



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA

CONTROL DE UN UAV TIPO PVTOL
MEDIANTE FUNCIONES SUAVES PARA SU
ESTABILIZACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

P R E S E N T A:

ANAI CAMACHO LUNA

DIRECTOR DE TESIS

DR. DAVID LARA ALABAZARES

CODIRECTORES

DR. IRAHAN OTONIEL JOSÉ GUZMÁN
DR. SIMÓN PEDRO ARGUIJO HERNÁNDEZ
DR. ABDELHAMID RABHI

MISANTLA, VER.

AGOSTO 2024



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN MAESTRÍA

FECHA:
12 DE AGOSTO DE 2024

ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN:
TESIS PROFESIONAL

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el (la) C:

ANAI CAMACHO LUNA

Estudiante de la **MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES** con No. de Control **222T0540** ha cumplido satisfactoriamente con lo estipulado por el **Lineamiento de Posgrado para la obtención del grado de Maestría** mediante **TESIS PROFESIONAL**

Por tal motivo se **Autoriza** la impresión del **Tema** titulado:

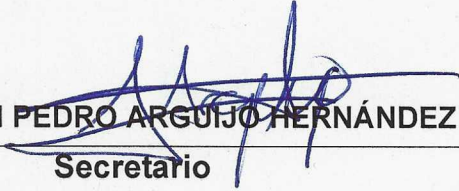
“CONTROL DE UN UAV TIPO PVTOL MEDIANTE FUNCIONES SUAVES PARA SU ESTABILIZACIÓN”

Dándose un plazo no mayor de un mes de la expedición de la presente a la solicitud del examen para la obtención del grado de maestría.

ATENTAMENTE


DR. DAVID LARA ALABAZARES
Presidente




DR. SIMÓN PEDRO ARGUIJO HERNÁNDEZ
Secretario


DR. IRAHAN OTONIEL JOSÉ GUZMÁN
Vocal

Archivo.

Agradecimientos.

Expreso mi gratitud al Instituto Tecnológico Superior de Misantla por haberme proporcionado el espacio necesario para llevar a cabo esta Tesis.

Al departamento de posgrados, que a través de la maestría en sistemas computacionales, ha sido un camino de oportunidades para el desarrollo de esta profesión que estoy a punto de realizar.

Expreso mi agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su valioso respaldo financiero a través de la beca de posgrado. Siendo fundamental para la realización de mi trabajo de investigación. Estoy segura de que en México existen talentos excepcionales con la capacidad de elevar el nivel tecnológico y fomentar la innovación en diversos sectores del país. Este respaldo no solo beneficia al proyecto actual, sino que también impulsa de manera significativa investigaciones científicas y tecnológicas futuras basadas en la misma línea de trabajo.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al Consejo Veracruzano de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico (COVEICYDET) por el apoyo institucional y financiero brindado para la realización de esta tesis a través del proyecto CP-1111-1620. Este respaldo ha sido esencial para mi crecimiento tanto personal como profesional.

También agradezco a mi director de tesis y codirectores, el Dr. David Lara Alabazares, el Dr. Simón Pedro Arguijo Hernández, el Dr. Irahan Otoniel José Guzmán quienes compartieron conmigo su conocimiento y experiencia, guiándome para alcanzar las metas relacionadas con este trabajo.

De igual forma agradezco al equipo del Laboratorio de Modelado, Información y de Sistemas (MIS) de la Université de Picardie Jules Verne (UPJV) de Francia, quienes me permitieron realizar una estancia de investigación bajo la supervisión del Dr. Abdelhamid Rabhi.

Quiero extender mi agradecimiento al equipo de trabajo y compañeros que contribuyeron aportando ideas.

Por último, expreso mi gratitud al personal administrativo y docente del ITSM por brindar las facilidades necesarias y ofrecer su asesoría con gran disposición. Su apoyo ha sido clave a lo largo de este proceso.

Dedicatoria.

A mis padres, Eugenia y Santiago, mi pilar de apoyo más importante en esta trayectoria académica. Desde el principio, me han brindado su respaldo incondicional, compartiendo mis alegrías y celebraciones, pero sobre todo, escuchándome y dándome ánimos cuando estuve a punto de desertar. A ellos, que han creído en mí más de lo que yo misma lo he hecho, este logro les pertenece más a ellos que a mí.

A mis hermanos y a Ma. de los Ángeles Camacho Luna, mi hermana mayor y mi segundo gran apoyo, que siempre ha estado para mí, ofreciéndome sus consejos y apoyo incondicional.

Al Dr. David Lara Alabahazares, mi asesor de tesis y guía durante estos dos años. Gracias por compartir su sabiduría conmigo, por su apoyo incondicional, así como sus consejos que me han ayudado tanto en mi crecimiento profesional como personal. Tiene todo mi respeto y admiración.

A mi cuarteto de amigas, quienes me han sabido comprender y apoyar en todo momento, compartiendo risas y sacándome de la rutina. Gracias por hacer este proceso más llevadero.

A mis maestros, por compartir sus conocimientos en las aulas de clase.

A mi equipo de trabajo, por brindarme su apoyo y explicarme cuando no entendía. Con el tiempo, nos convertimos en amigos, aliviando la carga de trabajo juntos. Gracias por todo el apoyo.

A todas las personas que se unieron a este viaje y me tendieron una mano cuando sentía que desfallecía, sin esperar nada a cambio. Gracias infinitas.

Con todo mi amor y sincero agradecimiento

Anaí Camacho Luna.

Resumen.

En esta tesis de investigación, presentamos una nueva técnica de control basada en el clásico algoritmo de controlador de saturación anidado (NSC), diseñado para la estabilización del vehículo aéreo no tripulado (Vehículo Aéreo No Tripulado) PVTOL-UAV. El NSC clásico tarda mucho tiempo en converger cuando se aplica una perturbación al sistema. Por lo tanto, para mejorar este aspecto se propone utilizar una función hiperbólica suave en una configuración anidada para construir un nuevo algoritmo de control, capaz de mejorar este tiempo de convergencia, teniendo un mejor rendimiento en un lazo cerrado de control del sistema. Para validar este control se obtuvo el modelo matemático del PVTOL utilizando el formalismo de Euler Lagrange, teniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales para la dinámica vertical, horizontal y rotacional. Luego, utilizando el error de estados como retroalimentación, la pendiente de la función hiperbólica acotada se puede ajustar para mejorar la respuesta del sistema. El controlador propuesto permite una rápida convergencia de los estados. Los resultados se obtienen mediante simulación numérica y se compararon con dos controladores, el primero se realizó con el NSC clásico y el segundo con el control de lógica difusa combinado con NSC. De la simulación se puede evidenciar que el control propuesto tiene el mejor tiempo de respuesta y un mejor tiempo de convergencia.

Abstract.

In this research thesis, we present a new control technique based on the classic nested saturation controller (NSC) algorithm, designed for stabilization of the Planar Vertical Take-off and Landing, Unmanned Aerial Vehicle) PVTOL-UAV. The classic NSC takes a long time to converge, when a perturbation is applied to the system. Then to improve this aspect it is proposed to use a hyperbolic smooth function in a nested configuration to build a new control algorithm, able to improve this convergence time, having a better performance in a closed loop of the system. In order to validate this control, the mathematical model of the PVTOL was obtained using the Euler Lagrange formalism, having a set of differential equations for the vertical, horizontal and rotational dynamics. Then using the states error as feedback, the slope of the bounded hyperbolic function can be adjusted to tuning the control response. The proposed controller allows a fast convergence of the states. The results are obtained using numerical simulation and were compared with two controllers, the first was done with the classic NSC, and the second was realized with the fuzzy logic control combined with NSC. From simulation it can be evidenced that the proposed control has the best response and convergence time.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VI
1. Introducción.	1
1.1. Antecedentes.	2
1.2. Definición de los UAV.	4
1.3. Plataformas implementadas en UAVS.	7
1.4. Planteamiento del problema.	8
1.5. Justificación.	9
1.6. Objetivo General.	9
1.6.1. Objetivos específicos.	9
1.7. Hipótesis.	10
1.8. Metodología propuesta.	10
1.9. Alcances y limitaciones.	11
2. Marco Teórico.	12
2.1. VTOL.	12
2.2. PVTOL.	13
2.3. Estado del arte.	14
2.4. Modelos matemáticos.	17
2.5. Enfoques de modelo matemático.	18
2.5.1. Formalismo de Euler-Lagrange.	18

2.5.2.	Formalismo de Newton-Euler.	19
2.6.	Fundamentos de control.	20
2.6.1.	Regulación de sistemas no lineales.	22
2.6.2.	Sistema lineal y linearización.	23
2.6.3.	Control de procesos en lazo abierto.	24
2.6.4.	Controladores en bucle cerrado.	25
2.6.5.	Sistemas de control robusto.	26
2.7.	Estrategias de control.	27
2.7.1.	Control PID.	27
2.7.2.	Control basado en lógica difusa.	33
2.7.3.	Control saturado anidado.	36
2.8.	Control de una función suave.	39
2.8.1.	Generalidades de una función suave.	39
2.8.2.	Función de Saturación Suave.	40
2.9.	Técnicas de Simulación.	44
2.9.1.	<i>MatLab</i> [®] - Simulink.	44
3.	Metodología.	45
3.1.	Modelado matemático del PVTOL.	45
3.1.1.	Modelo dinámico a partir de la metodología Euler-Lagrange.	46
3.2.	Control de saturación anidado.	47
3.3.	Control aplicando la función hiperbólica suave.	48
3.3.1.	Planteamiento del problema.	49
3.3.2.	Implementación del controlador (BSFC).	50
4.	Resultados.	51
4.1.	Comportamiento del controlador BSFC.	51
4.1.1.	Respuesta dinámica vertical.	52
4.1.2.	Respuesta dinámica horizontal-rotacional.	52
4.2.	Controlador BSFC VS el controlador de saturación anidada difusa.	56
4.2.1.	Respuesta dinámica horizontal.	57

5. Conclusiones.	62
Referencias	63

Índice de figuras

1.1. Áreas de aplicación UAVS.	1
1.2. Primeras aportaciones de los UAV.	3
1.3. La nueva era de los UAVs (Elaboración propia).	5
1.4. Clasificación de aeronaves.	6
1.5. Fases de vuelo de un UAV.	6
1.6. Categorías de UAVs (elaboración propia).	8
1.7. Metodología propuesta.	11
2.1. Fases de vuelo de un VTOL.	13
2.2. PVTOL en un plano vertical.	14
2.3. Sistema de modelado.	17
2.4. Formalismo de Euler - Lagrange.	19
2.5. Formalismo de Newton Euler.	20
2.6. Sistema de control por relé.	21
2.7. Componentes de la arquitectura de control en lazo abierto.	25
2.8. Diagrama de bloques de un sistema de control en bucle cerrado.	26
2.9. Sistema de control con perturbaciones.	27
2.10. Control PID. a) Diagrama de bloques en Simulink. b) Gráfica de las ganancias del control PID.	29
2.11. Diagrama de bloques del sintonizador automático. El sistema funciona como relé en el modo de sintonización (t) y como un regulador PID ordinario en el modo de control (c).	30
2.12. Reglas de Ziegler-Nichols para ajustar el controlador PID (primer método). .	31

2.13. Reglas de Ziegler-Nichols para ajustar el controlador PID (segundo método).	34
2.14. Ejemplo de variables lingüísticas.	35
2.15. Representación a bloques para un algoritmo de control difuso.	37
2.16. Función de Saturación $\sigma_L(s)$	37
2.17. función de saturación $sat(u_i)$ respecto con una función suave $thanh(u_i^{max})$. .	40
3.1. Diagrama de cuerpo libre del PVTOL (Elaboración propia).	45
3.2. Gráfica de la función de saturación.	47
4.1. Diagrama de bloques del NSC en Simulink.	51
4.2. Respuesta de posición vertical.	52
4.3. Respuesta de posición Y para el modelo simplificado PVTOL.	53
4.4. Respuesta de posición angular para el modelo simplificado PVTOL.	53
4.5. Respuesta de posición Y para el modelo completo PVTOL.	54
4.6. Posición angular para el modelo completo PVTOL.	54
4.7. Respuesta de la señal de paso de posición Y	55
4.8. Diagrama de bloques del Fuzzy - NSC en Simulink.	57
4.9. Respuesta de la posición Y empleando el modelo simplificado del PVTOL. .	58
4.10. Respuesta de la posición <i>angular</i> empleando el modelo simplificado del PVTOL.	58
4.11. Respuesta de la posición Y empleando el modelo completo del PVTOL. . . .	59
4.12. Respuesta de la posición <i>angular</i> empleando el modelo completo del PVTOL.	60
4.13. Respuesta de entrada escalon empleando el modelo completo.	60

Índice de tablas.

2.1. Notación de de la figura 2.2.	14
2.2. Método de ajuste de Ziegler-Nichols basado en la respuesta a escalón de la planta (primer enfoque).	32
2.3. Método de ajuste de Ziegler-Nichols utilizando la ganancia crítica K_{cr} y el periodo crítico P_{cr} (segundo enfoque).	33
4.1. Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo completo.	56
4.2. Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo simplificado.	56
4.3. Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo completo.	61
4.4. Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo simplificado.	61

Capítulo 1

Introducción.

Desde finales del siglo pasado, los avances tecnológicos en la miniaturización de la electrónica y los componentes mecánicos han allanado el camino para la creación y desarrollo de objetos voladores de pequeñas dimensiones, tales como aviones y helicópteros, los cuales están adquiriendo cada vez más habilidades para realizar vuelos de forma autónoma. Estos dispositivos son popularmente conocidos como drones, un término derivado del inglés “aberraciones”, y se consideran máquinas voladoras autónomas o semi-autónomas con la capacidad de realizar misiones de vuelo. En el ámbito internacional, se les conoce como UAVs del inglés “Unmanned Aerial Vehicles”, y representan una tecnología compleja cuyo control presenta desafíos, dado que sus características aerodinámicas son similares a las de las aeronaves convencionales [1].

El estudio de estos dispositivos despierta un gran interés debido a su versatilidad y capacidad de maniobra, lo que les permite un abanico muy amplio de tareas en diversas aplicaciones, tales como el uso civil, militar y aeroespacial [2, 3, 4]. En la figura 1.1, se presenta una clasificación detallada de las aplicaciones más importantes de los UAVs.



Figura 1.1: Áreas de aplicación UAVS.

En aplicaciones aéreas donde la presencia humana es restringida, los UAVs han despertado un gran interés en la comunidad robótica para investigaciones y nuevas aplicaciones. Se han propuesto diversas configuraciones, como la topología multirrotor, especialmente estudiada por su versatilidad tanto en entornos interiores como exteriores. Entre estas configuraciones, el UAV de cuatro rotores destaca por su agilidad y capacidad de maniobra, siendo ampliamente citado en el ámbito del control aéreo. Aunque logra un vuelo estacionario estable y un movimiento 3D completo, el desarrollo de sistemas para controlar la tarea del vuelo enfrenta desafíos debido a las limitaciones físicas de los motores y a las no linealidades e incertidumbres paramétricas de los componentes de estos dispositivos.

1.1. Antecedentes.

Históricamente, los vehículos aéreos no tripulados o UAVs surgieron durante la Primera Guerra Mundial en 1917, marcando un hito en la evolución de la tecnología aérea [5]. Sin embargo, la concepción de una "máquina voladora" tiene raíces mucho más antiguas, datando aproximadamente de hace 2,500 años.

Se ha documentado que uno de los primeros avances significativos en los mecanismos autónomos ocurrió durante la época de Pitágoras, quien, influenciado por sus estudios con Tales y otros matemáticos pitagóricos, sentó las bases para el desarrollo de la ingeniería. Se atribuye el primer avance en los mecanismos autónomos a Arquitas de Tarento, reconocido como el Leonardo Da Vinci de la antigüedad, no solo por ser el creador del concepto del número "uno" en la teoría numérica, sino también por sus contribuciones pioneras en ingeniería mecánica. Arquitas, al aplicar principios geométricos a la construcción de dispositivos, diseñó y construyó el primer vehículo aéreo no tripulado conocido en el año 425 a.C., un artefacto mecánico con forma de pájaro capaz de volar impulsado por un mecanismo en su interior [5]. En China, alrededor del año 400 a.C., se registró la primera idea documentada de un avión de vuelo vertical, que consistía en plumas montadas en un eje giratorio. Este dispositivo, similar al "pájaro volador" creado por Arquitas, refleja la persistencia del interés humano por el vuelo a lo largo de la historia.

Siglos más tarde, durante el Renacimiento, resurgió la idea del "pájaro volador" con el diseño de una aeronave capaz de planear, concebida por ingenieros anónimos de la época. Leonardo Da Vinci, en 1483, creó un diseño de una máquina similar, conocida como tornillo aéreo o giroscopio aéreo, que se considera un precursor del helicóptero moderno [6]. La figura 1.2 ilustra las contribuciones más relevantes en la evolución de los vehículos aéreos no tripulados, desde el "pájaro volador" de Arquitas hasta el vuelo pionero de demostración realizado por los hermanos Wright en 1903 [5].

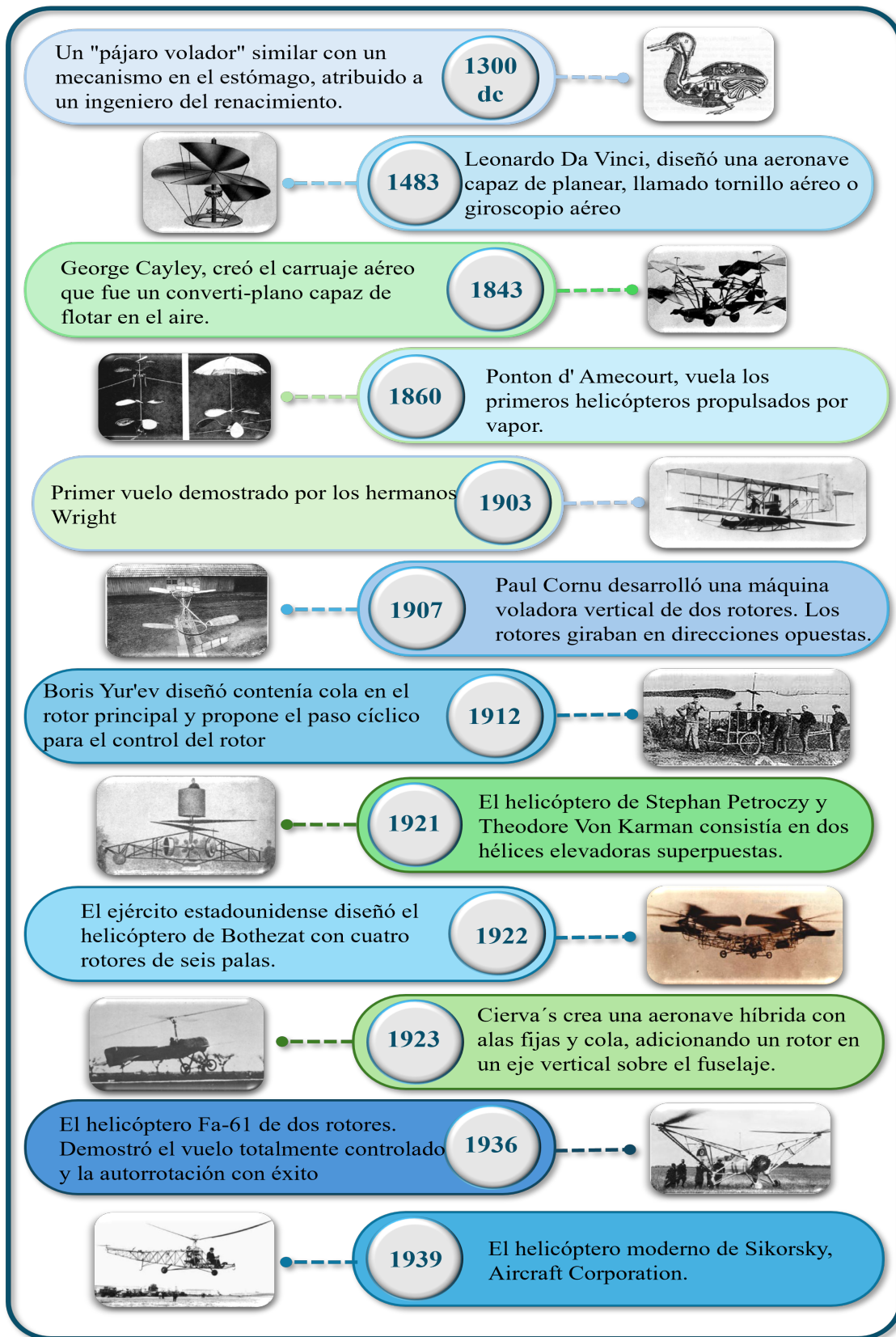


Figura 1.2: Primeras aportaciones de los UAV.

En la era contemporánea, una variedad de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) con distintos tamaños y diseños están en operación, siendo controlados de diversas maneras. Entre ellos, los helicópteros con uno, dos e incluso cuatro rotores han adquirido una posición predominante. Además de los helicópteros, se encuentran también aviones propulsados por motores e incluso turbinas, adaptándose según la aplicación o la misión específica. La gama de vehículos aéreos disponibles para llevar a cabo misiones con diferentes grados de autonomía es amplia. Por lo tanto, en ocasiones, surge la cuestión de si un sistema cumple con la definición de UAV, y se han introducido diversos términos para referirse a estas aeronaves, con mayor o menor precisión. En el pasado, se les conocía como ROA (Remotely Piloted Aircraft) [7], así como UA (Unmanned Aircraft) [8], y desde hace años, se emplea el término UAV, y más recientemente UAS (Unmanned Aircraft System) [9]. Estas designaciones señalan la ausencia de tripulación en la aeronave, aunque no necesariamente implican autonomía total. Los diseños y prototipos actuales de UAVs representan lo que se puede llamar "nuevas configuraciones de UAV". Estos incluyen UAVs de dimensiones gigantes, grandes, pequeñas, en miniatura y en mini escala (en comparación con sus contrapartes tripuladas), así como modelos de dirigibles [10, 11].

Algunos de los modelos más reconocidos son aquellos empleados por las fuerzas militares de diversos países. Estos vehículos ofrecen ventajas significativas sobre las aeronaves tripuladas en términos de resistencia (debido a la ausencia de fatiga del piloto) y prescindibles en conflictos modernos. Los diferentes tipos de UAVs en servicio se presentan en el esquema 1.3 elaborado con base a la información proporcionada en [5].

1.2. Definición de los UAV.

Un vehículo aéreo no tripulado (UAV) posee diferentes niveles de “inteligencia automática”. Puede establecer comunicación con su operador y enviar datos relevantes, como imágenes ópticas o térmicas, junto con su estado actual, incluyendo posición, velocidad, rumbo y altitud. Asimismo, transmite información sobre su estado de mantenimiento, como nivel de combustible y temperaturas de componentes como motores o electrónica. En caso de fallo en algún sistema o componente, el UAV puede estar programado para tomar acciones correctivas automáticamente y/o notificar al operador. Un UAV más avanzado puede contar con una mayor cantidad de programas que le permiten responder a diferentes situaciones de manera predeterminada. Hoy en día, el término UAV suele referirse al aspecto aeronáutico de un Sistema de Aeronave No Tripulada (UAS). Sin embargo, en ocasiones, el término UAV puede interpretarse como “no habitado”, reflejando que el sistema global no es completamente autónomo, sino que está bajo el control humano en alguna etapa dentro de la jerarquía de mando. Este término se considera más políticamente correcto [12].



Figura 1.3: La nueva era de los UAVs (Elaboración propia).

Estos vehículos UAV poseen la característica de elevarse y descender de forma vertical (VTOL), donde el quadrotor, ofrece una ventaja notable en términos de maniobrabilidad debido a su naturaleza dinámica inherente. El quadrotor se caracteriza por tener cuatro

entradas (balanceo, cabeceo, guiñada y acelerador) y seis salidas. Los aspectos que definen las características de una aeronave son el principio de vuelo y el método de propulsión [13]. La figura 1.4 ilustra la clasificación de los diversos tipos de aeronaves según estos criterios.

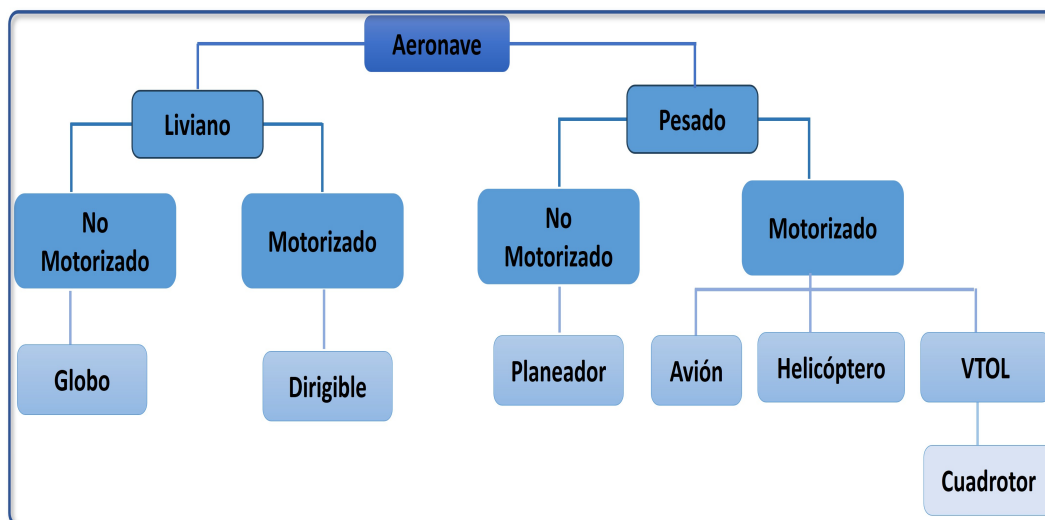


Figura 1.4: Clasificación de aeronaves.

El vuelo de un UAV se puede dividir en varias fases fundamentales, cada una con procedimientos y características específicas que aseguran un vuelo seguro y eficiente, estas fases se describen brevemente en la figura 1.5.



Figura 1.5: Fases de vuelo de un UAV.

Gracias a los avances en tecnología de sensores y automatización, se han desarrollado vehículos aéreos no tripulados (UAV) con diversas capacidades. Una ventaja significativa de los UAV sobre las aeronaves tripuladas es que su tiempo de vuelo está principalmente limitado por la duración del combustible y la batería, mientras que en los aviones tripulados también

se deben considerar factores humanos, como la fatiga. Además, los UAV son especialmente útiles para realizar misiones y tareas que superan las limitaciones de la resistencia humana

1.3. Plataformas implementadas en UAVS.

Una forma de clasificar las configuraciones aerodinámicas se basa en el tipo de vuelo que puede realizar el vehículo [14]. Esto incluye aquellos capaces de vuelo estacionario y/o vuelo de traslación. En términos simples, estas clasificaciones incluyen aviones, dirigibles, configuraciones de ala fija y multi-rotors. Estos últimos se pueden subdividir según el número de rotores, que puede ser 1, 2, 3 o 4 [15]. En fechas recientes, los vehículos aéreos no tripulados han captado un interés creciente, lo que ha resultado en la introducción de una variedad de aeronaves con diversas formas y tamaños, así como diferentes configuraciones y componentes. Los UAV se clasifican en cuatro categorías principales: monorotor, multirrotor, de ala fija e híbridos, tal como se ilustra en la figura 1.6.

- **Mono-rotores o helicópteros:** Los mono-rotores, también conocidos como en la categoría de UAV, tienen la capacidad de despegar y aterrizar verticalmente. Por lo general, emplean un rotor principal para controlar la actitud (como alabeo, cabeceo y guiñada), además de un rotor de cola para dirigir el vuelo. Su superioridad operativa radica en su capacidad para transportar cargas pesadas durante períodos prolongados de vuelo. No obstante, la complejidad de sus sistemas mecánicos, junto con el tamaño considerable y los costos elevados de los rotores, plantean desafíos para las versiones no tripuladas. Además, su estabilidad se ve comprometida en condiciones climáticas adversas [16].
- **Híbridos:** La categoría de drones híbridos se encuentra actualmente en proceso de desarrollo. Estos drones representan una versión mejorada que combina características de los UAV multirrotores y los de ala fija. Ofrecen una excelente combinación de agilidad y velocidad para vuelos de larga distancia, además de tener la capacidad de transportar cargas pesadas sin necesidad de una pista de aterrizaje. Sin embargo, tienen algunas desventajas importantes, como su alto costo, la complejidad mecánica involucrada, un rendimiento ligeramente inferior en términos de estabilidad de vuelo y restricciones en los rangos de velocidad [17].
- **Multicópteros:** También conocidos como multirrotores, son UAV que cuentan con más de dos rotores. Esta categoría se divide en cinco subtipos: bi-rotor, tri-rotor, quadrotor, hexarrotor y octocóptero (ocho rotores). Al igual que los UAV de un solo rotor, los multicópteros permiten despegues y aterrizajes verticales. Son ágiles y veloces en vuelo, lo que les permite realizar maniobras complejas y operar en espacios reducidos. Sin embargo, su principal limitación radica en su corto tiempo de vuelo [18].
- **Ala fija:** Los drones de ala fija se caracterizan por su diseño simple, que emplea un ala rígida fija para la navegación. La clasificación de estos vehículos no tripulados no solo se basa en el tipo de ala, sino también en otros aspectos como el cuerpo y el sistema de alimentación, que puede ser mediante baterías de iones de litio, gas. Se subdividen en

cuatro categorías: normal, barrido hacia atrás, barrido hacia adelante y delta. Además, tienen la capacidad de transportar cargas útiles más pesadas en comparación con los multicópteros. Sin embargo, su desventaja radica en su limitada agilidad en vuelo, lo que les impide realizar maniobras complejas y operar en espacios reducidos, además de requerir una pista para despegar y aterrizar [19].

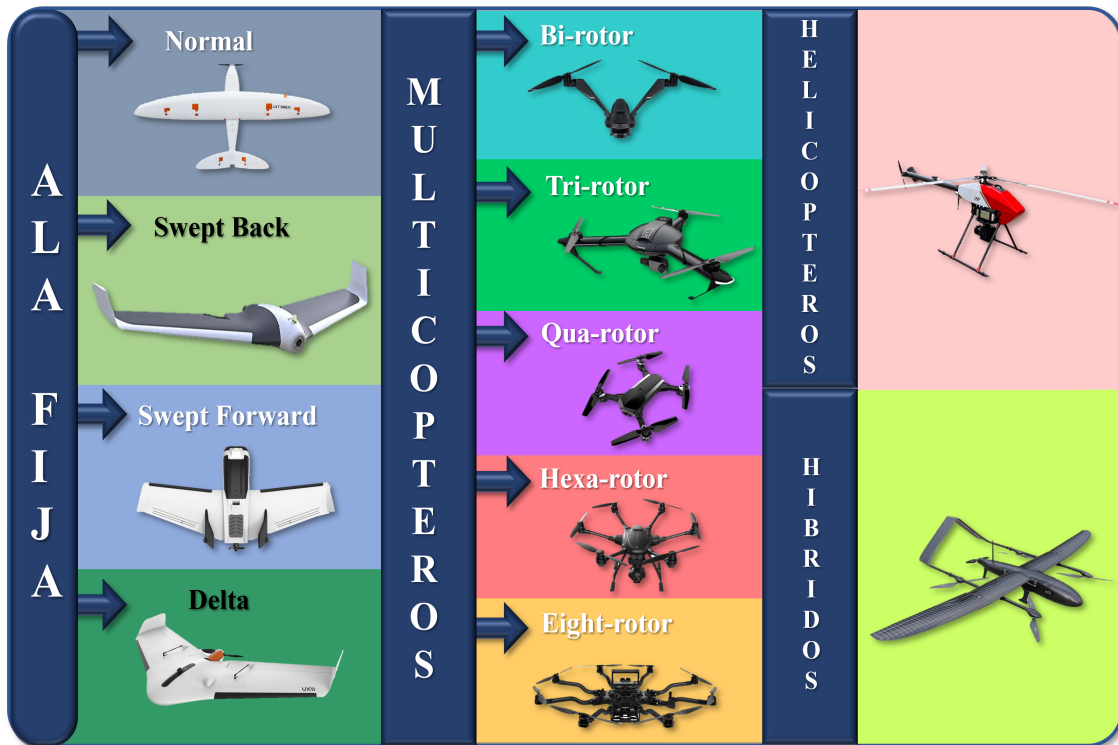


Figura 1.6: Categorías de UAVs (elaboración propia).

1.4. Planteamiento del problema.

Las aplicaciones de los UAV, popularmente conocidos como drones, han experimentado un rápido desarrollo. En el ámbito civil, estos dispositivos han facilitado el acceso a lugares de difícil alcance para el personal humano [20]. Esta tecnología ha generado un gran interés en la investigación, abarcando áreas como el diseño mecánico, la aerodinámica, la arquitectura informática, la misión de vuelo y las tecnologías emergentes relacionadas con la ingeniería de estos dispositivos. El desarrollo de algoritmos matemáticos para automatizar y regular el funcionamiento de estos vehículos aéreos [21]. La formación de ingenieros, diseñadores e investigadores en este campo demanda una educación sólida y una capacitación exhaustiva en el control automático de UAVs [22]. Sin embargo, experimentar con algoritmos de control en un entorno real conlleva costos elevados, riesgos de daños y posibles problemas de seguridad. Por lo tanto, la simulación del sistema de control emerge como una alternativa viable.

Desde los primeros estudios sobre UAVs, ha habido una amplia investigación en el área del Vehículo de Despegue y Aterrizaje Vertical restringido al plano (PVTOL). Por ejemplo,

en [23] desarrollaron un control de retroalimentación basado en una aproximación de fase mínima del sistema PVTOL para lograr un seguimiento de trayectoria acotado con estabilidad. Otros estudios han abordado problemas de control no lineal, como el trabajo de [24] sobre maniobras de seguimiento de trayectorias circulares [25] sobre control de vuelo estacionario robusto. A lo largo de estos estudios, se han aplicado diversas técnicas de control, como observadores no lineales y algoritmos de control óptimo, con el objetivo de estabilizar el PVTOL en diferentes condiciones operativas [22, 26, 27]. No obstante, la gran parte de estas investigaciones se han validado mediante simulaciones que muestran un tiempo prolongado de convergencia, lo que representa un desafío para su aplicación práctica. Para abordar estos desafíos mencionados y mejorar la eficacia de los algoritmos de control, se propone implementar una función de saturación suave debido a que mejora la estabilidad y la eficiencia del control del PVTOL, y facilita una transición más segura y efectiva de los algoritmos de simulación a aplicaciones prácticas en UAVs.

1.5. Justificación.

Recientemente, ha despertado un notorio interés por el uso de los UAVs en la comunidad científica, que se ha extendido a una variedad de aplicaciones tanto en el sector militar como en el civil. Estos vehículos se utilizan en diversas tareas, como la localización oportuna de fuego en bosques y selvas, la inspección de oleoductos, la vigilancia, el control de la contaminación e incluso en la industria de la construcción de alto riesgo [28]. Aunque la tecnología relacionada con los UAVs ha avanzado significativamente, el control de estos dispositivos se ha vuelto cada vez más complejo debido a las diferentes formas en que se aplican. El problema del control de vuelo de los UAVs se presenta en una variedad de configuraciones, incluyendo aviones de ala fija, helicópteros, dirigibles, entre otros. La dinámica completa de estos vehículos, que incluye factores como la aerodinámica, la flexibilidad y la dinámica de los actuadores, es extremadamente compleja y difícil de gestionar para el control. Una opción viable para abordar este desafío y facilitar el diseño, la validación y la enseñanza del control automático es el uso del modelo del PVTOL. Por lo tanto, esta tesis se enfoca en el análisis de esta plataforma experimental mediante de simulaciones. Esto permitirá el desarrollo de algoritmos de control de manera más accesible, lo que beneficiará el proceso de enseñanza y aprendizaje.

1.6. Objetivo General.

Desarrollar algoritmos de control que fusionen métodos no lineales, sistemas difusos y funciones suaves con la finalidad estabilizar una plataforma experimental simulada para un Vehículo de Despegue y Aterrizaje Vertical restringido al plano (PVTOL).

1.6.1. Objetivos específicos.

1. Examinar y evaluar las diversas estrategias de control empleadas en vehículos PVTOL, teniendo en cuenta sus usos particulares y los beneficios que ofrecen, con el fin de determinar cuáles son más adecuadas para su aplicación en el proyecto.

2. Adquirir y elaborar modelos de control que reflejen el comportamiento del Vehículo de Despegue y Aterrizaje Vertical restringido al plano (PVTOL), teniendo en cuenta factores como la dinámica, la estabilidad y las limitaciones operativas.
3. Plantear leyes de control apropiadas y efectivas para aplicar en la simulación, tomando en cuenta los modelos y peculiaridades particulares del PVTOL.
4. Programar e implementar las leyes de control diseñadas en el entorno de *MatLab*[®], garantizando su correcta adaptación a los requisitos y metas establecidas.
5. Desarrollar una plataforma que posibilite la implementación y verificación de los algoritmos de control.
6. Aplicar las leyes de control elegidas en la plataforma para confirmar su validez y eficacia, llevando a cabo pruebas exhaustivas y comparando los resultados con los objetivos definidos. Esto garantizará que el control del PVTOL funcione correctamente y sea efectivo.

1.7. Hipótesis.

Al unir las estrategias de control no lineal basadas en funciones suaves en y el control difuso en una plataforma experimental que emula el comportamiento de un UAV tipo PVTOL, se podrá estabilizar el vehículo con un nivel de error en estado estacionario que no supere el 10 %.

1.8. Metodología propuesta.

Para realizar este estudio, es necesario comprender las variables clave que contribuirán al diseño de algoritmos de control para un UAV tipo PVTOL, con el fin de lograr la estabilización del sistema en un bucle cerrado. Para ello, se seguirá una serie de pasos conforme a la metodología de investigación cuantitativa, ya que los resultados pueden ser cuantificados mediante mediciones en simulación utilizando un modelo que simula el comportamiento del dron. Los pasos principales de esta metodología se detallan en la figura 1.7.

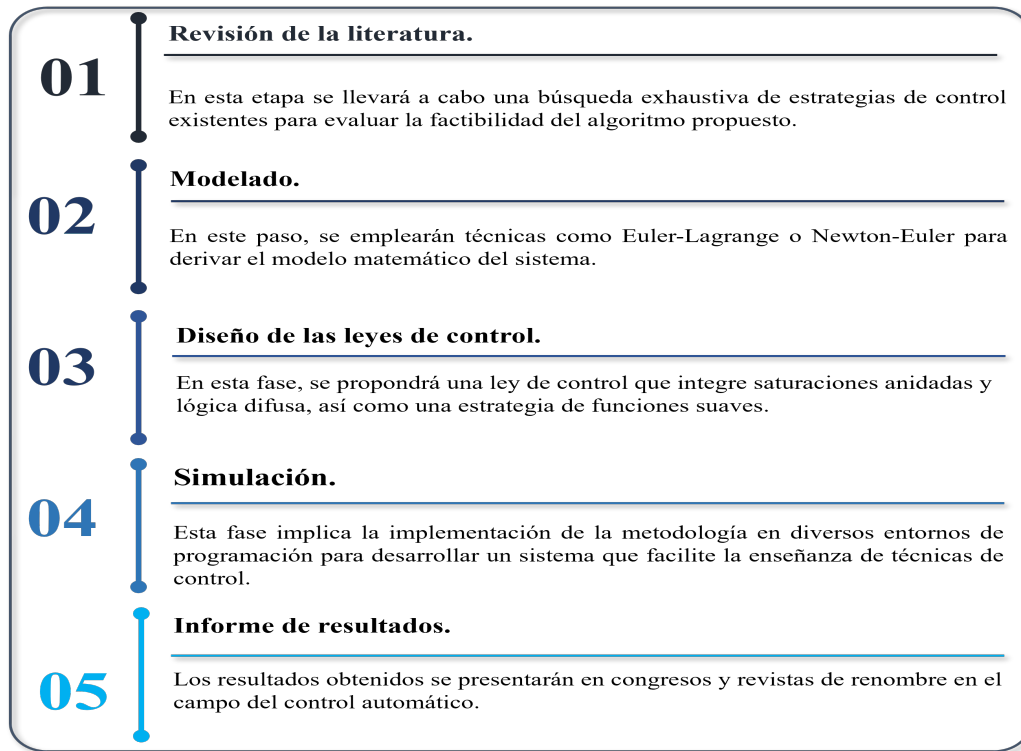


Figura 1.7: Metodología propuesta.

1.9. Alcances y limitaciones.

Los alcances de este trabajo de investigación son los siguientes:

- **Teóricos:** Modelado de un sistema del PVTOL usando sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, análisis de estabilidad de un sistema de control.
- **Prácticos:** Simulación en diferentes entornos de programación.
- **Divulgación:** Publicación de artículos en conferencias y revistas internacionales de prestigio.
- **Vinculación:** Estancia de investigación en institución de educación y centro de investigación internacional.

Las limitaciones a las que se restringe este trabajo son las siguientes:

- **Lugar:** El proyecto se realizará dentro del Instituto Tecnológico Superior de Misantla, en el área de posgrado de la Maestría en Ingeniería en Sistemas Computacionales.
- **Material:** Los laboratorios de la institución cuentan con algunos equipos y herramientas, que servirán de apoyo en la realización de esta investigación. El software se realizará utilizando programas bajo licencias propiedad de la institución, así como el software libre.

Capítulo 2

Marco Teórico.

En el entorno del diseño, desarrollo y puesta en marcha de técnicas de control para los vehículos aéreos no tripulados (UAVs), los Vehículos de Despegue y Aterrizaje Vertical (VTOL, por sus siglas en inglés) su variante planar (PVTOL) han captado una atención significativa debido a sus aplicaciones en diversas áreas como la vigilancia [29], entrega de paquetes [30] y exploración [31]. Este capítulo aborda los principios teóricos que respaldan el diseño y control de estos vehículos, incluyendo modelos matemáticos y técnicas avanzadas de control. En primer lugar, se describen los enfoques de modelado matemático utilizados para representar el comportamiento dinámico de los VTOL y PVTOL. Estos modelos son esenciales para comprender y predecir las respuestas del sistema ante diferentes estímulos. Particularmente, se emplea el formalismo de Euler-Lagrange, un método robusto y ampliamente aceptado en la dinámica de sistemas mecánicos.

Se describen varias estrategias de control que se utilizan para estabilizar y dirigir la trayectoria del PVTOL. El control PID (Proporcional-Integral-Derivativo) es un enfoque clásico apreciado por su simplicidad y efectividad. Para mejorar el rendimiento del controlador PID, se introduce el método de sintonización de Ziegler-Nichols, una técnica empírica que facilita determinar los valores de las ganancias o parámetros de la ley de control. Además, se explora el control basado en lógica difusa, una metodología que imita el razonamiento humano para manejar la incertidumbre y la no linealidad en los sistemas. Se destacan las reglas de control de lógica difusa, que son conjuntos de normas heurísticas aplicadas en la toma de decisiones en sistemas difusos.

Finalmente, se analizan técnicas avanzadas como el control de saturación anidado y la función de saturación suave. El control de saturación anidado se utiliza para manejar las limitaciones físicas de los actuadores, mientras que la función de saturación suave permite una transición gradual y controlada, evitando discontinuidades abruptas que puedan desestabilizar el sistema.

2.1. VTOL.

La capacidad de ascender y descender verticalmente (VTOL) es muy apreciada en los vehículos aéreos no tripulados (UAV) y tripulados (MAV), siempre que se alcance un rendimiento de vuelo comparable. La tecnología VTOL no solo resulta muy adecuada para

los UAV debido a los requisitos de misión y la necesidad de ocultación, sino que también es de gran importancia para los MAV, tanto en aplicaciones militares como civiles, debido a las ventajas que ofrece, como una menor o incluso nula dependencia de aeropuertos o campos de aviación.

McCormick [32] define un avión VTOL como aquel que puede despegar y aterrizar verticalmente y alcanzar velocidades de crucero comparables a las de los aviones convencionales de ala fija que operan desde pistas de aterrizaje más extensas. Por lo general, los helicópteros, globos y dirigibles tradicionales no cumplen con los criterios de los aviones VTOL debido a sus limitaciones de velocidad. El vuelo de un avión se clasifica en tres etapas: despegue, crucero y aterrizaje [33], en la figura 2.1 se describen las fases de vuelo del VTOL. Los aviones convencionales realizan despegues y aterrizajes deslizándose, lo que implica la necesidad de una pista de aterrizaje como se ilustró en la figura 1.5 del capítulo 1. Sin embargo, esta situación no aplica a los aviones VTOL. De acuerdo con el trabajo de investigación de McCormick [32] y Hirschberg [34], los aviones VTOL se dividen en las siguientes cuatro categorías.

- Aviones compuestos [35].
- Productor de empuje [33, 36].
- Ala inclinable [37].
- Empuje vectorizado [38]

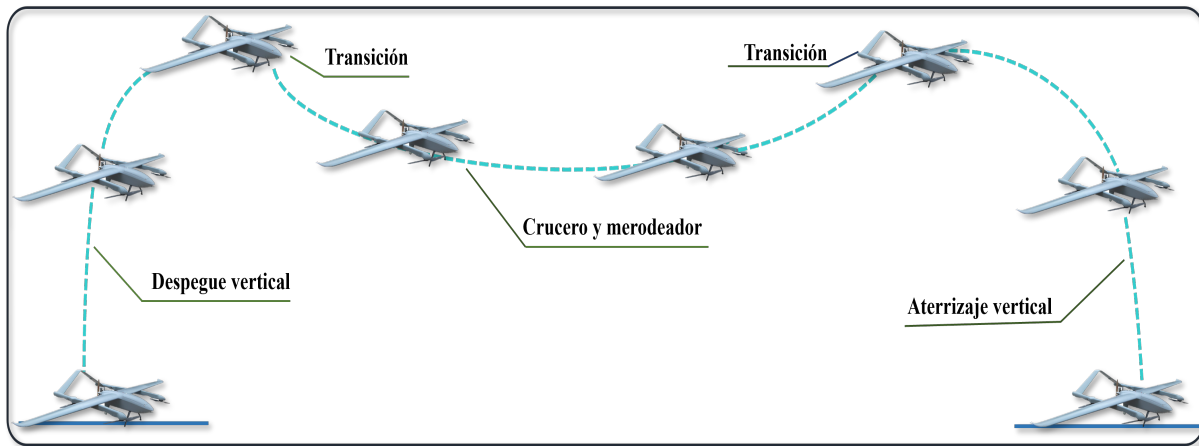


Figura 2.1: Fases de vuelo de un VTOL.

2.2. PVTOL.

El modelo PVTOL (Plataforma Vertical Despegue y Aterrizaje) describe el movimiento vertical de un objeto en un plano, correspondiente a la actitud, orientación el cual esta caracterizado por sus grados de libertad (x, y, ϕ) . Este sistema incluye dos propulsores independientes que generan fuerzas y momentos en la máquina voladora, como se muestra en la figura 2.2. Es importante destacar que el PVTOL es un sistema subactuado, ya que aunque

tiene tres grados de libertad, solo cuenta con dos entradas para su control. Debido a esta característica, el PVTOL constituye un desafío significativo en el ámbito del control no lineal [25].

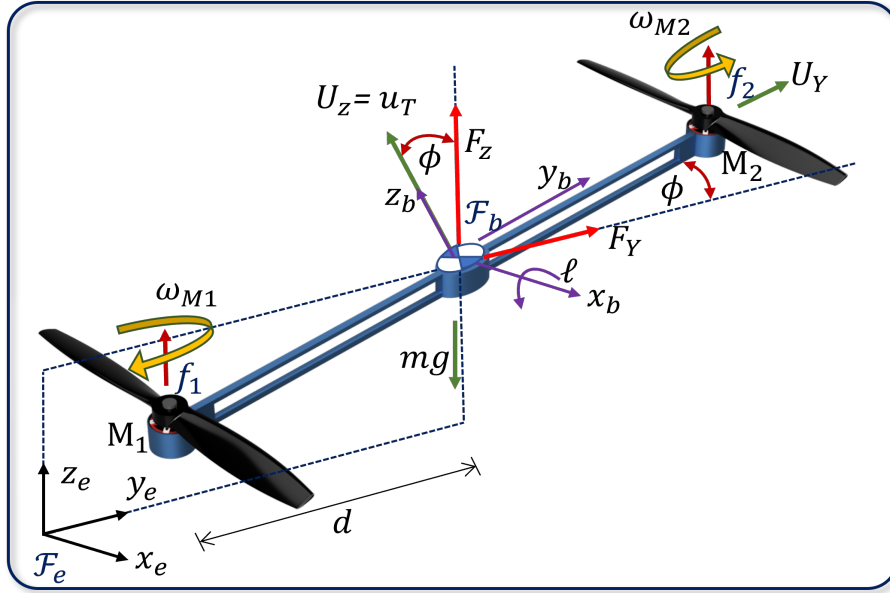


Figura 2.2: PVTOL en un plano vertical.

Notación	Descripción
$\mathcal{F}_e = \{y_e, z_e\}$	Marco de referencia inercial.
$\mathcal{F}_b = \{y_b, z_b\}$	Marco de referencia del cuerpo.
CM	Centro de masa del vehículo.
ϕ	Posición del ángulo de alabeo.
ℓ	Momento de vuelco del vehículo.
ω	Masa del vehículo.
$M_{1,2}$	Motores.
$\omega_{M1,2}$	Masa de los motores.
$f_{1,2}$	Fuerza de los motores.
g	Gravedad.
d	Distancia del CM al eje del rotor.

Tabla 2.1: Notación de de la figura 2.2.

2.3. Estado del arte.

Los drones han atraído la atención de la comunidad investigadora que trabaja tanto en el campo militar como en el civil, con una gran cantidad de usos que han sido propuestos por los

grupos de investigación, debido a sus características como capacidad y configuraciones, donde el helicóptero de cuatro rotores tiene el mayor número de citas en la literatura de control y ha sido ampliamente investigado para pruebas tanto en interiores como en exteriores [39].

El modelado y diseño de control para plataformas UAV es un trabajo difícil debido a su complicada estructura no lineal y subactuada, donde su comportamiento es función de efectos aerodinámicos, estructura mecánica, perturbaciones, incertidumbre, etc. [21]. Un modelo de UAV menos complejo utilizado para el desarrollo del control es el vehículo de despegue y aterrizaje vertical restringido al plano (PVTOL), estudiado desde el inicio de la investigación en UAV, como en el trabajo pionero [40]. A diferencia de los UAV convencionales, el modelo PVTOL simplificado tiene un número reducido de estados, así como la entrada de control. Se trata de una opción que no sacrifica los fenómenos originales [41]. Además, una ventaja atractiva de este sistema no lineal es que permite abordar la intrincada dinámica del cuadrotor tridimensional utilizando en un primer momento el enfoque bidimensional [42].

Se ha empleado metodología de control no lineal para controlar la dinámica del PVTOL, por ejemplo, en [43] la posición y el seguimiento de la trayectoria se controlan utilizando álgebra lineal, modelando el vehículo como un sistema en cascada de segundo orden. En [44] se propone un controlador óptimo inverso para un VTOL que minimiza una función de coste adecuada, que penaliza los errores de estabilización y las entradas de control. En [45] los autores proponen un controlador que rechaza perturbaciones combinando H_∞ y funciones de superficies deslizantes (SMC). El trabajo en [46] describe un control no lineal de tiempo finito que hace converger los estados del sistema a cero, y complementado con un controlador Lagrangiano se asegura asintóticamente la estabilidad para los estados PVTOL.

De forma similar en [47] se diseña una estrategia de control adaptativo con realimentación continua utilizando funciones Langrangianas con parámetros de modelo conocidos para la estabilización de un PVTOL. En [48] se propone un SMC y un algoritmo de control óptimo que reaccionan frente a la presencia de interferencias e incertidumbres en las etapas de despegue y aterrizaje del helicóptero VTOL. En [49] se aborda el problema del seguimiento de la trayectoria del PVTOL para el control en condiciones que implican restricciones posicionales y fuerzas externas. Esto se aborda aplicando un controlador robusto restringido, teniendo como fundamentos la función barrera de Lyapunov, donde el límite final para el sistema en lazo cerrado se demuestra en términos del método directo de Lyapunov.

El concepto de Control de Saturación Anidado fue introducido en [50] por Teel, descrito como una técnica que utiliza funciones de saturación recursivas en el control no lineal realimentado que permiten lograr la estabilización de forma global, de una secuencia de integradores de n - orden, conectados en cascada. Desde entonces, varios trabajos de investigación han utilizado en el campo del control de UAV, por ejemplo en [51] se propone un algoritmo de control simple para la aeronave PVTOL teniendo cuenta las restricciones de entrada. El diseño del control es tal que la aceleración satisface límites arbitrarios; en [52] se propone un controlador que se basa en el análisis de Lyapunov utilizando un algoritmo de saturación anidado. En [53] los autores presentan un análisis integral de la implementación de los controladores lineales y no lineales, la saturación anidada y los controladores acotados hiperbólicos comparándolas en simulaciones experimentales.

En [54] realizan una comparación de controladores no lineales entre modo deslizante, saturaciones anidadas y retroceso, comparando la altitud, guiñada y balanceo mediante pruebas de simulación. En [55] los autores aplican el formalismo de saturación anidado para limitar

la oscilación de la carga útil, demostrando la estabilidad del equilibrio. [56], donde se ha utilizado el algoritmo NSC para estabilizar la dinámica horizontal y vertical para helicóptero cuatrirotor, considerando el vehículo como dos PVTOLs acoplados perpendicularmente. Esta estrategia utiliza funciones de saturación recursivas (anidadas), donde las variables de estado del sistema actúan como variables independientes de estas funciones.

En [57] se propone un control saturado con entradas acotadas. En [42], se calcula la acotación de las funciones de saturación para garantizar la estabilidad del sistema, ya sea global, cuando el controlador está conectado a un sistema realimentado. Las funciones de saturación se mezclan con un SMC para gestionar la posición angular, la dinámica lateral y vertical del PVTOL. Este tipo de controlador se ha creado aplicando la teoría de sistemas no lineales como la metodología de Lyapunov como en [58] diseñan dos controladores que funcionan simultáneamente. El primero está dedicado a estabilizar la variable vertical basándose en la linealización de retroalimentación en combinación con una función de saturación y el segundo basado en una combinación del tradicional controlador PD y un controlador de modo deslizante, estabiliza las variables horizontales y angulares hasta la posición de reposo deseada. En [59] los autores emplean sistemas en forma de cascada y leyes de control de saturación anidadas fusionando el modo deslizante para garantizar una convergencia y robustez en tiempo finito. En [60] emplean un controlador de modo deslizante de segundo orden (SOSM) saturado anidado basado en la técnica de saturación y el método geométrico. Utilizado para probar la convergencia en tiempo finito de las variables deslizantes y revelar las relaciones entre los parámetros de control y la forma de la trayectoria de fase. En [61] se obtiene un esquema de control no lineal fraccional que se basa en NSC y en la derivada de Caputo-Fabrizio para alcanzar el vuelo estacionario tanto para la tarea de hovering como para la de seguimiento de trayectoria. En [62] se introdujo un enfoque alternativo, que mediante una transformación permite disponer los polos de un sistema de realimentación sobre el lado negativo del eje real.

Los NSC se han utilizado para controlar otro tipo de dispositivos, por ejemplo, en [63] se propone un control adaptativo capaz de estabilizar el sistema de péndulo invertido, que se compone de un controlador de realimentación de saturación anidado y un método de sintonización en línea implementado con un algoritmo lógico. En [64] se diseña un controlador destinado a estabilizar el helicóptero Twin-Rotor, visto como un sistema MIMO utilizando un NSC que utiliza estados observados. En [65], la estabilización de un péndulo volante amortiguado por fuerza alrededor de su punto de equilibrio inestable se resuelve utilizando funciones de saturación anidadas. Esto asegura que el sistema realimentado es globalmente estable asintóticamente y localmente estable exponencialmente en la posición vertical invertida, incluso con la presencia de amortiguamiento físico.

En general, el enfoque NSC cubre la problemática de la estabilidad asintótica de un sistema integrador en cadena, donde las situaciones de incertidumbre y perturbación se abordan en los estudios de investigación mencionados. Su objetivo es estabilizar el sistema alrededor del origen en un intervalo de tiempo finito para un arreglo de control retro alimentado. El control saturado se ha adoptado como una estrategia eficiente para abordar el reto de la cadena incierta de integradores con una estructura feedforward, considerando restricciones de saturación no lineales. Sin embargo, en el contexto del control en lazo cerrado, la elección de los parámetros de control puede influir en el rendimiento del sistema. Además, los límites de saturación de los controladores saturados permanecen constantes en todo momento. Por

un lado, en [66] se propone una función de saturación ajustable con parámetros positivos para construir un nuevo NSC que estabilice globalmente un sistema no lineal feed-forward, con parámetros inciertos. Este control garantiza una convergencia global inmutable en un dominio pequeño, mientras que un mayor nivel de saturación se obtiene con el ajuste de parámetros positivos mediante un proceso de sintonización. Por otro lado, en [67] se desarrolla un algoritmo no lineal que utiliza una función de saturación suave para regular la actitud y posición de un helicóptero quad-rotor.

Inspirados en trabajos previos en este trabajo utilizamos una función de saturación suave en lugar de la función de saturación ajustable modificada para implementar un NSC capaz de estabilizar el PVTOL, que es un sistema de múltiples integradores y funciones de saturación. Esto se hace evitando el uso de una función escalar con una función de tradicional, que son funciones escalares lineales continuas no decrecientes y NSF, que producen una señal de control de entrada no suave, afectando a la convergencia del sistema.

2.4. Modelos matemáticos.

Para entender los sistemas, es esencial desarrollar modelos matemáticos que los representen con exactitud. Un modelo de un sistema se describe como una representación de sus características relevantes, y el proceso de abstracción necesario para crear esta representación se conoce como modelado. El modelo es una versión simplificada de una realidad compleja; el término “modelar” se refiere a crear una descripción que capture de manera precisa un sistema y sus actividades. Los modelos científicos se desarrollan para realizar inferencias sobre ciertos aspectos de sistemas reales previamente observados. Este proceso de creación y utilización de un modelo se ilustra en la figura 2.3 a). Estos modelos se pueden clasificar de acuerdo al conocimiento previo sobre el proceso ilustrados en la figura 2.3 b).

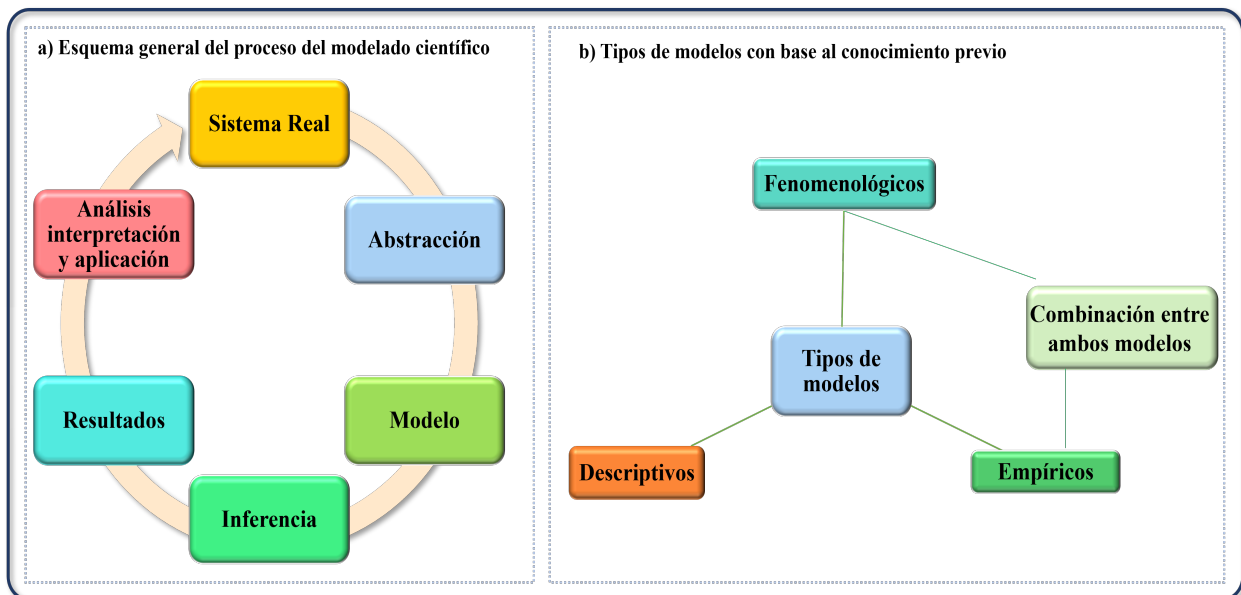


Figura 2.3: Sistema de modelado.

Otra forma de modelar un sistema es mediante modelos matemáticos, los cuales replican las relaciones de entrada(s) - salida(s) utilizando expresiones matemáticas. Cuando existe una relación lineal entre la entrada y la salida, el modelo matemático se expresa como:

$$y(t) = u(t)k_p \quad (2.1)$$

Donde $y(t)$ es la salida, $u(t)$ es la entrada del sistema, y k_p es la constante de proporcionalidad. No obstante, la ecuación (2.1) implica que cualquier cambio en la entrada se reflejará instantáneamente en la salida, lo cual no es cierto en sistemas reales, ya que la salida requiere tiempo para ajustarse. Esta relación se cumple únicamente cuando se ha alcanzado un tiempo suficiente para estabilizarse, conocido como la condición de estado estable, y puede representarse como:

El Valor en estado estable de $u(t) = y(t)$ por el Valor en estado estable de k_p

$$k_p = \frac{y(t)}{u(t)} \quad (2.2)$$

Donde k_p se refiere a la ganancia del sistema o función de transferencia. Así la función de transferencia en un sistema es responsable de conectar la salida y entrada es estado estable.

2.5. Enfoques de modelo matemático.

La dinámica no lineal, representada por los movimientos planetarios, ha sido un enigma científico ancestral. Figuras destacadas como Newton, Kepler, Cartan, Hamilton y Dirac están asociadas al desarrollo de la mecánica, que ha sido la principal motivación para investigar sistemas dinámicos y sus características. Brockett fue pionero en introducir los sistemas hamiltonianos controlados, seguido por Vander Schaft en el desarrollo de teorías de controlabilidad y observabilidad. Paralelismos con la teoría de sistemas lineales se han encontrado en la teoría de realización, demostrando la existencia y unicidad de realizaciones para sistemas "suaves" por Crouch y otros. La aplicación del control en sistemas mecánicos se inició en la robótica, donde se han examinado casos de control de actitud de naves espaciales, destacando la utilidad de los sistemas de control no lineales [68].

2.5.1. Formalismo de Euler-Lagrange.

La formulación Lagrangiana proporciona una forma de modelar la dinámica de un robot al analizar el balance de energía. En este enfoque, el robot se conceptualiza como una entidad cerrada, y las ecuaciones derivadas se centran únicamente en la energía almacenada, representada a través de las energías cinética y potencial. Para un robot dado, los resultados obtenidos mediante esta formulación son idénticos a los obtenidos mediante la formulación de Newton-Euler. Definido como una función escalar, el Lagrangiano se calcula mediante la suma algebraica, o diferencia, de las energías cinéticas y la energía potencial correspondiente del sistema mecánico, expresado en términos de las coordenadas generalizadas. [69]. En la figura 2.4 se desarrolla en detalle la formulación Lagrangiana.

2.5.2. Formalismo de Newton-Euler.

El formalismo de Newton-Euler es un método ampliamente utilizado en dinámica para modelar y analizar el movimiento de cuerpos rígidos. Este enfoque combina las leyes de Newton para el movimiento lineal y las ecuaciones de Euler para la rotación, proporcionando una descripción completa del comportamiento dinámico de un sistema [70, 71, 72]. En el esquema 2.5, se describe paso a paso el método de Newton-Euler, detallando las ecuaciones y matrices necesarias para modelar el movimiento de un cuerpo rígido donde se proporciona una visión clara y organizada del formalismo de Newton-Euler, destacando su aplicación en la dinámica de cuerpos rígidos y facilitando su comprensión y utilización en distintos ámbitos de la ingeniería y la física.

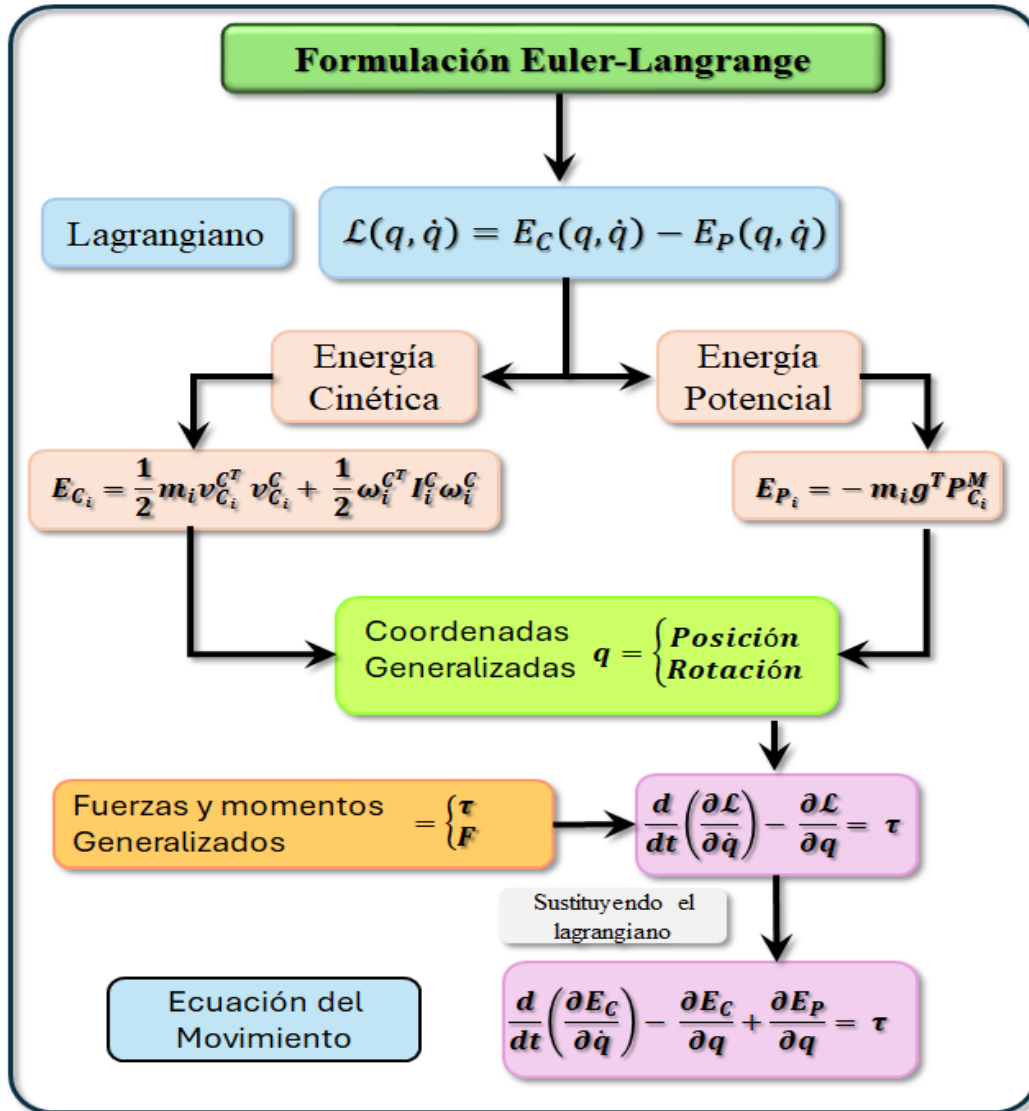


Figura 2.4: Formalismo de Euler - Lagrange.

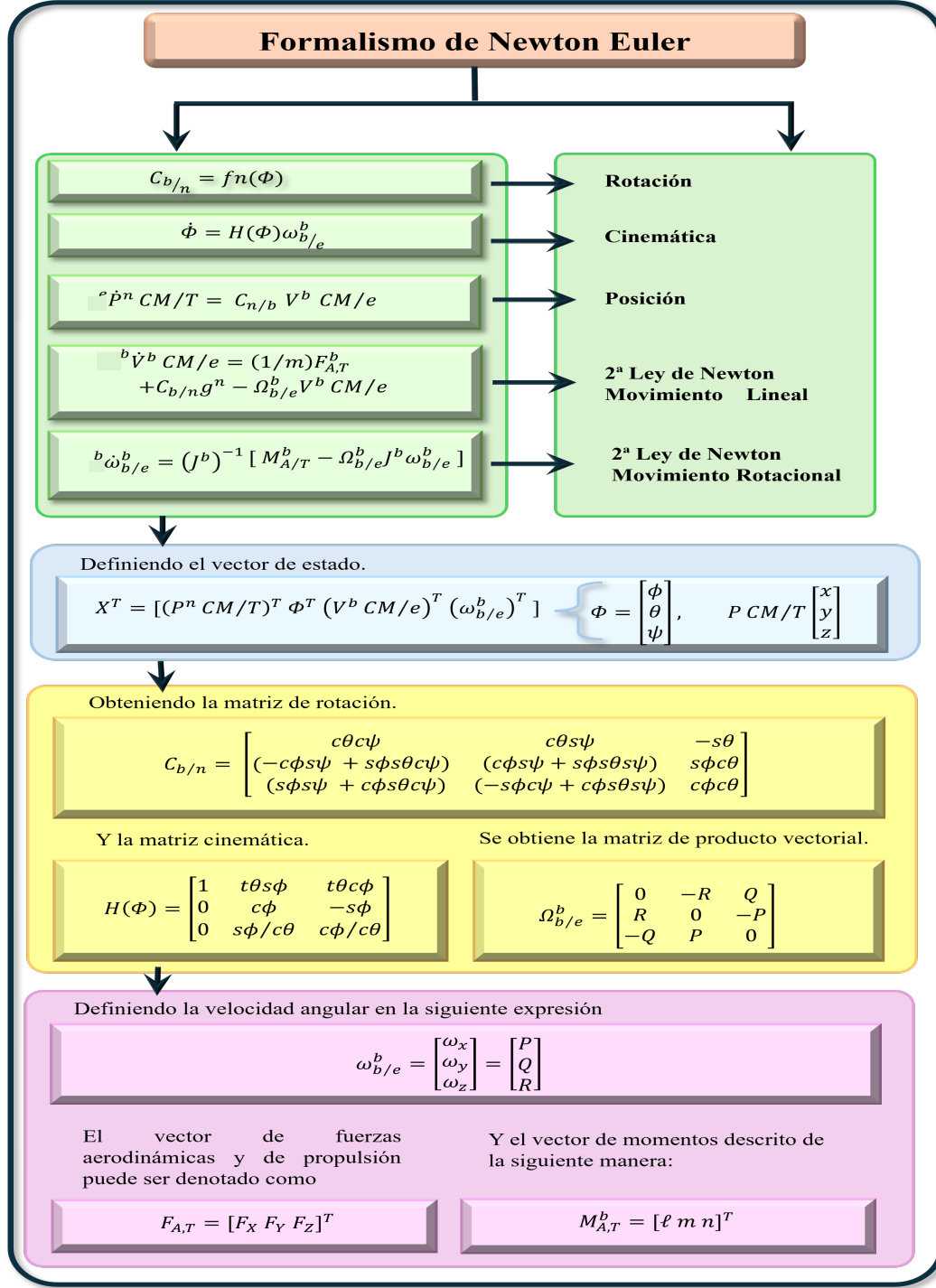


Figura 2.5: Formalismo de Newton Euler.

2.6. Fundamentos de control.

El sistema de control que se analizará se presenta en la figura 2.6. La planta se describe mediante una función de transferencia $g(s)$ que enlaza su entrada u con la salida x . El relé

recibe una señal de entrada z y produce una salida u , cumpliendo con:

$$u = \text{sgn}(z \neq 0) \quad (2.3)$$

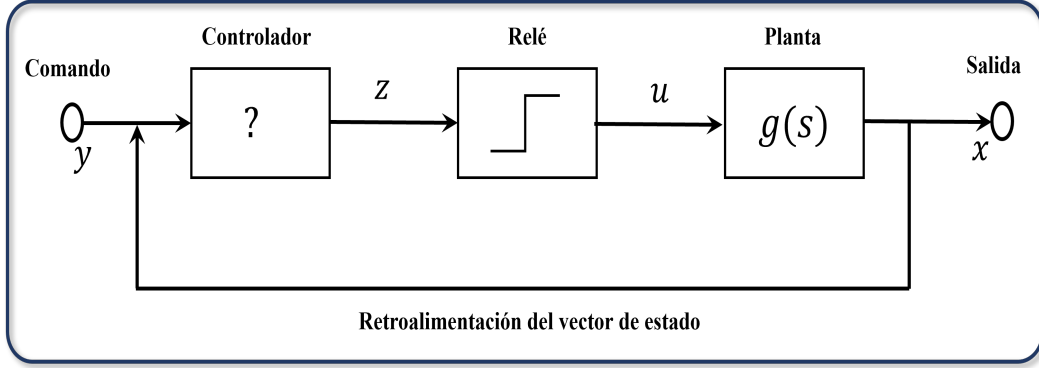


Figura 2.6: Sistema de control por relé.

La salida del regulador es función de las coordenadas de estado del sistema. La señal de mando es y , y el error del sistema e se define como:

$$e = x - y \quad (2.4)$$

El índice de rendimiento w es:

$$w = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.5)$$

Donde t es el tiempo.

La señal de mando del relé es una entrada de señal tipo escalón aplicada en $t = 0$ y los valores iniciales de las coordenadas de estado de la planta son cero. Sin embargo, los cálculos son esencialmente los mismos si en lugar de ello considera que la señal de mando es distinto a cero. Adoptando este procedimiento se permite la notación de respuesta escalonada a la del sistema, cuando sea apropiado. Así, a efectos de cálculo, se obtiene:

$$y = 0 \quad (2.6)$$

Y entonces el índice de rendimiento es:

$$w = \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.7)$$

El problema consiste en encontrar qué función z de las coordenadas de estado de la planta minimiza w , para valores iniciales dados de las coordenadas de estado, primero cuando z no está restringida, en segundo lugar cuando z está restringida a ser lineal. Cuando la planta consta de un único integrador:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{a} (a > 0) \quad (2.8)$$

El error cuadrático integral se minimiza mediante una función de conmutación:

$$z(x) = -x \quad (2.9)$$

La función de conmutación lineal anterior es óptima no sólo en la clase de funciones de conmutación lineales, sino también en la clase de funciones de conmutación generales. De esta manera la planta se produce ningún aumento del de rendimiento por el uso de una función de conmutación lineal.

2.6.1. Regulación de sistemas no lineales.

En [73] se considera un sistema no lineal de n dimensiones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde x es el vector de estado del sistema en $\mathbb{R}^n$, u es el vector de entrada $\mathbb{R}^m$, y es el vector de salida $\mathbb{R}^m$, $f(x)$ es una función vectorial no lineal que describe la dinámica interna del sistema, $g(x)$ es una matriz que relaciona las entradas u con la dinámica del sistema, $h(x)$ es una función vectorial que describe cómo los estados x se mapean a las salidas y .

El sistema tiene m entradas y m salidas. Se asume que su aproximación lineal en $x = 0$ caracterizada por la matrices A, B, C , donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, que describe la dinámica linealizada del sistema, donde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ representa la matriz de entrada, que describe de qué manera las entradas u influyen en los estados del sistema. $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de salida, que relaciona los estados x con las salidas y del sistema. Se asume que el sistema linealizado es estable mediante una realimentación de estado lineal $u = -Kx$, donde K es la matriz de ganancia que estabiliza el sistema del control cerrado. Además se supone que una trayectoria de referencia $y_d(t)$ es generada por un sistema dinámico autónomo $p - dimensional$ es decir:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= s(w), \\ y_d &= r(w) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Suponiendo que las funciones vectoriales f y h son ceros en $x = 0$ así como también en $w = 0$. El diseño del sistema se lleva acabo para un sistema fijo, pero se puede generar toda una clase de trayectorias variado la condición inicial $w(0)$. Además es suficiente tener (2.11) como un sistema lineal es decir $s(w) = Sw, r(w) = Rw$. El problema de la regulación a través de la retroalimentación se puede resolver encontrando una ley de la forma:

$$u = \gamma(w) + K(\pi(w) - x) \quad (2.12)$$

Donde las funciones suaves $\gamma(w)$ y $\pi(w)$ son cero en $w = 0$ y satisfacen las siguientes ecuaciones reguladoras:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w))\gamma(w), \\ r(w) &= h(\pi(w)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

El mapeo (w) caracteriza la evolución en estado estacionario asociado a la trayectoria y_d y también se denota como x_d , el termino $\gamma(w)$ en (2.12) mantiene el estado evolucionado como $x_d(t)$, una vez que el error de estado inicial se ha reducido a cero. Este último es garantizado, al menos localmente, por la matriz de ganancia de retroalimentación K . En particular, si el estado inicial coincide con el estado $x = 0 = x_d(0) = \pi(w(0))$, entonces es la salida exacta resultado de la reproducción. De lo contrario, sólo se obtiene un seguimiento asintótico.

Para permitir la regulación utilizando sólo medidas de producción, se necesita un supuesto de detectabilidad adicional para la aproximación lineal del sistema extendido compuesto por la planta original, es decir para el par $([CR], \text{diag}\{A, S\})$. El de regulación a través de la retroalimentación de salida (es decir, error) puede resolverse encontrando una ley dinámica de la forma:

$$\begin{aligned} u &= \theta(\hat{x}), \\ \dot{\hat{x}} &= \eta(\hat{x}\tilde{y}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Donde $\tilde{y} = y_d - y$, y con $\hat{x} = \sigma(w)$, $\sigma(0)$, satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w)) + \theta(\sigma(w)), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) &= \eta(\sigma(w), 0), \\ r(w) &= h(\pi(w)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

El mapeo de $\sigma(w)$ caracteriza la relación de estado estacionario entre el estado del sistema y el estado del observador. Teniendo en cuenta que la dinámica del observador η también tiene una copia del sistema, lo que resulta una dimensión general $n + p$. La parte de suficiencia de la prueba es constructiva y muestra que una vez resuelto (2.13) para $\pi(w)$ y $\gamma(w)$, se obtiene el regulador dinámico en (2.14) sin esfuerzo extra.

2.6.2. Sistema lineal y linearización.

El sistema lineal invariante en el tiempo se puede definir como:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.16}$$

El sistema posee un punto de equilibrio en el origen, que se considera aislado solo si $\det(A) \neq 0$. Si, por el contrario, $\det(A) = 0$, la matriz A posee un espacio nulo no trivial, lo que significa que cualquier punto dentro de este espacio nulo es también un punto de equilibrio para el sistema (2.16). Dicho de otra manera, cuando $\det(A) = 0$, el sistema presenta un subespacio de equilibrio. Es importante señalar que en un sistema lineal no pueden existir múltiples puntos de equilibrio aislados; si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ representan dos puntos de equilibrio para (2.16), entonces, debido a la naturaleza del sistema, todos los puntos situados en la línea que une $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ también serán puntos de equilibrio del sistema.

Las características de estabilidad del origen se pueden determinar a partir de las ubicaciones de los valores propios de la matriz A . De acuerdo con la teoría de sistemas lineales, la solución de (2.16) para un estado inicial dado $x(0)$ está dada por:

$$x(t) = \exp(At)x(0) \quad (2.17)$$

Forma de Jordan.

Para cualquier matriz A , siempre es posible encontrar una matriz no singular P (que puede ser compleja) que convierte a A en su forma de Jordan, es decir:

$$P^{-1}AP = J = \text{diag} (J_1, J_2, J_3, \dots, J_r) \quad (2.18)$$

La forma de Jordan es una representación especial de la matriz A que organiza los eigenvalores en bloques llamados bloques de Jordan. Estos bloques tienen la siguiente estructura:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (2.19)$$

Donde J_i es el bloque de Jordan asociado al eigenvalor λ_i en A y m es el orden del bloque de Jordan. Esta representación es útil porque simplifica el análisis de la dinámica de sistemas lineales, especialmente cuando A no es diagonalizable. La solución del sistema en términos de la forma de Jordan es:

$$\exp(at) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik} \quad (2.20)$$

Donde m_i es el orden del bloque de Jordan asociado al eigenvalor A . El siguiente teorema caracteriza las propiedades de estabilidad del origen.

- **Teorema 1.** [74] *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.16) es estable si y sólo si todos los valores propios de A satisfacen $\text{Re}\lambda_i \leq 0$ y cada valor propio con $\text{Re}\lambda_i = 0$ tiene asociado un bloque de Gauss Jordan de orden uno. El punto de equilibrio $x = 0$ es (globalmente) asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de A satisfacen $\text{Re}\lambda_i < 0$.*

2.6.3. Control de procesos en lazo abierto.

El sistema de tipo control en lazo abierto es relativamente básico y no siempre satisface adecuadamente los requisitos de rendimiento esenciales. Aunque estos sistemas son más económicos, suelen ser menos precisos. Normalmente, un sistema de control en lazo abierto consta de dos elementos principales: el dispositivo de control el proceso a controlar, como se puede ver de la representación a bloques de la figura 2.7.

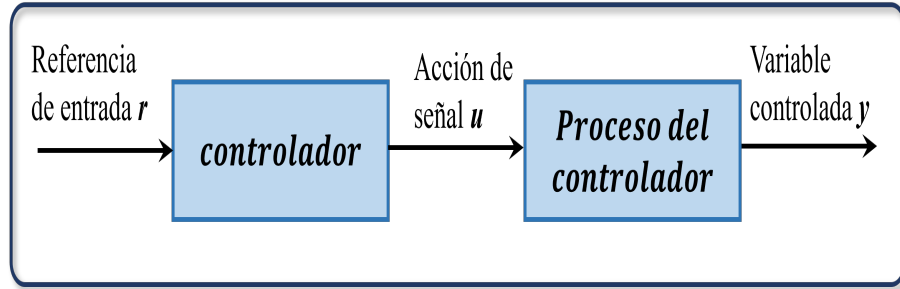


Figura 2.7: Componentes de la arquitectura de control en lazo abierto.

Una consigna de entrada, con referencia, r , se dirige al elemento de control, que produce una señal de salida, conocida como señal de entrada de control u , la cual ajusta el proceso controlado para que la variable y cumpla con ciertos estándares predefinidos. En configuraciones básicas, el dispositivo de control puede construirse mediante amplificadores, una conexión mecánica, un filtro, entre otros elementos de control, dependiendo de las características del sistema. En sistemas más avanzados, el dispositivo de control puede implementarse en un software en una computadora o en un microprocesador. Estas características de simplicidad y bajo costo son típicas de los sistemas de control en lazo abierto.

2.6.4. Controladores en bucle cerrado.

Para obtener un control mas preciso, se debe retroalimentar la variable controlada, y compararla con la señal de referencia. Esta comparación genera una señal para el control la cual es proporcional a la la suma aritmética entre la referencia y la variable salida, lo que permite ajustar el error. Un sistema que utiliza una o varias vías de retroalimentación, como el descrito, se denomina sistema de bucle cerrado. En la figura 2.8 se ilustra un sistema de control de régimen de ralentí en bucle cerrado. La entrada de referencia w_r define el régimen de ralentí deseado. La velocidad del motor en estado estacionario debe coincidir con el valor de deseado w_r . Cualquier desviación, como el par de carga T_L , es leída por el medidor de velocidad y el comparador de error. El algoritmo de control ajusta cualquier discrepancia y corrige la desviación u para modificar el ángulo del acelerador α y corregir el error.

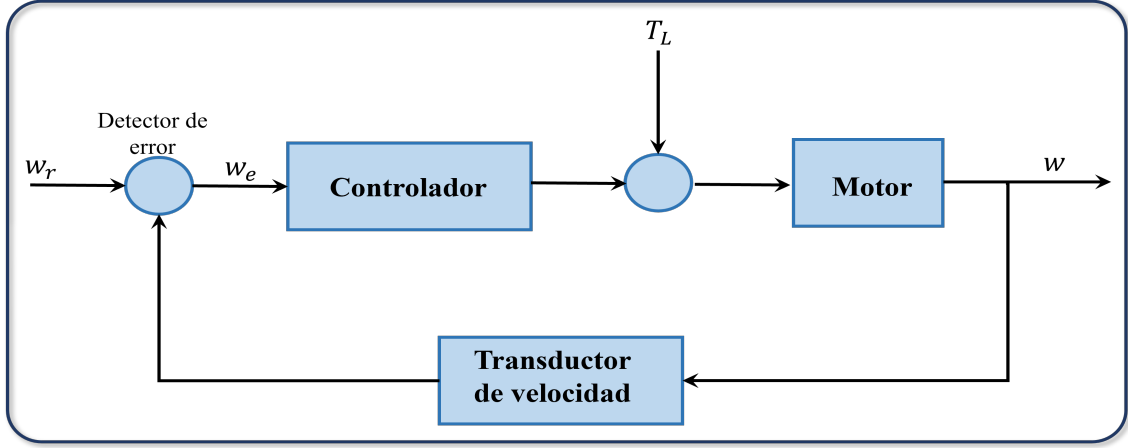


Figura 2.8: Diagrama de bloques de un sistema de control en bucle cerrado.

2.6.5. Sistemas de control robusto.

El sistema no solo tiene que cumplir con los requerimientos de amortiguación y precisión, sino que también debe garantizar un control robusto, lo que implica ser resistente a perturbaciones externas y a cambios en los parámetros. La robustez en un sistema con configuración de retroalimentación convencional solo se logra mediante una alta ganancia de bucle, lo cual a menudo puede ser perjudicial para la estabilidad. En la figura 2.9, la perturbación externa se representa por la señal $d(t)$, suponiendo que la ganancia del amplificador K puede variar durante la operación. La función de transferencia de *entrada – salida* del sistema cuando $d(t)$ es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_{cf}(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \quad (2.21)$$

Y la perturbación tiene como función de transferencia a la salida para $r(t)$ lo siguiente:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \quad (2.22)$$

La estrategia de diseño consiste en seleccionar el controlador $G_c(s)$ de forma que la salida $y(t)$ sea robusta frente a las perturbaciones en el rango de frecuencias especificado, y en diseñar el controlador de retroalimentación $G_{cf}(s)$ para lograr la función de transferencia deseada entre la entrada $r(t)$ y la salida $y(t)$. La sensibilidad de $M(s)$ frente a las variaciones en K se define como:

$$S_K^M = \frac{\text{porcentaje del cambio en } M(s)}{\text{Porcentaje de cambio en } K} = \frac{dM(s)/M(s)}{dK/K} \quad (2.23)$$

Y para el sistema de la figura 2.9:

$$S_K^M = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \quad (2.24)$$

Así que, tanto las funciones de sensibilidad como las perturbaciones de salida son equivalentes, lo que indica que los mismos esquemas de control pueden ser utilizados para la supresión de perturbaciones y para mantener la robustez frente a variaciones en K .

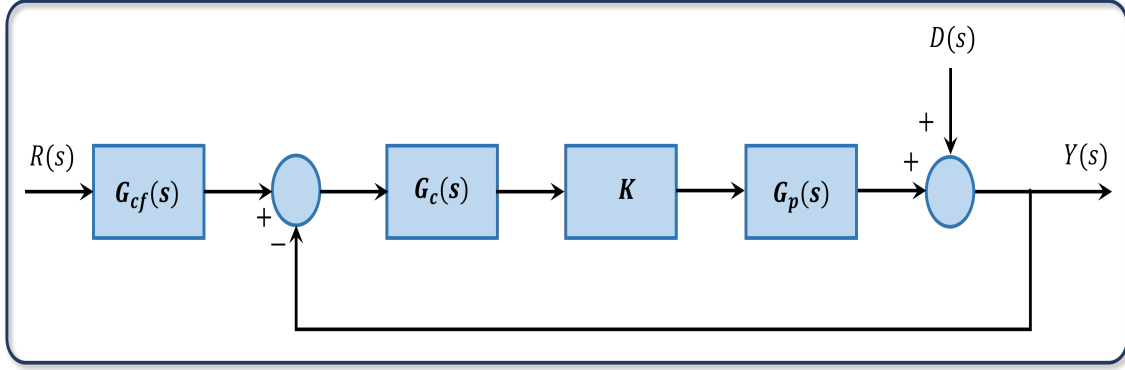


Figura 2.9: Sistema de control con perturbaciones.

2.7. Estrategias de control.

2.7.1. Control PID.

Un control PID se compone de tres parámetros: la ganancia proporcional k , el tiempo integral T_i y el tiempo derivativo T_d . La sintonización es el proceso de determinar los parámetros del controlador. Para encontrar el valor de estos tres factores y desarrollar controladores de alto rendimiento y tolerantes a fallos, se han desarrollado varios métodos y técnicas de ajuste de controladores PID, y tolerantes a fallos [75]. La expresión en el dominio del tiempo del controlador PID convencional se describe como [76]:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.25)$$

Donde $u(t)$ es la salida del regulador, $e(t)$ es la señal de error, K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo de derivación, respectivamente.

En la figura 2.10 a) se presenta el esquema de bloques del sistema de control PID (Proporcional-Integral-Derivativo). A continuación, se detallan los principales elementos de este esquema.

1. *Referencia* $r(t)$: Es la señal de entrada deseada que se quiere alcanzar en la salida del sistema.
2. *Sumador* Σ : Calcula el error $e(t)$ como la diferencia entre la referencia $r(t)$ y la salida actual del sistema.
3. *Controlador PID*: Consiste en tres partes [77]:
 - Proporcional K : Multiplica el error $e(t)$ por una constante proporcional K para ajustar la salida.

- Integral $\int$: Integra el error $e(t)$ a lo largo del tiempo para corregir errores acumulados pasados.
 - Derivativo $\frac{d}{dt}$: Calcula la derivada del error $e(t)$ para predecir y corregir cambios futuros en el error.
4. *Sumador* Σ : Combina las salidas de los componentes proporcional, integral y derivativo para generar la señal de control $u(t)$.
 5. *Planta*: Representa el proceso o sistema físico que se está controlando.
 6. *Retroalimentación*: La salida del sistema se retroalimenta al sumador inicial para actualizar el cálculo del error.

En la figura 2.10 b) se muestra una gráfica del error en función del tiempo, destacando las contribuciones de cada componente del controlador PID. La función de transferencia de un controlador PID ideal se describe como:

$$[h]G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.26)$$

La forma paralela del controlador PID:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(\frac{T_d s + 1}{\lambda T_d s + 1} \right) \quad (2.27)$$

En la forma paralela del control PID, λ es un parámetro filtrado donde $\lambda \in [0, 1]$.

El objetivo principal del método de ajuste del controlador PID es encontrar los valores óptimos de K_p , T_i y T_d para minimizar el error y el tiempo de establecimiento del sistema garantizando al mismo tiempo un funcionamiento estable tanto en condiciones estacionarias como transitorias. Existen diferentes tipos de métodos de sintonización disponibles en la literatura de control.

Método de sintonización Ziegler-Nichols.

La metodología de Ziegler-Nichols para calibrar reguladores PID se fundamenta en la observación, lo que permite ajustar los parámetros del regulador a partir de un punto determinado en la curva de Nyquist del sistema en bucle abierto. Este punto se encuentra en la intersección de la curva de Nyquist con el eje real negativo, y se suele expresar en términos de la ganancia crítica k_c y el período crítico t_c .

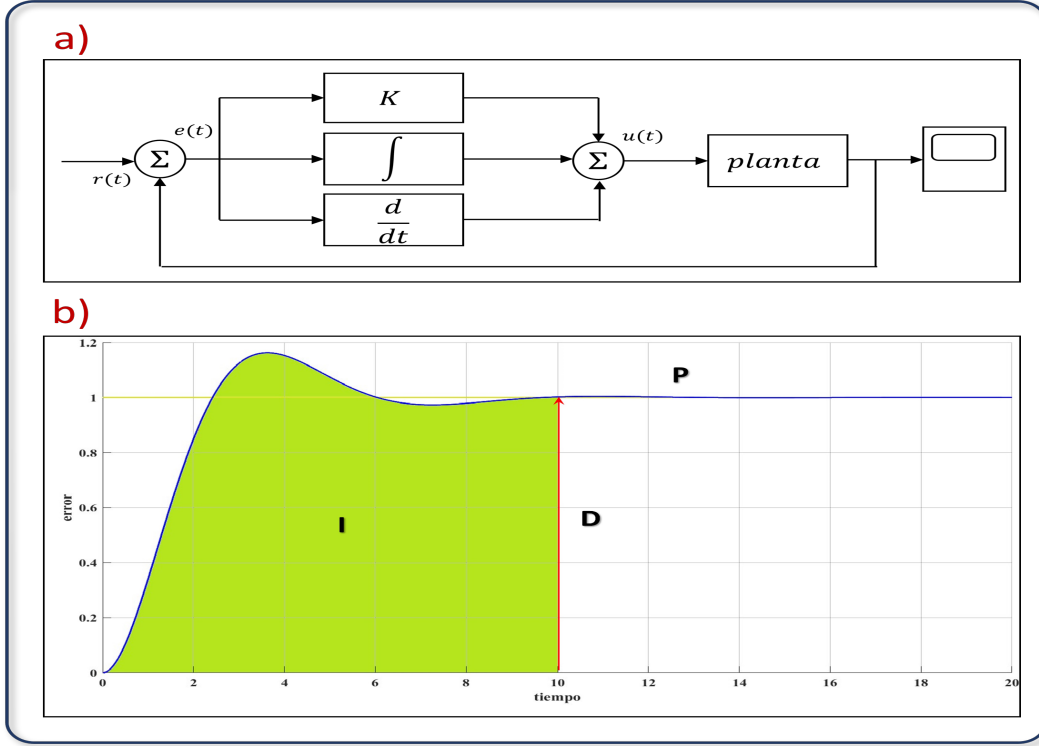


Figura 2.10: Control PID. a) Diagrama de bloques en Simulink. b) Gráfica de las ganancias del control PID.

El método está basado en la observación donde un sistema con un desfase de al menos π a altas frecuencias puede oscilar con un periodo t_c bajo un control de retardo; para determinar la ganancia crítica y el periodo crítico, el sistema se configura con una conexión de lazo retroalimentado a través de un relevador, tal como puede visualizarse en la figura 2.11, el error e es una señal periódica t_c ; d es la amplitud del retardo de acuerdo a la serie de Fourier la salida del retardo tiene la amplitud de $\frac{4d}{\pi}$. Si la salida del proceso es u , la ganancia crítica está dada aproximadamente por [78]:

$$k_c = \frac{4d}{\pi u} \quad (2.28)$$

Este resultado también se desprende de la función descriptiva de aproximación. Describiéndose en función de $N_{(a)}$ para un repetidor ideal viene dada por:

$$N_{(a)} = \frac{4d}{\pi a} \quad (2.29)$$

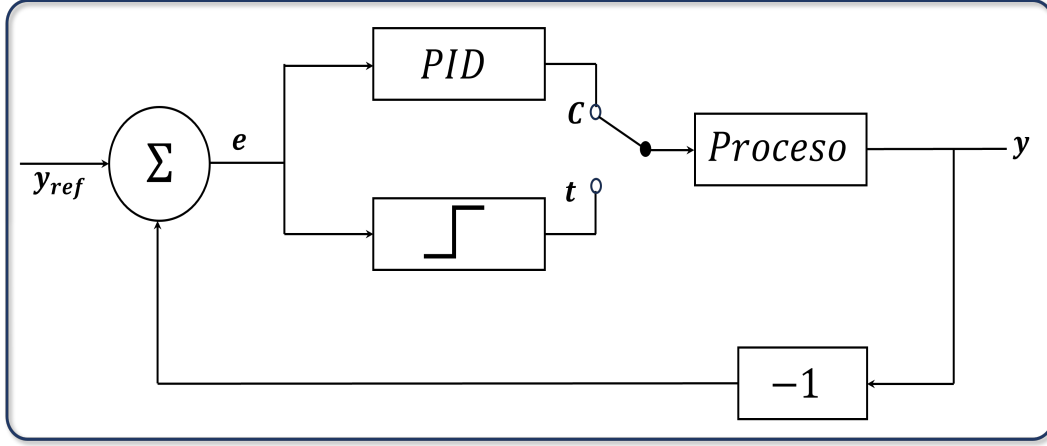


Figura 2.11: Diagrama de bloques del sintonizador automático. El sistema funciona como relé en el modo de sintonización (t) y como un regulador PID ordinario en el modo de control (c).

Los métodos para la determinación automática de la frecuencia y la amplitud de la oscilación, pueden determinarse fácilmente midiendo los tiempos entre cruces por cero y la amplitud puede determinarse midiendo los valores pico a pico de la salida. Considerando el siguiente teorema:

Teorema 1. Consideremos el sistema de bucle dosificado obtenido por una conexión realimentada de un sistema lineal que tiene la función de transferencia $G(s)$ con un relé con histéresis. Sea $H(\tau, z)$ la función de transferencia de impulsos de la combinación en serie de una muestra y con período τ y $G(s)$. Si hay una oscilación el período T viene dado por:

$$H\left(\frac{T}{2}, -1\right) = -\frac{\varepsilon}{d} \quad (2.30)$$

Donde ε es la histéresis con un retardo y d es el retardo de la salida. Seguido de la función de transferencia de impulsos que:

$$H(\tau, -1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi[1+2n]} \text{Im}G\left(\frac{\pi + 2n\pi}{n}i\right) \quad (2.31)$$

La respuesta en frecuencia de un regulador PID puede ser escrita como $k = k_c/A_m$, donde A_m , es el margen de amplitud deseado y K_c es la ganancia crítica. Cuando es necesaria la acción de la integral para la frecuencia del PID se describe de la siguiente manera:

$$G_R(l\omega) = k \left(1 + \frac{1}{l\omega T_i} (1 - \omega^2 T_i T_d) \right) \quad (2.32)$$

se deduce que cualquier regulador PID con la ganancia dada por $k = k_c/A_m$ y

$$T_d = \frac{1}{\omega_c^2 T_i} \quad (2.33)$$

donde $\omega_c = 2\phi/t_c$ también da la amplitud deseada. El tiempo de integración puede elegirse arbitrariamente, y el tiempo de derivada viene dado por ecuación 2.33.

El método de oscilación en lazo cerrado de Ziegler Nichols o también conocido como método cíclico continuo se utiliza para sintonizar el controlador en modo de lazo cerrado. La acción de control se establece primero en modo proporcional, donde la ganancia k_p se establece con el mayor valor posible, para lo cual se permite que se produzcan oscilaciones cerradas alrededor del punto de consigna. Se tiene en cuenta el periodo de tiempo de oscilación. El método de la curva de reacción del proceso es un método de ajuste de bucle abierto. En este caso, primero se rompe un sistema de bucle cerrado y, a continuación, se da una entrada escalonada al proceso.

Reglas de Ziegler-Nichols para el ajuste de controladores PID.

Ziegler y Nichols desarrollaron directrices para calcular los valores del tiempo integral T_i , la ganancia proporcional K_p y el tiempo derivativo T_d , basándose en los principales aspectos de la respuesta ante transitorios de un proceso determinado. Se han propuesto varias reglas para ajustar y sintonizar los parámetros del controlador PID. A continuación, se describen dos métodos conocidos como las reglas de ajuste de Ziegler-Nichols.

1. **Primer enfoque.** La respuesta de la planta ante una entrada de paso unitario se determina experimentalmente, como se ilustra en la figura 2.12 a). En el caso de que la planta no tenga un integrador S ni polos complejos conjugados dominantes, la curva de respuesta al paso unitario puede adoptar una forma de S , como se ilustra en la figura 2.12 b). Este enfoque es útil cuando la respuesta a una entrada escalón presenta una curva con forma de S . Estas curvas que representan la respuesta al escalón, se realizan mediante experimentos o mediante simulaciones dinámicas de la planta.

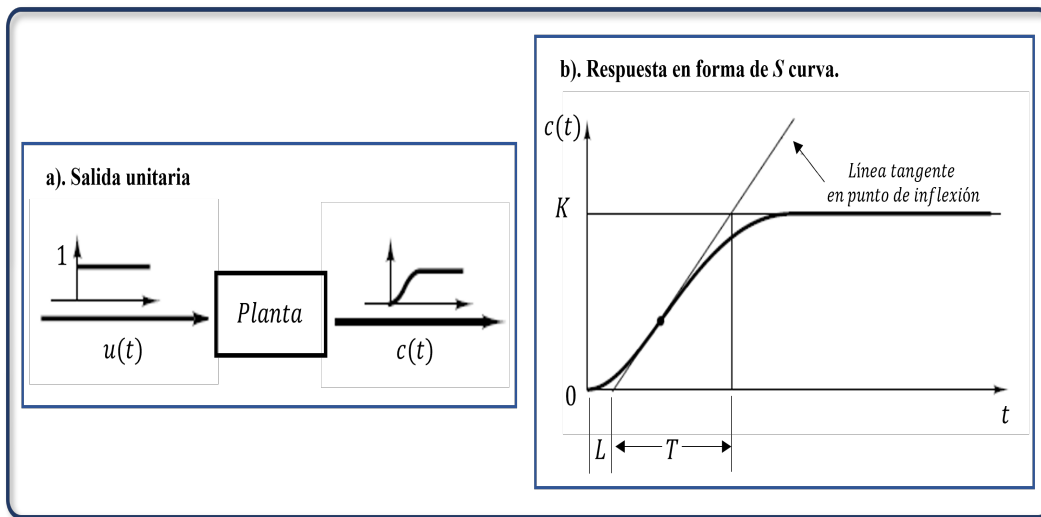


Figura 2.12: Reglas de Ziegler-Nichols para ajustar el controlador PID (primer método).

La función $C(s)/U(s)$ puede aproximarse utilizando un modelo matemático de primer orden empleando un retraso como se muestra:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (2.34)$$

Ziegler y Nichols recomendaron establecer los valores de K_p , T_i y T_d utilizando las fórmulas indicadas en la tabla 2.2

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	2L	0,5L

Tabla 2.2: Método de ajuste de Ziegler-Nichols basado en la respuesta a escalón de la planta (primer enfoque).

Nota que con el controlador PID ajustado utilizando el primer método de las reglas de Ziegler-Nichols se obtiene:

$$\begin{aligned}
G_C(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
&= 1,2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0,5Ls \right) \\
&= 0,6T \frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}
\end{aligned} \quad (2.35)$$

De esta manera, el controlador PID tiene un polo en el origen y dobles ceros en $s = -1/L$.

2. **Segundo enfoque.** En este método primero se ajusta $T_i = \infty$ y $T_d = 0$ Usando la acción de control proporcional solamente como se presenta en la figura 2.12 a), con incrementamos k_p desde 0 hasta un valor crítico K_{ct} en el cual la salida muestra por primera vez oscilaciones sostenidas. Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que tome k_p , entonces este método no se aplica. De este modo, la ganancia crítica K_{ct} y el período correspondiente P_{cr} son experimentales como se muestra en la figura 2.13 b). En este método se emplean los parámetros K_p , T_i y T_d de acuerdo a las formulas mostradas en la tabla 2.3.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	0,5K_{cr}	∞	0
PI	0,45K_{cr}	$\frac{1}{1,2}\mathbf{P_{cr}}$	0
PID	0,6K_{cr}	0,5P_{cr}	0,125P_{cr}

Tabla 2.3: Método de ajuste de Ziegler-Nichols utilizando la ganancia crítica K_{cr} y el periodo crítico P_{cr} (segundo enfoque).

Al utilizar el controlador PID ajustado mediante el segundo enfoque de Ziegler-Nichols, obtenemos:

$$\begin{aligned}
G_C(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
&= 0,6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0,5P_{cr}s} + 0,125P_{cr}s \right) \\
&= 0,75K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Así, el algoritmo PID posee un polo localizado en el origen y ceros dobles en $s = -4/P_{cr}$.

Cuando se dispone de un modelo matemático del sistema, representado como una función de transferencia, es posible emplear la técnica de root-locus para determinar la ganancia crítica J_{cr} y la frecuencia de oscilaciones constantes w_{cr} , donde $e\pi/w_{cr}$. Estos parámetros se obtienen identificando los puntos en los que las ramas del root-locus cruzan el eje j_w . Las reglas de ajuste de Ziegler-Nichols, junto con otras metodologías descritas en la literatura, han sido bastante empleadas para configurar algoritmos de control PID en lazos de control de procesos cuando la dinámica del procesos no esta identificada con precisión. A lo largo del tiempo, estas técnicas de ajuste han mostrado ser muy efectivas.

2.7.2. Control basado en lógica difusa.

En 1965 Lotfi Zadeh desarrolló la lógica difusa como una herramienta matemática para tratar la incertidumbre. La lógica difusa se basa en reglas lingüísticas *si-entonces*. Los sistemas basados en modelos difusos ayudan a describir los problemas mal definidos de una forma mucho más sencilla [79].

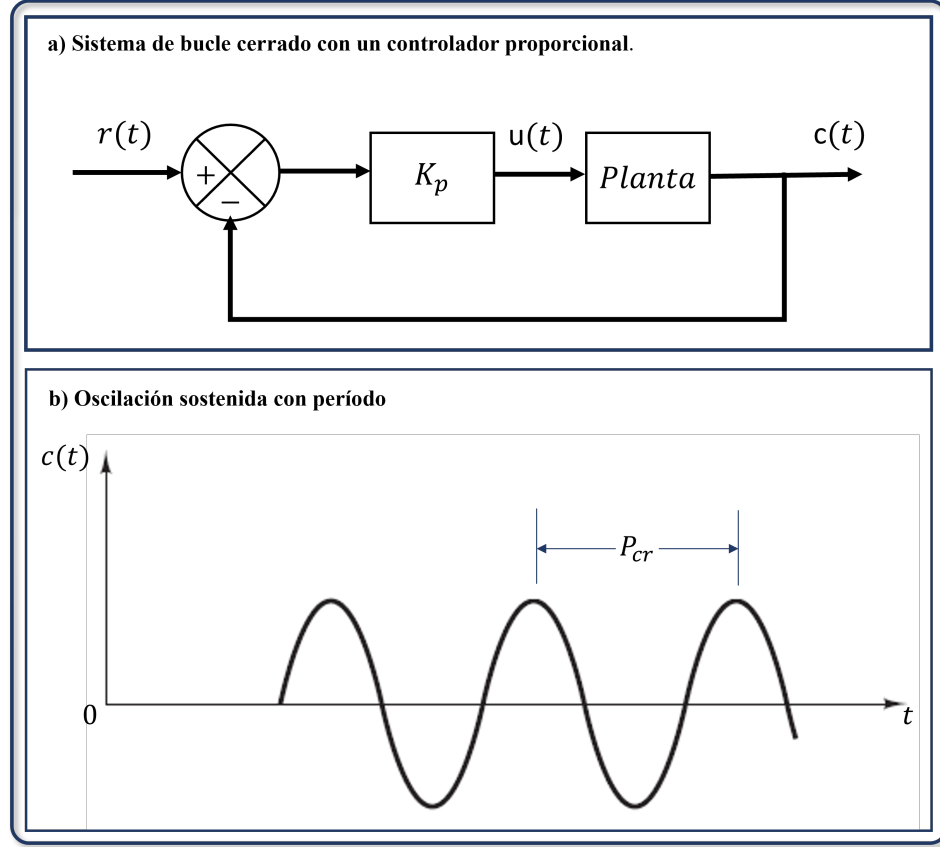


Figura 2.13: Reglas de Ziegler-Nichols para ajustar el controlador PID (segundo método).

Conjuntos difusos y terminología.

Sea U una colección de objetos denotada genéricamente por u , que puede ser discreta o continua. U se denomina universo del discurso y u representa el elemento genérico de U [80].

Definición 1: Una agrupación difusa F en un universo de discurso U se define mediante una relación univoca μ_F , que asigna valores en un rango $[0, 1]$, es decir, $\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$. A diferencia de un conjunto ordinario, cuya función de pertenencia solo puede tomar dos valores $\{0, 1\}$, a amplía este concepto. Así, la agrupación difusa F en U se puede representar como un conjunto de pares ordenados que incluyen un elemento genérico U y su grado de pertenencia: $F = \{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$ es continuo, esta representación puede expresarse de manera concisa como:

$$F = \int u \mu_F(u) / u \quad (2.37)$$

Cuando U es discreto, un conjunto difuso F se representa como:

$$F = \sum_{i=1}^n \mu_F(u_i) / u_i \quad (2.38)$$

Variables lingüísticas.

Una variable lingüística está definida por una quintupla $(x, T(x), U, G, M)$. Aquí, x representa el nombre de la variable, mientras que $T(x)$ es el conjunto de términos asociados a x , es decir, el conjunto de nombres de los valores lingüísticos, donde cada valor es un conjunto difuso en U . La regla sintáctica G se encarga de generar los nombres de estos valores, y la regla semántica M asigna un significado a cada uno de ellos. Los términos correspondientes a estos valores pueden ser representados como conjuntos difusos, cuyas funciones de pertenencia están ilustradas en la figura 2.14.

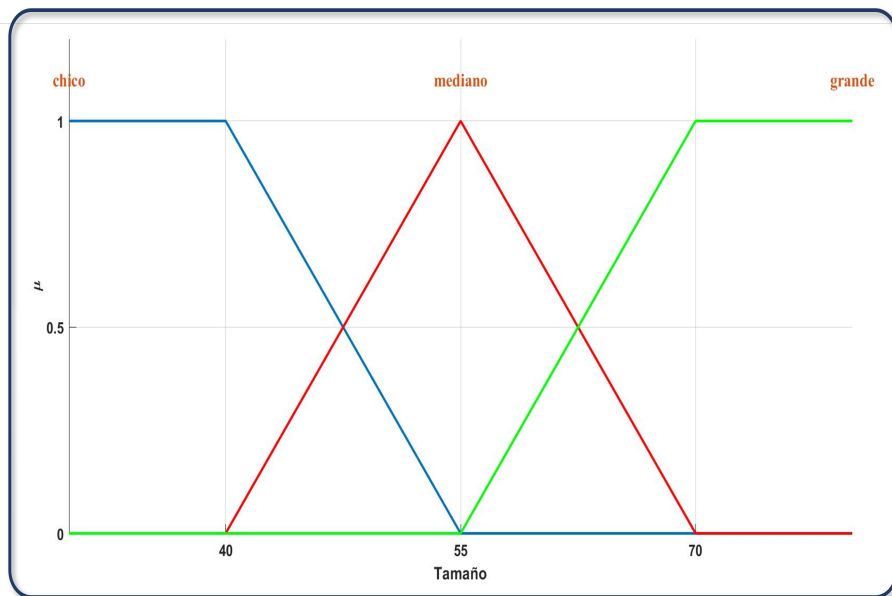


Figura 2.14: Ejemplo de variables lingüísticas.

Reglas de control difuso.

En la lógica de control difuso, el comportamiento dinámico de un sistema difuso está caracterizado por un conjunto de reglas de descripción lingüística basadas en el conocimiento experto. El control difuso suele ser de la siguiente forma: *SI (se cumplen una serie de condiciones) ENTONCES (pueden deducirse una serie de consecuencias)*.

Una regla de control difuso se define como una afirmación condicional difusa, en la que el antecedente describe una condición dentro de su ámbito de aplicación y el consecuente especifica una acción de control para el sistema. Estas reglas facilitan la formulación de la política de control y la representación del conocimiento especializado en el área. En el contexto de un sistema MIMO, las reglas de control difuso pueden incluir múltiples variables lingüísticas tanto en los antecedentes como en los consecuentes. La forma general de estas reglas para un sistema MIMO es:

$$\begin{aligned} R_1: & \text{si } x \text{ es } A_1 \text{ y } y \text{ es } B_t \text{ entonces } z \text{ es } C_1, \\ R_2: & \text{si } x \text{ es } A_2 \text{ y } y \text{ es } B_2 \text{ entonces } z \text{ es } C_2, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$R_n: \text{ si } x \text{ es } A_n \text{ y } y \text{ es } B_n \text{ entonces } z \text{ es } C_n$$

En este contexto, las variables lingüísticas x, y , y z representan dos variables de estado del proceso y una variable de control, respectivamente. Los valores lingüísticos de las variables x y y se designan como A_i, B_i y C_i en los universos de discurso U, V y W respectivamente, con $i = 1, 2, \dots, n$. Además, una conectiva de frase implícita vincula las reglas, formando un conjunto de reglas o, en otras palabras, una base de reglas.

Una regla de control difusa se expresa de la forma:

$$SI (x \text{ es } A_i \text{ y } y \text{ es } B_i) \text{ ENTONCES } (z \text{ es } C_i).$$

Esta regla se implementa mediante una *implicación difusa* o *relación difusa* R_i , y se define como sigue:

$$\begin{aligned} \mu_{R_i} &\triangleq \mu_{(A_i \text{ y } B_i \rightarrow C_i)}(u, v, w) \\ &= [\mu_{A_i}(u) \text{ y } \mu_{B_i}(v)] \rightarrow \mu_{C_i}(w) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Donde A , y B , es un conjunto difuso $A_i \times B_i$ en $U \times V$; $R_i \triangleq (A_i \text{ y } B_i) \rightarrow C_i$, es una implicación (relación) difusa en $U \times V \times W$; y $\rightarrow$ denota una función de implicación difusa.

El sistema de control se muestra en la figura 2.15 junto con el funcionamiento del controlador difuso, en general, suele dividirse en las tres categorías siguientes:

- Fuzzificación: En este bloque las variables del mundo real se traducen en términos de conjuntos difusos. Un algoritmo de control se codifica utilizando enunciados difusos teniendo en cuenta los objetivos de control y el comportamiento del sistema.
- Motor de inferencia difusa. Las acciones de control se codifican mediante reglas de inferencia difusa y los métodos de inferencia se formalizan en términos computacionales.
- Defuzzificación. Los resultados de los cálculos difusos se traducen en términos de valores reales para la acción de control difuso en el bloque de defuzzificación.

2.7.3. Control saturado anidado.

Una ley no lineal consistente en saturaciones anidadas que pueden garantizar estabilidad asintótica global para cadenas integradoras de cualquier orden n [50].

$$\dot{x}_1 = x_2 \dots \dot{x}_n = 1 \quad (2.40)$$

Definición 1. (*Saturación lineal*), dadas dos constantes $(L, M) \in \mathbb{R}_+$ tales que $0 < L \leq M$. Definiendo una función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que σ es una saturación tipo lineal si satisface continuidad, y no decremental y además:

$$\begin{aligned} a. \quad & s\sigma(s) > 0 \quad \forall s \neq 0 \\ b. \quad & \sigma(s) = s \quad \text{cuando } |s| \leq L \\ c. \quad & |\sigma(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.41)$$

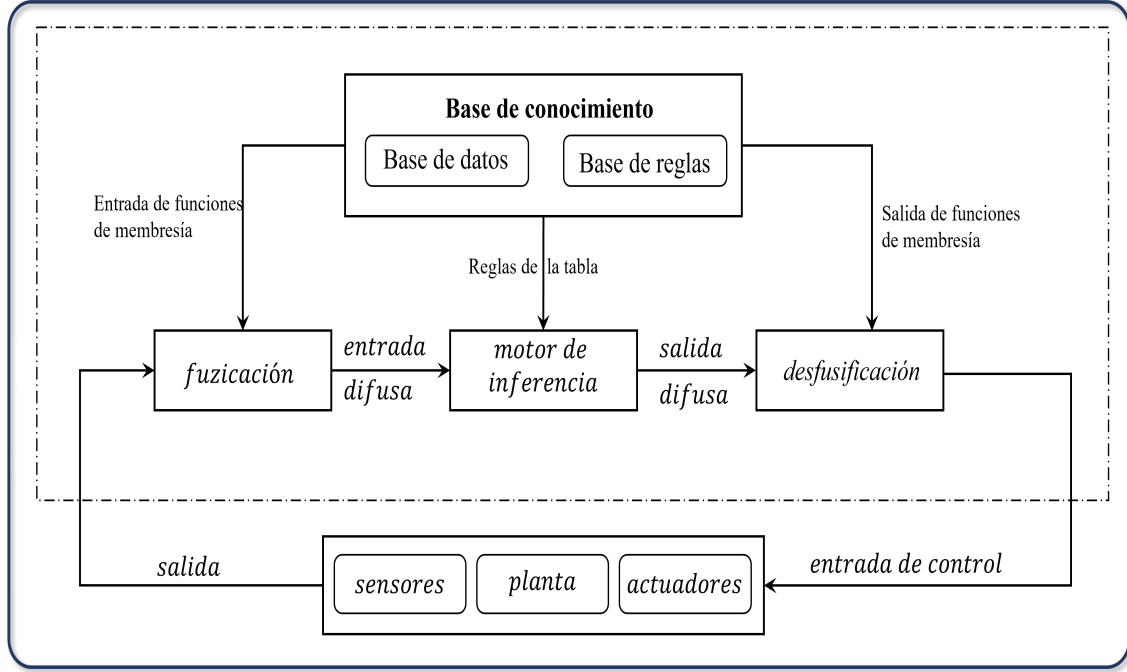


Figura 2.15: Representación a bloques para un algoritmo de control difuso.

La gráfica de esta función se muestra en la figura 2.16.

Definición 2. (*Saturación convencional*), $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una saturación convencional si tiene un límite $M \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\begin{aligned}
 a. \quad & s\sigma(s) > 0 \quad \forall s \neq 0 \\
 b. \quad & \sigma(s) = s \quad \text{cuando } |s| \leq M \\
 c. \quad & |\sigma(s)| = M \quad \text{cuando } |s| > M
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

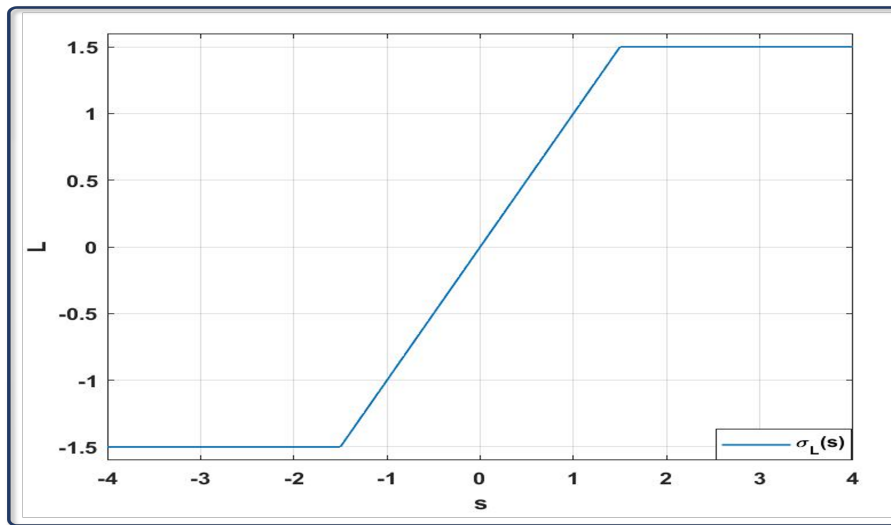


Figura 2.16: Función de Saturación $\sigma_L(s)$.

Observación 1. Se dice que σ está saturado cuando su argumento no se encuentra en su región lineal. Para la saturación lineal esto ocurre cuando $|s| > L$. Para la saturación convencional ocurre cuando $|S| > M$. [62]

A diferencia de los controladores backstepping, los controladores de saturación anidados siguen un esquema de diseño ascendente. A continuación se describe el enfoque de diseño de controlador propuesto para 2.40 [81].

Paso 1. Considere la entrada de control como $\bar{\theta}_c$.

$$\bar{\theta}_c = -k\sigma_1(x_3 + \sigma_2(\xi_1)) \quad (2.43)$$

Donde k es una constante positiva, $\sigma_i(\cdot)$ es una función de saturación con un límite de $M_i > 0$ que satisface $|\sigma_i(\cdot)| \leq M_i$, y ξ_1 es una función que se diseñará en el siguiente paso para garantizar la estabilidad de lazo cerrado. Se puede proponer una candidata a función de Lyapunov simple para el sistema como $V_1 = \frac{1}{2k}x_3^2$ por lo que su derivada temporal bajo el controlador es la siguiente:

$$\dot{V}_1 = -x_3\sigma_1(x_3 + \sigma_2(\xi_1)) \quad (2.44)$$

Eligiendo M_1 y M_2 tales que $M_1 > 2M_2$, se puede verificar que $V_1 < 0$ para todo $x_3 \notin S = x_3 : |x_3| < \frac{M_1}{2}$. En consecuencia, x_3 debe entrar en el conjunto S en un tiempo finito y permanecer después, lo que, a su vez, implica que:

$$x_3 + \sigma_2(\xi_1) \leq M_1 \quad (2.45)$$

Por lo tanto, la dinámica x_3 se reducirá a la siguiente forma lineal:

$$\dot{x}_3 = -k(x_3 + \sigma_2(\xi_1)) \quad (2.46)$$

En un tiempo infinito.

Paso 2. Sea $u_1 = x_3 + kx_2$ y $\dot{u}_1$ viene dada entonces como $-k\sigma_2(\xi_1)$. Se obtiene:

$$\xi_1 = u_1 + \sigma_3(\xi_2) \quad (2.47)$$

$\dot{u}_1$ puede describirse como:

$$\dot{u}_1 = -k\sigma_2(u_1 + \sigma_3(\xi_2)) \quad (2.48)$$

Considerando una función de Lyapunov candidata como $V_2 = \frac{1}{2k}v_1^2$, y su derivada temporal puede obtenerse como:

$$\dot{V}_2 = -u_1\sigma_2(u_1 + \sigma_3(\xi_2)) \quad (2.49)$$

Eligiendo M_2 tal que $M_2 > 2M_3$ y siguiendo el mismo análisis que en el paso anterior, se obtiene que $u_1 \leq \frac{M_2}{2}$ y $\dot{u}_1 = -k(u_1 + \sigma_3(\xi_2))$ pueden asegurarse en tiempo finito.

Paso 3. Se define $u_2 = u_1 + kx_2 + k^2x_1$, y puede comprobarse que $\dot{u}_2 = -\sigma_3(\xi_2)$. Si ξ_2 como $\xi_2 = u_2$. Entonces $\dot{u}_2 = -\sigma_3(u_2)$

Con una función de Lyapunov $V_3 = \frac{1}{2}u_2^2$ revela que u_2 y ξ_2 se aproximan asintóticamente al origen. Se puede concluir que $u_1 \rightarrow 0$ a partir de su dinámica, y por tanto $\xi_1 \rightarrow 0$ a partir de su definición. Además, $x_3 \rightarrow 0$ y, por lo tanto, a partir de las definiciones de u_1 y u_2 concluimos que $x_1 \rightarrow 0$ y $x_2 \rightarrow 0$. Entonces, la entrada de control final de $\bar{\theta}_c$ es:

$$\bar{\theta}_c = k\sigma_1(x_3 + \sigma_2(x_3 + kx_2 + \sigma_3(x_3 + 2kx_2 + k^2x_1))) \quad (2.50)$$

2.8. Control de una función suave.

2.8.1. Generalidades de una función suave.

Una función $F(x)$ definida en la proximidad de un punto x_0 se dice que es *suave* en ese punto, si:

$$\frac{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)}{h} \rightarrow 0 \quad (2.51)$$

Si la derivada $F'(x_0)$ existe y es finita.

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \quad (2.52)$$

La función F es suave en el punto x_0 , y la suavidad de F en x_0 no implica la diferenciabilidad de F allí. Lo único que se deduce de (2.51) es que, si las derivadas derecha de F existen en el punto x_0 , estas derivadas deben ser iguales, por lo que F es diferenciable en la curva $y = F(x)$ no tiene entonces ningún punto angular en x_0 , y éste es el origen de la terminología. Si $F(x)$ es suave en cada punto del intervalo (abierto o cerrado) (a, b) , diremos que F es suave en (a, b) .

Si $F(x)$ es suave en un punto x_0 , diremos a veces que F satisface la condición en ese punto; lo mismo se aplica para la suavidad en un intervalo. Si F cumple la condición:

$$\frac{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)}{h} = 0(1) \quad (2.53)$$

Diremos que F satisface la condición Λ en x_0 . Donde Λ se refiere a la condición en la cual la expresión anterior 2.53 se anula o tiende a cero en el límite cuando h tiende a cero. Del mismo modo definimos la condición Λ en un intervalo (a, b) . Si la condición (2.51) o (2.53) se cumple uniformemente en un intervalo (a, b) , y si F es continua en él, diremos que F cumple allí la condición $\prec\star$, o condición $\Lambda\star$. Esto presupone que F está definida en algún intervalo que comprende (a, b) . También escribiremos $F\varepsilon\prec\star$, o $F\varepsilon\Lambda\star$, según el caso.

Por último, supongamos que F es periódico, de período 2π , y que $F\varepsilon L^p$, donde p es cualquier número no menor que 1. Diremos que F satisface la condición $\prec_p$, o que $F\varepsilon\prec_p$, si:

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \pi |F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = 0(h) \quad (2.54)$$

Sustituyendo aquí o por 0 , obtenemos la condición h . La noción de suavidad fue considerada por primera vez por Riemann en su trabajo clásico sobre series trigonométricas. Demostró los coeficientes de la serie trigonométrica:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty}(a_v \cos vx + b_v \sin vx) \quad (2.55)$$

2.8.2. Función de Saturación Suave.

Se considera que una función $f(x)$ es suave, si para algún orden n deseado, existe $f^{(n)}(x)$ sobre algún dominio. Una función puede ser suave sobre un intervalo restringido como (a, b) o $[a, b]$. El orden de las derivadas continuas para que una función específica se considere suave depende del problema particular, y puede variar de dos a infinito, y una función para la que $\forall n$ $f^{(n)}(x)$ es continua se denomina función $C - infty$ [82]. La figura 2.17 muestra la aproximación de la función de saturación $sat(u_i)$ respecto con una función suave $\tanh(u_i^{max})$.

Un sistema dinámico puede escribirse como los siguientes cuatro subsistemas SISOS no lineales [39]:

$$\begin{cases} \dot{X}1_i = X2_i, \\ \dot{X}2_i = f_i(X) + \Delta f_i(X) \\ + (b_i(X) + \Delta b_i(X))u_{si} + d_i(t), \\ y_i = X1_i, i \in \{z, \phi, \theta, \psi\} \end{cases} \quad (2.56)$$

Donde

$$X = [X1_z, X2_z, X1_\phi, X2_\phi, X1_\theta, X2_\theta, X1_\psi, X2_\psi]^T \quad (2.57)$$

$$= [z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]^T \quad (2.58)$$

es el vector de estado del sistema, suponiendo que es medible y acotado, y_i es la salida i^{th} del subsistema, $f_i(X)$ y $b_i(X)$ son funciones de la dinámica no lineal y de control de entrada, respectivamente, con i^{th} denotando el número de cada subsistema.

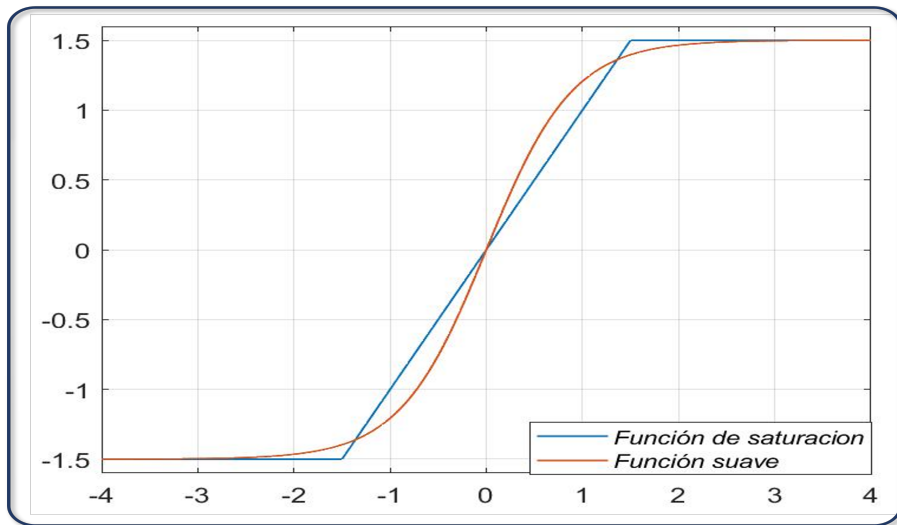


Figura 2.17: función de saturación $sat(u_i)$ respecto con una función suave $\tanh(u_i^{max})$.

Siendo:

$$f_z(X) = -g \quad (2.59a)$$

$$f_\phi(X) = \frac{I_y - I_z}{I_x} X 2\theta X 2\psi - \frac{J_r \Omega_r}{I_x} X 2\theta \quad (2.59b)$$

$$f_\theta(X) = \frac{I_z - I_x}{I_y} X 2\phi X 2\psi + \frac{J_r \Omega_r}{I_y} X 2\phi \quad (2.59c)$$

$$f_\psi(X) = \frac{I_x - I_y}{I_z} X 2\theta X 2\phi \quad (2.59d)$$

$$b_\phi(X) = \frac{1}{I_x} \quad (2.60a)$$

$$b_\theta(X) = \frac{1}{I_y} \quad (2.60b)$$

$$b_\psi(X) = \frac{1}{I_z} \quad (2.60c)$$

$$b_z(X) = \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{m} \cdot d_i(t) \quad (2.60d)$$

Funciones de perturbación externa desconocida que se supone acotada, $\Delta f_i(X)$ y $\Delta b_i(X)$ son términos inciertos del sistema dinámico.

Observación 1. Los términos $\Delta f_i(X)$ y $\Delta b_i(X)$ se añaden para tener en cuenta el problema de las incertidumbres paramétricas. De es la entrada de control saturada u_{si} depende de w_i , que están acotados por un límite físico del rotor. Por lo tanto $u_i \in [-u_i^{max}, u_i^{max}]$, de acuerdo con las propiedades del motor. Entonces, la restricción de saturación u_{si} puede escribirse como sigue:

$$u_{si} = sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{max} & si \quad u_i \geq u_i^{max} \\ u_i & si \quad -u_i^{max} \leq u_i \leq u_i^{max} \\ -u_i^{max} & si \quad u_i \leq -u_i^{max} \end{cases} \quad (2.61)$$

Donde u_i^{max} i es el valor máximo. Una función hiperbólica para aproximar la función de saturación no suave para mejorar la suavidad de la señal de control y señal de control y evitar la esquina aguda. Esta función se define como:

$$g_i(u_i) = u_i^{max} \times \left(\frac{u_i}{u_i^{max}} \right) \quad (2.62)$$

Entonces, u_{si} puede definirse de la siguiente manera:

$$g_i(u_i) = (u_i^{max}) tanh \left(\frac{u_i}{u_i^{max}} \right) \quad (2.63)$$

Donde

$$\tanh(u_i/u_i^{max}) = \frac{u^{u_i/u_i^{max}} - u^{-u_i/u_i^{max}}}{u^{u_i/u_i^{max}} + u^{-u_i/u_i^{max}}} \quad (2.64)$$

entonces u_{si} en términos de $h_i(u_i)$ puede formularse como $u_{si} = g_i(u_i) + \epsilon_i(u_i)$ o su equivalente:

$$u_{si} = g_i(u_i) + \epsilon_i(u_i) = u_i^{max} \times \tanh\left(\frac{u_i}{u_i^{max}}\right) + \epsilon_i(u_i) \quad (2.65)$$

Donde $u_{si} = g_i(u_i)$ es una función acotada en el tiempo, que puede obtenerse como:

$$|\epsilon_i(u_i)| = |u_{si} - g_i(u_i)| \leq u_i^{max}(1 - \tanh(1)) = \epsilon_i \quad (2.66)$$

y el sistema puede escribirse como sigue:

$$\begin{cases} \dot{X}1_i &= X2_i \\ \dot{X}2_i &= f_i(X) + b_i(x)g_i(u_i) + h_i(X, t), \\ y_i &= X1_i, i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}. \end{cases} \quad (2.67)$$

Donde

$$h_i(X, t) = d_i(t) + \Delta f_i(x) + b_i(X) \epsilon_i(u_i) + \Delta b_i(X)(g_i(u_i) + \epsilon_i(u_i)) \quad (2.68)$$

Representa las variaciones dinámicas del sistema.

Observación 1. Para abordar la saturación no suave en sistemas de control algunos autores [83], [84] han propuesto utilizar una función hiperbólica suave. Sin embargo, es necesario determinar el del error de aproximación para garantizar la estabilidad del sistema. En [85], desarrollaron una condición de estabilidad sin conocer este límite.

Las funciones dinámicas no lineales totales, incluidas las perturbaciones se denotan de la siguiente manera:

$$h_i(x, t) = d_i(t) + \Delta f_i(x) + \Delta b_i(x)(g_i(u_i) + \epsilon_i(u_i)) + b_i(x) \epsilon_i(u_i) \quad (2.69)$$

Utilizando (2.69) y tras algunas manipulaciones, el sistema puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\dot{x}2_i = f_i(x) + b_i(x)g_i(u_i) + h_i(x, t), \quad (2.70)$$

Esta nueva representación se ha escrito de tal manera, debido que las funciones no lineales y las perturbaciones de cada subsistema se agrupan en una sola función no lineal.

Suposición 1. Las siguientes suposiciones se utilizan en:

- La perturbación $d_i(t)$ está limitada por una constante desconocida $D_i > 0$, $|d_i(t)| \leq D_i$
- Los términos inciertos desconocidos $\Delta f_i(X)$ y $\Delta b_i(X)$ están limitados por constantes desconocidas, satisfaciendo $|\Delta f_i(X)| \leq \gamma_i$ y $|\Delta b_i(X)| \leq B_i$

- La función $h_i(X, t)$ se supone desconocida y acotada para una constante dada $\bar{h}_i$ tal que $|h_i(x, t)| \leq \bar{h}_i$.

Lema 1 (desigualdad de Young): $\forall(x, y) \in R \times R$ la desigualdad $xy \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}|x|^\alpha + \frac{1}{b\varepsilon^b}|y|^b$, donde $\varepsilon > 0, \alpha > 1, b > 1$ y $(\alpha - 1)(b - 1) = 1$.

Lema 2 [86]: Para cualquier $x_i \in R$ con $i = 1, \dots, n$ y $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces $(|x_1| + |x_2| + \dots |x_n|)^\varepsilon \leq |x_1|^\varepsilon + |x_2|^\varepsilon + \dots |x_n|^\varepsilon$.

Lema 3 [87]: Para cualquier sistema no lineal $\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \mathfrak{R}^n$. Suponiendo que existe una función de Lyapunov $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) + \eta_1 V^\mu(x) \leq 0$ con escalares $\eta_1 > 0$ y $\mu \in (0, 1)$. Entonces el origen es un punto de equilibrio, con tiempo de establecimiento $t_f \leq \frac{2}{\eta_1} V_1(t_0)^\mu$.

Lema 4 [88]: Para cualquier función de Lyapunov que verifique la siguiente desigualdad $\dot{V}(x) + \lambda_1 V(x) + \lambda_2 V^\gamma(x) \leq 0$, donde $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, 0 < \gamma < 1$ son escalares, existe una función finita de estabilidad en tiempo finito donde el tiempo de establecimiento viene dado por:

$$t_f \leq t_0 + \frac{1}{\lambda_1(1 - \gamma)} \ln \frac{\lambda_1 V^{1-\gamma}(t_0) + \lambda_2}{\lambda_2} \quad (2.71)$$

Lema 5 [89]: Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$. Suponiendo que $V(x)$ función de Lyapunov con $V(0) = 0$, números reales $\beta_1, \beta_2 > 0, 0 < p < 1$ y $0 < \delta < \infty$ tales que $\dot{V}(x) \leq -\beta_1 V(x) - \beta_2 V^p(x) + \delta$, entonces la trayectoria de $\dot{x} = f(x)$ es práctica estable en tiempo finito (PFS) y el conjunto residual de la solución del sistema viene dado por:

$$\Delta = \min \left\{ \frac{\delta}{(1 - \gamma)\beta_1}, \left(\frac{\delta}{(1 - \gamma)\beta_2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \quad (2.72)$$

Donde $0 < \gamma < 1$. El tiempo de asentamiento es el siguiente:

$$T \leq \max \left\{ \frac{1}{\gamma\beta_1(1 - p)} \ln \frac{\gamma\beta_1 V^{1-p}(x_0) + \beta_2}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1(1 - p)} \ln \frac{\beta_1 V^{1-p}(x_0) + \gamma\beta_2}{\gamma\beta_2} \right\} \quad (2.73)$$

Para concluir, se ha presentado un análisis detallado sobre la suavidad de funciones, destacando su relevancia en la representación y control de sistemas dinámicos no lineales. La aproximación de funciones de saturación mediante funciones suaves, como la hiperbólica tangente, no solo mejora la suavidad de la señal de control, sino que también contribuye a la estabilidad y rendimiento del sistema. Este enfoque permite manejar eficazmente las incertidumbres y perturbaciones presentes en los sistemas dinámicos, garantizando un comportamiento más predecible y controlado. En general, el uso de funciones suaves es una herramienta poderosa en el diseño de sistemas de control robustos y estables.

2.9. Técnicas de Simulación.

2.9.1. *MatLab*® - Simulink.

MatLab® y Simulink son herramientas esenciales en el campo del control automático, ampliamente utilizadas en la modelización, simulación y diseño de sistemas de control. *MatLab*®, desarrollado por MathWorks, es un entorno de programación que permite realizar cálculos numéricos, análisis de datos y visualización gráfica, facilitando el desarrollo de algoritmos complejos. Simulink, una extensión de *MatLab*®, proporciona un entorno de simulación basado en diagramas de bloques, que permite a los ingenieros diseñar, simular y analizar sistemas dinámicos de manera intuitiva [90].

Aplicaciones en Control.

- **Modelado de Sistemas Dinámicos:** Simulink permite la creación de modelos precisos de sistemas dinámicos, representando ecuaciones diferenciales y diferenciales-algebraicas a través de bloques predefinidos. Esto facilita la comprensión del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones [91].
- **Diseño de Controladores:** El entorno de Simulink soporta el diseño y la implementación de diversos tipos de controladores, como PID, controladores robustos y controladores adaptativos. Los usuarios pueden ajustar los parámetros del controlador y observar el impacto inmediato en la respuesta del sistema [91].
- **Simulación de Sistemas No Lineales:** Simulink es especialmente útil en la simulación de sistemas no lineales y de múltiples entradas y salidas (MIMO). La capacidad de realizar simulaciones en tiempo real permite probar el rendimiento del sistema antes de su implementación física [91].
- **Verificación y Validación:** Las herramientas de verificación en Simulink permiten verificar el funcionamiento correcto de sus modelos y controladores. Las simulaciones pueden ejecutarse en diversos escenarios, asegurando la robustez del diseño ante perturbaciones y variaciones de parámetros [92].
- **Integración con Hardware:** Simulink se integra fácilmente con hardware de control real mediante el uso de herramientas como Simulink Real-Time y Hardware Support Packages. Esto permite la implementación y prueba de algoritmos de control en sistemas embebidos, acelerando el ciclo de desarrollo [92].

La interfaz gráfica de Simulink permite una representación clara de sistemas complejos, facilitando el diseño y la comunicación de ideas. Las bibliotecas de bloques predefinidos cubren una amplia gama de aplicaciones, desde el control clásico hasta el control avanzado, ahorrando tiempo en el desarrollo, su flexibilidad y escalabilidad de este software permiten la creación de modelos escalables y reutilizables, adaptándose a diferentes niveles de complejidad y tamaño de proyectos. Las capacidades de *MatLab*® para el análisis de datos permiten un post procesamiento detallado de los resultados de las simulaciones, facilitando la optimización y mejora de diseños [93].

Capítulo 3

Metodología.

3.1. Modelado matemático del PVTOL.

El diagrama de fuerzas y momentos sin cuerpo para el PVTOL se muestra en la figura 3.1. Este vehículo consta de dos rotores, denotados como M_1 y M_2 , montados en el extremo de una barra sólida, cuyo centro de masa CM está situado entre ambos rotores a la misma distancia d . El rotor M_1 gira en sentido horario, mientras que M_2 lo hace en sentido inverso, reduciendo los efectos giroscópicos.

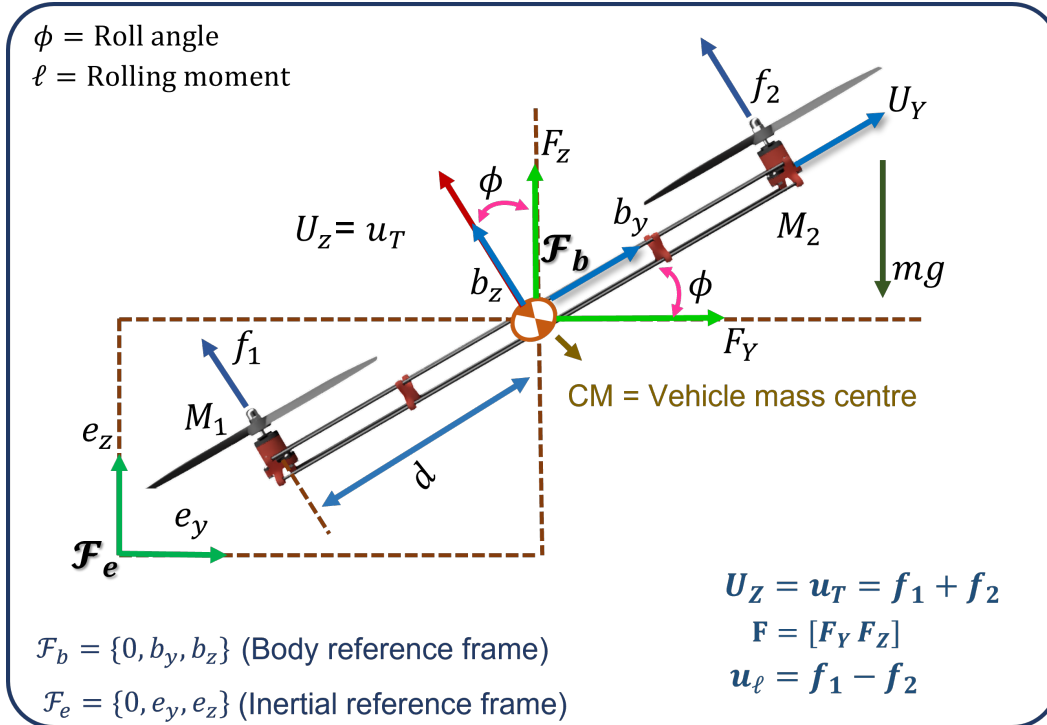


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del PVTOL (Elaboración propia).

3.1.1. Modelo dinámico a partir de la metodología Euler-Lagrange.

Se utiliza el enfoque de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico ideal. En primer lugar, la energía potencial y la energía cinética se denotan como E_p y E_k , respectivamente. Entonces, podemos escribir el Lagrangiano como $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q)$. Si τ describe los momentos generalizados y F denota la fuerza traslacional ejercida sobre el PVTOL, al implementar el formalismo de Euler-Lagrange, obtenemos la ecuación de movimiento del vehículo, como sigue [94]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = u(F, \tau) \quad (3.1)$$

Usando $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ en (3.1) resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} E_p(\mathbf{q}) = u(F, \tau) \quad (3.2)$$

El vector de coordenadas generalizado se define como $q = [Y \ Z \ \phi]^T$, que se compone de $\xi = [0 \ Y \ Z]^T$, la posición CM teniendo como referencia el origen de f_e , y $n = [\phi \ 0 \ 0]^T$ el vector de coordenadas rotacional. El vector generalizado de fuerzas y momentos es $u(F, \tau) = [F_Y \ F_Z \ \ell]^T$, cuyos elementos son la fuerza horizontal, la fuerza perpendicular, y el momento de rodadura, que actúan sobre el vehículo. Ahora, que $J = \text{diag}\{J_x, 1, 1\}$ denota la matriz de inercia, y m la masa. Utilizando estos elementos en (3.2) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m\ddot{Y} \\ m\ddot{Z} \\ J_x\ddot{\phi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_Y \\ F_Z \\ \ell \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La fuerza de sustentación total de las hélices es u_T , y la fuerza lateral debida a la aerodinámica es $U_Y = \epsilon \ell$ en $\mathcal{F}_b$. La letra griega ϵ representa un coeficiente que relaciona el efecto de la velocidad angular del vehículo con el movimiento lateral. Las fuerzas en f_e en términos de f_e están relacionadas por la transformación $U = Ru(F, \tau)$, cuya inversa es $u(F, \tau) = R^{-1}U$, por lo tanto resulta:

$$[F_Y \ F_Z \ \ell]^T = R^{-1}[U_Y \ U_Z \ \ell]^T \quad (3.4)$$

Aplicando la rotación a derechas del plano y - z alrededor del eje x , la matriz de rotación de Euler R , de F_e a F_b , se escribe como (1.3-6) de [72]. El momento de balanceo del vehículo se calcula como $\ell = u_\ell d - C_{\ell_\phi} \dot{\phi}$, donde u_ℓ es la diferencia entre las fuerzas de los rotores, y el coeficiente C_{ℓ_ϕ} constituye la amortiguación rotacional del vehículo. Tras algunas manipulaciones algebraicas (3.3) obtenemos:

$$\ddot{Y} = -\frac{u_T}{m} s\phi + \frac{\epsilon du_\ell}{m} c\phi \quad (3.5a)$$

$$\ddot{Z} = \frac{u_T}{m} c\phi + \frac{\epsilon du_\ell}{m} s\phi - g \quad (3.5b)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{u_\ell d}{J_x} - \frac{C_{\ell_\phi}}{J_x} \dot{\phi} \quad (3.5c)$$

Donde $s = \sin(\phi)$ y $c = \cos(\phi)$, para evitar lo complicado. A partir de (3.5b)-(3.5c), suponiendo que $\epsilon = 0$, que la gravedad se normaliza a -1 y que no hay amortiguación en el vehículo, como se muestra en [57], entonces, el modelo se puede simplificar como sigue:

$$\ddot{Y} = -u_T \sin \phi \quad (3.6a)$$

$$\ddot{Z} = u_T \cos \phi - 1 \quad (3.6b)$$

$$\ddot{\phi} = u_\ell \quad (3.6c)$$

3.2. Control de saturación anidado.

Sean L y M don números constantes de magnitudes positivas donde, $L \leq M$, una función $\sigma_L : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, puede afirmarse que es saturación con linealidad para (L, M) , es una función no decreciente que cumple[50]:

$$\sigma_L(s) = \text{sgn}(s) \min \{|s|, L\} \quad (3.7)$$

con $s\sigma_L(s) > 0 \forall s \neq 0$, y $|\sigma_L(s)| \leq M \forall s \in \mathcal{R}$. La función de saturación aparece como el gráfico de color azul en la figura 3.2.

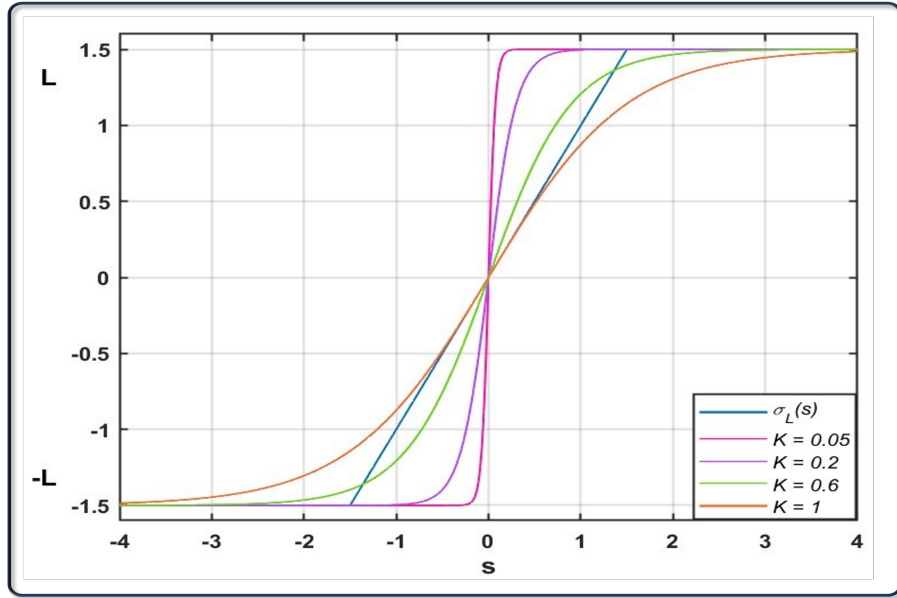


Figura 3.2: Gráfica de la función de saturación.

El conjunto de ecuaciones diferenciales puede representarse como la siguiente cascada de integradores interconectados:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = u \quad (3.8)$$

Por lo tanto, el algoritmo NSC se puede utilizar para estabilizar (3.8). Esta estrategia de control utiliza las propiedades de las funciones saturadas, que trae un control de retroalimentación, con entrada acotada. En una región cercana al origen, la función de saturación

es lineal y se utiliza para la estabilización, restringida por el valor absoluto para el límite en sus entradas. El teorema que valida este algoritmo de control se recuerda aquí [50]:

Teorema 1. *Si existen funciones lineales $h_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ para cualquier conjunto de constantes positivas $\{L_i, M_i\}$, donde $L_i < M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, y $M_i < \frac{1}{2}L_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ y para cualquier conjunto de funciones (σ_{L_i}) , como en (3.7), entonces, las funciones recursivas limitadas bases de control son:*

$$u = -\sigma_{L_n}(h_n(x) + \sigma_{L_{n-1}}(h_{n-1}(x) + \dots + \sigma_{L_1}(h_1(x))) \dots) \quad (3.9)$$

Estabiliza globalmente de forma asintótica el sistema (3.8).

A partir del teorema 1, es evidente que la salida de $\sigma_{L_n}(s)$ se ve afectada por el valor de L , cuyo valor se asigna de forma arbitraria, ver [95], y el rendimiento del control depende de este valor.

3.3. Control aplicando la función hiperbólica suave.

Se considera que una función $f(x)$ es suave, si para algún orden n deseado, existe $f^{(n)}(x)$ sobre algún dominio. Una función puede ser suave sobre un intervalo restringido como (a,b) o $[a,b]$. El orden de las derivadas continuas para que una función específica se considere suave depende del problema particular, y puede variar de dos a infinito, y una función para lo cual $\forall n$, $f^{(n)}(x)$ son continuas se llama, una función C-infnty [82]. Para mejorar la suavidad de la señal de control, se puede utilizar una función hiperbólica suave en lugar de una función de saturación no suave, cuya aproximación, evita la esquina aguda, que se da como sigue [96]:

$$g(s) = L \times \tanh\left(\frac{s}{L}\right) = L \frac{e^{s/L} - e^{-s/L}}{e^{s/L} + e^{-s/L}} \quad (3.10)$$

Entonces $\sigma_L(s)$ definido anteriormente en (3.7) se puede escribir como:

$$\sigma_L(s) = g(s) + d(s) = L \times \tanh\left(\frac{s}{L}\right) + d(s) \quad (3.11)$$

Donde $d(s) = \sigma_L(s) - g(s)$ es una función en el dominio del tiempo, con la misma magnitud para los límites inferior y superior, que se calcula como:

$$|d(s)| = |\sigma_L(s) - g(s)| \leq L(1 - \tanh(1)) = D \quad (3.12)$$

Se puede observar que $0 \leq |s| \leq L$ y $|d(s)|$ aumenta de 0 a D a medida que $|s|$ varía de 0 a L , y fuera de este intervalo, $|d(s)|$ disminuye de D a 0. La figura 3.2 ilustra cómo la función de saturación se aproxima a la función suave $L \times \tanh(\frac{s}{kL})$, $k = 1$, que se traza en color naranja.

3.3.1. Planteamiento del problema.

El problema de estabilización PVTOL es un desafío clave en la teoría de control, especialmente en el ámbito de sistemas no lineales y robótica. Este problema se enfoca en diseñar estrategias de control que aseguren la estabilidad y el control preciso de un vehículo aéreo en el plano vertical.

El sistema PVTOL se refiere a un modelo simplificado de un vehículo aéreo que puede despegar y aterrizar verticalmente, como un helicóptero o un dron quadrotor. Este tipo de vehículos tiene aplicaciones significativas en diversos campos, incluyendo la aviación, exploración espacial, rescate, y vigilancia. El control preciso y la estabilidad de estos sistemas son críticos para asegurar su operación segura y efectiva.

En el modelo PVTOL, el objetivo es controlar la posición vertical (Z), la posición horizontal (Y), y la orientación angular (ϕ) del vehículo. Estos tres parámetros definen el estado del sistema en un espacio tridimensional simplificado. Los controles del sistema son la fuerza de empuje (u_T) y el torque de inclinación (u_ℓ). La dinámica del sistema puede ser altamente no lineal debido a las interacciones entre estos controles y el movimiento del vehículo.

El problema de estabilización PVTOL consiste en proporcionar que si en el sistema (3.6a)-(3.6c), la posición angular se inicializa dentro del intervalo $I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$, entonces, teniendo las entradas u_ℓ y u_T , se puede garantizar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y - \bar{Y}, Z - \bar{Z}, \phi\| = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{and } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\phi}\| = 0 \quad (3.14)$$

Además, $\phi \in I_0 \ \forall t \geq 0$.

Describiendo las ecuaciones (3.13) y (3.14) de una manera más detallada:

- **Estabilidad Asintótica:** Se requiere que las posiciones Y, Z y el ángulo ϕ del sistema converjan a los valores deseados $\bar{Y}, \bar{Z}$ y 0, respectivamente, cuando el tiempo t tiende al infinito, expresado de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y - \bar{Y}, Z - \bar{Z}, \phi\| = 0 \quad (3.15)$$

Donde $|\cdot|$ denota la norma apropiada en el espacio de estados.

- **Convergencia de las Velocidades:** Las velocidades angulares y lineales del sistema, representadas por $\dot{Y}, \dot{Z}$ y $\dot{\phi}$ también deben converger a cero cuando el tiempo t tiende a infinito. Esto asegura que no haya movimientos residuales y que el sistema esté completamente en reposo en su estado deseado. Esto se puede formular como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\phi}\| = 0 \quad (3.16)$$

- **Restricción Angular:** Para mantener la estabilidad del sistema y evitar condiciones de vuelco o pérdida de control, se requiere que el ángulo ϕ permanezca dentro del intervalo inicial I_0 para todo tiempo $t \leq 0$ esta condición asegura para prevenir que el sistema exceda los límites operacionales seguros, formulándose como:

$$\phi \in I_0 \ \forall t \geq 0 \quad (3.17)$$

Estas condiciones definen el problema de estabilización del PVTOL, donde el objetivo es diseñar controladores robustos y efectivos que puedan manejar la dinámica no lineal del sistema, compensar posibles perturbaciones y asegurar una operación segura y estable a lo largo del tiempo.

3.3.2. Implementación del controlador (BSFC).

El PVTOL ha sido estudiado para diseñar estrategias de control tanto lineales como no lineales. En [97] un esquema de control basado en integradores en cascada, se estableció un enfoque sistemático y estructurado para garantizar (3.13)-(3.14), manteniendo la simplicidad en el análisis al imponer un límite superior muy pequeño en una de las variables, este control consiste en el siguiente algoritmo NSF:

$$s_d = \dot{\phi} + 3\phi - 3\frac{\dot{y}}{g} - \frac{y}{g} \quad (3.18)$$

$$s_c = 2\phi + \dot{\phi} - \frac{\dot{y}}{g} \quad (3.19)$$

$$s_b = \phi + \dot{\phi} \quad (3.20)$$

$$\tau = -\sigma_{L_a}(\dot{\phi} + \sigma_{L_b}(s_b + \sigma_{L_c}(s_c + \sigma_{L_d}(s_d)))) \quad (3.21)$$

Donde σ_{L_i} , con $i = a, b, c, d$ y límites superiores $L_i > 0$, garantizan que el error $e(t)$ tiende a cero a medida que t aumenta hacia el infinito, asegurando que el sistema de lazo cerrado alcanza la estabilidad asintótica global. Sin embargo, la salida de estos NSF está restringida por el límite de la función más profunda de la ley de control que se determina a través de ciertas desigualdades y restricciones. Además, la ley NSC aquí propuesta, para el intervalo cerrado $[-L, L]$ mantiene siempre una pendiente positiva de valor unitario en cada función de saturación. Esta configuración dificulta el uso de toda la capacidad del actuador. El esquema de control desarrollado en este trabajo se basa en la función suave acotada como sigue:

$$\Gamma = g(s/k) = L \times \tanh\left(\frac{s}{kL}\right) \quad (3.22)$$

Esta función modificada puede alcanzar asintóticamente el nivel de saturación, permitiendo operar los actuadores en su máxima capacidad de utilización. A continuación, se utilizará un esquema NSC modificado para estabilizar globalmente el sistema PVTOL, de forma que se garantice que todos los estados entren en dominios pequeños en un tiempo finito, y, por lo tanto serán asintóticamente estables.

A continuación, utilizando (3.22) en (3.21) se obtiene el siguiente controlador de función suave acotada equivalente (BSFC):

$$\tau = -\Gamma_{L_a}(\dot{\phi} + \Gamma_{L_b}(s_b + \Gamma_{L_c}(s_c + \Gamma_{L_d}(s_d)))) \quad (3.23)$$

El análisis de convergencia para la estabilización puede llevarse a cabo de forma similar al algoritmo de control (3.21) en [56], donde la teoría de Lyapunov es una herramienta esencial para sondear la estabilidad global del sistema.

Capítulo 4

Resultados.

4.1. Comportamiento del controlador BSFC.

El modelo simplificado (3.6a) - (3.6c) se desarrolla en base al método de Euler-Lagrange y se ejecuta en el software de simulación mediante *Simulink MatLab*®, se representa mediante el bloque cuyo icono es el PVTOL. A efectos comparativos se implementa el NSC (3.21) desarrollado en [95], cuyo bloque, coloreado en verde, se muestra en la parte superior de la figura 4.1. En la parte inferior de la figura, de color azul, se implementa el controlador propuesto.

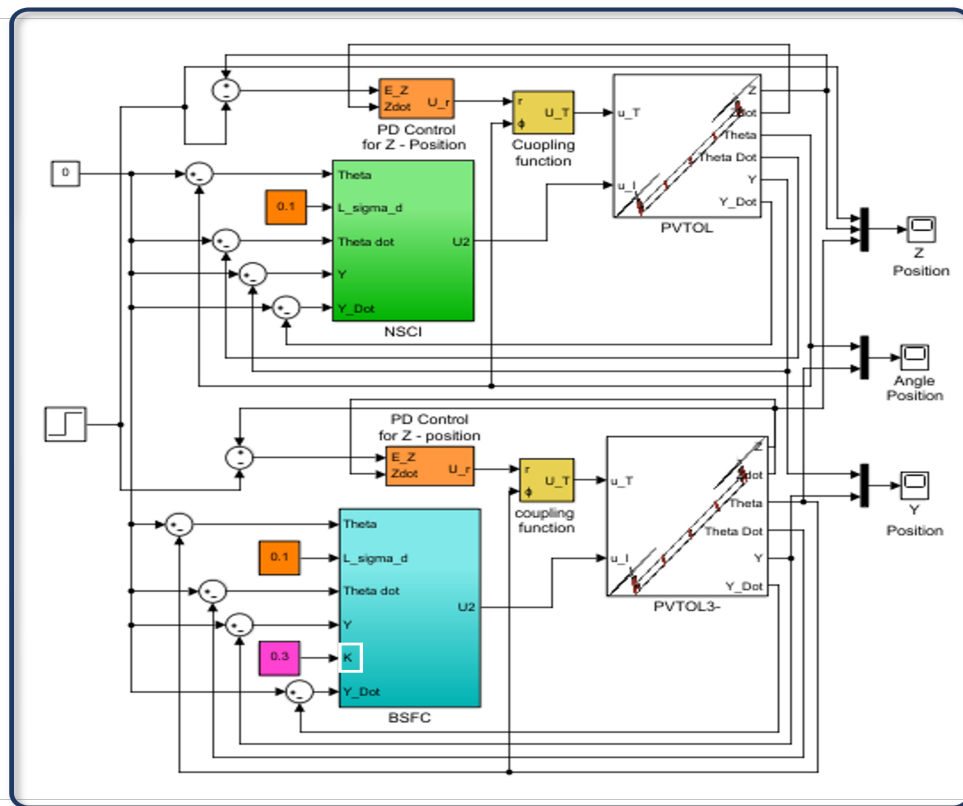


Figura 4.1: Diagrama de bloques del NSC en Simulink.

Además, el modelo completo del PVTOL (3.5b)-(3.5b) puede ser implementado sólo cambiando los parámetros principales cuyos valores son: $C_{l_\phi} = 0,36$, $d = 0,2m$, $J_x = 0,004kg.m$, $m = 0,5kg$, y $\epsilon = 0,01$. [56], los parámetros para el NSC, utilizados tanto en el modelo simplificado como en el completo, son $\sigma_a = 0,8$, $\sigma_b = 0,4$, $\sigma_c = 0,2$, and $\sigma_d = 0,1$.

4.1.1. Respuesta dinámica vertical.

La dinámica vertical se gobierna, por simplicidad, con un simple controlador PD, implementado en el color del bloque naranja en ambos sistemas PVTOL simulados funcionando en paralelo, con condiciones iniciales para todos los estados iguales a cero. En este escenario el valor deseado es $Z_d = 1$. La respuesta vertical con el controlador PD se ilustra en la figura 4.2, observándose que este enfoque PD muestra un tiempo de convergencia aceptable. Incluso si se utiliza tanto el modelo simplificado como el completo.

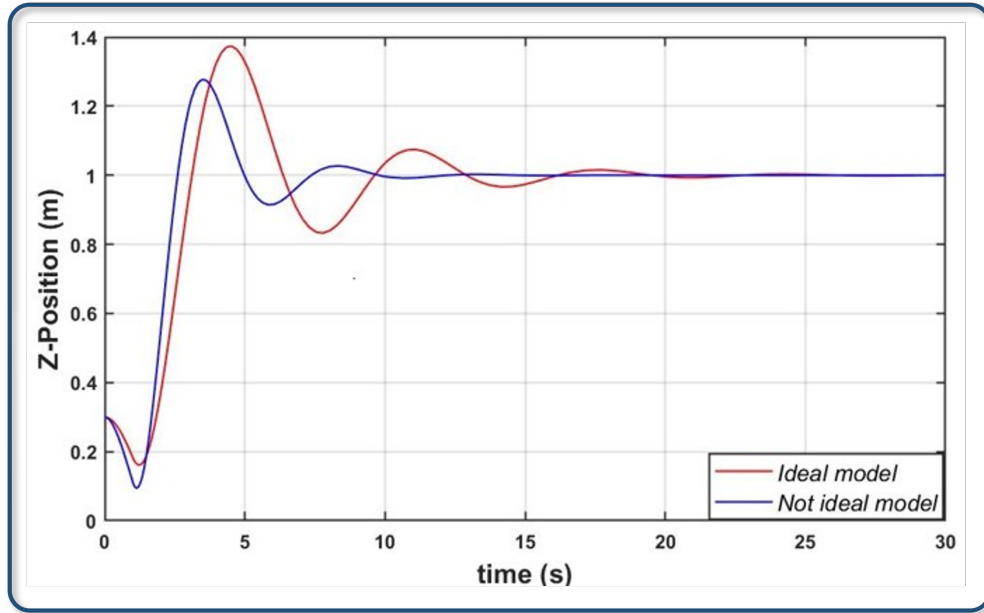


Figura 4.2: Respuesta de posición vertical.

4.1.2. Respuesta dinámica horizontal-rotacional.

En esta sección se realiza la estabilización del PVTOL, para ello se definen las condiciones iniciales $Y(0) = 0,0m$, $\dot{Y}(0) = 0m/seg$, $\phi(0) = 0,3rad$ y $\dot{\phi}(0) = 0,0rad/seg$, lo que representa que el vehículo parte inclinado $0,3rad$ en sentido anti-horario. Esto se hace para ambos esquemas de control, NSC y BSFC. En la figura 4.3 se puede observar el comportamiento de la posición horizontal utilizando el modelo simplificado con el NSC y el BSFC propuesto. La curva NSC corresponde al color en azul claro, mientras que las otras corresponden a la BSFC para distintos valores de k . Donde se observa que con este parámetro se puede mejorar considerablemente el tiempo de convergencia, seleccionando el valor adecuado lo suficientemente pequeño, es posible estabilizar el PVTOL en menos tiempo.

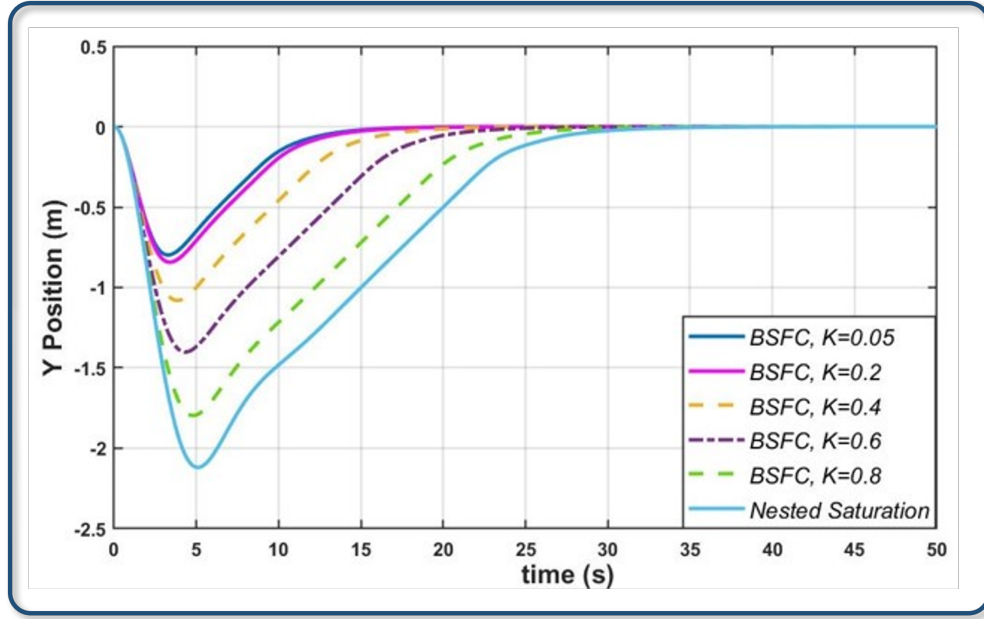


Figura 4.3: Respuesta de posición Y para el modelo simplificado PVTOL.

Para este escenario, la respuesta de posición angular de ambos sistemas de control, se ilustra en la figura 4.4, donde de forma similar el controlador propuesto muestra un comportamiento similar al NSC, pero con un mejor tiempo de convergencia. La imagen muestra que el NSC tarda casi 8 segundos más que el BSFC propuesto en alcanzar el estado estacionario.

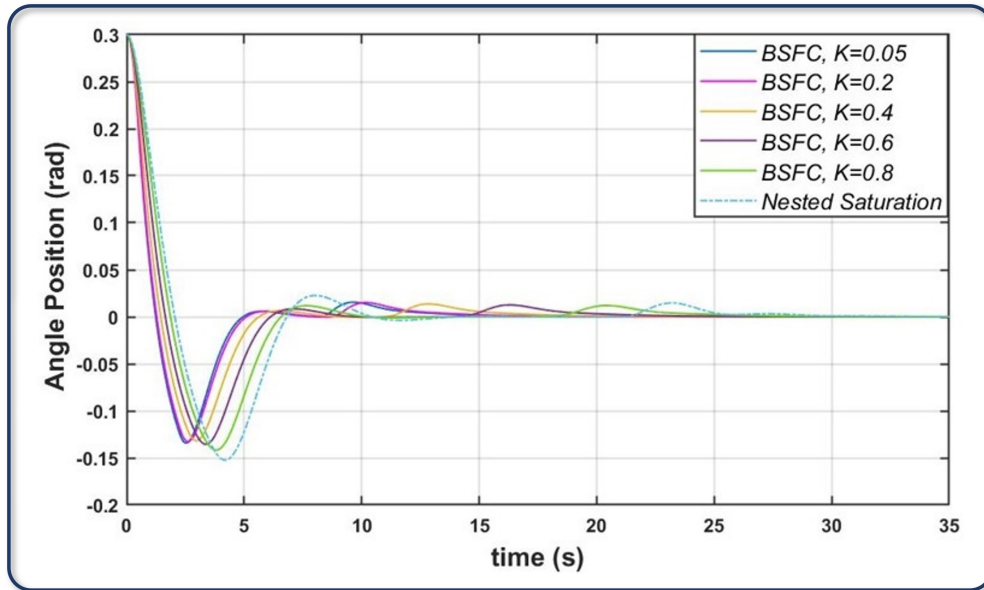


Figura 4.4: Respuesta de posición angular para el modelo simplificado PVTOL.

Para evaluar la efectividad del controlador aquí diseñado, se utilizó el modelo completo para probar ambos controladores. En la figura 4.5 se observa que aún empleando el modelo

completo para verificar la ley de control propuesta, el comportamiento exhibe una respuesta similar, donde el BSFC converge más rápido en comparación con el NSC.

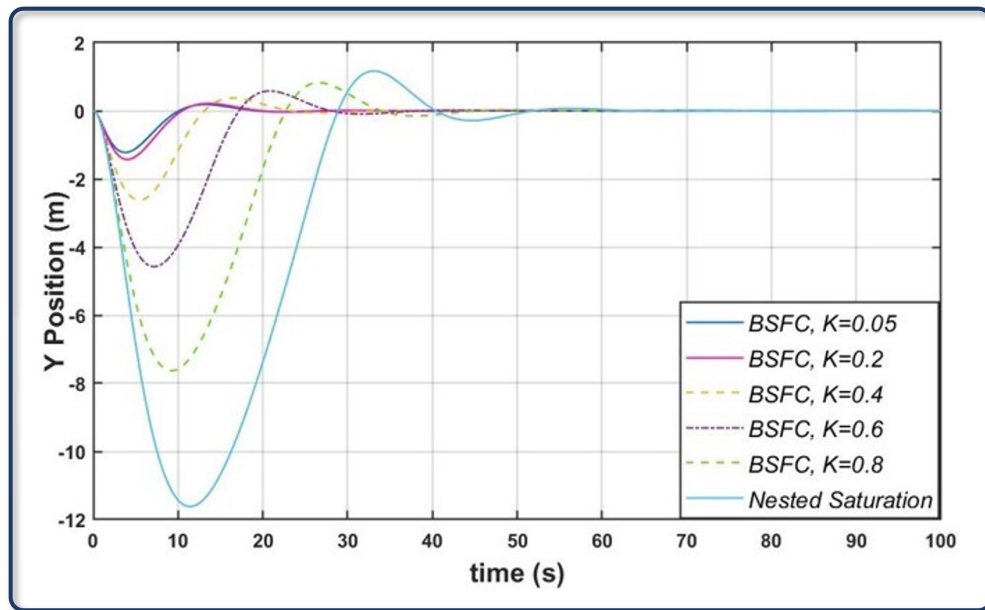


Figura 4.5: Respuesta de posición Y para el modelo completo PVTOL.

La respuesta angular de ambos sistemas de control aplicados al modelo completo, se representan en la figura 4.6, donde es notorio el buen tiempo de convergencia del controlador propuesto desde el origen en comparación con el NSC.

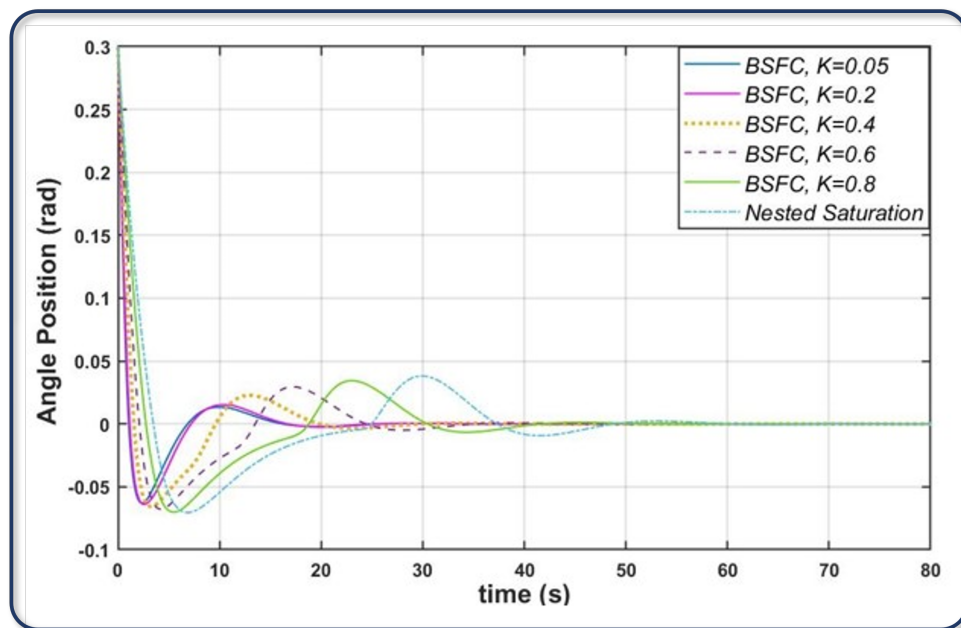


Figura 4.6: Posición angular para el modelo completo PVTOL.

La respuesta frente a una señal escalón utilizada como referencia, cuando se implementa el modelo completo, comparando con ambos controladores se ilustra en la Figura 4.7, siendo evidente que el controlador BSFC propuesto muestra un rendimiento superior en comparación con el NSC. La señal de escalón se aplica a 10s con un valor deseado de 0,4m.

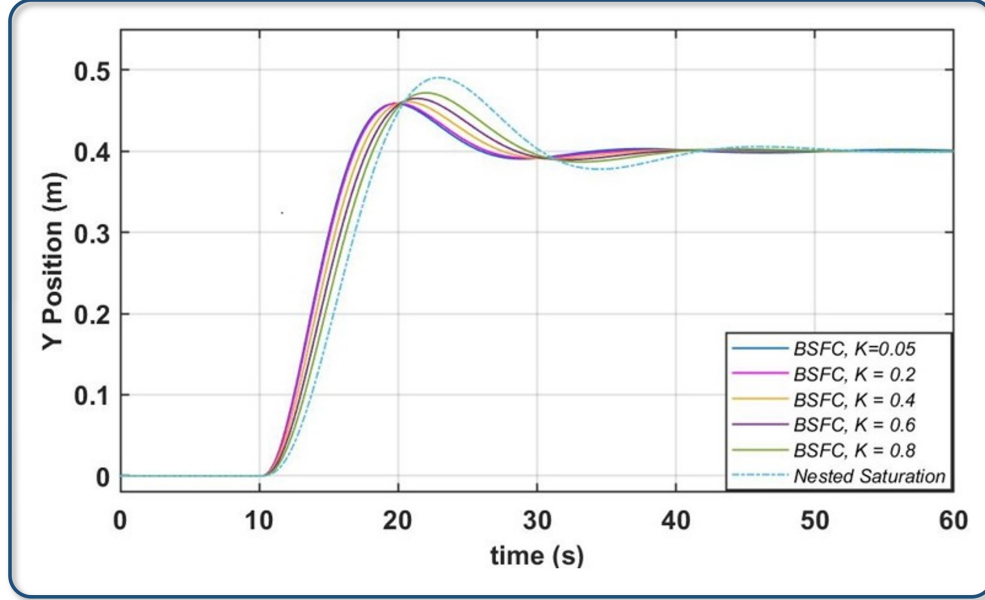


Figura 4.7: Respuesta de la señal de paso de posición Y .

En las siguientes tablas se evalúa el rendimiento de los controladores, el controlador de saturación anidado y el controlador de función de saturación suave (BSFC), utilizando tanto el modelo completo como el modelo simplificado. Se analizan utilizando criterios de desempeño como el IAE (Integración del valor absoluto del error), ISE (Integración del error cuadrático), ITAE (Integral del error absoluto con respecto al tiempo), e ITSE (Integral del error cuadrático con respecto al tiempo).

Al aplicar el modelo completo (tabla 4.1), los resultados muestran que el controlador BSFC ofrece mejores valores en la mayoría de los criterios de desempeño, especialmente para las variables Y y θ , donde se observan menores índices de error acumulado (IAE), cuadrado del error acumulado (ISE), error absoluto acumulado ponderado en el tiempo (ITAE), y cuadrado del error acumulado ponderado en el tiempo (ITSE) en comparación con NSC.

Se analizan utilizando criterios de desempeño como el IAE (Integración del valor absoluto del error), ISE (Integración del error cuadrático), ITAE (Integral del error absoluto con respecto al tiempo), e ITSE (Integral del error cuadrático con respecto al tiempo). De manera similar, al utilizar el modelo simplificado (tabla 4.2), el controlador BSFC nuevamente muestra un desempeño superior para la variable Y , presentando menores valores en los índices de desempeño en comparación con el NSC. Sin embargo, para la variable θ , los resultados son más competitivos, y el BSFC logra un mejor desempeño en ITAE y ITSE.

Al realizar una modificación del NSC clásico mediante el uso de funciones hiperbólicas suaves, comprobando que la implementación demuestra ser más eficaz, ya que mejora tanto el tiempo de convergencia como el rendimiento en el sistema de control en lazo cerrado.

	Controlador	IAE	ISE	ITAE	ITSE
Z	NSC	1.899	0.8762	7.807	3.087
	BSFC	1.89	0.8762	7.807	3.08
Y	NSC	1.201	0.2683	3.052	0.4733
	BSFC	0.924	0.1899	1.95	0.2559
θ	NSC	0.01477	2.69e-05	9.035e-05	0.6647
	BSFC	0.01647	5.643e-05	8.554e-05	0.04564

Tabla 4.1: Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo completo.

	Controlador	IAE	ISE	ITAE	ITSE
Z	NSC	3.561	1.72	21.64	7.646
	BSFC	3.561	1.72	21.64	7.646
Y	NSC	1.352	0.3092	3.694	0.6074
	BSFC	1.151	0.2543	2.737	0.4296
θ	NSC	0.1607	0.002691	0.01328	0.8097
	BSFC	0.1638	0.00363	0.01138	0.6544

Tabla 4.2: Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo simplificado.

PVTOL-vehículo. Ajustando la pendiente de la función hiperbólica acotada en una configuración anidada, el algoritmo propuesto permite una rápida convergencia de los estados de error, lo que resulta en una respuesta de control más eficiente. Las simulaciones muestran que el parámetro K influye en el comportamiento del controlador BSFC. A medida que K disminuye, mejora la estabilización y la respuesta angular. Por el contrario, a medida que K aumenta, el sistema tiende a comportarse como NSC puro. Por tanto, los resultados de la simulación numérica han puesto de manifiesto las ventajas del BSFC. Se trata de un enfoque alternativo que representa un avance significativo en la estabilización PVTOL, ofreciendo una solución simple pero eficaz que supera al método tradicional de control de saturación.

4.2. Controlador BSFC VS el controlador de saturación anidada difusa.

Se implementa el mismo modelo matemático, representado por las ecuaciones (3.6a) - (3.6c), se desarrolla utilizando el método de Euler-Lagrange. Este modelo está representado por el bloque con el icono de PVTOL. Para realizar comparaciones, se ha integrado el controlador NSC fusionado con lógica difusa representado en color morado, que puede apreciarse de lado superior de la figura 4.8. El controlador propuesto, se encuentra en la parte inferior de la figura, representado en color azul.

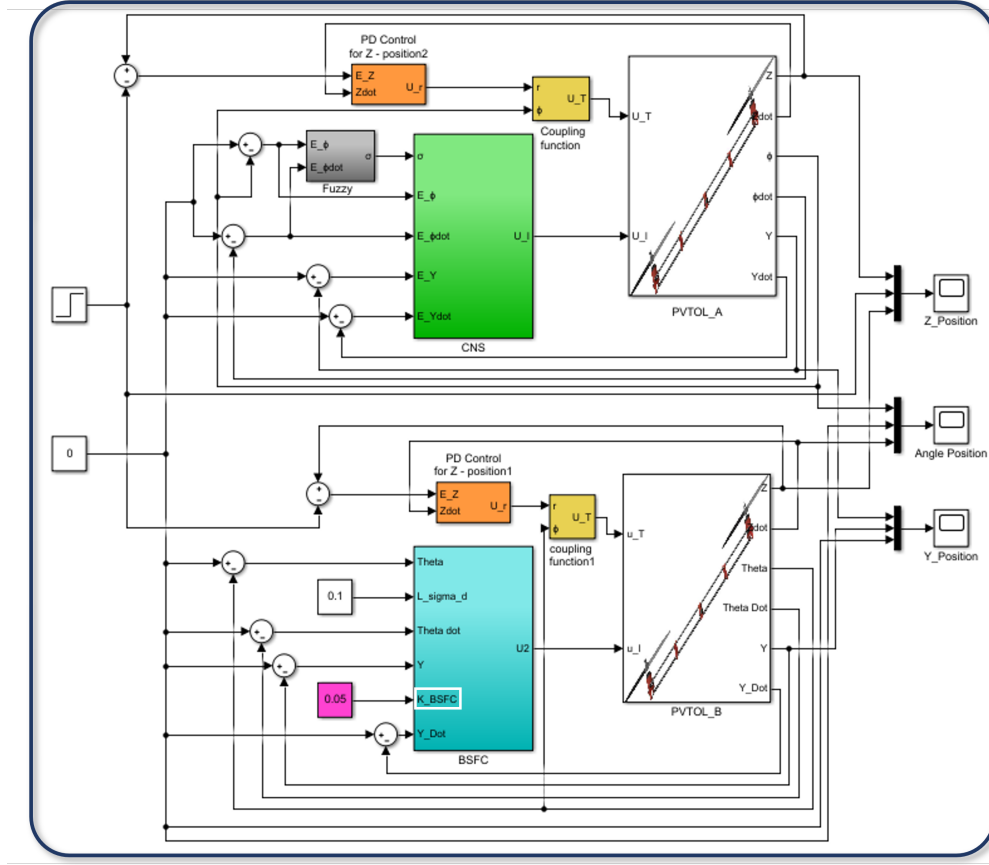


Figura 4.8: Diagrama de bloques del Fuzzy - NSC en Simulink.

4.2.1. Respuesta dinámica horizontal.

Se realiza la estabilización del PVTOL, utilizando las condiciones iniciales de $Y = 0m$, $\dot{Y} = 0m/seg$, $\phi(0) = 0,3rad$ y $\dot{\phi}(0) = 0,0rad/seg$, lo que representa que el vehículo parte inclinado en $0,3radianes$ en sentido anti horario. En la figura 4.9, se observa que el comportamiento del controlador propuesto utilizando el parámetro de $k = 0,05$ y el controlador de saturaciones anidadas tienden a tener un comportamiento similar convergiendo al mismo tiempo que son $12segundos$.

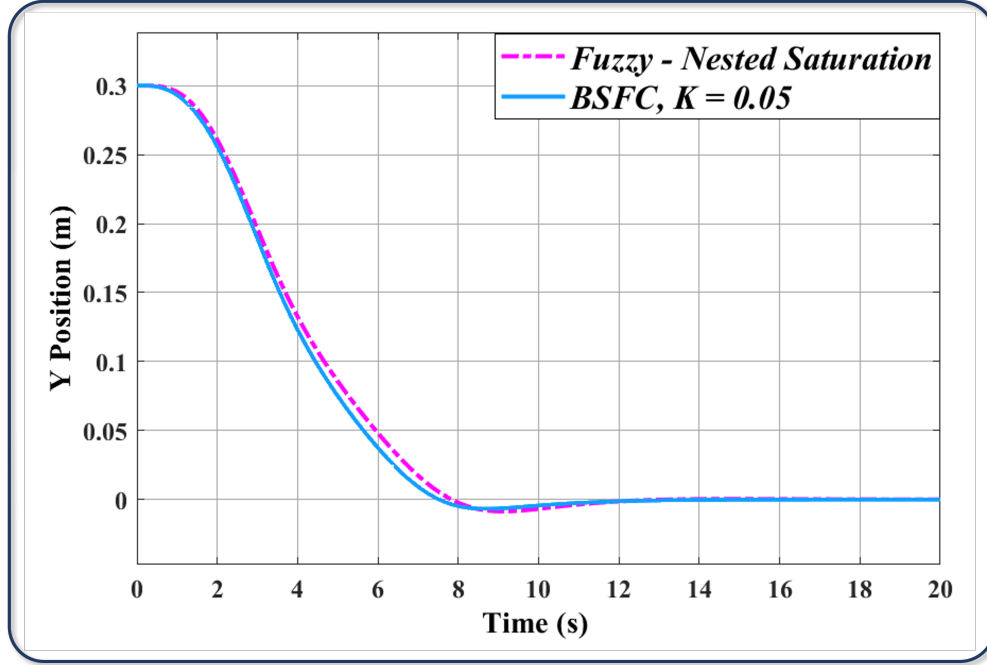


Figura 4.9: Respuesta de la posición Y empleando el modelo simplificado del PVTOL.

Para la posición angular, se emplea un controlador de funciones suaves con el parámetro $K = 0,05$, ya que esta configuración presenta el mejor comportamiento donde el vehículo PVTOL se estabiliza en *13segundos*. En contraste, utilizando un controlador de saturaciones anidadas difusas, la estabilización se logra en el mismo tiempo mostrando mas oscilaciones al estabilizarse, como se ilustra en la figura 4.10.

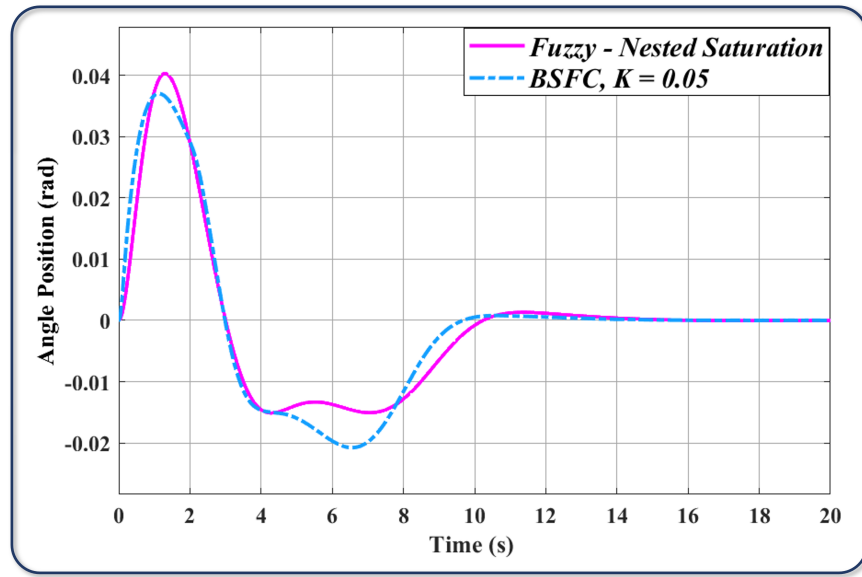


Figura 4.10: Respuesta de la posición *angular* empleando el modelo simplificado del PVTOL.

En la figura 4.11 se muestra el comportamiento del controlador BSFC utilizando el mode-

lo completo. Este controlador logra la estabilización en *10segundos*, mientras que el segundo controlador se estabiliza en *17segundos*, presentando un mayor número de oscilaciones. Esta comparación destaca la eficiencia y la rapidez del controlador BSFC frente al segundo controlador, evidenciando una mejora significativa en términos de estabilidad y respuesta del sistema.

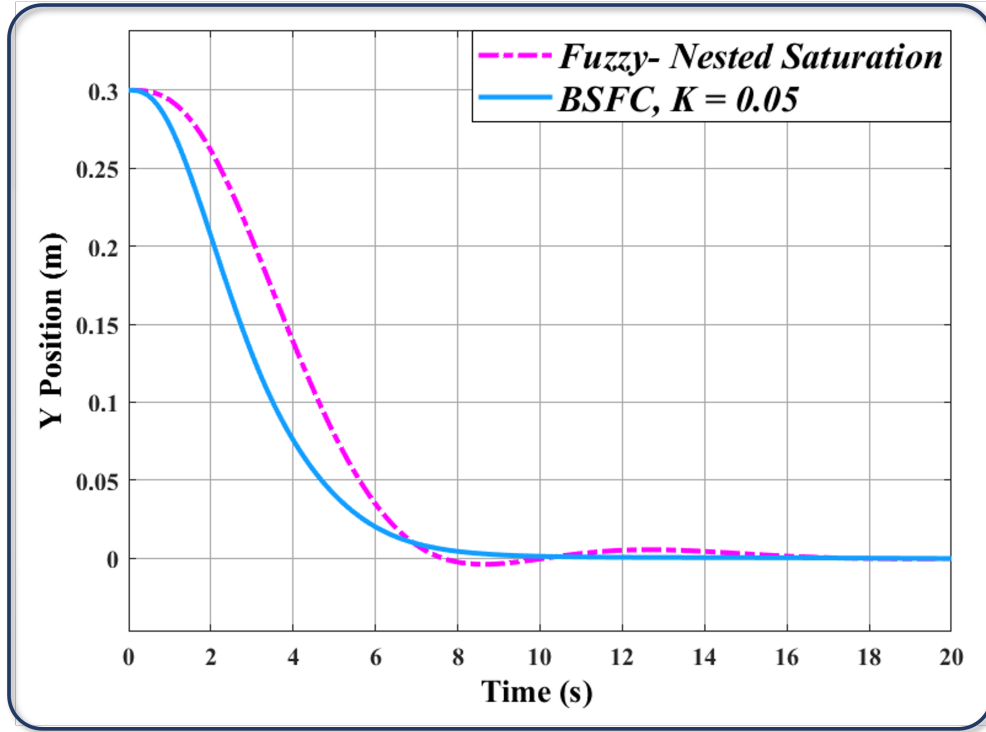


Figura 4.11: Respuesta de la posición Y empleando el modelo completo del PVTOL.

Para la posición angular utilizando el modelo completo, la figura 4.10 muestra que el controlador de lógica difusa empleando saturaciones anidadas se estabiliza a los *10segundos* teniendo mas oscilaciones, mientras que el controlador propuesto BSFC tiene menos oscilaciones pero se estabiliza a los *18segundos*.

Utilizando una señal escalón como referencia y el modelo completo, la figura 4.13 muestra la comparación entre los controladores evaluados. El controlador BSFC alcanza la estabilización en *14segundos*, mientras que el controlador de saturaciones anidadas tarda *21segundos* en estabilizarse. Esta diferencia resalta la eficiencia del controlador BSFC, que no solo logra una respuesta más rápida, sino que también ofrece un desempeño más ágil y estable en comparación con el controlador de saturaciones anidadas.

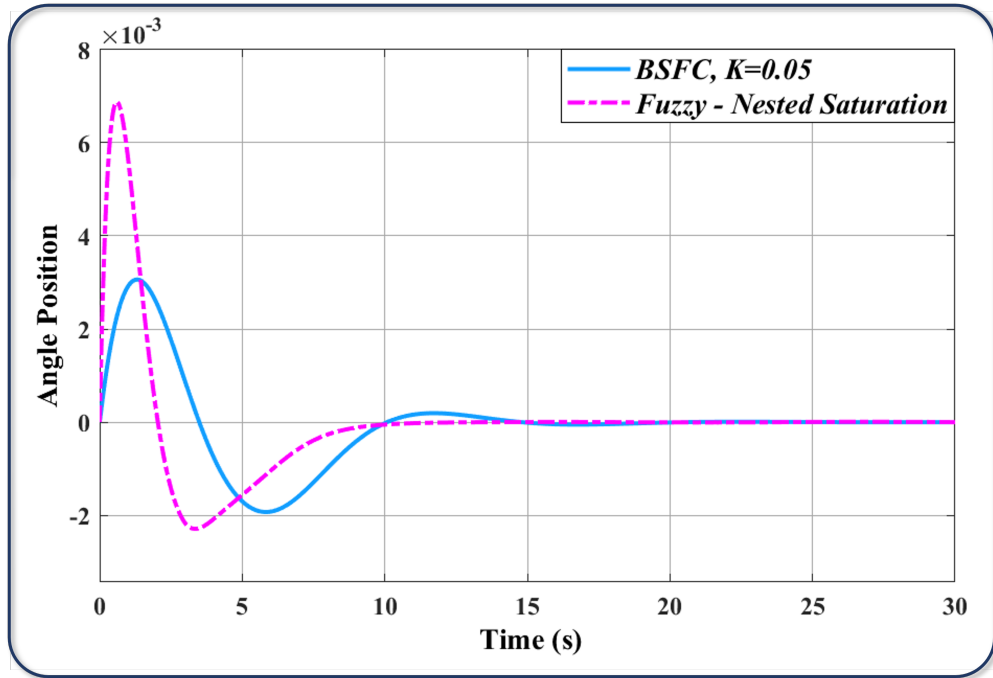


Figura 4.12: Respuesta de la posición *angular* empleando el modelo completo del PVTOL.

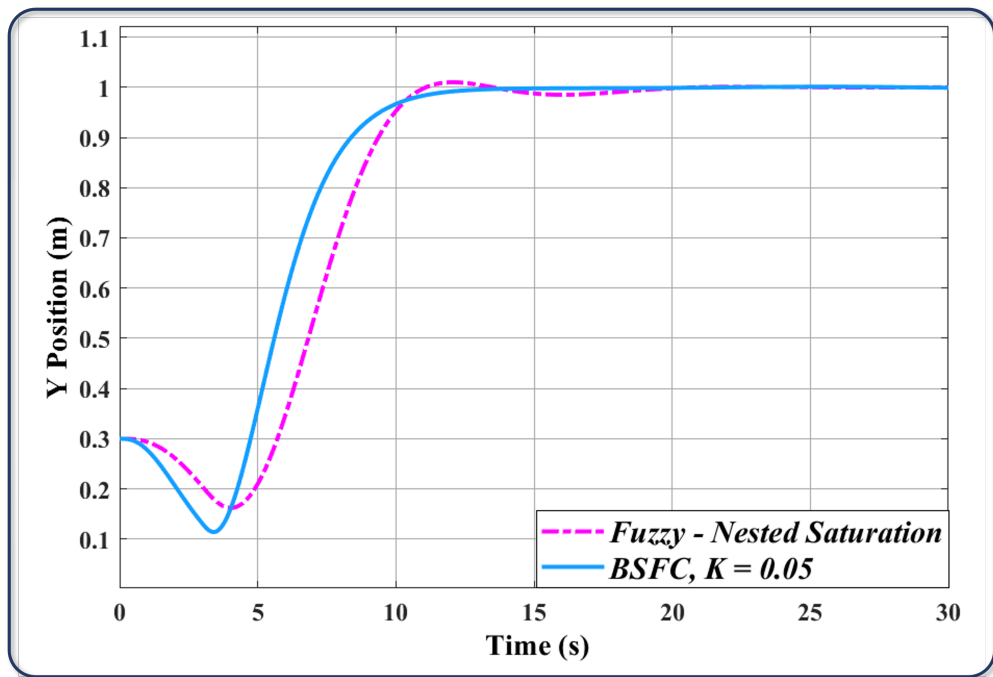


Figura 4.13: Respuesta de entrada escalon empleando el modelo completo.

Se evalúa el desempeño del controlador de saturaciones anidadas difuso y el controlador propuesto utilizando los mismos criterios de desempeños utilizados anteriormente, obteniendo los siguiente resultados para cada modelo. Para el modelo completo (tabla 4.3), ambos

controladores mostraron un rendimiento similar en la mayoría de los casos. Sin embargo, el controlador BSFC tuvo un mejor desempeño en la salida Y , presentando valores más bajos en todos los índices de desempeño comparados con el Fuzzy-NSC. En la salida θ , el BSFC también mostró un mejor desempeño en términos de ITAE y ITSE, aunque con un IAE ligeramente superior.

	Controlador	IAE	ISE	ITAE	ITSE
Z	Fuzzy-NSC	1.898	0.8762	7.801	3.083
	BSFC	1.898	0.8762	7.801	3.083
Y	Fuzzy-NSC	1.2	0.2683	3.035	0.4733
	BSFC	0.9226	0.1899	1.916	0.2559
θ	Fuzzy-NSC	0.01474	2.69e-05	9.035e-05	0.06581
	BSFC	0.01643	5.643e-05	8.554e-05	0.04456

Tabla 4.3: Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo completo.

En cuanto al modelo simplificado (tabla 4.4), el BSFC nuevamente demostró ser más eficaz en la salida Y , con mejores valores en todos los índices. Sin embargo, en la salida θ , el Fuzzy-NSC tuvo un desempeño ligeramente mejor en términos de ITAE e ITSE.

	Controlador	IAE	ISE	ITAE	ITSE
Z	Fuzzy-NSC	3.524	1.72	20.78	7.64
	BSFC	3.524	1.72	20.78	7.64
Y	Fuzzy-NSC	1.21	0.2663	3.043	0.4704
	BSFC	1.151	0.2543	2.736	0.4296
θ	Fuzzy-NSC	0.153	0.1637	0.0092	0.6375
	BSFC	0.1637	0.0036	0.0113	0.6523

Tabla 4.4: Índices de criterios de desempeño aplicando el modelo simplificado.

Al realizar la comparación de estos dos controladores, se observa que estos tienen un comportamiento similar, sin embargo el controlador de saturaciones anidadas difusa suele estabilizar en menor tiempo, mientras que el controlador propuesto presenta una mejor respuesta para la posición en Y , en cuanto a los índices de desempeño se observa que el controlador BSFC presentó un rendimiento superior en gran parte de los casos, particularmente en la salida Y , tanto en el modelo completo como en el simplificado.

Capítulo 5

Conclusiones.

En esta investigación se presentó una modificación del NSC clásico mediante el uso de funciones suaves hiperbólicas, cuya implementación demuestra ser más efectiva, ya que mejora tanto el tiempo de convergencia como el rendimiento en el sistema de control de circuito cerrado del vehículo PVTOL. Al ajustar la pendiente de la función hiperbólica acotada en una configuración anidada, el algoritmo propuesto permite una rápida convergencia de los estados de error, lo que resulta en una respuesta de control más eficiente. Las simulaciones muestran que el parámetro K influye en el comportamiento del controlador BSFC. A medida que K disminuye, la estabilización y la respuesta angular mejoran. Por el contrario, a medida que K aumenta, el sistema tiende a comportarse como NSC puro. Por tanto, los resultados de la simulación numérica han puesto de relieve las ventajas del BSFC. Este es un enfoque alternativo que representa un avance significativo en la estabilización PVTOL, ofreciendo una solución simple pero efectiva que supera el método tradicional de control de saturación. Al comparar el controlador propuesto, optimizado con el parámetro $K = 0,05$, con el controlador de saturaciones anidadas difuso, las simulaciones indican que el controlador BSFC ofrece un mejor rendimiento y una estabilización más rápida para la posición en Y mientras que para el ángulo estos tienden a comportarse de manera similar. Este enfoque alternativo representa un avance significativo en la estabilización del PVTOL, proporcionando una solución sencilla pero eficaz que supera al método tradicional de control de saturación.

Bibliografía

- [1] H. Eisenbeiss *et al.*, “A mini unmanned aerial vehicle (uav): system overview and image acquisition,” *International Archives of Photogrammetry. Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, vol. 36, no. 5/W1, pp. 1–7, 2004.
- [2] H. Nawaz, H. M. Ali, and S. Massan, “Applications of unmanned aerial vehicles: a review,” *Tecnol. Glosas InnovaciÓN Apl. Pyme. Spec*, vol. 2019, pp. 85–105, 2019.
- [3] H. Shakhathreh, A. H. Sawalmeh, A. Al-Fuqaha, Z. Dou, E. Almaita, I. Khalil, N. S. Othman, A. Khreishah, and M. Guizani, “Unmanned aerial vehicles (uavs): A survey on civil applications and key research challenges,” *Ieee Access*, vol. 7, pp. 48 572–48 634, 2019.
- [4] Z. Xiaoning, “Analysis of military application of uav swarm technology,” in *2020 3rd International Conference on Unmanned Systems (ICUS)*. IEEE, 2020, pp. 1200–1204.
- [5] K. P. Valavanis, *Advances in unmanned aerial vehicles: state of the art and the road to autonomy*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] P. Castillo, R. Lozano, and A. E. Dzul, “Introduction and historical background,” *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*, pp. 1–21, 2005.
- [7] D. Giordan, Y. Hayakawa, F. Nex, F. Remondino, and P. Tarolli, “The use of remotely piloted aircraft systems (rpas) for natural hazards monitoring and management,” *Natural hazards and earth system sciences*, vol. 18, no. 4, pp. 1079–1096, 2018.
- [8] S. G. Gupta, D. M. Ghonge, and P. M. Jawandhiya, “Review of unmanned aircraft system (uas),” *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET) Volume*, vol. 2, 2013.
- [9] A. Hobbs, “Unmanned aircraft systems,” in *Human factors in aviation*. Elsevier, 2010, pp. 505–531.
- [10] O. of the Secretary of Defense, “Unmanned aircraft systems roadmap: 2005–2030,” 2005.
- [11] O. O. T. U. S. O. D. F. A. TECHNOLOGY and L. W. DC, *Unmanned Aerial Vehicles Roadmap 2002-2027*. Defense Technical Information Center, 2002.
- [12] R. Austin, *Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment*. John Wiley & Sons, 2011.

- [13] S. Gupte, P. I. T. Mohandas, and J. M. Conrad, "A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles," *2012 Proceedings of IEEE Southeastcon*, pp. 1–6, 2012.
- [14] W. Johnson, *Helicopter theory*. Courier Corporation, 2012.
- [15] Y. Alghamdi, A. Munir, and H. M. La, "Architecture, classification, and applications of contemporary unmanned aerial vehicles," *IEEE Consumer Electronics Magazine*, vol. 10, no. 6, pp. 9–20, 2021.
- [16] P. Zhao, Q. Quan, S. Chen, D. Tang, and Z. Deng, "Experimental investigation on hover performance of a single-rotor system for mars helicopter," *Aerospace Science and Technology*, vol. 86, pp. 582–591, 2019.
- [17] A. S. Saeed, A. B. Younes, C. Cai, and G. Cai, "A survey of hybrid unmanned aerial vehicles," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 98, pp. 91–105, 2018.
- [18] P. Segui-Gasco, Y. Al-Rihani, H.-S. Shin, and A. Savvaris, "A novel actuation concept for a multi rotor uav," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 74, pp. 173–191, 2014.
- [19] G. Cai, K.-Y. Lum, B. M. Chen, and T. H. Lee, "A brief overview on miniature fixed-wing unmanned aerial vehicles," *IEEE ICCA 2010*, pp. 285–290, 2010.
- [20] M. Idrissi, M. Salami, and F. Annaz, "A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: applications, architectural design and control algorithms," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 104, no. 2, p. 22, 2022.
- [21] H. Mo and G. Farid, "Nonlinear and adaptive intelligent control techniques for quadrotor uav—a survey," *Asian Journal of Control*, vol. 21, no. 2, pp. 989–1008, 2019.
- [22] V. Rejon and E. Aranda-Bricaire, "Discrete-time stabilization of a pvtol without roll angle and velocities measurement," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2006, pp. 1521–1526.
- [23] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer, "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to v/stol aircraft," *Automatica*, vol. 28, no. 4, pp. 665–679, 1992.
- [24] S. Al-Hiddabi, J. Shen, and N. H. McClamroch, "A study of flight manoeuvres for the pvtol aircraft model," in *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, vol. 4. IEEE, 1999, pp. 2727–2731.
- [25] F. Lin, W. Zhang, and R. D. Brandt, "Robust hovering control of a pvtol aircraft," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 343–351, 1999.
- [26] M. Frye, S. Ding, C. Qian, and S. Li, "Fast convergent observer design for output feedback stabilisation of a planar vertical takeoff and landing aircraft," *IET control theory & applications*, vol. 4, no. 4, pp. 690–700, 2010.

- [27] A. Ailon, “Simple tracking controllers for autonomous vtol aircraft with bounded inputs,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 55, no. 3, pp. 737–743, 2010.
- [28] A. Toriz, M. Raygoza, and D. Martínez, “Modelo de inclusión tecnológica uav para la prevención de trabajos de alto riesgo, en industrias de la construcción basado en la metodología iva,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 14, no. 1, pp. 94–103, 2017.
- [29] S. Herwitz, L. Johnson, S. Dunagan, R. Higgins, D. Sullivan, J. Zheng, B. Lobitz, J. Leung, B. Gallmeyer, M. Aoyagi, R. Slye, and J. Brass, “Imaging from an unmanned aerial vehicle: agricultural surveillance and decision support,” *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 44, no. 1, pp. 49–61, 2004. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168169904000456>
- [30] M. Khosravi and H. Pishro-Nik, “Unmanned aerial vehicles for package delivery and network coverage,” in *2020 IEEE 91st Vehicular Technology Conference (VTC2020-Spring)*, 2020, pp. 1–5.
- [31] P. Sujit, J. Sousa, and F. L. Pereira, “Uav and auvs coordination for ocean exploration,” in *OCEANS 2009-EUROPE*, 2009, pp. 1–7.
- [32] B. W. McCormick, *Aerodynamics of V/STOL flight*. Courier Corporation, 1999.
- [33] Y. Zhou, H. Zhao, and Y. Liu, “An evaluative review of the vtol technologies for unmanned and manned aerial vehicles,” *Computer Communications*, vol. 149, pp. 356–369, 2020.
- [34] M. J. Hirschberg, “An overview of the history of vertical and/or short take-off and landing (v/stol) aircraft,” *Proceedings www.vstol.org*, 2006.
- [35] G. J. Leishman, *Principles of helicopter aerodynamics with CD extra*. Cambridge university press, 2006.
- [36] B. J. Donahue, *THE TESTING OF CIVILIAN AIRPLANE ENGINES AT THE NATIONAL BUREAU OF STANDARDS: 1928-1932*. University of Maryland, College Park, 1978.
- [37] S. Markman and W. G. Holder, *Straight up: a history of vertical flight*. Schiffer Pub., 2000.
- [38] J. Glancey, *Concorde: the rise and fall of the supersonic airliner*. Atlantic Books Ltd, 2015.
- [39] K. S. Brahim, N. Terki, A. El Hajjaji, and D. Lara, “Altitude and attitude quadro-rotor control based on adaptive sliding mode controller with input saturation,” in *30th Mediterranean Conf. on Control and Automation*. IEEE, 2022, pp. 456–461.
- [40] J. Roltgen and C. Byrnes, “Hover control of a pvtol using nonlinear regulator theory,” in *Amer. Contr. Conf*, 1991, pp. 1126–1130.

- [41] T. Turker, T. Oflaz, H. Gorgun, and G. Cansever, “A stabilizing controller for pvtol aircraft,” in *Amer. Contr. Conf.*, 2012, pp. 909–913.
- [42] R. Lozano, S. Calderón, and I. González-Hernández, “Lyapunov stability of a planar vertical take-off and landing aircraft exerting a force in the environment,” *Drones*, vol. 6, no. 6, p. 144, 2022.
- [43] L. P. F. R. Aguilar, M. C. F. Puchol, M. C. Sánchez, and G. J. Scaglia, “Linear algebra based control: Application to a second order chained form system,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 19, no. 9, pp. 1435–1442, 2021.
- [44] K. D. Do, “Global inverse optimal control of vertical take-off and landing aircraft,” *IFAC Journal of Systems and Control*, vol. 15, p. 100132, 2021.
- [45] S. Raj, “Adaptive control of pvtol using h_∞ based integral sliding mode control,” in *2021 International Conference on Intelligent Technologies (CONIT)*. IEEE, 2021, pp. 1–6.
- [46] Z. Li, “A simple nonlinear stabilization control of planar vertical take-off and landing aircraft based on finite-time control and controlled lagrangians,” *Asian Journal of Control*, vol. 24, no. 4, pp. 1862–1872, 2022.
- [47] G. Chen and W. Huo, “Adaptive stabilization of a pvtol aircraft with uncertainties based on controlled lagrangians,” in *2022 41st Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE, 2022, pp. 392–397.
- [48] W. S. Aboud, H. Al-Amir, A. A. Alhamdany, and F. M. Kadhim, “Overcome uncertainties of vertical take-off and landing aircraft based on optimal sliding mode control,” *Indones. J. Electr. Eng. Comput. Sci*, vol. 29, pp. 703–714, 2023.
- [49] Q. Yao, “Robust constrained trajectory tracking control for a pvtol aircraft subject to external disturbances,” *International Journal of Systems Science*, vol. 52, no. 12, pp. 2617–2629, 2021.
- [50] A. R. Teel, “Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls,” *Systems & control letters*, vol. 18, no. 3, pp. 165–171, 1992.
- [51] P. Castillo, R. Lozano, I. Fantoni, and A. Dzul, “Control design for the pvtol aircraft with arbitrary bounds on the acceleration,” in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, vol. 2. IEEE, 2002, pp. 1717–1722.
- [52] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano, “Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft,” *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 12, no. 4, pp. 510–516, 2004.
- [53] J. Betancourt, P. Castillo, and R. Lozano, “Stabilization and tracking control algorithms for vtol aircraft: Theoretical and practical overview,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 100, no. 3, pp. 1249–1263, 2020.

- [54] T. Espinoza, A. Dzul, L. García, and R. Parada, “Nonlinear controllers applied to fixed-wing uav,” in *2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*. IEEE, 2012, pp. 243–248.
- [55] M. M. Nicotra, E. Garone, R. Naldi, and L. Marconi, “Nested saturation control of an uav carrying a suspended load,” in *2014 American control conference*. IEEE, 2014, pp. 3585–3590.
- [56] R. Lozano, P. Castillo, and A. Dzul, “Global stabilization of the pvtol: real-time application to a mini-aircraft,” *International Journal of Control*, vol. 77, no. 8, pp. 735–740, 2004.
- [57] A. Zavala-Rio, I. Fantoni, and R. Lozano, “Global stabilization of a pvtol aircraft model with bounded inputs,” *International Journal of Control*, vol. 76, no. 18, pp. 1833–1844, 2003.
- [58] C. Aguilar-Ibañez, “Stabilization of the pvtol aircraft based on a sliding mode and a saturation function,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 5, pp. 843–859, 2017.
- [59] T. Ahmed-Ali, W. Perruquetti, and J.-P. Richard, “Nested saturation redesign for systems using sliding mode,” in *2001 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2001, pp. 1090–1093.
- [60] K. Mei, S. Ding, W. X. Zheng, and H. Du, “A nested saturated second-order sliding mode controller design,” in *37th Chinese Control Conf.* IEEE, 2018, pp. 3018–3023.
- [61] J. Lavín-Delgado, Z. Z. Beltrán, J. Gómez-Aguilar, and E. Pérez-Careta, “Controlling a quadrotor uav by means of a fractional nested saturation control,” *Adv. Space Res.*, 2022.
- [62] E. N. Johnson and S. K. Kannan, “Nested saturation with guaranteed real poles,” in *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, vol. 1. IEEE, 2003, pp. 497–502.
- [63] Z. Sun, S.-l. Chen, J.-k. Zhang, L. Lu, and M. Yu, “Logic-based switching nested saturation control for inverted pendulum,” in *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE, 2017, pp. 904–909.
- [64] S. Amini, B. Ahi, and M. Haeri, “Nested saturation control based on the extended state observer: Twin rotor mimo system,” in *2017 5th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*. IEEE, 2017, pp. 55–59.
- [65] C. F. Aguilar-Ibanez, M. S. S. Castanon *et al.*, “Stabilization of the strongly damping inertia wheel pendulum by a nested saturation functions,” in *2008 American Control Conference*. IEEE, 2008, pp. 3434–3439.
- [66] M. Li and Z. Zeng, “Modified nested saturated control for uncertain multiple integrators with high-order nonlinear perturbation,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022.

- [67] R. Dasgupta, “Smooth saturation function-based position and attitude tracking of a quad-rotorcraft avoiding singularity,” in *2019 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, 2019, pp. 692–703.
- [68] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, H. Sira-Ramirez, R. Ortega, A. Loría, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez, *Euler-Lagrange systems*. Springer, 1998.
- [69] F. Torres, P. Gil, S. T. Puente, and R. Aracil, *Robots y sistemas sensoriales*. Pearson Educación, 2002.
- [70] B. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of flight: stability and control*. John Wiley & Sons, 1995.
- [71] J. Roskam, *Airplane flight dynamics and automatic flight controls*. DARcorporation, 1998.
- [72] B. L. Stevens, F. L. Lewis, and E. N. Johnson, *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. John Wiley & Sons, 2015.
- [73] M. Plus, “A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints,” in *Proceedings of the 1-st European Control Conference*, 1991, pp. 1022–1033.
- [74] H. K. Khalil, “Nonlinear control: Adaptation and learning,” *Singapore: World Scientific*, 2015.
- [75] S. Singh, V. Singh, A. Rani, and J. Yadav, “Optimization of pid controller based on various tuning methods,” in *2023 International Conference on Power, Instrumentation, Energy and Control (PIECON)*. IEEE, 2023, pp. 1–6.
- [76] S. B. Prusty, S. Padhee, U. C. Pati, and K. K. Mahapatra, *Comparative performance analysis of various tuning methods in the design of PID controller*. IET, 2015.
- [77] R. Sharma, S. Mohanty, and A. Basu, “Improvising tuning techniques of digital pid controller for blood glucose level of diabetic patient,” in *2016 International Conference on Emerging Trends in Electrical Electronics & Sustainable Energy Systems (ICETEESES)*, 2016, pp. 159–163.
- [78] K. Åström and T. Hägglund, “Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins,” *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 645–651, 1984. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109884900141>
- [79] M. A. Sattar and A. Ismail, “Modeling and fuzzy logic control of a quadrotor uav,” *Int. Res. J. Eng. Technol*, vol. 4, pp. 1494–1498, 2017.
- [80] C. L. Chuen, “Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller-part i,” *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 20, no. 2, pp. 404–418, 1990.

- [81] Z. Huang, R. Bauer, and Y.-J. Pan, "Closed-loop identification and real-time control of a micro quadcopter," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 69, no. 3, pp. 2855–2863, 2021.
- [82] E. W. Weisstein. Smooth function. [Online]. Available: <https://mathworld.wolfram.com/SmoothFunction.html>
- [83] J. Sun, J. Yi, and Z. Pu, "Fixed-time adaptive fuzzy control for uncertain nonstrict-feedback systems with time-varying constraints and input saturations," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 30, no. 4, pp. 1114–1128, 2021.
- [84] M. Wang, L. Huang, and C. Yang, "Nn-based adaptive tracking control of discrete-time nonlinear systems with actuator saturation and event-triggering protocol," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 51, no. 12, pp. 7613–7621, 2020.
- [85] K. S. Brahim, A. El Hajjaji, N. Terki, and D. L. Alabazares, "Finite time adaptive smc for uav trajectory tracking under unknown disturbances and actuators constraints," *IEEE Access*, 2023.
- [86] X. Huang, W. Lin, and B. Yang, "Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems," *Automatica*, vol. 41, no. 5, pp. 881–888, 2005.
- [87] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- [88] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, "Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode," *Automatica*, vol. 41, no. 11, pp. 1957–1964, 2005.
- [89] J. Yu, P. Shi, and L. Zhao, "Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 92, pp. 173–180, 2018.
- [90] MathWorks, *Simulink Documentation*, 2024, <https://www.mathworks.com/help/simulink/>.
- [91] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Prentice Hall, 2010.
- [92] A. K. Tyagi, *MATLAB and Simulink for Engineers*. Oxford University Press, 2011.
- [93] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, and J. D. Powell, *Feedback control of dynamic systems*. Prentice hall Upper Saddle River, 2002, vol. 4.
- [94] J. Kim, M.-S. Kang, and S. Park, "Accurate modeling and robust hovering control for a quad-rotor vtol aircraft," in *2nd Int. Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA June 8–10*. Springer, 2009, pp. 9–26.
- [95] P. Castillo, R. Lozano, I. Fantoni, and A. Dzul, "Control design for the pvtol aircraft with arbitrary bounds on the acceleration," in *41st IEEE Conf. on Decision and Control*, 2002, pp. 1717–1722.

- [96] C. Wen, J. Zhou, Z. Liu, and H. Su, “Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance,” *IEEE Trans. Autom.*, vol. 56, no. 7, pp. 1672–1678, 2011.
- [97] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano, “Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 12, no. 4, pp. 510–516, 2004.