

ESTUDIO DEL MODELO MATEMÁTICO DE LAS ECUACIONES ACOPLADAS
DE TRANSFERENCIA DE MASA Y CALOR DURANTE EL SECADO DE
ALIMENTOS

Por:

M.C. Sarai Vargas González

Tesis propuesta a la

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO EN ALIMENTOS

del

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ

Como requerimiento para obtener el grado de

DOCTORADO EN CIENCIAS EN ALIMENTOS

Asesores:

Dr. Miguel Ángel García Alvarado

Dr. Erik López Sánchez

Dr. Irving Israel Ruiz López

Revisores:

Dr. José Manuel Tejero Andrade

Dra. Beatriz Torrestiana Sánchez

Dr. José Joel Espinosa de los Monteros Fernández

Dra. Guadalupe del Carmen Rodríguez Jimenes

Diciembre 2018

Dedico este trabajo a mis dos grandes y maravillosas abuelitas, Soledad Molinar Paredes y María Elena García Domínguez, a quienes amé con todo mi corazón y fueron muy importantes en mi vida.

Abuelas las extraño mucho y espero estén orgullosas de mí.

AGRADECIMIENTOS

Antes que nada, quiero agradecer infinitamente a Dios por todo su amor y su misericordia, por siempre darme esas fuerzas cuando peor me siento, por jamás dejarme sola en mis peores momentos, ya que sin él yo no sería nada y no sería esto posible, gracias Dios por todo y no tengo cómo agradecer por todo lo que has hecho por mí.

De igual manera quiero agradecer y dar un reconocimiento a mis padres Noemí González García y Emmanuel Vargas Molinar, que en todo momento me han apoyado y han estado ahí para mí cuando más los he necesitado, ya que nada de esto sería posible sin ustedes, muchas gracias por todo su amor.

También quiero agradecer con todo mi corazón a mi hermana Ana Elisabet Vargas González por ser una gran hermana y una gran amiga, por ser siempre mi apoyo y pilar, jamás olvides que eres todo para mí y que te amo infinitamente.

De igual manera quiero agradecer a todos los compañeros que conocí a lo largo de todo mi posgrado en las instalaciones de la U.N.I.D.A, pero sobre todo por todas esas amistades que encontré en el Laboratorio de Bioestadística, ya que fueron grandes amistades con las que tuve grandes convivencias, pero hago un especial agradecimiento a mis amigos Yerikc David Ramírez Villagómez y Edgar Julián Cortés Avendaño por ser tan buenos amigos, por sus consejos y gran apoyo, los quiero muchísimo niños.

RECONOCIMIENTOS

A los doctores:

Miguel Ángel García Alvarado

Erik López Sánchez

Irving Israel Ruíz López

José Manuel Tejero Andrade

Beatriz Torrestiana Sánchez

José Joel Espinosa de los Monteros Fernández

Guadalupe del Carmen Rodríguez Jimenes

Por la asesoría y el apoyo brindado.

A todos los investigadores de la Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos (UNIDA) que ayudaron a mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico tanto en lo personal como para el desarrollo de esta investigación.

RESÚMEN

Vargas González, Sarai, Doctorado en Ciencias en Alimentos. Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos. Instituto Tecnológico de Veracruz. Diciembre de 2018. ESTUDIO DEL MODELO MATEMÁTICO DE LAS ECUACIONES ACOPLADAS DE TRANSFERENCIA DE MASA Y CALOR DURANTE EL SECADO DE ALIMENTOS. Asesores: Dr. Miguel Ángel García Alvarado, Dr. Erik López Sánchez y Dr. Irving Israel Ruíz López.

A partir del comportamiento termodinámico de la interface se puede especular que un modelo lineal en dos segmentos tiene potencial de mejorar el desempeño de las GLE. El objetivo general fue estudiar las propiedades matemáticas de las ecuaciones acopladas de transferencia de masa y energía para establecer las relaciones topológicas de distintas geometrías. El valor de λ_n que se utilizó para cada geometría fue, al resolver la solución analítica para cuando $Bi \rightarrow \infty$, el primer valor positivo de λ_n de $\cos(\lambda_n) = 0$ en coordenadas rectangulares, $J_0(\lambda_n) = 0$ en coordenadas cilíndricas y $\sin(\lambda_n) = 0$ en coordenadas esféricas. Con los datos topológicos se pudo determinar que la relación entre las soluciones para la transferencia de masa y calor en estado puro, está en relación con las funciones Bessel, es decir de $J_{-1/2}$ a $J_{1/2}$. Conociendo la relación de λ_n en placa plana, cilindro y esfera se podrá conocer qué relación existe entre la variación de tiempo en dos campos vectoriales distintos. Para las cinéticas de humedad y temperatura se trabajaron con placas planas, cilindros y esferas de papa secaron a 70°C a una velocidad de 2 m.s^{-1} . Con las curvas (Ψ vs τ) se pudo observar que la pérdida de humedad fue más rápido en geometría esférica, siguiendo con la geometría cilíndrica y por último la geometría rectangular, esto se debe por la relación superficie-volumen y se pudo apreciar mejor por los valores de λ_n para cada coordenada. La relación de equilibrio lineal, usando dos ecuaciones lineales, representa de manera apropiada la conducta termodinámica de la interface en el proceso de secado. El análisis adimensional de las LGE, con interface lineal en dos segmentos, resultó en dos sistemas de

ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en función de números adimensionales convencionales. Las LGE se resolvieron numéricamente y demostraron que pueden ser utilizados para estimar los coeficientes de masa y energía a partir de curvas de secado, la solución lineal en dos segmentos representó de manera adecuada la conducta experimental del perfil de humedad, sin embargo para el perfil de temperatura el modelo es muy sensible cuando se pasa de la primera ecuación lineal a la segunda ecuación lineal.

ABSTRACT

Vargas González, Sarai, Doctoral Program in Food Science. Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos. Instituto Tecnológico de Veracruz. December 2018. STUDY OF MATHEMATICAL MODEL OF MASS AND HEAT TRANSFER COUPLED EQUATIONS DURING DRYING FOODS. Advisers: Dr. Miguel Ángel García Alvarado, Dr. Erik López Sánchez y Dr. Irving Israel Ruíz López.

Starting of the thermodynamic behavior of interface it can be speculated that a linear model in two segments has the potential to improve the GLE performance. The general objective was to study the mathematical properties of the coupled equations of mass and energy transfer in order to establish the topological relations of different geometries. The λ_n value used for each geometry was, as resolving the analytical solution when $Bi \rightarrow \infty$, the first positive value of λ_n of $\cos(\lambda_n) = 0$ in rectangular coordinates, $J_0(\lambda_n) = 0$ in cylindrical coordinates and $\sin(\lambda_n) = 0$ in spherical coordinates. With the topological data it could be determined that relation between the solutions for heat and mass transfer in pure state, is in relation to Bessel functions, that is to say from $J_{-1/2}$ to $J_{1/2}$. Knowing the relation of λ_n in flat plate, cylinder and sphere it will be known what relation exists between the variations of time in two different vectorial fields. For temperature and humidity kinetics, it was worked with flat plate, spheres and cylinders were dried at 70°C at a speed of $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. With the curves (Ψ vs τ) it could be observed that humidity loss was faster in spherical geometric, following with cylindrical geometry and finally the rectangular geometry, this is because of the relation surface-volume and it could be better appreciated by the values of λ_n for each coordinate. The relation of linear equilibrium, using two linear equations, represents properly the thermodynamic behavior of the interface in the drying process. The dimensionless analysis of the LGE, with linear interface in two segments, results in two systems differential equations in partial derivatives in function of dimensionless conventional numbers. The LGE were solved numerically

and demonstrated they can be used to estimate mass and energy coefficients from drying curves, the linear solution in two segments represented properly the experimental behavior of humidity profile, however for the temperature profile the model is very sensitive when one goes from first linear equation to second linear equation.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ANTECEDENTES	3
2.1 Transferencia de calor	5
2.1.1 Transferencia de calor por conducción.....	6
2.1.2 Ley de Fourier	9
2.2 Transferencia de masa	11
2.3 Ecuaciones de secado de alimentos (ESA)	14
2.4 Modelo de ecuaciones de Luikov (EL)	19
2.5 Ecuaciones de Luikov-García (ELG).....	23
2.5.1 Relación de equilibrio	27
2.6 Solución de las ecuaciones acopladas	30
3. JUSTIFICACIÓN	33
4. HIPÓTESIS	34
5. OBJETIVO GENERAL	35
5.1 Objetivos Específicos.....	35
6. METODOLOGÍA	36
7 RESULTADOS.....	37
7.1 La topología de distintas geometrías	37
7.1.1 Coordenadas Rectangulares 1D	37
7.1.2 Coordenadas Cilíndricas 1D.....	40
7.1.3 Coordenadas Esféricas 1D.....	42
7.1.4 Conclusiones topológicas	45

7.2 Datos experimentales de evolución de X_{β} y T_{β}	50
7.2.1 Placas planas a 70 °C	54
7.2.2 Cilindros a 70 °C.....	59
7.2.4 Conclusiones experimentales.....	63
7.3 Conducta termodinámica de la interface.....	65
7.4.1 Modelo LGE en coordenadas rectangulares 1D.....	71
7.4.2 Modelo LGE en coordenadas cilíndricas 1D.....	72
7.4.3 Modelo LGE en coordenadas esféricas 1D	73
7.5 Simulación Lineal y No Lineal.....	74
7.5.1 Simulación en coordenadas rectangulares.....	75
7.5.2 Simulación en coordenadas cilíndricas.....	79
7.5.3 Simulación en coordenadas esféricas	82
8. CONCLUSIONES	85
9. BIBLIOGRAFÍA	86
10. ANEXO A.....	87

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Solución analítica en diferentes geometrías.....	18
Tabla 2 Estudios de la solución analítica de las ecuaciones de Luikov	21
Tabla 3 Valores de las constantes de las isothermas de sorción.....	28
Tabla 4 Relación en otras geometrías	47
Tabla 5 Valores de v para algunas geometrías.....	48
Tabla 6 Datos del día de secado de placas de papas.....	54
Tabla 7 Propiedades del secado de placas planas de papas a 70 °C	58
Tabla 8 Propiedades del secado de cilindros de papas a 70 °C.....	59
Tabla 9 Propiedades del secado de esferas de papas a 70 °C	61
Tabla 10 Datos obtenidos del secado convectivo de papas en las tres geometrías convencionales	64
Tabla 11 Isotherma de adsorción de papas blancas.....	66
Tabla 12 Datos del secado de papas a 70 °C.....	66
Tabla 13 Parámetros para la simulación en coordenadas rectangulares.....	75
Tabla 14 Números adimensionales para la simulación en coordenadas rectangulares	76
Tabla 15 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de placas planas de papa.....	77
Tabla 16 Parámetros para la simulación en coordenadas rectangulares.....	79
Tabla 17 Números adimensionales para la simulación en coordenadas cilíndricas	80
Tabla 18 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de cilindros de papa.....	80

Tabla 19 Parámetros para la simulación en coordenadas esféricas	82
Tabla 20 Números adimensionales para la simulación en coordenadas esféricas	83
Tabla 21 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de cilindros de papa	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Transferencia de calor en el interior del producto	3
Figura 2 Transferencia de masa en el interior de un sólido	4
Figura 3 Placa plana infinita	7
Figura 4 Efecto en gradiente de temperatura, en estado estable.....	8
Figura 5 Temperatura contra posición	9
Figura 6 Permanganato de potasio en agua	12
Figura 7 Difusión en una placa plana.....	13
Figura 8 Comportamiento termodinámico de la interface y su aproximación lineal	30
Figura 9 Perfiles de temperatura y humedad	32
Figura 10 Comparación de los resultados obtenidos por el modelo semi-analítico y la solución numérica en MatLab PDE	32
Figura 11 Curva de Coseno	39
Figura 12 Curva de Bessel.....	41
Figura 13 Curva de seno.....	44
Figura 14 Dinámica de la temperatura o concentración.....	46
Figura 15 Papa blanca	50
Figura 16 Estufa al vacío del Laboratorio de Ingeniería.....	51
Figura 17 Balanza analítica del Laboratorio de Ingeniería.....	51
Figura 18 Secador de bandejas de la U.N.I.D.A.	52
Figura 19 Báscula de precisión Torrey.....	52
Figura 20 Registrador y medidor de temperatura DIGI-SENSE	52
Figura 21 Termopares tipo K.....	53

Figura 22 Cilindros de papa blanca.....	53
Figura 23 Esferas de papa blanca	53
Figura 24 Placas planas de papa blanca	54
Figura 25 Cinética de humedad del secado de placas planas de papa	55
Figura 26 Valores de $\ln \Psi_1$ contra tiempo	56
Figura 27 Perfil de humedad de las placas planas de papa durante el secado	57
Figura 28 Perfil de temperatura interna de las placas planas durante el secado..	58
Figura 29 Perfil de humedad del secado de cilindros de papas a 70 °C	60
Figura 30 Perfil de temperatura del secado de cilindros de papas a 70 °C.....	60
Figura 31 Perfil de humedad del secado de cilindros de papas a 70 °C	62
Figura 32 Perfil de temperatura del secado de cilindros de papas.....	62
Figura 33 Perfil de humedad de las tres geometrías convencionales	63
Figura 34 Perfil de temperatura de las tres geometrías convencionales.....	64
Figura 35 Conducta termodinámica de la interface.....	67
Figura 36 Conducta termodinámica lineal de la interface usando dos segmentos lineales.....	69
Figura 37 Esquema de la discretización espacial en el producto.....	74
Figura 38 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas rectangulares	78
Figura 39 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas rectangulares	78
Figura 40 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas cilíndricas	81
Figura 41 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas cilíndricas	81

Figura 42 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas esféricas.....	84
Figura 43 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas esféricas.....	84

LISTA DE SÍMBOLOS

a_w	Actividad del agua	
C_m	Capacidad de humedad	$kg \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ M^{-1}$
C_p	Calor específico del alimento	$J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$
D	Difusividad efectiva	$m^2 \cdot s^{-1}$
D_m	Coefficiente de conductividad del contenido de humedad	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot ^\circ M^{-1}$
h	Coefficiente de transferencia de calor	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
k	Conductividad térmica del alimento	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
k_c	Coefficiente de transferencia de masa en la interface	$m \cdot s^{-1}$
K_{eq}	Constante de partición entre el alimento y la humedad del aire	$g \text{ sólidos secos} \cdot (g \text{ aire seco})^{-1}$
$\mathbf{n}_{\beta\gamma}$	Vector de unidad normal de la fase β hacia a la fase γ	
T	Temperatura	$^\circ C \text{ o } K$
U	Potencial de humedad	
X	Contenido de humedad	$g \text{ agua} \cdot (g \text{ sólidos secos})^{-1}$

Letras griegas

ε	Fracción de volumen
θ	Potencial de transferencia de humedad

λ	Coeficiente de conductividad	
ρ	Densidad	$kg \cdot m^{-3}$
ρ_{β}	Concentración de sólidos en el alimento	$g \text{ sólidos secos}$ $\cdot m^{-3}$
ρ_{γ}	Concentración de aire seco	$g \text{ aire seco} \cdot m^{-3}$
Ψ	Valor adimensional de humedad o temperatura	
τ	Valor adimensional de tiempo	

Subíndices

β	En alimento
γ	En aire
e	En equilibrio
i	En la interface sólido-gas
m	humedad
wv	Vapor de agua
0	Al inicio de la cinética de secado

1. INTRODUCCIÓN

El secado de alimentos por convección es un proceso en el cual el medio convectivo calienta la superficie del alimento. Este calentamiento produce evaporación de agua y el calor en exceso produce un aumento en la temperatura del producto. En consecuencia dentro de los alimentos se producen una conducción térmica y una difusión másica.

Las ecuaciones de transferencia simultáneas se han utilizado ampliamente para la descripción del proceso de secado y por lo tanto serán llamadas ecuaciones de secado de alimentos. (Balaban & Pigott, 1988) (Mulet, 1994) (Wang & Brennan, 1995) (Ruiz-López, Córdova, Rodríguez-Jimenes, & García-Alvarado, 2004)

La solución analítica de las ecuaciones de secado de alimentos completas no está reportada. Se han introducido varias simplificaciones para obtener una solución analítica parcial, tal como: propiedades constantes, transferencia de energía despreciable (temperatura constante) y relaciones lineales de equilibrio.

Estas soluciones se han seguido aplicando para la descripción del secado de alimentos desde la primera mitad del siglo XX hasta nuestros días. (Sherwood, 1929) (Maskan & Fahrettin, 1998) (Trujillo, Wiangkaew, & Tuan Pham, 2007) (Dissa, Desmorieux, Bathiebo, & Koulidiati, 2008) (Páramo, y otros, 2010) (Liu, Chen, & Hou, 2012) (Torrez Irigoyen & Giner, 2014)

Un sistema similar al modelo de ecuaciones, pero no totalmente equivalente, son las Ecuaciones de Luikov, las cuales representan la transferencia

de masa y energía en un medio poroso. (Liu & Cheng, 1991) (Chang & Weng, 2000) (Abahri, Belarbi, & Trabelsi, 2011)

Estos han sido ampliamente utilizados en el área de la construcción. Las ecuaciones de Luikov han sido analíticamente resueltas en las geometrías convencionales bajo la suposición de propiedades termo-físicas y de transferencia constantes. (Tripathi, Shunkla, & Pandey, 1973) (Liu & Cheng, 1991) (Pandey, Srivastava, & Mikhailov, Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus] a new capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach, 1999) (Pandey, Pandey & Ribeiro, 2000) (Chang & Weng, 2000) (Abahri, Belarbi, & Trabelsi, 2011)

La solución analítica de las ecuaciones de Luikov, considera a la relación de equilibrio de líquido-vapor como lineal y sólo función del contenido de humedad.

2. ANTECEDENTES

El secado de alimentos es un proceso que involucra la transferencia acoplada de masa y calor. El secado por convección es un proceso en el cual el medio convectivo (generalmente aire) está en contacto directo con el sólido a secar.

La transferencia de calor, es en forma de calor que proporciona el medio convectivo para aumentar la temperatura del sólido y evaporar la humedad del sólido.

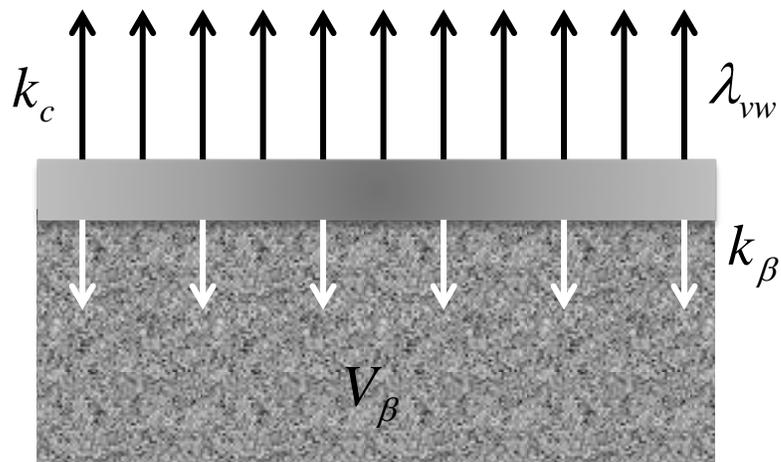


Figura 1 Transferencia de calor en el interior del producto

Éste proceso depende de las condiciones externas de temperatura, humedad de aire, área de exposición y presión. Existe también conducción de calor dentro del sólido y se da por la presencia de gradientes internos de temperatura.

El otro mecanismo que se lleva a cabo es la transferencia de masa del agua interna hacia la superficie del sólido:

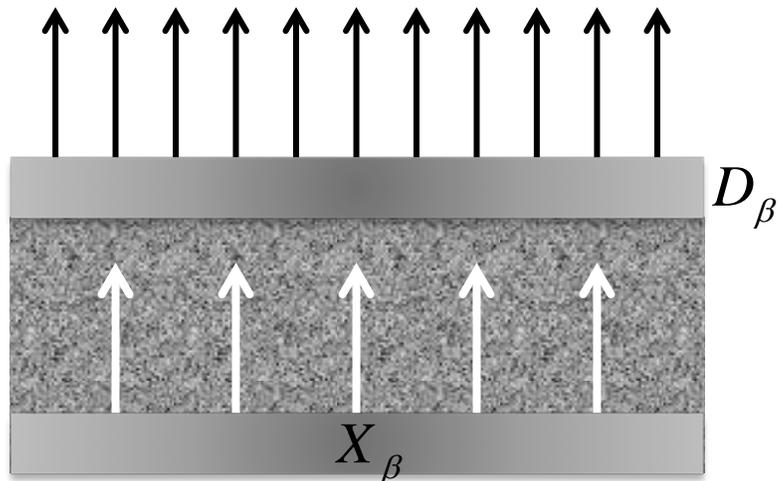


Figura 2 Transferencia de masa en el interior de un sólido

Éste movimiento del agua, es una función de la naturaleza física interna del producto y su contenido de humedad, y se da por:

- Flujo capilar debido a gradientes presión de succión capilar
- Difusión líquida por gradientes de concentración
- Difusión de vapor causada por gradientes de presiones de vapor
- Flujo viscoso por consecuencia de gradientes totales de presión externos o altas temperaturas

Después de llegar el agua a la superficie, ésta agua se evapora al aire.
(Sherwood, 1929)

El entendimiento de estos dos mecanismos en el alimento a secar y el aire o gas de secado, así como de las propiedades termo-físicas, de equilibrio y transporte de ambos sistemas, son de vital importancia para modelar el proceso y diseñar el secador. (Crapiste, 2000)

Cuando un proceso es modelado puede apreciarse, analizarse e identificarse con facilidad los fenómenos y mecanismos que se llevan a cabo. Además se ponen de manifiesto los problemas existentes y así poder corregirlos.

2.1 Transferencia de calor

La transferencia de calor es el transporte más familiar dado que es parte de nuestra experiencia diaria, por ejemplo cuando se nos enfría la sopa o el café. Procesos que emplean transporte de calor aparecen frecuentemente en la industria química: Calentamiento del petróleo crudo (u otra mezcla líquida) hasta su punto de ebullición para separarlo en fracciones en una columna de destilación o la remoción del calor generado en una reacción química. En cualquier caso, necesitamos hallar la velocidad a la cual ocurre la transferencia de energía para calcular el tamaño del equipo requerido o para mejorar el ya existente.

El calor es solo una de las formas de la energía y es ésta, y no el calor, la que se conserva de acuerdo a la primera ley de la termodinámica. La energía como propiedad, se utiliza en termodinámica para ayudar a especificar el estado de un sistema. La energía se transfiere a través de los límites de un sistema termodinámico en forma de trabajo o de calor. Por lo que transferencia de calor es la expresión usada para indicar el transporte de energía originado en una diferencia de temperaturas. La "Velocidad de Transferencia de Calor" o "Flujo de Calor" ($Q, [W], [Btu. h^{-1}]$), es la expresión de la energía térmica transportada por unidad de tiempo, y "Densidad de Flujo de Calor" o "Flux de Calor" ($q, [W. m^{-2}], [Btu. h^{-1}. pie^{-1}]$), es la velocidad de transferencia de calor por unidad de área. El cálculo de las velocidades locales de transferencia de calor requiere conocer las distribuciones locales de temperatura, las cuales proveen el potencial para la transferencia de calor.

Existen tres mecanismos diferentes por los cuales ocurre esta transferencia de calor:

- Conducción, en donde el calor pasa a través de la sustancia misma del cuerpo.
- Convección, en el cual el calor es transferido por el movimiento relativo de partes del cuerpo calentado.
- Radiación, mecanismo por el que el calor se transfiere directamente entre partes distantes del cuerpo por radiación electromagnética.

En gases y líquidos la convección y la radiación tienen importancia destacada, pero en los sólidos la convección puede considerarse ausente y la radiación generalmente es despreciable (Betancourt Grajales, 2008)

2.1.1 Transferencia de calor por conducción

La teoría matemática de la conducción del calor puede basarse en una hipótesis sugerida por el siguiente experimento: Tomemos una placa de algún sólido limitada por dos superficies planas paralelas de una extensión tal que, desde el punto de vista de las partes entre los dos planos, puedan suponerse infinitos (figura 1). En la práctica esta condición puede acercarse usando una placa plana de dimensiones finitas donde sus caras menores han sido aisladas térmicamente, de tal forma que solo existan gradientes de temperatura en la dirección perpendicular a las caras mayores. En este caso la diferencia de temperatura ocurre entre planos perpendiculares al eje z causando transporte en la dirección z .

El hecho de que la placa es muy delgada en la dirección z y muy ancha en las direcciones x e y , indica que hay pérdidas despreciables en los extremos perpendiculares a los ejes x e y . De esta forma q_x y q_y son cero. En general la velocidad de conducción de calor en cualquier punto en un material se caracteriza

por un vector de flux de calor q , el cual puede resolverse en componentes a lo largo de los tres ejes coordenados. Podemos ignorar la naturaleza vectorial de q y considerar solo su componente escalar z para un simple caso de conducción unidimensional de calor.

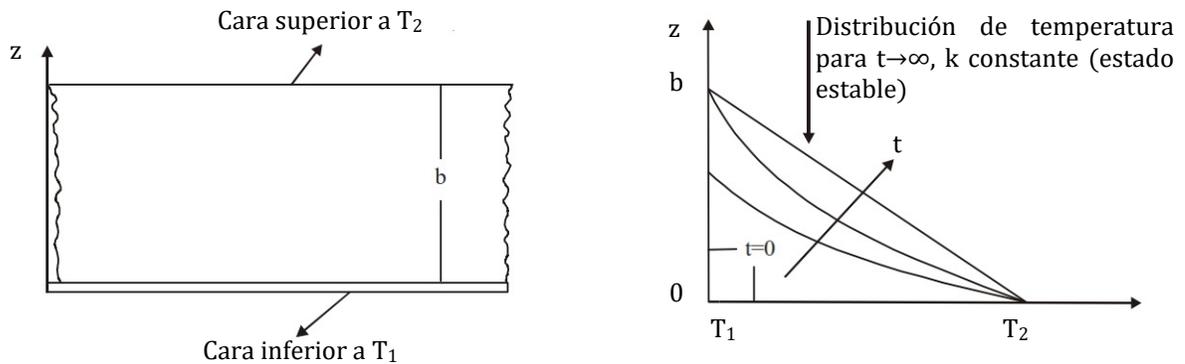


Figura 3 Placa plana infinita

Los dos planos se mantienen a temperaturas diferentes sin que ésta diferencia de temperaturas sea tan grande como para causar un cambio sensible en las propiedades del sólido. Por ejemplo, mientras la superficie superior se mantiene a la temperatura de una mezcla hielo agua, la inferior se mantiene a la temperatura de una corriente de agua caliente que fluye constantemente por allí. Después de mantener estas condiciones durante suficiente tiempo, las temperaturas de los diferentes puntos del sólido alcanzaran valores estables, la temperatura siendo igual para planos paralelos a la superficie de la placa (despreciando los efectos terminales).

Supongamos que la temperatura de la superficie inferior es T_1 y la de la superficie superior es T_2 ($T_1 > T_2$) y consideremos que el sólido está inicialmente a temperatura uniforme T_2 . La placa tiene un espesor b . Los resultados de los experimentos sugieren que, cuando se ha alcanzado el estado estable, la cantidad

de calor que fluye a través de la placa en un tiempo t a través de un área S_z perpendicular a la dirección z es igual a:

$$Q = \frac{kS_z(T_1 - T_2)}{b} \quad (1)$$

El coeficiente de proporcionalidad k es la conductividad térmica. La conductividad térmica no es una constante, de hecho, es una función de la temperatura para todas las fases y, en líquidos y gases depende también de la presión, especialmente cerca al estado crítico. La dependencia de la conductividad térmica con la temperatura para rangos de temperatura pequeños puede expresarse en forma aceptable como $k = k_0(1 + aT)$, donde k_0 es el valor de la conductividad térmica en alguna condición de referencia y a es el coeficiente de la temperatura que es positivo o negativo dependiendo del material en cuestión.

La figura 4, muestra el efecto en el gradiente de temperatura (para estado estable) en una placa plana como resultado que este sea positivo o negativo. Se resalta el que el gradiente de temperatura será lineal solo cuando la conductividad térmica sea constante. (Betancourt Grajales, 2008)

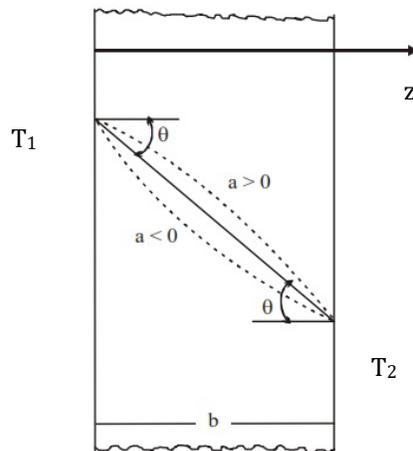


Figura 4 Efecto en gradiente de temperatura, en estado estable

2.1.2 Ley de Fourier

En la sección anterior, se considera el caso especial de conducción de calor unidimensional en estado estable en una geometría rectangular. La ecuación (1), es válida sólo para este caso especial y no puede usarse en otras situaciones, tales como geometría cilíndrica o estado transitorio. Tampoco puede usarse para predecir la variación de la temperatura con la posición dentro del medio. Por esta razón es necesario desarrollar una ecuación más general que sea aplicable en cualquier punto, en cualquier geometría y para condiciones estables o inestables, cuando el estado físico de un sistema no cambia con el tiempo, se dice que el sistema se encuentra en estado estable. Con este propósito se retoma la figura 3, una línea de temperatura contra posición en cualquier momento arbitrario (figura 5).

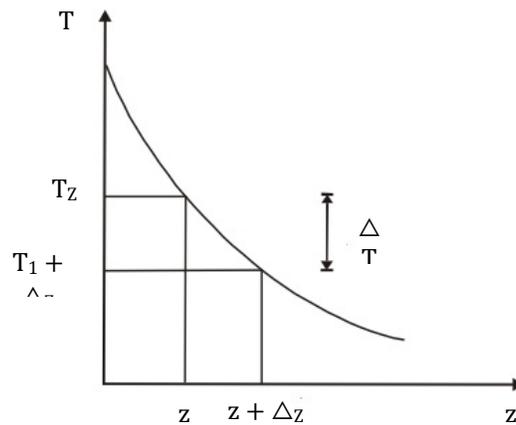


Figura 5 Temperatura contra posición

Se puede relacionar la velocidad de flujo de calor Q_z en cualquier posición arbitraria z a la densidad de flujo de calor q_z en la misma posición usando la definición $Q_z = q_z S_z$. Se comienza por reconocer que la velocidad de flujo de calor puede escribirse a partir de la ecuación (1) como:

$$\frac{Q_z}{S_z} = \frac{k(T_1 - T_2)}{b} = q_z \quad (2)$$

Si aplicamos (1) a un pequeño incremento Δz , b será reemplazado por $-\Delta z$, y (T_1-T_2) por $-\Delta T$. El signo menos es necesario de acuerdo a la definición del operador diferencia:

$$\Delta T = T_{z+\Delta z} - T_z$$

Entonces el flujo promedio de calor a través de una distancia Δz es:

$$q_z = -k \frac{\Delta T}{\Delta z} = -k \frac{T_{(z+\Delta z)} - T_{(z,t)}}{\Delta z}$$

De la figura 5 se observa que $\Delta z/\Delta T$ representa la pendiente promedio sobre la región Δz de la curva T vs z. También observamos que si hacemos Δz cada vez más pequeño, se obtiene una mejor aproximación de la pendiente en z. En el límite cuando Δz tiende a cero, obtenemos la derivada parcial de T respecto a z según el teorema fundamental del cálculo. Así, para estado transitorio, podemos escribir en cualquier localización:

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q_z}{S_z} \quad (3)$$

La cual es llamada ley de Fourier para conducción de calor en una dimensión, en honor al matemático francés Jean Baptiste Fourier a quien se le atribuye. En el caso de tratarse de estado estable en una dimensión, T sería solo función de z y la derivada sería total.

En el caso general, donde hay flujo de calor en las tres direcciones coordenadas, T es función de más de una variable independiente y:

$$\mathbf{q}_x = -k(\partial T/\partial x); \mathbf{q}_y = -k(\partial T/\partial y); \mathbf{q}_z = -k(\partial T/\partial z)$$

Serán las componentes del vector densidad de flujo de calor:

$$\mathbf{q} = i q_x + j q_y + k q_z \therefore \mathbf{q} = -k \nabla(T) \quad (2.4)$$

Aquí \mathbf{q} es una cantidad vectorial. También i, j, k son los vectores unitarios en las direcciones x , y , así como z . el operador ∇ (nabla) puede operar sobre cualquier escala. Usando T como ejemplo, el término es:

$$\nabla T = i(\partial T / \partial x) + j(\partial T / \partial y) + k(\partial T / \partial z) \quad (5)$$

La ecuación (2.4) es una ecuación para la ley de Fourier en notación vectorial Gibbs o forma vectorial. Es válida para cualquier sistema isotrópico, o sea que la conductividad es la misma independientemente de la dirección. El signo menos indica que el calor solo se transfiere en la dirección en la que decrece la temperatura como lo predice la segunda ley de la termodinámica. (Betancourt Grajales, 2008)

2.2 Transferencia de masa

La transferencia de masa por difusión molecular es el tránsito de masa como resultado de una diferencia de concentración en una mezcla.

Supongamos un cristal de permanganato de potasio en un vaso con agua. Las moléculas disueltas del cristal difunden lentamente desde la región de alta concentración en el fondo, tendiendo a convertir uniforme la concentración (proporcional a la intensidad de color) con el tiempo. Este tipo de difusión se debe al movimiento errático de las moléculas y se denomina difusión molecular.



Figura 6 Permanganato de potasio en agua

Ahora, así como en el transporte de calor, el transporte de masa puede ocurrir tanto por difusión como por convección, esta última representa el transporte de masa que resulta del movimiento global del fluido y la primera el transporte debido a gradientes de concentración.

De nuevo, como en transporte de calor, el transporte convectivo de masa consiste de dos tipos: convección forzada, en la que el movimiento es generado por una fuerza externa, y convección libre, un efecto de flotación en el cual el movimiento global se desarrolla naturalmente como consecuencia de cambios de densidad originados en las diferencias de concentración del medio. (Betancourt Grajales, 2008)

2.2.1 Ley de Fick

En el caso de la difusión, es muy habitual encontrarse con estados no estacionarios en los que la concentración cambie con la posición y con el tiempo. Veamos el cálculo de la concentración como función de la posición y del tiempo $C(r,t)$. Para ello consideramos cómo cambia la concentración en una capa perpendicular a la dirección de difusión (z) situada en z_0 de área A y espesor Δz :

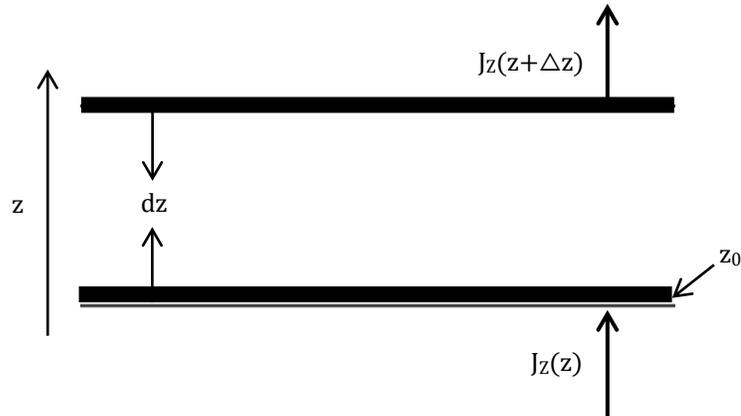


Figura 7 Difusión en una placa plana

El número de moles de la sustancia que se difunde, que entran por z_0 , por unidad de tiempo se puede expresar como densidad de flujo por el área: $J_Z(z_0) \cdot A$. El número de moles de la sustancia que se difunde, que abandonan la capa por $z_0 + \Delta z$ por unidad de tiempo sería: $J_Z(z_0 + \Delta z) \cdot A$.

Por tanto, la variación en el número de moles de la sustancia que se difunde por unidad de tiempo en la capa considerada es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = AJ_Z(z_0) - AJ_Z(z_0 + \Delta z) = A[J_Z(z_0) - J_Z(z_0 + \Delta z)]$$

Dividiendo ambos lados de la expresión por el volumen de la capa $V = A \cdot \Delta z$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{J_Z(z_0) - J_Z(z_0 + \Delta z)}{dz} = -\frac{\partial J_Z}{\partial z} \quad (6)$$

La ecuación 2.6 es la ecuación de continuidad, ya que equivale a decir que la velocidad de cambio en la concentración es la diferencia entre lo que entra y lo

que sale. Si sustituimos la densidad de flujo por el valor dado por la primera ley de Fick nos quedaría:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[-D \frac{\partial C}{\partial z} \right] \quad (7)$$

Si suponemos que el coeficiente de difusión no depende de la composición y por tanto de la posición, podemos sacarlo de la derivada, quedando entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (8)$$

Esta es la segunda ley de Fick (ecuación 8) y nos indica que la velocidad de variación de la concentración es proporcional a la segunda derivada espacial de la misma. En un caso como el que hemos planteado, con área constante, un gradiente de la concentración constante (variación lineal de la concentración con z) supondrá una derivada segunda nula y por lo tanto que la concentración no cambie con el tiempo. Se alcanza entonces el estado estacionario. (Atkins & De Paula, 2008)

2.3 Ecuaciones de secado de alimentos (ESA)

El de secado de alimentos, desde el punto de vista de la ingeniería, es un procedimiento complejo que puede involucrar el transporte simultáneo de masa (difusión molecular, flujo capilar, flujo de Knudsen, flujo hidrodinámico, o difusión superficial) y calor (conducción, radiación convección), entre otros fenómenos. (Srikiatden & Roberts, 2008)

Aunque es bien sabido que durante el secado puede estar presente más de un mecanismo de transporte de masa y calor simultáneamente, comúnmente los

estudios realizados para describir, modelar y simular el secado, consideran a la difusión basada en la segunda ley de Fick, como el mecanismo predominante para el transporte de masa (Bialobrzewski, Myhan, & Cydzik, 2005) (Ruiz-López & García-Alvarado, 2007). Mientras que el transporte de calor es definido por un mecanismo de conducción dictado por la ley de Fourier (Loulou, Adhikeri, & Leomte, 2006) (Puyate & Lawrence, 2006) (Arrieche, Correa, & Sartori, 2009)

En estos estudios se realizan algunas consideraciones como el establecer que el proceso de secado se divide en dos periodos:

- Un periodo de velocidad constante
- Un periodo de velocidad decreciente

(Karel & Lund, 2003) (Rizvi, 2005).

En este sentido, se considera que el período de velocidad constante se da cuando se remueve la humedad superficial de la partícula. Este período está gobernado por las condiciones externas tales como la diferencia de temperatura entre el aire seco y la superficie húmeda, el área expuesta al aire seco, y la velocidad de flujo de aire, que determina el valor de los coeficientes de transporte de masa y calor (Geankoplis, 1998) (Rizvi, 2005). En cambio, el periodo de velocidad decreciente inicia cuando la superficie del producto no se encuentra saturada y la tasa de movimiento de la humedad desde el interior hasta la superficie es menor que la tasa de evaporación sobre ella.

Por otra parte también el estudio de casos de transporte de masa y calor (secado) en alimentos, se abordaban casi exclusivamente considerando que se trataba de un alimento homogéneo, sin encogimiento y no deformable.

El secado de alimentos por convección, es un proceso en el cual el medio convectivo (generalmente aire) calienta la superficie del alimento. Este calentamiento produce evaporación de agua y el calor en exceso produce un aumento en la temperatura del producto. En consecuencia dentro de los alimentos se producen una conducción térmica y una difusión másica. Tomando $h(T_\gamma - T_i)$ como el calor transferido desde el aire a la superficie del alimento, la fracción de éste calor utilizado en la evaporación es $k_c \rho_\gamma (X_{\gamma i} - X_\gamma) \lambda_{wv}$ y el exceso de energía transferido al interior del alimento es $-\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla(k_\beta T_i)$ siguiendo la ley de Fourier, donde $\mathbf{n}_{\beta\gamma}$ es un vector unitario normal a la superficie del alimento con dirección del alimento (β) al aire (γ). Estos hechos se expresan como:

$$h(T_i - T_\gamma) = -k_c \rho_\gamma (X_{\gamma i} - X_\gamma) \lambda_{wv} - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla T_i \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (8)$$

Por lo que, el gradiente de humedad producido por la evaporación del agua es:

$$k_c \rho_\gamma (X_{\gamma i} - X_\gamma) = -\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot D_{\beta\gamma} \nabla(\rho_\beta X_{\beta i}) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (9)$$

El calor conducido dentro del alimento se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(C p_\beta \rho_\beta T_\beta)}{\partial t} = \nabla \cdot [k_\beta \nabla T_\beta] \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (10)$$

La difusión de agua dentro del alimento, y se propaga de acuerdo a la ley de Fick:

$$\frac{\partial(\rho_\beta X_\beta)}{\partial t} = \nabla \cdot [D_\beta \nabla(\rho_\beta X_\beta)] \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (11)$$

La relación de equilibrio entre las fases β y γ es el resultado de las características de sorción del alimento y la presión de vapor del agua (p_w) (Córdova-Quiroz, Ruiz-Cabrera, & García-Alvarado, 1996)

$$X_{\gamma i} = \frac{a_w p_w / p}{1 - a_w p_w / p} \frac{M_w}{M_a} \quad a_w = f(X_{\beta i}, T_i) \quad p_w = f(T_i) \quad (12)$$

Donde la actividad de agua (a_w) como función de la humedad y temperatura es universalmente conocida como isoterma de sorción.

Las ecuaciones (10) y (11) son un sistema de dos ecuaciones simultáneas en derivadas parciales, organizadas como un problema de valor en la frontera tipo Cauchy donde las condiciones de contorno son las ecuaciones (8) y (9) y el equilibrio de fases por la ecuación (12). Las ecuaciones (8) a (12) se han utilizado ampliamente para la descripción del proceso de secado y por lo tanto serán llamadas ecuaciones de secado de alimentos (ESA). (Balaban & Pigott, 1988) (Mulet, 1994) (Wang & Brennan, 1995) (Ruiz-López, Córdova, Rodríguez-Jimenes, & García-Alvarado, 2004)

La solución analítica de las ecuaciones de secado de alimentos completas no está reportada. Se han introducido varias simplificaciones para obtener una solución analítica parcial, tal como: propiedades constantes, transferencia de calor despreciable (temperatura constante) y relaciones lineales de equilibrio. Bajo estas simplificaciones las ecuaciones de secado de alimentos se reducen a una ecuación diferencial parabólica en derivadas parciales (ecuación 11). Un resumen de los trabajos que resolvieron la solución analítica en diferentes geometrías se describe en la siguiente tabla:

Tabla 1 Solución analítica en diferentes geometrías

Autor	Características	Geometría
(Ruiz-López, Córdova, Rodríguez-Jimenes, & García-Alvarado, 2004)	<p>Demostraron que la solución analítica de la ecuación de transferencia de masa, con difusividad promedio y longitud característica, reproduce aceptablemente la evolución de la humedad.</p> <p>El modelo tiene en cuenta los fenómenos que ocurren durante el secado como la contracción, las variaciones en densidad, difusividad, calor latente y otras propiedades del alimento.</p> <p>La sensibilidad de las soluciones del modelo, muestra la posibilidad de estimación de estas propiedades, de la cinética de secado experimental, mediante regresión no lineal.</p> <p>Si se pudieran estimar las propiedades variables de la transferencia de masa y de calor de los datos de secado, sería factible reproducir el comportamiento del secado sin la necesidad de datos experimentales.</p> <p>La ecuación de diferencias finitas para el modelo 3D de la transferencia de masa proporciona la distribución de humedad dentro del grano durante el secado.</p>	Placas de zanahorias
(Hernández-Díaz, Ruiz-López, Salgado-Cervantes, Rodríguez-Jimenes, & García-Alvarado, 2008)	<p>Permite predecir las zonas más susceptibles a contaminación, a estrés mecánico y agrietamiento.</p> <p>La ecuación de cinética de secado integrada, junto con la estimación de la difusividad efectiva del agua, reproduce la cinética de secado experimental de una cama de granos de café verdes, por lo que éste modelo podría usarse en el diseño óptimo de secadores de café.</p>	Granos de café verde (Geometría prolato esferoidal)
(Páramo, y otros, 2010)	<p>Demostraron que la cáscara representa una resistencia de los ácidos grasos volátiles (VFAs) en la transferencia de masa, sin embargo la acidez remanente en los granos de cacao en secadores convectivos es el resultado de difusividades menores de VFAs con respecto al</p>	Granos de cacao (Coordenadas cilíndricas elipsoidales)

	<p>agua.</p> <p>Las difusividades obtenidas en el trabajo pueden utilizarse en simuladores para la optimización del proceso de secado.</p>	
<p>(Ruiz-López, Ruiz-Espinosa, Luna-Guevara, & García-Alvarado, 2011)</p>	<p>El análisis teórico y los resultados de la simulación se utilizaron para desarrollar una analogía de la transferencia de masa para una geometría de cáscara semiesférica respecto a un producto de placa.</p> <p>Estas analogías proporcionan expresiones matemáticas simples para simulación de procesos de secado y la estimación del coeficiente de difusión del agua en los sólidos de la geometría propuesta y pueden ser aplicables a otras transferencias de masa y calor para operaciones como deshidratación osmótica o el freído.</p> <p>El procedimiento propuesto puede ser utilizado para el desarrollo de expresiones similares para otras geometrías no tradicionales.</p>	<p>Cáscara semiesférica</p>

Estas soluciones analíticas se han seguido aplicando para la descripción del secado de alimentos desde la primera mitad del siglo XX hasta nuestros días. (Sherwood, 1929) (Maskan & Fahrettin, 1998) (Trujillo, Wiangkaew, & Tuan Pham, 2007) (Dissa, Desmorieux, Bathiebo, & Koulidiati, 2008) (Páramo, y otros, 2010) (Liu, Chen, & Hou, 2012) (Torrez Irigoyen & Giner, 2014)

2.4 Modelo de ecuaciones de Luikov (EL)

Un sistema similar al modelo de ecuaciones (ESA), pero no totalmente equivalente, son las Ecuaciones de Luikov (EL), las cuales representan la transferencia de masa y energía en un medio poroso. Estos han sido ampliamente utilizados en el área de la construcción.

El sistema es matemáticamente expresado con el siguiente conjunto de ecuaciones. (Liu & Cheng, 1991) (Chang & Weng, 2000) (Abahri, Belarbi, & Trabelsi, 2011)

- Transferencia de calor:

$$h(T_i - T_\gamma) = -(1 - \varepsilon)k_m(U_i - U_\gamma)\lambda_{wv} - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla T_i \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (13)$$

$$C_p \rho_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial t} = k_\beta \nabla \cdot [\nabla T_\beta] + \varepsilon \lambda \rho_\beta C_m \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (14)$$

- Transferencia de masa:

$$k_m(U_i - U) = -n_{\beta\gamma} \cdot D_m \nabla U_i - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \theta D_m \nabla T_{\beta i} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (15)$$

$$\rho_\beta C_m \frac{\partial U}{\partial t} = D_m \nabla \cdot [\nabla U] + \theta D_m \nabla \cdot [\nabla T_\beta] \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (16)$$

- Relación de equilibrio:

$$C_m = \frac{X_\beta}{U} \quad (17)$$

De lo anterior se puede observar el calor transferido desde el aire a la superficie del sólido, se observa de igual manera la energía utilizada para evaporar la humedad superficial y el exceso de calor se transmite por conducción al interior del medio poroso (ecuación 13). El calor remanente se conduce al interior del sólido siguiendo la ley de Fourier con un proceso de evaporación en el interior de los poros (ecuación 14). La evaporación en el interior del sólido, produce un gradiente de potencial de humedad en la superficie del sólido, por lo que inicia un proceso difusión y termodifusión en la transferencia de masa

(ecuación 15). La difusión y la termodifusión se propagan en el interior del sólido de acuerdo a la ley de Fick (ecuación 16).

Las ecuaciones de Luikov han sido analíticamente resueltas en las geometrías convencionales bajo la suposición de propiedades termofísicas $(\rho_\beta, C_m, Cp_\beta, \lambda)$ y de transferencia $(D_m, \theta, k_\beta, k_m, h)$ constantes. (Tripathi, Shunkla, & Pandey, 1973) (Liu & Cheng, 1991) (Pandey, Srivastava, & Mikhailov, 1999) (Pandey, Pandey, & Ribeiro, 2000) (Chang & Weng, 2000) (Abahri, Belarbi, & Trabelsi, 2011)

Un resumen de los estudios donde se resuelven analíticamente las ecuaciones de Luikov se presentan en la tabla 2:

Tabla 2 Estudios de la solución analítica de las ecuaciones de Luikov

Autor	Característica	Material
(Tripathi, Shunkla, & Pandey, 1973)	<p>Desarrollaron un método de ecuaciones integrales para obtener los potenciales de transferencia de calor y masa.</p> <p>Condiciones de contorno generales.</p> <p>Consideran que la evolución del calor se conduce a través del sólido.</p>	Cuerpo de cilindro infinito unidimensional.
(Liu & Cheng, 1991)	<p>Desarrollaron un método analítico para resolver el sistema de ecuaciones diferencias parciales lineales de Luikov.</p> <p>Condiciones iniciales y de contorno especificadas.</p> <p>La inclusión de los valores propios complejos en el análisis se encontró que era de importancia sustancial ya que sin estos valores la solución es incompleta y físicamente no razonable.</p> <p>Los resultados numéricos se comparan</p>	Secado de una tabla de madera.

	<p>razonablemente bien con los datos experimentales y pueden servir para evaluar la exactitud de los métodos numéricos aproximados, tal como el elemento finito y técnicas de diferencias finitas.</p>	
(Pandey, Srivastava, & Mikhailov, 1999)	<p>Emplearon un análisis para obtener la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Luikov.</p> <p>Temperatura inicial uniforme y con distribución de humedad.</p> <p>Las soluciones adimensionales para la distribución de la temperatura y la humedad obtenidos por la forma de cálculo de matriz son expresiones suficientemente generales para la solución de muchos problemas específicos unidimensional.</p>	<p>Secado por convección de una lámina húmeda porosa.</p>
(Chang & Weng, 2000)	<p>Proponen un método analítico para resolver el problema de la transferencia acoplada de calor y humedad, para sólidos porosos.</p> <p>Las ecuaciones diferenciales parciales, así como las condiciones de contorno se sometieron a la transformada de Laplace.</p> <p>Las ecuaciones se redujeron a ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que las ecuaciones se convirtieron en una única ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden</p> <p>Los resultados al compararse contra una solución analítica ya publicada, muestran una muy buena evolución para una configuración de losa de madera.</p>	<p>Secado de una tabla de madera.</p>
(Abahri, Belarbi, & Trabelsi, 2011)	<p>Proponen la solución analítica de la transferencia acoplada de calor y humedad en materiales de construcción porosos.</p> <p>Consideran un equilibrio termodinámico entre el fluido y la matriz porosa.</p> <p>Obtuvieron simulaciones numéricas para comparar los resultados obtenidos analíticamente.</p> <p>Los resultados de la simulación muestran que la difusión térmica afecta fuertemente la</p>	<p>Materiales de construcción porosos</p>

	<p>migración de humedad en la envolvente del edificio (pared) por la contribución de los términos acoplados en ecuaciones diferenciales parciales. Pero la contribución de los términos de humedad en la ecuación de balance de energía tiene pocas incidencias sobre los valores de temperaturas.</p> <p>Al ser comparado con otros datos numéricos la solución analítica tiene muy buenos resultados razonables.</p>	
--	--	--

Como se ha visto anteriormente, la solución analítica de las ecuaciones de Luikov sólo han sido aplicados para materiales de construcción porosos y además se considera a la relación de equilibrio (ecuación 17) de líquido-vapor como lineal y sólo función del contenido de humedad.

2.5 Ecuaciones de Luikov-García (ELG)

Una forma de poder obtener la solución analítica completa sería combinando los dos modelos de ecuaciones (ESA) y (EL). Sin embargo existen diferencias importantes entre ambos modelos:

1. El modelo EL considera la existencia de evaporación de agua dentro de los poros del sólido (ε).
2. El modelo de EL considera un efecto de termogradiante en la transferencia de masa (θ).
3. La relación de equilibrio del modelo de EL está en función del potencial de humedad (U).

La diferencia 1 y 2 no serían ningún, pues aunque no hay evidencia del efecto de termogradiante o de evaporación dentro de los alimentos, ésta situación se puede expresar en el nuevo modelo de ecuaciones como $\theta = 0$ y $\varepsilon = 0$. (Balaban & Pigott, 1988) (Mulet, 1994) (Wang & Brennan, 1995) (Maskan &

Fahrettin, 1998) (Ruiz-López, Córdoba, Rodríguez-Jimenes, & García-Alvarado, 2004) (Trujillo, Wiangkaew, & Tuan Pham, 2007) (Páramo, y otros, 2010) (Dissa, Desmorieux, Bathiebo, & Koulidiati, 2008) (Liu, Chen, & Hou, 2012)

La diferencia 3 es el que ocasiona un gran problema para poder combinar ambos modelos de ecuaciones:

$$X_{\gamma i} = \frac{a_w p_w^0 / p}{1 - a_w p_w^0 / p} \frac{M_w}{M_a} \quad a_w = f_1(X_{\beta i}, T_i) \quad p_w^0 = f_2(T_i) \quad (12)$$

$$C_m = \frac{X_{\beta}}{U} \rightarrow X_{\beta} = C_m U \quad (17)$$

La ecuación (12) es la relación de equilibrio de líquido-vapor como lineal y en función de la humedad y la temperatura para el modelo ESA, mientras que la ecuación (17) es la relación de equilibrio de líquido-vapor como lineal y sólo función de la humedad para el modelo EL.

De la ecuación (17) se observa que al establecer $X_{\beta} = C_m U$, es decir, que el contenido de humedad es igual a la capacidad másica por el potencial de humedad, donde la C_m es constante, nos define que la capacidad másica (C_m) sea independiente de la temperatura y por lo tanto el contenido de humedad (X_{β}) como el potencial de humedad (U) son de igual manera independientes de la temperatura, por eso se dice que la relación de equilibrio del modelo de EL está en función sólo de la humedad.

Se conoce que la capacidad másica (C_m) es la cantidad de calor que se necesita por unidad de masa para elevar la temperatura a una unidad de temperatura ($kg \text{ agua} / [kg \text{ base seca}] ^\circ M$), el contenido de humedad es la

cantidad de agua contenida en un material (*kg agua/kg base seca*) y el potencial de humedad es el potencial que permite la circulación de agua en el interior de un sólido ($^{\circ}M$).

Si se desean expresar las ecuaciones de secado de alimentos en términos de las ecuaciones de Luikov es necesario identificar el potencial de humedad. Existen dos alternativas: el potencial químico de agua ($\mu = \mu_0 + RT \ln(a_w)$) o la humedad del medio convectivo (X_γ). En cualquiera de los dos casos la ecuación (17) es insuficiente para representar la relación, debido a que las dos variables con posibilidad de ser el potencial de humedad tienen una fuerte dependencia de la temperatura con respecto a la humedad (ecuación 12).

Bajo transferencia de energía despreciable la constante de partición promedio propuesta por Córdova-Quiroz *et al.*, (1996):

$$X_{\gamma i} = K_{eq} X_{\beta i} \quad \text{con} \quad K_{eq} = \frac{\int_{X_{\beta e}}^{X_{\beta 0}} \left(\frac{X_\gamma}{X_\beta} \right) dX_\beta}{X_{\beta 0} - X_{\beta e}} \quad (18)$$

Donde la integral se evalúa por métodos numéricos con la ecuación (12) a temperatura constante es análoga a la ecuación (17). Si $U = X_\gamma$ entonces $C_m = 1/K_{eq}$, $D_m = C_m \rho_\beta D_\beta$ y $k_m = \rho_\gamma k_c$. Con la temperatura variable la relación no es válida. Cuando se considera la transferencia simultánea de masa y energía, la ecuación (12) muestra que la relación de equilibrio debe ser en función de la humedad y temperatura. El modelo más simple para la referida relación de equilibrio líquido-vapor es una función lineal tanto de humedad como de temperatura. (García-Alvarado, Pacheco-Aguirre, & Ruiz-López, 2014)

$$X_\gamma = K_{eq0} + K_{eq1} X_{\beta i} + K_{eq2} T_i \quad (19)$$

Por lo que teniendo la relación de equilibrio anterior (ecuación 19) se puede combinar los dos modelos de ecuaciones, el cual llevara por nombre Ecuaciones Luikov-García (ELG). (García-Alvarado, Pacheco-Aguirre, & Ruiz-López, 2014)

- Transferencia de Calor:

$$h(T_i - T_\gamma) = -(1 - \varepsilon)k_c\rho_\gamma(X_{\gamma i} - X_\gamma)\lambda_{wv} - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot k_\beta \nabla T_i \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (20)$$

$$\frac{\partial(Cp_\beta[1 - \varepsilon]\rho_\beta T_\beta)}{\partial t} = \nabla \cdot [k_\beta \nabla T_\beta] + \varepsilon\lambda \frac{\partial([1 - \varepsilon]\rho_\beta X_\beta)}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (21)$$

- Transferencia de Masa

$$k_c\rho_\gamma(X_{\gamma i} - X_\gamma) = -\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot D_{\beta\gamma} \nabla([1 - \varepsilon]\rho_\beta X_{\beta i}) - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \theta D_{\beta\gamma} \nabla([1 - \varepsilon]\rho_\beta T_\beta) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\rho_\beta X_\beta)}{\partial t} = \nabla \cdot [D_\beta \nabla([1 - \varepsilon]\rho_\beta X_\beta)] - \nabla \cdot [\theta D_{\beta\gamma} \nabla([1 - \varepsilon]\rho_\beta T_\beta)] \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (23)$$

Las condiciones fronteras son las ecuaciones (20) y (22). Se tiene la fuerza impulsora que activa el proceso es la transferencia de una determinada cantidad de calor desde un fluido a la superficie de un medio sólido, donde el calor transferido se divide en una porción utilizada para la evaporación de la humedad y el exceso de calor se transmite por conducción al interior del sólido (ecuación 20). El calor remanente se conduce al interior del producto siguiendo la ley de Fourier, con un proceso de evaporación en el interior del sólido (ecuación 21). La evaporación produce un gradiente de concentración en la superficie del medio sólido, por lo que inicia un proceso de difusión y termo-difusión (ecuación 22). Finalmente, la difusión y termo-difusión se propagan en el interior del sólido de acuerdo a la ley de Fick (ecuación 23).

2.5.1 Relación de equilibrio

Como se mencionó anteriormente, para poder representar la relación de equilibrio líquido-vapor fue necesario recurrir a una función lineal tanto de humedad como de temperatura. (García-Alvarado, Pacheco-Aguirre, & Ruiz-López, 2014)

$$X_{\gamma i} = X_{\gamma 0} + \left(\frac{\partial X_{\gamma i}}{\partial a_w} \right)_0 \left(\frac{\partial a_w}{\partial X_{\beta i}} \right)_0 (X_{\beta i} - X_{\beta i_0}) + \left(\frac{\partial X_{\gamma i}}{\partial a_w p_w^0} \right)_0 \left(\frac{\partial a_w p_w^0}{\partial T_i} \right)_0 (T_i - T_{i0}) \quad (24)$$

$$X_{\gamma i} = X_{\gamma 0} + K_{eqX} X_{\beta i} + K_{eqT} T_i \quad (25)$$

El cual es el resultado de la serie de Taylor de:

$$X_{\gamma i} = \frac{a_w p_w^0 / p}{1 - a_w p_w^0 / p} \frac{M_w}{M_a} \quad a_w = f_i(X_{\beta i}, T_i) \quad p_w^0 = f_2(T_i) \quad (26)$$

Donde la humedad es una función de la humedad de la interface del lado del producto, y su temperatura determina la humedad en la fase gaseosa del seno del aire, por lo tanto es analítico y se corta en primer orden además de ser una función bivariada.

Para poder expresar la conducta no lineal de la interface usando la ecuación lineal (25) es necesario encontrar de manera correcta los valores de las constantes de equilibrio K_{eqX} y K_{eqT} .

Por eso (Núñez-Gómez, 2015) desarrolló un procedimiento para el cálculo de las constantes de equilibrio bajo ciertas condiciones, para que la aproximación lineal pudiera representar en mayor medida la termodinámica de la interface.

Ellos obtuvieron la conducta termodinámica de la interface para el secado de zanahorias y se obtuvieron de la siguiente manera:

- Con la carta psicométrica, la cual expresa las condiciones del aire referentes a la mezcla agua/aire húmedo, se calcularon los parámetros $T_{\beta 0}$ y a_w .
- La humedad de equilibrio $X_{\beta e}$ fue calculada por medio de la curva de sorción del producto (tabla 3) y usaron el modelo Henderson-García. (García-Alvarado, De la Cruz-Medina, Waliszewski-Kubiak, & Salgado.Cervantes, 1995)

Tabla 3 Valores de las constantes de las isotermas de sorción

Producto	$\ln k_1$	k_2	k_3	k_4	k_5
Zanahoria	12.872	-2.058	-10.38	0.751	-1.28×10^{-4}
Fibra	-4.423	1.3695	1.7322	0	0
Proteína	-30.791	5.979	1.5761	0	0
Almidón	8.233	-1.062	-12.9641	0.091	-1.44×10^{-4}

(Iglesias & Chirife, 1976) (Roman, Herman-y-Lara, Salgado-Cervantes, & García-Alvarado, 2004)

Del modelo Henderson-García se tiene que:

$$a_w = 1 - \exp\left(k_1 T_{\beta}^{k_2} X_{\beta}^{k_3 + k_4 T_{\beta} + k_5 T_{\beta}^2}\right) \quad (27)$$

Dónde:

$$\ln(-\ln(1 - a_w)) = k_1 + k_2 \ln(T_{\beta i}) + k_3 \ln(X_{\beta i}) + k_4 T_{\beta} \ln(X_{\beta i}) + k_5 T_{\beta}^2 \ln(X_{\beta i}) \quad (28)$$

Y la expresión para la presión de vapor de agua es:

$$p_w^0 = \exp\left(73.649 - \frac{7258.2}{T} - 7.3137\ln(T) + 4.1653 \times 10^{-6} T^2\right) \quad (29)$$

- Se calculó el valor de la humedad en la interface $X_{\gamma i}$ con el punto $(X_{\beta e}, T_{\beta 0})$ que corresponde al mínimo valor que puede ser obtenido por la relación lineal.
- Reemplazaron en la ecuación (25) el valor mínimo de $X_{\gamma i}$, las condiciones del aire: humedad absoluta X_{γ} , temperatura evaluada T_{γ} , y con el punto $(X_{\beta e}, T_{\beta 0})$ se calculó el parámetro K_{eqT} .
- Finalmente, calcularon el parámetro K_{eqX} por regresión lineal de los datos generados por la ecuación (30) en el intervalo de humedades $X_{\beta e} \leq X_{\beta} \leq X_{\beta 0}$ y de temperaturas $T_{\beta 0} \leq T_{\beta} \leq T_{\gamma}$.

$$X_{\gamma i} = \frac{a_w p_w^0 / p \frac{M_w}{M_a}}{1 - a_w p_w^0 / p \frac{M_w}{M_a}} \quad (30)$$

La figura 8 muestra el comportamiento termodinámico de la interface representada por la ecuación (30) y su aproximación lineal (25), calculada con los parámetros K_{eqX} y K_{eqT} para el secado de zanahoria a una temperatura de 60 °C.

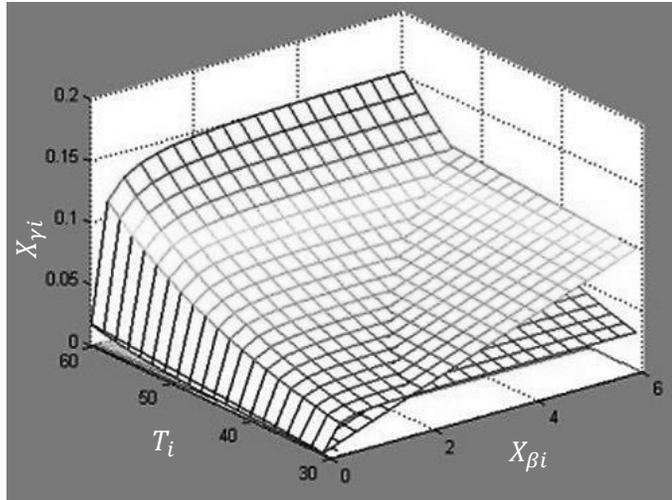


Figura 8 Comportamiento termodinámico de la interface y su aproximación lineal

En ese trabajo concluyeron que con un solo segmento lineal no se puede representar de manera adecuada la conducta de la humedad en la interface, por eso es que recomiendan el emplear 2 segmentos lineales.

2.6 Solución de las ecuaciones acopladas

En el trabajo de (Mikhailov, 1973) presenta una solución general de las ecuaciones acopladas de difusión. La solución obtenida se puede aplicar cuando se estudia la difusión en un reactor tubular, la transferencia de calor mediante una mezcla de fluidos-sólidos en una tubería.

$$w_m \frac{\partial T_m(M, \tau)}{\partial \tau} = \text{div}[k_m(M) \text{grad} T_m(M, \tau)] + (-1)^m \rho(M) [\sigma_{m-1} T_1(M, \tau) - \sigma_{m+1} T_2(M, \tau)] \quad m = 1, 2 \quad (31)$$

$$T_m(M, 0) = f_m(M) \quad m = 1, 2 \quad (32)$$

$$A_m(N) \frac{\partial T_m(N, T)}{\partial n} + B_m(N) T_m(N, \tau) = \varphi_m(N, \tau) \quad m = 1, 2 \quad (33)$$

La ecuación (31) es la ecuación de transferencia, la ecuación (32) es la inicial y la ecuación (33) es la de contorno, donde $m = 1, 2$ representa que puede ser para masa o calor.

Por su parte, en el trabajo de (García del Valle & Sierra Pallares, 2018) presentan una solución analítica para la transferencia acoplada de calor y masa, el cual fue aplicada a la cinética de secado de losas de capa delgada. Señalan que la transferencia de masa en el interior fue por flujo capilar y que la evaporación en la interface por conducción. En el trabajo, marcaron dos etapas de secado para la formulación del problema (figura 9); la primera etapa se caracteriza por la influencia del coeficiente de convección y la humedad relativa del ambiente, mientras que la segunda etapa está controlada por la difusividad efectiva. Este trabajo se ha propuesto como un sustituto para el número de Biot en la evaluación de si un modelo de decaimiento exponencial simplificado es adecuado para un experimento de secado particular.

Mientras que en otro trabajo se deriva una solución semi-analítica para la transferencia acoplada de calor y humedad en materiales porosos (hormigón de cáñamo, concreto airado en auto-clave y aislamiento de fibra de madera) usando condiciones de frontera periódicas en el tiempo. Este trabajo se basó en las ecuaciones de transferencia de Luikov y se reescribieron en formulación de matriz y se resolvieron usando la transformada de Laplace, sin embargo al aplicar la inversa algunos términos no pudieron ser resueltos analíticamente. La solución encontrada fue comparada con resultados numéricos que fueron obtenidos usando MatLab PDE (figura 10). (Pecenko, Challamel, Colinart, & Picandet, 2018)

Al ya existir una solución analítica, el presente trabajo se enfocó en estudiar las propiedades matemáticas de la solución a partir de ecuaciones diferenciales y con una interface lineal.

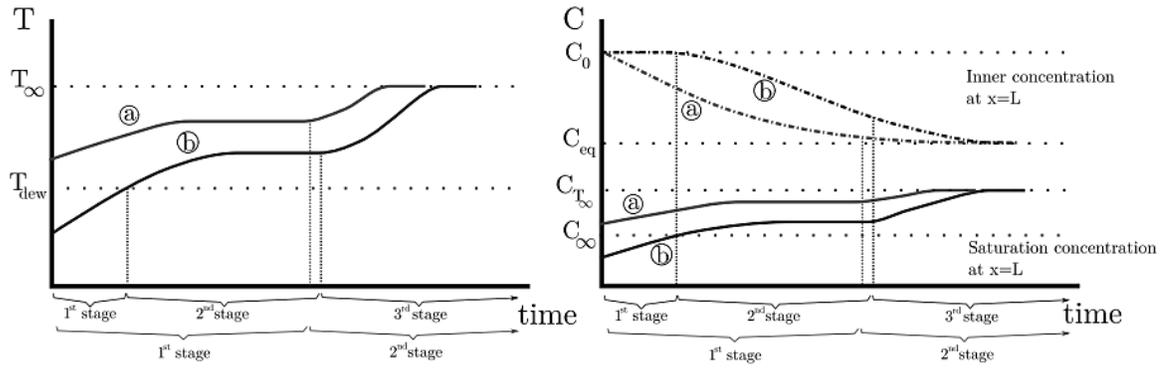


Figura 9 Perfiles de temperatura y humedad

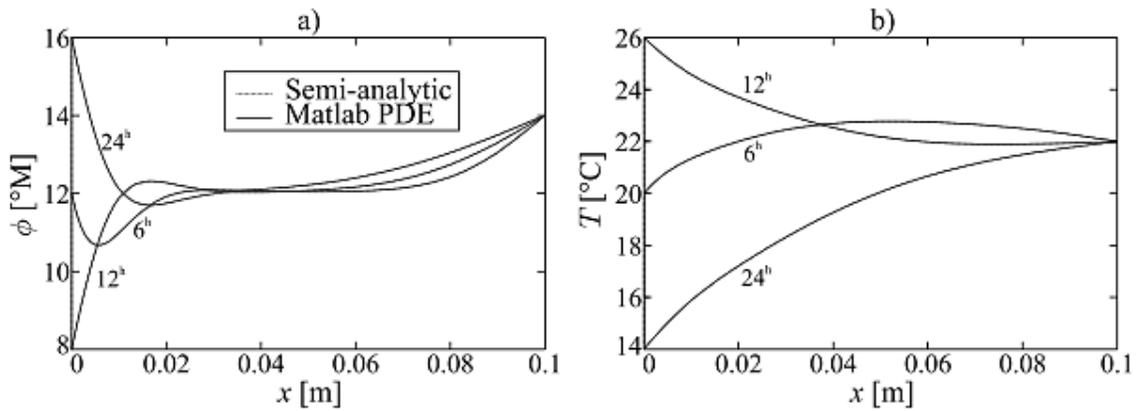


Figura 10 Comparación de los resultados obtenidos por el modelo semi-analítico y la solución numérica en MatLab PDE

3. JUSTIFICACIÓN

La relación de equilibrio del modelo de transferencia de masa y energía de Luikov está en función de un potencial de humedad empírico (U).

Por lo que García-Alvarado *et al.*, (2014) plantearon una analogía del modelo LE, el cual permite eliminar el parámetro (U), haciendo la relación de equilibrio de la interface en función de X_β y T_β .

La termodinámica de la interface, al ser calculada con una sola ecuación lineal, no representa de manera adecuada su conducta termodinámica.

Además, no se han reportado las relaciones de continuidad entre las soluciones de distintas geometrías.

4. HIPÓTESIS

Existe una solución analítica para las ecuaciones acopladas de transferencia de masa y calor, con una relación de equilibrio en función de humedad y temperatura, que permitirá encontrar la relación topológica de las soluciones en los tres sistemas geométricos comunes (placa plana, cilindro y esfera).

5. OBJETIVO GENERAL

Estudiar el modelo matemático de Luikov-García (LGE) de las ecuaciones acopladas de transferencia de masa y energía durante el secado de alimentos, para establecer la topología de distintas geometrías

5.1 Objetivos Específicos

- Establecer la topología entre soluciones de distintas geometrías.
- Validar el comportamiento cinético del secado en diferentes geometrías.
- Estudiar el modelo matemático de LGE para las ecuaciones de secado de alimentos.

6. METODOLOGÍA

1. Establecer la topología de distintas geometrías
2. Obtener datos experimentales de evolución de X_β y T_β
3. Calcular la termodinámica de la interface, usando 2 ecuaciones lineales
4. Realizar un análisis adimensional del modelo LGE
5. Realizar la simulación Lineal y No Lineal
6. Estimar los coeficientes de masa y calor

7 RESULTADOS

7.1 La topología de distintas geometrías

Para la relación topológica en las tres geometrías convencionales (placa plana, cilindro y esfera) se obtuvo la solución analítica las cuales (Crank, 1975) compiló para la transferencia de masa en estado no estacionario considerando que se trata de un sistema homogéneo sin encogimiento ni deformación.

7.1.1 Coordenadas Rectangulares 1D

Considerando una placa plana sólida infinita que tiene un espesor 2ℓ , la transferencia se encuentra en régimen no estacionario y en dirección z :

Transferencia en el interior del alimento:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \quad (34)$$

Transferencia en la interface:

$$-\alpha \frac{\partial Y}{\partial z} = h(Y - Y_e) \quad (35)$$

Donde Y es concentración (X) o temperatura (T) y α es la difusividad térmica ($k_\beta \cdot Cp_\beta^{-1} \cdot \rho_\beta^{-1}$) o difusión másica ($D_\beta \cdot \rho_\beta^{-1}$) y h es el coeficiente de transferencia de energía (h) o masa ($k_c \cdot \rho_\gamma \cdot \rho_\beta^{-1}$) entre el alimento y el aire.

Para resolver ecuaciones diferenciales parciales por el método de separación de variables, generalmente es conveniente usar variables adimensionales, por lo que el problema se expresa:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \quad (36)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial Z} = Bi \Psi \quad (37)$$

Donde Ψ es el término adimensional de concentración o temperatura ($\Psi = [Y - Y_e] \cdot [Y_0 - Y_e]^{-1}$), Z es la distancia adimensional desde el centro (z/ℓ), Biot es el número que relaciona las resistencias internas y externas ($Bi = h \cdot \ell \cdot \alpha^{-1}$) y donde τ es el término adimensional de tiempo ($\tau = \alpha \cdot t \cdot \ell^{-2}$).

La ecuación (33) se puede reducir a dos ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven por los métodos usuales. Se considerará resolverlo por separación de variables. Para ello se postula una solución que se puede escribirse como el producto de dos funciones: $\Psi = G(Z)F(\tau)$.

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dZ^2} = \frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau} = -\lambda^2 \quad (38)$$

Resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La que es función de la posición Z es un problema Sturm-Liouville.

$$G = C_2 \sin(\lambda Z) + C_3 \cos(\lambda Z) \quad (39)$$

Como condición de contorno del problema, se tiene:

$$Bi[\cos(\lambda_n)] - (\lambda_n)\sin(\lambda_n) = 0 \quad (40)$$

La ecuación anterior tiene todos los valores positivos de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\infty$. Una solución límite es cuando la transferencia en la interfase es mayor que la conductividad/difusividad, es decir $Bi \rightarrow \infty$. En éste caso $\Psi = 0$ en $Z = 1$, de la condición límite en la ecuación anterior se tiene:

$$\cos(\lambda_n) = 0 \text{ cuando } Bi \rightarrow \infty$$

Así que los valores de λ_n serán todos aquellos valores positivos que hagan $\cos = 0$, esto se puede apreciar en la siguiente figura:

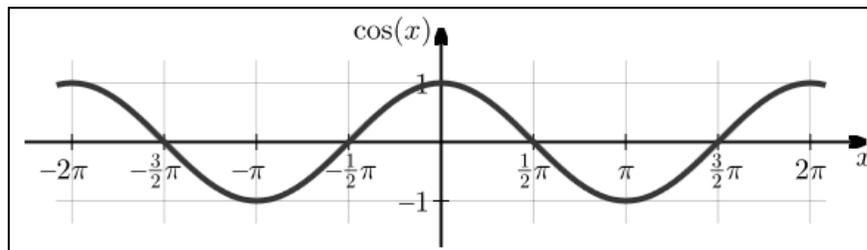


Figura 11 Curva de Coseno

Sin embargo, el valor de λ_n que se ocupó fue el primer valor positivo, es decir $\lambda_n = 1/2 \pi$.

Por lo que, la solución final es:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin(\lambda_n)}{\lambda_n}}{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n)}{4\lambda_n}} \cos(\lambda_n Z) \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (41)$$

La solución promedio: $\Psi(\tau) = \int_0^1 \Psi(Z\tau) dZ$, por lo que la solución analítica en coordenadas rectangulares es:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin(\lambda_n)}{\lambda_n}}{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n)}{4\lambda_n}} \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (42)$$

7.1.2 Coordenadas Cilíndricas 1D

Se consideró un cilindro infinito donde la transferencia se lleva a cabo sólo en la dirección radial:

Transferencia en el interior:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (43)$$

Transferencia en la interface:

$$-\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r} = h(Y - Y_e) \quad (44)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en coordenadas rectangulares, se tiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathcal{R}^2} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}} \right) \quad (45)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}} = Bi\Psi \quad (46)$$

Seguindo el procedimiento convencional para la separación de variables asumiendo que existe una solución de la forma $\Psi = G(\mathcal{R})F(\tau)$. Al reemplazarla en la ecuación (45) y reorganizar:

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{G} \left(\frac{d^2 G}{d\mathcal{R}^2} + \frac{1}{d\mathcal{R}} \frac{dG}{d\mathcal{R}} \right) = -\lambda^2 \quad (47)$$

Resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La que es función de la posición radial es una ecuación de Bessel de orden cero.

$$G = C_2 J_0(\lambda \mathcal{R}) + C_3 J_1(\lambda \mathcal{R}) \quad (48)$$

Como condición de contorno se tiene:

$$\lambda_n J_1(\lambda_n) - Bi[J_0(\lambda_n)] = 0 \quad (49)$$

La solución límite es:

$$J_0(\lambda_n) = 0 \text{ cuando } Bi \rightarrow \infty$$

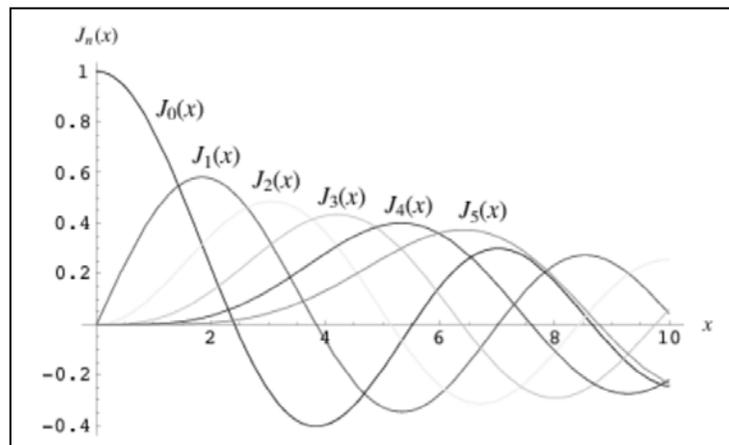


Figura 12 Curva de Bessel

Los posibles valores de J_0 serán:

k	$J_0(x)$
1	2.4048
2	5.5201
3	8.6537
4	11.7915
5	14.9309

Sin embargo, el valor de λ_n que se ocupó fue el primer valor positivo de J_0 , es decir 2.40483.

Por lo que, la solución final es:

$$\Psi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n (J_0^2[\lambda_n] + J_1^2[\lambda_n])} J_0(\lambda_n \mathcal{R}) \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (50)$$

La solución promedio: $\Psi(\tau) = \int_0^1 \Psi(\mathcal{R}\tau) \mathcal{R} d\mathcal{R}$, por lo que la solución analítica en coordenadas cilíndricas es:

$$\Psi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda_n)}{\lambda_n^2 (J_0^2[\lambda_n] + J_1^2[\lambda_n])} \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (51)$$

7.1.3 Coordenadas Esféricas 1D

Se considera una esfera de radio r en el cual la distribución inicial de temperatura y concentración así como las condiciones de contorno tienen simetría esférica.

Transferencia en el interior:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial Y}{\partial r} \right] \right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (52)$$

Transferencia en la interface:

$$-\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r} = h(Y - Y_e) \quad (53)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en coordenadas rectangulares, se tiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathcal{R}^2} + \frac{2}{\mathcal{R}} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathcal{R}^2} \quad (54)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}} = Bi\Psi \quad (55)$$

Buscando una solución de la forma $\Psi = G(\mathcal{R})F(\tau)$ (factores de variables separadas):

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\mathcal{R}^2} = -\lambda^2 \quad (56)$$

Como condición de contorno del problema, se tiene:

$$(Bi - 1)\sin(\lambda_n) + (\lambda_n)\cos(\lambda_n) = 0 \quad (57)$$

La solución límite es:

$$\sin(\lambda_n) = 0 \text{ cuando } Bi \rightarrow \infty$$

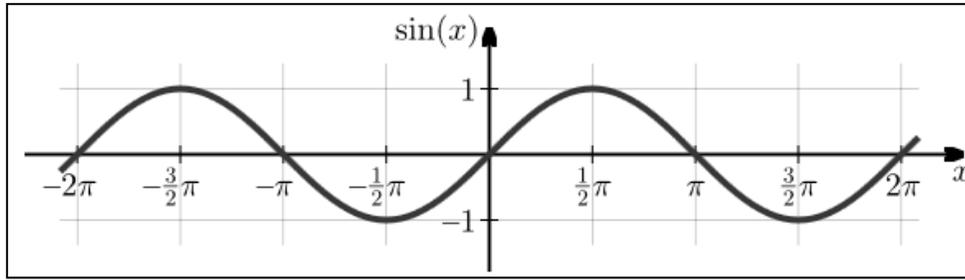


Figura 13 Curva de seno

Así que los valores de λ_n serán todos aquellos valores positivos que hagan $\sin = 0$. El valor de λ_n que se ocupó para el cálculo de D_{eff} fue el primer valor propio positivo, es decir π .

La solución final es:

$$\Psi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin(\lambda_n)}{\lambda_n^2} - \frac{\cos(\lambda_n)}{\lambda_n}}{1 - \frac{\sin(2\lambda_n)}{2\lambda_n}} \frac{\sin(\lambda_n \mathcal{R})}{\mathcal{R}} \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (58)$$

La solución promedio: $\Psi(\tau) = 3 \int_0^1 \Psi(\mathcal{R}\tau) \mathcal{R}^2 d\mathcal{R}$, por lo que la solución analítica en coordenadas esféricas es:

$$\Psi = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin(\lambda_n)}{\lambda_n^2} - \frac{\cos(\lambda_n)}{\lambda_n}}{1 - \frac{\sin(2\lambda_n)}{2\lambda_n}} \left(\frac{\sin[\lambda_n]}{\lambda_n^2} - \frac{\cos[\lambda_n]}{\lambda_n} \right) \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (59)$$

7.1.4 Conclusiones topológicas

Lo que depende la velocidad asintótica para cada transferencia, es la variación de Ψ con respecto a τ .

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (60)$$

Sin embargo, lo que determina la variación de Ψ es λ . Así que lo que cuenta para conocer la diferencia de una solución de una geometría a otra es el valor de λ , éste valor van desde:

- Coordenadas rectangulares: $\cos(\lambda_n) = 0$
- Coordenadas cilíndricas: $J_0(\lambda_n) = 0$
- Coordenadas esféricas: $\sin(\lambda_n) = 0$

El valor de λ cambia con respecto al tiempo (figuras 11, 12 y 13), esto hace que:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{\infty}$$

Por lo que en la sumatoria (ecuación 57), se tiene:

$$C_1 \exp(-\lambda_1^2 \tau) + C_2 \exp(-\lambda_2^2 \tau) + C_3 \exp(-\lambda_3^2 \tau) + \dots + C_{\infty} \exp(-\lambda_{\infty}^2 \tau)$$

Con el conocimiento anterior, el valor de λ al tratarse de un número negativo elevado al cuadrado, esto hace que:

$$-\lambda_1^2 > -\lambda_2^2 > -\lambda_3^2 > \dots > -\lambda_{\infty}^2$$

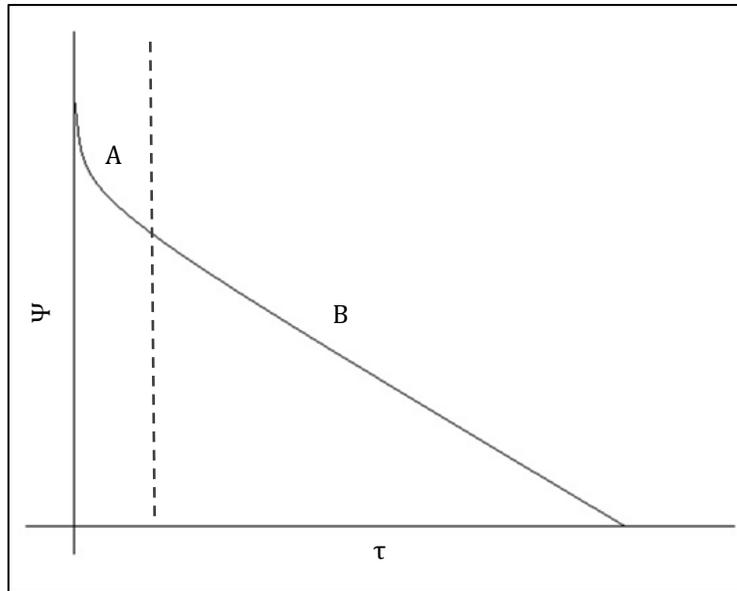


Figura 14 Dinámica de la temperatura o concentración

Esto se aprecia mejor en las gráficas de dinámica de temperatura/concentración (figura 14), ya que a determinado τ todos los valores de la sumatoria tienen efecto (A), pero después de un τ ya sólo hay presencia de la parte lineal (B) la cual no es la sumatoria sino sólo el primer valor propio de λ , por lo que los valores de $\lambda_2 \rightarrow \lambda_\infty$ se vuelven insignificantes. Por tal motivo se usa el primer valor de λ para cada sistema geométrico:

- Coordenadas rectangulares: $\lambda_1 = \pi/2 = 1.57080$
- Coordenadas cilíndricas: $\lambda_1 = 2.40483$
- Coordenadas esféricas: $\lambda_1 = \pi = 3.14159$

La solución en coordenadas cilíndricas está en función de las funciones Bessel, y un detalle es que en función Bessel se tiene:

$$J_{-1/2}(\lambda_n) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi(\lambda_n)}} \cos(\lambda_n) \therefore J_{-1/2}(\lambda_n) \propto \cos(\lambda_n) \quad (61)$$

Por lo que en placa plana, $\cos(\lambda_n) = 0$ se podría re-escribir en función Bessel como $J_{-1/2}(\lambda_n) = 0$. Además también en función Bessel se tiene:

$$J_{1/2}(\lambda_n) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi(\lambda_n)}} \sin(\lambda_n) \therefore J_{1/2}(\lambda_n) \propto \sin(\lambda_n) \quad (62)$$

Que de igual manera, en coordenadas esféricas, $\sin(\lambda_n) = 0$, se puede re-escribir a $J_{1/2}(\lambda_n) = 0$.

Las funciones Bessel de primera especie son funciones periódicas más generales que las funciones trigonométricas, tanto que las funciones Bessel las incluye y por lo tanto la topología de las soluciones están en el orden de las funciones Bessel, las cuales van desde $-(1/2)$ a $(1/2)$ y además se vuelve una función continua, es decir que para cualquier intermedio entre placa plana y esfera existe un valor de J y si pasa por cero sería un cilindro, además se podría conjeturar la existencia del homeomorfismo, ya que ésta se trata de una relación biyectiva (1:1) continua y además su inversa también es continua.

Después se prosiguió a conocer la solución de otras geometrías cambiando el valor de ν (J_ν) de las funciones de Bessel.

Tabla 4 Relación en otras geometrías

Geometría	Relación	Proporcional
Placa plana infinita	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2$	$J_n(\lambda_1) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}$

Placa plana semi-infinita	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 \left(\frac{\ell x^2}{\ell y^2} \right)$	
Placa plana finita	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2 \left(\frac{\ell y^2}{\ell x^2} \right) + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 \left(\frac{\ell y^2}{\ell z^2} \right)$	
Paralelepípedo infinito	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2$	
Paralelepípedo finito	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 \left(\frac{\ell y^2}{\ell z^2} \right) + \lambda_z^2 \left(\frac{\ell x^2}{\ell z^2} \right)$	
Cubo	$\lambda_1^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$	
Cilindro infinito	$\lambda_1^2 = \lambda_r^2$	$J_0(\lambda_n) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2.4048$
Cilindro finito	$\lambda_1^2 = \lambda_r^2 + \lambda_x^2 \left(\frac{r^2}{\ell x^2} \right)$	
Cilindro finito	$\lambda_1^2 = \lambda_r^2 \left(\frac{\ell x^2}{r^2} \right) + \lambda_x^2$	
Esfera	$\lambda_1^2 = \lambda_r^2$	$J_n(\lambda_1) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}$

Con la tabla anterior, se encontraron los valores de ν para diferentes geometrías y en la tabla siguiente se muestran algunos de esos resultados:

Tabla 5 Valores de ν para algunas geometrías

Geometría	Relación	λ_1	$J_\nu(\lambda_1) = 0$
Placa plana infinita	ℓ_x	1.5708	$\nu = -0.5$
Placa plana semi-infinita	ℓ_x $\ell_y = 4\ell_x$	1.6191	$\nu = -0.4737$
Placa plana finita	$\ell_x = 6\ell_y$	1.6138	$\nu = -0.4766$

	l_y $l_z = 6l_y$		
Paralelepípedo infinito	l_x $l_y = l_x$	2.2214	$\nu = -0.1172$
Paralelepípedo finito	l_x $l_y = l_x$ $l_z = 4l_x$	2.2559	$\nu = -0.0954$
Cubo	$l_x = l_y = l_z$	2.7207	$\nu = 0.2092$
Cilindro infinito	r	2.4048	$\nu = 0$
Cilindro finito	r $l = 4r$	2.4367	$\nu = 0.0207$
Cilindro finito	$r = 4l$ l	1.6819	$\nu = -0.4390$
Esfera	r	3.1416	$\nu = 0.5$

Con la tabla anterior, se pudo apreciar que el cubo está en el rango del cilindro finito y la esfera, y que dependiendo de las dimensiones de los cilindros éstos pueden estar en el rango de una placa plana o en el rango de la esfera.

Todo lo anterior es la expresión de la topología pura, ya que topología es la relación entre dos funciones representadas en dos campos topológicos, los cuales podrían ser dos campos vectoriales distintos, y en éste caso se tienen espacios vectoriales expresados en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

Así que, conociendo la relación de λ_n en placa plana, cilindro y esfera se podrá conocer qué relación existe entre la variación de tiempo en dos campos vectoriales distintos.

7.2 Datos experimentales de evolución de X_β y T_β

Para la cinética de humedad y temperatura, se trabajó con papa blanca, es decir, los sistemas geométricos (placa plana, cilindro y esfera) se obtuvieron de papas blancas. Se trabajó con una temperatura de secado de 70°C , con una misma velocidad de secado 2 m/s y se hizo por duplicado.

En todos los casos, se consideró un producto homogéneo, sin encogimiento y no deformable, además se hicieron las mismas consideraciones del modelo de ecuaciones de secado de alimentos (ESA) es decir que se consideró la temperatura constante y por lo tanto la transferencia de calor despreciable.



Figura 15 Papa blanca

Para la obtención de la humedad inicial se usó el método de estufa al vacío (60°C , $6 \times 10^{-4} \text{ Pa}$) y se emplearon tres muestras a analizar (1.0000 g), las cuales fueron pesadas con una balanza analítica ($1 \times 10^{-4} \text{ g}$).



Figura 16 Estufa al vacío del Laboratorio de Ingeniería



Figura 17 Balanza analítica del Laboratorio de Ingeniería

Los datos de la pérdida de humedad, se obtuvieron empleando el secado de bandejas (Apex 28-BE) y las muestras fueron pesadas con una báscula (Torrey, 0.1 g) cada 10 minutos las primeras 2 horas, después cada 20 minutos las siguientes 2 horas y de ahí cada 30 minutos.



Figura 18 Secador de bandejas de la U.N.I.D.A.



Figura 19 Báscula de precisión Torrey

Para la medición de la temperatura interna de las muestras se utilizó un registrador y medidor de temperatura utilizando termopares tipo K.



Figura 20 Registrador y medidor de temperatura DIGI-SENSE

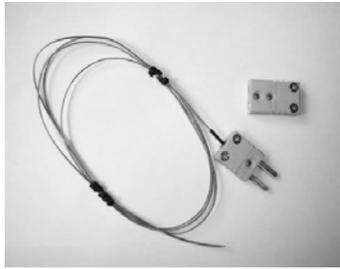


Figura 21 Termopares tipo K

Para los de los cilindros de papa blanca se usó un descorazonador de manzanas, el cual tiene un diámetro de 1.50 cm ($r = 0.75 \text{ cm}$).

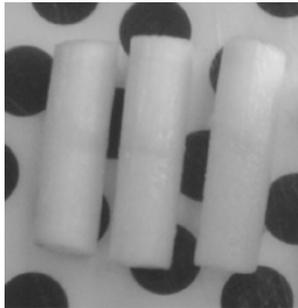


Figura 22 Cilindros de papa blanca

Para las esferas de papa, se empleó una cuchara parisina con un diámetro de 2.50 cm ($r = 1.25 \text{ cm}$).



Figura 23 Esferas de papa blanca

Por su parte las placas planas de papa tendrán un espesor de 1 cm ($L/2 = 0.5 \text{ cm}$) y se obtuvieron con la rebanadora que se encuentra en las instalaciones de la U.N.I.D.A.



Figura 24 Placas planas de papa blanca

7.2.1 Placas planas a 70 °C

Con las indicaciones que se propusieron en la sección 7.2, se obtuvieron los siguientes datos para el secado de placas planas a 70 °C:

Tabla 6 Datos del día de secado de placas de papas

Temperatura de bulbo húmedo (tbh)	27 °C
Temperatura de bulbo seco (tbs)	30 °C
Presión (p)	1 atm
Humedad absoluta (X_γ)	0.0217 g/g
Humedad de equilibrio ($X_{\beta e}$)	0.0007 g/g
Humedad inicial ($X_{\beta 0}$)	4 g/g

Con los datos de la cinética de humedad se prosiguió a graficar los valores de (gramos de agua/gramos de sólidos secos) contra tiempo:

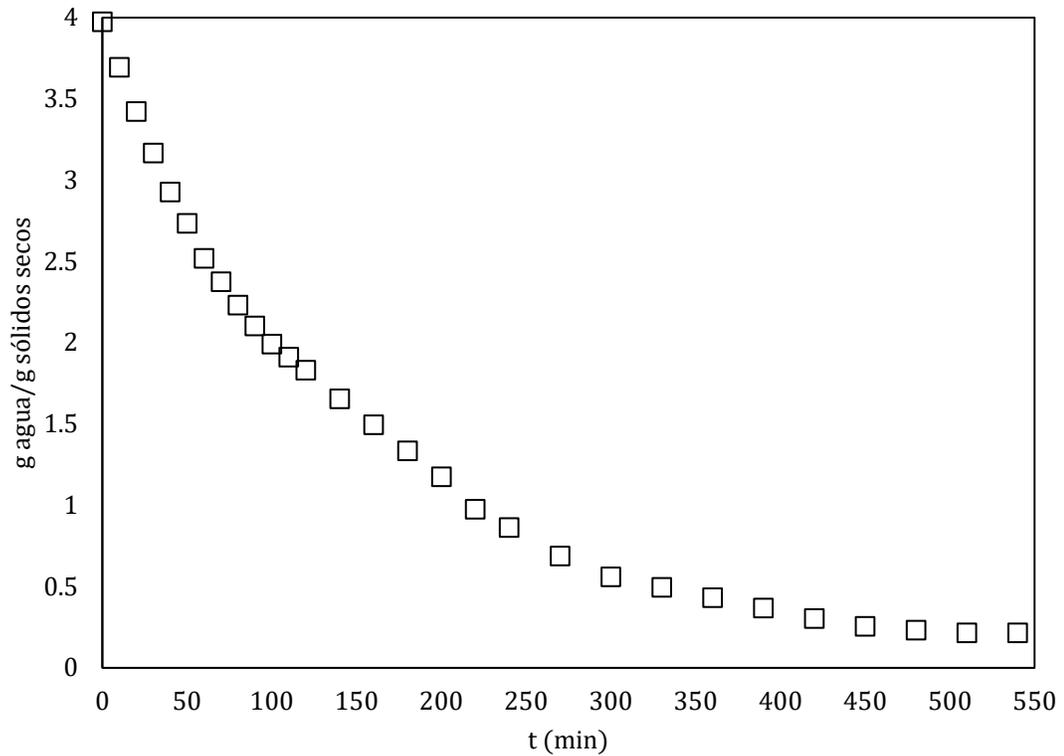


Figura 25 Cinética de humedad del secado de placas planas de papa

Se prosiguió a calcular los valores de la humedad adimensional (Ψ_1):

$$\Psi_1 = \frac{X_\beta - X_{\beta e}}{X_{\beta 0} - X_{\beta e}} \quad (63)$$

Para después graficar los valores de $\ln \Psi_1$ contra tiempo y así poder encontrar el valor de la pendiente:

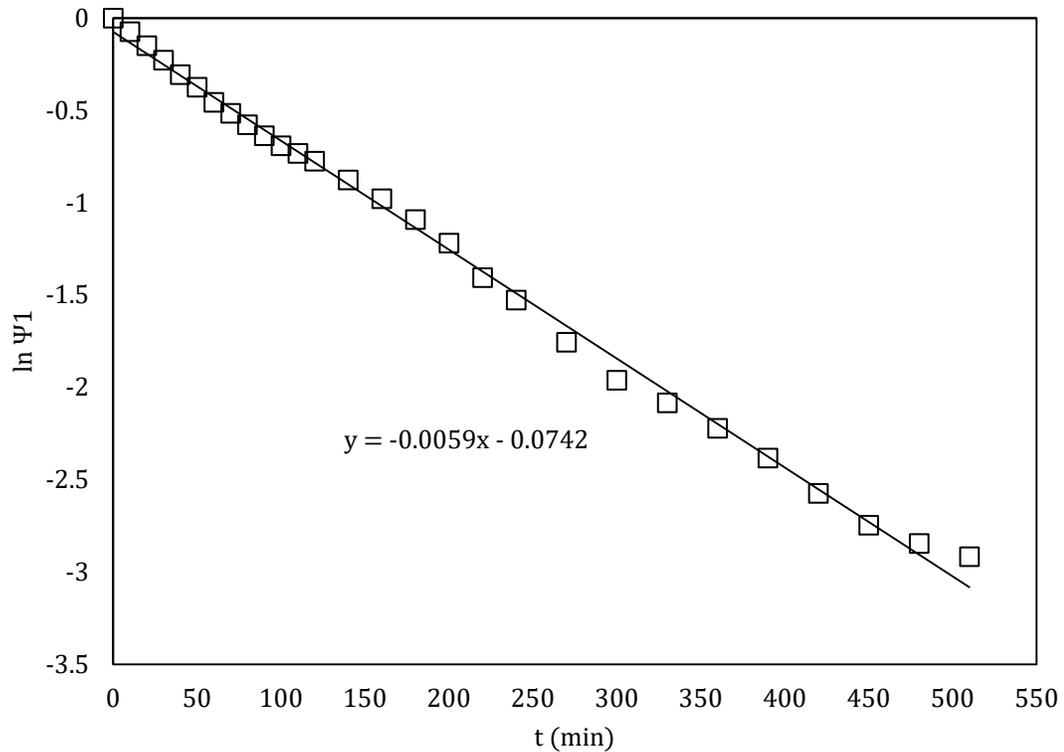


Figura 26 Valores de $\ln \Psi_1$ contra tiempo

Una vez obtenido el valor de la pendiente, se prosiguió a buscar el valor de la difusividad efectiva, dónde:

$$m = -\frac{\lambda^2 D_\beta}{\ell^2} \therefore D_\beta = -\frac{m \ell^2}{\lambda^2} \quad (64)$$

Dónde $\lambda = 1/2 \pi$ y $\ell = 2.38 \times 10^{-3} m$

Por lo tanto:

$$D_\beta = 2.23 \times 10^{-10} m^2/s$$

Una vez obtenida el valor de la difusividad se pudo calcular el tiempo adimensional (τ), para después graficar los valores de Ψ_1 contra τ , para poder

conocer la rapidez de la variación de la transferencia de masa durante el secado de placas planas de papa a una temperatura de 70° C.

$$\tau = \frac{D_{\beta} t}{\ell^2} \quad (65)$$

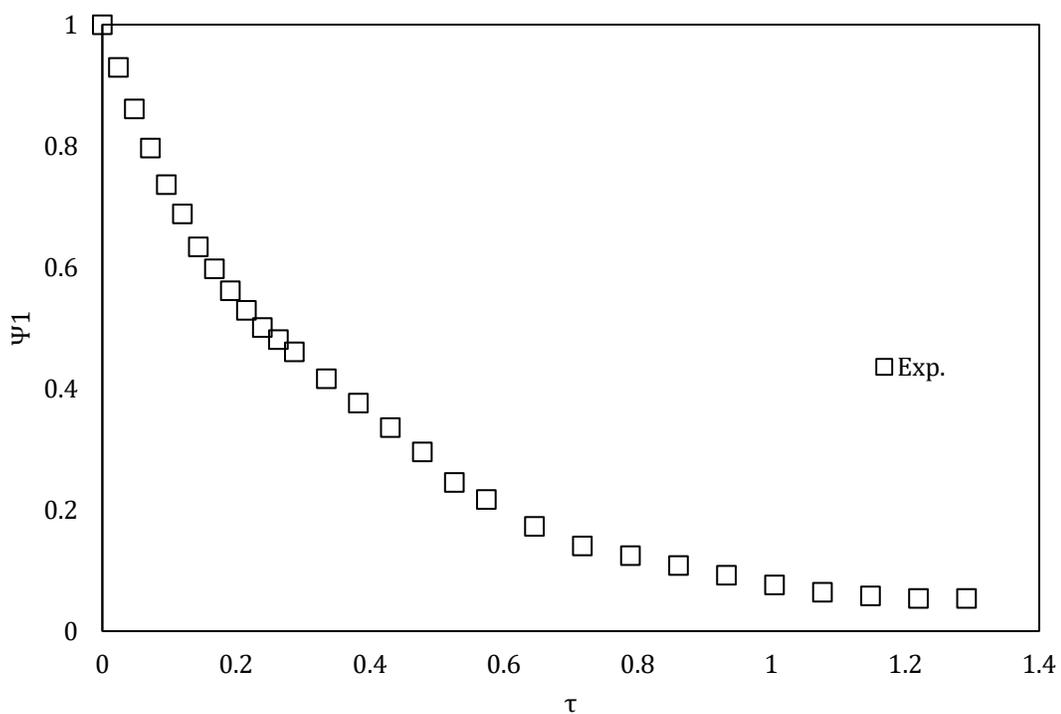


Figura 27 Perfil de humedad de las placas planas de papa durante el secado

Para el cálculo de la temperatura adimensional (Ψ_2), se ocupó la siguiente ecuación:

$$\Psi_1 = \frac{T_{\beta} - T_{\gamma}}{T_{\beta 0} - T_{\gamma}} \quad (66)$$

El valor de $T_{\beta 0}$ era la temperatura de bulbo húmedo, para después graficar los valores de Ψ_2 contra τ y conocer la dinámica de la temperatura interna de las placas planas de papa durante el secado a 70 °C.

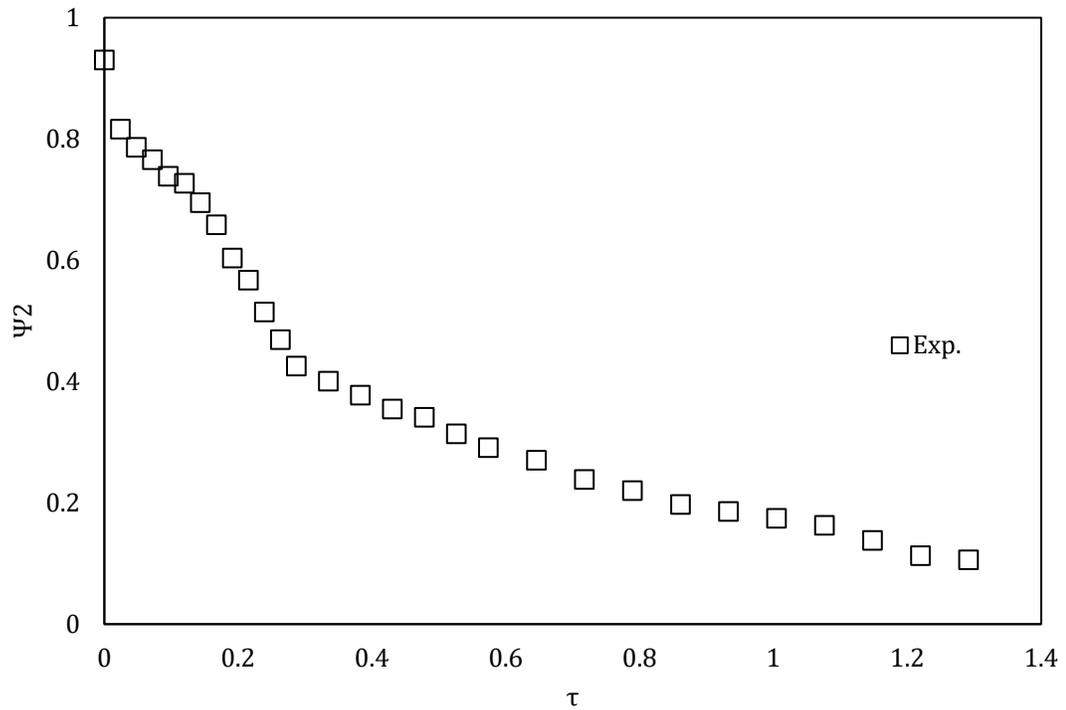


Figura 28 Perfil de temperatura interna de las placas planas durante el secado

Los datos que se obtuvieron fueron:

Tabla 7 Propiedades del secado de placas planas de papas a 70 °C

Propiedad	Placas planas
$X_{\beta 0}$	4 kg/kg
$T_{\beta 0}$	300.15 K
ℓ	$2.38 \times 10^{-3} m$

λ_1	$\pi/2$
D_β	$2.23 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
$X_{\beta e}$	$7 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_γ	$2.17 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$

7.2.2 Cilindros a 70 °C

Para la obtención de los perfiles de humedad y temperatura del secado de cilindros de papa blanca, se siguió el mismo procedimiento de las placas planas.

Por lo que los datos obtenidos fueron:

Tabla 8 Propiedades del secado de cilindros de papas a 70 °C

Propiedad	Cilindros
$X_{\beta 0}$	4 kg/kg
$T_{\beta 0}$	300.15 K
ℓ	$4.1 \times 10^{-3} \text{ m}$
λ_1	2.40483
D_β	$7.52 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
$X_{\beta e}$	$6.43 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_γ	$2.13 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$

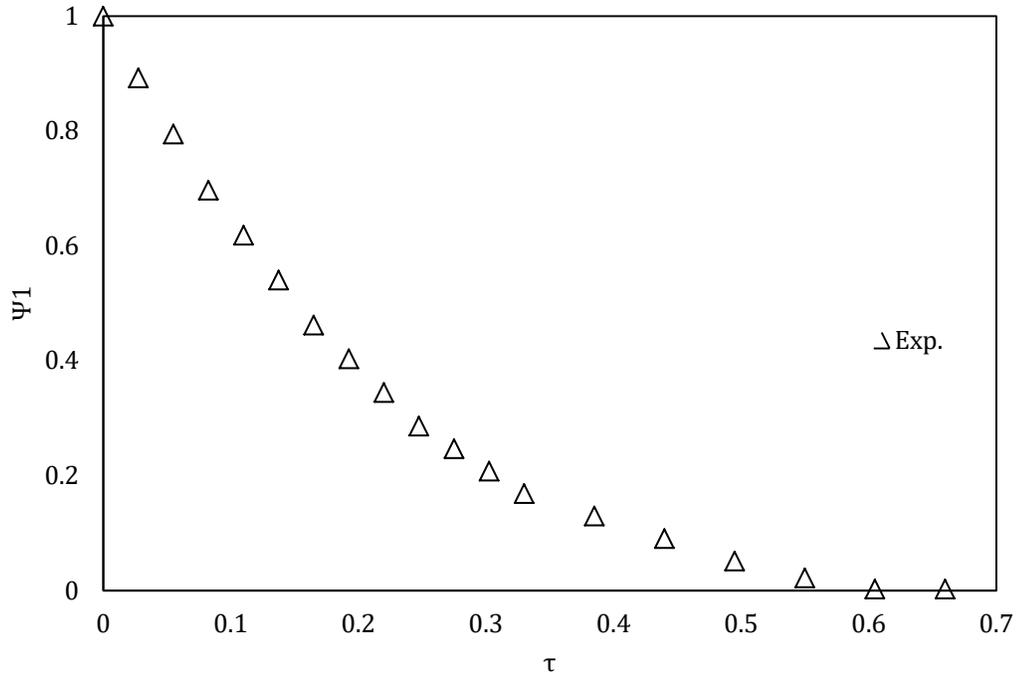


Figura 29 Perfil de humedad del secado de cilindros de papas a 70 °C

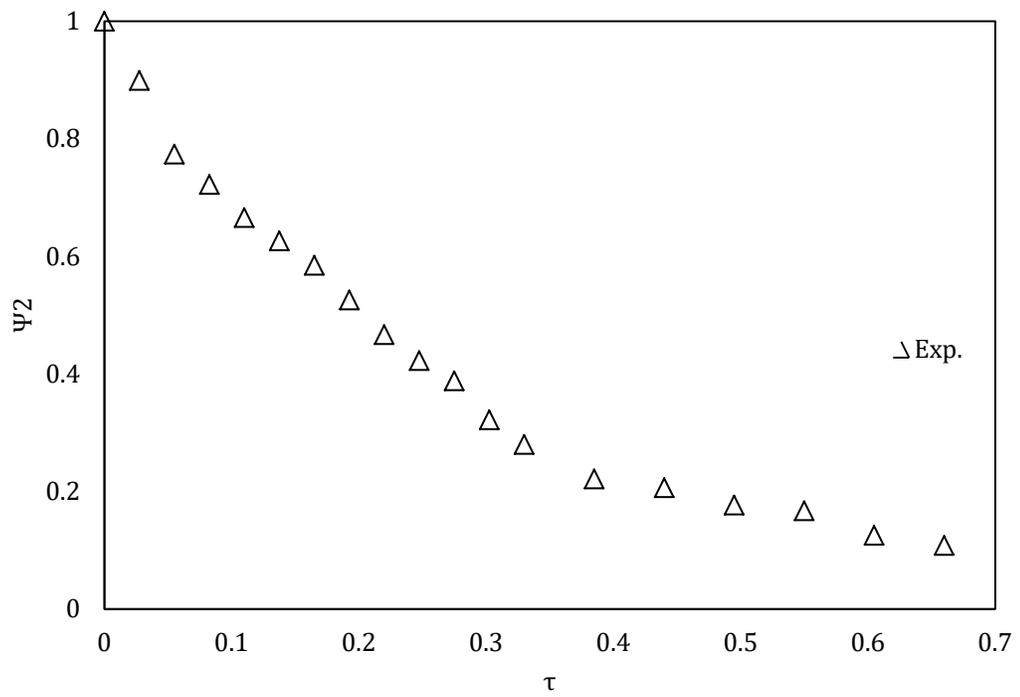


Figura 30 Perfil de temperatura del secado de cilindros de papas a 70 °C

7.2.3 Esferas a 70 °C

Se prosiguió a emplear la metodología de las geometrías anteriores para obtener los perfiles de humedad y temperatura del secado de esferas de papa blanca a 70 °C.

Los datos obtenidos fueron:

Tabla 9 Propiedades del secado de esferas de papas a 70 °C

Propiedad	Esferas
$X_{\beta 0}$	4 kg/kg
$T_{\beta 0}$	301.15 K
ℓ	$8 \times 10^{-3} \text{ m}$
λ_1	π
D_{β}	$8.65 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
$X_{\beta e}$	$8 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_{γ}	$2.35 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$

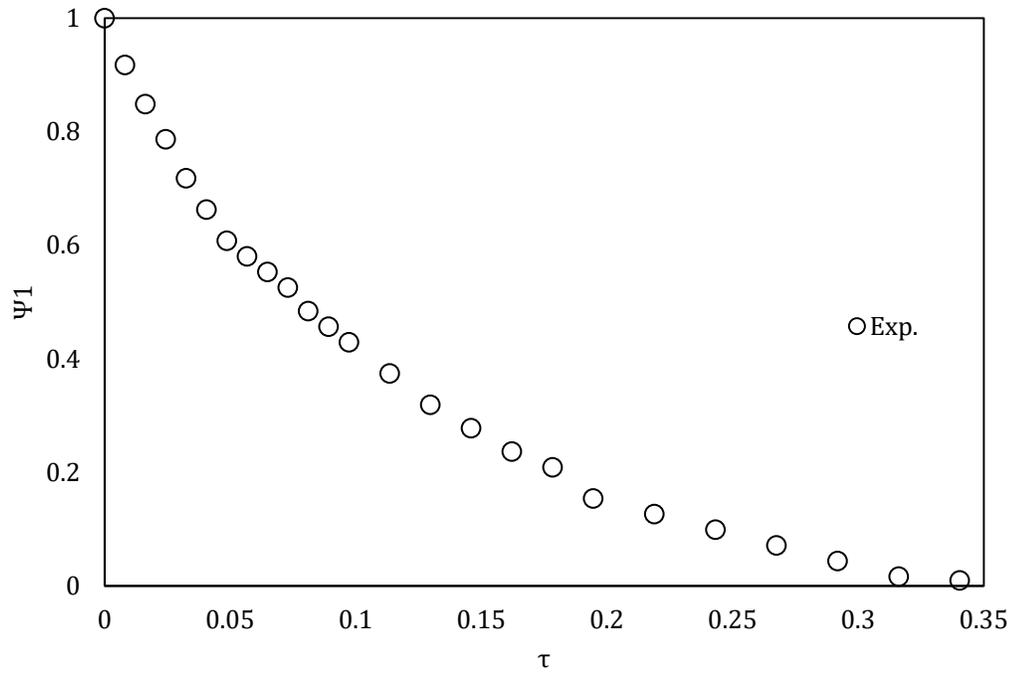


Figura 31 Perfil de humedad del secado de cilindros de papas a 70 °C

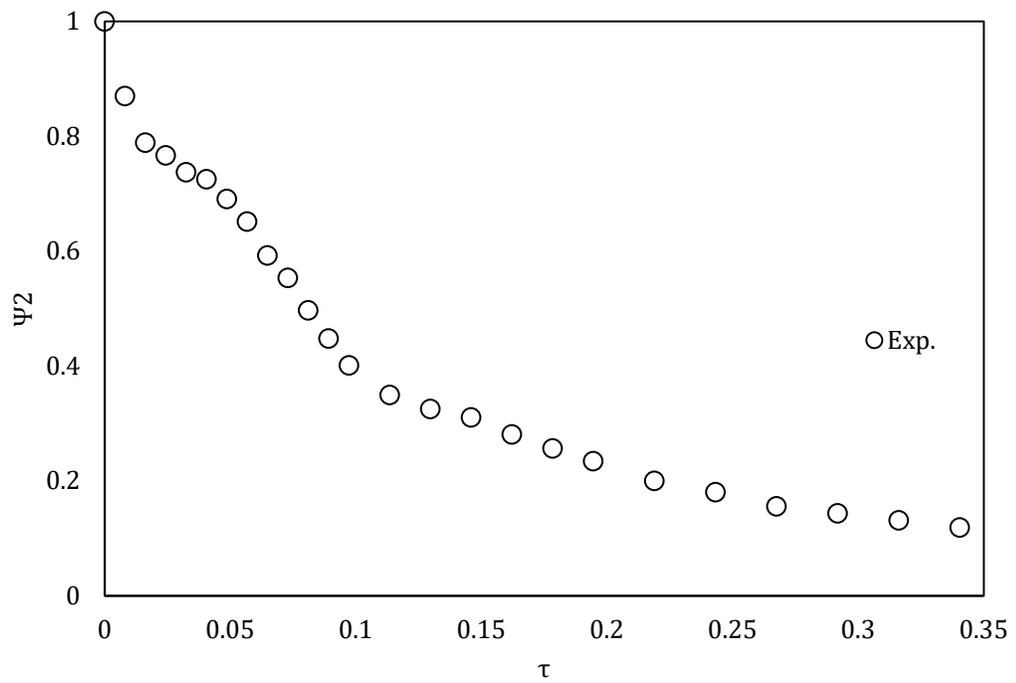


Figura 32 Perfil de temperatura del secado de cilindros de papas

7.2.4 Conclusiones experimentales

Al comparar los datos experimentales de las tres geometrías (figuras 31 y 32) se observó que en los perfiles de humedad, la pérdida de humedad es más rápida en las esferas de papas, en comparación con los cilindros y las placas planas.

Esto se debe a la relación *superficie/volumen*, es decir, al área específica, además esto también tiene que ver con los valores de λ_v para cada geometría. El valor más alto de λ_v es para la geometría esférica con un valor de $\lambda_1 = \pi$, seguido por el valor de λ_v para la geometría cilíndrica ($\lambda_1 = 2.40483$), y por último el valor de λ_v para la geometría rectangular ($\lambda_1 = \pi/2$).

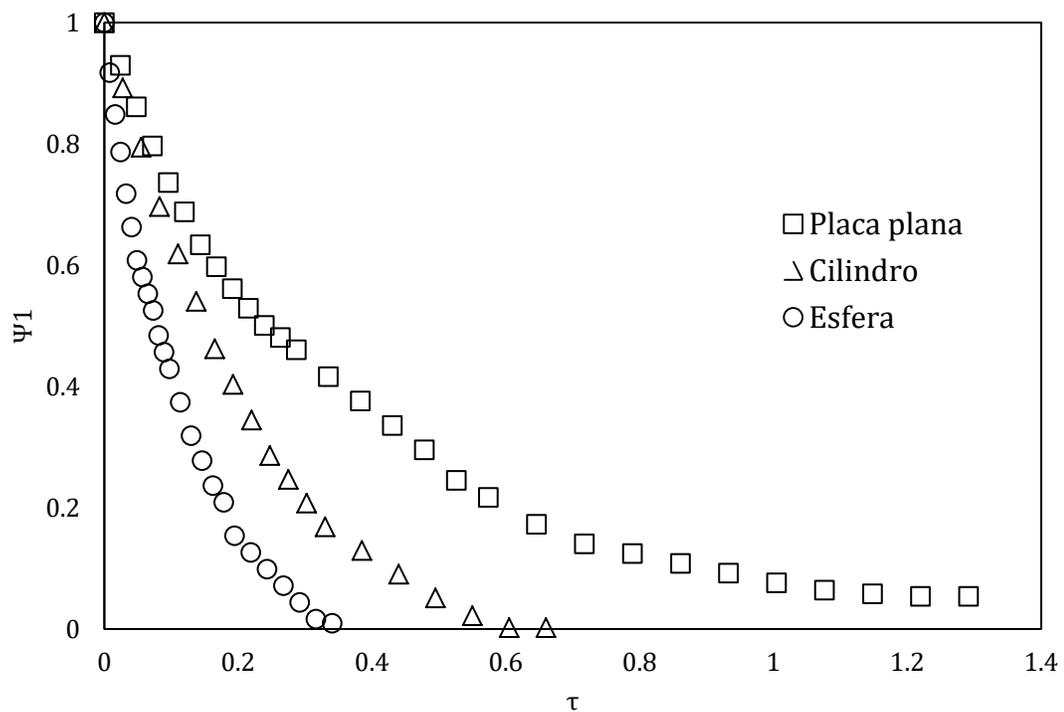


Figura 33 Perfil de humedad de las tres geometrías convencionales

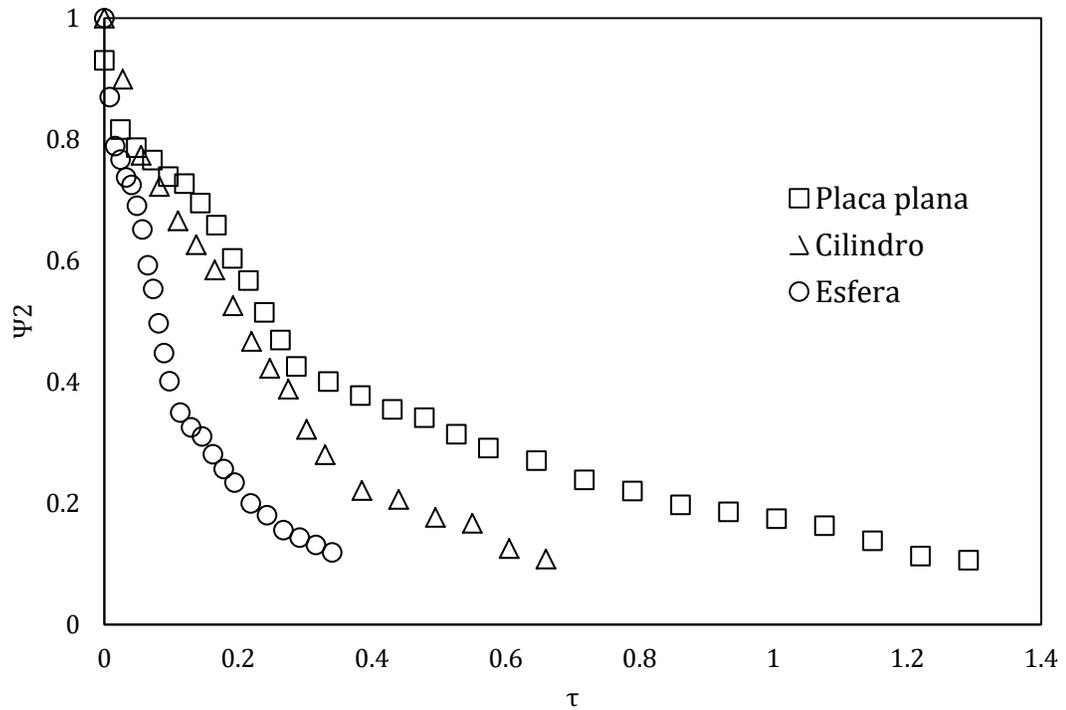


Figura 34 Perfil de temperatura de las tres geometrías convencionales

Tabla 10 Datos obtenidos del secado convectivo de papas en las tres geometrías convencionales

Propiedad	Placas planas	Cilindros	Esferas
$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	4	4	4
$T_{\beta 0}$ (K)	300.15	300.15	301.15
ℓ (m)	2.38×10^{-3}	4.1×10^{-3}	8×10^{-3}
λ_1	$\pi/2$	2.40483	π
D_{β} (m^2/s)	2.23×10^{-10}	7.52×10^{-10}	8.65×10^{-10}
$X_{\beta e}$ (kg/kg)	7×10^{-4}	6.43×10^{-4}	8×10^{-4}
X_{γ} (kg/kg)	2.17×10^{-2}	2.13×10^{-2}	2.35×10^{-2}

7.3 Conducta termodinámica de la interface

Con el fin de obtener un modelo lineal de la interface, fuertemente no lineal, se estimaron los parámetros K_{eq0} , K_{eq10} y K_{eq20} de la relación de equilibrio entre las fases propuesta por García-Alvarado *et al.*, (2014) y se siguió el procedimiento propuesto por (Núñez-Gómez, 2015).

$$X_{\gamma i} = K_{eq0} + K_{eq10}X_{\beta i} + K_{eq20}T_i$$

El cual es el resultado de la serie de Taylor de:

$$X_{\gamma i} = \frac{a_w p_w^0 / p \quad M_w}{1 - a_w p_w^0 / p \quad M_a}$$

Del modelo Henderson-García se tiene que:

$$a_w = 1 - \exp\left(k_1 T_{\beta}^{k_2} X_{\beta}^{k_3 + k_4 T_{\beta} + k_5 T_{\beta}^2}\right)$$

Dónde:

$$\ln(-\ln(1 - a_w)) = k_1 + k_2 \ln(T_{\beta i}) + k_3 \ln(X_{\beta i}) + k_4 T_{\beta} \ln(X_{\beta i}) + k_5 T_{\beta}^2 \ln(X_{\beta i})$$

Y la expresión para la presión de vapor de agua es:

$$p_w^0 = \exp\left(73.649 - \frac{7258.2}{T} - 7.3137 \ln(T) + 4.1653 \times 10^{-6} T^2\right)$$

Se usaron datos de isoterma de adsorción de papa blanca. (Carvalho Lago, Liendo-Cárdenas, & Zapata Noreña, 2013)

Los datos que se obtuvieron fueron:

Tabla 11 Isotherma de adsorción de papas blancas

$\ln k_1$	48.756
k_2	-8.0811
k_3	9.2538
k_4	-37.613×10^{-3}
k_5	3.535×10^{-5}

Tabla 12 Datos del secado de papas a 70 °C

Propiedad	Placas planas	Cilindros	Esferas
$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	4	4	4
X_{γ} (kg/kg)	2.17×10^{-2}	2.13×10^{-2}	2.35×10^{-2}
$X_{\beta e}$ (kg/kg)	7×10^{-4}	6.43×10^{-4}	8×10^{-4}
$T_{\beta 0}$ (K)	300.15	300.15	301.15
T_{γ} (K)	343.15	343.15	343.15

Después se prosiguió a graficar la conducta termodinámica de la interface:

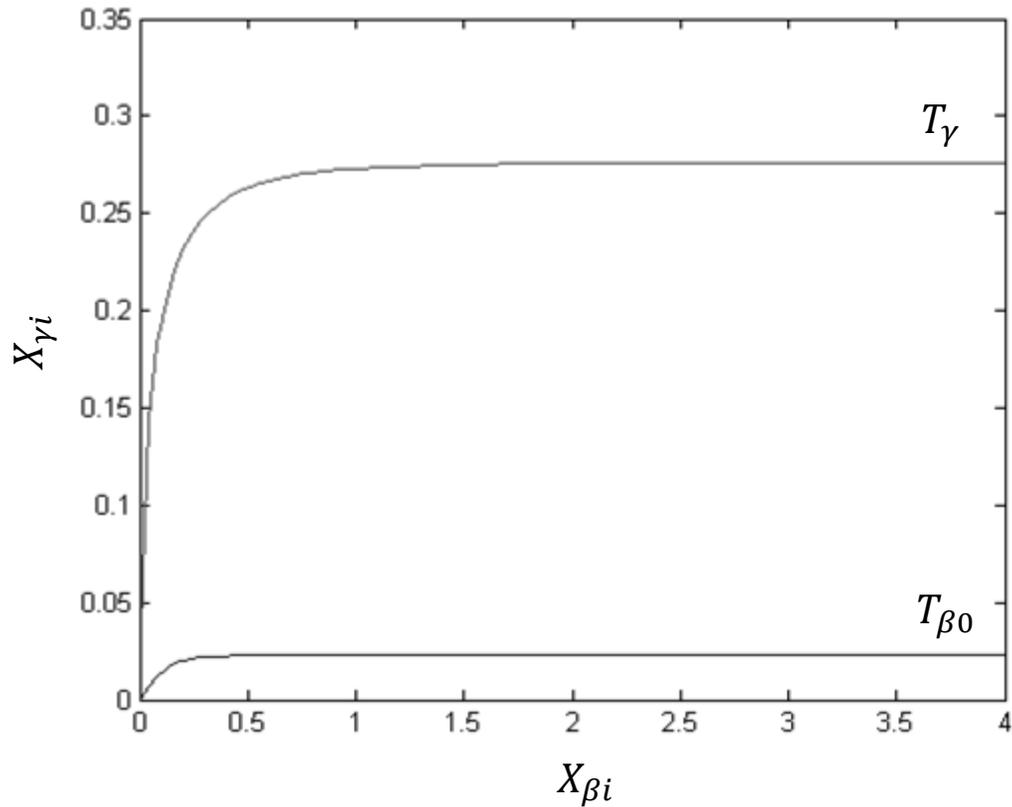


Figura 35 Conducta termodinámica de la interface

Con base en el trabajo de (Núñez-Gómez, 2015), para poder representar de forma lineal la interface, será necesario el uso de dos ecuaciones lineales, es decir dos segmentos. El primer segmento es el de mayor contenido de humedad y el segundo segmento es el de menor contenido de humedad y es cuando se encuentran en equilibrio la fase sólido y líquido.

Los datos que se ocuparon para los dos segmentos fueron:

- o Placas planas:

$$T_{\beta 0} = 300.15 \text{ K} \qquad X_{\beta 0} = 4 \text{ kg/kg} \qquad X_{\gamma 0} = 0.0227 \text{ kg/kg}$$

$$T_{\beta 0} = 300.15 \text{ K} \qquad X_{\beta i} = 0.3601 \text{ kg/kg} \qquad X_{\gamma i} = 0.0224 \text{ kg/kg}$$

$$\begin{array}{lll}
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta i} = 0.3604 \text{ kg/kg} & X_{\gamma i} = 0.2543 \text{ kg/kg} \\
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta e} = 0.3604 \text{ kg/kg} & X_{\gamma} = 0.0217 \text{ kg/kg}
 \end{array}$$

○ Cilindros

$$\begin{array}{lll}
 T_{\beta 0} = 300.15 \text{ K} & X_{\beta 0} = 4 \text{ kg/kg} & X_{\gamma 0} = 0.0227 \text{ kg/kg} \\
 T_{\beta 0} = 300.15 \text{ K} & X_{\beta i} = 0.3601 \text{ kg/kg} & X_{\gamma i} = 0.0224 \text{ kg/kg} \\
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta i} = 0.2805 \text{ kg/kg} & X_{\gamma i} = 0.2543 \text{ kg/kg} \\
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta e} = 0.0006 \text{ kg/kg} & X_{\gamma} = 0.0213 \text{ kg/kg}
 \end{array}$$

○ Esferas

$$\begin{array}{lll}
 T_{\beta 0} = 301.15 \text{ K} & X_{\beta 0} = 4 \text{ kg/kg} & X_{\gamma 0} = 0.0241 \text{ kg/kg} \\
 T_{\beta 0} = 301.15 \text{ K} & X_{\beta i} = 0.4001 \text{ kg/kg} & X_{\gamma i} = 0.0239 \text{ kg/kg} \\
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta i} = 0.4005 \text{ kg/kg} & X_{\gamma i} = 0.2575 \text{ kg/kg} \\
 T_{\gamma} = 343.15 \text{ K} & X_{\beta e} = 0.0008 \text{ kg/kg} & X_{\gamma} = 0.0235 \text{ kg/kg}
 \end{array}$$

Con los datos anteriores se pudo encontrar los valores de las constantes de equilibrio y se pudo graficar la conducta termodinámica de la interface usando dos segmentos lineales.

○ Placas planas

$$X_{\gamma i} = -1.60 + 8.24 \times 10^{-5} X_{\beta i} + 5.39 \times 10^{-3} T_i \quad (67)$$

$$X_{\gamma i} = -1.83 + 6.47 \times 10^{-1} X_{\beta i} + 5.39 \times 10^{-3} T_i \quad (68)$$

○ Cilindros

$$X_{\gamma i} = -1.60 + 8.24 \times 10^{-5} X_{\beta i} + 5.39 \times 10^{-3} T_i \quad (69)$$

$$X_{\gamma i} = -2.36 + 8.32 \times 10^{-1} X_{\beta i} + 6.93 \times 10^{-3} T_i \quad (70)$$

○ Esferas

$$X_{\gamma i} = -1.65 + 5.56 \times 10^{-5} X_{\beta i} + 5.56 \times 10^{-3} T_i \quad (71)$$

$$X_{\gamma i} = -1.88 + 5.85 \times 10^{-1} X_{\beta i} + 5.56 \times 10^{-3} T_i \quad (72)$$

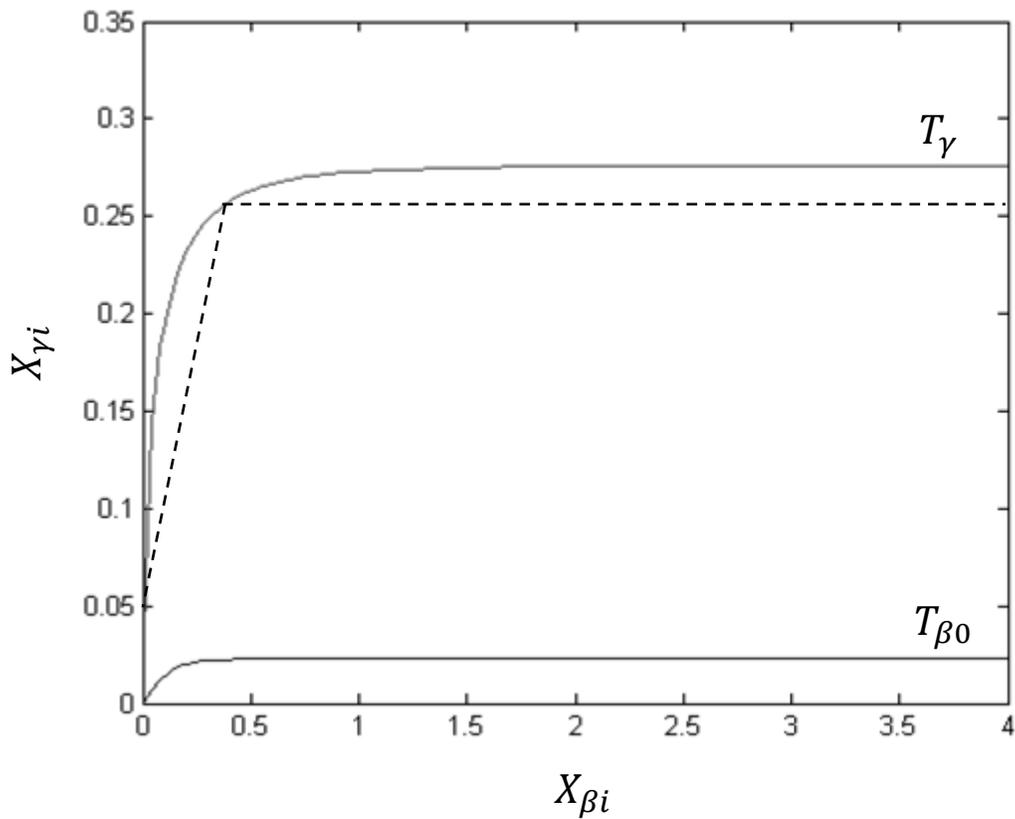


Figura 36 Conducta termodinámica lineal de la interface usando dos segmentos lineales

Como se puede apreciar en la figura anterior, la representación lineal de la interface usando dos segmentos, es decir dos ecuaciones, lineales representa de una manera más aproximada a la conducta no lineal de la interface y eso se puede apreciar mejor al comparar el trabajo de (Núñez-Gómez, 2015) donde sólo ocupan una ecuación lineal para la interface (figura 8).

7.4 Análisis adimensional del modelo LGE

Una vez realizado el análisis adimensional del modelo LGE (ecuaciones 20 – 23), se obtuvo el sistema de ecuaciones correspondientes con los números y variables adimensionales.

Los números adimensionales que se obtuvieron fueron:

$$\rho = \frac{\rho_{\beta s}}{\rho_{\beta}} \quad (73)$$

$$Bi = \frac{h\ell}{k_{\beta 0}} \quad (74)$$

$$Bi_m = \frac{k_c \ell \rho_{\gamma} \cdot K_{eq10}}{D_{\beta 0} \rho_{\beta 0}} \quad (75)$$

$$Ko = \frac{\lambda_{wv}^0 (X_{\beta 0} - X_{\beta e})}{Cp_{\beta 0} (T_{\beta 0} - T_{\gamma})} \quad (76)$$

$$Lu = \frac{Cp_{\beta 0} \rho_{\beta} D_{\beta}}{k_{\beta 0}} \quad (77)$$

$$Ga = \frac{K_{eq20} T_{\beta 0} - T_{\gamma}}{K_{eq10} X_{\beta 0} - X_{\beta e}} \quad (78)$$

$$\phi = \frac{K_{eq0} + (K_{eq10} X_{\beta e}) + (K_{eq20} T_{\gamma}) - X_{\gamma}}{K_{eq10} (X_{\beta 0} - X_{\beta e})} \quad (79)$$

Dónde ρ representa la relación entre la concentración de los componentes secos y la densidad del producto. El número de Biot (Bi) señala si la conducción controla la transferencia de calor. Por su parte, el número de Biot másico (Bi_m), señala si la difusión es el fenómeno que controla la transferencia de masa. El número de Kossovitch (Ko), representa el efecto del calor latente en la interface. El número de Luikov (Lu), señala si la transferencia de masa es el mecanismo que controla el secado. El número García (Ga), representa el efecto de la temperatura con respecto a la humedad en la interface. Sin embargo, ϕ es un número adimensional.

Como se propuso el usar dos ecuaciones lineales para poder representar la interface no lineal, es por ese motivo que se van a utilizar dos conjuntos de ecuaciones para la transferencia acoplada de masa y calor, es por esta razón que $\phi \neq 0$ en el primer conjunto de ecuaciones y $\phi = 0$ para el segundo segmento de ecuaciones.

7.4.1 Modelo LGE en coordenadas rectangulares 1D

Las ecuaciones para la transferencia unidimensional de masa y calor en una placa plana infinita de longitud z_0 son:

- Transferencia de calor en la interface

$$(Bi + Bi_m Lu\rho KoGa)\Psi_2 + Bi_m Lu\rho Ko\Psi_1 + Bi_m Lu\rho Ko\phi = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (80)$$

- Ecuación de transferencia de calor

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial\tau} = \frac{1}{Lu} \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\xi^2} \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (81)$$

- Transferencia de masa en la interface

$$Bi_m\Psi_1 + Bi_m Ga\Psi_2 + Bi_m\phi = -\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (82)$$

- Ecuación de transferencia de masa

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\xi^2} \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (83)$$

Donde $\xi = z/z_0$

7.4.2 Modelo LGE en coordenadas cilíndricas 1D

Las ecuaciones para la transferencia unidimensional de masa y calor en un cilindro infinito de radio r_0 son:

- Transferencia de calor en la interface

$$(Bi + Bi_m Lu\rho KoGa)\Psi_2 + Bi_m Lu\rho Ko\Psi_1 + Bi_m Lu\rho Ko\phi = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (84)$$

- Ecuación de transferencia de calor

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} = \frac{1}{Lu\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right) \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (85)$$

- Transferencia de masa en la interface

$$Bi_m \Psi_1 + Bi_m Ga \Psi_2 + Bi_m \phi = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (86)$$

- Ecuación de transferencia de masa

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right) \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (87)$$

Donde $\xi = r/r_0$

7.4.3 Modelo LGE en coordenadas esféricas 1D

Las ecuaciones para la transferencia unidimensional de masa y calor en una esfera de radio r_0 son:

- Transferencia de calor en la interface

$$(Bi + Bi_m Lu\rho Ko Ga) \Psi_2 + Bi_m Lu\rho Ko \Psi_1 + Bi_m Lu\rho Ko \phi = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (88)$$

- Ecuación de transferencia de calor

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} = \frac{1}{Lu\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right) \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (89)$$

- Transferencia de masa en la interface

$$Bi_m \Psi_1 + Bi_m Ga \Psi_2 + Bi_m \phi = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (90)$$

o Ecuación de transferencia de masa

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \right) \text{ en } \mathcal{V}_\beta \quad (91)$$

Donde $\xi = r/r_0$

7.5 Simulación Lineal y No Lineal

Una vez que se obtuvo el modelo adimensional, se estimaron los parámetros del sistema y se realizó la simulación del comportamiento del sistema. Se usó el comando ode15s de MatLab, Rung-Kutta de 5to orden.

El producto se dividió en 20 nodos, resultando en 20 ecuaciones de transferencia de masa y 20 ecuaciones de transferencia de calor, y se obtuvieron los perfiles de Ψ_1 y Ψ_2 , promedio y central, contra τ .

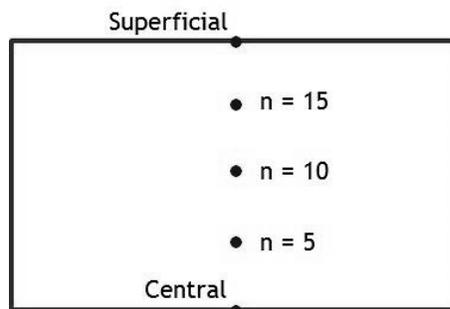


Figura 37 Esquema de la discretización espacial en el producto

Como se mencionó en la sección 7.3, para el cálculo de la interface se necesitaron dos ecuaciones lineales, por tal motivo se necesitarán dos soluciones lineales para la transferencia acoplada.

Para eso, se buscaron los datos correspondientes de las papas blancas y se prosiguió a calcular los números adimensionales. Para el primer conjunto de ecuaciones lineales se ocuparon los datos iniciales del secado de las papas, y los valores finales de esta etapa se ocuparon como valores iniciales para el segundo conjunto de ecuaciones lineales.

Una vez obtenida la simulación lineal del modelo LGE, se prosiguió a realizar la simulación no lineal del sistema y se hizo una comparación.

Y al realizar estas simulaciones, se pudieron estimar los coeficientes de transferencia de masa (k_c) y calor (h).

7.5.1 Simulación en coordenadas rectangulares

Los datos que se ocuparon para la simulación del secado de placas planas de papa a 70 °C fueron:

Tabla 13 Parámetros para la simulación en coordenadas rectangulares

Parámetro	Valor
$X_{\beta e}$	$7 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_{γ}	$2.17 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$
D_{β}	$2.23 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

$k_{\beta 0}$	0.296 W/mK
ρ_{γ}	1.03 kg/m ³
$\rho_{\beta 0}$	492.48 kg/m ³
ρ_{β}	936.19 kg/m ³
λ_{wy}	2.33x10 ⁺⁶ J/kg
$Cp_{\beta 0}$	4022.8 J/kg . K
ρ	0.526

(Mujumdar, 1987) (Geankoplis, 1998) (Ratti & Crapiste, 1995)

Las constantes de equilibrio ($K_{eq0}, K_{eq10}, K_{eq20}$) que se ocuparon fueron los calculados en la sección 7.3 y fueron las ecuaciones (67) y (68):

$$X_{\gamma i} = -1.60 + 8.24x10^{-5}X_{\beta i} + 5.39x10^{-3}T_i$$

$$X_{\gamma i} = -1.83 + 6.47x10^{-1}X_{\beta i} + 5.39x10^{-3}T_i$$

Los números adimensionales que se encontraron fueron:

Tabla 14 Números adimensionales para la simulación en coordenadas rectangulares

Primera parte		Segunda parte	
$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	4	$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	3.40
ℓ (m)	5x10 ⁻³	ℓ (m)	2.38x10 ⁻³
$T_{\beta 0}$ (K)	300.15	$T_{\beta 0}$ (K)	313.95
Bi	5.07x10 ⁻¹	Bi	2.41x10 ⁻¹

Bi_m	1.92×10^{-2}
Lu	2.86×10^{-3}
Ko	-53.91
Ga	-703.53
ϕ	705.68

Bi_m	71.44
Lu	2.86×10^{-3}
Ko	-53.91
Ga	-8.96×10^{-2}

Los valores de los coeficientes de transferencia de masa y calor fueron:

Tabla 15 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de placas planas de papa

Solución	$h (W/m^2 \cdot K)$	$k_c (m/s)$	S^2
No lineal	30*	0.002*	0.0065
Lineal	30	0.005	

*Estadísticamente $p < 0.01$

Y los perfiles de humedad y temperatura del secado de placas planas de papa blanca a 70 °C, fueron las figuras 38 y 39 respectivamente.

Al comparar la solución lineal (L) contra la no lineal (NL), se puede observar que la solución lineal, usando dos ecuaciones lineales, reproduce de manera adecuada la conducta experimental del perfil de humedad (figura 38). Sin embargo para el caso del perfil de temperatura (figura 39), presenta un pequeño brinco y esto podría deberse a que la solución lineal es sensible cuando se pasa de la primera ecuación lineal a la segunda ecuación lineal.

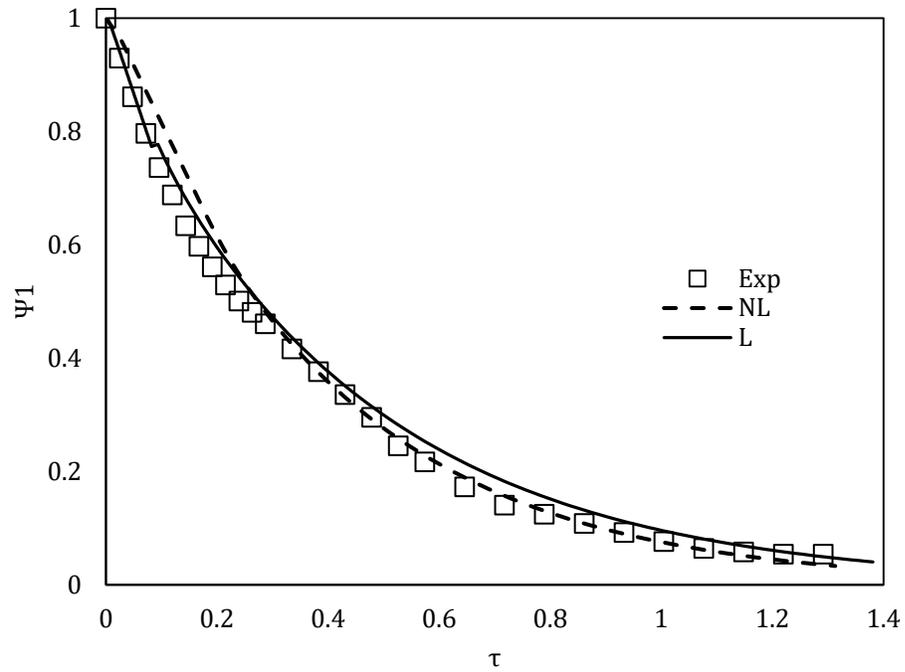


Figura 38 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas rectangulares

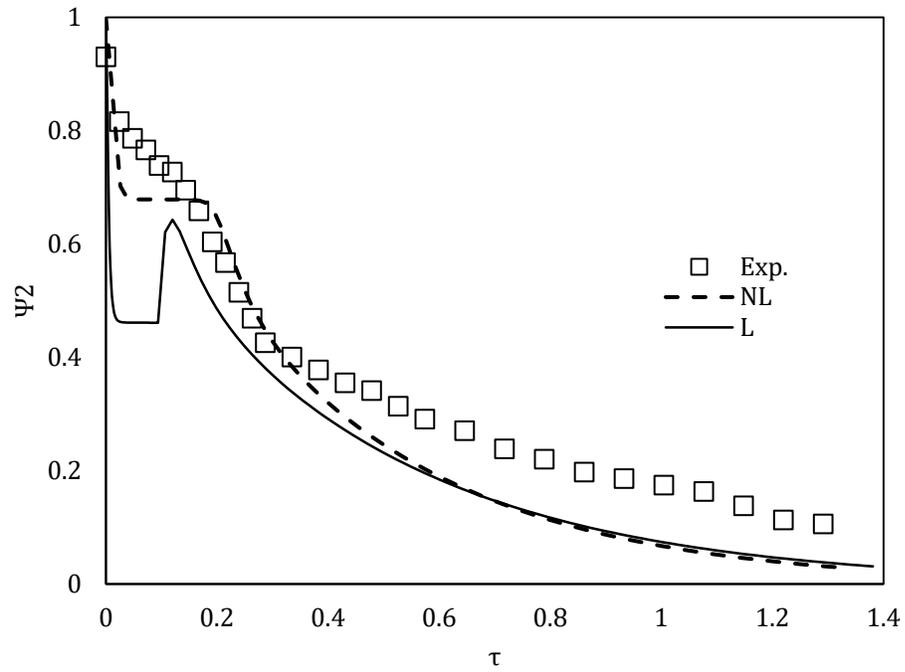


Figura 39 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas rectangulares

7.5.2 Simulación en coordenadas cilíndricas

Los datos que se ocuparon para la simulación del secado de cilindros de papa fueron:

Tabla 16 Parámetros para la simulación en coordenadas rectangulares

Parámetro	Valor
$X_{\beta e}$	$6.43 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_{γ}	$2.13 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$
D_{β}	$7.52 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
$k_{\beta 0}$	0.296 W/mK
ρ_{γ}	1.03 kg/m^3
$\rho_{\beta 0}$	622.96 kg/m^3
ρ_{β}	1007.84 kg/m^3
λ_{wy}	$2.33 \times 10^{+6} \text{ J/kg}$
$Cp_{\beta 0}$	$4037.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
ρ	0.618

(Mujumdar, 1987) (Geankoplis, 1998) (Ratti & Crapiste, 1995)

Las constantes de equilibrio ($K_{eq0}, K_{eq10}, K_{eq20}$) que se ocuparon fueron:

$$X_{\gamma i} = -1.60 + 8.24 \times 10^{-5} X_{\beta i} + 5.39 \times 10^{-3} T_i$$

$$X_{\gamma i} = -2.36 + 8.32 \times 10^{-1} X_{\beta i} + 6.93 \times 10^{-3} T_i$$

Los números adimensionales que se encontraron fueron:

Tabla 17 Números adimensionales para la simulación en coordenadas cilíndricas

Primera parte		Segunda parte	
$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	4	$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	3.56
ℓ (m)	7.5×10^{-3}	ℓ (m)	4.05×10^{-3}
$T_{\beta 0}$ (K)	300.15	$T_{\beta 0}$ (K)	302.63
Bi	2.023	Bi	1.096
Bi_m	1.36×10^{-1}	Bi_m	74.125
Lu	1.04×10^{-2}	Lu	1.04×10^{-2}
Ko	-53.71	Ko	-53.71
Ga	-703.55	Ga	-8.96×10^{-2}
ϕ	706.79		

Los valores de los coeficientes de transferencia de masa y calor fueron:

Tabla 18 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de cilindros de papa

Solución	h (W/m ² .K)	k_c (m/s)	S^2
No lineal	60*	0.01*	0.0010
Lineal	50	0.01	

*Estadísticamente $p < 0.01$

Las gráficas 40 y 41 representan los perfiles de humedad y temperatura del secado de cilindros de papa blanca a 70 °C y se observa que las gráficas siguen el mismo comportamiento que en el secado de placas planas de papa.

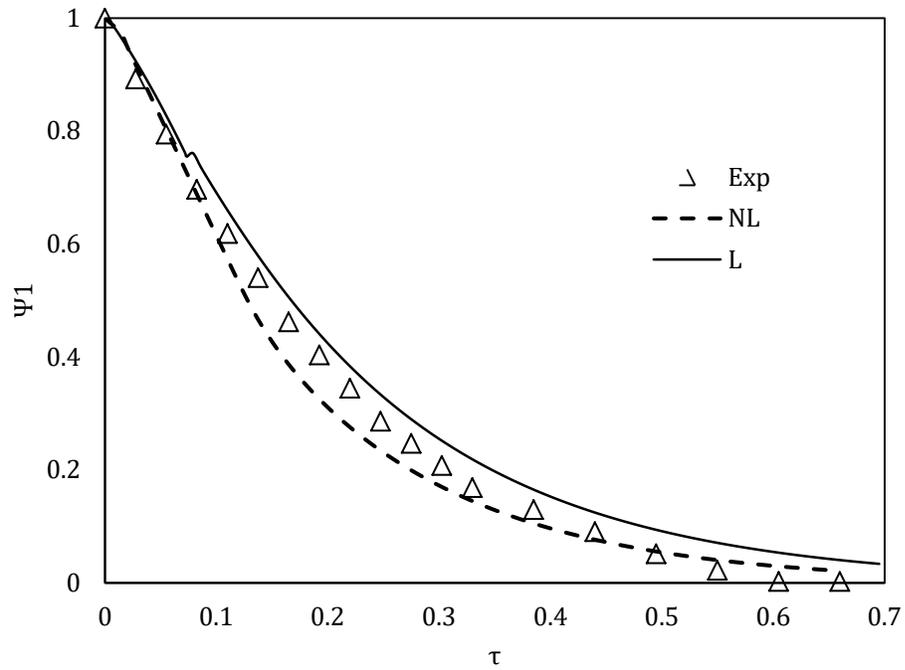


Figura 40 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas cilíndricas

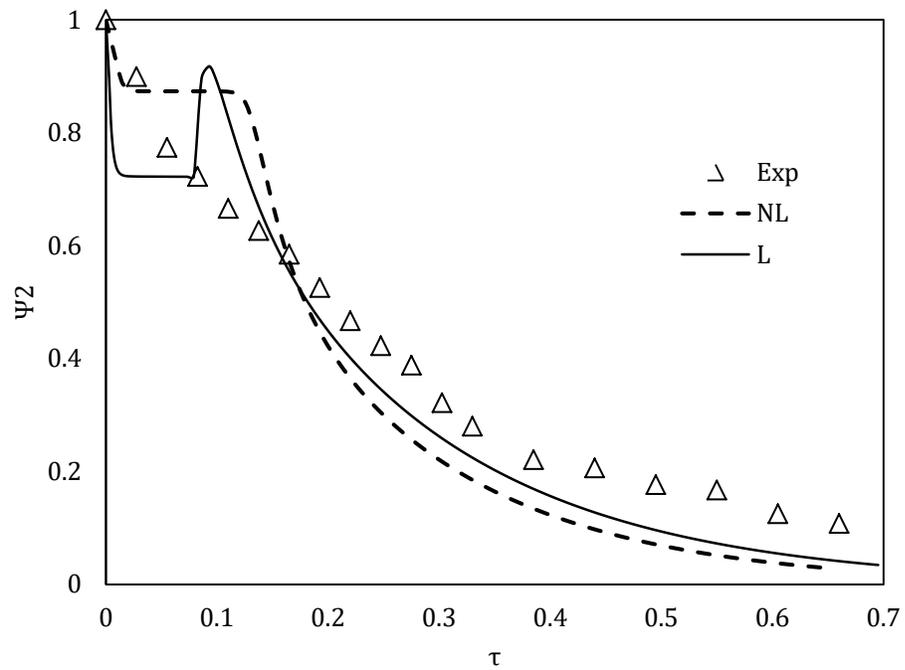


Figura 41 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas cilíndricas

7.5.3 Simulación en coordenadas esféricas

Los datos que se ocuparon para la simulación del secado de esferas de papa a 70 °C fueron:

Tabla 19 Parámetros para la simulación en coordenadas esféricas

Parámetro	Valor
$X_{\beta e}$	$8 \times 10^{-4} \text{ kg/kg}$
X_{γ}	$2.35 \times 10^{-2} \text{ kg/kg}$
D_{β}	$8.65 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$
$k_{\beta 0}$	0.296 W/mK
ρ_{γ}	1.03 kg/m^3
$\rho_{\beta 0}$	673.09 kg/m^3
ρ_{β}	1007.84 kg/m^3
λ_{wy}	$2.33 \times 10^{+6} \text{ J/kg}$
$Cp_{\beta 0}$	$4037.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
ρ	0.668

(Mujumdar, 1987) (Geankoplis, 1998) (Ratti & Crapiste, 1995)

Las constantes de equilibrio ($K_{eq0}, K_{eq10}, K_{eq20}$) que se ocuparon fueron las ecuaciones (71) y (72):

$$X_{\gamma i} = -1.65 + 5.56 \times 10^{-5} X_{\beta i} + 5.56 \times 10^{-3} T_i$$

$$X_{\gamma i} = -1.88 + 5.85 \times 10^{-1} X_{\beta i} + 5.56 \times 10^{-3} T_i$$

Los números adimensionales que se encontraron fueron:

Tabla 20 Números adimensionales para la simulación en coordenadas esféricas

Primera parte		Segunda parte	
$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	4	$X_{\beta 0}$ (kg/kg)	3.65
ℓ (m)	1.25×10^{-2}	ℓ (m)	8×10^{-3}
$T_{\beta 0}$ (K)	301.15	$T_{\beta 0}$ (K)	303.46
Bi	3.38	Bi	2.16
Bi_m	1.23×10^{-1}	Bi_m	828.12
Lu	1.19×10^{-2}	Lu	1.19×10^{-2}
Ko	-54.99	Ko	-54.99
Ga	-1051.38	Ga	-9.97×10^{-2}
ϕ	1053.03		

Los valores de los coeficientes de transferencia de masa y calor fueron:

Tabla 21 Coeficientes de transferencia de masa y energía del secado de cilindros de papa

Solución	h (W/m ² .K)	k_c (m/s)	S^2
No lineal	50*	0.005*	0.0097
Lineal	80	0.01	

*Estadísticamente $p < 0.01$

Las gráficas 42 y 43 representan los perfiles de humedad y temperatura del secado de esferas de papa blanca a 70 °C y se observa que las gráficas siguen el mismo comportamiento que en el secado de placas planas y en el secado de cilindros.

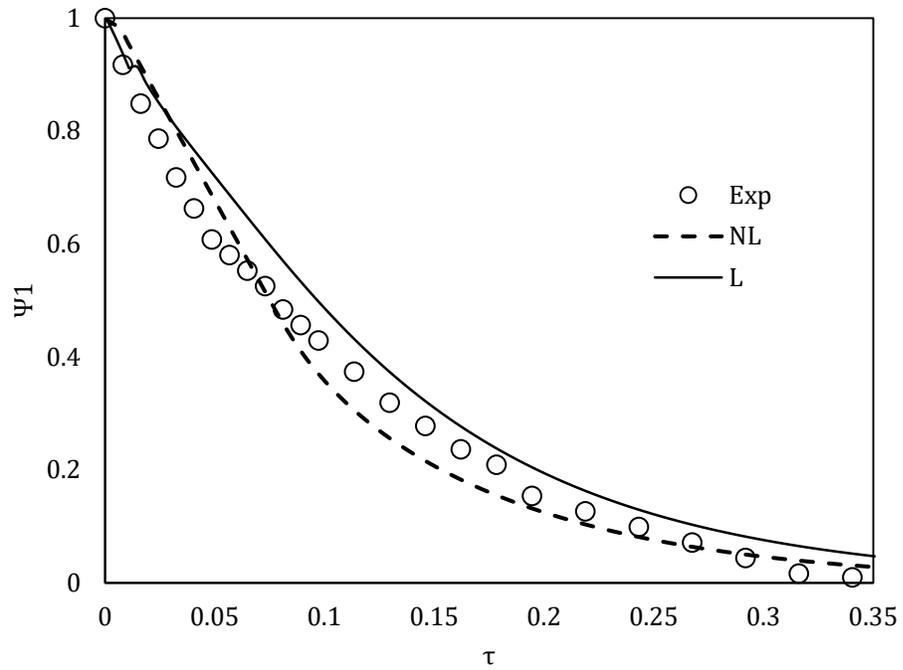


Figura 42 Perfil de humedad experimental, no lineal y lineal en coordenadas esféricas

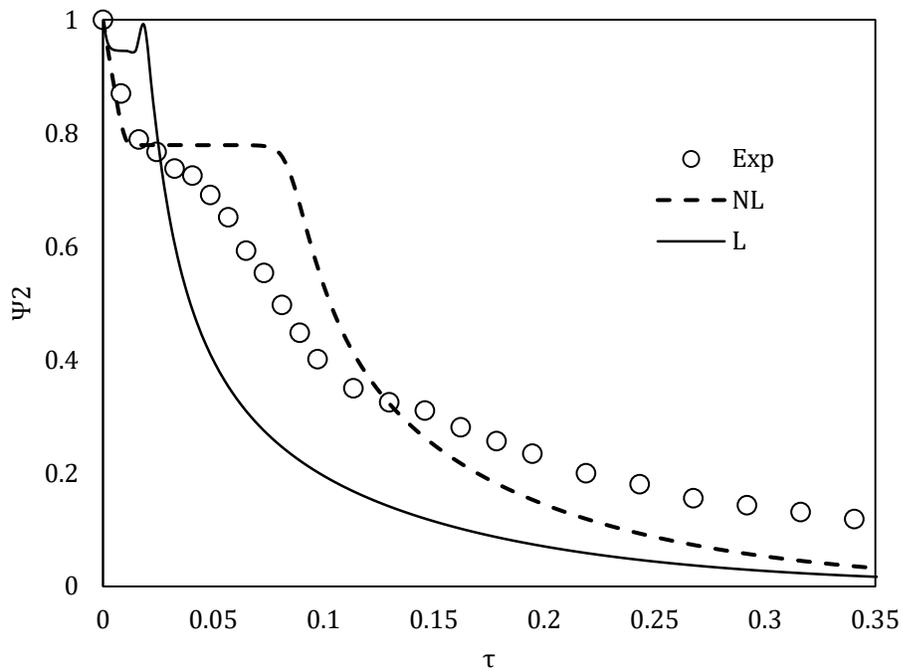


Figura 43 Perfil de temperatura experimental, no lineal y lineal en coordenadas esféricas

8. CONCLUSIONES

Con las curvas Ψ vs τ se pudo observar que la pérdida de humedad fue más rápido en geometría esférica, siguiendo con la geometría cilíndrica y por último la geometría rectangular, esto se debe por la relación superficie-volumen y se pudo apreciar mejor por los valores de λ_n para cada coordenada.

Con los datos topológicos se pudo determinar que la relación entre las soluciones para la transferencia de masa y energía en estado puro, está en relación con las funciones Bessel, es decir de $J_{-1/2}$ a $J_{1/2}$.

La relación de equilibrio lineal, usando dos ecuaciones lineales, representa de manera apropiada la conducta termodinámica de la humedad en la interface en el proceso de secado.

Se demostró que el modelo LGE puede ser utilizado para estimar los coeficientes de masa y energía a partir de curvas de secado.

El modelo LGE, usando dos ecuaciones lineales, representó de manera adecuada la conducta experimental para el perfil de humedad, sin embargo para el perfil de temperatura es necesario un estudio más profundo.

9. BIBLIOGRAFÍA

- Abahri, K., Belarbi, R., & Trabelsi, A. (2011). Contribution to analytical and numerical study of combined heat and moisture transfers in porous building materials. *Building and Environment*, 46, 1354 - 1360.
- Arrieche, L., Correa, R., & Sartori, D. (2009). Drying stresses and strain in a spherical food model. *Computer and Chemical Engineering*, 10, 1805 - 1813.
- Atkins, P., & De Paula, J. (2008). *Química Física* (8va ed.). Barcelona, Cataluña, España: Omega.
- Balaban, M., & Pigott, G. M. (1988). Mathematical Model of Simultaneous Heat and Mass Transfer in Food with Dimensional Changes and Variable Transport Parameters. *Journal of Food Science*, 53(3), 935 - 939.
- Betancourt Grajales, R. (2008). *Transferencia Molecular de Calor, Masa y/o Cantidad de Movimiento* (1ra. ed.). (A. Cuellar, Ed.) Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Bialobrzewski, I., Myhan, R., & Cydzik, R. (2005). Effective water diffusion coefficient in faba bean seeds during drying. Part 1. Determination of values. *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities*, 8(2).
- Carvalho Lago, C., Liendo-Cárdenas, M., & Zapata Noreña, C. P. (2013). Thermodynamic sorption properties of potato and sweet potato. *Food and Bioproducts Processing*, 91, 389 - 395.
- Chang, W. J., & Weng, C. I. (2000). An analytical solution to coupled heat and moisture diffusion transfer in porous materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43, 3621 - 3632.
- Córdova-Quiroz, A. V., Ruiz-Cabrera, M. A., & García-Alvarado, M. A. (1996). Analytical solution of mass transfer equation with interfacial resistance in food drying. *Drying Technology*, 14(7&8), 1815 - 1826.

- Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion* (2nd ed.). Bristol, England, Great Britain: Oxford University Press.
- Crapiste, G. H. (2000). Simulation of drying rates and quality changes during the dehydration of foodstuffs. En J. E. Lozano, C. Añón, E. Parada-Arias, G. V. Barbosa-Cánovas, & M. M. Góngora-Nieto (Ed.), *Trends in Food Engineering* (1st ed., págs. 135 - 148). Lancaster, Pennsylvania, U.S.A.: Technomic Publishing Company, Inc.
- Dissa, A. O., Desmorieux, H., Bathiebo, J., & Koulidiati, J. (10 de March de 2008). Convective drying characteristics of Amelie mango (*Mangifera Indica* L. cv. 'Amelie') with correction for shrinkage. *Journal of Food Engineering*, 88, 429 - 437.
- García del Valle, J., & Sierra Pallares, J. (2018). Analytical solution for the coupled heat and mass transfer formulation of one-dimensional drying kinetics. *Journal of Food Engineering*, 230, 99 - 113.
- García-Alvarado, M. A., De la Cruz-Medina, J., Waliszewski-Kubiak, K. N., & Salgado.Cervantes, M. A. (1995). Statistical analysis of the GAB and Henderson equations for sorption isotherms of Foods. *Drying Technology*, 13(8&9), 2141 - 2152.
- García-Alvarado, M. Á., Pacheco-Aguirre, F. M., & Ruiz-López, I. I. (June de 2014). Analytical solution of simultaneous heat and mass transfer equations during food drying. *Journal of Food Engineering*, 142, 39 - 45.
- Geankoplis, C. J. (1998). *Proceso de transporte y operaciones unitarias* (3ra. ed.). México: Compañía Editorial Continental, S.A de C.V.
- Hernández-Díaz, W. N., Ruiz-López, I. I., Salgado-Cervantes, M. A., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2008). Modeling heat and mass transfer during drying of green coffee beans using prolate spheroidal geometry. *Journal of Food Engineering*, 86(1), 1 - 9.

- Iglesias, H. A., & Chirife, J. (1976). Isoteric heats of water vapor sorption on dehydrated foods. Part I. Analysis of the differential heat curves. *Lebensmittel Wissenschaft & Technologie*, 9, 116 - 122.
- Karel, M., & Lund, D. B. (2003). *Physical principles of food preservation* (2nd ed.). New York, U.S.A.: Marcel Dekker, Inc.
- Liu, J. Y., & Cheng, S. (July de 1991). Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(7), 1747 - 1754.
- Liu, X., Chen, J., & Hou, H. (May de 2012). Theoretical analysis of water diffusivity estimated by Crank's equation. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 55, 24 - 28.
- Loulou, T., Adhikeri, B., & Leomte, D. (20 de November de 2006). Estimation of concentration-dependent diffusion coefficient in drying process from the space-averaged concentration versus time with experimental data. *Chemical Engineering Science*, 61(22), 7185 - 7198.
- Maskan, M., & Fahrettin, G. (September de 1998). Sorption isotherms and drying characteristics of mulberry (*Morus alba*). *Jornal of Food Engineering*, 37(4), 437 - 449.
- Mikhailov, M. D. (Febreary de 1973). General solutions of the coupled diffusion equations. *International Journal of Engineering Science*, 11(2), 235 - 241.
- Mujumdar, A. S. (1987). *Handbook of Industrial Drying*. (M. Dekker, Ed.) Inc. New York and Basel.
- Mulet, A. (1994). Drying Modelling and Water Ditisivity in Carrots and Potatoes. *Journal of Food Engineering*, 22, 329 - 348.
- Núñez-Gómez, K. S. (Diciembre de 2015). Propiedades matemáticas de las ecuaciones de transferencia de masa y energía. *Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Bioquímica*, 57. (M. Á. García-Alvarado, & G. d. Rodríguez-Jimenes, Edits.) Veracruz, Veracruz, México: Instituto Tecnológico de Veracruz.

- Pandey, R. N., Pandey, S. K., & Ribeiro, J. W. (October de 2000). Complete and satisfactory solutions of Luikov equations of heat and moisture transport in a spherical capillary - Porous body. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 27(7), 975 - 984.
- Pandey, R. N., Srivastava, S. K., & Mikhailov, M. D. (1999). Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus] a new capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42, 2649 - 2660.
- Páramo, D., García-Alamilla, P., Salgado-Cervantes, M. A., Robles-Olvera, V. J., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (9 de March de 2010). Mass transfer of water and volatile fatty acids in cocoa beans during drying. *Journal of Food Engineering*, 99, 276 - 283.
- Pecenko, R., Challamel, N., Colinart, T., & Picandet, V. (2018). (Semi-)analytical solution of Luikov equations for time-periodic boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 124, 533 - 542.
- Puyate, Y. T., & Lawrence, C. J. (6 de November de 2006). Sherwood models for the falling rate period: A missing link at moderate drying intensity. *Chemical Engineering Science*, 61(21), 7177 - 7183.
- Ratti, C., & Crapiste, G. H. (1995). Determination of Heat Transfer Coefficients during drying of foodstuffs. *Journal of Food Process Engineering*, 18, 41 - 53.
- Rizvi, S. S. (2005). Thermodynamic Properties of Foods in Dehydration. En M. A. Rao, S. S. Rizvi, & A. K. Datta, *Engineering Properties of Foods* (3rd Edition ed., pág. 768). Boca Ratón, Florida, U.S.A.: CRC Press.
- Roman, A. D., Herman-y-Lara, E., Salgado-Cervantes, M. A., & García-Alvarado, M. A. (2004). Food Sorption Isotherms Prediction Using the Ross Equation. *Drying Technology*, 22(8), 1829 - 1843.

- Ruiz-López, I. I., & García-Alvarado, M. Á. (2007). Analytical solution for food-drying kinetics considering shrinkage and variable diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 79, 208 - 216.
- Ruiz-López, I. I., Córdova, A. V., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2004). Moisture and temperature evolution during food drying: effect of variable properties. *Journal of Food Engineering*, 63, 117 - 124.
- Ruiz-López, I. I., Ruiz-Espinosa, H., Luna-Guevara, M. I., & García-Alvarado, M. A. (2011). Modeling and simulation of heat and mass transfer during drying of solids with hemispherical shell geometry. *Computers and Chemical Engineering*, 35(2), 191 - 199.
- Sherwood, T. K. (January de 1929). The Drying of Solids-I. *Industrial and Engineering Chemistry*, 21(1), 12 - 16.
- Srikiatden, J., & Roberts, J. S. (4 de July de 2008). Predicting moisture profiles in potato and carrot during convective hot air drying using isothermally measured effective diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 84(4), 516 - 525.
- Torrez Irigoyen, R. M., & Giner, S. A. (May de 2014). Drying-toasting kinetics of presoaked soybean in fluidised bed. Experimental study and mathematical modelling with analytical solutions. *Journal of Food Engineering*, 128, 31 - 39.
- Tripathi, G., Shunkla, K. N., & Pandey, R. N. (May de 1973). An integral equation approach to heat and mass transfer problem in an infinite cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16(5), 985 - 990.
- Trujillo, F. J., Wiangkaew, C., & Tuan Pham, Q. (3 de November de 2007). Drying modeling and water diffusivity in beef meat. *Journal of Food Engineering*, 78, 74 - 85.
- Wang, N., & Brennan, J. G. (1995). A Mathematical Model of Simultaneous Heat and Moisture Transfer during Drying of Potato. *Journal of Food Engineering*, 47 - 60.

10. ANEXO A