



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Identificación algebraica en línea del desbalance en
un sistema rotor-cojinete. Análisis experimental

presentada por

Ing. Agustín Erasmo Juárez Martínez

como requisito para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Mecánica**

Director de tesis

Dr. Jorge Colin Ocampo

Codirector de tesis

Dr. José Gabriel Mendoza Larios

Cuernavaca, Morelos, México. Junio de 2020.



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos 01/junio/2020

OFICIO No. SAC/ 157/2020

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**AGUSTIN ERASMO JUÁREZ MARTÍNEZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado *"Identificación algebraica en línea del desbalance en un sistema rotor-cojinete. Análisis experimental"*, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica

"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Expediente

GVGR/CHG

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.

Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir_cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.edu.mx





"2019. Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., [REDACTED]

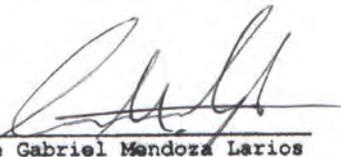
OFICIO No. DIM/078/2020

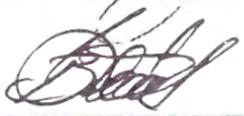
Asunto: Aceptación de documento de tesis
CENIDET-AC-004-M14-OFICIO

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

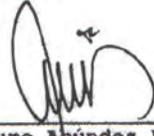
Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del Ing. Agustín Erasmo Juárez Martínez con número de control M18CE032, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis de grado titulado "Identificación algebraica en línea del desbalance en un sistema rotor-cojinete. Análisis experimental" y hemos encontrado que se han atendido todas las observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.


Dr. Jorge Colín Ocampo
Director de tesis


Dr. José Gabriel Mendoza Larios
Codirector de Tesis


Dr. Andrés Blanco Ortega
Revisor 1


Dr. Wilberth Melchior Alcocer
Rosado
Revisor 2


Dr. Arturo Abúndez Pliego
Revisor 3

C.d.p. Depto. Servicios Escolares,
Expediente / Estudiante
RAC/mysr

Dedicatoria

A mis padres y hermano que me dieron su apoyo en todo momento.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme el apoyo económico el cual me permitió mi crecimiento profesional.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por darme la oportunidad de continuar con mi crecimiento profesional.

A mis catedráticos del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) que me dieron las herramientas necesarias para mi crecimiento profesional.

A mis asesores Dr. Jorge Colín Ocampo y el Dr. José Gabriel Mendoza Larios por brindarme su tiempo y su apoyo para llevar a cabo este trabajo.

A mis compañeros del laboratorio de rotodinámica que me brindaron su amistad y compañerismo.

A mis revisores Dr. Arturo Abúndez Pliego, Dr. Wilberth Melchor Alcocer Rosado y Dr. Andrés Blanco Ortega por sus observaciones y revisiones brindadas para la elaboración de este trabajo.

Abstrac

This work presents a novel methodology for the identification of the imbalance of rotodynamic systems. The methodology developed is based on the online algebraic identification technique and is based on the mathematical model that emulates the dynamic behavior of a rotor with multiple degrees of freedom. For the model of the rotodynamic system, the finite element technique was used, considering a beam type element with four degrees of freedom per node.

The proposed identifier model requires as input data the geometric and mechanical properties of the system, as well as the vibration response (displacement) due to the imbalance at constant speed of the rotor, resulting in the magnitude and angular position of the imbalance. The numerical results are compared and validated with experimental results. To carry out the identification of the imbalance experimentally, the modal forms in the horizontal and vertical direction corresponding to the first mode of vibration of a Jeffcott-type rotor were used. Likewise, a treatment is proposed for the vibration signal obtained by applying the transform Fast Fourier (FFT), which ensures that the vibration signal corresponds only to the effects generated by the imbalance forces of the rotodynamic system.

With the proposed methodology, it is demonstrated that the global imbalance of the system can be identified, using the rotor vibration signal as input data in the proposed identifier model, with the system operating at constant speed, without the need for the rotor to exceed the first natural frequency of the system.

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología novedosa para la identificación del desbalance de sistemas rotodinámicos. La metodología desarrollada se basa en la técnica de identificación algebraica en línea y toma como base el modelo matemático que emula el comportamiento dinámico de un rotor de múltiples grados de libertad. Para el modelo del sistema rotodinámico se utilizó la técnica del elemento finito considerando un elemento tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo.

El modelo del identificador propuesto requiere como datos de entrada las propiedades geométricas y mecánicas del sistema, así como, la respuesta de vibración (desplazamiento) a causa del desbalance a velocidad constante del rotor, dando como resultados la magnitud y posición angular del desbalance. Los resultados numéricos se comparan y validan con resultados experimentales. Para llevar a cabo la identificación del desbalance de forma experimental, se utilizaron las formas modales en la dirección horizontal y vertical correspondientes al primer modo de vibración de un rotor tipo Jeffcott, asimismo, se propone un tratamiento a la señal de vibración obtenida aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT), con lo que se logra asegurar que la señal de vibración corresponde únicamente a los efectos generados por las fuerzas de desbalance del sistema rotodinámico.

Con la metodología propuesta, se demuestra que se puede identificar el desbalance global del sistema, utilizando la señal de vibración del rotor como dato de entrada en el modelo del identificador propuesto, con el sistema operando a velocidad constante, sin necesidad de que el rotor supere la primera frecuencia natural del sistema.

Índice general

Abstrac	III
Resumen	IV
Índice General	V
Lista de Figuras	VII
Lista de Tablas	IX
Nomenclatura	XI
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.1.1. Objetivo general	2
1.1.2. Objetivos específicos	2
1.2. Alcances	2
1.3. Metas	2
2. Estado del arte	3
2.1. Desbalance	3
2.2. Control de vibraciones	5
2.3. Balanceo activo con identificadores algebraicos	7
2.4. Conclusión del estado del arte	8
2.5. Justificación	9
3. Marco teórico	10
3.1. Conceptos de vibraciones	10
3.1.1. Vibración.	10
3.1.2. Grados de libertad.	10
3.1.3. Modelo matemático de un sistema.	11
3.1.4. Método de elemento finito	11
3.2. Partes de un rotor-cojinete	12
3.2.1. Ángulos de Euler	13
3.2.2. El disco	13
3.2.3. El eje	15
3.2.4. Energía de deformación	15

3.2.5. Soportes	17
3.2.6. Masa de desbalance	17
3.3. Modelado del sistema rotor-cojinete	18
3.3.1. Modelado del disco	18
3.3.2. Modelado del eje	19
3.3.3. Modelado de los soportes	23
3.3.4. Modelado de la masa de desbalance	23
3.3.5. Ecuación general del sistema rotor-cojinete.	24
3.4. Análisis modal (prueba de impacto)	25
3.5. Balanceo de rotores	26
4. Identificación algebraica	30
4.1. Identificación algebraica	30
4.2. Sistema rotor-cojinete con Múltiples Grados De Libertad (MGDL)	32
4.2.1. Consideraciones experimentales numéricas	34
4.3. Punto pesado (Desbalance)	44
4.4. Identificación algebraica con punto pesado	45
5. Identificación algebraica (Experimental)	49
5.1. Banco experimental rotor-cojinete tipo Jeffcott	49
5.1.1. Diagramas de Bode y Fase	50
5.2. Metodología de identificación de los parámetros del desbalance	51
5.2.1. Forma modal	54
5.3. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Vector efecto)	55
5.4. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Punto pesado)	58
5.5. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Vector efecto y Transformada de Fourier)	60
5.5.1. Acondicionamiento de señales experimentales (FFT)	61
5.5.2. Conclusión de la identificación algebraica (punto pesado y vector efecto)	76
5.6. Referencia del sistema para la identificación.	78
5.7. Identificación de la posición angular del desbalance para el balanceo modal del rotor experimental	80
6. Conclusiones	89
6.1. Trabajos futuros	90
Bibliografía	91
A. Anexos	94
A.1. Identificación de los parámetros del desbalance	94

Índice de figuras

3.1. Sistema masa-resorte	10
3.2. Sistemas con distintos grados de libertad	11
3.3. Representación de un sistema real.	11
3.4. Discretización de un elemento	12
3.5. Partes principales de un sistema rotor-cojinete	12
3.6. Ángulos de Euler	13
3.7. Marcos de referencia del disco sobre un eje flexible giratorio [1]	14
3.8. Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en el eje [1].	16
3.9. Rigidez y amortiguamiento en los soportes [1].	17
3.10. Masa de desbalance [1].	18
3.11. Elemento finito tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo [1].	19
3.12. Esquema de prueba de impacto con el martillo de impacto.	25
4.1. Modelo rotor-cojinete	32
4.2. Respuesta vibratoria resultante del sistema correspondiente al nodo 6 en un intervalo de velocidad de 0 – 30000 rpm	33
4.3. Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.	35
4.4. Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.	35
4.5. Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.	36
4.6. Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.	36
4.7. Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.	37
4.8. Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.	38
4.9. Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.	39
4.10. Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.	39
4.11. Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.	40
4.12. Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.	40

4.13. Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.	41
4.14. Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.	42
4.15. Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.	42
4.16. Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.	43
4.17. Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.	43
4.18. Punto pesado	44
4.19. Desbalance de $10 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 348.3° a 1300 rpm	46
4.20. Desbalance de $20 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 22° a 1300 rpm	46
4.21. Desbalance de $30 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 112.5° a 1300 rpm	47
5.1. Esquema del rotor experimental Bently Nevada RK4 (mm).	49
5.2. Diagramas de Bode y Fase del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott correspondientes al nodo central.	50
5.3. Tacómetro del banco experimental Bently Nevada RK4.	51
5.4. Análisis espectral de la respuesta vibratoria.	52
5.5. Regeneración de la señal experimental.	53
5.6. Aproximación de desplazamientos a partir del factor de forma modal del sistema.	53
5.7. Esquema del cálculo de las rotaciones θ y ψ	54
5.8. Primera forma modal del banco experimental Bently Nevada RK4, del rotor de la Figura 5.1.	54
5.9. Banco experimental Bently Nevada RK4	55
5.10. Masa de $5.73 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m} \angle 180^\circ$ a 900 rpm	56
5.11. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa $2.604 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 900 rpm.	59
5.12. Análisis espectral de la respuesta vibratoria inicial V_0 a 1200 rpm	62
5.13. Análisis espectral de la respuesta vibratoria V_1 de la masa M_3 con posición de 225° y velocidad de 1200 rpm	63
5.14. Respuesta vibratoria vectorial del sistema de V_0 , V_1 y V_e	64
5.15. Regeneración de la señal experimental V_1 de la masa M_3 con posición de 225° y velocidad de 1200 rpm	64
5.16. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm.	65
5.17. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 480 rpm.	65
5.18. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 600 rpm.	66
5.19. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1140 rpm.	66
5.20. Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$)	68
5.21. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm.	69

5.22. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de $600 rpm$	69
5.23. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 135° y velocidad constante de $780 rpm$	70
5.24. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de $1200 rpm$	70
5.25. Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_2 ($1.9575x10^{-4} kg \cdot m$)	72
5.26. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 225° y velocidad constante de $480 rpm$	73
5.27. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 315° y velocidad constante de $600 rpm$	73
5.28. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de $780 rpm$	74
5.29. Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692x10^{-4} kg \cdot m$) con posición angular de 180° y velocidad constante de $1200 rpm$	74
5.30. Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_3 ($2.8692x10^{-4} kg \cdot m$)	76
5.31. Variación de las referencias de corte para las señales experimentales a partir de la señal del tacómetro.	78
5.32. Identificación algebraica de la posición angular variando la referencia de corte de las señales experimentales.	79
5.33. Identificación de la posición angular del desbalance global del rotor RK4 Bently Nevada a distintas velocidades.	80
5.34. Posición angular promedio del desbalance global.	81
5.35. Identificación de la posición angular del desbalance a partir de los diagramas polares de respuesta (metodología de Balanceo Modal).	82
5.36. Disco inercial del rotor Bently Nevada RK4.	83
5.37. Respuesta vibratoria del sistema debido a la masa de prueba de $0.1 g$ ($3x10^{-6} kg \cdot m$).	84
5.38. Diferencia de amplitud debido a la masa de balanceo de prueba de $3x10^{-6} kg \cdot m$ y posición angular de 315°	85
5.39. Corrección de la respuesta vibratoria del sistema para una masa de $0.3 g$ ($9x10^{-6} kg \cdot m$) y posición angular de 315°	86
5.40. Corrección de la respuesta vibratoria del sistema para una masa de balanceo corregida de $0.3 g$ ($9x10^{-6} kg \cdot m$) y posición angular de 337.5°	87
5.41. Respuesta vibratoria residual del sistema.	88

Índice de tablas

3.1. Ventajas del método de balanceo modal	27
3.2. Desventajas del método de balanceo modal	27
3.3. Ventajas del método de coeficientes de influencia	29
3.4. Desventajas del método de coeficientes de influencia	29
4.1. Propiedades mecánicas y geométricas del eje	33
4.2. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos	33
4.3. Propiedades de los soportes	33
4.4. Masas de desbalance de prueba	34
4.5. Masas de desbalance de prueba	45
4.6. Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $10x10^{-4}kg \cdot m$ a 1300 rpm	47
4.7. Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $20x10^{-4}kg \cdot m$ a 1300 rpm	48
4.8. Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $30x10^{-4}kg \cdot m$ a 1300 rpm	48
5.1. Propiedades mecánicas y geométricas del eje	49
5.2. Propiedades mecánicas y geométricas de los discos	49
5.3. Masas de desbalance de prueba	55
5.4. Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 900 rpm .	57
5.5. Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 1200 rpm .	57
5.6. Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 1500 rpm .	57
5.7. Masas de prueba de desbalance a 900 rpm	58
5.8. Masas de prueba de desbalance a 1200 rpm	58
5.9. Masa de prueba de desbalance a 1500 rpm	58
5.10. Masa de desbalance de prueba M_1	60
5.11. Masa de desbalance de prueba M_2	60
5.12. Masa de desbalance de prueba M_3	61
5.13. Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_1	67
5.14. Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_2	71
5.15. Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_3	75
5.16. Resultados de la identificación algebraica de los parámetros del desbalance variando la referencia de corte	79
5.17. Identificación de la posición angular del desbalance global	81

Nomenclatura

α	Posición angular de la masa de desbalance	<i>rad</i>
δ	Vector de desplazamiento nodal	
$[C]$	Matriz de amortiguamiento global	
$[K]$	Matriz de rigidez global	
$[M]$	Matriz de masa global	
ν	Relación de Poisson	<i>adimensional</i>
Ω	Velocidad angular del rotor	<i>rad/s</i>
ω	Velocidad angular	<i>rad/s</i>
$\omega_{\frac{R}{R_0}}$	Vector de velocidad instantánea	<i>rad/s</i>
ϕ	Rotación alrededor del eje y de R	<i>rad</i>
ψ	Rotación alrededor del eje Z de R_0	<i>rad</i>
ρ	Densidad	<i>kg/m³</i>
θ	Rotación alrededor del eje x_1	<i>rad</i>
a	Efecto cortante	<i>adimensional</i>
d	Excentricidad de la masa de desbalance	<i>m</i>
E	Módulo de Young	<i>Pa</i>
e_D	Espesor del disco	<i>m</i>
F_o	Fuerza axial	<i>N</i>
F_{q_i}	Fuerzas generalizadas	
G	Módulo cortante	<i>Pa</i>
I_D	Momento de inercia del disco	<i>kgm²</i>
L	Longitud	<i>m</i>

L_e	Longitud del elemento	m
L_f	Longitud de la flecha	m
m_b	Masa de balanceo	kg
M_D	Masa del disco	kg
m_p	Masa de desbalance de prueba	$kg \cdot m$
m_u	Masa de desbalance	kg
q_i	Coordenadas generalizadas	
R	Marco de referencia del cuerpo	
r_e	Radio de la sección transversal de la flecha	m
R_o	Marco de referencia inercial	
r_{eD}	Radio externo del disco	m
r_{iD}	Radio interno del disco	m
S_e	Área de sección transversal de la flecha	m^2
T	Energía cinética	J
t	tiempo	s
T_D	Energía cinética del disco	J
T_S	Energía cinética de la flecha	J
T_U	Energía cinética de la masa de desbalance	J
U	Energía de deformación	J
U_S	Energía de deformación de la flecha	J
V_0	Vibración inicial del sistema	m
V_1	Vibración inicial del sistema mas la influencia de la masa de prueba	m
V_e	Vibración correspondiente a la masa de prueba	m

Capítulo 1

Introducción

A causa de la producción en serie de las máquinas rotativas y la creación de la turbina de vapor, los primeros avances en el análisis de sistemas rotodinámicos se dieron a principios de 1800, siendo éste un punto de partida importante para la industria y la investigación ya que los requerimientos de la industria demandaban sistemas más grandes y potentes para efectuar procesos de producción. Uno de los pioneros fue Rankine quien descubrió y mencionó el fenómeno de velocidad crítica en 1860. Posteriormente De Laval demostró que es posible superar la velocidad crítica que Rankine mencionó en su trabajo. En ese entonces no se consideraban importantes los efectos presentes en los rodamientos, pero Beauchamp demostró lo contrario mediante experimentos aunados a la teoría de Reynolds. En 1900 De Laval y Parson trabajaron exitosamente con turbinas de vapor superando las velocidades críticas. Debido a que la industria requiere máquinas rotativas capaces de entregar mayor potencia y velocidad, el tamaño de la máquina rotativa se vio afectado directamente y con ello se presentaron distintos fenómenos derivados de la modificación del tamaño y velocidad de operación. Uno de los principales problemas observados es el desbalance debido a que en máquinas de mayor tamaño el desbalance genera grandes amplitudes de vibración lo cual representa un riesgo para los operadores. Durante el paso de los años se han expuesto distintas alternativas que corrigen los efectos ocasionados por el desbalance con el fin de lograr superar las velocidades críticas, las primeras propuestas están basadas en un análisis matemático con el cual se describe el comportamiento del sistema rotodinámico, algunas de las primeras propuestas fueron el contrarrestar el desbalance mediante la técnica de Balanceo por coeficientes de influencia, lo cual daba como resultado la disminución de las vibraciones en el sistema, sin embargo, el método requiere una gran cantidad de tiempo y numerosos rodados de prueba. A causa de la problemática de aplicar las diferentes metodologías reportadas en la literatura para el balanceo de rotores, se inició el desarrollo de técnicas alternativas para el control de vibraciones del sistema rotodinámico durante su operación (en línea). En la actualidad existen distintos dispositivos que efectúan el control de vibraciones en línea, entre éstos se encuentra la técnica de modificar los parámetros de rigidez del sistema, con lo que se logra modificar las frecuencias naturales del sistema permitiendo pasar sin problema por las velocidades críticas del rotor hasta llegar a su velocidad nominal sin necesidad de balancear el sistema. Actualmente se han hecho investigaciones de nuevas metodologías que toman como base el modelo dinámico de un sistema a partir del cual, es posible la identificación de diferentes parámetros del sistema durante su operación, esta metodología lleva por nombre Identificación algebraica de parámetros en línea, y que ha sido adaptada para el análisis

dinámico de las máquinas rotativas, demostrando su alta eficiencia en la identificación de parámetros desconocidos en el modelo, además de presentar robustez contra perturbaciones externas.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

- Implementar la técnica de identificación algebraica de parámetros en línea en la identificación del desbalance de un sistema rotor-cojinete experimental.

1.1.2. Objetivos específicos

- Implementar un rotor-cojinete experimental.
- Caracterizar el sistema rotor-cojinete experimental.
- Puesta en marcha del rotor experimental.
- Desarrollar la metodología de identificación del desbalance en línea y su aplicación al balanceo de un sistema rotor-cojinete experimental.

1.2. Alcances

- Balanceo de un rotor en uno o más modos de vibración.
- Validación del modelo matemático mediante simulación numérica y pruebas experimentales.
- Implementar una metodología de balanceo de un sistema rotor-cojinete mediante la identificación algebraica de parámetros en línea.

1.3. Metas

- Obtener una metodología de identificación del desbalance en sistemas rotodinámicos aplicando la técnica de identificación algebraica de parámetros en línea.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Desbalance

El uso de las máquinas rotativas está envuelto en el crecimiento de la industria, debido a que es una de las principales fuentes de generación de movimiento, esto la hace indispensable. Los avances más grandes de la máquina rotativa se dieron a principios del año de 1800 y a finales de éste, debido a su producción en masa y la creación de las turbinas de vapor. Uno de los pioneros en los sistemas rotodinámicos fue H. Jeffcott en 1919 quien observó un sistema simple conformado por un disco y un eje montados sobre dos cojinetes. Derivado de su análisis definió que si el centro de masa del disco no coincidía con el eje geométrico del sistema se definía como un sistema desbalanceado, de igual forma concluyó que el movimiento que describe el comportamiento tiene dos componentes una transitoria y una estable, basado en su análisis él encontró que el comportamiento está afectado directamente por el ángulo presente entre la fuerza de excitación (masa de desbalance) y la velocidad angular (ω), derivado del ángulo presente, el sistema tendrá tres estados [2] :

1. El ángulo presente entre la fuerza de excitación y la respuesta de vibración (desplazamiento) tiende a 0° cuando la velocidad angular disminuye y se aproxima a cero.
2. El ángulo presente entre la fuerza de excitación y la respuesta de vibración (desplazamiento) incrementa conforme ω también incrementa, cuando el ángulo es igual a $\frac{\pi}{2}$ se dice que el sistema entra en resonancia.
3. Para valores de ω mayores a la frecuencia natural, el ángulo presente entre la fuerza de excitación y la respuesta de vibración (desplazamiento) tiende a 180° .

En 1940 H. Taylor analizó una versión extendida del modelo Jeffcott, con el propósito de estudiar la inestabilidad de un turbo generador de dos polos. En su estudio Taylor observó que la inestabilidad de un rotor asimétrico se manifiesta como un incremento de la vibración, principalmente en la zona de resonancia, con base en su análisis encontró que la fuerza elástica experimentada por el rotor no se encuentra en fase con el desplazamiento, y que la fuerza elástica cuenta con dos componentes una radial y una tangencial [3].

Tiempo después en 1959 R. E. D. Bishop retomó la investigación de Jeffcott, encontrando que el comportamiento de un eje uniforme circular rotatorio contiene dos planos en los cuales se

presentan las fuerzas derivadas de la velocidad angular (ω), para el análisis él propuso el uso de una propiedad fundamental de los sistemas vibratorios, que se basa en que la distorsión total es igual a la suma de las distintas distorsiones en el eje, catalogando a este fenómeno como “modos”. Al igual que Jeffcott, dedujo 3 estados de comportamiento del eje.

- El eje presenta una distorsión mínima cuando la velocidad angular (ω) es menor que la velocidad crítica (ω_c).
- El eje presenta la mayor distorsión cuando la velocidad angular (ω) y la velocidad crítica (ω_c) son iguales.
- La distorsión presente en el eje disminuye cuando la velocidad angular (ω) es mayor a la velocidad crítica (ω_c).

Bishop reportó que el movimiento del eje al incrementar la velocidad de giro hasta superar la velocidad crítica, describe una forma espiral que crece conforme se incrementa la velocidad angular del sistema [4].

La continuación del análisis de R. E. D. Bishop en 1959 fue presentado por R. E. D. Bishop and G. M. L. Gladwell, en este estudio se analizó el balanceo de un eje flexible mediante el método de “Baja velocidad”, concluyendo que debido a la distribución de las masas colocadas se genera una deformación mayor comparada con la obtenida en la primera velocidad crítica de la máquina, por lo que tratar de balancear un eje flexible mediante la técnica de baja velocidad no es viable. Por otra parte, se reportó que el balanceo modo por modo es viable para un eje flexible, donde la metodología consiste en insertar masas específicas con sentido opuesto a la fuerza de excitación, asumiendo que conocen los planos en los que actúan las fuerzas de excitación de cada modo [5].

En 1966 A. G. Parkinson, efectuó un análisis del comportamiento vibratorio de una flecha asimétrica soportada mediante chumaceras flexibles, para su estudio Parkinson desarrolló un modelo matemático considerando una ecuación de movimiento por cada eje de inercia principal del rotor, logrando demostrar de forma simple, el efecto de la simetría del rotor en la respuesta dinámica del sistema. Como conclusión, Parkinson reportó que la solución del modelo matemático desarrollado es similar a la solución de un rotor simétrico, con la diferencia de la expresión resultante la cuenta con dos términos adicionales en función de la asimetría modal de la flecha [6].

Por otra parte J. F. Shortle and M. B. Mendel en 1996 presentan el desbalance de un sistema rotodinámico basado en los procesos de fabricación de los cilindros y las leyes físicas, como resultado de su investigación encontraron que un disco montado y soportado por dos cojinetes presenta dos estados de desbalance [7]:

- Desbalance estático : la no coincidencia del centro de masa, generando que el eje gire por efecto de la gravedad, sin la necesidad que la máquina rotativa esté en funcionamiento.
- Desbalance dinámico : es derivado de la no coincidencia de los ejes de inercia con los ejes geométricos de la máquina rotativa.

2.2. Control de vibraciones

Las vibraciones en máquinas rotatorias se debe principalmente al fenómeno del desbalance, fenómeno que se presenta cuando el centro geométrico del rotor no coincide con el centro de masa ocasionando amplitudes de vibración importantes que pueden dañar al sistema y sus componentes mecánicos. Lo anterior a dado lugar al desarrollo de métodos y diseño de dispositivos los cuales permiten suprimir las vibraciones del sistema a causa del desbalance. El proceso de balanceo en sistemas rotodinámicos, puede llevarse a cabo mediante control activo o control pasivo. En el control activo, se utilizan dispositivos que corrigen el desbalance en tiempo real aplicando fuerzas externas al sistema. Mientras que en el control pasivo se modifican las propiedades físicas de la máquina estando esta fuera de servicio y se basa principalmente en los métodos de balanceo modal y por coeficientes de influencia. Dentro de los sistemas rotodinámicos existen dos clases de rotores los cuales se dividen en: **simétrico** y **asimétrico** la principal diferencia que presentan uno respecto del otro es la rigidez a lo largo de la sección transversal del sistema la cual tiene un gran impacto en la respuesta vibratoria del sistema.

J. C. Ocampo presentó en 1996 la implementación del balanceo modal en un rotor asimétrico de dos grados de libertad, basándose en los diagramas polares de respuesta del sistema. Los diagramas polares del sistema se obtienen mediante un método de integración numérica considerando una frecuencia de excitación 1.5 veces mayor a la frecuencia natural variando los parámetros de:

- Posición angular de la fuerza de excitación.
- Amortiguamiento.
- Asimetría del rotor.

De los resultados obtenidos de simulaciones numéricas y pruebas experimentales concluyó que no es posible encontrar una metodología que considere el vector de vibración en resonancia, esto, por que el ángulo de fase de la respuesta de vibración del rotor es variable para diferentes posiciones angulares de la fuerza de excitación. Para el balanceo del rotor experimental, propuso un método alternativo que considera el punto de inicio de la curva del diagrama polar de respuesta, así como, la posición angular de $\pm 45^\circ$ grados para la fuerza de excitación, logrando suprimir la vibración hasta en un 90% de la vibración inicial registrada en el sistema [8].

Por otra parte en 2008 E. H. Marceliz desarrolló una metodología para el balanceo de rotores flexibles mediante el análisis modal experimental en su estudio, propuso la técnica de acoplamiento de impedancias para el balanceo del sistema rotodinámico, logrando balancear únicamente el primer modo de vibración ya que en el segundo y tercer modo se registró inestabilidad presentando grandes amplitudes de vibración. [9].

Un año después en 2009 J. M. González propuso una metodología para determinar un arreglo de pesos modales y efectuar el balanceo de un rotor asimétrico en más de un modo de vibración a la vez. La metodología está basada en el análisis modal y el método de coeficientes de influencia, donde el arreglo de pesos es utilizado para determinar los coeficientes de influencia en los ejes de $\pm 45^\circ$ del rotor, de los resultados obtenidos mediante simulación numérica, concluyó que el comportamiento dinámico del rotor se encuentra en función de la

simetría y el amortiguamiento del sistema, de igual forma reportó que los diagramas polares de respuesta del sistema son de forma elíptica, finalmente logró reducir la vibración inicial en un 80 % dependiendo del criterio de la localización de la posición de la fuerza de excitación del sistema [10].

Finalmente F. J. R. Moroyoqui desarrolló en 2016 un estudio experimental de un rotor asimétrico basándose en un modelo de dos grados de libertad el cual representa el comportamiento de un rotor simétrico, derivado de su estudio propuso una metodología basada en la construcción de arreglo de pesos modales tomando como referencia los diagramas polares de respuesta del sistema, logrando reducir la vibración del primer modo en un 90 %, mientras que para el segundo modo de vibración en 100 %, demostrando que la construcción de arreglos de pesos modales es factible para el balanceo de rotores asimétricos [11].

En 2018 J. Yao presentó dos técnicas para la estimación de los parámetros del desbalance (posición angular y magnitud) a partir de la técnica de expansión modal con el fin de disminuir los puntos de medición del sistema, la primera metodología consiste en la optimización de los parámetros del desbalance a partir de la técnica de mínimos cuadrados y la combinación de tres distintos algoritmos Antlion (ALO), Simulated annealing (SA) y fly fruit algorithm(FOA) disponibles en matlab, la segunda metodología considera la expansión modal del sistema y problemas inversos acoplada con la optimización de los algoritmos, como resultado demuestra que a partir de los parámetros identificados mediante las dos técnicas es capaz de reducir la amplitud de vibración del sistema en un 67 % [12].

Un año después A. Shrivastava y A. R. Mohanty desarrollaron una metodología basada en la técnica de estados de entrada y mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros del desbalance (posición angular y magnitud) presentando simulación numérica y validación experimental en un sistema rotor-cojinete con un disco inercial. La técnica considera la fluctuación en la velocidad de operación del rotor así como únicamente una fuerza de excitación correspondiente a la masa de desbalance del sistema [13].

De igual forma en 2019 A. Wang desarrolló un modelo basado en la técnica de Rayleigh para un sistema rotor-cojinete, el modelo requiere únicamente los desplazamientos de cuatro segmentos del sistema para estimar los parámetros del desbalance (posición angular y magnitud) sin la necesidad de superar la primera velocidad crítica del sistema, mediante pruebas numéricas logra obtener un error del 2 % en los parámetros del desbalance [14].

Paralelamente en 2019 D. Zou desarrolló un modelo de un sistema rotor-cojinete basado en la técnica de elemento finito y filtro Kalma para la estimación de los parámetros del desbalance (posición angular y magnitud), a partir de pruebas numéricas y experimentales logró demostrar que el modelo presenta gran robustez contra ruido aleatorio en la señales, de igual forma obtiene un error máximo en los parámetros del desbalance de forma experimental de 9.79 % en la magnitud y una diferencia máxima de 14.3° para la posición angular [15].

Como alternativa a los diferentes métodos de balanceo, se diseñaron y desarrollaron dispositivos capaces de aplicar fuerzas de corrección con el fin de contrarrestar las fuerzas derivadas del desbalance obteniendo una disminución en la respuesta vibratoria del sistema rotatorio en condiciones de resonancia.

En 2010 A. B. Ortega presentó un cojinete móvil basándose en el control activo, con el dispositivo propuesto, se generó un cambio de rigidez en el eje variando la longitud de la flecha logrando disminuir los efectos de las vibraciones durante las velocidades críticas en el sistema [16].

Un año después en 2011 J. A. R. Monares analizó el comportamiento de un rotor asimétrico soportado en uno de sus extremos por una chumacera con fluido magnetorreológico, mediante experimentación numérica él demostró que el incremento de la corriente (I) en los amortiguadores mitiga las vibraciones cerca de las velocidades críticas, pero de igual forma este cambia las velocidades críticas debido al incremento en la corriente, por lo que el amortiguador tiende a comportarse como un soporte rígido [17].

Finalmente E. E. Cruz desarrolló en 2015 el diseño y la construcción de una chumacera semiactiva con fluido magnetorreológico analizando de forma numérica y experimental el comportamiento de un rotor asimétrico. El modelo está basado en la teoría de lubricación hidrodinámica donde, la cedencia del fluido está en función de la intensidad del campo magnético. De los resultados obtenidos, reportó dos estados del comportamiento del fluido.

- Si no se aplicaba un campo magnético al fluido, éste se comporta como un fluido Newtoniano.
- Si se aplica un campo magnético al fluido, se forma un núcleo rígido y se incrementa el esfuerzo cortante de cedencia $\tau_o(H)$.

Tomando en cuenta el núcleo rígido formado por la aplicación del campo magnético, modificó la rigidez del sistema y de igual forma la respuesta de vibración del rotor asimétrico [18].

2.3. Balanceo activo con identificadores algebraicos

Los sistemas rotodinámicos de la actualidad han sufrido cambios en sus características geométricas y en las velocidades de operación, por lo cual presentan mas de una velocidad crítica antes de alcanzar su velocidad nominal. Implementar una técnica de balanceo mediante coeficientes de influencia, diagramas polares de respuesta etc, resulta complejo y tedioso, además de que requiere de una gran experiencia en sistemas rotodinámicos, a partir de las limitaciones de las técnicas de balanceo convencional surge la necesidad de generar nuevas metodologías que permitan corregir la respuesta vibratoria debido a un desbalance presente en el sistema con el mínimo rodado de pruebas y sin superar la primera velocidad crítica, una alternativa presente en la literatura es la técnica de identificación algebraica a sistemas rotodinámicos.

En 2013 F. B. Carbajal desarrolló un modelo de identificación algebraico basado en la teoría de la metodología de elemento finito, a partir del identificador propuesto, logró estimar los parámetros del desbalance en un rotor tipo Jeffcott con 3 grados de libertad, el identificador propuesto, requiere como datos de entrada los desplazamientos radiales cercanos al disco inercial del sistema, donde, para el control de las vibraciones utilizó una chumacera magnética con un control PD [19].

Un año después en 2014 M. A. Montiel desarrolló un identificador algebraico basado en el método de elemento finito. El sistema analizado consta de un eje con dos discos montados de

forma asimétrica, una suspensión convencional en un extremo, mientras que en el otro utiliza un cojinete de control activo, el identificador muestra de manera experimental la estimación de los parámetros de excentricidad de los dos discos ubicados en el eje en un tiempo aproximado a 0.5 s y toma como datos de entrada los desplazamientos laterales del eje[20].

En 2016 J. G. M. Larios implementó un identificador algebraico basado en la solución mediante el método de Newmark, el cual solo requiere como dato de entrada la respuesta vibratoria del sistema. El identificador propuesto, determina los parámetros de rigidez y amortiguamiento a diferentes velocidades de rotación, así mismo, de los resultados obtenidos durante la simulación numéricas determinó que el tiempo de estimación de los parámetros es menor a 0.1 s, finalmente corroboró el funcionamiento del identificador mediante la comparación de la respuesta experimental de un rotor tipo Jeffcott a velocidad constante [21].

Paralelamente a la investigación de J. G. M. Larios, J. C. Ocampo presenta un modelo matemático de un identificador algebraico en línea implementado en un sistema rotor-cojinete a velocidad constante, el modelo del identificador está basado en el elemento finito para sistemas rotatorios de múltiples grados de libertad, para ello se consideró un elemento tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo, el identificador requiere de la respuesta del sistema como dato de entrada para la identificación de los parámetros de desbalance (magnitud y posición angular de las masas) finalmente concluyó que el tiempo de respuesta del identificador oscila en un intervalo de 0.002 s [22].

Un año después en 2017 S. J. L. Damas desarrolló un identificador algebraico para un sistema rotor-chumacera presurizada, y así poder llevar a cabo la estimación de los coeficientes rotodinámicos de la chumacera, el modelo está basado en el método numérico de Newmark, posteriormente presentó resultados numéricos y experimentales en donde se valida el funcionamiento del identificador arrojando que el tiempo de estimación de los parámetros es de 0.1 s [23].

De igual forma en ese mismo año de 2017 C. F. G. Correa presenta el análisis de un rotor asimétrico implementando un disco de balanceo activo (DBA). La configuración del rotor que él analizó era de tipo Jeffcott variando la flecha del sistema entre una flecha simétrica y una flecha asimétrica, de igual forma presenta un identificador algebraico para la estimación de los parámetros del desbalance y posteriormente corregir el desbalance mediante el disco de balanceo activo (DBA), el cual es capaz de posicionar una masa a cierta excentricidad y posición angular con el fin del contrarrestar las fuerzas debidas a la masa de desbalance presente, concluyó que es posible estimar los parámetros el desbalance de un rotor asimétrico a partir de un identificador desarrollado para un rotor simétrico, ya que a bajas velocidades el comportamiento dinámico en ambos rotores son similares [24].

2.4. Conclusión del estado del arte

Las técnicas relacionadas con el análisis y control de vibraciones reportadas en la literatura, en su mayoría son complejas, tediosas y requieren de un criterio de interpretación basado en la experiencia en sistemas rotodinámicos. A partir del control de vibraciones es posible alargar la vida útil de un sistema rotodinámico y de igual forma prevenir posibles fallas a causa de las vibraciones mecánicas presentes, se debe mencionar que debido al incremento de los sistemas rotodinámicos en el sector industrial existe la necesidad de generar nuevas técnicas para el control y análisis de vibraciones, por lo cual el desarrollo de una técnica ba-

sada en la identificación algebraica en línea para la estimación de parámetros del desbalance es viable, ya que está presenta gran robustez a perturbaciones externas del sistema y es capaz de identificar parámetros desconocidos del sistema basándose en el modelo matemático que represente su comportamiento dinámico, y lo mejor de la identificación, es que está se realiza mientras el sistema rotodinámico se encuentre en operación (en línea).

2.5. Justificación

El uso de las máquinas rotativas se ha visto envuelto en la vida cotidiana desde hace más de 200 años, desde un simple motor eléctrico hasta una turbina de vapor. Uno de los sectores en donde los sistemas rotodinámicos sufren una alta demanda en cuanto a potencia entregada, horas de operación y velocidades angulares excesivamente altas, se encuentra en la industria, uno de problemas más críticos en los sistemas rotodinámicos es el desbalance, y se debe a la excentricidad entre el centro de masa con respecto al eje geométrico del sistema, lo que ocasiona que el sistema experimente grandes amplitudes de vibración mientras alcanza su velocidad de trabajo, esto sucede cuando el eje gira a una velocidad angular ω y ésta coincide con la velocidad crítica ω_c , generando así un incremento en la amplitud de las vibraciones, a este fenómeno se le conoce como resonancia. El efecto de la resonancia puede generar que la integridad de la máquina rotodinámica este comprometida ocasionando una falla estructural en el eje.

Dentro de la literatura existen distintas técnicas de balanceo de sistemas rotodinámicos (coeficiente de influencia, arreglo de pesos modales etc.) las cuales son muy efectivas, pero tiene la gran desventaja de que requieren una gran cantidad de tiempo invertido y varios rodados de prueba de la máquina, los paros y arranques así como el tiempo invertido del personal se ve reflejado de forma económica para la industria. Por otra parte, existe la alternativa de implementar un control de vibraciones mediante un dispositivo de control activo, el cual se encarga de mitigar las vibraciones del sistema durante el fenómeno de la resonancia variando los parámetros de masa o rigidez, aunque esta alternativa tiene la gran dificultad de que los dispositivos de control no pueden ser instalado en el sistema debido a la falta de espacio en el mismo, otra alternativa presente en la literatura es la identificación algebraica la cual ha demostrado ser aplicable a sistemas rotodinámicos dando excelentes resultados debido a que cuenta con una gran robustez contra perturbaciones externas y una rápida convergencia en los parámetros a identificar (masa de desbalance, excentricidad, rigidez y amortiguamiento de los soportes), por lo que el acoplamiento con un dispositivo de control de vibraciones (disco de balanceo activo (DBA)) daría como resultado una nueva y eficiente alternativa para el análisis de sistemas rotodinámicos y el control de vibraciones aplicando una masa de balanceo durante el funcionamiento de la máquina (en línea).

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Conceptos de vibraciones

3.1.1. Vibración.

Una vibración u oscilación se define como cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo, la teoría de la vibración es la encargada del estudio de los movimientos oscilatorios, así como de las fuerzas asociadas a dichos movimientos [25]. Los sistemas mecánicos vibratorios se encuentran conformados esencialmente por un dispositivo capaz de almacenar energía potencial (resorte), un elemento para conservar energía cinética (masa) y un elemento mediante el cual la energía se disipe (amortiguador). En la Figura 3.1 se muestra una configuración masa-resorte de un sistema mecánico

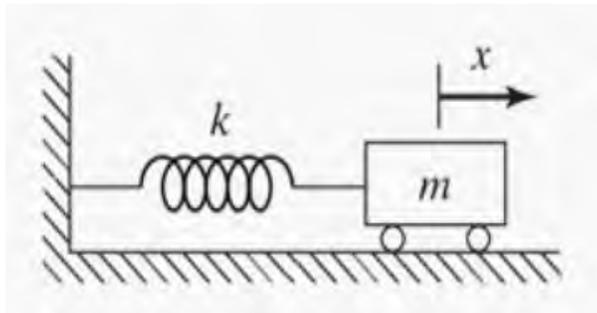
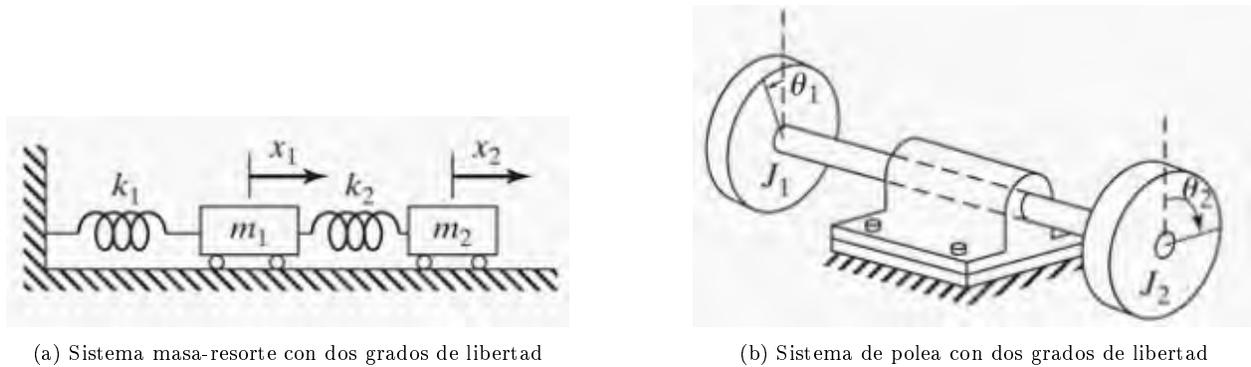


Figura 3.1: Sistema masa-resorte

3.1.2. Grados de libertad.

El número de grados de libertad de un sistema mecánico es igual al número de coordenadas independientes de los elementos del sistema, los grados de libertad de un sistema mecánico pueden ser clasificados en movimientos de traslación como el que presenta las masas en la Figura 3.2a las cuales son capaces de desplazarse sobre un riel de manera horizontal, de igual forma los movimientos del sistema pueden ser del tipo de rotación, claro ejemplo de ello se puede ver en el sistema de poleas de la Figura 3.2b en el cual las poleas son capaces de efectuar desplazamientos angulares con respecto al eje principal del soporte.



(a) Sistema masa-resorte con dos grados de libertad

(b) Sistema de polea con dos grados de libertad

Figura 3.2: Sistemas con distintos grados de libertad

3.1.3. Modelo matemático de un sistema.

El modelo matemático parte de la consideración del sistema de forma muy rústica considerando el mínimo número de elementos, con el fin de entender de manera elemental el comportamiento del sistema en la Figura 3.3a se muestra un sistema de martillo de forja el cual puede ser representado de manera simple mediante un sistema masa-resorte-amortiguador en la Figura 3.3b, posteriormente se genera un nuevo modelo incluyendo nuevos componentes como en la Figura 3.3c que describan de mejor forma el comportamiento de dicho sistema con el fin de llegar a un modelo que describa al sistema lo más cercano posible.

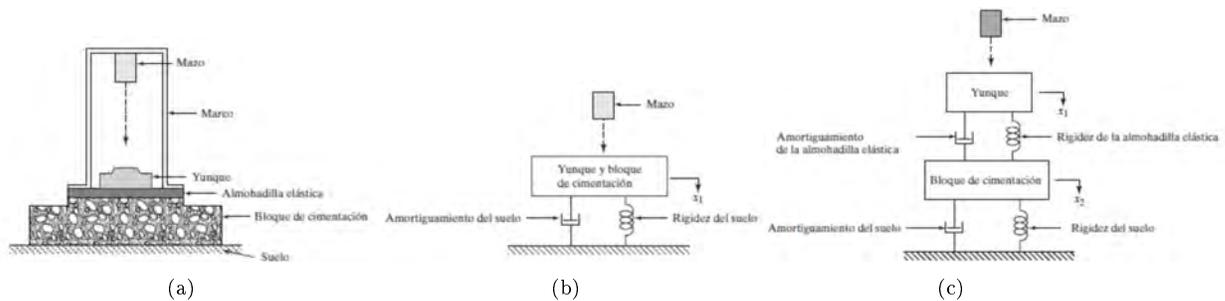


Figura 3.3: Representación de un sistema real.

3.1.4. Método de elemento finito

Existen distintas técnicas que logran interpretar de forma numérica el comportamiento dinámico de los sistemas mecánicos. Uno de los más usados en estos sistemas es la técnica de elemento finito, el método consiste en efectuar una discretización de un sistema complejo en elementos mas pequeños, los cuales se encuentran conectadas entre sí mediante puntos nodales logrando así reproducir de forma ajustada el sistema [26]. En la Figura 3.4 se muestra cuatro configuraciones desde un elemento finito hasta ocho elementos, si el número de elementos incrementa la precisión del análisis incrementara de igual forma pero el análisis sera mas complejo.

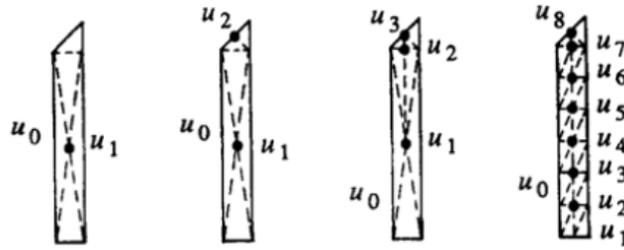


Figura 3.4: Discretización de un elemento

3.2. Partes de un rotor-cojinete

Los componentes básicos de un sistema rotor-cojinete principales son: el disco, el eje y los sellos, y de forma adicional las fuerzas generadas a causa de las masas de desbalance [21]. Se necesita determinar la energía cinética, así como la energía de deformación del sistema, de igual forma basándose en el trabajo virtual se obtienen las fuerzas de los rodamientos o sellos en el sistema, todos estos factores sirven para caracterizar el sistema rotor-cojinete. Las partes de un rotor-cojinete se muestra en la Figura 3.5

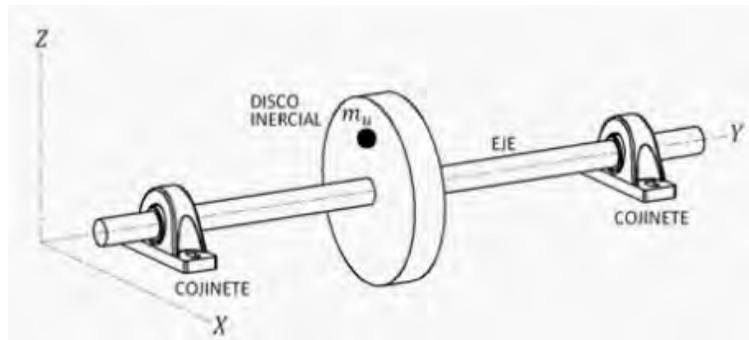


Figura 3.5: Partes principales de un sistema rotor-cojinete

El eje de la máquina rotativa puede ser de sección transversal simétrica o asimétrica, así como el disco hace referencia a la representación de los álabes de una turbomáquina, las propiedades de amortiguamiento y rigidez se relacionan con los soportes del sistema, el término m_u representa la masa de desbalance debido a la no coincidencia del centro de masa con el eje geométrico del sistema.

Mediante la siguiente metodología se obtiene la ecuación general del sistema [24]

1. Se determina la energía cinética T , la energía de deformación U y el trabajo virtual de las fuerzas externas para los elementos que conforman el sistema.
2. Se aplica la ecuación de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento para cada uno de los elementos.

La ecuación de Lagrange está definida como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = Fq_i \quad (3.1)$$

Donde:

N ($1 \leq i \leq N$) es el número de grados de libertad del sistema.

q_i son las coordenadas generalizadas.

Fq_i son las fuerzas generalizadas.

\dot{q}_i es la diferenciación con respecto al tiempo t .

T es la energía cinética.

U es la energía de deformación.

3.2.1. Ángulos de Euler

La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto en el espacio puede describirse usando tres coordenadas angulares conocidas como ángulos de Euler. Estas coordenadas están denotadas por ϕ , θ y ψ como se muestra en la Figura 3.6, el sistema de coordenadas XZY presente en la Figura 3.6 se puede transformar en un nuevo sistema de coordenadas xyz , con la ayuda de rotaciones de los ángulos ϕ , θ y ψ . Asimismo, a la línea de acción entre O y \mathcal{A} se le conoce como línea nodal [1].

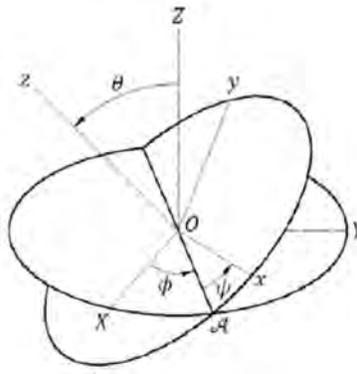


Figura 3.6: Ángulos de Euler

El sistema de coordenadas XYZ se encuentra fijo en el espacio mientras que el sistema xyz es el que está presente en el cuerpo rígido y éste recibe el nombre de ejes de cuerpo rígido.

3.2.2. El disco

El disco se modela como un cuerpo rígido por lo cual tiene únicamente energía cinética. La relación que existe entre el sistema coordenado XYZ y el xyz es a través del conjunto de los ángulos ϕ , θ y ψ . Por lo cual si el disco desea alcanzar cierta orientación el disco necesita rotar una cantidad ψ alrededor del eje Z , posteriormente una cantidad θ alrededor de del nuevo eje x , llamado x_1 y finalmente una cantidad ϕ alrededor del eje y . En la Figura 3.7 se presenta el disco rotando sobre un eje flexible.

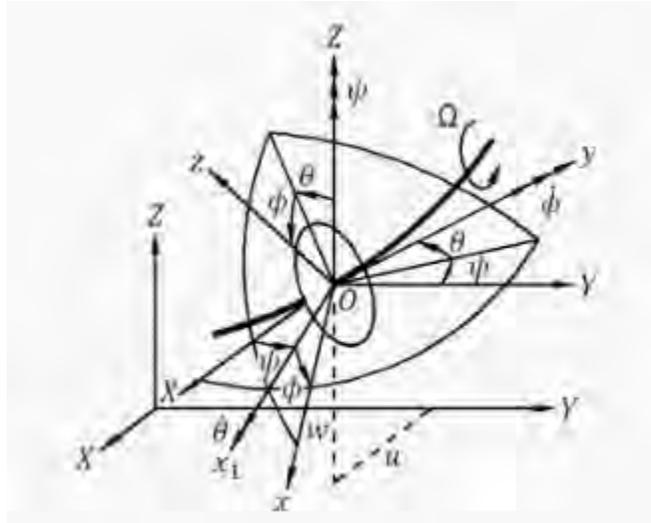


Figura 3.7: Marcos de referencia del disco sobre un eje flexible giratorio [1]

Donde O hace referencia al centro de masa del disco, $R_o (XYZ)$ representan un marco de referencia inercial, $R(x, y, z)$ representan un marco de referencia giratorio y que se encuentra fijo al disco, las coordenadas u y w determinan la ubicación en relación con los ejes de coordenadas X y Z respectivamente.

El vector de velocidad angular instantánea del marco de referencia xyz que se encuentra fijo al cuerpo es:

$$\omega_{\frac{R}{R_o}} = \dot{\psi}\hat{Z} + \dot{\theta}\hat{x}_1 + \dot{\phi}\hat{y} \quad (3.2)$$

Donde \hat{Z} , \hat{x}_1 y \hat{y} son vectores unitarios a lo largo de los ejes Z , x_1 y y respectivamente. Para el cálculo de la energía cinética del disco alrededor de su centro de masa O , se realiza mediante el marco de referencia R . De la ecuación 3.2 se aprecia que el vector de la velocidad angular instantánea $\omega_{\frac{R}{R_o}}$, se encuentra en función de las coordenadas de tres distintos marcos de referencia, por lo cual se debe de definir en función únicamente de las coordenadas del sistema fijo al cuerpo. Esto se logra a partir de transformaciones de rotación entre los sistemas coordenados. Posteriormente de efectuar la transformación correspondiente, el vector angular con respecto al marco de referencia R se expresa como:

$$\omega_{\frac{R}{R_o}} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La masa del disco se presenta como M_D y sus direcciones principales de inercia son x, y y z . Por lo tanto, el tensor de inercia en O es:

$$I_o = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde I_D es el momento de inercia del disco.

Por lo que la expresión para la energía cinética del disco según [1] es:

$$T_D = \frac{1}{2}M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x}\omega_x^2 + I_{D_y}\omega_y^2 + I_{D_z}\omega_z^2) \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 que representa la energía del disco puede simplificarse a partir de las siguientes consideraciones: el disco es simétrico por lo que $I_{D_x} = I_{D_z}$, de igual forma los ángulos θ y ψ son relativamente pequeños y debido a que el disco gira a una velocidad angular constante $\dot{\phi} = \Omega$, de esta forma basándose en estos criterios la ecuación 3.5 se convierte en :

$$T_D = \frac{1}{2}M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{D_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.6)$$

Donde el término $\frac{1}{2}I_{D_y}\Omega^2$ es una constante y representa la energía del disco girando a una velocidad Ω , mientras que el último término $\frac{1}{2}I_{D_y}2\Omega\dot{\psi}\theta$ hace referencia a los efectos giroscópicos (efecto de Coriolis).

3.2.3. El eje

El eje se representa como una viga con una sección transversal circular y se caracteriza por medio de las energías cinética y deformación. La energía cinética del eje proviene de una extensión de la energía del disco (Ecuación 3.6), tomando en cuenta un elemento de longitud L , la expresión para la energía cinética es:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho IL\Omega^2 + 2\rho IL\Omega^2 \int_0^L \dot{\psi}\theta dy \quad (3.7)$$

Donde ρ es la densidad del material, S es el área de la sección transversal de la viga, I es el momento de inercia del área de la sección transversal del eje a lo largo del eje neutro. La primera integral de la ecuación 3.7 es la expresión clásica de la energía cinética de un eje en flexión, la segunda integral es el efecto secundario de la inercia rotacional (viga de Timoshenko), el término $\rho IL\Omega^2$ es una constante, y la última integral representa el efecto giroscópico (Coriolis).

3.2.4. Energía de deformación

La energía de deformación del eje se obtiene tomando como referencia el sistema coordinado que se muestra en la Figura 3.8, donde C representa el centro geométrico del eje, $B(x, z)$ es un punto arbitrario sobre la sección transversal, de igual forma u^*, w^* son las componentes del desplazamiento del centro geométrico respecto a los ejes inerciales x y z , respectivamente. Considerando la deformación longitudinal del punto B , la ecuación general de la energía de deformación puede expresarse de la siguiente forma[1]

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.8)$$

Donde E es el módulo de Young, I_z e I_x hacen referencia a los momentos de inercia respecto a los ejes x y z respectivamente.

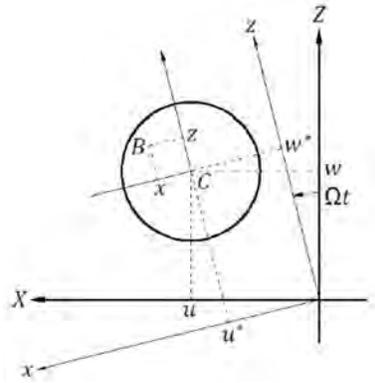


Figura 3.8: Coordenadas del centro geométrico C y un punto arbitrario B en el eje [1].

Para el caso de un eje sujeto a una fuerza axial constante F_o , la expresión de la energía de deformación se define como:

$$U_2 = \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.9)$$

Por lo que la energía de deformación total del eje es igual a la suma de $U_1 + U_2$ y se define como:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.10)$$

Para evitar términos periódicos dependientes del tiempo debido a las propiedades de los soportes, la energía de deformación del eje se expresa como una función de u y w , que son las componentes de los desplazamientos en R_o . Por lo cual se utilizan las siguientes relaciones:

$$u^* = u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \quad (3.11)$$

$$w^* = u \sin(\Omega t) - w \cos(\Omega t) \quad (3.12)$$

Las relaciones de las ecuaciones 3.11 y 3.12 se obtienen de la Figura 3.8, posteriormente si se sustituyen las relaciones 3.11 y 3.12 en la ecuación 3.10 se obtiene:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.13)$$

Finalmente, para el caso más común de la energía de deformación para un eje simétrico (es decir, $I_x = I_z = I$) la energía de deformación se convierte en:

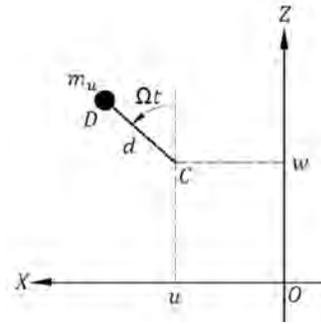


Figura 3.10: Masa de desbalance [1].

$$OD = \begin{Bmatrix} u + d \operatorname{sen} \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \operatorname{cos} \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Si se deriva con respecto del tiempo la ecuación 3.18, se obtiene:

$$V = \frac{dOD}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \operatorname{cos} \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \operatorname{sen} \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Por lo que entonces la energía cinética debido a la masa de desbalance es:

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \operatorname{cos}(\Omega t) - 2\Omega \dot{w} d \operatorname{sen}(\Omega t)) \quad (3.20)$$

De la ecuación 3.20 el término $\frac{m_u \Omega^2 d^2}{2}$ es una constante por lo cual no influye. La masa m_u es mucho más pequeña en comparación a la masa del rotor, por lo que la expresión de la energía cinética se puede escribir como:

$$T_u \cong m_u \Omega d (\dot{u} \operatorname{cos}(\Omega t) - \dot{w} \operatorname{sen}(\Omega t)) \quad (3.21)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a las relaciones anteriores, se obtendrá el llamado vector de fuerza centrífuga.

3.3. Modelado del sistema rotor-cojinete

3.3.1. Modelado del disco

En un nodo determinado el rotor tiene cuatro grados de libertad: dos desplazamientos u y w , y dos pendientes alrededor de los ejes X y Z , los cuales son: θ y ψ . Entonces, el vector de desplazamiento nodal δ del centro del disco es:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (3.22)$$

Por lo que aplicando la ecuación de Lagrange a la ecuación 3.22 se obtiene la energía cinética del disco:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \delta} = & \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \\
 & + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde la primera matriz es la clásica matriz de masa y la segunda matriz es la matriz de efectos giroscópicos (Coriolis).

3.3.2. Modelado del eje

El eje se modela como una viga con una sección transversal circular constante. El elemento finito cuenta con dos nodos. Por lo que las matrices son de octavo orden, incluyendo cuatro desplazamientos y cuatro pendientes, la Figura 3.11 muestra el esquema del elemento finito tipo viga.

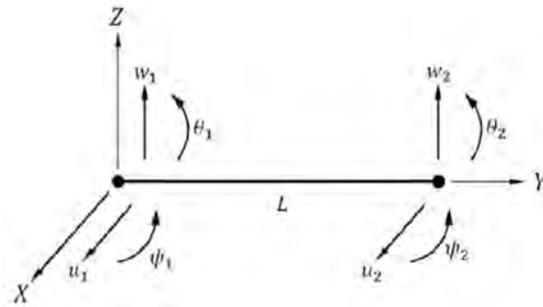


Figura 3.11: Elemento finito tipo viga con cuatro grados de libertad por nodo [1].

Donde la relación entre los desplazamientos y ángulos se encuentra dada por:

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{3.24}$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.25}$$

Con base en la Figura 3.11, el vector de desplazamiento nodal se define como:

$$\{\delta_e\} = \{u_1, w_1, \psi_1, \theta_1, u_2, w_2, \psi_2, \theta_2\}^T \tag{3.26}$$

El vector de la ecuación 3.26 incluye los desplazamientos correspondientes a los movimientos en las direcciones X y Z ; los cuales se definen como:

$$\{\delta_u\} = \{u_1, \psi_1, u_2, \psi_2\}^T \tag{3.27}$$

$$\{\delta_w\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^T \tag{3.28}$$

Donde al derivar las ecuaciones 3.27 y 3.28 con respecto al tiempo, se obtienen los vectores de velocidad $\{\dot{\delta}_e\}$ y aceleración $\{\ddot{\delta}_e\}$, respectivamente. Por otra parte, el elemento finito se construye a partir de las siguientes relaciones:

$$u = N_1(y) \delta_u \quad (3.29)$$

$$w = N_2(y) \delta_w \quad (3.30)$$

Donde $N_1(y)$ y $N_2(y)$ son las funciones de desplazamiento (funciones de forma o de interpolación) típicas de una viga en flexión, y se definen como:

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.31)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (3.32)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.29 y 3.30 en la ecuación 3.7, se obtiene la energía cinética del eje, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_e = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy \\ & + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En la ecuación 3.33, se sustituyen las funciones de desplazamiento, ecuación 3.31 y 3.32, y se efectúan sus derivadas correspondientes, así como sus integraciones de cada término obteniendo la energía cinética del eje, la cual se expresa como:

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T [M_1] \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T [M_2] \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T [M_3] \delta \dot{u} \\ & + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T [M_4] \delta \dot{w} + \Omega^2 \delta \dot{u}^T [M_5] \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donde las matrices $[M_1]$ y $[M_2]$ corresponden a las matrices de masa, $[M_3]$ y $[M_4]$ representan la influencia del efecto secundario de la inercia rotacional y $[M_5]$ proporcionan los efectos giroscópicos.

De la aplicación de la ecuación de Lagrange (1) en la ecuación 3.34 se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_T + M_R] \{\ddot{\delta}_e\} + [C_e] \{\dot{\delta}_e\} \quad (3.35)$$

Donde $[M_T]$ y $[M_R]$ se construyen a partir de las matrices $[M_1]$, $[M_2]$ y $[M_3]$, $[M_4]$ respectivamente, la matriz $[C_e]$ se obtiene de $[M_5]$, mientras que $[M_T]$ y $[M_R]$ representan las matrices de masa consistentes para los movimientos de traslación y rotación respectivamente, y se definen como:

$$[M_T] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[M_R] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Donde ρ es la densidad volumétrica del material, S es el área de la sección transversal, L es la longitud del elemento finito, e I es el segundo momento de área del elemento. Asimismo, la matriz $[C_e]$ representa la matriz de efectos giroscópicos y está en función de la velocidad de rotación del rotor Ω , por lo que se define como [1]:

$$[C_e] = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Por otra parte, la energía de deformación del eje se obtiene sustituyendo las ecuaciones 3.31 y 3.32 en la ecuación 3.14 por lo que ésta se puede escribir:

$$U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \\ + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \quad (3.39)$$

En la ecuación 3.39 se sustituyen las funciones de desplazamiento 3.31 y 3.32, se efectúan sus derivadas correspondientes y se integra cada uno de los términos, por lo que la energía cinética del eje se expresa de la siguiente forma:

$$U_e = \frac{1}{2} \delta u^T [K_1] \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T [K_2] \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T [K_3] \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T [K_4] \delta w \quad (3.40)$$

Donde $[K_1]$ y $[K_2]$ corresponden a las matrices clásicas de rigidez, mientras que $[K_3]$ y $[K_4]$ son las matrices de rigidez a causa de la fuerza axial.

De la aplicación de la ecuación de Lagrange 3.1 en la ecuación 3.40 se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = [K_0] \{\delta_e\} \quad (3.41)$$

con:

$$[K_0] = [K_e] + [K_F] \quad (3.42)$$

Donde $[K_0]$ es la rigidez total del elemento viga, $[K_e]$ representa la rigidez del eje a flexión y se construye a partir de las matrices $[K_1]$ y $[K_2]$ y de la consideración del efecto cortante en el elemento finito tipo viga, mientras que $[K_F]$ representa la rigidez axial del eje y se obtiene de las matrices $[K_3]$ y $[K_4]$. Las matrices $[K_e]$ y $[K_F]$ se definen como [1]:

$$[K_e] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$[K_F] = \frac{F_o}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Donde E es el módulo de Young del material y a es el efecto cortante, este último se determina como:

$$a = \frac{12EI}{GS_e L^2} \quad (3.45)$$

Siendo G el módulo a cortante, que se define como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.46)$$

Donde ν es la relación de Poisson del material.

3.3.3. Modelado de los soportes

Las expresiones de trabajo virtual para los soportes están dadas por las ecuaciones 3.15 y 3.16, las cuales se pueden expresar como [1]:

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (3.47)$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (3.48)$$

Si se considera que $F_\theta = F_\psi = 0$ entonces, el vector de fuerzas que actúa sobre el eje se define como:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Donde la primera matriz de la ecuación 3.49 corresponde a la matriz de rigidez de los soportes, mientras que la segunda corresponde a la matriz de amortiguamiento viscoso y generalmente son asimétricas, donde sus términos pueden variar de manera significativa en función de la velocidad de rotación del sistema.

3.3.4. Modelado de la masa de desbalance

Aplicando a la ecuación 3.1 de Lagrange a la ecuación 3.21 se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen } \Omega t \\ \text{cos } \Omega t \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Por otra parte, si el vector de desplazamiento se expresa como:

$$\{\delta_u\} = \{u, w\}^T \quad (3.51)$$

La ecuación 3.50 corresponde a las fuerzas producidas por una masa de desbalance localizada en una posición angular α con respecto al eje Z en un tiempo $t = 0$ y se puede expresar como:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = F_2 \text{sen}(\Omega t) + F_3 \text{cos}(\Omega t) \quad (3.52)$$

Donde F_2 y F_3 son las fuerzas producidas a causa de la masa de desbalance en los ejes X y Z respectivamente, las cuales se definen como:

$$F_2 = m_u d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{cos}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

$$F_3 = m_u d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \text{cos}(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

3.3.5. Ecuación general del sistema rotor-cojinete.

Como resultado de la aplicación de Lagrange a las ecuaciones de energía potencial y cinética que rigen el comportamiento de los componentes de un rotor, se obtiene la ecuación general de movimiento de un sistema rotodinámico que se puede expresar como:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C(\Omega)] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{F(t)\} \quad (3.55)$$

con:

$$F(t) = F_1 + F_2 \sin(\Omega t) + F_3 \cos(\Omega t) + F_4 \sin(s\Omega t) + F_5 \cos(s\Omega t) \\ + F_6 \sin(\omega t) + F_7 \cos(\omega t) \quad (3.56)$$

Donde $\{\delta\}$ es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales del sistema, mientras que $[M]$ es la matriz de masa del sistema, $[C(\Omega)]$ es la matriz de amortiguamiento que incluye los efectos giroscópicos en función de la velocidad de rotación y $[K]$ es la matriz de rigidez, por otra parte $\{F(t)\}$ es el vector de fuerza, que puede incluir fuerzas constantes (F_1), fuerzas generadas por masas de desbalance (F_2 y F_3), fuerzas asíncronas (F_4 y F_5) y fuerzas armónicas fijas en el espacio (F_6 y F_7).

3.4. Análisis modal (prueba de impacto)

El análisis modal mediante la prueba de impacto es una de las formas más rápidas de conocer las frecuencias naturales, así como los modos de vibración correspondiente a cada frecuencia natural del sistema. Esta técnica requiere de transductores de fuerza y de movimiento tales como el martillo de impacto y un acelerómetro, en la Figura 3.12 se muestra el esquema de una prueba de análisis modal experimental.

Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. La mayoría de los sistemas tienen n cantidad de modos de vibración los cuales pueden presentarse durante su operación, es decir que una máquina rotativa puede presentar uno o más modos durante el tiempo que necesita para alcanzar su velocidad de operación. Algunos fenómenos que pueden originar errores en el análisis de la respuesta del sistema debido a un impacto con el martillo se deben principalmente a:

- Ruido en la señal: debido a un falso en los cables que envían la señal al sistema de adquisición y análisis, o incluso debido a una excitación independiente al martillo de impacto.
- Tiempo de muestreo: debido a una selección muy pequeña del tiempo de muestreo puede omitirse una parte del sistema lo cual genera que el análisis de la respuesta sea incompleto.
- Condiciones de frontera: el tipo de conexión como sujeción o empotramiento del sistema debe tomarse en cuenta, de lo contrario, los resultados tendrán una gran diferencia al no elegir la condición indicada.

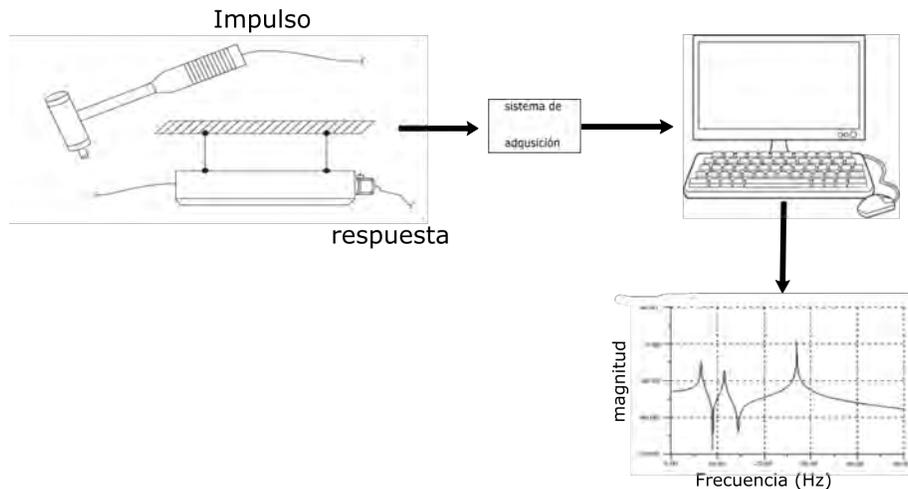


Figura 3.12: Esquema de prueba de impacto con el martillo de impacto.

3.5. Balanceo de rotores

Las máquinas rotativas sufren de distintos problemas durante su operación tales como desalineamiento, fractura o desbalance. El desbalance es ocasionado por la no coincidencia del centro geométrico del sistema y su centro de masa, esto genera que el sistema sufra de grandes amplitudes de vibración durante su operación lo cual puede derivar en una deformación permanente del eje o incluso la ruptura del mismo.

Existen distintas técnicas para corregir el desbalance en una máquina rotativa pero las más usadas son: balanceo modal y balanceo por coeficientes de influencia, en seguida se describen los métodos, así como las ventajas y desventajas de cada uno.

Balanceo modal

El método de balanceo modal se basa en el análisis de las señales de respuesta del rotor, que generalmente se representan en un diagrama polar, también llamado de Nyquist o diagrama de Argand. En este diagrama se gráfica la señal de vibración (generalmente desplazamiento contra ángulo de fase) en un recorrido a través del rango de velocidad de la máquina. Para implementar el método de balanceo modal, se debe identificar los vectores de vibración en resonancia para cada uno de los diagramas polares, debido a esto el método no es fácil de automatizar y de programar debido a que requiere de gran experiencia por parte del analista. La selección de esos pesos debe ser tal que no afecte negativamente el estado de desbalance de otros modos de vibración, lo cual puede expresarse de la siguiente forma:

$$\sum (\Phi_{ij}C_{mj}) = -\delta_{mi}D_m \quad (3.57)$$

Donde:

Φ_{ij} Es un factor de forma modal del plano de balanceo j para el modo i .

C_{mj} Es el peso de corrección para el modo m a colocarse en el plano de balanceo j

$-\delta_{mi}$ Es la delta de Kronecker. $\begin{cases} 0 & \text{para } m \neq i \\ 1 & \text{para } m = i \end{cases}$

q Número de planos de balanceo.

Es decir:

$$\begin{aligned} \sum (\Phi_{ij}C_{mj}) &= -D_m \text{ para } m = i \\ \sum (\Phi_{ij}C_{mj}) &= 0 \text{ para } m \neq i \end{aligned} \quad (3.58)$$

Con base en la ecuación anterior se permite que los pesos seleccionados C_{mj} , no afecten a otros modos diferentes al modo m de esta forma se puede efectuar el balanceo por este método [11]. Las ventajas que presenta este método de balanceo se presentan en las Tablas 3.1 y 3.2.

Tabla 3.1: Ventajas del método de balanceo modal

1. Los rodados de prueba pueden utilizarse como rodados de corrección.
2. Utiliza arreglos de pesos para afectar modos específicos.
3. Puede atacar varios modos a la vez.
4. Se obtiene mayor entendimiento del comportamiento del rotor.
5. Se aprovecha la experiencia del analista.
6. Las vibraciones pueden reducirse directamente si se hace uso de información extraída de modos bien identificados.

Tabla 3.2: Desventajas del método de balanceo modal

1. Se requiere de experiencia y conocimientos de dinámica de rotores.
2. Es necesario conocer la forma modal para configurar los arreglos de pesos.
3. La utilización de arreglos de pesos elimina la posibilidad de usar un programa basado en el método de coeficientes de influencia.

Método de coeficientes de influencia

La suposición básica del método por coeficientes de influencia es que la vibración del rotor en los planos de medición resulta de la distribución de pesos de desbalance. De este modo se toma $\{V\}$ como la respuesta del rotor, y se relaciona con la distribución de pesos de desbalance $\{P\}$ por medio de una matriz $[\vartheta]$ denominada de coeficientes de influencia, como se muestra de la siguiente forma:

$$\{V\} = [\vartheta] \{P\} \quad (3.59)$$

En donde:

$\{V\}$ Es un vector de p mediciones de vibraciones del rotor.

$[\vartheta]$ Es una matriz de $p \times f$ coeficientes de influencia.

$\{P\}$ Es un vector de h elementos de pesos de desbalance del rotor.

Donde h representa el número de planos de balanceo utilizados. Los datos de respuesta son tomados generalmente de más de una velocidad del rotor. De este modo $P = m \cdot n$, donde m es el número de velocidades de balanceo y n es el número de planos de medición. Los datos de respuesta del rotor se miden directamente y el procedimiento para determinar la matriz $[\vartheta]$ es de la siguiente forma. Un coeficiente de influencia se define como la relación entre la variación de la vibración de un rotor y el peso de prueba que la provoca, es decir:

$$\vartheta_{ij}^m = \frac{V_{ij}^m - V_{i0}^m}{PP_j} \quad (3.60)$$

Donde:

V_{ij}^m Representa la vibración medida en el plano i después de colocar el peso de prueba en el plano j .

V_{i0}^m Representa la vibración original medida en el plano i .

PP_j Representa al peso de prueba colocado en el plano de balanceo j .

m Es el número de velocidad de balanceo.

La construcción de la matriz de influencia $[\vartheta]$ mediante los resultados obtenidos de ϑ_{ij}^m se presenta de la siguiente forma.

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} \vartheta_{11}^1 & \vartheta_{12}^1 & \vartheta_{13}^1 \dots \vartheta_{1q}^1 \\ \vartheta_{21}^1 & \vartheta_{22}^1 & \vartheta_{23}^1 \dots \vartheta_{2q}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_{n1}^1 & \vartheta_{n2}^1 & \vartheta_{n3}^1 \dots \vartheta_{nq}^1 \\ \vartheta_{11}^2 & \vartheta_{12}^2 & \vartheta_{13}^2 \dots \vartheta_{1q}^2 \\ \vartheta_{21}^2 & \vartheta_{22}^2 & \vartheta_{23}^2 \dots \vartheta_{2q}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_{n1}^2 & \vartheta_{n2}^2 & \vartheta_{n3}^2 \dots \vartheta_{nq}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \vartheta_{n1}^m & \vartheta_{n2}^m & \vartheta_{n3}^m \dots \vartheta_{nq}^m \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Una vez que se han determinado los coeficientes de influencia y la respuesta del rotor, es posible conocer el vector de pesos de desbalance. Para ello se necesita calcular el vector de pesos de corrección que es el opuesto al vector $\{P\}$. Por lo que el planteamiento es el siguiente:

$$\{C\} = -[\vartheta]^{-1} \{V\} \quad (3.62)$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_q \end{pmatrix} = -[\vartheta]^{-1} \begin{pmatrix} V_{10}^1 \\ V_{20}^1 \\ V_{n0}^1 \\ V_{10}^2 \\ V_{20}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n0}^m \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Donde $C_j = (1, 2, 3 \dots n)$ son los pesos de corrección requeridos en el plano j a un ángulo de fase ϑ respecto a la posición de referencia para disminuir las vibraciones en las m a velocidades de balanceo. Para obtener la inversa de la matriz $[\vartheta]$, se requiere que la matriz sea cuadrada $h * h$, es decir que p (número de transductores de medición multiplicado por el número de velocidades de balanceo) sea igual a f y además que la matriz no sea singular.

Se debe considerar que debido a que no se usan varias velocidades, la matriz $[\vartheta]$ no es cuadrada y en esos casos es aplicada la técnica de mínimos cuadrados para obtener una solución. Las ventajas y desventajas que se presentan al considerar este método se muestran en la Tabla 3.3 y Tabla 3.4.

Tabla 3.3: Ventajas del método de coeficientes de influencia

1. Requiere un conocimiento mínimo sobre dinámica de rotores.
2. Balancea a dos o más velocidades simultáneamente.
3. Se programa y automatiza fácilmente.
4. Las mediciones de vibración pueden llevarse a cabo en velocidades muy cercanas a las críticas, con lo cual, puede reducirse considerablemente el desbalance.
5. Puede utilizarse una técnica de mínimos cuadrados para optimizar los resultados cuando se consideran varias velocidades

Tabla 3.4: Desventajas del método de coeficientes de influencia

1. Supone linealidad en la respuesta del rotor.
2. Requiere de un gran número de corridas de prueba para caracterizar el comportamiento dinámico del rotor.
3. En ocasiones será necesario rebasar las velocidades críticas para obtener los datos que se requieren.
4. El balanceo a una velocidad no garantiza un bajo nivel de vibración en todo el rango de operación.

Capítulo 4

Identificación algebraica

4.1. Identificación algebraica

La identificación algebraica es una técnica que toma como base el álgebra diferencial y el cálculo operacional para el desarrollo de estimadores, los cuales permiten la determinación de parámetros desconocidos de un sistema a partir de su modelo matemático. Una de las principales características de la identificación algebraica es proporcionar relaciones de identificación completamente independientes de las condiciones iniciales del sistema, dichas estimaciones se efectúan en línea y en tiempo continuo o discreto.

El modelo matemático de un sistema rotor-cojinete de múltiples grados de libertad con una masa de desbalance como fuerza de excitación, se define como:

$$[M] \left\{ \ddot{\delta} \right\} + [C(\Omega)] \left\{ \dot{\delta} \right\} + [K] \left\{ \delta \right\} = m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) + m_u d \Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha) \quad (4.1)$$

$$[M] \left\{ \ddot{\delta} \right\} + [C_1 + \Omega C_2] \left\{ \dot{\delta} \right\} + [K_1 + K_2] \left\{ \delta \right\} = m_u d \Omega^2 [\operatorname{sen}(\Omega t + \alpha) + \cos(\Omega t + \alpha)] \quad (4.2)$$

Donde $m_u d$ representa el desbalance presente con una distancia d con respecto del centro geométrico del eje y α su posición angular. $[M]$ es la matriz de masa global del sistema, $[C(\Omega)]$ es la matriz de efectos giroscópicos y amortiguamiento global y está conformada por la matriz $[\Omega C_2]$ que incluye los efectos giroscópicos en función de la velocidad de rotación y $[C_1]$ la cual contiene el amortiguamiento derivado de los soportes, $[K]$ es la matriz de rigidez global la cual está conformada por $[K_2]$ la cual representa la rigidez de la flecha y $[K_1]$ la cual contiene la rigidez derivada de los soportes, $\left\{ \delta \right\}$ es el vector que contiene todos los desplazamientos nodales del sistema y Ω la velocidad del rotor y se considera constante. Para obtener el identificador de la masa de desbalance y posición angular se multiplica la ecuación 4.1 por t^2 y se integra dos veces con respecto a t .

Donde:

$\int^{(2)} \varphi(t)$ son integrales iteradas en el tiempo de la forma $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n \dots d\sigma_1$, con $\int \varphi(t) = \int^t \varphi(\sigma) d\sigma$ y n un entero positivo. Resolviendo la ecuación 4.2 mediante integración por partes y posteriormente aplicando un tratamiento matemático se obtiene:

$$[M] \left(2 \int^2 \{\delta\} - 4 \int \{\delta\} t + t^2 \{\delta\} \right) + [C(\Omega)] \left(\int t^2 \{\delta\} - 2 \int^2 \{\delta\} t \right) + [K] \int^2 \{\delta\} t^2 = m_u d \Omega^2 \int^2 \{ \text{sen}(\Omega t + \alpha) + \cos(\Omega t + \alpha) \} t^2 \quad (4.3)$$

La ecuación 4.3 se puede representar en sistemas de ecuaciones lineales para cada nodo del rotor de la forma:

$$[A(t)] \{\Theta\} = \{b(t)\} \quad (4.4)$$

Donde $\{\Theta\} = \{m_u d_\eta = m_u d \cos \alpha, m_u d_\zeta = m_u d \text{sen} \alpha\}^T$ denota el vector de los parámetros de desbalance (magnitud y posición angular) a ser identificados. $[A(t)]$ es una matriz de 2x2 y $\{b(t)\}$ un vector de 2x1 respectivamente, los cuales contienen los grados de libertad de cada nodo y están dados por:

$$[A(t)] = \begin{pmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{12}(t) & a_{11}(t) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\{b(t)\} = \begin{Bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int^2 \text{sen}(\Omega t) t^2 \\ a_{11} &= \int^2 \cos(\Omega t) t^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\{b(t)\} = [M] t^2 \{\delta\} + \int [[C(\Omega)] t - 4[M] t] \{\delta\} + \int^{(2)} [2[M] - [C(\Omega)] t + [K] t^2] \{\delta\} \quad (4.8)$$

Cabe de señalar que $\{b(t)\}$ está en función de la respuesta vibratoria del rotor $\{\delta\}$, por lo que para la identificación de la magnitud y posición angular del desbalance se requiere la respuesta correspondiente a los grados de libertad de traslación y rotación de cada nodo del sistema.

De la ecuación 4.4 se puede observar que el vector es identificable de forma algebraica si, y solo si, las trayectorias o el comportamiento dinámico del sistema satisfacen la condición $\det[A(t)] \neq 0$. En general, esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño de tiempo $(t_0, t_0 + \epsilon]$, donde ϵ es un valor positivo y suficientemente pequeño.

De la solución propuesta en 4.4 se obtiene el modelo para el identificador en línea para la magnitud del desbalance y la posición angular del mismo.

$$\left. \begin{aligned}
 m_u d_\eta &= \frac{b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d_\zeta &= \frac{b_1 a_{12} - b_2 a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2} \\
 m_u d &= \sqrt{(m_u d_\eta)^2 + (m_u d_\zeta)^2} \\
 \alpha &= \cos^{-1} \frac{m_u d_\eta}{m_u d}
 \end{aligned} \right\} \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon] \quad (4.9)$$

Como se puede apreciar en 4.9, el identificador del desbalance en sistemas rotor-cojinete de múltiples grados de libertad, es independiente de las condiciones iniciales del sistema, además, solo depende del vector de desplazamientos del rotor para cada instante de tiempo. Asimismo, para la identificación del desbalance en un nodo i , se requiere conocer los dos desplazamientos laterales, así como, las pendientes nodales para ese nodo, asimismo, es necesaria la información de los nodos adyacentes $i - 1$ e $i + 1$ del sistema.

4.2. Sistema rotor-cojinete con Múltiples Grados De Libertad (MGDL)

En esta sección se realizó la identificación algebraica de forma numérica tomando como referencia el modelo presentado por Lalanne y Ferraris [1], el cual consta de un sistema rotor-cojinete con una discretización de 14 nodos en total, el rotor presenta tres discos inerciales montados a lo largo del eje los cuales están ubicados en los nodos 3, 6 y 11. El sistema se encuentra soportado por dos chumaceras ubicadas en los nodos 1 y 14, se considera una masa de desbalance colocada en el disco inercial del nodo 6, en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se presentan las características geométricas y mecánicas del sistema. En la figura 4.1 se muestra el esquema del sistema rotor-cojinete.

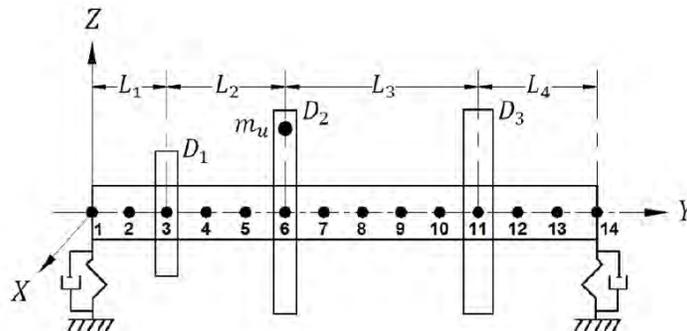


Figura 4.1: Modelo rotor-cojinete

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$r_e = 0.05 \text{ m}$
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_1 = 0.2 \text{ m} \quad L_2 = 0.3 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	$L_3 = 0.5 \text{ m} \quad L_4 = 0.3 \text{ m}$

Tabla 4.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos

Propiedades mecánicas	Geometría			
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Disco	D_1	D_2	D_3
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$e_D(m)$	0.05	0.05	0.06
$\nu = 0.3$	$r_{iD}(m)$	0.05	0.05	0.05
	$r_{eD}(m)$	0.12	0.20	0.20

Tabla 4.3: Propiedades de los soportes

Rigidez	Amortiguamiento
$k_{xx} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$	$c_{xx} = 5 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
$k_{zz} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}$	$c_{zz} = 7 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
$k_{xz} = k_{zx} = 0$	$c_{xz} = c_{zx} = 0$

En la Figura 4.2 se presenta el diagrama de Bode correspondiente al nodo 6 donde se encuentra la masa de desbalance con un valor de $2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y una posición angular de 0°

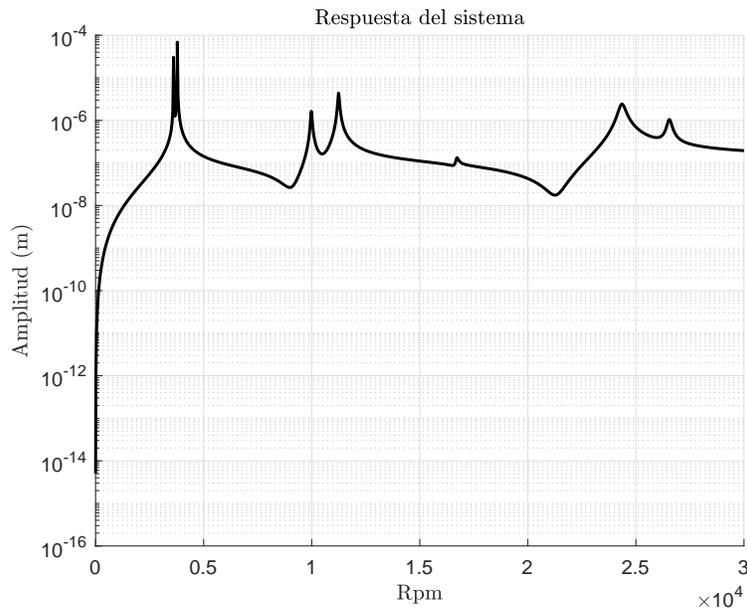


Figura 4.2: Respuesta vibratoria resultante del sistema correspondiente al nodo 6 en un intervalo de velocidad de 0 – 30000 rpm

4.2.1. Consideraciones experimentales numéricas

Para las pruebas numéricas se propone obtener la respuesta del sistema debido a una masa de desbalance de prueba o mejor dicho el vector efecto el cual corresponde únicamente a la respuesta debido a dicha masa de prueba de desbalance a velocidad constante.

La obtención del vector efecto es a través de una respuesta vibratoria inicial del sistema (V_0) la cual es ocasionada por un desbalance residual u otras fuerzas de excitación, posteriormente se agrega una masa de desbalance de prueba y se obtiene una nueva respuesta vibratoria (V_1), es posible obtener la respuesta vibratoria correspondiente a la masa de desbalance de prueba (V_e), a partir de la diferencia de la vibración V_1 y V_0 . La respuesta correspondiente a V_e es introducida al identificador algebraico junto con las propiedades geométricas y mecánicas del mismo para identificar los parámetros del desbalance tales como posición angular (α) y la fuerza de desbalance ($m_u d$). En la Tabla 4.4 se presentan las masas de desbalance de prueba propuestas para la experimentación numérica del identificador algebraico a velocidad constante.

Tabla 4.4: Masas de desbalance de prueba

Velocidad (rpm)	Posición angular α ($^\circ$)	Masas de desbalance de prueba ($kg \cdot m$)
1700	170	$0.9x10^{-4}$
		$0.5x10^{-4}$
		$1.5x10^{-4}$
		$1.9x10^{-4}$
		$0.1x10^{-4}$

Por otra parte se considera en la experimentación numérica los siguientes tres casos:

- Caso 1: Velocidad de operación de V_0 y V_1 iguales.
- Caso 2: Variación en la velocidad de operación de V_0 y V_1 y adición de ruido aleatorio a las señales numéricas.
- Caso 3: Variación de la velocidad de operación de V_0 y V_1 .

Los casos anteriores se consideraron con la finalidad de simular condiciones que se puedan presentar en las pruebas experimentales.

Velocidad de operación de V_0 y V_1 iguales

Para el primer caso se consideró que la respuesta vibratoria correspondiente a V_0 y V_1 son adquiridas a la misma velocidad de operación del sistema y que no existe fluctuaciones de velocidades en la respuesta vibratoria, así mismo, se consideró que la respuesta vibratoria del sistema se debe únicamente al desbalance presente.

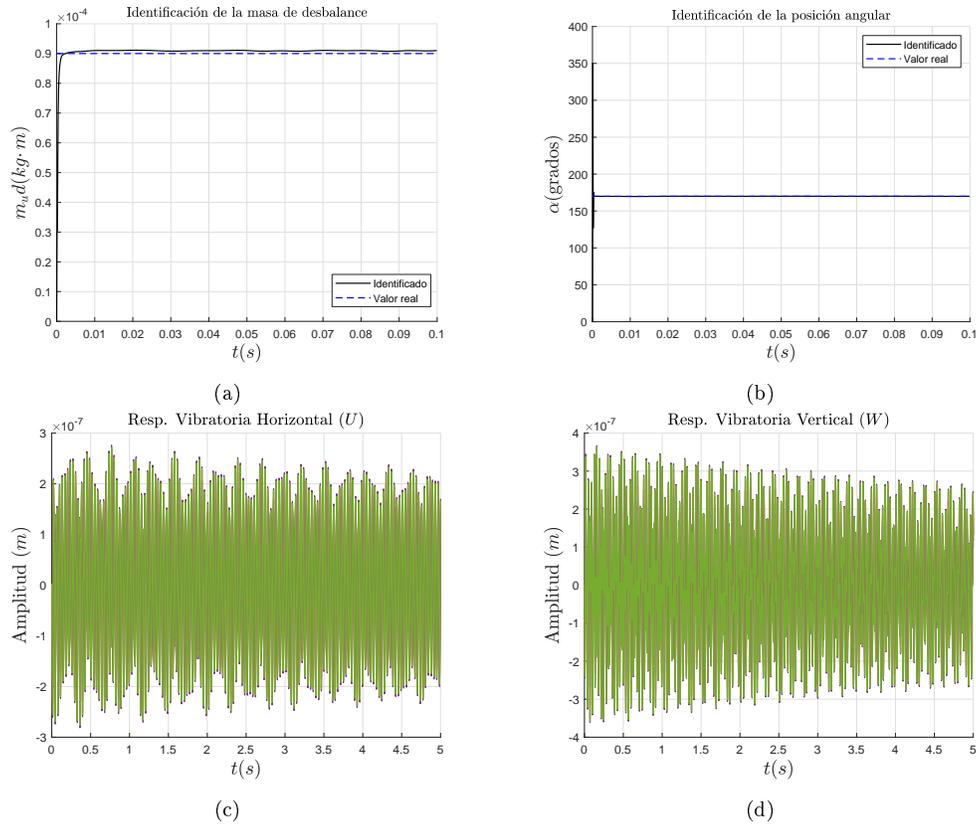


Figura 4.3: Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.

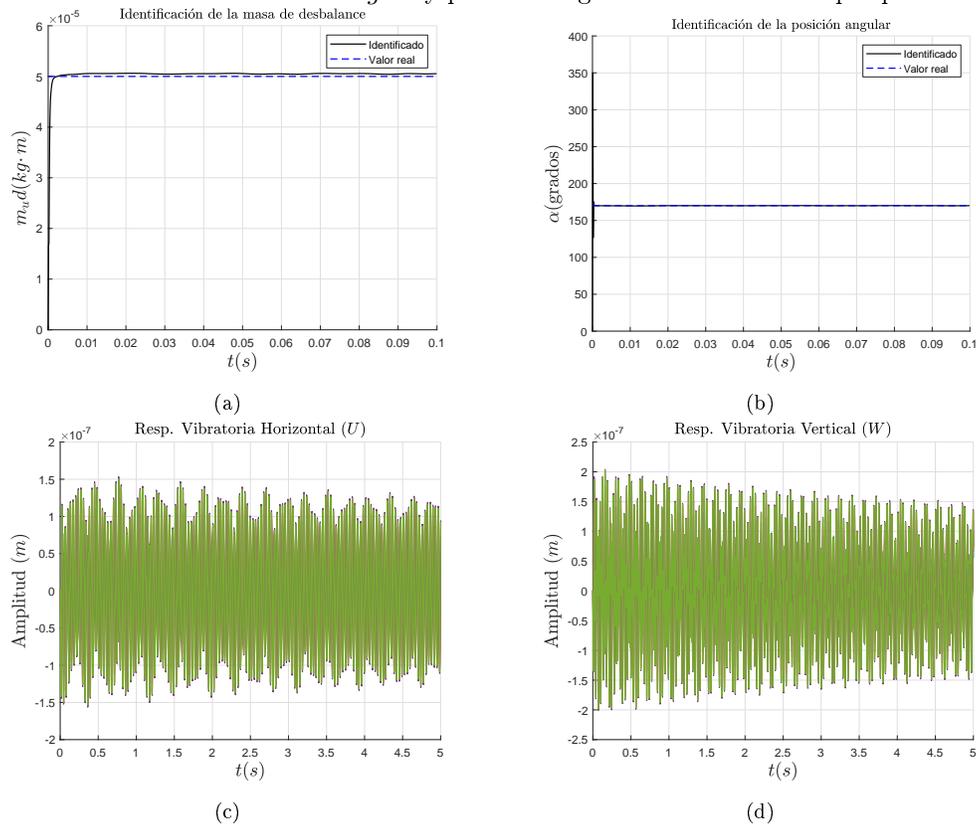


Figura 4.4: Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.

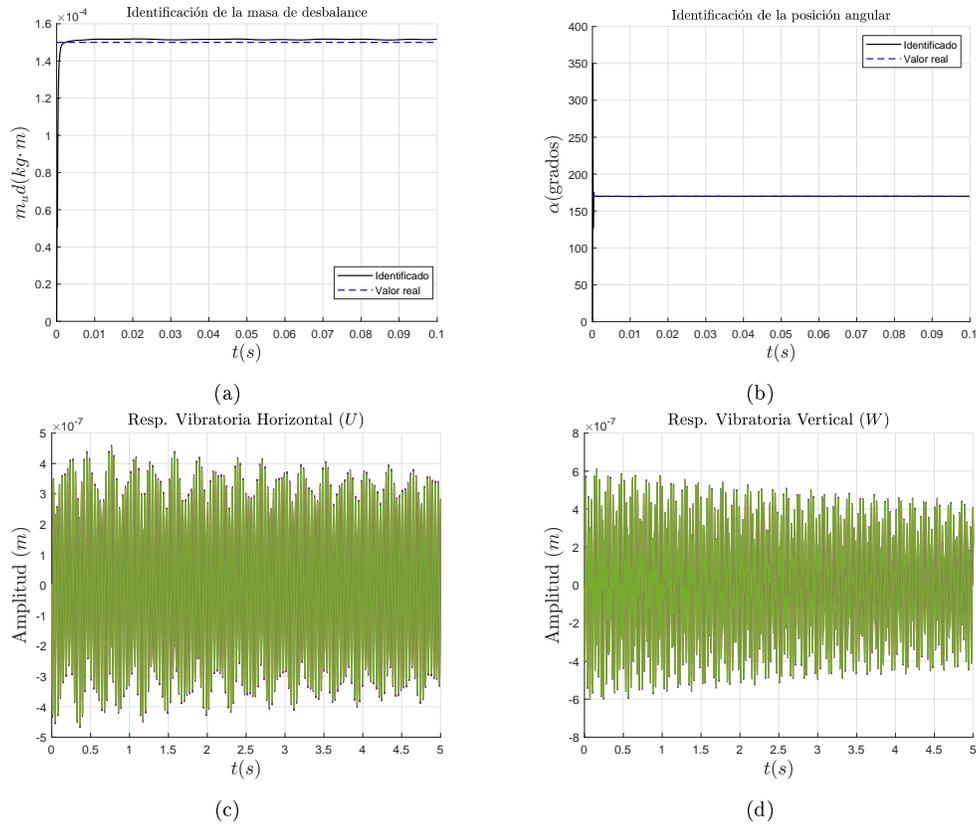


Figura 4.5: Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.

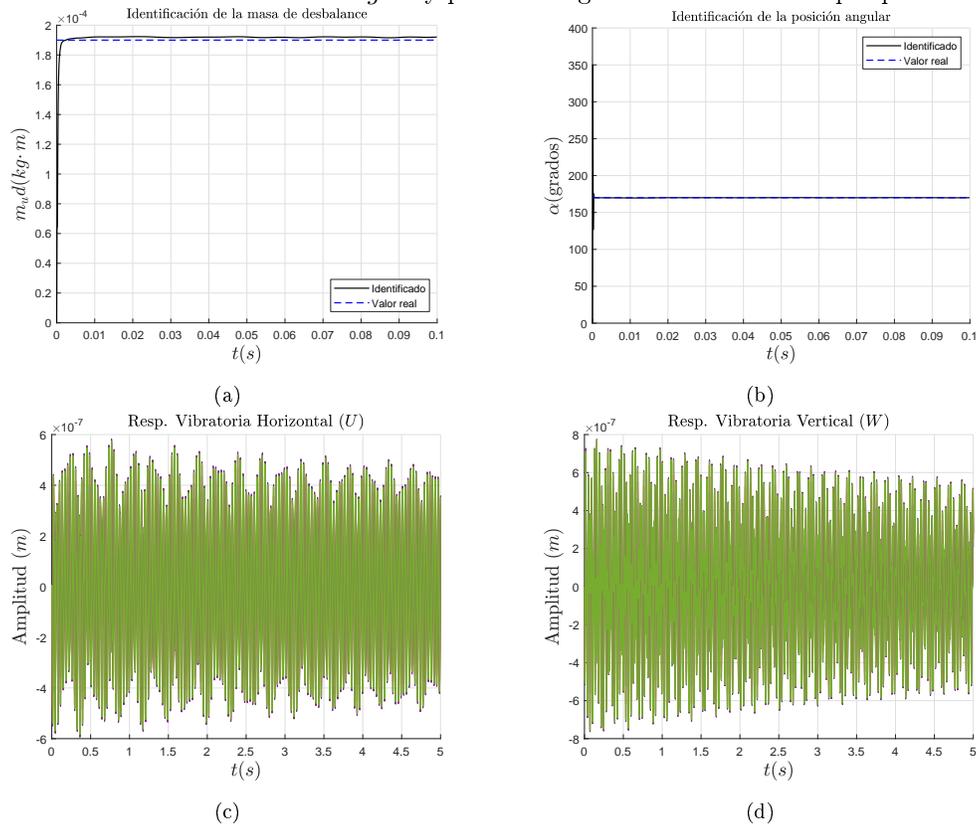


Figura 4.6: Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.

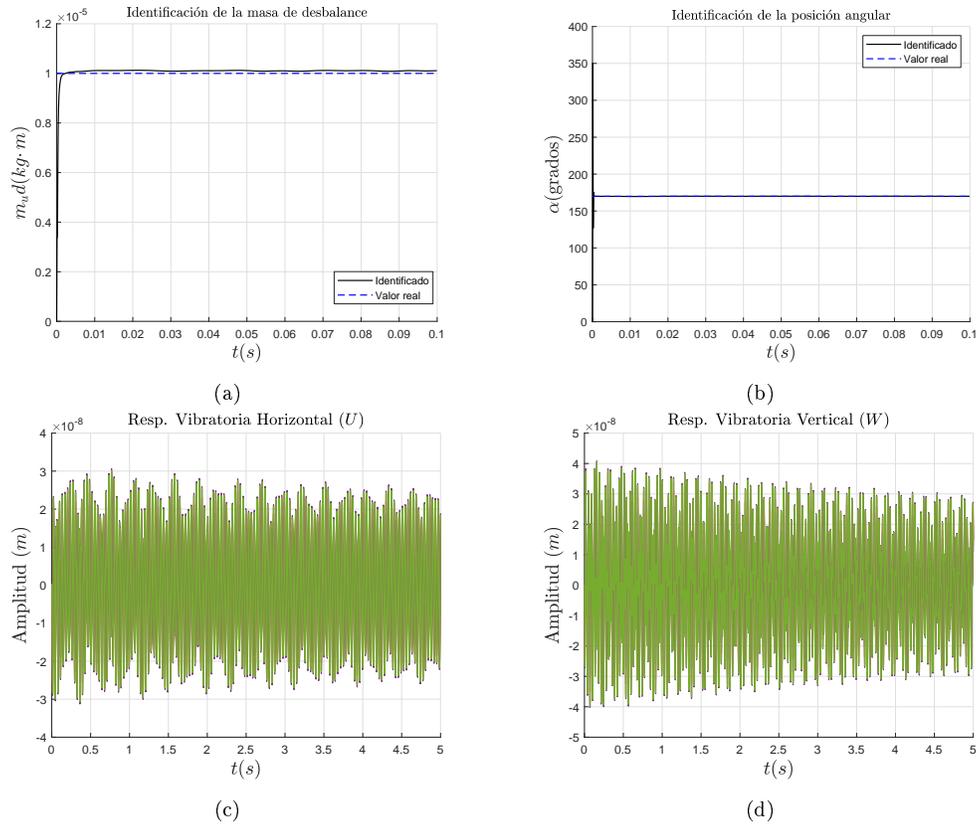


Figura 4.7: Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} \text{kg}\cdot\text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 1.

Discusión de caso 1 (Velocidad de operación de V_0 y V_1 iguales).

A partir del comportamiento del identificador de los parámetros del desbalance se define que para el caso en donde la respuesta vibratoria inicial V_0 y la respuesta vibratoria debido a la masa de prueba V_1 son adquiridas a una velocidad constante sin fluctuaciones a lo largo del tiempo es posible efectuar la resta $V_1 - V_0$ con el fin de eliminar la efecto ocasionado por un desbalance residual presente en el sistema y que el identificador logre converger a la masa de desbalance de prueba propuesto.

Variación en la velocidad de operación de V_0 y V_1 y adición de ruido aleatorio a las señales numéricas

Para este caso se consideró que existe una diferencia de velocidad en la adquisición de las señales correspondientes a V_0 y V_1 de esta forma se busca simular una variación ocasionada por el control de velocidad del banco experimental. La variación de velocidad consistió en obtener la respuesta de V_0 a 1700 rpm y la señal de V_1 a 1670 rpm de esta forma se genera una diferencia de 30 rpm entre las señales, de igual forma se agrega ruido blanco Gaussiano a las señales de V_0 y V_1 para simular el ruido electrónico ocasionado por la instrumentación de la parte experimental.

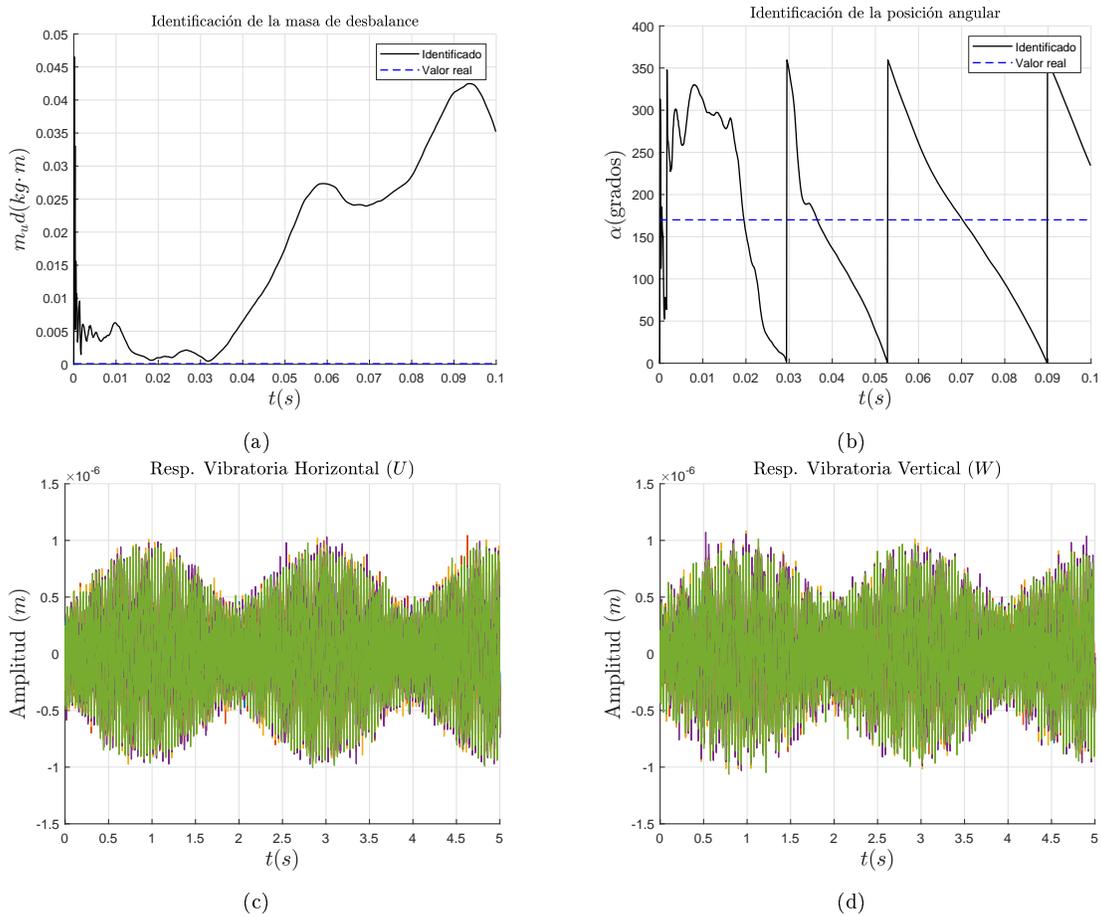


Figura 4.8: Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.

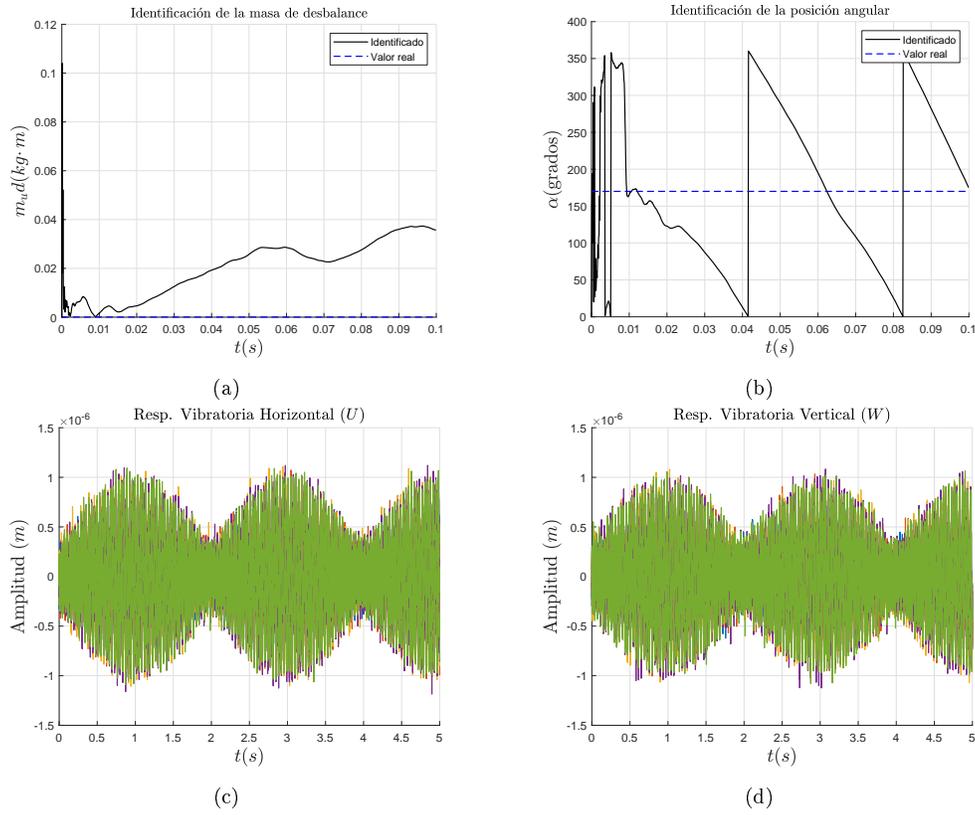


Figura 4.9: Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.

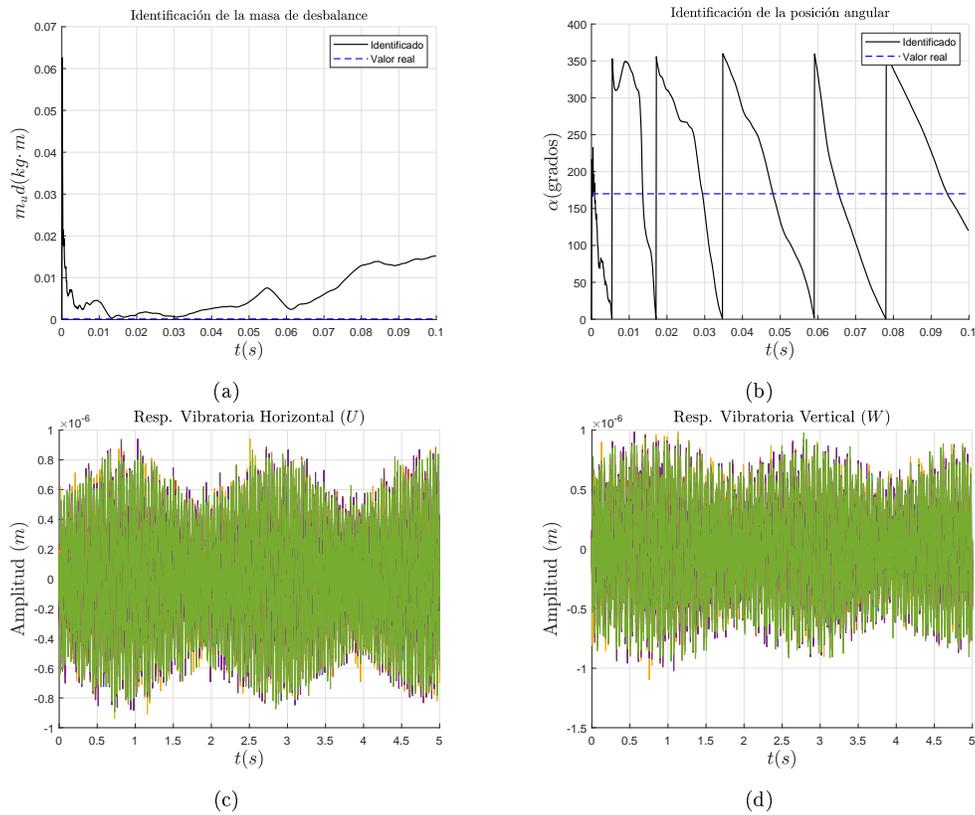


Figura 4.10: Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.

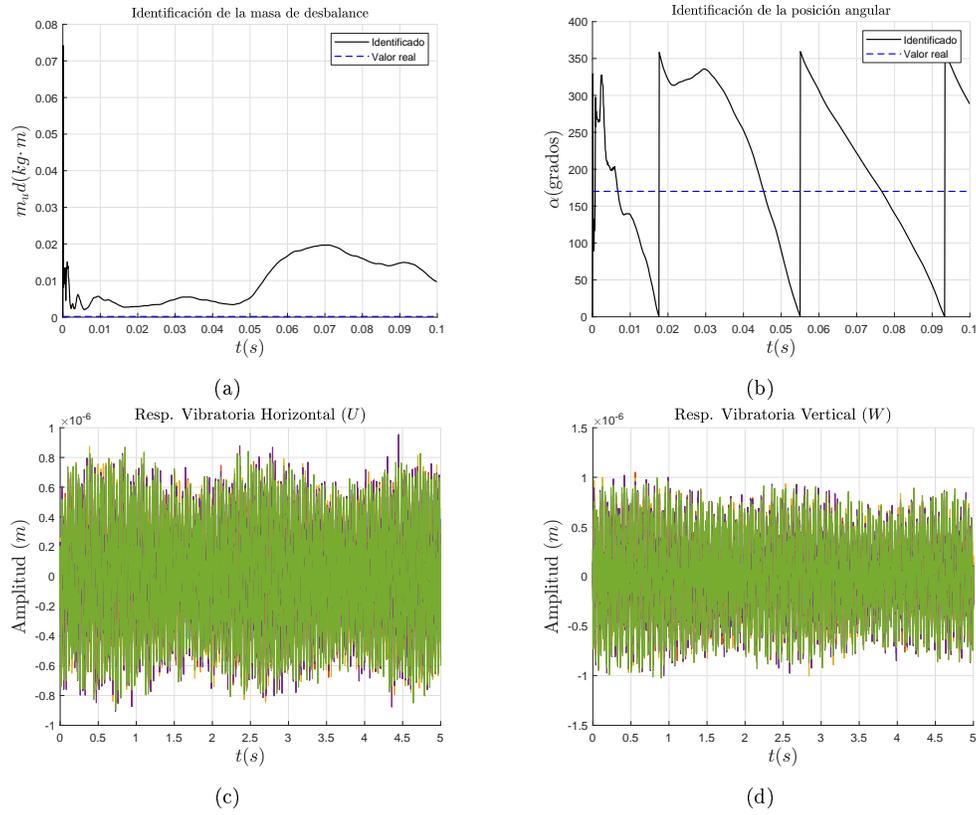


Figura 4.11: Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.

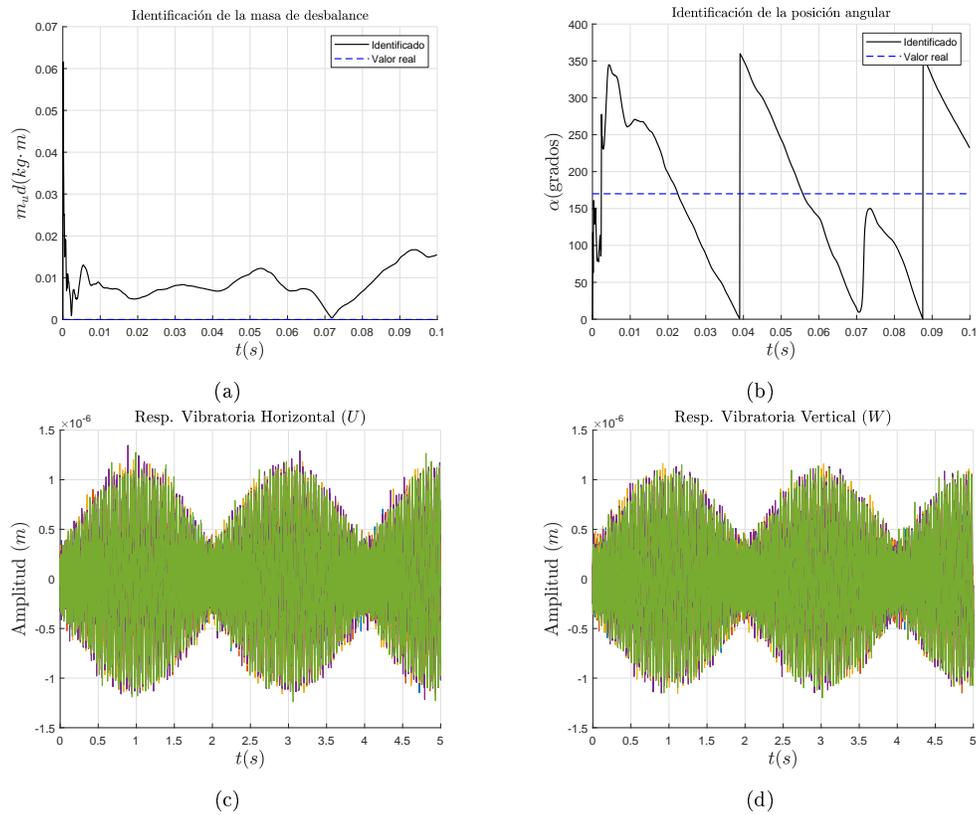


Figura 4.12: Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 2.

Discusión de caso 2 (Variación en la velocidad de operación de V_0 y V_1 y adición de ruido aleatorio a las señales numéricas).

La identificación de los parámetros del desbalance no logra converger a los valores de referencia, lo anterior, se debe a la variación de velocidad de las señales, de igual forma la adición de ruido aleatorio a la respuesta vibratoria genera que el identificador presente un comportamiento oscilatorio a lo largo de la señal de vibración.

Variación de la velocidad de operación de V_0 y V_1 .

Para este caso se consideró que existe una diferencia de velocidad en la adquisición de las señales correspondientes a V_0 y V_1 de esta forma se busca simular una variación ocasionada por el control de velocidad del banco experimental. La variación de velocidad consistió en obtener la respuesta de V_0 a 1700 rpm y la señal de V_1 a 1670 rpm, de esta forma se genera una diferencia de 30 rpm entre las señales. Solo se mantiene la variación de la velocidad de las señales y se elimina el ruido aleatorio el cual simula un ruido electrónico debido a la instrumentación.

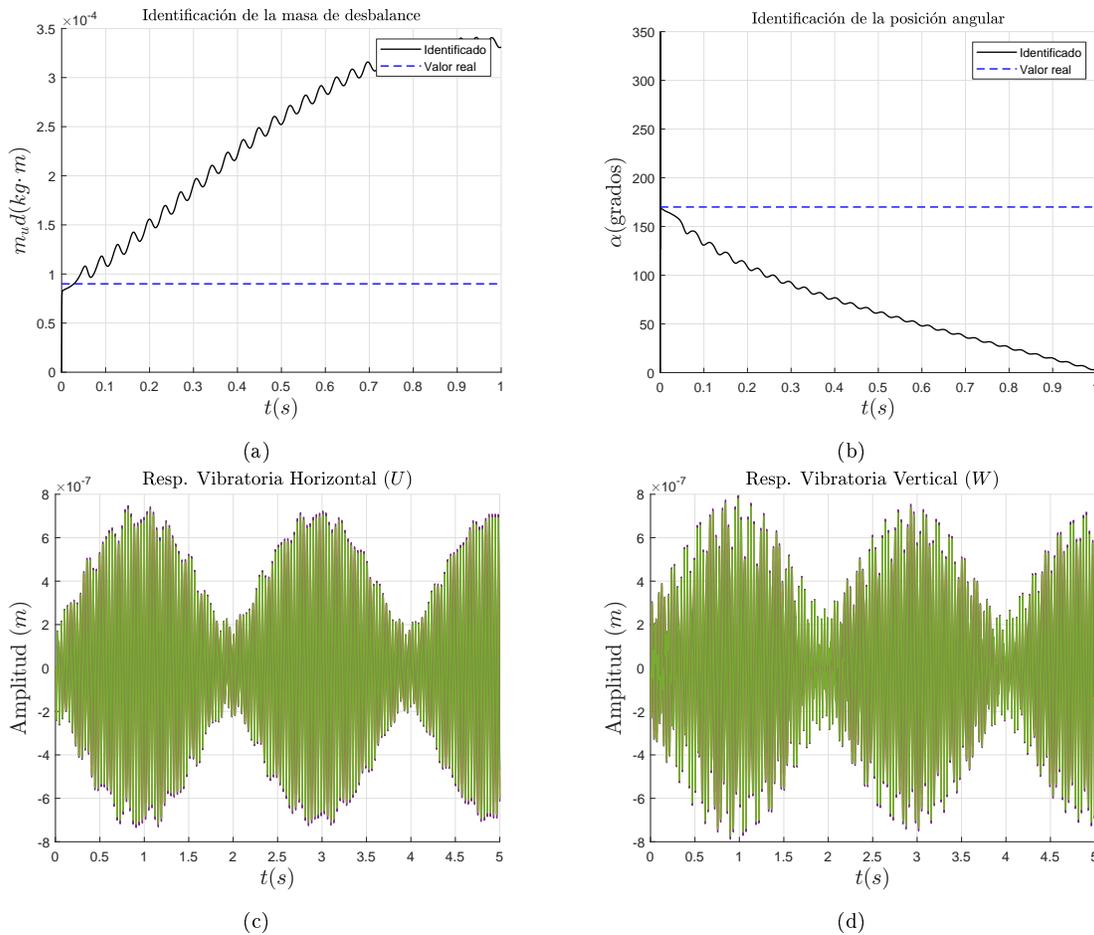


Figura 4.13: Desbalance de $0.9 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.

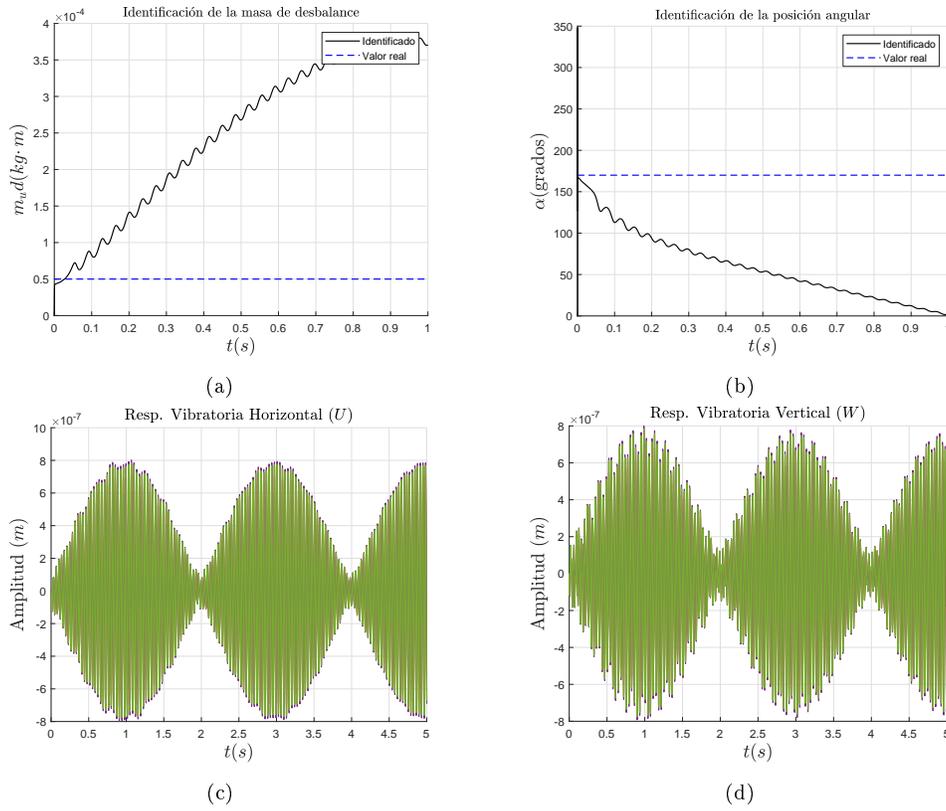


Figura 4.14: Desbalance de $0.5 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.

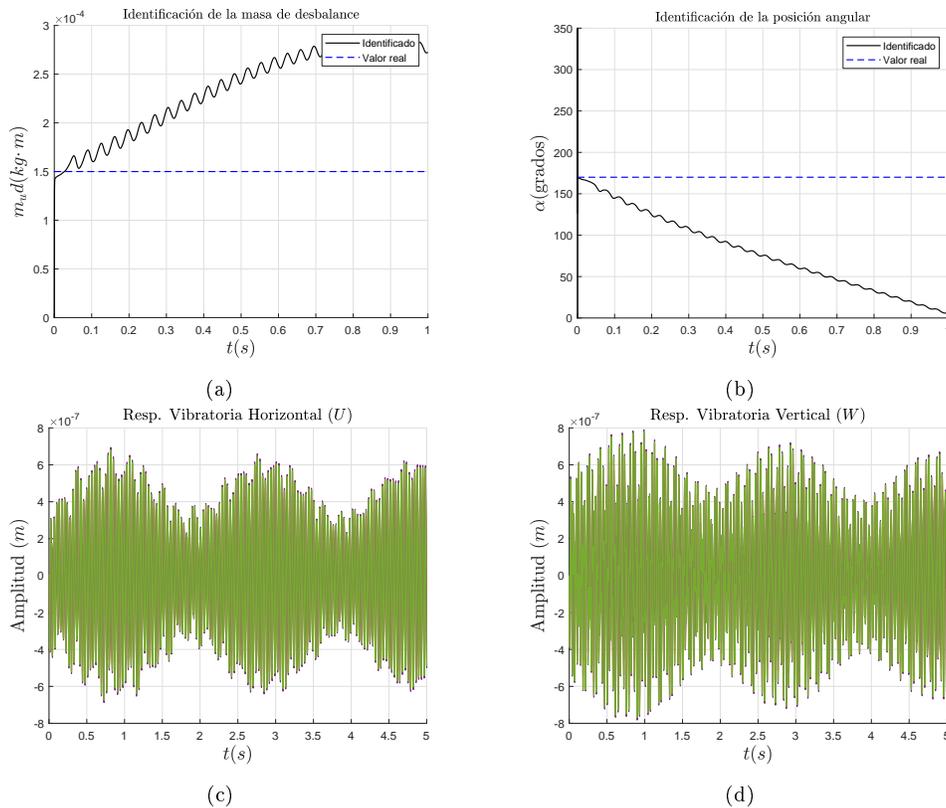


Figura 4.15: Desbalance de $1.5 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.

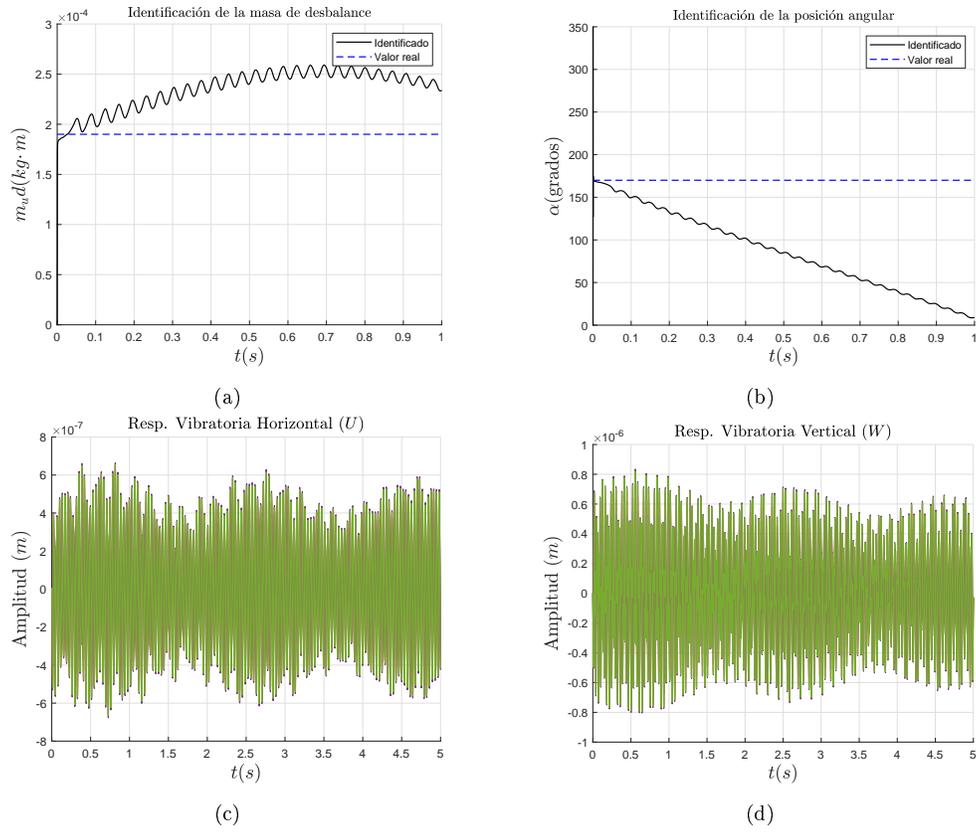


Figura 4.16: Desbalance de $1.9 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.

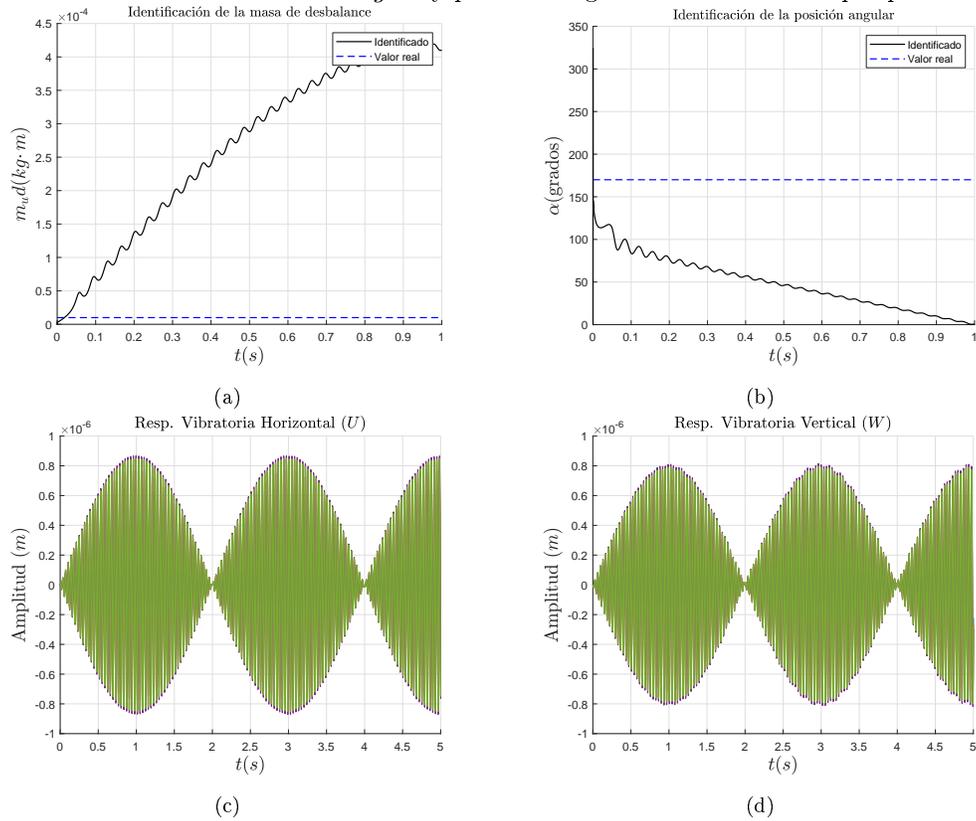


Figura 4.17: Desbalance de $0.1 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 170° a 1700 rpm para el caso 3.

Discusión de caso 3 (Variación de la velocidad de operación de V_0 y V_1).

Analizando el comportamiento del identificador algebraico de parámetros de desbalance, se logra determinar que efectivamente la variación de velocidad de las señales ocasionan que el vector efecto presente oscilaciones en amplitud y frecuencia, por lo tanto, la señal no corresponde a una velocidad constante lo cual genera que el identificador no logre converger a los valores de referencia.

4.3. Punto pesado (Desbalance)

Se denota como “ punto ” pesado a la posición angular del desbalance en un sistema rotodinámico, mientras que “ punto alto ” corresponde a la posición angular de la respuesta de vibración generada por el desbalance colocado en el “ punto pesado ”. En la Figura 4.18b se muestran tres vectores que corresponde a tres puntos pesado en el rotor, es decir tres desbalances en posiciones angulares diferentes, donde (D_i) es el desbalance inicial del sistema (no se conoce), D_p es el desbalance correspondiente a una masa de prueba (se conoce) y (D_r) es el desbalance resultante al sumar vectorialmente $(D_p) + (D_i)$. La respuesta de vibración correspondiente a (D_i) es la vibración inicial del rotor (V_o), mientras que la vibración cuando se agrega una masa de prueba al rotor, es decir $(D_p) + (D_i) = (D_r)$ es (V_1). Por otra parte se sabe que $(V_1) - (V_o) = (V_e)$ vector efecto, y corresponde a la vibración por efecto exclusivo de la masa de prueba (D_p). En esta sección se supone que no es posible eliminar los efectos a causa del desbalance inicial (D_i) y se considera que los efectos de este no son significativos en la vibración del sistema, de tal forma que podemos decir que $(V_1) \approx (V_e)$ siempre y cuando (V_o) sea pequeño, esto se logra utilizando masas de pruebas (D_p) mucho más grandes que (D_i) de tal forma que $(D_p) \approx (D_r)$. Por lo tanto, para la identificación del desbalance se utiliza la respuesta de vibración (V_1) medida en el rotor.

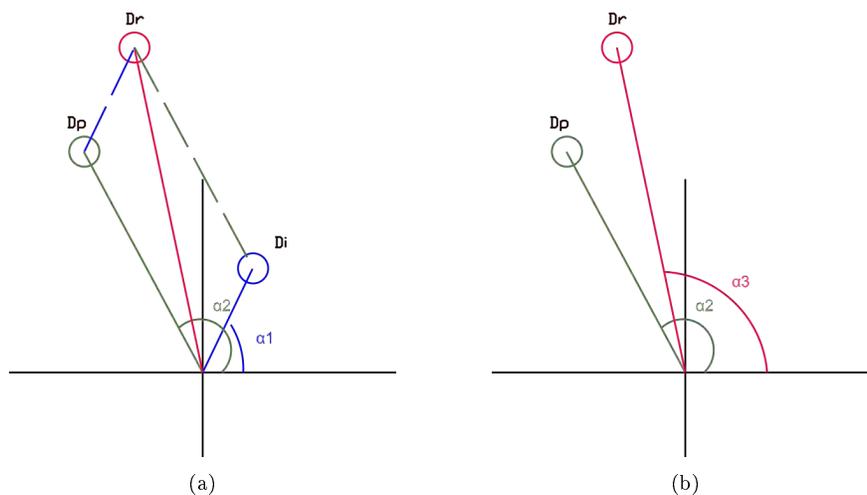


Figura 4.18: Punto pesado

4.4. Identificación algebraica con punto pesado

Se retoma el sistema presentado en la sección 4.2 para implementar la modificación del punto pesado del rotor (desbalance) de forma numérica, esto con el fin de que el efecto de las masas de desbalance de pruebas propuestas sea mayormente significativa en comparación del desbalance inicial del sistema el cual es igual a $2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$, de esta forma solo se requiere obtener la respuesta vibratoria correspondiente a V_1 la cual actuara como V_e para la identificación de los parámetros del desbalance, debido a que las masas deben de ser mayores al desbalance inicial en la Tabla 4.5 se presentan los desbalances de pruebas sugeridos los cuales son 5, 10 y 15 veces mayores en comparación del desbalance inicial con ello se busca modificar el punto pesado (desbalance) del sistema, de igual forma se propone la variación de la posición angular de cada una de las masas de prueba, cabe mencionar que la velocidad del sistema que se seleccionó para las pruebas numéricas mediante la variación del punto pesado es de 1300 rpm.

Tabla 4.5: Masas de desbalance de prueba

Masa de Desbalance de prueba	α_1 22°	α_2 112.5°	α_3 242.8°	α_4 348.3°	α_5 87.5°
$10 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$	x	x	x	x	x
$20 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$	x	x	x	x	x
$30 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$	x	x	x	x	x

En las Figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se presenta tres casos seleccionados correspondientes a las masas de $10 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$, $20 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y $30 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$, donde se presenta el comportamiento del identificador de los parámetros del desbalance (magnitud y posición angular), error porcentual de la magnitud y la posición angular del desbalance así como los desplazamientos verticales y horizontales utilizados para la identificación.

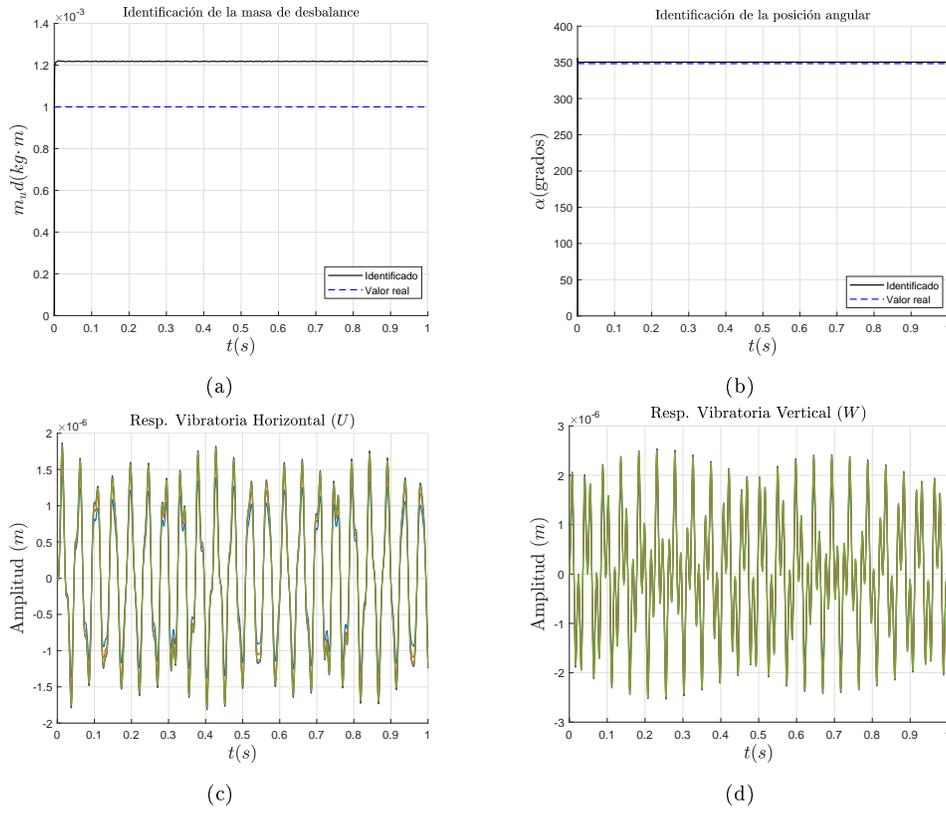


Figura 4.19: Desbalance de $10 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 348.3° a 1300 rpm

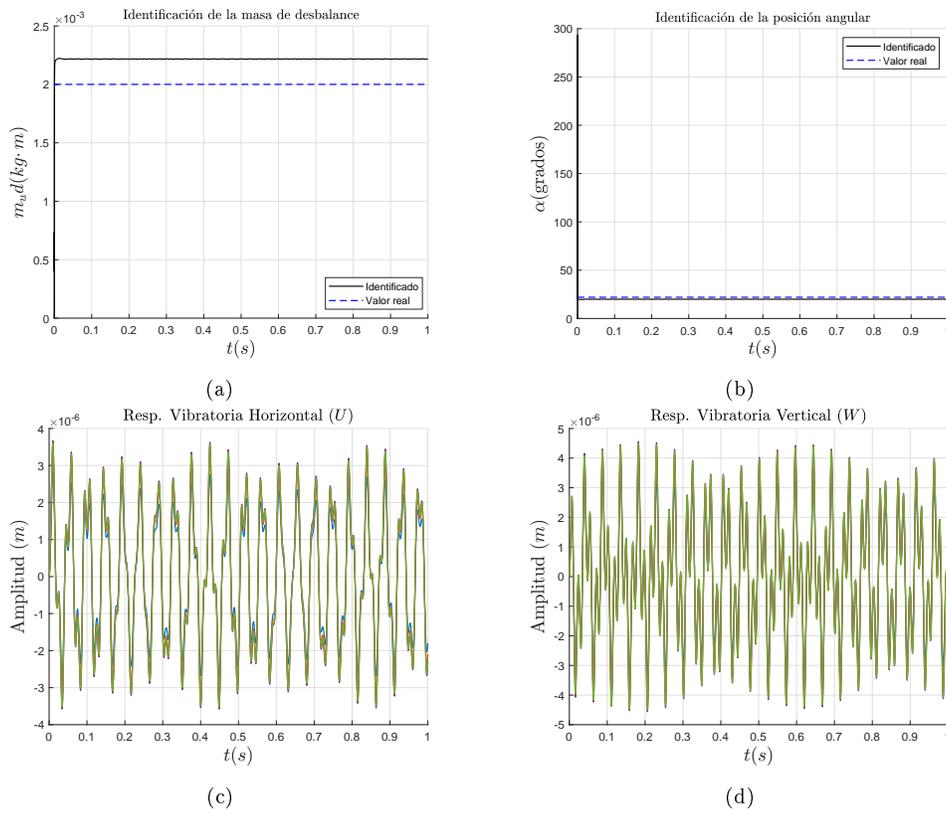


Figura 4.20: Desbalance de $20 \times 10^{-4} kg \cdot m$ y posición angular de 22° a 1300 rpm

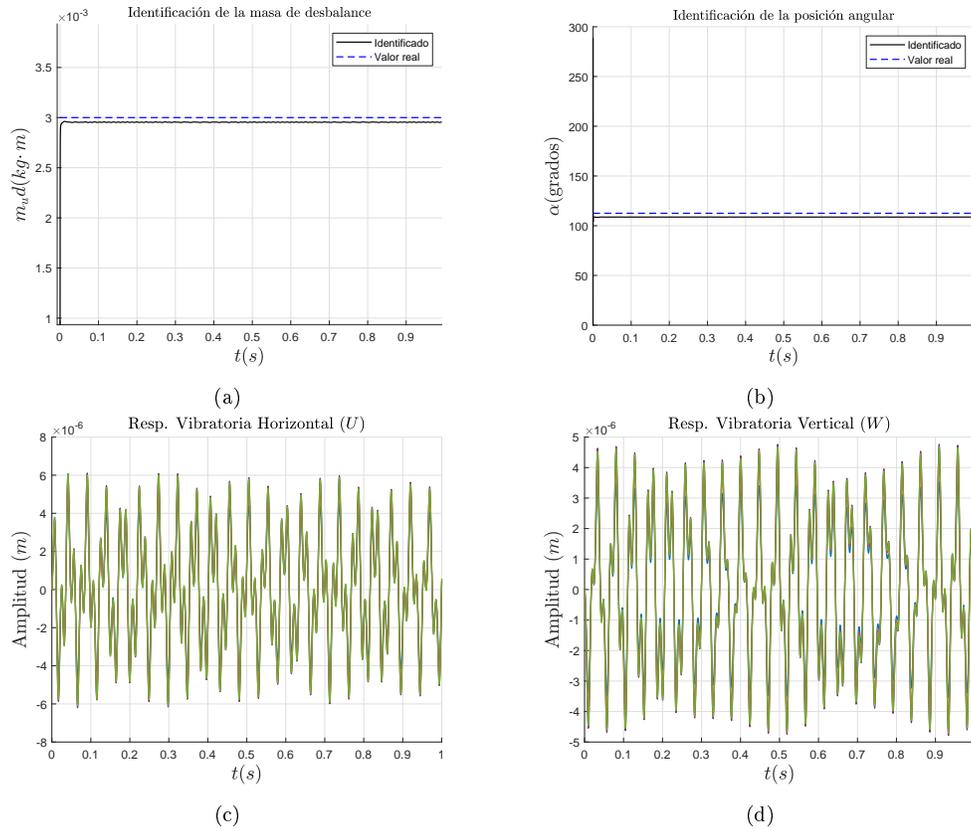


Figura 4.21: Desbalance de $30 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 112.5° a 1300 rpm

Los resultados de la identificación algebraica de los parámetros del desbalance mediante la modificación del punto pesado del sistema (Desbalance) se presentan en las Tablas 4.6, 4.7 y 4.8. El error porcentual para la magnitud del desbalance, se calcula tomando como referencia la magnitud del desbalance real. Cabe mencionar, que el porcentaje de error de la posición angular del desbalance, se calculó a partir de la diferencia de la posición angular del desbalance de referencia menos la posición angular del desbalance identificado, y se normalizó considerando 180° como la diferencia máxima, es decir 100%. Para el cálculo se utilizó la siguiente expresión:

$$\% \text{de error angular} = \frac{|\text{Posición angular de referencia} - \text{Posición angular identificado}| * 100}{180^\circ} \quad (4.10)$$

Tabla 4.6: Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $10 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ a 1300 rpm

Velocidad (rpm)	$m_u d$ (kg·m)	Posición angular (°)	Posición angular identificada (°)	error % α	$m_u d$ identificado	error % $m_u d$
1300	10×10^{-4}	22°	18.21	2.10	0.0012	20.88
		112.5°	100.5	6.66	0.0009	5.16
		242.8°	254	6.22	0.0009	6.86
		348.3°	350	0.94	0.0012	21.81
		87.5°	75.74	6.53	0.0010	3.99

Tabla 4.7: Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $20 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ a 1300 rpm

Velocidad (rpm)	m_{ud} ($\text{kg} \cdot \text{m}$)	Posición angular α ($^\circ$)	Posición angular identificada α ($^\circ$)	error % α	m_{ud} identificado	error % m_{ud}
1300	$20 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$	22 $^\circ$	19.92	1.15	0.0022	10.85
		112.5 $^\circ$	106	3.61	0.0019	2.65
		242.8 $^\circ$	248	2.88	0.0019	3.48
		348.3 $^\circ$	349	0.38	0.0022	11.37
		87.5 $^\circ$	81.53	3.31	0.0020	1.90

Tabla 4.8: Resultados de la identificación de la masa de desbalance de prueba de $30 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ a 1300 rpm

Velocidad (rpm)	m_{ud} ($\text{kg} \cdot \text{m}$)	Posición angular α ($^\circ$)	Posición angular identificada α ($^\circ$)	error % α	m_{ud} identificado	error % m_{ud}
1300	$30 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$	22 $^\circ$	20.56	0.8	0.0032	7.54
		112.5 $^\circ$	108	2.5	0.0029	1.57
		242.8 $^\circ$	246	1.77	0.0029	1.50
		348.3 $^\circ$	349	0.38	0.0032	7.90
		87.5 $^\circ$	83.50	2.22	0.0030	1.44

Discusión de los resultados (Punto pesado)

A partir de los resultados mostrados en las Tablas 4.6, 4.7 y 4.8, se puede observar que el identificador de los parámetros del desbalance es capaz de identificar la posición angular del desbalance de prueba (D_p) así como la magnitud del mismo. Lo que significa, que la masa de desbalance inicial de $2 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}$ no tiene efectos significativos en la respuesta del sistema, la identificación de la posición angular y la magnitud del desbalance presentada en las Figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se observa que el identificador tiende a los valores de referencia correspondientes a las masas de desbalance de prueba en un tiempo menor a 0.1 s y se mantienen constantes debido a que la respuesta vibratoria corresponde únicamente al desbalance por lo cual no presenta fluctuaciones en amplitud o velocidad debido a otras fuerzas de excitación o ruido aleatorio, a partir de la identificación de los parámetros del desbalance se demuestra que es posible modificar el punto pesado del sistema con lo cual se incrementa la respuesta vibratoria correspondiente al desbalance, de esta forma la aportación de otros fenómenos (desalineamiento, fractura etc.) a la señal experimental es insignificante a comparación del desbalance, por otra parte los porcentajes de errores obtenidos en los resultados del análisis numérico se deben a que se trabaja con la respuesta vibratoria correspondiente a V_1 y no se elimina la influencia de la masa de desbalance inicial.

Capítulo 5

Identificación algebraica (Experimental)

5.1. Banco experimental rotor-cojinete tipo Jeffcott

En la Figura 5.1 se presenta el esquema del banco experimental Bently Nevada RK4, el sistema rotodinámico utilizado, presenta una configuración rotor-cojinete tipo Jeffcott, el sistema se discretizó en 14 elementos finitos tipo viga, dos soportes en los extremos y un disco inercial ubicado en el nodo central, las características mecánicas y geométricas del sistema se presentan en las Tablas 5.1 y 5.2.

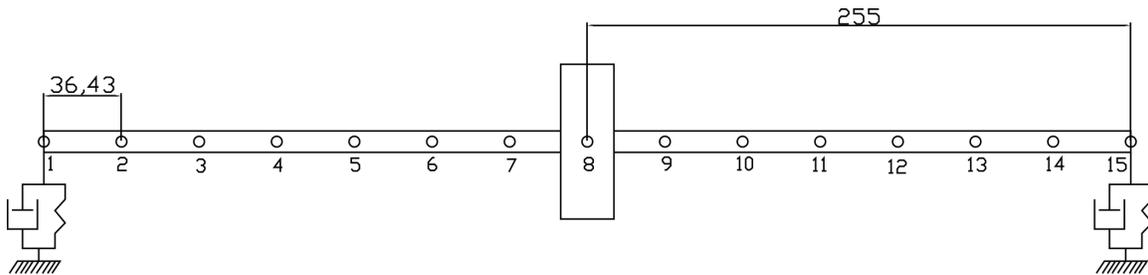


Figura 5.1: Esquema del rotor experimental Bently Nevada RK4 (mm).

Tabla 5.1: Propiedades mecánicas y geométricas del eje

Propiedades mecánicas	Geometría
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$r_e = 0.005 \text{ m}$
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$L_f = 0.51 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	

Tabla 5.2: Propiedades mecánicas y geométricas de los discos

Propiedades mecánicas	Geometría	
$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	Disco	D_1
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$e_D(m)$	0.025
$\nu = 0.3$	$r_{iD}(m)$	0.005
	$r_{eD}(m)$	0.0362

5.1.1. Diagramas de Bode y Fase

Con el fin de tener el control de la respuesta vibratoria del sistema se implementó la metodología del balanceo mediante coeficientes de influencia esto con el fin de mitigar la respuesta vibratoria debido a un desbalance inicial. En la Figura 5.2 se presentan los diagramas de Bode y Fase obtenidos en el nodo 8 (nodo central) del banco experimental posterior al proceso de balanceo (vibración residual), en un intervalo de operación de 0 a 2500 rpm.

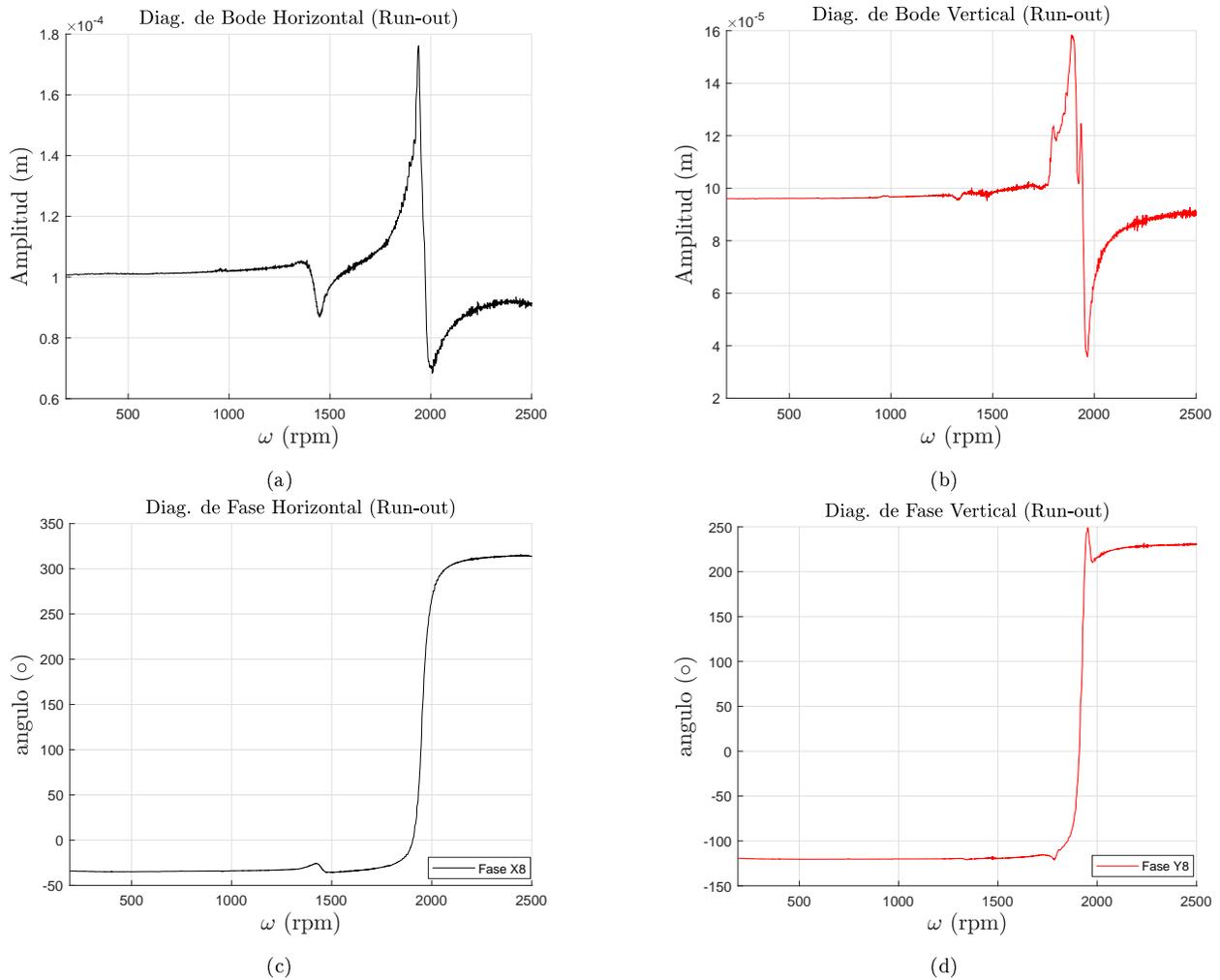


Figura 5.2: Diagramas de Bode y Fase del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott correspondientes al nodo central.

5.2. Metodología de identificación de los parámetros del desbalance

La metodología propuesta para este trabajo esta basada en el análisis modal, el método de elemento finito y la identificación algebraica para la estimación de parámetros del desbalance, magnitud ($kg \cdot m$) y posición angular (α). Esta metodología se sintetiza en los siguientes puntos:

1. Discretización del sistema.
 - Discretizar el sistema en un número específico de elementos finitos tipo viga.
2. Análisis modal
 - A partir de la discretización ya planteada del sistema es posible implementar la técnica de análisis modal experimental mediante la prueba de martillo de impacto y obtener el factor de forma modal de las frecuencias naturales de interés del sistema.
3. Adquisición de señales experimentales.
 - Selección de puntos nodales de medición del sistema.
 - Instalación y calibración de sensores.
 - Definición del tiempo de adquisición de las señales experimentales.
4. Tratamiento de señales.
 - Recorte de señales experimentales en función del tacómetro del sistema.

Las señales experimentales están en función de la señal del tacómetro el cual es una muesca física presente en el cople, (ver Figura 5.3). Para la identificación del desbalance, las señales de vibración medidas, se recortan tomando como referencia el tacómetro.



Figura 5.3: Tacómetro del banco experimental Bently Nevada RK4.

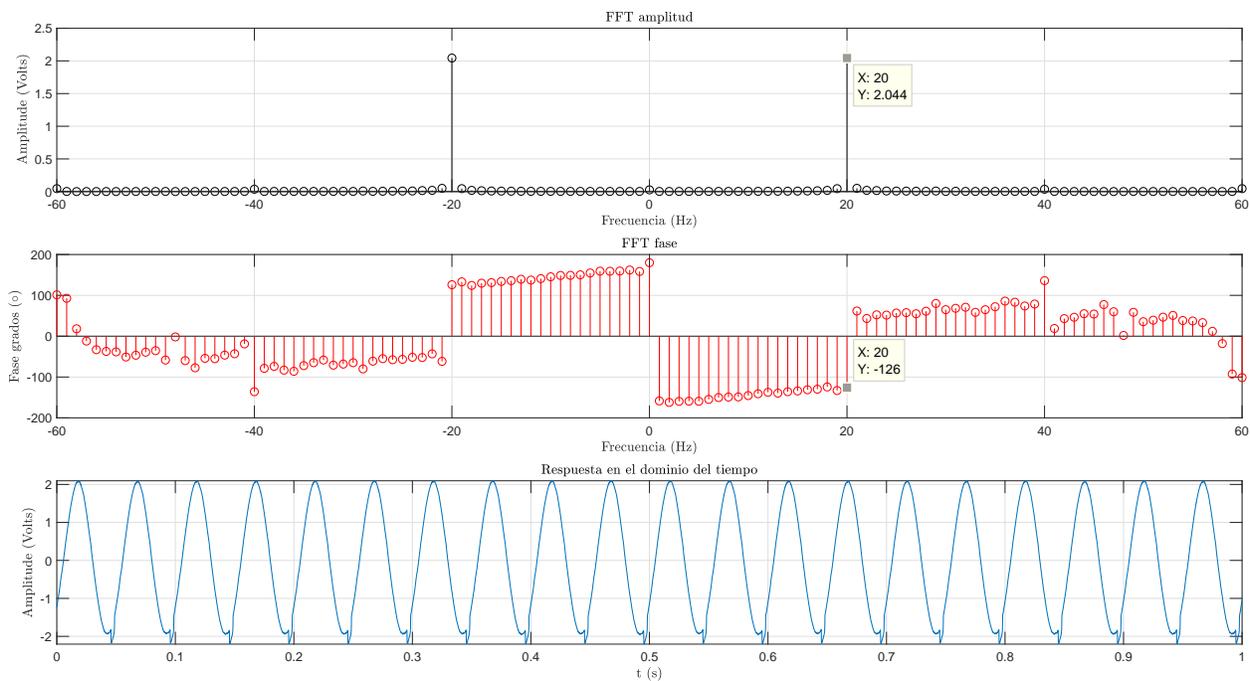
El recorte en función del tacómetro se efectúa para la respuesta vibratoria del sistema residual *run-out* (V_0) y para la respuesta vibratoria una vez agregada la masa de desbalance de prueba (V_1). Si se desea obtener la respuesta vibratoria

correspondiente a la masa de desbalance de prueba propuesta se debe de efectuar la siguientes sustracción:

$$V_e = V_1 - V_0 \quad (5.1)$$

De esta forma se elimina la vibración residual presente en el sistema debido a un desbalance residual o algún otro fenómeno (desalineamiento, fractura, rodamientos etc.

- Análisis espectral de las señales experimentales y regeneración de las señales. La respuesta experimental del sistema presenta fenómenos que no son considerados en la identificación, se debe proponer un tratamiento de señales a partir de la Transformada rápida de Fourier (FFT), en la Figura 5.4 se muestra un ejemplo donde a partir de la FFT se logra obtener la amplitud y fase correspondiente a la armónica 1x (desbalance) de la señal experimental adquirida, posteriormente se regenera la señal experimental eliminando componentes de otros fenómenos (desalineamiento, fractura etc.) y obteniendo una señal sin perturbaciones como se muestra en la Figura 5.5 [27].



(a) Señal vertical

Figura 5.4: Análisis espectral de la respuesta vibratoria.

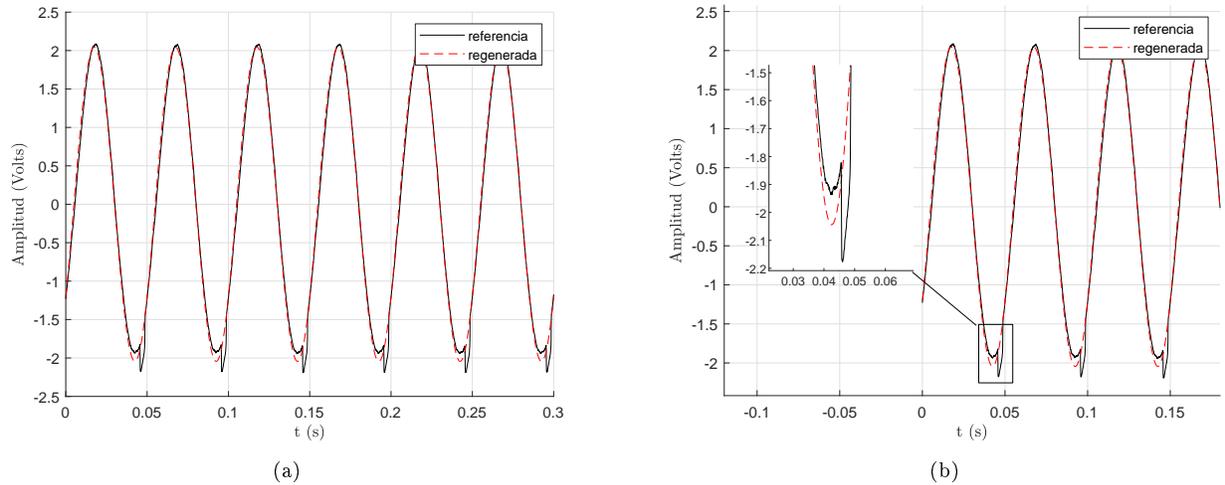


Figura 5.5: Regeneración de la señal experimental.

5. Aproximación de los desplazamiento U y W .

- Aproximación de las respuestas U y W de los demás nodos a partir del factor de forma modal del sistema.

Derivado de la regeneración de los desplazamientos experimentales y el factor de forma modal es posible aproximar los desplazamientos de los nodos del sistema, para aproximar los desplazamientos de todo el sistema basta con multiplicar la señal experimental obtenida por el factor de forma modal, como se muestra en la Figura 5.6. De esta forma se logra reducir la cantidad de sensores para la adquisición de los desplazamientos del sistema [12].

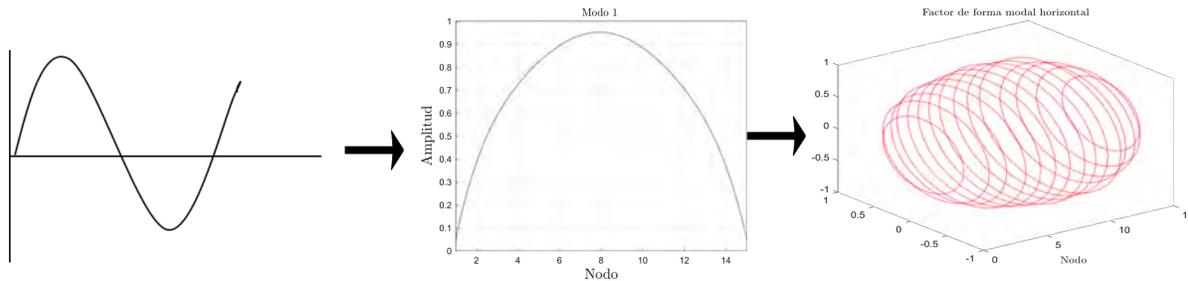


Figura 5.6: Aproximación de desplazamientos a partir del factor de forma modal del sistema.

6. Aproximación de las rotaciones θ y ψ del sistema

La identificación algebraica de la masa de desbalance ($m_u d$) requiere la información del vector de desplazamiento (δ) del nodo a identificar así como de un nodo adelantado y atrasado, experimentalmente no es posible obtener las rotaciones de cada uno de los nodos respectivamente por lo cual se propone una aproximación en función de los desplazamientos U y W . La aproximación de las rotaciones se obtiene aplicando las ecuaciones 5.2 y 5.3, las cuales consideran la longitud (Le) de los elementos tipo viga de la sección de la flecha.

$$\theta_i = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2Le} \quad (5.2)$$

$$\psi_i = \frac{-(U_{i+1} - U_{i-1})}{2Le} \quad (5.3)$$

En la Figura 5.7 se muestra el esquema de los nodos requeridos para la aproximación de las rotaciones del nodo i .

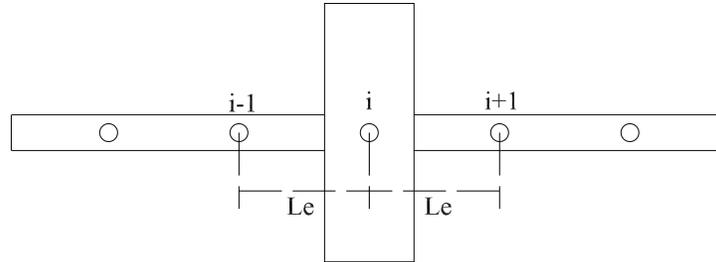


Figura 5.7: Esquema del cálculo de las rotaciones θ y ψ

7. Datos del sistema para la identificación.

- Ingreso de parámetros geométricos, propiedades mecánicas y velocidad de rotación del sistema.
- Ingreso del vector de desplazamientos experimental.
- Obtención de los parámetros del desbalance global del sistema.

5.2.1. Forma modal

Se implementó la técnica del análisis modal mediante la prueba de impacto con el martillo para obtener las frecuencias naturales del sistema así como su forma modal correspondientes a la dirección vertical y horizontal, en la Figura 5.8 se muestran los factores de forma modal para cada nodo del rotor normalizados a partir del nodo central del sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott, de esta forma solo se instrumenta el sistema con un par de sensores en el nodo central. Para la identificación del desbalance, se utilizó la forma modal ajustada.

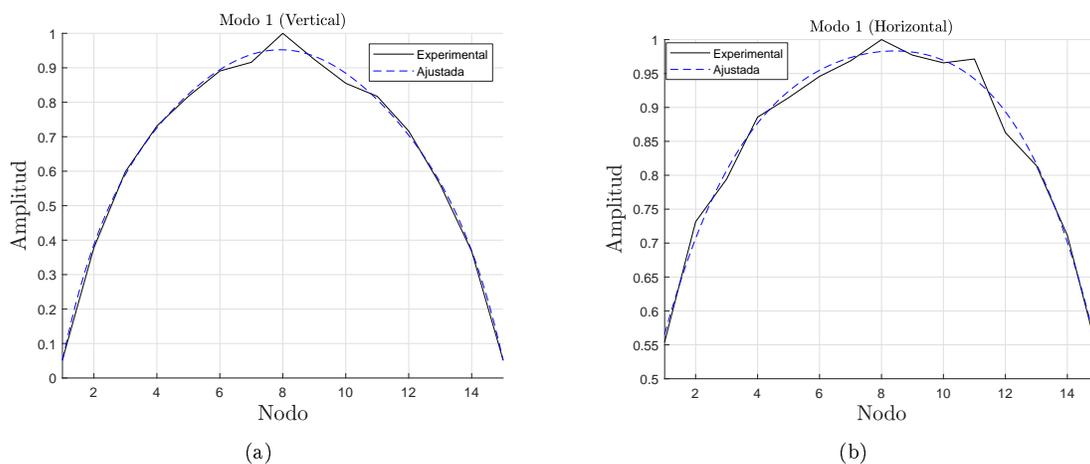


Figura 5.8: Primera forma modal del banco experimental Bently Nevada RK4, del rotor de la Figura 5.1.

5.3. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Vector efecto)

En la Figura 5.9 se muestra el banco experimental utilizado, se colocaron tres sensores tipo Eddy Current los cuales se encargan de medir los desplazamientos correspondientes al nodo central, en dirección vertical y horizontal, así como la señal del tacómetro, posteriormente se calculan los desplazamientos de los demás nodos a partir del factor de forma obtenidos de la primera forma modal del rotor.

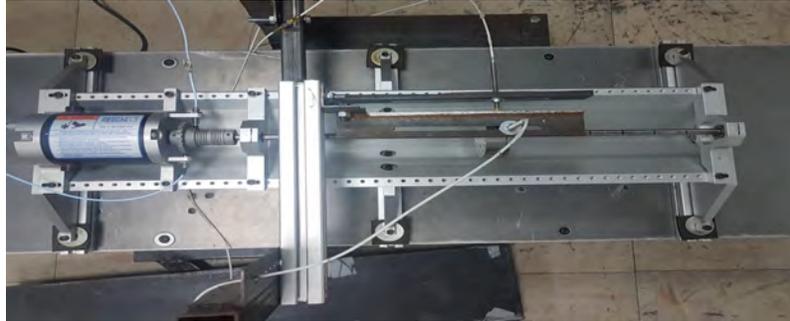


Figura 5.9: Banco experimental Bently Nevada RK4

En la Tabla 5.3 se presentan cinco masas de desbalance de prueba con las cuales se busca modificar la respuesta vibratoria del sistema, asimismo, se modifica la posición angular de las masas de desbalance de prueba propuestas y se definen tres velocidades para la identificación de los parámetros del desbalance. Para la identificación del desbalance, se consideró la respuesta de vibración del rotor obtenida a partir de la Ecuación 5.1, respuesta vibratoria que se debe únicamente a la masa de prueba de desbalance propuesta.

Tabla 5.3: Masas de desbalance de prueba

Velocidad rpm	M_1 $5.73 \times 10^{-6} \angle 180^\circ$ (kg·m)	M_2 $2.0052 \times 10^{-4} \angle 225^\circ$ (kg·m)	M_3 $1.4082 \times 10^{-4} \angle 67.5^\circ$ (kg·m)	M_4 $5.058 \times 10^{-5} \angle 337.5^\circ$ (kg·m)	M_5 $8.235 \times 10^{-5} \angle 337.5^\circ$ (kg·m)
900	x	x	x	x	x
1200	x	x	x	x	x
1500	x			x	

En la Figura 5.10 se muestra un caso seleccionado correspondiente a la masa de desbalance M_1 , donde se puede apreciar que la identificación algébrica no logra converger a los valores de referencia tanto en posición angular como magnitud del desbalance. Por otra parte la señal experimental presenta ruido debido a otros fenómenos ajenos al desbalance, por lo cual no corresponde a una señal a velocidad constante.

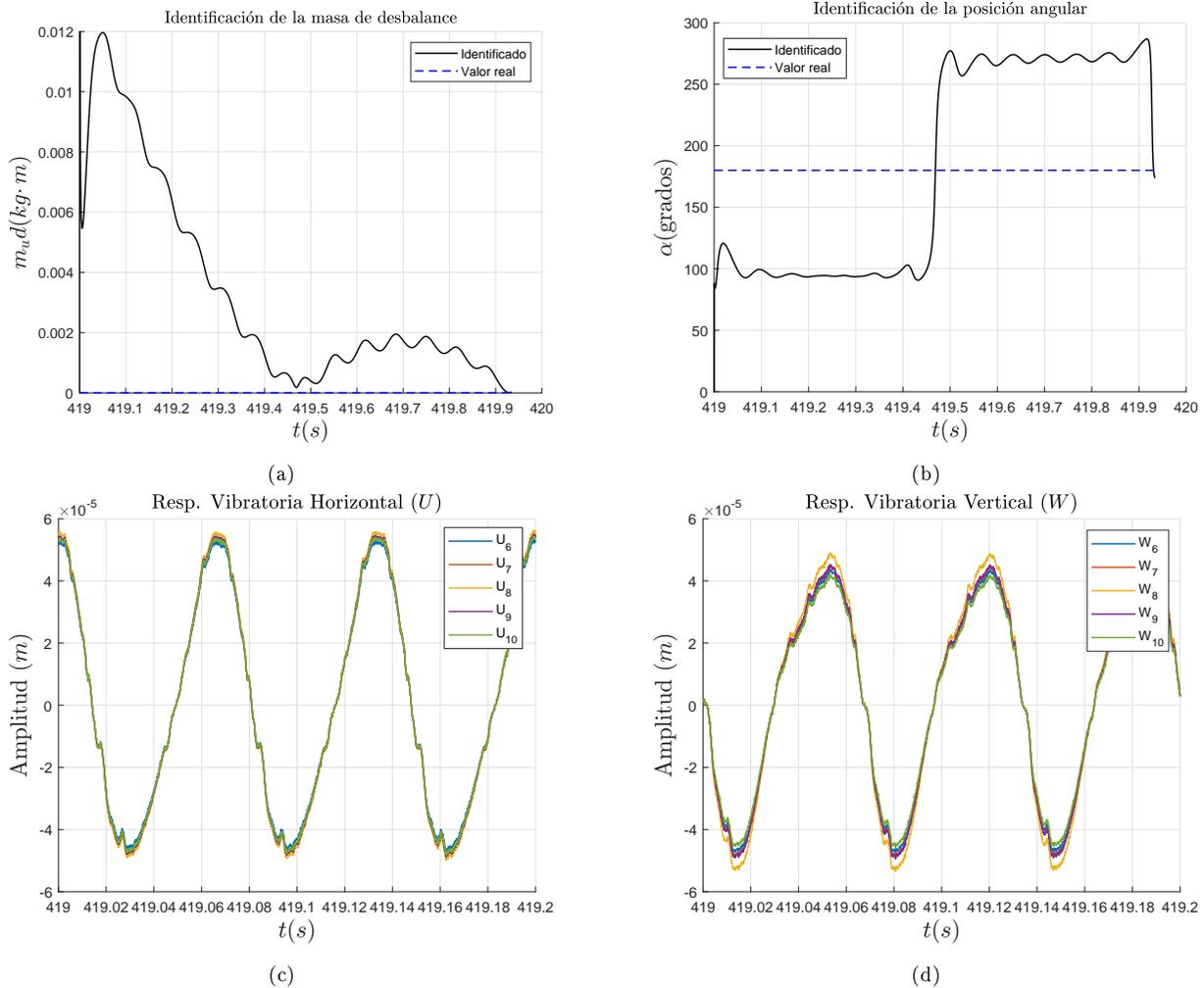


Figura 5.10: Masa de $5.73 \times 10^{-6} kg \cdot m \angle 180^\circ$ a 900 rpm

Los resultados obtenidos, utilizando las masas de desbalance propuestas en la Tabla 5.3 se presentan en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6, donde se logra apreciar que la identificación presenta mejores resultados para el parámetro de la posición angular, sin embargo, los porcentajes de error son grandes. Por otra parte la Tabla 5.6 solo presenta dos masa debido a que la amplitud de vibración en las demás era excesivamente grande por lo cual no era posible adquirir la respuesta vibratoria experimental. El porcentaje de error de la posición angular del desbalance que se muestra en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6, se calculó de la misma manera que en la parte numérica (Ver sección 4.4, Capítulo 4).

Tabla 5.4: Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 900 rpm

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($kg \cdot m$)	$m_u d$ identificado ($kg \cdot m$)	error % $m_u d$	Posición angular α (°)	Posición angular identificada α (°)	error % α
900	$5.73x10^{-6}$	$2.37x10^{-5}$	$4.04x10^3$	180	173	3.88
	$2.0052x10^{-4}$	$1.11x10^{-4}$	44.58	225	270	25
	$1.4082x10^{-4}$	$5.65x10^{-5}$	59.84	67.5	126	32.5
	$5.058x10^{-5}$	$3.85x10^{-5}$	23.69	337.5	221	64.72
	$8.235x10^{-5}$	$3.70x10^{-5}$	55.03	337.5	206	73.05

Tabla 5.5: Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 1200 rpm

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($kg \cdot m$)	$m_u d$ identificado ($kg \cdot m$)	error % $m_u d$	Posición angular α (°)	Posición angular identificada α (°)	error % α
1200	$5.73x10^{-6}$	$2.11x10^{-5}$	$2.68x10^2$	180	216	20
	$2.0052x10^{-4}$	$1.80x10^{-4}$	9.92	225	280	30.55
	$1.4082x10^{-4}$	$1.35x10^{-4}$	3.70	67.5	101	18.61
	$5.058x10^{-5}$	$3.12x10^{-5}$	38	337.5	197	78.05
	$8.235x10^{-5}$	$5.68x10^{-5}$	31.23	337.5	222	64.16

Tabla 5.6: Resultados de la identificación de los parámetros del desbalance a 1500 rpm

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($kg \cdot m$)	$m_u d$ identificado ($kg \cdot m$)	error % $m_u d$	Posición angular α (°)	Posición angular identificada α (°)	error % α
1500	$5.73x10^{-6}$	$1.43x10^{-5}$	$1.50x10^2$	180	205	13.88
	$5.058x10^{-5}$	$3.24x10^{-5}$	35.74	337.5	211	70.72

Discusión de las pruebas de la Tabla 5.3

La identificación algebraica de los parámetros del desbalance correspondientes a la Tabla 5.3 presenta un comportamiento oscilatorio debido a la señal experimental utilizada la cual muestra fluctuaciones debido a la variación de velocidad del sistema y aportaciones de otros fenómenos (desalineamiento, fractura etc.), así como ruido aleatorio debido a la instrumentación del sistema los cuales no son considerados para la identificación de los parámetros del desbalance, por lo cual la señal no corresponde a una señal a velocidad constante, cabe mencionar, que la señal experimental utilizada en la identificación no se le dio ningún tratamiento matemático. Por otra parte la señal implementada para la identificación algebraica de los parámetros del desbalance corresponde a la masa de desbalance de prueba, la cual es obtenida a partir de la ecuación 5.1 utilizando las señales de V_0 y V_1 en el dominio del tiempo, a pesar de que se resta la vibración inicial a la señal experimental no se logra eliminar las fluctuaciones de amplitud ocasionadas por la variación de la velocidad en el sistema así como la aportación de otros fenómenos ajenos al desbalance, por lo cual se debe de aplicar un tratamiento a las señales experimentales para aislar la respuesta correspondiente al desbalance.

5.4. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Punto pesado)

Para este caso, considérese el sistema rotor-cojinete mostrado en la Sección 5.1 el cual consta de una configuración tipo Jeffcott, para las pruebas experimentales se propone efectuar la variación del punto pesado del rotor. En esta sección se supone que no es posible eliminar los efectos a causa del desbalance inicial (D_i) y se considera que los efectos de este no son significativos en la vibración del sistema, de tal forma que podemos decir que $V_1 \approx V_e$ siempre y cuando V_o sea pequeño, esto se logra utilizando masas de pruebas D_p mucho más grandes que D_i de tal forma que $D_p \approx D_r$. Por lo tanto, para la identificación del desbalance se utiliza la respuesta de vibración (V_1) medida en el rotor (ver sección 4.3 del Capítulo 4). En las Tablas 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran distintas masas de desbalance de prueba y su posición angular, asimismo, se proponen tres velocidades del rotor para la identificación del desbalance.

Tabla 5.7: Masas de prueba de desbalance a 900 rpm

Velocidad (rpm)	Posición angular $\alpha(\circ)$	M_1 $2.604x10^{-4}$ (kg·m)	M_2 $2.787x10^{-4}$ (kg·m)	M_5 $3.54x10^{-4}$ (kg·m)
900	67.5	x	x	x
	135	x	x	x
	225	x	x	x
	315	x	x	x

Tabla 5.8: Masas de prueba de desbalance a 1200 rpm

Velocidad (rpm)	Posición angular $\alpha(\circ)$	M_1 $2.604x10^{-4}$ (kg·m)	M_3 $2.022x10^{-4}$ (kg·m)	M_5 $3.54x10^{-4}$ (kg·m)
1200	67.5	x	x	
	135	x	x	x
	225	x	x	
	315	x	x	

Tabla 5.9: Masa de prueba de desbalance a 1500 rpm

Velocidad (rpm)	Posición angular $\alpha(\circ)$	M_4 $1.524x10^{-4}$ (kg·m)
1500	67.5	x
	135	x
	225	x

En la Figura 5.11 se muestra un caso seleccionado correspondiente a una masa $2.604 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 900 rpm, esto con el fin de observar el comportamiento del identificador de los parámetros del desbalance.

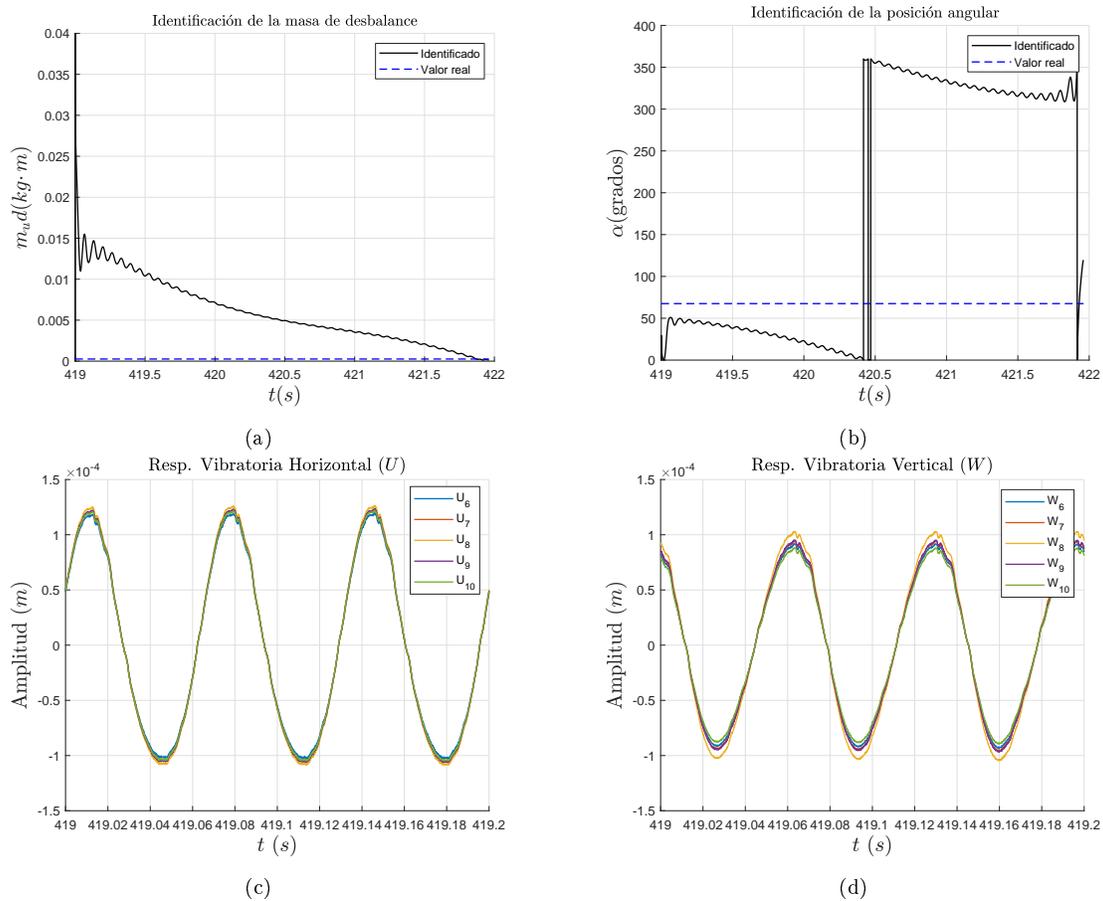


Figura 5.11: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa $2.604 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$ con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 900 rpm.

Discusión de las pruebas de la identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Punto pesado)

La identificación de los parámetros del desbalance a partir del cambio del punto pesado del sistema (desbalance) presenta un comportamiento fluctuante debido a la respuesta vibratoria V_1 , cabe mencionar que no se le dio ningún tratamiento matemático a la señal de vibración, por otra parte, las fluctuaciones en amplitud y frecuencia presentes en la señal se deben al control de velocidad del sistema, asimismo, la señal experimental cuenta con la aportación de otros fenómenos (fractura, desalineamiento etc.) los cuales ocasionan que la señal no corresponda únicamente al desbalance esto confirma que es necesario aplicar un acondicionamiento a la señal experimental para logra identificar los parámetros del desbalance presente en el sistema.

5.5. Identificación algebraica rotor-cojinete tipo Jeffcott (Vector efecto y Transformada de Fourier)

Considérese el sistema rotor-cojinete mostrado en la Sección 5.1 el cual consta de una configuración tipo Jeffcott. En esta sección se propone utilizar el (V_e) para la identificación del desbalance. Cabe mencionar, que se le aplica la transformada de Fourier tanto a la señal de vibración (V_o) vibración generada por efecto del desbalance residual del sistema, como a la señal de vibración (V_1) generada por la masa de desbalance propuesta, más la masa de desbalance residual. Posterior al tratamiento de las señales, se calcula el vector efecto (V_e) a partir de la Ecuación 5.1. Con lo anterior, se logra eliminar la influencia del desbalance inicial del sistema y de otros fenómenos presentes como desalineamiento, fractura etc. En las Tablas 5.10, 5.11 y 5.12 se presentan las masas de desbalance de prueba propuestas, así como, la variación de su posición angular. Para la identificación del desbalance, se proponen cinco velocidades del rotor.

Tabla 5.10: Masa de desbalance de prueba M_1

Velocidad (rpm)	Desbalance de prueba ($kg \cdot m$)	Posición angular α (°)		
480				
600				
780	1.2258×10^{-4}	67.5	135	315
1140				
1200				

Tabla 5.11: Masa de desbalance de prueba M_2

Velocidad (rpm)	Desbalance de prueba ($kg \cdot m$)	Posición angular α (°)		
480				
600				
780	1.9575×10^{-4}	67.5	135	202.5
1140				
1200				

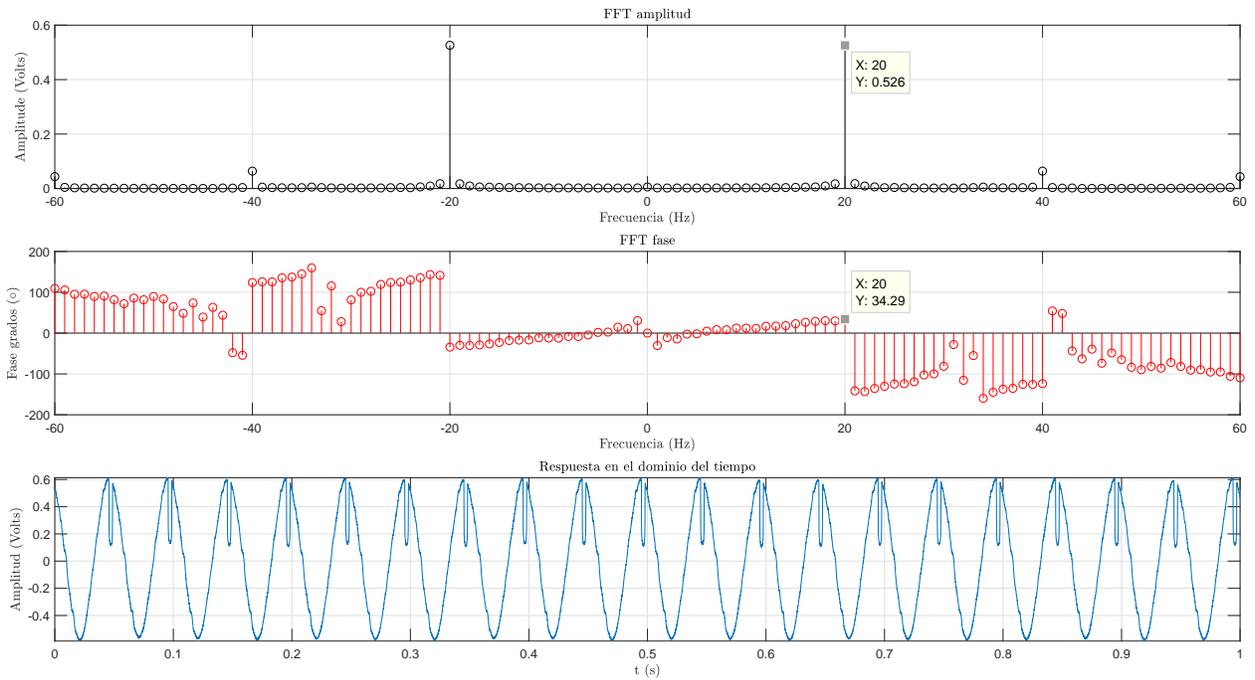
Tabla 5.12: Masa de desbalance de prueba M_3

Velocidad (rpm)	Desbalance de prueba ($kg \cdot m$)	Posición angular α ($^\circ$)			
480					
600					
780	2.8692×10^{-4}	112.5	180	225	315
1140					
1200					

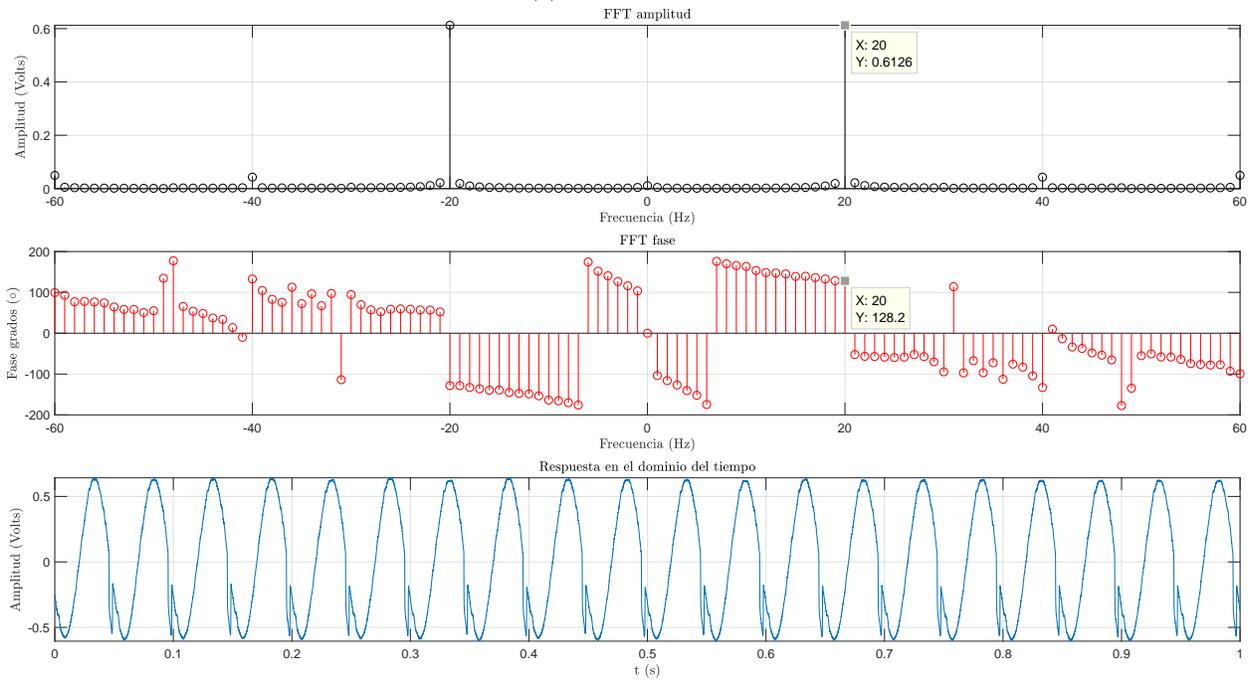
5.5.1. Acondicionamiento de señales experimentales (FFT)

La identificación algebraica de los parámetros de desbalance se ve afectada por los distintos fenómenos involucrados en la respuesta vibratoria del sistema, como por ejemplo, ruido eléctrico que se debe a las conexiones del sistema, asimismo, existen armónicas (1x, 2x, 3x, etc.) en la señal de vibración del rotor a causa de fenómenos como desalineamiento, asimetría, defectos en los rodamientos, etc. Para éste caso, la armónica de interés es la 1x la cual corresponde al desbalance, para separar la armónica de interés se realizó el análisis espectral de la señal de vibración experimental mediante la Transformada de Fourier.

En la Figura 5.12 y 5.13 se muestra el análisis espectral en el dominio de la frecuencia para la señal experimental de la vibración inicial del sistema (V_0) y la señal experimental de la vibración una vez agregada la masa de desbalance de prueba (V_1) para el caso particular de la masa de prueba de desbalance M_3 con posición angular de 225° . A partir de los datos de amplitud y fase de la señal de vibración de V_0 y V_1 obtenidos, es posible obtener la vibración correspondiente a la masa de desbalance de prueba a partir de la Ecuación 5.1.

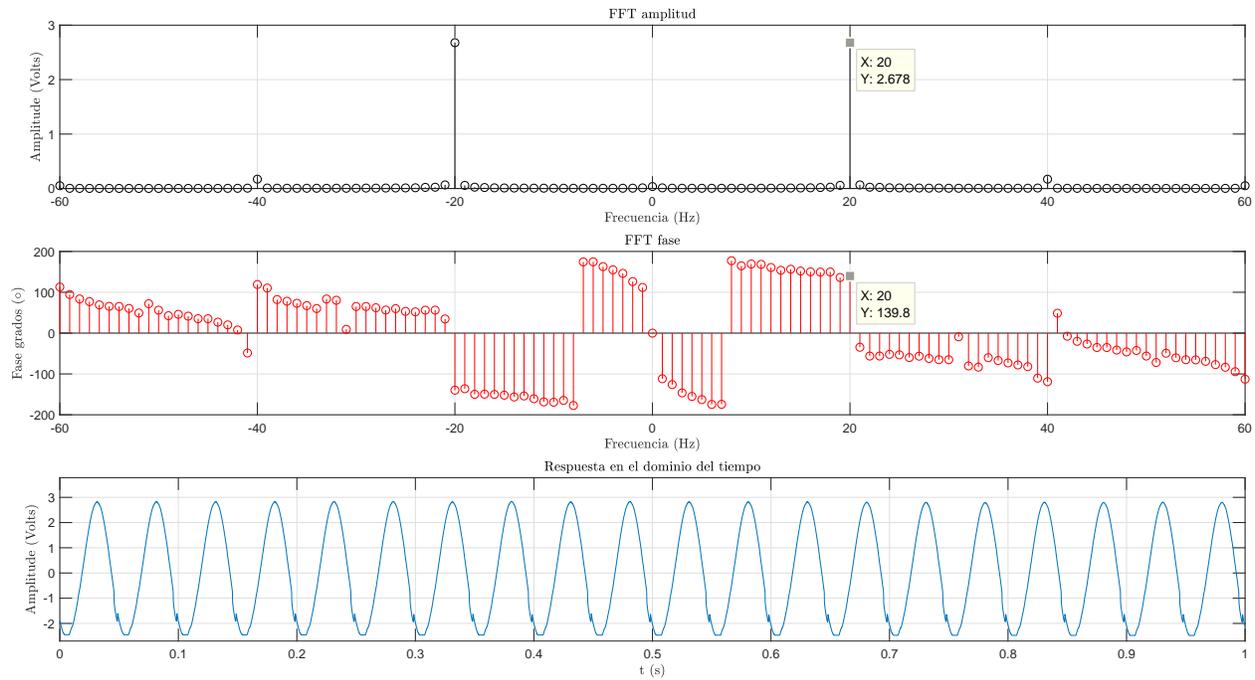


(a) Señal horizontal

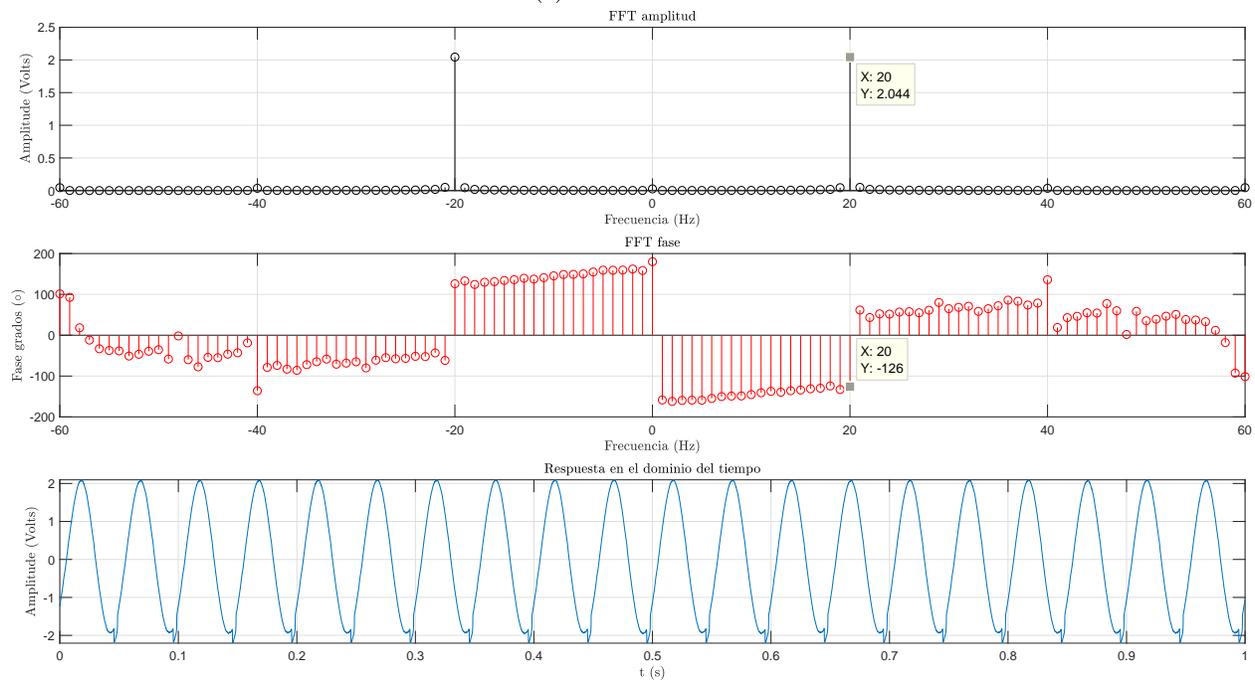


(b) Señal vertical

Figura 5.12: Análisis espectral de la respuesta vibratoria inicial V_0 a 1200 rpm



(a) Señal horizontal



(b) Señal vertical

Figura 5.13: Análisis espectral de la respuesta vibratoria V_1 de la masa M_3 con posición de 225° y velocidad de 1200 rpm

La amplitud y fase de la primera armónica de las señales de vibración de V_0 y V_1 se representan de manera vectorial en la Figura 5.14, asimismo, también se muestra la señal de vibración correspondiente al vector efecto V_e . Se puede observar que la señal de vibración correspondiente al vector efecto V_e y V_1 presentan ángulos de fase similares, esto se debe a que el efecto en la señal de vibración a causa de la masa de prueba utilizada predomina

en comparación con la señal de vibración generada por el desbalance residual. Conocida la amplitud y fase de las señales de vibración del rotor V_0 , V_1 y V_e , es posible regenerar la señal de vibración experimental eliminando de esta forma las fluctuaciones de velocidad y amplitud presentes en la señales.

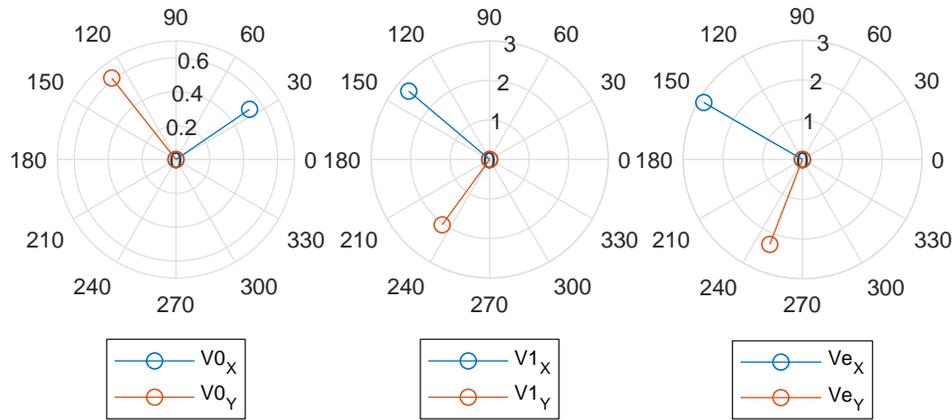
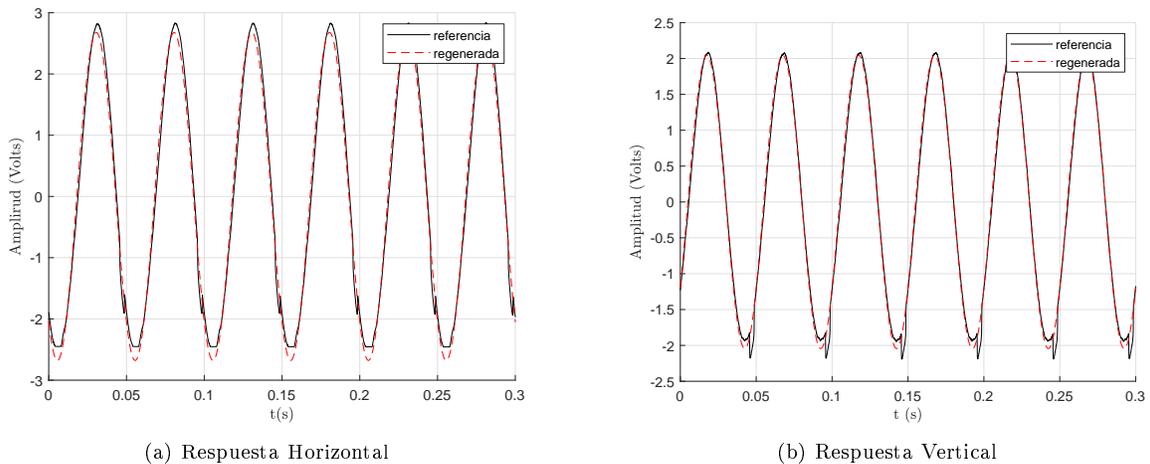


Figura 5.14: Respuesta vibratoria vectorial del sistema de V_0 , V_1 y V_e

Nótese que la señal de vibración correspondiente al vector efecto V_e también se puede obtener de la Ecuación 5.1 utilizando las señales en el dominio del tiempo, sin embargo, de esta forma no se logra aislar la señal de interés correspondiente a la armónica 1x, como resultado de lo anterior, la señal presentará fluctuaciones de amplitud y fase a lo largo del tiempo. En la Figura 5.15 se muestra la comparación de la señal correspondiente a V_1 obtenida experimentalmente y la regenerada a partir de la FFT.



(a) Respuesta Horizontal

(b) Respuesta Vertical

Figura 5.15: Regeneración de la señal experimental V_1 de la masa M_3 con posición de 225° y velocidad de 1200 rpm

Resultados: Masa de desbalance de prueba M_1 , Tabla 5.10

En las Figuras 5.16, 5.17, 5.18 y 5.19 se muestran cuatro casos de identificación de los parámetros del desbalance, posición angular (α) y magnitud del desbalance ($m_u d$) para la masa de desbalance de prueba M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) y distintas velocidades.

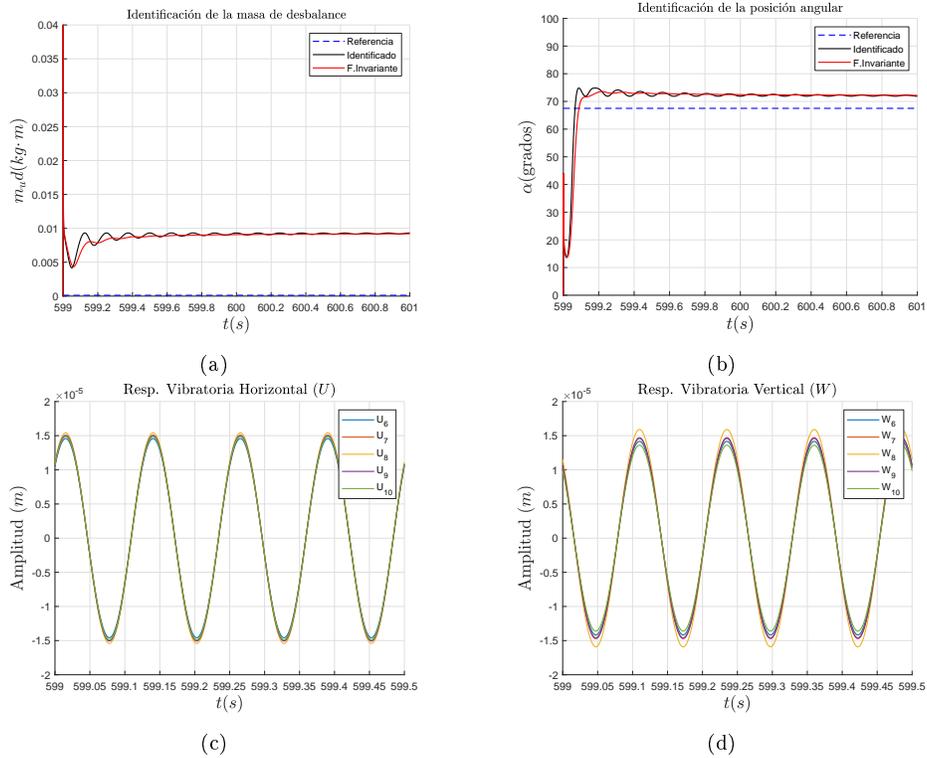


Figura 5.16: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm .

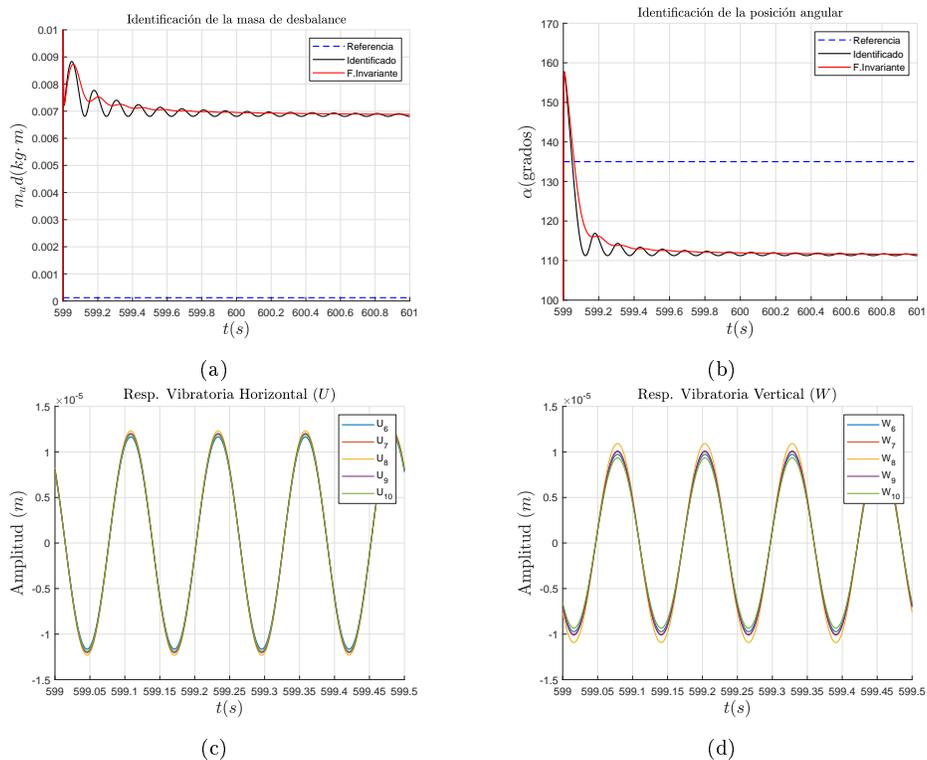


Figura 5.17: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 480 rpm .

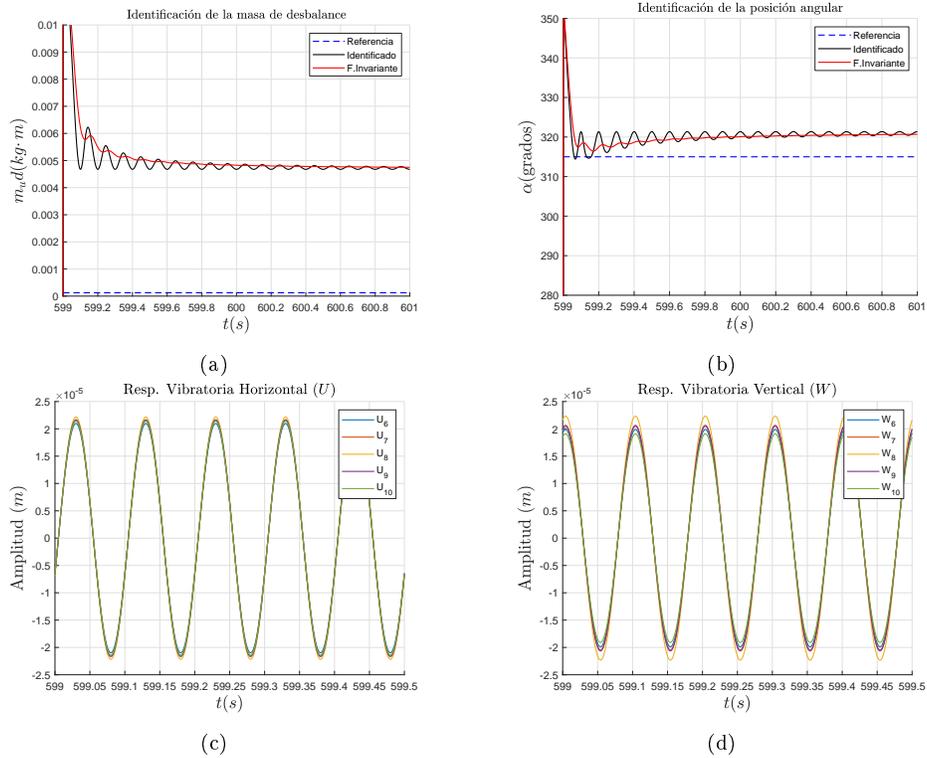


Figura 5.18: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 600 rpm .

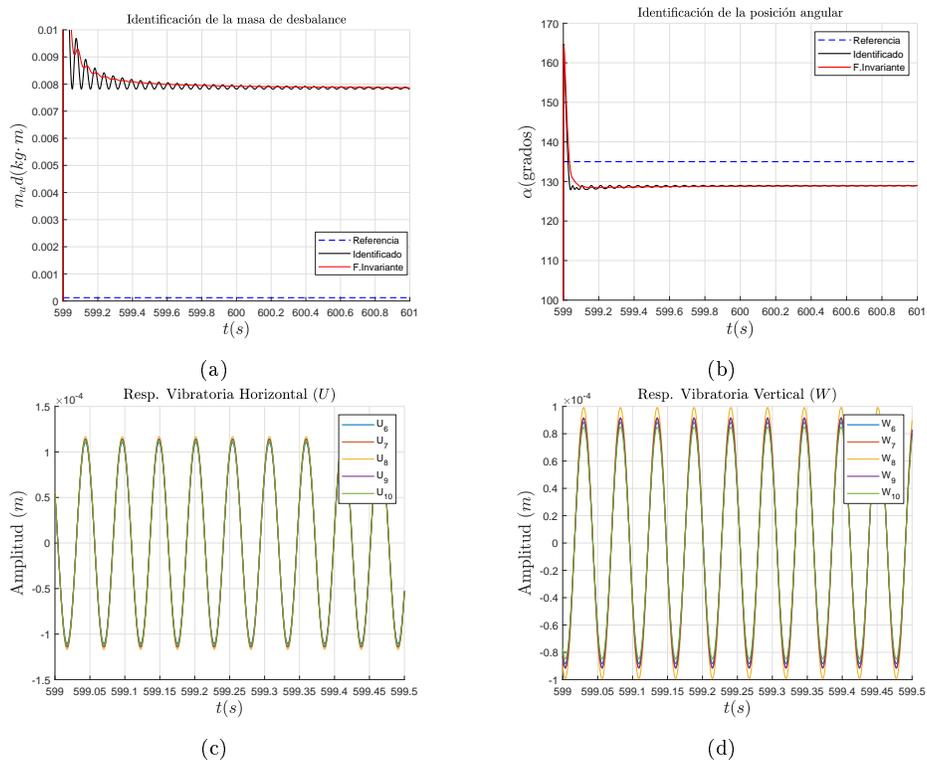


Figura 5.19: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1140 rpm .

En la Tabla 5.13 se presentan los resultados correspondientes a la identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) en sus diferentes velocidades y posiciones angulares.

Tabla 5.13: Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_1

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($\text{kg} \cdot \text{m}$)	$m_u d$ identificado	error % $m_u d$	Posición angular $\alpha(\circ)$	Posición angular identificada $\alpha(\circ)$	error % α
480	1.2258×10^{-4}	0.0043	3.36×10^3	315	331.5	9.16
		0.0069	5.513×10^3	135	111.6	13
		0.0092	7.40×10^3	67.5	72.18	2.6
600		0.0047	3.77×10^3	315	320.7	3.16
		0.0056	4.49×10^3	135	124.9	5.61
		0.0090	7.23×10^3	67.5	70.53	1.68
780		0.0057	4.53×10^3	315	305.8	5.11
		0.0071	5.72×10^3	135	115.3	10.94
		0.0081	6.49×10^3	67.5	71.38	2.15
1140		0.0076	6.07×10^3	315	310.04	2.75
		0.0079	6.31×10^3	135	128.9	3.38
		0.0105	8.45×10^3	67.5	66.6	0.5
1200	0.0081	6.54×10^3	315	312.8	1.22	
	0.0082	6.62×10^3	135	132.9	1.16	
	0.0114	9.18×10^3	67.5	62.6	2.72	

En la Figura 5.20 se muestra el error obtenido para cada una de las posiciones angulares de prueba de la masa M_1 a distintas velocidades así como el error promedio de cada una de ellas.

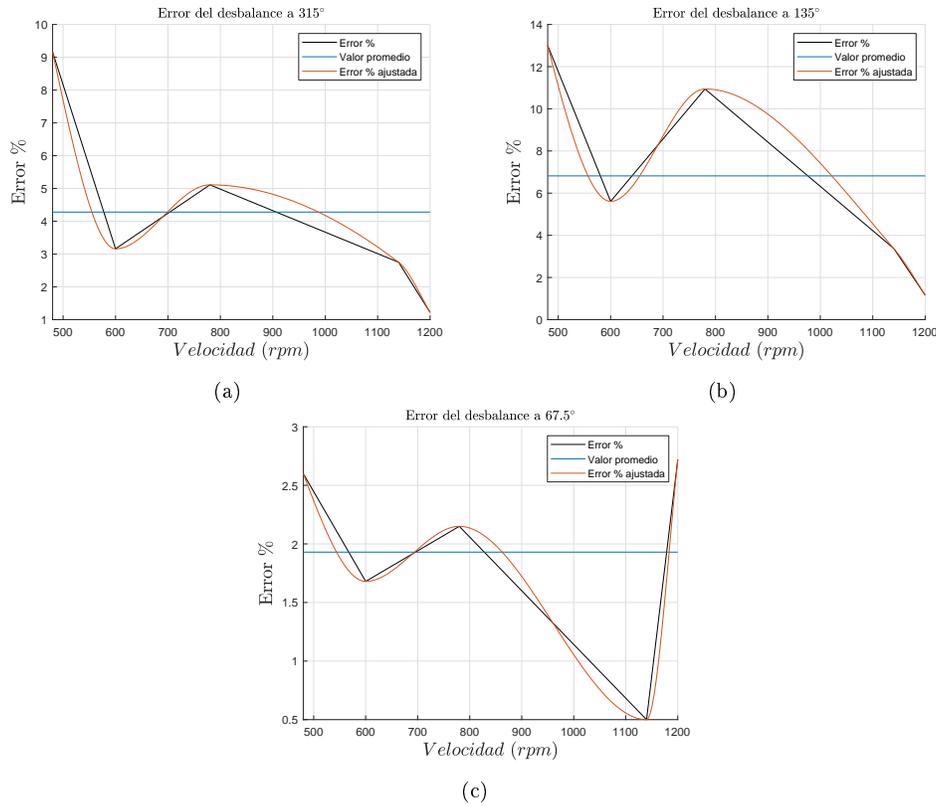


Figura 5.20: Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$)

Resultados de la masa de desbalance de prueba M_1 .

De los resultados presentados en la Tabla 5.13 para la masa de prueba de desbalance M_1 , se puede observar que existe un porcentaje de error menor al 11 %, sin embargo, para la magnitud del desbalance se registraron errores en el orden de 10^3 . Lo anterior, hace suponer que las magnitudes no son correctas, sin embargo, existe una constante de amplificación o proporcionalidad en las magnitudes identificadas que hace que el cálculo de la posición angular se encuentre en porcentajes de error aceptables.

Por otra parte, en la Figura 5.20 se puede observar que los porcentajes de error promedio para cada posición angular de la masa de desbalance de prueba M_1 , es de aproximadamente el 4 % para la posición angular de 315° , 7 % para la posición angular de 135° y del 2 % para la posición angular de 67.5° .

Resultados: Masa de desbalance de prueba M_2 , Tabla 5.11

En las Figuras 5.21, 5.22, 5.23, y 5.24 se presentan cuatro casos de identificación de los parámetros del desbalance, posición angular (α) y magnitud del desbalance ($m_a d$) para la masa de prueba M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) y distintas velocidades.

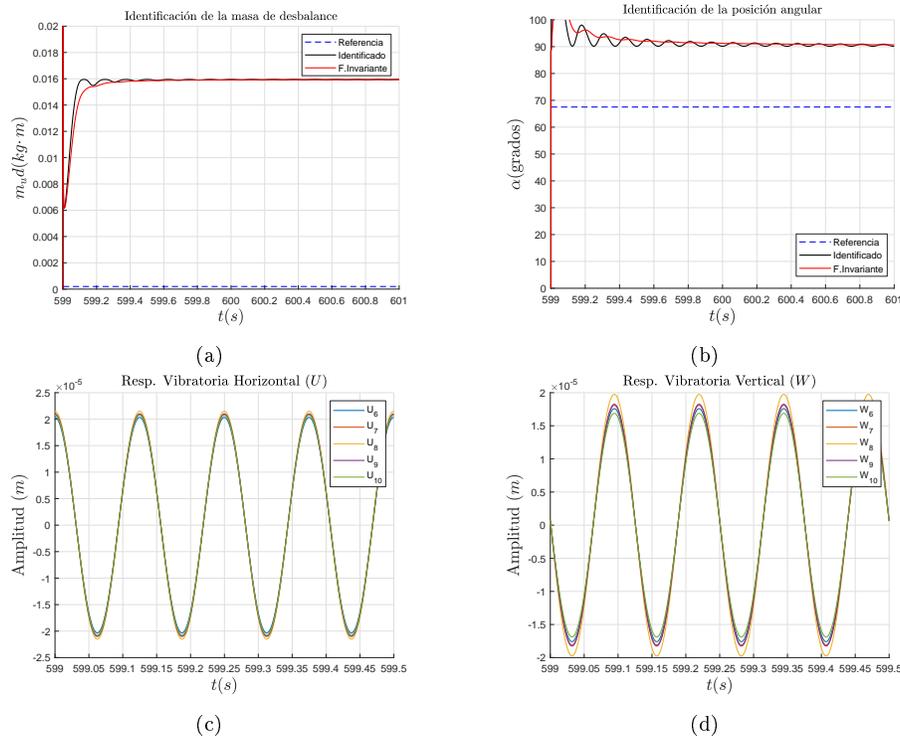


Figura 5.21: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm .

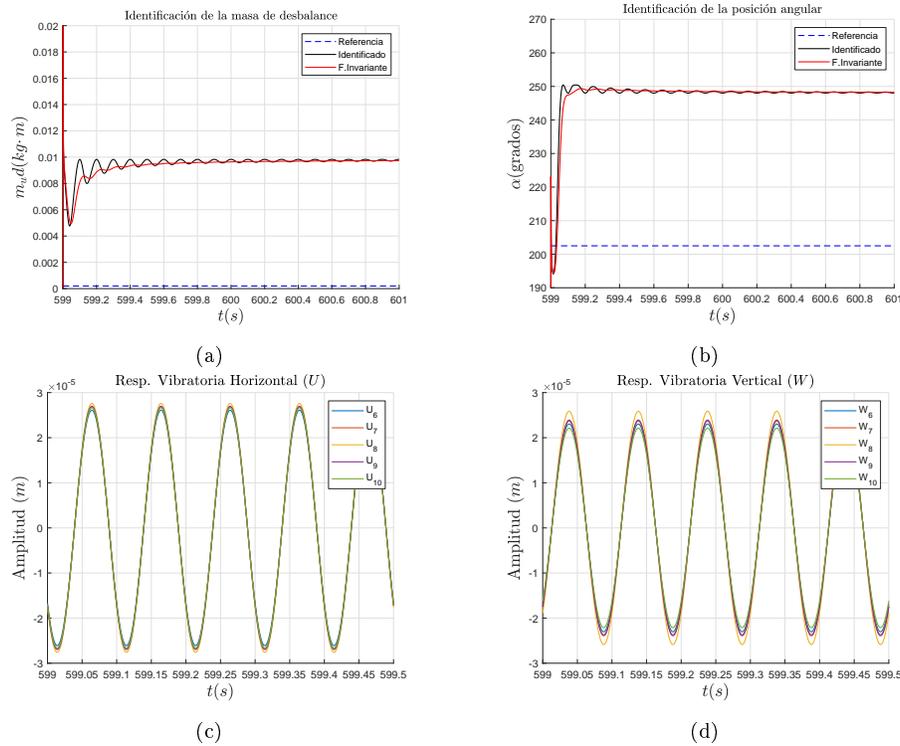


Figura 5.22: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 600 rpm .

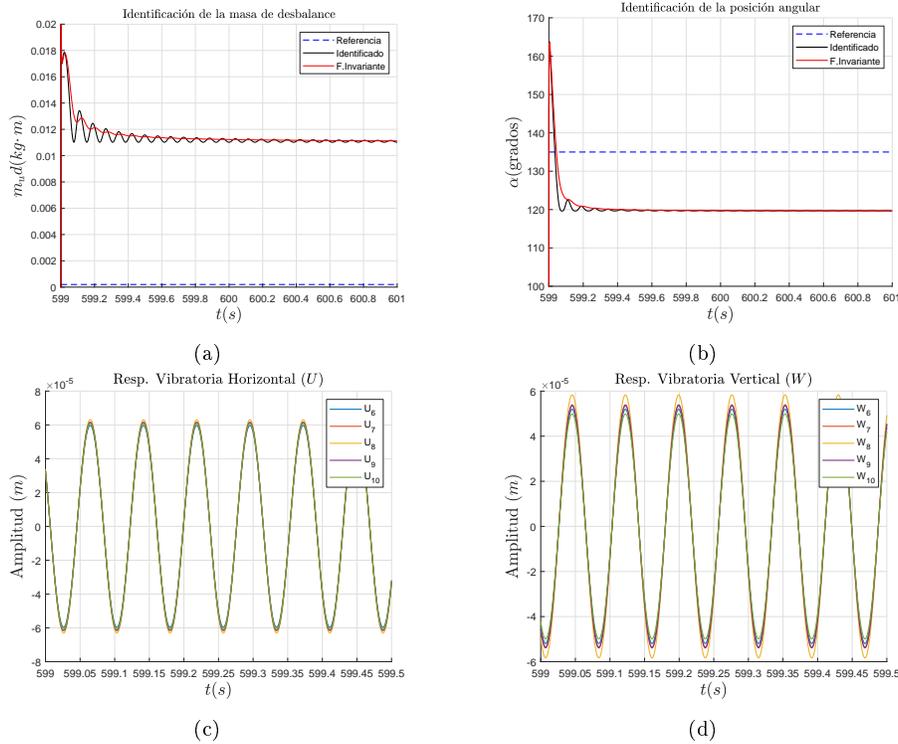


Figura 5.23: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 780 rpm .

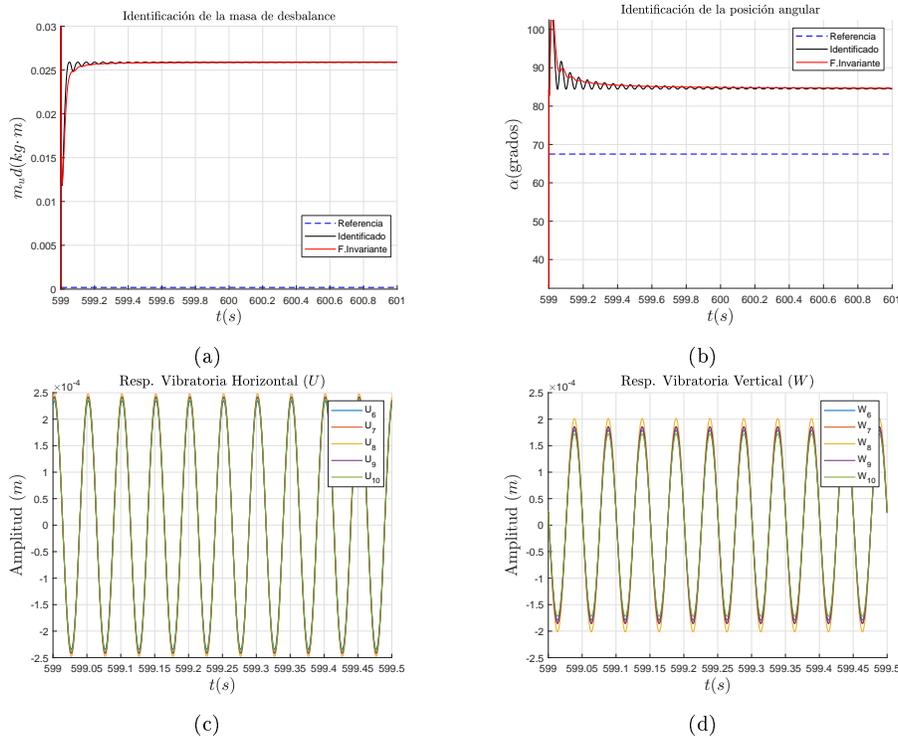


Figura 5.24: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1200 rpm .

En la Tabla 5.14 se presentan los resultados correspondientes a la identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) a distintas velocidades y posiciones angulares.

Tabla 5.14: Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_2

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($\text{kg}\cdot\text{m}$)	$m_u d$ identificado	error % $m_u d$	Posición angular $\alpha(\circ)$	Posición angular identificada $\alpha(\circ)$	error % α
480	1.9575×10^{-4}	0.0159	8.04×10^3	67.5	90.7	12.88
		0.0105	5.25×10^3	135	119.8	8.44
		0.0112	5.62×10^3	202.5	248.2	25.38
600		0.0180	9.07×10^3	67.5	88.04	11.41
		0.0108	5.43×10^3	135	116.8	10.11
		0.0097	4.87×10^3	202.5	248.2	25.38
780		0.0187	9.46×10^3	67.5	89.18	12.04
		0.0111	5.58×10^3	135	119.7	8.5
		0.0115	5.79×10^3	202.5	248	25.27
1140		0.0229	1.16×10^4	67.5	90.66	12.86
		0.0229	1.16×10^4	135	131.8	1.77
		0.0182	9.21×10^3	202.5	249.2	25.94
1200		0.0259	1.31×10^3	67.5	84.65	9.52
		0.0142	7.16×10^3	135	128	3.88
		0.0190	9.62×10^3	202.5	246.3	24.33

En la Figura 5.25 se muestra el error obtenido para cada una de las posiciones angulares de prueba de la masa M_2 a distintas velocidades así como el error promedio de cada una de ellas.

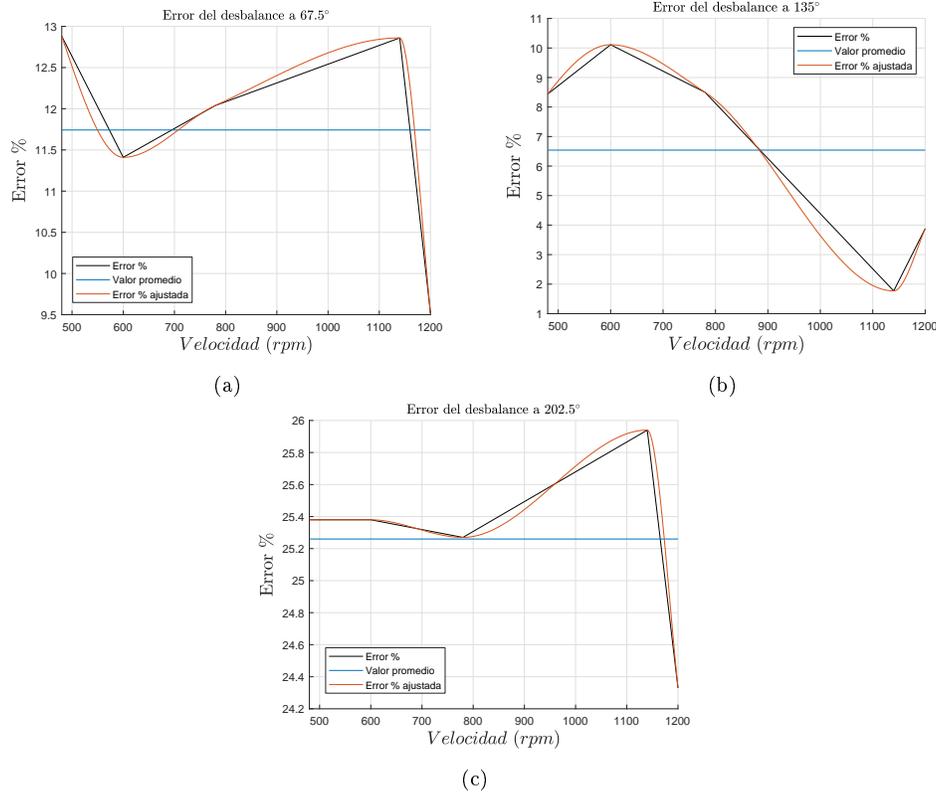


Figura 5.25: Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$)

Resultados de la masa de desbalance de prueba M_2 .

De los resultados presentados en la Tabla 5.14 para la masa de prueba de desbalance M_2 , se puede observar que existe un porcentaje de error menor al 26%, sin embargo, para la magnitud del desbalance se registraron errores en el orden de 10^3 . Lo anterior, hace suponer que las magnitudes no son correctas, sin embargo, existe una constante de amplificación o proporcionalidad en las magnitudes identificadas que hace que el cálculo de la posición angular se encuentre en la mayoría de los casos en porcentajes de error aceptables.

Por otra parte, en la Figura 5.25 se puede observar que los porcentajes de error promedio para cada posición angular de la masa de desbalance de prueba M_2 , es de aproximadamente el 25% para la posición angular de 202.5° , 6.5% para la posición angular de 135° y del 12% para la posición angular de 67.5° . Se puede observar que para este caso, los porcentajes de error son mayores en comparación con los resultados obtenidos con la masa de prueba de desbalance M_1 .

Resultados: Masa de desbalance de prueba M_3 , Tabla 5.12

En las Figuras 5.26, 5.27, 5.28 y 5.29 se muestra cuatro casos de identificación de los parámetros del desbalance, posición angular (α) y magnitud del desbalance ($m_u d$) para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) y distintas velocidades.

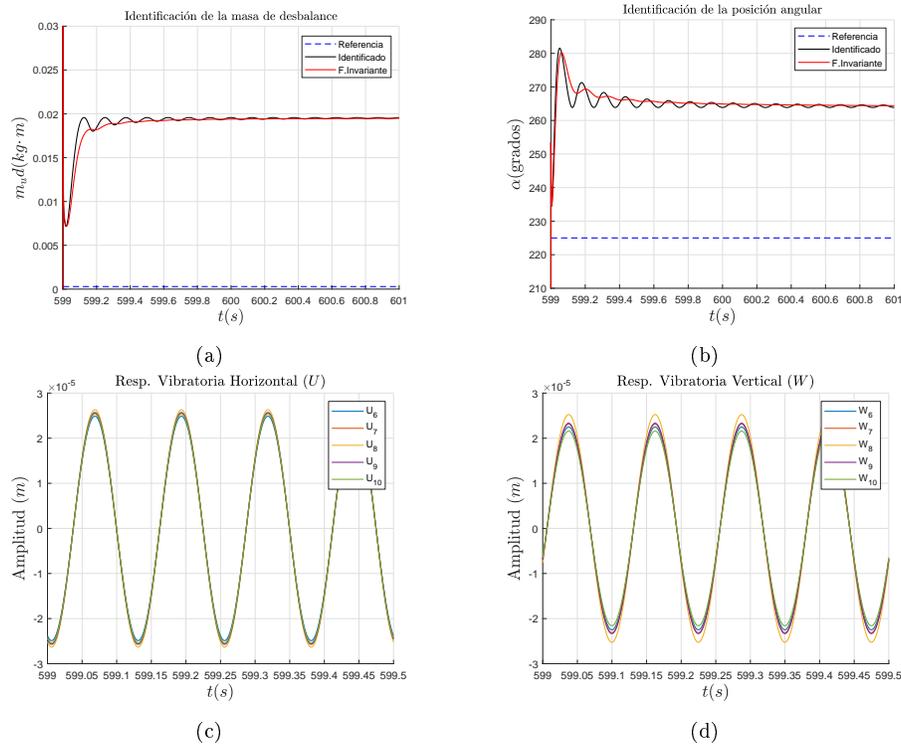


Figura 5.26: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 480 rpm .

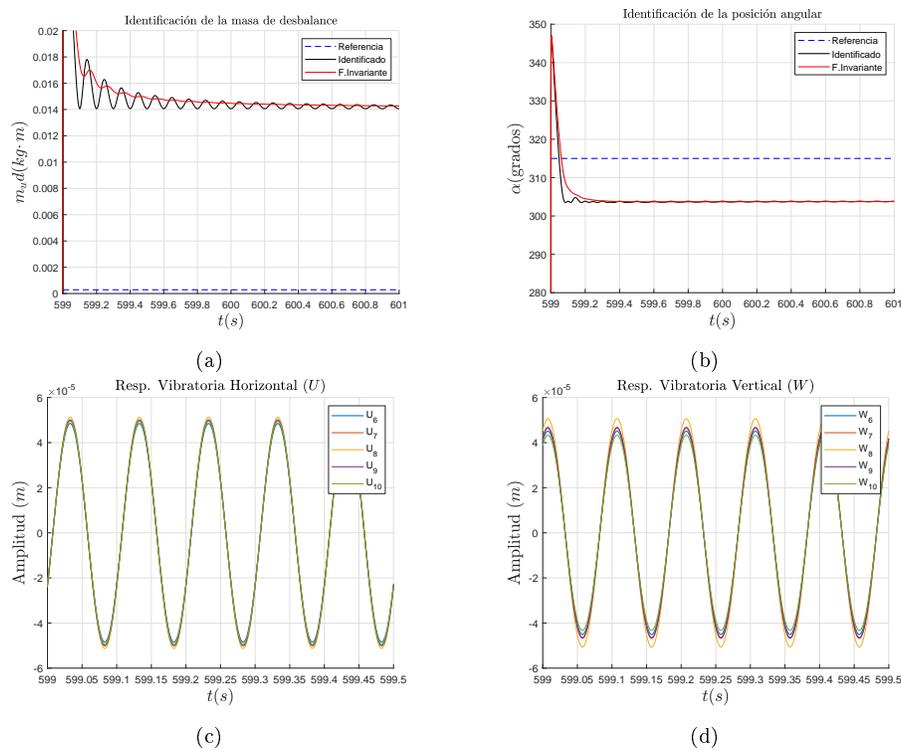


Figura 5.27: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 600 rpm .

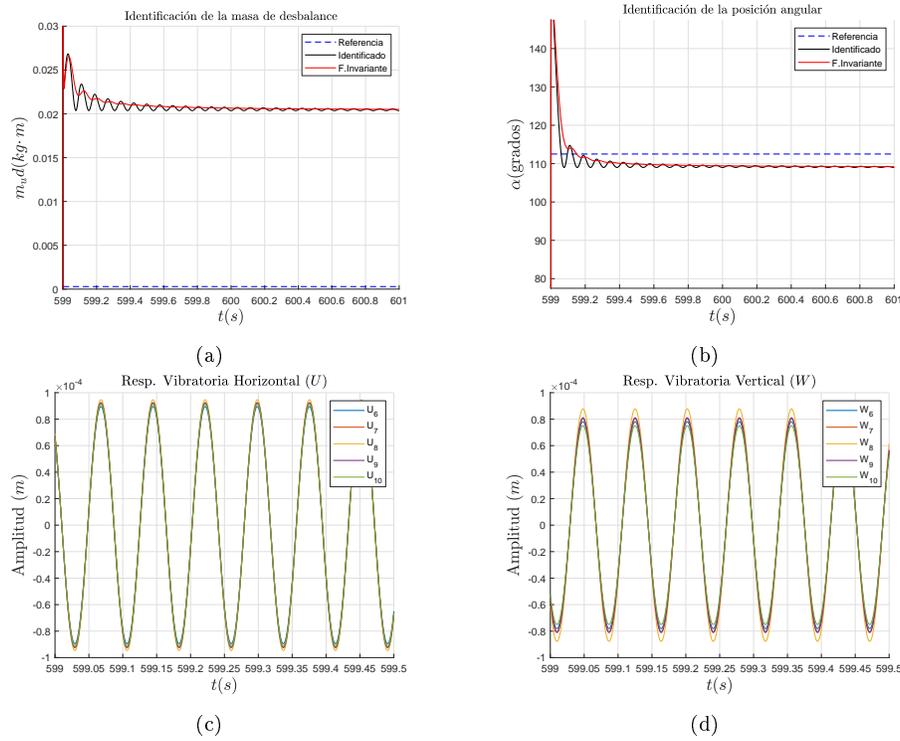


Figura 5.28: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 780 rpm .

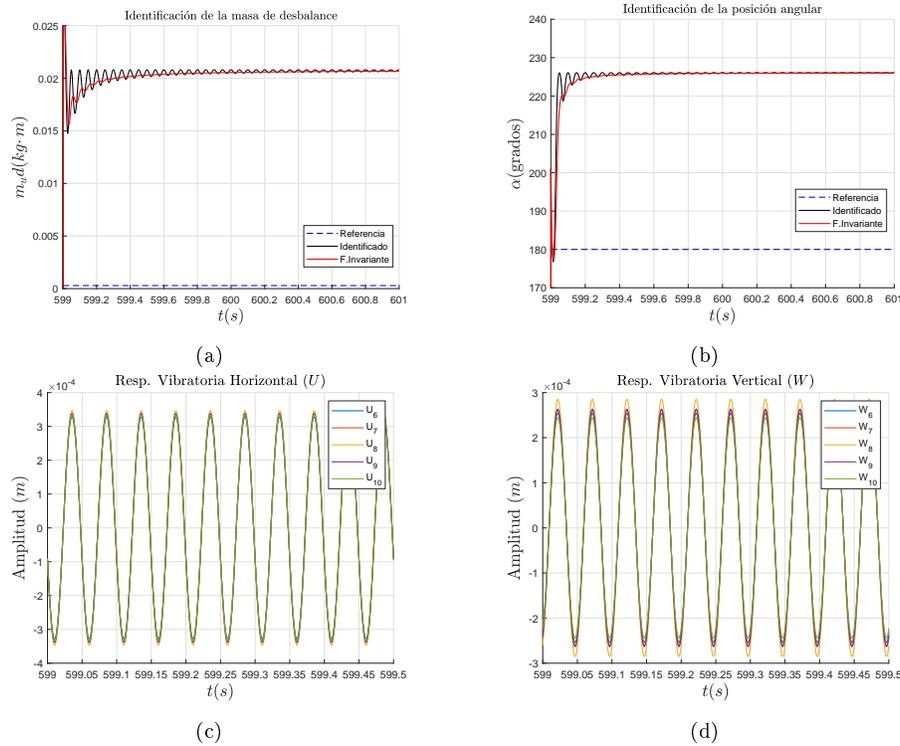


Figura 5.29: Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 1200 rpm .

En la Tabla 5.15 se presentan los resultados correspondientes a la identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) a distintas velocidades y posiciones angulares.

Tabla 5.15: Identificación de los parámetros del desbalance de la masa M_3

Velocidad (rpm)	$m_u d$ ($\text{kg}\cdot\text{m}$)	$m_u d$ identificado	error % $m_u d$	Posición angular $\alpha(\circ)$	Posición angular identificada $\alpha(\circ)$	error % α
480	2.8692×10^{-4}	0.0202	6.94×10^3	112.5	105	4.16
		0.0083	2.78×10^3	180	214.5	19.16
		0.0195	6.69×10^3	225	264.4	21.88
		0.0137	4.67×10^3	315	303.4	6.44
600		0.0198	6.78×10^3	112.5	109.1	1.88
		0.0112	3.8×10^3	180	227.1	26.16
		0.0227	7.8×10^3	225	263.4	21.33
		0.0143	4.87×10^3	315	303.8	6.22
780		0.0205	7.04×10^3	112.5	109.2	1.83
		0.0115	3.9×10^3	180	222.8	23.77
		0.0243	8.35×10^3	225	262	20.55
		0.0147	5×10^3	315	304.2	6.22
1140		0.0251	8.63×10^3	112.5	110.7	1
		0.0178	6.09×10^3	180	222.7	23.72
		0.0320	1.1×10^4	225	258.3	18.5
		0.0181	6.21×10^3	315	312.7	1.27
1200	0.0284	9.8×10^3	112.5	106.7	3.22	
	0.0207	7.1×10^3	180	226	25.55	
	0.0353	1.22×10^4	225	257.5	18.05	
	0.0195	6.68×10^3	315	315.6	0.33	

En la Figura 5.30 se muestra el el error obtenido para cada una de las posiciones angulares de prueba de la masa M_3 a distintas velocidad así como el error promedio de cada una de ellas.

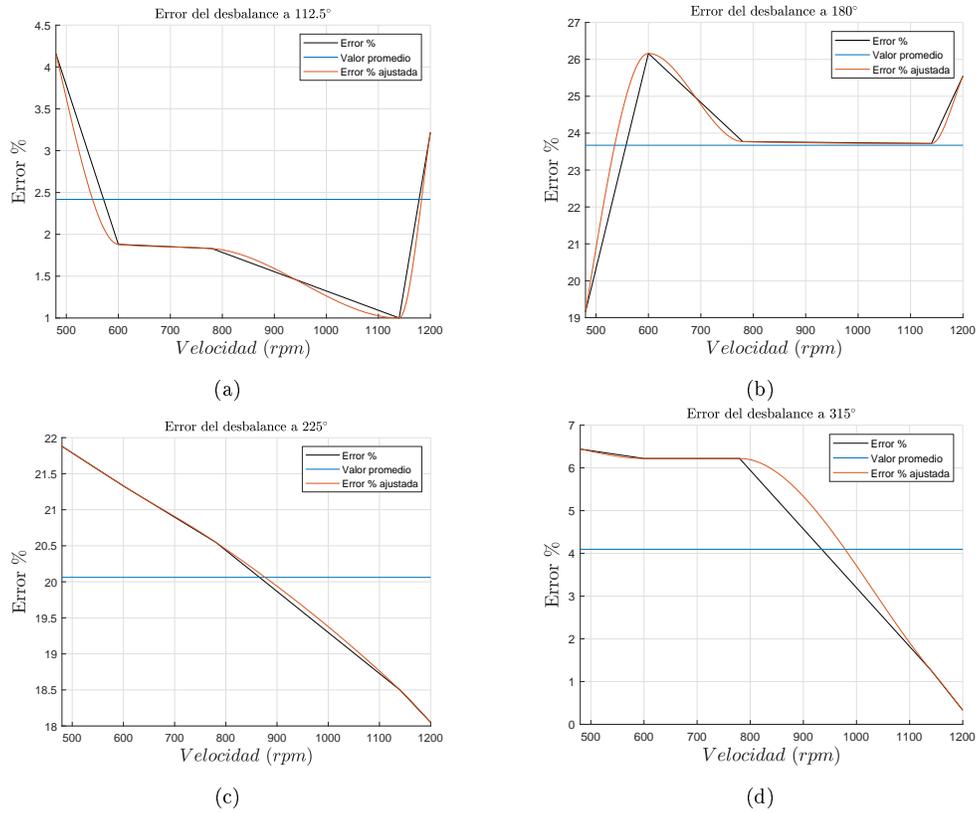


Figura 5.30: Error promedio de las posiciones angulares de la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$)

Resultados de la masa de desbalance de prueba M_3

De los resultados presentados en la Tabla 5.15 para la masa de prueba de desbalance M_3 , se puede observar que existe un porcentaje de error menor al 22%, sin embargo, para la magnitud del desbalance se registraron errores en el orden de 10^3 . Lo anterior, hace suponer que las magnitudes no son correctas, sin embargo, existe una constante de amplificación o proporcionalidad en las magnitudes identificadas que hace que el cálculo de la posición angular se encuentre en la mayoría de los casos en porcentajes de error aceptables.

Por otra parte, en la Figura 5.30 se puede observar que los porcentajes de error promedio para cada posición angular de la masa de desbalance de prueba M_3 , es de aproximadamente el 4% para la posición angular de 315° , 20% para la posición angular de 225° , 24% para la posición angular de 180° y del 2.5% para la posición angular de 112.5° .

5.5.2. Conclusión de la identificación algebraica (punto pesado y vector efecto)

Se puede observar de los resultados obtenidos para la identificación del desbalance para las masas de prueba de desbalance M_1 , M_2 y M_3 que los porcentajes de error de la posición angular del desbalance oscila en el entre el 0.33% como mínimo y 26.5% como máximo. Se propusieron posiciones angulares del desbalance en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano,

y se observó que los mayores porcentajes de error promedio para cada posición angular se presentaron en el tercer cuadrante, es decir en el intervalo de $180^\circ - 270^\circ$. Por otra parte, los porcentajes de error para la magnitud del desbalance son grandes en el orden de 10^3 , sin embargo, existe una constante de proporción en las magnitudes identificadas tanto en la dirección horizontal como vertical, ya que a partir de estas, se calcula la posición angular del desbalance.

Cabe mencionar, que los porcentajes de error en la identificación de la posición angular del desbalance se puede mejorar, ya que estos dependen del instante de tiempo en el que se recorta la señal de vibración tomando como referencia el tacómetro del sistema, ya que también la señal del tacómetro presenta oscilaciones de velocidad y amplitud ocasionando que la referencia de corte de la señal de vibración no sea en la posición del tiempo adecuado (ver sección 5.6, Capítulo 5). Es importante mencionar que el identificador propuesto identifica la posición angular del desbalance global del sistema rotodinámico sin la necesidad de superar la primera velocidad crítica del sistema en un tiempo menor a 0.1 s.

5.6. Referencia del sistema para la identificación.

Como se mencionó anteriormente, para que la identificación se realice de forma correcta y minimizar el porcentaje de error, es importante el instante de tiempo en el que se recorta la señal de vibración tomando como referencia el tacómetro del sistema. El tacómetro al igual que las señales de vibración experimentales sufre variaciones de velocidad debidas al control de velocidad del sistema. Para lo anterior, se realizó un análisis considerando distintos puntos de corte en la señal de vibración, tomando como referencia el tacómetro del sistema. Lo anterior, con el objetivo de observar de esta forma la influencia de una mala referencia en el análisis de las señales. En la Figura 5.31 se muestran cuatro puntos de corte de la señal de vibración utilizada en la identificación del desbalance. Se puede observar, que de acuerdo con las distintas referencias se obtienen cuatro diferentes señales de vibración que se utilizan como dato de entrada en el identificador algebraico, los resultados de la identificación para cada señal de vibración se muestran en la Tabla 5.16.

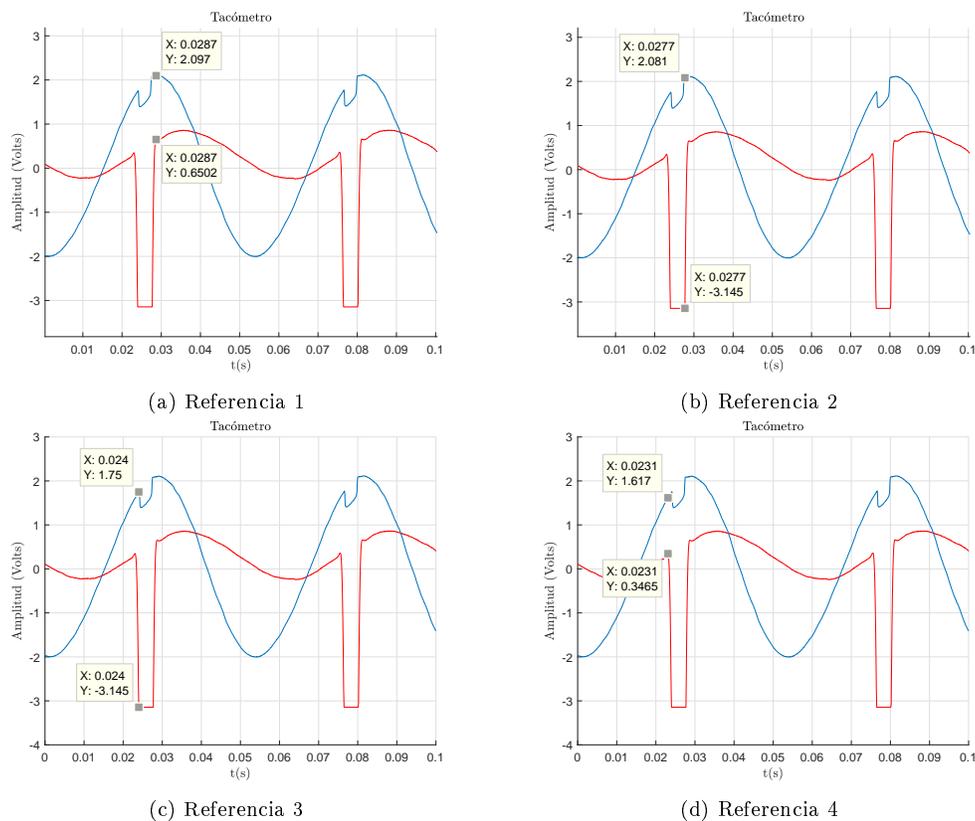


Figura 5.31: Variación de las referencias de corte para las señales experimentales a partir de la señal del tacómetro.

En la Figura 5.32 se muestra el comportamiento de la identificación de la posición angular del desbalance en las cuatro referencias de corte correspondiente a la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1140 rpm .

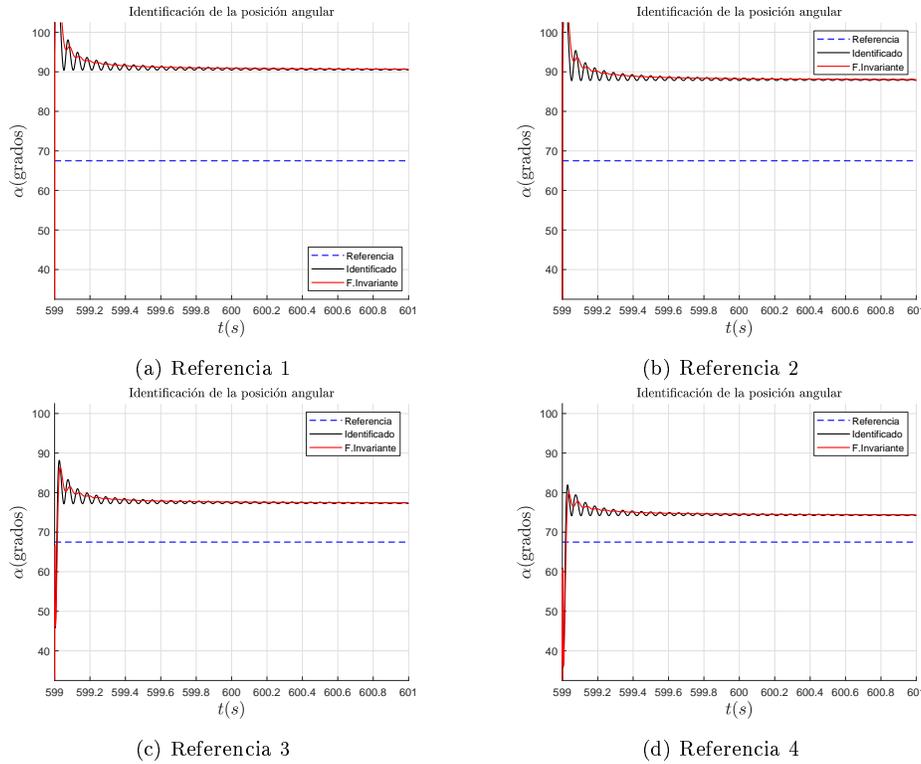


Figura 5.32: Identificación algebraica de la posición angular variando la referencia de corte de las señales experimentales.

En la Tabla 5.16 se presentan los resultados de la identificación de la posición del desbalance obtenidos a partir del ajuste de referencias de la señal experimental de la masa ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad de 1140 rpm.

Tabla 5.16: Resultados de la identificación algebraica de los parámetros del desbalance variando la referencia de corte

Velocidad (rpm)	Referencia	$m_u d$ ($\text{kg}\cdot\text{m}$)	$m_u d$ identificado	error % μu_d	Posición angular $\alpha(\circ)$	Posición angular identificada $\alpha(\circ)$	error % α
1140	1	1.9575×10^{-4}	0.0229	1.16×10^4	67.5	90.66	12.86
	2		0.0229	1.16×10^4		88.04	11.41
	3		0.0210	1.063×10^4		77.42	5.51
	4		0.02	1.012×10^4		74.38	3.82

Como se puede apreciar en los resultados de la variación de la referencia de corte de las señales experimentales, los errores en los parámetros identificados del desbalance se logran reducir de un 12.86 % hasta un mínimo de 3.82 % en la identificación de la posición angular del desbalance, por lo cual se confirma que la señal experimental correspondiente al tacómetro presenta fluctuaciones de velocidad ocasionando un cambio en el corte de la referencia de las señales experimentales. También se puede observar, que la identificación de la magnitud del desbalance mejora, sin embargo, esta no converge a la magnitud real.

5.7. Identificación de la posición angular del desbalance para el balanceo modal del rotor experimental

En la sección anterior se demostró que el identificador es capaz de identificar la posición angular del desbalance global presente en el sistema, por lo cual se propone adquirir la respuesta vibratoria V_0 del sistema sin balancear y posteriormente identificar la posición angular del desbalance global. En la Figura 5.33 se muestra la identificación de la posición angular del rotor experimental correspondiente a las velocidades de 600, 900, 1200, 1320 y 1500 rpm.

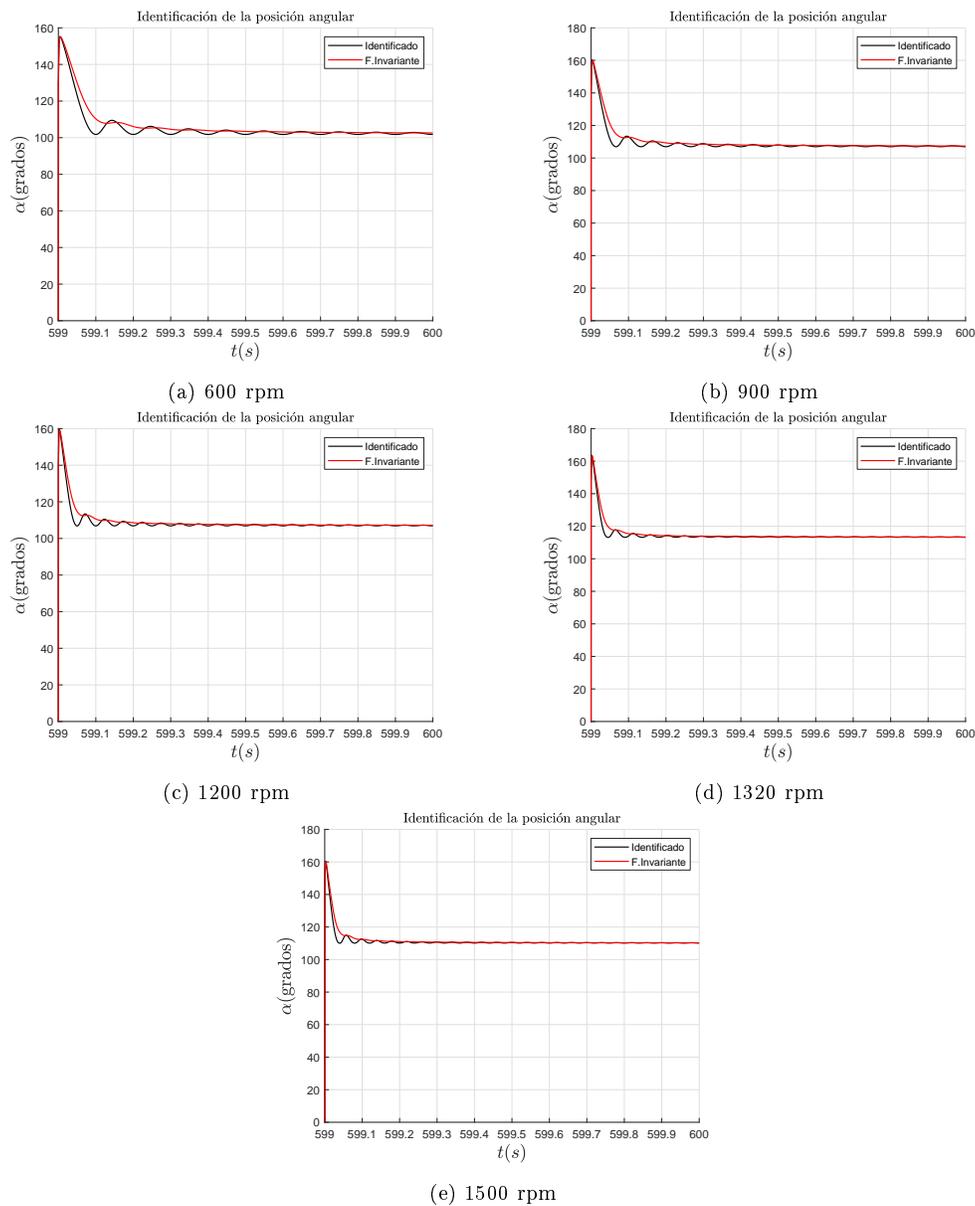


Figura 5.33: Identificación de la posición angular del desbalance global del rotor RK4 Bently Nevada a distintas velocidades.

En la Tabla 5.17, se presentan las posiciones angulares del desbalance en las diferentes velocidades del rotor, se puede apreciar que el valor identificado es consistente y oscila entre 102.6° grados como mínimo y 113.4° grados como máximo. Para el balanceo del rotor, se consideró el valor promedio que corresponde a una posición angular de 108.18° grados, por otra parte, en la Figura 5.34 se muestra el comportamiento de la posición angular del desbalance identificada en función de la velocidad del rotor. Como era de esperarse, se observa que la posición angular del desbalance identificada es prácticamente constante en las diferentes velocidades del rotor.

Tabla 5.17: Identificación de la posición angular del desbalance global

Velocidad (rpm)	Posición angular identificada $\alpha(^{\circ})$
600	102.6
900	107.4
1200	107.2
1320	113.4
1500	110.3
Promedio	108.18

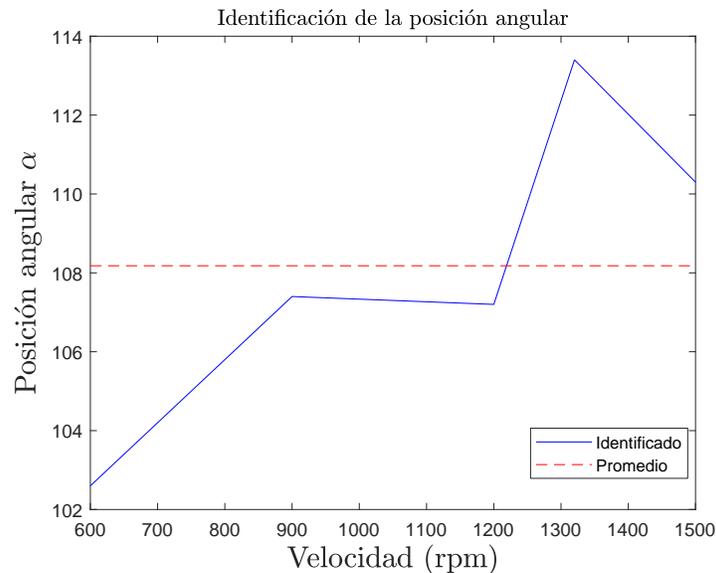
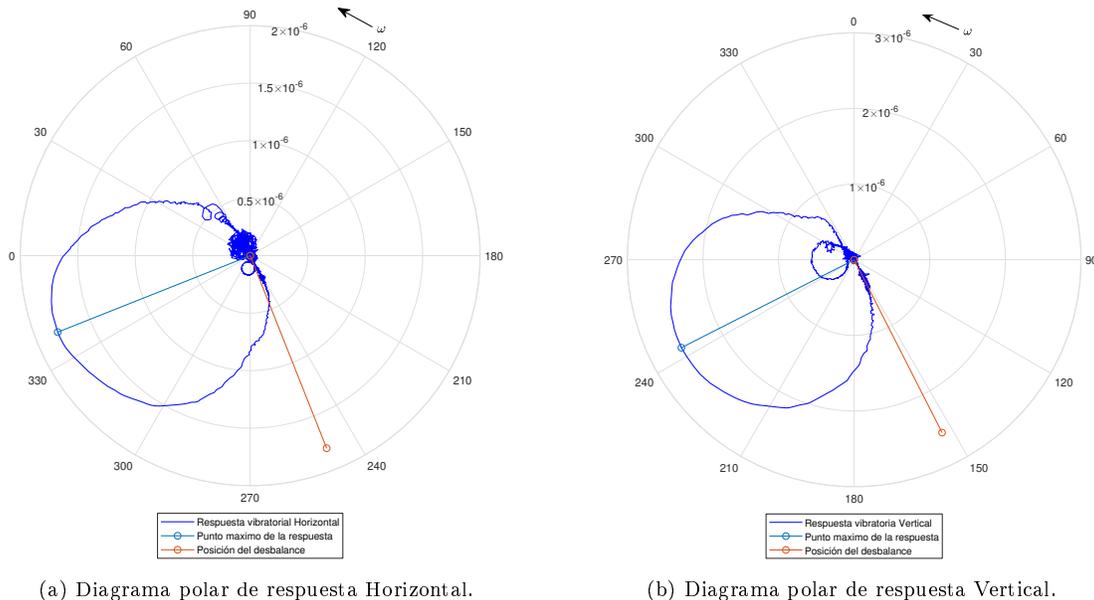


Figura 5.34: Posición angular promedio del desbalance global.

Con el objetivo de validar o ratificar la posición angular identificada, se determina la posición angular del desbalance a partir de la metodología de balanceo modal utilizando los diagramas polares de respuesta, en la Figura 5.35 se muestra los diagramas polares del sistema en un intervalo de 0 a 2500 rpm, en donde el punto mas alto del diagrama polar de respuesta corresponde a la respuesta de vibración en condiciones de resonancia y 90° grados adelante se encuentra el desbalance [2].

Tomando como referencia el eje vertical (0 grados), el sentido de giro del rotor es en contra de las manecillas del reloj, por lo que la respuesta de vibración del rotor se atrasa en sentido horario. En la Figura 5.35b, se puede observar que la máxima amplitud de vibración se localiza aproximadamente en 240° grados, por lo que 90° grados adelante, se localiza la posición angular del desbalance, es decir a 150° grados. Por otra parte, como la señal de vibración del eje horizontal (Figura 5.35a) se encuentra desfasada 90° grados con respecto a la vibración del eje vertical, la posición angular del desbalance para este eje se localiza en aproximadamente 240° grados. Nótese, que la posición angular del desbalance identificada con el identificador propuesto, fue de 108.18° grados, posición angular cercana a los 150° grados calculados a partir de la metodología de balanceo modal.



(a) Diagrama polar de respuesta Horizontal.

(b) Diagrama polar de respuesta Vertical.

Figura 5.35: Identificación de la posición angular del desbalance a partir de los diagramas polares de respuesta (metodología de Balanceo Modal).

A partir de la posición angular del desbalance identificada promedio de 108.18° grados se propone como posición angular para colocar la masa de balanceo 288.18°, a partir de la posición angular de balanceo se definen los pozos próximos presentes en el disco inercial del rotor siendo 270°, 292.5°, 315° y 337.5° las posiciones angulares de balanceo posibles. En la Figura 5.36 se muestra el disco inercial del rotor experimental, los pozos de balanceo disponibles se muestran de color rojo mientras la posición angular del desbalance global identificada se presenta de color azul, nótese que el giro del rotor es sentido antihorario, por lo tanto, la graduación se genera en sentido contrario a éste.

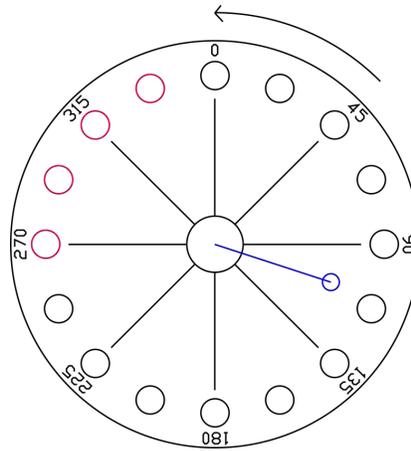


Figura 5.36: Disco inercial del rotor Bently Nevada RK4.

Se propone una masa de balanceo de prueba de $0.1g$ ($3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$) y se coloca en 270° , 292.5° , 315° y 337.5° , posibles posiciones angulares de balanceo. Lo anterior, con el objetivo de observar el efecto de la masa de balanceo en la respuesta de vibración del rotor, en las diferentes posiciones angulares. En la Figura 5.37 se muestran los diagramas de Bode de amplitud, así como, los diagramas Polares de respuesta de la vibración del rotor, para las diferentes posiciones angulares de la masa de balanceo, de igual forma en la Figura 5.37, se observa una disminución en la respuesta de vibración principalmente en las posiciones angulares de 292.5° , 315° y 337.5° grados. Se puede observar, que la amplitud de vibración se logra disminuir en un porcentaje mayor cuando la masa de balanceo se coloca en las posiciones angulares de 315° y 337.5° grados.

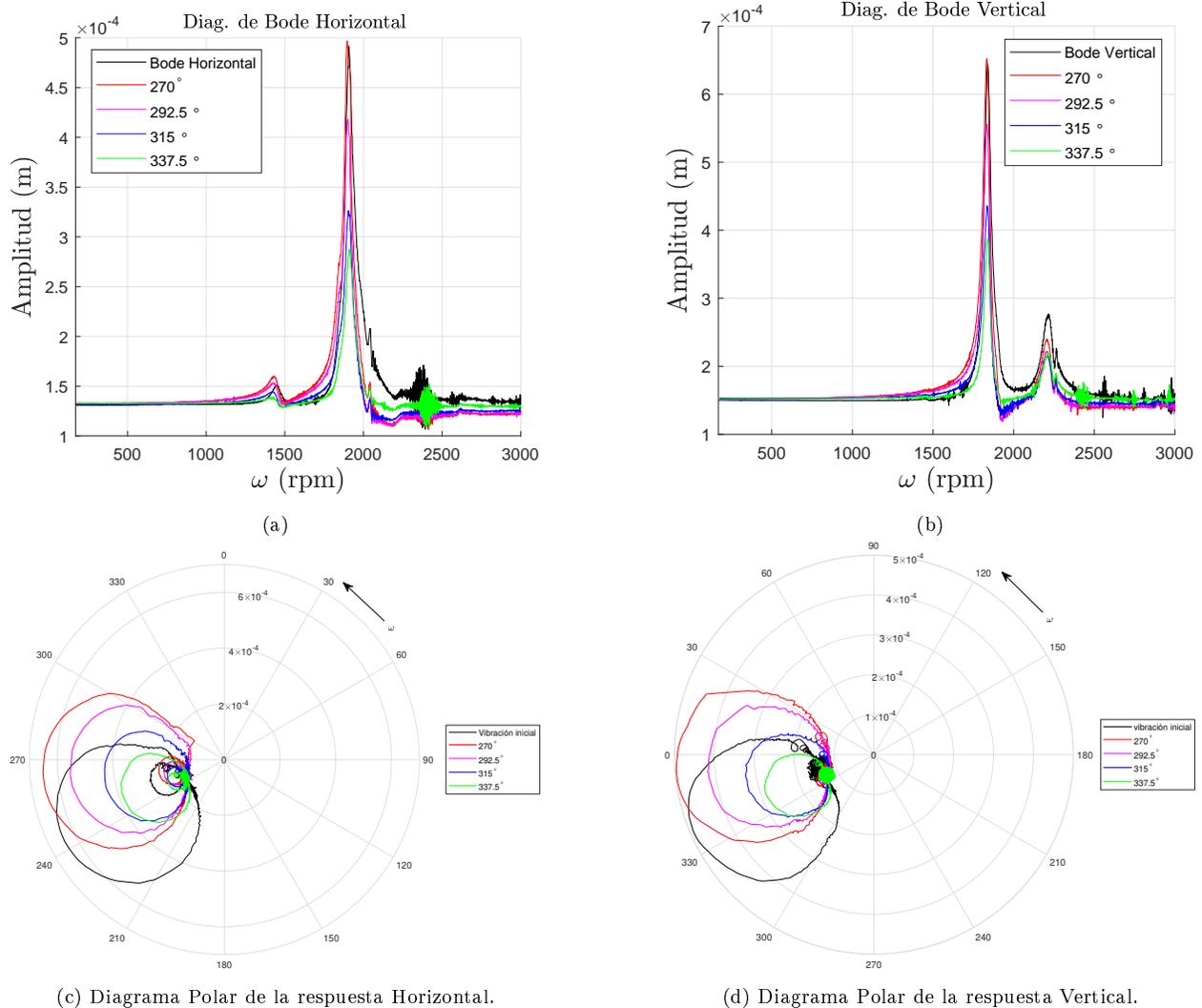


Figura 5.37: Respuesta vibratoria del sistema debido a la masa de prueba de 0.1 g ($3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$).

De la Figura 5.37 se logra observar que las posiciones de balanceo mas significativas son las correspondientes a 315° y 337.5° , por lo que se calcula una masa de balanceo corregida para estas dos posiciones angulares, tomando como V_1 la masa de balanceo de prueba de 0.1 g ($3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$).

Masa de balanceo corregida para la posición angular de 315° .

En la Figura 5.38 se muestra la amplitud de vibración en la dirección vertical y horizontal del rotor antes y después de colocar la masa de balanceo de prueba de 0.1 g ($3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$) en la posición angular de 315° .

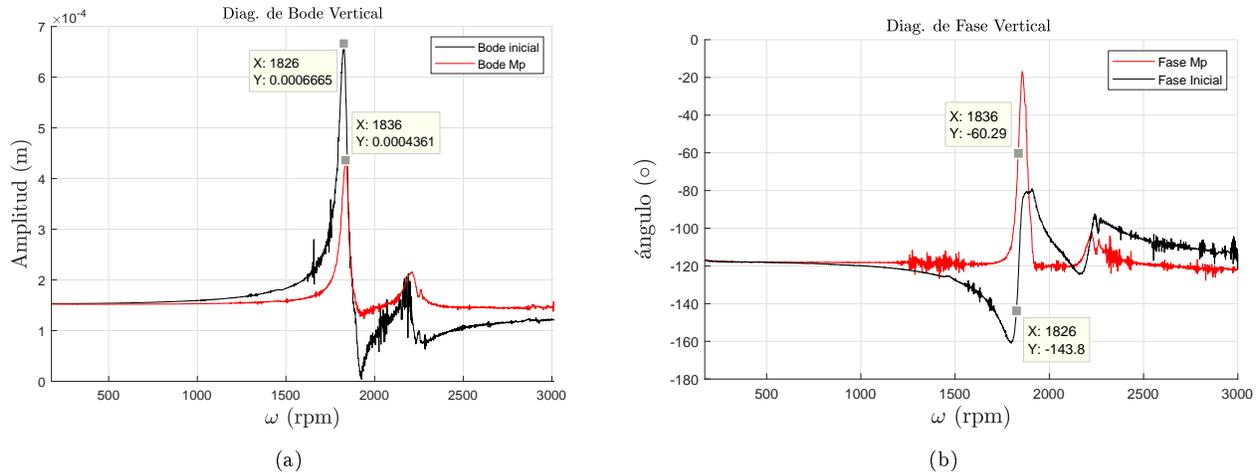


Figura 5.38: Diferencia de amplitud debido a la masa de balanceo de prueba de $3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ y posición angular de 315° .

El cálculo de la masa de balanceo corregida, se determina considerando la diferencia de amplitud de vibración en condiciones de resonancia, tomando para ello el diagrama de bode experimental con la mayor amplitud de vibración. En la Figura 5.38 se presenta la respuesta vibratoria inicial (V_0) antes de la masa de prueba del balanceo y la respuesta de vibración resultante posterior a la masa de prueba de balanceo (V_1). El efecto ocasionado por la masa de balanceo de prueba se puede calcular de la siguiente forma:

$$\Delta Amp = V_0 - V_1 \quad (5.4)$$

Sustituyendo los valores de amplitud de vibración en condiciones de resonancia de la Figura 5.38a en la ecuación 5.4 se obtiene:

$$\Delta Amp = 6.6648 \times 10^{-4} \text{ m} - 4.3609 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta Amp \approx 2.3039 \times 10^{-4} \text{ m}$$

De la diferencia de amplitud (ΔAmp) se concluye que el efecto ocasionado por la masa de prueba de $3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$ es aproximadamente a $2.3039 \times 10^{-4} \text{ m}$. De la Figura 5.38a se puede observar que la amplitud de vibración residual en condiciones de resonancia posterior a la masa de prueba de balanceo es de $4.3609 \times 10^{-4} \text{ m}$, amplitud de vibración que se debe eliminar para balancear el sistema. Nótese que con 0.1 g ($3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$) se generó un vector efecto de amplitud de $2.3039 \times 10^{-4} \text{ m}$.

Si se considera que la respuesta vibratoria de V_0 y V_1 tiene la misma fase, mediante una regla de tres, se puede calcular la masa de balanceo restante con lo que se lograría disminuir la vibración en su totalidad. De acuerdo con lo anterior, la masa de balanceo restante es aproximadamente de 0.2 g ($6 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$). Es decir la masa de balanceo corregida es de 0.3 g ($9 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}$) lo que genera un vector efecto de $6.9117 \times 10^{-4} \text{ m}$. Finalmente, se retira la masa de balanceo de prueba y se coloca la masa de balanceo corregida.

En la Figura 5.39 se presenta la comparativa de los diagramas de Bodes y diagramas Polares horizontal y vertical del sistema para la respuesta vibratoria V_0 , la respuesta vibratoria debido a la masa de balanceo de prueba V_1 y la respuesta de vibración obtenida con la masa de balanceo corregida V_{mb} . De la Figura 5.39 se puede observar que la vibración residual del rotor posterior a la masa de balanceo corregida presenta una amplitud en condiciones de resonancia todavía significativa, lo que significa que la posición angular donde se colocó la masa de balanceo corregida 315° grados no es la correcta.

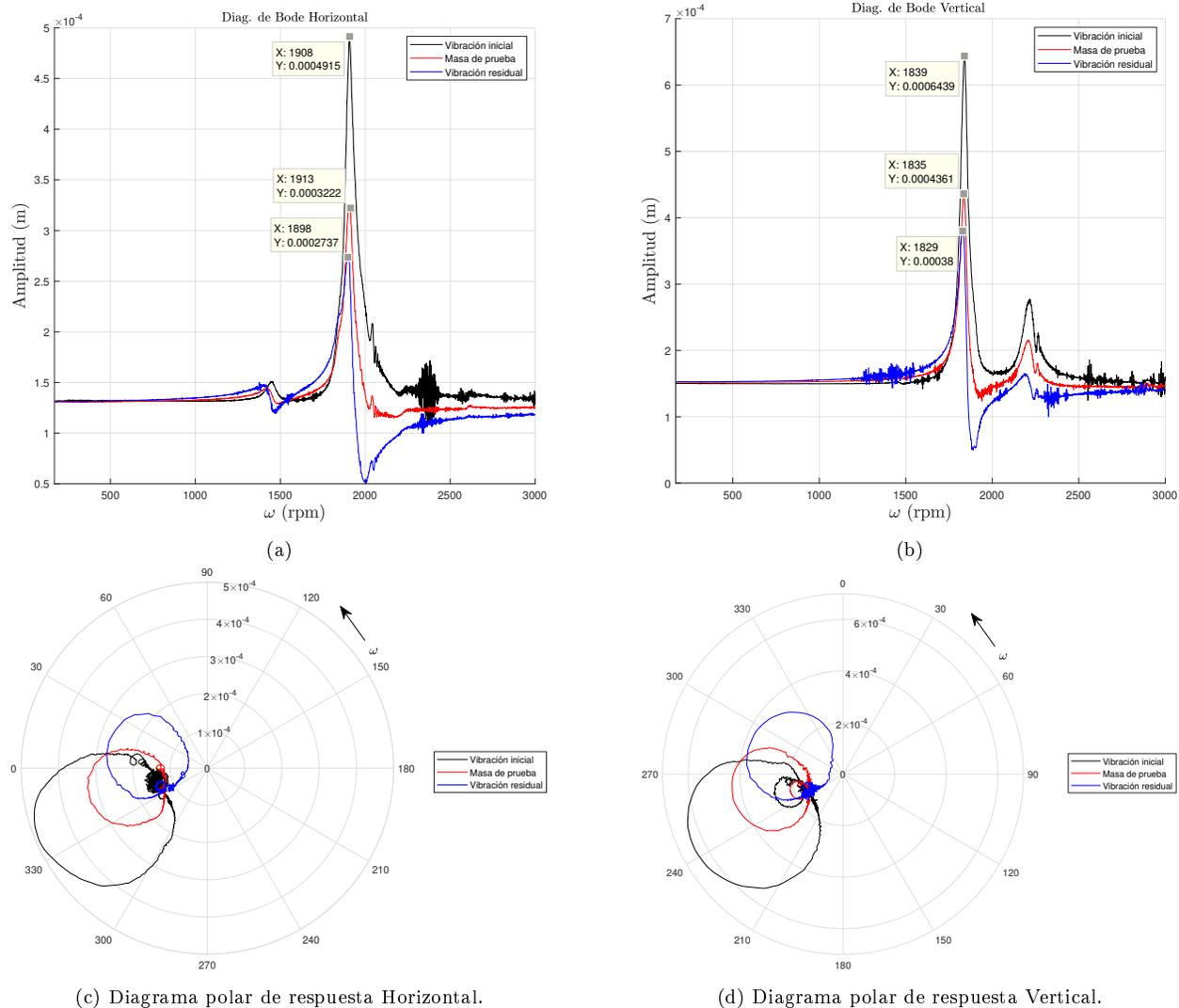


Figura 5.39: Corrección de la respuesta vibratoria del sistema para una masa de 0.3 g ($9 \times 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}$) y posición angular de 315°

Masa de balanceo corregida para la posición angular de 337.5° .

De la Figura 5.37 se puede observar que la amplitud de vibración del rotor en condiciones de resonancia posterior a la masa de balanceo de prueba 0.1 g ($3 \times 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}$) colocada en las posiciones angulares de 315° y 337.5° grados son similares, por lo que la masa de balanceo corregida calculada para la posición angular de 315° grados, se coloca ahora en la posición angular de 337.5° grados esto con el fin de observar el efecto de la nueva posición angular

de la masa de balanceo corregida en la respuesta vibratoria del sistema. En la Figura 5.40 se presenta la comparativa de los diagramas de Bode y diagramas Polares horizontal y vertical de la respuesta vibratoria inicial V_0 , la respuesta debido a la masa de prueba de balanceo V_1 y la respuesta de vibración obtenida con la masa de balanceo corregida V_{mb} .

De la Figura 5.41 se puede observar que la vibración residual del rotor posterior a la masa de balanceo corregida presenta una amplitud en condiciones de resonancia mínima, lo que significa que la posición angular donde se colocó la masa de balanceo corregida 337.5° grados es la correcta.

En conclusión, se logró disminuir la amplitud de vibración del rotor al 100 % colocando una masa de balanceo corregida de 0.3 g ($9 \times 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}$) en una posición angular de 337.5° grados.

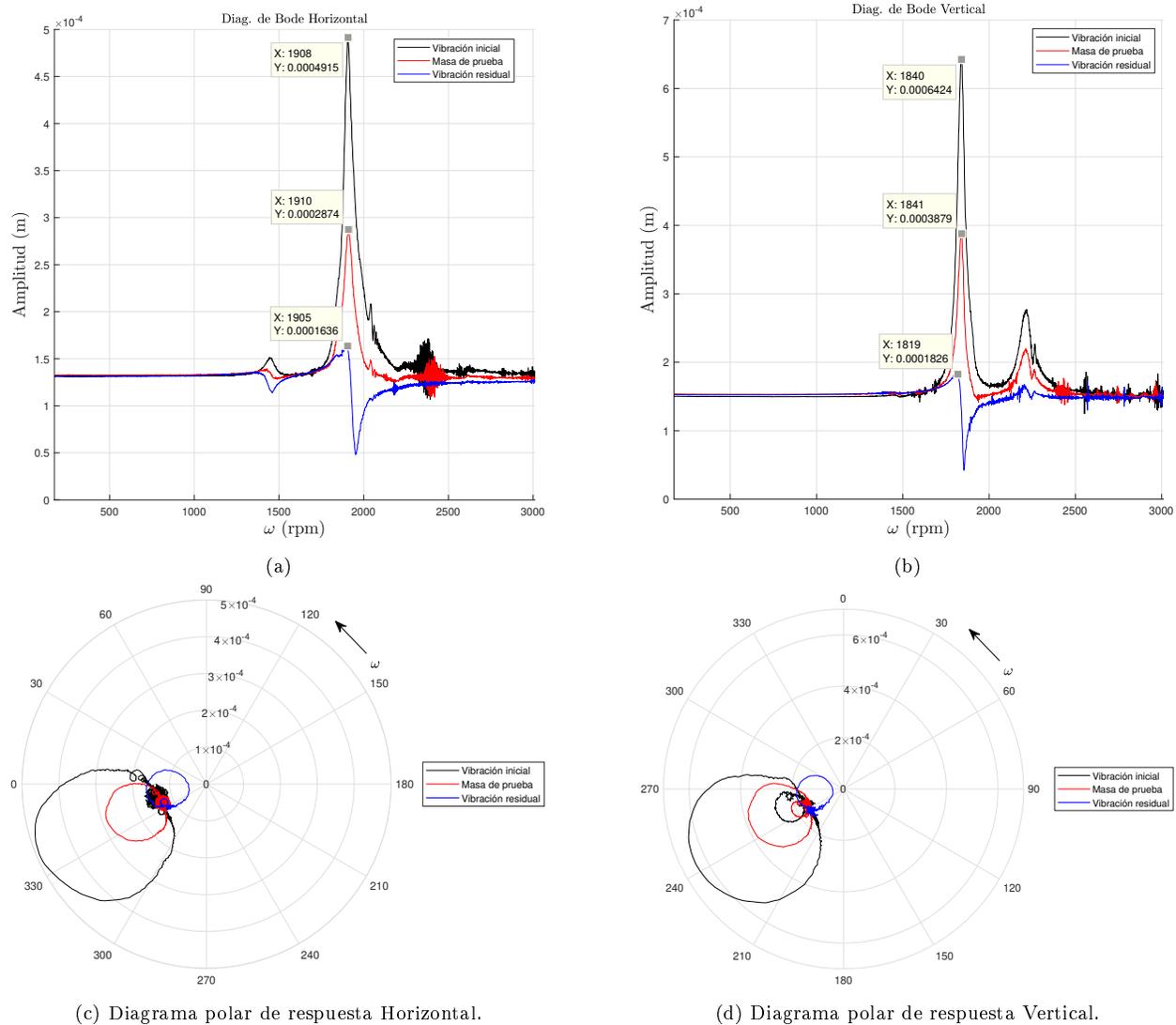


Figura 5.40: Corrección de la respuesta vibratoria del sistema para una masa de balanceo corregida de 0.3 g ($9 \times 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}$) y posición angular de 337.5°

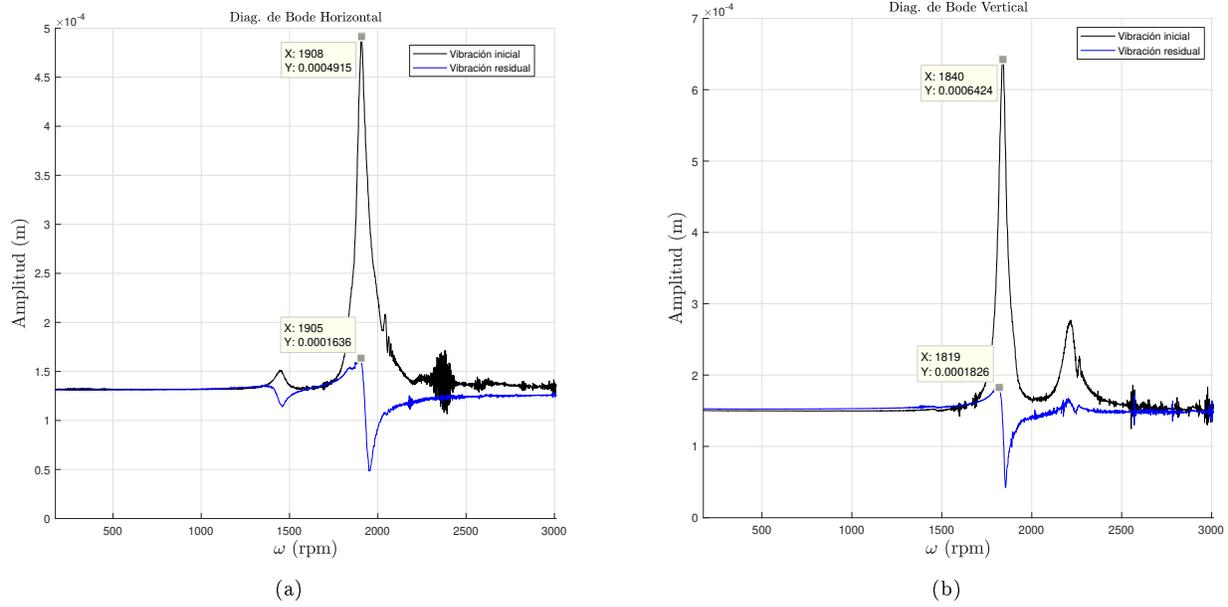


Figura 5.41: Respuesta vibratoria residual del sistema.

Discusión de los resultados

De la Figura 5.41 se observa que el rotor experimental se balanceo en un 100% al colocar la masa de balanceo corregida en una posición angular de 337.5° grados, por otra parte, la posición angular de desbalance identificada promedio fue de 108.18° , lo que corresponde una posición angular para el balanceo del rotor de 288.18° . Tomando como posición angular de balanceo real la calculada con la metodología del balanceo modal 330° , la posición angular de balanceo identificada 288.18° presenta un error del 23.23%, porcentaje similar a los porcentajes máximos reportados en las pruebas experimentales del Capítulo 5.

Cabe hacer notar, que no se colocó una masa de balanceo en la posición angular de 330° , ya que no existe pozo de balanceo en el rotor. Nótese, que la identificación de la posición angular del desbalance global del rotor se puede realizar a bajas velocidades sin necesidad de llevar el rotor a velocidades críticas.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se presenta un análisis experimental de la técnica de identificación algebraica del desbalance para el balanceo de un sistema rotodinámico. La metodología propuesta se basa en la identificación algebraica de parámetros en línea y toma como dato la respuesta de vibración del sistema rotor cojinete obtenida a velocidad constante. El identificador propuesto, toma como base el modelo matemático del comportamiento dinámico de un sistema rotodinámico de múltiples grados de libertad, modelado mediante la técnica del elemento finito, utilizando elementos finitos tipo viga de cuatro grados de libertad por nodo.

De los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas y pruebas experimentales, se concluye que la identificación de los parámetros del desbalance (magnitud y posición angular) se ve afectada por las variaciones en amplitud y frecuencia de las señales de vibración obtenidas a velocidad constante. De acuerdo a lo anterior, se propone la aplicación de un análisis espectral a la señal de vibración del rotor mediante la aplicación de la Transformada de Fourier (FFT). Con la aplicación de la FFT a la señal de vibración se logra obtener la señal correspondiente a los efectos del desbalance, eliminando otros fenómenos presentes en la señal como pueden ser, desalineamiento, pandeo del rotor, ruido eléctrico, variaciones de frecuencia, etc, que pueden presentarse como armónicas $2x$, $3x$, etc.

Para la metodología propuesta de identificación, es fundamental conocer de manera precisa las formas modales del sistema, de esta manera se requiere la medición de la respuesta de vibración tanto vertical como horizontal en un solo punto, calculando la vibración en otros puntos a lo largo del rotor utilizando la forma modal.

Por otra parte, para que la identificación sea exitosa, es fundamental el tiempo donde se recorta la señal de vibración, por lo que es necesario, tomar como referencia el tacómetro del sistema y analizar la identificación para diferentes puntos de referencia del tacómetro. De los resultados obtenidos se demostró que el recorte de la señal en el tiempo diferente al requerido, el error en la estimación de los parámetros del desbalance puede ser muy grande.

Se demostró de forma numérica que es posible la aplicación de la técnica de identificación de parámetros en línea en sistemas rotodinámicos, ya que se identifica de forma exitosa tanto la amplitud del desbalance como su posición angular. Durante las pruebas experimentales fue posible identificar con un margen de error aceptable la posición angular del desbalance,

sin embargo, la identificación de la magnitud presentó errores porcentuales del orden de 10^3 comparado con la magnitud del desbalance de referencia.

De acuerdo al modelo del identificador propuesto, la posición angular del desbalance se calcula a partir de las magnitudes del desbalance identificado en la dirección horizontal y vertical del rotor. Lo anterior, significa que, si la posición angular del desbalance identificado es función de las magnitudes identificadas del desbalance horizontal y vertical del rotor, existe un factor de proporcionalidad en las magnitudes identificadas del desbalance que permite obtener una posición angular de desbalance con un margen de error aceptable.

Los resultados obtenidos demuestran que la metodología de identificación de parámetros en línea propuesta en este estudio, puede ser aplicada en sistemas rotodinámicos para la identificación de la posición angular del desbalance del rotor. Asimismo, la identificación se puede realizar tomando como dato de entrada la vibración del rotor a velocidad constante, realizando ésta a bajas velocidades sin necesidad de llevar al sistema rotodinámico a operar en condiciones de resonancia.

6.1. Trabajos futuros

A partir del análisis experimental de la técnica de identificación algebraica aplicada a sistemas rotodinámicos para la estimación de los parámetros del desbalance global del sistema se proponen los siguientes trabajos.

- Mejorar la referencia del sistema debido a que el tacómetro genera errores en la identificación de los parámetros del desbalance.
- Identificar los parámetros del desbalance globales del sistema rotor-cojinete experimental con una configuración de dos y tres discos inerciales.
- Acoplar la metodología desarrollada en este trabajo basada en la identificación algebraica con la técnica de algoritmos genéticos para mejorar la identificación de los parámetros del desbalance.
- Agregar más fuerzas de excitación al modelo como: desalineamiento, variación de velocidad y ruido aleatorio.
- Acoplar la metodología basada en la identificación algebraica a un dispositivo de control de vibraciones activo (disco de balanceo)

Bibliografía

- [1] M. Lalanne and G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*. No. v. 2 in Rotordynamics prediction in engineering, John Wiley, 1998.
- [2] H. Jeffcott, “Xxvii. the lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed.—the effect of want of balance,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 37, no. 219, pp. 304–314, 1919.
- [3] H. Taylor, “Critical-speed behavior of unsymmetrical shafts,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 71–79, 1940.
- [4] R. E. D. Bishop, “The vibration of rotating shafts,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 1, no. 1, pp. 50–65, 1959.
- [5] R. E. D. Bishop and G. M. L. Gladwell, “The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 1, no. 1, pp. 66–77, 1959.
- [6] A. G. Parkinson, “On the balancing of shafts with axial asymmetry,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 294, no. 1436, pp. 66–79, 1966.
- [7] J. F. Shortle and M. B. Mendel, “Predicting dynamic imbalance in rotors,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 11, no. 1, pp. 31 – 35, 1996.
- [8] J. C. Ocampo, “Balance de rotores asimetricos,” Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 1996.
- [9] E. H. Marceliz, “Balanceo de rotores flexibles mediante el análisis modal,” Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2008.
- [10] J. M. González, “Arreglo de pesos modales para el balanceo de rotores asimétricos,” Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2009.
- [11] F. J. R. Moroyoqui, “Análisis experimental en el balanceo modal de rotores asimétricos,” Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2016.
- [12] J. Yao, L. Liu, F. Yang, F. Scarpa, and J. Gao, “Identification and optimization of unbalance parameters in rotor-bearing systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 431, pp. 54 – 69, 2018.

-
- [13] A. Shrivastava and A. R. Mohanty, "Identification of unbalance in a rotor system using a joint input-state estimation technique," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 442, pp. 414 – 427, 2019.
- [14] A. Wang, W. Yao, K. He, G. Meng, X. Cheng, and J. Yang, "Analytical modelling and numerical experiment for simultaneous identification of unbalance and rolling-bearing coefficients of the continuous single-disc and single-span rotor-bearing system with rayleigh beam model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 116, pp. 322 – 346, 2019.
- [15] D. Zou, H. Zhao, G. Liu, N. Ta, and Z. Rao, "Application of augmented kalman filter to identify unbalance load of rotor-bearing system: Theory and experiment," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 463, p. 114972, 2019.
- [16] A. B. Ortega, F. B. Carbajal, G. S. Navarro, and H. M. Azúa, "Control de vibraciones en maquinaria rotatoria," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 7, no. 4, pp. 36 – 43, 2010.
- [17] J. A. R. Monares, "Análisis del comportamiento dinámico de un rotor asimétrico soportado por una chumacera magnetorreológica," Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2011.
- [18] E. E. Cruz, "Diseño y construcción de una chumacera semi-activa con fluidos reológicos," Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2015.
- [19] F. B. Carbajal, G. S. Navarro, and A. Montiel, "Active unbalance control of rotor systems using on-line algebraic identification methods," *Asian Journal of Control*, vol. 15, 11 2013.
- [20] M. A. Montiel, F. B. Carbajal, and G. S. Navarro, "On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 85, pp. 152 – 159, 2014.
- [21] J. G. M. Larios, *Identificador Algebraico en Línea del Desbalance para un Sistema Rotodinámico*. PhD thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2016.
- [22] J. Colín Ocampo, J. G. Mendoza Larios, A. Blanco Ortega, A. Abúndez Pliego, and E. S. Gutiérrez Wing, "Determinación del desbalance en sistemas rotor-cojinete a velocidad constante: Método de identificación algebraica," *Ingeniería mecánica, tecnología y desarrollo*, vol. 5, no. 4, pp. 385–394, 2016.
- [23] S. J. L. Damas, "Identificación algebraica de coeficientes rotodinámicos de una chumacera presurizada," Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2017.
- [24] C. F. G. Correa, "Análisis de la respuesta de un rotor asimétrico con un disco de balanceo activo," Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), 2017.

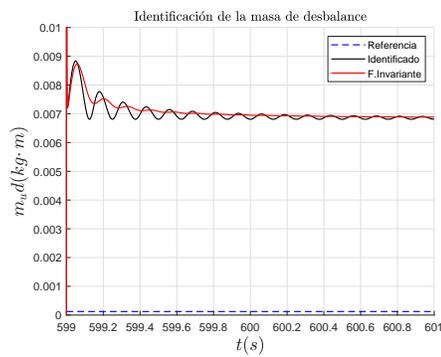
- [25] S. Rao, *Vibraciones mecánicas*. Pearson educación México, 2012.
- [26] J. Fornons, *El Método de los Elementos Finitos*. Marcombo, 1982.
- [27] H. Cao, D. He, S. Xi, and X. Chen, “Vibration signal correction of unbalanced rotor due to angular speed fluctuation,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 107, pp. 202 – 220, 2018.

Apéndice A

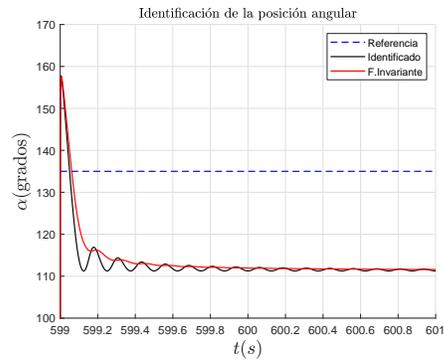
Anexos

A.1. Identificación de los parámetros del desbalance

480 rpm

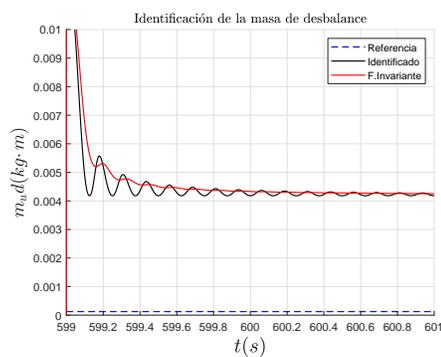


(a)

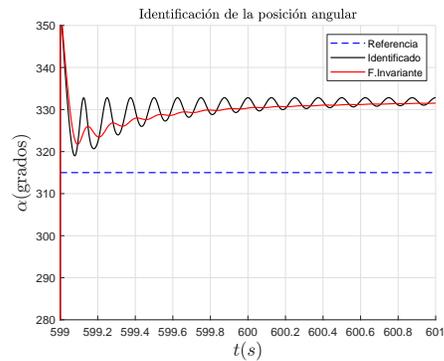


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 (1.2258×10^{-4} kg·m) con posición angular de 135° y velocidad constante de 480 rpm.

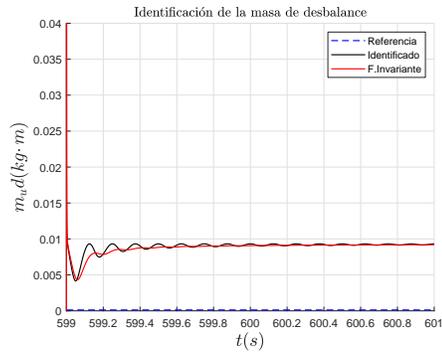


(a)

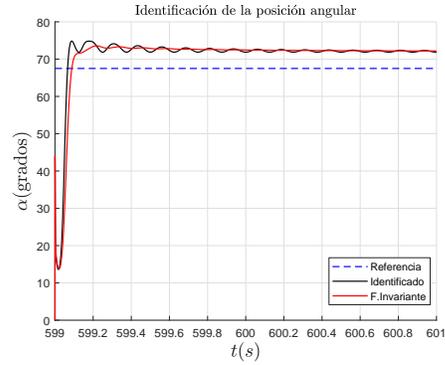


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 (1.2258×10^{-4} kg·m) con posición angular de 315° y velocidad constante de 480 rpm.

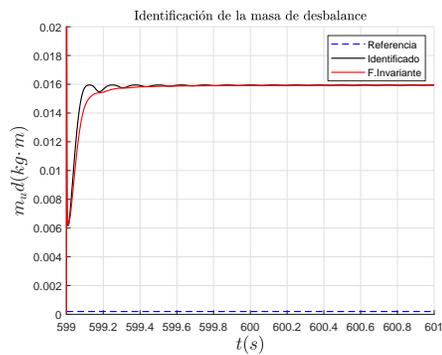


(a)

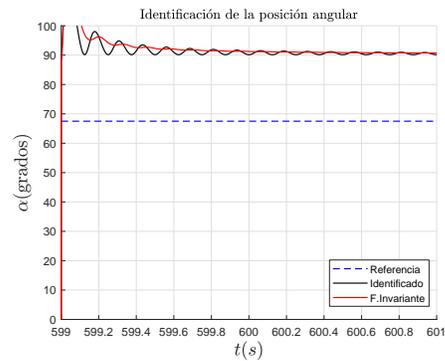


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm .

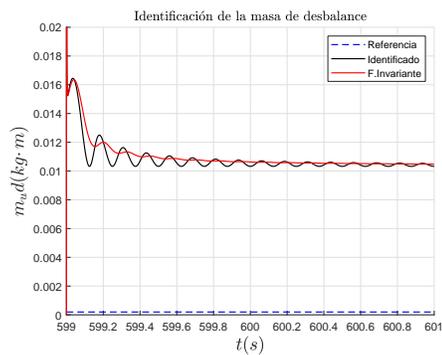


(a)

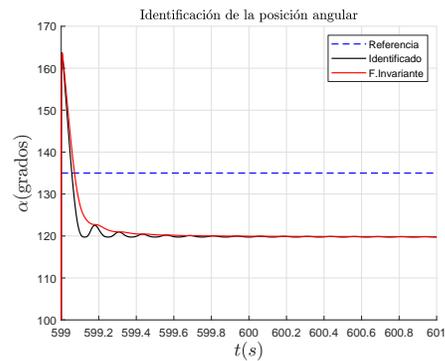


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 480 rpm .

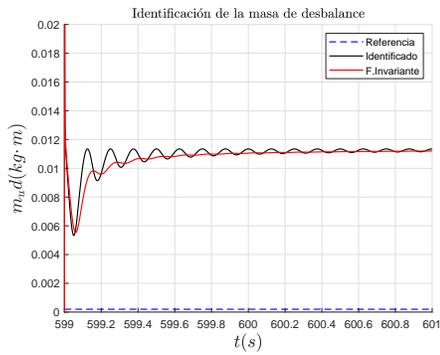


(a)

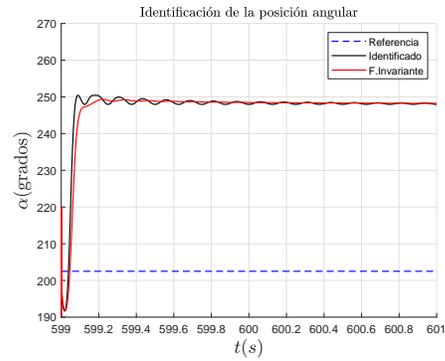


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 480 rpm .

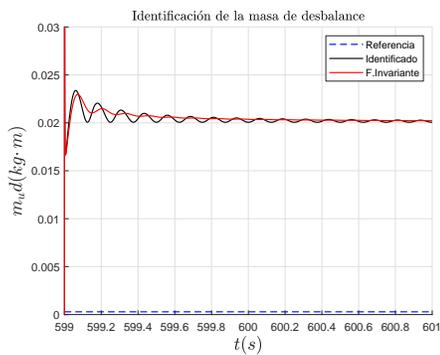


(a)

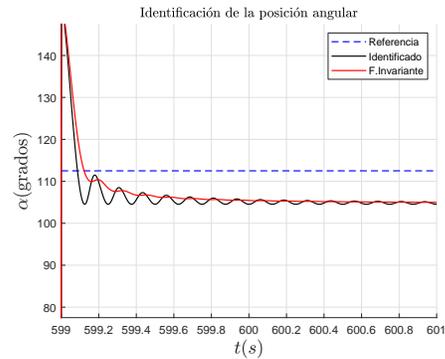


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 480 rpm .

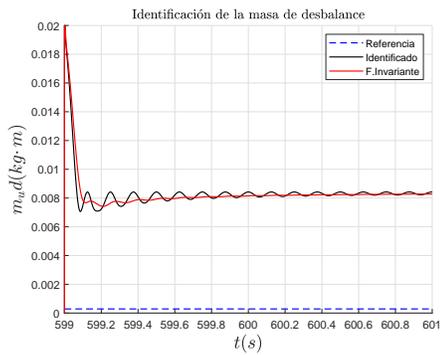


(a)

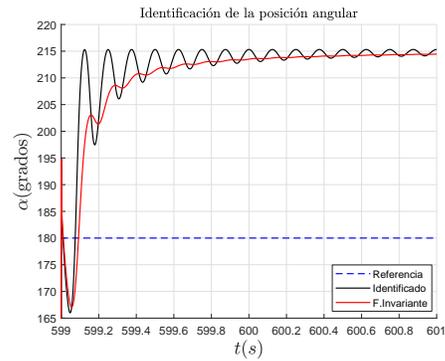


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 480 rpm .

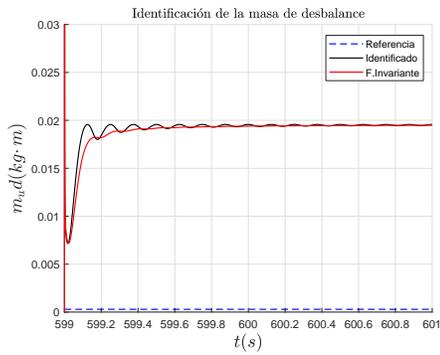


(a)

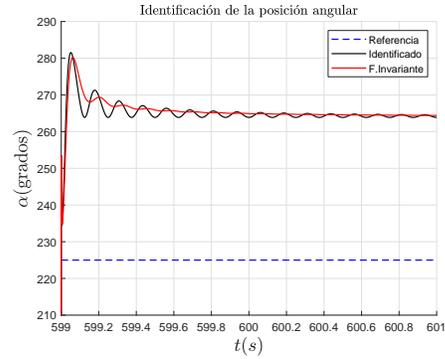


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 480 rpm .

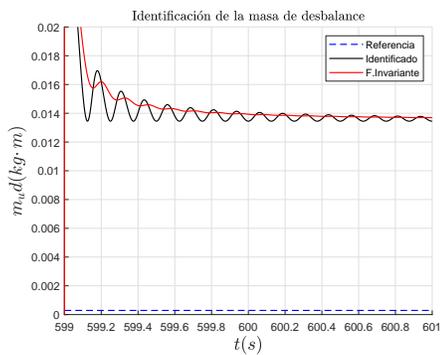


(a)

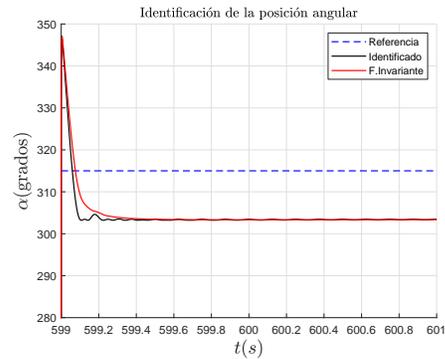


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 480 rpm .



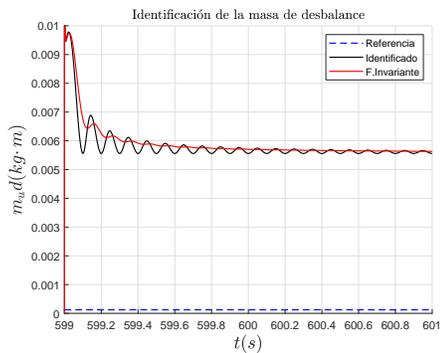
(a)



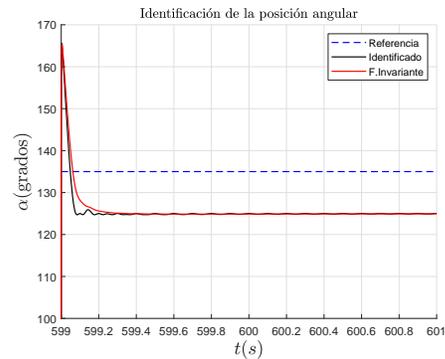
(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 480 rpm .

600 rpm

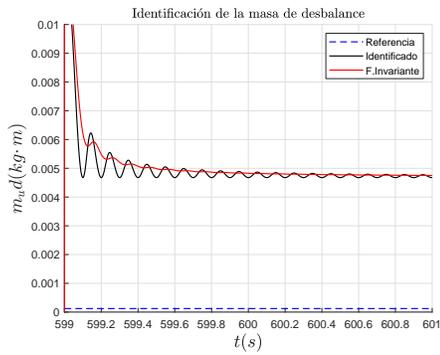


(a)

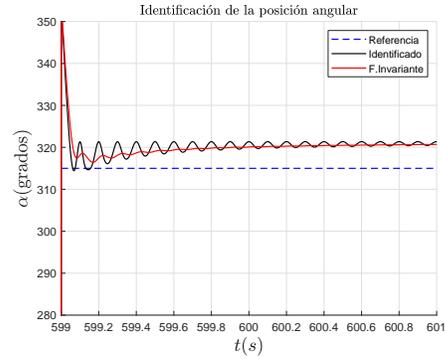


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 600 rpm .

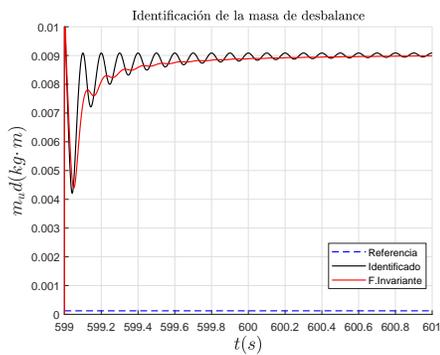


(a)

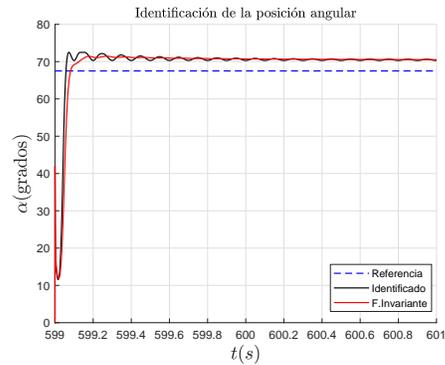


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 600 rpm .

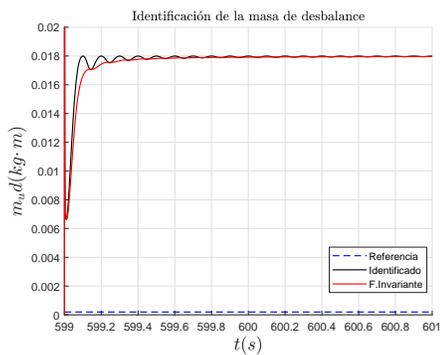


(a)

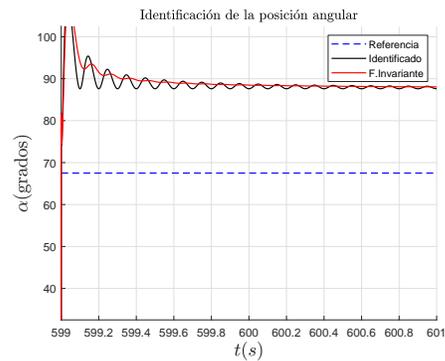


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 600 rpm .

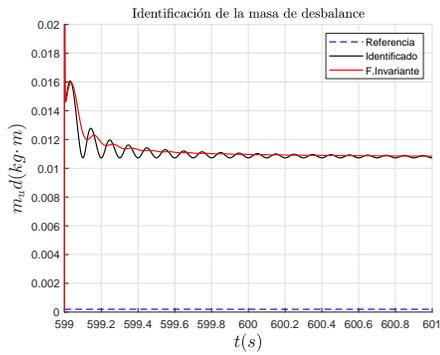


(a)

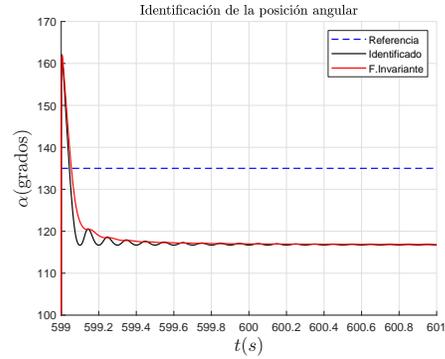


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 600 rpm .

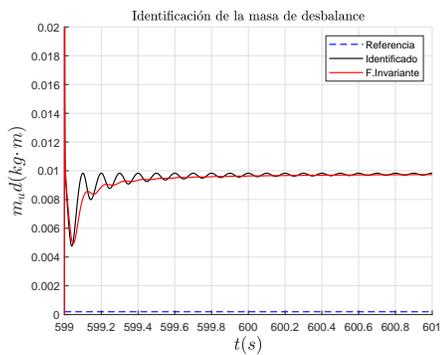


(a)

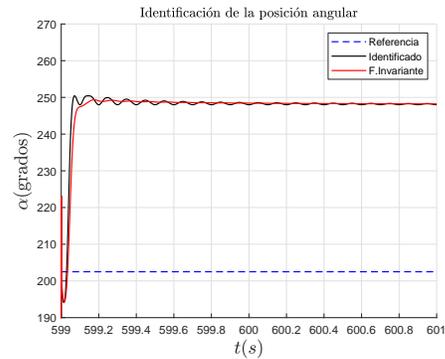


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 600 rpm .

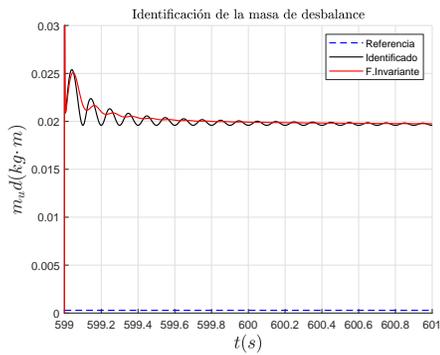


(a)

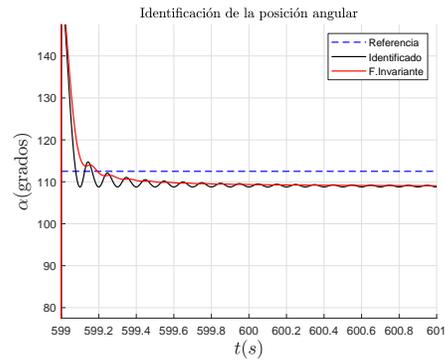


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 600 rpm .

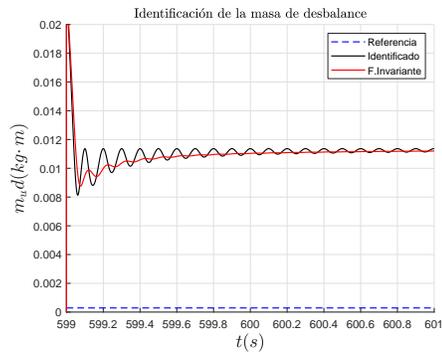


(a)

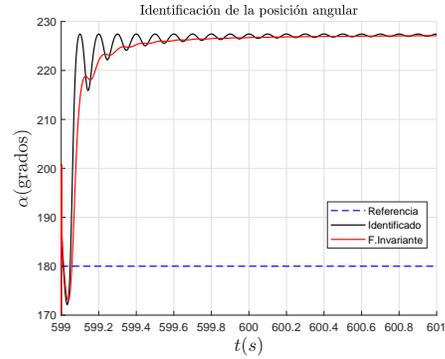


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 600 rpm .

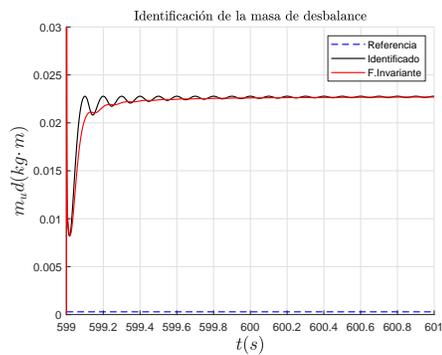


(a)

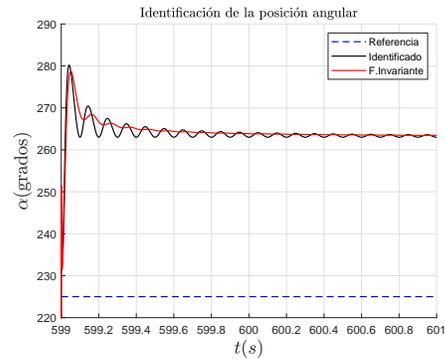


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 600 rpm .

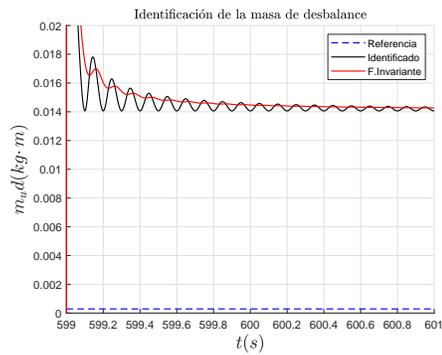


(a)

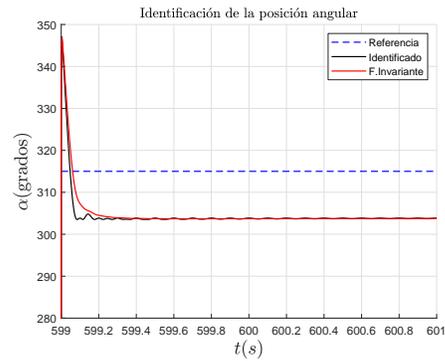


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 600 rpm .



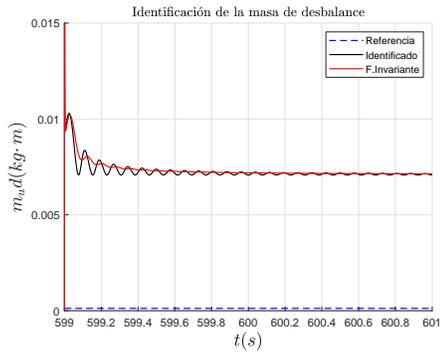
(a)



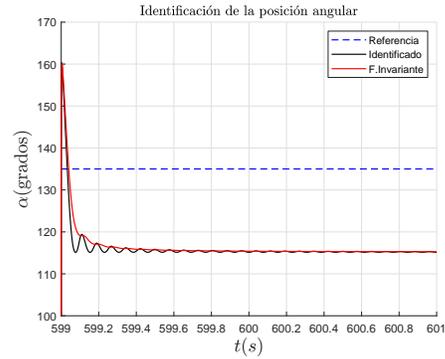
(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 600 rpm .

780 rpm

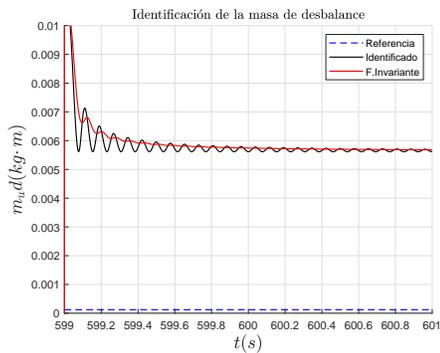


(a)

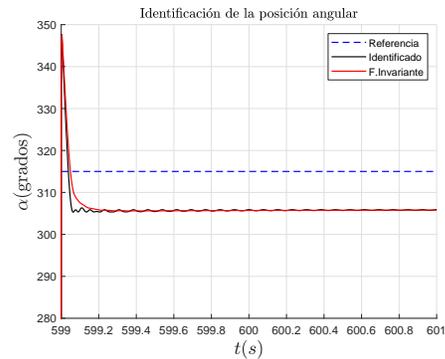


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 780 rpm .

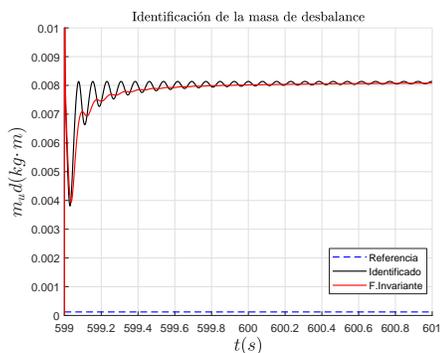


(a)

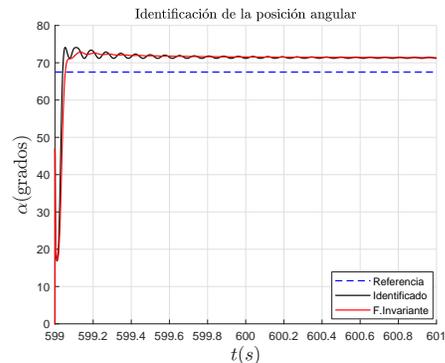


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 780 rpm .

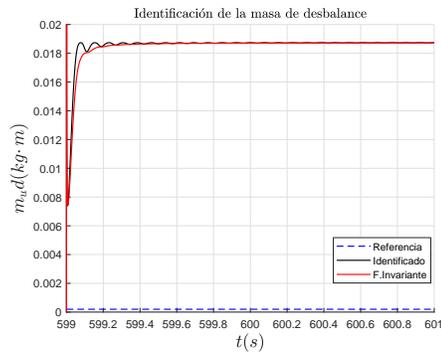


(a)

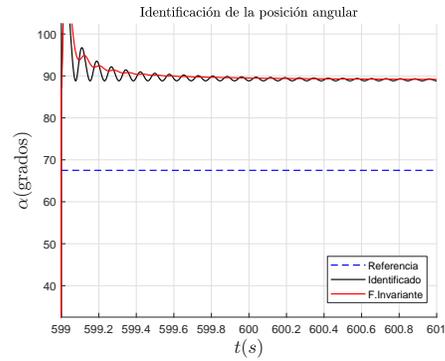


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 780 rpm .

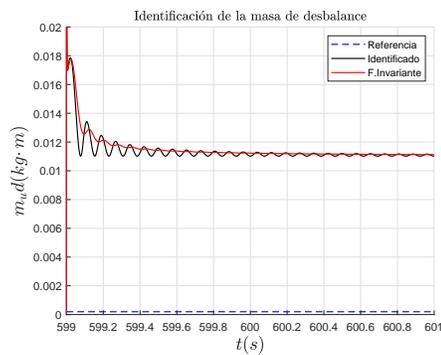


(a)

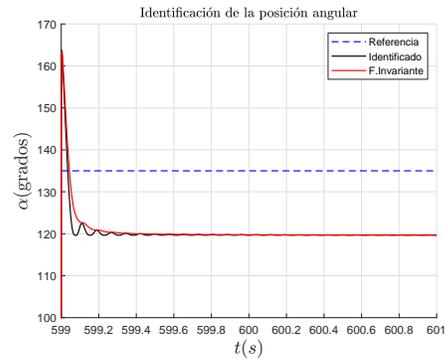


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 780 rpm .

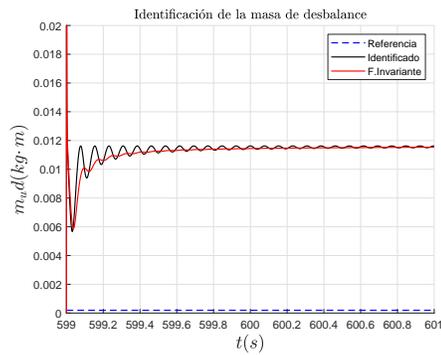


(a)

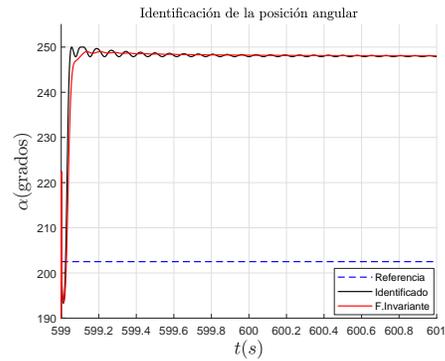


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 780 rpm .

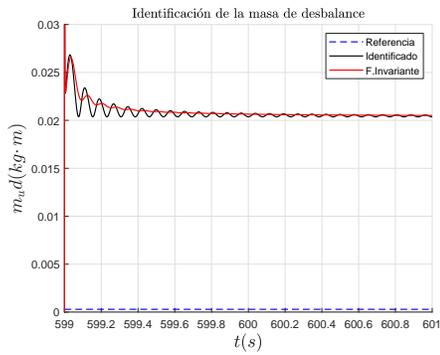


(a)

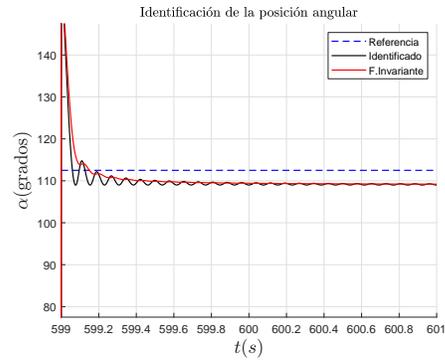


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 780 rpm .

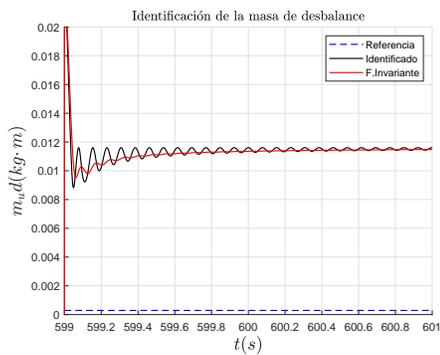


(a)

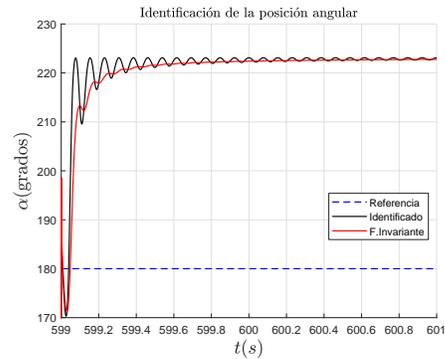


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 780 rpm .

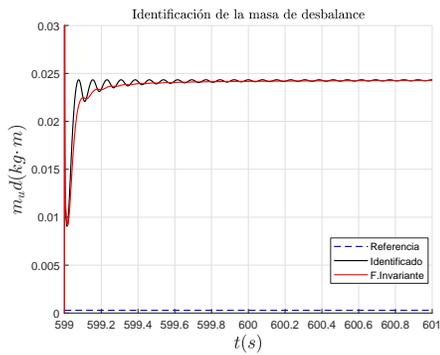


(a)

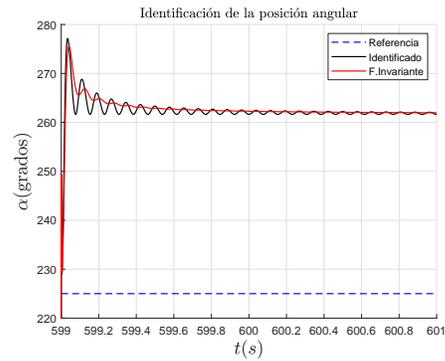


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 780 rpm .

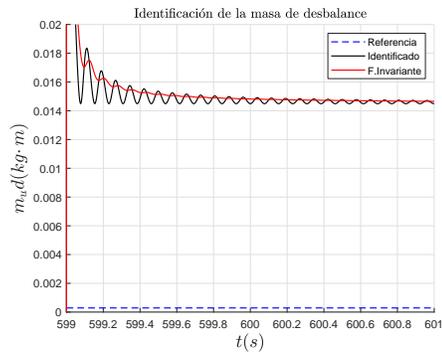


(a)

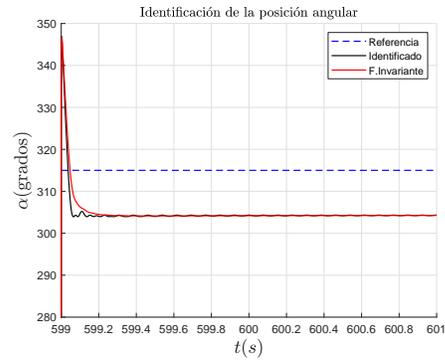


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 780 rpm .



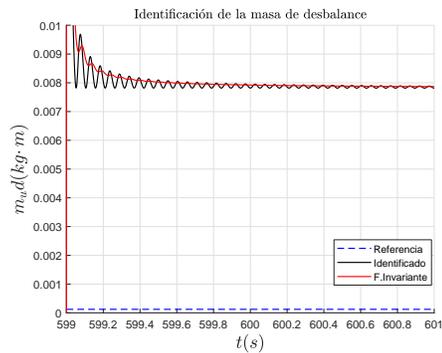
(a)



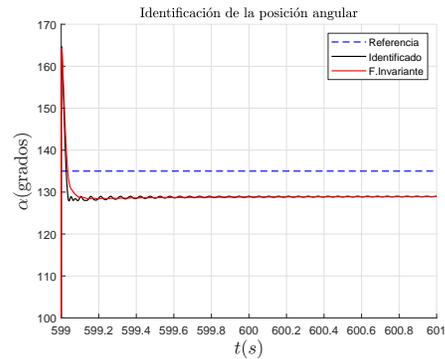
(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 780 rpm .

1140 rpm

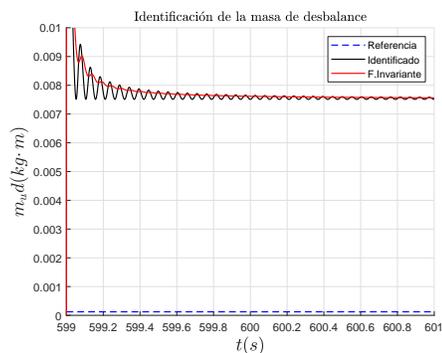


(a)

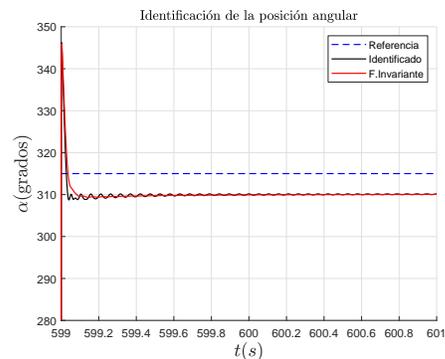


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1140 rpm .

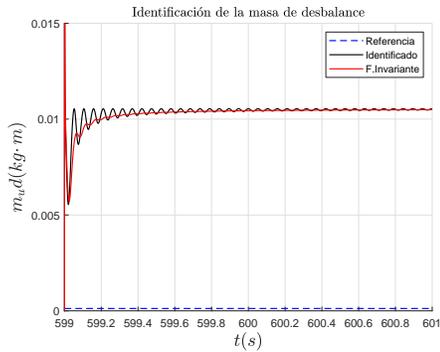


(a)

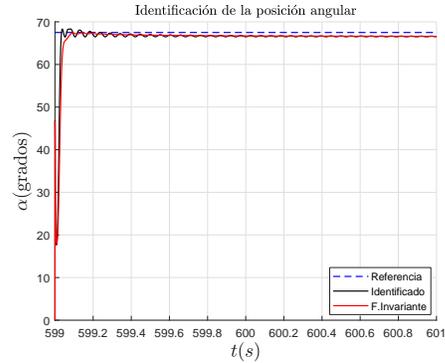


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 1140 rpm .

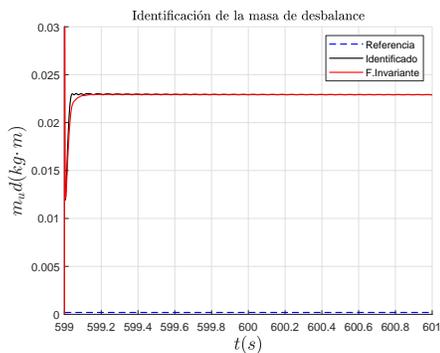


(a)

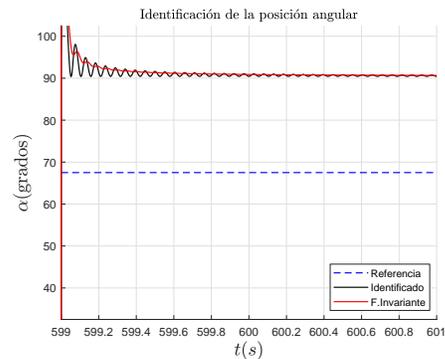


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1140 rpm .

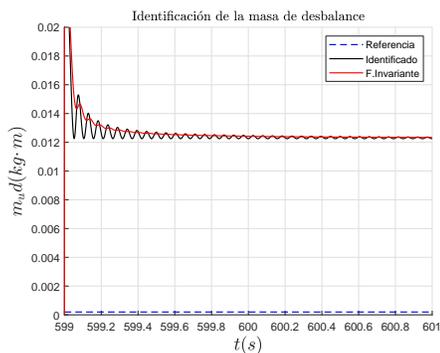


(a)

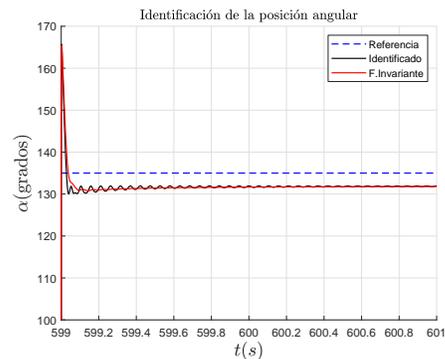


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1140 rpm .

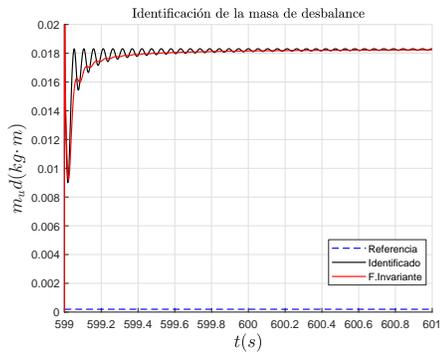


(a)

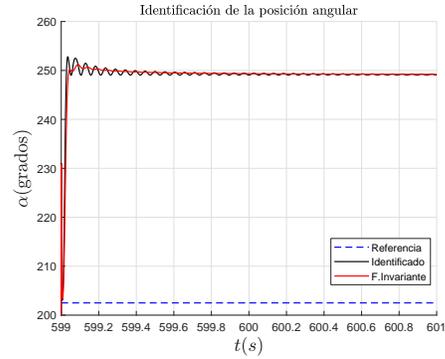


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1140 rpm .

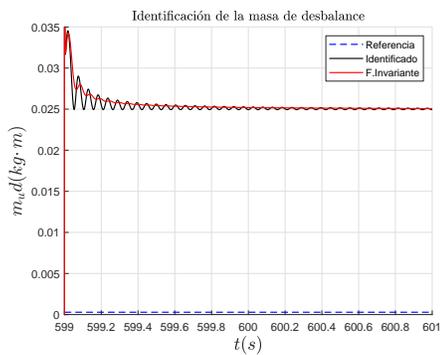


(a)

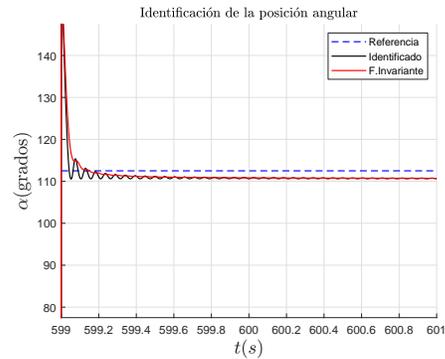


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 1140 rpm .

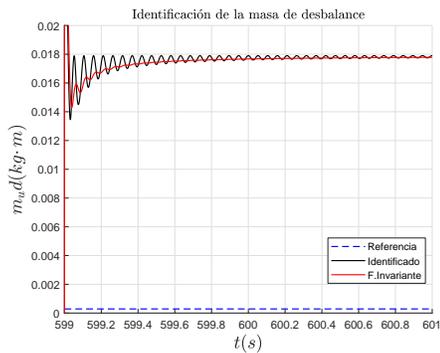


(a)

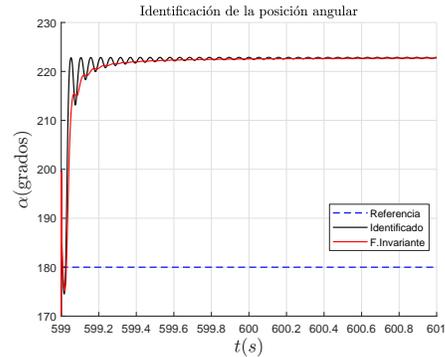


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 1140 rpm .

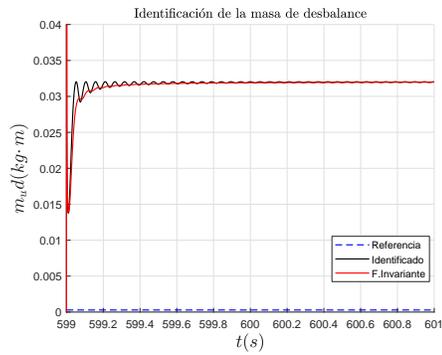


(a)

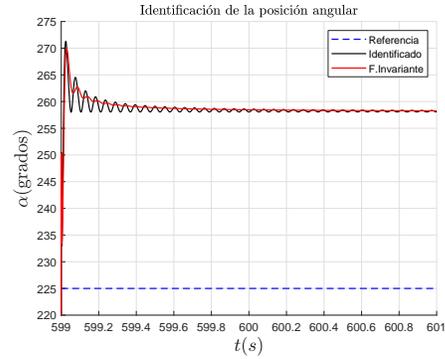


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 1140 rpm .

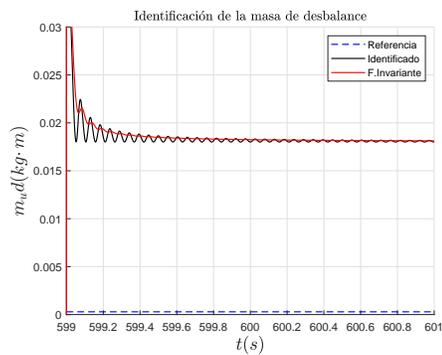


(a)

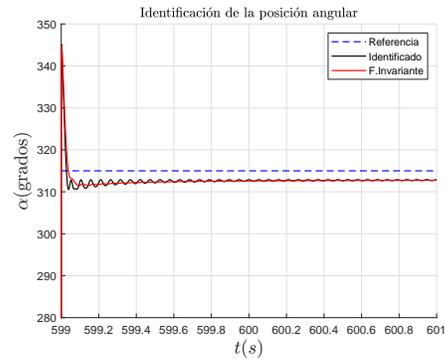


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 1140 rpm .



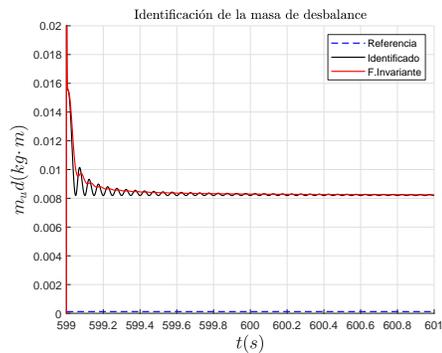
(a)



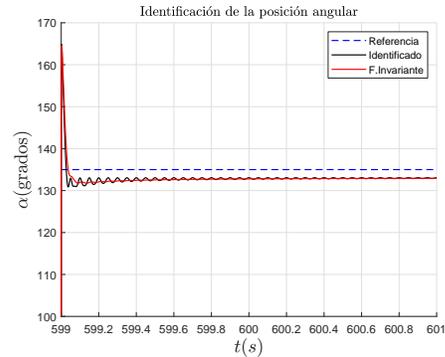
(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 1140 rpm .

1200 rpm

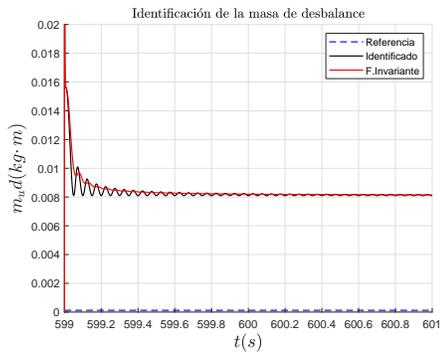


(a)

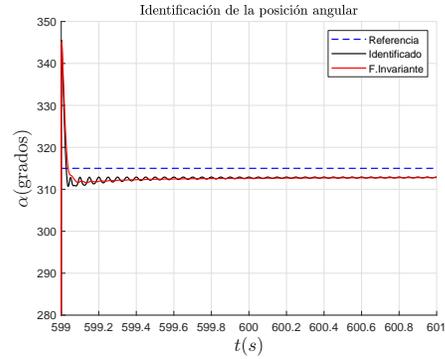


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1200 rpm .

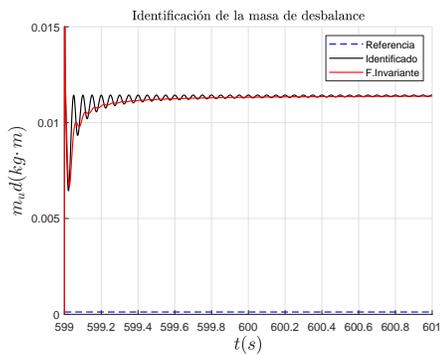


(a)

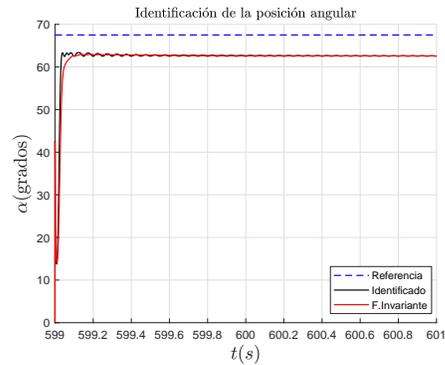


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 1200 rpm .

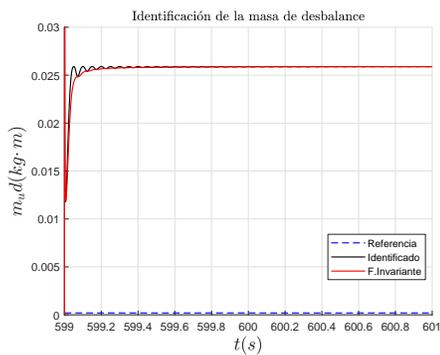


(a)

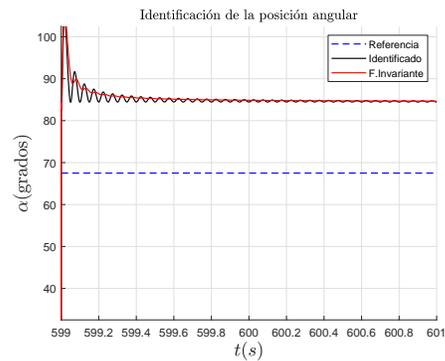


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_1 ($1.2258 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1200 rpm .

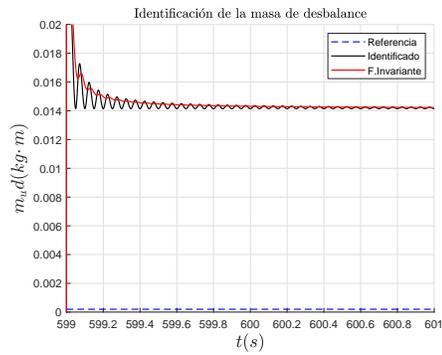


(a)

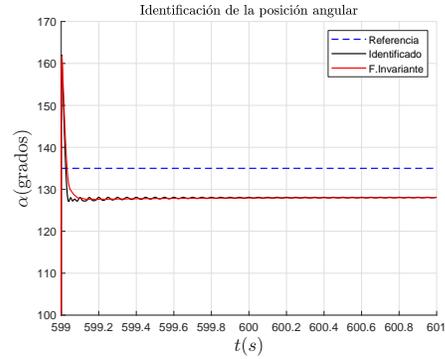


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 67.5° y velocidad constante de 1200 rpm .

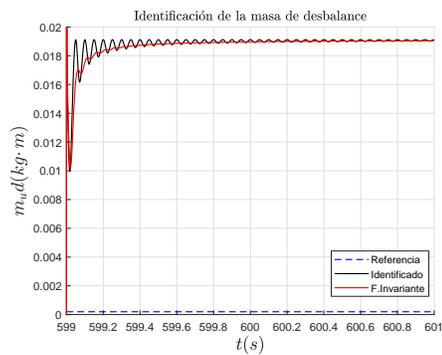


(a)

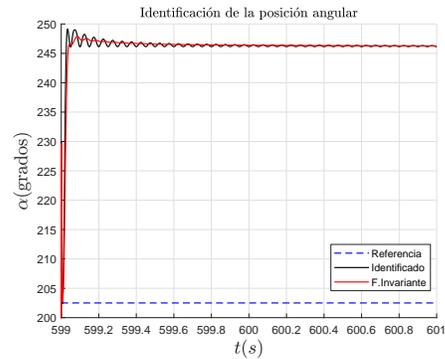


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 135° y velocidad constante de 1200 rpm .

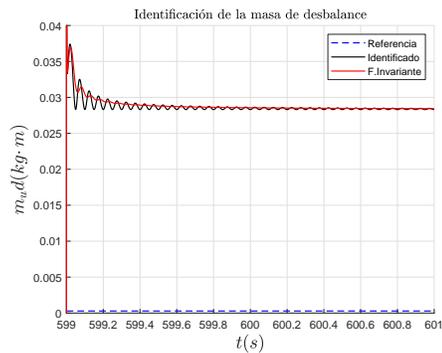


(a)

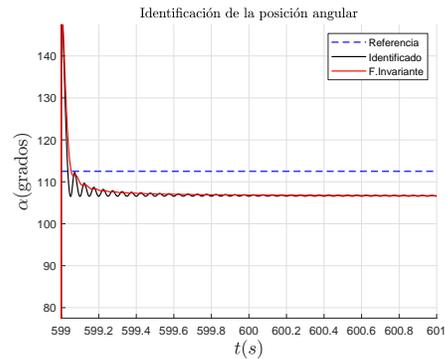


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_2 ($1.9575 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 202.5° y velocidad constante de 1200 rpm .

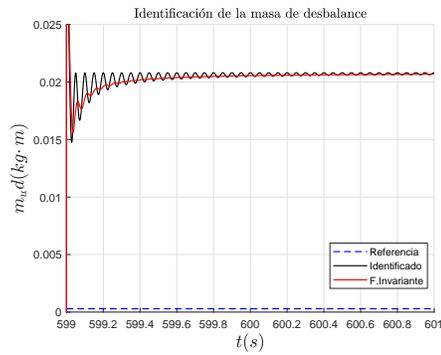


(a)

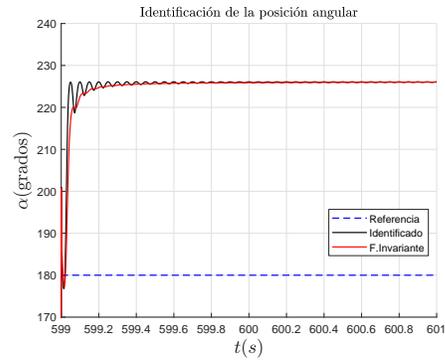


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$) con posición angular de 112.5° y velocidad constante de 1200 rpm .

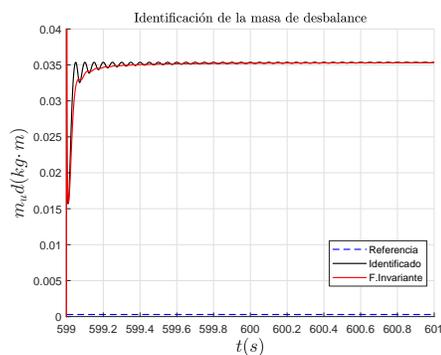


(a)

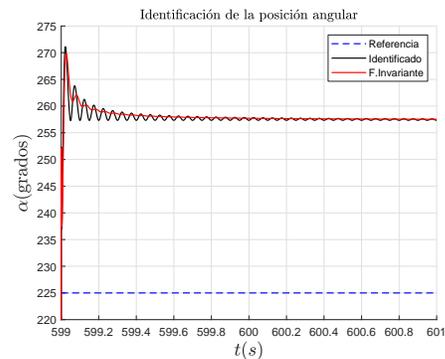


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 180° y velocidad constante de 1200 rpm .

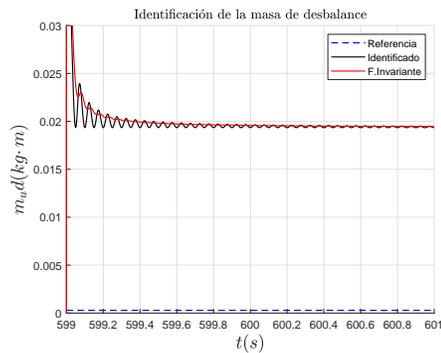


(a)

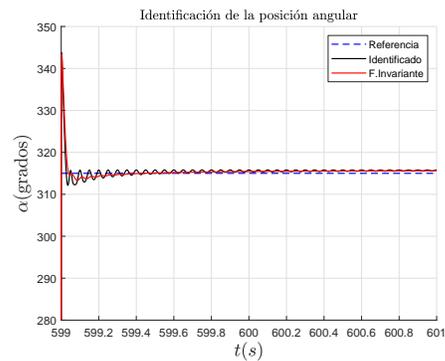


(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 225° y velocidad constante de 1200 rpm .



(a)



(b)

Identificación de los parámetros de desbalance para la masa M_3 ($2.8692 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$) con posición angular de 315° y velocidad constante de 1200 rpm .



**TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO**

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico