



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACIÓN

MC Luis Felipe Flores López



Matemáticas Aplicadas a la Administración

LAD-1027

2-3-5

Licenciatura en Administración

Tema 1: Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.	1
Introducción.....	1
1.1 Definición de Función.	2
1.2 Dominio y Rango Restringidos.	5
1.3 Funciones Multivariadas Básicas.	10
1.4 Representaciones Gráficas de Funciones Matemáticas.	13
1.5 Determinación de la ecuación de una Línea Recta.	17
Tema 2: Funciones Lineales, Aplicaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales.	32
Introducción.....	32
2.1 Funciones Lineales	33
2.2 Modelos de Equilibrio	34
2.3 Método de eliminación	50
Tema 3: Matrices	61
Introducción.....	61
3.1 Introducción a las matrices	62
3.2 Tipos especiales de matrices.	63
3.3 Operaciones con matrices	66
3.4 Introducción a los Determinantes.	77
3.5 Propiedades de los Determinantes.	86
3.6 Solución de la Inversa de una Matriz	92
3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto.	99
Tema 4: Diferenciación y Aplicaciones.....	107
4.1 Límites y Continuidad.	108
4.2 Derivadas Algebraicas	110
4.3 Derivada de n-ésimo orden.....	115
4.4 Derivadas Parciales Básicas.	119
4.6 Aplicaciones a Ingresos, Costos y Utilidades.....	129
4.7 Análisis Marginal.....	133
Tema 5: Integración y Aplicaciones.	139
5.1 Concepto de antiderivada.	140
5.2 Reglas de integración directas	143
5.3 Integral definida.....	146
5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas.....	149

Apéndice A: Cuestionario.....	153
A-1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.....	153
1.1: Definición de Función.	153
1.2: Dominio y Rango Restringidos.	154
1.3: Funciones Multivariadas Básicas.	156
1.4: Representaciones Gráficas de Funciones Matemáticas.	158
A-2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.	167
2.1 Funciones lineales.	167
2.2: Modelos de Equilibrio.	168
2.3: Métodos de eliminación	173
A-3 Álgebra matricial.	180
3.1 Introducción a las matrices.	180
3.2 Tipos especiales de matrices.....	181
3.3 Operaciones con matrices.....	183
3.4 Introducción a los determinantes.....	185
3.5 Propiedades de los determinantes.....	187
3.6 Solución de la inversa de una matriz.....	189
3.7 Aplicaciones a Modelos de Insumo-Producto	191
A-4 Diferenciación y Aplicaciones.....	194
4.1 Límites y continuidad.....	194
4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas.....	195
4.3 Derivada de n-ésimo orden.....	197
4.4 Derivadas parciales básicas.	199
4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos).	201
4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades.....	203
4.7 Análisis marginal.	205
A-5 Integración y Aplicaciones.	207
5.1 Concepto de antiderivada	207
5.2 Reglas de integración directas.	208
5.3 Integral definida.....	210
5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas.....	212
Apéndice B: Aplicaciones.	215
B-1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.	215
B-2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.....	220

2.1: Funciones Lineales	220
2.2: Modelos de Equilibrio	222
2.2: Modelo gráfico de punto de equilibrio	224
2.3: Métodos de eliminación	230
B-3 Álgebra Matricial.	234
3.1 Operaciones con matrices.	234
3.2 Aplicaciones de los Determinantes en la Administración.	245
B-4 Diferenciación y Aplicaciones	258
4.1 Límites y Continuidad.	258
4.2 Derivadas Algebraicas	261
4.3 Derivada de n-ésimo orden.....	264
4.4 Derivadas Parciales Básicas.	267
B-5 Integración y Aplicaciones.	271
Apéndice C1: Diapositivas Funciones Matemáticas	275
Apéndice C2: Diapositivas Funciones Lineales y Aplicaciones	287
Apéndice C3: Diapositivas Matrices	300
Apéndice C4: Diapositivas Diferenciación y Aplicaciones.....	310
Apéndice C5: Diapositivas Integración y Aplicaciones	317
Planeación e Instrumentación didáctica del curso	324

Tema 1: Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.

Introducción

El estudio de las funciones matemáticas y las ecuaciones lineales es fundamental para comprender y modelar las relaciones que surgen en diversos ámbitos de la administración. Este tema presenta las herramientas básicas para representar, analizar y predecir comportamientos en sistemas reales, permitiendo la formulación de modelos matemáticos que facilitan la toma de decisiones. A lo largo de este tema se exploran definiciones fundamentales como la función lineal, expresada en la forma $y = mx + b$, donde la pendiente m indica la tasa de cambio y la intersección en y b señala el punto de partida en el eje vertical. Asimismo, se analizan conceptos esenciales como el dominio y el rango, la representación gráfica de funciones y la determinación de la ecuación de una línea recta mediante distintos métodos: a partir de la pendiente e intersección, utilizando la fórmula punto-pendiente y a partir de dos puntos. Estas técnicas han sido ilustradas con ejercicios completos que abarcan aplicaciones prácticas en áreas relevantes para la administración, tales como la amortización de bonos, donde se modela la depreciación del valor; el costo de un producto o el costo total, que permiten estimar gastos fijos y variables; el equilibrio de mercado, fundamental para analizar la relación entre oferta y demanda; y el cálculo del margen de utilidad, clave para determinar la rentabilidad de las operaciones. Cada subtema está diseñado para conectar la teoría matemática con problemas cotidianos en el mundo empresarial, demostrando cómo una representación gráfica o la determinación precisa de la ecuación de una recta pueden facilitar la interpretación de datos y la predicción de escenarios económicos. De esta manera, el contenido no solo refuerza los fundamentos matemáticos, sino que también muestra su aplicabilidad en situaciones reales, permitiendo a los estudiantes desarrollar habilidades analíticas y estratégicas esenciales para su desempeño profesional.

1.1 Definición de Función.

Una *función* es una relación entre dos conjuntos en la que a cada elemento del *dominio* (valores de entrada) le corresponde únicamente un elemento en el *rango* (valores de salida). Se representa mediante una regla matemática, una tabla de valores o una gráfica.

Formato Analítico

El *formato analítico* de una función se expresa en términos algebraicos como:

$f(x)$ = expresión matemática en x

Donde:

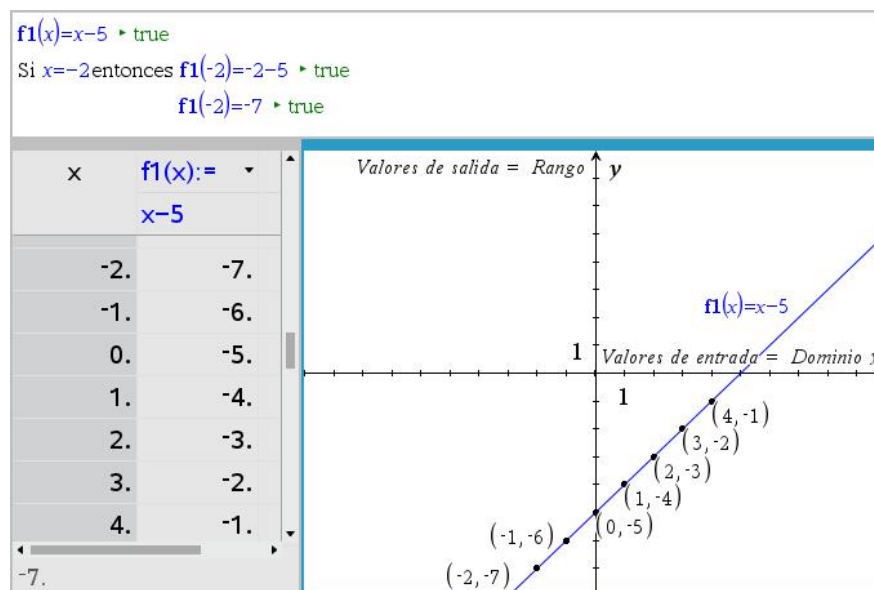
x es la variable independiente.

$f(x)$ es la variable dependiente, que es el resultado de aplicar la función a x .

Ejemplo 1: $f(x) = x - 5$

Cada valor de x tiene únicamente un valor correspondiente de $f(x)$ o $fl(x)$.

Formato analítico ↓



↑ Formato Tabular

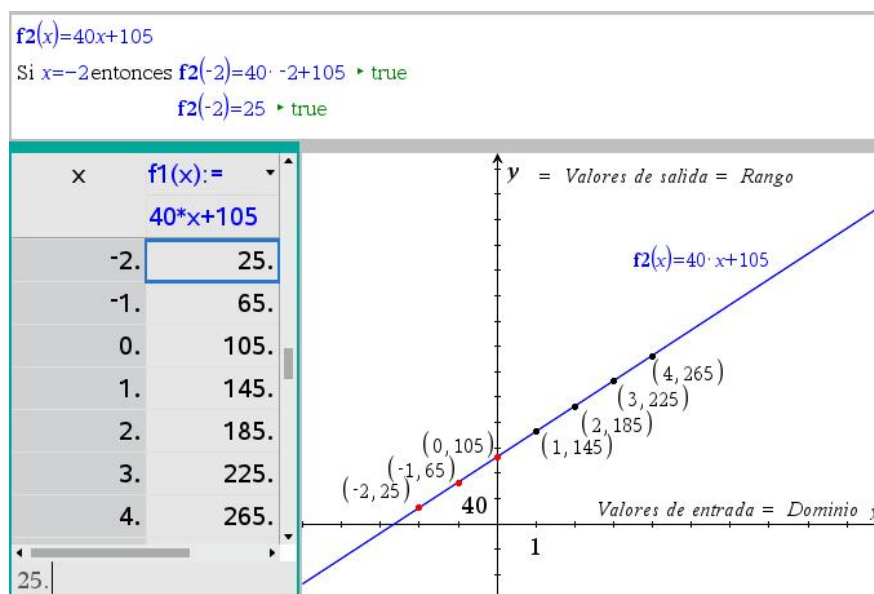
- ✓ *Dominio*: Conjunto de valores aceptados en la variable x . Nota: La tabla solo muestra algunos valores posibles.
- ✓ *Rango*: Conjunto de valores obtenidos de sustituir los valores aceptados en la variable x , si sustituimos x por -2 en $f1(x)$ obtenemos que $f1(-2) = -7$.

↑ Formato Gráfico.

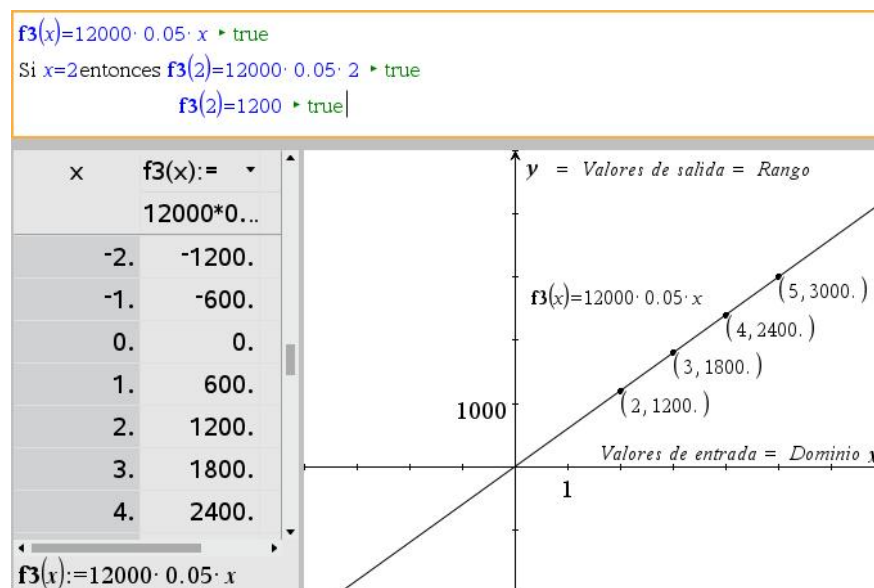
La función $f1(x) = x - 5$ se representa en el plano cartesiano mediante una línea recta. Para graficarla, se selecciona una dimensión adecuada para la ventana.

- ✓ Se trazan los puntos obtenidos en la tabla.
- ✓ Se conectan los puntos mediante una línea recta, ya que la función es lineal.
- ✓ La ventana que muestra la gráfica, solo es un segmento del *dominio* y el *rango*.
- ✓ El *dominio* = $(-\infty, \infty)$ y el *rango* = $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 2: $f2(x) = 40x + 105$



Ejemplo 3: $f3(x) = 12000 \cdot 0.05x$



Utiliza la calculadora para cotejar tu resultado con las tablas que aparecen en los ejemplos 1-1, 1-2 y 1-3, para familiarizarte con la captura de los datos y realizar sin dificultad los cálculos para el llenado de las tablas de los ejercicios que se enumeran a continuación.

Ejercicios 1.1

Dada las funciones, construir una tabla para $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; selecciona una ventana adecuada y grafica estos puntos y finalmente los unes con una línea recta.

1. $g1(x) = x - 3$
2. $g2(x) = x - 7$
3. $g3(x) = x + 2$
4. $g4(x) = x - 10$
5. $g5(x) = x - 8$
6. $g6(x) = x + 5$
7. $g7(x) = x - 15$
8. $g8(x) = x + 1$
9. $g9(x) = x + 11$
10. $h1(x) = 35x + 100$
11. $h2(x) = 42x + 110$
12. $h3(x) = 38x + 95$
13. $h4(x) = 45x + 120$
14. $h5(x) = 30x + 90$
15. $h6(x) = 50x + 130$
16. $h7(x) = 37x + 98$
17. $h8(x) = 43x + 115$
18. $h9(x) = 125x + 250$
19. $k1(x) = 10000 \cdot 0.04x$
20. $k2(x) = 15000 \cdot 0.06x$
21. $k3(x) = 9000 \cdot 0.03x$
22. $k4(x) = 11000 \cdot 0.045x$
23. $k5(x) = 13000 \cdot 0.055x$
24. $k6(x) = 12500 \cdot 0.05x$

$$25. k_7(x) = 14000 \cdot 0.07x$$

$$26. k_8(x) = 8000 \cdot 0.025x$$

$$27. k_9(x) = 17500 \cdot 0.025x$$

1.2 Dominio y Rango Restringidos.

El *dominio* y el *rango* de una función son conceptos fundamentales en matemáticas. El dominio es el conjunto de todos los valores posibles que la variable independiente (entrada) puede asumir, mientras que el rango es el conjunto de valores resultantes que la función puede generar. Cuando se habla de "dominio y rango restringidos," se hace referencia a situaciones en las que estos conjuntos están limitados debido a restricciones específicas impuestas por el contexto o la naturaleza de la función.

El dominio restringido limita los valores que puede asumir la variable independiente de una función, lo que puede deberse a condiciones, económicas o de otro tipo.

El rango restringido define los valores posibles que puede tomar la variable dependiente, influenciado por las restricciones en el dominio o las características de la función

Costos de Producción

Representan el conjunto de gastos necesarios para fabricar o elaborar un bien o servicio. Incluyen tanto los costos fijos como los costos variables.

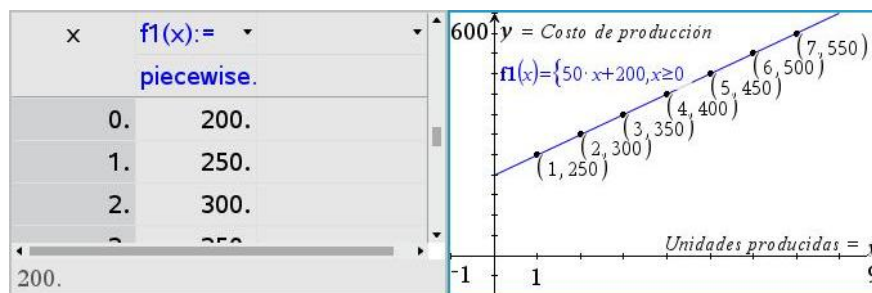
Fórmula general:

$$C(n) = mn + b$$

Variables:

- $C(n)$: costo total de producción
- m : costo variable por unidad
- n : número de unidades producidas
- b : costo fijo

Ejemplo 1 Costos de Producción: Si el costo de fabricación de un producto depende del número de unidades producidas, la función de costo $C(n) = 50n + 200$, donde $50n$ representa el costo variable por unidad y 200 el costo fijo, el dominio incluye valores enteros positivos de (n) , ($n \geq 0$) ya que no es posible fabricar una cantidad negativa de productos. El rango comienza en $C(n) = 200$, que es el costo mínimo.



Interés Simple

Es el rendimiento generado por un capital inicial invertido durante un período determinado, calculado sin reinversión de los intereses obtenidos.

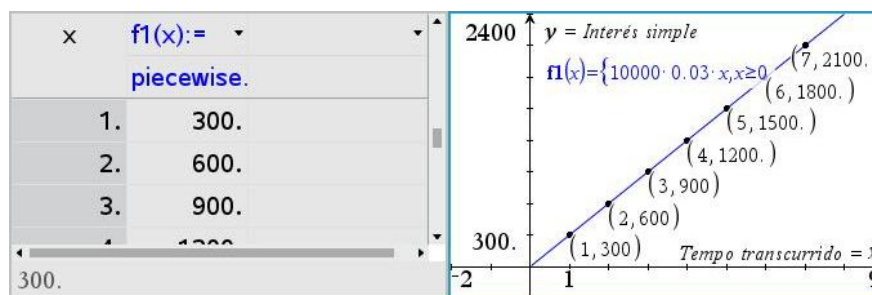
Fórmula:

$$I(t) = P \cdot r \cdot t$$

Variables:

- $I(t)$: Interés simple
- P : Capital inicial
- r : Tasa de interés anual
- t : Tiempo en años

Ejemplo 2 Interés Simple: Si una inversión genera un interés de acuerdo con el tiempo, su función se define como $I(t) = P \cdot r \cdot t$, donde P es el capital inicial, r la tasa de interés y t el tiempo transcurrido, con los siguientes datos $P=10\,000$, $r=3\%$.



Dominio “tiempo”: $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

Rango: Interés simple ≥ 0

Costo Total

Es la suma de los costos fijos y los costos variables en una función lineal, que permite analizar la evolución del gasto según la cantidad producida.

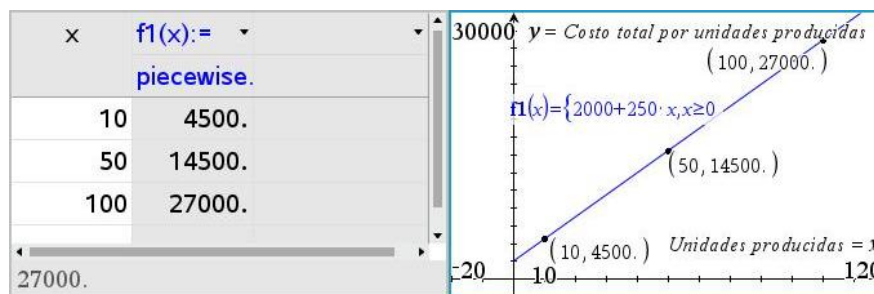
Fórmula:

$$C(n) = m \cdot n + b$$

Variables:

- $C(n)$: Costo total
- m : Costo variable por unidad
- n : Unidades producidas
- b : Costo fijo

Ejemplo 3 Costo Total: Si el costo fijo de operación de una empresa es de \$2,000 y cada producto tiene un costo de \$250 por unidad, encuentra el costo total de producir 10, 50 y 100 unidades.



Dominio: Unidades = 10, 50, 100

Rango: Costo total ≥ 2000

Margen de Utilidad

Es la diferencia entre el ingreso por ventas y el costo total de producción, expresada como una función lineal en función de la cantidad vendida.

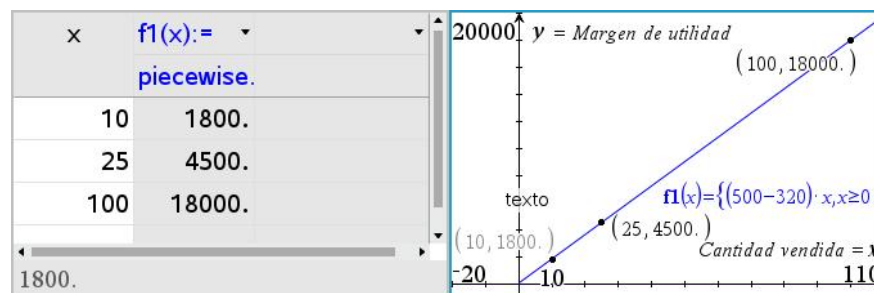
Fórmula:

$$U(x) = p \cdot x - c \cdot x$$

Variables:

- $U(x)$: utilidad total
- p : precio de venta por unidad
- c : costo de producción por unidad
- x : unidades vendidas

Ejemplo 4 Margen de Utilidad: Una empresa vende un producto a \$500 y el costo de producción es \$320. Define la función que representa el margen de utilidad en función de la cantidad vendida y calcula la utilidad para 10, 25 y 100 ventas.



Dominio: Cantidad vendida = 10, 25, 100

Rango: M de Utilidad ≥ 0

Depreciación

Es la pérdida de valor de un bien de capital a lo largo del tiempo debido al uso, desgaste o antigüedad, representada mediante una relación lineal decreciente.

Fórmula:

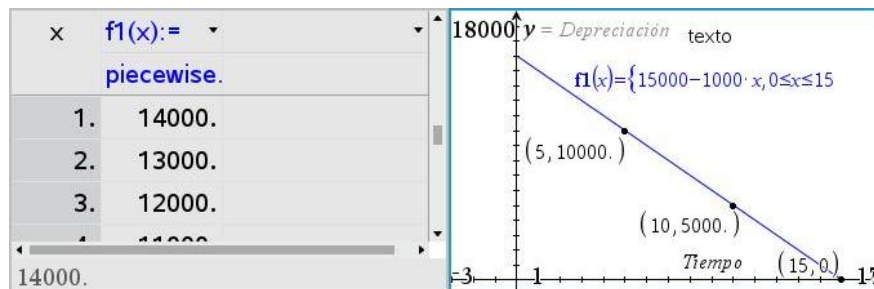
$$D(t) = V_0 - m \cdot t$$

Variables:

- $D(t)$: valor del bien en el tiempo t
- V_0 : valor inicial del bien
- m : depreciación anual

- t : tiempo transcurrido en años

Ejemplo 5 Depreciación: Un equipo de oficina se deprecia anualmente en \$1,000 según el modelo lineal $D(t) = 15,000 - 1,000t$, donde t es el número de años. Encuentra el valor del equipo después de 5, 10 y 15 años.



Como puedes observar la función $D(t)$ es decreciente y tiene dos restricciones:

- El tiempo inicia en cero
- El tiempo no puede ser mayor a quince años, ya que en los quince años su valor es cero, que corresponde al tiempo de vida del producto.

Equilibrio de Mercado

Es el punto en el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada a un determinado precio. Se determina igualando ambas funciones.

Fórmulas:

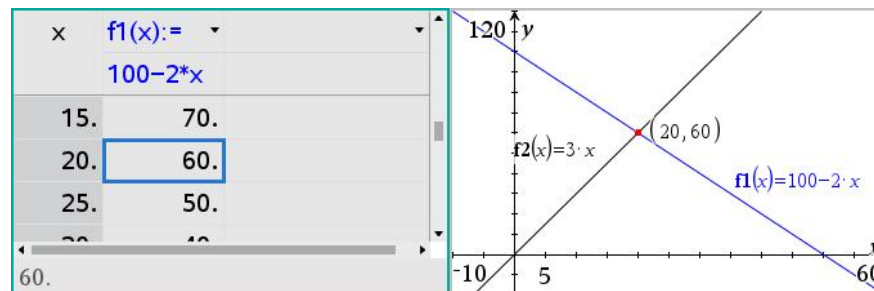
Demanda: $D(p) = m \cdot p + b$

Oferta: $S(p) = n \cdot p + c$

Variables:

- $D(p)$: cantidad demandada
- $S(p)$: cantidad ofertada
- p : precio
- m : pendiente de la función de demanda
- n : pendiente de la función de oferta
- b : ordenada al origen de la demanda
- c : ordenada al origen de la oferta

Ejemplo 6 Equilibrio de Mercado: Si la función de demanda es $D(p) = 100 - 2p$ y la oferta es $S(p) = 3p$, encuentra el precio de equilibrio donde $D(p) = S(p)$.



$$(100 - 2p = 3p) + 2p$$

$$(100 = 5p) \cdot \frac{1}{5}$$

$$20 = p$$

Ejercicios 1.2

1. Una empresa tiene un costo fijo de \$300 y un costo variable de \$45 por unidad. Define la función de costo total y calcula el costo para 5, 20 y 50 unidades producidas.
2. El costo de fabricación de un producto sigue la función $C(n) = 60n + 250$. Encuentra el costo total al fabricar 8, 25 y 40 unidades.
3. Si el costo total de producir un artículo está dado por $C(n) = 70n + 400$, determina el costo al producir 12, 30 y 75 unidades.
4. Una fábrica tiene costos fijos de \$150 y costos variables de \$55 por unidad producida. Encuentra $C(n)$ y evalúa para 10, 40 y 80 unidades.
5. Si la función de costos es $C(n) = 90n + 600$, calcula el costo total al fabricar 15, 35 y 60 unidades.
6. Una inversión de \$8,000 genera interés simple con una tasa del 4%. Define la función y calcula el interés generado en 2, 5 y 8 años.
7. Si una cantidad inicial de \$12,500 se invierte a una tasa del 5% anual, encuentra la función del interés simple y evalúa para 1, 3 y 6 años.
8. Un capital de \$6,000 se invierte con una tasa del 3.5% anual. Define la función de interés simple y calcula el rendimiento después de 4, 7 y 10 años.
9. Si se invierten \$15,000 a una tasa del 6% anual, ¿cuánto interés se genera en 3, 5 y 9 años?
10. Una inversión inicial de \$10,500 genera interés al 4.2% anual. Calcula el interés simple acumulado en 1, 5 y 12 años.
11. El costo fijo de una empresa es de \$3,000 y cada unidad producida cuesta \$200. Define la función de costo total y calcula $C(n)$ para 15, 40 y 75 unidades.
12. Si el costo total está dado por $C(n) = 225n + 1800$, determina el costo para 20, 50 y 100 unidades.
13. Una fábrica tiene costos fijos de \$2,500 y cada unidad cuesta \$270. Encuentra el costo total al producir 12, 30 y 85 unidades.
14. Si el costo de producción sigue la ecuación $C(n) = 350n + 2500$, calcula el costo total para $n = 10, 50, 200$.
15. Una compañía tiene costos fijos de \$1,800 y costos variables de \$150 por unidad. Calcula el costo total de fabricar 20, 45 y 100 productos.
16. Una empresa vende un producto a \$600, con un costo de producción de \$400 por unidad. Define la función de utilidad y evalúa para 5, 30 y 80 ventas.
17. Si el precio de venta es de \$750 y el costo de producción es de \$500, encuentra la función de utilidad y calcula para 10, 40 y 100 unidades vendidas.

18. Una compañía vende un producto en \$900 y su producción cuesta \$650. Define la utilidad como función de la cantidad vendida y evalúa para 15, 50 y 120 productos.
19. Si la utilidad por unidad está definida como $U(x) = 700x - 400x$, encuentra la utilidad para $x = 5, 25, 80$.
20. Si el margen de utilidad es $U(x) = 850x - 620x$, calcula el beneficio al vender 8, 35 y 95 unidades.
21. Un equipo tecnológico se deprecia en \$800 anualmente. Su valor inicial es de \$18,000 y sigue la función $D(t) = 18000 - 800t$. Encuentra el valor residual después de 5, 12 y 15 años.
22. Una maquinaria de oficina inicia con un valor de \$22,000 y pierde \$900 cada año. Usa $D(t) = 22000 - 900t$ para encontrar el valor después de 6, 10 y 14 años.
23. Un vehículo se deprecia en \$1,200 anualmente desde un valor inicial de \$30,000. Encuentra su valor al cabo de 7, 10 y 12 años usando $D(t) = 30000 - 1200t$.
24. Si el valor de una computadora sigue $D(t) = 25000 - 1500t$, determina su precio después de 4, 8 y 13 años.
25. Un equipo industrial empieza con un costo de \$40,000 y pierde \$2,000 anuales. Calcula el valor restante después de 5, 10 y 15 años usando $D(t) = 40000 - 2000t$.
26. Si la demanda es $D(p) = 120 - 4p$ y la oferta $S(p) = 2p$, encuentra el precio de equilibrio.
27. Dada la función de demanda $D(p) = 150 - 3p$ y la oferta $S(p) = 5p$, calcula el equilibrio de mercado.
28. Si la demanda sigue $D(p) = 200 - 6p$ y la oferta es $S(p) = 4p$, encuentra el precio de equilibrio.
29. En un modelo donde $D(p) = 90 - 2p$ y $S(p) = 3p$, determina el precio al que la oferta y la demanda son iguales.
30. Si la demanda está dada por $D(p) = 140 - 5p$ y la oferta por $S(p) = 3p$, calcula el precio de equilibrio.

1.3 Funciones Multivariadas Básicas.

Las funciones multivariadas son relaciones matemáticas que dependen de dos o más variables independientes. En el contexto de la administración, estas funciones son utilizadas para modelar y analizar situaciones complejas en las que varios factores interactúan simultáneamente, como costos, ingresos o niveles de producción. La notación general de una función multivariada es $f(x, y, z, \dots)$, donde x, y, z , etc., representan las variables independientes.

Función multivariada: Una función que depende de más de una variable independiente, por ejemplo, $f(x, y)$.

- ✓ **Dominio:** El conjunto de valores permitidos para todas las variables independientes.
- ✓ **Rango:** Los valores resultantes posibles de la función al aplicar las variables dentro del dominio.

Ejemplo 1: La función de costos totales de una empresa es $C(x, y) = 200x + 150y + 5000$, donde x es la cantidad de producto A fabricado y y es la cantidad de producto B. Determina el costo total si se producen 10 unidades de A y 15 de B.

Procedimiento:

Sustituimos $x = 10$, $y = 15$:

$$C(10, 15) = 200(10) + 150(15) + 5000 = 2000 + 2250 + 5000 = 9250$$

El costo total es \$9,250.

Ejemplo 2: Una fábrica mide su producción como $P(x, y) = 5x^2 + 3y^2 - x \cdot y$, donde x es el número de horas trabajadas por el equipo A y y por el equipo B. Encuentra la producción si $x = 4$, $y = 3$.

Procedimiento:

Sustituimos $x = 4$, $y = 3$:

$$P(4, 3) = 5(4)^2 + 3(3)^2 - (4)(3) = 5(16) + 3(9) - 12 = 80 + 27 - 12 = 95$$

La producción es 95 unidades.

Ejemplo 3: Una empresa calcula su ganancia como $G(p, q) = 100p + 200q - 50p \cdot q$, donde p es el precio de un producto A vendido y q el de un producto B. Encuentra la ganancia si $p = 3$ y $q = 2$.

Procedimiento:

Sustituimos $p = 3$ y $q = 2$:

$$G(3, 2) = 100(3) + 200(2) - 50(3)(2) = 300 + 400 - 300 = 400$$

La ganancia es \$400.

Ejemplo 4: Un negocio calcula su demanda como $D(x, y) = 500 - 10x - 5y$, donde x es el precio del producto A y y el precio del producto B. Determina la demanda si $x=20$ y $y=30$.

Procedimiento:

Sustituimos $x = 20$, $y = 30$:

$$D(20, 30) = 500 - 10(20) - 5(30) = 500 - 200 - 150 = 150$$

La demanda es 150 unidades.

Ejemplo 5: Cálculo de interés total con dos inversiones

Un fondo de inversión permite colocar dinero en dos cuentas diferentes: Cuenta A con una tasa de interés anual del 4%. Cuenta B con una tasa de interés anual del 5%. La función de interés total en función de los capitales invertidos en A y B se expresa como:

$$I(x, y) = (0.04x \cdot t) + (0.05y \cdot t)$$

Donde: x es el capital invertido en la cuenta A. y es el capital invertido en la cuenta B. t es el tiempo en años.

Procedimiento de cálculo

Datos proporcionados: Capital en cuenta A: $x = 5000$. Capital en cuenta B: $y = 8000$.

Tiempo $t = 2$ años

Sustituyendo en la ecuación y simplificando:

$$I(5000, 8000) = 0.04 \times 5000 \times 2 + 0.05 \times 8000 \times 2 = 400 + 800 = 1200$$

Resultado

El interés total generado en 2 años es \$1200.

Ejercicios 1.3

1. Una empresa tiene un costo fijo de \$300 y un costo variable de \$45 por unidad del producto A. También fabrica el producto B, cuyo costo variable es \$60 por unidad, con costos fijos compartidos. Define la función de costo total y calcula el costo para 5 unidades de A y 10 de B.
2. El costo de fabricación de dos productos sigue la función $C(x, y) = 60x + 80y + 2500$, donde x es el número de unidades de A y y el de B. Encuentra el costo total al fabricar 8 unidades de A y 12 de B.
3. Si el costo total de producción de una empresa está representado por $C(x, y) = 70x + 90y + 4000$, determina el costo al producir 10 unidades de A y 20 de B.
4. Una fábrica tiene costos fijos de \$1500 y costos variables de \$55 por unidad de A y \$75 por unidad de B. Encuentra $C(x, y)$ y evalúa para 6 unidades de A y 9 de B.
5. Si la función de costos es $C(x, y) = 90x + 120y + 5000$, calcula el costo total al fabricar 7 unidades de A y 14 de B.
6. Una empresa fabrica dos productos, A y B, cuyos costos totales siguen $C(x, y) = 85x + 110y + 3000$. Evalúa la función para $x = 15$ y $y = 20$.
7. Se establece la función $C(x, y) = 110x + 140y + 4200$. Determina el costo si $x = 5$ y $y = 7$.
8. La ecuación $C(x, y) = 120x + 150y + 4800$ modela costos de producción. Calcula el costo total cuando $x = 10$ y $y = 12$.
9. Una fábrica mide su producción como $P(x, y) = 5x^2 - 2xy$, donde x es el número de horas trabajadas por el equipo A y (y) por el equipo B. Encuentra la producción si $x = 6$ y $y = 4$.
10. La producción de una planta sigue la ecuación $P(x, y) = 7x^2 - xy$. Determina la producción si $x = 5$ y $y = 7$.
11. Si la producción de un taller está dada por $P(x, y) = 6x^2 - 3xy$, encuentra el valor de $P(x, y)$ cuando $x = 4$ y $y = 2$.
12. Se establece la función $P(x, y) = 8x^2 - 2xy$ para calcular la producción de una fábrica. Evalúa la producción si $x = 7$ y $y = 6$.
13. La producción de un equipo sigue el modelo $P(x, y) = 10x^2 - 4xy$. ¿Cuál es la producción si $x = 9$ y $y = 5$?
14. Si una planta opera con la función $P(x, y) = 4x^2 - xy$, calcula la producción para $x = 3$ y $y = 8$.
15. Un sistema de manufactura usa $P(x, y) = 9x^2 - 3xy$ como ecuación de producción. Encuentra el resultado para $x = 6$ y $y = 7$.

16. La producción de una línea de ensamblaje sigue $P(x, y) = 11x^2 - 5xy$. Evalúa el valor de $P(x, y)$ cuando $x = 8$ y $y = 4$.
17. Un banco ofrece una tasa de interés del 4.5% anual para inversión A y del 6% anual para inversión B. Define la función de interés total en función de los capitales invertidos en A y B, y calcula el interés generado en 2 años si se invierten \$9000 en A y \$18000 en B.
18. Si una cantidad inicial de \$10,000 se invierte en dos cuentas distintas, una con una tasa del 3% y otra del 6%, encuentra la función de interés y evalúa para 5 años con \$7000 en la primera cuenta y \$3000 en la segunda.
19. Un capital de \$12,000 se divide en dos inversiones: A con una tasa del 4.5% anual y B con una tasa del 5.5%. Define la función de interés simple y calcula el rendimiento después de 4 años si \$7000 se invierten en A y \$5000 en B.
20. Si una inversión está distribuida en dos fondos, con tasas del 2% y 3%, ¿cuánto interés se genera en 7 años si \$6000 se invierten en el primer fondo y \$4000 en el segundo?
21. Un negocio coloca capital en dos cuentas de ahorro, una con 4% de interés y otra con 6%. Determina el interés generado en 8 años si se depositan \$9000 en la primera y \$6000 en la segunda.
22. Si una inversión se divide en dos partes, con tasas de 3.5% y 5%, usa la ecuación $I(x, y) = 0.035x + 0.05y \times t$ para calcular el interés generado en 6 años con \$5000 en cada cuenta.
23. Se establece la función $I(x, y) = 0.04x + 0.06y \times t$. Evalúa el interés generado en 10 años si se invierten \$8000 en A y \$7000 en B.
24. Se modela el interés simple con $I(x, y) = 0.05x + 0.07y \times t$. Calcula la ganancia para 4 años con inversiones de \$12,000 en A y \$10,000 en B.
25. La demanda de un producto sigue la ecuación $D(x, y) = 600 - 8x - 4y$. Determina la demanda si $x = 15$ y $y = 25$.
26. Si la demanda está modelada por $D(x, y) = 550 - 9x - 6y$, calcula el resultado cuando $x = 18$ y $y = 30$.
27. Se usa $D(x, y) = 700 - 12x - 5y$. Encuentra la demanda si $x = 20$ y $y = 40$.
28. Si la ecuación de demanda es $D(x, y) = 450 - 11x - 3y$, calcula $D(x, y)$ para $x = 22$ y $y = 35$.
29. La empresa usa $D(x, y) = 500 - 15x - 7y$. Determina la demanda si $x = 25$ y $y = 28$.
30. Se modela la demanda con $D(x, y) = 650 - 10x - 6y$. Evalúa el resultado cuando $x = 15$ y $y = 25$.
31. La ecuación es $D(x, y) = 480 - 14x - 5y$. Calcula $D(x, y)$ para $x = 27$ y $y = 33$.

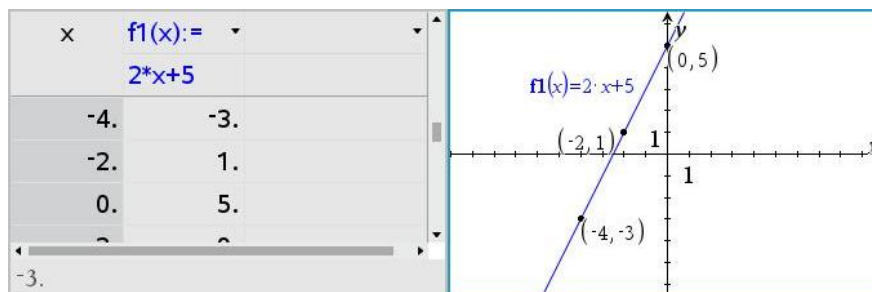
1.4 Representaciones Gráficas de Funciones Matemáticas.

Las representaciones gráficas de funciones matemáticas son herramientas visuales que permiten interpretar relaciones y comportamientos de las funciones. En el contexto administrativo, estas gráficas ayudan a visualizar tendencias, identificar puntos de equilibrio,

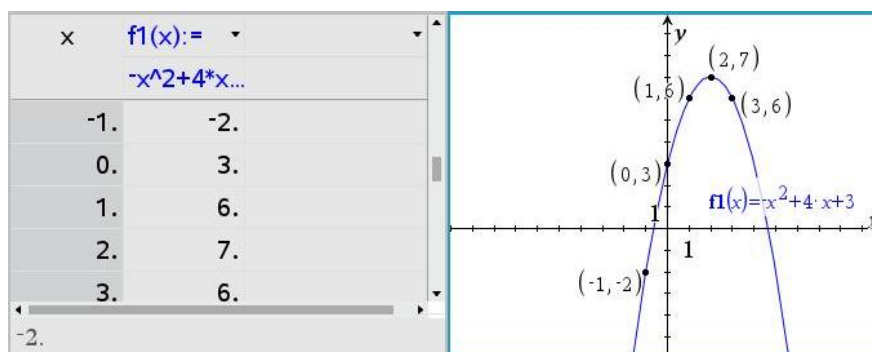
analizar costos, y optimizar recursos. Cada tipo de función tiene una forma gráfica característica, como funciones lineales, funciones polinomiales y de otro tipo.

Ejemplo 1 *Función Lineal*: $f(x) = m \cdot x + b$. Representa gráficamente la función $f_1(x) = 2x + 5$.

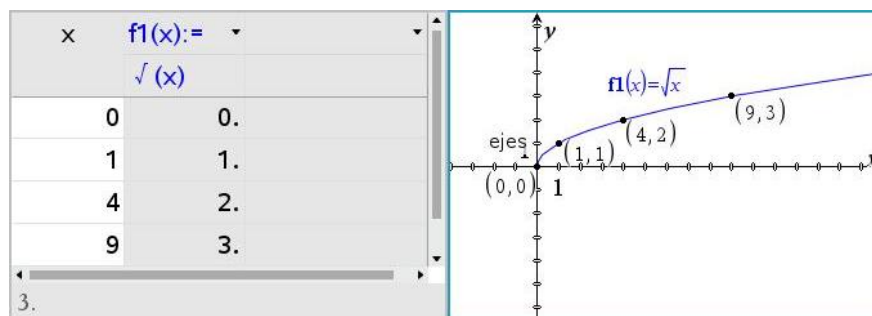
Procedimiento:



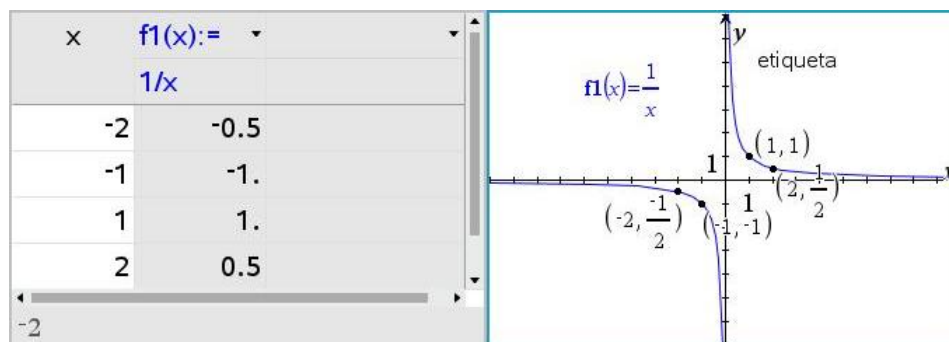
Ejemplo 2 *Función Cuadrática* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$: Graficar $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.



Ejemplo 3 *Función Raíz Cuadrada* $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$: Grafica $h(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.



Ejemplo 4 *Función Racional* $f(x) = a/(x-b) + c$: Representa $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$.



Definición de Función a Trozos

Una función a trozos es una función que está definida por diferentes expresiones matemáticas en distintos intervalos de su dominio. Es decir, la regla que describe la función cambia según el valor de la variable independiente.

Formato Analítico, Se expresa como:

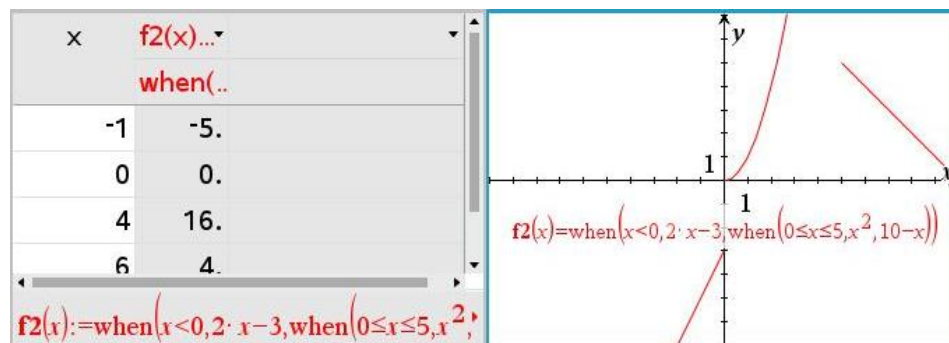
$$f(x) = \begin{cases} \text{Expresión 1, si } x \text{ pertenece al primer intervalo} \\ \text{Expresión 2, si } x \text{ pertenece al segundo intervalo} \\ \text{Expresión 3, si } x \text{ pertenece al tercer intervalo} \end{cases}$$

Nota: La función definida a trozos o por partes contiene más de una expresión.

Ejemplo 5:

La siguiente función está definida por diferentes ecuaciones en distintos rangos de x:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 10 - x, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$



Ejercicios 1.4

1. Representa gráficamente la función $f(x) = 3x - 4$.
2. Representa gráficamente la función $f(x) = -2x + 7$.
3. Representa gráficamente la función $f(x) = 4x - 6$.

4. Representa gráficamente la función $f(x) = -x + 3$.
5. Representa gráficamente la función $f(x) = 5x - 2$.
6. Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
7. Representa gráficamente la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.
8. Representa gráficamente la función $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.
9. Representa gráficamente la función $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.
10. Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
11. Representa gráficamente la función $h(x) = 2\sqrt{x}$ para $x \geq 0$.
12. Representa gráficamente la función $h(x) = -\sqrt{x+2}$ para $x \geq -2$.
13. Representa gráficamente la función $h(x) = 2\sqrt{x+1} + 3$ para $x \geq -1$.
14. Representa gráficamente la función $h(x) = -2\sqrt{x-1} + 4$ para $x \geq 1$.
15. Representa gráficamente la función $h(x) = 4\sqrt{x-1} - 8$ para $x \geq 1$.
16. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{x+2}$ para $-5 \leq x \leq 5$.
17. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ para $-4 \leq x \leq 6$.
18. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$ para $-3 \leq x \leq 8$.
19. Representa gráficamente la $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$ para $-6 \leq x \leq 7$.
20. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $-10 \leq x \leq 10$.
21. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 7-x, & \text{si } x > 4. \end{cases}$$
22. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x < -2, \\ -2x+1, & \text{si } -2 \leq x \leq 3, \\ 5x-4, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$
23. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{si } x < 1, \\ x, & \text{si } 1 \leq x \leq 6, \\ x-3, & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

24. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & \text{si } x < 2, \\ -x + 4, & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ 5x^2 - 2x + 1, & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

25. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x < 0, \\ 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 8, \\ x^2 - x, & \text{si } x > 8. \end{cases}$$

26. Graficar $f(x) = 3x + 2$.

27. Representar $g(x) = -x^2 + 2x + 1$.

28. Trazar la gráfica de $h(x) = \sqrt{x-1}$ para $x \geq 1$.

29. Graficar $k(x) = \frac{1}{x+2}$.

30. Graficar $n(x) = x - 3$.

31. Trazar la gráfica de $p(x) = x^2 - 4$.

32. Representar $r(x) = -2x + 7$.

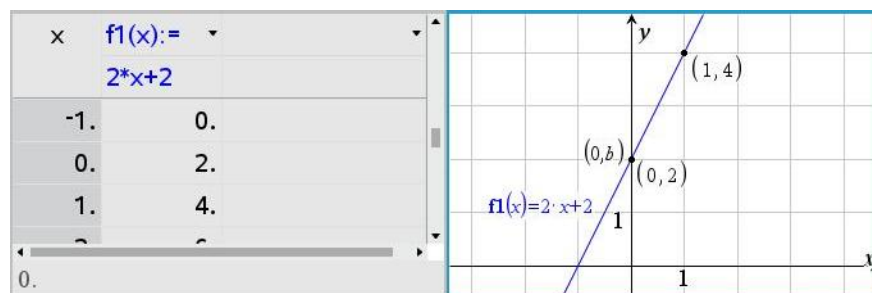
33. Graficar $s(x) = \sqrt{x+3}$ para $x \geq -3$.

1.5 Determinación de la ecuación de una Línea Recta.

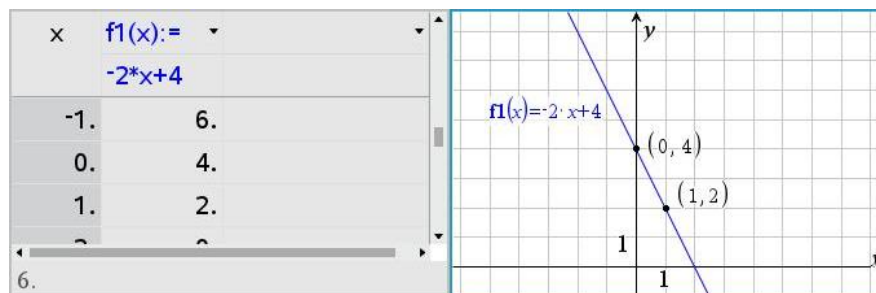
1.5.1 Ecuación de la recta dado su pendiente e intersección.

La fórmula pendiente-intersección se expresa en la forma $y = m \cdot x + b$, donde m representa la pendiente (la tasa de cambio de y con respecto a x) y b la intersección en el eje y (el valor de y cuando $x = 0$). Esta forma es fundamental para representar y analizar funciones lineales, ya que permite visualizar de forma directa cómo varía la variable dependiente en función de la variable independiente. En el ámbito administrativo, esta herramienta es muy útil para modelar relaciones como el costo total frente a la cantidad producida, la depreciación lineal de equipos, el margen de utilidad en función de las ventas, entre otros.

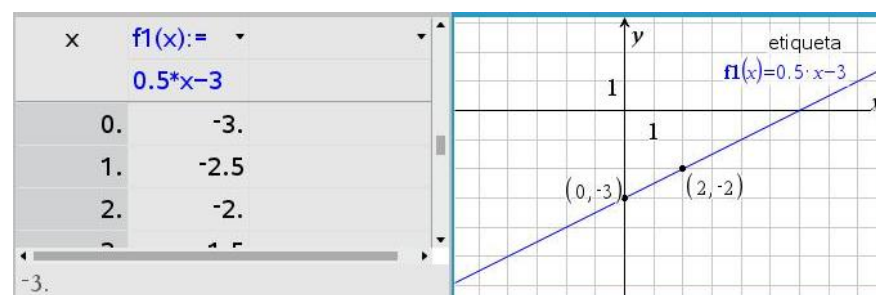
Ejemplo 1: Dada la función $y = 2x + 2$. Se identifica $m = 2$ y $b = 2$. Con los puntos: $(0, 2)$ y $(1, 4)$ se traza una línea recta que aumenta de forma constante.



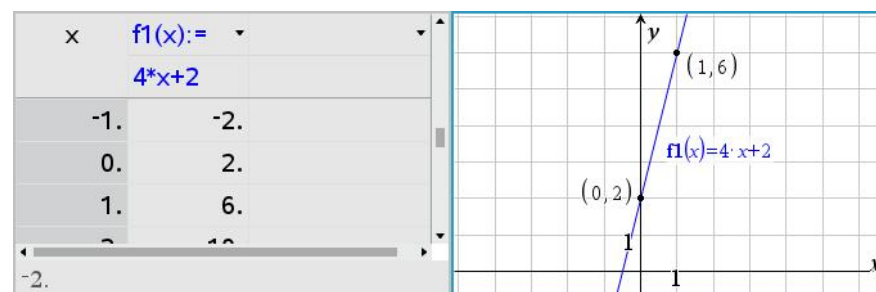
Ejemplo 2: Dada la función $y = -2x + 4$. Se identifica $m = -2$ y $b = 4$. Con los puntos: $(0, 4)$ y $(1, 2)$ se traza una línea recta que disminuye de forma constante.



Ejemplo 3: Dada la función $y = 0.5x - 3$. Se identifica $m = 0.5$ y $b = -3$. Con los puntos: $(0, -3)$ y $(2, -2)$ se traza una línea recta que aumenta de forma constante.



Ejemplo 4: Dada la función $y = 4x + 2$. Se identifica $m = 4$ y $b = 2$. Con los puntos: $(0, 2)$ y $(1, 6)$ se traza una línea recta que aumenta de forma constante.



Ejercicios 1.5.1

1. Determine la pendiente e intersección en y de la función $y = 5x + 7$.
2. Grafique la función $y = -x + 8$ y calcule los valores para $x = 0, 2$ y -3 .
3. Encuentre la pendiente de la función $y = 2.5x - 4$.
4. Halle la intersección en y de la función $y = -3x + 12$.
5. Para $y = 0.75x + 1$, calcule y para $x = 0, 4$ y -2 .
6. Escriba la ecuación de la línea que pasa por el punto $(0, 3)$ con pendiente 4.
7. Verifique la pendiente de la función $y = -2x - 5$ y determine y para $x = 1$ y 3 .
8. Grafique la función $y = x + 2$ y enumere tres puntos que pertenezcan a la línea.

9. Determine la ecuación de una función lineal que tenga intersección en $y = 6$ y pendiente -1.5 .
10. Calcule y para la función $y = 3x - 2$ cuando $x = -4, 0$ y 5 .
11. Encuentre la pendiente e intersección en y de la función $y = -1/2x + 9$.
12. Grafique la función $y = 4x + 8$ y describa la variación de y conforme varía x .
13. Determine la pendiente e intersección en y de la función $y = -4x + 10$.
14. Grafique la función $y = 2x - 3$ y calcule los valores para $x = -2, 0$ y 3 .
15. Encuentre la pendiente de la función $y = -3/2x + 7$.
16. Halle la intersección en y de la función $y = 5x - 2$.
17. Para $y = -x + 4$, calcule y para $x = -1, 2$ y 5 .
18. Escriba la ecuación de la línea que pasa por el punto $(0, 5)$ con pendiente -2 .
19. Verifique la pendiente de la función $y = 3x + 6$ y determine y para $x = -2$ y 4 .
20. Grafique la función $y = -2x + 7$ y enumere tres puntos que pertenezcan a la línea.

1.5.2 Ecuación de la recta dado un punto y pendiente:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \quad \therefore \quad y = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

Donde:

(x_1, y_1) es el punto

m es la pendiente

Ejemplo 1: Pendiente positiva

Dado el punto $(2,3)$ y la pendiente $m = 4$, encuentra la ecuación de la recta.

Solución: Sustituyendo $(x_1, y_1) = (2,3)$ y $m = 4$:

Sustituimos:

$$y = 4(x - 2) + 3$$

Simplificamos:

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$

Ejemplo 2: Pendiente negativa

Dado el punto $(-1,5)$ y la pendiente $m = -2$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = -2(x - -1) + 5$$

Simplificamos:

$$y = -2x - 2 + 5$$

$$y = -2x + 3$$

Ejemplo 3: Pendiente fraccionaria

Dado el punto $(4,-2)$ y la pendiente $m = 3/5$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = \frac{3}{5}(x-4) - 2$$

Simplificamos:

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5} - 2$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{22}{5}$$

Ejemplo 4: Pendiente negativa con número decimal

Dado el punto (5,7) y la pendiente $m = -0.4$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = -0.4(x-5) + 7$$

Simplificamos:

$$y = -0.4x + 2 + 7$$

$$y = -0.4x + 9$$

Ejercicios 1.5.2

1. Dado el punto (3,4) y la pendiente $m = 5$, encuentra la ecuación de la recta.
2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2) con pendiente $m = 3$
3. Dado el punto (-2,5) y $m = 6$, encuentra la ecuación de la recta.
4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (4,3) con pendiente $m = 2.5$
5. Dado el punto (-1,6) y $m = 4$, encuentra la ecuación de la recta.
6. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (7,5) con pendiente $m = 3.5$
7. Dado el punto (-3,7) y la pendiente $m = -3$, encuentra la ecuación de la recta.
8. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (5,2) con pendiente $m = -4$.
9. Dado el punto (2,8) y $m = -1.5$, encuentra la ecuación de la recta.
10. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (0,5) con pendiente $m = -2.3$
11. Dado el punto (-6,9) y $m = -5$, encuentra la ecuación de la recta.
12. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (4,1) con pendiente $m = -3.8$
13. Dado el punto (1,3) y la pendiente $m = 5/7$, encuentra la ecuación de la recta.
14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (2,-4) con pendiente $m = 2/3$
15. Dado el punto (6,2) y $m = 4/9$, encuentra la ecuación de la recta.
16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (0,-2) con pendiente $m = 7/8$
17. Dado el punto (-5,10) y $m = 1/4$, encuentra la ecuación de la recta.
18. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (3,-1) con pendiente $m = 3/4$
19. Dado el punto (2,6) y la pendiente $m = 0.5$, encuentra la ecuación de la recta.
20. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-3,4) con pendiente $m = 1.2$
21. Dado el punto (5,-2) y $m = 0.8$, encuentra la ecuación de la recta.
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (0,3) con pendiente $m = 1.6$

23. Dado el punto $(-4,7)$ y $m = 0.3$, encuentra la ecuación de la recta.

24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $(3,1)$ con pendiente $m = 2.4$

1.5.3 Ecuación de la recta dado dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \therefore \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Donde:

(x_1, y_1) es el punto P_1

(x_2, y_2) es el punto P_2

Ejemplo 1: Dos puntos con pendiente positiva

Dado los puntos $(1,2)$ y $(4,8)$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = \frac{8-2}{4-1} \cdot (x-1) + 2$$

Simplificamos:

$$y = \frac{6}{3} \cdot (x-1) + 2$$

$$y = \frac{6}{3}x - \frac{6}{3} + 2$$

$$y = 2x$$

Ejemplo 2: Dos puntos con pendiente negativa

Dado los puntos $(-2,6)$ y $(3,-4)$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = \frac{-4-6}{3-(-2)} \cdot (x-(-2)) + 6$$

Simplificamos:

$$y = \frac{-10}{5} \cdot (x+2) + 6$$

$$y = -2x - 4 + 6$$

$$y = -2x + 2$$

Ejemplo 3: Dos puntos con pendiente fraccionaria

Dado los puntos $(5,3)$ y $(10,7)$, encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = \frac{7-3}{10-5} \cdot (x-5) + 3$$

Simplificamos:

$$y = \frac{4}{5} \cdot (x-5) + 3$$

$$y = \frac{4}{5}x - 4 + 3$$

$$y = \frac{4}{5}x - 1$$

Ejemplo 4: Dos puntos con pendiente decimal

Dado los puntos (4,9) y (7,15.5), encuentra la ecuación de la recta.

Sustituimos:

$$y = \frac{15.5-9}{7-4} \cdot (x-4) + 9$$

Simplificamos:

$$y = \frac{6.5}{3} \cdot (x-4) + 9$$

$$y = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{1}} \cdot (x-4) + 9$$

$$y = \frac{13}{6} \cdot (x-4) + 9$$

$$y = \frac{13}{6}x - \frac{26 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{27}{3}$$

$$y = \frac{13}{6}x + \frac{1}{3}$$

Ejercicios 1.5.3

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (5,11).
2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-3,-1) y (2,9).
3. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (4,5) y (8,13).
4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (1,6) y (7,18).
5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-2,-4) y (5,10).
6. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (3,7) y (9,19).
7. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5,10) y (-3,-6).
8. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (2,4) y (6,-2).

9. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (1,7) y (-2,-1).
10. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (9,12) y (3,-3).
11. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-5,8) y (4,-2).
12. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (10,15) y (-4,-7).
13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,3) y (8,6).
14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-3,5) y (4,7).
15. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (1,2) y (7,5).
16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-5,9) y (3,13).
17. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (6,4) y (12,8).
18. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-2,7) y (5,11).
19. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,6) y (9,11.5).
20. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (2,5) y (7,14.3).
21. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (5,8) y (11,19.2).
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (1,3) y (6,12.8).
23. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (-3,-2) y (4,9.7).
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (7,10) y (12,18.5).

1.5.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda.

Demanda de un producto

Es la cantidad que los consumidores están dispuestos a adquirir de un bien o servicio a un precio determinado, en un tiempo y mercado específicos.

Fórmula general:

$$D(p) = m \cdot p + b$$

Variables:

- $D(p)$: cantidad demandada
- p : precio del producto
- m : pendiente de la demanda (negativa)
- b : cantidad demandada cuando p es igual a cero.

Ejemplo 1: Determinación de la demanda de un producto

Un producto tiene una demanda lineal. Se sabe que cuando el precio es \$20, la cantidad demandada es 100 unidades, y que la pendiente de la demanda es -5.

Paso 1: Identificar el modelo de demanda

La función de demanda sigue el formato:

$$D(p) = m \cdot p + b$$

Donde:

$m = -5$ es la pendiente de la demanda.

$p = 20$ representa el precio del producto.

b es la ordenada al origen (cantidad demandada cuando $p = 0$).

Paso 2: Determinar la ordenada b

Usamos el dato $D(20) = 100$:

$$100 = -5(20) + b$$

$$100 = -100 + b$$

$$b = 200$$

Paso 3: Ecuación de la demanda del producto es:

$$D(p) = -5p + 200$$

Oferta en función del precio

Es la relación entre la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer de un bien o servicio y el precio al que se puede vender en el mercado.

Fórmula general:

$$S(p) = n \cdot p + c$$

Variables:

- $S(p)$: cantidad ofertada
- p : precio del producto
- n : pendiente de la oferta (positiva)
- c : cantidad ofertada cuando p es igual a cero

Ejemplo 2: Oferta en función del precio

La función de oferta de un artículo sigue una relación lineal. Se sabe que cuando el precio es \$15, la cantidad ofertada es 50 unidades, y que su pendiente es 4.

Paso 1: Identificar el modelo de oferta

La función de oferta sigue el formato:

$$S(p) = m \cdot p + b$$

Donde:

$m = 4$ es la pendiente de la oferta.

$p = 15$ es el precio del producto.

Paso 2: Determinar la ordenada b

Usamos el dato $S(15) = 50$:

$$50 = 4(15) + b$$

$$50 = 60 + b$$

$$b = -10$$

Paso 3: Ecuación de la oferta en función del precio es:

$$S(p) = 4p - 10$$

Equilibrio de mercado entre oferta y demanda

Es el punto en el cual la cantidad demandada por los consumidores coincide con la cantidad ofrecida por los productores, a un precio determinado.

Método de obtención:

Igualar las funciones de oferta y demanda:

$$m \cdot p + b = n \cdot p + c$$

Variables:

- p : precio de equilibrio
- m y n : pendientes de demanda y oferta respectivamente
- b y c : ordenadas al origen de demanda y oferta respectivamente.

Ejemplo 3: Equilibrio de mercado entre oferta y demanda

Se sabe que cuando el precio es \$12, la demanda es 140 unidades y la oferta es 80 unidades.

Además, la pendiente de la demanda es -6 y la de la oferta es 3.

Paso 1: Identificar las ecuaciones

Formato de demanda y oferta:

$$D(p) = -6p + b$$

$$S(p) = 3p + b$$

Paso 2: Determinar las ordenadas

Para demanda, usando $D(12) = 140$:

$$140 = -6(12) + b$$

$$140 = -72 + b$$

$$b = 212$$

Ecuación de demanda: $D(p) = -6p + 212$

Para oferta, usando $S(12) = 80$:

$$80 = 3(12) + b$$

$$80 = 36 + b$$

$$b = 44$$

Ecuación de oferta: $S(p) = 3p + 44$

Paso 3: Encontrar el precio de equilibrio

Igualamos demanda y oferta:

$$-6p + 212 = 3p + 44$$

Despejamos p :

$$168 = 9p$$

$$p = 18.67$$

El precio de equilibrio es \$18.67

Relación entre demanda y precio

Es el vínculo inverso entre el precio de un bien o servicio y la cantidad que los consumidores están dispuestos a comprar. A mayores precios, la demanda disminuye; a menores precios, la demanda aumenta.

Fórmula general:

$$D(p) = m \cdot p + b$$

Variables:

- m : pendiente negativa

- p: precio
- b: ordenada al origen

Ejemplo 4: Relación entre demanda y precio

Cuando el precio es \$10, se venden 200 unidades, y cuando el precio aumenta a \$25, se venden 120 unidades.

Paso 1: Calcular la pendiente

Usamos los puntos (10, 200) y (25, 120):

$$m = (120 - 200) / (25 - 10)$$

$$m = -80 / 15$$

$$m = -16 / 3$$

Paso 2: Calcular la ordenada b

Usamos $D(10) = 200$:

$$200 = -16 / 3 (10) + b$$

$$200 = -160 / 3 + b$$

$$b = 760 / 3$$

Paso 3: Ecuación de la relación entre demanda y precio:

$$D(p) = -16/3p + 760/3$$

Expansión de producción y oferta

Es el crecimiento en la cantidad de bienes o servicios que los productores ofrecen como respuesta a un incremento del precio, manteniéndose una relación directa.

Fórmula general:

$$S(p) = m \cdot p + b$$

Variables:

- m: pendiente positiva
- p: precio
- b: cantidad ofertada cuando p es igual a cero

Ejemplo 5: Expansión de producción y oferta

Cuando el precio es \$30, la oferta es 400 unidades, y cuando el precio sube a \$50, la oferta es 700 unidades.

Paso 1: Calcular la pendiente

Usamos los puntos (30, 400) y (50, 700):

$$m = (700 - 400) / (50 - 30)$$

$$m = 300 / 20$$

$$m = 15$$

Paso 2: Calcular la ordenada b

Usamos $S(30) = 400$:

$$400 = 15(30) + b$$

$$400 = 450 + b$$

$$b = -50$$

Paso 3: Ecuación de la expansión de producción y oferta:

$$S(p) = 15p - 50$$

Variación de la demanda en función del precio

Es el análisis cuantitativo del cambio en la demanda que se produce ante distintas variaciones en el precio del producto.

Fórmula general:

$$D(p) = mp + b$$

Variables:

- m: pendiente negativa
- p: precio
- b: cantidad demandada cuando p es igual a cero.

Ejemplo 6: Variación de la demanda en función del precio

Cuando el precio es \$5, la cantidad vendida es 500 unidades, y cuando el precio es \$18, se venden 200 unidades.

Paso 1: Calcular la pendiente

Usamos los puntos (5, 500) y (18, 200):

$$m = (200 - 500) / (18 - 5)$$

$$m = -300/13 \approx -23.08$$

Paso 2: Calcular la ordenada b

Usamos $D(5) = 500$:

$$500 = -300/13 \cdot (5) + b$$

$$500 = -1500/13 + b$$

$$b = 8000/13 \approx 615.4$$

Paso 3: Ecuación de la variación de la demanda en función del precio:

$$D(p) = -300/13p + 8000/13$$

$$D(p) \approx -23.08p + 615.4$$

Ajuste de precio por cambios en oferta y demanda

Se analiza un mercado en el que inicialmente la oferta y la demanda están desequilibradas. Se conoce un punto para cada función y la pendiente correspondiente. Se busca determinar el *nuevo precio de equilibrio*.

Modelo base:

$$D(p) = m \cdot p + b$$

$$S(p) = n \cdot p + c$$

Luego se resuelve:

$$mp + b = np + c$$

Variables:

- m, n: pendientes de demanda y oferta
- b, c: ordenadas de demanda y oferta
- p: nuevo precio de equilibrio.

Ejemplo 7: Ajuste de precio por cambios en oferta y demanda

Datos proporcionados

Cuando el precio es 50:

Oferta: 1200 unidades

Demanda: 1000 unidades

Pendiente de la demanda: -18

Pendiente de la oferta: 20

Paso 1: Determinar la ecuación de demanda

Se usa el modelo:

$$D(p) = mp + b$$

$$D(p) = -18p + b$$

Sustituimos el punto $D(50) = 1000$:

$$1000 = -18(50) + b$$

$$1000 = -900 + b$$

$$b = 1900$$

Función de demanda:

$$D(p) = -18p + 1900$$

Paso 2: Determinar la ecuación de oferta

Se usa el modelo:

$$S(p) = np + c$$

$$S(p) = 20p + c$$

Sustituimos el punto $S(50) = 1200$:

$$1200 = 20(50) + c$$

$$1200 = 1000 + c$$

$$c = 200$$

Función de oferta:

$$S(p) = 20p + 200$$

Paso 3: Igualar ambas funciones para obtener el precio de equilibrio

$$D(p) = S(p)$$

$$-18p + 1900 = 20p + 200$$

Despejamos p:

$$1700 = 38p$$

$$p = 1700 / 38 = 850 / 19$$

Conclusión: El precio de equilibrio aproximado es $850/19$, en el cual la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada.

Ejercicios 1.5.4

Determinación de la demanda de un producto

1. La demanda de un producto sigue una relación lineal. Se sabe que cuando el precio es \$30, la cantidad demandada es 150 unidades, y que la pendiente es -6. Encuentra la ecuación de demanda.

2. Se observa que la demanda de un artículo cambia linealmente con el precio. Cuando el precio es \$12, se venden 220 unidades, y que la pendiente de la demanda es -4. Determina la ecuación de demanda.
3. Un producto tiene una demanda de 90 unidades cuando el precio es \$18, y su pendiente de demanda es -3. Encuentra la ecuación de demanda.
4. La demanda de un bien se ajusta a un modelo lineal. Se sabe que cuando el precio es \$25, la cantidad demandada es 80 unidades, y la pendiente es -2. Encuentra la ecuación de demanda.

Oferta en función del precio

5. La oferta de un producto sigue una ecuación lineal. Se sabe que cuando el precio es \$20, la cantidad ofertada es 120 unidades, y la pendiente de la oferta es 5. Encuentra la ecuación de oferta.
6. Un producto se ofrece en el mercado con una relación lineal. Se sabe que cuando el precio es \$35, la cantidad ofertada es 250 unidades, y la pendiente es 8. Determina la ecuación de oferta.
7. Una empresa ofrece su producto siguiendo un modelo lineal. Cuando el precio es \$50, la oferta es de 600 unidades, y su pendiente es 12. Encuentra la ecuación de oferta.
8. La oferta de un bien se ajusta a una función lineal. Se sabe que cuando el precio es \$15, la cantidad ofertada es 80 unidades, y la pendiente es 4. Encuentra la ecuación de oferta.

Equilibrio de mercado entre oferta y demanda

9. Se establece un mercado con oferta y demanda lineales. Cuando el precio es \$14, la demanda es 160 unidades y la oferta es 90 unidades. La pendiente de la demanda es -5 y la de la oferta es 4. Encuentra las ecuaciones y el precio de equilibrio.
10. Un mercado tiene oferta y demanda lineales. Se sabe que cuando el precio es \$30, la demanda es 200 unidades y la oferta es 120 unidades. La pendiente de la demanda es -10 y la de la oferta es 6. Determina las ecuaciones y el punto de equilibrio.
11. Se estudia el equilibrio en un mercado de bienes de consumo. Cuando el precio es \$50, la demanda es 450 unidades y la oferta es 350 unidades. Si la pendiente de la demanda es -15 y la de la oferta es 12, encuentra el precio de equilibrio.
12. En un mercado competitivo, la oferta y demanda siguen funciones lineales. Cuando el precio es \$60, la oferta es 900 unidades y la demanda es 700 unidades. Si la pendiente de la demanda es -20 y la de la oferta es 15, determina el precio de equilibrio.

Relación entre demanda y precio

13. Se establece que la demanda de un producto sigue una relación lineal. Cuando el precio es \$28, se venden 190 unidades, y cuando el precio aumenta a \$40, se venden 150 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.

14. En un estudio de mercado, se observa que cuando el precio de un bien es \$22, la cantidad vendida es 260 unidades, y cuando el precio sube a \$35, se venden 190 unidades. Encuentra la ecuación de la demanda.
15. Un producto tiene una demanda que disminuye conforme el precio sube. Se sabe que cuando el precio es \$12, se venden 350 unidades, y cuando el precio es \$25, se venden 220 unidades. Determina la ecuación de demanda.
16. Se establece una relación lineal en la demanda de un artículo. Cuando el precio es \$30, se venden 500 unidades, y cuando el precio es \$50, se venden 350 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.

Expansión de producción y oferta

17. En un mercado, se estudia la relación entre oferta y precio. Se sabe que cuando el precio es \$25, la oferta es 350 unidades, y cuando el precio aumenta a \$45, la oferta es 550 unidades. Encuentra la ecuación de oferta.
18. Una empresa reporta datos de producción con oferta lineal. Cuando el precio es \$30, la oferta es 400 unidades, y cuando el precio es \$55, la oferta es 850 unidades. Encuentra la ecuación de oferta.
19. Se analiza el crecimiento de oferta de un producto en el mercado. Se sabe que cuando el precio es \$20, la cantidad ofertada es 280 unidades, y cuando el precio es \$40, la oferta aumenta a 600 unidades. Encuentra la ecuación de oferta.
20. Un negocio expande su producción siguiendo una relación lineal. Se sabe que cuando el precio es \$35, la oferta es 500 unidades, y cuando el precio sube a \$60, la oferta es 950 unidades. Encuentra la ecuación de oferta.

Variación de la demanda en función del precio

21. La demanda de un artículo sigue una relación lineal con el precio. Se sabe que cuando el precio es \$8, se venden 600 unidades, y cuando el precio aumenta a \$20, se venden 350 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.
22. Se analiza la variación de la demanda en un mercado. Cuando el precio es \$15, la cantidad vendida es 450 unidades, y cuando el precio sube a \$28, se venden 280 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.
23. Un negocio registra la demanda de su producto. Se sabe que cuando el precio es \$10, se venden 550 unidades, y cuando el precio es \$22, se venden 380 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.
24. Se establece un modelo lineal de demanda en un mercado de consumo. Cuando el precio es \$18, se venden 450 unidades, y cuando el precio es \$30, se venden 300 unidades. Encuentra la ecuación de demanda.

Ajuste de precio por cambios en oferta y demanda

25. Un mercado competitivo presenta oferta y demanda lineales. Cuando el precio es \$35, la oferta es 600 unidades y la demanda es 450 unidades. Si la pendiente de la oferta es 10 y la de la demanda es -8, encuentra las ecuaciones de oferta y demanda.

26. Se establece un modelo de mercado donde la oferta y demanda siguen funciones lineales. Cuando el precio es \$40, la oferta es 900 unidades y la demanda es 700 unidades. La pendiente de la oferta es 15 y la de la demanda es -12. Encuentra las ecuaciones.
27. En un estudio de precios de mercado, se establece que cuando el precio es \$50, la oferta es 1,200 unidades y la demanda es 1,000 unidades. Si la pendiente de la oferta es 20 y la de la demanda es -18, encuentra las ecuaciones.
28. Un mercado en expansión presenta oferta y demanda con ecuaciones lineales. Se sabe que cuando el precio es \$45, la oferta es 1,500 unidades y la demanda es 1,200 unidades. La pendiente de la oferta es 25 y la de la demanda es -22. Encuentra las ecuaciones.

Tema 2: Funciones Lineales, Aplicaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Introducción

Este tema constituye la base para comprender cómo las funciones lineales se emplean para modelar relaciones de cambio constante y, a la vez, para analizar escenarios económicos y administrativos. Las funciones lineales, y se expresan generalmente en la forma $y = mx + b$, permiten representar de forma sencilla aspectos como el costo total, el margen de utilidad, los ingresos, la depreciación y otros indicadores financieros esenciales. Además, la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales es una herramienta para integrar datos de costos, inversión, asignación de recursos y equilibrio de mercado, facilitando la toma de decisiones estratégicas en entornos empresariales. Así, este tema no solo refuerza aspectos teóricos fundamentales, sino que también propone aplicaciones prácticas que vinculan conceptos matemáticos con situaciones reales en la administración.

2.1 Funciones Lineales

Función lineal: Es aquella función que se expresa mediante la fórmula $y = m \cdot x + b$, donde m es la pendiente (razón de cambio constante) y b es la ordenada al origen (valor de y cuando $x = 0$).

Pendiente m : Indica el cambio en el valor de y por cada unidad de cambio en x ; puede ser positiva (*crecimiento*) o negativa (*decrecimiento*).

Ordenada al origen b : Es el valor por el cual la recta corta el eje y ; representa el valor inicial de la función.

Dominio y rango: En general, para funciones lineales el dominio es el conjunto de todos los números reales y dependiendo del contexto, el rango también lo es.

Ejemplo 1: Evaluar $y = 2x + 3$ para $x = 2$

Sustituir x por 2: $y = 2(2) + 3$

Calcular: $y = 4 + 3 = 7$

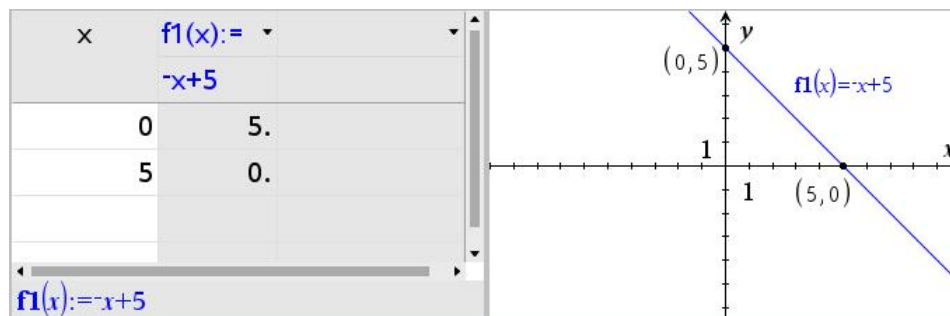
Conclusión: Para $x = 2$, $y = 7$

Ejemplo 2: Graficar la función $y = -x + 5$

Ordenada al origen: Con $x = 0$ se tiene $y = 5$, es decir, el punto $(0, 5)$

Intersección con el eje x : $0 = -x + 5$, de donde $x = 5$, es decir, el punto $(5, 0)$

Graficar la recta que pasa por $(0, 5)$ y $(5, 0)$



Ejemplo 3: Encontrar la ecuación de una recta con pendiente 3 que pasa por el punto $(1, 4)$

Utilizar la fórmula punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituir los valores: $y - 4 = 3(x - 1)$

Despejar: $y = 3x - 3 + 4 \rightarrow y = 3x + 1$

Conclusión: La ecuación es $y = 3x + 1$

Ejemplo 4: Evaluar $y = 4x - 2$ para $x = -1$ y analizar la función

Sustituir: $y = 4(-1) - 2 = -4 - 2 = -6$

Análisis: La pendiente 4 indica crecimiento; para $x = -1$, la función toma el valor -6

Ejemplo 5: Se tiene que una recta pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(4, 11)$

Calcular la pendiente: $m = (11 - 3) / (4 - 1) = 8/3$

Usando la forma punto-pendiente: $y - 3 = (8/3) \cdot (x - 1)$

Despejar: $y = (8/3) \cdot x - (8/3) + 3 = (8/3) \cdot x + 1/3$

Conclusión: La ecuación es $y = (8/3) \cdot x + 1/3$

Ejemplo 6: Determinar la pendiente y la ordenada al origen de $f(x) = -2x + 7$

Pendiente $m = -2$

Ordenada al origen $b = 7$ (ya que $f(0) = 7$)

Conclusión: $m = -2$ y $b = 7$

Ejemplo 7: Resolver la ecuación $5x + 2 = 17$.

$$5x = 17 - 2 = 15.$$

$$x = 15/5 = 3.$$

Conclusión: $x = 3$.

Ejercicios 2.1

1. Calcular y en la función $y = 3x + 2$ para $x = 4$.
2. Encontrar la intersección con el eje x de la función $y = -2x + 8$.
3. Determinar la ecuación de la recta que pase por $(2, 5)$ con pendiente -2 .
4. Evaluar la función $y = -3x + 7$ para $x = 0$ y para $x = -2$.
5. Encontrar el valor de x cuando $y = 0$ en la función $y = 5x - 10$.
6. Utilizar la fórmula punto-pendiente para hallar la recta que pase por $(3, 4)$ con pendiente 2 .
7. Calcular y en la función $y = -x + 3$ para $x = 6$.
8. Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 1$ que pase por $(1, -1)$.
9. Modelar una disminución constante de 10 unidades cada hora, partiendo de 100, y plantear la función.
10. Resolver la ecuación $4x + 2 = 18$.
11. Determinar el valor de y en la función $y = -2.5x + 9$ para $x = 4$.
12. Evalúa $f(x) = 4x - 1$ para $x = -3$.
13. Evalúa $f(x) = 2x + 3$ para $x = 0$ y para $x = 5$.
14. Determina la pendiente y ordenada de la función $f(x) = -5x + 8$.
15. Halla la función que pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(5, 10)$.
16. Escribe la ecuación de la recta con pendiente 3 que corta en $(0, -2)$.
17. Realiza la transformación de la forma general de una recta a forma pendiente-intersección.
18. Determina x para el cual $f(x) = 0$ en $f(x) = 6x + 12$.
19. Grafica la función $f(x) = x - 4$ identificando intersecciones con los ejes.
20. Encuentra la ecuación de una recta paralela a $f(x) = -4x + 3$ que pase por $(2, 5)$.
21. Describe qué sucede con la gráfica de $f(x) = mx + b$ al aumentar el valor de m .

2.2 Modelos de Equilibrio

2.2.1: Modelo de Punto de Equilibrio Aplicado a la Producción

Punto de Equilibrio: Es el nivel de producción o ventas en el cual los ingresos totales igualan a los costos totales (la suma de costos fijos y costos variables), resultando en una utilidad neta de cero.

Costos Fijos (CF): Son los costos que se mantienen constantes sin importar el volumen de producción (por ejemplo, alquileres, salarios fijos, amortización de bonos).

Costos Variables (CV): Son los costos que varían de acuerdo con la cantidad producida (por ejemplo, materias primas, mano de obra directa por unidad).

Margen de Contribución: Es la diferencia entre el precio de venta y el costo variable por unidad, y representa el aporte que cada unidad genera para cubrir los costos fijos.

BEP son las siglas en inglés de Break-Even Point, que en español se traduce como Punto de Equilibrio PE.

Ejemplo 1: Cálculo del BEP para un Producto

Una empresa tiene $CF = \$30,000$, $CV = \$10$ por unidad y vende la unidad a $\$25$.

$$\begin{aligned}\text{Fórmula: Punto de Equilibrio (unidades)} &= CF / (\text{Precio de venta} - CV) \\ &= 30000 / (25 - 10) \\ &= 30000 / 15 \\ &= 2000 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Conclusión: La empresa debe vender 2000 unidades para cubrir todos sus costos.

Ejemplo 2: Punto de Equilibrio en una Empresa de Servicios

Una consultoría tiene $CF = \$5,000$ mensuales, un costo variable de $\$50$ por sesión y cobra $\$80$ por sesión.

$$\begin{aligned}n &= 5000 / (80 - 50) \\ &= 5000 / 30 \\ &= 167 \text{ sesiones (redondeado al entero más cercano).}\end{aligned}$$

Conclusión: Se requieren aproximadamente 167 sesiones mensuales para alcanzar el equilibrio.

Ejemplo 3: PE en la Producción de Bebidas

Una compañía de refrescos posee $CF = \$20,000$ mensuales, $CV = \$0.80$ por litro y vende cada litro a $\$1.20$.

$$\begin{aligned}n &= 20000 / (1.20 - 0.80) \\ &= 20000 / 0.40 \\ &= 50000 \text{ litros.}\end{aligned}$$

Conclusión: La venta de 50,000 litros es necesaria para alcanzar el punto de equilibrio.

Ejemplo 4: Punto de Equilibrio en la Fábrica de Muebles

Una empresa que fabrica muebles incurre en $CF = \$50,000$, $CV = \$200$ por unidad y vende cada unidad a $\$350$.

$$\begin{aligned}n &= 50000 / (350 - 200) \\ &= 50000 / 150 = 333.33\ldots \text{ con 333 aún hay pérdida, así que pasamos a 334} \\ &= 334 \text{ unidades aproximadamente.}\end{aligned}$$

Conclusión: Se deben vender aproximadamente 334 unidades para que los ingresos igualen a los costos.

Ejercicios 2.2.1

1. Calcula el punto de equilibrio para una empresa con $CF = \$20,000$, $CV = \$5$ y precio de venta = $\$15$.
2. Determina la cantidad de unidades necesarias para el equilibrio con $CF = \$15,000$, $CV = \$20$ y precio = $\$50$.
3. Halla el punto de equilibrio para una fábrica con $CF = \$45,000$, $CV = \$30$ y precio = $\$75$.
4. Calcula cuántas unidades se deben vender para cubrir $CF = \$25,000$, $CV = \$15$ y precio = $\$35$.
5. Calcula el equilibrio para un servicio con $CF = \$3,000$, $CV = \$50$ y tarifa de $\$100$.
6. Halla el punto de equilibrio para una planta con $CF = \$40,000$, $CV = \$8$ y precio = $\$16$.
7. Determina la cantidad necesaria para cubrir $CF = \$12,000$, $CV = \$6$ y precio = $\$10$.
8. Calcula el equilibrio para un producto con $CF = \$18,000$, $CV = \$3$ y precio = $\$8$.
9. Halla el punto de equilibrio para un negocio manufacturero con $CF = \$30,000$, $CV = \$25$ y precio = $\$40$.
10. Calcula el punto de equilibrio para un negocio de servicios con $CF = \$6,000$,
11. $CV = \$30$ y precio = $\$50$.
12. Una empresa de accesorios para mascotas tiene costos fijos mensuales de $\$12,000$. El costo variable por collar es de $\$9$ y su precio de venta es de $\$27$. Calcula el punto de equilibrio en unidades.
13. Una empresa que produce galletas artesanales incurre en costos fijos mensuales por $\$7,500$. El costo variable por paquete es de $\$2.50$ y el precio de venta es de $\$6.25$. ¿Cuántos paquetes debe vender al mes para no tener pérdidas?
14. Una empresa de asesoría empresarial tiene costos fijos de $\$4,800$ mensuales. Cada sesión cuesta $\$45$ en insumos y mano de obra, y se cobra a $\$75$ por cliente. ¿Cuántas sesiones deben venderse al mes para alcanzar el punto de equilibrio?

2.2.2: Modelo gráfico de punto de equilibrio

Modelo gráfico de punto de equilibrio: Representación visual en un plano cartesiano de dos funciones: la línea de ingresos (Ventas totales) y la línea de costos totales (suma de costos fijos y costos variables). El punto de intersección es el nivel de producción en el que los ingresos igualan a los costos, es decir, el punto de equilibrio.

Eje horizontal x : Representa la cantidad de unidades o número de servicios vendidos o producidos.

Eje vertical y : Representa montos en la unidad monetaria de referencia, tanto para los costos como para los ingresos.

Línea de costos totales: Función lineal que resulta de sumar los costos fijos CF y los costos variables CV multiplicados por la cantidad Q , se expresa como $CT = CF + (CV \times Q)$.

Línea de ingresos: Función lineal que se obtiene al multiplicar el precio de venta (P) por la cantidad (Q), se expresa como $I = P \times Q$.

Tomemos los ejemplos de la sección 2.2.1 pero ahora los analizamos en representación gráfica:

Ejemplo 1: Representación gráfica

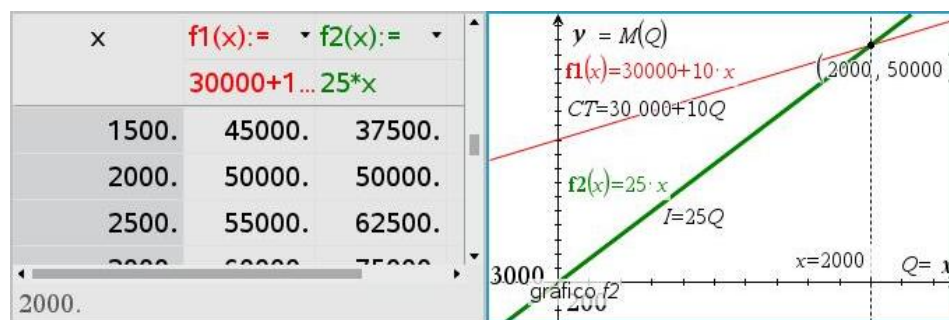
Una empresa tiene $CF = \$30,000$, $CV = \$10$ por unidad y vende cada unidad a $\$25$.

Se calcula el punto de equilibrio:

$$Q = CF / (P - CV) = 30000 / (25 - 10) = 30000 / 15 = 2000 \text{ unidades.}$$

En el gráfico, se traza la línea de costos totales con $CT = 30000 + 10Q$ y la línea de ingresos $I = 25Q$. Ambas se representan en el plano con Q en el eje horizontal y montos en el vertical. La intersección de ambas líneas ocurre en $Q = 2000$, y evaluando en cualquiera de las funciones se obtiene $y = 25 \times 2000 = \$50,000$.

Conclusión: La gráfica muestra claramente qué a partir de 2000 unidades, la empresa comienza a generar ganancias.



Ejemplo 2: Gráfico para una empresa de servicios

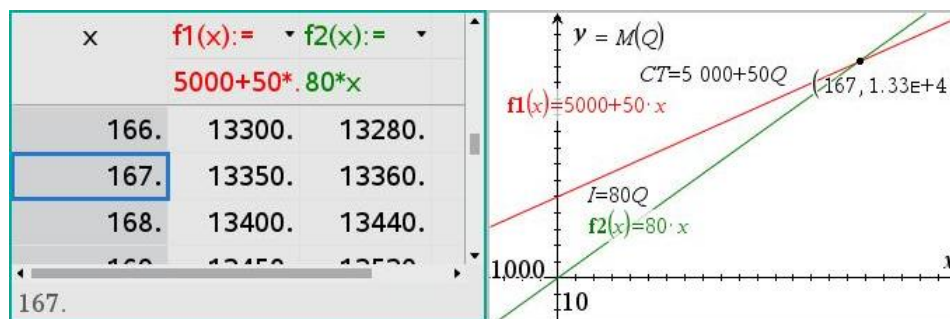
Una consultoría tiene $CF = \$5,000$ mensuales, $CV = \$50$ por sesión y cobra $\$80$ por sesión.

Se calcula el punto de equilibrio:

$$Q = 5000 / (80 - 50) = 5000 / 30 = 166.66 \text{ sesiones (redondeando al entero más cercano).}$$

En la representación gráfica, la línea de costos totales es $CT = 5000 + 50Q$ y la línea de ingresos es $I = 80Q$. El cruce de ambas líneas ocurre cerca de $Q = 167$, visualizándose que se acerca al valor entero, más al balance entre ingresos y costos.

Conclusión: La gráfica es una herramienta útil para prever cuántas sesiones se deben realizar para alcanzar el equilibrio.



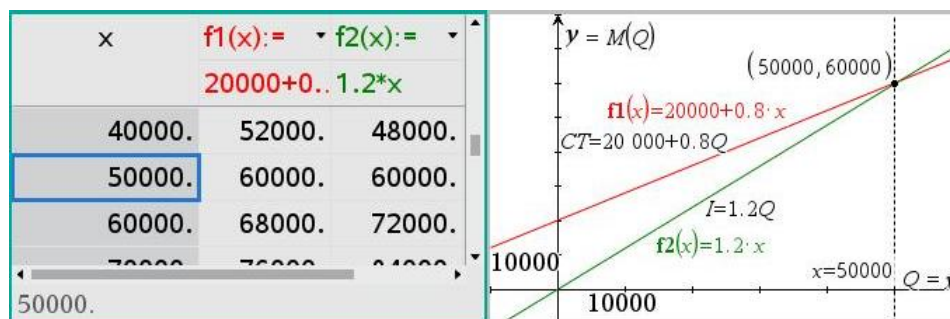
Ejemplo 3: Modelo gráfico en la producción de refrescos

Una compañía de bebidas tiene $CF = \$20,000$ mensuales, $CV = \$0.80$ por litro y vende cada litro a $\$1.20$.

Se determina el punto de equilibrio:

$$Q = 20000 / (1.20 - 0.80) = 20000 / 0.40 = 50000 \text{ litros.}$$

En el gráfico, se traza la función de costos totales $CT = 20000 + 0.80Q$ y la función de ingresos $I = 1.20Q$. El punto de intersección en $Q = 50000$ indica el umbral en que la venta de refrescos cubre los costos de producción.



Conclusión: El modelo gráfico facilita visualizar el impacto de cada variable sobre el equilibrio financiero.

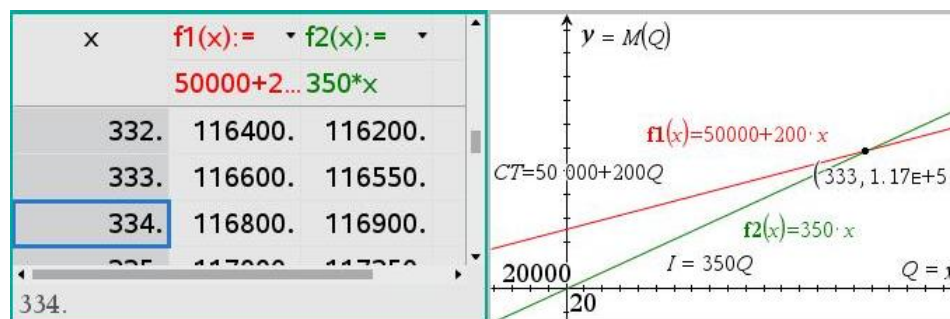
Ejemplo 4: Gráfico en una fábrica de muebles

Para una fábrica de muebles, los datos son $CF = \$50,000$, $CV = \$200$ por unidad y precio de venta = $\$350$.

Se resuelve el punto de equilibrio:

$$Q = 50000 / (350 - 200) = 50000 / 150 = 333.33.. \text{ unidades.}$$

En la gráfica, la línea de costos totales se expresa como $CT = 50000 + 200Q$ y la de ingresos como $I = 350Q$. Para evitar tener pérdida nos colocamos en 334



Conclusión: La representación gráfica ilustra de forma inmediata la relación entre costos e ingresos, ayudando en la toma de decisiones.

Ejercicios 2.2.2

Dados $CF = \$25,000$, $CV = \$8$ y precio = $\$18$, determina el punto de equilibrio y representa gráficamente las funciones.

Con $CF = \$40,000$, $CV = \$12$ y precio = $\$30$, calcula y grafica el punto de equilibrio.

Para una empresa con $CF = \$15,000$, $CV = \$5$ y precio = $\$15$, encuentra el equilibrio y dibuja las líneas de ingresos y costos.

Calcula el PE y realiza la gráfica para $CF = \$60,000$, $CV = \$20$ y precio = $\$50$.

Halla el punto de equilibrio para $CF = \$35,000$, $CV = \$10$ y precio = $\$22$ y representa gráficamente las funciones.

Dado un modelo con $CF = \$10,000$, $CV = \$7$ y precio = $\$17$, determina el equilibrio y su gráfica correspondiente.

Para $CF = \$45,000$, $CV = \$15$ y precio = $\$40$, calcula el punto de equilibrio y representa las funciones en el plano.

Calcula y grafica el PE para $CF = \$28,000$, $CV = \$9$ y precio = $\$19$.

Halla el equilibrio gráfico de un sistema con $CF = \$50,000$, $CV = \$18$ y precio = $\$35$.

Encuentra el punto de equilibrio y representa gráficamente las funciones para $CF = \$33,000$, $CV = \$11$ y precio = $\$25$.

Con $CF = \$22,000$, $CV = \$6$ y precio = $\$16$, determina el equilibrio y dibuja las curvas en el mismo gráfico.

Dado $CF = \$55,000$, $CV = \$13$ y precio = $\$28$, calcula y representa gráficamente el BEP.

2.2.3: Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad

Margen de Contribución (MC): Es la diferencia entre el precio de venta (P) y el costo variable (CV) por unidad. Representa la cantidad que cada unidad vendida aporta para cubrir los costos fijos y, una vez cubiertos, generar utilidad.

Costos Fijos (CF): Son los gastos que la empresa incurre de forma constante sin importar el nivel de producción, como alquiler, depreciación, amortización de bonos, sueldos fijos, entre otros.

Utilidad Deseada (UD): Es la ganancia adicional que la empresa pretende obtener, una vez cubiertos todos los costos fijos.

Punto de Equilibrio con Utilidad: Es el nivel de ventas en unidades necesario para cubrir tanto los costos fijos como obtener la utilidad deseada, calculado con la fórmula:

$$\text{Unidades requeridas} = (\text{CF} + \text{UD}) / \text{MC}.$$

Modelo de Contribución: Se utiliza para analizar la distribución de la contribución generada por cada unidad vendida, mostrando cómo se cubren los costos fijos y se empieza a generar utilidad.

Ejemplo 1: Cálculo básico del punto de equilibrio con utilidad

Datos

Precio de venta (P): \$50 por unidad

Costo variable (CV): \$20 por unidad

Costos fijos (CF): \$40,000

Utilidad deseada (UD): \$10,000

Procedimiento

Calcular MC: $50 - 20 = \$30$

Determinar unidades para cubrir CF: $40,000 / 30 = 1334$ unidades

Para obtener UD: $(40,000 + 10,000) / 30 = 50,000 / 30 = 1667$ unidades.

Conclusión: La venta de aproximadamente 1667 unidades permite cubrir los costos fijos y generar la utilidad deseada.

Ejemplo 2: Incorporando depreciación en costos fijos

Datos

Precio de venta (P): \$80 por unidad

Costo variable (CV): \$40 por unidad

Costos fijos (CF): \$100,000 (incluyendo depreciación de maquinaria)

Utilidad deseada (UD): \$20,000

Procedimiento

Calcular MC: $80 - 40 = \$40$

Punto de equilibrio sin UD: $100,000 / 40 = 2500$ unidades

Con utilidad: $(100,000 + 20,000) / 40 = 120,000 / 40 = 3000$ unidades.

Conclusión: Se deben vender 3000 unidades para cubrir los CF y obtener la utilidad de \$20,000.

Ejemplo 3: Aplicación en una empresa de servicios

Datos

Precio por consulta: \$200

Costo variable por consulta: \$50

Costos fijos mensuales: \$15,000

Utilidad deseada mensual: \$5,000

Procedimiento

Calcular MC: $200 - 50 = \$150$

Punto de equilibrio sin utilidad: $15,000 / 150 = 100$ consultas

Con objetivo de ganancia: $(15,000 + 5,000) / 150 = 20,000 / 150 = 134$ consultas.

Conclusión: Se requieren aproximadamente 134 consultas mensuales para cubrir CF y alcanzar la utilidad deseada.

Ejemplo 4: Modelo aplicado a inventario en una tienda minorista

Datos

Precio de venta: \$30 por unidad

Costo variable: \$18 por unidad

Costos fijos (CF): \$12,000 mensuales (alquiler, sueldos, servicios)

Utilidad deseada (UD): \$3,000

Procedimiento

Calcular MC: $30 - 18 = \$12$

Punto de equilibrio sin utilidad: $12,000 / 12 = 1000$ unidades

Con utilidad: $(12,000 + 3,000) / 12 = 15,000 / 12 = 1250$ unidades.

Conclusión: Se requieren vender aproximadamente 1250 unidades para cubrir los costos fijos y obtener la ganancia deseada.

Ejercicios 2.2.3

1. Con CF = \$50,000, CV = \$25 y P = \$60, calcula las unidades necesarias para lograr una UD de \$5,000.
2. Para CF = \$70,000, CV = \$30 y P = \$75, determina el BEP con una utilidad deseada de \$10,000.
3. Con CF = \$55,000, CV = \$20 y P = \$50, halla las unidades requeridas para alcanzar una UD de \$7,000.
4. Dado CF = \$80,000, CV = \$35 y P = \$90, calcula el punto de equilibrio que incluya una UD de \$8,000.
5. Con CF = \$25,000, CV = \$10 y P = \$30, determina las unidades necesarias para una UD de \$2,500.
6. Para CF = \$100,000, CV = \$50 y P = \$100, encuentra el BEP si se desea obtener \$15,000 de ganancia.
7. Con CF = \$40,000, CV = \$15 y P = \$40, calcula las unidades necesarias para alcanzar una UD de \$4,000.
8. Dado CF = \$65,000, CV = \$22 y P = \$60, halla el número de unidades requeridas con una UD de \$6,000.
9. Para CF = \$30,000, CV = \$18 y P = \$45, determina el BEP con una UD de \$3,000.
10. Con CF = \$90,000, CV = \$40 y P = \$80, calcula las unidades a vender si se quiere una ganancia de \$12,000.
11. Dado CF = \$33,000, CV = \$12 y P = \$30, halla el BEP considerando una UD de \$5,000.
12. Para CF = \$75,000, CV = \$28 y P = \$70, determina las unidades requeridas para obtener \$10,000 de ganancia.

2.2.4: Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir.

Modelo de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir: Es una herramienta de análisis que compara los costos asociados a la producción interna (con sus costos fijos y variables) frente al costo de compra de un bien o insumo de proveedores externos.

Costos de producción: Incluyen los costos fijos (gastos en infraestructura, depreciación, amortización de bonos, salarios fijos, etc.) más los costos variables (materias primas, mano de obra directa, costos operativos por unidad).

Costo de compra: Es el precio unitario que se paga a un proveedor, pudiendo incluir costos adicionales de transporte o logística.

Punto crítico o umbral: Es la cantidad de unidades en la que el costo total de producir internamente iguala al costo total de comprar externamente. A partir de ese punto, se determina la opción más conveniente.

Análisis de sensibilidad: Consiste en evaluar cómo varía el resultado del modelo ante cambios en los parámetros (CF, CV, precio de compra) para tomar decisiones informadas.

Ejemplo 1: Análisis de compra o producción de un componente electrónico

Datos

Producción interna: Costos fijos (CF) = \$100,000;

Costo variable (CV) = \$12 por unidad.

Compra externa: Precio unitario = \$25.

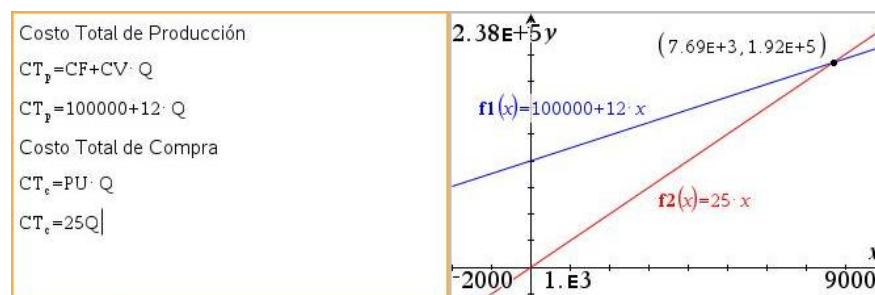
Procedimiento

Costo total de producción (CT_p) = $CF + (CV \times Q)$.

Costo total de compra (CT_c) = $25 \times Q$.

Igualamos: $100,000 + 12Q = 25Q \rightarrow 100,000 = (25 - 12)Q = 13Q$.

$Q = 100,000 / 13 = 7,693$ unidades.



Conclusión: Si la producción anual supera aproximadamente 7,693 unidades, resulta más rentable producir internamente; para cantidades inferiores, es preferible comprar.

Ejemplo 2: Decisión sobre la producción de empaques para productos

Datos

Producción interna: CF = \$50,000; CV = \$0.50 por unidad.

Compra externa: Costo unitario = \$1.20.

Procedimiento

$CT_p = 50,000 + 0.50Q$;

$$CT_c = 1.20Q;$$

$$\text{Igualamos: } 50,000 + 0.50Q = 1.20Q \rightarrow 50,000 = 0.70Q.$$

$$Q = 50,000 / 0.70 = 71,429 \text{ unidades.}$$

Conclusión: Para volúmenes superiores a 71,429 unidades, es ventajoso producir internamente; por debajo de ese umbral, conviene comprar.

Ejemplo 3: Incorporación de amortización y depreciación en la decisión de comprar o producir

Datos

Producción interna: CF (incluyendo amortización de bonos y depreciación) = \$150,000; CV = \$30 por unidad.

Compra externa: Costo unitario = \$45.

Procedimiento

$$CT_p = 150,000 + 30Q;$$

$$CT_c = 45Q;$$

$$\text{Igualamos: } 150,000 + 30Q = 45Q \rightarrow 150,000 = 15Q.$$

$$Q = 150,000 / 15 = 10,000 \text{ unidades.}$$

Conclusión: A partir de 10,000 unidades, producir internamente es más rentable que comprar.

Ejemplo 4: Evaluación en el análisis de inventario para una tienda minorista

Datos

Producción interna (ensamblaje, modificación o etiquetado): CF = \$80,000; CV = \$20 por unidad.

Compra externa: Precio unitario = \$30.

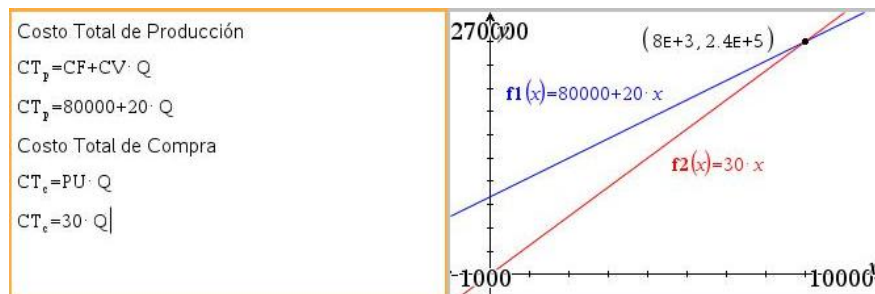
Procedimiento

$$CT_p = 80,000 + 20Q;$$

$$CT_c = 30Q;$$

$$\text{Igualamos: } 80,000 + 20Q = 30Q \rightarrow 80,000 = 10Q.$$

$$Q = 80,000 / 10 = 8,000 \text{ unidades.}$$



Conclusión: Si se estima vender más de 8,000 unidades, conviene producir internamente; de lo contrario, resulta favorable comprar.

Ejercicios 2.2.4

Componente electrónico

1. Una empresa tiene $CF = \$120,000$ y $CV = \$14$; si el costo de compra es $\$27$ por unidad, determina el umbral de producción.
2. Con $CF = \$90,000$, $CV = \$10$ y costo de compra de $\$22$, calcula la cantidad crítica para decidir producir.
3. Dado $CF = \$110,000$ y $CV = \$13$, si el costo de compra es $\$26$, encuentra el punto de equilibrio entre producir y comprar.
4. Una compañía registra $CF = \$95,000$ y $CV = \$15$; si el costo unitario de compra es $\$29$, determina la cantidad a partir de la cual conviene producir internamente.

Producción de empaques

5. Con $CF = \$55,000$ y $CV = \$0.60$, si el costo de compra es $\$1.25$, calcula el umbral de decisión.
6. Dado $CF = \$48,000$, $CV = \$0.55$ y precio de compra de $\$1.15$, determina la cantidad crítica.
7. Una empresa tiene $CF = \$52,000$ y $CV = \$0.65$; si comprar cuesta $\$1.30$ por unidad, halla el punto de equilibrio.
8. Con $CF = \$60,000$ y $CV = \$0.50$, y un costo de compra de $\$1.10$, determina la cantidad mínima para producir internamente.

Incorporación de amortización y depreciación

9. Si $CF = \$160,000$ (incluyendo depreciación) y $CV = \$32$, y el costo de compra es $\$50$, determina el umbral de unidades.
10. Con $CF = \$145,000$, $CV = \$28$ y costo de compra = $\$43$, calcula la cantidad crítica para decidir producir.
11. Dado $CF = \$155,000$ y $CV = \$35$, con un costo de compra de $\$55$, halla el punto de equilibrio.
12. Una fábrica tiene $CF = \$170,000$ y $CV = \$30$; si el costo de compra es $\$48$ por unidad, determina a partir de qué cantidad es preferible producir.

Análisis en tienda minorista

13. Con $CF = \$85,000$, $CV = \$22$ y costo de compra de $\$33$, calcula el umbral de decisión.
14. Dado $CF = \$75,000$, $CV = \$18$ y costo de compra = $\$29$, determina la cantidad crítica.
15. Una tienda tiene $CF = \$82,000$ y $CV = \$20$; si comprar cuesta $\$31$ por unidad, halla el punto de equilibrio.
16. Con $CF = \$90,000$, $CV = \$19$ y precio de compra de $\$30$, calcula la cantidad a partir de la cual conviene producir.

2.3.1: Métodos de eliminación suma y resta en Sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3

Sistema de ecuaciones lineales: Conjunto de dos o más ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente para las mismas variables.

Método de eliminación (suma y resta): Técnica mediante la cual se suman o restan ecuaciones del sistema para eliminar una o más variables, facilitando la resolución.

Sistemas 2×2: Sistemas compuestos por dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sistemas 3×3: Sistemas compuestos por tres ecuaciones con tres incógnitas.

Aplicación en Administración: Estos métodos se utilizan para resolver problemas tales como la asignación de costos, determinación de márgenes, planificación de recursos, fijación de precios, balance de inventarios y análisis de equilibrio de mercado.

Solución única: Situación en la que el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución.

Ejemplo 1. Resuelve el sistema:

$$4x + y = 50$$

$$2x - y = 10$$

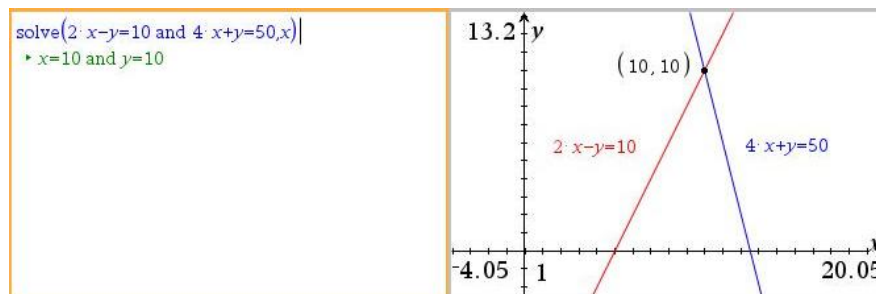
Procedimiento:

Sumar ambas ecuaciones:

$$(4x + y) + (2x - y) = 50 + 10 \rightarrow 6x = 60 \rightarrow x = 10$$

Sustituir en la primera:

$$4(10) + y = 50 \rightarrow 40 + y = 50 \rightarrow y = 10$$



Conclusión: $x = 10$, $y = 10$. Solución única.

Ejemplo 2. Resuelve el sistema:

$$x - 3y + z = 12$$

$$2x + y - z = 4$$

$$x + y + z = 10$$

Procedimiento:

Sumar ecuaciones 1 y 2:

$$(x - 3y + z) + (2x + y - z) = 12 + 4 \rightarrow 3x - 2y = 16 \rightarrow (i)$$

Sumar ecuaciones 2 y 3:

$$(2x + y - z) + (x + y + z) = 4 + 10 \rightarrow 3x + 2y = 14 \rightarrow (ii)$$

Sumar (i) y (ii):

$$(3x - 2y) + (3x + 2y) = 16 + 14 \rightarrow 6x = 30 \rightarrow x = 5$$

Sustituir x en (i):

$$3(5) - 2y = 16 \rightarrow 15 - 2y = 16 \rightarrow y = -0.5$$

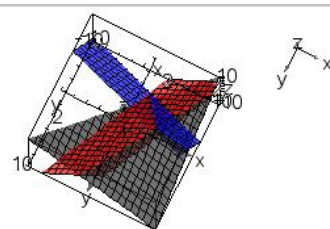
Sustituir x , y en ec. 3:

$$5 - 0.5 + z = 10 \rightarrow z = 5.5$$

```

solve(x-3·y+z=12,z) → z=-x+3·y+12
solve(2·x+y-z=4,z) → z=2·x+y-4
solve(x+y+z=10,z) → z=-x-y+10
solve(x-3·y+z=12 and 2·x+y-z=4
and x+y+z=10,x)
→ x=5 and y=-1/2 and z=11/2

```



Conclusión: $x = 5$, $y = -0.5$, $z = 5.5$. Solución única.

Ejemplo 3. Resuelve el sistema:

$$5x - 3y = 19$$

$$2x + y = 13$$

Procedimiento:

Multiplicamos la segunda por 3:

$$2x + y = 13 \rightarrow 6x + 3y = 39$$

Sumar con la primera:

$$(5x - 3y) + (6x + 3y) = 19 + 39 \rightarrow 11x = 58 \rightarrow x = 58 / 11 \approx 5.27$$

Sustituimos en la segunda:

$$2(5.27) + y = 13 \rightarrow 10.54 + y = 13 \rightarrow y \approx 2.46$$

Conclusión: $x \approx 5.27$, $y \approx 2.46$

Ejemplo 4. Resuelve el sistema:

$$x + 2y - z = 7$$

$$2x - y + 3z = 14$$

$$x - y + z = 5$$

Procedimiento:

Restamos la tercera a la primera:

$$(x + 2y - z) - (x - y + z) \rightarrow 3y - 2z = 2 \quad (1)$$

Multiplicamos la tercera por 2 y restamos a la segunda:

$$2(x - y + z) = 2x - 2y + 2z$$

$$(2x - y + 3z) - (2x - 2y + 2z) = y + z = 14 - 10 = 4 \rightarrow y + z = 4 \quad (2)$$

Sustituimos $z = 4 - y$ en (1):

$$3y - 2(4 - y) = 2 \rightarrow 3y - 8 + 2y = 2 \rightarrow 5y = 10 \rightarrow y = 2$$

$$z = 4 - 2 = 2$$

Sustituimos en la tercera: $x - 2 + 2 = 5 \rightarrow x = 5$

Conclusión: $x = 5$, $y = 2$, $z = 2$

Con solución múltiple (infinitas soluciones)

Ejemplo 5. Resuelve el sistema:

$$3x - 6y = 12$$

$$x - 2y = 4$$

Procedimiento:

Multiplicar la segunda por 3:

$$3(x - 2y) = 3(4) \rightarrow 3x - 6y = 12$$

Ambas ecuaciones resultan idénticas.

Conclusión: Las ecuaciones son equivalentes. El sistema tiene infinitas soluciones (dependientes). Toda solución que cumpla $x - 2y = 4$ es válida.

Ejemplo 6. Resuelve el sistema:

$$x + y + z = 12$$

$$2x + 2y + 2z = 24$$

$$3x + 3y + 3z = 36$$

Procedimiento:

Todas las ecuaciones son múltiplos entre sí:

$$\text{ec.2} = 2 \times \text{ec.1}, \quad \text{ec.3} = 3 \times \text{ec.1}$$

Conclusión: El sistema tiene infinitas soluciones. Representa un plano con infinitos puntos en común.

Ejemplo 7. Resuelve el sistema:

$$6a - 4b = 12$$

$$3a - 2b = 6$$

Procedimiento:

Multiplicamos la segunda por 2:

$$6a - 4b = 12$$

$$6a - 4b = 12$$

Ambas ecuaciones son equivalentes.

Conclusión: Sistema dependiente, infinitas soluciones.

Ejemplo 8. Resuelve el sistema:

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 2y + 2z = 18$$

$$3x + 3y + 3z = 27$$

Procedimiento:

Cada ecuación es múltiplo de la primera.

Conclusión: Sistema con infinitas soluciones, dependiente.

Sin solución

Ejemplo 9. Resuelve el sistema:

$$2x + 3y = 7$$

$$4x + 6y = 20$$

Procedimiento:

Multiplicar la primera por 2:

$$2(2x + 3y) = 2(7) \rightarrow 4x + 6y = 14$$

Comparar con la segunda:

$$4x + 6y = 14 \neq 20$$

Conclusión: El sistema es inconsistente. No hay solución (rectas paralelas).

Ejemplo 10. Resuelve el sistema:

$$x - y + z = 1$$

$$2x - 2y + 2z = 2$$

$$x - y + z = 5$$

Procedimiento:

Compara ecuaciones 1 y 3:

$$x - y + z = 1 \text{ y } x - y + z = 5$$

Conclusión: Contradicción directa. No existe solución que cumpla ambas. Sistema sin solución.

Ejemplo 11. Resuelve el sistema:

$$4x + 2y = 10$$

$$8x + 4y = 26$$

Procedimiento:

Multiplicamos la primera por 2:

$$8x + 4y = 20$$

Comparamos con la segunda:

$$8x + 4y = 20 \neq 26$$

Conclusión: Sistema inconsistente, sin solución.

Ejemplo 12. Resuelve el sistema:

$$x - y + z = 6$$

$$2x - 2y + 2z = 12$$

$$x - y + z = 10$$

Procedimiento:

Compara ecuación 1 con 3: contradicción directa

$$(x - y + z = 6) \text{ vs. } (x - y + z = 10)$$

Conclusión: No existe solución. El sistema es inconsistente.

Ejercicios 2.3.1

Resuelve:

$$3x + 2y = 180$$

$$3x - 2y = 60$$

Resuelve:

$$2x - y = 20,000$$

$$x + y = 100,000$$

Resuelve:

$$x + 1.5y = 210$$

$$x - y = 30$$

Resuelve:

$$3x + 2y = 210$$

$$2x + 5y = 250$$

Resuelve:

$$x + y + z = 240$$

$$x - 2y + z = 30$$

$$x = 2z$$

Resuelve el siguiente sistema:

$$p + q + c = 150$$

$$2p - q + 3c = 300$$

$$p - 2q + c = 30$$

Resuelve:

$$2x + y - z = 50$$

$$x - y + 2z = 30$$

$$3x + 4y + z = 100$$

Resuelve el sistema:

$$x + 2y + 3z = 60$$

$$2x - y + z = 10$$

$$-x + 3y + 2z = 50$$

Una empresa fija precios mediante el sistema:

$$4x + 5y = 360$$

$$6x - 5y = 240$$

Un centro de costos plantea:

$$x + 2y = 200$$

$$2x - y = 50$$

Distribución de horas en tres turnos:

$$x + y + z = 300$$

$$x = 2z$$

$$y = x - 30$$

Determina, mediante eliminación, los valores de x e y en:

$$5x - 3y = 125$$

$$2x + 3y = 85$$

Resuelve:

$$x + 4y = 200$$

$$3x - 2y = 80$$

Resuelve el sistema:

$$2p + q = 150$$

$$4p - q = 50$$

En un análisis de mercado, resuelve:

$$p + 2q + r = 180$$

$$2p - q + r = 120$$

$$p - q + 2r = 150$$

2.3 Método de eliminación

2.3.2: Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 y 3×3 (solución única)

Transformaciones elementales por renglón

Para el caso de las operaciones elementales el i y j se refieren ambos a renglones diferentes.

Las transformaciones elementales se usan para la eliminación Gaussiana.

$$\text{Transformaciones elementales} \begin{cases} \text{Intercambio de renglones } R_i \leftrightarrow R_j \\ \text{Un escalar por un renglón } k \cdot R_i \rightarrow R_i \\ \text{Un escalar por un renglón sumado a otro renglón } k \cdot R_i + R_j \rightarrow R_j \end{cases}$$

$$\text{Intercambio de renglones: } \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Un escalar por un renglón: } \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} -1/5 \cdot R_1 \rightarrow R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Un escalar por un renglón sumado a otro renglón: } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} 3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Intercambio de renglones: } \text{rowSwap}\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, 1, 2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Un escalar por un renglón: } \text{mRow}\left(\frac{1}{5}, \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, 1\right) \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Un escalar por un renglón sumado a otro renglón: } \text{mRowAdd}\left(3, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, 1, 2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada: Representación matricial que agrupa los coeficientes de las variables del sistema y los términos independientes, separándolos por una línea vertical.

Eliminación Gaussiana: Procedimiento que utiliza operaciones elementales (intercambio de filas, multiplicación de una fila por un escalar, suma o resta de filas) para transformar la matriz aumentada en una forma escalonada, de la que se extrae la solución mediante sustitución hacia atrás.

Solución única: Situación en la que el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución.

Ejemplo 1 Sistema 2×2

Problema:

Resolver el sistema

$$(1) \quad x + y = 5$$

$$(2) \quad x - y = 1$$

Procedimiento:

Formar la matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Operaciones: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times R_1 + R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{-2} \times R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

El sistema se reduce a:

$$x + y = 5$$

$$y = 2$$

Sustitución en (1): $x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$

Solución: (3, 2)

Ejemplo 2 Sistema 2×2 aplicado a costos de un producto:

Contexto:

Sea x el costo base de un producto y y el margen de utilidad. Se tienen las ecuaciones:

Resolver el sistema

$$(1) \quad 2x + y = 45$$

$$(2) \quad x - y = 5$$

Procedimiento:

Formar la matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Operaciones: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} R_1 + R_2} R_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{35}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{35}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3} R_2} R_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & \frac{35}{3} \end{bmatrix}$

El sistema se reduce a:

$$2x + y = 45$$

$$y = 35/3$$

Sustitución en (1): $2x + 35/3 = 45 \rightarrow 2x + 35/3 = 45 \rightarrow 2x = 100/3$

$$\rightarrow x = 50/3$$

Solución: (50/3, 35/3)

Ejemplo 3 Sistema 3×3 en asignación de recursos administrativos:

Contexto:

Una empresa distribuye recursos entre tres áreas:

x = costos de producción, y = costos operativos, z = margen de ganancia.

Se conocen:

$$(1) \quad x + y + z = 100$$

$$(2) \quad 2x - y + z = 80$$

$$(3) \quad x + 2y - z = 60$$

Procedimiento:

Formar la matriz aumentada:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & -1 & 60 \end{bmatrix}$$

Operaciones:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & -1 & 60 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -3 & -1 & -120 \\ 0 & 1 & -2 & -40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -3 & -1 & -120 \\ 0 & 1 & -2 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 40 \\ 0 & 1 & -2 & -40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 40 \\ 0 & 1 & -2 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 40 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 40 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -80 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{7}R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 40 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{240}{7} \end{bmatrix}$$

Sistema reducido:

$$(1') \quad x + y + z = 100$$

$$(2') \quad y + (1/3)z = 40$$

$$(3') \quad z = 240/7$$

$$\text{ref} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & -1 & 60 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 40 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{240}{7} \end{bmatrix}$$

Sustituya z en (2'): $y + (1/3)(240/7) = 40 \rightarrow y = 200/7$

Finalmente, sustituya los valores de z y y en (1'): $x + 200/7 + 240/7 = 100 \rightarrow x = 260/7$

Solución: $(260/7, 200/7, 240/7)$

$$\text{ref} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 1 & 80 \\ 1 & 2 & -1 & 60 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{260}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{200}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{240}{7} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4 Sistema 3×3 en fijación de precios y costos (aplicación en administración):

Contexto:

Una empresa establece tres variables:

x = costo base, y = margen de utilidad, z = costo adicional.

Con las relaciones:

(1) $x + y + z = 90$

(2) $2x - y + 3z = 110$

(3) $x - y + 2z = 70$

Procedimiento:

Matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & -1 & 3 & 110 \\ 1 & -1 & 2 & 70 \end{bmatrix}$

Operaciones: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & -1 & 3 & 110 \\ 1 & -1 & 2 & 70 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2, -1R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -70 \\ 0 & -2 & 1 & -20 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -70 \\ 0 & -2 & 1 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2/3 R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -70 \\ 0 & 0 & 1/3 & 80/3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -70 \\ 0 & 0 & 1/3 & 80/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -70 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{bmatrix}$

Sistema reducido:

(1') $x + y + z = 90$

(2') $-3y + z = -70$

(3') $z = 80$

Sustituya z en (2'): $-3y + 80 = -70 \rightarrow -3y = -150 \rightarrow y = 50$

Finalmente, sustituya los valores de z y y en (1'): $x + 50 + 80 = 90 \rightarrow x = -40$

Observación: El valor negativo de x indica la necesidad de revisar los supuestos o interpretar el costo en otro contexto (por ejemplo, ajustes o descuentos).

Solución: $(x, y, z) = (-40, 50, 80)$

Ejemplo 5 Determinación de costos en producción y margen (Sistema 2×2):

Una empresa tecnológica define

x = costo de producción de un dispositivo, y = margen de utilidad.

Con las ecuaciones:

$$(1) \quad 3x + 2y = 240$$

$$(2) \quad x - y = 20$$

Procedimiento:

Formar la matriz aumentada: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 240 \\ 1 & -1 & 20 \end{bmatrix}$

$$\text{Operaciones: } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 240 \\ 1 & -1 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 240 \\ 0 & -5/3 & -60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 240 \\ 0 & -5/3 & -60 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3/5 R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 240 \\ 0 & 1 & 36 \end{bmatrix}$$

El sistema se reduce a:

$$3x + 2y = 240$$

$$y = 36$$

$$\text{Sustitución en (1): } 3x + 2 \cdot 36 = 240 \rightarrow 3x = 168 \rightarrow x = 168/3 \rightarrow x = 56$$

Solución: Costo = \$56, margen = \$36.

Ejercicios 2.3.2

1. Resuelva:

$$x + y = 7$$

$$x - y = 3$$

2. Resuelva:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

3. Resuelva:

$$x + y = 8$$

$$x - y = 4$$

4. Resuelva:

$$x + y = 12$$

$$x - y = 6$$

5. Resuelva:

$$2x + y = 50$$

$$x - y = 10$$

6. Resuelva:

$$3x + y = 65$$

$$x - y = 5$$

7. Resuelva:

$$4x + 2y = 100$$

$$2x - y = 20$$

8. Resuelva:

$$2x + y = 48$$

$$x - y = 8$$

9. Resuelva:

$$x + y + z = 90$$

$$2x + y - z = 80$$

$$x - y + 2z = 70$$

10. Resuelva:

$$x + y + z = 75$$

$$2x + y - z = 65$$

$$x - y + 2z = 55$$

11. Resuelva:

$$x + y + z = 100$$

$$2x + y - z = 90$$

$$x - y + 2z = 80$$

12. Resuelva:

$$x + y + z = 85$$

$$2x + y - z = 75$$

$$x - y + 2z = 65$$

13. Resuelva:

$$x + y + z = 100$$

$$x - y + z = 20$$

$$2x + y - z = 60$$

14. Resuelva:

$$x + y + z = 110$$

$$x - y + z = 30$$

$$2x + y - z = 70$$

15. Resuelva:

$$x + y + z = 95$$

$$x - y + z = 25$$

$$2x + y - z = 65$$

16. Resuelva: $x + y + z = 105$

$$x - y + z = 35$$

$$2x + y - z = 75$$

2.3.3: Aplicaciones a modelos económico-administrativos

Sistema de ecuaciones lineales: Conjunto de dos o más ecuaciones lineales en las cuales se deben determinar valores para las mismas incógnitas que satisfacen cada ecuación simultáneamente.

Aplicaciones económico-administrativas: Uso de estos sistemas para modelar y resolver problemas relevantes en la administración y economía, tales como la determinación de costos, fijación de precios, asignación de recursos, amortización de bonos, cálculo de depreciación, equilibrio de mercado, análisis de inventario, libros de horas de trabajo, entre otros.

Variables del modelo: Pueden representar costos fijos, costos variables, márgenes de utilidad, depreciación, amortización, ingresos o incluso horas laborales. La estructura del sistema permite relacionar estas variables para obtener información estratégica.

Solución única en modelos administrativos: Cuando los datos (por ejemplo, los coeficientes y términos independientes) están bien definidos, la aplicación de métodos de resolución (como la eliminación gaussiana o la eliminación suma/resta) permite obtener una única solución que sirve para tomar decisiones informadas.

Ejemplo 1 Determinación del costo base y margen de utilidad: Una empresa desea establecer su precio de venta. Se determina que el doble del costo base (x) más el margen (y) es igual a 150, y que la diferencia entre el margen y el costo es de 10.

Sistema planteado:

$$(1) \quad 2x + y = 150$$

$$(2) \quad y - x = 10$$

Procedimiento:

Multiplicar por 2 la ecuación (2): $-2x + 2y = 20$

Sumarla a (1): $(-2x + 2y = 20) + (2x + y = 150) \rightarrow 3y = 170 \rightarrow y = 170/3$

Sustituir en (1): $2x + 170/3 = 150 \rightarrow 2x = 280/3 \rightarrow x = 140/3$

Conclusión: El costo base es de aproximadamente \$46.67 y el margen de utilidad es de aproximadamente \$56.67.

Ejemplo 2 Determinación de depreciación y amortización: En la contabilidad de costos, se registra que la suma de la depreciación (x) y la amortización de bonos (y) es de \$100,000, y que el doble de la depreciación menos la amortización es \$20,000.

Sistema planteado:

$$(1) \quad x + y = 100,000$$

$$(2) \quad 2x - y = 20,000$$

Procedimiento:

Suma (1) y (2): $(x + y) + (2x - y) = 100,000 + 20,000 \rightarrow 3x = 120,000 \rightarrow x = 40,000$

Sustituya en (1): $40,000 + y = 100,000 \rightarrow y = 60,000$

Conclusión: La depreciación es de \$40,000 y la amortización es de \$60,000.

Ejemplo 3 Modelo de equilibrio de costos en el mercado: Una empresa modela su situación económica relacionando el costo fijo (x), el costo variable total (y) y el margen de utilidad (z) de forma que:

Sistema planteado:

$$(1) \quad x + y + z = 500,000$$

$$(2) \quad 2x + y - z = 300,000$$

$$(3) \quad x + 2y + z = 600,000$$

Procedimiento:

$$\text{Sume (1) y (2): } (x + y + z) + (2x + y - z) = 500,000 + 300,000$$

$$\rightarrow 3x + 2y = 800,000 \quad (*)$$

$$\text{Reste (1) de (3): } (x + 2y + z) - (x + y + z) = 600,000 - 500,000$$

$$\rightarrow y = 100,000$$

$$\text{Sustituya en (*): } 3x + 2(100,000) = 800,000 \rightarrow 3x = 600,000 \rightarrow x = 200,000$$

$$\text{Finalmente, de (1): } 200,000 + 100,000 + z = 500,000 \rightarrow z = 200,000$$

Conclusión: El costo fijo es de \$200,000, el costo variable total es \$100,000 y el margen de utilidad es de \$200,000.

Ejemplo 4 Distribución de horas de trabajo en departamentos: Un centro administrativo reparte un total de 150 horas entre tres departamentos:

x = horas de producción, y = horas de marketing, z = horas administrativas. Se conocen las siguientes relaciones:

$$(1) \quad x + y + z = 150$$

$$(2) \quad x - y + z = 50$$

$$(3) \quad 2x + y - z = 100$$

Procedimiento:

$$\text{Reste (2) de (1): } (x + y + z) - (x - y + z) = 150 - 50$$

$$\rightarrow 2y = 100 \rightarrow y = 50$$

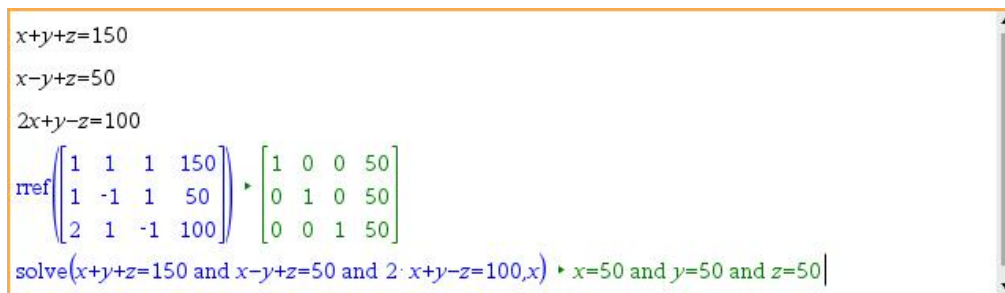
$$\text{Sustituya en (1): } x + 50 + z = 150 \rightarrow x + z = 100 \quad (*)$$

$$\text{Use (3): } 2x + 50 - z = 100 \rightarrow 2x - z = 50$$

$$\text{Sume (*) y } (2x - z = 50):$$

$$(x + z) + (2x - z) = 100 + 50 \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50$$

$$\text{Entonces, } z = 100 - 50 = 50$$



$$\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ x-y+z=50 \\ 2x+y-z=100 \end{array}$$

$$\text{ref} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & -1 & 1 & 50 \\ 2 & 1 & -1 & 100 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(x+y+z=150 \text{ and } x-y+z=50 \text{ and } 2 \cdot x+y-z=100,x) \rightarrow x=50 \text{ and } y=50 \text{ and } z=50$$

Conclusión: Cada departamento recibe 50 horas: 50 en producción, 50 en marketing y 50 en administración.

Ejemplo 5 Fijación de precios basada en costos y márgenes: Una empresa tecnológica establece que, para fijar el precio de un nuevo dispositivo, el triple del costo base (x) más el doble del margen de utilidad (y) debe ser igual a 300, y que el margen supera en 20 al costo.

Sistema planteado:

$$(1) \quad 3x + 2y = 300$$

$$(2) \quad y - x = 20$$

Procedimiento:

De (2): $y = x + 20$

Sustituir en (1): $3x + 2(x + 20) = 300 \rightarrow 3x + 2x + 40 = 300 \rightarrow 5x = 260 \rightarrow x = 52$

Luego, $y = 52 + 20 = 72$

Conclusión: El costo base es de \$52 y el margen de utilidad es de \$72.

Ejercicios 2.3.3

Determinación de costo base y margen de utilidad

1. Una empresa distribuidora de alimentos establece que el triple del costo de adquisición más el margen de utilidad equivale a \$210. Además, el margen es \$30 menor que el doble del costo.

Sistema:

$$3x + y = 210$$

$$y = 2x - 30$$

2. Una compañía de servicios proyecta que cinco veces el costo base menos el margen debe dar \$125. El margen representa el 40% más que el costo.

Sistema:

$$5x - y = 125$$

$$y = 1.4x$$

3. Un negocio establece que cuatro veces el costo sumado al margen es igual a \$200. También se sabe que el margen menos el triple del costo da \$20.

Sistema:

$$4x + y = 200$$

$$y - 3x = 20$$

Determinación de depreciación y amortización

4. En una auditoría financiera, se reporta que la depreciación sumada al doble de la amortización de activos representa \$160,000. Además, se detecta que el valor de la amortización menos la depreciación es de \$20,000.

Sistema:

$$x + 2y = 160,000$$

$$y - x = 20,000$$

5. Una empresa estima que tres veces la depreciación menos la amortización da \$30,000. A su vez, la suma de ambos conceptos equivale a \$170,000.

Sistema:

$$3x - y = 30,000$$

$$x + y = 170,000$$

6. El departamento contable establece que la depreciación más la amortización es igual al 60% del valor total de un activo (\$200,000). También indica que la amortización es 1.5 veces mayor que la depreciación.

Sistema:

$$x + y = 120,000$$

$$y = 1.5x$$

Modelo de equilibrio de costos

7. Una empresa determina que la suma de costos fijos, variables y utilidad alcanza los \$450,000. El doble de los costos fijos más el costo variable menos la utilidad debe dar \$270,000. Por último, se registra que el costo fijo más el doble de la variable más la utilidad equivale a \$530,000.

Sistema:

$$x + y + z = 450,000$$

$$2x + y - z = 270,000$$

$$x + 2y + z = 530,000$$

8. En un análisis contable se indica que la utilidad es la diferencia entre los ingresos (\$600,000) y los costos fijos y variables. Además, el doble del costo variable sumado al fijo equivale a \$320,000. La suma entre costo fijo y utilidad es \$380,000.

Sistema:

$$x + y + z = 600,000$$

$$2y + x = 320,000$$

$$x + z = 380,000$$

9. Una empresa proyecta que el costo fijo menos el variable más la utilidad representa \$250,000. A su vez, tres veces el costo variable más dos veces la utilidad equivale a \$440,000. Por último, el doble del costo fijo más el variable menos la utilidad da \$290,000.

Sistema:

$$x - y + z = 250,000$$

$$3y + 2z = 440,000$$

$$2x + y - z = 290,000$$

Distribución de horas por departamento

10. Una empresa asigna 180 horas totales entre producción, logística y administración. El doble de horas en producción más la diferencia entre administración y logística equivale a 100. También se indica que la suma de logística y administración es 120.

Sistema:

$$x + y + z = 180$$

$$2x + z - y = 100$$

$$y + z = 120$$

11. El equipo de proyectos distribuye las horas disponibles según los siguientes criterios: dos veces las horas en producción más tres veces marketing menos las administrativas equivale a 210. A su vez, producción menos marketing más administración da 90. Finalmente, la suma total debe ser 270 horas.

Sistema:

$$2x + 3y - z = 210$$

$$x - y + z = 90$$

$$x + y + z = 270$$

12. Un centro operativo reparte 200 horas entre tres áreas. La suma entre producción y administración representa 140 horas. La diferencia entre marketing y producción es 20. El total de marketing y administración equivale a 160.

Sistema:

$$x + z = 140$$

$$y - x = 20$$

$$y + z = 160$$

Fijación de precios por costos y márgenes

13. Un fabricante estima que el cuádruple del costo base más el margen comercial debe alcanzar los \$340. Por otro lado, se proyecta que el margen es \$60 mayor que el costo.

Sistema:

$$4x + y = 340$$

$$y - x = 60$$

14. El área comercial propone que el triple del costo más el doble del margen sea igual a \$300. También se establece que el margen menos el doble del costo base es de \$10.

Sistema:

$$3x + 2y = 300$$

$$y - 2x = 10$$

15. Una empresa tecnológica registra que cinco veces el costo base menos el margen equivale a \$220. Además, la suma entre el margen y tres veces el costo es igual a \$320.

Sistema:

$$5x - y = 220$$

$$y + 3x = 320$$

Tema 3: Matrices

Introducción

El álgebra matricial es una herramienta fundamental en el análisis cuantitativo aplicado a la administración, economía y otras ciencias sociales. Su utilidad radica en la capacidad de representar, organizar y resolver sistemas complejos de información mediante estructuras ordenadas llamadas matrices. Este tema proporciona los conceptos esenciales para comprender cómo las matrices y sus operaciones permiten modelar relaciones entre variables, optimizar recursos y tomar decisiones estratégicas basadas en datos.

3.1 Introducción a las matrices presenta el concepto de matriz como un arreglo rectangular de números, y establece su notación, dimensión y utilidad en contextos administrativos.

3.2 Tipos especiales de matrices, se estudian matrices cuadradas, identidad, diagonales y otras que poseen propiedades particulares que facilitan su manipulación y análisis.

3.3 Operaciones con matrices, se abordan las reglas para sumar, restar y multiplicar matrices, así como el cálculo de la transpuesta, operaciones que permiten combinar y transformar información estructurada.

3.4 Introducción a los determinantes explica cómo calcular el determinante de matrices 2×2 y 3×3 , utilizando métodos como columnas aumentadas y cofactores, esenciales para evaluar la invertibilidad de una matriz.

3.5 Propiedades de los determinantes profundiza en las reglas que rigen el comportamiento del determinante ante operaciones como el intercambio de renglones, multiplicación por escalares y suma de renglones, lo que permite simplificar cálculos y validar soluciones.

3.6 Solución de la inversa de una matriz, se presentan dos métodos para obtener la matriz inversa: el método de eliminación y el método de Cramer, ambos aplicables en la resolución de sistemas lineales y en el análisis de modelos administrativos.

3.7 Aplicaciones a modelos de insumo-producto conecta el álgebra matricial con la economía y la administración, mostrando cómo los modelos de Leontief permiten analizar la interdependencia entre sectores productivos, calcular la producción total requerida y evaluar el impacto de políticas económicas o decisiones empresariales.

Este tema proporciona las bases para aplicar el lenguaje matricial en la solución de problemas reales, fortaleciendo el pensamiento analítico y la toma de decisiones informadas en contextos administrativos y económicos.

3.1 Introducción a las matrices

Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de filas y columnas, es decir, su dimensión es $n \times n$. Estas matrices son fundamentales en álgebra lineal, permitiendo cálculos como determinantes, inversas y sistemas de ecuaciones.

1. Números naturales
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Números enteros
$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Números racionales
$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/5 & 7/2 \\ 4/9 & 1/6 & 3/4 \\ 5/7 & 8/3 & 2/8 \end{bmatrix}$$

Una *matriz rectangular* es aquella que tiene diferente número de filas y columnas, es decir, su dimensión es $m \times n$ con $m \neq n$.

4. Números naturales
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Números enteros
$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 & 8 \\ 7 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Números racionales
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Un vector es una matriz de una sola fila o columna, utilizado en la representación de datos, modelos económicos y análisis financiero.

7. Números naturales (vector columna)
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

8. Números enteros (vector fila)
$$[-1 \quad 5 \quad -3 \quad 7]$$

9. Números racionales (vector columna)
$$\begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/7 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 3.1

1. Escribe una matriz cuadrada de orden 4 con números naturales.

2. Genera una matriz cuadrada de orden 3 con números enteros.
3. Crea una matriz rectangular de dimensión 2×4 con números enteros.
4. Construye una matriz rectangular de dimensión 3×2 con números racionales y determina si se puede multiplicar por otra matriz.
5. Escribe un vector fila de dimensión 1×4 con números naturales.
6. Genera un vector columna de dimensión 3×1 con números enteros.

3.2 Tipos especiales de matrices.

Definición de Matrices cuadradas y Matrices rectangulares

Las matrices cuadradas tienen el mismo número de filas y columnas $n \times n$, siendo esenciales en el cálculo de determinantes, inversas y sistemas de ecuaciones.

Las matrices rectangulares tienen diferente número de filas y columnas $m \times n$ con $m \neq n$ y se usan en estadística, economía y modelos de distribución.

$$\text{Tipos de matrices cuadradas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Triangular Superior} \\ \text{Escalar} \\ \text{Identidad} \\ \text{Transpuesta} \end{array} \right.$$

Matriz triangular superior

Una matriz triangular superior tiene ceros debajo de la diagonal principal.

$$1. \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -2 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son iguales.

$$4. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

La matriz identidad es cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en los demás elementos.

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta

Una matriz transpuesta consiste en cambiar los renglones a columnas así los a_{ij} se transforman a_{ji} .

$$10. A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$11. A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tipos de matrices rectangulares $\begin{cases} \text{Escalonada} \\ \text{Escalonada reducida por filas} \end{cases}$

Matriz escalonada

Una matriz escalonada tiene filas con ceros progresivos hacia la derecha.

$$13. \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada reducida por filas

Una matriz escalonada reducida por filas es una matriz escalonada con unos como primeras entradas no nulas en cada fila, los demás elementos de la columna son ceros.

$$16. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$17. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 3.2

1. Escribe una matriz triangular superior de orden 4 con números enteros.
2. Genera una matriz triangular superior de orden 3 con números racionales.
3. Genera una matriz triangular superior de orden 3 y encuentra su transpuesta.
4. Crea una matriz escalar de orden 2 con números racionales.
5. Genera una matriz escalar de orden 3 con números reales y obtener su transpuesta.
6. Construye una matriz escalar de orden 5 con números enteros.
7. Construye una matriz identidad de orden 3.
8. Escribe una matriz escalonada de dimensión 3×4 con números naturales.

9. Genera una matriz escalonada de dimensión 4×5 con números enteros.
10. Encuentra la transpuesta de una matriz escalonada de dimensión 2×4 con números racionales.
11. Escribe una matriz escalonada reducida por filas de dimensión 3×4 con números reales.
12. Encuentra la transpuesta de una matriz escalonada reducida por filas de dimensión 2×3 con números racionales.

3.3 Operaciones con matrices

Suma de matrices: La suma de matrices consiste en sumar elemento a elemento dos matrices de igual dimensión.

Ejemplo 1

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Matriz B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Suma: } A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 5+1 & 8+3 \\ 3+2 & 6+7 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 11 \\ 5 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Suma: } A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 7+9 \\ 6+2 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Suma: } A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+5 & 4+7 \\ 5+2 & 7+4 & 3+6 \\ 6+1 & 8+3 & 9+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \\ 7 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

Resta de matrices: La resta de matrices consiste en restar elemento a elemento dos matrices de igual dimensión.

Ejemplo 4

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{Matriz B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resta: } A - B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2 & 9-4 & 5-3 \\ 3-1 & 6-5 & 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resta: } A - B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 8-5 \\ 2-1 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resta: } A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 7-3 & 9-5 \\ 3-2 & 6-4 & 8-7 \\ 2-0 & 4-1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Definición del Producto de Matrices Unidimensionales

En Álgebra Lineal, una matriz unidimensional es aquella que tiene solo una fila o una columna, es decir, puede ser un vector fila o vector columna.

Cuando se realiza la multiplicación entre matrices unidimensionales, se deben cumplir ciertas condiciones para que el producto sea válido:

1. Si un vector fila se multiplica por un vector columna, el resultado es un escalar.
2. Si un vector columna se multiplica por un vector fila, el resultado es una matriz cuya dimensión es el número de filas del primer vector por el número de columnas del segundo.
3. La multiplicación entre dos vectores fila o dos vectores columna no está definida en el producto de matrices estándar.

Ejemplo 7 Producto de un Vector Fila por un Vector Columna (Escalar)

Dado los vectores:

$$A \text{ (vector fila)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

El producto se calcula multiplicando cada componente y sumando los resultados:

$$A \cdot B = (2 \times 4) + (-1 \times 5) + (3 \times 6)$$

$$A \cdot B = 8 - 5 + 18$$

$$A \cdot B = 21$$

Resultado:

El producto de A y B es 21, un número escalar.

Ejemplo 8 Producto de un Vector Fila por un Vector Columna (Escalar)

Dado los vectores:

$$G \text{ (vector fila)} = [4 \quad 2 \quad -5]$$

$$H \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

El producto escalar se obtiene al multiplicar cada componente y sumar los resultados:

$$G \cdot H = (4 \times 3) + (2 \times 7) + (-5 \times 6)$$

$$G \cdot H = 12 + 14 - 30$$

$$G \cdot H = -4$$

Resultado:

El producto de G y H es -4, un número escalar.

Ejemplo 9 Producto de un Vector Columna por un Vector Fila (Matriz)

Dado los vectores:

$$I \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$J \text{ (vector fila)} = [4 \quad 7 \quad -3]$$

Procedimiento:

El producto entre un vector columna y un vector fila genera una matriz, obtenida multiplicando cada elemento del vector columna por cada elemento del vector fila:

$$I \times J = \begin{bmatrix} 2 \times 4 & 2 \times 7 & 2 \times -3 \\ 5 \times 4 & 5 \times 7 & 5 \times -3 \end{bmatrix}$$

Resultado:

$$\text{El producto de I y J es la matriz} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & -6 \\ 20 & 35 & -15 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10 Producto de un Vector Columna por un Vector Fila (Matriz)

Dado los vectores:

$$C \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D \text{ (vector fila)} = [4 \quad 5 \quad 6]$$

Procedimiento:

El resultado es una matriz obtenida al multiplicar cada elemento del vector columna por cada elemento del vector fila:

$$C \times D = \begin{bmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 5 & 3 \times 6 \\ 1 \times 4 & 1 \times 5 & 1 \times 6 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 \end{bmatrix}$$

Resultado:

$$\text{El producto de C y D es la matriz} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 11 Producto de un Vector Fila por un Vector Columna

Dado los vectores:

$$E \text{ (vector fila)} = [5 \quad 3]$$

$$F \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

Multiplicamos cada componente y sumamos los resultados:

$$E \cdot F = (5 \times 2) + (3 \times 7)$$

$$E \cdot F = 10 + 21$$

$$E \cdot F = 31$$

Resultado:

El producto de E y F es 31, un número escalar.

Multiplicar una matriz por un escalar significa multiplicar cada uno de sus elementos por un número fijo.

Ejemplo 12 Producto de una matriz por un escalar

$$\text{Matriz } A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Escalar $k = 2$

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \times 4 & 2 \times 7 \\ 2 \times 3 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 13 Producto de una matriz por un escalar

$$\text{Matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Escalar $k = 3$

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 6 & 3 \times 9 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 & 3 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 & 27 \\ 6 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 14 Producto de una matriz por un escalar

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Escalar $k = 4$

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \times 5 & 4 \times 3 & 4 \times 7 \\ 4 \times 2 & 4 \times 8 & 4 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 28 \\ 8 & 32 & 24 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

El producto de matrices se calcula mediante la multiplicación de filas por columnas, sumando los productos correspondientes. Solo es posible multiplicar matrices cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Ejemplo 15 Producto de matrices

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Producto:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 4 & 2 \times 6 + 4 \times 3 + 1 \times 5 \\ 5 \times 1 + 3 \times 2 + 7 \times 4 & 5 \times 6 + 3 \times 3 + 7 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 29 \\ 39 & 74 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 16 Producto de matrices

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Producto:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 6 + 5 \times 4 & 3 \times 3 + 2 \times 5 + 5 \times 8 & 3 \times 7 + 2 \times 1 + 5 \times 9 \\ 7 \times 2 + 1 \times 6 + 6 \times 4 & 7 \times 3 + 1 \times 5 + 6 \times 8 & 7 \times 7 + 1 \times 1 + 6 \times 9 \\ 4 \times 2 + 8 \times 6 + 9 \times 4 & 4 \times 3 + 8 \times 5 + 9 \times 8 & 4 \times 7 + 8 \times 1 + 9 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 59 & 68 \\ 44 & 74 & 104 \\ 92 & 124 & 117 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17 Producto de matrices

$$\text{Matriz A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Producto:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 \times 6 + 3 \times 4 & 5 \times 1 + 3 \times 9 \\ 2 \times 6 + 7 \times 4 & 2 \times 1 + 7 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 32 \\ 40 & 65 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 & 11 \\ 5 & 13 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 14 & -6 \\ 20 & 35 & -15 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 14 & 29 \\ 39 & 74 \end{bmatrix}$

Ejercicios 3.3

1. Encuentra la suma de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Construye dos matrices de orden 4×4 y realiza su suma.
3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentra su suma.

4. Genera dos matrices cuadradas de orden 5 y calcula su suma.
5. Suma dos matrices de orden 3×2 con números enteros.
6. Encuentra la suma de dos matrices de orden 2×5 con números naturales.
7. Encuentra la resta de las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

8. Construye dos matrices de orden 4×4 y realiza su resta.
9. Dadas las matrices:

$$E = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \\ 22 & 24 & 26 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

Encuentra su resta.

10. Genera dos matrices cuadradas de orden 4 y calcula su resta.

11. Resta dos matrices de orden 3×2 con números racionales.

12. Encuentra la diferencia entre dos matrices de orden 2×4 con números reales.

13. Multiplica la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Producto de un Vector Fila por un Vector Columna (Producto Escalar)

14. Calcula el producto escalar entre los vectores:

$$A \text{ (vector fila)} = [2 \quad -3 \quad 4]$$

$$B \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

15. Encuentra el producto escalar de:

$$C \text{ (vector fila)} = [-1 \quad 6 \quad 3]$$

$$D \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

16. Determina el producto escalar para los vectores:

$$E \text{ (vector fila)} = [3 \quad 0 \quad -2]$$

$$F \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

17. Calcula el producto escalar entre:

$$G \text{ (vector fila)} = [-2 \quad 4 \quad 7]$$

$$H \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

18. Halla el producto escalar de los vectores:

$$I \text{ (vector fila)} = [5 \quad -1 \quad 0]$$

$$J \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

19. Realiza el producto escalar para:

$$K \text{ (vector fila)} = [0 \quad 8 \quad 6]$$

$$L \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

20. Calcula el producto de:

$$M \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$N \text{ (vector fila)} = [3 \quad 1 \quad 4]$$

Resultado: matriz de 3×3 .

21. Multiplica el vector columna

$$O = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

por el vector fila

$$P = [2 \quad 0 \quad -5]$$

para obtener la matriz resultante.

22. Realiza la multiplicación de:

$$Q \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$R \text{ (vector fila)} = [-3 \quad 8 \quad 1]$$

Obtén la matriz 3×3 .

23. Determina el producto de:

$$S \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$T \text{ (vector fila)} = [5 \quad -2 \quad 7]$$

El resultado debe ser una matriz de 3×3 .

24. Multiplica el vector columna

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

por el vector fila

$$V = [4 \quad 4 \quad -2]$$

para formar la matriz correspondiente.

25. Halla el producto matricial de:

$$W \text{ (vector columna)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X \text{ (vector fila)} = [3 \quad -6 \quad 2]$$

Obtén la matriz resultante de 3×3 .

26. Calcula el producto cruz entre los vectores:

$$Y: [2 \quad -1 \quad 3]$$

$$Z: [4 \quad 0 \quad -2]$$

27. Determina el producto vectorial de:

$$A1: [-3 \quad 2 \quad 5]$$

$$B1: [1 \quad -4 \quad 2]$$

28. Halla el producto cruz para:

$$C1: [6 \quad -3 \quad 1]$$

$$D1: [-2 \quad 4 \quad -5]$$

29. Realiza el producto cruz entre:

$$E1: [0 \quad 7 \quad -3]$$

$$F1: [5 \quad -1 \quad 4]$$

30. Calcula el producto vectorial de:

$$G1: [-1 \quad -2 \quad 3]$$

$$H1: [4 \quad 0 \quad -6]$$

31. Determina el producto cruz entre:

$$I1: [3 \ 5 \ -2]$$

$$J1: [-4 \ 1 \ 7]$$

Por el escalar $\lambda = 4$.

32. Dada la matriz:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Multiplícala por $\lambda = -2$.

33. Construye una matriz de orden 4×4 y multiplícala por $\lambda = 7$

Multiplícala la matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Por el escalar $\lambda = \frac{1}{2}$.

34. Multiplica una matriz de orden 3×3 por $\lambda = 5$.

35. Encuentra el producto entre una matriz de orden 2×4 y un escalar de $\lambda = 8$.

36. Encuentra el producto entre el vector renglón:

$$A = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

Y el vector columna

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

37. Calcula el producto entre los vectores:

$$A = [2 \ 4 \ 6]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

38. Dado el vector renglón:

$$A = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$$

Y el vector columna:

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Realiza su producto.

39. Genera dos vectores de orden 1×6 y 6×1 y calcula su producto.
40. Calcula el producto de un vector fila de dimensión 1×4 y un vector columna de dimensión 4×1 con números racionales.
41. Encuentra el producto de dos vectores de dimensión 1×3 y 3×1 con números reales.
42. Multiplica la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Por la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

43. Calcula el producto entre la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Y la matriz: $D = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

44. Encuentra el producto entre la matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Y la matriz: $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

45. Genera dos matrices compatibles de orden 5×3 y 3×4 y calcula su producto.
46. Multiplica una matriz de orden 3×2 por una matriz de orden 2×5 con números naturales.
47. Encuentra el producto de una matriz de orden 4×4 por una matriz de orden 4×3 con números enteros.

3.4 Introducción a los Determinantes.

Definición de Determinante

El determinante de una matriz es un número asociado a una matriz cuadrada que proporciona información sobre sus propiedades. Se usa en la resolución de sistemas de ecuaciones, cálculo de áreas y volúmenes, análisis de independencia lineal y muchas aplicaciones en álgebra lineal. El determinante permite conocer si una matriz es invertible y si su rango es máximo.

El determinante de una matriz de orden 2×2 se obtiene como la diferencia entre los productos de sus diagonales. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La fórmula para su cálculo es:

$$\det(A) = (a \times d) - (b \times c)$$

Ejemplo 1

Dada la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Identificar los elementos:
 $a = 3, b = 5, c = 7, d = 2.$
2. Aplicar la fórmula:
 $\det(B) = (3 \times 2) - (5 \times 7) = 6 - 35 = -29$

Resultado:

El determinante de B es -29.

Ejemplo 2

Dada la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Identificar los elementos:
 $a = -4, b = 6, c = 1, d = -3.$
2. Aplicar la fórmula:
 $\det(C) = (-4 \times -3) - (6 \times 1) = 12 - 6 = 6$

Resultado:

El determinante de C es 6.

Ejemplo 3

Dada la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Identificar los elementos:
 $a = 8, b = -2, c = 5, d = 7.$
2. Aplicar la fórmula:
 $\det(D) = (8 \times 7) - (-2 \times 5) = 56 + 10 = 66$

Resultado:

El determinante de D es 66.

Determinante de una Matriz 3×3 por Método de Columnas Aumentadas

El método de columnas aumentadas consiste en extender la matriz repitiendo las primeras dos columnas a la derecha y luego calcular la diferencia entre los productos de las diagonales principales y secundarias. Se aplica solo a matrices de orden 3×3.

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Extender la matriz, agregando las dos primeras columnas al final.
2. Calcular la suma de los productos de las diagonales principales.
3. Restar la suma de los productos de las diagonales secundarias.

Ejemplo 4

Dada la matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Extender la matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calcular los productos de las diagonales principales:
 $(2 \times 5 \times 1) + (-1 \times -2 \times 7) + (3 \times 4 \times 0) = 10 + 14 + 0 = 24$
3. Calcular los productos de las diagonales secundarias:
 $(3 \times 5 \times 7) + (2 \times -2 \times 0) + (-1 \times 4 \times 1) = 105 + 0 - 4 = 101$
4. Restar los resultados:
 $24 - 101 = -77$

Resultado:

El determinante de F es -77

Determinante de una Matriz por Método de Cofactores

El método de cofactores consiste en calcular el determinante de una matriz cuadrada descomponiéndola en submatrices menores y multiplicando cada elemento por su cofactor, con un signo alternante. Este método se basa en desarrollar el determinante a partir de una fila o columna de la matriz.

Dada la matriz de orden 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

El determinante se calcula usando la expansión por cofactores de la primera fila:

$$\det(A) = a \cdot C_{11} - b \cdot C_{12} + c \cdot C_{13}$$

Donde C_{ij} representa el cofactor del elemento en la posición (i,j), obtenido de eliminar la fila y columna correspondiente y calculando el determinante de la submatriz 2×2 .

Ejemplo 5

Dada la matriz: $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

1. Seleccionamos la primera fila para el desarrollo:

$$b_{11} = 2, b_{12} = -1, b_{13} = 3.$$

2. Calculamos el cofactor eliminando la fila 1 y columna 2 de b_{11}

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así } \det \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - (-2) \times 0 = 5$$

$$\text{Cofactor de } b_{12}: \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así } \det \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - (-2) \times 7 = 18$$

$$\text{Cofactor de } b_{13}: \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así } \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times 0 - (5) \times 7 = -35$$

3. Aplicamos la fórmula del determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-1) \times 18 + 3 \times (-35) = -77$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow 9$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow 9$$

Ejemplo 6

$$\text{Dada la matriz: } C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Seleccionamos la primera fila para el desarrollo:

$$c_{11} = 2, c_{12} = -1, c_{13} = 3.$$

2. Calculamos el cofactor eliminando la fila 1 y columna 2 de c_{11}

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así } \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 5 \times (-2) = 28 + 10 = 38$$

$$\text{Cofactor de } c_{12}: \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así } \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 5 \times 6 = 7 - 30 = -23$$

Cofactor de c_{13} : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Así $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times -2 - 4 \times 6 = -2 - 24 = -26$

3. Aplicamos la fórmula del determinante:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times 38 - 2 \times (-23) + (-1) \times (-26) = 186$$

Ejemplo 7

Dada la matriz: $D = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

1. Seleccionamos la primera fila:

$$d_{11} = 5, d_{12} = -3, d_{13} = 4.$$

2. Calculamos los cofactores:

Cofactor de $d_{11} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Así $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 \times 8 - (-1) \times 6 = 6$

Cofactor de $d_{12} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Así $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - (-1) \times 7 = 16 + 7 = 23$

Cofactor de $d_{13} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - (0) \times 7 = 12$

3. Aplicamos la fórmula:

$$|D| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (5 \times 6) - (-3 \times 23) + (4 \times 12) = 30 + 69 + 48 = 147$$

Resultado:

El determinante de D es 147.

Ejercicios 3.4

Determinante de una Matriz 2×2

1. Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Encuentra el determinante de la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Calcula el determinante de la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Encuentra el determinante de la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Determina el valor del determinante de la matriz:

$$F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

7. Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Encuentra el determinante de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

9. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

10. Calcula el determinante de la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

11. Encuentra el determinante de la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinante de una Matriz 3×3 por Método de Columnas Aumentadas

13. Calcula el determinante de la siguiente matriz utilizando el método de columnas aumentadas:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Determina el determinante de la matriz por el método de columnas aumentadas:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

15. Encuentra el determinante de la siguiente matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

16. Calcula el determinante de la matriz por el método de columnas aumentadas:

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

17. Encuentra el determinante de la matriz aplicando el método de columnas aumentadas:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

18. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

19. Calcula el determinante de la siguiente matriz utilizando el método de columnas aumentadas:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Encuentra el determinante de la matriz por el método de columnas aumentadas:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

21. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

22. Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

23. Encuentra el determinante de la siguiente matriz aplicando el método de columnas aumentadas:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

24. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz:

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinante de una Matriz por Método de Cofactores

25. Calcula el determinante de la siguiente matriz utilizando el método de cofactores:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

26. Determina el determinante de la matriz por el método de cofactores:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

27. Encuentra el determinante de la siguiente matriz aplicando el método de cofactores:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

28. Calcula el determinante de la matriz por el método de cofactores:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

29. Encuentra el determinante de la matriz utilizando el desarrollo por cofactores:

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

30. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz aplicando el método de cofactores:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

31. Calcula el determinante de la siguiente matriz utilizando el método de cofactores:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

32. Encuentra el determinante de la matriz por el método de cofactores:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

33. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz aplicando el método de cofactores:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

34. Calcula el determinante de la matriz por el método de cofactores:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

34. Encuentra el determinante de la matriz utilizando el desarrollo por cofactores:

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

35. Determina el valor del determinante de la siguiente matriz aplicando el método de cofactores:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

3.5 Propiedades de los Determinantes

Propiedad 1: Intercambio de Renglones $R_i \Leftrightarrow R_j$, el determinante *cambia de signo*.

Ejemplo 1

Matriz original:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(A) = (3 \times 2) - (5 \times 7) = 6 - 35 = -29$$

Paso 2: Intercambiamos los renglones:

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el determinante de la nueva matriz:

$$\det(A') = (7 \times 5) - (2 \times 3) = 35 - 6 = 29$$

Resultado:

El determinante cambia de signo: $-29 \rightarrow 29$.

Ejemplo 2

Matriz original:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(B) = (4 \times 5) - (-1 \times 2) = 20 + 2 = 22$$

Paso 2: Intercambiamos los renglones:

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el determinante de la nueva matriz:

$$\det(B') = (2 \times -1) - (5 \times 4) = -2 - 20 = -22$$

Resultado:

El determinante cambia de signo: $22 \rightarrow -22$.

Ejemplo 3

Matriz original:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(C) = (8 \times 6) - (3 \times -2) = 48 + 6 = 54$$

Paso 2: Intercambiamos los renglones:

$$C' = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el determinante de la nueva matriz:

$$\det(C') = (-2 \times 3) - (6 \times 8) = -6 - 48 = -54$$

Resultado:

El determinante cambia de signo: $54 \rightarrow -54$.

Propiedad 2: Un Escalar por un Renglón $k \times R_i \Rightarrow R_i$ *el determinante se modifica k veces.*

Ejemplo 4

Matriz original:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(D) = (2 \times 7) - (4 \times 3) = 14 - 12 = 2$$

Paso 2: Multiplicamos el primer renglón por 3:

$$D' = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(D') = (6 \times 7) - (12 \times 3) = 42 - 36 = 6$$

Resultado:

El nuevo determinante es $2 \times 3 = 6$.

Ejemplo 5

Utilizamos las matrices:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(D) = (1 \times 3) - (5 \times 2) = 3 - 10 = -7$$

Paso 2: Multiplicamos el primer renglón por -2:

$$E' = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(E') = (-2 \times 3) - (-10 \times 2) = -6 + 20 = 14$$

Resultado:

El nuevo determinante es $-7 \times -2 = 14$.

Ejemplo 6

Utilizamos las matrices:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(F) = (4 \times 8) - (-2 \times 6) = 32 + 12 = 44$$

Paso 2: Multiplicamos el primer renglón por -3:

$$F' = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(F') = (-12 \times 8) - (6 \times 6) = -96 - 36 = -132$$

Resultado:

El nuevo determinante es $44 \times -3 = -132$.

Propiedad 3: Un Escalar por un Renglón Sumado a Otro Renglón $k \times R_i + R_j \Rightarrow R_j$ *el determinante no cambia.*

Ejemplo 7

Matriz original:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(G) = (3 \times 2) - (4 \times 7) = 6 - 28 = -22$$

Paso 2: Sumamos el doble del primer renglón al segundo: $2 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$

$$G' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} 2 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 13 & 10 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(G') = (3 \times 10) - (4 \times 13) = 30 - 52 = -22$$

Resultado: El determinante no cambia.

Ejemplo 8

Matriz original:

$$H = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(H) = (5 \times 3) - (-1 \times 4) = 15 + 4 = 19$$

Paso 2: Restamos el primer renglón al segundo: $-1 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$

$$H = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(H') = (5 \times 4) - (-1 \times -1) = 20 - 1 = 19$$

Resultado: El determinante no cambia.

Ejemplo 9

Matriz original:

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calculamos el determinante original:

$$\det(I) = (2 \times 6) - (7 \times 3) = 12 - 21 = -9$$

Paso 2: Sumamos el quintuplo del primer renglón al segundo: $5 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$

$$I' = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{5 \cdot R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 13 & 41 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calculamos el nuevo determinante:

$$\det(I') = (2 \times 41) - (7 \times 13) = 82 - 91 = -9$$

Resultado: El determinante no cambia.

Construcción de Matrices Triangulares Superiores

$$\text{Matriz original: } \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} = 6 \times 4 \times 9 + 8 \times 6 \times 8 + 2 \times 3 \times 1 - 2 \times 4 \times 8 - 6 \times 6 \times 1 - 3 \times 8 \times 9 = 290$$

Transformamos la matriz en triangular superior.

$$1. \quad \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ Permanece inalterable.}$$

$$2. \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ Cambia de signo.}$$

$$3. \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} -\frac{8}{6}R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & -29/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ Permanece inalterable.}$$

$$4. \det \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & -29/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 6 \times \frac{-29}{3} \times 5 = -290 \text{ Cambió de signo.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \therefore \det(\mathbf{a}) \rightarrow 2$$

Intercambio de renglones "Cambia de signo el determinante"

$$\text{rowSwap} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 1, 2 \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \rightarrow -2$$

Un escalar por un renglón "Cambia a $k \det(\mathbf{A})$ "

$$\text{mRow} \left(3, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 2 \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \right) \rightarrow 6$$

Un escalar por un renglón sumado a otro renglón "Permanece inalterable"

$$\text{mRowAdd} \left(-1, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 1, 2 \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \rightarrow 2$$

Ejercicios 3.5

Propiedad 1: Intercambio de Renglones $R_i \Leftrightarrow R_j$

1. Intercambia los renglones y calcula el nuevo determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Intercambia los renglones y determina el efecto en el determinante:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Intercambia dos renglones en la siguiente matriz y evalúa el determinante

$$\text{resultante: } C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Modifica el orden de los renglones y calcula el nuevo determinante de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedad 2: Un Escalar por un Renglón

5. Multiplica el primer renglón por 4 y calcula el determinante de la nueva matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Aplica un factor de 3 al segundo renglón y determina el nuevo determinante:

$$F = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Multiplica un renglón de la matriz por -2 y evalúa el determinante:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

8. Aplica un escalar de 5 a la primera fila y determina el nuevo valor del determinante:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad 3: Un Escalar por un Renglón Sumado a Otro Renglón

9. Suma el doble del primer renglón al segundo y calcula el determinante:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

10. Multiplica el primer renglón por 2 y súmalo al segundo renglón, luego determina el

nuevo determinante: $J = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

11. Modifica la segunda fila sumándole el triple de la primera y calcula el determinante

resultante: $K = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

12. Realiza la transformación sumando el primer renglón al segundo y determina el

resultado del determinante: $L = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Construcción de Matrices Triangulares Superiores

13. Transforma la siguiente matriz en una matriz triangular superior: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

14. Realiza las transformaciones necesarias para obtener una matriz triangular superior:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

15. Transforma la siguiente matriz en una matriz triangular superior: $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

16. Aplica transformaciones para construir una matriz triangular superior con la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

17. Convierte la siguiente matriz en una matriz triangular superior aplicando transformaciones adecuadas:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

3.6 Solución de la Inversa de una Matriz

La inversa de una matriz A es otra matriz A^{-1} que, cuando se multiplica por A , produce la matriz identidad I . Es decir: $A \cdot A^{-1} = I$

La existencia de la inversa depende de que el determinante de la matriz sea distinto de cero. Existen diversos métodos para calcular la inversa de una matriz, entre ellos el método de eliminación y el método de Cramer.

Definición de Inversa por el Método de Eliminación

El método de eliminación se basa en transformar la matriz A en la matriz identidad I mediante operaciones fila, aplicando estas mismas transformaciones a una matriz identidad adyacente. Cuando A se convierte en I , la matriz adyacente se transforma en A^{-1} .

Ejemplo 1: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Procedimiento

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{5}R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2 + R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Verificamos: $A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2: Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5R_1 + R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 11/3 & -5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 11/3 & -5/3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{11}R_2 + R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & 3/11 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_2 + R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & -5/11 & 3/11 \end{bmatrix} \therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} 7/11 & -2/11 \\ -5/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3 Dada la matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} R_1 \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_3 + R_1} R_3 \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{3}{2}R_3 + R_1 \Rightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 5/3 & 3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{5}{3}R_3 + R_1 \Rightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -5/3 & -6 & -4/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{5}{3}R_3 + R_1 \Rightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 5/2 & 1 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 5/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{6}R_3 + R_1 \Rightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 & -1/6 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 & -1/6 \end{array} \right] \xrightarrow{-3R_3 + R_1 \Rightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 & -1/6 \end{array} \right] \therefore C^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1/2 & -5/4 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & -5/12 & -1/6 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Definición de Inversa por el Método de Cramer

El método de Cramer permite calcular la inversa de una matriz cuadrada utilizando la matriz adjunta y el determinante de la matriz original. La fórmula general es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

Matriz adjunta $\text{Adj}(A)$ es la matriz de cofactores transpuesta.

La matriz de cofactores de una matriz cuadrada A es una matriz en la que cada elemento es el cofactor correspondiente de la matriz original.

El cofactor de un elemento a_{ij} de la matriz A se obtiene eliminando la fila i y la columna j , calculando el determinante de la matriz menor resultante y multiplicándolo por -1^{i+j} , que aplica el signo alternante.

Ejemplo 4 Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = (2 \cdot 4) - (5 \cdot 3) \Rightarrow 6 - 15 = -9$$

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det([4]) \Rightarrow d_{11} = 4$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det([3]) \Rightarrow d_{12} = -3$$

$$d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det([5]) \Rightarrow d_{21} = -5$$

$$d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det([2]) \Rightarrow d_{22} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \therefore D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5 Dada la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = (1 \cdot 4) - (3 \cdot 2) \Rightarrow 4 - 6 = -2$$

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det([4]) \Rightarrow d_{11} = 4$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det([2]) \Rightarrow d_{12} = -2$$

$$d_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det([3]) \Rightarrow d_{21} = -3$$

$$d_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det([1]) \Rightarrow d_{22} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \therefore D^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6 Dada la matriz $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \therefore \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 9$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \therefore \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/3 & -19/9 & 13/9 \\ 2/3 & 11/9 & -8/9 \\ -1/3 & 5/9 & -2/9 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & -19/9 & 13/9 \\ 2/3 & 11/9 & -8/9 \\ -1/3 & 5/9 & -2/9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \therefore \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow 9 \\
 & \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \therefore \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/3 & -19/9 & 13/9 \\ 2/3 & 11/9 & -8/9 \\ -1/3 & 5/9 & -2/9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7 Dada la matriz $G = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \therefore \det \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & 13 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{1}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ -2 & -3 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 3.6

Inversa por el Método de Eliminación

1. Calcula la inversa de la siguiente matriz utilizando el método de eliminación:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Encuentra la inversa por eliminación: $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determina la inversa de: $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. Aplica el método de eliminación para obtener la inversa de:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Calcula la inversa de: $E = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

6. Encuentra la inversa por eliminación:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Calcula la inversa de:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

8. Determina la inversa de: $H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

9. Aplica el método de eliminación para: $I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

10. Calcula la inversa de:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Inversa por el Método de Cramer

11. Calcula la inversa de la siguiente matriz utilizando el método de Cramer:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Encuentra la inversa por Cramer: $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

13. Determina la inversa de:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

14. Aplica el método de Cramer para obtener la inversa de:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Calcula la inversa de:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Encuentra la inversa por Cramer: $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

17. Calcula la inversa de: $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

18. Determina la inversa de: $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

19. Aplica el método de Cramer para: $S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

20. Calcula la inversa de: $T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto.

Los modelos de insumo-producto son herramientas fundamentales en administración y economía, utilizadas para analizar la interdependencia entre sectores productivos dentro de una economía o una empresa. Estos modelos permiten evaluar cómo los insumos utilizados en un sector afectan la producción de otros sectores, facilitando la toma de decisiones estratégicas en planificación económica, gestión de recursos y optimización de costos.

Algunas aplicaciones clave de los modelos de insumo-producto incluyen:

Análisis de impacto económico, determinando cómo los cambios en la producción afectan otros sectores.

Optimización de costos y recursos, asegurando una distribución eficiente de insumos en la producción.

Evaluación de políticas económicas, midiendo el efecto de inversiones o regulaciones en distintos sectores.

Planeación estratégica en empresas, ajustando la producción y el abastecimiento de insumos para maximizar eficiencia.

Ejemplo 1: Evaluación de la Interdependencia entre Sectores Productivos

Contexto

Una economía tiene tres sectores productivos: agricultura, manufactura y servicios. Se desea analizar cómo los insumos de cada sector afectan la producción total, utilizando un modelo de insumo-producto representado por una matriz de coeficientes técnicos.

Datos

Matriz de coeficientes técnicos A , que representa la proporción de insumos requeridos por cada sector para producir una unidad de producto:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Demanda final de cada sector:

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calculamos la matriz $I - A$:

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.1 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.3 & -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos la inversa de $I - A$.

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.90698 & 0.790698 & 0.697674 \\ 1.2093 & 1.72093 & 0.930233 \\ 1.62791 & 1.16279 & 2.7907 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D , para obtener la producción total requerida:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 448.837 \\ 565.116 \\ 895.349 \end{bmatrix}$$

5. Interpretamos los resultados, determinando la producción necesaria en cada sector para satisfacer la demanda final.

Sectores productivos:

Agricultura = 448.837

Manufactura = 565.116

Servicios = 895.349

$$(I - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1.90698 & 0.790698 & 0.697674 \\ 1.2093 & 1.72093 & 0.930233 \\ 1.62791 & 1.16279 & 2.7907 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1.90698 & 0.790698 & 0.697674 \\ 1.2093 & 1.72093 & 0.930233 \\ 1.62791 & 1.16279 & 2.7907 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448.838 \\ 565.116 \\ 895.35 \end{bmatrix}$$

Resultado

La matriz inversa permite calcular la producción total requerida en cada sector, asegurando que se cubran las necesidades de insumos y demanda final.

Ejemplo 2: Optimización de Recursos en una Empresa

Contexto

Una empresa tiene tres departamentos: producción, distribución y ventas. Se busca determinar la cantidad óptima de recursos que cada departamento debe recibir para cumplir con la demanda final de productos.

Datos

Matriz de coeficientes técnicos B , que representa la proporción de recursos utilizados por cada departamento:

$$B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Demanda final de recursos:

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos B de la identidad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos la inversa de I - B.

$$(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & 40 & 52 \\ 20 & 40 & 50 \\ 26 & 50 & 66 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D, para obtener la cantidad óptima de recursos en cada departamento.

$$\begin{bmatrix} 22 & 40 & 52 \\ 20 & 40 & 50 \\ 26 & 50 & 66 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,360 \\ 13,900 \\ 17,980 \end{bmatrix}$$

Resultado

La matriz inversa permite determinar la cantidad óptima de recursos que cada departamento debe recibir para cumplir con la demanda final, optimizando la gestión de insumos y costos.

Ejemplo 3: Evaluación del Impacto de una Política Económica

Contexto

El gobierno implementa una política de subsidios en tres sectores económicos: energía, transporte y tecnología. Se busca determinar cómo estos subsidios afectan la producción total de cada sector.

Datos

Matriz de coeficientes técnicos C, que representa la relación entre los sectores:

$$C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Demanda final ajustada por subsidios:

$$D = \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos B de la identidad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos la inversa de I - B.

$$(I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -28 & -34 & -38 \\ -32 & -36 & -42 \\ -38 & -44 & -48 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D, para obtener la cantidad óptima de recursos en cada departamento.

$$\begin{bmatrix} -28 & -34 & -38 \\ -32 & -36 & -42 \\ -38 & -44 & -48 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,400 \\ -14,700 \\ -17,300 \end{bmatrix}$$

Resultado

La matriz inversa permite evaluar el impacto de los subsidios en la producción total de cada sector, facilitando la toma de decisiones en políticas económicas.

Conclusión

Los modelos de insumo-producto son herramientas esenciales en administración y economía, utilizadas para analizar la interdependencia entre sectores, optimizar recursos y evaluar el impacto de políticas económicas. La aplicación de la inversa de una matriz en estos modelos permite calcular la producción total requerida, mejorar la gestión de insumos y tomar decisiones estratégicas basadas en datos cuantitativos.

Ejercicios 3.7

Evaluación de la Interdependencia entre Sectores Productivos

1. Una economía tiene tres sectores: agricultura, manufactura y servicios. Se representa la relación entre ellos con la siguiente matriz de coeficientes técnicos:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Determina la producción total requerida en cada sector.

2. Se analiza la interdependencia entre los sectores energía, transporte y tecnología con la siguiente matriz de coeficientes técnicos:

$$B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Calcula la producción total necesaria.

3. Se estudia la relación entre los sectores comercio, manufactura y construcción con la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 120 \\ 140 \\ 180 \end{bmatrix}$$

Determina la producción total requerida.

4. Se analiza la interdependencia entre los sectores educación, salud y tecnología con la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Calcula la producción total necesaria.

5. Se estudia la relación entre los sectores agricultura, minería y manufactura con la siguiente matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 130 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Determina la producción total requerida.

6. Se analiza la interdependencia entre los sectores turismo, comercio y transporte con la siguiente matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 110 \\ 140 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Calcula la producción total necesaria.

Optimización de Recursos en una Empresa

7. Una empresa tiene tres departamentos: producción, distribución y ventas. Se representa la relación entre ellos con la siguiente matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final de recursos es:

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Determina la cantidad óptima de recursos en cada departamento.

8. Se analiza la distribución de recursos en los departamentos marketing, producción y logística con la siguiente matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Calcula la cantidad óptima de recursos.

9. Se estudia la relación entre los departamentos investigación, desarrollo y producción con la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 120 \\ 140 \\ 180 \end{bmatrix}$$

Determina la cantidad óptima de recursos.

10. Se analiza la distribución de recursos en los departamentos finanzas, operaciones y ventas con la siguiente matriz:

$$K = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final es:

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Calcula la cantidad óptima de recursos.

Evaluación del Impacto de una Política Económica

11. Se analiza el impacto de subsidios en los sectores energía, transporte y tecnología con la siguiente matriz:

$$L = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final ajustada es:

$$D = \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Determina la producción total ajustada por subsidios.

12. Se estudia el efecto de una nueva política fiscal en los sectores comercio, manufactura y construcción con la siguiente matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Si la demanda final ajustada es:

$$D = \begin{bmatrix} 110 \\ 140 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Calcula la producción total ajustada.

Tema 4: Diferenciación y Aplicaciones

En el estudio del análisis matemático aplicado a contextos económico-administrativos, la diferenciación constituye una herramienta clave para interpretar y modelar el comportamiento de funciones que representan ingresos, costos, utilidades, demanda, producción, entre otras variables dependientes. La derivada, en su concepción básica, permite identificar la tasa de cambio instantánea de una magnitud respecto de otra, siendo útil para comprender tendencias, detectar puntos críticos, optimizar decisiones y proyectar escenarios.

A través del desarrollo secuencial de esta unidad, se aborda inicialmente el concepto de derivada y sus generalizaciones a órdenes superiores, seguido de su extensión a funciones de varias variables mediante derivadas parciales. Posteriormente se introducen aplicaciones prácticas como la identificación de máximos y mínimos, el análisis marginal y la optimización en modelos de ingreso, costo y utilidad. Cada sección se acompaña de ejemplos contextualizados y ejercicios cuidadosamente estructurados para que el estudiante adquiera una comprensión funcional de los conceptos y su utilidad en la toma de decisiones dentro del entorno empresarial.

El enfoque se mantiene orientado a la formación de habilidades analíticas que permiten no sólo calcular derivadas, sino interpretarlas en función de problemas reales. De esta manera, el estudiante transita desde el dominio técnico de la diferenciación hacia su aplicación directa en escenarios económicos concretos.

4.1 Límites y Continuidad.

Concepto geométrico del límite de una función

El límite de una función puede interpretarse como el comportamiento de la recta secante que une dos puntos de una curva a medida que estos se aproximan entre sí. Si consideramos los puntos $x, f(x)$ y $(x + h, f(x + h))$, la pendiente de la secante es:

$$m_{\text{secante}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cuando el valor de h tiende a cero, la secante se convierte en tangente, y su pendiente corresponde al valor exacto de cambio de la función en ese punto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Este límite representa una transición entre la aproximación y la precisión: nos da el valor instantáneo de la tasa de cambio en x .

Propiedades fundamentales de los límites

Propiedad aditiva: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Propiedad multiplicativa: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Propiedad del cociente si $M \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$

Propiedad del límite de una constante: $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Ejemplo 1 Determina el límite de la función $f(x) = 3x - 2$ cuando $x \rightarrow 5$.

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 5} (3x - 2) = 3(5) - 2 = 13$$

Ejemplo 2 Calcula el límite de $f(x) = x^2 + x$, aplicando la propiedad aditiva, cuando $x \rightarrow 2$.

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x = 4 + 2 = 6$$

Ejemplo 3 Calcula el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ cuando $x \rightarrow 2$.

Solución:

Factorizamos el numerador:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} \right) \rightarrow \text{true} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) &= 2+2 \rightarrow \text{true} \quad \therefore \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4 \rightarrow \text{true} \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Determina el límite de la constante $f(x) = 8$ cuando $x \rightarrow 0$.

Solución: $\lim_{x \rightarrow 0} 8 = 8$

Definición de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si cumple:

1. Está definida en a : $f(a)$ existe
2. El límite existe: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. El valor de la función coincide con el del límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 5 Verifica si la función $f(x) = 4x + 1$ es continua en $x = 2$

Solución:

$$f(2) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

Se cumple la definición. Es continua.

Ejemplo 6 Analiza la continuidad de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$

Solución:

El denominador se anula en $x = 1 \Rightarrow$ no está definida.

No cumple la definición. No es continua.

Ejercicios 4.1

1. Evalúa $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5)$
2. Calcula $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x)$
3. Determina $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$
4. Determina si $f(x) = 7$ tiene límite cuando $x \rightarrow 2$

5. Verifica si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ es continua en $x = 1$
6. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
7. Evalúa $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 4x + 1)$
8. Determina $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$
9. Verifica si la función $f(x) = 2x + 1$ es continua en $x = 0$
10. Evalúa $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x + 4}$
11. Determina $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
12. Evalúa $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 3x}{x}$
13. Determina el tipo de discontinuidad de $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ en $x = 2$
14. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
15. Evalúa $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^2)$
16. Determina $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$
17. Evalúa $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 9x + 18)$

4.2 Derivadas Algebraicas

Las derivadas algebraicas se obtienen aplicando reglas directas sobre las funciones comunes de una variable. A continuación, se presenta una lista ordenada de las principales derivadas utilizadas en el cálculo diferencial:

Reglas básicas de derivación: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = D_x$

Derivada de una constante: Si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$

Derivada de una variable elevada a una potencia (Regla de la potencia):

Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Derivada de una constante por una función:

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, entonces $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Derivada de una suma (o diferencia) de funciones:

Si $f(x) = g(x) \pm h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Derivada del producto de funciones (Regla del producto):

Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Derivada del cociente de funciones (Regla del cociente):

Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Derivada de una constante a una variable:

Si $f(x) = a^x$, entonces $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$

Derivada del logaritmo natural:

Si $f(x) = \ln(x) \mid x > 0$, entonces $f'(x) = 1/x \mid x > 0$

Derivada exponencial:

Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$

Derivadas algebraicas: c, n Constantes x, u, v, w Funciones o expresiones o variables

$$\frac{d}{dx}(c) = 0; \quad \frac{d}{dx}(x) = 1; \quad \frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v) \pm \frac{d}{dx}(w); \quad \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(v^n) = n \cdot v^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(v); \quad \frac{d}{dx}(c \cdot v) = c \cdot \frac{d}{dx}(v); \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(v)}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx}(v)$$

$$\text{Exponencial y Logarítmica} \quad \frac{d}{dx} a^v = \ln(a) \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx};$$

$$\frac{d}{dx} e^v = e^v \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \frac{d}{dx} \ln(v) = \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dx}(v); \quad \frac{d}{dx} \log_a(u) = \frac{1}{u \cdot \ln(a)} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{Ejemplo 1: } \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}, \text{ donde } n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ejemplo 3: } \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \rightarrow \text{true} \therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Ejemplo 4: } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 5: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln(a)$, para $a > 0$, $a \neq 1$

Ejemplo 6: $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$

Ejemplo 7: $f(x) = 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot 2x = 12x$

Ejemplo 8: $f(x) = -4x^3 \Rightarrow f'(x) = -4 \cdot 3x^2 = -12x^2$

Ejemplo 9: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^{4-1} = 2x^3$

Ejemplo 10: $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$

Ejemplo 11: $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - x) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x) \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x) = 3 \cdot x^2 - 1 \rightarrow \text{true} \therefore \frac{d}{dx}(x^3 - x) = 3 \cdot x^2 - 1$$

Ejemplo 12: $f(x) = x^4 + x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x - 1$

Ejemplo 13: $f(x) = x \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) &= x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) \rightarrow \text{true} \Rightarrow \\ x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) &= x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot 1 \rightarrow \text{true} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot 1 = 1 + \ln(x) \rightarrow \text{true} \therefore \\ \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 14: $f(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \cdot e^x) &= x^2 \cdot \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) \rightarrow \text{true} \Rightarrow x^2 \cdot \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2 \cdot x \rightarrow \text{true} \\ \Rightarrow x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2 \cdot x &= e^x \cdot (x^2 + 2 \cdot x) \rightarrow \text{true} \therefore \frac{d}{dx}(x^2 \cdot e^x) = (x^2 + 2 \cdot x) \cdot e^x \end{aligned}$$

Ejemplo 15: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot 2x - (x^2 + 1)(1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) - (x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x)}{x^2} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \\ \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) - (x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x)}{x^2} &= \frac{x \cdot 2 \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{x \cdot 2 \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \rightarrow \text{true} \therefore \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 16: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 3x^2 - x^3(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right) &= \frac{(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \quad \text{true} \Delta \Rightarrow \\
 &= \frac{(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) \cdot 3 \cdot x^2 - x^3 \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} \quad \text{true} \Rightarrow \\
 &= \frac{(x^2+1) \cdot 3 \cdot x^2 - x^3 \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^4}{(x^2+1)^2} \quad \text{true} \Rightarrow \frac{3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3 \cdot x^2}{(x^2+1)^2} \quad \text{true} \therefore \\
 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right) &= \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2} \Delta
 \end{aligned}$$

Ejemplo 17: $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Ejemplo 18: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Ejemplo 19: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Ejercicios 4.2

1. $f(x) = x^4$
2. $f(x) = 3x^2 - x + 5$
3. $f(x) = x^{-3}$
4. $f(x) = \sqrt{x^3}$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
6. $f(x) = e^x$
7. $f(x) = 2x^3$
8. $f(x) = x^2 + x^4$
9. $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$
10. $f(x) = 5x - 7$
11. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
12. $f(x) = x \cdot \ln(x)$
13. $f(x) = x^2 e^x$
14. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

15. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
16. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
17. $f(x) = x^{5-x^3} + x$
18. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
19. $f(x) = \ln(3x)$
20. $f(x) = \sqrt{x^5}$
21. $f(x) = \frac{5}{x} + x^2$
22. $f(x) = 3x \cdot e^x$
23. $f(x) = a \cdot x + \ln(x)$
24. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$
25. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
26. Deriva la función $f(x) = x^5 - 3x^2 + 4$
27. Deriva $f(x) = \sqrt{x} + x^3$
28. Calcula $f(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$
29. Determina la derivada de $f(x) = \ln(x) + x^2$
30. Halla $f(x)$ si $f(x) = 3x^4$
31. Deriva la función $f(x) = x \cdot \ln(x)$
32. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 \cdot e^x$
33. Encuentra $f(x)$ si $f(x) = x^3 + 7x + 1$
34. Deriva $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
35. Determina la derivada de $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
36. Deriva $f(x) = 4x^3 - x + 12$
37. Calcula $f(x)$ si $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$
38. Deriva la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

39. Encuentra la derivada de $f(x) = e^{2x} + \ln(x)$

40. Deriva $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

41. Determina la derivada de $f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$

42. Halla $f(x)$ si $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

4.3 Derivada de n-ésimo orden

Las derivadas de orden superior o n-ésimas derivadas amplían el análisis de funciones más allá de la tasa de cambio inmediata. Se obtienen al aplicar el proceso de diferenciación sucesiva sobre una función. Estos cálculos son esenciales para entender con mayor profundidad el comportamiento de fenómenos en administración y economía como el crecimiento, la aceleración de tendencias, el análisis de puntos críticos y la evolución marginal.

Sea $f(x)$ una función derivable. Entonces:

- La primera derivada $f'(x)$ representa la tasa instantánea de cambio.
- La segunda derivada $f''(x)$ representa la concavidad, aceleración o variabilidad en la tasa de cambio.
- La n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$ se define como: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

donde $n \in \mathbb{N}$ indica el número de veces que se aplica el operador de derivación.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^4$

- $f'(x) = 4x^3$
- $f''(x) = 12x^2$
- $f^{(3)}(x) = 24x$
- $f^{(4)}(x) = 24$

Ejemplo 2. Sea $f(x) = e^x$

- $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = \ln(x)$

- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

- $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

Las derivadas sucesivas de funciones polinómicas terminan en cero cuando el orden excede el grado.

Las funciones exponenciales tienen derivadas invariantes.

Las derivadas de funciones logarítmicas siguen un patrón de alternancia y factorial en el numerador.

Las derivadas de orden superior permiten analizar aspectos avanzados del comportamiento económico, como la variabilidad en la tasa de crecimiento, el cambio en las tendencias de costos e ingresos, y la aceleración de la productividad o demanda.

Aceleración en el crecimiento de ingresos

Definición: La segunda derivada del ingreso expresa cómo varía la tasa de crecimiento del ingreso conforme cambia la cantidad vendida. Si la segunda derivada es positiva, indica una aceleración en el crecimiento; si es negativa, una desaceleración.

Ejemplo 1: Una empresa registra su ingreso total por ventas como $I(x) = x^3 + 5x^2 + 12x$

Determina la segunda derivada para conocer la aceleración en el crecimiento de ingresos.

$$I'(x) = 3x^2 + 10x + 12$$

$$I''(x) = 6x + 10$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 + 5 \cdot x^2 + 12 \cdot x) &\rightarrow 3 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 12 \Rightarrow \frac{d}{dx}(3 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 12) \rightarrow 6 \cdot x + 10 \therefore \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^3 + 5 \cdot x^2 + 12 \cdot x) &\rightarrow 6 \cdot x + 10 \end{aligned}$$

Curvatura en la función de costos

Definición: La segunda derivada del costo total representa la curvatura o la sensibilidad del costo marginal. Permite saber si el costo marginal está aumentando o disminuyendo. Esto es útil para detectar puntos de inflexión en la eficiencia productiva.

Ejemplo 2: Una fábrica modela su costo total como $C(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2$.

Determina la segunda derivada para evaluar cómo varía el costo marginal.

$$C'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x$$

$$C''(x) = 12x^2 + 12x + 6$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^4 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2) &\rightarrow 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x \Rightarrow \frac{d}{dx}(4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x) \rightarrow 12 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 \therefore \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^4 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2) &\rightarrow 12 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 \end{aligned}$$

Variabilidad en la demanda según la tasa de cambio

Definición: La segunda derivada de la demanda permite identificar la naturaleza de la sensibilidad en la cantidad demandada frente al precio o ingreso. Analiza si la elasticidad está creciendo o decreciendo en el rango de estudio.

Ejemplo 3:

La demanda de un artículo está dada por $D(p) = -p^3 + 6p^2 - 9p + 30$.

Calcula la segunda derivada para analizar la variabilidad de la demanda.

$$D'(p) = -3p^2 + 12p - 9$$

$$D''(p) = -6p + 12$$

Comportamiento técnico de precios

Definición: La tercera derivada del precio se puede utilizar para modelar tendencias en precios dinámicos o predictivos. Ayuda a evaluar la aceleración o desaceleración en las variaciones del precio respecto a factores económicos.

Ejemplo 4:

Una empresa establece precios con base en una función de ajuste:

$$P(t) = t^4 - 3t^3 + 2t^2 + 5t$$

Determina la tercera derivada para analizar el comportamiento técnico del precio.

$$P'(t) = 4t^3 - 9t^2 + 4t + 5$$

$$P''(t) = 12t^2 - 18t + 4$$

$$P'''(t) = 24t - 18$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t^4 - 3t^3 + 2t^2 + 5t) &\rightarrow 4t^3 - 9t^2 + 4t + 5 \Rightarrow \frac{d}{dt}(4t^3 - 9t^2 + 4t + 5) \rightarrow 12t^2 - 18t + 4 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(12t^2 - 18t + 4) &\rightarrow 24t - 18 \therefore \frac{d^3}{dt^3}(t^4 - 3t^3 + 2t^2 + 5t) \rightarrow 24t - 18 \end{aligned}$$

Ritmo de cambio marginal en inversión acumulada

Definición: La segunda o tercera derivada de la inversión acumulada indica la velocidad con la que se incrementa o estabiliza el rendimiento económico. Se usa para optimizar horizontes de retorno o tasas de crecimiento financiero.

Ejemplo 5:

El valor acumulado de una inversión está modelado por $V(t) = 2000e^{0.03t} + t^2$. Calcula las derivadas de segundo y tercer orden para interpretar el ritmo de cambio en el crecimiento.

$$V'(t) = 2000e^{0.03t} \times 0.03 + 2t$$

$$V''(t) = 60e^{0.03t} + 2$$

$$V'''(t) = 1.8e^{0.03t} + 2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(2000 \cdot e^{0.03 \cdot t + t^2}) &= 2000 \cdot e^{0.03 \cdot t} \cdot 0.03 + 2 \cdot t \rightarrow \text{true} \Rightarrow \\ 2000 \cdot e^{0.03 \cdot t} \cdot 0.03 + 2 \cdot t &= 60 \cdot e^{0.03 \cdot t + 2 \cdot t} \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{d}{dt}(60 \cdot e^{0.03 \cdot t + 2 \cdot t}) = 1.8 \cdot e^{0.03 \cdot t + 2} \rightarrow \text{true} \\ \therefore \frac{d^2}{dt^2}(2000 \cdot e^{0.03 \cdot t + t^2}) &= 1.8 \cdot e^{0.03 \cdot t + 2} \rightarrow \text{true} \end{aligned}$$

Ejercicios de aplicación

1. Una empresa presenta su ingreso total como $I(x) = x^3 + 4x^2 + 5x$. Calcula la segunda derivada e interpreta la aceleración del ingreso.
2. Si el ingreso es $I(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7$, evalúa cómo varía la tasa de crecimiento.
3. El modelo de ingreso está dado por $I(x) = x^4 + x^2 + x$. Determina la aceleración en el crecimiento.
4. Una función de ingreso se expresa como $I(x) = 5x^3 + 6x + 10$. Obtén la segunda derivada.
5. La función de ingresos de una plataforma es $I(x) = x^5 + 2x^3 + x$. Calcula $I''(x)$ para conocer el cambio en la tasa de crecimiento.

Curvatura en la función de costos

6. El costo total de fabricación está modelado por $C(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2$. Determina su segunda derivada.
7. Si el costo se expresa como $C(x) = x^5 + 4x^2 + 8$, analiza cómo varía el costo marginal.
8. La función es $C(x) = 6x^3 + 9x^2 + x$. Calcula $C''(x)$ para examinar la eficiencia.
9. Una empresa usa $C(x) = x^2 + 4x + 100$ como función de costos. Evalúa la curvatura.
10. El modelo productivo define costos con $C(x) = x^6 + x^3 + x^2$. Calcula la segunda derivada.

Variabilidad en la demanda según la tasa de cambio

11. La demanda de un producto está definida por $D(x) = -x^3 + 5x - 8x + 20$. Evalúa la segunda derivada.
12. Si $D(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$, analiza la variabilidad en la demanda.
13. Una empresa registra $D(x) = \ln x + x^2$ como demanda estimada. Determina $D''(x)$.
14. La función de demanda es $D(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$. Evalúa cómo cambia la sensibilidad.
15. Si la demanda está dada por $D(x) = 5x^4 + x^2 + 10$, calcula la segunda derivada.

Comportamiento técnico de precios

16. La función de precio está dada por $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$. Obtén la tercera derivada.
17. Si $P(x) = x^5 + x^3 - x$, analiza el comportamiento técnico del precio.
18. La empresa define $P(x) = 2x^4 + 4x^2 + 9$. Calcula la tercera derivada.
19. En un mercado ajustable, el precio se modela como $P(x) = \ln(x^2 + 1) + x$. Determina el tercer orden de derivación.

20. La función de precios predictiva es $P(x) = e^{0.05x} + x^4$. Evalúa el comportamiento técnico con la tercera derivada.

Ritmo de cambio marginal en inversión acumulada

21. Una inversión está modelada por $V(t) = 2000e^{0.03t} + t^2$. Calcula $V''(t)$ y $V^{(3)}(t)$.

22. Si $V(t) = 500e^{0.04t} + \ln t$, determina sus derivadas superiores.

23. El valor proyectado es $V(t) = t^3 + 4t^2 + 7t$. Evalúa la segunda y tercera derivada.

24. La empresa define inversión como $V(t) = et + t^2$. Calcula $V^{(2)}(t)$ y $V^{(3)}(t)$.

25. Si $V(t) = \ln(t^2 + 1) + 3t$, determina las derivadas de segundo y tercer orden.

4.4 Derivadas Parciales Básicas.

En análisis económico y administrativo, es común trabajar con funciones que dependen de dos variables, como ingreso en función de precio y cantidad, o costo en función de producción y tiempo. Para estudiar cómo varía la función respecto a cada variable individualmente, se utilizan las derivadas parciales, que permiten mantener constantes las demás variables mientras se analiza el cambio con respecto a una en particular.

Sea $f(x, y)$ una función real definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de primer orden se definen como:

Derivada parcial respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{Notación común: } f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Derivada parcial respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad \text{Notación común: } f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Notas esenciales

Al calcular una derivada parcial, todas las variables distintas de la que se deriva se tratan como constantes.

Las derivadas parciales describen la tasa de cambio de la función en una dirección específica del plano.

Las derivadas parciales pueden extenderse a órdenes superiores (por ejemplo, f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} para analizar curvatura e interacción entre variables).

Ejemplo 1.

Sea la función $f(x, y) = x^2y + 3xy$. Calcula f_x y f_y .

Solución:

- Derivada parcial respecto a x :
- $f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 3xy) = 2xy + 3y$

- Derivada parcial respecto a y :

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3xy^2) = x^2 + 6xy$$

Ejemplo 2.

Sea $f(x, y) = e^{xy} + x \ln y$. Encuentra f_x y f_y .

Solución:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + x \ln y) = ye^{xy} + \ln y$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + x \ln y) = xe^{xy} + \frac{x}{y}$$

$$f(x, y) = e^{x \cdot y} + x \cdot \ln(y)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x \cdot y} + x \cdot \ln(y)) = e^{x \cdot y} \cdot y + \ln(y)$$

$$\frac{d}{dy}(e^{x \cdot y} + x \cdot \ln(y)) = e^{y \cdot x} \cdot x + \frac{x}{y}$$

Usa el emulador para construir el procedimiento completo

Ejemplo 3.

Dada $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcula f_x y f_y .

Solución:

Aplicamos regla de derivación en raíz compuesta:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{d}{dy}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

Usa el emulador para construir el procedimiento completo

Ejemplo 4.

Sea $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$. Determina f_x y f_y .

Solución:

Usamos regla del cociente:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f_x &= \frac{2x(x-y) - (x^2 + y^2)(1)}{(x-y)^2} = \frac{2x^2 - 2xy - x^2 - y^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x-y)^2} \\ \bullet \quad f_y &= \frac{2y(x-y) - (x^2 + y^2)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2xy - 2y^2 + x^2 + y^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{x-y} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+y^2}{x-y} \right) &= \frac{x^2-2 \cdot x \cdot y - y^2}{(x-y)^2} \quad \triangle \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{x^2+y^2}{x-y} \right) &= \frac{-y^2-2 \cdot y \cdot x - x^2}{(y-x)^2} \quad \triangle \end{aligned}$$

Usa el emulador para construir el procedimiento completo

Ejemplo 5.

Sea $f(x, y) = x^2 \cdot \cos(y) + y^3 \cdot \ln(x)$. Calcula f_x y f_y .

Solución:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f_x &= 2x \cos y + \frac{y^3}{x} \\ \bullet \quad f_y &= -x^2 \sin y + 3y^2 \ln x \end{aligned}$$

Ejemplo 6.

Dada $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, encuentra f_x y f_y .

Solución:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f_x &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \bullet \quad f_y &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Lista de ejercicios

1. Determina f_x y f_y de $f(x, y) = x^2 \cdot y + y^3$
2. Calcula las derivadas parciales de $f(x, y) = x^3 + y^4 + 2x \cdot y$
3. Encuentra f_x y f_y de $f(x, y) = \ln(x \cdot y + 1)$
4. Halla f_x y f_y de $f(x, y) = e^{x+y^2}$

5. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = x^2 + y^2 + x \cdot \ln(y)$
6. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = x^2 y^2 + x \cdot \ln(x)$
7. Encuentra las derivadas parciales de $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y + 1}$
8. Determina f_x y f_y de $f(x, y) = e^x + e^y + x \cdot y$
9. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = x \cdot \ln(x^2 + y)$
10. Halla las derivadas parciales de $f(x, y) = \ln(x + y^2 + 1)$
11. Encuentra f_x y f_y de $f(x, y) = x^4 + y^3 + 2x^2 y$
12. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = e^{x^2 + y^2} + x^2 y$
13. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = \frac{x \cdot \ln(y)}{x + y}$
14. Encuentra f_x y f_y de $f(x, y) = x^2 y + y \cdot \ln(x)$
15. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = e^{x \cdot y} + x^2 + y^2$
16. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + x \cdot y$
17. Halla f_x y f_y de $f(x, y) = x \ln(x) + y \ln(y)$
18. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x + y}$
19. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = x \ln(x \cdot y + 1)$
20. Encuentra las derivadas parciales de $f(x, y) = e^x + \ln(y) + x \cdot y^2$
21. Determina f_x y f_y de $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y^2 + x)$
22. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = e^x \cdot y^2 + e^y \cdot x^2$
23. Halla f_x y f_y de $f(x, y) = x^3 \cdot y + e^x \cdot y$
24. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\ln(x + y + 2)}$
25. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = x^2 \cdot y + x \cdot y \cdot \ln(x \cdot y)$
26. Encuentra f_x y f_y de $f(x, y) = x^2 + y^2 + x \cdot e^y$
27. Determina las derivadas parciales de $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + e^{x \cdot y}$
28. Calcula f_x y f_y de $f(x, y) = x \cdot \ln(x + y^2)$
29. Halla f_x y f_y de $f(x, y) = y \cdot e^{x^2} + y^2 + x^3$
30. Determina f_x y f_y de $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 1}$

4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos)

Las derivadas permiten identificar el comportamiento local de una función. En economía, administración y ciencias aplicadas, es fundamental conocer cuándo una función alcanza su punto máximo o mínimo para optimizar recursos, precios, producción, ingresos y utilidades. Las herramientas principales para analizar estos puntos son la primera y segunda derivada.

Definiciones fundamentales

Punto crítico: Valor de x donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Primera derivada $f'(x)$: Describe el crecimiento o decrecimiento de la función. Se usa para encontrar puntos donde la función cambia de sentido.

Segunda derivada $f''(x)$: Evalúa la concavidad de la función en los puntos críticos:

Si $f''(x) > 0$, el punto crítico es mínimo local.

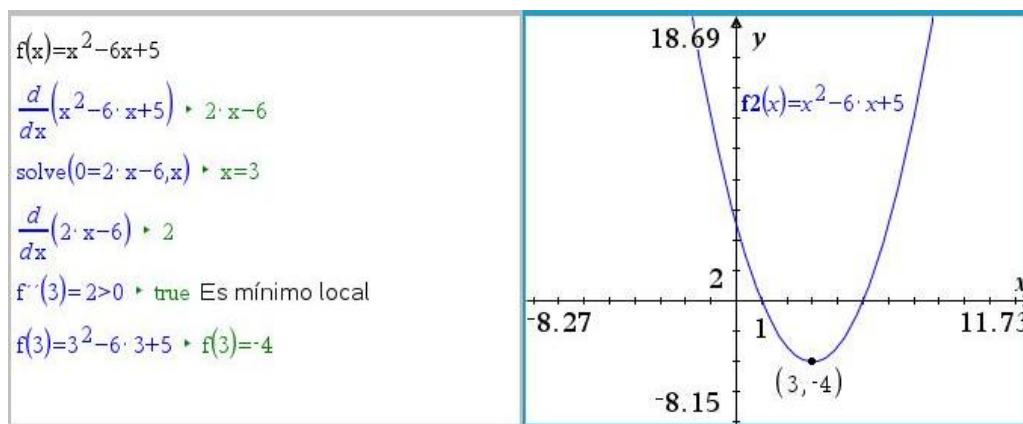
Si $f''(x) < 0$, el punto crítico es máximo local.

Ejemplo 1.

Determina los extremos locales de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Solución:

- Primera derivada: $f'(x) = 2x - 6$
Igualamos a cero: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$
- Segunda derivada: $f''(x) = 2$
Como $f''(3) > 0$, entonces $x = 3$ es mínimo local.
- Valor mínimo: $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$



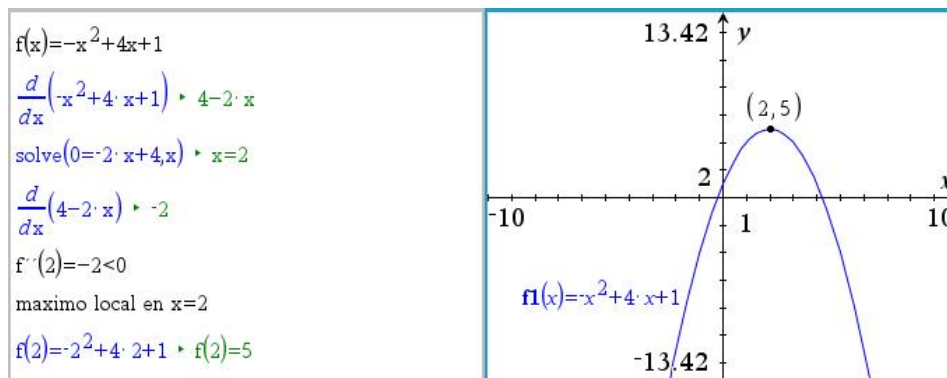
Ejemplo 2.

Encuentra los extremos locales de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

Solución:

- $f'(x) = -2x + 4$
 $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

- $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(2) < 0$
Máximo local en $x = 2$
- $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$



Ejemplo 3.

Determina el máximo o mínimo de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
- $f''(x) = 6x - 6$; $f''(0) = -6 \Rightarrow$ máximo en $x = 0$
 $f''(2) = 6 \Rightarrow$ mínimo en $x = 2$
- $f(0) = 0 - 0 + 2 = 2$; $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$

Ejemplo 4.

Analiza la función $f(x) = x^4 - 4x^2$

Solución:

- $f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$
- $f''(x) = 12x^2 - 8$
 $f''(0) = -8 \Rightarrow$ máximo en $x = 0$
 $f''(\sqrt{2}) = 12(2) - 8 = 16 \Rightarrow$ mínimo en $x = \pm\sqrt{2}$
- $f(0) = 0$; $f(\sqrt{2}) = 4 - 8 = -4$

Ejemplo 5.

Determina extremos locales de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Solución:

- $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(0) = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo local en } x = 0$$

- $f(0) = \ln(1) = 0$

Ejemplo 6.

Encuentra máximos y mínimos de $f(x) = xe^{-x}$

Solución:

- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$
- $f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = -e^{-x}(2 - x)$
 $f''(1) = -e^{-1}(1) < 0 \Rightarrow \text{máximo local en } x = 1$
- $f(1) = e^{-1} \approx 0.3679$

Ejercicios

1. Determina los extremos locales de $f(x) = x^2 - 8x + 15$
2. Analiza los máximos y mínimos de $f(x) = -x^2 + 6x - 4$
3. Evalúa los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
4. Calcula los extremos de $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$
5. Determina máximos y mínimos de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
6. Encuentra los extremos locales de $f(x) = x \cdot e - x$
7. Identifica los puntos críticos de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
8. Evalúa el comportamiento de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
9. Analiza los extremos de $f(x) = e^{-x^2}$
10. Determina máximos y mínimos de $f(x) = x^5 - 5x^3$
11. Calcula los extremos de $f(x) = \ln(x + 1) - x$
12. Evalúa los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 3x + 2$
13. Analiza los extremos de $f(x) = x^4 - 8x^2$
14. Determina máximos y mínimos de $f(x) = \ln(x^4 + 1)$
15. Identifica los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 20$
16. Evalúa los extremos de $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$
17. Analiza $f(x) = x^2 - \ln x, x > 0$

18. Determina extremos de $f(x) = x^3 e^{-x}$
19. Calcula máximos y mínimos de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
20. Encuentra extremos de $f(x) = x^2 e^x$
21. Evalúa puntos críticos de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$
22. Analiza extremos de $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
23. Determina extremos locales de $f(x) = x \cdot \ln x, x > 0$
24. Encuentra extremos de $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$
25. Evalúa $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$
26. Analiza extremos de $f(x) = x^4 - x^2$
27. Determina máximos y mínimos de $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$
28. Encuentra extremos de $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 2}$
29. Evalúa comportamiento de $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2), x > -1$

Aplicaciones

La función de ingreso total $I(x)$ representa el monto obtenido por la venta de x unidades de un producto. Para encontrar el número de unidades que maximiza dicho ingreso, se calcula la primera derivada $I'(x)$ y se determina el punto crítico donde esta se anula. Posteriormente, la segunda derivada $I''(x)$ permite verificar si ese punto corresponde a un máximo local. Esta técnica es útil para identificar el nivel óptimo de ventas.

Ejemplo 1: Una empresa modela su ingreso total con $I(x) = -2x^2 + 40x$, donde x representa el número de unidades vendidas.

Solución:

- $I'(x) = -4x + 40 \Rightarrow -4x + 40 = 0 \Rightarrow x = 10$
- $I''(x) = -4 \Rightarrow \text{negativo} \Rightarrow \text{máximo local}$
- Ingreso máximo: $I(10) = -200 + 400 = 200$

El costo total $C(x)$ depende de la cantidad producida x . Para determinar el nivel de producción que minimiza el costo, se busca el punto crítico de la función mediante la primera derivada $C'(x)$ igualada a cero. Se aplica la segunda derivada $C''(x)$ para confirmar que dicho punto corresponde a un mínimo local. Este análisis permite optimizar recursos y reducir gastos operativos.

Ejemplo 2: El costo total está dado por $C(x) = x^2 - 16x + 140$, donde x es el número de unidades producidas.

Solución:

- $C'(x) = 2x - 16 \Rightarrow 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8$
- $C''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ mínimo local
- Costo mínimo: $C(8) = 64 - 128 + 140 = 76$

La utilidad $U(x)$ refleja la ganancia obtenida por la venta de x unidades, considerando ingresos y costos. La primera derivada $U'(x)$ determina el punto de equilibrio en el crecimiento de utilidad, y la segunda derivada $U''(x)$ establece si dicho punto representa un máximo local. Esta técnica permite definir el volumen de producción que genera la mayor rentabilidad.

Ejemplo 3: La función utilidad es $U(x) = -x^2 + 20x - 75$

Solución:

- $U'(x) = -2x + 20 \Rightarrow -2x + 20 = 0 \Rightarrow x = 10$
- $U''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ máximo local
- $U(10) = -100 + 200 - 75 = 25$

El ingreso marginal $M(x)$ indica el cambio en el ingreso total cuando se vende una unidad adicional. El valor óptimo de x que maximiza o minimiza este ingreso se determina encontrando los puntos críticos de $M'(x)$ y analizando su concavidad con $M''(x)$. Esta aplicación ayuda a establecer políticas de producción escalonada o escalamiento progresivo.

Ejemplo 4: El ingreso marginal se modela con $M(x) = xe^{-0.5x}$

Solución:

- $M'(x) = e^{-0.5x}(1 - 0.5x) \Rightarrow M'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 0.5x = 0 \Rightarrow x = 2$
- $M(x) = -0.5e^{-0.5x}(1 - 0.5x) - 0.5e^{-0.5x} = -e^{-0.5x}(1 - x)$
 $\Rightarrow M''(2) = -e^{-1}(1 - 2) = e^{-1} > 0 \Rightarrow$ mínimo

La función $T(x)$ modela el tiempo de operación requerido para producir x unidades de un bien. Su análisis mediante derivadas permite determinar el punto en el que dicho tiempo se minimiza. Al calcular $T'(x)$ e igualarlo a cero se obtiene el punto crítico, mientras que $T''(x)$ indica si este corresponde a un mínimo. Esta herramienta es clave en la programación de procesos industriales o logísticos.

Ejemplo 5: El tiempo operativo de una máquina está modelado por $T(x) = x^2 - 12x + 40$

Solución:

- $T'(x) = 2x - 12 \Rightarrow x = 6$

- $T''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ mínimo local
- Tiempo mínimo: $T(6) = 36 - 72 + 40 = 4$

Ejercicios

Maximización de ingreso por ventas

1. Determina el número de unidades que maximiza el ingreso si $I(x) = -3x^2 + 48x$
2. Encuentra el punto máximo de $I(x) = -x^2 + 30x$
3. Calcula el ingreso máximo para $I(x) = -4x^2 + 64x$
4. Analiza la función $I(x) = -2x^2 + 36x$ para encontrar el valor óptimo de ventas
5. Determina el máximo ingreso con $I(x) = -5x^2 + 75x$

Minimización de costo de producción

6. Encuentra el nivel de producción que minimiza el costo si $C(x) = x^2 - 20x + 250$
7. Calcula el mínimo de $C(x) = x^2 - 14x + 196$
8. Determina los extremos de $C(x) = x^2 - 10x + 135$
9. Evalúa el punto mínimo para $C(x) = x^2 - 24x + 300$
10. Encuentra el valor mínimo de $C(x) = x^2 - 18x + 200$

Maximización de utilidad

11. Analiza $U(x) = -x^2 + 28x - 100$ y determina el máximo de utilidad
12. Encuentra el valor de x que maximiza $U(x) = -x^2 + 16x - 60$
13. Calcula el punto de utilidad máxima para $U(x) = -x^2 + 22x - 81$
14. Determina el máximo de $U(x) = -x^2 + 12x - 30$
15. Evalúa $U(x) = -x^2 + 18x - 64$ para obtener el punto de mayor utilidad

Maximización de ingreso marginal

16. Encuentra el punto crítico de $M(x) = xe^{-0.3x}$
17. Determina el máximo de ingreso marginal de $M(x) = xe^{-0.2x}$
18. Calcula el valor óptimo de x para $M(x) = xe^{-0.7x}$
19. Evalúa el comportamiento de $M(x) = xe^{-x}$ en torno al máximo
20. Analiza $M(x) = xe^{-0.4x}$ y encuentra el extremo local

Minimización del tiempo de operación

21. Calcula el valor mínimo de $T(x) = x^2 - 10x + 28$
22. Encuentra el tiempo mínimo en $T(x) = x^2 - 14x + 50$
23. Evalúa el punto óptimo de $T(x) = x^2 - 16x + 60$
24. Determina el mínimo operativo para $T(x) = x^2 - 18x + 82$
25. Analiza el comportamiento de $T(x) = x^2 - 20x + 95$

4.6 Aplicaciones a Ingresos, Costos y Utilidades

Definiciones fundamentales

1. Ingreso total (IT): Es el valor monetario obtenido por la venta de un número determinado de unidades de un producto. Se define como la multiplicación del precio unitario por la cantidad de unidades vendidas

$IT(x) = p(x) \cdot x$, donde $p(x)$ es el precio como función de la cantidad x .

2. Costo total (CT): Representa el gasto total de producción en función del número de unidades elaboradas. Incluye costos fijos y variables, y se expresa como una función dependiente de la cantidad producida:

$$CT(x) = CF + CV(x)$$

3. Utilidad (U): Es la diferencia entre el ingreso total y el costo total. Sirve para determinar la ganancia o pérdida obtenida por la empresa según el nivel de producción:

$$U(x) = IT(x) - CT(x)$$

Para determinar el nivel óptimo de producción, se calculan derivadas de estas funciones para identificar máximos, mínimos o puntos de equilibrio.

Ingreso total

Ejemplo 1

El precio de venta por unidad está dado por $p(x) = 40 - x$. Calcula el ingreso total y determina su valor máximo.

Solución:

- $IT(x) = p(x) \cdot x = (40 - x)x = 40x - x^2$
- $IT'(x) = 40 - 2x \Rightarrow 40 - 2x = 0 \Rightarrow x = 20$
- $IT''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ máximo local
- $IT(20) = 800 - 400 = 400$

Ejemplo 2.

Dado $p(x) = 50 - 2x$, calcula el ingreso total y encuentra su valor máximo.

Solución:

- $IT(x) = (50 - 2x)x = 50x - 2x^2$
- $IT'(x) = 50 - 4x \Rightarrow x = 12.5$
- $IT''(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ máximo
- $IT(12.5) = 625 - 312.5 = 312.5$

Ejemplo 3.

Si el precio por unidad es $p(x) = 60 - 3x$, halla el ingreso total y su máximo.

Solución:

- $IT(x) = (60 - 3x)x = 60x - 3x^2$

- $IT'(x) = 60 - 6x = 0 \Rightarrow x = 10$
- $IT(10) = 600 - 300 = 300$

Ejemplo 4.

Encuentra el máximo de ingreso si $p(x) = 30 - 0.5x$

Solución:

- $IT(x) = (30 - 0.5x)x = 30x - 0.5x^2$
- $IT'(x) = 30 - x \Rightarrow x = 30$
- $IT(30) = 900 - 450 = 450$

Ejemplo 5.

Dado $p(x) = 80 - 4x$, determina el ingreso total y su extremo.

Solución:

- $IT(x) = (80 - 4x)x = 80x - 4x^2$
- $IT'(x) = 80 - 8x = 0 \Rightarrow x = 10$
- $IT(10) = 800 - 400 = 400$

Costo total

Ejemplo 6.

La función de costo está dada por $CT(x) = x^2 + 10x + 50$. Encuentra el punto mínimo.

Solución:

- $CT'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5$
- $CT''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ mínimo local
- $CT(-5) = 25 - 50 + 50 = 25$

Ejemplo 7.

Sea $CT(x) = x^2 - 16x + 180$. Calcula el mínimo costo.

Solución:

- $CT'(x) = 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8$
- $CT(8) = 64 - 128 + 180 = 116$

Ejemplo 8.

Para $CT(x) = x^2 + 6x + 100$, determina el mínimo.

Solución:

- $CT'(x) = 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$
- $CT(-3) = 9 - 18 + 100 = 91$

Ejemplo 9.

Evalúa el mínimo de $CT(x) = x^2 - 12x + 140$

Solución:

- $CT'(x) = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$
- $CT(6) = 36 - 72 + 140 = 104$

Ejemplo 10.

Encuentra el mínimo costo si $CT(x) = x^2 - 20x + 256$

Solución:

- $CT'(x) = 2x - 20 = 0 \Rightarrow x = 10$
- $CT(10) = 100 - 200 + 256 = 156$

Utilidad

Ejemplo 11.

Si $IT(x) = -2x^2 + 40x$ y $CT(x) = x^2 + 10x + 100$, calcula la utilidad y su máximo.

Solución:

- $U(x) = IT(x) - CT(x) = -2x^2 + 40x - x^2 - 10x - 100 = -3x^2 + 30x - 100$
- $U'(x) = -6x + 30 = 0 \Rightarrow x = 5$
- $U(5) = -75 + 150 - 100 = -25$

Ejemplo 12.

Dado $IT(x) = 60x - 3x^2$ y $CT(x) = x^2 + 20x + 80$, calcula utilidad máxima.

Solución:

- $U(x) = 60x - 3x^2 - x^2 - 20x - 80 = -4x^2 + 40x - 80$
- $U'(x) = -8x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5$
- $U(5) = -100 + 200 - 80 = 20$

Ejemplo 13.

Calcula utilidad máxima si $IT(x) = 50x - 2x^2$, $CT(x) = x^2 + 10x + 90$

Solución:

- $U(x) = 50x - 2x^2 - x^2 - 10x - 90 = -3x^2 + 40x - 90$
- $U'(x) = -6x + 40 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6.67$

Ejemplo 14.

Dado $IT(x) = 100x - 5x^2$ y $CT(x) = x^2 + 40x + 120$, encuentra el valor de producción que maximiza la utilidad.

Solución:

- Utilidad:

$$U(x) = IT(x) - CT(x) = 100x - 5x^2 - (x^2 + 40x + 120)$$

$$U(x) = -6x^2 + 60x - 120$$
- Primera derivada:

$$U'(x) = -12x + 60 \Rightarrow -12x + 60 = 0 \Rightarrow x = 5$$
- Segunda derivada:

$$U''(x) = -12 < 0 \Rightarrow \text{máximo local}$$
- Valor máximo de utilidad:

$$U(5) = -150 + 300 - 120 = 30$$

Ejemplo 15.

Si $IT(x) = 60x - x^2$ y $CT(x) = x^2 + 30x + 50$, calcula el valor óptimo de producción que maximiza la utilidad.

Solución:

- Utilidad:

$$U(x) = 60x - x^2 - (x^2 + 30x + 50) = -2x^2 + 30x - 50$$
- Primera derivada:

$$U'(x) = -4x + 30 = 0 \Rightarrow x = 7.5$$
- Segunda derivada:

$$U''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \text{máximo local}$$
- Valor máximo de utilidad:

$$U(7.5) = -2(56.25) + 225 - 50 = -112.5 + 175 = 62.5$$

Ejercicios

Ingreso Total

1. Si el precio por unidad está dado por $p(x) = 50 - x$, determina el ingreso total y analiza su comportamiento.
2. Sea $p(x) = 60 - 2x$, encuentra la expresión del ingreso total y localiza su extremo.
3. Dado el precio por unidad $p(x) = 80 - 4x$, calcula el ingreso total y determina su punto máximo.
4. Si el precio depende de la cantidad mediante $p(x) = 45 - 3x$, obtén el ingreso total.
5. Sea $p(x) = 100 - 5x$, determina el valor de producción que maximiza el ingreso total.

Costo Total

6. Dado $CT(x) = x^2 + 15x + 100$, evalúa el punto mínimo.
7. Si $CT(x) = x^2 - 18x + 200$, encuentra el nivel de producción más eficiente.
8. Sea la función de costo $CT(x) = x^2 + 8x + 80$, analiza su comportamiento.
9. Dado $CT(x) = x^2 - 20x + 250$, determina el valor de x que minimiza el costo.

10. Si $CT(x) = x^2 + 10x + 120$, encuentra su mínimo local.

Utilidad

11. Si $IT(x) = 60x - x^2$ y $CT(x) = x^2 + 20x + 50$, determina la función utilidad y su extremo.

12. Sea $IT(x) = 100x - 4x^2$ y $CT(x) = x^2 + 40x + 60$, calcula la utilidad máxima.

13. Dado $IT(x) = 40x - 2x^2$ y $CT(x) = x^2 + 12x + 90$, encuentra el nivel óptimo de producción.

14. Si $IT(x) = 80x - 5x^2$ y $CT(x) = x^2 + 30x + 100$, determina el punto donde la utilidad es máxima.

15. Sea $IT(x) = 50x - x^2$ y $CT(x) = x^2 + 25x + 120$, analiza la función utilidad.

Ingreso, Costo y Utilidad combinados

16. Dado $IT(x) = x(60 - x)$ y $CT(x) = x^2 + 10x + 90$, evalúa la utilidad y su extremo.

17. Sea $p(x) = 70 - 2x$ y $CT(x) = x^2 + 20x + 80$, determina el ingreso y la utilidad.

18. Si $IT(x) = 100x - 3x^2$ y $CT(x) = x^2 + 40x + 150$, calcula la utilidad máxima.

19. Dado $p(x) = 40 - x$ y $CT(x) = x^2 + 15x + 120$, encuentra el nivel óptimo de utilidad.

20. Sea $IT(x) = 90x - 6x^2$ y $CT(x) = x^2 + 35x + 110$, evalúa el punto crítico de utilidad.

Aplicaciones interpretativas

21. Dado $p(x) = 60 - x$, interpreta el significado económico del valor donde el ingreso es máximo.

22. Si $CT(x) = x^2 + 12x + 80$, analiza cómo se comporta el costo marginal en función de x .

23. Evalúa en qué nivel de producción x se maximiza la utilidad si $U(x) = -2x^2 + 20x - 50$

24. Dado $IT(x) = x(70 - 2x)$ y $CT(x) = x^2 + 25x + 140$, analiza los extremos de utilidad.

25. Explica cómo se calcula el nivel óptimo de producción cuando se conocen las funciones de ingreso y costo.

4.7 Análisis Marginal.

El análisis marginal consiste en estudiar el comportamiento de una función económica ante cambios pequeños o incrementales en las variables que la afectan. Es una herramienta esencial para evaluar decisiones óptimas en producción, costos, ingresos y utilidades. En este contexto, se utilizan derivadas para modelar cómo varían estas funciones con respecto a la cantidad producida o vendida.

Ingreso marginal: El ingreso marginal se refiere al cambio instantáneo en el ingreso total cuando se vende una unidad adicional. Se representa como la derivada de la función de ingreso total:

$$IM(x) = \frac{d}{dx}[IT(x)]$$

Ejemplo 1. Dado $IT(x) = 30x - x^2$, calcula el ingreso marginal.

- $IM(x) = \frac{d}{dx}(30x - x^2) = 30 - 2x$

Ejemplo 2. Sea $IT(x) = 50x - 2x^2$, halla el ingreso marginal en $x = 10$.

- $IM(x) = \frac{d}{dx}(50x - 2x^2) = 50 - 4x$
- $IM(10) = 50 - 40 = 10$

Ejemplo 3. Si $p(x) = 40 - x$, encuentra el ingreso marginal de $IT(x) = x(40 - x)$.

- $IT(x) = 40x - x^2$
- $IM(x) = \frac{d}{dx}(40x - x^2) = 40 - 2x$

Ejemplo 4. Dada $IT(x) = 80x - 4x^2$, calcula $IM(x)$ y evalúa en $x = 8$.

- $IM(x) = \frac{d}{dx}(80x - 4x^2) = 80 - 8x$
- $IM(8) = 80 - 64 = 16$

Costo marginal: El costo marginal indica el cambio instantáneo en el costo total por producir una unidad adicional. Se representa como la derivada de la función de costo total:

$$CM(x) = \frac{d}{dx}[CT(x)]$$

Ejemplo 5. Sea $CT(x) = x^2 + 10x + 50$, calcula el costo marginal.

- $CM(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 10x + 50) = 2x + 10$

Ejemplo 6. Dado $CT(x) = x^2 - 16x + 200$, evalúa el costo marginal en $x = 4$.

- $CM(x) = 2x - 16$
- $CM(4) = 8 - 16 = -8$

Ejemplo 7. Si $CT(x) = x^2 + 8x + 100$, determina el costo marginal y evalúa en $x = 6$.

- $CM(x) = 2x + 8$
- $CM(6) = 12 + 8 = 20$

Ejemplo 8. Para $CT(x) = x^2 + 5x + 90$, calcula $CM(x)$ y evalúa en $x = 10$.

- $CM(x) = 2x + 5$
- $CM(10) = 20 + 5 = 25$

Utilidad marginal: La utilidad marginal representa el cambio instantáneo en la utilidad total por producir o vender una unidad adicional. Se define como la derivada de la función de utilidad:

$$UM(x) = \frac{d}{dx}[U(x)] = IM(x) - CM(x)$$

Ejemplo 9. Dado $IT(x) = 60x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 20x + 80$, calcula la utilidad marginal.

- $U(x) = IT(x) - CT(x) = 60x - x^2 - x^2 - 20x - 80 = -2x^2 + 40x - 80$
- $UM(x) = \frac{d}{dx}(-2x^2 + 40x - 80) = -4x + 40$

Ejemplo 10. Sea $IT(x) = 90x - 3x^2$, $CT(x) = x^2 + 35x + 100$, encuentra $UM(x)$.

- $U(x) = 90x - 3x^2 - x^2 - 35x - 100 = -4x^2 + 55x - 100$
- $UM(x) = -8x + 55$

Ejemplo 11. Si $IT(x) = 50x - 2x^2$, $CT(x) = x^2 + 10x + 90$, halla la utilidad marginal en $x = 4$.

- $U(x) = -3x^2 + 40x - 90$
- $UM(x) = -6x + 40 \Rightarrow UM(4) = -24 + 40 = 16$

12. Dado $IT(x) = 70x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 25x + 110$, evalúa $UM(x)$ y calcula su valor en $x = 5$.

- $U(x) = 70x - x^2 - x^2 - 25x - 110 = -2x^2 + 45x - 110$
- $UM(x) = -4x + 45 \Rightarrow UM(5) = -20 + 45 = 25$

Ejercicios

Ingreso marginal

1. Dada la función $IT(x) = 40x - x^2$, calcula el ingreso marginal.
2. Sea $IT(x) = 50x - 2x^2$, encuentra $IM(x)$.
3. Si el precio por unidad es $p(x) = 30 - x$, determina el ingreso marginal.
4. Para $IT(x) = x(60 - x)$, halla el ingreso marginal.
5. Calcula $IM(x)$ cuando $IT(x) = 75x - 3x^2$.
6. Dada la expresión $IT(x) = 100x - 5x^2$, determina su ingreso marginal.
7. Sea $p(x) = 40 - 2x$, calcula el ingreso marginal correspondiente.
8. Si $IT(x) = x^2 \cdot e - x$, evalúa la derivada que representa el ingreso marginal.
9. Encuentra $IM(x)$ para $IT(x) = 90x - x^2$.
10. Dado $IT(x) = 80x - 4x^2$, calcula el ingreso marginal.

Costo marginal

11. Sea $CT(x) = x^2 + 10x + 120$, calcula el costo marginal.
12. Dado $CT(x) = x^2 - 20x + 200$, encuentra $CM(x)$.
13. Si $CT(x) = x^2 + 8x + 96$, determina su derivada marginal.
14. Para $CT(x) = x^2 + 15x + 160$, halla el costo marginal.
15. Calcula $CM(x)$ cuando $CT(x) = x^2 + 5x + 90$.
16. Dada la función $CT(x) = x^2 - 12x + 144$, evalúa su derivada.
17. Si $CT(x) = x^2 + 20x + 100$, encuentra el costo marginal.
18. Determina $CM(x)$ para $CT(x) = x^2 + 6x + 80$.
19. Sea $CT(x) = x^2 + 2x + 60$, calcula el costo marginal.
20. Dado $CT(x) = x^2 - 10x + 130$, halla la derivada correspondiente.

Utilidad marginal

21. Si $IT(x) = 60x - x^2$ y $CT(x) = x^2 + 20x + 80$, calcula la utilidad marginal.
22. Dado $IT(x) = 80x - 3x^2$, $CT(x) = x^2 + 25x + 100$, halla $UM(x)$.
23. Para $IT(x) = 100x - 4x^2$ y $CT(x) = x^2 + 40x + 150$, evalúa la derivada de utilidad.
24. Sea $IT(x) = x(70 - x)$, $CT(x) = x^2 + 30x + 120$, encuentra $UM(x)$.
25. Si $IT(x) = 50x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 15x + 110$, calcula la utilidad marginal.
26. Dado $IT(x) = 90x - 2x^2$, $CT(x) = x^2 + 35x + 105$, encuentra la derivada de $U(x)$.
27. Si $IT(x) = 45x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 10x + 95$, determina $UM(x)$.
28. $IT(x) = 70x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 28x + 100$, halla la utilidad marginal.
29. Calcula $UM(x)$ cuando $IT(x) = 60x - 2x^2$, $CT(x) = x^2 + 18x + 80$.
30. Dada $IT(x) = 55x - x^2$, $CT(x) = x^2 + 12x + 90$, evalúa la derivada de la utilidad.

Aplicaciones

Ejemplo 1 Ingreso marginal aplicado a ventas con precio variable

Una empresa vende cierto producto cuyo precio depende de la cantidad vendida según la función $p(x) = 60 - 1.5x$. Se desea conocer el ingreso marginal al vender x unidades.

Solución:

1. El ingreso total se define como:

$$IT(x) = p(x) \cdot x = (60 - 1.5x)x = 60x - 1.5x^2$$

2. Derivamos para obtener el ingreso marginal:

$$IM(x) = \frac{d}{dx}[60x - 1.5x^2] = 60 - 3x$$

3. Evaluamos en $x = 10$:

$$IM(10) = 60 - 30 = 30$$

Interpretación:

El ingreso marginal al vender la unidad número 10 es de \$30.

Ejemplo 2 Costo marginal aplicado a producción escalonada

Una planta productiva tiene costos totales dados por $CT(x) = x^2 + 12x + 140$, donde x es el número de unidades producidas. Se requiere conocer el costo marginal en $x = 6$.

Solución:

1. Calculamos la derivada de la función de costo:

$$CM(x) = \frac{d}{dx}[x^2 + 12x + 140] = 2x + 12$$

2. Evaluamos en $x = 6$:

$$CM(6) = 12 + 12 = 24$$

Interpretación:

El costo de producir la séptima unidad es de \$24.

Ejemplo 3 Utilidad marginal en estrategia de precios

Una compañía define su ingreso total como $IT(x) = 100x - 4x^2$ y su costo total como $CT(x) = x^2 + 35x + 100$. Determina la utilidad marginal.

Solución:

1. Construimos la función de utilidad:

$$U(x) = IT(x) - CT(x) = 100x - 4x^2 - (x^2 + 35x + 100)$$

$$U(x) = -5x^2 + 65x - 100$$

2. Derivamos para obtener la utilidad marginal:

$$UM(x) = \frac{d}{dx}[-5x^2 + 65x - 100] = -10x + 65$$

3. Evaluamos en $x = 5$:

$$UM(5) = -50 + 65 = 15$$

Interpretación:

La utilidad al producir la unidad número 6 aumenta en \$15.

Ejemplo 4 Evaluación de ingreso marginal en comportamiento comercial

El precio de un artículo sigue la función $p(x) = 48 - 2x$. Encuentra el ingreso marginal para el modelo de ingreso total correspondiente.

Solución:

1. Ingreso total:

$$IT(x) = x(48 - 2x) = 48x - 2x^2$$

2. Ingreso marginal:

$$IM(x) = \frac{d}{dx}(48x - 2x^2) = 48 - 4x$$

3. Evaluamos en ($x = 6$):

$$IM(6) = 48 - 24 = 24$$

Interpretación:

El ingreso por la séptima unidad vendida sería de \$24.

Ejemplo 5 Utilidad marginal aplicada a decisión financiera

Sea $IT(x) = 75x - 2x^2$ y $CT(x) = x^2 + 18x + 90$. Calcula la utilidad marginal en $x = 6$.

Solución:

$$1. \quad U(x) = 75x - 2x^2 - (x^2 + 18x + 90) = -3x^2 + 57x - 90$$

$$2. \quad UM(x) = \frac{d}{dx}[-3x^2 + 57x - 90] = -6x + 57$$

$$3. \quad UM(6) = -36 + 57 = 21$$

Interpretación:

La utilidad al producir la unidad número 7 incrementa en \$21.

Tema 5: Integración y Aplicaciones.

El cálculo integral es una herramienta fundamental en el análisis de acumulaciones, totales y áreas bajo curvas, con aplicaciones directas en los ámbitos económico y administrativo. A diferencia del cálculo diferencial, que se enfoca en tasas de cambio, el cálculo integral permite reconstruir funciones originales a partir de sus derivadas, así como determinar valores acumulados en procesos dinámicos.

Este tema introduce el concepto de antiderivada como base para la integración indefinida, y presenta las principales reglas de integración directa que permiten calcular integrales de funciones comunes. Posteriormente, se aborda la integral definida, que permite calcular el valor exacto de una acumulación en un intervalo determinado, con interpretación geométrica como área bajo la curva.

Finalmente, se exploran diversas aplicaciones del cálculo integral en problemas administrativos, tales como el cálculo de ingresos totales, costos acumulados, utilidad total y análisis de eficiencia productiva. El enfoque se orienta a fortalecer la capacidad del estudiante para aplicar el cálculo integral en la toma de decisiones, mediante ejemplos contextualizados y ejercicios estructurados.

5.1 Concepto de antiderivada.

Área bajo la curva mediante sumas de Riemann

El cálculo integral permite determinar el área bajo la gráfica de una función continua en un intervalo $[a, b]$. Una forma de aproximar esta área es mediante sumas de Riemann, que consisten en dividir el intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b-a)/n$, y construir rectángulos cuya altura depende del valor de la función en puntos específicos de cada subintervalo.

Suma de Riemann por la izquierda

En la suma por la izquierda, la altura de cada rectángulo se toma en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Si los puntos de división son $x_0, x_1, \dots, x_n$, entonces:

$$S_{\text{izq}} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Suma de Riemann por la derecha

En la suma por la derecha, la altura de cada rectángulo se toma en el extremo derecho de cada subintervalo. Usando los mismos puntos de división:

$$S_{\text{der}} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Una función es constante si su valor no cambia en el dominio. Ejemplo: $f(x) = c$

Una función es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_2$

Una función es decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 > x_2$

Grado 0 Función constante

Ejemplo 1 Sumatoria por la Izquierda

$f(x) = 3$ en $[0, 2]$, $n = 2$

1. $\Delta x = 1$
2. Extremos izquierdos: $x_0 = 0, x_1 = 1$
3. $f(x_i) = 3$
4. $S_{\text{izq}} = 1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$

$$S_{\text{izq}} = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) \cdot \Delta x) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(a+i \cdot h) \cdot h), \quad S_{\text{der}} = \sum_{i=1}^n (f(x_i) \cdot \Delta x) = \sum_{i=1}^n (f(a+i \cdot h) \cdot h)$$

$3 \rightarrow f(x) \rightarrow \text{Hecho}, \quad 0 \rightarrow a \rightarrow 0, \quad 2 \rightarrow b \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow n \rightarrow 2, \quad \frac{a+b}{n} \rightarrow h \rightarrow 1$

$$S_{\text{izq}} = \sum_{i=0}^{2-1} (f(a+i \cdot h) \cdot h) \rightarrow S_{\text{izq}} = 6, \quad S_{\text{der}} = \sum_{i=1}^2 (f(a+i \cdot h) \cdot h) \rightarrow S_{\text{der}} = 6$$

Ejemplo 2 Sumatoria por la Derecha

 $f(x) = 3$ en $[0, 2]$, $n = 2$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_1 = 1, x_2 = 2$
3. $f(x_i) = 3$
4. $S_{\text{der}} = 1 \times 3 + 1 \times 3 = 6$

Grado 1 Función lineal creciente

Ejemplo 3 Sumatoria por la Izquierda

 $f(x) = x$ en $[0, 2]$, $n = 2$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_0 = 0, x_1 = 1$
3. $f(0) = 0, f(1) = 1$
4. $S_{\text{izq}} = 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$

Ejemplo 4 Sumatoria por la Derecha

 $f(x) = x$ en $[0, 2]$, $n = 2$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_1 = 1, x_2 = 2$
3. $f(1) = 1, f(2) = 2$
4. $S_{\text{der}} = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$

Grado 2 Función cuadrática creciente

Ejemplo 5 Sumatoria por la Izquierda

 $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$, $n = 3$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$
3. $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4$
4. $S_{\text{izq}} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 4 = 5$

Ejemplo 6 Sumatoria por la Derecha

 $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$, $n = 3$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
3. $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$
4. $S_{\text{der}} = 1 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 9 = 14$

Grado 3 Función cúbica decreciente

Ejemplo 7 Sumatoria por la Izquierda

$$f(x) = -x^3 \text{ en } [0, 3], n = 3$$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$
3. $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = -8$
4. $S_{izq} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times (-8) = -9$

Ejemplo 8 Sumatoria por la Derecha

$$f(x) = -x^3 \text{ en } [0, 3], n = 3$$

1. $\Delta x = 1$
2. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
3. $f(1) = -1, f(2) = -8, f(3) = -27$
4. $S_{der} = 1 \times (-1) + 1 \times (-8) + 1 \times (-27) = -36$

$$\begin{aligned}
 & -x^3 \rightarrow f(x) \text{ Hecho, } 0 \rightarrow a \rightarrow 0, 3 \rightarrow b \rightarrow 3, 3 \rightarrow n \rightarrow 3, \frac{a+b}{n} \rightarrow h \rightarrow 1 \\
 & S_{izq} = \sum_{i=0}^{n-1} (f(a+i \cdot h) \cdot h) \rightarrow S_{izq} = -9 \\
 & S_{der} = \sum_{i=1}^n (f(a+i \cdot h) \cdot h) \rightarrow S_{der} = -36
 \end{aligned}$$

Ejercicios Tema 5.1

1. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, 4]$ con $n = 4$.
2. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, 4]$ con $n = 4$.
3. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
4. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
5. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
6. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
7. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
8. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
9. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
10. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
11. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
12. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
13. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
14. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
15. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = -x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
16. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = -x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 2$.
17. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = -x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
18. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = -x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 3$.
19. Calcula la suma de Riemann por la izquierda para $f(x) = 5$ en el intervalo $[1, 4]$ con $n = 3$.
20. Calcula la suma de Riemann por la derecha para $f(x) = 5$ en el intervalo $[1, 4]$ con $n = 3$.

5.2 Reglas de integración directas

Reglas fundamentales de integración

Expresión a integrar Fórmula de integración Condiciones

$$\int k dx \quad k \cdot x + C \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{Linealidad}$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \text{Algebraica}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \quad x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{Exponencial}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad \text{Exponencial}$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0 \quad \text{Logarítmica}$$

Ejemplo 1: Integración de una constante

Calcular $\int 7 dx$

Procedimiento:

- Aplicamos la regla directa para constantes:
- $\int k dx = k \cdot x + C$
- Sustituimos $k = 7$:
- $\int 7 dx = 7 \cdot x + C$

Resultado:

$$\int 7 dx = 7 \cdot x + C$$

Ejemplo 2: Suma de funciones

Calcular $\int (x^2 + 4x - 5) dx$

Procedimiento:

- Aplicamos la propiedad de linealidad:
- $\int (x^2 + 4x - 5) dx = \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 5 dx$
- Integramos término por término:

- $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad \int 4x dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 2x^2, \quad \int 5 dx = 5x$

Resultado:

$$\int (x^2 + 4x - 5) dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + C$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 5) dx &= \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 5 dx \quad \text{true} \\ \int x^2 dx + \int 4x dx - \int 5 dx &= \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + 4 \cdot \int x dx - 5 \cdot x \quad \text{true} \\ \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + 4 \cdot \int x dx - 5 \cdot x &= \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x \quad \text{true} \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Constante por una función

Calcular $\int 3x^4 dx$

Procedimiento:

- Aplicamos la regla:
- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
- Integramos:
- $\int 3x^4 dx = 3 \cdot \int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{3x^5}{5}$

Resultado:

$$\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + C$$

Ejemplo 4: Función logarítmica

Calcular $\int \ln(x) dx$

Procedimiento:

- Aplicamos la fórmula directa:
- $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$

Resultado:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x \quad \text{true}$$

Ejemplo 5: Función exponencial con base e

Calcular $\int e^x dx$

Procedimiento:

- La función e^x es su propia antiderivada:
- $\int e^x dx = e^x + C$

Resultado:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x \quad \text{true}$$

Ejemplo 6: Función exponencial con base distinta

Calcular $\int 2^x dx$

Procedimiento:

- Aplicamos la fórmula:

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

- Sustituimos $a = 2$:

- $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C$

Resultado:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C$$

Ejercicios Tema 5.2

1. Calcula $\int 5 dx$

2. Calcula $\int (-8) dx$

3. Calcula $\int x dx$

4. Calcula $\int x^2 dx$

5. Calcula $\int x^3 dx$

6. Calcula $\int x^4 dx$

7. Calcula $\int x^5 dx$

8. Calcula $\int x^{-1} dx$

9. Calcula $\int \frac{1}{x} dx$

10. Calcula $\int 2 \cdot \ln(x) dx$

11. Calcula $\int 3 \cdot e^x dx$

12. Calcula $\int 2 \cdot x dx$

13. Calcula $\int \frac{1}{3} \cdot x dx$

14. Calcula $\int (x^2 + 3x) dx$

15. Calcula $\int (x^3 + 2x^2 - x)dx$
16. Calcula $\int (5x^4 + 3x)dx$
17. Calcula $\int (x^2 + 3)dx$
18. Calcula $\int (x^3 + x^2 + x + 1)dx$
19. Calcula $\int (2x^2 - 7x + 4)dx$
20. Calcula $\int (x^4 - x^2 + 6)dx$
21. Calcula $\int 6x^3 dx$
22. Calcula $\int -2x^2 dx$
23. Calcula $\int 11x dx$
24. Calcula $\int -5x^6 dx$
25. Calcula $\int 3x^5 dx$
26. Calcula $\int 7x^5 dx$
34. Calcula $\int (x^2 + \ln(x))dx$
35. Calcula $\int (3x + 2e^x)dx$
36. Calcula $\int (x^2 + \ln(x^2 + 2x))dx$
37. Calcula $\int (3x^3 + 2e^{x^3+3x})dx$
38. Calcula $\int (x^2 + \frac{1}{x})dx$
39. Calcula $\int (x^4 + \ln(x))dx$
40. Calcula $\int (x^3 + 2e^{x+1})dx$

5.3 Integral definida.

La integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se representa como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esta expresión representa el área neta bajo la curva de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Se calcula utilizando una antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, aplicando la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1

Calcular $\int_0^2 x dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Aplicamos la fórmula:

$$\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_1^3 x dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Ejemplo 3

Calcular $\int_0^2 x^2 dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \rightarrow \text{true} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3} \therefore \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \rightarrow \text{true}$$

Ejemplo 4

Calcular $\int_2^4 x^2 dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^3}{3}$

$$\int_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

Ejemplo 5

Calcular $\int_0^3 5 dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = 5x$

$$\int_0^3 5dx = 5(3) - 5(0) = 15$$

Ejemplo 6

Calcular $\int_0^2 x^3 dx$

Solución:

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^4}{4}$

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2^4}{4} - 0 = \frac{16}{4} = 4$$

Ejercicios 4.3

Funciones lineales

1. $\int_0^2 x dx$

2. $\int_1^3 x dx$

3. $\int_2^5 x dx$

4. $\int_0^4 2x dx$

5. $\int_1^5 3x dx$

6. $\int_0^2 (x+1) dx$

7. $\int_0^3 (x+3) dx$

8. $\int_1^4 (2x+3) dx$

Funciones cuadráticas

9. $\int_0^3 x^2 dx$

10. $\int_1^2 2x^2 dx$

11. $\int_0^1 3x^2 dx$

12. $\int_1^2 -x^2 dx$

13. $\int_0^3 (x^2+1) dx$

14. $\int_2^3 (x^2+3) dx$

15. $\int_0^1 (3x^2 + 1) dx$

16. $\int_1^2 (3x^2 - 1) dx$

Funciones constantes

17. $\int_1^3 5 dx$

18. $\int_3^9 6 dx$

19. $\int_1^4 4 dx$

20. $\int_2^3 2 dx$

Funciones cúbicas

21. $\int_1^2 x^3 dx$

22. $\int_1^3 3x^3 dx$

23. $\int_2^4 2x^3 dx$

24. $\int_0^3 x^3 dx$

25. $\int_2^4 (2x^3 - 2) dx$

26. $\int_2^3 (3x^3 + 3) dx$

27. $\int_0^3 (3x^3 + 1) dx$

28. $\int_0^1 (2x^3 + 3) dx$

5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas

Ingreso total acumulado: El ingreso total acumulado se obtiene integrando la función de ingreso marginal $IM(x)$ en un intervalo de producción. Representa el valor total generado por la venta de unidades desde $x = a$ hasta $x = b$.

$$IT(x) = \int_a^b IM(x) dx$$

Ejemplo 1

Sea $IM(x) = 100 - 5x$. Calcular el ingreso total al vender de $x = 0$ a $x = 10$.

Solución:

$$IT(x) = \int_0^{10} (100 - 5x) dx = \left[100x - \frac{5x^2}{2} \right]_0^{10} = 100 \cdot 10 - \frac{5 \cdot 10^2}{2} = (1000 - 250) + (0 - 0) = 750$$

Resultado:

Ingreso total acumulado: \$750

Ejemplo 2

Sea $IM(x) = 60 - 3x$. Calcular el ingreso total entre $x = 5$ y $x = 12$.

Solución:

$$IT(x) = \int_5^{12} (60 - 3x)dx = \left[60x - \frac{3x^2}{2} \right]_5^{12} = (720 - 216) - (300 - 37.5) = 504 - 262.5 = 241.5$$

Resultado:

Ingreso total acumulado: \$241.5

Ejemplo 3

Sea $IM(x) = 40 - x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 8$.

Solución:

$$IT(x) = \int_2^8 (40 - x)dx = \left[40x - \frac{x^2}{2} \right]_2^8 = (320 - 32) - (80 - 2) = 288 - 78 = 210$$

Resultado:

Ingreso total acumulado: \$210

Costo total acumulado: El costo total acumulado se obtiene integrando la función de costo marginal $CM(x)$ en un intervalo de producción. Representa el gasto total incurrido al producir desde $x = a$ hasta $x = b$.

$$CT(x) = \int_a^b CM(x)dx$$

Ejemplo 4

Sea $CM(x) = 4x + 20$. Calcular el costo total al producir de $x = 0$ a $x = 6$.

Solución:

$$CT(x) = \int_0^6 (4x + 20)dx = \left[2x^2 + 20x \right]_0^6 = (72 + 120) + (0 - 0) = 192$$

Resultado:

Costo total acumulado: \$192

Ejemplo 5

Sea $CM(x) = 3x + 15$. Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 7$.

Solución:

$$CT(x) = \int_2^7 (3x + 15)dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 15x \right]_2^7 = (73.5 + 105) - (6 + 30) = 178.5 - 36 = 142.5$$

Resultado:

Costo total acumulado: \$142.5

Ejemplo 6

Sea $CM(x) = 2x + 10$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 5$.

Solución:

$$CT(x) = \int_1^5 (2x + 10)dx = \left[x^2 + 10x \right]_1^5 = (25 + 50) - (1 + 10) = 75 - 11 = 64$$

Resultado:

Costo total acumulado: \$64

Utilidad total acumulada: La utilidad total acumulada se obtiene integrando la función de utilidad marginal $UM(x)$, o bien, calculando la diferencia entre ingreso total y costo total en un intervalo dado.

$$U(x) = \int_a^b UM(x)dx \quad \text{o} \quad U(x) = IT(x) - CT(x)$$

Ejemplo 7

Sea $UM(x) = 30 - x$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 6$.

Solución:

$$U(x) = \int_0^6 (30 - x)dx = \left[30x - \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = 180 - 18 = 162$$

Resultado:

Utilidad total acumulada: \$162

Ejemplo 8 Utilidad total acumulada

Sea $IM(x) = 50 - x$, $CM(x) = 2x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$.

Solución:

Ingreso total:

$$IT(x) = \int_0^5 (50 - x)dx = \left[50x - \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 250 - 12.5 = 237.5$$

Costo total:

$$CT(x) = \int_0^5 (2x + 10)dx = \left[x^2 + 10x \right]_0^5 = 25 + 50 = 75$$

Utilidad total:

$$U(x) = IT(x) - CT(x) = 237.5 - 75 = 162.5$$

Resultado:

Utilidad total acumulada: \$162.5

Ejemplo 9 Utilidad total acumulada

Sea $IM(x) = 60 - 2x$, $CM(x) = x + 20$. Calcular la utilidad total entre $x = 3$ y $x = 7$.

Solución:

Ingreso total:

$$IT(x) = \int_3^7 (60 - 2x)dx = \left[60x - x^2 \right]_3^7 = (420 - 49) - (180 - 9) = 371 - 171 = 200$$

Costo total:

$$CT(x) = \int_3^7 (x + 20)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 20x \right]_3^7 = (24.5 + 140) - (4.5 + 60) = 164.5 - 64.5 = 100$$

Utilidad total:

$$U(x) = IT(x) - CT(x) = 200 - 100 = 100$$

Ejercicios 5.4

1. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 90 - 3x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 10$.
2. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 70 - 2x$ en el intervalo de $x = 5$ a $x = 12$.
3. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 50 - x$ en el intervalo de $x = 3$ a $x = 9$.
4. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 100 - 4x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 8$.
5. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 60 - 1.5x$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 10$.
6. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 80 - 5x$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 6$.
7. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 45 - x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 7$.
8. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 65 - 2.5x$ en el intervalo de $x = 4$ a $x = 9$.
9. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 55 - x$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 6$.
10. Calcular el ingreso total si $IM(x) = 75 - 3x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 5$.
11. Calcular el costo total si $CM(x) = 2x + 10$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 6$.
12. Calcular el costo total si $CM(x) = 3x + 15$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 5$.
13. Calcular el costo total si $CM(x) = 4x + 20$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 7$.
14. Calcular el costo total si $CM(x) = x + 12$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$.
15. Calcular el costo total si $CM(x) = 5x + 25$ en el intervalo de $x = 3$ a $x = 8$.
16. Calcular el costo total si $CM(x) = 2.5x + 18$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 6$.
17. Calcular el costo total si $CM(x) = 3x + 10$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 5$.
18. Calcular el costo total si $CM(x) = 6x + 30$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 9$.
19. Calcular el costo total si $CM(x) = 4x + 16$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 7$.
20. Calcular el costo total si $CM(x) = x + 8$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 3$.
21. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 40 - x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 6$.
22. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 35 - 1.5x$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 7$.
23. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 50 - 2x$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 5$.
24. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 60 - 3x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 4$.
25. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 45 - x$ en el intervalo de $x = 3$ a $x = 8$.
26. Calcular la utilidad total si $UM(x) = 30 - 0.5x$ en el intervalo de $x = 2$ a $x = 6$.
27. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 70 - x$, $CM(x) = 2x + 20$, entre $x = 0$ a $x = 5$.
28. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 60 - 2x$, $CM(x) = x + 15$, entre $x = 1$ a $x = 6$.
29. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 80 - 4x$, $CM(x) = 3x + 10$, entre $x = 2$ a $x = 7$.
30. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 55 - x$, $CM(x) = 2x + 12$, entre $x = 0$ a $x = 4$.
31. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 65 - 2x$, $CM(x) = x + 18$, entre $x = 3$ a $x = 9$.
32. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 50 - x$, $CM(x) = 3x + 15$, entre $x = 2$ a $x = 6$.
33. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 90 - 5x$, $CM(x) = 4x + 20$, entre $x = 1$ a $x = 5$.
34. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 60 - x$, $CM(x) = 2x + 10$, entre $x = 0$ a $x = 3$.
35. Calcular la utilidad total si $IM(x) = 75 - 3x$, $CM(x) = x + 25$, entre $x = 2$ a $x = 6$.

Apéndice A: Cuestionario.

A-1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.

1.1: Definición de Función.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Toda función lineal se representa mediante una línea recta en el plano cartesiano?
2. ¿El dominio de una función lineal es siempre el conjunto de los números reales?
3. ¿La función $f(x) = x - 5$ tiene pendiente positiva?
4. ¿Es posible representar una función lineal mediante una tabla de valores?
5. ¿Toda función lineal tiene una intersección con el eje y?
6. ¿La ecuación $f(x) = 40x + 105$ representa una función constante?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es el formato general de una función lineal?
 - a. $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - b. $f(x) = mx + b$
 - c. $f(x) = 1/x$
 - d. $f(x) = e^x$
8. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene pendiente negativa?
 - a. $g1(x) = x - 3$
 - b. $g4(x) = x - 10$
 - c. $h3(x) = 38x + 95$
 - d. $k6(x) = 12500 \cdot 0.05x$
9. Si $f(x) = 35x + 100$, ¿cuál es el valor de $f(2)$?
 - a. 170
 - b. 135
 - c. 80
 - d. 200
10. ¿Qué representa la pendiente en una función lineal?
 - a. La cantidad por la que cambia y cuando x cambia una unidad
 - b. La intersección en el eje x
 - c. El valor máximo de la función
 - d. La curvatura de la gráfica
11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el dominio de una función lineal es correcta?
 - a. Depende de los valores seleccionados en la tabla
 - b. Siempre es el conjunto de los números reales
 - c. Depende del tipo de ecuación
 - d. Solo incluye números enteros
12. ¿Cómo afecta la ventana de visualización al graficar una función?
 - a. Determina qué parte de la gráfica es visible
 - b. Cambia la pendiente de la función

- c. Modifica la intersección en y
- d. Hace que la función sea no lineal

Preguntas de Verdadero/Falso

- 13. La función $f(x) = x - 5$ es una ecuación cuadrática. (V/F)
- 14. La ecuación $k8(x) = 8000 \cdot 0.025x$ representa una función lineal con pendiente positiva. (V/F)
- 15. La intersección de la función $h1(x) = 35x + 100$ con el eje y ocurre en $(0,100)$. (V/F)
- 16. Para graficar una función lineal, se deben conectar los puntos obtenidos con una línea curva. (V/F)
- 17. La ecuación $f3(x) = 12000 \cdot 0.05x$ tiene una pendiente negativa. (V/F)
- 18. Toda función lineal tiene un único valor de y para cada valor de x. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

- 19. Explica cómo se construye una tabla de valores para una función lineal.
- 20. ¿Cuál es la importancia de la pendiente en una ecuación de la recta?
- 21. Describe los pasos para representar gráficamente una función lineal.
- 22. ¿Por qué la representación en una ventana de visualización afecta la percepción de la gráfica?
- 23. ¿Cómo puedes determinar la intersección en y de una función lineal sin graficarla?
- 24. Explica cómo la ecuación $f(x) = 40x + 105$ representa una función lineal.

1.2: Dominio y Rango Restringidos.

Preguntas de Sí/No

- 1. ¿El dominio de una función puede estar limitado por restricciones económicas o físicas?
- 2. ¿El rango de una función depende de las restricciones impuestas en el dominio?
- 3. ¿El costo mínimo en una función de costo total es siempre igual al costo fijo?
- 4. ¿El modelo de depreciación lineal implica que el valor de un bien disminuye en cantidades iguales cada año?
- 5. ¿En una función de interés simple, el capital inicial se mantiene constante mientras aumenta el interés acumulado?
- 6. ¿El precio de equilibrio se encuentra igualando las funciones de demanda y oferta?

Preguntas de Opción Múltiple

- 7. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene un dominio restringido solo a valores enteros positivos?
 - a. $C(n) = 50n + 200$
 - b. $I(t) = 10,000(0.03)^t$
 - c. $D(p) = 100 - 2p$
 - d. $S(p) = 3p$
- 8. Si el costo fijo de operación de una empresa es \$3,000 y cada unidad producida cuesta \$250, ¿cuál es la función de costo total?

- a. $C(n) = 3,000 + 250n$
 - b. $C(n) = 3,000 - 250n$
 - c. $C(n) = 250n$
 - d. $C(n) = 250n - 3,000$
9. Si una inversión de \$8,000 genera interés simple con una tasa del 4%, ¿cuál es la ecuación que describe el interés acumulado?
- a. $I(t) = 8,000(0.04)t$
 - b. $I(t) = 8,000(1.04)t$
 - c. $I(t) = 8,000 + 0.04t$
 - d. $I(t) = 8,000t + 0.04$
10. Una empresa vende un producto a \$500 y su costo de producción es \$320. ¿Cuál es la función que describe el margen de utilidad en función de la cantidad vendida x ?
- a. $U(x) = 500x - 320x$
 - b. $U(x) = 320x - 500x$
 - c. $U(x) = 180x$
 - d. $U(x) = 500 + 320x$
11. Si la depreciación de un equipo de oficina sigue el modelo $D(t) = 15,000 - 1,000t$, ¿cuál es su valor después de 10 años?
- a. \$5,000
 - b. \$10,000
 - c. \$15,000
 - d. \$1,000
12. ¿Cuál de las siguientes funciones representa una ecuación de demanda en un mercado?
- a. $D(p) = 100 - 2p$
 - b. $S(p) = 3p$
 - c. $C(n) = 50n + 200$
 - d. $I(t) = 10,000(0.03)t$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La función $C(n) = 50n + 200$ tiene un rango restringido porque el costo mínimo es \$200. (V/F)
14. En un modelo de interés simple, el dominio está restringido a valores positivos de tiempo. (V/F)
15. La ecuación $D(p) = 100 - 2p$ representa un comportamiento creciente en la demanda. (V/F)
16. En la ecuación $D(t) = 15,000 - 1,000t$, el equipo pierde valor de manera progresiva. (V/F)
17. El equilibrio de mercado se alcanza cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada. (V/F)
18. Si el dominio de una función está restringido, significa que no se pueden usar valores arbitrarios para la variable independiente. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica la importancia de restringir el dominio y el rango en modelos económicos y financieros.
20. ¿Cómo afecta la pendiente en una ecuación de costo total a la toma de decisiones empresariales?
21. Describe cómo la ecuación de interés simple puede ayudar a calcular ganancias en inversiones.
22. ¿Cuáles son las restricciones que suelen aplicarse a los modelos de depreciación en economía?
23. ¿Por qué la ecuación de demanda suele tener pendiente negativa?
24. Explica cómo se determina el precio de equilibrio en un modelo de oferta y demanda.

1.3: Funciones Multivariadas Básicas.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Una función multivariada puede depender de dos o más variables independientes?
2. ¿El dominio de una función multivariada incluye todas las combinaciones posibles de los valores de sus variables independientes?
3. ¿El costo total de producción depende únicamente del número de unidades fabricadas, sin considerar costos fijos?
4. ¿El interés total en una inversión multivariable se calcula sumando los intereses generados por cada inversión?
5. ¿Las funciones multivariadas pueden modelar la demanda de productos en función del precio de múltiples bienes?
6. ¿Es posible optimizar la producción de una empresa utilizando funciones multivariadas?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es un ejemplo de función multivariada?
 - a. $C(n) = 50n + 200$
 - b. $D(p) = 100 - 2p$
 - c. $C(x, y) = 200x + 150y + 5000$
 - d. $I(t) = 10,000(0.03)^t$
8. ¿Cuál de las siguientes funciones describe el costo total de fabricación de dos productos?
 - a. $C(x) = 300 + 45x$
 - b. $C(x, y) = 60x + 80y + 2500$
 - c. $D(x, y) = 500 - 10x - 5y$
 - d. $P(x, y) = 5x^2 - 2xy$
9. ¿Qué representa la ecuación $P(x, y) = 7x^2 - xy$ en un modelo de producción?
 - a. Costo de fabricación
 - b. Ganancia empresarial

- c. Relación de oferta y demanda
 - d. Cantidad de unidades producidas
10. En un modelo de inversión con interés simple, ¿cuál es la función que describe el interés total generado?
- a. $I(x, y, t) = 0.04xt + 0.05yt$
 - b. $I(x, y) = 4x + 5y$
 - c. $I(x) = x + 0.04$
 - d. $I(x, y, t) = 10,000x + 8,000y + 2t$
11. ¿Cómo se obtiene el precio de equilibrio en un modelo de oferta y demanda multivariado?
- a. Igualando las ecuaciones de oferta y demanda
 - b. Sumando la demanda y la oferta
 - c. Restando el costo total de la producción
 - d. Multiplicando el número de productos por el precio
12. ¿Qué caracteriza a una ecuación multivariada de demanda?
- a. Involucra dos o más variables independientes relacionadas con el precio
 - b. Depende solo del costo fijo de producción
 - c. Tiene pendiente positiva en todos los casos
 - d. Está definida como una función lineal con un solo término

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La ecuación $C(x, y) = 200x + 150y + 5000$ representa el costo total de una empresa que fabrica dos productos. (V/F)
14. En la función $P(x, y) = 5x^2 - 2xy$, el número de unidades producidas depende de dos factores simultáneamente. (V/F)
15. Una función de utilidad en administración se puede definir como $U(x, y) = p(x) - c(y)$. (V/F)
16. Si una empresa tiene costos fijos y variables, el modelo de costos total siempre debe incluir ambos términos. (V/F)
17. La ecuación de interés $I(x, y, t) = 0.04xt + 0.05yt$ calcula la ganancia generada por dos inversiones con diferentes tasas de interés. (V/F)
18. La ecuación $D(x, y) = 500 - 10x - 5y$ modela la demanda en función del precio de dos bienes. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica cómo las funciones multivariadas pueden mejorar la planificación financiera en una empresa.
20. ¿Qué factores pueden influir en la variación del dominio y rango de una función multivariada en economía?
21. Describe los pasos para evaluar una ecuación de costos total en función de dos variables independientes.
22. ¿Cómo ayuda el uso de ecuaciones multivariadas en la optimización de producción en una fábrica?

23. Explica la importancia de calcular el precio de equilibrio en un modelo de oferta y demanda con múltiples productos.
24. ¿Cómo afectaría la variación en los coeficientes de una ecuación de inversión al cálculo del interés total generado?

1.4: Representaciones Gráficas de Funciones Matemáticas.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Toda función lineal se representa mediante una línea recta en el plano cartesiano?
2. ¿El dominio de una función polinomial es siempre el conjunto de los números reales?
3. ¿Una función cuadrática tiene una representación gráfica en forma de parábola?
4. ¿Las funciones a trozos pueden estar definidas por más de una ecuación matemática?
5. ¿Es posible graficar una función utilizando una tabla de valores?
6. ¿Las funciones polinomiales de segundo grado pueden tener vértices máximos o mínimos?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es el formato general de una función lineal?
 - a. $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - b. $f(x) = mx + b$
 - c. $f(x) = 1/x$
 - d. $f(x) = e^x$
8. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene una representación gráfica en forma de parábola?
 - a. $f(x) = 3x - 4$
 - b. $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$
 - c. $f(x) = -x + 3$
 - d. $f(x) = 5x - 2$
9. Si $f(x) = 4x - 6$, ¿cuál es el valor de $f(2)$?
 - a. -2
 - b. 2
 - c. 8
 - d. 4
10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta sobre las funciones a trozos?
 - a. Pueden estar definidas por diferentes ecuaciones en distintos intervalos
 - b. Su representación gráfica siempre es una recta
 - c. Tienen un único valor de y para cada valor de x
 - d. No pueden tener cambios bruscos en la pendiente
11. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una función polinomial de segundo grado?
 - a. $f(x) = 5x + 2$

- b. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
 - c. $f(x) = x - 10$
 - d. $f(x) = 3x - 4$
12. ¿Cómo se grafican las funciones matemáticas en el plano cartesiano?
- a. Marcando puntos obtenidos mediante una tabla de valores y uniéndolos con una línea
 - b. Trazando curvas sin calcular puntos específicos
 - c. Multiplicando los valores de la variable independiente por la pendiente
 - d. Sumando los coeficientes de la ecuación para obtener puntos

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Una función cuadrática se representa gráficamente como una línea recta. (V/F)
14. La función $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ tiene una parábola con vértice máximo. (V/F)
15. La ecuación $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ tiene una parábola que abre hacia arriba. (V/F)
16. Para graficar una función a trozos, se deben representar cada una de sus ecuaciones en su intervalo correspondiente. (V/F)
17. El dominio de una función lineal es restringido a valores positivos de x . (V/F)
18. La función $f(x) = 5x - 2$ tiene una pendiente positiva. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica el procedimiento para graficar una función lineal a partir de una ecuación.
20. ¿Cuál es la importancia de la pendiente en la representación gráfica de una función lineal?
21. Describe los pasos para encontrar el vértice de una función cuadrática y graficarla.
22. ¿Por qué las funciones a trozos pueden tener cambios bruscos en su representación gráfica?
23. ¿Cómo afecta el coeficiente de x^2 en una función cuadrática a la orientación de su parábola?
24. Explica cómo puedes determinar la intersección en y de una función sin graficarla.

1.5: Determinación de la ecuación de una Línea Recta.

1.5.1 Ecuación de la recta dado su pendiente e intersección.

Preguntas de Sí/No

- 1. ¿Toda función lineal puede expresarse en la forma $y = mx + b$?
- 2. ¿La pendiente de una recta indica si la función es creciente o decreciente?
- 3. ¿La intersección en el eje y de la función $y = 3x - 5$ es 3?
- 4. ¿Si una recta tiene pendiente negativa, significa que disminuye conforme aumenta x ?
- 5. ¿El coeficiente de x en una ecuación lineal siempre representa la pendiente?
- 6. ¿La ecuación $y = -2x + 4$ tiene pendiente positiva?

Preguntas de Opción Múltiple

- 7. ¿Cuál es la ecuación general de una función lineal?

- a. $y = ax^2 + bx + c$
 - b. $y = mx + b$
 - c. $y = 1/x$
 - d. $y = e^x$
8. ¿Qué representa la pendiente en la ecuación de una línea recta?
- a. La cantidad por la que cambia y cuando x cambia una unidad
 - b. La intersección con el eje x
 - c. El punto máximo de la función
 - d. La curvatura de la gráfica
9. Si la ecuación de una recta es $y = 5x + 7$, ¿cuál es su pendiente?
- a. 5
 - b. 7
 - c. -5
 - d. -7
10. ¿Cuál es la intersección en y de la función $y = -x + 8$?
- a. -8
 - b. -1
 - c. 0
 - d. 8
11. Si la pendiente de una recta es -3, ¿cómo se describe su comportamiento?
- a. La recta es horizontal
 - b. La recta es creciente
 - c. La recta es decreciente
 - d. La recta es vertical
12. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una línea recta?
- a. $y = x^2 - 4x + 3$
 - b. $y = 5x - 2$
 - c. $y = e^x$
 - d. $y = 1/x$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La ecuación $y = 2x - 3$ representa una función lineal con pendiente positiva. (V/F)
14. La función $y = -4x + 10$ tiene una pendiente negativa y es decreciente. (V/F)
15. La ecuación $y = 3x + 6$ tiene una intersección en (y) de 6. (V/F)
16. En la ecuación $y = -1/2x + 9$, la pendiente es -2. (V/F)
17. Si una recta tiene pendiente positiva, su gráfica siempre se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. (V/F)
18. La ecuación $y = 0.75x + 1$ tiene una intersección en y de 0.75. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica cómo determinar la pendiente y la intersección en y a partir de la ecuación de una recta.

20. ¿Cómo se grafica una función lineal utilizando la ecuación $y = mx + b$?
21. ¿Por qué la pendiente es importante para describir el comportamiento de una función lineal?
22. ¿Cómo puedes encontrar la ecuación de una recta si conoces su pendiente y un punto?
23. Explica la diferencia entre una pendiente positiva y una pendiente negativa en una función lineal.
24. Describe un ejemplo en el ámbito administrativo donde la ecuación de la recta se utilice para modelar costos o ingresos.

1.5.2 Ecuación de la recta dado un punto y pendiente:

Preguntas de Sí/No

1. ¿Es posible encontrar la ecuación de una recta si se conoce un punto y la pendiente?
2. ¿Una recta con pendiente positiva se inclina hacia arriba de izquierda a derecha?
3. ¿La ecuación de la recta siempre tiene la forma $y = mx + b$?
4. ¿Si la pendiente de una recta es negativa, significa que la recta es horizontal?
5. ¿Es necesario conocer dos puntos para determinar la ecuación de una recta?
6. ¿Una pendiente fraccionaria indica una variación gradual en la inclinación de la recta?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la ecuación punto-pendiente de una recta?
 - a. $y - y_1 = m(x - x_1)$
 - b. $y = mx + b$
 - c. $x - x_1 = m(y - y_1)$
 - d. $y = x^2 + bx + c$
8. Si la pendiente de una recta es -2, ¿cómo se describe su comportamiento?
 - a. Es horizontal
 - b. Es creciente
 - c. Es decreciente
 - d. Es vertical
9. Si la pendiente de una recta es $3/5$ y pasa por el punto 4,-2, ¿cómo se expresa su ecuación?
 - a. $y - 4 = 3/5(x - 2)$
 - b. $y + 2 = 3/5(x - 4)$
 - c. $y - 2 = 3/5(x + 4)$
 - d. $y - 2 = 5/3(x - 4)$
10. ¿Qué representa la pendiente en la ecuación de una línea recta?
 - a. El valor de la intersección en el eje x
 - b. La tasa de cambio entre x y y
 - c. El punto donde la recta cruza el eje y
 - d. El coeficiente de la variable dependiente

11. Si la pendiente es $m = 0.8$ y el punto es $5, -2$, ¿cuál es la ecuación de la recta?
- $y + 2 = 0.8(x - 5)$
 - $y - 2 = 0.8(x - 5)$
 - $y - 2 = 5(x - 0.8)$
 - $y + 5 = 0.8(x - 2)$
12. ¿Cuál de las siguientes opciones representa correctamente la ecuación de una recta con pendiente negativa?
- $y = 5x + 2$
 - $y = -3x + 6$
 - $y = x - 4$
 - $y = 7x + 9$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Una recta con pendiente 3.5 es creciente. (V/F)
14. La ecuación punto-pendiente se usa para encontrar la ecuación de una recta cuando se conoce un punto y la pendiente. (V/F)
15. La pendiente fraccionaria $m = 3/5$ indica que por cada unidad de cambio en x , y aumenta $3/5$. (V/F)
16. La ecuación $y - 7 = 4(x - 5)$ describe una recta con pendiente negativa. (V/F)
17. Si una recta tiene pendiente positiva, su gráfica siempre se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. (V/F)
18. La ecuación $y = -2x + 4$ tiene pendiente positiva. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica cómo se utiliza la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación de una recta.
20. ¿Qué importancia tiene la pendiente en la representación gráfica de una recta?
21. Describe los pasos para obtener la ecuación de una recta cuando se conoce un punto y su pendiente.
22. ¿Cómo puedes determinar la pendiente de una recta si solo tienes su ecuación en forma $y = mx + b$?
23. Explica cómo la pendiente fraccionaria afecta la inclinación de una recta en comparación con una pendiente entera.
24. Describe una aplicación real en economía o administración donde la ecuación de la recta es útil para analizar datos.

1.5.3 Ecuación de la recta dado dos puntos:

Preguntas de Sí/No

- ¿Es posible encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos de la misma?
- ¿La pendiente de una recta siempre indica su inclinación en el plano cartesiano?
- ¿Una recta con pendiente positiva se inclina hacia arriba de izquierda a derecha?
- ¿Si la pendiente de una recta es negativa, significa que la recta es decreciente?

5. ¿La ecuación de la recta siempre tiene la forma $y = mx + b$?
6. ¿La pendiente fraccionaria indica una variación gradual en la inclinación de la recta?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la ecuación general de una recta cuando se conocen dos puntos?
 - a. $y - y_1 = m(x - x_1)$
 - b. $y = mx + b$
 - c. $x - x_1 = m(y - y_1)$
 - d. $y = x^2 + bx + c$
8. Si se conocen los puntos 1,2 y 4,8, ¿cómo se calcula la pendiente?
 - a. $(8 - 2) / (4 - 1)$
 - b. $(2 - 8) / (1 - 4)$
 - c. $(1 - 4) / (8 - 2)$
 - d. $(4 - 1) / (2 - 8)$
9. Si la pendiente es -3 y pasa por el punto 5, 10, ¿cómo se expresa su ecuación?
 - a. $y - 10 = -3(x - 5)$
 - b. $y + 5 = -3(x - 10)$
 - c. $y - 5 = -3(x + 10)$
 - d. $y - 10 = 3(x - 5)$
10. ¿Qué representa la pendiente en la ecuación de una línea recta?
 - a. El valor de la intersección en el eje x
 - b. La tasa de cambio entre x y y
 - c. El punto donde la recta cruza el eje y
 - d. El coeficiente de la variable dependiente
11. Si los puntos son 2,6 y 7,15.5, ¿cómo se encuentra su pendiente?
 - a. $(15.5 - 6) / (7 - 2)$
 - b. $(6 - 15.5) / (2 - 7)$
 - c. $(7 - 2) / (15.5 - 6)$
 - d. $(2 - 7) / (6 - 15.5)$
12. ¿Cuál de las siguientes opciones representa correctamente la ecuación de una recta con pendiente negativa?
 - a. $y = 5x + 2$
 - b. $y = -3x + 6$
 - c. $y = x - 4$
 - d. $y = 7x + 9$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Una recta con pendiente 2.5 es creciente. (V/F)
14. La ecuación punto-pendiente se usa para encontrar la ecuación de una recta cuando se conocen dos puntos. (V/F)
15. La pendiente fraccionaria $3/5$ indica que, por cada unidad de cambio en x, y aumenta $3/5$. (V/F)

16. La ecuación $y - 7 = 4(x - 5)$ describe una recta con pendiente negativa. (V/F)
17. Si una recta tiene pendiente positiva, su gráfica siempre se inclina hacia arriba de izquierda a derecha. (V/F)
18. La ecuación $y = -2x + 4$ tiene pendiente positiva. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica el procedimiento para encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos.
20. ¿Qué importancia tiene la pendiente en la representación gráfica de una recta?
21. Describe los pasos para obtener la ecuación de una recta utilizando la ecuación punto-pendiente.
22. ¿Cómo puedes determinar la pendiente de una recta si solo tienes su ecuación en forma $y = mx + b$?
23. Explica cómo la pendiente fraccionaria afecta la inclinación de una recta en comparación con una pendiente entera.
24. Describe una aplicación real en economía o administración donde la ecuación de la recta es útil para analizar datos.

1.5.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda, en los que estos métodos facilitan la obtención de ecuaciones que describen, por ejemplo, la relación entre precio y cantidad.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Es posible modelar la demanda de un producto con una función lineal?
2. ¿Se utiliza la pendiente en la función de demanda para indicar la variación de la cantidad demandada frente al precio?
3. ¿La función de oferta normalmente tiene pendiente positiva, de modo que a mayor precio se ofrece mayor cantidad?
4. ¿El precio de equilibrio se obtiene igualando la función de demanda a la función de oferta?
5. ¿La ordenada en el eje y en una función de demanda representa la cantidad demandada cuando el precio es cero?
6. ¿Un aumento en la pendiente de la oferta significa que la cantidad ofertada varía más agresivamente con el precio?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la forma general de una función de demanda lineal?
 - a. $D(p)=mp+b$
 - b. $D(p)=p-mb$
 - c. $D(p)=m+p-b$
 - d. $D(p)=m/p+b$
8. Si se sabe que cuando el precio es 20, la cantidad demandada es 100 y la pendiente de la demanda es -5, ¿cuál es el valor de la ordenada?

- a. 0
 - b. 150
 - c. 200
 - d. 250
9. Una función de oferta se expresa como $S(p)=mp+b$. Si $S(15)=50$ y $m=4$, ¿cuál es el valor de b ?
- a. -10
 - b. 10
 - c. 15
 - d. 5
10. En el equilibrio de mercado, se igualan la demanda y la oferta. Si $D(p)=-6p+212$ y $S(p)=3p+44$, ¿cuál es el precio de equilibrio?
- a. 16
 - b. 18.67
 - c. 20
 - d. 22
11. La función $D(p)=-5.33p+253.3$ modela una demanda. ¿Qué ocurre cuando el precio aumenta?
- a. La cantidad demandada aumenta
 - b. La cantidad demandada disminuye
 - c. La cantidad demandada permanece igual
 - d. La función no es válida
12. Si la función $S(p)=15p-50$ describe la oferta, ¿qué significa la pendiente 15?
- a. Por cada incremento unitario en el precio, la oferta aumenta 15 unidades
 - b. Por cada incremento unitario en el precio, la oferta disminuye 15 unidades
 - c. La oferta es independiente del precio
 - d. La oferta se duplica con cada aumento en el precio

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La función $D(p)=-5p+200$ indica que cuando el precio es cero, la cantidad demandada es 200. (V/F)
14. En una función de oferta, una pendiente positiva implica que a mayor precio, mayor es la cantidad ofertada. (V/F)
15. El precio de equilibrio se determina igualando la función de demanda con la de oferta. (V/F)
16. En la función $D(p)=-5.33p+253.3$, la pendiente negativa significa que si el precio aumenta, la cantidad demandada disminuye. (V/F)
17. Una pendiente de -6 en una función de demanda significa que por cada incremento unitario en el precio, la cantidad demandada se reduce en 6 unidades. (V/F)
18. La función $S(p)=4p-10$ indica que la oferta disminuye a medida que aumenta el precio. (V/F)

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica el procedimiento para determinar la ordenada en el eje y en una función de demanda lineal.
20. Describe cómo se obtiene la ecuación de oferta a partir de un punto dado (precio, cantidad) y la pendiente.
21. Analiza el efecto de la pendiente negativa en una función de demanda y qué implica para la cantidad demandada al variar el precio.
22. Explica cómo se determina el precio de equilibrio de mercado cuando se conocen las funciones de demanda y oferta.
23. Discute la importancia de la intersección en el eje y en la interpretación de una función de demanda.
24. Describe una situación en la que el modelo de oferta y demanda se utiliza para tomar decisiones en el ámbito administrativo.

A-2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

2.1 Funciones lineales.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Es una función lineal siempre de la forma $y = mx + b$?
2. ¿Representa la variable “b” la pendiente en la función lineal?
3. ¿Es cierto que la gráfica de una función lineal es una recta?
4. ¿Puede el coeficiente “m” tener un valor negativo en una función lineal?

Preguntas de Opción múltiple

5. En la función $y = 3x + 2$, ¿cuál es el valor de la pendiente?
 - a) 3
 - b) 2
 - c) 5
 - d) 0
6. La ordenada al origen en la función $y = -4x + 7$ es:
 - a) -4
 - b) 7
 - c) -7
 - d) 4
7. Si una recta pasa por el punto (0, 5), ¿qué valor toma b en la ecuación $y = mx + b$?
 - a) 0
 - b) 5
 - c) Depende de la pendiente
 - d) Ninguno de los anteriores
8. En un modelo de depreciación lineal, ¿qué representa la pendiente?
 - a) El valor inicial del activo
 - b) La tasa de disminución anual
 - c) La vida útil del activo
 - d) El valor residual

Preguntas de Verdadero/Falso

9. La función lineal presenta un cambio constante en su variable dependiente.
(Verdadero/Falso)
10. El coeficiente “m” en una función lineal se conoce como la pendiente.
(Verdadero/Falso)
11. Un valor negativo de “b” indica que la recta corta el eje y en el sector negativo.
(Verdadero/Falso)
12. Alterar el valor de “m” en una función lineal no afecta la inclinación de la recta.
(Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta Abierta

13. Explica con tus palabras qué es una función lineal y menciona sus componentes esenciales.

14. Describe el procedimiento para determinar la ecuación de una función lineal a partir de un punto y la pendiente.
15. ¿Cómo se utiliza una función lineal para modelar el costo total de producción en una empresa?
16. Analiza el papel de las funciones lineales en la toma de decisiones administrativas, especialmente en la determinación del equilibrio de mercado.

2.2: Modelos de Equilibrio.

2.2.1: Modelo de Punto de Equilibrio Aplicado a la Producción.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Representa el punto de equilibrio el nivel en el que los ingresos totales igualan a los costos totales?
2. ¿Incluyen los costos fijos elementos tales como la amortización de bonos en el modelo de punto de equilibrio?
3. ¿Puede un incremento en el precio de venta reducir el número de unidades necesarias para alcanzar el equilibrio?
4. ¿El margen de contribución se define como la diferencia entre el precio de venta y el costo variable?

Preguntas de Opción Múltiple

5. La fórmula para calcular el punto de equilibrio es:
 - a) $CF / (Precio + CV)$
 - b) $CF / (Precio - CV)$
 - c) $(CF - CV) / Precio$
 - d) $CF / Precio$
6. En el modelo de punto de equilibrio, los costos fijos son:
 - a) Costos que varían con el volumen de producción.
 - b) Costos que permanecen constantes independientemente del nivel de producción.
 - c) Costos acumulados por cada unidad producida.
 - d) Ninguna de las anteriores.
7. Si se aumenta el precio de venta mientras el costo variable se mantiene constante, el punto de equilibrio:
 - a) Aumenta.
 - b) Disminuye.
 - c) Se mantiene igual.
 - d) Puede aumentar o disminuir según el nivel de CF.
8. La inclusión de la amortización de bonos en el análisis del punto de equilibrio se considera:
 - a) Un costo variable.
 - b) Un costo fijo.
 - c) Un ingreso adicional.

d) Una inversión a corto plazo.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. El punto de equilibrio se alcanza cuando los ingresos totales igualan a los costos totales, generando una utilidad de cero. (Verdadero/Falso)
10. La fórmula del punto de equilibrio es $CF + CV / \text{Precio}$. (Verdadero/Falso)
11. Un incremento en el precio de venta, manteniendo constante el costo variable, disminuye el número de unidades necesarias para alcanzar el equilibrio. (Verdadero/Falso)
12. La amortización de bonos se clasifica como un costo fijo en el análisis del punto de equilibrio. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta Abierta

13. Explique con sus palabras el concepto de punto de equilibrio y su importancia en la toma de decisiones de producción.
14. Describa el procedimiento completo para calcular el punto de equilibrio en un modelo de producción.
15. ¿Cómo afectan la fijación de precios y los costos variables en el cálculo del punto de equilibrio?
16. Analice la relevancia de incorporar elementos financieros, como la amortización de bonos, en el análisis del punto de equilibrio.

2.2.2: Modelo gráfico de punto de equilibrio

Preguntas de Sí/No

1. ¿Representa el modelo gráfico de punto de equilibrio el punto de intersección entre la línea de ingresos y la de costos totales?
2. ¿Se considera el punto de equilibrio como el nivel en el que la empresa no genera ni ganancia ni pérdida?
3. ¿La gráfica del punto de equilibrio puede utilizarse para ilustrar el impacto de modificar el precio de venta en la rentabilidad?
4. ¿Es posible ajustar el modelo gráfico de punto de equilibrio para incluir elementos como la depreciación y la amortización de bonos?

Preguntas de Opción múltiple

5. En el modelo gráfico de punto de equilibrio, el eje horizontal representa:
 - a) Los costos totales.
 - b) La cantidad de unidades.
 - c) Los ingresos totales.
 - d) El margen de contribución.
6. La ecuación de la línea de costos totales se formula como:
 - a) $CT = CF \times CV$.
 - b) $CT = CF + (CV \times Q)$.
 - c) $CT = CF - (CV \times Q)$.
 - d) $CT = CF + (P \times Q)$.

7. En el gráfico, la intersección de la línea de ingresos y costos totales indica:
 - a) La pérdida máxima.
 - b) El punto de equilibrio.
 - c) El costo variable.
 - d) El ingreso marginal.
8. Si se aumenta el precio de venta sin alterar el costo variable, ¿qué sucede con el punto de equilibrio en el gráfico?
 - a) Se desplaza hacia la derecha.
 - b) Se desplaza hacia la izquierda.
 - c) Se mantiene igual.
 - d) Se vuelve no lineal.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. El modelo gráfico de punto de equilibrio permite visualizar de manera inmediata la relación entre costos e ingresos. (Verdadero/Falso)
10. En un gráfico de punto de equilibrio, el eje vertical representa únicamente los costos fijos. (Verdadero/Falso)
11. Una modificación en el valor de los costos variables se reflejará en la pendiente de la línea de costos totales. (Verdadero/Falso)
12. Incluir conceptos como la depreciación en el análisis gráfico no afecta la determinación del PE. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta abierta

13. Explique en sus propias palabras qué representa el modelo gráfico de punto de equilibrio y cuál es su utilidad para la toma de decisiones administrativas.
14. Describa el procedimiento para elaborar el gráfico de un punto de equilibrio, desde la formulación de las funciones hasta la identificación de la intersección.
15. ¿Cómo influye la modificación de uno o más parámetros (CF, CV o precio) en la posición del punto de equilibrio en el gráfico?
16. Analice la importancia de incorporar elementos financieros adicionales, como la amortización de bonos o la depreciación, en el análisis gráfico para determinar con mayor precisión el BEP.

2.2.3: Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad

Preguntas de Sí/No

1. ¿Representa el margen de contribución la diferencia entre el precio de venta y el costo variable?
2. ¿El punto de equilibrio con utilidad se calcula sumando la utilidad deseada a los costos fijos?
3. ¿Se utiliza el modelo de contribución para determinar cuántas unidades se deben vender para cubrir los costos fijos sin generar ganancia?
4. ¿Una disminución en el costo variable incrementa el margen de contribución por unidad?

Preguntas de Opción múltiple

5. La fórmula para calcular las unidades requeridas considerando una utilidad deseada es:
 - a) $CF / (P - CV)$
 - b) $(CF + UD) / (P - CV)$
 - c) $(CF - UD) / (P - CV)$
 - d) $(P - CV) / (CF + UD)$
6. En el modelo de contribución, el término “MC” se refiere a:
 - a) Margen de contribución
 - b) Monto de costos
 - c) Margen de comercialización
 - d) Mínimo de costos
7. Si se reduce el costo variable en cada unidad, el efecto sobre el BEP es:
 - a) Un aumento en el número de unidades necesarias
 - b) Una disminución en el número de unidades necesarias
 - c) No se ve afectado
 - d) Depende del nivel de CF
8. La utilidad deseada en el modelo de contribución se suma a los costos fijos para:
 - a) Determinar el precio de venta ideal
 - b) Establecer el nuevo costo variable
 - c) Calcular las unidades necesarias para alcanzar la ganancia prevista
 - d) Ajustar la depreciación de activos

Preguntas de Verdadero/Falso

9. El margen de contribución es fundamental para cubrir los costos fijos y generar utilidades. (Verdadero/Falso)
10. A mayor margen de contribución, menor será el número de unidades necesarias para alcanzar el punto de equilibrio con utilidad. (Verdadero/Falso)
11. El modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad no considera la utilidad deseada al calcular el BEP. (Verdadero/Falso)
12. La fórmula $(CF + UD) / (P - CV)$ permite determinar las unidades requeridas para cubrir costos fijos y lograr una ganancia específica. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta abierta

13. Explique con sus propias palabras qué es el margen de contribución y cómo se utiliza para determinar el punto de equilibrio con utilidad.
14. Describa el procedimiento para calcular las unidades requeridas cuando se desea cubrir los costos fijos y obtener una utilidad adicional.
15. Analice cómo influye la disminución del costo variable en la cantidad de unidades a vender para alcanzar la utilidad deseada.
16. Discuta la importancia de incorporar elementos como la amortización de bonos o la depreciación en el análisis del modelo de contribución para la toma de decisiones administrativas.

2.2.4: Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Se utiliza el modelo de equilibrio para comparar los costos de producir internamente frente a comprar externamente?
2. ¿La decisión de comprar o producir depende únicamente del costo variable por unidad?
3. ¿Los costos fijos, como la depreciación y amortización, se incluyen en el análisis del modelo de decisión?
4. ¿Es posible que, para un bajo volumen de unidades, resulte más ventajoso comprar en lugar de producir?

Preguntas de Opción múltiple

5. En el modelo de decisión para comprar o producir, la comparación se realiza evaluando:
 - a. Solo los costos fijos.
 - b. Solo los costos variables.
 - c. La suma de los costos fijos y variables frente al precio de compra.
 - d. Únicamente el precio de compra.
6. La cantidad crítica en este modelo se determina igualando:
 - a. CT_p y CT_c .
 - b. CF y $(P - CV)$.
 - c. CV y el precio de compra.
 - d. CF y el precio de compra.
7. ¿Qué factor puede modificar el análisis de la decisión de comprar o producir?
 - a. Cambios en los costos fijos.
 - b. Variaciones en el costo de compra.
 - c. Ajustes en los costos variables.
 - d. Todas las anteriores.
8. El punto de decisión se alcanza cuando:
 - a. El costo total de producción es menor que el costo total de compra.
 - b. El costo total de producción es igual al costo total de compra.
 - c. El costo variable iguala el costo de compra.
 - d. Los costos fijos se eliminan.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. El análisis de comprar o producir siempre excluye costos adicionales como transporte o logística. (Verdadero/Falso)
10. Incluir amortización y depreciación en los costos fijos permite obtener un modelo de decisión más realista. (Verdadero/Falso)
11. Una disminución en el costo de compra favorece la opción de comprar en lugar de producir. (Verdadero/Falso)

12. El umbral de unidades críticas es fundamental para tomar decisiones estratégicas en la administración. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta Abierta

13. Explique con sus propias palabras en qué consiste el modelo de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir y cuáles son sus componentes principales.
14. Describa el procedimiento para determinar el umbral de unidades a partir del cual resulta rentable producir internamente.
15. Analice cómo influye la variación en los costos fijos y variables en la decisión de comprar o producir.
16. Discuta la importancia de incorporar elementos como la depreciación y la amortización al evaluar la opción de producir versus comprar en el contexto administrativo.

2.3: Métodos de eliminación

2.3.1: Métodos de eliminación suma y resta en sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3

Preguntas de Sí/No

1. ¿El método de eliminación suma y resta permite eliminar una variable al sumar o restar ecuaciones del sistema?
2. ¿Un sistema 2×2 contiene siempre dos ecuaciones con dos incógnitas?
3. ¿La técnica de eliminación se puede aplicar tanto a sistemas lineales de 2×2 como de 3×3 ?
4. ¿En administración los sistemas de ecuaciones lineales pueden ayudar a determinar la asignación de costos y la distribución de recursos?

Preguntas de Opción múltiple

5. El método de eliminación consiste en:
 - a) Multiplicar cada ecuación por una constante para igualar coeficientes.
 - b) Sumar o restar ecuaciones para eliminar una variable.
 - c) Sustituir una variable por otra.
 - d) Graficar las ecuaciones en el plano cartesiano.
6. En un sistema 2×2 , si se suman las ecuaciones y se elimina una variable, el siguiente paso es:
 - a) Despejar la variable restante.
 - b) Restituir la variable eliminada.
 - c) Dividir todas las ecuaciones por la suma de coeficientes.
 - d) Reemplazar las incógnitas por sus valores estimados.
7. ¿Cuál es la ventaja de utilizar el método de eliminación en sistemas de ecuaciones?
 - a) Se evita la necesidad de multiplicar por constantes.
 - b) Permite obtener soluciones exactas de manera sistemática.
 - c) Es aplicable solo a sistemas 2×2 .
 - d) No requiere realizar sustituciones.

8. En la aplicación administrativa, el sistema de ecuaciones puede ayudar a:
 - a) Determinar el costo total y el margen de utilidad.
 - b) Calcular únicamente costos fijos.
 - c) Estimar precios sin considerar la competencia.
 - d) Distribuir únicamente tareas operativas.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. La técnica de eliminación suma y resta es efectiva para resolver tanto sistemas de 2×2 como de 3×3 . (Verdadero/Falso)
10. En un sistema de ecuaciones, multiplicar una ecuación por una constante no altera sus soluciones. (Verdadero/Falso)
11. La eliminación de variables facilita la reducción de un sistema complejo a ecuaciones más simples. (Verdadero/Falso)
12. Los sistemas de ecuaciones lineales no tienen aplicación en la toma de decisiones administrativas. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta abierta

13. Explique con sus propias palabras en qué consiste el método de eliminación suma y resta y cómo se aplica en la resolución de sistemas 2×2 .
14. Describa el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones de 3×3 mediante eliminación, destacando los pasos fundamentales.
15. Analice la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales en la toma de decisiones administrativas, dando ejemplos concretos.
16. Discuta cómo la electrónica de los métodos de eliminación puede contribuir a optimizar recursos en una empresa.

2.3.1: Métodos de eliminación suma y resta en Sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3

Preguntas de Sí/No

1. ¿El método de eliminación permite resolver sistemas lineales al eliminar una variable mediante suma o resta?
2. ¿Un sistema 3×3 tiene tres ecuaciones con tres incógnitas?
3. ¿Es posible encontrar una solución única en sistemas que presentan ecuaciones equivalentes?
4. ¿En un sistema inconsistente, las rectas representadas se cruzan en un solo punto?
5. ¿Los sistemas que presentan ecuaciones proporcionales pueden tener infinitas soluciones?
6. ¿Un sistema de ecuaciones puede aplicarse en la planeación de recursos administrativos?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Qué sucede cuando al multiplicar una ecuación por un número se obtiene otra idéntica?
 - a. El sistema es inconsistente
 - b. El sistema tiene solución única

- c. El sistema es dependiente
 - d. El sistema se vuelve no lineal
8. ¿Cuál es el resultado de sumar las ecuaciones $4x + y = 50$ y $2x - y = 10$?
- a. $2x = 40$
 - b. $6x = 60$
 - c. $4x = 60$
 - d. $6x = 50$
9. ¿En qué ejemplo se presenta una contradicción directa entre dos ecuaciones iguales con resultados diferentes?
- a. Ejemplo 2
 - b. Ejemplo 5
 - c. Ejemplo 10
 - d. Ejemplo 6
10. ¿Qué tipo de solución tiene el sistema formado por $3x - 6y = 12$ y $x - 2y = 4$?
- a. Única
 - b. Inconsistente
 - c. Múltiple
 - d. Indefinida
11. ¿Cuál de las siguientes características define un sistema sin solución?
- a. Tiene tres ecuaciones equivalentes
 - b. Presenta contradicción entre resultados
 - c. Tiene una variable dependiente de otra
 - d. Representa un plano con puntos en común
12. ¿Cuál es la finalidad del método de eliminación?
- a. Resolver ecuaciones cuadráticas
 - b. Simplificar sistemas no lineales
 - c. Eliminar variables para encontrar soluciones
 - d. Representar ecuaciones gráficamente

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Si dos ecuaciones de un sistema son exactamente iguales, el sistema es inconsistente.
14. El sistema compuesto por $x + y + z = 9$, $2x + 2y + 2z = 18$ y $3x + 3y + 3z = 27$ tiene infinitas soluciones.
15. En el método de eliminación, se utiliza la suma o resta de ecuaciones para eliminar incógnitas.
16. Si la suma de dos ecuaciones da como resultado una ecuación con una sola variable, el sistema no puede resolverse.
17. El sistema formado por $4x + 2y = 10$ y $8x + 4y = 26$ es inconsistente.
18. Todo sistema 2×2 representa una solución única.

Preguntas de Correlación

Relaciona cada tipo de sistema con su característica.

<i>Tipo de sistema</i>	<i>Característica principal</i>
Sistema dependiente	Todas las ecuaciones son proporcionales
Sistema con solución única	Tiene una solución precisa para cada variable
Sistema inconsistente	Presenta contradicción en resultados
Método de eliminación	Utiliza suma o resta para su resolución
Sistema 3×3	Tiene tres ecuaciones y tres incógnitas
Aplicación en administración	Se usa en planificación y fijación de precios

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica en qué consiste el método de eliminación y cómo se aplica en sistemas de ecuaciones.
20. Describe un caso en el que un sistema de ecuaciones no tiene solución y justifica el motivo.
21. ¿Qué implica que un sistema tenga infinitas soluciones? Menciona una aplicación posible.
22. Explica la utilidad del método de eliminación en el análisis de equilibrio de mercado.
23. ¿Qué significa que dos ecuaciones sean equivalentes en un sistema lineal?
24. Justifica por qué un sistema que genera contradicción directa no puede resolverse.

2.3.2: Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 y 3×3 (solución única)

Preguntas de Sí/No

1. ¿El método de eliminación Gaussiana utiliza operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada?
2. ¿Es posible obtener una solución única de un sistema 3×3 ?
3. ¿La eliminación Gaussiana requiere siempre la sustitución hacia atrás para obtener la solución final?
4. ¿Un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 sin solución implica las líneas son paralelas?

Preguntas de Opción múltiple

5. El primer paso en la eliminación Gaussiana es:
 - a) Formar la matriz aumentada y aplicar operaciones elementales.
 - b) Sustituir una variable en otra ecuación.
 - c) Calcular el determinante de la matriz.
 - d) Graficar las ecuaciones en el plano.
6. La forma escalonada de una matriz permite realizar:
 - a) Sustitución hacia adelante.
 - b) Sustitución hacia atrás para resolver el sistema.
 - c) Multiplicación de cada ecuación.
 - d) Ninguna de las anteriores.

7. En un sistema 2×2 , la eliminación Gaussiana conduce a:
 - a) Una ecuación con dos incógnitas.
 - b) Dos ecuaciones independientes.
 - c) Una ecuación en una incógnita que se resuelve fácilmente.
 - d) Un sistema indeterminado.
8. La eliminación Gaussiana se utiliza en aplicaciones administrativas para:
 - a) Determinar distribución de costos.
 - b) Calcular márgenes de utilidad.
 - c) Asignar horas de trabajo entre diferentes departamentos.
 - d) Todas las anteriores.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. La eliminación Gaussiana transforma la matriz aumentada a una forma escalonada sin alterar las soluciones del sistema. (Verdadero/Falso)
10. Una vez obtenida la forma escalonada, siempre se requiere sustitución hacia atrás para resolver el sistema. (Verdadero/Falso)
11. Las operaciones elementales sobre filas, como el intercambio y la multiplicación por un escalar, son fundamentales en el método de eliminación Gaussiana. (Verdadero/Falso)
12. La eliminación Gaussiana es aplicable únicamente a sistemas 2×2 . (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta abierta

13. Explique con sus propias palabras en qué consiste el método de eliminación Gaussiana y detalle los pasos principales para resolver un sistema 2×2 .
14. Describa el proceso para transformar la matriz aumentada de un sistema 3×3 a su forma escalonada, resaltando las operaciones elementales utilizadas.
15. Analice la importancia de obtener una forma escalonada en la eliminación Gaussiana y cómo la sustitución hacia atrás permite resolver el sistema.
16. Discuta la relevancia del método de eliminación Gaussiana en la toma de decisiones administrativas, dando ejemplos en áreas como costos, fijación de precios e inversión.

2.3.3: Aplicaciones a modelos económico-administrativos

Preguntas de Sí/No

1. ¿El método de eliminación gaussiana se utiliza para obtener soluciones únicas en sistemas de ecuaciones lineales?
2. ¿La aplicación de operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada altera el conjunto de soluciones del sistema?
3. ¿Es necesaria la sustitución hacia atrás para determinar la solución final en la eliminación gaussiana?
4. ¿Un sistema de ecuaciones con determinante cero puede tener solución única?

Preguntas de Opción múltiple

5. El primer paso en el método de eliminación gaussiana es:
 - a) Formar la matriz aumentada a partir del sistema.
 - b) Sustituir una variable en otra ecuación.
 - c) Calcular el determinante de la matriz de coeficientes.
 - d) Graficar las ecuaciones en el plano cartesiano.
6. ¿Cuál de las siguientes operaciones es *NO* empleada en la eliminación gaussiana?
 - a) Multiplicación de una fila por un escalar.
 - b) Suma o resta de filas.
 - c) Intercambio de filas.
 - d) Elevación de una fila al cuadrado.
7. En un sistema 3×3 , la existencia de una solución única depende de que:
 - a) La matriz de coeficientes tenga determinante distinto de cero.
 - b) Todas las filas sean idénticas.
 - c) Al menos una fila sea cero.
 - d) No se realicen intercambios de filas.
8. La sustitución hacia atrás en el método gaussiano se realiza:
 - a) Antes de obtener la matriz en forma escalonada.
 - b) Después de transformar la matriz aumentada a forma escalonada.
 - c) Durante la formación de la matriz aumentada.
 - d) Al calcular el determinante de la matriz.

Preguntas de Verdadero/Falso

9. La eliminación gaussiana se basa en operaciones elementales (intercambio de filas, multiplicación por un escalar y suma/resta de filas) que no alteran las soluciones del sistema. (Verdadero/Falso)
10. Una vez obtenida la forma escalonada de la matriz aumentada, siempre es necesaria la sustitución hacia atrás para hallar la solución. (Verdadero/Falso)
11. Si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el sistema no puede tener solución única. (Verdadero/Falso)
12. Las aplicaciones administrativas, como la asignación de costos y la distribución de horas de trabajo, se pueden modelar mediante sistemas de ecuaciones lineales con solución única. (Verdadero/Falso)

Preguntas de Respuesta abierta

13. Explique con sus propias palabras en qué consiste el método de eliminación gaussiana y detalle los pasos principales para resolver un sistema 2×2 .
14. Describa de forma detallada el proceso de transformar la matriz aumentada de un sistema 3×3 a su forma escalonada mediante eliminación gaussiana y cómo se procede con la sustitución hacia atrás.
15. Analice la importancia de utilizar sistemas de ecuaciones lineales para modelar problemas económico-administrativos en áreas como costos, fijación de precios y distribución de recursos.

16. Discuta cómo la solución obtenida mediante la eliminación gaussiana puede influir en la toma de decisiones administrativas, ofreciendo un ejemplo concreto relacionado con inventarios o asignación de horas de trabajo.

A-3 Álgebra matricial.

3.1 Introducción a las matrices.

Preguntas de Sí/No

1. ¿Una matriz puede tener más columnas que filas?
2. ¿Las matrices se utilizan para representar sistemas de ecuaciones lineales?
3. ¿Una matriz de una sola fila se llama matriz fila?
4. ¿Una matriz cuadrada siempre tiene el mismo número de filas y columnas?
5. ¿La posición de un elemento en una matriz se identifica por su fila y columna?
6. ¿Una matriz puede contener letras en lugar de números?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Qué representa una matriz en el contexto administrativo?
 - a. Un conjunto de ecuaciones sin orden
 - b. Una tabla de datos sin estructura
 - c. Una forma organizada de representar información numérica
 - d. Un gráfico de barras
8. ¿Cuál es la dimensión de una matriz con 3 filas y 4 columnas?
 - a. 4×3
 - b. 3×4
 - c. 7×3
 - d. 4×1
9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre una matriz columna?
 - a. Tiene una sola fila
 - b. Tiene una sola columna
 - c. Tiene elementos solo en la diagonal
 - d. Tiene ceros en todas sus posiciones
10. ¿Qué significa el subíndice a_{ij} en una matriz?
 - a. El número total de elementos
 - b. La suma de la fila i y la columna j
 - c. La posición del elemento en la fila i y columna j
 - d. El valor máximo de la matriz
11. ¿Cuál de las siguientes no es una característica de una matriz cuadrada?
 - a. Tiene el mismo número de filas y columnas
 - b. Puede tener elementos en la diagonal
 - c. Siempre tiene determinante
 - d. Tiene más columnas que filas

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Una matriz de dimensión 2×3 tiene 2 columnas y 3 filas.
(Verdadero / Falso)

14. Las matrices se pueden usar para representar datos financieros, logísticos o administrativos.
(Verdadero / Falso)
15. Una matriz identidad tiene ceros en la diagonal principal.
(Verdadero / Falso)
16. El elemento a_{23} se encuentra en la segunda fila y tercera columna.
(Verdadero / Falso)
17. Una matriz columna tiene más de una columna.
(Verdadero / Falso)
18. Las matrices solo se utilizan en matemáticas puras.
(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

A continuación, se presenta una tabla con dos columnas para relacionar conceptos con su definición.

Concepto	Definición/Característica
Matriz fila	Matriz con una sola fila
Matriz columna	Matriz con una sola columna
Matriz cuadrada	Matriz con igual número de filas y columnas
Matriz nula	Matriz cuyos elementos son todos ceros
Elemento a_{ij}	Valor ubicado en la fila i y columna j
Dimensión	Número de filas y columnas que tiene una matriz

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica qué es una matriz y cómo se representa su dimensión.
20. Describe los diferentes tipos de matrices según su forma y contenido.
21. ¿Cómo se identifica la posición de un elemento dentro de una matriz?
22. Menciona tres aplicaciones prácticas de las matrices en administración.
23. ¿Qué diferencia hay entre una matriz fila y una matriz columna?
24. ¿Por qué es importante conocer la dimensión de una matriz antes de operar con ella?

3.2 Tipos especiales de matrices

Preguntas de Sí/No

1. ¿Una matriz triangular superior tiene ceros debajo de la diagonal principal?
2. ¿Una matriz escalar es una matriz diagonal con todos los elementos iguales en la diagonal?
3. ¿La matriz identidad cambia los valores de una matriz al multiplicarse con ella?
4. ¿La matriz transpuesta se obtiene al intercambiar filas por columnas?
5. ¿Una matriz escalonada puede tener ceros antes del primer elemento no nulo de una fila?

6. ¿La matriz escalonada reducida por filas tiene ceros en todas las posiciones excepto los pivotes?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la característica principal de una matriz triangular superior?
- Tiene ceros en la diagonal
 - Tiene ceros debajo de la diagonal principal
 - Tiene ceros en toda la matriz
 - Tiene ceros sobre la diagonal principal
8. ¿Qué define a una matriz escalar?
- Todos sus elementos son cero
 - Tiene ceros fuera de la diagonal y valores iguales en la diagonal
 - Tiene ceros en la diagonal
 - Tiene valores distintos en cada posición
9. ¿Qué representa la matriz identidad en álgebra lineal?
- Una matriz que invierte los signos
 - Una matriz que no altera el resultado al multiplicarse
 - Una matriz que elimina columnas
 - Una matriz que suma elementos
10. ¿Qué ocurre al transponer una matriz?
- Se eliminan las filas
 - Se duplican los elementos
 - Las filas se convierten en columnas
 - Se suman los elementos de cada fila
11. ¿Cuál es la diferencia entre una matriz escalonada y una escalonada reducida por filas?
- La escalonada reducida tiene ceros en la diagonal
 - La escalonada reducida tiene pivotes igual a uno y ceros en su columna
 - La escalonada tiene ceros en toda la matriz
 - No hay diferencia
12. ¿Cuál de las siguientes matrices permite resolver sistemas lineales mediante sustitución regresiva?
- Matriz identidad
 - Matriz escalar
 - Matriz triangular superior
 - Matriz transpuesta

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Una matriz escalar siempre tiene ceros fuera de la diagonal principal.
(Verdadero / Falso)
14. La matriz identidad tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto.
(Verdadero / Falso)

15. La matriz transpuesta conserva el número total de elementos.
(Verdadero / Falso)
16. Una matriz escalonada puede tener ceros antes del primer número distinto de cero en cada fila.
(Verdadero / Falso)
17. La matriz escalonada reducida por filas tiene pivotes distintos de uno.
(Verdadero / Falso)
18. La matriz triangular superior tiene ceros sobre la diagonal principal.
(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

Relaciona cada tipo de matriz con su característica principal:

Tipo de matriz	Característica principal
Matriz triangular superior	Tiene ceros debajo de la diagonal principal
Matriz escalar	Diagonal con valores iguales, ceros fuera de ella
Matriz identidad	Unos en la diagonal principal, ceros en el resto
Matriz transpuesta	Intercambia filas por columnas
Matriz escalonada	Pivotes alineados en diagonal, ceros debajo de ellos
Matriz escalonada reducida	Pivotes igual a uno, ceros en su columna y debajo

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica qué es una matriz triangular superior y cómo se utiliza en la resolución de sistemas.
20. ¿Qué condiciones debe cumplir una matriz para considerarse escalar?
21. ¿Por qué la matriz identidad es fundamental en la multiplicación de matrices?
22. Describe el proceso para obtener la matriz transpuesta de una matriz dada.
23. ¿Qué ventajas ofrece la matriz escalonada reducida por filas al resolver sistemas lineales?
24. Compara la utilidad de la matriz escalonada y la escalonada reducida en el contexto administrativo.

3.3 Operaciones con matrices

Preguntas de Sí/No

1. ¿Dos matrices se pueden sumar si tienen diferente dimensión?
2. ¿Multiplicar una matriz por un escalar afecta todos sus elementos?
3. ¿La multiplicación de matrices es conmutativa?
4. ¿La suma de matrices es una operación definida solo para matrices del mismo tamaño?
5. ¿Multiplicar una matriz por la identidad conserva sus valores?
6. ¿La transposición de una matriz cambia su número total de elementos?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Qué condición deben cumplir dos matrices para poder sumarse?
 - a. Tener el mismo número de columnas
 - b. Ser cuadradas
 - c. Tener la misma dimensión
 - d. Tener ceros en la diagonal principal
8. ¿Qué representa el producto de una matriz por un escalar?
 - a. La suma de sus elementos
 - b. La multiplicación de cada elemento por el escalar
 - c. La transposición de la matriz
 - d. La eliminación de ceros
9. ¿Qué condición deben cumplir dos matrices para poder multiplicarse?
 - a. Tener el mismo número de filas
 - b. Ser cuadradas
 - c. El número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda
 - d. Tener ceros en la diagonal
10. ¿Qué representa el elemento c_{ij} en el producto de dos matrices A y B?
 - a. La suma de los elementos de la fila i de A
 - b. El producto escalar entre la fila i de A y la columna j de B
 - c. El valor máximo de la matriz A
 - d. La transposición de la columna j de B
11. ¿Qué ocurre si se intenta sumar matrices de diferente dimensión?
 - a. Se obtiene una matriz nula
 - b. La operación no está definida
 - c. Se suman solo las filas coincidentes
 - d. Se suman solo las columnas coincidentes
12. ¿Cuál es el resultado de multiplicar una matriz por el escalar cero?
 - a. Una matriz identidad
 - b. Una matriz transpuesta
 - c. Una matriz nula
 - d. Una matriz diagonal

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La suma de matrices es conmutativa.
(Verdadero / Falso)
14. La multiplicación de matrices es conmutativa.
(Verdadero / Falso)
15. Multiplicar una matriz por la identidad no altera sus valores.
(Verdadero / Falso)
16. La multiplicación de matrices es asociativa.
(Verdadero / Falso)

17. Multiplicar una matriz por cero da como resultado una matriz nula.

(Verdadero / Falso)

18. La transposición de una matriz cambia su número total de elementos.

(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

Relaciona cada operación con su característica principal:

Operación	Característica principal
Suma de matrices	Requiere misma dimensión, suma elemento a elemento
Multiplicación por escalar	Multiplica cada elemento por un número
Multiplicación de matrices	Producto escalar entre filas y columnas
Transposición de matriz	Intercambia filas por columnas
Multiplicación por identidad	Conserva los valores de la matriz original
Multiplicación por cero	Da como resultado una matriz nula

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica qué condiciones deben cumplir dos matrices para poder sumarse.
20. ¿Cómo se realiza la multiplicación de una matriz por un escalar?
21. ¿Qué significa multiplicar dos matrices y cómo se obtiene cada elemento del producto?
22. ¿Por qué la multiplicación de matrices no es conmutativa?
23. ¿Qué representa la matriz identidad en la multiplicación de matrices?
24. ¿Qué utilidad tiene la transposición de matrices en el análisis de datos?

3.4 Introducción a los determinantes.

Solución de un determinante de 2×2 , 3×3 por método de columnas aumentadas y cofactores

Preguntas de Sí/No

1. ¿Toda matriz cuadrada tiene un determinante?
2. ¿El determinante de una matriz 2×2 se calcula con una fórmula directa?
3. ¿El método de cofactores se aplica únicamente a matrices de orden mayor a 2×2 ?
4. ¿Una matriz con determinante igual a cero no tiene inversa?
5. ¿El método de columnas aumentadas se utiliza para calcular determinantes?
6. ¿El signo del cofactor depende de la posición del elemento dentro de la matriz?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la fórmula para calcular el determinante de una matriz 2×2 ?
 - a. $a + b + c + d$
 - b. $a \cdot d - b \cdot c$
 - c. $a \cdot b + c \cdot d$
 - d. $a \cdot c - b \cdot d$
8. ¿Qué representa el determinante de una matriz cuadrada?
 - a. El número total de elementos

- b. La suma de los elementos de la diagonal
 - c. Un valor que indica si la matriz es invertible
 - d. La cantidad de filas y columnas
9. ¿Qué se necesita para aplicar el método de cofactores?
- a. Multiplicar la matriz por su transpuesta
 - b. Calcular menores y aplicar signos alternantes
 - c. Sumar los elementos de la matriz
 - d. Intercambiar filas y columnas
10. ¿Qué ocurre si el determinante de una matriz es igual a cero?
- a. La matriz es invertible
 - b. La matriz tiene solución única
 - c. La matriz no tiene inversa
 - d. La matriz se convierte en la identidad
11. ¿Qué representa el cofactor de un elemento a_{ij} ?
- a. La suma de la fila (i) y columna (j)
 - b. El menor multiplicado por $(-1)^{i+j}$
 - c. El producto de todos los elementos
 - d. El valor máximo de la matriz
12. ¿Cuál es el primer paso para calcular el determinante de una matriz 3×3 por cofactores?
- a. Multiplicar por la matriz identidad
 - b. Calcular el determinante de la matriz transpuesta
 - c. Seleccionar una fila o columna y calcular sus menores
 - d. Sumar todos los elementos de la matriz

Preguntas de Verdadero/Falso

13. El determinante de una matriz cuadrada puede ser negativo.
(Verdadero / Falso)
14. El método de cofactores utiliza menores y signos alternantes.
(Verdadero / Falso)
15. Una matriz con determinante cero tiene inversa.
(Verdadero / Falso)
16. El determinante de una matriz 3×3 se puede calcular por expansión de cofactores.
(Verdadero / Falso)
17. El método de columnas aumentadas es exclusivo para matrices cuadradas.
(Verdadero / Falso)
18. El determinante de una matriz identidad siempre es uno.
(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

Relaciona cada concepto con su definición o característica principal:

Concepto	Definición/Característica
Determinante	Valor que indica si una matriz es invertible
Cofactor	Menor multiplicado por signo alternante según posición
Menor	Determinante de la submatriz que queda al eliminar fila y columna
Método de cofactores	Técnica que usa menores y signos para calcular el determinante
Método de columnas aumentadas	Técnica que extiende la matriz para facilitar el cálculo del determinante
Matriz cuadrada	Matriz con igual número de filas y columnas

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica cómo se calcula el determinante de una matriz 2×2 .
20. Describe el procedimiento para obtener el determinante de una matriz 3×3 por cofactores.
21. ¿Qué significa que el determinante de una matriz sea igual a cero?
22. ¿Cómo se aplica el método de columnas aumentadas para calcular el determinante de una matriz 3×3 ?
23. ¿Qué papel juegan los signos alternantes en el método de cofactores?
24. ¿Por qué es importante conocer el valor del determinante antes de intentar calcular la inversa de una matriz?

3.5 Propiedades de los determinantes

Preguntas de Sí/No

1. ¿Intercambiar dos renglones de una matriz cambia el signo de su determinante?
2. ¿Multiplicar un renglón por un escalar afecta el valor del determinante?
3. ¿Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón modifica el determinante?
4. ¿El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal?
5. ¿Una matriz con dos renglones iguales tiene determinante cero?
6. ¿Las transformaciones elementales pueden usarse para simplificar el cálculo del determinante?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Qué ocurre con el determinante si se intercambian dos renglones de una matriz?
 - a. Se multiplica por cero
 - b. No cambia
 - c. Cambia de signo
 - d. Se duplica
8. ¿Qué efecto tiene multiplicar un renglón por un escalar k en el determinante?
 - a. El determinante se multiplica por k
 - b. El determinante se divide por k

- c. El determinante se vuelve cero
 - d. El determinante no cambia
9. ¿Qué ocurre si se suma un múltiplo de un renglón a otro renglón?
- a. El determinante se multiplica por ese múltiplo
 - b. El determinante cambia de signo
 - c. El determinante permanece igual
 - d. El determinante se vuelve negativo
10. ¿Cuál de las siguientes operaciones no altera el valor del determinante?
- a. Intercambiar dos renglones
 - b. Multiplicar un renglón por un escalar
 - c. Sumar un múltiplo de un renglón a otro
 - d. Multiplicar toda la matriz por un escalar
11. ¿Qué propiedad se cumple si una matriz tiene dos renglones proporcionales?
- a. Su determinante es uno
 - b. Su determinante es negativo
 - c. Su determinante es cero
 - d. Su determinante es igual al escalar
12. ¿Cuál es el propósito de aplicar transformaciones elementales al calcular determinantes?
- a. Eliminar ceros de la matriz
 - b. Convertir la matriz en identidad
 - c. Simplificar el cálculo sin alterar el resultado
 - d. Cambiar el tamaño de la matriz

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Intercambiar dos renglones de una matriz cuadrada cambia el signo del determinante.
(Verdadero / Falso)
14. Multiplicar un renglón por un escalar no afecta el determinante.
(Verdadero / Falso)
15. Sumar un múltiplo de un renglón a otro no cambia el determinante.
(Verdadero / Falso)
16. Si una matriz tiene dos renglones iguales, su determinante es cero.
(Verdadero / Falso)
17. Las transformaciones elementales permiten simplificar el cálculo del determinante.
(Verdadero / Falso)
18. El determinante de una matriz triangular se obtiene sumando los elementos de la diagonal.
(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

Relaciona cada transformación elemental con su efecto sobre el determinante:

Transformación Elemental	Efecto sobre el Determinante
Intercambio de dos renglones	Cambia el signo del determinante
Multiplicación de un renglón por un escalar	Multiplica el determinante por ese escalar
Suma de un múltiplo de un renglón a otro	No altera el valor del determinante
Dos renglones iguales	Determinante igual a cero
Matriz triangular	Determinante igual al producto de los elementos diagonales
Transformaciones elementales	Facilitan el cálculo del determinante sin cambiar su esencia

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica qué ocurre con el determinante al intercambiar dos renglones de una matriz.
20. ¿Cómo afecta al determinante multiplicar un renglón por un escalar?
21. ¿Por qué sumar un múltiplo de un renglón a otro no modifica el determinante?
22. ¿Qué sucede con el determinante si una matriz tiene dos renglones iguales o proporcionales?
23. ¿Cómo se puede usar la forma triangular de una matriz para calcular su determinante?
24. ¿Qué ventajas ofrece el uso de transformaciones elementales en el cálculo de determinantes?

3.6 Solución de la inversa de una matriz

Preguntas de Sí/No

1. ¿Toda matriz cuadrada tiene una inversa?
2. ¿El determinante de una matriz debe ser distinto de cero para que la matriz tenga inversa?
3. ¿El método de eliminación se basa en transformar la matriz original en la identidad?
4. ¿El método de Cramer utiliza la matriz adjunta para calcular la inversa?
5. ¿La inversa de una matriz (A) es la misma que la inversa de su transpuesta?
6. ¿Multiplicar una matriz por su inversa siempre da como resultado la matriz identidad?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál de las siguientes condiciones es necesaria para que una matriz tenga inversa?
 - a. La matriz debe ser simétrica.
 - b. La matriz debe ser cuadrada y su determinante distinto de cero.
 - c. La matriz debe tener todos sus elementos positivos.
 - d. La matriz debe ser diagonal.
8. ¿Cuál es el objetivo del método de eliminación para calcular la inversa de una matriz?

- a. Transformar la matriz en una matriz triangular superior.
 - b. Convertir la matriz en la identidad mediante operaciones fila.
 - c. Multiplicar la matriz por su transpuesta.
 - d. Aplicar la regla de Cramer para encontrar soluciones.
9. ¿Cómo se obtiene la matriz adjunta en el método de Cramer?
- a. Calculando la transpuesta de la matriz de cofactores.
 - b. Multiplicando la matriz por su determinante.
 - c. Intercambiando filas y columnas de la matriz original.
 - d. Sumando los elementos de cada fila.
10. ¿Qué sucede si el determinante de una matriz es igual a cero?
- a. La matriz no tiene inversa.
 - b. La matriz es invertible.
 - c. La matriz se convierte en la identidad.
 - d. La matriz se vuelve diagonal.
11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta sobre la inversa de una matriz?
- a. La inversa de una matriz siempre tiene elementos enteros.
 - b. La inversa de una matriz A es la misma que la inversa de A^T .
 - c. Si A^{-1} existe, entonces $A \cdot A^{-1} = I$.
 - d. La inversa de una matriz se obtiene sumando los elementos de cada fila.
12. ¿Cuál es la fórmula general para calcular la inversa de una matriz por el método de Cramer?
- a. $A^{-1} = \det(A) \cdot \text{Adj}(A)$
 - b. $A^{-1} = 1/\det(A) \cdot \text{Adj}(A)$
 - c. $A^{-1} = A \cdot A^T$
 - d. $A^{-1} = A + I$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Si el determinante de una matriz es cero, la matriz no tiene inversa.
(Verdadero / Falso)
14. La inversa de una matriz se obtiene aplicando operaciones fila hasta convertirla en la identidad.
(Verdadero / Falso)
15. En el método de Cramer, la matriz adjunta se obtiene calculando la transpuesta de la matriz de cofactores.
(Verdadero / Falso)
16. Multiplicar una matriz por su inversa siempre da como resultado la matriz identidad.
(Verdadero / Falso)
17. Si una matriz es diagonal, su inversa se obtiene simplemente invirtiendo los valores de la diagonal.
(Verdadero / Falso)

18. La inversa de una matriz A es la misma que la inversa de su transpuesta A^T .

(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

A continuación, se presenta una tabla con dos columnas para relacionar conceptos con su definición.

Concepto	Definición/Característica
Matriz inversa	Matriz que, al multiplicarse por la original, da como resultado la identidad.
Determinante	Valor que indica si una matriz es invertible o no.
Método de eliminación	Técnica que transforma la matriz en la identidad mediante operaciones fila.
Método de Cramer	Método que usa la matriz adjunta y el determinante para calcular la inversa.
Matriz adjunta	Transpuesta de la matriz de cofactores.
Matriz identidad	Matriz cuadrada con unos en la diagonal y ceros en el resto.

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica detalladamente el procedimiento para calcular la inversa de una matriz por el método de eliminación.
20. Describe el método de Cramer y menciona un ejemplo donde su aplicación sea útil.
21. ¿Por qué el determinante de una matriz es clave para determinar si tiene inversa?
22. Explica la relación entre la matriz adjunta y la inversa de una matriz.
23. ¿Cómo se puede verificar que una matriz ha sido correctamente invertida?
24. ¿Cuáles son las diferencias entre el método de eliminación y el método de Cramer para calcular la inversa de una matriz?

3.7 Aplicaciones a Modelos de Insumo-Producto

Preguntas de Sí/No

1. ¿La matriz de coeficientes técnicos refleja la proporción de insumos que cada sector requiere de los demás?
2. ¿Se obtiene la producción total multiplicando la matriz de coeficientes técnicos por el vector de demanda final?
3. ¿Debe ser invertible la matriz $I - A$ para aplicar el modelo de Leontief?
4. ¿Un valor negativo en la matriz inversa de Leontief indica un efecto indirecto negativo en la producción?
5. ¿La suma de cada fila de la matriz técnica siempre es igual a uno?
6. ¿Es válido usar un modelo de insumo-producto para analizar recursos dentro de una sola empresa?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Qué representa la matriz $I - A$ en un modelo de insumo-producto?
 - a. Identidad de sectores
 - b. Coeficientes de producción neta
 - c. Relación inversa entre oferta y demanda
 - d. Balance de insumos directos e indirectos
8. ¿Cómo se calcula la producción total requerida X ?
 - a. $X = A \cdot D$
 - b. $X = (I - A)^{-1} \cdot D$
 - c. $X = I \cdot A$
 - d. $X = D - A$
9. ¿Qué mide el elemento x_{ij} de la inversa de Leontief?
 - a. Insumo directo del sector i en j
 - b. Efecto total del sector j en la producción de i
 - c. Demanda final de i
 - d. Costo unitario de producción
10. ¿Cuál es el primer paso al formular un modelo de insumo-producto?
 - a. Calcular la matriz inversa
 - b. Determinar la matriz identidad
 - c. Construir la matriz de coeficientes técnicos
 - d. Definir la demanda total
11. Si la demanda final de un sector aumenta, ¿qué ocurre con la producción total según el modelo?
 - a. Disminuye en todos los sectores
 - b. Permanece constante
 - c. Aumenta proporcionalmente en cada sector según la inversa
 - d. Solo afecta al sector de demanda
12. ¿Cuál de los siguientes no es componente del modelo de Leontief?
 - a. Matriz de coeficientes técnicos
 - b. Vector de demanda final
 - c. Matriz de varianzas
 - d. Matriz identidad

Preguntas de Verdadero/Falso

13. El modelo de insumo-producto solo considera efectos directos entre sectores.
(Verdadero / Falso)
14. La inversa de Leontief incorpora tanto efectos directos como efectos indirectos.
(Verdadero / Falso)
15. Un determinante de $I - A$ igual a cero impide encontrar la producción total.
(Verdadero / Falso)

16. La matriz técnica A puede tener elementos mayores que 1 si un sector consume más de su propia producción.
(Verdadero / Falso)
17. El vector de demanda final incluye tanto consumo interno como exportaciones.
(Verdadero / Falso)
18. El modelo de Leontief es aplicable únicamente a economías nacionales, no a unidades empresariales.
(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

A continuación, se presenta una tabla con dos columnas para relacionar conceptos con su definición.

Concepto	Definición/Característica
Matriz inversa	Matriz que, al multiplicarse por la original, da como resultado la identidad.
Determinante	Valor que indica si una matriz es invertible o no.
Método de eliminación	Técnica que transforma la matriz en la identidad mediante operaciones fila.
Método de Cramer	Método que usa la matriz adjunta y el determinante para calcular la inversa.
Matriz adjunta	Transpuesta de la matriz de cofactores.
Matriz identidad	Matriz cuadrada con unos en la diagonal y ceros en el resto.

Preguntas de Respuesta Abierta

19. Explica detalladamente el procedimiento para calcular la producción total en un modelo de insumo-producto.
20. Describe cómo se construye la matriz de coeficientes técnicos y qué representa.
21. ¿Por qué es esencial que el determinante de $I - A$ sea distinto de cero?
22. Explica la relación entre la matriz inversa de Leontief y los efectos indirectos en la producción.
23. ¿Cómo se puede verificar que los resultados obtenidos en el modelo satisfacen la demanda final?
24. ¿Cuáles son las ventajas y limitaciones de aplicar el modelo de insumo-producto en una empresa?

A-4 Diferenciación y Aplicaciones

4.1 Límites y continuidad

Preguntas de Sí/No

1. ¿El límite de una función existe si no hay valor definido en el punto de aproximación?
2. ¿Una función puede ser continua en un punto sin tener límite en ese punto?
3. ¿Toda función polinómica es continua en todo su dominio?
4. ¿Una discontinuidad de salto impide que el límite exista en un punto?
5. ¿Una función constante presenta variación en su límite?
6. ¿El límite lateral izquierdo puede diferir del límite lateral derecho en una función?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Cuál es el resultado de $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8
8. ¿Cuál propiedad del límite se aplica en $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$?
A) Aditiva B) Multiplicativa C) Cociente D) Constante
9. ¿Cuál es el resultado de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) Indeterminado
10. ¿Cuál es la condición para que una función sea continua en $x = a$?
A) Que el valor de la función esté definido
B) Que el límite exista
C) Que el límite coincida con el valor de la función
D) Todas las anteriores
11. ¿El límite de una constante c cuando $x \rightarrow a$ siempre es igual $a \dots$?
A) x B) a C) c D) 0
12. ¿En qué casos no se puede aplicar la propiedad del cociente?
A) Cuando el numerador tiende a cero
B) Cuando el denominador tiende a cero
C) Cuando ambos tienden a infinito
D) Cuando el cociente es una constante

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Si el límite lateral izquierdo y derecho son iguales, el límite existe.
Verdadero _____ Falso _____
14. El límite de una función racional siempre existe para todo número real.
Verdadero _____ Falso _____
15. Una función no puede ser continua en un punto si no tiene límite en ese punto.
Verdadero _____ Falso _____

16. La expresión $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es indeterminada cuando $x = 2$.

Verdadero _____ Falso _____

17. Toda discontinuidad implica que el límite no existe.

Verdadero _____ Falso _____

18. El límite de $\sqrt{x+9}$ cuando $x \rightarrow 0$ es igual a 3.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de Correlación

19. Relaciona cada expresión con su propiedad correspondiente:

Expresión	Propiedad del límite
$\lim_{x \rightarrow a} c$	Interpretación geométrica del límite
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	Cociente si $g(x) \neq 0$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$	Límite de una constante
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	Evaluación directa
$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 3x)$	Aditiva
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	Multiplicativa

Preguntas de respuesta abierta

- ¿En qué consiste el concepto geométrico del límite mediante la aproximación de la secante a la tangente?
- Explica cuáles son las tres condiciones necesarias para que una función sea continua en un punto.
- ¿Por qué una función con diferente límite lateral derecho e izquierdo no puede tener límite en ese punto?
- Describe cómo se puede simplificar algebraicamente una expresión indeterminada para evaluar su límite.
- ¿Cómo se interpreta el límite en el contexto de evaluación marginal en administración?
- ¿Qué representa el límite de una función constante? ¿Varía según el punto de aproximación?

4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas

Preguntas de Sí/No

- ¿La derivada de una constante es siempre igual a cero?
- ¿La derivada de x^n se obtiene aplicando la regla de la potencia?

3. ¿La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas?
4. ¿La derivada de e^x es igual a e^x ?
5. ¿La derivada de $\ln(x)$ es $1/x$?
6. ¿La derivada de una constante multiplicada por una función afecta solo a la función?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es la derivada de x^4 ?
 - a. $4x^4$
 - b. x^3
 - c. $4x^3$
 - d. $x^4 + 1$
8. ¿Cuál es la derivada de $5x^2 + 3x + 7$?
 - a. $10x + 3$
 - b. $5x^2 + 3$
 - c. $2x + 3$
 - d. $10x^2 + 3x$
9. ¿Qué regla se aplica para derivar el producto de dos funciones algebraicas?
 - a. Regla de la cadena
 - b. Regla del producto
 - c. Regla de la suma
 - d. Regla de la constante
10. ¿Cuál es la derivada de $\sqrt{x}$?
 - a. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
 - b. $\sqrt{x}$
 - c. $x^{1/2}$
 - d. $\frac{1}{x}$
11. ¿Cuál es la derivada de $\ln(x^2)$?
 - a. $\frac{2}{x}$
 - b. $\ln(2x)$
 - c. $\frac{1}{x^2}$
 - d. $2\ln(x)$

Preguntas de Verdadero/Falso

12. La derivada de x^3 es $3x^2$.
(Verdadero / Falso)

13. La derivada de x^{-1} es x^{-2} .

(Verdadero / Falso)

14. La derivada de e^x es diferente de e^x .

(Verdadero / Falso)

15. La derivada de $\ln(x)$ es $1/x$.

(Verdadero / Falso)

16. La derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

(Verdadero / Falso)

Pregunta de Correlación

Relaciona cada función con su derivada correspondiente:

Función Derivada

x^n $1/x$

e^x $-x^{-2}$

$\ln(x)$ $n \cdot x^{n-1}$

$\sqrt{x}$ $14x + 4$

x^{-1} e^x

$7x^2 + 4x$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Preguntas de Respuesta Abierta

17. Explica cómo se aplica la regla de la potencia para derivar x^n .

18. ¿Cuál es el procedimiento para derivar una función compuesta como $\ln(\sqrt{x})$?

19. ¿Por qué la derivada de una constante es cero?

20. Describe cómo se deriva el producto de dos funciones algebraicas.

21. ¿Qué significa que la derivada de e^x sea igual a sí misma?

22. ¿Cómo se interpreta geométricamente la derivada de una función polinómica?

4.3 Derivada de n-ésimo orden

Preguntas de Sí/No

1. ¿La segunda derivada puede determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

2. ¿Toda función derivable tiene necesariamente derivadas de orden superior?

3. ¿Es posible que la tercera derivada de una función sea constante?

4. ¿La derivada de n-ésimo orden puede ser útil en el análisis económico?

5. ¿Una función exponencial tiene derivadas de orden superior iguales a cero?

Preguntas de opción múltiple

6. ¿Cuál es la tercera derivada de $f(x) = x^4$?

- A) $12x^2$ B) $24x$ C) $4x^3$ D) $6x$
7. ¿La segunda derivada de $f(x) = e^x$ es...?
- A) $2e^x$ B) e^{2x} C) e^x D) $\ln(x)$
8. ¿Cuál función tiene derivadas de orden n iguales para todo n ?
- A) $f(x) = x^2$ B) $f(x) = e^x$ C) $f(x) = \ln(x)$ D) $f(x) = x^n$
9. ¿Qué describe la segunda derivada de una función de ingreso?
- A) Valor absoluto del ingreso
B) Aceleración del crecimiento
C) Precio marginal
D) Punto de equilibrio
10. ¿Cuál es la segunda derivada de $f(x) = x^3 + 5x$?
- A) $6x$ B) $3x^2$ C) 6 D) 0

Preguntas de Verdadero/Falso

11. La tercera derivada de una función cuadrática siempre es cero.
Verdadero _____ Falso _____
12. La segunda derivada de $f(x) = \ln x$ es negativa para todo $x > 0$.
Verdadero _____ Falso _____
13. La tercera derivada puede servir para modelar fluctuaciones de precios.
Verdadero _____ Falso _____
14. Si una función tiene segunda derivada negativa, es cóncava hacia abajo.
Verdadero _____ Falso _____
15. Una función constante tiene tercera derivada distinta de cero.
Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

16. Relaciona cada función con la característica que describe su comportamiento en derivadas superiores:
- | | |
|-------------------|--|
| Función | Comportamiento de derivadas |
| $f(x) = e^x$ | Segunda derivada positiva constante |
| $f(x) = x^5$ | Alternancia de signos con factorial |
| $f(x) = \ln x$ | N-ésima derivada igual a cero cuando $n > 5$ |
| $f(x) = x^3 + 2x$ | Derivadas invariantes |

Preguntas de respuesta abierta

17. Explica en qué casos se usa la segunda derivada para analizar tendencias en ingresos.
18. ¿Qué información aporta la tercera derivada en el contexto de análisis de precios?

19. ¿Por qué es útil evaluar derivadas superiores en funciones de inversión acumulada?
20. Explica con tus palabras cómo afecta la segunda derivada al estudio de eficiencia en costos.
21. ¿Qué diferencias hay entre primera, segunda y tercera derivada en un modelo económico?

4.4 Derivadas parciales básicas.

Preguntas de Sí/No

1. ¿La derivada parcial respecto al tiempo permite conocer cómo varía el costo sin cambiar la producción?
2. ¿El ingreso total depende únicamente de la cantidad vendida si el precio se mantiene constante?
3. ¿La demanda publicitaria puede incrementarse, aunque el precio se mantenga sin cambios?
4. ¿Las derivadas parciales pueden aplicarse a modelos de utilidad que involucran más de un producto?
5. ¿El valor de producción es sensible a la tecnología incluso si no hay cambios en la mano de obra?
6. ¿Es posible calcular derivadas parciales en funciones que contengan logaritmos y raíces cuadradas?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Qué representa la derivada parcial $\frac{\partial C}{\partial t}$ en una función de costo?
 - A) El incremento de ingresos por unidad adicional
 - B) El cambio en el costo por hora adicional
 - C) La variación del precio unitario
 - D) La utilidad marginal en ventas
8. ¿Cuál función puede modelar el ingreso según precio y cantidad?
 - A) $I(p, q) = \ln(p + q)$
 - B) $I(p, q) = pq$
 - C) $I(p, q) = p + q + 1$
 - D) $I(p, q) = p^2 + q^2$
9. En una función de demanda como $D(p, a) = 120 - 2p + 5\ln(a + 1)$, ¿qué representa $\frac{\partial D}{\partial a}$?
 - A) El efecto del precio sobre la demanda
 - B) La sensibilidad de la demanda ante la publicidad
 - C) La tasa de inflación sobre consumo
 - D) El costo marginal por unidad demandada

10. ¿Cuál expresión representa la utilidad como función de dos productos?

A) $U(x, y) = 40x + 35y - 2x^2 - y^2$

B) $U(x, y) = x + y + 100$

C) $U(x, y) = x \cdot y \cdot ex$

D) $U(x, y) = x^2 + y^3 + \ln(x + y)$

11. Si $V(t, n) = 100t^{0.5}n^{0.8}$, ¿cuál es el efecto de n en la producción?

A) Constante

B) Logarítmico

C) Potencial

D) Exponencial

¿Qué ocurre cuando la derivada parcial respecto a x es cero?

A) La función no depende de x

B) El crecimiento de x es exponencial

C) La variable x genera cambios negativos

D) La variable x tiene raíz cuadrada

Preguntas de Verdadero/Falso

13. En una función de ingreso, si el precio se incrementa y la derivada parcial es negativa, los ingresos disminuyen.

Verdadero _____ Falso _____

14. La derivada parcial respecto a la publicidad siempre será constante.

Verdadero _____ Falso _____

15. La derivada parcial de x^2y respecto a y es $2xy$.

Verdadero _____ Falso _____

16. En una función de utilidad, las derivadas parciales permiten identificar puntos críticos de rentabilidad.

Verdadero _____ Falso _____

17. Si una función depende de dos variables, solo puede tener una derivada parcial.

Verdadero _____ Falso _____

18. El valor de producción depende únicamente del número de trabajadores, no de la tecnología.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada modelo con el concepto que representa:

Modelo

Concepto económico-administrativo

$C(x, t) = 5x^2 + 3xt + 2t^2$

Costo según producción y tiempo

$I(p, q) = pq + 0.5p^2 + 0.2q^2$

Ingreso según precio y cantidad

$D(p, a) = 100 - 2p + 5\ln(a + 1)$

Demanda influenciada por publicidad

Modelo	Concepto económico-administrativo
$U(x, y) = 40x + 35y - 2x^2 - y^2$	Utilidad multivariable por producto
$V(t, n) = 100t^{0.5}n^{0.8}$	Valor económico por recursos operativos
$f(x, y) = x^2 + y^2 + \ln(x + y + 1)$	Función combinada sin contexto económico

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica cómo se interpreta la derivada parcial de un costo total respecto a tiempo.
26. ¿Qué representa la derivada parcial de ingreso respecto al precio en una función de dos variables?
27. ¿En qué casos una empresa podría analizar la derivada parcial de la demanda respecto a la inversión publicitaria?
28. Describe cómo se interpreta $\frac{\partial U}{\partial x}$ en una función de utilidad con dos productos.
29. ¿Qué información ofrece la derivada parcial del valor de producción respecto al número de empleados?
30. ¿Por qué es útil aplicar derivadas parciales en modelos multivariables dentro de administración?

4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos).

Preguntas de Sí/No

1. ¿La primera derivada permite encontrar los puntos críticos de una función?
2. ¿La segunda derivada sirve para verificar si un punto crítico es máximo o mínimo?
3. ¿El valor de x donde $f'(x) = 0$ es siempre un extremo?
4. ¿Un punto donde la segunda derivada es positiva puede ser mínimo local?
5. ¿El valor máximo de una función puede encontrarse usando derivadas?
6. ¿Es posible que una función tenga un punto crítico, pero no sea ni máximo ni mínimo?

Preguntas de Opción Múltiple

7. ¿Cuál es el valor de x donde $f(x) = x^2 - 10x + 25$ alcanza su mínimo?
A) $x = -10$ B) $x = 25$ C) $x = 5$ D) $x = 0$
8. Si $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$, ¿cuál es su extremo local?
A) Mínimo en $x = 2$ B) Máximo en $x = 2$ C) Máximo en $x = 1$ D) Ninguno
9. La función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ tiene extremos en:
A) $x = 0, 3$ B) $x = 1, 3$ C) $x = 2, 3$ D) $x = 0, 2$
10. ¿Cuál derivada indica la concavidad de una función?
A) Primera derivada
B) Segunda derivada
C) Derivada parcial
D) Ninguna de las anteriores
11. Si $f''(x) = -5$, ¿qué tipo de extremo puede existir en x ?

- A) Mínimo local
- B) Máximo local
- C) Punto de inflexión
- D) No se puede determinar

12. ¿Cuál expresión puede representar una función con máximo en $x = 4$?

- A) $f(x) = x^2 - 8x + 12$
- B) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$
- C) $f(x) = x^3 + 3x + 1$
- D) $f(x) = x^2 + 8x - 12$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. Si $f'(x) = 0$, no se puede concluir si hay máximo o mínimo.

Verdadero _____ Falso _____

14. La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

Verdadero _____ Falso _____

15. Cuando la primera derivada cambia de positiva a negativa, hay un máximo local.

Verdadero _____ Falso _____

16. Un valor de x con derivada nula no es necesariamente extremo.

Verdadero _____ Falso _____

17. La segunda derivada negativa indica concavidad hacia abajo.

Verdadero _____ Falso _____

18. El punto $x = 0$ es máximo local en $f(x) = x^4$.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de Correlación

Relaciona cada función con su comportamiento de derivadas:

Función	Tipo de extremo o propiedad
$f(x) = x^2 - 6x + 9$	Mínimo local en $x = 3$
$f(x) = -x^2 + 4x$	Máximo local en $x = 2$
$f(x) = x^3$	Punto crítico sin extremo
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$	Mínimo en $x = 0$
$f(x) = x^2 e^{-x}$	Extremo local con derivada nula
$f(x) = x e^{-x}$	Máximo en $x = 1$

Preguntas de Respuesta Abierta

- 25. Explica cómo se determina si un punto crítico es máximo o mínimo.
- 26. ¿Por qué es importante conocer los extremos locales de una función en economía?
- 27. Describe el procedimiento para identificar puntos críticos usando derivadas.
- 28. ¿Qué indica el signo de la segunda derivada en la interpretación gráfica?

29. Menciona un ejemplo de función con punto crítico que no es extremo.
30. ¿Cómo se relacionan los extremos locales con los procesos de optimización?

4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades.

Preguntas de Sí/No

1. ¿La función de ingreso total se puede obtener multiplicando el precio por la cantidad?
2. ¿El costo total incluye tanto los costos fijos como los variables?
3. ¿Es posible que una función de utilidad tenga un valor máximo?
4. ¿Se requiere derivar una función para encontrar su punto óptimo?
5. ¿La derivada de la utilidad permite identificar el nivel de producción más rentable?
6. ¿Una función cuadrática de ingreso total siempre tiene un extremo?

Preguntas de opción múltiple

7. Si $p(x) = 50 - x$, ¿cuál es la expresión del ingreso total?
A) $50x$ B) $50x - x$ C) $50x - x^2$ D) $x^2 - 50$
8. ¿Cuál es la función de utilidad si $IT(x) = 40x - 2x^2$ y $CT(x) = x^2 + 10x + 100$?
A) $40x - 3x^2 - 10x - 100$
B) $-3x^2 + 30x - 100$
C) $x^2 - 30x + 100$
D) Las opciones A y B son equivalentes
9. ¿Qué representa el valor de x tal que $IT'(x) = CT'(x)$?
A) Máximo ingreso
B) Punto de equilibrio marginal
C) Pérdida mínima
D) Costo fijo
10. Si $CT(x) = x^2 - 16x + 200$, ¿cuál es su valor mínimo?
A) En $x = 8$
B) En $x = 16$
C) En $x = 100$
D) En $x = 0$
11. ¿Qué tipo de derivada se usa para encontrar máximos y mínimos en funciones económicas?
A) Primera derivada
B) Segunda derivada
C) Derivadas parciales
D) Ambas A y B
12. ¿Qué ocurre si la segunda derivada de una función de utilidad es negativa en un punto crítico?
A) Mínimo local
B) Máximo local

C) Punto de inflexión

D) Ninguno de los anteriores

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La utilidad puede calcularse como la diferencia entre ingreso total y costo total.

Verdadero _____ Falso _____

14. El ingreso total siempre se maximiza cuando el precio se incrementa.

Verdadero _____ Falso _____

15. Si $CT''(x) > 0$, entonces el costo total tiene un mínimo local en x .

Verdadero _____ Falso _____

16. En una función de ingreso cuadrática, el valor máximo se encuentra derivando la función.

Verdadero _____ Falso _____

17. Cuando la derivada de la utilidad se hace cero, se puede identificar el punto óptimo de producción.

Verdadero _____ Falso _____

18. La función $p(x) \cdot x$ se utiliza para calcular el costo total.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada expresión con el concepto que representa:

Expresión	Concepto económico
$IT(x) = p(x) \cdot x$	Ingreso total
$CT(x) = x^2 + 20x + 150$	Costo total
$U(x) = IT(x) - CT(x)$	Utilidad
$IT'(x) = CT'(x)$	Punto de equilibrio marginal
$CT'(x) = \frac{d}{dx}[CT(x)]$	Costo marginal
$IT''(x) < 0$	Concavidad hacia abajo del ingreso

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica cómo se obtiene la función de ingreso total cuando el precio depende de la cantidad.

26. ¿Cuál es el procedimiento para encontrar el valor mínimo de una función de costo total?

27. Describe cómo se construye una función de utilidad con base en las funciones de ingreso y costo.

28. ¿Qué papel juega la segunda derivada en la maximización de utilidad?

29. Menciona un ejemplo de situación en la que se requiera optimizar el ingreso total.

30. Explica el concepto de equilibrio marginal y su interpretación en la toma de decisiones.

4.7 Análisis marginal.

Preguntas de Sí/No

1. ¿El ingreso marginal se obtiene derivando la función de ingreso total?
2. ¿La utilidad marginal se calcula restando ingreso marginal menos costo marginal?
3. ¿El análisis marginal puede aplicarse a funciones no derivables?
4. ¿El costo marginal indica el cambio instantáneo en el costo por unidad adicional?
5. ¿La utilidad marginal positiva implica que la ganancia está aumentando?
6. ¿Toda función cuadrática de utilidad tiene necesariamente un extremo?

Preguntas de opción múltiple

7. Si $IT(x) = 60x - x^2$, ¿cuál es el ingreso marginal?
A) $60x$ B) $60 - x$ C) $60 - 2x$ D) $x^2 - 60$
8. Dado $CT(x) = x^2 + 12x + 90$, ¿cuál es el costo marginal?
A) $x^2 + 12x$ B) $2x + 12$ C) $12x + 90$ D) $2x + 90$
9. Si $IT(x) = 40x - x^2$ y $CT(x) = x^2 + 10x + 100$, ¿cuál es $UM(x)$?
A) $40x - 2x^2 - 10x - 100$
B) $-2x + 40$
C) $-2x^2 + 30x - 100$
D) Las opciones B y C son correctas
10. ¿Qué representa la expresión $IM(x) = p(x) + p'(x)x$?
A) Costo marginal con precio variable
B) Ingreso marginal generalizado
C) Utilidad marginal constante
D) Margen de beneficio unitario
11. Si el ingreso marginal es menor que el costo marginal, ¿qué se deduce?
A) La utilidad aumenta
B) La utilidad disminuye
C) El ingreso crece más rápido
D) El costo fijo cambia
12. ¿Cuál derivada indica el crecimiento instantáneo de la utilidad?
A) $U'(x)$
B) $IT'(x)$
C) $CT'(x)$
D) $p'(x)$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. El ingreso marginal puede ser negativo si el ingreso total decrece.
Verdadero _____ Falso _____
14. El costo marginal nunca puede ser negativo.

Verdadero _____ Falso _____

15. La utilidad marginal se anula cuando el ingreso y el costo marginal son iguales.

Verdadero _____ Falso _____

16. En modelos económicos, el análisis marginal ayuda a identificar niveles óptimos.

Verdadero _____ Falso _____

17. El ingreso marginal es constante si el precio es constante.

Verdadero _____ Falso _____

18. Si la derivada de la utilidad es negativa, la empresa está maximizando sus ganancias.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada función con el tipo de análisis marginal que representa:

Función

Interpretación marginal

$$IT(x) = 80x - 4x^2$$

Ingreso marginal variable

$$CT(x) = x^2 + 15x + 120$$

Costo marginal dependiente de producción

$$U(x) = IT(x) - CT(x)$$

Utilidad total

$$U'(x) = IM(x) - CM(x)$$

Utilidad marginal

$$IT'(x) = \frac{d}{dx}[IT(x)]$$

Ingreso marginal

$$CT'(x) = \frac{d}{dx}[CT(x)]$$

Costo marginal

Preguntas de respuesta abierta

19. Explica en qué consiste el análisis marginal en el contexto de funciones económicas.

20. ¿Cómo se interpreta el signo de la utilidad marginal en decisiones productivas?

21. Describe el procedimiento para obtener el ingreso marginal a partir de una función con precio variable.

22. ¿Qué significa que el ingreso marginal sea igual al costo marginal?

23. Menciona un ejemplo de aplicación del análisis marginal en planificación financiera.

24. ¿Por qué es útil calcular el análisis marginal antes de aumentar la producción?

A-5 Integración y Aplicaciones.

5.1 Concepto de antiderivada

Preguntas de Sí/No

1. ¿Las sumas de Riemann permiten aproximar el área bajo una curva?
2. ¿La suma por la izquierda utiliza el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo?
3. ¿La suma por la derecha puede sobreestimar el área si la función es creciente?
4. ¿Una función constante tiene el mismo valor en todos los subintervalos?
5. ¿La suma de Riemann se vuelve más precisa al aumentar el número de subintervalos?
6. ¿Una función decreciente genera una subestimación si se usa suma por la derecha?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Cuál es la longitud de cada subintervalo si se divide $[0, 4]$ en 4 partes iguales?
A) 1 B) 2 C) 0.5 D) 4
8. Si $f(x) = x$ en $[0, 2]$ y se usa suma por la izquierda con $n = 2$, ¿cuál es el valor aproximado del área?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
9. ¿Qué tipo de función es $f(x) = 5$?
A) Creciente B) Decreciente C) Constante D) Lineal
10. ¿Cuál es el valor de $f(x) = x^2$ en el extremo izquierdo del segundo subintervalo de $[0, 3]$ con $n = 3$?
A) 1 B) 2 C) 4 D) 9
11. Si $f(x) = -x^3$, ¿qué tipo de función es?
A) Constante B) Creciente C) Decreciente D) Lineal
12. ¿Qué ocurre si se usa suma por la izquierda en una función creciente?
A) Se sobreestima el área
B) Se subestima el área
C) El resultado es exacto
D) No se puede calcular

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La suma por la derecha utiliza el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo.

Verdadero _____ Falso _____

14. Una función constante genera el mismo resultado con suma por la izquierda o por la derecha.

Verdadero _____ Falso _____

15. Si la función es decreciente, la suma por la izquierda sobreestima el área.

Verdadero _____ Falso _____

16. El valor de Δx depende del número de subintervalos.

Verdadero _____ Falso _____

17. Las sumas de Riemann se utilizan para calcular áreas exactas sin necesidad de antiderivadas.

Verdadero _____ Falso _____

18. La suma por la derecha siempre da el mismo resultado que la integral definida.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada función con su tipo y comportamiento en sumas de Riemann:

Función	Tipo de función
$f(x) = 3$	Constante nula
$f(x) = x$	Cuadrática creciente
$f(x) = x^2$	Lineal creciente
$f(x) = -x^3$	Cúbica creciente
$f(x) = 0$	Constante
$f(x) = x^3$	Cúbica decreciente

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica cómo se calcula una suma de Riemann por la izquierda.

26. ¿Qué diferencia hay entre una suma por la izquierda y una por la derecha?

27. Describe el comportamiento de la suma por la derecha en una función creciente.

28. ¿Por qué se considera que las sumas de Riemann aproximan el área bajo la curva?

29. Menciona un ejemplo de función constante y explica cómo se calcula su área con sumas de Riemann.

30. ¿Qué ocurre con la precisión de la suma de Riemann al aumentar el número de subintervalos?

5.2 Reglas de integración directas.

Preguntas de Sí/No

1. ¿La integral de una constante se obtiene multiplicando la constante por la variable?

2. ¿La integral de una suma de funciones se puede calcular sumando las integrales de cada término?

3. ¿La integral de e^x es igual a e^x ?

4. ¿La integral de $\ln(x)$ se puede calcular directamente sin aplicar integración por partes?

5. ¿La constante de integración debe incluirse en toda integral indefinida?

6. ¿La regla de potencias se aplica a x^{-1} sin modificación?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Cuál es la integral de $\int 7dx$?

- A) $7x$ B) x^7 C) $\frac{7x^2}{2}$ D) $7 + C$

8. ¿Cuál es la integral de $\int (x^2 + 3x)dx$?

A) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$

B) $x^3 + 3x^2 + C$

C) $x^2 + 3x + C$

D) $\frac{x^2}{2} + 3x + C$

9. ¿Cuál es la integral de $\int 5x^3 dx$?

A) $\frac{5x^4}{4} + C$ B) $\frac{5x^4}{5} + C$ C) $x^4 + C$ D) $5x^4 + C$

10. ¿Cuál es la integral de $\int \ln(x) dx$?

A) $\frac{1}{x} + C$ B) $x \ln(x) - x + C$ C) $\ln(x) + C$ D) $x^2 \ln(x) + C$

11. ¿Cuál es la integral de $\int e^x dx$?

A) $x \cdot e^x + C$ B) $\ln(x) + C$ C) $e^x + C$ D) $\frac{e^x}{x} + C$

12. ¿Cuál es la integral de $\int 2x dx$?

A) $\frac{2x}{\ln(2)} + C$ B) $2x + C$ C) $\ln(2x) + C$ D) $x \cdot 2x + C$

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La integral de una constante es una función lineal.

Verdadero _____ Falso _____

14. La integral de una suma de funciones se calcula término por término.

Verdadero _____ Falso _____

15. La integral de x^n es $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, siempre que $n \neq -1$.

Verdadero _____ Falso _____

16. La integral de $\frac{1}{x}$ es $\ln|x| + C$.

Verdadero _____ Falso _____

17. La integral de e^x requiere aplicar la regla de potencias.

Verdadero _____ Falso _____

18. La integral de a^x se calcula como $\frac{a^x}{\ln(a)} + C$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada expresión con su integral correspondiente:

Expresión Integral

$$\int 4dx \quad \frac{3^x}{\ln(3)} + C$$

$$\int x^2 dx \quad \frac{6x^4}{4} + C$$

$$\int 6x^3 dx \quad \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \ln(x) dx \quad 4x + C$$

$$\int e^x dx \quad x \ln(x) - x + C$$

$$\int 3^x dx \quad e^x + C$$

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica cómo se calcula la integral de una constante. Da un ejemplo.
26. Calcula $\int (x^2 + 5x + 2)dx$. Muestra el procedimiento completo.
27. Explica cómo se aplica la regla de linealidad en una integral compuesta.
28. Calcula $\int 4x^3 dx$. Muestra el procedimiento.
29. Calcula $\int \ln(x) dx$. Explica el resultado obtenido.
30. Calcula $\int 2^x dx$. Muestra el procedimiento completo.

5.3 Integral definida.

Preguntas de Sí/No

1. ¿La integral definida permite calcular el área bajo la curva de una función continua?
2. ¿La integral definida se calcula utilizando una antiderivada?
3. ¿Es posible aplicar la integral definida a funciones constantes?
4. ¿La integral definida puede tener resultado negativo?
5. ¿La integral definida representa siempre un área geométrica?
6. ¿La integral definida depende del orden de los límites de integración?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Cuál es la antiderivada de $f(x) = x$?
 A) x^2 B) $\frac{x^2}{2}$ C) $2x$ D) x^3
8. ¿Cuál es el valor de $\int_0^2 x dx$?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
9. ¿Cuál es la antiderivada de $f(x) = x^2$?

A) $\frac{x^2}{2}$ B) x^3 C) $\frac{x^3}{3}$ D) $3x^2$

10. ¿Cuál es el valor de $\int_1^3 x^2 dx$?

A) $\frac{26}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{10}{3}$

11. ¿Cuál es la antiderivada de $f(x) = x^3$?

A) $\frac{x^4}{4}$ B) x^4 C) $3x^2$ D) $\frac{x^3}{3}$

12. ¿Cuál es el valor de $\int_0^2 x^3 dx$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

Preguntas de Verdadero/Falso

13. La integral definida se calcula como la diferencia entre los valores de la antiderivada evaluados en los extremos del intervalo.

Verdadero _____ Falso _____

14. Si se invierten los límites de integración, el signo del resultado cambia.

Verdadero _____ Falso _____

15. La integral definida de una función constante es igual al valor de la constante multiplicado por la longitud del intervalo.

Verdadero _____ Falso _____

16. La integral definida de $f(x) = x$ en $[0, 2]$ es igual a 2.

Verdadero _____ Falso _____

17. La integral definida de $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$ es igual a $\frac{8}{3}$.

Verdadero _____ Falso _____

18. La integral definida de $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$ es igual a 8.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada función con su antiderivada correspondiente:

Función Antiderivada

$f(x) = x$ $\frac{x^2}{2}$

$f(x) = x^2$ $\frac{x^3}{3}$

$f(x) = x^3$ $\frac{x^4}{4}$

$f(x) = 5$ $5x$

Función Antiderivada

$$f(x) = 2x \quad x^2$$

$$f(x) = 3x^2 \quad x^3$$

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica el procedimiento completo para calcular $\int_0^2 x dx$.

26. Calcula $\int_1^3 x^2 dx$. Incluye el procedimiento.

27. ¿Qué representa geométricamente la integral definida de una función positiva?

28. Calcula $\int_0^3 5 dx$. Muestra el procedimiento.

29. ¿Qué ocurre si se invierten los límites de integración en una integral definida?

30. Calcula $\int_2^4 x^3 dx$. Incluye el procedimiento completo.

5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas.

Preguntas de Sí/No

1. ¿El ingreso total acumulado se obtiene integrando la función de ingreso marginal?
2. ¿El costo total acumulado se puede calcular a partir de la función de costo marginal?
3. ¿La utilidad total acumulada puede calcularse como la diferencia entre ingreso total y costo total?
4. ¿Es posible aplicar el cálculo integral para analizar decisiones administrativas?
5. ¿La utilidad marginal representa el cambio en la utilidad por unidad adicional producida?
6. ¿El ingreso marginal puede ser negativo en ciertos intervalos?

Preguntas de opción múltiple

7. ¿Cuál es la fórmula para calcular el ingreso total acumulado?

A) $IT(x) = IM(x) \cdot x$

B) $IT(x) = \int IM(x) dx$

C) $IT(x) = \frac{d}{dx} IM(x)$

D) $IT(x) = IM(x)^2$

8. Si $IM(x) = 60 - 2x$, ¿cuál es el ingreso total entre $x = 0$ y $x = 5$?

A) 250 B) 200 C) 150 D) 100

9. ¿Cuál es la fórmula para calcular el costo total acumulado?

A) $CT(x) = CM(x) \cdot x$

B) $CT(x) = \int CM(x) dx$

C) $CT(x) = \frac{d}{dx} CM(x)$

D) $CT(x) = CM(x)^2$

10. Si $CM(x) = 2x + 10$, ¿cuál es el costo total entre $x = 0$ y $x = 5$?

A) 50 B) 75 C) 100 D) 125

11. ¿Cuál es la fórmula para calcular la utilidad total acumulada?

A) $U(x) = IT(x) + CT(x)$

B) $U(x) = IT(x) - CT(x)$

C) $U(x) = IT(x) \cdot CT(x)$

D) $U(x) = \int IT(x)dx$

12. Si $IT(x) = 250$ y $CT(x) = 75$, ¿cuál es la utilidad total?

A) 175 B) 325 C) 100 D) 225

Preguntas de Verdadero/Falso

13. El ingreso total acumulado se calcula integrando la función de ingreso marginal en un intervalo.

Verdadero _____ Falso _____

14. El costo total acumulado se obtiene derivando la función de costo marginal.

Verdadero _____ Falso _____

15. La utilidad total acumulada puede calcularse directamente como una integral definida.

Verdadero _____ Falso _____

16. Si el ingreso marginal disminuye, el ingreso total también disminuye.

Verdadero _____ Falso _____

17. La utilidad total acumulada puede ser negativa si el costo total supera al ingreso total.

Verdadero _____ Falso _____

18. El cálculo integral permite estimar acumulaciones en procesos administrativos.

Verdadero _____ Falso _____

Preguntas de correlación

Relaciona cada función con su interpretación administrativa:

Función	Interpretación
$IM(x) = 60 - x$	Ingreso marginal
$CM(x) = 2x + 10$	Costo marginal
$IT(x) = \int IM(x)dx$	Ingreso total acumulado
$CT(x) = \int CM(x)dx$	Costo total acumulado
$U(x) = IT(x) - CT(x)$	Utilidad total acumulada
$UM(x) = 30 - x$	Utilidad marginal

Preguntas de respuesta abierta

25. Explica cómo se calcula el ingreso total acumulado a partir de una función de ingreso marginal.

26. Calcula el ingreso total si $IM(x) = 80 - 4x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 5$. Muestra el procedimiento.
27. Explica cómo se calcula el costo total acumulado a partir de una función de costo marginal.
28. Calcula el costo total si $CM(x) = 3x + 15$ en el intervalo de $x = 1$ a $x = 4$. Muestra el procedimiento.
29. Explica cómo se calcula la utilidad total acumulada a partir de ingreso y costo total.
30. Si $IM(x) = 60 - x$ y $CM(x) = 2x + 10$, calcula la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$. Muestra el procedimiento completo.

Apéndice B: Aplicaciones.

B-1 Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.

Ejemplo 1: Costos de Producción

El costo de producción de un artículo depende del número de unidades fabricadas. Se sabe que al producir 20 unidades, el costo total es \$6000, y que la pendiente de la función de costo es 150.

Paso 1: Identificar la ecuación

La ecuación de costos sigue el modelo:

$$C(x) = m \cdot x + b$$

Donde:

- $m = 150$ es el costo variable por unidad.
- x representa las unidades producidas.
- b es el costo fijo.

Paso 2: Calcular el costo fijo

Usamos el dato $C(20) = 6000$:

$$6000 = 150(20) + b$$

$$6000 = 3000 + b$$

$$b = 3000$$

Paso 3: Ecuación final

$$C(x) = 150x + 3000$$

Esta ecuación describe el costo total de producción en función de x .

Ejemplo 2: Crecimiento de Ventas

Una empresa registra un crecimiento lineal en ventas. En enero, vendió 500 productos, y en junio, vendió 800 productos.

Paso 1: Identificar la ecuación

Modelo de crecimiento:

$$V(t) = mt + b$$

Donde:

- t es el número de meses.
- V representa la cantidad vendida.

Paso 2: Calcular la pendiente

Usamos los puntos 0, 500 y 5, 800:

$$m = (800 - 500) / (5 - 0) = 300 / 5 = 60$$

Paso 3: Ecuación de la recta

$$V(t) = 60t + 500$$

Esta ecuación describe el crecimiento mensual de ventas.

Ejemplo 3: Valor de un Activo con Depreciación

El valor de un equipo de oficina disminuye linealmente con el tiempo. Se sabe que, al inicio $t = 0$, su valor es \$25,000, y que tras 5 años su valor es \$10,000.

Paso 1: Identificar la ecuación

Modelo de depreciación:

$$V(t) = mt + b$$

Paso 2: Calcular la pendiente

Usamos los puntos 0, 25000 y 5, 10000:

$$m = (10000 - 25000) / (5 - 0) = -15000 / 5 = -3000$$

Paso 3: Ecuación de la recta

$$V(t) = -3000t + 25000$$

Esta ecuación describe la depreciación del activo en función del tiempo.

Ejemplo 4: Costos Variables y Fijos

Una empresa tiene un costo fijo de \$2000 y un costo variable de \$50 por unidad producida.

Paso 1: Identificar la ecuación

Modelo de costos:

$$C(x) = 50x + 2000$$

Paso 2: Interpretación

- La pendiente $m = 50$ representa el costo por unidad.
- La intersección $b = 2000$ indica el costo fijo, independientemente de la producción.

Ejemplo 5: Salario en función de horas trabajadas

El salario de un empleado depende del número de horas trabajadas. Se sabe que si trabaja 40 horas recibe \$12,000, y si trabaja 50 horas recibe \$15,000.

Paso 1: Identificar la ecuación

Modelo de salario:

$$S(h) = mh + b$$

Paso 2: Calcular la pendiente

Usamos los puntos (40, 12000) y (50, 15000):

$$m = \frac{15000 - 12000}{50 - 40} = \frac{3000}{10} = 300$$

Paso 3: Calcular la intersección con el eje Y

$$12000 = 300(40) + b$$

$$b = 0$$

Paso 4: Ecuación final

$$S(h) = 300h$$

Ejemplo 6: Demanda en función del precio

La función de demanda de un producto es lineal. Se sabe que cuando el precio es \$15, la cantidad demandada es 90 unidades, y que cuando el precio es \$25, la cantidad demandada es 50 unidades.

Paso 1: Identificar la ecuación

Modelo de demanda:

$$D(p) = mp + b$$

Paso 2: Calcular la pendiente

Usamos los puntos (15, 90) y (25, 50):

$$m = \frac{50 - 90}{25 - 15} = \frac{-40}{10} = -4$$

Paso 3: Calcular la intersección

$$90 = -4(15) + b$$

$$b = 150$$

Paso 4: Ecuación final

$$D(p) = -4p + 150$$

Ejemplo 7: Equilibrio de Mercado

La función de oferta de un producto sigue la ecuación $S(p) = 4p$, mientras que la demanda sigue la ecuación $D(p) = 120 - 2p$.

Paso 1: Encontrar el equilibrio

El equilibrio de mercado ocurre cuando:

$$D(p) = S(p)$$

$$120 - 2p = 4p$$

Paso 2: Despejar p

$$120 = 6p$$

$$p = 20$$

Resultado

El precio de equilibrio es \$20.

Lista de ejercicios prácticos

Costos de Producción.

1. El costo de fabricación de un producto sigue una ecuación lineal. Se sabe que al producir 30 unidades, el costo es \$7500, y que la pendiente es 200. Encuentra la ecuación del costo total.
2. Una empresa tiene un costo fijo de \$5000 y un costo variable de \$120 por unidad producida. Encuentra la ecuación de la función de costos.
3. Una fábrica reporta costos de producción de \$9000 al fabricar 40 unidades. Si la pendiente de la ecuación de costos es 250, determina la ecuación de la recta.
4. Se establece una relación entre costos y unidades producidas. Si fabricar 15 unidades tiene un costo de \$4500 y la pendiente es 180, encuentra la ecuación de costos.

Crecimiento de Ventas.

5. Un negocio reporta 200 ventas en el primer mes y 600 ventas en el cuarto mes. Encuentra la ecuación de la recta que describe el crecimiento de ventas.

6. En un modelo de crecimiento de ventas, se sabe que en marzo se vendieron 700 productos y en agosto 1200 productos. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona ventas y tiempo.
7. Una compañía muestra un crecimiento de ventas de 150 unidades por mes. Si en el primer mes se vendieron 350 productos, determina la ecuación de la recta.
8. Se establece una relación lineal entre las ventas y los meses de operación. Si en el segundo mes hubo 800 ventas y en el quinto mes 1400 ventas, encuentra la ecuación de la recta.

Valor de un Activo con Depreciación.

9. Un vehículo tiene un valor de \$30,000 al momento de compra y después de 8 años vale \$12,000. Encuentra la ecuación de la recta que representa la depreciación del vehículo.
10. El valor de una maquinaria industrial se reduce linealmente. Se sabe que al inicio su valor era \$50,000 y después de 6 años su valor es \$20,000. Determina la ecuación de la recta.
11. Un activo tecnológico disminuye su valor de \$40,000 a \$15,000 en un período de 10 años. Encuentra la ecuación de la recta que modela su depreciación.
12. El valor de una computadora era \$12,000 en su primer año y después de 4 años su valor es \$4,000. Encuentra la ecuación de la recta que describe su pérdida de valor.

Costos Variables y Fijos.

13. Un negocio tiene costos fijos de \$3000 y costos variables de \$75 por unidad producida. Encuentra la ecuación de costos.
14. Si una fábrica reporta costos fijos de \$5000 y un costo variable de \$40 por unidad, encuentra la ecuación que representa el costo total en función de unidades producidas.
15. Una empresa manufacturera tiene un costo fijo de \$2500 y costos variables de \$90 por unidad. Determina la ecuación del costo total.
16. Se establece que una línea de producción tiene costos fijos de \$8000 y costos variables de \$150 por unidad fabricada. Encuentra la ecuación del costo total.

Salario en función de horas trabajadas.

17. Se sabe que un empleado recibe \$8,000 por 30 horas trabajadas y \$11,000 por 45 horas trabajadas. Encuentra la ecuación del salario en función de las horas trabajadas.
18. Un trabajador que labora 35 horas recibe \$10,000, mientras que otro que trabaja 50 horas recibe \$14,500. Determina la ecuación de la recta que relaciona salario y horas trabajadas.
19. Se establece que un profesionista recibe \$18,000 por 60 horas de trabajo y \$24,000 por 80 horas. Encuentra la ecuación de la recta que describe su salario en función del tiempo trabajado.
20. Si un trabajador gana \$25 por hora y tiene un salario base de \$2,000, encuentra la ecuación que modela su sueldo en función de las horas trabajadas.

Demanda en función del precio.

21. En un mercado, se observa que cuando el precio de un artículo es \$30, la cantidad demandada es 120 unidades, y cuando el precio es \$40, la cantidad demandada es 80 unidades. Encuentra la ecuación de la demanda.
22. Se determina que la demanda de un producto sigue una relación lineal. Cuando el precio es \$20, se venden 150 unidades, y cuando el precio es \$35, se venden 90 unidades. Encuentra la ecuación de la recta.
23. La demanda de un artículo cambia con el precio. Si a \$10 se venden 250 unidades y a \$20 se venden 180 unidades, encuentra la ecuación de la demanda.
24. Un producto tiene una demanda de 500 unidades cuando el precio es \$5, y una demanda de 350 unidades cuando el precio es \$12. Encuentra la ecuación de la recta que modela la cantidad demandada.

Equilibrio de Mercado

25. Se establece un modelo donde la oferta es $S(p) = 6p$ y la demanda es $D(p) = 150 - 3p$. Determina el precio de equilibrio.
26. En un mercado, la oferta y demanda están modeladas por las ecuaciones $S(p) = 8p$ y $D(p) = 200 - 4p$. Encuentra el precio de equilibrio.
27. Se sabe que en un mercado competitivo la oferta es $S(p) = 10p$ y la demanda $D(p) = 180 - 6p$. Determina el precio de equilibrio.
28. En una industria, la oferta y demanda siguen $S(p) = 12p$ y $D(p) = 250 - 5p$. Encuentra el punto de equilibrio.

B-2 Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

2.1: Funciones Lineales

Ejemplo 1: Amortización de bonos

Una empresa emite un bono con valor nominal de \$1,000 que se amortiza de forma lineal en 5 años.

Calcular la depreciación anual:

$$\text{Depreciación anual} = 1000 \div 5 = \$200.$$

Plantear la función: $A(t) = 1000 - 200t$, en la que t representa los años transcurridos.

Para $t = 3$ años:

$$A(3) = 1000 - 200(3) = 1000 - 600 = \$400.$$

Conclusión: La función $A(t)$ permite conocer el valor residual del bono en cualquier año t .

Ejemplo 2: Costo total de producción (Costo de un producto)

Una empresa tiene costos fijos de \$5,000 y un costo variable de \$25 por unidad.

La función del costo total es: $C(x) = 5000 + 25x$, donde x representa el número de unidades fabricadas.

Para la producción de 200 unidades:

$$C(200) = 5000 + 25(200) = 5000 + 5000 = \$10,000.$$

Conclusión: La función permite planificar y estimar el costo total según la cantidad de unidades producidas.

Ejemplo 3: Depreciación de un activo

Una máquina se adquiere por \$12,000 y se estima que tendrá un valor residual de \$2,000 después de 5 años.

Calcular la depreciación anual:

$$\text{Depreciación anual} = (12000 - 2000) \div 5 = \$2000.$$

La función de depreciación es: $D(t) = 12000 - 2000t$, con t en años.

Para $t = 4$ años:

$$D(4) = 12000 - 2000(4) = 12000 - 8000 = \$4000.$$

Conclusión: Se puede prever el valor del activo en cualquier instante usando la función lineal.

Ejemplo 4: Equilibrio de mercado

Se modela la demanda y la oferta con funciones lineales.

Supóngase que:

$$\text{Demanda: } D(p) = 150 - 2p$$

$$\text{Oferta: } S(p) = 20 + 3p$$

Para hallar el equilibrio, se igualan ambas funciones:

$$150 - 2p = 20 + 3p$$

Resolución:

$$150 - 20 = 3p + 2p \rightarrow 130 = 5p, \text{ de donde } p = 26.$$

Hallar la cantidad de equilibrio (usando la demanda):

$$Q = 150 - 2(26) = 150 - 52 = 98.$$

Conclusión: El precio de equilibrio es \$26 y la cantidad de equilibrio es 98 unidades.

Ejemplo 5: Interés simple aplicado a inversiones

Una empresa invierte \$10,000 a una tasa de interés simple del 5% anual.

La función de interés simple es: $I(t) = \text{Principal} \times \text{tasa} \times t$, es decir,

$$I(t) = 10,000 \times 0.05 \times t.$$

Para $t = 4$ años:

$$I(4) = 10,000 \times 0.05 \times 4 = \$2,000.$$

Conclusión: La función lineal demuestra cómo el interés acumulado crece de forma proporcional al tiempo.

Lista de ejercicios prácticos

1. Calcule el valor de un bono de \$2,000 que se amortiza en 10 años de forma lineal para $t = 6$ años.
2. Determine el valor residual a los 8 años de un bono de \$1,500 amortizado en 5 años.
3. Encuentre la función de amortización para un bono de \$800 que se paga en 4 años y calcule su valor a los 2 años.
4. Para un bono de \$1,200 amortizado en 6 años, halle el valor del bono a $t = 3$ años.
5. Una empresa tiene costos fijos de \$4,000 y un costo variable de \$30 por unidad; determine el costo total para 150 unidades.
6. Con costos fijos de \$5,000 y un costo variable de \$35 por unidad, calcule el costo total para 100 unidades.
7. Plantee la función de costo total y calcule el costo para 250 unidades, considerando costos fijos de \$6,000 y costo variable de \$20 por unidad.
8. Determine cuántas unidades deben producirse para que el costo total sea de \$9,000, si los costos fijos son \$3,000 y el costo variable es \$25 por unidad.
9. Una máquina con costo de \$15,000 y valor residual de \$3,000 se deprecia en 6 años; determine la depreciación anual y el valor a los 4 años.
10. Con una máquina adquirida por \$10,000 y valor residual de \$1,000 en 5 años, halle la función de depreciación y calcule su valor a los 2 años.
11. Determine cuántos años se necesitan para que un activo de \$20,000 se deprecie a \$5,000 mediante depreciación lineal.
12. Plantee la función de depreciación para un activo que se reduce de \$8,000 a \$500 en 7 años y calcule su valor a los 5 años.
13. Con las funciones de demanda $D(p) = 200 - 4p$ y oferta $S(p) = 50 + 2p$, encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

14. Dados $D(p) = 180 - 3p$ y $S(p) = 30 + 3p$, determine el equilibrio en precio y cantidad.
15. Si la demanda es $D(p) = 160 - 2p$ y la oferta $S(p) = 40 + 4p$, halle el punto de equilibrio.
16. Plantee y resuelva el equilibrio para $D(p) = 140 - 5p$ y $S(p) = 20 + 5p$, y analice cómo varía el precio ante cambios en la pendiente.
17. Una inversión de \$5,000 al 6% anual genera interés simple; calcule el interés acumulado en 3 años.
18. Determine la función de interés simple para una inversión de \$12,000 con una tasa del 4% y halle el interés en 5 años.
19. Encuentre cuánto se ganará en interés durante 2 años sobre una inversión de \$8,000 a una tasa del 7% anual.
20. Plantee la función de interés simple y calcule el monto total (principal + interés) para una inversión de \$10,000 al 5% anual durante 4 años.

2.2: Modelos de Equilibrio

2.2.1: Modelo de Punto de Equilibrio Aplicado a la Producción.

Ejemplo 1 Punto de Equilibrio en la Producción de Zapatos

Una empresa de calzado presenta CF mensuales de \$40,000 y un CV de \$25 por par, mientras que el precio de venta es \$45 por par.

$$\begin{aligned}n &= 40000 / (45 - 25) \\&= 40000 / 20 \\&= 2000 \text{ pares.}\end{aligned}$$

Conclusión: Para alcanzar el punto de equilibrio, se deben vender 2000 pares de zapatos mensualmente.

Ejemplo 2 Análisis de Punto de Equilibrio para Fijación de Precios

Una compañía de gadgets tiene CF = \$30,000 y CV = \$12 por unidad. Inicialmente, el precio de venta es \$22.

Primer cálculo:

$$\begin{aligned}n &= 30000 / (22 - 12) \\&= 30000 / 10 \\&= 3000 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Estrategia de ajuste: Si el precio se incrementa a \$25,

$$\begin{aligned}n &= 30000 / (25 - 12) \\&= 30000 / 13 \\&= 2308 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Conclusión: El aumento en el precio reduce el volumen que se debe vender para llegar al equilibrio, lo que brinda una herramienta valiosa para la toma de decisiones en la fijación de precios.

Ejemplo 3 Punto de Equilibrio y Margen de Utilidad con Objetivo de Ganancia

Una unidad de negocio tiene $CF = \$50,000$, $CV = \$10$ por unidad y vende cada unidad a \$18.

Cálculo del BEP:

$$\begin{aligned}n &= 50000 / (18 - 10) \\&= 50000 / 8 \\&= 6250 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Si se establece un objetivo de ganancia de \$20,000, se requiere:

$$\begin{aligned}n &= (50000 + 20000) / 8 \\&= 70000 / 8 \\&= 8750 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Conclusión: La inclusión de un objetivo de ganancia modifica las metas de producción, permitiendo planificar según objetivos financieros específicos.

Ejemplo 4 Integración de Amortización de Bonos en el Punto de Equilibrio

Una empresa financia una nueva línea de producción mediante la emisión de bonos, lo que implica una amortización anual de \$15,000; sumado a otros costos fijos de \$35,000, el total CF es de \$50,000. El costo variable es de \$8 por unidad y el precio de venta es \$18.

$$\begin{aligned}n &= 50000 / (18 - 8) \\&= 50000 / 10 \\&= 5000 \text{ unidades.}\end{aligned}$$

Conclusión: Incluir la amortización de bonos en los costos fijos permite evaluar con precisión el impacto financiero en la determinación del punto de equilibrio.

Lista de ejercicios prácticos*Producción de Zapatos*

1. Calcula el punto de equilibrio para una empresa de calzado que tiene $CF = \$35,000$, $CV = \$22$ por par y vende cada par a \$42.
2. Determina cuántos pares se deben vender si $CF = \$45,000$, $CV = \$20$ y el precio es \$40.
3. Halla el BEP para un establecimiento con $CF = \$50,000$, $CV = \$28$ y precio de \$55.
4. Calcula el equilibrio para una empresa con $CF = \$38,000$, $CV = \$24$ y precio de \$44.

Fijación de Precios en Gadgets

5. Una empresa tiene $CF = \$30,000$, $CV = \$12$ y vende a \$22. Calcula el BEP y vuelve a calcularlo si el precio se incrementa a \$24.
6. Determina el punto de equilibrio para $CF = \$35,000$, $CV = \$15$ y precio de \$25; luego, analiza el efecto de aumentar el precio a \$28.

7. Calcula el BEP para una compañía con $CF = \$40,000$, $CV = \$10$ y precio de $\$20$, y evalúa el cambio si el precio se modifica a $\$23$.
8. Halla el equilibrio para $CF = \$25,000$, $CV = \$8$ y precio de $\$18$; repite el cálculo si el precio se eleva a $\$20$.

Margen de Utilidad y Objetivo de Ganancia

9. Calcula el punto de equilibrio para una unidad de negocio con $CF = \$60,000$, $CV = \$12$ y precio de $\$20$, y luego determina la producción necesaria para un objetivo de ganancia de $\$15,000$.
10. Determina el BEP para $CF = \$55,000$, $CV = \$10$ y precio de $\$18$, y calcula el número de unidades requeridas para obtener una ganancia de $\$25,000$.
11. Halla el equilibrio en una empresa con $CF = \$45,000$, $CV = \$8$ y precio de $\$16$, incluyendo un objetivo de ganancia de $\$10,000$.
12. Calcula el punto de equilibrio para un negocio con $CF = \$50,000$, $CV = \$10$ y precio de $\$18$, y determina la cantidad necesaria si se desea obtener $\$20,000$ de ganancia.

Integración de Amortización de Bonos

13. Calcula el BEP para una empresa que tiene una amortización de bonos de $\$20,000$, otros costos fijos de $\$30,000$, $CV = \$9$ y precio de $\$19$.
14. Determina el punto de equilibrio para CF totales de $\$55,000$ (incluyendo una amortización de bonos de $\$15,000$), $CV = \$7$ y precio de $\$17$.
15. Halla cuántas unidades deben venderse para alcanzar el equilibrio con $CF = \$50,000$, $CV = \$8$ y precio de $\$18$.
16. Calcula el BEP para $CF = \$60,000$ (sumando amortización de bonos y otros costos fijos), $CV = \$10$ y precio de $\$20$.

2.2: Modelo gráfico de punto de equilibrio

Ejemplo 1 Modelo gráfico en la producción de muebles con financiamiento

Una empresa de fabricación de muebles financia parte de su inversión mediante la emisión de bonos, integrando una amortización anual de $\$15,000$ en sus costos fijos. Sumando otros CF de $\$40,000$, el total es $CF = \$55,000$. Con un CV de $\$15$ por unidad y un precio de venta de $\$35$, se calcula:

$$Q = 55000 / (35 - 15) = 55000 / 20 = 2750 \text{ unidades.}$$

En la gráfica, se traza la línea de costos totales $CT = 55000 + 15Q$ y la línea de ingresos $I = 35Q$. La intersección en $Q = 2750$ representa el punto de equilibrio.

Conclusión: El modelo gráfico permite visualizar cómo la inclusión de la amortización de bonos afecta el equilibrio y ayuda en la planificación de la producción.

Ejemplo 2 Modelo gráfico para un centro de atención telefónica.

Un centro de atención telefónica cuenta con CF diarios de $\$10,000$ (incluyendo sueldos fijos y depreciación de equipos) y un costo variable de $\$2$ por llamada, mientras cobra $\$5$ por cada llamada atendida.

Se calcula:

$$Q = 10000 / (5 - 2) = 10000 / 3 = 3333 \text{ llamadas.}$$

En la gráfica, la línea de costos es $CT = 10000 + 2Q$ y la de ingresos es $I = 5Q$, cruzándose en aproximadamente 3333 llamadas, lo que señala el umbral para no incurrir en pérdidas.

Conclusión: El diagrama facilita la comprensión del impacto de cada llamada sobre la rentabilidad del centro.

Ejemplo 3 Modelo gráfico aplicado a inventario en una tienda minorista

Una tienda minorista tiene CF mensuales de \$8,000 (alquiler, servicios, etc.), un CV de \$20 por producto y un precio de venta de \$50 por producto.

El punto de equilibrio se obtiene:

$$Q = 8000 / (50 - 20) = 8000 / 30 = 267 \text{ unidades.}$$

En el gráfico, se representan $CT = 8000 + 20Q$ e $I = 50Q$, mostrándose que la intersección se produce en torno a 267 unidades, lo que permite planificar la rotación del inventario.

Conclusión: El modelo gráfico es clave para visualizar cómo la estructura de costos afecta la venta mínima requerida para cubrir los gastos.

Ejemplo 4 Modelo gráfico integrando depreciación y amortización en decisiones estratégicas

Una compañía que desarrolla proyectos de producción incorpora CF de \$18,000 en amortización de bonos y \$12,000 en otros costos fijos, totalizando $CF = \$30,000$. Con un CV de \$9 por unidad y un precio de venta de \$19, se determina:

$$Q = 30000 / (19 - 9) = 30000 / 10 = 3000 \text{ unidades.}$$

La representación gráfica utiliza $CT = 30000 + 9Q$ para costos e $I = 19Q$ para ingresos, y la intersección se da en $Q = 3000$, evidenciando el equilibrio financiero.

Conclusión: Integrar depreciación y amortización en el análisis gráfico permite a los administradores tomar decisiones basadas en datos financieros completos.

Lista de ejercicios prácticos

Producción de muebles con financiamiento

1. Calcula y grafica el punto de equilibrio para una fábrica con $CF = \$60,000$, $CV = \$18$ y precio = \$38.
2. Determina el BEP y representa gráficamente las funciones para $CF = \$50,000$ (incluyendo amortización) y $CV = \$16$, precio = \$34.
3. Halla el punto de equilibrio gráfico para $CF = \$65,000$, $CV = \$15$ y precio = \$40.
4. Grafica las funciones e identifica el PE para $CF = \$55,000$, $CV = \$14$ y precio = \$36.

Centro de atención telefónica

5. Calcula el punto de equilibrio gráfico para un centro con $CF = \$12,000$, $CV = \$3$ y precio = \$6.
6. Determina y representa el PE para $CF = \$9000$, $CV = \$2.5$ y precio = \$5.5.

7. Halla el equilibrio en un centro con $CF = \$11,000$, $CV = \$2$ y $\text{precio} = \$4$.
8. Grafica las funciones e identifica el PE para $CF = \$10,500$, $CV = \$2.2$ y $\text{precio} = \$5$.

Inventario en la tienda minorista

9. Calcula y grafica el PE para una tienda con $CF = \$8500$, $CV = \$22$ y $\text{precio} = \$52$.
10. Determina el punto de equilibrio gráfico para $CF = \$8000$, $CV = \$19$ y $\text{precio} = \$48$.
11. Halla el PE para $CF = \$7500$, $CV = \$21$ y $\text{precio} = \$55$, representando las funciones.
12. Grafica las curvas e identifica el equilibrio para $CF = \$8200$, $CV = \$20$ y $\text{precio} = \$50$.

Integración de depreciación y amortización

13. Calcula y representa gráficamente el PE para $CF = \$32,000$, $CV = \$10$ y $\text{precio} = \$20$.
14. Determina el punto de equilibrio gráfico para $CF = \$28,000$, $CV = \$8$ y $\text{precio} = \$18$.
15. Halla y grafica el PE para $CF = \$35,000$, $CV = \$9$ y $\text{precio} = \$19$.
16. Grafica las funciones e identifica el equilibrio para $CF = \$30,000$, $CV = \$7.5$ y $\text{precio} = \$17$.

2.2.3: Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad

Ejemplo 1. Fijación de precios en la industria tecnológica

Contexto: Una empresa que lanza un nuevo producto tecnológico (smartphone) tiene los siguientes datos:

Precio de venta: \$400

Costo variable: \$150

Costos fijos: \$200,000 (incluyen alquiler, salarios y otros gastos administrativos)

Utilidad deseada: \$50,000

Procedimiento:

$$MC = 400 - 150 = \$250$$

$$\text{BEP sin utilidad: } 200,000 / 250 = 800 \text{ unidades}$$

$$\text{Con UD: } (200,000 + 50,000) / 250 = 250,000 / 250 = 1000 \text{ unidades.}$$

Conclusión: La empresa debe vender 1000 unidades del smartphone para cubrir los costos y alcanzar el objetivo de ganancia.

Ejemplo 2 Amortización de bonos en la producción manufacturera

Contexto: Una fábrica financia parte de su inversión mediante bonos, incorporando una amortización anual de \$15,000 en los CF. Otros costos fijos ascienden a \$165,000, totalizando $CF = \$180,000$. El producto se vende a \$80 y su costo variable es de \$30. Se desea una UD de \$20,000.

Procedimiento:

$$MC = 80 - 30 = \$50$$

$$\text{BEP sin UD: } 180,000 / 50 = 3600 \text{ unidades}$$

$$\text{Con UD: } (180,000 + 20,000) / 50 = 200,000 / 50 = 4000 \text{ unidades.}$$

Conclusión: La producción y venta de 4000 unidades permiten cubrir CF (incluyendo la amortización) y obtener la ganancia deseada.

Ejemplo 3 Análisis de inventario en una tienda minorista

Contexto: Una tienda que vende un producto cuenta con los siguientes datos:

Precio de venta: \$28 por unidad

Costo variable: \$12 por unidad

Costos fijos: \$30,000 mensuales

Utilidad deseada: \$5,000 mensuales

Procedimiento:

$$MC = 28 - 12 = \$16$$

$$\text{BEP sin UD: } 30,000 / 16 = 1875 \text{ unidades}$$

$$\text{Con UD: } (30,000 + 5,000) / 16 = 35,000 / 16 = 2188 \text{ unidades.}$$

Conclusión: La tienda debe vender aproximadamente 2188 unidades para cubrir los gastos y alcanzar la meta de ganancia.

Ejemplo 4 Optimización en un centro de atención telefónica

Contexto: Un centro de atención telefónica registra los siguientes datos:

Precio por llamada atendida: \$12

Costo variable por llamada: \$5

Costos fijos diarios: \$10,000

Utilidad deseada diaria: \$3,000

Procedimiento:

$$MC = 12 - 5 = \$7$$

$$\text{BEP sin UD: } 10,000 / 7 = 1429 \text{ llamadas}$$

$$\text{Con UD: } (10,000 + 3,000) / 7 = 13,000 / 7 = 1857 \text{ llamadas.}$$

Conclusión: Se requieren aproximadamente 1857 llamadas diarias para cubrir los costos y obtener la utilidad prevista.

Lista de ejercicios prácticos

Industria tecnológica

1. Dados $CF = \$210,000$, $CV = \$160$ y $P = \$420$, calcula las unidades necesarias para lograr una UD de \$60,000.
2. Con $CF = \$190,000$, $CV = \$140$ y $P = \$380$, determina el BEP considerando una utilidad de \$40,000.
3. Halla las unidades requeridas para $CF = \$205,000$, $CV = \$155$ y $P = \$410$, con un objetivo de ganancia de \$55,000.

4. Calcula el BEP para $CF = \$220,000$, $CV = \$165$ y $P = \$430$, si se desea obtener $\$65,000$ de utilidad.

Amortización y producción manufacturera

5. Con $CF = \$185,000$ (incluyendo amortización), $CV = \$32$ y $P = \$82$, determina las unidades requeridas para lograr una UD de $\$25,000$.
6. Dados $CF = \$170,000$, $CV = \$28$ y $P = \$78$, halla el punto de equilibrio con un objetivo de ganancia de $\$18,000$.
7. Calcula las unidades necesarias para $CF = \$190,000$, $CV = \$35$ y $P = \$85$, considerando una UD de $\$22,000$.
8. Halla el BEP para $CF = \$175,000$, $CV = \$30$ y $P = \$80$, con una utilidad deseada de $\$20,000$.

Tienda minorista

9. Con $CF = \$32,000$, $CV = \$13$ y $P = \$30$, calcula el BEP con una UD de $\$4,000$.
10. Dados $CF = \$28,000$, $CV = \$11$ y $P = \$29$, determina las unidades requeridas si se desea una ganancia de $\$3,500$.
11. Halla las unidades necesarias para $CF = \$35,000$, $CV = \$14$ y $P = \$31$, con una UD de $\$5,000$.
12. Calcula el punto de equilibrio para $CF = \$30,000$, $CV = \$12$ y $P = \$28$, considerando una utilidad deseada de $\$3,000$.

Centro de atención telefónica

13. Con $CF = \$11,000$, $CV = \$5.5$ y $P = \$12.5$, determina las llamadas diarias requeridas para obtener una UD de $\$3,500$.
14. Dados $CF = \$9,500$, $CV = \$4.8$ y $P = \$11$, calcula el BEP con un objetivo de ganancia de $\$2,500$.
15. Halla las llamadas necesarias para $CF = \$10,500$, $CV = \$5$ y $P = \$12$, considerando una UD de $\$3,000$.
16. Determina el BEP para $CF = \$10,000$, $CV = \$5.2$ y $P = \$12.2$, si se desea alcanzar una utilidad de $\$3,200$.

2.2.4: Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir.

Ejemplo 1 Industria automotriz

Contexto: Una empresa automotriz debe decidir si producir internamente un componente para el motor o comprarlo a un proveedor externo.

Datos:

- Producción interna: $CF = \$500,000$; $CV = \$50$ por unidad.
- Compra externa: Costo unitario = $\$70$.

Procedimiento:

- Igualamos costos: $500,000 + 50Q = 70Q \rightarrow 500,000 = 20Q$.
- $Q = 500,000 / 20 = 25,000$ unidades.

Conclusión: Si la demanda supera las 25,000 unidades, es más rentable producir en casa; de lo contrario, conviene comprar.

Ejemplo 2 Empresa de cosmetología

Contexto: Una compañía de productos de belleza evalúa la opción de producir internamente un ingrediente natural versus comprarlo.

Datos:

- Producción interna: $CF = \$100,000$; $CV = \$3$ por unidad.
- Compra externa: Precio unitario = $\$5$.

Procedimiento:

- Cuadro de costos: $100,000 + 3Q = 5Q \rightarrow 100,000 = 2Q$.
- $Q = 100,000 / 2 = 50,000$ unidades.

Conclusión: Con una demanda superior a 50,000 unidades, producir es la opción más conveniente.

Ejemplo 3 Empresa de alimentos

Contexto: Una panadería industrial analiza si preparar internamente un aditivo especial o adquirirlo externamente.

Datos:

- Producción interna: $CF = \$80,000$; $CV = \$2$ por unidad.
- Compra externa: Costo unitario = $\$3$.

Procedimiento:

- Igualando: $80,000 + 2Q = 3Q \rightarrow 80,000 = Q$.
- $Q = 80,000$ unidades.

Conclusión: La producción interna se vuelve rentable para cantidades mayores a 80,000 unidades.

Ejemplo 4 Industria textil

Contexto: Una empresa textil analiza la conveniencia de producir telas propias versus comprarlas a un proveedor.

Datos:

- Producción interna: $CF = \$300,000$; $CV = \$8$ por metro.
- Compra externa: Precio unitario = $\$12$ por metro.

Procedimiento:

- Se igualan: $300,000 + 8Q = 12Q \rightarrow 300,000 = 4Q$.
- $Q = 300,000 / 4 = 75,000$ metros.

Conclusión: Si la producción supera los 75,000 metros, es preferible producir en casa.

Lista de ejercicios prácticos

Industria automotriz

1. Con $CF = \$520,000$, $CV = \$48$ y costo de compra = $\$68$, determina la cantidad crítica para producir.

2. Si $CF = \$480,000$, $CV = \$52$ y el precio de compra es $\$72$, calcula el umbral de producción.
3. Dado $CF = \$500,000$, $CV = \$50$ y compra a $\$70$, encuentra la cantidad a partir de la cual conviene producir.
4. Con $CF = \$510,000$, $CV = \$49$ y costo de compra de $\$69$, determina el punto de decisión.

Empresa de cosmetología

5. Si $CF = \$105,000$, $CV = \$3.2$ y cesta de compra es $\$5.5$, calcula la cantidad crítica.
6. Con $CF = \$95,000$, $CV = \$2.8$ y precio de compra = $\$4.8$, determina el umbral para producir.
7. Dado $CF = \$100,000$, $CV = \$3$ y compra a $\$5$, halla la cantidad mínima para optar por producción interna.
8. Con $CF = \$98,000$, $CV = \$3.1$ y costo de compra de $\$5.2$, calcula el punto de equilibrio en la decisión.

Empresa de alimentos

9. Con $CF = \$82,000$, $CV = \$2.1$ y costo de compra = $\$3.1$, determina el umbral de decisión.
10. Dado $CF = \$78,000$, $CV = \$1.9$ y compra a $\$2.9$, calcula la cantidad crítica para producir.
11. Con $CF = \$80,000$, $CV = \$2$ y precio de compra = $\$3$, halla la cantidad a partir de la cual es rentable producir.
12. Si $CF = \$85,000$, $CV = \$2.2$ y costo de compra = $\$3.2$, determina el mínimo de unidades a producir.

Industria textil

13. Con $CF = \$310,000$, $CV = \$8.5$ y precio de compra = $\$12.5$, determina el umbral en metros.
14. Dado $CF = \$295,000$, $CV = \$7.8$ y costo de compra = $\$11.8$, calcula la cantidad crítica para producir internamente.
15. Con $CF = \$300,000$, $CV = \$8$ y precio de compra = $\$12$, halla el punto de equilibrio en metros.
16. Si $CF = \$305,000$, $CV = \$8.2$ y compra a $\$12.2$, determina el umbral de decisión.

2.3: Métodos de eliminación

2.3.1: Métodos de eliminación suma y resta en sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3

Ejemplo 1 Fijación de precios en función de costos y utilidades

Contexto: Una empresa desea ajustar su estructura de costos para fijar el precio de venta de un producto. Se plantea que la suma del costo base x y 1.5 veces el margen de utilidad y es igual a $\$210$, y que la diferencia entre el costo y el margen es $\$30$.

Sistema planteado (2×2):

$$x + 1.5y = 210$$

$$x - y = 30$$

Procedimiento (método de eliminación):

Restablecer la segunda ecuación: $x = 30 + y$.

Sustituir en la primera: $(30 + y) + 1.5y = 210$

$$30 + 2.5y = 210$$

$$2.5y = 180$$

$$y = 72$$

Luego, $x = 30 + 72 = 102$

Conclusión: El costo base es \$102 y el margen de utilidad es \$72.

Ejemplo 2 Distribución de Horas de Trabajo en Turnos (Sistema 3×3)

Contexto: Para optimizar la producción, una planta organiza tres turnos. Se sabe que:

La suma total de horas es 240: $x + y + z = 240$

El turno matutino (x) es doble que el nocturno (z): $x = 2z$

El turno vespertino (y) es 20 horas menor que el matutino: $y = x - 20$

Procedimiento:

Sustituir $x = 2z$ y $y = 2z - 20$ en la primera ecuación:

$$2z + (2z - 20) + z = 240$$

$$5z - 20 = 240$$

$$5z = 260$$

$$z = 52$$

Luego, $x = 2(52) = 104$ y $y = 104 - 20 = 84$

Conclusión: La distribución óptima es de 104 horas (matutino), 84 horas (vespertino) y 52 horas (nocturno).

Ejemplo 3 Determinación de Unidades Vendidas de Dos Productos

Contexto: Una empresa desea conocer cuántas unidades de dos productos se han vendido.

Se sabe que:

3 unidades de Producto A (x) y 2 de Producto B (y) generan ingresos de \$210.

2 unidades de A y 5 de B generan ingresos de \$250.

Sistema planteado (2×2):

$$3x + 2y = 210$$

$$2x + 5y = 250$$

Procedimiento (eliminación por suma/resta):

Multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda por 2, de modo que los términos de y sean 10:

$$15x + 10y = 1050$$

$$4x + 10y = 500$$

Restar la segunda ecuación de la primera:

$$(15x - 4x) = 1050 - 500$$

$$11x = 550$$

$$x = 50$$

Sustituir x en $3x + 2y = 210$:

$$150 + 2y = 210$$

$$2y = 60 \Rightarrow y = 30$$

Conclusión: Se han vendido 50 unidades de Producto A y 30 unidades de Producto B.

Ejemplo 4 Determinación de Tarifa de Servicio y Costos Operativos

Contexto: Una empresa de logística busca determinar la tarifa de servicio (x) y los costos de operación (y) a partir de dos relaciones: la suma de ambos es \$150 y la diferencia, al duplicar el primero y restar el segundo, es \$50.

Sistema planteado (2×2):

$$x + y = 150$$

$$2x - 2y = 50$$

Procedimiento:

Simplificar la segunda ecuación dividiendo entre 2:

$$x - y = 25$$

Sumar la ecuación obtenida con la primera:

$$(x + y) + (x - y) = 150 + 25$$

$$2x = 175 \Rightarrow x = 87.5$$

$$\text{Luego, } y = 150 - 87.5 = 62.5$$

Conclusión: La tarifa de servicio es \$87.50 y los costos operativos son \$62.50.

2.3.3: Aplicaciones a Modelos Económico-Administrativos

Ejemplo 1:

Contexto: Fijación de precios.

Sistema: $2x + y = 150$; $x - y = 30$, donde x es el costo base y y el margen.

Procedimiento: Despeje $y = x + 30$; sustitución en la primera ecuación y resolución dan $x = 40$, $y = 70$.

Conclusión: Costo base = 40; Margen = 70.

Ejemplo 2:

Contexto: Depreciación y amortización.

Sistema: $x + y = 100,000$; $2x - y = 20,000$, donde x es depreciación y y la amortización.

Resolución: $x = 40,000$, $y = 60,000$.

Conclusión: Depreciación = 40,000; Amortización = 60,000.

Ejemplo 3:

Contexto: Equilibrio de costos.

Sistema (3×3): $x + y + z = 500,000$; $2x + y - z = 300,000$; $x + 2y + z = 600,000$.

Procedimiento: Mediante eliminación se obtiene $x = 200,000$, $y = 100,000$, $z = 200,000$.

Conclusión: Los parámetros económicos se equilibran con esos valores.

Ejemplo 4:

Contexto: Distribución de horas de trabajo.

Sistema: $x + y + z = 150$; $x - y + z = 50$; $2x + y - z = 100$.

Resolución: $x = 40$; $y = 40$; $z = 70$ (o utilizando el método correspondiente, se puede obtener otra distribución que sume 150).

Conclusión: Los recursos se asignan para optimizar la producción administrativa.

Ejercicios de Práctica

Resuelve: $x + y = 120$; $x - y = 30$.

Resuelve: $x + y + z = 400,000$; $2x + y - z = 250,000$; $x + 2y + z = 550,000$.

Resuelve: $x + y = 90,000$; $2x - y = 20,000$.

Resuelve: $x + y + z = 600,000$; $2x + y - z = 350,000$; $x + 2y + z = 700,000$.

Resuelve: $3x + 2y = 240$; $x - y = 20$.

Resuelve: $x + y + z = 150$; $x - y + z = 50$; $2x + y - z = 100$.

Resuelve: $2x + y = 180$; $x - y = 40$.

Resuelve: $x + y = 120$; $2x - y = 60$.

Resuelve: $x + y + z = 500,000$; $2x + y - z = 300,000$; $x + 2y + z = 600,000$.

Resuelve: $3x + y = 210$; $x - y = 30$.

Resuelve: $x + 2y = 200$; $2x - y = 50$.

Resuelve: $p + 2q + r = 180$; $2p - q + r = 120$; $p - q + 2r = 150$.

B-3 Álgebra Matricial.

3.1 Operaciones con matrices.

En el ámbito de la Administración se utilizan ampliamente las operaciones con matrices para analizar y tomar decisiones basadas en grandes volúmenes de datos. Las operaciones como la suma, la resta, la multiplicación por un escalar, el producto de vectores (producto escalar y producto cruz) y el producto de matrices permiten modelar escenarios financieros, optimizar presupuestos y evaluar la asignación de recursos. Por ejemplo, en la elaboración y revisión de presupuestos se pueden representar los gastos por departamentos o proyectos en forma de matrices. La suma de estas matrices facilita la consolidación de datos de distintas áreas, mientras que la multiplicación de una matriz por un escalar permite ajustar presupuestos de acuerdo con cambios porcentuales en costos o ingresos. Estas operaciones proveen herramientas cuantitativas que permiten a los administradores tomar decisiones estratégicas fundamentadas.

1. Suma de Matrices.

Contexto: Se tienen los presupuestos de dos períodos para tres áreas de la empresa, representados en dos matrices (cada fila corresponde a una división y cada columna a una categoría de gasto).

Ejemplo 1: Consolidación de Presupuestos de Dos Periodos

Matriz A (Presupuesto Periodo 1) $\begin{bmatrix} 10000 & 15000 & 20000 \\ 8000 & 12000 & 18000 \end{bmatrix}$

Matriz B (Presupuesto Periodo 2) $\begin{bmatrix} 5000 & 7000 & 9000 \\ 4000 & 6000 & 8000 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

1. Verificar que ambas matrices son de 2×3 .
2. Sumar elemento a elemento:

Primera fila:

$$10000 + 5000 = 15000$$

$$15000 + 7000 = 22000$$

$$20000 + 9000 = 29000$$

Segunda fila:

$$8000 + 4000 = 12000$$

$$12000 + 6000 = 18000$$

$$18000 + 8000 = 26000$$

Resultado:

Matriz resultante: $\begin{bmatrix} 15000 & 22000 & 29000 \\ 12000 & 18000 & 26000 \end{bmatrix}$

Contexto: Dos departamentos registran sus costos mensuales para tres rubros. Se desea consolidar los costos.

Ejemplo 2: Consolidación de Costos Departamentales

$$\text{Matriz C (Departamento A)} \begin{bmatrix} 3000 & 4500 & 6000 \\ 3500 & 5000 & 6500 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz D (Departamento B)} \begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 4000 \\ 2500 & 3500 & 4500 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Ambas matrices tienen dimensiones 2×3 .
2. Sumar elemento a elemento:

Primera fila:

$$3000 + 2000 = 5000$$

$$4500 + 3000 = 7500$$

$$6000 + 4000 = 10000$$

Segunda fila:

$$3500 + 2500 = 6000$$

$$5000 + 3500 = 8500$$

$$6500 + 4500 = 11000$$

Resultado:

$$\text{Matriz resultante:} \begin{bmatrix} 5000 & 7500 & 10000 \\ 6000 & 8500 & 11000 \end{bmatrix}$$

2. Resta de Matrices

Contexto: Una empresa compara los costos proyectados con los costos reales registrados.

Ejemplo 1: Ajuste de Costos Proyectados vs. Reales

$$\text{Matriz E (Costos Proyectados)} \begin{bmatrix} 12000 & 16000 & 20000 \\ 10000 & 14000 & 18000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz F (Costos Reales)} \begin{bmatrix} 11000 & 15500 & 19000 \\ 9500 & 13500 & 17500 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Ambas matrices son de 2×3 .
2. Restar elemento a elemento (Proyectados – Reales):

Primera fila:

$$12000 - 11000 = 1000$$

$$16000 - 15500 = 500$$

$$20000 - 19000 = 1000$$

Segunda fila:

$$10000 - 9500 = 500$$

$$14000 - 13500 = 500$$

$$18000 - 17500 = 500$$

Resultado:

Matriz resultante:
$$\begin{bmatrix} 1000 & 500 & 1000 \\ 500 & 500 & 500 \end{bmatrix}$$

Contexto: Se tiene el registro de ingresos mensuales estimados y los ingresos reales de dos sucursales.

Ejemplo 2: Variación de Ingresos Mensuales

Matriz G (Ingresos Estimados)
$$\begin{bmatrix} 8000 & 9000 & 10000 \\ 7500 & 8500 & 9500 \end{bmatrix}$$

Matriz H (Ingresos Reales)
$$\begin{bmatrix} 7800 & 9200 & 9800 \\ 7300 & 8700 & 9300 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Verificar dimensiones: 2×3 .
2. Realizar la resta:

Primera fila:

$$8000 - 7800 = 200$$

$$9000 - 9200 = -200$$

$$10000 - 9800 = 200$$

Segunda fila:

$$7500 - 7300 = 200$$

$$8500 - 8700 = -200$$

$$9500 - 9300 = 200$$

Resultado:

Matriz resultante:
$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 200 \\ 200 & -200 & 200 \end{bmatrix}$$

3. Producto Escalar de Vectores

(Este caso es el producto de un vector fila por un vector columna, resultando en un escalar)

Contexto: Dos vectores representan ponderaciones y calificaciones de indicadores en un departamento.

Ejemplo 1: Evaluación de Indicadores de Rendimiento

Vector I Ponderaciones: $[0.4 \quad 0.35 \quad 0.25]$

Vector J Calificaciones:
$$\begin{bmatrix} 80 \\ 90 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

$$\begin{aligned} \text{Producto escalar} &= (0.4 \times 80) + (0.35 \times 90) + (0.25 \times 85) \\ &= 32 + 31.5 + 21.25 \\ &= 84.75 \end{aligned}$$

Resultado:

La puntuación ponderada es 84.75.

Contexto: Un vector fila contiene porcentajes de crecimiento y un vector columna, los factores de conversión para calcular un beneficio común.

Ejemplo 2: Cálculo de Beneficio Compuesto

Vector K Factores: $[1.05 \quad 1.03 \quad 1.07]$

Vector L Importes base: $\begin{bmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 25000 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

$$\begin{aligned} \text{Producto escalar} &= (1.05 \times 20000) + (1.03 \times 15000) + (1.07 \times 25000) \\ &= 21000 + 15450 + 26750 \\ &= 63200 \end{aligned}$$

Resultado:

El beneficio compuesto es 63200.

4. Producto Cruz de Vectores

(Se aplica a vectores tridimensionales y el resultado es un vector)

Contexto: Dos vectores representan direcciones en un espacio físico para determinar una dirección perpendicular.

Ejemplo 1: Determinación de un Vector de Orientación

Vector M: $[3 \quad 4 \quad 5]$

Vector N: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

Calcular el producto cruz:

$$\text{Componente i: } (4 \times 3) - (5 \times -1) = 12 + 5 = 17$$

$$\text{Componente j: } -[(3 \times 3) - (5 \times 2)] = -[9 - 10] = 1$$

$$\text{Componente k: } (3 \times -1) - (4 \times 2) = -3 - 8 = -11$$

Resultado:

$$\text{El vector perpendicular es: } [17 \quad 1 \quad -11].$$

Contexto: Dos vectores en tres dimensiones representan la fuerza aplicada y la distancia; su producto cruz da el vector de torque.

Ejemplo 2: Cálculo de Torque

Vector O: $[5 \quad -2 \quad 4]$

Vector P: $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Procedimiento:

Calcular producto cruz:

Componente i: $(-2) \times (-1) - (4 \times 0) = 2 - 0 = 2$

Componente j: $- [5 \times (-1) - (4 \times 3)] = - [-5 - 12] = 17$

Componente k: $(5 \times 0) - ((-2) \times 3) = 0 + 6 = 6$

Resultado:

El vector de torque es: $\begin{bmatrix} 2 & 17 & 6 \end{bmatrix}$.

5. Producto de un Escalar por una Matriz

(Se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar)

Contexto: Se aplica un ajuste del 10% a los costos de un departamento.

Ejemplo 1: Incremento Presupuestario

Matriz Q (Costos actuales): $\begin{bmatrix} 2000 & 3000 \\ 4000 & 5000 \end{bmatrix}$

Escalar: $[1.10]$

Procedimiento:

Multiplicar cada elemento:

Primera fila:

$2000 \times 1.10 = 2200$

$3000 \times 1.10 = 3300$

Segunda fila:

$4000 \times 1.10 = 4400$

$5000 \times 1.10 = 5500$

Resultado:

Matriz ajustada: $\begin{bmatrix} 2200 & 3300 \\ 4400 & 5500 \end{bmatrix}$

Contexto: Una reducción del 20% se aplica a los costos de un proyecto.

Ejemplo 2: Reducción de Costos

Matriz R (Costos iniciales): $\begin{bmatrix} 5000 & 7000 \\ 6000 & 8000 \end{bmatrix}$

Escalar: $[0.80]$

Procedimiento:

Multiplicar cada elemento:

Primera fila:

$5000 \times 0.80 = 4000$

$$7000 \times 0.80 = 5600$$

Segunda fila:

$$6000 \times 0.80 = 4800$$

$$8000 \times 0.80 = 6400$$

Resultado:

$$\text{Matriz ajustada: } \begin{bmatrix} 4000 & 5600 \\ 4800 & 6400 \end{bmatrix}$$

6. Producto de Dos Matrices

(Se realiza la multiplicación de filas por columnas)

Contexto: Una empresa evalúa el rendimiento de diferentes inversiones. La matriz A representa las cantidades invertidas y la matriz B los porcentajes de retorno.

Ejemplo 1: Análisis de Inversiones

$$\text{Matriz A: } \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B: } \begin{bmatrix} 0.05 & 0.10 \\ 0.08 & 0.12 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

Verificar dimensiones: A es 2×2 , B es 2×2 .

Calcular cada elemento del producto AB:

$$\text{Elemento (1,1): } (100 \times 0.05) + (200 \times 0.08) = 5 + 16 = 21$$

$$\text{Elemento (1,2): } (100 \times 0.10) + (200 \times 0.12) = 10 + 24 = 34$$

$$\text{Elemento (2,1): } (150 \times 0.05) + (250 \times 0.08) = 7.5 + 20 = 27.5$$

$$\text{Elemento (2,2): } (150 \times 0.10) + (250 \times 0.12) = 15 + 30 = 45$$

Resultado:

$$\text{Producto AB: } \begin{bmatrix} 21 & 34 \\ 27.5 & 45 \end{bmatrix}$$

Contexto: Se tiene una matriz que representa la asignación de recursos en distintas áreas y otra que indica la eficiencia de cada área. Se desea obtener una matriz que refleje la contribución total.

Ejemplo 2: Optimización de Recursos

$$\text{Matriz C (Recursos asignados, en miles de dólares): } \begin{bmatrix} 50 & 80 & 70 \\ 60 & 90 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz D (Eficiencia, en porcentaje convertido a decimal): } \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 \\ 0.85 & 0.95 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

Verificar dimensiones: C es 2×3 , D es 3×2 ; el producto será una matriz de 2×2 .

Calcular cada elemento de CD:

$$\text{Elemento (1,1): } (50 \times 0.9) + (80 \times 0.85) + (70 \times 0.8) = 45 + 68 + 56 = 169$$

$$\text{Elemento (1,2): } (50 \times 0.8) + (80 \times 0.95) + (70 \times 0.9) = 40 + 76 + 63 = 179$$

$$\text{Elemento (2,1): } (60 \times 0.9) + (90 \times 0.85) + (100 \times 0.8) = 54 + 76.5 + 80 = 210.5$$

$$\text{Elemento (2,2): } (60 \times 0.8) + (90 \times 0.95) + (100 \times 0.9) = 48 + 85.5 + 90 = 223.5$$

Resultado:

$$\text{Producto CD: } \begin{bmatrix} 169 & 179 \\ 210.5 & 223.5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de aplicación.

A. Suma de Matrices

(Aplicación: Consolidación de datos presupuestarios o de costos en distintas áreas)

Ejercicio 1

Dadas las matrices:

$$\text{Matriz A: } \begin{bmatrix} 12000 & 16000 & 21000 \\ 9000 & 13000 & 17000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B: } \begin{bmatrix} 6000 & 8000 & 11000 \\ 5000 & 7000 & 9000 \end{bmatrix}$$

Realiza la suma de A y B para obtener el presupuesto total consolidado.

Ejercicio 2

Dadas las matrices que representan costos por proyecto en dos periodos:

$$\text{Matriz A: } \begin{bmatrix} 8500 & 9200 & 10000 \\ 7800 & 8600 & 9500 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B: } \begin{bmatrix} 4500 & 5000 & 6000 \\ 4200 & 4800 & 5500 \end{bmatrix}$$

Determina la matriz resultante al sumar ambas.

Ejercicio 3

Para dos departamentos se tienen las siguientes matrices de gastos mensuales:

$$\text{Matriz A: } \begin{bmatrix} 7500 & 8500 & 9500 \\ 6800 & 7900 & 8800 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B: } \begin{bmatrix} 2500 & 2900 & 3100 \\ 2200 & 2600 & 3000 \end{bmatrix}$$

Realiza la suma de las matrices y expresa el total consolidado.

Ejercicio 4

Una empresa registra los gastos trimestrales en dos divisiones, en las siguientes matrices:

$$\text{Matriz A: } \begin{bmatrix} 15000 & 18000 & 21000 \\ 13000 & 16000 & 19000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B: } \begin{bmatrix} 7000 & 8000 & 11000 \\ 6000 & 7500 & 10000 \end{bmatrix}$$

Obtén la matriz que refleje la suma total de ambos periodos.

B. Resta de Matrices

(Aplicación: Comparación entre datos estimados y reales, o variaciones mensuales)

Ejercicio 1

Una empresa desea evaluar la variación entre los ingresos proyectados y los reales.

$$\text{Matriz A (Proyectados): } \begin{bmatrix} 14000 & 18000 & 22000 \\ 11000 & 15000 & 19000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B (Reales): } \begin{bmatrix} 13500 & 17500 & 21000 \\ 10500 & 14500 & 18500 \end{bmatrix}$$

Determina la diferencia (A – B) para cada celda.

Ejercicio 2

Para dos sucursales se tienen las siguientes matrices de ventas mensuales estimadas y realizadas:

$$\text{Matriz C (Estimados): } \begin{bmatrix} 8100 & 9200 & 10300 \\ 7600 & 8700 & 9800 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz D (Reales): } \begin{bmatrix} 8000 & 9300 & 10100 \\ 7500 & 8800 & 9700 \end{bmatrix}$$

Calcula la resta C – D para identificar variaciones.

Ejercicio 3

Una organización desea comparar los gastos planificados con los gastos ejecutados en dos áreas.

$$\text{Matriz A (Planificados): } \begin{bmatrix} 16000 & 20000 & 24000 \\ 14000 & 18000 & 22000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz B (Ejecutados): } \begin{bmatrix} 15500 & 19500 & 23500 \\ 13500 & 17500 & 21500 \end{bmatrix}$$

Realiza la resta para determinar la diferencia en cada celda.

Ejercicio 4

Se registraron los costos de producción previstos y los costos efectivos en dos fábricas:

$$\text{Matriz E (Previstos): } \begin{bmatrix} 9200 & 10800 & 12500 \\ 8700 & 9800 & 11000 \end{bmatrix}$$

Matriz F (Efectivos):
$$\begin{bmatrix} 9000 & 10500 & 12300 \\ 8500 & 9600 & 10700 \end{bmatrix}$$

Halla la diferencia (Previstos – Efectivos) en cada celda.

C. Producto Escalar de Vectores (Producto de un Vector Fila por un Vector Columna)

(Aplicación: Cálculo de puntajes ponderados o beneficios combinados)

Ejercicio 1

Dado el vector fila con ponderaciones: $[0.3 \quad 0.4 \quad 0.3]$

y el vector columna de calificaciones:
$$\begin{bmatrix} 75 \\ 85 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Calcula el producto escalar para obtener el puntaje ponderado.

Ejercicio 2

Un departamento evalúa tres indicadores de desempeño usando:

Vector fila de ponderaciones: $[0.25 \quad 0.35 \quad 0.40]$

Vector columna de resultados:
$$\begin{bmatrix} 90 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Determina el resultado del producto escalar.

Ejercicio 3

Para analizar la rentabilidad, se tienen los siguientes datos:

Vector fila (factores de conversión): $[1.08 \quad 1.05 \quad 1.10]$

Vector columna (ingresos base):
$$\begin{bmatrix} 20000 \\ 15000 \\ 25000 \end{bmatrix}$$

Calcula el producto escalar para obtener el ingreso ajustado.

Ejercicio 4

En una evaluación de desempeño, se utilizan:

Vector fila (pesos en %): $[0.20 \quad 0.50 \quad 0.30]$

Vector columna (puntuaciones):
$$\begin{bmatrix} 85 \\ 90 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Realiza el producto escalar para obtener el puntaje final.

D. Producto Cruz de Vectores

(Aplicación: Cálculo de direcciones o torque, en condiciones donde se requiere determinar un vector perpendicular)

Ejercicio 1

Dado el vector A: $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y el vector B: $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Realiza el producto cruz para determinar el vector perpendicular.

Ejercicio 2

Para definir la dirección de aplicación de una fuerza, se tienen:

Vector C: $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ Vector D: $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

Determina el producto cruz de C y D.

Ejercicio 3

En la modelación de torque, se utilizan los vectores:

E: $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ F: $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Realiza el producto cruz y expresa el vector resultante.

Ejercicio 4

Para obtener una orientación perpendicular, se tienen:

Vector G: $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ Vector H: $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Calcula el producto cruz entre G y H.

E. Producto de un Escalar por una Matriz

(Aplicación: Ajuste o actualización de presupuestos o costos)

Ejercicio 1

Dada la matriz de costos: $\begin{bmatrix} 6000 & 8000 \\ 7000 & 9000 \end{bmatrix}$

y un factor de ajuste de 1.08, multiplica la matriz por el escalar para obtener los costos actualizados.

Ejercicio 2

Una empresa reduce el presupuesto de marketing en un 15%.

Dada la matriz de gastos: $\begin{bmatrix} 12000 & 15000 \\ 10000 & 13000 \end{bmatrix}$

Multiplica cada elemento por 0.85 para obtener el nuevo presupuesto.

Ejercicio 3

Una unidad operativa proyecta un incremento del 12% en sus costos.

Dada la matriz: $\begin{bmatrix} 5000 & 6000 \\ 5500 & 6500 \end{bmatrix}$

Multiplica la matriz por 1.12 y presenta la matriz resultante.

Ejercicio 4

Para ajustar el presupuesto de un proyecto, se reduce cada costo en un 10%.

Dada la matriz: $\begin{bmatrix} 14000 & 16000 \\ 13000 & 15000 \end{bmatrix}$

Multiplica cada elemento por 0.90 y muestra la matriz ajustada.

F. Producto de Dos Matrices

(Aplicación: Análisis financiero o evaluación de inversiones mediante la combinación de variables)

Ejercicio 1

Dadas las matrices:

Matriz A (Inversiones, en miles): $\begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 150 \end{bmatrix}$

Matriz B (Retornos, en decimal): $\begin{bmatrix} 0.06 & 0.08 \\ 0.07 & 0.09 \end{bmatrix}$

Realiza el producto $A \times B$ y presenta la matriz resultante.

Ejercicio 2

Una empresa evalúa la efectividad de la asignación de recursos.

Dadas las matrices:

Matriz C (Recursos asignados): $\begin{bmatrix} 40 & 60 & 80 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$

Matriz D (Eficiencia): $\begin{bmatrix} 0.85 & 0.75 \\ 0.80 & 0.90 \\ 0.78 & 0.88 \end{bmatrix}$

Realiza el producto $C \times D$ para obtener la contribución total.

Ejercicio 3

Para analizar el rendimiento de diferentes proyectos, se tienen:

Matriz E (Costos): $\begin{bmatrix} 150 & 200 \\ 180 & 220 \\ 170 & 210 \end{bmatrix}$

Matriz F (Beneficios, en decimal): $\begin{bmatrix} 0.10 & 0.15 & 0.20 \\ 0.12 & 0.18 & 0.22 \end{bmatrix}$

Realiza el producto $E \times F$ y presenta el resultado.

Ejercicio 4

Una evaluación de inversiones utiliza las siguientes matrices:

$$\text{Matriz G (Capital asignado): } \begin{bmatrix} 200 & 300 & 250 \\ 180 & 270 & 230 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz H (Índices de retorno): } \begin{bmatrix} 0.05 & 0.07 \\ 0.06 & 0.08 \\ 0.055 & 0.075 \end{bmatrix}$$

Realiza el producto $G \times H$ para obtener la matriz de resultados.

3.2 Aplicaciones de los Determinantes en la Administración.

En el ámbito de la administración, los determinantes de matrices juegan un papel fundamental en la resolución de problemas relacionados con la optimización de recursos, análisis financiero y evaluación de riesgos. Las matrices y sus determinantes permiten modelar sistemas económicos complejos, ayudando a los administradores en la toma de decisiones.

Algunas aplicaciones de los determinantes en la administración incluyen:

- Análisis de estabilidad financiera, donde se evalúan relaciones entre variables económicas.
- Cálculo de coeficientes en modelos de inversión, facilitando la estimación de rendimientos futuros.
- Evaluación de costos y presupuestos, comparando alternativas de financiamiento o asignación de recursos.
- Solución de sistemas de ecuaciones, utilizados en modelos de oferta y demanda, precios de mercado y eficiencia operativa.

A continuación, se presentan ejemplos prácticos de aplicación de determinantes en el área de administración, con procedimiento completo.

Ejemplo 1: Evaluación Financiera con Determinante 2×2

Una empresa desea comparar dos alternativas de financiamiento a corto plazo, evaluando el impacto en costos y retorno de inversión. Se representan las tasas de interés y costos en una matriz 2×2 .

Datos

Matriz de evaluación de costos e intereses:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Procedimiento

1. Aplicamos la fórmula del determinante para una matriz 2×2 :
 $\det(A) = (8 \times 12) - (10 \times 5)$

2. Realizamos las operaciones:

$$= 96 - 50$$

$$= 46$$

Resultado

El determinante de la matriz es 46, lo que indica que existe una diferencia considerable en los costos y tasas de interés entre ambas opciones de financiamiento.

Ejemplo 2: Evaluación de Proyectos de Inversión con Determinante 3×3

Un administrador desea evaluar la viabilidad de tres proyectos de inversión, considerando rendimiento esperado, costos operativos y margen de ganancia.

Datos

Matriz de evaluación de proyectos: $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 4 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

Procedimiento

1. Aplicamos el método de columnas aumentadas: $B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 5 & 8 & 12 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 10 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right]$

Extendemos la matriz agregando las primeras dos columnas a la derecha:

2. Calculamos los productos de las diagonales principales:

$$(5 \times 6 \times 9) + (8 \times 10 \times 3) + (12 \times 4 \times 7) = 270 + 240 + 336 = 846$$

3. Calculamos los productos de las diagonales secundarias:

$$(12 \times 6 \times 3) + (8 \times 4 \times 9) + (5 \times 10 \times 7) = 216 + 288 + 350 = 854$$

4. Restamos ambos valores: $846 - 854 = -8$

Resultado

El determinante de la matriz es -8, lo que indica que los costos operativos y márgenes de ganancia presentan una variabilidad importante que afecta la estabilidad de los proyectos de inversión.

Ejemplo 3: Optimización de Presupuesto con Método de Cofactores

Una empresa analiza la distribución de presupuesto en tres áreas estratégicas: marketing, producción y administración. Se desea determinar el impacto en la estructura financiera.

Datos

Matriz de distribución presupuestaria: $C = \begin{bmatrix} 150 & 200 & 250 \\ 100 & 180 & 220 \\ 130 & 170 & 210 \end{bmatrix}$

Procedimiento

1. Seleccionamos la primera fila para el desarrollo: $a = 150$, $b = 200$, $c = 250$.

2. Calculamos los determinantes menores 2×2 :

Cofactor de a = 150

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 180 & 220 \\ 170 & 210 \end{bmatrix}$$

$$\det C_{11} = (180 \times 210) - (220 \times 170) = 37800 - 37400 = 400$$

Cofactor de b = 200

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 100 & 220 \\ 130 & 210 \end{bmatrix}$$

$$\det C_{12} = (100 \times 210) - (220 \times 130) = 21000 - 28600 = -7600$$

Cofactor de c = 250

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 100 & 180 \\ 130 & 170 \end{bmatrix}$$

$$\det C_{13} = (100 \times 170) - (180 \times 130) = 17000 - 23400 = -6400$$

3. Aplicamos la fórmula del determinante:

$$\det C = (150 \times 400) - (200 \times (-7600)) + (250 \times (-6400))$$

$$= 60000 + 152000 - 160000$$

$$= 52000$$

Resultado

El determinante de la matriz es 52000, lo que muestra una diferencia significativa en la asignación de recursos financieros, sugiriendo que es necesario revisar el presupuesto para optimizar los costos y maximizar el rendimiento.

Conclusión

Los determinantes de matrices son herramientas esenciales en la administración para la evaluación de proyectos, financiamiento, optimización de presupuestos y análisis financiero. Cada método proporciona un enfoque distinto para resolver problemas administrativos, facilitando la toma de decisiones estratégicas en empresas y organizaciones.

Ejercicios de Aplicaciones de los Determinantes a la Administración.

Evaluación Financiera con Determinante 2×2

1. Una empresa compara dos alternativas de inversión. Evalúa los costos y rendimientos con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y analiza su significado en la comparación de inversiones.

2. Un banco analiza el comportamiento de tasas de interés y costos operativos de dos productos financieros. Representa la información en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante y su impacto en la elección del producto.

3. Se evalúan dos planes de financiamiento con tasas y costos asociados en la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y determina qué opción es más viable.

4. Una empresa compara dos estrategias de reducción de costos y sus efectos en los beneficios proyectados. Representa los datos con la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Evalúa el determinante y su interpretación en la toma de decisiones.

5. Se analizan dos escenarios de inversión en bienes raíces, considerando los costos de adquisición y mantenimiento en la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y analiza la estabilidad de los proyectos.

6. Un gerente financiero quiere evaluar la rentabilidad de dos estrategias de inversión con base en la matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante y explica su significado en la estrategia financiera.

Evaluación de Proyectos de Inversión con Determinante 3×3

1. Un administrador evalúa tres proyectos de inversión, considerando rentabilidad esperada, costos y margen de ganancia. Representa la información en la siguiente matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y analiza su interpretación en la elección de proyectos.

2. Un equipo financiero estudia las proyecciones de crecimiento de tres departamentos en la empresa, según la siguiente matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante y su impacto en la toma de decisiones estratégicas.

3. Se evalúan los costos y beneficios en tres áreas de producción de una empresa mediante la matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y explica cómo puede influir en el análisis financiero.

4. Un gerente compara el desempeño de tres proyectos de expansión usando la siguiente matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante y analiza su efecto en la elección de estrategias.

5. En una empresa, tres estrategias de crecimiento se evalúan con la siguiente matriz:

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante y explica su impacto en la planificación empresarial.

6. Se comparan los costos operativos y márgenes de ganancia de tres divisiones de la empresa con la siguiente matriz:

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante y analiza su influencia en la distribución de recursos.

Optimización de Presupuesto con Método de Cofactores

1. Una empresa busca optimizar la asignación de recursos en marketing, producción y administración según la siguiente matriz de costos:

$$M = \begin{bmatrix} 120 & 140 & 160 \\ 100 & 130 & 150 \\ 110 & 125 & 170 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante mediante el método de cofactores y analiza la distribución presupuestaria.

2. Se evalúan tres estrategias de reducción de costos en diversas áreas de negocio según la matriz:

$$N = \begin{bmatrix} 200 & 180 & 150 \\ 140 & 160 & 130 \\ 120 & 170 & 110 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante por cofactores y explica su influencia en el presupuesto empresarial.

3. Un gerente financiero revisa la asignación de presupuesto entre departamentos usando la siguiente matriz:

$$O = \begin{bmatrix} 170 & 140 & 120 \\ 150 & 160 & 130 \\ 180 & 190 & 170 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante utilizando el método de cofactores y analiza su impacto en la gestión presupuestaria.

4. Se compara el rendimiento financiero de tres unidades de negocio con la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 210 & 190 & 170 \\ 180 & 200 & 160 \\ 140 & 130 & 120 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante mediante cofactores y explica su relevancia en la administración de recursos.

5. Se estudia la eficiencia del presupuesto en tres departamentos clave mediante la matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 130 & 120 & 110 \\ 140 & 150 & 125 \\ 170 & 160 & 180 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante con el método de cofactores y describe su impacto en la estrategia empresarial.

6. Un equipo de administración analiza las proyecciones financieras de tres divisiones con la siguiente matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 150 & 140 & 130 \\ 170 & 160 & 150 \\ 180 & 190 & 175 \end{bmatrix}$$

Determina el valor del determinante mediante el método de cofactores y evalúa la asignación de recursos.

Aplicaciones a modelo de Insumo-Producto

El modelo de insumo-producto analiza la interdependencia entre sectores productivos dentro de una economía o empresa, representando las relaciones mediante una matriz de coeficientes técnicos.

Ejemplo 1: Evaluación de Estrategias de Inversión con la Inversa de una Matriz

Una empresa desea evaluar tres estrategias de inversión, considerando rendimiento esperado, costos operativos y margen de ganancia. Se representa la información en una

matriz 3×3 , y se busca determinar los coeficientes de impacto de cada estrategia mediante la inversa de la matriz.

Datos

Matriz de evaluación de estrategias: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Procedimiento

1. Calculamos el determinante de la matriz:

$$\det A = 2(5 \times 9 - 6 \times 8) - 3(4 \times 9 - 6 \times 7) + 1(4 \times 8 - 5 \times 7)$$

$$= 2(-3) - 3(-6) + 1(-3) = -6 + 18 - 3 = 9$$
2. Calculamos la matriz de cofactores y su transpuesta.
3. Aplicamos la fórmula de la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$
4. Multiplicamos cada elemento por $\frac{1}{9}$ para obtener la matriz inversa.

Resultado

La matriz inversa de A permite determinar los coeficientes de impacto de cada estrategia de inversión, facilitando la toma de decisiones financieras.

Ejemplo 2: Optimización de Recursos en una Empresa

Una empresa tiene tres departamentos: producción, distribución y ventas. Se busca determinar la cantidad óptima de recursos que cada departamento debe recibir para cumplir con la demanda final de productos.

Datos

Matriz de coeficientes técnicos: $B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

Demanda final de recursos: $D = [80 \quad 120 \quad 150]$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.
2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos B de la identidad.
3. Calculamos la inversa de I - B.
4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D para obtener la cantidad óptima de recursos en cada departamento.

Resultado

La matriz inversa permite determinar la cantidad óptima de recursos que cada departamento debe recibir para cumplir con la demanda final, optimizando la gestión de insumos y costos.

Ejemplo 3: Evaluación del Impacto de una Política Económica

El gobierno implementa una política de subsidios en tres sectores económicos: energía, transporte y tecnología. Se busca determinar cómo estos subsidios afectan la producción total de cada sector.

Datos

$$\text{Matriz de coeficientes técnicos: } C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Demanda final ajustada por subsidios: } D = [90 \quad 130 \quad 170]$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.
2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos C de la identidad.
3. Calculamos la inversa de I - C.
4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D para obtener la producción total ajustada por subsidios.

Resultado

La matriz inversa permite evaluar el impacto de los subsidios en la producción total de cada sector, facilitando la toma de decisiones en políticas económicas.

Evaluación del Impacto de una Política Económica

El gobierno implementa una política de subsidios en tres sectores económicos: energía, transporte y tecnología. Se busca determinar cómo estos subsidios afectan la producción total de cada sector.

Datos

$$\text{Matriz de coeficientes técnicos: } C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Demanda final ajustada por subsidios: } D = [90 \quad 130 \quad 170]$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.
2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos C de la identidad.
3. Calculamos la inversa de I - C.
4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D para obtener la producción total ajustada por subsidios.

Resultado

La matriz inversa permite evaluar el impacto de los subsidios en la producción total de cada sector, facilitando la toma de decisiones en políticas económicas.

Análisis de Interdependencia entre Sectores Productivos

Una economía tiene tres sectores productivos: agricultura, manufactura y servicios. Se desea analizar cómo los insumos de cada sector afectan la producción total.

Datos

$$\text{Matriz de coeficientes técnicos: } E = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Demanda final: } D = [100 \quad 150 \quad 200]$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.
2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos E de la identidad.
3. Calculamos la inversa de I - E.
4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D para obtener la producción total requerida.

Resultado

La matriz inversa permite calcular la producción total requerida en cada sector, asegurando que se cubran las necesidades de insumos y demanda final.

Planeación Estratégica en Empresas

Una empresa busca determinar la mejor estrategia de producción y distribución para maximizar la rentabilidad.

Datos

$$\text{Matriz de coeficientes técnicos: } F = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Demanda final: } D = [80 \quad 120 \quad 150]$$

Procedimiento

1. Calculamos la matriz identidad I.
2. Restamos la matriz de coeficientes técnicos F de la identidad.
3. Calculamos la inversa de I - F.
4. Multiplicamos la inversa por la matriz de demanda D para obtener la producción óptima.

Resultado

La matriz inversa permite determinar la mejor estrategia de producción y distribución para maximizar la rentabilidad de la empresa.

Ejercicios de aplicación

Evaluación de Estrategias de Inversión

1. Una empresa tecnológica analiza tres proyectos. Se representa la relación entre recursos invertidos y beneficios estimados con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Una consultora financiera compara tres carteras de inversión. La matriz de factores de retorno es:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Se analizan tres estrategias de posicionamiento en mercados internacionales con la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Un grupo de inversionistas evalúa la viabilidad de tres negocios con la siguiente matriz de datos históricos:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Una organización sin fines de lucro compara rendimientos de tres modelos de financiamiento:

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Una empresa del sector salud revisa propuestas de inversión mediante la matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Optimización de Recursos en una Empresa

7. Una empresa textil busca optimizar la distribución de materia prima entre sus departamentos:

$$G = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

8. Una fábrica de calzado organiza el uso de personal, materiales y maquinaria:

$$H = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

9. Una cadena de supermercados gestiona la asignación de productos por sucursal:

$$I = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

10. Una empresa energética distribuye recursos entre producción, mantenimiento y comercialización:

$$J = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

11. Una constructora administra sus costos operativos en proyectos simultáneos:

$$K = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

12. Una agencia logística calcula los recursos necesarios para transportes regionales:

$$L = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Evaluación del Impacto de una Política Económica

13. Un gobierno simula el efecto de subsidios en infraestructura, salud y educación:

$$M = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

14. Una región agrícola estudia los efectos de incentivos fiscales:

$$N = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

15. Una oficina gubernamental evalúa la aplicación de nuevos aranceles en tres industrias:

$$O = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

16. Una nación implementa reforma energética. La interdependencia de sectores es:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

17. Un nuevo programa de subsidios rurales impacta a los sectores agrícola, comercial y transporte:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

18. Se analiza el impacto económico de créditos a la vivienda en tres regiones:

$$R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Análisis de Interdependencia entre Sectores Productivos

19. Una economía evalúa cómo se relacionan los sectores forestal, pesquero e industrial:

$$S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

20. Se analizan las relaciones entre minería, energía y construcción:

$$T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

21. Se estudia la dinámica entre sector público, privado y comunitario:

$$U = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

22. Tres ramas de actividad (agropecuaria, industrial y comercial) presentan la matriz:

$$V = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

23. Interdependencia económica entre sectores exportador, importador y local:

$$W = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

24. Estructura de intercambio entre industrias automotriz, aeronáutica y naval:

$$X = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Planeación Estratégica en Empresas

25. Una empresa planifica su expansión considerando distribución, ventas y producción:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

26. Una empresa de software define su planeación estratégica en tres áreas: desarrollo, operaciones y soporte, con la siguiente matriz de coeficientes:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

27. Una compañía automotriz planifica la producción de tres líneas de vehículos: sedán, SUV y camión, con esta matriz:

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

28. Una firma de consultoría organiza su crecimiento en tres regiones: América, Europa y Asia, mediante la matriz:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

29. Una empresa de bienes de consumo distribuye sus esfuerzos entre marketing digital, retail y distribución, representado por:

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

30. Una Startup de energía renovable planea su asignación de recursos en I+D, producción y ventas, usando la matriz:

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.30 & 0.40 \\ 0.45 & 0.35 & 0.20 \end{bmatrix}$$

B-4 Diferenciación y Aplicaciones

4.1 Límites y Continuidad.

Evaluación de costos marginales en producción

El costo marginal representa el cambio aproximado en el costo total cuando se produce una unidad adicional. Se evalúa como el límite de la razón de cambio del costo total respecto al número de unidades producidas. Matemáticamente, si $C(x)$ es la función de costo total y x el número de unidades, entonces el costo marginal en $x = a$ es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(a+h) - C(a)}{h}$$

Ejemplo 1 Evaluación de costos marginales en producción

Una empresa produce cajas de cartón y su función de costo total, en miles de pesos, está dada por: $C(x) = 4x + 12$, donde x representa el número de cajas producidas en centenas.

Se desea conocer el costo marginal cuando la producción tiende a 5 centenas de unidades.

Solución:

El costo marginal se aproxima al límite de la razón de cambio:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(5+h) - C(5)}{h}$$

Evaluamos:

$$C(5) = 4(5) + 12 = 32$$

$$C(5+h) = 4(5+h) + 12 = 20 + 4h + 12 = 32 + 4h$$

Sustituimos en la fórmula:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(32 + 4h) - 32}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} = 4$$

El costo marginal en ese nivel de producción es de \$4,000 por cada cien cajas adicionales.

Estabilidad de ingresos publicitarios por visitas web

La estabilidad del ingreso se examina mediante la continuidad de la función de ingreso en relación con el número de visitas. Si la función $I(x)$ está definida, tiene límite y coincide con su valor en un punto, se considera que es continua en ese punto. Esto refleja que no hay saltos abruptos ni cambios inesperados en ingresos.

Ejemplo 2 Estabilidad de ingresos publicitarios por visitas web

Una agencia de marketing digital registra el ingreso promedio por visitas según la función $I(x) = 2x^2 + 5x$, donde x representa millones de visitas.

Determina si la función de ingreso es continua en $x = 1$ millón de visitas.

Solución:

- Verificamos si $I(1)$ está definida:

$$I(1) = 2(1)^2 + 5(1) = 7$$

- Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 5x) = 2(1)^2 + 5(1) = 7$$

- Comparamos:

$$I(1) = \lim_{x \rightarrow 1} I(x) = 7$$

La función es continua en ese punto $\Rightarrow$ el ingreso por visitas no presenta fluctuaciones abruptas.

Continuidad en la función de demanda

La función de demanda de un producto es continua en cierto punto si no presenta saltos, interrupciones o discontinuidades bruscas en la relación entre cantidad demandada y precio. Esto se analiza mediante las tres condiciones de continuidad: existencia del valor, existencia del límite y coincidencia entre ambos.

Ejemplo 3 Continuidad en la función de demanda

El comportamiento de demanda para un artículo está dado por:

$$\lim_{x \rightarrow 10} D(x) = D(10) = 10$$

Determina si la función es continua en $x = 10$.

Solución:

$$\text{Límite por la izquierda: } \lim_{x \rightarrow 10^-} D(x) = 20 - 10 = 10$$

$$\text{Límite por la derecha: } \lim_{x \rightarrow 10^+} D(x) = 10$$

$$\text{Valor en el punto: } D(10) = 10$$

Se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 10} D(x) = D(10) = 10$$

La función de demanda es continua en ese nivel de precio.

Evaluación del ingreso marginal al incrementar ventas

El ingreso marginal se interpreta como el cambio en el ingreso total por cada unidad adicional vendida. Este valor se obtiene del límite de la razón de cambio de la función de ingresos con respecto a la cantidad vendida. Si $R(x)$ es la función de ingreso, entonces el ingreso marginal en $x = a$ es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(a+h) - R(a)}{h}$$

Ejemplo 4 Evaluación del ingreso marginal al incrementar ventas

Supón que una empresa obtiene ingresos por ventas representados por: $R(x) = x^2 + 8x$, donde x es el número de unidades vendidas en cientos.

Calcula el ingreso marginal en el punto donde $x \rightarrow 3$ centenas.

Solución:

$$\text{Utilizamos la razón de cambio: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(3+h) - R(3)}{h}$$

Evaluamos:

$$R(3) = 9 + 24 = 33$$

$$R(3+h) = (3+h)^2 + 8(3+h) = 9 + 6h + h^2 + 24 + 8h = 33 + 14h + h^2$$

Entonces:

$$\frac{R(3+h) - R(3)}{h} = \frac{33 + 14h + h^2 - 33}{h} = \frac{14h + h^2}{h} = 14 + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (14 + h) = 14$$

El ingreso marginal es de 14,000 pesos por cada cien unidades adicionales vendidas.

Ejercicios de Aplicaciones 4.1

Evaluación de costos marginales en producción

- Una fábrica de botellas tiene un costo total de producción dado por $C(x) = 5x + 20$. Evalúa el costo marginal cuando la producción tiende a 6 centenas.
- Una empresa textil modela su costo total como $C(x) = x^2 + 10x$. Determina el costo marginal en el punto donde $x \rightarrow 4$.
- Si el costo total por fabricar zapatos se expresa como $C(x) = 3x^2 - 2x + 40$, calcula el costo marginal en $x \rightarrow 5$.
- La función de costos está dada por $C(x) = 6x + 18$. Evalúa el costo marginal cuando la producción se aproxima a 2 centenas.
- El costo total en miles de pesos es $C(x) = x^2 + 4x + 9$. Determina el costo marginal en el instante donde $x \rightarrow 3$.

Estabilidad de ingresos publicitarios por visitas web

- Determina si la función de ingreso $I(x) = 2x^2 + 3x$ es continua en $x = 2$.
- Evalúa la continuidad de $I(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$ dentro del contexto de ingresos por publicidad.
- La función $I(x) = x^2 + 5x + 4$ representa los ingresos por clics. Verifica si es continua en $x = 3$.
- Una empresa usa $I(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$. Determina si es continua en $x = 1$.
- Verifica si la función $I(x) = x^2$ es continua en $x = 0$, suponiendo que x representa millones de visitas.

Continuidad en la función de demanda

- Verifica si $D(x) = 50x$ es continua en $x = 1$.
- Determina si la función $D(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ presenta continuidad en $x = 3$.

Evaluación del ingreso marginal al incrementar ventas

- Una empresa registra ingresos con la función $R(x) = x^2 + 2x$. Evalúa el ingreso marginal cuando las ventas se aproximan a $x = 5$.
- Si los ingresos se modelan con $R(x) = 4x + 10$, calcula el ingreso marginal en $x = 3$.
- La función de ingreso es $R(x) = x^2 + 6x + 1$. Determina el ingreso marginal cuando $x \rightarrow 2$.
- Evalúa el ingreso marginal si $R(x) = 5x^2 - x$ y $x \rightarrow 4$.
- La empresa vende productos y modela ingresos con $R(x) = 3x^2 + x + 7$.
Calcula
el ingreso marginal en el punto $x = 1$.

4.2 Derivadas Algebraicas

Definición: El costo marginal representa el incremento aproximado en el costo total al producir una unidad adicional. Se obtiene mediante la derivada de la función de costo total, expresando cómo varía el costo ante cambios mínimos en la cantidad producida.

Ejemplo 1 Evaluación del costo marginal.

Una empresa produce carpetas y el costo total de producción, en miles de pesos, está dado por:

$C(x) = 5x^2 + 12x + 20$, donde x es el número de carpetas en centenas.

Determina el costo marginal en términos de x .

Solución:

La derivada representa el costo marginal:

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(5x^2 + 12x + 20) = 10x + 12$$

El costo marginal depende de la cantidad producida y crece linealmente con x .

Definición: La tasa de variación del ingreso representa el cambio instantáneo en el ingreso total cuando varía el número de unidades vendidas o suscripciones realizadas. Se determina mediante la derivada de la función de ingreso y permite medir el crecimiento económico o el rendimiento de las ventas digitales en tiempo real.

Ejemplo 2 Tasa de variación en ingreso por ventas digitales

Una plataforma registra su ingreso total en función del número de suscripciones mensuales como:

$I(x) = x^2 + 5x$, donde x representa miles de suscripciones.

Determina la derivada $I'(x)$ para conocer la tasa de crecimiento del ingreso.

Solución:

$$I'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5x) = 2x + 5$$

La tasa de crecimiento del ingreso aumenta conforme crecen las suscripciones.

Definición: La variación del precio respecto a la demanda permite analizar cómo se modifica el precio de un bien o servicio ante cambios en la cantidad demandada. Esta sensibilidad se describe con la derivada de la función de precio, y resulta útil en estrategias de fijación o ajuste dinámico de precios.

Ejemplo 3 Variación del precio en función de la demanda

El precio de un servicio depende de la demanda mediante la función:

$$P(x) = \frac{100}{x} + 20, \text{ donde } x \text{ representa cientos de unidades demandadas.}$$

Calcula la derivada del precio con respecto a la demanda.

Solución:

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{100}{x} + 20 \right) = -\frac{100}{x^2}$$

A medida que la demanda aumenta, la variación en el precio disminuye.

Definición: El crecimiento exponencial de una inversión describe cómo aumenta su valor de forma continua y acelerada en función del tiempo. La derivada de la función de inversión permite conocer la velocidad con la que se incrementa el capital, siendo esencial para estimaciones financieras de largo plazo.

Ejemplo 4 Crecimiento exponencial de inversión

Una empresa proyecta el valor de su inversión mediante la función:

$$V(x) = 2000 \cdot e^{0.05x}, \text{ donde } x \text{ es el número de meses.}$$

Calcula la derivada del valor de la inversión.

Solución:

$$V'(x) = \frac{d}{dx} (2000 \cdot e^{0.05x}) = 2000 \cdot 0.05 \cdot e^{0.05x} = 100 \cdot e^{0.05x}$$

El crecimiento de la inversión sigue una trayectoria exponencial sostenida.

Definición: La sensibilidad del ingreso ante la inversión publicitaria mide cómo cambia el ingreso cuando se ajusta el gasto en campañas. Se determina por la derivada de la función ingreso-publicidad y permite entender el impacto marginal de nuevas estrategias promocionales.

Ejemplo 5 Sensibilidad del ingreso respecto a publicidad

El ingreso generado por una campaña publicitaria se modela como:

$$R(x) = x \cdot \ln(x), \text{ donde } x \text{ representa miles de pesos invertidos.}$$

Calcula la derivada del ingreso para conocer su sensibilidad.

Solución:

Aplicamos la regla del producto:

$$R'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Por cada aumento en publicidad, el ingreso aumenta proporcionalmente y con aceleración logarítmica.

Ejercicios de práctica

Evaluación del costo marginal.

1. Una fábrica modela su costo total como $C(x) = 6x^2 + 18x + 10$. Calcula el costo marginal en términos de x .

2. El costo total de producción está dado por $C(x) = 5x^3 + 2x^2 + 20$. Encuentra la derivada que representa el costo marginal.

3. Si $C(x) = \frac{100}{x} + 50x$, determina el costo marginal en función de x .

4. La función de costos es $C(x) = x^4 + 3x^2 + 6x$. Evalúa el costo marginal.

5. El costo total está dado por $C(x) = 4x + 12$. Determina el costo marginal.

La tasa de crecimiento del ingreso aumenta conforme crecen las suscripciones.

6. Una plataforma digital genera ingresos según la función $I(x) = x^3 + 4x^2 + x$. Calcula la tasa de variación del ingreso respecto a las suscripciones.

7. El ingreso por membresías se modela como $I(x) = 2x^2 + 8x$. Determina su tasa de crecimiento.

8. Si el ingreso mensual es $I(x) = \ln(x) + 3x$, halla la tasa de variación con respecto al número de clientes.

9. La función de ingreso es $I(x) = 6x \cdot e^x$. Encuentra la derivada para evaluar la eficiencia de las ventas.

10. La empresa registra ingresos mediante $I(x) = x^4 + 5x^2$. Calcula la tasa de cambio instantáneo.

Variación del precio en función de la demanda

11. Un producto tiene precio definido por $P(x) = \frac{60}{x} + 15$. Calcula la variación del precio respecto a la demanda.

12. La función de precio se expresa como $P(x) = \ln(x + 2) + 10$. Determina su tasa de variación.

13. Si $P(x) = 90 - 6x$, halla cómo cambia el precio cuando la demanda aumenta.

14. El precio de venta depende de la demanda según $P(x) = x^2 - 8x + 100$. Evalúa la derivada.

15. Una empresa usa la función $P(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ para establecer precios. Determina la sensibilidad ante cambios en la demanda.

Crecimiento exponencial de inversión

16. Una inversión evoluciona como $V(t) = 4000 \cdot e^{0.06t}$. Calcula su tasa de crecimiento instantáneo.
17. El valor proyectado está dado por $V(t) = e^{0.03t} + 3000$. Determina cómo varía la inversión con el tiempo.
18. Si $V(t) = 750 \cdot e^{t/20}$, halla la derivada que representa el cambio en el valor.
19. La función es $V(t) = 1000 \cdot e^{0.05t}$. Evalúa la velocidad de crecimiento de la inversión.
20. Una inversión empresarial se describe con $V(t) = e^{t/5} + t^2$. Determina la tasa de incremento con respecto al tiempo.
- Sensibilidad del ingreso respecto a publicidad
21. El ingreso generado por publicidad se modela con $R(x) = x \cdot \ln(3x)$. Evalúa su sensibilidad.
22. Si $R(x) = x^2 \cdot \ln x + 2x$, determina cómo varía el ingreso frente al gasto.
23. La función es $R(x) = \ln x + x^2$. Calcula el cambio marginal del ingreso respecto a la inversión.
24. Una empresa usa $R(x) = x \cdot e^x + 50$ para estimar ingresos. Evalúa la derivada.
25. El modelo de ingreso está dado por $R(x) = \ln(2x + 1) + x$. Determina la sensibilidad ante cambios en publicidad.

4.3 Derivada de n-ésimo orden

Las derivadas de orden superior permiten analizar aspectos avanzados del comportamiento económico, como la variabilidad en la tasa de crecimiento, el cambio en las tendencias de costos e ingresos, y la aceleración de la productividad o demanda.

Aceleración en el crecimiento de ingresos

Definición: La segunda derivada del ingreso expresa cómo varía la tasa de crecimiento del ingreso conforme cambia la cantidad vendida. Si la segunda derivada es positiva, indica una aceleración en el crecimiento; si es negativa, una desaceleración.

Ejemplo 1: Una empresa registra su ingreso total por ventas como

$$I(x) = x^3 + 5x^2 + 12x$$

Determina la segunda derivada para conocer la aceleración en el crecimiento de ingresos.

$$I'(x) = 3x^2 + 10x + 12$$

$$I''(x) = 6x + 10$$

Curvatura en la función de costos

Definición: La segunda derivada del costo total representa la curvatura o la sensibilidad del costo marginal. Permite saber si el costo marginal está aumentando o disminuyendo. Esto es útil para detectar puntos de inflexión en la eficiencia productiva.

Ejemplo 2: Una fábrica modela su costo total como $C(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2$.

Determina la segunda derivada para evaluar cómo varía el costo marginal.

$$C'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x$$

$$C''(x) = 12x^2 + 12x + 6$$

Variabilidad en la demanda según la tasa de cambio

Definición: La segunda derivada de la demanda permite identificar la naturaleza de la sensibilidad en la cantidad demandada frente al precio o ingreso. Analiza si la elasticidad está creciendo o decreciendo en el rango de estudio.

Ejemplo 3:

La demanda de un artículo está dada por $D(p) = -p^3 + 6p^2 - 9p + 30$.

Calcula la segunda derivada para analizar la variabilidad de la demanda.

$$D'(p) = -3p^2 + 12p - 9$$

$$D''(p) = -6p + 12$$

Comportamiento técnico de precios

Definición: La tercera derivada del precio se puede utilizar para modelar tendencias en precios dinámicos o predictivos. Ayuda a evaluar la aceleración o desaceleración en las variaciones del precio respecto a factores económicos.

Ejemplo 4:

Una empresa establece precios con base en una función de ajuste:

$$P(t) = t^4 - 3t^3 + 2t^2 + 5t.$$

Determina la tercera derivada para analizar el comportamiento técnico del precio.

$$P'(t) = 4t^3 - 9t^2 + 4t + 5$$

$$P''(t) = 12t^2 - 18t + 4$$

$$P'''(t) = 24t - 18$$

Ritmo de cambio marginal en inversión acumulada

Definición: La segunda o tercera derivada de la inversión acumulada indica la velocidad con la que se incrementa o estabiliza el rendimiento económico. Se usa para optimizar horizontes de retorno o tasas de crecimiento financiero.

Ejemplo 5:

El valor acumulado de una inversión está modelado por $V(t) = 2000e^{0.03t} + t^2$. Calcula las derivadas de segundo y tercer orden para interpretar el ritmo de cambio en el crecimiento.

$$V'(t) = 2000e^{0.03t} \times 0.03 + 2t$$

$$V'(t) = 60e^{0.03t} + 2t$$

$$V''(t) = 1.8e^{0.03t} + 2$$

Ejercicios de aplicación

1. Una empresa presenta su ingreso total como $I(x) = x^3 + 4x^2 + 5x$. Calcula la segunda derivada e interpreta la aceleración del ingreso.

2. Si el ingreso es $I(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7$, evalúa cómo varía la tasa de crecimiento.
3. El modelo de ingreso está dado por $I(x) = x^4 + x^2 + x$. Determina la aceleración en el crecimiento.
4. Una función de ingreso se expresa como $I(x) = 5x^3 + 6x + 10$. Obtén la segunda derivada.
5. La función de ingresos de una plataforma es $I(x) = x^5 + 2x^3 + x$. Calcula $I''(x)$ para conocer el cambio en la tasa de crecimiento.

Curvatura en la función de costos

6. El costo total de fabricación está modelado por $C(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2$. Determina su segunda derivada.
7. Si el costo se expresa como $C(x) = x^5 + 4x^2 + 8$, analiza cómo varía el costo marginal.
8. La función es $C(x) = 6x^3 + 9x^2 + x$. Calcula $C''(x)$ para examinar la eficiencia.
9. Una empresa usa $C(x) = x^2 + 4x + 100$ como función de costos. Evalúa la curvatura.
10. El modelo productivo define costos con $C(x) = x^6 + x^3 + x^2$. Calcula la segunda derivada.

Variabilidad en la demanda según la tasa de cambio

11. La demanda de un producto está definida por $D(x) = -x^3 + 5x - 8x + 20$. Evalúa la segunda derivada.
12. Si $D(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$, analiza la variabilidad en la demanda.
13. Una empresa registra $D(x) = \ln x + x^2$ como demanda estimada. Determina $D''(x)$.
14. La función de demanda es $D(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$. Evalúa cómo cambia la sensibilidad.
15. Si la demanda está dada por $D(x) = 5x^4 + x^2 + 10$, calcula la segunda derivada.

Comportamiento técnico de precios

16. La función de precio está dada por $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$. Obtén la tercera derivada.
17. Si $P(x) = x^5 + x^3 - x$, analiza el comportamiento técnico del precio.
18. La empresa define $P(x) = 2x^4 + 4x^2 + 9$. Calcula la tercera derivada.
19. En un mercado ajustable, el precio se modela como $P(x) = \ln(x^2 + 1) + x$. Determina el tercer orden de derivación.
20. La función de precios predictiva es $P(x) = e^{0.05x} + x^4$. Evalúa el comportamiento técnico con la tercera derivada.

Ritmo de cambio marginal en inversión acumulada

21. Una inversión está modelada por $V(t) = 2000e^{0.03t} + t^2$. Calcula $V'(t)$ y $V''(t)$.
22. Si $V(t) = 500e^{0.04t} + \ln t$, determina sus derivadas superiores.
23. El valor proyectado es $V(t) = t^3 + 4t^2 + 7t$. Evalúa la segunda y tercera derivada.
24. La empresa define inversión como $V(t) = et + t^2$. Calcula $V''(t)$ y $V'''(t)$.
25. Si $V(t) = \ln(t^2 + 1) + 3t$, determina las derivadas de segundo y tercer orden.

4.4 Derivadas Parciales Básicas.

Cuando el costo total depende del volumen de producción y del tiempo de operación, se modela como una función de dos variables $C(x, t)$. La derivada parcial respecto a x representa el incremento del costo por unidad adicional producida manteniendo el tiempo constante. La derivada parcial respecto a t indica cómo varía el costo ante aumentos en el tiempo sin modificar la cantidad producida.

Ejemplo 1

Función: $C(x, t) = 5x^2 + 3xt + 2t^2$, donde x es el número de unidades producidas y t es el tiempo en horas.

Solución:

$$C_x = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + 3xt + 2t^2) = 10x + 3t$$

$$C_t = \frac{\partial}{\partial t}(5x^2 + 3xt + 2t^2) = 3x + 4t$$

El ingreso total generado por una operación de venta depende del precio unitario p y la cantidad vendida q . La derivada parcial respecto a p muestra cómo varía el ingreso ante ajustes en el precio, manteniendo la cantidad constante. La derivada respecto a q revela la variación de ingresos por cambio en el volumen de ventas, con precio constante.

Ejemplo 2

Función: $I(p, q) = pq + 0.5p^2 + 0.2q^2$, donde p es el precio y q la cantidad vendida.

Solución:

$$I_p = \frac{\partial}{\partial p}(pq + 0.5p^2 + 0.2q^2) = q + p$$

$$I_q = \frac{\partial}{\partial q}(pq + 0.5p^2 + 0.2q^2) = p + 0.4q$$

La demanda de un producto puede depender del precio de venta p y del gasto publicitario a . La derivada parcial respecto a p mide la sensibilidad de la demanda ante variaciones de precio. La derivada respecto a a indica cómo impacta la publicidad en la cantidad demandada, manteniendo el precio constante.

Ejemplo 3

Función: $D(p, a) = 100 - 2p + 5\ln(a + 1)$, donde p es el precio y a es la inversión publicitaria en miles.

Solución:

$$D_p = \frac{\partial}{\partial p}(100 - 2p + 5\ln(a + 1)) = -2$$

$$D_a = \frac{\partial}{\partial a}(100 - 2p + 5\ln(a + 1)) = \frac{5}{a + 1}$$

En empresas que venden dos productos, la utilidad total $U(x, y)$ depende de las cantidades vendidas de cada uno. La derivada parcial respecto a x indica cómo cambia la utilidad si se vende más del producto A, manteniendo fijo el producto B. La derivada respecto a y mide el impacto por variación del producto B con producto A constante.

Ejemplo 4

Función: $U(x, y) = 40x + 35y - 2x^2 - y^2$, donde x y y son cantidades vendidas del producto A y B respectivamente.

Solución:

$$U_x = \frac{\partial}{\partial x}(40x + 35y - 2x^2 - y^2) = 40 - 4x$$

$$U_y = \frac{\partial}{\partial y}(40x + 35y - 2x^2 - y^2) = 35 - 2y$$

El valor generado por una producción se modela como una función de dos variables: tecnología t y número de trabajadores n . La derivada parcial respecto a t representa el impacto del avance tecnológico en el valor productivo, manteniendo constante la fuerza laboral. La derivada respecto a n indica cómo incide el tamaño del equipo humano sobre el rendimiento económico.

Ejemplo 5

Función: $V(t, n) = 100t^{0.5}n^{0.8}$, donde t es la tecnología utilizada y n el número de empleados.

Solución:

$$V_t = \frac{\partial}{\partial t}(100t^{0.5}n^{0.8}) = 50t^{-0.5}n^{0.8}$$

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n}(100t^{0.5}n^{0.8}) = 80t^{0.5}n^{-0.2}$$

Ejercicios de práctica

Costo total en función de producción y tiempo

1. Determina C_x y C_t de $C(x, t) = 6x^2 + 4x \cdot t + 9t^2$
2. Calcula las derivadas parciales de $C(x, t) = \ln(x + 2t + 1) + x^2 \cdot t$
3. Encuentra C_x y C_t de $C(x, t) = x^2 \cdot e^t + 2x \cdot t$
4. Evalúa C_x y C_t de $C(x, t) = 3x^3 + x^2 \cdot t + 5t$
5. Determina las derivadas parciales de $C(x, t) = \frac{x^2 + t^2}{x + t + 1}$

Ingreso según precio y cantidad vendida

6. Calcula I_p y I_q de $I(p, q) = p \cdot q + 0.3p^2 + 0.4q^2$
7. Determina las derivadas parciales de $I(p, q) = p \cdot \ln(q) + q^2$
8. Encuentra I_p y I_q de $I(p, q) = e^{p+q} + p \cdot q$
9. Evalúa I_p y I_q de $I(p, q) = p^2 \cdot q + q \cdot \ln(p)$
10. Calcula las derivadas parciales de $I(p, q) = \frac{p \cdot q}{p + q + 2}$

Demanda en función del precio y la publicidad

11. Encuentra D_p y D_a de $D(p, a) = 150 - 2.5p + 6\ln(a + 1)$
12. Calcula las derivadas parciales de $D(p, a) = 120 - 3p + a^{0.6}$
13. Evalúa D_p y D_a de $D(p, a) = \ln(p + 3a + 1)$
14. Determina D_p y D_a de $D(p, a) = \frac{20a}{p + 2}$

Encuentra las derivadas parciales de $D(p, a) = e^{-p} + \ln(a + 4)$

Utilidad como función de dos productos

16. Determina U_x y U_y de $U(x, y) = 45x + 30y - 3x^2 - y^2$
17. Calcula las derivadas parciales de $U(x, y) = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$
18. Encuentra U_x y U_y de $U(x, y) = x \cdot \ln(y) + y \cdot \ln(x)$
19. Evalúa U_x y U_y de $U(x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y + 1}$
20. Determina las derivadas parciales de $U(x, y) = e^x + e^y + x^2 \cdot y$

Valor de producción según tecnología y número de trabajadores

21. Encuentra V_t y V_n de $V(t, n) = 120t^{0.4}n^{0.9}$

22. Calcula las derivadas parciales de $V(t, n) = 250 \cdot \ln(t+1)n^{0.7}$

23. Evalúa V_t y V_n de $V(t, n) = e^t \cdot n + t^2 \cdot n$

24. Determina V_t y V_n de $V(t, n) = \ln(t \cdot n + 2) + t^2 \cdot n$

25. Encuentra las derivadas parciales de $V(t, n) = \frac{t \cdot n}{t + n + 3}$

B-5 Integración y Aplicaciones.

Ingreso total en un intervalo: Cuando se conoce la función de ingreso marginal $IM(x)$, el ingreso total generado por la venta de unidades entre $x = a$ y $x = b$ se calcula mediante la integral definida:

$$IT = \int_a^b IM(x)dx$$

Ejemplo 1

Sea $IM(x) = 80 - 4x$. Calcular el ingreso total al vender de $x = 0$ a $x = 5$.

Solución:

$$IT = \int_0^5 (80 - 4x)dx = \left[80x - 2x^2 \right]_0^5 = (400 - 50) - 0 = 350$$

Resultado:

Ingreso total: \$350

Ejemplo 2

Sea $IM(x) = 60 - 2x$. Calcular el ingreso total entre $x = 3$ y $x = 7$.

Solución:

$$IT = \int_3^7 (60 - 2x)dx = \left[60x - x^2 \right]_3^7 = (420 - 49) - (180 - 9) = 371 - 171 = 200$$

Resultado:

Ingreso total: \$200

Ejemplo 3

Sea $IM(x) = 50 - x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

$$IT = \int_2^6 (50 - x)dx = \left[50x - \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = (300 - 18) - (100 - 2) = 282 - 98 = 184$$

Resultado:

Ingreso total: \$184

Costo total en un intervalo: Cuando se conoce la función de costo marginal $CM(x)$, el costo total incurrido al producir entre $x = a$ y $x = b$ se calcula mediante:

$$CT = \int_a^b CM(x)dx$$

Ejemplo 4

Sea $CM(x) = 2x + 10$. Calcular el costo total al producir de $x = 0$ a $x = 5$.

Solución:

$$CT = \int_0^5 (2x + 10)dx = \left[x^2 + 10x \right]_0^5 = 25 + 50 = 75$$

Resultado:

Costo total: \$75

Ejemplo 5

Sea $CM(x) = 3x + 15$. Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

$$CT = \int_2^6 (3x + 15)dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 15x \right]_2^6 = (54 + 90) - (6 + 30) = 144 - 36 = 108$$

Resultado:

Costo total: \$108

Ejemplo 6

Sea $CM(x) = x + 20$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 4$.

Solución:

$$CT = \int_1^4 (x + 20)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 20x \right]_1^4 = (8 + 80) - (0.5 + 20) = 88 - 20.5 = 67.5$$

Resultado:

Costo total: \$67.5

Utilidad total en un intervalo: La utilidad total se puede calcular como la diferencia entre ingreso total y costo total en un intervalo:

$$U = \int_a^b IM(x)dx - \int_a^b CM(x)dx$$

Ejemplo 7

Sea $IM(x) = 60 - x$, $CM(x) = 2x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$.

Solución:

Ingreso total:

$$IT = \int_0^5 (60 - x)dx = \left[60x - \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 300 - 12.5 = 287.5$$

Costo total:

$$CT = \int_0^5 (2x + 10)dx = \left[x^2 + 10x \right]_0^5 = 25 + 50 = 75$$

Utilidad total:

$$U = IT - CT = 287.5 - 75 = 212.5$$

Resultado:

Utilidad total: \$212.5

Ejemplo 8

Sea $IM(x) = 80 - 3x$, $CM(x) = x + 25$. Calcular la utilidad total entre $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

Ingreso total:

$$IT = \int_2^6 (80 - 3x) dx = \left[80x - \frac{3x^2}{2} \right]_2^6 = (480 - 54) - (160 - 6) = 426 - 154 = 272$$

Costo total:

$$CT = \int_2^6 (x + 25) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 25x \right]_2^6 = (18 + 150) - (2 + 50) = 168 - 52 = 116$$

Utilidad total:

$$U = IT - CT = 272 - 116 = 156$$

Resultado:

Utilidad total: \$156

Ejemplo 9

Sea $IM(x) = 70 - 2x$, $CM(x) = 3x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 1$ y $x = 4$.

Solución:

Ingreso total:

$$IT = \int_1^4 (70 - 2x) dx = \left[70x - x^2 \right]_1^4 = (280 - 16) - (70 - 1) = 264 - 69 = 195$$

Costo total:

$$CT = \int_1^4 (3x + 10) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 10x \right]_1^4 = (24 + 40) - (1.5 + 10) = 64 - 11.5 = 52.5$$

Utilidad total:

$$U = IT - CT = 195 - 52.5 = 142.5$$

Lista de ejercicios

1. Sea $IM(x) = 100 - 5x$. Calcular el ingreso total entre $x = 0$ y $x = 6$.
2. Sea $IM(x) = 80 - 4x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 7$.
3. Sea $IM(x) = 60 - 3x$. Calcular el ingreso total entre $x = 1$ y $x = 5$.
4. Sea $IM(x) = 90 - 6x$. Calcular el ingreso total entre $x = 0$ y $x = 4$.
5. Sea $IM(x) = 70 - 2x$. Calcular el ingreso total entre $x = 3$ y $x = 8$.
6. Sea $IM(x) = 85 - x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 6$.
7. Sea $IM(x) = 95 - 4x$. Calcular el ingreso total entre $x = 1$ y $x = 5$.
8. Sea $IM(x) = 75 - 3x$. Calcular el ingreso total entre $x = 0$ y $x = 6$.
9. Sea $IM(x) = 65 - 2x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 7$.
10. Sea $IM(x) = 55 - x$. Calcular el ingreso total entre $x = 1$ y $x = 4$.
11. Sea $CM(x) = 2x + 10$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 5$.
12. Sea $CM(x) = 3x + 15$. Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 6$.
13. Sea $CM(x) = x + 20$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 4$.
14. Sea $CM(x) = 4x + 5$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 3$.
15. Sea $CM(x) = 5x + 8$. Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 5$.

16. Sea $CM(x) = 6x + 12$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 6$.
17. Sea $CM(x) = 2x + 25$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 4$.
18. Sea $CM(x) = 3x + 10$. Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 7$.
19. Sea $CM(x) = x + 30$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 5$.
20. Sea $CM(x) = 4x + 20$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 6$.
21. Sea $IM(x) = 80 - 2x$ y $CM(x) = x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$.
22. Sea $IM(x) = 90 - 3x$ y $CM(x) = 2x + 15$. Calcular la utilidad total entre $x = 1$ y $x = 6$.
23. Sea $IM(x) = 70 - x$ y $CM(x) = 3x + 20$. Calcular la utilidad total entre $x = 2$ y $x = 7$.
24. Sea $IM(x) = 85 - 4x$ y $CM(x) = x + 25$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 4$.
25. Sea $IM(x) = 95 - 5x$ y $CM(x) = 2x + 30$. Calcular la utilidad total entre $x = 1$ y $x = 5$.
26. Sea $IM(x) = 60 - 2x$ y $CM(x) = 3x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 2$ y $x = 6$.
27. Sea $IM(x) = 75 - x$ y $CM(x) = x + 15$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 3$.
28. Sea $IM(x) = 65 - 3x$ y $CM(x) = 2x + 20$. Calcular la utilidad total entre $x = 1$ y $x = 4$.
29. Sea $IM(x) = 100 - 6x$ y $CM(x) = 4x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$.
30. Sea $IM(x) = 55 - x$ y $CM(x) = 2x + 5$. Calcular la utilidad total entre $x = 2$ y $x = 6$.
31. Sea $IM(x) = 90 - 2x$. Calcular el ingreso total entre $x = 1$ y $x = 5$.
32. Sea $CM(x) = 3x + 18$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 4$.
33. Sea $IM(x) = 85 - 3x$ y $CM(x) = x + 12$. Calcular la utilidad total entre $x = 2$ y $x = 6$.
34. Sea $IM(x) = 75 - 2x$. Calcular el ingreso total entre $x = 0$ y $x = 3$.
35. Sea $CM(x) = 2x + 22$. Calcular el costo total entre $x = 1$ y $x = 5$.
36. Sea $IM(x) = 65 - x$ y $CM(x) = 3x + 8$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 4$.
37. Sea $IM(x) = 95 - 4x$. Calcular el ingreso total entre $x = 2$ y $x = 6$.
38. Sea $CM(x) = x + 35$. Calcular el costo total entre $x = 0$ y $x = 3$.
39. Sea $IM(x) = 80 - x$ y $CM(x) = 2x + 10$. Calcular la utilidad total entre $x = 1$ y $x = 5$.
40. Sea $IM(x) = 70 - 2x$ y $CM(x) = x + 5$. Calcular la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 4$.

Apéndice C1: Diapositivas Funciones Matemáticas

Diapositiva 1

Funciones Matemáticas y Ecuaciones Lineales

Herramientas fundamentales para modelar y analizar relaciones en administración



Diapositiva 2



Introducción a las Funciones Matemáticas

- El estudio de las funciones matemáticas y las ecuaciones lineales es fundamental para comprender y modelar las relaciones en diversos ámbitos de la administración.
- Permiten representar, analizar y predecir comportamientos en sistemas reales, facilitando la toma de decisiones estratégicas.
- Se exploran definiciones como función lineal, pendiente e intersección, y se aplican técnicas para determinar ecuaciones de líneas rectas.
- Estas herramientas matemáticas conectan la teoría con problemas cotidianos empresariales, mostrando su aplicabilidad en situaciones reales.
- Desarrollan habilidades analíticas y estratégicas esenciales para el desempeño profesional en administración.

Diapositiva 3

Conceptos Fundamentales de Funciones

Definición de Función

Una función es una relación entre dos conjuntos donde a cada elemento del dominio (valores de entrada) le corresponde únicamente un elemento en el rango (valores de salida). Puede representarse mediante una regla matemática, tabla o gráfica.

Dominio

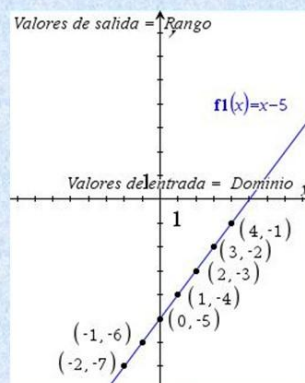
El dominio es el conjunto de todos los valores posibles que la variable independiente (entrada) puede asumir. En funciones lineales, por lo general, el dominio es todo el conjunto de los números reales.

Rango

El rango es el conjunto de valores que la función puede tomar como resultado, dependiendo de los valores del dominio. En funciones lineales, el rango también suele ser el conjunto de números reales.

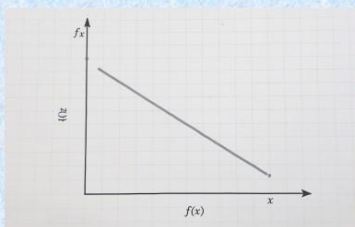
Forma Analítica

La forma analítica de una función lineal se expresa como $f(x) = m \cdot x + b$, donde m es la pendiente que indica la tasa de cambio y b es la intersección con el eje y . Ejemplo: $f(x) = 2x + 3$ representa una recta con pendiente 2 e intersección 3.



Diapositiva 4

Ejemplos de Funciones Lineales



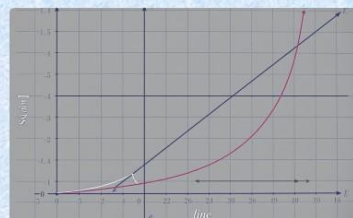
Ejemplo Analítico: $f(x) = x - 5$

La función $f(x) = x - 5$ asigna a cada valor de x un valor de salida que es 5 unidades menor. Cada valor de x tiene un único valor correspondiente de $f(x)$.

x	$f(x)$
4	105
2.5	2.5
3.5	2.5
4.5	2.5
6.5	2.5
4.5	4.5
10.5	

Ejemplo Tabular: $f(x) = 40x + 105$

Para valores específicos de x , como 0, 1, 2, 3, se calculan los valores correspondientes de $f(x)$, permitiendo construir una tabla que facilita la visualización y análisis.



Ejemplo de Función: $f(x) = 12000 \cdot 0.05^x$

Esta función representa un crecimiento exponencial, pero se incluye para comparación con funciones lineales en la representación gráfica y análisis de comportamiento.

Diapositiva 5

Dominio y Rango Restringidos

(x) Dominio Restringido

- Es el conjunto limitado de valores que la variable independiente puede tomar.
- Limitado por condiciones específicas o contexto económico.
- Ejemplo: No se pueden fabricar cantidades negativas de un producto.
- Refleja restricciones prácticas en modelos matemáticos.

(f) Rango Restringido

- Conjunto de valores posibles que puede tomar la variable dependiente.
- Limitado por las restricciones del dominio o la naturaleza de la función.
- Ejemplo: El costo mínimo de producción no puede ser menor al costo fijo.
- Importante para interpretar resultados reales y aplicables.

Diapositiva 6

Aplicaciones en Administración: Costos de Producción

- La fórmula general de costos de producción es: $C(n) = m \cdot n + b$.
- $C(n)$ representa el costo total de producción para n unidades.
- m es el costo variable por unidad, que varía según la cantidad producida.
- b es el costo fijo, que se mantiene constante independientemente de la producción.
- Ejemplo práctico: Si el costo variable por unidad es \$50 y el costo fijo es \$200, la función de costos es $C(n) = 50n + 200$.

Diapositiva 7

**Aplicaciones:
Interés Simple**

- El interés simple es el rendimiento generado por un capital inicial invertido durante un periodo determinado, calculado sin reinversión de intereses.
- La fórmula general es: $I(t) = P \cdot r \cdot t$, donde: $I(t)$ es el interés simple generado, P es el capital inicial, r es la tasa de interés anual y t es el tiempo en años.
- Ejemplo: Si una inversión tiene un capital inicial de \$10,000, una tasa de interés anual del 3% y un tiempo de 5 años, el interés simple se calcula como $I(5) = 10,000 \times 0.03 \times 5 = \$1,500$.
- Esto significa que al final de 5 años, la ganancia por intereses será de \$1,500, sin que los intereses generen nuevos intereses durante ese periodo.

Diapositiva 8

Aplicaciones: Costo Total y Margen de Utilidad**Costo Total**

- La función de costo total suma costos fijos y variables: $C(n) = m \cdot n + b$.
- $C(n)$ representa el costo total de producción para n unidades.
- m es el costo variable por unidad, b es el costo fijo.
- Ejemplo: Costo fijo de \$2,000 y costo variable de \$250 por unidad.
- Calcular costo total para 10, 50 y 100 unidades produce valores crecientes.

Margen de Utilidad

- Margen de utilidad es la diferencia entre ingreso y costo total: $U(x) = p \cdot x - c \cdot x$.
- $U(x)$ es la utilidad total para x unidades vendidas.
- p es el precio de venta por unidad, c el costo de producción por unidad.
- Ejemplo: Producto vendido a \$500 con costo de \$320 por unidad.
- Calcular utilidad para 10, 25 y 100 ventas muestra rentabilidad creciente.

Diapositiva 9



Aplicaciones: Depreciación

- La depreciación es la pérdida de valor de un bien de capital a lo largo del tiempo debido al uso, desgaste o antigüedad.
- Se representa mediante una relación lineal decreciente con la fórmula: $D(t) = V_0 - m \cdot t$, donde $D(t)$ es el valor del bien en el tiempo t , V_0 es el valor inicial y m la depreciación anual.
- Ejemplo: Un equipo de oficina se deprecia anualmente en \$1,000 según el modelo $D(t) = 15,000 - 1,000t$, donde t es el número de años transcurridos.
- Restricciones: el tiempo inicia en cero y no puede ser mayor al tiempo de vida útil del bien (ejemplo, 15 años), cuando su valor es cero.
- La función $D(t)$ es decreciente, reflejando la reducción continua del valor del activo con el paso del tiempo.

Diapositiva 10

Equilibrio de Mercado

Definición del Equilibrio Es el punto donde la cantidad demandada coincide con la cantidad ofertada, a un precio específico. • Concepto de equilibrio • Importancia en economía • Visualización del punto de equilibrio	Funciones Demanda y Oferta Las funciones lineales se expresan como $D(p) = m \cdot p + b$ y $S(p) = n \cdot p + c$, donde p es el precio, m y n las pendientes, b y c las ordenadas al origen. • Ecuaciones lineales • Significado de variables • Pendientes y ordenadas	Cálculo del Precio Se igualan demanda y oferta: $m \cdot p + b = n \cdot p + c$ y se despeja p para hallar el precio donde demanda = oferta. • Igualación de funciones • Despeje de p • Precio de equilibrio	Ejemplo Práctico Con $D(p) = 100 - 2p$ y $S(p) = 3p$, igualamos $100 - 2p = 3p$. Despejando, $100 = 5p$, entonces $p = 20$ es el precio de equilibrio. • Cálculo paso a paso • Interpretación del resultado • Aplicación práctica
--	--	--	---

Diapositiva 11

Funciones Multivariadas Básicas

Definición y Notación

Las funciones multivariadas son relaciones matemáticas que dependen de dos o más variables independientes. La notación general es $f(x, y, z, \dots)$, donde x, y, z representan las variables independientes que afectan el resultado de la función.

Ejemplo: Costos Totales

La función $C(x, y) = 200x + 150y + 5000$ representa el costo total de una empresa, donde x es la cantidad del producto A y y la del producto B. Por ejemplo, si se producen 10 unidades de A y 15 de B, el costo total es \$9,250.

Ejemplo: Producción y Demanda

La producción puede modelarse con $P(x, y) = 5x^2 - 2xy$, y la demanda con $D(x, y) = 500 - 10x - 5y$. Estas funciones muestran cómo diferentes variables simultáneamente influyen en los resultados, facilitando análisis detallados en la administración.

Diapositiva 12

Ejemplos de Funciones Multivariadas



Costo Total de Productos

Ejemplo: La función de costos totales es $C(x, y) = 200x + 150y + 5000$, donde x y y son cantidades de productos A y B. Para $x=10$ y $y=15$, $C(10,15) = \$9250$.



Producción con Dos Equipos

Ejemplo: La producción se mide con $P(x, y) = 5x^2 - 2xy$, donde x y y son horas trabajadas por los equipos A y B. Para $x=4$ y $y=3$, la producción es 95 unidades.



Ganancia de Productos Vendidos

Ejemplo: Ganancia calculada con $G(p, q) = 100p + 50q + 200$, con p y q precios de productos A y B. Para $p=3$ y $q=2$, ganancia = \$400.

Diapositiva 13

Representaciones Gráficas de Funciones

Función Lineal La función lineal $f(x) = m \cdot x + b$ se representa gráficamente mediante una línea recta que muestra la relación directa y constante entre las variables.	Función Cuadrática Representa funciones de segundo grado con forma de parábola, como $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, que pueden abrirse hacia arriba o abajo según el coeficiente a.	Función Raíz Cuadrada La función raíz cuadrada tiene forma creciente y curva, mientras que la función racional presenta comportamientos más complejos con posibles asíntotas.	Función a Trozos Una función definida a trozos está compuesta por diferentes expresiones matemáticas en intervalos específicos del dominio, cambiando su forma según el rango de x.

Diapositiva 14

Determinación de la Ecuación de la Línea Recta: Pendiente e Intersección

Fórmula Pendiente-Intersección La fórmula de la recta es $y = m \cdot x + b$, donde m representa la pendiente o la tasa de cambio y b la intersección con el eje y (valor de y cuando $x = 0$).	Pendiente Positiva Ejemplo: $y = 2x + 2$. La pendiente $m = 2$ indica que la línea sube, y la intersección $b = 2$ es el punto donde cruza el eje y.
Pendiente Negativa Ejemplo: $y = -2x + 4$. La pendiente $m = -2$ muestra una línea que desciende, con intersección $b = 4$ en el eje y.	Pendiente Fraccionaria Ejemplo: $y = 0.5x - 3$. La pendiente $m = 0.5$ indica una subida suave, mientras que la intersección $b = -3$ señala el punto inicial en y.

Diapositiva 15

Ecuación de la Recta: Punto y Pendiente



Fórmula Punto-Pendiente

La ecuación se expresa como $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde (x_1, y_1) es un punto en la recta y m es la pendiente. Esta fórmula permite encontrar la ecuación lineal con un punto y una pendiente conocidos.



Ejemplos Prácticos

Ejemplo 1: Dado el punto $(2,3)$ y pendiente $m = 4$, la ecuación es $y - 3 = 4(x - 2)$, que simplificada queda $y = 4x - 5$. Ejemplo 2: Para el punto $(-1,5)$ y pendiente $m = -2$, la ecuación es $y - 5 = -2(x + 1)$, que simplificada es $y = -2x + 3$.

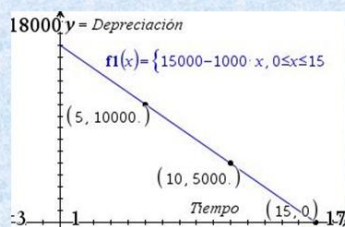


Ejercicios para Practicar

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $(3,4)$ con pendiente 5. 2. Escribe la ecuación para el punto $(1,2)$ y pendiente 3. 3. Determina la ecuación con punto $(-2,5)$ y pendiente 6. 4. Calcula la recta que pasa por $(4,3)$ con pendiente 2.5.

Diapositiva 16

Ecuación de la Recta: Dos Puntos



01 Fórmula General

La ecuación de la recta a partir de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se encuentra usando la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la fórmula $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$.

02 Ejemplo 1: Pendiente Positiva

Dados los puntos $(1, 2)$ y $(4, 8)$, la pendiente es $m = \frac{8-2}{4-1} = 2$. La ecuación de la recta es $y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$, que simplificada es $y = 2x + 0$.

03 Ejemplo 2: Pendiente Negativa

Dados los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$, la pendiente es $m = \frac{-4-6}{3-(-2)} = -2$. La ecuación es $y - 6 = -2 \cdot (x - (-2))$, que simplificada es: $y = -2x - 8$.

04 Ejemplos con Pendientes Fraccionarias y Decimales

Con puntos $(5, 3)$ y $(10, 7)$, $m = \frac{7-3}{10-5} = \frac{4}{5}$. La ecuación es $y - 3 = \frac{4}{5} \cdot (x - 5)$, la ecuación es $y = \frac{4}{5} \cdot x - 1$.

Diapositiva 17

Demanda y Oferta: Modelos Lineales

Función Lineal de Demanda

- Se expresa como $D(p) = m \cdot p + b$, donde m es la pendiente negativa.
- p representa el precio del producto.
- b es la ordenada al origen, cantidad demandada cuando $p = 0$.
- Ejemplo: $D(p) = -5p + 200$, pendiente $m = -5$, ordenada $b = 200$.

Función Lineal de Oferta

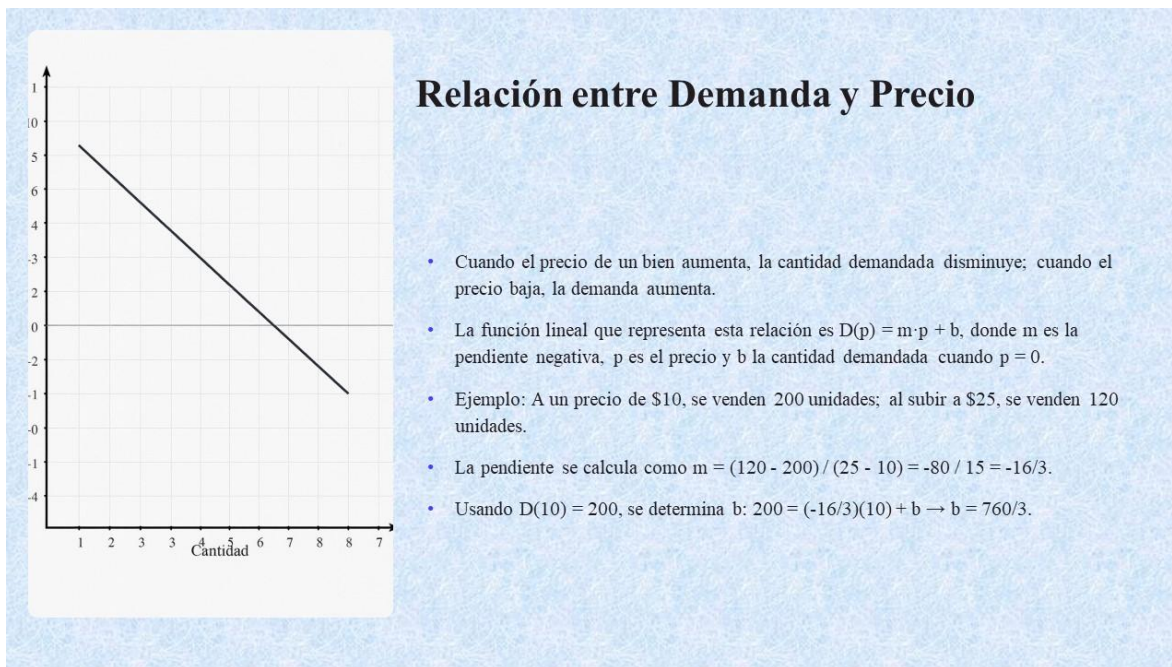
- Se expresa como $S(p) = n \cdot p + c$, donde n es la pendiente positiva.
- p representa el precio del producto.
- c es la ordenada al origen, cantidad ofertada cuando $p = 0$.
- Ejemplo: $S(p) = 4p - 10$, pendiente $n = 4$, ordenada $c = -10$.

Diapositiva 18

Equilibrio de Mercado: Ejemplo Completo

01 Identificar ecuaciones	02 Calcular ordenadas	03 Igualar funciones	04 Calcular equilibrio
La función de demanda sigue el formato $D(p) = m \cdot p + b$ y la función de oferta $S(p) = n \cdot p + c$, donde m y n son las pendientes, y b y c son las ordenadas al origen. - Modelo de demanda: $D(p) = -6p + b$ - Modelo de oferta: $S(p) = 3p + c$	Usamos los datos dados para calcular b y c. Para demanda, con $D(12) = 140$: $140 = -6(12) + b$, resultando $b = 212$. Para oferta, con $S(12) = 80$: $80 = 3(12) + c$, resultando $c = 44$. - Ecuación de demanda: $D(p) = -6p + 212$ - Ecuación de oferta: $S(p) = 3p + 44$	Para encontrar el precio de equilibrio, igualamos la demanda y la oferta: $-6p + 212 = 3p + 44$. Esto permite despejar p para obtener el precio en equilibrio. Igualación: $-6p + 212 = 3p + 44$	Despejando p, tenemos: $212 - 44 = 3p + 6p$, es decir, $168 = 9p$, por lo que $p = 18.67$. Este es el precio donde la cantidad demandada es igual a la ofrecida. Precio de equilibrio: $p = 18.67$

Diapositiva 19



Diapositiva 20

Expansión de Producción y Oferta

- La expansión de producción y oferta es el crecimiento en la cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a ofrecer como respuesta a un incremento del precio, manteniendo una relación directa.
- La fórmula general que representa esta relación es: $S(p) = m \cdot p + b$, donde $S(p)$ es la cantidad ofertada, m es la pendiente positiva, p es el precio y b es la cantidad ofertada cuando el precio es cero.
- Ejemplo: Cuando el precio es \$30, la oferta es 400 unidades, y cuando el precio sube a \$50, la oferta es 700 unidades.
- Para calcular la pendiente (m): $m = (700 - 400) / (50 - 30) = 300 / 20 = 15$.
- Para obtener la ordenada al origen (b), se usa el punto (30, 400): $400 = 15(30) + b$, despejando $b = -50$.



Diapositiva 21



Variación de la Demanda en Función del Precio

- La variación de la demanda en función del precio se analiza cuantitativamente para entender cómo cambia la cantidad demandada ante cambios en el precio del producto.
- La fórmula general que describe esta relación es $D(p) = m \cdot p + b$, donde m es la pendiente negativa que indica la disminución de la demanda al aumentar el precio, y b es la cantidad demandada cuando el precio es cero.
- Ejemplo: Cuando el precio es \$5, la cantidad vendida es 500 unidades, y cuando el precio es \$18, se venden 200 unidades.
- Para calcular la pendiente m se usa la fórmula: $m = (\text{cambio en demanda}) / (\text{cambio en precio}) = (200 - 500) / (18 - 5) = -300 / 13 \approx -23.08$.
- Luego, con el punto (5, 500), se calcula la ordenada al origen b : $500 = -300/13 \cdot 5 + b$, resultando $b = 8000/13 \approx 615.4$.

Diapositiva 22

Ajuste de Precio por Cambios en Oferta y Demanda

Nueva función de demanda

Usar $D(p) = m \cdot p + b$, donde m es la pendiente y b la ordenada al origen. Sustituir el punto conocido para calcular b .

- Función de demanda actualizada
- Ejemplo: $D(p) = -18p + 1900$

Nueva función de oferta

Usar $S(p) = n \cdot p + c$, donde n es la pendiente y c la ordenada al origen. Sustituir el punto conocido para calcular c .

- Función de oferta actualizada
- Ejemplo: $S(p) = 20p + 200$

Igualar demanda y oferta

Igualar $D(p)$ y $S(p)$ para encontrar p que satisface $D(p) = S(p)$. Resolver la ecuación lineal para p .

- Ecuación lineal igualando demanda y oferta
- Ejemplo: $-18p + 1900 = 20p + 200$

Calcular precio equilibrio

Despejar p y obtener su valor numérico. Este es el nuevo precio de equilibrio donde demanda iguala oferta.

- Precio de equilibrio ajustado
- Ejemplo: $p = 850 / 19 \approx 44.74$

Diapositiva 23



Conclusiones

- Las funciones matemáticas permiten representar relaciones clave en administración, como costos, ingresos y demanda.
- Las ecuaciones lineales facilitan la interpretación de datos económicos y la predicción de escenarios de mercado.
- Aplicaciones prácticas incluyen cálculo de costos, interés simple, depreciación y margen de utilidad.
- El análisis del equilibrio de mercado con funciones lineales ayuda a entender la interacción entre oferta y demanda.
- La representación gráfica y la determinación de ecuaciones de líneas rectas son herramientas fundamentales para modelar relaciones lineales.

Diapositiva 24

Preguntas y Respuestas

- ¿Cómo aplicar funciones lineales para modelar costos y utilidades en diferentes escenarios empresariales?
- ¿Cuáles son las diferencias principales entre dominio y rango restringidos en funciones?
- ¿Cómo se calcula y qué significa el equilibrio de mercado en las funciones de oferta y demanda?
- ¿Qué ejemplos prácticos existen para funciones multivariadas en la administración?
- ¿Cómo interpretar gráficas de funciones lineales y determinar sus ecuaciones a partir de puntos o pendientes?

Apéndice C2: Diapositivas Funciones Lineales y Aplicaciones

Diapositiva 25

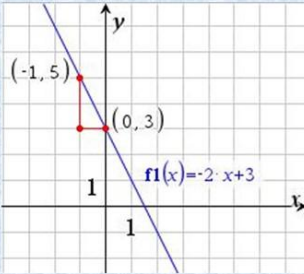
Funciones Lineales y Aplicaciones

Modelado matemático para economía y administración



Diapositiva 26

Introducción a Funciones Lineales



01	Concepto de Función Lineal	Una función lineal se expresa generalmente en la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen. Representa relaciones con cambio constante.
02	Importancia en Economía y Administración	Permiten modelar aspectos como costo total, margen de utilidad, ingresos y depreciación, facilitando el análisis financiero y la toma de decisiones estratégicas.
03	Pendiente y Ordenada al Origen	La pendiente m indica el cambio en y por unidad de x , positiva o negativa. La ordenada al origen b es el valor inicial cuando $x = 0$.
04	Aplicaciones Prácticas	Se usan para formular y resolver sistemas de ecuaciones lineales que integran costos, inversión y asignación de recursos en entornos empresariales reales.

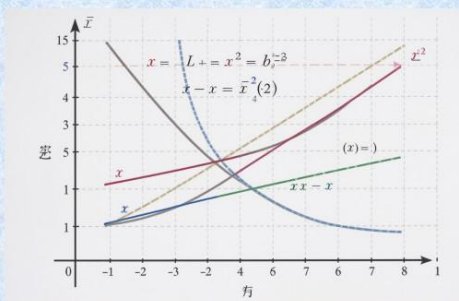
Diapositiva 27

Componentes de una Función Lineal

	Pendiente (m)	La pendiente indica el cambio en el valor de y por cada unidad de cambio en x; puede ser positiva (crecimiento) o negativa (decrecimiento). Es la razón de cambio constante en la función $y = mx + b$.
	Ordenada al Origen (b)	Es el valor por el cual la recta corta el eje y; representa el valor inicial de la función cuando $x = 0$, es decir, el punto $(0, b)$.
	Dominio	Para funciones lineales, el dominio es generalmente el conjunto de todos los números reales, lo que significa que x puede tomar cualquier valor real.
	Rango	El rango depende del contexto, pero para funciones lineales suele ser también todos los números reales, ya que y puede variar sin restricción según la pendiente y el dominio.

Diapositiva 28

Ejemplos de Funciones



Evaluación de Función

Ejemplo: Evaluar $y = 2x + 3$ para $x = 2$. Sustituir x por 2: $y = 2(2) + 3 = 7$.
Conclusión: Para $x = 2$, $y = 7$.

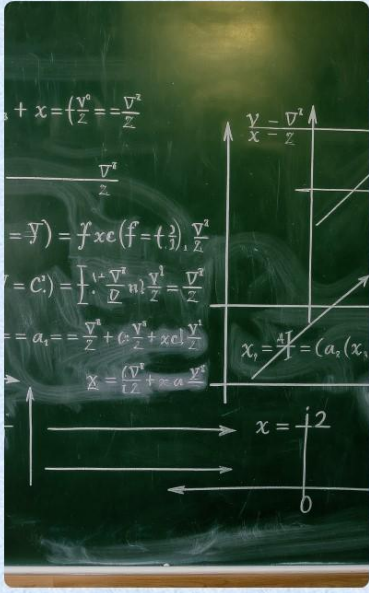
Gráfica de Función

Ejemplo: Graficar $y = -x + 5$. Intersección con eje y: $(0, 5)$. Intersección con eje x: $(5, 0)$. Graficar la recta que pasa por estos puntos.

Ecuación de la Recta

Ejemplo: Encontrar ecuación con pendiente 3 que pasa por $(1, 4)$. Usar fórmula punto-pendiente: $y - 4 = 3(x - 1)$. Despejar: $y = 3x + 1$.

Diapositiva 29



Ejercicios Prácticos de Funciones Lineales

- Calcular y en la función $y = 3x + 2$ para $x = 4$.
- Encontrar la intersección con el eje x de la función $y = -2x + 8$.
- Determinar la ecuación de la recta que pase por $(2, 5)$ con pendiente -2 .
- Evaluar la función $y = -3x + 7$ para $x = 0$ y para $x = -2$.
- Encontrar el valor de x cuando $y = 0$ en la función $y = 5x - 10$.

Diapositiva 30

Modelo de Punto de Equilibrio

 Punto de Equilibrio	Es el nivel de producción o ventas en el cual los ingresos totales igualan a los costos totales (costos fijos más costos variables), resultando en una utilidad neta de cero.
 Costos Fijos (CF)	Son los costos que se mantienen constantes sin importar el volumen de producción, como alquileres, salarios fijos y amortización de bonos.
 Costos Variables (CV)	Son los costos que varían según la cantidad producida, por ejemplo, materias primas y mano de obra directa por unidad.
 Margen de Contribución	Es la diferencia entre el precio de venta y el costo variable por unidad, representando el aporte de cada unidad para cubrir costos fijos y generar utilidad.



Diapositiva 31

Cálculo del Punto de Equilibrio: Ejemplos

Ejemplo 1: Producto con costos y ventas definidas

Una empresa con costos fijos (CF) de \$30,000, costo variable (CV) por unidad de \$10 y precio de venta de \$25. El punto de equilibrio se calcula como: $PE = CF / (P - CV) = 30000 / (25 - 10) = 2000$ unidades. Conclusión: Se deben vender 2000 unidades para cubrir los costos totales.

Ejemplo 2: Consultoría de servicios

Una consultoría con CF de \$5,000 mensuales, CV de \$50 por sesión y tarifa de \$80 por sesión. Cálculo: $PE = 5000 / (80 - 50) = 167$ sesiones. Conclusión: Se requieren aproximadamente 167 sesiones mensuales para alcanzar el equilibrio financiero.

Ejemplo 3: Producción de bebidas

Una compañía de refrescos tiene CF de \$20,000, CV de \$0.80 por litro y precio de venta de \$1.20. El punto de equilibrio es: $PE = 20000 / (1.20 - 0.80) = 50000$ litros. Conclusión: La venta de 50,000 litros es necesaria para cubrir costos y evitar pérdidas.

Ejemplo 4: Fábrica de muebles

Empresa con CF de \$50,000, CV de \$200 por unidad y precio de \$350. Cálculo: $PE = 50000 / (350 - 200) = 333.33$ unidades. Se redondea a 334 unidades para evitar pérdidas. Conclusión: Se deben vender aproximadamente 334 unidades para que los ingresos igualen a los costos.

Diapositiva 32

Ejercicios de Punto de Equilibrio

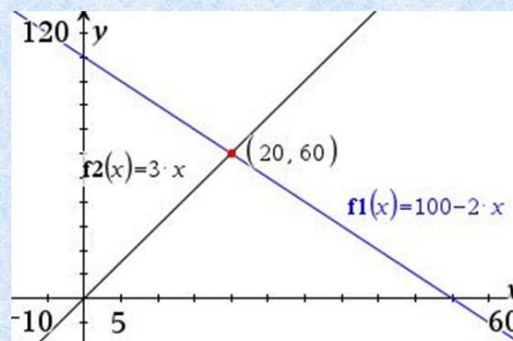
- Calcula el punto de equilibrio para una empresa con CF = \$20,000, CV = \$5 y precio de venta = \$15.
- Determina la cantidad de unidades necesarias para el equilibrio con CF = \$15,000, CV = \$20 y precio = \$50.
- Halla el punto de equilibrio para una fábrica con CF = \$45,000, CV = \$30 y precio = \$75.
- Calcula cuántas unidades se deben vender para cubrir CF = \$25,000, CV = \$15 y precio = \$35.
- Calcula el equilibrio para un servicio con CF = \$3,000, CV = \$50 y tarifa de \$100.

Diapositiva 33

Modelo Gráfico del Punto de Equilibrio

Representación gráfica del punto de equilibrio

- El eje horizontal (x) representa la cantidad de unidades o servicios vendidos o producidos.
- El eje vertical (y) representa montos monetarios tanto para costos como para ingresos.
- La línea de costos totales (CT) es una función lineal que suma costos fijos (CF) y costos variables (CV) multiplicados por la cantidad (Q): $CT = CF + CV \times Q$.
- La línea de ingresos (I) es una función lineal que multiplica el precio de venta (P) por la cantidad (Q): $I = P \times Q$.
- El punto de intersección de ambas líneas indica el nivel de producción en el que los ingresos igualan a los costos, definiendo el punto de equilibrio.



Diapositiva 34

Ejemplos Gráficos de Punto de Equilibrio



Ejemplo 1: Empresa con costos y ventas unitarias

CF = \$30,000, CV = \$10/unidad, precio = \$25; el punto de equilibrio es 2000 unidades, donde las líneas $CT = 30000 + 10Q$ e $I = 25Q$ se cruzan.



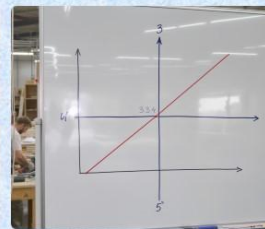
Ejemplo 2: Consultoría con sesiones

CF = \$5,000, CV = \$50/sesión, precio = \$80; el equilibrio ocurre alrededor de 167 sesiones donde $CT = 5000 + 50Q$ e $I = 80Q$ se intersectan.



Ejemplo 3: Producción de bebidas

CF = \$20,000, CV = \$0.80/litro, precio = \$1.20; el punto de equilibrio es a 50,000 litros, con las funciones $CT = 20000 + 0.80Q$ e $I = 1.20Q$ intersectándose.



Ejemplo 4: Fábrica de muebles

CF = \$50,000, CV = \$200/unidad, precio = \$350; punto de equilibrio en aproximadamente 334 unidades, donde $CT = 50000 + 200Q$ e $I = 350Q$ se cruzan.

Diapositiva 35

Ejercicios Gráficos de Punto de Equilibrio

- Dado $CF = \$25,000$, $CV = \$8$ y $\text{precio} = \$18$, determina el punto de equilibrio y representa gráficamente las funciones.
- Con $CF = \$40,000$, $CV = \$12$ y $\text{precio} = \$30$, calcula y grafica el punto de equilibrio.
- Para una empresa con $CF = \$15,000$, $CV = \$5$ y $\text{precio} = \$15$, encuentra el equilibrio y dibuja las líneas de ingresos y costos.
- Calcula el PE y realiza la gráfica para $CF = \$60,000$, $CV = \$20$ y $\text{precio} = \$50$.
- Halla el punto de equilibrio para $CF = \$35,000$, $CV = \$10$ y $\text{precio} = \$22$ y representa gráficamente las funciones.

Diapositiva 36

Modelo con Contribución al Costo Fijo y Utilidad

Margen de Contribución (MC)

Es la diferencia entre el precio de venta (P) y el costo variable (CV) por unidad. Representa el aporte de cada unidad para cubrir costos fijos y generar utilidad.

Costos Fijos (CF)

Son los gastos constantes que no varían con el nivel de producción, como alquiler, sueldos fijos, amortización y depreciación.

Utilidad Deseada (UD)

Ganancia adicional que la empresa busca obtener una vez cubiertos todos los costos fijos.

Fórmula para Unidades Requeridas

Unidades necesarias = $(CF + UD) / MC$. Esta fórmula calcula cuántas unidades se deben vender para cubrir costos fijos y alcanzar la utilidad deseada.



Diapositiva 37

Ejemplos de Punto de Equilibrio con Utilidad

01

Ejemplo 1: Cálculo básico

Con $P = \$50$, $CV = \$20$, $CF = \$40,000$ y $UD = \$10,000$, calcular el Margen de Contribución $MC = 30$. Unidades para cubrir CF : $40,000 / 30 = 1334$. Unidades para cubrir CF y UD : $(40,000 + 10,000) / 30 = 1667$.

02

Ejemplo 2: Incorporación de depreciación

Con $P = \$80$, $CV = \$40$, $CF = \$100,000$ (incluyendo depreciación) y $UD = \$20,000$, $MC = 40$. BEP sin UD : $100,000 / 40 = 2500$. Con UD : $(100,000 + 20,000) / 40 = 3000$ unidades.

03

Ejemplo 3: Empresa de servicios

Precio por consulta $\$200$, $CV \$50$, $CF \$15,000$, $UD \$5,000$. $MC = 150$. BEP sin utilidad: $15,000 / 150 = 100$ consultas. Con UD : $(15,000 + 5,000) / 150 = 134$ consultas.

04

Ejemplo 4: Inventario de tienda minorista

$P = \$30$, $CV = \$18$, $CF = \$12,000$, $UD = \$3,000$. $MC = 12$. BEP sin utilidad: $12,000 / 12 = 1000$ unidades. Con utilidad: $(12,000 + 3,000) / 12 = 1250$ unidades.

Diapositiva 38

Ejercicios de Punto de Equilibrio con Utilidad

- Con $CF = \$50,000$, $CV = \$25$ y $P = \$60$, calcula las unidades necesarias para lograr una utilidad deseada de $\$5,000$.
- Para $CF = \$70,000$, $CV = \$30$ y $P = \$75$, determina el BEP con una utilidad deseada de $\$10,000$.
- Con $CF = \$55,000$, $CV = \$20$ y $P = \$50$, halla las unidades requeridas para alcanzar una utilidad deseada de $\$7,000$.
- Dado $CF = \$80,000$, $CV = \$35$ y $P = \$90$, calcula el punto de equilibrio que incluya una utilidad deseada de $\$8,000$.
- Con $CF = \$25,000$, $CV = \$10$ y $P = \$30$, determina las unidades necesarias para una utilidad deseada de $\$2,500$.

Diapositiva 39

Decisión de Comprar o Producir

 Costos de Producción	 Costos de Compra	 Punto Crítico o Umbral	 Análisis de Sensibilidad
Incluyen costos fijos como infraestructura, depreciación, amortización y salarios, junto con costos variables que dependen de la cantidad producida, como materias primas y mano de obra directa.	Es el precio unitario pagado al proveedor externo, que puede incluir costos adicionales de transporte o logística, representando una alternativa frente a la producción interna.	Es la cantidad de unidades donde el costo total de producir internamente iguala al costo total de comprar. A partir de este punto, se determina la opción más rentable.	Evalúa cómo cambios en costos fijos, variables o precios de compra afectan el umbral crítico, facilitando decisiones informadas y ajustadas a variaciones del mercado.

Diapositiva 40

Ejemplos de Análisis Comprar o Producir

01 Ejemplo 1: Componente Electrónico Producción interna: CF = \$100,000, CV = \$12 por unidad. Compra externa: Precio unitario = \$25. Igualamos costos: $100,000 + 12Q = 25Q \rightarrow Q = 7,693$ unidades. Se recomienda producir internamente si la producción supera 7,693 unidades.	02 Ejemplo 2: Producción de Empaques CF = \$50,000, CV = \$0.50 por unidad. Compra externa: \$1.20 por unidad. Igualamos: $50,000 + 0.50Q = 1.20Q \rightarrow Q = 71,429$ unidades. Producir internamente es más rentable para volúmenes superiores a 71,429 unidades.
03 Ejemplo 3: Incorporación de Amortización CF = \$150,000 (incluye amortización), CV = \$30 por unidad. Compra externa: \$45 por unidad. Igualamos: $150,000 + 30Q = 45Q \rightarrow Q = 10,000$ unidades. A partir de 10,000 unidades, conviene producir internamente.	04 Ejemplo 4: Tienda Minorista CF = \$80,000, CV = \$20 por unidad. Compra externa: \$30 por unidad. Igualamos: $80,000 + 20Q = 30Q \rightarrow Q = 8,000$ unidades. Si se venden más de 8,000 unidades, es mejor producir internamente.

Diapositiva 41



Ejercicios de Decisión Comprar o Producir

- Una empresa tiene $CF = \$120,000$ y $CV = \$14$; si el costo de compra es $\$27$ por unidad, determina el umbral de producción.
- Con $CF = \$90,000$, $CV = \$10$ y costo de compra de $\$22$, calcula la cantidad crítica para decidir producir.
- Dado $CF = \$110,000$ y $CV = \$13$, si el costo de compra es $\$26$, encuentra el punto de equilibrio entre producir y comprar.
- Una compañía registra $CF = \$95,000$ y $CV = \$15$; si el costo unitario de compra es $\$29$, determina la cantidad a partir de la cual conviene producir internamente.
- Con $CF = \$55,000$ y $CV = \$0.60$, si el costo de compra es $\$1.25$, calcula el umbral de decisión para producción de empaques.

Diapositiva 42

Método de Eliminación: Sistemas 2×2 y 3×3

01 Definición del Método	El método de eliminación (suma y resta) consiste en sumar o restar ecuaciones para eliminar una o más variables, facilitando la solución del sistema de ecuaciones lineales.
02 Sistemas 2×2	Sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas. Aplicando suma o resta se elimina una variable para encontrar el valor de la otra, luego se sustituye para obtener la solución completa.
03 Sistemas 3×3	Sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas. Se combinan ecuaciones para eliminar variables progresivamente hasta reducir el sistema a uno o dos variables, facilitando la resolución.
04 Aplicación en Administración	Este método permite resolver problemas de asignación de costos, márgenes, planificación de recursos y análisis de equilibrio de mercado mediante sistemas lineales.

Diapositiva 43



Ejercicios Método de Eliminación

- Resuelve: $3x + 2y = 18$ y $3x - 2y = 6$.
- Resuelve: $2x - y = 20,000$ y $2x + y = 100,000$.
- Resuelve: $x + 1.5y = 210$ y $x - y = 30$.
- Resuelve: $3x + 2y = 210$ y $2x + 5y = 250$.
- Resuelve: $x + y + z = 240$, $x - 2y + z = 30$ y $x = 2z$.

Diapositiva 44

Método de Eliminación Gaussiana

$$\begin{aligned} & x+y+z=10+15 \quad x+y+z=25 \\ & 4 \cdot y - z + 8 \cdot 10 - 2 \cdot 15 = 0 \Rightarrow 4 \cdot y - z + 110 = 0 \\ & (4 \cdot y - z + 110 = 0) - 110 \Rightarrow 4 \cdot y - z = -110 \\ & x - 4 \cdot z + 15 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x - 4 \cdot z + 30 = 0 \\ & (x - 4 \cdot z + 30 = 0) - 30 \Rightarrow x - 4 \cdot z = -30 \\ & \text{mRowAdd} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 4 & -8 & -110 \\ 4 & 0 & -4 & -30 \end{bmatrix}, 1, 3 \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 4 & -8 & -110 \\ 0 & 4 & -8 & -130 \end{bmatrix} \\ & \text{mRowAdd} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 4 & -8 & -110 \\ 0 & 4 & -8 & -130 \end{bmatrix}, 2, 3 \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & 4 & -8 & -110 \\ 0 & 0 & -16 & -240 \end{bmatrix} \\ & (-16 \cdot z = -240) \cdot \frac{1}{-16} \Rightarrow z = 15 \\ & (4 \cdot y - 8 \cdot 15 = -110) + 120 \Rightarrow 4 \cdot y = 10 \\ & (4 \cdot y = 10) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \quad \therefore \left(\frac{x}{4} + 5 = 15 + 25 \right) - \frac{35}{2} \Rightarrow x = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

- | | | |
|----|---|--|
| 01 | Transformaciones Elementales | Incluyen el intercambio de renglones, multiplicar un renglón por un escalar, y sumar o restar un múltiplo de un renglón a otro para simplificar el sistema. |
| 02 | Matriz Aumentada | Es la representación matricial que agrupa los coeficientes de las variables y los términos independientes, separándolos por una línea vertical para facilitar el manejo. |
| 03 | Proceso de Eliminación Gaussiana | Se aplican operaciones elementales para convertir la matriz aumentada en una forma escalonada, desde donde se resuelve el sistema mediante sustitución hacia atrás. |
| 04 | Ejemplo Práctico | Resolver el sistema: $x + y = 5$ y $x - y = 1$. Formar matriz aumentada, realizar operaciones para obtener $y=2$, luego $x=3$. Solución: (3, 2). |

Diapositiva 45

Ejemplos Resolución por Eliminación Gaussiana

01 Ejemplo 1: Sistema 2x2

Resolver el sistema:

$$(1) x + y = 5$$

$$(2) x - y = 1$$

Procedimiento: Formar matriz aumentada, realizar operaciones para obtener $y = 2$ y luego $x = 3$.

Solución: (3, 2). Este método es eficiente para sistemas pequeños.

02 Ejemplo 2: Sistema 2x2 aplicado a costos

Contexto: x es costo base, y es margen de utilidad.

Ecuaciones:

$$(1) 2x + y = 45$$

$$(2) x - y = 5$$

Se usa matriz aumentada y operaciones para despejar $y = 35/3$ y $x = 50/3$.

Solución: Costo base \$16.67, margen \$11.67.

03 Ejemplo 3: Sistema 3x3 en administración

Variables: x = costos producción, y = costos operativos, z = margen de ganancia.

Ecuaciones:

$$(1) x + y + z = 100$$

$$(2) 2x - y + z = 80$$

$$(3) x + 2y - z = 60$$

Procedimiento: Transformar matriz aumentada a forma escalonada para obtener $z = 240/7$, $y = 200/7$, $x = 260/7$.

Solución: (260/7, 200/7, 240/7).

Diapositiva 46

Ejercicios Eliminación Gaussiana

- Resuelva el sistema 2x2: $x + y = 5$ y $x - y = 1$ usando eliminación gaussiana.
- Resolver sistema 2x2 aplicado a costos: $2x + y = 45$ y $x - y = 5$ mediante matriz aumentada y operaciones elementales.
- Sistema 3x3 con asignación de recursos: $x + y + z = 100$, $2x - y + z = 80$, $x + 2y - z = 60$, usando transformaciones elementales para solución.
- Resolver sistema 3x3 en fijación de costos: $x + y + z = 90$, $2x - y + 3z = 110$, $x - y + 2z = 70$ mediante eliminación gaussiana y sustitución.
- Practicar sustitución hacia atrás para encontrar valores de variables en sistemas escalonados.

Diapositiva 47

Aplicaciones en Modelos Económico-Administrativos



Fijación de Precios

Los sistemas lineales permiten determinar el costo base, margen de utilidad y precio de venta mediante ecuaciones que relacionan estas variables, facilitando decisiones estratégicas de precios.



Asignación de Recursos

Se usan para distribuir horas de trabajo, costos y otros recursos entre diferentes departamentos o proyectos, garantizando un balance eficiente y optimización administrativa.



Análisis Financiero

Permiten modelar costos fijos, variables, depreciación y amortización para analizar la rentabilidad y tomar decisiones informadas sobre costos y utilidades.



Solución Única y Decisiones

Con datos bien definidos, estos sistemas ofrecen soluciones únicas que permiten tomar decisiones claras y basadas en datos para la administración y economía.

Diapositiva 48

Ejemplos de Aplicaciones en Administración

01 Determinación de costo base y margen de utilidad Una empresa desea establecer su precio de venta con el sistema: $2x + y = 150$ y $y - x = 10$. Se calcula el costo base como aproximadamente \$46.67 y el margen de utilidad \$56.67.	02 Distribución de horas de trabajo Un centro administrativo reparte 150 horas entre producción, marketing y administración con el sistema: $x + y + z = 150$, $x - y + z = 50$, $2x + y - z = 100$. Resultado: 50 horas para cada departamento.	03 Determinación de depreciación y amortización En contabilidad de costos, la suma de depreciación (x) y amortización (y) es \$100,000, con $2x - y = 20,000$. Se obtiene depreciación \$40,000 y amortización \$60,000.	04 Modelo de equilibrio de costos en mercado Una empresa modela costos fijos (x), variables (y) y margen de utilidad (z) con: $x + y + z = 500,000$, $2x + y - z = 300,000$, $x + 2y + z = 600,000$. Resultados: \$200,000, \$100,000 y \$200,000 respectivamente.
--	--	--	--

Diapositiva 49

**Ejercicios
Aplicaciones
Económico-
Administrativas**

- Determina el costo base y margen de utilidad: Una empresa distribuidora de alimentos establece que el triple del costo de adquisición más el margen equivale a \$210, y que el margen es \$30 menor que el doble del costo. Sistema: $3x + y = 210$, $y = 2x - 30$.
- Proyecta un costo base y margen: Una compañía de servicios plantea que cinco veces el costo base menos el margen debe dar \$125, y que el margen representa el 40% más que el costo. Sistema: $5x - y = 125$, $y = 1.4x$.
- Calcula depreciación y amortización: En auditoría financiera, la depreciación más el doble de la amortización es \$160,000, y la amortización menos la depreciación es \$20,000. Sistema: $x + 2y = 160,000$, $y - x = 20,000$.
- Modelo de equilibrio de costos: Costos fijos, variables y utilidad suman \$450,000; el doble de los costos fijos más el costo variable menos la utilidad es \$270,000; y el costo fijo más el doble del variable más la utilidad es \$530,000. Sistema: $x + y + z = 450,000$, $2x + y - z = 270,000$, $x + 2y + z = 530,000$.
- Distribución de horas: Un centro administrativo reparte 150 horas entre producción, marketing y administración con relaciones específicas entre ellas. Sistema: $x + y + z = 150$, $x - y + z = 50$, $2x + y - z = 100$.

Apéndice C3: Diapositivas Matrices

Diapositiva 50

Álgebra Matricial

Fundamentos y aplicaciones en Administración y Economía.



Diapositiva 51

Introducción a las Matrices

	Definición y Notación	Una matriz es un arreglo rectangular de números organizado en filas y columnas, representado comúnmente con letras mayúsculas y sus elementos con subíndices, por ejemplo, $A = [a_{ij}]$.
	Dimensión de una Matriz	La dimensión se expresa como el número de filas por el número de columnas ($m \times n$). Una matriz cuadrada tiene igual número de filas y columnas, mientras que una matriz rectangular tiene diferente cantidad.
	Utilidad en Administración	Las matrices permiten modelar relaciones entre variables, optimizar recursos, organizar sistemas complejos de información y apoyar la toma de decisiones estratégicas basadas en datos cuantitativos en administración y economía.

Diapositiva 52

Tipos Especiales de Matrices

	Matrices Cuadradas y Rectangulares	Las matrices cuadradas tienen el mismo número de filas y columnas, esenciales para cálculo de determinantes e inversas. Las matrices rectangulares tienen diferente número de filas y columnas, usadas en estadística y modelos económicos.
	Matriz Identidad	Es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en los demás elementos. Representa la matriz neutra en la multiplicación matricial.
	Matriz Escalar	Una matriz escalar es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son iguales, facilitando operaciones y simplificaciones en álgebra matricial.
	Matriz Transpuesta	La matriz transpuesta se obtiene al cambiar los renglones por columnas, transformando el elemento a_{ij} en a_{ji} . Es útil para operaciones y propiedades matriciales.
	Matriz Escalonada	Una matriz escalonada tiene filas con ceros progresivos hacia la derecha. La matriz escalonada reducida por filas tiene unos como primeras entradas no nulas y ceros en las demás posiciones de la columna.

Diapositiva 53

Operaciones con Matrices

01

Suma de Matrices

La suma de matrices consiste en sumar elemento a elemento dos matrices de igual dimensión. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 11 \\ 5 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

02

Resta de Matrices

La resta de matrices es la operación elemento a elemento de dos matrices con igual dimensión. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

03

Producto por Escalar

Multiplicar una matriz por un escalar implica multiplicar cada elemento de la matriz por un número fijo. Ejemplo:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

04

Producto de Matrices

El producto de matrices se calcula multiplicando filas por columnas y sumando los productos correspondientes. Solo es posible si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 29 \\ 39 & 74 \end{bmatrix}$$

Diapositiva 54

Producto entre Vectores y Matrices

Producto Escalar entre Vectores

Multiplicar un vector fila por un vector columna del mismo tamaño da un número escalar. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [21]$$

Producto de Vector Columna por Vector Fila

El producto de un vector columna por un vector fila genera una matriz. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & -6 \\ 20 & 35 & -15 \end{bmatrix}$$

Diapositiva 55

Introducción a los Determinantes

✓ Definición de Determinante

El determinante de una matriz es un número asociado a una matriz cuadrada que proporciona información sobre sus propiedades. Se usa en la resolución de sistemas de ecuaciones y análisis de independencia lineal. Permite conocer si una matriz es invertible y si su rango es máximo.

✖₂ Determinante de Matrices 2x2

El determinante de una matriz 2x2 se obtiene como la diferencia entre los productos de sus diagonales. Para la matriz.

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = 8 \cdot -7 - 2 \cdot 5 = -66$$

📊 Método de Cofactores

El determinante se calcula descomponiendo la matriz en submatrices menores y multiplicando cada elemento por su cofactor, con signo alternante. Se desarrolla a partir de una fila o columna, calculando determinantes de submatrices menores.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 9$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 9$$

Diapositiva 56

Método de Columnas Aumentadas para Determinantes

- El método de columnas aumentadas consiste en extender la matriz repitiendo las primeras dos columnas a la derecha.
- Luego se calcula la diferencia entre la suma de los productos de las diagonales principales y la suma de los productos de las diagonales secundarias.
- Este método se aplica exclusivamente a matrices de orden 3×3 .
- Ejemplo: Dada la matriz, se extiende agregando las dos primeras columnas al final para facilitar el cálculo.
- Se resta la suma de las diagonales secundarias a la suma de las diagonales principales para obtener el determinante.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{a}) = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 1 \rightarrow \text{true}$$

$$\det(\mathbf{a}) = 10 + 14 + 0 - 105 - 0 + 4 \rightarrow \text{true}$$

$$\det(\mathbf{a}) = -77 \rightarrow \text{true}$$

Diapositiva 57

Propiedades de los Determinantes



Intercambio de Renglones

Al intercambiar dos renglones de una matriz, el determinante cambia de signo. Por ejemplo, si el determinante original es D , después del intercambio será $-D$. Este cambio es crucial para entender cómo las operaciones elementales afectan el determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \therefore \det(\mathbf{a}) = 2$$

Intercambio de renglones "Cambia de signo el determinante"

$$\text{rowSwap}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 1, 2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = -2$$



Multipliación por un Escalar en un Renglón

Multiplificar un renglón de la matriz por un escalar k modifica el determinante multiplicándolo por k . Por ejemplo, si el determinante original es D , el nuevo determinante será $k \times D$. Esta propiedad es útil para simplificar cálculos mediante operaciones elementales.

Un escalar por un renglón "Cambia a $k \det(\mathbf{A})$ "

$$\text{mRow}\left(3, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}\right) = 6$$



Suma de un Escalar por un Renglón a Otro Renglón

Sumar un múltiplo escalar de un renglón a otro no cambia el valor del determinante. Esto permite transformaciones sin alterar la propiedad fundamental del determinante, facilitando la construcción de matrices triangulares superiores.

Un escalar por un renglón sumado a otro renglón "Permanece inalterable"

$$\text{mRowAdd}\left(-1, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, 1, 2\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

Diapositiva 58



Solución de la Inversa de una Matriz

- La inversa de una matriz A es otra matriz que, al multiplicarse por A, produce la matriz identidad I: $A \times A^{-1} = I$.
- La existencia de la matriz inversa depende de que el determinante de A sea distinto de cero.
- Si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa y no es invertible.
- La matriz inversa se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales y analizar modelos en administración y economía.
- Existen métodos para calcular la inversa, como el método de eliminación y el método de Cramer, que permiten obtener la matriz inversa de forma sistemática.

Diapositiva 59

Método de Eliminación para la Inversa

Definición y Procedimiento

- La inversa de una matriz A es otra matriz que multiplicada por A da la matriz identidad I.
- El método de eliminación aplica operaciones fila para transformar A en I.
- Simultáneamente, estas operaciones se aplican a una matriz identidad adyacente.
- Al terminar, la matriz identidad adyacente se convierte en la matriz inversa de A.

$$\text{mRow} \left(\frac{1}{2}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{mRowAdd} \left(-1, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1, 2 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{mRow} \left(\frac{2}{5}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, 2 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{mRowAdd} \left(\frac{-3}{2}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, 2, 1 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Diapositiva 60

Método de Cramer para la Inversa

Definición y fundamentos

- La matriz inversa se calcula usando la fórmula: $A^{-1} = (1/\det(A)) \times \text{adj}(A)$.
- La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores de A.
- Cada cofactor se obtiene eliminando la fila y columna del elemento y calculando el determinante de la submatriz resultante.
- El signo del cofactor alterna según la posición (i,j) con la regla $(-1)^{(i+j)}$.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 9$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} & (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} & (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} & (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} & (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} & (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -19 & 11 & 5 \\ 13 & -8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -19 & 13 \\ 6 & 11 & -8 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-19}{9} & \frac{13}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \end{bmatrix}$$

Diapositiva 61

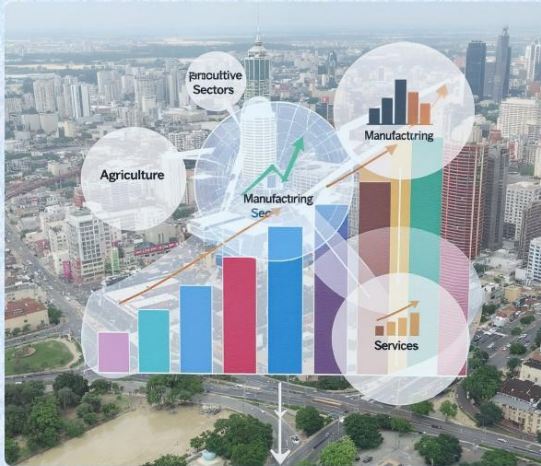


Modelos de Insumo-Producto: Introducción

- Los modelos de insumo-producto analizan la interdependencia entre sectores productivos dentro de una economía o empresa.
- Permiten evaluar cómo los insumos de un sector afectan la producción de otros sectores, facilitando la toma de decisiones estratégicas.
- Se usan para optimizar costos y recursos, mejorar la distribución de insumos y planear estratégicamente en empresas y economías.
- Son fundamentales para evaluar el impacto de políticas económicas y ajustes en la demanda o producción.
- La aplicación de la matriz inversa en estos modelos ayuda a calcular la producción total requerida y mejorar la gestión de insumos.

Diapositiva 62

Ejemplo 1: Interdependencia entre Sectores Productivos



Análisis de la interdependencia y cálculo de producción total requerida

- La economía tiene tres sectores productivos: agricultura, manufactura y servicios.
- Se utiliza una matriz de coeficientes técnicos A que representa la proporción de insumos requeridos por cada sector para producir una unidad de producto.
- Se calcula la matriz identidad I y luego $I - A$.
- Se obtiene la inversa de $I - A$ y se multiplica por la matriz de demanda D para determinar la producción total requerida en cada sector.
- Los resultados son Agricultura = 448.837, Manufactura = 565.116 y Servicios = 895.349, mostrando la producción necesaria para cubrir la demanda final y las interdependencias sectoriales.

Diapositiva 63

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1.90698 & 0.790698 & 0.697674 \\ 1.2093 & 1.72093 & 0.930233 \\ 1.62791 & 1.16279 & 2.7907 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1.90698 & 0.790698 & 0.697674 \\ 1.2093 & 1.72093 & 0.930233 \\ 1.62791 & 1.16279 & 2.7907 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448.838 \\ 565.116 \\ 895.35 \end{bmatrix}$$

Diapositiva 64

Ejemplo 2: Optimización de Recursos en una Empresa

Optimización de Recursos en una Empresa

- Una empresa tiene tres departamentos: producción, distribución y ventas.
- Se utiliza una matriz de coeficientes técnicos que representa la proporción de recursos utilizados por cada departamento.
- Se calcula la matriz identidad I y se resta la matriz de coeficientes técnicos B .
- Se obtiene la inversa de $I - B$ y se multiplica por la matriz de demanda D para hallar la cantidad óptima de recursos.
- Este método permite optimizar la gestión de insumos y costos para satisfacer la demanda final de productos.



Diapositiva 65

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.5 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & 40 & 52 \\ 20 & 40 & 50 \\ 26 & 50 & 66 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 22 & 40 & 52 \\ 20 & 40 & 50 \\ 26 & 50 & 66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14360 \\ 13900 \\ 17980 \end{bmatrix}$$

Diapositiva 66

Ejemplo 3: Evaluación del Impacto de una Política Económica



Contexto y Procedimiento

- El gobierno implementa una política de subsidios en tres sectores económicos: energía, transporte y tecnología.
- Se utiliza una matriz de coeficientes técnicos que representa la relación entre los sectores.
- Se calcula la matriz identidad I y se resta la matriz de coeficientes técnicos de la identidad.
- Se calcula la inversa de $I - A$ para evaluar el impacto de los subsidios.
- Multiplicando la inversa por la matriz de demanda ajustada se obtiene la producción total ajustada en cada sector.

Diapositiva 67

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -28. & -34. & -38. \\ -32. & -36. & -42. \\ -38. & -44. & -48. \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} -28. & -34. & -38. \\ -32. & -36. & -42. \\ -38. & -44. & -48. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 90 \\ 130 \\ 170 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13400. \\ -14700. \\ -17300. \end{bmatrix}$$

Diapositiva 68



Conclusiones

- El álgebra matricial permite representar, organizar y resolver sistemas complejos mediante matrices, facilitando el modelado de relaciones entre variables.
- Los modelos de insumo-producto muestran la interdependencia entre sectores productivos, ayudando a calcular producción total requerida y optimizar recursos.
- El cálculo de la inversa de una matriz es fundamental para evaluar impactos y tomar decisiones informadas en administración y economía.
- Estas herramientas fortalecen el pensamiento analítico y permiten la planificación estratégica basada en datos cuantitativos.
- La aplicación práctica de álgebra matricial mejora la gestión de insumos, costos y políticas económicas en contextos reales.

Diapositiva 69

Preguntas y Respuestas

- ¿Desea aclarar algún concepto sobre tipos y operaciones con matrices?
- ¿Tiene dudas sobre el cálculo y propiedades de los determinantes?
- ¿Le gustaría profundizar en los métodos para encontrar la inversa de una matriz?
- ¿Quiere entender mejor las aplicaciones prácticas de los modelos de insumo-producto?
- Este es el momento ideal para resolver cualquier inquietud sobre el tema tratado.

Apéndice C4: Diapositivas Diferenciación y Aplicaciones

Diapositiva 70

Diferenciación y Aplicaciones.

Análisis matemático aplicado a contextos económico-administrativos

$$D' = (x = \frac{x}{1} + (x) = u, x) = x, x, x)$$

$$C_0 = x^2 = 2, \frac{x}{13} + \frac{x}{13} =$$

$$C_0 = (x^2) + (\frac{2x}{13}) = (x = x + x^2) \frac{x}{13} = x, x, x)$$

$$u^2 = (x + x^2)y = (u, x)$$

$$u^2, 11, x (x = a, x + x, x^2) = x, m = \frac{x}{2} = \frac{x}{1} x)$$

$$a^2$$

Diapositiva 71

Introducción a Límites y Continuidad

 Concepto geométrico del límite	 Propiedades fundamentales de los límites	 Definición de continuidad	 Ejemplos básicos de límites	 Ejemplos básicos de continuidad
El límite de una función es el comportamiento de la recta secante que une dos puntos de una curva cuando estos se acercan. Al tender la distancia a cero, la secante se vuelve tangente y su pendiente representa la tasa de cambio instantánea.	Propiedad aditiva, multiplicativa, del cociente y del límite de una constante facilitan el cálculo y análisis de límites en funciones económicas y administrativas.	Una función es continua en un punto si está definida, el límite existe y coincide con el valor de la función en ese punto, garantizando un comportamiento sin saltos ni interrupciones.	Ejemplos prácticos para determinar límites de funciones algebraicas y constantes, aplicando propiedades para su cálculo y verificación.	Análisis de continuidad en puntos específicos, verificando existencia, valor y límite para confirmar continuidad o identificar discontinuidades.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} \right) = \text{true}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = \text{true} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4 = \text{true}$$

Diapositiva 72

Derivadas Algebraicas: Reglas Básicas

π	x^2	$\pm$	$\times$	$\div$
Derivada de una constante	Regla de la potencia	Derivada de suma y diferencia	Regla del producto	Regla del cociente
Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces la derivada es cero: $f'(x) = 0$. Esto refleja que una constante no cambia respecto a la variable.	Para una función potencia $f(x) = x^n$, la derivada se calcula como $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Esta regla es fundamental para funciones polinómicas.	La derivada de la suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de sus derivadas: $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Esto facilita el cálculo en funciones compuestas.	Para dos funciones f y g , la derivada del producto es: $(fg)' = f'g + fg'$. Esta regla es vital para derivar funciones multiplicadas entre sí.	La derivada del cociente de funciones f y g se calcula como: $(f/g)' = (f'g - fg') / g^2$, siempre que $g \neq 0$. Esta regla permite derivar funciones divididas.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot e^x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$$

Diapositiva 73

Derivadas de n-ésimo Orden y Aplicaciones

Definición de derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior o n-ésimas derivadas se obtienen aplicando el proceso de diferenciación sucesiva sobre una función para analizar aspectos más profundos del comportamiento de la variable.	Significado de la primera y segunda derivada La primera derivada representa la tasa instantánea de cambio, mientras la segunda derivada indica la concavidad, aceleración o variabilidad en la tasa de cambio.	Definición formal de la n-ésima derivada La n-ésima derivada se define como la derivada aplicada n veces consecutivas: $f^{(n)}(x) = d^n f / dx^n$, donde n es el número de veces que se deriva la función.
Ejemplos en economía La segunda derivada del ingreso muestra la aceleración en el crecimiento; la del costo total indica la curvatura que refleja sensibilidad del costo marginal; y la tercera derivada del precio modela tendencias dinámicas.	Aplicaciones prácticas Estas derivadas son esenciales para evaluar puntos críticos, optimizar niveles de producción, analizar variabilidad en demanda y anticipar cambios acelerados en ingresos y costos.	Ejemplo aplicado Una empresa con ingreso total $I(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$ calcula la segunda derivada para conocer la aceleración del crecimiento de ingresos y así tomar decisiones estratégicas.

Diapositiva 74

Derivadas Parciales Básicas

$$f(x,y) = x^2y + y^3$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot y + y^3) = 2 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{d}{dy}(x^2 \cdot y + y^3) = 3 \cdot y^2 + x^2$$

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

$$\frac{d}{dx}((x+y)^2) = 2 \cdot (x+y)$$

Concepto de derivada parcial	Las derivadas parciales permiten estudiar la tasa de cambio de una función respecto a una variable, manteniendo constantes las otras variables. Son esenciales para funciones de varias variables en economía y administración.
Definición formal	Para una función real de varias variables, la derivada parcial de primer orden respecto a x se define como el límite del cociente incremental, manteniendo y constante. Notación común: $\partial f / \partial x$.
Cálculo de derivadas parciales	Al calcular derivadas parciales, tratamos todas las variables distintas de la variable de derivación como constantes. Se aplican reglas de derivación habituales para funciones de una variable.
Ejemplos prácticos	Ejemplo 1: Para $f(x,y) = x^2y + y^3$, la derivada parcial respecto a x es $2xy$, y respecto a y es $x^2 + 3y^2$. Ejemplo 2: Para $f(x,y) = (x+y)^2$, $\partial f / \partial x = 2(x+y)$.
Aplicaciones en economía	Las derivadas parciales se usan para analizar cómo varía el ingreso, costo o utilidad respecto a variables como precio, cantidad o tiempo, manteniendo constantes las demás, facilitando la toma de decisiones.

Diapositiva 75

Aplicaciones de la Primera y Segunda Derivada

Punto crítico y derivadas

Un punto crítico es donde la primera derivada es cero o no está definida. La primera derivada describe crecimiento o decrecimiento, mientras la segunda evalúa la concavidad para identificar máximos y mínimos locales.

Identificación de extremos

Si la segunda derivada en un punto crítico es positiva, el punto es un mínimo local. Si es negativa, el punto es un máximo local. Esto ayuda a optimizar funciones económicas como ingresos y costos.

Ejemplo: Mínimo local

Para la función $f(x) = x^2$, la primera derivada $f'(x) = 2x$ se iguala a cero en $x=0$. La segunda derivada $f''(x) = 2$ es positiva, confirmando que $x=0$ es un mínimo local con valor mínimo $f(0)=0$.

Ejemplo: Máximo local

Para $f(x) = -x^2 + 4$, la primera derivada $f'(x) = -2x$ se anula en $x=0$. La segunda derivada $f''(x) = -2$ es negativa, indicando un máximo local con valor máximo $f(0) = 4$.

Aplicación en ingreso y costo

El ingreso total se maximiza al hallar el punto crítico de su función y verificarlo con la segunda derivada. Similarmente, el costo total se minimiza aplicando esta técnica para optimizar producción y gastos.

Utilidad y optimización

La función utilidad combina ingresos y costos. La primera derivada señala puntos de equilibrio en crecimiento, mientras la segunda confirma máximos locales para maximizar rentabilidad y definir volúmenes óptimos de producción.

Diapositiva 76

Aplicaciones a Ingresos, Costos y Utilidades

01	02	03	04	05
Ingreso Total	Costo Total	Utilidad	Ejemplos Ilustrativos	Optimización de Decisiones
El ingreso total (IT) es el valor monetario por la venta de unidades, definido como precio unitario por cantidad vendida. Se usa derivadas para calcular y maximizar su valor local.	El costo total (CT) incluye costos fijos y variables, expresado como $CT(x) = CF + CV(x)$. Derivadas ayudan a encontrar niveles que minimizan el costo y optimizan recursos.	La utilidad (U) es la diferencia entre ingreso y costo total. Derivadas permiten hallar el nivel óptimo que maximiza la utilidad, identificando máximos locales.	Ejemplo: $IT(x) = x(100 - x)$ tiene un máximo local donde la primera derivada es cero y la segunda negativa. $CT(x) = 50 + 10x + x^2$ se minimiza con derivadas.	Derivadas en ingresos, costos y utilidades optimizan decisiones, determinando producción que maximiza ganancias o minimiza costos, mejorando rentabilidad.

Diapositiva 77

Análisis Marginal: Conceptos y Ejemplos

 Ingreso Marginal	 Costo Marginal	 Utilidad Marginal	 Ejemplo Ingreso Marginal	 Ejemplo Costo Marginal y Utilidad
El ingreso marginal representa el cambio instantáneo en el ingreso total cuando se vende una unidad adicional. Se calcula como la derivada de la función de ingreso total. Ejemplo: Dado $I(x)$, se halla $IM(x)$ derivando y evaluando en un punto específico.	El costo marginal indica el cambio instantáneo en el costo total al producir una unidad más. Se obtiene derivando la función de costo total. Ejemplo: Para $C(x)$, se calcula la derivada y se evalúa para determinar el costo de la unidad adicional.	La utilidad marginal es el cambio instantáneo en la utilidad total al producir o vender una unidad más. Se define como la derivada de la función utilidad. Ejemplo: Dada $U(x)$, se deriva para obtener $UM(x)$ y se evalúa para interpretar el cambio en la ganancia.	Ejemplo práctico: Una empresa con precio dependiente de la cantidad vendida calcula ingreso marginal para la unidad 10. Se deriva el ingreso total y se evalúa para obtener \$30 como ingreso marginal al vender esa unidad.	Ejemplo: Planta productiva evalúa costo marginal en la séptima unidad, hallando \$24. Otra empresa calcula utilidad marginal para la unidad 6, con un incremento en utilidad de \$15, usando derivación y evaluación en puntos específicos.

Diapositiva 78

Ejemplo Aplicado de Ingreso Marginal

01	02	03	04
Definir ingreso total	Calcular ingreso marginal	Evaluar en un punto	Interpretar resultado
El ingreso total es el precio por la cantidad vendida, expresado como $IT(x) = P(x) \cdot x$, donde $P(x)$ depende de x. - Función de ingreso total $IT(x)$ - Precio como función $P(x)$	Se deriva la función de ingreso total respecto a x para obtener el ingreso marginal, que indica el cambio en ingresos por unidad adicional. - Derivada $IM(x) = \frac{d}{dx} IT(x)$ - Expresión del ingreso marginal	Se evalúa la derivada en un valor específico de x para conocer el ingreso marginal en esa unidad, por ejemplo, $IM(10)$. - Valor numérico de $IM(x)$ - Interpretación del resultado	El ingreso marginal muestra cuánto cambia el ingreso total al vender una unidad más, ayudando a decisiones de producción y ventas. - Análisis económico - Implicaciones para la empresa

Diapositiva 79

Ejemplo Aplicado de Costo Marginal

Definición de costo marginal El costo marginal indica el cambio instantáneo en el costo total por producir una unidad adicional. Se representa como la derivada de la función de costo total. - Función de costo total - Derivada para obtener costo marginal - Interpretación económica	Función de costo ejemplo Consideremos una planta productiva con costos totales dados por $CT(x) = 10x^2 + 5x + 100$, donde x es el número de unidades producidas. - Función de costo total - Variables definidas - Contexto de producción escalonada	Cálculo del costo marginal Derivamos la función de costo total: $CT'(x) = 20x + 5$, que indica cómo varía el costo al producir una unidad más. - Derivada de la función de costo - Expresión del costo marginal - Fórmula para evaluación	Evaluación en $x = 7$ Evaluamos el costo marginal en $x = 7$ unidades: $CT'(7) = 20(7) + 5 = 145$. Indica que el costo de producir la séptima unidad es \$145. - Sustitución $x=7$ - Cálculo numérico - Interpretación aplicada
---	---	---	--

Diapositiva 80



Diapositiva 81



Conclusiones

- La diferenciación permite identificar la tasa de cambio instantánea de variables clave como ingresos, costos, utilidades y demanda.
- El análisis de máximos y mínimos mediante la primera y segunda derivada es esencial para optimizar recursos, precios y producción en las empresas.
- Las derivadas parciales permiten estudiar funciones de varias variables, crucial para entender relaciones entre precios, cantidades y costos.
- El análisis marginal, basado en derivadas, ayuda a evaluar incrementos pequeños en producción y ventas para decisiones óptimas.
- La aplicación de estas técnicas fortalece la capacidad analítica y estratégica en la administración económica.

Diapositiva 82

Preguntas y Respuestas

- ¿Cómo interpretar la segunda derivada en el análisis de ingresos y costos?
- ¿Cuáles son las diferencias clave entre derivadas parciales y totales en funciones económicas?
- ¿Cómo se aplican las derivadas para optimizar la producción y maximizar utilidades?
- ¿Qué ejemplos prácticos pueden ilustrar el uso del análisis marginal en decisiones empresariales?
- ¿Cómo identificar puntos críticos y qué significan en la toma de decisiones?

Apéndice C5: Diapositivas Integración y Aplicaciones

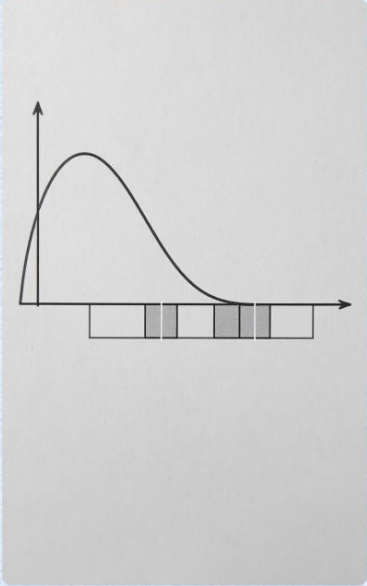
Diapositiva 83

Integración y Aplicaciones.

Herramienta fundamental para análisis de acumulaciones, áreas y aplicaciones administrativas



Diapositiva 84



Concepto de Antiderivada y Área bajo la Curva

El cálculo integral permite determinar el área bajo la gráfica de una función continua en un intervalo $[a, b]$. Una forma de aproximar esta área es mediante sumas de Riemann, que consisten en dividir el intervalo en n subintervalos de igual longitud, y construir rectángulos cuya altura depende del valor de la función en puntos específicos de cada subintervalo.

La antiderivada es una función original cuya derivada es la función dada. Su concepto es fundamental para la integración indefinida, ya que permite reconstruir funciones a partir de sus derivadas y calcular valores acumulados en procesos dinámicos. Así, la integración y el concepto de antiderivada están estrechamente vinculados para resolver problemas de acumulación y área bajo curvas.

Diapositiva 85

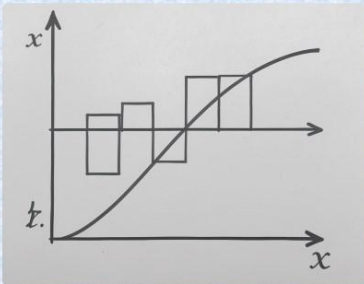
Suma de Riemann por la Izquierda y por la Derecha

$$S_{\text{avg}} = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) \cdot \Delta x) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(a+i \cdot h) \cdot h),$$

$3 \rightarrow f(x) = \text{Hecho}, 0 \rightarrow a = 0, 2 \rightarrow b = 2, 2 \rightarrow n = 2$

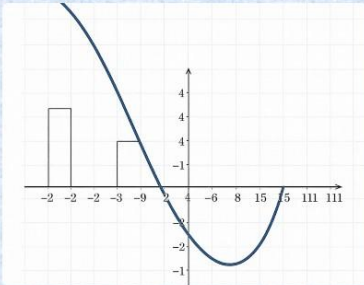
$$\frac{a+b}{n} \rightarrow h = 1, \text{ then } S_{\text{avg}} = \sum_{i=0}^{2-1} (f(a+i \cdot h) \cdot h) = f(a) \cdot h = 3 \cdot 1 = 3$$

$$S_{\text{der}} = \sum_{i=1}^n (f(a+i \cdot h) \cdot h) = f(b) \cdot h = 3 \cdot 1 = 3$$



Suma de Riemann por la Izquierda

En la suma por la izquierda, la altura de cada rectángulo se toma en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Esto implica que para un intervalo dividido en n partes, la altura del rectángulo i es el valor de la función en el punto izquierdo x_{i-1} del subintervalo.

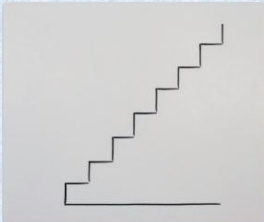
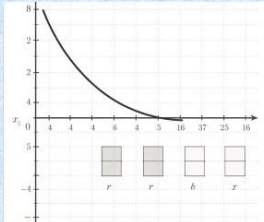


Suma de Riemann por la Derecha

En la suma por la derecha, la altura de cada rectángulo se toma en el extremo derecho de cada subintervalo. Para un intervalo dividido en n partes, la altura del rectángulo i es el valor de la función en el punto derecho x_i del subintervalo, aproximando el área bajo la curva con esta configuración.

Diapositiva 86

Ejemplos de Funciones y Sumas de Riemann

Función constante	Función lineal creciente	Función cuadrática creciente	Función cúbica decreciente
			
Ejemplo con $f(x) = 3$ en $[0, 2]$, $n = 21$, mostrando suma de Riemann por la izquierda y derecha con altura constante.	Ejemplo con $f(x) = x$ en $[0, 2]$, $n = 21$, ilustrando sumas de Riemann que varían linealmente según el valor de x en cada subintervalo.	Ejemplo con $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$, $n = 31$, mostrando sumas de Riemann con alturas cuadráticamente crecientes para aproximar el área.	Ejemplo con $f(x) = -x^3$ en $[0, 3]$, $n = 31$, ilustrando sumas de Riemann por izquierda y derecha para una función cúbica decreciente.

Diapositiva 87

Reglas Fundamentales de Integración

Σ Linealidad La integral de una suma de funciones es la suma de sus integrales. Es decir $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	Π Integración de Constantes La integral de una constante k es k por la variable de integración, por ejemplo, $\int k dx = k \cdot x + C$	(x) Funciones Algebraicas Para funciones de la forma x^n, la integral es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
x^2 Funciones Exponenciales La integral de la función exponencial e^x es $\int e^x dx = e^x + C$	$\sqrt{}$ Funciones Logarítmicas La integral de $\ln(x)$ es $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0$	$\ominus$ Condiciones de Aplicación Estas reglas se aplican a funciones continuas en el intervalo de integración y son la base para métodos más avanzados de integración.

Diapositiva 88

Ejemplos de Aplicación de Reglas de Integración

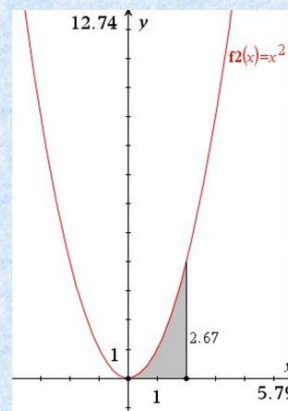
Integración de una constante Ejemplo 1: Calcular $\int 7 dx$. Aplicamos la regla directa para constantes: $\int k dx = kx + C$. Resultado: $7x + C$.	Suma de funciones Ejemplo 2: Calcular $\int (4x + 3) dx$. Aplicamos la propiedad de linealidad: $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$. Resultado: $2x^2 + 3x + C$.	Constante por función Ejemplo 3: Calcular $\int 5x dx$. Aplicamos la regla: $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$. Resultado: $(5/2)x^2 + C$.	Integración de función logarítmica Ejemplo 4: Calcular $\int (1/x) dx$. Aplicamos la fórmula directa: $\int (1/x) dx = \ln x + C$. Resultado: $\ln x + C$.	Funciones exponenciales Ejemplo 5: Calcular $\int e^x dx$. La función es su propia antiderivada. Resultado: $e^x + C$.
--	--	---	--	---

Diapositiva 89

Integral Definida y Su Interpretación Geométrica

La integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se representa como $\int_a^b f(x) dx$. Esta expresión representa el área neta bajo la curva de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Se calcula utilizando una antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, aplicando la fórmula: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, donde $F'(x) = f(x)$. Esta fórmula permite obtener el valor exacto de la acumulación o área bajo la curva en el intervalo especificado, interpretándose geoméricamente como el área neta entre la función y el eje x desde el punto a hasta el punto b . Es fundamental en el análisis de cantidades acumuladas y tiene aplicaciones en diversas áreas como la economía y la administración.

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} 0^3 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} 0^3 = \frac{8}{3} \therefore \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \rightarrow \text{true}$$



Diapositiva 90

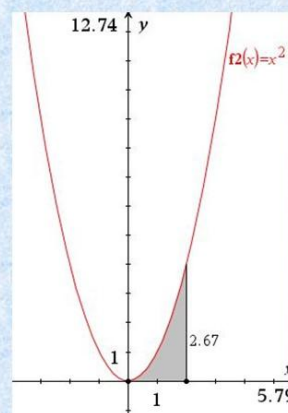
Ejemplos de Cálculo de Integrales Definidas

Ejemplo 1:
Función Lineal Calcular la integral definida de $f(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 3]$. Antiderivada: $F(x) = x^2$. Aplicando la fórmula: $F(3) - F(1) = 9 - 1 = 8$.

Ejemplo 2:
Función Cuadrática Calcular la integral definida de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Antiderivada: $F(x) = x^3/3$. Aplicando la fórmula: $F(2) - F(0) = 8/3 - 0 = 8/3$.

Ejemplo 3:
Función Constante Calcular la integral definida de $f(x) = 5$ en el intervalo $[0, 4]$. Antiderivada: $F(x) = 5x$. Aplicando la fórmula: $F(4) - F(0) = 20 - 0 = 20$.

Ejemplo 4:
Función Lineal Negativa Calcular la integral definida de $f(x) = -3x$ en el intervalo $[0, 2]$. Antiderivada: $F(x) = -3x^2/2$. Aplicando la fórmula: $F(2) - F(0) = -6 - 0 = -6$.



Diapositiva 91

Aplicaciones en Áreas Administrativas: Ingreso Total Acumulado

**Definición del ingreso total acumulado**

El ingreso total acumulado se obtiene integrando la función de ingreso marginal $IM(x)$ en un intervalo de producción, representando el valor total generado por la venta de unidades desde $x = a$ hasta $x = b$.

**Ejemplo 1: $IM(x) = 100 - 5x$**

Calcular el ingreso total al vender de $x = 0$ a $x = 10$. Resultado: Ingreso total acumulado es \$750, obtenido integrando la función marginal en ese intervalo.

**Ejemplo 2: $IM(x) = 60 - 3x$**

Calcular el ingreso total entre $x = 5$ y $x = 12$. Resultado: Ingreso total acumulado es \$241.5, obtenido al integrar la función de ingreso marginal en el intervalo dado.

Diapositiva 92

Aplicaciones en Áreas Administrativas: Costo Total Acumulado

**Definición de costo total acumulado**

El costo total acumulado se obtiene integrando la función de costo marginal $CM(x)$ en un intervalo de producción. Representa el gasto total incurrido al producir desde $x = a$ hasta $x = b$.

**Ejemplo 1: $CM(x) = 4x + 20$**

Calcular el costo total al producir de $x = 0$ a $x = 6$. La integral calcula el área bajo la curva del costo marginal, resultando en un costo total acumulado de \$192.

**Ejemplo 2: $CM(x) = 3x + 15$**

Calcular el costo total entre $x = 2$ y $x = 7$. Integrando $CM(x)$, se determina un costo total acumulado de \$142.5 para ese intervalo de producción.

Diapositiva 93

Aplicaciones en Áreas Administrativas: Utilidad Total Acumulada

**Definición y cálculo**

La utilidad total acumulada se obtiene integrando la función de utilidad marginal $UM(x)$, o calculando la diferencia entre ingreso total y costo total en un intervalo dado, para medir la rentabilidad acumulada.

**Ejemplo 1: Utilidad total acumulada simple**

Sea $UM(x) = 30 - x$. La utilidad total entre $x = 0$ y $x = 6$ se calcula integrando $UM(x)$, resultando una utilidad total acumulada de \$162.

**Ejemplo 2: Utilidad total acumulada con ingreso y costo**

Con $IM(x) = 50 - x$ y $CM(x) = 2x + 10$, la utilidad total entre $x = 0$ y $x = 5$ se calcula restando el costo total al ingreso total, obteniendo una utilidad acumulada de \$162.5.

Diapositiva 94

Ejemplo Integrado: Cálculo de Ingreso, Costo y Utilidad

Sea $IM(x) = 50 - x$ y $CM(x) = 2x + 10$ para el intervalo de producción de $x = 0$ a $x = 5$.

1. Ingreso Total Acumulado:

Integrar $IM(x)$ para obtener ingreso total.

$$\int_0^5 (50 - x) dx = \left[50x - \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = (50 \times 5) - \frac{5^2}{2} = 250 - 12.5 = 237.5$$

2. Costo Total Acumulado:

Integrar $CM(x)$ para obtener costo total.

$$\int_0^5 (2x + 10) dx = \left[x^2 + 10x \right]_0^5 = 25 + 50 = 75$$

3. Utilidad Total Acumulada:

Diferencia entre ingreso total y costo total.

$$237.5 - 75 = 162.5$$

Resultado: La utilidad total acumulada en el intervalo de producción de 0 a 5 unidades es de \$162.5.

Este ejemplo muestra cómo el cálculo integral facilita el análisis económico integral para la toma de decisiones en administración.



Diapositiva 95

**Conclusiones y
Aplicaciones
Prácticas**

El cálculo integral permite reconstruir funciones originales a partir de sus derivadas y determinar valores acumulados en procesos dinámicos, fundamentales en análisis económico y administrativo.

Mediante antiderivadas y sumas de Riemann, se calcula el área bajo la curva, representando cantidades acumuladas como ingresos, costos y utilidades.

Las reglas de integración directa facilitan el cálculo de integrales comunes, y la integral definida da el valor exacto de acumulaciones en intervalos.

Estas herramientas se aplican para calcular ingreso total, costo total y utilidad total, apoyando la toma de decisiones estratégicas.

Dominar estos conceptos mejora la capacidad para aplicar cálculo integral en contextos económicos y administrativos, optimizando la gestión empresarial.

Planeación e Instrumentación didáctica del curso



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LOS MOCHIS
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
DEPARTAMENTO CIENCIAS BÁSICAS

Nombre del docente:(2) LUIS FELIPE FLORES LOPEZ Carrera(3) LA Grupo(4) L11

Nombre de la asignatura (5) MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION Clave de la asignatura(6) LAD – 1027

Créditos (Horas teoría – Horas práctica:(7) 3-2-5 Número de unidades(8) 5 Periodo Escolar(9) AGO-DIC-23.

I. Competencias Específicas de la Asignatura (10)

Analiza y aplica los criterios matemáticos como funciones lineales, sistemas de ecuaciones, matrices, cálculo diferencial e integral para mejorar el análisis de las técnicas cuantitativas aplicadas a modelos económicos administrativos.

II. Análisis por unidades

No. de Unidad (11) 1 Nombre de la unidad (12) Funciones matemáticas y ecuaciones lineales.

Competencias Genéricas a desarrollar (13)

Conocimientos básicos de la carrera.
Habilidades básicas del manejo de la computación. Habilidades de gestión de información. Solución de problemas. Toma de decisiones. Trabajo en equipo. Habilidades interpersonales. Compromiso ético. Capacidad de aplicar los conocimientos en las prácticas. Habilidades de investigación. Habilidad para trabajar en forma autónoma. Búsqueda del logro.

Competencias Específicas (14)

Aplica las funciones matemáticas en la solución de problemas para representarla gráficamente.

Total de Horas (15)

15



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

Contenidos de la unidad (16)	Actividades de Aprendizaje de la unidad (17)	Evidencia/producto de la unidad (18)	Herramientas de la unidad (19)	Criterios de Evaluación de la unidad (20)
1.1 Definición 1.2 Dominio y rango restringidos 1.3 Funciones multivariadas básicas 1.4 Representaciones gráficas de funciones matemáticas 1.5 Formula pendiente intersección 1.6 Determinación de la ecuación de una línea recta 1.6.1 Pendiente e intersección 1.6.2 Pendiente y un punto 1.6.3 Dos puntos 1.6.4 Aplicaciones a modelos de oferta y demanda	Investigar el significado de funciones, dominio y rango y elaborar un mapa conceptual. Realizar ejercicios en equipos en los cuales se apliquen los conceptos de dominio y rango restringidos. Realizar ejercicios en equipos en los cuales efectué una combinación de funciones. Resolver y graficar problemas donde aplique la fórmula de la pendiente/intersección. Determinar y analizar la ecuación de la línea recta aplicada a la oferta, demanda, depreciación y pronósticos.	Reportes escritos. Solución de ejercicios. Actividades de investigación. Análisis y discusión grupal. Resolución de problemas con apoyo de software. Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.	Bibliografía. Notas del profesor. Software. Emuladores. Calculadoras Científicas.	Investigación 10%. Trabajo de equipo 10% Solución de ejercicios 15% Solución de Problemas 15% Examen 50%

	Planeación e Instrumentación didáctica del curso	Código: F-SIG-P-RS-03-01
		Revisión: 1 11/NOVIEMBRE/2019

Seguimiento de la unidad (21)

PERIODO			EVALUACION			OBSERVACIONES
	P	R	Sumativa		% Competencia alcanzado	Firma del docente:
INICIO	25/08/25		P	R	20%	
FIN	12/09/25		19/09/25			

No. de Unidad (11) 2 Nombre de la unidad (12) Funciones lineales, aplicaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

Competencias Genéricas a desarrollar (13)

Solución de problemas. Toma de decisiones.
Trabajo en equipo. Habilidades interpersonales

Competencias Específicas (14)

Soluciona y aplica los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones en problemas de punto de equilibrio y equilibrio en el mercado.

Total de Horas (15)

15



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

Contenidos de la unidad (16)	Actividades de Aprendizaje de la unidad (17)	Evidencia/producto de la unidad (18)	Herramientas de la unidad (19)	Criterios de Evaluación de la unidad (20)
2.1 Funciones lineales 2.2 Modelos de equilibrio 2.2.1 Modelo de punto de equilibrio aplicado a la producción 2.2.2 Modelo gráfico de punto de equilibrio. 2.2.3 Modelo utilizando la contribución al costo fijo y a la utilidad. 2.2.4 Modelos de equilibrio para tomar decisiones de comprar o producir. 2.3 Sistemas de ecuaciones lineales 2.3.1. Métodos de eliminación. suma y resta Sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3 . 2.3.2 Método de eliminación Gaussiana de sistemas 2×2 , 3×3 solución única. 2.3.3 Aplicaciones a modelos. económico- administrativos	Consultar previo a clase los conceptos de funciones lineales, ingreso, costo, utilidad, depreciación y punto de equilibrio, elaborar un reporte. Formular funciones en donde estén implícitos los ingresos, costos, la utilidad y la depreciación. Crear y resolver modelos de punto de equilibrio, partiendo de la actividad anterior. Graficar el punto de equilibrio. Resolver sistemas de ecuaciones, utilizando los métodos de suma y resta, eliminación y Gauss Jordán, aplicar el modelo en casos prácticos del área	Reportes escritos. Solución de ejercicios. Actividades de investigación. Análisis y discusión grupal. Resolución de problemas con apoyo de software. Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.	Bibliografía. Notas del profesor. Software. Emuladores. Calculadoras Científicas.	Investigación 10%. Trabajo de equipo 10% Solución de ejercicios 15% Solución de Problemas 15% Examen 50%

	Planeación e Instrumentación didáctica del curso	Código: F-SIG-P-RS-03-01
		Revisión: 1 11/NOVIEMBRE/2019

Seguimiento de la unidad (21)

PERIODO			EVALUACION			OBSERVACIONES
	P	R	Sumativa		% Competencia alcanzado	Firma del docente:
INICIO	15/09/25		P	R	40%	
FIN	03/10/25		10/10/25			

No. de Unidad (11) 3 Nombre de la unidad (12) Algebra matricial

Competencias Genéricas a desarrollar (13)

Solución de problemas. Toma de decisiones.
Trabajo en equipo. Habilidades interpersonales

Competencias Específicas (14)

Aplica la notación de una matriz para la representación matricial de datos, sus operaciones matemáticas y soluciona problemas de sistemas de ecuaciones aplicando para resolver casos del área económica administrativa.

Total de Horas (15)

15



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

Contenidos de la unidad (16)	Actividades de Aprendizaje de la unidad (17)	Evidencia/producto de la unidad (18)	Herramientas de la unidad (19)	Criterios de Evaluación de la unidad (20)
3.1 Introducción a las matrices 3.2 Tipos especiales de matrices 3.3 Operaciones con matrices 3.4 Introducción a los determinantes. Solución de un determinante de 2×2 , 3×3 por método de columnas aumentadas y cofactores 3.5 Propiedades de los determinantes 3.6 Solución de la inversa de una matriz 3.7 Aplicaciones a modelos de insumo producto	Investigar las matrices, identificando los diversos tipos especiales. Realizar ejercicios en equipos en los cuales se efectuó operaciones matriciales. Resolver ejercicios con el método de columnas aumentadas y cofactores para sistemas 2×2 y 3×3 , así como la inversa de una matriz mediante el método de eliminación y cofactores. Resolver sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3 utilizando el método de la inversa y Cramer. Investigar datos de INEGI, del Banco de México y de otras instituciones, en donde identifique la aplicación de modelos matriciales en el manejo de sus datos. Aplicar matrices para resolver casos prácticos del área económica administrativa	Reportes escritos. Solución de ejercicios. Actividades de investigación. Análisis y discusión grupal. Resolución de problemas con apoyo de software. Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.	Bibliografía. Notas del profesor. Software. Emuladores. Calculadoras Científicas.	Investigación 10%. Trabajo de equipo 10% Solución de ejercicios 15% Solución de Problemas 15% Examen 50%

	Planeación e Instrumentación didáctica del curso	Código: F-SIG-P-RS-03-01
		Revisión: 1 11/NOVIEMBRE/2019

Seguimiento de la unidad (21)

PERIODO			EVALUACION			OBSERVACIONES
	P	R	Sumativa		% Competencia alcanzado	Firma del docente:
INICIO	06/10/25		P	R	60%	
FIN	24/10/25		31/10/25			

No. de Unidad (11) 4 Nombre de la unidad (12) Diferenciación y Aplicaciones

Competencias Genéricas a desarrollar (13)

Solución de problemas. Toma de decisiones.
Trabajo en equipo. Habilidades interpersonales

Competencias Específicas (14)

Comprende los conceptos de límite y continuidad para la solución de problemas relativos a tasa promedio de cambio e incrementos y aplica las reglas de diferenciación de máximos y mínimos como la metodología en la aplicación a ingresos, costos y utilidad.

Total de Horas (15)

20



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

Contenidos de la unidad (16)	Actividades de Aprendizaje de la unidad (17)	Evidencia/producto de la unidad (18)	Herramientas de la unidad (19)	Criterios de Evaluación de la unidad (20)
4.1 Límites y continuidad. 4.2 Derivadas algebraicas con fórmulas. 4.3 Derivada de n-ésimo orden. 4.4 Derivadas parciales básica. 4.5 Aplicaciones de la primera y segunda derivada (a máximos y mínimos). 4.6 Aplicaciones a ingresos costos y utilidades. 4.7 Análisis marginal.	Aplicar propiedades de los límites y continuidad para resolver problemas. Aplicar propiedades de tasa de cambio para resolver problemas. Aplicar las fórmulas básicas de diferenciación para resolver ejercicios. Aplicar las derivadas algebraicas para la obtención de las derivadas parciales algebraicas. Identificar y determinar los puntos críticos de una ecuación. Utilizar la aproximación marginal a la maximización de utilidades a través del criterio de la primera y segunda derivada en casos del área	Reportes escritos. Solución de ejercicios. Actividades de investigación. Análisis y discusión grupal. Resolución de problemas con apoyo de software. Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.	Bibliografía. Notas del profesor. Software. Emuladores. Calculadoras Científicas.	Investigación 10%. Trabajo de equipo 10% Solución de ejercicios 15% Solución de Problemas 15% Examen 50%

	Planeación e Instrumentación didáctica del curso	Código: F-SIG-P-RS-03-01
		Revisión: 1 11/NOVIEMBRE/2019

Seguimiento de la unidad (21)

PERIODO			EVALUACION			OBSERVACIONES
	P	R	Sumativa		% Competencia alcanzado	Firma del docente:
INICIO	27/10/25		P	R	80%	
FIN	21/11/25		28/11/25			

No. de Unidad (11) 5 Nombre de la unidad (12) Integración y Aplicaciones

Competencias Genéricas a desarrollar (13)

Solución de problemas. Toma de decisiones.
Trabajo en equipo. Habilidades interpersonales

Competencias Específicas (14)

Aplica las reglas de integración para resolver problemas de integrales definidas en la aplicación de inconvenientes relativos a área económico y administrativo.

Total de Horas (15)

15



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

Contenidos de la unidad (16)	Actividades de Aprendizaje de la unidad (17)	Evidencia/producto de la unidad (18)	Herramientas de la unidad (19)	Criterios de Evaluación de la unidad (20)
5.1 Concepto de antiderivada 5.2 Reglas de integración directas 5.3 Integral definida 5.4 Aplicaciones del cálculo integral a problemas de las áreas administrativas	Consultar el concepto de antiderivada y las reglas de integración básicas. Resolver ejercicios sobre reglas de integración básicas. Realizar ejercicios en equipos para diferenciar entre una integral definida y una indefinida. Resolver en equipo ejercicios de integral definidas. Aplicar las integrales definidas a problemas del área económica administrativas	Reportes escritos. Solución de ejercicios. Actividades de investigación. Análisis y discusión grupal. Resolución de problemas con apoyo de software. Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.	Bibliografía. Notas del profesor. Software. Emuladores. Calculadoras Científicas.	Investigación 10%. Trabajo de equipo 10% Solución de ejercicios 15% Solución de Problemas 15% Examen 50%

	Planeación e Instrumentación didáctica del curso	Código: F-SIG-P-RS-03-01
		Revisión: 1 11/NOVIEMBRE/2019

Seguimiento de la unidad (21)

PERIODO			EVALUACION			OBSERVACIONES
	P	R	Sumativa		% Competencia alcanzado	Firma del docente:
INICIO	24/11/25		P	R	100%	
FIN	11/12/25		12/12/25			

III. Fuentes de información de la asignatura (22)

1. Arya. (2012) Matemáticas aplicadas a la administración y economía. Editorial: Iberoamericana.
2. Draper J.E. (2002). Matemáticas para administración y economía. México. Editorial: Harla.
3. Ernest-Haeussler Jr. Richar S. Paul. (2012) Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida. Editorial: Prentice Hall.
4. Frank S. Budnick. (2005) Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. 4ª edición Editorial: McGrawHill.
5. Jean E. Weber. (2004). Matemáticas Para Administración y Economía, 4ª ed. Oxford University Press México, S. A. de C.V.,
6. Mizrahi-Sullivan. (1999) Matemáticas finitas con aplicaciones a la administración y economía. Editorial: Limusa-Wiley

IV. Apoyos didácticos y equipo de la asignatura (23)

INSTRUMENTOS:

- Investigaciones
- Reportes
- Gráficas
- Mapa Conceptual
- Ejercicios
- Exposiciones
- Creación de modelos
- Proyecto de la asignatura
- Participación en equipo

HERRAMIENTAS:

- Rubricas
- Lista de Cotejo.



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

V. Calendarización de evaluación de la asignatura (semanas) (24)

Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T.P.	Δ			▣ ○			▣ ○			▣ ○				▣ ○		▣ ○
T.R.																

T.P. Tiempo Planeado

T.R. Tiempo Real

Δ

▣

○

Evaluación Diagnóstica

Evaluación Formativa

Evaluación Sumativa

VI. Seguimiento de la asignatura

Fecha de entrega de programación (25)	Periodo Programado para 1er, 2do y 3er. Seguimiento			Periodo Programado de entrega de reporte final
Fecha: Firma:	(26) Fecha: Firma:	(27) Fecha: Firma:	(28) Fecha: Firma:	(29) Fecha: Firma:

NOMBRE Y FIRMA DEL DOCENTE
(30)

Vo. Bo. DEL JEFE DEL DEPARTAMENTO
(31)

INSTRUCTIVO DE LLENADO

Número	Descripción
1	Anotar el nombre correspondiente al Departamento Académico adscrito
2	Anotar el nombre del Docente
3	Anotar el nombre del programa académico a la que se imparte la asignatura
4	Anotar el grupo al que se le impartirá la asignatura, Ej. II "A"
5	Anotar el nombre de la asignatura



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

6	Anotar la clave de la asignatura
7	Anotar horas teoría – horas practica en base a los créditos de la asignatura (SATCA) Sistema de Asignación y Transferencia de Créditos Académicos
8	Anotar el número de temas que contiene la asignatura
9	Anotar el periodo de la instrumentación didáctica. Ej: Ene - Junio 2014
10	Describir de manera clara y descriptiva las competencias específicas que se pretende que el estudiante desarrolle, de manera adecuada, respondiendo a la pregunta Qué debe saber y saber hacer el estudiante? Como resultado de su proceso formativo en el desarrollo de la asignatura
11	Anotar el número de tema, según la asignatura correspondiente
12	Anotar el nombre de la unidad de la asignatura correspondiente
13	De manera genérica, se debe explicar, en base a los criterios, como por ejemplo: Propiciar actividades de búsqueda, selección y análisis de información en distintas fuentes; Fomentar actividades grupales que propicien la comunicación, el intercambio argumentado de ideas, la reflexión, la integración y la colaboración de y entre los estudiantes
14	Describir de manera clara y descriptiva las competencias específicas que se pretende que el estudiante desarrolle, de manera adecuada, respondiendo a la pregunta Qué debe saber y saber hacer el estudiante? Como resultado de su proceso formativo en el desarrollo del tema
15	Anotar horas teoría – horas practica en base a los créditos de la unidad desarrollar (SATCA) Sistema de Asignación y Transferencia de Créditos Académicos
16	Describir cada uno de los puntos o subtemas a desarrollar
17	Anotar las actividades que hará el estudiante para alcanzar la competencia
18	Es el resultado de las actividades de aprendizaje
19	Actividades de apoyo y soporte para llevar a cabo las actividades de clase, como lo pueden ser: cuestionarios, matriz de valoración, rúbrica, listas de cotejo, portafolio de evidencias, coevaluación, autoevaluación, entre otros
20	Anotar la valoración numérica de acreditación que le corresponda a cada criterio utilizado
21	Anotar las fechas de inicio y término de cada unidad en particular de acuerdo a lo programado y a lo real, llevando un control también del % de las competencias alcanzadas por tema, observaciones del unidad y firma del docente
22	Anotar las referencias bibliográficas a utilizar, nombre del libro, revista o página de internet con autor y editorial. Nota: los recursos deben ser vigentes y actuales e indicarlos según la norma APA vigente (American Psychological Association) Ej. Medina y Barquera (2013). Práctica Docente (1er Ed.) México Ed. Trillas
23	Anotar los materiales de apoyo que requerirá durante el tema, así como el equipo necesario para su desarrollo
24	Marcar la semana en la cual se llevarán a cabo las evaluaciones correspondientes
25	Fecha en que entrega el Docente la Planeación del Curso y Avance Programático y firma del Jefe del Departamento Académico



Planeación e Instrumentación didáctica del curso

Código: F-SIG-P-RS-03-01

Revisión: 1
11/NOVIEMBRE/2019

26	Periodo programado para el Primer seguimiento al avance programático (semana 5), incluyendo reportes, calificaciones parciales de sus evaluaciones, es necesario presentar las evidencias y firma del Jefe del Departamento Académico
27	Periodo programado para el Segundo seguimiento al avance programático (semana 9), incluyendo reportes, calificaciones parciales de sus evaluaciones, es necesario presentar las evidencias y firma del Jefe del Departamento Académico
28	Periodo programado para el Tercer seguimiento al avance programático (semana 13), incluyendo reportes, calificaciones parciales de sus evaluaciones, es necesario presentar las evidencias y firma del Jefe del Departamento Académico
29	Periodo programado para la entrega del Reporte Final para su revisión por el Jefe del Departamento Académico (semana 16 o 17) y firma del Jefe del Departamento Académico
30	Anotar el nombre del docente, así como la firma correspondiente
31	Anotar el nombre del jefe del área académica y firmar de visto bueno del documento

