



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

**Estimación de fallas en actuadores basada en  
observadores de aprendizaje para sistemas LPV**

presentada por

**Ing. Israel Isaac Zetina Rios**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Directora de tesis

**Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo**

Codirector de tesis

**Dr. Guadalupe Madrigal Espinosa**

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2019.



# EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico  
Departamento de Ingeniería Electrónica

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor.,

12/agosto/2019

No. de Oficio:

DIE/100/2019

Asunto:

Aceptación de documentos de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Israel Isaac Zetina Rios**, con número de control **M17CE071** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Estimación de fallas en actuadores basada en observadores de aprendizaje para sistemas LPV"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 9968714

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Guadalupe Madrigal Espinosa  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 11106824

REVISOR 1

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Doctor en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5505019

REVISOR 2

Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 10259407

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante  
Expediente  
MPS/irr.

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 2225, e-mail: die@cenidet.edu.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx





"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor.,

No. de Oficio:

Asunto:

**14/agosto/2019**

**SAC/253/2019**

**Autorización de  
impresión de tesis**

**ING. ISRAEL ISAAC ZETINA RIOS  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Estimación de fallas en actuadores basada en observadores de aprendizaje para sistemas LPV", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®  
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.p. Mtra. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr



# Dedicatoria

*A mi familia...*

# Agradecimientos

A mis padres, que han hecho de mí la persona que soy, a quienes respeto, admiro y amo con todo mi corazón.

A mis hermanos, que llenan de alegría mi vida, agradezco su amistad y compañía aún en los peores momentos de la vida.

A mis asesores, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y el Dr. Guadalupe Madrigal Espinosa quienes me guiaron, apoyaron y siempre me brindaron su amistad. ¡Infinitas gracias!

A los integrantes del comité revisor: Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez y el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, cuyos comentarios y observaciones fueron muy valiosos para el desarrollo del presente trabajo.

A todos mis profesores de la maestría quienes me compartieron sus conocimientos y experiencias, así como su paciencia y comprensión para entrar en el maravilloso mundo del control automático.

A mis amigos de la maestría con quienes compartí momentos muy agradables. Pero sobre todo a mis amigos de generación, Erick, Jonathan, Christian, Elizabeth, Diana, Eusebio, Juan y Henry quienes compartieron conmigo muchos momentos tanto divertidos como difíciles y a pesar de eso siempre estuvimos juntos. Siempre tendrán un amigo sincero en este servidor que les esta infinitamente agradecido. La maestría no hubiera sido lo mismo sin ustedes.

De manera especial agradezco a Citlaly, Abraham, Jesús quienes me ayudaron aportando tiempo, esfuerzo y conocimientos para el desarrollo de este trabajo. Les estoy muy agradecido por todo.

A mis amigos Ricardo, Dersein, Lilia, Karen, Diana Brigett, en quien encontré siempre una amistad maravillosa y quienes me ayudaron a salir adelante con su apoyo y amistad incondicional. A Rocio por su amor incondicional y de quien me siento muy agradecido por siempre tener una palabra de ánimo.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por darme la oportunidad de estudiar y prepararme, así como de tener un ambiente muy agradable de trabajo y una atención excelente en todo momento.

# Resumen

En esta tesis se presenta el análisis, diseño y simulación de observadores para sistemas lineales de parámetros variantes (LPV, por sus siglas en inglés Linear Parameter Varying) aplicado al modelo de un robot de articulación flexible de un eslabón.

Dentro de los algoritmos de estimación que se desarrollaron, se encuentra un observador dinámico generalizado (GDO, por sus siglas en inglés Generalized Dynamic Observer), así como sus casos particulares, el observador proporcional integral (PIO, por sus siglas en inglés Proportional-Integral Observer) y un observador proporcional (PO, por sus siglas en inglés Proportional Observer). Este diseño generaliza el orden del observador, es decir, dependiendo de las necesidades de observación, se puede desarrollar un observador de orden completo u orden reducido. Estos observadores permiten la estimación de los estados no disponibles a la salida del sistema.

Se presenta un algoritmo de estimación para obtener una estructura de observador, nombrada en este trabajo como observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO, por sus siglas en inglés Learning Generalized Dynamic Observer) y su caso particular, el observador proporcional integral de aprendizaje (PILO, por sus siglas en inglés Learning Proportional-Integral Observer), los cuales permiten la estimación de los estados no disponibles a la salida del sistema y reducen el tiempo de convergencia para la estimación de la falla.

La estabilidad asintótica de los observadores se determina mediante el análisis de Lyapunov utilizando desigualdades matriciales lineales (LMI, por sus siglas en inglés Linear Matrix Inequalities) y se utiliza el lema de eliminación para transformar dichas LMIs y mantener la estructura generalizada de los observadores.

Finalmente, el desempeño de los observadores se evalúa mediante el modelo del robot de articulación flexible de un eslabón y se muestran los respectivos análisis de índices de desempeño.

# Abstract

In this thesis the analysis, design and simulation of observers for Linear Parameter Varying (LPV) systems are presented, these observers are applied in the model of a single-link robot of flexible articulation.

Within the estimation algorithms that were developed in this thesis, there is a Generalized Dynamic Observer (GDO) as well as its particular cases, the Proportional-Integral Observer (PIO), and Proportional Observer (PO). This design generalizes the order of the observer, that is, depending on the needs of observation, a complete or reduced order observer can be developed. These observers allow the estimation of the unavailable states at the output of the system.

An estimation algorithm is presented to obtain an observer structure, named in this work as Generalized Dynamic Learning Observer (GDLO) and its particular case, the Learning Proportional-Integral Observer (PILO), which allow the estimation of the states not available at the output of the system and reduce the time of convergence for the estimation of the fault.

The asymptotic stability of the observers is performed by Lyapunov analysis using Linear Matrix Inequalities (LMI) and the elimination lemma is used to transform these LMIs and maintain the generalized structure of the observers.

Finally, the performance of the observers is evaluated by means of the single-link robot of flexible articulation flexible robot model and the respective performance analyzes are shown.

# Índice general

Índice general	IX
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XIV
Nomenclatura	XV
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo general	2
1.2.2 Objetivos específicos	2
1.3 Estudio del estado del arte	3
1.4 Alcances	4
1.5 Aportaciones	4
1.6 Originalidad	5
1.7 Conclusiones del capítulo	5
1.8 Organización del documento	6
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1 Conceptos básicos sobre fallas.	7
2.1.1 Fallas en un sistema	8
2.2 Sistemas lineales de parámetros variantes (LPV)	9
2.2.1 Representación de los sistemas LPV	10
2.2.2 Obtención de la formulación LPV	11
2.2.3 Sistemas cuasi-LPV	18
2.2.4 Obtención de las funciones de ponderación	19
2.2.5 Propiedades de los sistemas LPV	21
2.3 Observadores	23
2.3.1 Tipos de observadores	24
2.3.2 Observador dinámico generalizado	26
2.3.3 Observador de aprendizaje	29
2.4 Conclusiones del capítulo	30
<b>3 Caso de estudio</b>	<b>31</b>

3.1	Robots de articulación flexible . . . . .	31
3.2	Materiales y configuraciones mecánicas . . . . .	34
3.2.1	Eslabones . . . . .	34
3.2.2	Actuadores . . . . .	34
3.2.3	Sistema sensorial . . . . .	34
3.2.4	Configuraciones mecánicas . . . . .	35
3.3	Modelo matemático del robot de articulación flexible de un eslabón . . . . .	36
3.3.1	Obtención del modelo cuasi-LPV del robot de articulación flexible de un eslabón . . . . .	38
3.4	Simulación 1. Validación del modelo cuasi-LPV del robot de articulación flexible de un eslabón . . . . .	39
3.5	Conclusiones del capítulo . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Diseño de observadores para sistemas LPV</b>	<b>47</b>
4.1	Diseño del Observador dinámico generalizado (GDO) para sistemas LPV . . . . .	48
4.1.1	Estudio de la dinámica del error . . . . .	49
4.1.2	Parametrización de las matrices del observador . . . . .	51
4.1.3	Análisis de estabilidad . . . . .	54
4.1.4	Casos particulares . . . . .	56
4.2	Diseño del observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) para sistemas LPV . . . . .	58
4.2.1	Estudio de la dinámica del error . . . . .	59
4.2.2	Parametrización de las matrices del observador . . . . .	60
4.2.3	Análisis de estabilidad . . . . .	62
4.2.4	Casos particulares . . . . .	64
4.3	Conclusiones del capítulo . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Resultados de simulación</b>	<b>67</b>
5.1	Simulación 2. Observador dinámico generalizado para sistemas LPV con fallas en actuador (orden reducido). . . . .	69
5.1.1	Primer escenario de fallas. . . . .	73
5.1.2	Segundo escenario de fallas. . . . .	78
5.2	Simulación 3. Observador dinámico generalizado para sistemas LPV con fallas en actuador (orden completo) . . . . .	82
5.2.1	Escenario de fallas. . . . .	86
5.3	Simulación 4. Observador dinámico generalizado de aprendizaje para sistemas LPV con fallas en actuador. . . . .	90
5.3.1	Primer escenario de fallas . . . . .	94
5.3.2	Segundo escenario de fallas. . . . .	98
5.3.3	Tercer escenario de fallas. . . . .	103
5.4	Simulación 5. Observador dinámico generalizado de aprendizaje para sistemas LPV con fallas en actuador modificando el retardo. . . . .	108
5.5	Índice de desempeño considerando diferentes incertidumbres paramétricas . . . . .	111
5.6	Conclusiones del capítulo . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Conclusiones generales</b>	<b>115</b>

6.1 Trabajos futuros . . . . .	116
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
<b>Anexos</b>	<b>121</b>
<b>A Índices de desempeño IAE, ISE e ITAE</b>	<b>123</b>

# Índice de figuras

2.1	Figura convexa de un conjunto de puntos en el plano . . . . .	10
2.2	Sistema RLC con elementos variantes en el tiempo . . . . .	15
2.3	Péndulo simple. . . . .	17
2.4	Representación del politopo de un sistema en el que se consideran dos parámetros variables. . . . .	20
2.5	Esquema general de un observador. . . . .	23
2.6	Diagrama a bloques de un observador dinámico generalizado. . . . .	28
2.7	Diagrama a bloques de un observador tipo Luenberger de aprendizaje. . . . .	30
3.1	Flexibilidad en las articulaciones. . . . .	32
3.2	Flexibilidad en los eslabones. . . . .	32
3.3	Manipulador remoto de la estación espacial (SSRMS). . . . .	33
3.4	Robot flexible de un grado de libertad construido en aluminio y montado en voladizo. . . . .	35
3.5	Robot de articulación flexible de un eslabón . . . . .	36
3.6	Simulación 1. Variación de $\varrho(t)$ . . . . .	40
3.7	Simulación 1. Posición del motor ( $x_1$ ). . . . .	41
3.8	Simulación 1. Error de la posición del motor. . . . .	41
3.9	Simulación 1. Velocidad del motor ( $x_2$ ). . . . .	42
3.10	Simulación 1. Error de la velocidad del motor. . . . .	42
3.11	Simulación 1. Posición del eslabón ( $x_3$ ). . . . .	43
3.12	Simulación 1. Error de la posición del eslabón. . . . .	43
3.13	Simulación 1. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ). . . . .	44
3.14	Simulación 1. Error de la velocidad del eslabón. . . . .	44
3.15	Simulación 1. Funciones de ponderación. . . . .	45
5.1	Diagrama a bloques de un GDLO. . . . .	68
5.2	Simulación 2. Prueba 1. Variación de $\varrho(t)$ . . . . .	74
5.3	Simulación 2. Prueba 1. Funciones de ponderación. . . . .	74
5.4	Simulación 2. Prueba 1. Posición del motor ( $x_1$ ). . . . .	75
5.5	Simulación 2. Prueba 1. Velocidad del motor ( $x_2$ ). . . . .	75
5.6	Simulación 2. Prueba 1. Posición del eslabón ( $x_3$ ) . . . . .	76
5.7	Simulación 2. Prueba 1. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ) . . . . .	76
5.8	Simulación 2. Prueba 1. Estimación de la falla en actuador. . . . .	77
5.9	Simulación 2. Prueba 2. Variación de $\varrho(t)$ . . . . .	78
5.10	Simulación 2. Prueba 2. Funciones de ponderación. . . . .	79
5.11	Simulación 2. Prueba 2. Posición del motor ( $x_1$ ). . . . .	79

5.12	Simulación 2. Prueba 2. Velocidad del motor ( $x_2$ ).	80
5.13	Simulación 2. Prueba 2. Posición del eslabón ( $x_3$ ).	80
5.14	Simulación 2. Prueba 2. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ).	81
5.15	Simulación 2. Prueba 2. Estimación de la falla en actuador.	81
5.16	Simulación 3. Variación de $\varrho(t)$ .	86
5.17	Simulación 3. Funciones de ponderación.	87
5.18	Simulación 3. Posición del motor ( $x_1$ ).	87
5.19	Simulación 3. Velocidad del motor ( $x_2$ ).	88
5.20	Simulación 3. Posición del eslabón ( $x_3$ ).	88
5.21	Simulación 3. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ).	89
5.22	Simulación 3. Estimación de la falla en actuador.	89
5.23	Simulación 4. Prueba 1. Variación de $\varrho(t)$ .	95
5.24	Simulación 4. Prueba 1. Funciones de ponderación.	95
5.25	Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).	96
5.26	Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).	96
5.27	Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).	97
5.28	Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).	97
5.29	Simulación 4. Prueba 1. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.	98
5.30	Simulación 4. Prueba 2. Variación de $\varrho(t)$ .	99
5.31	Simulación 4. Prueba 2. Funciones de ponderación.	100
5.32	Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).	100
5.33	Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).	101
5.34	Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).	101
5.35	Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).	102
5.36	Simulación 4. Prueba 2. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.	102
5.37	Simulación 4. Prueba 3. Variación de $\varrho(t)$ .	104
5.38	Simulación 4. Prueba 3. Funciones de ponderación.	104
5.39	Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).	105
5.40	Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).	105
5.41	Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).	106
5.42	Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).	106
5.43	Simulación 4. Prueba 3. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.	107
5.44	Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 0.001s$ ).	109
5.45	Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 1s$ ).	109
5.46	Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 200s$ ).	110
5.47	Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 2000s$ ).	110

# Índice de tablas

Tabla 3.1 Definición de parámetros . . . . . 37

Tabla 5.1 Índice de desempeño IAE para el primer escenario de fallas. . . . . 77

Tabla 5.2 Índices de desempeño IAE para el segundo escenario de fallas. . . . . 82

Tabla 5.3 Índice de desempeño IAE para el primer escenario de fallas . . . . . 98

Tabla 5.4 Índice de desempeño IAE para el segundo escenario de fallas . . . . . 103

Tabla 5.5 Índice de desempeño IAE para el tercer escenario de fallas. . . . . 107

Tabla 5.6 Índice de desempeño IAE con diferentes porcentajes de incertidumbres para-  
métricas. . . . . 112

# Nomenclatura y acrónimos

## Conjuntos y Normas

$\mathbb{R}$	Conjunto de todos los números reales.
$\mathbb{C}_+$	Semiplano complejo abierto por la derecha
$\ a\ $	La norma Euclidiana de $a$ .

## Matrices y Vectores

$A > 0$	Matriz definida positiva.
$A < 0$	Matriz definida negativa.
$I$	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
$0$	Matriz con elementos cero de dimensiones apropiadas.
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$ .
$A^{-1}$	Inversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $\det(A) \neq 0$ .
$A^T$	Traspuesta de una matriz $A$ .
$A^\perp$	Ortogonal de una matriz $A$ .
$\text{eig}(A)$	Conjunto de todos los eigenvalores de la matriz $A$ .
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
$\text{rango}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .
$(*)$	Los elementos traspuestos en posición simétrica.
$\text{diag}(A)$	Diagonal principal de la matriz $A$ .
$\text{unos}_{n,m}$	Matriz con elementos uno de dimensión $n \times m$ .
$\text{ceros}_{n,m}$	Matriz con elementos cero de dimensión $n \times m$ .

## Acrónimos

CD	Corriente directa.
LMI	Desigualdad matricial lineal ( <i>Linear Matrix Inequalities</i> ).
LTI	Lineal invariable en el tiempo ( <i>Linear Time-Invariant</i> ).
LTV	Lineal variable en el tiempo ( <i>Linear Time-Variant</i> ).
LPV	Lineal de parámetros variables ( <i>Linear Parameter-Varying</i> ).
LO	Observador de aprendizaje ( <i>Learning Observers</i> ).
GDO	Observador dinámico generalizado ( <i>Generalize Dynamic Observer</i> ).
PIO	Observador proporcional integral ( <i>Proportional-Integral Observer</i> ).
PO	Observador proporcional ( <i>Proportional Observer</i> ).
GDLO	Observador dinámico generalizado de aprendizaje ( <i>Learning Generalized Dynamic Observer</i> ).
PILO	Observador proporcional integral de aprendizaje ( <i>Learning Proportional-Integral Observer</i> ).
IAE	Integral del error absoluto ( <i>Integral of Absolute Error</i> ).
ISE	Integral del error al cuadrado ( <i>Integral Squared Error</i> ).
ITAE	Integral del error absoluto multiplicado por el tiempo ( <i>Time-weighted Absolute Error</i> ).
IFAC	Federación internacional de control automático ( <i>International Federation of Automatic Control</i> ).

# Capítulo 1

## Introducción

Con frecuencia en los procesos industriales de la actualidad es necesario conocer la medición de ciertas variables mediante algún sensor específico, sin embargo, no siempre es posible medir todas las variables de un sistema a través de sensores físicos, ya sea porque la instrumentación requerida es muy costosa o simplemente porque no existe el sensor que pueda medir dicha variable

Hoy en día existen procesos que constan de una gran cantidad de equipos y sistemas para realizar una tarea específica, esto los vuelve propensos a la ocurrencia de fallas en algún actuador, componente o sensor. La poca atención a este tipo de fallas puede degradar el desempeño del proceso, reducir la vida de los componentes, generar paros no programados (lo cual puede desembocar en pérdidas económicas) e incluso si no se atienden a tiempo puede ocurrir un desastre de mayor magnitud en la tarea desarrollada. Debido a esta problemática, los observadores son una estrategia ampliamente usada en sistemas de detección y diagnóstico de fallas.

Existe una variedad de observadores con características diferentes aplicados a sistemas lineales y no lineales. Este trabajo de tesis se enfoca en los observadores de aprendizaje (LO, por sus siglas en inglés Learning Observers) con una estructura generalizada para la estimación de fallas en actuadores en sistemas no lineales con representación lineal de parámetros variables (LPV, por sus siglas en inglés Linear Parameter Varying). Se presenta el desarrollo de un observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO, por sus siglas en inglés Learning Generalized Dynamic Observer) para la estimación simultánea de estados y fallas en actuador, el cual reduce considerablemente el tiempo de convergencia de la falla estimada. Los resultados del GDLO se muestra mediante simulaciones utilizando el modelo de un robot de articulación flexible de un eslabón.

## 1.1. Planteamiento del problema

La cantidad de equipos y sistemas en procesos, aumenta la posibilidad de que se presenten fallas y/o averías en sensores, actuadores y/o componentes. Esta ocurrencia puede degradar el desempeño del proceso y derivar en un paro no programado de la planta. Como respuesta a los altos requerimientos de seguridad, confiabilidad y desempeño, resulta necesario implementar esquemas de detección de fallas que permitan mejorar el desempeño de los sensores y actuadores mediante el mantenimiento, y por lo tanto su vida útil.

Los observadores como el observador Luenberger, el observador proporcional, el observador proporcional integral y el observador dinámico generalizado logran tener una estimación simultánea de estados y fallas adecuado, sin embargo, consideran un tiempo de convergencia para la estimación de la falla que podría no ser adecuado para fines de control tolerante a fallas. Es por esta razón que en este trabajo de tesis se propone incluir la etapa de aprendizaje en la estructura generalizada para reducir considerablemente el tiempo de convergencia para la estimación de la falla.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Diseñar un observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) para la estimación de fallas abruptas en actuadores para procesos con representación LPV.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Obtener un modelo LPV para el robot de articulación flexible de un eslabón.
- Diseñar un observador dinámico generalizado (GDO) para sistemas LPV.
- Diseñar un observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) que permita la estimación de fallas abruptas en actuadores con fines de monitoreo.
- Comparar el desempeño del GDLO, con el observador proporcional integral de aprendizaje (PILO), como caso particular.

### 1.3. Estudio del estado del arte

Inicialmente los observadores para sistemas lineales fueron propuestos por Luenberger (1964) mediante la representación de modelos en variables de estado y ecuaciones diferenciales. En Luenberger (1971) se muestran propiedades como observabilidad y estabilidad para el diseño de observadores lineales.

Mediante la teoría LPV, es posible obtener una representación lineal partiendo de un modelo no lineal. Existen diversos trabajos que abordan el diseño de observadores para sistemas LPV como en Daafouz et al. (2002) donde se propone un observador para sistemas LPV en tiempo discreto. Otros trabajos más recientes como en Bolajraf et al. (2010) se presenta un observador LPV intervalar con incertidumbre en la salida. En Rodrigues et al. (2015), los autores muestran un observador para sistemas descriptivos LPV con retardo, en Chen et al. (2019) se presenta un observador en modos deslizantes para sistemas LPV para la estimación de fallas en sensores, por mencionar algunos.

El observador con una estructura generalizada fue propuesto inicialmente por Middleton et al. (1989) y Marquez (2003) donde presentaron los sistemas como un mapeo de entrada a estado y buscaron errores de estimación pequeños en presencia de excitaciones persistentes.

En la literatura existen diversos trabajos mediante el uso de observadores dinámicos generalizados (GDO) como en Osorio-Gordillo (2015) donde se presenta un GDO para sistemas descriptivos con incertidumbres para el diagnóstico de fallas y control, en Osorio-Gordillo et al. (2015) se trata el diseño de un observador GDO  $H_\infty$  para sistemas singulares LPV con perturbaciones. En Pérez-Estrada et al. (2017b) se propone un observador dinámico generalizado para sistemas LPV aplicado al modelo de un intercambiador de calor de tubería doble. La metodología propuesta en este trabajo logra tener robustez ante incertidumbres paramétricas y una estructura generalizada, de la cual pueden derivarse casos particulares. En Pérez-Estrada et al. (2017a) se propone el diseño de un GDO para sistemas LPV discretos, entre otros trabajos.

Algunos otros investigadores han puesto atención al diseño del observador de aprendizaje (LO) para la estimación de fallas, como en Chen and Chowdhury (2007) en donde se presenta el diseño de un LO para sistemas LPV para estimar variables de estados, en Jia et al. (2012) se propone un observador de aprendizaje de entradas desconocidas (LUIO, por sus siglas en inglés Learning Unknown Input Observer), en Chen et al. (2014) se diseña un LO para la generación de residuos para la detección de fallas en un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés Linear Time-Invariant Systems) aplicado a una celda de baterías, en Jia et al. (2014) se presenta un método de estimación de fallas basado en LOs para sistemas difusos Takagi-Sugeno. Mediante esta metodología es posible estimar tanto fallas abruptas como fallas variables en el tiempo. Sin embargo, en esta metodología propuesta no se consideran incertidumbres paramétricas para el caso de simulación.

En Jia et al. (2015) se diseña un observador descriptivo difuso de aprendizaje (FDLO, por sus siglas en inglés Fuzzy Descriptor Learning Observer) para un sistema descriptivo difuso Takagi-Sugeno basado en técnicas de desacoplamiento de perturbaciones. La metodología propuesta logra reducir

considerablemente el tiempo de convergencia de la falla, sin embargo el análisis para la obtención del observador puede ser complejo. En Lin and Du (2016) se diseñan LOs para estimar fallas en un modelo de un propulsor.

En esta revisión bibliográfica se muestra que existe un gran interés por los observadores para sistemas LPV, así como los observadores generalizados y de aprendizaje. Por lo cual el objetivo de este tema de tesis es adoptar las ventajas de la estructura generalizada y de la etapa de aprendizaje, para así proponer un esquema de estimación de fallas.

## 1.4. Alcances

- El diseño del observador de aprendizaje se realizará considerando el modelo no lineal de un robot de articulación flexible de un eslabón del cual se obtendrá su representación LPV utilizando el enfoque politópico.
- El desempeño del observador de aprendizaje generalizado se evaluará mediante simulación en base al programa de versión 2017b.
- Los resultados obtenidos del observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) se compararán con un observador proporcional integral de aprendizaje (PILO), como caso particular del observador propuesto.

## 1.5. Aportaciones

Las aportaciones de este trabajo de tesis se muestran a continuación:

- La obtención de un modelo cuasi-LPV del robot de articulación flexible de un eslabón, partiendo de las ecuaciones no lineales del mismo.
- Diseño del GDO y sus casos particulares (PO y PIO) para sistemas LPV con fallas en actuadores. El GDO ha sido utilizado en otros trabajos para la estimación de variables de estado (véase Osorio-Gordillo et al. (2015), Pérez-Estrada et al. (2017b), Pérez-Estrada et al. (2017a)). En Osorio-Gordillo et al. (2018) se presenta un GDO para la estimación de fallas en sistemas descriptivos, los resultados, muestran un tiempo de convergencia considerable en la estimación de la falla. El análisis y diseño del GDO (tomando la estructura del GDO de Osorio-Gordillo et al. (2018)) permitió evaluar el desempeño de la estimación de la falla para los sistemas LPV. Los resultados obtenidos fueron similares a los mostrados para el GDO aplicado a sistemas descriptivos, el tiempo de convergencia para la estimación de la falla es considerable si esta información se usara para un esquema de control tolerante a fallas.
- Diseño de un GDLO para sistemas LPV con fallas en actuadores. En el presente trabajo de tesis se plantea la estructura de un observador que combina las características del GDO y

del LO. En previos trabajos sobre LO (véase Jia et~al. (2014), Jia et~al. (2015), Jia et~al. (2016a)) se demostró que la etapa de aprendizaje permite reducir el tiempo de convergencia en la estimación de la falla, mientras que el GDO ha presentado robustez en la estimación de variables ante incertidumbres paramétricas (Osorio~Gordillo et~al. (2015)).

- Diseño del PILO como caso particular. Considerando que el GDLO es una generalización, a partir de este es posible obtener el PILO como caso particular, siguiendo la misma metodología utilizada para el GDLO. El PILO se utiliza en este trabajo de tesis para comparar el desempeño del GDLO para la estimación de fallas en actuador en sistemas LPV.

## 1.6. Originalidad

En este trabajo se presenta un GDO y sus observadores derivados, aplicados a sistemas LPV para la estimación de fallas en actuador, introduciendo así una alternativa de diseño de observadores para dichos fines.

Al evaluar el GDO para la estimación de fallas en actuador en este trabajo de tesis, se muestra que se mantiene un tiempo de convergencia considerable para la estimación de la falla como en otros trabajos que se han desarrollado utilizando el GDO para la estimación de fallas (véase Osorio~Gordillo et~al. (2018)).

En este trabajo se realiza el diseño de un GDLO el cual hasta el momento no había sido reportado en la literatura. El GDLO toma la etapa de aprendizaje del LO para mejorar el tiempo de convergencia de la estimación de la falla, y además, tiene una estructura generalizada tomada del GDO que permite tener robustez ante incertidumbres paramétricas. El GDLO al tener una estructura generalizada permite obtener casos particulares como el PILO el cual también mantiene las características de aprendizaje y robustez según lo reportado en este trabajo de tesis.

## 1.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se puede notar que existe un gran interés por mejorar el tiempo de convergencia de la estimación de la falla mediante el diseño del GDLO. En el estado del arte se muestra que en los trabajos más recientes no se ha desarrollado un GDO con la técnica de aprendizaje utilizada en el LO. Finalmente, este trabajo queda acotado a resultados en simulación aplicado al robot de articulación flexible y la principal aportación de este trabajo es la nueva metodología que une la técnica de aprendizaje del LO y la estructura del GDO en un solo observador conocido como GDLO.

## 1.8. Organización del documento

Los siguientes capítulos se encuentran organizados como se muestra a continuación:

En el **Capítulo 2** se presentan algunos conceptos fundamentales sobre fallas, clasificación, y su representación para sistemas lineales, considerando fallas en sensores y actuadores. Se describen los sistemas LPV y cuasi-LPV. Su obtención a partir de un sistema no lineal y algunas propiedades importantes para este tipo de sistemas. Finalmente se presenta el concepto de observador y una descripción del observador de aprendizaje y del observador dinámico generalizado.

En el **Capítulo 3** se aborda el robot de articulación flexible como caso de estudio, las ecuaciones dinámicas no lineales del robot de un eslabón y su representación cuasi-LPV. Se muestran simulaciones de la evaluación del modelo no lineal comparado con el modelo cuasi-LPV.

En el **Capítulo 4** se realiza el diseño y análisis de un GDO para la estimación simultánea de estados y fallas en actuador para sistemas LPV y se muestra la obtención de un observador PI y un observador P como casos particulares para estimar fallas en actuadores para sistemas LPV.

En el **Capítulo 5** se muestran los resultados obtenidos del GDO, PIO y PO aplicados al robot de articulación flexible de un eslabón ante dos escenarios de falla diferentes, también se muestran los resultados del GDLO y PILO aplicados a los mismos escenarios de falla, así mismo se analizan los índices de desempeño de cada uno de los observadores diseñados en este trabajo.

En el **Capítulo 6** se dan las conclusiones obtenidas en este trabajo y se proponen algunos trabajos futuros a considerar.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

El presente capítulo está dedicado a la descripción de diferentes conceptos y definiciones para una mejor comprensión de las fallas, los sistemas LPV y observadores.

En la sección 2.1 se describen algunos conceptos de fallas y cómo se presentan en un sistema lineal. En la sección 2.2 se aborda la representación de los sistemas LPV y cuasi-LPV y algunas propiedades de los mismos. Por último, en la sección 2.3 se presentan definiciones sobre observadores, así como algunos tipos de observadores que se encuentran reportados en la literatura.

### 2.1. Conceptos básicos sobre fallas.

El comité de SafeProcess de la IFAC ha establecido un vocabulario dentro de la comunidad de diagnóstico de fallas, el cual está publicado en diversos libros en inglés (Isermann (2006), (Blanke et~al. (2006))). La terminología usada a continuación, es tomada de Verde et~al. (2013).

Una *falla* consiste en una desviación de una propiedad característica de un sistema con respecto a las condiciones usuales y estándar de operación. Por lo tanto, una falla en un solo componente puede cambiar el rendimiento del sistema en general.

Una *avería* es una interrupción permanente de la capacidad de un sistema para realizar una función requerida en condiciones operativas específicas.

Una *disfunción* se denota cuando el sistema es incapaz de cumplir con alguna de las funciones para las que fue diseñado, de manera intermitente.

### Clasificación de fallas

A continuación, se presenta una clasificación de fallas dependiendo de dónde se presentan en un sistema:

- **Falla en sensores:** Estos son errores de medición causados por defectos en los sensores, tales como, offset, bias, cortes de energía, mediciones “congeladas”, error de escala, histéresis, etc. (Unbehauen (2009)).

- **Falla en actuadores:** Estos son errores causados por defectos en actuadores, tales como daños de rodamientos, pérdida de impulso, defectos en engranajes, efectos de envejecimiento, etc. (Unbehauen (2009)).
- **Falla en componentes:** Estos son cambios no deseados en la operación del sistema causados por defectos en los elementos de la planta, tales como, grietas, rupturas, fracturas, fugas, cortes de energía, pérdida de partes, variaciones anormales de parámetros, debido a cambios repentinos de las condiciones, u obstáculos externos, tales como, colisiones, obstrucción de las tuberías de salida, etc. (Unbehauen (2009)).

## Tipos de fallas

Las fallas pueden presentarse con diferentes formas en un proceso, a continuación, se listan las más comunes:

1. **Falla abrupta.** La falla se manifiesta con un cambio repentino y puede ser modelada mediante una función tipo escalón donde se desconoce el tiempo de ocurrencia y suele desaparecer de la misma forma (Verde et al. (2013)).
2. **Falla incipiente.** Esta falla se manifiesta como un cambio en la magnitud de las variables del sistema que va aumentando paulatinamente con respecto al tiempo y puede modelarse mediante una función tipo rampa con un tiempo de ocurrencia desconocido (Verde et al. (2013)).
3. **Falla intermitente.** Este tipo de falla se considera que no tiene una evolución determinada en el tiempo y frecuentemente se presenta solamente en ciclos de trabajo de manera aleatoria y desaparece también de la misma forma (Verde et al. (2013)).

### 2.1.1. Fallas en un sistema

#### Fallas en actuador en un sistema lineal

Considerando un sistema lineal, con presencia de **fallas en actuador**, se puede representar como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gf(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  son los estados, la entrada y la salida del sistema respectivamente. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son matrices de dimensiones apropiadas.  $G$  representa la matriz de inferencia de la falla en el sistema y  $f(t)$  corresponde a la variación en el tiempo de la falla.

## Fallas en sensor en un sistema lineal

La representación de un sistema lineal, considerando la presencia de **fallas en sensores**, se presenta a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + G_s f(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  son los estados, la entrada y la salida del sistema respectivamente. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son matrices de dimensiones apropiadas.  $G_s$  representa la matriz de inferencia de la falla en el sistema y  $f(t)$  corresponde a la variación en el tiempo de la falla.

En las ecuaciones (2.1) y (2.2) se presenta un cambio de tipo aditivo de la ecuación de estado (fallas en actuadores) y salidas del sistema (fallas en sensores) respectivamente.

## 2.2. Sistemas lineales de parámetros variantes (LPV)

Los sistemas lineales de parámetros variables en el tiempo (LPV) fueron introducidos por Shamma (1988) para distinguir a aquellos sistemas de los sistemas lineales invariables en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés Linear Time Invariant) y de los sistemas lineales variables en el tiempo (LTV, por sus siglas en inglés Linear Time Variant) (Mohammadpour and Scherer (2012)). Desde entonces, el paradigma para sistemas LPV se ha convertido en un formalismo estándar, para el análisis y síntesis de controladores, observadores e incluso la identificación de sistemas.

Los sistemas LPV son sistemas lineales dinámicos cuya descripción matemática depende de parámetros que cambian sus valores a lo largo del tiempo, dichos parámetros son considerados acotados y medibles, adoptando valores dentro de un subconjunto acotado, a menudo considerado como un polítopo compacto y convexo (por ejemplo, una caja). Un sistema LPV es considerado como una familia parametrizada de sistemas lineales que cambian con las condiciones de punto de operación del sistema no lineal, generando con ello, la aproximación en términos de un conjunto de sistemas lineales a un sistema no lineal.

Los sistemas LPV son descritos comúnmente por ecuaciones de la forma (Briat (2014))

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \quad t \geq 0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

con

$$\rho(t) = [\rho_1(t), \dots, \rho_r(t)]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\tag{2.4}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  son los estados, la entrada y la salida del sistema, respectivamente.  $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de  $r$  parámetros variantes, el cual actúa internamente en el sistema modificando su estructura en el tiempo, y consecuentemente, modificando el comportamiento general de la salida del sistema.

Los puntos que conforman la trayectoria admisible pertenecen en todo instante al conjunto compacto  $\subset \mathbb{R}^r$  esto es, el vector de parámetros satisface en todo tiempo  $t$  la condición:

$$\rho(t) \in \Omega = \{\rho(t) : \underline{\rho}_i \leq \rho_i \leq \bar{\rho}_i \quad \forall i = 1, \dots, r\} \subset \mathbb{R}^r \quad (2.5)$$

donde  $\underline{\rho}_i$  y  $\bar{\rho}_i$  son el límite inferior y superior de variación del parámetro  $\rho_i(t)$ , respectivamente. El sistema LPV puede interpretarse como una generalización de un sistema LTI cuando el parámetro, es constante  $\rho(t) = \rho_0$ .

### 2.2.1. Representación de los sistemas LPV

Un sistema LPV se puede clasificar en varias familias en función de cómo los parámetros están involucrados en las ecuaciones del sistema. Esencialmente, hay tres formulaciones globales para los sistemas LPV, (Briat (2014)).

- Formulación politópica.
- Formulación dependiente de los parámetros.
- Formulación para una transformación lineal fraccional (LFT, por sus siglas en inglés Linear Fractional Transformation).

En el desarrollo de este tema de tesis se trató el caso de sistemas LPV en su representación politópica, ya que es una de más utilizadas en la literatura de sistemas LPV.

#### Formulación politópica

El marco politópico (politópico, hace referencia a que es perteneciente o relativo a un politopo) ofrece una manera de representar y analizar sistemas LPV como una combinación convexa variable en el tiempo de sistemas LTI. Un politopo (véase Fig. 2.1) es un objeto con “lados planos”: cuadrados, cubos, triángulos y tetraedros, con lo que la estabilidad del sistema politópico puede ser caracterizada en términos de la estabilidad de los vértices del sistema. Esta propiedad estructural puede aprovecharse para obtener resultados de estabilidad que pueden verificarse utilizando técnicas de optimización convexa.

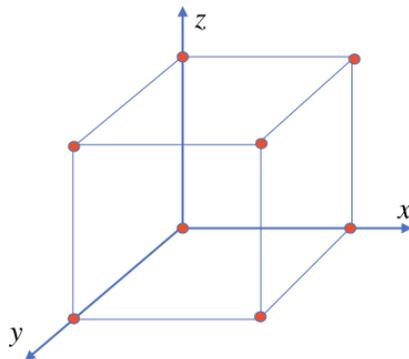


Fig. 2.1. Figura convexa de un conjunto de puntos en el plano

La representación politópica de un sistema LPV consiste en definir funciones de ponderación que permitan obtener las variables del sistema como la suma de los modelos definidos en cada vértice del politopo. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\rho(t)) \leq 1, \sum_{i=1}^{2^r} \mu_i(\rho(t)) = 1 \quad (2.6)$$

donde  $\mu_i(\rho(t))$  es la función de ponderación dependiente de los parámetros. El vector de parámetros  $\rho(t)$  se encuentra dentro de un politopo de  $2^r$  vértices donde  $r$  es el número de parámetros variables. Cada vértice del politopo, está formado por la combinación de los valores extremos de cada parámetro.

La forma general de un sistema LPV con formulación politópica es como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medibles,  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C$  son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas,  $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de  $r$  parámetros variables. Se evalúa cada una de las  $k$  combinaciones de los límites de los parámetros variables, generando así un conjunto de modelos locales, donde  $k = 2^r$ , con  $r$  igual al número de parámetros variables.

### 2.2.2. Obtención de la formulación LPV

En la literatura existen diversos métodos para obtener la representación LPV politópica de un sistema:

- **Linealizando en diferentes puntos de operación**
- **A partir de un modelo LTV**
- **Considerando las no linealidades de un modelo no lineal**

#### Linealizando en diferentes puntos de operación

Linealización utilizando el Jacobiando es una metodología para formular un modelo LPV. Es útil para modelos no lineales que pueden ser linealizados alrededor de puntos de equilibrio de interés (Briat (2014)). Dichas linealizaciones juntas, forman una familia de modelos linealizados, resultando así un modelo LPV.

La familia de modelos linealizados, son una aproximación local de las dinámicas del sistema no lineal alrededor de los puntos de equilibrio de interés. La aproximación del sistema no lineal es calculada usando series de Taylor.

Considere un modelo no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, t) + g(x, u, t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde  $x(t)$ ,  $u(t)$  y  $y(t)$  son los estados, la entrada y la salida.  $C$  es una matriz de dimensiones apropiadas,  $f(x, u, t)$  y  $g(x, u, t)$  son funciones no lineales.

Tomando  $k$  puntos de linealización definidos por  $x_{eq_i}$  y  $u_{eq_i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , se obtiene el siguiente modelo LPV

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(t) (A_i \bar{x}(t) + B_i \bar{u}(t)) \\ y(t) &= C\bar{x}(t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde  $\bar{x}(t) = x(t) - x_{eq_i}$ ,  $\bar{u}(t) = u(t) - u_{eq_i}$ ,  $\mu_i(t)$  son las funciones de ponderación que definen la intervención de cada modelo local.  $A_i = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x(t)} \right|_{x=x_{eq_i}}$ ,  $B_i = \left. \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u(t)} \right|_{u=u_{eq_i}}$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , y  $C$  es una matriz de dimensiones apropiadas.

*Ejemplo:*

Considerando las ecuaciones de un electroimán como se muestra a continuación (Khalil (2002))

$$\begin{aligned}M \frac{d^2 y(t)}{dt} &= Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \\ e(t) &= R(t)i(t) + L \frac{di(t)}{dt}\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde  $e(t)$  es el voltaje de entrada,  $i(t)$  es la corriente del embobinado,  $L$  es la inductancia,  $g$  la gravedad,  $y(t)$  la posición de la esfera,  $R(t)$  es la resistencia la cual se considera que es variable en el tiempo debido a sobrecalentamiento en los componentes y  $M$  es la masa de la esfera.

Realizando el cambio de variable

$$x_1(t) = y(t), \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_3(t) = i(t) \quad y \quad u(t) = e(t)\tag{2.11}$$

queda como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= g - \frac{x_3^2(t)}{Mx_1(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{e(t)}{L} - \frac{R(t)x_3(t)}{L}\end{aligned}\tag{2.12}$$

expresando las ecuaciones anteriores en el formato de la ecuación (2.8) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ g - \frac{x_3^2(t)}{Mx_1(t)} \\ -\frac{R(t)x_3(t)}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)\tag{2.13}$$

considerando  $\dot{x}_1(t) = 0$ ,  $\dot{x}_2(t) = 0$  y  $\dot{x}_3(t) = 0$  y renombrando se tiene

$$f_1(t) = x_2(t) \quad (2.14)$$

$$f_2(t) = g - \frac{x_3^2(t)}{Mx_1(t)} \quad (2.15)$$

$$f_3(t) = \frac{u(t)}{L} - \frac{Rx_3(t)}{L} \quad (2.16)$$

se obtiene el punto de equilibrio definiendo una entrada constante  $e_{eq} = 0$ , obteniendo así

$$x_{1_s} = \left( \frac{e_{eq}}{R(t)} \right)^2 \frac{1}{Mg}, \quad x_{2_s} = 0, \quad x_{3_s} = \frac{e_{eq}}{R(t)} \quad (2.17)$$

considerando el vector de equilibrio  $x_{eq} = \begin{bmatrix} x_{1_s} \\ x_{2_s} \\ x_{3_s} \end{bmatrix}$  y  $u_{eq} = e_{eq}$  se procede a calcular

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=x_{eq}}, \quad B = \left. \frac{\partial g(x, u, t)}{\partial u(t)} \right|_{u(t)=u_{eq}}, \quad \text{quedando}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2(t)} & \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_3(t)} \\ \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_2(t)} & \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_3(t)} \\ \frac{\partial f_3(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial f_3(t)}{\partial x_2(t)} & \frac{\partial f_3(t)}{\partial x_3(t)} \end{bmatrix} \right|_{x(t)=x_{eq}} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1_s} \\ x_2(t) - x_{2_s} \\ x_3(t) - x_{3_s} \end{bmatrix} + \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(t)}{\partial u(t)} \\ \frac{\partial f_2(t)}{\partial u(t)} \\ \frac{\partial f_3(t)}{\partial u(t)} \end{bmatrix} \right|_{u(t)=u_{eq}} [u(t) - u_{eq}]$$

sustituyendo en las derivadas parciales, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_3^2(t)}{Mx_1^2(t)} & 0 & \frac{-2x_3(t)}{Mx_1(t)} \\ 0 & 0 & \frac{-R(t)}{L} \end{bmatrix} \right|_{x(t)=x_{eq_i}} \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1_s} \\ x_2(t) - x_{2_s} \\ x_3(t) - x_{3_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} [u(t) - u_{eq}]$$

evaluando el punto de equilibrio, se obtiene

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{3_s}^2}{Mx_{1_s}^2} & 0 & \frac{-2x_{3_s}}{Mx_{1_s}} \\ 0 & 0 & \frac{-R(t)}{L} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \bar{u}(t) \quad (2.18)$$

donde  $\bar{x}(t) = x(t) - x_{eq}$  y  $\bar{u}(t) = u(t) - u_{eq}$ .

La ecuación (2.18) puede escribirse como

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad (2.19)$$

la ecuación (2.19) está en su forma LTV, debido a que  $R(t)$  es un parámetro variante en el tiempo.

Definiendo  $R(t) = \rho(t)$ , se pueden obtener los valores máximos y mínimos de variación

$$[\bar{R}, \underline{R}] = [\bar{\rho}, \underline{\rho}] \quad (2.20)$$

considerando los valores máximos y mínimos de  $\rho(t)$  y sustituyéndolos en la matriz  $A(t)$  se obtienen los modelos locales

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{3_s}^2}{Mx_{1_s}^2} & 0 & \frac{-2x_{3_s}}{Mx_{1_s}} \\ 0 & 0 & \frac{-\underline{\rho}}{L} \end{bmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{3_s}^2}{Mx_{1_s}^2} & 0 & \frac{-2x_{3_s}}{Mx_{1_s}} \\ 0 & 0 & \frac{-\bar{\rho}}{L} \end{bmatrix}$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\rho(t)) = \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}}, \quad \mu_2(\rho(t)) = \frac{\rho(t) - \underline{\rho}}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \quad (2.21)$$

donde  $\bar{\rho}$  y  $\underline{\rho}$  son el límite superior e inferior de  $\rho(t)$ , respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\rho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t)) = 1 \quad (2.22)$$

donde  $k = 2^r$  es número de combinaciones posibles de los límites del parámetro variable. Para el sistema (2.19) se considera solo a  $R(t)$  como parámetro variable. De tal forma que  $r = 1$ .

Ahora, el sistema (2.19) puede ser expresado en forma LPV como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $A_i$  está definida previamente.

## A partir de un modelo LTV

Un modelo LTV, con parámetros variables se describe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde  $x(t)$ ,  $u(t)$  y  $y(t)$  son los estados, la entrada y la salida.  $A(t)$  y  $B(t)$  son matrices que dependen de parámetros variantes en el tiempo, y  $C$  es una matriz de dimensiones apropiadas.

Considerando que  $A(t)$  y  $B(t)$  varían con respecto a un vector parámetros medibles  $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ , se puede determinar el intervalo de variación definiendo así el valor máximo  $\bar{\rho}$  y el valor mínimo  $\underline{\rho}$ . De forma tal que, evaluando la combinación de estos límites en las matrices  $A(t)$  y  $B(t)$ , se obtienen  $2^r$  modelos locales lineales, generando así el siguiente modelo LPV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde  $x(t)$ ,  $u(t)$  y  $y(t)$  son los estados, la entrada y la salida.  $A_i$  y  $B_i$  son matrices constantes evaluadas en  $\rho(t)$  igual alguna a una combinación de los límites de variación previamente definidos.  $C$  es una matriz constante de dimensiones apropiadas y  $\mu_i(t)$  son las funciones de ponderación.

### Ejemplo

Considerando un sistema RLC como en la Fig.2.2 en donde la resistencia  $R(t)$  se considera variable en el tiempo debido a un aumento en la temperatura de los componentes (Ogata (2003)).

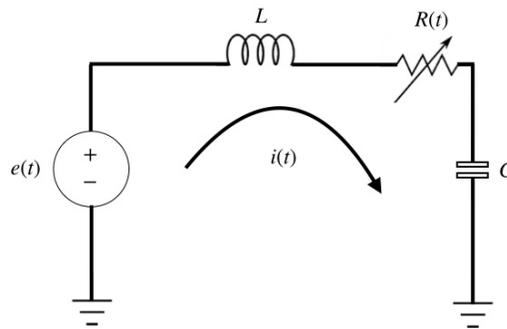


Fig. 2.2. Sistema RLC con elementos variantes en el tiempo

La ecuación que describe el sistema es como se muestra a continuación

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R(t) \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = e(t)\tag{2.26}$$

haciendo un cambio de variable considerando

$$x_1(t) = i(t) \quad y \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.27)$$

queda

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R(t)}{L}x_2(t) - \frac{1}{LC}x_1(t) + \frac{e(t)}{L} \quad (2.28)$$

utilizando las ecuaciones (2.27)-(2.28) se obtienen las matrices del sistema LTV (2.24) donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R(t)}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$u(t) = e(t)$  y  $y(t) = x_1(t)$ . Cabe aclarar que únicamente la matriz  $A(t)$  es dependiente del parámetro variable en el tiempo. Por tal razón, solo la matriz  $A$  es variable en el tiempo.

Definiendo  $R(t) = \rho(t)$  se obtienen los valores máximos y mínimos de  $R(t)$

$$[\bar{R}, \underline{R}] = [\bar{\rho}, \underline{\rho}] \quad (2.29)$$

considerando los valores máximos y mínimos de  $\rho(t)$  y sustituyéndolos en la matriz  $A(t)$  se obtienen las matrices de los modelos locales

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{\underline{\rho}}{L} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{\bar{\rho}}{L} \end{bmatrix}$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\rho(t)) = \frac{\bar{\rho} - \rho(t)}{\bar{\rho} - \underline{\rho}}, \quad \mu_2(\rho(t)) = \frac{\rho(t) - \underline{\rho}}{\bar{\rho} - \underline{\rho}} \quad (2.30)$$

donde  $\bar{\rho}$  y  $\underline{\rho}$  son el límite superior e inferior de  $\rho(t)$ , respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\rho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t)) = 1 \quad (2.31)$$

donde  $k = 2^r$  es número de combinaciones posibles de los límites del parámetro variable. Para el sistema 2.2 se considera solo a  $R(t)$  como parámetro variante. De tal forma que  $r = 1$ .

Ahora, el sistema (2.24) puede ser expresado en forma LPV como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $A_i$ ,  $B$  y  $C$  están definidas previamente.

### Considerando las no linealidades de un modelo no lineal

Considerando un modelo no lineal expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde  $x(t)$ ,  $u(t)$  y  $y(t)$  son los estados, la entrada y la salida.  $C$  es una matriz de dimensiones apropiadas,  $A(x(t))$  y  $B(x(t))$  son matrices que dependen de funciones no lineales con respecto a los estados.

Definiendo las no linealidades de las matrices  $A(x(t))$  y  $B(x(t))$  como un vector medible  $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ , el modelo (2.33) puede quedar expresado como un modelo LTV:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.34}$$

A partir de aquí, se sigue el procedimiento anteriormente mencionado para la obtención de un modelo LPV a partir de un modelo LTV. Teniendo en cuenta que ahora el vector  $\rho(t)$  varía con respecto a la dinámica de las variables de estado.

#### *Ejemplo*

Considerando el péndulo simple mostrado en la Fig. 2.3 (Khalil (2002)).

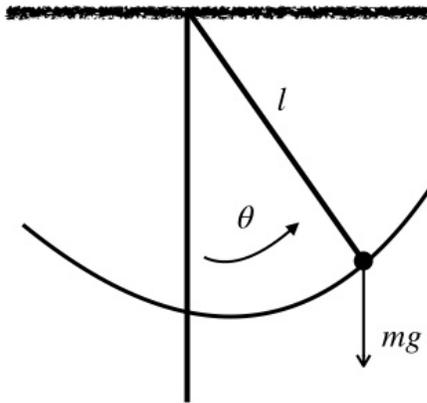


Fig. 2.3. Péndulo simple.

Utilizando la segunda ley de Newton, es posible escribir las ecuaciones de movimiento en dirección tangencial como

$$ml\ddot{\theta}(t) = -mg\text{sen}(\theta(t)) - kl\dot{\theta}(t)\tag{2.35}$$

donde  $l$  es el largo de la cuerda,  $m$  es la masa,  $g$  la aceleración debido a la gravedad y  $k$  es el coeficiente de fricción.

considerando  $x_1(t) = \theta(t)$  y  $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ , es posible obtener el modelo en espacio de estado como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g \operatorname{sen}(x_1(t))}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Definiendo  $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$  como el vector de  $r$  parámetros variables que incluyen la no linealidad queda expresada como:

$$\varrho(t) = \frac{-g \operatorname{sen}(x_1(t))}{l} \quad (2.37)$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho} - \varrho(t)}{\bar{\varrho} - \underline{\varrho}}, \quad \mu_2(\varrho(t)) = \frac{\varrho(t) - \underline{\varrho}}{\bar{\varrho} - \underline{\varrho}} \quad (2.38)$$

donde  $\bar{\varrho}$  y  $\underline{\varrho}$  son el límite superior e inferior de  $\varrho(t)$ , respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\varrho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \quad (2.39)$$

donde  $k = 2^r$  es número de combinaciones posibles de los límites del parámetro variable. Considerando que solo existe un parámetro variante  $\varrho(t)$  de tal forma que  $r = 1$ .

Ahora, el sistema (2.35) puede ser expresado en forma LPV como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i x(t)) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{\varrho}(t) & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{\varrho}(t) & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$  y  $C = [1 \ 0]$ .

### 2.2.3. Sistemas cuasi-LPV

Cuando los sistemas LPV son obtenidos considerando las no linealidades del modelo, las funciones de ponderación son funciones del estado del sistema. Este tipo particular de sistemas LPV se conocen como sistemas cuasi-LPV (Briat (2014)).

Como ejemplo se muestra el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -10 \operatorname{sen}(x_1(t)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

que puede ser representado como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \varrho(t)x_1(t)\end{aligned}$$

donde  $\varrho(t) = \frac{-10\text{sen}(x_1(t))}{x_1(t)} \in \mathbb{R}$ .

Se puede observar que la no linealidad puede ser representada mediante un enfoque cuasi-LPV, el cual permite representar la ecuación no lineal, ahora en una forma lineal. Considerando que  $\varrho(t)$  es un parámetro variante, del cual solo se conocen los límites de variación, pero no la trayectoria. En este caso las funciones de ponderación dependen de la variación de  $\varrho(t)$ , que a su vez varía de acuerdo a las dinámicas de los estados del sistema.

La forma general de un sistema cuasi-LPV en su forma politopica es como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.42}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medibles,  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C$  son matrices reales conocidas,  $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de  $r$  parámetros variables **que incluyen la dinámica de las variables de estado** y  $\mu_i(\varrho(t))$  son las funciones de ponderación.

#### 2.2.4. Obtención de las funciones de ponderación

El comportamiento de un sistema LPV politópico está regido por funciones de ponderación  $\mu_i(\rho(t))$ , donde cada función pertenece al siguiente conjunto convexo

$$\Phi = \left\{ \mu_i(\rho(t)) = \mu_i(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \rho(t)) : \mu_i(\rho(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t)) = 1 \right\}\tag{2.43}$$

donde  $\underline{\rho}$  es un vector con los límites inferiores de cada parámetro y  $\bar{\rho}$  es un vector con los límites superiores

$$\underline{\rho} = [\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2, \dots, \underline{\rho}_r]^T, \quad \bar{\rho} = [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_r]^T\tag{2.44}$$

A continuación, se muestra cómo pueden ser obtenidas las funciones de ponderación (Osorio~Gordillo (2011)):

$$\mu_i(\rho(t)) = \varphi \left\{ \text{diag} \left\{ \left[ \frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \dots, \frac{1}{\delta_r} \right] \right\} \cdot \text{diag} \{ \alpha(i) \} \cdot [f(\alpha(i), \underline{\rho}, \bar{\rho}) - \rho] \right\}.\tag{2.45}$$

donde  $\varphi$  es el producto de todos los elementos del vector  $v = [v_1, v_2, \dots, v_s]^T$ ,

$$\varphi(v) = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_s = \prod_{i=1}^s v_i$$

$\bar{\rho}$  y  $\underline{\rho}$  están definidas en la ecuación (2.44)

$$\delta_i = \bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i$$

$\alpha(i)$  es un vector binario auxiliar, que asigna  $-1$  al límite inferior y  $1$  al límite superior

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= [-1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1], \\ \alpha(2) &= [1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1], \\ \alpha(3) &= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad \dots \quad -1 \quad -1], \\ &\vdots \\ \alpha(2^k - 1) &= [-1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1], \\ \alpha(2^k) &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1], \end{aligned} \tag{2.46}$$

y  $f(\alpha(i), \underline{\rho}, \bar{\rho})$  tiene la siguiente expresión

$$f(\alpha(i), \underline{\rho}, \bar{\rho}) = \frac{1}{2} [\bar{\rho} + \underline{\rho} + \text{diag}\{\alpha(i)\} \cdot [\bar{\rho} - \underline{\rho}]]. \tag{2.47}$$

De esta manera se obtienen las  $k$  funciones de ponderación que determinan la presencia de cada uno de los modelos locales, dependiendo de la variación del parámetro.

### Ejemplo de sistema LPV politópico

Para ejemplificar lo anterior, se considera un sistema con dos parámetros variables  $\rho_1(t) \in [\bar{\rho}_1, \underline{\rho}_1]$ ,  $\rho_2(t) \in [\bar{\rho}_2, \underline{\rho}_2]$  en donde, el vector de parámetros se mantiene dentro del politopo que se muestra en la Fig. 2.4, cuyos vértices están formados por la combinación de los valores extremos de los conjuntos  $\rho_1(t)$  y  $\rho_2(t)$ .

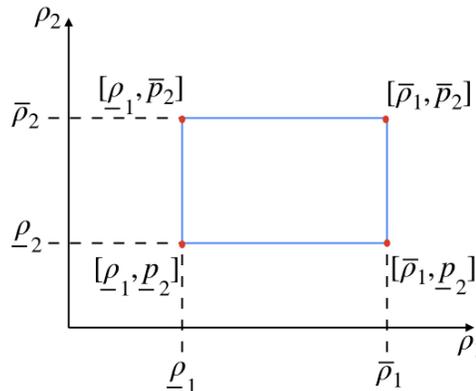


Fig. 2.4. Representación del politopo de un sistema en el que se consideran dos parámetros variables.

A continuación, obtenemos los siguientes vectores auxiliares en base a la ecuación (2.47)

$$\begin{aligned} f(\alpha(1), \underline{\rho} \cdot \bar{\rho}) &= \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 \\ \underline{\rho}_2 \end{bmatrix} \\ f(\alpha(2), \underline{\rho} \cdot \bar{\rho}) &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \\ \underline{\rho}_2 \end{bmatrix} \\ f(\alpha(3), \underline{\rho} \cdot \bar{\rho}) &= \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 \\ \bar{\rho}_2 \end{bmatrix} \\ f(\alpha(4), \underline{\rho} \cdot \bar{\rho}) &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \\ \bar{\rho}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación (2.45) y las ecuaciones anteriores, se obtienen las funciones de ponderación como sigue:

$$\begin{aligned} \mu_1(\rho(t)) &= \frac{\rho_1(t) - \underline{\rho}_1}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1} \cdot \frac{\rho_2(t) - \underline{\rho}_2}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2} = \frac{\rho_1(t) + 1}{2} \cdot \frac{\rho_2(t) + 2}{4} \\ \mu_2(\rho(t)) &= \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_1(t)}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1} \cdot \frac{\rho_2(t) - \underline{\rho}_2}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2} = \frac{1 - \rho_1(t)}{2} \cdot \frac{\rho_2(t) + 2}{4} \\ \mu_3(\rho(t)) &= \frac{\rho_1(t) - \underline{\rho}_1}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1} \cdot \frac{\bar{\rho}_2 - \rho_2(t)}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2} = \frac{\rho_1(t) + 1}{2} \cdot \frac{2 - \rho_2(t)}{4} \\ \mu_4(\rho(t)) &= \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_1(t)}{\bar{\rho}_1 - \underline{\rho}_1} \cdot \frac{\bar{\rho}_2 - \rho_2(t)}{\bar{\rho}_2 - \underline{\rho}_2} = \frac{1 - \rho_1(t)}{2} \cdot \frac{2 - \rho_2(t)}{4} \end{aligned}$$

### 2.2.5. Propiedades de los sistemas LPV

Considerando el siguiente sistema LPV, se definen algunas propiedades importantes que se deben tener en cuenta.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medibles,  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C$  son matrices reales conocidas,  $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de  $r$  parámetros variables y  $\mu_i(\rho(t))$  son las funciones de ponderación.

## Estabilidad

Considerando una función cuadrática como:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0 \quad (2.49)$$

donde  $P$  es una matriz simétrica positiva definida. Cuya derivada está expresada por:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\rho(t))x^T(t)(A_i^T P + P A_i)x(t) \quad (2.50)$$

de acuerdo a la literatura, una de las propiedades de la función de Lyapunov (2.49) es que su derivada debe ser negativa definida. Para cumplir esta propiedad, es necesario asegurar que la siguiente LMI (por sus siglas en inglés Linear Matrix Inequality) se verifique en cada vértice del politopo (Briat (2014)).

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (2.51)$$

Si las ecuaciones (2.49) y (2.51) se satisfacen con la existencia de una matriz  $P = P^T > 0$ , entonces se asegura la estabilidad para el sistema LPV politópico (2.48) (Lendek et al. (2011)).

## Controlabilidad

Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (2.48) es de estados controlables en  $t = t_0$ , si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Si todos los estados son controlables, entonces se dice que el sistema es *completamente controlable*. La condición para saber si el sistema es completamente controlable es mediante la siguiente condición

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & A_i B & \dots & A_i^{n-1} B \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (2.52)$$

La cual se conoce comúnmente como la matriz de controlabilidad (Ogata (2003)).

## Observabilidad

La observabilidad es una propiedad que determina la capacidad de estimar los estados del sistema a través de las mediciones de salida y entrada (Ogata (2003)). La matriz de observabilidad para el sistema (2.48) está dada por la siguiente condición

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ C A_i \\ C A_i^2 \\ \vdots \\ C A_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (2.53)$$

## 2.3. Observadores

En determinadas circunstancias resulta necesario estimar el valor de ciertas variables de estado que no son medidas en un sistema. La estimación de este tipo de variables se define como **observación**. Un dispositivo (o programa) que estima u observa las variables de estado se llama observador de estados (o simplemente observador).

De acuerdo con Ogata (2003) “Un observador de estados estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control.”

El observador de estados permite conocer las variables de estado internas (conocidas y no conocidas) de algún sistema real, mediante el uso de las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico a lo largo de la trayectoria de funcionamiento del mismo.

El observador utiliza únicamente la información de las entradas y salidas del sistema original para lograr estimar los estados que se desean conocer.

En la Fig. 2.5 se muestra un esquema de un observador en donde se aprecia que las señales medidas pasan por una etapa de procesamiento y un algoritmo de estimación para lograr obtener las variables de estado estimadas.

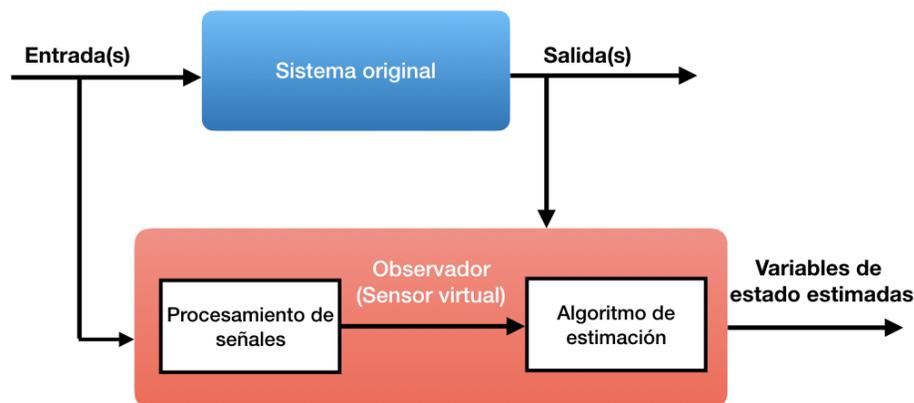


Fig. 2.5. Esquema general de un observador.

Si el observador es sometido al mismo estímulo de la entrada que el sistema original, a medida que pasa el tiempo, los estados internos del observador se comportarán cada vez más como el sistema original (siempre y cuando el observador sea estable), de esta manera se puede utilizar el estado estimado como una aproximación del sistema original (Luenberger (1971)).

### 2.3.1. Tipos de observadores

Una forma de clasificar los observadores es por su orden. De esta manera se puede considerar una clasificación de observadores en tres tipos:

- **Observador de orden completo**

Este tipo de observador, estima todas las variables del sistema, sin importar que algunas están disponibles para una medición directa.

- **Observador de orden reducido**

En este tipo de observador se estiman menos de  $n$  variables de estado, en donde  $n$  es la dimensión del vector de estado.

- **Observador de orden mínimo**

Es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si  $n$  es la dimensión del vector de estado y  $p$  es la dimensión del vector de salidas, el observador de orden mínimo observa  $n - p$  variables.

#### Clasificación por estructura

Otra forma de clasificar a los observadores es considerando su estructura.

Considerando el siguiente sistema LTI

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.54}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  son las salidas medibles.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas.

#### Observador tipo Luenberger

La estructura para un observador tipo Luenberger para el sistema (2.54) es como se muestra a continuación (Alessandri and Coletta (2001))

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.55}$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados estimados,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  son las salidas estimadas y  $L$  es una matriz desconocida de dimensiones apropiadas.

El observador tipo Luenberger se enfoca en obtener el valor de la matriz  $L$  de tal manera que  $\hat{x}(t)$  converja a  $x(t)$  en un tiempo finito.

### Observador proporcional

El observador proporcional para el sistema (2.54) es como se muestra a continuación (Darouach et-al. (1994))

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.56)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) - Qy(t) \quad (2.57)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ .  $N$ ,  $F$ ,  $J$ , y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja a  $x(t)$  en un tiempo finito.

Para la obtención de las matrices del observador proporcional (2.56)-(2.57) se estudia la estabilidad de la dinámica del error, definida como:

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (NT + FC - TA)x(t) + (J - TB)u(t) \quad (2.58)$$

en donde se ven directamente involucradas las matrices del sistema (2.54).

### Observador proporcional-integral

La estructura para un observador tipo proporcional-integral para el sistema (2.54) es como se muestra a continuación (Koenig and Mammari (2002))

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + F_1y(t) + F_2y(t) + Ju(t) \quad (2.59)$$

$$\dot{v}(t) = M(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (2.60)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.61)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (2.62)$$

donde  $\hat{x}(t)$  es la estimación de  $x(t)$ ,  $\zeta(t)$  es el vector de estados del observador,  $\hat{v}(t)$ , es el vector auxiliar,  $\hat{y}(t)$  son las salidas estimadas.  $N$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $P$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Es importante destacar que esta estructura generaliza el caso proporcional, ya que si se considerará  $F_1 = F$ ,  $F_2 = 0$ ,  $H = 0$ ,  $M = 0$  y  $P = I$  se obtiene el caso proporcional.

Similar al caso del PO las matrices del PIO (2.59)-(2.61) son obtenidas a partir de la dinámica del error

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (NT - F_1C - F_2C - TA)x(t) + (J - TB)u(t) \quad (2.63)$$

en donde se ven directamente involucradas las matrices del sistema (2.54).

### Observador dinámico generalizado

La estructura de un observador dinámico generalizado (GDO) para el sistema (2.54) es como se muestra a continuación (Osorio-Gordillo (2015))

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.64)$$

$$\dot{v}(t) = S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \quad (2.65)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.66)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $F$ ,  $J$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $P$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Es importante destacar que el GDO (2.64)-(2.66) incluye dentro de su estructura al observador PO y al PIO, por ejemplo al considerar las matrices  $H = 0$ ,  $S = 0$ ,  $M = 0$  y  $L = 0$  obtiene el PO y si se consideran las matrices  $L = 0$ ,  $S = -CP$  y  $M = -CQ + I$  se obtiene el PIO.

La estructura generalizada permite tener grados de libertad adicionales para cumplir con el objetivo de estimación. Así mismo, estos grados de libertad permiten que esta estructura tenga mayor robustez ante variaciones paramétricas, como se muestra en el capítulo 5 de este trabajo de tesis.

La obtención de las matrices del observador se realiza analizando la estabilidad de la dinámica del error transformado y del vector auxiliar

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} NTG + TG \\ STG \end{bmatrix} e_f(t) \quad (2.67)$$

en donde las matrices del sistema (2.54) están involucradas.

### 2.3.2. Observador dinámico generalizado

En la última década algunos investigadores han estudiado los observadores dinámicos generalizados el cual mantiene una mejora ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Este observador ha sido aplicado a diversos sistemas tales como lineales, Takagi-Sugeno, descriptivos y LPV.

Considerando el siguiente sistema lineal (Osorio~Gordillo (2015))

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  representa el vector de salida. Las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.

El observador dinámico generalizado (GDO) para el sistema (2.68) es (Osorio~Gordillo (2015))

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (2.69)$$

$$\dot{v}(t) = S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \quad (2.70)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Qy(t) \quad (2.71)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $F$ ,  $J$ ,  $S$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $P$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

El GDO (2.69)-(2.71) tiene una estructura generalizada. Esto quiere decir, que su estructura es diferente al observador Luenberger, al PO y PIO. El GDO presenta una alternativa más general

de la estimación de los estados que el observador proporcional (PO) y el observador proporcional integral (PIO). Los cuales solo pueden ser considerados como casos particulares de esta estructura (Osorio~Gordillo (2015)). La idea de incluir dinámicas adicionales en la estructura del observador fue propuesta por Middleton et~al. (1989).

### Orden del GDO

Cabe destacar que el GDO (2.69)-(2.71) tiene una estructura generalizada y el orden del vector auxiliar  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  permite al diseñador decidir si el observador es de orden completo o de orden reducido. Si  $q_0 < n$  entonces el GDO (2.69)-(2.71) será de orden reducido, sin embargo si  $q_0 = n$  entonces el GDO (2.44)-(2.46) será de orden completo.

Para el caso del observador de orden completo es posible considerar la matriz  $P$  igual a la identidad para simplificar el análisis de estabilidad. Sin embargo, se puede mantener este grado de libertad y posteriormente obtener su valor mediante el análisis de la dinámica del error.

Por ejemplo, Considerando un sistema LTI como el mostrado en (2.68), donde  $x(t) \in \mathbb{R}^4$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^2$ , si se quisiera configurar el GDO (2.69)-(2.71) como un observador de orden reducido, el vector de estado del observador sería  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^2$ , el vector auxiliar  $v(t) \in \mathbb{R}^2$  y el vector de estimación  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^4$ .

Por otro lado, si se quisiera configurar el GDO (2.69)-(2.71) como un observador de orden completo el vector de estado del observador sería  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^4$ , el vector auxiliar  $v(t) \in \mathbb{R}^4$  y el vector de estimación  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^4$ .

A continuación, se muestra el diagrama a bloques del funcionamiento de un GDO para el sistema lineal (2.68).

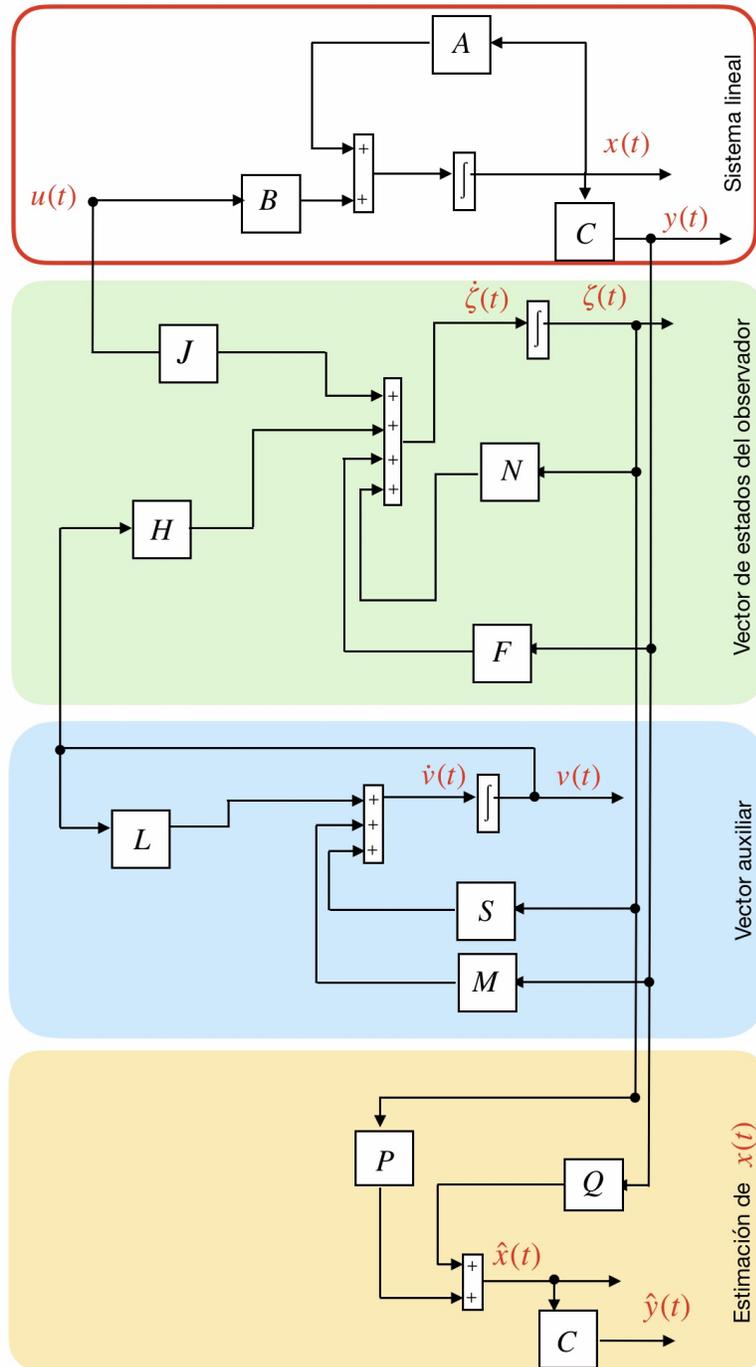


Fig. 2.6. Diagrama a bloques de un observador dinámico generalizado.

### 2.3.3. Observador de aprendizaje

Como se ha mostrado previamente los observadores tienen la capacidad de estimar los estados que no están disponibles a la salida del sistema.

En las últimas décadas se ha estudiado el diseño de observadores de aprendizaje (LO, por sus siglas en inglés Learning Observer), en el cual, a diferencia de un observador convencional la estimación de la falla se realiza de forma algebraica y con un retardo, al cual se le atañe el término de aprendizaje.

Los observadores de aprendizaje encontrados en la literatura se han diseñado para diferentes tipos de sistemas: no lineales, lineales, Takagi-Sugeno, descriptivo.

El observador de aprendizaje fue propuesto por Chen and Saif (2001), para lograr la detección y estimación de fallas abruptas. El diseño principal es emplear un término de retardo en el vector de estimación de la falla (Jia et~al. (2014)). Como resultado de tal diseño, las fallas constantes pueden ser estimadas con mayor precisión.

Considerando el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gf(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.72}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de entrada,  $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$  el vector de falla en actuador,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  son las salidas medibles,  $A, B, G, C$  son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas.

El observador de aprendizaje para la estimación de fallas y estados considerando el sistema (2.72) queda

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + G\hat{f}(t) \tag{2.73}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{2.74}$$

$$\hat{f}(t) = K_1\hat{f}(t - \tau) + K_2(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{2.75}$$

donde  $\hat{x}(t)$  y  $\hat{y}(t)$  son los estados estimados del sistema y la salida, respectivamente. La estimación de la falla  $\hat{f}(t)$  se actualiza por la información previa en  $\hat{f}(t - \tau)$  y el error de estimación de la salida (Jia et~al. (2014)). Las matrices  $L, K_1, K_2$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas a determinar en el análisis de estabilidad del observador.

A continuación, se muestra un diagrama a bloques del observador tipo Luenberger de aprendizaje para sistemas lineales.

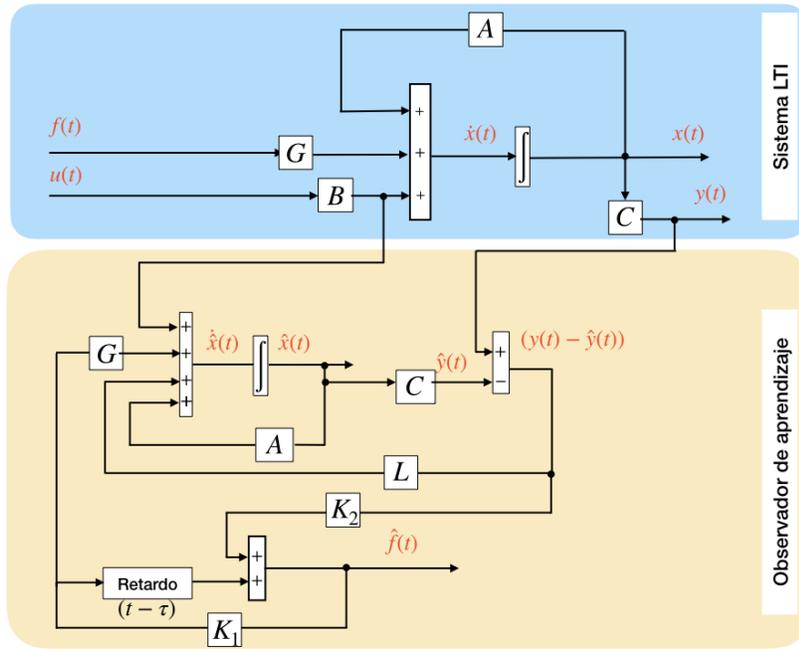


Fig. 2.7. Diagrama a bloques de un observador tipo Luenberger de aprendizaje.

## 2.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se muestran algunos conceptos básicos de fallas, características y representaciones de las mismas, con el fin de que el lector pueda relacionarse con estos conceptos. También se muestran conceptos básicos para comprender el uso de observadores, así mismo, se muestra la estructura de un LO para sistemas LTI, el cual logra estimar la falla mediante el uso de retardos para mejorar el tiempo de convergencia de la falla. De manera similar se muestra la estructura de un GDO para sistemas LTI, el cual muestra una forma más general observadores (en comparación con el proporcional y proporcional integral) y contiene más grados de libertad. Este observador puede ser diseñado de orden completo o de orden reducido dependiendo las necesidades del diseñador.

# Capítulo 3

## Caso de estudio

En este trabajo se considera como caso de estudio un robot de articulación flexible de un eslabón. Este capítulo contiene la aplicación de la teoría descrita en el capítulo anterior para obtener un modelo con representación cuasi-LPV del robot de articulación flexible, basado principalmente en lo reportado en Batlle (2009) y Spong and Vidyasagar (2008).

Para entender la dinámica del robot de articulación flexible, en la sección 3.1 de este capítulo se describen las generalidades del funcionamiento del robot de articulación flexible, además, se aborda de forma breve su clasificación. En la sección 3.2, se presentan algunas configuraciones y especificaciones del robot de articulación flexible de uno o varios eslabones como en Jia et al. (2014), ya que en base a estas se obtiene el modelo cuasi-LPV presentado en el presente trabajo. En la sección 3.3, se presenta en detalle la obtención del modelo cuasi-LPV politópico del robot de articulación flexible.

### 3.1. Robots de articulación flexible

Los robots flexibles constituyen un campo de investigación que ha despertado un gran interés entre la comunidad científica dedicada a la robótica, esto ha sido motivado por la necesidad impuesta por la industria aeroespacial, de construir robots más grandes y ligeros. por otro lado, la dinámica de estos robots es muy compleja (sistemas multivariables, no lineales, de parámetros distribuidos y algunos de ellos variantes en el tiempo) lo cual ha atraído, además, el interés de muchos investigadores de los campos de la mecánica (diseños de robots con nuevas propiedades dinámicas) y del control automático (desarrollo de nuevos sistemas de control de altas prestaciones).

En un sentido muy amplio puede decirse que un robot flexible es aquel que incluye algún elemento con un cierto grado de flexibilidad, entendiendo por flexibilidad la propiedad mecánica de una pieza de deformarse de forma elástica ante la aplicación de una fuerza o par. Se consideran 2 tipos de flexibilidad en robótica: en las **articulaciones y en los eslabones**.

La **flexibilidad en articulaciones** aparece como consecuencia de la torsión en los elementos que conectan los actuadores (motores) con los eslabones y siempre es de tipo rotacional. Este movimiento se traduce en una variación de ángulo y, por ejemplo, las reductoras de los robots suelen

experimentarla cuando están sometidas a movimientos rápidos. La Fig.3.1 ilustra este fenómeno.

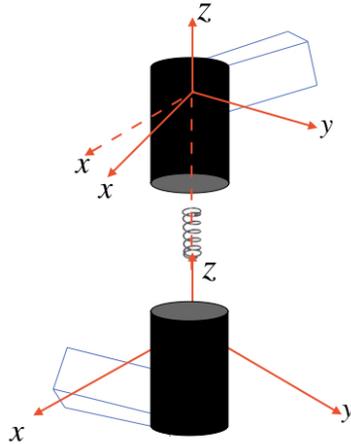


Fig. 3.1. Flexibilidad en las articulaciones.

La **flexibilidad en los eslabones** aparece también como consecuencia de movimientos rápidos, del transporte de grandes cargas o la generación de grandes fuerzas o momentos en el extremo del robot resultado de la realización de tareas que impliquen contacto con el entorno. En este caso se produce una deflexión en cada eslabón que se traduce en una variación de la posición de su extremo respecto a la posición calculada geoméricamente (como si fuera rígido). El fenómeno anterior combinado con la torsión que se produce en el eslabón, también genera una variación de la orientación del extremo. Sin embargo, se suponen despreciables las deformaciones producidas por los fenómenos de tracción o compresión. La Fig.3.2 ilustra este tipo de flexibilidad.

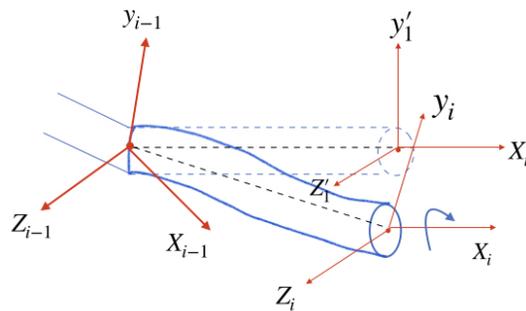


Fig. 3.2. Flexibilidad en los eslabones.

La flexibilidad en los eslabones es un problema sustancialmente más complejo que el de la flexibilidad en las articulaciones: por cada elemento flexible en el primer caso aparecen deflexiones en dos dimensiones espaciales además de la torsión de la barra, mientras que en el segundo caso solo aparece el fenómeno de torsión.

Como ya se ha mencionado la robótica flexible surge de la necesidad de construir robots de grandes dimensiones y de poco peso, con el objeto de poder ser transportados, para aplicaciones aeroespaciales (ver Fig.3.3).

Una forma de obtener esto (además de la solución obvia de utilizar materiales más ligeros, que a menudo no es factible), consiste en reducir la sección transversal de los eslabones del robot.



Fig. 3.3. Manipulador remoto de la estación espacial (SRMS).

Con ello se consiguen robots más “esbeltos” pero que plantea 2 problemas principales: 1) en situaciones estáticas aparecen deflexiones que hacen que la posición final en el extremo del robot no sea la deseada, 2) durante el movimiento aparecen oscilaciones en el extremo del robot muy poco amortiguadas, lo cual obliga a esperar un tiempo considerable entre la finalización de la trayectoria ordenada y la desaparición de estas vibraciones (ya que es como si el robot tuviera “Parkinson”).

Debido a lo anterior la flexibilidad ha sido tradicionalmente como un problema. Sus efectos deben minimizarse de la manera más eficaz posible mediante una ley de control adecuada. Sin embargo, recientemente han aparecido algunos enfoques que plantean la flexibilidad como una propiedad mecánica que puede presentar importantes ventajas en la realización de determinadas tareas.

- **Acomodación pasiva:** Añadiendo al extremo del robot una muñeca flexible y luego acoplar a esta el útil de trabajo. Las fuerzas de reacción sobre el útil generan una deformación que hacen que este se adapte mecánicamente al entorno (Garcia et~al. (2003)).
- **Situaciones de colisión:** Es bien sabido que si un robot “rígido” impacta con una persona le produce daños considerables, sin embargo, si impacta un robot flexible los daños se reducen drásticamente (Lim and Tanie (1999)).

- **Diseño de nuevos sensores:** Los insectos con sus antenas y los gatos con sus bigotes les permiten moverse en la obscuridad e incluso reconocer objetos sin visión. Tanto las antenas como los bigotes son varillas muy flexibles que se deforman cuando entran en contacto con algún objeto. Existen algunos grupos investigando este tipo de sensores, que pueden sustituir a los de visión en determinadas aplicaciones de reconocimiento de superficies (Fend (2005)).

Este tipo de robots han sido utilizados en la industria para diferentes tareas, así como en grúas de gran dimensión que requieren cierta flexibilidad debido a las grandes cargas que deben soportar, carros móviles en los cuales se necesita que sean lo más ligeros posibles para poder montarlos en sistemas que los transporten y aprovechar las menores inercias de estos robots para aumentar su rapidez de movimiento (Batlle (2009)).

## 3.2. Materiales y configuraciones mecánicas

### 3.2.1. Eslabones

Los robots flexibles se suelen construir de materiales muy ligeros (aluminio, por ejemplo). Existe la alternativa de usar materiales compuestos pero esta opción ha sido muy poco explorada hasta la fecha: un trabajo pionero fue el de Choi et~al. (1995). Todos estos materiales presentan un amortiguamiento muy bajo para las vibraciones. También se está investigando el diseño de nuevos eslabones compuestos por rodajas transversales de materiales distintos de modo que estos actúen como filtros mecánicos a determinadas frecuencias.

### 3.2.2. Actuadores

Los actuadores habitualmente usados en robótica flexible son los motores eléctricos (igual que los usados en la robótica industrial) o los actuadores hidráulicos para el caso de robots de grandes dimensiones. Sin embargo, estos actuadores, que cumplen adecuadamente los requerimientos de la robótica rígida convencional, algunas veces pueden limitar las posibilidades de los robots flexibles, que a menudo requieren actuadores más rápidos que los convencionales (mayor ancho de banda) para cancelar activamente dinámicas que aparecen a altas frecuencias (vibraciones). Los robots flexibles también suelen requerir actuadores mucho más ligeros (con mayores relaciones entre la fuerza que el actuador es capaz de desarrollar y su peso). Esto abre la puerta a la utilización de nuevos actuadores en robótica, que a menudo se combinan y complementan con los clásicos.

### 3.2.3. Sistema sensorial

La dinámica de los robots flexibles es sustancialmente más compleja que la de los robots rígidos: a la dinámica habitual del robot rígido hay que añadirle la de las oscilaciones en los eslabones causadas por la flexibilidad. Los robots convencionales usan un sensor de posición angular para cada articulación o motor. Dado que los robots flexibles suelen ser sistemas observables, podría pensarse utilizar los mismos sensores. Sin embargo, no es práctico usar la medida del ángulo de la articulación para observar las vibraciones del eslabón conectado a la misma (o para cerrar un lazo de control que cancele dichas vibraciones) ya que a menudo las articulaciones tienen reductoras que disminuyen enormemente el par de acoplamiento existente en el motor y el eslabón, haciendo

que el efecto sobre el motor de las vibraciones en el eslabón sea pequeño. Por tanto, es aconsejable utilizar (además de las medidas del ángulo del motor) sensores adicionales que midan o permitan estimar las vibraciones de los eslabones de manera más directa.

En robótica flexible se emplean tres tipos de sensores adicionales: 1) sensores que midan la posición extremo del robot (típicamente con cámaras de visión) lo cual da una medida directa de la deflexión de los eslabones del robot, 2) sensores que midan la aceleración del extremo del robot (acelerómetros) el cual da medidas más aproximadas de las oscilaciones que los anteriores (son segundas derivadas de la deflexión respecto del tiempo), 3) sensores que midan los momentos en determinados puntos del eslabón (galgas extensiométricas o cristales piezoeléctricos) lo cual permite estimar la deflexión completa del eslabón.

### 3.2.4. Configuraciones mecánicas

En este apartado se describirán las configuraciones mecánicas más utilizadas en robótica flexible, cabe mencionar que a menudo se combinan eslabones rígidos con otros flexibles para construir el robot.

#### Robot de uno o más grados de libertad

La mayoría de los eslabones suelen ser de un grado de libertad, la mayoría de estos prototipos son del tipo rotatorio, en donde se controla el ángulo de la posición del extremo del robot en un plano mediante una articulación de tipo rotacional, en la Fig. 3.4 se muestra un robot flexible de un grado de libertad.

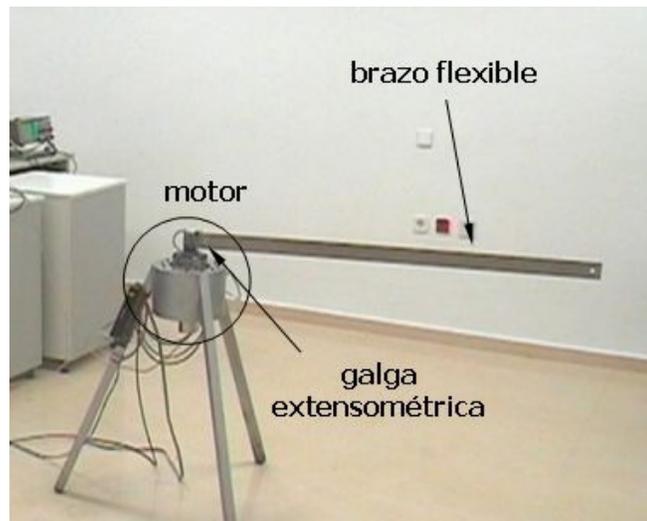


Fig. 3.4. Robot flexible de un grado de libertad construido en aluminio y montado en voladizo.

También existe una variedad considerable de robots con dos grados de libertad, pueden moverse en el plano vertical, así como en el plano horizontal. Sin embargo, al tratarse de eslabones muy ligeros y flexibles, la instalación del motor que mueve el segundo eslabón sobre la articulación correspondiente, puede causar deflexiones indeseables en el primer eslabón y puede obligar a sobre

dimensionar el actuador de la base que además de mover todo el brazo, debe mover dicho segundo actuador.

Los robots de tres o más grados de libertad también se han diseñado, sin embargo, existen muy pocos prototipos de esta clase. El robot de tres grados de libertad, suele tener dos articulaciones rotacionales que sitúan el extremo del robot en un punto de un plano vertical, además de una tercera también rotacional, situada en la base del robot, que realiza un giro horizontal de dicho plano vertical.

### 3.3. Modelo matemático del robot de articulación flexible de un eslabón

Se emplea un actuador manipulador de un eslabón el cual se muestra en la Fig.3.5, mediante un motor de CD como en Rajamani and Cho (1998).

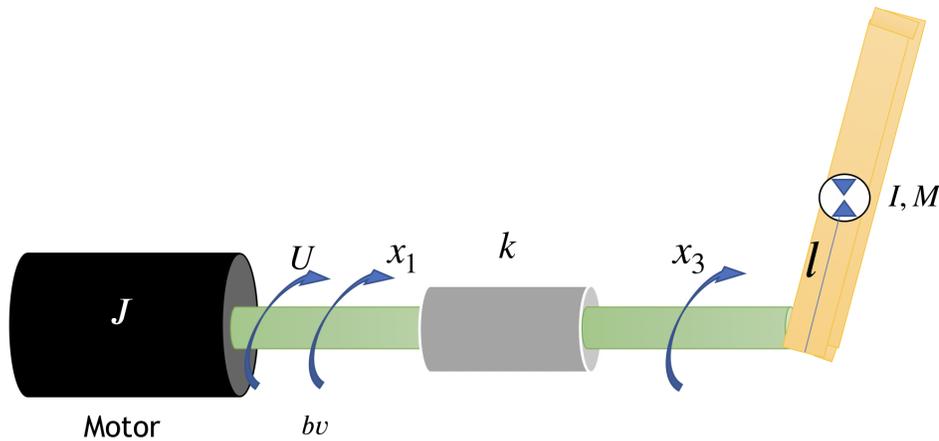


Fig. 3.5. Robot de articulación flexible de un eslabón

Las ecuaciones dinámicas del sistema considerado, se describen como sigue:

$$I\ddot{q}_2(t) + Mgl\sin(q_2(t)) + k(q_2(t) - q_1(t)) = 0 \quad (3.1)$$

$$J\ddot{q}_1(t) + b_v\dot{q}_1(t) + k(q_1(t) - q_2(t)) = k_\tau U(t) \quad (3.2)$$

donde  $q_1(t)$  es la posición del motor,  $q_2(t)$  es la posición del eslabón,  $I$  es la inercia del motor,  $J$  es la inercia del eslabón,  $M$  es masa del eslabón,  $g$  es la aceleración debido la gravedad,  $l$  es el centro de masa del eslabón,  $k$  es coeficiente de elasticidad,  $b_v$  es el coeficiente de fricción viscosa,  $U(t)$  es el par de entrada del actuador y  $K_\tau$  es una ganancia de amplificación.

Considerando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= q_1(t) \\
 x_2(t) &= \dot{q}_1(t) \\
 x_3(t) &= q_2(t) \\
 x_4(t) &= \dot{q}_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

y aplicando el cambio de variable en las ecuaciones (3.1) y (3.2) tenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\frac{b_v x_2(t)}{J} - \frac{k(x_1(t) - x_3(t))}{J} + \frac{k_\tau}{J}(U(t)) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= -\frac{Mgl \operatorname{sen}(x_3(t))}{I} - \frac{k(x_3(t) - x_1(t))}{I} \\
 y_1(t) &= x_1(t) \\
 y_2(t) &= x_2(t) \\
 y_3(t) &= x_3(t)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  y  $x_4(t)$  son la posición del motor, la velocidad del motor, la posición del eslabón y la velocidad del eslabón respectivamente.  $U(t)$  es el par de entrada del actuador,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  y  $y_3(t)$  son las salidas medibles del sistema. Los parámetros se muestran en la Tabla 3.1 (Jia et-al., 2014).

Tabla 3.1. Definición de parámetros

Parámetro	Valor	Definición
$g$	$9.81m/s^2$	Gravedad
$M$	$0.31Kg$	Masa del eslabón
$l$	$0.15m$	Centro de masa del eslabón
$k$	$0.18Nm/rad$	Coefficiente de elasticidad
$b_v$	$0.0083Nms/rad$	Coefficiente de fricción viscosa
$K_\tau$	$0.08Nm/V$	Ganancia de amplificación
$J$	$0.0037Kgm^2$	Inercia del motor
$I$	$0.0093Kgm^2$	Inercia del eslabón

### 3.3.1. Obtención del modelo cuasi-LPV del robot de articulación flexible de un eslabón

Las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del robot de articulación flexible (3.4), contienen una no linealidad en el estado  $x_4(t)$  ( $\text{sen}(x_3(t))$ ). Estas ecuaciones pueden representarse mediante un enfoque lineal utilizando una representación cuasi-LPV, además si se considera la presencia de fallas en el actuador, el modelo (3.4) puede expresarse en espacio de estados como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + Bu(t) + Gf(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $f(t)$  es el vector de fallas,  $U(t) = u(t)$ ,  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$ ,  $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ ,

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \varrho(t) & 0 \end{bmatrix}, B = G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\tau}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es importante resaltar que la matriz  $G$  no necesariamente debe ser igual a la matriz  $B$ . Sin embargo, en esta ocasión se considera una falla aditiva al sistema  $B\bar{u}$ , donde  $\bar{u} = u + f$  de tal manera que  $B = G$  para el presente trabajo.

Definiendo  $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$  como el vector de  $r$  parámetros variables que incluyen la no linealidad queda expresada como:

$$\varrho(t) = -\frac{k}{I} - \frac{Mgl \text{sen}(x_3(t))}{I x_3(t)} \quad (3.6)$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho} - \varrho(t)}{\bar{\varrho} - \underline{\varrho}}, \quad \mu_2(\varrho(t)) = \frac{\varrho(t) - \underline{\varrho}}{\bar{\varrho} - \underline{\varrho}} \quad (3.7)$$

donde  $\bar{\varrho}$  y  $\underline{\varrho}$  son el límite superior e inferior de  $\varrho(t)$ , respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\varrho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \quad (3.8)$$

donde  $k = 2^r$  es número de combinaciones posibles de los límites de los parámetros variables. Para el caso de estudio se considera  $r = 1$ .

La ecuación (3.5) muestra que únicamente la matriz  $A$  incluye la no linealidad y por esta razón es la única que es afectada por las funciones de ponderación. Cabe mencionar que al variar el estado  $x_3(t)$  la matriz  $A$  cambia su valor, de tal forma que la matriz que se modifica en cada modelo local es únicamente la matriz  $A$ .

Es posible que la matriz  $B$  también pueda ser afectada por las funciones de ponderación, en el caso de que dicha matriz contenga parámetros variantes o alguna no linealidad. Sin embargo, en este trabajo solo se considera una no linealidad en la matriz  $A$  de tal forma que solo esta matriz es interpolada por las funciones de ponderación.

Ahora, el sistema (3.5) puede ser expresado en su formato cuasi-LPV como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) + Gf(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \underline{\varrho} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b_V}{J} & \frac{k}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & 0 & \bar{\varrho} & 0 \end{bmatrix}$ , las matrices  $B$ ,  $G$  y  $C$  están definidas en (3.5).

### 3.4. Simulación 1. Validación del modelo cuasi-LPV del robot de articulación flexible de un eslabón

**Objetivo.** El objetivo de esta simulación es encontrar los valores máximos y mínimos de variación de  $\varrho(t)$  y analizar el desempeño de los estados del sistema cuasi-LPV, comparándolos con las ecuaciones dinámicas no lineales del robot de articulación flexible de un eslabón.

Se consideran las mismas condiciones iniciales tanto para el sistema no lineal correspondiente a la ecuación (3.4) así como en el sistema cuasi-LPV dado por la ecuación (3.9).

La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b, considerando un motor a pasos como actuador. El tiempo de muestreo es de  $T_m = 0.001s$  y las condiciones iniciales de simulación son  $x(t) = [0.5rad \ 0 \ 0.5rad \ 0]^T$ . Se considera un sistema libre de falla y se supone la entrada  $u(t) = 1Nm(Newton - metro)$

Se toman los valores de los parámetros de la tabla 3.1 para la obtención del modelo cuasi-LPV (3.9) obteniendo así las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -70 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -2.24 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -66.30 & 0 \end{bmatrix}, B = G = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La Fig.3.6 muestra el comportamiento de  $\varrho$  obteniendo así un rango de variación entre  $-66.3$  y  $-70$ .

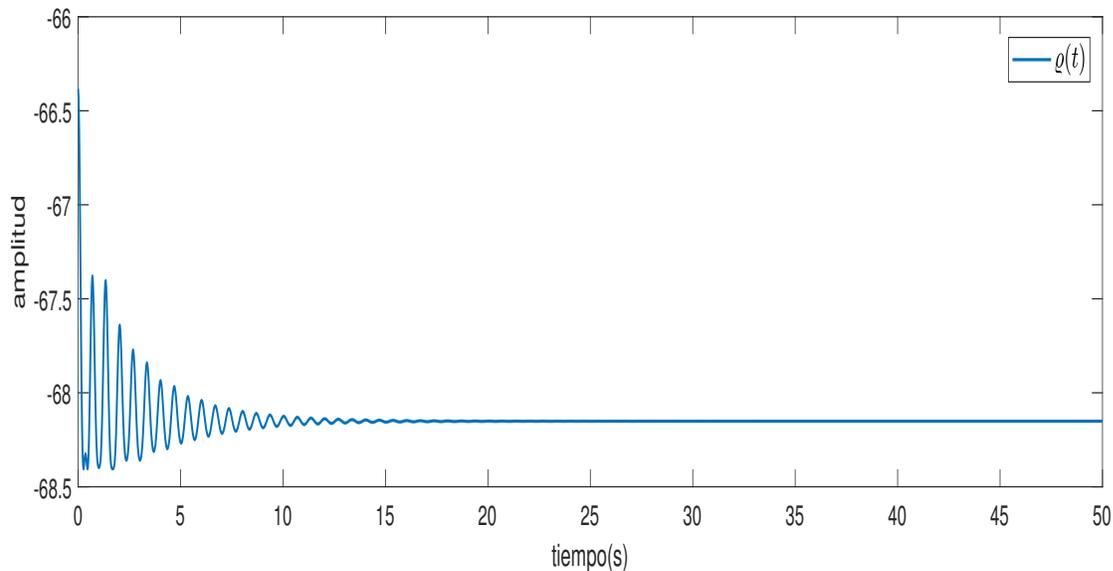


Fig. 3.6. Simulación 1. Variación de  $\varrho(t)$

Considerando las mismas condiciones utilizadas para la obtención de la variación de  $\varrho(t)$ , se realiza la simulación para la comparación del desempeño entre el sistema cuasi-LPV y el sistema no lineal.

Los resultados de la simulación, muestran que el enfoque cuasi-LPV puede representar la dinámica de las ecuaciones no lineales del robot de articulación flexible de un eslabón, como se puede observar en las Fig. 3.7 - 3.14.

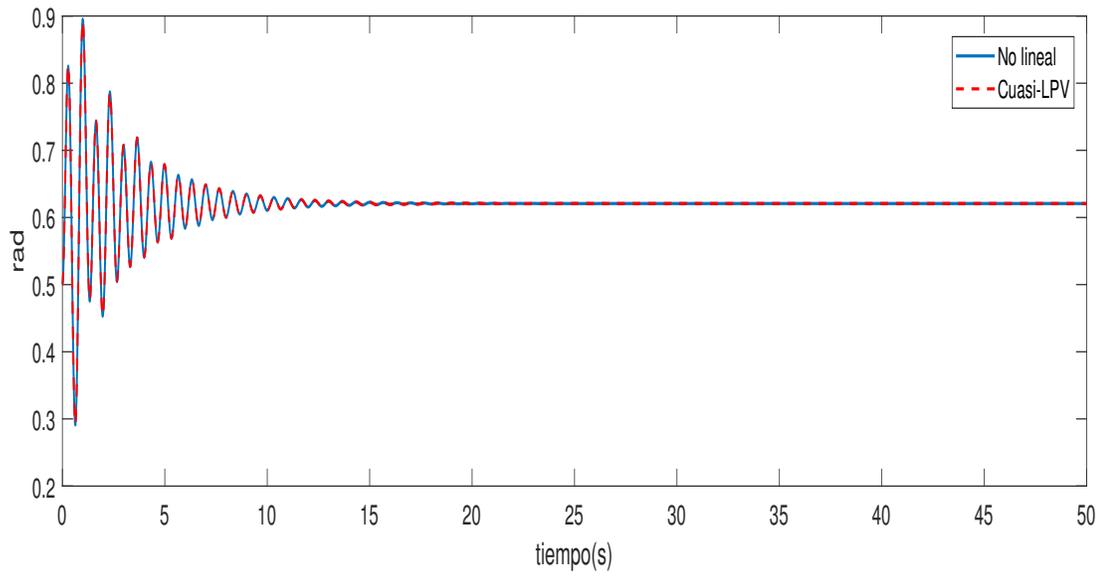
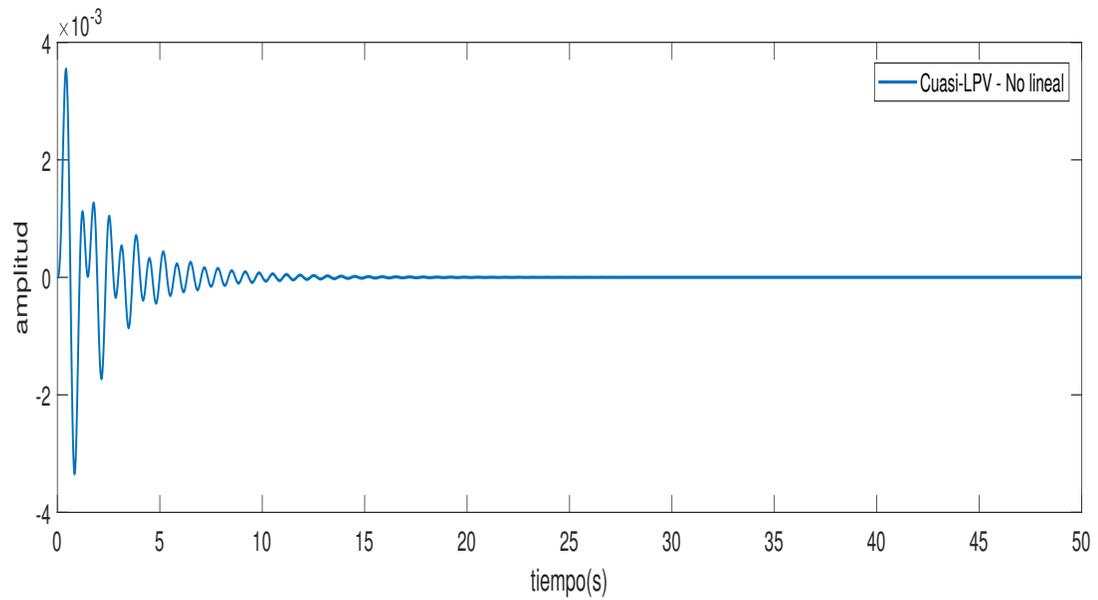
Fig. 3.7. Simulación 1. Posición del motor ( $x_1$ ).

Fig. 3.8. Simulación 1. Error de la posición del motor.

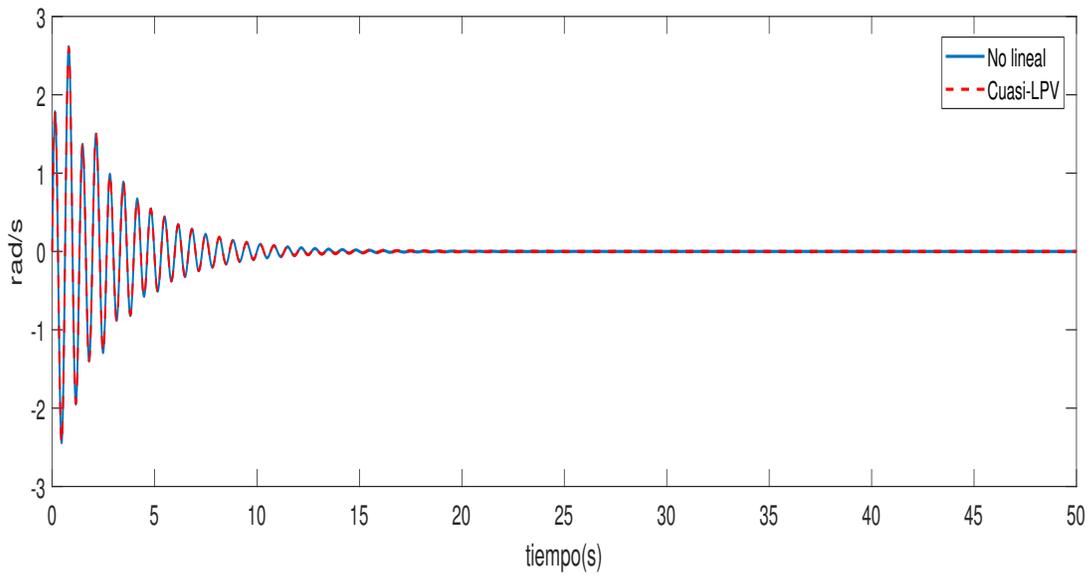


Fig. 3.9. Simulación 1. Velocidad del motor ( $x_2$ ).

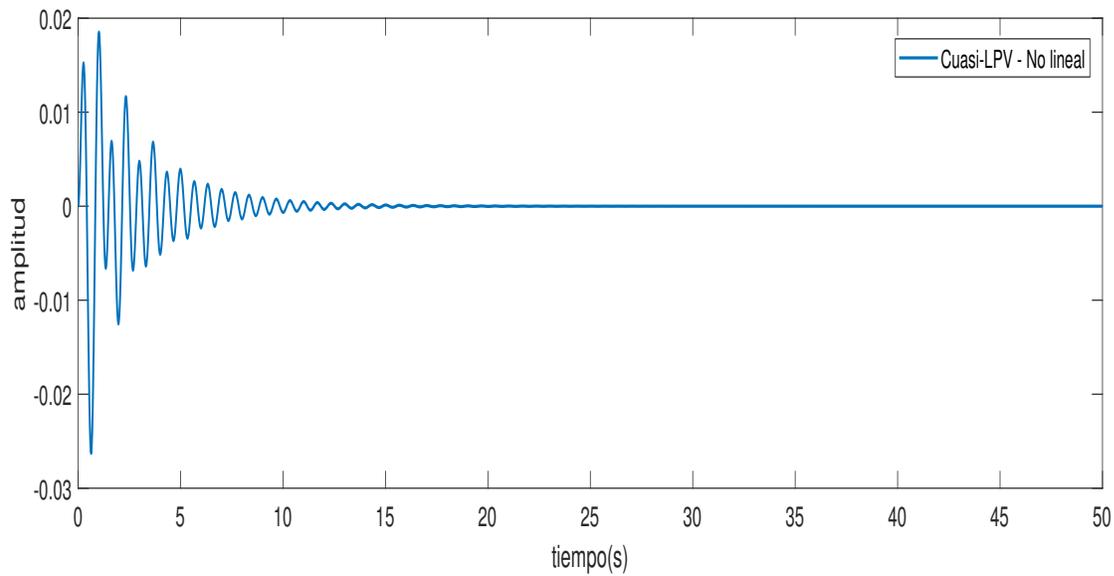


Fig. 3.10. Simulación 1. Error de la velocidad del motor.

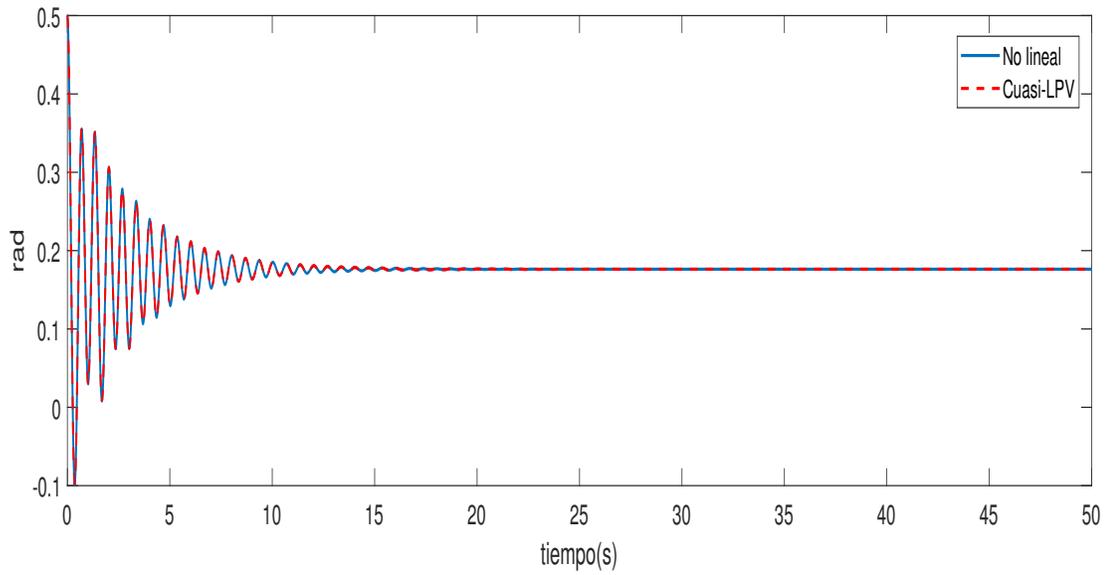
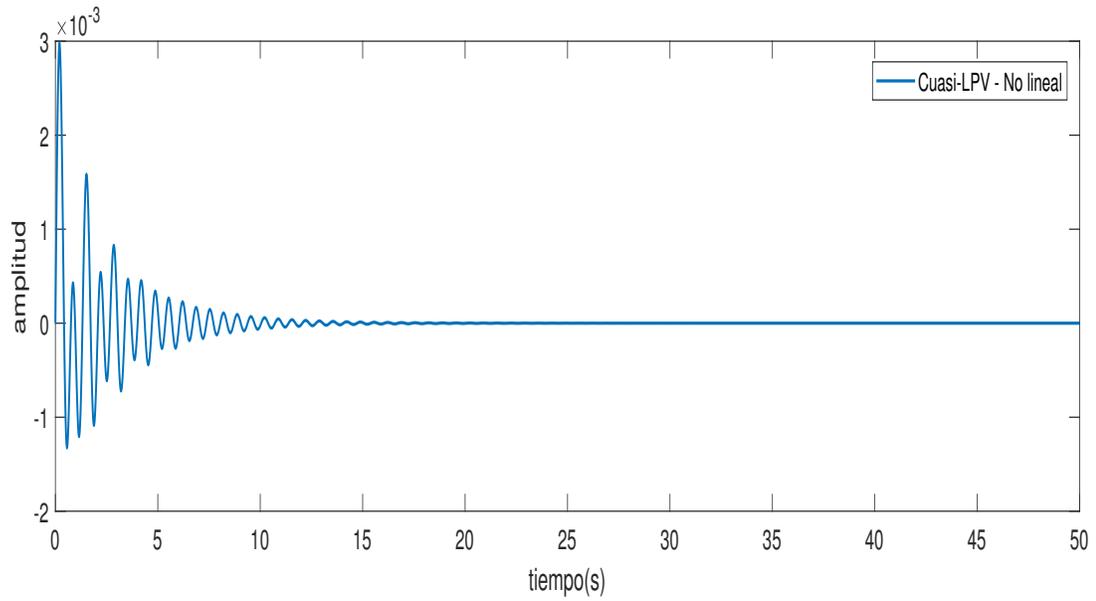
Fig. 3.11. Simulación 1. Posición del eslabón ( $x_3$ ).

Fig. 3.12. Simulación 1. Error de la posición del eslabón.

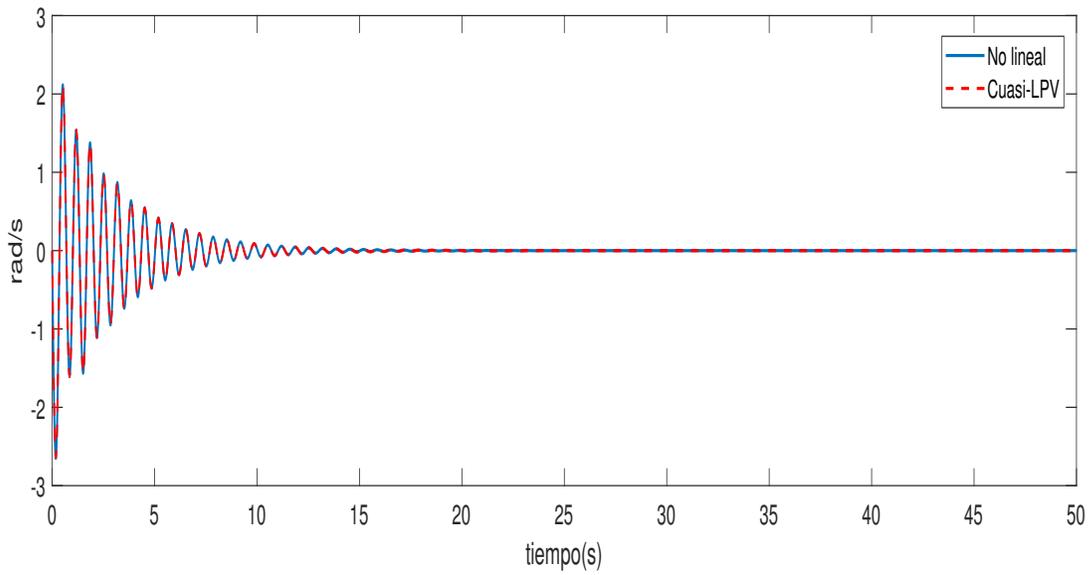


Fig. 3.13. Simulación 1. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ).

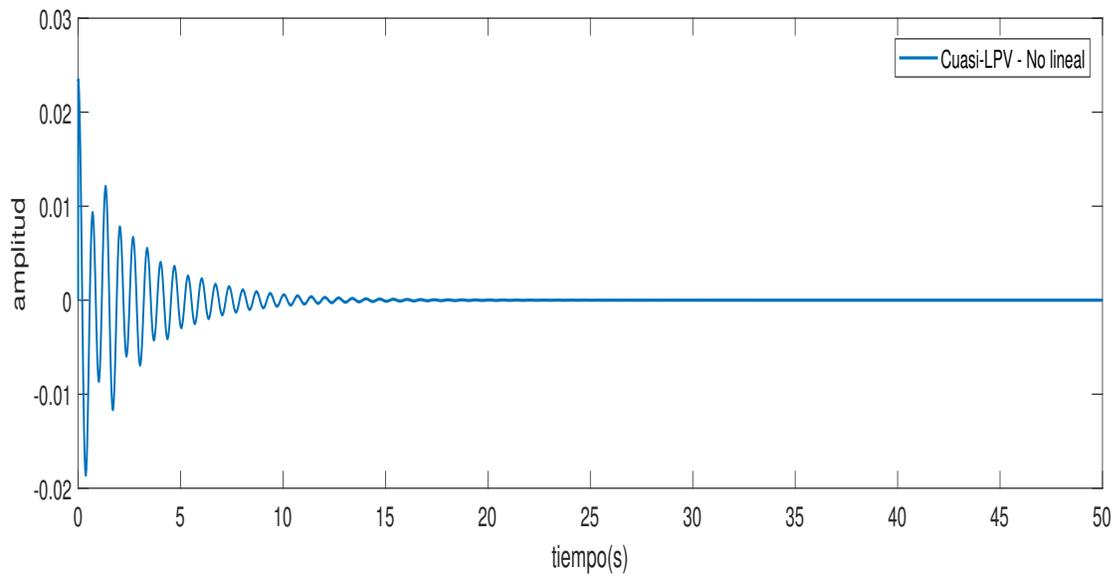


Fig. 3.14. Simulación 1. Error de la velocidad del eslabón.

En la Fig. 3.15 se puede notar que las funciones de ponderación se encuentran dentro del rango de cero y uno, y la suma de ambas funciones es igual a uno en todo momento. Por tanto, se comprueba que las funciones de ponderación se encuentran dentro del rango permisible.

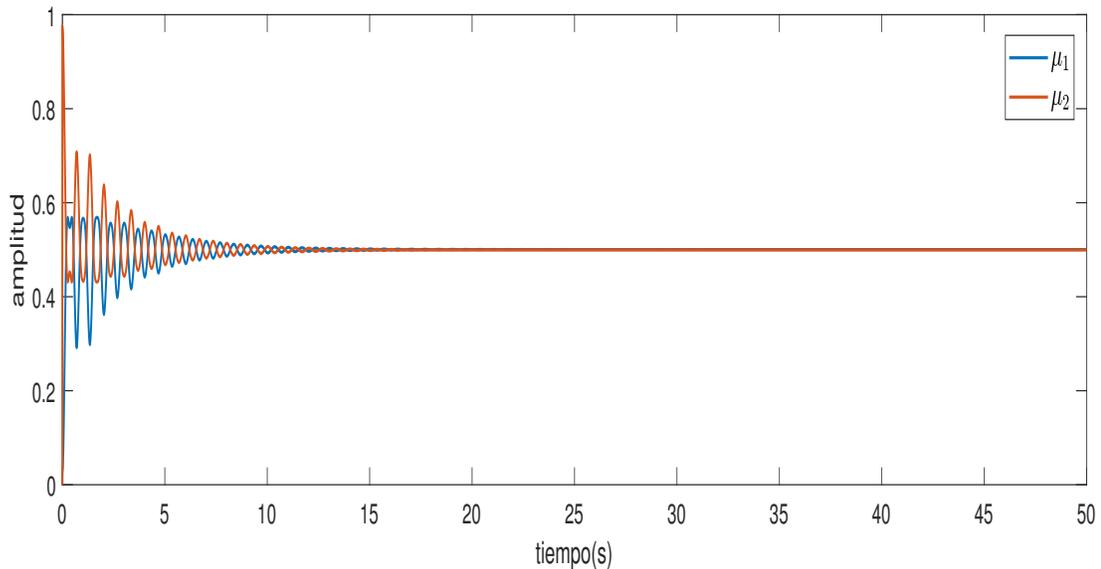


Fig. 3.15. Simulación 1. Funciones de ponderación.

En las Fig. 3.8-3.14 se pueden ver las diferencias (error) entre los valores del modelo no lineal y los valores del sistema cuasi-LPV, los cuales tienen una amplitud de error muy pequeño de  $1 \times 10^{-3}$ . Lo cual indica que el enfoque LPV puede representar de manera correcta la dinámica del modelo no lineal del robot de articulación flexible de un eslabón.

### 3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se muestra que los robots flexibles son utilizados en diversas aplicaciones y son usados por tener ciertas propiedades y características que los robots rígidos no logran desempeñar. También se muestran las ecuaciones dinámicas no lineales que rigen el comportamiento de un robot de articulación flexible de un eslabón y su representación en un sistema cuasi-LPV. Los resultados muestran que el sistema cuasi-LPV logra representar la dinámica en los estados del sistema que el modelo no lineal, partiendo de las mismas condiciones iniciales para ambos enfoques. Sin embargo, al utilizar el enfoque cuasi-LPV es posible utilizar las ventajas y propiedades de los sistemas lineales.



# Capítulo 4

## Diseño de observadores para sistemas LPV

En este capítulo se aborda el análisis y diseño de un observador dinámico generalizado (GDO) para sistemas LPV con fallas en actuador. Se muestran las condiciones para asegurar la estabilidad y la convergencia del GDO mediante funciones Lyapunov. De manera similar se presenta el análisis y diseño de un observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) para sistemas LPV con fallas abruptas en el actuador. Se muestran las condiciones para asegurar la estabilidad y la convergencia del GDLO.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la sección 4.1 se presenta la estructura general del observador dinámico generalizado para sistemas LPV y el estudio de la dinámica del error, la parametrización de las matrices y el análisis de estabilidad para dicho observador. También se presentan casos particulares del GDO como el observador proporcional (PO) y el observador proporcional integral (PIO) para sistemas LPV con fallas en actuador.

En la sección 4.2 se presenta la estructura y análisis de estabilidad del observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO). Se muestra el diseño de un observador Proporcional-Integral de aprendizaje (PILO), como caso particular del GDLO.

## 4.1. Diseño del Observador dinámico generalizado (GDO) para sistemas LPV

El diseño del GDO para evaluar el desempeño de la estimación de fallas para sistemas LPV que se muestra a continuación, se realizó siguiendo la estructura que se presenta en (Osorio-Gordillo et al. (2018)).

Considerando el siguiente sistema cuasi-LPV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))(A_i x(t) + Bu(t) + Gf(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de entrada,  $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$  el vector de falla en actuador,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  son las salidas medibles,  $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de  $r$  parámetros variables,  $\mu_i(\varrho(t))$  son las funciones de ponderación las cuales dependen de la variación de  $\varrho(t)$ , que a su vez varía de acuerdo a las dinámicas de los estados del sistema.  $A_i$ ,  $B$ ,  $G$  y  $C$  son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas.

El observador dinámico generalizado para la estimación de fallas en actuador se muestra como sigue (Osorio-Gordillo et al. (2018)):

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + H_i v(t) + F_i y(t) + J_i u(t) + TG\hat{f}(t)] \quad (4.2)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [S_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + L_i v(t) + M_i y(t)] \quad (4.3)$$

$$\hat{x}(t) = P(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + Qy(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.5)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estimado de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $S_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $T$ ,  $J$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$  y que  $\hat{f}(t)$  converja asintóticamente a  $f(t)$ .

Cabe destacar que el GDO (4.2)-(4.5) tiene una estructura generalizada si  $q_0 < n$  entonces el GDO (4.2)-(4.5) será de orden reducido, sin embargo si  $q_0 = n$  entonces el GDO (4.2)-(4.5) será de orden completo.

### 4.1.1. Estudio de la dinámica del error

Considerando  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  una matriz de parámetros y  $\epsilon(t) = \zeta - Tx(t) + TGf(t)$  como el error transformado, entonces la derivada de  $\epsilon(t)$  queda como

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\zeta} - T\dot{x}(t) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i\epsilon(t) + N_iTx + F_iCx - TA_i x(t) + Ju(t) - TBu(t) + \\ &H_iv(t) - N_iTGf(t) + N_iTG\hat{f}(t) + TG\hat{f}(t) - TGf(t)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

despejando  $\zeta(t)$  de la expresión del error transformado y sustituyéndola, junto con  $y(t)$  en la ecuación (4.7) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i\epsilon(t) + (N_iT + F_iC - TA_i)x(t) + (J - TB_i)u(t) + \\ &H_iv(t) + (N_iTG + TG)e_f(t)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $e_f(t) = \hat{f}(t) - f(t)$ , para simplificar la expresión de (4.8), se proponen las siguientes consideraciones:

- (a)  $N_iT + F_iC - TA_i = 0$
- (b)  $J = TB$

quedando como

$$\dot{\epsilon}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i\epsilon(t) + H_iv(t) + (N_iTG + TG)e_f(t)] \quad (4.9)$$

usando la definición de  $\epsilon(t)$ , las ecuaciones (4.3) y (4.4) pueden ser escritas como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [(S_iT + M_iC)x(t) + S_iTGe_f(t) + S_i\epsilon(t) + L_iv(t)] \quad (4.10)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [P\epsilon(t) + (PT + QC)x(t) + PTGe_f(t)] \quad (4.11)$$

si se cumplen las siguientes condiciones

- (c)  $S_iT + M_iC = 0$
- (d)  $PT + QC = I$

las ecuaciones (4.10) y (4.11) pueden escribirse como

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [S_i T G e_f(t) + S_i \epsilon(t) + L_i v(t)] \quad (4.12)$$

$$e_x(t) = P \epsilon(t) + P T G e_f(t) \quad (4.13)$$

donde  $e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ .

**Observación** *Este análisis inicia considerando un error transformado  $\epsilon(t)$ , analizando la ecuación del error (4.13), se puede notar que, considerando el caso libre de fallas, el error  $e_x(t)$  es una ponderación del error transformado  $\epsilon(t)$ . Por lo tanto, si se asegura la estabilidad del error transformado  $\epsilon(t)$ , se estará en consecuencia, asegurando la estabilidad del error  $e_x(t)$ .*

Agrupando las ecuaciones (4.9) y (4.12) entonces la dinámica del error de estimación puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left[ \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_i T G + T G \\ S_i T G \end{bmatrix} e_f(t) \right] \quad (4.14)$$

donde si  $f(t) = 0$  y las matrices  $\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix}$  son Hurwitz, entonces el error de estimación  $e_x(t)$  del GDO es estable.

Cabe mencionar que al asegurar la estabilidad para las matrices  $N_i, H_i, S_i$  y  $L_i$  considerando  $f(t) = 0$ , entonces  $\epsilon(t)$  y  $v(t)$  de la ecuación (4.14) serán estables, y si  $\epsilon(t)$  es estable entonces  $e_x(t)$  también lo será.

Tomando la ecuación (4.13) y dado que  $\dot{f}(t) = 0$ , al considerarse el caso de fallas abruptas. Entonces la derivada de  $e_f(t)$  considerando la ecuación (4.5), está dada por

$$\dot{e}_f(t) = \Phi C (P \epsilon(t) + P T G e_f(t)) \quad (4.15)$$

Las condiciones (a)-(d) se proponen para simplificar el análisis de estabilidad del GDO, tomando en cuenta que el GDO tiene varios grados de libertad (en las matrices desconocidas) es por tal razón que es posible satisfacer con las condiciones mencionadas.

### 4.1.2. Parametrización de las matrices del observador

Considerando las condiciones (c) y (d) presentadas en la sección anterior

$$\begin{aligned} (c) \quad S_i T + M_i C &= 0 \\ (d) \quad P T + Q C &= I \end{aligned}$$

pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Si el *rango*  $\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = n$ , entonces siempre existen dos matrices  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  y  $K \in \mathbb{R}^{q_0 \times n_y}$  tal que

$$T + K C = R \quad (4.17)$$

definiendo  $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ , la solución general de la ecuación (4.17) está dada por:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = R \Omega^+ - Z_1 (I_{n+n_y} - \Omega \Omega^+)$$

la cual es equivalente a

$$T = T_1 - Z_1 T_2 \quad (4.18)$$

$$K = K_1 - Z_1 K_2 \quad (4.19)$$

donde  $T_1 = R \Omega^+ \begin{bmatrix} I_{n_y} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T_2 = (I_{n+n_y} - \Omega \Omega^+) \begin{bmatrix} I_{n_y} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $K_1 = R \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $K_2 = (I_{n+n_y} - \Omega \Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$  y  $Z_1$  es una matriz con elementos arbitrarios de dimensiones apropiadas.

De la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q_0} & -K \\ 0 & I_{n_y} \end{bmatrix} \Sigma \quad (4.20)$$

donde  $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}$ , insertando la ecuación (4.20) en (4.16) obtenemos

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{q_0} & -K \\ 0 & I_{n_y} \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

esta ecuación puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} Y_{2i} \\ Y_3 \end{bmatrix} (I_{q_0+n_y} - \Sigma \Sigma^+) \right) \begin{bmatrix} I_{q_0} & K \\ 0 & I_{n_y} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donde  $Y_{2i}$  y  $Y_3$  son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas, entonces las matrices  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$  pueden ser determinadas como:

$$S_i = -Y_{2i}N_3 \quad (4.23)$$

$$M_i = -Y_{2i}F_3 \quad (4.24)$$

$$P = P_1 - Y_3N_3 \quad (4.25)$$

$$Q = Q_1 - Y_3F_3 \quad (4.26)$$

donde  $P_1 = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $Q_1 = \begin{bmatrix} K \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ .

Insertando la equivalencia de  $T$  de la ecuación (4.17) en la condición (a) de la sección anterior

$$(a) \quad N_i T + F_i C - T A_i = 0$$

se tiene

$$N_i(R - KC) + F_i C - T A_i = 0 \quad (4.27)$$

$$N_i R + \tilde{K}_i C = T A_i \quad (4.28)$$

donde  $\tilde{K}_i = F_i - N_i K$ . La solución general de la ecuación (4.28) está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_i & \tilde{K}_i \end{bmatrix} = T A_i \Sigma^+ - Y_{1i}(I_{q_0+n_y} - \Sigma \Sigma^+) \quad (4.29)$$

Reemplazando  $T$  de la ecuación (4.18) en la ecuación (4.29) se tiene:

$$N_i = N_{1i} - Z_1 N_{2i} - Y_{1i} N_3 \quad (4.30)$$

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_{1i} - Z_1 \tilde{K}_{2i} - Y_{1i} \tilde{K}_3 \quad (4.31)$$

donde  $N_{1i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $N_{2i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $N_3 = (I_{q_0+n_y} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K}_{1i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K}_{2i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K}_3 = [I_{q_0+n_y} - \Sigma \Sigma^+] \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $Y_{1i}$  y  $Z_1$  son matrices con elementos arbitrarios de dimensiones apropiadas.

Dado que se conoce la estructura de las matrices  $N_i$ ,  $T$ ,  $K$  y  $\tilde{K}_i$  podemos deducir la forma de la matriz  $F_i$  como:

$$\begin{aligned} F_i &= \tilde{K}_i + N_i K \\ F_i &= F_{1i} - Z_1 F_{2i} - Y_{1i} F_3 \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde  $F_{1i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $F_{2i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ ,  $F_3 = (I_{q_0+n_y} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I_{n_y} \end{bmatrix}$ .

Reemplazando la estructura de las matrices  $N_i, S_i, T$  en la ecuación de la dinámica del error (4.14), aparece una bilinealidad en el producto de matrices  $N_iTG$ . Para evitar esta bilinealidad se lleva a cabo una adaptación en la parametrización.

Siendo  $\bar{T}_2 = T_2G$  y  $Z_1 = Z(I_{n+n_y} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)$  donde  $Z$  es una matriz con elementos arbitrarios de dimensiones apropiadas tal que, el producto de matrices  $N_iTG$  se convierte en:

$$N_iTG = N_{1i}T_1G - Z\mathcal{N}_{2i}T_1G - Y_{1i}N_3T_1G$$

donde se tomó en cuenta  $\bar{T}_2\bar{T}_2^+\bar{T}_2 = \bar{T}_2$ .

De la misma forma se obtienen las siguientes matrices  $T, K_i, N_i$  y  $F_i$

$$T = T_1 - Z\mathcal{T}_2 \quad (4.33)$$

$$K_i = K_1 - Z\mathcal{K}_2 \quad (4.34)$$

$$N_i = N_{1i} - Z\mathcal{N}_{2i} - Y_{1i}N_3 \quad (4.35)$$

$$F_i = F_{1i} - Z\mathcal{F}_{2i} - Y_{1i}F_3 \quad (4.36)$$

donde  $\mathcal{T}_2 = (I_{n+n_y} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)T_2$ ,  $\mathcal{K}_2 = (I_{n+n_y} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)K_2$ ,  $\mathcal{N}_{2i} = (I_{n+n_y} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)N_{2i}$ ,  $\mathcal{F}_{2i} = (I_{n+n_y} - \bar{T}_2\bar{T}_2^+)F_{2i}$  y las matrices  $T_1, T_2, K_1, K_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3, F_{1i}, F_{2i}, F_3$  son matrices definidas previamente.

Considerando la parametrización de las ecuaciones (4.23)-(4.36), la dinámica del error (4.14) puede ser escrita como:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}\mathbb{A}_{2i})\varphi(t) + (\mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}\mathbb{F}_{2i})e_f(t)] \quad (4.37)$$

$$\text{donde } \mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} - Z\mathcal{N}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{q1} \end{bmatrix}, \mathbb{F}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i}T_1G + T_1G - Z\mathcal{N}_{2i}T_1G \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} N_3T_1G \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{Y}_{1i} = \begin{bmatrix} Y_{1i} & H_i \\ Y_{2i} & L_i \end{bmatrix} \text{ y } \varphi(t) = \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

Escribiendo juntas la dinámica del error del observador (4.37) y la dinámica del error de estimación de la falla (4.15) considerando (4.23)-(4.36) con  $Y_3 = 0$  por simplicidad, se obtiene:

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [\mathcal{A}_i] \eta(t). \quad (4.38)$$

$$\text{donde } \mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i\mathbb{F}_2 \\ \mathbb{C} & \mathbb{D}_1 \end{bmatrix} \text{ y } \eta(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}, \text{ con } \mathbb{C} = [\Phi CP_1 \quad 0] \text{ y } \mathbb{D} = \Phi CP_1 T_1 G.$$

Las matrices del observador se obtienen de la determinación de las matrices  $\mathbb{Y}_i, \Phi$  y  $Z$  tal que el sistema (4.59) sea estable.

### 4.1.3. Análisis de estabilidad

En el siguiente apartado se presentan las condiciones de estabilidad para el sistema (4.59), tal que la estimación de los estados y fallas puedan realizarse.

Considerando la siguiente función de Lyapunov  $V(\eta(t)) = \eta(t)^T X \eta(t)$  con una matriz simétrica positiva definida  $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$  con  $X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{11} \\ X_{11} & X_{12} \end{bmatrix} > 0$ , siendo  $X_{11} = X_{11}^T$  y  $X_2 > 0$  entonces su derivada a lo largo de la trayectoria de (4.59), es  $\dot{V}(\eta(t)) = \eta(t)^T (\mathcal{A}_i^T X + X \mathcal{A}_i) \eta(t)$ .

La estabilidad asintótica del sistema (4.59) se garantiza si y solo si  $\dot{V}(\eta(t)) < 0$ . Esto nos lleva a que la LMI:  $\mathcal{A}_i^T X + X \mathcal{A}_i < 0$ .

Insertando la forma de las matrices  $\mathcal{A}_i$  y  $X$ , se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{bmatrix} X_1(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X_1 & X_1(\mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{F}_2) + \mathbb{C}^T X_2 \\ (*) & X_2 \mathbb{D} + \mathbb{D}^T X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.39)$$

La cual puede ser escrita como:

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C} + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i \mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (4.40)$$

donde

$$\mathcal{X}_i = X_1 \mathbb{Y}_i, \quad \mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} X_1(\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) - (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X_1 & X_1(\mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{F}_2) + \mathbb{C}^T X_2 \\ (*) & X_2 \mathbb{D}_i + \mathbb{D}_i^T X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I_{q_0+q_1} \\ 0 \end{bmatrix} y$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}.$$

Usando el lema de eliminación la desigualdad (4.40) es equivalente a:

$$\mathcal{C}^{T\perp} \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.41)$$

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (4.42)$$

con  $\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_2^T \\ \mathbb{F}_2^T \end{bmatrix}^\perp$  y  $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ . Usando la definición de las matrices  $\mathcal{C}^{T\perp}$ ,  $\mathcal{D}_i$  y  $X_1$ , la desigualdad (4.41) es equivalente a

$$\mathcal{C}^{T\perp} \begin{bmatrix} \Pi_{1i} & N_{1i}^T X_{11} - N_{2i}^T W_1^T & \Pi_{2i} \\ (*) & 0 & X_{11}(N_{1i} T_1 G + T_1 G) - W_1 N_{2i} T_1 G \\ (*) & (*) & X_2 \Phi C P_1 T_1 G + G^T P_1 C \Phi^T X_2 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0 \quad (4.43)$$

con

$$\Pi_{1i} = X_{11}N_{1i} + N_{1i}^T X_{11} - W_1 \mathcal{N}_{2i} - \mathcal{N}_{2i}^T W_1^T \quad (4.44)$$

$$\Pi_{2i} = X_{11}(N_{1i}T_1G + T_1G) - W_1 \mathcal{N}_{2i}T_1G + P_1^T C^T \Phi^T X_2 \quad (4.45)$$

en este caso la matriz  $W_1 = X_{11}Z$ .

Usando la definición de las matrices  $\mathcal{B}^\perp$ ,  $\mathcal{D}_i$  y  $X_1$ , la desigualdad (4.42) es equivalente a

$$X_2 \Phi C P_1 T_1 G + G^T P_1 C \Phi^T X_2 < 0 \quad (4.46)$$

si las condiciones (4.43) y (4.46) son satisfechas, la matriz  $\mathbb{Y}_i$  se obtiene de como se muestra a continuación

$$\mathbb{Y}_i = X_1^{-1}(\mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+), \quad (4.47)$$

donde

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \vartheta_i \mathcal{C}_r^T (C_r \vartheta_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{1/2} \mathcal{L} (C_r \vartheta_i \mathcal{C}_r^T)^{-1/2} \quad (4.48)$$

$$\vartheta_i = (\mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (4.49)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\vartheta_i - \vartheta_i \mathcal{C}_r^T (C_r \vartheta_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \vartheta_i] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (4.50)$$

donde  $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I_{q_0+q_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_3 T_1 G \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$  y

$$\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} \Pi_{1i} & N_{1i}^T X_{11} - \mathcal{N}_{2i}^T W_1^T & \Pi_{2i} \\ (*) & 0 & X_{11}(N_{1i}T_1G + T_1G) - W_1 \mathcal{N}_{2i}T_1G \\ (*) & (*) & X_2 \Phi C P_1 T_1 G + G^T P_1 C \Phi^T X_2 \end{bmatrix}.$$

Las matrices  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{Z}$  son matrices con elementos arbitrarios de dimensiones apropiadas que satisfacen a  $\mathcal{R} > 0$  y  $\|\mathcal{L}\| < 1$ . Las matrices  $\mathcal{C}_l$ ,  $\mathcal{C}_r$ ,  $\mathcal{B}_l$  y  $\mathcal{B}_r$  son matrices de rango completo tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$ .

#### 4.1.4. Casos particulares

##### Observador proporcional (PO) para sistemas LPV

Considerando  $H_i = 0$ ,  $S_i = 0$ ,  $M_i = 0$ , y  $L_i = 0$  en el GDO (4.2)-(4.5) la estructura se reduce a un observador proporcional (PO) para sistemas LPV de la forma (4.1)

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + F_i y(t) + Ju(t) + TG\hat{f}(t)] \quad (4.51)$$

$$\hat{x}(t) = P(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + Qy(t) \quad (4.52)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.53)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estimado de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i, F_i, P, Q, J, T$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$  y  $\hat{f}(t)$  converja asintóticamente a  $f(t)$ .

##### Estudio de la dinámica del error

Considerando la parametrización de las ecuaciones (4.23)-(4.36), la dinámica del error (4.59) puede ser escrita como:

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [\mathcal{A}_i] \eta(t). \quad (4.54)$$

donde  $\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{bmatrix}$  y  $\eta(t) = \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}$ , con  $\mathbb{A}_{1i} = N_{1i} - ZN_{2i}$ ,  $\mathbb{A}_2 = N_3$ ,  $\mathbb{F}_{1i} = N_{1i}T_1G + T_1G - ZN_{2i}T_1G$ ,  $\mathbb{F}_2 = N_3T_1G$ ,  $\mathbb{C} = \Phi CP_1$ ,  $\mathbb{D} = \Phi CP_1T_1G$  y  $\mathbb{Y}_i = Y_{1i}$ .

A partir de la ecuación (4.54), el estudio de la dinámica del error se realiza como en el GDO para obtener las matrices del observador proporcional.

##### Observador proporcional integral (PIO) para sistemas LPV

Considerando las matrices  $L_i = 0$ ,  $S_i = CP$  y  $M_i = CQ - I$  existe un observador proporcional integral para sistemas LPV de la forma (4.1)

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + H_i v(t) + F_i y(t) + J_i u(t) + TG\hat{f}(t)] \quad (4.55)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [C\hat{x}(t) - y(t)] \quad (4.56)$$

$$\hat{x}(t) = P(\zeta(t) + TG\hat{f}(t)) + Qy(t) \quad (4.57)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.58)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es el vector auxiliar  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estimado de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i, F_i, H_i, P, Q, T, J, \Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$  y  $\hat{f}(t)$  converja asintóticamente a  $f(t)$ .

## Estudio de la dinámica del error

La dinámica del error de estimación y el error de la falla (4.59) pueden reescribirse como

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left[ \mathcal{A}_i \right] \eta(t). \quad (4.59)$$

donde  $\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 & \mathbb{F}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{bmatrix}$  y  $\eta(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix}$  con  $\mathbb{C} = [\Phi C P_1 \quad 0]$ ,  $\mathbb{D} = \Phi C P_1 T_1 G$ ,

$$\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} - Z N_{2i} & 0 \\ C P_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{q_1} \end{bmatrix}, \mathbb{F}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} T_1 G + T_1 G - Z N_{2i} T_1 G \\ C P_1 T_1 G \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} N_3 T_1 G \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1i} & H_i \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, el estudio de la dinámica del error se realiza como en el GDO para obtener las matrices del observador proporcional integral.

## Metodología para la obtención del GDO

### Algoritmo.

1. Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $R \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que el rango( $\Sigma$ ) =  $n$ .
2. Obtener las matrices  $T_1, T_2, K_1, K_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$  y  $P_1$  definidas en la sección 4.1.2.
3. Resolver las LMIs (4.43) y (4.46) para encontrar las matrices  $\Phi, Z$  y  $X$ .
4. Encontrar una matriz  $\mathcal{R} > 0$  tal que  $\vartheta_i$  en la ecuación (4.49) sea positiva definida.
5. Encontrar matrices arbitrarias  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{Z}$  tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  para resolver la ecuación (4.48), entonces obtener  $\mathbb{Y}_i$  usando (4.47), el cual contiene las matrices  $Y_{1i}, Y_{2i}, H_i$  y  $L_i$  que serán usadas en el siguiente paso.
6. Obtener las matrices  $N_i, H_i, F_i, J, S_i, L_i, M_i, P$  y  $Q$  de la dinámica del observador (4.2)-(4.5), usando (4.35) para programar  $N_i$ , (4.47) para programar  $H_i$  y  $L_i$ , (4.23)-(4.26) para programar  $S_i, M_i, P$ , y  $Q$  con  $Y_3 = 0$ , (4.18) para calcular  $T$ .  $F_i$  está definida en (4.36) y la matriz  $J$  está dada por la consideración (b) mostrada en la sección 4.1.1.

## 4.2. Diseño del observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO) para sistemas LPV

Considerando un sistema cuasi-LPV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))(A_i x(t)) + Bu(t) + Gf(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (4.60)$$

el observador dinámico generalizado de aprendizaje para la estimación de fallas en actuador se muestra como sigue:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)] + Ju(t) + TG\hat{f}(t) \quad (4.61)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [S_i \zeta(t) + L_i v(t) + M_i y(t)] \quad (4.62)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (4.63)$$

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(t - \tau) + \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.64)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar,  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la estimación de  $x(t)$  y  $\hat{f}(t)$  es la estimación de  $f(t)$ . Las matrices  $N_i, H_i, F_i, S_i, L_i, M_i, Q, J, T, \Phi$ , son desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$  y que  $\hat{f}(t)$  converja asintóticamente a  $f(t)$ .

**Observación** *El sistema LPV (4.60) debe cumplir con las siguientes condiciones para asegurar la existencia del GDLO*

1.  $\text{rango}(CG) = \text{rango}(G) = m$ ,
2.  $\text{rango} \begin{bmatrix} A_i - sI_n & G \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rango}(G), \quad s \in \mathbb{C}_+$

*La condición (1) implica que  $p \geq nf$ ; esto es, el número de salidas medibles debe ser mayor o igual al número de fallas (Edwards and Tan (2006)). La condición (2) garantiza que la tripleta  $(A_i, G, C)$  no posee ceros invariantes,  $\forall_i \in [1, \dots, k]$  (Edwards et al. (2007)).*

El GDLO (4.61)-(4.64) es un observador de orden completo debido a que el vector del observador  $\zeta(t)$  es de dimensión  $q_0 = n$  de esta forma la matriz  $P$  es considerada como identidad por simplicidad, debido a que si no se considera identidad el desarrollo del GDLO se complica considerablemente.

### 4.2.1. Estudio de la dinámica del error

Considerando  $e_f(t) = \hat{f}(t) - f(t)$  y  $e_x(t) = \zeta(t) - Tx(t)$ , la derivada de  $e_x(t)$  queda como

$$\dot{e}_x(t) = \dot{\zeta} - T\dot{x}(t) \quad (4.65)$$

$$= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) - T A_i x(t)] + J u(t) + T G \hat{f}(t) - T B u(t) - T G f(t) \quad (4.66)$$

Sustituyendo  $\zeta(t)$  y  $y(t)$  en la ecuación (4.66) tenemos

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i e_x(t) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(t) + H_i v(t)] + (J - T B) u(t) + T G e_f(t) \quad (4.67)$$

para simplificar la expresión de  $e_x(t)$ , se proponen las siguientes consideraciones:

- (a)  $N_i T + F_i C - T A_i = 0$
- (b)  $J = T B$

quedando como

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i e_x(t) + H_i v(t)] + T G e_f(t) \quad (4.68)$$

considerando la definición de  $e_x(t)$ , la ecuación (4.62) y (4.63) pueden ser reescritas como

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [(S_i T + M_i C) x(t) + S_i e_x + L_i v(t)] \quad (4.69)$$

$$\hat{x}(t) = e_x(t) + (T + Q C) x(t) \quad (4.70)$$

si se cumplen las siguientes condiciones

- (c)  $S_i T + M_i C = 0$
- (d)  $T + Q C = I$

las ecuaciones (4.69) y (4.70) pueden reescribirse como

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [S_i e_x(t) + L_i v(t)] \quad (4.71)$$

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (4.72)$$

Agrupando las ecuaciones (4.68) y (4.71) entonces la dinámica del error de estimación puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TG \\ 0 \end{bmatrix} e_f(t) \quad (4.73)$$

donde si  $e_f(t) = 0$  y las matrices  $\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & L_i \end{bmatrix}$  son Hurwitz, entonces la dinámica del error del GDLO es estable.

Las condiciones (a)-(d) se proponen para simplificar el análisis de estabilidad del GDLO, tomando en cuenta que el GDLO tiene varios grados de libertad (en las matrices desconocidas), es por tal razón que es posible cumplir con las condiciones mencionadas.

### 4.2.2. Parametrización de las matrices del observador

Tomando la condición (d) de la sección anterior

$$(d) \quad T + QC = I$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \Sigma = I \quad (4.74)$$

donde  $\Sigma = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}$ . La solución particular de (4.74) se puede expresar como

$$T = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$Q = \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Considerando la condición (b) de la sección anterior

$$(b) \quad J = TB$$

y sustituyendo el valor de  $T$  de la condición (d) tenemos

$$N_i = K_i C + T A_i \quad (4.77)$$

donde  $K_i = N_i Q - F_i$ .

Haciendo uso de la condición (c) de la sección anterior

$$(c) \quad S_i T + M_i C = 0$$

y sustituyendo el valor de  $T$  de la condición (d) tenemos

$$S_i = Z_i C \quad (4.78)$$

donde  $Z_i = S_i Q - M_i$ .

Utilizando la parametrización de las matrices del observador, la dinámica del error puede reescribirse tomando en cuenta las ecuaciones (4.75)-(4.78), quedando como

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(t) + \mathbb{B} e_f(t) \quad (4.79)$$

donde:  $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} T A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} T G \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} K_i & H_i \\ Z_i & L_i \end{bmatrix}$ ,  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ .

Usando la definición de  $e_f(t)$  tenemos

$$e_f(t) = \hat{f}(t) - f(t) \quad (4.80)$$

$$= \hat{f}(t - \tau) + \Phi C (\hat{x}(t) - x(t)) - f(t) \quad (4.81)$$

sumando y restando el término  $f(t - \tau)$  tenemos

$$e_f(t) = \hat{f}(t - \tau) - f(t - \tau) + \Phi C (\hat{x}(t) - x(t)) + f(t - \tau) - f(t) \quad (4.82)$$

considerando  $\tilde{f}(t) = f(t - \tau) - f(t)$ , puede reescribirse como

$$e_f(t) = e_f(t - \tau) + \Phi C_1 e_x(t) + \tilde{f}(t) \quad (4.83)$$

De la ecuación (4.83) al considerar fallas abruptas se supone que  $f(t - \tau) = f(t)$  en un tiempo finito, por lo tanto  $\tilde{f}(t) = 0$ , pudiendo expresar (4.83) como

$$e_f(t) = e_f(t - \tau) + \mathbb{C} \varphi(t) \quad (4.84)$$

donde  $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \Phi C & 0 \end{bmatrix}$  y  $\varphi = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ .

### 4.2.3. Análisis de estabilidad

Considerando la siguiente función de Lyapunov

$$\mathcal{V}(t) = \varphi^T(t)X\varphi(t) + \int_{t-\tau}^t e_f(t)^T e_f(t) dt \quad (4.85)$$

donde  $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$  es una matriz simétrica definida positiva. La derivada de la función de Lyapunov (4.85) con respecto del tiempo queda:

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq \varphi(t)^T X \dot{\varphi}(t) + \dot{\varphi}(t)^T X \varphi(t) + e_f(t)^T e_f(t) - e_f(t-\tau)^T e_f(t-\tau) \quad (4.86)$$

sustituyendo (4.79) en la ecuación (4.86) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(t) \leq \varphi(t)^T [X(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) + (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X] \varphi(t) + 2\varphi(t)^T X \mathbb{B} e_f(t) + \\ e_f(t)^T e_f(t) - e_f(t-\tau)^T e_f(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Sustituyendo (4.84) en (4.87) queda como

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(t) \leq \varphi^T [X(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) + (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X] \varphi(t) + 2\varphi^T(t) [X\mathbb{B} + \mathbb{C}^T] e_f(t-\tau) + \\ \varphi^T(t) [2X\mathbb{B} + \mathbb{C}^T] \mathbb{C} \varphi(t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Considerando la siguiente restricción

$$\mathbb{B}^T X = -\mathbb{C} \quad (4.89)$$

podemos obtener

$$\varphi(t)^T [2X\mathbb{B} + \mathbb{C}^T] \mathbb{C} \varphi(t) = -\varphi(t)^T \mathbb{C}^T \mathbb{C} \varphi(t) \leq 0 \quad (4.90)$$

es importante notar que la ecuación (4.90) está formada por un término cuadrático y al contener el signo menos, siempre cumplirá la condición de ser definido negativo, siempre y cuando  $\varphi(t) \neq 0$ .

Utilizando (4.89) y (4.90), la ecuación (4.88) puede ser escrita como

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq \varphi^T(t) [X\mathbb{A}_{1i} + Y_{fi}\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T Y_{fi}^T] \varphi(t) \quad (4.91)$$

donde  $Y_{fi} = X\mathbb{Y}_i$ .

Si la condición  $X\mathbb{A}_{1i} + Y_{fi}\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T Y_{fi}^T < 0$  se cumple, entonces  $\dot{\mathcal{V}}(t) < 0$ .

## Condiciones de estabilidad

De la ecuación (4.91) se pueden obtener las condiciones necesarias para asegurar la estabilidad del GDLO como se muestra a continuación.

$$X\mathbb{A}_{1i} + Y_{fi}\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_{1i}^T X + \mathbb{A}_2^T Y_{fi}^T < 0 \quad (4.92)$$

La condición (4.92) puede ser resuelta usando una herramienta estándar de LMIs (por sus siglas en inglés desigualdades matriciales lineales), sin embargo, la condición (4.89) es una igualdad matricial que es difícil de resolver usando las herramientas de LMIs. Para resolver este problema, podemos reescribir la ecuación (4.89) como (Jia et al. (2016b))

$$(\mathbb{B}^T X + \mathbb{C})^T (\mathbb{B}^T X + \mathbb{C}) \leq \gamma I \quad (4.93)$$

donde  $\gamma$  es un escalar positivo, utilizando el lema del complemento de Schur (Boyd et al. (1994)), (4.93) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -\gamma I & \mathbb{B}^T X + \mathbb{C} \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.94)$$

El problema de diseño de (4.92) y (4.89) ahora se convierte en un problema de minimización, donde se debe considerar un escalar  $\gamma$  suficientemente pequeño tal que las matrices  $X$  y  $\Phi$  satisfagan las desigualdades (4.92) y (4.94) mediante el uso de alguna herramienta para resolver LMIs.

## Lema de eliminación

Considerando la solución a la ecuación (4.92) mediante el solucionador de MATLAB, genera una matriz  $Y_{fi} = 0$ , lo que simplifica la estructura generalizada, por lo tanto, surge la necesidad de utilizar una equivalencia de dicha desigualdad, para este caso, se utiliza el lema de eliminación (Skelton et al. (1998)).

La ecuación (4.92) puede ser escrita como:

$$\mathcal{Q}_i + \mathcal{B}\mathcal{X}_i + (\mathcal{B}\mathcal{X}_i)^T < 0 \quad (4.95)$$

donde  $\mathcal{X}_i = Y_{fi}^T$ ,  $\mathcal{Q}_i = X\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{A}_{1i}^T X$ ,  $\mathcal{B} = \mathbb{A}_2^T$ . De acuerdo al lema Skelton et al. (1998), existe una matriz  $\mathcal{X}_i$  que satisface (4.95) si y solo si se mantiene la siguiente condición:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{Q}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (4.96)$$

$$\text{con } \mathcal{B}^\perp = [C^{T\perp} \ 0] \text{ y } \mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} X_1(TA_i) + (TA_i)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si la condición (4.96) se satisface, la matriz de parámetros  $\mathbb{Y}_i$  se obtiene como se muestra a continuación

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1}(-\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Gamma_i^{1/2})^T \quad (4.97)$$

donde

$$\Gamma_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - \mathcal{Q}_i > 0$$

donde  $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{L}$  es cualquier matriz tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  es cualquier escalar tal que  $\Gamma_i > 0$ .

En resumen, las desigualdades a solucionar son (4.96) y (4.94) con lo que se obtiene el valor de las matrices  $X$  y  $\Phi$ . Para determinar las matrices del observador se resuelve (4.97) y una vez obtenido se sustituye el valor de  $\mathbb{Y}_i$  obtenido en las matrices correspondientes (véase el algoritmo para la obtención de las matrices del GDLO al final de la sección).

#### 4.2.4. Casos particulares

##### Observador de aprendizaje proporcional integral (PILO) para sistemas LPV

Considerando el sistema cuasi-LPV (3.9) y el observador (4.61)-(4.64) con las matrices  $L_i = 0$ ,  $S_i = C_1$  y  $M_i = C_1 Q - I$  se obtiene el PILO para la estimación de fallas en actuador como se muestra a continuación:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)] + Ju(t) + TG\hat{f}(t) \quad (4.98)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [C\hat{x}(t) - y(t)] \quad (4.99)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (4.100)$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \hat{f}(t - \tau) + \Phi(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.101)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estados del observador,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estimado de  $x(t)$ . Las matrices  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $Q$ ,  $J$ ,  $T$  y  $\Phi$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales deben determinarse tal que  $\hat{x}(t)$  converja asintóticamente a  $x(t)$  y  $\hat{f}(t)$  converja asintóticamente a  $f(t)$ .

## Estudio de la dinámica del error

la dinámica del error de estimación (4.79) se vuelve

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) [(\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(t)] + \mathbb{B} e_f(t) \quad (4.102)$$

donde  $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} T A_i & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} T G \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [K_i \quad H_i]$ ,  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ .

el error de estimación de la falla (4.84) queda como

$$e_f(t) = e_f(t - \tau) + \mathbb{C} \varphi(t) \quad (4.103)$$

donde  $\mathbb{C} = [\Phi C \quad 0]$ . Consecuentemente, el análisis de estabilidad mostrada para el GDLO puede ser aplicados directamente a las dinámicas de estimación (4.102) y (4.103) para obtener las matrices del observador proporcional integral.

## Metodología para la obtención del GDLO

A continuación, se muestra un algoritmo, el cual resume el método para lograr obtener todos los parámetros del observador.

### Algoritmo.

1. *Seleccionar el orden de  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  con  $q_0 = n$  tal que el rango( $\Sigma$ ) =  $n$*
2. *Encontrar las matrices  $Q$ ,  $T$ ,  $\mathbb{A}_{1i}$ ,  $\mathbb{A}_2$ ,  $\mathbb{B}$  y  $\Sigma$  definidas en la sección 4.2.2.*
3. *Resolver las LMIs (4.96) y (4.94) para encontrar las matrices  $X$  y  $\Phi$ .*
4. *Encontrar matrices arbitrarias  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  tal que  $\Gamma_i$  de la ecuación (4.97) sea positiva definida, entonces obtener  $\mathbb{Y}_i$  usando (4.97), el cual contiene las matrices  $K_i$ ,  $H_i$ ,  $Z_i$  y  $L_i$  que serán usadas en el siguiente paso.*
5. *Obtener las matrices  $N_i$ ,  $F_i$ ,  $S_i$ ,  $M_i$  y  $J$ , usando (4.77) para programar  $N_i$  y  $F_i$ , (4.78) para programar  $S_i$  y  $M_i$ , y  $J$  está definida por la consideración (b) en la sección 4.2.2.*

### 4.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se muestra el análisis y diseño de un GDO y de un GDLO para sistemas LPV considerando fallas en actuador. El GDO El GDO puede ser diseñado de orden reducido y/o de orden completo de acuerdo a las dimensiones del vector  $\zeta(t)$ . Se muestra la obtención de la dinámica del error y se encuentra la parametrización de las matrices encontrando una solución general para cada una de ellas y usando el lemma de eliminación, se encuentra las matrices desconocidas del observador.

El GDLO diseñado en este este trabajo es un observador de orden completo debido a que el vector del observador  $\zeta(t)$  es de dimensión  $q_0 = n$  de esta forma la matriz  $P$  es considerada como identidad por simplicidad. Así mismo la solución de la parametrización de las matrices del GDLO, se encuentran mediante una solución particular y usando el lemma de eliminación, se encuentra las matrices desconocidas del observador.

Los resultados de los observadores diseñados en este capítulo son mostrados en el capítulo siguiente.

# Capítulo 5

## Resultados de simulación

En este capítulo se muestra el desempeño de cada uno de los observadores realizados en este trabajo de tesis para la estimación simultánea de estados y fallas en actuador, evaluados en diferentes escenarios de fallas y realizando un análisis de desempeño en cada uno de los casos. La simulación se realiza en el robot de articulación flexible de un eslabón.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la sección 5.1 se muestra la obtención de un GDO de orden reducido y sus observadores derivados, siguiendo el algoritmo presentado. Se muestra el desempeño del GDO, PIO y PO considerando 2 escenarios de fallas y se muestran los índices de desempeño correspondientes. En la sección 5.2 se muestra la obtención de un GDO de orden completo, siguiendo el algoritmo presentado en 4.1.4. Se muestra el desempeño del GDO considerando 1 escenario de falla.

En la sección 5.3 se muestran la obtención de las matrices del GDLO mediante el algoritmo mostrado al final de la sección 4.2.4. Se muestran las simulaciones del desempeño del GDLO y PILO para la estimación de estados y fallas en actuador así como los índices de desempeño correspondientes. En la sección 5.4 se muestra el GDLO considerando un retado  $\tau$  diferente del tiempo de muestreo y se analizan el desempeño del GDLO y del PILO para la estimación de la falla contemplando diferentes porcentajes de incertidumbres paramétricas en los parámetros  $B_v$  y  $k$  del robot de articulación flexible. En la sección 5.5 se mencionan las conclusiones principales del capítulo.

## Diagrama a bloques de un observador dinámico generalizado de aprendizaje (GDLO)

A continuación, se muestra un diagrama a bloques de la conexión entre un sistema no lineal y el GDLO. En donde se observa que el GDLO solo obtiene información de la entrada y de la salida del sistema no lineal, usando esa información el observador logra estimar simultáneamente variables de estado y fallas que ocurren en el actuador. Mediante esta estructura es como se proponen las simulaciones que se muestran en las siguientes secciones.

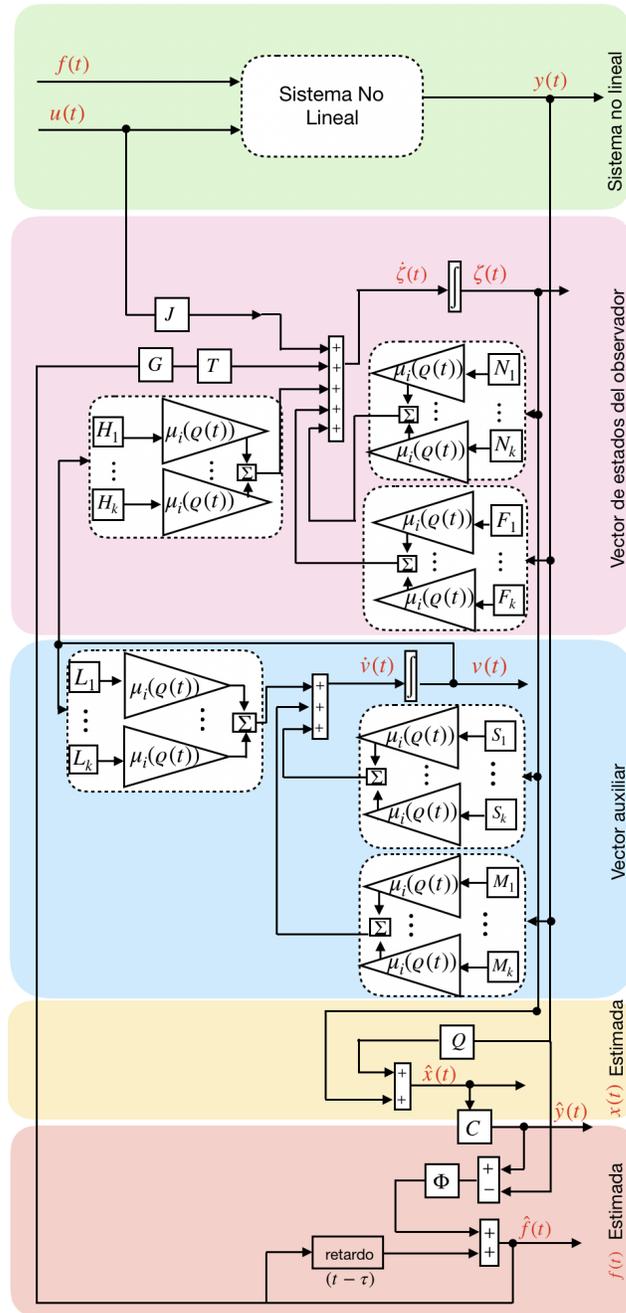


Fig. 5.1. Diagrama a bloques de un GDLO.

## 5.1. Simulación 2. Observador dinámico generalizado para sistemas LPV con fallas en actuador (orden reducido).

**Objetivo.** El objetivo de esta simulación es mostrar el desempeño del GDO considerando 2 pruebas. La primera prueba se realiza considerando una falla abrupta y para la segunda prueba se considera una falla abrupta e incipiente, ambas fallas ocurren en el actuador del robot de articulación flexible de un eslabón.

En esta simulación se considera un observador de orden reducido, donde la dimensión del vector de estados del observador  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  es  $q_0 < n$ , siendo  $n$  el número de variables de estado del sistema cuasi-LPV.

### Aplicación de la metodología para la obtención del GDO

Se considera el GDO de las ecuaciones (4.2)-(4.5) para el sistema cuasi-LPV del robot de articulación flexible (3.9). Los parámetros utilizados para el robot de articulación flexible de un eslabón son los que se muestran en la sección 3.5, cuyas matrices son

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.05 & -2.45 & 54.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21.50 & 0 & -72 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.05 & -2.45 & 54.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21.50 & 0 & -68.53 & 0 \end{bmatrix}, B = G = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{-68.5370 - \varrho(t)}{3.4630}, \quad \mu_2(\varrho(t)) = \frac{\varrho(t) - 72}{3.4630} \quad (5.1)$$

A continuación, se utiliza el algoritmo mostrado al final de la subsección 4.1.4 para la obtención de las matrices del observador.

*1. Seleccionar el orden del observador  $q_0$  y una matriz  $R \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que el rango( $\Sigma$ ) =  $n$ .*

Con el propósito de simular un GDO de orden reducido se considera  $q_0 = 3$  y una matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces el } \text{rango}(\Sigma) = 4.$$

2. Obtener las matrices  $T_1, T_2, K_1, K_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$  y  $P_1$  definidas en la sección 4.1.2.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.50 & 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}, N_{11} = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.06 & 0.50 \\ -3.34 & 9.54 & 0.50 \\ -10.06 & -20.81 & 0.50 \end{bmatrix}, N_{12} = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.06 & 0.50 \\ -3.34 & 9.54 & 0.50 \\ -9.19 & -19.94 & 0.50 \end{bmatrix},$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & -0.12 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & -0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & -0.50 \end{bmatrix}, N_{22} = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & -0.12 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & -0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & -0.50 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.12 & 0 \\ -0.12 & 0.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.37 & 0.12 & 0 \\ 0.12 & -0.37 & 0 \\ -0.25 & -0.12 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } P_1 = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.12 & 0 \\ -0.12 & 0.37 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Resolver las LMIs (4.43) y (4.46) para encontrar las matrices  $\Phi, Z$  y  $X$ .

Usando el toolbox de YALMIP, se resuelven las LMIs (4.43) y (4.46) de donde se encuentran las matrices  $\Phi, Z$  y  $X$ .

$$X = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \Phi = [3.39 \quad -6.65 \quad -6.99] \text{ y}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.63 & 0 & 0 & 0 & 2.63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Encontrar una matriz  $\mathcal{R} > 0$  tal que  $\vartheta_i$  en la ecuación (4.49) sea positiva definida.

Considerando  $\mathcal{R} = I_6 \times 0.01$  de tal forma que  $\vartheta_i$  en la ecuación (4.49) sea positiva definida.

5. Encontrar matrices arbitrarias  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{Z}$  tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  para resolver la ecuación (4.48), entonces obtener  $\mathbb{Y}_i$  usando (4.47), el cual contiene las matrices  $Y_{1i}$ ,  $Y_{2i}$ ,  $H_i$  y  $L_i$  que serán usadas en el siguiente paso.

Considerando

$\mathcal{Z} = \text{ceros}_{6,9}$  y  $\mathcal{L} = \text{unos}_{6,6} \times 0.1$  tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$ , entonces de (4.47) se obtiene

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix} 416.30 & 2.03 & 0 & -416.30 & -2.03 & -418.33 & 178.25 & -19.80 & -22.18 \\ 8.50 & 12.91 & 0 & -8.50 & -12.91 & -21.42 & -11.62 & 88.85 & -13 \\ -34.31 & -42.09 & 0 & 34.31 & 42.09 & 76.40 & 14.86 & 15.84 & 217.79 \\ -198.07 & 0 & 0 & 198.07 & 0 & 198.07 & -198.07 & 0 & 0 \\ 10.04 & 0.96 & 0 & -10.04 & -0.96 & -11 & -9.85 & -109.31 & -11.03 \\ 27.23 & 22.06 & 0 & -27.23 & -22.23 & -49.29 & -17.34 & -17.82 & -219.02 \end{bmatrix} y$$

$$\mathbb{Y}_2 = \begin{bmatrix} 416.30 & 1.95 & 0 & -416.28 & -1.95 & -418.23 & 178.25 & -19.80 & -22.06 \\ 8.49 & 12.86 & 0 & -8.49 & -12.86 & -21.36 & -11.62 & 88.85 & -12.94 \\ -32.58 & -40.31 & 0 & 32.58 & 42.31 & 72.71 & 14.86 & 15.84 & 217.70 \\ -198.07 & 0 & 0 & 198.07 & 0 & 198.07 & -198.07 & 0 & 0 \\ 10.03 & 0.92 & 0 & -10.03 & -0.92 & -10.95 & -9.85 & -109.31 & -10.97 \\ 26.35 & 21.13 & 0 & -26.35 & -21.13 & -47.49 & -17.34 & -17.82 & -218.92 \end{bmatrix}.$$

6. Finalmente se obtienen las matrices el observador  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $J$ ,  $S_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $P$ ,  $T$  y  $Q$ .

$$N_1 = \begin{bmatrix} -416.49 & -1.97 & 0.5 \\ -11.73 & -3.23 & 0 \\ 24.62 & 21.65 & -1 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -416.46 & -1.89 & 0.5 \\ -11.71 & -3.19 & 0 \\ 23.76 & 20.74 & -1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 178.25 & -19.80 & -22.18 \\ -11.62 & 88.85 & -13.00 \\ 14.86 & 15.84 & 217.79 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 178.25 & -19.80 & -22.06 \\ -11.62 & 88.85 & -12.94 \\ 14.86 & 15.84 & 217.70 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 208.24 & 1.48 & 208.74 \\ -21.16 & 0.38 & 32.89 \\ 9.19 & -10.82 & -85.31 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 208.23 & 1.44 & 208.73 \\ -21.16 & 0.36 & 32.88 \\ 9.62 & -10.37 & -81.41 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 198.07 & 0 & 0 \\ -10.04 & -0.96 & 0 \\ -27.23 & 22.06 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 198.07 & 0 & 0 \\ -10.03 & -0.92 & 0 \\ -26.35 & 21.13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -198.07 & 0 & 0 \\ -9.85 & -109.31 & -11.03 \\ -17.34 & -17.82 & -219.02 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -198.07 & 0 & 0 \\ -9.85 & -109.31 & -11.03 \\ -17.34 & -17.82 & -219.02 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -99.03 & 0 & -99.03 \\ 5.02 & 0.48 & 5.02 \\ 13.61 & 11.03 & 13.61 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -99.03 & 0 & -99.03 \\ 5.01 & 0.46 & 5.01 \\ 13.17 & 10.56 & 13.17 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.12 & 0 \\ -0.12 & 0.37 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.06 & -0.18 \\ 0.06 & 0.81 & 0.06 \\ -0.12 & -0.12 & 0.87 \\ 0.12 & 0.12 & 1.12 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para realizar la comparación del GDO con el PO y el PIO, se diseñaron estos observadores siguiendo el mismo algoritmo que para el GDO.

### Obtención de las matrices para el PO

Considerando  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0.79 & 0.25 & 0.06 & 0.71 & 0.39 & 0.81 \\ 0.57 & 0.75 & 0.76 & 0.64 & 0.81 & 0.78 \\ 0.44 & 0.22 & 0.67 & 0.41 & 0.31 & 0.85 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{L} = unos_{3,2} \times 0.1$   
y

$\mathcal{R} = I_3 \times 0.01$  se obtienen las siguientes matrices del PO

$$N_1 = \begin{bmatrix} -93.76 & 0.31 & -0.5 \\ 62.33 & -1.27 & 0 \\ -1.49 & 0.21 & -0.5 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -93.80 & 0.28 & 0.5 \\ 62.25 & -1.32 & 0 \\ -1.48 & -0.20 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 46.88 & 0.34 & 47.13 \\ -58.19 & -0.59 & -4.14 \\ 22.25 & 0.10 & -71.50 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 46.90 & 0.35 & 47.15 \\ -58.15 & -0.56 & -4.10 \\ 22.24 & 0.10 & -68.04 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.12 & 0 \\ -0.12 & 0.37 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49.18 & 0.70 & 0.86 \\ 0 & 0 & 1 \\ 17.84 & -0.10 & 0.37 \end{bmatrix} \text{ y } \Phi = [164.05 \quad 54.47 \quad -1.85].$$

### Obtención de las matrices para el PIO

Considerando  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.68 & 0.13 & 0.93 & 0.98 & 0.68 & 0.55 & 0.35 & 0.21 \\ 0.80 & 0.78 & 0.21 & 0.35 & 0.76 & 0.52 & 0.58 & 0.97 & 0.12 \\ 0.98 & 0.53 & 0.18 & 0.41 & 0.33 & 0.41 & 0.51 & 0.34 & 0.30 \\ 0.06 & 0.88 & 0.04 & 0.98 & 0.66 & 0.60 & 0.08 & 0.88 & 0.72 \\ 0.93 & 0.89 & 0.10 & 0.94 & 0.24 & 0.75 & 0.71 & 0.45 & 0.78 \\ 0.01 & 0.62 & 0.61 & 0.67 & 0.29 & 0.58 & 0.99 & 0.41 & 0.69 \end{bmatrix}$ ,

$\mathcal{L} = unos_{6,5} \times 0.1$  y  $\mathcal{R} = I_6 \times 0.1$  se obtienen las siguientes matrices del PIO

$$\begin{aligned}
N_1 &= \begin{bmatrix} -2.42 & 0.24 & -2.39 \\ -0.09 & -0.33 & 0.09 \\ -1.26 & 0.24 & -1.28 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -2.42 & 0.24 & -2.39 \\ -0.09 & -0.33 & 0.09 \\ -1.26 & 0.24 & -1.28 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 23.55 & 0.37 & -89.83 \\ -26.52 & 0.41 & 26.81 \\ 22.41 & 0.37 & -81.37 \end{bmatrix}, \\
F_2 &= \begin{bmatrix} 23.55 & 0.37 & -86.37 \\ -26.81 & 0.41 & 26.81 \\ 22.41 & 0.37 & -77.90 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -4.82 & 1 \\ 1.47 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & -2.54 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.73 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.50 & 0 & 3.68 \end{bmatrix}, \Phi = [0 \quad -25.95 \quad 0], \\
H_1 &= \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 \\ 0.01 & 5.31 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix} \text{ y } H_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 \\ 0.01 & 2.45 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### 5.1.1. Primer escenario de fallas.

Para la simulación, se supone que existe una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, lo cual genera un aumento abrupto en el par de entrada del actuador, ocurrido en el segundo 20 y desapareciendo posteriormente en el segundo 35 como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.2Nm & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema no lineal fueron:  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.00001s$ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nms/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres son consideradas como desgaste en los materiales. Cabe mencionar que las incertidumbres son añadidas únicamente para la simulación y no son contempladas en el diseño del observador, esto para evaluar el desempeño de los observadores ante incertidumbres paramétricas

En esta simulación suponemos que el parámetro  $\varrho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.2.

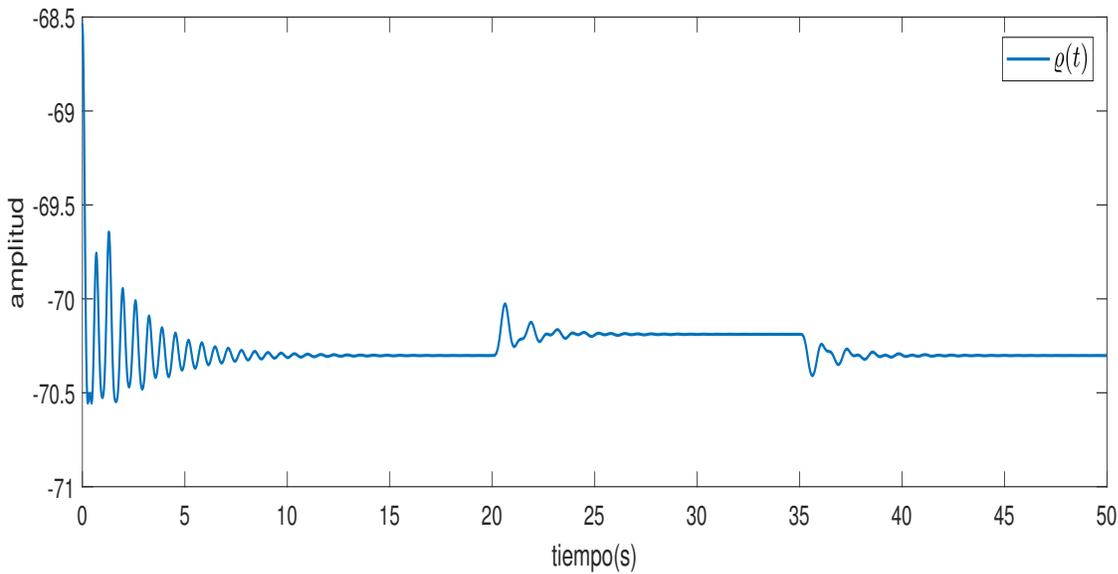


Fig. 5.2. Simulación 2. Prueba 1. Variación de  $\rho(t)$ .

Utilizando las funciones de ponderación de la ecuación (5.1) se obtuvo la gráfica de la Fig.5.3. En donde se logra observar la interpolación de las funciones de ponderación, también se puede notar que la amplitud varía entre 0 y 1, al igual que la suma de ambas funciones a lo largo de la simulación es la unidad.

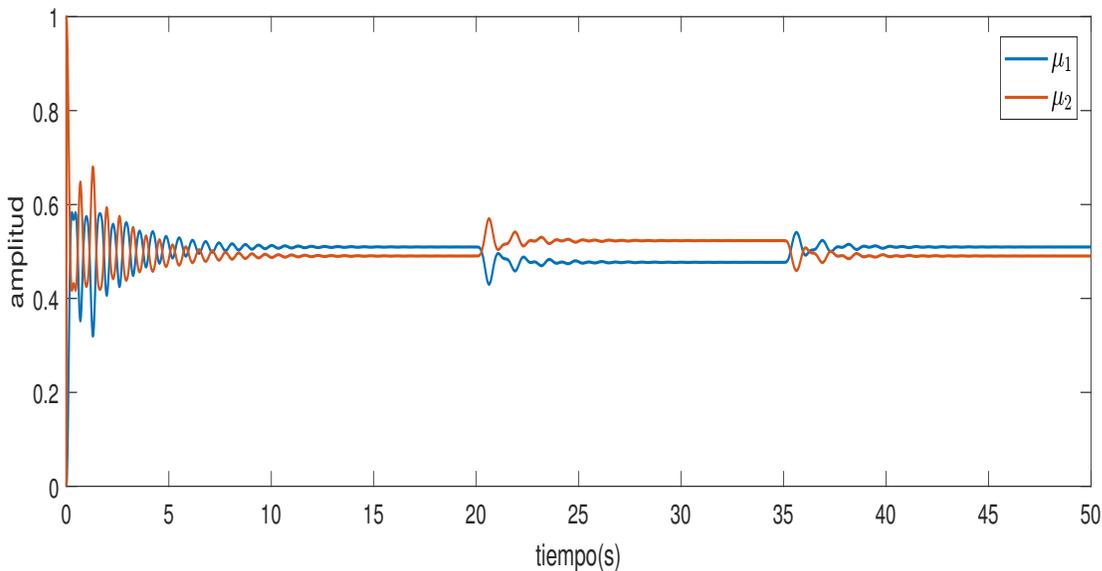
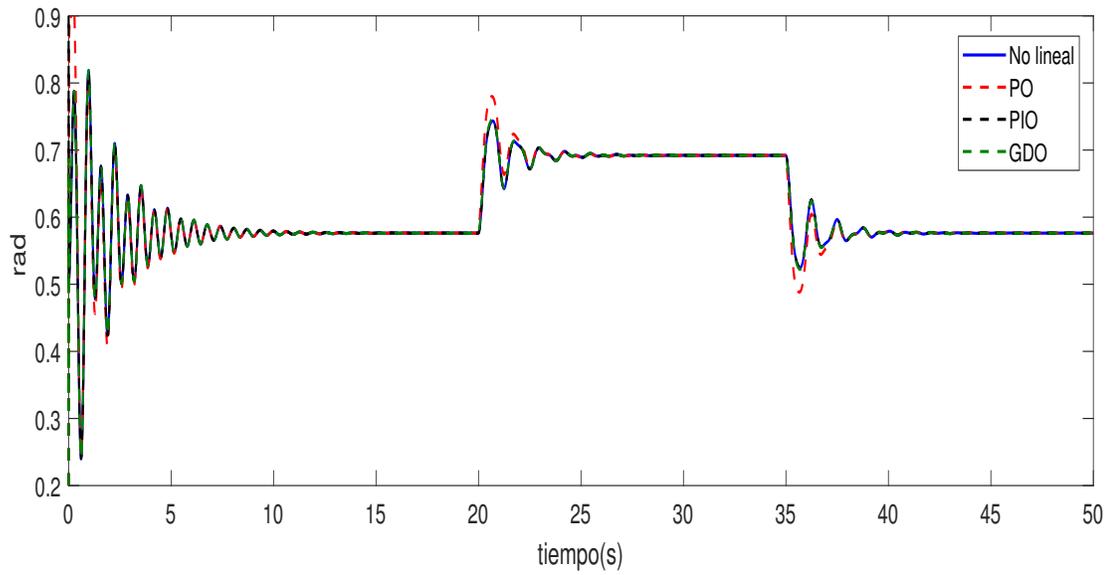
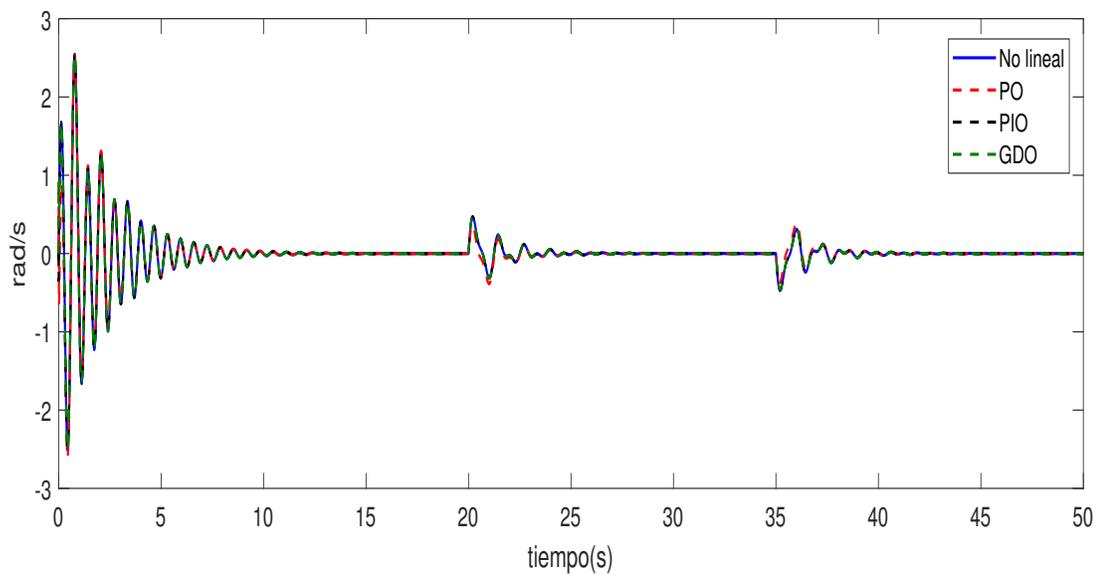
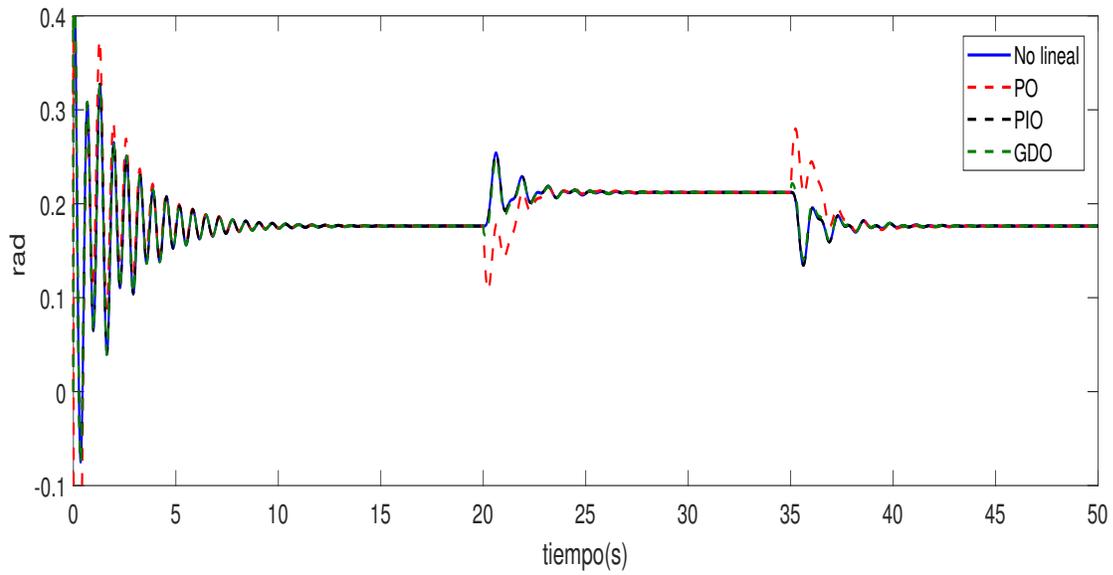
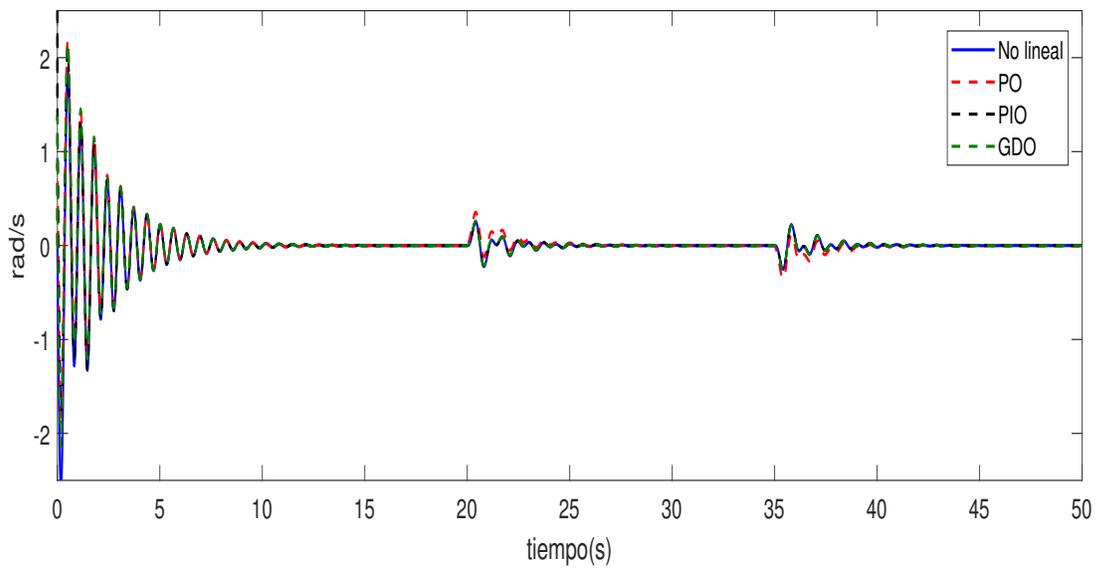


Fig. 5.3. Simulación 2. Prueba 1. Funciones de ponderación.

Los resultados de la simulación se muestran en las Fig. 5.4 - 5.7, en las cuales se comparan los estados del sistema no lineal y los estados estimados por el GDO.

Fig. 5.4. Simulación 2. Prueba 1. Posición del motor ( $x_1$ ).Fig. 5.5. Simulación 2. Prueba 1. Velocidad del motor ( $x_2$ ).

Fig. 5.6. Simulación 2. Prueba 1. Posición del eslabón ( $x_3$ )Fig. 5.7. Simulación 2. Prueba 1. Velocidad del eslabón ( $x_4$ )

Se puede observar en la Fig. 5.8 que el GDO logra estimar la falla abrupta ocurrida en actuador en el segundo 20, y logra regresar a su valor sin falla en el segundo 35 con un tiempo de convergencia de la estimación de la falla alrededor de 5 segundos.

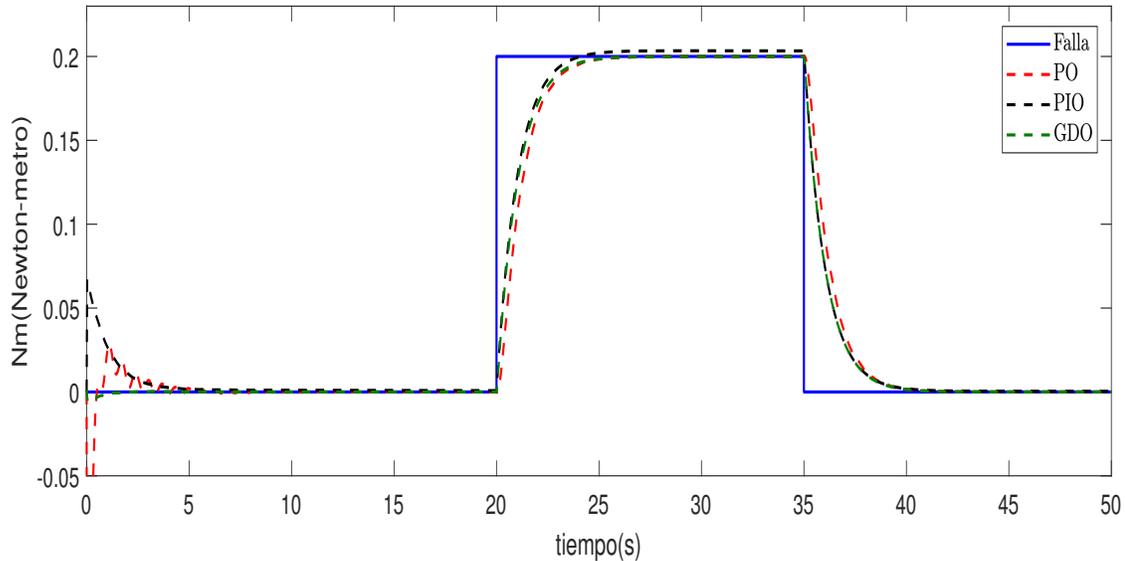


Fig. 5.8. Simulación 2. Prueba 1. Estimación de la falla en actuador.

### Índice de desempeño para el primer escenario de falla (GDO)

En la tabla 5.1 se muestra el índice de desempeño IAE para analizar el GDO y sus casos particulares.

Se puede notar en la tabla, que el PO logra estimar los estados y la falla. Sin embargo, es el más afectado por la incertidumbre paramétrica, ya que al no contener grados de libertad adicionales en su estructura su desempeño se ve afectado considerablemente. El PIO mantiene un buen desempeño para la estimación de estados y fallas, manteniendo cierta robustez del GDO. El GDO tiene un desempeño adecuado para la estimación de estados y fallas. De igual manera el PIO y el PO logran mantener cierta robustez derivada del GDO ya que han sido diseñados siguiendo la metodología del GDO. Aunque aparentemente el PIO tiene mejor desempeño para estimar los estados del robot de articulación flexible de un eslabón, para el caso de la estimación de la falla el GDO logra un mejor desempeño que sus caso particulares.

Tabla 5.1. Índice de desempeño IAE para el primer escenario de fallas.

Estados y falla	GDO	PIO	PO
$x_1(t)$	3364.4	462.06	85697
$x_2(t)$	9708.7	6724.5	$2.6182 \times 10^5$
$x_3(t)$	5520.9	385.41	$1.7581 \times 10^5$
$x_4(t)$	$2.576 \times 10^5$	$2.1687 \times 10^5$	$4.648 \times 10^5$
$f(t)$	91430	$1.3376 \times 10^5$	$1.4747 \times 10^5$

### 5.1.2. Segundo escenario de fallas.

En esta simulación se considera una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, lo cual genera un aumento abrupto e incipiente en el par de entrada del actuador, ocurrido en el segundo 20 y desapareciendo posteriormente en el segundo 35 como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.16 + t \text{ Nm} & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$ (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema no lineal fueron:  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.00001s$ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nms/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En esta simulación se supone que el parámetro  $\varrho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.9.

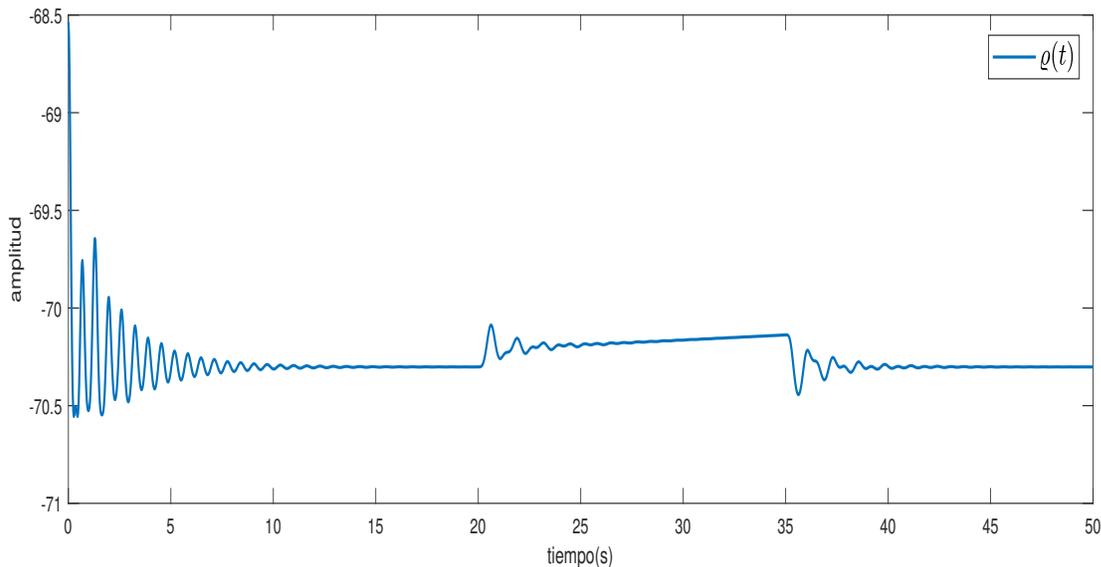


Fig. 5.9. Simulación 2. Prueba 2. Variación de  $\varrho(t)$ .

Utilizando las funciones de ponderación de la ecuación (5.1) se obtuvo la gráfica de la Fig.5.10. En donde la interpolación de las funciones de ponderación respetan las condiciones de variación

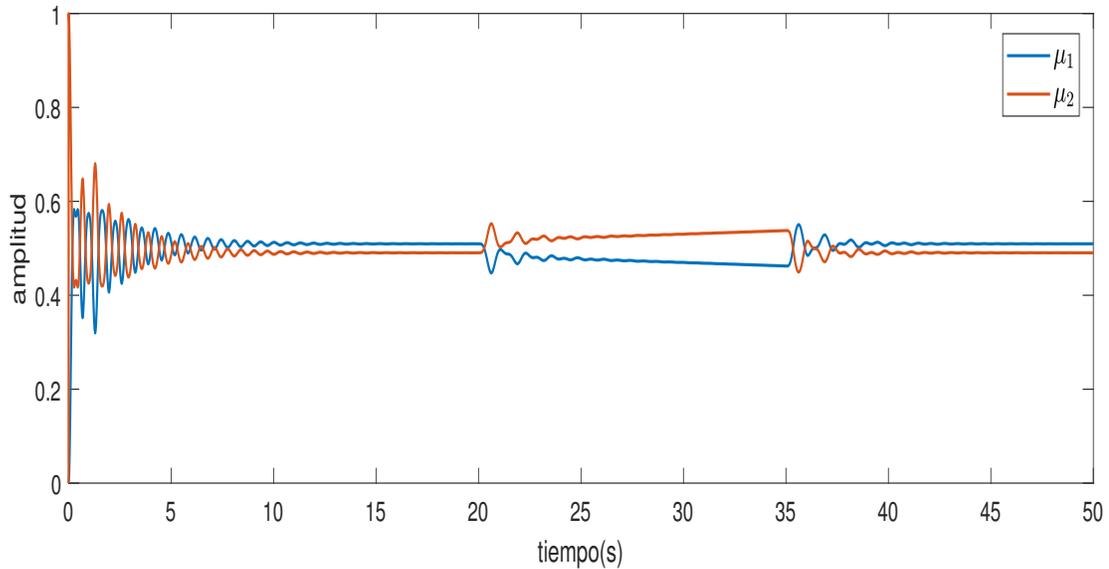


Fig. 5.10. Simulación 2. Prueba 2. Funciones de ponderación.

Los resultados de la simulación se muestran en las Fig. 5.11 - 5.14, en las cuales se comparan los estados del sistema no lineal y los estados estimados por el GDO.

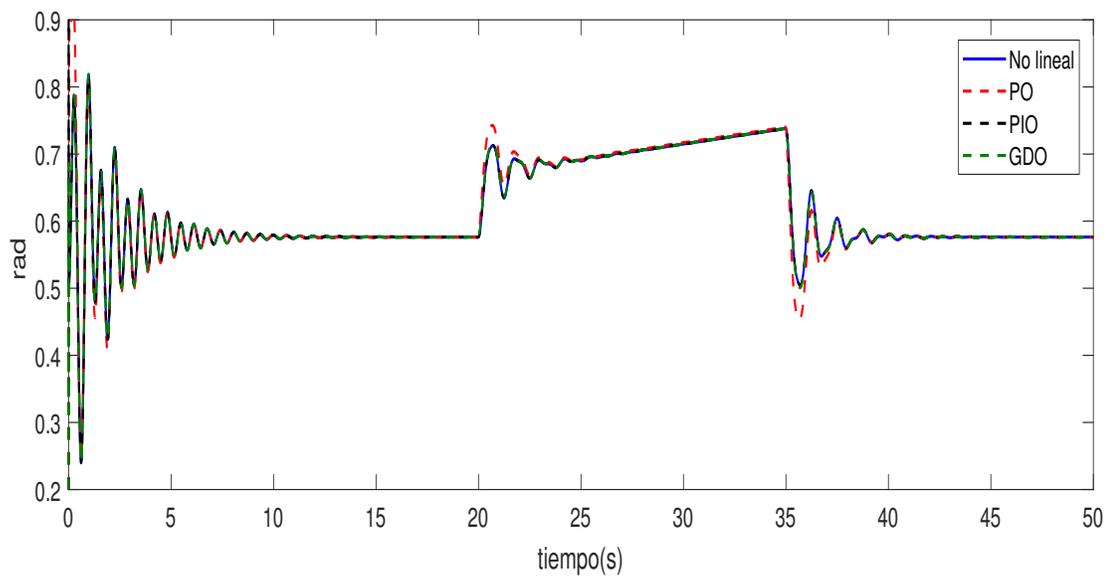


Fig. 5.11. Simulación 2. Prueba 2. Posición del motor ( $x_1$ ).

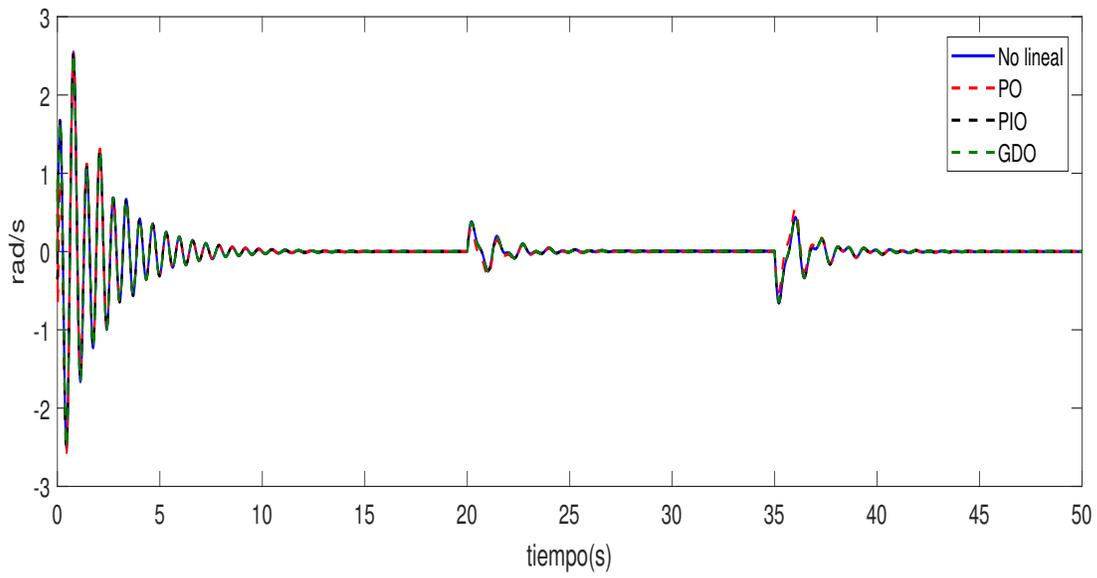


Fig. 5.12. Simulación 2. Prueba 2. Velocidad del motor ( $x_2$ ).

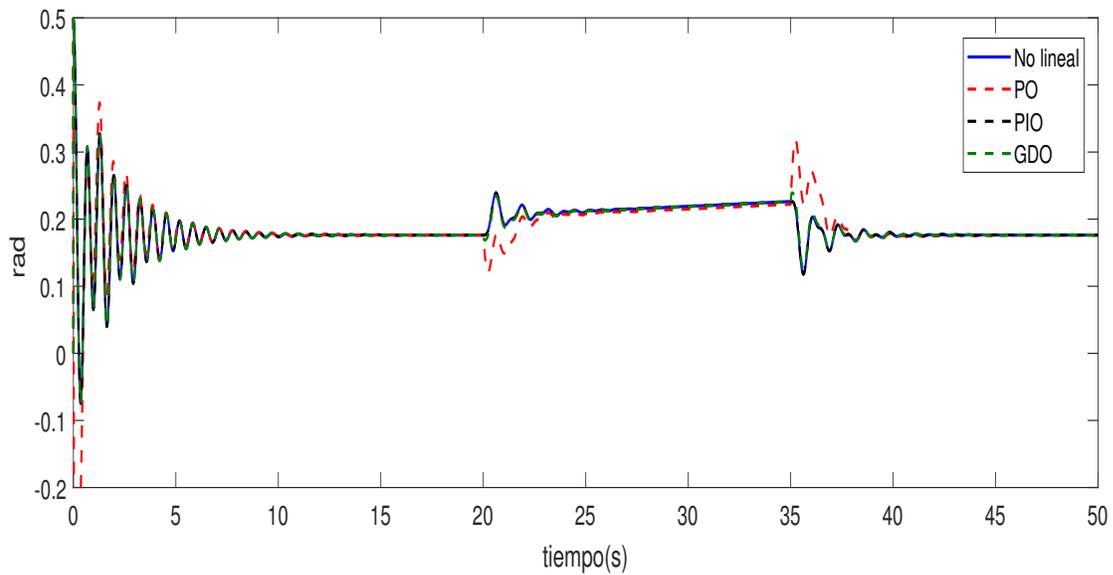


Fig. 5.13. Simulación 2. Prueba 2. Posición del eslabón ( $x_3$ ).

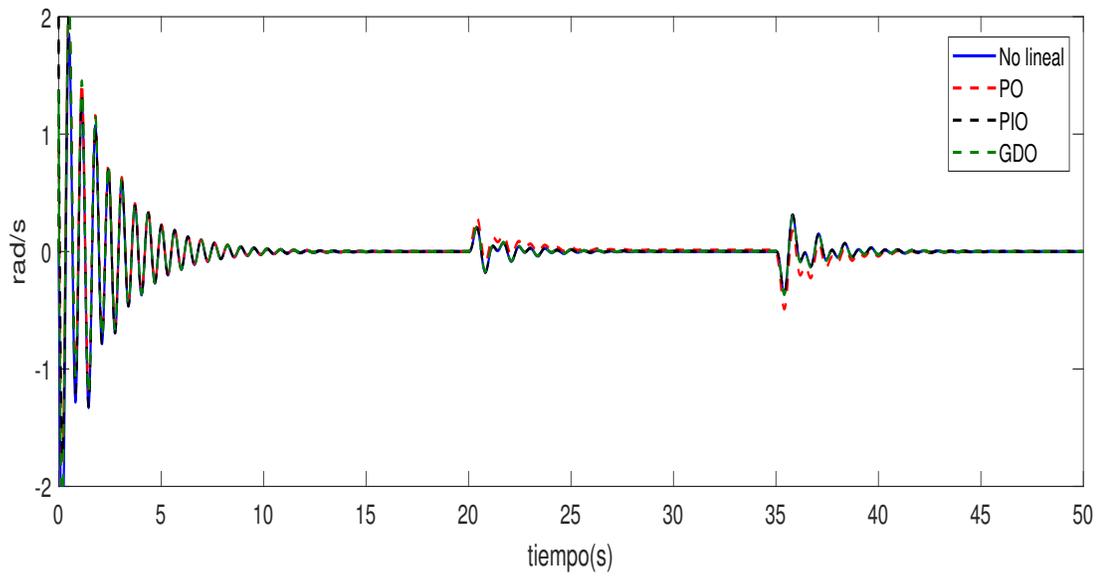


Fig. 5.14. Simulación 2. Prueba 2. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ).

Se puede observar en la Fig. 5.15 que el GDO logra estimar la falla abrupta e incipiente ocurrida en actuador en el segundo 20, y logra regresar a su valor sin falla en el segundo 35 considerando un tiempo de convergencia de la estimación de la falla alrededor de 5 segundos.

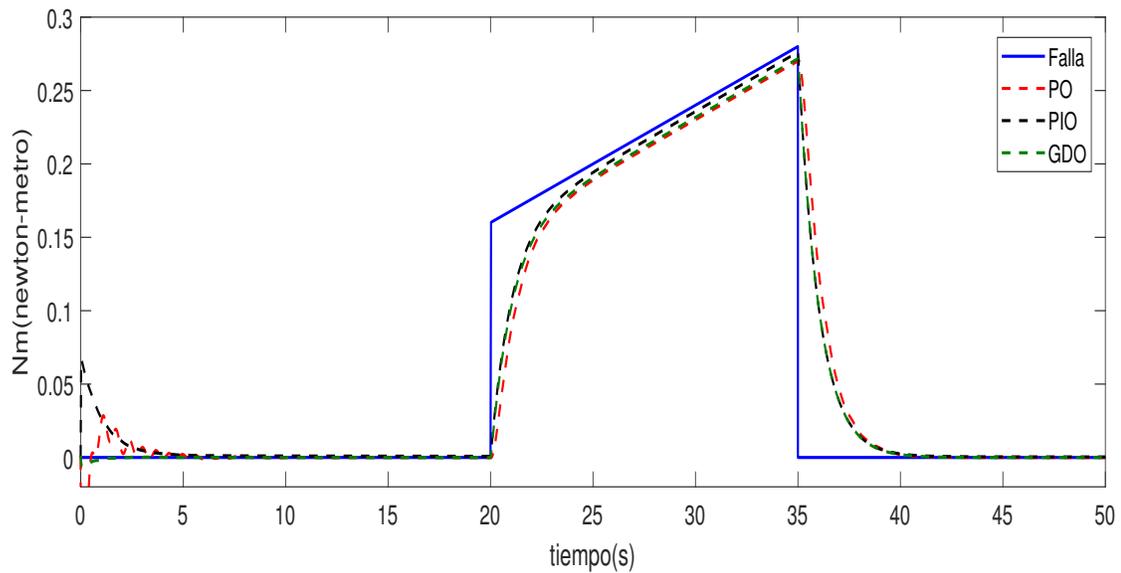


Fig. 5.15. Simulación 2. Prueba 2. Estimación de la falla en actuador.

## Índice de desempeño para el segundo escenario de falla (GDO)

En la tabla 5.2 se puede notar que los observadores logran tener un buen desempeño a pesar de las incertidumbres paramétricas y la falla ocurrida en el actuador. El PO mantiene un buen desempeño y conserva cierta robustez del GDO. El PIO logra estimar correctamente los estados, Sin embargo el GDO permite estimar la falla con un desempeño correcto.

Tabla 5.2. Índices de desempeño IAE para el segundo escenario de fallas.

Estados y falla	GDO	PIO	PO
$x_1(t)$	3974.1	462.81	91113
$x_2(t)$	11550	7625	$2.7804 \times 10^5$
$x_3(t)$	6754.4	385.5	$1.8661 \times 10^5$
$x_4(t)$	$2.5934 \times 10^5$	$4.919 \times 10^5$	$8.7718 \times 10^6$
$f(t)$	$1.1524 \times 10^5$	$1.4351 \times 10^5$	$1.7596 \times 10^5$

## 5.2. Simulación 3. Observador dinámico generalizado para sistemas LPV con fallas en actuador (orden completo)

**Objetivo.** El objetivo de esta simulación es mostrar que el GDO también puede ser configurado de orden completo y que el desempeño del GDO de orden completo es similar al de orden reducido, es por ello que la comparación de los casos particulares no es mostrada.

### Aplicación de la metodología para la obtención del GDO

Se considera el GDO de las ecuaciones (4.2)-(4.5) para el sistema cuasi-LPV del robot de articulación flexible (3.9). Los parámetros utilizados para el robot de articulación flexible de un eslabón son los que se muestran en la sección 3.5, cuyas matrices son

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -70 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.64 & -2.24 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.35 & 0 & -66.30 & 0 \end{bmatrix}, B = G = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como en la ecuación (5.1). Se utiliza el algoritmo mostrado al final de la subsección 4.2.4 para la obtención de las matrices del GDO.

## Obtención de las matrices de un GDO de orden completo

1. Con el propósito de simular un GDO de orden completo se considera que el vector  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  tiene una dimensión  $q_0 = 4$  y una matriz  $R = I_4$ , entonces el rango( $\Sigma$ ) = 4.

2. Se obtienen las matrices  $T_1, T_2, K_1, K_2, N_{1i}, N_{2i}, N_3$  y  $P_1$  definidas en la sección 4.1.2.

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.50 & 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}, N_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -13.51 & -0.61 & 13.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 10.72 & 0 & -36 & 0 \end{bmatrix}, \\
 N_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -13.51 & -0.61 & 13.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 10.72 & 0 & -34.26 & 0 \end{bmatrix}, N_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.50 \end{bmatrix}, \\
 N_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.50 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } P_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Usando el toolbox de YALMIP, se resuelven las LMIs (4.43) y (4.46) de donde se encuentran las matrices  $\Phi, Z$  y  $X$ .

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -549.62 & 0 & 0 & 0 & -551.65 \end{bmatrix}, \Phi = [0 \quad -8.99 \quad 0] \text{ y}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 \\ 0.47 & 0 & 0 & 0 & 1.43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 1.43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 1.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Considerando  $\mathcal{R} = I_8 \times 0.01$  de tal forma que  $\vartheta_i$  en la ecuación (4.49) sea positiva definida.

5. Encontrar matrices arbitrarias  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{Z}$  tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  para resolver la ecuación (4.48), entonces obtener  $\mathbb{Y}_i$  usando (4.47).

Considerando

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.95 & 0.42 & 0.67 & 0.27 & 0.43 & 0.70 & 0.95 & 0.89 & 0.81 & 0.35 \\ 0.90 & 0.96 & 0.91 & 0.75 & 0.04 & 0.38 & 0.75 & 0.34 & 0.95 & 0.24 & 0.83 \\ 0.12 & 0.15 & 0.79 & 0.74 & 0.09 & 0.76 & 0.27 & 0.58 & 0.54 & 0.92 & 0.58 \\ 0.91 & 0.97 & 0.95 & 0.39 & 0.82 & 0.79 & 0.67 & 0.22 & 0.13 & 0.35 & 0.54 \\ 0.63 & 0.95 & 0.65 & 0.65 & 0.69 & 0.18 & 0.65 & 0.75 & 0.14 & 0.19 & 0.91 \\ 0.09 & 0.48 & 0.03 & 0.17 & 0.31 & 0.48 & 0.16 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.28 \\ 0.27 & 0.80 & 0.84 & 0.70 & 0.95 & 0.44 & 0.11 & 0.50 & 0.84 & 0.61 & 0.75 \\ 0.54 & 0.14 & 0.93 & 0.03 & 0.03 & 0.64 & 0.49 & 0.69 & 0.25 & 0.47 & 0.75 \end{bmatrix}$$

y  $\mathcal{L} = \text{unos}_{8,7} \times 0.1$  tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$ , entonces de (4.47) se obtiene

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix} 334.14 & 1.72 & 23.48 & 1.43 & -332.11 & 1.45 & -21.31 & 83.42 & -20.85 & -20.85 & -22.03 \\ 110.36 & 160.63 & 223.94 & 179.56 & 115.02 & 157.74 & 172.08 & -11.49 & 92.71 & -11.50 & -12.15 \\ 20.07 & 0.93 & 336.32 & 1.58 & -20.65 & 0.65 & -333.99 & -20.82 & -20.85 & 83.40 & -22.03 \\ 11.20 & 2.30 & -58.82 & 1.19 & -6.37 & 2.39 & 62.45 & 7.34 & 7.35 & 6.61 & 113.53 \\ -104.13 & -0.13 & 0.09 & -0.02 & 104.37 & -0.13 & 0.09 & -104.25 & 0 & 0 & 0 \\ 9.77 & -0.13 & 10.16 & -0.60 & -10.32 & -0.25 & -11.68 & -10.21 & -113.45 & -10.22 & -10.80 \\ 0.52 & 0.16 & -104.30 & -0.03 & 0.52 & 0.16 & 104.20 & 0 & 0 & -104.25 & 0 \\ 3.25 & -0.44 & 27.56 & -0.37 & -4.46 & -0.57 & -27.78 & -9.39 & -9.40 & -9.15 & -114.69 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_2 = \begin{bmatrix} 334.14 & 1.72 & 23.48 & 1.43 & -332.11 & 1.45 & -21.31 & 83.42 & -20.85 & -20.85 & -22.03 \\ 110.36 & 160.63 & 223.94 & 179.56 & 115.02 & 157.74 & 172.08 & -11.49 & 92.71 & -11.50 & -12.15 \\ 20.07 & 0.93 & 336.32 & 1.58 & -20.65 & 0.65 & -333.99 & -20.82 & -20.85 & 83.40 & -22.03 \\ 11.20 & 2.30 & -58.82 & 1.19 & -6.37 & 2.39 & 62.45 & 7.34 & 7.35 & 6.61 & 113.53 \\ -104.13 & -0.13 & 0.09 & -0.02 & 104.37 & -0.13 & 0.09 & -104.25 & 0 & 0 & 0 \\ 9.77 & -0.13 & 10.16 & -0.60 & -10.32 & -0.25 & -11.68 & -10.21 & -113.45 & -10.22 & -10.80 \\ 0.52 & 0.16 & -104.30 & -0.03 & 0.52 & 0.16 & 104.20 & 0 & 0 & -104.25 & 0 \\ 3.25 & -0.44 & 27.56 & -0.37 & -4.46 & -0.57 & -27.78 & -9.39 & -9.40 & -9.15 & -114.69 \end{bmatrix}.$$

6. Se obtienen las matrices del observador  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $J$ ,  $S_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $P$ ,  $T$  y  $Q$ .

$$N_1 = \begin{bmatrix} -333.13 & 0.11 & -22.39 & 0 \\ -11.18 & -2.06 & -12.41 & 0 \\ -20.36 & -0.13 & -335.15 & 0.50 \\ 1.96 & 0.04 & 24.63 & -1.01 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -333.13 & 0.11 & -22.39 & 0 \\ -11.17 & -2.06 & -12.41 & 0 \\ -20.36 & -0.13 & -335.09 & 0.50 \\ 1.96 & 0.04 & 23.77 & -1.01 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 83.42 & -20.85 & -20.85 & -22.03 \\ -11.49 & 92.71 & -11.50 & -12.15 \\ -20.82 & -20.85 & 83.40 & -22.03 \\ 7.34 & 7.35 & 6.61 & 113.53 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 83.42 & -20.85 & -20.85 & -21.95 \\ -11.49 & 92.71 & -11.50 & -12.15 \\ -20.82 & -20.85 & 83.40 & -21.95 \\ 7.34 & 7.35 & 6.61 & 113.50 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 166.56 & 0.44 & 11.19 \\ -21.43 & -0.19 & 33.23 \\ 10.18 & 0.06 & 168.08 \\ 20.52 & -0.02 & -85.34 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 166.56 & 0.44 & 11.16 \\ -21.43 & -0.19 & 33.21 \\ 10.18 & 0.06 & 168.08 \\ 20.52 & -0.02 & -85.34 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 104.22 & 0 & 0 & 0 \\ -10.05 & -0.06 & -10.92 & 0 \\ 0 & 0 & 104.25 & 0 \\ -3.86 & -0.06 & -27.67 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 104.22 & 0 & 0 & 0 \\ -10.05 & -0.06 & -10.89 & 0 \\ 0 & 0 & 104.25 & 0 \\ -3.86 & -0.06 & -26.79 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -104.25 & 0 & 0 & 0 \\ -10.21 & -113.45 & -10.22 & -10.80 \\ 0 & 0 & -104.25 & 0 \\ -9.39 & -9.40 & -9.15 & -114.69 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -104.25 & 0 & 0 & 0 \\ -10.21 & -113.45 & -10.22 & -10.76 \\ 0 & 0 & -104.25 & 0 \\ -9.39 & -9.40 & -9.15 & -114.65 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -52.12 & 0 & 0 \\ 5.02 & 0.03 & 5.46 \\ 0 & 0 & -52.12 \\ 1.93 & 0.03 & 13.83 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -52.12 & 0 & 0 \\ 5.02 & 0.03 & 5.46 \\ 0 & 0 & -52.12 \\ 1.93 & 0.03 & 13.39 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 10.81 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1.01 \end{bmatrix} y$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 5.2.1. Escenario de fallas.

Para esta simulación, se considera una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor, lo cual genera un aumento abrupto en el par de entrada del actuador, ocurrido en el segundo 20 y desapareciendo posteriormente en el segundo 35 como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.2Nm & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . El tiempo de muestreo es  $T_m = 0.00001s$ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nm/s/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En esta simulación el parámetro  $\varrho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.16.

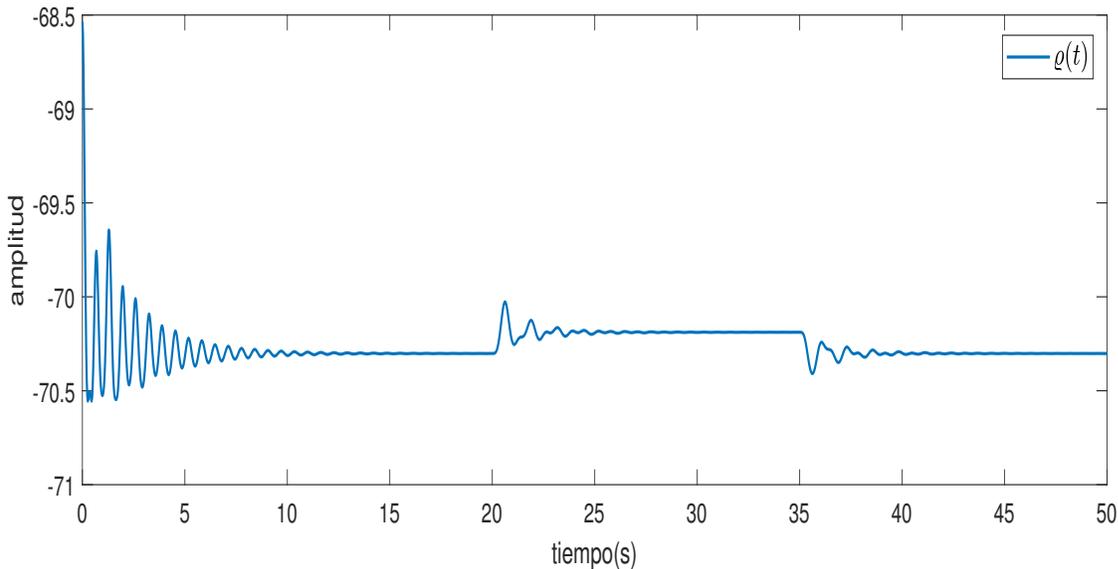


Fig. 5.16. Simulación 3. Variación de  $\varrho(t)$ .

En la Fig.5.17 se logra apreciar la interpolación de las funciones de ponderación, que cumplen con las condiciones de variación.

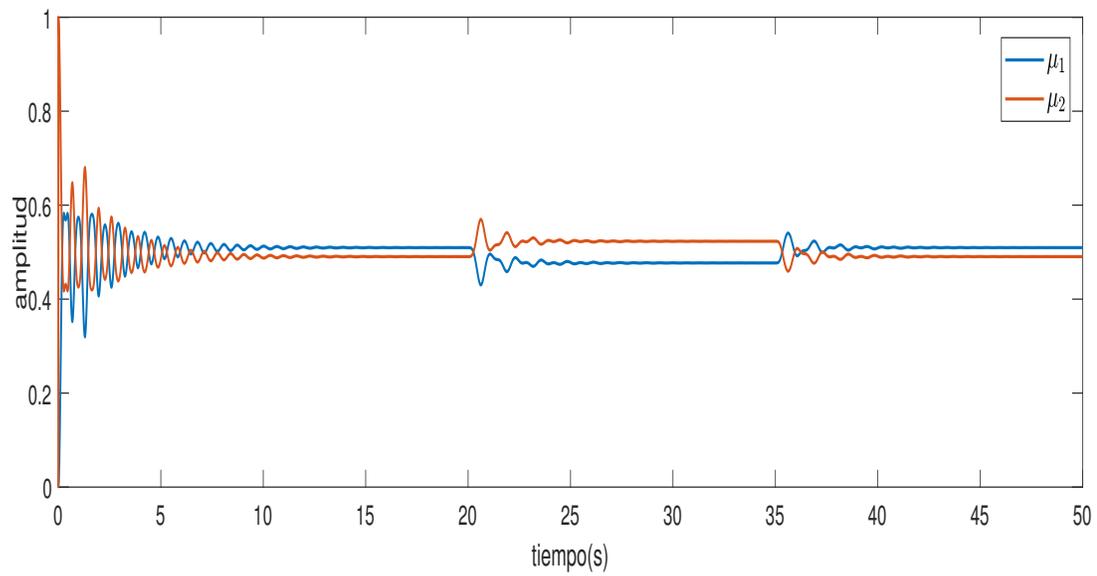
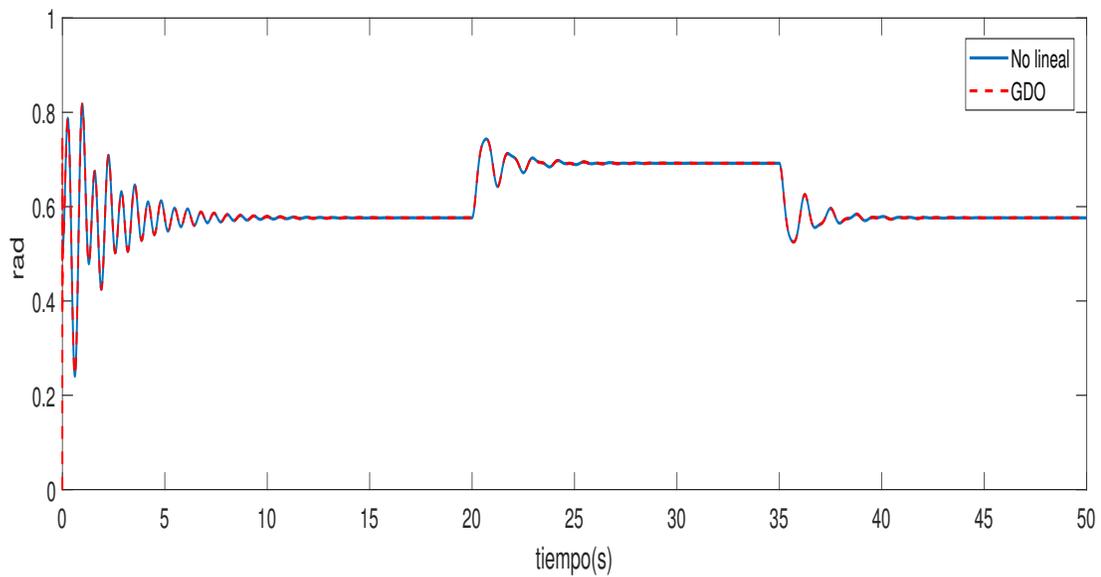
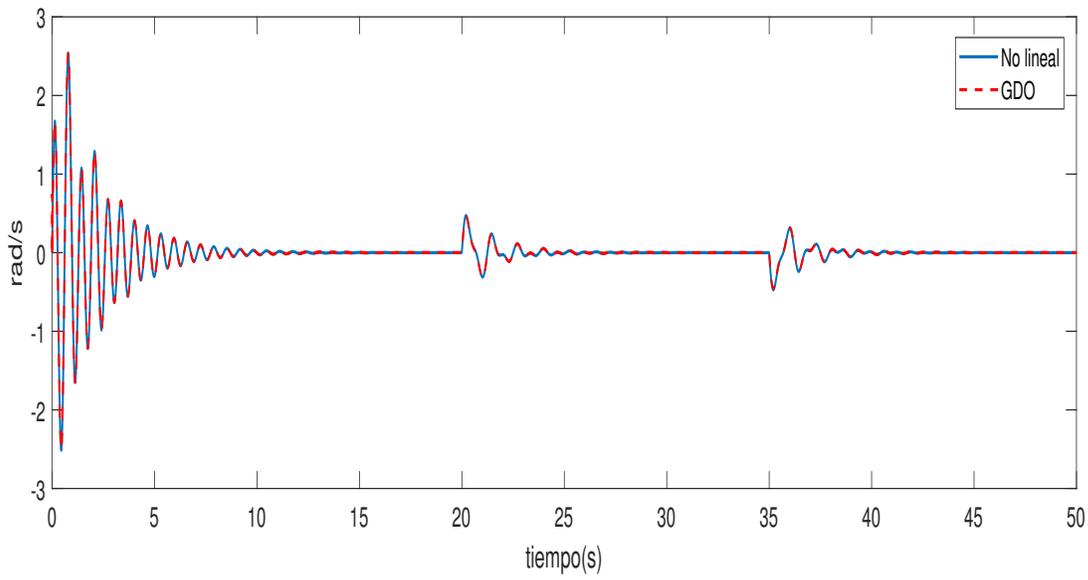
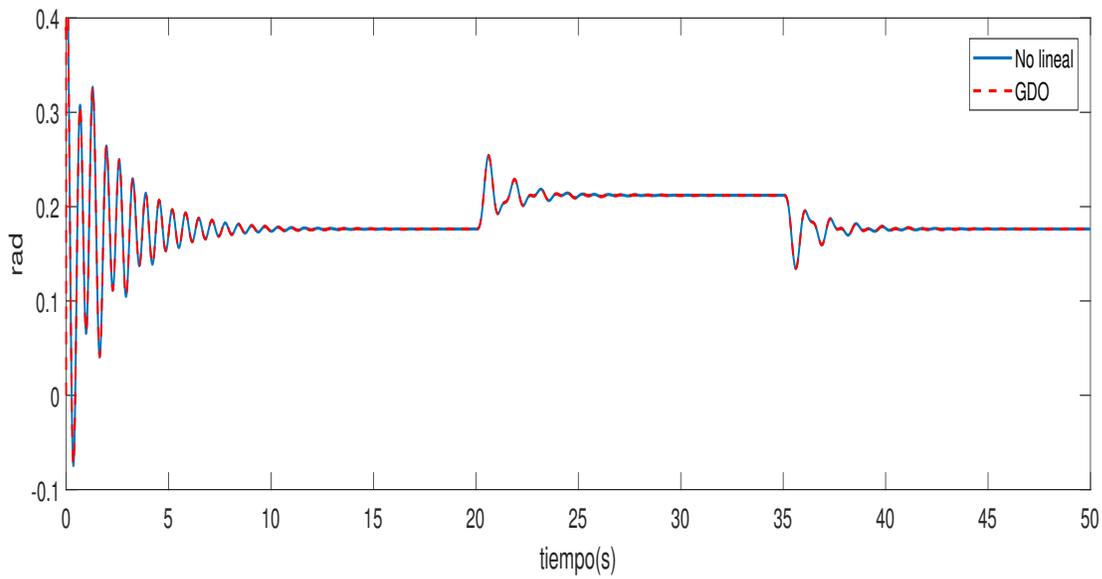


Fig. 5.17. Simulación 3. Funciones de ponderación.

Los resultados de la simulación se muestran en las Fig. 5.18 - 5.21, en donde se aprecia la comparación del modelo no lineal y los estados del observador de orden completo. Se puede notar que los estados del sistema no lineal son estimados de manera adecuada por este observador.

Fig. 5.18. Simulación 3. Posición del motor ( $x_1$ ).

Fig. 5.19. Simulación 3. Velocidad del motor ( $x_2$ ).Fig. 5.20. Simulación 3. Posición del eslabón ( $x_3$ ).

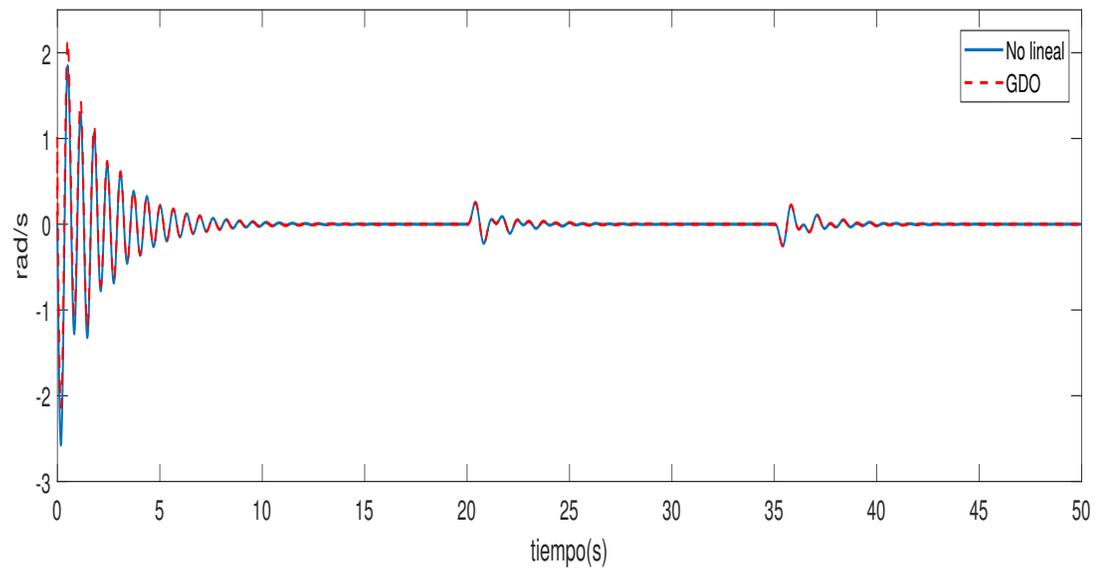


Fig. 5.21. Simulación 3. Velocidad del eslabón ( $x_4$ ).

Se puede observar en la Fig. 5.22 que el GDO de orden completo logra estimar la falla abrupta ocurrida en el actuador manteniendo un tiempo de convergencia usual en este tipo de observadores. Con lo que se comprueba que el GDO puede ser diseñado orden completo y mantener un desempeño adecuado para la estimación de variables de estado y fallas en actuador.

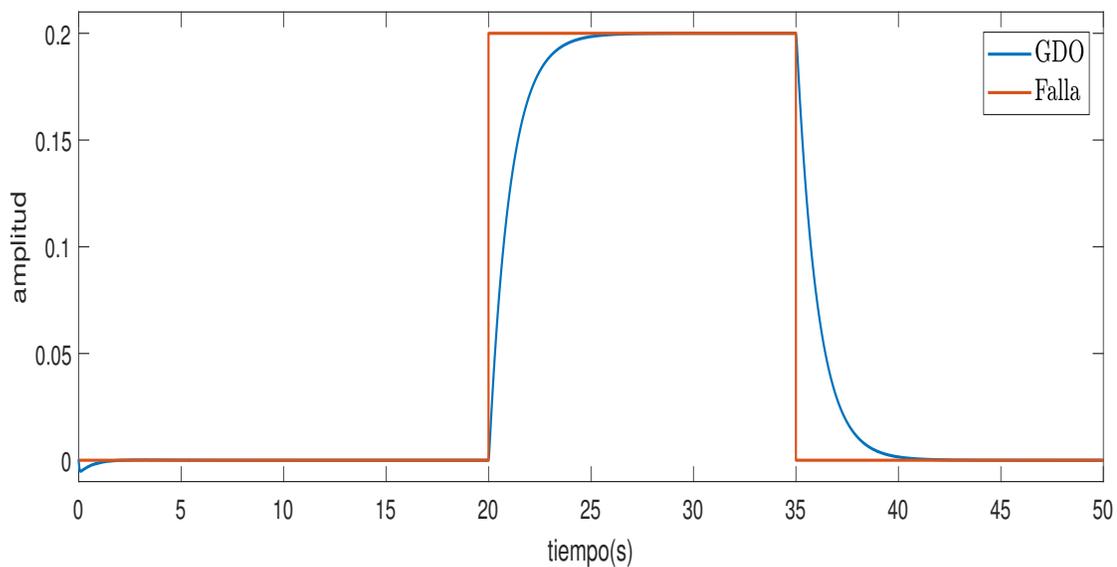


Fig. 5.22. Simulación 3. Estimación de la falla en actuador.

### 5.3. Simulación 4. Observador dinámico generalizado de aprendizaje para sistemas LPV con fallas en actuador.

**Objetivo.** El objetivo de esta simulación es mostrar el desempeño del GDLO realizando 3 pruebas diferentes. La primera prueba es suponiendo una falla abrupta, para la segunda prueba se considera una falla abrupta e incipiente y para la tercera prueba se supone una falla tipo senoidal. Todas las fallas ocurren en el actuador del robot de articulación flexible de un eslabón (3.9).

#### Aplicación de metodología para la obtención del GDLO

Se considera el GDLO de las ecuaciones (4.61)-(4.64) para el sistema cuasi-LPV del robot de articulación flexible (3.9), Los parámetros utilizados para el motor de articulación flexible de un eslabón son los que se muestran en la sección 3.5, cuyas matrices son

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.05 & -2.45 & 54.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21.50 & 0 & -72 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -54.05 & -2.45 & 54.056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21.50 & 0 & -68.53 & 0 \end{bmatrix}, B = G = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{-68.5370 - \varrho(t)}{3.4630}, \mu_2(\varrho(t)) = \frac{\varrho(t) - 72}{3.4630} \quad (5.2)$$

A continuación, se utiliza el algoritmo mostrado al final de la subsección 4.2.4 para la obtención de las matrices del observador.

*1. Encontrar las matrices  $Q$ ,  $T$ ,  $\mathbb{A}_{1i}$ ,  $\mathbb{A}_2$ ,  $\mathbb{B}$  y  $\Sigma$  definidas en la subsección 4.2.2.*

$$Q = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27.02 & -1.22 & 27.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.50 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27.02 & -1.22 & 27.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.50 & 0 & -68.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Resolver las LMIs (4.96) y (4.94) para encontrar las matrices  $X$  y  $\Phi$ .

$$X = \begin{bmatrix} 1.71 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09 & 9.25 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.18 & 2.31 & -1.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.15 & 2.30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.71 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.71 \end{bmatrix} \text{ y } \Phi = \begin{bmatrix} -1 & -100 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Encontrar matrices arbitrarias  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  tal que  $\Gamma_i$  de la ecuación (4.97) sea positiva definida, entonces obtener  $\mathbb{Y}_i$  usando (4.97), el cual contiene las matrices  $K_i$ ,  $H_i$ ,  $Z_i$  y  $L_i$  que serán usadas en el siguiente paso.

Considerando  $\sigma = 100$  y  $\mathcal{L} = \text{unos}(7, 8) \times 0.01$  entonces

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 105.06 & 249.25 & 17.21 & -49.66 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 249.25 & 122.65 & -250.22 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17.21 & -250.22 & -56.22 & 165.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -49.66 & 0.09 & 165.12 & 1.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 105.06 & 249.25 & 17.21 & -49.66 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 249.25 & 122.65 & -250.22 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17.21 & -250.22 & -48.23 & 157.13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -49.66 & 0.09 & 157.13 & 1.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -60.02 & -1.15 & -1.71 & -1.74 & -1.74 & -1.74 & -1.74 \\ -0.27 & -11.14 & -1.46 & -0.30 & -0.30 & -0.30 & -0.30 \\ -1.39 & -2.57 & -59.19 & -1.42 & -1.42 & -1.42 & -1.42 \\ -1.34 & -1.90 & -30.20 & -1.32 & -1.32 & -1.32 & -1.32 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 \end{bmatrix} y$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -60.02 & -1.15 & -1.71 & -1.74 & -1.74 & -1.74 & -1.74 \\ -0.27 & -11.14 & -1.46 & -0.30 & -0.30 & -0.30 & -0.30 \\ -1.36 & -2.55 & -59.16 & -1.39 & -1.39 & -1.39 & -1.39 \\ -1.32 & -1.87 & -30.17 & -1.30 & -1.30 & -1.30 & -1.30 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 & -0.58 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -0.58 & -58.84 \end{bmatrix}.$$

4. Obtener las matrices  $N_i$ ,  $F_i$ ,  $S_i$ ,  $M_i$  y  $J$ , usando (4.77) para programar  $N_i$  y  $F_i$ , (4.78) para programar  $S_i$  y  $M_i$ , y  $J$  está definida por la consideración (b) de la subsección 4.2.2.

$$N_1 = \begin{bmatrix} -60.02 & -0.65 & -1.71 & 0 \\ -26.74 & -12.37 & 25.55 & 0 \\ -1.39 & -2.57 & -59.19 & 0.50 \\ 20.15 & -1.90 & -102.20 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -60.02 & -0.65 & -1.71 & 0 \\ -26.74 & -12.37 & 25.55 & 0 \\ -1.36 & -2.55 & -59.16 & 0.50 \\ 20.18 & -1.87 & -98.71 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 30.01 & 0.82 & 0.85 \\ -13.65 & -4.95 & 14.24 \\ 0.69 & 1.28 & 29.59 \\ 11.42 & 0.95 & -20.89 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 30.01 & 0.82 & 0.85 \\ -13.65 & -4.95 & 14.24 \\ 0.68 & 1.27 & 29.58 \\ 11.42 & 0.93 & -19.17 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \\ -0.58 & -0.58 & -0.58 & 0 \end{bmatrix} y M_2 = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 \end{bmatrix}.$$

## Obtención de matrices para el PILO

Considerando

$$Q = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27.02 & -1.22 & 27.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 21.50 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27.02 & -1.22 & 27.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 21.50 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$X = \begin{bmatrix} 2.62 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.61 & 0 & 0 \\ -1.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.61 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ y } \Phi = \begin{bmatrix} -1 & -100 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando  $\sigma = 1 \times 10^4$  y  $\mathcal{L} = \text{unos}(6,7) \times 0.01$  entonces

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^4, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

$$\mathbb{Y}_1 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & -0.01 & 0 & -0.06 & -0.02 \\ -0.01 & -1.10 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & -0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ y}$$

$$\mathbb{Y}_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & -0.01 & 0 & -0.06 & -0.02 \\ -0.01 & -1.10 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & -0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \times 10^3.$$

Obteniendo

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & -1.10 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & -0.07 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3, N_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & -1.10 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & -0.06 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 16.36 & -0.81 & 5.68 \\ -8.37 & 553.01 & 19.15 \\ 4.96 & 0.34 & 5.34 \\ 9.40 & -11.39 & -36.86 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 16.35 & -0.80 & 5.67 \\ -8.36 & 553.01 & 19.15 \\ 4.96 & 0.34 & 5.34 \\ 9.19 & -11.59 & -35.34 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -88.09 & -63.28 & -28.59 \\ 2 & -9.24 & -7.57 \\ -26.57 & -19.12 & -8.72 \\ -7.13 & 5.59 & 11.97 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -88.07 & -63.27 & -28.57 \\ 1.99 & -9.25 & -7.58 \\ -26.56 & -19.11 & -8.72 \\ -6.72 & 6.01 & 12.38 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 5.3.1. Primer escenario de fallas

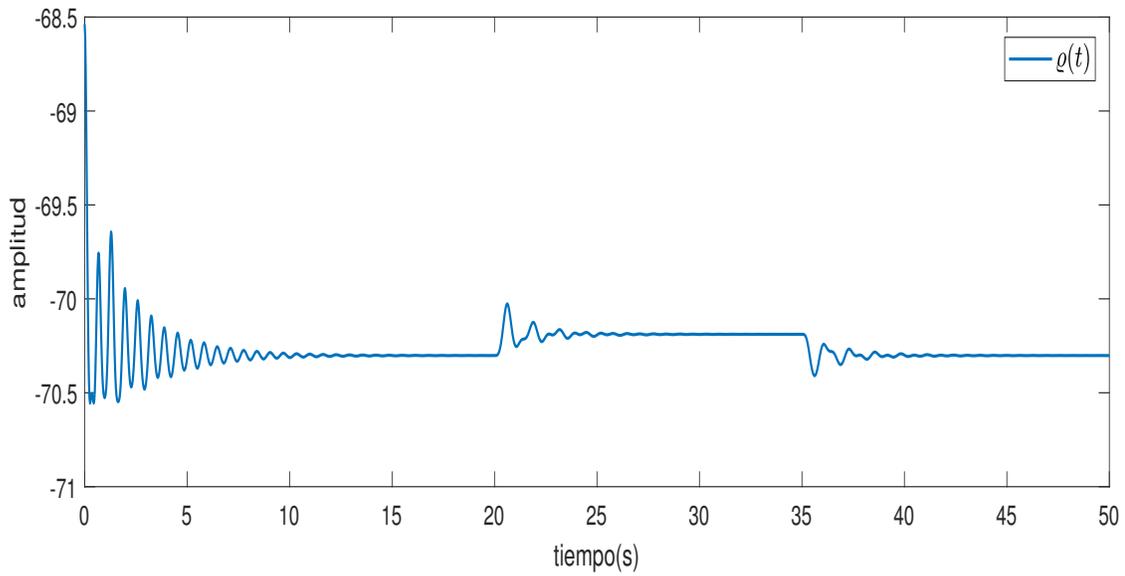
Para la simulación, se supone una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor lo cual genera un aumento abrupto en el par de entrada del actuador. Esta falla ocurre en el segundo 20 y desaparece posteriormente en el segundo 35. como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.2Nm & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.001s$  y un retardo  $\tau = 0.001s$ , la simulación se realiza en en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nm/s/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En esta simulación se supone que el parámetro  $\varrho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.23.

Fig. 5.23. Simulación 4. Prueba 1. Variación de  $\rho(t)$ .

Utilizando las funciones de ponderación de la ecuación (3.7) se obtuvieron las gráficas de la Fig.5.24.

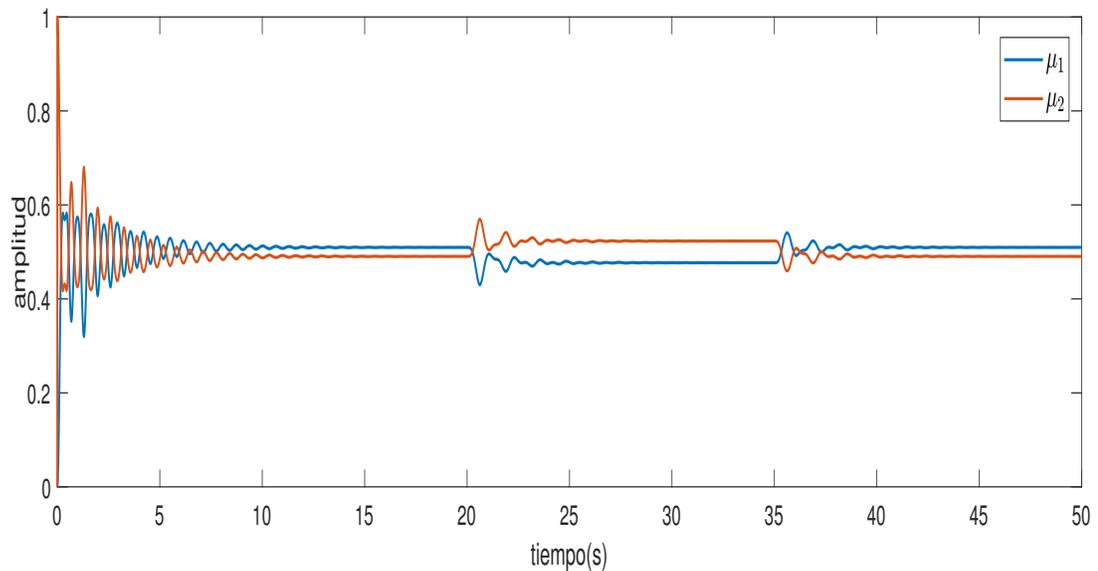


Fig. 5.24. Simulación 4. Prueba 1. Funciones de ponderación.

Los resultados del primer escenario de falla muestran que tanto el GDLO como el PILO son capaces de estimar los estados de manera adecuada del sistema no lineal como se muestra en las Fig. 5.25 y 5.28.

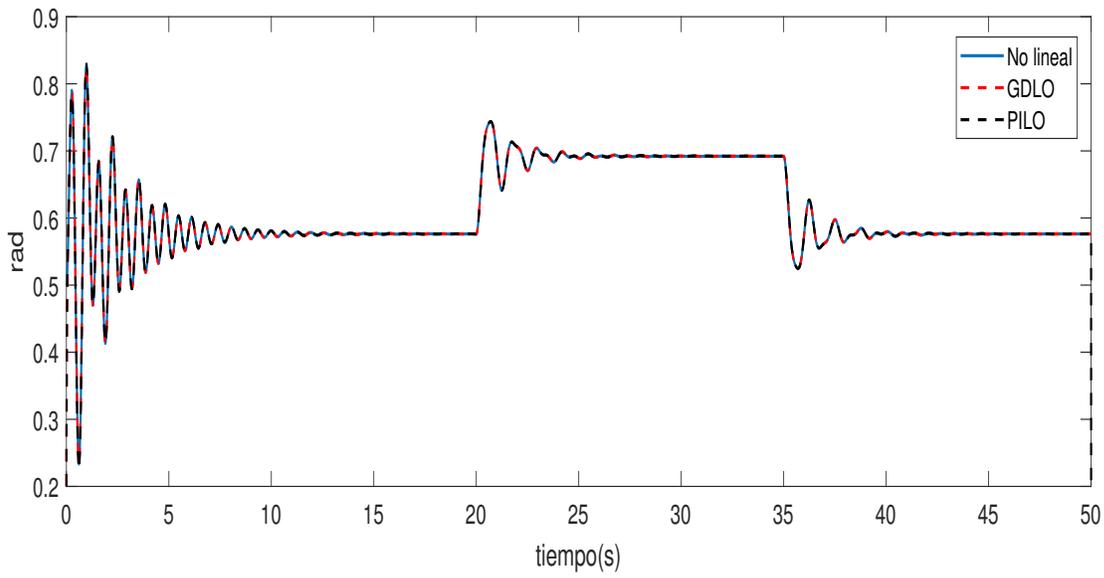


Fig. 5.25. Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).

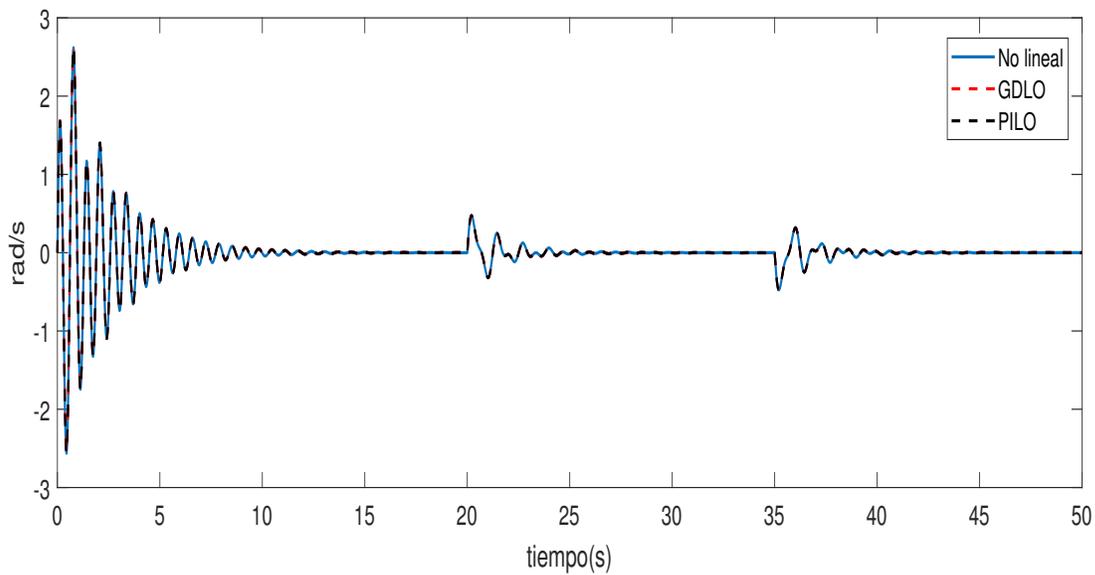


Fig. 5.26. Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).

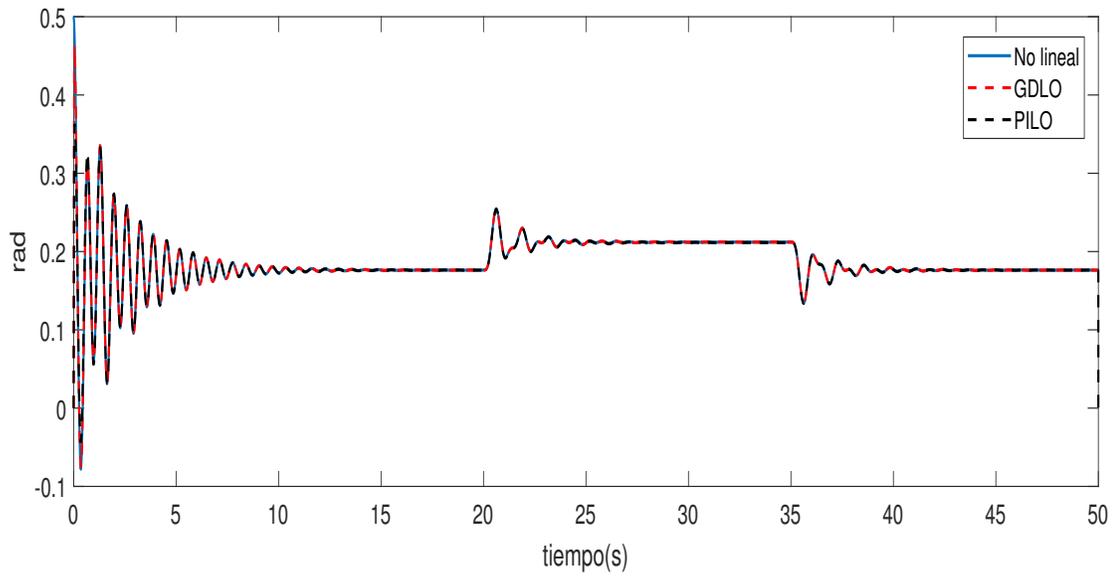


Fig. 5.27. Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).

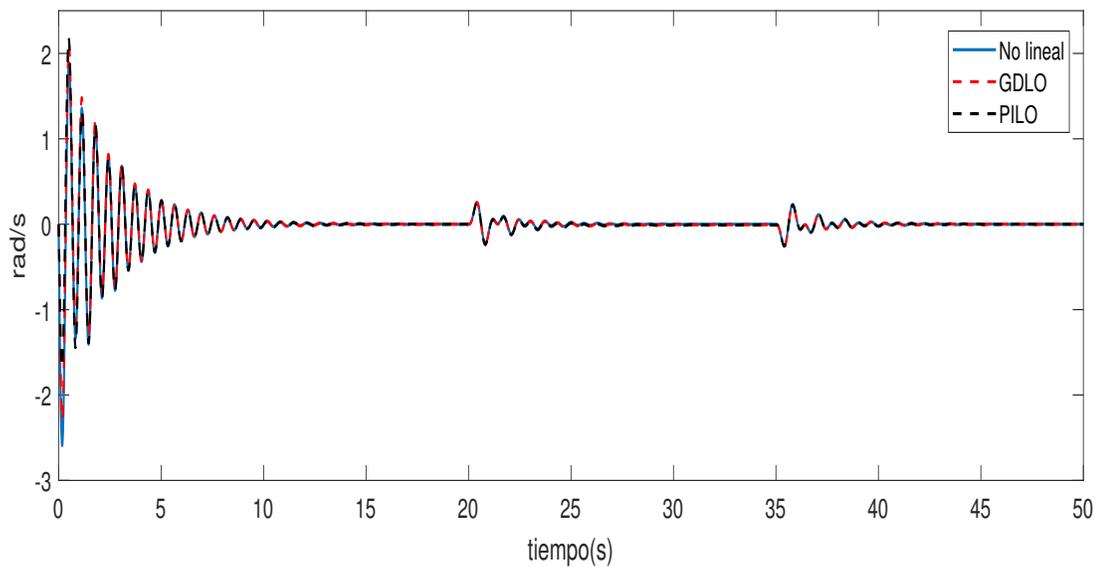


Fig. 5.28. Simulación 4. Prueba 1. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).

En la Fig.5.29 se logra observar que tanto el GDLO y el PILO logran estimar la falla ocurrida en actuator, reduciendo considerablemente el tiempo de convergencia para la estimación de la falla.

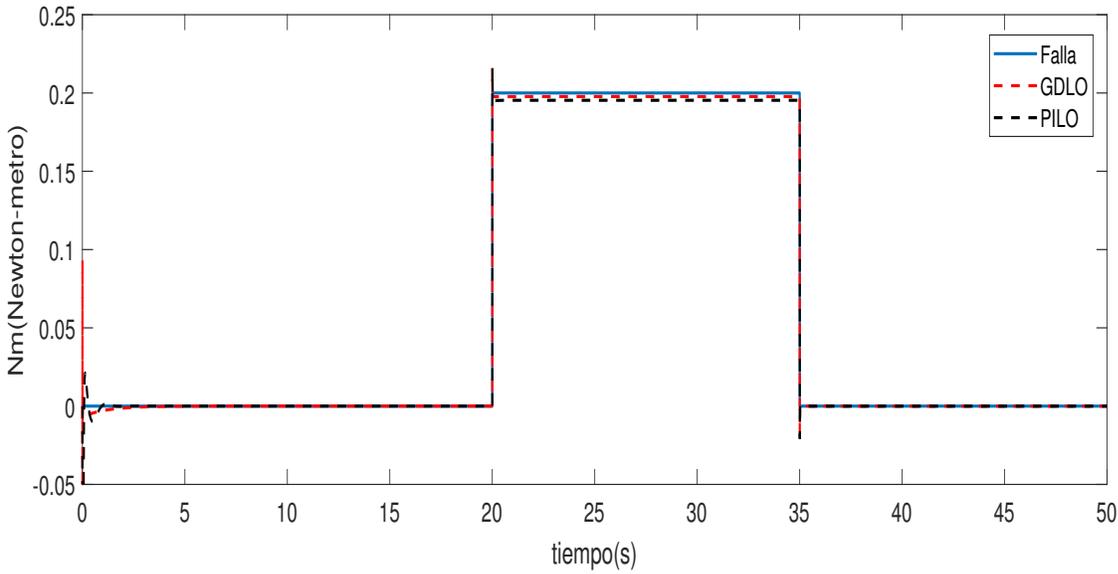


Fig. 5.29. Simulación 4. Prueba 1. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.

En la tabla 5.3 se puede apreciar que el GDLO tiene un desempeño ligeramente mejor que el PILO. Sin embargo, el PILO mantiene robustez al ser un caso particular del GDLO. No existe una gran diferencia en los índices de desempeño mostrados debido a que ambos observadores parten de la misma metodología para la obtención de las matrices de los observadores.

Tabla 5.3. Índice de desempeño IAE para el primer escenario de fallas

Estados y falla	GDLO	PILO
$x_1(t)$	456.28	882.07
$x_2(t)$	2683.9	3288.3
$x_3(t)$	459.33	1834.5
$x_4(t)$	20375	24180
$f_1(t)$	1244.6	2816.1

### 5.3.2. Segundo escenario de fallas.

Para esta simulación, se supone que existe una falla debido a sobrecalentamiento en el embobinado del motor lo cual genera un aumento abrupto en el par de entrada del actuador, adicionalmente el par de entrada aumenta gradualmente como una señal tipo rampa debido a que el rotor tiene contacto con algún elemento suelto del motor. Esta falla ocurre en el segundo 20 y desaparece posteriormente en el segundo 35. como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.16 + t \text{ Nm} & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.001s$  y considerando un retardo  $\tau = 0.001s$ , la simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de  $+10\%$  en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nms/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de  $+11\%$  en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En esta simulación se supone que el parámetro  $\varrho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.30.

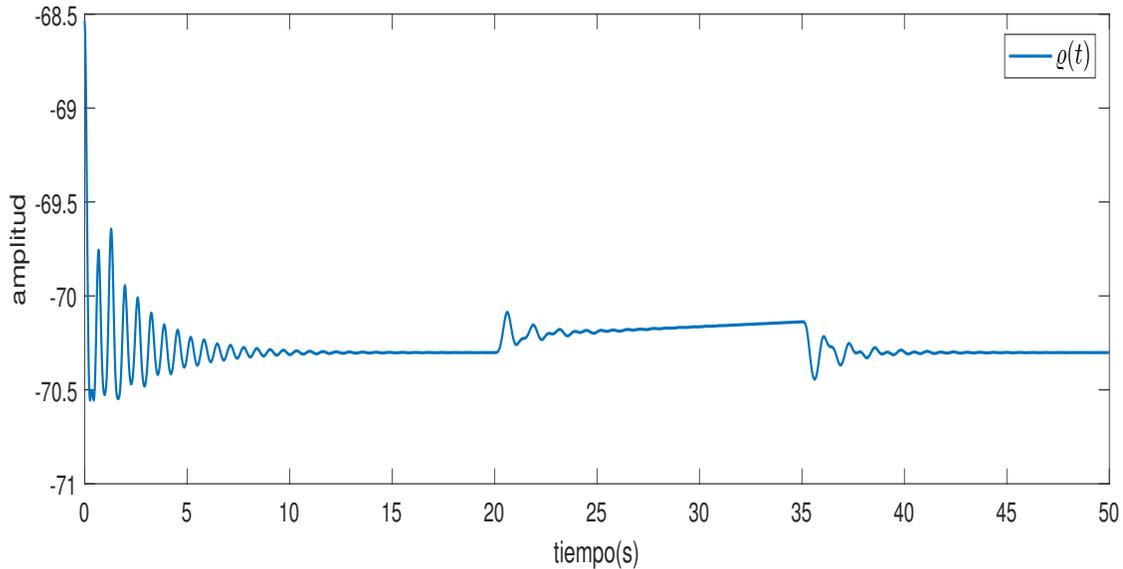


Fig. 5.30. Simulación 4. Prueba 2. Variación de  $\varrho(t)$ .

Utilizando las funciones de ponderación de la ecuación (3.7) se obtuvieron las gráficas de la Fig.5.31. Que muestran la interpolación de las funciones de ponderación.

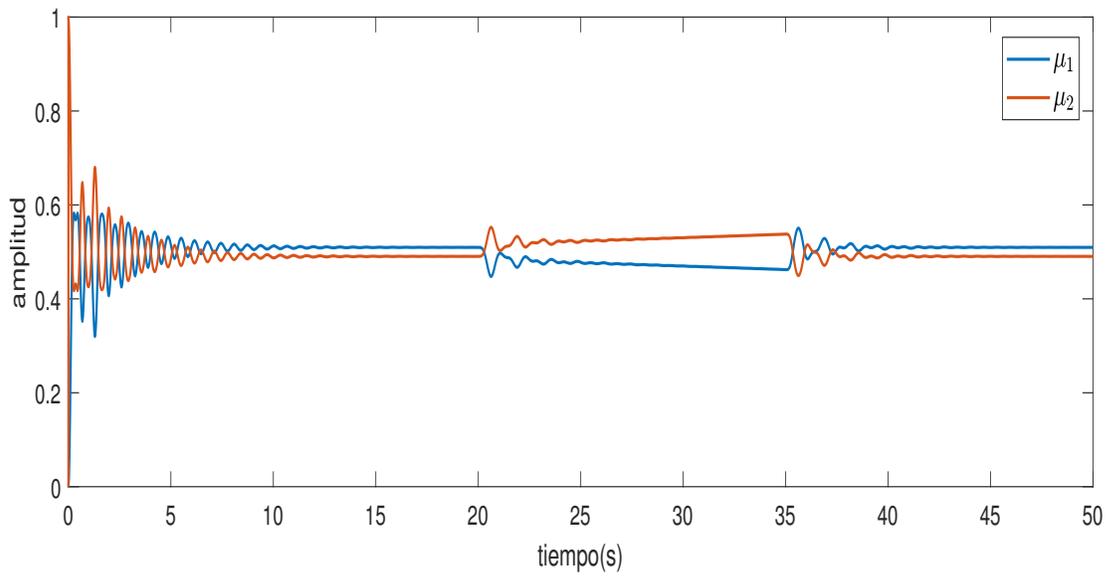


Fig. 5.31. Simulación 4. Prueba 2. Funciones de ponderación.

Los resultados para el segundo escenario de falla muestran que tanto el GDLO como el PILO son capaces de estimar los estados del sistema no lineal como se muestra en las Fig. 5.32 - 5.35.

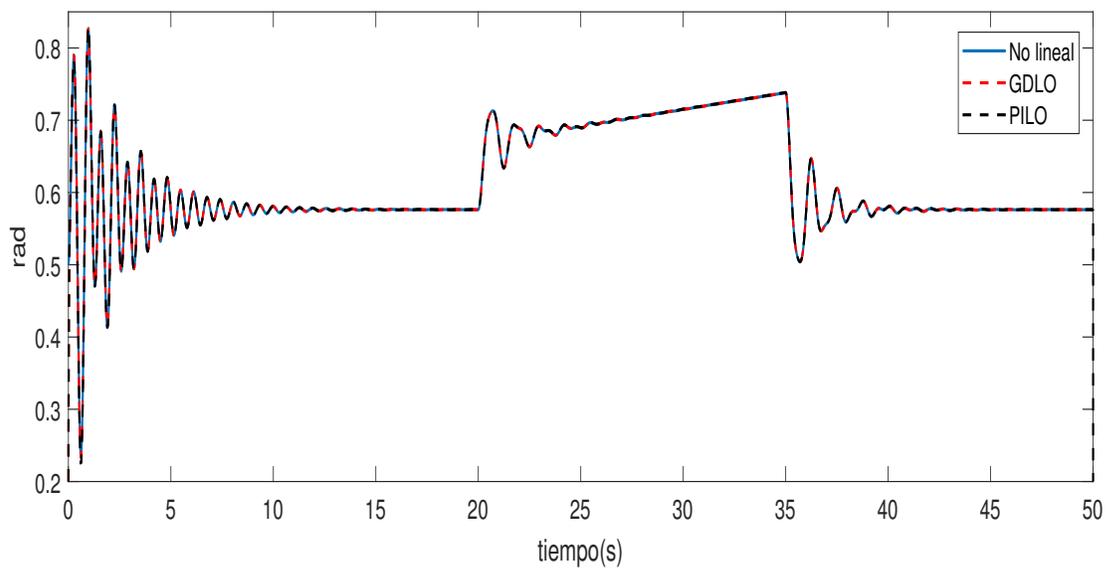


Fig. 5.32. Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).

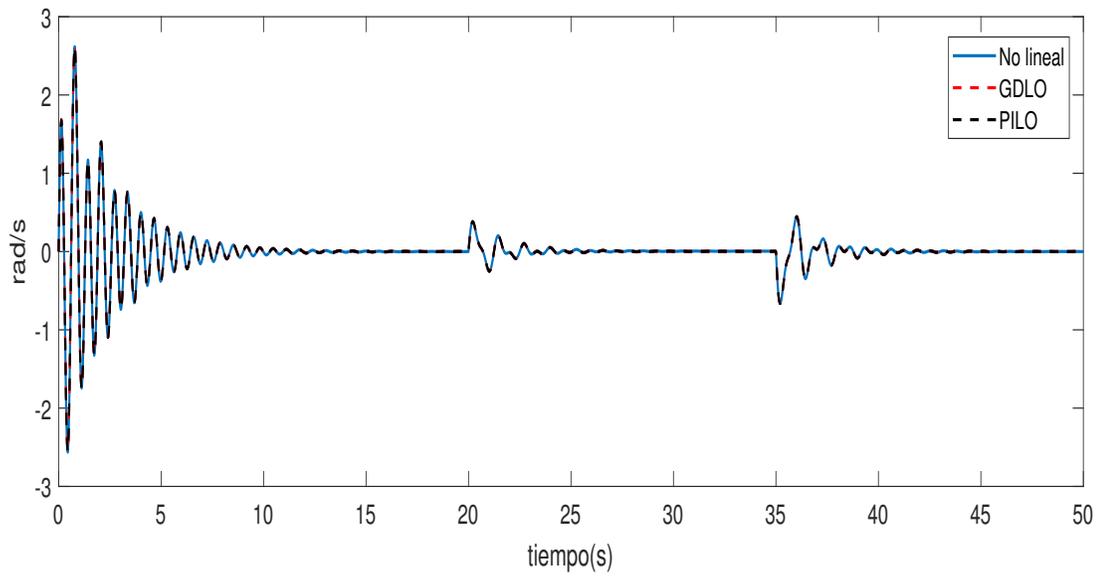


Fig. 5.33. Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).

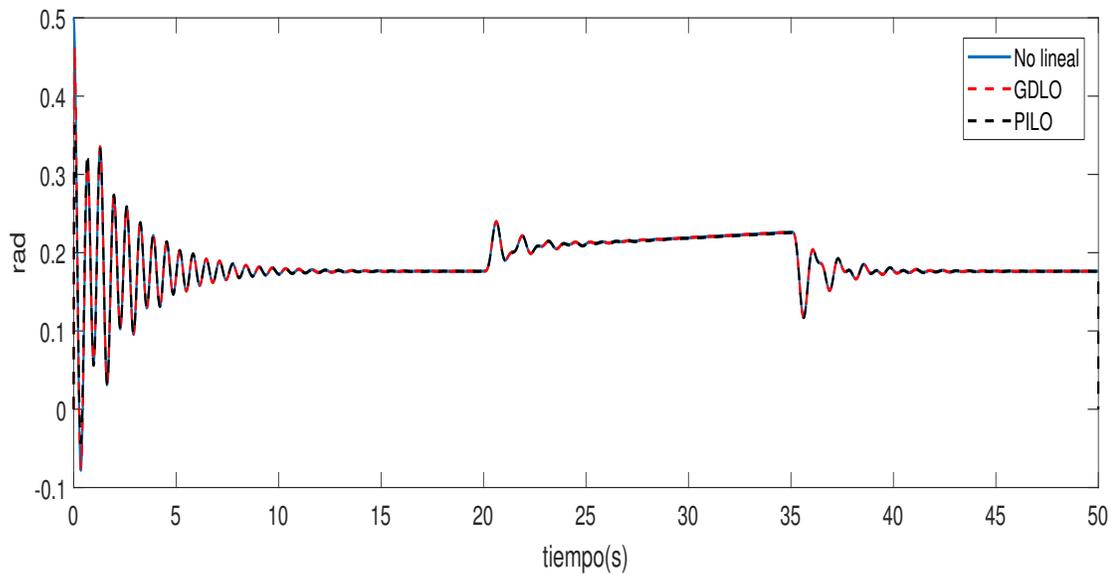


Fig. 5.34. Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).

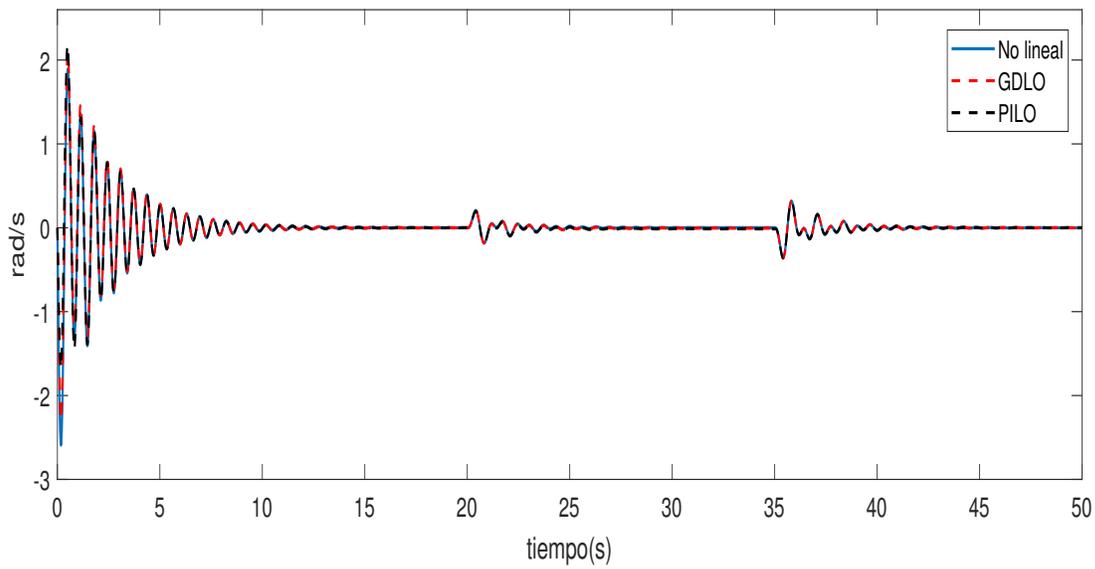


Fig. 5.35. Simulación 4. Prueba 2. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).

En la Fig. 5.36 se aprecia que el GDLO y el PILO logran estimar la falla abrupta e incipiente ocurrida en actuador reduciendo el tiempo de convergencia para la estimación de la falla considerablemente.

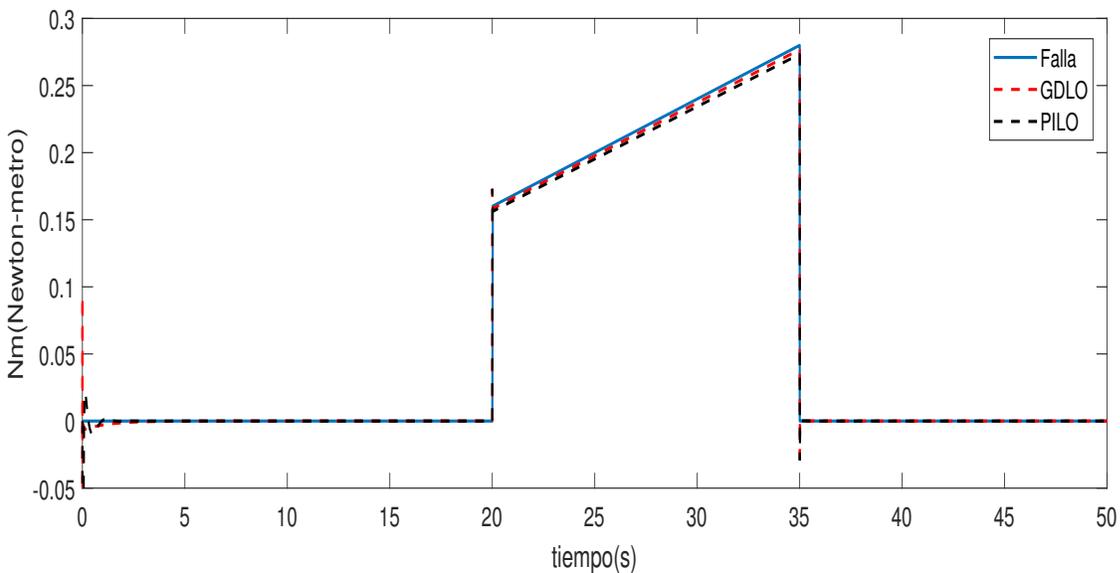


Fig. 5.36. Simulación 4. Prueba 2. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.

En la tabla 5.4 se puede apreciar que el GDLO tiene un buen desempeño para estimar los estados y fallas, incluyendo fallas incipientes. El PILO mantiene robustez del GDLO y un desempeño ligeramente menor que este. Sin embargo, logra estimar los estados y fallas adecuadamente, esto considerando la falla abrupta e incipiente generada en el actuador.

Tabla 5.4. Índice de desempeño IAE para el segundo escenario de fallas

Estados y falla	GDLO	PILO
$x_1(t)$	455.83	888.63
$x_2(t)$	2745.4	3349.8
$x_3(t)$	461.04	1851.6
$x_4(t)$	20482	24475
$f(t)$	1302.5	2945.1

### 5.3.3. Tercer escenario de fallas.

Para esta simulación, Se considera una falla senoidal en el actuador ocurriendo en el segundo 20 como se muestra a continuación.

$$f(t) = \begin{cases} 0.05\text{sent} + 0.15\text{sen}2t + 0.3Nm & t \geq 20s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$ (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.001s$  y considerando un retardo  $\tau = 0.001s$ , la simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nms/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En esta simulación suponemos que el parámetro  $\rho(t)$  varía entre  $-68.5370$  y  $-72$  de acuerdo a la trayectoria mostrada en la Fig.5.37.

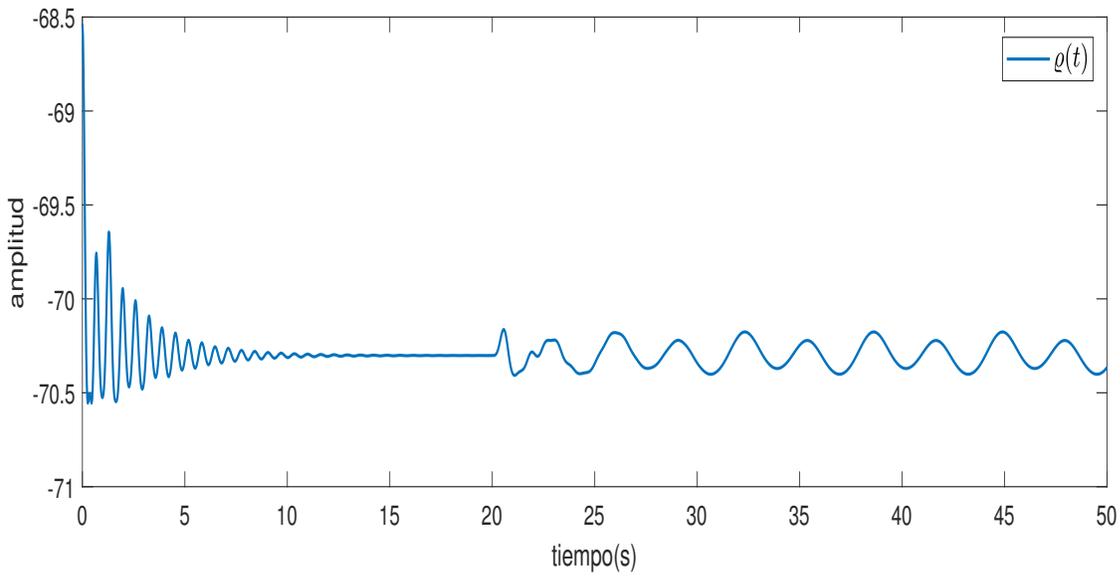


Fig. 5.37. Simulación 4. Prueba 3. Variación de  $\rho(t)$ .

Utilizando las funciones de ponderación de la ecuación (3.7) se obtuvieron las gráficas de la Fig.5.38.

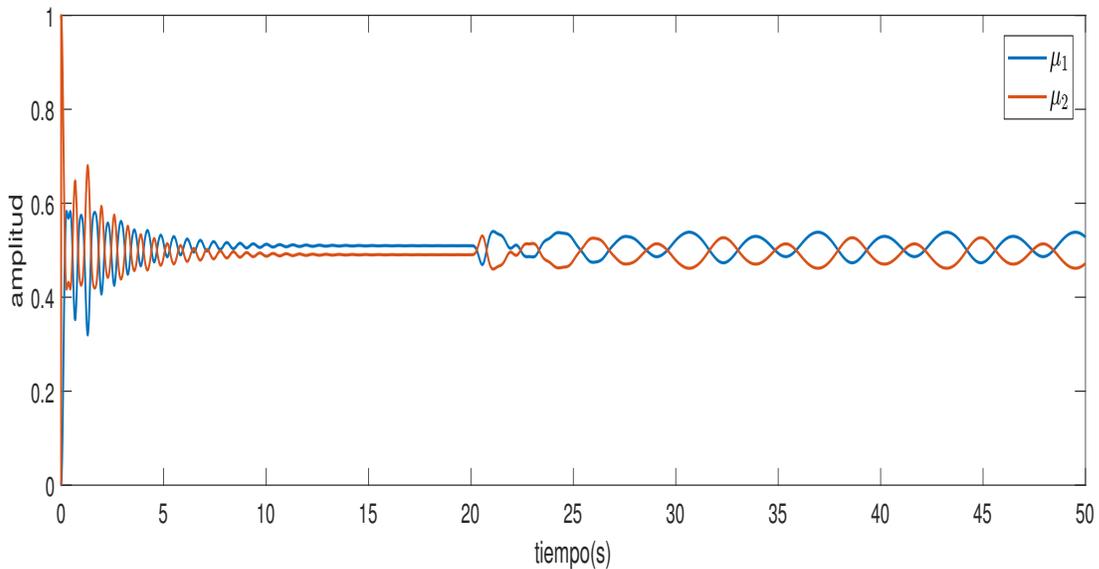


Fig. 5.38. Simulación 4. Prueba 3. Funciones de ponderación.

Los resultados del tercer escenario de falla muestran que tanto el GDLO como el PILO son capaces de estimar los estados del sistema no lineal como se muestra en las Fig. 5.39 - 5.42.

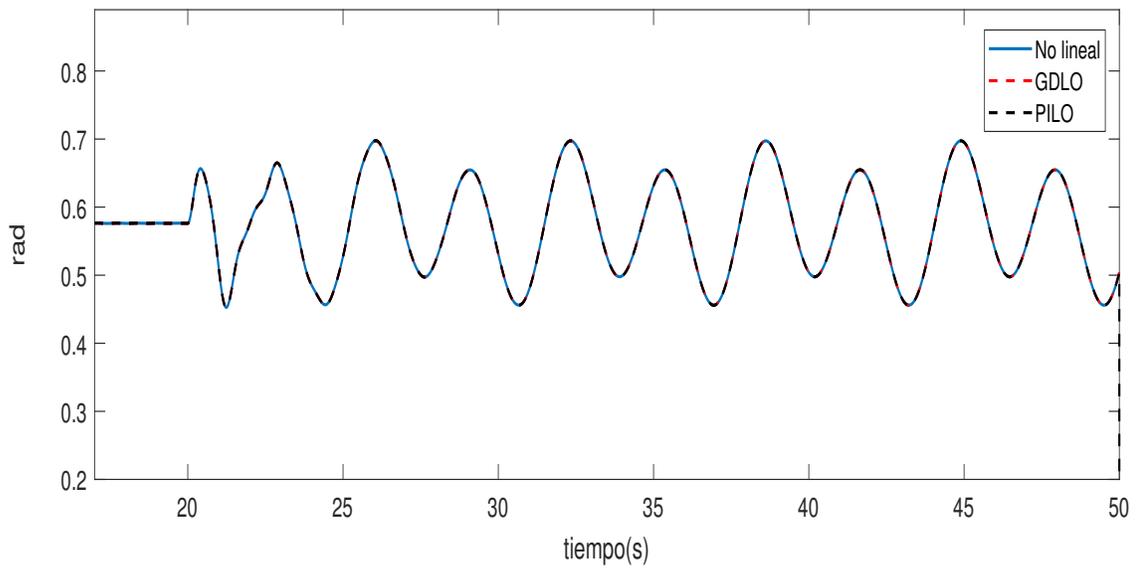


Fig. 5.39. Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_1$ ).

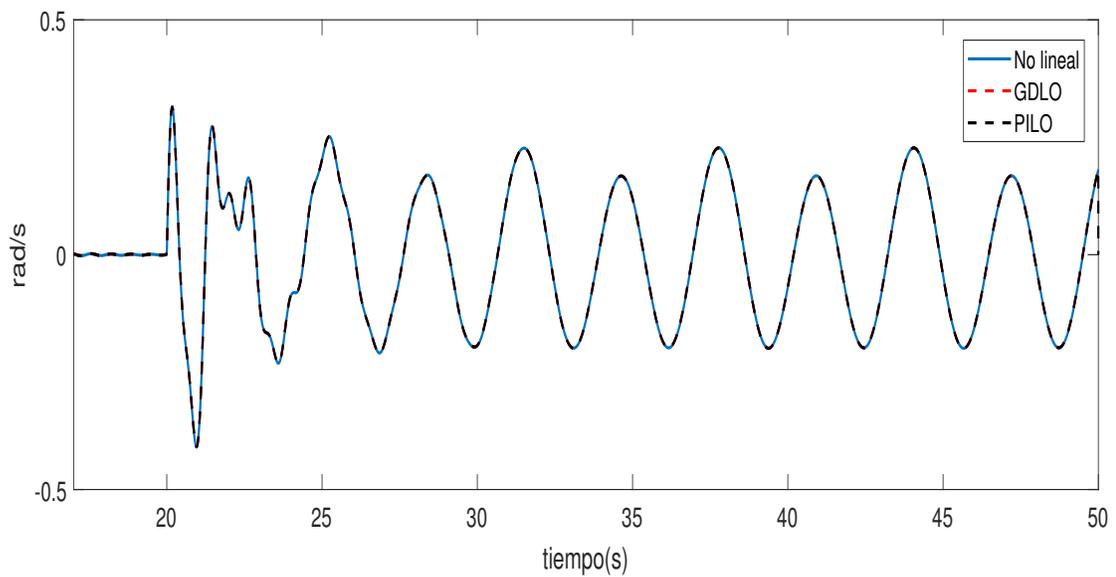


Fig. 5.40. Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_2$ ).

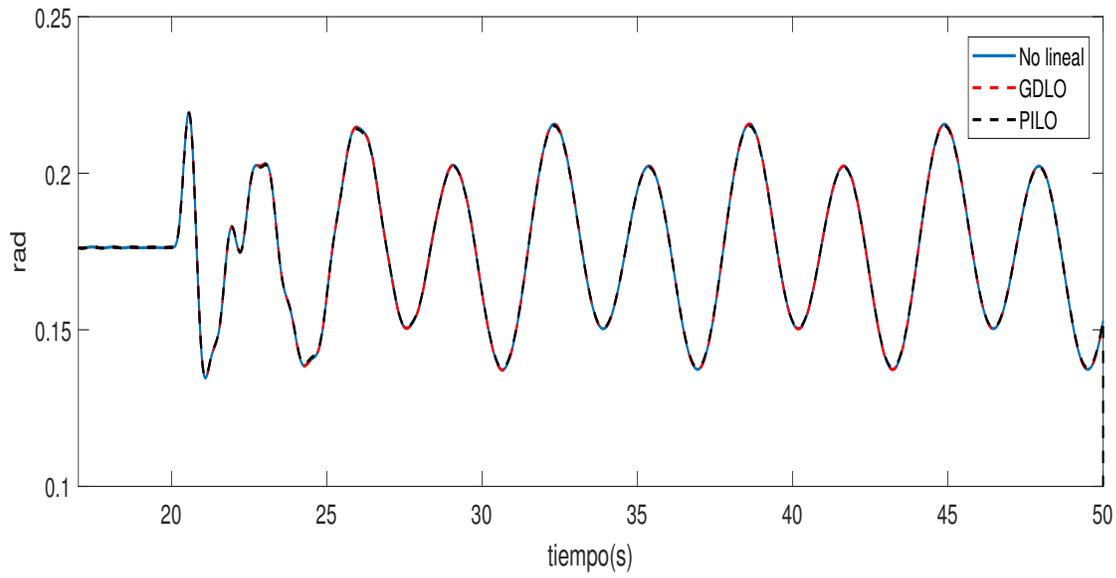


Fig. 5.41. Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_3$ ).

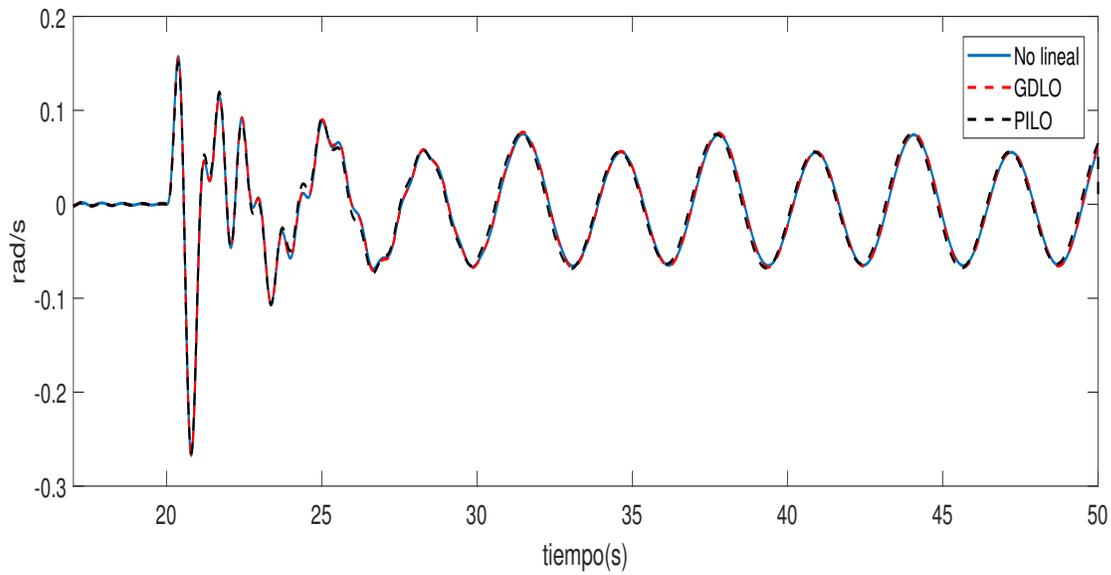


Fig. 5.42. Simulación 4. Prueba 3. Desempeño del GDLO y del PILO ( $x_4$ ).

En la Fig. 5.43 se logra observar que tanto el GDLO y el PILO logran estimar la falla ocurrida en actuador.

Cabe mencionar que tanto el GDLO como el PILO mostrados en este trabajo fueron diseñados para la estimación de fallas abruptas. Sin embargo, ambos observadores logran estimar tanto estados como fallas incluso contemplando una falla senoidal en el actuador y manteniendo un tiempo de convergencia reducido para la estimación de la falla senoidal.

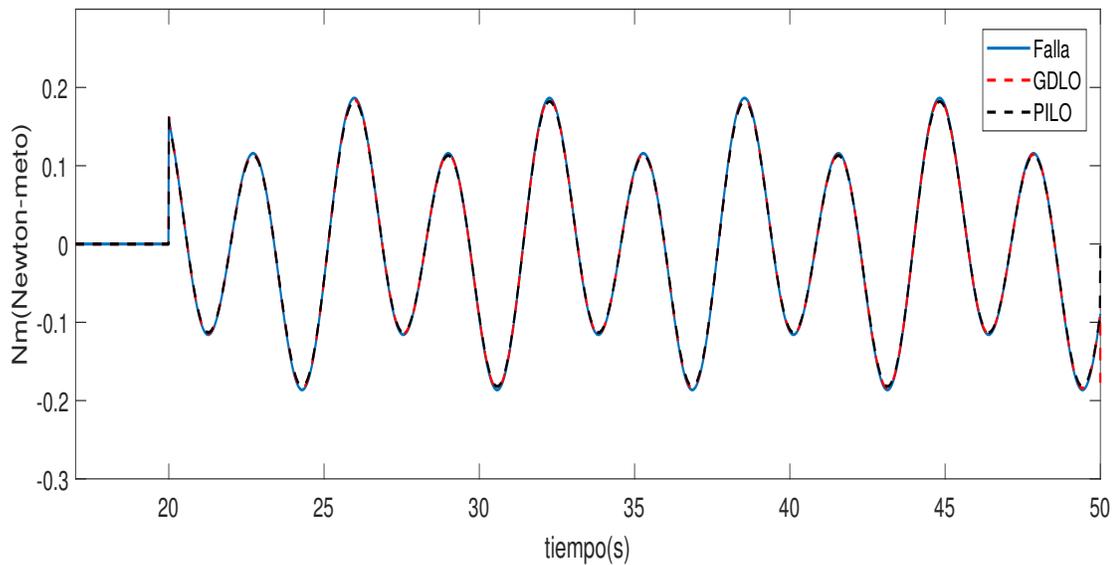


Fig. 5.43. Simulación 4. Prueba 3. Estimación de la falla del GDLO y del PILO.

En la tabla 5.5 se observa el índice de desempeño IAE del GDLO y del PILO. Considerando una falla en actuador no contemplada para el diseño de este observador. Sin embargo, ambos observadores logran tener un desempeño adecuado para estimar correctamente los estados y la falla a pesar de la incertidumbre paramétrica contemplada.

Tabla 5.5. Índice de desempeño IAE para el tercer escenario de fallas.

Estados y falla	GDLO	PILO
$x_1(t)$	493.5	884.58
$x_2(t)$	2321.8	2924.6
$x_3(t)$	462.51	1764.9
$x_4(t)$	19180	23046
$f(t)$	992.73	2262.3

## 5.4. Simulación 5. Observador dinámico generalizado de aprendizaje para sistemas LPV con fallas en actuador modificando el retardo.

**Objetivo.** El objetivo de esta simulación es mostrar el comportamiento del GDLO (4.61)-(4.64) considerando un retardo diferente al tiempo de muestreo, la teoría indica que el tiempo del retardo permite modificar el tiempo de convergencia de la estimación de la falla (Jia et al. (2014)).

Para esta simulación se consideran las mismas matrices del sistema cuasi-LPV del motor de articulación flexible de un eslabón, y las mismas matrices de los observadores como en la simulación 4, por tal razón no se repiten en esta sección.

### Escenario de falla.

La falla utilizada en esta simulación es como se muestra a continuación

$$f(t) = \begin{cases} 0.2Nm & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.001s$  y diferentes retardos  $\tau = 1s$ ,  $\tau = 200s$ ,  $\tau = 2000s$ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Se considera una incertidumbre paramétrica de +10% en el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) resultando en  $0.0091Nms/rad$  para esta simulación y una incertidumbre paramétrica de +11% en el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ) resultando en  $0.20Nm/rad$  para esta simulación, ambas incertidumbres consideradas como desgaste en los materiales.

En la Fig.5.44 se muestra la estimación de la falla considerando un retardo  $\tau = 0.001s$ , para analizar y realizar una comparación entre las Fig.5.45 y 5.47 en donde se consideran diferentes retardos.

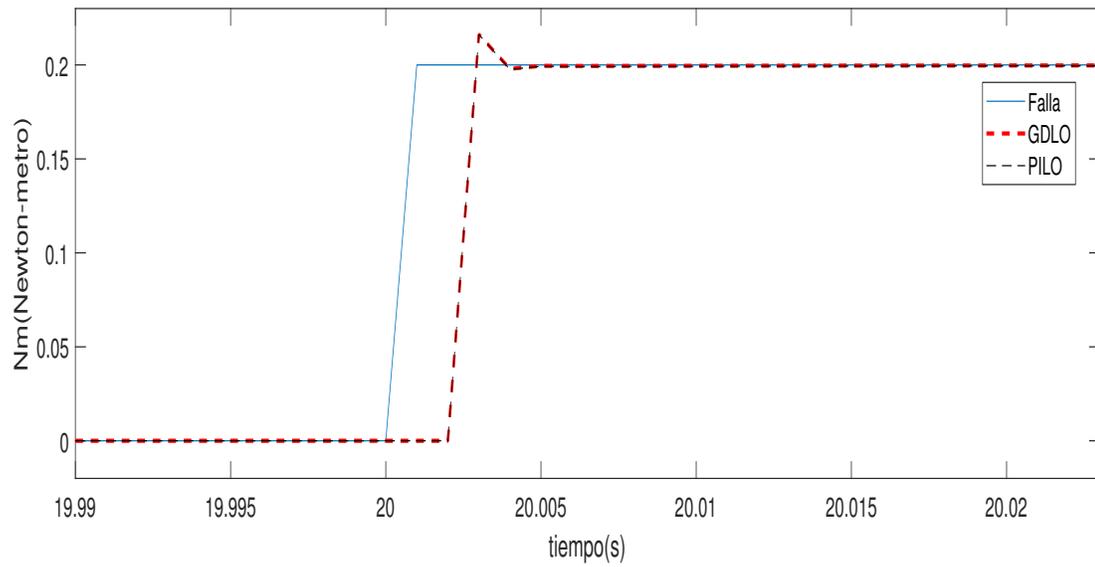


Fig. 5.44. Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 0.001s$ )

En la Fig.5.45 se considera un retardo  $\tau = 1s$  y se puede apreciar que no existe una gran diferencia para la convergencia de la falla con respecto a la Fig.5.44.

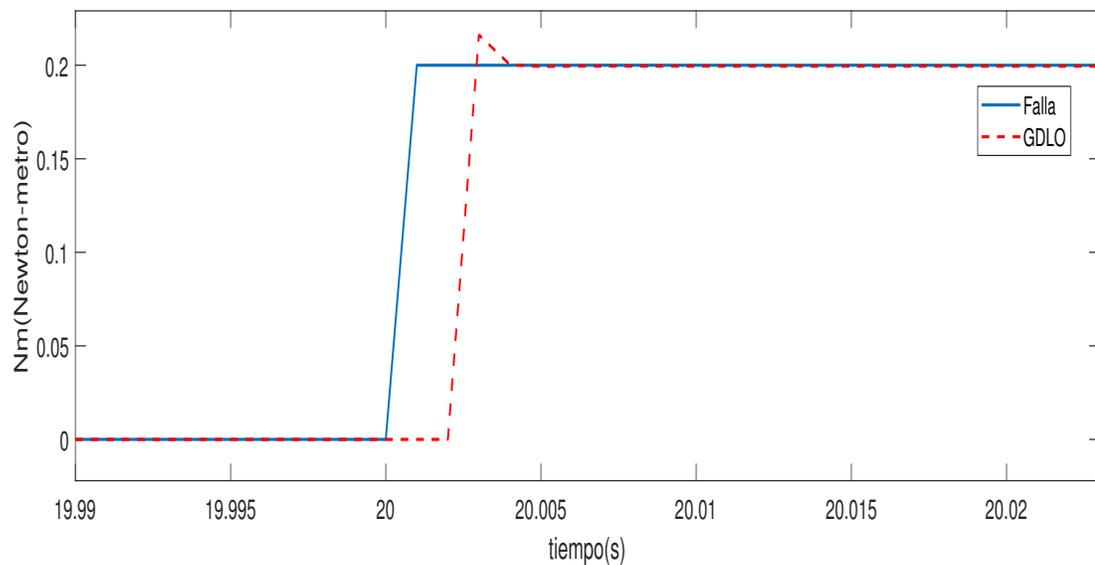


Fig. 5.45. Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 1s$ ).

En la Fig.5.46 se considera un retardo  $\tau = 200s$ . Se puede notar que no existe una gran diferencia para la convergencia de la falla a pesar del retardo considerado.

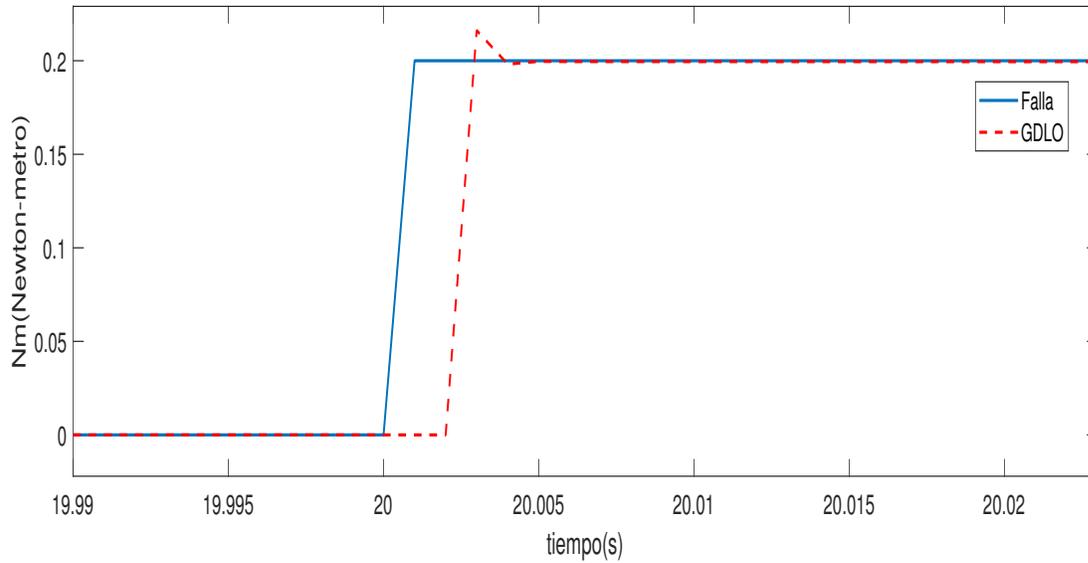


Fig. 5.46. Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 200s$ ).

En la Fig.5.47 se considera un retardo  $\tau = 2000s$ . Al considerar un retardo muy grande, se puede observar un retardo para la estimación en el momento de la ocurrencia de la falla, en donde al tener un retardo mucho mayor, varía ligeramente el tiempo y amplitud para la estimación de la falla al iniciar a estimar la falla, mientras que al tener un retardo más pequeño el tiempo de estimación de la falla en el momento de la ocurrencia de la falla es ligeramente menor.

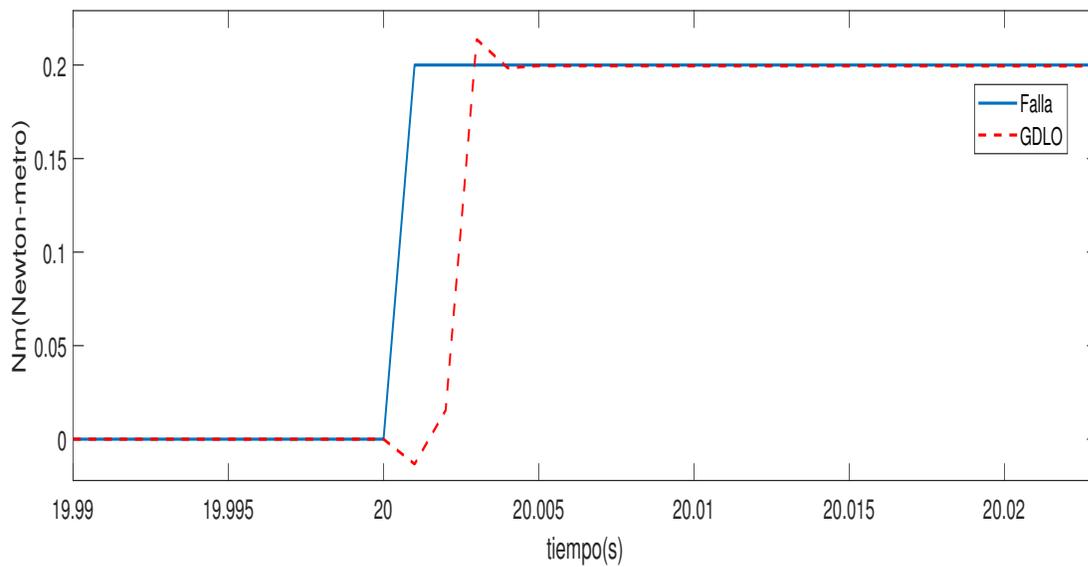


Fig. 5.47. Simulación 5. Estimación de la falla senoidal del GDLO y del PILO ( $\tau = 2000s$ ).

En las comparaciones realizadas en este trabajo de tesis para la variación de  $\tau$ , se observa que el retardo no impacta directamente la estimación de la falla. Al considerar un retardo grande se puede apreciar una variación pequeña en el momento en el que el observador empieza a estimar la falla.

Es importante recalcar que, en el retardo de la estimación de la falla  $\hat{f}(t - \tau)$  todos los datos que se generan en  $t < \tau$  son datos con valor cero, esto debido a que el sistema inicia libre de falla, una vez que  $t \geq \tau$  la estimación de la falla empieza a considerar los datos con retardo de la misma estimación, aunque seguirán siendo cero hasta que se presente la falla. Uno de los factores que se considera que influye en el comportamiento de la estimación de la falla ante variaciones de  $\tau$  es que la variable de estimación de la falla  $\hat{f}(t)$  en la estructura del GDLO es una operación algebraica, por lo que la modificación en la estimación es instantánea una vez que se ha presentado la falla.

## 5.5. Índice de desempeño considerando diferentes incertidumbres paramétricas

Para esta simulación se consideran las mismas matrices del sistema cuasi-LPV del motor de articulación flexible de un eslabón, y las mismas matrices de los observadores como en la simulación 4, por tal razón no se repiten en esta sección.

Se plantea un único escenario de fallas con diferentes variaciones en los parámetros del sistema.

### Escenario de falla.

La falla utilizada en esta simulación es como se muestra a continuación

$$f(t) = \begin{cases} 0.2Nm & \text{si } 20s \leq t \leq 35s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La señal de entrada se consideró constante  $U(t) = 1Nm$  (Newton-metro). Las condiciones iniciales del sistema cuasi-LPV fueron;  $x_1(0) = 0.5rad$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.5rad$ ,  $x_4(0) = 0$ , mientras que las condiciones iniciales de los estados estimados del observador fueron:  $\hat{x}_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0$ . Se considera un tiempo de muestreo  $T_m = 0.001s$ . La simulación se realiza en el software de MATLAB 2017b.

Los parámetros considerados para ser considerados como incertidumbre son el coeficiente de elasticidad ( $b_v$ ) y el coeficiente de fricción viscosa ( $k$ ), con el propósito de analizar el desempeño de los observadores y el efecto que tienen al incrementar la incertidumbre en el sistema.

En la tabla 5.6 se muestran los índices de desempeño IAE para el GDLO y del PILO respectivamente, sometidos a diferentes porcentajes de incertidumbre paramétrica.

Se puede observar que el GDLO logra estimar la falla a pesar de los valores de incertidumbre en parámetros, cabe mencionar que a pesar de aumentar el porcentaje de incertidumbre, ambos observadores logran tener un buen desempeño para la estimación de la falla, sin embargo el GDLO muestra mayor robustez ante el aumento del porcentaje de incertidumbre debido a la estructura del mismo observador mientras que el PILO al ser un caso particular trata de mantener un buen desempeño ante el aumento de incertidumbre.

Tabla 5.6. Índice de desempeño IAE con diferentes porcentajes de incertidumbres paramétricas.

Porcentaje de falla	GDLO	PILO
+10 %	7106.1	16817
+30 %	1484.8	1543.3
+50 %	11991	18491
+70 %	11282	16254
+100 %	11760	21965

Es importante destacar que aunque al variar el porcentaje de incertidumbre ambos observadores logran seguir estimando la falla. El máximo porcentaje de incertidumbre en parámetros alcanzó el 100 % y a pesar de esto, ambos observadores son capaces de estimar los estados y la falla. Sin embargo, si el porcentaje de incertidumbre tuviera valores superiores (por ejemplo, arriba del 300 % o valores negativo en la incertidumbre de los parámetros) o si se modificaran otros parámetros del robot de articulación flexible de un eslabón, no se asegura la estimación correcta de estados o fallas mediante el GDLO o del PILO presentados en este trabajo de tesis.

## 5.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se mostró la obtención de las matrices de un GDO de orden reducido y sus observadores derivados (PIO y PO) mediante el algoritmo presentado, así como el desempeño de dichos observadores para la estimación de estados y fallas, esto para sistemas LPV en 2 escenarios de falla diferentes. Se muestra el desempeño de un GDO de orden completo para sistemas LPV considerando 1 escenario de falla.

Se presenta la obtención de las matrices del GDLO y de PILO siguiendo el algoritmo diseñado. También se presenta el desempeño del GDLO y el PILO para la estimación de estados y fallas para 3 escenarios de fallas distintos.

EL GDLO y el PILO logran estimar los estados y fallas para los escenarios propuestos, incluso ante la falla senoidal contemplada (considerando que el GDLO es diseñado para estimar fallas abruptas), esto demuestra la robustez del GDLO incluso ante diferentes tipos de fallas.

Se muestra que si se modifica el retardo  $\tau$  del GDLO pudiera tener una diferencia mínima al momento que el observador empieza a estimar la falla. En la mayoría de valores de retardo no hay una diferencia considerable al momento de estimar la falla.

Así mismo el GDLO logra estimar estados y fallas incluso considerando incertidumbres de porcentajes altos en los parámetros  $B_v$  y  $k$  como se ve en la tabla 5.6. Sin embargo, si se considera un valor muy grande segura que eo negativo en estos parámetros, no se al GDLO o el PILO logre la estimación de estados y fallas.



# Capítulo 6

## Conclusiones generales

En este trabajo de tesis se utiliza el enfoque LPV para representar la dinámica de un modelo no lineal de robot de articulación flexible de un eslabón en donde las simulaciones muestran que el sistema cuasi-LPV logra representar de una manera adecuada las ecuaciones del sistema no lineal.

Se presenta el diseño y análisis de estabilidad de un GDO para sistemas LPV. Se utiliza el lema de eliminación para la obtención de las matrices de los observadores. Ya que el GDO tiene una estructura generalizada se presenta el diseño de 2 observadores derivados del GDO (PO y PIO), Cada uno de los observadores tanto el GDO y sus derivados son aplicados al robot de articulación flexible de un eslabón para sistemas LPV en 2 diferentes escenarios de falla, mostrando que los observadores logran tener un correcto desempeño para la estimación simultánea de estados y fallas en actuador.

Se presenta un GDLO para la estimación de estados y fallas que ocurren en actuador. El GDLO tiene una estructura que permite estimar las fallas con un tiempo de convergencia reducido debido a la parte de aprendizaje, así mismo ofrece mayor robustez ante incertidumbres que puedan ocurrir en el sistema por la estructura generalizada.

Una de las ventajas del enfoque propuesto es que las matrices del observador pueden ser resueltas mediante alguna herramienta de MATLAB para resolver LMIs. Se utiliza el lema de eliminación de Skelton et al. (1998) para encontrar una solución factible a las LMIs y conservar la estructura generalizada del observador.

Para comprobar la efectividad del GDLO y del PILO en la estimación de fallas, se analizan los resultados de simulación en un robot de articulación flexible de un eslabón como caso de estudio. Se emplean dos diferentes escenarios de fallas considerando incertidumbre paramétrica para observar la capacidad del observador de estimar la falla y los estados. Los resultados de la simulación muestran que tanto el GDLO como el PILO son capaces de estimar los estados del sistema, así como estimar con mayor precisión las fallas abruptas en actuador.

En la comparativa entre el GDLO y el PILO se observa que el GDLO tiene un mejor índice de desempeño que el PILO ante la presencia de incertidumbres paramétricas en ambos escenarios de fallas propuestos. Sin embargo, el PILO sigue manteniendo características de robustez y buen

desempeño ante incertidumbres paramétricas.

El GDLO al contar con más grados de libertad, permite tener un mejor desempeño ante perturbaciones e incertidumbres, y al tener la parte de aprendizaje permite tener más precisión en la estimación de fallas abruptas. De esta manera se aporta una nueva metodología para poder detectar y estimar fallas abruptas con variación rápida que ocurran en los actuadores para sistemas LPV.

## 6.1. Trabajos futuros

Como trabajos futuros se pretende usar el GDLO para brindar información a un controlador tolerante a fallas para mejorar el desempeño de este, ante fallas abruptas que pueda representar, mediante la dinámica completa de la falla presentada.

Se ha considerado implementar el GDLO en algún sistema en línea, de tal manera que se pueda conocer la existencia de fallas abruptas en tiempo real, de tal forma que ayude a la optimización en la detección, estimación y la aplicación de un control para fallas que ocurran en dicho sistema.

En una de las pruebas mostradas en este trabajo se presentó el caso de estimación de fallas variantes en el tiempo, aunque el diseño de los observadores fue planteado para estimar fallas abruptas, los observadores presentaron un buen desempeño. Como trabajo futuro se podría realizar un análisis completo del diseño del observador para fallas variantes en el tiempo dándole así el sustento matemático.

# Bibliografía

- Alessandri, A. and Coletta, P. (2001). Design of luenberger observers for a class of hybrid linear systems. In *International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, pages 7–18. Springer.
- Battle, V. F. (2009). Robots flexibles: Hacia una generación de robots con nuevas prestaciones. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3:24–41.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., and Schröder, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*.
- Bolajraf, M., Tadeo, F., Alvarez, T., and Rami, M. A. (2010). State-feedback with memory for controlled positivity with application to congestion control. *IET Control Theory & applications*, 4:2041–2048.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam.
- Briat, C. (2014). Linear parameter-varying and time-delay systems. *Analysis, Observation, Filtering & Control*, 3:335–394.
- Chen, L., Edwards, C., and Alwi, H. (2019). Sensor fault estimation using LPV sliding mode observers with erroneous scheduling parameters. *Automatica*, 101:66–77.
- Chen, W., Chen, W.-T., Saif, M., Li, M.-F., and Wu, H. (2014). Simultaneous fault isolation and estimation of lithium-ion batteries via synthesized design of Luenberger and learning observers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22:290–298.
- Chen, W. and Chowdhury, F. N. (2007). Simultaneous identification of time-varying parameters and estimation of system states using iterative learning observers. *International Journal of Systems Science*, 38:39–45.
- Chen, W. and Saif, M. (2001). An iterative learning observer-based approach to fault detection and accommodation in nonlinear systems. pages 4469–4474.
- Choi, S.-B., Thompson, B. S., and Gandhi, M. V. (1995). Control of a single-link flexible manipulator fabricated from composite laminates. *Journal of Robotic Systems*, 12:45–54.
- Daafouz, J., Riedinger, P., and Jung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:1883–1887.

- Darouach, M., Zasadzinski, M., and Xu, S. J. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE transactions on automatic control*, 39:606–609.
- Dorf, R. C., Bishop, R. H., Canto, S. D., Canto, R. D., and Dormido, S. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación.
- Edwards, C. and Tan, C. P. (2006). A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction. *European Journal of Control*, 12:245–260.
- Edwards, C., Yan, X.-G., and Spurgeon, S. K. (2007). On the solvability of the constrained Lyapunov problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52:1982–1987.
- Fend, M. (2005). Whisker-based texture discrimination on a mobile robot. In *European Conference on Artificial Life*, pages 302–311. Springer.
- Garcia, A., Feliu, V., and Somolinos, J. (2003). Experimental testing of a gauge based collision detection mechanism for a new three-degree-of-freedom flexible robot. *Journal of Robotic Systems*, 20:271–284.
- Graham, D. and Lathrop, R. C. (1953). The synthesis of "optimum" transient response: criteria and standard forms. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, 72:273–288.
- Isermann, R. (2006). *Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media.
- Jia, Q., Chen, W., Jin, Y., Zhang, Y., and Li, H. (2014). A new strategy for fault estimation in Takagi-Sugeno fuzzy systems via a fuzzy learning observer, 3228-3233.
- Jia, Q., Chen, W., Wang, P., and Zhang, Y. (2016a). Design of a pd-type learning observer for reconstruction of actuator faults in descriptor systems. *IET Control Theory & Applications*, 11:17–24.
- Jia, Q., Chen, W., Zhang, Y., and Li, H. (2015). Fault reconstruction and fault-tolerant control via learning observers in Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems with time delays. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 62:3885–3895.
- Jia, Q., Chen, W., Zhang, Y., and Li, H. (2016b). Fault reconstruction for Takagi-Sugeno fuzzy systems via learning observers. *International Journal of Control*, 89:564–578.
- Jia, Q.-X., Zhang, Y.-C., Chen, W., and Shen, Y. (2012). A novel fault reconstruction approach to satellite attitude control system via learning unknown input observer and  $h_\infty$  techniques. In *American Control Conference (ACC)*, 5160-5162.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, third edition.
- Koenig, D. and Mammar, S. (2002). Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(12):2057–2062.

- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and Schutter, B. D. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*.
- Lim, H.-o. and Tanie, K. (1999). Collision-tolerant control of human-friendly robot with viscoelastic trunk. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 4:417–427.
- Lin, Y. and Du, J. (2016). Fault-tolerant control for dynamic positioning of ships based on an iterative learning observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1116-1122.
- Luenberger, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8:74–80.
- Luenberger, D. G. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16:596–602.
- Marquez, H. J. (2003). A frequency domain approach to state estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 340:147–157.
- Middleton, R. H., Goodwin, G. C., and Longman, R. W. (1989). A method for improving the dynamic accuracy of a robot performing a repetitive task. *The International Journal of Robotics Research*, 8:67–74.
- Mohammadpour, J. and Scherer, C. W. (2012). *Control of linear parameter varying systems with applications*.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Osorio Gordillo, G. L. (2011). Observadores para sistemas singulares LPV. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Osorio Gordillo, G. L. (2015). *Observateurs des systèmes singuliers incertains: application au contrôle et au diagnostic*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- Osorio Gordillo, G. L., Astorga Zaragoza, C. M., Pérez Estrada, A. J., Vargas Méndez, R. A., Darouach, M., and Boutat-Baddas, L. (2018). Fault estimation for descriptor linear systems based on the generalised dynamic observer. *International Journal of Systems Science*, 49:2398–2409.
- Osorio Gordillo, G. L., Darouach, M., Boutat-Baddas, L., and Astorga Zaragoza, C. M. (2015). Generalized dynamic observers for LPV singular systems.
- Pérez Estrada, A. J., Osorio Gordillo, G. L., Darouach, M., Alma, M., and Olivares Peregrino, V. H. (2017a). Generalized dynamic observer design for discrete LPV systems with parameter dependent Lyapunov functions. pages 1–6.
- Pérez Estrada, A. J., Osorio Gordillo, G. L., Darouach, M., and Olivares Peregrino, V. H. (2017b). Generalized dynamic observers for LPV systems. *Congres Nacional de Control Automático. Monterrey, Nuevo León, México*.

- Rajamani, R. and Cho, Y. (1998). Existence and design of observers for nonlinear systems: relation to distance to unobservability. *International Journal of Control*, 69:717–731.
- Rodrigues, M., Hamdi, H., Theilliol, D., Mechmeche, C., and BenHadj Braiek, N. (2015). Actuator fault estimation based adaptive polytopic observer for a class of LPV descriptor systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25:673–688.
- Shamma, J. S. (1988). *Analysis and design of gain scheduled control systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Skelton, R., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K. (1998). A unified algebraic approach to linear control design. *A Unified Algebraic Approach to Control Design*, pages 1–285.
- Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (2008). *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- Unbehauen, H. (2009). *Control systems, robotics and automation, fault analysis and control*. Eolss Publisher.
- Verde, C., Gentil, S., and Morales-Menéndez, R. (2013). *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Editorial Trillas.

# Anexos



# Anexo A

## Índices de desempeño IAE, ISE e ITAE

Un índice de desempeño es una medida cuantitativa del comportamiento de un sistema y se elige de forma que resalte las especificaciones importantes del sistema (Dorf et al. (2005)).

Un sistema se considera óptimo cuando sus parámetros se ajustan de tal forma que el índice alcanza un valor extremo, generalmente un valor mínimo. Para que un índice de desempeño resulte útil siempre debe ser un número positivo o cero, de tal forma que el mejor comportamiento se define como aquel que minimiza este índice (Dorf et al. (2005)).

Diversos índices de desempeño son empleados en la literatura, la selección de dichos índices depende del tipo de comportamiento que se quiera analizar y de las características del sistema.

La integral del cuadrado del error (ISE, por sus siglas en inglés Integral Squared Error) se expresa como:

$$ISE = \int_0^t e^2(t) dt \quad (\text{A.0.1})$$

Este índice penaliza grandes errores y discrimina entre respuestas excesivamente sobreamortiguadas y subamortiguadas, el mínimo valor de la integral ocurre para un valor crítico de amortiguamiento. Otro índice empleado para reducir la contribución del error inicial, así como para destacar los errores que se producen después de la respuesta (Graham and Lathrop (1953)), es el valor de la integral del tiempo multiplicada por el error absoluto (ITAE, por sus siglas en inglés Time-weighted Absolute Error), dicho índice se define a continuación:

$$ITAE = \int_0^t t|e(t)| dt \quad (\text{A.0.2})$$

Otro índice particularmente útil para estudios de simulación, es el valor de la integral del error absoluto (IAE, por sus siglas en inglés Integral of Absolute Error), es un índice más sensible que el ISE, debido a esto, el IAE tiende a dar tiempos largos de establecimiento y sobrepicos más altos. El IAE se define como:

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt \quad (\text{A.0.3})$$

Existen otros índices de desempeño además de los que se describen anteriormente, sin embargo, para los objetivos del presente trabajo se emplean los mencionados previamente.