

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

# **“Modelado y Control de Sistemas Multi-agente Heterogéneos Basado en Distancia y Ángulo entre los Agentes”**

POR

**Ing. Oscar Adrián González Medina**

## **TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Jaime González Sierra**

**CODIRECTOR DE TESIS  
Dr. Alejandro Enrique Dzul López**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (01)-TMCIE-2019**  
Torreón, Coahuila. México,  
Febrero 2019





**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MEXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **28/Enero/2019**  
Dependencia: DEPI/CPCIE  
Oficio: DEPI/CPCIE/07/2019  
Asunto: Autorización de impresión  
de tesis.

**C. Oscar Adrián González Medina**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Control de sistemas Multi-agente Heterogéneos basado en Distancia y Angulo entre los Agentes"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (01)-TMCIE-2019**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**  
*EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN*

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación**  
**del Instituto Tecnológico de la Laguna**



SECRETARIA DE  
EDUCACIÓN PUBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO  
de la laguna  
División de Estudios de Posgrado  
e Investigación



Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. México  
Tel. 01 (871) 7051313 e-mail: [webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx](mailto:webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx)



**SEP**

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., **18/Enero/2019**

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Control de sistemas Multi-agente Heterogéneos basado en Distancia y Angulo entre los Agentes"**

Desarrollado por el **C. Oscar Adrián González Medina**, con número de control **M1713010** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

*EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN*

**Dr. Jaime González Sierra**  
**Asesor/Director de Tesis**

**Dr. Alejandro E. Dzúl López**  
**Coasesor/Codirector**

**Dr. Eduardo Aranda Bricaire**  
**Comité Tutorial**

**Dr. Héctor Ríos Barajas**  
**Comité Tutorial**



Bvld. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. México

Tel. 01 (871) 7061313 e-mail: [webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx](mailto:webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx)



# Agradecimientos

A mis padres, Roberto González Domínguez y Lorena Medina González, por inculcarme el valor del estudio y apoyarme en todas las decisiones que tomo.

A mis hermanos, Roberto González Medina y Karla González Medina, por mostrarme que el rendirme no es una opción y que hay que pelear por todo lo que se desea.

A mis compañeros Amaury Jamir Meza Pérez, Omar Rodolfo Martínez de la Cruz, José Roberto Franco Jaramillo, Jorge Alberto Villalobos Chin, Rubén Hernández, Luis Ricardo Ovalle Gamboa, José Manuel Busquets González, Eduardo de la Cruz, por brindarme su amistad y permitirme pasar a su lado grandes momentos.

A mis asesores Dr. Jaime González Sierra y Dr. Alejandro Dzul López, por tener la paciencia y la dedicación necesaria para realizar este trabajo. Además se agradece al comité tutorial conformado por el Dr. Héctor Ríos Barajas y Dr. Eduardo Aranda Bricaire.

A la Universidad Iberoamericana, Campus Ciudad de México, el Dr. Eduardo Gamaliel Hernández Martínez y Pablo Paniagua Contro, por recibirme y apoyarme en todo lo necesario durante la estancia realizada.

Al Instituto Tecnológico de La Laguna y CONACyT-SENER 817174 por el apoyo económico para poder realizar los estudios de maestría.



# Resumen

Este trabajo está enfocado en el desarrollo de un modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre los agentes, de un sistema multi-agente heterogéneo, compuesto por robots móviles tipo diferencial, omnidireccional y vehículos aéreos no tripulados tipo cuadri-rotor. Dicho modelo matemático se obtiene a partir del modelo cinemático de ambos robots móviles y los estados de velocidad  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  del vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor. Posteriormente, se diseñan estrategias de control utilizando técnicas de linealización por retroalimentación de los estados para lograr el control de formación de los sistemas conformados por los robots terrestres; mientras que para el sistema conformado por un robot terrestre y un vehículo aéreo no tripulado, se diseña un controlador mediante la técnica de backstepping con el objetivo de lograr la formación deseada. Ambos esquemas de control de formación usan solamente información local de los sensores en un esquema líder-seguidor. En ese sentido, se asume que cada robot está equipado con sensores que miden la distancia y orientación de un robot con respecto al otro (por ejemplo: cámaras de video, sonares, láser, giroscopio, etc); además, se considera que el movimiento del líder ya está planeado. Finalmente, para validar la estrategia de control propuesta, se presentan simulaciones numéricas y resultados experimentales.





# Abstract

This work deals with the development of a mathematical model based on distance and angle between agents for a multi-agent heterogeneous system, which is composed by differential-drive mobile robots, omnidirectional mobile robots and unmanned aerial vehicles (Quad-Rotor). The mathematical model is obtained from the kinematics models of the two mobile robots and, in the case of the Quad-Rotor, it is used the velocity states  $\dot{x}$  and  $\dot{y}$ . Subsequently, it is designed the control strategies to reach a leader-follower formation control. In the case of two terrestrial mobile robots it is used a feedback linearization whilst for a terrestrial mobile robot and a Quad-Rotor it is used the backstepping technique. Both formation control strategies only use local sensor data, in this way, it is assumed that each robot is equipped with sensors which measure the distance and angle of the other robot with respect to him (e.g. video cameras, sonars, lasers, gyroscopes, etc.). It is also assumed that the leader motion is already planned. Finally, the proposed formation control strategies are validated by numerical simulations and experimental results.



# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Robots Móviles . . . . .	1
1.1.1. Aplicaciones . . . . .	2
1.2. Sistemas multi-agente . . . . .	3
1.2.1. Trabajo relacionado . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Modelos cinemáticos . . . . .	7
2.1.1. Modelo dinámico del cuadri-rotor . . . . .	8
2.2. Ecuación de movimiento de cuerpos rígidos . . . . .	9
2.3. Sistema 1-tráiler estándar . . . . .	11
2.4. Omni-tráiler . . . . .	12
2.5. Algoritmo de extensión dinámica . . . . .	13
<b>3. Modelado y control</b>	<b>15</b>
3.1. Modelo y control referenciado al agente líder . . . . .	15
3.2. Modelo y control referenciado al agente seguidor . . . . .	25
3.2.1. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{O}$ . . . . .	26
3.2.2. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{O}$ . . . . .	28
3.2.3. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{D}$ . . . . .	28
3.2.4. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ . . . . .	29
3.3. Comportamiento de cuerpos rígidos . . . . .	30
3.4. Esquema líder seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$ . . . . .	32
<b>4. Resultados experimentales y simulaciones numéricas</b>	<b>37</b>
4.1. Plataforma experimental . . . . .	37
4.2. Resultados experimentales . . . . .	38
4.2.1. Modelo referenciado al agente líder . . . . .	38
4.2.2. Esquema líder seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{O}$ . . . . .	39
4.2.3. Esquema líder seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{O}$ . . . . .	41
4.2.4. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{D}$ . . . . .	43
4.2.5. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ . . . . .	45
4.3. Simulaciones numéricas . . . . .	49
4.3.1. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$ . . . . .	49

---

5. Conclusiones y trabajo futuro	53
A. Producción académica	55
Bibliografía	56

# Lista de figuras

2.1. Esquema del robot móvil terrestre tipo diferencial. . . . .	8
2.2. Esquema del robot móvil terrestre tipo omnidireccional. . . . .	9
2.3. Rueda tipo sueca. . . . .	9
2.4. Esquema cuadri-rotor . . . . .	10
2.5. Diagrama esquemático de un cuerpo rígido. . . . .	10
2.6. Diagrama esquemático de un sistema 1-tráiler estándar. . . . .	11
2.7. Diagrama esquemático de un omni-tráiler. . . . .	13
3.1. Esquema líder-seguidor. . . . .	16
3.2. Esquema líder-seguidor. . . . .	25
3.3. Esquema Líder-seguidor con cuadri-rotor como seguidor . . . . .	32
4.1. Esquema genérico del funcionamiento del sistema. . . . .	37
4.2. Robots tipo unicycle y tipo omnidireccional. . . . .	38
4.3. Cámara <i>Bonita</i> ®. . . . .	38
4.4. Trayectoria en el plano. . . . .	40
4.5. Errores de distancia y ángulo. . . . .	40
4.6. Entradas de control. . . . .	41
4.7. Trayectoria en el plano. . . . .	42
4.8. Errores de distancia y ángulo. . . . .	42
4.9. Entradas de control. . . . .	43
4.10. Trayectoria en el plano. . . . .	44
4.11. Errores de distancia y ángulo. . . . .	44
4.12. Entradas de control. . . . .	45
4.13. Trayectoria en el plano. . . . .	46
4.14. Errores de distancia y ángulo. . . . .	46
4.15. Entradas de control. . . . .	47
4.16. Trayectoria en el plano. . . . .	47
4.17. Errores de distancia y ángulo. . . . .	48
4.18. Entradas de control. . . . .	48
4.19. Movimiento de ambos agentes en el plano. . . . .	50
4.20. Distancia y ángulo de formación. . . . .	51
4.21. Ángulos de orientación del agente líder y agente seguidor. . . . .	51
4.22. Altura del <i>Quad-Rotor</i> . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Robots Móviles

Un robot móvil es un dispositivo autónomo capaz de desplazarse a través de su área de trabajo, esto lo hace gracias a la combinación de varios componentes físicos y computacionales, como lo son el sistema de locomoción, el sistema de sensado y el sistema de comunicación [1], [2].

Debido a que el presente trabajo de tesis es orientado hacia robots móviles terrestres con ruedas y robots aéreos de ala rotativa, se profundizará en el tema de la locomoción de los robots móviles, de esta manera el tema de sensores y comunicación serán tratados de manera superficial.

La locomoción es el mecanismo mediante el cual un robot móvil puede trasladarse en su espacio de trabajo, este mecanismo puede estudiarse desde el punto de vista dinámico, considerando las fuerzas que generan el movimiento, o cinemático, estudiando el movimiento del robot sin considerar las fuerzas que lo generan. Considerando el tipo de locomoción los robots móviles pueden clasificarse en cuatro categorías, las cuales son:

1. Robots móviles terrestres. Son aquellos robots capaz de viajar sobre alguna superficie sólida, los cuales se clasifican en:
  - Robots móviles terrestres accionados por ruedas.
    - Robot móvil terrestre accionado por ruedas.
    - Tipo diferencial. Cuenta con dos ruedas fijas alineadas sobre un mismo eje.
    - Tipo omnidireccional. Cuenta con ruedas suecas.
    - Tipo triciclo. Cuenta con dos ruedas alineadas en un mismo eje y una rueda direccional.
    - Tipo Ackerman. Cuenta con dos ruedas fijas sobre el mismo eje y dos ruedas direccionables.
  - Robot móvil terrestre accionado por orugas.
  - Robot móvil terrestre accionado por piernas.
    - Bípedo.
    - Hexápodo.
2. Robots móviles acuáticos. Son aquellos robots que pueden operar en medios acuáticos, pudiendo ser impulsado tanto por hélices como por turbinas acuáticas.

- Submarinos, cuando tienen la capacidad de operar bajo la superficie.
  - Barcos, capaz de actuar sobre la superficie.
3. Robots móviles aéreos. Son aquellos robots que operan en el aire imitando aeronaves existentes.
- Robots aéreos de ala fija.
  - Robots aéreos de ala rotativa.
    - Helicópteros coaxiales.
    - Cuadri-rotores.
    - Hexa-rotores.
4. Robots móviles espaciales. Están conformados por robots diseñados específicamente para actuar en ambientes de microgravedad.

Por otra parte, el sistema de sensado permite conocer, a través de ciertos dispositivos, tanto la orientación como la localización del robot móvil dentro de su espacio de trabajo. Los sensores comúnmente más utilizados son

- Sensores de contacto.
- Sensores inerciales.
- Sensores ultrasónicos e infrarrojos.
- Sonares, radares y laser.
- GPS.
- Cámaras.

### 1.1.1. Aplicaciones

Debido a la ventaja que tienen los robots móviles de desplazarse en sus entorno de trabajo, les permite ser aptos para una variedad de tareas las cuales podrían representar un riesgo para el ser humano, tales como:

- Robots repartidores.
- Robots para vigilancia e inspección.
- Robots mineros.
- Robots espaciales (manutención de la estación espacial internacional).
- Robots para reconocimiento militar.
- Robots anti bombas.
- Robots para la agricultura y forestales.
- Robots de soporte, domésticos y de entretenimiento.

Como es de esperarse si se combinan y coordinan las acciones de control de varios robots móviles es posible realizar tareas que un solo robot no sería capaz de realizar, dando cabida a los sistemas multi-agente, los cuales son descritos en la siguiente Sección.

## 1.2. Sistemas multi-agente

Un sistema multi-agente es un conjunto de entes (insectos, software, personas, robots móviles, manipuladores, etc.) que trabajan de manera cooperativa para lograr una tarea en conjunto. Dichos sistemas pueden clasificarse de acuerdo al tipo de entes que lo conforman, siendo homogéneo cuando se trata de un sistema conformado por entes del mismo tipo (por ejemplo: un sistema conformado por dos o mas robots móviles terrestres con ruedas tipo diferencial, un sistema conformado por dos o mas vehículos aéreos no tripulados tipo cuadri-rotor, sistema conformado por dos o mas manipuladores seriales, etc.) y heterogéneo cuando se trata de entes de distinto tipo (por ejemplo: un sistema conformado por dos robots móviles terrestres con ruedas uno tipo diferencial y uno tipo omnidireccional, un sistema conformado por un robot móvil terrestre con ruedas tipo diferencial y un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor, etc.), como se muestra en [20]. La coordinación de múltiples robots móviles toma importancia en algunas áreas, como lo son, aplicaciones en la industria, vigilancia, servicios en hogares, logística, entre otros [44], para esto el problema clásico de converger a un punto o seguir una trayectoria para un solo robot móvil es extendido al caso de comportamientos colectivos, como lo son, convergencia a parámetros de formación, seguimiento de trayectorias en formación, dispersión, confinamiento, estrategias para evitar la colisión entre robots, etc. Para abordar este problema existen diferentes enfoques, tanto para el modelado del sistema como para el control del mismo. De acuerdo a [16], existen dos esquemas en los que están basados los sistemas multi-agente para tener un comportamiento cooperativo: los esquemas basados en comportamiento y los esquemas basados en modelos. Los esquemas basados en comportamiento imitan la conducta y organización colectiva de seres biológicos (conocidos en la literatura como swarms), tales como los bancos de peces, las parvadas de aves, las colonias de hormigas, etc. [12], [13], [15], [17], [18], [41]. Por otra parte, en los esquemas basados en modelos, la cinemática o dinámica de cada robot móvil, y las interacciones entre los robots, son modeladas matemáticamente, donde el comportamiento de cada robot móvil surge de las técnicas de teoría de control, física, inteligencia artificial, etc. Algunas técnicas de análisis utilizadas en este esquema son: campos potenciales artificiales, métodos de Lyapunov, análisis de topología/geometría, modelos de ecuaciones diferenciales, teoría de grafos, predicción del movimiento de cohesión, frecuencia de colisión, fuerzas de atracción y repulsión de partículas, etc. [15]. Sin embargo, para la implementación de la mayoría de estas técnicas, se requiere de un sistema que permita conocer las posiciones de cada robot dentro de un marco de referencia inercial.

El control de formación se puede dividir en 2 grupos: enfoque basado en posición y enfoque basado en distancia. La principal diferencia entre ambos enfoques consiste en el tipo de marco de referencia (global o local), que se esté utilizando. En este sentido, los investigadores han prestado más atención al enfoque en distancia debido a su estructura descentralizada, esto significa que, los agentes no necesitan compartir un sistema de coordenadas común. Por lo tanto, el principal objetivo para cada agente consiste en controlar su distancia y orientación relativa con respecto a los otros, utilizando información obtenida a través de sensores locales. Sin embargo, no compartir un mismo sistema de coordenadas, implica que el control de formación a través del enfoque basado en distancia y ángulo sea desafiante.

Este trabajo considera un sistema multi-agente heterogéneo, conformado por robots móviles terrestres tipo omnidireccional y diferencial, bajo el esquema líder-seguidor, y el movimiento de éstos se da en un plano horizontal  $X - Y$ . Además, se considera un sistema multi-agente heterogéneo conformado por un robot móvil terrestre tipo omnidireccional y un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor, bajo el esquema líder-seguidor. En ambos casos, el agente seguidor debe mantenerse a una cierta distancia y orientación con respecto del líder.



### 1.2.1. Trabajo relacionado

Uno de los primeros trabajos donde se aborda el enfoque de modelado y control basado en distancia y ángulo entre los agentes, se presenta en [3], donde se diseña una estrategia de control para formar a un grupo de robots utilizando la distancia y el ángulo de alineamiento con respecto al líder. De manera similar, en [4], los autores proponen una estrategia de control para lograr la formación de un grupo de robots no holónomos y, además, evadir obstáculos cambiando la formación. Por otro lado en [8], [42], [50], se presentan leyes de control diseñadas a partir de la realimentación de la posición global de cada uno de los robots o la medida relativa de la distancia y ángulo de acuerdo a sensores instalados en el ambiente de trabajo o montados en los robots. En [11] se presenta una ley de control, obtenida a partir de la dinámica de la distancia, la cual logra que los errores de formación converjan exponencialmente a cero. Por su parte, [10] presenta una ley de control adaptable, basada en distancia, para mantener la formación de un sistema líder-seguidor, donde los vehículos utilizados son aviones, cuya velocidad es constante y está definida por la velocidad del líder. Por otro lado, en [9] utilizan la dinámica de los robots no holónomos para proponer una ley de control, obtenida a través del gradiente de una función que depende de la distancia y el ángulo, con el objetivo de lograr una formación deseada. Mientras que en [6] proponen un control de formación basado en distancia, diseñado mediante el método de análisis de Lyapunov, para garantizar la evasión de colisiones y el seguimiento de la trayectoria por el grupo de agentes, siendo necesario en estos últimos un sistema de coordenadas global. Bajo esta misma metodología de modelado y control, en [5] se propone un control por modos deslizantes, para mantener la formación durante el vuelo de un conjunto de UAVs (vehículos aéreos no tripulados, del inglés *Unmanned Aerial Vehicles*) del tipo cuadri-rotor, en movimientos planares X-Y, mientras que en [7] se propone una ley de control por backstepping para resolver el problema de formación líder-seguidor de un UAV tipo cuadri-rotor siguiendo como líder a un robot móvil tipo diferencial. Por otro lado, en [32] se enfoca en el desarrollo de una ley de control basada en distancia que permita la convergencia global a la formación deseada mediante el uso de grafos de formación, por su parte [47] logra este fin mediante el uso de controladores PI, mientras que [23] utiliza formaciones que varían con el tiempo, se tiene además en [22] el uso de un área de trabajo con restricciones y en [24] se logra una formación triangular. En [49] se utiliza un controlador por modelo predictivo basado en la optimización de la dinámica neuronal.

Por otra parte, ejemplos de la implementación de robots móviles terrestres con ruedas se pueden encontrar en [40], para el caso del transporte, en [26] se presenta un convoy, integrado por tractores, utilizado en agricultura para transporte de cargas. Finalmente, en [34] se presenta el transporte de cargas en un ambiente industrial utilizando vehículos aéreos no tripulados.

Por otro lado, el problema de seguimiento de trayectorias en formación requiere la convergencia de los robots a un patrón de formación y el seguimiento de una trayectoria deseada, simultáneamente. El caso de estudio básico de este problema es el caso de dos robots, donde el robot líder sigue la trayectoria deseada, mientras que el robot seguidor mantiene una distancia y un ángulo relativo respecto al agente líder. En una manera descentralizada, la estrategia de control depende de medidas locales de la distancia y ángulo de orientación. En [48] la posición deseada del agente seguidor es dada por un robot móvil terrestre tipo unicycle virtual al cual debe converger el agente físico. La estimación de un líder en movimiento es presentado en [10]. El comportamiento líder-seguidor entre dos robots es extendido en trabajos como [28], al caso de múltiples robots con el fin de lograr configuraciones ramificadas. Cabe destacar que estos trabajos previos analizan leyes de control con las cuales se tiene convergencia local.

Con respecto al trabajo experimental, en [29] utilizan robot móviles terrestres tipo diferencial, mientras que la calibración y perspectiva de visión de las cámaras a bordo son estudiadas en [33], y la estimación de la distancia utilizando técnicas de visión es presentado en [31]. En [43] se presentan leyes de control que permiten mantener al líder dentro del campo de visión de la cámara, aún cuando se encuentran presentes obstáculos. Por otro lado, en [29] se presenta un estimador para aeronaves utilizando sensores de búsqueda. Por último, en [38] se presenta la reasignación del agente líder

basado en mediciones difusas.

La extensión del esquema líder-seguidor al caso del transporte colaborativo de objetos o el seguimiento de trayectorias, se imponen algunas estructuras entre los robots, en [36] se muestra un primer caso de estas estructuras, como lo es la generación de trayectorias virtuales para la navegación del seguidor relativa al líder. Una segunda estrategia, presentada en [46], es la creación de robots virtuales ubicados en los centros de los círculos utilizados para generar formaciones poligonales para los seguidores. En [37], esta idea es extendida para subgrupos de robots formados en columnas con una organización jerárquica. El tercer caso de este concepto es la definición de estructuras virtuales, donde la posición deseada de los robots es definida en una estructura que se mueve a lo largo de una trayectoria. Algunos ejemplos se presentan en [51], donde un operador humano mueve la estructura virtual, en [30] para el caso de vehículos inteligentes, en [45] utilizando modelos dinámicos de la estructura virtual y en [25] utilizando marcos rígidos. En [27] se presenta una estructura virtual especial conocida como formación  $V$ , donde el líder es colocado en el nodo raíz y los seguidores son colocados en líneas cuyo ángulo es medido respecto al nodo raíz o líder. Por último, el concepto de imponer una estructura móvil es referido al espacio de cluster en [35] y [39], donde se toma en cuenta la dinámica del objeto que se transporta y se especifica la posición de los robots bajo este objeto. Sin embargo, tanto en los trabajos de [3] y [4] como en el trabajo de [8], controlan los vehículos terrestres tomando como punto de referencia el centro del eje de las ruedas, lo cual implica que no está definido si el vehículo va de frente o en reversa; mientras que en el de trabajo de [10] y [11] se consideran agentes puntuales, por lo tanto no se tiene definición de la orientación. Por último en [6] y [9], se considera un sistema de coordenadas global, necesitando entonces el conocimiento de las coordenadas de todos los agentes, teniendo un sistema centralizado y en un ambiente totalmente controlado.

### 1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es:

Desarrollar un modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre los agentes, para un sistema multi-agente heterogéneo, conformado por robots móviles aéreos y terrestres (accionados por ruedas), utilizando el esquema líder-seguidor. Posteriormente, diseñar, analizar y validar algoritmos de control que permitan resolver el problema de formación.

Para lograr el objetivo general, se establecen los siguientes objetivos específicos:

1. Obtener el modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre los agentes, para el sistema multi-agente, utilizando como referencia el marco inercial del robot líder.
2. Obtener el modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre los agentes, para el sistema multi-agente, utilizando como referencia un marco global .
3. Diseñar estrategias de control que permitan que el agente seguidor se forme a una distancia y ángulo deseados con respecto al líder.
4. Análisis teórico de convergencia de la distancia y ángulo de formación entre los agentes a los valores deseados.
5. Realizar simulaciones numéricas para validar las estrategias de control.
6. Realizar pruebas experimentales.

## 1.4. Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. El Capítulo 2 presenta los modelos matemáticos de los robots móviles que serán utilizados, la ecuación de movimiento de cuerpos rígidos, el modelo cinemático de un sistema 1-tráiler estándar y un nuevo sistema al que denominamos omni-tráiler, así como el algoritmo de extensión dinámica. Dichos preliminares matemáticos serán de utilidad para establecer los resultados de este trabajo. El Capítulo 3 contiene las principales contribuciones. Este Capítulo está dedicado a desarrollar el modelo matemático de un sistema multi-agente conformado por robots móviles terrestres y aéreos, así como el diseño y validación de las estrategias de control para lograr que el agente seguidor se mantenga a una distancia y orientación con respecto al líder. En el Capítulo 4, se describe la plataforma experimental utilizada. Además, se presentan las simulaciones numéricas y los experimentos en tiempo real. Finalmente, algunas conclusiones y trabajo a futuro se presentan en el Capítulo 5.

## Capítulo 2

# Preliminares

En este Capítulo se hace un repaso de los modelos matemáticos de los robots móviles que se van a utilizar en este trabajo, la ecuación de movimiento de cuerpos rígidos, del modelo cinemático del 1-tráiler estándar, y se propone un modelo cinemático de una nueva estructura rígida compuesta por un robot móvil omnidireccional y un robot móvil diferencial. Finalmente, se presenta el algoritmo de extensión dinámica. Estos resultados preliminares nos permitirán enmarcar claramente las contribuciones de este trabajo.

### 2.1. Modelos cinemáticos

Los robots móviles que se encuentran en el Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna, y aquellos que se utilizaron en el Laboratorio de Análisis de Movimiento, del Departamento de Estudios de Ingeniería e Innovación, de la Universidad Iberoamericana, Campus Ciudad de México, utilizan motores de corriente directa para realizar el movimiento de las ruedas. Cada motor incluye un encoder de alta resolución. Esta información es usada por el microcontrolador interno para determinar la velocidad rotacional inmediata de cada rueda, requerida para realizar el movimiento deseado. Debido a que las ruedas están fabricadas de un caucho resistente, se considera que éstas no presentan deformaciones durante el movimiento del robot. Además, considerando que los robots se mueven sobre un plano horizontal y éste no pierde adherencia al terreno, entonces existe una relación directa entre el movimiento de rotación de las ruedas y el movimiento del robot. Debido a lo anterior, se decide utilizar el modelo cinemático de los robots para el modelado y el control. Un robot móvil terrestre tipo diferencial cuenta con dos ruedas unidas al mismo eje (Figura 2.1) y cuyo modelo cinemático está dado por [19]

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad (2.1a)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \quad (2.1b)$$

$$\dot{\theta} = w, \quad (2.1c)$$

donde  $[x \ y]^\top \in \mathbb{R}^2$  es la posición del punto medio del eje de las ruedas,  $\theta \in \mathbb{R}$  denota la orientación del vehículo, medida con respecto al eje horizontal  $X$ , y  $[v \ w]^\top \in \mathbb{R}^2$  son las entradas de control, correspondientes a la velocidad lineal y velocidad angular, respectivamente.

Por otra parte, un robot móvil terrestre tipo omnidireccional (Figura 2.2) es un robot que generalmente está equipado con ruedas suecas (Figura 2.3), mediante las cuales, a partir de algunos arreglos entre los giros de las mismas, permite al robot desplazarse de manera lateral sin cambiar la orientación del mismo. El modelo cinemático para este tipo de robots está dado por [52]

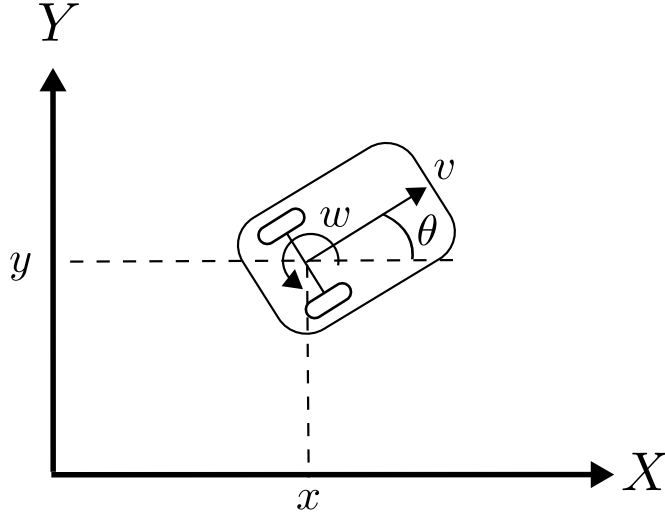


Figura 2.1: Esquema del robot móvil terrestre tipo diferencial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  $[x \ y]^\top \in \mathbb{R}^2$  es la posición del centro geométrico del robot,  $\theta \in \mathbb{R}$  es la orientación del vehículo, medida con respecto al eje horizontal  $X$ ;  $[v_x \ v_y \ w]^\top \in \mathbb{R}^3$  son las entradas de control, correspondientes a la velocidad lineal, velocidad lateral y velocidad angular, respectivamente, y  $R(\theta)$  es una matriz de rotación dada por

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.1. Modelo dinámico del cuadri-rotor

El modelo simplificado del vehículo aéreo no tripulado, tipo cuadri-rotor (Figura 2.4) está dado por [58]:

$$\ddot{x} = \frac{u_z}{m} (\text{sen } \phi \text{ sen } \psi + \cos \phi \cos \psi \text{ sen } \theta), \quad (2.3a)$$

$$\ddot{y} = \frac{u_z}{m} (-\text{sen } \phi \cos \psi + \cos \phi \text{ sen } \psi \text{ sen } \theta), \quad (2.3b)$$

$$\ddot{z} = \frac{u_z}{m} (\cos \phi \cos \theta - g), \quad (2.3c)$$

$$\ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (2.3d)$$

$$\ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (2.3e)$$

$$\ddot{\psi} = \tau_\psi, \quad (2.3f)$$

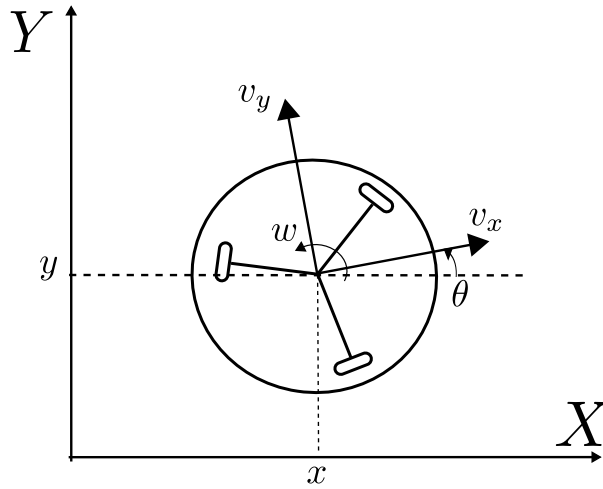


Figura 2.2: Esquema del robot móvil terrestre tipo omnidireccional.



Figura 2.3: Rueda tipo sueca.

donde  $[x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$  son las coordenadas del centro geométrico,  $z \in \mathbb{R}_+$  es la altura del mismo, mientras que  $\theta \in \mathbb{R}$  es el ángulo de cabeceo,  $\phi$  es al ángulo de alabeo y  $\psi \in \mathbb{R}$  es el ángulo de guiñada; por otro lado  $m$  es la masa del cuadri-rotor, siendo  $u_z, \tau_\theta, \tau_\phi, \tau_\psi \in \mathbb{R}$ , las entradas de control relacionadas al empuje total, el torque en cabeceo, el torque en alabeo y el torque en guiñada, respectivamente. Mientras que  $m$  y  $g$  son parámetros del modelo correspondientes a la masa y la constante de aceleración gravitacional, respectivamente.

## 2.2. Ecuación de movimiento de cuerpos rígidos

La relación de velocidades entre dos puntos de un cuerpo rígido (Figura 2.5) puede ser expresada por la ecuación de movimiento de cuerpos rígidos [53], dada por

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{12}, \quad (2.4)$$

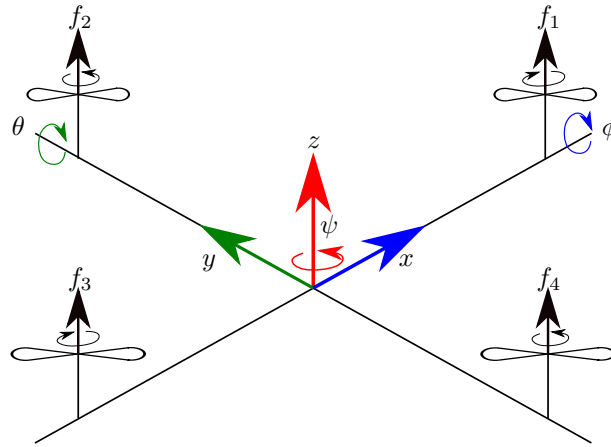


Figura 2.4: Esquema cuadri-rotor

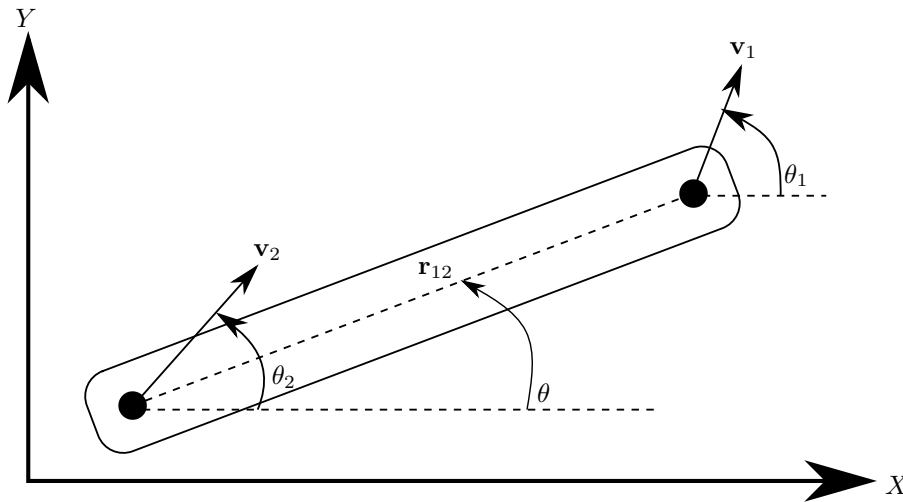


Figura 2.5: Diagrama esquemático de un cuerpo rígido.

donde  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son los vectores de velocidad del punto 1 y 2 respectivamente,  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de velocidad angular,  $\mathbf{r}_{12}$  es el vector de posición del punto 1 al punto 2, mientras que  $\ell$  es la distancia que separa el punto 1 y el punto 2,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las direcciones de las velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , respectivamente, medidos con respecto al eje horizontal y  $\theta$  es el ángulo de la recta que une a los puntos 1 y 2 con respecto al eje horizontal.

Considerando el movimiento del cuerpo rígido en un espacio de dos dimensiones y tomando  $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|$  y  $v_2 = \|\mathbf{v}_2\|$ , entonces, las velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= v_1(\hat{i} \cos \theta_1 + \hat{j} \sin \theta_1), \\ \mathbf{v}_2 &= v_2(\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{j} \sin \theta_2),\end{aligned}$$

mientras que la velocidad angular se expresa como  $\boldsymbol{\omega} = \hat{k} \dot{\theta}$ , donde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son vectores unitarios, siendo el vector de posición expresado por

$$\mathbf{r}_{12} = -\ell(\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta),$$

entonces la ecuación de movimiento de cuerpo rígido (2.4) se reescribe como

$$v_2(\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{j} \sin \theta_2) = v_1(\hat{i} \cos \theta_1 + \hat{j} \sin \theta_1) + \hat{k} \dot{\theta} \times (-\ell \hat{i} \cos \theta - \ell \hat{j} \sin \theta),$$

resolviendo el producto cruz se tiene que

$$v_2(\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{j} \sin \theta_2) = \hat{i} v_1 \cos \theta_1 + \hat{i} \dot{\theta} \ell \sin \theta + \hat{j} v_1 \sin \theta_1 - \hat{j} \dot{\theta} \ell \cos \theta,$$

el cual, al expresarlo en forma vectorial obtenemos

$$\begin{bmatrix} v_2 \cos \theta_2 \\ v_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cos \theta_1 \\ v_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \ell \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

a partir de la Figura 2.5 se tiene que  $\dot{x}_1 = v_1 \cos \theta_1$ ,  $\dot{y}_1 = v_1 \sin \theta_1$ ,  $\dot{x}_2 = v_2 \cos \theta_2$  y  $\dot{y}_2 = v_2 \sin \theta_2$ , entonces (2.5) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \ell \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

El resultado obtenido en (2.6) nos ayudará a validar algunos resultados presentados en el Capítulo 3 de este trabajo.

## 2.3. Sistema 1-tráiler estándar

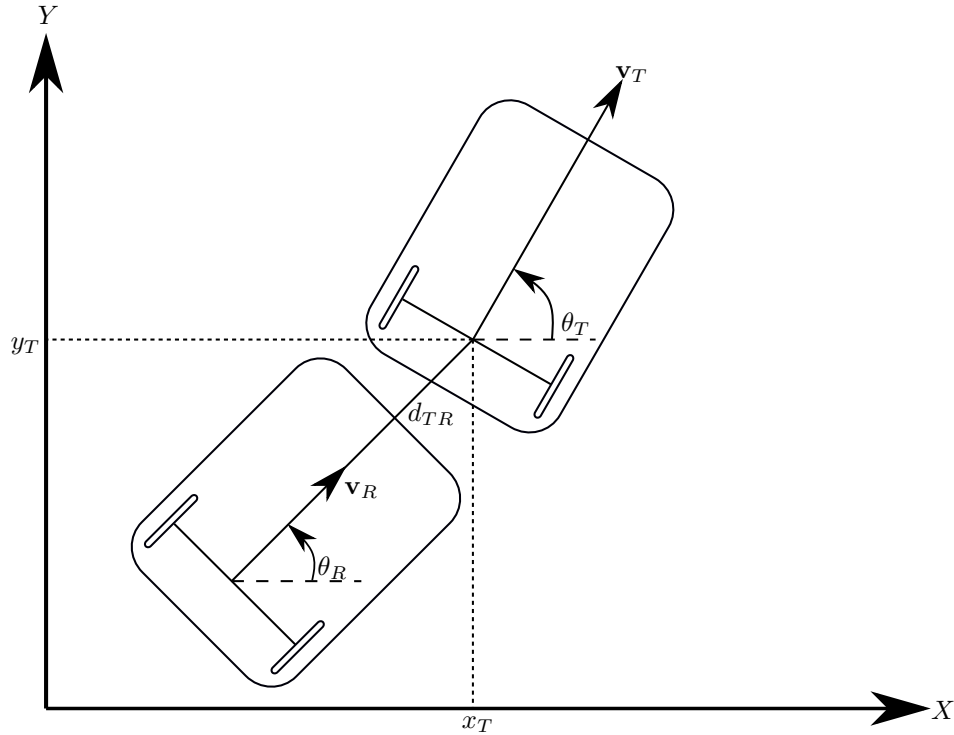


Figura 2.6: Diagrama esquemático de un sistema 1-tráiler estándar.

Un  $n$ -tráiler es un dispositivo mecánico compuesto por un cierto número de vehículos (tráilers), jalados por un robot móvil conocido como tractor. El primer tráiler está ligado al tractor y los subsiguientes vehículos están ligados al tráiler que se encuentra adelante de ellos por medio de



uniones mecánicas. Un tráiler tipo estándar es aquel en donde las uniones coinciden con el punto medio del eje de las ruedas del vehículo que se encuentra adelante. El modelo cinemático de un 1-tráiler estándar (Figura 2.6), está dado por ([54], [55], [56]):

$$\dot{x}_T = v_T \cos \theta_T, \quad (2.7a)$$

$$\dot{y}_T = v_T \sen \theta_T, \quad (2.7b)$$

$$\dot{\theta}_T = w_T, \quad (2.7c)$$

$$\dot{\theta}_R = v_T \frac{\sen(\theta_T - \theta_R)}{d_{TR}}, \quad (2.7d)$$

donde  $[x_T \ y_T]^\top \in \mathbb{R}^2$  es el punto medio del eje de las ruedas del tractor,  $\theta_T \in \mathbb{R}$  es el ángulo de orientación del tractor, siendo  $w_T$  la velocidad angular. Por otro lado,  $v_R$  es la velocidad longitudinal del remolque,  $\theta_R$  la orientación del mismo y  $d_{TR}$  es la distancia que existe entre los vehículos.

**Lema 2.1** *La velocidad longitudinal del tráiler  $v_R$  depende de la velocidad longitudinal del tractor  $v_T$  y de las orientaciones  $\theta_T$  y  $\theta_R$  a través de la siguiente relación:*

$$v_R = v_T \cos(\theta_T - \theta_R). \quad (2.8)$$

**Prueba 2.1** Aplicando (2.4) para obtener la velocidad del tractor  $\mathbf{v}_T$ , se tiene que

$$\mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_R\|(\cos \theta_R \hat{i} + \sen \theta_R \hat{j}) + \dot{\theta}_R \hat{k} \times d_{TR}(\cos \theta_R \hat{i} + \sen \theta_R \hat{j}), \quad (2.9)$$

donde  $\hat{i}, \hat{j}$  y  $\hat{k}$  son vectores unitarios y  $\mathbf{v}_R$  es la velocidad del remolque. Note que la velocidad  $\mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\|(\cos \theta_T \hat{i} + \sen \theta_T \hat{j})$ , que sustituyendo en (2.9) y reescribiendo en forma vectorial, se tiene que

$$\|\mathbf{v}_T\| \begin{bmatrix} \cos \theta_T \\ \sen \theta_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_R & -d_{TR} \sen \theta_R \\ \sen \theta_R & d_{TR} \cos \theta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_R\| \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

sea  $v_T = \|\mathbf{v}_T\|$  y  $v_R = \|\mathbf{v}_R\|$ , entonces

$$\begin{aligned} v_R &= v_T \cos(\theta_T - \theta_R), \\ \dot{\theta}_R &= v_T \frac{\sen(\theta_T - \theta_R)}{d_{TR}}. \end{aligned}$$

## 2.4. Omni-tráiler

Debido a que la estructura del sistema 1-tráiler puede ser heterogénea, entonces es posible tener un robot móvil tipo omnidireccional como tractor (Figura 2.7), siendo el remolque, un robot móvil tipo diferencial, ambos robots están conectados por una barra rígida de longitud  $d_{TR}$ .

**Lema 2.2** *La velocidad lineal  $\mathbf{v}_R$ , y la velocidad angular  $\dot{\theta}_R$  del robot móvil diferencial dependen de la velocidad longitudinal  $v_{x_T}$ , la velocidad lateral  $v_{y_T}$  y de los ángulos de orientación del tractor  $\theta_T$  y del ángulo de orientación del remolque  $\theta_R$ , y están dadas por*

$$v_R = v_{x_T} \cos(\theta_T - \theta_R) - v_{y_T} \sen(\theta_T - \theta_R), \quad (2.11a)$$

$$\dot{\theta}_R = \frac{1}{d_{TR}} [v_{x_T} \sen(\theta_T - \theta_R) + v_{y_T} \cos(\theta_T - \theta_R)]. \quad (2.11b)$$

**Prueba 2.2** Aplicando (2.4) para obtener la velocidad del tractor ( $\mathbf{v}_T$ ), se tiene que

$$\mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_R\|(\cos \theta_R \hat{i} + \sen \theta_R \hat{j}) + \dot{\theta}_R \hat{k} \times d_{TR}(\cos \theta_R \hat{i} + \sen \theta_R \hat{j}), \quad (2.12)$$

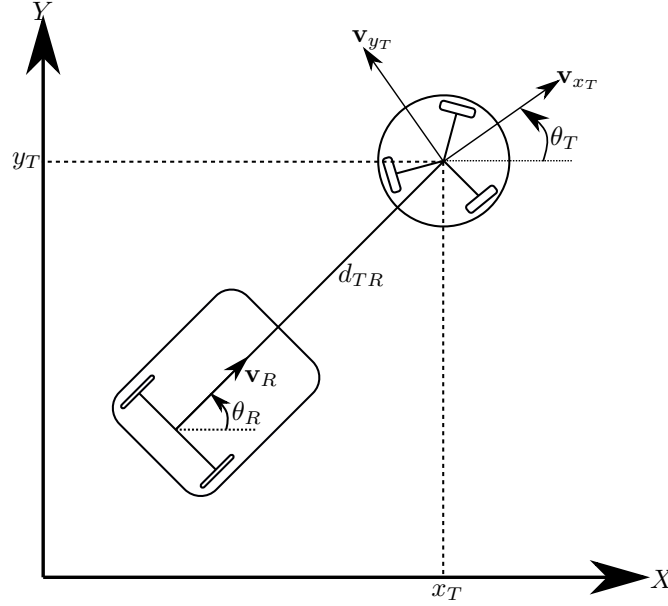


Figura 2.7: Diagrama esquemático de un omni-tráiler.

se tiene además que  $\mathbf{v}_T = v_{x_T} \cos \theta_T \hat{i} - v_{y_T} \sin \theta_T \hat{i} + v_{x_T} \sin \theta_T \hat{j} + v_{y_T} \cos \theta_T \hat{j}$ , al sustituir lo anterior en (2.12), y expresándolo en forma vectorial se tiene

$$\begin{bmatrix} v_{x_T} \cos \theta_T - v_{y_T} \sin \theta_T \\ v_{x_T} \sin \theta_T + v_{y_T} \cos \theta_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_R & -d_{TR} \sin \theta_R \\ \sin \theta_R & d_{TR} \cos \theta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_R\| \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

sea  $v_R = \|\mathbf{v}_R\|$ , entonces

$$\begin{aligned} v_R &= v_{x_T} \cos(\theta_T - \theta_R) - v_{y_T} \sin(\theta_T - \theta_R), \\ \dot{\theta}_R &= \frac{1}{d_{TR}} [v_{x_T} \sin(\theta_T - \theta_R) + v_{y_T} \cos(\theta_T - \theta_R)]. \end{aligned}$$

## 2.5. Algoritmo de extensión dinámica

El algoritmo de extensión dinámica [57], consiste en diseñar una nueva retroalimentación, de tal manera que en lazo cerrado, el grado relativo de las primeras  $q$  salidas aumente una unidad. Específicamente, el propósito de este algoritmo es generar un nuevo sistema para el cual, posiblemente,  $\text{rank}(D) > q$ , donde  $D$  es la matriz de desacoplamiento. Para lograr esto, las siguientes ecuaciones se deben cumplir

$$L_f^{r_i} h_i + L_g L_f^{r_i - 1} h_i \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) = 0, \quad 1 \leq i \leq q, \quad (2.14a)$$

$$D(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{q \times q} & 0_{q \times (\bar{m} - q)} \\ \star_{(\bar{m} - q) \times q} & 0_{(\bar{m} - q) \times (\bar{m} - q)} \end{bmatrix}, \quad (2.14b)$$

donde  $\bar{m}$  es el número de entradas,  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\zeta})$  y  $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\zeta})$  son funciones de diseño,  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad, mientras que  $\star$  implica que dicho elemento puede tomar cualquier valor. Con base en esto, la nueva realimentación está dada por

$$u = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) + \beta_1(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\xi} + \beta_2(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\nu}_2, \quad (2.15a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}_1, \quad (2.15b)$$

donde  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2]^\top$  son las nuevas entradas de control del sistema,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las columnas que conforman la matriz  $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\zeta})$ .

## Capítulo 3

# Modelado y control

En este Capítulo se utilizan dos enfoques para desarrollar un modelo matemático basado en distancia y ángulo entre los agentes, de un sistema multi-agente heterogéneo, conformado por robots móviles tipo omnidireccional, diferencial y vehículos aéreos no tripulados tipo cuadri-rotor, bajo el esquema líder-seguidor y considerando el modelo cinemático y/o dinámico de cada vehículo. El primer enfoque consiste en medir el ángulo de formación a partir del marco inercial del agente líder, mientras que en el segundo enfoque, el ángulo de formación se mide a partir del marco inercial del agente seguidor. Utilizando el segundo enfoque, se obtienen cuatro modelos cinemáticos diferentes, *i.e.*

- Esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{O}$ . Ambos agentes son robots móviles tipo omnidireccional.
- Esquema líder-seguidor  $\mathcal{D} - \mathcal{O}$ . El agente líder es un robot tipo diferencial y el agente seguidor es un robot omnidireccional.
- Esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{D}$ . El agente líder es un robot tipo omnidireccional y el agente seguidor es un robot tipo diferencial.
- Esquema líder-seguidor  $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ . Ambos agentes son robots tipo diferencial.

Además, utilizando la misma metodología del segundo enfoque, se desarrolla un modelo matemático de un esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$ , donde el líder es un robot omnidireccional y el agente seguidor es un cuadri-rotor.

En ambos enfoques, se diseñan estrategias de control con el objetivo de que el agente seguidor se mantenga a una distancia y ángulo deseados con respecto al líder, logrando, en algunos casos, emular el comportamiento cinemático de cuerpos rígidos. Para validar las estrategias de control, en todos los casos, se presenta el análisis de estabilidad correspondiente.

### 3.1. Modelo y control referenciado al agente líder

En esta sección se obtendrá el modelo considerando como referencia al marco inercial del agente líder.

De acuerdo a la Figura 3.1, sea  $\ell$  la distancia entre el agente líder y el agente seguidor (medida entre los puntos medios de los ejes de tracción),  $\varphi$  el ángulo que existe entre la componente de la velocidad lineal del agente líder y la línea  $\ell$  que une a los dos agentes,  $\theta_L$  es el ángulo de orientación del agente líder,  $w_L$  es la velocidad angular de dicho agente, mientras que  $\theta_F$  es el ángulo de orientación del agente seguidor siendo  $w_F$  su velocidad angular, se tiene además que  $v_L$  y  $v_F$  son las velocidades

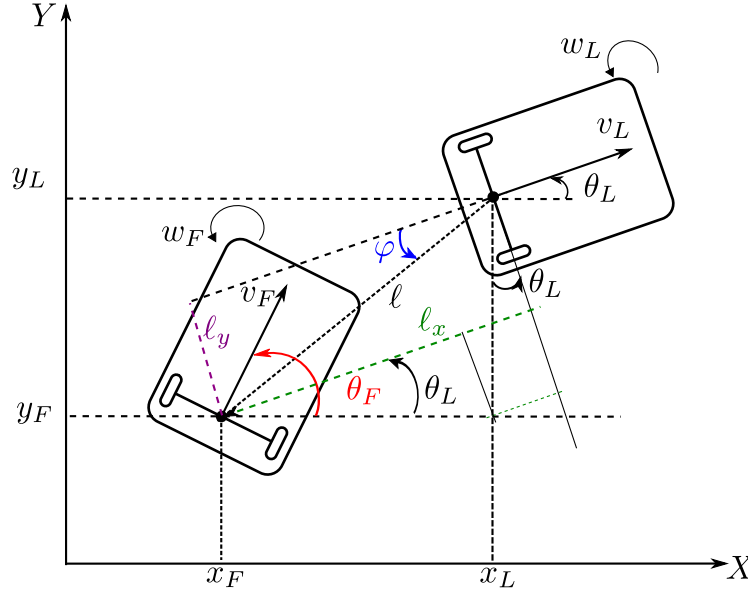


Figura 3.1: Esquema líder-seguidor.

longitudinales de cada agente. Por otro lado,  $\ell$  y sus componentes  $\ell_x$  y  $\ell_y$  se pueden expresar a partir de las posiciones y orientaciones de ambos agentes, *i.e.*

$$\ell = \sqrt{(x_L - x_F)^2 + (y_L - y_F)^2}, \quad (3.1a)$$

$$\ell_x = -(y_L - y_F) \sin \theta_L - (x_L - x_F) \cos \theta_L, \quad (3.1b)$$

$$\ell_y = -(y_L - y_F) \cos \theta_L + (x_L - x_F) \sin \theta_L. \quad (3.1c)$$

Por otra parte, la distancia  $\ell$  y sus componentes  $\ell_x$  y  $\ell_y$  también se pueden expresar como

$$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}, \quad (3.2a)$$

$$\ell_x = -\ell \cos \varphi, \quad (3.2b)$$

$$\ell_y = -\ell \sin \varphi. \quad (3.2c)$$

Con el fin de representar el sistema líder-seguidor en función de  $\ell$  y  $\varphi$ , se obtendrán sus derivadas. Derivando con respecto al tiempo (3.1b), (3.1c) y (3.2a), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{\ell_x \dot{\ell}_x + \ell_y \dot{\ell}_y}{\ell}, \\ \dot{\ell}_x &= -(\dot{y}_L - \dot{y}_F) \sin \theta_L - (y_L - y_F) \dot{\theta}_L \cos \theta_L - (\dot{x}_L - \dot{x}_F) \cos \theta_L + (x_L - x_F) \dot{\theta}_L \sin \theta_L, \\ &= -(v_L \sin \theta_L - v_F \sin \theta_F) \sin \theta_L - (y_L - y_F) w_L \cos \theta_L - (v_L \cos \theta_L - v_F \cos \theta_F) \cos \theta_L \\ &\quad + (x_L - x_F) w_L \sin \theta_L, \\ &= -v_L \sin^2 \theta_L + v_F \sin \theta_F \sin \theta_L - (y_L - y_F) w_L \cos \theta_L - v_L \cos^2 \theta_L + v_F \cos \theta_F \cos \theta_L \\ &\quad + (x_L - x_F) w_L \sin \theta_L, \\ &= -v_L + v_F (\sin \theta_F \sin \theta_L + \cos \theta_F \cos \theta_L) - w_L [(y_L - y_F) \cos \theta_L - (x_L - x_F) \sin \theta_L], \\ &= -v_L + v_F \cos(\theta_F - \theta_L) + w_L \ell_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\ell}_y &= -(\dot{y}_L - \dot{y}_F) \cos \theta_L + (y_L - y_F) \dot{\theta}_L \sin \theta_L + (\dot{x}_L - \dot{x}_F) \sin \theta_L + (x_L - x_F) \dot{\theta}_L \cos \theta_L, \\
&= -(v_L \sin \theta_L - v_F \sin \theta_F) \cos \theta_L + (y_L - y_F) w_L \sin \theta_L + (v_L \cos \theta_L - v_F \cos \theta_F) \sin \theta_L \\
&\quad + (x_L - x_F) w_L \cos \theta_L, \\
&= v_F (\sin \theta_F \cos \theta_L - \cos \theta_F \sin \theta_L) + w_L [(y_L - y_F) \sin \theta_L + (x_L - x_F) \cos \theta_L], \\
&= v_F \sin(\theta_F - \theta_L) - w_L \ell_x.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.2b) y (3.2c) en la dinámica de  $\dot{\ell}$  se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\ell} &= \frac{-\ell \cos \varphi [-v_L + v_F \cos(\theta_F - \theta_L) - w_L \ell \sin \varphi]}{\ell} \\
&\quad - \frac{\ell \sin \varphi [v_F \sin(\theta_F - \theta_L) + \ell \cos \varphi w_L]}{\ell}, \\
&= \frac{-\ell \cos \varphi [-v_L + v_F \cos(\theta_F - \theta_L)] - \ell \sin \varphi [v_F \sin(\theta_F - \theta_L)]}{\ell}, \\
&= v_L \cos \varphi - v_F \cos(\theta_F - \theta_L) \cos \varphi - v_F \sin(\theta_F - \theta_L) \sin \varphi, \\
&= v_L \cos \varphi - v_F [\cos(\theta_F - \theta_L) \cos \varphi + \sin(\theta_F - \theta_L) \sin \varphi], \\
&= v_L \cos \varphi - v_F \cos(\theta_F - \theta_L - \varphi).
\end{aligned}$$

A partir de (3.2b) y (3.2c), el ángulo  $\varphi$  está dado por  $\varphi = \arctan\left(\frac{\ell_y}{\ell_x}\right)$ , cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{\ell_x \dot{\ell}_y - \ell_y \dot{\ell}_x}{\ell_y^2 + \ell_x^2}, \\
&= \frac{-\ell \cos \varphi [v_F \sin(\theta_F - \theta_L) + \ell w_L \cos \varphi]}{\ell^2} + \frac{\ell \sin \varphi [-v_L + v_F \cos(\theta_F - \theta_L) - w_L \ell \sin \varphi]}{\ell^2}, \\
&= \frac{-\ell v_F \cos \varphi \sin(\theta_F - \theta_L) - \ell^2 w_L - v_L \ell \sin \varphi}{\ell^2} + \frac{v_F \ell \sin \varphi \cos(\theta_F - \theta_L)}{\ell^2}, \\
&= \frac{-v_F [\cos \varphi \sin(\theta_F - \theta_L) - \sin \varphi \cos(\theta_F - \theta_L)] - \ell w_L - v_L \sin \varphi}{\ell}, \\
&= \frac{-v_F \sin(\theta_F - \theta_L - \varphi) - \ell w_L - v_L \sin \varphi}{\ell}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo que representa la distancia y el ángulo entre el agente  $R_L$  y el agente  $R_F$  se define como

$$\dot{\zeta} = f(\zeta) + g(\zeta) \mathbf{u}_F, \quad (3.3)$$

donde  $\zeta = [\ell \ \varphi \ \theta_F]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados del sistema y  $\mathbf{u}_F = [v_F \ w_F]^\top \in \mathbb{R}^2$  es el vector de entradas de control para el agente seguidor, además

$$f(\zeta) = \begin{bmatrix} v_L \cos \varphi \\ \frac{-\ell w_L - v_L \sin \varphi}{\ell} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(\zeta) = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell} \sin(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Suposición 3.1** *En los análisis subsecuentes, se asume que el agente líder es controlado para seguir una trayectoria deseada, y que el agente seguidor tiene la capacidad de conocer la entradas de control correspondientes al agente líder.*

Evidentemente, el sistema (3.3), es un sistema subactuado. Debido a eso, se considera como salida a  $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2]^\top = [\ell \ \varphi]^\top$ . Antes de diseñar el control por realimentación, se procede a determinar

el grado relativo del sistema así como su matriz de desacoplamiento, la cual está dada por [57]

$$D(\zeta) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\zeta) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\zeta) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\zeta) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\zeta) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\zeta) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\zeta) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde  $L_{g_i} h_i$ ,  $L_f h_i$  son las derivadas de Lie de la función de salida  $\mathbf{h}$  respecto a  $g(\zeta)$  y  $f(\zeta)$ ,  $r_i$  es el grado relativo asociado a la  $i$ -ésima salida del sistema dado por [57]

$$\begin{aligned} L_g L_f^k h(x) &= 0 \quad k < r - 1, \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

mientras  $m$  es el numero de salidas del sistema, y

$$g_1 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ -\frac{1}{\ell} \text{sen}(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, las derivadas de Lie, están dadas por

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ -\frac{1}{\ell} \text{sen}(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi), \\ L_{g_2} h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \\ L_{g_1} h_2(\psi) &= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ -\frac{1}{\ell} \text{sen}(\theta_F - \theta_L - \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\ell} \text{sen}(\theta_F - \theta_L - \varphi), \\ L_{g_2} h_2(\psi) &= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las derivadas de Lie, es evidente que el grado relativo para la salida  $h_1$  es  $r_1 = 1$ , mientras que el grado relativo para la salida  $h_2$  es  $r_2 = 1$ , y la matriz de desacoplamiento, dada en (3.4), se reduce a

$$D(\zeta) = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell} \text{sen}(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

la cual es singular, debido a que  $\det(D(\zeta)) = 0$ , además de que el rango de la matriz  $D$  es  $q = \text{rank}(D) = 1$ ; por lo tanto no es posible diseñar una ley de control por realimentación estática. Para resolver dicho problema se hace uso del algoritmo de extensión dinámica, mostrado en el Capítulo 2. Debido a que  $q = 1$ , entonces la condición (2.14a) se reduce a

$$L_f h_1 + L_g h_1 \alpha(\zeta) = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\alpha(\zeta) = [\alpha_1(\zeta) \ \alpha_2(\zeta)]^\top$ ,

$$\begin{aligned} L_f h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} v_L \cos \varphi \\ \frac{-\ell v_L - v_L \text{sen} \varphi}{\ell} \\ 0 \end{bmatrix} = v_L \cos \varphi, \\ L_g h_1(\ell) &= [-\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \ 0], \end{aligned}$$

y, sustituyendo en (3.6), se tiene que

$$v_L \cos \varphi + [-\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \quad 0] \begin{bmatrix} \alpha_1(\zeta) \\ \alpha_2(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Seleccionando  $\alpha_1(\zeta)$  y  $\alpha_2(\zeta)$  de tal manera que la igualdad se cumpla, entonces

$$\boldsymbol{\alpha}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{v_L \cos \varphi}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, (2.14b) se reduce a

$$\begin{bmatrix} -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell} \sin(\theta_F - \theta_L - \varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11}(\zeta) & \beta_{12}(\zeta) \\ \beta_{21}(\zeta) & \beta_{22}(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Los elementos de la matriz  $\beta(\zeta)$  se seleccionan de tal forma que se cumpla la ecuación (3.7), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\zeta) &= -\frac{1}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)}, \\ \beta_{12}(\zeta) &= 0, \\ \beta_{21}(\zeta) &= 0, \\ \beta_{22}(\zeta) &= -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi), \end{aligned}$$

y la matriz  $\beta(\zeta)$  queda definida como

$$\beta(\zeta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)} & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix},$$

la cual es no singular debido a que  $\det[\beta(\zeta)] = 1$ . Separando en dos columnas la matriz  $\beta$ , entonces se define a  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , como

$$\beta_1(\zeta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores de  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$  en (2.15a), se tiene que la nueva realimentación está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_F \\ w_F \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{v_L \cos \varphi}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi)} \\ 0 \end{bmatrix} \xi_F + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix} \bar{w}_F, \\ \dot{\xi}_F &= u_F. \end{aligned}$$

El sistema extendido está dado por

$$\dot{\bar{\zeta}} = \bar{f}(\bar{\zeta}) + \bar{g}(\bar{\zeta}) \bar{\mathbf{u}}_F, \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{\zeta}) &= \begin{bmatrix} \xi_F \\ \frac{1}{\ell}(-\ell w_L - v_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{g}(\bar{\zeta}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



donde  $\bar{\zeta} = [\ell \ \varphi \ \xi_F \ \theta_F]^\top \in \mathbb{R}^4$  es el vector de estados extendido,  $\bar{\mathbf{u}}_F = [u_F \ \bar{w}_F]^\top \in \mathbb{R}^2$  es el nuevo vector de entradas de control.

Una vez aplicado el algoritmo de extensión dinámica, se procede a calcular el grado relativo y la matriz de desacoplamiento del sistema extendido (3.8) con la misma salida  $\mathbf{h} = [\ell \ \varphi]^\top$ . A partir de (3.4), se calculan las derivadas de Lie correspondientes

$$\begin{aligned}
L_{\bar{g}_1} h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, & L_{\bar{g}_2} h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix} = 0, \\
L_{\bar{g}_1} h_2(\psi) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, & L_{\bar{g}_2} h_2(\psi) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix} = 0, \\
L_{\bar{f}} h_1(\ell) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell}(-\ell w_L - v_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi_F, \\
L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}} h_1(\ell) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \\
L_{\bar{g}_2} L_{\bar{f}} h_1(\ell) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix} = 0, \\
L_{\bar{f}} h_2(\psi) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell}(-\ell w_L - v_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-\ell w_L - v_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F)}{\ell}, \\
L_{\bar{g}_1} L_{\bar{f}} h_2(\psi) &= \left[ \frac{1}{\ell} a'_1 - \frac{1}{\ell^2} a_1 \quad \frac{1}{\ell} a'_2 \quad \frac{1}{\ell} a'_3 \quad \frac{1}{\ell} a'_4 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} a'_3, \\
L_{\bar{g}_2} L_{\bar{f}} h_2(\psi) &= \left[ \frac{1}{\ell} a'_1 - \frac{1}{\ell^2} a_1 \quad \frac{1}{\ell} a'_2 \quad \frac{1}{\ell} a'_3 \quad \frac{1}{\ell} a'_4 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} a'_5,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\ell w_L - v_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F), \\
a_1' &= -w_L, \\
a_2' &= -v_L \cos \varphi + (v_L \cos \varphi - \xi_F) \sec^2(\theta_F - \theta_L - \varphi) + v_L \sin \varphi \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi), \\
a_3' &= \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi), \\
a_4' &= -(v_L \cos \varphi - \xi_F) \sec^2(\theta_F - \theta_L - \varphi), \\
a_5' &= (v_L \cos \varphi - \xi_F) \sec(\theta_F - \theta_L - \varphi).
\end{aligned}$$

Note que, con los anteriores cálculos, el grado relativo de la salida  $h_1$  y  $h_2$  es  $r_1 = r_2 = 2$  y, la matriz de desacoplamiento del sistema (3.8) está dada por

$$D(\bar{\zeta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\ell} \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi) & \frac{1}{\ell} (v_L \cos \varphi - \xi_F) \sec(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix},$$

la cual es no singular para toda  $v_F = (v_L \cos \varphi - \xi_F) \sec(\theta_F - \theta_L - \varphi) \neq 0$ , debido a que el  $\det(D) = \frac{v_F}{\ell}$ . Considerando la salida  $\mathbf{h}$  y derivándola con respecto al tiempo sucesivamente, se tiene

$$\ddot{\mathbf{h}} = \hat{f}(\bar{\zeta}) + D(\bar{\zeta}) \begin{bmatrix} u_F \\ \bar{w}_F \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde

$$\hat{f}(\bar{\zeta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{w}_L + \frac{1}{\ell} b_1 - \frac{\dot{\ell}}{\ell} a_1 \end{bmatrix},$$

con  $a_1$  definida anteriormente y

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\dot{\ell} w_L - v_L \dot{\varphi} \cos \varphi - u_L \sin \varphi - \tan(\theta_F - \theta_L - \varphi)(-v_L \dot{\varphi} \sin \varphi + u_L \cos \varphi) \\
&\quad - \sec^2(\theta_F - \theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi - \xi_F)(-w_L - \varphi).
\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, la matriz  $D(\bar{\zeta})$  es no singular para toda  $v_F \neq 0$ , esto implica que los agentes deben de estar siempre en movimiento. Para lidiar con la singularidad  $v_F = 0$ , se propone una salida alterna  $\bar{\mathbf{h}} = [\xi_F \ \theta_F]^\top$ , obteniéndose el siguiente sistema

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_F - \theta_L - \varphi) \end{bmatrix}}_{\hat{D}(\bar{\zeta})} \begin{bmatrix} u_F \\ \bar{w}_F \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Es importante mencionar, que la salida alterna  $\bar{\mathbf{h}}$ , se propone para lidiar con la singularidad  $v_F = 0$ .

A partir de (3.9), le ley de control por realimentación, está dada por

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} u_F \\ \bar{w}_F \end{bmatrix} = D(\bar{\zeta})^{-1} \left\{ -\hat{f}(\bar{\zeta}) + \begin{bmatrix} \ddot{\ell}_d - k_{\ell_p}(\ell - \ell_d) - k_{\ell_d}(\dot{\ell} - \dot{\ell}_d) \\ \ddot{\varphi}_d - k_{\varphi_p}(\varphi - \varphi_d) - k_{\varphi_d}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d) \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.11)$$

donde  $k_{\ell_p}, k_{\ell_d}, k_{\varphi_p}, k_{\varphi_d} > 0$  son parámetros de diseño, mientras que para el sistema (3.10), la ley de control por realimentación, está dada por

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} u_F \\ \bar{w}_F \end{bmatrix} = \hat{D}(\bar{\zeta})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v}_L - k_{\xi_p}(\xi_F - v_L) \\ w_L - k_{\theta_p}(\theta_F - \theta_L) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde  $k_{\xi_p}, k_{\theta_p} > 0$  son parámetros de diseño. El vector de grado relativo del sistema (3.8) con la salida  $\mathbf{h}$  es  $\{2, 2\}$ . Debido a que la dimensión del sistema es 4, entonces, es posible, diseñar una ley de control que linealice completamente al sistema (3.8). Por otra parte, el vector de grado relativo del sistema (3.8) con la salida  $\bar{\mathbf{h}}$  es  $\{1, 1\}$ . Por lo tanto, la dimensión de la dinámica cero del sistema (3.8) es 2 y corresponde a la evolución de los estados  $\ell$  y  $\varphi$ , la cual está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\ell} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_L - \frac{v_L \sin \varphi}{\ell} - \frac{\tan(-\theta_L - \varphi)(v_L \cos \varphi)}{\ell} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

**Comentario 3.1** *El estudio de la dinámica que se obtuvo requiere de un análisis más profundo, se asume que es estable debido a que en las pruebas experimentales y simulaciones numéricas se observó que esta dinámica se estabilizaba.*

**Comentario 3.2** *Note que la ley de control (3.11) exhibe una singularidad, cuando  $v_F = 0$ . Esto implica que (3.11) no es capaz de seguir trayectorias en las que la velocidad lineal del robot diferencial sea cero. Además, debido a la existencia de esa singularidad, (3.11) no está definida globalmente. Para superar este inconveniente, se propone una ley de control discontinua que permita lograr el seguimiento de trayectorias global. Por otro lado, la ley de control (3.12), solo se propone para evitar la singularidad  $v_F = 0$ .*

Con el objetivo de definir una ley de control que permita sobrellevar la singularidad se propone el siguiente esquema de conmutación

$$\bar{\mathbf{u}}_F = \begin{cases} \nu & \text{si } (\ell, \varphi, \xi_F, \theta_F) \in \mathcal{M}, \\ \bar{\nu} & \text{si } (\ell, \varphi, \xi_F, \theta_F) \in \bar{\mathcal{M}}, \end{cases} \quad (3.14)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{(\ell, \varphi, \xi_F, \theta_F) \in \mathbb{R}^4 \mid |v_F| \geq \bar{\delta}\}, \\ \bar{\mathcal{M}} &= \{(\ell, \varphi, \xi_F, \theta_F) \in \mathbb{R}^4 \mid |v_F| < \bar{\delta}\}, \end{aligned}$$

donde  $\bar{\delta}$  es un parámetro positivo correspondiente al parámetro de conmutación.

**Comentario 3.3** *Es importante mencionar que el controlador (3.14) puede presentar algunos fenómenos no deseables en el sistema extendido (3.8) por lo que debe de realizarse un análisis más a fondo sobre la estabilidad de este sistema. Sin embargo este análisis queda como trabajo futuro, así como el cálculo del valor del parámetro de conmutación  $\bar{\delta}$ .*

**Teorema 3.1** *Considere el sistema (3.9) en lazo cerrado con el control (3.11), para todo  $v_F \neq 0$ , y considere que el término  $\dot{w}_L$  (correspondiente a la aceleración angular del líder) es una perturbación no desvaneciente. Entonces, si los parámetros de diseño ( $k_{\ell_p}, k_{\ell_d}, k_{\varphi_p}, k_{\varphi_d}$ )  $> 0$ , el error en distancia  $e_\ell$  y el error de ángulo de formación  $e_\varphi$  convergerán de manera exponencial, i.e.  $\|\epsilon\| \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\epsilon_0\| \exp\left(-\frac{(1-\kappa)\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)\right)$  en una región determinada por*

$$\|\epsilon\| \geq \frac{2\delta\lambda_{\max}(P)}{\kappa\lambda_{\min}(Q)}, \quad (3.15)$$

donde  $\kappa \in (0, 1)$  es un parámetro de diseño,  $\epsilon = [e_\ell \ \dot{e}_\ell \ e_\varphi \ \dot{e}_\varphi]^\top$  es el vector de errores,  $\delta$  es la cota superior de la perturbación  $\dot{w}_L$ , es decir  $\|\dot{w}_L\| \leq \delta$ ,  $P = P^\top > 0$  y  $Q = Q^\top > 0$ .

**Prueba 3.1** La dinámica del error está dada por

$$\ddot{e}_\ell = \ddot{\ell} - \ddot{\ell}_d, \quad \ddot{e}_\varphi = \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_d.$$

Sustituyendo (3.9) y el control (3.11) en la dinámica del error, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_\ell \\ \dot{e}_\ell \\ e_\varphi \\ \dot{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{\ell_p} e_\ell - k_{\ell_d} \dot{e}_\ell \\ \dot{e}_\ell \\ -k_{\varphi_p} e_\varphi - k_{\varphi_d} \dot{e}_\varphi - \dot{w}_L \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Definiendo ahora los estados como  $\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4]^\top = [e_\ell \ \dot{e}_\ell \ e_\varphi \ \dot{e}_\varphi]^\top$ , entonces, el sistema (3.16), en espacio de estados, está dado por

$$\dot{\epsilon} = K\epsilon + \rho \quad (3.17)$$

donde  $\rho = [0 \ 0 \ 0 \ -\dot{w}_L]^\top$  y

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{\ell p} & -k_{\ell d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_{\varphi p} & -k_{\varphi d} \end{bmatrix}.$$

En primera instancia, se analizará el sistema cuando la perturbación es considerada como  $\rho = \mathbf{0}$ . Para lograr esto, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon^\top P\epsilon, \quad (3.18)$$

donde  $P$  es una matriz definida positiva,  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $P = P^\top$ , y cuyas cotas superior e inferior están dadas por

$$\lambda_{\min}(P)\|\epsilon\|^2 \leq V(\epsilon) \leq \lambda_{\max}(P)\|\epsilon\|^2. \quad (3.19)$$

La derivada con respecto al tiempo, de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (3.17), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon) &= \dot{\epsilon}^\top P\epsilon + \epsilon^\top P\dot{\epsilon}, \\ &= (K\epsilon)^\top P\epsilon + \epsilon^\top P(K\epsilon), \\ &= \epsilon^\top K^\top P\epsilon + \epsilon^\top PK\epsilon, \\ &= \epsilon^\top [K^\top P + PK]\epsilon. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación fundamental de Lyapunov, se tiene que  $K^\top P + PK = -Q$  donde  $Q = Q^\top > 0$ , por lo que  $\dot{V}(\epsilon)$  se simplifica a

$$\dot{V}(\epsilon) = -\epsilon^\top Q\epsilon.$$

Acotando la derivada de la función candidata de Lyapunov, se tiene que

$$\dot{V}(\epsilon) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|\epsilon\|^2. \quad (3.20)$$

Además, a partir de (3.19), se tiene que  $\|\epsilon\|^2 \leq \frac{V(\epsilon)}{\lambda_{\min}(P)}$ , entonces, (3.20) se reescribe como

$$\dot{V}(\epsilon) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}V(\epsilon). \quad (3.21)$$

Debido a que la derivada de la función candidata de Lyapunov es definida negativa, entonces, el sistema (3.17), con la perturbación  $\rho = \mathbf{0}$ , es global y exponencialmente estable.

Una vez definida la estabilidad del sistema (3.17) sin perturbación, se procede a continuación a analizar dicho sistema pero con la perturbación  $\rho = [0 \ 0 \ 0 \ -\dot{w}_L]^\top$ . Antes de proceder, asumamos que la Suposición 3.1 se cumple, es decir, el agente líder es controlado para realizar el seguimiento de una trayectoria. Específicamente, en este trabajo se considera la estrategia de control dada en [14], [19], por lo que la ley de control para la velocidad angular esta dada por

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{1}{v_L} (-\sin \theta_L (\ddot{m}_x - k_{dx_L}(\dot{x}_L - \dot{m}_x) - k_{px_L}(x_L - m_x)) \\ &\quad + \cos \theta_L (\ddot{m}_y - k_{dy_L}(\dot{y}_L - \dot{m}_y) - k_{py_L}(y_L - m_y))). \end{aligned}$$

Note que la aceleración angular  $\dot{w}_L$  depende de la posición, velocidad y aceleración del agente líder y de la trayectoria deseada por lo que en este análisis se considera como una perturbación no desvaneciente, y está dada por

$$\begin{aligned}\dot{w}_L &= \frac{1}{v_L^2} [\dot{v}_L (\sin \theta_L (k_{p_{x_L}} (m_x - x_L) + k_{d_{x_L}} (\dot{m}_x - \dot{x}_L) + \ddot{m}_x) - \cos \theta_L (k_{p_{y_L}} (m_y - y_L) + k_{d_{y_L}} (\dot{m}_y - \dot{y}_L) + \ddot{m}_y)) \\ &\quad + v_L (-\sin \theta_L (k_{p_{x_L}} (\dot{m}_x - \dot{x}_L) + k_{d_{x_L}} (\ddot{m}_x - \ddot{x}_L) + w_L (k_{p_{y_L}} (m_y - y_L) + k_{d_{y_L}} (\dot{m}_y - \dot{y}_L) + \ddot{m}_y) + \ddot{m}_x) \\ &\quad + \cos \theta_L (k_{p_{y_L}} (\dot{m}_y - \dot{y}_L) + k_{d_{y_L}} (\ddot{m}_y - \ddot{y}_L) + w_L (k_{p_{x_L}} (m_x - x_L) + k_{d_{x_L}} (\dot{m}_x - \dot{x}_L) + \ddot{m}_x) + \ddot{m}_y))],\end{aligned}$$

donde  $\ddot{m}_x$  y  $\ddot{m}_y$  corresponden a la tercer derivada de la trayectoria deseada,  $\dot{v}_L$  es la aceleración lineal del agente líder,  $\ddot{x}_L$  y  $\ddot{y}_L$  corresponden a las aceleraciones longitudinal y lateral del agente líder, respectivamente. Considerando la función candidata de Lyapunov dada en (3.18), y derivándola con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.17), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon) &= \dot{\epsilon}^\top P \epsilon + \epsilon^\top P \dot{\epsilon}, \\ &= (K \epsilon + \rho)^\top P \epsilon + \epsilon^\top P (K \epsilon + \rho), \\ &= \epsilon^\top K^\top P \epsilon + \rho^\top P \epsilon + \epsilon^\top P K \epsilon + \epsilon^\top P \rho, \\ &= \epsilon^\top [K^\top P + P K] \epsilon + 2 \epsilon^\top P \rho.\end{aligned}$$

Considérese que la perturbación está acotada, es decir,  $\|\rho\| \leq \delta$ , entonces, la derivada de la función candidata de Lyapunov se acota de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{V}(\epsilon) &\leq -\|\epsilon^\top Q \epsilon\| + 2\delta \lambda_{\max}(P) \|\epsilon\|, \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2 + 2\delta \lambda_{\max}(P) \|\epsilon\|, \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2 + 2\delta \lambda_{\max}(P) \|\epsilon\| + \kappa \lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2 - \kappa \lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2, \\ &\leq -(1 - \kappa) \lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2 + 2\delta \lambda_{\max}(P) \|\epsilon\| - \kappa \lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2,\end{aligned}\tag{3.22}$$

con  $\kappa \in (0, 1)$ . A partir de (3.22), note que  $\dot{V}(\epsilon)$  será definida negativa si

$$-\kappa \lambda_{\min}(Q) \|\epsilon\|^2 + 2\delta \lambda_{\max}(P) \|\epsilon\| \leq 0.$$

A partir de la expresión anterior, es posible definir la región en la cual los estados del sistema (3.17) van a converger, y está dada por

$$\|\epsilon\| \geq \frac{2\delta \lambda_{\max}(P)}{\kappa \lambda_{\min}(Q)},\tag{3.23}$$

además, recordando que  $\|\epsilon\|^2 \leq \frac{V(\epsilon)}{\lambda_{\min}(P)}$ , entonces, (3.22) se reescribe como

$$\dot{V}(\epsilon) \leq -\frac{(1 - \kappa) \lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} V(\epsilon).$$

A partir de esta última expresión, se observa que el sistema perturbado (3.17), convergerá de manera exponencial a la región determinada por (3.23), dicho esto podemos concluir que el sistema es entrada-estado estable con respecto a la perturbación  $\dot{w}_L$ .

□

**Teorema 3.2** *Considere el sistema (3.10) en lazo cerrado con el control (3.12), entonces, la velocidad y orientación del agente seguidor convergerán a la velocidad y orientación del agente líder, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ , siendo  $e_\xi = \xi_F - v_L$  es el error de velocidad y  $e_\theta = \theta_F - \theta_L$  es el error de orientación.*

**Prueba 3.2** La dinámica de las coordenadas del error está dada por

$$\dot{e}_\xi = u_F - u_L, \quad \dot{e}_\theta = \bar{w}_F - w_L,$$

y, al sustituir (3.10) y (3.12), en la dinámica de las coordenadas del error se tiene que

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = -\bar{K}_p \bar{\mathbf{e}}, \quad (3.24)$$

donde  $\bar{\mathbf{e}} = [e_\xi \quad e_\theta]^\top$ ,  $\bar{K}_p = \text{diag}\{k_{\xi_p}, k_{\theta_p}\}$  es una matriz diagonal. Si  $k_{\xi_p}, k_{\theta_p} > 0$ , entonces, la matriz  $\bar{K}_p$  es Hurwitz y los errores de velocidad y orientación convergen asintóticamente a cero, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ .

□

### 3.2. Modelo y control referenciado al agente seguidor

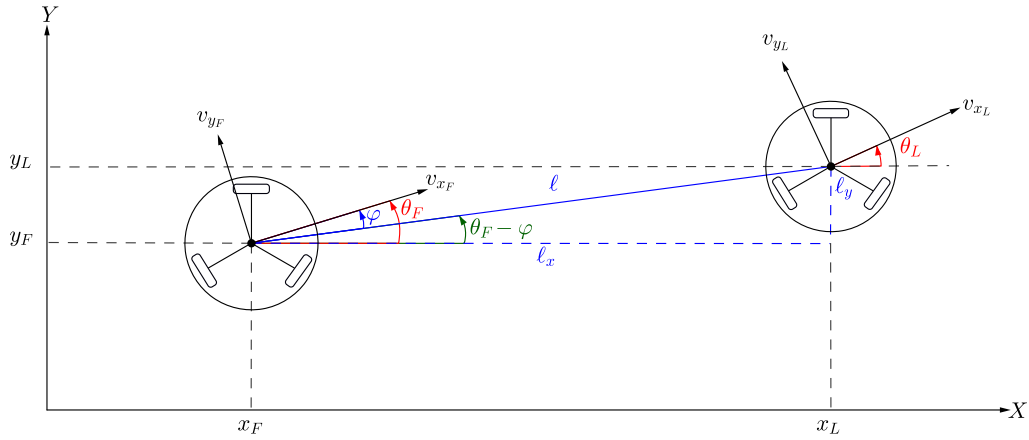


Figura 3.2: Esquema líder-seguidor.

Sea  $N = \{R_F, R_L\}$  el conjunto de dos robots móviles tipo omnidireccional, cuyo modelo cinemático está dado por [52]

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_j = R(\theta_j) \mathbf{v}_j, \quad (3.25)$$

donde

$$R(\theta_j) = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con  $j = F, L$ , donde  $F$  es el agente seguidor y  $L$  es el agente líder,  $\mathbf{v}_j = [v_{x_j} \quad v_{y_j} \quad w_j]^\top \in \mathbb{R}^3$  como el vector de entradas, siendo  $v_{x_j}$  la velocidad lineal,  $v_{y_j}$  la velocidad lateral y  $w_j$  la velocidad angular;  $\boldsymbol{\xi}_j = [x_j \quad y_j \quad \theta_j]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados del sistema donde  $x_j, y_j$  determinan la posición del centro geométrico del robot y  $\theta_j$  su orientación, con respecto al eje horizontal  $X$ .

**Comentario 3.4** Si se considera una velocidad lateral nula, *i.e.*  $v_{y_j} = 0$ , entonces, el modelo cinemático dado en (3.25) cambia de tal forma que se obtiene el modelo cinemático de un robot tipo diferencial

$$\dot{x}_j = v_{x_j} \cos \theta_j, \quad (3.26a)$$

$$\dot{y}_j = v_{x_j} \text{sen } \theta_j, \quad (3.26b)$$

$$\dot{\theta}_j = w_j. \quad (3.26c)$$

Definidos los modelos cinemáticos del robot omnidireccional y del diferencial, respectivamente, se procede a obtener una expresión que relacione la distancia entre los agentes (Figura 3.2), la cual está dada por

$$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}, \quad (3.27)$$

donde  $\ell_x$  y  $\ell_y$  son las distancias en el eje horizontal y vertical, respectivamente, y pueden ser definidas en función de las posiciones de los agentes como

$$\ell_x = x_L - x_F, \quad (3.28a)$$

$$\ell_y = y_L - y_F. \quad (3.28b)$$

Note que las distancias  $\ell_x$  y  $\ell_y$  pueden ser expresadas en función de la distancia  $\ell$  y de los ángulos  $\theta_F$  y  $\varphi$  como

$$\ell_x = \ell \cos(\theta_F - \varphi), \quad (3.29a)$$

$$\ell_y = \ell \operatorname{sen}(\theta_F - \varphi), \quad (3.29b)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo medido entre el eje que forma la línea  $\ell$  y el eje de la velocidad lineal  $v_{x_F}$ , y  $\varphi$  está dado por

$$\varphi = \theta_F - \arctan\left(\frac{\ell_y}{\ell_x}\right). \quad (3.30)$$

Al derivar con respecto al tiempo (3.27), se obtiene lo siguiente

$$\dot{\ell} = \frac{\ell_x \dot{\ell}_x + \ell_y \dot{\ell}_y}{\ell}, \quad (3.31)$$

donde  $\dot{\ell}_x$  y  $\dot{\ell}_y$  se obtienen al derivar (3.28) con respecto al tiempo, y están dadas por

$$\dot{\ell}_x = \dot{x}_L - \dot{x}_F, \quad (3.32a)$$

$$\dot{\ell}_y = \dot{y}_L - \dot{y}_F. \quad (3.32b)$$

Por otra parte, derivando (3.30) con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}_F - \frac{\ell_x \dot{\ell}_y - \ell_y \dot{\ell}_x}{\ell^2}. \quad (3.33)$$

Las expresiones (3.31) y (3.33) son representaciones generales del modelo basado en distancia y ángulo. Dicho modelo puede ser reducido dependiendo del tipo de agentes que van a ser utilizados.

### 3.2.1. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{O}$

**Proposición 3.1** Considere que el conjunto de robots,  $N$ , está representado por dos robots móviles terrestres del tipo omnidireccional, con el modelo cinemático dado por (3.25), entonces, el modelo matemático basado en distancia y ángulo está dado por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = A(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + B(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_F, \quad (3.34)$$

con

$$A(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos(e_\theta + \varphi) & -\sin(e_\theta + \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell} \sin(e_\theta + \varphi) & -\frac{1}{\ell} \cos(e_\theta + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \frac{1}{\ell} \sin \varphi & \frac{1}{\ell} \cos \varphi & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde  $e_\theta = \theta_L - \theta_F$ ,  $\boldsymbol{\eta} = [\ell \ \varphi \ e_\theta]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados del sistema,  $\mathbf{v}_L = [v_{x_L} \ v_{y_L} \ w_L]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas del agente líder y  $\mathbf{v}_F = [v_{x_F} \ v_{y_F} \ w_F]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas del agente seguidor.

**Prueba 3.3** La dinámica de la distancia entre dos agentes se obtiene al sustituir (3.29) y (3.32) en (3.31), quedando definida por

$$\dot{\ell} = \frac{1}{\ell} [\ell \cos(\theta_F - \alpha)(\dot{x}_L - \dot{x}_F) + \ell \sin(\theta_F - \alpha)(\dot{y}_L - \dot{y}_F)].$$

Posteriormente, sustituyendo (3.25) en la expresión anterior, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{\ell} [\ell \cos(\theta_F - \varphi)(v_{x_L} \cos \theta_L - v_{y_L} \sin \theta_L - v_{x_F} \cos \theta_F + v_{y_F} \sin \theta_F) \\ &\quad + \ell \sin(\theta_F - \varphi)(v_{x_L} \sin \theta_L + v_{y_L} \cos \theta_L - v_{x_F} \sin \theta_F - v_{y_F} \cos \theta_F)], \\ &= v_{x_L} \cos(\theta_L - \theta_F + \varphi) - v_{y_L} \sin(\theta_L - \theta_F + \varphi) - v_{x_F} \cos \varphi + v_{y_F} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Por otra parte, la dinámica de la orientación entre los dos agentes se obtiene al sustituir (3.29) y (3.32) en (3.33), obteniendo

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}_F - \frac{1}{\ell^2} [\ell \cos(\theta_F - \varphi)(\dot{y}_L - \dot{y}_F) - \ell \sin(\theta_F - \varphi)(\dot{x}_L - \dot{x}_F)],$$

y, al sustituir (3.25) en la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\theta}_F - \frac{1}{\ell^2} [\ell \cos(\theta_F - \varphi)(v_{x_L} \sin \theta_L + v_{y_L} \cos \theta_L - v_{x_F} \sin \theta_F - v_{y_F} \cos \theta_F) \\ &\quad - \ell \sin(\theta_F - \varphi)(v_{x_L} \cos \theta_L - v_{y_L} \sin \theta_L - v_{x_F} \cos \theta_F + v_{y_F} \sin \theta_F)], \\ &= \dot{\theta}_F - \frac{1}{\ell} [v_{x_L} \sin(\theta_L - \theta_F + \varphi) + v_{y_L} \cos(\theta_L - \theta_F + \varphi) - v_{x_F} \sin \varphi - v_{y_F} \cos \varphi]. \end{aligned}$$

Definiendo  $e_\theta = \theta_L - \theta_F$ , entonces su dinámica está dada por

$$\dot{e}_\theta = w_L - w_F.$$

Finalmente, el sistema en forma matricial está dado por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = A(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + B(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_F.$$

□

Note que el determinante de la matriz  $B(\boldsymbol{\eta})$  está dado por  $\det(B(\boldsymbol{\eta})) = \frac{1}{\ell}$ , por lo tanto la matriz es invertible para cualquier valor de  $\ell \neq 0$ , y es posible diseñar una la ley de control de linealización por realimentación dada por

$$\mathbf{v}_F = B^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \left\{ -A(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + \begin{bmatrix} \dot{\ell}_d - k_{p_\ell} e_\ell \\ \dot{\varphi}_d - k_{p_\varphi} e_\varphi \\ -k_{p_\theta} e_\theta \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.35)$$

donde  $e_\ell = \ell - \ell_d$  y  $e_\varphi = \varphi - \varphi_d$  son los errores de distancia y ángulo, respectivamente, con  $\ell_d$  y  $\varphi_d$  como la distancia y ángulo deseados, mientras que  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi}, k_{p_\theta} > 0$  son parámetros de diseño.



**Teorema 3.3** *Sea el sistema (3.34) en lazo cerrado con el control (3.35); si los parámetros de diseño  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi}, k_{p_\theta} > 0$ , entonces, el agente seguidor se mantendrá a una distancia y ángulo deseados con respecto al líder, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ , donde  $e_\ell = \ell - \ell_d$  y  $e_\varphi = \varphi - \varphi_d$  son los errores de distancia y ángulo de formación, mientras que  $e_\theta = \theta_L - \theta_F$  es el error de ángulo de orientación.*

**Prueba 3.4** La dinámica de las coordenadas del error está dada por

$$\dot{e}_\ell = \dot{\ell} - \dot{\ell}_d, \quad \dot{e}_\varphi = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d, \quad \dot{e}_\theta = w_L - w_F,$$

las cuales, de manera vectorial, se expresan de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\boldsymbol{\eta}}_d, \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{e} = [e_\ell \ e_\varphi \ e_\theta]^\top \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\eta}_d = [\ell_d \ \varphi_d \ 0]^\top \in \mathbb{R}^3$ . Sustituyendo (3.34) y (3.35) en (3.36), se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{e}} = -K\mathbf{e}, \quad (3.37)$$

con  $K = \text{diag}\{k_{p_\ell}, k_{p_\varphi}, k_{p_\theta}\}$ . Si los parámetros de diseño  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi}, k_{p_\theta} > 0$ , entonces, la matriz  $K$  es Hurwitz, y los errores de distancia y de orientación convergen asintóticamente a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ . □

### 3.2.2. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{O}$

**Proposición 3.2** Si se considera que el agente líder es un robot móvil terrestre del tipo diferencial, y el agente seguidor es un robot móvil terrestre del tipo omnidireccional, entonces,  $v_{y_L} = 0$  y el sistema (3.34) se reescribe como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \bar{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + B(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_F, \quad (3.38)$$

donde

$$\bar{A}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos(e_\theta + \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell} \text{sen}(e_\theta + \varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$B(\boldsymbol{\eta})$  está definida como en (3.34),  $\mathbf{v}_L = [v_{x_L} \ w_L]^\top \in \mathbb{R}^2$  es el vector de entradas del agente líder y  $\mathbf{v}_F = [v_{x_F} \ v_{y_F} \ w_F]^\top \in \mathbb{R}^3$  el vector de entradas del agente seguidor. La ley de control de linealización por realimentación está dada por

$$\mathbf{v}_F = B^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \left\{ -\bar{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + \begin{bmatrix} \dot{\ell}_d - k_{p_\ell} e_\ell \\ \dot{\varphi}_d - k_{p_\varphi} e_\varphi \\ -k_{p_\theta} e_\theta \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.39)$$

donde  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi}, k_{p_\theta} > 0$  son parámetros de diseño.

### 3.2.3. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{D}$

**Proposición 3.3** Sea el agente líder un robot móvil terrestre tipo omnidireccional y el agente seguidor un robot móvil terrestre tipo diferencial. En este sentido,  $v_{y_F} = 0$ , y el sistema (3.34) se reescribe como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = A(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + \hat{B}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_F, \quad (3.40)$$

donde

$$\hat{B}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & 0 \\ \frac{1}{\ell} \text{sen} \varphi & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$A(\boldsymbol{\eta})$  está definida como en (3.35) con  $\mathbf{v}_L = [v_{x_L} \ v_{y_L} \ w_L]^\top \in \mathbb{R}^3$  como el vector de entradas del agente líder y  $\mathbf{v}_F = [v_{x_F} \ w_F]^\top \in \mathbb{R}^2$  como el vector de entradas del agente seguidor. Considerando como salida del sistema (3.40) a  $\mathbf{h} = [\ell \ \varphi]^\top$ , se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{h}} = A_h(\mathbf{h}, e_\theta)\mathbf{v}_L + B_h(\mathbf{h})\mathbf{v}_F, \quad (3.41)$$

donde

$$A_h(\mathbf{h}, e_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(e_\theta + \varphi) & -\sin(e_\theta + \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell}\sin(e_\theta + \varphi) & -\frac{1}{\ell}\cos(e_\theta + \varphi) & 0 \end{bmatrix}, \quad B_h(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & 0 \\ \frac{1}{\ell}\sin \varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que el determinante de la matriz  $B_h(\mathbf{h})$  está dado por  $\det(B_h(\mathbf{h})) = -\cos \varphi$ , por lo tanto la matriz es invertible para cualquier valor de  $\varphi \neq \pm k\frac{\pi}{2}$ , con  $k$  como cualquier número impar, y es posible diseñar una la ley de control de linealización por realimentación dada por

$$\mathbf{v}_F = B_h^{-1} \left\{ -A_h(\mathbf{h}, e_\theta)\mathbf{v}_L + \begin{bmatrix} \dot{\ell}_d - k_{p_\ell} e_\ell \\ \dot{\varphi}_d - k_{p_\varphi} e_\varphi \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.42)$$

donde  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi} > 0$  son parámetros de diseño. Debido al modelo simplificado del robot tipo diferencial, el control dado por (3.42) está relacionado con solo dos variables de control.

### 3.2.4. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{D}$

**Proposición 3.4** Considere que el agente líder y el agente seguidor son robots móviles terrestres tipo diferencial, por lo que  $v_{y_L} = v_{y_F} = 0$ , y el sistema (3.34) se reescribe como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \bar{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_L + \hat{B}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_F, \quad (3.43)$$

donde  $\bar{A}(\boldsymbol{\eta})$  y  $\hat{B}(\boldsymbol{\eta})$  se definieron anteriormente, con  $\mathbf{v}_L = [v_{x_L} \ w_L]^\top \in \mathbb{R}^2$  como el vector de entradas del agente líder y  $\mathbf{v}_F = [v_{x_F} \ w_F]^\top \in \mathbb{R}^2$  como el vector de entradas del agente seguidor. Considerando la misma salida  $\mathbf{h}$ , el sistema se reescribe como

$$\dot{\mathbf{h}} = \bar{A}_h(\mathbf{h}, e_\theta)\mathbf{v}_L + B_h(\mathbf{h})\mathbf{v}_F, \quad (3.44)$$

donde  $B_h(\mathbf{h})$  queda definida como en (3.41) y

$$\bar{A}_h(\mathbf{h}, e_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(e_\theta + \varphi) & 0 \\ -\frac{1}{\ell}\sin(e_\theta + \varphi) & 0 \end{bmatrix}.$$

Es posible diseñar una la ley de control de linealización por realimentación dada por

$$\mathbf{v}_F = B_h^{-1} \left\{ -\bar{A}_h(\mathbf{h}, e_\theta)\mathbf{v}_L + \begin{bmatrix} \dot{\ell}_d - k_{p_\ell} e_\ell \\ \dot{\varphi}_d - k_{p_\varphi} e_\varphi \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.45)$$

donde  $k_{p_\ell}, k_{p_\varphi} > 0$  son parámetros de diseño. Note que se trata de la misma matriz  $B_h(\mathbf{h})$  que el caso anterior, por lo cual, es no singular para cualquier valor de  $\varphi \neq \pm k\frac{\pi}{2}$ , con  $k$  como cualquier número impar.

**Comentario 3.5** Siguiendo la misma metodología que en la Prueba 3.3, es posible demostrar que el sistema (3.38), con la ley de control (3.39), las coordenadas del error convergen a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ . Además, en el sistema (3.41) con la ley de control (3.42), y en el sistema (3.44) con el control (3.45), los errores  $e_\ell$  y  $e_\varphi$  convergen a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = 0$ .

### 3.3. Comportamiento de cuerpos rígidos

En la Sección 3.2 se demostró que el robot seguidor se mantiene a una distancia y ángulo deseados con respecto al líder. Sin embargo, resulta de interés conocer el comportamiento del robot seguidor. La siguiente Proposición establece otro de los resultados principales de este trabajo.

**Proposición 3.5** Considere que cualquiera de los esquemas líder-seguidor presentados en la Sección 3.2, *i.e.* (3.34) para  $\mathcal{O}-\mathcal{O}$ , (3.38) para  $\mathcal{D}-\mathcal{O}$ , (3.40) para  $\mathcal{O}-\mathcal{D}$  y (3.43) para  $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ , con los controles (3.35), (3.39), (3.42) y (3.45), respectivamente, han alcanzado el estado estable, *i.e.*  $\ell_d \in \mathbb{R}_+$  y  $\varphi_d = 0$ , entonces, cualquiera de los 4 esquemas líder-seguidor emularán el comportamiento cinemático de un cuerpo rígido.

**Prueba 3.5 Caso esquema líder-seguidor  $\mathcal{O}-\mathcal{O}$ .** Considere que el sistema (3.34), con el control (3.35), ha alcanzado el estado estable, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ , entonces, sustituyendo el control (3.35) en (3.25), se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_F &= v_{x_L} \cos(\theta_L - 2\varphi_d) - v_{y_L} \sin(\theta_L - 2\varphi_d) + \ell_d w_L \sin(\theta_F - \varphi_d), \\ \dot{y}_F &= v_{x_L} \sin(\theta_L - 2\varphi_d) + v_{y_L} \cos(\theta_L - 2\varphi_d) - \ell_d w_L \cos(\theta_L - \varphi_d), \\ \dot{\theta}_F &= w_L,\end{aligned}$$

y, seleccionando el ángulo de formación deseado como  $\varphi_d = 0$ , el sistema anterior puede reescribirse como

$$\dot{x}_F = v_{x_L} \cos \theta_L - v_{y_L} \sin \theta_L + \ell_d w_L \sin \theta_L, \quad (3.46a)$$

$$\dot{y}_F = v_{x_L} \sin \theta_L + v_{y_L} \cos \theta_L - \ell_d w_L \cos \theta_L, \quad (3.46b)$$

$$\dot{\theta}_F = w_L. \quad (3.46c)$$

A partir de (3.25) se tiene que  $\dot{x}_L = v_{x_L} \cos \theta_L - v_{y_L} \sin \theta_L$  y  $\dot{y}_L = v_{x_L} \sin \theta_L + v_{y_L} \cos \theta_L$ , por lo que al sustituir en (3.46a) y (3.46b), se tiene que

$$\dot{x}_F = \dot{x}_L + \ell_d w_L \sin \theta_L, \quad (3.47a)$$

$$\dot{y}_F = \dot{y}_L - \ell_d w_L \cos \theta_L, \quad (3.47b)$$

$$\dot{\theta}_F = w_L, \quad (3.47c)$$

Comparando las expresiones (3.47) con (2.5), se concluye que el agente seguidor se moverá de tal manera, que el esquema líder-seguidor conformado por dos robots móviles terrestres tipo omnidireccional, tendrá el mismo comportamiento que un cuerpo rígido.

**Caso esquema líder-seguidor  $\mathcal{D}-\mathcal{O}$ .** Considere que el sistema (3.38) con el control (3.39) ha alcanzado el estado estable, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$ , entonces, sustituyendo el control (3.39) en (3.25), se tiene el siguiente sistema

$$\dot{x}_F = v_L \cos \theta_L + \ell_d w_L \sin(\theta_L - \varphi_d),$$

$$\dot{y}_F = v_L \sin \theta_L - \ell_d w_L \cos(\theta_L - \varphi_d),$$

$$\dot{\theta}_F = w_L,$$

y, seleccionando  $\varphi_d = 0$ , el sistema anterior se reescribe de la siguiente forma

$$\dot{x}_F = v_L \cos \theta_L + \ell_d w_L \sin \theta_L,$$

$$\dot{y}_F = v_L \sin \theta_L - \ell_d w_L \cos \theta_L,$$

$$\dot{\theta}_F = w_L.$$

Note que a partir de (3.26), se tiene que  $\dot{x}_L = v_L \cos \theta_L$ ,  $\dot{y}_L = v_L \sin \theta_L$ ; obteniendo lo siguiente

$$\dot{x}_F = \dot{x}_L + \ell_d w_L \sin \theta_L, \quad (3.50a)$$

$$\dot{y}_F = \dot{y}_L - \ell_d w_L \cos \theta_L, \quad (3.50b)$$

$$\dot{\theta}_F = w_L. \quad (3.50c)$$

Comparando las expresiones (3.50) con (2.5), se concluye que el agente seguidor se moverá de tal manera que el esquema líder-seguidor, conformado por un robot móvil terrestre tipo diferencial y un robot móvil terrestre tipo omnidireccional, respectivamente, tendrá el mismo comportamiento que un cuerpo rígido.

**Caso esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{D}$ .** Considere que el sistema (3.40) con el control (3.42) ha alcanzado el estado estable, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = 0$ , entonces, sustituyendo el control (3.42) en (3.26) se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_F &= (v_{x_L} \cos(e_\theta + \varphi_d) - v_{y_L} \operatorname{sen}(e_\theta + \varphi_d)) \frac{\cos(\theta_L - e_\theta)}{\cos \varphi_d}, \\ \dot{y}_F &= (v_{x_L} \cos(e_\theta + \varphi_d) - v_{y_L} \operatorname{sen}(e_\theta + \varphi_d)) \frac{\operatorname{sen}(\theta_L - e_\theta)}{\cos \varphi_d}, \\ \dot{\theta}_F &= \frac{1}{\ell_d \cos \varphi_d} (v_{x_L} \operatorname{sen} e_\theta + v_{y_L} \cos e_\theta),\end{aligned}$$

y, seleccionando  $\varphi_d = 0$ , entonces, el sistema anterior se reescribe de la siguiente forma

$$\dot{x}_F = (v_{x_L} \cos e_\theta - v_{y_L} \operatorname{sen} e_\theta) \cos(\theta_L - e_\theta), \quad (3.52a)$$

$$\dot{y}_F = (v_{x_L} \cos e_\theta - v_{y_L} \operatorname{sen} e_\theta) \operatorname{sen}(\theta_L - e_\theta), \quad (3.52b)$$

$$\dot{\theta}_F = \frac{1}{\ell_d} (v_{x_L} \operatorname{sen} e_\theta + v_{y_L} \cos e_\theta). \quad (3.52c)$$

A partir de la condición de rodamiento puro, se tiene que  $v_F = \dot{x}_F \cos \theta_F + \dot{y}_F \operatorname{sen} \theta_F$ , donde, al sustituirlos en (3.52a) y (3.52b), se tiene que la velocidad lineal del seguidor está dada por

$$\begin{aligned}v_F &= (v_{x_L} \cos e_\theta - v_{y_L} \operatorname{sen} e_\theta) \cos^2(\theta_L - e_\theta) + (v_{x_L} \cos e_\theta - v_{y_L} \operatorname{sen} e_\theta) \operatorname{sen}^2(\theta_L - e_\theta), \\ &= v_{x_L} \cos e_\theta - v_{y_L} \operatorname{sen} e_\theta,\end{aligned} \quad (3.53)$$

Note que tanto la velocidad lineal, como la angular del agente seguidor, dependen de las velocidades longitudinales y laterales del agente líder, así como de la diferencia entre los ángulos de orientación de ambos agentes. Además, al comparar (3.52c) y (3.53) con (2.11), se puede concluir que el esquema líder seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{D}$  se comporta como el sistema denominado omni-tráiler.

**Caso esquema líder-seguidor  $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ .** Al sustituir el control (3.45) en (3.26), se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_F &= \frac{\cos(\theta_L - e_\theta)}{\cos(e_\varphi + \varphi_d)} v_L \cos(e_\theta + e_\varphi + \varphi_d + k_{p_\ell} e_\ell), \\ \dot{y}_F &= \frac{\operatorname{sen}(\theta_L - e_\theta)}{\cos(e_\varphi + \varphi_d)} v_L \cos(e_\theta + e_\varphi + \varphi_d + k_{p_\ell} e_\ell), \\ \dot{\theta}_F &= \frac{1}{(e_\ell + \ell_d) \cos(e_\varphi + \varphi_d)} (v_L \operatorname{sen}(e_\theta + 2e_\varphi + 2\varphi_d) - k_{p_\ell} e_\ell \operatorname{sen}(e_\varphi + \varphi_d)) - k_{p_\varphi} e_\varphi.\end{aligned}$$

Debido a que se analiza el sistema en estado estable, *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = 0$ , entonces

$$\dot{x}_F = \frac{\cos(\theta_L - e_\theta)}{\cos \varphi_d} v_L \cos(e_\theta + \varphi_d), \quad (3.55a)$$

$$\dot{y}_F = \frac{\operatorname{sen}(\theta_L - e_\theta)}{\cos \varphi_d} v_L \cos(e_\theta + \varphi_d), \quad (3.55b)$$

$$\dot{\theta}_F = \frac{1}{\ell_d \cos \varphi_d} v_L \operatorname{sen}(e_\theta + 2\varphi_d), \quad (3.55c)$$

y, considerando al ángulo de formación deseado como  $\varphi_d = 0$ , entonces el sistema (3.55) se reduce a

$$\dot{x}_F = v_L \cos(\theta_L - e_\theta) \cos e_\theta, \quad (3.56a)$$

$$\dot{y}_F = v_L \sin(\theta_L - e_\theta) \cos e_\theta, \quad (3.56b)$$

$$\dot{\theta}_F = \frac{1}{\ell_d} v_L \sin e_\theta. \quad (3.56c)$$

Note que la velocidad lineal del agente seguidor se puede obtener a partir de (3.56a) y (3.56b) de la siguiente manera,  $v_F = \dot{x}_F \cos \theta_F + \dot{y}_F \sin \theta_F$ ; entonces, al sustituir (3.56a) y (3.56b), se tiene que la velocidad lineal del seguidor está dada por

$$v_F = v_L \cos(\theta_L - \theta_F). \quad (3.57)$$

A partir del Lema 2.1 de la Sección 2.3, y, comparando (3.57) con (2.8) y (3.56c) con (2.7d), uno puede notar que tienen la misma estructura. Esta significa que el esquema líder-seguidor, representado por dos robots móviles terrestres tipo diferencial, emulan el comportamiento cinemático de un 1-tráiler estándar.

□

### 3.4. Esquema líder seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$

En esta Sección se desarrolla el modelo matemático de un esquema líder-seguidor, considerando que el agente líder es un robot móvil terrestre tipo omnidireccional y el agente seguidor es un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor. Posteriormente, se diseña un control que permite al cuadri-rotor mantenerse a una distancia y ángulo con respecto al líder.

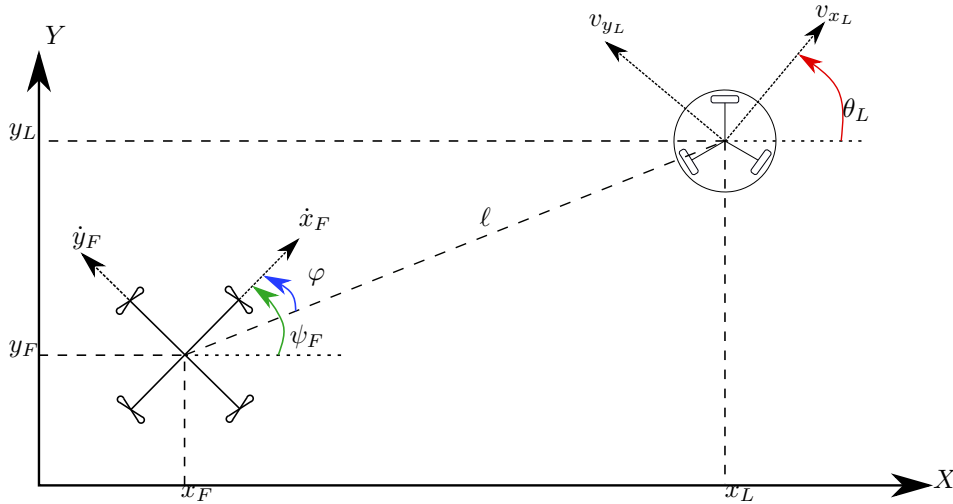


Figura 3.3: Esquema Líder-seguidor con cuadri-rotor como seguidor

De la Figura 3.3 se tienen  $v_{x_L}, v_{y_L}$  como las velocidades longitudinal y lateral del agente líder, respectivamente, siendo  $\theta_L$  el ángulo de orientación, mientras que  $[x_L \ y_L]^\top$  representan la posición del centro geométrico del robot móvil terrestre tipo omnidireccional. Se tiene además, para el agente seguidor,  $[\dot{x}_F \ \dot{y}_F]^\top$  como los estados de velocidad del robot aéreo tipo cuadri-rotor, denotándose la orientación del mismo como  $\psi_F$ , la posición del centro geométrico del robot aéreo tipo cuadri-rotor está dada por  $[x_F \ y_F]^\top$ . Por otro lado, se tiene que  $\ell$  es la distancia, definida en el plano  $X$ - $Y$ , que separa los centros geométricos de ambos robots y  $\varphi$  es el ángulo de formación.

Recuerde que en este esquema, el agente líder es un robot omnidireccional con modelo dado por (3.25). Sustituyendo (3.25), (3.29) y (3.32) en la dinámica (3.31) y (3.33), correspondiente a la dinámica de la distancia entre agentes y el ángulo de formación entre ellos, respectivamente, y asumiendo que  $\theta_F = \psi_F$ , se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{\ell} &= v_{x_L} \cos(\theta_L - \psi_F + \varphi) - v_{y_L} \operatorname{sen}(\theta_L - \psi_F + \varphi) - \dot{x}_F \cos(\psi_F - \varphi) - \dot{y}_F \operatorname{sen}(\psi_F - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \dot{\psi}_F - \frac{1}{\ell} (v_{x_L} \operatorname{sen}(\theta_L - \psi_F + \varphi) + v_{y_L} \cos(\theta_L - \psi_F + \varphi) + \dot{x}_F \operatorname{sen}(\psi_F - \varphi) - \dot{y}_F \cos(\psi_F - \varphi)).\end{aligned}$$

Definiendo el error de distancia como  $e_\ell = \ell - \ell_d$ , el error de ángulo de formación como  $e_\varphi = \varphi - \varphi_d$  y el error de orientación como  $e_\psi = \theta_L - \psi_F$ , entonces, el modelo cinemático del esquema líder-seguidor, en coordenadas del error, está dado por

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta = \check{A}(\mathbf{e}_\eta, \ell_d, \varphi_d) \mathbf{v}_L + \check{B}(\mathbf{e}_\eta, \ell_d, \varphi_d, \theta_L) \mathbf{v}_F \quad (3.58)$$

con

$$\begin{aligned}\check{A} &= \begin{bmatrix} \cos(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) & -\operatorname{sen}(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) & 0 \\ -\frac{1}{e_\ell + \ell_d} \operatorname{sen}(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) & -\frac{1}{e_\ell + \ell_d} \cos(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \check{B} &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & -\operatorname{sen}(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & 0 \\ -\frac{1}{e_\ell + \ell_d} \operatorname{sen}(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & \frac{1}{e_\ell + \ell_d} \cos(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e}_\eta = [e_\ell \ e_\varphi \ e_\psi]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados del sistema,  $\mathbf{v}_L = [v_{x_L} \ v_{y_L} \ w_L]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas del agente líder y  $\mathbf{v}_F = [\dot{x}_F \ \dot{y}_F \ \dot{\psi}_F]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de entradas del agente seguidor.

A partir del modelo dinámico del cuadri-rotor (2.3) y el modelo cinemático (3.58), el modelo matemático de formación se puede expresar como un sistema subactuado  $\Sigma_1$  y un subsistema  $\Sigma_2$  totalmente actuado, es decir

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e}_\ell \\ \dot{e}_\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_e(\mathbf{v}_L, e_\psi, e_\varphi, e_\ell) + G_e(\psi_L, e_\psi, e_\varphi, e_\ell) \begin{bmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \ddot{x}_F \\ \ddot{y}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_z}{m} (\operatorname{sen} \phi_F \operatorname{sen} \psi_F + \cos \phi_F \cos \psi_F \operatorname{sen} \theta_F) \\ \frac{u_z}{m} (-\operatorname{sen} \phi_F \cos \psi_F + \cos \phi_F \operatorname{sen} \psi_F \operatorname{sen} \theta_F) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_F \\ \ddot{\phi}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \dot{e}_\psi = w_L - \dot{\psi}_F, \\ \ddot{\psi}_F = \tau_\psi, \\ \ddot{z}_F = \frac{u_z}{m} (\cos \phi_F \cos \theta_F - g), \end{cases} \quad (3.61)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_e(\mathbf{v}_L, e_\psi, e_\varphi, e_\ell) &= \begin{bmatrix} v_{x_L} \cos(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) - v_{y_L} \operatorname{sen}(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) \\ -\frac{v_{x_L}}{e_\ell + \ell_d} \operatorname{sen}(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) - \frac{v_{y_L}}{e_\ell + \ell_d} \cos(e_\psi + e_\varphi + \varphi_d) + w_L \end{bmatrix}, \\ G_e(\psi_L, e_\psi, e_\varphi, e_\ell) &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & -\operatorname{sen}(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) \\ -\frac{1}{e_\ell + \ell_d} \operatorname{sen}(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) & \frac{1}{e_\ell + \ell_d} \cos(\theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$w_L$  es la velocidad angular del agente líder. En primera instancia, se diseñan las estrategias de control para estabilizar el subsistema  $\Sigma_2$ . En ese sentido se diseñan los controladores para controlar la altura  $z_F$  y el ángulo de guiñada  $\psi_F$ . Específicamente, el control para la altitud y el ángulo de guiñada se obtiene a partir de [21], el cual está basado en un control por modos deslizantes continuo, y está dado por

$$u_z = \frac{m(z_3 - \bar{k}_{z_1}[\nu_z]^{\frac{1}{2}} + g + \ddot{z}_d)}{\cos \theta_F \cos \phi_F}, \quad \dot{z}_3 = -\bar{k}_{z_3}[\nu_z]^0, \quad \dot{\nu}_z = \dot{e}_z + \bar{k}_{z_2}[e_z]^{\frac{2}{3}}, \quad (3.62a)$$

$$\tau_\psi = \dot{w}_L - \dot{\psi}_3 + \bar{k}_{\psi_1}[\nu_\psi]^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\psi}_3 = -\bar{k}_{\psi_3}[\nu_\psi]^0, \quad \dot{\nu}_\psi = \dot{e}_\psi + \bar{k}_{\psi_2}[e_\psi]^{\frac{2}{3}}, \quad (3.62b)$$

donde  $[\cdot]^\alpha = |\cdot|^\alpha \text{sign}(\cdot)$ ,  $e_z = z_F - z_d$ ,  $\dot{e}_\psi = w_L - \dot{\psi}_F$ ,  $m$  es la masa del cuadri-rotor,  $g$  es la constante de gravedad,  $z_d$  es la altura deseada, mientras que  $\bar{k}_{z_i}, \bar{k}_{\psi_i} > 0$  son parámetros de diseño con  $i = 1, 2, 3$ . En el mismo sentido, las entradas de control  $\tau_\theta$  y  $\tau_\phi$  se diseñan a partir de un control por modos deslizantes continuo [21], y están dadas por

$$\tau_\theta = \theta_3 - \bar{k}_{\theta_1}[\nu_\theta]^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\psi}_3 = -\bar{k}_{\theta_3}[\nu_\psi]^0, \quad \dot{\nu}_\psi = \dot{e}_\theta + \bar{k}_{\psi_2}[e_\theta]^{\frac{2}{3}}, \quad (3.63a)$$

$$\tau_\phi = \phi_3 - \bar{k}_{\phi_1}[\nu_\phi]^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\phi}_3 = -\bar{k}_{\phi_3}[\nu_\phi]^0, \quad \nu_\phi = \dot{e}_\phi + \bar{k}_{\phi_2}[e_\phi]^{\frac{2}{3}}, \quad (3.63b)$$

con  $e_\theta = \theta_F - \theta_F^*$ ,  $e_\phi = \phi_F - \phi_F^*$ , donde  $\theta_F^*$  y  $\phi_F^*$  son controles virtuales obtenidos a partir de los movimientos deseados en  $x_F$  y  $y_F$ , mientras que  $\bar{k}_{\theta_i}, \bar{k}_{\phi_i} > 0$  son parámetros de diseño con  $i = 1, 2, 3$ .

**Teorema 3.4** *Sea el control (3.62) aplicado al subsistema  $\Sigma_2$ , entonces, si las ganancias se definen como  $\bar{k}_{z_i}, \bar{k}_{\psi_i} > 0$  con  $i = 1, 2, 3$ , el error de altitud  $e_z$  y el error de guiñada  $e_\psi$  convergen uniformemente y en tiempo finito a cero, para  $t \geq T_\psi$  y  $t \geq T_z$ . Además, considere el control  $\tau_\theta$  y  $\tau_\phi$  aplicados al tercer sistema de (3.60), entonces si las ganancias son  $\bar{k}_{\theta_i}, \bar{k}_{\phi_i} > 0$  con  $i = 1, 2, 3$ , entonces los errores  $e_\theta = \theta_F - \theta_F^*$  y  $e_\phi = \phi_F - \phi_F^*$  convergen a cero uniformemente en tiempo finito, es decir,  $e_\theta = e_\phi = 0$  para todo  $t \geq T_\theta$  y  $t \geq T_\phi$ .*

**Prueba 3.6** El lector es referido a [21].

Debido a que  $e_z = e_\psi = \nu_z = \nu_\psi = 0$  para un tiempo  $T = \max(T_z, T_\psi)$ , entonces,  $\psi_F = \theta_L$ , y, substituyendo el control (3.62a), en la segunda ecuación del subsistema (3.60), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_F \\ \ddot{y}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_3 + g + \ddot{z}_d) \left( \frac{\tan \phi_F \sin \psi_F}{\cos \theta_F} + \tan \theta_F \cos \psi_F \right) \\ (z_3 + g + \ddot{z}_d) \left( \tan \theta_F \sin \psi_F - \frac{\tan \phi_F \cos \psi_F}{\cos \theta_F} \right) \end{bmatrix}.$$

Suponiendo que  $\tan \theta_F \approx \theta_F$  y  $\tan \phi_F \approx \phi_F$  y que  $\theta_F = e_\theta + \theta_F^*$  y  $\phi_F = e_\phi + \phi_F^*$ , entonces la dinámica del cuadri-rotor se reduce a

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_F \\ \ddot{y}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_3 + g + \ddot{z}_d) \left( \frac{\tan \phi_F \sin \psi_F}{\cos \theta_F} + (e_\theta + \theta_F^*) \cos \psi_F \right) \\ (z_3 + g + \ddot{z}_d) \left( \tan \theta_F \sin \psi_F - \frac{(e_\phi + \phi_F^*) \cos \psi_F}{\cos \theta_F} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Debido a que  $e_\theta = e_\phi = 0$ , para  $t \geq T_\theta$  y  $t \geq T_\phi$ , entonces el sistema (3.64) se reescribe como

$$\dot{\zeta} = \tilde{\mathbf{f}}_{xy} + \tilde{\mathbf{G}}_{xy} \tilde{\mathbf{u}}_F, \quad (3.65)$$

con

$$\tilde{\mathbf{f}}_{xy} = \begin{bmatrix} (z_3 + g + \ddot{z}_d) \frac{\tan \phi_F \sin \psi_F}{\cos \theta_F} \\ (z_3 + g + \ddot{z}_d) \tan \theta_F \sin \psi_F \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_{xy} = \begin{bmatrix} (z_3 + g + \ddot{z}_d) \cos \psi_F & 0 \\ 0 & -\frac{(z_3 + g + \ddot{z}_d) \cos \psi_F}{\cos \theta_F} \end{bmatrix},$$

donde  $\zeta = [\dot{x}_F \ \dot{y}_F]^\top$  y  $\tilde{\mathbf{u}}_F = [\theta_F^* \ \phi_F^*]^\top$ . Se diseña un controlador por linealización por realimentación de la forma

$$\tilde{\mathbf{u}}_F = \tilde{G}_{xy}^{-1}(-\tilde{\mathbf{f}}_{xy} + \tilde{\mathbf{u}}_F), \quad (3.66)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}_F = [\bar{\theta}_F \ \bar{\phi}_F]^\top$  son controles auxiliares. Sustituyendo (3.66) en (3.65) y, considerando el primer subsistema de (3.60) se tiene que

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_\eta = \mathbf{f}_e + G_e \zeta, \quad (3.67a)$$

$$\dot{\zeta} = \tilde{\mathbf{u}}_F, \quad (3.67b)$$

donde  $\tilde{\mathbf{e}}_\eta = [e_\ell \ e_\varphi] \in \mathbb{R}^2$ , mientras que  $\mathbf{f}_e$  y  $G_e$ , se definieron anteriormente. Debido a la estructura del sistema (3.67), se procede a diseñar un control, por medio de la técnica de backstepping. Para ello, el primer sistema a estabilizar es el de (3.67a), para lo cual se define  $\zeta = \nu_e$  como entrada de control virtual, y al ser sustituido se tiene que

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_\eta = \mathbf{f}_e + G_e \nu_e, \quad (3.68)$$

se propone entonces la función candidata de Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top \tilde{\mathbf{e}}_\eta$ , cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (3.67a) está dada por

$$\dot{V}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top (\mathbf{f}_e + G_e \nu_e). \quad (3.69)$$

A partir de (3.69) se propone que  $\nu_e = G_e^{-1}(-\mathbf{f}_e - K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta)$ , y al sustituirlo en (3.69) se obtiene

$$\dot{V}_1 = -\tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta$$

con  $K_1 = \text{diag}\{k_{11}, k_{12}\}$ . Posteriormente, se define el error  $\mathbf{z}_\eta = G_e(\zeta - \nu_e)$ , entonces  $\zeta = G_e^{-1} \mathbf{z}_\eta + \nu_e$ , y, sustituyéndolo en (3.67a) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_\eta &= \mathbf{f}_e + G_e(G_e^{-1} \mathbf{z}_\eta + \nu_e), \\ &= \mathbf{f}_e + \mathbf{z}_\eta + G_e \nu_e, \\ &= \mathbf{f}_e + \mathbf{z}_\eta + G_e G_e^{-1}(-\mathbf{f}_e - K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta), \\ &= \mathbf{z}_\eta - K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta. \end{aligned}$$

Por otro lado, la dinámica del error está dada por  $\dot{\mathbf{z}}_\eta = \dot{G}_e(\zeta - \nu_e) + G_e(\dot{\zeta} - \dot{\nu}_e)$  donde

$$\dot{G}_e = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \sin \gamma & -\dot{\gamma} \cos \gamma \\ \frac{(\dot{e}_\ell + \dot{\ell}_d) \sin \gamma - \dot{\gamma} (e_\ell + \ell_d) \cos \gamma}{(e_\ell + \ell_d)^2} & -\frac{(\dot{e}_\ell + \dot{\ell}_d) \cos \gamma + \dot{\gamma} (e_\ell + \ell_d) \sin \gamma}{(e_\ell + \ell_d)^2} \end{bmatrix},$$

con  $\gamma = \theta_L - e_\psi - e_\varphi - \varphi_d$  y  $\dot{\gamma} = w_L - \dot{e}_\psi - \dot{e}_\varphi - \dot{\varphi}_d$ . Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top \tilde{\mathbf{e}}_\eta + \mathbf{z}_\eta^\top \mathbf{z}_\eta)$ , cuya derivada con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.67b), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_\eta + \mathbf{z}_\eta^\top \dot{\mathbf{z}}_\eta, \\ &= \tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top (\mathbf{z}_\eta - K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta) + \mathbf{z}_\eta^\top (\dot{G}_e(\zeta - \nu_e) + G_e(\dot{\zeta} - \dot{\nu}_e)), \end{aligned} \quad (3.70)$$

si se selecciona

$$\tilde{\mathbf{u}}_F = \dot{\nu}_e - G_e^{-1}(\dot{G}_e(\zeta - \nu_e) + K_2 \mathbf{z}_\eta + \tilde{\mathbf{e}}_\eta), \quad (3.71)$$

y se sustituye en (3.70), se tiene que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{e}}_\eta^\top K_1 \tilde{\mathbf{e}}_\eta - \mathbf{z}_\eta^\top K_2 \mathbf{z}_\eta, \quad (3.72)$$

donde  $K_2 = \text{diag}\{k_{21}, k_{22}\}$  es un parámetro de diseño. El análisis anterior, da como resultado el siguiente Teorema.

**Teorema 3.5** *Sea el sistema (3.67) con el control (3.71), entonces, el error de distancia  $e_\ell$  y el error de orientación  $e_\varphi$ , convergen asintóticamente a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\varphi = 0$ .*





## Capítulo 4

# Resultados experimentales y simulaciones numéricas

Este Capítulo presenta los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las leyes de control diseñadas en el Capítulo 3. La primera parte de este Capítulo se describen los diferentes elementos que componen a la plataforma experimental. Posteriormente, se presentan los experimentos relacionados a los diferentes esquemas líder-seguidor ( $\mathcal{O} - \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{D} - \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O} - \mathcal{D}$  y  $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ ) y, finalmente, se presenta una simulación numérica del esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$ .

### 4.1. Plataforma experimental

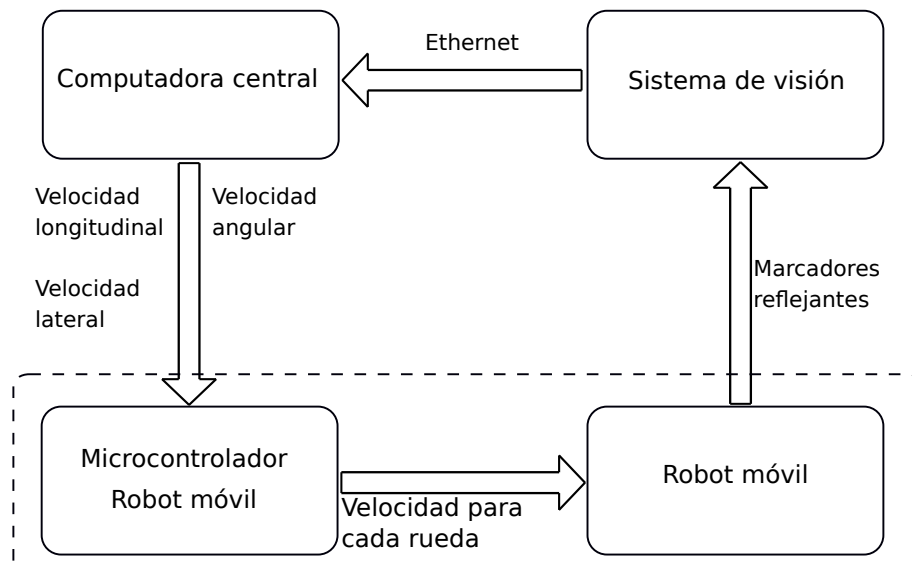


Figura 4.1: Esquema genérico del funcionamiento del sistema.

La validación experimental para algunos esquemas se realizó en el Laboratorio de Análisis de Movimiento, del Departamento de Estudios de Ingeniería e Innovación, de la Universidad Iberoamericana, Campus Ciudad de México. La Figura 4.1 muestra un diagrama esquemático del funcionamiento de la plataforma que se encuentra en dicho laboratorio. Además, el laboratorio cuenta con diferentes

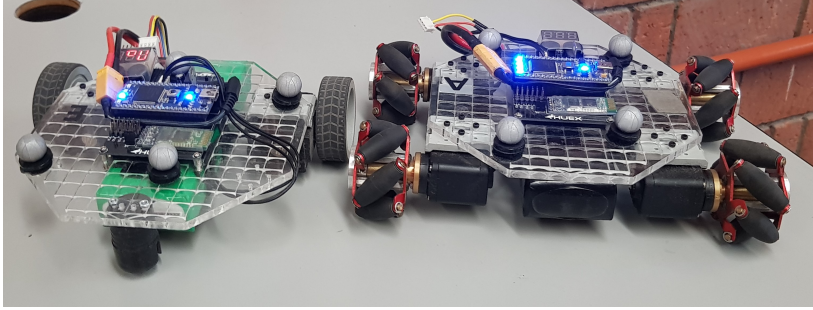


Figura 4.2: Robots tipo unicycle y tipo omnidireccional.

tipos de robots, dentro de los cuales se encuentran los robots móviles terrestres tipo diferencial y los robots móviles terrestres tipo omnidireccional (Figura 4.2), los cuales están actuados por servomotores *Dynamixel AX - 12W*, y son controlados por un microcontrolador *NXP®* modelo *LPC1768*, el cual descompone las señales de velocidad longitudinal, lateral y angular, que recibe de la computadora de control mediante comunicación vía *Bluetooth*, en las señales requeridas por cada rueda del robot para realizar el movimiento deseado. La posición y orientación de cada robot es medido con el sistema de captura de movimiento *Vicon®* conformado por seis cámaras modelo *Bonita®* (Figura 4.3), las cuales detectan los marcadores reflectivos que se colocan en la parte superior de cada robot móvil con que se trabaja y esta información es enviada a la computadora de control mediante comunicación Ethernet, y es utilizada para el cálculo de las acciones de control que se envía a cada robot.



Figura 4.3: Cámara *Bonita®*.

## 4.2. Resultados experimentales

### 4.2.1. Modelo referenciado al agente líder

Se realiza la prueba experimental del controlador (3.14), donde el sistema está conformado por dos robots móviles terrestres tipo diferencial, donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una trayectoria circular, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = -1.5 + 0.75 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad m_y = 0.75 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right),$$

y, cuya ley de control, esta dada por [14], [19]

$$\mathbf{v}_L = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } (x_L, y_L, v_L, \theta_L) \in \mathcal{M}_L, \\ \bar{\mathbf{v}}_L & \text{si } (x_L, y_L, v_L, \theta_L) \in \bar{\mathcal{M}}_L, \end{cases} \quad (4.1)$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_L &= \left\{ (x_L, y_L, v_L, \theta_L) \in \mathbb{R}^2 \mid |v_L| \geq \hat{\delta} \right\}, \\ \bar{\mathcal{M}}_L &= \left\{ (x_L, y_L, v_L, \theta_L) \in \mathbb{R}^2 \mid |v_L| < \hat{\delta} \right\},\end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\nu}_L = \begin{bmatrix} \cos \theta_L & -v_L \sin \theta_L \\ \sin \theta_L & v_L \cos \theta_L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{m}_x - k_{dx_L}(\dot{x}_L - \dot{m}_x) - k_{px_L}(x_L - m_x) \\ \ddot{m}_y - k_{dy_L}(\dot{y}_L - \dot{m}_y) - k_{py_L}(y_L - m_y) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_L = \begin{bmatrix} \dot{v}_{L_d} - k_{pv_L}(v_L - v_{L_d}) \\ \dot{\theta}_{L_d} - k_{p\theta_L}(\theta_L - \theta_{L_d}) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

donde  $m_x$  y  $m_y$  son las trayectorias deseadas en el plano,  $v_L$  es la velocidad longitudinal del agente líder,  $v_{L_d}$  es la velocidad longitudinal deseada,  $w_{L_d}$  es la velocidad angular deseada y  $\theta_{L_d}$  es el ángulo de orientación deseado,  $k_{px_L} = k_{py_L} = 1$ ,  $k_{dx_L} = k_{dy_L} = 1.5$ ,  $k_{pv_L} = k_{p\theta_L} = 5$ , son las ganancias para el controlador del agente líder, las cuales fueron sintonizadas en línea, mientras que el parámetro de conmutación se fijó en  $\hat{\delta} = 0.01$ . La distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor es  $\ell_d = 0.5$  [m] y el ángulo deseado  $\varphi_d = 0$  [rad]. Las ganancias del controlador para el agente seguidor se sintonizaron de manera experimental y están dadas por  $k_{\ell_p} = 100$ ,  $k_{\varphi_p} = 200$ ,  $k_{\ell_d} = 6.5$ ,  $k_{\varphi_d} = 7.5$ ,  $k_{\xi_p} = 5$  y  $k_{\theta_p} = 5$ . Las condiciones iniciales del agente líder son dadas por  $[x_L(0) \ y_L(0) \ \theta_L(0)]^\top = [-0.7713 \ 0.0335 \ 9.2476]^\top$ , mientras que las del agente seguidor están dadas por  $[x_F(0) \ y_F(0) \ \theta_F(0)]^\top = [-0.8125 \ -0.5054 \ 6.2388]^\top$ . La Figura 4.4 ilustra una comparación de las trayectorias en el plano entre el experimento en tiempo real (líneas discontinuas) y la simulación numérica (líneas sólidas) del esquema líder-seguidor. Note que las trayectorias del experimento difieren con respecto a las trayectorias de la simulación. Esto se debe principalmente a elementos no modelados como los efectos de ruido que aparecen en la fricción de las ruedas con respecto al piso, medidas en el sensor, error en los actuadores, entre otros.

El error de distancia y el error de ángulo de formación se presentan en la Figura 4.5, los cuales se mantienen oscilando alrededor de cero. Esto significa que el agente seguidor se mantiene a la distancia y ángulo deseados. Por último, en la Figura 4.6, se muestran las señales de control enviadas a los agentes. Note que al inicio del experimento se presentan algunos sobrepulsos en la velocidad angular, los cuales se deben a las condiciones iniciales y la sintonización de las ganancias del controlador.

#### 4.2.2. Esquema líder seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{O}$

Se realiza la prueba experimental del controlador (3.35), donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una trayectoria circular, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = 0.7 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad m_y = 0.7 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right).$$

La ley de control para el agente líder está dada por

$$\mathbf{v}_L = R(\theta_L)^{-1} \mathbf{u}_{L_a}, \quad (4.4)$$

donde  $R(\theta_L)$  está definida como en (3.25) y  $\mathbf{u}_{L_a}$  es el control que se propone como

$$\mathbf{u}_{L_a} = \begin{bmatrix} \dot{m}_x - k_{px_L}(x_L - m_x) \\ \dot{m}_y - k_{py_L}(y_L - m_y) \\ \dot{\theta}_{L_d} - k_{p\theta_L}(\theta_L - \theta_{L_d}) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde  $m_x$  y  $m_y$  son las trayectorias deseadas en el plano, mientras que  $\theta_{L_d}$  es el ángulo de orientación deseado del agente líder, las ganancias del controlador fueron sintonizadas experimentalmente

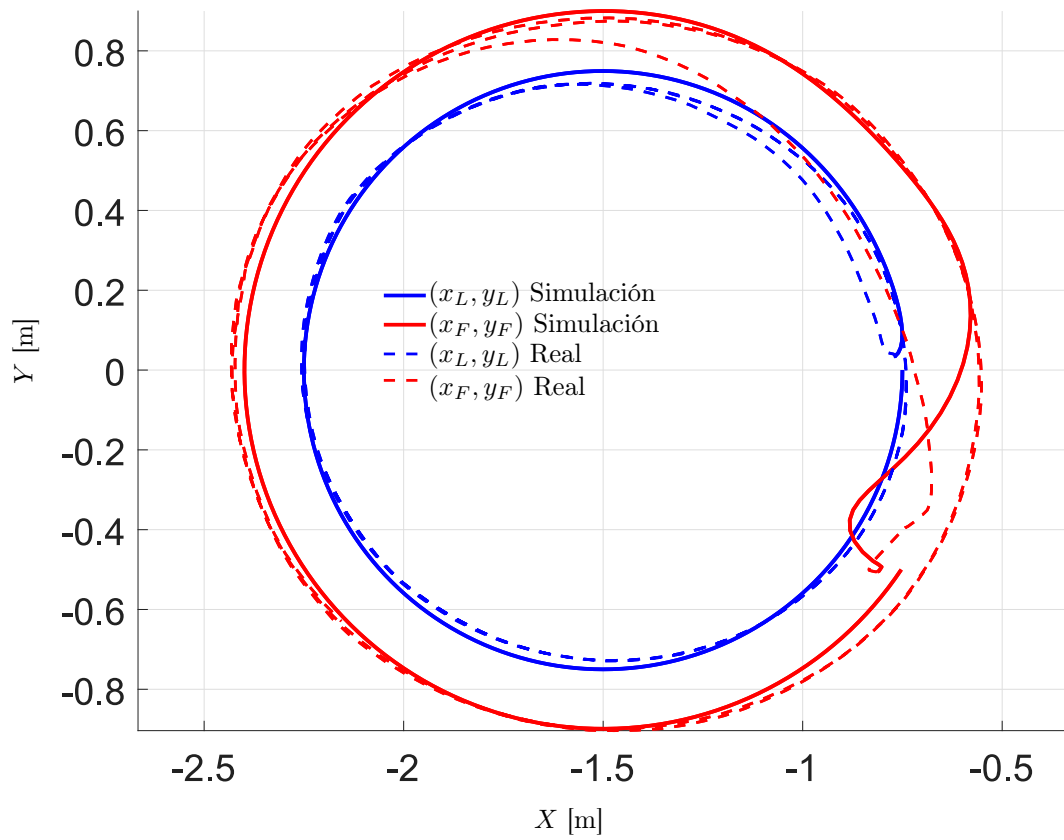


Figura 4.4: Trayectoria en el plano.

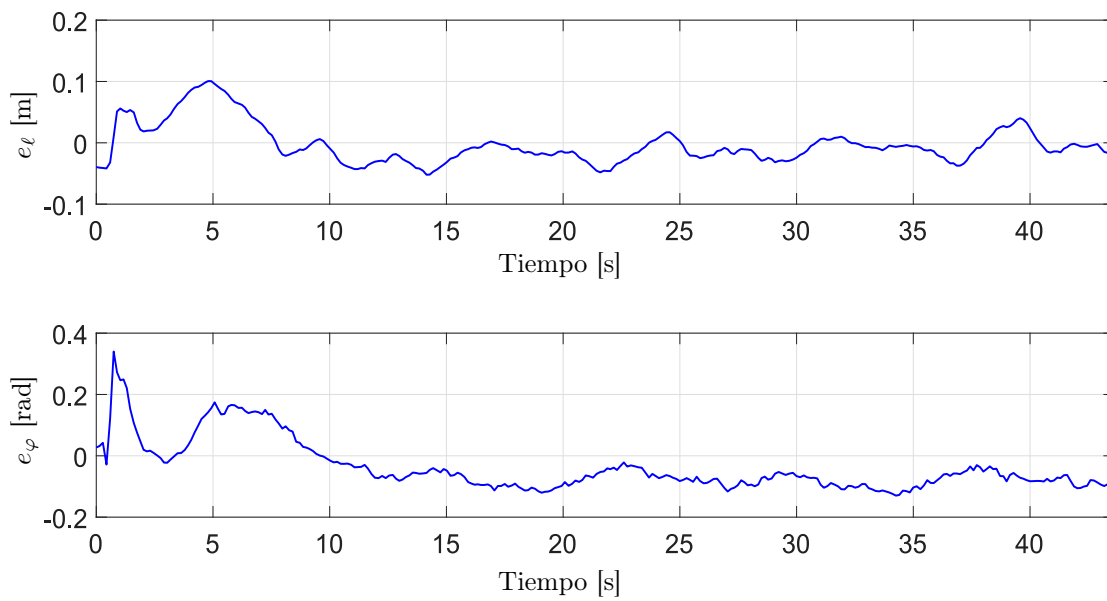


Figura 4.5: Errores de distancia y ángulo.

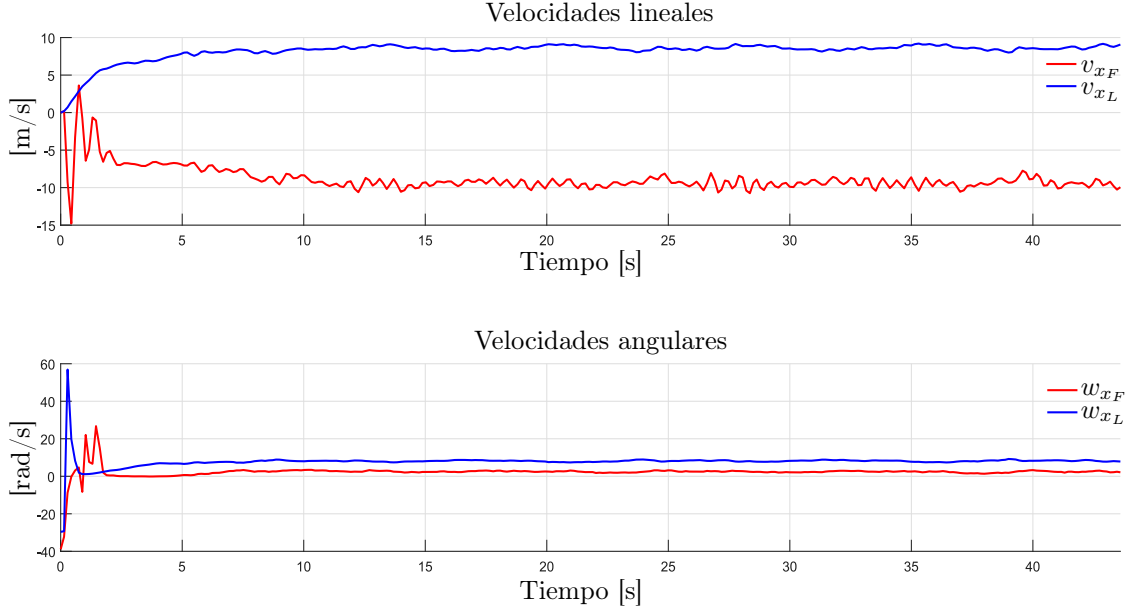


Figura 4.6: Entradas de control.

y están dadas por  $k_{px_L} = k_{py_L} = 0.1$  y  $k_{p\theta_L} = 0.02$ . La distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor es de  $\ell_d = 0.35$  [m] y el ángulo deseado como  $\varphi_d = \theta_L$  [rad]. Las ganancias del controlador del agente seguidor se sintonizaron experimentalmente y están dadas por  $k_{p\epsilon} = 0.25$ ,  $k_{p\varphi} = 0.07$  y  $k_{p\theta} = 0.07$ . Siendo las condiciones iniciales del agente líder dadas por  $[x_L(0) \ y_L(0) \ \theta_L(0)]^\top = [0.4455 \ -0.0321 \ -0.0200]^\top$ , mientras que para el agente seguidor están dadas por  $[x_F(0) \ y_F(0) \ \theta_F(0)]^\top = [0.3677 \ -0.4189 \ -0.5157]^\top$ . La Figura 4.7 presenta una comparación de las trayectorias en el plano entre el experimento en tiempo real (líneas discontinuas) y una simulación numérica (líneas solidas), del esquema líder-seguidor  $\mathcal{O} - \mathcal{O}$ , mientras que en la Figura 4.8 muestra el error de distancia y el error de ángulo de formación, los cuales oscilan alrededor de cero, lo que implica que el agente seguidor se mantiene a la distancia y ángulo deseado con respecto al líder. Por último, la Figura 4.9 ilustra las señales de control para ambos agentes. Al igual que en el caso anterior, se aprecian algunos sobreimpulsos al inicio del experimento, lo cual se debe a las condiciones iniciales y a la sintonización de las ganancias del controlador.

### 4.2.3. Esquema líder seguidor $\mathcal{D} - \mathcal{O}$

Se realiza la prueba experimental del controlador (3.39), donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una trayectoria circular, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = -1.5 + 0.7 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad m_y = 0.7 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right).$$

Para este caso, la ley de control para el agente líder está dada por [59]

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} \cos \theta_L & \alpha \sin \theta_L \\ \sin \theta_L & \alpha \cos \theta_L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{m}_x - k_{px_{Lc}}(x_L - m_x) \\ \dot{m}_y - k_{py_{Lc}}(y_L - m_y) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

donde  $m_x$  y  $m_y$  son las trayectorias deseadas en el plano, y  $k_{px_{Lc}} = k_{py_{Lc}} = 50$  son las ganancias del controlador del agente líder, las cuales se sintonizaron durante la experimentación, en este caso,

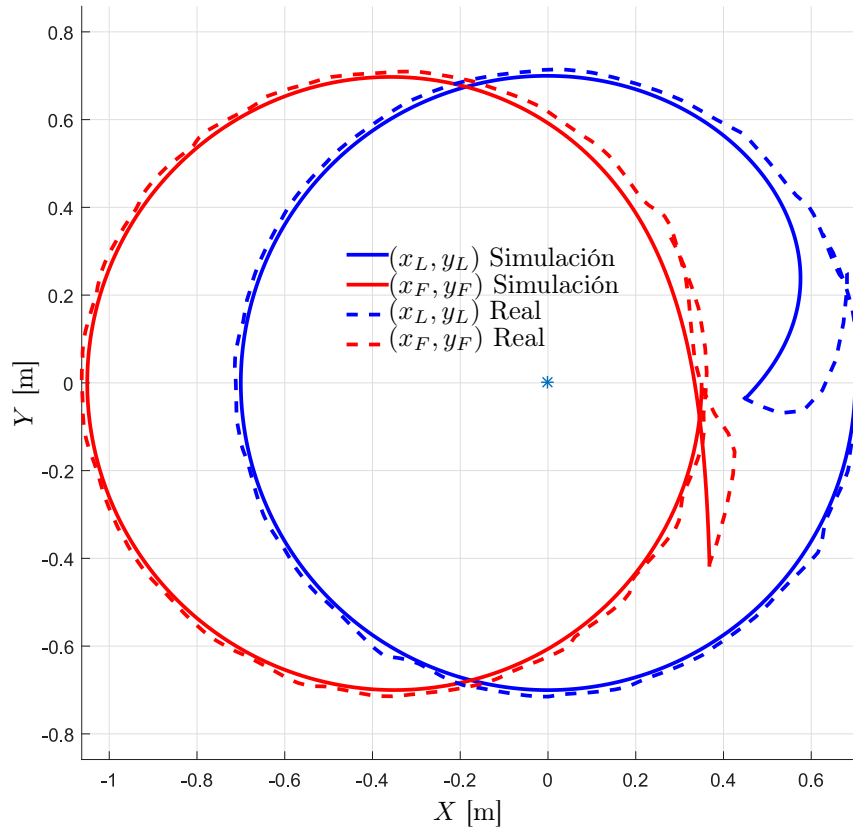


Figura 4.7: Trayectoria en el plano.

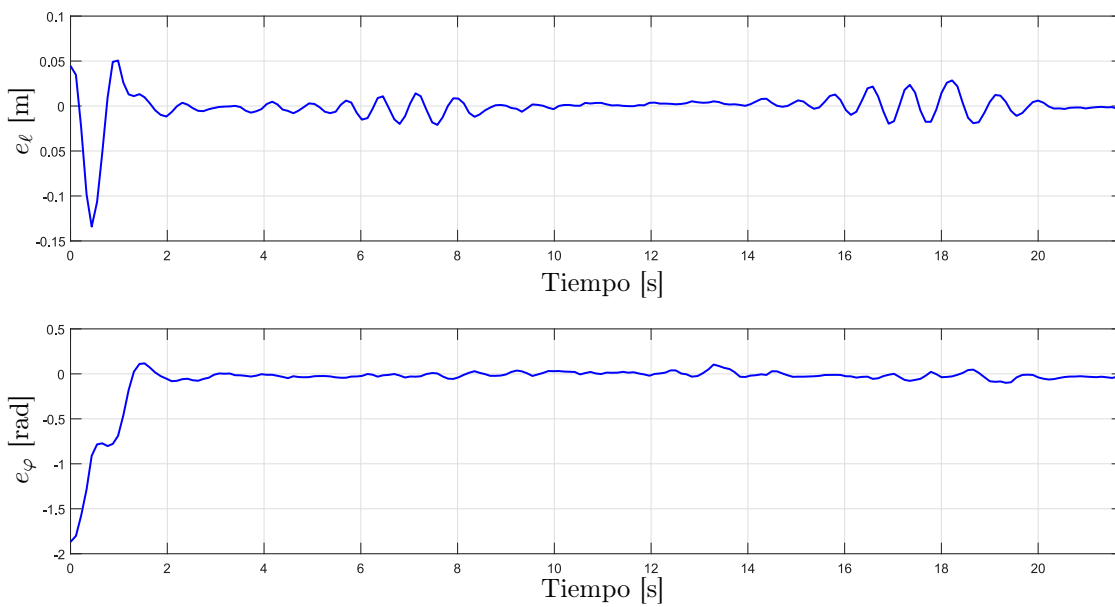


Figura 4.8: Errores de distancia y ángulo.

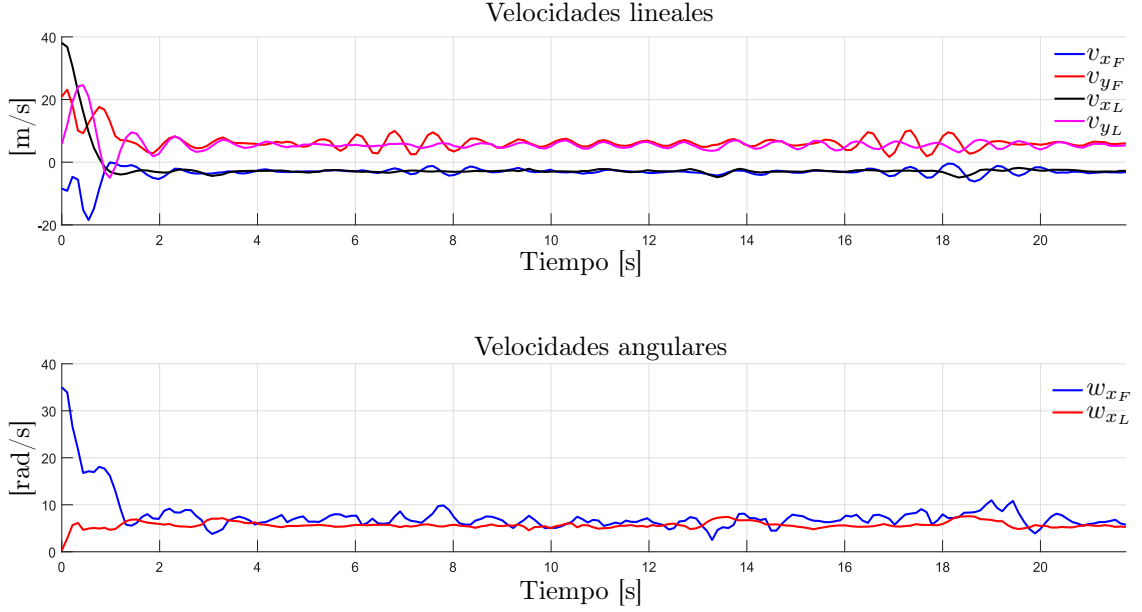


Figura 4.9: Entradas de control.

se controla el punto frontal del punto medio del eje de las ruedas, el cual está dado por  $\alpha = 0.05$  [m]. La distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor de  $\ell_d = 0.5$  [m] y el ángulo deseado como  $\varphi_d = 0$  [rad]. Las ganancias del controlador del agente seguidor se sintonizaron experimentalmente y están dadas por  $k_{p\ell} = 85$ ,  $k_{p\varphi} = 7.5$  y  $k_{p\theta} = 7.5$ . Siendo las condiciones iniciales del agente líder dadas por  $[x_L(0) \ y_L(0) \ \theta_L(0)]^\top = [-0.9295 \ 0.0012 \ -0.0853]^\top$ , mientras que para el agente seguidor están dadas por  $[x_F(0) \ y_F(0) \ \theta_F(0)]^\top = [0.9215 \ -0.7410 \ 0.0048]^\top$ . La Figura 4.10 presenta una comparación de las trayectorias en el plano entre el experimento en tiempo real (líneas discontinuas) y una simulación numérica (líneas solidas), del esquema líder-seguidor  $\mathcal{D} - \mathcal{O}$ , mientras que en la Figura 4.11 muestra el error de distancia y el error de ángulo de formación, los cuales oscilan alrededor de cero, lo que implica que el agente seguidor se mantiene a la distancia y ángulo deseado con respecto al líder. Por último, la Figura 4.12 ilustra las señales de control para ambos agentes. Al igual que en el caso anterior, se aprecian algunos sobreimpulsos al inicio del experimento, lo cual se debe a las condiciones iniciales y a la sintonización de las ganancias del controlador.

#### 4.2.4. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{D}$

Se realizó la prueba experimental del controlador (3.42), donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una trayectoria circular, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = -1.5 + 0.75 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad m_y = 0.75 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right).$$

El controlador utilizado en esta prueba experimental es el dado en (4.4), mientras que la distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor es de  $\ell_d = 0.5$  [m] y el ángulo deseado de formación es de  $\varphi_d = 0$  [rad]. Las ganancias del controlador se sintonizaron experimentalmente y están dadas por  $k_{p\ell} = 70$  y  $k_{p\varphi} = 525$ . Siendo las condiciones iniciales del agente líder dadas por  $[x_L(0) \ y_L(0) \ \theta_L(0)]^\top = [-0.8207 \ 0.0129 \ 0.0100]^\top$ , mientras que para el agente seguidor están dadas por  $[x_F(0) \ y_F(0) \ \theta_F(0)]^\top = [-0.8105 \ -0.5492 \ -0.0852]^\top$ . La Figura 4.13 ilustra una



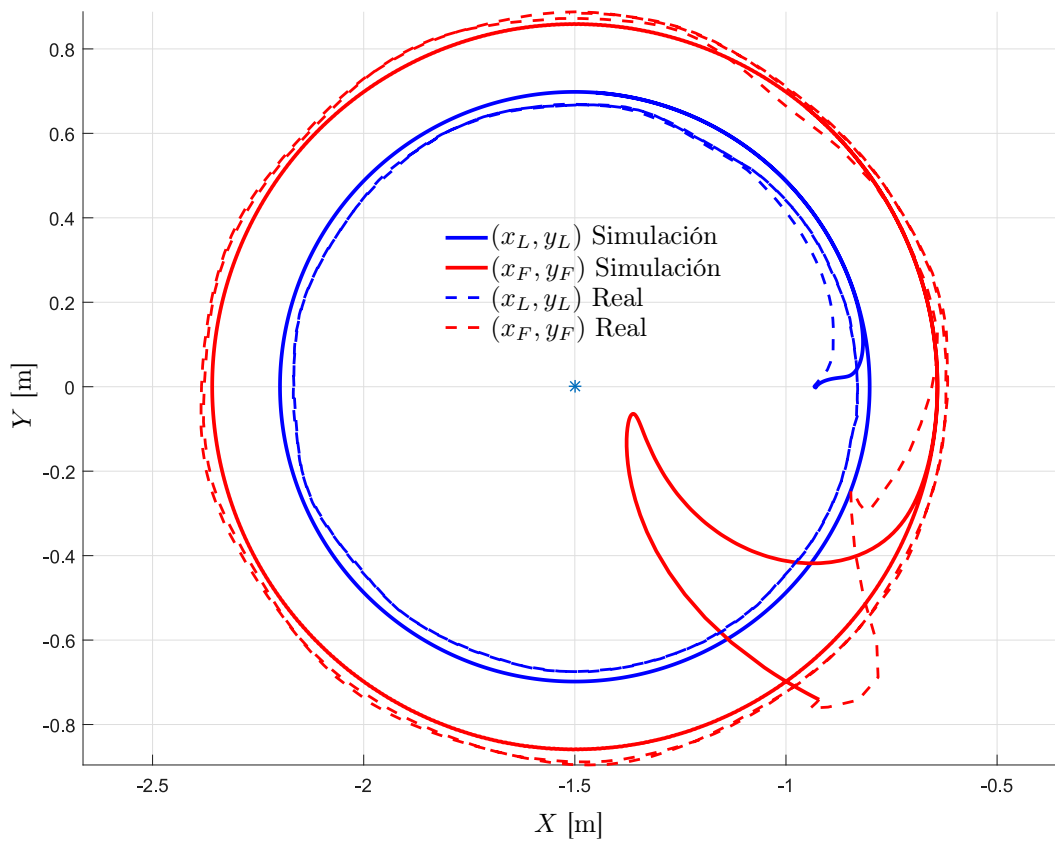


Figura 4.10: Trayectoria en el plano.

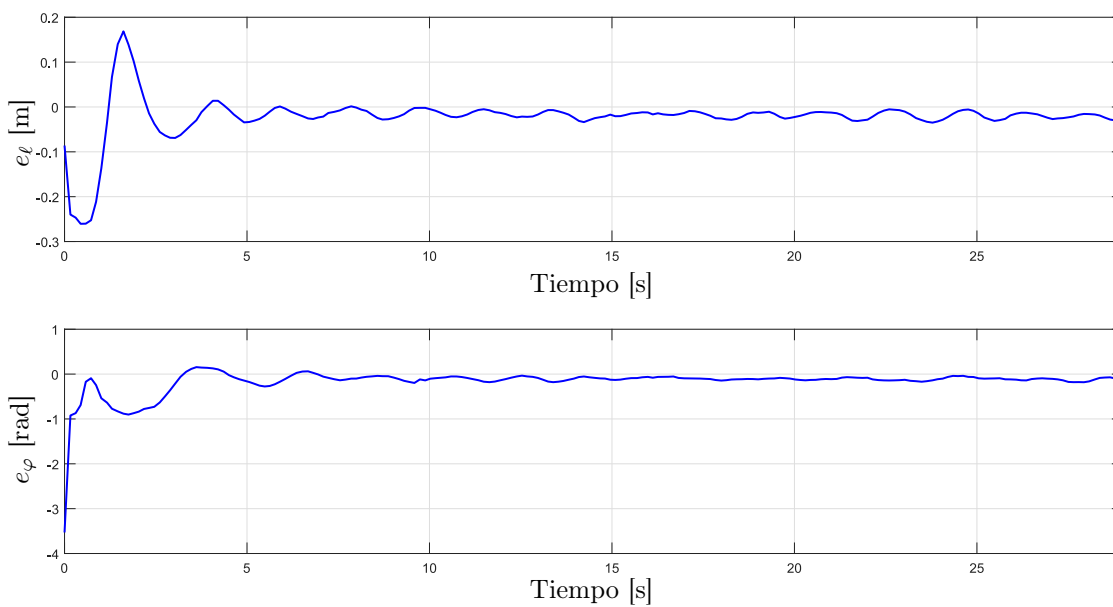


Figura 4.11: Errores de distancia y ángulo.

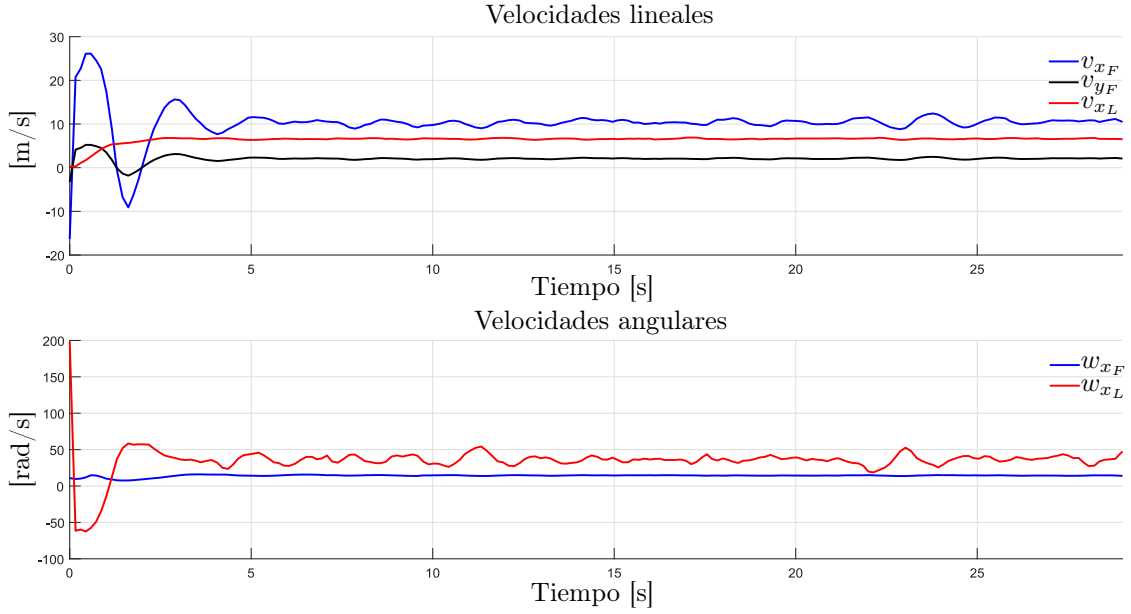


Figura 4.12: Entradas de control.

comparación de las trayectorias en el plano entre el experimento en tiempo real (líneas discontinuas) y las obtenidas mediante la simulación numérica (líneas continuas), del esquema líder-seguidor  $\mathcal{O}-\mathcal{D}$ , mientras que en la Figura 4.14 se presentan los errores de distancia y ángulo de formación, los cuales oscilan alrededor del cero, lo que implica que el agente seguidor se mantiene a la distancia y ángulo deseado con respecto al líder. Por último, en la Figura 4.15 ilustra las señales de control para ambos agentes, las cuales muestran un sobreimpulso al inicio del experimento debido a las condiciones iniciales y la sintonización de las ganancias del controlador.

#### 4.2.5. Esquema líder-seguidor $\mathcal{D}-\mathcal{D}$

Se realiza la prueba experimental del controlador (3.45), donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una trayectoria circular, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = -1.5 + 0.75 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad m_y = 0.75 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right).$$

El controlador que se utiliza para el agente líder es el dado en (4.6), mientras que la distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor es de  $\ell_d = 0.5$  [m] y el ángulo deseado de formación de  $\varphi = 0$  [rad]. Las ganancias del controlador para el agente seguidor se sintonizaron experimentalmente y están dadas por  $k_{p_\ell} = 50$  y  $k_{p_\varphi} = 250$ . Siendo las condiciones iniciales del agente líder dadas por  $[x_L(0) \ y_L(0) \ \theta_L(0)]^\top = [-0.2561 \ 0.6073 \ 0.2182]^\top$ , mientras que para el agente seguidor están dadas por  $[x_F(0) \ y_F(0) \ \theta_F(0)]^\top = [0.0373 \ -0.1519 \ -0.4809]^\top$ . La Figura 4.16 ilustra una comparación de las trayectorias en el plano de los resultados obtenidos en el experimento en tiempo real (líneas discontinuas) y las trayectorias obtenidas al realizar la simulación numérica (líneas sólidas), del esquema líder-seguidor  $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ , mientras que la Figura 4.17 muestra los errores de distancias y ángulo de formación, los cuales oscilan alrededor de cero, lo que significa que el agente líder se mantiene a la distancia y ángulo de formación deseado con respecto al agente líder. Por último, la Figura 4.18 ilustra las señales de control del agente seguidor, las cuales tienen un sobreimpulso al inicio del experimento en tiempo real debidos a las condiciones iniciales y la sintonización de las ganancias del controlador.

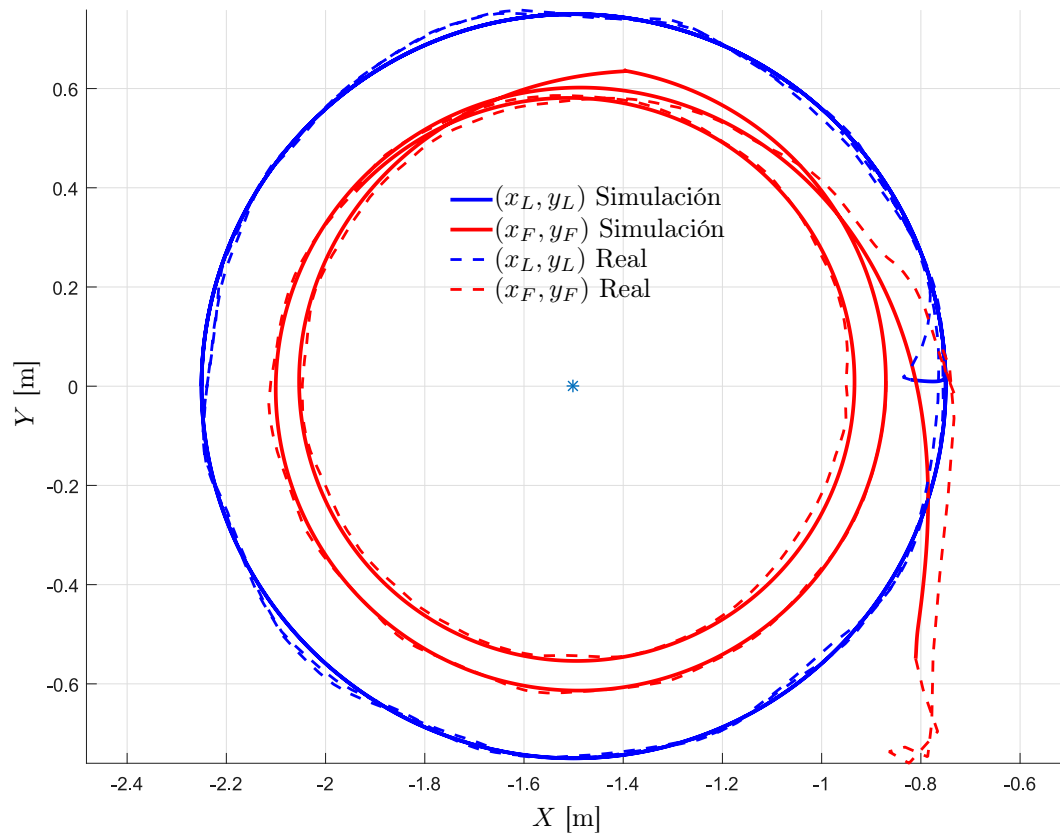


Figura 4.13: Trayectoria en el plano.

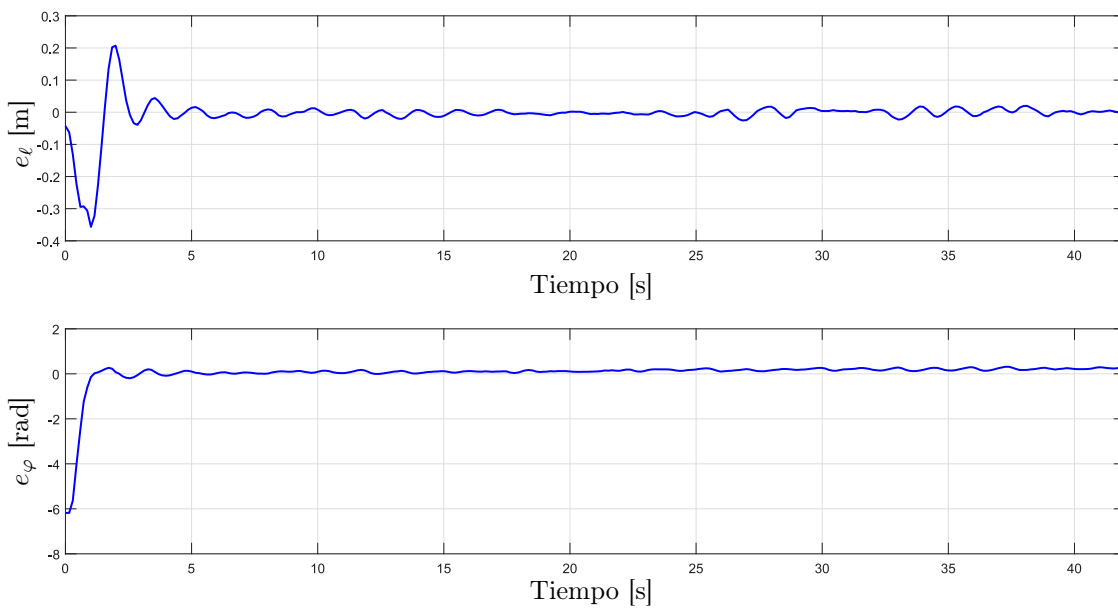


Figura 4.14: Errores de distancia y ángulo.

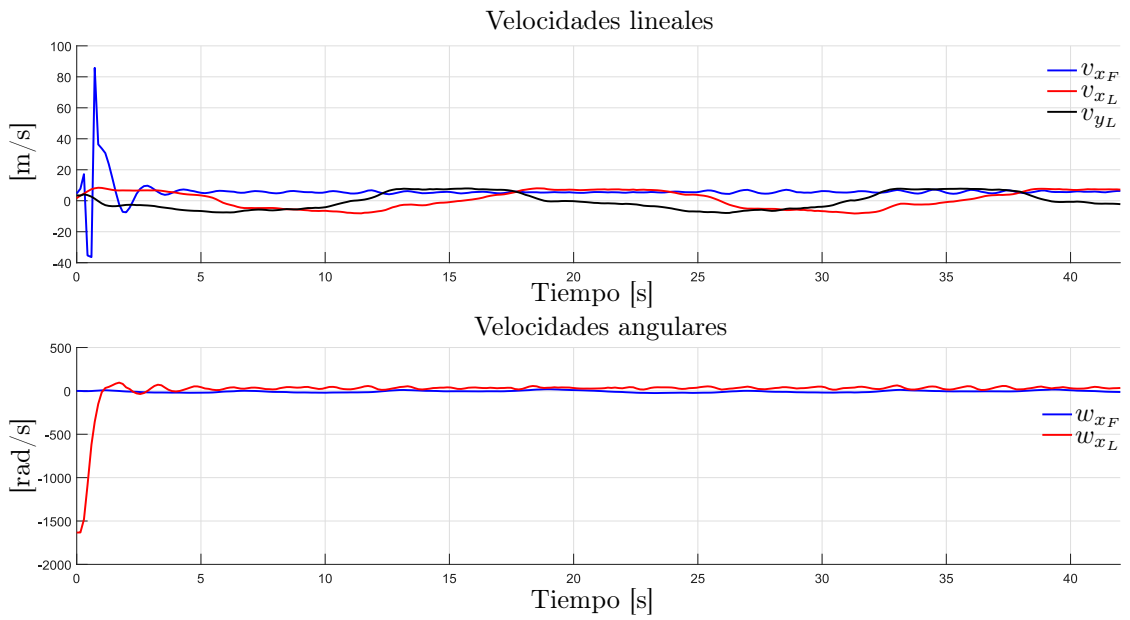


Figura 4.15: Entradas de control.

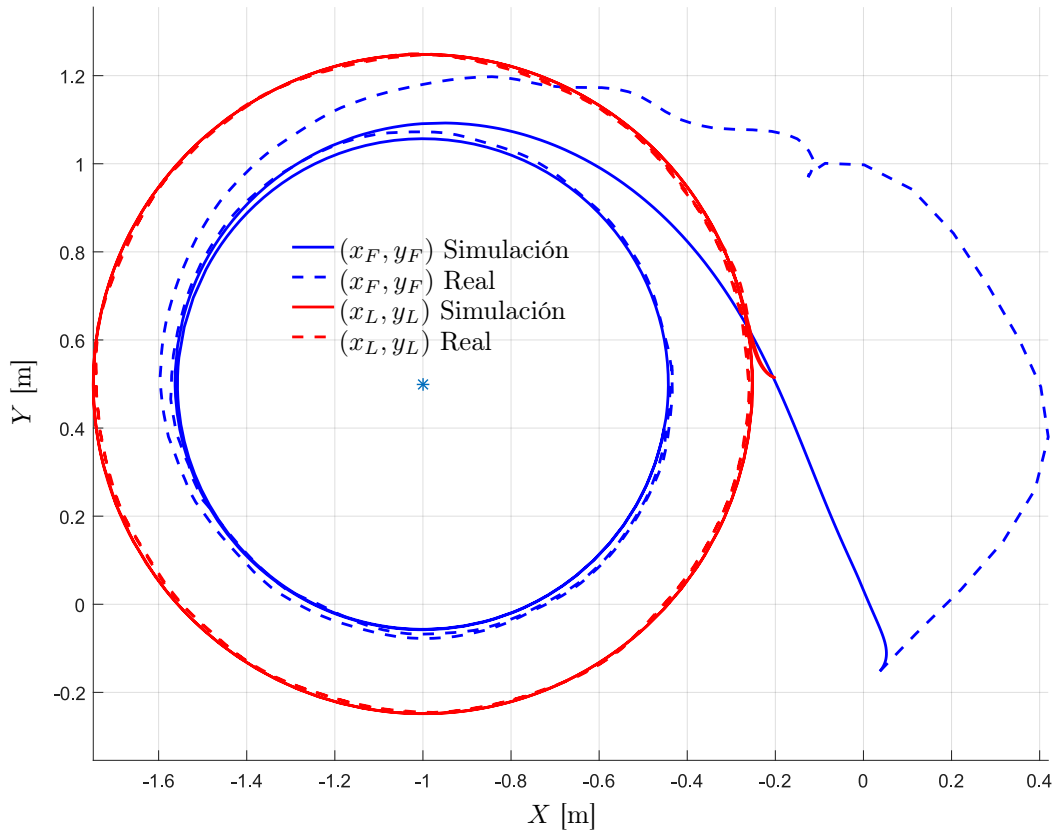


Figura 4.16: Trayectoria en el plano.

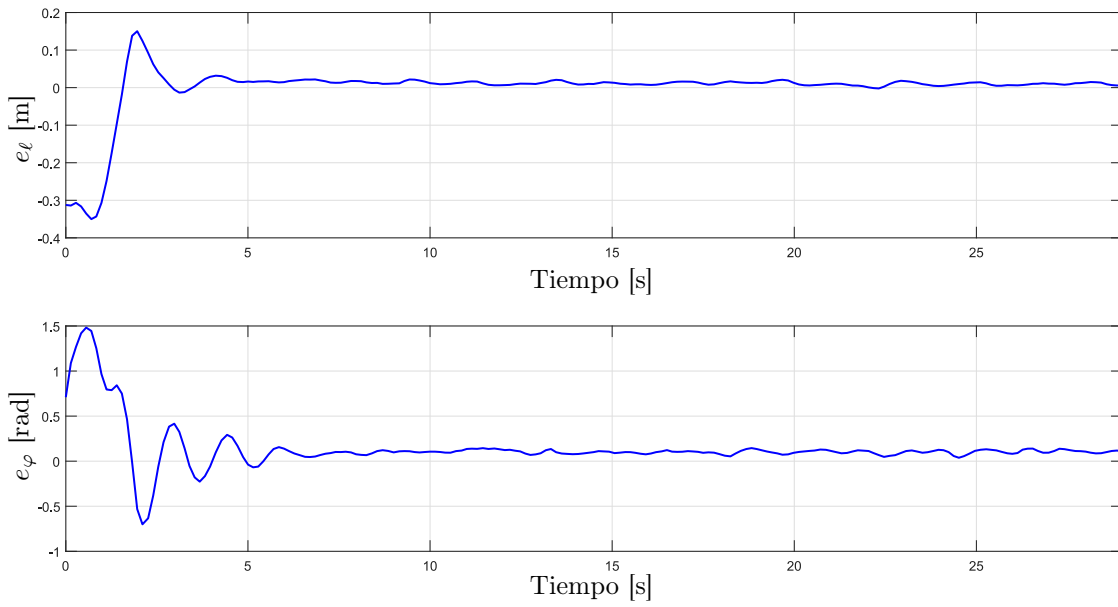


Figura 4.17: Errores de distancia y ángulo.

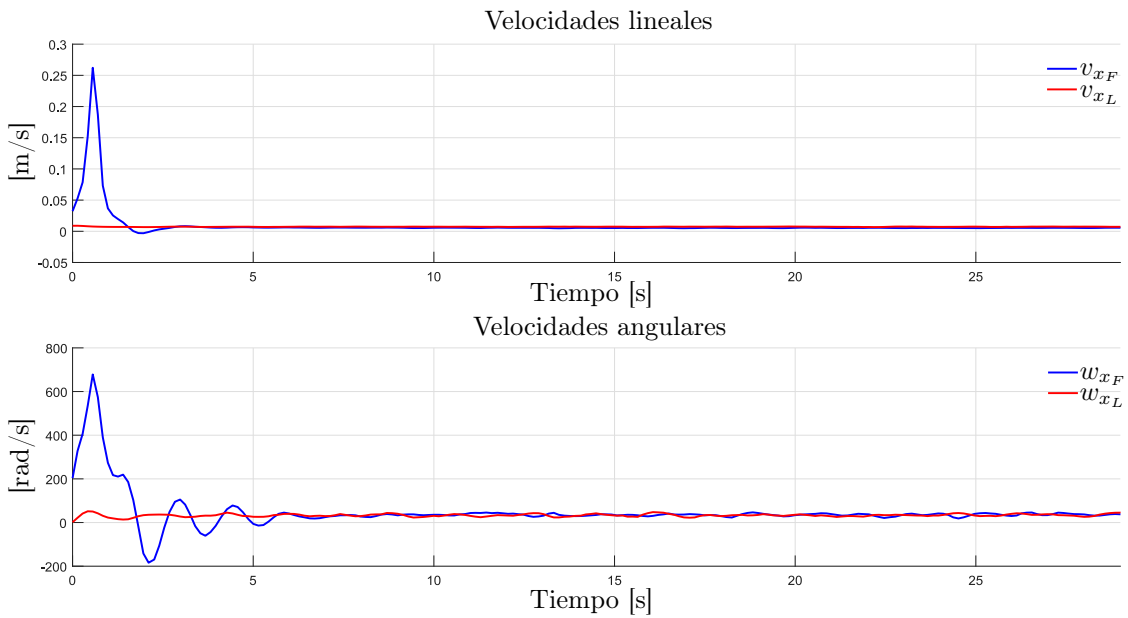


Figura 4.18: Entradas de control.

## 4.3. Simulaciones numéricas

### 4.3.1. Esquema líder-seguidor $\mathcal{O} - \mathcal{Q}$

Se realiza la simulación numérica de los controladores mostrados en (3.62), (3.63) y (3.71), donde el agente líder  $R_L$  es controlado para seguir una lemniscata, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$m_x = 0.5 \cos(0.1t), \quad m_y = 0.25 \sin(0.2t).$$

Para el agente líder se utiliza el controlador mostrado en (4.4), la distancia deseada a la que debe permanecer el agente seguidor  $\ell_d = 1.5$  [m] y el ángulo deseado  $\varphi_d = \frac{\pi}{4}$  [rad], las ganancias del controlador del agente seguidor se seleccionan como  $\bar{k}_{z_1} = 3$ ,  $\bar{k}_{z_2} = \bar{k}_{z_3} = 1$ ,  $\bar{k}_{\psi_1} = 5$ ,  $\bar{k}_{\psi_2} = 2$ ,  $\bar{k}_{\psi_3} = 1$ ,  $K_1 = \text{diag}\{10, 1\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{10, 5\}$ ,  $\bar{k}_{\theta_1} = 5$ ,  $\bar{k}_{\theta_2} = 2$ ,  $\bar{k}_{\theta_3} = 1$ ,  $\bar{k}_{\phi_1} = 5$ ,  $\bar{k}_{\phi_2} = 2$  y  $\bar{k}_{\phi_3} = 1$ , estas ganancias fueron sintonizadas durante la simulación. Siendo las condiciones iniciales del agente líder dadas por  $[x_L(0) \quad y_L(0) \quad \theta_L(0)]^\top = [0.4000 \quad 0 \quad 0.1]^\top$ , mientras que las condiciones iniciales para el agente seguidor son dadas por  $x_F(0) = 0.5$  [m],  $y_F(0) = 0$  [m],  $z_F(0) = 0$  [m],  $\psi_F(0) = 0.1$  [rad],  $\theta_F(0) = 0$  [rad],  $\phi_F(0) = 0$  [rad]. La Figura 4.19 ilustra las trayectorias obtenidas mediante la simulación numérica del controlador, donde se observa que el agente seguidor se forma a la distancia y ángulo de formación deseados. La Figura 4.20 muestra la evolución de la distancia y ángulo de formación, los cuales convergen a su valor deseado, lo que significa que el agente seguidor se forma a una distancia y ángulo deseados con respecto del agente líder. La Figura 4.21 ilustra los movimientos que realizan los ángulos  $\theta_F$  y  $\phi_F$ , necesarios para realizar la trayectoria deseada en el plano  $X - Y$ , los cuales son obtenidos por el control virtual realizado mediante la metodología de backstepping. Además, es importante mencionar que el ángulo de guiñada del cuadri-rotor  $\psi_F$  converge al ángulo de orientación del agente líder  $\theta_L$ . Por último la Figura 4.22 muestra como la altura del cuadri-rotor alcanza el valor deseado.

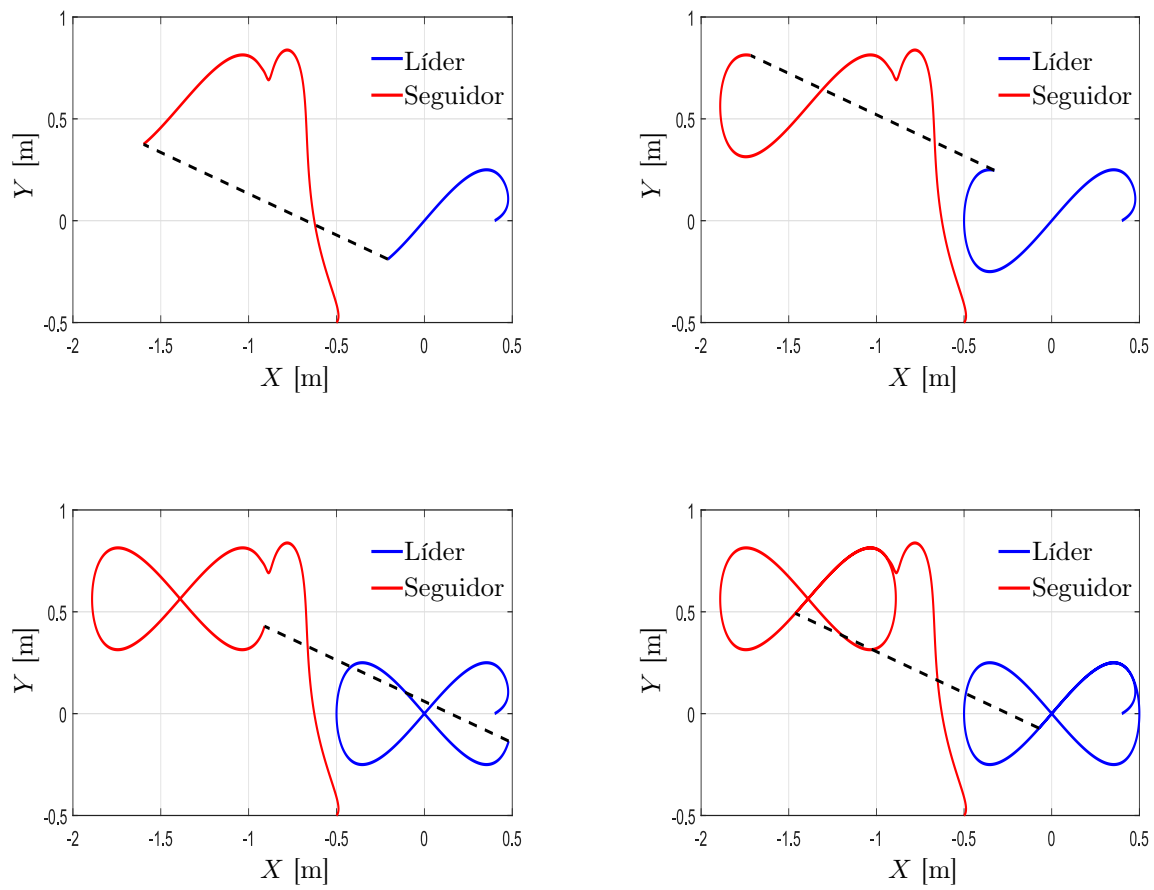


Figura 4.19: Movimiento de ambos agentes en el plano.

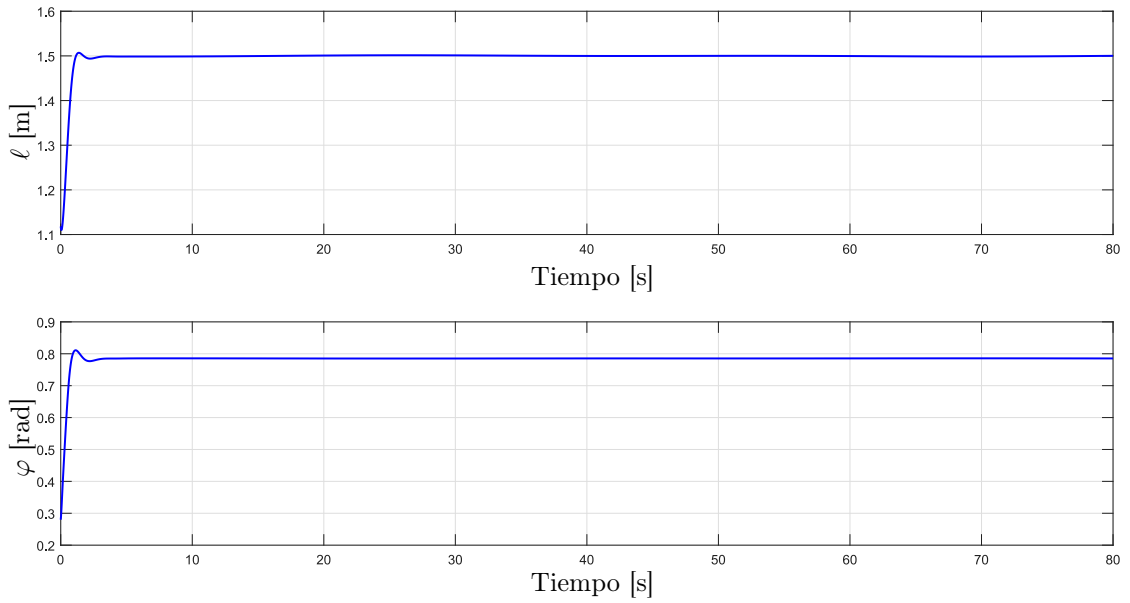


Figura 4.20: Distancia y ángulo de formación.

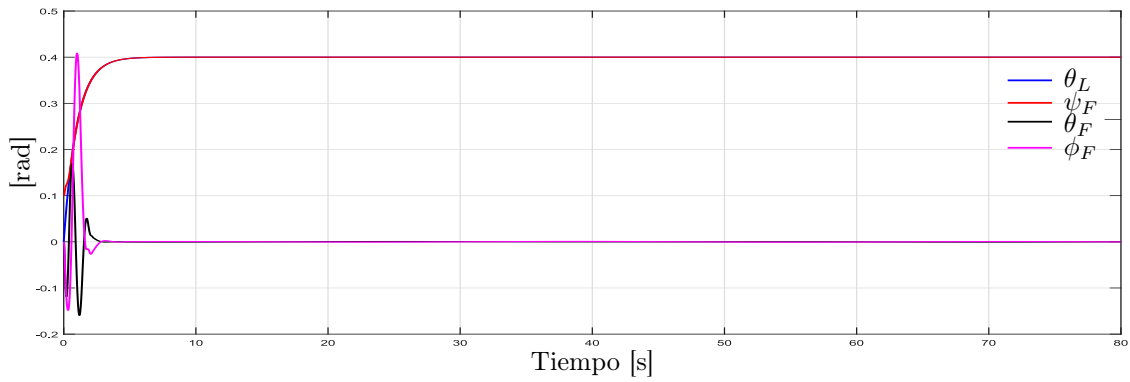


Figura 4.21: Ángulos de orientación del agente líder y agente seguidor.

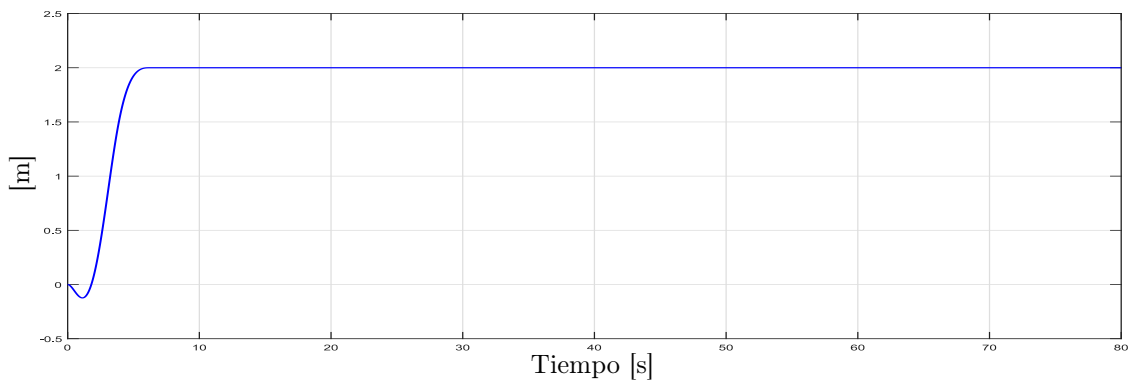


Figura 4.22: Altura del *Quad-Rotor*.





## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se desarrolló el estudio de un modelo matemático, basado en distancia y ángulo entre agentes, de un sistema multi-agente heterogéneo conformado por robots móviles terrestres tipo omnidireccional y diferencial, además de un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor, bajo el esquema líder-seguidor.

En primera instancia, dicho modelo se obtuvo para dos robots móviles tipo diferencial, considerando que el ángulo de formación se mide a partir del marco inercial del robot líder. Para el diseño de la ley de control, se utilizó la técnica de linealización por retroalimentación dinámica, la cual permite al agente seguidor mantenerse a una distancia y ángulo deseado con respecto al líder. La desventaja que presenta este esquema radica en que es necesario conocer la aceleración angular del agente líder. Sin embargo, se demostró que, si la aceleración angular del agente líder está acotada, entonces, el sistema, compuesto por los errores de distancia y ángulo, convergerán a una región dada por la cota superior de la aceleración angular.

Posteriormente, el modelo se obtuvo para dos robots móviles terrestres tipo omnidireccional, considerando que el ángulo de formación se mide a partir del marco inercial del robot seguidor. A partir de este modelo, y considerando que la velocidad lateral de cualquiera de los robots móviles terrestres tipo omnidireccional es cero, se obtuvieron 4 esquemas líder-seguidor

- Esquema  $\mathcal{O} - \mathcal{O}$
- Esquema  $\mathcal{O} - \mathcal{D}$
- Esquema  $\mathcal{D} - \mathcal{O}$
- Esquema  $\mathcal{D} - \mathcal{D}$

La estrategia de control se diseñó utilizando el enfoque de linealización por retroalimentación. De esta manera, el agente seguidor se mantiene a una distancia y ángulo deseado con respecto al líder. Además, se prueba que, en estado estable, los agentes logran emular el comportamiento cinemático de cuerpos rígidos, del 1-tráiler estándar o del omni-tráiler.

Finalmente, se obtuvo el modelo matemático basado en distancia y ángulo para un esquema líder-seguidor conformado por un robot móvil terrestre tipo omnidireccional y un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadri-rotor. Se utilizó un enfoque por modos deslizantes para controlar la altura, el ángulo de guiñada, el ángulo de alabeo y el ángulo de cabeceo del cuadri-rotor, mientras que la técnica de Backstepping se utilizó para controlar la distancia y ángulo de formación entre el cuadri-rotor y el robot omnidireccional.

Como trabajo futuro se tiene planeado extender los modelos referidos al marco inercial del agente seguidor al caso de  $n$  agentes. Se tiene además planeado el diseño de nuevos algoritmos de control con diferentes estrategias, con el fin de resolver el problema de singularidad que se presenta en

algunos controladores diseñados en este trabajo. Por otro lado, se estudiarán los temas relacionados con la estabilidad de sistemas conmutados para realizar la prueba de estabilidad del controlador del sistema referido al marco inercial del robot líder. Además, abordar el problema cuando la distancia y el ángulo de formación sean variantes en el tiempo.

# Apéndice A

## Producción académica

### Congresos nacionales

- **J. González Sierra, E. Aranda-Bricaire and O. González-Medina.** *Parking task for an emulated trailer through a heterogeneous multi-agent robot system.* Memorias del XX Congreso Mexicano de Robótica, Ensenada, Baja California, México, Septiembre, 2018.
- **O. González Medina, J. González-Sierra, A. Dzul, E.G. Hernández-Martínez and P. Paniagua-Contro.** *Modelado y control de un esquema líder-seguidor basado en distancia y ángulo.* Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, Octubre, 2018.

### Revistas JCR

- **H. Ríos, R. Falcón, O. González and A. Dzul.** *Continuous sliding-modes control strategies for Quad-Rotor robust tracking: Real-time application.* IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 66, No. 2, pages 1264-1272, 2019.
- **P. Paniagua-Contro, E.G. Hernandez-Martinez, O. González-Medina, J. González-Sierra, J.J. Flores-Godoy, E.D. Ferreira-Vazquez and G. Fernandez-Anaya.** *Extension of leader-follower behaviors for wheeled mobile robots in multi-robot coordination.* Aceptado en Mathematical Problems in Engineering.



# Bibliografía

- [1] G. Dudek and M. Jenkin (2004). Computational principles of mobile robotics. *Cambridge University Press*, Cambridge, Massachusetts, 2010.
- [2] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh (2004). Introduction to autonomous mobile robots. *MIT Press*, Cambridge, Massachusetts, 2004.
- [3] J. Desai, J. Ostrowski and V. Kumar (1998) Controlling formations of multiple mobile robots. *Proc. of the 1988 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, pages 2864-2869, 1988.
- [4] J. Desai, J. Ostrowski and V. Kumar (2001) Modeling and Control of Formations of Nonholonomic Mobile Robots. *Proc. of the 2001 IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol.4, pages 905-908, 2001.
- [5] A. Khaled and Youmin Zhang (2015) Formation Control of Multiple Quadrotors Based on Leader-Follower Method. *Proc. of the 2015 IEEE Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, Denver, Colorado, pages 1037-1042, 2015.
- [6] S. Mastellone, D. Stipanovic, C. Graunke, K. Intlekofer and M. Spong (2007). Formation Control and Collision Avoidance for Multi-agent Non-holonomic Systems: Theory and Experiments. *The International Journal of Robotics Research*, pages 107-126, 2007.
- [7] M.A. Vallejo-Alarcón, R. Castro-Linares and M. Velasco Villa (2015). Unicycle-Type Robot & Quadrotor Leader-Follower Formation Backstepping Control. *IFAC*, pages 51-56, 2015.
- [8] A. Lopez-Gonzalez, E. D. Ferreira, E. G. Hernandez-Martinez, J. J. Flores-Godoy, G. Fernandez-Anaya and P. Paniagua-Contro (2016). Multi-robot formation control using distance and orientation. *Advanced Robotics* pages 1-13, 2016.
- [9] S. Ahmadi and H. Werner (2016). Cascaded formation control using angle and distance between agents with orientation control part 1 and part 2. *International Conference on Control*, 2016.
- [10] S.M. Kang, M.C. Park, B.H Lee and H.S. Ahn (2014). Distance-based formation control with a single moving leader (2014). *American Control Conference*, pages 305-310, 2014.
- [11] K.K. Oh and H.S. Ahn (2011). Formation control of mobile agents based on inter-agent distance dynamics (2011). *Automatica*, pages 2307-2312, 2011.
- [12] V. Gazi (2015) Swarm aggregations using artificial potential and sliding-mode control. *IEEE Transaction On Robotics*, Vol. 21, No. 6, pages 1208-1214, Diciembre 2015.
- [13] T. Balch and C. Arkin (1998) Behavior-based formation control for multirobot teams. *IEEE Transaction On Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 6, pages 926-939, Diciembre 1998.

- [14] H. Rodríguez-Cortés and Eduardo Aranda-Bricaire (2007). Observer based trajectory tracking for a wheeled mobile robot (2007). *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 991-996, 2007.
- [15] J.C. Hamann, R. Heil, W.M. Spears and D.F. Spears (2004). Distributed, physics-based control of swarms of vehicles (2004). *Autonomous Robots*, pages 137-162, 2004.
- [16] H. Yamaguchi (2003). A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operation. (2003). *Robotics and autonomous systems*, pages 257-282, 2003.
- [17] K. Sakurama, Y. Kosaka and S. Nishida (2018). Formation control of swarms robots with multiple proximity distance sensors. (2018). *International Journal of Control Automation and Systems*, pages 16-26, 2018.
- [18] J. Wiech, V. A. Eremeyev and I. Giorgio (2018). Virtual spring damper method for non-holonomic robotic swarm self-organization and leader following. (2018). *Continuum Mech. Thermodyn*, 2018.
- [19] J. González-Sierra, E. Aranda-Bricaire and E.G. Hernández-Martínez (2011). Trajectory tracking strategies with singularities avoidance for groups of unicycle-type robots. *IFAC*, pages 5926-5931, Agosto 2011.
- [20] Y. U. Cao, A. S. Fukunaga and A. B. Kahng (1997). Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions. (1197). *Autonomous Robots*, pages 7-27, 1997.
- [21] H. Ríos, J. González-Sierra and A. Dzul (2017). Robust tracking output-control for a quadrotor: A continuous sliding-mode approach. (2017). *Journal of the Franklin Institute*, pages 6673-6691, 2017.
- [22] B.D.O. Anderson, Z. Sun, T. Sugie, S.I. Azuma and K. Sakurama (2017). Formation shape control with distance and area constraints (2017). *IFAC Journal of Systems and Control*, pages 2-12, 2017.
- [23] G. Antonelli, F. Arrichiello, F. Caccavale and A. Marino (2014). Decentralized time-varying formation control for multi-robot systems. (2014). *Journal of Robotic Research*, 33(4), pages 1029-1043, 2014.
- [24] M. Basiri, A.N. Bishop and P. Jensflet (2010). Distributed control of triangular formations with angle-only constraints. (2010). *Systems & Control Letters*, 59(2), pages 147-154, 2010.
- [25] X. Cai and M. Queiroz (2015). Adaptive rigidity-based formation control for multirobotic vehicles with dynamics. (2015). *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1), pages 389-396, 2015.
- [26] J.T. Cook, L.E. Ray and J.H. Lever (2018). Dynamics modeling and robotics-assist, leader-follower control of tractor convoys. (2018). *Journal of Terramechanics*, 75, pages 57-72, 2018.
- [27] A. Dang and J. Horn (2016). Formation control of autonomous robots following desired formation during tracking a moving target. (2016). *Proc. of the 2015 IEEE 2nd International Conference on Cybernetics (CYBCONF)*, 1, pages 160-165, 2016.
- [28] M.A. Dehghani, M.B. Menhaj and M. Azimi (2016). Leader-follower formation control using and onboard leader tracker. (2016). *2016 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA)*, pages 99-104, 2016.

- [29] M.A. Dehghani and M.B. Menhaj (2016). Communication free leader-follower formation control of unmanned aircraft systems. (2016). *Robotics and Autonomous Systems*, 80, pages 69-75, 2016.
- [30] L. Dong, Y. Chen and X. Qu (2016). Formation control strategy for nonholonomic intelligent vehicles based on virtual structure and consensus approach. (2016). *Procedia Engineering*, 137, pages 415-424, 2016.
- [31] B. Fidan, V. Gazi, S. Zhai and N. Cen (2013). Single-view distance-estimation-based formation control of robotic swarms. (2013). *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(2), pages 5781-5791, 2013.
- [32] H. Garcia-De-Marina, B. Jayawardana and M. Cao (2016). Distributed rotational and translational maneuvering of rigid formations and their applications. (2016). *IEEE Transactions on Robotics*, 32(3), pages 684-697, 2016.
- [33] D. Guo, H. Wang, W. Chen, M. Liu, Z. Xia and K.K. Leang (2017). A unified leader-follower scheme for mobile robots with uncalibrated on-board camera. (2017). *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3792-3797, 2017.
- [34] E. Harik, F. Guérin, F. Guinand, J.F. Brethe and H. Pelvillain (2015). Uav-uvg cooperation for objects transportation in an industrial area (2015). *Proc. of the 2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 1, pages 547-552, 2015.
- [35] C.A. Kitts and I. Mas (2009). Cluster space specification and control of mobile multirobot system (2009). *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(2), pages 207-218, 2009.
- [36] R. Kobayashi, M. Susuki and K. Nakano (2013). Leader-following formation navigation with virtual trajectories for dynamic multi-agents. (2013). *IFAC Proceedings*, 46(21), pages 773-779, 2013.
- [37] J. Kwon and D. Chwa (2012). Hierarchical formation control based on a vector field method for a wheeled mobile robots. (2012). *IEEE Transactions on Robotics*, 28(3), pages 1335-1345, 2012.
- [38] F. Li, Y. Ding, M. Zhou, K. Hao and L. Chen (2017). An affection-based dynamic leader selection model formation control in multirobot systems. (2017). *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(7), pages 1217-1228, 2017.
- [39] I. Mas and C.A. Kitts (2014). A hybrid multirobot control architecture for object transport. (2014). *IEEE Access*, 2, pages 558-570, 2014.
- [40] M. Neuman and C. Kitts (2016). A hybrid multirobot control architecture for object transport. (2016). *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(6), pages 2983-2988, 2016.
- [41] H. Oh, A.R. Shirazi, C. Sun and Y. Jin (2017). Bio-inspired self-organising multi-robot pattern formation: A review. (2017). *Robotics and Autonomous Systems*, 91, pages 83-100, 2017.
- [42] K. Oh, M. Park and H. Ahn (2015). A survey of multi-agent formation control. (2015). *Automatica*, 53, pages 424-440, 2015.
- [43] D. Panagou and V. Kumar (2014). Cooperative visibility maintenance for leader-follower formations in obstacle environments. (2014). *IEEE Transactions on Robotics*, 30(4), 2014.
- [44] W. Ren and R. Beard (2008). Distributed Consensus in multi-vehicle cooperative control. (2008). *Springer*, London, 2008.



- [45] W. Ren and R.W. Beard (2004). Formation feedback control for multiple spacecraft via virtual structures. (2008). *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 151(3), pages 357-368, 2004.
- [46] H. Rezaee and F. Abdollahi (2014). A decentralized cooperative control scheme with obstacle avoidance for a team of mobile robots. (2014). *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(1), pages 347-354, 2014.
- [47] O. Rozenheck, S. Zhao and D. Zelazo (2015). A proportional-integral controller for distance-based formation tracking. (2015). *Proc. of the 2015 European Control Conference (ECC)*, 1, pages 1693-1698, 2015.
- [48] N. Soltani, A. Shahmansoorian and M.A. Khosravi (2014). Robust distance-angle leader-follower formation control of non-holonomic mobile robots. (2014). *In 2014 Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*, pages 024-028, 2014.
- [49] H. Xiao, Z. Li and C.P. Chen (2016). Formation control of leader-follower mobile robots systems using model predictive control based on neural-dynamic optimization. (2016). *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(9), pages 5752-5762, 2016.
- [50] Y. Zheng, Y. Zhu and L. Wang (2011). Consensus of heterogeneous multi-agent systems. (2011). *IET Control Theory Applications*, 5(16), pages 1881-1888, 2011.
- [51] D. Zhou, Z. Wang and M. Schwager (2018). Agile coordination and assistive collision avoidance for quadrotor swarms using virtual structures. (2018). *IEEE Transactions on Robotics*, 34(4), pages 916-923, 2018.
- [52] G. Campion, G. Bastin and B. D'Andréa-Novel (1993). Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. (1993). *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(41), pages 47-62, 1993.
- [53] J.E. Shigley and J.J. Uicker (1988). Teoría de máquinas y mecanismos (1988). *McGraw-Hill* Ed. 1, pages 78-80, 1988.
- [54] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine and P. Martin (1993). Flatness and motion planning: the car with  $n$ -trailers (1993). *In Proc. European Control Conference*, pages 1-6, 1993.
- [55] L. Bushnell, D. Tibury and S. Sastry (1993). Steering three-input chained form nonholonomic systems sinusoids: the fire truck example (1993). *In Proc. European Control Conference*, pages 1432-1437, 1993.
- [56] R. Orosco-Guerrero, E. Aranda-Bricaire and M. Velasco-Villa (1993). Modeling and dynamic feedback linearization of a multi-steered  $n$ -trailer (1993). *In Proc. of 15th Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, España, pages 1432-1437, 1993.
- [57] A. Isidori (1989). Nonlinear control systems (1989). *Springer* Ed. 3, pages 249-263, 1988.
- [58] L.R. García-Carillo, A.E. Dzul-López, R. Lozano and C. Pégard (2013). Quad rotorcraft control: Vision-Based hovering and navigation (2013). *Springer*, pages 26-33, 2013.
- [59] E.G. Hernández-Martínez and E. Aranda-Bricaire (2012). Non-collision conditions in multi-agent virtual leader-based formation control. (2012). *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 9, pages 1-10, 2012.