mathbf{r}'(1)|} = \frac{\langle 6, 0, -3 \rangle}{3\sqrt{5}} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{0}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Reglas de Derivación

Las reglas para las derivadas de funciones de una sola variable se trasladan directamente a funciones con valores vectoriales o tienen análogos cercanos. Estas reglas generalmente se demuestran trabajando en las componentes individuales de la función vectorial.

Teorema

Sean u y v funciones con valores vectoriales diferenciables, y sea f una función escalar diferenciable, todas en un punto t . Sea c un vector constante. Las siguientes reglas se aplican.

Derivada de una constante	$\frac{d}{dt}(c) = 0$
Regla de la suma	$\frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
Regla del producto escalar por vector	$\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$
Regla del producto escalar entre vectores	$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$
Regla del producto vectorial (cruz)	$\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$
Regla de la cadena (composición)	$\frac{d}{dt}[u(f(t))] = u'(f(t))f'(t)$

Derivadas de Orden Superior

Las derivadas de orden superior de funciones con valores vectoriales se calculan de la manera esperada: simplemente derivamos cada componente varias veces. Las derivadas segundas destacan especialmente en el papel de la aceleración.

Problema No. 23

Usando las reglas de la derivación

Sean $\mathbf{u}(t) = 2t^3\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}(t) = e^t\mathbf{i} + 2e^{-t}\mathbf{j} - e^{2t}\mathbf{k}$. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

$(t^{12} + 3t)\mathbf{u}(t)$	$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(t^{12} + 3t)\mathbf{u}(t)] \\ = (12t^{11} + 3)(2t^3\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \\ + (t^{12} + 3t)(6t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \end{aligned}$
------------------------------	--

$(4t^8 - 6t^3)\mathbf{v}(t)$	$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(4t^8 - 6t^3)\mathbf{v}(t)] \\ = (32t^7 - 18t^2)(e^t\mathbf{i} + 2e^{-t}\mathbf{j} - e^{2t}\mathbf{k}) \\ + (4t^8 - 6t^3)(e^t\mathbf{i} - 2e^{-t}\mathbf{j} - 2e^{2t}\mathbf{k}) \end{aligned}$
------------------------------	---

$\mathbf{u}(t^4 - 2t)$	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t^4 - 2t)] = (4t^3 - 2)[6(t^4 - 2t)^2\mathbf{i} + 2(t^4 - 2t)\mathbf{j}]$
------------------------	--

$\mathbf{v}(\sqrt{t})$	$\frac{d}{dt}[\mathbf{v}(\sqrt{t})] = \frac{1}{2\sqrt{t}}(e^{\sqrt{t}}\mathbf{i} - 2e^{-\sqrt{t}}\mathbf{j} - 2e^{2\sqrt{t}}\mathbf{k})$
------------------------	--

$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = 6t^2e^t + 4te^{-t} + 2t^3e^t - 2(t^2 - 1)e^{-t} + 16e^{2t}$
-------------------------------------	--

$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$	$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] \\ = [-2te^{2t} - 2(t^2 - 1)e^{2t} - 16e^{-t}]\mathbf{i} \\ + [6t^2e^{2t} + 4t^3e^{2t} + 8e^t]\mathbf{j} \\ + [12t^2e^{-t} - 2te^t - 4t^3e^{-t} - (t^2 - 1)e^t]\mathbf{k} \end{aligned}$
--------------------------------------	--

Problema No. 24

Derivadas de orden superior. Calcule $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'''(t)$ para las siguientes funciones

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t + 1, 1 \rangle$	$\mathbf{r}''(t) = \langle 2, 0, 0 \rangle, \mathbf{r}'''(t) = \langle 0, 0, 0 \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle 3t^{12} - t^2, t^8 + t^3, t^{-4} - 2 \rangle$	$\mathbf{r}''(t) = \langle 396t^{10} - 2, 56t^6 + 6t, 20t^{-6} \rangle,$ $\mathbf{r}'''(t) = \langle 3960t^9, 336t^5 + 6, -120t^{-7} \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle \cos 3t, \sin 4t, \cos 6t \rangle$	$\mathbf{r}''(t) = \langle -9\cos 3t, -16\sin 4t, -36\cos 6t \rangle,$ $\mathbf{r}'''(t) = \langle 27\sin 3t, -64\cos 4t, 216\sin 6t \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle e^{4t}, 2e^{-4t} + 1, 2e^{-t} \rangle$	$\mathbf{r}''(t) = \langle 16e^{4t}, 32e^{-4t}, 2e^{-t} \rangle,$ $\mathbf{r}'''(t) = \langle 64e^{4t}, -128e^{-4t}, -2e^{-t} \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t+4}\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\mathbf{j} - e^{-t^2}\mathbf{k}$	$\mathbf{r}''(t) = \left\langle -\frac{1}{4(t+4)^{3/2}}, -\frac{2}{(t+1)^3}, 2e^{-t^2}(1-2t^2) \right\rangle,$ $\mathbf{r}'''(t) = \left\langle \frac{3}{8(t+4)^{5/2}}, \frac{6}{(t+1)^4}, 2e^{-t^2}(4t^3 - 6t) \right\rangle$

Problema No. 25

Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones diferenciables en $t = 0$ con $\mathbf{u}(0) = \langle 0, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{u}'(0) = \langle 0, 7, 1 \rangle$, $\mathbf{v}(0) = \langle 0, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{v}'(0) = \langle 1, 1, 2 \rangle$. Evalúe la siguiente expresión.

$\frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{dt} \Big _{t=0}$	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$ $\mathbf{u}'(0) \cdot \mathbf{v}(0) = (0)(0) + (7)(1) + (1)(1) = 0 + 7 + 1 = 8$ $\mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v}'(0) = (0)(1) + (1)(1) + (1)(2) = 0 + 1 + 2 = 3$ $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] \Big _{t=0} = \mathbf{u}'(0) \cdot \mathbf{v}(0) + \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v}'(0) = 8 + 3 = 11$ Por lo tanto, la derivada es (11).
---	--

3.4 Integración de funciones vectoriales

Integrales de Funciones con Valores Vectoriales

Una antiderivada de la función vectorial r es una función R tal que $R' = r$. Si $r(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces una antiderivada de r es $R(t) = F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}$, donde F , G y H son antiderivadas de f , g y h , respectivamente. Este hecho se deriva al diferenciar los componentes de R y verificar que $R' = r$. La colección de todas las antiderivadas de r constituye la integral indefinida de r .

Definición

Integral Indefinida de una Función con valores vectoriales

Sea $r(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ una función vectorial, y sea $R(t) = F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}$ una función vectorial, donde F , G y H son antiderivadas de f , g y h , respectivamente. La integral indefinida de r es $\int r(t) dt = R(t) + C$, donde C es un vector constante arbitrario. Alternativamente, en forma de componentes

$$\int \langle f(t), g(t), h(t) \rangle dt = \langle F(t), G(t), H(t) \rangle + \langle C_1, C_2, C_3 \rangle.$$

Problema No. 26

Calcule las integrales indefinidas de las siguientes funciones

$r(t) = \langle t^4 - 3t, 2t - 1, 10 \rangle$	$\int r(t) dt = \left\langle \frac{t^5}{5} - \frac{3t^2}{2} + C_1, t^2 - t + C_2, 10t + C_3 \right\rangle$
---	--

$r(t) = \langle 5t^{-4} - t^2, t^6 - 4t^3, \frac{2}{t} \rangle$	$\int r(t) dt = \left\langle -\frac{5}{3t^3} - \frac{t^3}{3} + C_1, \frac{t^7}{7} - t^4 + C_2, 2\ln t + C_3 \right\rangle$
---	---

$r(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin 3t, 4 \cos 8t \rangle$	$\int r(t) dt = \left\langle 2 \sin t + C_1, -\frac{2}{3} \cos 3t + C_2, \frac{1}{2} \sin 8t + C_3 \right\rangle$
---	---

$r(t) = te^t \mathbf{i} + t \sin t^2 \mathbf{j} - \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}} \mathbf{k}$	$\int r(t) dt = (e^t(t-1) + C_1)\mathbf{i} + \left(-\frac{1}{2} \cos(t^2) + C_2\right)\mathbf{j} + (-2\sqrt{t^2 + 4} + C_3)\mathbf{k}$
---	--

Definición

Integrales definidas de una función con valores vectoriales

Sea $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde (f) , (g) y (h) son integrables en el intervalo $[a, b]$. La integral definida de $\mathbf{r}$ en $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}.$$

Problema No. 27

Evalúa las siguientes integrales definidas

$\int_{-1}^1 (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt$	$\begin{aligned} (\mathbf{i}): & \left(\int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2 \right) \\ (\mathbf{j}): & \left(\int_{-1}^1 3 dt = 3[t]_{-1}^1 = 3(1 - (-1)) = 6 \right) \\ (\mathbf{k}): & \left(\int_{-1}^1 3t^2 dt = 3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \right) \\ & \int_{-1}^1 (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{aligned}$
--	--

$\int_1^4 (6t^2\mathbf{i} + 8t^3\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}) dt$	$\begin{aligned} (\mathbf{i}): & \left(\int_1^4 6t^2 dt = 6 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^4 = 6 \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot 21 = 126 \right) \\ (\mathbf{j}): & \left(\int_1^4 8t^3 dt = 8 \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^4 = 8 \left(64 - \frac{1}{4} \right) = 8 \cdot \frac{255}{4} = 510 \right) \\ (\mathbf{k}): & \left(\int_1^4 9t^2 dt = 9 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^4 = 9 \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) = 9 \cdot 21 = 189 \right) \\ & \int_1^4 (6t^2\mathbf{i} + 8t^3\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}) dt = 126\mathbf{i} + 510\mathbf{j} + 189\mathbf{k} \end{aligned}$
--	--

$\int_0^{\ln 2} (e^t \mathbf{i} + e^t \cos(\pi e^t) \mathbf{j}) dt$	$(\mathbf{i}): \left(\int_0^{\ln 2} e^t dt = [e^t]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1 \right)$ $(\mathbf{j}): \left(\int_0^{\ln 2} e^t \cos(\pi e^t) dt \right)$ $(u = e^t), (du = e^t dt), (dt = \frac{du}{u})$ $\left(\int_1^2 \cos(\pi u) \frac{du}{u} \right), \text{primitiva: } \left(\left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi u) \right]_1^2 \right)$ $= \frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot 2) - \frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot 1) = 0 - 0$ $= 0)$ $\int_0^{\ln 2} (e^t \mathbf{i} + e^t \cos(\pi e^t) \mathbf{j}) dt = \mathbf{i}$
---	--

$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) dt$	$(\mathbf{i}): \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = [-\cos t]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos(-\pi)) \right)$ $= 1 + 1 = 2)$ $(\mathbf{j}): \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = [\sin t]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 \right)$ $= 0)$ $(\mathbf{k}): \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2 \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0 \right)$ $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) dt = 2\mathbf{i}$
--	---

Problema No. 28Encuentra función $\mathbf{r}$ a partir de $\mathbf{r}'$ que satisfice las condiciones dadas

$\mathbf{r}'(t) = \langle e^t, \sin t, \sec^2 t \rangle;$ $\mathbf{r}(0) = \langle 2, 2, 2 \rangle$	$(i): (\int e^t dt = e^t + C_1)$ $(j): (\int \sin t dt = -\cos t + C_2)$ $(k): (\int \sec^2 t dt = \tan t + C_3)$ Entonces $\mathbf{r}(t) = \langle e^t + C_1, -\cos t + C_2, \tan t + C_3 \rangle = \langle 2, 2, 2 \rangle$ $(1 + C_1 = 2) \Rightarrow (C_1 = 1)$ $(-1 + C_2 = 2) \Rightarrow (C_2 = 3)$ $(0 + C_3 = 2) \Rightarrow (C_3 = 2)$ La solución es: $\mathbf{r}(t) = \langle e^t + 1, -\cos t + 3, \tan t + 2 \rangle$
--	--

$\mathbf{r}'(t) = \langle 0, 2, 2t \rangle; \quad \mathbf{r}(1) = \langle 4, 3, -5 \rangle$	$(i): (\int 0 dt = C_1)$ $(j): (\int 2 dt = 2t + C_2)$ $(k): (\int 2t dt = t^2 + C_3)$ $\mathbf{r}(t) = \langle C_1, 2t + C_2, t^2 + C_3 \rangle$ $(C_1 = 4)$ $(2 + C_2 = 3) \Rightarrow (C_2 = 1)$ $(1 + C_3 = -5) \Rightarrow (C_3 = -6)$ $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 2t + 1, t^2 - 6 \rangle$
---	---

Posición, velocidad y aceleración

Como se muestra en esta sección, al combinar la Segunda Ley del Movimiento de Newton con todo lo que hemos aprendido sobre vectores, es posible resolver una variedad de problemas de cuerpos en movimiento.

Trabajamos en un sistema de coordenadas tridimensional y dejamos que la función con valor vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ describa la posición de un objeto en movimiento en los tiempos $t > 0$. La curva descrita por r es la trayectoria o el camino del objeto (Figura No. 1). Al igual que con el movimiento unidimensional, la tasa de cambio de la función de posición con respecto al tiempo es la velocidad instantánea del objeto, un vector con tres componentes correspondientes a la **velocidad** en las direcciones x , y , y z : $v(t) = r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

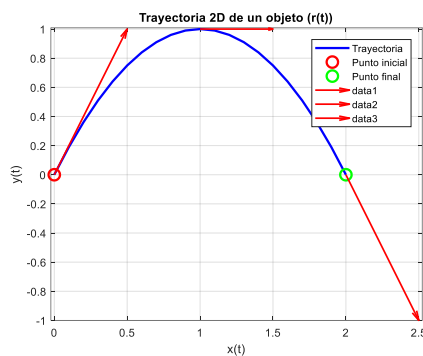


Figura No. 1. Curva descrita por r es la trayectoria o el camino del objeto

Los vectores de velocidad de un objeto en movimiento son simplemente vectores tangentes; es decir, en cualquier punto, el vector de velocidad es tangente a la trayectoria.

Al igual que con el movimiento unidimensional, la **rapidez** de un objeto que se mueve en tres dimensiones es la magnitud de su vector de velocidad:

$|v(t)| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| = \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$. La rapidez es una función escalar no negativa.

La aceleración de un objeto en movimiento es la tasa de cambio de la velocidad:

$a(t) = v'(t) = r''(t)$. Aunque el vector de posición da la trayectoria de un objeto en movimiento y el vector de velocidad es siempre tangente a la trayectoria, el vector de aceleración es más difícil de visualizar (Figura No. 2)

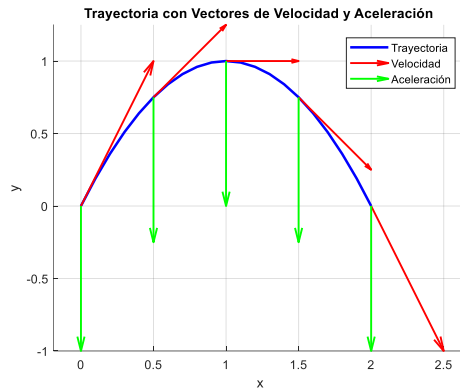


Figura No. 2. Trayectoria con vectores de velocidad y aceleración

Las relaciones entre r , v y a se exploran en los ejemplos siguientes.

Definición

Posición, Velocidad, Rapidez, Aceleración

Sea la **posición** de un objeto que se mueve en el espacio tridimensional dada por

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t > 0$. La velocidad del objeto es

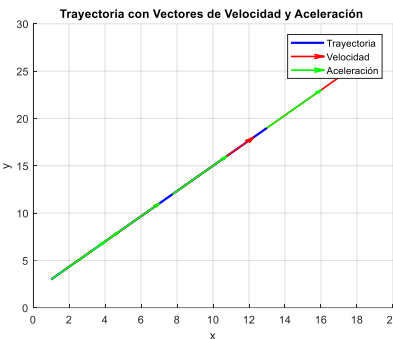
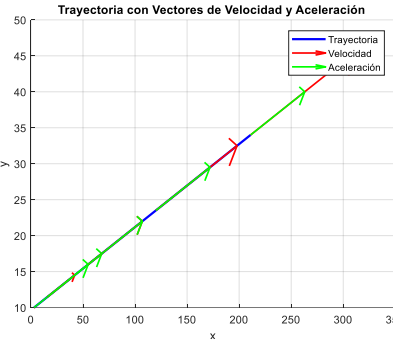
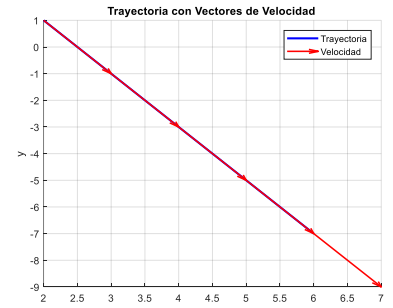
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. La rapidez del objeto es la función escalar

$|\mathbf{v}(t)| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$. La aceleración del objeto es

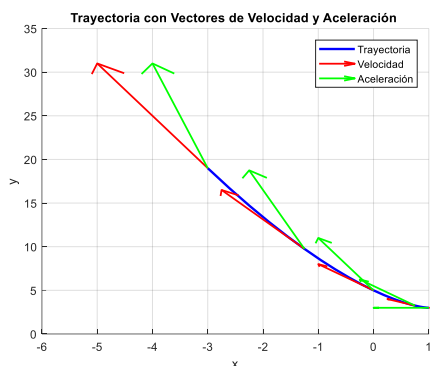
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.

Problema No. 29

Considera las siguientes funciones de posición: a. Encuentra la velocidad y la rapidez del objeto. b. Encuentra la aceleración del objeto.

$\mathbf{r}(t) = \langle 3t^2 + 1, 4t^2 + 3 \rangle, \text{ para } t \geq 0$ 	$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2 + 1, 4t^2 + 3 \rangle$ $= \langle 6t, 8t \rangle$ $\mathbf{v}(t) = \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2}$ $= \sqrt{36t^2 + 64t^2}$ $= \sqrt{100t^2} = 10t$ $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = d/dt \langle 6t, 8t \rangle$ $= \langle 6, 8 \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle \frac{5}{2}t^2 + 3, 6t^2 + 10 \rangle, \text{ para } t \geq 0$ 	$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt} \langle 5t^2 + 3, 6t^2 + 10 \rangle$ $= \langle 10t, 12t \rangle$ $\mathbf{v}(t) = \sqrt{(10t)^2 + (12t)^2}$ $= \sqrt{100t^2 + 144t^2}$ $= \sqrt{244t^2}$ $= \sqrt{244} \cdot t$ $\text{Para } (t \geq 0)$ $\mathbf{v}(t) = \sqrt{244} \cdot t \approx 15.62t$ $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = d/dt \langle 10t, 12t \rangle$ $= \langle 10, 12 \rangle$
$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + 2t, 1 - 4t \rangle, \text{ para } t \geq 0$ 	$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = d/dt \langle 2 + 2t, 1 - 4t \rangle$ $= \langle 2, -4 \rangle$ $\mathbf{v}(t) = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16}$ $= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.472$ $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = d/dt \langle 2, -4 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$

$$r(t) = \langle 1 - t^2, 3 + 2t^3 \rangle, \text{ para } t \geq 0$$

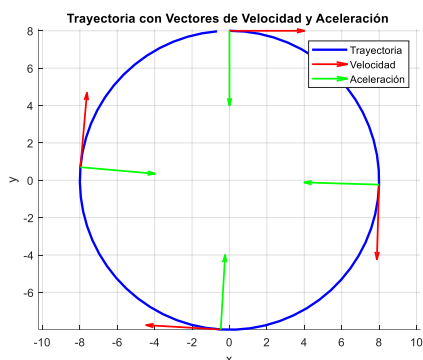


$$v(t) = r'(t) = \frac{d}{dt} \langle 1 - t^2, 3 + 2t^3 \rangle \\ = \langle -2t, 6t^2 \rangle$$

$$|v(t)| = \sqrt{\{(-2t)^2 + (6t^2)^2\}} \\ = \sqrt{\{4t^2 + 36t^4\}} \\ = \sqrt{\{4t^2(1 + 9t^2)\}} \\ = 2t \sqrt{1 + 9t^2}$$

$$a(t) = v'(t) = d/dt \langle -2t, 6t^2 \rangle = \langle -2, 12t \rangle$$

$$r(t) = \langle 8 \sin t, 8 \cos t \rangle, \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

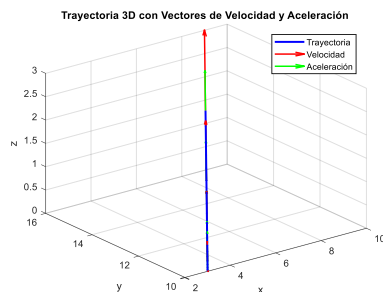


$$v(t) = r'(t) = d/dt \langle 8 \sin t, 8 \cos t \rangle \\ = \langle 8 \cos t, -8 \sin t \rangle$$

$$|v(t)| = \sqrt{(8 \cos t)^2 + (-8 \sin t)^2} \\ = \sqrt{64 \cos^2 t + 64 \sin^2 t} \\ = \sqrt{64 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{64} = 8$$

$$a(t) = v'(t) = d/dt \langle 8 \cos t, -8 \sin t \rangle \\ = \langle -8 \sin t, -8 \cos t \rangle$$

$$r(t) = \langle t^2 + 3, t^2 + 10, \frac{1}{2}t^2 \rangle$$

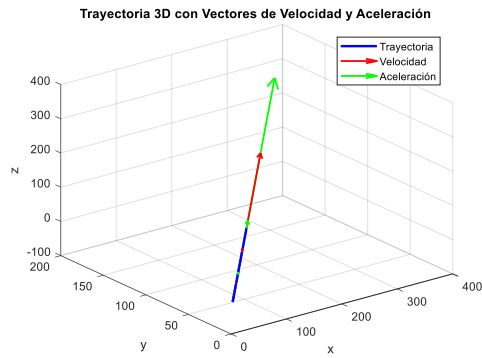


$$v(t) = r'(t) = \frac{d}{dt} \left\langle t^2 + 3, t^2 + 10, \frac{1}{2}t^2 \right\rangle \\ = \langle 2t, 2t, t \rangle$$

$$|v(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (t)^2} \\ = \sqrt{4t^2 + 4t^2 + t^2} \\ = \sqrt{9t^2} \\ = 3t \quad (\text{para } t \geq 0)$$

$$a(t) = v'(t) = d/dt \langle 2t, 2t, t \rangle = \langle 2, 2, 1 \rangle$$

$$r(t) = \langle 2e^{2t} + 1, e^{2t} - 1, 2e^{2t} - 10 \rangle, \text{ para } t \geq 0$$



$$v(t) = r'(t) = \frac{d}{dt} \langle 2e^{2t} + 1, e^{2t} - 1, 2e^{2t} - 10 \rangle = \langle 4e^{2t}, 2e^{2t}, 4e^{2t} \rangle$$

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \sqrt{(4e^{2t})^2 + (2e^{2t})^2 + (4e^{2t})^2} \\ &= \sqrt{16e^{4t} + 4e^{4t} + 16e^{4t}} = \sqrt{36e^{4t}} \\ &= 6e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt} \langle 4e^{2t}, 2e^{2t}, 4e^{2t} \rangle \\ &= \langle 8e^{2t}, 4e^{2t}, 8e^{2t} \rangle \end{aligned}$$

3.5 Longitud de arco

Longitud de curvas

En esta sección, extendemos estas ideas para manejar la longitud de arco de una curva tridimensional descrita por una función vectorial. También descubrimos cómo formular una descripción paramétrica de una curva utilizando la longitud de arco como parámetro.

Supongamos que una curva está descrita por la función con valor vectorial

$$r(t) = (f(t), g(t), h(t)), \text{ para } a < t < b, \text{ donde } f', g' \text{ y } h' \text{ son continuas en } [a, b].$$

Anteriormente, mostramos que la longitud de arco L de la curva bidimensional

$$r(t) = (f(t), g(t)), \text{ para } a < t < b, \text{ está dada por:}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

Una fórmula análoga de longitud de arco para curvas tridimensionales se deriva usando un argumento similar. La longitud de la curva $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt.$$

Notando que

$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)), \text{ establecemos la siguiente definición.}$$

Definición

Longitud de arco para funciones vectoriales

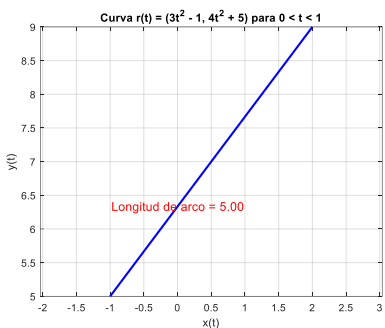
Consideremos la curva parametrizada $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, donde f' , g' y h' son continuas, y la curva se recorre una vez para $a < t < b$

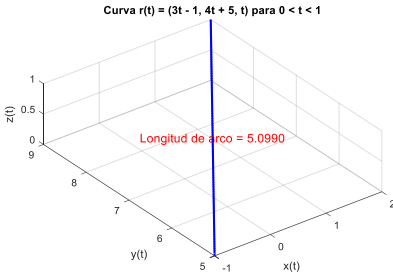
La longitud de arco de la curva entre $((f(a), g(a), h(a)))$ y $((f(b), g(b), h(b)))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

Problema No. 30

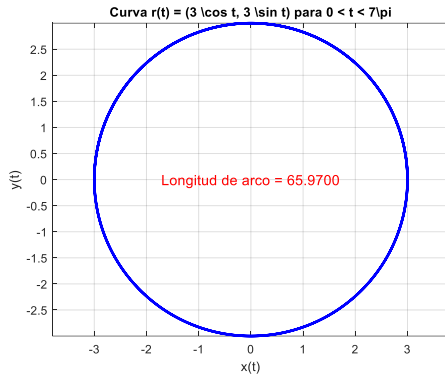
Encuentra la longitud de las siguientes curvas bidimensionales y tridimensionales.

$(r(t) = (3t^2 - 1, 4t^2 + 5))$ para $(0 < t < 1)$. 	$L = \int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$ $(f(t) = 3t^2 - 1), (f'(t) = 6t)$ $(g(t) = 4t^2 + 5), (g'(t) = 8t).$ $L = \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 64t^2} dt$ $= \int_0^1 \sqrt{100t^2} dt = \int_0^1 10t dt$ $L = 10 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 10 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 5$
--	---

$(r(t) = (3t - 1, 4t + 5, t))$ para $(0 < t < 1)$ 	$L = \int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$ $f(t) = 3t - 1, (f'(t) = 3),$ $g(t) = 4t + 5, (g'(t) = 4),$ $h(t) = t, (h'(t) = 1).$ $L = \int_0^1 \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 16 + 1} dt$ $= \int_0^1 \sqrt{26} dt$ $L = \sqrt{26} \cdot [t]_0^1 = \sqrt{26} \cdot (1 - 0) = \sqrt{26}$ $(L = \sqrt{26} \approx 5.0990).$
--	--

$$(r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t))$$

$$\text{para } 0 < t < 7\pi$$



$$f(t) = 3 \cos t, (f'(t) = -3 \sin t)$$

$$g(t) = 3 \sin t, (g'(t) = 3 \cos t)$$

$$L = \int_0^{7\pi} \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{7\pi} \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt$$

$$(\sin^2 t + \cos^2 t = 1):$$

$$L = \int_0^{7\pi} \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

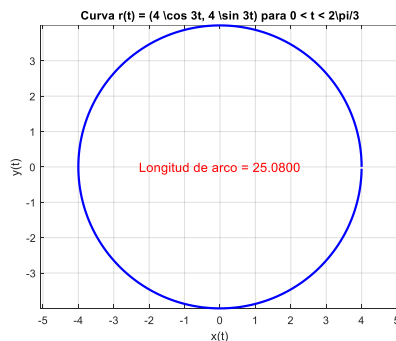
$$= \int_0^{7\pi} 3 dt$$

$$L = 3[t]_0^{7\pi} = 3(7\pi - 0) = 21\pi$$

$$(L = 21\pi \approx 65.9734)$$

$$r(t) = (4 \cos 3t, 4 \sin 3t)$$

$$\text{para } 0 < t < \frac{2\pi}{3}$$



$$f(t) = 4 \cos 3t, (f'(t) = -12 \sin 3t),$$

$$g(t) = 4 \sin 3t, (g'(t) = 12 \cos 3t).$$

$$L = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{(-12 \sin 3t)^2 + (12 \cos 3t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{144 \sin^2 3t + 144 \cos^2 3t} dt$$

$$(\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1):$$

$$L = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{144(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} dt$$

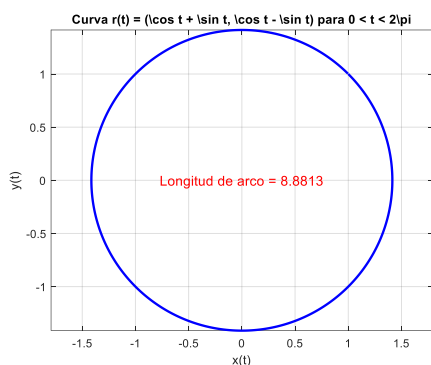
$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 12 dt$$

$$L = 12[t]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 12\left(\frac{2\pi}{3} - 0\right) = 8\pi$$

$$(L = 8\pi \approx 25.1327).$$

$$r(t) = (\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$$

$$\text{para } (0 < t < 2\pi)$$



$$f(t) = \cos t + \sin t, f'(t) = -\sin t + \cos t,$$

$$g(t) = \cos t - \sin t, g'(t) = -\sin t - \cos t.$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t + \cos t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} &(-\sin t + \cos t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2 \\ &= (\sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) \\ &+ (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) \\ &= 2(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2 \end{aligned}$$

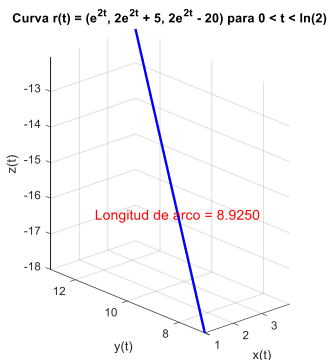
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt$$

$$L = \sqrt{2}[t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(2\pi - 0) = 2\pi\sqrt{2}$$

$$(L = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.8858).$$

$$r(t) = (e^{2t}, 2e^{2t} + 5, 2e^{2t} - 20)$$

$$\text{para } (0 < t < \ln 2)$$



$$f(t) = e^{2t}, (f'(t) = 2e^{2t}),$$

$$g(t) = 2e^{2t} + 5, (g'(t) = 4e^{2t}),$$

$$h(t) = 2e^{2t} - 20, (h'(t) = 4e^{2t}).$$

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{(2e^{2t})^2 + (4e^{2t})^2 + (4e^{2t})^2} dt$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{4e^{4t} + 16e^{4t} + 16e^{4t}} dt$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{36e^{4t}} dt = \int_0^{\ln 2} 6e^{2t} dt$$

$$\begin{aligned} L &= 6 \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = 3[e^{2t}]_0^{\ln 2} = 3(e^{2 \cdot \ln 2} - e^0) \\ &= 3(4 - 1) = 9 \end{aligned}$$

3.6 Vectores tangente, normal y binormal

Curvatura y vectores normales

Sabemos cómo encontrar vectores tangentes y longitudes de curvas en el espacio, pero se puede decir mucho más sobre la forma de dichas curvas. En esta parte de los apuntes, introducimos varios conceptos nuevos. La *curvatura* mide qué tan rápido gira una curva en un punto, el *vector normal* indica la dirección en la que la curva gira, y el *vector binormal* y la *torsión* describen el retorcimiento de una curva.

3.7 Curvatura

Imagina que conduces un automóvil por una carretera montañosa sinuosa. Hay dos formas de cambiar la *velocidad* del automóvil (es decir, de acelerar). Puedes cambiar la *rapidez* del automóvil o puedes cambiar la dirección del automóvil. Un cambio de rapidez es relativamente fácil de describir, por lo que posponemos esa discusión y nos enfocamos en el cambio de dirección. La tasa a la que el automóvil cambia de dirección está relacionada con la noción de *curvatura*.

Vector tangente unitario

si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva orientada suave, entonces el vector tangente unitario en un punto es el vector unitario que apunta en la dirección del vector tangente $r'(t)$; es decir, $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{v(t)}{|v(t)|}$

Dado que T es un vector unitario, su longitud no cambia a lo largo de la curva. La única forma en que T puede cambiar es mediante un cambio en su dirección.

¿Cómo de rápido cambia T (en dirección) a medida que nos movemos a lo largo de la curva? Si un pequeño incremento en la longitud de arco Δs a lo largo de la curva resulta en un gran cambio en la dirección de T , la curva gira rápidamente en ese intervalo y decimos que tiene una curvatura grande (Figura a). Si un pequeño incremento Δs en la longitud de arco resulta en un cambio pequeño en la dirección de T , la curva gira lentamente en ese intervalo y tiene una curvatura pequeña (Figura b). La magnitud de la tasa a la que la dirección de T cambia con respecto a la longitud de arco es la curvatura de la curva.

Curva con alta curvatura (Espiral)

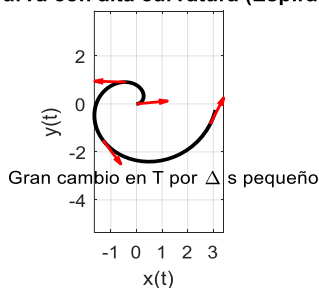


Figura a)

Curva con baja curvatura (Línea recta)

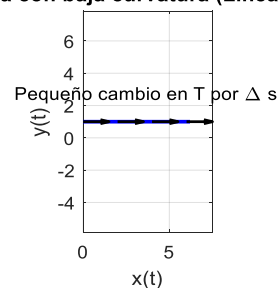


Figura b)

Definición

Curvatura

Sea r una curva parametrizada suave. Si (s) denota la longitud de arco y $T = \frac{r'}{|r'|}$ es el vector tangente unitario, la curvatura es $\kappa(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right|$

Nota que κ es una función escalar no negativa. Un valor grande de κ en un punto indica una curva cerrada que cambia de dirección rápidamente. Si κ es pequeño, entonces la curva es relativamente plana y su dirección cambia lentamente. La curvatura mínima (cero) ocurre en una línea recta, donde el vector tangente nunca cambia de dirección a lo largo de la curva. Figura c)

Un cálculo breve nos lleva a la primera de dos fórmulas prácticas de curvatura. Sea (t) un parámetro arbitrario, comenzamos con la Regla de la Cadena y escribimos

$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$. Después de dividir ambos lados de esta ecuación por $\frac{ds}{dt} = |v|$, tomamos valores absolutos y llegamos a: $k = \frac{\left| \frac{dT}{ds} \right|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|}$, $\kappa(t) = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$

Teorema

Fórmula de Curvatura

Sea $r(t)$ una curva parametrizada suave, donde (t) es cualquier parámetro. Si $v = r'$ es la velocidad y T es el vector tangente unitario, entonces la curvatura es:

$$\kappa(t) = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$$

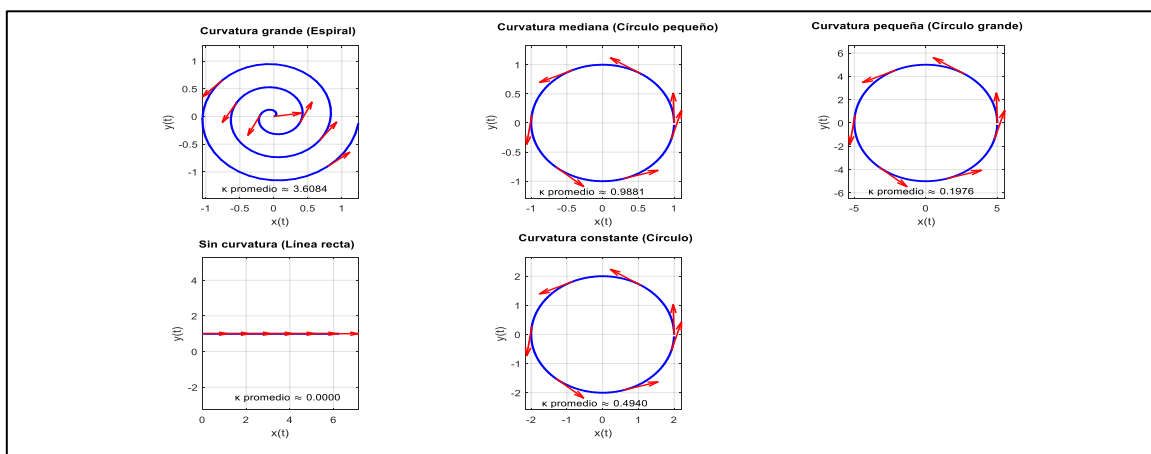


Figura c). Distintas representaciones de la curvatura

Fórmula Alternativa de Curvatura

Una segunda fórmula de curvatura, que se aplica específicamente a las trayectorias de objetos en movimiento, es más fácil de usar en algunos casos. El cálculo es instructivo porque depende de muchas propiedades de las funciones vectoriales. Al final, surge una fórmula notablemente simple.

Teorema

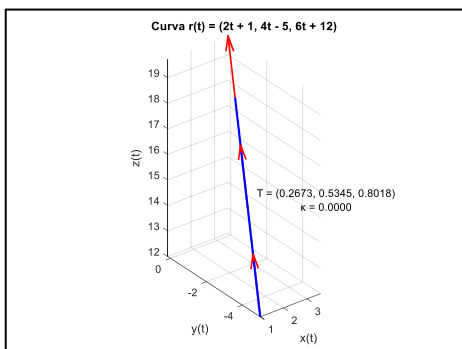
Fórmula Alternativa de Curvatura

Sea r la posición de un objeto que se mueve sobre una curva suave. La curvatura en un punto de la curva es: $\kappa = \frac{|v \times a|}{|v|^3}$ donde $v = r'$ es la velocidad y $a = v'$ es la aceleración.

Problema No. 31

Encuentra el vector tangente unitario T y la curvatura κ para las siguientes curvas parametrizadas.

$$r(t) = (2t + 1, 4t - 5, 6t + 12)$$

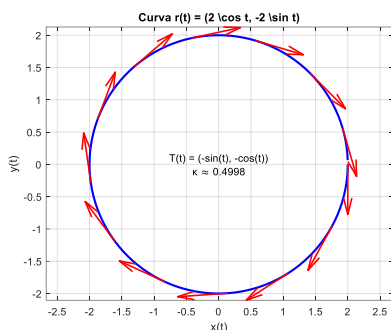


$$\begin{aligned} v &= r'(t) = (2, 4, 6), \\ a &= v' = (0, 0, 0), \\ v \times a &= (0, 0, 0), |v \times a| = 0, \\ |v| &= 2\sqrt{14}, |v|^3 = 112\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{0}{112\sqrt{14}} = 0$$

La curvatura es 0 porque $r(t)$ describe una línea recta (todas las componentes son lineales), y las líneas rectas tienen curvatura nula.

$$r(t) = (2 \cos t, -2 \sin t)$$



$$\begin{aligned} r'(t) &= (-2 \sin t, -2 \cos t) \\ |r'(t)| &= \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (-2 \cos t)^2} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2 \\ T(t) &= \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{(-2 \sin t, -2 \cos t)}{2} \\ &= (-\sin t, -\cos t) \end{aligned}$$

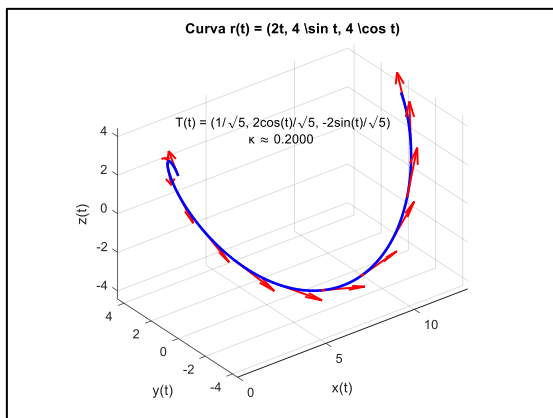
$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} \\ T'(t) &= (-\cos t, \sin t), \quad |T'(t)| \\ &= \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1 \\ \kappa &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \approx 0.5000$$

(constante, como se espera para una circunferencia de radio 2).

La gráfica muestra una circunferencia con vectores tangentes y curvatura constante

$$r(t) = (2t, 4 \sin t, 4 \cos t)$$



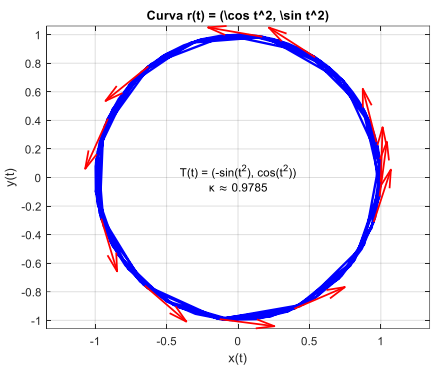
$$\begin{aligned} v &= r'(t) = (2, 4 \cos t, -4 \sin t), \\ a &= v' = (0, -4 \sin t, -4 \cos t), \\ v \times a &= (-16, 8 \cos t, -8 \sin t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v \times a| &= \sqrt{256 + 64 \cos^2 t + 64 \sin^2 t} \\ &= 8\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$|v| = 2\sqrt{5}, \quad |v|^3 = 40\sqrt{5}$$

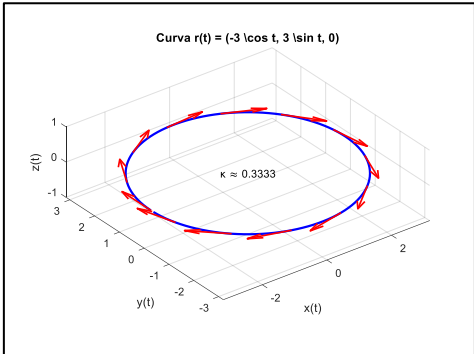
$$\kappa = \frac{8\sqrt{5}}{40\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

La curvatura es constante ($\kappa = 0.2$), lo que es típico de una hélice circular con radio fijo (aquí, 4 en el plano yz).

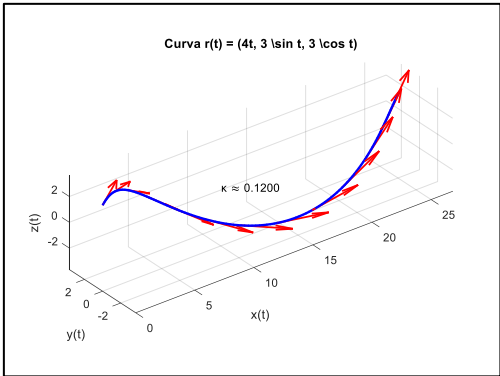
$r(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ 	$r'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$ $ r'(t) = \sqrt{(-2t \sin t^2)^2 + (2t \cos t^2)^2}$ $= \sqrt{4t^2} = 2t \quad (t > 0)$ $T(t) = \frac{r'(t)}{ r'(t) } = \frac{(-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)}{2t}$ $= (-\sin t^2, \cos t^2)$ $\kappa = \frac{ T'(t) }{ r'(t) }$ $T'(t) = (-2t \cos t^2, -2t \sin t^2), \quad T'(t) $ $= \sqrt{4t^2(\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2)} = 2t$ $\kappa(t) = \frac{2t}{2t} = 1 \quad (t > 0)$
---	---

Problema No. 32

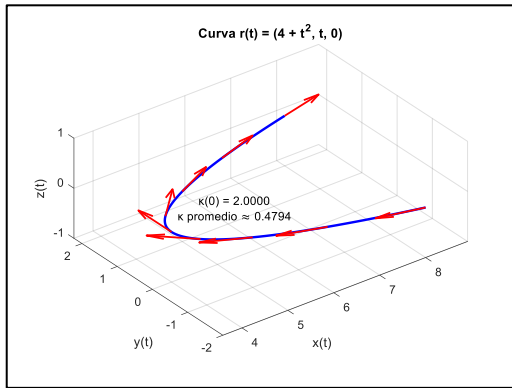
Usa la fórmula alternativa de curvatura $\kappa = \frac{|v \times a|}{|v|^3}$ para encontrar la curvatura de las siguientes curvas parametrizadas.

$r(t) = (-3 \cos t, 3 \sin t, 0)$ 	$\kappa = \frac{ v \times a }{ v ^3}$ $a = v'(t) = (3 \cos t, -3 \sin t, 0)$ $v = (3 \sin t, 3 \cos t, 0)$ $a = (3 \cos t, -3 \sin t, 0)$ $v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 \sin t & 3 \cos t & 0 \\ 3 \cos t & -3 \sin t & 0 \end{vmatrix}$ $= i(0 - 0) - j(0 - 0)$ $+ k((3 \sin t)(-3 \sin t) - (3 \cos t)(3 \cos t))$ $= k(-9 \sin^2 t - 9 \cos^2 t)$ $= k(-9(\sin^2 t + \cos^2 t))$ $= (0, 0, -9)$ $ v \times a = 9$ $ v = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = 3, \quad v ^3 = 27$
---	---

	$\kappa(t) = \frac{ v \times a }{ v ^3} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ La curvatura $\kappa = \frac{1}{3}$ es constante, lo cual es correcto para una circunferencia de radio 3 (radio $R = 3, \kappa = \frac{1}{R} = \frac{1}{3}$)
--	---

$\mathbf{r}(t) = (4t, 3 \sin t, 3 \cos t)$ 	$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = (4, 3 \cos t, -3 \sin t)$ $\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = (0, -3 \sin t, -3 \cos t)$ $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 \cos t & -3 \sin t \\ 0 & -3 \sin t & -3 \cos t \end{vmatrix} =$ $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = (-9, 12 \cos t, -12 \sin t)$ $ \mathbf{v} \times \mathbf{a} = \sqrt{81 + 144 \cos^2 t + 144 \sin^2 t} = \sqrt{225} = 15$ $ \mathbf{v} = \sqrt{16 + 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} = \sqrt{25} = 5, \quad \mathbf{v} ^3 = 125$ $\kappa(t) = \frac{ \mathbf{v} \times \mathbf{a} }{ \mathbf{v} ^3} = \frac{15}{125} = \frac{3}{25} = 0.12$ La curvatura $\kappa = 0.12$ es constante, lo cual es típico de una hélice circular con radio 3 en el plano (yz) y un avance lineal en (x).
---	--

$\mathbf{r}(t) = (4 + t^2, t, 0)$	$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = (2t, 1, 0)$ $\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = (2, 0, 0)$ $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2)$ $ \mathbf{v} \times \mathbf{a} = 2$
-----------------------------------	--



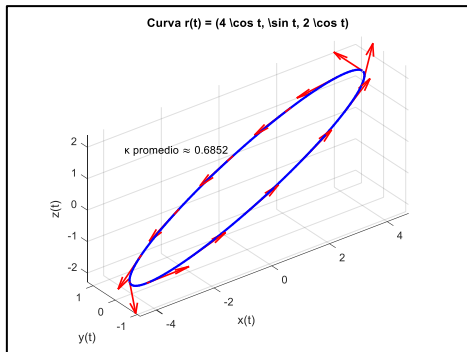
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2t)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + 1},$$

$$|\mathbf{v}|^3 = (4t^2 + 1)^{3/2}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{3/2}}$$

La curvatura $\kappa(t) = \frac{2}{(4t^2+1)^{3/2}}$ varía con t , siendo máxima en $t = 0$ ($\kappa(0) = 2$) y disminuyendo a medida que $|t|$ aumenta, lo cual es típico de una parábola.

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos t, \sin t, 2 \cos t)$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = (-4 \sin t, \cos t, -2 \sin t)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = (-4 \cos t, -\sin t, -2 \cos t)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 \sin t & \cos t & -2 \sin t \\ -4 \cos t & -\sin t & -2 \cos t \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(-2(\cos^2 t + \sin^2 t)) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(4(\sin^2 t + \cos^2 t)) \\ = (-2, 0, 4)$$

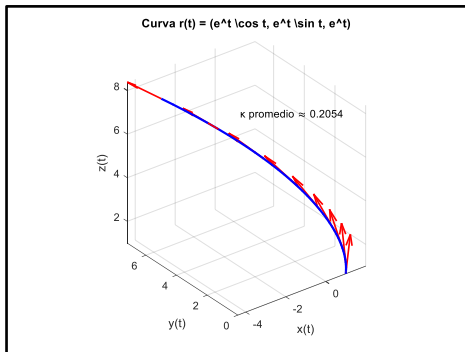
$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{16 \sin^2 t + \cos^2 t + 4 \sin^2 t} \\ = \sqrt{20 \sin^2 t + \cos^2 t}, \quad |\mathbf{v}|^3 \\ = (\sqrt{20 \sin^2 t + \cos^2 t})^3$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{20 \sin^2 t + \cos^2 t})^3}$$

La curvatura $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{20 \sin^2 t + \cos^2 t})^3}$ varía con t , lo cual es esperado para una curva elíptica en el espacio.

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$



$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t \\ &\quad + e^t \cos t, e^t) \\ &= e^t(\cos t - \sin t, \sin t \\ &\quad + \cos t, 1)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = e^t(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = e^t \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}(\sin t - \cos t, -\sin t - \cos t, 2)$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| &= e^{2t} \sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2 + 4} \\ &= e^{2t} \sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{e^{2t} \sqrt{6}}{e^{3t} 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3e^t}$$

La curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{6}}{3e^t}$ disminuye exponencialmente con (t) , lo cual es consistente con una espiral que crece rápidamente en el espacio.

Vector Normal Unitario Principal

La curvatura responde a la pregunta de qué tan rápido gira una curva. El vector normal unitario principal determina la dirección en la que gira una curva. Específicamente, la magnitud de $\frac{dT}{ds}$ es la curvatura: $\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$. ¿Qué pasa con la dirección de $\frac{dT}{ds}$? Si solo interesa la dirección, pero no la magnitud, de un vector, es conveniente trabajar con un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector original. Aplicamos esta idea a $\frac{dT}{ds}$. El vector unitario que apunta en la dirección de $\frac{dT}{ds}$ es el vector normal unitario principal.

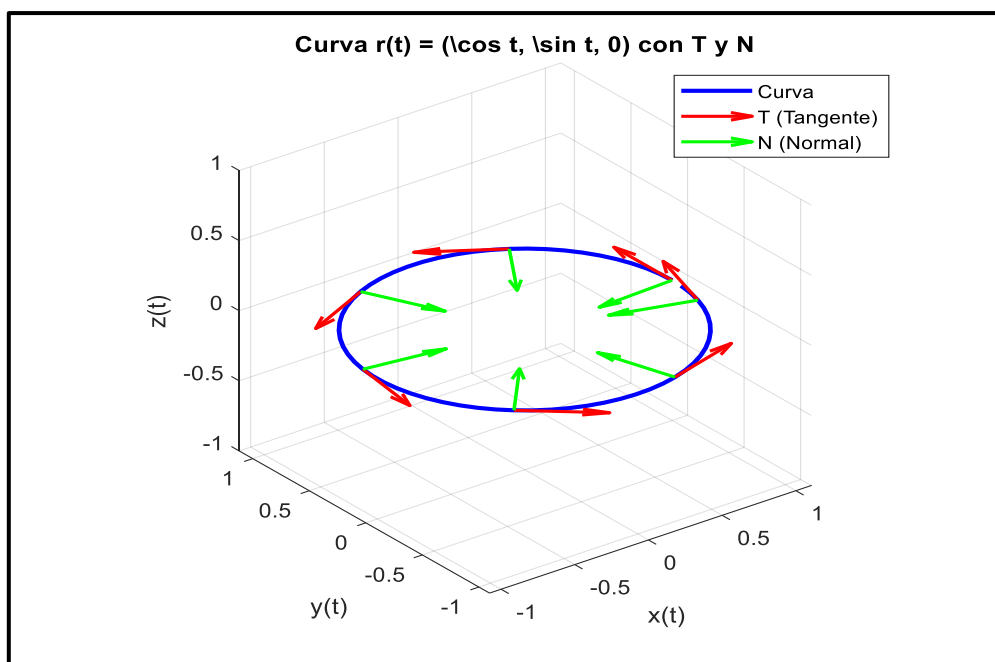
Definición

Vector Normal Unitario Principal

Sea r una curva suave parametrizada por longitud de arco. El vector normal unitario principal en un punto (P) de la curva en el que $\kappa \neq 0$ es: $N(s) = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left| \frac{dT}{ds} \right|} = \frac{dT}{\kappa ds}$

Para otros parámetros, usamos la fórmula equivalente: $N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|}$

evaluada en el valor de (t) correspondiente a (P).



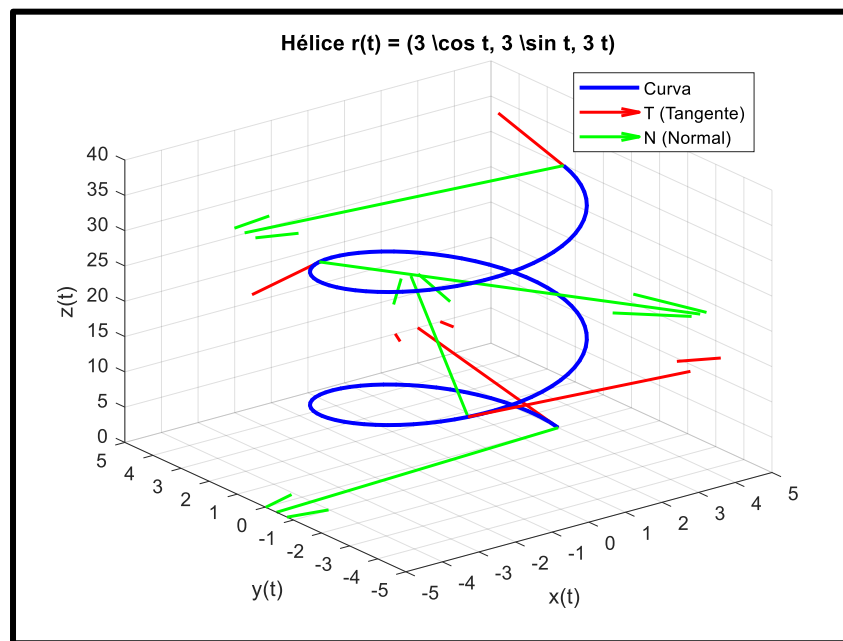
Representación gráfica del vector normal unitario principal

Teorema

Propiedades del Vector Normal Unitario Principal

Sea r una curva suave parametrizada con vector tangente unitario T y vector normal unitario principal N .

1. T y N son ortogonales en todos los puntos de la curva; es decir, $T \cdot N = 0$ en todos los puntos donde N está definido.
2. El vector normal unitario principal apunta hacia el interior de la curva, en la dirección en la que la curva está girando.



Representación gráfica del vector normal unitario principal en una hélice

Componentes de la Aceleración

Los vectores T y N pueden usarse para obtener información sobre cómo se aceleran los objetos en movimiento. Recordemos la observación hecha anteriormente de que las dos formas de cambiar la velocidad de un objeto (acelerar) son cambiar su rapidez y cambiar su dirección de movimiento. Mostramos que cambiar la rapidez produce una aceleración en la dirección de T y cambiar la dirección produce una aceleración en la dirección de N .

Teorema

Componentes Tangencial y Normal de la Aceleración

El vector de aceleración de un objeto que se mueve en el espacio a lo largo de una curva suave tiene la siguiente representación en términos de su componente tangencial a_T (en la dirección de T) y su componente normal a_N (en la dirección de N)

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

Donde

$$a_N = \kappa |\mathbf{v}|^2 = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|}, \quad a_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

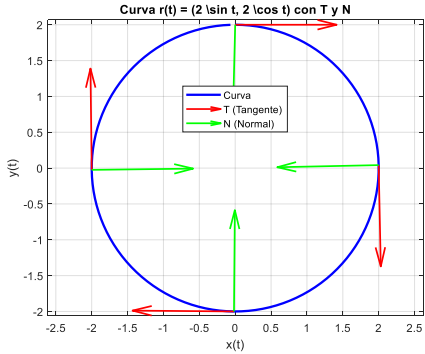
Demostración:

Posición	$\mathbf{r}(t)$
Velocidad	$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$
Aceleración	$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$
Vector tangente unitario	$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{ \mathbf{v}(t) }$
Vector normal unitario principal	$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right } = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \kappa$ donde $\kappa = \left \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right $
Relación entre t y s	$\frac{ds}{dt} = \mathbf{v}(t) , \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa \mathbf{v} \mathbf{N}$
Derivada de la velocidad	$\mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{T}$

Aceleración	$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \mathbf{T}) = \frac{d \mathbf{v} }{dt}\mathbf{T} + \mathbf{v} \frac{d\mathbf{T}}{dt}$
Sustitución	$\mathbf{a} = \frac{d \mathbf{v} }{dt}\mathbf{T} + \mathbf{v} (\kappa \mathbf{v} \mathbf{N}) = \frac{d \mathbf{v} }{dt}\mathbf{T} + \kappa \mathbf{v} ^2\mathbf{N}$
Componentes	$a_T = \frac{d \mathbf{v} }{dt}, \quad a_N = \kappa \mathbf{v} ^2$
Se ha demostrado que	$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$

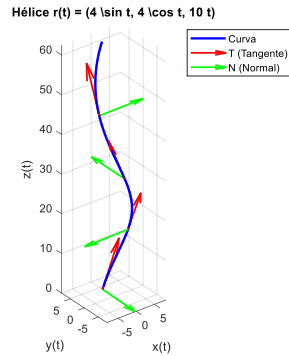
Problema No. 33

Encuentra el vector tangente unitario $\mathbf{T}$ y el vector normal unitario principal $\mathbf{N}$ para las siguientes curvas parametrizadas. En cada caso, verifica que $|\mathbf{T}| = |\mathbf{N}| = 1$ y $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$

$\mathbf{r}(t) = (2\sin t, 2\cos t)$ 	$\mathbf{r}'(t) = (2\cos t, -2\sin t)$ $ \mathbf{r}'(t) = \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2}$ $= \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2$ $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{ \mathbf{r}'(t) } = \frac{(2\cos t, -2\sin t)}{2}$ $= (\cos t, -\sin t)$ $ \mathbf{T} = \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1$ $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = (-\sin t, -\cos t)$ $\left \frac{d\mathbf{T}}{dt}\right = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$ $\mathbf{N}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left \frac{d\mathbf{T}}{dt}\right } = (-\sin t, -\cos t)$ $ \mathbf{N} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$ $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = (\cos t)(-\sin t) + (-\sin t)(-\cos t)$ $= -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$ $\mathbf{T}(t) = (\cos t, -\sin t), (\mathbf{N}(t) = (-\sin t, -\cos t))$
--	---

$$\mathbf{r}(t) = (4 \sin t, 4 \cos t, 10t),$$

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{N}| = 1 \text{ y } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$$



$$\mathbf{r}'(t) = (4 \cos t, -4 \sin t, 10)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(4 \cos t)^2 + (-4 \sin t)^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t + 100} \\ &= \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(4 \cos t, -4 \sin t, 10)}{2\sqrt{29}} \\ &= \left(\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}}, -\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}| &= \sqrt{\left(\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}} \right)^2 + \left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}} \right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 25}{29}} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}}, -\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}}, 0 \right)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \sqrt{\left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}} \right)^2 + \left(-\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}} \right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|} = \frac{\left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}}, -\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}}, 0 \right)}{\frac{2}{\sqrt{29}}} \\ &= (-\sin t, -\cos t, 0) \end{aligned}$$

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

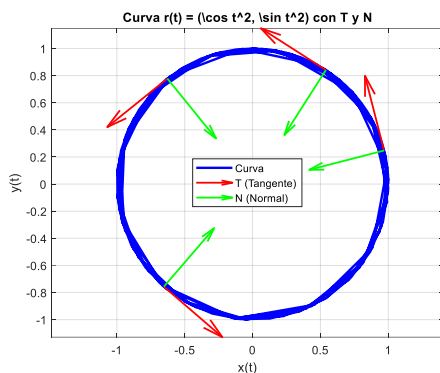
$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} &= \left(\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}} \right) (-\sin t) + \left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}} \right) (-\cos t) \\ &\quad + \left(\frac{5}{\sqrt{29}} \right) (0) \\ &= -\frac{2 \cos t \sin t}{\sqrt{29}} + \frac{2 \sin t \cos t}{\sqrt{29}} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{2 \cos t}{\sqrt{29}}, -\frac{2 \sin t}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right)$$

$$\mathbf{N}(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$$

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{N}| = 1 \text{ y } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$$

$$(\mathbf{r}(t) = (\cos t^2, \sin t^2))$$



$$\mathbf{r}'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(-2t \sin t^2)^2 + (2t \cos t^2)^2} \\ &= \sqrt{4t^2 \sin^2 t^2 + 4t^2 \cos^2 t^2} \\ &= 2t \quad (t > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)}{2t} \\ &= (-\sin t^2, \cos t^2) \end{aligned}$$

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{(-\sin t^2)^2 + (\cos t^2)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = (-2t \cos t^2, -2t \sin t^2)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| &= \sqrt{(-2t \cos t^2)^2 + (-2t \sin t^2)^2} \\ &= \sqrt{4t^2} = 2t \quad (t > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|} = \frac{(-2t \cos t^2, -2t \sin t^2)}{2t} \\ &= (-\cos t^2, -\sin t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}| &= \sqrt{(-\cos t^2)^2 + (-\sin t^2)^2} = \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} &= (-\sin t^2)(-\cos t^2) \\ &\quad + (\cos t^2)(-\sin t^2) \\ &= \sin t^2 \cos t^2 \\ &\quad - \cos t^2 \sin t^2 = 0 \end{aligned}$$

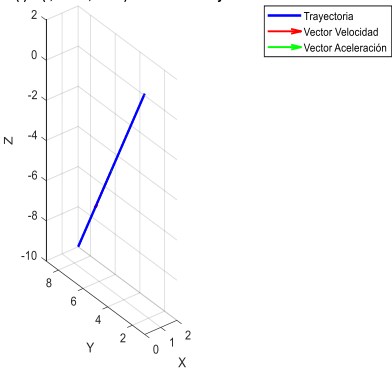
$$\mathbf{T}(t) = (-\sin t^2, \cos t^2)$$

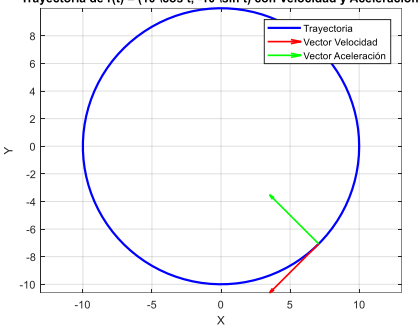
$$\mathbf{N}(t) = (-\cos t^2, -\sin t^2)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}| &= |\mathbf{N}| = 1 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} &= 0 \end{aligned}$$

Problema No. 34

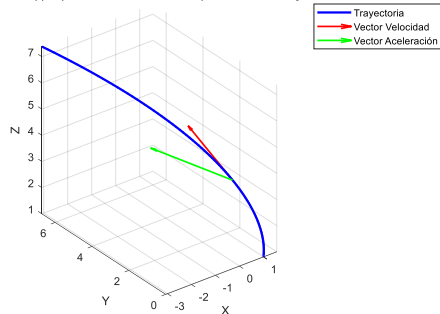
Considera las siguientes trayectorias de objetos en movimiento. Encuentra las componentes tangencial y normal de la aceleración.

$\mathbf{r}(t) = (t, 1 + 4t, 2 - 6t)$ Trayectoria de $\mathbf{r}(t) = (t, 1 + 4t, 2 - 6t)$ con Velocidad y Aceleración 	$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 4, -6)$ $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (0, 0, 0)$ $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{ \mathbf{v} }, \quad \mathbf{v} = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{53}$ $\mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}, -\frac{6}{\sqrt{53}} \right)$ $a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = (0, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}, -\frac{6}{\sqrt{53}} \right) = 0$ $a_N = \mathbf{a} - a_T \mathbf{T} = (0, 0, 0) - 0 \cdot \mathbf{T} = 0$ $a_T = 0, \quad a_N = 0$ Dado que la aceleración es nula $\mathbf{a}(t) = (0, 0, 0)$, ambas componentes son cero
--	--

$\mathbf{r}(t) = (10 \cos t, -10 \sin t)$ Trayectoria de $\mathbf{r}(t) = (10 \cos t, -10 \sin t)$ con Velocidad y Aceleración  (la componente normal es constante porque describe un movimiento circular uniforme). (la componente tangencial es cero porque la velocidad tiene magnitud constante).	$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-10 \sin t, -10 \cos t)$ $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-10 \cos t, 10 \sin t)$ $ \mathbf{v} = \sqrt{(-10 \sin t)^2 + (-10 \cos t)^2}$ $= \sqrt{100(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 10$ $a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = (-10 \cos t, 10 \sin t) \cdot (-\sin t, -\cos t)$ $= 10 \cos t \sin t - 10 \sin t \cos t = 0$ $ \mathbf{a} = \sqrt{(-10 \cos t)^2 + (10 \sin t)^2}$ $= \sqrt{100(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 10$ $a_N = \mathbf{a} = 10$ $a_T = 0, \quad a_N = 10$ Esto tiene sentido, ya que $\mathbf{r}(t) = (10 \cos t, -10 \sin t)$ representa una circunferencia de radio 10 en el plano (xy), recorrida en sentido horario, y la aceleración es puramente centrípeta (normal).
--	--

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Gráfica de $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ con Velocidad y Aceleración



$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (e^t(-2 \sin t), e^t(2 \cos t), e^t)$$

$$|\mathbf{v}|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{e^t}{\sqrt{3}} [(-2 \sin t)(\cos t - \sin t) + (2 \cos t)(\sin t + \cos t) + 1]$$

$$= \frac{e^t}{\sqrt{3}} (2 \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + 2 \cos t \sin t + 2 \cos^2 t + 1) = \frac{e^t}{\sqrt{3}} (3) = e^t \sqrt{3}$$

$$|\mathbf{a}|^2 = e^{2t}(4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1) = 5e^{2t}, \quad |\mathbf{a}| = e^t \sqrt{5}$$

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{5e^{2t} - 3e^{2t}} = \sqrt{2e^{2t}} = e^t \sqrt{2}$$

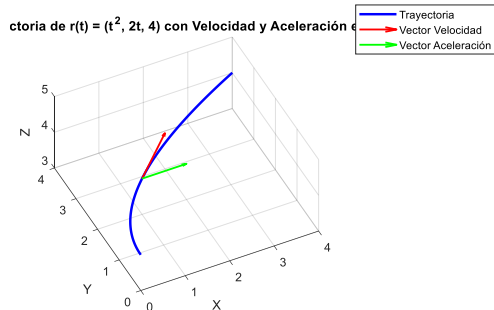
$$a_T = e^t \sqrt{3}, \quad a_N = e^t \sqrt{2}$$

Un avión describe una trayectoria de ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}.$$

Obtener la posición del avión, su velocidad, su aceleración y las componentes vectoriales de la aceleración a_T y a_N en $t = 1$

La trayectoria del avión, $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, 4)$, describe un movimiento parabólico en el plano (xy) (ya que $z = 4$ es constante). En $t = 1$, la posición es $(1, 2, 4)$, la velocidad $(2, 2, 0)$ indica movimiento en el plano xy , y la aceleración $(2, 0, 0)$ es constante en la dirección (x). Las componentes tangencial $a_T = \sqrt{2}$ y $a_N = \sqrt{2}$ de la aceleración muestran que la aceleración tiene contribuciones tanto en la dirección del movimiento (tangencial) como perpendicular a este (normal), lo que refleja la curvatura de la trayectoria parabólica.



$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, 4), \quad \mathbf{r}(1) = (1, 2, 4)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2t, 2, 0), \quad \mathbf{v}(1) = (2, 2, 0)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (2, 0, 0), \quad \mathbf{a}(1) = (2, 0, 0)$$

$$|\mathbf{v}(1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(1)}{|\mathbf{v}(1)|} = \frac{(2, 2, 0)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} a_T &= \mathbf{a}(1) \cdot \mathbf{T} = (2, 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{a}(1)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$$

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ($t = 1$)

$$\mathbf{r}(1) = (1, 2, 4),$$

$$\mathbf{v}(1) = (2, 2, 0),$$

$$\mathbf{a}(1) = (2, 0, 0),$$

$$a_T = \sqrt{2},$$

$$a_N = \sqrt{2}$$

El Vector Binormal y la Torsión

Hemos visto que la función de curvatura y el vector normal unitario principal nos indican qué tan rápido y en qué dirección gira una curva. Para curvas en dos dimensiones, estas cantidades ofrecen una descripción bastante completa del movimiento a lo largo de la curva. Sin embargo, en tres dimensiones, una curva tiene más "espacio" para cambiar su curso, y otra función descriptiva suele ser útil. La figura No. 1 siguiente se muestra una curva parametrizada suave (C) con su vector tangente unitario T y su vector normal unitario principal N en dos puntos diferentes. Estos dos vectores determinan un plano llamado el plano osculador. La pregunta que ahora nos planteamos es: ¿Qué tan rápido se aleja la curva (C) del plano determinado por T y N ?

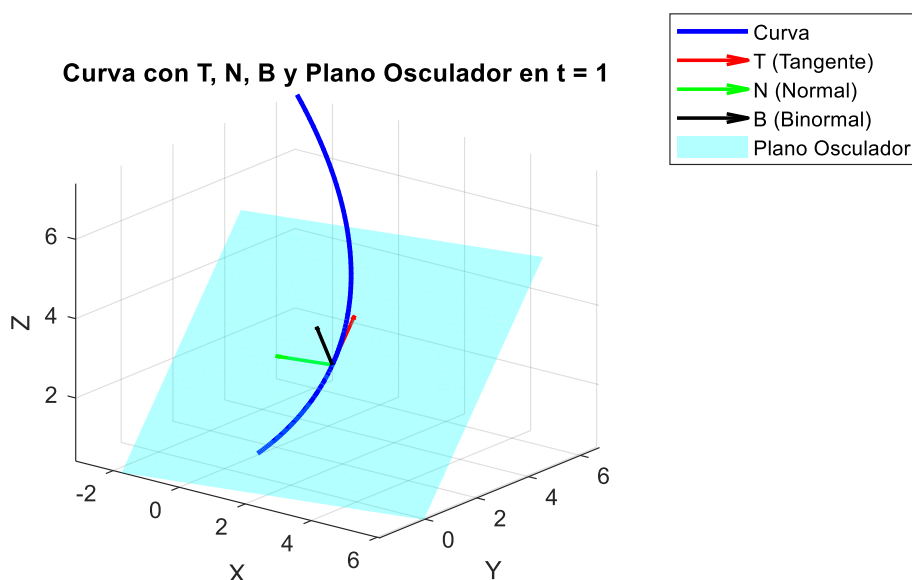


Figura que muestra la curva C parametrizada, el vector tangente, el vector normal y el plano osculatorio

Para responder a esta pregunta, comenzamos definiendo el vector binormal unitario $B = T \times N$. Por la definición del producto cruz, B es ortogonal a T y N . Dado que T y N son vectores unitarios, B también es un vector unitario. Observa que T , N y B forman un sistema de coordenadas dextrógiro (como el sistema de coordenadas (xyz)) que cambia su orientación a medida que nos movemos a lo largo de la curva. Este sistema de coordenadas se denomina comúnmente el marco **TNB** (Figura No. 1). La tasa a la que la curva (C) se retuerce fuera del plano determinado por T y N es la tasa a la que B cambia a medida que avanzamos a lo largo de (C), lo cual es $\frac{dB}{ds}$. Un cálculo breve conduce a una fórmula práctica para la torsión de la curva.

Demostración

Definición del vector binormal	$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$
El vector $\mathbf{B}$ es unitario	$ \mathbf{B} = 1$
Ortogonales a	$\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$
Calculamos la derivada de $\mathbf{B}$ respecto a la longitud de arco (s):	$\frac{d}{ds}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} = 0$
Por lo tanto	$(\frac{d\mathbf{B}}{ds})$, es perpendicular a $\mathbf{B}$
Como $(\frac{d\mathbf{B}}{ds})$ esta en el plano osculador generado por	$\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$
	$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N}$
Derivamos	$\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$
Sabemos que	$\frac{d}{ds}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$
Por lo que	$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$
Entonces	$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0 \Rightarrow a = 0$
	$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = b\mathbf{N}$, $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$
Definimos la torsión (τ) con el signo convencional	$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\tau\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -\tau(1) = -$
Multiplicamos por ($\mathbf{N}$):	$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}$
Por lo tanto	$\frac{d}{ds} = \frac{1}{ \mathbf{r}' } \frac{d}{dt} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' }$
Para una fórmula práctica usamos y	$\tau = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''')}{ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' ^2}$
Derivando y simplificando con la tercera derivada $\mathbf{r}'''$, se obtiene	

Definición:**Vector Binormal Unitario y Torsión**

Sea (C) una curva parametrizada suave con vectores tangente unitario y normal unitario principal T y N , respectivamente. Entonces, en cada punto de la curva donde la curvatura es no nula, el vector binormal unitario es:

$$B = T \times N,$$

y la torsión es:

$$\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$$

Problema No. 35

Utiliza las definiciones para calcular el vector binormal unitario y la torsión de las siguiente curva

$$(r(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t, -t)$$

$$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, -1)$$

$$B = T \times N \text{ y } \tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$$

$$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, -1)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$$

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(-\frac{2 \sin t}{\sqrt{5}}, \frac{2 \cos t}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

T :

$$\frac{dT}{dt} = \left(-\frac{2 \cos t}{\sqrt{5}}, -\frac{2 \sin t}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$B = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

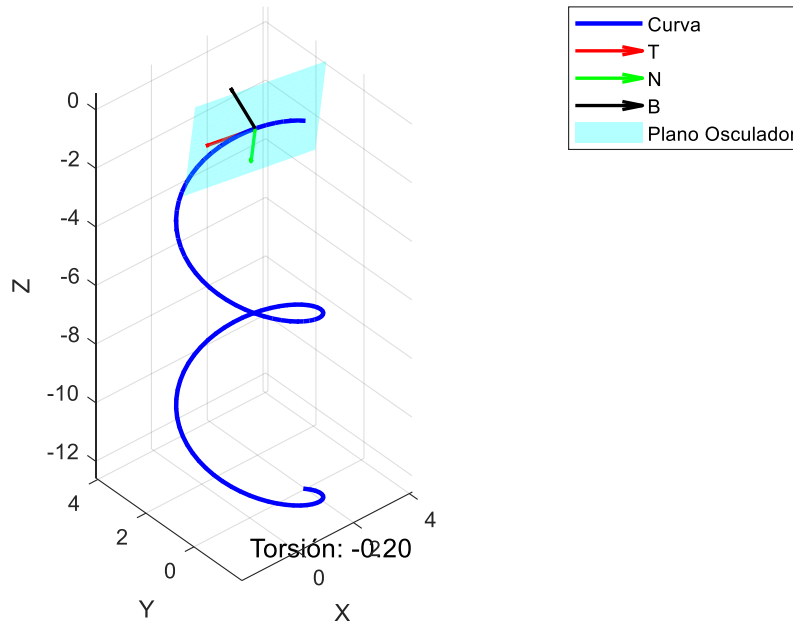
$$\frac{dB}{dt} = \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{5}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N = -\left(-\frac{\cos t}{5}(-\cos t) + \left(-\frac{\sin t}{5} \right)(-\sin t) \right) = -\frac{1}{5}$$

La curva $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -t)$ describe una hélice circular con radio 2 y paso constante en la dirección negativa de (z) . El vector binormal $B = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ depende de (t) pero tiene magnitud constante 1, y la torsión $\tau = -\frac{1}{5}$ es constante y negativa, indicando que la hélice se retuerce hacia abajo de manera uniforme. Esto es consistente con una hélice circular de paso fijo.

Curva $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -t)$ con T, N, B y Torsión



Representación gráfica de la curva $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -t)$, el vector tangente unitario, el vector normal principal, el vector binormal y el plano osculatorio. De igual forma, se muestra la torsión como una helice circular de paso fijo.

Fórmulas para curvatura en el espacio

Función de posición	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
Velocidad	$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
Aceleración	$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Vector tangente unitario	$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{ \mathbf{v} }$
Vector normal unitario principal	$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right } \quad \left(\text{si } \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq 0 \right) \right)$
Curvatura	$\kappa = \frac{\left \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right }{ \mathbf{v} } = \frac{\left \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right }{ \mathbf{v} } = \frac{ \mathbf{v} \times \mathbf{a} }{ \mathbf{v} ^3}$
Componentes de la aceleración Donde y	$\mathbf{a} = a_N \mathbf{N} + a_T \mathbf{T}$ $a_N = \kappa \mathbf{v} ^2 = \frac{ \mathbf{v} \times \mathbf{a} }{ \mathbf{v} }$ $a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} / \mathbf{v} $
Vector binormal unitario	$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{ \mathbf{v} \times \mathbf{a} }$
Torsión	$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}'}{ \mathbf{v} \times \mathbf{a} ^2} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' ^2}$

3.8 Aplicaciones

Aplicaciones de las funciones vectoriales de una variable real en ciencias e ingeniería

Las funciones vectoriales de una variable real son herramientas esenciales en el cálculo vectorial, con aplicaciones significativas en ciencias e ingeniería debido a su capacidad para modelar fenómenos dinámicos en el espacio tridimensional. A continuación, se describen las aplicaciones de los temas mencionados, destacando su relevancia en diversos campos.

Definición de función vectorial de una variable real: Una función vectorial de una variable real, $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, asigna a cada valor real (t) (usualmente tiempo) un vector en el espacio tridimensional. En física, estas funciones modelan trayectorias de partículas, como el movimiento de planetas o proyectiles. Por ejemplo, la órbita de un satélite puede representarse como $r(t) = \langle R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), h \rangle$, donde (R) es el radio orbital y (h) la altura. En ingeniería, se usan para diseñar trayectorias de robots o vehículos autónomos, optimizando caminos en sistemas de navegación.

Límites y continuidad de una función vectorial: Los límites y la continuidad, definidos componente por componente, son cruciales para analizar la suavidad de trayectorias. En física, la continuidad asegura que no haya saltos en el movimiento de un objeto, como en el análisis de trayectorias de partículas en fluidos. En ingeniería aeroespacial, los límites se usan para estudiar el comportamiento de un cohete al acercarse a puntos críticos, como el escape de la atmósfera, garantizando transiciones suaves en los modelos de simulación.

Derivada de una función vectorial: La derivada $r'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$ representa el vector tangente, que indica la dirección y velocidad del movimiento. En física, $r'(t)$ modela la velocidad de un objeto en movimiento, como en la cinemática de un vehículo o un electrón en un campo magnético. En ingeniería mecánica, se usa para analizar el movimiento de componentes en maquinaria, como en el diseño de pistones o turbinas, donde la derivada informa sobre la dinámica del sistema.

Integración de funciones vectoriales: La integral $\int_a^b r(t) dt$ calcula desplazamientos netos o acumulación de magnitudes vectoriales. En física, se aplica para determinar el desplazamiento total de una partícula bajo fuerzas variables, como en el movimiento de un satélite bajo perturbaciones gravitacionales. En ingeniería eléctrica, la integración de campos vectoriales modela el flujo de corriente en circuitos complejos, ayudando a diseñar sistemas eficientes.

Longitud de arco: La longitud de arco, $= \int_a^b |r'(t)| dt$ o largo de una curva. En ingeniería civil, se usa para calcular la longitud de carreteras o puentes curvos, optimizando costos y materiales. En robótica, la longitud de arco ayuda a planificar trayectorias eficientes para brazos robóticos, minimizando el consumo de energía.

Vectores tangente, normal y binormal: El vector tangente unitario $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ o movimiento, el vector normal unitario $N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ ambio de curvatura, y el vector binormal $B(t) = T(t) \times N(t)$ completa el triedro de Frenet-Serret. En física, estos vectores son esenciales en dinámica, por ejemplo, para analizar la fuerza centrípeta en curvas de vehículos o en órbitas planetarias. En ingeniería aeronáutica, se utilizan para estudiar la orientación y estabilidad de aviones durante maniobras, como giros o ascensos.

Curvatura: La curvatura, $k(t) = |T'(t)|/|r'(t)|$, mide qué tan rápido una curva se desvía de una línea recta. En ingeniería civil, la curvatura es clave para diseñar carreteras o vías férreas seguras, asegurando que los giros sean suaves para evitar descarrilamientos o accidentes. En biomedicina, se usa para modelar trayectorias de vasos sanguíneos o nervios en simulaciones quirúrgicas, donde la curvatura afecta la planificación de intervenciones.

Estos conceptos son fundamentales para aplicaciones avanzadas. En física, permiten modelar sistemas dinámicos complejos, como el movimiento caótico o la relatividad. En ingeniería, son cruciales en el diseño de estructuras (puentes, edificios curvos), optimización de trayectorias (navegación GPS, drones), y análisis de sistemas dinámicos (motores, turbinas). En computación gráfica, las funciones vectoriales y sus propiedades se usan para modelar curvas y superficies en animaciones y videojuegos, mientras que en robótica y control, facilitan el diseño de movimientos precisos. La comprensión de estos temas es la base para abordar campos vectoriales, integrales de línea y teoremas fundamentales del cálculo vectorial, ampliando su utilidad en electromagnetismo, mecánica de fluidos y optimización de sistemas complejos.

Conclusiones

Tema III sobre funciones vectoriales de una variable real constituye un pilar fundamental en el estudio del cálculo vectorial, al proporcionar las herramientas necesarias para modelar y analizar fenómenos dinámicos en el espacio tridimensional. Los temas abordados —definición de funciones vectoriales, límites y continuidad, derivadas, integrales, longitud de arco, vectores tangente, normal y binormal, y curvatura— son esenciales para comprender el comportamiento de curvas en física, ingeniería y ciencias aplicadas. Estas herramientas permiten a los estudiantes del Instituto Tecnológico de Ensenada modelar trayectorias de objetos, analizar movimientos en sistemas dinámicos y diseñar soluciones en áreas como la ingeniería civil, mecánica y aeroespacial. Su relevancia radica en su capacidad para conectar conceptos matemáticos con aplicaciones prácticas, sentando las bases para temas avanzados como campos vectoriales y teoremas de Stokes y Green. Este capítulo es valioso tanto para alumnos, que adquieren una comprensión sólida de los conceptos, como para maestros, quienes pueden usar el material como complemento didáctico en sus clases, enriqueciendo la enseñanza con enfoques visuales y analíticos. Con más de 40 ejemplos resueltos, muchos acompañados de representaciones gráficas elaboradas con Mathematica, el capítulo facilita una comprensión visual e intuitiva, permitiendo a los estudiantes visualizar curvas como hélices, elipses y parábolas en 3D, lo que fortalece su aprendizaje y aplicación práctica del cálculo vectorial.

Bibliografía

Apostol, T. M. (1974). *Calculus, Volume II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability* (2nd ed.). Wiley.

Este libro cubre funciones vectoriales, sus derivadas, integrales y aplicaciones en física, con un enfoque riguroso.

Stewart, J. (2015). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.

Incluye un capítulo dedicado a funciones vectoriales, con énfasis en curvas, longitud de arco y curvatura, con ejemplos prácticos.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2017). *Calculus* (10th ed.). Cengage Learning.

Ofrece una introducción clara a funciones vectoriales, con secciones sobre límites, derivadas, y vectores tangente y normal.

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2007). *Cálculo: Una y varias variables* (9th ed.). Reverté.

Este texto en español aborda funciones vectoriales, con aplicaciones en geometría y física, y ejemplos resueltos.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Thomas' Calculus* (13th ed.). Pearson.

Cubre funciones vectoriales de una variable real, incluyendo curvatura y el triedro de Frenet-Serret, con aplicaciones en ingeniería.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2013). *Calculus: Early Transcendentals* (4th ed.). Jones & Bartlett Learning.

Incluye secciones sobre funciones vectoriales, con énfasis en longitud de arco y aplicaciones en cinemática.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo* (9th ed.). Pearson Educación.

Texto en español que explica funciones vectoriales, sus derivadas e integrales, con ejemplos gráficos para estudiantes.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2011). *Vector Calculus* (6th ed.). W. H. Freeman.

Ofrece un tratamiento detallado de funciones vectoriales, con aplicaciones en física y geometría diferencial.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7th ed.). Oxford University Press.

Clásico en español que cubre funciones vectoriales, con ejemplos de trayectorias y curvatura en contextos aplicados.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2012). *Calculus* (6th ed.). Cengage Learning.

Incluye un capítulo sobre funciones vectoriales, con enfoque en límites, continuidad y aplicaciones en movimiento.

Ayres, F., & Mendelson, E. (2013). *Schaum's Outline of Calculus* (6th ed.). McGraw-Hill Education.

Proporciona ejercicios resueltos sobre funciones vectoriales, longitud de arco y curvatura, ideal para estudiantes.

Piskunov, N. S. (2004). *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo II* (2nd ed.). Editorial Mir.

Texto en español que aborda funciones vectoriales con un enfoque práctico, incluyendo derivadas e integrales.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus: Early Transcendentals* (10th ed.). Wiley.

Cubre funciones vectoriales de una variable real, con aplicaciones en ingeniería y física, y gráficos ilustrativos.

Tema IV

4. Funciones reales de varias variables

- 4.1 Introducción y definición de una función de varias variables
- 4.2 Gráfica de una función de varias variables
- 4.3 Curvas y superficies de nivel
- 4.4 Límite y continuidad de una función de varias variables
- 4.5 Derivadas parciales
- 4.6 Incrementos y diferenciales
- 4.7 Regla de la cadena y derivada implícita
- 4.8 Derivadas parciales de orden superior
- 4.9 Derivada direccional y gradiente
- 4.10 Valores extremos de funciones de varias variables
- Conclusiones
- Bibliografía

4.1 Introducción y definición de una función de varias variables

El tema I y las funciones con valores vectoriales del Capítulo III nos llevaron al espacio tridimensional por primera vez. En este tema, ingresamos al espacio tridimensional por un camino diferente al considerar funciones con varias variables independientes y una variable dependiente. Todas las propiedades familiares de las funciones de una sola variable —dominios, gráficas, límites, continuidad y derivadas— tienen generalizaciones para funciones de varias variables, aunque también observarás diferencias sutiles y nuevas características. Con funciones de varias variables independientes, trabajamos con derivadas parciales, las cuales, a su vez, dan lugar a derivadas direccionales y al gradiente, un concepto fundamental en cálculo. Las derivadas parciales nos permiten encontrar valores máximos y mínimos de funciones de varias variables. Definimos planos tangentes, en lugar de líneas tangentes, que nos permiten realizar aproximaciones lineales.

Una función de varias variables es una regla que asigna un valor numérico (generalmente real) a un conjunto de variables independientes, también conocidas como entradas. Mientras que una función de una sola variable, como $f(x) = x^2$, depende de un solo parámetro (x), una función de varias variables depende de dos o más parámetros. Por ejemplo, una función $f(x, y) = x^2 + y^2$ toma dos variables (x) y (y) y produce un resultado único. Estas funciones se definen típicamente sobre un dominio en un espacio multidimensional como $(\mathbb{R}^2$ para dos variables) y son fundamentales en campos como la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas, donde describen fenómenos que dependen de múltiples factores, como la temperatura en un punto del espacio o la presión en función de la posición y el tiempo.

4.2 Gráfica de una función de varias variables

4.2.1 Funciones de dos variables

Los conceptos clave relacionados con funciones de varias variables se presentan más fácilmente en el caso de dos variables independientes; la extensión a tres o más variables es entonces directa. En general, las funciones de dos variables se escriben explícitamente en la forma $z = f(x, y)$ o implícitamente en la forma $F(x, y, z) = 0$.

Ambas formas son importantes, pero por ahora consideramos funciones definidas explícitamente. Los conceptos de dominio y rango se trasladan directamente desde las funciones de una sola variable.

Definición

Función, Dominio y Rango con Dos Variables Independientes

Una función $z = f(x, y)$ asigna a cada punto (x, y) en un conjunto D en $\mathbb{R}^2$ un único número real z en un subconjunto de R . El conjunto D es el dominio de f . El rango de f es el conjunto de números reales z que se obtienen a medida que los puntos (x, y) varían sobre el dominio. Figura No. 1

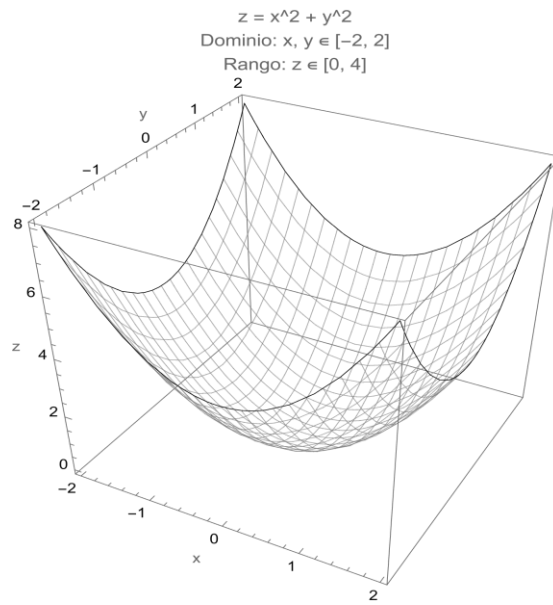


Figura No. 1. La ecuación $z = x^2 + y^2$ se usa para mostrar el dominio y se grafica como una superficie 3D.

Al igual que con las funciones de una variable, una función de varias variables puede tener un dominio que esté restringido por el contexto del problema. Por ejemplo, si las variables independientes corresponden a precio, longitud o población, estas solo toman valores no negativos, aunque la función asociada pueda estar definida para valores negativos de las variables. Si no se indica lo contrario, D es el conjunto de todos los puntos para los cuales la función está definida.

Problema No. 1

Encuentra el dominio de las siguientes funciones.

$f(x, y) = 2xy - 3x + 4y$ Superficie: Una superficie en 3D (un paraboloide hiperbólico) que representa $f(x, y)$. Dominio: Plano en color cian en $z = 0$ que indica el subconjunto graficado de $D = \mathbb{R}^2$	Dominio $D = \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = 2xy - 3x + 4y$ Dominio: $x, y \in [-2, 2]$ Rango: $z \in [-12, 12]$
---	---

$$f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$$

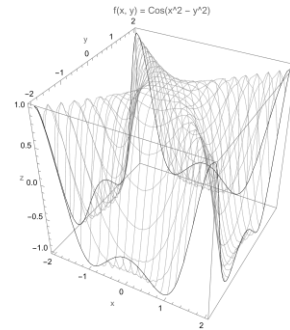
El dominio se muestra como un plano color negro en $z = 0$

La función $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ no tiene restricciones en su dominio, por lo que es $\mathbb{R}^2$

La gráfica muestra solo una porción para fines prácticos.

Dominio

$$D = \mathbb{R}^2$$



$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0$$

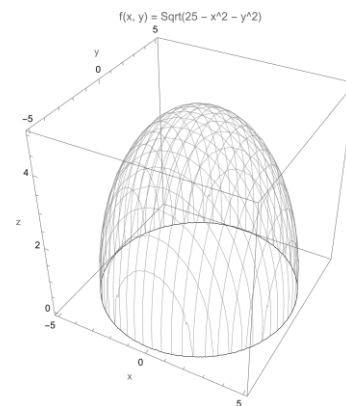
$$x^2 + y^2 \leq 25$$

La función $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ involucra una raíz cuadrada, que está definida solo cuando el argumento es no negativo.

Esta desigualdad describe un disco circular en el plano xy con centro en el origen $(0,0)$ y radio 5. El dominio incluye todos los puntos dentro y sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$

Dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$$



$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

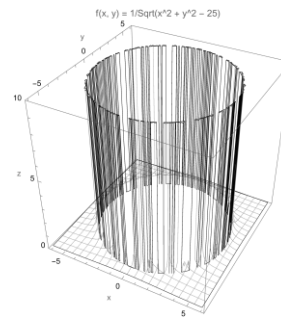
$$x^2 + y^2 - 25 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 25$$

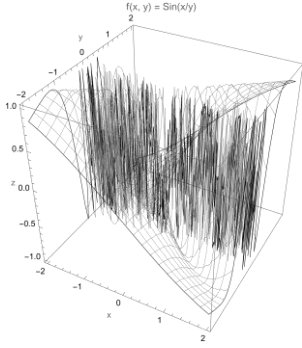
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 - 25} \neq 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 25 > 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 > 25 \end{aligned}$$

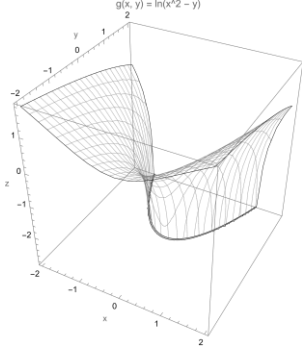
el dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y) fuera del círculo de radio 5 centrado en el origen, excluyendo la frontera $x^2 + y^2 = 25$

Dominio

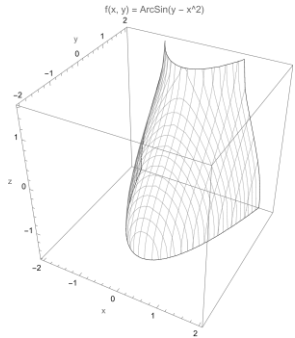
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 25\}$$



$f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ La función $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ involucra la función seno, que está definida para todos los números reales. Sin embargo, hay una división en el argumento $\frac{x}{y}$, lo que implica que el denominador y no puede ser cero: $y \neq 0$	Dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ 
---	--

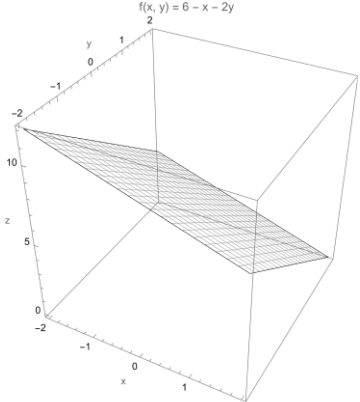
$g(x, y) = \ln(x^2 - y)$ Para que el logaritmo natural este definido, el argumento debe ser positivo $x^2 - y > 0$ $y < x^2$ Esta desigualdad describe la región del plano (x, y) debajo de la parábola $y = x^2$, excluyendo la frontera $y = x^2$, ya que $\ln(0)$ no está definido. Por lo tanto, el dominio es:	Dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$ 
---	---

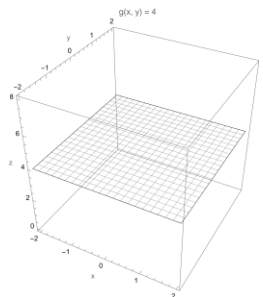
$f(x, y) = \sin^{-1}(y - x^2)$ La función arco seno $\sin^{-1}$ está definida solo cuando su argumento está en el intervalo $[-1, 1]$: $-1 \leq y - x^2 \leq 1$ $-1 \leq y - x^2$ $y \geq x^2 - 1$ $y - x^2 \leq 1$	Dominio: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}$
--	---

$y \leq x^2 + 1$ Combinando ambas condiciones, el dominio es la región entre las parábolas $(y = x^2 - 1)y(y = x^2 + 1)$ Incluyendo las fronteras. Por lo tanto	
---	--

Problema No. 2

Trazar una gráfica de las siguientes funciones. En cada caso, identifica la superficie y establece el dominio y el rango de la función.

$f(x, y) = 6 - x - 2y$ $(x = 0, y = 0): (z = 6)$ $(y = 0, z = 0): (x = 6)$ $(x = 0, z = 0): (y = 3)$ Por lo tanto, la superficie es un plano inclinado	Dominio: $D = \mathbb{R}^2$ Rango: $R = \mathbb{R}$ 
---	--

$g(x, y) = 4$ La ecuación $z = 4$ es una constante, lo que representa un plano horizontal en el espacio 3D paralelo al plano (xy) a una altura de $z = 4$. La función es constante y no depende de x ni y, por lo que no tiene restricciones y está definida para todos los puntos en el plano cartesiano: Dado que $(g(x, y) = 4)$ para cualquier (x) y (y), el rango es un solo valor:	Dominio: $D = \mathbb{R}^2$ Rango: $R = 4$ 
---	--

$$p(x, y) = x^2 - y^2$$

La ecuación $z = x^2 - y^2$ representa una superficie cuadrática en el espacio 3D, conocida como un hiperboloide de una hoja o silla de montar. Algunos puntos clave:

La superficie tiene una forma de silla que se curva hacia arriba a lo largo del eje x y hacia abajo a lo largo del eje y .

La función es un polinomio cuadrático y no tiene restricciones, por lo que está definida para todos los puntos en el plano cartesiano.

Dado que $z = x^2 - y^2$ puede tomar cualquier valor real dependiendo de x y y :

$$(x = y = 0): (z = 0).$$

$$(x > y): (z)$$

(puede ser arbitrariamente grande)

$$(y > x):$$

$$(z < 0)$$

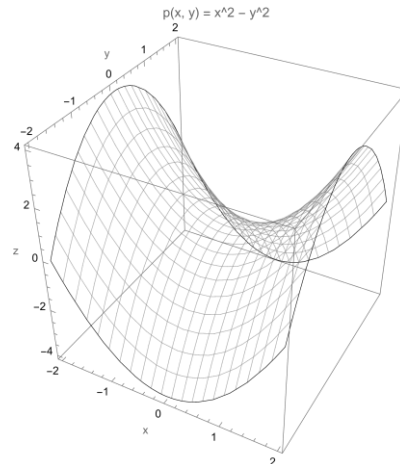
(puede ser arbitrariamente pequeño)

Dominio:

$$D = \mathbb{R}^2$$

Rango:

$$R = \mathbb{R}$$



$$h(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

La ecuación $z = 2x^2 + 3y^2$ es un polinomio cuadrático con coeficientes positivos, lo que representa un paraboloide elíptico en el espacio 3D que se abre hacia arriba. Algunos puntos clave:

$$((x, y) = (0, 0)): (z = 0) (\text{vértice}).$$

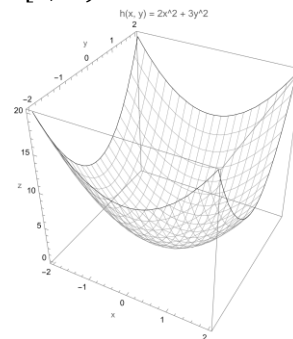
$$(y = 0): (z = 2x^2) (\text{parábola en el plano}(xz)).$$

$$(x = 0): (z = 3y^2) (\text{parábola en el plano}(yz)).$$

La función es un polinomio cuadrático y no tiene restricciones, por lo que está definida para todos los puntos en el plano cartesiano:

Dominio: $D = \mathbb{R}^2$

Rango: $R = [0, \infty)$



Mínimo: $(z = 0)$ cuando $(x = 0)$ y $(y = 0)$. Máximo: $(z \rightarrow \infty)$ a medida que (x) o (y) aumentan

$$g(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2}$$

La ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2} = 2\sqrt{4 - x^2}$ no depende de y , lo que representa una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje y . En el plano $(xz)y = 0$, $(z = 2\sqrt{4 - x^2})$ describe una semicircunferencia superior con centro en $((0,0)$ y radio 2, que se extiende infinitamente en la dirección y . La raíz cuadrada requiere que el argumento sea no negativo:

$$\begin{aligned} 16 - 4x^2 &\geq 0 \\ x^2 &\leq 4 \\ -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

No hay restricciones en y , por lo que el dominio es una banda infinita paralela al eje y :

El valor de $(z = \sqrt{16 - 4x^2})$ varía según x

Dominio:

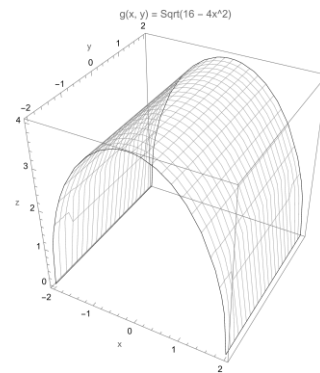
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

Máximo: $(x = 0), (z = \sqrt{16} = 4)$.

Mínimo: $(x = \pm 2), (z = \sqrt{0} = 0)$

Rango:

$$R = [0, 4]$$



4.3 Curvas y superficies de nivel

Las funciones de dos variables se representan mediante superficies en R^3 . Sin embargo, dichas funciones pueden representarse de otra manera reveladora, que se utiliza para crear mapas topográficos. Figura No. 2

Considera una superficie definida por la función $z = f(x, y)$. (Figura No. 3). Ahora imagina que subes a la superficie y caminas por un sendero en el que tu elevación tiene el valor constante $z = z_0$. El sendero que recorres en la superficie forma parte de una curva de contorno; la curva de contorno completa es la intersección de la superficie con el plano horizontal $z = z_0$. Cuando esta curva de contorno se proyecta sobre el plano xy , el resultado es la curva $f(x, y) = z_0$. Esta curva en el plano (xy) se llama curva de nivel.

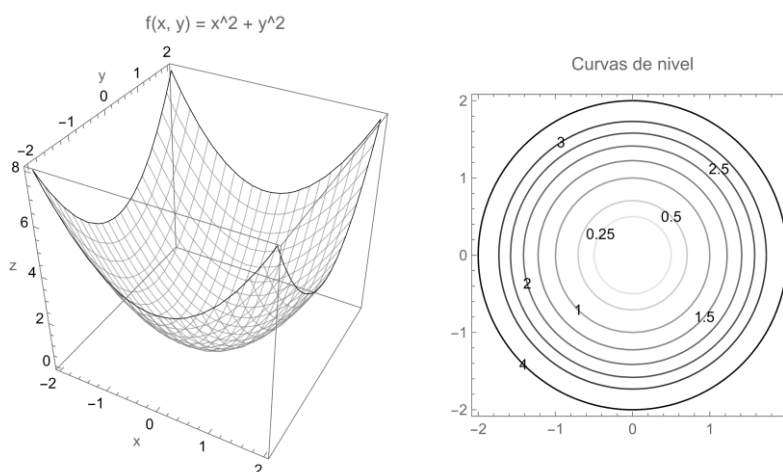


Figura No. 2. Curvas de nivel: líneas donde $f(x, y) = k$ es constante.

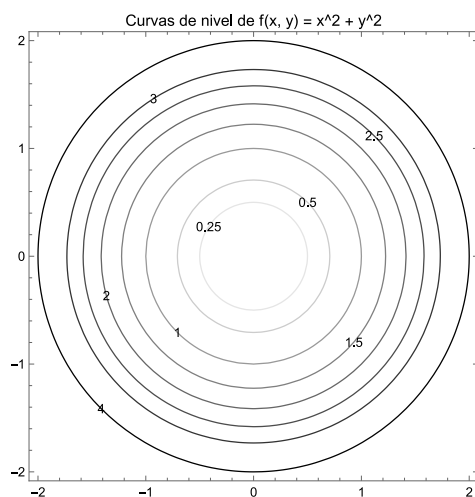


Figura No. 3. Cuervas de nivel en el plano xy cuando $f(x, y) = z_0$

Imagina repetir este proceso con un valor constante diferente de (z), digamos $z = z_1$. El sendero que recorres esta vez, al proyectarse sobre el plano (xy), forma parte de otra curva de nivel $f(x,y) = z_1$. Una colección de tales curvas de nivel, correspondientes a diferentes valores de (z), proporciona una representación bidimensional útil de la superficie (Figura No. 4).

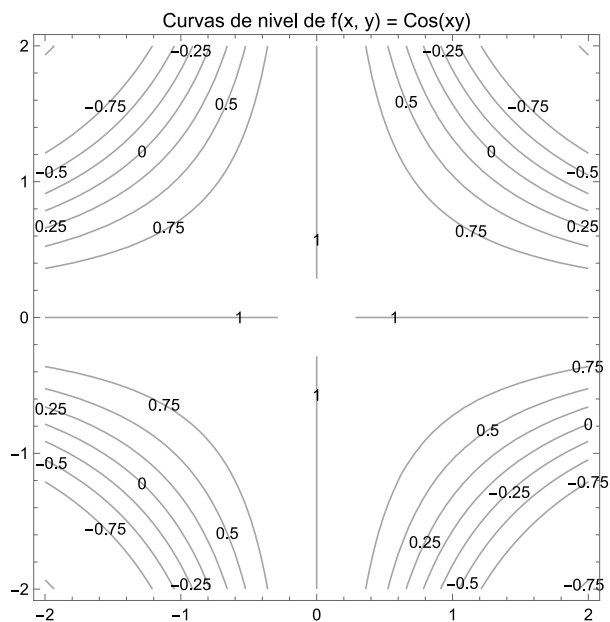
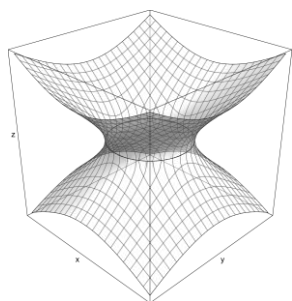


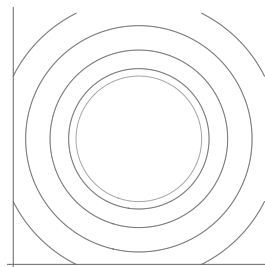
Figura No. 4. Curvas de nivel para distintos valores de z

Problema No. 3

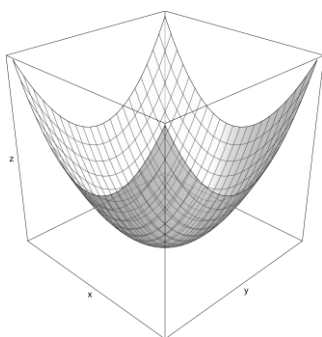
Superficies con las curvas de nivel correspondientes



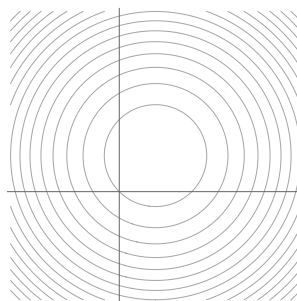
Hiperboloide de un manto



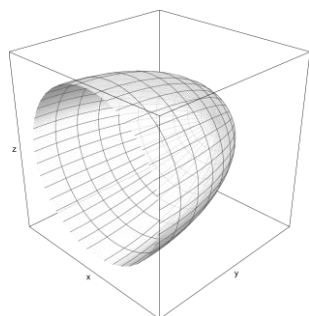
Curvas de nivel



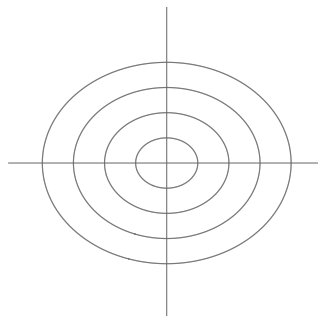
Paraboloide elíptico



Curvas de nivel



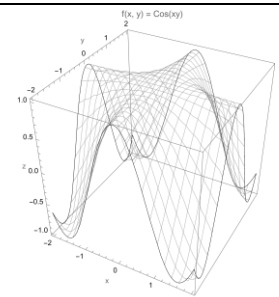
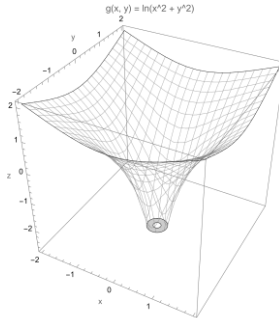
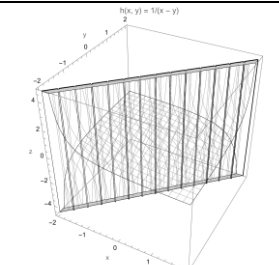
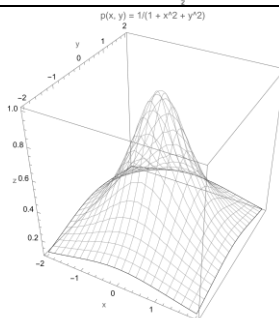
Cono elíptico



Curvas de nivel

Problema No. 4

Superficies coincidentes. Empareja las funciones a-d con las superficies A-D en la figura.

$f(x, y) = \cos(xy)$	 3D plot of the surface $f(x, y) = \cos(xy)$. The surface oscillates between $z = 1$ and $z = -1$ as xy varies from 0 to 2. The axes are labeled x, y, and z.
$g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$	 3D plot of the surface $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. The surface is a bowl-like shape opening upwards, with a vertical asymptote at the origin $(0, 0)$ where it goes to negative infinity. The axes are labeled x, y, and z.
$h(x, y) = \frac{1}{x - y}$	 3D plot of the surface $h(x, y) = \frac{1}{x - y}$. The surface has a vertical asymptote along the line $y = x$ in the xy-plane. The surface approaches positive or negative infinity as it gets close to this line. The axes are labeled x, y, and z.
$p(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$	 3D plot of the surface $p(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$. The surface is a bell-shaped curve that peaks at $z = 1$ when $x = 0$ and $y = 0$, and approaches $z = 0$ as x and y move away from the origin. The axes are labeled x, y, and z.

Funciones de más de dos variables

Muchas propiedades de las funciones de dos variables independientes se extienden naturalmente a funciones de tres o más variables. Una función de tres variables se define explícitamente en la forma $w = f(x, y, z)$ e implícitamente en la forma $F(x, y, z, w) = 0$. Con más de tres variables independientes, las variables suelen escribirse como $x_1, \dots, x_n$. Tabla No. 1

Número de variables	Forma explícita	Forma implícita	Espacio donde reside la gráfica
1 variable	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$	$R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$
2 variables	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$	$R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$
3 variables	$w = f(x, y, z)$	$F(x, y, z, w) = 0$	$R^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in R\}$
n variables	$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$	$R^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n + 1\}$

Tabla No. 1. La progresión de funciones de varias variables

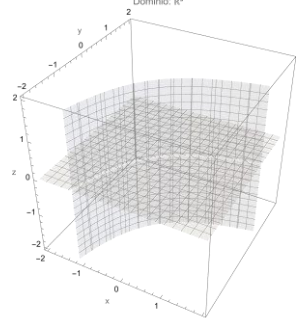
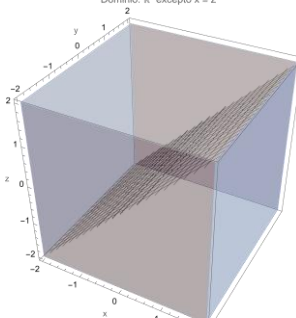
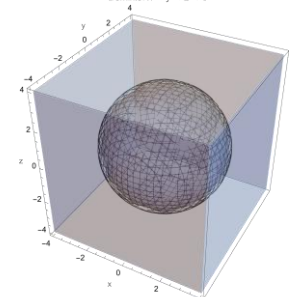
Definición

Función, Dominio y Rango con (n) Variables Independientes

La función $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ asigna un único número real x_{n+1} a cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en un conjunto (D) en $\mathbb{R}^n$. El conjunto (D) es el dominio de (f) . El rango es el conjunto de números reales x_{n+1} que se obtienen a medida que los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ varían sobre el dominio.

Problema 5

Encuentra el dominio de las siguientes funciones

$f(x, y, z) = 2xyz - 3xz + 4yz$ $\text{Dominio} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$	$f(x, y, z) = 2xyz - 3xz + 4yz$ Dominio: $\mathbb{R}^3$ 
$g(x, y, z) = \frac{1}{x - z}$ $\text{Dominio} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq z\}$	$g(x, y, z) = 1/(x - z)$ Dominio: $\mathbb{R}^3$ excepto $x = z$ 
$p(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ $\text{Dominio} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}$	$p(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ Dominio: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$ 

4.4 Límite y continuidad de una función de varias variables

En esta sección, revisamos temas encontrados en el cálculo de una sola variable y vemos cómo se aplican a funciones de varias variables. Comenzamos con los conceptos fundamentales de límites y continuidad.

Límite de una función de dos variables

Una función (f) de dos variables tiene un límite (L) cuando ($P(x, y)$) se aproxima a un punto fijo $P_0(a, b)$ si $|f(x, y) - L|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño para todos los (P) en el dominio que estén suficientemente cerca de P_0 . Si existe tal límite, escribimos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = L$$

Para hacer esta definición más precisa, "cerca de" debe definirse cuidadosamente. Un punto x en la recta numérica está cerca de otro punto (a) siempre que la distancia $|x - a|$ sea pequeña (Figura No.5). En $\mathbb{R}^2$, un punto ($P(x, y)$) está cerca de otro punto $P_0(a, b)$ si la distancia entre ellos, $|PP_0| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, es pequeña (Figura 15.19b). Cuando decimos "para todos los P cerca de P_0 ", significa que $|PP_0|$ es pequeño para puntos P en todos los lados de P_0 .

Con esta comprensión de la cercanía, podemos dar una definición formal de un límite con dos variables independientes

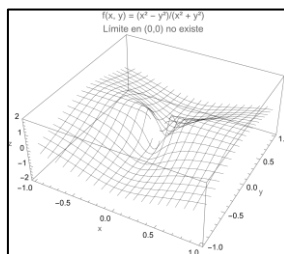


Figura No. 5. Representación gráfica del límite de una función.

Un punto x en la recta numérica está cerca de otro punto a siempre que la distancia $|x - a|$ sea pequeña (Figura 15.19a). En $\mathbb{R}^2$, un punto ($P(x, y)$) está cerca de otro punto $P_0(a, b)$ si la distancia entre ellos, $|PP_0| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, es pequeña (Figura No. 6). Cuando decimos "para todos los P cerca de P_0 ", significa que $|PP_0|$ es pequeño para puntos P en todos los lados de P_0 . Con esta comprensión de la cercanía, podemos dar una definición formal de un límite con dos variables independientes.

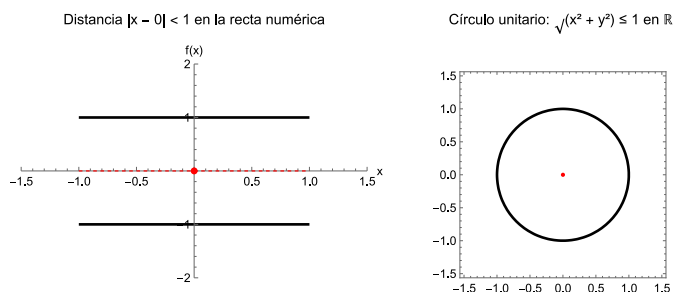


Figura No. 6. Representación gráfica de la definición formal del límite de una función

Definición:**Límite de una función de dos variables**

La función f tiene el límite L cuando $P(x, y)$ se aproxima a $P_0(a, b)$, escrito como

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = L$, sí, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$|f(x, y) - L| < \epsilon$ siempre que (x, y) esté en el dominio de f y

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta.$$

Teorema**Límites de funciones constantes y lineales**

Sean a , b y c números reales.

1. Función constante

$$f(x, y) = c : \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$$

2. Función lineal

$$f(x, y) = x : \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

3. Función lineal

$$f(x, y) = y : \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$$

Definición:**Puntos interiores y frontera**

Sea R una región en $\mathbb{R}^2$. Un punto interior P de R está completamente dentro de R , lo que significa que es posible encontrar un disco centrado en P que contenga solo puntos de R (Figura No. 7). Un punto frontero Q de R está en el borde de R en el sentido de que cada disco centrado en Q contiene al menos un punto en R y al menos un punto que no está en R .

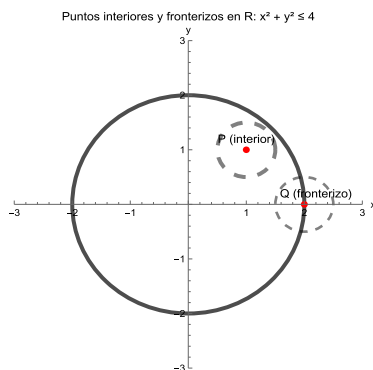


Figura No. 7. Representación gráfica de puntos interiores y puntos frontera

Teorema

Leyes de los límites para funciones de dos variables

Sean L y M números reales y supongamos que: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$.

Asumamos que c es una constante y $n > 0$ es un entero.

Ley	Descripción	Expresión matemática
suma	El límite de la suma es la suma de los límites	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$
diferencia	El límite de la diferencia es la diferencia de los límites	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) - g(x,y)] = L - M$
producto	El límite del producto es el producto de los límites	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$
cociente	El límite del cociente es el cociente de los límites (si $M \neq 0$)	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)/g(x,y) = L/M$ (si $M \neq 0$)
constante	El límite de una constante por una función es la constante por el límite	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [c \cdot f(x,y)] = c \cdot L$
múltiplo	El límite de una función multiplicada por una constante es el múltiplo del límite	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [c \cdot f(x,y)] = c \cdot L$
potencia	El límite de una función elevada a una potencia entera es el límite elevado a esa potencia	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)]^n = L^n$

Definición

Conjuntos abiertos y cerrados

Una región es abierta si consiste enteramente de puntos interiores. Una región es cerrada si contiene todos sus puntos fronterizos. Figura No. 8

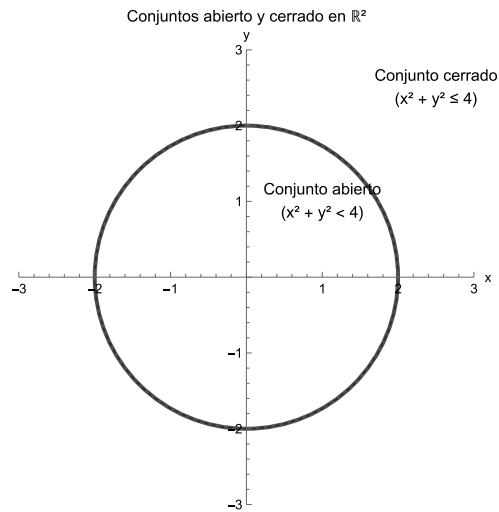
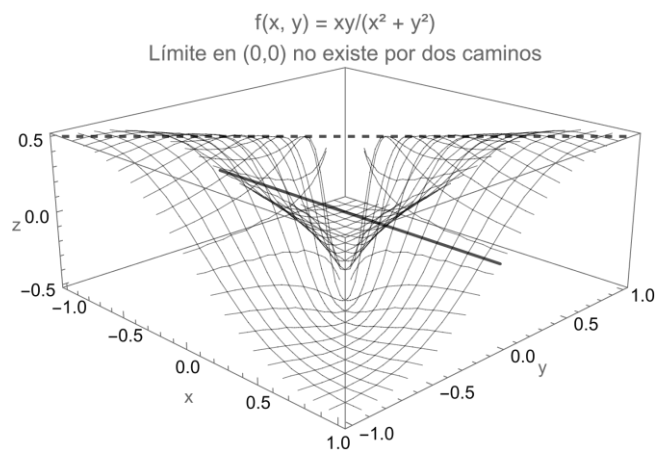


Figura No. 8. Representación gráfica de conjuntos abiertos y cerrados

Procedimiento

Prueba de dos caminos para la no existencia de límites

Si $f(x, y)$ se aproxima a dos valores diferentes cuando (x, y) se acerca a (a, b) a lo largo de dos caminos diferentes en el dominio de f , entonces el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe.



Camino 1: Línea continua negra a lo largo del eje x ($y = 0$), donde $z = 0$

Camino 2: Línea discontinua negra a lo largo de $y = x$, donde $z = \frac{1}{2}$

Continuidad de funciones de dos variables

La siguiente definición de continuidad para funciones de dos variables es análoga a la definición de continuidad para funciones de una variable.

Definición

Continuidad

La función f es continua en el punto (a, b) siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. f está definida en (a, b) ,
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe, y
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Problema No. 6

Evalúe los siguientes límites

$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} (3x + 4y - 2).$	$f(1, -3) = 3(1) + 4(-3) - 2 = 3 - 12 - 2 = 3 - 14 = -11.$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} (3x + 4y - 2) = f(1, -3) = -11.$
--	--

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\cos(xy) + \sin(xy)}{2y}$	$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \cos(xy) &= \cos(0 \cdot \pi) = \cos(0) = 1, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \sin(xy) &= \sin(0 \cdot \pi) = \sin(0) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} 2y = 2 \cdot \pi = 2\pi \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\cos(xy) + \sin(xy)}{2y} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} (\cos(xy) + \sin(xy))}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} 2y} = \frac{1}{2\pi}. \\ f(0, \pi) &= \frac{1}{2\pi} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\cos(xy) + \sin(xy)}{2y} &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$
---	---

$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (xy^8 - 3x^2y^3).$	$(x = 2), (y = -1)$ $f(2, -1) = (2)(-1)^8 - 3(2)^2(-1)^3 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot (-1)$ $= 2 + 12 = 14$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (xy^8 - 3x^2y^3) = 14.$
---	---

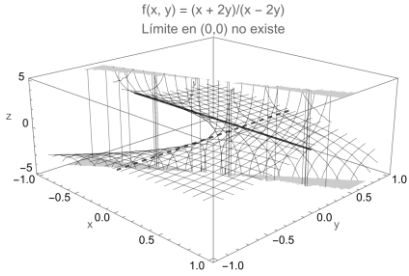
$\lim_{(x,y) \rightarrow (e^2, 4)} \ln \sqrt{xy}.$	La función $(f(x, y) = \ln \sqrt{xy})$ $= \frac{1}{2} \ln(xy)$ es continua en $((e^2, 4))$ porque $(e^2 \cdot 4 > 0)$. El límite es $(f(e^2, 4))$ Sustituyendo $(x = e^2), (y = 4)$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (e^2, 4)} \ln \sqrt{xy} = 1 + \ln 2.$
--	--

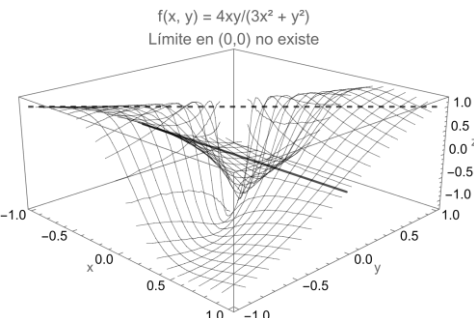
$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{y^2 - 4}{xy - 2x}.$	$(f(x, y) = \frac{y^2 - 4}{xy - 2x}) \text{ da } \left(\frac{0}{0}\right) \text{ en } ((2,2))$ $\frac{(y - 2)(y + 2)}{x(y - 2)} = \frac{y + 2}{x}, \quad \text{si } y \neq 2.$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{y + 2}{x} = \frac{2 + 2}{2} = 2.$ $(y = 2), (x = 2), (y = x)$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{y^2 - 4}{xy - 2x} = 2.$
---	--

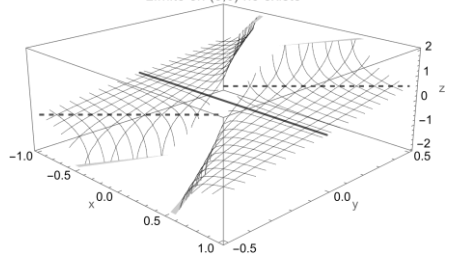
$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,9)} 101$	$f(2,9) = 101$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,9)} 101 = 101.$
--------------------------------------	--

Problema No.7

Utilice la Prueba de Dos Caminos para demostrar que los siguientes límites no existen.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+2y}{x-2y}$ $f(x, y) = (x+2y)/(x-2y)$ Límite en (0,0) no existe 	$(y = 0)$ $f(x, 0) = \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1.$ $(x = 0)$ $f(0, y) = \frac{2y}{-2y} = -1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1.$ Dado que $(1 \neq -1)$, el límite no existe.
---	---

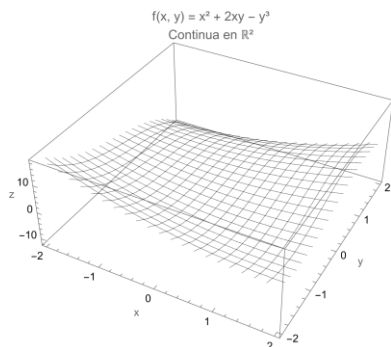
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3x^2 + y^2}$ $f(x, y) = 4xy/(3x^2 + y^2)$ Límite en (0,0) no existe 	$f(x, y) = \frac{4xy}{3x^2 + y^2}$ da $\frac{0}{0}$ en (0,0) Camino1: $(y = 0)$ $f(x, 0) = \frac{4x \cdot 0}{3x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$ Camino2: $(y = x)$ $f(x, x) = \frac{4x^2}{3x^2 + x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1.$ Dado que $(0 \neq 1)$, el límite no existe.
--	---

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ $f(x, y) = y/\sqrt{x^2 - y^2}$ Límite en (0,0) no existe 	$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ da $\frac{0}{0}$ en ((0,0)), con dominio $(x > y)$ Camino1: $(y = 0)$ $f(x, 0) = \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$ Camino2: $(y = \frac{x}{2})$ $f\left(x, \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ si } x > 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ si } x < 0$ Dado que $(0 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$, el límite no existe
---	---

Problema No. 8

¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ son continuas las siguientes funciones?

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3.$$

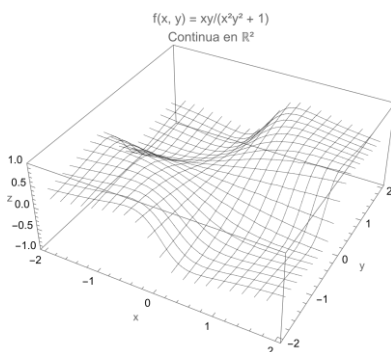


$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$$

Polinomio continuo en todo $\mathbb{R}^2$ no tiene restricciones en su dominio ni discontinuidades

$f(x, y)$ es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2y^2 + 1}.$$

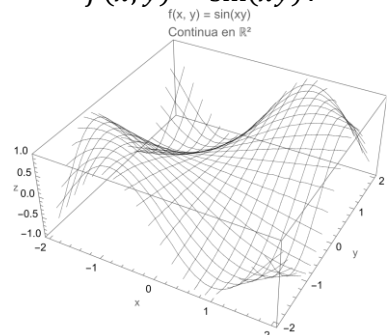


$f(x, y) = \frac{xy}{x^2y^2 + 1}$ es racional. El denominador $x^2y^2 + 1 > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Numerador y denominador son continuos, y la división es continua cuando el denominador no es cero.

$f(x, y)$ es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \sin(xy).$$



$f(x, y) = \sin(xy)$ es una composición de (xy) continua en $\mathbb{R}^2$, continua en $\mathbb{R}$. No hay restricciones en el dominio

$f(x, y)$ es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$

Problema No. 9

Evalúa los siguientes límites de tres variables

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1, \ln 2, 3)} z e^{xy}.$	La función $f(x, y, z) = z e^{xy}$ es continua en R^3 Ya que z y e^{xy} son continuas. El límite $f(1, \ln 2, 3)$ $f(1, \ln 2, 3) = 3e^{1 \cdot \ln 2} = 3e^{\ln 2} = 3 \cdot 2 = 6.$ $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1, \ln 2, 3)} z e^{xy} = 6.$
--	---

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \ln(1+y) e^{xz}.$	La función $f(x, y, z) = \ln(1+y) e^{xz}$ es continua en $(0,1,0)$ ya que $\ln(1+y)$ está definida para $(y > -1)$ y (e^{xz}), es continua en R^3. El límite es $f(0,1,0)$ $f(0,1,0) = \ln(1+1) e^{0 \cdot 0} = \ln(2) \cdot 1 = \ln 2.$ $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \ln(1+y) e^{xz} = \ln 2.$
---	---

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{yz - xy - xz - x^2}{yz + xy + xz - y^2}$	$f(1,1,1) = \frac{1 - 1 - 1 - 1}{1 + 1 + 1 - 1} = \frac{-2}{2} = -1.$ $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{yz - xy - xz - x^2}{yz + xy + xz - y^2} = -1.$
--	--

4.5 Derivadas parciales

La derivada de una función de una variable, $y = f(x)$, mide la tasa de cambio de y con respecto a x , y proporciona las pendientes de las rectas tangentes. La idea análoga para funciones de varias variables presenta un nuevo giro: las derivadas pueden definirse con respecto a cualquiera de las variables independientes. Por ejemplo, podemos calcular la derivada de $f(x, y)$ con respecto a x o y . Las derivadas resultantes se llaman derivadas parciales; aún representan tasas de cambio y están asociadas con las pendientes de las tangentes. Por lo tanto, mucho de lo que aprendido sobre derivadas se aplica a funciones de varias variables. Sin embargo, también hay muchas diferencias.

Definición

Derivadas parciales

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (a, b) es:

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (a, b) es:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Siempre que estos límites existan

Supongamos que nos movemos a lo largo de la superficie $z = f(x, y)$, comenzando en el punto $(a, b, f(a, b))$, de tal manera que $y = b$ se mantiene fijo y solo x varía. El camino resultante es una curva (una traza) en la superficie que varía en la dirección de x (Figura No. 9). Esta curva es la intersección de la superficie con el plano vertical $y = b$; se describe por $z = f(x, b)$, que es una función de la única variable x . Sabemos cómo calcular la pendiente de esta curva: es la derivada ordinaria de $f(x, b)$ con respecto a x . Esta derivada se llama la derivada parcial de f con respecto a x , denotada como $\frac{\partial f}{\partial x}$ o f_x . Cuando se evalúa en (a, b) , su valor está definido por el límite.

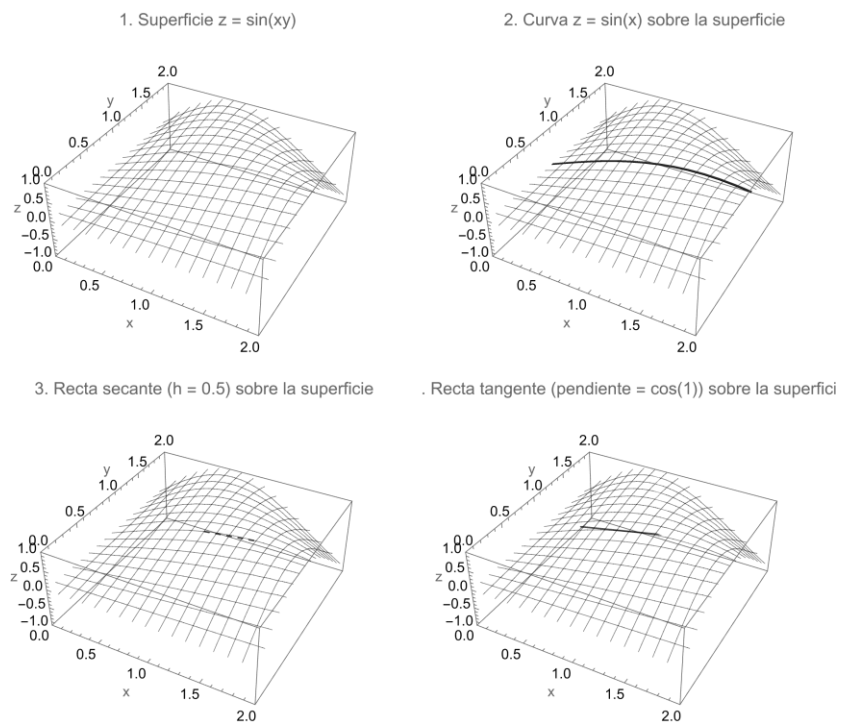


Figura No. 9. Representación gráfica de la derivada parcial. Función, plano, recta secante y pendiente

Notación

Las derivadas parciales evaluadas en un punto (a, b) se denotan de cualquiera de las siguientes formas:

Para la derivada parcial con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a, b)} = f_x(a, b)$$

Para la derivada parcial con respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a, b)} = f_y(a, b).$$

4.6 Derivadas parciales de orden superior

Así como tenemos derivadas de orden superior para funciones de una variable, también tenemos derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, dada una función f y su derivada parcial f_x , podemos tomar la derivada de f_x con respecto a x o con respecto a y , lo que representa dos de las cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden. La Tabla siguiente resume la notación para las derivadas parciales de segundo orden.

Notación 1	Notación 2	Forma de expresarlo
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	f_{xx}	Segunda derivada de f respecto a x
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	f_{yy}	Segunda derivada de f respecto a y
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	f_{xy}	Derivada mixta de f primero respecto a x , luego respecto a y
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	f_{yx}	Derivada mixta de f primero respecto a y , luego respecto a x

El orden de diferenciación puede marcar una diferencia en las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} .

Por lo tanto, es importante usar la notación correcta para reflejar el orden en que se toman las derivadas. Por ejemplo, las notaciones $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y f_{yx} ambas significan $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$; es decir, derivar primero con respecto a y , luego con respecto a x .

Igualdad de las derivadas parciales mixtas

Observa que las dos derivadas parciales mixtas en el Ejemplo 4 son iguales; es decir, $f_{xy} = f_{yx}$.

Las condiciones suficientes para la igualdad de las derivadas parciales mixtas se presentan en un teorema atribuido al matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765).

Teorema

(Clairaut) Igualdad de las derivadas parciales mixtas

Supongamos que f está definida en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$, y que f_{xy} y f_{yx} son continuas en todo D . Entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en todos los puntos de D .

Problema No. 10

Utiliza la definición de derivadas parciales mediante límites para evaluar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para las siguientes funciones.

$f(x, y) = 5xy$	$f(x + h, y) = 5(x + h)y = 5xy + 5hy,$ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5xy + 5hy) - 5xy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5hy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5y = 5y.$ $f_x(x, y) = 5y$ $f_y(x, y)$ $f(x, y + h) = 5x(y + h) = 5xy + 5xh,$ $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5xy + 5xh) - 5xy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5x = 5x.$ $f_y(x, y) = 5x.$
-----------------	--

$f(x, y) = x + y^2 + 4$	$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$ $f(x + h, y) = (x + h) + y^2 + 4 = x + h + y^2 + 4,$ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h + y^2 + 4) - (x + y^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$ $f_x(x, y) = 1.$ $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$ $f(x, y + h) = x + (y + h)^2 + 4 = x + (y^2 + 2yh + h^2) + 4,$ $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + y^2 + 2yh + h^2 + 4) - (x + y^2 + 4)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2yh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2y + h)$ $f_y(x, y) = 2y + 0 = 2y$ $f_y(x, y) = 2y.$
-------------------------	---

$f(x, y) = \frac{x}{y}$	$f(x + h, y) = \frac{x + h}{y}$ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x + h}{y} - \frac{x}{y}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x + h - x}{y}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{y}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$ $f_x(x, y) = \frac{1}{y}, \quad (\text{para } y \neq 0)$ $f(x, y + h) = \frac{x}{y + h}$ $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{y + h} - \frac{x}{y}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{xy - x(y + h)}{y(y + h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-xh}{y(y + h)}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x}{y(y + h)}$ $f_y(x, y) = \frac{-x}{y^2}.$ $f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}, \quad (\text{para } y \neq 0)$ $f_x(x, y) = \frac{1}{y}, \quad f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2},$ $(y \neq 0)$
-------------------------	--

$f(x, y) = \sqrt{xy}$	$f(x + h, y) = \sqrt{(x + h)y},$ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + h)y} - \sqrt{xy}}{h}$ $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + h)y} - \sqrt{xy}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x + h)y} + \sqrt{xy}}{\sqrt{(x + h)y} + \sqrt{xy}}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)y - xy}{h(\sqrt{(x + h)y} + \sqrt{xy})}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt{(x + h)y} + \sqrt{xy}}$ $f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$ $f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad (\text{para } xy > 0).$ $f(x, y + h) = \sqrt{x(y + h)},$ $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x(y + h)} - \sqrt{xy}}{h}$
-----------------------	---

	$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x(y+h)} - \sqrt{xy}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x(y+h)} + \sqrt{xy}}{\sqrt{x(y+h)} + \sqrt{xy}}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(y+h) - xy}{h(\sqrt{x(y+h)} + \sqrt{xy})}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x(y+h)} + \sqrt{xy}}$ $f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$ $f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}, \quad (\text{para } xy > 0)$ $f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$ $(xy > 0)$
--	--

Problema No. 11

Encuentra las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones

$f(x, y) = xe^y$	$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = e^y \cdot 1 = e^y$ $f_x(x, y) = e^y$ $f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^y) = x \cdot e^y$ $f_y(x, y) = xe^y, \quad f_x(x, y) = e^y, \quad f_y(x, y) = xe^y$
------------------	---

$f(x, y) = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 10$	$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^2) = 4y^2 \cdot 3x^2 = 12x^2y^2$ $\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^3) = 3y^3 \cdot 2x = 6xy^3$ $\frac{\partial}{\partial x}(10) = 0, \quad f_x(x, y) = 12x^2y^2 + 6xy^3.$ $\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) = 4x^3 \cdot 2y = 8x^3y,$ $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^3) = 3x^2 \cdot 3y^2 = 9x^2y^2,$ $\frac{\partial}{\partial y}(10) = 0, \quad f_y(x, y) = 8x^3y + 9x^2y^2.$ $f_x(x, y) = 12x^2y^2 + 6xy^3, \quad f_y(x, y) = 8x^3y + 9x^2y^2$
------------------------------------	---

$f(x, y) = (3xy + 4y^2 + 1)^5$	$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3xy + 4y^2 + 1) = 3y,$ $f_x(x, y) = 5[g(x, y)]^4 \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 5(3xy + 4y^2 + 1)^4 \cdot 3y$ $= 15y(3xy + 4y^2 + 1)^4.$ $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3xy + 4y^2 + 1) = 3x + 8y,$ $f_y(x, y) = 5[g(x, y)]^4 \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 5(3xy + 4y^2 + 1)^4 \cdot (3x + 8y)$ $= 5(3x + 8y)(3xy + 4y^2 + 1)^4$ $f_x(x, y) = 15y(3xy + 4y^2 + 1)^4,$ $f_y(x, y) = 5(3x + 8y)(3xy + 4y^2 + 1)^4$
--------------------------------	---

$f(s, t) = \frac{s - t}{s + t}$	$\frac{\partial u}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = 1,$ $f_s(s, t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial s} v - u \frac{\partial v}{\partial s}}{v^2} = \frac{1 \cdot (s + t) - (s - t) \cdot 1}{(s + t)^2}$ $= \frac{(s + t) - (s - t)}{(s + t)^2} = \frac{2t}{(s + t)^2}$ $f_s(s, t) = \frac{2t}{(s + t)^2}, \quad (\text{para } s + t \neq 0)$ $\frac{\partial u}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 1,$ $f_t(s, t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} v - u \frac{\partial v}{\partial t}}{v^2} = \frac{(-1) \cdot (s + t) - (s - t) \cdot 1}{(s + t)^2}$ $= \frac{-(s + t) - (s - t)}{(s + t)^2} = \frac{-2s}{(s + t)^2}$ $f_t(s, t) = -\frac{2s}{(s + t)^2}, \quad (\text{para } s + t \neq 0)$ $f_s(s, t) = \frac{2t}{(s + t)^2}, \quad f_t(s, t) = -\frac{2s}{(s + t)^2}, \quad (s + t \neq 0)$
---------------------------------	--

Problema No. 12

Derivadas parciales de segundo orden

Encuentra las cuatro derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones

$f(x, y) = x^2 \sin y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y) = 2x \sin y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin y) = x^2 \cos y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x \sin y) = 2 \sin y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cos y) = x^2(-\sin y) = -x^2 \sin y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y) = 2x \cos y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x \sin y) = 2x \cos y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos y,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \cos y$
------------------------	--

$h(x, y) = x^3 + xy^2 + 1$	$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + xy^2 + 1) = 3x^2 + y^2$ $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2 + 1) = 2xy$ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y^2) = 6x$ $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$
----------------------------	---

	$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$ $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2) = 2y$ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2x, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2y$
--	---

$f(x, y) = 2x^5y^2 + x^2y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^5y^2 + x^2y) = 10x^4y^2 + 2xy$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^5y^2 + x^2y) = 4x^5y + x^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(10x^4y^2 + 2xy) = 40x^3y^2 + 2y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^5y + x^2) = 4x^5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^5y + x^2) = 20x^4y + 2x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(10x^4y^2 + 2xy) = 20x^4y + 2x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 40x^3y^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 20x^4y + 2x$ $= 20x^4y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 20x^4y + 2x$
----------------------------	---

$f(x, y) = y^3 \sin 4x$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 \sin 4x) = 4y^3 \cos 4x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^3 \sin 4x) = 3y^2 \sin 4x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 \cos 4x) = -16y^3 \sin 4x$
-------------------------	--

	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 \sin 4x) = 6y \sin 4x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 \sin 4x) = 12y^2 \cos 4x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(4y^3 \cos 4x) = 12y^2 \cos 4x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -16y^3 \sin 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \sin 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y^2 \cos 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12y^2 \cos 4x$
--	---

$f(x, y) = \sin^2(x^3 y)$	$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \sin(2x^3 y)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \sin(2x^3 y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy \sin(2x^3 y) + 18x^4 y^2 \cos(2x^3 y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^6 \cos(2x^3 y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 \sin(2x^3 y) + 6x^5 y \cos(2x^3 y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 \sin(2x^3 y) + 6x^5 y \cos(2x^3 y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy \sin(2x^3 y) + 18x^4 y^2 \cos(2x^3 y),$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^6 \cos(2x^3 y),$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 \sin(2x^3 y) + 6x^5 y \cos(2x^3 y),$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 \sin(2x^3 y) + 6x^5 y \cos(2x^3 y)$
---------------------------	---

Problema No. 13

Derivadas parciales con más de dos variables

Encuentra las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

$(G(r, s, t) = \sqrt{rs + rt + st})$	$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{s + t}{2\sqrt{rs + rt + st}}$ $\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{r + t}{2\sqrt{rs + rt + st}}$ $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{r + s}{2\sqrt{rs + rt + st}}$ $\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{s + t}{2\sqrt{rs + rt + st}}, \quad \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{r + t}{2\sqrt{rs + rt + st}},$ $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{r + s}{2\sqrt{rs + rt + st}}.$
$h(x, y, z) = \cos(x + y + z)$	$\frac{\partial h}{\partial x} = -\sin(x + y + z)$ $\frac{\partial h}{\partial y} = -\sin(x + y + z)$ $\frac{\partial h}{\partial z} = -\sin(x + y + z)$ $\frac{\partial h}{\partial x} = -\sin(x + y + z), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\sin(x + y + z),$ $\frac{\partial h}{\partial z} = -\sin(x + y + z).$

4.7 Incrementos y diferenciales

Un incremento es el cambio en el valor de una función o variable cuando sus variables independientes cambian. Para una función $f(x, y)$, el incremento Δf se define como:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

donde Δx y Δy son los cambios en x e y . Representa la variación total de la función debido a pequeños cambios en las variables.

Diferenciales: La diferencial de una función, denotada df , es una aproximación lineal del incremento Δf basada en las derivadas parciales. Para $f(x, y)$, se expresa como:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

La diferencial proporciona una estimación del cambio en f cuando Δx y Δy son pequeños, usando la tangente lineal en el punto (x, y) .

Definición

Diferenciabilidad

La función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) si las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen y el cambio $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ satisface:

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

Donde para a y b , ϵ_1 y ϵ_2 son funciones que dependen únicamente de Δx y Δy , con $(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Una función es diferenciable en un conjunto abierto R si es diferenciable en cada punto de R .

El siguiente teorema puede ser útil para comprobar la diferenciabilidad.

Teorema

Supongamos que la función f tiene derivadas parciales f_x y f_y definidas en un conjunto abierto que contiene (a, b) , con f_x y f_y continuas en (a, b) . Entonces, f es diferenciable en (a, b) .

Teorema

Diferenciable implícita continua

Si una función f es diferenciable en (a, b) , entonces es continua en (a, b) .

Problema No. 14

Funciones diferenciables

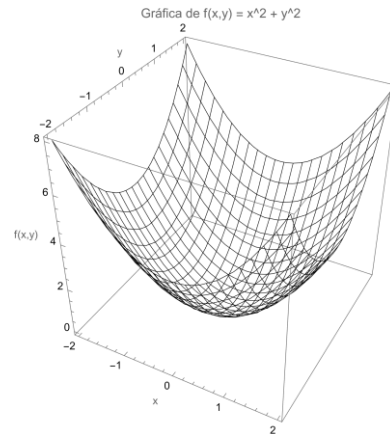
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Ambas son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que, por el Teorema anterior f es diferenciable en cualquier punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La forma del paraboloide en el rango $x, y \in [-2, 2]$

.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

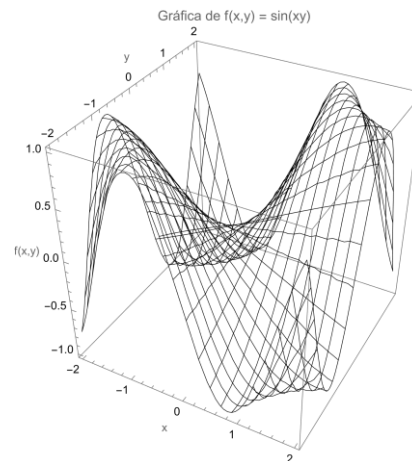


$$f(x, y) = \sin(xy)$$

Dado que $y \cos(xy)$ y $x \cos(xy)$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Esta función trigonométrica es también infinitamente diferenciable

Una superficie suave con ondulaciones
una superficie ondulada con un patrón de ondas que se intensifica a medida que $|x|$ o $|y|$ aumenta.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy).$$



4.8 Regla de la cadena y derivadas implícitas

La regla de la cadena para derivadas parciales es una herramienta fundamental en cálculo multivariable que permite calcular las derivadas de funciones compuestas, donde las variables de una función dependen a su vez de otras variables.

Teorema

Regla de la Cadena (Una Variable Independiente)

Sea z una función diferenciable de x e y en su dominio, donde x e y son funciones diferenciables de t en un intervalo I . Entonces:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Con $z = f(x(t), y(t))$, la variable dependiente es z y la única variable independiente es t . Las variables x e y son variables intermedias.

La elección de la notación para derivadas parciales y ordinarias en la Regla de la Cadena es importante. Escribimos las derivadas ordinarias $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ porque x e y dependen únicamente de t . Escribimos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ porque z es una función de ambas variables x e y . Finalmente, escribimos $\frac{dz}{dt}$ como una derivada ordinaria porque z depende, en última instancia, solo de t .

La Regla de la Cadena con Varias Variables Independientes

Las ideas detrás de la Regla de la Cadena del Teorema anterior pueden modificarse para abarcar una variedad de situaciones en las que funciones de varias variables se componen entre sí. Por ejemplo, supongamos que z depende de dos variables intermedias x e y , cada una de las cuales depende de las variables independientes s y t .

Teorema

Regla de la Cadena (Dos Variables Independientes)

Sea z una función diferenciable de x e y , donde x e y son funciones diferenciables de s y t . Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Formulación de la Regla de la Cadena (Tres Variables Independientes)

Sea z una función diferenciable de x e y , donde x e y son funciones diferenciables de u , v , y w . Entonces, las derivadas parciales de z con respecto a u , v , y w se calculan como:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w}.$$

La regla se puede extender a más variables independientes o intermedias siguiendo el mismo principio: sumar los productos de las derivadas parciales de la función con las derivadas de las variables intermedias respecto a cada variable independiente.

Cuadro resumen

Número de Variables Independientes	Formulación de la Regla de la Cadena
Una Variable Independiente	Sea $z = f(x, y)$, donde $x = x(t)$, $y = y(t)$. Entonces: $dz/dt = (\partial z/\partial x)(dx/dt) + (\partial z/\partial y)(dy/dt).$
Dos Variables Independientes	Sea $z = f(x, y)$, donde $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$. Entonces: $\partial z/\partial s = (\partial z/\partial x)(\partial x/\partial s) + (\partial z/\partial y)(\partial y/\partial s), \partial z/\partial t = (\partial z/\partial x)(\partial x/\partial t) + (\partial z/\partial y)(\partial y/\partial t).$
Tres Variables Independientes	Sea $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, w)$. Entonces: $\partial z/\partial u = (\partial z/\partial x)(\partial x/\partial u) + (\partial z/\partial y)(\partial y/\partial u), \partial z/\partial v = (\partial z/\partial x)(\partial x/\partial v) + (\partial z/\partial y)(\partial y/\partial v), \partial z/\partial w = (\partial z/\partial x)(\partial x/\partial w) + (\partial z/\partial y)(\partial y/\partial w).$

Diferenciación Implícita

Usando la Regla de la Cadena para derivadas parciales, la técnica de diferenciación implícita puede situarse en una perspectiva más amplia.

Teorema

Diferenciación Implícita

Sea F una función diferenciable en su dominio y supongamos que $F(x, y) = 0$ define y como una función diferenciable de x . Siempre que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Problema No. 15

Regla de la Cadena con una Variable Independiente para $z = f(x, y)$, donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$, la derivada es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$z = x \sin y$ $x = t^2$ $y = 4t^3$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \sin y) = \sin y.$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \sin y) = x \cos y.$ Para $(x = t^2)$: $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$ Para $(y = 4t^3)$: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^3) = 12t^2.$ $\frac{dz}{dt} = (\sin y)(2t) + (x \cos y)(12t^2).$
---	---

	$\frac{dz}{dt} = (\sin(4t^3))(2t) + (t^2 \cos(4t^3))(12t^2)$ $= 2t \sin(4t^3) + 12t^4 \cos(4t^3).$ $\frac{dz}{dt} = 2t[\sin(4t^3) + 6t^3 \cos(4t^3)].$ $\frac{dz}{dt} = 2t \sin(4t^3) + 12t^4 \cos(4t^3)$ o, equivalentemente, $2t[\sin(4t^3) + 6t^3 \cos(4t^3)].$
--	--

$z = x^2y - xy^3,$ $x = t^2,$ $y = t^{-2}$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - xy^3) = 2xy - y^3.$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - xy^3) = x^2 - 3xy^2.$ \ Para $(x = t^2):$ $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$ \ Para $(y = t^{-2}):$ $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{-2}) = -2t^{-3} = -\frac{2}{t^3}.$ $\frac{dz}{dt} = (2xy - y^3)(2t) + (x^2 - 3xy^2)\left(-\frac{2}{t^3}\right).$ \ Sustituyendo $(x = t^2), (y = t^{-2}):$ $2xy - y^3 = 2(t^2)\left(\frac{1}{t^2}\right) - \left(\frac{1}{t^2}\right)^3 = 2 - \frac{1}{t^6} = \frac{2t^6 - 1}{t^6},$ $(2xy - y^3)(2t) = \left(\frac{2t^6 - 1}{t^6}\right)(2t) = 4t - \frac{2}{t^5}.$ $x^2 - 3xy^2 = (t^2)^2 - 3(t^2)\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 = t^4 - \frac{3}{t^2},$
--	---

	$(x^2 - 3xy^2)\left(-\frac{2}{t^3}\right) = \left(t^4 - \frac{3}{t^2}\right)\left(-\frac{2}{t^3}\right) = -2t + \frac{6}{t^5}.$ $\frac{dz}{dt} = \left(4t - \frac{2}{t^5}\right) + \left(-2t + \frac{6}{t^5}\right) = 2t + \frac{4}{t^5}.$ $\frac{dz}{dt} = 2t + \frac{4}{t^5}.$
--	--

$w = \cos 2x \sin 3y$ $x = \frac{t}{2}$ $y = t^4$	$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$ $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\cos 2x \sin 3y) = -2 \sin 2x \sin 3y.$ $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\cos 2x \sin 3y) = 3 \cos 2x \cos 3y.$ Para $(x = \frac{t}{2})$: $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}.$ Para $(y = t^4)$: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (t^4) = 4t^3.$ $\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= (-2 \sin 2x \sin 3y) \left(\frac{1}{2}\right) + (3 \cos 2x \cos 3y)(4t^3) \\ &= -\sin 2x \sin 3y + 12t^3 \cos 2x \cos 3y. \end{aligned}$ Sustituyendo $(x = \frac{t}{2}), (y = t^4)$: $2x = t, \quad 3y = 3t^4,$ $\frac{dw}{dt} = -\sin t \sin(3t^4) + 12t^3 \cos t \cos(3t^4).$ $\frac{dw}{dt} = -\sin t \sin(3t^4) + 12t^3 \cos t \cos(3t^4).$
--	--

$z = \sqrt{r^2 + s^2}$ $r = \cos 2t$ $s = \sin 2t$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{ds}{dt}.$ $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{r^2 + s^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}}.$ $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{r^2 + s^2} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}.$ Para $(r = \cos 2t)$: $\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos 2t) = -2 \sin 2t.$ Para $(s = \sin 2t)$: $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin 2t) = 2 \cos 2t.$ $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right) (-2 \sin 2t) + \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right) (2 \cos 2t).$ $\sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{(\cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2} = \sqrt{1} = 1,$ $\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (\cos 2t)(-2 \sin 2t) + (\sin 2t)(2 \cos 2t) \\ &= -2 \cos 2t \sin 2t + 2 \sin 2t \cos 2t = 0. \end{aligned}$
--	---

$z = (x + 2y)^{10}$ $x = \sin^2 t$ $y = (3t + 4)^5$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$ Derivada con respecto a (x): $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2y)^{10} = 10(x + 2y)^9.$ Derivada con respecto a (y): $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x + 2y)^{10} = 20(x + 2y)^9.$
---	--

	Para $(x = \sin^2 t)$: $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin^2 t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t.$ Para $(y = (3t + 4)^5)$: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(3t + 4)^5 = 15(3t + 4)^4.$ $\frac{dz}{dt} = [10(x + 2y)^9](\sin 2t) + [20(x + 2y)^9][15(3t + 4)^4].$ $\frac{dz}{dt} = 10(x + 2y)^9[\sin 2t + 30(3t + 4)^4].$ Sustituyendo $(x = \sin^2 t), (y = (3t + 4)^5)$: $x + 2y = \sin^2 t + 2(3t + 4)^5,$ $\frac{dz}{dt} = 10[\sin^2 t + 2(3t + 4)^5]^9[\sin 2t + 30(3t + 4)^4].$
--	--

Problema No. 16

Regla de la Cadena con Varias Variables Independientes. Encuentra las siguientes derivadas.

(Regla de la Cadena para dos variables independientes). Este teorema establece que si $z = f(x, y)$, con $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$, entonces: $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$z = x^2 \sin y$ $x = s - t$ $y = t^2$	$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$ $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$ Derivada con respecto a (x): $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y) = 2x \sin y$ Derivada con respecto a (y): $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin y) = x^2 \cos y.$ Para $(x = s - t)$:
--	---

	$\frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -1.$ Para $(y = t^2)$: $\frac{\partial y}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 2t.$ $\frac{\partial z}{\partial s} = (2x \sin y)(1) + (x^2 \cos y)(0) = 2x \sin y.$ Sustituyendo $(x = s - t), (y = t^2)$: $\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s - t) \sin(t^2).$ $\frac{\partial z}{\partial t} = (2x \sin y)(-1) + (x^2 \cos y)(2t) = -2x \sin y + 2tx^2 \cos y.$ Sustituyendo $(x = s - t), (y = t^2)$: $\frac{\partial z}{\partial t} = -2(s - t) \sin(t^2) + 2t(s - t)^2 \cos(t^2).$ Factorizando $\frac{\partial z}{\partial t} = 2(s - t)[- \sin(t^2) + t(s - t) \cos(t^2)].$ $\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s - t) \sin(t^2),$ $\frac{\partial z}{\partial t} = 2(s - t)[- \sin(t^2) + t(s - t) \cos(t^2)].$
--	--

$z = \sin(2x + y)$ $x = s^2 - t^2$ $y = s^2 + t^2$	$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(2x + y) = 2 \cos(2x + y).$ Derivada con respecto a (y):
--	---

	$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sin(2x + y) = \cos(2x + y).$ Para $(x = s^2 - t^2)$: $\frac{\partial x}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -2t.$ Para $(y = s^2 + t^2)$: $\frac{\partial y}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 2t.$ $\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= [2 \cos(2x + y)](2s) + [\cos(2x + y)](2s) \\ &= (4s + 2s) \cos(2x + y) = 6s \cos(2x + y). \end{aligned}$ Sustituyendo $(x = s^2 - t^2), (y = s^2 + t^2)$: $2x + y = 2(s^2 - t^2) + (s^2 + t^2) = 3s^2 - t^2,$ $\frac{\partial z}{\partial s} = 6s \cos(3s^2 - t^2)$ $\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= [2 \cos(2x + y)](-2t) + [\cos(2x + y)](2t) \\ &= (-4t + 2t) \cos(2x + y) = -2t \cos(2x + y). \end{aligned}$ Sustituyendo $(2x + y = 3s^2 - t^2)$: $\frac{\partial z}{\partial t} = -2t \cos(3s^2 - t^2).$ $\frac{\partial z}{\partial s} = 6s \cos(3s^2 - t^2),$ $\frac{\partial z}{\partial t} = -2t \cos(3s^2 - t^2).$
--	--

$z = e^{x+y}$ $x = st$ $y = s + t$	Derivada con respecto a (x): $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} = e^{x+y}.$ Derivada con respecto a (y):
--	--

	$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y} = e^{x+y}.$ Para $(x = st)$: $\frac{\partial x}{\partial s} = t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = s.$ Para $(y = s + t)$: $\frac{\partial y}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 1.$ $\frac{\partial z}{\partial s} = (e^{x+y})(t) + (e^{x+y})(1) = (t+1)e^{x+y}.$ Sustituyendo $(x = st), (y = s + t)$: $\frac{\partial z}{\partial s} = (t+1)e^{st+s+t}.$ $\frac{\partial z}{\partial t} = (e^{x+y})(s) + (e^{x+y})(1) = (s+1)e^{x+y}.$ Sustituyendo $(x = st), (y = s + t)$: $\frac{\partial z}{\partial t} = (s+1)e^{st+s+t}.$ $\frac{\partial z}{\partial s} = (t+1)e^{st+s+t},$ $\frac{\partial z}{\partial t} = (s+1)e^{st+s+t}.$
--	---

Problema No. 17

Diferenciación Implícita

Usa el Teorema correspondiente para evaluar $\frac{dy}{dx}$. Asume que cada ecuación define implícitamente y como una función diferenciable de x

$x^2 - 2y^2 - 1 = 0$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$ $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0.$
----------------------	---

	<i>Derivada con respecto a (x):</i> $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y^2 - 1) = 2x.$ <i>Derivada con respecto a (y):</i> $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2y^2 - 1) = -4y.$ <i>Siempre que ($\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$)(es decir, ($y \neq 0$)):</i> $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{-4y} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}.$ <i>Derivamos implícitamente ($x^2 - 2y^2 - 1 = 0$):</i> $\frac{d}{dx}(x^2 - 2y^2 - 1) = 0, 2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}.$ El resultado coincide, confirmando la corrección.
--	---

$x^3 + 3xy^2 - y^5 = 0$	<i>Para (x^3):</i> $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ <i>Para($3xy^2$):</i> <i>Usamos la regla del producto, ya que ($y = y(x)$):</i> $\frac{d}{dx}(3xy^2) = 3 \cdot \frac{d}{dx}(xy^2)$ $\frac{d}{dx}(xy^2) = x \cdot \frac{d}{dx}(y^2) + y^2 \cdot \frac{d}{dx}(x) = x \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 1$ $= 2xy \frac{dy}{dx} + y^2$ <i>Por lo tanto:</i>
-------------------------	--

	$3 \cdot \left(2xy \frac{dy}{dx} + y^2 \right) = 6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2$ Para $(-y^5)$: Usamos la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}(-y^5) = -\frac{d}{dx}(y^5) = -5y^4 \cdot \frac{dy}{dx}$ El lado derecho: $\frac{d}{dx}(0) = 0$ $3x^2 + \left(6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 \right) - 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0$ $3x^2 + 3y^2 + 6xy \frac{dy}{dx} - 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0$ $3x^2 + 3y^2 + (6xy - 5y^4) \frac{dy}{dx} = 0$ $(6xy - 5y^4) \frac{dy}{dx} = -(3x^2 + 3y^2)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2 + 3y^2)}{6xy - 5y^4}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2 + y^2)}{y(6x - 5y^3)} = \frac{x^2 + y^2}{y(5y^3 - 6x)}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y(5y^3 - 6x)}$
--	--

$2 \sin(xy) = 1$	$\frac{d}{dx}(2 \sin(xy)) = 2 \cdot \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy)$ $\frac{d}{dx}(xy) = x \cdot \frac{d}{dx}(y) + y \cdot \frac{d}{dx}(x) = x \frac{dy}{dx} + y$ $2 \cos(xy) \cdot \left(x \frac{dy}{dx} + y \right)$
------------------------------------	---

	$\frac{d}{dx}(1) = 0$ $2 \cos(xy) \cdot \left(x \frac{dy}{dx} + y\right) = 0$ $x \frac{dy}{dx} + y = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$
--	---

$ye^{xy} - 2 = 0$	$F(x, y) = ye^{xy} - 2$ $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - 2)$ $= y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = y \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \cdot e^{xy} \cdot y = y^2 e^{xy}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - 2)$ $= y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + e^{xy} \cdot 1$ $\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) = e^{xy} \cdot x$ $= y \cdot (e^{xy} \cdot x) + e^{xy} = xye^{xy} + e^{xy} = e^{xy}(xy + 1)$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y^2 e^{xy}}{e^{xy}(xy + 1)} = -\frac{y^2}{xy + 1}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{xy}(xy + 1) \neq 0$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{xy + 1}}$
-------------------	---

4.9 Derivada direccional y gradiente

Las derivadas parciales nos dicen mucho sobre la tasa de cambio de una función en su dominio. Sin embargo, no responden directamente algunas preguntas importantes. Por ejemplo, supongamos que estás parado en un punto $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$. Las derivadas parciales f_x y f_y te indican la tasa de cambio (o pendiente) de la superficie en ese punto en las direcciones paralelas al eje x y al eje y , respectivamente. Pero podrías caminar en un número infinito de direcciones desde ese punto y encontrar una tasa de cambio diferente en cada dirección. Con esta observación en mente, planteamos varias preguntas.

Supongamos que estás parado en una superficie y caminas en una dirección distinta a las direcciones de los ejes de coordenadas, por ejemplo, noroeste o sur-sureste. ¿Cuál es la tasa de cambio de la función en esa dirección?

- Supongamos que estás parado en una superficie y sueltas una pelota a tus pies, dejándola rodar. ¿En qué dirección rodará?
- Si estás escalando una montaña, ¿en qué dirección deberías caminar después de cada paso si quieres seguir el camino más empinado?

Estas preguntas se responden en esta sección introduciendo la derivada direccional, seguida por uno de los conceptos centrales del cálculo: el gradiente.

Sea $(a, b, f(a, b))$ un punto en la superficie $z = f(x, y)$ y sea $\vec{u}$ un vector unitario en el plano xy (Figura No. 1). Nuestro objetivo es encontrar la tasa de cambio de f en la dirección $\vec{u}$ en el punto $P_0(a, b)$. En general, esta tasa de cambio no es ni $f_x(a, b)$ ni $f_y(a, b)$ (a menos que $\vec{u} = (1, 0)$ o $\vec{u} = (0, 1)$), pero resulta ser una combinación de $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$.

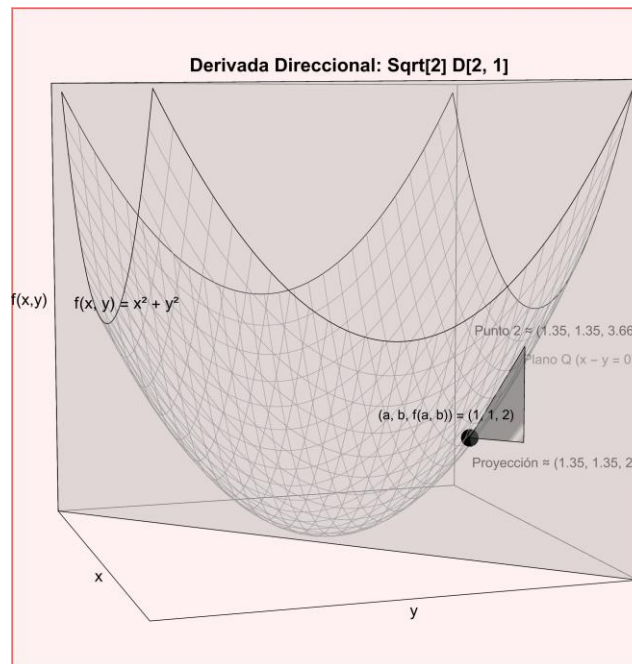


Figura No. 1. Un punto en la superficie $z = f(x, y)$ y sea $\vec{u}$ un vector unitario en el plano xy

La derivada direccional mide la tasa de cambio de una función $f(x, y)$ en un punto (a, b) a lo largo de una dirección específica dada por un vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Matemáticamente, se define como:

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}$$

Si f es diferenciable, la derivada direccional se calcula como el producto escalar del gradiente

$$\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$$

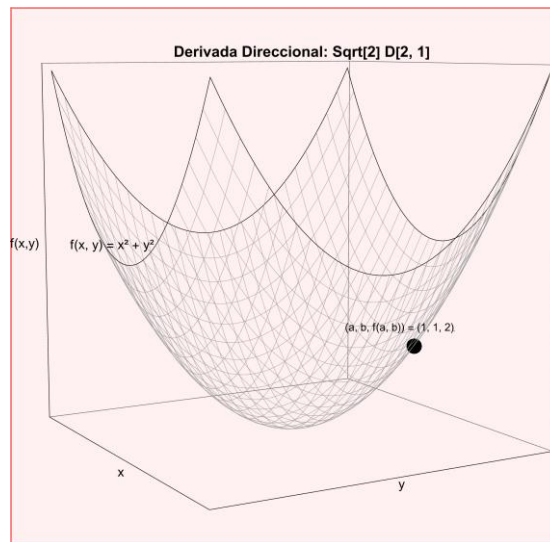
con el vector unitario $\vec{u}$: $D_{\vec{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u} = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$

La pendiente de la recta secante mencionada en el texto se aproxima a esta derivada cuando

$$h \rightarrow 0$$

La gráfica en 3D debe mostrar:

La superficie $z = f(x, y)$, el punto $(a, b, f(a, b))$, el vector gradiente ∇f , el vector de dirección $\vec{u}$, una línea tangente que represente la derivada direccional (la pendiente en la dirección $\vec{u}$).



Definición

Derivada direccional

Sea f una función diferenciable en el punto (a, b) y sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario en el plano xy . La derivada direccional de f en (a, b) en la dirección de $\vec{u}$ se define como:

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Teorema

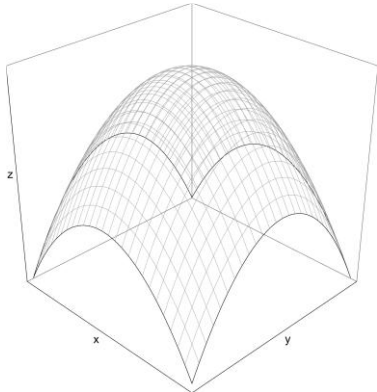
Derivada Direccional

Sea f una función diferenciable en el punto (a, b) y sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario en el plano xy . La derivada direccional de f en (a, b) en la dirección de $\mathbf{u}$ está dada por:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) \cdot (u_1, u_2).$$

Problema No. 18

Derivadas direccionales

$f(x, y) = 8 - \frac{x^2}{2} - y^2$ 	En los puntos $(2, 0), (0, 2), y (1, 1)$ Vectores de dirección $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \mathbf{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), y \mathbf{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u} = (-a, -2b) \cdot (u_1, u_2)$ $= -au_1 - 2bu_2.$
--	--

	$(2, 0)$	$(0, 2)$	$(1, 1)$
$\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$D_{\mathbf{u}}f(2, 0) = -\sqrt{2} \approx -1.414.$	$D_{\mathbf{u}}f(0, 2) = -2\sqrt{2} \approx -2.828.$	$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx -2.121.$
$\mathbf{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$D_{\mathbf{v}}f(2, 0) = \sqrt{2} \approx 1.414.$	$D_{\mathbf{v}}f(0, 2) = -2\sqrt{2} \approx -2.828.$	$D_{\mathbf{v}}f(1, 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.707.$
$\mathbf{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$D_{\mathbf{w}}f(2, 0) = \sqrt{2} \approx 1.414.$	$D_{\mathbf{w}}f(0, 2) = 2\sqrt{2} \approx 2.828.$	$D_{\mathbf{w}}f(1, 1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.121.$

Procedimiento

El gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(8 - \frac{x^2}{2} - y^2 \right) = -x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(8 - \frac{x^2}{2} - y^2 \right) = -2y$$

Por lo tanto

$$\nabla f(x, y) = (-x, -2y)$$

En el punto $(2, 0)$:

$$\nabla f(2, 0) = (-2, -2 \cdot 0) = (-2, 0)$$

Normalizar el vector de dirección:

El vector de dirección es $v = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Calculamos su norma:

$$|v| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|v| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

El vector unitario es:

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{(\sqrt{2}, \sqrt{2})}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$D_u f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot u$$

En $(2, 0)$:

$$D_u f(2, 0) = (-2, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

La derivada direccional de

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 8 - \frac{x^2}{2} - y^2 \text{ en el punto } (2, 0) \text{ en la dirección del vector } v \\ &= (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \text{ con vector unitario } u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ es} \end{aligned}$$

$$D_u f(2, 0) = -\sqrt{2} \approx -1.414.$$

El vector gradiente

Hemos visto que la derivada direccional puede escribirse como un producto escalar:

$$D_u f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b)) \cdot (u_1, u_2).$$

El vector $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ que aparece en el producto escalar es importante por sí mismo y se denomina el gradiente de f .

La derivada direccional describe cómo $D_u f(a, b)$ se calcula mediante el producto escalar entre el gradiente de la función f , denotado $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$, y un vector unitario $u = (u_1, u_2)$.

El gradiente es un vector que contiene las derivadas parciales de f con respecto a x (f_x) y a y (f_y) evaluadas en el punto (a, b) . Este vector es fundamental porque indica la dirección de mayor incremento de la función y su magnitud representa la tasa de cambio máxima.

Definición

Gradiente (Dos Dimensiones)

Sea f una función diferenciable en el punto (x, y) . El gradiente de f en (x, y) es la función con valor vectorial:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j.$$

El gradiente es importante no solo para calcular derivadas direccionales; desempeña muchos otros roles en el cálculo multivariable.

El objetivo es proporcionar una comprensión intuitiva del gradiente, explicando conceptos como:

- Dirección de mayor incremento: El gradiente apunta en la dirección en la que la función crece más rápidamente.
- Magnitud: La norma del gradiente ($|\nabla f|$) indica la tasa de cambio máxima de la función en esa dirección.
- Relación con superficies de nivel: El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel (o superficies de nivel en 3D) de la función.

Teorema

Dirección de cambio

Sea f una función diferenciable en el punto (a, b) con $\nabla f(a, b) \neq 0$

1. f tiene su máxima tasa de incremento en (a, b) en la dirección del gradiente $\nabla f(a, b)$. La tasa de cambio en esta dirección es $|\nabla f(a, b)|$.
2. La función tiene su máxima tasa de decremento en (a, b) en la dirección de $-\nabla f(a, b)$. La tasa de cambio en esta dirección es $-|\nabla f(a, b)|$.
3. La derivada direccional es cero en cualquier dirección ortogonal $\nabla f(a, b)$.

Problema No. 19

Dirección de Mayor Ascenso y Descenso

Considera las siguientes funciones y punto P :

Encuentra los vectores unitarios que indican la dirección de mayor ascenso y mayor descenso en P .

Encuentra un vector que apunte en una dirección de no cambio en la función en P .

$f(x, y) = x^2 - 4y^2$ $P(1, -2)$ Solución: $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -8y$ $\nabla f(x, y) = (2x, -8y)$ En $P(1, -2)$: $\nabla f(1, -2) = (2 \cdot 1, -8 \cdot (-2))$ $= (2, 16)$ Dirección de mayor ascenso: la dirección es $\nabla f(1, -2) = (2, 16)$ $ \nabla f(1, -2) = \sqrt{2^2 + 16^2}$ $= \sqrt{4 + 256}$ $= \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$	El vector unitario en la dirección de mayor ascenso es $\mathbf{u}_{\text{ascenso}} = \frac{(2, 16)}{2\sqrt{65}} = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{8}{\sqrt{65}} \right)$ Dirección de mayor descenso: la dirección es: $-\nabla f(1, -2) = (-2, -16)$ El vector unitario es: $\mathbf{u}_{\text{descenso}} = -\frac{(2, 16)}{2\sqrt{65}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{8}{\sqrt{65}} \right)$ Una dirección de no cambio es cualquier dirección ortogonal al gradiente $\nabla f(1, -2) = (2, 16)$. Un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es ortogonal a $(2, 16)$ si su producto escalar es cero: $(2, 16) \cdot (v_1, v_2) = 2v_1 + 16v_2 = 0$ $v_1 + 8v_2 = 0$ Elegimos $v_2 = 1$ $v_2 = 1$ $v_1 = -8 \cdot 1 = -8$ El vector ortogonal es: $\mathbf{v} = (-8, 1)$
---	--

Problema No. 20

Calcula el gradiente de las siguientes funciones y evalúalo en el punto dado P

$f(x, y) = 2 + 3x^2 - 5y^2$ en $P(2, -1)$	$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (6x, -10y)$ $\nabla f(2, -1) = (6 \cdot 2, -10 \cdot (-1)) = (12, 10)$
$f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2$ $P(-1, -5)$	$\nabla f(x, y) = (8x - 2y, -2x + 2y)$ $P(-1, -5)$ $\nabla f(-1, -5) = (2, -8)$
$g(x, y) = x^2 - 4x^2y - 8xy^2$ $P(-1, 2)$	$\nabla g(x, y) = (2x - 8xy - 8y^2, -4x^2 - 16xy)$ En $P(-1, 2)$ $\nabla g(-1, 2) = (-18, 28)$
$p(x, y) = \sqrt{12 - 4x^2 - y^2}$ $P(-1, -1)$	$\nabla p(x, y) = \left(\frac{-4x}{\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}} \right)$ En $P(-1, -1)$: $\nabla p(-1, -1) = \left(\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$
$f(x, y) = xe^{2xy}$ $P(1, 0)$	El gradiente es: $\nabla f(x, y) = (e^{2xy}(1 + 2xy), 2x^2e^{2xy})$ En $P(1, 0)$: $\nabla f(1, 0) = (1, 2)$
$f(x, y) = \sin(3x + 2y)$ $P\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\nabla f(x, y) = (3 \cos(3x + 2y), 2 \cos(3x + 2y))$ En $P\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$: $\nabla f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = (3, 2)$

Problema No. 21

Calcula la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto dado P en la dirección del vector dado. Asegúrate de usar un vector unitario para el vector de dirección.

$f(x, y) = x^2 - y^2$ $P(-1, -3)$ $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (vector unitario)	$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ $\nabla f(-1, -3) = (-2, 6)$ $D_{\mathbf{u}}f(-1, -3) = \nabla f(-1, -3) \cdot \mathbf{u} = (-2, 6) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -6$
--	---

$f(x, y) = 3x^2 + y^3$ $P(3, 2)$ $\mathbf{v} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ (vector unitario) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$	$\nabla f(x, y) = (6x, 3y^2)$ <i>En $P(3, 2)$:</i> $\nabla f(3, 2) = (18, 12)$ <i>La derivada direccional es:</i> $D_{\mathbf{u}}f(3, 2) = \nabla f(3, 2) \cdot \mathbf{u} = (18, 12) \cdot \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{234}{13}$
---	---

$f(x, y) = 10 - 3x^2 + \frac{y^4}{4}$ $P(2, -3)$ $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (vector unitario) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ $ \mathbf{v} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$	$\nabla f(x, y) = (-6x, y^3)$ <i>En $P(2, -3)$:</i> $\nabla f(2, -3) = (-12, -27)$ <i>La derivada direccional es:</i> $D_{\mathbf{u}}f(2, -3) = \nabla f(2, -3) \cdot \mathbf{u} = (-12, -27) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{27 - 12\sqrt{3}}{2}$
---	---

4.10 Valores extremos de funciones de varias variables

En el cálculo diferencial, mostramos cómo usar derivadas para encontrar valores máximos y mínimos de funciones de una sola variable. Cuando estas técnicas se extienden a funciones de dos variables, descubrimos tanto similitudes como diferencias. El paisaje de una superficie es mucho más complicado que el perfil de una curva en el plano, por lo que observamos características más interesantes al trabajar con varias variables. Además de picos (valores máximos) y hondonadas (valores mínimos), encontramos crestas sinuosas, valles largos y pasos de montaña. Sin embargo, a pesar de estas complicaciones, muchas de las ideas utilizadas para funciones de una variable reaparecen en dimensiones superiores. Por ejemplo, la Prueba de la Segunda Derivada, adaptada adecuadamente para dos variables, juega un papel central. Al igual que con las funciones de una sola variable, las técnicas desarrolladas aquí son útiles para resolver problemas prácticos de optimización.

Definición:

Valores Máximo/Mínimo Local

Supongamos que (a, b) es un punto en una región R en la cual está definida la función f . Si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f y dentro de algún disco abierto centrado en (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un valor máximo local de f . Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f y dentro de algún disco abierto centrado en (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un valor mínimo local de f . Los valores máximo local y mínimo local también se denominan valores extremos locales o extremos locales.

En términos familiares, un máximo local es un punto en una superficie desde el cual no se puede caminar hacia arriba. Un mínimo local es un punto desde el cual no se puede caminar hacia abajo.

Teorema

Derivadas y valores máximos/mínimo local

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales f_x y f_y existen en (a, b) , entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

Definición

Punto crítico

Un punto interior (a, b) en el dominio de f es un punto crítico de f si:

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, o al menos una de las derivadas parciales f_x o f_y no existe en (a, b) .

Prueba de la segunda derivada

Los puntos críticos son candidatos para valores extremos locales. Con funciones de una variable, la Prueba de la Segunda Derivada se utiliza para determinar si los puntos críticos corresponden a máximos o mínimos locales (la prueba también puede ser inconclusa). La prueba análoga para funciones de dos variables no solo detecta máximos y mínimos locales, sino que también identifica otro tipo de punto conocido como punto de silla.

Definición

Punto silla

Considera una función f que es diferenciable en un punto crítico (a, b) . Entonces, f tiene un punto de silla en (a, b) si, en cada disco abierto centrado en (a, b) , hay puntos (x, y) para los cuales $f(x, y) > f(a, b)$ y puntos para los cuales $f(x, y) < f(a, b)$

Teorema

Prueba de la segunda derivada

Supongamos que las derivadas de parciales de segundo orden de f son continuas en un disco abierto centrado en el punto (a, b) , donde $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

1. Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un valor máximo local en (a, b)
2. Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo local en (a, b)
3. Si $D(a, b) < 0$, entonces f tiene un punto silla en (a, b)
4. Si $D(a, b) = 0$, entonces la prueba es inconclusa.

Valores máximos y mínimos absolutos

Al igual que en el caso de una variable, a menudo estamos interesados en saber dónde una función de dos o más variables alcanza sus valores extremos en su dominio (o en un subconjunto de su dominio).

Definición

Valores máximos/mínimo absolutos

Sea f una función definida en un conjunto R en $\mathbb{R}^2$ que contiene el punto (a, b) .

Si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) en R , entonces $f(a, b)$ es un valor máximo absoluto de f en R . Si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) en R , entonces $f(a, b)$ es un valor mínimo absoluto de f en R .

Problema No. 22

Supongamos que las derivadas de segundo orden de f son continuas en todo el plano xy y que

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

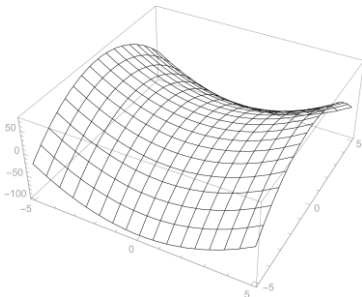
Usa la información proporcionada y la Prueba de la Segunda Derivada para determinar si f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de silla en $(0,0)$, o indica que la prueba es inconclusa.

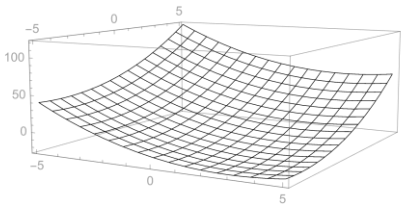
$f_{xx}(0,0)$ y $f_{yy}(0,0)$ y $f_{xy}(0,0)$ y $D(0,0)$

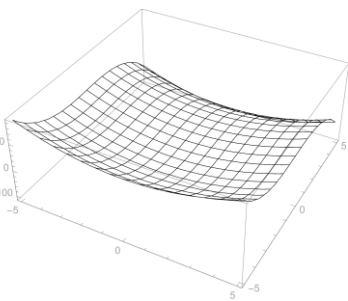
$f_{xx}(0,0) = 5, f_{yy}(0,0) = 5, f_{xy}(0,0) = -4, D(0,0) = -1$	$D(0,0) = -1 < 0$ Punto silla
$f_{xx}(0,0) = -6, f_{yy}(0,0) = -3, f_{xy}(0,0) = 4, D(0,0) = 2$	$f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ Máximo local
$f_{xx}(0,0) = 8, f_{yy}(0,0) = 5, f_{xy}(0,0) = -6, D(0,0) = 4$	$f_{xx}(0,0) = 8 > 0$ Mínimo local
$f_{xx}(0,0) = -9, f_{yy}(0,0) = -4, f_{xy}(0,0) = -6, D(0,0) = 0$	$D(0,0) = 0$ Inconclusa

Problema No. 23

Encuentra los puntos críticos de las siguientes funciones. Concluye

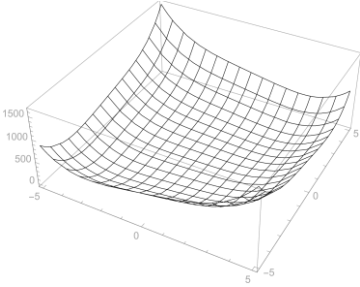
Función y Gráfica	Puntos críticos y conclusión
$f(x,y) = 3x^2 - 4y^2$  Paraboloide hiperbólico (silla de montar en el contexto de puntos críticos)	$f_x = 6x, \quad f_y = -8y$ $\begin{aligned} 6x &= 0 \\ x &= 0, \\ -8y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$ Punto crítico $(0,0)$ $f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = -8, \quad f_{xy} = 0$ $D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2$ $= (6)(-8) - (0)^2 = -48$ $D(0,0) = -48 < 0$ es un punto silla

Función y gráfica	Puntos críticos y conclusión
$f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 + 8y$ $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 - 25$  paraboloide elíptico con vértice en $(3, -4, -25)$	$f_x = 2x - 6, \quad f_y = 2y + 8$ $2x - 6 = 0$ $x = 3, \quad 2y + 8 = 0$ $y = -4$ Punto crítico $(3, -4)$ $f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$ $f_{xx}(3, -4) = 2, \quad f_{yy}(3, -4) = 2, \quad f_{xy}(3, -4) = 0$ $D(3, -4) = (2)(2) - (0)^2 = 4$ $D(3, -4) = 4 > 0$ $f_{xx}(3, -4) = 2 > 0$ $(3, -4)$ es un mínimo local

Función y gráfica	Puntos críticos y conclusión
$f(x, y) = 3x^2 + 3y - y^3$  superficie cúbica con una forma que combina una curvatura parabólica en la dirección x y una curvatura cúbica en la dirección y, lo que da lugar a una estructura con regiones de concavidad y convexidad alternadas.	$f_x = 6x, \quad f_y = 3 - 3y^2$ $6x = 0,$ $x = 0,$ $3 - 3y^2 = 0,$ $y = \pm 1$ Puntos críticos $(0, 1), (0, -1)$ $f_{xx} = 6, \quad f_{yy} = -6y, \quad f_{xy} = 0$ Para $((0, 1))$: $f_{xx}(0, 1) = 6, \quad f_{yy}(0, 1) = -6, \quad f_{xy}(0, 1) = 0$ $D(0, 1) = (6)(-6) - (0)^2 = -36$ Como $(D(0, 1) < 0)$,

	$(0,1)$ es un punto de silla. Para $((0,-1))$: $f_{xx}(0,-1) = 6, \quad f_{yy}(0,-1) = 6, \quad f_{xy}(0,-1) = 0$ $D(0,-1) = (6)(6) - (0)^2 = 36$ Como $D(0,-1) > 0$ $f_{xx}(0,-1) = 6 > 0$ $(0,-1)$ es un mínimo local
--	--

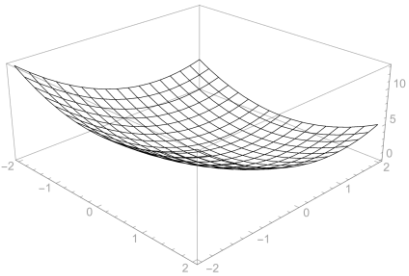
Función y gráfica	Puntos críticos y conclusión
-------------------	------------------------------

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 16xy$  La superficie es una superficie cuartica, con comportamiento dominado por x^4 y y^4, pero con puntos críticos debido a $-16xy$.	$f_x = 4x^3 - 16y, \quad f_y = 4y^3 - 16x$ Igualando a cero: $x^3 = 4y, \quad y^3 = 4x$ Resolviendo, los puntos críticos son: $((0,0)), ((2,2)), ((-2,-2))$ Derivadas de segundo orden: $f_{xx} = 12x^2, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = -16$ Para $((0,0))$: $f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{yy}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = -16$ $D(0,0) = (0)(0) - (-16)^2 = -256$ Como $(D(0,0) < 0)$, $((0,0))$ es un punto de silla. Para $((2,2))$: $f_{xx}(2,2) = 48, \quad f_{yy}(2,2) = 48, \quad f_{xy}(2,2) = -16$ Para $(2,2)$: $f_{xx}(2,2) = 48, \quad f_{yy}(2,2) = 48, \quad f_{xy}(2,2) = -16$ $D(2,2) = (48)(48) - (-16)^2 = 2048$ Como $(D(2,2) > 0)$ y $f_{xx}(2,2) > 0$, $((2,2))$ es un punto de silla.
--	---

	> 0), $((2,2))$ es un mínimo local Para $((-2,-2))$: $f_{xx}(-2,-2) = 48, \quad f_{yy}(-2,-2) = 48, \quad f_{xy}(-2,-2) = -16$ $D(-2,-2) = (48)(48) - (-16)^2 = 2048$ Como $(D(-2,-2) > 0)$ y $(f_{xx}(-2,-2) > 0)$, $((-2,-2))$ es un mínimo local
--	---

Problema No. 24

Encuentra los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones en la región R dada

Función y gráfica	Máximos y mínimos absolutos
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1,$ $R = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 4\}$ $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$  Es un paraboloide elíptico con vértice en $(0,1,0)$ Puntos críticos en el interior	Derivadas parciales: $f_x = 2x, \quad f_y = 2y - 2$ Igualando a cero: $2x = 0, \quad x = 0, \quad 2y - 2 = 0, y = 1$ Punto crítico: $((0,1)),$ en (R) $((0^2 + 1^2 = 1 \leq 4))$ Valor: $f(0,1) = 0^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ Derivadas de segundo orden: $f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$ Discriminante: $D(0,1) = (2)(2) - 0^2 = 4$ Como $D(0,1) > 0,$ $f_{xx}(0,1) > 0$, es un mínimo local. Frontera $(x^2 + y^2 = 4)$

	<i>Parametrizamos: $(x = 2 \cos \theta), (y = 2 \sin \theta),$</i> <i>$(\theta \in [0, 2\pi]).$</i> $f(\theta) = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 - 2(2 \sin \theta) + 1$ $= 4 - 4 \sin \theta + 1$ $= 5 - 4 \sin \theta$ <i>Máximo: $(\sin \theta = -1), (f = 5 - 4(-1) = 9),$</i> <i>en $(\theta = \frac{3\pi}{2}), \text{ punto } ((0, -2)).$</i> <i>Mínimo: $(\sin \theta = 1), (f = 5 - 4(1) = 1), \text{ en}$</i> <i>$(\theta = \frac{\pi}{2}), \text{ punto } ((0, 2)$</i> <i>$(0, 1)): (f = 0)$</i> <i>$(0, -2)): (f = 9)$</i> <i>$(0, 2)): (f = 1)$</i> <i>Mínimo absoluto: (0) en $(0, 1)$</i> <i>Máximo absoluto: (9) en $(0, -2)$</i>
--	--

Conclusiones

El Tema IV de los apuntes de Cálculo Vectorial abarca conceptos fundamentales para comprender y analizar funciones de varias variables, esenciales en el estudio de fenómenos multidimensionales en ingeniería. La definición de una función de varias variables establece la base para modelar relaciones entre múltiples variables independientes, como en sistemas físicos o procesos ingenieriles. La gráfica de estas funciones permite visualizar su comportamiento en el espacio tridimensional, aunque su representación puede ser compleja, lo que lleva a la importancia de las curvas y superficies de nivel, que simplifican el análisis al mostrar conjuntos de puntos con valores constantes, útiles en aplicaciones como topografía o diseño de superficies.

El estudio de límites y continuidad garantiza que las funciones sean bien definidas y estables, un requisito clave en modelado matemático. Las derivadas parciales permiten analizar cómo una función cambia respecto a una variable específica, fundamentales en optimización y análisis de tasas de cambio en sistemas ingenieriles. Los incrementos y diferenciales proporcionan aproximaciones lineales para estudiar variaciones pequeñas, mientras que la regla de la cadena y la derivada implícita facilitan el cálculo en funciones compuestas o definidas implícitamente, comunes en ecuaciones de sistemas dinámicos. Las derivadas parciales de orden superior son esenciales para estudiar la curvatura y comportamiento detallado de funciones, y la derivada direccional y el gradiente permiten analizar cambios en direcciones arbitrarias, con aplicaciones en campos como la transferencia de calor o el flujo de fluidos. Finalmente, los valores extremos son cruciales para optimizar funciones, como en el diseño de estructuras o procesos industriales, al identificar puntos críticos.

La importancia de estos temas radica en su aplicabilidad directa en ingeniería. Por ejemplo, en el diseño de sistemas mecánicos, eléctricos o civiles, las funciones de varias variables modelan comportamientos complejos, como tensiones en materiales, distribución de cargas o flujos térmicos. Comprender estos conceptos permite a los ingenieros optimizar diseños, predecir comportamientos y resolver problemas prácticos con precisión. Los apuntes, con más de 50 problemas de distinta dificultad, ofrecen una herramienta práctica para que los estudiantes refuercen su aprendizaje mediante ejercicios que abarcan desde aplicaciones básicas hasta problemas avanzados, fomentando el desarrollo de habilidades analíticas.

Este material será de gran utilidad para los alumnos de las carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Ensenada, ya que proporciona una base sólida para abordar problemas reales en sus respectivas disciplinas. Asimismo, sirve como un valioso recurso de apoyo para los profesores que deseen complementar sus clases con ejemplos prácticos y estructurados, enriqueciendo la enseñanza del cálculo vectorial y su aplicación en la ingeniería.

Bibliografía

- Stewart, J. (2016). Calculus: Early Transcendentals (8th ed.). Boston, MA: Cengage Learning. (Cubre funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes y valores extremos con un enfoque claro para estudiantes de ingeniería).
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2018). Calculus (11th ed.). Boston, MA: Cengage Learning. (Incluye explicaciones detalladas sobre límites, continuidad, derivadas direccionales y aplicaciones en ingeniería).
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). Thomas' Calculus (13th ed.). Boston, MA: Pearson. (Trata temas como curvas de nivel, derivadas parciales de orden superior y optimización en varias variables).
- Apostol, T. M. (1969). Calculus, Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications (2nd ed.). New York, NY: John Wiley & Sons. (Ofrece un tratamiento riguroso de funciones de varias variables y derivadas implícitas).
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). Vector Calculus (6th ed.). New York, NY: W. H. Freeman. (Enfocado en cálculo vectorial, con énfasis en gradientes, derivadas direccionales y superficies de nivel).
- Spivak, M. (2008). Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. Boulder, CO: Westview Press. (Aborda temas avanzados como derivadas parciales y gradientes con un enfoque teórico).
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus: Multivariable (10th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. (Incluye aplicaciones prácticas de valores extremos y derivadas en problemas de ingeniería).
- Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de varias variables (4th ed.). México, D.F.: McGraw-Hill. (Texto en español que cubre funciones de varias variables, límites, continuidad y optimización).
- Leithold, L. (2002). El cálculo con geometría analítica (7th ed.). México, D.F.: Oxford University Press. (En español, aborda derivadas parciales, regla de la cadena y valores extremos con ejemplos claros).
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). Cálculo (9th ed.). México, D.F.: Pearson Educación. (Texto en español con un enfoque práctico en curvas de nivel, gradientes y aplicaciones ingenieriles).
- Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2008). Cálculo de una y varias variables (10th ed.). México, D.F.: Reverté. (En español, incluye temas como derivadas direccionales, diferenciales y optimización).

- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2012). Calculus (6th ed.). Boston, MA: Cengage Learning. (Cubre funciones de varias variables, continuidad y derivadas parciales con ejemplos prácticos).
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2002). Calculus with Analytic Geometry (6th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. (Trata temas como superficies de nivel, gradientes y valores extremos con aplicaciones).
- Piskunov, N. S. (2004). Cálculo diferencial e integral, Tomo II (2nd ed.). México, D.F.: Editorial Mir.
(En español, ofrece un tratamiento completo de cálculo vectorial, incluyendo derivadas implícitas y gradientes).

Tema V

5. Integración múltiple

Introducción.....	250
5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles.....	251
5.2 Integral doble en coordenadas rectangulares.....	253
5.3 Integrales iteradas.....	253
5.4 Integral doble en coordenadas polares.....	266
5.5 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen.....	275
5.6 Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas.....	285
5.7 Campos vectoriales.....	300
5.8 La Integral de línea.....	308
5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.....	318
5.10 Teoremas de integrales. Aplicaciones	321
Conclusiones.....	322
Bibliografía.....	323

Introducción

Las integrales simples (de una variable) se desarrollan a partir de sumas de Riemann y se utilizan para calcular áreas de regiones en $\mathbb{R}^2$. De manera análoga, usamos sumas de Riemann para desarrollar integrales dobles (de dos variables) y triples (de tres variables), que se emplean para calcular volúmenes de regiones sólidas en $\mathbb{R}^3$. Estas integrales múltiples tienen muchas aplicaciones en estadística, ciencia e ingeniería, incluyendo el cálculo de la masa, el centro de masa y los momentos de inercia de sólidos con densidad variable. Otro desarrollo significativo en este tema es la aparición de coordenadas cilíndricas y esféricas. Estos sistemas de coordenadas alternativos a menudo simplifican la evaluación de integrales en el espacio tridimensional. El tema concluye con las versiones bidimensional y tridimensional de la regla de sustitución (cambio de variables). La lección general del tema es que podemos integrar funciones sobre la mayoría de los objetos geométricos, desde intervalos en el eje x hasta regiones en el plano delimitadas por curvas y sólidos tridimensionales complicados. En este tema, ampliamos la integración a funciones de múltiples variables.

Tablas de derivadas simples, parciales, integrales simples, dobles definidas e indefinidas, triples indefinidas, e integrales triples sobre límites específicos

Función	Primera derivada:	Segunda derivada	Derivada de orden (n):
$f(x)$	$f'(x)$ o $\frac{df}{dx}$	$f''(x)$ o $\frac{d^2f}{dx^2}$	$f^{(n)}(x)$ o $\frac{d^nf}{dx^n}$

Tabla No. 1. Derivadas e básicas del cálculo

Función	Integral indefinida:	Integral definida (de (a) a (b)):	Integral doble indefinida:	Integral doble definida (sobre una región (R)):
$f(x)$	$\int f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx$	$\iint f(x, y) dx dy$	$\iint_R f(x, y) dA$

Tabla No. 2. Integrales básicas e integrales doble

Integral doble definida con límites específicos:	Integral triple indefinida:	Integral triple definida (sobre una región (E)):	Integral triple definida con límites específicos:
$f(x, y)$	$f(x, y, z)$	$f(x, y, z)$	$f(x, y, z)$
$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$	$\iiint f(x, y, z) dx dy dz$	$\iiint_E f(x, y, z) dV$	$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx$

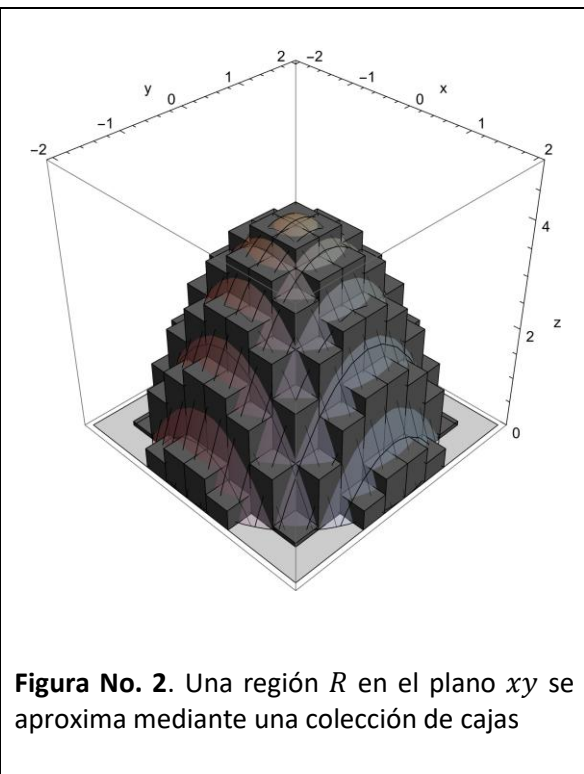
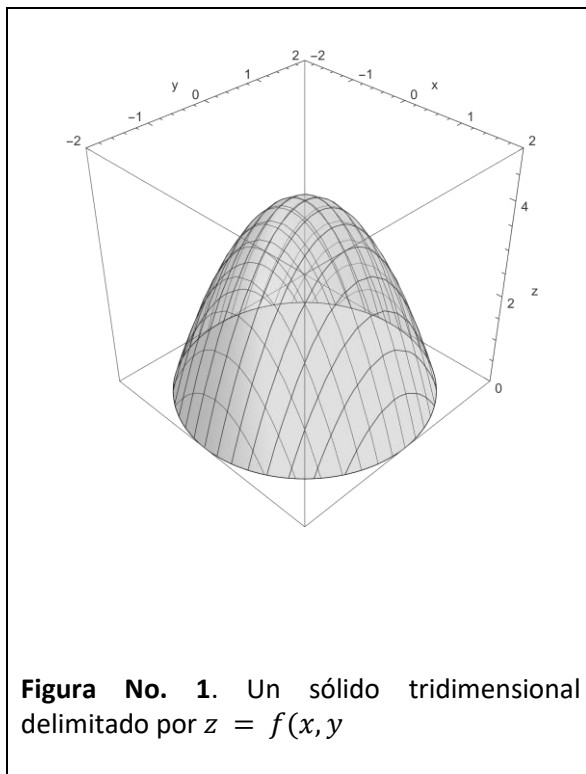
Tabla No. 3. Integrales dobles y triples

Función	Derivada parcial respecto a (x):	Derivada parcial respecto a (y):	Derivada parcial mixta (segunda derivada):
$f(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial x}$ o $f_x(x, y)$	$\frac{\partial f}{\partial y}$ o $f_y(x, y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ o $f_{xy}(x, y)$

Tabla No. 4. Derivadas parciales

5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles

Ahora llevamos a cabo un procedimiento análogo con superficies definidas por funciones de la forma $z = f(x, y)$, donde, por el momento, asumimos que $f(x, y) \geq 0$ en una región R en el plano xy (figura No. 1). El objetivo es determinar el volumen del sólido delimitado por la superficie y R . En términos generales, el sólido se aproxima primero mediante cajas. La suma de los volúmenes de estas cajas, que es una suma de Riemann, aproxima el volumen del sólido. Bajo condiciones apropiadas, a medida que el número de cajas aumenta, las aproximaciones convergen al valor de una integral doble, que es el volumen del sólido.



Asumimos que $z = f(x, y)$ es una función no negativa definida en una región rectangular $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Una partición de R se forma dividiendo R en n subregiones rectangulares utilizando líneas paralelas a los ejes x y y (no necesariamente espaciadas uniformemente). Los rectángulos pueden numerarse de cualquier manera sistemática; por ejemplo, de izquierda a derecha y luego de abajo hacia arriba. Las longitudes de los lados del k –ésimo rectángulo se denotan Δx_k y Δy_k , por lo que el área del k –ésimo rectángulo es $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

También consideramos (x_k, y_k) como cualquier punto en el k – ésimo rectángulo, para $1 \leq k \leq n$ (Figura No. 3)

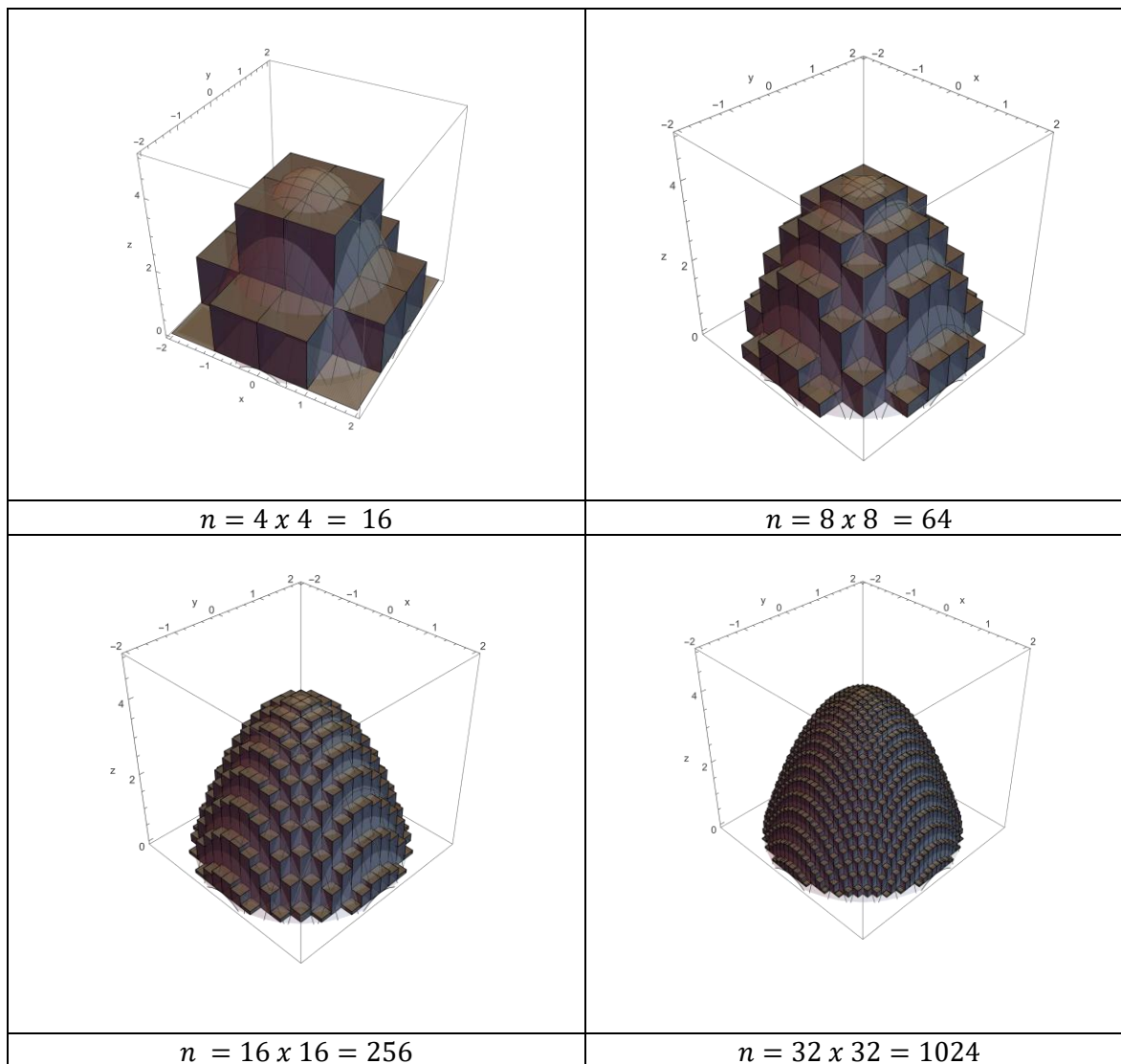


Figura No. 3. La suma de los volúmenes de las n cajas proporciona una aproximación al volumen del sólido.

Ahora definimos Δ como la longitud máxima de las diagonales de los rectángulos en la partición. A medida que $\Delta \rightarrow 0$, las áreas de todos los rectángulos tienden a cero ($\Delta A_k \rightarrow 0$) y el número de rectángulos aumenta ($n \rightarrow \infty$). Si las aproximaciones dadas por estas sumas de Riemann tienen un límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, entonces definimos el volumen del sólido como ese límite.

5.2 Integrales Dobles en coordenadas rectangulares

Definición

Integrales Dobles

Una función f definida en una región rectangular $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ en el plano xy es integrable en R si el límite de la suma de Riemann existe para todas las particiones de R y para todas las elecciones de los puntos $((x_k^*, y_k^*))$ en cada subrectángulo de la partición. Es decir, si la suma de Riemann se define como: $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$, donde $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ es el área del k ésimo rectángulo y $((x_k^*, y_k^*))$ es un punto en el k ésimo rectángulo, entonces f es integrable en R si: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ existe y es independiente de la elección de las particiones y los puntos $((x_k^*, y_k^*))$, donde Δ es la longitud máxima de las diagonales de los rectángulos en la partición. Este límite se denota como la integral doble

$$\iint_R f(x, y) \, dA.$$

Si f es no negativa en R , entonces la integral doble es igual al volumen del sólido delimitado por $z = f(x, y)$ y el plano xy sobre R . Si f es negativa en partes de R , el valor de la integral doble puede ser cero o negativo, y el resultado se interpreta como un volumen neto (por analogía con el área neta en integrales de una variable).

5.3 Integrales Iteradas

Una integral iterada es un método práctico para evaluar una integral doble al calcularla como una secuencia de dos integrales de una variable, en lugar de usar directamente sumas de Riemann. Este enfoque se basa en el teorema de Fubini, que establece que, bajo ciertas condiciones (como que la función sea continua o integrable en una región rectangular), una integral doble sobre una región R puede expresarse como una integral repetida en una variable a la vez.

Teorema

(Fubini) Integrales Dobles sobre Regiones Rectangulares

Sea $f(x, y)$ una función definida en una región rectangular $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ en el plano xy . Si f es integrable en R entonces la integral doble de f sobre R puede calcularse mediante integrales iteradas en cualquiera de los dos órdenes siguientes:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

Valor Promedio

El concepto del valor promedio de una función se extiende naturalmente a funciones de dos variables. Recordemos que el valor promedio de la función integrable f sobre el intervalo $[a, b]$ es:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Para una función $f(x, y)$ integrable sobre una región rectangular $R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, el valor promedio se define como:

$$\frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f(x, y) dA = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Definición

Valor Promedio de una Función sobre una Región Plana

El valor promedio de una función integrable f sobre una región R es

$$f_{\text{promedio}} = \frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f(x, y) dA$$

Problema No. 1

Evalúa las siguientes integrales iteradas.

$\int_0^2 \int_0^1 4xy \, dx \, dy.$ Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (x) $\int_0^1 4xy \, dx.$ $4y \int_0^1 x \, dx.$ $\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ $4y \cdot \frac{1}{2} = 2y.$	Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (y) $\int_0^2 2y \, dy.$ $2 \int_0^2 y \, dy.$ $\int_0^2 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$ $2 \cdot 2 = 4.$ El valor de la integral iterada es: $\int_0^2 \int_0^1 4xy \, dx \, dy = 4.$
--	--

$$\int_0^2 \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) dy dx.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y)

$$\int_0^1 (3x^2 + 4y^3) dy.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) dy \\ = \int_0^1 3x^2 dy + \int_0^1 4y^3 dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 \int_0^1 1 dy &= 3x^2 \cdot [y]_0^1 = 3x^2 \cdot (1 - 0) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 y^3 dy &= 4 \cdot \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = 4 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$3x^2 + 1.$$

Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (x)

$$\int_0^2 (3x^2 + 1) dx.$$

$$\int_0^2 (3x^2 + 1) dx = \int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 1 dx.$$

$$\begin{aligned} 3 \int_0^2 x^2 dx &= 3 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 3 \cdot \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= 3 \cdot \frac{8}{3} = 8. \end{aligned}$$

$$\int_0^2 1 dx = [x]_0^2 = 2 - 0 = 2.$$

$$8 + 2 = 10.$$

$$\int_0^2 \int_0^1 (3x^2 + 4y^3) dy dx = 10.$$

$$\int_1^3 \int_0^2 x^2 y dx dy.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_0^2 x^2 y dx.$$

$$y \int_0^2 x^2 dx.$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$y \cdot \frac{8}{3} = \frac{8y}{3}.$$

Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (y)

$$\int_1^3 \frac{8y}{3} dy.$$

$$\frac{8}{3} \int_1^3 y dy.$$

$$\int_1^3 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3}.$$

$$\int_1^3 \int_0^2 x^2 y dx dy = \frac{32}{3}.$$

$$\int_0^3 \int_{-2}^1 (2x + 3y) \, dx \, dy.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_{-2}^1 (2x + 3y) \, dx.$$

$$\int_{-2}^1 (2x + 3y) \, dx = \int_{-2}^1 2x \, dx + \int_{-2}^1 3y \, dx.$$

$$\begin{aligned} 2 \int_{-2}^1 x \, dx &= 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = 2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \\ &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y \int_{-2}^1 1 \, dx &= 3y \cdot [x]_{-2}^1 = 3y \cdot (1 - (-2)) \\ &= 3y \cdot 3 = 9y. \end{aligned}$$

$$-3 + 9y = 9y - 3.$$

Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (y)

$$\int_0^3 (9y - 3) \, dy.$$

$$\int_0^3 (9y - 3) \, dy = \int_0^3 9y \, dy - \int_0^3 3 \, dy.$$

$$\begin{aligned} 9 \int_0^3 y \, dy &= 9 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 = 9 \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 9 \cdot \frac{9}{2} \\ &= \frac{81}{2}. \end{aligned}$$

$$3 \int_0^3 1 \, dy = 3 \cdot [y]_0^3 = 3 \cdot (3 - 0) = 9.$$

$$\frac{81}{2} - 9 = \frac{81}{2} - \frac{18}{2} = \frac{63}{2}.$$

$$\int_0^3 \int_{-2}^1 (2x + 3y) \, dx \, dy = \frac{63}{2}.$$

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y)

$$\int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy.$$

$$x \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy &= [-\cos y]_0^{\pi/2} \\ &= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \end{aligned}$$

$$= -0 - (-1) = 1.$$

$$x \cdot 1 = x.$$

Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_1^3 x \, dx.$$

$$\int_1^3 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin y \, dy \, dx = 4.$$

$$\int_1^4 \int_0^4 \sqrt{uv} \, du \, dv.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (u)

$$\int_0^4 \sqrt{uv} \, du.$$

$$v^{1/2} \int_0^4 u^{1/2} \, du.$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 u^{1/2} \, du &= \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} [u^{3/2}]_0^4 \\ &= \frac{2}{3} (4^{3/2} - 0^{3/2}). \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

$$v^{1/2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{16}{3} v^{1/2}.$$

Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (v)

$$\int_1^4 \frac{16}{3} v^{1/2} \, dv.$$

$$\frac{16}{3} \int_1^4 v^{1/2} \, dv.$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 v^{1/2} \, dv &= \left[\frac{v^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} [v^{3/2}]_1^4 \\ &= \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1^{3/2}). \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}.$$

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{16 \cdot 14}{3 \cdot 3} = \frac{224}{9}.$$

$$\int_1^4 \int_0^4 \sqrt{uv} \, du \, dv = \frac{224}{9}.$$

$$\int_1^{\ln 5} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx \, dy.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx.$$

$$e^y \int_0^{\ln 3} e^x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} e^x \, dx &= [e^x]_0^{\ln 3} = e^{\ln 3} - e^0 = 3 - 1 \\ &= 2. \\ e^y \cdot 2 &= 2e^y. \end{aligned}$$

Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (y)

$$\int_1^{\ln 5} 2e^y \, dy.$$

$$2 \int_1^{\ln 5} e^y \, dy.$$

$$\int_1^{\ln 5} e^y \, dy = [e^y]_1^{\ln 5} = e^{\ln 5} - e^1 = 5 - e.$$

$$2(5 - e) = 10 - 2e.$$

$$\int_1^{\ln 5} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx \, dy = 10 - 2e.$$

Problema No. 2

Evalúa cada integral doble sobre la región R convirtiéndola en una integral iterada.

$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$ $\iint_R (x + 2y) \, dA.$ $\int_0^3 \int_1^4 (x + 2y) \, dy \, dx.$ Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y) $\int_1^4 (x + 2y) \, dy.$ $\int_1^4 (x + 2y) \, dy = \int_1^4 x \, dy + \int_1^4 2y \, dy.$ $x \int_1^4 1 \, dy = x \cdot [y]_1^4 = x \cdot (4 - 1) = 3x.$ $2 \int_1^4 y \, dy = 2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^4 = 2 \cdot \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right)$ $= 2 \cdot \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15.$ $3x + 15.$ Paso 2: Evaluar la integral externa con respecto a (x) $\int_0^3 (3x + 15) \, dx.$ $\int_0^3 (3x + 15) \, dx = \int_0^3 3x \, dx + \int_0^3 15 \, dx.$	$3 \int_0^3 x \, dx = 3 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 3 \cdot \frac{3^2}{2} = 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$ $15 \int_0^3 1 \, dx = 15 \cdot [x]_0^3 = 15 \cdot (3 - 0) = 45.$ $\frac{27}{2} + 45 = \frac{27}{2} + \frac{90}{2} = \frac{117}{2}.$ $\iint_R (x + 2y) \, dA = \frac{117}{2}.$ La integral también puede calcularse en el orden (dx, dy): $\int_1^4 \int_0^3 (x + 2y) \, dx \, dy,$
--	---

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_R \frac{x}{1+xy} dA.$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy dx.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$

Usamos la sustitución $u = 1 + xy$ de modo que $du = x dy$, $dy = \frac{du}{x}$. Los límites cambian:

Cuando $(y = 0)$, $(u = 1)$.

Cuando $(y = 1)$, $(u = 1 + x)$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy = \int_1^{1+x} \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{x} = \int_1^{1+x} \frac{1}{u} du.$$

$$\int_1^{1+x} \frac{1}{u} du = [\ln u]_1^{1+x} = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x).$$

Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

Usamos la integración por partes.

Sea $(u = \ln(1+x))$, $(dv = dx)$, entonces:

$$du = \frac{1}{1+x} dx, \quad v = x.$$

Por la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= [x \ln(1+x)]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 x \frac{1}{1+x} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x \ln(1+x)]_0^1 &= (1 \cdot \ln(1+1)) \\ &\quad - (0 \cdot \ln(1+0)) = \ln 2 - 0 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx. \\ \left(\int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1\right) \\ &= \ln(1+1) - \ln(1+0) \\ &= \ln 2. \\ &1 - \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 2 - (1 - \ln 2) &= \ln 2 - 1 + \ln 2 \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

$$\left[\iint_R \frac{x}{1+xy} dA = 2 \ln 2 - 1. \right]$$

$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ $\iint_R \cos x \sin y \, dA$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin y \, dy \, dx.$ Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin y \, dy$ $\cos x \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy.$	$\int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = [-\cos y]_0^{\pi/2}$ $= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$ $= -0 - (-1) = 1.$ $\cos x \cdot 1 = \cos x.$ Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx.$ $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$ $= 1 - 0 = 1.$ $\iint_R \cos x \sin y \, dA = 1.$
---	--

$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ $\iint_R (2x + y^2) \, dA.$ $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y^2) \, dy \, dx.$ Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y) $\int_0^1 (2x + y^2) \, dy.$ $\int_0^1 (2x + y^2) \, dy = \int_0^1 2x \, dy + \int_0^1 y^2 \, dy.$ $2x \int_0^1 1 \, dy = 2x \cdot [y]_0^1 = 2x \cdot (1 - 0) = 2x.$ $\int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ $2x + \frac{1}{3}$	Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x) $\int_0^2 \left(2x + \frac{1}{3} \right) \, dx.$ $\int_0^2 \left(2x + \frac{1}{3} \right) \, dx = \int_0^2 2x \, dx + \int_0^2 \frac{1}{3} \, dx.$ $2 \int_0^2 x \, dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \frac{2^2}{2} = 2 \cdot 2 = 4.$ $\frac{1}{3} \int_0^2 1 \, dx = \frac{1}{3} \cdot [x]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot (2 - 0) = \frac{2}{3}.$ $4 + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$ $\iint_R (2x + y^2) \, dA = \frac{14}{3}.$
---	--

Problema No. 3

Encuentra el volumen de los siguientes sólidos

Calcular el volumen del sólido bajo la superficie ($z = e^{-x}$) y sobre la región $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq \ln 4, -2 \leq y \leq 2\}$

$$\iint_R e^{-x} dA.$$

$$\int_0^{\ln 4} \int_{-2}^2 e^{-x} dy dx.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y)

$$\int_{-2}^2 e^{-x} dy.$$

$$\begin{aligned} e^{-x} \int_{-2}^2 1 dy &= e^{-x} \cdot [y]_{-2}^2 \\ &= e^{-x} \cdot (2 - (-2)) = 4e^{-x} \end{aligned}$$

Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_0^{\ln 4} 4e^{-x} dx.$$

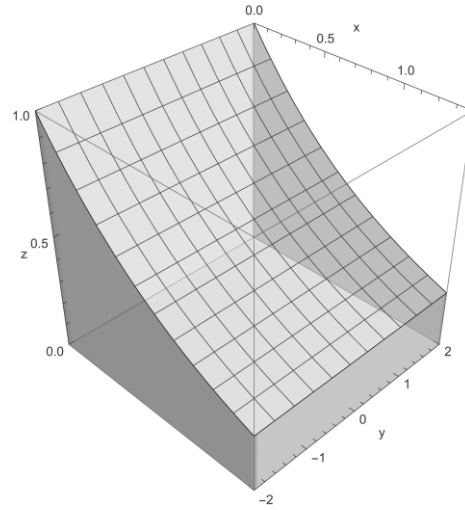
$$4 \int_0^{\ln 4} e^{-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} e^{-x} dx &= [-e^{-x}]_0^{\ln 4} \\ &= -e^{-\ln 4} - (-e^0) \\ &= -\frac{1}{4} - (-1) = -\frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$4 \cdot \frac{3}{4} = 3.$$

El volumen del sólido es:

$$\iint_R e^{-x} dA = 3.$$



Grafica de la función $z = e^{-x}$

La región:

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq \ln 4, -2 \leq y \leq 2\}$$

Volumen de una esfera de radio unitario $r = 1$, (centrado en el origen, definido por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bajo la superficie $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y sobre la región

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$R = (-1 \leq x \leq 1), (-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2})$$

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dA.$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dy \, dx.$$

Paso 1: Evaluar la integral interna con respecto a (y)

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dy.$$

Usamos la sustitución $(y = \sqrt{1 - x^2} \sin \theta), (dy = \sqrt{1 - x^2} \cos \theta \, d\theta)$. Los límites cambian

$$(y = -\sqrt{1 - x^2}), (\sin \theta = -1), (\theta = -\frac{\pi}{2}).$$

$$(y = \sqrt{1 - x^2}), (\sin \theta = 1), (\theta = \frac{\pi}{2}).$$

$$1 - x^2 - y^2 = (1 - x^2)(1 - \sin^2 \theta) = (1 - x^2) \cos^2 \theta, \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - x^2} \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2} \cos \theta \cdot \sqrt{1 - x^2} \cos \theta \, d\theta \\ &= (1 - x^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$(1 - x^2) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 - x^2).$$

Paso 2: Evaluar la integral interna con respecto a (x)

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} (1 - x^2) dx.$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx.$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx.$$

$$\left(\int_{-1}^1 1 dx = [x]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2 \right).$$

$$\left(\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \right).$$

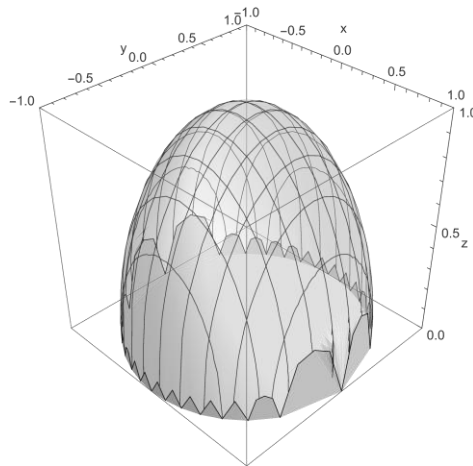
$$\text{Total: } \left(2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \right).$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

El volumen del hemisferio superior es:

$$\frac{2\pi}{3}.$$

El volumen total de la esfera es el doble del volumen del hemisferio superior:



$$V_{\text{esfera}} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Problema No. 4

Calcula el valor promedio de las siguientes funciones sobre la región R

$$f(x, y) = 4 - x - y, \text{ sobre la región } R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

El valor promedio de $f(x, y)$ sobre (R) se calcula como:

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f(x, y) \, dA.$$

$$\text{Área de } R = (2 - 0) \cdot (2 - 0) = 4.$$

La integral doble sobre (R) es:

$$\iint_R (4 - x - y) \, dA = \int_0^2 \int_0^2 (4 - x - y) \, dy \, dx.$$

Primero, integramos con respecto a (y) :

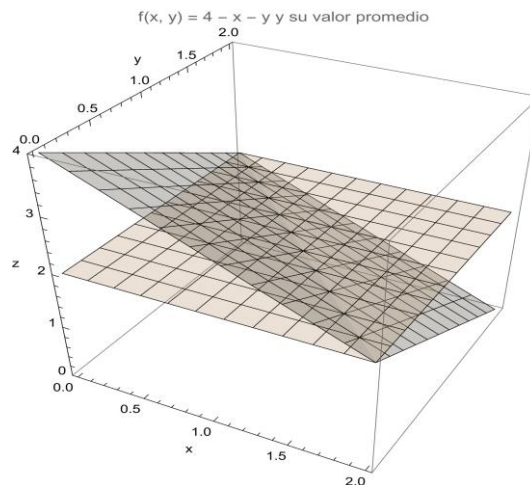
$$\int_0^2 (4 - x - y) \, dy = \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = (8 - 2x - 2) - 0 = 6 - 2x.$$

Luego, integramos con respecto a (x) :

$$\int_0^2 (6 - 2x) \, dx = [6x - x^2]_0^2 = (12 - 4) - 0 = 8.$$

$$\iint_R (4 - x - y) \, dA = 8.$$

Valor promedio = $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$. El valor promedio de $f(x, y) = 4 - x - y$ sobre la región R es 2



$f(x, y) = e^{-y}$ sobre la región $(R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq \ln 2\})$.

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f(x, y) \, dA$$

La región R es un rectángulo con $0 \leq x \leq 6$ y $0 \leq y \leq \ln 2$

$$\text{Área de } R = (6 - 0) \cdot (\ln 2 - 0) = 6 \ln 2.$$

La integral doble sobre R es:

$$\iint_R e^{-y} \, dA = \int_0^6 \int_0^{\ln 2} e^{-y} \, dy \, dx.$$

Primero, integramos con respecto a y :

$$\int_0^{\ln 2} e^{-y} \, dy = [-e^{-y}]_0^{\ln 2} = -e^{-\ln 2} - (-e^0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Luego, integramos con respecto a x :

$$\int_0^6 \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^6 1 \, dx = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

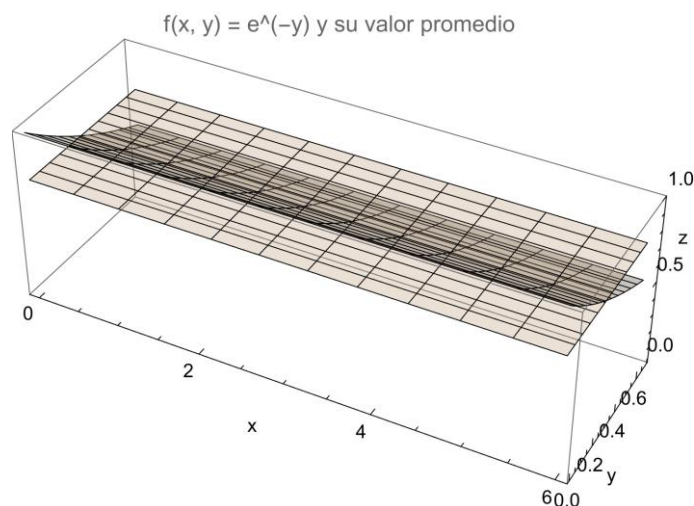
Por lo tanto:

$$\iint_R e^{-y} \, dA = 3.$$

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f(x, y) \, dA = \frac{1}{6 \ln 2} \cdot 3 = \frac{3}{6 \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Aproximadamente, $(\ln 2 \approx 0.693)$, así que $(2 \ln 2 \approx 1.386)$, y:

$$\text{Valor promedio} \approx \frac{1}{1.386} \approx 0.721.$$



5.4 Integral doble en coordenadas polares

Exploramos las coordenadas polares y vimos que, en ciertas situaciones, simplifican los problemas considerablemente. Lo mismo ocurre cuando se trata de la integración sobre regiones planas. En esta sección, aprendemos cómo formular integrales dobles en coordenadas polares y cómo cambiar integrales dobles de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

La integración doble en coordenadas polares es una técnica para evaluar integrales dobles sobre regiones con simetría circular, como discos, anillos o sectores, simplificando tanto la región de integración como el integrando.

En coordenadas cartesianas, una integral doble se escribe como $\iint_R f(x, y) \, dA$, donde $dA = dx \, dy$. En coordenadas polares, se usa la relación $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, y el elemento de área se transforma en $dA = r \, dr \, d\theta$. Así, la integral se convierte en:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta,$$

donde $(r_1(\theta))$, $(r_2(\theta))$, (θ_1) , y (θ_2) definen la región R . Este método es útil para simplificar integrales en problemas con simetría radial, como volúmenes bajo superficies sobre regiones polares.

Teorema

Cambio de variables para integrales dobles sobre regiones rectangulares polares

Sea f una función continua en la región R en el plano xy , expresada en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): a < r < b, \alpha < \theta < \beta\}$, donde $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Entonces, f es integrable sobre R , y la integral doble de f sobre R es:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta.$$

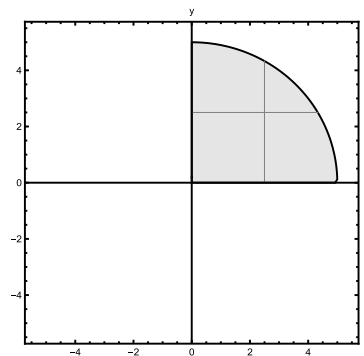
La región de integración en este problema es un ejemplo de un rectángulo polar. En coordenadas polares, tiene la forma $R = \{(r, \theta): a < r < b, \alpha < \theta < \beta\}$, donde $(\beta - \alpha \leq 2\pi)$ y (a) , (b) , (α) , y (β) son constantes. Los rectángulos polares son análogos a los rectángulos en coordenadas cartesianas. Por esta razón, los métodos utilizados anteriormente para evaluar integrales dobles sobre rectángulos pueden extenderse a rectángulos polares. El objetivo es evaluar integrales de la forma $\iint_R f(x, y) \, dA$, donde f es una función continua en el rectángulo polar R . Si f es no negativa en R , esta integral es igual al volumen del sólido limitado por la superficie $z = f(x, y)$ y la región R en el plano xy .

Problema No. 5

Dibuja los siguientes rectángulos polares.

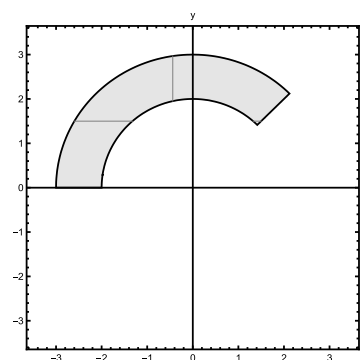
Dibuja el rectángulo polar definido por la región:

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$



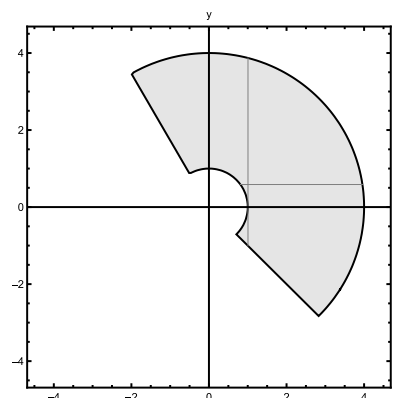
Dibuja el rectángulo polar definido por la región:

$$R = \{(r, \theta): 2 \leq r \leq 3, \pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4\}$$



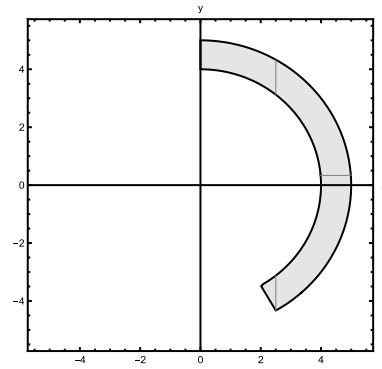
Dibuja el rectángulo polar definido por la región:

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 4, -\pi/4 \leq \theta \leq 2\pi/3\}$$



Dibuja el rectángulo polar definido por la región:

$$R = \{(r, \theta): 4 \leq r \leq 5, -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2\}$$



Teorema

Cambio de variables para integrales dobles sobre regiones polares más generales

Sea f una función continua en la región R del plano xy , expresada en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): g(\theta) < r < h(\theta), \alpha < \theta < \beta\},$$

donde $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Entonces, f es integrable sobre R , y la integral doble de f sobre R está dada por:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta.$$

Áreas de Regiones

En coordenadas cartesianas, el área de una región R en el plano xy se calcula integrando la función $f(x, y) = 1$ sobre R ; es decir, $A = \iint_R dA$. Este hecho se extiende a coordenadas polares.

Área de regiones polares

El área de la región polar $R = \{(r, \theta): g(\theta) < r < h(\theta), \alpha < \theta < \beta\}$, donde $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, está dada por:

$$A = \iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Problema No. 6

Encuentra el volumen del sólido delimitado por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano xy

$$z = f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y el plano } xy$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) \, dA \\ &= \iint_R (4 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dA, \end{aligned}$$

La superficie es ($z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$).

Para ($z \geq 0$)

$$4 - \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

Implica $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 4$

Implica $x^2 + y^2 \leq 16$.

En coordenadas polares ($x = r \cos \theta$), ($y = r \sin \theta$), esto es:

$$r^2 \leq 16$$

Implica $0 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

La región R es un disco de radio 4 centrado en el origen

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

La función $f(x, y)$ en coordenadas polares es:

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - r.$$

El elemento diferencial en polares es ($dA = r \, dr \, d\theta$), por lo que:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (4 - r)r \, dr \, d\theta.$$

1.- Integral interna respecto a r :

$$\int_0^4 (4 - r)r \, dr = \int_0^4 (4r - r^2) \, dr.$$

$$\int (4r - r^2) \, dr = 2r^2 - \frac{r^3}{3}.$$

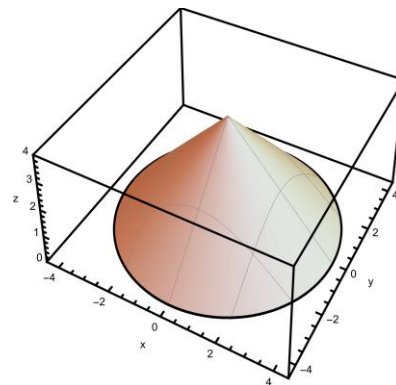
$$\begin{aligned} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^4 &= \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} \right) = 32 - \frac{64}{3} \\ &= \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

2.- Integral externa respecto a θ

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \frac{32}{3} \, d\theta = \frac{32}{3} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{32}{3} \cdot 2\pi \\ &= \frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es:

$$V = \frac{64\pi}{3} \text{ unidades cúbicas.}$$



$z = f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano xy

$z = f(x, y) = 16 - 4(x^2 + y^2)$ y el plano xy

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA \\ = \iint_R (16 - 4(x^2 + y^2)) \, dA,$$

$$16 - 4(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$4(x^2 + y^2) \leq 16$$

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$r^2 \leq 4$$

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

La región R es un disco de radio 2 centrado en el origen

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$f(x, y) = 16 - 4(x^2 + y^2) = 16 - 4r^2.$$

El elemento diferencial en polares es ($dA = r \, dr \, d\theta$), por lo que

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (16 - 4r^2)r \, dr \, d\theta.$$

1.- Integral interna respecto a r

$$\int_0^2 (16 - 4r^2)r \, dr = \int_0^2 (16r - 4r^3) \, dr.$$

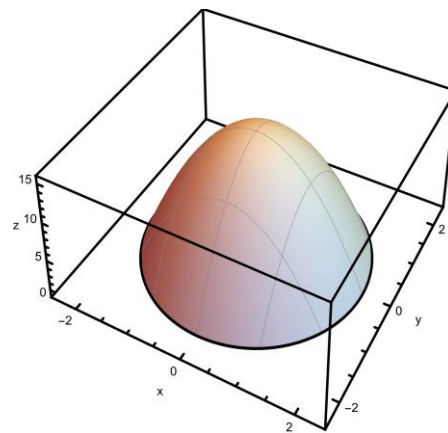
$$\int (16r - 4r^3) \, dr = 8r^2 - r^4.$$

$$[8r^2 - r^4]_0^2 = (8 \cdot 2^2 - 2^4) = (8 \cdot 4 - 16) \\ = 32 - 16 = 16.$$

2.- Integral externa respecto a θ

$$V = \int_0^{2\pi} 16 \, d\theta = 16 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 16 \cdot 2\pi \\ = 32\pi.$$

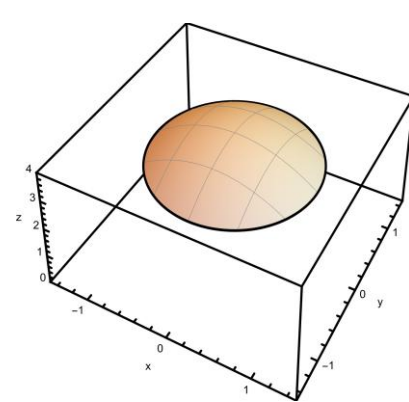
$V = 32\pi$ unidades cúbicas.

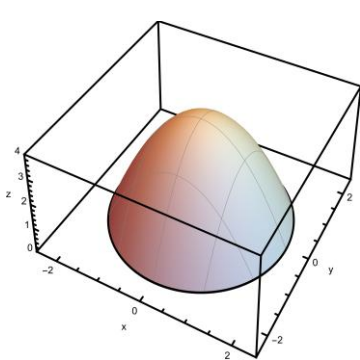


$z = f(x, y) = 16 - 4(x^2 + y^2)$ y el plano xy

Problema No. 7

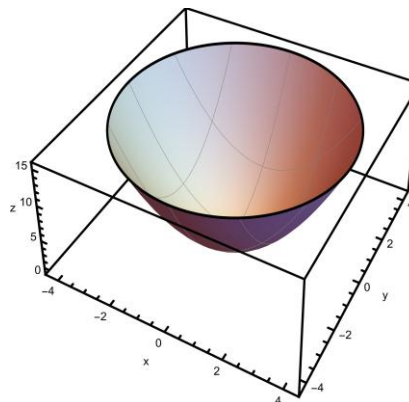
Encuentra el volumen del sólido bajo el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y sobre los siguientes rectángulos polares.

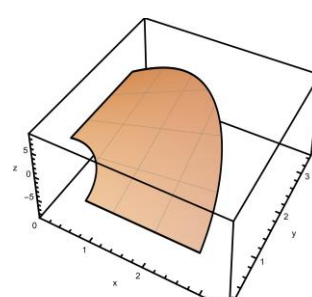
$z = 4 - x^2 - y^2$ y sobre el rectángulo polar $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r^2)r \, dr \, d\theta.$ $\int_0^1 (4r - r^3) \, dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$ $V = \int_0^{2\pi} \frac{7}{4} \, d\theta = \frac{7}{4} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{2}.$ $V = \frac{7\pi}{2} \text{ unidades cúbicas.}$	 $z = 4 - x^2 - y^2$ y sobre el rectángulo polar $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
---	--

y sobre el rectángulo polar $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)r \, dr \, d\theta.$ Integral interna $\int_0^2 (4r - r^3) \, dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8 - 4 = 4.$ Integral externa $V = \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$	El volumen es: $V = 8\pi \text{ unidades cúbicas.}$ 
--	---

Problema No. 8

Evalúa las siguientes integrales utilizando coordenadas polares. Asume que (r, θ) son coordenadas polares. Una gráfica será útil.

$\iint_R (x^2 + y^2) dA$ $R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $(x^2 + y^2 = r^2), y (dA = r dr d\theta)$ $\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^3 dr d\theta.$ Integral interna $\int_0^4 r^3 dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^4 = \frac{256}{4} = 64.$ Integral externa $\int_0^{2\pi} 64 d\theta = 64 \cdot 2\pi = 128\pi.$	 $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ $R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ El valor de la integral es: 128π.
---	---

$\iint_R 2xy dA$ $R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ $2xy = r^2 \sin 2\theta, y (dA = r dr d\theta)$ $\iint_R 2xy dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^3 r^3 \sin 2\theta dr d\theta.$ Integral interna $\int_1^3 r^3 \sin 2\theta dr = \sin 2\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^3$ $= \sin 2\theta \cdot \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \right)$ $= 20 \sin 2\theta.$	Integral externa $\int_0^{\pi/2} 20 \sin 2\theta d\theta = 20 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2}$ $= 20 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 20.$ El valor de la integral es: 20. 
--	--

$$\iint_R \frac{dA}{1+x^2+y^2}$$

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

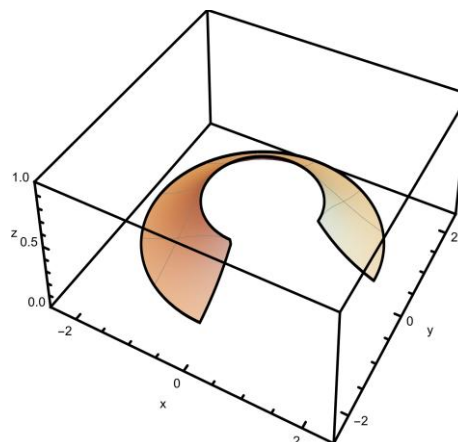
$$\iint_R \frac{dA}{1+x^2+y^2} = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r}{1+r^2} dr d\theta.$$

Integral interna

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{r}{1+r^2} dr &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Integral externa

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} d\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \ln \frac{5}{2}$$



El valor de la integral es:

$$\frac{\pi}{2} \ln \frac{5}{2}$$

$$\iint_R e^{-x^2-y^2} dA$$

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$\iint_R e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Integral interna

$$\int_0^3 e^{-r^2} r dr = \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^3 = \frac{1}{2} (1 - e^{-9}).$$

Integral externa

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-9}) d\theta = \pi (1 - e^{-9}). \text{ El valor de la integral es: } \pi (1 - e^{-9}).$$

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

$$R = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

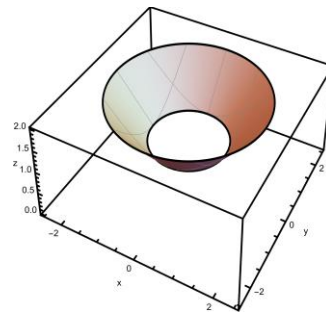
$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, dr \, d\theta.$$

Integral interna

$$\int_1^2 r^2 \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Integral externa

$$\int_0^{2\pi} \frac{7}{3} \, d\theta = \frac{7}{3} \cdot 2\pi = \frac{14\pi}{3}.$$



El valor de la integral es: $\frac{14\pi}{3}$

5.5 Integrales Triples en Coordenadas Rectangulares. Volumen

En esta sección, damos otro paso e investigamos las integrales triples de funciones de tres variables. No hay un límite en la progresión de las integrales múltiples. Es posible definir integrales con respecto a cualquier número de variables. Por ejemplo, los problemas en estadística y mecánica estadística involucran integración sobre regiones de muchas dimensiones.

Integrales Triples

Considera una función $w = f(x, y, z)$ que está definida en una región cerrada y acotada D en $\mathbb{R}^3$. La gráfica de f se encuentra en un espacio cuatridimensional y es el conjunto de puntos $(x, y, z, f(x, y, z))$, donde (x, y, z) en D . A pesar de la dificultad para representar f en $\mathbb{R}^3$, aún podemos definir la integral de f sobre D . Primero, creamos una partición de D dividiendo la región con tres conjuntos de planos paralelos a los planos xz , yz y xy (Figura No. 1). Esta partición subdivide D en pequeños paralelepípedos que se ordenan de manera conveniente desde $k = 1$ hasta $k = n$. La partición incluye todos los paralelepípedos que están completamente contenidos en D . El k –ésimo paralelepípedo tiene longitudes de lado Δx_k , Δy_k y Δz_k , y un volumen $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. Seleccionamos un punto arbitrario (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en el k –ésimo paralelepípedo, para $k = 1, \dots, n$.

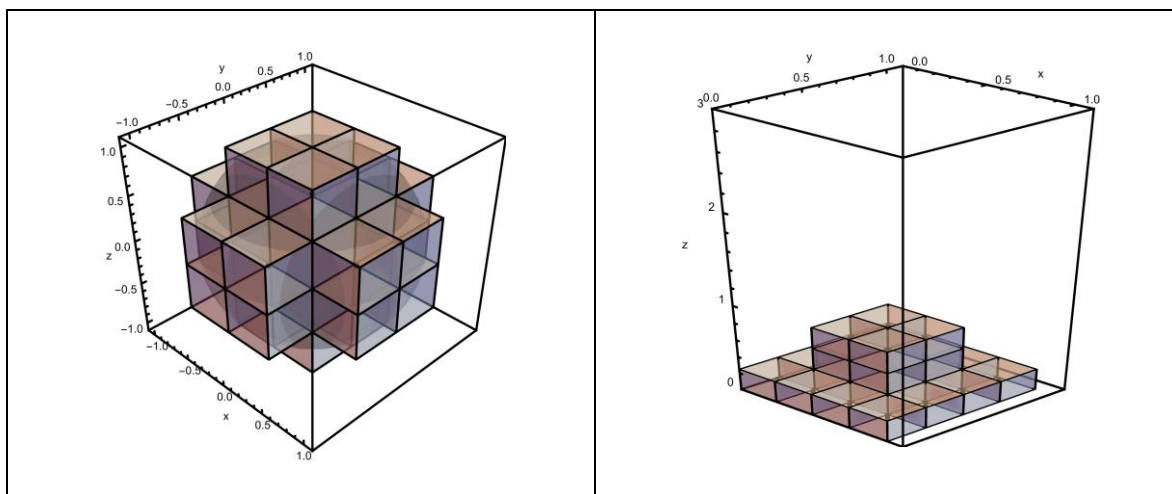


Figura No. 1. partición de D dividiendo la región con tres conjuntos de planos paralelos a los planos xz , yz y xy .

Suma de Riemann para Integrales Triples

Ahora se forma una suma de Riemann, en la que el k –ésimo término es el valor de la función $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ multiplicado por el volumen del k –ésimo paralelepípedo:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k.$$

Denotamos por Δ la longitud máxima de las diagonales de los paralelepípedos. A medida que el número de paralelepípedos n aumenta, mientras que Δ tiende a cero, ocurren dos cosas:

Para regiones comúnmente encontradas, la región formada por la colección de paralelepípedos se aproxima a la región D .

Si f es continua, la suma de Riemann se aproxima a un límite.

El límite de la suma de Riemann es la integral triple de f sobre D , y escribimos:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_D f(x, y, z) \, dV.$$

El k —ésimo paralelepípedo en la partición tiene un volumen $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$, donde Δx_k , Δy_k y Δz_k son las longitudes de los lados del paralelepípedo. En consecuencia, el elemento de volumen en la integral triple, que denotamos como dV , se convierte en dx , dy , dz (o alguna reorganización de (dx) , (dy) y (dz)) en una integral iterada.

Damos dos interpretaciones inmediatas de una integral triple. Primero, si $f(x, y, z) = 1$, entonces la suma de Riemann simplemente suma los volúmenes de los paralelepípedos en la partición. En el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, la integral triple $\iiint_D dV$ el volumen de la región D . Segundo, supongamos que D es un objeto sólido tridimensional y su densidad varía de un punto a otro según la función $(f(x, y, z))$. Las unidades de densidad son masa por unidad de volumen, por lo que el producto $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$ aproxima la masa del k —ésimo paralelepípedo en D . Sumar las masas de los paralelepípedos proporciona una aproximación a la masa total de D . En el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, la integral triple da la masa del objeto.

Al igual que con las integrales dobles, una versión del Teorema de Fubini expresa una integral triple en términos de una integral iterada en (x) , (y) y (z) . La situación se vuelve interesante porque, con tres variables, hay seis posibles órdenes de integración.

Encontrando los Límites de Integración

Supongamos que una región D en $\mathbb{R}^3$ está acotada superiormente por una superficie $z = H(x, y)$ y por debajo por una superficie $z = G(x, y)$. Estas dos superficies determinan los límites de integración en la dirección z . El siguiente paso es proyectar la región D sobre el plano xy para formar una región que llamamos R . Puedes pensar en R como la sombra de D en el plano xy . En este punto, podemos comenzar a escribir la integral triple como una integral iterada. Hasta ahora, tenemos

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k.$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_D f(x, y, z) \, dV.$$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left[\int_{G(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA.$$

Ahora supongamos que la región R está acotada superiormente e inferiormente por las curvas $y = h(x)$ y $y = g(x)$, respectivamente, y acotada a la derecha y a la izquierda por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente (Figura 16.40). La integración restante sobre R se lleva a cabo como una integral doble

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Los intervalos que describen D están resumidos en la Tabla siguiente, los cuales pueden usarse para formular los límites de integración. Para integrar sobre todos los puntos de D , llevamos a cabo los siguientes pasos:

Integrar con respecto a z desde $z = G(x, y)$ hasta $z = H(x, y)$; el resultado (en general) es una función de x e y .

Integrar con respecto a y desde $y = g(x)$ hasta $y = h(x)$; el resultado (en general) es una función de x .

Integrar con respecto a x desde $x = a$ hasta $x = b$; el resultado es (siempre) un número real.

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Integral	Variable	Intervalo	Procedimiento
Interna	z	$G(x, y) \leq z \leq H(x, y)$	$\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz$
Intermedia	y	$g(x) \leq y \leq h(x)$	$\int_{g(x)}^{h(x)} \left[\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy$
Externa	x	$a \leq x \leq b$	$\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \right] dx$

Teorema

Integrales Triples

Sea f una función continua sobre la región

$$D = \{(x, y, z): a < x < b, g(x) < y < h(x), G(x, y) < z < H(x, y)\},$$

donde $(g), (h), (G)$ y (H) son funciones continuas. Entonces, f es integrable sobre D y la integral triple se evalúa como la integral iterada

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

Valor Promedio de una Función de Tres Variables

La idea del valor promedio de una función se extiende naturalmente desde los casos de una y dos variables. El valor promedio de una función de tres variables se obtiene integrando la función sobre la región de interés y dividiendo por el volumen de la región

Definición

Valor promedio de una función de tres variables

Si f es continua en una región $D \subset \mathbb{R}^3$, entonces el valor promedio de f sobre D es

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{\iiint_D 1 \, dV} \iiint_D f(x, y, z) \, dV,$$

donde $\iiint_D 1 \, dV$ representa el volumen de la región (D).

Problema No. 9

integrales sobre paralelepípedos. Evalúa las siguientes integrales. Una gráfica o bosquejo de la región de integración puede ser útil.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k = \iiint_D f(x, y, z) \, dV.$$

$$\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_3^6 \int_{-2}^2 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Integral interna (con respecto a x)

$$\int_{-2}^2 1 \, dx = [x]_{-2}^2 = 2 - (-2) = 4.$$

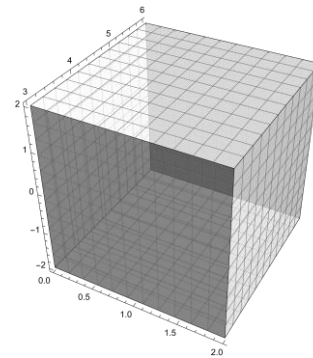
Integral intermedia (con respecto a y)

$$\int_3^6 4 \, dy = 4[y]_3^6 = 4(6 - 3) = 12.$$

El valor de la integral triple es 24

Integral externa (con respecto a z)

$$\int_0^2 12 \, dz = 12[z]_0^2 = 12(2 - 0) = 24.$$



El valor de la integral triple es 24

$$\begin{aligned} \iiint_D 6xyz \, dy \, dx \, dz \\ = \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 6xyz \, dy \, dx \, dz. \end{aligned}$$

Integral interna (con respecto a y)

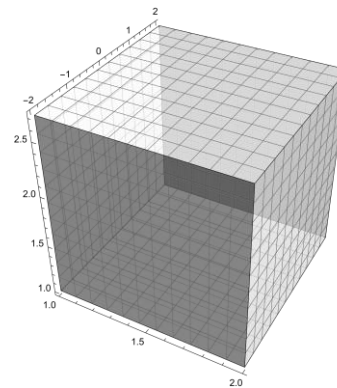
$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 6xyz \, dy &= 6xz \int_{-1}^2 y \, dy = 6xz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^2 \\ &= 6xz \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = 9xz. \end{aligned}$$

Integral intermedia (con respecto a x)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 9xz \, dx &= 9z \int_{-1}^1 x \, dx = 9z \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 \\ &= 9z \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Integral externa (con respecto a z)

$$\int_0^1 0 \, dz = 0.$$



El valor de la integral triple es 0

$$\iiint_D \frac{xy^2}{z} dz dx dy = \int_1^2 \int_{-2}^2 \int_1^e \frac{xy^2}{z} dz dx dy.$$

Integral interna (con respecto a z)

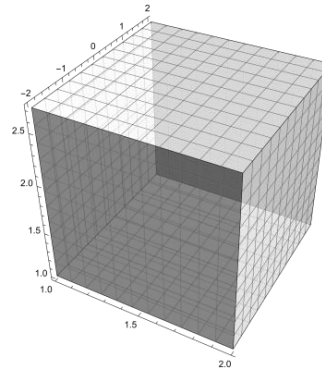
$$\int_1^e \frac{xy^2}{z} dz = xy^2 \int_1^e \frac{1}{z} dz = xy^2 [\ln z]_1^e = xy^2 (\ln e - \ln 1) = xy^2.$$

Integral intermedia (con respecto a x)

$$\int_{-2}^2 xy^2 dx = y^2 \int_{-2}^2 x dx = y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = y^2 \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{2} \right) = 0.$$

Integral externa (con respecto a y)

$$\int_1^2 0 dy = 0.$$



El valor de la integral triple es 0

Problema No. 10

Volumen de sólidos. Usa una integral triple para encontrar el volumen de los siguientes sólidos.

$2x + 3y + 6z = 12$ los planos
coordenados, con intersecciones en

$$(6,0,0), (0,4,0), (0,2,2)$$

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4 - \frac{2}{3}x, 0 \leq z \leq 2 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\}.$$

El volumen es

$$\iiint_D 1 dV = \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} 1 dz dy dx.$$

Integral interna z

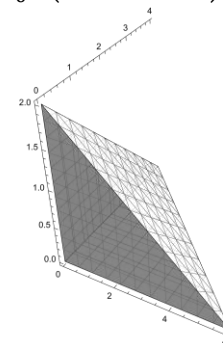
$$\int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} 1 dz = 2 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}.$$

Integral intermedia y

$$\int_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(2 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \right) dy = 4 - \frac{2x}{9} + \frac{x^2}{9}$$

Integral externa x

$$\int_0^6 \left(4 - \frac{2x}{9} + \frac{x^2}{9} \right) dx = 28.$$



El volumen es 28

Volumen del sólido en el primer octante formado por el cilindro $z = \sin y$ para $(0 \leq y \leq \pi, \text{ cortado por los planos } y = x \text{ y } x = 0)$

La región D es:

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \sin y\}$$

El volumen es:

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_0^\pi \int_0^y \int_0^{\sin y} 1 \, dz \, dx \, dy.$$

Integral interna z

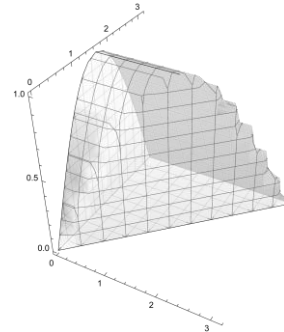
$$\int_0^{\sin y} 1 \, dz = \sin y$$

Integral intermedia x

$$\int_0^y \sin y \, dx = y \sin y$$

Integral externa y

$$\int_0^\pi y \sin y \, dy = [-y \cos y + \sin y]_0^\pi = \pi.$$



El volumen es (π)

Calcular el volumen de la cuña sobre el plano xy formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, cortada por los planos $z = 0$ y $y = -z$

El volumen es:

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{-y} 1 \, dz \, dx \, dy.$$

Integral interna z

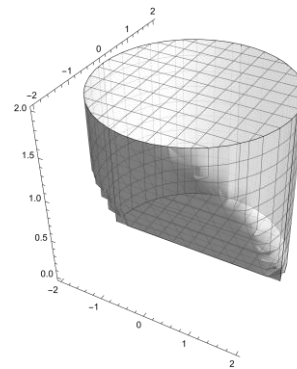
$$\int_0^{-y} 1 \, dz = -y.$$

Integral intermedia x

$$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (-y) \, dx = -2y\sqrt{4-y^2}.$$

Integral externa y

$$\int_{-2}^0 -2y\sqrt{4-y^2} \, dy = \frac{16}{3}.$$



El volumen es $\frac{16}{3}$

Problema No. 11

Evalúa las siguientes integrales

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} \sin y \, dz \, dx \, dy.$$

Integral interna z

$$\begin{aligned} \int_0^{\sin x} \sin y \, dz &= \sin y \int_0^{\sin x} 1 \, dz \\ &= \sin y \cdot [\sin x]_0^{\sin x} \\ &= \sin y \sin x. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin y \sin x \, dx \, dy.$$

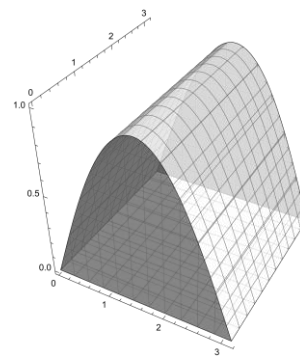
Integral intermedia x

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin y \sin x \, dx &= \sin y \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= \sin y \cdot [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= \sin y \cdot (-\cos \pi - (-\cos 0)) \\ &= \sin y \cdot (1 + 1) = 2 \sin y. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} 2 \sin y \, dy.$$

Integral externa y

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 2 \sin y \, dy &= 2 \int_0^{\pi} \sin y \, dy \\ &= 2 \cdot [-\cos y]_0^{\pi} \\ &= 2 \cdot (-\cos \pi - (-\cos 0)) \\ &= 2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$



4

$$\int_0^2 \int_0^4 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \, dz \, dx \, dy.$$

Integral interna z

$$\begin{aligned} \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \, dz &= \sqrt{x} \int_{y^2}^4 1 \, dz = \sqrt{x} \cdot [z]_{y^2}^4 \\ &= \sqrt{x}(4 - y^2) \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_0^4 \sqrt{x} (4 - y^2) \, dx \, dy.$$

Intermedia x

$$\int_0^4 \sqrt{x} (4 - y^2) \, dx = (4 - y^2) \int_0^4 x^{1/2} \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 x^{1/2} \, dx &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot 8 \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$(4 - y^2) \cdot \frac{16}{3} = \frac{16}{3} (4 - y^2).$$

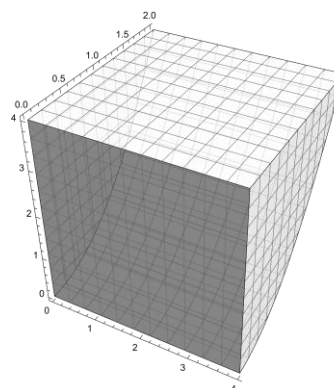
$$\int_0^2 \frac{16}{3} (4 - y^2) \, dy.$$

Integral externa y

$$\int_0^2 \frac{16}{3} (4 - y^2) \, dy = \frac{16}{3} \int_0^2 (4 - y^2) \, dy.$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4 - y^2) \, dy &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{256}{9}.$$



$$\boxed{\frac{256}{9}}$$

Encuentre el valor promedio de la función

$f(x, y, z) = 8xyz \cos z$ sobre la región

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \pi/2\}$$

Valor promedio

$$= \frac{1}{\iiint_D 1 \, dV} \iiint_D f(x, y, z) \, dV.$$

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^1 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Integral interna x

$$\int_0^1 1 \, dx = 1.$$

Integral intermedia y

$$\int_0^2 1 \, dy = 2.$$

Integral externa z

$$\int_0^{\pi/2} 1 \, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Volumen total

$$1 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Evaluar la integral de $f(x, y, z)$

$$\begin{aligned} & \iiint_D 8xy \cos z \, dV \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^1 8xy \cos z \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Integral interna x

$$\begin{aligned} \int_0^1 8xy \cos z \, dx &= 8y \cos z \int_0^1 x \, dx \\ &= 8y \cos z \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 8y \cos z \cdot \frac{1}{2} = 4y \cos z. \end{aligned}$$

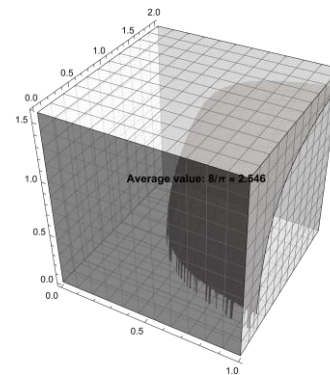
Intermedia y

$$\begin{aligned} \int_0^2 4y \cos z \, dy &= 4 \cos z \int_0^2 y \, dy \\ &= 4 \cos z \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 4 \cos z \cdot 2 \\ &= 8 \cos z. \end{aligned}$$

Externa z

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 8 \cos z \, dz &= 8 \int_0^{\pi/2} \cos z \, dz \\ &= 8 \cdot [\sin z]_0^{\pi/2} = 8 \cdot (1 - 0) \\ &= 8. \end{aligned}$$

$$\iiint_D 8xy \cos z \, dV = 8.$$



$$\text{Valor promedio} = \frac{8}{\pi}.$$

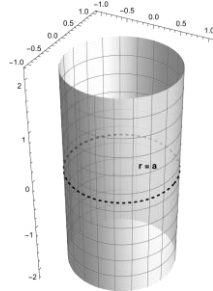
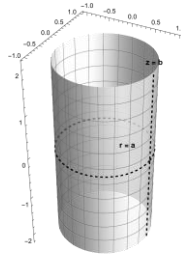
5.6 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

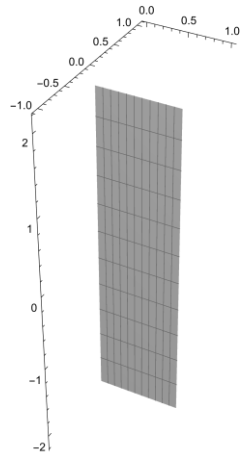
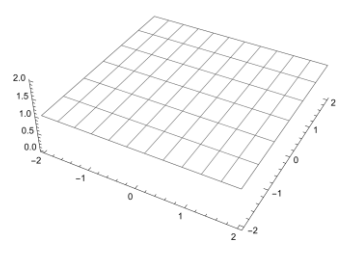
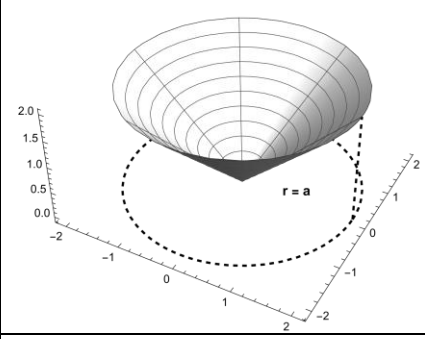
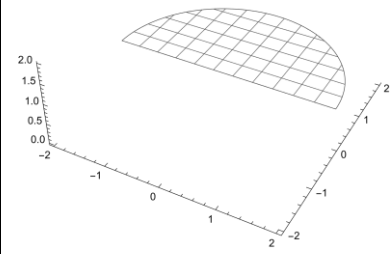
Cuando se evalúan integrales triples, es posible que hayas notado que algunas regiones (como esferas, conos y cilindros) tienen descripciones complicadas en coordenadas cartesianas. En esta parte, examinamos dos sistemas de coordenadas adicionales en $\mathbb{R}^3$ que son más fáciles de usar cuando se trabaja con ciertos tipos de regiones. Estos sistemas de coordenadas son útiles no solo para la integración, sino también para la resolución de problemas en general.

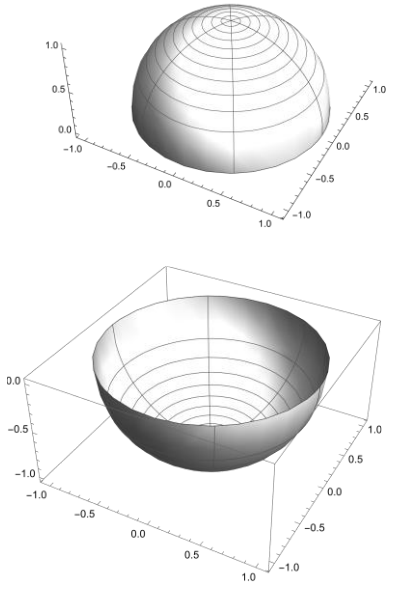
Coordenadas cilíndricas

Cuando extendemos las coordenadas polares de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, obtenemos las coordenadas cilíndricas. En este sistema de coordenadas, un punto P en $\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas (r, θ, z) , donde (r) y θ son las coordenadas polares del punto (P^*) , que es la proyección de (P) sobre el plano (xy) . Al igual que en las coordenadas cartesianas, la coordenada (z) es la distancia vertical con signo entre (P) y el plano (xy) . Cualquier punto en $\mathbb{R}^3$ puede representarse en coordenadas cilíndricas utilizando los intervalos: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Muchos conjuntos de puntos tienen representaciones simples en coordenadas cilíndricas. Por ejemplo, el conjunto $\{(r, \theta, z): r = a\}$ representa los puntos cuya distancia al eje (z) es (a) , lo que corresponde a un cilindro circular recto de radio (a) . El conjunto $\{(r, \theta, z): \theta = \theta_0\}$ es el conjunto de puntos con una coordenada θ constante; este es un semiplano vertical que emana del eje (z) en la dirección $\theta = \theta_0$. La Tabla siguiente resume estos y otros conjuntos que son ideales para la integración en coordenadas cilíndricas

Nombre	Descripción	Ejemplo
Cilindro	$\{(r, \theta, z): r = a, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$.	
Cáscara cilíndrica	$\{(r, \theta, z): r = a, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$.	

Semiplano vertical	$\{(r, \theta, z): \theta = \theta_0, 0 \leq r < \infty, -\infty < z < \infty\}.$	
Plano horizontal	$\{(r, \theta, z): z = c, 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$	
Cono	$\{(r, \theta, z): z = kr, 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, z \geq 0\}.$	
Rectangular cilíndrico	$\{(r, \theta, z): r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2\}.$	

Esfera	$\{(r, \theta, z): r^2 + z^2 = a^2, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -a \leq z \leq a\}.$	
--------	---	--

Transformaciones entre coordenadas cilíndricas y rectangulares

Rectangulares $\rightarrow$ Cilíndricas	Cilíndricas $\rightarrow$ Rectangulares
$r^2 = x^2 + y^2$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r \cos \theta$
$\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = r \sin \theta$
$z = z$	$z = z$

Integración en coordenadas cilíndricas

Entre los usos de las coordenadas cilíndricas está la evaluación de integrales triples de la forma $\iiint_D f(x, y, z) dV$. Comenzamos con una región (D) en $\mathbb{R}^3$ y la dividimos en cuñas cilíndricas formadas por cambios de Δr , $\Delta \theta$ y Δz en las direcciones de las coordenadas (Figura 16.50). Aquellas cuñas que se encuentran completamente dentro de (D) se etiquetan desde $k = 1$ hasta $k = n$ en algún orden conveniente. Sea (r_k, θ_k, z_k) las coordenadas cilíndricas de un punto arbitrario en la (k) -ésima cuña. Este punto también tiene coordenadas cartesianas $(x_k, y_k, z_k) = (r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k, z_k)$. Como se muestra en la Figura No. 1, la base de la (k) -ésima cuña es un rectángulo polar con un área aproximada de $r_k \Delta r \Delta \theta$. La altura de la cuña es Δz . Multiplicando estas dimensiones, el volumen aproximado de la cuña es $\Delta V_k = r_k \Delta r \Delta \theta \Delta z$. Ahora asumimos que $(f(x, y, z))$ es continua en (D) y formamos una suma de Riemann sobre la región sumando los valores de la función multiplicados por los volúmenes aproximados correspondientes para $k = 1, \dots, n$.

Ahora asumimos que $(f(x, y, z))$ es continua en (D) y formamos una suma de Riemann sobre la región sumando los valores de la función multiplicados por los volúmenes aproximados correspondientes:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum_{k=1}^n f(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k, z_k) \Delta V_k.$$

Sea (Δ) el valor máximo de (Δr) , $(\Delta \theta)$ y (Δz) , para $k = 1, \dots, n$. A medida que $n \rightarrow \infty$ y $\Delta \rightarrow 0$, las sumas de Riemann se aproximan a un límite llamado la integral triple de f sobre D en coordenadas cilíndricas

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k, z_k) r_k \Delta r \Delta \theta \Delta z = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

La suma más a la derecha nos indica cómo escribir una integral triple en (x, y, z) como una integral iterada de $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)r$ en coordenadas cilíndricas.

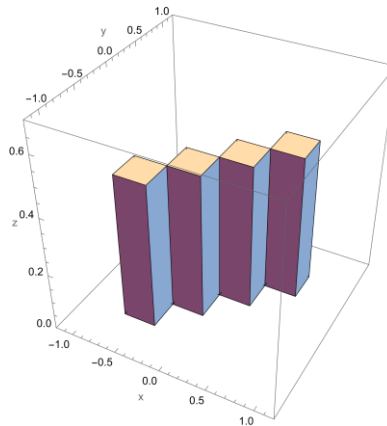


Figura No. 1 la base de la (k) -ésima cuña es un rectángulo polar con un área aproximada de $r_k \Delta r \Delta \theta$. La altura de la cuña es Δz . El volumen aproximado de la cuña es $\Delta V_k = r_k \Delta r \Delta \theta \Delta z$.

Encontrando Límites de Integración

Mostramos cómo encontrar los límites de integración en una situación común que involucra coordenadas cilíndricas. Supongamos que (D) es una región en $\mathbb{R}^3$ que consiste en puntos entre las superficies $z = G(x, y)$ y $z = H(x, y)$, donde (x) e (y) pertenecen a una región (R) en el plano (xy) y $G(x, y) < H(x, y)$ en (R) (Figura No. 2). Asumiendo que (f) es continua en (D) , la integral triple de (f) sobre (D) puede expresarse como la integral iterada

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dA.$$

La integral interna con respecto a (z) va desde la superficie inferior $z = G(x, y)$ hasta la superficie superior $z = H(x, y)$, dejando una integral doble externa sobre (R) .

Si la región (R) se describe en coordenadas polares por $\{(r, \theta): g(\theta) < r < h(\theta), \alpha < \theta < \beta\}$, entonces evaluamos la integral doble sobre (R) en coordenadas polares. El efecto es un cambio de variables de coordenadas rectangulares a cilíndricas. Haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Tenemos el siguiente resultado, que es otra fórmula de cambio de variables.

Teorema

Cambio de Variables para Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas

Sea (f) una función continua sobre la región (D) , expresada en coordenadas cilíndricas como:

$$D = \{(r, \theta, z): g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, G(r \cos \theta, r \sin \theta) \leq z \leq H(r \cos \theta, r \sin \theta)\}.$$

$$D = \{(r, \theta, z): g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, G(x, y) \leq z \leq H(x, y)\},$$

donde $(x = r \cos \theta)$ y $(y = r \sin \theta)$.

Entonces, (f) es integrable sobre (D) , y la integral triple de (f) sobre (D) es:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \int_{G(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{H(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Observe que el integrando y los límites de integración se convierten de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas. Al igual que con las integrales triples en coordenadas cartesianas, hay dos interpretaciones inmediatas de esta integral. Si $f = 1$, entonces la integral triple $\iiint_D dV$ es igual al volumen de la región (D) . Además, si (f) describe la densidad de un objeto que ocupa la región (D) , la integral triple es igual a la masa del objeto. Es decir:

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \int_{G(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{H(r \cos \theta, r \sin \theta)} 1 \, r \, dz \, dr \, d\theta.$$

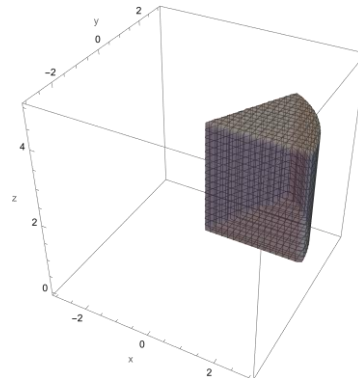
Problema No. 12

Identifique y gráfica con un programa los siguientes conjuntos en coordenadas cilíndricas.

$$\{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/3, 1 \leq z \leq 4\}.$$

El conjunto es una región sólida en el espacio 3D. En el plano (xy), la proyección es un sector de un disco de radio 3, con ángulos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$ (un sector de 60°). Verticalmente, la región se extiende desde el plano $z = 1$ hasta el plano $z = 4$, formando un sólido en forma de "cuña" con altura constante entre estas dos alturas

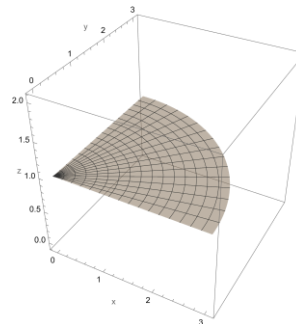
La proyección en el plano (xy) es un sector circular de radio 3, delimitado por los rayos $\theta = 0$ (eje (x) positivo) y $\theta = \pi/3$, y el arco $r = 3$. En la dirección (z), el sólido está acotado por los planos $z = 1$ (base) y $z = 4$ (cima). El sólido se asemeja a una porción de un cilindro de radio 3, cortado entre $z = 1$ y $z = 4$, con un ángulo de 60° .



$$\{(r, \theta, z): 0 \leq \theta < \pi/2, z = 1\}.$$

El conjunto es una superficie 2D en el plano $z = 1$. En el plano (xy), la proyección es un sector de un disco de radio $r \leq 3$, con ángulos de $\theta = 0$ a $\theta < \pi/2$ (primer cuadrante, excluyendo estrictamente el eje (y) positivo). Como no se especifican límites para (r), asumimos $0 \leq r \leq 3$ para una visualización finita, representando un sector circular en el plano $z = 1$.

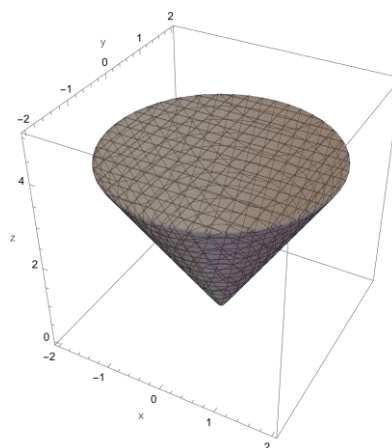
La proyección en el plano (xy) es un sector de un disco de radio 3, delimitado por el rayo $\theta = 0$ (eje (x) positivo) y acercándose al rayo $\theta = \pi/2$ (eje (y) positivo). El conjunto está completamente en el plano $z = 1$, formando una superficie plana en forma de "cuarto de disco" a altura $z = 1$.



$$\{(r, \theta, z): 2r \leq z \leq 4\}.$$

El conjunto es una región sólida en el espacio 3D. Asumiendo $0 \leq r \leq 2$ (ya que $z = 2r \leq 4$ implica $r \leq 2$) y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la proyección en el plano (xy) es un disco de radio 2 ($x^2 + y^2 \leq 4$). Verticalmente, para cada (r), la altura (z) varía desde el cono $z = 2r$ hasta el plano $z = 4$. El sólido está delimitado por la superficie cónica $z = 2r$ (inferior) y el plano $z = 4$ (superior), formando un frustum cónico (figura sólida que parece como una pirámide)

La proyección en el plano (xy) es un disco de radio 2. La superficie inferior es el cono $z = 2r$, que comienza en $(0,0,0)$ (cuando $r = 0$) y alcanza $z = 4$ en $r = 2$. La superficie superior es el plano $z = 4$. El sólido se asemeja a un cono truncado, con una base circular de radio 2 y una tapa plana a altura $z = 4$.



Problema No. 13

Evalúe las siguientes integrales en coordenadas cilíndricas. Las figuras, si se proporcionan, ilustran la región de integración.

Límites de la región cartesiana

$$D = \{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}.$$

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Integral interna con respecto a z

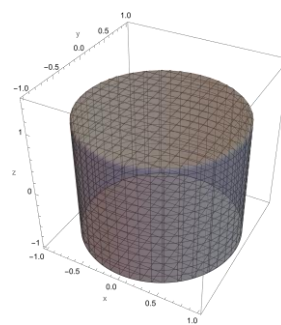
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 r \, dz &= r \int_{-1}^1 1 \, dz = r[z]_{-1}^1 \\ &= r(1 - (-1)) = 2r. \end{aligned}$$

Integral intermedia con respecto a r

$$\int_0^1 2r \, dr = 2 \int_0^1 r \, dr = 2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Integral externa con respecto a θ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta &= [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi. \\ \iiint_D 1 \, dV &= 2\pi \cdot 1 = 2\pi. \end{aligned}$$



Límites de la región cartesiana

$$D = \{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 9 - 3r\}.$$

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_0^\pi \int_0^3 \int_0^{9-3r} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Integral externa con respecto a z

$$\begin{aligned} \int_0^{9-3r} r \, dz &= r \int_0^{9-3r} 1 \, dz = r[z]_0^{9-3r} \\ &= r(9 - 3r) = 9r - 3r^2. \end{aligned}$$

Integral intermedia con respecto a r

$$\int_0^3 (9r - 3r^2) \, dr = 9 \int_0^3 r \, dr - 3 \int_0^3 r^2 \, dr.$$

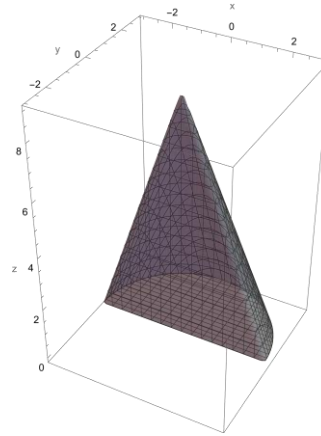
$$\int_0^3 r \, dr = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}, \quad 9 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{2}.$$

$$\int_0^3 r^2 \, dr = \frac{3^3}{3} = 9, \quad 3 \cdot 9 = 27.$$

Integral externa con respecto a θ

$$\int_0^\pi \frac{27}{2} \, d\theta = \frac{27}{2} [\theta]_0^\pi = \frac{27}{2} \cdot \pi = \frac{27\pi}{2}.$$

Resultado: $\iiint_D 1 \, dV = \frac{27\pi}{2}.$



La región D es

$$D = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

En coordenadas cilíndricas D es

$$D = \{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}.$$

La integral triple es

$$\iiint_D 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Integral con respecto a z

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 r \, dz &= r \int_{-1}^1 1 \, dz = r[z]_{-1}^1 \\ &= r(1 - (-1)) = 2r. \end{aligned}$$

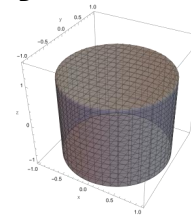
Integral con respecto a r

$$\int_0^1 2r \, dr = 2 \int_0^1 r \, dr = 2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Integral externa con respecto a θ

$$\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

Resultado: $\iiint_D 1 \, dV = 2\pi.$



$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx dz.$$

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq \sqrt{2}/2, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq 4\}.$$

En coordenadas cilíndricas, $(x = r \cos \theta)$, $(y = r \sin \theta)$, la región es:

$$D = \{(r, \theta, z): 0 \leq r \leq 1, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 4\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_D e^{-x^2-y^2} dV \\ = \int_0^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 e^{-r^2} r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a z (interna)

$$\int_0^4 e^{-r^2} r dz = e^{-r^2} r \cdot 4 = 4e^{-r^2} r.$$

Integrando con respecto a r (intermedia)

$$\int_0^1 4e^{-r^2} r dr = 4 \int_0^1 e^{-r^2} r dr.$$

$$\begin{aligned} \text{Sustituyendo } (u = r^2), (du = 2r dr), (r dr \\ = \frac{1}{2} du): \end{aligned}$$

$$\int_0^1 e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-u} du = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

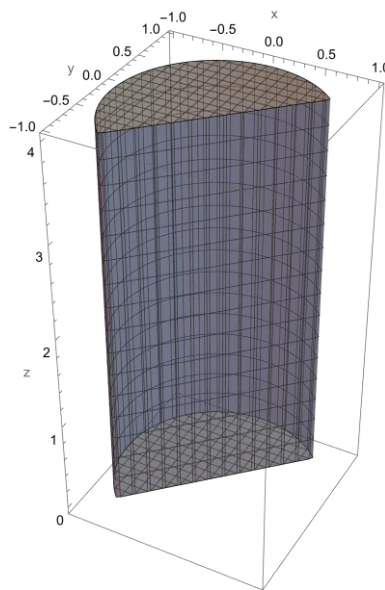
$$4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Integral con respecto a θ (externa)

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) d\theta &= 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

Resultado final

$$\iiint_D e^{-x^2-y^2} dV = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$



Integración en Coordenadas Esféricas

Investigamos ahora las integrales triples en coordenadas esféricas sobre una región (D) en $\mathbb{R}^3$. La región (D) se particiona en "cajas esféricas" que se forman por cambios de $\Delta\rho$, $\Delta\varphi$, y $\Delta\theta$ en las direcciones de las coordenadas. Aquellas cajas que están completamente dentro de (D) se etiquetan desde $k = 1$ hasta $k = n$. Denotamos $(\rho_k, \varphi_k, \theta_k)$ como las coordenadas esféricas de un punto arbitrario en la (k) -ésima caja. Este punto también tiene coordenadas cartesianas.

Las integrales triples en coordenadas esféricas se utilizan para calcular volúmenes, masas u otras cantidades en regiones tridimensionales $D \subset \mathbb{R}^3$ con simetría esférica. En lugar de coordenadas cartesianas $((x, y, z))$, se emplean coordenadas esféricas (ρ, φ, θ) , donde ρ es la distancia radial, φ es el ángulo polar y θ es el ángulo azimutal. La integral triple en coordenadas esféricas:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_D f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

es igual al límite de la suma de Riemann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\rho_k \sin \varphi_k \cos \theta_k, \rho_k \sin \varphi_k \sin \theta_k, \rho_k \cos \varphi_k) \rho_k^2 \sin \varphi_k \Delta\rho \Delta\varphi \Delta\theta,$$

donde $((\rho_k, \varphi_k, \theta_k))$ es un punto en la k -ésima caja esférica y $(\Delta V_k \approx \rho_k^2 \sin \varphi_k \Delta\rho \Delta\varphi \Delta\theta)$

En resumen, para integrar sobre todos los puntos de (D) , llevamos a cabo los siguientes pasos:

1. Integrar con respecto a (ρ) desde $(\rho = g(\varphi, \theta))$ hasta $(\rho = h(\varphi, \theta))$; el resultado (en general) es una función de (φ) y (θ) .
2. Integrar con respecto a (φ) desde $(\varphi = \alpha)$ hasta $(\varphi = \beta)$; el resultado (en general) es una función de (θ) .
3. Integrar con respecto a (θ) desde $(\theta = \alpha)$ hasta $(\theta = \beta)$; el resultado es (siempre) un número real.

Otro cambio de variables expresa la integral triple como una integral iterada en coordenadas esféricas.

Teorema

Cambio de variables para integrales triples en coordenadas esféricas

Sea (f) una función continua sobre la región (D) , expresada en coordenadas esféricas como

$$D = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \gamma \leq \varphi \leq \delta, g(\varphi, \theta) \leq \rho \leq h(\varphi, \theta)\}$$

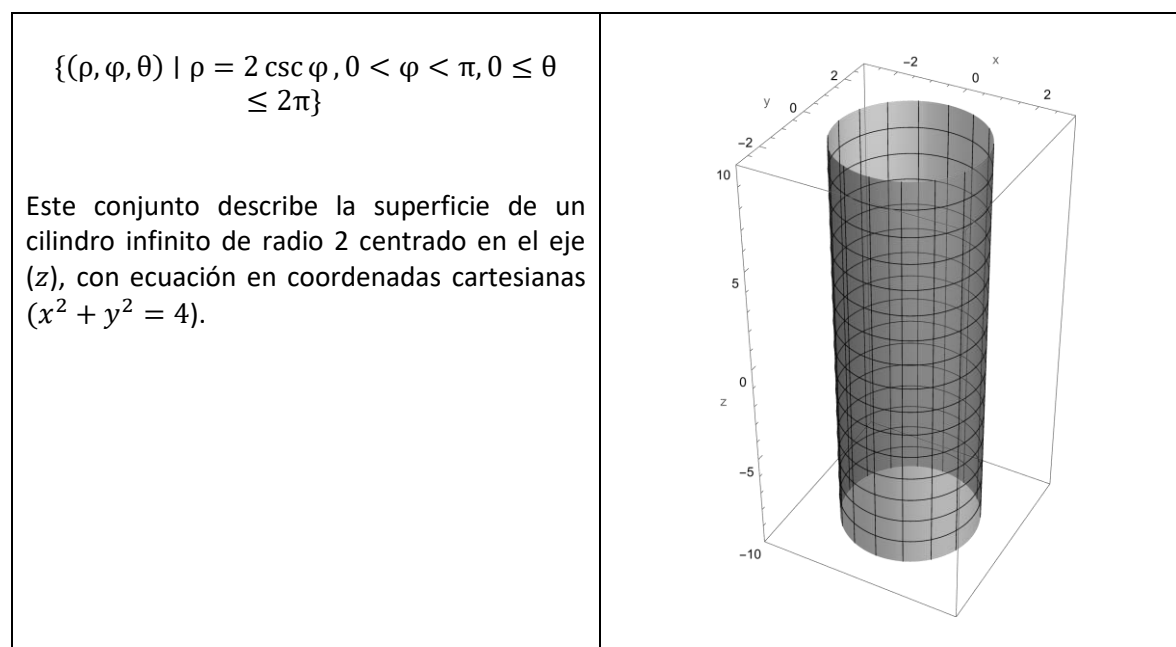
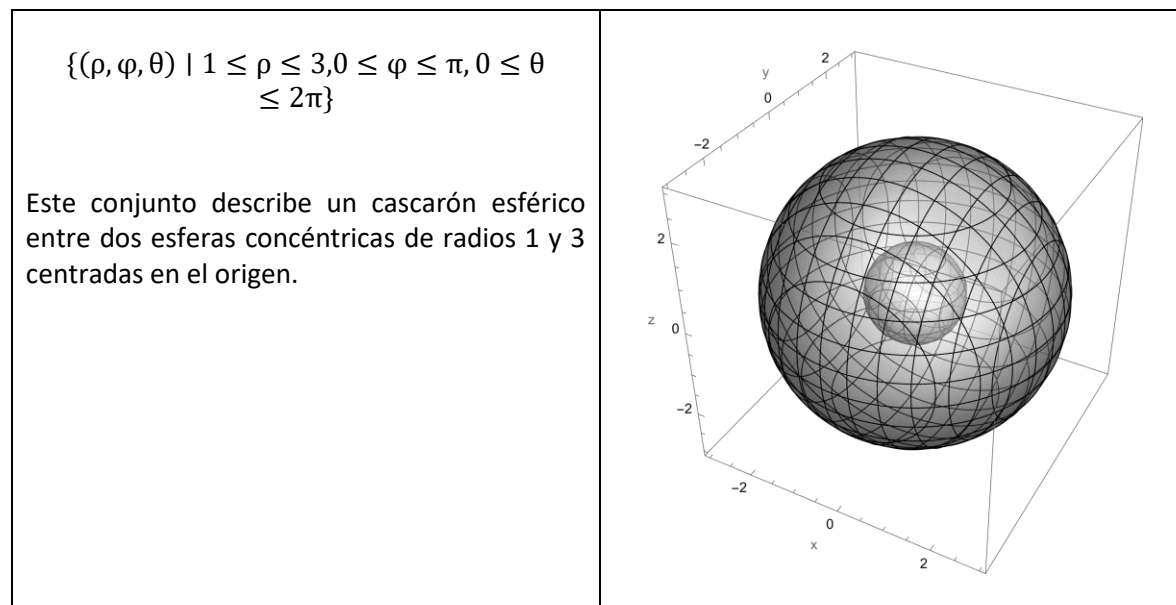
Entonces, la integral triple de (f) sobre (D) se transforma en

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{\varphi=\gamma}^{\delta} \int_{\rho=g(\varphi, \theta)}^{h(\varphi, \theta)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Si el integrando está dado en términos de coordenadas cartesianas (x, y, z) , debe expresarse en coordenadas esféricas antes de integrar. Al igual que con otras integrales triples, si $f = 1$, entonces la integral triple es igual al volumen de (D) . Si (f) es una función de densidad para un objeto que ocupa la región (D) , entonces la integral triple es igual a la masa del objeto.

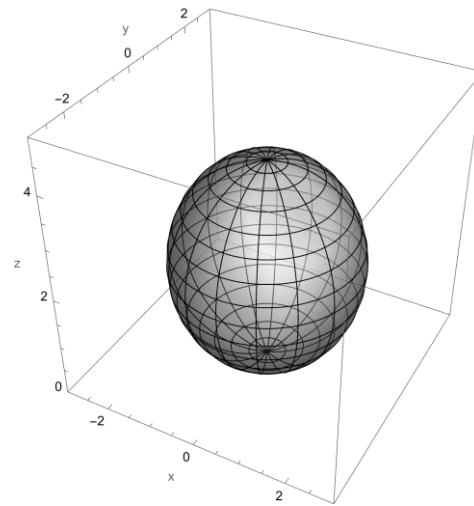
Problema No. 14

Conjuntos en coordenadas esféricas: Identifica y bosqueja los siguientes conjuntos en coordenadas esféricas.



$$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \rho = 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Este conjunto describe la superficie de la mitad superior de una esfera de radio 2 centrada en $(0,0,2)$, con ecuación en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$, para $(z \geq 0)$.



Problema No. 15

Integrales en coordenadas esféricas: Evalúa las siguientes integrales en coordenadas esféricas.

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} dV,$$

donde (D) es la bola unitaria

$$(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$$

En coordenadas esféricas,

$$(x = \rho \sin \phi \cos \theta), (y = \rho \sin \phi \sin \theta), (z = \rho \cos \phi),$$

y el elemento de volumen es

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Y el integrando se transforma en:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} = (\rho^2)^{5/2} = \rho^5.$$

La región (D) está definida por $(0 \leq \rho \leq 1), (0 \leq \theta \leq 2\pi), (0 \leq \phi \leq \pi)$.

Por lo tanto, la integral es:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^5 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^7 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi. \end{aligned}$$

Evaluamos cada integral:

$$\int_0^1 \rho^7 \, d\rho = \left[\frac{\rho^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = [-\cos \phi]_0^\pi = 2.$$

Por lo tanto, el valor de la integral es:

$$\frac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\iiint_D e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV,$$

donde (D) es la bola unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

En coordenadas esféricas

$$(x = \rho \sin \phi \cos \theta), (y = \rho \sin \phi \sin \theta), (z = \rho \cos \phi)$$

y el elemento de volumen es

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

El integrando se transforma en:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2, & (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \\ &= \rho^3, & e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= e^{-\rho^3}. \end{aligned}$$

La región (D) está definida por

$$(0 \leq \rho \leq 1), (0 \leq \theta \leq 2\pi), (0 \leq \phi \leq \pi).$$

Por lo tanto, la integral es:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

Separamos las integrales

$$\left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^2 e^{-\rho^3} \, d\rho \right).$$

Evaluamos cada una

$$\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = [-\cos \phi]_0^\pi = 2,$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$\int_0^1 \rho^2 e^{-\rho^3} \, d\rho.$$

Para esta última, hacemos $(u = \rho^3), (du = 3\rho^2 \, d\rho), (\rho^2 \, d\rho = \frac{du}{3})$.

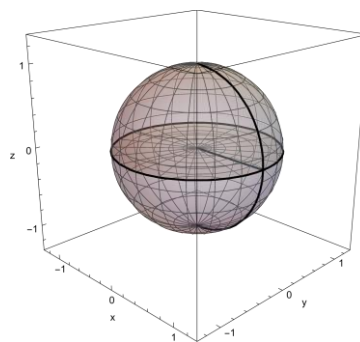
Los límites son $(u = 0)$ cuando $(\rho = 0)$, y $(u = 1)$ cuando $(\rho = 1)$.

Así:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^2 e^{-\rho^3} \, d\rho &= \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-u} \, du = \frac{1}{3} [-e^{-u}]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Combinando, El valor de la integral es:

$$2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{4 \sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

La integral está en coordenadas esféricas, donde el elemento de volumen es

($dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$), lo que implica que integramos la función

($f = 1$).

La región está definida por:

$$\begin{aligned} (0 \leq \theta \leq 2\pi), \\ (0 \leq \phi \leq \pi/3), \\ (0 \leq \rho \leq 4 \sec \phi) \end{aligned}$$

Separamos la integral

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/3} \sin \phi \cdot \left(\int_0^{4 \sec \phi} \rho^2 \, d\rho \right) d\phi \right).$$

Evaluamos cada parte

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4 \sec \phi} \rho^2 \, d\rho &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{4 \sec \phi} = \frac{64 \sec^3 \phi}{3} \\ &= \frac{64}{3 \cos^3 \phi}. \end{aligned}$$

Para la integral en ϕ

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \sin \phi \cdot \frac{64}{3 \cos^3 \phi} \, d\phi \\ = \frac{64}{3} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \, d\phi. \end{aligned}$$

Sustituimos ($u = \cos \phi$), ($du = -\sin \phi \, d\phi$)

$$\int \frac{\sin \phi}{\cos^3 \phi} \, d\phi = \int u^{-3} (-du) = \frac{1}{2u^2}$$

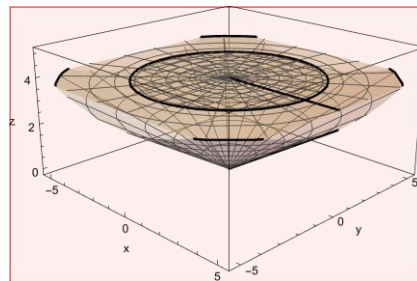
Evaluamos de

($\phi = 0$) ($u = 1$) a ($\phi = \pi/3$) ($u = 1/2$)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2 \cos^2 \phi} \right]_0^{\pi/3} &= \frac{1}{2(1/2)^2} - \frac{1}{2(1)^2} = 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

El valor de la integral es:

$$2\pi \cdot \frac{64}{3} \cdot \frac{3}{2} = 64\pi.$$



Encuentra el centro de masa del interior del hemisferio (D) de radio (a) con base en el plano (xy). La densidad es

$$\delta(\rho, \phi, \theta) = 2 - \frac{\rho}{a}$$

En coordenadas esféricas

($x = \rho \sin \phi \cos \theta$), ($y = \rho \sin \phi \sin \theta$), ($z = \rho \cos \phi$), ($dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$),

Con límites ($0 \leq \rho \leq a$), ($0 \leq \phi \leq \pi/2$), ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

La masa total es

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left(2 - \frac{\rho}{a}\right) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{5a^3}{12} = \frac{5\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

Para ($\bar{x}$), la integral en (θ) da

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0 \text{ implica } \bar{x} = 0.$$

Para ($\bar{y}$), la integral en (θ) da

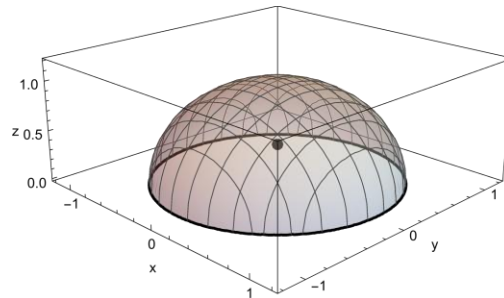
$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = \text{implica } \bar{y} = 0.$$

Para ($\bar{z}$), la integral en (θ) da

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (\rho \cos \phi) \left(2 - \frac{\rho}{a}\right) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^4}{10}}{\frac{5\pi a^3}{6}} = \frac{9a}{25} \end{aligned}$$

El centro de masa es:

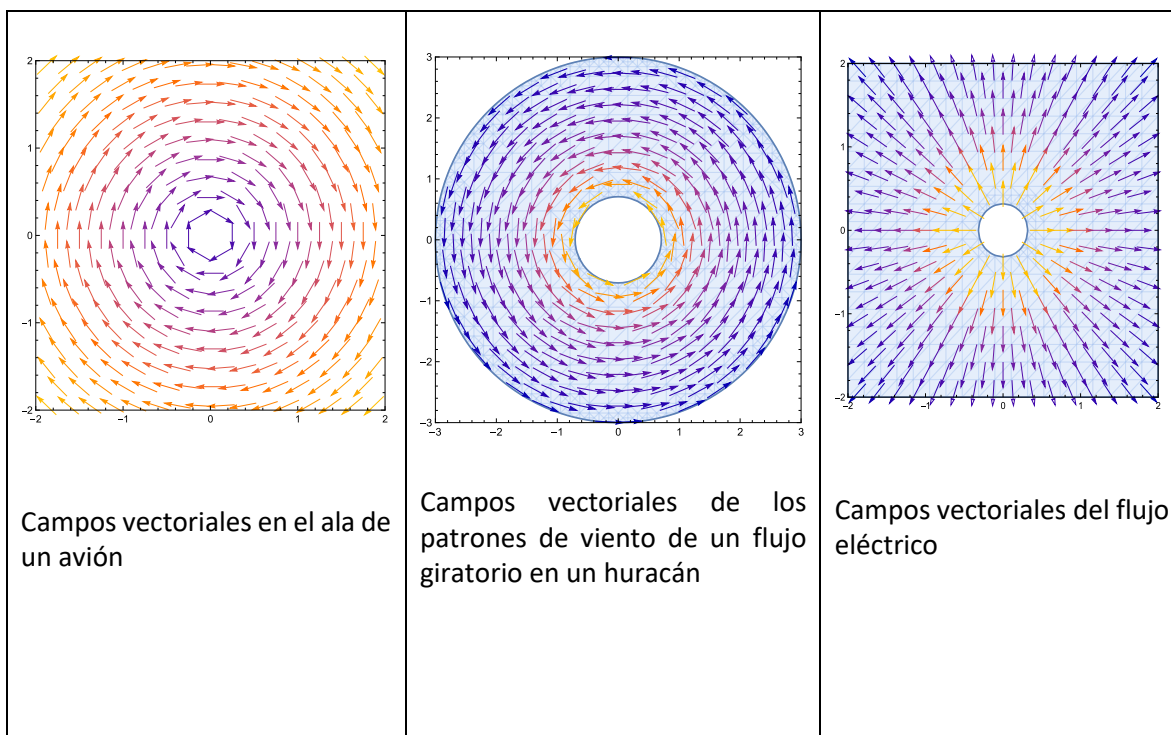
$$\left(0, 0, \frac{9a}{25}\right).$$



5.7 Campos vectoriales

Vivimos en un mundo lleno de fenómenos que pueden representarse mediante campos vectoriales. Imagina estar sentado en un asiento junto a la ventana, mirando hacia el ala de un avión comercial. Aunque no puedes verlo, el aire fluye rápidamente por encima y por debajo del ala. Concéntrate en un punto cerca del ala y visualiza el movimiento del aire en ese punto en un instante específico. Este movimiento se describe mediante un vector de velocidad con tres componentes: por ejemplo, este-oeste, norte-sur y arriba-abajo. En otro punto cerca del ala, en el mismo instante, el aire se mueve a una velocidad y dirección diferentes, y se asocia un vector de velocidad distinto a ese punto. En general, en un instante dado, cada punto alrededor del ala tiene un vector de velocidad asociado. Esta colección de vectores de velocidad —un vector único para cada punto en el espacio— es una función llamada campo vectorial.

Otros ejemplos de campos vectoriales incluyen los patrones de viento en un huracán y la circulación de agua en un intercambiador de calor. Los campos de fuerza gravitacional, magnética y eléctrica también se representan mediante campos vectoriales, al igual que las tensiones y deformaciones en edificios y puentes. Más allá de la física y la ingeniería, el transporte de un contaminante químico en un lago y los patrones de migración humana también pueden modelarse mediante campos vectoriales.



Campos vectoriales en dos dimensiones

Para consolidar la idea de un campo vectorial, comenzamos explorando campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$. Desde allí, es un paso corto hacia los campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$.

Definición

Campos Vectoriales en Dos Dimensiones

Sea (f) y (g) funciones definidas en una región (R) de $\mathbb{R}^2$. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función F que asigna a cada punto en (R) un vector $((f(x, y), g(x, y)))$. El campo vectorial se escribe como: $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ o $F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$. Un campo vectorial $F = (f, g)$ es continuo o diferenciable en una región (R) de $\mathbb{R}^2$ si las funciones (f) y (g) son continuas o diferenciables en (R) , respectivamente.

Un campo vectorial no puede representarse gráficamente en su totalidad. En cambio, graficamos una muestra representativa de vectores que ilustra la apariencia general del campo vectorial.

Consideremos el campo vectorial definido por $F(x, y) = (2x, 2y) = 2xi + 2yj$.

En puntos seleccionados $P(x, y)$, graficamos un vector con su origen en (P) igual al valor de $F(x, y)$. Por ejemplo, $F(1, 1) = (2, 2)$, por lo que dibujamos un vector igual a $(2, 2)$ con su origen en el punto $(1, 1)$. De manera similar, $F(-2, -3) = (-4, -6)$, por lo que en el punto $(-2, -3)$, dibujamos un vector igual a $(-4, -6)$. Podemos hacer las siguientes observaciones generales sobre el campo vectorial $F(x, y) = (2x, 2y)$.

Para cada (x, y) excepto $(0, 0)$, el vector $F(x, y)$ apunta en la dirección de $(2x, 2y)$, que es directamente hacia afuera desde el origen.

La longitud de $F(x, y)$ es

$$|F| = |(2x, 2y)| = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

la cual aumenta con la distancia desde el origen

Si (F) representa la velocidad de un fluido que se mueve en dos dimensiones, el gráfico del campo vectorial proporciona una imagen vívida de cómo un objeto pequeño, como un corcho, se mueve a través del fluido. En este caso, en cada punto del campo vectorial, una partícula se mueve en la dirección de la flecha en ese punto con una velocidad igual a la longitud de la flecha. Por esta razón, los campos vectoriales a veces se denominan *flujos*. Al dibujar campos vectoriales, a menudo es útil trazar curvas continuas que estén alineadas con el campo vectorial. Dichas curvas se llaman *curvas de flujo* o *líneas de corriente*; examinaremos sus propiedades en mayor detalle más adelante en esta sección.

Ejemplo No. 16

Dibuje vectores representativos del siguiente campo vectorial

$$F(x, y) = (0, x) = xj.$$

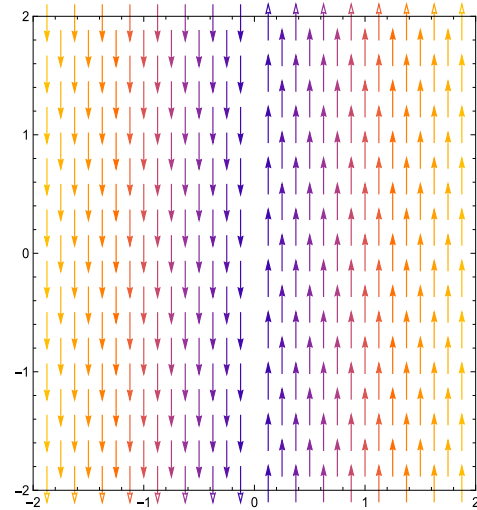
En cada punto (x, y) , el vector $F(x, y) = (0, x)$ apunta en la dirección del eje (y) , con una longitud igual a $|x|$. Por ejemplo:

$$\text{En } (1,1): F(1,1) = (0,1)$$

$$\text{En } (-2,0): F(-2,0) = (0,-2)$$

$$\text{En } (0,2): F(0,2) = (0,0)$$

Este campo vectorial es un campo de cizallamiento, ya que los vectores son verticales y su magnitud depende únicamente de la coordenada (x) .

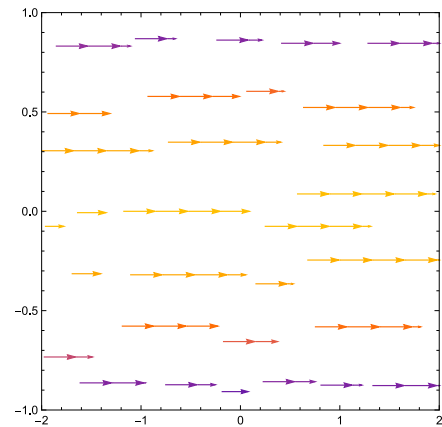


$$F(x, y) = (0, x) = xj.$$

$$F(x, y) = (1 - y^2, 0) = (1 - y^2)i,$$

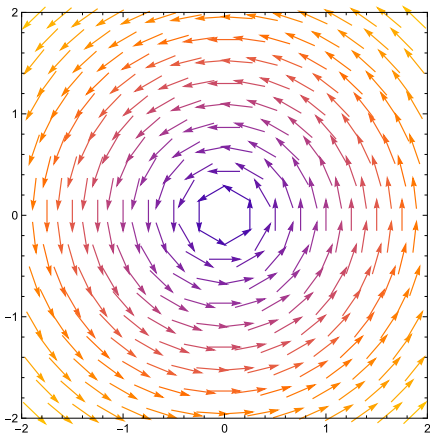
$$\text{para } |y| \leq 1.$$

Este campo vectorial representa un flujo de canal, donde los vectores son horizontales y su magnitud depende de (y) . En cada punto (x, y) , el vector $F(x, y) = (1 - y^2, 0)$ apunta en la dirección del eje (x) , con una longitud igual a $|1 - y^2|$. Por ejemplo:



$$F(x, y) = (1 - y^2, 0) = (1 - y^2)i,$$

$$\text{para } |y| \leq 1$$

$F(x, y) = (-y, x) = -yi + xj.$ Este campo vectorial representa un campo de rotación, ya que los vectores son perpendiculares a la dirección radial y generan un movimiento circular antihorario alrededor del origen. En cada punto (x, y), el vector $F(x, y) = (-y, x)$ tiene una magnitud igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por ejemplo: En $(1, 0)$: $F(1, 0) = (0, 1)$ En $(0, 1)$: $F(0, 1) = (-1, 0)$ En $(1, 1)$: $F(1, 1) = (-1, 1)$	 $F(x, y) = (-y, x) = -yi + xj.$
---	--

Campos vectoriales radiales en $\mathbb{R}^2$.

Los campos vectoriales radiales en $\mathbb{R}^2$ tienen la propiedad de que sus vectores apuntan directamente hacia o desde el origen en todos los puntos (excepto el origen), paralelos a los vectores de posición $r = (x, y)$. Trabajaremos con campos vectoriales radiales de la forma $F(x, y) = \frac{r}{|r|^p} = \frac{(x, y)}{|r|^p}$, donde (p) es un número real. Estos campos vectoriales (y sus equivalentes tridimensionales) desempeñan un papel importante en muchas aplicaciones. Por ejemplo, las fuerzas centrales, como las fuerzas gravitacionales o electrostáticas entre masas puntuales o cargas, se describen mediante campos vectoriales radiales. Estas fuerzas obedecen una ley de inverso del cuadrado en la que la magnitud de la fuerza es proporcional a $(\frac{1}{|r|^2})$.

Definición

Campos vectoriales radiales en $\mathbb{R}^2$

Sea $r = (x, y)$. Un campo vectorial de la forma $F = f(x, y)r$, donde (f) es una función escalar, es un campo vectorial radial. De particular interés son los campos vectoriales radiales

$$F(x, y) = \frac{r}{|r|^p} = \frac{(x, y)}{|r|^p},$$

donde (p) es un número real. En cada punto (excepto el origen), los vectores de este campo están dirigidos hacia afuera desde el origen con una magnitud de $|F| = |r|^{1-p}$

Campos vectoriales en tres dimensiones

Los campos vectoriales en tres dimensiones son conceptualmente iguales a los campos vectoriales en dos dimensiones. El vector (F) ahora tiene tres componentes, cada una de las cuales depende de tres variables.

Definición

Campos vectoriales y campos vectoriales radiales en $\mathbb{R}^3$

Sean (f), (g) y (h) funciones definidas en una región (D) de $\mathbb{R}^3$. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función (F) que asigna a cada punto en (D) un vector $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$. El campo vectorial se escribe como

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad \text{o}$$

$$F(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k.$$

Un campo vectorial $F = (f, g, h)$ es continuo o diferenciable en una región (D) de $\mathbb{R}^3$ si (f), (g) y (h) son continuas o diferenciables en (D), respectivamente. De particular importancia son los campos vectoriales radiales

$$F(x, y, z) = \frac{r}{|r|^p} = \frac{(x, y, z)}{|r|^p},$$

donde (p) es un número real

Ejemplo No. 17

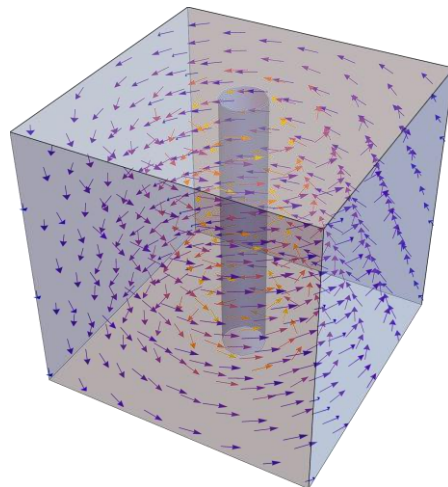
$$F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Este campo modela un vórtice en el plano (xy), con vectores perpendiculares al radio desde el eje (z) y magnitud ($|F| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$). Algunos ejemplos de vectores representativos son:

$$\text{En } ((1, 0, 0)): (F(1, 0, 0) = (0, 1, 0)).$$

$$\text{En } ((0, 1, 0)): (F(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)).$$

$$\text{En } ((1, 1, 1)): (F(1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)).$$



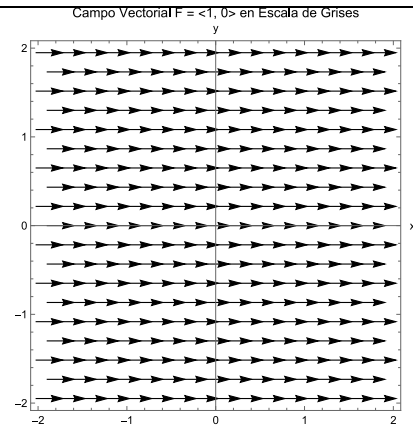
Problema No. 18.

Esboza los siguientes campos vectoriales.

$$F(x, y) = \langle 1, 0 \rangle$$

Para el campo vectorial $F = \langle 1, 0 \rangle$, cada vector en el plano tiene una componente constante de 1 en la dirección (x) y 0 en la dirección (y) .

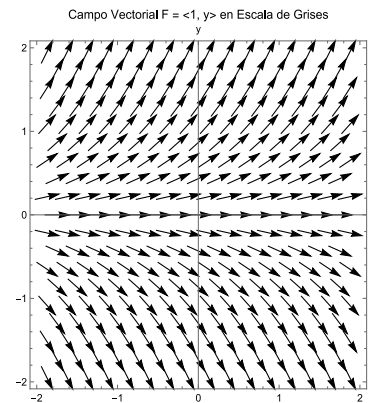
Esto significa que en cada punto $((x, y))$, el vector es $\langle 1, 0 \rangle$, apuntando horizontalmente hacia la derecha con magnitud 1.



$$F(x, y) = \langle 1, y \rangle$$

El campo vectorial $F = \langle 1, y \rangle$ asigna un vector $\langle 1, y \rangle$ a cada punto $((x, y))$. Tiene una componente (x) constante de 1 (desplazamiento horizontal a la derecha) y una componente (y) que varía con (y) : hacia arriba si $y > 0$, horizontal si $y = 0$, y hacia abajo si $y < 0$.

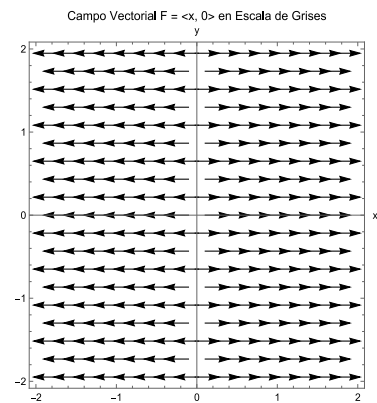
La magnitud es $|F(x, y)| = \sqrt{1^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2}$. En el gráfico en escala de grises, los vectores son negros, mostrados en una cuadrícula de $[-2, 2] \times [-2, 2]$



$$F(x, y) = \langle x, 0 \rangle$$

Este campo asigna un vector $\langle x, 0 \rangle$ a cada punto (x, y) en el plano. La componente en (x) varía linealmente con (x) , mientras que la componente en (y) es siempre cero. Los vectores son horizontales: apuntan hacia la derecha si $(x > 0)$, son nulos si $(x = 0)$, y apuntan hacia la izquierda si $(x < 0)$. La magnitud del campo vectorial es:

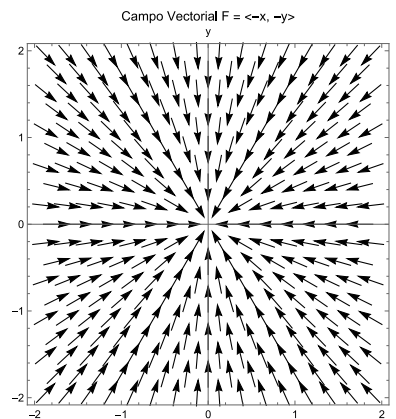
$$|F(x, y)| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$



$$F(x, y) = \langle -x, -y \rangle$$

Este campo asigna un vector $\langle -x, -y \rangle$ a cada punto (x, y) en el plano. Los vectores apuntan hacia el origen $(0,0)$, ya que la componente en (x) , $(-x)$, es opuesta a la coordenada (x) , y la componente en (y) , $(-y)$, es opuesta a (y) . La magnitud del campo vectorial es:

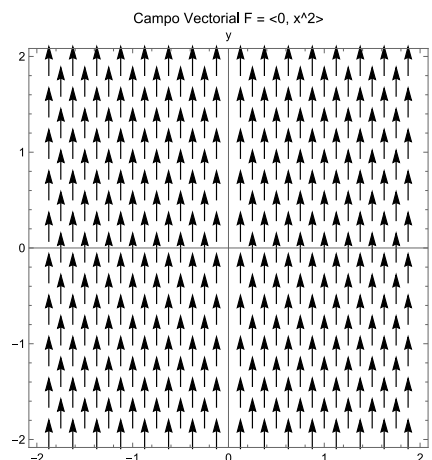
$$|F(x, y)| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$F(x, y) = \langle 0, x^2 \rangle$$

Este campo asigna un vector $\langle 0, x^2 \rangle$ a cada punto (x, y) en el plano. La componente en (x) es siempre cero, y la componente en (y) , (x^2) , es no negativa, lo que resulta en vectores verticales que apuntan hacia arriba (dirección positiva de (y)). La longitud de los vectores es (x^2) , siendo nula en el eje (y) ($x = 0$) y aumentando con $|x|$. La magnitud del campo vectorial es:

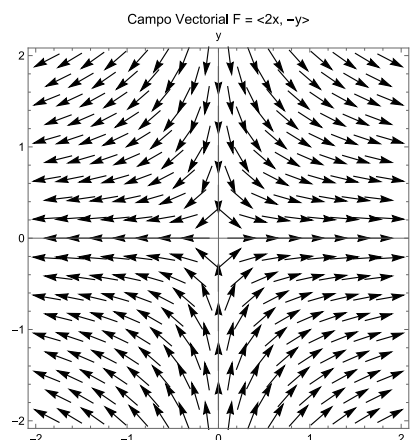
$$|F(x, y)| = \sqrt{0^2 + (x^2)^2} = x^2$$



$$F(x, y) = \langle 2x, -y \rangle$$

Este campo asigna un vector $\langle 2x, -y \rangle$ a cada punto (x, y) en el plano. La componente en (x) , $(2x)$, es proporcional a (x) , apuntando a la derecha si $(x > 0)$ y a la izquierda si $(x < 0)$. La componente en (y) , $(-y)$, apunta hacia abajo si $(y > 0)$ y hacia arriba si $(y < 0)$. La magnitud del campo vectorial es:

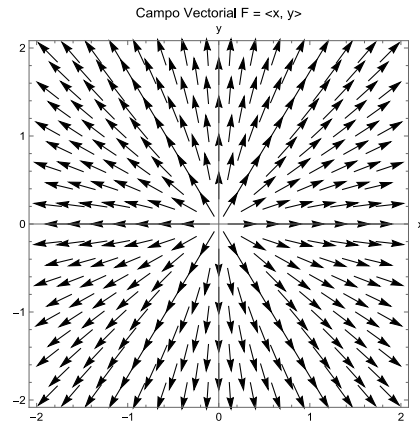
$$|F(x, y)| = \sqrt{(2x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{4x^2 + y^2}$$



Problema No. 19

Consideremos el campo vectorial radial en $(\mathbb{R}^2)$ definido por: $F(x, y) = \langle x, y \rangle$

Este campo asigna un vector $\langle x, y \rangle$ a cada punto $((x, y))$, apuntando radialmente hacia afuera desde el origen $((0,0))$. La magnitud es: $|F(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

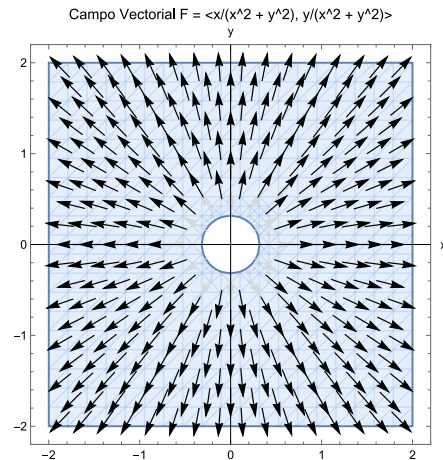


Sea el campo vectorial radial

$$F(x, y) = \frac{r}{|r|^p} = \frac{\langle x, y \rangle}{|r|^p},$$

donde $r = \langle x, y \rangle$ y $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Este es un campo vectorial radial en $\mathbb{R}^2$ cuya dirección es la del vector posición (hacia afuera del origen), y su magnitud depende de la distancia al origen elevada a la potencia (p) .

Por ejemplo, en $(1,2)$, $F(1,2) = \left\langle \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle \approx \langle 0.2, 0.4 \rangle$.



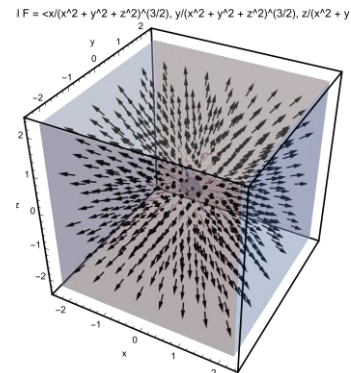
Problema No. 20

Consideremos el campo vectorial radial en $(\mathbb{R}^3)$: $F(x, y, z) = \frac{\langle x, y, z \rangle}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

Los vectores apuntan radialmente hacia afuera desde el origen, con magnitud:

$$|F(x, y, z)| = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Por ejemplo, en $(1,1,1)$, $F(1,1,1) \approx \langle 0.192, 0.192, 0.192 \rangle$. El campo no está definido en $(0,0,0)$, donde $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.



5.8 Integrales de línea

Con integrales de una sola variable, integramos sobre intervalos en R (la recta real). Con integrales dobles y triples, integramos sobre regiones en R^2 o R^3 . Las integrales de línea (que realmente deberían llamarse integrales de curva) son otra clase de integrales que juegan un papel importante en el cálculo vectorial. Se utilizan para integrar funciones de valor escalar o campos vectoriales a lo largo de curvas.

Supongamos que una placa circular delgada tiene una distribución de temperatura conocida y se debe calcular la temperatura promedio a lo largo del borde de la placa. Este cálculo requiere integrar la función de temperatura sobre el contorno curvo de la placa. De manera similar, para calcular la cantidad de trabajo necesario para poner un satélite en órbita, integramos la fuerza gravitacional (un campo vectorial) a lo largo de la trayectoria curva del satélite. Ambos cálculos requieren integrales de línea. Como se verá, las integrales de línea toman varias formas diferentes. El objetivo de esta sección es distinguir entre estas diversas formas y mostrar cómo y cuándo debe usarse cada una.

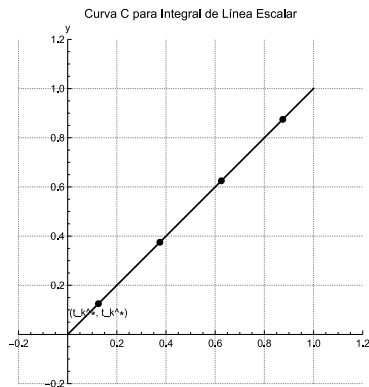
Nos enfocamos primero en las integrales de línea de funciones de valor escalar sobre curvas en el plano (xy). Supongamos que (C) es una curva suave de longitud finita dada por:

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{para } a < t < b.$$

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en (n) subintervalos usando los puntos de la cuadrícula

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Esta partición de $[a, b]$ divide la curva (C) en (n) *sub arcos* (Figura No. 1), donde la longitud del arco del (k) – *ésimo sub arco* se denota (Δs_k) . Sea (t_k^*) un punto en el (k) – *ésimo sub intervalo* $[t_{k-1}, t_k]$, que corresponde a un punto $(x(t_k^*), y(t_k^*))$ en el (k) – *ésimo sub arco* de (C) , para $(k = 1, 2, \dots, n)$.



El parámetro (t) reside en el eje (t) . A medida que (t) varía de (a) a (b) , la curva (C) en el plano (xy) se genera desde $(x(a), y(a))$ hasta $(x(b), y(b))$.

Ahora consideremos una función de valor escalar ($z = f(x, y)$) definida en una región que contiene a (C) . Evaluando (f) en $(x(t_k^*), y(t_k^*))$ y multiplicando este valor por (Δs_k) , formamos la suma:

Definición

Integral de línea escalar en el plano

Supongamos que la función de valor escalar (f) está definida en una región que contiene la curva suave (C) dada por $r(t) = (x(t), y(t))$, para ($a < t < b$). La integral de línea de (f) sobre (C) es

$$\int_C f(x(t), y(t)) \, ds = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x(t_k), y(t_k)) \Delta s_k,$$

siempre que este límite exista sobre todas las particiones de $[a, b]$. Cuando el límite existe, se dice que (f) es integrable en (C).

Las notaciones más compactas ($\int_C f(r(t)) \, ds$), ($\int_C f(x, y) \, ds$) y ($\int_C f \, ds$) también se utilizan para la integral de línea de (f) sobre (C). Se puede demostrar que si (f) es continua en una región que contiene (C), entonces (f) es integrable sobre (C).

Existen varias interpretaciones útiles de la integral de línea de una función escalar. Si ($f(x, y) = 1$), la integral de línea ($\int_C ds$) proporciona la longitud de la curva (C), de manera similar a como la integral ordinaria ($\int_a^b dx$) da la longitud del intervalo ($[a, b]$), que es ($b - a$). Si ($f(x, y) > 0$) en (C), entonces ($\int_C f(x, y) \, ds$) puede interpretarse como el área de un lado de la superficie vertical, similar a una cortina, que se encuentra entre los gráficos de (f) y (C). Esta interpretación surge al considerar el producto ($f(x(t_k), y(t_k)) \Delta s_k$) como una aproximación al área del (k) – ésimo panel de la cortina. De manera similar, si (f) es una función de densidad para un alambre delgado representado por la curva (C), entonces ($\int_C f(x, y) \, ds$) proporciona la masa del alambre; el producto ($f(x(t_k), y(t_k)) \Delta s_k$) es una aproximación a la masa de la (k) – ésima pieza del alambre.

Teorema

Evaluación de integrales de línea escalares en ($\mathbb{R}^2$)

Sea f una función continua en una región que contiene una curva suave $C: r(t)$ para $a < t < b$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_a^b f(x(t), y(t)) |r'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt. \end{aligned}$$

Si (t) representa el tiempo y (C) es la trayectoria de un objeto en movimiento, entonces ($|r'(t)|$) es la velocidad del objeto. El factor de velocidad ($|r'(t)|$) que aparece en la integral relaciona la distancia recorrida a lo largo de la curva, medida por (s), con el tiempo transcurrido, medido por el parámetro (t). Observa que si ($f(x, y) = 1$), entonces la integral de línea es

$(\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt)$, que es la fórmula de la longitud de arco para (C) . El Teorema conduce al siguiente procedimiento para evaluar integrales de línea.

Procedimiento para evaluar la integral de línea $(\int_C f ds)$

Encuentra una descripción paramétrica de (C) en la forma $r(t) = (x(t), y(t))$, para $a < t < b$.

Calcula $|r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

Realiza las sustituciones para (x) e (y) en el integrando y evalúa una integral ordinaria:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |r'(t)| dt.$$

Integrales de línea en (R^3)

El razonamiento que conduce a las integrales de línea en curvas planas se extiende inmediatamente a tres o más dimensiones. A continuación, se presenta el teorema de evaluación correspondiente para integrales de línea en (R^3) .

Teorema

Evaluación de integrales de línea escalares en R^3

Sea (f) una función continua en una región que contiene una curva suave

$C: r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $a < t < b$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Problema No. 21

Evalúa las siguientes integrales de línea a lo largo de la curva (C).

Evaluación de la integral de línea $\int_C xy \, ds$

Dada la función $f(x, y) = xy$ y la curva (C) parametrizada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, calculamos la integral de línea $\int_C xy \, ds$.

$$r(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces, $(x(t) = \cos t)$, $(y(t) = \sin t)$, y la función es:

$$f(x(t), y(t)) = x(t)y(t) = \cos t \cdot \sin t.$$

Calcular $|r'(t)|$: Derivamos $r(t)$:

$$r'(t) = \frac{d}{dt}(\cos t, \sin t) = (-\sin t, \cos t).$$

Configurar la integral: La integral de línea es:

$$\begin{aligned} \int_C xy \, ds &= \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot \sin t) \cdot 1 \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt. \end{aligned}$$

Usamos la identidad ($\cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t \, dt. \end{aligned}$$

La primitiva es:

$$\int \sin 2t \, dt = -\frac{1}{2} \cos 2t.$$

Evaluamos:

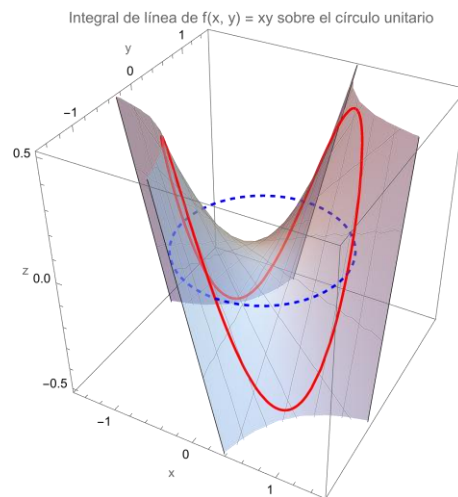
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{2\pi} \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 4\pi + \frac{1}{2} \cos 0 \right). \end{aligned}$$

Como ($\cos 4\pi = \cos 0 = 1$):

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto:

$$\int_C xy \, ds = 0.$$



Problema No. 22

Evaluación de la integral de línea $\int_C (x^2 - 2y^2) ds$

Dada la función $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ y la curva parametrizada por $(C) \quad r(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \leq t \leq 4$, calculamos la integral de línea $\int_C (x^2 - 2y^2) ds$.

Parametrización y función: La curva (C) está dada por: $r(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \leq t \leq 4$.

Entonces, $(x(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}})$, y la función es: $f(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - 2 \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} - t^2 = -\frac{t^2}{2}$.

$|r'(t)|$: Derivamos $r(t)$:

$$r'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

La magnitud es:

$$|r'(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

La integral de línea es:

$$\int_C (x^2 - 2y^2) ds = \int_0^4 \left(-\frac{t^2}{2} \right) \cdot 1 dt = \int_0^4 -\frac{t^2}{2} dt.$$

Calculamos:

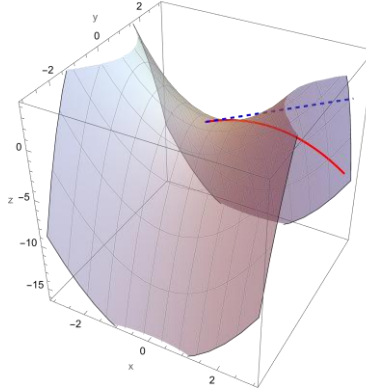
$$\int_0^4 -\frac{t^2}{2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^4 t^2 dt.$$

La primitiva es: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3}$.

Evaluamos: $-\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{64}{3} = -\frac{32}{3}$.

Por lo tanto: $\int_C (x^2 - 2y^2) ds = -\frac{32}{3}$.

Integral de línea de $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ sobre el segmento de línea

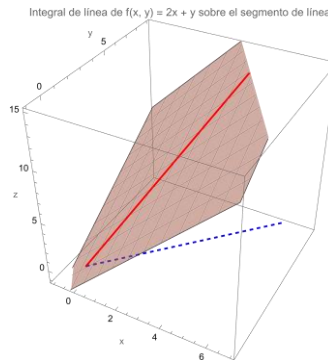


Problema No. 23

Evaluación de la integral de línea

$\int_C (2x + y) \, ds$, $(f(x, y) = 2x + y)$, $(C): (r(t) = (3t, 4t)), (0 \leq t \leq 2)$, $(x(t) = 3t), (y(t) = 4t)$, $f(x(t), y(t)) = 2(3t) + 4t = 10t$, $(r'(t) = (3, 4))$, $|r'(t)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$$\int_C (2x + y) \, ds = \int_0^2 10t \cdot 5 \, dt = 50 \int_0^2 t \, dt = 50 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 50 \cdot 2 = 100.$$



Problema No. 24

$(f(x, y) = xy^3)$, $(C: r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)), (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$. $(x(t) = 2 \cos t), (y(t) = 2 \sin t)$.

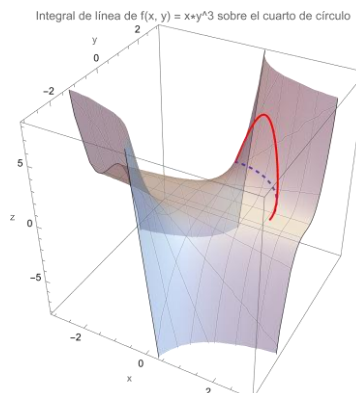
$(f(x(t), y(t)) = (2 \cos t)(2 \sin t)^3 = 16 \cos t \sin^3 t)$.

$(r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t))$. $(|r'(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2)$.

$$\int_C xy^3 \, ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^3 t \cdot 2 \, dt = 32 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^3 t \, dt.$$

$(u = \sin t), (du = \cos t \, dt), (t = 0 \rightarrow u = 0), (t = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1)$.

$$32 \int_0^1 u^3 \, du = 32 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8.$$



Definición

Integral de línea de un campo vectorial

Sea (F) un campo vectorial continuo en una región que contiene una curva suave orientada (C) , parametrizada por longitud de arco. Sea (T) el vector tangente unitario en cada punto de (C) , consistente con la orientación. La integral de línea de (F) sobre (C) es $(\int_C F \cdot T ds)$.

Al igual que hicimos con las integrales de línea de funciones escalares, necesitamos un método para evaluar integrales de línea vectoriales cuando el parámetro no es la longitud de arco. Supongamos que (C) tiene una parametrización $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $a < t < b$.

$$\int_C F \cdot T ds,$$

$$r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), |r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}, ds = |r'(t)| dt,$$

$$F \cdot T ds = F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \cdot |r'(t)| dt = F(r(t)) \cdot r'(t) dt, \int_C F \cdot T ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Diferentes formas de las integrales de línea de campos vectoriales

La integral de línea $\int_C F \cdot T ds$ puede expresarse en las siguientes formas, donde $F = (f, g, h)$ y (C) tiene una parametrización $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $a < t < b$:

$$\begin{aligned} \int_a^b F \cdot r'(t) dt &= \int_a^b (f(t)x'(t) + g(t)y'(t) + h(t)z'(t)) dt \\ &= \int_C f dx + g dy + h dz \\ &= \int_C F \cdot dr. \end{aligned}$$

Para integrales de línea en el plano, tomamos $F = (f, g)$ y asumimos que (C) está parametrizada como $r(t) = (x(t), y(t))$, para $a < t < b$. Entonces:

$$\int_a^b F \cdot r'(t) dt = \int_a^b (f(t)x'(t) + g(t)y'(t)) dt = \int_C f dx + g dy = \int_C F \cdot dr.$$

Problema No. 25

Integrales de línea de campos vectoriales en el plano: Dados los siguientes campos vectoriales y curvas orientadas (C), evalúa $\int_C F \cdot T \, ds$

Dado el campo vectorial: $F = (x, y)$ y la curva C parametrizada por $r(t) = (4t, t^2)$, para $0 \leq t \leq 1$, evaluamos $\int_C F \cdot T \, ds$.

Campo y curva:

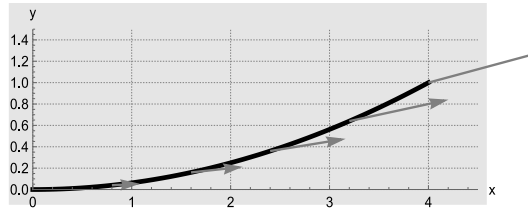
$$F(r(t)) = (4t, t^2), (r'(t) = (4, 2t)), (|r'(t)| = 2\sqrt{4 + t^2}), (T(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\right)).$$

Producto escalar: $F \cdot T = \frac{8t+t^3}{\sqrt{4+t^2}}, \quad ds = 2\sqrt{4+t^2} \, dt.$

Integral

$$\int_C F \cdot T \, ds = \int_0^1 2(8t + t^3) \, dt = 2 \left[4t^2 + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{2}.$$

$$\left(\int_C F \cdot T \, ds = \frac{17}{2} \right).$$



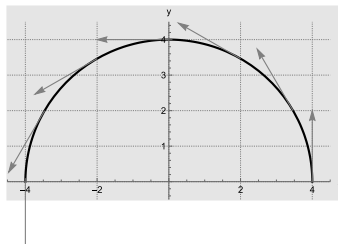
Problema No. 26

Dado el campo vectorial ($F = (-y, x)$) y la curva (C) parametrizada por ($r(t) = (4 \cos t, 4 \sin t)$), para $0 \leq t \leq \pi$, evaluamos $\int_C F \cdot T \, ds$.

Campo y curva: $F(r(t)) = (-4 \sin t, 4 \cos t)$, ($r'(t) = (-4 \sin t, 4 \cos t)$), ($|r'(t)| = 4$), ($T(t) = (-\sin t, \cos t)$).

Producto escalar: $F \cdot T = 4(\sin^2 t + \cos^2 t) = 4, \quad ds = 4 \, dt.$

Integral: $\int_C F \cdot T \, ds = \int_0^\pi 4 \cdot 4 \, dt = 16 \int_0^\pi dt = 16\pi.$



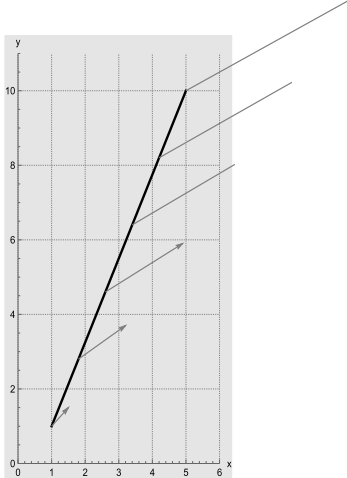
Problema No. 27

Campo y curva: Parametrizamos $(r(t) = (1 + 4t, 1 + 9t))$, $(0 \leq t \leq 1)$. Entonces,

$$(F(r(t)) = (1 + 9t, 1 + 4t)), (r'(t) = (4, 9)), (|r'(t)| = \sqrt{97}), (T(t) = \left(\frac{4}{\sqrt{97}}, \frac{9}{\sqrt{97}}\right)).$$

Producto escalar: $F \cdot T = \frac{13+72t}{\sqrt{97}}, \quad ds = \sqrt{97} dt.$

Integral: $\int_C F \cdot T ds = \int_0^1 (13 + 72t) dt = [13t + 36t^2]_0^1 = 49.$



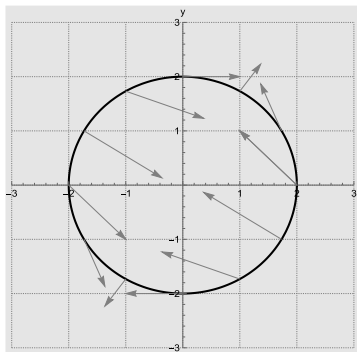
Problema No. 28

Dado el campo vectorial $F = (y - x, x)$ y la curva (C) parametrizada por $(r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t))$, para $(0 \leq t \leq 2\pi)$, evaluamos $(\int_C F \cdot T ds)$.

Campo y curva: $(F(r(t)) = (2 \sin t - 2 \cos t, 2 \cos t)), (r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)), (|r'(t)| = 2), (T(t) = (-\sin t, \cos t))$.

Producto escalar: $F \cdot T = 2 \cos(2t) + \sin(2t), \quad ds = 2 dt.$

Integral: $\int_C F \cdot T ds = 2 \int_0^{2\pi} [2 \cos(2t) + \sin(2t)] dt = 2 \left[\sin(2t) - \frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{2\pi} = 0.$



Problema No. 29

Evalúa: $\int_C F \cdot T \, ds$, donde $(F = (x + y, x - y))$ y (C) es el segmento de recta desde $((0,0))$ hasta $((1,1))$.

Método 1: $\int_C F \cdot T \, ds$

Campo y curva: $(r(t) = (t, t)), (0 \leq t \leq 1)$. Entonces, $(F(r(t)) = (2t, 0))$, $(r'(t) = (1, 1))$, $(|r'(t)| = \sqrt{2})$, $(T(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}))$.

Producto escalar: $F \cdot T = \sqrt{2}t$, $(ds = \sqrt{2} \, dt)$

Integral: $\int_C F \cdot T \, ds = \int_0^1 (\sqrt{2}t) \cdot (\sqrt{2} \, dt) = \int_0^1 2t \, dt = [t^2]_0^1 = 1$.

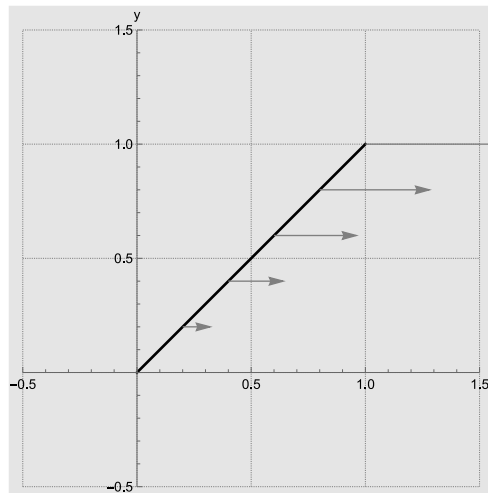
Método 2: $\int_C F \cdot dr$

Producto escalar: $(F \cdot r'(t) = (2t, 0) \cdot (1, 1) = 2t)$.

Integral: $\int_C F \cdot dr = \int_0^1 2t \, dt = [t^2]_0^1 = 1$.

Método 3: $(f = x + y = 2t), (g = x - y = 0), (dx = dt), (dy = dt)$

Integral: $\int_C (x + y) \, dx + (x - y) \, dy = \int_0^1 (2t \cdot dt + 0 \cdot dt) = \int_0^1 2t \, dt = [t^2]_0^1 = 1$.



Integral de línea cerrada

Una integral de línea cerrada calcula la circulación de un campo vectorial $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ a lo largo de una curva cerrada (C): $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Interpretación geométrica: Mide el "giro" neto del campo a lo largo de (C). Si es cero, el campo puede ser conservativo.

Interpretación física: Representa el trabajo neto de una fuerza o la circulación de un fluido en un contorno cerrado.

Relación con divergencia y rotacional:

Teorema de Green (2D): $\oint_C (F_x dx + F_y dy) = \iint_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA$

Teorema de Stokes (3D): $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$

5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física. Aplicaciones

Divergencia

Definición: Para un campo vectorial $(F = (F_x, F_y, F_z))$, la divergencia es:

$$\text{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Interpretación Geométrica: Mide la "expansión" o "contracción" del campo en un punto, representando el flujo neto que sale (divergencia positiva) o entra (divergencia negativa) en un volumen infinitesimal.

Interpretación Física: En fluidos, indica fuentes (por ejemplo, manantial) o sumideros (ejemplo, drenaje). En electromagnetismo, se relaciona con la densidad de carga.

Rotacional

Definición: Para $(F = (F_x, F_y, F_z))$, el rotacional es:

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Interpretación Geométrica

Describe la "rotación" local del campo alrededor de un punto. Su magnitud indica la intensidad de la rotación, y su dirección (en 3D) el eje de rotación.

Interpretación Física: En fluidos, representa el giro local (e.g., vórtices). En electromagnetismo, está relacionado con campos magnéticos generados por corrientes o campos eléctricos variables.

Relaciones Clave

Teorema de la Divergencia}: Relaciona la divergencia con el flujo a través de una superficie cerrada:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teorema de Stokes: Conecta el rotacional con la circulación a lo largo de una curva cerrada:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Problema No. 30.

Algunos ejemplos de integrales de línea cerrada

Ejemplo 1: Ley de Faraday $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	Ejemplo 2: Campo gravitacional $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA = 0$
Ejemplo 3: Circulación en un fluido $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dS$	Ejemplo 4: Circulación en un campo magnético (Ley de Ampère) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 I_{\text{enc}}$

Problema No. 31

Circulación de un campo electromagnético (Ley de Faraday)

En electromagnetismo, la ley de Faraday relaciona la integral de línea cerrada del campo eléctrico

($\vec{E}$) con la tasa de cambio del flujo magnético: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$

Consideremos el campo $\vec{E} = (-y, x, 0)$ y la curva cerrada (C) como el círculo unitario en el plano (xy), parametrizado ($\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$), ($t \in [0, 2\pi]$)

Cálculo directo. El campo en la curva es: $\vec{E}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t, 0)$.

El elemento diferencial es:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\cos t, \sin t, 0) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

El producto escalar es:

$$\vec{E} \cdot \vec{r}' = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + (0)(0) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

La integral de línea cerrada es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Usando el teorema de Stokes. El teorema de Stokes establece:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS.$$

Calculamos el rotacional:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) = (0, 0, 1 - (-1)) = (0, 0, 2).$$

La superficie (S) es el disco unitario en el plano (xy), con ($\hat{n} = \hat{k}$). Entonces:

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} = (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) = 2.$$

La integral de superficie es:

$$\iint_S 2 dA = 2 \cdot \text{Área del disco} = 2 \cdot \pi = 2\pi.$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Interpretación. La circulación no nula ((2π)) indica que el campo eléctrico no es conservativo, consistente con un cambio en el flujo magnético ($\frac{d\Phi_B}{dt} = -2\pi$), como predice la ley de Faraday.

5.10 Teorema de integrales. Aplicaciones

Las **integrales múltiples** (dobles, triples, etc.) generalizan el concepto de integración a funciones de varias variables. A continuación, presentamos los principales teoremas y herramientas relacionadas con ellas.

Teorema	Descripción	Aplicación	Fórmula
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC-1)	Establece que la derivada de la integral de una función desde a hasta x es igual a $f(x)$	Calcular derivadas de integrales con límite variable	$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$
Teorema Fundamental del Cálculo (TFC-2)	Permite evaluar integrales definidas usando antiderivadas	Cálculo de áreas bajo curvas	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
Teorema de Fubini	Permite descomponer integrales dobles en integrales iteradas	Simplificar cálculo de integrales múltiples	$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$
Cambio de Variable (Jacobiano)	Generaliza la sustitución para integrales múltiples usando determinante Jacobiano	Transformar coordenadas (polares, cilíndricas)	$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u, v) J(u, v) du dv$
Teorema de Green	Relaciona integral de línea sobre curva cerrada con integral doble	Calcular trabajo/flujo en el plano	$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$
Teorema de la Divergencia	Conecta flujo a través de superficie con integral de divergencia en volumen	Flujo en electromagnetismo, fluidos	$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$
Teorema de Stokes	Relaciona circulación con flujo del rotacional	Verificar campos conservativos	$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Conclusiones

El capítulo de Integrales Múltiples, forjado con incontables horas de trabajo y una profunda pasión por la enseñanza, ofrece una base esencial para comprender fenómenos físicos y resolver problemas en ingeniería. En Cálculo de áreas e integrales dobles, se establecen los fundamentos para calcular áreas y magnitudes bidimensionales, cruciales en diseño y análisis estructural. Integral doble en coordenadas rectangulares detalla la evaluación de integrales en regiones generales, aplicable en distribución de cargas. Integrales iteradas simplifica estas integrales en pasos sucesivos, optimizando cálculos en física e ingeniería. Integral doble en coordenadas polares facilita la integración en regiones circulares, como en problemas de electromagnetismo. Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen permite calcular volúmenes, esencial en mecánica de sólidos. Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas optimiza cálculos en sistemas con simetrías, como en dinámica de fluidos. Campos vectoriales modela fenómenos como flujos o campos electromagnéticos. La integral de línea calcula trabajo en trayectorias, vital en mecánica. Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física analiza flujo y rotación, fundamentales en hidráulica y aerodinámica. Teoremas de integrales. Aplicaciones, con los teoremas de Green, Stokes y Gauss, y más de 50 problemas resueltos, conecta estos conceptos con aplicaciones en ingeniería, como análisis de tensiones o electromagnetismo.

Este material, reflejo de mi compromiso con la formación académica, busca ser una herramienta valiosa para los estudiantes del Instituto Tecnológico de Ensenada y los estudiantes y docentes del Tecnológico Nacional de México, inspirándolos a dominar el cálculo vectorial para abordar con éxito los desafíos físicos e ingenieriles del mundo real.

Bibliografía

Adams, R. A., & Essex, C. (2013). Cálculo: Un curso completo (8.ª ed.). Pearson.

Cubre integrales dobles y triples en diversos sistemas de coordenadas, con énfasis en aplicaciones en ingeniería y física.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Cálculo: Multivariable (10.ª ed.). Limusa Wiley.

Proporciona explicaciones detalladas de integrales múltiples y su uso en problemas reales de ingeniería.

Apostol, T. M. (1969). Cálculo, Volumen II: Cálculo multivariable y álgebra lineal, con aplicaciones en ecuaciones diferenciales y probabilidad (2.ª ed.). Reverté.

Un texto clásico que cubre integrales dobles y triples, con énfasis en transformaciones de coordenadas.

Briggs, W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (2015). Cálculo: Trascendentes tempranas (2.ª ed.). Pearson Educación.

Ofrece una explicación clara de integrales dobles y triples en coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas, con aplicaciones en física e ingeniería.

Fernández, J. L., & Pérez, A. (2018). Aplicaciones de las integrales múltiples en ingeniería. *Revista de Ingeniería Matemática*, 12(2), 45–60.

Un artículo en español que analiza las aplicaciones prácticas de las integrales dobles y triples en ingeniería, incluyendo transformaciones de coordenadas.

Gockenbach, M. S. (2010). Entendiendo el cambio de variables en integrales múltiples. *The American Mathematical Monthly*, 117(5), 453–458. <https://doi.org/10.4169/000298910X485996>

Un artículo que explora el cambio de variables en integrales dobles y triples, con enfoque en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Cálculo (10.ª ed.). McGraw-Hill.

Cubre integrales múltiples en coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas, con aplicaciones en volumen, masa y mecánica de fluidos.

Leithold, L. (1996). *El Cálculo* (7.ª ed.). Oxford University Press.

Un libro completo en español que cubre integrales múltiples, transformaciones de coordenadas y aplicaciones en física y geometría.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2011). Cálculo vectorial (6.ª ed.). W. H. Freeman.

Explora integrales múltiples, campos vectoriales y teoremas como los de Green y Stokes, con ejemplos en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2006). Cálculo (9.ª ed.). Pearson Educación.

Un texto en español que aborda integrales dobles y triples, con ejemplos prácticos en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2007). Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas (9.ª ed.). Reverté.

Un libro en español que incluye integrales dobles y triples, con ejemplos en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Spivak, M. (2008). Cálculo en variedades: Un enfoque moderno de los teoremas clásicos del cálculo avanzado. Reverté.

Un texto riguroso que aborda los aspectos teóricos de las integrales múltiples y sus aplicaciones en cálculo vectorial.

Stewart, J. (2015). Cálculo: Trascendentes tempranas (8.ª ed.). Cengage Learning.

Proporciona un tratamiento completo de integrales múltiples, incluyendo su evaluación en diferentes sistemas de coordenadas y aplicaciones en ciencias físicas.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). Cálculo de Thomas (13.ª ed.). Pearson.

Ofrece una discusión exhaustiva de integrales múltiples y sus aplicaciones en ciencias físicas, con ejemplos en diferentes sistemas de coordenadas.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2013). Cálculo: Trascendentes tempranas (4.ª ed.). Jones & Bartlett Learning.

Incluye secciones detalladas sobre integrales dobles y triples, con aplicaciones en ingeniería y física en diversos sistemas de coordenadas.