



**GOBIERNO DE
MÉXICO**

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**DEPARTAMENTO ADSCRIPCIÓN
CIENCIAS BASICAS**

Programa y Modalidad

**B1 ELABORACION DE APUNTES
B1.2 ELABORACION DE APUNTES DE ASIGNATURAS
ALGEBRA LINEAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES**

Nombre del Docente:

ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA

No dictamen:

AS-1-134-2024

Personas Revisoras:

M. en T. E. Ma. Luisa Ernestina Velázquez Sánchez

Ing. Ramon Berber Palafox

Dr. Javier de Jesús Cortes Aguirre

Fecha: 01 febrero de 2024 - 31 de enero de 2025

1. Números Complejos.....	4
1.1 Definición y origen de los números complejos.....	4
1.2 Operaciones fundamentales con números complejos.	6
1.3 Potencias de "i", modulo o valor absoluto de un numero complejo.....	11
1.4 Forma polar y exponencial de un número complejo.	15
1.5 Teorema De Moivre, potencias y extracción de raíces de un número complejo..	18
1.6 Ecuaciones polinómicas.	24
Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.	28
Complemento Educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar	32
Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica.....	35
2. Matrices y Determinantes.....	37
2.1 Definición de matriz, notación y orden.....	37
2.2 Operaciones con matrices.	39
2.3 Clasificación de las matrices.....	43
2.4 Transformaciones elementales por región. Escalonamiento de una matriz. Núcleo y rango de una matriz	45
2.5 Cálculo de la inversa de una matriz.....	48
2.6 Definición de determinante de una matriz.	49
2.7 Propiedades de los determinantes.	53
2.8 Inversa de una matriz cuadrada a través de la adjunta.	56
2.9 Aplicación de matrices y determinantes	61
Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.	63
Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar	68
Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica.....	73
3. Sistemas de Ecuaciones Lineales.....	77
3.1 Definición de sistemas de ecuaciones lineales.....	77
3.2 Clasificación de los sistemas de ecuaciones y tipos de solución.....	80
3.3 Interpretación geométrica de las soluciones.....	82
3.4 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales	84
3.5 Aplicaciones.....	93
Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.	96
Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar	99

Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica.....	104
4. Espacios Vectoriales	107
4.1 Definición de espacio vectorial	107
4.2 Definición de subespacio vectorial y propiedades	110
4.3 Combinación lineal, Independencia lineal.....	113
4.4 Base y dimensión de un espacio vectorial, cambio de base.....	115
4.5 Espacio vectorial con producto interno y propiedades.....	117
4.6 Base ortonormal, proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.....	122
Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.	133
Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar	137
Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica.....	141
5.1 Definición de transformación lineal	143
5.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal	146
5.3 Representación matricial de una transformación lineal	150
5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación	157
Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.	162
Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar	167
Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica.....	171

1. Números Complejos

1.1 Definición y origen de los números complejos.

Los números complejos, aparecen en las ecuaciones algebraicas con una incógnita, al darles solución. Por ejemplo:

$$x^2 + x + 1 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

no tiene raíces reales. Al aplicar la fórmula que da la solución de una ecuación de segundo grado, resulta:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \dots\dots\dots(2)$$

la cual no tiene significado en los números reales. No se puede obtener raíz cuadrada de un número negativo.

Otro ejemplo, es $x^2 + 1 = 0$, implica un número real tal que $x^2 = -1$, sin embargo, de las propiedades de los números reales, el cuadrado de un número real es positivo, por lo cual no hay número real, que sea solución.

Para dar significado a una raíz cuadrada de numero negativo, se desarrolló el sistema de números complejos.

Definición: Un numero complejo se define por: Un par ordenado de números reales (x_1, x_2) . La primera componente, x_1 se llama parte real; la segunda componente, x_2 se llama parte imaginaria.

El conjunto de los números complejos esta especificado por C.

La expresión de la forma $z = a + bi$, es un número complejo, donde, a y b son números reales; "a" es la parte real y "bi", parte imaginaria del número complejo; i es la unidad imaginaria, ecuaciones 3 y 4.

$$i = \sqrt{-1} \dots\dots\dots(3)$$

$$i^2 = -1 \dots\dots\dots(4)$$

Los números complejos conjugados $a + bi$ y $a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria.

Sí $a = 0$, el número $0 + bi = bi$, es un número puro imaginario; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0i = a$.

Los números complejos, $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ se consideren iguales, si:

$$a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2 \dots\dots\dots(5)$$

Es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias.

Un número complejo es igual a cero:

$$a + bi = 0 \dots\dots\dots(6)$$

Siempre que $a = 0$ y $b = 0$.

Ejemplos:

- Identificar la parte real e imaginaria de $5 - 3i$

Solución:

$5 - 3i$ tiene parte real 5 e imaginaria -3

- Identificar la parte real e imaginaria de $-6 + \sqrt{2}i$

Solución:

$-6 + \sqrt{2}i$ tiene parte real -6 e imaginaria $\sqrt{2}$

- Identificar la parte real e imaginaria de $25 + 12i$

Solución:

$25 + 12i$ tiene parte real 25 e imaginaria 12i

Ejercicios:

1. Identificar la parte real e imaginaria de $-6 - 5i$

2. Identificar la parte real e imaginaria de $\frac{6-12i}{\sqrt{3}i}$
3. Identificar la parte real e imaginaria de $\cos(x) + \tan(y)i$

1.2 Operaciones fundamentales con números complejos.

Definición: La suma $x + y$ y el producto xy , donde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \dots\dots\dots(7)$$

$$xy = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\dots\dots\dots(8)$$

Teorema: Las operaciones de suma y multiplicación satisfacen las leyes conmutativas, asociativa y distributiva.

Demostración: La propiedad distributiva establece que: $x(y + z) = xy + xz$

Si $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_1z_1 - x_2y_2 - x_2z_2, x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2 + x_1z_1 - x_2z_2, x_1y_2 + x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1z_1 - x_2z_2, x_1z_2 + x_2z_1) \\ x(y + z) &= xy + xz \end{aligned}$$

Teorema:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (0, 0) &= (x_1, x_2) \\ (x_1, x_2)(0, 0) &= (0, 0), \\ (x_1, x_2)(1, 0) &= (x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Teorema: Dados dos números complejos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, existe un número complejo z tal que $x + z = y$. De hecho, $z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. Este z se designa por $y - x$: El número complejo $(-x_1, -x_2)$ se designa por $-x$.

Teorema: Para cualquier par de números complejos x , y ; tenemos:

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

Teorema: Si x, y son números complejos con $x \neq (0, 0)$, existe un número complejo z tal que

$$xz = y, \text{ a saber, } z = y/x = yx^{-1}.$$

Teorema:

$$(x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0),$$

$$(x_1, 0)(y_1, 0) = (x_1 y_1, 0),$$

$$\frac{x_1, 0}{y_1, 0} = \left(\frac{x_1}{y_1}, 0\right) \text{ si } y_1 \text{ diferente de } 0$$

Si los números complejos están expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) &= \\ r_1r_2[\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2] &= \\ r_1r_2[\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2] + i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) &= \\ r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] &= \end{aligned}$$

Así pues:

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)], \dots \dots \dots (9)$$

El producto de los módulos de los factores y la suma de argumentos de los factores es igual al producto de dos números complejos.

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

los números complejos conjugados, $a + bi$ y $a - bi$, satisfacen a la igualdad:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2, \dots \dots \dots (10)$$

Y la suma de los cuadrados de sus módulos, e el producto de dos números complejos conjugados.

División. La operación inversa a la multiplicación es la división. Si:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi \dots \dots \dots (11)$$

Donde $(a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}}$ diferente de 0, entonces x, y deben ser tales que se cumpla la igualdad:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi) \dots \dots \dots (12)$$

O sea:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x) i \dots \dots \dots (13)$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y \dots \dots \dots (14)$$

De donde:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \dots \dots \dots (15)$$

Y finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \dots \dots \dots (16)$$

En la práctica, división de los números complejos se efectúa de la manera siguiente: para dividir $a_1 + ib_1$ por $a_2 + ib_2$, multiplicamos, tanto el dividendo como el divisor, por un número complejo conjugado de este último (es decir, por $a_1 - ib_2$).

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} =$$

$$\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{En forma trigonométrica: } \frac{r_1(\cos a_1 + i \sin a_1)}{r_2(\cos a_2 + i \sin a_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(a_1 - a_2) + i \sin(a_1 - a_2)] \dots \dots \dots (18)$$

Al multiplicar el divisor por el cociente, se verifica:

$$r_2(\cos a_2 + i \sin a_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos(a_1 - a_2) + i \sin(a_1 - a_2)] =$$

$$r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos(a_2 + a_1 - a_2) + i \sin(a_2 + a_1 - a_2)] = r_1(\cos a_1 + i \sin a_1) \dots \dots \dots (19)$$

El cociente de los módulos del dividendo y del divisor, es igual al módulo resultante de la división de los dos números complejos, y la diferencia entre los argumentos del dividendo y del divisor, es igual al argumento de la división.

Las operaciones con números complejos dan números complejos como resultado, y si se aplican a los números complejos, con su parte imaginaria igual a cero, se convierten en operaciones aritméticas de los números reales.

Resumen de operaciones con números complejos

Suma: $z + w = (a+c) + (b+d)i$

Resta: $z - w = (a - c) + (b - d)i$

Producto: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

División: $\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}, w \neq 0$

Producto por un escalar: $kz = ka + kbi$

Ejemplos:

- Sean $c_1 = 5 - 3i$, $c_2 = 4 + 2i$ y $c_3 = -3 + i$ realizar las siguientes operaciones:

Solución:

(a)

$$c_1 + c_2$$

$$= (5 - 3i) + (4 + 2i)$$

$$= 9 - i$$

(b)

$$\begin{aligned}c_2 - c_3 \\&= (4 + 2i) - (-3 + i) \\&= (4 - (-3)) + (2 - 1)i \\&= 7 + i\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}c_1 c_2 \\&= (5 - 3i) \cdot (4 + 2i) \\&= 20 + 10i - 12i - 6i^2 \\&= 26 - 2i\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}c_1 \bar{c}_3 \\&= (5 - 3i)\overline{(-3 + i)} \\&= (5 - 3i)(-3 - i) \\&= -15 - 5i + 9i + 3i^2 \\&= -18 + 4i\end{aligned}$$

- Resolver la siguiente operación con números complejos.

$$\frac{3 + 2i}{4 - 5i}$$

Solución:

Divisor y dividendo se multiplican por el complejo conjugado $4 + 5i$

$$\begin{aligned}&= \frac{12 + 15i + 8i + 10i^2}{16 + 25} \\&= \frac{2 + 23i}{41}\end{aligned}$$

Ejercicios:

- 1) Resolver $(2 + 3i) + 2(1 - i)$
- 2) Resolver $5(5 + 8i) + (2 + 9i)$
- 3) Resolver $\frac{5+2i}{3-5i}$

1.3 Potencias de "i", modulo o valor absoluto de un numero complejo.

Hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 i^2 &= -1; \\
 i^3 &= (-1)i = -i \\
 i^4 &= (-i)(i) = -i^2 = 1; \\
 i^5 &= 1i, etc.....(20)
 \end{aligned}$$

Y en general, para k entero:

$$\begin{aligned}
 i^{4k} &= 1; \\
 i^{4k+1} &= i; i^{4k+2} = -1; \\
 i^{4k+3} &= -i(21)
 \end{aligned}$$

Entonces i^n se puede calcular al dividir la potencia n entre 4 y tomar como nueva potencia el residuo de la división.

Determinar la potencia indicada de i

- a) $i^{10} = i^2$ Pues que $\frac{10}{4}$ tiene residuo 2, Entonces $i^{10} = -1$
- b) $i^{83} = i^3$ Pues que $\frac{83}{4}$ tiene residuo 3, Entonces $i^{83} = -i$

Definición: Si z es diferente de 0 y si w es un número complejo cualquiera, definimos:

$$z^w = e^{w \text{Log} z}(22)$$

Ejemplos

- $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi/2}$
- $(-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$

Definición: Si n es un entero, entonces $z^{n+1} = e^{(n+1)\operatorname{Log} z} e^{\operatorname{Log} z} = z^n z$,

Reglas de cálculo con potencias complejas:

Teorema:

$$z^w, z^w = z^{w1+w2\operatorname{Log} z} = e^{w1\operatorname{Log} z} e^{w2\operatorname{Log} z} = z^{w1} z^{w2} \dots (23)$$

Teorema:

$$\operatorname{Si}(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{\frac{2\pi}{w} n(z_1, z_2)} \dots (24)$$

Donde $n(z_1, z_2)$ es el entero definido en el teorema.

$$(z_1 z_2)^2 = e^{\operatorname{Log}(z_1 z_2)} = e^{w[\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2)]} \dots (25)$$

El concepto de valor absoluto al sistema de los números complejos.

Definición: Si $x = (x_1, x_2)$, definimos el módulo, o valor absoluto, de x como el número real no negativo $|x|$ dado por

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \dots (26)$$

Ejemplos:

- Determina el módulo del número complejo

$$\text{a) } |3 - 5i| = \sqrt{3^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

$$\text{b) } |(2+i)(5+3i)| = |2+i||5+3i|$$

$$|7+11i| = |2+i||5+3i|$$

$$\sqrt{7^2 + 11^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{5^2 + 3^2}$$

$$\sqrt{170} = \sqrt{5} \sqrt{24}$$

$$\sqrt{170} = \sqrt{170}$$

Teorema:

$$i) \quad |(0,0)| = 0, \text{ y } |x| > 0 \text{ si } x \neq 0$$

$$ii) \quad |xy| = |x||y|.$$

$$iii) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = |x|/|y|, \text{ si } y \neq 0.$$

$$iv) \quad |x_1, 0| = |x_1|$$

Demostración: Las afirmaciones (i) y (iv) son inmediatas. Para demostrar (ii), consideremos $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$, entonces $xy = x_1y_1 - y_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ La afirmación (ii) se sigue de la relación

$$|xy|^2 = x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2y_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2|y|^2 \dots\dots(27)$$

La ecuación $|xy|^2$ puede deducirse de $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ escribiéndola en la forma

$$|x| = |y| \left| \frac{x}{y} \right| \dots\dots\dots(28)$$

$|x|$ representa la longitud del segmento del origen al punto x . En general, $|x - y|$ es la distancia entre los puntos x e y . La interpretación geométrica, establece que uno de los lados de un triángulo es menor a la suma de los otros dos lados.

Teorema: Si x e y son números complejos, entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ (desigualdad triangular) } \dots\dots\dots(29)$$

Ejemplos:

- Elevar a la potencia 9 el número complejo $2 = \sqrt{3} - i$.

Solución:

El módulo del número z es igual a 2 y de uno de los argumentos sirve $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, por eso el modulo del numero z^9 vale 2^9 y el argumento del numero z^9 vale $9\alpha = \frac{-3}{2}\pi$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - i)^9 \\ &= 2^9 \left(\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \right) \\ &= 512i \end{aligned}$$

- Calcular el resultado $(2 - 3i)^3$

Solución:

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^3 &= (2 - 3i)(2 - 3i)(2 - 3i) \\ &= (4 - 6i - 6i + 9i^2)(2 - 3i) \\ &= (4 - 12i - 9)(2 - 3i) \\ &= (-5 - 12i)(2 - 3i) \\ &= -10 - 9i - 36 \\ &= -46 - 9i \end{aligned}$$

- Simplificar la expresión i^{58} .

Solución: Recordemos que $i^4 = 1$. Entonces obtenemos factores que tengan exponentes divisibles por 4 y simplificamos:

$$\begin{aligned} & i^{58} \\ & i^{58} = i^{56} x i^2 \\ &= (i^4)^{14} x i^2 \\ &= 1^{14} x i^2 \\ &= i^2 \end{aligned}$$

Ejercicios:

- 1) Simplificar la expresión i^{91}
- 2) Simplificar la expresión $(4 + 4i)^3$
- 3) Simplificar la expresión $(1 - i)^8$

1.4 Forma polar y exponencial de un número complejo.

Los números complejos se pueden representar en un plano llamado Plano de Argand-Gauss. De tal manera que un $z = x + yi$ se presenta en el plano como el punto P .

Sea $z = a + bi$ se puede definir y denotar forma polar de z por $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, donde r es el módulo de z y $\theta = \arg_z$ el argumento de z , $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sea $z = a + bi$ se puede definir y denotar forma exponencial de z por $z = re^{i\theta}$, donde r es el módulo de z y $\theta = \arg_z$ el argumento de z , $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejemplo:

Sea $z = 4 + i$

Solución

$$r = \sqrt{17} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.24$$

Forma polar de z es $z = \sqrt{17}(\cos 0.24 + i \sin 0.24)$,

Forma exponencial de z es $z = \sqrt{17}e^{i0.24}$

Al definir e^x para z complejo, las propiedades de la función exponencial real se conservan.

Las propiedades de e^x para x real son la ley de los exponentes, $e^{x1}, e^{x2} = e^{x1+x2}$, y $e^0 = 1$

Si $z = x + iy$, entonces para que se verifique la ley de los exponentes se debe tener $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Queda entonces por definir lo que significa e^{iy}

Definición: Si $z = x + iy$, definimos $e^z = e^{ex+iy}$ como el número complejo

$$e^x = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \dots \dots \dots (30)$$

Teorema: Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos números complejos, entonces

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \dots \dots \dots (31)$$

Demostración.

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)$$

$$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2),$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)] \dots \dots \dots (32)$$

Ahora bien, $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, ya que x_1 y x_2 son ambos reales, además,

$$\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 = \cos(y_1 + y_2)$$

y

$$\cos y \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 = \sin(y_1 + y_2),$$

Y por la tanto

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2} \dots \dots \dots (33)$$

Un número complejo z en forma trigonométrica:

$$z = r(\cos a + i \sin a), \dots \dots \dots (34)$$

r es el módulo y a , el argumento, según Euler:

$$\cos a + i \sin a = re^{ia} \dots \dots \dots (35)$$

La forma polar de un número complejo se expresa como $r(\cos a + i \sin a)$, donde r es el módulo del número complejo y θ es el argumento. Esta forma proporciona información sobre la distancia y la dirección del número complejo en relación con el origen. Por otro lado, la forma exponencial se expresa como $re^{i\theta}$, donde r y θ son los mismos de la forma polar. La ventaja de esta

representación radica en su relación con la función exponencial, lo que facilita las operaciones matemáticas, como la multiplicación y la potenciación de números complejos.

Ejemplos:

- Demostrar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Solución:

Usando las series de potencia se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Entonces

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \dots$$

Ahora bien, $i^2 = -1, i^3 = -i^4 = 1, i^5 = i$, etc. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{(\theta)^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

- Pasar a la forma polar y trigonométrica $z = 1 + \sqrt{3}i$

Solución:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\alpha = \arctan \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^\circ$$

$$z = 2_{60^\circ} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

Ejercicios:

1. Obtener la forma binomial y polar del número complejo $(\sqrt{3}, 1)$. Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.
2. Resuelve $x^4 + 16 = 0$. Escribe las soluciones en notación polar
3. Opera y desarrolla la potencia $(\sqrt{2} - i)^6$ y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica.

1.5 Teorema De Moivre, potencias y extracción de raíces de un número complejo.

Definición: Dados un número complejo z y un número entero n , se define la n -ésima potencia de z como sigue:

$$z^0 = 1$$

$$z^{n+1} = z^n z$$

$$\text{si } n \geq 0$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n$$

$$\text{si } z \neq 0 \text{ y } n > 0 \dots\dots\dots(36)$$

Teorema: Dados dos enteros m y n , se tiene, para $z \neq 0$

$$z^n z^m = z^{n+m}$$

y

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n \dots\dots\dots(37)$$

Teorema: Si $z \neq 0$, y si n entero positivo, entonces existen exactamente n números complejos distintos $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, llamados raíces n -ésimas de z , tales que

$$z_k^n = z, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Además, estas raíces son dadas por las fórmulas

$$z_k = R e^{i\sigma_k}, \text{ donde } R = |z|^{\frac{1}{n}}, \dots \dots \dots (38)$$

Y

$$\sigma_k = \left(\frac{\arg(z)}{n} \right) + \frac{2\pi k}{n}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \dots \dots \dots (39)$$

Las n raíces n -ésimas de z están sobre el círculo de radio $R = |z|^{\frac{1}{n}}$, con centro en el origen, espaciadas a la misma distancia.

1. Elevación a potencia. Si n es un número entero positivo, entonces:

$$(r(\cos a + i \sin a))^n = r^n (\cos na + i \sin na) \dots \dots \dots (40)$$

Al elevar un número complejo a una potencia entera y positiva, el módulo de este se eleva a la misma potencia y el argumento se multiplica por el exponente de esta potencia. Así expresa la fórmula de Moivre.

Con la ecuación 40, se obtiene:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na \dots \dots \dots (41)$$

Según el Binomio de Newton, e igualando las partes reales e imaginarias, el primer miembro se expresa $\sin na$ y $\cos na$ en función de potencias de $\sin a$ y $\cos a$.

Así, por ejemplo, si $n=3$, se obtiene:

$$\cos^3 a + i 3 \cos^2 a \sin a - 3 \cos a \sin^2 a - i \sin^3 a = \cos 3a + i \sin 3a$$

Usando la igualdad de estos números complejos, se tiene:

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a, \sin 3a = -\sin^3 a + 3 \cos^2 a \sin a$$

2. La raíz n -ésima de un número complejo, al ser elevado a la potencia n , es otro complejo:

$$\sqrt[n]{r(\cos a + i \sin a)} = p(\cos a + i \sin a), \dots\dots\dots(42)$$

$$p^n(\cos na + i \sin na) = r(\cos a + i \sin a) \dots\dots\dots(43)$$

Los números complejos iguales son iguales en sus módulos y los argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π , se tiene:

$$p^n = r, na = a + 2k\pi \dots\dots\dots(44)$$

De aquí:

$$p = \sqrt[n]{r}, \quad a = \frac{a+2k\pi}{n} \dots\dots\dots(45)$$

Con k número entero arbitrario,

$\sqrt[n]{r}$ es el valor real y positivo

.

Entonces,

$$\sqrt[n]{r(\cos a + i \sin a)} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{a+2k\pi}{n} + i \sin \frac{a+2k\pi}{n}) \dots\dots\dots(46)$$

Si k toma los valores $0, 1, 2, \dots, n-1$, se obtienen n valores de la raíz. Entonces, la raíz n-ésima de un complejo tiene n diferentes valores.

Como el número real es un caso del complejo, entonces, La raíz n-ésima del número real A, distinto de cero, también tiene n valores, y A en forma trigonométrica:

$$si \ A > 0, tenemos: A = |A|(\cos 0 + i \sin 0) \dots\dots\dots(47)$$

$$si \ A < 0, tenemos: A = |A|(\cos \pi + i \sin \pi) \dots\dots\dots(48)$$

Un número complejo elevado a una potencia entera positiva, se pueden calcular múltiples potencias sucesivas.

La extracción de raíces "n-ésimas" de un número complejo se simplifica con el teorema De Moivre, mediante una simple división del argumento por "n" y se calculan las raíces "n-ésimas" de la magnitud.

El teorema De Moivre es calcular potencias y extracción de raíces de números complejos. Permite simplificar y manipular expresiones complejas, y también proporciona una interpretación geométrica en términos de rotaciones en el plano complejo.

Ejemplos:

- Hallar los valores de la raíz cúbica de la unidad.

Solución:

Se expresa la unidad en forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

Según la fórmula $1 = \cos 0 + i \sin 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} \\ &= \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3} \dots\dots\dots(49)\end{aligned}$$

Con k igual a 0,1,2, se obtienen tres valores de la raíz:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

Tomando en cuenta que $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2};$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Resulta: $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Simplificar, efectuando las operaciones en forma polar y expresar la respuesta en la

$$a + bi$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{20} (4 - 4\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2}$$

Solución:

Hallaremos las potencias primero, aplicando el teorema de Moivre

$$\begin{aligned} \frac{[1^{20} \text{cis}(20)(30)] * (8 \text{cis} 300^\circ)}{2^2 \text{cis} * 45} &= \frac{(\text{cis} 600^\circ) * 8 \text{cis} 300^\circ}{4 \text{cis} 90^\circ} \\ &= \frac{8 \text{cis} 900^\circ}{4 \text{cis} 90^\circ} \\ &= 2 \text{cis} 810^\circ \\ &= 2 \text{cis} 90^\circ \\ &= 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2i \end{aligned}$$

Si r y z son el módulo y el argumento de z , respectivamente. Entonces la k -ésima raíz está

dada por

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right) \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1$$

- Si $z = 4 + i$ calcular z^4

Solución

$$r = \sqrt{17} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \approx 0.24$$

$$z^4 = \sqrt{17}^4 (\cos 4(0.24) + i \sin 4(0.24))$$

$$z^4 = \sqrt{17}^4 (\cos 0.96 + i \sin 0.96)$$

- Determina las raíces cúbicas de $z = 2 + 3i$

Solución:

$$n = 3, \quad k = 0, 1, 2, \quad r = \sqrt{13}, \quad \theta = 0.98$$

$$w_0 = \sqrt[3]{13} \left(\cos\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 0}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 0}{3}\right) \right)$$

$$w_0 = 1.45 + 0.48i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{13} \left(\cos\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 1}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 1}{3}\right) \right)$$

$$w_1 = -1.15 + 1.01i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{13} \left(\cos\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 2}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0.98 + 2\pi \cdot 2}{3}\right) \right)$$

$$w_2 = -0.30 - 1.5i$$

Ejercicios:

1. Aplica el teorema de Moivre y expresa luego la respuesta en la forma $a + bi$

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)^5$$

2. Simplifica, expresando la respuesta en la forma $a + bi$:

$$\frac{(2 \operatorname{cis} 50^\circ)^6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{10}}$$

3. A partir de la fórmula de Moivre, deduce las razones trigonométricas del seno y el coseno del ángulo doble.

1.6 Ecuaciones polinómicas.

El cálculo de las raíces de una ecuación algebraica de grado n

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, constituye uno de los objetivos fundamentales de las matemáticas, por lo que analizar el tipo y cuáles son las soluciones de la ecuación es importante.

Teorema del residuo: Si el polinomio $f(x)$ se divide entre $x - r$, con r constante independiente de x , el residuo es igual a $f(r)$.

Teorema: Regla de los signos de Descartes

Una ecuación con coeficientes reales y sin raíces nulas, $f(x) = 0$, cumple:

1.- $f(x) = 0$ tiene un número de raíces positivas igual al número de variaciones de signos de $f(x)$ o menor que este, en un número par.

2.- $f(x) = 0$ tiene un número de raíces negativas igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o menor que este, en un número par.

La segunda parte de este teorema que se refiere a raíces negativas es una consecuencia inmediata de la primera parte, ya que las raíces positivas de $f(x) = 0$ son las raíces negativas de $f(-x)$.

El número de raíces complejas es igual a n menos el número de raíces positivas y raíces negativas, cuando $f(x) = 0$ de grado n y tiene exactamente n raíces.

Teorema: Si un número complejo $a + bi$ es raíz de la ecuación $f(x) = 0$ con coeficientes reales, entonces también, es raíz de la ecuación su conjugado $a - bi$.

Una ecuación $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se puede expresar como producto de factores lineales $f(x) = (x - r_n)(x - r_{n-1}) \dots (x - r_1)$, donde $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$ son las raíces o soluciones., estas pueden ser reales o complejas.

Ejemplo:

- Para el polinomio $f(x) = 0$ determina el tipo de raíces, cuales son y expresarlo como productos de binomios lineales.

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x = 0$$

Solución

Raíces nulas: 1, ya que

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x = x(x^3 + x^2 - 4x + 6)$$

Raíces reales positivas: 2 o 0

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x$$

Raíces reales positivas: 1

$$f(-x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 6x$$

¿Cuáles son las raíces?

Notar que los factores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

1	1	-4	6	-3
	-3	6	-6	
1	-2	2	0	

Luego tenemos $x^2 - 2x + 2 = 0$, de donde $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

Entonces $f(x) = x(x-3)(x-1+i)(x-1-i)$

Ejercicio:

Para $x^4 - 4x^2 - 14x - 20 = 0$ determinar el tipo de raíces y cuáles son. Expresar la ecuación como producto de binomios lineales.

Ejemplos:

- Calcular $z = (1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$

Solución:

$$z = (1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \wedge \theta \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$z = (1 + \sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{(1 + \sqrt{3}i)^3}$$

$$= \sqrt[4]{\left(2\frac{\pi}{3}\right)^3}$$

$$= \sqrt[4]{8\pi}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{8\pi + 2k\pi}{4}}$$

$$k = 0,1,2,3$$

- Calcular $z = \frac{1+i^{100}}{(1+i)^{100}}$

Solución:

$$z = \frac{1 + i^{100}}{(1 + i)^{100}}$$

Teniendo en cuenta que $1 + i = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$ y que $i^4 = 1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + (i^4)^{25}}{\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\right)^{100}} \\
 &= \frac{1 + 1}{(\sqrt{2})^{100} \frac{100\pi}{4}} \\
 &= \frac{2}{2^{50} 25\pi} \\
 &= \frac{2}{2^{50}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)} \\
 &= \frac{2}{2^{50}(-1)} \\
 &= -2^{49}
 \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. Calcula las soluciones de la ecuación $z^2 = 1 - i$
2. Obtener z en la ecuación $\frac{z}{1+i} - \frac{z}{i} = 2i$, sabiendo que z es un número complejo
3. Obtén el valor de la incógnita z , perteneciente al cuerpo de los números complejos: $13z^5 + 5 - 12i = 0$

Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL

NOMBRE DEL DOCENTE: _____

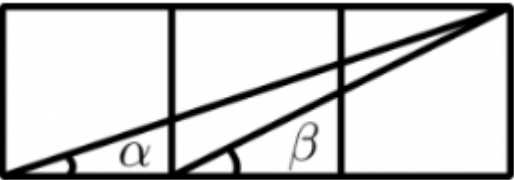
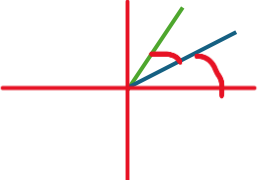
Rubrica para calificar las competencias genéricas (Tarea por equipo).

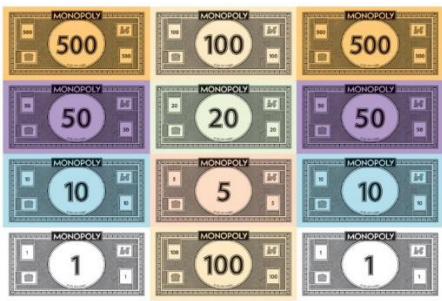
ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

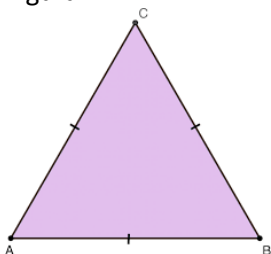
FECHA: _____ TEMA 1. Números complejos Calificación: _____

	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Problemas que cubren uno o más indicadores de alcance	Modelado del problema, es la descripción, incluye las figuras que lo describen 0%	Seleccionar las variables e incógnitas, con sus respectivas unidades, y/o Diagrama de Cuerpo Libre y/o esquema representativo 0%	Plantear la hipótesis de solución, fórmulas y/o algoritmos para resolver el problema 0%	Hacer los cálculos y operaciones, paso a paso, incluye documentar dichas operaciones 0%	Analizar los resultados y evaluar los resultados obtenidos con sus unidades y expresar las conclusiones 34%	Ponderación
1.Resuelve problemas de aplicación de Números Complejos						
2.Resuelve problemas de aplicación de Números Complejos						
3.Resuelve problemas de aplicación de Números Complejos						

Total

Modelado del problema En la figura hay tres cuadrados de lado 1 uno tras otro. Determina la suma de los ángulos marcados con α y β.	Figura 
Seleccionar Variables Angulo α Angulo β	Diagrama de cuerpo libre 
Hipótesis: El ángulo α es igual al argumento del complejo $2 + i$ y el ángulo β es igual al argumento $3 + i$. de esta forma, $\alpha + \beta$ es igual al argumento del complejo.	
Calcular los resultados $\alpha + \beta$ $(2 + i)(3 + i)$ $(6 - 1) + (2 + 3)i$ $5 + 5i$ $Re(z) = Im(z)$ $= \pi / 4$	Comentarios Utilizamos las divisiones del rectángulo para darnos una idea de la posible solución y mediante las propiedades de los números complejos obtenemos el resultado.
Analizar: Podemos observar en la imagen que se forman 3 rectángulos, que a la vez forman triángulos los cuales nos van a ayudar para obtener el resultado en base a sus ángulos.	

Modelado del problema: En una caja del juego Monopoly había 25 billetes «reales», y para poder jugar se tuvieron que crear otros «imaginarios». Ambos tipos de billetes se repartieron. Si a 8 veces el total de billetes de cada jugador, le quitabas este mismo al cuadrado, el resultado era el número de billetes iniciales que había en la caja. ¿Cada jugador cuántos billetes «reales» e «imaginarios» tenía al empezar a jugar?	
Seleccionar las variables: Billetes «reales»: a Billetes «imaginarios»: b Total, de billetes «reales»: 25	
Plantear la hipótesis: Teniendo en cuenta que en este caso se usan billetes tanto reales como imaginarios tendremos que plantear una ecuación que cumpla con las condiciones que se plantean en el problema por tanto al resolver esta obtendremos el resultado	
Calcular los resultados: $a + bi = z$ $8z - z^2 = 25 \rightarrow z^2 - 8z + 25 = 0$ $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 25}}{2}$ $= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{8 \pm -36}{2}$ $= \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$	Comentarios: SE expresa la suma total de billetes como un número complejo. Expresamos la relación del enunciado en forma de ecuación. Se resuelve la ecuación, asumiendo que las soluciones pueden ser complejas.
Analizar: Hay dos posibles soluciones: La primera a = 4 y b = 3, y a = 4 y b = -3. La segunda solución no se puede tener -3 billetes. Así, la respuesta es que, al iniciar , cada jugador tiene 4 + 3i billetes; es decir, 4 billetes «reales» (del juego original) y 3 billetes «imaginarios» fabricados.	

Modelado del problema: Que condición es necesaria y suficiente para que tres números complejos z_1, z_2 y z_3 sean los vértices de un triángulo equilátero.	Figura: 
Seleccionar las variables: z_1, z_2 y z_3 -> vértices del triángulo	Diagrama de cuerpo libre:
Plantear la hipótesis: Los vértices forman un triángulo equilátero, lo que significa que los lados del triángulo tienen la longitud igual y 60 grados tienen los ángulos internos. Para determinar una condición necesaria y suficiente para que los afijos z_1, z_2, y z_3 formar un triángulo equilátero, podemos utilizar la propiedad de la exponenciación en el plano complejo.	
Calcular los resultados: $\alpha = z_1 - z_2,$ $\beta = z_2 - z_3,$ $\gamma = z_3 - z_1$ $ z_1 - z_2 = z_2 - z_3 = z_3 - z_1 .$ $ \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta \bar{\beta} = \gamma \bar{\gamma}$ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1} = 0$ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$ $z_3^2 - z_3(z_1 + z_2) + z_1^2 + z_2^2 - z_2^2 = 0$ $2z_3$ $= z_1 + z_2$ $\pm \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2)} \Leftarrow$ $\Rightarrow 2z_3 = z_1 + z_2 \pm i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \Leftarrow$ $\Rightarrow 2(z_3 - z_2) = z_1 - z_2 \pm i\sqrt{3}(z_1 - z_2)$ $\Leftrightarrow 2(z_3 - z_2)$ $= z_1 - z_2 \pm i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \Leftarrow$ $\Rightarrow 2(z_3 - z_2) = (z_1 - z_2)(1 \pm i\sqrt{3}).$ $z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{\pm i\pi/3}$ $ z_3 - z_2 = z_1 - z_2 \text{ y } \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) = \pm \frac{\pi}{3}.$	Comentarios Supongamos en primer lugar que el triángulo es equilátero. Se desarrolla una condición, que es suficiente y se considera una ecuación cuadrática en z_3. Por tanto, el triángulo es equilátero.
Analizar: Si ambas condiciones se cumplen para los números complejos z_1, z_2 y z_3, entonces los puntos z_1, z_2 y z_3 forman un triángulo equilátero en el plano complejo. Recuerda que para que esta condición se cumpla, los números complejos z_1, z_2 y z_3 deben ser distintos entre sí, ya que tres puntos coincidentes siempre formarán un triángulo de área cero.	

Complemento Educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
BÁSICAS
EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: DR. ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 1: Números complejos CALIF: _____

a)

b)	c) Niveles de desempeño de los indicadores de alcance				
Indicadores de alcance cubiertos por los reactivos del examen en forma directa uno a uno.	Procedimiento y resultado correctos 25%	Un matemático en el desarrollo del procedimiento 15%	Máximo dos errores matemáticos en el desarrollo del procedimiento 10%	Procedimiento incorrecto. Desconocer competencia previa. Tres o más errores matemáticos. Dato incorrecto. 0%	Ponderación
Resuelve operaciones con números complejos					
Realiza diferentes transformaciones en la forma rectangular, polar y exponencial					
Aplica Teorema De Moivre para extracción de raíces y potencias de números complejos					
Soluciona ecuaciones polinómicas que implican soluciones complejas					
Examen Escrito		Escala		Calificación final del Tema	

1. Resolver la siguiente multiplicación de números complejos $(3 + 2i)(5 + 6i)$.
2. Escribir en forma exponencial los números $1, t, -2, -i$.

3. Aplicar el teorema de Moivre, expresando la respuesta en la forma $a + bi$, $(2\text{cis}\frac{\pi}{6})^4$.
4. Calcular $z = 1 + i + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$

Soluciones:

1. Resolver la siguiente multiplicación de números complejos $(3 + 2i)(5 + 6i)$

Solución:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(5 + 6i) \\&= 15 + 18i + 10i + 12i^2 \\&= 3 + 28i\end{aligned}$$

2. Escribir en forma exponencial los números $1, t, -2, -i$.

Solución:

$$\begin{aligned}1 &= \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i} \\t &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}, \\-2 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i}, \\-i &= \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2}i}\end{aligned}$$

3. Aplicar el teorema de Moivre, expresando la respuesta en la forma $a + bi$

$$(2\text{cis}\frac{\pi}{6})^4$$

Solución:

Aplicamos $(r \text{cis } \theta)^n = r^n \text{cis } \theta,$

Luego $\left(2\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^4 = 2^4 \text{cis}\frac{4\pi}{6}$

$$16\text{cis}\frac{2\pi}{3} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 16\cos\frac{2\pi}{3} + 16i \text{sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2}\right) + 16i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -8 + 8\sqrt{3}i$$

4. Calcular $z = 1 + i + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$

Solución: $z = 1 + i + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{20}$

Comprobamos que es una progresión geométrica de razón $r = 1 + i$, por tanto:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a_n r - a}{r - 1} \\ &= \frac{(1 + i)^{20}(1 + i) - (1 - i)}{1 + i - 1} \\ &= \frac{(1 + i)^{20}(1 + i) - (1 - i)}{i} \\ &= i[(1 + i)^{21} - 1 + i] \end{aligned}$$

Calculamos en primer lugar $(1 + i)^{21}$:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{21} &= \left(\sqrt{\frac{2\pi}{4}} \right)^{21} \\ &= (\sqrt{2})^{21} \frac{21\pi}{4} \\ &= 2^{\frac{21}{2}} \frac{5\pi}{4} \\ &= 2^{\frac{21}{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{21}{2}} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2^{10}(-1 - i) \end{aligned}$$

Sustituyendo:

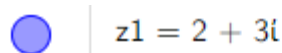
$$\begin{aligned} z &= -i[2^{21}(-1 - i) - (1 + i)] \\ &= i(1 + i)(2^{10} + 1) \\ &= 1025(-1 + i) \end{aligned}$$

Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica
Práctica virtual: Argumento y módulo de un número complejo

Objetivos de aprendizaje: Comprender la representación gráfica de los números complejos y sus operaciones en el plano complejo.

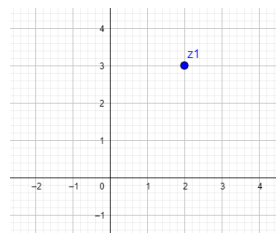
Indicaciones: Acceder a <https://www.geogebra.org/m/ve7xgvq8>

Ingresa a GeoGebra y en la zona de entradas escribe $z1=2+3i$ y presiona *Enter*, como se ilustra



$z1 = 2 + 3i$

GeoGebra reconocerá que se trata de un número complejo y aparecerá una gráfica en el plano 2D del número complejo. Puedes ingresar los números complejos que desees y GeoGebra los graficará.



Para poder ver el módulo del número complejo ingresa con el teclado la barra vertical $|$, GeoGebra abrirá doble barra que significa norma o módulo. Dentro de la barra doble ingresa el número complejo y presiona *Enter*. El módulo del número complejo se mostrará, GeoGebra asignará un nombre a este escalar



$a = |z1|$

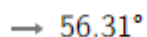


$\rightarrow 3.61$

Para calcular el argumento del número complejo, en la zona de entradas ingresa entre paréntesis el *Ángulo*, presiona *Enter*, GeoGebra mostrará el argumento del número complejo, le asignará un nombre.

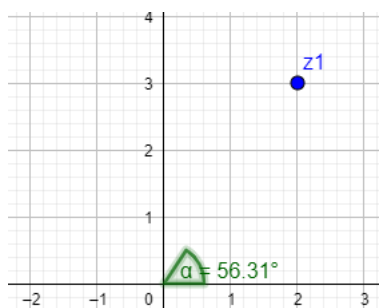


$\alpha = \text{Ángulo}(z1)$



$\rightarrow 56.31^\circ$

Así también en la zona de gráficos 2D se mostrará el ángulo correspondiente.



Ejemplo. Encuentra el módulo y el argumento de los números complejos continuación se enlistan.

Forma cartesiana	Forma Polar
$z = 4 + 2i$	$z = 4.47 \angle 26.57^\circ$ ● $z1 = 4 + 2i$ $a = z1$ $\rightarrow 4.47$ ● $\alpha = \text{Ángulo}(z1)$ $\rightarrow 26.57^\circ$ + Entrada...
$z = 3 - 5i$	
$z = -3 + 5i$	
$z = -2 - 4i$	

2. Matrices y Determinantes

2.1 Definición de matriz, notación y orden.

Las matrices son objetos matemáticos para organizar información numérica, una matriz denota sus elementos, estos se escriben en orden, que depende de la posición (fila, columna) de cada uno de ellos, y la tabla resultante se encierra entre paréntesis, corchetes o barras verticales dobles. Las formas generales de una matriz (m,n) se muestran en la figura 1. Donde α representan elementos.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\|$$

Figura 1. *Representación de matrices.*

Orden de una matriz: Es una manera de indicar su tamaño, o sea su número de filas y columnas (m,n) , Si las filas coinciden con el número de columnas, la matriz es cuadrada y el número de sus filas igual al número de sus columnas se llama orden de la matriz cuadrada. Una matriz cuadrada de orden 1 es simplemente un elemento. Una matriz que consta de una sola fila se denomina simplemente fila, y el número de sus elementos se denomina longitud de fila.

Definición: Un arreglo rectangular con m filas y n columnas de números reales, es una matriz de orden $m \times n$. Se denota con letras mayúsculas $A, B, \dots$ y los componentes de la matriz que son números reales se denotan por a_{ij} , donde i es la i -ésima fila y j la j -ésima columna

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Teorema: Se dice que dos matrices son iguales si los números en sus filas o columnas son los mismos y si los números que ocupan las posiciones correspondientes en estas matrices son los

mismos. Por tanto, una igualdad entre dos elementos (m, n) , es equivalente a igualdad entre sus elementos. Es decir, $A = B$ si y solo si $A, B \in M_{m \times n}$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para toda $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$

Ejemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de tamaño 3×3
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz rectangular de tamaño 2×3
- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ es una matriz o vector columna de tamaño 5×1
- ¿Las matrices A y B son iguales?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & x+4 & 1 \\ -x & 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{¿} A = B?$$

Solución

Para que sea $A = B$;

$$a_{13} = 1 = b_{13}, \text{ entonces } x = 1$$

$$a_{22} = 5 = x + 4 = 5 = b_{22}$$

$$a_{31} = -1 = -x = -1 = b_{31}$$

$$a_{33} = 3 = y = b_{33}$$

Por lo tanto $A = B$

Ejercicio: Determina si las matrices son iguales

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} s & 4 \\ -1 & t \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & t \\ s-t & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Operaciones con matrices.

Las operaciones matriciales principales son: la multiplicación de un número por una matriz, la adición y la multiplicación de dos matrices.

Una matriz que consta de m filas y n columnas $[m \times n]$. La operación de sumar matrices $[m \times n]$ se puede definir como se muestra en la figura 2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura 2. Representación suma de 2 matrices tamaño $[m \times n]$.

y la multiplicación de un número por una matriz $[m \times n]$ se muestra en la figura 3.

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura 3. Representación de un escalar multiplicado por una matriz de tamaño $[m \times n]$

Está claro que para toda matriz A y para cualesquiera $\alpha, \beta \in R$ tienen lugar las relaciones que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Relaciones de una matriz A para cualquier escalar

1	$1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
2	$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0; \quad \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
3	$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A; \quad (A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$

De las operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalar, se desprenden las relaciones de la tabla 2:

Tabla 2. Relaciones de dos matrices del mismo tamaño.

4	$A + (B + C) = (A + B) + C;$
5	$A + B = B + A;$
6	$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta;$
7	$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad (A + B)\alpha = A\alpha + B\alpha;$
8	$A + 0 = 0 + A = A;$

El producto de la matriz B de dimensiones $p \times n$ con los elementos b_{ij} por la matriz A de dimensiones $n \times m$ con los elementos a_{ij} es la matriz C de dimensiones $p \times m$ con los elementos c_{ij} , ecuación 1:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} \dots \dots \dots (1)$$

Para $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m$. El producto de las matrices se designa con la fórmula 2.

$$C = BA \dots \dots \dots (2)$$

Si:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

con x_i en F , entonces AX es la matriz $m \times 1$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

tal que $y_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n \dots \dots \dots (3)$

Las operaciones de adición y de multiplicación de matrices rectangulares cumplen las relaciones de la tabla 3.

Tabla 3. Relaciones

1	$A + B = B + A$
2	$(A + B) + C = A + (B + C)$
3	$A + 0 = A$
4	$A + (-A) = 0$
5	$A(BC) = (AB)C$
6	$(A + B)C = AC + BC$
7	$C(A + B) = CA + CB$

Resumen de operaciones de matrices

1. La suma $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$, $A+B$ es de orden $m \times n$
2. La resta $A-B = (a_{ij} - b_{ij})$, $A-B$ es de orden $m \times n$
3. El producto por un escalar k $kA = (ka_{ij})$, kA es de orden $m \times n$
4. El producto de A con B se define si y solo si A es de orden $m \times n$ y B de orden $n \times p$

Entonces $C = AB$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ y C es de orden $m \times p$

Ejemplo:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ calcular}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1(0) - 2(-1) + 1(5) & 1(8) - 2(1) + 1(1) & 1(2) - 2(-2) + 1(0) \\ 9(0) + 0(-1) + 0(5) & 9(8) + 0(1) + 0(1) & 9(2) + 0(-2) + 0(0) \\ 2(0) + 3(-1) - 1(5) & 2(8) + 3(1) - 1(1) & 2(2) + 3(-2) - 1(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 0 & 72 & 18 \\ -8 & -18 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ calcular}$$

a) $5A - B$

b) BA

2.3 Clasificación de las matrices.

Definición: La matriz nula, tiene los elementos son iguales a cero, y se designa O . si se se escribe O_{mn} para indicar su número de filas y de columnas.

Definición: Una matriz cuadrada tiene el mismo número de filas y columnas.

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n , se llama diagonal con a_{ij} , tal que $i = j$, si los componentes que no están en la diagonal principal son cero.

Definición: Una matriz diagonal A de orden n , se llama matriz identidad, si las componentes son 1 y se denota por I_n .

(a) Si I es la matriz identidad $m \times m$ es una matriz $m \times n$, $IA = A$

(b) Si I es la matriz identidad $n \times n$ y A es una matriz $m \times n$, $AI = A$

(c) Si es la matriz nula $k \times m$, $0^{n,m} = 0^{n,m} A$. En forma similar, $A0^{n,p} = 0^{n,p}$

Definición. Una matriz $m \times m$ se dice elemental $n \times m$ si por medio de una sola operación elemental simple de filas se obtiene la matriz identidad.

Una matriz 2×2 es elemental si es una de las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ con } c \neq 0$$

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n , se llama triangular superior si todos sus componentes son cero debajo de la diagonal principal y se llama triangular inferior si todos sus componentes son cero arriba de la diagonal principal.

Definición: Dada A una matriz de orden $m \times n$, la matriz transpuesta de A se obtiene al cambiar filas por columnas, obteniendo una matriz de orden $n \times m$, se denota por A^t

Teorema: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n , k un escalar, tales que las operaciones indicadas están bien definidas. Entonces:

$$1. (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

$$2. (AB)^t = B^t A^t$$

$$3. (kA)^t = kA^t$$

$$4. (A^t)^t = A$$

Definición: La matriz cuadrada de orden n A , es simétrica, si $A^t = A$.

Definición: La matriz cuadrada de orden n A , es asimétrica, si $A^t = -A$.

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n cuando es igual a su cuadrado, es decir, $A^2 = A$, es idempotente.

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n es linealmente independiente de orden k si $A^k = 0$

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n es involutiva si y solo si $A^2 = 1$.

Ejemplos:

$$a) \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es una matriz diagonal}$$

$$c) I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz identidad de orden } n$$

Ejercicios:

a) Escribir la matriz identidad de orden 5

b) Escribir la matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 Transformaciones elementales por renglón. Escalonamiento de una matriz. Núcleo y rango de una matriz

Las operaciones elementales por renglones en una matriz A de orden $m \times n$, dan paso a la determinación de la matriz inversa de una matriz invertible. Así como a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Dada una matriz A de orden $m \times n$ se denotará el i -ésimo renglón por R_i

Definición: Sea A una matriz de orden $m \times n$, se pueden definir las operaciones elementales por renglones como sigue

1. *Intercambiar renglones*, es decir cambiar las componentes del i -ésimo renglón por las componentes del j -ésimo renglón, se denota por $R_i \leftrightarrow R_j$
2. *Multiplicar un escalar por un renglón*; es decir las componentes de un renglón se multiplican por un escalar k , se denota por $kR_i \leftrightarrow R_i$
3. *Sumar un múltiplo de renglón a otro renglón*; es decir multiplicar un renglón por un escalar k y sumarlo a otro renglón, se denota por $kR_i + R_j \leftrightarrow R_j$

La matriz B obtenida de las operaciones elementales se llama matriz semejante a A .

Definición: Una matriz A de orden $m \times n$ es escalonada si:

1. Si hay renglones nulos con componentes cero, aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. En el primer renglón, el pivote que es el primer componente debe ser un 1.

3. En cualquier renglón, el primer pivote del renglón subsiguiente debe estar más a la derecha que el pivote de tal renglón.

Definición: Una matriz A de orden $m \times n$ es escalonada reducida si es escalonada, y cumple que por arriba y por abajo del pivote todas las componentes son cero.

Eliminación Gaussiana

Sea A una matriz de orden $m \times n$

Paso 1 Elegir el primer pivote en la componente a_{11}

Paso 2 Hacer cero todas las componentes que estén debajo del pivote.

Paso 3 Con el pivote más próximo se hacen cero las componentes que estén debajo.

Paso 4 Repetir el paso 3 hasta la última columna.

Reducción Gauss - Jordan

Sea A una matriz de orden $m \times n$

Paso 1 Realizar las operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada.

Paso 2 Realizar las reducciones gaussianas para hacer cero todas las componentes que se encuentran arriba del pivote en su columna correspondiente. Empezar con el pivote de más abajo y de más a la derecha de la matriz del paso 1.

Paso 3 Obtener la matriz en su forma escalonada reducida, repitiendo el paso 2 con los demás pivotes, avanzando de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda.

Definición: Sea A una matriz de orden $m \times n$. El núcleo de una matriz es el conjunto de vectores solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A

Definición: Sea A una matriz de orden $m \times n$. El Rango de la matriz es el conjunto generado por las columnas no cero de la matriz escalonada equivalente a la matriz transpuesta de A

Ejemplo:

Calcular la matriz equivalente a A escalona y escalona reducida. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \leftrightarrow R_2 \\ -2R_1 + R_3 \leftrightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & -13 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 + R_3 \leftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{13} R_2 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz escalonada es $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Continuando

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -8R_2 + R_1 \leftrightarrow R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/13 \\ 0 & 1 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz escalonada reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/13 \\ 0 & 1 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Calcular la matriz equivalente a A escalona y escalona reducida.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.5 Cálculo de la inversa de una matriz.

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n , decimos que A es invertible (o no singular) si existe una matriz cuadrada B de orden n , tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B se le llama matriz inversa de A y se denota por A^{-1} , por lo que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Gauss-Jordan para obtener la matriz inversa.

1. Denotar el sistema de forma $(A|I_n)$.
2. Calcular la matriz escalona reducida equivalente a A
3. La parte derecha será la matriz inversa.

$$\text{Esto es } (A|I_n) \Leftrightarrow (I_n|A^{-1})$$

Ejemplo:

Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 11/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{11}R_1 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/11 & 2/11 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2 + R_1 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/11 & -3/11 \\ 0 & 1 & 1/11 & 2/11 \end{array} \right)$$

Entonces, A es una matriz invertible y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Determina la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.6 Definición de determinante de una matriz.

Definición. Para una matriz cuadrada $A = \|a_{ij}\|$, de orden $n + 1$ toman, por definición, en la ecuación 4.

$$\det \|a_{ij}\| = a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + a_{13}|A_1^3| - \dots + (-1)^n a_{1,n+1}|A_1^{n+1}| \dots \dots \dots (4)$$

donde $|A_1^j|$ es el valor del determinante de la matriz de orden n que se obtiene de la matriz A suprimiendo la primera fila y la j -ésima columna ($j = 1, \dots, n + 1$).

Método de Cofactores

El menor a_{ij} denotado por M_{ij} o $|A_{ij}|$, es el determinante que resulta de suprimir la fila i y la columna j en un determinante.

Por ejemplo: Considérese el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Hállese el menor M_{11} para esto se elimina la primera fila y columna.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - 6(4) = -19$$

El menor M_{12} es el determinante que se obtiene después de eliminar la fila 1 y la columna 2 en el determinante es:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 42 = -33$$

Definición

El coeficiente i,j denotado por c_{ij} se define

por: $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ Por ejemplo:

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 56 = -53$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(18 - 72) = 54$$

La ley de Sarrus nos permite resolver determinantes de orden tres, el método de cofactores es utilizado para resolver determinantes de cualquier orden. Dado el determinante A de orden cuatro, este determinante se puede resolver por cualquier fila o por cualquier columna utilizando el método de cofactores. Para resolver un determinante por cofactores seleccionamos la fila o columna con el mayor número de ceros.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}$$

La matriz está encerrada, entre dos paréntesis, llaves y/o corchetes, en un medio de trabajo y/o real son la base de datos, u organización de información con la que se cuenta a diario, mientras los determinantes están encerrados entre dos barras parecidas a las de valor absoluto, y son una función de la matriz que representa un valor numérico de la misma. Para calcular un determinante por el método de cofactores, se selecciona el cofactor o coeficiente de la matriz que se ubica a manera de pivote sin incluir la fila y columna que se intersecan en este elemento, para con ellos organizar el determinante a calcular.

Ejemplos:

Resolver el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) : \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(0) + 1(0) + 3(0) + 2(0) = 0$$

Hallar el valor determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8-1) + 3(6-5) + (-5) (-3-20) = 109$$

Una matriz cuadrada A es no singular si tiene inversa B por la izquierda que $BA = I$. Y es también inversa por la derecha, $AB = I$. Se designa la inversa por A^{-1} .

Teorema: Si una matriz A es no singular, y $\det A \neq 0$ y entonces:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \dots \dots \dots (5)$$

Demostración. Según la fórmula del producto tenemos la ecuación 6.

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1 \dots \dots \dots (6)$$

Luego $\det A \neq 0$ y la ecuación 6 es cierta.

Los elementos de la matriz inversa con los menores de la matriz A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{m1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{m2}}{d} \\ \frac{A_{1m}}{d} & \frac{A_{1m}}{d} & \dots & \frac{A_{mm}}{d} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

Aquí d , es el determinante de la matriz A ; A_{ij} el componente algebraico del elemento A .

El menor, dispuesto en las filas $i_1, i_2, \dots, i_p$ y en las columnas $j_1, j_2, \dots, j_p$ se designará mediante

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

Corolario. El producto de los determinantes es igual a él determinante del producto de dos matrices cuadradas $\det C = \det A * \det B$

Sea A una matriz de tamaño de 2×2 , se define y denota el determinante de A como:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \dots \dots \dots (9)$$

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden n , se define el menor M_{ij} de la componente a_{ij} como el determinante de la matriz de orden $n - 1$, que se obtiene al eliminar el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de A . El cofactor C_{ij} de la componente a_{ij} es $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Usar patrón de signos de cofactores $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$, para los determinantes de

orden mayor a 2

Definición: Sea A una matriz de orden n cuadrada, el determinante de A es la suma de los elementos del primer renglón de A , multiplicados por su respectivo cofactor.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \dots + a_{1n} C_{1n} \dots \dots \dots (10)$$

Ejemplo:

Calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) = -141 + 0 - 76 = -217 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 4 \cdot (-(12 + 9)) + 7 \cdot (-4 - 15) + 0 \cdot (-(6 - 30)) = -84 - 133 + 0 = -217 \end{aligned}$$

Ejercicios: Calcular los siguientes determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.7 Propiedades de los determinantes.

Teorema: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n , k un escalar, tales que las operaciones indicadas están bien definidas. Entonces:

$$1. \det(AB) = \det(A) \det(B).$$

$$2. \det(kA) = k^n \det(A)$$

$$3. \det(A^t) = \det(A)$$

$$4. \text{ Si } A \text{ es invertible, } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$5. \text{ Si } A \text{ es triangular (superior o inferior), entonces } \det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Teorema: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n .

1. Si B se obtiene a partir de A al intercambiar renglones, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
2. Si B se obtiene a partir de A al multiplicar un renglón por un escalar k entonces $\det(B) = k \det(A)$.
3. Si B se obtiene de A al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón de A , entonces $\det(B) = \det(A)$.

Teorema: Una matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Teorema: Sean A una matriz cuadrada de orden n , entonces $\det(A) = 0$, si A

1. Tiene un renglón de ceros.
2. Tiene dos renglones o columnas iguales.
3. Tiene un renglón o columna múltiplo de otro renglón o columna.

Ejemplos:

1. Calcular los siguientes determinantes (usar teoremas).

Considerando que $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$ y $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

- a) $\det(AB) = 5(3)=15$
- b) $\det(2A) = 2^2 \det(A) = 4(5)=20$
- c) $\det(B^t) = 5$
- d) Si B es invertible, $\det(B^{-1}) = \frac{1}{3}$

2. Si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ Calcula los determinantes de

a) $\det(B) = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -4$, ya que $R_1 \leftrightarrow R_2$

b) $\det(B) = \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3(4) = 12$, ya que $3R_1 \leftrightarrow R_1$

c) $\det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{vmatrix} = 4$, ya que $2R_1 + R_2 \leftrightarrow R_2$

Ejercicios:

1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 , tales que $\det(A) = 4$ y $\det(B) = 2$,

Calcular los siguientes determinantes. A partir de los teoremas.

a) $\det(AB) =$

b) $\det(-5B) =$

c) $\det(B^t) + \det(4A) =$

d) ¿ A es invertible? $\det(A^{-1}) =$

2. Si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ Calcula los determinantes de

a) $B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4d & 4e & 4f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

$$\text{b) } \det(B) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3g+d & 3g+e & 3g+f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \det(B) = \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \det(B) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

2.8 Inversa de una matriz cuadrada a través de la adjunta.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $BA = I$, siendo I la matriz identidad $n \times n$, entonces A se llama no singular y B la inversa de A por la izquierda.

Teorema: La matriz A es no singular si y sólo si T es invertible. Si $BA = I$, entonces $B = m(T^{-1})$.

Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, está representado por:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \dots\dots\dots(15)$$

que se puede escribir, de una manera más simple, como una ecuación matricial

$$AX = C, \dots\dots\dots(16)$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de los coeficientes, y X y C matrices columna,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

Si A es no singular, la única solución del sistema está dada por $X = A^{-1}C$.

Ejemplos:

- Hallar por determinantes la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución

Obtenemos la determinante

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54$$

Obtenemos la matriz adjunta

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz traspuesta de A^*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

Dividimos la traspuesta de la adjunta entre la determinante:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & -\frac{1}{54} \\ -\frac{9}{54} & -\frac{9}{54} & \frac{9}{54} \\ \frac{4}{54} & -\frac{14}{54} & \frac{2}{54} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & -\frac{1}{54} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

- Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ Si A es invertible calcular A^{-1}

Solución:

$\det A = 3 \neq 0$, entonces A es invertible.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 12 & 13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 12 & 13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

comprobación

$$A^{-1}A = 1/3 \begin{bmatrix} 12 & 13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = I$$

- Calcular la inversa de la matriz usando el determinante y la adjunta

$$\text{Sea } A) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ Si } A \text{ es invertible calcular } A^{-1}$$

Solución:

$\det A = -1 \neq 0$ por lo tanto A^{-1} existe.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

así
$$A^{-1} = 1/1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- Calcular la adjunta de una matriz determinante de 3×3

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ Calcular $\text{adj } A$

Solución: Se tiene $A_{11} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 12, A_{12} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = -3, A_{13} = -3, A_{21} = -13$

$A_{22} = 5, A_{23} = 2, A_{31} = -7, A_{32} = 2$ Y $A_{33} = 2$ así, $\begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Y $\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- Calcular la adjunta de una matriz determinante de 4×4

Sea $A) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Calcular $\text{adj } A$.

Solución:

$A_{12} = - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -1, A_{24} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -2$ Y $A_{43} = - \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{bmatrix} = 3$

Al comparar estos cálculos se encuentra que

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{adj } A = B^T = b) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Definición: Sea A matriz de orden n definimos la matriz de cofactores como

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

Donde C_{ij} es el cofactor de la componente a_{ij}

La matriz transpuesta de cofactores de A se le llama matriz adjunta de A y se denota por:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

Teorema: Sea A una matriz invertible de orden n . Entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$

Ejemplo:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Verifica si es invertible y en caso de serlo encuentra su inversa

Solución

Primero verificamos que A una matriz invertible, $\det(A) = -5$

Obtener matriz de cofactores

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz adjunta

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 15 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Por Teorema

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 15 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Verifica si es invertible y en caso de serlo encuentra su inversa.

2.9 Aplicación de matrices y determinantes

Teorema: El Área de un triángulo cuyos vértices son los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$

en $\mathbb{R}^2$, está dada por $\text{Área} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, el signo $\pm$ se elige para obtener un área positiva

Teorema: El volumen de un tetraedro con vértices en los puntos

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ y $S(x_4, y_4, z_4)$ en $\mathbb{R}^3$, está dado por

$$\text{Volúmen} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

el signo $\pm$ se elige para obtener un área positiva.

Ejemplos:

- a) Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P(0, 0)$, $Q(5, 1)$ y $R(3, 7)$

Solución:

$$\text{Área} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(32) = 16$$

- b) Determina el volumen del tetraedro con vértices $P(0, 0, 0)$, $Q(4, 6, 0)$, $R(-4, 6, 0)$ y $S(2, 2, 5)$ en $\square^3$, está dado por

$$\text{Volúmen} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Volúmen} = -\frac{1}{6}(-240) = 40$$

Ejercicios:

- a) Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P(1, 0)$, $Q(-5, 4)$ y $R(3, -4)$ en $\square^2$.

- b) Determina el volumen del tetraedro con vértices

$$P(0, 0, 0), Q(4, 6, 1), R(-4, 6, 1) \text{ y } S(2, 2, -5) \text{ en } \square^3.$$

Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL

NOMBRE DEL DOCENTE: _____

Rubrica para calificar las competencias genéricas (Tarea por equipo).

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____
FECHA: _____ TEMA 2. Matrices y determinantes Calificación: _____

	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Problemas que cubren uno o más indicadores de alcance	Modelado del problema, es la descripción textual, incluye las figuras que lo describen 0%	Seleccionar las variables e incógnitas, con sus respectivas unidades, y/o Diagrama de Cuerpo Libre y/o esquema representativo 0%	Plantear la hipótesis de solución, fórmulas y/o algoritmos para resolver el problema 0%	Hacer los cálculos y operaciones, paso a paso, incluye documentar dichas operaciones 0%	Analizar los resultados y evaluar los resultados obtenidos con sus unidades y expresar las conclusiones 34%	Ponderación
1.Resuelve problemas de aplicación de Matrices y determinantes						
2.Resuelve problemas de aplicación de Matrices y determinantes						
3.Resuelve problemas de aplicación de Matrices y determinantes						

Total

Modelado del problema: Una empresa quiere amueblar dos oficinas. Una necesita 20 sillas, 5 escritorios y 3 computadoras; para la otra 15 sillas, 3 escritorios y 2 computadoras. Las sillas cuestan \$120 cada una, los escritorios \$500 y cada computadora cuesta \$650, cuáles son las cantidades totales invertidas en cada una de las oficinas expresadas como producto de matrices.	Figura
Seleccionar variables: Costos Cantidades Gastos	
Planteamiento de hipótesis: Para expresar las cantidades gastadas en las dos oficinas como de producto de matrices, podemos utilizar una matriz que represente los costos de cada tipo de artículo y otra matriz que represente las cantidades compradas para cada oficina.	
Cálculo de resultados $\text{Costos} = \begin{bmatrix} 120 & 500 & 650 \end{bmatrix}$ $\text{Cantidades} = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\text{Gastos} = \text{Cantidades} * \text{Costos}$ $\text{Gastos} = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 120 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix}$ $\text{Gastos} = \begin{bmatrix} 2400 & 2500 & 1950 \\ 1800 & 1500 & 1300 \end{bmatrix}$ $\text{Gastos} = \begin{bmatrix} 6850 \\ 4600 \end{bmatrix}$	Comentarios
Analizar Por lo tanto, la empresa gastó \$6,850 en la primera oficina y \$4,600 en la segunda oficina para amueblarlas según las cantidades y precios dados.	

Modelado del problema: Una economía hipotética tiene tres industrias: carbón, electricidad y acero y tres consumidores 1, 2 y 3. Cada consumidor utiliza parte de la producción de cada industria y cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras industrias. Las necesidades de cada consumidor y de cada industria se representan con un vector de demanda con la cantidad de carbón, electricidad y acero necesarios para el consumidor o industria.	Figura:
Seleccionar las variables: $D_1, D_2, D_3, C_C, D_E, D_S$ serán las variables empleadas	Diagrama de cuerpo libre:
Hipótesis: Empezaremos sacando y determinando las 3 primeras variables para después continuar con las siguientes 3 y finalmente sumarlas	
Cálculo de resultados: Consumidores: $D_1 = [3 \ 2 \ 5] \ D_2 = [0 \ 17 \ 1] \ D_3 = [4 \ 6 \ 12]$ Industrias: $D_S = [0 \ 1 \ 4] \ D_E = [20 \ 0 \ 8] \ D_C = [30 \ 5 \ 0]$ Los subíndices C, E y S son para carbón, electricidad. La demanda total de los consumidores es la suma $D_1 + D_2 + D_3 = [3 \ 2 \ 5] + [0 \ 17 \ 1] + [4 \ 6 \ 12]$ $= [7 \ 25 \ 18]$ La demanda industrial total está dada por la suma $D_C + D_E + D_S = [0 \ 1 \ 4] + [20 \ 0 \ 8] + [30 \ 5 \ 0]$ $= [50 \ 6 \ 12]$ La demanda global total está dada por $[7 \ 25 \ 18] + [50 \ 6 \ 12] + [57 \ 31 \ 30]$	
Analizar: La industria del carbón vende 57 unidades, la industria de la electricidad vende 31 y la industria del acero vende 30.	

Modelado del problema: Un contratista tiene pedidos para 5 casas estilo rustico, 7 estilo moderno y 12 estilo colonial. Sus pedidos se representan con el vector renglón $Q = [5 \ 7 \ 12]$ Las materias primas son de acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Las entradas de la matriz R dan el número de unidades de cada materia prima que se utilizan en cada tipo de casa.	Figura:
Seleccionar las variables: Las variables empleadas son C, QRC, RC, Q, QR	Diagrama de cuerpo libre:
Hipótesis: Lo resolveremos a través de cada uno de los renglones los cuales indican el tipo de materia prima que se necesita para un tipo de casa en específico y por lo que cada columna señala la cantidad de una materia prima dada para cada tipo de casa.	
Cálculo de resultados: La información anterior dada está representada por la siguiente matriz $QR = [5 \ 7 \ 12] \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}$ $= [146 \ 526 \ 260 \ 158 \ 388]$ Así el contratista analiza 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio. El contratista quiere saber los costos que tendrá que pagar por estos materiales. Suponga que el acero cuesta \$2500 por unidad, la madera \$1200 por unidad y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan \$800, \$150 y \$1500 por unidad. Estos datos pueden escribirse como el vector columna de costos $C = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}$ El costo para cada tipo de casa es: $RC = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75850 \\ 81550 \\ 71650 \end{bmatrix}$	Comentarios: En mi opinión podemos ver que el uso de las matrices determinadas nos es de bastante utilidad para poder determinar algunos costos sobre distintas cotizaciones que podemos llegar a tener de tanto en materiales como en las mismas cantidades de estos

En consecuencia, el costo de los materiales para la casa rústica es de \$75 850, para la casa estilo moderno \$81 550 y para la de estilo colonial \$71 650. El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por $QRC = Q(RC) = [5 \ 7 \ 12] \begin{bmatrix} 75 \ 850 \\ 81 \ 550 \\ 71 \ 650 \end{bmatrix} = [1 \ 809 \ 900]$ El costo total es de \$1 809 900	
Analizar: El costo de los materiales Casa rustica es de \$75 850, Casa estilo moderno \$81 550 y Casa de estilo colonial \$71 650. El costo de la materia prima para todas las casas es $QRC = Q(RC) = [5 \ 7 \ 12] \begin{bmatrix} 75 \ 850 \\ 81 \ 550 \\ 71 \ 650 \end{bmatrix} = [1 \ 809 \ 900]$	

Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
BÁSICAS
EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: DR. ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 2: Matrices y determinantes CALIF: _____

RESUELVA LOS EJERCICIOS, COLOCANDO SU DESARROLLO COMPLETO, CLARO Y ORDENADO.

Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Indicadores de alcance cubiertos por los reactivos del examen en forma directa uno a uno.	Procedimiento y resultado correctos 25%	Un matemático en el desarrollo del procedimiento 15%	Máximo dos errores matemáticos en el desarrollo del procedimiento 10%	Procedimiento incorrecto. Desconocer competencia previa. Tres o más errores matemáticos. Dato incorrecto. 0%	Ponderación
Resuelve operaciones aritméticas entre matrices y escalares.					
Obtiene la inversa de una matriz por la forma escalonada					
Aplica los conceptos de menores y cofactores para cálculo de determinantes.					
Calcula la inversa por el método de la adjunta					
Examen Escrito		Escala		Calificación final del Tema	

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcular

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

se realiza el producto por el escalar 2

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & -2+16 & 1+4 \\ 9-2 & 0+2 & 0-2 \\ 2+10 & 3+2 & -1+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 14 & 5 \\ 7 & 2 & -2 \\ 12 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

Construir una matriz del tipo $M = (A \mid I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow 3F_2 + F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & : & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \leftarrow F_1 - F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & 0 & : & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow \frac{1}{15}F_2, \quad F_3 \leftarrow \frac{1}{3}F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Calcular determinantes por cofactores

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(0-0) - 1(0-4) + 2(4-0) \\ &= 8 \end{aligned}$$

4. Hallar por la adjunta la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Obtenemos la determinante

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Obtenemos la matriz adjunta

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 14 & -9 \\ 4 & -8 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz traspuesta de A^*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 14 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Dividimos la traspuesta de la adjunta entre la determinante:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{14}{4} & \frac{8}{4} & -\frac{2}{4} \\ \frac{9}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica
Práctica virtual: Matrices y determinantes

Objetivo: Conocer los comandos elementales para realizar operaciones con matrices en el lenguaje de SageMath.

Indicaciones: Ingresa a la dirección <https://sagecell.sagemath.org/> , aparecerá una pantalla similar a la siguiente.

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
1 A=matrix([[1,-1,2],[3,4,5],[0,1,-1]])
2 B=matrix([[0,2,1],[3,0,5],[7,6,0]])
3 C=matrix([[0,0,2],[3,1,0],[0,-2,4]])
4
5
6 detA=A.det() #determinante de A
7 show('detA = ',detA) #muestra en pantalla el determinante de A
8 R=4*C-3*B+3*A #operación con matrices
9 show('R = ',R) #muestra en pantalla el resultado de la operación 4*C-3*B+3*A
10 invR=R.inverse()
11 show('invR = ',invR)
12
```

Evaluate

```
detA = - 6
R = 
$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ 12 & 16 & 0 \\ -21 & -23 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{168} & -\frac{17}{336} & -\frac{11}{168} \end{pmatrix}$$

```

En la sección de código las primeras tres líneas definen las entradas de las matrices A,B,C.

```
1 A=matrix([[1,-1,2],[3,4,5],[0,1,-1]])
2 B=matrix([[0,2,1],[3,0,5],[7,6,0]])
3 C=matrix([[0,0,2],[3,1,0],[0,-2,4]])
```

Puedes cambiar las entradas según el ejercicio que vayas a resolver. Para calcular el determinante de una matriz se usa el comando `nombredelaMatriz.det()`, para calcular el determinante

se ingresa `A.det()`, este resultado se puede guardar en una variable cuyo nombre aluda a la cantidad que se ha calculado, por ejemplo, `detA`, es decir

```
6 detA=A.det() #determinante de A
```

Los comentarios en el código se escriben después del símbolo `#` y únicamente sirven para guiar al usuario, es decir, dan una breve explicación de lo que significa la línea correspondiente. Puedes cambiarlos según lo requieras. Para mostrar el resultado en pantalla se usa el comando `show( nombredelavariabreamostrar)`, por ejemplo, si deseo mostrar el determinante de A, se ingresa la instrucción

```
7 show('detA = ',detA) #muestra en pantalla el determinante de A
```

o también puede quedar como

```
7 show(detA) #muestra en pantalla el determinante de A
```

No obstante, `show('detA = ',detA)` imprime en pantalla el texto `'detA = '` además del valor numérico de la variable `detA` y con ello puedes identificar rápidamente en la sección de resultados dicha cantidad, como se observa en la siguiente figura.

Evaluate

```
detA = -6
R = 
$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ 12 & 16 & 0 \\ -21 & -23 & 13 \end{pmatrix}$$

```

Para calcular la inversa de una matriz, se ingresa el comando `nombredelaMatriz.inverse()`, se guarda en una variable, por ejemplo, `invR`, y se muestra en pantalla con el comando `show`, es decir:

```
10 invR=R.inverse()
11 show('invR = ',invR) #muestra en pantalla la inversa de la matriz 4*C-3*B+3*A
```

que arroja

$$\text{invR} = \begin{pmatrix} \frac{13}{168} & -\frac{17}{336} & -\frac{11}{168} \\ -\frac{13}{224} & \frac{45}{448} & \frac{11}{224} \\ \frac{5}{224} & \frac{43}{448} & \frac{13}{224} \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, realizar las operaciones indicadas	
Operación	Resultado con SageMath
$4C - 3B + 3A$	$R = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 11 \\ 12 & 16 & 0 \\ -21 & -23 & 13 \end{pmatrix}$
$5A + 2B - C$	
$ 5A + 2B - C $	
$A - 10B - C$	
$8A + A + 6B - 10C$	

$ 8A + A + 6B - 10C $	
A^{-1}	
$(5A + 2B - C)^{-1}$	
B^{-1}	
C^{-1}	
$(8A + A + 6B - 10C)^{-1}$	
$(A - B)^{-1}$	

3. Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1 Definición de sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, pueden ser de una o más variables.

Ejemplo, la ecuación lineal con tres incógnitas $3x + 2y + 6z = 6$.

Una recta en el plano se representa por una ecuación lineal de 2 incógnitas.

Un plano en el espacio se representa por una ecuación de 3 incógnitas.

Definición: Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables se representa de la forma:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Nomenclatura

Coeficientes: Números reales a_{ij}

Incógnitas: Variables x_j

Términos independientes: Constantes b_i

Matriz ampliada: Sistema de m ecuaciones lineales con n variables

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

Matriz de coeficientes: A

Vector de incógnitas: x

Vector de constantes: b

También se puede expresar como producto de matrices $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definición: Un sistema se llama sistema homogéneo si cada una de sus ecuaciones son igual a cero, esto es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Observación a un sistema

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \quad \text{se le asocia el sistema}$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - \sqrt{x_3} = -1 \end{cases} \quad \text{es un sistema de dos ecuaciones, pero la segunda no es lineal ya}$$

que la potencia de x_3 es $\frac{1}{2}$.

$$c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - \quad - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \text{ es un sistema de 4 ecuaciones lineales y 3 variables}$$

A un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $Ax = b$ se le puede asociar el sistema homogéneo $Ax = 0$. Además, para identificar que es lineal las m ecuaciones deben de ser de grado uno.

Ejercicios:

1. Escribe el sistema homogéneo asociado a

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 x_3 - x_1 = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + 2b - 4c = 1 \\ -a + b - c = 1 \\ 5a - b - 3c = 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - \quad - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3.2 Clasificación de los sistemas de ecuaciones y tipos de solución

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar en dos: en consistentes y en inconsistentes de acuerdo con sus soluciones que pueden ser que un sistema tenga solo una solución, que no tenga solución o que tenga una infinidad de soluciones.

Las soluciones de un sistema de ecuaciones:

Un sistema de ecuaciones cumple una de las siguientes afirmaciones:

1. El sistema tiene solución única, en este caso se dice que el sistema *es consistente de solución única*
2. El sistema tiene infinitas soluciones, en este caso se dice que el *sistema es consistente con soluciones infinitas*
3. El sistema no tiene solución, entonces se dice que el *sistema es inconsistente*.

Teorema: $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, con el determinante de la matriz de coeficientes diferente de cero. Entonces el sistema tiene solución única.

Teorema: Si $Ax = 0$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, con el determinante de la matriz de coeficientes diferente de cero. Entonces el sistema tiene solución única, y la solución nula (cero).

Si $Ax = b$ tal que $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene solución única, en otro caso puede tener soluciones infinitas o no tener solución.

Si $Ax = 0$ tal que $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene solución única, en otro caso puede tener soluciones infinitas

Ejemplos:

- Considere el sistema
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
. Si se suman las dos ecuaciones se tiene que $2x = 12$, es decir, $x = 6$. Entonces $y = -1$. Por lo que el sistema tiene una solución.

- Considere el sistema $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$. Se observa que una ecuación es múltiplo de la otra.

Así que $(x, x - 7)$ es solución al sistema para cualquier número real x . Por lo que, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

- Considere el sistema $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{cases}$. Al multiplicar por 2 la primera ecuación se tiene que

$2x - 2y = 14$ lo cual contradice a la segunda ecuación y así el sistema no tiene solución.

Ejercicios:

1. Encontrar condiciones de a , b , y c para que los sistemas dados sean consistentes.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = a \end{cases}$$

2. Determinar los valores de a , b y c de forma que la solución del sistema ecuaciones sea

(a) única solución, (b) sin solución y (c) un número infinito de soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \end{cases}$$

3.3 Interpretación geométrica de las soluciones

Un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas se representa con 2 líneas rectas el sistema tiene solución única cuando las rectas tienen un punto de intersección; y un número infinito de soluciones cuando coinciden; si son paralelas, el sistema no tiene solución.

Cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas, en lugar de ser rectas se trata de planos en 3 dimensiones.

1. Los tres planos se interceptan en un punto, con solución única.
2. Los tres planos se intersecan en una recta, cada punto de la recta es solución y se da un número infinito de soluciones.
3. Los tres planos coinciden al 100%, cada punto en el plano es solución y se da un número infinito de soluciones.
4. Dos planos coinciden e intersecan a un tercer plano una recta, cada punto de la recta es solución y se da un número infinito de soluciones.
5. Dos de los planos son paralelos y distintos, ningún punto puede estar en ambos y no hay solución, se da un sistema inconsistente.
6. Dos de los planos coinciden en una recta L y el tercer plano es paralelo a la recta L y no contiene a L, ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros planos, no hay solución y se da un sistema inconsistente.
7. Los tres planos paralelos no coinciden y no hay solución para el sistema de 3x3.
8. Los tres planos coinciden en pares, pero no tienen los tres simultáneamente una línea o un punto en común y no hay solución para el sistema de 3x3.

Ejemplos:

- Sea el sistema $\begin{cases} 3x - y = -7 \\ x + y = 4 \end{cases}$, resolviendo el sistema por el método grafico este queda

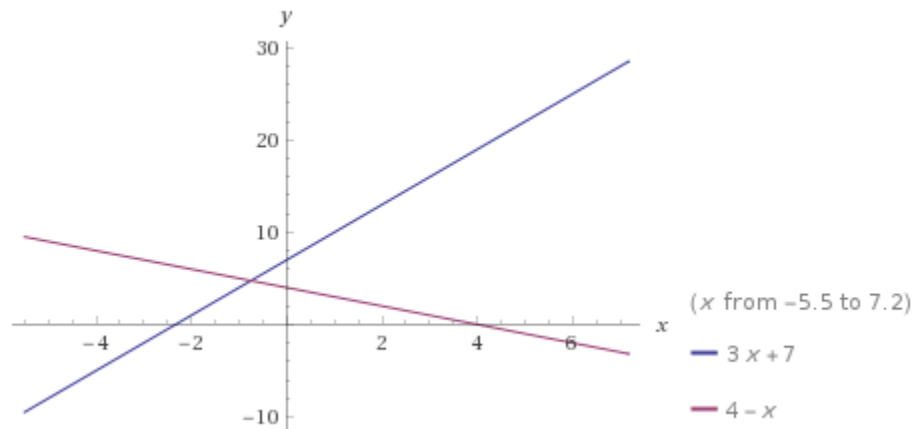


Figura 1 realizada en wólfam Alpha, se observa que el único punto de intersección de las dos

rectas es $(-\frac{3}{4}, \frac{19}{4})$.

- Sea el sistema $\begin{cases} 3x - y = -7 \\ 3x - y = -14 \end{cases}$, resolviendo el sistema por el método grafico

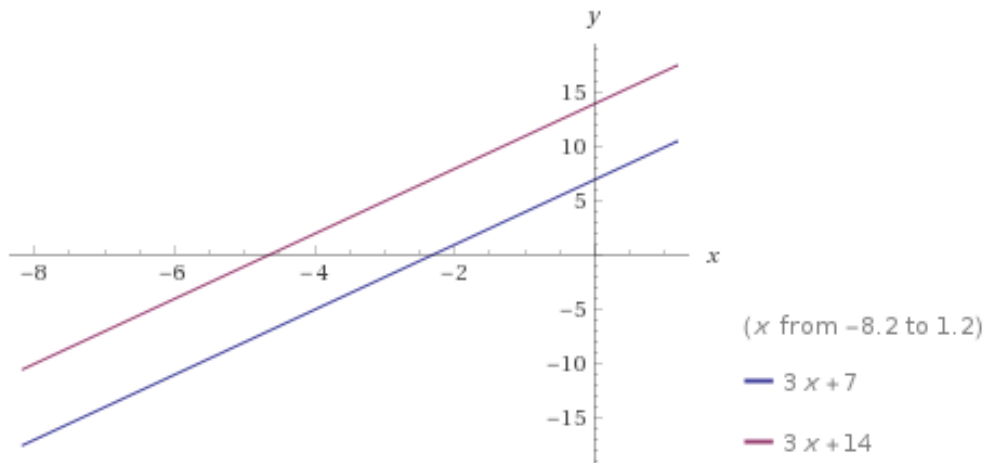


Figura 2 realizada en wólfam Alpha, se observa que las dos rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.

Ejercicios:

- 1) Resuelve el sistema por el método gráfico los siguientes sistemas y determina si el sistema tiene solución única, número infinito de soluciones o es inconsistente.

$$a) \begin{cases} 5x - 5y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 4y = 5 \\ -x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 6x + 15y = 30 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$$

3.4 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

- a) Método por eliminación gaussiana con reducción hacia atrás.

Sea $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n variables.

Paso 1 Escribir el sistema en la forma ampliada $(A|b)$

Paso 2 Con las operaciones elementales por renglones, encontrar la matriz escalonada por renglones. (importante realizarlo de derecha a izquierda)

Paso 3 Escribe el sistema de ecuaciones lineales de la matriz escalonada y aplicar sustitución hacia atrás.

- b) Método Gauss - Jordan

Paso 1 Sea $Ax = b$ un sistema lineal de $m \times n$, escribir en la forma ampliada $(A|b)$

Paso 2 Con las operaciones elementales por renglones, encontrar la matriz escalonada reducida por renglones. (importante realizarlo de derecha a izquierda)

Paso 3 Escribir la solución del sistema de ecuaciones lineales.

c) Método Regla de Cramer

Sea $Ax = b$ un sistema lineal de $m \times n$, tal que $\det(A) \neq 0$. La solución única del sistema

$$\text{es: } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Donde A_i es la matriz que resulta la cambiar la i -ésima columna por el vector de constantes.

d) Método por matriz inversa

Sea $Ax = b$ un sistema lineal de $m \times n$, tal que $\det(A) \neq 0$. La solución única del sistema

$$\text{es } x = A^{-1}b$$

Ejemplos:

- Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \text{ por el método de Gauss-Jordan.} \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Primero reescribimos el sistema en forma de matriz aumentada y luego continuamos realizando operaciones por renglones:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Así que la solución del sistema es

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

- Resuelve el sistema

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \text{ por el método regla de Cramer}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Primero calculamos el determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ y vemos que si tiene una única

solución. Después

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{12}{6} = -2$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

- Resuelve el sistema

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \text{ por el método de la matriz inversa.}$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Se nota que el sistema lo podemos reescribir como
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, notemos que tiene inversa ya que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5/6 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11/6 & -5/3 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11/6 & 5/3 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Resolver el siguiente sistema por el Método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - t = 0 \\ -3y + 2z + 6t = -8 \\ -3x - y + 3z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = -8 \end{cases}$$

Solución

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 6 & -8 \\ -3 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & -8 \end{array} \right)$$

Realizamos operaciones elementales fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida:

Sumamos a las filas tercera y cuarta la primera multiplicada por 3 y por -2, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

Sumamos a las filas primera, segunda y tercera la cuarta multiplicada por 2, -3 y 5, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & -22 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 34 & 3 & -40 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

Multiplicamos la cuarta fila por -1 y la intercambiamos con la segunda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & -8 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 34 & 3 & -40 \\ 0 & 0 & -22 & 3 & 16 \end{array} \right)$$

Multiplicamos las filas tercera y cuarta por 1/34 y -1/22, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & -8 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/34 & -40/34 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -8/11 \end{array} \right)$$

Le restamos la tercera fila a la cuarta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & -8 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/34 & -40/34 \\ 0 & 0 & 0 & -42/187 & 84/187 \end{array} \right)$$

Multiplicamos la cuarta fila por -187/42:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & -8 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/34 & -40/34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Le sumamos a las filas primera y segunda la tercera multiplicada por -13 y 8, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/34 & -12/17 \\ 0 & 1 & 0 & -5/17 & -24/17 \\ 0 & 0 & 1 & 3/34 & -40/34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Le sumamos a las filas primera, segunda y tercera la cuarta multiplicada por 5/34, 5/17 y -3/34, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado y su solución es

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -2 \\ z &= -1 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

- Resolver el siguiente sistema por el Método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 7z = 1 \\ 5x \quad \quad + z = 2 \end{cases}$$

Solución

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Realizamos operaciones elementales fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida

Multiplicamos las filas primera y segunda por 1/3 y por 1/6, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 7/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{array} \right)$$

Restamos a la segunda fila la tercera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -13/6 & 0 \end{array} \right)$$

Sumamos a la primera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -13/6 & 0 \end{array} \right)$$

Multiplicamos la tercera fila por 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -13/2 & 0 \end{array} \right)$$

Esta última matriz ya tiene forma escalonada reducida, por lo que podemos calcular fácilmente los rangos:

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -13/2 & 0 \end{array} \right) = 2$$

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & -13/2 \end{array} \right) = 2$$

Como son iguales, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. Es indeterminado porque el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones. La matriz obtenida representa el sistema

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}z$$

$$y = \frac{13}{2}z$$

Las soluciones del sistema son

$$x = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right)$$

$$y = \frac{13}{2} \lambda$$

$$z = \lambda \in \mathbb{R}$$

- Resolver el siguiente sistema por el Método de Matriz Inversa

$$\begin{cases} -x + z = 1 \\ 2x + 2y = 0 \\ -x - z = 3 \end{cases}$$

Solución

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 4. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices $A^{-1}A^{-1}$ y b :

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} \cdot b = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

- Resolver el siguiente sistema por el Método de Matriz Inversa

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Solución

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 14. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices $A^{-1} \cdot b$ y b :

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} \cdot b = \\ &= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicios: Resolver los sistemas de ecuaciones lineales por el método indicado.

$$1) \text{ Método de Gauss-Jordan} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

2) Regla de Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

3) Método matricial

$$x = A^{-1}b \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + 16x_2 - 8x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases}$$

4) Método de Gauss-Jordan, con solución particular para el valor de $z=1$.

$$\begin{cases} x + iy - iz = 0 \\ -x + (1-i)y + 2iz = 0 \\ 2x + (-1+2i)y - 3iz = 0 \end{cases}$$

3.5 Aplicaciones

En esta sección de aplicación a sistemas de ecuaciones debemos tomar importancia a realizar un buen planteamiento de un problema y a resolverlo con algún método visto anteriormente.

Pasos para resolver problemas de aplicación:

- 1) Identificar y asignar variables a objetos del problema
- 2) Plantear un sistema de ecuaciones con las variables asignadas
- 3) Resolver el sistema de ecuaciones con algún método visto anteriormente (M. de Gauss-Jordan, M. de regla de Cramer, M. de la matriz inversa, M. de la matriz aumentada, etc.)

Ejemplos:

- El largo de un rectángulo es dos veces el ancho de éste. El perímetro del rectángulo es de 30 cm. ¿Cuál es el largo y cuál es el ancho?

Solución: Planteamos el sistema, asignado x para el ancho y y para el largo. Así el sistema queda

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2y = 30 \end{cases}$$

Si sustituimos y en la segunda ecuación tenemos que $6x = 30$, entonces $x = 5$. Así que $y = 10$. Por lo tanto, el largo vale 10 u y el ancho 5u. Notemos que el sistema tiene solución única.

- Se proporcionan 3 tipos de comida a un lago que alberga a 3 especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 unidades del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3. Cada semana se proporciona al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 del 3. Y los peces se comen todo el alimento ¿En el lago, ¿cuántos peces por especie pueden coexistir?

Solución: Primero hacemos el planteamiento del problema. Sean x_1, x_2, x_3 el número de especies de cada especie. Así que

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25000$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 20000$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 55000$$

Resolvemos el sistema por algún método visto anteriormente

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20000 \\ 1 & 5 & 5 & | & 55000 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$x_1 = 40000 - 5x_3$$

$$x_2 = x_3 - 5000$$

Si se elige arbitrariamente a x_3 se tiene un número infinito de soluciones, pero como se debe cumplir que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, entonces $x_2 = x_3 - 5000 \geq 0$ y

$x_1 = 40000 - 5x_3 \geq 0$. Por lo que $x_3 \geq 5000$ y $8000 \geq x_3$, es decir, $5000 \leq x_3 \leq 8000$. Si por ejemplo $x_3 = 6000$, entonces $x_1 = 10000$ y $x_2 = 1000$.

El sistema da número infinito de soluciones.

El problema de administración de recursos tiene un número finito de soluciones, x_1, x_2, x_3 son enteros positivos y hay 3001 enteros en el intervalo $[5000, 8000]$.

Ejercicios:

- 1) El importe de una compra de refrescos, cerveza y vino es de \$500 sin impuestos. El costor del vino es \$60.00 menos que el costo de los refrescos y el costo de la cerveza. Los refrescos pagan IVA del 6%, la cerveza IVA del 12% y el vino IVA del 30%, la factura con impuestos es de \$592.40, ¿Cuál es la cantidad invertida en cada tipo de bebida?
- 2) La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, hace años la diferencia de las edades actuales de los hijos, la edad del padre era triple que la suma de las edades de sus hijos. Cuando pasen los años de la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de los tres padre e hijos será 150. ¿Cuántos años tenía el padre al nacer sus hijos?

Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL

NOMBRE DEL DOCENTE: _____

Rubrica para calificar las competencias genéricas (Tarea por equipo).

ALUMNO(A): _____

CARRERA: _____

FECHA: _____

TEMA 3. Sistemas de ecuaciones lineales

Calificación: _____

	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Problemas que cubren uno o más indicadores de alcance	Modelado del problema, es la descripción, incluye las figuras que lo describen 0%	Seleccionar las variables e incógnitas, con sus respectivas unidades, y/o Diagrama de Cuerpo Libre y/o esquema representativo 0%	Plantear la hipótesis de solución, fórmulas y/o algoritmos para resolver el problema 0%	Hacer los cálculos y operaciones, paso a paso, incluye documentar dichas operaciones 0%	Analizar los resultados y evaluar los resultados obtenidos con sus unidades y expresar las conclusiones 50%	Ponderación
1.Resuelve problemas de aplicación de Sistemas de ecuaciones lineales						
2.Resuelve problemas de aplicación de Sistemas de ecuaciones lineales						

Total

Modelado del problema	
Supongamos que estás planificando un viaje en tren y tienes dos opciones para llegar a tu destino: un tren exprés y un tren regular. El tren expresó recorre una distancia de 300 km a una velocidad promedio de 150 km/h, mientras que el tren regular recorre la misma distancia a una velocidad promedio de 100 km/h. Quieres llegar a tu destino en un tiempo específico y necesitas determinar cuántos kilómetros tomar el tren expreso y cuántos kilómetros tomar el tren regular para cumplir con tu horario.	
Selección de variables	
Sea "x" la distancia en kilómetros que recorres en el tren exprés. Sea "y" la distancia en kilómetros que recorres en el tren regular. Tiempo del tren exprés = $x / 150$ Tiempo del tren regular = $y / 100$	
Planteamiento de hipótesis	
Para resolver el sistema, se utiliza el método de eliminación.	
Cálculo de resultados	Comentarios
$100x + 150y = 300$ <i>(Tiempo total del viaje en minutos)</i> $(100x + 150y) + (x + y) = 300 + 300$ $101x = 600$ $x = 600 / 101 \approx 5.94 \text{ km}$ $5.94 + y = 300$ $y = 300 - 5.94 \approx 294.06 \text{ km}$	La solución del sistema de ecuaciones muestra que para llegar a tu destino en 2 horas
Analizar	
La solución del sistema de ecuaciones muestra que, para llegar a tu destino en 2 horas, debes tomar el tren exprés y recorrer aproximadamente 5.94 km y luego cambiar al tren regular para recorrer aproximadamente 294.06 km. Con esta combinación, alcanzarás tu destino en el tiempo deseado.	

Modelado del problema	
Imagina que quieres comprar boletos para un concierto de tu banda favorita. Hay dos tipos de boletos disponibles: boletos regulares y boletos VIP. Los boletos regulares cuestan \$30 cada uno y los boletos VIP cuestan \$50 cada uno. Tienes un presupuesto máximo de \$200 para la compra de boletos y deseas obtener un total de 6 boletos para ti y tus amigos.	
Selección de variables	
Vamos a definir las variables que representan el número de boletos regulares y el número de boletos VIP que deseas comprar. Denotaremos el número de boletos regulares como "x" y el número de boletos VIP como "y". $30x + 50y = \text{Costo total de boletos}$ $x + y = 6$ (Cantidad total de boletos)	
Planteamiento de hipótesis	
Se comprarán x boletos regulares y y boletos VIP. El costo total de los boletos no debe exceder el presupuesto de \$200. El número total de boletos comprados debe ser igual a 6 (la cantidad que deseas obtener).	
Cálculo de resultados	Comentarios
$30x + 50y = \text{Costo total de boletos}$ $x + y = 6$ $30x + 50y \leq 200$	Finalmente, resolveremos el sistema de ecuaciones (1) y (2) junto con la desigualdad (3) para encontrar el número de boletos regulares y VIP que cumplen con nuestras condiciones.
Analizar	
Al resolver el sistema de ecuaciones y la desigualdad, encontramos que el número de boletos regulares es $x = 2$ y el número de boletos VIP es $y = 4$. Esto nos da un costo total de boletos de $\$30(2) + \$50(4) = \$20 + \$200 = \$220$. Como el costo total excede nuestro presupuesto de \$200, es necesario ajustar la cantidad de boletos VIP comprados para cumplir con nuestras condiciones.	

Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: DR. ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____
 FECHA: _____ TEMA 2: Sistemas de ecuaciones lineales CALIF: _____

Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Indicadores de alcance cubiertos por los reactivos del examen en forma directa uno a uno, que se aplican en la solución de sistemas de ecuaciones lineales	Procedimiento y resultado correctos 25%	Un matemático en el desarrollo del procedimiento 15%	Máximo dos errores matemáticos en el desarrollo del procedimiento 10%	Procedimiento incorrecto. Desconocer competencia previa. Tres o más errores matemáticos. Dato incorrecto. 0%	Ponderación
Método de Gauss inconsistente					
Método de Gauss-Jordan,					
Método de la matriz inversa					
Método de la Regla de Cramer					
Examen Escrito		Escala		Calificación final del Tema	

Solucionar los sistemas de ecuaciones lineales por el método indicado

1. Método de Gauss

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = -2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$

Solución: La matriz ampliada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Restando la primera fila de la segunda, restando la primera fila de la tercera y restando la primera fila triplicada de la cuarta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{matrix}$$

Sumando la tercera fila triplicada a la segunda y sumando la tercera fila duplicada a la cuarta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -14 \\ -4 \\ -14 \end{matrix}$$

Restando la segunda fila de la cuarta y dividiéndola por -14

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -14 \\ -4 \\ 1 \end{matrix}$$

Pero ésta es la matriz ampliada del sistema

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 4x_3 = -4$$

la solución del sistema es

$$x_3 = 1,$$

$$x_2 = -4 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 = 2 - 3 = -1$$

2. Resolver el siguiente sistema por el Método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases}$$

Solución

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Realizamos operaciones elementales fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida:

A la segunda fila le restamos la primera y a la tercera se la sumamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Multiplicamos la primera fila por 1/2 y la segunda por 1/3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por 1/2 y a la tercera, la segunda multiplicada por -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 17/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 2/3 \end{array} \right)$$

Multiplicamos la tercera fila por 1/3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 17/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right)$$

Sumamos a la primera fila la tercera multiplicada por -3/2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right)$$

Esta última matriz es la escalonada reducida (lo sabemos porque tenemos la matriz identidad).

Calculamos los rangos:

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right) = 3$$

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = 3$$

Como los rangos coinciden y son máximos, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado. La solución del sistema es

$$x = 5/2$$

$$y = 2/3$$

$$z = 2/9$$

3. Resolver el siguiente sistema por el Método de Matriz Inversa

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Solución

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 7. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} \cdot b = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

4. Empleando las fórmulas de Cramer, resolver el sistema de ecuaciones

$$x + 2y + 3z = 7,$$

$$x - 3y + 2z = 5,$$

$$x + y + z = 3$$

Solución.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -3 + 3 + 4 + 9 - 2 - 2 = 9 \neq 0$$

$$D1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -21 + 15 + 12 + 27 - 10 - 14 = 9$$

$$D2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 5 + 14 + 9 - 15 - 7 - 6 = 0$$

$$D3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -9 + 7 + 10 + 21 - 6 - 5 = 18$$

Por consiguiente,

$$x = \frac{D1}{D} = 1, \quad y = \frac{D2}{D} = 0, \quad z = \frac{D3}{D} = 2$$

Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica

Práctica virtual: Solución de sistemas de ecuaciones lineales usando inversa de matriz de coeficientes

Objetivo: Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de la matriz inversa en el lenguaje de SageMath.

Indicaciones: Ingresa a la dirección <https://sagecell.sagemath.org/> , aparecerá una pantalla similar a la siguiente.

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
1 #Solución de sistema de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de coeficientes
2 A=matrix([[2,1,-3],[1,-2,1],[3,4,-2]])
3 B=matrix([[5],[10],[0]])
4 X=A.inverse()*B
5 show('X = ',X) #solución
6
```

Evaluate

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En la sección de código las primeras tres líneas definen las entradas de las matrices A,B. Donde A es la matriz de coeficientes del sistema a resolver y B es la matriz columna de los coeficientes constantes. Por ejemplo, para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ingresamos

```
2 A=matrix([[2,1,-3],[1,-2,1],[3,4,-2]])
```

Mientras que los miembros derechos quedan como

```
3 B=matrix([[5],[10],[0]])
```

La solución al sistema se sabe que es $x = A^{-1}B$, en SageMath se escribe como

```
4 X=A.inverse()*B
```

Y finalmente para mostrar en pantalla usamos el comando show

```
5 show('X = ',X) #solución
```

Al dar clic en el botón Evaluar nos arrojará:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es la solución al sistema.

Ejercicio: Resolver los sistemas de ecuaciones lineales con el método de la inversa $x = A^{-1}B$	
Sistema	Solución con SageMath
$\cdot \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$	$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	
$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \end{cases}$	
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$	
$\begin{cases} A + B + 3C + D = 0 \\ A + B + C + D = 1 \\ A - 2B + C - D = 1 \\ 4A + B + 8C - D = 0 \end{cases}$	

4. Espacios Vectoriales

4.1 Definición de espacio vectorial

Definición: Un conjunto de vectores, con dos operaciones binarias suma y multiplicación por un escalar, se llama Espacio Vectorial si satisface los siguientes axiomas

Axiomas de la suma

1. Cerradura. Si $u \in V$ y $v \in V$, $\rightarrow u + v \in V$
2. Asociativa. Para todo $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Neutro Aditivo. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $u \in V$,
$$u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$$
4. Inverso aditivo Si $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$
5. Conmutativa Si $u \in V$ y $v \in V \rightarrow u + v = v + u$

Axiomas del producto por escalar

6. Cerradura. Si $u \in V$ y α es un escalar, $\rightarrow \alpha u \in V$.
7. Distributiva. Si $u, v \in V$ y α es un escalar, $\rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Distributiva. Si $u \in V$ y α y β son escalares, $\rightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
9. Asociativa. Si $u \in V$ y α y β son escalares, $\rightarrow (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
10. Neutro multiplicativo. Para cada vector $u \in V$, $1u = u$

Teorema. Sea V un espacio vectorial.

- i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α
- ii) $\mathbf{0} \cdot u = \mathbf{0}$ para todo $u \in V$
- iii) Si $\alpha u = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $u = \mathbf{0}$ (o ambos)
- iv) $(-1)u = -u$ para toda $u \in V$

Un conjunto V es un espacio vectorial si se verifican los 10 axiomas, y no será un espacio vectorial si solo alguno de los 10 axiomas no se cumple.

- Sea $V = \{0\}$. Veamos si cumple los 10 axiomas:

1. Si $0 \in V$ y $0 \in V$ entonces $0 + 0 = 0 \in V$
2. Para todo $0, 0, 0 \in V$, $(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0)$
3. Existe $0 \in V$ tal que para todo $0 \in V$, $0 + 0 = 0$
4. Si $0 \in V$, existe $-0 = 0 \in V$ tal que $0 + (-0) = 0$
5. Si $0 \in V$ y $0 \in V$ entonces $0 + 0 = 0 + 0$
6. Si $0 \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha 0 = 0 \in V$
7. Si $0 \in V$ y $0 \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0 = 0$
8. Si $0 \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta) 0 = \alpha 0 + \beta 0 = 0$
9. Si $0 \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha\beta)0 = \alpha(\beta 0) = 0$
10. Para cada vector $0 \in V$, $1 \cdot 0 = 0$

Por lo tanto V es un espacio vectorial trivial

Ejemplos:

- Sea $V = \{1\}$. Veamos si cumple los 10 axiomas:

Para verificar que no es un espacio vectorial basta con ver que no cumple uno de los 10 axiomas. Para este ejemplo podemos ver que no cumple el axioma 1: ya que $1 \in V$, pero $1 + 1 = 2 \notin V$. Por lo tanto, V no es un espacio vectorial.

- Sea $V = C[a, b]$ el conjunto de funciones continuas de reales definidas en el intervalo

$[a, b]$. Se define $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Veamos que cumple los 10 axiomas

1. Si $f \in V$ y $g \in V$ entonces $f + g \in V$
2. Para todo $f, g, h \in V$, $(f + g) + h = f + (g + h)$
3. Existe $0 \in V$ tal que para todo $f \in V$, $f + 0 = 0 + f = f$

4. Si $f \in V$, existe $-f \in V$ tal que $f + (-f) = \mathbf{0}$
5. Si $f \in V$ y $g \in V$ entonces $f + g = g + f$
6. Si $f \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha f \in V$
7. Si $f \in V$ y $g \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
8. Si $f \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
9. Si $f \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$
10. Para cada $f \in V$, $1 \cdot f = f$

Por lo tanto, V es un espacio vectorial.

- El espacio de n-tuplas F . Sea F un cuerpo y sea V el conjunto de las n-tuplas $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares x_i de F . Si $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de escalares y_i de F , la suma de α y β se define por: $\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

El producto de un escalar c por el vector α es $c\alpha = (c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_n)$

La adición vectorial y multiplicación escalar cumplen las condiciones de elementos de F .

- El espacio de matrices $m \times n$. Sea F cualquier cuerpo y sea m y n enteros positivos.

Sea $F_{m \times n}$ el conjunto de las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo F . La suma de dos vectores

A y B en $F_{m \times n}$ es: $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

El producto de un escalar c por la matriz A se define por $(cA)_{ij} = cA_{ij}$

Ejercicios, utilizando la definición de espacio vectorial y sus condiciones establecidas de cumplimiento:

1. Demostrar si el conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial.
2. Determinar si el conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un espacio vectorial de $M_{2 \times 2}$.
3. Determinar si V es un espacio vectorial, si $V = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2\}$ y $c \in \mathbb{R}$, se definen

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2) \text{ y } c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2).$$

4. Determinar si el conjunto $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un espacio vectorial de $M_{2 \times 2}$.

5. Sea $V = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2\}$ y $c \in \mathbb{R}$, se definen $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 - b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$. Determinar si V es un espacio vectorial.

4.2 Definición de subespacio vectorial y propiedades

Todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que por sí mismos también satisfacen la definición de espacio vectorial.

Definición: H es un subespacio de V , si H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y además H es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar en V .

Teorema: Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si:

- i) Si $u \in H$ y $v \in H$, entonces $u + v \in H$.
- ii) Si $u \in H$, entonces $\alpha u \in H$ para todo escalar α .

Teorema: $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V . Si H_1 y H_2 son dos subespacios de V .

Sea $H = \{0\}$ un subconjunto de cualquier espacio vectorial V . Veamos si cumple las dos reglas de cerradura del teorema

- i) Si $0 \in H$ y $0 \in H$, entonces $0 + 0 = 0 \in H$.
- ii) Si $0 \in H$, entonces $\alpha 0 = 0 \in H$ para todo escalar α

Por lo tanto, H es un subespacio de cualquier espacio vectorial V .

Subespacio propio de $\mathbb{R}^2$

Sea $H = \{(x, y, z) : x = at, y = bt, z = ct ; a, b, c, t \text{ reales}\}$. Veamos que cumplen las reglas del teorema:

- i) Si $x \in H$ y $y \in H$ $x = (x_1, y_1, z_1)$ y $y = (x_2, y_2, z_2)$

Entonces
$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ &= (a(t_1 + t_1), b(t_1 + t_1), c(t_1 + t_1)) \\ \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} &\in H \quad \text{ya que } t_1 + t_1 \text{ es real} \end{aligned}$$

ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha \mathbf{x} = (a(\alpha t_1), b(\alpha t_1), c(\alpha t_1)) \in H$ para toda escalar α
ya que αt_1 es real

Subconjunto que no es un subespacio propio de M_{nn}

Sea $V = M_{nn}$ y sea $H = \{A \in M_{nn} : A \text{ es invertible}\}$. H no es subespacio ya que $0A = \mathbf{0} \notin H$ la matriz cero no está en H .

Desde un punto de vista de sistemas algebraicos, se debe de tomar en cuenta el concepto de cuerpo, que dice que: Un cuerpo algebraico es un conjunto de elementos algebraicos que se pueden combinar mediante operaciones de adición y multiplicación, y que cumplen con ciertas propiedades básicas. Estas propiedades incluyen la existencia de un elemento neutro para la operación de adición (el cero), un elemento neutro para la operación de multiplicación (el elemento unitario), y la asociatividad y la conmutatividad de ambas operaciones. Los cuerpos algebraicos pueden ser finitos o infinitos, y pueden ser definidos sobre un campo algebraico, como el campo real o el campo complejo.

Para verificar que un conjunto es un subespacio se tienen que cumplir las dos reglas del teorema y para ver que no es un subespacio con un ejemplo particular que no cumple una de las dos reglas es suficiente.

Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de R son subespacios de R^n ($n \geq 3$)?

- (a) $\forall$ los α tal que $\alpha_1 \geq 0$;
- (b) $\forall$ los α tal que $\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$
- (c) $\forall$ los α tal que $\alpha_2 = \alpha_1$;
- (d) $\forall$ los α tal que $\alpha_1\alpha_2 = 0$;
- (e) $\forall$ los α tal que α_2 es racional.

2. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de R en R . ¿Cuál de los siguientes conjuntos de funciones son espacios de V ?

- (a) $\forall$ las funciones f tales que $f(x) = f(x)$
- (b) $\forall$ las funciones f tales que $f(0) = f(1)$;
- (c) $\forall$ las funciones f tales que $f(3) = 1 + f(-5)$;
- (d) $\forall$ las funciones f tal que $f(- - 1) = 0$;
- (e) $\forall$ las funciones f que son continuas.

3. ¿El vector $(3, -1, 0, -1)$ es elemento del subespacio de R^n generado por $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ y $(1, 1, 9, -5)$?

4. Determinar si $W = \{(a, -a, 2a)\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

5. Determinar si el subconjunto $H = \{S \in M_{mn} \mid S \text{ es simétrica}\}$, es un subespacio vectorial de M_{mn}

6. Determinar si $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \right\}$ es un subespacio de $M_{2 \times 2}$

7. Determinar si $H = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $V = \mathbb{R}^2$

4.3 Combinación lineal, Independencia lineal

Definición. La combinación lineal de elementos de S , es el subconjunto S no vacío de un espacio lineal V , de un elemento $X \in V$ de la forma $X = \sum_{i=1}^k c_i x_i$ en donde $x_1, \dots, x_k$ pertenecen todos a S y $c_1, \dots, c_k$, son escalares.

El conjunto las combinaciones lineales finitas de elementos de S , si satisface los axiomas de clausura es un subespacio de V .

Se ha visto que todo vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma $v = ai + bj + ck$ Se dice que v es una combinación lineal de los vectores i, j, k .

Definición: Sean los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de un espacio vectorial V . Entonces se denomina combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$ a cualquier vector de la forma $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares

Definición: Si todo vector en V es una combinación lineal, se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de un espacio vectorial V generan a V . Es decir, para todo $v \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

Definición: Sea que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V . El espacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $v_1, v_2, \dots, v_n$. Es decir $gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{v: v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n\}$ donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares arbitrarios.

Teorema: Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores en un espacio vectorial V , entonces $gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un subespacio de V .

La combinación lineal permite expresar un vector como una suma ponderada de otros vectores, lo que es esencial para entender las transformaciones lineales y la representación de sistemas de ecuaciones lineales. Por otro lado, la independencia lineal se refiere a un conjunto de vectores

que no pueden ser expresados como combinaciones lineales de los demás, lo que implica que cada vector en el conjunto aporta información única.

Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente independientes si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$

y se cumple $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente dependientes si el vector 0 en V es una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$ con coeficientes no todos iguales a cero.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^3$ el vector $(-7, 7, 7)$ es una combinación lineal de los vectores $(-1, 2, 4)$ y $(5, -3, 1)$

porque $(-7, 7, 7) = 2(-1, 2, 4) - (5, -3, 1)$

2. Conjunto generador en $\mathbb{R}^2$

Sea $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $H = \text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v: v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

Si $v = (x, y) \in H \Rightarrow (x, y) = a_1(1, 2) + a_2(3, 4) \Rightarrow (x, y) = (a_1 + 3a_2, 2a_1 + 4a_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3a_2 = x \\ 2a_1 + 4a_2 = y \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por algún método (podría ser por Gauss-Jordan) se tiene

que $a_1 = \frac{3y-4x}{2}, a_2 = \frac{2x-y}{2}$ son los escalares tales que

$(x, y) = a_1(1, 2) + a_2(3, 4)$. Por lo tanto, H es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios

1. Es linealmente independiente el conjunto de vectores $\{(1, -2, 1, 1), (3, 0, 2, -2), (0, 4, -1, 1), (5, 0, 3, -1)\}$

2. Determinar si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial dado:

a) En $\mathbb{R}^3: \{(1, -1, 2), (1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$

b) En $\mathbb{R}^3: \{(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$

3. Determinar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M_{2 \times 2}$

4. Determinar que el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente o es linealmente dependiente:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.4 Base y dimensión de un espacio vectorial, cambio de base

Definición. Una base del espacio vectorial V es un subconjunto de vectores linealmente independiente elementos de V , que generan el espacio vectorial V .

Teorema: Sea el espacio vectorial V generado por los vectores $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, que expresan un conjunto finito de tamaño m , entonces todo conjunto independiente de vectores de V es finito y con menos o igual a m elementos.

La dimensión finita de un espacio vectorial es el número de elementos de una base cualquiera de V ($\dim V$)

Corolario: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

(a) Cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores es linealmente dependiente

(b) Ningún subconjunto de V que contenga menos de n vectores puede generar V .

La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores en su base. El cambio de base es una transformación lineal que permite expresar un vector en términos de otra base, utilizando una matriz de cambio de base.

En $\mathbb{R}^2$ se ha visto que conviene escribir vectores como una combinación lineal de los vectores

$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esta idea se generaliza para vectores en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo:

Base canónica para P_3 . Veamos que el conjunto $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para P_3 .

Primero veamos que $1, x, x^2, x^3$ son linealmente independientes. Suponga que

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 0$$

esto se debe cumplir para todo número real x .

En particular si $x = 0$, se obtiene $c_0 = 0$. Entonces, haciendo que $x = 1, -1, 2$ se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\-c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 0\end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. De manera que el

sistema tiene única solución $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así que $1, x, x^2, x^3$ son linealmente

independientes. Como cualquier polinomio en P_3 se puede escribir como una combinación

lineal de $1, x, x^2, x^3$, entonces $1, x, x^2, x^3$ generan a P_3 . Por lo tanto $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para P_3 .

Para ver que un conjunto de vectores es una base para un espacio vectorial hay que ver que se cumplan las dos reglas de la definición, es decir, comprobar que el conjunto de vectores es linealmente independiente y además genera al espacio vectorial. Para ver que no es una base, con verificar que no se cumple una de las dos partes de la definición, por lo regular lo que no se cumple es que los vectores no son linealmente independientes.

Ejercicios:

1. Determinar cuáles de los conjuntos son bases para $P_2(\mathbb{R})$

a) $\{-1 - x + 2x^2, 2 + x - 2x^2, 1 - 2x + 4x^2\}$

b) $\{1 + 4x - 2x^2, -2 + 3x - x^2, -3 - 12x + 6x^2\}$

2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$

a) $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$

b) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

4.5 Espacio vectorial con producto interno y propiedades

El producto escalar de los vectores $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es el número real $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Un producto interno sobre un espacio vectorial es una función con propiedades similares a las del producto escalar en $\mathbb{R}^3$, y en términos de tal producto interno se puede también definir longitud y ángulos.

Definición. Sean F el cuerpo de los números reales, o de los complejos y V un espacio vectorial sobre F . Un producto interno sobre V es una función que asigna a cada ordenado de vectores α, β de V un escalar $\alpha\beta$ de F de tal modo que, para cualesquiera α, β de V y todos los escalares c

(a) $(\alpha + \beta) = (\alpha) + (\beta)$

(b) $(c\alpha\beta) = c(\alpha\beta)$

(c) $(\beta\alpha) = (\alpha\beta)$ donde se indica la conjugación compleja

(d) $(\alpha\alpha) > 0$, con $\alpha \neq 0$

Debe observarse que las condiciones a, b y c implican que

$$(\alpha|c\beta + r) = c(\alpha|\beta) + (\alpha|r) \dots\dots\dots(3)$$

Si F es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, los complejos conjugados (c) y (d) no aplican; para números complejos son necesarios para la consistencia de las condiciones y evitar la contradicción:

$$(\alpha|\alpha) > 0 \text{ y } (i\alpha|i\alpha) = -1(\alpha|\alpha) > 0. \dots\dots\dots(4)$$

Definición: Un espacio producto interno es un espacio real o complejo junto con un producto interno definido sobre ese espacio.

Un espacio producto interno real de dimensión finita se llama a menudo espacio euclidiano. Un espacio con producto interno complejo se llama a veces espacio unitario.

En F^n existe un producto interno que se llama producto interno canónico.

Está definido sobre $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ y $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ por

$$(\alpha|\beta) = \sum_j x_j y_j. \dots\dots\dots(5)$$

Definición: Si para cada par ordenado $\langle u, v \rangle$, de vectores V en existe un número complejo único $\langle u, v \rangle$, denominado producto interno de u y v , entonces, se define como un espacio vectorial complejo V con producto interno, tal que si u, v y $w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, cumple:

- i) $\langle v, v \rangle \geq 0$
- ii) $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$
- iii) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- v) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- vi) $\langle \alpha u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
- vii) $\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$

La barra en v) y en vii) indica complejo conjugado. Si $\langle u, v \rangle$ es un escalar real, entonces $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ y se puede eliminar la barra en v).

Producto interno en $\mathbb{C}^n$

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en $\mathbb{C}^n$.

Entonces $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$

Recordemos que $\langle x, x \rangle = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$, ya que $|x_j|^2 \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$
- ii) $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ se cumple ya que $|x_j|$ es un número real
- iii)
$$\begin{aligned}\langle x, y + z \rangle &= x_1 \overline{(y_1 + z_1)} + x_2 \overline{(y_2 + z_2)} + \dots + x_n \overline{(y_n + z_n)} \\ &= (x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}) + (x_1 \overline{z_1} + x_2 \overline{z_2} + \dots + x_n \overline{z_n}) \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle\end{aligned}$$
- iv)
$$\begin{aligned}\langle u + v, w \rangle &= (x_1 + y_1) \overline{z_1} + (x_2 + y_2) \overline{z_2} + \dots + (x_n + y_n) \overline{z_n} \\ &= (x_1 \overline{z_1} + x_2 \overline{z_2} + \dots + x_n \overline{z_n}) + (y_1 \overline{z_1} + y_2 \overline{z_2} + \dots + y_n \overline{z_n}) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle\end{aligned}$$
- v)
$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} \\ &= \overline{y_1 x_1} + \overline{y_2 x_2} + \dots + \overline{y_n x_n} \\ &= \overline{y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n} = \overline{\langle y, u \rangle}\end{aligned}$$
- vi)
$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y \rangle &= \alpha x_1 \overline{y_1} + \alpha x_2 \overline{y_2} + \dots + \alpha x_n \overline{y_n} \\ &= \alpha (x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}) = \alpha \langle x, y \rangle\end{aligned}$$
- vii)
$$\begin{aligned}\langle x, \alpha y \rangle &= x_1 \overline{\alpha y_1} + x_2 \overline{\alpha y_2} + \dots + x_n \overline{\alpha y_n} \\ &= \overline{\alpha} x_1 \overline{y_1} + \overline{\alpha} x_2 \overline{y_2} + \dots + \overline{\alpha} x_n \overline{y_n} \\ &= \overline{\alpha} (x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}) = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

Producto interno de dos vectores en $\mathbb{C}^3$

En $\mathbb{C}^3$ sean $x = (1 + i, -3, 4 - 3i)$ y $y = (2 - i, -i, 2 + i)$

$$\langle x, y \rangle = (1 + i) \overline{(2 - i)} + (-3) \overline{(-i)} + (4 - 3i) \overline{(2 + i)}$$

$$\langle x, y \rangle = (1 + i)(2 + i) + (-3)(i) + (4 - 3i)(2 - i)$$

$$\langle x, y \rangle = (1 + 3i) + (-3i) + (5 - 10i)$$

$$\langle x, y \rangle = 6 - 10i$$

Para que $\langle u, v \rangle$ sea un producto interno se tiene que verificar que se cumplan los siete puntos de la definición, y para ver que no es un producto interno solo hay que mostrar con un ejemplo particular que no se cumple alguno de los siete puntos de la definición.

Ejemplos:

- Sean los vectores $\bar{u} = (0, -1, 1, 2)$ y $\bar{v} = (2, 1, 1, 0)$. Al aplicar el producto escalar ordinario en cuartetos ordenados reales se llega a

$$\begin{aligned}\bar{u} \cdot \bar{v} &= (0, -1, 1, 2) \cdot (2, 1, 1, 0) \\ &= (0)(2) + (-1)(1) + (1)(1) + (2)(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo que los vectores son ortogonales.

- Para el subespacio $S = \{(w, x, 2w - x, z) \mid w, x, z \in \mathbb{R}\}$, encuéntrase un conjunto ortogonal. Se inicia con un vector arbitrario del subespacio $\bar{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 &= (1, 1, 1, 1) \cdot (w, x, 2w - x, z) \\ 0 &= 3w + z\end{aligned}$$

El segundo vector es $\bar{v}_2 = (w, x, 2w - x, -3w)$, o bien $\bar{v}_2 = (1, 1, 1, -3)$. El tercer vector es

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = 3w + z$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 &= (1, 1, 1, \\ &\quad -3) \cdot (w, x, 2w \\ &\quad - x, z) \quad 0 = 3w \\ &\quad - 3z\end{aligned}$$

Al sustituir las dos condiciones, se obtiene el vector $\bar{v}_3 = (0, x, -x, 0)$, que con valores es $\bar{v}_3 = (0, 1, -1, 0)$. Finalmente, el conjunto ortogonal es

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -3), (0, 1, -1, 0)\}$$

- Sea el subespacio $A = \{(w, x, x, w) \mid w, x \in \mathbb{R}\}$. ¿Cuál es su complemento ortogonal, con respecto al producto escalar ordinario?

En este problema se debe elegir una base de A , la cual planteará la ortogonalidad con otro subespacio de los cuartetos reales ordenados. La base elegida será:

$$\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$$

Por lo que se tiene que

$$(1, 0, 0, 1) \cdot (w, x, y, z) = 0$$

$$(0, 1, 1, 0) \cdot (w, x, y, z) = 0$$

De estas dos operaciones se obtienen las condiciones $w + z = 0$ y $x + y = 0$ del complemento ortogonal de A :

$$A^\perp = \{(-z, -y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

Si se realiza el producto escalar entre (w, x, x, w) y $(-z, -y, y, z)$ se obtiene

$$(w, x, x, w) \cdot (-z, -y, y, z) = -wz - xy + xy + wz$$

cuyo resultado es cero.

Ejercicios:

1- Verificar si la siguiente expresión es un producto interno:

$$\langle u, v \rangle = 4u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2$$

2- Sean $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$, comprobar que

$$\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 4u_2v_2 \text{ es un producto interno.}$$

3- Comprobar si la operación binaria

$$u, v = u_1v_1 + 2u_2v_1 + 2u_1v_2 + 8u_2v_2 \text{ es producto interno.}$$

4.6 Base ortonormal, proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Teorema de ortonormalización: En un espacio euclídeo V , una sucesión finita o indefinida de elementos $x_1, x_2, \dots$, y sea el subespacio generado por los k primeros de esos elementos. Existe una sucesión de elementos de V con las siguientes propiedades para cada entero k :

- a) El elemento y_k es normal a todo elemento del subespacio $L(y_1, \dots, y_{k-1})$.
- b) El subespacio generado por $y_1, \dots, y_k$ es el mismo que el generado por $x_1, \dots, x_k$

$$L(y_1, \dots, y_k) = L(x_1, \dots, x_k) \dots \dots \dots (8)$$

- c) La sucesión $y_1, y_2, \dots$, es única, salvo factores o múltiplos escalares. Esto es, si $y_1, y_2, \dots$, es si $y_1, y_2, \dots$, se trata de otra sucesión de elementos de V con las propiedades a) y b), y que para cada k existe un escalar factor o múltiplo c_k tal que $y_k = c_k y_k$.

Demostración. Por inducción. Para iniciar el proceso, tomamos $y_1 = x_1$ Se supone que se ha construido modo que a) y b) se satisfacen cuando $k = r$. Entonces se define y_{r+1} mediante la ecuación

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \dots \dots \dots (9)$$

Donde los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tienen que terminarse. Para $j < r$, el producto interior de y_{r+1} con y_i viene dado por

$$(y_{r+1}, y_i) = (x_{r+1}, y_i) - \sum_{i=1}^r \alpha_i (y_i, y_j) \dots \dots \dots (10)$$

Puesto que $(y_i, y_j) = 0$ si $i \neq j$, podemos hacer ortogonal a y_i tomando

$$\alpha_i = \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} \dots \dots \dots (11)$$

Si $y_i = 0$, entonces y_{r+1} es ortogonal a para cualquier α_i que se elija, en este caso elegimos $\alpha_i = 0$. Así pues, el elemento y_{r+1} está bien definido y es ortogonal a cada uno de los anteriores elementos, Por consiguiente, es ortogonal a todo elemento del subespacio

$$L(y_1, \dots, y_r) \dots \dots \dots (12)$$

Demuestra que a) cuando $k = r + 1$

Al demostrar b) cuando $k = r + 1$, se tiene que probar que $L(y_1, \dots, y_{r+1}) = L(x_1, \dots, x_{r+1})$ dado que $L(y_1, \dots, y_r)$ Los r primeros elementos $y_1, \dots, y_r$

$$L(x_1, \dots, x_r) \dots \dots \dots (13)$$

Y están en el subespacio más amplio $L(x_1, \dots, x_{r+1})$. El nuevo elemento y_{r+1} dado es una diferencia de los elementos de $L(x_1, \dots, x_{r+1})$

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \dots, x_{r+1}) \dots \dots \dots (14)$$

Esto demuestra cuando $k = r + 1$.

Entonces, a) y b) son demostrados por inducción respecto de k .

Se demuestra por inducción respecto de k . El caso $k = 1$ es trivial. Se supone que es cierto para $k = r$ y considerar el elemento y_{r+1} . En virtud de este elemento pertenece a

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) \dots \dots \dots (15)$$

Así se puede escribir

$$y_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1} \dots \dots \dots (16)$$

Donde $z_r \in L(y_1, \dots, y_r)$. Se quiere demostrar que $z_r = 0$. Por la propiedad a), y_{r+1}, c_{r+1} son ambos ortonormales a z . Y su diferencia, z es ortonormal a z . O sea, z es ortonormal a sí mismo, así que $z = 0$. Esto completa la demostración del teorema de ortonormalidad.

Puede suceder que $y_{r+1} = 0$ para algún r , resultando que x_{r+1} es una combinación lineal de $y_1, \dots, y_r$, y $x_1, \dots, x_r$, los elementos son dependientes

Si los k primeros elementos son independientes, los elementos correspondientes son no nulos.

Y los coeficientes de α_i vienen dados y las fórmulas que definen $y_1, \dots, y_k$ se convierten en

$$y_1 = x_1, y_{r+1} = x_{r+1} \sum_{i=1}^r \frac{x_{r+1}, y_i}{(y_1, y_j)} \dots \dots \dots (17)$$

Y así se constituye el método de Gram-Schmidt para construir un conjunto normal de elementos no nulos $y_1, \dots, y_k$ que generan el mismo subespacio que el conjunto independiente $x_1, \dots, x_n$.

En particular, si $x_1, \dots, x_k$ es una base para un espacio euclídeo de dimensión finita, entonces $y_1, \dots, y_k$ es una base normal para el mismo espacio. Se puede convertir ésta en una base ortonormal, a cada uno de los elementos y_i dividiéndolo por su norma.

Un conjunto ortonormal $\{y_1, y_2, y_3\}$ que se construye desde de un conjunto independiente $\{x_1, x_2, x_3\}$, es la proyección de x sobre y .

En el método de Gram-Schmidt, el elemento y_{r+1} se construye restando de x_{r+1} la proyección de x_{r+1} desde cada uno de los anteriores elementos $y_1, \dots, y_r$. La figura 3 representa la construcción geométrica en el espacio vectorial V_3 .

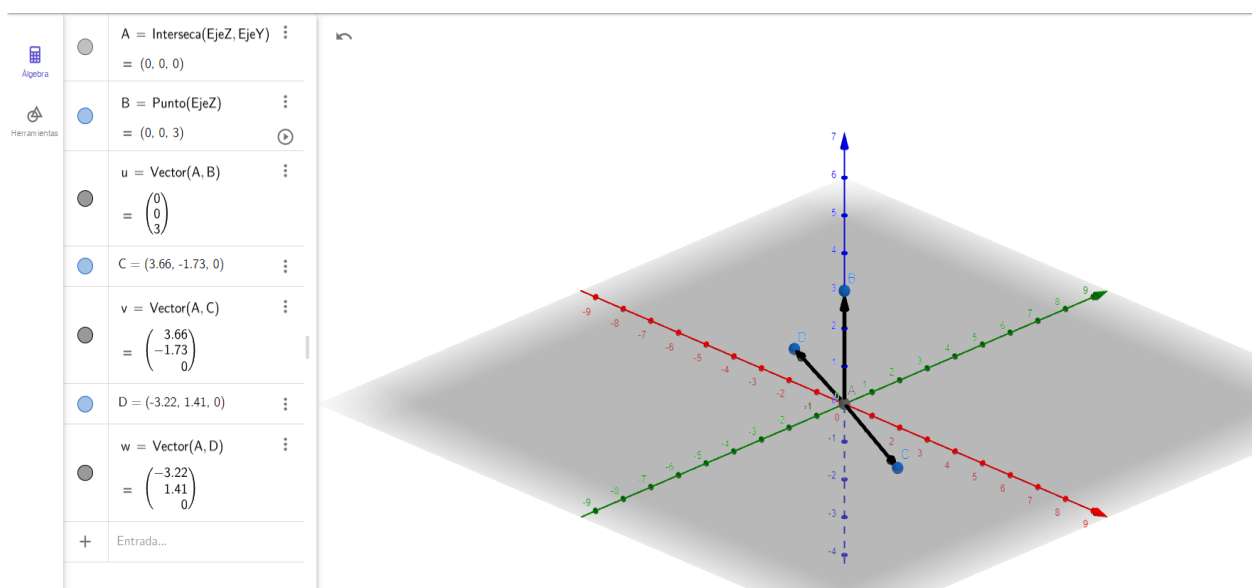


Figura 3. Representación de una base ortogonal

Una base en $\mathbb{R}^n$ se constituye con n vectores linealmente independientes. En la base canónica

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ los vectores e_i tienen dos propiedades:

$$\begin{aligned} i) e_i^T e_j &= 0 \text{ si } i \neq j \\ ii) e_i^T e_j &= 1 \text{ si } i = j \end{aligned}$$

Definición: Se dice que un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ortonormal si

$$\begin{aligned} v_i^T v_j &= 0 \text{ si } i \neq j \\ v_i^T v_j &= 1 \text{ si } i = j \end{aligned}$$

Sí cualquier par de vectores es ortogonal y cada uno tiene longitud 1, el conjunto de vectores es ortonormal

Definición: Si $v \in \mathbb{R}^n$, es decir, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ entonces la norma de un vector v , denotada

por $\|v\|$, está dada por $\|v\| = \sqrt{v^T v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ una base de H , donde H es un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$.

Paso 1. Elección del primer vector unitario

Se toma el vector v_1 con su norma $\|v_1\|$

Entonces

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Paso 2. Elección del segundo vector unitario

Primero se encuentra un vector ortogonal a u_1 con el procedimiento:

$$v_2' = v_2 - (v_2^T u_1) u_1$$

Luego se obtiene v_2' y se define a u_2 como

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

Paso 3. Elección del tercer vector unitario

Se encuentra un vector ortogonal a u_1 y u_2 con el procedimiento:

$$v_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2$$

Luego se obtiene v_3' y se define a u_3 como

$$u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}$$

Paso 4. Continuamos con el proceso

Se busca un vector ortogonal a $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($k < m$) con el procedimiento:

$$v_{k+1}' = v_{k+1} - (v_{k+1} \cdot u_1)u_1 - (v_{k+1} \cdot u_2)u_2 - \dots - (v_{k+1} \cdot u_k)u_k$$

Entonces

$$u_{k+1} = \frac{v_{k+1}'}{\|v_{k+1}'\|}$$

Por lo tanto

$$\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$$

donde $k+1 = m$ es una base ortonormal para H.

La norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Sean $v_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $v_2 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$v_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplos:

1. Construya la base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ con la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Paso 1. Como $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $v_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$$\text{Así que } u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2. Como $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } v_2' = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Así que } u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 3. Como } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$v_3' = v_3 - (v_3^2 u_1)u_1 - (v_3^2 u_2)u_2$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$v'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } v'_3 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Así que } u_2 = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base ortonormal para } \mathbb{R}^3$$

2. Polinomios de Legendre. Los polinomios, con el producto interior $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$, considera la sucesión $x_0, x_1, x_3, \dots$ donde $x_n(t) = t^n$, dentro del espacio lineal. Al aplicar esta sucesión el teorema de ortogonalización se transforma en otra sucesión de polinomios $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Los primeros polinomios se calculan con el método de Gram-Schmidt.

Se tiene $\alpha_0(t) = \alpha_0(t) = 1$. Puesto que

$$(y_0, y_0) = \int_{-1}^1 dt = 2 \quad y \quad (x_1, y_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

Se encuentra que

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t$$

A continuación, se utilizan las relaciones

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^1 t dt = \frac{2}{3}, \quad (x_2, x_1) = \int_{-1}^1 t dt = 0, \quad (y_1, y_1) = \int_{-1}^1 t dt = \frac{2}{3} \dots,$$

Para obtener

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{x_2, y_0}{y_0, y_0} y_0(t) - \frac{x_2, y_1}{y_1, y_1} y_1(t) = t - \frac{1}{3}$$

Del mismo modo, se encuentra que

$$y_3(t) = t - \frac{3}{5}, \quad y_4(t) = t - \frac{6}{7}t + \frac{3}{35}, \quad y_5(t) = t - \frac{10}{9}t + \frac{5}{21}t$$

Se probará que

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d}{dt} (t-1)$$

Los polinomios de Legendre P dados por

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2(n)!} y_n(t) = \frac{1}{2n!} \frac{d}{dt} (t-1)$$

Y los polinomios de la sucesión ortogonal correspondiente p_0, p_1, p_2 dado por se llaman polinomios de Legendre normalizados. De las fórmulas para $y_0, \dots, y_5$, se encuentra que

$$p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad p_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2}}(3t-1)}$$

3. En el espacio de los polinomios con grado no mayor que 4 definidos sobre el segmento $(-1,1)$, encontrar una base ortogonal.

Solución. La base inicial

$$g_0 = 1, g_1 = t, g_2 = t^2, g_3 = t^3, g_4 = t^4$$

Se toman

$$f_0 = g_0 = 1 \quad y \quad f_1 = g_1 - \alpha f_0$$

Puesto que

$$(g_1, f_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0, \text{ resulta } \alpha_1 = 0$$

Después

$$f_2 = g_2 + \beta f_0 + \gamma f$$

Se tiene

$$(g_0, f_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

Es decir, $\gamma = 0$. Por consiguiente

$$f_2 = t - \frac{1}{3}$$

$$\text{Sea } f_0 = g_0 + f_1 + f_2$$

Se tiene

$$(g_0, \alpha_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0, \text{ de donde}$$

$$f_1 = 0; (\alpha_0, f_1) = \int_{-1}^1 t dt = \frac{2}{5} \text{ y } (f_2, f_1) = \int_{-1}^1 t dt = \frac{2}{3} = \gamma (g_3, g_2) = \int_{-1}^1 \left(t - \frac{1}{3} t \right) dt = 0$$

Por consiguiente,

$$f_0 = t - \frac{3}{5} t$$

Finalmente

$$f_1 = g_1 + f_0 + f_1 + f_2 + f_3$$

Puesto que

$$(g_1, f_0) = \int_{-1}^1 t dt = \frac{2}{5} \text{ y } (f_0, f_0) = 2$$

Los polinomios obtenidos

$$f_0, f_1, f_2, f_3 \text{ y } f_4$$

Ejercicios

1. Sea $e_1, e_2, \dots, e_n$ una base ortogonal de un espacio euclídeo. Demuestre que el sistema de vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ es linealmente independiente, si

$$\sum_{i=1}^n \cos\{e_1, x_1\} > n - \frac{1}{2}$$

2. Se supone que los vectores $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ para $i = 1, 2, \dots, n$ están definidos por medio de sus coordenadas en una base arbitraria. Demuéstrese que si $|x_{i1}|^2 > n \sum_{k \neq i} |x_{ik}|^2$. Para cualquier valor de i , el sistema de $x_1, x_2, \dots, x_n$ es linealmente independiente.

3. Encontrar una base ortonormal : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ utilizando el proceso de ortonormalización

de Gram-Schmidt

4. En $\mathbb{R}^2$, construir una base ortonormal con los vectores base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5., Encontrar una base ortonormal $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ mediante el algoritmo de ortonormalización

de Gram-Schmidt.

Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL

NOMBRE DEL DOCENTE: _____

Rubrica para calificar las competencias genéricas (Tarea por equipo).

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 4. Espacios vectoriales Calificación: _____

	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Problemas que cubren uno o más indicadores de alcance	Modelado del problema, es la descripción textual, incluye las figuras que lo describen 0%	Seleccionar las variables e incógnitas, con sus respectivas unidades, y/o Diagrama de Cuerpo Libre y/o esquema representativo 0%	Plantear la hipótesis de solución, fórmulas y/o algoritmos para resolver el problema 0%	Hacer los cálculos y operaciones, paso a paso, incluye documentar dichas operaciones 0%	Analizar los resultados y evaluar los resultados obtenidos con sus unidades y expresar las conclusiones 34%	Ponderación
1.Resuelve problemas de aplicación de Espacios vectoriales						
2.Resuelve problemas de aplicación de Espacios vectoriales						
3.Resuelve problemas de aplicación de Espacios vectoriales						

Total

Modelado del problema Una empresa utiliza 3 entradas A, B C con cantidades x, y, z respectivamente. La mitad de su producto requiere 3 unidades de A, 5 unidades de B y 2 de C. La empresa está estudiando modificar su producción. Los incrementos factibles $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, que no producen excedentes de entradas determinan un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Hecho que se debe de comprobar
Selección de variables 1. Inputs utilizados: A, B, C. 2. Cantidades de los inputs: x, y, z (representan la cantidad de A, B, C utilizadas respectivamente). 3. Requerimientos para elaborar la mitad del producto: 3 unidades de A, 5 unidades de B, y 2 unidades de C.
Hipótesis Los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ que no producen excedentes de entradas determinan un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
Cálculo de resultados Comprobar que el conjunto $W = \{3\Delta P, 5\Delta P, 2\Delta P \Delta P \in R\} = \{\Delta P * (3,5,2) \Delta P \in R\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Las condiciones del subespacio vectorial: 1. $(0,0,0) \in W$. Esto se cumple tomando $\Delta P = 0$, $(0,0,0) = (3 * 0, 5 * 0, 2 * 0) \in W$. 2. Si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. En efecto, del hecho de que $x, y \in W$ se sigue que $x = \Delta P * (3,5,2)$ e $y = \Delta P' * (3,5,2)$. Por consiguiente $x + y = \Delta P(3,5,2) + \Delta P' * (3,5,2) = (\Delta P + \Delta P') * (3,5,2) \in W$ 3. Si $x \in W$ y $\lambda \in R$, entonces $\lambda x \in W$. En efecto, como $x \in W$ ha de ser $x = \Delta P * (3,2,5)$, luego $\lambda x = (\lambda \Delta P) * (3,5,2) \in W.$
Análisis de resultados Los resultados proporcionados realizan la comprobación de estas condiciones: 1. Se verifica que $(0, 0, 0)$ está en W, ya que al tomar $\Delta P = 0$, se obtiene $(0, 0, 0) = (3 * 0, 5 * 0, 2 * 0) \in W$. Esto cumple con la condición de que el vector cero está en el conjunto W. 2. Se muestra que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. Para esto, se considera $x = \Delta P * (3, 5, 2)$ y $y = \Delta P' * (3, 5, 2)$. Luego, se suman los dos vectores: $x + y = \Delta P * (3, 5, 2) + \Delta P' * (3, 5, 2) = (\Delta P + \Delta P') * (3, 5, 2) \in W$. Esto cumple con la condición de cerradura bajo la suma. 3. Por último, se muestra que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda x \in W$. Se toma $x = \Delta P * (3, 5, 2)$, y se realiza la multiplicación por el escalar λ: $\lambda x = (\lambda \Delta P) * (3, 5, 2) \in W$. Esto cumple con la condición de cerradura bajo la multiplicación por un escalar. Dado que se han comprobado las tres condiciones necesarias para que W sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, se concluye que el conjunto W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Modelado del problema Una empresa distribuye las cantidades x, y, z de su producto en tres mercados A, B y C respectivamente. Sin alterar la producción, la empresa desea cambiar esta distribución. Probar que el conjunto de incrementos factibles $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ constituye un subespacio vectorial de R^3.
Selección de variables 1. x - Cantidad de producto distribuida en el mercado A. 2. y - Cantidad de producto distribuida en el mercado B. 3. z - Cantidad de producto distribuida en el mercado C. 4. $\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$ es la condición que cumplir
Hipótesis Para resolver el problema sería considerar que la distribución actual de productos en los mercados A, B y C está representada por las cantidades x, y, z respectivamente. Entonces, se estudiará un cambio en esta distribución sin alterar la producción total. Este cambio estará representado por los incrementos factibles $\Delta x, \Delta y$ y Δz. La hipótesis también asume que los incrementos factibles cumplen la condición de conservación: $\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$ Además, se supone que $\Delta x, \Delta y$ y Δz pueden tomar cualquier valor en R, lo que significa que se consideran cambios tanto positivos como negativos en la distribución de productos entre los mercados.
Cálculo de resultados Para incrementar la distribución en cantidades $(\Delta x + \Delta y + \Delta z)$ en cada mercado, se necesita un incremento de producción $\Delta x + \Delta y + \Delta z$. Sin alterar su producción, entonces $\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$, el conjunto de incrementos factibles es $W = \{(\Delta x + \Delta y + \Delta z) \in R^3 \mid \Delta x + \Delta y + \Delta z = 0\}$. La ecuación lineal homogénea define al conjunto, entonces el conjunto es un subespacio vectorial de R^3.
Análisis de resultados Incremento de distribución en cada mercado: Se considera un cambio en la distribución de productos en los mercados A, B y C, representado por los incrementos $\Delta x + \Delta y + \Delta z$. Estos incrementos pueden ser positivos o negativos, lo que indica un aumento o disminución en la cantidad de productos distribuidos en cada mercado. Conservación de la producción: La empresa no quiere alterar su producción total, lo que significa que la suma de los incrementos en cada mercado debe ser igual a cero: $\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0$ Esto garantiza que cualquier cambio en la distribución de productos entre los mercados no afectará la producción total de la empresa.

Modelado del problema

Un banco administra 4 carteras A, B, C y D, cuyo capital se distribuye en acciones de tres compañías P, Q y R en la proporción que se indica:

Compañías	Carteras			
	A	B	C	D
P	20%	30%	25%	24%
Q	0%	60%	30%	24%
R	80%	10%	45%	52%

Para ampliar el capital de sus carteras. Comprobar y calcular que los incrementos $(\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$ de la inversión del banco en cada compañía que pueden distribuirse entre las cuatro carteras sin crear excedentes es un subespacio vectorial de R^3 .

Selección de variables

Compañías = P, Q, R

Carteras = A, B, C, D

Hipótesis

Sin crear excedentes se forma un subespacio vectorial de R^3 con los incrementos $(\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$ de la inversión del banco en cada compañía que pueden distribuirse entre las cuatro carteras

Cálculo de resultados

El incremento ΔA de capital en la cartera A requiere que el banco compre o venda acciones por una cantidad de $(0.2RA, 0, 0.8\Delta A) = \Delta A(0.2, 0, 0.8)$.

Las cuatro carteras $(\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D)$ requieren una compra o venta de acciones dada por el vector $(\Delta P, \Delta Q, \Delta R) = \Delta A(0.2, 0, 0.8) + \Delta B(0.3, 0.6, 0.1) + \Delta C(0.25, 0.3, 0.45) + \Delta D(0.24, 0.24, 0.52)$.

Los incrementos factibles forman el espacio vectorial

$W = (0.2, 0, 0.8), (0.3, 0.6, 0.1), (0.25, 0.3, 0.45), (0.24, 0.24, 0.52)$.

Análisis

El banco puede realizar ajustes de inversión en las compañías P, Q y R en las carteras A, B, C y D siguiendo las restricciones de la tabla proporcionada sin generar excedentes.

Los incrementos factibles forman un espacio vectorial de dimensión 4, lo que indica que hay cuatro combinaciones independientes posibles para ajustar las inversiones en las compañías P, Q y R en las cuatro carteras. Estos incrementos pueden realizarse de manera proporcional según los coeficientes indicados.

Complemento educacional 2 Examen con rubrica competencia disciplinar

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL NOMBRE DEL DOCENTE: DR. ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA
--

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 4: Espacios vectoriales CALIF: _____

Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					
Indicadores de alcance cubiertos por los reactivos del examen en forma directa uno a uno.	Procedimiento y resultado correctos 25%	Un matemático en el desarrollo del procedimiento 15%	Máximo dos errores matemáticos en el desarrollo del procedimiento 10%	Procedimiento incorrecto. Desconocer competencia previa. Tres o más errores matemáticos. Dato incorrecto. 0%	Ponderación
Verifica de forma correcta si un conjunto es espacio vectorial o no					
Verifica de forma correcta si un conjunto es un subespacio vectorial o no					
Verifica de forma correcta si un conjunto forma una base para espacio vectorial o no					
Realiza ejercicios sobre producto interno					
Realiza un cambio de base mediante el proceso de orto normalización de Gram-Schmidt					
Examen Escrito		Escala		Calificación final del Tema	

1 Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, las ternas (x_1, x_2, x_3) de puntos del espacio euclidiano.

Un vector se define como un segmento PQ , del punto P a otro punto Q . Los vectores están

definidos por su longitud y dirección. Probar los axiomas de espacio vectorial para establecer la interpretación geométrica utilizando sistemas de coordenadas euclidianas mediante dibujos a mano alzada.

2. Sea V el espacio vectorial R^3 y sean $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ y $v_3 = (1, 1, 0)$.

¿Los vectores v_1, v_2 y v_3 generan a V ?

Solución

Paso 1. Sea $v = (a, b, c)$ un vector en R^3 con a, b y c son números reales arbitrarios

Paso 2. Si v es combinación lineal de los vectores, es decir, si existen constantes

c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = v$.

El sistema lineal queda:

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + c_3 &= a \\2c_1 + c_3 &= b \\c_1 + 2c_2 &= c\end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{-2a+2b+c}{3}, \\c_2 &= \frac{a+b+c}{3}, \\c_3 &= \frac{4a-b-2c}{3}\end{aligned}$$

Como hay una solución para cualquier elección de a, b y c , entonces v_1, v_2 y v_3 generan a R^3 , o que $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = R^3$.

3. Dado el conjunto de vectores $\{(2a, 0, -1), (-1, 10, -2), (2, 1, b)\}$, ¿qué valores $a, b \in \mathbb{R}$ permiten que el conjunto sea ortogonal?

Se debe plantear que

$$(2a, 0, -1) \cdot (-1, 10, -2) = 0$$

$$(2, 1, b) \cdot (2a, 0, -1) = 0$$

$$(-1, 10, -2) \cdot (2, 1, b) = 0$$

Por lo que surge el sistema de ecuaciones

$$-2a = -2$$

$$4a - b = 0$$

$$-2b = -8$$

Finalmente se obtiene que $a = 1$ y $b = 4$.

4. En V_4 , hallar una base ortonormal para el subespacio generado por los tres vectores, por el método de Gram-Schmidt

$$x_1 = (1, -1, 1, -1), x_2 = (5, 1, 1, 1), x_3 = (-3, -3, 1, -3)$$

Solución.

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot y_1}{y_1 \cdot y_1} y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot y_1}{y_1 \cdot y_1} y_1 - \frac{x_3 \cdot y_2}{y_2 \cdot y_2} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0)$$

Puesto que $y_3 = 0$, los tres vectores x_1, x_2, x_3 dependientes. Con y_1, y_2 no nulos, los vectores x_1, x_2 son independientes. Entonces $L(x_1, x_2, x_3)$ es un subespacio de dimensión dos. El conjunto $\{y_1, y_2\}$ es una base ortogonal para ese subespacio. Dividiendo y_1 e y_2 cada uno entre su norma se tiene una base ortonormal que consta de dos vectores

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \text{ y } \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1).$$

5. Dada una base de un subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$$

Encuéntrese una base ortogonal.

Por el proceso de Gram-Schmidt se establece que

$$\bar{w}_1 = (1, 1, 0, 0)$$

El segundo vector es

$$\begin{aligned}\bar{w}_2 &= (0, 1, 1, 0) - \frac{(1, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1, 0)}{(1, 1, 0, 0) \cdot (1, 1, 0, 0)}(1, 1, 0, 0) \\ &= (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)\end{aligned}$$

El tercer vector es

$$\begin{aligned}\bar{w}_3 &= (0, 0, 1, 1) - \frac{0}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \cdot (0, 0, 1, 1)}{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\end{aligned}$$

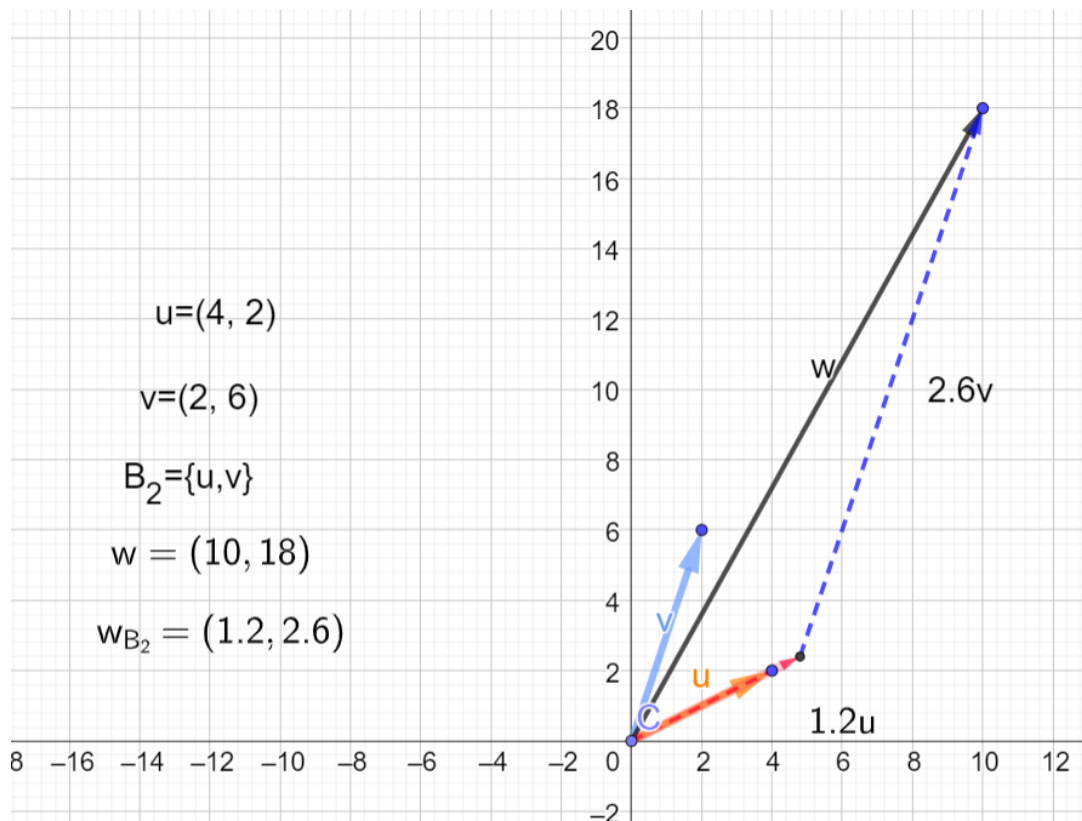
Finalmente, la base ortogonal es

$$\left\{(1, 1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\right\}$$

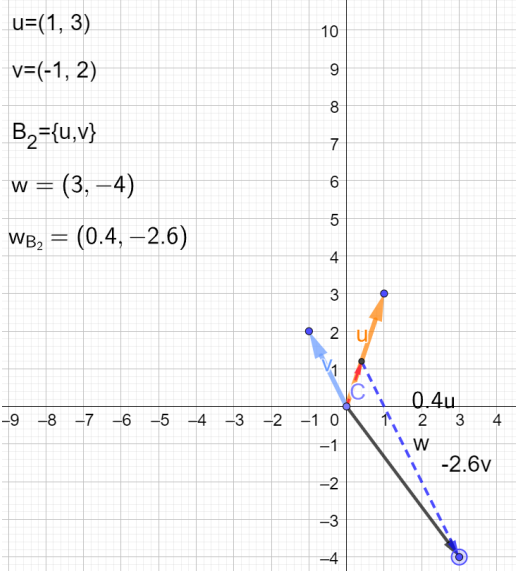
Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica
Práctica virtual: Cambio de base

Objetivo: Encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base dada y realizar el cambio de base de un vector de la base canónica a la base dada. Verificar sus resultados gráficamente con el software GeoGebra.

Indicaciones: Ingresa a la dirección <https://www.geogebra.org/m/ktdkrnua>, aparecerá una pantalla similar a la siguiente.



Para cambiar los vectores arrastra la punta de las flechas.

Ejercicio: Encuentra la matriz de transición de base canónica a base $B_2 = \{u, v\}$. Realiza el cambio de base para el vector w dado.		
$w, B_2 = \{u, v\}$.	Matriz de transición y cambio de base	Comprobación con GeoGebra
$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $B_2 = \{u, v\}$. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ $w_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $w_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -2.6 \end{pmatrix}$	 $u = (1, 3)$ $v = (-1, 2)$ $B_2 = \{u, v\}$ $w = (3, -4)$ $w_{B_2} = (0.4, -2.6)$
$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B_2 = \{u, v\}$. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$		
$w = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B_2 = \{u, v\}$. $u = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$		
$w = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \{u, v\}$. $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$		
$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B_2 = \{u, v\}$. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$		
$w = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$,		

$B_2 = \{u, v\}.$ $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$		
---	--	--

5. Transformaciones lineales

5.1 Definición de transformación lineal

Definición. Si V y W son dos espacios vectoriales, una función $T: V \rightarrow W$ se llama transformación lineal de V en W , si tiene las propiedades siguientes:

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \dots\dots\dots (1)$$

$$T(cx) = cT(x) \dots\dots\dots (2)$$

cualesquiera que sean x e y de V , para todo x de V y cualquier escalar c .

Esto significa que T conserva la adición y la multiplicación por escalares. Las dos propiedades pueden combinarse en una fórmula que establece que

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \dots\dots\dots (3)$$

para todo x y todo y de V y todos los escalares a y b . Por inducción, tenemos también la relación más general

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i\right) = \left(\sum_{i=k+1}^n T c_i \alpha_i\right) \dots\dots\dots (4)$$

Si T es una transformación lineal de V en W , entonces $T(0) = 0$: lo que se ve por la misma definición, pues

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

Supóngase que V es el espacio vectorial R^1 . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, son vectores de V y $c_1, \dots, c_n$, son escalares, entonces las combinaciones lineales

$$T(c_1\alpha_1) + \dots + (c_n\alpha_n) = c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n) \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} T(c_1\alpha_1) + (c_2\alpha_2) &= T(c_1\alpha_1) + c_2(T\alpha_2) \\ &= T(c_1\alpha_1) + T(c_2\alpha_2) \end{aligned}$$

El conjunto N , de los vectores α en V tales que $T\alpha = 0$ es un subespacio de V , pues

(a) $T(0) = 0$, indica que N no es vacío

(b) Si $T\alpha_1 = T\alpha_2 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que $c\alpha_1 + \alpha_2$ es un elemento de N .

Definición: La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y la identidad definida $I: V \rightarrow V$ por $I(v) = v, \forall v \in V$. Cumple la definición porque:

$$\begin{aligned} I(u + v) &= u + v = I(u) + I(v) \\ I(\alpha v) &= \alpha v = \alpha I(v) \end{aligned}$$

Definición: Transformación de reflexión

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Vemos que satisface la definición. Sea $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, entonces

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} -(u_1+v_1) \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Tu + Tv$$

$$T(\alpha v) = \begin{pmatrix} -\alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha Tv$$

Ejemplos:

1. Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y + z \end{pmatrix}$ encuentra la imagen del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bajo esta transformación

Solución

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2(1) + 2 \\ 3(2) + (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Encuentra la imagen del vector $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ bajo esta transformación

Solución

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) &= 3T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 4T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. Determina si la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \\ x + y \end{pmatrix}$ es inyectiva (uno a uno) y/o sobreyectiva.

2. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Encuentra la matriz de transformación asociada a T .

3. Justifica porque las siguientes no son transformaciones lineales.

$$T(x, y) = (1, y)$$

$$T(x, y) = (x^2, y)$$

$$T(x, y) = (|x|, y)$$

5.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal

Definición. Al conjunto de elementos de V que T aplica en O se llama núcleo de T y se designa por $N(T)$ y es un subespacio de V .

$$N(T) = \{x \mid x \in V \mid y \quad T(x) = 0\} \dots\dots\dots (10)$$

Si x e y están en $N(T)$, lo mismo les ocurre a $x + y$ y a cx para todos los escalares c , ya que

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 \text{ y } T(cx) = cT(x) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

Definición: Para los espacios vectoriales V y W , sea $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Entonces

i) nuT , denota el núcleo de T

$$nuT = \{v \in V : Tv = 0\} \dots\dots\dots (12)$$

ii) ImT , denota la imagen de T

$$ImT = \{w \in W : Tv = w \text{ para algún } v \in V\} \dots\dots\dots (13)$$

Definición. Rango y nulidad de una transformación lineal

Para los espacios vectoriales V y W , y sea $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

$$Nulidad\ de\ T = \nu(T) = \dim nuT \dots\dots\dots (14)$$

$$Rango\ de\ T = \rho(T) = \dim ImT \dots\dots\dots (15)$$

Ejemplos de Núcleo e Imagen:

1. Operador de proyección

Sea $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Como $\text{nu}T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : Tv = 0 \right\}$, entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, $x = 0$ y $y = 0$

Así que $\text{nu}T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Y $\text{Im}T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para algún } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$, es decir,

$\text{Im}T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ y } x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Observemos que $\dim \text{nu}T = 1$ y $\dim \text{Im}T = 2$

2. Operador integral

Sea $V = C[0,1]$ y $J : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $J(f) = \int_0^1 f(x) dx$. Entonces

$$\text{nu}J = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

Y $\text{Im}J = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \int_0^1 f(x) dx \text{ para alguna } f \in C[0,1] \right\}$, es decir,

sea α un número real. Entonces la función $f(x) = \alpha$ para $x \in [0,1]$ está en $C[0,1]$ y

$\int_0^1 \alpha dx = \alpha$. Como se cumple para todo número real α , se tiene que $\text{Im } J = \mathbb{R}$.

Teorema: Si V tiene dimensión finita, $T(V)$, es finita y se tiene

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V \dots\dots\dots (16)$$

Dicho de otro modo, la dimensión del núcleo más el rango de una transformación lineal es igual a la dimensión de su dominio.

Ejemplos:

1. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y - 3z + w \\ 2x - y + z - 2w \\ -x + 3y - 2z \end{bmatrix}$. Determina el núcleo y la imagen de T

Solución

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + w \\ 2x - y + z - 2w \\ -x + 3y - 2z \end{cases}$$

$$\text{nu}(T) = \{0\}$$

$$\text{im}(T) = \text{ran} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x - y \\ 3x + y \end{bmatrix}$.

Determina el núcleo y la imagen de T

Solución

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{nu}(T) = \{0\}$$

$$\text{im}(T) = \text{ran} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicios:

1. Considera la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x + y - z \\ -x + 2y + 2z \end{bmatrix}$

Encuentra el núcleo y la imagen de T

2. Sea $T: R^4 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y + 3z + w \\ x - y + 2z + 2w \\ x + y + z \end{bmatrix}$.

Determina el núcleo y la imagen de T

3. Calcular el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de la transformación lineal dada.

a) $T: M_{22} \rightarrow M_{22}; T(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $T: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]; T(f) = f'$

5.3 Representación matricial de una transformación lineal

Sea V dimensión n y sea W de dimensión m , espacios vectoriales sobre un cuerpo F . Sea $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ base ordenada de V , y $\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$ base ordenada de W . Si T es una transformación lineal de V en W , entonces la transformación T está determinada por su efecto sobre los n vectores y $T\alpha_j$ se expresa como combinación lineal.

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}B_j \dots\dots\dots (17)$$

de los B_j los escalares $A_{1j}, \dots, A_{mj}$ son las coordenadas de $T\alpha_j$, en la base ordenada B_j .

La transformación T está determinada por los $m \times n$ escalares A_{ij} .

La matriz A $m \times n$, $A(i, j) = A_{ij}$ se llama matriz de T respecto al par de bases ordenadas B_1 y B_n .

Si $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ es un vector de V , entonces

$$\begin{aligned} T\alpha &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j(T\alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_j \sum_{j=1}^m A_{ij}B_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j\right) B_j \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

Si X es la matriz de las coordenadas de α en la base ordenada, β . entonces AX es la matriz de las coordenadas del vector α en la base ordenada β , ya que el escalar $\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j$ es el elemento de la i -ésima fila de la matriz columna AX . Y A es una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F , entonces

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j T\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j\right) B_j \dots\dots\dots (20)$$

Se tiene una transformación lineal T de V en W , la matriz de la cual es A , respecto a β, β' .

Ejemplos:

1. Calcular la representación matricial D , con la base $(1, 1 + x, 1 + x + x', 1 + x, 2 + x'')$ de V , y la base $(1, x, x^2)$ de W . La base de V se transforma así:

$$D(1) = 0, \quad D(1 + x) = 1,$$

$$D(l + x + x^2) = 1 + 2x,$$

$$D(l + x + x^2 + x^3) = 1 + 2x + 3x^2,$$

y matricial es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Sea F un cuerpo, T el operador lineal en F^2 $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sea $\beta = \{E_1, E_2\}$. la base ordenada canónica de F^2 . Calcular $[T]_\beta$

Solución:

$$T_{E_1} = T(1, 0) = (1, 0) = 1E_1 + 0E_2$$

$$T_{E_2} = T(0, 1) = (0, 0) = 0E_1 + 0E_2$$

la matriz de T en la base ordenada B es

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformación lineal. Existe una matriz única de $m \times n$, A_T tal que

$$Tx = A_T x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \dots \dots \dots (22)$$

Teorema: Sea A_T matriz de transformación lineal T . Entonces

$$Im T = Im A_T \dots \dots \dots (23)$$

$$\rho(T) = \rho(A_T) \dots \dots \dots (24)$$

$$nu(T) = N_{A_T} \dots \dots \dots (25)$$

$$\nu(T) = \nu(A_T) \dots \dots \dots (26)$$

Teorema: Sea V espacio vectorial con dimensión n . W espacio vectorial con dimensión m y

$T: V \rightarrow W$ transformación lineal. Sea $\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base para V y sea

$\beta_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base para W . Entonces una matriz única A_T de $m \times n$ existe, tal que

$$[T(x)]_{\beta_2} = A_T [x]_{\beta_1} \dots\dots\dots (27)$$

Ejemplos

3. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$. Usando las bases

$$\beta_1 = \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ calcule } A_T.$$

$$\text{Se tiene que } T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } T \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Como } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se tiene que } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ Así que } A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. La matriz de T en la base ordenada canónica $\beta = E_1, E_2$

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supóngase que β' es la base ordenada de $\mathbb{R}^2$, que consta de los vectores $E_1 = (1, 1)$, $E_2 = (2, 1)$. Entonces

$$E_1 = E_1 + E_2$$

$$E_2 = 2E_1 + E_2$$

de modo que P es la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} [T\alpha]_{\beta} &= P^{-1}[T]_{\beta} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se comprueba que es correcto, pues

$$TE_1 = (1,0) = -E_1 + E_2$$

$$TE_2 = (2,0) = -2E_1 + 2E_2$$

5. Sea V espacio de funciones polinomiales de R en R de «grado» menor o igual que 3. Sea

D el operador derivación en V y sea

$$\beta = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = tf_1 + f_2$$

$$g_3 = tf_1 + 2f_2 + f_3$$

$$g_4 = tf_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4$$

Como la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t & t \\ 0 & 1 & 2t & 3t \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es invertible con $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t & -t \\ 0 & 1 & -2t & 3t \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - 3y + z \end{bmatrix}$. Encuentra

la matriz de representación de T respecto a las bases canónicas estándar de R^2 y R^3

Solución

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ y } T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|T| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Considera la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 3x - y \\ 2x + 4y - 3z \end{bmatrix}$

Encuentra la matriz de representación de T respecto a las bases canónicas estándar de R^3

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|T| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1. Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + y \end{bmatrix}$ Encuentra la matriz de representación de T respecto a las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de R^2

2. Considera la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + y - 2z \end{bmatrix}$

Encuentra la matriz de representación de T respecto a las bases $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de R^3

3. Considera la transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 3x - y \\ 2x + 4y - 3z \end{bmatrix}$

4. Encuentra la matriz de representación de T respecto a las bases $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de R^3 .

5. Para las siguientes transformaciones lineales las bases dadas

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \beta = \{1, x, x^2\}, \gamma = \{1\}$$

a) $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$ definida por $T(A) = A^t$ calcular $[T]_{\alpha}$

b) $T: P_2 \rightarrow M_{22}$ definida por $T(f) = \begin{pmatrix} f'(0) & 2f(1) \\ 0 & f'''(3) \end{pmatrix}$ calcular $[T]_{\beta}^{\alpha}$

c) $T: M_{22} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(A) = |A|$ calcular $[T]_{\alpha}^{\gamma}$

5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación

La reflexión es el conjunto de puntos graficados desde el espacio euclidiano de entrada a otro que este es isométrico a este mismo.

Con respecto matrices, la matriz de salida es llamada la matriz de reflexión. La reflexión es realizada con respecto a uno de los ejes cartesianos.

Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hace girar cada punto en el plano alrededor del origen, hasta describir un ángulo θ , entonces, se deduce que la matriz estándar para T es:

Decimos que,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Cuando

$$\theta = 120^\circ, x = 3, y = 4$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2})(3) + (-\frac{\sqrt{3}}{2})(4) \\ (\frac{\sqrt{3}}{2})(3) + (-\frac{1}{2})(4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.96 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

La expansión al igual que en la reflexión, también es posible expandir los puntos dados en una dirección particular. La expansión se realiza en un cierto ángulo. Es multiplicar los elementos del conjunto de puntos por un término escalar hacia la dirección del ángulo donde tiene que ser expandido.

La contracción es el procedimiento inverso de la expansión, el punto es contraído en un ángulo hacia una dirección, entonces el nuevo punto es una multiplicación de ambas matrices.

La rotación tiene dos significados, la rotación de un objeto puede ser realizada con respecto a un eje dado o al eje mismo. La rotación se realiza para un cierto ángulo, la rotación se realiza en la dirección de las manecillas del reloj, o inverso a las manecillas del reloj.

Teorema: Toda matriz elemental E de 2×2 es uno de los siguientes casos en su representación matricial:

- i) Una expansión a lo largo del eje x o y
- ii) Una compresión a lo largo del eje x o y
- iii) Una reflexión respecto a la recta $y = x$
- iv) Un corte a lo largo del eje x o y
- v) Una reflexión a lo largo del eje x o y

- vi) Una reflexión respecto al eje x o y
- vii) Una expansión o compresión.

Teorema: Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal cuya representación matricial es invertible.

Entonces T puede obtener una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones.

Ejemplos:

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$, $c > 1$ y usando la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

Entonces $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así que $A_T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ y usando la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

Entonces $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Así que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix}$ y usando la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

Entonces $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$. Así que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Sea $v = (3, 4)$ aplicar la expansión sobre el eje y

Solución:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(3) + (0)(4) \\ (0)(3) + (-1)(4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5. Sea $v = (-7, 4)$ aplicar la expansión sobre el eje y

Solución:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(-7) + (0)(4) \\ (0)(-7) + (-1)(4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1. Trazar la imagen del cuadrado unitario cuyos vértices son $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ bajo la transformación dada.

- a) T es una reflexión a lo largo del eje x
- b) T es una reflexión respecto a la recta $y = x$

c) T es la contracción $T(x, y) = (x/2, y)$

d) T es la dilatación definida por $T(x, y) = (x, 3y)$

e) T es la deformación por esfuerzo cortante $T(x, y) = (x + 2y, y)$

f) Usar la matriz estándar para rotar el cuadro 30° en sentido horario.

2. Sea $v = (-1, -1)$ aplicar la expansión sobre el eje x

3. Sea $v = (2, 6)$ aplicar la expansión sobre el eje x

Complemento Educacional 1 Aprendizaje basado en problemas.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL

NOMBRE DEL DOCENTE: _____

Rubrica para calificar las competencias genéricas (Tarea por equipo).

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 5. Transformaciones lineales Calificación: _____

Problemas que cubren uno o más indicadores de alcance	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance					Ponderación
	Modelado del problema, es la descripción textual, incluye las figuras que lo describen	Seleccionar las variables e incógnitas, con sus respectivas unidades, y/o Diagrama de Cuerpo Libre y/o esquema representativo	Plantear la hipótesis de solución, fórmulas y/o algoritmos para resolver el problema	Hacer los cálculos y operaciones, paso a paso, incluye documentar dichas operaciones	Analizar los resultados y evaluar los resultados obtenidos con sus unidades y expresar las conclusiones	
	0%	0%	0%	0%	34%	
1.Resuelve problemas de aplicación de Transformaciones lineales						
2.Resuelve problemas de aplicación de Transformaciones lineales						
3.Resuelve problemas de aplicación de Transformaciones lineales						

Total

Modelado del problema: Supongamos que tienes un avión en el plano xy y deseas modelar la transformación lineal que representa una rotación de cierto ángulo θ alrededor del origen (punto (0,0)) del plano. Queremos entender cómo esta rotación afecta a las coordenadas de los puntos en el plano.
Seleccionar las variables: (x, y): Son las coordenadas de un punto en el plano original antes de la rotación. (x', y'): Son las coordenadas del mismo punto después de la rotación.
Plantear la hipótesis: La transformación lineal de rotación alrededor del origen es lineal, lo que significa que para cualquier par de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano, la rotación de sus combinaciones lineales será igual a la combinación lineal de sus rotaciones. La rotación alrededor del origen conservará la distancia entre los puntos y el origen.
Calcular los resultados: $x' = x * \cos(\theta) - y * \sin(\theta)$ $y' = x * \sin(\theta) + y * \cos(\theta)$ $x' = 2 * \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 * \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ≈ 0.7071 $y' = 2 * \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ≈ 4.9497 $(2, 3) \approx (0.7071, 4.9497)$
Analizar: La transformación lineal de rotación efectivamente movió el punto (2, 3) a una nueva posición en el plano. Ahora se encuentra en (0.7071, 4.9497). Si aplicamos la misma rotación al resto de los puntos en el plano, podemos verificar que las propiedades de linealidad y conservación de distancias se cumplen para la transformación de rotación alrededor del origen.

Modelado del problema: Supongamos que tenemos un sistema de cámaras de seguridad ubicadas en un edificio. Cada cámara puede rotar y hacer zoom para seguir a los visitantes en el vestíbulo. Queremos modelar la transformación lineal que describe el movimiento de los visitantes desde el plano de la cámara original hasta el plano de la cámara final después de aplicar la rotación y el zoom.

Seleccionar las variables:

Coordenadas (x, y) de un punto en el plano de la cámara original
Coordenadas (x', y') de ese mismo punto en el plano de la cámara final.

Plantear la hipótesis: Suponemos que la transformación lineal es una combinación de una rotación y un escalado (zoom) en el espacio 2D. La transformación lineal es única para cada cámara.

Calcular los resultados:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación (A):

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Vector de traslación (b):

$$\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$x' = 1.5 * 2 + 0.5 * 3 + 10$$

$$= 15 + 1.5 + 10$$

$$= 26.5$$

$$y' = 0.7 * 2 + 0.9 * 3 + 5$$

$$= 1.4 + 2.7 + 5$$

$$= 9.1$$

Analizar: La matriz A determina la rotación y el escalado. Si los elementos de la matriz A son iguales a 1, la transformación solo realiza una rotación. Si los elementos son mayores que 1, implica un escalado.

El vector b indica una traslación. Es decir, si b_1 y b_2 no son cero, la imagen será desplazada en el plano.

Analizando las matrices A y vectores b para todas las cámaras, podemos entender cómo se transforman los puntos en el plano original al plano de cada cámara después de aplicar la rotación y el zoom. Además, podemos comparar las transformaciones entre cámaras y analizar cómo afectan a la representación de la escena del vestíbulo desde diferentes puntos de vista.

Modelado del problema: Supongamos que estamos diseñando un sistema de comunicaciones para una red de satélites. Tenemos una matriz de datos que representa las señales recibidas por diferentes antenas en diferentes momentos. Queremos realizar una transformación lineal sobre estos datos para resaltar las señales más fuertes y eliminar el ruido.

Seleccionar las variables:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

A: Matriz de datos de entrada (3x3)

T: Matriz de transformación lineal (3x3)

B: Matriz de datos transformados (3x3)

Plantear la hipótesis: Suponemos que, al aplicar una transformación lineal adecuada a la matriz de datos de entrada, podremos resaltar las señales más fuertes y eliminar el ruido, lo que resultará en una matriz de datos transformados B. Aplicaremos una transformación lineal multiplicando la matriz de datos de entrada A por una matriz de transformación lineal T.

Calcular los resultados:

$$B = A * T$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 7 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 24 & 18 \\ 62 & 68 & 62 \\ 76 & 76 & 72 \end{bmatrix}$$

Analizar: Hemos aplicado una transformación lineal a la matriz de datos de entrada A, utilizando una matriz de transformación T. La matriz resultante B muestra las señales más fuertes resaltadas y el ruido atenuado. Esto puede ser útil para mejorar la calidad de las señales recibidas en la red de satélites y facilitar el procesamiento de los datos.

TECNM-INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TOLUCA-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS EXAMEN DE LA MATERIA: ALGEBRA LINEAL NOMBRE DEL DOCENTE: DR. ALAIN CESAR GONZALEZ GARCIA
--

ALUMNO(A): _____ CARRERA: _____

FECHA: _____ TEMA 5: Transformaciones lineales CALIF: _____

	Niveles de desempeño de los indicadores de alcance				
Indicadores de alcance cubiertos por los reactivos del examen en forma directa uno a uno.	Procedimiento y resultado correctos 25%	Un matemático en el desarrollo del procedimiento 15%	Máximo dos errores matemáticos en el desarrollo del procedimiento 10%	Procedimiento incorrecto. Desconocer competencia previa. Tres o más errores matemáticos. Dato incorrecto. 0%	Ponderación
Verifica que una función es una transformación					
Encuentra el núcleo de una transformación lineal					
Encuentra una base para el rango y la nulidad de una transformación lineal					
Encuentra la matriz estándar para una transformación lineal y respecto a una base no estándar					
Resuelve problemas de aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación					
Examen Escrito	Escala			Calificación final del Tema	

1. Dada la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$ encuentra la transformación asociada a T

Solución

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3(1) + 2(0) \\ 1 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3(0) + 2(1) \\ 0 - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Considera la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - z \end{bmatrix}$.

Encuentra el núcleo y la imagen de T .

Solución

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$z = 0$$

$$nu = \{0\}$$

$$\text{im}(T) = \text{ran} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x+10y \\ -15x-13y \end{pmatrix}$. Usando las bases

$$\beta_1 = \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \text{ calcule } A_T.$$

$$\text{Se tiene que } T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } T \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Como } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se tiene que } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ Así que } A_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Considera la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^3$ por $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \\ 3x \end{bmatrix}$ Encuentra la matriz

de representación de T respecto a las bases canónicas estándar de R^2 y R^3

Solución

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|T| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Sea $v = 3, -1$ aplicar la expansión sobre el eje y

Solución,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(3) + (0)(-1) \\ (0)(3) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

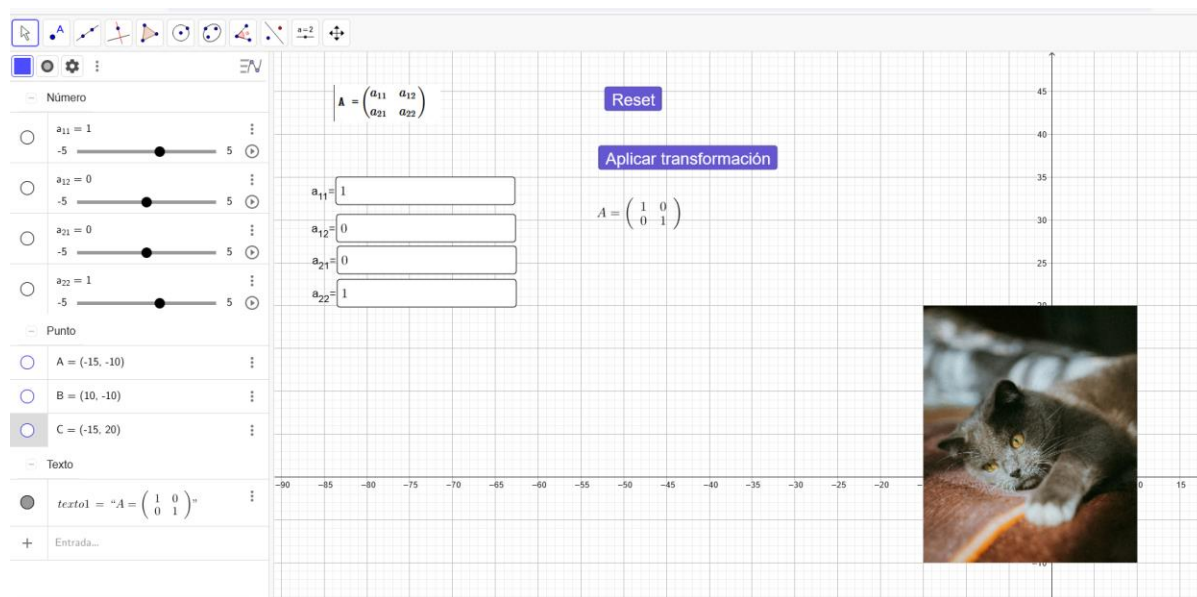
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Complemento Educacional 3 Practica utilizando TIC's competencia genérica

Práctica virtual : Transformaciones lineales

Objetivo: Encontrar la matriz de transformación lineal y visualizar los efectos geométricos que tiene al aplicarse a una región en el plano utilizando el software GeoGebra.

Indicaciones: Ingresa a la dirección <https://www.geogebra.org/m/dtejsmpu> , aparecerá una pantalla similar a la siguiente.



En las cajas de texto podrás introducir las entradas de la matriz de transformación lineal según se te solicite. Posteriormente dar clic en aplicar “Aplicar transformación”. Si deseas la configuración inicial presiona el botón “Reset”.

Ejercicio. Escribir la representación matricial de 2×2 de las transformaciones lineales y hacer un bosquejo de la figura obtenida al aplicar la transformación a la imagen.	
Sistema	Matriz de transformación y Representación gráfica
Expansión a lo largo del eje X con $c = 2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
Compresión a lo largo del eje Y con $c = \frac{1}{3}$	
Reflexión respecto de la recta $y = x$	
Corte a lo largo del eje x con $c = -3$	
Corte a lo largo del eje y con $c = 3$	

Corte a lo largo del eje y con $c=-1/2$	
Rotación de 45° en sentido de las manecillas del reloj	
Rotación de 60° en sentido contrario de las manecillas del reloj	
Reflexión respecto del eje X	
Reflexión respecto del eje Y	

Referencias

1. Golovina. L. I. (1980). Algebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones. Rusia: Mir Moscú.
2. Voevodin. (1982). Algebra Lineal. Rusia: Mir Moscú
3. Málstev A. I. (1978). Fundamentos de Algebra Lineal. Rusia: Mir Moscú.
4. Apostol. T. M. (1990). Cálculo Volumen 2. Estados Unidos: Springer-Verlag, Nueva York.
5. Kolman B, Hill D.R. (2006). Algebra Lineal 8a Edición. Estados Unidos: Brooklyn.
6. Rudin Walter. (1980) Principios de Análisis Matemático. 3ª edición. México: Mc Graw Hill.
7. Piskunov N. (1977) Calculo Diferencial e Integral Tomo I. 3ª edición. URSS: Mir. Moscú.
8. Yakovliev N. G. (1984) Algebra y Principios del Análisis. Sin edición. URRS: Mir. Moscú.
9. Kolmogorov. A. N. (1975) Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcionales. 2ª edición. URSS: Mir. Moscú.
10. Hoffman, K y Kunze, R. (1973). Álgebra lineal. 2ª Edición. México: Prentice – HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
11. Apóstol, T. M. (1985). Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. 2ª edición. Estados Unidos: Blaisdell Publishing Company.
12. Plá Carrera, J. (1996). 01 02 y 03 Análisis Matemático (2ª ed). Reverté S. A.