



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Doctorado

Cuantificación de la capacidad de regeneración de  
energía en vehículos sujetos a vibración estocástica

presentada por

**MC. Eduardo Barredo Hernández**

como requisito para la obtención del grado de  
**Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

Director de tesis

**Dr. Jorge Colín Ocampo**

Codirector de tesis

**Dr. Manuel Arias Montiel**

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2020.



# EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA



10-000003  
Módulo de ASESOR

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico  
Departamento de Ingeniería Mecánica

"2000. Año de Luisa Viterbo, Heroína del Ecuador"

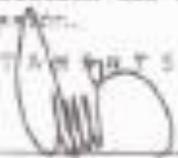
Cuenca, Mor., a 25 de mayo de 2004

DR. OSWALDO VICENTE CARRERO RAMÍREZ  
DIRECTOR ACADÉMICO  
P R E S E N T E  
R.

Año: DR. WILBERT MELCHOR ALDICE  
PRESIDENTE DEL CLAUSTRO DOCTORAL  
DEL DEPARTAMENTO DE ING. MECÁNICA

Los abajo firmantes, miembros del Comité Técnico del estudiante Eduardo Barredo Hernández manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado: "Caracterización de la capacidad de regeneración de un tipo de tejidos sujetos a vibración estocástica", realizada bajo la dirección del Dr. Jorge Colín Coampo y la codirección del Dr. Manuel Arias Montiel, el comité es ACEPTA para promover a su impresión.

A T E N T A M E N T E

  
DR. ARTURO AGUIRRE PILEGO  
CENIDET

*Szwedowicz*  
DR. DANIELE SŁAWOMIR SZWEDOWICZ NABIE  
CENIDET

  
DR. LUIS GERARDO VELA VALDÉS  
CENIDET

  
DR. JIM NORTH CHAIRES  
CIATED

  
DR. JORGE COLÍN COAMPO  
CENIDET

  
DR. MANUEL ARIAS MONTEL  
ITM

Envío: W. E. Tecnología Médica Ecuatoria Data del Departamento de Ingeniería Mecánica  
A. C. Dr. Oswaldo Vicente Carrero Ramírez, Director Académico  
C. P. Expediente





"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos **01/junio/2020**

OFICIO No. SAC/ 158/2020

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**EDUARDO BARREDO HERNÁNDEZ**  
**CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**P R E S E N T E**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Expediente  
CVGR/CHG

# Dedicatoria

*En memoria de mis padres,*

*Víctor Barredo Villareal y María Inés Hernández Castellanos*

# Agradecimientos

*Al CENIDET por darme la oportunidad de realizar este trabajo de investigación, y al CONACYT por proporcionar los medios económicos también. Por otro lado, mis agradecimientos más sinceros al Dr. Jorge Colín Ocampo por confiar en mí, y que, gracias a esa confianza se lograron publicaciones en revistas indizadas en JCR de cuartil Q1. Al Dr. José Gabriel Mendoza Larios por sus valiosas sugerencias y consejos durante el proceso de las publicaciones de los artículos, y por su valiosa amistad. Al Dr. Jan Mayen Chaires por su interés en mejorar tanto la calidad de la tesis doctoral como la de los artículos publicados, en realidad, estoy completamente agradecido con estas personas.*

## Resumen

A medida que incrementa la demanda energética en el mundo, muchos temas y líneas de investigación en energías verdes han emergido durante las dos últimas décadas, las cuales se pueden mencionar algunas; recuperación de energía térmica desperdiciada (recovery of wasted heat energy), energía regenerativa por frenado KERS (kinetic energy recovery system), y la energía vibratoria disipada en los amortiguadores hidráulicos del sistema de suspensión del vehículo. Existe una gran cantidad de energía cinética que se está disipando en el sistema de suspensión automotriz, que se puede transformar en energía eléctrica a través de amortiguadores regenerativos inteligentes. Sin embargo, realizar tal tarea es complicado debido a los equilibrios entre los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión y el de regeneración de energía. Por lo tanto, en este trabajo de investigación, se proporciona una perspectiva del potencial de regeneración de energía considerando; dinámicas lineales y no lineales del modelo completo del vehículo, perfiles estocásticos estacionarios y no estacionarios. Adicionalmente, se presenta un diseño mejorado del sistema de suspensión pasivo considerando redes mecánicas basadas en inersores y amortiguadores semi activos también. A través de la optimización multivariable no lineal, se demostró que el diseño propuesto supera el rendimiento dinámico de las suspensiones reportadas en la literatura. Finalmente, se sugiere realizar trabajos futuros para la construcción del sistema propuesto.

## **Abstract**

As the world's energy demand increases, many topics and lines of research in green energy have emerged during the last two decades, which can be mentioned some; recovery of wasted heat energy, regenerative energy by braking KERS (kinetic energy recovery system), and the dissipated vibratory energy into the hydraulic shock absorbers of the vehicle suspension system. There is a large amount of kinetic energy being dissipated in the automotive suspension system, which can be transformed into electrical energy through smart regenerative dampers. However, performing such a task is difficult due to the balances between the dynamic performance indices of the suspension system and the power regeneration index. Therefore, in this research work, a perspective of the energy regeneration potential is provided considering; linear and nonlinear dynamics of the complete vehicle model, stationary and non-stationary stochastic profiles. Additionally, an improved design of the passive suspension system is presented considering mechanical networks based on inerters and semi-active dampers as well. Through multivariable nonlinear optimization problems, it was demonstrated that the proposed design outperforms the dynamic performance of the suspensions reported in the literature. Finally, it is suggested to carry out future works for the construction of the proposed system.

# Notaciones

Notaciones	
Notación	Descripción
$I_{xz}, I_{xy}, I_{yz}$	Productos cruz de inercia de masa de la masa suspendida del vehículo
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Momentos de inercia de masa alrededor de los ejes centroidales $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
$M$	Masa suspendida del modelo cuarto de vehículo
$m$	Masa no suspendida del modelo cuarto de vehículo
$k, c$	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento del sistema de suspensión del modelo cuarto de vehículo
$k_t$	Coefficiente de rigidez del neumático del modelo cuarto de vehículo
$\omega_1, \omega_2$	Frecuencias naturales no amortiguadas
$q$	Relación de frecuencias naturales no amortiguadas
$\mu$	Relación de masas (masa no suspendida a masa suspendida)
$\zeta$	Factor de amortiguamiento del sistema de suspensión
$\Omega$	Relación de frecuencias forzadas
$x_{wfr}, x_{wfl}, x_{wrl}, x_{wrr}$	Desplazamientos longitudinales de las masas no suspendidas del modelo completo del vehículo
$x_{bfr}, x_{bfl}, x_{brl}, x_{brr}$	Desplazamientos longitudinales de la masa suspendida del modelo completo del vehículo
$x_{gfr}, x_{gfl}, x_{grl}, x_{grr}$	Excitación estocástica en cada neumático del modelo completo de vehículo
$x_c$	Desplazamiento longitudinal de la masa suspendida
$I_p, I_r$	Momentos polares de inercia de la masa suspendida del modelo completo de vehículo
$\theta_p, \phi_r$	Movimientos rotacionales de la masa suspendida del vehículo completo
$[\mathbf{M}_s]$	Matriz de masas
$[\mathbf{M}_u]$	Matriz de masas de los neumáticos
$[\mathbf{B}_f]$	Matriz de inercia rotacional de las redes mecánicas $C_2, C_3, C_4$
$[\mathbf{L}]$	Matriz de las dimensiones geométricas del vehículo
$[\bar{\mathbf{L}}]$	Solución única de la ecuación de Lyapunov
$[\mathbf{K}_s]$	Matriz de rigidez de las suspensiones del vehículo
$[\mathbf{K}_t]$	Matriz de rigidez de los neumáticos del vehículo
$[\mathbf{K}_f], [\mathbf{K}_F]$	Matrices de rigidez de la red mecánica $C_1$
$[\mathbf{C}]$	Matriz de amortiguamiento del sistema de suspensión del vehículo
$[\mathbf{C}_f], [\mathbf{C}_F]$	Matrices de amortiguamiento de la red mecánica $C_1$
$E[\ ]$	Valor esperado de un proceso estocástico estacionario
$\sigma_x^2$	Varianza del módulo cuadrado de una función frecuencial continua
$S_{aa}$	Densidad espectral de potencia (PSD)
$\mathcal{H}_2$	Norma estándar para la determinación de la energía total de vibración
$\mathcal{H}_\infty$	Norma estándar para la minimización de amplitudes resonantes
$\tilde{J}_{C_i}$	Índices de rendimientos dinámicos normalizados
$\% \tilde{J}_{Acel, C_i}$	Mejoramiento del índice de aceleración
$\% \tilde{J}_{Susp.Def, C_i}$	Mejoramiento del índice de la deflexión del sistema de suspensión
$\% \tilde{J}_{TyreLoad, C_i}$	Mejoramiento del índice de la carga dinámica
$\% \tilde{J}_{Pow.Dissip, C_i}$	Mejoramiento del índice de la capacidad de disipación de energía
$\Psi$	Cuantificación del potencial de regeneración de energía total

# Índice general

<b>Dedicatoria</b> .....	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b> .....	<b>II</b>
<b>Resumen</b> .....	<b>III</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>IV</b>
<b>Notaciones</b> .....	<b>V</b>
<b>Índice de figuras</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Índice de tablas</b> .....	<b>XIII</b>
<b>Capítulo 1: Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1. Tecnologías en suspensiones automotrices.....	1
1.2. Planteamiento del problema .....	5
1.3. Objetivos de la tesis .....	6
1.3.1. Objetivo general.....	6
1.3.2. Objetivos específicos .....	6
1.4. Justificación .....	6
1.5. Contribución del trabajo al estado de arte .....	7
1.6. Organización de la tesis.....	7
<b>Capítulo 2: Antecedentes</b> .....	<b>9</b>
2.1. Aspectos generales de las suspensiones regenerativas automotrices .....	9
2.1.1. Amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales .....	13
2.1.2. Amortiguadores regenerativos electromecánicos .....	16
2.1.3. Amortiguadores regenerativos electrohidráulicos.....	26
2.1.4. Conclusión del estado de arte .....	31
<b>Capítulo 3: Marco teórico</b> .....	<b>34</b>
3.1. Dinámica de vehículos.....	34
3.2. Modelo del sistema cuarto de vehículo pasivo.....	35
3.3. Puntos de equilibrio del modelo cuarto de vehículo .....	37
3.4. Modelo del cuarto de vehículo simplificado .....	38
3.5. Propiedades invariantes del modelo cuarto de vehículo .....	39
3.6. Modelo dinámico del vehículo completo .....	43
3.7. Procesos estocásticos estacionarios y no estacionarios.....	46
3.7.1. Estacionariedad, ergodicidad, valores promedios y esperados.....	46
3.7.2. Medidas de rendimiento dinámico de suspensiones automotrices .....	49
3.7.3. Norma $\mathcal{H}_2$ y su optimización .....	50
3.7.4. Método de Newton-Raphson .....	51
3.7.5. Programación Cuadrática Secuencial (SQP) .....	53
3.7.6. Norma $\mathcal{H}_\infty$ y su optimización .....	57
<b>Capítulo 4: Modelado y simulación numérica</b> .....	<b>59</b>
4.1. Análisis en el dominio de la frecuencia de la suspensión propuesta.....	59
4.2. Modelado matemático del vehículo completo con impedancias mecánicas y sus representaciones en espacios de estados .....	62
4.3. Cálculo de los índices de rendimiento dinámico.....	68
4.4. Optimización de los índices de rendimiento .....	70
4.5. Cuantificación de regeneración de energía en vehículos .....	77
4.5.1. Simulación numérica del primer modo de excitación estocástica estacionaria .....	85

4.5.2.	Simulación numérica del segundo modo de excitación estocástica estacionaria	
	87	
4.5.3.	Simulación numérica del tercer modo de excitación estocástica estacionaria...	88
4.5.4.	Simulación numérica considerando los ciclos de conducción transitorio .....	90
<b>Capítulo 5: Conclusiones</b>	.....	<b>94</b>
<b>Apéndice A: Funciones <math>B_i^{J_{1,C_j}}</math> y <math>A_{i,C_j}</math></b>	.....	<b>96</b>
<b>Referencias</b>	.....	<b>97</b>

## Índice de figuras

Figura 1.1: Diagrama del flujo de energía producida por el combustible fósil de un vehículo de pasajeros. (Imagen reproducida y adaptada de la Ref. [1]).	4
Figura 2.1: Energía disponible para recolectar considerando diferentes niveles de intensidad de vibración; (a) potencial de la eficiencia del combustible utilizando amortiguadores regenerativos, (b) potencial de aprovechamiento de energía para diferentes tipos de vehículo (imágenes adaptadas con permisos de derecho de autor [19]).	11
Figura 2.2: Diagrama de flujo de energía vibracional en una suspensión con amortiguador regenerativo (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [29]).	12
Figura 2.3: Recolector electromagnético lineal de cuatro fases (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [19]).	13
Figura 2.4: Recolector electromagnético lineal de ocho polos (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [43]).	15
Figura 2.5: Recolector electromagnético lineal para usos en túneles de carretera (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor[46]).	15
Figura 2.6: Amortiguadores regenerativos basados en transmisión mecánica; (a) transmisión cremallera-piñón; (b) transmisión tornillo-bolla (Imagen adaptada de la Ref. [61]).	16
Figura 2.7: Diagrama del amortiguador electromecánico de recolección de energía basado en múltiples mecanismos de tornillo-bola y múltiples generadores eléctricos controlados; (a) modelo 3D, (b) el amortiguador regenerativo en el sistema de suspensión, (c) diagrama del mecanismo de transmisión de potencia mecánica. (Imagen adaptada de la Ref.[68]).	18
Figura 2.8: Amortiguador regenerativo electromecánico basado en doble transmisión de tornillo-bola; (1) vástago del amortiguador, (2) tornillo izquierdo, (3) tornillo derecho, (4) tuerca del tornillo, (5) embrague unidireccional, (6) engrane, (7) piñón, (8) generador eléctrico. (imagen adaptada de la Ref. [70]).	19
Figura 2.9: Amortiguador regenerativo electromecánico basado en el mecanismo tornillo-bola con doble sistema de acoplamiento. (imagen adaptada de la Ref. [71]).	20
Figura 2.10: Amortiguador regenerativo electromecánico autoalimentado basado en el mecanismo tornillo-bola.; (1) manga de conexión 1, (2) carcasa del estator, (3) rotor, (4) tuerca del tornillo de bola, (5) eje del tornillo de bola (por ejemplo, vástago de embolo), (6) carcasa del generador, (7) salida de energía eléctrica, (8) cubierta 2, (9) fluido MR, (10) bobina, (11) cubierta 1, (12) mecanismo de amortiguamiento controlable. (imagen adaptada de la Ref. [73]).	21

Figura 2.11: Amortiguador regenerativo electromecánico con transmisión piñón-cremallera y con doble sistema de embragues unidireccionales. (imagen adaptada de la Ref.[29]).	22
Figura 2.12: Sistema de recolección de energía cinética ferroviaria a través de un mecanismo de doble transmisión de potencia. (imagen adaptada de la Ref.[80]).	23
Figura 2.13: Recolector de energía cinética ferroviaria con mecanismo de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la Ref.[83]).	24
Figura 2.14: Amortiguador electromecánico de accionamiento indirecto basado en el mecanismo de dientes-brazo. (imagen adaptada de la Ref. [91]).	25
Figura 2.15: Amortiguador regenerativo con transmisión mecánica de engranajes helicoidales y embragues unidireccionales de rodillos. (imagen adaptada de la Ref. [92]).	26
Figura 2.16: Amortiguador regenerativo electrohidráulico sin mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la Ref. [98]).	27
Figura 2.17: Amortiguador regenerativo electrohidráulico con mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento: (a) dispositivo en 3D, (b) circuito de recolección de energía. (imagen adaptada de la Ref.[99]).	28
Figura 2.18: Amortiguador regenerativo electrohidráulico de doble tubo con mecanismo de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la Ref. [101]).	29
Figura 3.1: Grados de libertad del cuerpo de un vehículo sin restricciones. CG, centro de gravedad.	34
Figura 3.2: Representación de un sistema de suspensión en un cuarto de vehículo. (Imagen reproducida y adaptada de la Ref.[9]).	35
Figura 3.3: Representación de un sistema de suspensión en un cuarto de vehículo simplificado.	37
Figura 3.4: Frecuencias y amplitudes invariantes de la FRF de la aceleración de la masa suspendida del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra solida representa a una suspensión estándar)	41
Figura 3.5: Frecuencia y amplitud invariante de la FRF de la deflexión de la suspensión del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra solida representa a una suspensión estándar).	41
Figura 3.6: Frecuencias y amplitudes invariantes de la FRF de la carga dinámica en el neumático del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra solida representa a una suspensión estándar).	42
Figura 3.7: Frecuencia y amplitud invariante de la FRF de la potencia disipada en el sistema de suspensión del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra solida representa a una suspensión estándar).	42
Figura 3.8: Representación cinética del modelo del vehículo completo.	43
Figura 3.9: Señales vibratorias aleatorias; (a) señal aleatoria estacionaria, (b) señal estacionaria no estacionaria. (Imagen adaptada de la Ref.[112]).	47

Figura 4.1: Red mecánica propuesta conectada a un aislador de vibraciones.....	59
Figura 4.2: Modelo de vehículo completo con la red mecánica propuesta.....	63
Figura 4.3: Redes mecánicas basadas en inersores.....	64
Figura 4.4: Grafica 3D simi-log para $J_{C1}(M_s, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f, C_F)$ de la red mecánica $C_1$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible.....	72
Figura 4.5: Comportamiento geométrico del índice normalizado $J_{C2}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f)$ de la red mecánica $C_2$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible. ....	73
Figura 4.6: Comportamiento geométrico del índice normalizado $J_{C4}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f)$ de la red mecánica $C_4$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible. ....	74
Figura 4.7: Curvas FRF óptimas de la aceleración del chasis considerando las redes mecánicas con inersores y la propuesta en este trabajo de tesis.....	74
Figura 4.8: Curvas FRF óptimas de la deflexión del sistema de suspensión.....	74
Figura 4.9: Curvas FRF óptimas de la carga dinámica del neumático sobre la carretera. .....	74
Figura 4.10: Curvas FRF óptimas de la potencia disipada en el sistema de suspensión. .....	75
Figura 4.11: Perfiles artificiales de carretera clase A-D.....	75
Figura 4.12: Comparación de la potencia disipada instantánea en el sistema de suspensión considerando tanto la suspensión pasiva como las redes mecánicas estudiadas.....	76
Figura 4.13: Comparación de las respuestas de la deflexión del sistema de suspensión considerando las redes mecánicas estudiadas.....	76
Figura 4.14: Comparación de las respuestas de la aceleración del chasis considerando las redes mecánicas estudiadas.....	76
Figura 4.15: Comparación de las respuestas de la carga dinámica del neumático sobre la carretera considerando tanto las redes mecánicas estudiadas como la suspensión pasiva convencional.....	76
Figura 4.16: Simulación numérica de los perfiles artificiales de la carreteras clase C y D con sus respectivos retardos.....	78
Figura 4.17: Ciclo de conducción modal estandar NEDC y EUDC. ....	79
Figura 4.18: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D creados utilizando los ciclos de conducción NEDC y EUDC. ....	80
Figura 4.19: Ciclo de conducción de velocidad transitoria WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure).....	80
Figura 4.20: Perfiles artificiales no estacionarios para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure).....	80

Figura 4.21: Ciclo de conducción de velocidad transitoria FTP (Federal Test Procedure). .....	81
Figura 4.22: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria FTP (Federal Test Procedure).....	81
Figura 4.23: Ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test). .....	81
Figura 4.24: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test).....	82
Figura 4.25: Perfiles artificial para la carretera clase C con retardo de tiempo variables considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test). .....	82
Figura 4.26: Código general en Matlab-Simulink del modelo dinámico de siete grados de libertad del vehículo. Los cuadros de líneas discontinuas representan las funciones y subfunciones tanto de las fuerzas dinámicas como de la cinemática lineal y no lineal del vehículo. ....	86
Figura 4.27: Potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión del vehículo completo cuando la velocidad es $V_t = 20$ m/s y considerando las clases diferentes de carretera.....	86
Figura 4.28: Potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión del vehículo completo cuando la velocidad es $V_t$ varía desde 5 hasta 210 y fijando la rugosidad de la carretera (clase C). .....	86
Figura 4.29: Potencia instantánea disipada tanto en las suspensiones frontales como traseras del vehículo considerando que la velocidad de conducción y perfil artificial de carretera son 90 km/h y clase C, respectivamente. ....	87
Figura 4.30: Potencia instantánea disipada en los cuatro amortiguadores del sistema de suspensión del vehículo considerando que la velocidad de conducción y perfiles artificiales de carretera son 90 km/h y clase C y D, respectivamente. ....	88
Figura 4.31: Potencia instantánea disipada tanto en el sistema de suspensión delantero como en el trasero del vehículo completo cuando la velocidad $V_t$ varia desde 5 hasta 210 km/h y fijando las rugosidades de la carretera (clase C y D). ....	89
Figura 4.32: Niveles de aceleración instantánea del cuerpo del vehículo considerando que la velocidad de conducción del vehículo es 90 km/h sujeto a vibración estocástica estacionaria (carretera clase C y D).....	89
Figura 4.33: Potencia instantánea disipada tanto en el sistema de suspensión delantero como en el trasero del vehículo completo considerando el ciclo de conducción NEDC y EUDC. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) potencia disipada en las suspensiones del eje trasero del vehículo. ....	90
Figura 4.34: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción transitorio WLTP. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero.....	91

Figura 4.35: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción FTP. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero. .... 92

Figura 4.36: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero. .... 92

## Índice de tablas

Tabla 4:1: Parámetros óptimos de las redes mecánicas $C_1$ , $C_2$ y $C_4$ .....	72
Tabla 4:2: Niveles de rugosidad de la carretera clasificados por la norma ISO 8608...	75

# 1. Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Tecnologías en suspensiones automotrices

La suspensión y el neumático son probablemente los elementos de un vehículo que afectan principalmente su comportamiento dinámico, sin embargo, los efectos aerodinámicos también repercuten en la estabilidad dinámica de un vehículo. La función principal de un sistema de suspensión en la dinámica de un vehículo es intuitiva: establece el vínculo entre la carretera y la carrocería del vehículo, lo cual involucra no solo la dinámica vertical, sino también las dinámicas de rotación tanto de cabeceo como balanceo (pitch and roll) causadas por sus movimientos no sincronizados. Una suspensión pasiva no logra aislar en su totalidad las vibraciones ocasionadas por las irregularidades de la carretera y por el comportamiento dinámico del chasis. Además, el sistema de suspensión pasiva tradicional presenta los siguientes problemas; no se adaptan a diferentes índices de desempeño tales como el índice del confort (comfort performance), el agarre mecánico de los neumáticos sobre la carretera (road-holding performance), la deflexión del sistema de suspensión (suspension deflection performance), el aumento de la temperatura del aceite del amortiguador hidráulico conduce a la minimización de la fuerza de amortiguamiento. Adicionalmente, desde un punto vista dinámico, el resorte y el amortiguador son los dos elementos mecánicos claves de un sistema de suspensión, mientras que los eslabones mecánicos son principalmente responsables de la cinemática de la suspensión. En términos generales, una suspensión es un filtro mecánico de ancho de banda reducido que atenúa las frecuencias de excitación del espectro de potencia vibratorio del perfil irregular de la carretera. Las respuestas del sistema bajo el efecto de excitación estocástica son típicamente; la aceleración del cuerpo del vehículo (chasis), la deflexión del sistema de suspensión, y el nivel de carga dinámica del neumático sobre la carretera. Dado que la fuente de excitación del sistema es una señal vibratoria estocástica, las respuestas del sistema también se comportan de la misma manera. En consecuencia, el sistema de suspensión tiene como objetivo minimizar estas respuestas y encontrar el mejor compromiso entre ellas. Sin embargo, lograr un excelente compromiso entre estos índices de rendimiento dinámico en una suspensión pasiva es realmente imposible. En la literatura se ha reportado que el índice de la comodidad se obtiene considerando un nivel bajo de amortiguamiento, y además se presenta en el rango de frecuencias de excitación de 1-4 Hz. Por otro lado, para lograr una adherencia excelente de los neumáticos sobre la carretera a frecuencias altas de excitación, se debe incrementar el nivel de amortiguamiento de la energía vibratoria del sistema de suspensión. Sin embargo, lograr simultáneamente estos objetivos en un sistema de suspensión pasivo es imposible. Con el objetivo de incrementar el ancho de banda de operación de estos sistemas, un novedoso elemento mecánico llamando inersor ha sido propuesto recientemente por Smith. El efecto de inercia rotacional de este dispositivo mecánico en un sistema de suspensión convencional es sintonizar y mitigar vibración estocástica de banda ancha. Aunque, este dispositivo proporciona excelentes características

dinámicas al sistema de suspensión, el equilibrio dinámico entre estos índices de rendimiento aún persiste.

Con el objetivo de lograr un máximo rendimiento del sistema de suspensión, nuevas tecnologías con dispositivos electrónicamente controlables han sido propuestas durante las dos últimas décadas. Las suspensiones automotrices que utilizan un sistema de control para manipular el nivel de fuerza de amortiguamiento en diferentes modos de operación del vehículo, se suelen clasificar en; suspensiones semi activas y totalmente activas. Las suspensiones automotrices activas pueden lograr que el neumático permanezca adherido a la carretera sin afectar las dinámicas de la carrocería del vehículo. Sin embargo, la demanda de consumo de energía de los actuadores (hidráulicos, neumáticos y electromagnéticos) de este tipo de sistema es grande, además de la complejidad, robustez (tamaño), volumen físico, e incertidumbre a la seguridad de los circuitos hidráulicos. Aunque, este tipo de suspensión supera en muchos factores dinámicos al sistema de suspensión pasivo convencional, su única aparición fue en los coches de la fórmula uno. Después de eso, las suspensiones activas no han tenido gran impacto en la industria automotriz debido a su costo alto de fabricación. De hecho, estos sistemas son más convenientes de usar en vehículos donde es importante atenuar vibraciones estocásticas a frecuencias altas de excitación o vibración de banda ancha. Adicionalmente, en los últimos años los sistemas de suspensión activa basada en actuadores hidráulicos han sido mejorados fuertemente en lo que respecta al número de componentes hidráulicos, mecánicos y electromagnéticos. A estos sistemas novedosos se les conoce como suspensiones automotrices interconectados hidráulicamente. Este sistema logra mantener un control electrónico en el ancho de banda, en el cual el rechazo de perturbaciones en el sistema de actuación es increíble. De hecho, la rigidez y amortiguamiento en todos los sistemas de suspensión del vehículo completo se mantienen activos todo el tiempo. Se espera que en los próximos años este tipo de suspensión automotriz represente un papel significativo en el control de vibración en vehículo pesados y de todo terreno.

En la segunda mitad de la década de los noventa, surgió una nueva tendencia en la modernización de los sistemas de suspensión; se hizo cada vez más claro que el mejor compromiso entre el costo (costo de los componentes, peso, sensores y actuadores, consumo de energía, etc.) y el desempeño del sistema de suspensión (comodidad de conducción, mayor agarre mecánico, y seguridad de conducción) se encuentra en otra tecnología de suspensiones controlables electrónicamente. A esta tecnología novedosa se le conoce como la suspensión de amortiguamiento variable o la suspensión semi activa. Durante la última década, esta tecnología sigue siendo la más prometedora y atractiva, y además se ha introducido en la línea de producción masiva de autos, motocicletas, en el control de vibración en edificios, y en el tren de aterrizaje de aviones. Se espera que las suspensiones semi activas desempeñen un papel más importante en los vehículos con motores eléctricos en las ruedas. Actualmente, existen tres tipos de amortiguadores que proporcionan inteligencia semi activa al sistema de suspensión a través un algoritmo de control; estos tipos de amortiguadores inteligentes son dispositivos electrohidráulicos, electroreológicos, y magnetoreológico. Aunque, estos dispositivos ofrecen muchas ventajas con respecto al mejoramiento de las dinámicas

de un vehículo y al tiempo de respuesta de control, la fuerza de saturación y el diseño del algoritmo de control son los aspectos más desafiantes en el proceso de diseño. Las suspensiones semi activas son una mezcla sorprendente de características atractivas, entre todas, las más interesantes son:

- Insignificante demanda de energía. Dado que solo se basan en la regulación de la relación de amortiguamiento, el consumo de potencia se limita a pocos watts requeridos para modificar los orificios hidráulicos y la viscosidad del fluido.
- Seguridad. En una suspensión semi activa la estabilidad siempre está garantizada, por el hecho de que todo el sistema se mantiene disipativo en todo momento.
- Costo y peso bajo. Las principales tecnologías de modulación de amortiguamiento (electrohidráulica, electroreológica, magnetoreológica y amortiguación por aire) se pueden producir (en volúmenes grandes) en bajo costo y con embalajes compactos.
- Mejoramiento significativo en los índices de rendimiento. Al modificar la relación de amortiguamiento de la suspensión, la comodidad y el agarre a la carretera, y la deflexión de la suspensión se modifican continuamente dependiendo de los requisitos dinámicos del sistema.

Como se mencionó anteriormente, la selección de un mejor coeficiente de amortiguamiento de un amortiguador controlable electrónicamente en tiempo real, es una tarea extremadamente desafiante dado que depende principalmente de dos factores; el primero es el diseño del algoritmo de control, y el segundo es si el amortiguador es de conmutación rápida, es decir, el tiempo de *pade* en que cambia el amortiguamiento. Existen tres tecnologías modernas de amortiguadores controlables, los cuales permiten una modificación rápida controlada electrónicamente del coeficiente de amortiguamiento. A continuación, se mencionan.

- La *tecnología electrohidráulica clásica (EH)*. Se basa en válvulas de solenoide localizadas dentro y fuera del cuerpo principal del amortiguador; estos pueden modificar su coeficiente de amortiguamiento modificando el tamaño de los orificios hidráulicos.
- La *tecnología magnetoreológica (MR)*. Se ocupa de los fluidos que pueden cambiar su viscosidad cuando están expuestos a campos magnéticos.
- La *tecnología electroreológica (ER)*. Esta tecnología estudia el comportamiento de los fluidos cuando están expuesto a campos eléctricos.

Estas tecnologías están en una fuerte competencia sobre la base de muchas características y parámetros, tales como; tiempo de respuesta, rango de controlabilidad, gestión de fallas, fiabilidad a largo plazo, costo, peso y embalaje, requerimientos de mantenimiento, requerimientos de electrónica de potencia, etc. El desempeño de los sistemas de suspensión semi activa se encuentra aún en rigurosa investigación tanto en los algoritmos de control como en el diseño del dispositivo. Debido a que el objetivo central de estos tipos de sistemas de suspensión es disipar la energía vibratoria indeseable, muchos investigadores han propuesto regenerarla a

través de transductores regenerativos. Esta energía regenerada puede incrementar la eficiencia del combustible fósil y disminuir las emisiones de CO<sub>2</sub> de los vehículos.

Recientemente, el tema de la regeneración de energía cinética producida por la velocidad del sistema de suspensión, se ha convertido en un tema de mucho interés en la comunidad científica. De hecho, las tecnologías diferentes de regeneración de energía se han venido estudiando y mejorando a medida que los problemas energéticos se vuelven cada vez más urgentes. En la mayoría de los vehículos que utilizan combustible fósil, se ha demostrado que solo el 16% de la energía del combustible se utiliza para conducir el vehículo. Parte de la energía restante se utiliza para alimentar a otros subsistemas del vehículo, además la mayor parte de la energía térmica producida en el motor se disipa en calor. Luego, el porcentaje restante de energía (16%) que mueve al vehículo, se distribuye para vencer los efectos aerodinámicos (4%), resistencia a la rodadura (4%), y en el frenado (4%), ver [Figura 1.1](#). La resistencia a la rodadura se genera principalmente por el espectro estocástico de potencia del nivel de rugosidad de la carretera, el cual induce energía de vibración al sistema de suspensión. Entonces, esta energía vibratoria se transmite al sistema de suspensión, y posteriormente se disipa en forma de calor en el amortiguador.

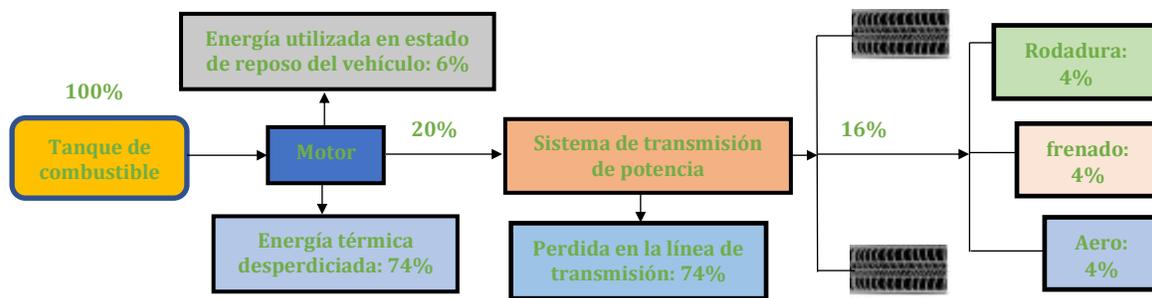


Figura 1.1: Diagrama del flujo de energía producida por el combustible fósil de un vehículo de pasajeros. (Imagen reproducida y adaptada de la [Ref. \[1\]](#)).

En muchos trabajos de investigación se ha concluido que tal energía cinética del sistema de suspensión se puede regenerar por medio de amortiguadores regenerativos inteligentes. Existen básicamente tres tipos de amortiguadores regenerativos que convierten la energía cinética del sistema de suspensión en electricidad, y se clasifican de acuerdo a su principio de operación. Estos tipos de amortiguadores regenerativos son los siguientes; amortiguadores con motores electromagnéticos, amortiguadores electromecánicos, y amortiguadores electrohidráulicos. Cada uno de estos dispositivos tienen sus ventajas y desventajas, que de hecho también determinan su campo de aplicación. Por ejemplo, los amortiguadores regenerativos basados en motores electromagnéticos lineales presentan una eficiencia alta de conversión de energía cinética, sin embargo, estos dispositivos carecen de fuerza de amortiguamiento alta. Los amortiguadores electromecánicos también presentan una eficiencia alta de regeneración de energía, sin embargo, el efecto dinámico de inercia rotacional del mecanismo de rectificación de movimiento deteriora drásticamente los requerimientos dinámicos del sistema de suspensión. Por otra parte, la eficiencia de regeneración de energía de los amortiguadores electrohidráulicos es baja comparada con la de los mencionados anteriormente, sin embargo, este tipo de dispositivo regenerativo aporta

lo niveles necesarios de fuerza de amortiguación al sistema de suspensión. Especialmente, los sistemas de suspensión regenerativos interconectados hidráulicamente. Este tipo de amortiguador puede cambiar rigidez y amortiguamiento para mantener un control activo del ancho de banda siempre que sea necesario en el sistema de suspensión. De hecho, se ha demostrado recientemente que los amortiguadores regenerativos pueden mejorar la eficiencia de los vehículos eléctricos híbridos y totalmente eléctricos. Con el objetivo de lograr mejor gestión en la energía regenerada, diferentes sistemas de rectificación y almacenamiento de energía se han desarrollado y propuesto recientemente; los circuitos eléctricos trifásicos son tan solo uno de ellos, y los sistemas de almacenamiento de energía se basan principalmente en supercapacitores, ultracapacitores, y en baterías electroquímicas. Aunque, este tipo de tecnología es novedosa en el campo de energías limpias, aún se encuentra en rigurosa investigación. De hecho, hay muchos inconvenientes que aún no se han resuelto en estos sistemas, principalmente en la fiabilidad de implementación, diseño de algoritmos de control, análisis de esfuerzos en los elementos estructurales, análisis completo de la cuantificación de energía considerando linealidades y no linealidades de los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos, etc. Por lo tanto, se espera que en los próximos años estos transductores puedan ser instalados en los vehículos eléctricos. Como se mencionó anteriormente, la energía regenerada a través de los amortiguadores regenerativos podría ayudar a mejorar la eficiencia del combustible fósil, y así mismo disminuir las emisiones CO<sub>2</sub> de los vehículos.

## **1.2. Planteamiento del problema**

En los últimos años, muchos investigadores han propuesto diferentes dispositivos de amortiguadores con el propósito de mejorar los índices de desempeño de una suspensión de automóvil. Las suspensiones pasivas no logran mitigar totalmente las vibraciones causadas por el perfil irregular de la carretera. Además, este tipo de suspensiones trabaja en un ancho de banda muy reducido, lo cual significa que el índice del confort está limitado dado que depende en mayor parte del factor de amortiguamiento. Por otra parte, el índice de desempeño del agarre a la carretera (road-holding) depende de la rigidez del resorte, lo cual en una suspensión pasiva no es posible variar. Otro inconveniente que se presenta comúnmente en este tipo de suspensiones es la transmisión de vibración por impacto. Esto ocurre cuando los elementos pasivos de la suspensión alcanzan su máxima carrera. Además, el efecto de la temperatura en el aceite hidráulico del amortiguador afecta en gran medida la fuerza de amortiguación. Es por ello que, estos dispositivos ya están siendo reemplazados por amortiguadores y resortes inteligentes. De hecho, las suspensiones activas logran estos requerimientos de desempeño utilizando actuadores hidráulicos y neumáticos para controlar las dinámicas del auto en todo momento, sin embargo, la implementación de estos sistemas es costosa en cuanto al consumo de potencia, peso, seguridad y viabilidad, etc. En efecto, lograr excelentes índices de desempeño dinámico en una suspensión sin aumentar el costo de fabricación y el consumo de potencia es una tarea de diseño extremadamente difícil, sin embargo, con la ayuda de las redes mecánicas y dispositivos semi activos tal solución podría existir. Por lo tanto, en esta tesis se propone emular el comportamiento de una suspensión activa utilizando una red

mecánica compuesta de amortiguadores semi activos y resortes pasivos. Adicionalmente, se realizarán simulaciones numéricas para la determinación de la capacidad de regeneración de energía en el sistema de suspensión propuesto. Posteriormente, esta energía se puede utilizar en el control semi activo del sistema de suspensión propuesto dando origen a un sistema autoalimentado. Es importante mencionar que, en la mayoría de estudios no se han reportado resultados que consideren perfiles reales de carretera, dinámicas lineales y no lineales del vehículo, etc. En esta tesis también se presenta el análisis de regeneración de energía considerando perfiles artificiales de carretera, los cuales se generan a partir de una ecuación diferencial estocástica. Adicionalmente, con el objetivo de emular el comportamiento de conducción de un vehículo, se propone utilizar perfiles de velocidad de conducción.

### **1.3. Objetivos de la tesis**

#### **1.3.1. Objetivo general**

Diseñar un sistema de suspensión con la capacidad de emular el comportamiento de una suspensión activa, y así mismo determinar la capacidad de regeneración de energía en el sistema propuesto.

#### **1.3.2. Objetivos específicos**

1. Diseñar la red mecánica compuesta de amortiguadores semi activos y resortes pasivos con la capacidad de modificar amortiguamiento y rigidez del sistema.
2. Generar los perfiles artificiales de carretera estacionarios y no estacionarios considerando los ciclos de conducción del vehículo.
3. Acoplar las dinámicas de la red mecánica propuesta (impedancia mecánica) al modelo del vehículo completo con la finalidad de realizar simulaciones numéricas tanto del mejoramiento de aislamiento de vibración como de la capacidad de regeneración de energía.
4. Calcular analíticamente los índices de rendimientos dinámicos del sistema de suspensión propuesto utilizando el concepto de la norma estandar  $\mathcal{H}_2$ .
5. Formular y resolver los problemas de optimización no lineal multiobjetivo.
6. Obtener el diseño óptimo del sistema de suspensión propuesto considerando excitación estocástica al menos para el modelo del cuarto de vehículo.
7. Realizar un análisis de sensibilidad paramétrica del sistema de suspensión propuesto considerando el porcentaje de mejoramiento de los índices de rendimiento en el dominio del tiempo.
8. Cuantificar la capacidad de regeneración de energía utilizando el modelo completo del vehículo, perfiles artificiales estacionarios y no estacionarios, utilizando los ciclos de conducción de velocidad.

### **1.4. Justificación**

En este trabajo de investigación se propone mejorar el rendimiento dinámico del sistema de suspensión convencional utilizando el concepto de redes mecánicas. El

diseño propuesto pretende emular el comportamiento dinámico de una suspensión totalmente activa. En efecto, el objetivo central de esta investigación es modificar los acoplamientos dinámicos a través de amortiguadores semi activos y resortes pasivos, y así mismo modificar las fuerzas de amortiguamiento del sistema. Adicionalmente, se realizan diversas simulaciones numéricas para calcular la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica lineal y no lineal. De hecho, en la literatura no se ha reportado tal análisis del potencial de conversión de energía, y por lo tanto en este trabajo de investigación se realizan extensas simulaciones numéricas. Adicionalmente, se calculan analíticamente los índices de desempeño de la suspensión propuesta tales como; el índice del confort dinámico, el índice de la calidad de adherencia de los neumáticos sobre la carretera, el índice del nivel de deflexión del sistema de suspensión, y el índice de la capacidad de regeneración de energía. Pocos estudios han considerado calcular analíticamente estos índices. Por lo tanto, este trabajo de investigación tiene como objetivo investigar la posibilidad de modificar los coeficientes de amortiguamiento y rigidez del sistema de suspensión. Adicionalmente, al diseño propuesto basado en redes mecánicas se le añadirá la capacidad de generación de energía con el objetivo de producir una suspensión semi activa autoalimentada.

### **1.5. Contribución del trabajo al estado de arte**

En este trabajo de investigación se diseña un sistema de suspensión con la capacidad de regenerar energía eléctrica, y así mismo proporcionar los requerimientos dinámicos necesarios al sistema. Con la finalidad de brindar una perspectiva de regeneración de energía vibratoria en vehículos, extensas simulaciones numéricas se llevan a cabo considerando perfiles artificiales estocásticos estacionario y no estacionarios. De acuerdo, a la revisión bibliográfica extensa realizada en este trabajo, trabajos futuros y oportunidades en energías renovables en vehículos eléctricos se proponen. A pesar de la complejidad del cálculo analítico de los índices de desempeño del sistema propuesto, en este trabajo se calcula el valor esperado (RMS) de la energía total de vibración que fluye a través del sistema de suspensión. Adicionalmente, se formulan problemas de optimización multiobjetivo multivariable no lineal, posteriormente, las soluciones numéricas se obtienen resolviendo ecuaciones no lineales implícitas de alto orden. Luego, soluciones numéricas en el dominio tiempo-frecuencia se proporcionan con el objetivo de cuantificar el mejoramiento del sistema de suspensión propuesto. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo de investigación.

### **1.6. Organización de la tesis**

Este trabajo de investigación está organizado en cinco capítulos que se detallan a continuación.

- En el Capítulo 2, se presenta una revisión extensa del estado de arte de las nuevas tecnologías de amortiguadores regenerativos inteligentes. Adicionalmente, se analiza profundamente las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Se discuten también las diferentes aplicaciones de estos tipos de transductores de regeneración de energía, principalmente, en términos de

eficiencia de regeneración de energía. Al final de esta sección, se presenta rigurosamente la conclusión del estado de arte.

- En el Capítulo 3, se presenta teóricamente el desarrollo de las ecuaciones dinámicas tanto de la cuarta parte como del modelo de vehículo completo. Adicionalmente, se presentan las complicaciones dinámicas que presentan las suspensiones pasivas en términos de sus propiedades invariantes, y también cómo una suspensión semi activa también se limita por estas propiedades intrínsecas del sistema de suspensión. Luego, se presenta la teoría de procesos estocásticos con el objetivo de proporcionar herramientas necesarias para determinar la respuesta dinámica del sistema de suspensión bajo el efecto de este tipo de excitación. Con el objetivo de calcular los índices de desempeño del sistema de suspensión, se presenta la definición teórica de las normas  $\mathcal{H}_\infty$  y  $\mathcal{H}_2$ , de hecho, la norma  $\mathcal{H}_2$  se relaciona directamente con la determinación de la energía de vibración total del sistema. Luego, se presenta la teoría para calcular los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión. Adicionalmente, se presenta la teoría para resolver problemas de optimización multivariables no lineales con y sin restricciones.
- En el Capítulo 4, se presentan los cálculos teóricos de los índices de rendimiento del sistema de suspensión propuesto. Estos índices de rendimiento son los siguientes; índice del confort, índice del agarre mecánico, índice de la deflexión de la suspensión, y el índice del potencial de regeneración de energía. Posteriormente, se realizan comparaciones de las respuestas en el dominio de la frecuencia y tiempo del sistema propuesto considerando las respuestas dinámicas de las suspensiones pasivas con inersor y la convencional también. Posteriormente, se llevan a cabo simulaciones numéricas considerando perfiles artificiales de carretera estocásticos considerando el modelo del vehículo completo. Al final de este capítulo, se determina la capacidad de regeneración de energía en términos de la velocidad de conducción, tipos de carreteras, ciclos de velocidad de conducción, y parámetros del sistema de suspensión.
- En el Capítulo 5. Se presentan las conclusiones y trabajos futuros de esta tesis.

## 2. Capítulo 2

### Antecedentes

#### 2.1. Aspectos generales de las suspensiones regenerativas automotrices

Durante las últimas décadas, las suspensiones pasivas no han cambiado su configuración y estructura mecánica, la cual consta de dispositivos que disipan (amortiguadores) y absorben energía (resortes). Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de estos dispositivos se eligen principalmente de acuerdo a las especificaciones del confort, agarre mecánico, y de la deflexión de la suspensión. Además, las suspensiones convencionales pueden lograr teóricamente un equilibrio entre el confort y el agarre mecánico dado que sus coeficientes de amortiguamiento y rigidez se pueden sintonizar solo en un ancho de banda relativamente angosto. Adicionalmente, un novedoso dispositivo mecánico llamado inersor fue propuesto por Smith y Chen con el objetivo de mejorar las dinámicas de las suspensiones pasivas [2-4]. Cuando este dispositivo se conecta con otros elementos mecánicos se obtienen redes o impedancias mecánicas, de hecho, se ha demostrado teóricamente que al utilizar estas configuraciones, se puede obtener un rendimiento dinámico del 4-16% en la minimización de la aceleración del chasis y de la carrocería del vehículo, disminución de la deflexión del sistema de suspensión, y en la minimización de la carga dinámica del neumático sobre la carretera [5,6]. Aunque el inersor mejora las dinámicas de un sistema de suspensión convencional, el equilibrio entre los índices de rendimiento dinámico aún persiste. Con el objetivo de resolver los inconvenientes de las suspensiones pasivas, las suspensiones semi activas y activas han sido propuestas y estudiadas en [7-10]. Se reveló que las suspensiones activas superan a las semi activas y pasivas en términos de rendimiento dinámico. Sin embargo, las suspensiones activas demandan un fuerte consumo de potencia energética, complejidad estructural, y actuadores demasiado grandes comparadas con las suspensiones semi activas, lo cual implica que el uso de estas tecnologías se restringe a aplicaciones muy específicas [11]. Por lo tanto, las suspensiones semi activas ofrecen un buen compromiso en lo que respecta al costo de fabricación, confiabilidad, tiempo de respuesta, y principalmente bajo consumo energético [8].

Con el objetivo de mejorar tanto las dinámicas como el consumo del combustible de los vehículos eléctricos híbridos, nuevas tecnologías de aprovechamiento de energía han sido propuestas recientemente. Las principales tecnologías de aprovechamiento de energías limpias son las siguientes; recuperación de energía térmica desperdiciada (recovery of wasted heat energy) [12-14], energía regenerativa por frenado KERS (kinetic energy recovery system) [15-17]; y la energía vibratoria disipada en los amortiguadores hidráulicos [13,18]. Una cantidad considerable de energía cinética se disipa en forma de calor en los amortiguadores de fluido viscoso en las suspensiones automotrices pasivas. Esta energía cinética causada por la velocidad relativa del sistema de suspensión se podría regenerar por medio de amortiguadores regenerativos inteligentes, y posteriormente reutilizarla en otros subsistemas del vehículo. Sin embargo, la complejidad para realizar tal tarea es grande y desafiante porque al

transformar la energía vibratoria del sistema a electricidad se involucran muchos aspectos de diseño tales como; el diseño estructural del amortiguador regenerativo, el mecanismo de conversión de energía mecánica traslacional a rotacional, control de las eficiencias mecánicas, eléctricas, hidráulicas del sistema de regeneración, conversión de la energía eléctrica alterna a continua, sistema de almacenamiento (baterías electroquímicas, supercapacitores, y ultracapacitores) de la energía regenerada etc. Por lo tanto, el tema de la recuperación de energía por medio de amortiguadores regenerativos ha adquirido gran atención por parte de los investigadores como de las industrias automotrices, y consecuentemente una posible línea de investigación prometedora en energías limpias [19]. De hecho, la idea subyacente de la regeneración de energía es disminuir las emisiones de CO<sub>2</sub> y aumentar la eficiencia de la energía total producida por el combustible fósil [20,21].

Recientemente, [Abdelkareem et al \[19\]](#). reportaron aspectos importantes sobre el aprovechamiento de la energía cinética producida por el sistema de suspensión, tipos de amortiguadores regenerativos, mecanismos de transferencia de energía vibratoria, cuantificación teórica y experimental del potencial de energía disponible cosechable, y las posibles brechas de investigación en este campo. En esa investigación se concluyó que se puede cosechar una potencia promedio de 350 watts en vehículos de pasajeros considerando perfiles artificiales de carretera ISO/TC108/SC2N67 [22,23], y más de 1000 watts para vehículos pesados y de todo terreno. De hecho, más del 3% o 0.3-0.5 litros por cada 100 km de conducción en ahorro de combustible fósil se podría obtener utilizando este tipo de tecnología novedosa [24], lo cual significa también que las emisiones de CO<sub>2</sub> se reducirían [25-27]. Otro hallazgo importante fue que, más de 13 millones de dólares por año se podrían ahorrar en combustible al aprovechar la energía cinética producida en las suspensiones de los camiones pesados [28]. De hecho, en términos del potencial de aprovechamiento de la energía desperdiciada en los amortiguadores hidráulicos para diferentes tipos de vehículos fue investigado por [Zhang et al. \[12\]](#). En dicha investigación, se reveló que tanto la eficiencia del combustible como la cantidad de energía cosechable depende fuertemente de los niveles de intensidad de vibración de la carretera, velocidad de conducción del vehículo y del tipo de vehículo, tal como se muestra en la [Figura 2.1 \(a\) y \(b\)](#).

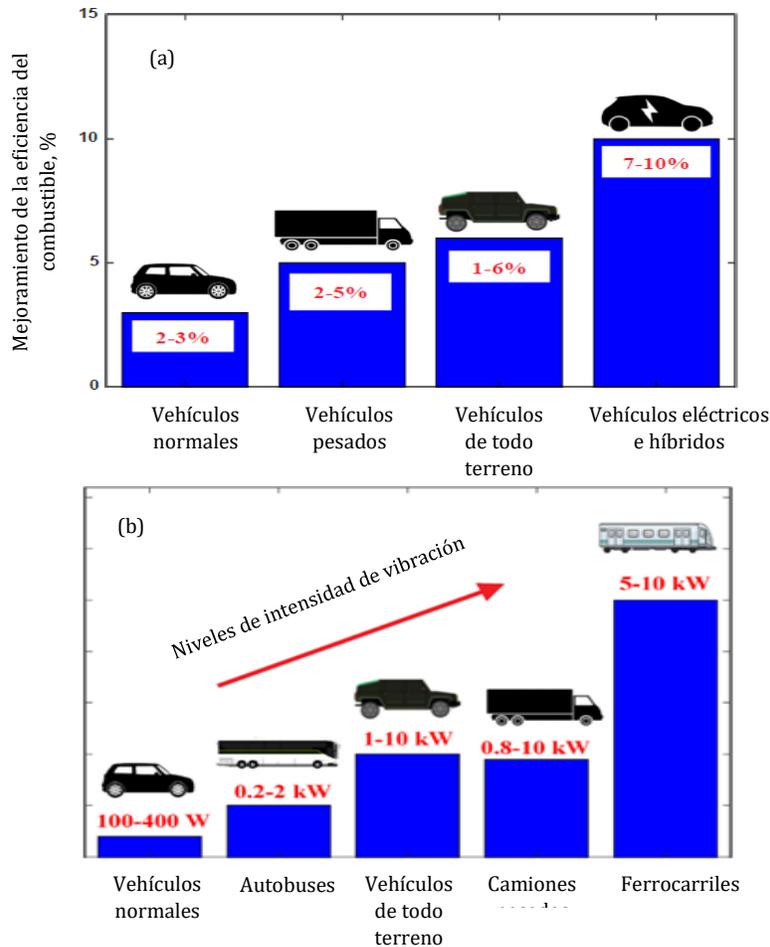


Figura 2.1: Energía disponible para recolectar considerando diferentes niveles de intensidad de vibración; (a) potencial de la eficiencia del combustible utilizando amortiguadores regenerativos, (b) potencial de aprovechamiento de energía para diferentes tipos de vehículo (imágenes adaptadas con permisos de derecho de autor [19]).

En la Figura 2.1 (a) y (b) se puede observar que una gran cantidad de energía cinética se disipa en los amortiguadores de las suspensiones de los vehículos, además la capacidad de regeneración de energía depende fuertemente del nivel de rugosidad de la carretera y de la velocidad del vehículo. Adicionalmente, la eficiencia del combustible se podría mejorar utilizando amortiguadores regenerativos. Por otro lado, diferentes investigadores han esquematizado el flujo de energía cinética a través del sistema de suspensión con el objetivo de explicar las complicaciones y requerimientos para transformar, almacenar, y distribuir la energía recolectada. A continuación, se presenta un esquema general de la recolección de energía en sistemas de suspensión de vehículo, basado en el trabajo de Zhang et al. [29].

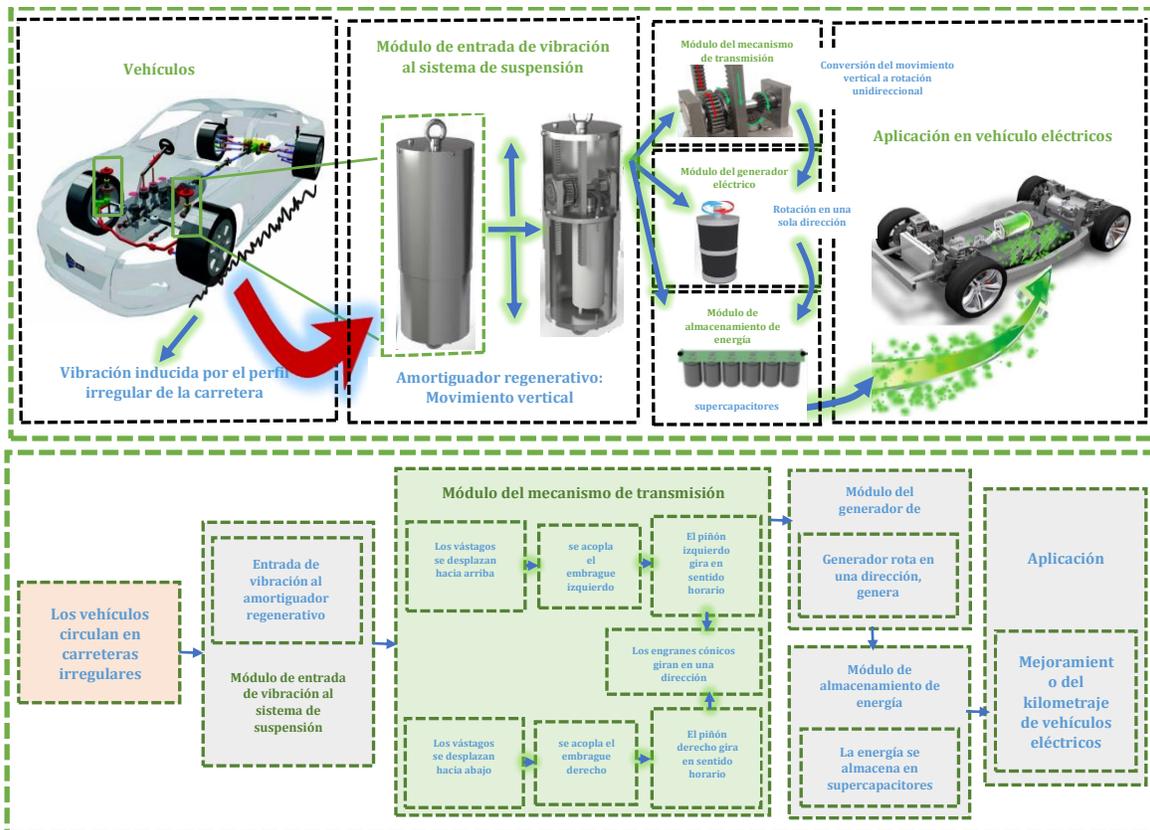


Figura 2.2: Diagrama de flujo de energía vibracional en una suspensión con amortiguador regenerativo (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [29]).

El proceso de conversión de energía vibratoria a energía eléctrica es tal como se presenta en la [Figura 2.2](#). Note que, solo la energía cinética producida por la velocidad relativa del sistema de suspensión se considera para la regeneración. Aunque, los neumáticos también disipan energía, la energía disipada en el sistema de suspensión es aún mayor. Con el objetivo de transformar el movimiento vertical oscilatorio a movimiento rotacional unidireccional, dos embragues unidireccionales acoplan y desacoplan a los vástagos del amortiguador regenerativo. Luego, el movimiento rotacional rectificado acciona un generador eléctrico para producir energía eléctrica alterna, y posteriormente se almacena en supercapacitores. Finalmente, esta energía se puede utilizar para abastecer los requerimientos de potencia eléctrica de otros subsistemas del vehículo. Para lograr una densidad alta de conversión de energía, diferentes tipos de amortiguadores regenerativos han sido propuestos, construidos y analizados recientemente. Estos tipos de transductores de recolección de energía se clasifican de acuerdo a la forma en la que convierten la energía de vibración a electricidad, y en general existen tres tipos de amortiguadores regenerativos los cuales son los siguiente; el amortiguador electromagnético lineal; el amortiguador electromagnético basado en transmisión mecánica, y el amortiguador electromagnético basado en transmisión hidráulica. Aunque, estos dispositivos mecánicos pueden regenerar la energía de vibración, algunas desventajas se presentan principalmente en el proceso de la rectificación de movimiento.

### 2.1.1. Amortiguadores regenerativos electromagnéticos lineales

Los amortiguadores electromagnéticos lineales transforman directamente la energía cinética producida por las diferencias de velocidades del sistema de suspensión a través del fenómeno de inducción electromagnética, ver [Figura 2.3](#). Además, este dispositivo presenta una densidad alta de conversión de energía porque no necesita de mecanismos para la rectificación del movimiento vertical oscilatorio a rotación unidireccional. En efecto, la variación del flujo magnético producido por el movimiento relativo entre los imanes y las bobinas del amortiguador origina un voltaje inducido en las bobinas, y consecuentemente energía eléctrica. Debido a la alta conversión de energía de este dispositivo, varios estudios en suspensiones activa y semi activas han sido realizadas. De hecho, el primer amortiguador regenerativo basado en motores electromagnéticos lineales fue presentado en el trabajo de [Karnopp \[30\]](#). Más tarde, [Suda y Shiiba \[31\]](#) desarrollaron una suspensión híbrida compuesta de un sistema de recolección de energía (amortiguador electromagnético lineal) para mejorar el rendimiento dinámico de una suspensión activa, y reducir el consumo energético del sistema control activo. [Zuo et al. \[32\]](#) diseñaron un amortiguador regenerativo compuesto de un generador lineal de cuatro fases para aumentar la eficiencia de regeneración de energía, obteniendo una capacidad de recolección de energía que va desde 26 hasta 64 watts de potencia eléctrica, considerando que la velocidad relativa de la suspensión era de 0.25-0.5 m/s. Luego, [Gysen et al. \[33\]](#) analizaron y prototiparon una suspensión activa compuesta de un amortiguador electromagnético lineal, y concluyeron que tal suspensión electromagnética puede mejorar significativamente tanto la comodidad como el agarre mecánico manteniendo requisitos mínimos de energía entre 150 y 300 watts. [Ebrahimi et al. \[34\]](#) diseñaron un amortiguador electromagnético híbrido que consumía menor cantidad de energía que una suspensión activa, y aprovechaba el efecto de Foucault para producir amortiguamiento eléctrico pasivo. Además, el dispositivo podía reducir hasta el 70% del consumo energético de una suspensión activa, sin embargo, el peso del dispositivo era relativamente mayor que el de los amortiguadores convencionales, lo cual es una desventaja en aplicaciones reales.

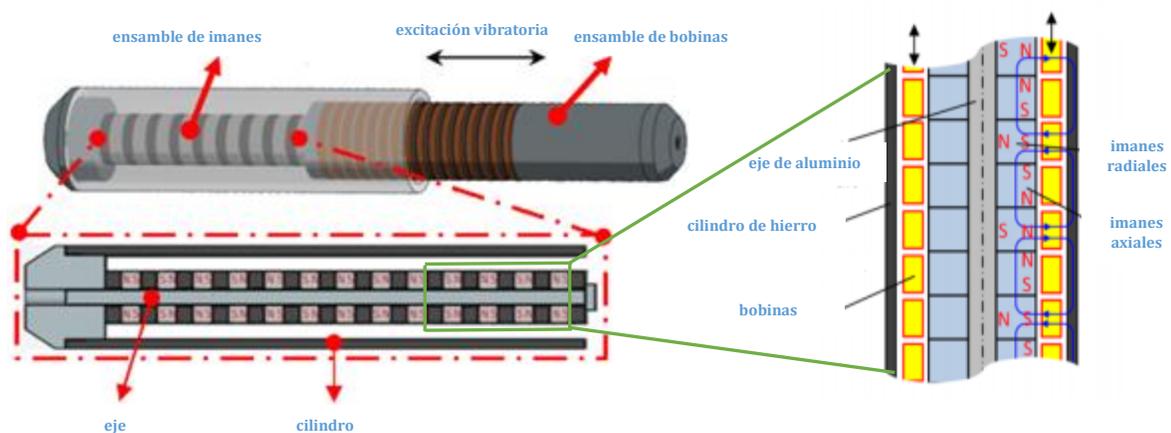


Figura 2.3: Recolector electromagnético lineal de cuatro fases (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [19]).

Adicionalmente, [Asadi et al. \[35\]](#) diseñaron un amortiguador regenerativo híbrido que consta de dos partes; la primera es la parte pasiva, la cual proporciona fuerzas de amortiguamiento pasivo por medio de un fluido viscoso; la segunda es la parte electromagnética del dispositivo híbrido, la cual se utilizaba para la regeneración de la energía por medio de un generador lineal y proporcionar fuerzas activas al sistema de suspensión. [Hu et al. \[36\]](#) presentaron un amortiguador regenerativo semi activo autoalimentado, el cual consistía de dos partes también; la primera es un generador eléctrico lineal que regeneraba la energía cinética del sistema de suspensión; la segunda es el fluido magnetorreológico que controlaba los niveles de amortiguamiento a través de la corriente eléctrica producida por el generador. [Chen et al. \[37\]](#) diseñaron un amortiguador regenerativo semi activo híbrido con tres niveles de amortiguamiento regulables, el cual constaba de un generador lineal y un amortiguador hidráulico. Adicionalmente, varios estudios sobre suspensiones semi activas autoalimentadas con amortiguadores electromagnéticos lineales han sido recientemente investigadas en [\[38–40\]](#). Por otra parte, [Gao et al. \[41\]](#) estudiaron los compromisos dinámicos entre el índice del confort y el de la regeneración de energía en suspensiones electromagnéticas activas por medio de diferentes estrategias de control, y demostraron que no es posible incrementar la capacidad de regeneración de energía sin afectar el índice de la comodidad. Recientemente, [Ding et al. \[42\]](#) desarrollaron un sistema de suspensión activa electromagnética híbrida la cual estaba integrada por un motor lineal y amortiguador magnetorreológico, los resultados indicaron que el sistema híbrido minimizó el consumo energético de las suspensiones electromagnéticas activas. Con el objetivo de disminuir el tamaño y peso de los amortiguadores electromagnéticos lineales, [Duong et al. \[43\]](#) diseñaron y prototiparon un recolector electromagnético monofásico lineal de 8 fases y 8 ranuras con imanes permanentes (single-phase 8 slot 8 pole tubular permanent magnet machine) ver [Figura 2.4](#), y se demostró que tal dispositivo recolectaba una potencia promedio de 96.67 watts, sin embargo, presentaba efectos negativos en las dinámicas del sistema de suspensión. Es evidente que los amortiguadores electromagnéticos lineales proporcionan un mejoramiento significativo tanto a las suspensiones activas como semi activas. Sin embargo, el tamaño y peso de estos dispositivos es el principal inconveniente para su aplicación en sistemas reales, ya que se necesita aumentar el tamaño de los motores electromagnéticos para proporcionar fuerzas de amortiguamiento grandes [\[19,44,45\]](#).

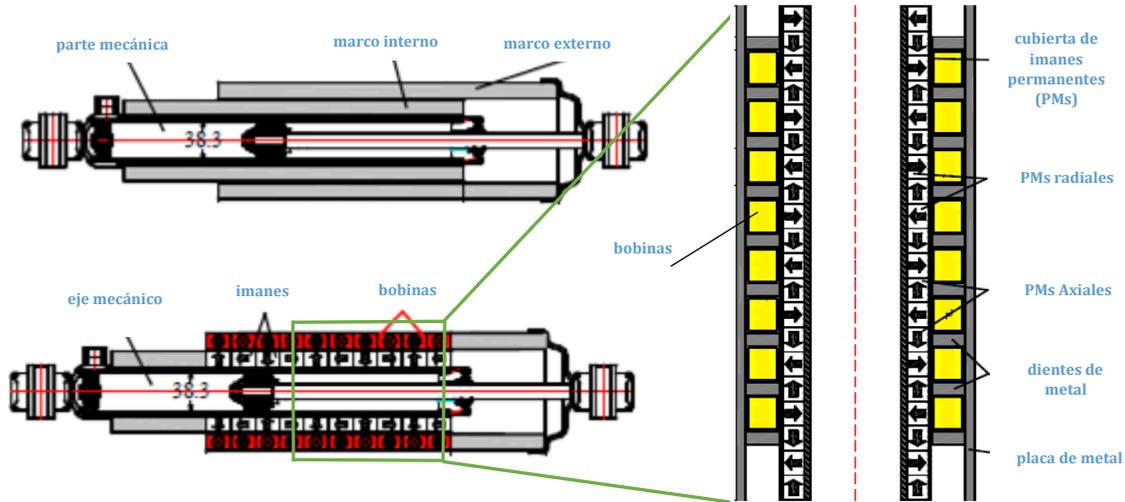


Figura 2.4: Recolector electromagnético lineal de ocho polos (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor [43]).

Por otra parte, los recolectores de energía basados en generadores electromagnéticos lineales han sido instalados en las entradas y salidas de los túneles de carretera con el objetivo de aprovechar la energía de impacto de los neumáticos del vehículo, y así abastecer los requerimientos de energía eléctrica para el alumbrado de los túneles. De hecho, esta tecnología prometedora es útil en lugares donde el acceso a energía eléctrica es difícil. Recientemente, Zhang et al. [46] desarrollaron un sistema de recolección de energía cinética de alto voltaje para su aplicación en los túneles de carretera sustentables, ver Figura 2.5, el dispositivo fue capaz de recolectar un voltaje pico de 194 voltios y un voltaje promedio de 55.2 voltios cuando el vehículo excitaba al dispositivo recolector a una velocidad de 40 km/h.



Figura 2.5: Recolector electromagnético lineal para usos en túneles de carretera (imagen adaptada y reproducida con permisos de derechos de autor[46]).

Adicionalmente, muchos investigadores han desarrollado recolectores electromagnéticos lineales a partir de fuentes externas de vibración, los cuales aprovechan el fenómeno de levitación magnética para producir electricidad a baja escala [47–51]. Algunas de las aplicaciones de estos dispositivos se encuentran en la regeneración de energía a partir de la energía vibracional causada por sismos [52], en sistemas de suspensión de vehículos [53], túneles de viento actuando como sensores autoalimentados [54], sensores de vibración autoalimentados [55], etc. Recientemente,

Xiang Zou et al. [13,48] reportaron los principios, métodos y aplicaciones de diferentes tipos de transductores de densidad baja en aprovechamiento de energía cinética, y además informaron que estos dispositivos son más factibles de ser utilizados en aplicaciones tales como aeroespaciales, ingeniería biomédica, monitoreo ambiental e ingeniería militar.

### 2.1.2. Amortiguadores regenerativos electromecánicos

Los amortiguadores regenerativos electromecánicos se distinguen básicamente por su mecanismo de conversión de movimiento. Estos mecanismos transforman el movimiento vertical bidireccional del sistema de suspensión en movimiento rotacional unidireccional, y posteriormente accionan un generador eléctrico [56]. Además, ellos pueden amplificar la energía cinética por medio de un tren de potencia, y así obtener una densidad alta de regeneración de energía. Existen diferentes tipos de mecanismos de amplificación de movimiento, los cuales son los siguientes; mecanismo tornillo-bola (ball-screw mechanism), mecanismo piñón-cremallera (rack-pinion mechanism), mecanismo tornillo algebraico (algebraic screw mechanism), sistema de transmisión basado en engranajes helicoidales (helical gears transmission), etc. Inicialmente, Kawamoto et al. [57] desarrollaron el primer amortiguador regenerativo basado en el mecanismo tornillo-bola para un sistema de suspensión activa. Este tipo de mecanismo se puede apreciar en la Figura 2.6-(a). Adicionalmente, Amati et al. [58] estudiaron la factibilidad de utilizar este mecanismo (ball-screw mechanism) en suspensiones semi activas y totalmente activas, y demostraron que la dinámica del sistema de suspensión se deteriora en frecuencias altas de excitación debido al efecto de la constante de inercia del mecanismo. Este inconveniente se puede resolver añadiendo elementos de restitución de energía mecánica proporcionándole al sistema mejor ancho de banda [59,60].

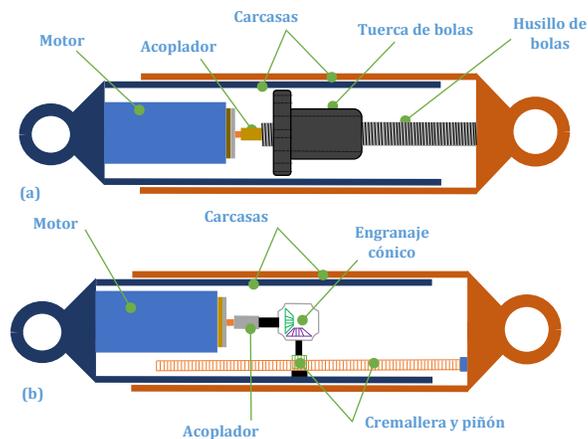


Figura 2.6: Amortiguadores regenerativos basados en transmisión mecánica; (a) transmisión cremallera-piñón; (b) transmisión tornillo-bola (Imagen adaptada de la Ref. [61]).

Con el objetivo de mejorar el índice de la comodidad y obtener un índice alto de regeneración de energía en los amortiguadores electromagnéticos basados en el mecanismo tornillo-bola, Zhang et al. [62] desarrollaron un control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  con

múltiples requerimientos dinámicos de un modelo de vehículo completo. Aunque, en esa investigación se reveló que el controlador brindaba excelentes resultados a bajas frecuencias de excitación (1-4 Hz) para ambos requerimientos dinámicos, no se estudió el índice del agarre mecánico el cual es de suma importancia para frecuencias altas de excitación. Este inconveniente fue estudiado más tarde por [Pires et al. \[63\]](#) considerando un modelo de una cuarta parte del vehículo, ellos demostraron que cuando el valor de inercia del dispositivo regenerativo es 50 kg, los índices de desempeño del nivel de comodidad y de agarre mecánico se degradan drásticamente en un 84% y 61%, respectivamente; Por otro lado, cuando la inercia es menor o igual a 20 kg, se mejoran ambos índices. Sin embargo, no siempre se pueden lograr simultáneamente tales índices obteniendo niveles altos de regeneración de energía. De hecho, también este fenómeno dinámico producido por el mecanismo tornillo-bola fue estudiado por [Yin et al. \[64\]](#) realizaron una comparación entre las cantidades de masa física producidas por la inercia rotacional tanto del mecanismo tornillo-bola como el del mecanismo de transmisión de potencia por engranajes (Gearbox type actuator). En términos de la potencia regenerada promedio producida por el amortiguador regenerativo basado en transmisión tornillo-bola, [Huang et al. \[65\]](#) demostró que una potencia promedio de aproximadamente 9 watts es posible recolectar considerando las dinámicas del modelo de suspensión de un grado de libertad, sin afectar tanto el índice de la comodidad como la capacidad de regeneración de energía. Adicionalmente, [Li et al. \[66,67\]](#) mejoraron la eficiencia de los regeneradores de energía basados en el mecanismo de tornillo-bola en términos de capacidad de recolección de energía, el dispositivo consistía de un generador síncrono de imanes permanentes (PMSM) de densidad alta de recolección de energía y un convertidor buck-boost para controlar los estados de carga y descarga del sistema de almacenamiento de energía. Además, este dispositivo podía proporcionar una fuerza de amortiguamiento electromagnética controlable, y simultáneamente logrando una eficiencia de regeneración de energía del 51.81%-75.24% considerando excitaciones de tipo harmónicas y estocásticas. [Xie et al. \[68,69\]](#) diseñaron un amortiguador regenerativo electromecánico que consistía de una transmisión de múltiples mecanismos tornillo-bola y múltiples generadores eléctricos controlados para aumentar el potencial de regeneración de energía, ver [Figura 2.7](#). El dispositivo recolecta 32 watts de potencia eléctrica promedio cuando la frecuencia y el desplazamiento de excitación era de 3 Hz y 20 mm, respectivamente.

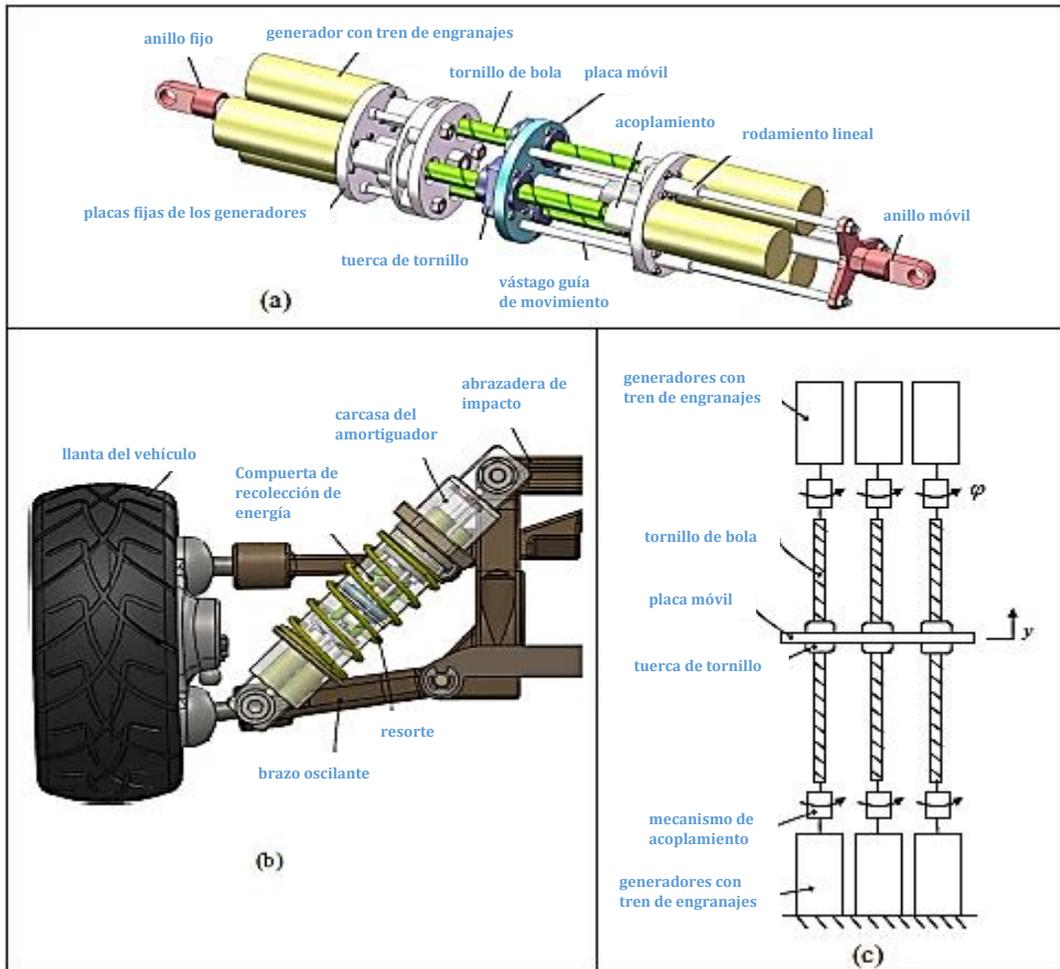


Figura 2.7: Diagrama del amortiguador electromecánico de recolección de energía basado en múltiples mecanismos de tornillo-bola y múltiples generadores eléctricos controlados; (a) modelo 3D, (b) el amortiguador regenerativo en el sistema de suspensión, (c) diagrama del mecanismo de transmisión de potencia mecánica. (Imagen adaptada de la Ref.[68]).

Recientemente, un novedoso amortiguador electromecánico con múltiples mecanismos tornillo-bola fue desarrollado por Wang et al. [70], ver Figura 2.8, el dispositivo recolectaba una potencia promedio de 3.701 watts con una eficiencia promedio de 36.4% bajo el efecto de excitaciones armónicas.



Figura 2.8: Amortiguador regenerativo electromecánico basado en doble transmisión de tornillo-bola; (1) vástago del amortiguador, (2) tornillo izquierdo, (3) tornillo derecho, (4) tuerca del tornillo, (5) embrague unidireccional, (6) engrane, (7) piñón, (8) generador eléctrico. (imagen adaptada de la Ref. [70]).

Similarmente, [Zhu et al.](#) diseñaron y construyeron un amortiguador electromagnético basado en la transmisión de tipo tornillo-bola con un sistema de doble acoplamiento para transformar el movimiento vertical bidireccional en movimiento rotacional unidireccional, y posteriormente accionar un generador eléctrico, con el objetivo de mitigar vibración estructural causada por sismos y regenerar dicha transferencia de energía, ver [Figura 2.9](#). En esa investigación se estudió la capacidad de fuerza de amortiguamiento del dispositivo considerando la inercia rotacional como un efecto dinámico similar al de un inersor. Además, se demostró una capacidad de regeneración máxima en términos de la eficiencia del dispositivo del 29.1% y 9.2 watts de potencia eléctrica, considerando una excitación harmónica de 5mm de amplitud y 1 Hz de frecuencia de excitación [71,72]. Aunque, el enfoque de operación de este dispositivo fue recolectar la energía de vibración en estructuras mecánicas sujetas a sismos o vibración estocástica, los autores solo reportaron evaluaciones experimentales del dispositivo sujeto a vibración armónica. Esto permite que este dispositivo pueda ser evaluado en términos de los rendimientos dinámicos de un sistema de suspensión considerando todas las dinámicas de un vehículo real, y así evaluar claramente la capacidad de regeneración de energía. De hecho, en la mayoría de los dispositivos propuestos recientemente, solo se evalúan considerando el modelo de la cuarta parte del vehículo o un sistema de dos grados de libertad (2-DOF), por simplicidad. Sin embargo, al considerar todas las dinámicas de un vehículo completo sujeto a vibraciones inducidas por perfiles reales de carretera, el modelo 2-DOF es insuficiente. Por lo tanto, extensas simulaciones se deben realizar considerando todos los tipos de amortiguadores regenerativos, las dinámicas de un vehículo completo, efectos lineales y no lineales, perfiles estocásticos estacionarios y no estacionarios, etc.

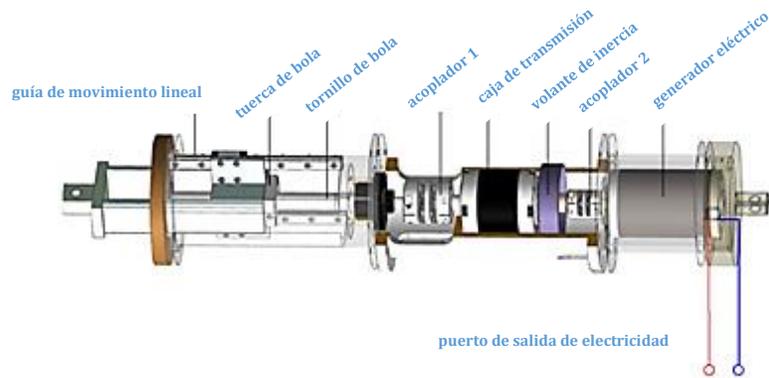


Figura 2.9: Amortiguador regenerativo electromecánico basado en el mecanismo tornillo-bola con doble sistema de acoplamiento. (imagen adaptada de la Ref. [71]).

Finalmente, para el caso de los amortiguadores regenerativos basados en transmisión de tipo tornillo-bola. Bai et al. [73] propusieron un novedoso amortiguador regenerativo autoalimentado con la capacidad de regeneración de energía y brindar amortiguamiento por medio de un fluido magnetorreológico, ver Figura 2.10. Este dispositivo brindó una capacidad de fuerza de amortiguamiento de 341 a 2260 newtons considerando un rango de corriente eléctrica de 0-1 amperio. Además, la potencia promedio de salida del dispositivo fue de 4.5 watts cuando la velocidad de excitación era de 125 mm/s. Yang et al. [74] diseñaron un recolector de energía cinética producida por los movimientos verticales en una bicicleta, el dispositivo consistía básicamente de; un mecanismo tornillo-bola, un rectificador de movimiento (embragues unidireccionales), y un sistema de almacenamiento de energía eléctrica directa (supercapacitores). Además, se observó que la potencia de salida del recolector es proporcional a la frecuencia de excitación e inversamente proporcional a la resistencia eléctrica externa. Este tipo de transductor regenerativo lograba recolectar un voltaje máximo de salida de 7.8 voltios, una potencia máxima de 0.491watts, y una eficiencia de conversión total de 52.8% cuando la fuente de excitación era una función armónica simple. Como se mencionó anteriormente, muchos de los resultados del potencial de cuantificación de energía de estos dispositivos en suspensiones automotrices, solo ha sido evaluada considerando excitaciones simples (funciones armónicas).

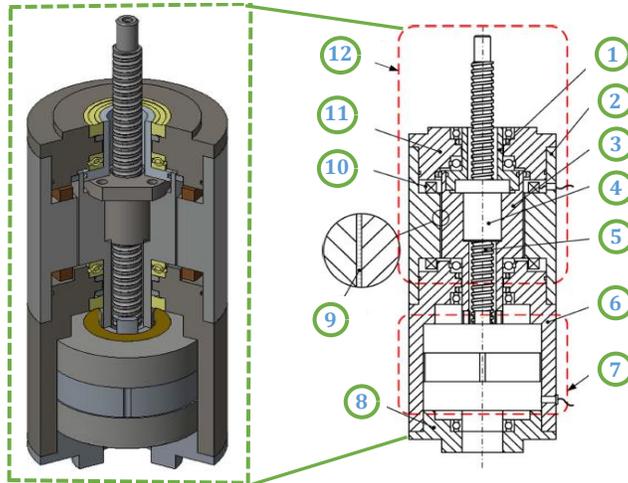


Figura 2.10: Amortiguador regenerativo electromecánico autoalimentado basado en el mecanismo tornillo-bola.; (1) manga de conexión 1, (2) carcasa del estator, (3) rotor, (4) tuerca del tornillo de bola, (5) eje del tornillo de bola (por ejemplo, vástago de embolo), (6) carcasa del generador, (7) salida de energía eléctrica, (8) cubierta 2, (9) fluido MR, (10) bobina, (11) cubierta 1, (12) mecanismo de amortiguamiento controlable. (imagen adaptada de la Ref. [73]).

Por otra parte, los amortiguadores regenerativos basados en el mecanismo piñón-cremallera pueden incrementar la densidad de regeneración de energía a través de un sistema de transmisión de potencia, ver [Figura 2.6 \(b\)](#). Dado que estos dispositivos utilizan un generador electromagnético rotatorio, el movimiento vertical oscilatorio del sistema de suspensión se debe convertir en movimiento rotacional unidireccional. Para lograr tal objetivo, este tipo de dispositivo utiliza dos embragues unidireccionales con la finalidad de aprovechar tanto el estado de tensión como el de compresión del amortiguador. Un tren de potencia simple se utiliza para aumentar la velocidad de rotación del generador eléctrico, a diferencia del amortiguador electromecánico basado en la transmisión tornillo-bola, la velocidad de rotación del generador está directamente influenciada por el paso de rosca del tornillo. Sin embargo, al incrementar la relación de transmisión de potencia en ambos dispositivos, se agregan efectos de inercia rotacional al sistema de suspensión. Se ha demostrado que añadir niveles altos de inercia en estos tipos de amortiguadores, un efecto perjudicial se obtiene en los índices dinámicos del sistema de suspensión. Con el objetivo de analizar paramétricamente este efecto dinámico, [Li et al.](#) diseñaron y evaluaron la capacidad de regeneración de energía de un amortiguador regenerativo con transmisión piñón-cremallera. Además, en esa investigación se recalcó que la eficiencia mecánica de este tipo de dispositivos se encuentra en el rango 33-63% considerando diferentes frecuencias de excitación y diferentes cargas eléctricas del generador eléctrico. En las pruebas experimentales se demostró que, el dispositivo fue capaz de recolectar una potencia pico de 67.5 watts y una potencia media de 19.2 watts considerando que la velocidad del vehículo era de 48 km/h [75]. Sin embargo, el dispositivo sufrió efectos perjudiciales en el sistema de transmisión de potencia a frecuencias altas de excitación [76]. De hecho, estos investigadores afirmaron que el amortiguador electromecánico con transmisión tornillo-bola presenta mayor dificultad de operación a frecuencias altas de excitación mayores a 7 Hz, a diferencia del amortiguador electromecánico con transmisión piñón-cremallera y con mecanismo de rectificación de movimiento ofreció

mejor rendimiento a altas frecuencias. Recientemente, [Guo et al. \[77\]](#) realizaron un estudio sobre el efecto dinámico del amortiguador electromecánico con y sin mecanismo de rectificación de movimiento en diferentes tipos de vehículos. Ellos demostraron que el amortiguador regenerativo sin mecanismo de rectificación funciona mejor considerando niveles bajos de inercia rotacional, lo cual significa que no se alteran drásticamente los índices dinámicos del sistema de suspensión. Además, el amortiguador electromecánico con mecanismo de rectificación presenta mayor robustez a frecuencias altas de excitación que el anterior. Es evidentes notar que, para ambos casos de diseño, la cantidad de inercia incluida en el mecanismo de transmisión, se debe considerar seriamente para el análisis dinámico tanto de recolección de energía como en los índices dinámicos del sistema. De hecho, esta consideración de diseño fue también reafirmada por [Zhang et al.](#) quien diseñó un amortiguador regenerativo basado en una transmisión mecánica que consistía de un sistema de doble embrague para aprovechar los estados (tensión y compresión) del movimiento del amortiguador, ver [Figura 2.11](#). Este amortiguador regenerativo recolectó una potencia promedio de 4.302 watts con una eficiencia del 44.24% considerando una excitación armónica a 2.5 Hz y 7.5 mm de amplitud [\[29,78\]](#).

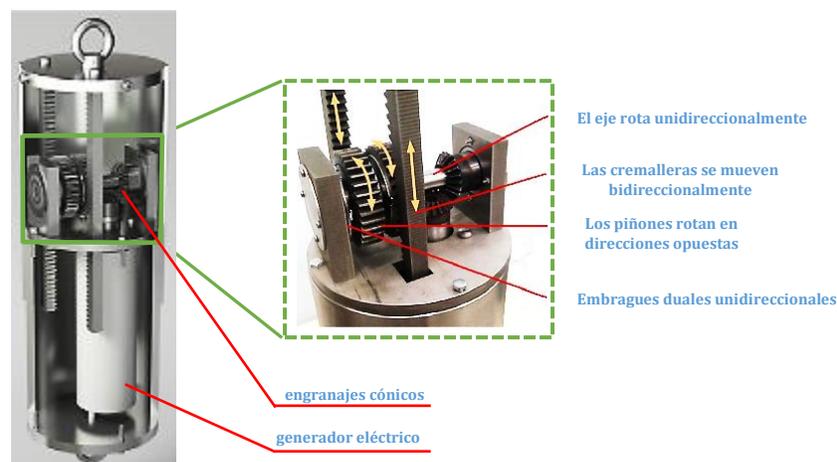


Figura 2.11: Amortiguador regenerativo electromecánico con transmisión piñón-cremallera y con doble sistema de embragues unidireccionales. (imagen adaptada de la [Ref.\[29\]](#)).

Más tarde, [Zhang et al. \[79\]](#) extendieron el uso de este tipo de transmisión mecánica basada en el arreglo piñón-cremallera para cosechar la energía vibratoria causada por los movimientos oscilatorios de las vías ferroviarias obteniendo una eficiencia de regeneración de energía del 55.5%. Con el objetivo de aumentar la capacidad de regeneración de energía en estos transductores electromecánicos, [Pan et al. \[80\]](#) diseñaron, construyeron y realizaron evaluaciones experimentales para un novedoso recolector de energía cinética que consistía principalmente de una transmisión engranaje doble para incrementar la velocidad rotacional del eje del generador eléctrico, ver [Figura 2.12](#). Se observó que tal dispositivo mejorado recolectaba 58 voltios cuando la frecuencia y amplitud de excitación eran de 1 Hz y 2.5 mm, respectivamente.

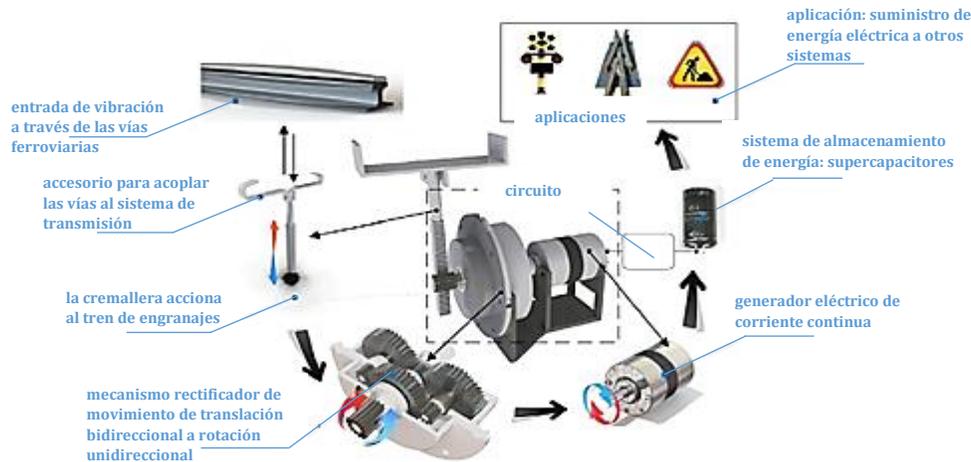


Figura 2.12: Sistema de recolección de energía cinética ferroviaria a través de un mecanismo de doble transmisión de potencia. (imagen adaptada de la Ref.[80]).

Adicionalmente, [Lin et al. \[81\]](#) diseñaron un recolector portable similar al que se muestra en la [Figura 2.12](#), para regenerar la energía cinética ferroviaria en diferentes condiciones ambientales de operación, el dispositivo cosechaba una potencia eléctrica promedio y pico de 7 y 56 watts, respectivamente. Otra aplicación de este tipo de transmisión mecánica bastante interesante fue reportada por [Wang et al.](#) quien propuso un transductor de recolección de energía causada por la energía de vibración en cables. El dispositivo regenerativo constaba básicamente de un conjunto de mecanismos piñón-cremallera conectados a una estructura mecánica en forma de Y, un módulo de conversión del movimiento radial bidireccional a movimiento rotacional unidireccional (embragues unidireccionales), un generador eléctrico, y un sistema de almacenamiento de energía (supercapacitores). Se demostró que el dispositivo recolectaba con éxito la energía vibratoria estocástica del cable, mostrando buenas perspectivas en el suministro de energía a equipos de vigilancia inalámbricos en áreas remotas montañosas [\[82\]](#). Recientemente, [Pan et al.](#) diseñaron, modelaron, y realizaron pruebas experimentales de un novedoso recolector de energía cinética producida en el sistema de suspensión de los vagones del tren. El diseño estructural del amortiguador regenerativo consistía de un mecanismo piñón-cremallera, un sistema mecánico de rectificación de movimiento vertical bidireccional a movimiento rotacional unidireccional, un sistema de lubricación para disminuir la fricción mecánica, un generador electromagnético, y un sistema de almacenamiento de energía, ver [Figura 2.13](#). Este dispositivo recolectó una potencia eléctrica promedio 14.5 watts cuando la velocidad del vagón del tren era de 90 km/h [\[83\]](#). Adicionalmente, este mismo investigador reportó un novedoso recolector de energía cinética ferroviaria que utilizaba reductor de velocidades, y un sistema de embragues unidireccionales para amplificar y transformar el movimiento oscilatorio de las vías ferroviarias en movimiento rotacional unidireccional. En prueba de campo, el dispositivo recolectó una potencia promedio de 2.24 watts cuando un tren de tránsito rápido Tipo A circulaba con una velocidad de 30 km/h [\[84\]](#). Con el objetivo de incrementar la velocidad de rotación del generador electromagnético, [Zhang et al. \[85\]](#) diseñó un mecanismo de transmisión de potencia que consistía de una cremallera de doble dentadura acoplada

a dos piñones, y a un generador electromagnético rotatorio. Al incrementar la relación de transmisión de potencia de los piñones igual a 3, el dispositivo recolectó 54 watts de potencia eléctrica promedio. Adicionalmente, este tipo de transmisión mecánica ha sido empleada en el diseño de un recolector regenerativo de la energía producida por las olas marítimas [86].

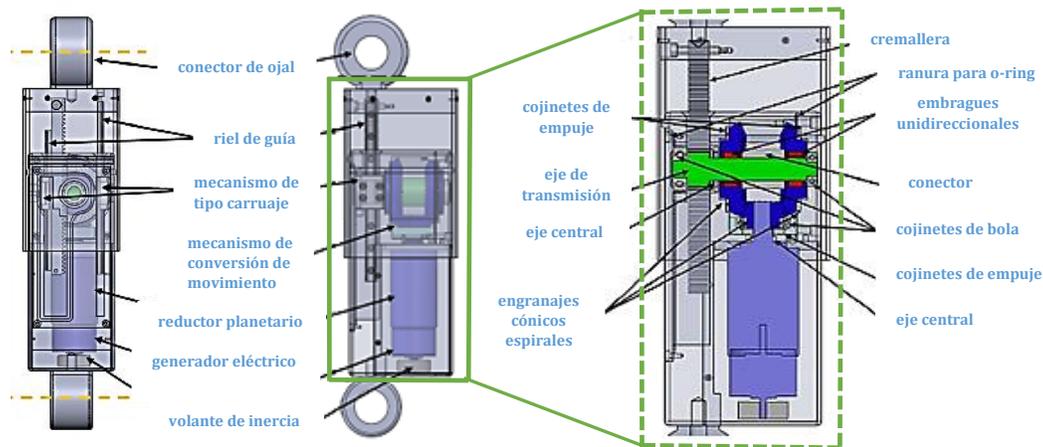


Figura 2.13: Recolector de energía cinética ferroviaria con mecanismo de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la Ref.[83]).

Por otra parte, el amortiguador electromecánico basado en el mecanismo tornillo algebraico (algebraic screw mechanism) ha sido propuesto recientemente para resolver las deficiencias de la eficiencia de regeneración de energía de los amortiguadores regenerativos basados en transmisión de tornillo-bola y piñón-cremallera [87]. Por ejemplo, el amortiguador electromecánico basado en la transmisión tornillo-bola presentan desventajas drásticas en los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión cuando opera a altas frecuencias. Para resolver este inconveniente, el mecanismo piñón-cremallera fue propuesto, sin embargo, se observó que tal dispositivo presentó una disminución considerable en la eficiencia de regeneración de energía debido a la fricción, backlash, y por el número de elementos mecánicos de transmisión de potencia también. De hecho, Maravandi y Moallem propusieron un recolector de energía basado en el diseño estructural del mecanismo de tornillo algebraico, el cual estaba compuesto de un mecanismo de dos eslabones móviles (two-leg mechanism) para convertir el movimiento vertical bidireccional en movimiento rotacional unidireccional, un reductor de transmisión de potencia, y un motor sin escobillas (brushless) rotatorio de tres fases; por lo tanto, este dispositivo demostró una eficiencia de regeneración de energía del 78%. Aunque, el dispositivo demostró una eficiencia mecánica elevada de regeneración de energía, los niveles de amortiguamiento eran pobres [88]. Basado en este tipo de mecanismo de conversión de movimiento, Syuhri et al. diseñaron un recolector de energía cinética que utilizaba una transmisión de engranajes epicíclicos para aumentar la velocidad de rotación del generador electromagnético. Se observó que el valor máximo para la potencia mecánica y regenerativa se alcanza en 4.67 y 3.14W, respectivamente. Esto significa que la eficiencia del dispositivo se encuentra en 67.29%. En otras palabras, el dispositivo puede convertir el 67.29% de la energía mecánica en energía eléctrica,

mientras que el 32.71% se disipa en otras formas, como pérdidas por fricción y pérdidas por inercia en el mecanismo de eslabones móviles, el generador y los engranajes epicíclicos [89]. Recientemente, Zhang et al. diseñaron y construyeron un amortiguador electromecánico de accionamiento directo e indirecto compuesto principalmente por un mecanismo novedoso de conversión de movimiento llamado mecanismo de dientes-brazo (arm-teeth mechanism) que convertía el movimiento lineal bidireccional en movimiento rotacional unidireccional, y además incrementaba la velocidad de rotación del generador electromagnético, ver Figura 2.14. El dispositivo presentó un buen compromiso entre el índice del confort y la regeneración de energía hasta 13 Hz de frecuencia de excitación. Sin embargo, el dispositivo puede sufrir daños estructurales bajo el efecto de frecuencias altas de excitación, que generalmente ocurren cuando la velocidad de conducción del vehículo es grande [90,91].



Figura 2.14: Amortiguador electromecánico de accionamiento indirecto basado en el mecanismo de dientes-brazo. (imagen adaptada de la Ref. [91]).

Por otro lado, Salman et al. diseñaron un amortiguador regenerativo electromecánico basado principalmente en un módulo de transmisión de potencia mecánica. Este módulo de transmisión consta de engranajes helicoidales y embragues unidireccionales de rodillos cónicos que convierte el movimiento bidireccional del eje en movimiento rotacional unidireccional para accionar un motor eléctrico, ver Figura 2.15. El dispositivo demostró la capacidad de regenerar la energía vibratoria con una eficiencia promedio del 40%, además se obtuvo una potencia promedio de 270 watts considerando una frecuencia de excitación de 2.5 Hz y una amplitud de vibración de 5mm [92]. Aunque este transductor electromecánico demostró alta eficiencia en regeneración de energía cinética, más estudios se deben realizar en términos de viabilidad de implementación, efectos positivos y perjudiciales en los índices dinámicos del sistema de suspensión, y análisis mecánicos de los elementos estructurales, etc. Es de suma importancia mencionar que, la mayoría de las investigaciones realizadas se enfocan principalmente en mejorar la capacidad de regeneración de energía cinética a través de mecanismos simples de conversión de movimiento. Sin embargo, pocos estudios han considerado efectos no lineales tanto de los diferentes tipos de transductores regenerativos como de las dinámicas de un vehículo completo; considerando diferentes tipos de perfiles de carretera, tipos de vehículos, y tipos de sistemas de almacenamiento de energía (supercapacitores, ultracapacitores, y baterías electroquímicas). Por lo tanto, extensas simulaciones numéricas se deben realizar, y posteriormente evaluar las capacidades robustas en términos de incertidumbre a

cargas dinámicas aleatorias producidas por las irregularidades de la carretera de los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos.

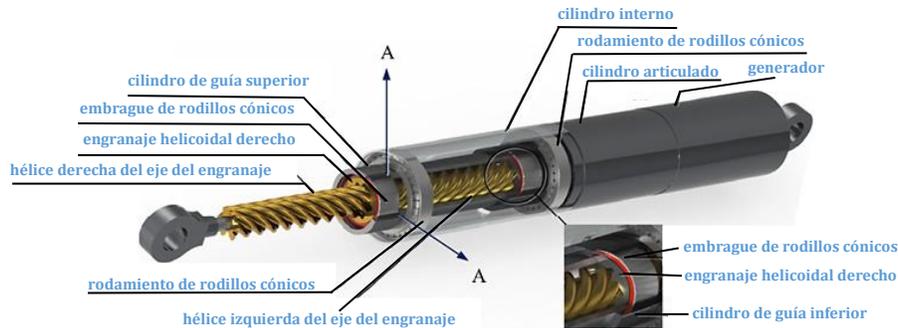


Figura 2.15: Amortiguador regenerativo con transmisión mecánica de engranajes helicoidales y embragues unidireccionales de rodillos. (imagen adaptada de la Ref. [92]).

El problema de estos dispositivos regenerativos es el mecanismo de rectificación de movimiento dado que se pierde una porción significativa de energía cinética en calor térmico desperdiciado en los sistemas mecánicos de transmisión de potencia y en la conversión cinemática. Por lo tanto, la eficiencia de estos dispositivos se encuentra entre el 5% y 70% tal como se presentó en el trabajo de Peter Múčka [93].

### 2.1.3. Amortiguadores regenerativos electrohidráulicos

Los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos están compuestos principalmente de válvulas de retención (check valves), tuberías hidráulicas, motores o bombas hidráulicas, acumuladores de gases o aceites, y un generador eléctrico. Las válvulas de retención se utilizan para direccionar el flujo de fluido hidráulico en las tuberías y proporcionar los niveles de amortiguación en el dispositivo, mientras que el acumulador se utiliza para garantizar la estabilidad de los niveles de fuerza de amortiguamiento en los estados de compresión y tensión del amortiguador. Cuando el fluido entra al motor hidráulico, se produce un trabajo mecánico directamente. Luego, esta energía mecánica se transforma en electricidad por medio de un generador electromagnético rotario [94–96]. Aunque, el costo de estos tipos de dispositivos es alto, ellos proporcionan fuerzas grandes de amortiguamiento sin aumentar su tamaño físico comparado con los amortiguadores regenerativos electromecánicos. Al emplear un circuito hidráulico es posible regular los impactos a altas frecuencias y así mismo suavizar la respuesta del rotor del generador, a diferencia del mecanismo rectificador basado en transmisión mecánica (piñón-cremallera-embragues unidireccionales), no es posible lograr tal objetivo. De hecho, en aplicaciones reales, un sistema hidráulico es más durable debido a que el desgaste por fricción entre sus componentes mecánicos y el flujo de fluido es menor que el de un sistema mecánico compuesto de elementos sólidos (piñón-cremallera o tornillo-bola). Por esta razón, los amortiguadores hidráulicos disfrutaron de una de las mayores participaciones en el mercado de la industria automotriz. Fang et al. [97] fabricaron un amortiguador regenerativo electrohidráulico (HESA), y demostraron experimentalmente que el dispositivo podía cosechar aproximadamente 200 watts con una eficiencia del 16.6%. Li y Tse [98]

propusieron un amortiguador electrohidráulico sin mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento, ellos observaron que se producían fuerzas de impacto en el dispositivo a altas frecuencias, ver [Figura 2.16](#).



Figura 2.16: Amortiguador regenerativo electrohidráulico sin mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la [Ref. \[98\]](#)).

Más tarde, [Li et al. \[99\]](#) diseñaron y prototiparon un transductor electrohidráulico que consistía básicamente de cuatro válvulas de retención, un motor hidráulico y un generador eléctrico de tres fases. Las válvulas de retención se utilizaron para crear un mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento (HMR) del flujo de fluido, y posteriormente accionar el eje de motor hidráulico en una sola dirección. Además, el HMR se utilizó para disminuir las fuerzas de impacto del dispositivo, y así mismo suavizar la respuesta del rotor del generador. El trabajo mecánico producido por el motor hidráulico era convertido en electricidad a través del generador eléctrico trifásico. En esa investigación se reveló que el dispositivo logró recolectar una potencia instantánea de 248.8 watts y una potencia promedio de 114.1 watts con una eficiencia máxima de regeneración de energía del 38.81% cuando la frecuencia de excitación era de 2 Hz y de 8 mm de amplitud, ver [Figura 2.17 \(a\)](#). Adicionalmente, el proceso de recolección de energía, rectificación de movimiento del flujo de fluido hidráulico, y de rectificación de la energía alterna a energía directa se muestra en la [Figura 2.17 \(b\)](#). Note que, en este proceso, el núcleo del diseño del amortiguador regenerativo es un cilindro hidráulico, el cual se divide en dos cámaras por un pistón. Dos vástagos se conectan a través de las caras del pistón el cual se encuentra entre las dos cámaras. La razón de utilizar un cilindro con dos vástagos es para garantizar que el flujo de aceite entre las dos cámaras sea idéntico. Uno de los vástagos se conecta directamente a una terminal del amortiguador mientras que la otra se acopla a través de un acoplamiento flexible. Los dos puertos (11 y 12) del cilindro se conectan a los dos puertos (21 y 22) del motor hidráulico a través de un rectificador hidráulico. El eje de salida del motor hidráulico se conecta a un generador electromagnético trifásico, cuya electricidad de salida se utiliza para alimentar a una carga a través de un rectificador eléctrico trifásico. El diseño del mecanismo de rectificación hidráulico hace posible que la transferencia de energía de vibración en el sistema de regeneración de energía del amortiguador se realice de manera suave, es decir, las fuerzas de impacto se reducen. Por lo tanto, en este dispositivo se puede lograr simultáneamente tanto la disipación de energía como la regeneración de energía cinética.

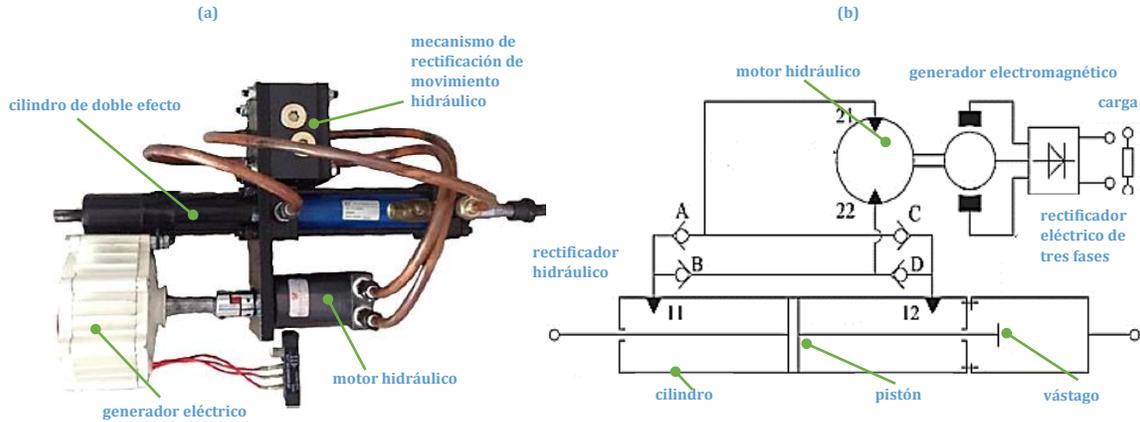


Figura 2.17: Amortiguador regenerativo electrohidráulico con mecanismo hidráulico de rectificación de movimiento: (a) dispositivo en 3D, (b) circuito de recolección de energía. (imagen adaptada de la Ref.[99]).

Como se muestra en la [Figura 2.17 \(b\)](#), el rectificador hidráulico consiste de cuatro válvulas de retención, es decir, válvulas A-D. Considerando vibración positiva (es decir, estado de tensión del amortiguador), el aceite dentro de la cámara izquierda fluye hacia la cámara derecha a través de la ruta del puerto 11, válvula A, puerto 21, puerto 22, válvula D y puerto 12. Suponiendo que la rotación del motor hidráulico en respuesta a la dirección del flujo desde el puerto 21 al puerto 22 es en sentido horario, la vibración positiva da como resultado la rotación en sentido horario del motor hidráulico. Bajo el efecto de vibración negativa (es decir, estado de compresión del amortiguador), el aceite fluye sucesivamente a través del puerto 12, la válvula C, el puerto 21, el puerto 22, la válvula B y el puerto 11. En este caso, el motor hidráulico todavía gira en sentido horario. En consecuencia, la rotación del motor hidráulico (o el generador de energía) siempre es unidireccional, aunque la excitación vibratoria es bidireccional.

Adicionalmente, [Zhang et al.](#) propusieron un amortiguador regenerativo electrohidráulico con HMR. Este amortiguador proporcionaba amortiguamiento asimétrico para lograr eficientemente fuerzas de adherencia de los neumáticos sobre la carretera. Con el objetivo de cuantificar la capacidad de regeneración de energía, se utilizaron algoritmos genéticos (GA) considerando los radios tanto del cilindro como del vástago del amortiguador, capacidad de la bomba hidráulica, y las cargas eléctricas del generador electromagnético. A través de la optimización GA, el dispositivo proporcionó una potencia regenerativa de 33.4W cuando la frecuencia de excitación era de 1.67 Hz y la amplitud de desplazamiento de 50mm, y así mismo se obtuvo una eficiencia de regeneración de energía entre el 70-73% [100]. Mas tarde, [Zhang et al.](#) diseñaron y realizaron pruebas experimentales de un amortiguador electrohidráulico de doble tubo con la capacidad de regeneración de energía, y para su uso en sistemas de suspensión tanto semi activa como activa completamente, ver [Figura 2.18](#). Este dispositivo consiste de un tubo interno entre el tubo de presión y el tubo de reserva del dispositivo, el cual tiene un orificio de circulación para conectar la cavidad superior y la entrada del motor hidráulico; La salida del motor hidráulico está conectada a la cavidad de reserva a través de una tubería de aceite. Para lograr un flujo de aceite unidireccional, se añade una válvula de retención en la cara superior del pistón, y otra

en la base del amortiguador. Note que, el mecanismo de rectificación del flujo del fluido hidráulico (hydraulic rectifier) solo contiene dos válvulas de retención con el objetivo de reducir el tamaño del amortiguador regenerativo, el cual también permite que el proceso de operación sea más sencillo que los anteriores [101].

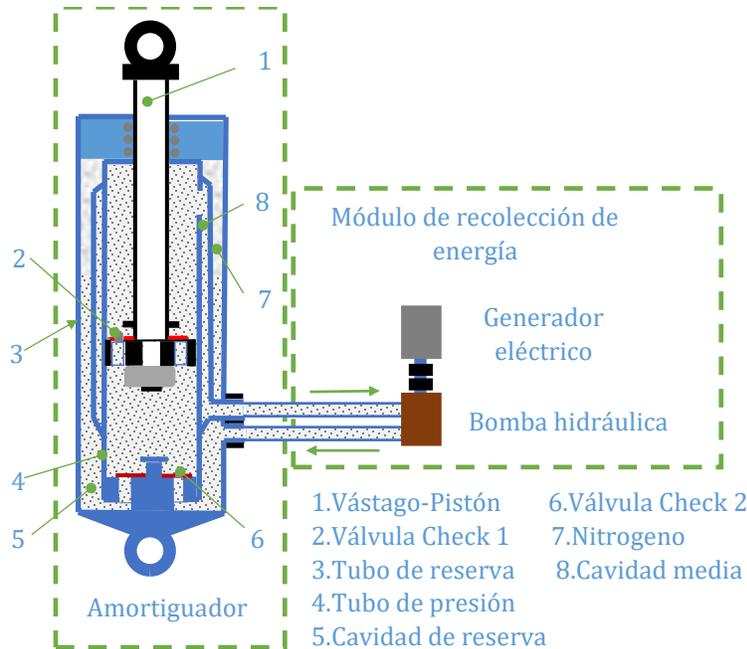


Figura 2.18: Amortiguador regenerativo electrohidráulico de doble tubo con mecanismo de rectificación de movimiento. (imagen adaptada de la Ref. [101]).

Cuando el vástago del pistón del amortiguador regenerativo se mueve hacia arriba (estado de tensión de amortiguador regenerativo), la válvula de retención 1 se cierra y la válvula 2 se abre. Luego, el flujo del aceite de presión alta localizado en la cavidad superior fluye hacia la entrada del motor hidráulico a través de la cavidad media y de la tubería; posteriormente, flujo de fluido unidireccional hace girar al rotor del generador eléctrico. Luego, el aceite de presión baja fluye a través de la salida del motor hidráulico, y regresa a la cavidad de reserva; finalmente, regresa a la cavidad inferior a través de la válvula de retención 2. Debido a la extracción del vástago del pistón en el estado de tensión, el volumen del amortiguador se expandirá. Esto origina que una parte del fluido de presión baja se estanque en la cavidad de reserva. Con el objetivo de regresar el aceite a la cavidad inferior, la fuerza producida por el nitrógeno de presión alta permitirá que una porción del aceite regrese a la cavidad inferior. Cuando el vástago del pistón se mueve hacia abajo (estado de compresión del amortiguador regenerativo), la válvula de retención 1 se abre y la válvula 2 se cierra. Luego, el aceite de presión alta localizado en la cavidad inferior fluye a la cavidad superior a través de la válvula de retención 1. El flujo de fluido de presión alta en esta etapa, se transporta a través de la cavidad media y de las tuberías hidráulicas. Posteriormente, se produce un trabajo mecánico en el motor hidráulico, que después se convierte en electricidad mediante el generador electromagnético. Note que, el nitrógeno funciona principalmente como un acumulador hidráulico, el cual le proporciona estabilidad al nivel de presión en el flujo del fluido hidráulico en ambos estados de movimiento del dispositivo.

Recientemente, [Galluzzi et al. \[102,103\]](#) mejoraron el diseño de los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos considerando aspectos de diseño sumamente importantes tales como, las pérdidas de energía hidráulica en el circuito hidrostático, la eficiencia volumétrica e hidráulica del motor hidráulico, eficiencia mecánica, y la eficiencia eléctrica de los motores electromagnéticos. Luego, mediante planos de eficiencias establecidos por los niveles de fuerza-velocidad del fluido en el motor hidráulico se determinó que el dispositivo proporcionaba una eficiencia máxima de conversión de energía del 41.7%. Aunque los resultados obtenidos en esa investigación fueron relevantes en términos del mejoramiento de la eficiencia de conversión de energía en la parte del motor hidráulico, se deben realizar estudios numéricos considerando tanto las dinámicas no lineales del dispositivo como las dinámicas de un vehículo completo sujeto a vibración estocástica.

Con el objetivo de mejorar tanto la capacidad de regeneración de energía vibracional como las dinámicas dominantes de los vehículos, [Zou et al.](#) propusieron un sistema de suspensión interconectado por amortiguadores regenerativos electrohidráulicos (HIS-HESA). La idea subyacente de conectar todos los amortiguadores regenerativos a una unidad central de conversión de energía hidráulica a electricidad es para reducir el número de componentes hidráulicos, mecánicos, y eléctricos. Por lo tanto, el sistema regenerativo constituía principalmente de cuatro amortiguadores hidráulicos con mecanismos de conversión de movimiento del flujo de fluido hidráulico (HMRs), dos acumuladores de presión baja y alta, un motor hidráulico, y un circuito eléctrico de generación de potencia. De acuerdo a los resultados numéricos obtenidos considerando las dinámicas de un modelo vehículo de siete grados de libertad (Full vehicle suspension system), el HIS-HESA puede recolectar una potencia de alrededor de 190 watts. Adicionalmente, este sistema regenerativo mejoró tanto el índice del confort como del agarre mecánico en un 33% y 20%, respectivamente. Los autores también recalcaron que el uso de este dispositivo es para camiones pesados porque ellos disipan mayor cantidad de energía cinética comparado con los otros tipos de vehículos. Adicionalmente, se observó un equilibrio entre el índice del confort y la capacidad de regeneración de energía cuando la resistencia externa del generador eléctrico variaba [\[1,104-106\]](#). Aunque, los resultados numéricos presentados en este artículo son muy interesantes, algunos aspectos relevantes en el almacenamiento de la energía regenerada fueron omitidos. Por lo tanto, es conveniente considerar todos los tipos de eficiencias que se involucran en el mejoramiento y cuantificación de la capacidad de regeneración de energía en los vehículos.

Debido a que los rectificadores hidráulicos de los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos presentan menor efecto de fatiga mecánica en sus elementos de conversión de movimiento bidireccional, ellos son también factibles de utilizar en aplicaciones de regeneración de energía de impacto producida por la velocidad de conducción de los vehículos. En efecto, en la literatura se han reportado dos excelentes aplicaciones de estos sistemas, las cuales son; aprovechamiento de la energía de impacto para túneles renovables de carretera, y tecnologías de regeneración de energía vial. De hecho, [Obeid et al. \[107\]](#) diseñaron un sistema de recolección de energía vial, el

cual consistía principalmente de bombas hidráulicas conectadas en serie para incrementar el potencial hidráulico del fluido, un motor hidráulico para transformar la energía hidráulica en trabajo mecánico, y un generador electromagnético rotatorio conectado a un volante de inercia mecánico. El dispositivo propuesto por estos investigadores recolectó una potencia promedio de 4000 watts cuando la velocidad de conducción del vehículo era de 30-50 km/h. Adicionalmente, [Ting et al. \[108\]](#) diseñaron y patentaron un recolector de energía para aprovechar la energía potencial de los vehículos que son conducidos en carreteras inclinadas. Este dispositivo consistía principalmente de una matriz de pistones mecánicos, bombas y motores hidráulicos, y un generador electromagnético. Los resultados experimentales demostraron que la eficiencia de regeneración del dispositivo fue del 40%, la cual es superior a las reportadas en otras investigaciones.

Recientemente, la compañía Levant Power Corp. desarrolló un amortiguador regenerativo electrohidráulico compactado llamado GenShock con el objetivo de aumentar la eficiencia del combustible de los vehículos de pasajeros, y simultáneamente proporcionar fuerzas activas al sistema de suspensión [\[109\]](#). Adicionalmente, el grupo de investigación de la corporación AUDI presentó un novedoso sistema de regeneración de energía vibracional llamado amortiguador electromecánico rotatorio (eRot), el cual fue fabricado basado elementos de transmisión mecánica [\[110\]](#). Tal como lo reportó recientemente el investigador Abdelkareem, existen muchas oportunidades de investigación en este campo de la regeneración de energía vibracional en automóviles. En los próximos años, se espera que se instalen nuevos amortiguadores regenerativos en camiones pesados porque en ellos existe mayor potencial de regeneración de energía [\[19\]](#).

#### **2.1.4. Conclusión del estado de arte**

El tema de la regeneración de energía vibratoria producida por el nivel de irregularidad de la carretera es una línea de investigación prometedora en energías limpias, sin embargo, para lograr tal objetivo se requieren cubrir muchos aspectos y equilibrios de diseño (comportamientos dinámicos y parámetros estructurales) en los transductores regenerativos. Como se observó en la literatura, existen básicamente tres tipos de amortiguadores regenerativos, los cuales aprovechan el movimiento relativo bidireccional del sistema de suspensión para generar electricidad. Estos tipos de amortiguadores regenerativos son los siguientes; amortiguadores regenerativos basados en motores electromagnéticos lineales, amortiguadores regenerativos electromecánicos, y amortiguadores regenerativos electrohidráulicos. La eficiencia de conversión de energía de los amortiguadores electromagnéticos lineales se encuentra aproximadamente entre 10-35%, logrando un rango de aprovechamiento de energía de 5-310 watts. La principal ventaja de este tipo de amortiguadores en su rápida respuesta en el control de las dinámicas del vehículo, sin embargo, proporciona niveles bajos de amortiguamiento. De hecho, estos tipos de dispositivos son más factibles de usar en coches de pasajeros (coches de lujo), y en sistemas mecánicos con sensores autoalimentados. Aunque, se propusieron recientemente amortiguadores híbridos basados en motores electromagnéticos lineales para mejorar la capacidad de fuerza de

amortiguación en los sistemas de suspensión, ellos solo fueron analizados en plataformas de pruebas experimentales considerando excitaciones armónicas simples. Por lo tanto, se deben realizar extensas simulaciones numéricas considerando todas las dinámicas del vehículo, linealidades y no linealidades de este tipo de amortiguador, perfiles artificiales de carretera que se aproximen a una carretera real.

Por otra parte, los amortiguadores electromecánicos presentan una eficiencia de conversión de aproximadamente entre 5-75%, y una capacidad de regeneración de energía de 10-350 watts considerando diferentes condiciones de operación. Aunque, este tipo de dispositivo presenta una eficiencia alta de conversión de energía, el efecto de inercia rotacional producido por su mecanismo de rectificación de movimiento es perjudicial para el sistema de suspensión a altas frecuencias de excitación. Con el objetivo de minimizar este inconveniente y además aprovechar la topología mecánica de este tipo de amortiguador regenerativo, el mecanismo de conversión de movimiento ha sido mejorado recientemente, tal como se muestra en las [Figura 2.7](#), [Figura 2.8](#), [Figura 2.14](#), y [Figura 2.15](#). Sin embargo, estos amortiguadores regenerativos novedosos solo fueron analizados desde la perspectiva de eficiencia de conversión de energía, y raramente desde el punto de vista de capacidad de mejoramiento en las dinámicas de un vehículo completo. Adicionalmente, el autor de esta tesis sugiere que se debe realizar análisis de durabilidad de los sistemas de rectificación de movimiento con el objetivo de cuantificar la vida útil y factibilidad del dispositivo sujetos a cargas estocásticas de banda ancha de frecuencias de excitación. Además, la capacidad de conversión de energía del dispositivo está directamente influenciada por el mecanismo de transmisión de potencia, lo cual implica que; al incrementar la relación de transmisión de velocidad, se incrementa la inercia rotacional y el tamaño del dispositivo. Esta es la principal desventaja de este amortiguador regenerativo. De hecho, es posible que se utilice solo para un objetivo, el cual es la regeneración de energía en diferentes sistemas de energías verdes; por ejemplo, en sistemas de regeneración de energía producida por las olas marítimas, en la recolección de energía en cables, en la cosecha de la energía de vibración inducida en las vías ferroviarias, y en los sistemas de suspensión de los vagones de los ferrocarriles, etc. También es importante mencionar que, en la mayoría de los estudios reportados en la literatura, no se consideraron efectos no lineales en este tipo de dispositivo. En efecto, es de suma importancia considerar estos efectos tanto en la cuantificación de la capacidad de regeneración de energía como en todas las dinámicas de un vehículo completo sujeto a vibración estocástica lineal o y no lineal, y así mismo evitar equilibrios dinámicos en el sistema.

Adicionalmente, la eficiencia de conversión de energía de los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos es baja comparada con los dos tipos mencionados anteriormente. De hecho, este tipo de amortiguador regenerativo logra una eficiencia de conversión de energía del 5-30%, y un potencial de regeneración de 15-450 watts. Estos datos fueron obtenidos considerando condiciones diferentes de operación, y por lo tanto pueden estar sujetos a cambios. Los amortiguadores regenerativos electrohidráulicos pueden proporcionar fuerzas de amortiguación grandes a frecuencias bajas y altas comparado con los amortiguadores regenerativos

electromagnéticos y los basados en motores electromagnéticos lineales. Sin embargo, la respuesta de acción de control de un sistema electrohidráulico es inferior a la de un sistema electromagnético. Dada la superioridad en fuerza de amortiguamiento de este dispositivo, es conveniente su uso en vehículos pesados tales como; camiones pesados, camiones tipo tráiler, vehículos de todo terreno. De hecho, en la literatura se recalca que en este tipo de vehículos se disipa mayor cantidad de energía vibratoria, y que los amortiguadores regenerativos basados en transmisión hidráulica son más factibles de usar en estos tipos de sistemas. Aunque, el costo de estos dispositivos es alto debido al número de componentes mecánicos, eléctricos, e hidráulicos necesarios para lograr tanto la capacidad de regeneración de energía como los niveles de amortiguamiento en el sistema. Recientemente, una idea novedosa fue reportada, la cual consiste en ubicar el sistema de regeneración de energía en una unidad central del vehículo, y solo utilizar pocos mecanismos hidráulicos para transformar eficientemente la energía hidrodinámica del flujo de fluido.

Dado que pocos estudios reportaron la cuantificación de energía de un vehículo completo sujeto a vibración causada por las irregularidades de la carretera, es necesario realizar simulaciones numéricas extensivas considerando todas las dinámicas de un vehículo completo. Posteriormente, agregar los modelos dinámicos lineales y no lineales de los diferentes tipos de amortiguadores regenerativos sujetos a las mismas condiciones de operación, con el objetivo de cuantificar razonablemente el potencial de regeneración de energía en vehículos. Es importante mencionar que, los efectos dinámicos de los sistemas de almacenamiento de energía los amortiguadores regenerativos son también de crucial importancia en la eficiencia de conversión de energía tales como; supercapacitores, ultracapacitores, y baterías electroquímicas. Adicionalmente, es necesario considerar perfiles artificiales de velocidad de conducción de los vehículos, con el objetivo de proporcionar un enfoque más realista en las simulaciones numéricas del modelo de vehículo completo. Por lo tanto, en este trabajo de investigación se presentan extensas simulaciones numéricas del modelo de vehículo completo considerando dinámicas lineales y no lineales sujetos a vibración estocástica no lineal.

## 3. Capítulo 3

### Marco teórico

#### 3.1. Dinámica de vehículos

Existen dos aspectos principales en la dinámica de un vehículo que definen su comportamiento. La primera es el aislamiento de vibración y la segunda es el algoritmo de control. El aislamiento consiste en minimizar todas las perturbaciones que deterioran el confort del pasajero. Esto, también se divide en dos temas, las perturbaciones que el vehículo genera (por ejemplo, vibraciones y ruido del motor) y las que le impone el mundo exterior dado que se comporta como un sistema no inercial. Las perturbaciones son principalmente las ondulaciones de la carretera y la interacción aerodinámica del vehículo con su entorno. Además, la carga vertical sobre el neumático cambia constantemente de acuerdo al perfil irregular de la carretera, la cual tiene gran influencia en la fuerza lateral que el neumático genera en cualquier instante para proporcionar estabilidad al sistema. Por otra parte, el algoritmo control es una parte esencial del sistema de suspensión para mejorar las dinámicas del chasis y del neumático. Es de interés mencionar que las dinámicas tanto del cuerpo del automóvil como del neumático son cruciales para la implementación de un algoritmo de control. Por lo tanto, para poder aislar las vibraciones producidas por la dinámica del neumático mediante un sistema de suspensión se necesita definir las principales dinámicas de un vehículo completo, tal como se muestra en la [Figura 3.1](#).

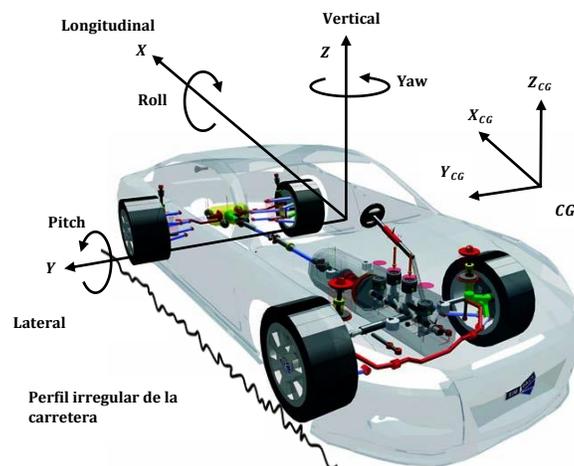


Figura 3.1: Grados de libertad del cuerpo de un vehículo sin restricciones. CG, centro de gravedad.

Por inspección se puede ver que debería existir un valor para el producto de cruz de inercia  $I_{xz}$ , lo cual  $I_{xy}$  y  $I_{yz}$  deberían aproximarse a cero dada la simetría del vehículo. En realidad, el cuerpo del vehículo podría tener cierta asimetría, que de hecho  $I_{xy}$  y  $I_{yz}$  toman valores diferentes de cero. Esto origina efectos inerciales perjudiciales en la dinámica del cuerpo del vehículo. Además, la dinámica del vehículo también está influenciada por el momento de inercia de la guiñada (yaw)  $I_{zz}$ , el cual causa que el vehículo derrape principalmente en curvas. Adicionalmente, los momentos de inercia

$I_{xx}$  y  $I_{yy}$  representan movimientos de balanceo (roll) y cabeceo (pitch), respectivamente [111]. El balanceo está relacionado con el giro del cuerpo del vehículo alrededor del eje  $x$  perpendicular al plano  $yz$ , además, este efecto se origina también por las curvas de la carretera y por las irregularidades de esta misma. Por otra parte, el efecto del cabeceo se origina por el arranque y frenado del vehículo. La dinámica de un vehículo suele dividirse en cuatro partes debido a que la cinemática de los mecanismos de sujeción del sistema de suspensión es independiente. Por lo general, se utiliza solo una cuarta parte del vehículo para evaluar el desempeño de un sistema de suspensión considerando el supuesto de que el vehículo es totalmente simétrico. A esta cuarta parte comúnmente se le conoce como el *Modelo cuarto de automóvil*, el cual está constituido por la masa del neumático (masa no suspendida) y la masa de chasis (masa suspendida), ver [Figura 3.2](#). Este modelo parece ser simple dado que solo supone la dinámica vertical de la cuarta parte del vehículo, pero es suficiente para estudiar los índices de desempeño del sistema de suspensión. Adicionalmente, a este modelo se puede incluir efectos lineales y no lineales de la suspensión con la finalidad de aproximar las soluciones obtenidas tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia a los resultados experimentales. Por lo general, la respuesta en frecuencia se utiliza para determinar el ancho de banda del sistema de suspensión, y es de gran interés para aplicar criterios de optimización con la finalidad de controlar los índices de desempeño, tales como el confort y el agarre a la carretera, dado que están relacionados directamente con el factor de amortiguamiento y la rigidez de la suspensión, respectivamente.

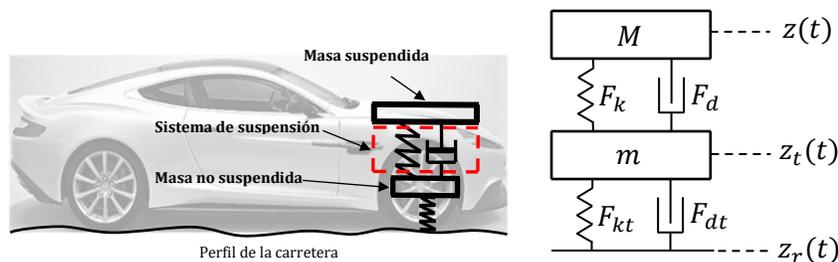


Figura 3.2: Representación de un sistema de suspensión en un cuarto de vehículo. (Imagen reproducida y adaptada de la [Ref.\[9\]](#)).

### 3.2. Modelo del sistema cuarto de vehículo pasivo

El modelo cuarto de vehículo mostrado en la [Figura 3.2](#) se utiliza ampliamente para el diseño del control y para el análisis del rendimiento del sistema de suspensión a través de los índices de desempeño. De acuerdo a la notación descrita, los modelos matemáticos que rigen el comportamiento dinámico del *cuarto de vehículo* se pueden representar de la siguiente manera.

$$M\ddot{z}(t) = F_k(t) + F_d(t) + F_L(t) - Mg \quad (3.1)$$

$$m\ddot{z}_t(t) = -F_k(t) - F_d(t) + F_{kt}(t) + F_{dt}(t) - mg \quad (3.2)$$

Donde  $F_k(t)$  y  $F_d(t)$  son funciones que describen las fuerzas verticales del resorte y del amortiguador del sistema de suspensión, respectivamente.  $F_{kt}(t)$  y  $F_{dt}(t)$  son

funciones que describen las fuerzas verticales de la rigidez y del amortiguamiento interno del neumático.  $M$  y  $m$  son las masas del chasis y del neumático, respectivamente.  $z(t)$  y  $z_t(t)$  son los desplazamientos absolutos de rebote del chasis y de la rueda.  $g$  es la constante gravitacional. Finalmente,  $z_r(t)$  y  $F_L(t)$  son las perturbaciones verticales del perfil irregular de la carretera y la carga sobre el chasis, respectivamente. En este modelo, la masa no suspendida  $m$  corresponde al conjunto de elementos que componen a la rueda, el sistema de suspensión y múltiples eslabones conectados desde el chasis hasta el pivote de giro de la rueda. Se debe tener en cuenta que, en realidad, las fuerzas  $F_k(t)$ ,  $F_d(t)$ ,  $F_{kt}(t)$  y  $F_{dt}(t)$  son funciones de múltiples variables que asumen dinámicas no lineales. Para poder implementar un algoritmo de control se sugieren hacer las siguientes suposiciones.

Primero, la perturbación de la carga vertical causada por la carga sobre la carrocería del vehículo no se considera como una entrada al sistema, es decir,  $F_L(t) = 0$ . Ciertamente,  $F_L(t)$  se utiliza para modelar los efectos de transferencia de carga que ocurren cuando se realizan maniobras de dirección y de frenado, los cuales están vinculados con otras dinámicas del vehículo. Por lo pronto, no se consideran estos efectos dado que se desea conocer las capacidades de filtrado de vibración de la suspensión con respecto a las perturbaciones causadas por las irregularidades de la carretera. Por otra parte, la descripción de fuerza lineal del resorte es.

$$F_{kt}(t) = -k_t(z_t(t) - z_r(t) - R_t) \quad (3.3)$$

donde  $k_t \in \mathbb{R}^+$  y  $R_t \in \mathbb{R}^+$  son las rigideces linealizadas y la rigidez del neumático, respectivamente. Adicionalmente, el factor de amortiguamiento del neumático es despreciable, es decir,  $F_{dt}(t) = 0$ . En efecto, en la práctica, el coeficiente de amortiguamiento de un neumático es mucho menor que el del amortiguador del sistema de suspensión. Además, este parámetro no es de gran interés para el análisis del desempeño de la suspensión y del algoritmo de control. Por otra parte, la descripción lineal de la fuerza de suspensión del resorte es.

$$F_k(t) = -k(z(t) - z_t(t) - L) \quad (3.4)$$

donde  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $L \in \mathbb{R}^+$  son la rigidez linealizada y longitud nominal del resorte de suspensión, respectivamente. El diseñador debe tener en cuenta que un sistema de suspensión semi-activa normalmente tiene como objetivo operar en las zonas lineales de los dispositivos con el objetivo de evitar inestabilidad. Adicionalmente, la descripción lineal de la fuerza de amortiguamiento del amortiguador es.

$$F_d(t) = -c(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) \quad (3.5)$$

donde  $c \in \mathbb{R}^+$  es el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador. Estas simplificaciones del modelo son muy convenientes para síntesis del controlador y para la eficacia de la simulación numérica. Además, como se explicó, no son tan restrictivas para el propósito de aplicación. Por lo tanto, de acuerdo a estas consideraciones, el modelo cuarto de vehículo se simplifica, y se puede reescribir como en las ecuaciones (3.6) y (3.7).

$$M\ddot{z}(t) = -k(z(t) - z_t(t) - L) - c(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - Mg \quad (3.6)$$

$$m\ddot{z}_t(t) = k(z(t) - z_t(t) - L) + c(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - R_t) - mg \quad (3.7)$$

Además, el modelo cuarto de vehículo mostrado en la [Figura 3.2](#) se puede mostrar en su forma simplificada, tal como se observa en la [Figura 3.3](#).

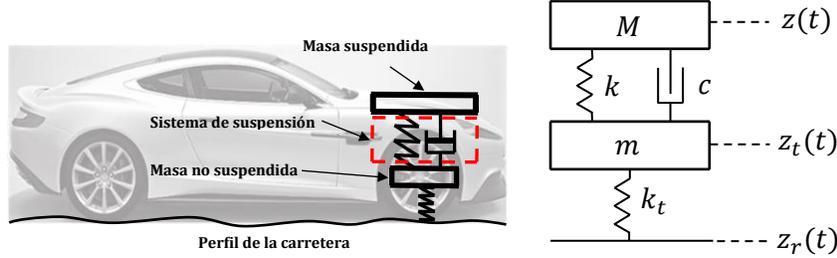


Figura 3.3: Representación de un sistema de suspensión en un cuarto de vehículo simplificado.

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) son válidas bajo un dominio restrictivo. Mas especialmente, este modelo se puede considerar válido si y solo sí.

- Las deflexiones de la suspensión son pequeñas considerando la carga nominal tanto del chasis como de la carrocería del vehículo, y por lo tanto, el perfil irregular de la carretera son las únicas perturbaciones que actúan sobre el sistema y son suficientemente pequeñas para no entrar en las limitaciones del sistema de suspensión, y las no linealidades:  $|z(t) - z_t(t) - L| \leq L_{max}$  (donde  $L_{max}$  es el límite de deflexión de la suspensión).
- El neumático siempre está unido a la tierra mecánica (el vehículo no salta sobre la carretera); en efecto, cuando la rueda ya no está en contacto con la carretera, el vehículo no es controlable.

### 3.3. Puntos de equilibrio del modelo cuarto de vehículo

Los puntos de equilibrio del sistema se refieren a los desplazamientos verticales de la masa suspendida y no suspendida, es decir, cuando el sistema está en reposo. A partir de las ecuaciones (3.6) y (3.7), el punto de equilibrio del sistema se obtiene de la siguiente manera.

$$-k(z^{eq} - z_t^{eq} - L) - Mg = 0 \quad (3.8)$$

$$k(z^{eq} - z_t^{eq} - L) - k_t(z_t^{eq} - z_r^{eq} - R_t) - mg = 0 \quad (3.9)$$

Por lo que, la solución de ese sistema es extremadamente simple,

$$\begin{bmatrix} z^{eq} \\ z_t^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k - k_t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Mg - kL \\ mg + kL - k_t R_t - k_t z_r^{eq} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Luego, eligiendo  $z_r^{eq} = 0$ , el punto de equilibrio se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} z^{eq} \\ z_t^{eq} \end{bmatrix} = \frac{1}{kk_t} \begin{bmatrix} k + k_t & k \\ k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Mg - kL \\ mg + kL - k_t R_t \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Simplificando la ecuación (3.11), se obtiene.

$$\begin{bmatrix} z^{eq} \\ z_t^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L - \frac{Mg}{k} + R_t - \frac{(M+m)g}{k_t} \\ R_t - \frac{(M+m)g}{k_t} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Estos puntos de equilibrio se utilizan para simplificar otra vez el modelo del sistema. En la siguiente subsección, se presenta el modelo del cuarto de vehículo simplificado con el objetivo de investigar las propiedades intrínsecas del sistema de suspensión convencional, y así mismo proporcionar las desventajas de una suspensión semi activa en relación con los puntos invariantes del sistema.

### 3.4. Modelo del cuarto de vehículo simplificado

De acuerdo al punto de equilibrio definido por la (3.12), se puede obtener el *modelo cuarto de vehículo simplificado*. Por lo tanto, los modelos matemáticos lineales invariantes el tiempo (LTI) tanto de la masa suspendida como la masa no suspendida alrededor del punto de equilibrio se pueden representar de la siguiente manera.

$$M\ddot{z}(t) = -k(z(t) - z_t(t)) - c(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) \quad (3.13)$$

$$m\ddot{z}_t(t) = k(z(t) - z_t(t)) + c(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k_t(z_t(t) - z_r(t)) \quad (3.14)$$

donde  $k \in \mathbb{R}^+$  y  $k_t \in \mathbb{R}^+$  son los coeficientes de rigidez linealizados del sistema de suspensión y del neumático, respectivamente.  $c \in \mathbb{R}^+$  es el coeficiente de amortiguamiento linealizado.  $M$  y  $m$  son las masas del chasis y de la rueda, respectivamente.  $z$  y  $z_t$  son los desplazamientos de rebote del chasis y de la rueda, respectivamente. Finalmente,  $z_r$  es la perturbación provocada por el perfil irregular de la carretera. Con el objetivo de calcular las propiedades invariantes de este modelo, es conveniente expresarlo de la siguiente manera,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{z}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{z}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{z}(t)\} = \{\mathbf{z}_r(t)\} \quad (3.15)$$

donde  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ , y  $[\mathbf{K}]$  representan la matriz de masas, amortiguamiento, y de rigidez del modelo cuarto de vehículo; mientras que  $\{\mathbf{z}(t)\}$  y  $\{\mathbf{z}_r(t)\}$  denotan el vector desplazamiento y la excitación estocástica producida por el perfil irregular de la carretera, respectivamente. Al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (3.15), es decir,  $\mathcal{F}\{\ddot{\mathbf{z}}(t)\}$ ,  $\mathcal{F}\{\dot{\mathbf{z}}(t)\}$ ,  $\mathcal{F}\{\mathbf{z}(t)\}$ , y  $\mathcal{F}\{\mathbf{z}_r(t)\}$  se obtiene la siguiente expresión matemática,

$$\{\mathbf{z}(\omega)\} = \mathbf{H}(\omega)\{\mathbf{z}_r(\omega)\}; \text{ para } \mathbf{H}(\omega) = (-\omega^2[\mathbf{M}] + j\omega[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}])^{-1} \quad (3.16)$$

donde, específicamente,  $\mathbf{H}(\omega)$  es la matriz de función de respuesta en frecuencia del sistema. Con el objetivo de simplificar el análisis analítico de la ecuación (3.16), es conveniente seleccionar variables sin dimensión, las cuales se puede elegir como sigue;

$q = \omega_2/\omega_1$ ,  $\mu = m/M$ ,  $\zeta = c/2\sqrt{kM}$ ,  $\Omega = \omega/\omega_1$ , y  $\omega_1 = \sqrt{k_t/m}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{k/M}$ . Note que,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  representan las frecuencias naturales no amortiguadas del sistema, además, son cantidades físicas con dimensión. De acuerdo a las variables sin dimensión seleccionadas, es posible calcular las respuestas en el dominio de la frecuencia a partir de la ecuación (3.16). Las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) de estudio para el diseño de una suspensión pasiva convencional son las siguientes; la FRF de la aceleración de la masa del chasis, la FRF del nivel de adherencia del neumático sobre la carretera, la FRF de la deflexión de la suspensión, y la FRF de la capacidad disipativa en el sistema de suspensión. Por lo tanto, esta FRFs se puede expresar la siguiente manera,

$$\left. \begin{aligned} |H_{Acel}(\mu, q, \zeta, \Omega)| &= \left[ \frac{(\mu q^2 \Omega^2)^2 + (2\zeta \mu q \Omega^3)^2}{C_1(\mu, q, \Omega) + D_1(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ |H_{SuspDeflec}(\mu, q, \zeta, \Omega)| &= \left[ \frac{(\mu \Omega^2)^2}{C_1(\mu, q, \Omega) + D_1(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ |H_{PowerDisip}(\mu, q, c, \zeta, \Omega)| &= c \left[ \frac{(\mu \Omega^3)^2}{C_1(\mu, q, \Omega) + D_1(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ |H_{TyreLoad}(\mu, q, k_t, \zeta, \Omega)| &= k_t \left[ \frac{\{\mu \Omega^4 - [(1 + \mu)q^2] \Omega^2 + \mu q^2\}^2 + (2\zeta q \Omega)^2 [(1 + u) \Omega^2]^2}{C_1(\mu, q, \Omega) + D_1(\mu, q, \zeta, \Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \forall (\mu, q, c, k_t, \zeta, \Omega) \in \mathbb{R}^+ \quad (3.17)$$

donde,

$$C_1(\mu, q, \Omega) + D_1(\mu, q, \zeta, \Omega) = \{\mu \Omega^4 - [\mu + (1 + \mu)q^2] \Omega^2 + \mu q^2\}^2 + (2\zeta q \Omega)^2 [\mu - (1 + u) \Omega^2]^2$$

En la siguiente sección se abordará el significado de cada respuesta con la finalidad de entender las limitaciones de la suspensión pasiva. Estas limitaciones estarán dadas por el comportamiento invariante de cada respuesta, es decir, existen amplitudes de vibración en la respuesta en frecuencia que no dependen del coeficiente del amortiguamiento. Por lo tanto, es importante considerar estos puntos para el diseño de una suspensión semi activa dado que se enfoca principalmente en variar el amortiguamiento.

### 3.5. Propiedades invariantes del modelo cuarto de vehículo

En esta sección se introducen las definiciones de las propiedades intrínsecas del *modelo cuarto de vehículo*. Este modelo exhibe algunos puntos invariantes (comportamientos dinámicos intrínsecos) con respecto al coeficiente de amortiguamiento del amortiguador del sistema de suspensión. Es de interés mencionar que estos puntos no se pueden modificar a través de una suspensión pasiva y semi activa. Para poder encontrar estos puntos se formula la siguiente definición matemática.

Considere que, la función de respuesta frecuencia normalizada de aceleración del chasis  $H_{Acel}(\mu, q, \zeta, \Omega)$ , donde  $\Omega \in \omega \subseteq \mathbb{R}^+$  y donde  $\zeta \in \mathbb{R}^+$  es el factor de amortiguamiento. Entonces, la función  $H_{Acel}(\mu, q, \zeta, \Omega)$  tiene un punto invariante con respecto al parámetro  $\zeta$ , si y solo sí.

$$\{\exists |H_i(\mu, q, \Omega)| \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \Omega_i(\mu, q, \Omega) \in \mathbb{R}^+ / \forall \zeta \in \mathbb{R}^+, |H_i(\mu, q, \Omega)|_{\Omega=\Omega_0} = |H_i(\mu, q, \Omega)|\} \quad (3.18)$$

Tomando en cuenta las restricciones y consideraciones de la ecuación (3.18) se produce la siguiente ecuación.

$$\left. \begin{aligned} f_1(\mu, q, \zeta, \Omega) &= \left| H_{Accl}(\mu, q, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} - \left| H_{Accl}(\mu, q, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \right| = 0 \\ f_2(\mu, q, \zeta, \Omega) &= \left| H_{SuspDeflec}(\mu, q, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} - \left| H_{SuspDeflec}(\mu, q, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \right| = 0 \\ f_3(\mu, q, c, \zeta, \Omega) &= \left| H_{PowerDisip}(\mu, q, c, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} - \left| H_{PowerDisip}(\mu, q, c, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \right| = 0 \\ f_4(\mu, q, k_t, \zeta, \Omega) &= \left| H_{TyreLoad}(\mu, q, k_t, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} - \left| H_{TyreLoad}(\mu, q, k_t, \zeta, \Omega) \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \right| = 0 \end{aligned} \right\} \forall (\Omega) \in \mathbb{R}^+ \quad (3.19)$$

Al resolver el conjunto de ecuaciones no lineales implícitas (3.19) se obtienen las frecuencias donde ocurren los comportamientos invariantes de todas las respuestas en frecuencia normalizadas del modelo del cuarto de vehículo. A continuación, se presentan.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= 0 \\ \Omega_2(\mu, q) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\mu q^2 + 2q^2 + \mu - \sqrt{(4\mu^2 + 8\mu + 4)q^4 + (4\mu - 4\mu^2)q^2 + \mu^2}}{\mu}} \\ \Omega_3(k_t, m) &= 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{k_t}{m}} \\ \Omega_4(\mu, q) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\mu q^2 + 2q^2 + \mu + \sqrt{(4\mu^2 + 8\mu + 4)q^4 + (4\mu - 4\mu^2)q^2 + \mu^2}}{\mu}} \\ \Omega_5(\mu) &= \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \\ \Omega_6(\mu, q) &= \sqrt{\frac{(1 + q^2)2\mu^2 + (1 + 4q^2)\mu + 2q^2 - \sqrt{4(\mu + 1)^4 q^4 - [4\mu(2\mu - 1)(\mu + 1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu + 1)^2}}{\mu(\mu + 1)}} \\ \Omega_7(\mu, q) &= \sqrt{\frac{(1 + q^2)2\mu^2 + (1 + 4q^2)\mu + 2q^2 + \sqrt{4(\mu + 1)^4 q^4 - [4\mu(2\mu - 1)(\mu + 1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu + 1)^2}}{\mu(\mu + 1)}} \end{aligned} \right\} \forall (\mu, q, k_t, m) \in \mathbb{R}^+ \quad (3.20)$$

Note que, existen ocho frecuencias invariantes sin dimensión en el modelo del cuarto de vehículo, además no dependen de la cantidad de amortiguamiento del amortiguador del sistema de suspensión. Estas frecuencias repercuten en los rendimientos tanto en una suspensión pasiva como semi activa. Esto implica que también el rendimiento de las suspensiones semi activas se limite alrededor de estas frecuencias invariantes, porque en este tipo de suspensión no es posible cambiar el coeficiente de rigidez del elemento de restitución de energía potencial. De hecho, esto se puede observar directamente en el conjunto de ecuaciones (3.20). Adicionalmente, las amplitudes invariantes del modelo de cuarto de vehículo también se pueden calcular al combinar las ecuaciones (3.17) y (3.20). Esto resulta en,

$$\left. \begin{aligned}
|H_{\text{Accel}}(k_t, m)|_{\text{@}\Omega_1} &= 1 \\
|H_{\text{Accel}}(\mu, q)|_{\text{@}\Omega_2} &= \frac{2\mu^2}{(1-2q^2)\mu^2 - (1+4q^2)\mu - 2q^2 + (1+\mu)\sqrt{4(1+\mu)^2q^4 - 4(\mu^2 + \mu)q^2 + \mu^2}} \\
|H_{\text{Accel}}(\mu)|_{\text{@}\Omega_3} &= \mu \\
|H_{\text{Accel}}(\mu, q)|_{\text{@}\Omega_4} &= \frac{2\mu^2}{(2q^2-1)\mu^2 + (1+4q^2)\mu + 2q^2 + (1+\mu)\sqrt{4(1+\mu)^2q^4 - 4(\mu^2 + \mu)q^2 + \mu^2}} \\
|H_{\text{SuspDeflec}}(\mu)|_{\text{@}\Omega_5} &= 1 + \mu \\
|H_{\text{TyreLoad}}(\mu, q)|_{\text{@}\Omega_6} &= \sqrt{\frac{\{(1+q^2)2\mu^2 + (1+4q^2)\mu + 2q^2 - \sqrt{4(\mu+1)^4q^4 - [4\mu(2\mu-1)(\mu+1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu+1)^2}\}^2}{\{(q^2-1)2\mu^2 + (1+4q^2)\mu + 2q^2 - \sqrt{4(\mu+1)^4q^4 - [4\mu(2\mu-1)(\mu+1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu+1)^2}\}^2}} \\
|H_{\text{TyreLoad}}(\mu, q)|_{\text{@}\Omega_7} &= \sqrt{\frac{\{(1+q^2)2\mu^2 + (1+4q^2)\mu + 2q^2 + \sqrt{4(\mu+1)^4q^4 - [4\mu(2\mu-1)(\mu+1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu+1)^2}\}^2}{\{(q^2-1)2\mu^2 + (1+4q^2)\mu + 2q^2 + \sqrt{4(\mu+1)^4q^4 - [4\mu(2\mu-1)(\mu+1)^2]q^2 + \mu^2(2\mu+1)^2}\}^2}}
\end{aligned} \right\} \forall (\mu, q) \in \mathbb{R}^+ \quad (3.21)$$

Con el objetivo de apreciar estos comportamientos dinámicos intrínsecos del sistema de suspensión pasivo, se realizan simulaciones numéricas utilizando los conjuntos de ecuaciones (3.17), (3.20), y (3.21). De acuerdo a estos comportamientos invariantes que se presentan en las curvas FRF de este sistema, se observan las principales limitaciones en términos de minimización de amplitud de vibración. De hecho, estas amplitudes invariantes dependen fuertemente de las rigideces y masas tanto del sistema de suspensión como del modelo dinámico. Estas limitaciones se pueden observar en las siguientes gráficas,

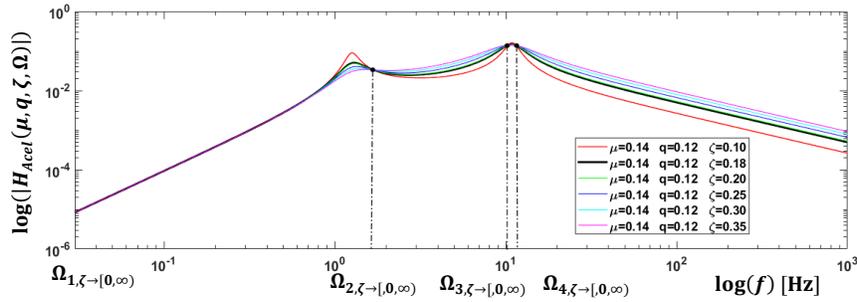


Figura 3.4: Frecuencias y amplitudes invariantes de la FRF de la aceleración de la masa suspendida del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra sólida representa a una suspensión estándar)

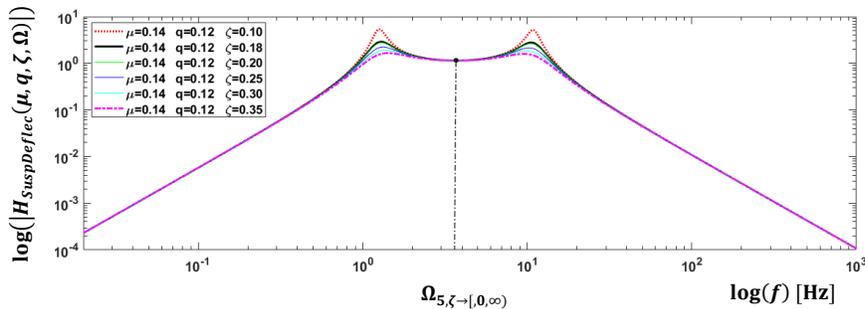


Figura 3.5: Frecuencia y amplitud invariante de la FRF de la deflexión de la suspensión del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra sólida representa a una suspensión estándar).

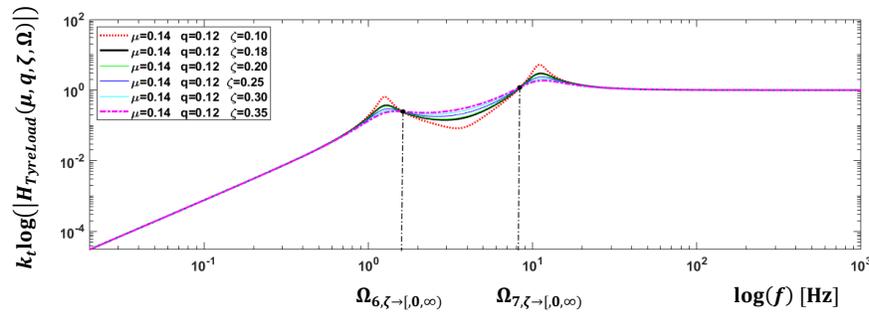


Figura 3.6: Frecuencias y amplitudes invariantes de la FRF de la carga dinámica en el neumático del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra sólida representa a una suspensión estándar).

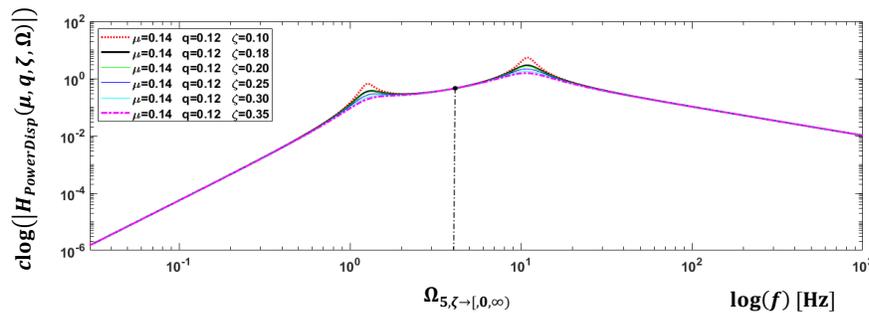


Figura 3.7: Frecuencia y amplitud invariante de la FRF de la potencia disipada en el sistema de suspensión del modelo del cuarto de vehículo. Nota: (La curva negra sólida representa a una suspensión estándar).

Con base en las simulaciones numéricas presentadas en las [Figura 3.4-7](#), es posible observar que el rendimiento dinámico tanto de una suspensión pasiva como de una suspensión semi activa compuesta de un amortiguador electrónicamente controlable se limita por los comportamientos invariantes presentados en las curvas FRF del sistema. Aunque una suspensión semi activa puede mejorar los rendimientos dinámicos a bajas y altas frecuencias de excitación, este tipo de suspensión no puede modificar las amplitudes invariantes del sistema a menos que tenga un dispositivo que pueda cambiar la rigidez de la suspensión. Sin embargo, en el mercado de la industria automotriz solo existe un tipo de dispositivo que puede cambiar la rigidez del sistema de suspensión, el cual es el resorte de presión neumática o resortes de gases. En efecto, los únicos sistemas de suspensión automotriz que pueden cambiar tanto la capacidad de disipación y almacenamiento de energía y potencial del sistema son las suspensiones totalmente activas; sin embargo, utilizar suspensiones activas involucra incrementar tanto el costo como el consumo de energía del sistema, lo cual no es tan conveniente en las industrias automotrices. Por lo tanto, se necesitan otras soluciones para poder mejorar tanto los requerimientos dinámicos como el consumo de energía eléctrica de los actuadores del sistema de suspensión. En esta tesis se presenta una alternativa para mejorar los índices dinámicos del sistema de suspensión convencional utilizando el concepto de redes mecánicas. Con el objetivo de realizar simulaciones numéricas realistas, en la siguiente sección se presenta el modelado matemático del vehículo completo.

### 3.6. Modelo dinámico del vehículo completo

En esta sección, se presenta el modelado dinámico del modelo de vehículo completo considerando tanto las dinámicas de translación como de rotación. Este modelo consiste básicamente de cuatro subconjuntos de sistemas de suspensión pasiva convencional. Con el objetivo de simplificar el modelo matemático de este sistema dinámico, se considera que los neumáticos son ligeramente amortiguados, es decir, el coeficiente amortiguamiento del neumático es pequeño comparado con el del amortiguador del sistema de suspensión. Las ecuaciones dinámicas de este modelo se obtienen a través del balance energético proporcionado por la formulación Euler-Lagrange. A continuación, se presenta el diagrama cinético del modelo de vehículo completo,

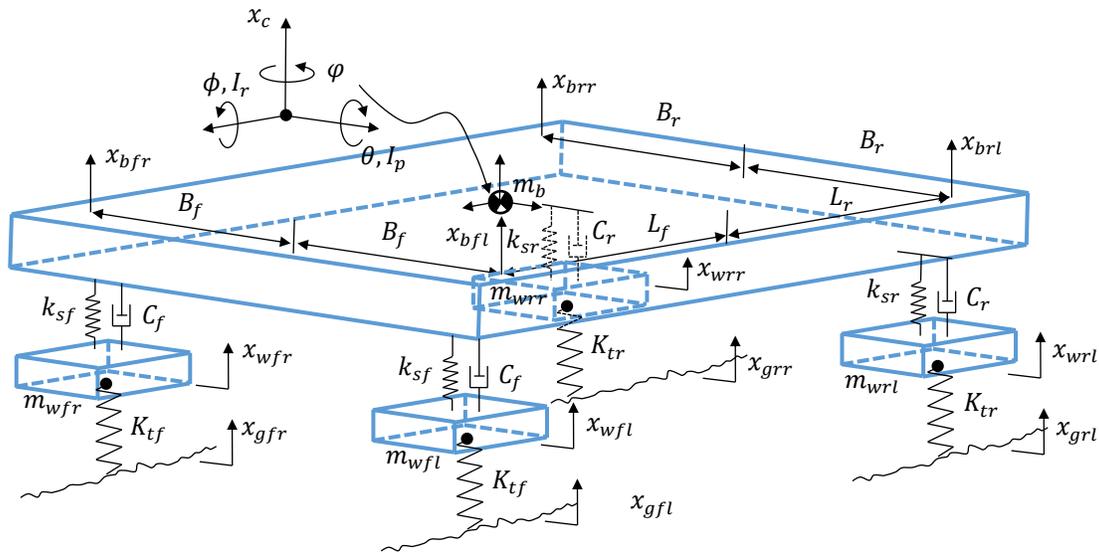


Figura 3.8: Representación cinética del modelo del vehículo completo.

En la Figura 3.8, las dimensiones geométricas del modelo de vehículo completo están dadas por las variables  $B_f, B_r, L_f, L_r$ . Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento tanto de las suspensiones delanteras como traseras están dados por  $k_{sf}, C_f, k_{sr}, C_r$ , respectivamente. Las masas de los neumáticos del vehículo están dadas por las siguientes variables  $m_{wfr}, m_{wfl}, m_{wrl}, m_{wrr}$ . La masa del vehículo está dada por la variable  $m_b$ . Luego, las rigideces tanto de los neumáticos delanteros como traseros están dadas por las variables  $k_{tf}, k_{tr}$ , respectivamente. La cinemática de los extremos del cuerpo del vehículo es una función de cuatro variables, las cuales son las siguientes;  $x_{bfr}, x_{bfl}, x_{brl}, x_{brr}$ . Las variables  $\theta, I_p$  y  $\phi, I_r$  representan tanto los ángulos de rotación como los momentos de inercia de las dinámicas de cabeceo y balanceo del vehículo, respectivamente. Finalmente, las excitaciones estocásticas del perfil irregular de la carretera están dadas por las variables de entrada  $x_{gfr}, x_{gfl}, x_{grl}, x_{grr}$ . De hecho, la excitación del perfil irregular de la carretera se puede aproximar a la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$\dot{x}_g(t) = -2\pi f_0 x_g(t) + 2\pi W(t) \sqrt{G_x(\eta_0) V(t)} \quad (3.22)$$

donde  $f_0 = 0.0628$  Hz representa la frecuencia de corte,  $\eta_0 = 0.1 \text{ m}^{-1}$  es la frecuencia espacial de referencia,  $G_x(\eta_0)$  es el coeficiente de rugosidad de la carretera,  $V(t)$  es la velocidad de conducción del vehículo, y  $W(t)$  es un proceso estocástico estacionario (ruido blanco gaussiano) con media temporal igual a cero. Finalmente,  $x_g(t)$  es el perfil irregular de la carretera [22]. Adicionalmente, la dinámica de guiñado  $\varphi$  o rotación alrededor del eje  $z$ , no se considera porque se utiliza para otros estudios del vehículo, por ejemplo, en efecto dinámico de carreteras curvas que proporcionan excitaciones a altas frecuencias. Considerando las variables definidas anteriormente, el modelo del vehículo completo es un sistema dinámico de siete grados de libertad, por lo tanto, las formulaciones de las ecuaciones dinámicas se pueden obtener a partir de la siguiente formulación,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_c} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{wfl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfl}} = \frac{\dot{x}_{gfl}(t) = -2\pi f_0 x_{gfl}(t) + 2\pi W(t) \sqrt{G_x(\eta_0) V(t)}}{x_{gfl}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wfr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{wfr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wfr}} = \frac{\dot{x}_{gfr}(t) = -2\pi f_0 x_{gfr}(t) + 2\pi W(t) \sqrt{G_x(\eta_0) V(t)}}{x_{gfr}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{wrl}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrl}} = \frac{\dot{x}_{grl}(t) = -2\pi f_0 x_{grl}(t) + 2\pi W(t) \sqrt{G_x(\eta_0) V(t)}}{x_{grl}(t)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{wrr}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{wrr}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{wrr}} = \frac{\dot{x}_{grr}(t) = -2\pi f_0 x_{grr}(t) + 2\pi W(t) \sqrt{G_x(\eta_0) V(t)}}{x_{grr}(t)} \end{cases} \quad (3.23)$$

donde  $L$  y  $D$  representan la función Lagrangiana y de disipación de energía en el sistema. Note que, el sistema de ecuaciones diferenciales (3.23), es un sistema estocástico. Tenga en cuenta que, las excitaciones de los neumáticos traseros se retrasan un tiempo con respecto de los neumáticos frontales. En efecto, en la ecuación (3.23), no se considera tal retraso, es decir, la excitación en los cuatro neumáticos es la misma. Para efectos de modelado, es conveniente usar la representación matemática (3.23). Al considerar las suposiciones anteriores, la función Lagrangiana se puede expresar de la siguiente manera,

$$L(T, V) = T(\dot{x}_c, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{x}_{wfl}, \dot{x}_{wfr}, \dot{x}_{wrl}, \dot{x}_{wrr}) - V(x_c, \theta, \phi, x_{wfl}, x_{wfr}, x_{wrl}, x_{wrr}) \quad (3.24)$$

Luego la función de disipación de energía considerando los cuatro amortiguadores de fluido viscoso del sistema de suspensión, se puede expresar de la siguiente manera.

$$D = \sum_{i=1}^4 \int_0^{\dot{x}_i} \dot{x}_i d\dot{x}_i = \frac{1}{2} C_f (\dot{x}_c - L_f \dot{\theta} + B_f \dot{\phi} - \dot{x}_{wfl})^2 + \frac{1}{2} C_f (\dot{x}_c - L_f \dot{\theta} - B_f \dot{\phi} - \dot{x}_{wfr})^2 + \frac{1}{2} C_r (\dot{x}_c + L_r \dot{\theta} + B_r \dot{\phi} - \dot{x}_{wrl})^2 + \frac{1}{2} C_r (\dot{x}_c + L_r \dot{\theta} - B_r \dot{\phi} - \dot{x}_{wrr})^2 \quad (3.25)$$

Al combinar las ecuaciones (3.24), (3.25), y (3.23) se obtiene el modelo matemático del vehículo completo, el cual se puede representar mediante el siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\begin{cases}
 m_b \ddot{x}_c = k_{sf}(x_{wfl} - x_{bfl}) + c_f(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) + k_{sf}(x_{wfr} - x_{bfr}) + c_f(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr}) + \\
 \quad k_{sr}(x_{wrl} - x_{brl}) + c_r(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{brl}) + k_{sr}(x_{wrr} - x_{brr}) + c_r(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr}) \\
 I_p \ddot{\theta} = L_r[k_{sr}(x_{wrl} - x_{brl}) + c_r(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{brl}) + k_{sr}(x_{wrr} - x_{brr}) + c_r(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr})] - \\
 \quad L_f[k_{sf}(x_{wfl} - x_{bfl}) + c_f(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) + k_{sf}(x_{wfr} - x_{bfr}) + c_f(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr})] \\
 I_r \ddot{\phi} = B_f[k_{sf}(x_{wfl} - x_{bfl}) + c_f(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) - k_{sf}(x_{wfr} - x_{bfr}) - c_f(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr})] + \\
 \quad B_r[k_{sr}(x_{wrl} - x_{brl}) + c_r(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{brl}) - k_{sr}(x_{wrr} - x_{brr}) - c_r(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr})] \\
 m_{wfl} \ddot{x}_{wfl} = K_{tf}(x_{gfl} - x_{wfl}) + k_{sf}(x_{bfl} - x_{wfl}) + c_f(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) \\
 m_{wfr} \ddot{x}_{wfr} = K_{tf}(x_{gfr} - x_{wfr}) + k_{sf}(x_{bfr} - x_{wfr}) + c_f(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) \\
 m_{wrl} \ddot{x}_{wrl} = K_{tr}(x_{grl} - x_{wrl}) + k_{sr}(x_{brl} - x_{wrl}) + c_r(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{wrl}) \\
 m_{wrr} \ddot{x}_{wrr} = K_{tr}(x_{grr} - x_{wrr}) + k_{sr}(x_{brr} - x_{wrr}) + c_r(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr})
 \end{cases} \quad (3.26)$$

En el conjunto de ecuaciones diferenciales (3.26)  $x_{bfl}, x_{bfr}, x_{brl}, x_{brr}$  son funciones lineales y no lineales. Estás representan la cinemática lineal y no lineal del modelo de vehículo completo. Por lo tanto, para ángulos pequeños de  $\theta$  y  $\phi$  se obtiene

$$\begin{cases}
 x_{bfl} = x_c - L_f \theta + B_f \phi \\
 x_{bfr} = x_c - L_f \theta - B_f \phi \\
 x_{brl} = x_c + L_r \theta + B_r \phi \\
 x_{brr} = x_c + L_r \theta - B_r \phi
 \end{cases} \quad (3.27)$$

Sin embargo, el conjunto de ecuaciones lineales (3.27) es una aproximación al comportamiento dinámico del vehículo completo. Por lo tanto, la dinámica completa del vehículo está dada por las siguientes ecuaciones no lineales.

$$\begin{cases}
 x_{bfl} = x_c - L_f \sin \theta + B_f \sin \phi \\
 x_{bfr} = x_c - L_f \sin \theta - B_f \sin \phi \\
 x_{brl} = x_c + L_r \sin \theta + B_r \sin \phi \\
 x_{brr} = x_c + L_r \sin \theta - B_r \sin \phi \\
 \dot{x}_{bfl} = \dot{x}_c - \dot{\theta} L_f \cos \theta + \dot{\phi} B_f \cos \phi \\
 \dot{x}_{bfr} = \dot{x}_c - \dot{\theta} L_f \cos \theta - \dot{\phi} B_f \cos \phi \\
 \dot{x}_{brl} = \dot{x}_c + \dot{\theta} L_r \cos \theta + \dot{\phi} B_r \cos \phi \\
 \dot{x}_{brr} = \dot{x}_c + \dot{\theta} L_r \cos \theta - \dot{\phi} B_r \cos \phi
 \end{cases} \quad (3.28)$$

Considerando que  $R = [x_c \ \theta \ \phi]^T$ ,  $X_b = [x_{bfl} \ x_{bfr} \ x_{brl} \ x_{brr}]^T$ ,  $X_w = [x_{wfl} \ x_{wfr} \ x_{wrl} \ x_{wrr}]^T$ ,  $X_g = [x_{gfl} \ x_{gfr} \ x_{grl} \ x_{grr}]^T$ . El conjunto de ecuaciones diferenciales (3.26) se pueden expresar de la siguiente manera,

$$\begin{cases}
 [M_s]\{\ddot{R}(t)\} = [L][K_s](\{X_w(t)\} - \{X_b(t)\}) + [L][C](\{\dot{X}_w(t)\} - \{\dot{X}_b(t)\}) \\
 [M_u]\{\ddot{X}_w(t)\} = [K_t](\{X_g(t)\} - \{X_w(t)\}) + [K_s](\{X_b(t)\} - \{X_w(t)\}) + [C](\{\dot{X}_b(t)\} - \{\dot{X}_w(t)\})
 \end{cases} \quad (3.29)$$

donde,

$$[M_s] = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -L_f & -L_f & L_r & L_r \\ B_f & -B_f & B_r & -B_r \end{bmatrix}, \quad [K_s] = \begin{bmatrix} k_{sf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{sr} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_u] = \begin{bmatrix} m_{wfl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{wfr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{wrl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{wrr} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}_t] = \begin{bmatrix} k_{tf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{tf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{tr} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_r \end{bmatrix}$$

Se puede notar que las ecuaciones de movimiento del modelo del vehículo completo se pueden expresar en solo dos ecuaciones diferenciales en forma matricial. Además, se puede observar que las ecuaciones (3.29), son similares a las ecuaciones dinámicas del modelo cuarto de vehículo. Con el objetivo de calcular la respuesta del modelo de vehículo completo sujeto a vibración estocástica, en la siguiente sección se presenta la definición de teoría de procesos estocásticos. Adicionalmente, se presentan las teorías para minimizar la energía de vibración total del sistema dinámico.

### 3.7. Procesos estocásticos estacionarios y no estacionarios

Las excitaciones o vibraciones aleatorias se pueden originar por medio del flujo turbulento de los gases o líquidos, de las superficies irregulares de las carreteras, en las olas marítimas, de los sismos, etc. El campo aeroespacial también proporciona muchos ejemplos de vibraciones aleatorias, los cuales se dividen en tres grupos: el vuelo a través de turbulencia atmosférica, las fuerzas originadas por el flujo de aire en las aeronaves, y la el ruido mezclado a diferentes frecuencias de los gases expulsados de los motores de aviones. Se ha demostrado en la literatura que el efecto de este tipo de cargas en los diferentes tipos de estructuras puede inducir fatiga en los materiales. Sin embargo, el cálculo matemático de la respuesta dinámica de una estructura sujeta a estos tipos de cargar es complejo, especialmente, si las propiedades estadísticas continuas cambian en el dominio del tiempo. Por otra parte, cuando las propiedades de estas señales estocásticas no cambian con respecto del tiempo, existen métodos tanto analíticos como numéricos para calcular y evaluar la respuesta dinámica del sistema. De hecho, muchos métodos de solución se basan en análisis espectral. Con el objetivo de entender un proceso estocástico, es necesario definir los siguientes conceptos [112].

#### 3.7.1. Estacionariedad, ergodicidad, valores promedios y esperados

Matemáticamente, para realizar el análisis de señales estocásticas se deben cumplir dos características fundamentales, las cuales son; estacionariedad y ergodicidad. La estacionariedad se aplica a una sola señal, e implica que sus propiedades estadísticas tales como media, varianza, autocorrelación, y covarianza son constantes con respecto del tiempo. La ergodicidad se aplica a un ensamble de un número grande de señales aleatorias nominales, registradas en condiciones similares. Si todas estas señales tienen propiedades estadísticas similares, se sugiere suponer que todas las señales son estacionarias del fenómeno físico como tal. En la práctica, es extremadamente difícil caracterizar y definir la ergodicidad del ensamble de un conjunto de señales aleatorias. Sin embargo, utilizando herramientas matemáticas sofisticadas es posible tal caracterización. El concepto de estacionariedad se ilustra en la Figura 3.9, la cual muestra dos graficas de señales aleatorias estacionarias y no estacionarias. Obviamente en (a), al seleccionar el periodo  $T$  como base para análisis estadístico, la señal resultará

ser estacionaria. Por otra parte, la gráfica (b) es claramente no estacionaria, al seleccionar el periodo  $T_1$  posiblemente dará como resultado propiedades estadísticas estacionarias; sin embargo, no se obtendrán propiedades estacionarias para los periodos  $T_2, T_3,$  y  $T_4,$  de hecho, en esos periodos las señales son más agresivas. Las técnicas tales como el análisis wavelet han sido desarrolladas, específicamente para tratar con las señales no estacionarias. Incluso utilizando el método convencional tal como la transformada discreta de Fourier, existen complicaciones al tratar con los efectos de la no estacionariedad de la señal registrada. Sin embargo, al realizar el análisis separadamente la señal en los periodos  $T_1, T_2, T_3,$  y  $T_4,$  se reduce la precisión estadística de los resultados.

El *valor esperado* de un proceso aleatorio, muchas veces denotado por la expresión  $E[x(t)],$  es el valor que se obtendría al promediar la señal definida en el tiempo desde  $-\infty$  hasta  $+\infty.$  De hecho, el valor esperado  $E[x(t)]$  de una señal  $x(t)$  es el valor medio  $\langle x(t) \rangle.$  Similarmente,  $E[x^2(t)]$  es el valor medio cuadrático o  $\langle x^2(t) \rangle.$  Luego, la varianza se define como  $\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 dt,$  al desarrollar esta expresión resulta en,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - 2\langle x \rangle \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt + \langle x(t) \rangle^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (3.30)$$

donde  $\langle x^2(t) \rangle$  es el valor cuadrático medio y  $\langle x(t) \rangle^2$  es el valor medio elevado al cuadrado. Luego, la raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar  $\sigma_x.$  Considerando un proceso estacionario con media igual a cero, la desviación estándar toma el significado del valor RMS, es decir,  $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}.$  Estas propiedades estadísticas son de crucial importancia para determinar la respuesta vibratoria de una estructura sujeta a vibración estocástica.

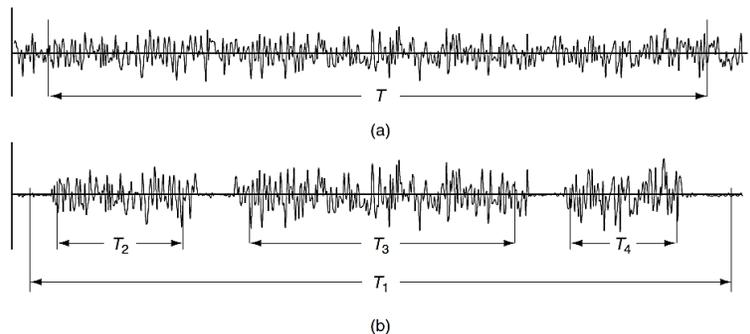


Figura 3.9: Señales vibratorias aleatorias; (a) señal aleatoria estacionaria, (b) señal estacionaria no estacionaria. (Imagen adaptada de la [Ref.\[112\]](#)).

Considerando que la excitación aleatoria de banda ancha del sistema cuya distribución de probabilidad es normal o gaussiana, la respuesta del sistema también tendrá una distribución gaussiana. Luego, la respuesta del sistema suele ser expresada en términos de sus densidades espectrales. De hecho, estas densidades espectrales suelen ser calculadas a través de la transformada de Fourier. Por ejemplo, un sistema es excitado con una fuerza  $f(t)$  cuya densidad espectral de potencia (PSD)  $S_f(\omega) = S_f$  es constante en todo el rango de frecuencias, y además se considera como un proceso

de ruido blanco gaussiano con un valor de media igual a cero. Luego, la respuesta del sistema es  $S_x(\omega) = |H_i(j\omega)|^2 S_f$ , la cual es el espectro de potencia de salida del sistema [113,114]. Con el objetivo de calcular el valor RMS del espectro de potencia de salida  $S_x(\omega)$ , es posible utilizar las definiciones derivadas a partir de la ecuación (3.30). Por lo tanto, el valor medio cuadrático  $E[x^2]$  de  $S_x(\omega)$ , se puede expresar de la siguiente manera.

$$E[x^2] = S_f \int_{-\infty}^{+\infty} |H_i(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.31)$$

La ecuación (3.31) proporciona la energía total de vibración del sistema, la cual es la parte de  $\int_{-\infty}^{+\infty} |H_M(j\omega)|^2 d\omega$ . Al utilizar el teorema de Parseval [115], se obtiene

$$E[x^2] = \|H(j\omega)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_M(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.32)$$

En la ecuación (3.32)  $|H_M(j\omega)|^2$  es el modulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del sistema, y  $\|H(\omega)\|_2^2$  es la definición de la norma estándar  $\mathcal{H}_2$ . Luego, la integral evaluada en los extremos  $-\infty$  y  $+\infty$ , se puede expresar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \|H(j\omega)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_i(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_i(-j\omega)||H_i(j\omega)| d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint |H_i(-j\omega)||H_i(j\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res}[f_n; j\omega_k] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Note que la última integral es una integral de contorno, la cual se puede resolver utilizando el método de integración del residuo (teorema de Cauchy) [116-118]. Adicionalmente, la solución de este tipo de tipo de integral se puede representar por medio de la suma de los residuos producidos en cada polo simple de la función  $|H_i(j\omega)|$ , los cuales se encuentran en el plano medio superior del plano complejo. En muchos casos es extremadamente difícil obtener una solución analítica de este tipo de integración, porque se debe utilizar el teorema de Vieta. Posteriormente, se deben representar las raíces del denominador de la FRF  $|H_i(j\omega)|$  en términos de sumas y productos de sus coeficientes. Sin embargo, obteniendo la solución única de la ecuación de Lyapunov es posible obtener fácilmente la solución de la norma  $\mathcal{H}_2$ . De hecho, la representación matemática es la siguiente,

$$\begin{aligned} \|H(j\omega)\|_2^2 \text{ norm} &= \|[\mathbf{C}](s\{\mathbf{I}\} - [\mathbf{A}])^{-1}[\mathbf{B}]\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint |H_i(-j\omega)||H_i(j\omega)| d\omega \\ &= \text{Trace}([\mathbf{C}][\mathbf{L}][\mathbf{C}]^T) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde las matrices  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  se obtienen a partir de los coeficientes de los polinomios de la FRF  $|H_i(j\omega)|$ . Luego  $\{\mathbf{I}\}$  es una matriz identidad. Finalmente, la matriz  $[\mathbf{L}]$  es la solución única de la ecuación de Lyapunov  $([\mathbf{A}][\mathbf{L}] + [\mathbf{L}][\mathbf{A}]^T + [\mathbf{B}][\mathbf{B}]^T = [\mathbf{0}])$ . Las matrices definidas anteriormente se pueden expresar de la siguiente manera [119],

$$|H_i(j\omega)| = \left| \frac{B_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + B_1(j\omega) + B_0}{(j\omega)^n + A_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + A_1(j\omega) + A_0} \right|^{\frac{1}{2}}; [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & A_{n-1} \end{bmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{C}] = [B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{n-1}]$$

Debido a que el perfil irregular de la carretera es un proceso estocástico estacionario, es posible calcular los índices de rendimiento del sistema de suspensión por medio de la definición de la ecuación (3.34). En la siguiente subsección, se presentan las definiciones de los índices de rendimiento dinámico de los sistemas de suspensión.

### 3.7.2. Medidas de rendimiento dinámico de suspensiones automotrices

Actualmente, existen cinco medidas de desempeño dinámico de un sistema de suspensión, las cuales son las siguientes; el índice del confort ( $J_1$ ), el índice del nivel de deflexión del sistema de suspensión ( $J_2$ ), el índice de la carga dinámica de los neumáticos sobre la carretera ( $J_3$ ), el índice la potencia disipada en el amortiguador del sistema de suspensión ( $J_4$ ), y el índice de la carga dinámica sobre el sistema de suspensión ( $J_5$ ) [2,120,121]. Para cada una de las medidas se requiere de un proceso de optimización cuidadoso. Dado que en el modelo del vehículo con suspensión pasiva convencional en muchos casos es simétrico, por simplicidad es conveniente analizar un cuarto de la suspensión del vehículo. Esta cuarta parte del sistema es un modelo simplificado del modelo del vehículo completo mostrado en la Figura 3.3. Considerando que el perfil de la carretera es un proceso estocástico estacionario que se puede representar a través de una función de densidad espectral de potencial. Al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación, se obtiene la siguiente expresión,

$$H_{x_g}(\omega) = \frac{2\pi G_x(\eta_0)V}{\omega^2} = \left| \frac{\sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V}}{j\omega} \right|^2 \quad (3.35)$$

Al considerar el espectro del perfil irregular de la carretera como excitación de entrada al sistema de suspensión, el espectro de potencia de salida se puede se puede expresar tal como se definió en la [subsección 3.7.1](#). Para conocer los efectos dinámicos de este tipo de espectro, es necesario conocer las funciones de respuestas en frecuencia (FRFs) de la aceleración del chasis  $|H_{Accl}(j\omega)|$ , la deflexión del sistema de suspensión  $|H_{SuspDeflec}(j\omega)|$ , la carga dinámica del neumático sobre la carretera  $|H_{TyreLoad}(j\omega)|$ , la potencia disipada en el sistema de suspensión  $|H_{PowerDisip}(j\omega)|$ , y la carga dinámica sobre el sistema de suspensión  $|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|$ . Por lo tanto, los índices de rendimiento se pueden expresar de la siguiente manera,

$$\begin{cases} E[|H_{Accl}(j\omega)|^2] = J_1 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega} H_{Accl}(j\omega) \right|^2 d\omega \\ E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2] = J_2 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega} H_{SuspDeflec}(j\omega) \right|^2 d\omega \\ E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2] = J_3 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega} H_{TyreLoad}(j\omega) \right|^2 d\omega \\ E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2] = J_4 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega} H_{PowerDisip}(j\omega) \right|^2 d\omega \end{cases} \quad (3.36)$$

Tenga en cuenta que, los índices definidos por la ecuación (3.36) representan la salida de energía total de vibración en cada parte del sistema de suspensión. Por otra parte, el índice de la carga dinámica sobre el sistema de suspensión  $J_5$  está relacionado con los efectos dinámicos producidos por el frenado y arranque del vehículo. Este índice, está relacionado con la minimización del valor supremo de la FRF  $|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|$  sobre todas las frecuencias. Note que, este tipo de índice está relacionado con la norma  $\mathcal{H}_\infty$ , además es igual a la transferencia de energía máxima en el sistema de suspensión [120]. Por lo tanto, este índice se puede representar mediante la expresión matemática  $J_5 = \|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)\|_\infty$ . En la siguiente subsección, se presenta algunas teorías de optimización con el objetivo de obtener el mejor compromiso entre los índices de rendimiento del sistema de suspensión.

### 3.7.3. Norma $\mathcal{H}_2$ y su optimización

Con el objetivo de minimizar la energía de vibración total de las partes del sistema de suspensión, es necesario la aplicación de métodos de optimización. Por lo general, las funciones objetivo a ser minimizadas son los índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión, cuyas funciones implícitas son fracciones parciales impropias o propias. Generalmente hablando, en las teorías de optimización existen dos tipos de formulaciones de problemas de optimización, las cuales son las siguientes; problemas de optimización multivariable no lineal con o sin restricciones de igualdad y desigualdad. Existen diversos métodos de optimización que proporcionan una precisión alta en las soluciones, algunos de ellos son; Algoritmos Genéticos (GA), Programación cuadrática secuencial (SQP), Método de Newton Modificado (MNM), Gradiente Conjugado Preacondicionado (PCG), etc. Actualmente, existen muchas herramientas de matemática simbólica que pueden resolver eficientemente varios tipos de problemas de optimización, por ejemplo, las herramientas de optimización global tanto de Matlab como de Maplesoft [122]. Por ejemplo, en las herramientas de optimización global de Maplesoft, se puede utilizar el comando NLPsolve para resolver problemas de optimización multivariables no lineales con o sin restricciones. El comando NLPsolve resuelve un problema de optimización no lineal, que involucra el cálculo de un mínimo o máximo de una función objetivo real evaluada, posiblemente sujeta a restricciones. Este comando devuelve un mínimo local si el problema de optimización es convexo. Dado que las funciones objetivos obtenidas a partir del cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$  son convexas en un dominio acotado, la convexidad de la minimización de dicha norma se puede obtener a partir del cálculo de los autovalores  $|\lambda_i\{\mathbf{I}\} - [\nabla^2 f(x)]|$  de la matriz Hessiana  $H(f) = \nabla^2 f(x)$ . Por lo tanto, las formulaciones de los problemas de optimización que minimizan la energía total de vibración de las respuestas del sistema de suspensión se pueden expresar de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \min_{\{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\}} E[|H_{Acel}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\}} E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\}} E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2] \\ \min_{\{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\}} E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2] \\ \text{Sujeto a:} \\ \{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\} \geq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Note que la formulación (3.37), es un problema de optimización no lineal sin restricciones de igualdad o desigualdad. Por lo tanto, se puede resolver por medio de la siguiente formulación matemática,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_3} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E[|H_i(j\omega)|^2]_i}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \{X_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\} \in \mathbb{R}^+; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.38)$$

Se ha observado que el conjunto de ecuaciones (3.38) no lineales implícitas de alto orden, se pueden resolver por medio del método de Newton-Raphson. Como se mencionó anteriormente, para problemas de optimización no lineales con o sin restricción, se pueden resolver a través del comando NLPsolve proporcionado por la caja de herramientas de optimización global de Maplesoft. Uno de los *solvers* más sofisticados que utiliza Maplesoft es proporcionado por el método de optimización *Programación cuadrática secuencial (SPQ)*. En la siguiente subsección, se presenta este método con el objetivo de proporcionar las herramientas necesarias de optimización al lector.

### 3.7.4. Método de Newton-Raphson

Este método sirve para encontrar el cero tanto de una función real no lineal como de un conjunto de funciones reales no lineales de múltiples variables. Para funciones de múltiples variables, considere la aproximación cuadrática de la función  $f(\mathbf{X})$  en  $\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{X}\}_i$  utilizando la expansión de las series de Taylor se obtiene,

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_i) + \{\nabla f(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)\}_i^T + \frac{1}{2} \{\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\}^T [\mathbf{J}_i] \{\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\} \quad (3.39)$$

donde  $[\mathbf{J}_i] = [\mathbf{J}_i]_{\mathbf{X}_i}$  es la matriz Hessiana (derivadas de segundo orden) de la función  $f(\mathbf{X})$  evaluada en el punto  $\{\mathbf{X}_i\}$ . Al igualar a cero las derivadas de la ecuación (3.39) para la búsqueda del mínimo de  $f(\mathbf{X})$ , se obtiene

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j} = \{0\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.40)$$

Combinando las ecuaciones (3.39) y (3.40), se obtiene

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f_i(\mathbf{X}) + [\mathbf{J}_i] \{\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\} = \{0\} \quad (3.41)$$

Si  $[\mathbf{J}_i]$  no es singular, la ecuación (3.50) se puede resolver para obtener una aproximación mejorada de  $(\mathbf{X} = \mathbf{X}_{i+1})$ , como sigue

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - [\mathbf{J}_i]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{X}) \quad (3.42)$$

Debido a que los términos de orden superior se han descuidado en la ecuación (3.39), más inclusiones matemáticas deben ser añadidas. La ecuación (3.41) se resuelve iterativamente para encontrar la solución óptima de  $\{\mathbf{X}\}$ . La secuencia de puntos  $\{\mathbf{X}\}_1, \{\mathbf{X}\}_2, \dots, \{\mathbf{X}\}_{i+1}$  se pueden mostrar para converger a la solución actual  $\{\mathbf{X}\}$  a partir de cualquier punto inicial  $\{\mathbf{X}\}_1$  suficientemente cerca de la solución  $\{\mathbf{X}\}$ , asegurando que  $[\mathbf{J}_i]$  no se convierta en una matriz singular. Como se puede ver, el método de Newton-Raphson utiliza derivadas de segundo orden de la función objetivo (en la forma de la matriz  $[\mathbf{J}_i]$ ), por lo tanto, es un método de segundo orden. Con el objetivo de demostrar que el método de Newton-Raphson encuentra el mínimo de una función cuadrática en una iteración, considera la siguiente función cuadrática algebraica,

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\} + [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{X}\} + [\mathbf{C}] \quad (3.43)$$

El mínimo de  $f(\mathbf{X})$  se obtiene a través de la siguiente expresión matemática,

$$\nabla f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\} + [\mathbf{B}] \quad (3.44)$$

$$\{\mathbf{X}\} = -[\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] \quad (3.45)$$

El paso iterativo de la ecuación (3.42) da como resultado la siguiente expresión,

$$\{\mathbf{X}\}_{i+1} = \{\mathbf{X}\}_i - [\mathbf{A}]^{-1} ([\mathbf{A}] \{\mathbf{X}\}_i + [\mathbf{B}]) \quad (3.46)$$

donde  $\{\mathbf{X}\}_i$  es el punto de inicio para la  $i$ -ésima iteración. Así, la ecuación (3.52) proporciona la solución exacta

$$\{\mathbf{X}\}_{i+1} = \{\mathbf{X}\} = -[\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] \quad (3.47)$$

Por otra parte, si la función  $f(\mathbf{X})$  es una función no cuadrática, el método de Newton-Raphson puede en algunas veces diverger, y puede converger a puntos de silla y a máximos relativos. Este problema se puede evitar modificando la (3.42) como sigue,

$$\{\mathbf{X}\}_{i+1} = \{\mathbf{X}\}_i + \lambda_i \{\mathbf{S}_i\} = \{\mathbf{X}\}_i - \lambda_i [\mathbf{J}_i]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{X}) \quad (3.48)$$

donde  $\lambda_i$  es la longitud mínima de paso en la dirección de  $\{\mathbf{S}_i\} = -[\mathbf{J}_i]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{X})$ . La modificación indicada por la ecuación (3.54) tiene muchas ventajas. La primera es, encontrará el mínimo en un menor número de pasos en comparación con el método original. La segunda es, encuentra el punto mínimo en todos los casos, mientras que el método original puede no converger en algunos casos. La tercera es, generalmente evita la convergencia a un punto de silla o un máximo relativo. Con todas estas ventajas, este método parece ser el método de minimización más poderoso. A pesar de estas ventajas, el método no es muy útil en la práctica, debido a las siguientes características del método:

1. Se requiere del almacenamiento de la matriz  $n \times n$   $[\mathbf{J}_i]$ .
2. Es muy difícil y a veces imposible calcular los elementos de la matriz  $[\mathbf{J}_i]$ .
3. Se debe calcular la inversa de la matriz  $[\mathbf{J}_i]$  en cada paso de iteración.
4. Se requiere la evaluación de la cantidad  $[\mathbf{J}_i]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{X})$

Estas características hacen que el método sea poco práctico para problemas que involucran una función objetivo complicada con una gran cantidad de variables [123].

### 3.7.5. Programación Cuadrática Secuencial (SQP)

La programación cuadrática secuencial es uno de los métodos de optimización desarrollados recientemente, y quizás uno de los mejores. Este método tiene una base teórica que se relaciona a; (1) la solución de un conjunto de ecuaciones implícitas no lineales utilizando el método de Newton, (2) la derivación de un sistema de ecuaciones implícitas no lineales simultáneas utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker con respecto del Lagrangiano del problema de optimización restringido. A continuación, se presenta tanto la derivación de las ecuaciones y el procedimiento de solución del enfoque de la programación cuadrática secuencial. Considere un problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad solamente,

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \{\mathbf{X}\} \text{ que minimiza } f(\mathbf{X}) \\ &\text{Sujeto a;} \\ &h_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \end{aligned}$$

Luego la función de Lagrange,  $L(\{\mathbf{X}\}, \lambda)$ , que corresponde al problema de optimización anterior, se puede representar como sigue,

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^p \lambda_k h_k(\mathbf{X}) \quad (3.49)$$

donde  $\lambda_k$  es el multiplicador de Lagrange para la  $k$ -ésima restricción de igualdad. Las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker se pueden establecer como sigue,

$$\nabla L(\mathbf{X}, \lambda) = [\mathbf{0}] \quad \text{o} \quad \nabla f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \nabla h_k(\mathbf{X}) = [\mathbf{0}] \quad \text{o} \quad \nabla f(\mathbf{X}) + [\mathbf{A}]^T \lambda \quad (3.50)$$

$$h_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \quad (3.51)$$

donde  $[\mathbf{A}]$  es una matriz  $n \times p$  cuya  $k$ -ésima columna denota el gradiente de la función  $h_k(\{\mathbf{X}\})$ . Las ecuaciones (3.50) y (3.51) representan un conjunto de  $n + p$  ecuaciones implícitas no lineales, las cuales se pueden resolver utilizando el método de Newton. Por conveniencia, las ecuaciones (3.50) y (3.51) se pueden escribir de la siguiente manera,

$$\{\mathbf{F}\}(\{\mathbf{Y}\}) = \{\mathbf{0}\} \quad (3.52)$$

donde,

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} \nabla L(\mathbf{X}, \lambda) \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}_{(n+p) \times 1}, \quad \{\mathbf{Y}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{X}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}_{(n+p) \times 1}, \quad \{\mathbf{0}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix}_{(n+p) \times 1} \quad (3.53)$$

De acuerdo al método de Newton-Raphson, la solución de las ecuaciones no lineales implícitas (3.52), se pueden resolver iterativamente, además se recomienda seleccionar un vector inicial aproximado al cero del vector solución del sistema. Por lo tanto, la solución numérica del sistema de ecuaciones no lineales simultáneas se puede expresar como sigue,

$$\{\mathbf{Y}\}_{j+1} = \{\mathbf{Y}\}_j + \Delta\{\mathbf{Y}\}_j \quad (3.54)$$

con,

$$[\nabla\{\mathbf{F}\}]_j^T \Delta\{\mathbf{Y}\}_j = -\{\mathbf{F}\}_j \quad (3.55)$$

donde  $\{\mathbf{Y}\}_j$  es el vector de inicio para el proceso iterativo del método o dicho de otra forma es la solución de inicio, y  $\Delta\{\mathbf{Y}\}_j$  es el cambio en  $\{\mathbf{Y}\}_j$  necesario para garantizar la solución correcta  $\{\mathbf{Y}\}_{j+1}$ , y  $[\nabla\{\mathbf{F}\}]_j^T = [\nabla\{\mathbf{F}\}\{\mathbf{Y}\}_j]$  es la matriz Jacobiana  $(n + p) \times (n + p)$  de las ecuaciones no lineales cuya enésima columna denota el gradiente de la función  $F_i\{\mathbf{Y}\}$  con respecto al vector  $\{\mathbf{Y}\}$ . Al sustituir las ecuaciones (3.52) y (3.53) en la ecuación (3.55), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda) & [\mathbf{H}] \\ [\mathbf{H}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \{\Delta\mathbf{X}\}_j \\ \{\Delta\lambda\}_j \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \nabla L(\mathbf{X}, \lambda) \\ \{\mathbf{h}\}_j \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\{\Delta\mathbf{X}\}_j = \{\Delta\mathbf{X}\}_{j+1} - \{\mathbf{X}\}_j \quad (3.57)$$

$$\{\Delta\lambda\}_j = \{\Delta\lambda\}_{j+1} - \{\lambda\}_j \quad (3.58)$$

donde  $[\nabla^2 L(\{\mathbf{X}\}, \lambda)]_{n \times p}$  denota la matriz Hessiana de la función Lagrangiana. El primer conjunto de ecuaciones no lineales en (3.56) se pueden escribir separadamente como,

$$[\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)]_j \{\Delta\mathbf{X}\}_j + [\mathbf{H}]_j \{\Delta\lambda\}_j = -\nabla L(\mathbf{X}, \lambda) \quad (3.59)$$

utilizando la ecuación (3.58) para  $\{\Delta\lambda\}_j$  y (3.50) para  $[\nabla^2 L(\{\mathbf{X}\}, \lambda)]_j$ , la ecuación (3.59) se puede expresar de la siguiente manera,

$$[\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)]_j \{\Delta\mathbf{X}\}_j + [\mathbf{H}]_j (\{\lambda\}_{j+1} - \{\lambda\}_j) = -[\nabla f(\mathbf{X})]_j - [\mathbf{H}]_j^T \{\lambda\}_j \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) se puede simplificar a la siguiente expresión matemática,

$$[\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)]_j \{\Delta\mathbf{X}\}_j + [\mathbf{H}]_j (\{\lambda\}_{j+1}) = -[\nabla f(\mathbf{X})]_j \quad (3.61)$$

Luego, combinando las ecuaciones (3.61) y (3.57) se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda) & [\mathbf{H}] \\ [\mathbf{H}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \{\Delta\mathbf{X}\}_j \\ \{\lambda\}_{j+1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} [\nabla f(\mathbf{X})]_j \\ \{\mathbf{h}\}_j \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

La ecuación (3.62) se puede resolver para encontrar el cambio en el vector de diseño  $\Delta\{\mathbf{X}\}_j$ , y los valores nuevos de los multiplicadores de Lagrange  $\{\lambda\}_{j+1}$ . El proceso

iterativo indicado por la ecuación (3.62) se puede repetir hasta lograr la convergencia. Ahora considere el siguiente problema de programación cuadrática,

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \{\Delta \mathbf{X}\} \text{ que minimiza la función objetivo cuadrática} \\ &Q = [\nabla f(\mathbf{X})]^T \{\Delta \mathbf{X}\} + \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{X}]^T [\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)] \{\Delta \mathbf{X}\} \\ &\text{Sujeto a restricciones de igualdad lineal;} \\ &h_k(\mathbf{X}) + \nabla \{h_k(\mathbf{X})\}^T \{\Delta \mathbf{X}\} = [\mathbf{0}], \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \quad \text{o} \quad [\mathbf{h}] + [\mathbf{H}]^T \{\Delta \mathbf{X}\} = [\mathbf{0}] \end{aligned}$$

La función Lagrangiana  $\tilde{L}(\{\mathbf{X}\}, \lambda)$  que corresponde a la formulación del problema de optimización anterior está dada por la siguiente expresión matemática,

$$\begin{aligned} \{\tilde{L}(\mathbf{X}, \lambda)\} &= [\nabla f(\mathbf{X})]^T \{\Delta \mathbf{X}\} + \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{X}]^T [\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)] \{\Delta \mathbf{X}\} \\ &+ \sum_{k=1}^p \{\lambda_k\} (\{h_k(\mathbf{X})\} + \nabla \{h_k(\mathbf{X})\}^T (\{\Delta \mathbf{X}\})) \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde  $\{\lambda_k\}$  es el multiplicador de Lagrange asociado la enésima restricción de igualdad. Luego, las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker se pueden establecer como,

$$\nabla f(\mathbf{X}) + [\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)] \{\Delta \mathbf{X}\} + [\mathbf{H}] \{\lambda\} = [\mathbf{0}] \quad (3.64)$$

$$\{h_k(\mathbf{X})\} + \nabla \{h_k(\mathbf{X})\}^T \{\Delta \mathbf{X}\} = [\mathbf{0}], \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \quad (3.65)$$

Las ecuaciones (3.64) y (3.65) se pueden arreglar de la misma forma que la ecuación matricial (3.62). Esto demuestra que el problema de optimización formulado al inicio de esta subsección se puede resolver resolviendo iterativamente el problema de programación cuadrática definido por la (3.62). En efecto, las restricciones de desigualdad se añaden a la formulación original (ver al inicio de esta subsección), el problema de programación cuadrática de la ecuación (3.62) se convierte en,

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \{\mathbf{X}\} \text{ que minimiza} \\ &Q = [\nabla f(\mathbf{X})]^T \{\Delta \mathbf{X}\} + \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{X}]^T [\nabla^2 L(\mathbf{X}, \lambda)] \{\Delta \mathbf{X}\} \\ &\text{Sujeto a restricciones de igualdad y desigualdad;} \\ &g_j(\mathbf{X}) + \nabla \{g_j(\mathbf{X})\}^T \{\Delta \mathbf{X}\} \leq [\mathbf{0}], \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \\ &h_k(\mathbf{X}) + \nabla \{h_k(\mathbf{X})\}^T \{\Delta \mathbf{X}\} = [\mathbf{0}], \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \end{aligned}$$

con la función de Lagrange dada por la siguiente expresión matemática,

$$\{\tilde{L}(\mathbf{X}, \lambda)\} = \{f(\mathbf{X})\} + \sum_{j=1}^m \{\lambda_j\} \{g_j(\mathbf{X})\} + \sum_{k=1}^p \{\lambda_{m+k}\} \{h_k(\mathbf{X})\} \quad (3.66)$$

Debido a que se involucra el mínimo de la función Lagrangiana aumentada, el método de la programación cuadrática secuencial se conoce también como el *método del Lagrangiano proyectado*. Como en el método de Newton-Raphson de la minimización no restringida, el vector solución  $\{\Delta \mathbf{X}\}$  en las restricciones de igualdad y desigualdad se trata como la dirección de búsqueda  $\{\mathbf{S}\}$ , y el subproblema de programación cuadrática (en términos del vector de diseño  $\{\mathbf{S}\}$ ) se reformula como:

Encontrar  $\{\mathbf{S}\}$  que minimiza

$$Q(\mathbf{S}) = [\nabla f(\mathbf{X})]^T \{\mathbf{S}\} + \frac{1}{2} [\mathbf{S}]^T [\mathbf{H}] \{\mathbf{S}\}$$

Sujeto a restricciones de igualdad y desigualdad;

$$\beta_j g_j(\mathbf{X}) + \nabla \{g_j(\mathbf{X})\}^T \{\mathbf{S}\} \leq [\mathbf{0}], \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\bar{\beta} h_k(\mathbf{X}) + \nabla \{h_k(\mathbf{X})\}^T \{\mathbf{S}\} = [\mathbf{0}], \quad k = 1, 2, 3, \dots, p$$

donde  $[\mathbf{H}]$  es una matriz definida positiva que se toma inicialmente como la matriz identidad, y se actualiza en las iteraciones posteriores para converger a la matriz Hessiana de la función de Lagrange de la ecuación (3.66), luego  $\beta_j$  y  $\bar{\beta}$  son constantes utilizadas para asegurar que las restricciones linealizadas se encuentren completamente en el espacio factible. Los valores típicos de estas constantes están dados por,

$$\bar{\beta} \approx 0.9; \quad \beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(\mathbf{X}) \leq \{0\} \\ \bar{\beta} & \text{si } g_j(\mathbf{X}) \geq \{0\} \end{cases} \quad (3.67)$$

El problema de optimización cuadrático secuencial con restricciones de igualdad y desigualdad o subproblema definido anteriormente, que puede ser resuelto por medio del método del gradiente. Debido a que los multiplicadores de Lagrange asociados con la solución de este problema son necesarios para el proceso de iteración, ellos se pueden también evaluar utilizando la ecuación (3.66). Una vez que la dirección de búsqueda  $\{\mathbf{S}\}$ , se encuentre al resolver las restricciones de igualdad y desigualdad, el vector de diseño se actualiza como

$$\{\mathbf{X}_{j+1}\} = \{\mathbf{X}_j\} + \alpha \{\mathbf{S}\} \quad (3.68)$$

donde  $\alpha$  es la longitud del paso óptimo a lo largo de la dirección de  $\{\mathbf{S}\}$  encontrado al minimizar la función (utilizando un enfoque de función de penalización exterior)

$$\phi = \{f(\mathbf{X})\} + \sum_{j=1}^m \{\lambda_j (\max[0, g_j(\mathbf{X})])\} + \sum_{k=1}^p \{\lambda_{m+k} |h_k(\mathbf{X})|\} \quad (3.69)$$

con,

$$\lambda_j = \begin{cases} |\lambda_j|, & j = 1, 2, 3, \dots, m + p \text{ en la primer iteración} \\ \max\left\{|\lambda_j|, \frac{1}{2}(\tilde{\lambda}_j, |\lambda_j|)\right\} & \text{en las iteraciones posteriores} \end{cases} \quad (3.70)$$

donde  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$  es de la iteración anterior. La longitud de paso unidimensional  $\alpha$  se puede encontrar a través del método de Newton-Raphson. Una vez que se encuentra el vector solución  $\mathbf{X}_{j+1}$  a partir de la ecuación (3.68), para la siguiente iteración la matriz Hessiana se actualiza para mejorar la aproximación cuadrática en las ecuaciones de restricciones de igualdad y desigualdad. Usualmente, se utiliza una formula BFGS (Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno) para este propósito, la cual es

$$[\mathbf{H}_{i+1}] = [\mathbf{H}_i] - \frac{[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i][\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i]}{[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i]} + \frac{\{\gamma\}\{\gamma\}^T}{[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{P}_i]} \quad (3.71)$$

$$[\mathbf{P}_i] = [\mathbf{X}_{i+1}] - [\mathbf{X}_i] \quad (3.72)$$

$$\{\gamma\} = \theta[\mathbf{Q}_i] + (1 - \theta)[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i] \quad (3.73)$$

$$[\mathbf{Q}_i] = \nabla_x \tilde{L}(\mathbf{X}_{i+1}, \boldsymbol{\lambda}_{i+1}) - \nabla_x \tilde{L}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (3.74)$$

$$[\mathbf{Q}_i] = \nabla_x \tilde{L}(\mathbf{X}_{i+1}, \boldsymbol{\lambda}_{i+1}) - \nabla_x \tilde{L}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (3.75)$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } [\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{Q}_i] \geq 0.2[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i] \\ \frac{0.8[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i]}{[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i] - [\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{Q}_i]} & \text{si } [\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{Q}_i] < 0.2[\mathbf{P}_i]^T[\mathbf{H}_i][\mathbf{P}_i] \end{cases} \quad (3.76)$$

donde  $\tilde{L}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$  esta dada por la ecuación (3.66), y las constantes 0.2 y 0.8 en la ecuación (3.76) se pueden cambiar según la experiencia numérica [124].

### 3.7.6. Norma $\mathcal{H}_\infty$ y su optimización

El criterio de optimización  $\mathcal{H}_\infty$  tiene como objetivo minimizar las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia del sistema, la cual es bien conocida como la norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Esta técnica de optimización ha sido ampliamente utilizada en la teoría de la minimización de la respuesta vibratoria en absorbedores de vibración, la cual se puede utilizar también para minimizar el rendimiento dinámico de la carga dinámica sobre el sistema de suspensión ( $J_5$ ). Aquí, se presenta un enfoque general y a la vez un ejemplo de cómo esta norma se puede minimizar. Por ejemplo, en la teoría de absorbedores de vibración, la minimización de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  conduce a producir un equilibrio dinámico entre las amplitudes de vibración en las frecuencias de resonancia del sistema, las cuales se pueden denotar como  $|H_M(j\omega_A)|$ ,  $|H_M(j\omega_B)|$ , y  $|H_M(j\omega_C)|$ . Por supuesto, si el sistema es de tres grados de libertad, luego el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  se puede definir como  $\|H_M(j\omega)\|_\infty \text{ norm} = \max[|H_M(j\omega_A)|, |H_M(j\omega_B)|, |H_M(j\omega_C)|]$ . Por lo tanto, la minimización de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  conduce a la formulación de un problema de optimización no lineal multivariable con restricciones, el cual se puede expresar como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left( \max_{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)} (|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|) \right) = \max(|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|) \\ \text{sujeto a;} \\ \frac{\partial |H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|^2}{\partial \Omega^2} = 0 \\ \{X_i(x_1, x_2, x_3, x_n)\} \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.77)$$

El problema de optimización dado por la formulación (3.77) se puede resolver numéricamente similar al método reportado por Hu et al. [119] ó también utilizando el método descrito en la subsección 3.7.5. Recientemente, un método alternativo de alta precisión numérica ha sido desarrollado por Nishihara [125]. Este investigador introdujo un artificio matemático novedoso con el objetivo de minimizar la FRF de la estructura principal de los absorbedores de vibración conectados en serie a través de la función  $h = 1/\sqrt{1-r^2}$ , en la cual el índice de rendimiento  $\mathcal{H}_\infty$  se puede minimizar mediante la variable desconocida  $r$ . Por lo tanto, al reemplazar la magnitud de vibración

$|H_{Tyre-SuspLoad}(j\omega)|^2$  por  $h = 1/\sqrt{1-r^2}$ , conduce a la siguiente ecuación en términos de  $\omega^2$

$$\omega^6 + X_1(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\omega^5 + X_2(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\omega^4 + X_3(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\omega^3 + X_4(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\omega^2 + X_5(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\omega + X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r) = 0 \quad (3.78)$$

donde las funciones  $X_i(x_1, x_2, x_3, x_n, r)$  para  $i = 1, \dots, 6$  son funciones en términos de los parámetros del sistema dinámico. Además, la ecuación (3.78) garantiza que las amplitudes de vibración máxima en las frecuencias de resonancia se igualen. Adicionalmente, las raíces dobles producidas por esta ecuación se pueden expresar como  $(\omega - \omega_A)^2(\omega - \omega_B)^2(\omega - \omega_C)^2$ . Al utilizar el teorema de Vieta, la suma y productos de las raíces de la ecuación (3.78) se pueden expresar en términos de las funciones  $X_i(x_1, x_2, x_3, x_n, r)$ . Luego, eso conduce a la formulación de un sistema sobredeterminado no lineal de tres ecuaciones no lineales de alto orden, las cuales se pueden expresar como  $f_i(X_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, 3$ . Para resolver este sistema de ecuaciones simultáneas, se deben agregar ecuaciones restrictivas o constitutivas. Por lo tanto, las ecuaciones restantes se pueden obtener utilizando la matriz Jacobiana  $J_f(X_i) = \frac{\partial f_i(X_i)}{\partial(X_i)}$  de la variación infinitesimal de la variable desconocida  $r$  con respecto de los parámetros de diseño, lo cuales están dados en una forma implícita de  $f_i(X_i)$ . Luego, el enfoque del criterio de optimalidad se satisface cuando cualquier determinante menor de la matriz Jacobiana se iguala a cero. Por lo tanto, esta metodología se resume a resolver numéricamente un conjunto de ecuaciones implícitas no lineales de alto orden, las cuales se pueden escribir como sigue

$$\left. \begin{aligned} f_1(X_i) &= (4X_2(x_1, x_2, x_3, x_n, r) - X_1(x_1, x_2, x_3, x_n, r)^2)\sqrt{X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r)} + 4X_5(x_1, x_2, x_3, x_n, r) = 0 \\ f_2(X_i) &= X_1(x_1, x_2, x_3, x_n, r)X_5(x_1, x_2, x_3, x_n, r) + 4X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r) + 2X_3(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\sqrt{X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r)} = 0 \\ f_3(X_i) &= 4X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r)(X_1(x_1, x_2, x_3, x_n, r)\sqrt{X_6(x_1, x_2, x_3, x_n, r)} + X_4(x_1, x_2, x_3, x_n, r)) - X_5(x_1, x_2, x_3, x_n, r) = 0 \end{aligned} \right\} \forall \{X_i\} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.79)$$

$$f_4(X_i) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

$$f_5(X_i) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_4, x_1, x_3)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_i)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X_i)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(X_i)}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

donde  $f_1(X_i), f_2(X_i), f_3(X_i), f_4(X_i)$  y  $f_5(X_i)$  son funciones del vector solución  $\{X_i\}$  que a su vez están expresadas en forma implícita a partir de la ecuación (3.78). La solución del sistema de ecuaciones no lineales se puede obtener utilizando el método de Newton-Raphson descrito en la subsección 3.7.4, y tomando los valores óptimos obtenidos del criterio de optimización  $\mathcal{H}_2$  como el vector de inicio de iteración. En la siguiente sección de esta tesis, se presenta el análisis tanto el dominio del tiempo como de frecuencia del sistema de suspensión propuesto. Además, se aborda el cálculo analítico de los índices de rendimiento y su optimización también.

## 4. Capítulo 4

### Modelado y simulación numérica

#### 4.1. Análisis en el dominio de la frecuencia de la suspensión propuesta

En esta sección se presenta el modelado dinámico de la suspensión propuesta. Como menciono anteriormente, el sistema propuesto consiste básicamente de una red mecánica compuesta de dos amortiguadores de fluido viscoso semi activos y resortes pasivos. En la literatura se ha reportado que este tipo de impedancias mecánicas han demostrado mejores rendimientos comparado con el sistema de suspensión pasivo convencional. Dando lugar a un sistema con capacidades de amortiguamiento y rigidez semi activo. Estos sistemas han demostrado excelente desempeño. Sin embargo, los dispositivos convencionales para controlar rigidez variable son complicados y difíciles de implementar en muchas aplicaciones industriales. Para abordar esta cuestión, en este trabajo de investigación se propone una red mecánica que consiste de dos amortiguadores controlables y dos resortes de rigidez constante. Al controlar el coeficiente tanto de amortiguamiento como de rigidez en el sistema de suspensión es posible aislar vibraciones de baja y alta frecuencia, es decir, el comportamiento del sistema se aproxima a una suspensión activa. Recientemente, el tema de recolección de energía en sistemas de suspensión de vehículo ha sido de gran interés por muchos investigadores, y nuevos amortiguadores regenerativos han sido propuestos. En efecto, en este trabajo se propone que los amortiguadores controlables tienen la capacidad de recolectar la energía de vibración originada por las irregularidades del perfil de la carretera. En muchos trabajos de investigación, solo se han considerado perfiles de carreteras aleatorios estacionarios, es decir, estos perfiles artificiales son modelados como procesos aleatorios estrictamente estacionarios o como procesos gaussianos, y por lo tanto en este trabajo también se propone analizar la capacidad de recolección de energía de vibración considerando procesos aleatorios no estacionarios. A continuación, se presenta la red mecánica propuesta conectada a un aislador de vibraciones con el objetivo de demostrar el concepto de rigidez y amortiguamiento variable.

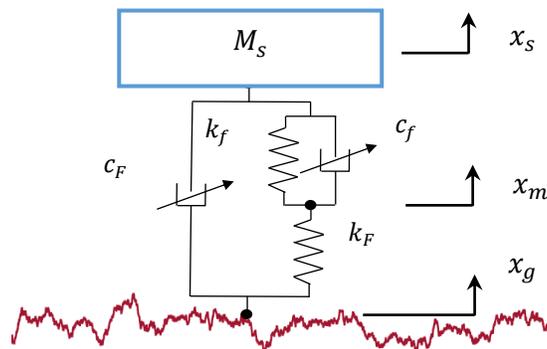


Figura 4.1: Red mecánica propuesta conectada a un aislador de vibraciones.

La función de transferencia en el dominio de la frecuencia del sistema mostrado en la [Figura 4.1](#) se puede expresar por conveniencia de la siguiente manera,

$$\frac{X_s}{X_g} = \frac{k_F - \frac{k_F^2(k_F + k_f)}{(k_F + k_f)^2 + c_f^2\omega^2} + j\left(c_F + \frac{k_F^2(k_F + k_f)}{(k_F + k_f)^2 + c_f^2\omega^2}\right)\omega}{-M_s\omega^2 + k_F - \frac{k_F^2(k_F + k_f)}{(k_F + k_f)^2 + c_f^2\omega^2} + j\left(c_F + \frac{k_F^2(k_F + k_f)}{(k_F + k_f)^2 + c_f^2\omega^2}\right)\omega} = \frac{\tilde{K} + j\tilde{C}\omega}{-M_s\omega^2 + \tilde{K} + j\tilde{C}\omega} \quad (4.1)$$

Note que en la ecuación anterior los coeficientes  $\tilde{K}$  y  $\tilde{C}$  son la rigidez y amortiguamiento equivalente del sistema de suspensión. Además, note que la rigidez del sistema se puede modificar al variar el coeficiente de amortiguamiento  $c_f$  y consecuentemente el amortiguamiento por medio del amortiguador  $c_F$ .

De acuerdo con la definición anterior, es necesario desarrollar un método de optimización para derivar soluciones de forma cerrada de los índices de rendimiento tales como el nivel de comodidad (ride comfort) y la cuantificación de potencia (power regeneration) sobre todo el rango de frecuencias de excitación. Estas soluciones analíticas representan una forma teórica para seleccionar los parámetros óptimos del sistema de suspensión propuesto. En efecto, estos índices se deben cuantificar en términos de la densidad espectral del perfil de la carretera. Los perfiles de carretera se caracterizan en términos de la densidad espectral de potencia del desplazamiento (PSD), los cuales se consideran como entradas estocásticas típicas. De acuerdo a la norma ISO 8608 (1995) [65], la PSD del desplazamiento en términos de la frecuencia espacial se puede escribir como

$$G_d(n) = G_d(n_0) \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w} = G_0 n^{-w} \quad (4.2)$$

donde  $G_0 = G_d(n_0)/n_0^{-w}$ . Asumiendo que un vehículo es conducido a una velocidad constante  $V$ , la frecuencia de excitación temporal  $f$  y la frecuencia de excitación espacial  $n$  se relacionan mediante la expresión  $f = nV$ , y similarmente se obtiene para la frecuencia circular  $\omega = 2\pi nV$ . Por lo tanto, la PSD de la excitación de la carretera en el dominio de la frecuencia espacial se puede transferir en el dominio de la frecuencia temporal por la siguiente expresión  $G_d(n)dn = G_d(\omega)d\omega$  y se puede escribir como

$$G_d(\omega) = \frac{2\pi G_0 V}{\omega^2} = \left| \frac{\sqrt{2\pi G_0 V}}{j\omega} \right|^2 \quad (4.3)$$

Por otra parte, el movimiento de la interface tierra/neumático en el vehículo se utiliza como la medida de la elevación del terreno, y la medición se limita en longitudes de onda corta por la longitud de la huella del neumático en contacto con la carretera. Específicamente, las variaciones en la elevación del camino con una longitud de onda más o menos igual a la longitud de la huella del neumático que no se pueden medir, ya que la elevación observada por el neumático en esa longitud de onda se encuentra en la atenuación máxima. Por lo tanto, el neumático actúa como un filtro de paso bajo de la elevación del terreno, con una frecuencia espacial de corte total de  $n_{fc} = W^{-1}m^{-1}$ , donde  $W$  es la longitud de la huella del neumático. Suponiendo que la velocidad del vehículo es  $V$ , la frecuencia temporal de corte total debe estar alrededor de  $f_{fc} = n_{fc}V = W^{-1}V$  dada en Hertz. Utilizando un filtro de paso bajo de primer orden para simular la interface tierra/neumático, la frecuencia de corte del filtro se puede encontrar a  $f_c =$

$0.4f_{fc}$ , donde -3 dB de atenuación aparece. Por lo tanto, el filtro de paso bajo que representa los efectos del neumático es

$$H_T(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} \quad (4.4)$$

donde  $\omega_c = 0.8\pi VW^{-1}$ . De acuerdo a las definiciones anteriores, el RMS de la aceleración absoluta de la masa suspendida del vehículo se puede obtener mediante una sola función analítica que relacione la interacción dinámica entre el neumático/carretera y el movimiento absoluto de la masa del vehículo. Primero, la aceleración absoluta la masa  $M_s$  del sistema mostrado en la [Figura 4.1](#) se puede representar de la siguiente manera

$$H_a(j\omega) = \frac{c_f c_f (j\omega)^4 + (c_f k_f + c_f k_f + c_f k_f)(j\omega)^3 + k_f k_f (j\omega)^2}{c_f M_s (j\omega)^3 + (c_f c_f + k_f M_s + k_f M_s)(j\omega)^2 + (c_f k_f + c_f k_f + c_f k_f)(j\omega) + k_f k_f} \quad (4.5)$$

De acuerdo a la norma ISO 2631-1 1997 [126], el nivel o la intensidad de vibración que un humano puede soportar se puede aproximar por medio de un filtro de segundo orden cuya función de transferencia ponderada está dada por la siguiente expresión

$$H_{asen}(j\omega) = \frac{86.51(j\omega) + 546.1}{(j\omega)^2 + 82.17(j\omega) + 1892} \quad (4.6)$$

De acuerdo a la teoría de vibración aleatoria lineal, la PSD de la aceleración absoluta se puede obtener como sigue

$$S_{aa} = |H_a(j\omega)|^2 |H_{asen}(j\omega)|^2 |H_T(j\omega)|^2 G_d(\omega) \quad (4.7)$$

Y el valor esperado de la aceleración absoluta se puede obtener como,

$$E[a^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{aa} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_a(j\omega)|^2 |H_{asen}(j\omega)|^2 |H_T(j\omega)|^2 G_d(\omega) d\omega \quad (4.8)$$

Note que la PSD de la aceleración absoluta, el desplazamiento relativo y la velocidad relativa se pueden expresar como una fracción parcial de polinomios en términos de  $j\omega$  de la siguiente manera

$$S_{aa} = |H(j\omega)|^2; H(j\omega) = \left\{ \frac{B_0 + (j\omega)B_1 + \dots + (j\omega)^{n-1}B_{n-1}}{A_0 + (j\omega)A_1 + \dots + (j\omega)^n A_n} \right\} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la PSD de la aceleración absoluta se puede expresar como sigue

$$S_{aa} = 2\pi G_0 \omega_c^2 \left| \frac{(j\omega)B_1 + (j\omega)^2 B_2 + (j\omega)^3 B_3 + (j\omega)^4 B_4}{A_0 + (j\omega)A_1 + (j\omega)^2 A_2 + (j\omega)^3 A_3 + (j\omega)^4 A_4 + (j\omega)^5 A_5 + (j\omega)^6} \right|^2 \quad (4.10)$$

En efecto, el valor esperado  $E[a^2]$  se puede expresar como sigue

$$E[a^2] = 2\pi G_0 \omega_c^2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(j\omega)B_1 + (j\omega)^2 B_2 + (j\omega)^3 B_3 + (j\omega)^4 B_4}{A_0 + (j\omega)A_1 + (j\omega)^2 A_2 + (j\omega)^3 A_3 + (j\omega)^4 A_4 + (j\omega)^5 A_5 + (j\omega)^6} \right|^2 d\omega \right) \quad (4.11)$$

Note que la expresión dentro del paréntesis de la Eq. (4.11) es la definición de una integral impropia y el resultado de esa integral es el valor principal de la integral de Cauchy, la cual se puede calcular utilizando el método de integración del residuo. Sin embargo, la evaluación por este método conduce a resolver una integral de contorno utilizando las singularidades de la Eq. (4.11), lo cual es un proceso complicado. Un enfoque de solución bastante realizable es utilizar la definición de la norma  $\|H(j\omega)\|_2$ , la cual conduce a calcular la solución única de la ecuación de Lyapunov. Al aplicar esta metodología se obtiene

$$E[a^2] = 2\pi G_0 V \omega_c^2 \left( (A_4 B_4^2 - 2B_2 B_4 + B_3^2) A_1^2 + ((-B_4^2 A_0 + (2B_2 B_4 - B_3^2) A_2 + (2B_1 B_3 - B_2^2) A_4 - B_1^2) A_5 - (2((1/2)B_4^2 A_2 + B_1 B_3 - (1/2)B_2^2)) A_3) A_1 + ((-2B_1 B_3 + B_2^2) A_0 + B_1^2 A_2) A_5^2 - ((2B_2 B_4 - B_3^2) A_0 + B_1^2 A_4) A_3 A_5 + A_3^2 (A_0 B_4^2 + B_2^2) / (2A_1^3 + ((2A_4^2 - 4A_2) A_5 - 2A_3 A_4) A_1^2 + ((-4A_0 A_4 + 2A_2^2) A_5^2 + (6(-(1/3)A_2 A_4 + A_0)) A_3 A_5 + 2A_2 A_3^2) A_1 + 2A_0 (A_0 A_5^3 - A_2 A_3 A_5^2 + A_3^2 A_4 A_5 - A_3^3)) \right) \quad (4.12)$$

Por lo tanto, el valor RMS de la aceleración absoluta es simplemente  $RMS_{aa} = \sqrt{E[a^2]}$ . Por otro lado, el índice la regeneración de potencia se puede expresar como sigue

$$E[power] = 2\pi G_0 \omega_c^2 \left( \frac{c_f}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(j\omega)^2 B_2 + (j\omega)^3 B_3}{A_0 + (j\omega) A_1 + (j\omega)^2 A_2 + (j\omega)^3 A_3 + (j\omega)^4} \right|^2 d\omega + \frac{c_f}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(j\omega)^2 B_2}{A_0 + (j\omega) A_1 + (j\omega)^2 A_2 + (j\omega)^3 A_3 + (j\omega)^4} \right|^2 d\omega \right) \quad (4.13)$$

Al resolver las integrales dadas por la Eq. (4.13) se obtiene

$$E[power] = 2\pi G_0 \omega_c^2 \left( c_f \frac{A_0 A_3 B_3^2 - A_1 A_2 B_3^2 - A_1 B_2^2}{2A_0 A_3^2 - 2A_1 A_2 A_3 + 2A_1^2} + c_f \frac{-A_1 B_2^2}{2A_0 A_3^2 - 2A_1 A_2 A_3 + 2A_1^2} \right) \quad (4.14)$$

En la siguiente sección, se presentará el modelado y optimización de estos índices considerando todos índices de rendimiento de la suspensión propuesta. Luego se realizarán simulaciones numéricas tanto en el dominio del tiempo como de frecuencia a partir del modelo óptimo obtenido.

## 4.2. Modelado matemático del vehículo completo con impedancias mecánicas y sus representaciones en espacios de estados

En esta sección se obtienen los modelos matemáticos considerando que el sistema de suspensión del vehículo está compuesto de la impedancia propuesta y también una red mecánica basada en inersores, amortiguadores y resortes pasivos. Por lo general, las impedancias mecánicas tienen como objetivo suavizar el flujo de energía de vibración por toda la estructura del sistema de suspensión. Por medio de la impedancia propuesta se pretende controlar la rigidez y amortiguamiento del sistema de suspensión para lograr tanto el índice del confort como el índice del agarre mecánico. A continuación, se presenta el modelo del vehículo completo consideran sus principales dinámicas como estudio, ver Figura 4.2.

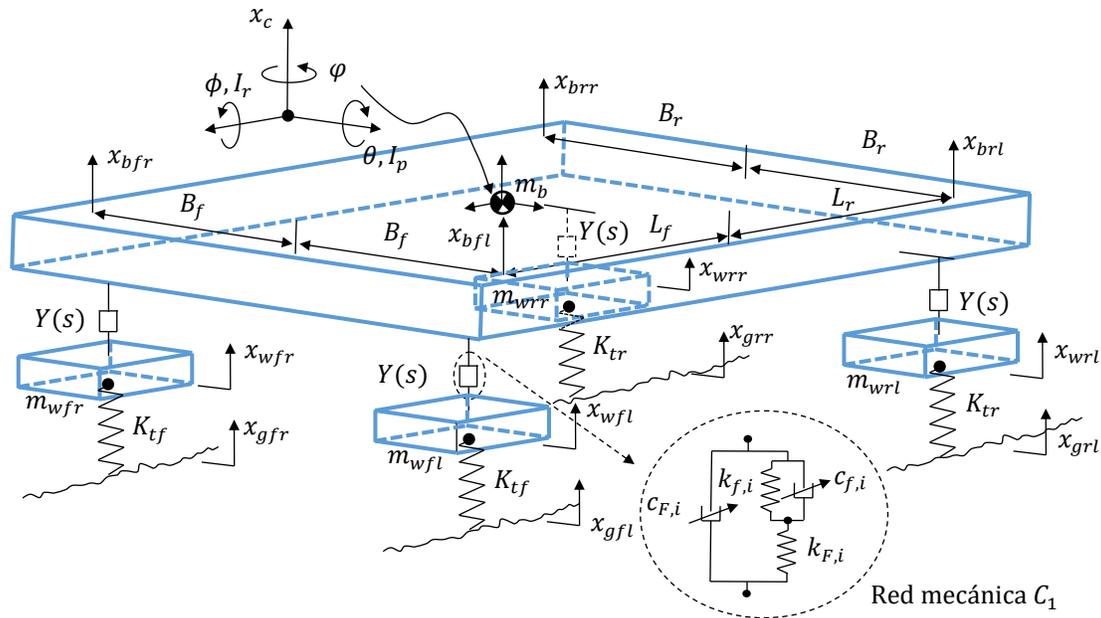


Figura 4.2: Modelo de vehículo completo con la red mecánica propuesta.

De acuerdo con la [Figura 4.2](#), la impedancia mecánica modelada en este trabajo de investigación está compuesta por dos amortiguadores semi activos regenerativos autoalimentados y dos resortes de rigidez constante, en la [Figura 4.3](#) se muestran las impedancias propuestas para el análisis en este trabajo. Al simplificar esta impedancia se obtiene una red mecánica resultante que está compuesta por un amortiguador de amortiguamiento variable y un resorte semi activo, tal como se presentó en el trabajo de [Liu et. al \[127\]](#). Por medio de estos elementos mecánicos semi activos se pretende romper totalmente el equilibrio (Trade-off) entre los índices de desempeño dinámico del sistema de suspensión. Por otra parte, es importante señalar que al añadir esta configuración de elementos mecánicos se añade un grado de libertad al sistema de suspensión, el cual tiene como objetivo modificar en gran medida el acoplamiento dinámico y estático del sistema. Por lo tanto, el modelo de vehículo completo se convierte en un sistema dinámico de once grados de libertad. Así, la función Lagrangiana está dada por la siguiente expresión matemática.

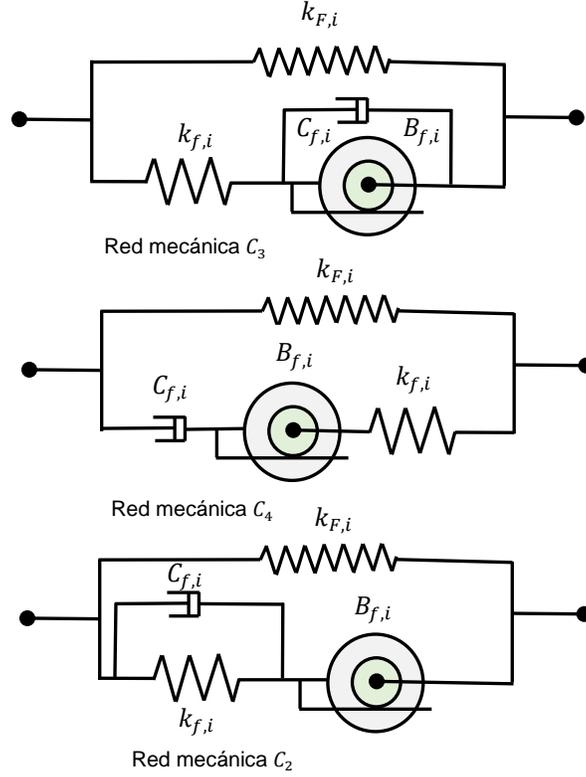


Figura 4.3: Redes mecánicas basadas en inersores.

$$L(T, V) = T(\dot{x}_c, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{x}_{wfl}, \dot{x}_{wfr}, \dot{x}_{wrl}, \dot{x}_{wrr}, \dot{x}_{fl}, \dot{x}_{fr}, \dot{x}_{rl}, \dot{x}_{rr}) - V(x_c, \theta, \phi, x_{wfl}, x_{wfr}, x_{wrl}, x_{wrr}, x_{fl}, x_{fr}, x_{rl}, x_{rr}) \quad (4.15)$$

En la ecuación (4.15), los desplazamientos  $x_{fl}, x_{fr}, x_{rl}, x_{rr}$  son los grados de libertad causados por la impedancia mecánica  $C_1$ . Por simplicidad, se evita representar la función de disipación de energía. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son las siguientes

$$\begin{cases} m_b \ddot{x}_c = k_{f1}(x_{fl} - x_{bfl}) + c_{f1}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{bfl}) + c_{F1}(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) + k_{f2}(x_{fr} - x_{bfr}) + \\ c_{f2}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{bfr}) + c_{F2}(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr}) + k_{f3}(x_{rl} - x_{bri}) + c_{f3}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{bri}) + \\ c_{F3}(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{bri}) + k_{f4}(x_{rr} - x_{brr}) + c_{f4}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{brr}) + c_{F4}(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr}) \\ I_p \ddot{\theta} = L_r \{k_{f3}(x_{rl} - x_{bri}) + c_{f3}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{bri}) + c_{F3}(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{bri}) + k_{f4}(x_{rr} - x_{brr}) + \\ c_{f4}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{brr}) + c_{F4}(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr})\} - L_f \{k_{f1}(x_{fl} - x_{bfl}) + c_{f1}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{bfl}) \\ + c_{F1}(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) + k_{f2}(x_{fr} - x_{bfr}) + c_{f2}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{bfr}) + c_{F2}(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr})\} \\ I_r \ddot{\phi} = B_f \{k_{f1}(x_{fl} - x_{bfl}) + c_{f1}(\dot{x}_{fl} - \dot{x}_{bfl}) + c_{F1}(\dot{x}_{wfl} - \dot{x}_{bfl}) - k_{f2}(x_{fr} - x_{bfr}) \\ - c_{f2}(\dot{x}_{fr} - \dot{x}_{bfr}) - c_{F2}(\dot{x}_{wfr} - \dot{x}_{bfr})\} + B_r \{k_{f3}(x_{rl} - x_{bri}) + c_{f3}(\dot{x}_{rl} - \dot{x}_{bri}) + \\ c_{F3}(\dot{x}_{wrl} - \dot{x}_{bri}) - k_{f4}(x_{rr} - x_{brr}) - c_{f4}(\dot{x}_{rr} - \dot{x}_{brr}) - c_{F4}(\dot{x}_{wrr} - \dot{x}_{brr})\} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} m_{wfl} \ddot{x}_{wfl} = K_{lf}(x_{gfl} - x_{wfl}) + k_{F1}(x_{fl} - x_{wfl}) + c_{F1}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{wfl}) \\ m_{wfr} \ddot{x}_{wfr} = K_{lf}(x_{gfr} - x_{wfr}) + k_{F2}(x_{fr} - x_{wfr}) + c_{F2}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{wfr}) \\ m_{wrl} \ddot{x}_{wrl} = K_{lr}(x_{grl} - x_{wrl}) + k_{F3}(x_{rl} - x_{wrl}) + c_{F3}(\dot{x}_{bri} - \dot{x}_{wrl}) \\ m_{wrr} \ddot{x}_{wrr} = K_{lr}(x_{grr} - x_{wrr}) + k_{F4}(x_{rr} - x_{wrr}) + c_{F4}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{wrr}) \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} k_{F1}(x_{fl} - x_{wfl}) = k_{f1}(x_{bfl} - x_{fl}) + c_{f1}(\dot{x}_{bfl} - \dot{x}_{fl}) \\ k_{F2}(x_{fr} - x_{wfr}) = k_{f2}(x_{bfr} - x_{fr}) + c_{f2}(\dot{x}_{bfr} - \dot{x}_{fr}) \\ k_{F3}(x_{rl} - x_{wrl}) = k_{f3}(x_{brl} - x_{rl}) + c_{f3}(\dot{x}_{brl} - \dot{x}_{rl}) \\ k_{F4}(x_{rr} - x_{wrr}) = k_{f4}(x_{brr} - x_{rr}) + c_{f4}(\dot{x}_{brr} - \dot{x}_{rr}) \end{cases} \quad (4.18)$$

Considerando que  $R = [x_c \ \theta \ \phi]^T$ ,  $X_b = [x_{bfl} \ x_{bfr} \ x_{brl} \ x_{brr}]^T$ ,  $X_w = [x_{wfl} \ x_{wfr} \ x_{wrl} \ x_{wrr}]^T$ ,  $X_f = [x_{fl} \ x_{fr} \ x_{rl} \ x_{rr}]^T$ ,  $X_g = [x_{gfl} \ x_{gfr} \ x_{grl} \ x_{grr}]^T$ . Las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18) se pueden expresar de la siguiente manera

$$\begin{cases} [M_s]\{\ddot{R}(t)\} = [L][K_f]\{X_f(t)\} - \{X_b(t)\} + [L][C_f]\{\dot{X}_f(t)\} - \{\dot{X}_b(t)\} + [L][C_f]\{\dot{X}_w(t)\} - \{\dot{X}_b(t)\} \\ [M_u]\{\ddot{X}_w(t)\} = [K_i]\{X_g(t)\} - \{X_w(t)\} + [K_f]\{X_f(t)\} - \{X_w(t)\} + [C_f]\{\dot{X}_f(t)\} - \{\dot{X}_w(t)\} \\ [K_f]\{X_f(t)\} - \{X_w(t)\} = [K_i]\{X_b(t)\} - \{X_f(t)\} + [C_f]\{\dot{X}_b(t)\} - \{\dot{X}_f(t)\} \end{cases} \quad (4.19)$$

Con el objetivo de calcular la norma  $\mathcal{H}_2$ , es conveniente realizar la representación en espacios de estado a partir de la ecuación (4.19). Posteriormente, es posible formular las matrices  $[A]$ ,  $[B]$ , y  $[C]$ , las cuales son necesarias para la formulación del cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$ . Por lo tanto, la ecuación (4.19) se puede reorganizar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{R}(t) \\ \ddot{X}_w(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [M_s]^{-1}[L][C_f][L]^T + [M_s]^{-1}[L][C_f][L]^T & -[M_s]^{-1}[L][C_f] & -[M_s]^{-1}[L][C_f] \\ -[M_u]^{-1}[C_f][L]^T & [M_u]^{-1}[C_f] & [0] \\ -[C_f][L]^T & [0] & [C_f] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R}(t) \\ \dot{X}_w(t) \\ \dot{X}_f(t) \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [M_s]^{-1}[L][K_f][L]^T & [0] & -[M_s]^{-1}[L][K_f] \\ [0] & [M_u]^{-1}[K_i] + [M_u]^{-1}[K_f] & -[M_u]^{-1}[K_f] \\ -[K_f][L]^T & -[K_f] & [K_f] + [K_f] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R(t) \\ X_w(t) \\ X_f(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [0] \\ [M_u]^{-1}[K_i]X_g(t) \\ [0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Luego la ecuación (4.20) se puede expresar en la forma canónica controlable  $\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{X_g\}$ ,  $\{Y\} = [C]\{X\}$ . Esto resulta en,

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\} &= \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{X}_w \\ \dot{X}_f \\ \dot{R} \\ \dot{X}_w \\ \dot{X}_f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [I_3] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I_4] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I_4] \\ -[H_1][K_f][L]^T & [0] & [H_1][K_f] & -[H_1]([C_f] + [C_f])[L]^T & [H_1][C_f] & [H_1][C_f] \\ [0] & -[Q_1]([K_f] + [K_i]) & [Q_1][K_f] & [Q_1][C_f][L]^T & -[Q_1][C_f] & [0] \\ [K_f][L]^T & [K_f] & -([K_f] + [K_i]) & [C_f][L]^T & [0] & -[C_f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X_w \\ X_f \\ \dot{R} \\ \dot{X}_w \\ \dot{X}_f \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [Q_1][K_i] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ X_g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde,

$$[H_1] = [M_s]^{-1}[L]; [Q_1] = [M_u]^{-1}$$

A partir de la ecuación de dinámica general (4.21), se puede calcular las funciones de transferencia que describen las principales dinámicas del sistema suspensión propuesta. Adicionalmente, en esta tesis se presenta la comparación de las respuestas dinámicas proporcionadas por el sistema de suspensión propuesto con las obtenidas a través de redes mecánicas basadas en inersores, ver Figura 4.3. Al conectar la impedancia  $C_2$  al modelo del vehículo completo, se obtiene un sistema dinámico de once grados libertad similar a modelado anteriormente. Por lo tanto, el modelo matemático que rige el comportamiento dinámico del modelo del vehículo completo conectado a la red mecánica  $C_2$ , se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{cases} [\mathbf{M}_s]\{\ddot{\mathbf{R}}(t)\} = [\mathbf{L}][\mathbf{K}_f](\{X_w(t)\} - \{X_b(t)\}) + [\mathbf{L}][\mathbf{K}_f](\{X_f(t)\} - \{X_b(t)\}) + [\mathbf{L}][\mathbf{C}_f](\{\dot{X}_f(t)\} - \{\dot{X}_b(t)\}) \\ [\mathbf{M}_u]\{\ddot{X}_w(t)\} - [\mathbf{B}_f](\{\ddot{X}_f(t)\} - \{\ddot{X}_w(t)\}) = [\mathbf{K}_t](\{X_g(t)\} - \{X_w(t)\}) + [\mathbf{K}_f](\{X_f(t)\} - \{X_w(t)\}) \\ [\mathbf{B}_f](\{\dot{X}_f(t)\} - \{\dot{X}_w(t)\}) = [\mathbf{K}_f](\{X_b(t)\} - \{X_f(t)\}) + [\mathbf{C}_f](\{\dot{X}_b(t)\} - \{\dot{X}_f(t)\}) \end{cases} \quad (4.22)$$

donde  $[\mathbf{B}_f]$  es una matriz de inercia rotacional producida por los inersores en el sistema de suspensión. Luego,  $[\mathbf{M}_s]$ ,  $[\mathbf{M}_u]$ ,  $[\mathbf{L}]$ ,  $[\mathbf{K}_F]$ ,  $[\mathbf{K}_f]$ ,  $[\mathbf{C}_f]$ ,  $[\mathbf{C}_f]$ , y  $[\mathbf{K}_t]$  ya han sido definidas anteriormente. Luego, la ecuación (4.22) se puede reordenar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}(t) \\ \ddot{X}_w(t) \\ \ddot{X}_f(t) \end{cases} + \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_1][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & -[\mathbf{H}_1][\mathbf{C}_f] \\ -[\mathbf{H}_2][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_2][\mathbf{C}_f] \\ -[\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f] \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{\mathbf{R}}(t) \\ \dot{X}_w(t) \\ \dot{X}_f(t) \end{cases} \\ + \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_f)[\mathbf{L}]^T & -[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F] & -[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_f] \\ -[\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{Q}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_t) & [\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f] - [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F] \\ -[\mathbf{H}_3][\mathbf{K}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{Q}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_t) & [\mathbf{H}_3][\mathbf{K}_f] - [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{R}(t) \\ X_w(t) \\ X_f(t) \end{cases} \\ = \begin{bmatrix} [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_t]X_g(t) \\ [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_t]X_g(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Luego la representación en espacios de estados de la ecuación matricial (4.23) es de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{X}_w \\ \dot{X}_f \\ \ddot{\mathbf{R}} \\ \ddot{X}_w \\ \ddot{X}_f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_3] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_4] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_4] \\ -[\mathbf{H}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_f)[\mathbf{L}]^T & [\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F] & [\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_f] & -[\mathbf{H}_1][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_1][\mathbf{C}_f] \\ [\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{Q}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_t) & -([\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f] - [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F]) & [\mathbf{H}_2][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_2][\mathbf{C}_f] \\ [\mathbf{H}_3][\mathbf{K}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{Q}_1](\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_t) & -([\mathbf{H}_3][\mathbf{K}_f] - [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F]) & [\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ X_w \\ X_f \\ \ddot{\mathbf{R}} \\ \ddot{X}_w \\ \ddot{X}_f \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_t] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ X_g \\ X_g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde,

$$[\mathbf{H}_1] = [\mathbf{M}_s]^{-1}; [\mathbf{H}_2] = [\mathbf{M}_u]^{-1}[\mathbf{B}_f][\mathbf{B}_f]^{-1}; [\mathbf{H}_3] = [\mathbf{Q}_2] + [\mathbf{H}_2]; [\mathbf{Q}_1] = [\mathbf{M}_u]^{-1}; [\mathbf{Q}_2] = [\mathbf{B}_f]^{-1}$$

Finalmente, el modelo dinámico para la impedancia mecánica  $C_3$  se puede obtener aplicando el balance energético de Euler-Lagrange. Es importante recordar que, estos modelos se utilizan para realizar un análisis comparativo tanto del rendimiento proporcionado por el sistema de suspensión propuesto como el proporcionado por las impedancias mecánicas basados en inersores. De hecho, se calculará los índices de rendimiento dinámico para todos los modelos analizados en esta tesis. Por lo tanto, el modelo matemático para la red mecánica  $C_3$  mostrada en la [Figura 4.3](#), se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} [\mathbf{M}_s]\{\ddot{\mathbf{R}}(t)\} + [\mathbf{L}][\mathbf{B}_f]\{\{\ddot{\mathbf{X}}_b(t)\} - \{\ddot{\mathbf{X}}_f(t)\}\} = [\mathbf{L}][\mathbf{K}_F]\{\{\mathbf{X}_w(t)\} - \{\mathbf{X}_b(t)\}\} + [\mathbf{L}][\mathbf{C}_f]\{\{\dot{\mathbf{X}}_f(t)\} - \{\dot{\mathbf{X}}_b(t)\}\} \\ [\mathbf{M}_u]\{\ddot{\mathbf{X}}_w(t)\} = [\mathbf{K}_i]\{\{\mathbf{X}_g(t)\} - \{\mathbf{X}_w(t)\}\} + [\mathbf{K}_F]\{\{\mathbf{X}_b(t)\} - \{\mathbf{X}_w(t)\}\} + [\mathbf{K}_f]\{\{\mathbf{X}_f(t)\} - \{\mathbf{X}_w(t)\}\} \\ -[\mathbf{B}_f]\{\{\dot{\mathbf{X}}_b(t)\} - \{\dot{\mathbf{X}}_f(t)\}\} = -[\mathbf{K}_f]\{\{\mathbf{X}_f(t)\} - \{\mathbf{X}_w(t)\}\} + [\mathbf{C}_f]\{\{\dot{\mathbf{X}}_b(t)\} - \{\dot{\mathbf{X}}_f(t)\}\} \end{cases} \quad (4.25)$$

Luego, la ecuación (4.25) se puede reorganizar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{R}}(t) \\ \ddot{\mathbf{X}}_w(t) \\ \ddot{\mathbf{X}}_f(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & -[\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ ([\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_3] - [\mathbf{Q}_2])[\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & ([\mathbf{Q}_2] - [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_3])[\mathbf{C}_f] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}(t) \\ \dot{\mathbf{X}}_w(t) \\ \dot{\mathbf{X}}_f(t) \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & -([\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F] + [\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f]) & [\mathbf{0}] \\ -[\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{Q}_1]([\mathbf{K}_F] + [\mathbf{K}_f] + [\mathbf{K}_i]) & -[\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_f] \\ [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & -([\mathbf{Q}_3][\mathbf{K}_f] + [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F]) & [\mathbf{Q}_3][\mathbf{K}_f] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{X}_w(t) \\ \mathbf{X}_f(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_i]\mathbf{X}_g(t) \\ [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Consecuentemente, la representación en espacios de estados del modelo matemático de la última impedancia mecánica  $C_3$ , se puede representar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{X}}_w \\ \dot{\mathbf{X}}_f \\ \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{X}}_w \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_3] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_4] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_4] \\ -[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & ([\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F] + [\mathbf{H}_2][\mathbf{K}_f]) & [\mathbf{0}] & -[\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & [\mathbf{H}_3][\mathbf{C}_f] \\ [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & -[\mathbf{Q}_1]([\mathbf{K}_F] + [\mathbf{K}_f] + [\mathbf{K}_i]) & [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_f] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ -[\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F][\mathbf{L}]^T & ([\mathbf{Q}_3][\mathbf{K}_f] + [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_1][\mathbf{K}_F]) & -[\mathbf{Q}_3][\mathbf{K}_f] & -([\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_3] - [\mathbf{Q}_2])[\mathbf{C}_f][\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] & -([\mathbf{Q}_2] - [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_3])[\mathbf{C}_f] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{X}_w \\ \mathbf{X}_f \\ \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{X}}_w \\ \dot{\mathbf{X}}_f \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}_1][\mathbf{K}_i] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde,

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_1] &= [\mathbf{M}_s]^{-1}; \quad [\mathbf{H}_2] = [\mathbf{M}_s]^{-1}[\mathbf{L}][\mathbf{B}_f][\mathbf{B}_f]^{-1}; \quad [\mathbf{H}_3] = [\mathbf{H}_1] - [\mathbf{H}_2]; \quad \mathbf{Q}_1 = [\mathbf{M}_u]^{-1}; \quad [\mathbf{Q}_2] = [\mathbf{B}_f]^{-1}; \quad [\mathbf{Q}_3] \\ &= [\mathbf{Q}_2] + [\mathbf{L}]^T[\mathbf{H}_2] \end{aligned}$$

Los modelos dinámicos presentados en espacios de estados dados por las ecuaciones (4.21), (4.24), y (4.27) pueden ser utilizados tanto para la determinación de las funciones de transferencia como el control del sistema de suspensión. En la siguiente sección, se presenta el cálculo de los índices de rendimiento considerando

principalmente las siguientes respuestas del sistema en estado estable; la primera es el nivel de aceleración de la masa suspendida, la FRF de la deflexión del sistema de suspensión, la FRF de la carga dinámica del neumático, y por último la FRF de potencia disipada en el sistema de suspensión.

### 4.3. Cálculo de los índices de rendimiento dinámico

En esta sección, se presenta el cálculo de los índices de rendimiento del sistema de suspensión propuesto. Para realizar tales operaciones matemáticas es necesario el cálculo de las siguientes funciones de transferencia;  $|H_{Acel}(j\omega)|$ ,  $|H_{SuspDeflec}(j\omega)|$ ,  $|H_{TyreLoad}(j\omega)|$ , y  $|H_{PowerDisip}(j\omega)|$ . Estas funciones de transferencia describen intrínsecamente las dinámicas del sistema de suspensión. Por lo tanto, utilizando la ecuación (4.21) es posible el cálculo de estas funciones de respuesta en frecuencia, tenga en cuenta que la ecuación dinámica (4.21) representa a la red mecánica  $C_1$  propuesta en este trabajo. Luego la formulación del cálculo de los índices de rendimiento se puede realizar utilizando la ecuación (3.36), lo cual resulta en la siguiente formulación matemática

$$\left\{ \begin{array}{l} E[|H_{Acel}(j\omega)|^2] = J_1 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)} V \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_4^{J_1}(j\omega)^4 + B_3^{J_1}(j\omega)^3 + B_2^{J_1}(j\omega)^2 + B_1^{J_1}(j\omega) + B_0^{J_1}}{(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \\ E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2] = J_2 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)} V \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_4^{J_2}(j\omega)^4 + B_3^{J_2}(j\omega)^3 + B_2^{J_2}(j\omega)^2 + B_1^{J_2}(j\omega) + B_0^{J_2}}{(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \\ E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2] = J_3 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)} V \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_4^{J_3}(j\omega)^4 + B_3^{J_3}(j\omega)^3 + B_2^{J_3}(j\omega)^2 + B_1^{J_3}(j\omega) + B_0^{J_3}}{(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \\ E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2] = J_4 = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)} V \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_4^{J_4}(j\omega)^4 + B_3^{J_4}(j\omega)^3 + B_2^{J_4}(j\omega)^2 + B_1^{J_4}(j\omega) + B_0^{J_4}}{(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0} d\omega \end{array} \right. \quad (4.28)$$

donde,

$$A_4 = (C_F C_f M_s + C_F C_f m_u + K_F M_s m_u + K_f M_s m_u)(C_f M_s m_u)^{-1}; A_3 = (C_F K_F M_s + C_F K_F m_u + C_F K_f M_s + C_F K_f m_u + C_f K_F M_s + C_f K_F m_u + C_f K_t M_s)(C_f M_s m_u)^{-1}; A_2 = (C_F C_f K_t + K_F K_f M_s + K_F K_f m_u + K_F K_t M_s + K_f K_t M_s)(C_f M_s m_u)^{-1}; A_1 = (C_F K_F K_t + C_F K_f K_t + C_f K_F K_t)(C_f M_s m_u)^{-1}; A_0 = (K_F K_f K_t)(C_f M_s m_u)^{-1}$$

$$B_3^{J_1} = (C_F K_t)(M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_1} = A_1; B_1^{J_1} = A_0; B_4^{J_1} = B_0^{J_1} = B_4^{J_2} = B_3^{J_2} = B_0^{J_2} = B_0^{J_3} = B_4^{J_4} = B_1^{J_4} = B_0^{J_4} = 0; B_2^{J_2} = -(K_t)(m_u)^{-1}; B_1^{J_2} = -K_t(K_F + K_f)(C_f m_u)^{-1}; B_4^{J_3} = -K_t; B_3^{J_3} = -K_t A_4; B_2^{J_3} = -K_t(C_F K_F M_s + C_F K_F m_u + C_f K_f M_s + C_f K_f m_u + C_f K_F M_s + C_f K_F m_u)(C_f M_s m_u)^{-1}; B_1^{J_3} = -K_t(K_F K_f M_s + K_F K_f m_u)(C_f M_s m_u)^{-1}; B_4^{J_4} = -K_t(C_F C_f M_s)(C_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_4} = -K_t M_s(C_F K_F + C_f K_f + C_f K_F)(C_f M_s m_u)^{-1}$$

Los índices de rendimiento dinámico formulados en la ecuación (4.28) se pueden calcular utilizando la formulación de la norma  $\mathcal{H}_2$  descrita en la subsección 3.7.1. Por lo tanto, la formulación para la obtención de una expresión analítica general de los índices de rendimiento dinámico se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{norm } \mathcal{H}_{2,i} &= E[|H_i(j\omega)|^2]_i = \|[\mathbf{C}]_i(s\{\mathbf{I}\} - [\mathbf{A}])^{-1}[\mathbf{B}]\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint |H_i(-j\omega)||H_i(j\omega)|d\omega \\ &= \text{Trace}([\mathbf{C}]_i[\mathbf{L}][\mathbf{C}]^T) \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde  $i = 1, \dots, 4$  representa a los índices de rendimiento dinámico  $J_i$  del sistema de suspensión. Luego, las matrices para el cálculo de la norma  $\text{norm } \mathcal{H}_{2,i}$  se pueden expresar de la siguiente manera

$$|H_i(j\omega)| = \frac{B_4^{J_i}(j\omega)^4 + B_3^{J_i}(j\omega)^3 + B_2^{J_i}(j\omega)^2 + B_1^{J_i}(j\omega) + B_0^{J_i}}{(j\omega)^5 + A_4(j\omega)^4 + A_3(j\omega)^3 + A_2(j\omega)^2 + A_1(j\omega) + A_0}; \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{C}] = [B_0^{J_i} \quad B_1^{J_i} \quad B_2^{J_i} \quad B_3^{J_i} \quad B_4^{J_i}]$$

Al calcular la solución única  $[\mathbf{L}]$  de la ecuación de Lyapunov ( $[\mathbf{A}][\mathbf{L}] + [\mathbf{L}][\mathbf{A}]^T + [\mathbf{B}][\mathbf{B}]^T = [\mathbf{0}]$ ), y luego sustituyendo esta solución en la ecuación (4.29) se obtiene una expresión general para el cálculo de los índices de rendimiento dinámico descritos por la formulación (4.28). Esto resulta en,

$$\begin{aligned} \text{norm } \mathcal{H}_{2,i} = & A_0^2 A_3^2 A_4^2 + A_0 A_1^2 A_4 (B_4^2)^{J_i} - A_0 A_1 A_2 A_3 (B_4^2)^{J_i} - A_0^2 A_1 (B_4^2)^{J_i} - 2A_0^2 A_3 B_2^{J_i} B_4^{J_i} + A_0^2 A_3 (B_3^2)^{J_i} \\ & + 2A_0 A_1 A_2 B_2^{J_i} B_4^{J_i} - A_0 A_1 A_2 (B_3^2)^{J_i} - 2A_0 A_1 A_4 B_0^{J_i} B_4^{J_i} + 2A_0 A_1 A_4 B_1^{J_i} B_3^{J_i} - A_0 A_1 A_4 (B_2^2)^{J_i} \\ & + 2A_0 A_3 A_4 B_0^{J_i} B_2^{J_i} - A_0 A_3 A_4 (B_1^2)^{J_i} + A_1 A_4^2 (B_0^2)^{J_i} - A_2 A_3 A_4 (B_0^2)^{J_i} + 2A_0^2 B_0^{J_i} B_4^{J_i} - 2A_0^2 B_1^{J_i} B_3^{J_i} \\ & + A_0^2 (B_2^2)^{J_i} - 2A_0 A_2 B_0^{J_i} B_2^{J_i} + A_0 A_2 (B_1^2)^{J_i} - A_0 A_4 (B_0^2)^{J_i} + A_2^2 (B_0^2)^{J_i} / (A_0 A_3^2 A_4 + A_1^2 A_4^2 \\ & - A_1 A_2 A_3 A_4 - 2A_0 A_1 A_4 - A_0 A_2 A_3 + A_1 A_2^2 + A_0^2) A_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Mediante la solución general de la norma  $\text{norm } \mathcal{H}_{2,i}$  dada por la ecuación (4.30) es posible calcular los índices descritos por la formulación (4.28). Adicionalmente, note que la ecuación (4.30) describe el RMS de la energía total de vibración que fluye a través de todo el sistema de suspensión. Con el objetivo de comparar los valores de RMS obtenidos del sistema de suspensión propuesto con respecto a los de las impedancias mecánicas ( $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$ ) basadas en inersores, es necesario la formulación matemática para el cálculo de los índices dinámicos de estas suspensiones basadas en redes mecánicas de alto rendimiento. Por lo tanto, las funciones de transferencia ( $|H_{\text{Accel}}(j\omega)|$ ,  $|H_{\text{SuspDeflec}}(j\omega)|$ ,  $|H_{\text{TyreLoad}}(j\omega)|$ , y  $|H_{\text{PowerDisip}}(j\omega)|$ ) se pueden obtener a partir de las ecuaciones dinámicas (4.24) y (4.27). Luego, los índices de rendimiento dinámico de las redes mecánicas  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$  se pueden formular de la siguiente manera,

$$\begin{cases} E[|H_{\text{Accel}}(j\omega)|^2]_{C_j} = J_{1,C_j} = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5^{J_{1,C_j}}(j\omega)^5 + B_4^{J_{1,C_j}}(j\omega)^4 + B_3^{J_{1,C_j}}(j\omega)^3 + B_2^{J_{1,C_j}}(j\omega)^2 + B_1^{J_{1,C_j}}(j\omega) + B_0^{J_{1,C_j}}}{(j\omega)^6 + A_{5,C_j}(j\omega)^5 + A_{4,C_j}(j\omega)^4 + A_{3,C_j}(j\omega)^3 + A_{2,C_j}(j\omega)^2 + A_{1,C_j}(j\omega) + A_{0,C_j}} d\omega \\ E[|H_{\text{SuspDeflec}}(j\omega)|^2]_{C_j} = J_{2,C_j} = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5^{J_{2,C_j}}(j\omega)^5 + B_4^{J_{2,C_j}}(j\omega)^4 + B_3^{J_{2,C_j}}(j\omega)^3 + B_2^{J_{2,C_j}}(j\omega)^2 + B_1^{J_{2,C_j}}(j\omega) + B_0^{J_{2,C_j}}}{(j\omega)^6 + A_{5,C_j}(j\omega)^5 + A_{4,C_j}(j\omega)^4 + A_{3,C_j}(j\omega)^3 + A_{2,C_j}(j\omega)^2 + A_{1,C_j}(j\omega) + A_{0,C_j}} d\omega \\ E[|H_{\text{TyreLoad}}(j\omega)|^2]_{C_j} = J_{3,C_j} = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5^{J_{3,C_j}}(j\omega)^5 + B_4^{J_{3,C_j}}(j\omega)^4 + B_3^{J_{3,C_j}}(j\omega)^3 + B_2^{J_{3,C_j}}(j\omega)^2 + B_1^{J_{3,C_j}}(j\omega) + B_0^{J_{3,C_j}}}{(j\omega)^6 + A_{5,C_j}(j\omega)^5 + A_{4,C_j}(j\omega)^4 + A_{3,C_j}(j\omega)^3 + A_{2,C_j}(j\omega)^2 + A_{1,C_j}(j\omega) + A_{0,C_j}} d\omega \\ E[|H_{\text{PowerDisip}}(j\omega)|^2]_{C_j} = J_{4,C_j} = \sqrt{2\pi G_x(\eta_0)V} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_5^{J_{4,C_j}}(j\omega)^5 + B_4^{J_{4,C_j}}(j\omega)^4 + B_3^{J_{4,C_j}}(j\omega)^3 + B_2^{J_{4,C_j}}(j\omega)^2 + B_1^{J_{4,C_j}}(j\omega) + B_0^{J_{4,C_j}}}{(j\omega)^6 + A_{5,C_j}(j\omega)^5 + A_{4,C_j}(j\omega)^4 + A_{3,C_j}(j\omega)^3 + A_{2,C_j}(j\omega)^2 + A_{1,C_j}(j\omega) + A_{0,C_j}} d\omega \end{cases} \quad (4.31)$$

En la expresión matemática (4.31)  $C_j$   $j = 2,3,4$  corresponde a cada red mecánica basada en inersores, ver Figura 4.3. Las funciones  $B_i^{J_{k,C_j}}$  y  $A_{i,C_j}$  para  $i = 0, \dots, 5$ ,  $j = 2,3$  y  $k = 1, \dots, 4$  se muestran en el Apéndice A. Luego, la formulación de las matrices  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ , y  $[\mathbf{C}]$  para el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_{2,i}$  es la siguiente

$$\text{norm } \mathcal{H}_{2,C_j} = E[|H_i(j\omega)|^2]_{C_j} = \left\| [\mathbf{C}]_{C_j} (s\{\mathbf{I}\} - [\mathbf{A}]_{C_j})^{-1} [\mathbf{B}]_{C_j} \right\|_2^2 = \text{Trace}([\mathbf{C}]_{C_j} [\mathbf{L}]_{C_j} [\mathbf{C}]_{C_j}^T) \quad (4.32)$$

donde,

$$|H_k(j\omega)|_{C_j} = \frac{B_5^{J_{k,C_j}}(j\omega)^5 + B_4^{J_{k,C_j}}(j\omega)^4 + B_3^{J_{k,C_j}}(j\omega)^3 + B_2^{J_{k,C_j}}(j\omega)^2 + B_1^{J_{k,C_j}}(j\omega) + B_0^{J_{k,C_j}}}{(j\omega)^6 + A_5 C_j (j\omega)^5 + A_4 C_j (j\omega)^4 + A_3 C_j (j\omega)^3 + A_2 C_j (j\omega)^2 + A_1 C_j (j\omega) + A_0 C_j} [\mathbf{A}]_{C_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_{0,C_j} & -A_{1,C_j} & -A_{2,C_j} & -A_{3,C_j} & -A_{4,C_j} & -A_{5,C_j} \end{bmatrix} ; [\mathbf{B}]_{C_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{C}]_{C_j} = [B_0^{J_{k,C_j}} \quad B_1^{J_{k,C_j}} \quad B_2^{J_{k,C_j}} \quad B_3^{J_{k,C_j}} \quad B_4^{J_{k,C_j}} \quad B_5^{J_{k,C_j}}]$$

A partir de la formulación (4.32), se puede obtener el valor esperado para cada respuesta en frecuencia de la impedancia mecánicas  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$ . Por lo tanto, calculando la solución única de la ecuación de Lyapunov, la solución general de la ecuación (4.32) es la siguiente expresión matemática

$$\text{norm } \mathcal{H}_{2,C_j} = (A_0^3 A_5^2 B_5^2 - 2A_0^2 A_1 A_4 A_5 B_5^2 - A_0^2 A_2 A_3 A_5 B_5^2 + A_0^2 A_3 A_4 B_5^2 + A_0 A_1^2 A_4^2 B_5^2 + A_0 A_1 A_2^2 A_5 B_5^2 - A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 B_5^2 + A_0^2 A_1 A_3 B_5^2 + 2A_0^2 A_1 A_5 B_3 B_5 - A_0^2 A_1 A_5 B_4^2 - 2A_0^2 A_3^2 B_3 B_5 + A_0^2 A_3^2 B_4^2 + 2A_0^2 A_3 A_5 B_1 B_5 - 2A_0^2 A_3 A_5 B_2 B_4 + A_0^2 A_3 A_5 B_5^2 - 2A_0^2 A_3^2 B_1 B_3 + A_0^2 A_3^2 B_2^2 - A_0 A_1^2 A_2 B_3^2 - 2A_0 A_1^2 A_2 B_3 B_5 + A_0 A_1^2 A_4 B_4^2 + 2A_0 A_1 A_2 A_3 B_3 B_5 - A_0 A_1 A_2 A_3 B_4^2 - 2A_0 A_1 A_2 A_5 B_1 B_5 + 2A_0 A_1 A_2 A_5 B_2 B_4 - A_0 A_1 A_2 A_5 B_3^2 + 2A_0 A_1 A_4 A_5 B_1 B_3 - A_0 A_1 A_4 A_5 B_2^2 + A_0 A_2 A_5^2 B_1^2 - A_0 A_3 A_4 A_5 B_1^2 + 2A_0 A_4^2 B_1 B_5 - 2A_0 A_4^2 B_2 B_4 + A_0 A_4^2 B_3^2 - 2A_0 A_1 A_3 B_1 B_3 + A_0 A_1 A_3 B_2^2 - A_0 A_1 A_5 B_1^2 + A_0 A_3^2 B_1^2)/2A_0 \left( \begin{array}{l} A_0^3 A_5^3 - 2A_0 A_1 A_4 A_5^2 - A_0 A_2 A_3 A_5^2 + A_0 A_3^2 A_4 A_5 + A_1^2 A_4^2 A_5 + A_1 A_2^2 A_5^2 \\ -A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 + 3A_0 A_1 A_3 A_5 - A_0 A_3^3 - 2A_1^2 A_2 A_5 - A_1^2 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_3^2 + A_1^3 \end{array} \right) \quad (4.33)$$

donde,  $A_i = A_{i,C_j}$  y  $B_i = B_0^{J_{k,C_j}}$  para  $i = 0, \dots, 5$ . Estas funciones se muestran en el [Apéndice A](#). Adicionalmente, estas funciones representan los términos matemáticos de las funciones de respuesta en frecuencia del sistema de suspensión basado en inersores. A partir de la ecuación (4.33) es posible calcular la energía total de vibración para los cuatro índices de rendimiento dinámico. La minimización de esta energía involucra obtener los parámetros dinámicos óptimos para los cuales se obtiene un mejor balance dinámico del sistema de suspensión. Note que, para las redes mecánicas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$  se obtienen doce funciones objetivo, es decir, funciones que representan a los índices de rendimiento dinámico tanto de la red mecánica propuesta como de las redes mecánicas basadas en inersores. En la siguiente sección, se presenta la metodología para la minimización de estas funciones objetivos proporcionadas a través de las ecuaciones (4.30) y (4.33). Adicionalmente, se presentan simulaciones numéricas tanto en el dominio del tiempo como en frecuencia de los sistemas estudiados en esta tesis considerando perfiles artificiales de carretera.

#### 4.4. Optimización de los índices de rendimiento

En esta sección, se presenta el procedimiento para la optimización de los índices de rendimiento dinámico para las impedancias mecánicas estudiadas. Dado que los índices de rendimiento tienen dimensiones físicas diferentes, es necesario una formulación general para la minimización de todos ellos. Esto conduce a una formulación de un problema de optimización multiobjetivo no lineal. En efecto, la solución óptima de tal problema de optimización conduce a un mejor compromiso entre cuatro índices de rendimiento calculados anteriormente. Con el objetivo de encontrar un mejor compromiso dinámico entre estos índices, es necesario formular una combinación lineal de todos ellos. Esto se logra a través de una función sin dimensión en la cual se toma en cuenta los índices dinámicos de una suspensión pasiva. Por lo tanto, una sola

función sin dimensión contiene toda la información de las energías de vibración del sistema de suspensión basadas en las redes mecánicas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$ . Esto resulta en,

$$\begin{cases} \tilde{J}_{C_1} = \frac{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_{C_1}}{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_{C_1}}{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_{C_1}}{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_{C_1}}{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_P} \\ \tilde{J}_{C_2} = \frac{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_{C_2}}{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_{C_2}}{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_{C_2}}{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_{C_2}}{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_P} \\ \tilde{J}_{C_3} = \frac{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_{C_3}}{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_{C_3}}{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_{C_3}}{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_{C_3}}{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_P} \\ \tilde{J}_{C_4} = \frac{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_{C_4}}{E[|H_{Acel}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_{C_4}}{E[|H_{SuspDeflec}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_{C_4}}{E[|H_{TyreLoad}(j\omega)|^2]_P} + \frac{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_{C_4}}{E[|H_{PowerDisip}(j\omega)|^2]_P} \end{cases} \quad (4.34)$$

En la ecuación (4.34),  $\tilde{J}_{C_1}$ ,  $\tilde{J}_{C_2}$ ,  $\tilde{J}_{C_3}$ , y  $\tilde{J}_{C_4}$  representan índices normalizados de la redes mecánicas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$ . Además, estas funciones multiobjetivo representan un compromiso entre los cuatro índices de rendimiento dinámico del sistema de suspensión. Luego, la formulación de los problemas de optimización multiobjetivo no lineal se puede realizar tal como se presentó en la [subsección 3.7.3](#). Esto resulta en,

$$\begin{cases} \min_{K_f, C_f, C_F} \tilde{J}_{C_1}(M_s, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f, C_F) \\ \min_{B_f, K_f, C_f} \tilde{J}_{C_2}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f) \\ \min_{B_f, K_f, C_f} \tilde{J}_{C_3}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f) \\ \min_{B_f, K_f, C_f} \tilde{J}_{C_4}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f) \\ \text{Sujecto a:} \\ \{B_f, K_f, C_f, C_F\} \geq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Note que, la formulación (4.35) consiste en minimizar las funciones objetivo normalizadas  $\tilde{J}_{C_1}(M_s, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f, C_F)$ ,  $\tilde{J}_{C_2}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f)$ ,  $\tilde{J}_{C_3}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f)$ , y  $\tilde{J}_{C_4}(M_s, B_f, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f)$  sin restricciones de igualdad y desigualdad. Dado que se trata de un problema de optimización convexo, las soluciones se pueden obtener aplicando la formulación (3.38), y luego resolviendo el conjunto de ecuaciones no lineales a través del método de Newton-Raphson descrito en la [subsección 3.7.4](#). Esto conduce a resolver simultáneamente un conjunto de ecuaciones no lineales de alto orden, las cuales se pueden representar en forma implícita a través de los parámetros de los índices normalizados. Considerando los parámetros de simulación para una suspensión pasiva convencional reportados en la investigación de [Shen et al.\[128\]](#), luego resolviendo los problemas de optimización dados por la formulación (4.35) se obtienen las soluciones óptimas que proporcionan el mejor compromiso entre los índices de rendimiento dinámico, ver Tabla 4:1. Durante la búsqueda de las soluciones numéricas óptimas se observó que la red mecánica  $C_3$  no proporciona rendimiento a la suspensión. Esto se debe principalmente al efecto de inercia rotacional del inersor, el cual causa inestabilidad en las FRFs objetivos del sistema. Luego, las redes mecánicas basadas en inersores ( $C_2, C_4$ ) restantes proporcionan un rendimiento dinámico significativo al sistema de suspensión clásico. Aunque, estas redes mecánicas proporcionan un rendimiento significativo, la red

mecánica  $C_1$  propuesta proporciona el mejor compromiso dinámico. Esto significa que la red  $C_1$  proporciona un índice normalizado  $\tilde{J}_{C_1}$  mas pequeño que los obtenidos para las redes  $C_2, C_4$ . Por lo tanto, se obtiene también una mejor disipación de energía vibratoria de banda ancha en el sistema.

Tabla 4:1: Parámetros óptimos de las redes mecánicas  $C_1, C_2$  y  $C_4$

	Red mecánica $C_1$	Red mecánica $C_2$	Red mecánica $C_4$
$M_s$ [kg]	320	320	320
$m_u$ [kg]	45	45	45
$B_f$ [kg]	---	346	1016
$K_F$ [N/m]	22000	22000	22000
$K_f$ [N/m]	-11512	9430	294624
$K_t$ [N/m]	190000	190000	190000
$C_F$ [Ns/m]	1123	---	---
$C_f$ [Ns/m]	1559	1611	1903
$\tilde{J}_{C_i}$	3.0308	3.36317	3.4526

Note que, el índice normalizado  $\tilde{J}_{C_1} < \tilde{J}_{C_{2,4}}$  de la red mecánica propuesta es menor que los proporcionados por las redes mecánicas basadas en inersores. Adicionalmente, el valor de inercia rotacional  $B_f$  y el de rigidez  $K_f$  de la red  $C_4$  son mucho mayor que el de la red  $C_2$ , eso significa que en aplicaciones reales no es posible construir un inersor con tal capacidad de inercia. Por lo tanto, la red  $C_2$  proporciona un buen compromiso entre rendimiento y factibilidad de implementación. Luego para la red propuesta, se obtiene un valor de rigidez negativa  $K_f$ , lo cual significa que el elemento de restitución de energía potencial debe funcionar como un elemento activo. Con el objetivo de verificar las soluciones numéricas calculadas, la Figura 4.4 muestra tanto una superficie semi-log 3D como curvas de contorno del índice normalizado  $\tilde{J}_{C_1}$ . En esas graficas es posible observar que el mínimo global de la función objetivo  $\tilde{J}_{C_1}$  se produce exactamente en la región de los valores negativos de la rigidez  $K_f$ .

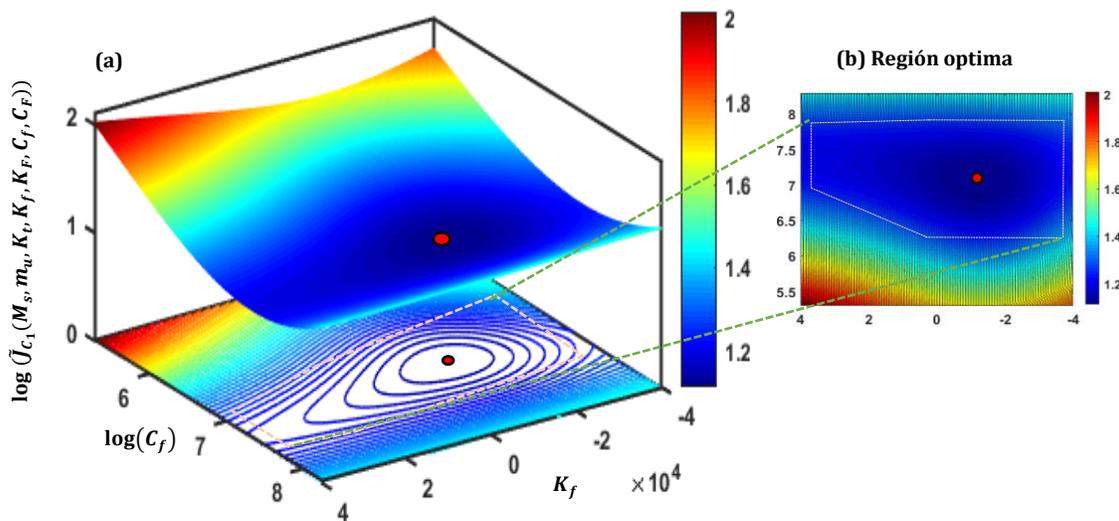


Figura 4.4: Grafica 3D semi-log para  $\tilde{J}_{C_1}(M_s, m_u, K_t, K_f, K_F, C_f, C_F)$  de la red mecánica  $C_1$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible.

Adicionalmente, note que, las curvas de contorno de la [Figura 4.4 \(b\)](#) demuestran también que la red mecánica puede proporcionar un excelente compromiso dinámico utilizando valores positivos de rigidez  $K_f$ . Por lo tanto, la red propuesta en este trabajo puede operar en dos estados, los cuales son el estado pasivo y activo. De hecho, esta observación también fue proporcionada al inicio de la [sección 4.1](#) donde se demostró que la rigidez del sistema se puede variar modificando los coeficientes de amortiguamiento de los amortiguadores  $C_f$  y  $C_F$ . Este hallazgo es muy interesante porque esta red mecánica  $C_1$  supera en términos de rendimiento dinámico a las redes mecánicas basadas en inersores. Además, en la red  $C_1$  los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se pueden variar para mejorar el comportamiento del sistema de suspensión mientras que en las redes mecánicas basadas en inersores no es posible alcanzar tal objetivo. Por otra parte, las superficies log 3D y de contorno de las redes mecánicas  $C_2$  y  $C_4$  se muestran en las [Figura 4.5](#) y [Figura 4.6 \(a-b\)](#).

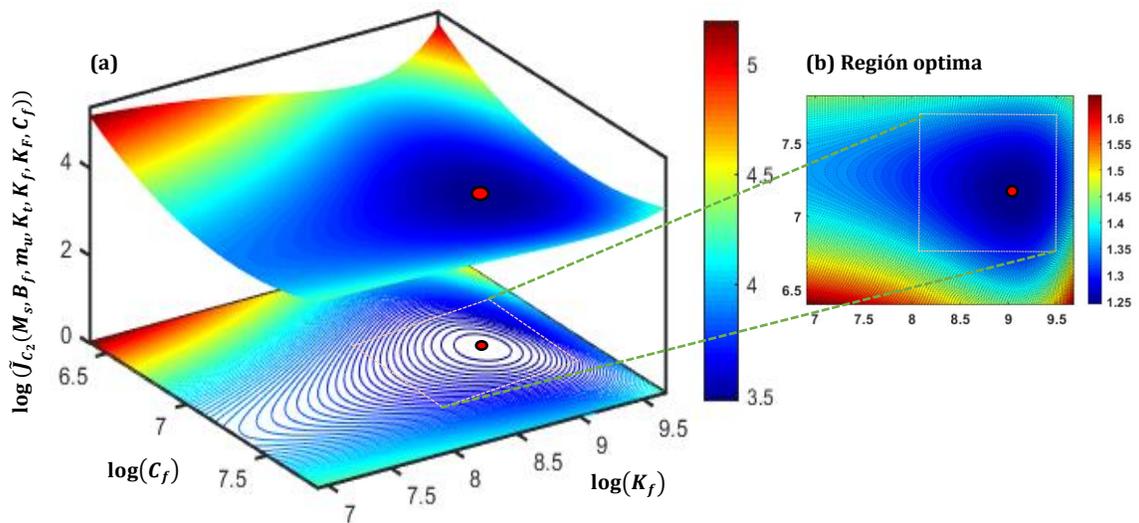


Figura 4.5: Comportamiento geométrico del índice normalizado  $\tilde{J}_{C_2}(M_s, B_f, m_w, K_t, K_f, K_F, C_f)$  de la red mecánica  $C_2$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible.

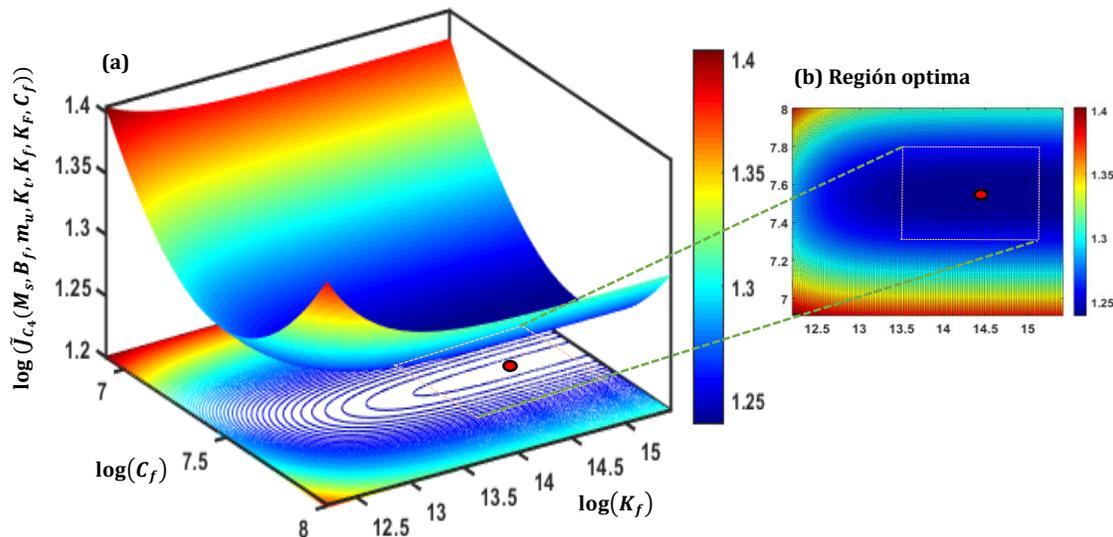


Figura 4.6: Comportamiento geométrico del índice normalizado  $\tilde{J}_{C_4}(M_s, B_f, m_w, K_t, K_f, K_F, C_f)$  de la red mecánica  $C_4$ : (a) superficie 3D con mínimo óptimo global, (b) curvas de contorno y región óptima factible.

Note que efectivamente las soluciones numéricas óptimas obtenidas en Maplesoft son los mínimos globales de las funciones normalizadas  $\tilde{J}_{C_2}$  y  $\tilde{J}_{C_4}$ . Adicionalmente, para demostrar que la red mecánica propuesta en este trabajo proporciona el mejor compromiso dinámico que las redes mecánicas basadas en inersor e incluso que una suspensión pasiva convencional, se realizan simulaciones numéricas de las funciones de respuesta en frecuencia de la aceleración de la masa suspendida, de la deflexión del sistema de suspensión, la carga dinámica del neumático sobre la carretera, y de la potencia disipada en el sistema de suspensión. Las simulaciones numéricas fueron conducidas utilizando los parámetros óptimos mostrados en la [Tabla 4.1](#). Por lo tanto, las curvas FRF óptimas se muestran en las [Figura 4.7](#), [Figura 4.8](#), [Figura 4.9](#), y [Figura 4.10](#).

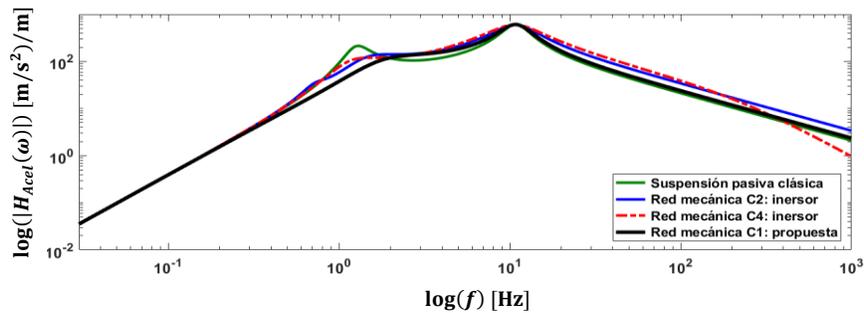


Figura 4.7: Curvas FRF óptimas de la aceleración del chasis considerando las redes mecánicas con inersores y la propuesta en este trabajo de tesis.

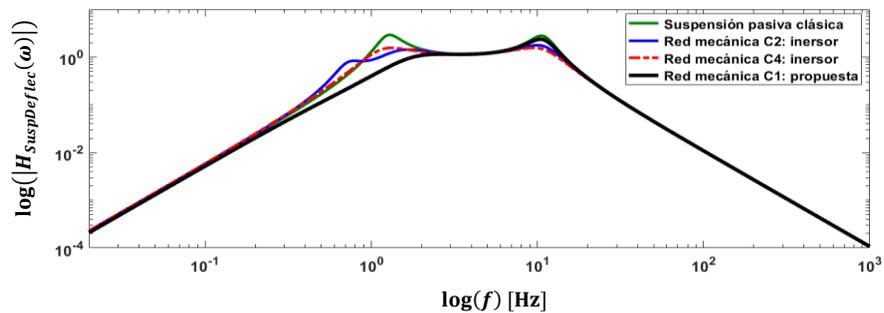


Figura 4.8: Curvas FRF óptimas de la deflexión del sistema de suspensión.

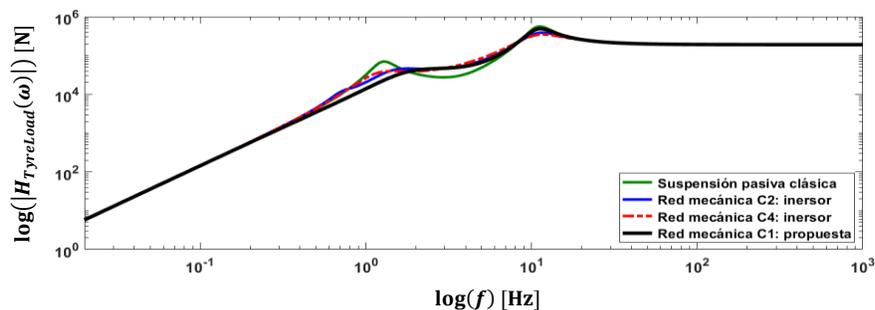


Figura 4.9: Curvas FRF óptimas de la carga dinámica del neumático sobre la carretera.

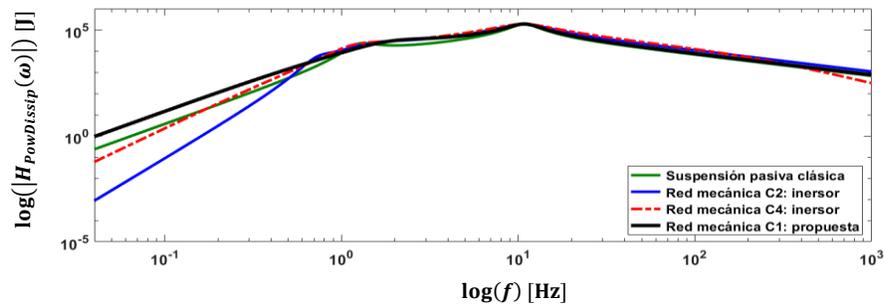


Figura 4.10: Curvas FRF óptimas de la potencia disipada en el sistema de suspensión.

Note que, las curvas FRF óptimas proporcionadas por la red mecánica propuesta en esta tesis presentan un mejor balance dinámico que las otras obtenidas a través de las redes mecánicas basadas en inersores, ver curva negra sólida. Adicionalmente, las simulaciones numéricas en el dominio del tiempo se realizaron considerando un perfil artificial de carretera de clase-C. Este perfil estocástico estacionario se puede crear resolviendo la ecuación estocástica diferencial (3.22) mencionada en la sección 3.6. En la siguiente tabla se muestran los parámetros para generar los perfiles artificiales de carretera.

Tabla 4:2: Niveles de rugosidad de la carretera clasificados por la norma ISO 8608

Grado del perfil de la carretera	$G_x(\eta_0)(10^{-6}) [m^3]$ $\eta_0 = 0.1 [m^{-1}]$ Media geométrica	Grado del perfil de la carretera	$G_x(\eta_0)(10^{-6}) [m^3]$ $\eta_0 = 0.1 [m^{-1}]$ Media geométrica
Clase A	16	Clase E	4096
Clase B	46	Clase F	16384
Clase C	256	Clase G	65536
Clase D	1024	Clase H	262144

Por lo tanto, los perfiles artificiales de carretera se pueden obtener solucionando la ecuación diferencial estocástica mencionada anteriormente. Esto resulta en,

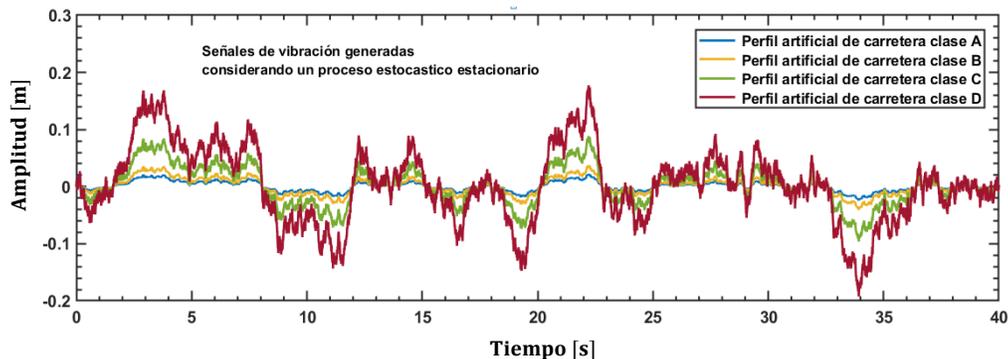


Figura 4.11: Perfiles artificiales de carretera clase A-D.

Considerando el perfil artificial de la carretera clase C como fuente principal de excitación en el sistema de suspensión. Las respuestas en el dominio del tiempo de la potencia disipada, la deflexión de la suspensión, la aceleración de la masa suspendida,

y de la carga dinámica del neumático sobre la carretera se muestran en las [Figura 4.12](#), [Figura 4.13](#), [Figura 4.14](#), y [Figura 4.15](#).

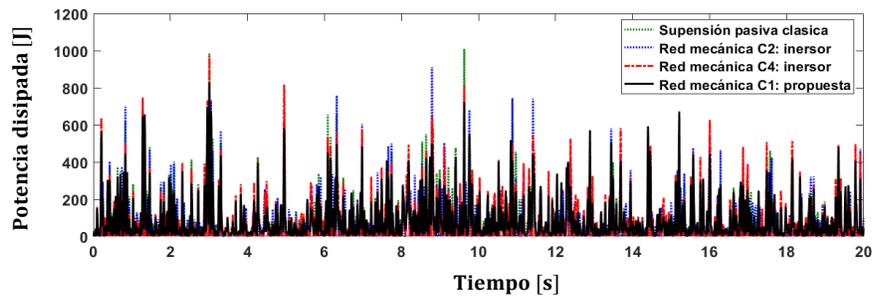


Figura 4.12: Comparación de la potencia disipada instantánea en el sistema de suspensión considerando tanto la suspensión pasiva como las redes mecánicas estudiadas.

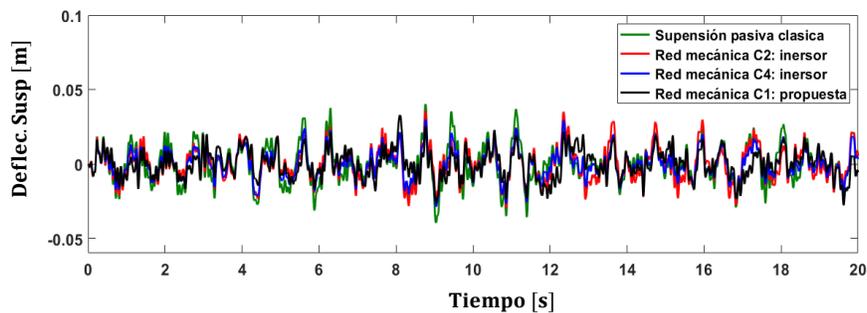


Figura 4.13: Comparación de las respuestas de la deflexión del sistema de suspensión considerando las redes mecánicas estudiadas.

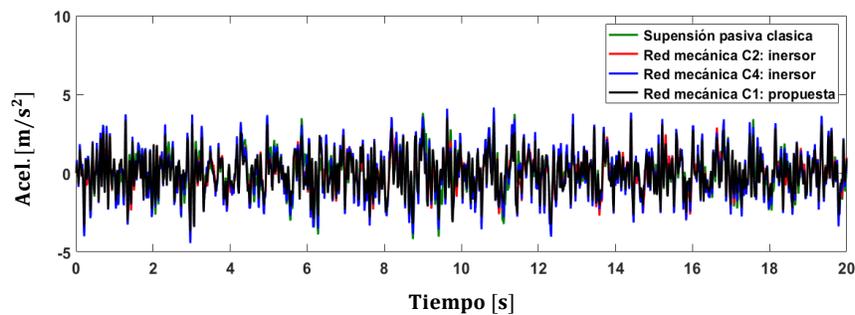


Figura 4.14: Comparación de las respuestas de la aceleración del chasis considerando las redes mecánicas estudiadas.

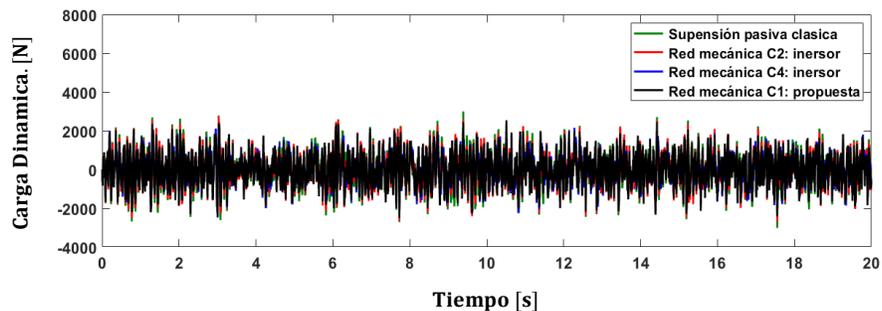


Figura 4.15: Comparación de las respuestas de la carga dinámica del neumático sobre la carretera considerando tanto las redes mecánicas estudiadas como la suspensión pasiva convencional.

Es evidente que los resultados obtenidos tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo a través de la red mecánica  $C_1$  demuestran un mejor compromiso dinámico que los obtenidos por la suspensión pasiva. Luego, en términos de porcentajes de mejoramiento dinámico, es necesario definir los siguientes índices en el dominio del tiempo con el objetivo de calcular el mejoramiento dinámico de las redes mecánicas estudiadas.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \% \tilde{J}_{Acel,C_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{Susp. pasiva}\|^2 dt} - \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{Red mecánica C_1}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} \\
 \% \tilde{J}_{Susp.Def,C_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(x_b - x_w)_{Susp. pasiva}\|^2 dt} - \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(x_b - x_w)_{Red mecánica C_1}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(x_b - x_w)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} \\
 \% \tilde{J}_{TyreLoad,C_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(x_w - x_g)_{Susp. pasiva}\|^2 dt} - \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(x_w - x_g)_{Red mecánica C_1}\|^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(x_w - x_g)_{Susp. pasiva}\|^2 dt}} \\
 \% \tilde{J}_{Pow.Dissip,C_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_F(\dot{x}_b - \dot{x}_w)_{Susp. pasiva}^2\|^2 dt} - \left( \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_F(\dot{x}_b - \dot{x}_w)_{Red mecánica C_1}^2\|^2 dt} + \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_r(\dot{x}_b - \dot{x}_f)_{Red mecánica C_1}^2\|^2 dt} \right)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|C_F(\dot{x}_b - \dot{x}_w)_{Susp. pasiva}^2\|^2 dt}}
 \end{array} \right. \quad (4.36)$$

El conjunto de índices de rendimiento dinámico en el dominio del tiempo (4.36) se pueden implementar como una función en Matlab-Simulink. Al realizar esta subrutina en Matlab se obtiene que  $\% \tilde{J}_{Acel,C_1} = 8.14\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Acel,C_2} = 4.18\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Acel,C_4} = -8.61\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Susp.Def,C_1} = 30.66\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Susp.Def,C_2} = 11.74\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Susp.Def,C_4} = 25.55\%$ ,  $\% \tilde{J}_{TyreLoad,C_1} = 10.56\%$ ,  $\% \tilde{J}_{TyreLoad,C_2} = 5.46\%$ ,  $\% \tilde{J}_{TyreLoad,C_4} = 14.6\%$ , y  $\% \tilde{J}_{Pow.Dissip,C_1} = 5.41\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Pow.Dissip,C_2} = -1.58\%$ ,  $\% \tilde{J}_{Pow.Dissip,C_4} = -2.02\%$ . El valor negativo de  $\% \tilde{J}_{Acel,C_4}$  significa un deterioro en el índice de la comodidad, y el valor negativo de  $\% \tilde{J}_{Pow.Dissip,C_2,4}$  significa que las redes mecánicas basadas en inersor son más disipativas tanto para el sistema de suspensión clásico como el de la red mecánica  $C_1$ . Por lo tanto, la red propuesta proporciona un excelente desempeño en la minimización de la energía vibración producida por la irregularidad de carretera, y como consecuencia se obtiene un mejoramiento significativo en los índices de rendimiento del sistema de suspensión.

En la siguiente sección se realizarán simulaciones numéricas de la capacidad de regeneración de energía considerando todas las dinámicas del vehículo completo, perfiles de carretera estacionarios y no estacionarios, y ciclos de velocidad de conducción del vehículo. Al considerar estas tres características de simulación numérica, se obtiene un ambiente de simulación numéricas más realista del comportamiento dinámico del vehículo. De hecho, al considerar estos modos de operación del vehículo, la capacidad disipativa del vehículo es bien cuantificada.

#### 4.5. Cuantificación de regeneración de energía en vehículos

En esta subsección se presenta el análisis numérico de la capacidad de regeneración de energía en los sistemas de suspensión automotrices considerando los tipos diferentes de carretera mostrados en la [Tabla 4.2](#). A partir de los parámetros de rugosidad de la carretera se pueden crear perfiles artificiales de carretera, los cuales se caracterizan como señales estacionarias al considerar que la velocidad  $V(t)$  de

conducción del vehículo es constante. Esta afirmación se puede corroborar al solucionar la ecuación diferencial (3.22). Por otra parte, al considerar que la velocidad  $V(t)$  de vehículo varia en el dominio del tiempo, se obtienen perfiles artificiales no estacionarios en términos de las características reales de conducción del vehículo. Cuando se consideran todas las dinámicas del vehículo completo existen cuatro excitaciones como entrada al sistema, estas entradas de vibración aleatoria están representadas por las variables  $x_{gfl}, x_{gfr}, x_{grl}$  y  $x_{grr}$ , ver Figura 3.8. Cuando el vehículo es conducido a una velocidad constante, las señales de vibración que actúan sobre los neumáticos traseros se retrasan un tiempo. En la literatura, a este tiempo se le conoce como tiempo de retardo (time delay), el cual se puede calcular a partir de la velocidad de conducción del vehículo [1]. Considerando que el vehículo es conducido a una velocidad de  $V(t) = 20$  m/s sobre una carretera de clase-C, el perfil artificial se puede crear a partir de la ecuación diferencial (3.22), y así mismo las señales de vibración con retardo también se pueden obtener. Al implementar esta ecuación diferencial en Matlab-Simulink y considerando los parámetros físicos de la carretera clase-C se obtienen las señales de vibración que actúan tanto en los neumáticos delanteros como traseros. Esto resulta en,

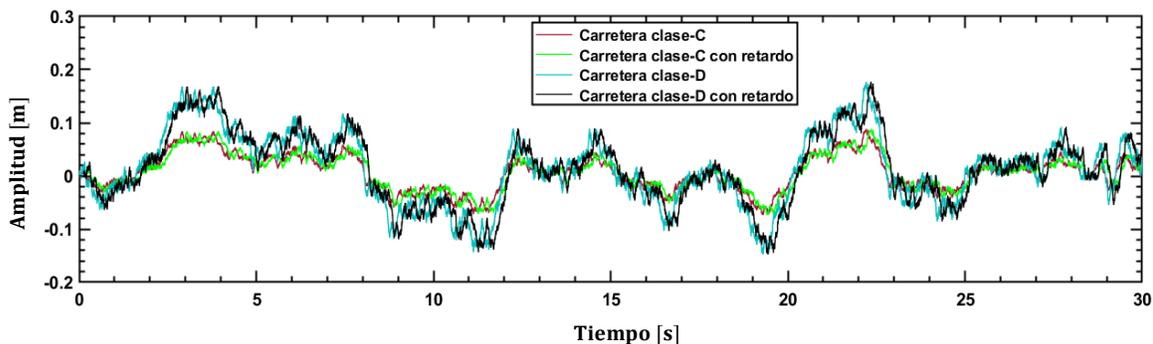


Figura 4.16: Simulación numérica de los perfiles artificiales de la carreteras clase C y D con sus respectivos retardos.

En la Figura 4.16 se puede apreciar que las señales de vibración de los neumáticos traseros del vehículo se retardan una cantidad de tiempo con respecto de las señales de los neumáticos delanteros. Con el objetivo de obtener resultados más certeros de la capacidad de regeneración de energía, se propone cuatro modos de excitación al modelo del vehículo completo. En el *primer modo de excitación*, las señales  $x_{gfl}, x_{gfr}, x_{grl}$  y  $x_{grr}$  se consideran todas iguales, es decir, no existe un retardo de tiempo entre ellas, y todas son de la misma clase, ver Figura 4.11. Adicionalmente, en este modo de vibración se considera que la velocidad del vehículo es constante. Para el *segundo modo*, las señales de vibración del eje trasero del vehículo se retardan con respecto del eje delantero, tal como se muestra en la Figura 4.16, además, tenga en cuenta que, las señales de vibración del eje delantero es el perfil clase C. Esto implica que, en este modo vibratorio, el chasis del vehículo se puede desplazar más libremente en dirección angular  $\theta$  (pitch). Luego, en el *tercer modo*, se considera que las excitaciones de los neumáticos delanteros se excitan considerando el perfil clase C y D, luego las entradas de vibración del eje trasero se retarda una cantidad de tiempo con respecto del eje delantero. Note que, este modo de operación del vehículo es el más

complejo debido a que se generan simultáneamente los movimientos angulares  $\theta$  (pitch) y  $\phi$  (roll). Estas señales de vibración también se pueden apreciar tal como se muestra en la [Figura 4.16](#) también. En estos tres primeros modos de excitación de vibración estacionaria en el vehículo, los parámetros objetivos a variar son; el factor de amortiguamiento del sistema de suspensión, la velocidad de conducción del vehículo  $V(t)$ , la rigidez de los neumáticos  $K_t$ , el coeficiente de rugosidad de la carretera  $G_x(\eta_0)$ . La variación de los parámetros anteriormente mencionados se realiza con la finalidad de crear un análisis paramétrico sobre la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica estacionaria.

Finalmente, para completar el análisis paramétrico del potencial de regeneración de energía en vehículo bajo el efecto de vibración estocástica no estacionaria, se propone implementar ciclos de velocidad de conducción al modelo del vehículo completo. Un ciclo de conducción es un patrón de velocidad de conducción estandarizado que se utiliza para obtener una comprensión cuantitativa tanto del consumo de combustible como de las emisiones  $\text{CO}_2$  en vehículos. Los ciclos de conducción se clasifican en dos categorías, las cuales son; los ciclos modales de conducción tales como el NEDC (New European Driving Cycle) y el EUDC (Extra Urban Driving Cycle), y por último los ciclos transitorios en los cuales se encuentran principalmente los ciclos de velocidad variable WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure), FTP (Federal Test Procedure), y el HWFET (Highway Fuel Economy Test) [20,129–132]. A continuación, se presenta la representación gráfica del ciclo de conducción de velocidad variable NEDC y EUDC, y además los perfiles de carretera clase C y D.

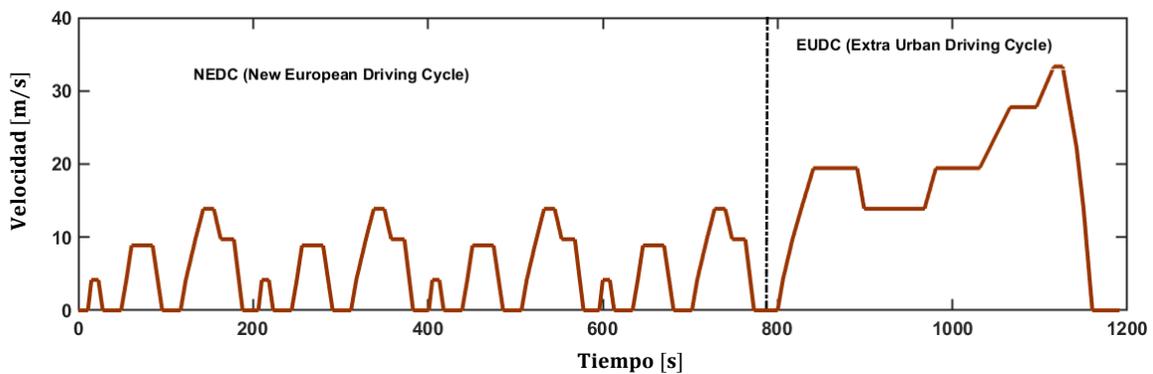


Figura 4.17: Ciclo de conducción modal estandar NEDC y EUDC.

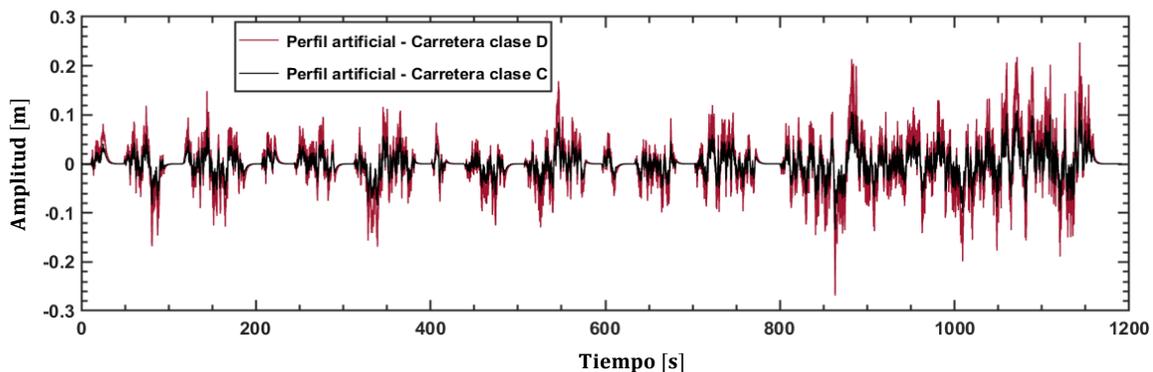


Figura 4.18: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D creados utilizando los ciclos de conducción NEDC y EUDC.

Note que en la Figura 4.17, el ciclo de conducción NEDC consiste de cuatro secciones consecutivas de conducción urbana. Estas secciones alcanzan una velocidad máxima de vehículo de 50 km/h. Luego la sección del ciclo EUDC muestra un escenario de conducción extraurbano, el cual alcanza una velocidad máxima de 120 km/h. Adicionalmente, en la [Figura 4.18](#), la intensidad de vibración aumenta a medida que la velocidad del vehículo aumenta también. Por otra parte, el ciclo de conducción transitorio WLTP consiste básicamente de un perfil de velocidad de conducción totalmente transitorio, tal como se muestra en la [Figura 4.19](#),

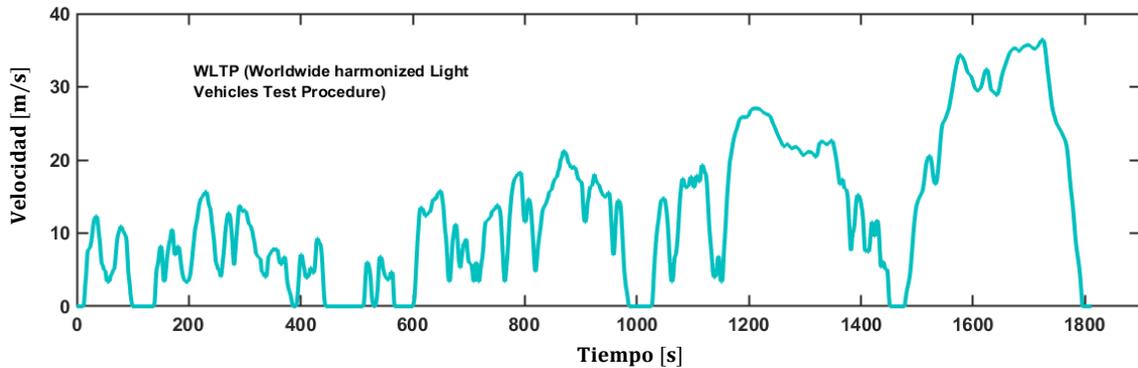


Figura 4.19: Ciclo de conducción de velocidad transitoria WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure).

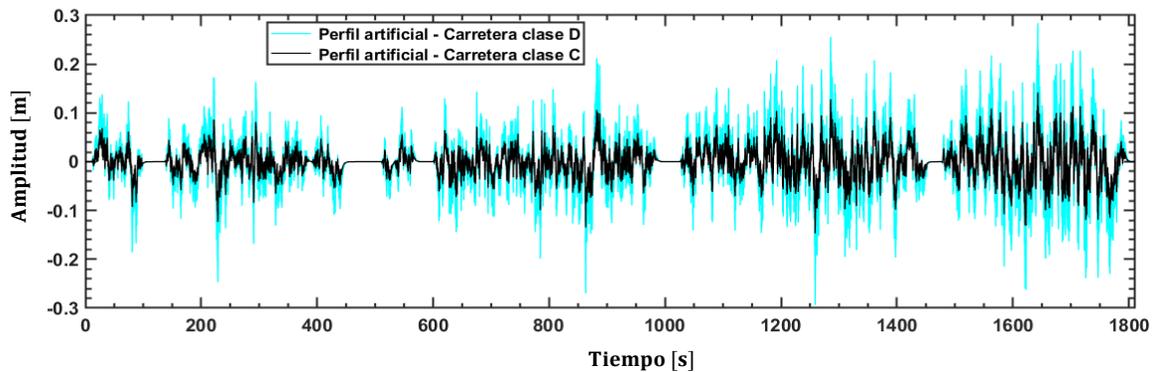


Figura 4.20: Perfiles artificiales no estacionarios para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria WLTP (Worldwide harmonized Light Vehicles Test Procedure).

Este ciclo de conducción es más transitorio que el NEDC y EUDC. Adicionalmente, en la [Figura 4.20](#) se muestran los perfiles artificiales no estacionarios para las carreteras clase C y D. Por otra parte, otro ciclo de conducción de velocidad transitoria es el FTP, el cual se muestra en la [Figura 4.21](#),

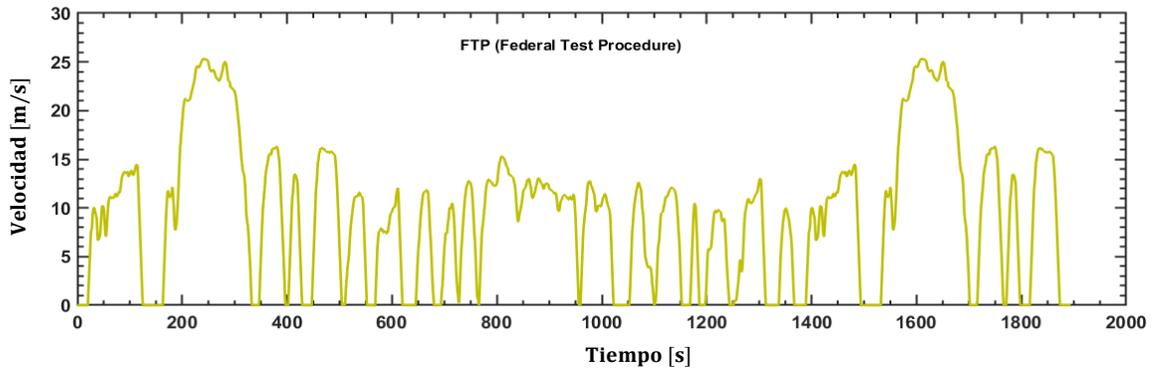


Figura 4.21: Ciclo de conducción de velocidad transitoria FTP (Federal Test Procedure).

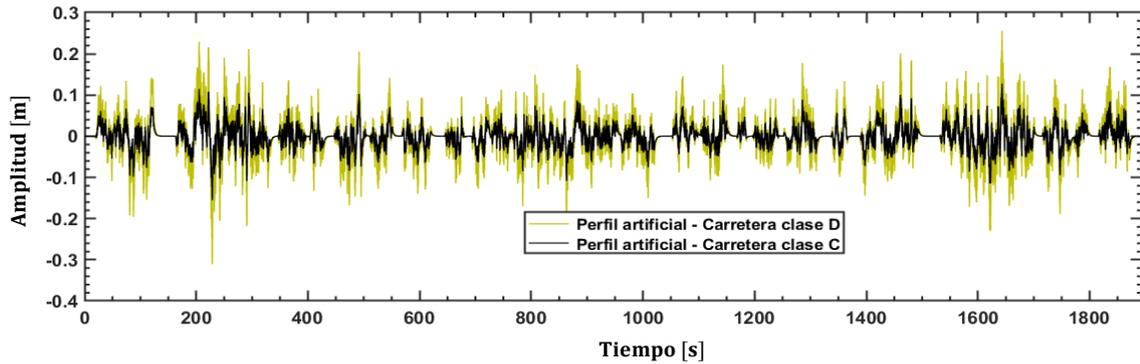


Figura 4.22: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria FTP (Federal Test Procedure).

En la [Figura 4.22](#) se muestran los perfiles de carretera de clase C y D. Adicionalmente, note que este ciclo de conducción de velocidad variable consiste de una sección de velocidad transitoria desde el tiempo cero hasta el tiempo 1400 segundos, después el ciclo FTP es repetitivo. Finalmente, el ciclo de conducción de velocidad transitorio HWFET se muestra en la

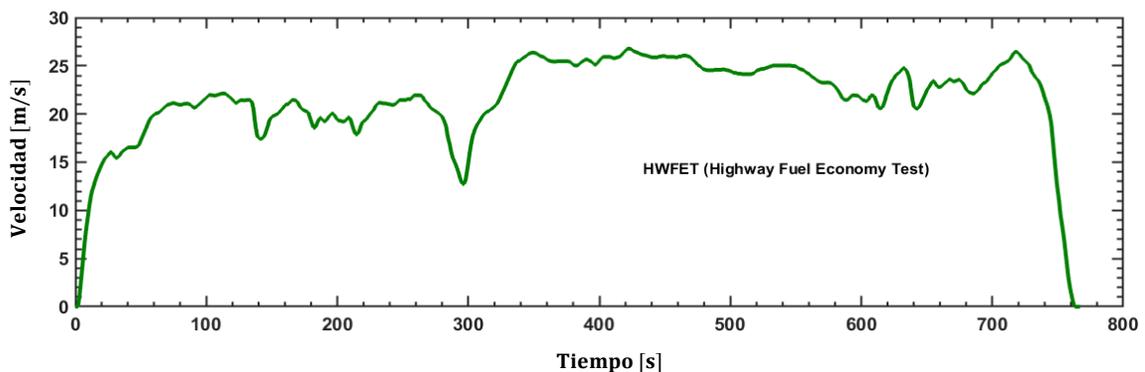


Figura 4.23: Ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test).

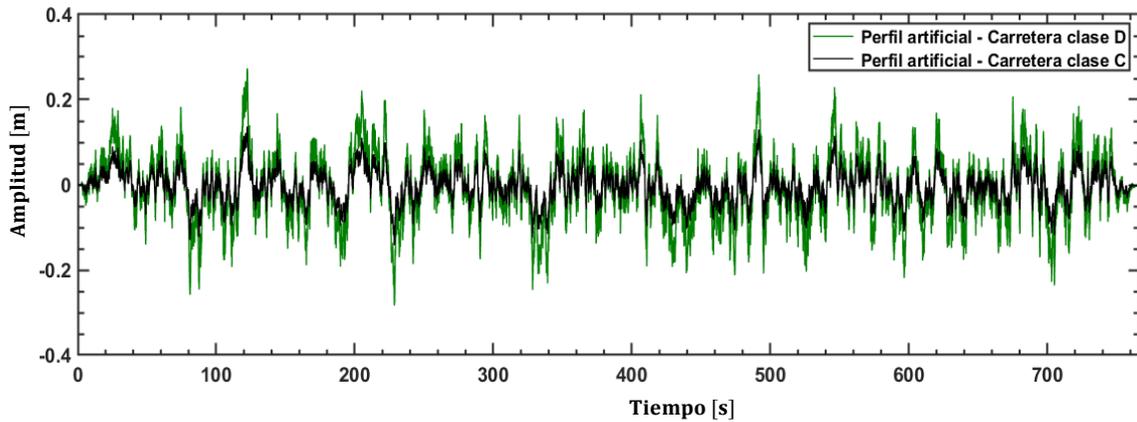


Figura 4.24: Perfiles artificiales para las carreteras clase C y D considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test).

Note que, los perfiles artificiales de carretera generados anteriormente no están retrasados una cantidad de tiempo, y por lo tanto solo se pueden utilizar en el primer modo de excitación de vibración descrito anteriormente. Al considerar que el retardo de tiempo en este tipo de señales, es decir, en las señales de vibración mostrados en las [Figura 4.18](#), [Figura 4.20](#), [Figura 4.22](#), y [Figura 4.24](#), el tiempo de retardo entre las señales de vibración en los neumáticos delanteros y los traseros varia con respecto del perfil de velocidad de conducción del vehículo. Utilizando el perfil de velocidad mostrado en la [Figura 4.23](#), el tiempo de retardo variable se puede obtener a través de la función *Variable Transport Delay* descrita en Matlab-Simulink. Por lo tanto, el perfil con retardo de tiempo variable se muestra en la [Figura 4.25](#),

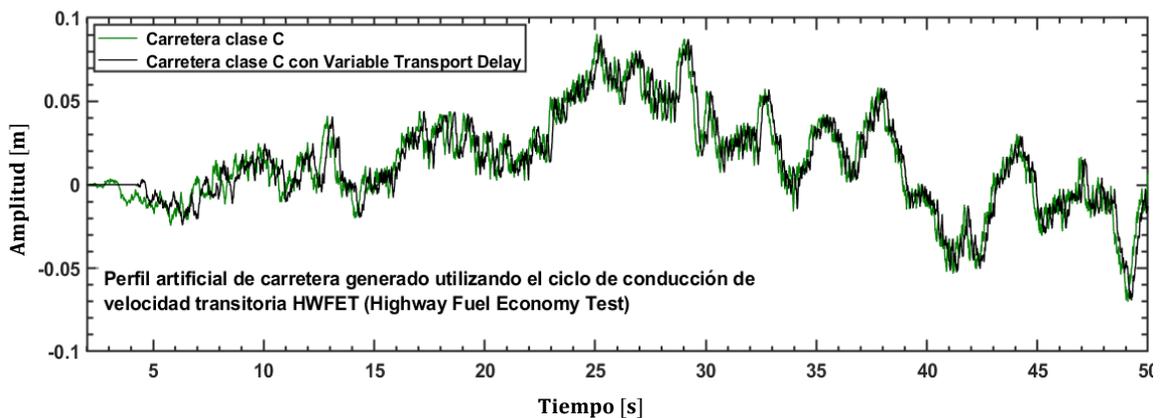


Figura 4.25: Perfiles artificial para la carretera clase C con retardo de tiempo variables considerando el ciclo de conducción de velocidad transitoria HWFET (Highway Fuel Economy Test).

Observe que en la [Figura 4.25](#), las señales de vibración se unen a medida que la velocidad de conducción del vehículo aumenta, sin embargo, estas señales se separan cuando la velocidad del vehículo es baja. Esta analogía es intuitiva porque las señales de excitación de los neumáticos traseros serán las mismas que la de los neumáticos delanteros cuando la velocidad del vehículo se incremente. Es importante mencionar que estas señales fueron creadas con el objetivo de realizar un análisis paramétrico de la capacidad de regeneración de energía en vehículos. Adicionalmente, el análisis

paramétrico también incluye la evaluación de los índices dinámicos en el dominio del tiempo que incluyen las principales dinámicas del vehículo completo. Existen tres principales respuestas que se deben tomar en cuenta para realizar dicho análisis, estas respuestas dinámicas son; el comportamiento de la calidad de comodidad, el comportamiento de agarre mecánico, la deflexión del sistema de suspensión, y el potencial de recolección de energía. Primero, el índice de la calidad del confort se puede calcular a través de las aceleraciones absolutas del cuerpo del vehículo. Por lo tanto, este índice se puede representar como la raíz media cuadrática (RMS) de la aceleración vertical (rebote) del cuerpo del vehículo, y las aceleraciones absolutas tanto de cabeceo como del balanceo. Esto resulta en,

$$\begin{cases} RMS_{Acel, \ddot{x}_c} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{x}_c\|^2 dt} \\ RMS_{pitch, \ddot{\theta}_p} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{\theta}_p\|^2 dt} \\ RMS_{roll, \ddot{\phi}_r} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\ddot{\phi}_r\|^2 dt} \end{cases} \quad (4.37)$$

Luego los valores ponderados de la deflexión del sistema de suspensión por cada rueda del vehículo se pueden calcular mediante la siguiente expresión matemática,

$$\begin{cases} RMS_{Deflec.Susp,@(X_{bfl}-X_{wfl})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_{bfl} - X_{wfl})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{Deflec.Susp,@(X_{bfr}-X_{wfr})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_{bfr} - X_{wfr})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{Deflec.Susp,@(X_{brl}-X_{wrl})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_{brl} - X_{wrl})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{Deflec.Susp,@(X_{brr}-X_{wrr})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|(X_{brr} - X_{wrr})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \end{cases} \quad (4.38)$$

El valor promedio de la deflexión del sistema de suspensión para el modelo del vehículo completo se puede calcular a través de la siguiente formulación,

$$Deflec. Sup_{promedio} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n=4} (\{X_b\} - \{X_w\}) \quad (4.39)$$

donde  $\{X_b\} = \{X_{bfl}, X_{bfr}, X_{brl}, X_{brr}\}$  y  $\{X_w\} = \{X_{wfl}, X_{wfr}, X_{wrl}, X_{wrr}\}$  representan los desplazamientos verticales en cada esquina del modelo completo del vehículo. Por otra parte, la carga dinámica del neumático sobre la carretera se puede interpretar como la fuerza de contacto suficiente con la carretera para lograr una conducción y movilidad segura, especialmente, durante la dirección, propulsión y en las condiciones de frenado del vehículo. Se ha demostrado que, para valores de fuerzas altas de contacto, el

vehículo carece de condiciones buenas de conducción y de propiedades de seguridad. Mientras que, para fuerzas de contacto menores, el vehículo presenta excelentes características de conducción. El valor RMS de la fuerza dinámica para cada neumático del vehículo se puede calcular mediante la siguiente expresión matemática,

$$\left\{ \begin{array}{l} RMS_{TyreLoad,@K_t(X_{wfl}-X_{gfl})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_{wfl} - X_{gfl})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{TyreLoad,@K_t(X_{wfr}-X_{gfr})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_{wfr} - X_{gfr})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{TyreLoad,@K_t(X_{wrl}-X_{grl})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_{wrl} - X_{grl})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \\ RMS_{TyreLoad,@K_t(X_{wrr}-X_{grr})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|K_t(X_{wrr} - X_{grr})_{Susp. pasiva}\|^2 dt} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Luego, el valor promedio de las fuerzas dinámicas de los neumáticos del modelo completo del vehículo se puede expresar de la siguiente manera,

$$TyreLoad_{promedio} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n=4} K_t(\{X_w\} - \{X_g\}) \quad (4.41)$$

donde  $\{X_w\} = \{X_{wfl}, X_{wfr}, X_{wrl}, X_{wrr}\}$  y  $\{X_g\} = \{X_{gfl}, X_{gfr}, X_{grl}, X_{grr}\}$  representan la deflexión del neumático de rigidez  $K_t$ . Finalmente, el potencial de recolección de energía se puede representar a través del valor medio cuadrático (mean square value) de la velocidad del sistema de suspensión multiplicado por el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador.

$$\left\{ \begin{array}{l} PowerDissipation_{@C_f(\dot{X}_{bfl}-\dot{X}_{wfl})} = C_f \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\dot{X}_{bfl} - \dot{X}_{wfl})^2 \right) \\ PowerDissipation_{@C_f(\dot{X}_{bfr}-\dot{X}_{wfr})} = C_f \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\dot{X}_{bfr} - \dot{X}_{wfr})^2 \right) \\ PowerDissipation_{@C_r(\dot{X}_{brl}-\dot{X}_{wrl})} = C_r \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\dot{X}_{brl} - \dot{X}_{wrl})^2 \right) \\ PowerDissipation_{@C_r(\dot{X}_{brr}-\dot{X}_{wrr})} = C_r \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\dot{X}_{brr} - \dot{X}_{wrr})^2 \right) \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Luego, la potencia promedio se puede expresar de la siguiente manera,

$$PowerDissipation_{promedio} = \frac{1}{4} (PowerDissipation_{@C_f(\dot{X}_{bfl}-\dot{X}_{wfl})} + PowerDissipation_{@C_f(\dot{X}_{bfr}-\dot{X}_{wfr})} + PowerDissipation_{@C_r(\dot{X}_{brl}-\dot{X}_{wrl})} + PowerDissipation_{@C_r(\dot{X}_{brr}-\dot{X}_{wrr})}) \quad (4.43)$$

La potencia total disipada en los sistemas de suspensión del modelo completo del vehículo es,

$$\Psi = \text{PowerDissipation}_{\text{Total}} = \text{PowerDissipation}_{@C_f(\dot{x}_{bfl}-\dot{x}_{wfl})} + \text{PowerDissipation}_{@C_f(\dot{x}_{bfr}-\dot{x}_{wfr})} + \text{PowerDissipation}_{@C_r(\dot{x}_{brl}-\dot{x}_{wrl})} + \text{PowerDissipation}_{@C_r(\dot{x}_{brt}-\dot{x}_{wrt})} \quad (4.44)$$

Las ecuaciones definidas anteriormente se utilizarán para realizar el análisis paramétrico principalmente para el potencial de regeneración de energía en vehículos. Por lo tanto, las ecuaciones (4.37)-(4.44) se pueden implementar en Matlab-Simulink como subrutinas para obtener los valores ponderados de los índices dinámicos en el dominio del tiempo. Primero, para el primer modo de excitación se propone variar la velocidad de conducción del vehículo y las rugosidades de la carretera considerando que las excitaciones en los cuatro neumáticos son iguales.

#### 4.5.1. Simulación numérica del primer modo de excitación estocástica estacionaria

En esta subsección se presenta la simulación numérica del modelo dinámico del vehículo completo. Las ecuaciones dinámicas de este modelo se desarrollaron en la sección 3.8, luego estas ecuaciones se pueden codificar mediante el uso de bloques y funciones inteligentes proporcionados por Matlab-Simulink. Adicionalmente, este modelo dinámico considera principalmente siete grados de libertad del vehículo, que proporcionan efectos lineales y no lineales al sistema. Es decir, las dinámicas proporcionadas por el movimiento no sincronizado del chasis del vehículo producen no linealidades en la función Lagrangiana del sistema, que de hecho eso fue recalado en las ecuaciones cinéticas y cinemáticas (3.28) y (3.29), respectivamente. Luego, los parámetros de simulación fueron tomados de la Ref. [133] con permisos de derechos de autor. Para este primer modo de excitación de vibración estocástica estacionaria, se considera que la excitación en cada neumático del vehículo es igual, es decir, las señales de excitación del eje trasero del vehículo no se retardan una cantidad de tiempo. Al considerar esta suposición el modelo dinámico en Matlab-Simulink se puede representar de la siguiente manera,

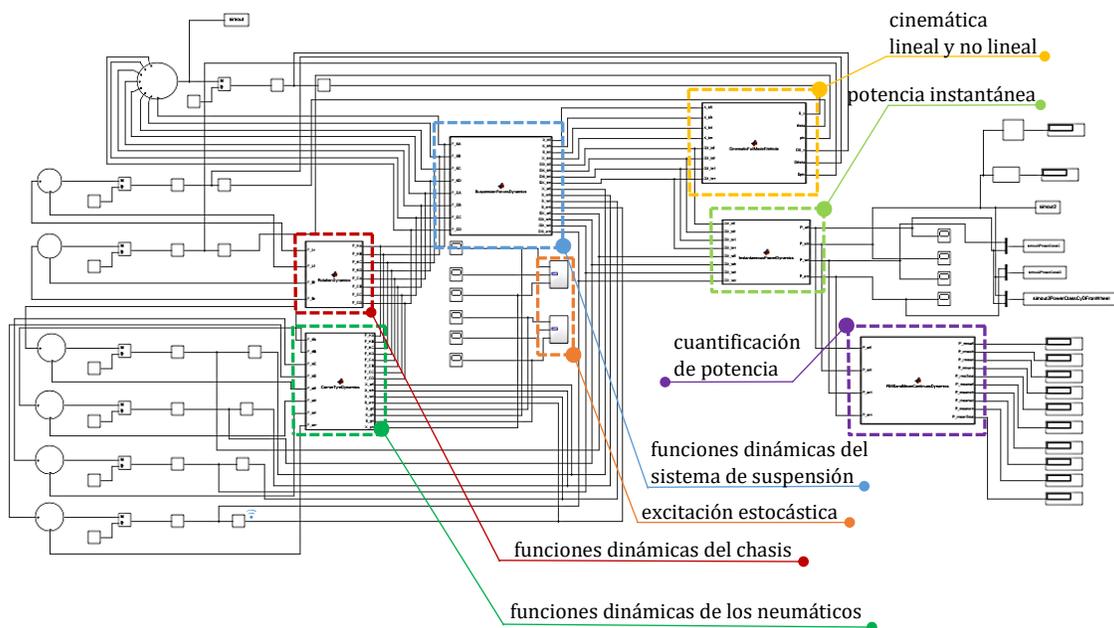


Figura 4.26: Código general en Matlab-Simulink del modelo dinámico de siete grados de libertad del vehículo. Los cuadros de líneas discontinuas representan las funciones y subfunciones tanto de las fuerzas dinámicas como de la cinemática lineal y no lineal del vehículo.

En la Figura 4.26 se muestra el código de simulación numérica para la cuantificación del potencial de regeneración de energía en el modelo completo del vehículo. En los bloques dentro de los cuadros de líneas verdes y moradas discontinuas se codificó el conjunto de ecuaciones (4.42) y (4.43), respectivamente. Considerando que la velocidad de vehículo es constante  $V(t) = 20$  m/s, y tomando en cuenta los perfiles de carretera mostrados en la Figura 4.11. La potencia instantánea disipada en los sistemas de suspensión del vehículo es,

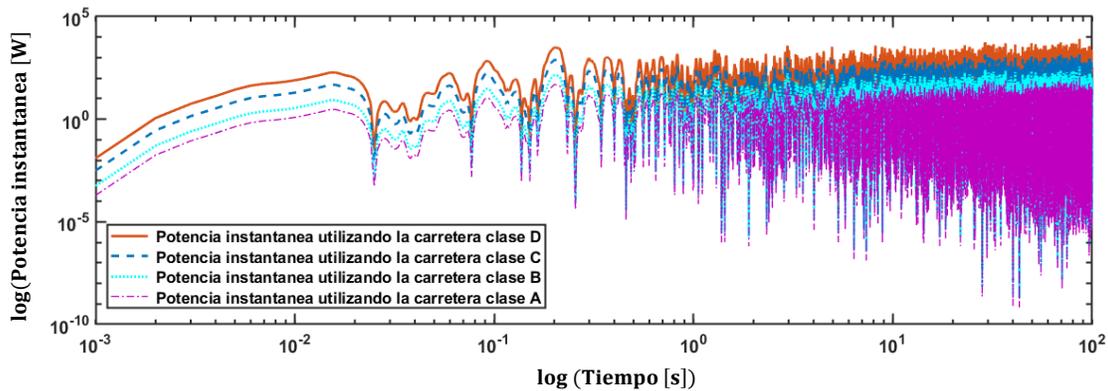


Figura 4.27: Potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión del vehículo completo cuando la velocidad es  $V(t) = 20$  m/s y considerando las clases diferentes de carretera.

Note que, en la Figura 4.27, la potencia instantánea en escala logarítmica aumenta a medida que la rugosidad  $G_x(\eta_0)$  de la carretera incrementa también. Por otro lado, al considerar que la velocidad del vehículo incrementa desde 5 hasta 120 k/h, y manteniendo constante la rugosidad de la carretera (clase C), se obtienen los siguientes resultados,

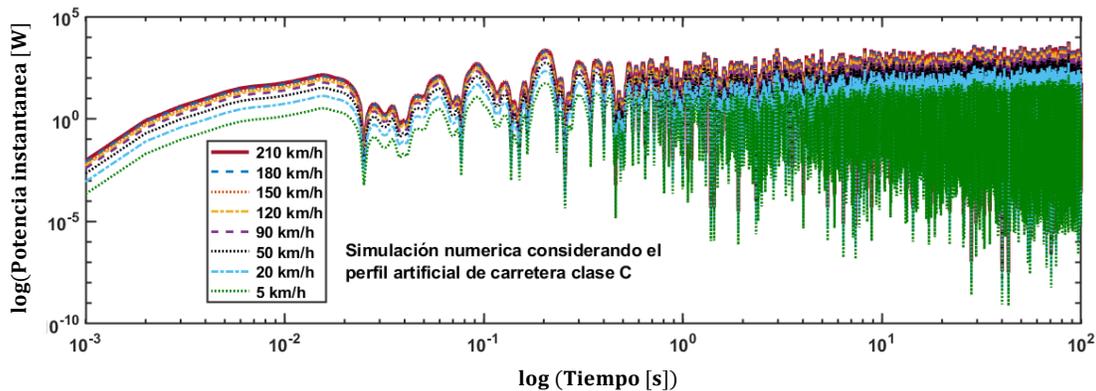


Figura 4.28: Potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión del vehículo completo cuando la velocidad es  $V(t)$  varía desde 5 hasta 210 y fijando la rugosidad de la carretera (clase C).

En la Figura 4.28 se puede observar que la potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión del vehículo no incrementa a medida que la velocidad de

conducción del vehículo se incrementa. De hecho, se ha observado que a velocidades altas de conducción, las dinámicas del vehículo son afectadas por las perturbaciones aerodinámicas [1]. Por lo tanto, la calidad de la carretera es un factor importante que afecta potencialmente la capacidad de disipación de energía en los amortiguadores del sistema de suspensión del vehículo. En la siguiente subsección se presentan simulaciones numéricas para el segundo modo de excitación de vibración del vehículo.

#### 4.5.2. Simulación numérica del segundo modo de excitación estocástica estacionaria

En esta subsección se presentan simulaciones numéricas considerando que los neumáticos del eje delantero del vehículo están sujeto a vibración estocástica producida por el perfil de carretera clase C. Luego, la excitación vibratoria de los neumáticos del eje trasero es la señal de vibración retardada una cantidad de tiempo, ver [Figura 4.16](#). Al considerar que la perturbación de los neumáticos del eje trasero del vehículo se retarda una cantidad de tiempo, se producen aceleraciones rotacionales en dirección angular  $\ddot{\theta}_{pitch}$ . En efecto, en este modo de excitación, el código de simulación numérico empleado en la [subsección 4.5.1](#) se puede utilizar para cuantificar el potencial de regeneración de energía, ver [Figura 4.26](#). Por lo tanto, la potencia instantánea disipada tanto en los neumáticos del eje frontal como del eje lateral se puede cuantificar a través del conjunto de ecuaciones (4.42). Esto resulta en,

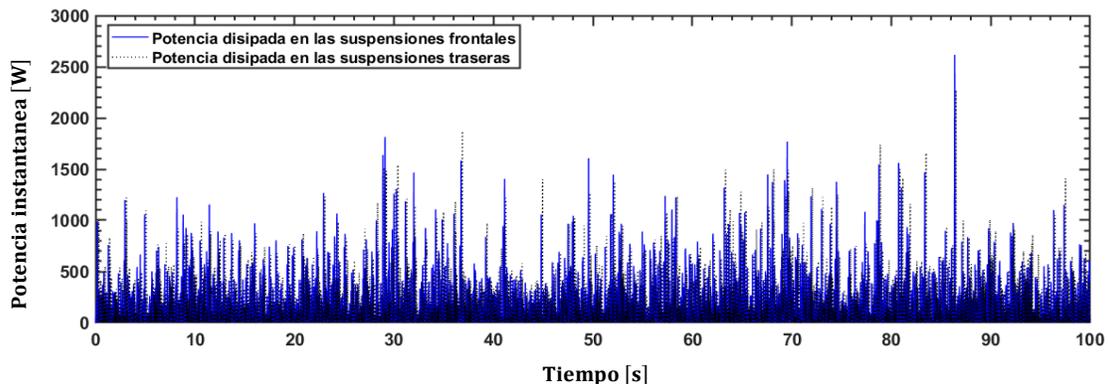


Figura 4.29: Potencia instantánea disipada tanto en las suspensiones frontales como traseras del vehículo considerando que la velocidad de conducción y perfil artificial de carretera son 90 km/h y clase C, respectivamente.

Note que la potencia disipada en el sistema de suspensión del eje trasero es menor que la del eje frontal, ver [Figura 4.29](#). Esto se debe principalmente a que el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador del sistema de suspensión del eje trasero es menor que el del amortiguador del eje frontal. Adicionalmente, observe que la señal de la potencia disipada del sistema de suspensión trasero se retarda la misma cantidad de tiempo contenida en la señal de perturbación. En este modo de excitación de vibración estocástica estacionaria también es posible variar tanto la velocidad de conducción vehículo como el tipo de carretera. Sin embargo, no es necesario realizar tal esfuerzo de simulación numérica porque se obtendrían resultados similares a los obtenidos en la

subsección 4.5.1. En la siguiente subsección se presenta la simulación numérica para el tercer modo de excitación de vibración aleatoria estacionaria.

### 4.5.3. Simulación numérica del tercer modo de excitación estocástica estacionaria

En última parte de excitación estocástica estacionaria se presenta la simulación numérica del modo de excitación complejo del vehículo. En efecto, las perturbaciones de los neumáticos del eje delantero están sujetos a vibración estocástica producida por el perfil artificial de carretera clase C y D. Luego, la excitación de los neumáticos del eje trasero son señales vibratorias retardadas una cantidad de tiempo, tal como se muestra en la Figura 4.16. La simulación numérica se puede llevar a cabo utilizando el código descrito en la Figura 4.26. Considerando que la velocidad de conducción del vehículo es de 90 km/h, la potencia disipada tanto en las suspensiones del eje frontal como trasero se puede calcular a través de la formulación (4.42). Esto resulta en,

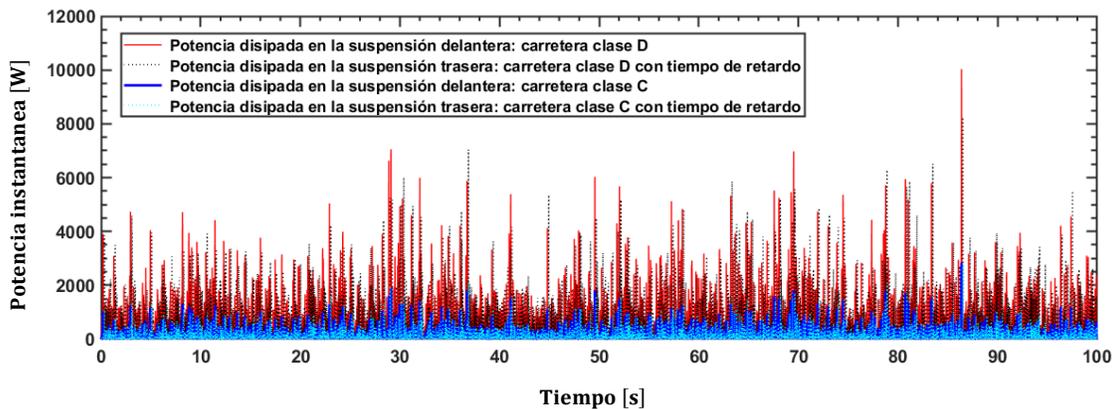


Figura 4.30: Potencia instantánea disipada en los cuatro amortiguadores del sistema de suspensión del vehículo considerando que la velocidad de conducción y perfiles artificiales de carretera son 90 km/h y clase C y D, respectivamente.

En la Figura 4.30 se puede apreciar que la potencia disipada en el sistema de suspensión del eje trasero es menor que la suspensión del eje frontal. Esto ocurre porque el coeficiente de amortiguamiento de los amortiguadores del sistema de suspensión del eje trasero es menor que el del sistema de suspensión del eje frontal. Con el objetivo de observar la variación del potencial de energía cinética disipada en los sistemas de suspensión del vehículo completo se varía la velocidad de conducción del vehículo, y posteriormente se grafica la potencia disipada tanto en la suspensión del eje frontal como en la del eje trasero. Esto resulta en,

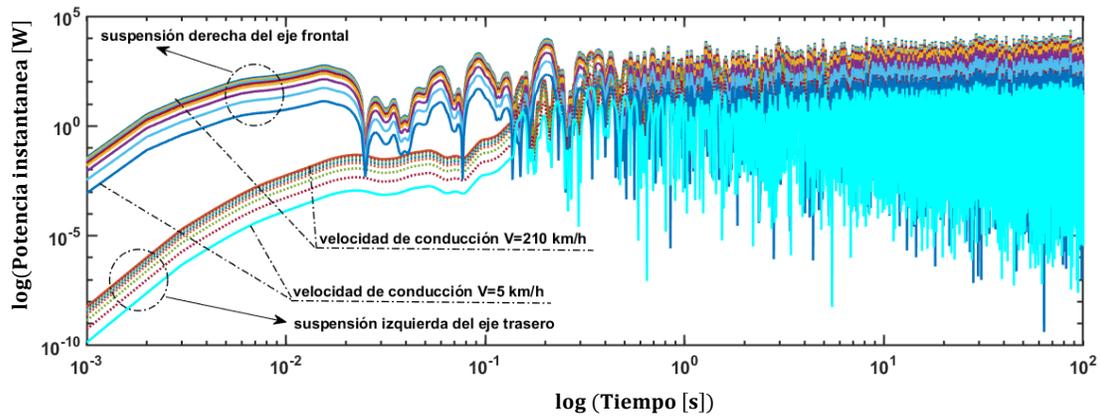


Figura 4.31: Potencia instantánea disipada tanto en el sistema de suspensión delantero como en el trasero del vehículo completo cuando la velocidad  $V(t)$  varía desde 5 hasta 210 km/h y fijando las rugosidades de la carretera (clase C y D).

En la [Figura 4.31](#) se puede observar que, a velocidades altas de conducción del vehículo, la potencia instantánea disipada en el sistema de suspensión no incrementa monótonamente. Sin embargo, este parámetro repercute sustancialmente en el potencial de disipación de energía cinética del sistema de suspensión del vehículo. Dado que en este modo de excitación de vibración se produce simultáneamente movimientos tanto de rotación como translación del cuerpo del vehículo, los niveles de aceleración instantánea se pueden obtener mediante el código descrito en la [Figura 4.26](#). Por lo tanto, esto resulta en

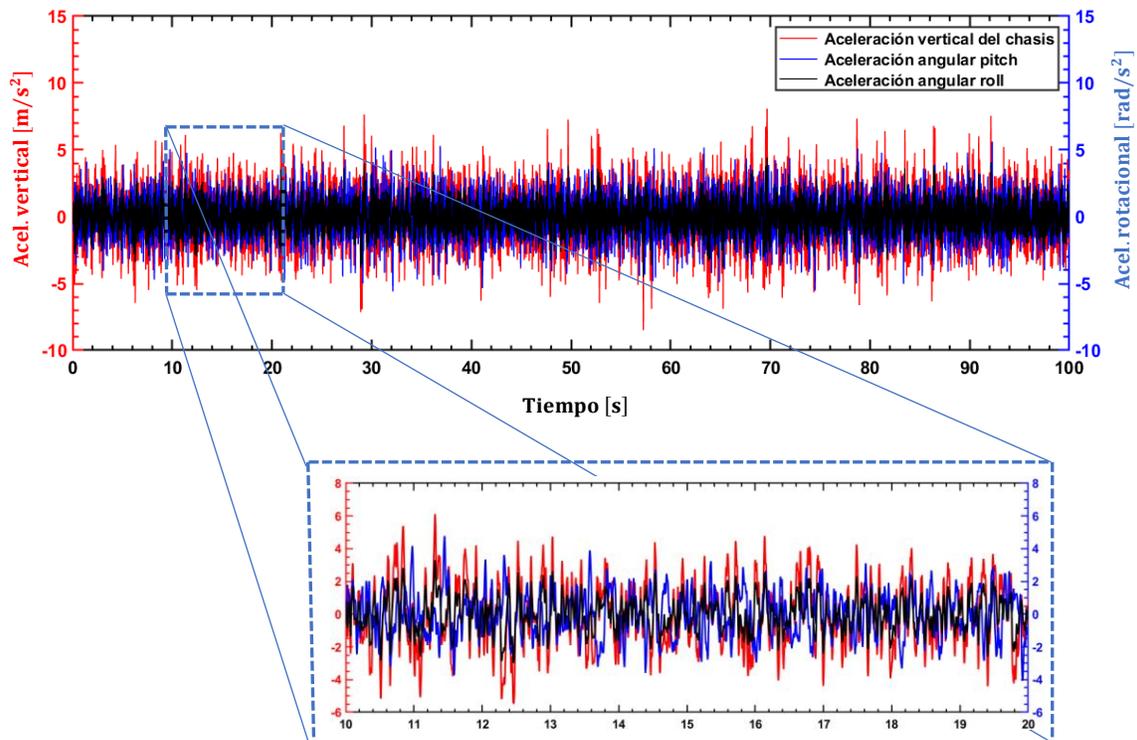


Figura 4.32: Niveles de aceleración instantánea del cuerpo del vehículo considerando que la velocidad de conducción del vehículo es 90 km/h sujeto a vibración estocástica estacionaria (carretera clase C y D).

En la [Figura 4.32](#) se puede apreciar que en el tercer modo de vibración se produce simultáneamente tanto aceleración vertical como rotacional del cuerpo del vehículo. En la siguiente subsección se presenta la simulación numérica del potencial de disipación de energía cinética considerando los ciclos de conducción de velocidad transitoria NEDC y EUDC, WLTP, FTP, y HWFET descritos en la [sección 4.5](#).

#### 4.5.4. Simulación numérica considerando los ciclos de conducción transitorio

En esta subsección se presenta la simulación numérica del potencial de disipación de energía en vehículo sujetos a vibración estocástica no transitoria. Con el objetivo de obtener resultados certeros de la regeneración de energía, se considera que la excitación tanto en los neumáticos del eje frontal como del eje trasero son diferentes. Esto permite a que se genere simultáneamente movimientos no sincronizados del cuerpo del vehículo. De hecho, los perfiles artificiales de carretera se crearon considerando las rugosidades clase C y D, similar al tercer modo de excitación presentado en la [subsección 4.5.3](#). Note que, el tiempo de retardo de las señales de vibración es variable, tal como se muestra en la [Figura 4.25](#). Al considerar que la velocidad de conducción del vehículo esta descrita por el ciclo de conducción NEDC y EUDC, la potencia disipada instantánea no estacionaria en el sistema de suspensión del modelo completo del vehículo es,

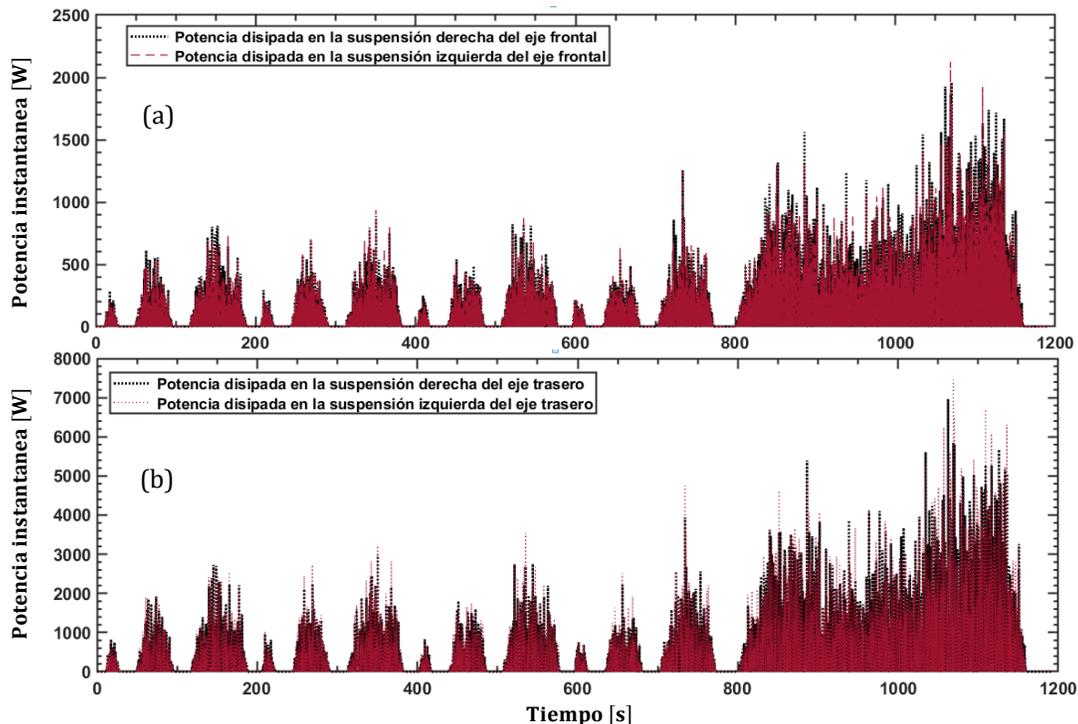


Figura 4.33: Potencia instantánea disipada tanto en el sistema de suspensión delantero como en el trasero del vehículo completo considerando el ciclo de conducción NEDC y EUDC. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) potencia disipada en las suspensiones del eje trasero del vehículo.

Observe que a medida que la velocidad de conducción del vehículo, la potencia disipada en el sistema de suspensión aumenta también, ver [Figura 4.33 \(a\) y \(b\)](#). Adicionalmente, la potencia disipada en el sistema de suspensión del eje trasero es mayor que la del eje frontal. Esto se debe principalmente a que el coeficiente de amortiguamiento de los amortiguadores del sistema de suspensión del eje trasero es mayor que el del eje frontal. Considerando las mismas condiciones de simulación numérica y cambiando el ciclo de conducción de NEDC a WLTP en el algoritmo de diagrama de bloques mostrado en la [Figura 4.26](#). De hecho, las simulaciones numéricas de la cuantificación de regeneración de energía para los ciclos de conducción FTP y HWFET se pueden realizar bajo las mismas condiciones de simulación que las del ciclo NEDC y EUDC. Por lo tanto, realizando las modificaciones necesarias al algoritmo general en Simulink, la potencia disipada para cada sistema de suspensión contenidas tanto en el eje frontal como en el eje trasero se presentan en las siguientes figuras.

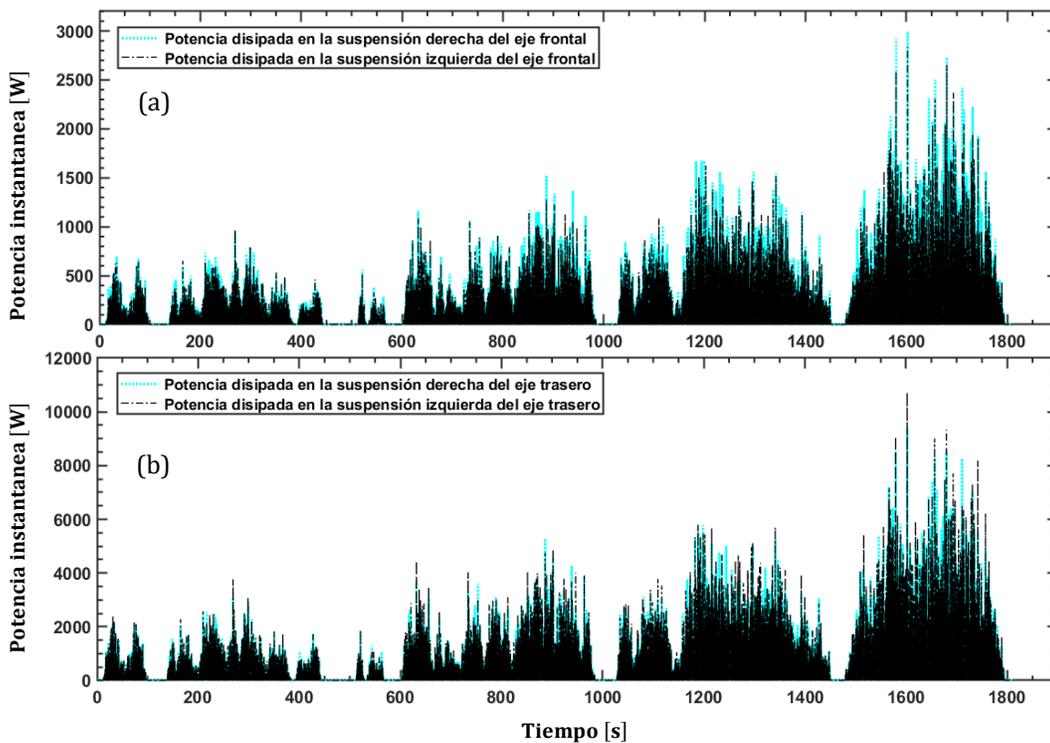


Figura 4.34: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción transitorio WLTP. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero.

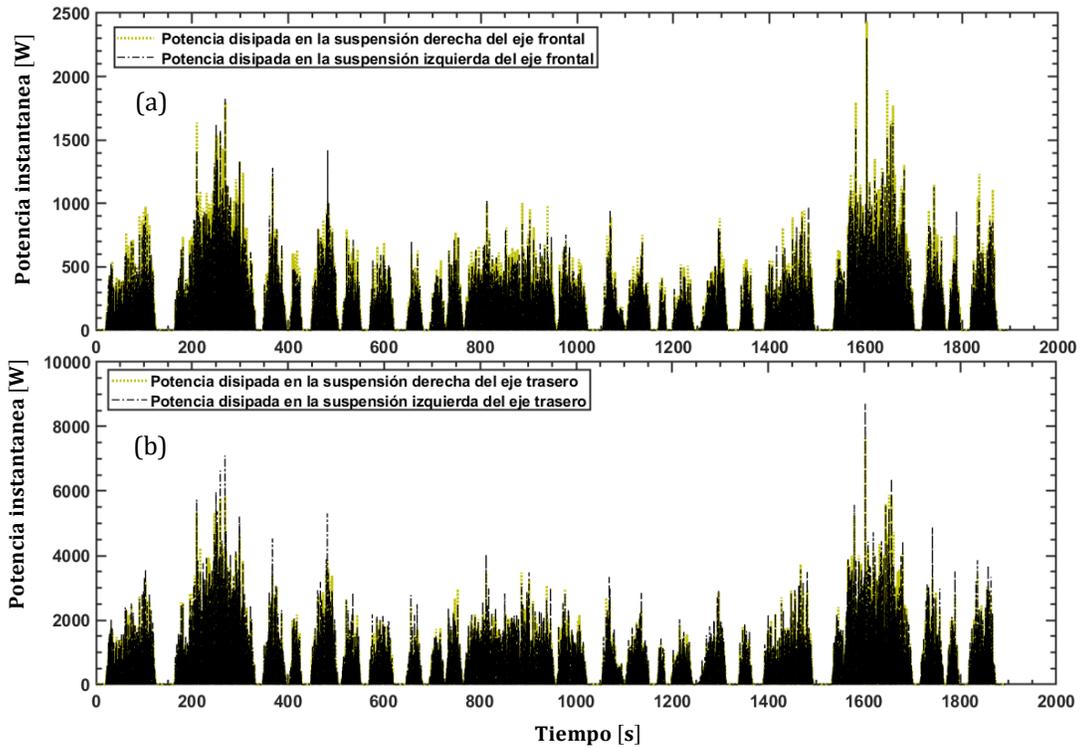


Figura 4.35: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción FTP. (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero.

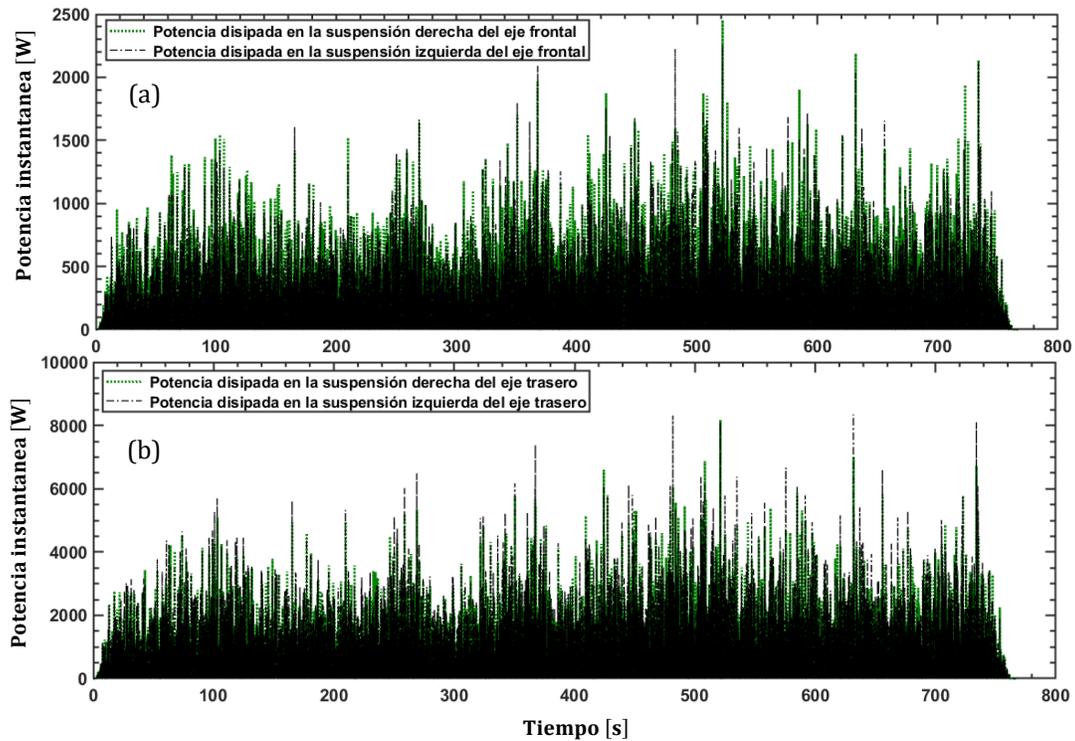


Figura 4.36: Potencia instantánea disipada en el modelo del vehículo completo considerando el ciclo de conducción transitorio HWFET (Highway Fuel Economy Test). (a) potencia disipada en las suspensiones del eje frontal, (b) en el eje trasero.

Note que en las [Figura 4.33](#), [Figura 4.34](#), [Figura 4.35](#), y [Figura 4.36](#), el potencial de disipación de energía cinética se incrementa en los estados transitorios de los ciclos de conducción, en los cuales la velocidad de conducción del vehículo se incrementa también. Esta afirmación fue observada en las simulaciones numéricas de la cuantificación de regeneración de energía cinética considerando perfiles artificiales estocásticos estacionarios. De acuerdo, a las simulaciones numéricas considerando perfiles artificiales estocásticos no estacionarios se puede obtener cuantificar certeramente el potencial de regeneración de energía en los estados transitorios diferentes de operación del vehículo. Dado que la potencia instantánea de disipación de energía del vehículo es una señal transitoria, no es posible aplicar el concepto simple del valor cuadrático medio (RMS) para calcular la potencia disipada ponderada, para ello se recomienda calcular el área bajo la curva de señales de disipación de energía. En siguiente capítulo de esta tesis se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis.

## 5. Capítulo 5

### Conclusiones

En esta tesis doctoral se propuso una red mecánica novedosa basada en amortiguadores semi activos y resortes pasivos para emular el comportamiento dinámico de una suspensión activa. Adicionalmente, se propusieron redes mecánicas basadas en inersores con el objetivo de comparar el mejoramiento dinámico con respecto de la red propuesta. La posibilidad de modificar las propiedades dinámicas, tales como la energía efectiva de disipación y absorción en el sistema de suspensión, fue demostrado matemáticamente. Aunque, esto es un hecho dinámico paradójico dado que en el sistema de suspensión propuesto basado en la red mecánica  $C_1$ , no existen fuerzas activas. Sin embargo, al modificar los coeficientes de amortiguamiento dinámicos de la red mecánica propuesta es posible lograr teóricamente tal efecto dinámico. Esta afirmación fue demostrada rigurosamente a través de formulaciones matemáticas presentadas en las subsecciones 4.3 y 4.4. Estas formulaciones matemáticas se basan principalmente en minimizar la energía total de vibración del sistema de suspensión sujeto a vibración estocástica por medio de la norma  $\mathcal{H}_2$ . Esto se puede interpretar como la minimización de un índice dinámico normalizado que contiene los cuatro índices de rendimiento tales como; la aceleración del cuerpo del vehículo, la deflexión del sistema de suspensión, la carga dinámica del neumático sobre la carretera, y la capacidad de regeneración de energía. Dado que la minimización de este índice normalizado consiste en resolver un problema de optimización convexo multivariable no lineal, y sin restricciones de igualdad y desigualdad. El método de optimización de programación cuadrática secuencial se reduce a resolver un sistema de ecuaciones no lineales de alto orden a través del método de Newton – Raphson. Adicionalmente, se analizó la capacidad de regeneración de energía en vehículos sujetos a vibración estocástica estacionaria y no estacionaria. En el caso de vibración estocástica estacionaria, las señales de vibración de excitación se obtienen considerando un proceso estocástico estrictamente Gaussiano, en el cual el ruido blanco de banda limitada fue considerado. Por otra parte, para generar señales de vibración estocásticas no estacionarias, se consideró ciclos de conducción de velocidad transitoria con el objetivo de incrementar los niveles de intensidad de vibración en ciertos rangos de tiempo. Por lo tanto, los hallazgos y contribuciones al estado del arte de este trabajo doctoral se presentan a continuación,

- Se obtuvo una formulación matemática general para el cálculo de los índices de rendimiento dinámico de las redes mecánicas propuestas en este trabajo. Esta formulación se basa principalmente en la observación de los polos complejos en plano medio superior de las funciones de respuesta en frecuencia relacionadas a los índices de rendimiento. Luego, la varianza de la respuesta dinámica del sistema sujeto a vibración estocástica, se calculó a través de norma  $\mathcal{H}_2$ , la cual consiste de obtener la solución única de la ecuación de Lyapunov.
- La minimización de los índices dinámicos normalizados se realizó tanto numéricamente como de manera gráfica. La solución numérica de los valores óptimos que minimizan estos índices normalizados, se obtuvo a través del

método de Newton-Raphson. Luego se validaron a través de optimización gráfica, es decir, en la observación del mínimo global contendió tanto en superficies 3D log – log y simi – log, y también a través de las curvas de contorno.

- Se realizaron simulaciones numéricas tanto en el dominio del tiempo como en frecuencia de los sistemas de suspensión basados en las redes mecánicas propuesta con el objetivo de cuantificar el porcentaje de mejoramiento con respecto de la suspensión pasiva. Por lo tanto, se determinó que la suspensión propuesta supera tanto a la suspensión basada en inersores como a la suspensión pasiva en aproximadamente 14%.
- Se generaron perfiles artificiales de carretera considerando que la velocidad de conducción del vehículo es constante y transitoria. Luego, se consideró el nivel de rugosidad de la carretera para cuantificar la capacidad de regeneración de energía considerando el modelo del vehículo completo. Luego, se desarrolló un algoritmo en Matlab – Simulink compuesto principalmente de subrutinas para la cuantificación de regeneración de energía cinética.
- Se determinó que más de 0.45 kW están disponibles para recolectar considerando perfiles estocásticos estacionarios. Luego, al considerar que perfiles estocásticos transitorios se determinó que más de 0.56 kW están disponibles para recolectar. Esta cantidad de energía se puede utilizar para sustituir a un alternador de un vehículo de pasajeros.
- Se consideró dinámicas lineales y no lineales en el modelo dinámico del vehículo completo, y se observó que no existe un cambio significativo en la cuantificación de regeneración de energía.
- Al variar tanto la velocidad de conducción del vehículo como el nivel de rugosidad del vehículo, se observó que el potencial de disipación de energía incrementa monótonamente al variar la rugosidad de la carretera mientras que, a velocidades altas de conducción del vehículo, no se presenta un cambio significativo en el potencial de regeneración de energía, ver [Figura 4.31](#).

Los hallazgos novedosos en este trabajo de investigación se pueden utilizar para futuras investigaciones en la implementación de algoritmos de control utilizando la red mecánica propuesta  $C_1$  con la capacidad de regeneración de energía. Es importante mencionar que en este trabajo se presentó un estudio exhaustivo del estado de arte con el objetivo de proporcionar al lector, las posibles brechas de investigación en suspensiones automotrices basadas en amortiguadores regenerativos inteligentes. Basado en esta recopilación, aun no se reportan aplicaciones reales de las suspensiones regenerativas en vehículos pesados. Por lo tanto, la regeneración de energía por medio de amortiguadores regenerativos es una línea de investigación de energías limpias novedosa.

## Apéndice A: Funciones $B_i^{J_{1,C_j}}$ y $A_{i,C_j}$

$$A_{5,C_2} = (B_f C_f M_s + B_f C_f m_u + C_f M_s m_u)(B_f M_s m_u)^{-1}; A_{4,C_2} = (B_f K_F M_s + B_f K_F m_u + B_f K_f M_s + B_f K_f m_u + B_f K_t M_s + K_f M_s m_u)(B_f M_s m_u)^{-1}; A_{3,C_2} = (B_f C_f K_t + C_f K_F M_s + C_f K_F m_u + C_f K_t M_s)(B_f M_s m_u)^{-1}; A_{2,C_2} = (B_f K_F K_t + B_f K_f K_t + K_F K_f M_s + K_F K_f m_u + K_f K_t M_s)(B_f M_s m_u)^{-1}; A_{1,C_2} = (C_f K_F K_t)(B_f M_s m_u)^{-1}; A_{0,C_2} = (K_F K_f K_t)(B_f M_s m_u)^{-1}$$

$$B_4^{J_{1,C_2}} = B_f C_f K_t (B_f M_s m_u)^{-1}; B_3^{J_{1,C_2}} = (B_f K_F K_t + B_f K_f K_t)(B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{1,C_2}} = A_{1,C_2}; B_1^{J_{1,C_2}} = A_{0,C_2}; B_5^{J_{1,C_2}} = B_0^{J_{1,C_2}} = B_5^{J_{2,C_2}} = B_4^{J_{2,C_2}} = B_0^{J_{2,C_2}} = B_0^{J_{3,C_2}} = B_5^{J_{4,C_2}} = B_3^{J_{4,C_2}} = B_2^{J_{4,C_2}} = B_1^{J_{4,C_2}} = B_0^{J_{4,C_2}} = 0; B_3^{J_{2,C_2}} = -K_t B_f M_s (B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{2,C_2}} = -C_f K_t (B_f m_u)^{-1}; B_1^{J_{2,C_2}} = -K_f K_t (B_f m_u)^{-1}; B_5^{J_{3,C_2}} = -K_t; B_4^{J_{3,C_2}} = -K_t A_{5,C_2}; B_3^{J_{3,C_2}} = -K_t (B_f K_F M_s + B_f K_F m_u + B_f K_f M_s + B_f K_f m_u + K_f M_s m_u)(B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{3,C_2}} = -K_t (C_f K_F M_s + C_f K_F m_u)(B_f M_s m_u)^{-1}; B_1^{J_{3,C_2}} = -K_t (K_F K_f M_s + K_F K_f m_u)(B_f M_s m_u)^{-1}; B_4^{J_{4,C_2}} = -K_t C_f (m_u)^{-1}$$

$$A_{5,C_3} = (B_f C_f M_s + C_f M_s m_u)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; A_{4,C_3} = (B_f K_F M_s + B_f K_F m_u + B_f K_f m_u + B_f K_t M_s + K_f M_s m_u)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; A_{3,C_3} = (C_f K_F M_s + C_f K_F m_u + C_f K_f m_u + C_f K_t M_s)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; A_{2,C_3} = (B_f K_F K_t + B_f K_f K_t + K_F K_f M_s + K_F K_f m_u + K_f K_t M_s)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; A_{1,C_3} = (C_f K_F K_t + C_f K_f K_t)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; A_{0,C_3} = (K_F K_f K_t)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}$$

$$B_3^{J_{1,C_3}} = K_t (B_f K_F + B_f K_f)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{1,C_3}} = A_{1,C_3}; B_1^{J_{1,C_3}} = A_{0,C_3}; B_5^{J_{1,C_3}} = B_4^{J_{1,C_3}} = B_0^{J_{1,C_3}} = B_5^{J_{2,C_3}} = B_4^{J_{2,C_3}} = B_0^{J_{2,C_3}} = B_0^{J_{3,C_3}} = B_5^{J_{4,C_3}} = B_3^{J_{4,C_3}} = B_1^{J_{4,C_3}} = B_0^{J_{4,C_3}} = 0; B_3^{J_{2,C_3}} = -(B_f K_t M_s)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{2,C_3}} = -(C_f K_t M_s)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_1^{J_{2,C_3}} = -K_f K_t M_s (B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_5^{J_{3,C_3}} = -K_t; B_4^{J_{3,C_3}} = -K_t A_{5,C_3}; B_3^{J_{3,C_3}} = -K_t (B_f K_F M_s + B_f K_F m_u + B_f K_f m_u + K_f M_s m_u)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{3,C_3}} = -K_t (C_f K_F M_s + C_f K_F m_u + C_f K_f m_u)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_1^{J_{3,C_3}} = -K_t (K_F K_f M_s + K_F K_f m_u)(B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{4,C_3}} = -K_t C_f K_f M_s (B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}; B_2^{J_{4,C_3}} = -K_t C_f K_f M_s (B_f^2 M_s + B_f M_s m_u)^{-1}$$

## Referencias

- [1] J. Zou, X. Guo, M.A.A. Abdelkareem, L. Xu, J. Zhang, Modelling and ride analysis of a hydraulic interconnected suspension based on the hydraulic energy regenerative shock absorbers, *Mech. Syst. Signal Process.* 127 (2019) 345–369. doi:10.1016/j.ymsp.2019.02.047.
- [2] F. Scheibe, M.C. Smith, Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions, *Veh. Syst. Dyn.* 47 (2009) 1229–1252. doi:10.1080/00423110802588323.
- [3] M.C. Smith, Synthesis of Mechanical Networks : The inerter, 47 (2002) 1657–1662.
- [4] M.Z.Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, F. Wang, M.C. Smith, The Missing Mechanical Circuit Element, *IEEE Circuits Syst. Mag.* (2009) 10–26.
- [5] Y. Shen, L. Chen, X. Yang, D. Shi, J. Yang, Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension, *J. Sound Vib.* 361 (2016) 148–158. doi:10.1016/j.jsv.2015.06.045.
- [6] Y. Hu, M.Z.Q. Chen, Z. Shu, Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements, *J. Sound Vib.* 333 (2014) 2212–2225. doi:10.1016/j.jsv.2013.12.016.
- [7] L. Honghai, G. Huijung, L. Ping, Handbook of Vehicle Suspension Control Systems, London, United Kingdom, 2014.
- [8] S.M. Savaresi, Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles, Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2010.
- [9] C. Poussot-Vassal, C. Spelta, O. Sename, S.M. Savaresi, L. Dugard, Survey and performance evaluation on some automotive semi-active suspension control methods: A comparative study on a single-corner model, *Annu. Rev. Control.* 36 (2012) 148–160. doi:10.1016/j.arcontrol.2012.03.011.
- [10] C. Poussot-Vassal, C. Spelta, O. Sename, S. Savaresi, L. Dugard, Survey on Some Automotive Semi-Active Suspension Control Methods: a Comparative Study on a Single-Corner Model, in: *IFAC World Congr.*, 2011: pp. 1802–1807. doi:10.3182/20110828-6-IT-1002.00446.
- [11] D. Hrovatt, Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications \*, 1098 (1997).
- [12] Y. Zhang, K. Guo, D. Wang, C. Chen, X. Li, Energy conversion mechanism and regenerative potential of vehicle suspensions, *Energy.* 119 (2017) 961–970. doi:10.1016/j.energy.2016.11.045.
- [13] H. Zou, L. Zhao, Q. Gao, L. Zuo, F. Liu, T. Tan, Mechanical modulations for enhancing energy harvesting : Principles , methods and applications, *Appl. Energy.* 255 (2019) 113871. doi:10.1016/j.apenergy.2019.113871.
- [14] D. Zhao, Waste thermal energy harvesting from a convection-driven Rijke – Zhao thermo-acoustic-piezo system, *Energy Convers. Manag.* 66 (2013) 87–97. doi:10.1016/j.enconman.2012.09.025.
- [15] L. Pugi, M. Pagliai, A. Nocentini, G. Lutzemberger, A. Pretto, Design of a hydraulic servo-actuation fed by a regenerative braking, *Appl. Energy.* 187 (2017) 96–115. doi:10.1016/j.apenergy.2016.11.047.
- [16] K. Itani, A. De Bernardinis, Z. Khatir, A. Jammal, Comparative analysis of two hybrid energy storage systems used in a two front wheel driven electric vehicle during extreme start-up and regenerative braking operations, *Energy Convers. Manag.* 144 (2017) 69–87. doi:10.1016/j.enconman.2017.04.036.
- [17] L. Li, Y. Zhang, C. Yang, B. Yan, C.M. Martinez, Model predictive control-based efficient energy recovery control strategy for regenerative braking system of hybrid electric bus, *Energy Convers. Manag.* 111 (2016) 299–314. doi:10.1016/j.enconman.2015.12.077.
- [18] C. Wei, X. Jing, A comprehensive review on vibration energy harvesting : Modelling and realization, *Renew. Sustain. Energy Rev.* 74 (2017) 1–18. doi:10.1016/j.rser.2017.01.073.
- [19] M.A.A. Abdelkareem, L. Xu, M. Kamal, A. Ali, A. Elagouz, Vibration energy harvesting in automotive suspension system : A detailed review Single Degree of Freedom, *Appl. Energy.* 229 (2018) 672–699. doi:10.1016/j.apenergy.2018.08.030.
- [20] D. Shi, P. Pisu, L. Chen, S. Wang, R. Wang, Control design and fuel economy investigation of power split HEV with energy regeneration of suspension, *Appl. Energy.* 182 (2016) 576–589. doi:10.1016/j.apenergy.2016.08.034.
- [21] M. Montazeri-Gh, M. Soleymani, Investigation of the Energy Regeneration of Active Suspension System in Hybrid Electric Vehicles, *IEEE Trans. Ind. Electron.* 57 (2010) 918–925. doi:10.1109/TIE.2009.2034682.
- [22] X. Xie, Q. Wang, A mathematical model for piezoelectric ring energy harvesting technology from vehicle tires, *Int. J. Eng. Sci.* 94 (2015) 113–127. doi:10.1016/j.ijengsci.2015.05.004.
- [23] X.D. Xie, Q. Wang, Energy harvesting from a vehicle suspension system, *Energy.* 86 (2015) 385–392. doi:10.1016/j.energy.2015.04.009.
- [24] Audi's latest chassis suspension system innovation: eROT (electromechanical rotary damper), (n.d.). <https://www.audi-mediacenter.com/en/press-releases/theinnovative-%0Ashock-absorber-system-from-audi-new-technology-saves-fuel-andenhances-%0Acomfort-6551>.
- [25] R. Faria, P. Moura, J. Delgado, A.T. De Almeida, A sustainability assessment of electric vehicles as a personal mobility system, *Energy Convers. Manag.* 61 (2012) 19–30. doi:10.1016/j.enconman.2012.02.023.
- [26] P. Clarke, T. Muneer, K. Cullinane, Cutting vehicle emissions with regenerative braking, *Transp. Res. Part D.* 15 (2010) 160–167. doi:10.1016/j.trd.2009.11.002.
- [27] T.H. Bradley, A.A. Frank, Design , demonstrations and sustainability impact assessments for plug-in hybrid electric vehicles, 13 (2009) 115–128. doi:10.1016/j.rser.2007.05.003.
- [28] D.L. Chandler, More power from bumps in the road, MIT Tech Talk 2009;534. (n.d.).
- [29] Z. Zhang, X. Zhang, W. Chen, Y. Rasim, W. Salman, H. Pan, Y. Yuan, C. Wang, A high-efficiency energy regenerative shock absorber using supercapacitors for renewable energy applications in range extended electric vehicle, *Appl. Energy.* 178 (2016) 177–188. doi:10.1016/j.apenergy.2016.06.054.
- [30] D. Karnopp, Permanent Magnet Linear Motors Used as Variable Mechanical Dampers for Vehicle Suspensions, *Veh. Syst. Dyn.* (1989) 187–200.
- [31] Y. Suda, T. Shiiba, A New Hybrid Suspension System with Active Control and Energy Regeneration, (2007) 37–41. doi:10.1080/00423119608969226.
- [32] L. Zuo, B. Scully, J. Shestani, Y. Zhou, Design and characterization of an electromagnetic energy harvester for vehicle suspensions, *Smart Mater. Struct.* 19 (2010) 1–10. doi:10.1088/0964-1726/19/4/045003.

- [33] B.L.J. Gysen, T.P.J. Van Der Sande, J.J.H. Paulides, E.A. Lomonova, Efficiency of a regenerative direct-drive electromagnetic active suspension, *IEEE Trans. Veh. Technol.* 60 (2011) 1384–1393. doi:10.1109/TVT.2011.2131160.
- [34] B. Ebrahimi, H. Bolandhemmat, M.B. Khamesee, F. Golnaraghi, A hybrid electromagnetic shock absorber for active vehicle suspension systems, *Veh. Syst. Dyn.* 49 (2011) 311–332. doi:10.1080/00423111003602400.
- [35] E. Asadi, R. Ribeiro, M.B. Khamesee, A. Khajepour, A new adaptive hybrid electromagnetic damper: modelling, optimization, and experiment, *Smart Mater. Struct.* 24 (2015) 1–14. doi:10.1088/0964-1726/24/7/075003.
- [36] G. Hu, Y. Lu, S. Sun, W. Li, Performance Analysis of a Magnetorheological Damper with Energy Harvesting Ability, *Shock Vib.* (2016) 1–10. doi:10.1155/2016/2959763.
- [37] L. Chen, D. Shi, R. Wang, H. Zhou, Energy conservation analysis and control of hybrid active semiactive suspension with three regulating damping levels, *Shock Vib.* (2016) 1–14. doi:10.1155/2016/6196542.
- [38] C. Chen, W.-H. Liao, A self-sensing magnetorheological damper with power generation, *Smart Mater. Struct.* 21 (2012) 1–14. doi:10.1088/0964-1726/21/2/025014.
- [39] K.-M. Choi, H.-J. Jung, H.-J. Lee, S.-W. Cho, Feasibility study of an MR damper-based smart passive control system employing an electromagnetic induction device, *Smart Mater. Struct.* 16 (2007) 2323–2329. doi:10.1088/0964-1726/16/6/036.
- [40] Y.-T. Choi, N.M. Wereley, Self-Powered Magnetorheological Dampers, *J. Vib. Acoust.* 131 (2009) 1–5. doi:10.1115/1.3142882.
- [41] Z. Gao, S. Chen, Y. Zhao, Z. Liu, Numerical evaluation of compatibility between comfort and energy recovery based on energy flow mechanism inside electromagnetic active suspension, *Energy.* 170 (2019) 521–536. doi:10.1016/j.energy.2018.12.193.
- [42] R. Ding, R. Wang, X. Meng, L. Chen, Energy consumption sensitivity analysis and energy-reduction control of hybrid electromagnetic active suspension, *Mech. Syst. Signal Process.* 134 (2019) 106301. doi:10.1016/j.ymsp.2019.106301.
- [43] M. Duong, Y. Chun, P. Han, Optimal Design of a Novel Single-Phase 8 Slot-8 Pole Tubular Electromagnetic Shock Absorber to Harvest Energy, *IEEE Trans. Ind. Electron. PP* (2019) 1. doi:10.1109/TIE.2019.2898591.
- [44] Z. Jin-qiu, P. Zhi-zhao, Z. Lei, Z. Yu, A Review on Energy-Regenerative Suspension Systems for Vehicles, in: *Proc. World Congr. Eng.*, 2013: pp. 3–6.
- [45] L. Zuo, X. Tang, Large-scale vibration energy harvesting, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 24 (2013) 1405–1430. doi:10.1177/1045389X13486707.
- [46] Z. Zhang, X. Zhang, Y. Rasim, C. Wang, B. Du, Y. Yuan, Design, modelling and practical tests on a high-voltage kinetic energy harvesting (EH) system for a renewable road tunnel based on linear alternators, *Appl. Energy.* 164 (2016) 152–161. doi:10.1016/j.apenergy.2015.11.096.
- [47] K. Kecik, A. Mitura, S. Lenci, Energy harvesting from a magnetic levitation system, *Int. J. Non. Linear. Mech.* (2017). doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2017.03.021.
- [48] C. Wei, X. Jing, A comprehensive review on vibration energy harvesting : Modelling and realization, *Renew. Sustain. Energy Rev.* 74 (2017) 1–18. doi:10.1016/j.rser.2017.01.073.
- [49] A. Haroun, I. Yamada, S. Warisawa, Study of electromagnetic vibration energy harvesting with free/impact motion for low frequency operation, *J. Sound Vib.* (2015) 1–14. doi:10.1016/j.jsv.2015.03.048.
- [50] Z. Liu, X. Wang, S. Ding, R. Zhang, L. McNabb, A new concept of speed amplified nonlinear electromagnetic vibration energy harvester through fixed pulley wheel mechanisms and magnetic springs, *Mech. Syst. Signal Process.* 126 (2019) 305–325. doi:10.1016/j.ymsp.2019.02.010.
- [51] M. Gao, Y. Wang, Y. Wang, P. Wang, Experimental investigation of non-linear multi-stable electromagnetic- induction energy harvesting mechanism by magnetic levitation oscillation, *Appl. Energy.* (2018) 0–1. doi:10.1016/j.apenergy.2018.03.170.
- [52] S. Zhu, W. ai Shen, Y. lin Xu, Linear electromagnetic devices for vibration damping and energy harvesting: Modeling and testing, *Eng. Struct.* 34 (2012) 198–212. doi:10.1016/j.engstruct.2011.09.024.
- [53] C. Wei, H. Taghavifar, A novel approach to energy harvesting from vehicle suspension system : Half-vehicle model, *Energy.* 134 (2017) 279–288. doi:10.1016/j.energy.2017.06.034.
- [54] L.B. Zhang, H.L. Dai, A. Abdelke, S.X. Lin, L. Wang, Theoretical modeling , wind tunnel measurements , and realistic environment testing of galloping-based electromagnetic energy harvesters, 254 (2019). doi:10.1016/j.apenergy.2019.113737.
- [55] M.L. Seol, S.B. Jeon, J.W. Han, Y.K. Choi, Ferrofluid-based triboelectric-electromagnetic hybrid generator for sensitive and sustainable vibration energy harvesting, *Nano Energy.* 31 (2017) 233–238. doi:10.1016/j.nanoen.2016.11.038.
- [56] A. Tonoli, N. Amati, J.G. Detoni, R. Galluzzi, E. Gasparin, Modelling and validation of electromechanical shock absorbers, *Veh. Syst. Dyn.* 51 (2013) 1186–1199. doi:10.1080/00423114.2013.789538.
- [57] Y. Kawamoto, Y. Suda, H. Inoue, T. Kondo, Modeling of Electromagnetic Damper for Automobile Suspension, *J. Syst. Des. Dyn.* 1 (2007) 524–535. doi:10.1299/jsdd.1.524.
- [58] N. Amati, A. Festini, A. Tonoli, Design of electromagnetic shock absorbers for automotive suspensions, *Veh. Syst. Dyn.* 49 (2011) 1913–1928.
- [59] V. Design, Electromagnetic regenerative damping in vehicle suspension systems, *Int. J. Veh. Des.* 24 (2000) 182–197.
- [60] M. Montazeri-Gh, O. Kavianipour, Investigation of the passive electromagnetic damper, *Acta Mech.* 223 (2012) 2633–2646. doi:10.1007/s00707-012-0735-8.
- [61] X. Wang, Frequency Analysis of Vibration Energy Harvesting Systems, United States, n.d.
- [62] G. Zhang, J. Cao, F. Yu, Design of active and energy-regenerative controllers for DC-motor-based suspension, *Mechatronics.* 22 (2012) 1124–1134. doi:10.1016/j.mechatronics.2012.09.007.
- [63] N.E.H. & R. a. M. L. Piresa, M. C. Smith, Design trade-offs for energy regeneration and control in vehicle suspensions, *Int. J. Control.* (2013) 1–18. doi:http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2013.830197.
- [64] J. Yin, X. Chen, J. Li, L. Wu, Investigation of equivalent unsprung mass and nonlinear features of electromagnetic actuated active suspension, *Shock Vib.* (2015) 1–8. doi:10.1155/2015/624712.
- [65] B. Huang, C.Y. Hsieh, F. Golnaraghi, M. Moallem, Development and optimization of an energy-regenerative suspension

- system under stochastic road excitation, *J. Sound Vib.* 357 (2015) 16–34. doi:10.1016/j.jsv.2015.07.004.
- [66] S. Li, J. Xu, X. Pu, T. Tao, X. Mei, A novel design of a damping failure free energy-harvesting shock absorber system, *Mech. Syst. Signal Process.* 132 (2019) 640–653. doi:10.1016/j.ymsp.2019.07.004.
- [67] S. Li, J. Xu, X. Pu, T. Tao, H. Gao, X. Mei, Energy-Harvesting Variable / Constant Damping Suspension, *Energy*. (2019). doi:10.1016/j.energy.2019.116199.
- [68] L. Xie, J. Li, X. Li, L. Huang, S. Cai, Damping-tunable energy-harvesting vehicle damper with multiple controlled generators : Design , modeling and experiments, *Mech. Syst. Signal Process.* 99 (2018) 859–872. doi:10.1016/j.ymsp.2017.07.005.
- [69] L. Xie, J. Li, S. Cai, X. Li, Electromagnetic Energy-Harvesting Damper With Multiple Independently Controlled Transducers : On-Demand Damping and, 22 (2017) 2705–2713.
- [70] Z. Wang, T. Zhang, Z. Zhang, Y. Yuan, Y. Liu, A high-efficiency regenerative shock absorber considering twin ball screws transmissions for application in range-extended electric vehicles, *Energy Built Environ.* (2019). doi:10.1016/j.enbenv.2019.09.004.
- [71] H. Zhu, Y. Li, W. Shen, S. Zhu, Mechanical and energy-harvesting model for electromagnetic inertial mass dampers, *Mech. Syst. Signal Process.* 120 (2019) 203–220. doi:10.1016/j.ymsp.2018.10.023.
- [72] Y. Li, W. Shen, H. Zhu, Vibration mitigation of stay cables using electromagnetic inertial mass dampers : Full-scale experiment and analysis, *Eng. Struct.* 200 (2019) 1–18. doi:10.1016/j.engstruct.2019.109693.
- [73] A.-D.Z. and J.S. Bai, Xian-xu, Wei-Min Zhong, Qi Zou, Principle , design and validation of a power- generated magnetorheological energy absorber with velocity self-sensing capability, *Smart Mater. Struct.* 27 (2018) 1–18. doi:10.1088/1361-665X/aac7ef.
- [74] Y. Yang, Y. Pian, Q. Liu, Design of energy harvester using rotating motion rectifier and its application on bicycle, *Energy*. 179 (2019) 222–231. doi:10.1016/j.energy.2019.05.036.
- [75] L. Li, L. Zuo, G. Luhrs, L. Lin, Y.X. Qin, Electromagnetic energy-harvesting shock absorbers: Design, modeling, and road tests, *IEEE Trans. Veh. Technol.* 62 (2013) 1065–1074. doi:10.1109/TVT.2012.2229308.
- [76] Z. Li, L. Zuo, J. Kuang, G. Luhrs, Energy-harvesting shock absorber with a mechanical motion rectifier, *Smart Mater. Struct.* 22 (2013) 1–10. doi:10.1088/0964-1726/22/2/025008.
- [77] S. Guo, Y. Liu, L. Xu, X. Guo, L. Zuo, Performance evaluation and parameter sensitivity of energy-harvesting shock absorbers on different vehicles, *Veh. Syst. Dyn.* (2016) 1–25. doi:10.1080/00423114.2016.1174276.
- [78] Z. Zhang, X. Zhang, W. Chen, Y. Rasim, W. Salman, H. Pan, Y. Yuan, C. Wang, Corrigendum to “A high-efficiency energy regenerative shock absorber using supercapacitors for renewable energy applications in range extended electric vehicle” [*Appl. Energy* 178 (2016) 177–188], *Appl. Energy*. 254 (2019). doi:10.1016/j.apenergy.2019.113634.
- [79] X. Zhang, Z. Zhang, H. Pan, W. Salman, Y. Yuan, Y. Liu, A portable high-efficiency electromagnetic energy harvesting system using supercapacitors for renewable energy applications in railroads, *Energy Convers. Manag.* 118 (2016) 287–294. doi:10.1016/j.enconman.2016.04.012.
- [80] X. Zhang, H. Pan, L. Qi, Z. Zhang, Y. Yuan, Y. Liu, A renewable energy harvesting system using a mechanical vibration rectifier (MVR) for railroads, *Appl. Energy*. 204 (2017) 1535–1543. doi:10.1016/j.apenergy.2017.04.064.
- [81] T. Lin, Y. Pan, S. Chen, L. Zuo, Modeling and field testing of an electromagnetic energy harvester for rail tracks with anchorless mounting, *Appl. Energy*. 213 (2018) 219–226. doi:10.1016/j.apenergy.2018.01.032.
- [82] H. Wang, C. He, S. Lv, H. Sun, A new electromagnetic vibrational energy harvesting device for swaying cables, *Appl. Energy*. 228 (2018) 2448–2461. doi:10.1016/j.apenergy.2018.07.059.
- [83] Y. Pan, F. Liu, R. Jiang, Z. Tu, L. Zuo, Modeling and onboard test of an electromagnetic energy harvester for railway cars, *Appl. Energy*. 250 (2019) 568–581. doi:10.1016/j.apenergy.2019.04.182.
- [84] Y. Pan, T. Lin, F. Qian, C. Liu, J. Yu, J. Zuo, L. Zuo, Modeling and field-test of a compact electromagnetic energy harvester for railroad transportation, *Appl. Energy*. 247 (2019) 309–321. doi:10.1016/j.apenergy.2019.03.051.
- [85] R. Zhang, X. Wang, Z. Liu, A novel regenerative shock absorber with a speed doubling mechanism and its Monte Carlo simulation, *J. Sound Vib.* 417 (2018) IBC-IBC. doi:10.1016/j.jsv.2017.12.017.
- [86] C. Liang, J. Ai, L. Zuo, Design, fabrication, simulation and testing of an ocean wave energy converter with mechanical motion rectifier, *Ocean Eng.* 136 (2017) 190–200. doi:10.1016/j.oceaneng.2017.03.024.
- [87] R. Sabzehgar, A. Maravandi, M. Moallem, Energy Regenerative Suspension Using an Algebraic Screw Linkage Mechanism, *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*. 19 (2013) 1251–1259. doi:10.1109/TMECH.2013.2277854.
- [88] A. Maravandi, M. Moallem, Regenerative shock absorber using a two-leg motion conversion mechanism, *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*. 20 (2015) 2853–2861. doi:10.1109/TMECH.2015.2395437.
- [89] A. Syuhri, W. Hadi, S.N.H. Syuhri, Damping properties and energy evaluation of a regenerative shock absorber, *Int. J. Interact. Des. Manuf.* (2017). doi:10.1007/s12008-017-0440-x.
- [90] R. Zhang, X. Wang, Parameter study and optimization of a half-vehicle suspension system model integrated with an arm-teeth regenerative shock absorber using Taguchi method, *Mech. Syst. Signal Process.* 126 (2019) 65–81. doi:10.1016/j.ymsp.2019.02.020.
- [91] R. Zhang, X. Wang, E. Al, S. John, L. Zuo, C.H. Wang, A novel indirect-drive regenerative shock absorber for energy harvesting and comparison with a conventional direct-drive regenerative shock absorber, *Appl. Energy*. 229 (2018) 111–127. doi:10.1016/j.apenergy.2018.07.096.
- [92] W. Salman, L. Qi, X. Zhu, H. Pan, X. Zhang, S. Bano, Z. Zhang, Y. Yuan, A high-efficiency energy regenerative shock absorber using helical gears for powering low-wattage electrical device of electric vehicles, *Energy*. 159 (2018) 361–372. doi:10.1016/j.energy.2018.06.152.
- [93] P. Múčka, Energy-harvesting potential of automobile suspension, *Veh. Syst. Dyn.* (2016) 1–20. doi:10.1080/00423114.2016.1227077.
- [94] J. Mi, L. Xu, S. Guo, L. Meng, M.A.A. Abdelkareem, ENERGY HARVESTING POTENTIAL COMPARISON STUDY OF A NOVEL RAILWAY VEHICLE BOGIE SYSTEM WITH THE HYDRAULIC-ELECTROMAGNETIC ENERGY-REGENERATIVE SHOCK ABSORBER, *Proc. 2017 Jt. Rail Conf.* (2017) 1–10.
- [95] K. Ahmad, M. Alam, Design and Simulated Analysis of Regenerative Suspension System with Hydraulic Cylinder, Motor and Dynamo, *SAE Tech. Pap.* 2017–March (2017). doi:10.4271/2017-01-1284.

- [96] H. Zhang, X. Guo, L. Xu, S. Hu, Z. Fang, Parameters analysis of hydraulic-electrical energy regenerative absorber on suspension performance, *Adv. Mech. Eng.* (2014) 1–11. doi:10.1155/2014/836502.
- [97] Z. Fang, X. Guo, L. Xu, H. Zhang, Experimental study of damping and energy regeneration characteristics of a hydraulic electromagnetic shock absorber, *Adv. Mech. Eng.* (2013) 1–9. doi:10.1155/2013/943528.
- [98] C. Li, P.W. Tse, Fabrication and testing of an energy-harvesting hydraulic damper, *Smart Mater. Struct.* 22 (2013). doi:10.1088/0964-1726/22/6/065024.
- [99] C. Li, R. Zhu, M. Liang, S. Yang, Integration of shock absorption and energy harvesting using a hydraulic rectifier, *J. Sound Vib.* 333 (2014) 3904–3916. doi:10.1016/j.jsv.2014.04020.
- [100] Y. Zhang, X. Zhang, M. Zhan, K. Guo, F. Zhao, Z. Liu, Study on a novel hydraulic pumping regenerative suspension for vehicles, *J. Franklin Inst.* 352 (2015) 485–499. doi:10.1016/j.jfranklin.2014.06.005.
- [101] Y. Zhang, H. Chen, K. Guo, X. Zhang, S. Eben Li, Electro-hydraulic damper for energy harvesting suspension: Modeling, prototyping and experimental validation, *Appl. Energy.* 199 (2017) 1–12. doi:10.1016/j.apenergy.2017.04.085.
- [102] R. Galluzzi, A. Tonoli, N. Amati, G. Curcuruto, P. Torino, P. Conti, G. Greco, A. Nepote, M. Marelli, Regenerative Shock Absorbers and the Role of the Motion Rectifier, *SAE Int.* (2018). doi:10.4271/2016-01-1552.
- [103] R. Galluzzi, Y. Xu, N. Amati, A. Tonoli, Optimized design and characterization of motor-pump unit for energy- regenerative shock absorbers, *Appl. Energy.* 210 (2018) 16–27. doi:10.1016/j.apenergy.2017.10.100.
- [104] J. Zou, X. Guo, L. Xu, M.A.A. Abdelkareem, B. Gong, J. Zhang, G. Tan, Simulation Research of a Hydraulic Interconnected Suspension Based on a Hydraulic Energy Regenerative Shock Absorber, *SAE Int.* (2018) 1–9. doi:10.4271/2018-01-0582.
- [105] J. Zou, X. Guo, L. Xu, G. Tan, C. Zhang, J. Zhang, Design, Modeling, and Analysis of a Novel Hydraulic Energy-Regenerative Shock Absorber for Vehicle Suspension, *Shock Vib.* (2017). doi:10.1155/2017/3186584.
- [106] M. Peng, X. Guo, J. Zou, C. Zhang, Simulation Study on Vehicle Road Performance with Hydraulic Electromagnetic Energy-Regenerative Shock Absorber, *SAE Tech. Pap.* (2016). doi:10.4271/2016-01-1550.
- [107] H.H. Obeid, A.K. Jaleel, N.A. Hassan, Design and Motion Modeling of an Electromagnetic Hydraulic Power Hump Harvester, *Adv. Mech. Eng.* (2014) 11. doi:10.1155/2014/150293.
- [108] C. Ting, D. Tsai, C. Hsiao, Developing a mechanical roadway system for waste energy capture of vehicles and electric generation, *Appl. Energy.* 92 (2012) 1–8. doi:10.1016/j.apenergy.2011.10.006.
- [109] H.R. Rolf, ZF and start-up Levant Power partnering on first fully active, regenerative suspension for automobiles, *Green Car Congr.* (2013). <https://www.greencarcongress.com/2013/08/20130828-zflevant.html>.
- [110] K. Stefan, Audi developing electromechanical rotary dampers; potential for energy recuperation from suspension; 48V, *Green Car Congr.* (2016). [www.greencarcongress.com/2016/08/audi-developing-electromechanical-rotary-dampers-potential-for-energy-recuperation-from-suspension-4.html](http://www.greencarcongress.com/2016/08/audi-developing-electromechanical-rotary-dampers-potential-for-energy-recuperation-from-suspension-4.html).
- [111] D.H. Michael Blundell, *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*, 2nd Editio, 2014.
- [112] T. Douglas, Random vibration, in: *Struct. Dyn. Vib. Pract.*, 2008: pp. 267–324. doi:<https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8002-8.00010-9>.
- [113] S. Crandall, W. Mark, Transmission of Random Vibration, in: *Random Vib. Mech. Syst.*, 1963: pp. 55–102.
- [114] P. Taylor, B.R. Davis, A.G. Thompson, Spectral Density of Road Profiles, *Veh. Syst. Dyn.* 35 (2001) 409–415.
- [115] J. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, 1990.
- [116] E. Kreyszig, Laurent Series. Residue Integration, in: *Adv. Eng. Math.*, 10th editi, 2010: pp. 708–725.
- [117] A. Javidialesaadi, N.E. Wierschem, Optimal design of rotational inertial double tuned mass dampers under random excitation, *Eng. Struct.* 165 (2018) 412–421. doi:10.1016/j.engstruct.2018.03.033.
- [118] T. Asami, Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel, *J. Vib. Acoust.* 139 (2016) 011015. doi:10.1115/1.4034776.
- [119] Y. Hu, M.Z.Q. Chen, Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers, *Int. J. Mech. Sci.* 99 (2015) 297–307. doi:10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003.
- [120] G.H.Z. Liu, M.Z.Q. Chen, Performance Benefits in Passive Vehicle Suspensions Employing Inerter, *Veh. Syst. Dyn.* 42 (2016) 235–257. doi:10.1109/ChiCC.2016.7554789.
- [121] L. Zuo, P.-S. Zhang, Energy Harvesting, Ride Comfort, and Road Handling of Regenerative Vehicle Suspensions, *J. Vib. Acoust.* 135 (2013) 1–8. doi:10.1115/1.4007562.
- [122] W. Forst, D. Hoffmann, Chapter 8: Global optimization, in: *Optim. Theory Pract.*, Springer New York, New York, NY, 2010. doi:10.1007/978-0-387-78977-4.
- [123] Singiresu S. Rao, *Nonlinear Programming II: Unconstrained Optimization Techniques*, in: *Eng. Optim. Theory Pract.*, Fourth Edi, 2009: pp. 345–347.
- [124] Singiresu S. Rao, *Nonlinear Programming III: Constrained Optimization Techniques*, in: *Eng. Optim. Theory Pract.*, Fourth Edi, 2009: pp. 422–426.
- [125] T. Asami, Exact Algebraic Solution of an Optimal Double-Mass Dynamic Vibration Absorber Attached to a Damped Primary System, *141* (2019) 1–13. doi:10.1115/1.4043815.
- [126] B. Huang, C.Y. Hsieh, F. Golnaraghi, M. Moallem, Development and optimization of an energy-regenerative suspension system under stochastic road excitation, *J. Sound Vib.* (2015) 1–19. doi:10.1016/j.jsv.2015.07.004.
- [127] Y. Liu, H. Matsuhisa, H. Utsuno, Semi-active vibration isolation system with variable stiffness and damping control, *J. Sound Vib.* 313 (2008) 16–28. doi:10.1016/j.jsv.2007.11.045.
- [128] Y. Shen, Y. Liu, L. Chen, X. Yang, Optimal design and experimental research of vehicle suspension based on a hydraulic electric inerter, *Mechatronics.* 61 (2019) 12–19. doi:10.1016/j.mechatronics.2019.05.002.
- [129] P. Seers, G. Nachin, M. Glaus, Development of two driving cycles for utility vehicles, *Transp. Res. Part D.* 41 (2015) 377–385. doi:10.1016/j.trd.2015.10.013.
- [130] J. Brady, M.O. Mahony, Development of a driving cycle to evaluate the energy economy of electric vehicles in urban areas, *Appl. Energy.* 177 (2016) 165–178. doi:10.1016/j.apenergy.2016.05.094.
- [131] P. Shen, Z. Zhao, J. Li, X. Zhan, Development of a typical driving cycle for an intra-city hybrid electric bus with a fixed route, *Transp. Res. Part D.* 59 (2018) 346–360. doi:10.1016/j.trd.2018.01.032.
- [132] Q. Wang, H. Huo, K. He, Z. Yao, Q. Zhang, Characterization of vehicle driving patterns and development of driving cycles in

- Chinese cities, 13 (2008) 289–297. doi:10.1016/j.trd.2008.03.003.
- [133] L. Dugard, O. Sename, S. Aubouet, B. Talon, Full vertical car observer design methodology for suspension control applications, *Control Eng. Pract.* 20 (2012) 832–845. doi:10.1016/J.CONENGPRAC.2012.04.008.